50639
2425
FOLYÓIRATOK
SZEGED

MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVI. KÖTET. – ELSŐ RÉSZ.

1937 JUL. 21

MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVI. – ERSTER TEIL.

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1937.

EGYETEMI KÖNYVTÁR
FOLYÓIRATOK
1938 39 1-697

TARTALOMJEGYZÉK.

	Lap
Ábrahám Ambrus: A gerincesek intracardialis idegrendszere	320—343
Barnóthy Jenő és Forró Magdolna: Meteorologiai és mágneses tényezők hatása a kozmikus sugárzásra. II. Napi menet	207—213
Barnóthy Jenő és Forró Magdolna: A kozmikus sugárzás mérése a dorogi bányában	184—204
Forró Magdolna: lásd Barnóthy Jenő.	
Konek Frigyes: A hydrocinchonidin vagy cinchamidin α- és β-jódmethylszármazékai	249—253
Kovács István: Kétatomos molekulatermek állandóinak meghatározása a perturbáció alapján	126—155
Küster Ernst: A konjugáta-sejtek plazma-amőbái	287—288
Lörinczi Katalin: Újabb vizsgálatok a nemesgázok színképvonalainak Zeeman-jelenségéről	158—182
Pekár Dezső: Bauxitok kimutatása földmágneses mérésekkel	215—226
Rados Gusztáv: Adalék az algebrai számtestek elméletéhez	47— 52
Rédei László: A négyzetes maradékok eloszlásáról összetett modulus esetében	54— 83
Rédei László: A másodfajú D-felbontásokról	89—124
Riesz Frigyes: A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról	1— 45
Szádeczky-Kardoss Elemér: Adatok a fuchsitek optikai ismeretéhez	346—351
Szelényi Tibor: Bauxitok berylliumtartalmának színképanalytikai meghatározása	231—246
Zimmermann Gusztáv: Adatok a kemény agyvelőburok működésbeli szerkezetéről	262—284
Zucker Ferenc: Az Azotobakter előfordulása magyar talajokban	303—317

MATEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVI. KÖTET.

MATHEMATISCHER
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHER
ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVI.

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1937.

50639

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

Ábrahám Ambrus: A gerincesek intracardiális idegrendszere 320—343

Barna Béla: A médium aritmetiko-geometrikum és a modulfüggvény elemi elméletéről ..... 893—907

Barnóthy Jenő és Forró Magdolna: A kozmikus sugárzás mérése a dorogi bányában ..... 184—204

Barnóthy Jenő és Forró Magdolna: Meteorologiai és mágneses tényezők hatása a kozmikus sugárzásra. II. Napi menet ..... 207—213

Barnóthy Jenő és Forró Magdolna: A kozmikus sugárzás csillagidő periodicitása ..... 410—415

Beer Borbála Zsuzsanna: A két szabad vegyértéket mutató *CO*-módosulat színképéről ..... 525—558

Boros János: Ion vezetés vékony kristályrétegekben ..... 655—670

Cholnoky Béla: Protoplazmatikai tanulmányok élvefestéssel és plazmolizissel ..... 940—943

Cotel Ernő: Kerpely Antal hatása a vaskohászati tudományok és a magyar vasipar fejlődésére ..... 688—696

Császár Elemér: A Röntgen-sugárzás energiájának mérése. IV. rész ..... 397—407

Fekete Jenő: lásd Pogány Béla.

Finkey József: Az adszorpciós maximum ..... 924—937

Forró Magdolna: lásd Barnóthy Jenő.

Gerő Lóránd: lásd Schmid Rezső.

Gombás Pál: A fémelektronok eloszlásának meghatározásáról alkalifémek esetében ..... 417—421

Gombás Pál: A szilárd hélium kémiai kötéséről ..... 910—913

Haranghy László: A Mytilus minimus Poli. és az Ostrea plicata Chemn. mérgező hatásának összefüggése a kagylók életviszonyaival ..... 1161—1170

Hoor-Tempis Móric: Csonkamagyarország és a külföld elektromos energiagazdálkodásának fejlődési irányzata és az ipari telepítés sürgős feladatai ..... 771—779

Iharos Alfonz: A magyarországi medveállatocskák ..... 982—1040

*

Oldal

Jugovics Lajos: A Sághegy felépítése és vulkanológiai viszonyai ..... 1214—1232
Kandó Kálmán †: Villamos mozdonyok hajtóművének dynamikus igénybevétele kerékcsuszás következtében ..... 729—763
Konek Frigyes: A hydrocinchonidin vagy cinchamidin α- és β-jódmethyl-származékai ..... 249—253
Konek Frigyes: Adatok a Cinchona cuprea alkaloidjainak kémiájához ..... 570—580
Kormos Tivadar: A Villányi Hegység felsőpliocénkori csontbrecciáinak földtani viszonyai és a lelőhelyek története . 1061—1062
Kovács István: Kétatomos molekulatermek állandóinak meghatározása a perturbáció alapján ..... 126—155
Kövessi Ferenc: Az élőlények fejlődése szabályosságának a magyarázata VII. ..... 1101—1102
Kövessi Ferenc: Az élőlények fejlődése szabályosságának a magyarázata VIII. ..... 1126—1128
Küster Ernst: A kunjugáta-sejtek plazma-amőbái .... 287—288
Lipka István: Mátrixok szorzásáról ..... 376—380
Lőrinczi Katalin: Újabb vizsgálatok a nemesgázok színképvonalainak Zeeman-jelenségéről ..... 158—182
Malán Mihály: Tenyérlenyomat vizsgálatok ..... 698—726
Náray-Szabó István: A zirkonszilicid $ZrSi_2$ szerkezete ... 886—891
Neugebauer Tibor: A hydromolekulák rezgésfrekvenciáinak kiszámítása ..... 450—451
Neugebauer Tibor: A spektroszkópiai stabilitás tételének alkalmazása az oldatok refrakciócsökkenésének elméletére 441—442
Papp György: Gammasugarak szóródásánál fellépő mageffektusról ..... 477—491
Pekár Dezső: Bauxitok kimutatása földmágneses mérésekkel 215—226
Pogány Béla és Fekete Jenő: Reflexiós szeizmikus mérések a Nagy-Alföldön ..... 505—522
Preisz Hugó: További vizsgálatok a Pettenkoferiákra vonatkozólag ..... 582—605
Rados Gusztáv: Adalék az algebrai számtestek elméletéhez 47—52
Rédei László: A négyzetes maradékok eloszlásáról összetett modulus esetében ..... 54—83
Rédei László: A másodfaju D-felbontásokról ..... 89—124
Rédei László: Egy új számelméleti jel. alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére. I. ..... 807—845
Rédei László: Másodfokú számtestek abszolut osztálycsoportjának 2-, 4- és 8-cal osztható invariánsai ..... 848—852
Riesz Frigyes: A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról ..... 1—45

Oldal

Sasvári Kálmán: Az ezüstpermanganát ($Ag\ Mn\ O_4$) kristályszerkezete ..... 493—502
Schmid Rezső és Gerő Lóránd: A szénmonoxid «3A» sávrendszerének rotációs analizise ..... 854—862
Schmid Rezső és Gerő Lóránd: Széntartalmú vegyületek és gyökök képződési és disszociációs energiáiról. I. ..... 865—883
Szabó Zoltán: Új Cephalária Délafrikából ..... 608—609
Szádeczky-Kardoss Elemér: Adatok a fuchsitek optikai ismeretéhez ..... 346—351
Szász Ottó: Fourier-sorok részletösszegeiről ..... 382—395
Szelényi Tibor: Bauxitok berylliumtartalmának színképanalytikai meghatározása ..... 231—246
Szekeres György és Turán Pál: Egy szélsőértékfeladat a determináns elméletben ..... 796—804
Szentpétery Zsigmond: Titanmagnetites kőzetek a szarvaskői Vaskapu vidékéről ..... 1172—1212
Szepesi Zoltán: A gammasugarak Compton-szórásának intenzitáseloszlásáról ..... 637—652
Szilády Zoltán: A magyarországi legyek synopsisa. V. Tipulidae ..... 622—635
Szőkefalvi Nagy Gyula: Véges fajszámú valós egész függvények képzetes záróhelyeiről ..... 353—372
Szőkefalvi Nagy Gyula: Olyan maximális indexü felületekről, amelyeknek egyik köpenye másodrendű torzfelület .. 783—794
Turán Pál: lásd Szekeres György.
Varga Lajos: Ptygura Tihanyensis n. sp., egy uj kerekesféregfaj a tihanyi belső tóból ..... 612—614
Vitális István: A soproni Virágvölgy fossilis Bagliviái és kortársaik ..... 672—686
Wagner János: Vasvári Miklós 1936. évi kisázsiai kutató útjának állattani eredményei ..... 1042—1059
Zemplén Géza: A «lusitanicosid»-nak, a Cerasus lusitanica Lois. glükozidjának szerkezete és szintézise ..... 560—568
Zimmermann Gusztáv: Adatok a kemény agyvelőburok működésbeli szerkezetéről ..... 262—284
Zucker Ferenc: Az Azotobakter előfordulása magyar talajokban ..... 303—317

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

ÁBRAHÁM, A.: Das intrakardiale Nervensystem der Wirbeltiere 344—345

BARNA, B.: Über die elementare Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion ..... 908—909

BARNÓTHY, J. und FORRÓ, M.: Messung der Ultrastrahlung im Doroger Bergwerk ..... 205—206

BARNÓTHY, J. und FORRÓ, M.: Meteorologisch-magnetische Einflüsse auf die Ultrastrahlungsintensität. II. Tagesgang 214

BARNÓTHY, J. und FORRÓ, M.: Sternzeitliche Periode der Ultrastrahlungsintensität und ihre Phasenverschiebung ... 416

BEER, B.: Über den Grundterm der Carbonylmodifikation von *CO* 559

BOROS, J.: Ionleitung in dünnen Kristallschichten 671

CHOLNOKY, B. J. v.: Protoplasmatische Untersuchungen durch Lebendfärbung und Plasmolyse ..... 944—981

COTEL, E.: Die Wirkung Anton Ritter v. Kerpely's auf die Entwicklung des Eisenhüttenwesens und die ungarische Eisenindustrie 697

CSÁSZÁR, E.: Die Energiemessung der Röntgenstrahlung. IV. Teil ..... 408—409

FEKETE, J. siehe POGÁNY, B.

FIŇKEY, J.: Über das Maximum der Adsorption ..... 938—939

FORRÓ, M. siehe BARNÓTHY, J.

GERŐ, L. siehe SCHMID, R.

GOMBÁS, P.: Zur Bestimmung der Verteilung der Metallelektronen in Alkalimetallen ..... 422—440

GOMBÁS, P.: Über die chemische Bindung des festen Heliums 914—923

HARANGHY, L. v.: Über den Zusammenhang von Giftwirkung und Lebensweise der Muscheln Mytilus minimus Poli. und Ostrea plicata Chemn. 1171

HOOR-TEMPIS, M.: Der Entwicklungsgang der elektrischen Energiewirtschaft in Trianon-Ungarn und im Ausland und die dringenden Aufgaben der Gewerbesiedlung ..... 780—782

IHAROS, A.: Die Tardigraden des historischen Ungarns 1041

JUGOVICS, L.: Der Aufbau und die vulkanologischen Verhältnisse des Ságberges ..... 1233—1235

Seite

KANDÓ, K. †: Über die dynamische Beanspruchung der Triebwerke elektrischer Lokomotiven bei Radgleitung ..... 764—770
KONEK, FR.: Über die beiden α- und β-Jodmethylate des Hydrocinchonidins oder Cinchamidins 261
KONEK, F.: Beiträge zur Chemie der Alkaloide von «Cinchona cuprea» 581
KORMOS, TH.: Zur Geschichte und Geologie der oberpliocänen Knochenbreccien des Villányer Gebirges ..... 1063—1100
KOVÁCS, ST.: Über die Bestimmung der Rotations- bzw. Schwingungs-Konstanten von zweiatomigen Molekültermen auf Grund der Störungsdaten ..... 156—157
KÖVESSI, F.: Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Ablaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen VII..... 1103—1125
KÖVESSI, F.: Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Ablaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen VIII. ..... 1129—1160
KÜSTER, E.: Über die Plasmaamöben der Konjugatenzelle ... 289—302
LIPKA, ST.: Über das Produkt von Matrizen 381
LŐRINCZI, K.: Neuere Untersuchungen über den Zeeman-Effekt der Edelgaslinien 183
MALÁN, M.: Handabdruck-Untersuchungen ..... 727—728
NAGY, J. von Sz.: Über Flächen vom Maximalindex mit mindestens einer Regelflächenschale zweiter Ordnung 795
NÁRAY-SZABÓ, ST. v.: Die Struktur des Zirkoniumsilicids $ZrSi_2$ 892
NEUGEBAUER, T.: Zur Theorie der Refraktionsverminderung von Elektrolytlösungen ..... 443—449
NEUGEBAUER, T.: Über die Berechnung der ultraroten Schwingungsfrequenzen der Hydridmoleküle ..... 452—476
PAPP, G.: Über den Kerneffekt bei der Streuung von γ-Strahlen 492
PEKÁR, D.: Nachweis von Bauxiten mit erdmagnetischen Messungen ..... 227—230
POGÁNY, B. und FEKETE, J.: Seismische Reflexionsbeobachtungen in der Ungarischen Tiefebene ..... 523—524
PREISZ, H.: Weitere Untersuchungen über Pettenkoferien .. 606—607
RADOS, G.: Beitrag zur Theorie der algebraischen Zahlkörper 53
RÉDEI, L.: Über die Verteilung der quadratischen Reste für zusammengesetzte Moduli ..... 84—88
RÉDEI, L.: Über die D-Zerfällungen zweiter Art 125
RÉDEI, L.: Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendung auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper . 846—847
RÉDEI, L.: Die durch 2, 4 und 8 teilbaren Invarianten in der absoluten Klassengruppe der quadratischen Zahlkörper 853
RIESZ, FR.: Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires 46

Seite

Sasvári, K.: Die Kristallstruktur des Silberpermanganats $Ag\,Mn\,O_4$ ..... 503—504
Schmid, R. und Gerő, L.: Rotationsanalyse der «3A» Banden des Kohlenoxyds. ..... 863—864
Schmid, R. und Gerő, L.: Über die Bildungs- und Spaltungsenergien von organischen Verbindungen und Radikale. I. 884—885
Szabó, Z.: One new Cephalaria from South Africa ..... 610—611
Szádeczky-Kardoss, E. v.: Beiträge zur optischen Kenntnis des Fuchsites 352
Szász, O.: Über die Partialsummen Fourier'scher Reihen ... 396
Szekeres, G. und Turán, P.: Über ein Extremalproblem in der Determinantentheorie ..... 805—806
Szelényi, T.: Spektralanalytische Bestimmung des Berylliumgehaltes der Bauxite ..... 247—248
Szentpétery, S. v.: Titanomagnetithältige Gesteine der Vaskapugegend bei Szarvaskő 1213
Szepesi, Z.: Über die Intensitätsverteilung der Comptonstreuung von γ- Strahlen ..... 653—654
Szilády, Z.: Synopsis der Fliegen Ungarns. V. Tipulidae. .. 636
Szőkefalvi-Nagy, J.: Über die nichtreellen Nullstellen der reellen ganzen Funktionen von endlichem Geschlecht .. 373—375
Turán, P. siehe Szekeres, G.
Varga, L.: Ptygura Tihanyiensis n. sp., ein neues Rädertier aus dem tihanyer Belső Tó ..... 615—621
Vitális, I.: Die Fossilen Baglivien des Blumentales (Virágvölgy) bei Sopron und ihre Begleitfauna 687
Wagner, H.: Zoologische Ergebnisse der Forschungsreise N. Vasvári's in Kleinasien. (1936) 1060
Zemplén, G.: Synthese des Lusitanicosids, des Glycosids aus Cerasus Lusitanica Lois 569
Zimmermann, G.: Beiträge zum funktionellen Bau der harten Hirnhaut. ..... 285—286
Zucker, Fr.: Vorkommen von Azotobakter in ungarischen Böden ..... 318—319

A LINEÁRIS OPERÁCIÓK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY ALAPVETŐ FOGALOMALKOTÁSÁRÓL.

RIESZ FRIGYES r. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Vizsgálataim célja annak a néhány gondolatnak kidolgozása és továbbfejlesztése, melyeket 1928-ban a bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson vetettem föl és alkalmaztam lineáris operációknak speciális típusok szerint való szétbontására.[1] Rövidre szabott előadásomban példaképen a folytonos függvények operációira szorítkoztam és többek közt azt mutattam meg, hogy a lineáris operáció szóbanforgó részei jellemezhetők és előállíthatók a nélkül, hogy ehhez az operációnak STIELTJES-féle integrállal való ismeretes analitikus előállítását fölhasználnók. Már előadásomban hangsúlyoztam, hogy az ismertetett módszernek az az előnye, hogy teljesen általános, úgy hogy alkalmazható absztrakt halmazokon értelmezett függvények lineáris operációira, mint amilyeneket DANIELL az integrálfogalom kiterjesztéseként tanulmányozott.[2] A jelen dolgozatban még általánosabb föltevésekből indulok ki, mint amilyenekre bolognai

[1] F. RIESZ, Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires, *Atti del congresso internazionale dei matematici*, Bologna 1928, 3, pp. 143–148; ugyanaz magyarra fordítva: A lineáris függvényoperációk szétbontásáról, *Mat. és Fiz. Lapok*, **36** (1926), pp. 1—9.

[2] P. J. DANIELL, The Integral and Its Generalizations, *Rice Institute Pamphlet*, **8** (1921), pp. 34—62; A General Form of Integral, *Annals of Math.*, (2) **29** (1917—18), pp. 279—294; Further Properties of the General Integral, *ibidem*, (2) **21** (1919–20), pp. 203—220.

előadásom alkalmával gondoltam; nem a számközt vagy ponthalmazt helyettesítem absztrakt halmazzal, nem a folytonos függvényeket általánosabb függvényosztállyal, hanem maguknak a függvényeknek a szerepét veszik át absztrakt elemek és a függvényosztályét ezeknek az elemeknek az összessége, melyet néhány, nagyon kevés, az elemek összeadását illető föltevéssel jellemzünk.

Elméletünk sokban érintkezik az úgynevezett félig rendezett lineáris tereknek nemrég megindult elméletével.[3] A lényeges különbség, elsősorban ami a kiindulást illeti, az, hogy az utóbbi elméletben az alapul vett absztrakt halmazt sokkal több föltevésnek kell alávetni, olyan föltevéseknek, melyek ezzel szemben a mi alaptartományainkon egyelőre esetleg nem teljesülnek, de viszont maguktól teljesülnek lineáris operációink halmazán és ennek kapcsán természetesen kínálkozó adjunkció után már eredeti halmazunkon is. Ennek fejében a mondott újabb elméletben már az eredeti elemek játsszák azt a szerepet, amit nálunk az operációk és így többek közt ez az elmélet majd segítségünkre lehet abban a törekvésben, hogy az operációkra adódó eredmények egymáshoz való viszonyát tisztázzuk.

Részben ez a találkozás indokolja meg azt, hogy dolgozatomat, melynek gondolatával már jóval bolognai előadásom előtt foglalkoztam, de amelynek terve azóta sokban módosult és melynek módszerét sok tekintetben sikerült egyszerűsítenem, de még mindig, legalább némely részletében, nem annyira, mint szeretném, most mégis írásba foglaltam; hogy későbbre halasztottam többek közt az operációértékű függvények integrálására támaszkodó függvénykalkulus rendszeres kidolgozását és csak vázlatosan ismertettem azokat a problémákat, melyeket az alaptartománynak a dualitás gondolatán, az operációk operációinak vizsgálatán épülő kibővítése felszínre vet. Nem érintettem azt a tárgyalásaink folyamán nyilvánvalóan kínálkozó általánosítást sem, amely-

[3] A jelen dolgozat szempontjából elsősorban tekintetbe jövő közlemény, mely csak néhány hónappal ezelőtt jelent meg és amelyről csak közvetlenül a dolgozat befejezése előtt szereztem tudomást: H. Freudenthal, Teilweise geordnete Moduln, *Proceedings Acad. Amsterdam*, 39 (1936), pp. 641—651. Szerző a tárgyalt elmélet kezdetét ugyancsak bolognai előadásomtól datálja.

nél a számértékű operációk helyett olyanokat tekintünk, amelyeknek értékei maguk is egy megfelelő föltevéseknek eleget tevő absztrakt alaphalmaz elemei.

1. Az alaptartomány; példák.

Vizsgálataink tárgya absztrakt elemeknek egy bizonyos összessége, amelyet alaptartománynak nevezünk és Ω-val jelölünk. Elemeit, melyek a vizsgálatainkba besorolható konkrét esetek közül a legnevezetesebbekben függvények, erre való emlékeztetésül a függvények jelölésére használatos betűkkel, elsősorban f, g betűkkel jelöljük. Föltesszük, hogy az alaptartomány elemeire értelmezve van az összeadás művelete, azaz hogy bármely két elemhez, f_1-hez és f_2-höz, tartozik egy meghatározott f_1+f_2 elem, hogy továbbá ez a hozzárendelés eleget tesz a következő követeléseknek.

1. *Érvényesek a kommutatív és az asszociatív törvények:* $f_1+f_2=f_2+f_1$; $(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)$.

2. *Ha* $f_1+f_2=f_1+f_3$, *akkor* $f_2=f_3$.

3. *Van olyan elem, jele* 0, *hogy minden f-re* $f+0=f$ *(az előző föltevés alapján csak egy ilyen elem van); hogy továbbá, ha* $f_1+f_2=0$, *akkor egyszersmind* $f_1=f_2=0$.

4. *Ha* $f_1+f_2=g_1+g_2$, *akkor van négy olyan elem,* $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$, *melyekre* $f_{11}+f_{12}=f_1$; $f_{21}+f_{22}=f_2$; $f_{11}+f_{21}=g_1$; $f_{12}+f_{22}=g_2$.

Az utolsó föltevés általánosabb alakja, mely belőle, az 1. föltevés fölhasználásával, teljes indukcióval adódik, a következő. Ha

$$f_1+f_2+\cdots+f_m=g_1+g_2+\cdots+g_n,$$

akkor vannak olyan f_{ik} elemek, melyekre

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}=f_i; \quad \sum_{i=1}^{m} f_{ik}=g_k.$$

Fölsorolunk néhány konkrét példát. A kínálkozó legegyszerűbbek a nemnegatív számok összessége, a nemnegatív egész számok összessége és a pozitív egész számok logaritmusainak összessége vagy ami ugyanaz, maga a pozitív egész számok összessége, melyben azonban az összeadás szerepét a szorzás, a 0-ét pedig az 1 veszi át. Mindezek túlságosan szűkek és ered-

ményeink, rájuk alkalmazva, nagyon keveset mondanak. Az alábbi példák már sokkal alkalmasabbak eredményeink megvilágitására. Mivel az összeadás valamennyiben egyszerűen a számszerű összeadás és az első három követelést valamennyi nyilvánvalóan teljesíti, csak a 4. követelést kell majd az egyes esetekben megvizsgálnunk.

1. példa. Az $a \leqq x \leqq b$ számközön értelmezett nemnegatív folytonos függvények.

Ha $f_1+f_2=g_1+g_2=f$, akkor az

$$f_{ik}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_i(x)\, g_k(x)}{f(x)}, & \text{ha } f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{ha } f(x) = 0 \end{cases}$$

függvények szolgáltatják a kívánt szétbontást. Mivel nyilvánvaló, hogy a belőlük a 4. föltevésnek megfelelően képezett összegek rendre f_1-et, f_2-t, g_1-et és g_2-t adják, csak azt kell igazolnunk, hogy az f_{ik} függvények folytonosak. Csak a határozatlansági helyeken való viselkedés kérdéses, vagyis azokon, ahol $f(x)=0$. Ezeken a helyeken azonban $f_1(x)=f_2(x)=0$ és mivel mindenütt $g_k(x) \leqq f(x)$, azért $f_{ik}(x) \leqq f_i(x)$ és ennélfogva a kérdéses helyeken $f_{ik}(x)$ határértéke létezik és 0.

Egy másik szétbontási mód a következő: Legyen

$$f_{11}(x) = \min\left(f_1(x),\ g_1(x)\right),$$

továbbá

$$f_{12}=f_1-f_{11},\ f_{21}=g_1-f_{11},\ f_{22}=f-\max\left(f_1(x),\ g_1(x)\right).^4$$

Világos, hogy

$$f_{11}+f_{12}=f_1,\ f_{11}+f_{21}=g_1;$$

továbbá

$$f_{21}+f_{22}=g_1-\min(f_1, g_1)+f-\max(f_1, g_1)=g_1+f-f_1-g_1=f_2,$$
$$f_{12}+f_{22}=f_1-\min(f_1, g_1)+f-\max(f_1, g_1)=f_1+f-f_1-g_1=g_2,$$

minthogy általánosan $\min(x, y)+\max(x, y)=x+y$.

---

[4] $\min(x, y)$, ill. $\max(x, y)$ jelenti x és y közül a kisebbiket, ill. nagyobbikat (ha egyenlők, akkor közös értéküket); hasonló jelölést alkalmazunk véges vagy végtelen *számhalmaz* legkisebb és legnagyobb elemének, ill. alsó és felső határának jelölésére; az erre szintén használatos inf és sup jelöléseket élesebb megkülönböztetés kedvéért más esetekre tartjuk fenn.

2. példa. Az $a \leqq x \leqq b$ számközön tekintett és ott a $p(x) \geqq 0$, $q(x) > 0$ föltételeknek eleget tevő racionális polinomokból alkotott $f(x) = p(x)/q(x)$ törtfüggvények.

A 4. követelésnek eleget tevő fölbontás a folytonos függvényekre alkalmazott első eljárással eszközölhető. A második eljárás ebben az esetben csődöt mond, mert a $\min(f_1, g_1)$ és $\max(f_1, g_1)$ függvények általában nem tartoznak az alaptartományba.

3. példa. Az $a \leqq x \leqq b$ számközön értelmezett pozitív lépcsős függvények, pontosabban azok a sehol sem negatív függvények, melyek az (a, b) köz egymásba nem nyúló és együtt az egész közt befedő véges számú részközén állandók, a részközök határpontjain pedig tetszésszerinti értékűek.

4. példa. Ugyanezek a lépcsős függvények, de azzal a megállapodással, hogy olyan két függvényt, melyek egymástól csak véges számú helyen különböznek, azonosnak tekintünk.

Mindkét példánál a szétbontás az 1. példánál alkalmazott mindkét módon eszközölhető.

5. példa. Megadott, síkbeli vagy térbeli, nyitott tartományban harmonikus, pozitív függvények összessége.

A szétbontás a második módszerhez hasonlóan eszközölhető, de úgy, hogy a $\min(f_1, g_1)$ és $\max(f_1, g_1)$ függvények helyébe, melyek hiszen általában nem harmonikusak, az $\inf(f_1, g_1)$ és $\sup(f_1, g_1)$ harmonikus függvények lépnek, melyek közül az első az összes az f_1, g_1 függvények alatt fekvő harmonikus függvények közt a mindenütt legnagyobb értékűt, a második viszont az f_1, g_1 fölött fekvő harmonikus függvények közt a legkisebbet jelenti. E két függvény a Poincaré-féle jól ismert kisöprési (balayage-) eljárással adódik oly módon, hogy azt a $\min(f_1, g_1)$ és $\max(f_1, g_1)$ szuperharmonikus, illetőleg szubharmonikus függvényekre alkalmazzuk. Az ilyen módon értelmezett $\varphi = \inf(f_1, g_1)$ és $\psi = \sup(f_1, g_1)$ függvényekre a $\varphi + \psi = f_1 + g_1$ összefüggés a $\min(f_1(P), g_1(P)) + \max(f_1(P), g_1(P)) = f_1(P) + g_1(P)$ összefüggésből következik, minthogy az f_1 és g_1 harmonikus függvényeken a balayage-eljárás nem változtat. Érdekes és a későbbiekre való tekintettel fontos megjegyezni, hogy ez az összefüggés már a φ és ψ elemek fogalmi jellemzéséből, azaz extremális voltuk-

ból is következik. Ugyanis minthogy $\varphi \leqq f_1$ és $\leqq g_1$, azért $f_1 + g_1 - \varphi \geqq f_1$ és $\geqq g_1$, tehát a ψ függvény minimális sajátsága folytán egyszersmind $f_1 + g_1 - \varphi \geqq \psi$, vagyis

$$f_1 + g_1 \geqq \varphi + \psi. \tag{1}$$

Másrészt, mivel $\psi \geqq f_1$ és $\geqq g_1$, azért $f_1 + g_1 - \psi \leqq g_1$ és $\leqq f_1$ és így a φ függvény maximális sajátsága folytán $f_1 + g_1 - \psi \leqq \varphi$, vagyis

$$f_1 + g_1 \leqq \varphi + \psi. \tag{2}$$

Végül (1)-ből és (2)-ből $f_1 + g_1 = \varphi + \psi$, mint ahogy azt állítottuk.

Az imént végzett meggondolás eredményét absztrakt alaptartomány esetére is megfogalmazhatjuk. Ha a természetesen kínálkozó $f_1 \geqq f_2$, $f_2 \leqq f_1$ és $f_1 - f_2 = f_3$ jelöléseket használjuk az $f_2 + f_3 = f_1$ összefüggés változataiképpen és az első kettő kimondására rövidség kedvéért a «nagyobb» és «kisebb» szavakat alkalmazzuk, valamint megfelelő értelemben használjuk a «legnagyobb» és «legkisebb» kifejezéseket is, akkor eredményünket a következő alakban mondhatjuk ki:

Ha az Ω alaptartomány f és g elemeihez van olyan φ elem, mely a mindkét elemnél kisebb elemek közt a legnagyobb és olyan ψ elem, mely az f-nél és g-nél nagyobb elemek a legkisebb, akkor

$$\varphi + \psi = f + g.$$

Ha továbbá a mondott föltevést, az alaphalmaz bármely két elemére posztulálva, 4'.-vel jelöljük, akkor az 1—3. és 4'. föltevésből következik a 4. föltevés teljesülése is.

A 4'. föltevés teljesülése azonban még nem következik az 1—4. föltevésekből, mint azt a 2. példán könnyen láthatjuk.

6. példa. Pozitív jellegű tömegeloszlás a térben, megadva például a tér összes korlátos nyitott e halmazaira értelmezett $\mu(e) \geqq 0$ halmazfüggvénnyel, mely függvénynek eleget kell tennie még a következő követeléseknek: 1) $\mu(e') \leqq \mu(e)$, ha e' része e-nek; 2) $\mu(e_1 e_2) + \mu(e_1 + e_2) = \mu(e_1) + \mu(e_2)$, ahol $e_1 e_2$ és $e_1 + e_2$ az e_1, e_2 halmazok közös része, illetőleg egyesítése; 3) $\mu(e)$ felső határa mindazon e' halmazokhoz tartozó $\mu(e')$ értékeknek, melyek határukkal együtt az e halmazban foglaltatnak.

Erre a példára is teljesül a 4'. föltevés, és pedig két ilyen tömegeloszláshoz, $\mu(e)$-hez és $\nu(e)$-hez, a megfelelő inf (μ, ν) és sup (μ, ν) tömegeloszlásokat a következő ismeretes módon értelmezhetjük. Az inf (μ, ν) halmazfüggvény értéke az e halmazra egyenlő a $\mu(e_1) + \nu(e_2)$ összegek alsó határával, ahol e_1, e_2 jelenti az összes olyan halmazpárokat, melyeknek egyesítése, $e_1 + e_2$, az e halmazt befödi. A sup (μ, ν) tömegelosztás pedig a $\mu(e_3) + \nu(e_4)$ értékek felső határa, ahol e_3, e_4 azokat a halmazpárokat jelenti, melyekre $e_3 e_4$ üres, míg $e_3 + e_4$ az e halmazban foglaltatik.

7. példa. A DANIELL-féle integrálfogalom alapját képező absztrakt függvényrendszer, azaz absztrakt x elemekből álló halmazon értelmezett nemnegatív függvények olyan rendszere, mely az $f(x)$ és $g(x)$ függvényekkel együtt az $f(x) + g(x)$, $\min\big(f(x), g(x)\big)$ és $\max\big(f(x), g(x)\big)$ függvényeket is tartalmazza.

Ebben a példában, melynek az 1. és 3. példák speciális esetei, a 4. követelés szerint való szétbontás nyilvánvalóan a második módszerrel teljesíthető.

További példákat nyerhetünk a már fölsoroltak módosításával, így a 6. példából azzal, hogy véges össztömegű eloszlásokra és azzal is, hogy az egész tér helyett egy korlátos tartományra vagy például egy felületre szorítkozunk, a 7. példából pedig azzal, hogy olyan $f(x)$ függvényeket, melyek csak véges számú helyen különböznek egymástól, azonosaknak tekintünk. Említsük még meg, hogy a 7. példa egyik nevezetes alesete a pozitív majdnem periodusos függvények. További példa gyanánt fölhozhatnók még a HILBERT-féle tér önmagukhoz adjungált, pozitív transzformációinak bizonyos, az utóbbi években sokat vizsgált osztályait.

2. Pozitív lineáris operációk; a legnagyobb minoráns és a legkisebb majoráns.

Az Ω alaptartományon értelmezett összeadás feleljen meg az 1—4. követeléseknek. Tekintsük az alaphalmazon értelmezhető nemnegatív értékű, vagy röviden pozitív lineáris operációkat, azaz olyan $A = A(f)$, rövidebben Af függvényeket, melyekre $Af \geqq 0$, $A(f + g) = Af + Ag$. Ha két ilyen operációra és Ω min-

den f elemére $A_1 f \leqq A_2 f$ vagy rövidebben írva $A_1 \leqq A_2$ vagy még $A_2 \geqq A_1$, akkor azt mondjuk, hogy A_1 az A_2 *minoránsa* és hogy A_2 az A_1 *majoránsa*.

Tekintsünk már most valamely, véges számú vagy végtelen sok A operációból álló $\{A\}$ halmazt. Ha $B \leqq A$ a halmazban foglalt valamennyi A-ra, akkor azt mondjuk, hogy B az $\{A\}$ halmaz minoránsa. Ezek közül a minoránsok közül természetesen kínálkozó kifejezéssel legnagyobbnak azt mondjuk és $\inf\{A\}$-val azt jelöljük, melynek az összes többi ugyanancsak minoránsa. Meg fogjuk mutatni, hogy ilyen mindig van, éppúgy, mint ahogy pozitív számokból álló számhalmaznak van alsó határa. Analóg módon értelmezzük a halmaz majoránsait és a legkisebb majoránst, a $\sup\{A\}$ operációt is. Míg azonban minden $\{A\}$ halmaznak van legalább egy minoránsa, tudniillik a $B \equiv 0$, röviden a 0 operáció, addig a majoráns létezése nem szükségszerű; például nincsen majoránsa az nA_0 ($n = 1, 2, \ldots$; $A_0 \not\equiv 0$) operációkból álló halmaznak. Az olyan halmazt, amelynek van majoránsa, majorálhatónak mondjuk. Véges számú operáció nyivánvalóan majorálható; egyik majoránsuk az operációk összege.

1. tétel. *Minden, véges számú vagy végtelen sok pozitív lineáris operációból álló $\{A\}$ halmaznak van legnagyobb minoránsa; ha pedig a halmaz majorálható, akkor van legkisebb majoránsa is.*

A tétel első állítását a következő módon bizonyítjuk be. Tekintsük az összes

$$\sum_1^m A_i f_i \tag{1}$$

alakú összegeket, ahol m tetszésszerinti, az A_i-k is tetszésszerinti, a halmazba tartozó operációk, míg

$$f = \sum_1^m f_i$$

a megadott f elem tetszés szerint való fölbontása (természetesen ugyancsak az Ω alaptartományból vett) összeadandókra. Jelöljük Bf-fel az összes (1) alakú összegek értékeinek alsó határát. Világos, hogy $Bf \leqq Af$ minden halmazunkba tartozó A-ra, mert

hiszen maga Af is az (1) alakú összegek közé tartozik. Világos az is, hogy $Bf \geqq Cf$ halmazunk bármely C minoránsára, minthogy

$$\sum_1^m A_i f_i \geqq \sum_1^m C f_i = Cf.$$

Tehát állításunk igazolására csak azt kell megmutatnunk, hogy a fenti módon minden f-re értelmezett B operáció lineáris, azaz hogy

$$B(f+g) = Bf + Bg. \tag{2}$$

Minthogy f-nek és g-nek minden $f = \sum_1^m f_i$ és $g = \sum_1^n g_i$ fölbontása egyszersmind az $f+g$-nek is egy fölbontását adja az $f_1, \ldots, f_m; g_1, \ldots, g_n$ összeadandókra, azért rögtön adódik, hogy

$$B(f+g) \leqq Bf + Bg. \tag{3}$$

Legyen másrészt $f+g = \sum_1^p h_k$; akkor az alaptartományra kirótt 4. föltevés alapján, mint ott általánosan megjegyeztük, van olyan

$$f = \sum_1^p f_k, \quad g = \sum_1^p g_k$$

fölbontás, amelyre $f_k + g_k = h_k$ $(k = 1, \ldots, p)$. Ennélfogva és minthogy $B(f+g)$ a

$$\sum_1^p A_k h_k = \sum_1^p A_k f_k + \sum_1^p A_k g_k \geqq Bf + Bg$$

összegek értékeinek alsó határa, azért egyszersmind

$$B(f+g) \geqq Bf + Bg. \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenlőtlenségek összehasonlításából adódik a (2) egyenlőség. Ezzel első állításunkat bebizonyítottuk.

Második állításunk közvetlenül következik az elsőből és pedig úgy, hogy ezt a $D-A$ operációkból álló halmazra alkalmazzuk, ahol D az $\{A\}$ valamely majoránsa. Jelentse ugyanis E ezen halmaz legnagyobb minoránsát; akkor először is, mivel $E \leqq D - A$ valamennyi A-ra, azért $D - E \geqq A$, tehát $D-E$ majoránsa az $\{A\}$ halmaznak. Másodszor, ha D_1 bármely

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

más majoránsa az $\{A\}$ halmaznak, akkor $D_2 = \inf(D_1, D)$ is az; ezért $D - D_2 \leqq D - A$ minden A-ra, tehát

$$D - D_2 \leqq \inf\{D - A\} = E$$

és így

$$D_1 \geqq D_2 \geqq D - E;$$

vagyis $D - E$ a keresett legkisebb majoráns.

Egyébként könnyű átlátni, hogy sup $\{A\}$ úgy is előállítható, mint az (1) összeg értékeinek felső határa.

Abban az esetben, amikor az $\{A\}$ halmaz csak két elemből, A_1-ből és A_2-ből áll, D gyanánt az $A_1 + A_2$ összeg választható, tehát E az $(A_1 + A_2) - A_1 = A_2$ és $(A_1 + A_2) - A_2 = A_1$ operációk legnagyobb minoránsa, azaz $E = \inf(A_1, A_2)$. A legkisebb majoráns tehát $D - E = A_1 + A_2 - \inf(A_1, A_2)$. Vagyis áll a

2. tétel. *Bármely két A_1 és A_2 operációra*

$$\inf(A_1, A_2) + \sup(A_1, A_2) = A_1 + A_2.$$

A tétel különben az 5. példáról és a 4'. követelésről mondottakban is bennefoglaltatik.

Az 1. tételhez még a következőt kell megjegyeznünk. Világos, hogy

$$\inf\{A\} f \leqq \min\{Af\},$$

ahol a balról álló kifejezés a $B = \inf\{A\}$ operációnak az f elemre való alkalmazásával adódó Bf értéket, a jobbról álló pedig az összes, az $\{A\}$ halmazba tartozó operációknak a megadott f elemre való alkalmazásával adódó Af értékek alsó határát jelenti. Az egyenlőségi jel nem szükségszerűen érvényes. Abban az esetben azonban, ha az $\{A\}$ halmaz olyan, hogy bármely két A_1 és A_2 eleméhez van legalább egy olyan A eleme, mely mindkettőnek minoránsa, $A \leqq A_1$, $A \leqq A_2$, akkor teljes indukció ugyanezt adja bármely n elemre, $A_1, A_2, \ldots, A_n$-re is és így az (1) összegre

$$\sum_1^n A_i f_i \geqq \sum_1^n A f_i = Af \geqq Bf,$$

tehát a Bf érték nemcsak az (1) összegeknek. de már maguknak az Af értékeknek is alsó határa. Áll tehát a

3. tétel. *Ha az* $\{A\}$ *halmaz bármely két eleméhez ezeknek legalább egy minoránsát is tartalmazza, akkor minden* f*-re*

$$\inf \{A\} f = \min \{Af\}.$$

Világos, hogy megfelelő tétel érvényes a majoránsokra is. Különösen fontos az a nyilvánvaló eset, amikor az A operációk úgy rendezhetők egymás között, akár megszámozással, akár egy például 0-tól ∞-ig változó λ paraméternek megfelelően, hogy $\lambda_1 < \lambda_2$-re $A_{\lambda_1} \geqq A_{\lambda_2}$, illetőleg $A_{\lambda_1} \leqq A_{\lambda_2}$ röviden mondva, amikor az A_λ-k növekvő λ-val fogynak, illetőleg nőnek. Ebben az esetben az inf $\{A\}$, illetőleg sup $\{A\}$ jelölés helyett nyivánvaló értelemben a lim A_n, lim A_λ, $A_\lambda \to \lim A_\lambda$ írásmódokat is használhatjuk.

3. Diszjunkt operációk.

Az A és B pozitív lineáris operációkról akkor mondjuk, hogy egymáshoz *diszjunktak*, jelben $A \| B$ vagy $B \| A$, ha inf $(A, B) = 0$, azaz ha a 0-n kívül nincs pozitív minoránsuk. Ez a föltevés a a 2. tétel szerint egyértelmű azzal, hogy sup $(A, B) = A + B$. A legnagyobb minoránst megadó eljárásból világos a következő kritérium. *Ahhoz, hogy* A *és* B *diszjunktak legyenek, szükséges és elegendő, hogy minden* f*-hez és minden pozitív* ε*-hoz létezzék olyan* $f = f_1 + f_2$ *szétbontás, melyre*

$$Af_1 \leqq \varepsilon, \quad Bf_2 \leqq \varepsilon.$$

A definicióból közvetlenül világos, hogy ha $A \| B_1$ és $A_1 \leqq A$, $B_1 \leqq B$, akkor egyszersmind $A_1 \| B_1$. Egy másik nyilvánvaló következménye a definíciónak, amelyet ugyancsak fölösleges külön tétel alakjában kimondanunk, az, hogy ha $A \| B$ és $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, akkor $aA \| bB$. Az utóbbi tény a max $(a, b) = c$ jelöléssel az

$$\inf (aA, bB) \leqq \inf (cA, cB) = c \inf (A, B) = 0$$

egyenlőtlenségből adódik.

4. tétel. *Ha* $A_k \| B$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *akkor egyszersmind* $\sum_1^n A_k \| B$.

A tételt elég az $n = 2$ esetre bebizonyítani; tetszésszerinti

n-re azután teljes indukcióval következik. Legyen tehát $A_1 \| B$ és $A_2 \| B$; akkor bármely megadott pozitív ε-ra minden f elem szétbontható az $f = f_1 + f_2$ alakban úgy, hogy $A_1 f_1 \leqq \varepsilon/2$ és $B f_2 \leqq \varepsilon/2$; továbbá f_1 szétbontható az $f_1 = f_{11} + f_{12}$ alakban úgy, hogy $A_2 f_{11} \leqq \varepsilon/2$ és $B f_{12} \leqq \varepsilon/2$. Ennélfogva az $f = f_{11} + (f_{12} + f_2)$ szétbontásra

$$(A_1 + A_2) f_{11} = A_1 f_{11} + A_2 f_{11} \leqq A_1 f_1 + A_2 f_{11} \leqq \varepsilon;$$
$$B(f_{12} + f_2) = B f_{12} + B f_2 \leqq \varepsilon.$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

5. tétel. *Ha az* $\{A\}$ *halmaz majorálható és ha egy* B *operációra és minden* A*-ra* $A \| B$, *akkor egyszersmind* $\sup\{A\} \| B$.

Ugyanis adott f-re és pozitív ε-ra, a $C = \sup\{A\}$ jelöléssel, megadhatók olyan az $\{A\}$-ba tartozó $A_1, A_2, \ldots, A_n$ operációk és az f-nek olyan $f = \sum_1^n f_k$ szétbontása, amelyekre

$$Cf \leqq \sum_1^n A_k f_k + \varepsilon/2,$$

vagyis

$$\sum_1^n (C - A_k) f_k \leqq \varepsilon/2.$$

Másrészt, minthogy $A_k \| B$, azért alkalmas $f_k = f_k' + f_k''$ szétbontással elérhetjük, hogy

$$A_k f_k' \leqq \varepsilon/2n, \quad B f_k'' \leqq \varepsilon/2n,$$

Ennélfogva, a $\sum_1^n f_k' = f'$, $\sum_1^n f_k'' = f''$ jelöléssel, $f = f' + f''$;

$$Cf' = \sum_1^n (C - A_k) f_k' + \sum_1^n A_k f_k' \leqq \sum_1^n (C - A_k) f_k + \sum_1^n A_k f_k' \leqq$$
$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon$$

és

$$Bf'' = \sum_1^n B f_k'' \leqq n \frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon,$$

vagyis valóban $C \| B$.

Fogalmazzuk még meg az 5. tételt külön korollárium gyanánt arra a speciális esetre is, mikor az $\{A\}$ halmaz elemei

egymással is diszjunktak. Ebben az esetben, mint azt két elem esetében már említettük,

$$\sup \{A\} = \Sigma A,$$

ahol az összegezés az $\{A\}$ halmaz összes elemeire vonatkozik, még akkor is, ha az elemek száma nemcsak hogy nem véges, de még csak nem is megszámlálhatóan végtelen. Ezt a következőképpen kell értenünk. Mivel az A-k egymással diszjunktak, azért bármely két elemre, A_1-re és A_2-re,

$$\sup (A_1, A_2) = A_1 + A_2$$

és ebből teljes indukcióval a 4. tétel alapján bármely n elemre

$$\sup \{A\} \geqq \sup (A_1, \ldots, A_n) = \sum_1^n A_k.$$

Vagyis

$$\sum_1^n A_k f \leqq \sup \{A\} f; \tag{1}$$

ennélfogva megadott f-re $Af = 0$ legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok A kivételével és az utóbbiakkal képezett ΣAf összeg létezik; ΣA-n a minden f-re ilyen módon képezett összeggel értelmezett operációt értjük. Ez az operáció nyilvánvalóan lineáris, azaz

$$\Sigma A (f + g) = \Sigma Af + \Sigma Ag,$$

továbbá majoránsa valamennyi A-nak; mivel még (1) szerint $\Sigma A \leqq \sup \{A\}$, azért pontosan $\Sigma A = \sup \{A\}$.

Az 5. tétel tehát ebben az esetben így is kimondható: *ha az $\{A\}$ halmaz majorálható és az A-k egymással és B-vel diszjunktak, akkor ΣA is diszjunkt B-vel.*

Egyébként, mint a 4. tétel alkalmazásával adódik, ez az állítás akkor is érvényes, ha az A-k egymással nem diszjunktak, de a ΣA operáció valamely kínálkozó módon értelmezve (például mint az $\{A\}$ operációhalmaz tetszésszerinti véges számú eleméből képezett összegek legkisebb majoránsa) létezik.

6. tétel. *Ha A és B két tetszésszerinti pozitív lineáris operáció, akkor*

$$\sup (A, B) - A = B - \inf (A, B) \| A - \inf (A, B) = \sup (A, B) - B.$$

A tétel természetesen triviális abban az esetben, mikor az egyik operáció a másiknak majoránsa, például $A \geqq B$; ebben az esetben a tétel azt mondja, hogy $0 \parallel A - B$; már pedig nyilvánvaló, hogy 0 minden operációhoz diszjunkt. Abban az általános esetben azonban, mikor sem $A \geqq B$, sem $A \leqq B$, a tétel szerint A-ból és B-ből alkalmas eljárással, tudniillik $\inf(A, B)$ levonásával, két egymással diszjunkt $A_1 \not\equiv 0$ és $B_1 \not\equiv 0$ operáció származtatható.

A tétel bizonyítására legyen $C = \inf(A_1, B_1)$, ahol $A_1 = A - \inf(A, B)$, $B_1 = B - \inf(A, B)$; meg kell mutatnunk, hogy $C = 0$. Minthogy $A_1 \geqq C$, $B_1 \geqq C$, azért

$$A = \inf(A, B) + A_1 \geqq \inf(A, B) + C,$$
$$B = \inf(A, B) + B_1 \geqq \inf(A, B) + C,$$

tehát az $\inf(A, B)$ mint *legnagyobb* minoráns értelmezése alapján valóban $C = 0$.

7. tétel. *Ha* $A \parallel B$ *és* $A \leqq B + C$, *akkor egyszersmind* $A \leqq C$.

Ugyanis, minthogy $A \leqq B + C$ és $B \leqq B + C$, azért egyszersmind

$$A + B = \sup(A, B) \leqq B + C.$$

tehát

$$A = (A + B) - B \leqq (B + C) - B = C,$$

Érdekes megemlíteni, hogy a 4. és az 5. tétel a legkisebb majoráns fogalmából, a szerkesztésére szolgáló eljárásra való hivatkozás nélkül is adódik, mint a 7. tétel korollárriuma. A 4. tételnél elég volt bebizonyítani, hogy ha $A_1 \parallel B$, $A_2 \parallel B$, akkor $A_1 + A_2 \parallel B$, más szóval, hogy $C = \inf(A_1 + A_2, B) = 0$. Bizonyítás: minthogy $C \leqq B \parallel A_1$, azért $C \parallel A_1$, tehát $C \leqq A_1 + A_2$-ből a 7. tétel szerint $C \leqq A_2$; minthogy egyszersmind $C \leqq B$ és $A_2 \parallel B$, tehát $C = 0$. — Az 5. tétel bizonyítása: az $\inf(\sup\{A\}, B) = D$ jelöléssel az $\{A\}$ halmaz minden A elemére $A \leqq \sup\{A\} = D + (\sup\{A\} - D)$; másrészt $D \leqq B \parallel A$ folytán $A \parallel D$, ennélfogva a 7. tétel szerint valamennyi $A \leqq \sup\{A\} - D$; így $D = 0$.

4. Lineáris operációk diszjunkt részei.

Ha A és B pozitív lineáris operációk és $A \leqq B$, $A \| B - A$, akkor azt mondjuk, hogy A — és ugyanúgy $B - A$ — a B-nek *diszjunkt részei*; jelölése $A \prec B$.

8. tétel. *Ha* $A \prec B \prec C$, *akkor* $A \prec C$.

Minthogy ugyanis a föltevés szerint $B \| C - B$ és $A \leqq B$, azért egyszersmind $A \| C - B$; minthogy még ugyancsak a föltevés szerint $A \| B - A$, azért a 4. tétel alapján $A \| (C - B) + (B - A) = C - A$, azaz $A \prec C$.

9. tétel. *Ha* $A \leqq B \leqq C$ *és* $A \prec C$, *akkor* $A \prec B$.

Minthogy ugyanis a föltevés szerint $A \| C - A$ és $B - A \leqq C - A$, azért egyszersmind $A \| B - A$, vagyis $A \prec B$.

10. tétel. *Ha az* $\{A\}$ *halmaz minden elemére* $A \prec B$, *akkor egyszersmind* $\inf \{A\} \prec B$ *és* $\sup \{A\} \prec B$.

Legyen ugyanis egyszerűbb írásmód kedvéért $\inf \{A\} = C$ és $\sup \{A\} = D$. Akkor, minthogy a föltevés szerint minden A-ra $C \leqq A \| B - A$, azért egyszersmind $C \| B - A$ és így az 5. tétel alapján

$$C \| \sup \{B - A\} = B - \inf \{A\} = B - C,$$

vagyis $C \| B$, tehát tételünk első állítását igazoltuk. Alkalmazzuk most eredményünket a $\{B - A\}$ halmazra és B-re; kapjuk, hogy

$$B - D = B - \sup \{A\} = \inf \{B - A\} \prec B$$

vagyis $B - D \| B - (B - D) = D$; tehát $D \prec B$, mint ahogyan állítottuk.

Jegyezzük még meg, hogy az 5. tétellel kapcsolatban említett speciális esetben, amikor valamennyi A egymással is diszjunkt, a tétel első állítása triviális, mert $\inf \{A\} = 0$; a második állításban pedig $\sup \{A\}$ helyébe a vele megegyező ΣA-t írhatjuk.

11. tétel. *Ha* $A \neq 0$, $A \prec B$ *és* a *és* b *olyan nemnegatív számok, melyekre* $aA \leqq bB$, *akkor egyszersmind* $a \leqq b$.

A tételt a következő meggondolással bizonyítjuk be. Minthogy föltevésünk szerint $A \| B - A$, azért egyszersmind $aA \| b(B - A)$; ezenkívül $b(B - A) \leqq bB$ és a föltevés szerint $aA \leqq bB$, tehát

$$aA + b(B - A) = \sup \left(aA, b(B - A)\right) \leqq bB,$$

vagyis $aA \leqq bA$. Legyen f olyan elem, hogy $Af \neq 0$, vagyis $Af > 0$, akkor tehát $(b-a)Af \geqq 0$ és így egyszersmind $b-a \geqq 0$, azaz $a \leqq b$, mint ahogyan állítottuk.

5. Teljes és majdnem teljes családok.

Egy pozitív lineáris operációkból álló halmazról akkor mondjuk, hogy teljes családot alkot, ha

1) minden eleméhez tartalmazza annak valamennyi minoránsát,

2) bármely két elemével együtt tartalmazza azok összegét és

3) tartalmazza bármely majorálható részhalmazával együtt annak legkisebb majoránsát.

A legegyszerűbb példák: *a)* az Ω alaptartomány pozitív lineáris operációinak összessége; *b)* azoknak az A operációknak a halmaza, melyek bizonyos megadott véges számú, vagy végtelen sok f helyen eltűnnek; *c)* azoknak az A'-knek az összessége, melyek bizonyos megadott véges számú, vagy végtelen sok A operációval diszjunktak. Az *a)* példa nyilvánvaló. A *b)* példánál is evidens az első két tulajdonság, a harmadik pedig abból adódik, hogy bármely majorálható $\{A\}$ részhalmazra és a szóbanforgó f elemekre $\sup \{A\} f$ az $f = f_1 + \cdots + f_n$ fölbontásokhoz képezett $A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n \leqq A_1 f + \cdots + A_n f = 0$ összegek felső határa. A *c)* példánál az 1) tulajdonság közvetlenül a diszjunktság értelmezéséből, illetőleg az ott tett megjegyzésből adódik, mely szerint ha $A' \| A$ és $A'_1 \leqq A'$, akkor egyszersmind $A'_1 \| A$; a 2) és 3) sajátságok pedig a 4., illetőleg az 5. tételből következnek.

12. tétel. *Ha az $\{A\}$ halmaz teljes családot alkot, akkor bármely pozitív lineáris B operáció szétbontható és pedig csak egy módon két diszjunkt részre, A_1-re és $B_1 = B - A_1$-re olyként, hogy A_1 az $\{A\}$ családba tartozik, míg $B_1 \| A$ a család minden A elemére.*

Jelöljük ugyanis A_1-gyel az $\{A\}$ halmaz összes olyan elemeinek, melyek a B operáció minoránsai, legkisebb majoránsát és legyen $B_1 = B - A_1$. Az A_1 operáció a 3) követelés alapján az $\{A\}$ családba tartozik; megmutatjuk, hogy viszont $B_1 \| A$

a család valamennyi A elemére. Az 1) és 2) követelések szerint A-val együtt $A_1 + \inf(A, B_1)$ is a családba tartozik; mivel még ezenkívül

$$A_1 + \inf(A, B_1) \leqq A_1 + B_1 = B,$$

azért az A_1 szerkesztése szerint

$$A_1 + \inf(A, B_1) \leqq A_1,$$

tehát $\inf(A, B_1) = 0$, azaz $B_1 \| A$.

Az unicitás a 7. tétel közvetlen következménye.

Az imént bebizonyított tételnek egyik legjellegzetesebb alkalmazása az 1. példában megadott alaptartomány, vagyis egy számközön folytonos függvények, lineáris operációinak három nevezetes típus szerint való, bolognai előadásomban eszközölt szétbontása.

13. tétel. *Adva lévén az* $\{A\}$ *halmaz, jelentse* $\{A'\}$ *az összes A-kkal diszjunkt A' operációk összességét,* $\{A''\}$ *pedig azokét az A'' operációkét, melyek az összes A'-kkel diszjunktak. Akkor* $\{A'\}$ *és* $\{A''\}$ *teljes családok és pedig* $\{A''\}$ *a legkisebb olyan teljes család, amely az* $\{A\}$ *halmazt magában foglalja.*

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy az a tény, hogy az $\{A\}$ halmazhoz egyáltalában van legkisebb, a halmazt magában foglaló teljes család, nyilvánvaló az $\{A''\}$ halmaz megkonstruálása nélkül is. A teljes család definíciójából evidens, hogy teljes családoknak, akár véges számúnak, akár végtelen soknak, közös része ugyancsak teljes család; ennélfogva a legkisebb az $\{A\}$ halmazt tartalmazó család nem egyéb, mint az összes az $\{A\}$ halmazt tartalmazó családok közös része.

Azt, hogy $\{A'\}$ teljes család, már az imént a *c)* példa címén megmutattuk; ugyanazon oknál fogva teljes család az $\{A''\}$ halmaz is. Továbbá világos, hogy az $\{A''\}$ család magában foglalja az $\{A\}$ halmazt. Jelöljük $[A]$-lel a legkisebb az $\{A\}$ halmazt magábazáró teljes családot, akkor tehát az $\{A''\}$ család tartalmazza az $[A]$ családot és az $\{A''\} \equiv [A]$ állítás igazolására csak azt kell megmutatnunk, hogy minden A'' eleme az $[A]$ család-

nak is. Tekintsünk tehát egy A'' operációt, mondjuk A_1''-et; bontsuk föl az előző tétel szerint az $A_1''=A_1+B_1$ alakban, ahol A_1 az $[A]$ család egy eleme, B_1 pedig az $[A]$ minden elemével, tehát a fortiori a $\{A\}$ halmaz minden elemével diszjunkt, vagyis az A'-k közé tartozik. Minthogy $B_1 \leqq A_1''$, azért B_1 az $\{A''\}$ családba is beletartozik. Vagyis B_1 diszjunkt önmagával, $B_1 \| B_1$, tehát $B_1 = \inf(B_1, B_1) = 0$, azaz $A_1''=A_1$, úgy hogy A_1'' benne van az $[A]$ családban. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Jegyezzük még meg, hogy abban az esetben, amikor a megadott $\{A\}$ halmaz már magában teljes család és ennélfogva azonos a tartalmazó legkisebb teljes családdal, tételünk a következő korollárriumra redukálódik: *Minden teljes* $\{A\}$ *családhoz tartozik egy meghatározott kiegészítő teljes család,* $\{A'\}$, *mely az* $\{A\}$ *család összes elemeivel diszjunkt* A' *operációk összessége; és az* $\{A'\}$*-höz ugyanilyen értelemben tartozó kiegészítő család maga* $\{A\}$.

Egy másik közvetlen korollárium, későbbi alkalmazásának megfelelő speciális alakban megfogalmazva, a következő. *Ha* $A \| B$ *és* $[A]$ *és* $[B]$ *jelentik a legkisebb az A-t, illetőleg B-t magukban foglaló teljes családokat, akkor* $[A]$ *minden eleme diszjunkt* $[B]$ *minden elemével.*

Talán helyénvaló itt példával rávilágítani arra, hogy egyetlenegy A elemhez tartozó $[A]$ család már mennyire népes lehet. Egyik legjellemzőbb példa, mely felsorolásunkban nem szerepel külön, de a 7. példának egyik legegyszerűbb speciális esete, a következő. Legyen Ω a nemnegatív számokból álló összetartó összegű (x_k) sorozatok összessége, az összeadás a megfelelő tagok összeadása. Nagyon könnyű átlátni, hogy minden A operáció egy-egy nemnegatív tagokból álló, az operációt jellemző korlátos (a_k) sorozattal a $\sum_1^\infty a_k x_k$ alakban állítható elő. Nyilvánvaló az is, hogy az $A=(a_k)$ és $A'=(a_k')$ operációk legnagyobb minoránsát a $(\min(a_k, a_k'))$ sorozat jellemzi, hogy ennélfogva az $A=(1, 1, \ldots)$ operációhoz csupán a 0 operáció diszjunkt és hogy így az ezt az operációt tartalmazó legkisebb teljes család egyszerűen az operációk összessége. Említsük még meg, hogy az 1. példában szereplő Ω alaptartomány, azaz az

$a \leqq x \leqq b$ számközön folytonos nemnegatív függvények esetében, ha A az integrálás, azaz ha

$$Af = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

akkor, mint azt bolognai előadásomban megjegyeztem, az A-hoz tartozó teljes család pontosan az összes

$$\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx \tag{2}$$

operációkból áll, ahol $g(x)$ tetszésszerinti, LEBESGUE szerint integrálható, nemnegatív függvény.

Csak néhány szót a *majdnem teljes család* fogalmáról, amelyre úgy jutunk, hogy a teljes családot jellemző követelésekből az utolsót elejtjük. Az $\{A\}$ halmazt tehát akkor mondjuk majdnem teljes családnak, ha

1) minden eleméhez tartalmazza annak valamennyi minoránsát és

2) bármely két elemével együtt tartalmazza azok összegét.

A megadott $\{A\}$ halmazt magában foglaló legkisebb majdnem teljes család létezése ugyanúgy nyilvánvaló, mint a legkisebb teljes családé. A 2) követelés alapján világos még az is, hogy ennek a családnak tartalmaznia kell az összes

$$a_1A_1 + \cdots + a_nA_n \tag{3}$$

alakú operációkat, ahol $A_1, \ldots, A_n$ tetszésszerinti az $\{A\}$ halmazból vett operációk, $a_1, \ldots, a_n$ pedig tetszésszerinti pozitív egész számok, az 1) követelés folytán pedig tartalmaznia kell a (3) operációk összes minoránsait. Viszont világos, hogy a (3) operációk és azok minoránsai majdnem teljes családot alkotnak; a szóbanforgó két majdnem teljes család tehát egymással azonos.

Speciálisan, egy megadott A lineáris operációt magában foglaló legkisebb majdnem teljes család nem más, mint az A minoránsainak és azok többszöröseinek összessége; vagy másképpen fogalmazva, az A operációhoz viszonyítva korlátos B

operációk, $B \leqq cA$, összessége. Példaképpen említsük meg, hogy az (1) előírással megadott A operációt, vagyis az integrálást tartalmazó legkisebb majdnem teljes család azokból a (2) operációkból áll, melyekben a $g(x)$ függvény pozitív és korlátos, legfeljebb egy 0 mértékű halmaz kivételével.

A következőkben a megadott A operációt tartalmazó legkisebb teljes családot, $[A]$-t, röviden *az A operáció családjának*, az A operációt tartalmazó legkisebb majdnem teljes családot pedig *az A operáció szűkebb családjának* mondjuk.

Az imént láttuk, hogy egyetlenegy A operáció családja (sőt már szűkebb családja is) egybeeshetik az operációk összességével. Említsük most meg a másik szélső eshetőséget is. Ha az A operációnak nincs más minoránsa, mint a cA operációk $(0 \leqq c \leqq 1)$, akkor nyilvánvaló, hogy mind a két család ugyancsak a cA operációkra $(0 \leqq c < \infty)$ szorítkozik. Ilyenek az 1. példa esetében az $Af = cf(a)$ vagy általában az $Af = cf(x_0)$ operációk $(c \geqq 0)$ és csak ezek. Hasonlóan áll a dolog a 2. és 3. példákban megadott alaptartományokra nézve, míg a 4. példában megadott alaptartomány operációi között már nem szerepelnek ilyen «szinguláris» operációk.

Jegyezzük még meg, hogy, amint nagyon könnyen igazolható, egy operáció szűkebb családjából az operáció családja az összes majorálható részhalmazok legkisebb majoránsainak adjungálásával adódik. Ugyanez a kapcsolat több, véges számú vagy végtelen sok megadott operációt tartalmazó legkisebb majdnem teljes és teljes családok közt.

6. Tetszésszerinti előjelű lineáris operációk.

A következőkben lineáris operációk bizonyos fajta összetételeivel, megadott operációkból további operációk származtatásával foglalkozunk. Ilyenek voltak már eddig is az operációk összege, legnagyobb minoránsuk és legkisebb majoránsuk. Mindenekelőtt ideje, hogy számbavegyük az $A = B - C$ alakú operációkat is, ahol B és C pozitív lineáris operációk, C azonban nem okvetlenül minoránsa B-nek, tehát A nem okvetlenül pozitív operáció. A következőkben lineáris operáció néven, jelző

nélkül, ezeket az operációkat értjük; világos, hogy az eddigiek mind közéjük tartoznak. Hogy az A operáció ebbe az osztályba tartozzék, annak szükséges és elegendő föltétele az operáció disztributív volta, $A(f+g) = Af + Ag$, és ezenkívül pozitív majorálhatósága a következő értelemben: van olyan pozitív lineáris B operáció, melyre $A \leqq B$, azaz minden f-re $Af \leqq Bf$; $Bf \geqq 0$. A kritérium nyilvánvaló és az előállításban szereplő C nem más, mint $B - A$.

Az $A = B - C$ tetszésszerinti előjelű operációnak, ahol $B \geqq 0$, $C \geqq 0$, egy kitüntetett előállítását szolgáltatják a

$$\begin{aligned} B_1 &= B - \inf(B, C) = \sup(B, C) - C, \\ C_1 &= C - \inf(B, C) = \sup(B, C) - B \end{aligned} \tag{1}$$

operációk, amelyek közül az elsőt az A operáció *pozitív részének*, a másodikat az A operáció *negatív részének* nevezzük és $\operatorname{pos} A$, illetőleg $\operatorname{neg} A$-val jelöljük. Világos, hogy $B_1 \geqq 0$, $C_1 \geqq 0$ és $A = B_1 - C_1$; ezenkívül a 6. tétel szerint $B_1 \| C_1$. Ez a tulajdonság, azaz *a B_1 és C_1 operációk diszjunkt volta tünteti ki az $A = B_1 - C_1 = \operatorname{pos} A - \operatorname{neg} A$ előállítást az összes lehetséges $A = B - C$, $B \geqq 0$, $C \geqq 0$ előállítások közt.* Legyen ugyanis $A = B_2 - C_2$, $B_2 \geqq 0$, $C_2 \geqq 0$, $B_2 \| C_2$ egy ugyanilyen típusú előállítás, vagyis más szóval legyen

$$\begin{gathered} B_1 + C_2 = B_2 + C_1,\ B_1 \geqq 0,\ C_1 \geqq 0,\ B_2 \geqq 0,\ C_2 \geqq 0, \\ B_1 \| C_1,\ B_2 \| C_2; \end{gathered}$$

akkor tehát $B_1 \| C_1$ és $B_1 \leqq C_1 + B_2$ és így a 7. tétel szerint $B_1 \leqq B_2$; ugyanígy adódik, hogy $B_2 \leqq B_1$, $C_1 \leqq C_2$, $C_2 \leqq C_1$ és így végül, hogy $B_2 = B_1$, $C_2 = C_1$, vagyis a fenti módon való előállítás egyértelmű volta.

A $\operatorname{pos} A = B_1$ és $\operatorname{neg} A = C_1$ operációk tehát függetlenek az $A = B - C$, $B \geqq 0$, $C \geqq 0$ előállítás speciális megválasztásától. Ebből (1) alapján az is következik, hogy minden ilyen előállításra nézve $\operatorname{pos} A \leqq B$, $\operatorname{neg} A \leqq C$; minthogy pedig $A = \operatorname{pos} A - \operatorname{neg} A$ maga is ilyen előállítás, azért a $\operatorname{pos} A$ és $\operatorname{neg} A$ operációk az összes ilyen előállításokban szereplő B-k, illetőleg C-k legnagyobb minoránsai.

Ha a minoráns és majoráns, valamint a legnagyobb mino-

ráns és legkisebb majoráns fogalmát tetszésszerinti előjelű operációkra nyilvánvaló módon kiterjesztjük, akkor a pos A és neg A operációkat még így is jellemezhetjük:

$$\text{pos } A = \sup(A, 0); \quad \text{neg } A = \sup(-A, 0).$$

Valóban, az A és 0 operációk minden közös B majoránsa, vagy ami ugyanaz, A minden pozitív B majoránsa egy $A = B - C$, $B \geqq 0$, $C = B - A \geqq 0$ fölbontást szolgáltat; ugyanígy $-A$ minden pozitív C majoránsa egy $A = B - C$, $B = A + C = C - (-A) \geqq 0$, $C \geqq 0$ fölbontást, amiből állításunk nyilvánvalóan következik.

Összefoglalva:

14. tétel. *Valamely tetszésszerinti előjelű A lineáris operáció egy és csak egy módon állítható elő, mint két egymással diszjunkt pozitív operáció különbsége; ez az előállítás*

$$A = \text{pos } A - \text{neg } A; \quad \text{pos } A = \sup(A, 0), \quad \text{neg } A = \sup(-A, 0).$$

Minden más $A = B - C$, $B \geqq 0$, $C \geqq 0$ előállításra nézve

$$B \geqq \text{pos } A, \quad C \geqq \text{neg } A.$$

Tetszésszerinti előjelű lineáris operációkra nyilvánvaló módon terjeszthető ki a legnagyobb minoráns és a legkisebb majoráns megszerkesztésére szolgáló eljárás, valamint nyilvánvalóan érvényesek maradnak az azokra vonatkozó tételek is, azzal az egyetlen eltéréssel, hogy végtelen sok lineáris operációból álló halmaz nem szükségképpen minorálható.

A diszjunktság fogalmát is kiterjeszthetjük tetszésszerinti előjelű lineáris operációkra; az A és B operációkról akkor mondjuk, hogy diszjunktak egymással, jelölésben ismét $A \parallel B$, ha

$$\text{pos } A \parallel \text{pos } B, \quad \text{pos } A \parallel \text{neg } B, \quad \text{neg } A \parallel \text{pos } B, \quad \text{neg } A \parallel \text{neg } B;$$

rövidebben, a

$$\text{pos } A + \text{neg } A = \text{mod } A$$

írásmóddal, ugyanezt jelenti a

$$\text{mod } A \parallel \text{mod } B$$

föltevés.

Könnyű átlátni, hogy a diszjunkt operációkra vonatkozó tételek ebben az általánosabb fogalmazásban is érvényesek maradnak.

Állapodjunk meg abban, hogy az A és B tetszésszerinti előjelű operációk közül A-ról akkor mondjuk, hogy diszjunkt része a B-nek, jelölésben ismét $A \prec B$, ha $A \| B-A$. Az $A \leqq B$ föltevés itt már tárgytalan, mivel az eddig is csak annak az előzetes biztosítására szolgált, hogy a lényeges föltevésben szereplő $B-A$ operáció pozitív. Könnyű átlátni, hogy ezzel a megállapodással érvényes marad a 8., valamint nyilvánvaló módosítással a 10. tétel is, míg a 9. és 11. tételekben a pozitivitás lényeges föltevés.

Ami végül a teljes és majdnem teljes családokat illeti, tartsuk fönn ezeket az elnevezéseket az eddig használt értelemben, pozitív operációkra, és nevezzük az illető család kibővítésének azt a halmazt, melyet belőle az elemeiből alkotott különbségek adjungálásával nyerünk. Nyilvánvaló, hogy minden ilyen különbséget, egy-egy példányban, már akkor is megkapunk, ha csupán az egymással diszjunkt operációk különbségeit képezzük.

7. Lineáris operációk szimultán földarabolása.

Lineáris operációk összetételére szolgáló általánosabb eljárásoknak bevezető lépése lineáris operációk szimultán földarabolása. Tekintsünk egyelőre két lineáris operációt, a tetszésszerinti előjelű A-t és a pozitív E-t; az utóbbi jelölés arra akar figyelmeztetni, hogy az E operáció és részei a következőkben bizonyos tekintetben az egység szerepét fogják játszani. Föltesszük még, hogy az A operáció az E operáció $[E]$ családjába, illetőleg ennek kibővítésébe tartozik, vagyis, hogy minden az E-vel diszjunkt operáció A-val is diszjunkt.

Jelentsen λ egy valós változót és tekintsük a

$$P_\lambda = \text{pos}\,(\lambda E - A),$$
$$N_\lambda = \text{neg}\,(\lambda E - A) = P_\lambda - \lambda E + A$$

operációkat, mint λ függvényeit. Mind a kettő pozitív és monoton; az első növekvő, a második fogyó, azaz $\lambda_1 < \lambda_2$-re $P_{\lambda_1} \leqq P_{\lambda_2}$, $N_{\lambda_1} \geqq N_{\lambda_2}$. Azt állítom, hogy P_λ és N_λ konvexek, vagyis hogy a

$$\frac{P_{\lambda+h} - P_\lambda}{h}, \quad \frac{N_{\lambda+h} - N_\lambda}{h}$$

hányadosok λ-nak növekvő függvényei. Állításunk nyilvánvalóan egyértelmű azzal, hogy minden f-re a $P_\lambda f$ és $N_\lambda f$ számértékű függvények konvex függvények. Hogy ezt átlássuk, csak azt kell figyelembe vennünk, hogy minden λ értékre

$$P_\lambda f = \max \{\max (\lambda E g - A g,\ 0)\},$$

képezve az összes olyan g-kkel, melyekre $g \leqq f$, azaz f összes $f = g + (f - g)$ fölbontásaira. Minden ilyen g-re a $\max (\lambda E g - A g, 0)$ kifejezés λ-nak egy-egy konvex függvénye; ennélfogva $P_\lambda f$, mint az összes tekintetbe jövő g-khez tartozó konvex függvények felső burkolója, maga is konvex függvény. Hogy az $N_\lambda f$ függvény is konvex, az ugyanígy, vagy már az $N_\lambda = P_\lambda - \lambda E + A$ összefüggésből is adódik.

A $P_\lambda f$ és $N_\lambda f$ függvények, mint a λ változó konvex függvényei, λ minden értékére jobbról és balról differenciálhatók. Tekintsük csupán a jobboldali differenciálhányadosokat; ezek a λ változónak növekvő és jobbfelől folytonos függvényei. Ezek a differenciálhányadosok megadott értékre, a változó f elem függvényeinek tekintve, egy-egy lineáris operációt értelmeznek, melyeket P'_λ-vel és N'_λ-vel jelölünk. P'_λ és N'_λ a λ változónak nyilvánvaló értelemben növekvő függvényei; mivel még P_λ növekvő, N_λ pedig fogyó függvény, azért $P'_\lambda \geqq 0$, $N'_\lambda \leqq 0$.

A P_λ és N_λ operációk, mint a $\lambda E - A$ operáció pozitív és negatív részei, a 14. tétel szerint diszjunktak egymással, $P_\lambda \| N_\lambda$. Megmutatjuk, hogy ugyancsak $P_\lambda \| N'_\lambda$, $P'_\lambda \| N_\lambda$, $P'_\lambda \| N'_\lambda$. Először is, minthogy $P_\lambda \| N_\lambda$ és N_λ pozitív és a λ-nak fogyó függvénye, azaz

$$0 \leqq N_\lambda - N_{\lambda+h} \leqq N_\lambda \qquad (h > 0),$$

azért egyszersmind $P_\lambda \| N_\lambda - N_{\lambda+h}$; ennélfogva

$$P_\lambda \| \frac{N_\lambda - N_{\lambda+h}}{h},$$

tehát a jobbról álló operációnak h-ra nézve monoton volta és az 5. tétel alapján $P_\lambda \| - N'_\lambda$ és így ugyancsak $P_\lambda \| N'_\lambda$. Legyen továbbá $\lambda < \mu$, akkor minden olyan h-ra, melyre $\lambda + h \leqq \mu$, $P_{\lambda+h} \| N_{\lambda+h} \geqq N_\mu \geqq 0$, tehát $P_{\lambda+h} \| N_\mu$ és így, mivel P_λ pozitív és növekvő, egyszersmind

$$P'_\lambda \leqq \frac{P_{\lambda+h} - P_\lambda}{h} \Big\| N_\mu,$$

tehát $P'_\lambda \| N_\mu$; ebből az 5. tétel alapján egyszersmind $P'_\lambda \| N_\lambda$. Végül ebből az előzőhöz hasonló meggondolással

$$P'_\lambda \| \frac{N_\lambda - N_{\lambda+h}}{h},$$

tehát egyszersmind $P'_\lambda \| - N'_\lambda$ és így $P'_\lambda \| N_\lambda$.

Minthogy még a $P_\lambda - N_\lambda = \lambda E - A$ identitásból differenciálással adódik, hogy $P'_\lambda - N'_\lambda = E$, azért *az*

$$E_\lambda = P_\lambda,\ E - E_\lambda = - N'_\lambda \tag{1}$$

operációk az E operációnak diszjunkt részei. Az A operáció megfelelő földarabolását az

$$A_\lambda = \lambda P'_\lambda - P_\lambda,\ A - A_\lambda = - \lambda N'_\lambda + N_\lambda \tag{2}$$

operációk szolgáltatják. Az így értelmezett két operáció összege a

$$P_\lambda - N_\lambda = \lambda E - A,\ P'_\lambda - N'_\lambda = E$$

összefüggések folytán valóban A. Továbbá a P_λ, N_λ, P'_λ, N'_λ között fönnálló, az imént bebizonyított diszjunktsági relációkból a 4. tétel alapján valóban $A_\lambda \| A - A_\lambda$, vagyis A_λ *és* $A - A_\lambda$ *az A operációnak egymást kiegészítő diszjunkt részei. Végre még ugyanezen oknál fogva* $E_\lambda \| A - A_\lambda$ *és* $A_\lambda \| E - E_\lambda$.

Még egy fontos összefüggést szolgáltat a következő meggondolás. Minthogy P_λ a λ-nak konvex függvénye, azért, ha $\lambda < \mu$, akkor

$$(\mu - \lambda) P_\mu \geqq P_\mu - P_\lambda \geqq (\mu - \lambda) P'_\lambda.$$

Minden taghoz a $\lambda P'_\lambda - \mu P'_\mu$ kifejezést hozzáadva és -1-gyel szorozva, kapjuk, hogy

$$\lambda (P'_\mu - P'_\lambda) \leqq \mu P'_\mu - P_\mu - \lambda P'_\lambda + P_\lambda \leqq \mu (P'_\mu - P'_\lambda),$$

vagyis az E_λ és A_λ jelölésekkel, az (1) és (2) összefüggések alapján,

$$\lambda (E_\mu - E_\lambda) \leqq A_\mu - A_\lambda \leqq \mu (E_\mu - E_\lambda). \tag{3}$$

Vizsgáljuk még meg, milyen határok közt változnak E_λ és A_λ, mialatt λ a számegyenest befutja, vagyis határozzuk meg az $E_{-\infty}$, E_∞, $A_{-\infty}$, A_∞ limeszoperációkat. Először is, minthogy $\lambda>0$-ra és $\lambda\to\infty$-re

$$E \geqq E_\lambda = P'_\lambda \geqq {}^1\!/_\lambda (P_\lambda - P_0) \geqq {}^1\!/_\lambda (\lambda E - A - P_0) \to E,$$

azért $E_\infty = E$. Ugyanígy $\lambda<0$-ra, illetőleg $\lambda\to-\infty$-re

$$E \geqq E - E_\lambda = -N'_\lambda \geqq -{}^1\!/_\lambda (N_\lambda - N_0) \geqq {}^1\!/_\lambda (\lambda E - A - N_0) \to E;$$

tehát $E_{-\infty} = 0$. Valamivel mélyebb meggondolást igényel az $A_{-\infty}$ és A_∞ operációk kérdése. Minthogy $N_\lambda \geqq 0$ és $N'_\lambda \leqq 0$, azért $A - A_\lambda = -\lambda N'_\lambda + N_\lambda$ pozitív λ-ra pozitív. Továbbá (3) alapján A_λ pozitív λ-ra λ-val növekszik. Létezik tehát az A_∞ limeszoperáció. Mivel továbbá $E_\lambda \| A - A_\lambda \geqq A - A_\infty$, azért $E_\lambda \| A - A_\infty$ és így az 5. tétel alapján egyszersmind $E = E_\infty = \sup E_\lambda \| A - A_\infty$. Ugyanígy, minthogy negatív λ-ra $-A_\lambda = P_\lambda - \lambda P'_\lambda \geqq 0$ és mivel (3) alapján $-A_\lambda$ negatív λ-ra növekvő $|\lambda|$-val fogy, azért létezik $A_{-\infty}$ és az $E - E_\lambda \| -A_\lambda \geqq -A_\infty$ összefüggés és az 5. tétel alapján $-A_{-\infty} \| E - E_{-\infty} = E$. Most használjuk föl először azt a föltevést, hogy A az E operáció családjába, illetőleg ennek kibővítésébe tartozik. Ebből ugyanis nyilvánvalóan következik, hogy az E-ből és A-ból a mostani meggondolásaink folyamán rendre származtatott operációk, mint P_λ, N_λ, A_λ stb. és végül $A_{-\infty}$ és $A - A_\infty$ is az $[E]$ családba, illetőleg ennek kibővítésébe tartoznak. Ebből és az imént bebizonyított $-A_{-\infty} \| E$ és $A - A_\infty \| E$ kapcsolatokból a 13. tétel alapján következik, hogy a $-A_{-\infty}$ és $A - A_\infty$ pozitív operációk önmagukkal is diszjunktak és így mindkettő 0. *Vagyis* $A_{-\infty} = 0$, $A_\infty = A$.

Végül állapítsuk még meg, hogy $\lambda=0$-ra

$$A_0 = -P_0 = -\sup(-A, 0) = -\operatorname{neg} A$$

és

$$A - A_0 = A + \operatorname{neg} A = \operatorname{pos} A.$$

Az E_0 operációt pedig még a következő sajátságával jellemezhetjük: $E - E_0$ az E operációnak a pos A operáció családjába tartozó részei közül a legnagyobb, vagyis más szóval $E = (E - E_0) + E_0$ az E operációnak diszjunkt részekre való az a fölbontása, melyre

nézve $E_0 \| \operatorname{pos} A$, míg $E - E_0$ a $[\operatorname{pos} A]$ családba tartozik. Az első összefüggést már ismerjük, tehát csak az utóbbit kell megmutatnunk, vagyis a 13. tétel alapján csak azt kell igazolnunk, hogy minden olyan pozitív B operációra, melyre nézve $B \| \operatorname{pos} A$, egyszersmind $B \| E - E_0$. De minthogy $B \| \operatorname{pos} A \geqq A_\mu - A_\lambda$, mihelyt $0 < \lambda < \mu$, azért és (3) alapján $B \| A_\mu - A_\lambda \geqq \lambda (E_\mu - E_\lambda)$; ebből, minthogy $\lambda \neq 0$, következik, hogy $B \| E_\mu - E_\lambda$ és végül az 5. tétel alapján, a $\lambda \to 0$, $\mu \to \infty$ határátmenettel, $B \| E_\infty - E_0 = E - E_0$, mint ahogy azt állítottuk.

Az A_0 és E_0 operációknak ebből a jellemzéséből azonnal adódik tetszésszerinti λ_0 érték esetére az A_{λ_0} és E_{λ_0} operációk megfelelő jellemzése. Adjuk át az A operáció szerepét az $A - \lambda_0 E$ operációnak, tehát a $P_\lambda = \operatorname{pos}(\lambda E - A)$ operáció szerepét a $\operatorname{pos}(\lambda E - A + \lambda_0 E) = P_{\lambda + \lambda_0}$ operációnak, úgy hogy tehát E_0 szerepét $E_{\lambda_0} = (P'_{\lambda + \lambda_0})_{\lambda = 0}$ veszi át. Ennélfogva *például* $E - E_{\lambda_0}$ *az* E *operációnak a* $\operatorname{pos}(A - \lambda_0 E)$ *operáció által meghatározott legkisebb teljes családba tartozó részei közül a legnagyobb*, vagy más szóval, $E = (E - E_{\lambda_0}) + E_{\lambda_0}$ az E operációnak erre a családra nézve a 12. tétel szerint való fölbontása. Ugyancsak egyszerű az átmenet az E és $-A$ operációk szimultán földarabolására, mivel itt a $P_\lambda = \operatorname{pos}(\lambda E - A)$ szerepét a $\operatorname{pos}(\lambda E + A) = \operatorname{neg}(-\lambda E - A) = N_{-\lambda} = P_{-\lambda} + \lambda E + A$ operáció, tehát P'_λ szerepét a $-P'_{-\lambda} + E$ operáció játssza, azonban az előjelváltozásoknak megfelelően azzal a módosítással, hogy P'_λ most a baloldali differenciálhányadost jelenti, úgy hogy például E_0 helyét az $E - \lim_{\lambda = -0} E_\lambda$ operáció veszi át.

Abban a speciális esetben, mikor az A operáció pozitív, minden $\lambda \leqq 0$ értékre $P_\lambda = 0$ és ennélfogva egyszersmind $A_\lambda = \lambda P'_\lambda - P_\lambda = 0$, továbbá minden $\lambda < 0$ értékre $E_\lambda = P'_\lambda = 0$, míg E_0 *a fentiek szerint az* E *operációnak az* A *operációval diszjunkt részei közül a legnagyobb*, vagyis $E = E_0 + (E - E_0)$ az E operációnak diszjunkt részekre való az a fölbontása, melyre nézve $E_0 | A$, $E - E_0$ pedig az A családjába tartozik. Ebből nyilvánvalóan következnek a megfelelő jelenségek a $\lambda \leqq \lambda_0$ értékekre abban az esetben, mikor $A \geqq \lambda_0 E$.

8. Lineáris operációk szorzása.

Az előző fejezetben értelmezett és vizsgált szimultán feldarabolásnak legjelentősebb alkalmazása új operációk képezése a megadott E és A operációkból a nyilvánvaló értelmű

$$\Phi_E(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda$$

STIELTJES-típusú integrállal, mely alaki tekintetben többek között a HILBERT-féle tér elméletének egy nevezetes módszerére emlékeztet. Az előző fejezet (3) alatti egyenlőtlenségei alapján például nyilvánvaló, hogy ha $\Phi(\lambda) = \lambda$, akkor $\Phi_E(A) = A$, ha pedig $\Phi(\lambda) = \operatorname{pos} \lambda$, azaz $\lambda \leqq 0$-ra $\Phi(\lambda) = 0$, $\lambda \geqq 0$-ra $\Phi(\lambda) = \lambda$, akkor $\Phi_E(A) = \operatorname{pos} A$. Több operációból két-, illetőleg többváltozós hasonló típusú integrálokkal származtathatunk más operációkat, így például az E, A és B operációkból, ahol A és B az $[E]$ családba, illetőleg tetszésszerinti előjel esetén az $[E]$ család kibővítésébe tartoznak, a

$$\Phi_E(A, B) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \Phi(\lambda, \mu)\, dE_{\lambda,\mu}$$

előírással, ahol $E_{\lambda,\mu} = \inf(E_\lambda, \bar{E}_\mu)$; itt E_λ az E és A operációk szimultán földarabolásában szerepelt operációt, $\bar{E}_\lambda$ pedig az E és B földarabolásában szereplő megfelelő operációt jelenti.

Az itt vázolt eljárással és az azzal kapcsolatos függvénykalkulussal más alkalommal szándékozom foglalkozni; a jelen dolgozatban elsősorban két operációnak egy harmadikra viszonyított szorzatával, az $(AB)_E$ képzéssel foglalkozom, azután még ehhez hasonló típusú képzésekkel; valamennyit nagyon egyszerű módon, integrál alkalmazása nélkül fogjuk értelmezni.

Az előjel okozta kényelmetlenség elkerülése végett pozitív operációkra szorítkozunk; tetszésszerinti előjelű operációk szorzásának kérdése a pozitív operációk szorzásából, a disztributív elv igazolása után, a szokásos módon néhány szóval elintézhető. Legyenek tehát E, A és B pozitív operációk; a két utóbbi tartozzék az E operáció családjába. Az A és B operációknak az E operációra viszonyított szorzatát — jele $(AB)_E$ — a következő

módon értelmezzük. Jelentse E' az E operáció tetszésszerinti diszjunkt részét, a, b pedig olyan számokat, melyekre nézve

$$aE' \leqq A,\ bE' \leqq B,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0. \tag{1}$$

Tekintsük az összes az (1) föltételnek megfelelő diszjunkt részeket és számpárokat; képezzük belőlük az abE' operációkat és tegyük föl, hogy ezek összesége majorálható; akkor azt mondjuk, hogy A és B az E operációra viszonyítva szorozhatók és szorzatukat az

$$(AB)_E = \sup \{abE'\}$$

előírással értelmezzük.

Az ilyen módon értelmezett szorzat nyilvánvalóan *kommutatív*, továbbá *az E családjába tartozik*; ugyancsak nyilvánvaló, hogy *ha* $c \geqq 0$, *akkor* $(cAB)_E = c(AB)_E$; továbbá, hogy *a szorzat bizonyosan létezik, ha a tényezők egyike az E operációhoz viszonyítva korlátos*, vagyis, ha E szűkebb családjába tartozik. Néhány más könnyen igazolható sajátság:

1. $(AE)_E = A$;

2. *ha* $\bar{E} \prec E$, *akkor* $(A\bar{E})_E = \bar{A}$, *ahol* $\bar{A}$ *az* A *operációnak az* $\bar{E}$ *operáció családjába tartozó legnagyobb diszjunkt részét jelenti*;

3. *ha* $A \| B$, *akkor* $(AB)_E = 0$;

4. *ha* $B \leqq C$, *akkor* $(AB)_E \leqq (AC)_E$.

Az 1. állítás igazolására először is jegyezzük meg, hogy ebben, vagyis a $B=E$ esetben a $bE' \leqq E$ föltevésből a 11. tétel szerint $b \leqq 1$, tehát $abE' \leqq aE' \leqq A$, úgy, hogy A az összes abE' operációknak mindenesetre majoránsa. Vagyis

$$(AE)_E \leqq A. \tag{2}$$

Másrészt tekintsük az E és A operációk E_λ, A_λ szimultán földarabolását; jelentsen ε tetszés szerint kicsiny pozitív számot és vegyük E' gyanánt rendre az

$$E^{(1)} = E_\varepsilon,\ E^{(2)} = E_{2\varepsilon} - E_\varepsilon, \ldots,\ E^{(n)} = E_{n\varepsilon} - E_{(n-1)\varepsilon}, \ldots \tag{3}$$

egymással diszjunkt operációkat, valamint tekintsük még a megfelelő

$$A^{(1)} = A_\varepsilon,\ A^{(2)} = A_{2\varepsilon} - A_\varepsilon, \ldots,\ A^{(n)} = A_{n\varepsilon} - A_{(n-1)\varepsilon}, \ldots \tag{4}$$

operációkat, melyek egymással, valamint az eltérő mutatójú $E^{(n)}$ operációkkal szintén diszjunktak. Az előző fejezet (3) egyenlőtlensége szerint

$$(n-1)\varepsilon E^{(n)} \leqq A^{(n)} \leqq n\varepsilon E^{(n)};$$

ennek megfelelően ($E' = E^{(n)}$, $a = (n-1)\varepsilon$, $b = 1$)

$$(AE)_E \geqq abE' = (n-1)\varepsilon E^{(n)} \geqq A^{(n)} - \varepsilon E^{(n)},$$

tehát egyszersmind

$$(AE)_E \geqq \sup (A^{(n)} - \varepsilon E^{(n)}) = \sum_1^\infty (A^{(n)} - \varepsilon E^{(n)}) = A - \varepsilon E,$$

vagyis végül, minthogy az ε számot tetszés szerint választhattuk, azért

$$(AE)_E \geqq A; \tag{5}$$

a (2) és (5) egyenlőtlenségek összehasonlítása adja az 1. állítást.

A 2. állítás igazolására először jegyezzük meg, hogy ha $bE' \leqq \bar{E}$, akkor bE' és ha még $b \neq 0$, akkor E' is az $\bar{E}$ családjába tartozik, vagyis $E' \| E - \bar{E}$ és így, mivel $E' \leqq E$, azért a 7. tétel alapján egyszersmind $E' \leqq \bar{E}$ és így a 9. tétel alapján $E' \prec \bar{E}$. Ennélfogva az $(A\bar{E})_E$ szorzat konstruálásánál az E operáció azon E' diszjunkt részeire szorítkozhatunk, amelyek diszjunkt részei már az $\bar{E}$ operációnak is. Az ilyenekre viszont, ha $aE' \leqq A = \bar{A} + (A - \bar{A})$, akkor a 7. tétel alapján egyszersmind $aE' \leqq \bar{A}$ és nyilvánvalóan fordítva, ha $aE' \leqq \bar{A}$, akkor egyszersmind $aE' \leqq A$. Ennélfogva és az 1. állítás alapján

$$(A\bar{E})_E = (\bar{A}\bar{E})_{\bar{E}} = \bar{A}.$$

A 3. állítás igazolására elég megjegyeznünk, hogy mivel a föltevés szerint $A \| B$, azért, ha $aE' \leqq A$ és $bE' \leqq B$, akkor $aE' \| bE'$ és így egyszersmind $baE' \| abE'$, vagyis $abE' = 0$.

A 4. állítás nyilvánvaló módon következik a szóbanforgó szorzatok értelmezéséből.

A szorzás *disztributív* és *asszociatív* törvényeinek, vagyis az

$$(AB)_E + (AC)_E = (A(B+C))_E \tag{6}$$

és

$$((AB)_E C)_E = (A(BC)_E)_E \tag{7}$$

egyenlőségeknek a bebizonyítása valamivel részletesebb meggondolást igényel. Kezdjük a disztributív törvényen. Föltesszük vagy a (6) egyenlőség baloldalán szereplő szorzatok létezését, vagy a jobboldalon állóét; a két föltevés nyilvánvalóan ugyanazt jelenti. Bontsuk föl az E és A operációkat a (3) és (4) előírásokkal megadott $E^{(n)}$ és $A^{(n)}$ diszjunkt részeikre, tehát úgy, hogy

$$\sum_1^\infty E^{(n)}=E,\ \sum_1^\infty A^{(n)}=A,\ (n-1)\varepsilon E^{(n)}\leqq A^{(n)}\leqq n\varepsilon E^{(n)},\ E^{(m)}\|E^{(n)} \quad (m\neq n) \tag{8}$$

és így minden $A^{(n)}$ az illető $E^{(n)}$ családjába tartozik. Daraboljuk föl továbbá a B operációt is a $B^{(n)}$ diszjunkt részekre, ahol $B^{(n)}$ a B operációnak az $E^{(n)}$ családjába tartozó legnagyobb része. Minthogy $B^{(m)}\|B^{(n)}$, ha $m\neq n$, azért a

$$B^*=\sum_1^\infty B^{(n)}=\sup\{B^{(n)}\}$$

sor összetartó és $B^*\leqq B$; továbbá $B-B^*\|E^{(n)}$ minden n-re és így

$$B-B^*\|\sup\{E^{(n)}\}=E;$$

másrészt $B-B^*$ a B operációval együtt az E családjába tartozik és így $B-B^*=0$. Vagyis

$$\sum_1^\infty B^{(n)}=B.$$

Daraboljuk már most föl, n minden egyes értékére külön-külön, az $E^{(n)}$ és $B^{(n)}$ operációkat az $E^{(n,p)}$ és $B^{(n,p)}$ diszjunkt részekre hasonló módon, mint az imént az E és A operációkat, azaz úgy, hogy hasonlóképpen mint a (8) összefüggések, minden n-re fönnálljanak a

$$\sum_{p=1}^\infty E^{(n,p)}=E^{(n)},\ \sum_{p=1}^\infty B^{(n,p)}=B^{(n)},$$
$$(p-1)\varepsilon E^{(n,p)}\leqq B^{(n,p)}\leqq p\varepsilon E^{(n,p)},\ E^{(n,p)}\|E^{(n,q)} \quad (p\neq q)$$

összefüggések. Ismételjük még meg ezt az eljárást az így nyert $E^{(n,p)}$ operációkkal és a C operációnak a megfelelő családokba tartozó legnagyobb részeivel; végül az így nyert $E^{(n,p,q)}$ operá-

cióknak megfelelően daraboljuk föl tovább a megfelelő családokba tartozó legnagyobb $A^{(n,p,q)}$ és $B^{(n,p,q)}$ diszjunkt részeikre az $A^{(n)}$ és $B^{(n,p)}$ operációkat. A 7. tétel alapján akkor ezekre a részekre is érvényesek az

$$(n-1)\varepsilon E^{(n,p,q)} \leqq A^{(n,p,q)} \leqq n\varepsilon E^{(n,p,q)},$$
$$(p-1)\varepsilon E^{(n,p,q)} \leqq B^{(n,p,q)} \leqq p\varepsilon E^{(n,p,q)}$$

egyenlőtlenségek. *Végeredményben, átszámozással adódó egyszerűbb jelöléssel, az E, A, B, C operációkat földaraboltuk E_n, A_n, B_n, C_n ($n=1, 2, \ldots$) diszjunkt részeikre oly módon, hogy A_n, B_n, C_n az E_n családjába tartoznak, hogy E_n, A_n, B_n, C_n közül bármely két eltérő mutatójú operáció diszjunkt egymással, hogy*

$$\sum_1^\infty E_n = E,\ \sum_1^\infty A_n = A,\ \sum_1^\infty B_n = B,\ \sum_1^\infty C_n = C \tag{9}$$

és hogy A_n, B_n, C_n az E_n operációnak két-két egymástól εE_n-nel különböző többszöröse között feküsznek, azaz, hogy bizonyos, alkalmasan kijelölt $\alpha_n \geqq 0$, $\beta_n \geqq 0$, $\gamma_n \geqq 0$ értékekre fennállanak az

$$\alpha_n E_n \leqq A_n \leqq (\alpha_n+\varepsilon)E_n,\ \beta_n E_n \leqq B_n \leqq (\beta_n+\varepsilon)E_n,$$
$$\gamma_n E_n \leqq C_n \leqq (\gamma_n+\varepsilon)E_n \tag{10}$$

egyenlőtlenségek. Ezeket az egyenlőtlenségeket használjuk föl a (6) egyenlőségben szereplő szorzatok két oldalról való megbecslésére.

Tekintsük az $(AB)_E$ szorzatot, mint az értelmezésében szerepelt abE' operációk legkisebb majoránsát. Daraboljuk föl az E' operációt ugyancsak az $[E_n]$ családok szerint az E'_n diszjunkt részekre; mivel a föltevés szerint $aE' \leqq A$, $bE' \leqq B$, azért a fortiori $aE'_n \leqq A$, $bE'_n \leqq B$ és ezért a 7. tétel és a (10) egyenlőtlenségek szerint

$$aE'_n \leqq A_n \leqq (\alpha_n+\varepsilon)E_n,\ bE'_n \leqq B_n \leqq (\beta_n+\varepsilon)E_n;$$

ennélfogva és a 11. tétel alapján (minthogy a 8., 7. és 9. tétel folytán $E'_n \prec E_n$)

$$abE'_n \leqq (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)E_n$$

és így

$$abE' = \sum_1^\infty abE'_n \leqq \sum_1^\infty (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)E_n.$$

Minthogy ez a meggondolás az E operáció **minden** diszjunkt E' részére és minden az (1) föltevést kielégítő a, b számpárra érvényes, azért (9) és (10) alapján

$$(AB)_E = \sup\{abE'\} \leqq \sum_1^\infty (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)E_n \leqq$$
$$\leqq \sum_1^\infty \alpha_n\beta_nE_n + \varepsilon A + \varepsilon B + \varepsilon^2 E. \qquad (11)$$

Másrészt $E' = E_n$, $a = \alpha_n$, $b = \beta_n$ a (10) szerint eleget tesznek az (1) föltevésnek és így

$$(AB)_E \geqq \sup\{\alpha_n\beta_nE_n\} = \sum_1^\infty \alpha_n\beta_nE_n. \qquad (12)$$

Hasonló meggondolással, (11)-ben és (12)-ben a B szerepét a C, illetőleg $B+C$ operációknak juttatva, tehát a β_n és $\beta_n+\varepsilon$ helyébe a γ_n, $\gamma_n+\varepsilon$, illetőleg $\beta_n+\gamma_n$, $\beta_n+\gamma_n+2\varepsilon$ értékeket helyettesítve adódik, hogy

$$\sum_1^\infty \alpha_n\gamma_nE_n \leqq (AC)_E \leqq \sum_1^\infty \alpha_n\gamma_nE_n + \varepsilon A + \varepsilon C + \varepsilon^2 E; \qquad (13)$$

$$\sum_1^\infty \alpha_n(\beta_n+\gamma_n)E_n \leqq (A(B+C))_E \leqq$$
$$\leqq \sum_1^\infty \alpha_n(\beta_n+\gamma_n)E_n + 2\varepsilon A + \varepsilon B + \varepsilon C + 2\varepsilon^2 E. \qquad (14)$$

A (11)—(14) egyenlőtlenségek összehasonlításából, minthogy ε tetszés szerint kicsiny pozitív érték, nyilvánvaló módon következik a (6) disztributív törvény.

Az asszociatív törvény bebizonyításához föltesszük az $(AB)_E$, $(AC)_E$ és $(BC)_E$ szorzatok és a (7) egyenlőtlenség baloldalán álló hármas szorzat létezését. Ezt föltéve, tekintsük az $(AB)_E$ szorzatot. A (12) egyenlőtlenség alapján, előző jelöléseinkkel, bármely N-re,

$$(AB)_E \geqq \sum_1^N \alpha_n\beta_nE_n$$

és így, a disztributív törvényt alkalmazva,

$$((AB)_EC)_E \geqq \sum_1^N \alpha_n\beta_n(E_nC)_E = \sum_1^N \alpha_n\beta_nC_n \geqq \sum_1^N \alpha_n\beta_n\gamma_nE_n,$$

tehát

$$\big((AB)_E C\big)_E \geqq \sum_1^\infty \alpha_n\beta_n\gamma_n E_n. \tag{15}$$

Másrészt, ugyancsak a disztributív törvény alapján,

$$\Big(\big(\sum_1^N (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)\big) E_n C\Big)_E = \sum_1^N (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon) C_n \leqq$$

$$\leqq \sum_1^N (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)(\gamma_n+\varepsilon) E_n$$

és így egyszersmind

$$\begin{aligned}\big((AB)_E C\big)_E &\leqq \Big(\big(\sum_1^\infty (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)\big) E_n C\Big)_E \leqq \\ &\leqq \sum_1^\infty (\alpha_n+\varepsilon)(\beta_n+\varepsilon)(\gamma_n+\varepsilon) E_n \leqq \\ &\leqq \sum_1^\infty \alpha_n\beta_n\gamma_n E_n + \varepsilon(AB)_E + \varepsilon(AC)_E + \varepsilon(BC)_E + \\ &\qquad + \varepsilon^2(A+B+C) + \varepsilon^3 E.\end{aligned} \tag{16}$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty \alpha_n\beta_n\gamma_n E_n &\leqq \big(A(BC)_E\big)_E \leqq \\ &\leqq \sum_1^\infty \alpha_n\beta_n\gamma_n E_n + \varepsilon(AB)_E + \varepsilon(AC)_E + \varepsilon(BC)_E + \\ &\qquad + \varepsilon^2(A+B+C) + \varepsilon^3 E.\end{aligned} \tag{17}$$

A (15)—(17) egyenlőtlenségek egybevetése adja a (7) egyenlőséget, vagyis az asszociatív törvényt.

Hasonló jellegű meggondolással, az eddig használt földarabolás segítségével bizonyítható be még a következő összefüggés is; a bizonyítást nem részletezzük. *Ha az A, B operációk a C operáció családjába tartoznak, C pedig az E családjába, és ha az* $(AB)_C$ *és* $(AB)_E$ *szorzatok léteznek, akkor*

$$(AB)_E = \big((AB)_C C\big)_E.$$

Vagyis az $(AB)_C = \dfrac{AB}{C}$ írásmódot használva, a jobboldali szorzat képezése alakilag *a törtek szorzásának megfelelő módon*

eszközölhető. Ennek alapján fölvethetjük és tovább is követhetnők azt a gondolatot, hogy az

$$\frac{A}{C}, \frac{B}{C}, \frac{C}{E}$$

szimbolumokat önálló operátoroknak tekintsük, mint amelyek közül például az első a B operációt az

$$\frac{AB}{C} = (AB)_C$$

operációba viszi át.

Említsük még meg, ugyancsak mellőzve a különben nem nehéz bizonyítást, hogy az $(A^2)_E = (AA)_E$ operációt a következő módon is képezhetjük és hogy ugyanazt az operációt nyerjük, mint az eddigi értelmezés alapján. *Az Ω alaptartomány f elemét bontsuk föl az $f=f_1+\cdots+f_n$ alakban és képezzük a*

$$\sum_1^n \frac{(Af_k)^2}{Ef_k} \tag{18}$$

összeget, azzal a megállapodással, hogy ha $Ef_k=0$, akkor az illető tag helyébe 0-t írunk. Akkor $(A^2)_E f$ nem más, mint az összes az f elemből képezhető (18) *alakú összegek értékeinek felső határa.*

Hasonló jelenség érvényes általánosan az $(A^p)_E$ operációkra, ahol $p>1$, ha az $(A^p)_E$ operációt, mint az $E' \prec E$, $a \geqq 0$, $aE' \leqq A$ föltevéseknek megfelelő összes $a^p E'$ operációk legkisebb majoránsát értelmezzük és a (18) kifejezés helyébe a

$$\sum_1^n \frac{(Af_k)^p}{(Ef_k)^{p-1}} \tag{19}$$

összeget tesszük. Ha $0<p<1$, akkor a jelenség annyiban módosul, hogy a (19) alakú összegek értékeinek nem a felső, hanem az *alsó* határát tekintjük.

Az itt ismertetett jelenség az úgynevezett HELLINGER—RADON-féle integrálokra emlékeztet; ugyanezekre emlékeztet még az $(A^{1/2}B^{1/2})_E$ képezés is, melyet az (1), azaz $E' \prec E$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$,

$aE' \leqq A$, $bE' \leqq B$ föltevéseknek megfelelő $a^{1/2}b^{1/2}E'$ operációk legkisebb majoránsával értelmezünk. Minthogy

$$a^{1/2}b^{1/2}E' \leqq \frac{a+b}{2}E' \leqq \frac{A+B}{2},$$

azért *ez a képezés mindig létezik,* nem úgy, mint $(AB)_E$. Azt állítom, hogy *az így értelmezett operáció csak az A és B operációktól függ,* hogy tehát független az E operáció megválasztásától, azaz pontosan, hogy minden olyan E operációra, melyre nézve A és B az E családjába tartoznak, az $(A^{1/2}B^{1/2})_E$ operáció ugyanaz. E szerint indokolt az egyszerűbb $A^{1/2}B^{1/2}$ írásmód. Állításunk nyilvánvaló korollárium a következő állításnak: *Az* $A^{1/2}B^{1/2}$ *operáció nem más, mint az összes*

$$\frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2} \qquad (0<\lambda<\infty) \tag{20}$$

operációk legnagyobb minoránsa. Ezt az állítást így bizonyítjuk be. Először is, a már használt jelölésekkel,

$$a^{1/2}b^{1/2}E' \leqq \frac{\lambda a+\lambda^{-1}b}{2}E' \leqq \frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2},$$

tehát

$$A^{1/2}B^{1/2} = \sup\left\{a^{1/2}b^{1/2}E'\right\} \leqq \frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2}$$

és így egyszersmind

$$A^{1/2}B^{1/2} \leqq \inf\left\{\frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2}\right\} \qquad (0<\lambda<\infty). \tag{21}$$

Másrészt, ha C a (20) operációk egy közös minoránsa és ha az A, B, C és E operációkat az eddigi módon és jelölésekkel földaraboljuk, akkor, minthogy

$$C_n \leqq C \leqq \frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2},$$

azért a 7. tétel alapján egyszersmind

$$C_n \leqq \frac{\lambda A_n+\lambda^{-1}B_n}{2} \leqq \frac{\lambda(a_n+\varepsilon)+\lambda^{-1}(\beta_n+\varepsilon)}{2}E_n$$

és speciálisan, a $\lambda=(\alpha_n+\varepsilon)^{-1/2}(\beta_n+\varepsilon)^{1/2}$ értéket helyettesítve,

$$C_n \leqq (\alpha_n+\varepsilon)^{1/2}(\beta_n+\varepsilon)^{1/2}E_n \leqq (\alpha_n^{1/2}+\varepsilon^{1/2})(\beta_n^{1/2}+\varepsilon^{1/2})E_n \leqq$$
$$\leqq \left(\alpha_n^{1/2}\beta_n^{1/2}+\varepsilon^{1/2}\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{2}+\varepsilon\right)E_n.$$

Mivel még $A^{1/2}B^{1/2} \geqq \sup\{\alpha_n^{1/2}\beta_n^{1/2}E_n\} = \sum_1^\infty \alpha_n^{1/2}\beta_n^{1/2}E_n$, azért

$$C = \sum_1^\infty C_n \leqq A^{1/2}B^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\frac{A+B+2E}{2} + \varepsilon E. \tag{22}$$

Speciálisan, ha

$$C = \inf\left\{\frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2}\right\} \qquad (0<\lambda<\infty),$$

a (21) és (22) egyenlőtlenségekből nyerjük, hogy

$$0 \leqq \inf\left\{\frac{\lambda A+\lambda^{-1}B}{2}\right\} - A^{1/2}B^{1/2} \leqq \varepsilon^{1/2}\frac{A+B+2E}{2} + \varepsilon E;$$

ezzel, minthogy ε tetszés szerint kicsiny, állításunkat bebizonyítottuk.

Az $A^{1/2}B^{1/2}$ operációnak még egy harmadik kínálkozó értelmezési módja az f elem $f=f_1+\cdots+f_n$ fölbontásainak megfelelő

$$\sum_1^n (Af_kBf_k)^{1/2}$$

összegek alsó határának képezése. Könnyű megmutatni, hogy ez az értelmezés a másik kettővel egyenértékű.

Hasonló módon tárgyalhatók az $A^{1/2}B^{1/2}$ operáció nyilvánvalóan kínálkozó általánosításai, például az $A^\alpha B^\beta$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$) és $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$) operációk. Az első helyen említett képezés speciálisan magában foglalja az $(A^p)_E$ ($0<p<1$) operációt ($B=E$, $\alpha=p$, $\beta=1-p$). Azt is megmutathatnók, hogy mindezek a képzések az egymással való további komponálás szempontjából úgy viselkednek, amint azt szimbolikus írásmódjuk szerint elvárjuk. Mindez azonban kevesebb fáradsággal adódik a fejezet elején említett függvénykalkulus általános eredményeiből.

Csak még néhány szót arról, hogyan alakulnak az itt tárgyalt képezések egyes konkrét alaptartományok esetében. A már többször említett 1. példa, vagyis az $a \leqq x \leqq b$ számközön foly-

tonos $f(x)$ függvényekből álló Ω alaptartományra nézve tekintsük először is azt a különösen egyszerű esetet, mikor

$$Ef = \int_a^b f(x)\,dx,$$

mikor tehát az E családjába tartozó A és B operációk az

$$Af = \int_a^b a(x) f(x)\,dx, \quad Bf = \int_a^b b(x) f(x)\,dx$$

alakban írhatók föl, ahol $a(x)$ és $b(x)$ tetszésszerinti pozitív, LEBESGUE szerint integrálható függvények. Ebben az esetben összes képzéseink is hasonló alakban írhatók föl, így például

$$(AB)_E f = \int_a^b a(x)\, b(x)\, f(x)\,dx,$$

$$A^{1/2}B^{1/2}f = \int_a^b \big(a(x)\, b(x)\big)^{1/2} f(x)\,dx;$$

természetesen az $(AB)_E$ szorzatnak csak akkor van értelme, ha az $a(x)\,b(x)$ szorzat is integrálható, például, ha egyik tényezője korlátos.

Az általános esetben, mint azt 1909-ben megmutattam, a lineáris operáció analitikus előállítása

$$Af = \int_a^b f(x)\,da(x),$$

ahol $a(x)$ egy csupán az A operációtól függő és az operáció által lényegében meghatározott korlátos növekvő függvény; megfordítva, minden ilyen STIELTJES-féle integrál egy-egy lineáris operációt értelmez.[5] Ebben az esetben, ha a B és E operációkhoz tartozó analog függvények $\beta(x)$ és $\varepsilon(x)$, akkor például a $C=(A^2)_E$ és $D=A^{1/2}B^{1/2}$ operációkat előállító $\gamma(x)$ és $\delta(x)$ függvények a

[5] F. RIESZ, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, **149** (1909), pp. 947—977.

$$\gamma(x) = \int_a^x \frac{d^2\alpha(t)}{d\varepsilon(t)}, \quad \delta(x) = \int_a^x d^{1/2}\alpha(t)\, d^{1/2}\beta(t)$$

HELLINGER-féle integrálokkal adódnak.

Ugyanezek az analitikus előállítások érvényesek a 2., 3. és 4. példákban szereplő alaptartományok eseteiben, a két utóbbiban a STIELTJES-féle integrál megfelelően módosított értelmezésével és az utolsó esetben még azzal az eltéréssel, hogy itt előállító függvények gyanánt csak a folytonos növekvő függvények szerepelnek.

A 6. példában szereplő alaptartomány operációi egyik kategóriájának analitikus előállítását az

$$A\mu = \int a(P)\, d\mu(e),$$

az egész térre képezett, STIELTJES—LEBESGUE—RADON típusú integrálok szolgáltatják, ahol $a(P)$ a P pontnak minden pozitív tömegeloszlásra nézve integrálható pozitív függvénye. A kompozíció módja itt ugyanolyan, mint az imént, például, ha a B operációhoz tartozó függvény $b(P)$, akkor az $A^{1/2}B^{1/2}$ operációhoz az $(a(P)\, b(P))^{1/2}$ függvény tartozik.

Az operációk egy másik osztályának analitikus előállítása

$$A\mu = \Sigma a(P)\, \mu(P),$$

ahol $\mu(P)$ az egyes tömegpontokban elhelyezett tömeg, vagyis az illető P pontot tartalmazó e nyitott halmazokba eső $\mu(e)$ tömegek alsó határa, mely csak megszámlálhatóan végtelen sok pontban különbözhetik 0-tól és amelyre $\Sigma\mu(P)$ a P pontok minden korlátos halmazára nézve összetartó; itt $a(P)$ gyanánt szerepelhet minden olyan korlátos, de nem okvetlenül integrálható vagy nem is mérhető függvény, mely a tér elég távoli részében mindenütt eltűnik. A kompozíció módja itt ismét olyan, mint az előző esetben.

A legáltalánosabb operáció három különböző típusú operációból tehető össze, t. i. a már fölsorolt kettőn kívül még egy harmadikból, amely a $\mu(e)$ tömegeloszlásnak csak az úgynevezett folytonos szinguláris komponensétől függ. E harmadik fajta

operáció analitikus előállításának a kérdése azonban még nincs elintézve.

Az 5. példában az alaptartomány elemei a valamely, például térbeli tartományban harmonikus és pozitív függvények. Gömb esetében tudvalevőleg minden ilyen függvényhez egy-egy a gömbfelületen értelmezett pozitív és véges tömegeloszlás tartozik, melyből a függvény a POISSON—STIELTJES-féle integrálelőállítással adódik, úgy hogy tehát az operációk az ilyen tömegeloszlások összességére értelmezett operációknak is tekinthetők; ennélfogva mutatis mutandis érvényes az, amit a 6. példáról mondtunk. Hasonló jellegű előállítás érvényes, mint azt DE LA VALLÉE—POUSSIN megmutatta, eléggé reguláris felületek által határolt tartományokra,[6] az általános tartományra azonban a megfelelő probléma sokkal nehezebb és egyelőre még elintézésre vár.

A 7. példa megbeszélése a DANIELL-féle integrál elméletének föltételezése nélkül túlságosan hosszadalmas volna. Erről az alaptartományról majd a következő fejezetben lesz szó.

9. Az alaptartomány kibővítése.

Az alaptartomány kibővítésének egyik legfontosabb és legjobban ismert konkrét esete a folytonos függvényekről a LEBESGUE szerint integrálható függvényekre való átmenet, ami többféle módon, általában ilyen vagy olyan értelemben összetartó, például korlátos vagy monoton, mindenütt vagy csak majdnem mindenütt, vagy nem is pontonkint, hanem csupán valamilyen értelemben integrálra nézve összetartó sorozatok segítségével történik. Ennek a módszernek absztrakt alaptartományra való átvitele mindenekelőtt egy megfelelő, esetleg további megszorító föltevésekre támaszkodó, konvergenciafogalom bevezetését tenné szükségessé. Megszorító föltevések nélkül való például az $\{f_n\}$ sorozat összetartásának a következő értelmezése: a sorozat összetartó, ha minden lineáris A operációra nézve összetartó az

[6] C. DE LA VALLÉE—POUSSIN, Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2) 2 (1933), pp. 167—197.

Af_n értékekből képezett numerikus sorozat. Más, tágabb értelmezéseket kapunk, ha az $\{f_n\}$ sorozat összetartó voltát az összes A operációk helyett csak azok egy részére, tehát egy valamilyen módon kitüntetett halmazra, esetleg teljes vagy majdnem teljes családra nézve posztuláljuk. Például az $a \leqq x \leqq b$ közön folytonos függvényekre az első értelmezés egyértékű az $f_n(x)$ függvénysorozat korlátos és mindenütt összetartó voltával, míg az említett tágabb értelmezés alá esnek a minden egyéb kikötés nélkül mindenütt való összetartás, továbbá az úgynevezett gyenge összetartás egyes esetei.

Egy másik, sok tekintetben rendszeresebb kibővítési módot sugalmaz a dualitás gondolata. Csak néhány megjegyzéssel és példával akarok rámutatni az ezzel a gondolattal kapcsolatos problémákra. Adva lévén az Ω alaptartomány, tekintsük annak összes pozitív lineáris A operációit. Mivel az A operációk összeadása eleget tesz az alaptartományok elemeinek összeadására az 1. fejezetben megszabott föltevéseknek (a 4'.-nek is), azért ez az összesség maga is tekinthető alaptartománynak. Ennek az új Ω^* alaptartománynak az operációi közt ott szerepelnek az eredeti Ω alaptartomány f elemei, abban az értelemben, hogy egy megadott f elem az A operációkhoz az Af értékeket rendeli. Az első tekintetre leginkább kínálkozó kibővítés az Ω^* alaptartomány összes további A^* operációinak az adjungálása. Azonban már az imént is említett 1. példa azt mutatja, hogy a kibővítésnek ez a módja túlságosan sok, konkrét esetben fölöslegesen sok és nehezen kezelhető új elemeket adna. Az 1. példa esetében az Ω^* alaptartomány, azaz az A operációk összessége, mint azt az előző fejezetben is említettük, az

$$Af = \int_a^b f(x)\, da(x) \tag{1}$$

alakban állítható elő, ahol $a(x)$ tetszésszerinti korlátos növekvő függvény, úgy, hogy az Ω^* alaptartomány lényegében az ilyen $a(x)$ függvények összessége, azzal a kikötéssel, hogy két olyan $a(x)$ függvény, melyeknek folytonossági helyeiken tekintett különbsége állandó és amelyekre ennélfogva az (1) integrál ugyanazt az A operációt szolgáltatja, azonosnak veendő. Tudjuk, hogy

az (1) integrál úgy is értelmezhető, mint az $\alpha(x)$ függvényhez ismert módon rendelhető $\mu(e)$ tömegelosztással képezett integrál és abból, amit az előző fejezetben a 6. példáról mondtunk, nyilvánvaló, hogy a tekintett módon az Ω alaptartományhoz már olyan A^* operációkat is adjungálnánk, amelyek nem jellemezhetők integrálható vagy akár csak mérhető függvényekkel sem.

Természetesen kínálkozó megszorítás, hogy az Ω^* alaptartománynak csak azokat az A^* operációit tekintsük, amelyek a megadott Ω alaptartomány f elemeivel jellemzett operációkat tartalmazó legkisebb teljes családba, vagy azokat, amelyek a megfelelő majdnem teljes családba tartoznak. Ha ezt a gondolatot az 1. példára alkalmazzuk és minden így adjungált A^* operációhoz azt az $a^*(x)$ függvényt rendeljük, melyet minden x_0 helyen az

$$a^*(x_0) = A^* A_{x_0}; \quad A_{x_0} f = f(x_0) \tag{2}$$

előírással értelmezünk, akkor az ilyen módon megszerkesztett $a^*(x)$ függvények mind a két esetben pontosan a pozitív és minden korlátos és monoton $\alpha(x)$ függvényre nézve a STIELTJES—LEBESGUE-féle értelemben[7] integrálható függvények összességét alkotják.

Alkalmazzuk ugyanezt a gondolatot a 7. példára, melynek az 1. példa speciális esete és amely a DANIELL-féle integrálfogalomhoz vezet. A DANIELL-féle elmélethez való alkalmazkodás kedvéért föltesszük, hogy úgy, mint az 1. példában, az Ω alaptartomány itt is tartalmazza minden $f(x)$ elemével együtt annak $cf(x)$ többszöröseit ($c \geqq 0$) is. Ez a föltevés nem megszorítás, mert ha az eredeti Ω alaptartományra még nincsen teljesítve, akkor mindenekelőtt nyilvánvaló módon adjungálhatjuk a c racionális értékeivel képezett $cf(x)$ függvényeket; az is nyilvánvaló, hogy a 4'. föltevés ez után a kibővítés után is teljesül. Az A operáció viszont minden új $cf(x)$ elemre a nyilvánvaló $A(cf) = cAf$ előírással értelmezhető, úgy hogy tehát az Ω kibővítése nem érinti az Ω^* halmazt. További ismert kibővítési mód, melynél már az összes $c \geqq 0$ értékek belépnek, azonkívül, mint

[7] H. LEBESGUE, Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations linéaires, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, **150** (1910), pp. 86—88.

a 2. és 3. példák mutatják, esetleg további új függvények is adódnak, a viszonylagosan egyenletesen összetartó sorozatok limeszeinek adjungálása; ezek a sorozatok E. H. MOORE értelmezése szerint az olyanok, melyeknél majdnem minden m-re és n-re

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon f_0(x),$$

ahol $\varepsilon > 0$ tetszés szerint adott érték, $f_0(x)$ pedig az alaptartománynak a sorozathoz alkalmasan megválasztott eleme.[8] Ennél a kibővítésnél ismét nyilvánvaló úgy az alaptartományra megszabott föltevések, köztük a 4'. föltevés érvényessége, mint az összes A operációk értelmezésének az új alaptartományra való kiterjesztése is.

Tegyük tehát föl, az eddig is követelt sajátságokon kívül, hogy az Ω alaptartomány az $f(x)$ függvénnyel együtt tartalmazza az összes $cf(x)$ függvényeket ($c \geqq 0$); akkor pontosan a DANIELL-féle integrálfogalom kiindulópontján vagyunk. Ha már most ugyanazt a gondolatmenetet követjük, mint a folytonos függvények esetében, akkor, ugyanúgy mint ott, eljutunk az Ω^* alaptartományhoz, mint az A operációk összességéhez és ennek az alaptartománynak azok az A^* operációi, melyek az $f(x)$ függvényeknek megfelelő A^* operációkat magában foglaló legkisebb teljes családba tartoznak, ugyanúgy mint az imént, az Ω alaptartománynak egy célszerűnek látszó kibővítését szolgáltatják. Minden ilyen A^* operációhoz itt is hozzárendelhetjük a (2) előírással értelmezett $a^*(x)$ függvényt. Míg azonban az 1. példa esetében, amint azt könnyű átlátni, az A^* operációból származtatott $a^*(x)$ függvény viszont teljesen meghatározza az A^* operációt, addig itt az általános esetben ez nincsen mindig így. Lássunk mindjárt egy szélsőséges ellenpéldát. Az 1. példát módosítsuk úgy, hogy az x változó csak a racionális értékeken fusson végig; ha ennek fejében az $f(x)$ függvényektől egyenletes folytonosságot követelünk, akkor úgy látszik, mintha lényegében az 1. példával volna dolgunk. Az eltérés csak akkor kezdődik, mikor az $a^*(x)$ függvényeket tekintjük; nyilvánvaló, hogy ezek

[8] E. H. MOORE, On the Foundations of the Theory of Linear Integral Equations, *Bulletin American Math. Soc.*, 13 (1912), pp. 334—362.

a függvények az A^* operációkat már az $A_{x_0}f = f(x_0)$ ugrás-operációk közül is csak a racionális értékekhez tartozókra határozzák meg, míg a folytonos $a(x)$ monoton függvényekkel előállítható A operációkra egyáltalában nem, mert hiszen módosító föltevésünk éppen azt eredményezi, hogy az $a^*(x)$ függvényt csak megszámlálhatóan végtelen sok pontban, tehát az $\int a^*(x)da(x)$ integrál szempontjából tekintetbe nem jövő halmazon ismerjük.

Ez a jelenség magyarázza meg azt, hogy miért kellett a DANIELL-féle elméletnek a tekintetbe veendő operációk körét már kezdettől fogva megszorítania. DANIELL csak azokat az A operációkat tekinti integrálás műveletének, melyeknek megvan a következő (L) sajátságuk: minden fogyó és mindenütt 0 felé tartó $f_n(x)$ sorozatra $Af_n \to 0$. Az 1. példa esetében minden A operációnak megvan ez a sajátsága, mint például a DINI-tétel alkalmazásával rögtön adódik; viszont a fenti módosításban már például az irracionális x_0 értékekhez tartozó $A_{x_0}f = f(x_0)$ operációkról könnyen átlátható, hogy nincs meg az (L) sajátságuk.

Mutassuk meg, hogy *az* (L) *sajátsággal bíró A operációk teljes családot alkotnak.* Közvetlenül világos, hogy ezek az operációk eleget tesznek a teljes családokra az értelmezésben megszabott három követelés közül az első kettőnek: A_1-gyel együtt közéjük tartozik minden $A \leqq A_1$, A_1 és A_2-vel együtt pedig $A_1 + A_2$. Csak azt kell még megmutatnunk, hogy bármely majorálható halmazuknak a legkisebb majoránsa is közéjük tartozik. Vagyis azt kell megmutatnunk, hogy ha valamely fogyó $f_n(x) \to 0$ sorozatra és egy majorálható $\{A\}$ halmaz minden elemére $Af_n \to 0$, akkor egyszersmind az $\bar{A} = \sup\{A\}$ operációra is $\bar{A}f_n \to 0$.

Tekintsünk egy tetszésszerinti $\varepsilon > 0$ értéket; akkor a $\sup\{A\}$ megszerkesztésére szolgáló eljárás szerint megadható véges számú az adott halmazba tartozó $A_1, A_2, \ldots, A_m$ operáció és egy $f_1 = f_{11} + f_{12} + \cdots + f_{1m}$ fölbontás úgy, hogy

$$\sum_1^m A_k f_{1k} \geqq \bar{A}f_1 - \varepsilon$$

és ennélfogva, a $\sup(A_1, \ldots, A_m) = \bar{A}_m$ jelöléssel, $\bar{A}_m f_1 \geqq \bar{A}f_1 - \varepsilon$, tehát $(\bar{A} - \bar{A}_m)f_1 \leqq \varepsilon$; minthogy továbbá $\bar{A} - \bar{A}_m \geqq 0$, $f_n \leqq f_1$, azért minden n-re

$$(\bar{A} - \bar{A}_m)f_n \leqq \varepsilon. \qquad (3)$$

Mivel másrészt, ha $n \to \infty$,

$$\bar{A}_m f_n \leqq \sum_{k=1}^{m} A_k f_n \to 0,$$

azért (3)-ból

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \bar{A} f_n = \overline{\lim_{n=\infty}} (\bar{A} - \bar{A}_m) f_n \leqq \varepsilon,$$

vagyis végül $\bar{A} f_n \to 0$ és ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Hogy a DANIELL-féle föltevést elméletünk szempontjából teljesen megvilágítsuk, még meg kellene vizsgálnunk, vajjon ez a föltevés, vagyis az összes A operációk Ω^* összessége helyett az (L) sajátsággal rendelkező operációkra való szorítkozás és így csak az ezekből álló alaphalmaz A^* operációinak fölhasználása az Ω alaphalmaz kibővítésére egyrészt nem vezet-e az eddiginél tágabb kibővítésre és másrészt biztosítja-e azt, hogy az $a^*(x)$ függvények egyértelműen meghatározzák azt az A^* operációt, amelyhez tartoznak. Nyitva hagyjuk ezt a kérdést, melynek érdekességét csökkenti az, hogy bizonyos szempontból az adjungálásnak ez a módja is túlságosan szűk. Mutatja ezt már az 1. példa, ahol minden A operációnak megvan az (L) sajátsága, amelynél tehát az (L) sajátság megkövetelése nem változtat a helyzeten; ebben a példában, mint ezt már említettük, a vázolt eljárással adjungált $a^*(x)$ függvények, az eredeti folytonos $f(x)$ függvényeket is közéjük számítva, azok a függvények, melyek a STIELTJES—LEBESGUE-féle értelemben *minden* monoton és korlátos $a(x)$ függvényre nézve integrálhatók. Ha az adjungálás problémáját úgy fogjuk föl, mint például a LEBESGUE szerint integrálható függvények bevezetésénél, hogy egy megadott E operációra, például a mondott esetben az integrálásra nézve óhajtjuk az Ω függvényhalmazt lehetőség szerint kibővíteni, akkor az Ω^* szerepét át kell adnunk az E operációt és az összes a (2) szerint értelmezett A_{x_0} operációkat tartalmazó legkisebb teljes, illetőleg majdnem teljes családnak; az első esetben az összes pozitív, korlátos és integrálható, a másodikban az összes pozitív integrálható függvényekhez jutunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. dec. 14-én tartott üléséből.)

SUR QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES DANS LA THÉORIE GÉNÉRALE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES.

Par FRÉDÉRIC RIESZ, membre de l'Académie.

Le présent Mémoire a pour but de développer et de poursuivre quelques idées concernant les opérations linéaires, soulevées par l'auteur dans une conférence faite en 1928, au congrès international des mathématiciens à Bologne, sous le titre «Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires». Tandis que dans cette conférence l'auteur, à titre d'exemple, n'a envisagé que les opérations portant sur des fonctions continues et se contentait d'observer que les méthodes s'appliquent aussi à des classes plus générales de fonctions qui puissent même être définies dans un ensemble abstrait, le présent exposé va plus loin en remplaçant les fonctions elles-mêmes par les éléments d'un ensemble abstrait. Ayant l'intention de reprendre et de continuer le sujet dans un travail rédigé en langue française, qu'il nous suffise ici d'énumérer les titres des paragraphes.

1. Le domaine fondamental; exemples.
2. Opérations linéaires positives; la plus grande minorante et la plus petite majorante.
3. Opérations disjointes.
4. Parties disjointes des opérations linéaires.
5. Familles complètes et familles presque complètes.
6. Opérations linéaires de signe arbitraire.
7. Décomposition simultanée des opérations linéaires.
8. Multiplication des opérations linéaires.
9. Extension du domaine fondamental.

ADALÉK AZ ALGEBRAI SZÁMTESTEK ELMÉLETÉHEZ.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

Ismeretes, hogy a GAUSS-féle számtestben egy kéttagú komplex törzsszámhoz, mint modulushoz, mindenkor olyan teljes maradéksor is található, amelynek összes elemei racionális egész számok.

Ugyanis az

$$n = a+bi \ (i = \sqrt{-1})$$

modulushoz tartozó egyik maradéksor a következő előírás szerint kapható: legyen $a+bi$ normája

$$N(a+bi) = a^2+b^2 = \nu,$$

az a és b legnagyobb közös osztója

$$(a, b) = \delta,$$

akkor az

$$x + yi$$

$$(x = 0, 1, \ldots, \frac{\nu}{\delta} - 1 ; \ y = 0, 1, \ldots, \delta - 1)$$

számokból álló sorozat az $n = a + bi$ modulusnak egy teljes maradéksora.

Ha n kéttagú komplex törzsszám, akkor

$$\delta = (a, b) = 1$$

lévén,

$$0, 1, 2, \ldots, a^2+b^2-1$$

racionális egész számokból álló sorozat az n komplex törzsszámnak egyik teljes maradéksora.

E tényállás praemissái más fogalmazást is engednek meg. Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a $T(p+qi)$ GALOIS-féle számtest azaz a $T'(p+qi)$ számtest a vele konjugált $T(p-qi)$ számtesttel azonos, hiszen $p-qi$, amint a

$$p - qi = \frac{p^2+q^2}{p+qi}$$

egyenlőtlenségből kiderül, a $p+qi$ számnak racionális kifejezése lévén, $(p-qi)$-nek minden racionális kifejezése is a $T(p+qi)$ számtesthez tartozik. Minthogy egészen hasonlóan kimutatható, hogy a $T(p+qi)$ számtest minden száma egyszersmind száma a $T(p-qi)$ számtestnek, kimondhatjuk, hogy

$$T(p+qi) = T(p-qi),$$

azaz, hogy a GAUSS-féle számtest GALOIS-féle test.

Az a követelés pedig, hogy az $a+bi$ komplex törzsszám kéttagú legyen, egyenlő értelmű azzal a kikötéssel, hogy e törzsszám a konjugált értékétől különböző legyen, mert az

$$a+bi = a-bi$$

egyenlőség maga után vonná a

$$b = 0$$

egyenlőséget, de akkor $a+bi$ nem lenne kéttagú.

Így fogva föl a kéttagú komplex törzsmodulusokra fönt kimondott tételt, ez tetszésszerinti GALOIS-féle számtestekre általánosítható. Ugyanis fennáll a következő tétel:

Ha $\mathfrak{p}$ *a* $T(\vartheta)$ GALOIS-*féle számtestnek oly prímideálja, melynek konjugált ideáljai egymástól és* $\mathfrak{p}$*-től különbözők, akkor a* $\mathfrak{p}$ *ideálnak van olyan teljes maradéksora, amelynek összes számai racionális egész számok és ez a maradéksor a következő:*

$$0, 1, 2, \ldots, g, \ldots, h, \ldots, N(\mathfrak{p})-1. \qquad (M)$$

Legyen

$$f(x) = (x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m) \equiv (x-\vartheta)(x-\vartheta')\ldots(x-\vartheta^{(m-1)}) = 0$$

az m-edfokú egész együtthatós irreducibilis egyenlet, mely a $T(\vartheta)$ m-edfokú algebrai számtestet meghatározza. Ha a

$$T(\vartheta),\ T(\vartheta'),\ldots,\ T(\vartheta^{(m-1)})$$

számtestek, a $T(\vartheta)$-nak konjugált testjei azonosak, akkor a $T(\vartheta)$ Galois-féle szamtest. Ekkor az $f(x)=0$ egyenletnek

$$\vartheta,\ \vartheta',\ldots,\ \vartheta^{(m-1)}$$

gyökei közülök tetszés szerint választott gyök segítségével racionálisan kifejezhetők, azaz a $f(x)=0$ egyenlet normális egyenlet. Legyen

$$\vartheta = s_0\vartheta,\ \vartheta' = s,\ \vartheta,\ldots,\ \vartheta^{(m-1)} = s_{m-1}\vartheta,$$

ahol

$$s_0,\ s_1,\ldots,\ s_{m-1}$$

az $f(x)=0$ egyenlet csoportját jelenti.

Mindenekelőtt könnyen kimutatható, hogy a $T(\vartheta)$ Galois-féle számtest bármely $\mathfrak{p}$ prímideáljának összes konjugált ideáljai ismét prímideálok. A $\mathfrak{p}(\vartheta)$ prímideálnak konjugált ideáljai legyenek

$$\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{p}(\vartheta')\ \mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}(\vartheta''),\ldots,\ \mathfrak{p}^{(m-1)} = \mathfrak{p}(\vartheta^{(m-1)}),$$

ezek mindannyian a $\mathfrak{p}(\vartheta)$-val együtt prímideálok, mert föltéve hogy

$$\mathfrak{p}^{(g)} = \mathfrak{p}(\vartheta^{(g)}) = \mathfrak{p}_1(\vartheta^{(g)})\,\mathfrak{p}_2(\vartheta^{(g)}) \qquad (1)$$

felbomlás léteznék, $\mathfrak{p}_1(\vartheta^{(g)})$ különböznék az egységideáltól, az (1) alatti egyenletre a s_g^{-1} helyettesítést alkalmazván (az $f(x)=0$ egyenlet irreducibilitás folytán,)

$$\mathfrak{p}(\vartheta) = \mathfrak{p}_1(\vartheta)\,\mathfrak{p}_2(\vartheta)$$

egyenlőség adódnék, amelyben $\mathfrak{p}_1(\vartheta)$ különböznék az egységideáltól, ez pedig ellenkezik azzal a feltevésünkkel, hogy $\mathfrak{p}(\vartheta)$ prímideál.

Ezen előzetes észrevételek után könnyen bebizonyítható, hogy a

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ g,\ldots,\ h,\ldots,\ N(\mathfrak{p})-1 \qquad (M)$$

sorozat a $\mathfrak{p}$ törzsideálmodulusnak teljes maradéksora. Föltéve az ellenkezőt, hogy e sorozatban van két szám, pl. g és h, a mely

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

(mod $\mathfrak{p}$) kongruens, azaz hogy különbségük $\mathfrak{p}$-vel osztható, akkor fennállana egy ilyen egyenlőség

$$g-h = \mathfrak{p}(\vartheta)\,\mathfrak{q}(\vartheta).$$

Ha erre rendre az $f(x) = 0$ egyenlet csoportjának

$$s_0,\ s_1, \ldots,\ s_{m-1}$$

substitutióit alkalmazzuk, akkor, mivel $g-h$, mint racionális egész szám, a substitutiókkal szemben érzéketlen, a következő egyenlőtlenségek adódnának:

$$\begin{aligned} g-h &= \mathfrak{p}(\vartheta)\ \mathfrak{q}(\vartheta) = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}(\vartheta) \\ g-h &= \mathfrak{p}(\vartheta')\,\mathfrak{q}(\vartheta') = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}(\vartheta') \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g-h &= \mathfrak{p}(\vartheta^{(m-1)})\,\mathfrak{q}(\vartheta^{(m-1)}) = \mathfrak{p}^{(m-1)}\,\mathfrak{q}(\vartheta^{(m-1)}) \end{aligned}$$

azaz a $g-h$ a

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}', \ldots,\ \mathfrak{q}^{(m-1)} \qquad (2)$$

ideáloknak közös többszöröse és mint ilyen, azoknak legkisebb többszörösével osztható. Mivel pedig a (2) alatti ideálok egymástól különböző prímideálok, azoknak legkisebb közös többszöröse egyenlő a szorzatukkal és így kellene, hogy $g-h$ a

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}' \ldots \mathfrak{p}^{(m-1)}$$

szorzattal osztható legyen. Ez a szorzat azonban egyenlő $N(\mathfrak{p})$-vel, tehát kellene, hogy $g-h$ a $N(\mathfrak{p})$ racionális egész számmal osztható legyen. Ezt azonban kizárja az a körülmény, hogy

$$g-h < N(\mathfrak{p}).$$

Így tehát az a feltevés, hogy az (M) alatti sorozat két egymással (mod $\mathfrak{p}$) kongruens számot tartalmaz, ellentmondásra vezet. Ennek következtében az (M) alatti szorzat $N(\mathfrak{p})$ számú (mod $\mathfrak{p}$) inkongruens számot tartalmaz és mivel (mod $\mathfrak{p}$) mindössze $N(\mathfrak{p})$ számú inkongruens számosztály létezik, végül következik, hogy a racionális egész számokból álló (M) sorozat a $\mathfrak{p}$ prímideálnak teljes maradéksora.

Tekintsük át a viszonyokat egy számbeli példán.

Az

$$f(x) = x^2+5 = (x+5^{\frac{1}{2}}i)\,(x-5^{\frac{1}{2}}i) = 0$$

másodfokú irreducibilis egyenlet a

$$T(5^{\frac{1}{2}}i) = T_1 \quad T(-5^{\frac{1}{2}}i) = T_2$$

konjugált számtesteket határozza meg, amelyek — mint közvetlenül látható — azonosak, tehát $T(5^{\frac{1}{2}}i)$ GALOIS-féle számtest.

E számtestnek a

$$\mathfrak{p} = [3,\ 1+5^{\frac{1}{2}}i]$$

ideálja — mint könnyen kimutatható — prímideál. Ennek belátására elegendő kimutatni, hogy $\mathfrak{p}$ normája racionális törzsszám. A $\mathfrak{p}$ normája

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{p}) &= [3,\ 1+5^{\frac{1}{2}}i]\,[3,\ 1-5^{\frac{1}{2}}i] = \\ &= [9,\ 3\,(1+5^{\frac{1}{2}}i),\ 3\,(1-5^{\frac{1}{2}}i),\ 6] = \\ &= [3]\,[3,\ 1+5^{\frac{1}{2}}i,\ 1-5^{\frac{1}{2}}i,\ 2]. \end{aligned}$$

Az

$$\mathfrak{i} = [3,\ 1+5^{\frac{1}{2}}i,\ 1-5^{\frac{1}{2}}i,\ 2]$$

ideálról kimutathatjuk, hogy az egységideállal azonos. A $\mathfrak{i}$ ideál, mint fölírásából látható, tartalmazza a

$$3 \quad \text{és} \quad 2$$

számokat és így tartalmazni fogja a

$$3-2 = 1$$

különbséget is és ezzel együtt a $T(5^{\frac{1}{2}}i)$ összes algebrai egész számait, aminek következtében $\mathfrak{i}$ az egységideállal azonos. De akkor

$$N(\mathfrak{p}) = [3] = 3$$

Ha $\mathfrak{p}$-ről föltesszük, hogy van valódi fölbontása, azaz

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$$

amelyben $\mathfrak{p}_1$ különbözik az egységideáltól, akkor a

$$N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}_1)\,N(\mathfrak{p}_2)$$

egyenlőségből a

$$3 = N(\mathfrak{p}_1)\,N(\mathfrak{p}_2)$$

egyenlőségből következnék, hogy a 3 racionális törzsszámnak van valódi fölbontása a racionális tartományban, ez pedig abszurdum.

Tehát a $\mathfrak{p}$ ideál valóban prímideál.

Könnyen kimutatható, hogy a

$$\mathfrak{p} = [3,\ 1+5^{\frac{1}{2}}i]$$

prímideál a

$$\mathfrak{p} = [3,\ 1-5^{\frac{1}{2}}i]$$

konjugált ideáljától különbözik.

Ugyanis, ha a

$$\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$$

egyenlőség állana fenn, akkor

$$N(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^2$$

egyenlőségnek is fenn kellene állania és mivel

$$N(\mathfrak{p}) = 3$$

kellene, hogy a [3] főideál egyenlő legyen a

$$\mathfrak{p}^2 = [9,\ 3(1+5^{\frac{1}{2}}i),\ -4+2i5^{\frac{1}{2}}]$$

ideállal, azaz kellene, (hogy a $\mathfrak{p}^2$ ideálnak minden száma 3-mal osztható legyen; azonban a $\mathfrak{p}^2$ ideálnak $-4+2i.5^{\frac{1}{2}}$ száma mint közvetlenül látható 3-mal nem osztható. Lehetetlen tehát, hogy a $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$ egyenlőség fennálljon. De akkor tételünk összes praemissái teljesülnek és így a $\mathfrak{p}$ prímideálnak

$$0,\ 1,\ 2 \qquad (M)$$

egy teljes maradéksora.

Hogy az (M) alatti sorozat csakugyan $\mathfrak{p}$-nek teljes maradéksora, arról közvetlenül is meggyőződhetünk. Az (M) alatti sorozat két-két számából alakítható különbségek egyike sem osztható $\mathfrak{p}$-vel, mert a

$$N(1) = 1 \quad N(2) = 4$$

számok a

$$N(\mathfrak{p}) = 3$$

számmal nem oszthatók.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15.-én tartott üléséből.)

BEITRAG ZUR THEORIE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER.

Von GUSTAV RADOS o. Mitglied.

Im vorstehenden Artikel wurde der nachfolgende Satz bewiesen:

Ist $\mathfrak{p}$ *ein Primideal eines* GALOIS*'schen Zahlkörpers von der Beschaffenheit, dass seine konjugierten Ideale untereinander und von* $\mathfrak{p}$ *verschieden sind, alsdann liefert die Reihe der ganzen razionalen Zahlen*

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ N(\mathfrak{p})-1$$

ein vollständiges Restesystem des Modul $\mathfrak{p}$.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 15. März 1937).

A NÉGYZETES MARADÉKOK ELOSZLÁSÁRÓL ÖSSZETETT MODULUS ESETÉBEN.[1]

RÉDEI LÁSZLÓ-tól (Mezőtúr).

Legyen $n(>2)$ racionális egész szám, a az n-hez prím mod n négyzetes maradékok összessége, Δ az a mindama elemei számosságainak különbsége, amelyek a 0, $\frac{n}{2}$ illetve $\frac{n}{2}$, n számközbe esnek.

Az a nem egyéb, mint néhány mod n prím maradékosztály egyesítési halmaza. Ezek a maradékosztályok az összes mod n prím maradékosztályok csoportjának egyik alcsoportját képezik; az index tudvalevőleg 2e, ahol $e = \lambda$, $\lambda - 1$ vagy $\lambda + 1$ a $2 \nmid n$, $2^2 \parallel n$; $2 \parallel n$; $2^3 \mid n$ eseteknek megfelelőleg és λ az n különböző törzstényezőinek számossága. ($x^u \parallel y$ jelentése:

[1] Jelenlevő vizsgálataimat doktori dolgozatomban kezdtem meg, amely dolgozat nyomtatásban nem jelent meg. Ezekre a vizsgálatokra GROSSCHMID LAJOS-nak ugyancsak a négyzetes maradékok eloszlásának kérdését illető sorozatos vizsgálatai indítottak, s érdeklődésem felkeltésében nagy része volt még az ő személyes rámhatásának; mindezekért neki hosszú idő multán most mondok nyilvánosan is hálás köszönetet. Egyébként a GROSSCHMID-féle vizsgálatoknak és az ittenieknek csak területük közös, irányuk különböző; azok LAGRANGE nyomán tetszésszerinti p törzsszám mellett az $\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots, \left(\frac{p-1}{p}\right)$ sorozatban bizonyos előjelkövetkezéseket tárgyalnak, amely kérdésben újabban DAVENPORT majd HASSE további nevezetes eredményeket értek el. L. H. HASSE, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), S. 325—348.

A jelenlevő dolgozat az eredeti kéziratnak csupán egy nagy mértékben megcsonkított része, minthogy az túlságos terjedelme miatt nem volt közölhető. Hogy ez a csonkítás a dolgozat érdemét mennyiben érinti, az kitűnik a dolgozat végén lévő megjegyzésből.

$x^u \mid y$, $x^{u+1} \nmid y$.) A megfelelő mellékcsoportok valamelyikében foglalt számok összeségét jelölje b. Az összes különböző b legyen $a_1=a$, a_2, $a_3,\ldots$, a_{2^e}. Legyen ezután $\Delta(b)$ hasonlóan értelmezve a b-hez, mint Δ az a-hoz. Legyen $b=a_i$ mellett egyszerűbb jelöléssel $\Delta(b)=\Delta_i$. Különösen $\Delta(a)=\Delta_1=\Delta$.

Mindezekből a Δ, Δ_2, Δ_3,... számosságkülönbségekből főleg csak a Δ fog érdekelni bennünket.

Minthogy $n>2$ mellett a $0, \frac{n}{2}; \frac{n}{2}$, n számközök egyenlő számú a modulushoz prím egész számot tartalmaznak, azért

$$\Delta + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_{2^e} = 0.$$

Ha $n(\neq 2)$ törzsszám, akkor az összes Δ_i csupán Δ és $\Delta_2(=-\Delta)$. Ha az n ezenfelül $4k+1$ alakú, akkor $\Delta=0$ egyszerűen azért, mert most r-el együtt $n-r$ is négyzetes maradék mod n. Ellenben az n-nek $4k+3$ alakú törzsszám esetére vonatkozólag a képzetes másodfokú számtesteket illető DIRICHLET-féle osztályszámképleteknek híres következménye az, hogy ekkor $\Delta>0$. (Ennek elemi bizonyítása mindeddig csak részben sikerült B. A. WENKOV-nak: Über die Klassenzahl positiver binärer quadr. Formen, Math. Zeitsch., **33** (1931), 350—74.)

Páratlan négyzetmentes n-re érvényes a következő összefüggés:

$$2^{e-1}\Delta(b) = \sum_{d \mid n} \left(\frac{b}{d}\right) h(d) \prod_{\pi \mid \frac{n}{d}} \left(1 - \left(\frac{\pi}{d}\right)\right), \qquad (1)$$

ahol d és π befutják az n összes pozitív osztóját, illetve az $\frac{n}{d}$ összes pozitív törzstényezőjét, a $\left(\frac{b}{d}\right)$-ben b helyébe ennek egyik tetszésszerinti eleme gondolandó, $\left(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)$ a KRONECKER-féle jel és

$$h(d) = \sum_{i=1}^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{i}{d}\right)$$

a $h(1)=0$ kiegészítéssel. Az (1)-ben szereplő szorzat a $d=n$ esetben értelmetlen, helyébe ekkor 1 veendő.

Az (1)-nek $b=a$ esete — ekkor $\Delta(b)=\Delta$, $\left(\frac{b}{d}\right)=1$ — egy LERCH—PLANCHEREL[2]-féle összefüggés. Maga az (1) ennek könnyű általánosítása s legegyszerűbben nyerhető hasonló úton, mint ahogy én egy régebbi dolgozatomban[3] az (1)-nek $b=a$ esetét levezettem.

Ha d $4k+1$ alakú, akkor nyilvánvalóan $h(d)=0$. Ezért az (1)-ben elegendő csupán $4k+3$ alakú d-ket tekinteni. Utóbbiakra az említett osztályszámképletek miatt $h(d)>0$. Továbbá az (1)-ben szereplő szorzat $\geqq 0$. Ezek szerint mindig

$$\Delta \geqq 0 \quad \text{és} \quad |\Delta(b)| \leqq \Delta.$$

A jelenlevő dolgozat azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy mely páratlan négyzetmentes n értékekre $\Delta=0$? (Az iménti megjegyzés szerint a tekintett esetben ezzel a kérdéssel mindjárt arra is megfelelünk, hogy mikor $\Delta=\Delta_2=\Delta_3=\cdots=\Delta_{2^e}=0$.)

Nyilvánvaló az (1)-ből, hogy $\Delta=0$ csak $4k+1$ alakú n mellett lehetséges és ilyen n mellett $\Delta=0$ akkor és csak akkor, ha

$$\prod_{\pi \mid \frac{n}{d}} \left(1-\left(\frac{\pi}{d}\right)\right)=0 \qquad (d \mid n;\ d \equiv 3 \pmod 4). \tag{2}$$

A triviális megoldásoktól eltekintünk, azoktól az n-ektől ugyanis, amelyeknek összes pozitív törzstényezői $4k+1$ alakúak. Egyéb n-ekre a $\Delta=0$ teljesülése, tekintettel a négyzetes reciprocitás tételre, csupán a $\left(\frac{-1}{\pi_i}\right)$ $(i=1, 2, \ldots, \lambda)$; $\left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)$ $(1 \leqq i<j \leqq \lambda)$ értékrendszertől függ, ahol $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\lambda$ az n összes különböző törzstényezői egy tetszésszerinti sorrendben.

---

[2] M. PLANCHEREL, Sur les congruences (mod 2^m) relativ au nombre des classes des formes quadratiques binaires á discriminant négatif, Thesis, Pavia (1908) 94 o., különösen 32. o. (31).

[3] RÉDEI L.: A másodfokú képzetes számtest osztályszámáról, ez az Értesítő 44 (1927), 239—245. Ennek (6) egyenlete (232. o.) hasonlóan alakítandó át, mint amely úton a 232—234. oldalakon (8) előállt, de nem végzendő el az ottani $a=1$ helyettesítés, hanem a meghagyandó tetszésszerintinek. Az ottani a-t fent b-vel jelöltem, s könnyű látni, hogy az ottani $V_{\frac{1}{2}}(n, c)$ egyenlő a fenti jelölésben $\frac{1}{2}\Delta(c)$-vel.

Jóllehet (2) látszólag egyszerűen dönti el azt a kérdést, hogy egy bizonyos adott n megoldása-e a $\Delta=0$ egyenletnek, azonban (2)-ről közvetlenül nem olvasható le az, hogy melyek az összes megoldások, sőt még az sem világos első pillantásra, vajon egyáltalán létezik-e nem triviális megoldás, végül egy bizonyos adott n esetében is a kérdés eldöntésének munkája közvetlen a (2) alapján nagy pazarlással járhat. Mindez azért, mert a (2) egyenletei egymással nagy mértékű függésben vannak. (A fenti értékrendszer tagjainak számossága $\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$, míg a (2) egyenleteké $2^{\lambda-1}$.)

Sikerült a kérdésnek teljes megoldását nyernem, úgy mégpedig, hogy kész utasítást fogok adni a kérdezett összes n-eknek felírására. Az összes megoldásokból kiragadom a következő legegyszerűbb, de mégis nagy mértékben jellegzetes példát:

Ha $n=q_1q_2\ldots q_\nu p_1p_2\ldots p_{\frac{\nu}{2}}^{\nu}$ $(\nu=0;\ 2|\nu)$, *ahol a* q*-k és* p*-k pozitív* $4k+3$, *illetve* $4k+1$ *alakú törzsszámok s ezek közül az itt felírt sorrendben az elébb álló az utóbb állónak négyzetes maradéka, kivéve csupán a* q_{2i}, p_i $\left(i=1, 2,\ldots, \frac{\nu}{2}\right)$ *párokat, amely párok elemei egymásnak négyzetes nemmaradékai, akkor* $\Delta=0$.

$\Delta=0$-nak 1000 alatt lévő összes nem triviális megoldásai: $285=19.3.5$, $385=11.7.5$, $429=3.11.13$, $465=31.3.5$, $609=7.3.29$, $969=19.3.17$. Ezek mindannyian az előbbi példa $\nu=2$ esete alá tartoznak s a törzstényezőket már a megfelelő sorrendben írtam fel.

Az összes megoldások megadása egy sajátságos geometriai alakzat (egy egyenesen bizonyos pontok és intervallumok halmaza) segélyével válik majd lehetségessé, amiről közelebbit később.

A teljes eredményből kiolvasható a következő jól használható szükséges feltétel:

Ha $\Delta=0$, *akkor teljesülniök kell a következőknek:*

1) *Az* n *összes* $4k+3$ *alakú pozitív törzstényezői olyan* $q_1, q_2,\ldots, q_\nu$ $(2|\nu)$ *sorba írhatók, hogy itt minden tag minden utóbb állóra nézve négyzetes maradék.*

2) *Az* n $4k+1$ *alakú pozitív törzstényezőinek számossága*

legalább $\frac{\nu}{2}$, *s ha közöttük pontosan* e_i *számú olyan van, amelyre nézve egy bizonyos* q_i *négyzetes nemmaradék, akkor* $e_i \equiv i+1 \pmod 2$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$.

3) *Az* n *bármely* p $4k+1$ *alakú pozitív törzstényezőjére a*

$$* \left(\frac{p}{q_1}\right) * \left(\frac{p}{q_2}\right) * \cdots * \left(\frac{p}{q_\nu}\right) *$$

sorozat -1 *tagjai hézag nélkül következnek, azaz két* -1 *tag között nincs* $+1$ *tag.*

4) *Ha az iménti sorozatban van* -1 *tag, s közülük a legelső az* i*-dik* «$*$»*-ra következik, míg a legutolsó* -1 *tagra a* j*-dik* «$*$» *következik, és* p', i', j' *egy a* p, i, j*-hez hasonlóan értelmezett olyan hármas, amelyre nézve* i, j, i', j' *négy különböző szám, akkor* $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ *vagy* -1 *a szerint, amint az* $(i-i')(i-j')(j-i')(j-j')$ *szorzat pozitív vagy negatív.*

5) *Ha a* 3) *alatti szorzatnak van* -1 *tagja, akkor*

$$\left(\frac{p}{\frac{n}{p}}\right) = -1.$$

Külön figyelmeztetek arra az érdekes körülményre, amit a 2) első fele fejez ki. Ugyanis az 1) alatti q törzsszámok mindegyikére $\Delta > 0$, de ezeknek a ν számú q-knak jelenlétét «ellensúlyozhatjuk» alkalmas $4k+1$ alakú pozitív törzstényezők által, s az ellensúlyozás szóval ép a 2) miatt gondoltam a tényállást találóan jellemezni.

Megjegyzem, hogy tudomásom szerint az irodalomban eddig még nem történt említés a $\Delta = 0$ nem triviális megoldásairól.

Megjegyzem továbbá a következőt: Jelentsen x és y egy-egy tetszésszerinti négyzetes maradékot mod n a 0, $\frac{n}{2}$ illetve $\frac{n}{2}$, n számközből. Mint említettük, a triviális esetben $\Delta = 0$ abból következik, hogy a $z \rightarrow -z$ leképezés az x, y számokat mod n egymással egy-egyértelmű vonatkozásba hozza. A $\Delta = 0$ egyéb n megoldása esetében is felvethetnők a kérdést egy olyan, lehetőleg egyszerű f függvény után, amelyre $z \rightarrow f(z)$ egy az előbbihez

hasonló leképezést jelent. Ilyen f függvényt még a legegyszerűbb esetben (a fenti példa $\nu=2$ esete) sem sikerült találnom.

Végül megjegyzem, hogy többszörös törzstényezőket tartalmazó páratlan n modulusok tekintetbe vétele nem jelenti a kérdés általánosítását, mert tudvalevőleg páratlan n esetében Δ független az n törzstényezőinek többszörösségétől. Ellenben páros modulusokra a kérdés tovább bonyolódik. A nélkül, hogy erről közelebbit mondanék, csak annyit említek meg, hogy a $2n$, $4n$, $2^x n\,(2\nmid n;\ x \geqq 3)$ alakú modulusokra nézve rendre a $\Delta \gtreqless 0$, $\Delta \geqq 0$, $\Delta > 0$ esetek fordulnak elő. Érdekes a $2n$ alakú modulus eltérő viselkedése, mert csak ilyenre lehet $\Delta < 0$. Ez utóbbi áll fenn például, valahányszor az n $8k+7$ alakú pozitív törzsszám.

1. §.

1. Az n a jövőben is mindenkor 1-nél nagyobb négyzetmentes páratlan egész számot jelent. Törzsszám alatt mindenkor pozitív páratlan törzsszámot fogok érteni. A p és q betűk bármilyen jelzéssel ellátva is jelentsenek mindenkor $4k+1$ illetve $4k+3$ alakú törzsszámot, ellenben a π bármilyen törzsszám jelölésére szolgál. Mindezek mindig az n törzstényezőit fogják jelenteni, hacsak az összefüggések nem mutatnak világosan egyébre vagy kifejezetten mást nem mondunk.

Összetett számokat kényelmes lesz úgy is tekintenünk, mint az ő törzstényezőinek halmazát, a nélkül, hogy ezt a jelölésben kifejezésre juttatnánk. Fordítva máskor törzsszámok halmaza helyett az ő szorzatuk értendő.

Minthogy a $\Delta=0$ nem triviális megoldásait keressük, azért a bevezetésben mondottak miatt feltesszük, hogy a q-k számossága páros, legalább 2. Azonban már most megjegyzem, hogy később szükséges lesz más feltételű n-eket is tekintetbe vennünk.

A (2)-t könnyebben kezelhető alakban írjuk annak az észrevételnek alapján, hogy annak baloldala akkor és csak akkor zérus, ha legalább egy π mellett $\left(\frac{\pi}{d}\right) = 1$. E szerint:

$\Delta=0$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{\pi \mid \frac{n}{d}} \left(1 + \left(\frac{\pi}{d}\right)\right) > 0 \qquad (d \mid n;\ d \equiv 3 \pmod 4). \tag{3}$$

2. Egyszerű, de fontos előkészitő észrevétel a következő:

Ha n_1 az n-hez prím különböző olyan p-k szorzata, amelyek mindegyike négyzetes maradéka n-nek, akkor $\Delta = 0$ az n és nn_1 számokra egyidőben teljesül.

Ugyanis nn_1-re vonatkozólag $\Delta = 0$ feltétele (3) szerint

$$\sum_{\pi \mid \frac{n}{d}} \left(1 + \left(\frac{\pi}{dd_1}\right)\right) + \sum_{\pi_1 \mid \frac{n_1}{d_1}} \left(1 + \left(\frac{\pi_1}{dd_1}\right)\right) > 0, \tag{4}$$

ahol d jelentése ugyanaz, mint (3)-ban, d_1 jelenti n_1 minden osztóját. A feltevés miatt $\left(\frac{\pi}{d_1}\right) = 1$ s ezért (4) baloldalának első fele nem egyéb, mint (3) baloldala. Egyrészt tehát a (3) egyenlőtlenségek fennállásából következik az összes (4) egyenlőtlenségek fennállása, másrészt az utóbbi egyenlőtlenségek között megvannak az előbbiek, mert $d_1 = n_1$ mellett a (4) baloldalának második fele kiesik. Ezzel az állitást bebizonyítottuk.

3. Értelmezem a következőket:

Láncnak nevezem a tetszésszerinti különböző törzsszámoknak egy $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ sorozatát akkor, ha közöttük legfeljebb egy $4k+3$ alakú van és a szomszédos elemek egymásnak négyzetes nemmaradékai. Itt az r tetszésszerinti pozitív egész szám. Ennek értelmében minden törzsszám önmagában egy (egyelemű) láncot alkot. Az $r \geqq 2$ esetben azt mondjuk, hogy a lánc *összeköti* az ő szélső elemeit.

Egyszerűnek nevezek egy láncot, ha bármely két nem szomszédos eleme egymásnak négyzetes maradéka. E szerint a legfeljebb kételemű lánc mindig egyszerű.

Legyen h_0 és H különböző π elemeknek két olyan halmaza, amelyek közül h_0 nem üres és H nem tartalmaz q elemet. Megalkotjuk a H-nak $h_1, h_2, \ldots$ részhalmazait a következőképpen: Rendre $s = 1, 2, \ldots$ mellett legyen h_s a $H - (h_1 + h_2 + \cdots + h_{s-1})$ halmaz mindama elemeinek halmaza, amely elemek mindegyike

a h_{s-1} halmaz legalább egyik elemének négyzetes nemmaradéka. Ez az eljárás folytatandó egy olyan h_r-ig, mígnem h_{r+1} már üres. A $h_1+h_2+\cdots+h_r$ halmazt a h_0 *halmaz H-beli folytatásának* nevezem. Az is lehet, hogy $r=0$, ilyenkor azt is mondjuk, hogy h_0-nak a H-ban nincs folytatása. Ez az eset áll be mindenesetre akkor, ha H az üres halmaz. Magát a h_s-et ($s=1, 2,\ldots, r$) a h_0 *H-beli s-dik folytatásának* nevezem.

Nyilvánvaló, hogy minden $s(=0, 1,\ldots, r)$ mellett a fenti h_s, $h_{s-1},\ldots, h_1$, h_0 halmazokból kiválasztható rendre egy-egy π_s, $\pi_{s-1},\ldots, \pi_1$, π_0 elem úgy, hogy ez az elemsorozat lánc, mégpedig ez akkor szükségképpen egyszerű. Mi több, a π_s kezdő elem a h_s-ből tetszés szerint választható. Akkor a fordított $\pi_0, \pi_1,\ldots, \pi_s$ sorozat is egyszerű lánc.

Érvényes tehát a fenti h_0, H halmazokról a következő:

Mindama egyszerű láncok egyesítési halmaza, amelyek első eleme a h_0-ból, többi eleme a H-ból van véve, azonos a h_0-nak s az ő H-beli folytatásának egyesítési halmazával.

4. Érvényes a következő:

Minden legalább kételemű lánc szélső elemeit olyan egyszerű lánc is összeköti egymással, amelynek elemei ugyancsak az eredeti láncból valók.

Elég ugyanis a bizonyítást arra az esetre végezni, amikor az adott lánc csupa p elemekből áll. Ha ez a lánc $p_1, p_2,\ldots, p_r$, akkor p_1-nek a $H=(p_2, p_3,\ldots, p_r)$ halmazbeli folytatása maga a H, s így a 3. miatt helyes az állítás.

5. Az itt következő értelmezésekben nem kötöm ki azt, hogy a q-knak számossága páros, de változatlanul kikötöm azt, hogy legalább egy q létezik.

Ha m az összes q-knak halmaza és m-nek az $\frac{n}{m}$-beli folytatása maga $\frac{n}{m}$, akkor n-t *magnak* nevezem.

Tetszésszerinti n esetében az n-ben foglalt legnagyobb magot az n *magjának* nevezem.

A 3. miatt érvényes a következő:

Ha az n mag, akkor minden p-t legalább egy egyszerű lánc összeköt legalább egy q-val.

Továbbá világos, hogy ha az n magja m, akkor $\frac{n}{m}$ csupa p-ből áll s ezek mindegyike négyzetes maradéka m-nek. A 2. szerint tehát $\Delta=0$ az n és m számokra egyidőben teljesül, ami azt jelenti, hogy kérdésünkben elegendő mag n-ekre szorítkozni.

6. *A jövőben feltételezzük, hogy n mag.*

Állítom a következőt:

Ha $\Delta=0$, akkor minden p-re

$$\left(\frac{p}{\frac{n}{p}}\right)=-1 \tag{5}$$

és minden q-ra

$$\left(\frac{q}{\frac{n}{q}}\right)=1. \tag{6}$$

A bizonyításhoz mindenekelőtt (3)-ban d helyett $\frac{n}{d}$-t írok. Ez megengedett, mert d-vel együtt $\frac{n}{d}$ is befutja n összes $4k+3$ alakú osztóját. Ezzel előáll

$$\sum_{\pi \mid d}\left(1+\left(\frac{\pi}{\frac{n}{d}}\right)\right)>0 \quad (d \mid n,\ d\equiv 3 \pmod 4), \tag{3'}$$

amely egyenlőtlenségek fennállása ugyancsak szükséges és elegendő feltétele $\Delta=0$ teljesülésének.

Ha mármost $\Delta=0$, akkor (3')-ből azonnal következik (6).

Feltételezem, hogy ugyancsak $\Delta=0$ mellett van egy p, amelyre (5) nem áll fenn. Minthogy n mag, azért 5. szerint van egy $q, p_1, p_2, \ldots, p_r$ egyszerű lánc, amelyben $p_r=p$. Feltehető, hogy a $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$ elemekre teljesül (5), mert ha ez nem így van, akkor közöttük van egy legelső olyan p_s, amelyre (5) nem teljesül, s az előbbi lánc helyettesíthető lenne a $q, p_1, p_2, \ldots, p_s$ ugyancsak egyszerű lánccal, amely a követelményeknek már megfelel.

Mindig érvényes

$$\left(\frac{\pi}{\frac{n}{d}}\right)=\left(\frac{\pi}{\frac{d}{\pi}}\right)\left(\frac{\pi}{\frac{n}{\pi}}\right) \quad (\pi \mid d;\ d \mid n). \tag{7}$$

Legyen a fenti láncból megalkotva $d=qp_1p_2\ldots p_r$ és legyen π a d egyik törzstényezője. A (7) jobboldalának első tényezője mindig 1, kivéve csupán a $\pi=q, p_r$ eseteket, amikor ennek a tényezőnek értéke -1. A második tényező értéke (6) és a feltevés miatt mindig -1, éppen csak a $\pi=q, p_r$ esetekben 1. Maga a szorzat tehát minden π-re -1, ami ellenkezik (3')-vel. Ezzel az (5)-öt is bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy (6) a mag n-ekre való korlátozás nélkül is érvényes, amihez hatonlót 2. miatt (5)-ről nem mondhatunk. Ez utóbbiban jelentkezik a 2.-nek fontossága.

7. Érvényes (3'), (7) miatt a következő:

Ha fennáll (5) *és* (6), *akkor a* $\Delta=0$ *teljesülésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy*

$$\sum_{q|d}\left(1+\left(\frac{q}{\frac{d}{q}}\right)\right)+\sum_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{\frac{d}{p}}\right)\right)>0 \quad (d|n;\ d\equiv 3 \pmod 4) \tag{8}$$

legyen.

Megjegyzés. A (8)-ban szereplő $\left(\frac{x}{y}\right)$ jelek szorzatára érvényes a következő:

$$\prod_{q|d}\left(\frac{q}{\frac{d}{q}}\right)\prod_{p|d}\left(\frac{p}{\frac{d}{p}}\right)=(-1)^{\frac{r-1}{2}}, \tag{9}$$

ahol r a d q tényezőinek számossága.

Ugyanis a baloldal az összes

$$\left(\frac{\pi}{\pi'}\right)\left(\frac{\pi'}{\pi}\right)$$

szorzata, kiterjesztve a d különböző törzstényezőiből alakított π, π' párokra. Minthogy ez az utóbbi szorzat akkor és csak akkor -1, ha π és π' mindketten a q-k közül valók s az ilyen párok száma $\frac{r(r-1)}{2}\equiv\frac{r-1}{2} \pmod 2$, azért a (9) helyes.

A (9) azt jelenti, hogy a

$$\left(\frac{q}{\frac{d}{q}}\right)=-1\,(q\,|\,d);\quad\left(\frac{p}{\frac{d}{p}}\right)=1\,(p\,|\,d)$$

egyenletek fennállása az $r \equiv 1 \pmod 4$ esetben lehetetlen és hogy ugyanezen egyenletek közül bármelyik az $r \equiv 3 \pmod 4$ esetben a többi egyenletnek következménye. Ez ismét azt jelenti, hogy a (8)-ból törölhetők azok az egyenlőtlenségek, amelyekben a d q tényezőinek számossága $\equiv 1 \pmod 4$, s ugyancsak törölhető a megmaradt egyenlőtlenségek baloldalának egyik tetszésszerinti tagja.

E szerint a következőt nyertük:

A (8)-cal egyidőben teljesül

$$\sum_{q|d}\left(1+\left(\frac{q}{d}\right)+\sum_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{d}\right)\right)\right)^{*}>0 \qquad (d|n\,;\ q(d)\equiv 3 \pmod 4), \qquad (8')$$

ahol $q(d)$ a d q tényezőinek számosságát jelenti és a «$*$» csillag arra figyelmeztet, hogy az összegezésnél tetszés szerint vagy az egyik q vagy az egyik p mellőzendő.

Egyébként a (8)-at a jövőben sokat fogjuk használni s csak néha fogjuk helyette a (8')-t venni.

2. §.

8. A kérdésünkben eddig elért eredményünket ebben összegezhetjük: a $\Delta=0$ megoldásánál csak $4k+1$ alakú n jön tekintetbe s elegendő csupán mag n-et vizsgálni. Az ilyen aztán akkor és csak akkor megoldás, ha rá (5), (6) és (8) teljesülnek.

Utóbbiak közül nehézséget természetesen csak (8) nyujthat. Ezért egyelőre célul tűzzük ki a (8)-nak megoldását. Hogy ezt a munkát zavartalanabbul végezhessük, egyelőre mitsem fogunk törődni (5) és (6) fennállásával s e mellett azt sem kötjük ki többé, mint az 1. §-ban, hogy n $4k+1$ alakú legyen. Ellenben továbbra is csak mag n-re szorítkozunk, amelyben az a feltevés már bentfoglaltatik, hogy a q-k száma legalább 1.

Legyen ezek szerint n *tetszésszerinti mag.*

Kizárólag az ilyen n-ekre vonatkozzék a következő definíció:

Az n-et *egyszerűnek* nevezzük akkor és csak akkor, ha rá érvényes (8).

Egyszerű rátekintéssel a (8)-ra nyilvánvaló a következő,

kérdésünkben alapvető fontosságú tény, amiben egyszersmind tükröződik az eddigi megfontolások érdeme:

Bármely egyszerű n-nek minden mag osztója is egyszerű.

9. *Ettől kezdve feltételezem, hogy n egyszerű.*

Érvényes a következő:

A q-knak van egyetlen egy olyan $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ *sorrendje, amelyet ezután mindvégig rögzítve gondolunk, hogy*

$$\left(\frac{q_i}{q_j}\right) = 1 \quad (1 \leqq i < j \leqq \nu) \tag{10}$$

teljesül. Egyszersmind ν jelenti ezután az összes különböző q-knak számosságát.

A (10) semmitmondó a $\nu=1$ esetben, a $\nu=2$ esetben pedig azonnali következmény a négyzetes reciprocitás tételből.

A $\nu \geqq 3$ esetre vonatkozólag előbb megjegyezzük, hogy bármely három különböző q', q'', q''' elemre

$$\left(\frac{q'}{q''q'''}\right) + \left(\frac{q''}{q'q'''}\right) > -2 \tag{11}$$

teljesül.

Mégpedig ez nem egyéb, mint (8′) alkalmazva a $d=q'q''q'''$ esetre.

Elég lesz kimutatni, hogy már (11)-ből következik (10). Feltételezem, hogy ez így van a ν-nél kisebb értékekre, s minthogy (10) helyes a $\nu=1, 2$ értékekre, azért a szóbanlévő ν-re így bizonyíthatunk:

Legyen q_ν az összes q közül olyan, amelynek a többi q között lehetőleg sok négyzetes maradéka van. Erre a q_ν-től különböző $\nu-1$ számú q-ra ismét fennáll (11) s ezért rájuk a feltevés szerint érvényes (10) is. Írjuk őket a megfelelő $q_1, q_2, \ldots, q_{\nu-1}$ sorrendben.

Nem lehet $\left(\frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}\right) = -1$, mert akkor $\left(\frac{q_\nu}{q_{\nu-1}}\right) = 1$, tehát $\left(\frac{q_i}{q_{\nu-1}}\right) = 1$ $(i=1, 2, \ldots, \nu-2$ és $i=\nu)$, amivel $q_{\nu-1}$ megcáfolná q_ν maximumtulajdonságát. Következőleg $\left(\frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}\right) = 1$.

A (11)-et a $q_i, q_{\nu-1}, q_\nu$ $(i=1, 2, \ldots, \nu-2)$ hármasra alkalmazva előáll

$$\left(\frac{q_i}{q_{\nu-1}q_\nu}\right)+\left(\frac{q_{\nu-1}}{q_iq_\nu}\right)>-2.$$

Ebből a megelőzőleg nyert eredmény és $\left(\frac{q_i}{q_{\nu-1}}\right)=1$ miatt $\left(\frac{q_i}{q_\nu}\right)=1$ következik. Ezzel (10)-et bebizonyítottuk s az ott követelt egyértelműség is nyilvánvaló a négyzetes reciprocitás tételből.

10. *Érvényes*

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1+(-1)^{i-1}\left(\frac{q_{a_i}}{d_0}\right)\right)+\sum_{p\mid d_0}\left(1-\left(\frac{p}{\frac{d}{p}}\right)\right)^{*}>0 \qquad (8'')$$

$$\left(\begin{matrix}1\leqq a_1<a_2<\cdots<a_r\leqq\nu\,;\ r\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ d_0\,\Big|\,\frac{n}{q_1q_2\cdots q_\nu}\,;\ d=d_0q_{a_1}q_{a_2}\cdots q_{a_r}\end{matrix}\right),$$

ahol a «» arra figyelmeztet, hogy az összegezésnél vagy az egyik i vagy az egyik p mellőzendő.*

Az itt megadott $d=d_0q_{a_1}q_{a_2}\ldots q_{a_r}$ értékek azonosak ugyanis a (8')-ben szereplőkkel s a (8') baloldalának első részébe való behelyettesítés után (10)-ből és a négyzetes reciprocitás tételből következik (8'').

11. Állítom a következőt:

Bármely p mellett a

$$\left(\frac{p}{q_1}\right),\ \left(\frac{p}{q_2}\right),\ldots,\ \left(\frac{p}{q_\nu}\right)$$

sorozat negatív tagjai hézag nélkül következnek, azaz két negatív tag között nincs pozitív tag (megengedve természetesen azokat az eseteket is, amikor ama sorozat negatív tagjainak számossága 0 vagy 1).

Legyen ugyanis (8'')-ben $r=3$, $a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$ $(1\leqq x<y<z\leqq\nu)$ és $d_0=p$. Akkor előáll

$$\left(1+\left(\frac{p}{q_x}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p}{q_y}\right)\right)+\left(1+\left(\frac{p}{q_z}\right)\right)>0.$$

Ha itt

$$\left(\frac{p}{q_x}\right)=\left(\frac{p}{q_z}\right)=-1,\ \left(\frac{p}{q_y}\right)=1$$

lenne, akkor a baloldal zérussá válnék, amely ellentmondással az állítást kimutattuk.

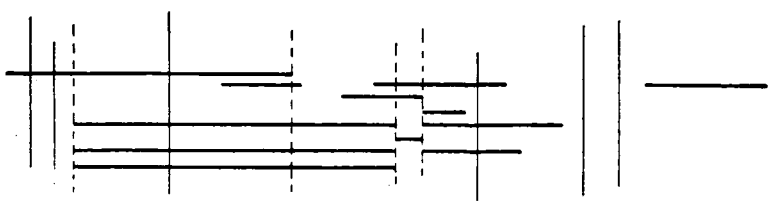
3. §.

12. Az n közelebbi szerkezetének kiderítése kedvéért segítségül fogok venni bizonyos halmazokat, amelyek egy egyenes véges számú pontjaiból és intervallumaiból fognak állni. Egy ilyen halmazt egyelőre H-val jelölök s rája itt néhány mindvégig szóló megállapodást teszek.

Legyen g egy irányított egyenes, amelyet mindvégig szilárdan megtartunk. A H elemei legyenek a g véges számú különböző pontjai és véges számú intervallumai, kikötve, hogy a H-nak egyetlen ponteleme sem végpontja a H egyetlen intervallumának sem. Ha mást nem mondok, intervallum alatt zárt intervallumot értek. Két intervallumot csak akkor tekintünk egyenlőknek, ha végpontjaik közösek. Megengedünk a H-ban egyenlő (többszörös) intervallumokat is, amelyek azonban mindig egymástól megkülönböztetve gondolandók.

Topologiai leképezésnek nevezem a g-nek egy olyan leképezését önmagára, amely inverzével együtt folytonos és egyértelmű s amely a g irányítását is meghagyja. Egy ilyen leképezés átviszi a H-t egy H' halmazba, amit az előbbitől nem különbözőnek tekintek. Az ilyen halmazokat egyenlőknek nevezem, jelekben $H=H'$. Ha azonban H és H' azonosan egyenlők, akkor ezt így jelölöm: $H\equiv H'$.

Ha szükség lesz a H-nak vagy egy részének rajzban való előállítására, ezt úgy fogom tenni, mint az 1. ábra mutatja,



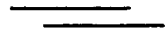
1. ábra.

hogy ugyanis a H minden egyes intervalluma helyett egy vele (g-vel) párhuzamos intervallumot tüntetek fel, olyant, amelynek

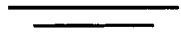
merőleges vetülete g-re épp az eredeti intervallum, továbbá a H-nak minden ponteleme helyett a rajta átmenő g-re merőleges egyenest rajzolom meg. Egy hasonló irányú, szaggatottan rajzolt egyenessel azt fejezem ki, hogy a hozzá (a rajzban) végpontjukkal illeszkedő intervallumoknak (illetve természetesen ezek vetületeinek) közös végpontja annak az egyenesnek g-vel való metszéspontja. Magát a g-t felesleges lenne a rajzban feltüntetni s így ezt elhagyom. Végül úgy végezzük az ábrázolást, hogy az egyes intervallumokat (g-től) alkalmas távolságba helyezve, a H összes intervallumai páronként közös pont nélküli intervallumokkal legyenek előállítva. Mindig úgy fogok ábrázolni, hogy a g irányítása balról jobbra mutasson.

Hogy H-t topologiai leképezések nem változtatják, ez azt jelenti, hogy a H elemeinek metrikus viszonyaival nem törődünk, úgyhogy lényegében csupán a H pontelemeinek és intervallumelemei végpontjainak *sorrendje* fog tekintetbe jönni. Különösen, ha a H két intervallumának 1 vagy 2 közös végpontja van, akkor az illető intervallumok egy ilyen leképezés után is hasonló tulajdonságot mutatnak fel.

A H két, közös végpont nélküli intervallumát *visszásnak* nevezem, ha mindegyik a másiknak egyetlen végpontját tartalmazza (2. ábra), ellenkező esetben *rendesnek*. Az utóbbi esetben



2. ábra.



3. ábra.

4. ábra.

vagy az egyik intervallum a másiknak belsejében van (3. ábra) vagy azok közös pont nélkül vannak (4. ábra).

A H-nak egyik intervallumából kiindulva vegyünk néhány olyan intervallumot H-ból, amelyek mindegyikének az előbbi intervallummal közös végpontja van, majd ismét vegyünk további olyan intervallumokat a H-ból, amelyek mindegyikének az előbb említett intervallumok közül legalább eggyel közös végpontja van, s ezt az eljárást folytassuk tetszés szerint. Így előáll a H-nak egy részhalmaza, amit a H egyik *kötegének* nevezek. (Pl. az 1. ábrán a 4 legalsó intervallum egy köteget alkot, nem

így a 3 legalsó intervallum, de ismét egy köteg a 8 legalsó intervallum.) Az adott értelmezést úgy fogjuk fel, hogy a H minden egyes intervalluma maga is köteg.

Minden olyan köteget, amely nem valódi része egyetlen más kötegnek sem, *maximális kötegnek* nevezek. (Pl. az 1. ábrán a 8 legalsó intervallum egy maximális köteg. Maximális köteg állhat egyetlen intervallumból is, amit akkor a H *izolált* intervallumának nevezek.

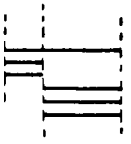
Beszélni fogok a H-nak vagy a H egyik részhalmazának *végpontjairól* s értem alatta az illető halmaz intervallumai végpontjainak összességét, mégpedig az esetleg többször előforduló végpontot is csak egyszeresen számítva. Ebben az értelemben beszélhetünk egy *köteg végpontjairól.*

Nyilvánvaló, hogy a H intervallumainak halmaza egyértelműen esik szét maximális kötegekre s ezek páronként közös végpont nélküliek.

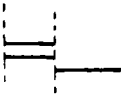
Álljanak itt még a következő értelmezések, amelyek jóllehet csak később jönnek alkalmazásba:

Egyszerűnek nevezek egy köteget, ha végpontjainak számossága legfeljebb 3. Ez a számosság akkor csak 2 vagy 3 lehet

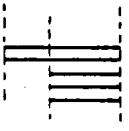
5. ábra.



6. ábra.



7. ábra.



8. ábra.

s megfelelőleg a köteget 1-*sőfajúnak* (5. ábra) vagy 2-*odfajúnak* nevezem (6.—8. ábrák).

Az 1-sőfajú köteg e szerint egyenlő intervallumok összessége. Különösen minden intervallum önmagában 1-sőfajú köteget alkot.

Legyenek egy 2-odfajú köteg végpontjai A, B, C és legyen $A<B<C$. Mint itt, a jövőben is $P<Q$ alatt, ha P és Q a g-nek pontjai, azt értem, hogy P a g egyenesen megelőzi Q-t. A mondott kötegnek AC intervallumait az illető köteg *hosszú* intervallumainak, a köteg AB, BC intervallumait a köteg *rövid*

intervallumainak nevezem. Az utóbbiak közül az AB intervallumok *baloldaliak*, a BC intervallumok *jobboldaliak*.

Nyilvánvaló, hogy egyszerű kötegnek intervallumai páronként közös végponttal bírnak, míg más kötegekre hasonló általában nem mondható.

13. A végzett előkészületek után értelmezek az n összes törzstényezőire egy S leképezést a következő módon:

$Sq_i = Q_i$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$, *ahol* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ *a* g *egyenesnek tetszésszerinti egymásra következő pontjai.*

Veszek ezután a g egyenesen egy olyan intervallumot, amely az összes Q_i pontot belsejében tartalmazza, s ezt ν számú részintervallumra darabolom úgy, hogy ezek belső pontként tartalmazzanak egy-egy Q_i pontot. Ezeket a részintervallumokat egy pillanatra $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$-vel jelölöm úgy, hogy $Q_i \subset e_i$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ legyen, ahol «$\subset$» a tartalmazás jele.

Ezután a még hiányzó Sp képeket a következőképpen értelmezem:

Ha egy tetszésszerinti p*-hez van olyan* q*, amellyel* $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$*, akkor* Sp *mindazon* e_i *intervallumoknak egyesítési halmaza, amelyekre* $\left(\frac{p}{q_i}\right) = -1$. Ez az Sp a 11. szerint maga is intervullum.

Ha ellenben p*-re minden* q*-val* $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$*, akkor* $Sp = p$.

Az így előállott Sx elemek (Sx) halmazát $[n]$-nel jelölöm s az n *alapképének* nevezem. Fentiek szerint az $[n]$ elemei pontok, intervallumok és $(4k+1$ alakú) törzsszámok. Észrevesszük, hogy az $[n]$ pont- és intervallumelemei olyan H halmazt alkotnak, amilyent a 12.-ben bevezettünk. Az $[n]$-re is átvisszük az ottani megállapodásokat úgy, hogy például az $[n]$ egyik kötege jelenteni fogja az $[n]$ intervallumai halmazának egyik kötegét.

Az $[n]$-nek Sx elemét nevezem az x $[n]$-beli képének vagy az x alapképének vagy, ha félreértéstől nem kell tartani, röviden az x képének.

Az Sp képek között lehetnek egyenlő intervallumok, amelyek azonban megállapodásaink szerint különbözőknek tekin-

tendők. Ezért S az n-nek egy-egyértelmű leképezését jelenti s így az $[n]$ minden elemének határozott ősképe van (Sx ősképe x).

14. Álljanak itt még az $[n]$-re vonatkozó következő értelmezések:

Legyen k az $[n]$ egyik tetszésszerinti kötege és k' a k ősképe, vagyis k' a k elemei ősképeinek halmaza. Legyen továbbá n_0 az $[n]$ törzsszámelemeinek halmaza. A k'-nek az n_0 halmazbeli $k_1+k_2+\cdots+k_r$ folytatását, ahol k_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ az i-dik folytatás, röviden a k *kötegy* $[n]$-*beli folytatásának* nevezem, s hasonlóképpen k_i a k-nak $[n]$-beli i-dik folytatása. Ezek közül a k_r-t nevezem így is: a k-nak $[n]$-beli utolsó folytatása.

A k kötegnek s az ő $[n]$-beli folytatásának egyesítési halmazát $\hat{k}$-val jelölöm s egy ilyen halmazt az $[n]$ egyik *folytatott kötegének* nevezek; mégpedig a tekintett $\hat{k}$ a k kötegnek $[n]$-beli folytatott kötege.

Mindezeknél az «$[n]$-beli» kitételt elhagyom, ha ez zavart nem okoz.

Minthogy az $[n]$ minden intervalluma mint köteg tekinthető, azért a fentiek értelmében beszélhetünk köteg helyett intervallumot mondva.

Nyilvánvaló, hogy egy köteg folytatása az ő intervallumai folytatásainak egyesítési halmaza.

15. Álljon itt még a következő egyszerű észrevétel. Ha n_0 az $[n]$ mindama törzsszámelemeinek szorzata, amelyek nem tartoznak az $[n]$ egyetlen intervallumának folytatásába sem és $n=n_1n_0$, akkor nyilvánvaló, hogy n_0 minden törzstényezője négyzetes maradéka az n_1 minden törzstényezőjének. Minthogy azonban n mag, azért csak $n_0=1$ lehetséges, és így a következőt nyertük:

Az $[n]$ *minden törzsszámeleme beletartozik az* $[n]$ *egyik intervallumának folytatásába.*

Természetesen megtörténhetik, hogy az $[n]$ egyik törzsszámeleme beletartozik az $[n]$ több intervallumának folytatásába (v. ö. a köv. 16. γ.-val).

16. Bebizonyítom, hogy az n-nek $[n]=(Sx)$ alapképére a következők érvényesek:

α. $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ *akkor és csak akkor, ha* Sp *olyan intervallum, amely tartalmazza az* Sq *pontot.*

β. Ha Sp_1, Sp_2 *közös végpont nélküli intervallumok, akkor* $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$ *vagy* -1 *a szerint, amint ezek az intervallumok rendesek vagy visszásak.*

γ. Az $[n]$ *bármely két közös végpont nélküli intervallumának folytatásai közös elem nélkül vannak.*

Bebizonyítom továbbá, hogy γ.-nak aequivalens fogalmazása a következő:

γ'. Az $[n]$ *bármely két közös végpont nélküli intervalluma folytatúsainak egy-egy tetszésszerinti eleme egymásnak négyzetes maradéka.*

Még a bizonyítás előtt megjegyzem, hogy γ. és γ'. nyilvánvalóan a következő általánosabb alakban is mondhatók:

γ''. A γ. *és* γ'. *érvényesek az* $[n]$ *bármely két közös végpont nélküli kötegére is.*

Bebizonyítom végül a következőt:

γ'''. Az $[n]$ *bármely* k *maximális kötege folytatásának minden eleme négyzetes maradéka az* n *minden olyan törzstényezőjének, amelynek képe nem esik a* k *folytatott kötegbe.*

Bizonyítás. Az *α.* közvetlen folyománya az $[n]$ 13.-beli értelmezésének.

Ennek alapján a továbbiakhoz mindenekelőtt átalakítom a (8)-at a következőképpen: Először (8)-at helyettesíthetjük azokkal az egyenlőtlenségekkel, amik (8'')-ből előállnak, ha itt a «*» csillagot töröljük s az $r \equiv 3 \pmod 4$ kikötést a $2 \nmid r$ kikötéssel helyettesítjük. Ez természetesen lehetséges, mert csak arról van szó, hogy azt az átalakítást, ami (8')-ről (8'')-re vitt, közvetlenül (8)-on hajtjuk végre. Az előállt egyenlőtlenségek mindegyike úgy is felfogható, hogy ha a baloldal első összege eltűnik, akkor a második összeg pozitív. Az első összeg akkor és csak akkor tűnik el, ha

$$\left(\frac{q_{\alpha_i}}{d_0}\right) = (-1)^i \qquad (i=1, 2, \ldots, r).$$

Még bevezetem az n tetszésszerinti d osztójára az $[n, d]$

jelt, ami alatt értem az $[n]$-nek ama részhalmazát, amely áll a d törzstényezőinek $[n]$-beli képeiből; ezt az $[n, d]$-t nevezem a d $[n]$-beli képének.

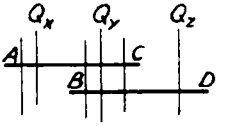
A fentiek szerint a. figyelembevételével a (8) egyenlőtlenségek megengedik a következő fogalmazást:

Legyen $d \mid n$, $d \equiv 3 \pmod 4$, legyen d továbbá olyan, hogy az $[n, d]$ pontelemeit a g egyenesen való következésük sorrendjében az $1, 2, 3, \ldots$ sorszámokkal ellátva, ezekből a $\overset{\text{páratlan}}{\text{páros}}$ sorszámú pontok az $[n, d]$ $\overset{\text{páratlan}}{\text{páros}}$ számú intervallumában tartalmaztatnak; akkor van a d-nek legalább egy olyan p törzstényezője, amelyre

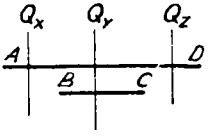
$$\left(\frac{p}{\frac{d}{p}}\right) = -1 \qquad (8''')$$

teljesül.

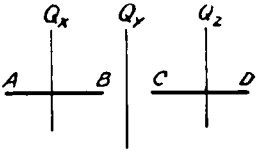
Legyen ezután Sp_1, Sp_2 az $[n]$ bármely két közös végpont nélküli intervalluma. Ezeknek összesen 4 végpontja a g egyenesen való sorrendben legyen A, B, C, D. Az AB, BC, CD intervallumok (ezek általában nem intervallumai $[n]$-nek!) az n értelmezésénél fogva tartalmaznak egy-egy Q_x, Q_y, Q_z pontot



9. ábra,



10. ábra.



11. ábra.

$(x<y<z)$. Ezekből az elsőt és harmadikat Sp_1 és Sp_2 közül pontosan egy intervallum tartalmazza, a másodikat (Q_y-t) páros számú intervallum, ugyanis mindkettő vagy egyik sem (v. ö. a 9., 10., 11. ábrákkal). Ezek szerint $d = q_x q_y q_z p_1 p_2$-re s ennek egyik p törzstényezőjére fennáll (8'''). Alkalmas jelöléssel $p = p_1$ vehető s ekkor

$$\left(\frac{p_1}{q_x q_y q_z p_2}\right) = -1$$

következik. Azonban a szerint, amint Sp_1 és Sp_2 rendesek

(10. és 11. ábrák) vagy visszásak (9. ábra), Sp_1 a Q_x, Q_y, Q_z pontokból páratlan számút (1-et vagy 3-at), illetve páros számút (2-őt) tartalmaz. Megfelelőleg tehát α. alapján

$$\left(\frac{p_1}{q_x q_y q_z}\right) = -1 \text{ illetve } 1,$$

azaz az előbbiből

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1 \text{ illetve } -1.$$

Ezzel a β. bizonyítása megtörtént.

A továbbiak bebizonyításához elébb felteszem γ. érvényességét s szándékom először kimutatni, hogy akkor γ'. is fennáll. Tegyük fel ehhez, hogy γ'. nem érvényes. Akkor van két közös végpont nélküli Sp_1, Sp_2 intervallum s ezeknek folytatásaiból egy-egy π_1, π_2 elem, amelyek egymásnak nem négyzetes maradékai. A γ. miatt a $\pi_1 = \pi_2$ eset nem lehetséges, következőleg $\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}\right) = -1$. Minthogy azonban π_1 az Sp_1 folytatásába tartozik, azért van egy $p_1, p', p'', \ldots, p^{(r)}, \pi_1$ ($r \geqq 0$) lánc, amelynek $p^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) elemei az $[n]$ törzsszámelemei, s az előbbi miatt $p_1, p', p'', \ldots, p^{(r)}, \pi_1, \pi_2$ is lánc lévén, π_2 az S_1 folytatásába is beletartoznék. Ebből az ellenmondásból következik az állítás helyessége.

Ezután kimutatom, hogy ugyancsak γ. helyességének feltevése mellett γ'''. is helyes. Legyen ehhez k az $[n]$ egyik tetszésszerinti maximális kötege s π a k folytatásának egyik eleme. A π négyzetes maradéka először az imént bizonyított γ'. szerint az $[n]$ minden olyan törzsszámelemének, amely nem esik k-ba, másodszor γ''. miatt minden olyan p-nek, amelynek képe olyan intervallum, amely nem esik k-ba, mert ellenkező esetben p, π lánc lenne, azaz π az Sp folytatásába is beletartoznék, harmadszor α. miatt minden q-nak. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Ezután bebizonyítom, hogy γ'.-ből következik γ. Ez azonban tüstént világos, mert abból, hogy az $[n]$ bármely két közös végpont nélküli intervalluma folytatásainak egy-egy π_1, π_2 eleme egymásnak négyzetes maradéka, máris következik $\pi_1 \not\equiv \pi_2$. Ezzel kimutattuk γ. és γ'. állított aequivalentiáját.

Hátra van csupán még bebizonyítani γ. érvényességét. Ellenkező esetben lenne két közös végpont nélküli Sp_1, Sp_2 intervallum, amelyek folytatásai egy p elemet közösen tartalmaznak. Ez azt jelenti, hogy van két $p_1, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r, p$ és $p_2, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s, p$ $(r, s \geqq 0)$ lánc, amelyekben $\pi_1, \pi_2, \ldots, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ az $[n]$-nek törzsszámelemei. Nyilvánvalóan $p_1, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r, p, \varrho_s, \varrho_{s-1}, \ldots, \varrho_1, p_2$ is lánc. Ugyancsak lánc az is, ami ebből az utolsó elem elhagyásával előáll, s az így nyert lánc elemeiből 4. szerint előállítható egy $p_1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ egyszerű lánc, amelyben a σ_t utolsó elem az elébb említett lánc utolsó eleme (nevezetesen $\sigma_t = \varrho_1$ vagy p a szerint, amint $s > 0$ vagy $s = 0$) s így $t \geqq 1$; e mellett σ_t négyzetes nemmaradéka p_2-nek. Ez újabb lánctól még az is követelhető, hogy a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ elemek közül σ_t legyen az első olyan, amely a p_2-nek négyzetes nemmaradéka, mert ellenkező esetben ama lánc helyett annak egy olyan $p_1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_x$ $(1 \leqq x < t)$ részét vehetnénk, amely a kívánságnak már megfelel.

Nyertük tehát a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ egyszerű láncot, amelynek elemei a szerkesztésnél fogva az $[n]$-nek törzsszámelemei, közülük csupán σ_1 négyzetes nemmaradéka p_1-nek és csupán σ_t négyzetes nemmaradéka p_2-nek, míg — ismétlem — Sp_1, Sp_2 közös végpont nélküli intervallumok.

Legyen ezután $d = q_x q_y q_z p_1 p_2$ ugyanaz, mint fentebb a β. bizonyításánál, továbbá legyen $d' = d\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_t$. Erre a d'-re is (d helyett) alkalmazható (8‴), mert $[n, d']$ és $[n, d]$ pont- és intervallumelemei egymással megegyeznek. Ámde az említett helyen éppen arra következtettünk, hogy

$$\left(\frac{p_1}{\frac{d}{p_1}}\right) = -1,$$

amiből azonnal

$$\left(\frac{p_1}{\frac{d'}{p_1}}\right) = 1$$

folyik. Hasonló természetesen p_1 helyett p_2-re is fennáll. Végül minthogy a $p_1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t, p_2$ sorozatban minden σ_i csupán a két szomszédos elemnek négyzetes nemmaradéka és minden σ_i minden q-nak négyzetes maradéka, azért

$$\left(\frac{\sigma_i}{\frac{d'}{\sigma_i}}\right) = 1 \quad (i=1, 2, \ldots, t).$$

Mindez ellentétben van a d'-re vonatkozó (8‴)-vel, amivel γ.-t bebizonyítottuk.

4. §.

17. Az előbbi §-ban megismert $[n]$ alapkép mellé bevezetjük most még az n (egyik) *egyszerű képének* fogalmát. Ehhez nem kötjük ki n egyszerű voltát, azaz a (8) teljesülését, csupán annyit, hogy n most is mag legyen s az ő q tényezőire ismét teljesüljön (10). Ezután az n (egyik) $\{n\}$ egyszerű képét a következő 1)—3) tulajdonságokkal értelmezem:

1) $\{n\}$ egyenlő az összes Tx elemek halmazával, ahol T egy egyértelmű leképezése az n törzstényezőinek, mégpedig $Tq_i = Q_i$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$, továbbá $Tp=p$ vagy egy olyan intervallum a g egyenesen, amelynek nem végpontja egyetlen Q_i sem;

2) a 16. $\alpha.$, $\beta.$, $\gamma.$, érvényesek akkor is, ha $[n]$ és S helyébe $\{n\}$ és T vétetnek;

3) az $\{n\}$ minden kötege egyszerű.

Ezek szerint az $\{n\}$ egyszerű kép az $[n]$ alapképhez nagyban hasonló fogalom. Az $\{n\}$ elemei is a g egyenes véges számú pontja, intervalluma és véges számú p. Közülük a pontok s intervallumok ismét egy olyan H halmazt alkotnak, amilyent a 12.-ben bevezettünk. Így az $\{n\}$-re is átvesszük mindazokat a kifejezésmódokat, amelyeket $[n]$-re használtunk, mint például köteg, köteg folytatása. Így értendők már a fenti 2) és 3). Úgy az $[n]$ alapképet mint egy $\{n\}$ egyszerű képet az n egyik képének nevezem. Nyilvánvaló, hogy 15. és 16. $\gamma.'$, $\gamma''.$, γ''' $\{n\}$-re is fennállnak.

Ha $\{n\}=(Tx)$ és $\{n\}_1=(T_1x)$ az n két képe, amelyek a T, illetve T_1 leképezéssel álltak elő, akkor ezeket természetesen közvetlen egymásra leképezve gondolhatjuk. Mégpedig az $\{n\}$-nek $\{n\}_1$-re való leképezése alatt értjük a $Tx \longrightarrow T_1x$ hozzárendelést, ahol x az n törzstényezőit jelenti. Megfelelőleg beszélünk így: T_1x a Tx-nek $\{n\}_1$-beli képe. Hasonlóan értendő az $\{n\}$ egyik részhalmazának $\{n\}_1$-beli képe.

Megegyezésben korábbi megállapodásainkkal két $\{n\}$, $\{n\}_1$ képet egyenlőknek nevezek akkor és csak akkor, jelekben $\{n\} = \{n\}_1$, ha törzsszámelemeik megegyeznek s van a g egyenesnek egy olyan topologiai leképezése, amely az $\{n\}$ minden egyes pont- és intervallumelemét átviszi ennek $\{n\}_1$-beli képébe. Két képnek azonos egyenlőségét megkülönböztetésül, ha ez szükséges, így jelölöm: $\{n\} \equiv \{n\}_1$.

Világos, hogy *minden n-nek legfeljebb véges s-ámú* (különböző) *képe lehet.*

Természetezen nem minden, a jelen 17. elején tekintetbe vett n-nek van egyszerű képe, hanem érvényes a következő állítás, amely a felvetett kérdésünkre teljes feleletet ad:

Egyszerű az n akkor és csak akkor, ha az n-nek van legalább egy egyszerű képe.

5. §.

Ennek alapján a 8. első bekezdésében végzett összefoglalás szerint a következő módon nyerhetők a $\Delta = 0$ összes (négyzetmentes páratlan) nem triviális n megoldásai: Megszerkesztünk egy tetszésszerinti olyan n_0 számot, amelynek van egyszerű képe, ügyelve mégis arra, hogy n_0 $4k+1$ alakú legyen s rá nézve (5) és (6) fennálljanak (ezekben n helyett n_0-t gondolva), amely n_0 számok máris szolgáltatják a $\Delta = 0$ összes magmegoldásait. Ezután a 2. szerint egy-egy alkalmas m tényező hozzáfüggesztésével az $n_0 m$ alakban előáll az összes nem triviális megoldás. Ezekből az első lépést illetőleg tudjuk, hogy a megszerkesztendő n_0 szám máris mag, mert csakis magra értelmeztük a képnek, különösen az egyszerű képnek fogalmát. Azonban a kép értelmezése minden további nélkül kiterjeszthető olyan n számokra is, amelyek nem magok, csupán (páratlanok és) négyzetmentesek. Amint ez a következő 5. §-ból világos lesz, az ilyen tágabb értelmezés is olyan n_0 számra vezet, amelyre (8) fennáll. Ennek a körülménynek figyelembevételével a vázolt szerkesztés könnyebbé válik. Ezeket részletesen kifejtve a következő hosszadalmas, de tartalmában egyszerű eredményre jutunk:

Tétel. *Legyenek tetszés szerint megadva:*

1) *egy g irányított egyenes;*

2) *egy ϱ pozitív egész szám;*

3) *3ϱ számú P_i', P_i'', P_i''' $(i=1, 2, \ldots, \varrho)$ különböző pont a g egyenesen:*

4) *ϱ számú M_i $(i=1, 2, \ldots, \varrho)$ nem üres halmaz nem feltétlenül különböző véges számú $P_i'P_i''$, $P_i'P_i'''$, $P_i''P_i'''$ intervallumokból;*

5) *egymásra következő páros számú, legalább 2, az összes $P_i^{(j)}$ $(i=1, 2, \ldots, \varrho;\ j=1, 2, 3)$ ponttól különböző $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ $(2 \mid \nu;\ \nu>0)$ pont a g egyenesen úgy, hogy az $M=M_1+M_2+\cdots+M_\varrho$ halmaz Q_k-t tartalmazó intervallumainak e_k számossága kielégíti az $e_k \equiv k+1 \pmod 2$ feltételt $(k=1, 2, \ldots, \nu)$;*

6) *a $H=Q_1+Q_2+\cdots+Q_\nu+M$ halmaz minden egyes Q_i eleméhez egy-egyértelműen hozzárendelve egy q_i pozitív $4l+3$ alakú törzsszám úgy, hogy $\left(\frac{q_i}{q_j}\right)=1$ $(1 \leqq i<j \leqq \nu)$ és a H minden egyes $J_1, J_2 \ldots$ intervallumához egy-egyértelműen hozzárendelve egy-egy $p_1, p_2, \ldots$ pozitív $4l+1$ alakú törzsszám, amelyek mind különbözők, úgyhogy $\left(\frac{p_i}{q_j}\right)=-1$ akkor és csak akkor, ha J_i tartalmazza Q_j-t $(i=1, 2, \ldots;\ j=1, 2, \ldots, \nu)$, s valahányszor J_i és J_j közös végpont nélkül vannak (azaz nem egyugyanazon M_x-be tartoznak), akkor $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1$ vagy -1 a szerint, amint J_i az J_j végpontjai közül páros számút (kettőt vagy egyet sem) vagy páratlan számút (pontosan egyet) tartalmaz $(i, j=1, 2, \ldots;\ i<j)$ [ellenben a mondott jel tetszés szerint választandó, ha J_i-nek és J_j-nek van legalább egy közös végpontja];*

7) *minden i-hez $(i=1, 2, \ldots, \varrho)$ olyan pozitív $4l+1$ alakú törzsszámoknak egy (üres vagy nem üres) h_i halmaza, amelyek egymástól s az eddig megadott törzsszámoktól különbözők, úgy mégpedig, hogy mindegyikük minden q_j-nek $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ és minden olyan p_x-nek négyzetes maradéka, amely p_x-hez tartozó J_x intervallum nem esik M_i-be $(x=1, 2, \ldots)$, továbbá bármely két különböző h_i, h_j $(1 \leqq i<j \leqq \varrho)$ halmaz egy-egy tetszésszerinti eleme egymásnak négyzetes maradéka.*

8) *Legyen továbbá H mind az eddig megadott törzsszámok*

halmaza s jelentse $H(x)$ a H tetszésszerinti x elemére azoknak a H-beli elemeknek számosságát, amelyeknek x négyzetes nemmaradéka. Valahányszor egyik $i(=1, 2, \ldots, \varrho)$ mellett az M_i elemeihez tartozó törzsszámok és a h_i-beli törzsszámok egyesített halmazában van olyan x_i elem, amelyre $H(x_i) = 0 \pmod 2$, akkor legyen adva egy olyan pozitív $4l+1$ alakú törzsszám, amely negyzetes nemmaradéka minden most említett x_i-nek, de négyzetes maradéka a H minden más elemének, továbbá az itt újonnan megadott törzsszámok négyzetes maradékai egymásnak, s egyszersmind jelölje h_i' azt a halmazt, ami h_i-ből az (i-hez) újonnan megadott törzsszámnak mint újabb elemnek hozzáfüggesztésével előáll, különben pedig legyen $h_i' = h$.

9) *Legyen ezután H' mind az eddig megadott törzsszámok halmaza s legyen $H'(x)$ a $H(x)$-hez hasonlóan értelmezve. Valahányszor egyik i $(=1, 2, \ldots, \varrho)$ mellett $h_i' \neq h_i$ és a $h_i' - h_i$ (egyelemű) halmaz x_i' elemére $H'(x_i') \equiv 0 \pmod 2$, akkor legyen adva egy olyan pozitív $4l+1$ alakú törzsszám, amely négyzetes nemmaradéka ennek az x_i'-nek, de négyzetes maradéka a H' minden más elemének, továbbá az itt újonnan megadott törzsszámok négyzetes maradékai egymásnak, s egyszersmind jelölje h_i'' azt a halmazt, ami h_i'-ből az (i-hez) újonnan megadott törzsszámnak hozzáfüggesztésével előáll, különben pedig legyen $h_i'' = h_i'$.*

10) *Legyen n_0 az eddig megadott törzsszámok szorzata és legyen m $(=1$ vagy) olyan különböző pozitív $4l+1$ alakú törzsszámok szorzata, amelyek mindegyike négyzetes maradéka n_0-nak.*

Az így megadott $n = n_0 m$ számok a $\Delta = 0$ egyenlet összes páratlan négyzetmentes nem triviális megoldásai.

Ennek a szerkesztésnek megvilágítására elég annyit megjegyeznünk, hogy az 5) alatt történt gondoskodás arról, hogy az n $4l+1$ alakú legyen és (6) fennálljon, továbbá 8) és 9) biztosítják (5) fennállását. Természetesen az itt megszerkesztett n_0 számok nem mindannyian magok. Ha azonban csupán mag n_0 értékekre szorítkozunk, amely megszorítás a szerkesztésben könnyen keresztül vihető, akkor is megnyerjük (10) miatt az összes kívánt n-eket.

Ennek a tételnek alapján látjuk, hogy a bevezetésben tényleg a lehető legegyszerűbb típusú példát adtuk meg, s hasonló példák könnyen szerkeszthetők. Ugyancsak látjuk az ott felsorolt szükséges feltételek helyességét.

6. §.

19. Hátra van a 4. §-beli állítás bizonyítása. Könnyű bizonyítani ennek az állításnak egyik felét, amely így hangzik:

Ha $\{n\}$ *egyszerű kép, akkor n egyszerű.*

Tegyük fel ugyanis, hogy $\{n\}$ egyszerű kép s mégis n nem egyszerű. Utóbbi azt jelenti, hogy az n-re (8) nem teljesül. Tekintettel arra, hogy (8)-nak a (8‴) alakban való írása (10) és 16. *a.* alapján történt s utóbbiak a most tekintetbe vett n-re, illetve $\{n\}$-re is fennállnak, azért (8)-nak (8‴) alakjában való fogalmazása akkor is helyes, ha utóbbiban $[n, d]$ helyett $\{n, d\}$-t mondunk, amely utóbbi természetesen ismét a d $\{n\}$-beli képét jelenti. A (8) nem teljesülése miatt van tehát egy d, amelyre az így átírt (8‴) nem teljesül.

Van tehát az $\{n\}$-nek egy olyan $\{n, d\}$ részhalmaza $(d \mid n;$ $d \equiv 3 \pmod 4)$, amelyre a következő 1)—3) érvényesek:

1) az $\{n, d\}$-nek páratlan számú ponteleme van, amik legyenek Q_{i_1} $Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_r}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq \nu;$ $2 \nmid r)$;

2) ha e_s jelenti az $\{n, d\}$ mindama intervallumainak számosságát, amelyek a Q_{i_s} pontot tartalmazzák, akkor $e_s \equiv s \pmod 2$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$;

3) a d-nek minden p törzstényezőjére fennáll

$$\left(\frac{\frac{p}{d}}{p}\right) = 1.$$

Legyenek az $\{n, d\}$ intervallumainak végpontjai és az $\{n, d\}$ pontelemei a g egyenesen való következésük sorrendjében $P_1, P_2, \ldots, P_m$ $(P_1 \leqq P_2 \leqq \cdots \leqq P_m)$.[4] Itt a g-nek minden olyan

[4] Abban a különös esetben, amikor az $\{n, d\}$-nek csupán izolált intervallumai vannak, az én eredeti bizonyításomat KALMÁR LÁSZLÓ leegyszerűsítette. Ennek főgondolata a fenti $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bevezetése s így a fenti bizonyítás lényegében tőle való.

pontját, amely több intervallumnak közös végpontja, megfelelő többszörösséggel számítottuk, s láthatóan a többszörös pontok indexei egymásra következő egész számok.

Ki fogom mutatni, hogy ebben a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sorozatban az $\{n, d\}$ összes pontelemei páros indexet, míg az $\{n, d\}$ intervallumelemeinek végpontjai felerészben páros, felerészben páratlan indexet nyertek. Ez akkor azt fogja jelenteni, hogy az $1, 2, \ldots, m$ számok között r-rel több a párosak száma, mint a páratlanoké, ami az 1)-ből folyó $r \geqq 2$ miatt lehetetlen. Ez az ellentmondás be fogja bizonyítani állításunkat.

Tekintem az $\{n, d\}$ tetszésszerinti $Q_{i_s} = P_l$ pontelemét. Minthogy ezt az $\{n, d\}$-nek e_s számú intervalluma tartalmazza, azért az őt megelőző $P_1, P_2, \ldots, P_{l-1}$ pontokból leszámítva a $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_{s-1}}$ pontokat, a megmaradt pontok számossága $\equiv e_s \pmod 2$. Azaz fennáll $(l-1)-(s-1) \equiv e_s \pmod 2$, s ebből 2) miatt $l \equiv 0 \pmod 2$, amint követeltük.

Tekintem ezután az $\{n, d\}$-nek egyik tetszésszerinti k maximális kötegét. Elegendő kimutatni, hogy eme k intervallumainak végpontjai a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sorozatban felerészben páros, felerészben páratlan indexeket nyertek. Ha k 2-odfajú köteg s az ő végpontjai A, B, C $(A<B<C)$ és a k AB, BC, AC intervallumainak számossága rendre a, b, c, akkor a k intervallumainak végpontjai közül az A, B illetve C ponttal azonosak a $P_1, P_2, \ldots. P_m$ sorozatban rendre a következők:

$$P_{x+i} \ (i=1, 2, \ldots, a+c); \quad P_{x+y+a+c+i} \ (i=1, 2, \ldots, a+b);$$
$$P_{x+y+z+2a+b+c+i} \ (i=1, 2, \ldots, b+c).$$

Itt y és z az AB illetve BC intervallumok belsejébe eső P_i pontok számosságát jelentik, míg x egy ránk nézve közömbös egész szám. Ha k 1-sőfajú, akkor is mondhatunk hasonlót, azzal a különbséggel, hogy akkor a, b, c közül csak az egyik nem zérus (úgy képzelhetjük ugyanis az 1-sőfajú köteget, mint egy 2-odfajú köteg «elfajulását», amikor ugyanis a köteg az AB, BC, AC intervallumok közül csak egyfélét tartalmaz).

Legyen ezután u a k köteg ősképe elemeinek szorzata és legyen v a d ama törzstényezőinek szorzata, amely törzstényezők beletartoznak az $\{n\}$ k-t tartalmazó k_1 maximális kötegének

$\{n\}$-beli folytatásába $(u \mid d\,;\ v \mid d)$, továbbá legyen $d = uvw$, ahol w is egész szám.

Alkalmazzuk 3)-at az uv törzsténye zőire s szorozzuk az így előállt egyenleteket. A négyzetes reciprocitás tétel miatt előáll

$$\left(\frac{uv}{w}\right) = 1.$$

Minthogy v része a k_1 $\{n\}$-beli folytatásának és w-nek nincs közös eleme a $\hat{k}_1$ folytatott köteg ősképével, azért 16. γ'''. szerint v minden törzsténye zője négyzetes maradéka w minden törzsténye zőjének. E szerint az előbbiből következik

$$\left(\frac{u}{w}\right) = 1.$$

A w-nek minden olyan törzsténye zője, amely az $\{n\}$-nek törzsszámeleme, az $\{n\}$ kép egyik k_1-től különböző maximális kötegének $\{n\}$-beli folytatásába tartozik s így ismét 16. γ'''. szerint minden ilyen törzsszám s az u minden törzsténye zője egymásnak négyzetes maradékai. E szerint az utóbbi egyenletből előáll

$$\left(\frac{u}{w_0}\right) = 1,$$

ahol w_0 az $\{n, d\}$ pontelemei és k-n kívül levő intervallumelemei ősképeinek szorzata.

Tekintem most az u-nak egyik olyan p törzsténye zőjét, amelynek $\{n\}$-beli képe az AB intervallummal egyenlő. A 16. α. és β. szerint a w_0 mindama törzsténye zőinek számossága, amelyeknek p négyzetes nemmaradéka, mod 2 kongruens az AB belsejébe eső $\{n, d\}$-beli pontelemeknek és intervallumelemek végpontjainak együttes y számosságával. E szerint a tekintett p-re $\left(\frac{p}{w_0}\right) = (-1)^y$. Ha pedig p olyan osztója u-nak, amelynek képe a BC vagy az AC intervallum, akkor a jobboldalon megfelelőleg $(-1)^z$, illetve $(-1)^{y+z}$ áll elő. Minthogy pedig eme 3-féle p-k számossága rendre a, b, c, azért ezeket a megelőző egyenletben figyelembe véve előáll

$$(-1)^{ay+bz+c(y+z)} = 1,$$

azaz $2 \mid ay+bz+c(y+z)$.

Lehetségesek tehát csupán a következő esetek: *a)* $2|y$, $2|z$; *b)* $2|y$, $2\nmid z$, $2|b+c$; *c)* $2\nmid y$, $2|z$, $2|a+c$; *d)* $2\nmid y$, $2\nmid z$, $2|a+b$.

Könnyű látni, hogy mind a négy esetben a fentebb részletesen feljegyzett P_i pontok (a k intervallumainak végpontjai) indexeinek pontosan a fele páros. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*

Ezzel be van bizonyítva, hogy az 5. §-beli tételben megszerkesztett u számok mind megoldásai a $\Delta=0$ egyenletnek. A tétel teljes bizonyításához szükséges még annak kimutatása, hogy ott tényleg felsoroltuk a $\Delta = 0$ minden négyzetmentes páratlan nem triviális megoldását. Mint láttuk, ehhez elegendő annyit kimutatni, hogy minden egyszerű n-nek (v. ö. a 8.-beli értelmezéssel) van egyszerű képe. Ezen az úton már eljutottunk addig, hogy kimutattuk, miszerint minden egyszerű n-nek van alapképe. E mellett az alapkép osztja az egyszerű képeknek minden tulajdonságát azzal az egy eltéréssel, hogy az alapkép kötegei között lehetnek nem egyszerűek is. Így legalább alakilag már nagymértékben megközelítettük a teljes bizonyítást, amelynek hátralévő részét azonban, mint ezt a dolgozat címéhez függesztett lábjegyzetben említettem, mellőzzük. Egyébként ez az itt elhagyott bizonyítás a 4. §-beli tételen túlmenően annyival többet nyujt, hogy utasítást ad arra, hogyan lehet az összes megoldások megszerkesztésénél az ismétléseket elkerülni.*

* Megjegyzés a korrektura alkalmával. A 3., 4., 5., 9. pontok a gráfelmélet nyelvén is megfogalmazhatók lennének, amely elmélet újabban első rendszeres feldolgozást nyert a D. Kőnig, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig (1936) c. tankönyvben. Azonban ez a mű már későn jutott kezembe ahhoz, hogy megállapításaival és terminologiájával élhettem volna. Egyébként ez által a tárgyalásban nem állt volna be számbavehető rövidülés.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. jún. 8.-án tartott üléséből.

ÜBER DIE VERTEILUNG DER QUADRATISCHEN RESTE FÜR ZUSAMMENGESETZTE MODULI.

Von LADISLAUS RÉDEI in Mezőtúr.

Es bedeute $n\,(>1)$ eine rationale ungerade, quadratfreie ganze Zahl, a die Menge der zu n primen quadratischen Reste mod n, Δ die Differenz der Anzahlen derjenigen Elemente von a, die im Intervall $0, \frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n}{2}, n$ liegen.

Ist n eine Primzahl von der Gestalt $4l+3$, so besteht die berühmte Folgerung $\Delta > 0$ aus den Klassenzahlformeln von DIRICHLET.

Auch im zusammengesetzten Fall ist trivialerweise $\Delta=0$, wenn alle Primfaktoren von n von der Gestalt $4l+1$ sind. Aus den erwähnten Klassenzahlformeln und einer einfachen Relation von LERCH—PLANCHEREL[5] folgt vor allem $\Delta \geqq 0$ auch im allgemeinen Falle, und dass es auch im nicht trivialen Falle noch Moduli gibt, für die $\Delta=0$. Hierzu muss folgendes bestehen («Primzahl» ist immer positiv):

a) All die in n aufgehenden Primzahlen von der Gestalt $4l+3$ lassen sich in einer (einzigen) solchen Reihenfolge $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ $(2 \mid \nu)$ aufschreiben, dass ein jedes Glied ein quadratischer Rest von einem jeden nachfolgenden Gliede ist. (Insbesondere muss also $n \equiv 1 \pmod 4$ sein).

b) Ist e_i die genaue Anzahl derjenigen in n aufgehenden Primzahlen von der Gestalt $4l+1$, für die q_i ein quadratischer Rest ist, so ist $e_i \equiv i+1 \pmod 2$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$. (Insbesondere muss also n wenigstens $\frac{\nu}{2}$ Primzahlen von der Gestalt $4l+1$ enthalten.)

---

[4] An der S. 32 der in [1] angeführten Arbeit.

c) Für eine jede in n aufgehende Primzahl p von der Gestalt $4l+1$ folgen diejenige Glieder der Reihenfolge

$$\star\left(\frac{p}{q_1}\right)\star\left(\frac{p}{q_2}\right)\star\cdots\star\left(\frac{p}{q_\nu}\right)\star$$

lückenlos aufeinander, die den Wert -1 haben, d. h. zwischen zwei Gliedern -1 gibt es kein Glied $+1$.

d) Hat die vorige Reihenfolge Glieder -1 und sind all diese Glieder genau diejenigen, die zwischen dem i-ten und j-ten Stern «$\star$» liegen, ist weiter p', i', j' dem p, i, j ähnlich definiert, so hat $\left(\frac{p}{p'}\right)$ das Vorzeichen von $(i-i')(i-j')(j-i')(j-j')$ jedesmal, wenn dieses Produkt von Null verschieden ist.

e) Hat die Reihenfolge in *c)* Glieder -1, so ist

$$\left(\frac{\frac{p}{n}}{p}\right)=-1.$$

Diese notwendigen Bedingungen sind aber nur ein Teil aus dem folgenden langen Satze, der doch ohne jede Mühe alle nicht trivialen Lösungen von $\Delta=0$ konstruieren lässt:

Satz. Es seien beliebig gegeben:

1) eine gerichtete Gerade g;

2) eine positive ganze Zahl ϱ;

3) 3ϱ verschiedene Punkte P_i', P_i'', P_i''' $(i=1, 2,\ldots, \varrho)$ auf der Gerade g;

4) ϱ nicht leere Mengen M_i $(i=1, 2,\ldots, \varrho)$ von endlich vielen Intervallen $P_i'P_i''$, $P_i'P_i'''$, $P_i''P_i'''$, so dass ein jedes M_i auch gleiche Elemente enthalten kann;

5) aufeinanderfolgende untereinander und von allen Punkten $P_i^{(j)}$ $(i=1, 2,\ldots, \varrho;\ j=1, 2, 3)$ verschiedene Punkte $Q_1, Q_2,\ldots, Q_\nu$ in einer beliebigen geraden Anzahl ν $(2\nmid\nu;\ \nu>0)$ auf der Gerade g so aber, dass die Anzahl e_k der den Punkt Q_k enthaltenden Elemente der Intervallenmenge $M=M_1+M_2+\cdots+M_\varrho$ die Kongruenz $e_k\equiv k+1 \pmod 2$ erfüllt $(k=1, 2,\ldots, \nu)$;

6) einem jeden Punktelement Q_i der Menge $H=Q_1+Q_2+\cdots+Q_\nu+M$ je eine Primzahl q_i von der Gestalt $4l+3$

zugeordnet so, dass $\left(\frac{q_i}{q_j}\right) = 1$ $(1 \leqq i < j \leqq \nu)$ und einem jeden Intervallenelement $J_1, J_2, \ldots$ von H eine Primzahl $p_1, p_2, \ldots$ von der Gestalt $4l+1$ zugeordnet, die alle verschieden sind, so dass dann und nur dann $\left(\frac{p_i}{q_j}\right) = -1$, wenn J_i den Punkt Q_j enthält $(i=1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots, \nu)$, und jedesmal wenn J_i und J_j ohne gemeinsamen Endpunkt sind (d. h. wenn sie nicht beide *einem* M_x gehören), so soll $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$ oder -1 sein, je nachdem die Anzahl der in J_i enthaltenen Endpunkte von J_j gerade (0 oder 2) oder ungerade ist $(i, j=1, 2, \ldots; i<j)$ [dagegen soll der Wert dieses Symbols beliebig gewählt werden, wenn J_i und J_j einen gemeinsamen Endpunkt haben];

7) zu jedem i $(=1, 2, \ldots, \varrho)$ eine (leere oder nicht leere) Menge h_i von Primzahlen der Gestalt $4l+1$, die untereinander und von allen bisher gegebenen Primzahlen verschieden sind, so dass ein jedes Element von h_i ein quadratischer Rest von einem jeden q_j $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ und von einem jeden solchen p_x ist, wofür das zugeordnete Intervall J_x nicht dem M_i gehört, und auch ein jedes Element von h_i ein quadratischer Rest aller Elemente von h_j ist $(1 \leqq i < j \leqq \varrho)$.

8) Es sei weiter H die Menge der bisher gegebenen Primzahlen und bedeute $H(x)$ für ein beliebiges Element x von H die Anzahl derjenigen Elemente von H, von denen x ein quadratischer Nichtrest ist. Jedesmal wenn es für ein bestimmtes i $(=1, 2, \ldots, \varrho)$ unter den den Elementen von M_i zugeordneten Primzahlen oder in der Menge h_i wenigstens ein solches Element x_i gibt, wofür $H(x_i) \equiv 0 \pmod 2$, so sei immer eine solche Primzahl von der Gestalt $4l+1$ gegeben, die ein quadratischer Nichtrest von einem jeden solchen Element x_i, dagegen ein quadratischer Rest von allen übrigen Elementen von H, ausserdem auch eine jede Primzahl unter den neugegebenen ein quadratischer Rest von allen übrigen ist, gleichzeitig soll dann h_i' die aus h_i durch die Hinzufügung dieser (zu i) eben gegebenen Primzahl entstehende Menge bedeuten, sonst aber soll $h_i' = h_i$ sein.

9) Es sei noch H' die Menge der bisher gegebenen Primzahlen und sei $H'(x)$ dem $H(x)$ ähnlich erklärt. Jedesmal wenn für ein bestimmtes i $(=1, 2, \ldots, \varrho)$ $h_i' \neq h_i$ und für das (einzige) Element x_i' von $h_i' - h_i$ $H'(x_i) \equiv 0 \pmod 2$ besteht, so sei immer eine solche Primzahl von der Gestalt $4l+1$ gegeben, die ein quadratischer Nichtrest von diesem x_i', dagegen ein quadratischer Rest von allen übrigen Elementen von H', ausserdem auch eine jede Primzahl unter den neugegebenen ein quadratischer Rest von allen übrigen ist, gleichzeitig soll dann h_i'' die aus h_i' durch die Hinzufügung dieser (zu i) eben gegebenen Primzahl entstehende Menge bedeuten, sonst aber soll $h_i'' = h_i'$ sein.

10) Es sei n_0 das Produkt der bisher gegebenen Primzahlen und sei m $(=1$ oder) ein beliebiges Produkt aus solchen verschiedenen Primzahlen von der Gestalt $4l+1$, deren jede ein quadratischer Rest von n_0 ist.

Die so gegebenen Zahlen $n = n_0 m$ sind alle nicht trivialen ungeraden quadratfreien Lösungen von $\Delta = 0$.

Ich erwähne folgendes Beispiel von diesem Satze, das dem denkbar möglichsten Fall entspricht, wo nämlich die Menge M aus solchen Intervallen besteht, die paarweise ohne gemeinsamen Punkt sind, jedes h_i leer und $m=1$ ist:

Beispiel. Ist $n = q_1 q_2 \ldots q_\nu p_1 p_2 \ldots p_{\frac{\nu}{2}}$ $(2 \mid \nu;\ \nu > 0)$, wobei die q und p verschiedene Primzahlen von der Gestalt $4l+3$ bzw. $4l+1$ sind, und ist eine jede Primzahl unter ihnen ein quadratischer von einer jeden solchen, die in der angegebenen Reihenfolge hinter ihr steht bis auf die Paare q_{2i}, p_i $\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{\nu}{2}\right)$, für welche p_i ein quadratischer Nichtrest von q_{2i} ist, so ist $\Delta = 0$.

Alle nicht trivialen Lösungen < 1000 von $\Delta = 0$ sind: 285, 385, 465, 429, 609, 969.

Ich bemerke folgendes: Es ist $|\Delta'| \leq \Delta$, wo Δ' aus Δ durch Vertauschen von a mit einer Nebengruppe von ihm entsteht. Im Falle $\Delta = 0$ ist also jedes $\Delta' = 0$. — Vermehrfacht man die Primfaktoren von n, so bleibt doch Δ unverändert, so dass man also auf diesem Wege keine Erweiterung der Frage erhält. — Dagegen bieten die Moduli $2n$, $4n$, $2^x n$ $(2 \nmid n;\ x \geqq 3)$ neue Ver-

wicklungen. In diesen Fällen ist $\Delta \gtreqless 0$, $\geqq 0$, bzw. >0. Insbesondere ist also $\Delta<0$ nur für Moduli $2n$ möglich. Ist z. B. n eine Primzahl von der Gestalt $8l+7$, so ist für $2n$ immer $\Delta<0$. — Es wurde wegen des grossen Umfanges nicht die ganze Arbeit veröffentlicht, so dass der vollständige Beweis davon fehlt, dass der obige Satz wirklich alle Lösungen liefert.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 8. Juni 1936.)

A MÁSODFAJÚ D-FELBONTÁSOKRÓL.

RÉDEI LÁSZLÓ-tól, Mezőtúr.

Bevezetés.

Ismeretes,[1] hogy a másodfokú számtest (szűkebb értelemben vett) abszolút osztálycsoportja 4-gyel osztható invariánsainak e_4 számossága a 2-odfajú D-felbontások számossága által van meghatározva, amely utóbbiak a test diszkriminánsából könnyen megállapíthatók.

Fordítva, ha meg akarjuk szerkeszteni mindazokat a másodfokú számtesteket, amelyekre e_4 előre megadott érték, akkor ez a kérdés valójában a 2-odfajú D-felbontásokat illeti.

Ettől a kérdéstől indíttatva dolgozatom céljául tűzöm ki a 2-odfajú D-felbontásoknak, illetőleg ezek csoportjának a mondott irányba eső vizsgálatát. Vizsgálataimnál az a cél is fog vezetni, hogy egy későbbi dolgozatban meghatározzam, milyen gyakran várható (milyen valószínű) e_4-nek egy bizonyos tetszésszerinti értéke.[2] Mind, a 2-odfajú D-felbontások csoportját illető így fermerült kérdéseket alább fogom pontosan megfogalmazni.

Ha 2^x a 2-nek az a hatványa, amellyel a másodfokú számtest diszkriminánsa pontosan osztható, akkor tudvalevően $x=0, 2$ vagy 3. Ezekből az $x=2$ esetet, ami kellemetlen bonyodalmakat okozna, ezúttal helykímélés kedvéért mellőzöm. Az $x=3$ eset

---

[1] RÉDEI LÁSZLÓ: A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, ez az Értesítő, 49 (1932), 360.

[2] A fenti kérdéssel már foglalkoztam abban a legegyszerűbb esetben, amikor a számtest diszkriminánsa pozitív, s páratlan pozitív törzstényezői $4k+1$ alakúak, a következő dolgozatban: RÉDEI L.: Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben, ez az Értesítő, 54 (1935) 45—112.

mindenben egyező az $x=0$ esettel s ezért elegendő csak az utóbbi esetet tárgyalni.

Jelentse ezután D egy másodfokú számtest diszkriminánsát, az imént mondottak értelmében álljon fenn mindvégig a $2\dagger D$ korlátozás a nélkül, hogy erre külön figyelmeztetnék, egyébként legyen D tetszésszerinti. Jelentse t a D különböző törzstényezőinek számosságát. Tudvalevőleg

$$D = p_1 p_2 \dots p_t, \tag{1}$$

ahol $p_1, p_2, \dots, p_t$ különböző $4k+1$ alakú pozitív vagy negatív racionális törzsszámok. A sorrendet rögzítjük a

$$|p_1| < |p_2| < \dots < |p_t|$$

kikötés által. Fordítva minden ilyen $p_1, p_2, \dots, p_t$ sorozatnak megfelel egy D. Ezentúl ezt a sorozatot értem a D törzstényezői alatt.

Legyen $\varepsilon_i = 0$ vagy 1 a szerint, amint $p_i > 0$ vagy < 0 $(i = 1, 2, \dots, t)$.

Legyen $x_{ik} = 0$ vagy 1 a szerint, amint p_k négyzetes maradék vagy négyzetes nemmaradék mod p_i, azaz

$$x_{ik} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p_k}{p_i}\right)\right) \quad (i, k = 1, 2, \dots, t;\ i \neq k), \tag{2}$$

ahol $\left(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)$ a KRONECKER-féle jel.

A négyzetes reciprocitás tétel szerint fennáll:

$$x_{ik} + x_{ki} \equiv \varepsilon_i \varepsilon_k \pmod 2 \quad (1 \leqq i < k \leqq t). \tag{3}$$

A

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t;\ x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1t};\ x_{23}, \dots, x_{2t}; \dots;\ x_{t-1,t}) \tag{4}$$

értékrendszert a D típusának nevezem. Ennek

$$U = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t) \tag{5}$$

részét a T főrésznek nevezem.

Emlékeztetek a D-felbontás, 2-odfajú D-felbontás, továbbá ezek csoportjainak értelmezésére:[3]

---

[3] V. ö. az [1] alatti dolgozatban 340, 359. o.

D-felbontás egy olyan $\Delta = D', D''$ $(D'D'' = D)$ számpár, amelyben D' a D néhány különböző törzstényezőjének szorzata, a $D' = 1$ és $D' = D$ esetek beleértésével. Ebben a dolgozatban mind az így előálló 2^t számú D-felbontás különbözőknek tekintendő.[4] Ha a, b és c, d két D-felbontás, akkor az ab szorzatból az összes p_i^2 tenyezők törlése után visszamaradó e számmal előállott e, $\frac{D}{e}$ D-felbontás a megadott elemekből összetett D-felbontás. Eme szabállyal az összes D-felbontások egy G ABEL-féle csoportot alkotnak, ennek rendje 2^t, típusa $(2, 2, \ldots, 2)$, egységeleme az 1, D.

2-odfajú a D', D'' D-felbontás akkor, ha

$$\left(\frac{D' \text{ vagy } D''}{p_i}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t), \tag{6}$$

ahol a számlálóban mindenkor a p_i-vel nem osztható szám értendő. E szerint D' D'' és D'', D' egyszerre 2-odfajúak vagy nem azok. Különösen 1, D és D, 1 2-odfajúak. Az összes 2-odfajú D-felbontások G-nek egy alcsoportját alkotják, amit G_2-vel jelölök. Ennek rendje 2 és 2^t között van.

Az [1] alatt idézett tétel az itteni értelmezéseknek megfelelő módosításában így szól: *e_t 1-gyel kisebb a G_2 független elemei számosságánál.* Egyébként ezzel a tétellel ebben a dolgozatban semmi további dolgunk nem lesz, itt ezt csak azért jegyeztem fel, hogy világosan lássék a 2-odfajú D-felbontások szerepe.

A (2), (3), (4) szerint világos, hogy egy D', D'' D-felbontás 2-odfajú volta csupán a D-nek T típusától függ, de független a a D-nek különös megválasztásától (ennek «numerikus» viszonyaitól). Hasonló mondható a G_2 csoportról, ez is csupán a T típus függvénye.

Ugyancsak beszélhetünk a G csoportról vagy ennek egy bizonyos g alcsoportjáról, a nélkül, hogy e közben egy bizonyos D-re gondolnánk. (Pl. g az a csoport, amely a $p_1 p_2$, p_3;

[4] Más dolgozataimban a D', D'' és D'', D' D-felbontásokat egyenlőknek tekintettem, de már eddig is néhányszor alkalmasabbnak bizonyult a fenti felfogás.

p_1, p_2p_3 elemeken épül fel, ahol p_1, p_2, p_3 tetszőlegesek, természetesen alávetve az (1)-nél mondott megkötéseknek).

Ezekután érthető a következő kérdés: *Adva lévén* $t(\geqq 1)$ *és a G-nek egy g alcsoportja, melyek azok a T-k, amelyekre* $G_2 = g$.

Természetesen ebben a kérdésben $p_1, p_2, \ldots, p_t$ már határozatlanoknak tekintendők, a mondott értelemben. Mindazok a különös $p_1, p_2, \ldots, p_t$ sorozatok, amelyek az itt kérdezett T típusok alá tartoznak, bírnak akkor azzal a tulajdonsággal, hogy az (1) által hozzájuk rendelt D-knek mindegyikére éppen $G_2 = g$, míg minden más esetben $G_2 \neq g$. Világos ezekután, hogy erre a legutóbbi kérdésre megfelelve egyszersmind a fenti második bekezdés kérdére is megfeleltünk. (Mindehhez kiegészítésül még megjegyzendő, hogy az eleve lehetséges mindössze $2^{\binom{t+1}{2}}$ számú T típusok mindegyike DIRICHLET-nek a számtani haladványról szóló tétele szerint tényleg lehetséges.)

A mondott kérdést azonban természetszerűleg élesítjük azáltal, hogy egyszerre mindig csak egy bizonyos U főrészü T-ket veszünk tekintetbe, mi több — mint látni fogjuk — ez az élesítés szükségszerű. Továbbá részben önmaguktól előállnak, részben mint kézenfekvők jelentkeznek bizonyos egyéb, kapcsolatos kérdések, s így végül is a következő kérdéseket fogjuk tárgyalni:

A. *Adott t és U mellett mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a G-nek egy bizonyos g alcsoportjára alkalmas (U főrészű) T mellett* $G_2 = g$ *teljesüljön.*

B. *Megszerkesztendők az* **A**-*ban kérdezett feltételt kielégítő g csoportok.*

C. *Mennyi a* **B**-*beli adott rendű g csoportok számossága?*

D. *Melyek az* **A**-*ban említett T típusok?*

E. *Mennyi a* **D**-*beli T-knek számossága?*

F. *Adott t, U és r mellett mennyi azoknak a T-knek számossága, amelyekre* G_2 *rendje* 2^r.

Ezek közül főérdeklődésre a **D** kérdés tarthat számot, mert rá megfelelve, az idézett tételen keresztül megadtuk a választ a

fenti második bekezdésben felvetett kérdésre is. Az ezirányú alkalmazáshoz szükséges természetesen az A-ra és B-re adandó válasz.

Az F-re adandó felelet az, amelyet a harmadik bekezdésben említett célra fogok használni. Hozzá szükséges mind a megelőző kérdések elintézése, leszámítva B-t.

Az $U = (0, 0, \ldots, 0)$ esetben az itteni kérdéseket a [2] alatti dolgozatban már tárgyaltam, de ezt az esetet itt minden külön fáradság nelkül a tárgyalásba ismét belevonom. Egyébként ez az eset aránylag egyszerű s ránézve kérdéseink egy része magától elesik. Lényegesen újat csupán az $U = (1, 1, \ldots, 1)$ másik véglet ad. Szebb lett volna ezt az esetet mindvégig külön tárgyalni, de gazdaságosabb volt mindig az általános esetet tekinteni. Egyedül a B kérdést csak az $U = (1, 1, \ldots, 1)$ esetre dolgoztam ki részletesen, a 9. §-ban, de ezzel lényegében az általános eset is elintézést nyert (l. a dolgozat végén levő összefoglalást). Az 1—5. §-okban lévő előkészületek épp az $U = (1, 1, \ldots, 1)$ esetet illetik s így mégis látható, hogy mennyi az a segédlet, amit ez az eset megkíván. A 9. §-t elébb is beiktathattam volna, akár a dolgozat élére, mégis azért helyeztem ezt leghátra, mert zavarta volna a tárgyalás nyugodtságát, továbbá ezzel is hangsúlyozni kívántam, hogy a B-beli szerkesztéstől függetlenül sikerült a többi kérdésre való feleletadás.

1. §.

Legyen R_2 a 2-karakterisztikájú törzstest, azaz R_2 összes elemei 0 és ε ($\varepsilon^2 = \varepsilon$). Ha félreértéstől nem kell tartani, akkor ε helyett 1-et írok.

Legyen t tetszésszerint megadott pozitív egész szám. Tekinteni fogok olyan t elemű $x = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ vektorokat, amelyeknek $x_1, x_2, \ldots, x_t$ elemei az R_2 testben vannak. Ha $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_t)$ egy másik ilyen vektor, akkor az $x + x'$ összeg és xx' szorzat alatt értem az $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_t + x'_t)$ illetve $(x_1 x'_1, x_2 x'_2, \ldots, x_t x'_t)$ vektort. Az x vektor keresztösszege alatt értem az $x_1 + x_2 + \cdots + x_t$ összeget s ezt $\overline{x}$-szel jelölöm.

Két vektort (egymással) barátságosnak nevezek, ha a szorzatuk keresztösszege egyenlő az eredeti két vektor keresztössze-

geinek szorzatával. Azaz az x, x' vektorok akkor barátságosak, ha

$$\overline{xx'} = \bar{x}\bar{x'}. \tag{7}$$

Minthogy az $a^2=a$ egyenletet az R_2-nek minden eleme s ugyancsak minden vektora kielégíti, azért minden vektor önmagával barátságos.

A vektoroknak egy tetszésszerinti halmazát barátságosnak nevezem akkor, ha a halmaz bármely két eleme (egymással) barátságos.

Nyilvánvalók a vektorokra vonatkozó következő műveleti szabályok:

$$(x + x')\,x'' = xx'' + x'x'',$$
$$\overline{x+x'} = \bar{x} + \bar{x'}.$$

Ezekből folynak a következők:

$$\overline{(x + x')\,x''} = \overline{xx'' + x'x''} = \overline{xx''} + \overline{x'x''},$$
$$\overline{x + x'}\;\overline{x''} = (\bar{x} + \bar{x'})\,\overline{x''} = \bar{x}\,\overline{x''} + \overline{x'}\,\overline{x''}.$$

A (7) szerint érvényes tehát a következő:

Ha az x, x' vektorok barátságosak az x'' vektorral, akkor $x+x'$ is barátságos x''-vel.

Minthogy pedig a (7) érvénytelensége az $\overline{xx'} = \bar{x}\bar{x'} + 1$ egyenletet jelenti és az R_2-ben $1+1=0$, azért az előbbihez hasonlóan:

Ha az x, x' vektorok egyike sem barátságos az x'' vektorral, akkor $x+x'$ barátságos x''-vel.

Az összeadás szabálya alapján a vektorok egy 2^t rendű $(2, 2, \ldots, 2)$ típusú Abel-féle csoportot alkotnak. Ezt az összes (t elemű) vektorok (additív) csoportjának nevezem s H-val jelölöm. A H-nak egy tetszésszerinti h alcsoportját vektorcsoportnak nevezem. Ha a h-nak elemei barátságosak, akkor magát a h-t is barátságosnak nevezem. Előkészítő vizsgálataink az ilyen h csoportokat illetik.

A fentiek szerint *barátságos elemeken felépülő vektorcsoport maga is barátságos.* Más szóval, *egy vektorcsoport már akkor barátságos, ha egyik bázisának elemei barátságosak.*

Tanácsos a következőket megjegyezni: Az $1_1=(1, 0, \ldots, 0)$,

$1_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, 1_t = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorokat (1-ső, 2-dik,..., t-dik) egységvektoroknak, röviden egységeknek nevezem. Minden vektor egyértelműen előállítható különböző egységek összegeként, amelyeket az illető vektor egységeinek nevezek. (A $(0, 0, \ldots, 0)$ vektornak «nincs» egysége.) Pl. a $(0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ vektor a 2-dik és 4-dik egységekből áll. Érvényesek a következők: Két vektor összege áll mindazokból az egységekből, amelyek a két vektor közül pontosan csak az egyikben szerepelnek. Vektorszorzat egységei a tényezők közös egységei. Vektor keresztösszege 0 vagy 1 a szerint, amint a vektor páros vagy páratlan számú egységből áll. Megfelelőleg magát a vektort is párosnak, illetve páratlannak nevezem. A (7) szerint a barátságosság feltétele akkor így szövegezhető: Két páratlan vektor akkor barátságos, ha közös egységeik számossága páratlan. Más két vektor akkor barátságos, ha közös egységeik számossága páros.

Bebizonyítom a következőt:

1. Segédtétel. Ha az R_2-beli $A = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, t)$ matrix szimmetrikus $(a_{ik} = a_{ki})$, főátlójának minden eleme $0\,(a_{ii} = 0)$ s az $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{it})$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ sorvektorok halmaza barátságos, akkor

$$\sum_{1 \leqq i < k \leqq t} a_{ik} = 0.$$

Mint az itt következő bizonyításban, úgy máskor is meg fog történni, hogy egy-egy pillanatra az R_2 elemeit az R (racionális számok teste) megfelelő elemeivel (0-sal, illetve 1-gyel) helyettesítve gondoljuk. Az ilyen esetekre külön nem figyelmeztetek, de ezek felismerhetők lesznek arról, hogy az illető kijelentések az R_2 testben elvesztik értelmüket.

Feltevés szerint

$$\overline{a_i a_k} = \bar{a}_i \bar{a}_k \qquad (1 \leqq i < k \leqq t).$$

Ebből $0 = \overline{a_i a_k} + \bar{a}_i \bar{a}_k$ s így

$$0 \equiv 2 \sum_{1 \leqq i < k \leqq t} \overline{a_i a_k} + 2 \sum_{1 \leqq i < k \leqq t} \bar{a}_i \bar{a}_k \pmod 4.$$

Minthogy $a_i = a_i^2$, azért

$$\sum_{i=1}^{t} \bar{a}_i \equiv \sum_{i=1}^{t} \bar{a}_i^2 \pmod 4.$$

Ezt az előbbihez hozzáadva:

$$\sum_{i=1}^{t} \overline{a_i} \equiv \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{t} \overline{a_i a_k} + 2 \sum_{1 \leqq i < k \leqq t} \overline{a_i}\,\overline{a_k} \pmod 4.$$

A jobboldal első összege részletesen kiírva:

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{t} \sum_{n=1}^{t} a_{in} a_{kn}.$$

E helyett vehető

$$\sum_{n=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{t} a_{in} \cdot \sum_{k=1}^{t} a_{kn}\right) \equiv \sum_{n=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{t} a_{in}\right)^2 \equiv \sum_{n=1}^{t} \overline{a_n'}^2 \pmod 4,$$

ahol $a_n' = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{tn})$ az A matrix n-dik oszlopvektora. Az utóbbi összeg helyett a szimmetria sajátság miatt

$$\sum_{n=1}^{t} \overline{a_n}^2$$

írható, s így a fenti kongruenciából előáll:

$$\sum_{i=1}^{t} \overline{a_i} \equiv \left(\sum^{t} \overline{a_i}\right)^2 \pmod 4.$$

A baloldali összeg nem egyéb, mint az A matrix elemeinek összege, vagyis az A egységelemeinek számossága. Ez az A-ról szóló feltevések szerint páros, s így épp az itteni kongruencia szerint egyben 4-gyel is osztható. Ezzel az 1. segédtételt bebizonyítottuk.

2. §.

Az itt következő segédtétel első állítása a [2] alatt idézett dolgozat C segédtételének (l. o. 59. o.) ismétlése, míg a második állítást itt fogom bizonyítani.

2. Segédtétel. Legyen megadva az R_2 testben $r (\geqq 0)$ számú t elemű független $c^m (m=1, 2, \ldots, r)$ vektor s jelentse

$$x_i (i = 1, 2, \ldots, t) \quad az \quad (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it})$$

vektort, ahol $x_{11}, \ldots, x_{tt}$ i^2 számú független változó az R_2 testben. Az

$$x_{ik} + x_{ki} = 1 \qquad (1 \leqq i < k \leqq t), \tag{8}$$

$$\overline{c^m x_i} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, t;\ m=1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

lineáris egyenletrendszer rangja $t^2 - \binom{t-r+1}{2}$ *s a megoldhatóság szükséges és elegendő feltétele az, hogy a* $c^1, c^2, \ldots, c^r$ *vektorok halmaza barátságos legyen.* (A c^m jelölésben az m természetesen nem kitevő. A $c^1, c^2, \ldots, c^r$ függetlensége a vektoroknál szokásos értelemben gondolandó, vagy — ami ugyanazt jelenti — érthető alatta ezeknek a vektoroknak függetlensége a H csoportban.)

A még bizonyítandó második állítás az $r = 0$ esetben helyes, mert a (9) elmarad s a (8) egyenletrendszernek van megoldása. Ezért feltehető, hogy $r \geqq 1$. Legyen a c^m részletesen kiírva $(c_1^m, c_2^m, \ldots, c_t^m)$.

Tegyük fel előbb, hogy a (8), (9) egyenletrendszernek van megoldása. Akkor (9) szerint

$$\sum_{i=1}^{t} c_i^m \overline{c^n x_i} + \sum_{i=1}^{t} c_i^n \overline{c^m x_i} = 0,$$

ahol m és n két tetszésszerinti elem $1, 2, \ldots, r$ közül. Jelentse a_{ik} az x_{ik} együtthatóját az egyenlet baloldalán. Akkor

$$a_{ik} = c_i^m c_k^n + c_i^n c_k^m \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, t).$$

E szerint $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ és $a_{ik} = a_{ki}$ $(1 \leqq i < k \leqq t)$. A fenti egyenlet tehát (8) miatt átmegy a következőbe:

$$\sum_{1 \leqq i < k \leqq t} a_{ik} = 0.$$

Ez nem egyéb, mint

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{t} c_i^m c_k^n = 0.$$

Ebből előáll

$$\sum_{i=1}^{t} c_i^m \cdot \sum_{k=1}^{t} c_k^n = \sum_{i=1}^{t} c_i^m c_i^n,$$

azaz $\overline{c^m}\,\overline{c^n} = \overline{c^m c^n}$. Ezzel azt nyertük, hogy a (8), (9) fennállásából következik a $c^1, c^2, \ldots, c^r$ vektorok halmazának barátságos volta.

Legyen most fordítva ez a vektorhalmaz barátságos s legyen h az eme vektorokon felépülő csoport, ami akkor ugyancsak barátságos.

Legyenek az

$$l_{ik}\ (1 \leqq i < k \leqq t) \quad \text{és} \quad l_i^m\ (i = 1, 2, \ldots, t;\ m = 1, 2, \ldots, r)$$

tetszésszerinti olyan állandók az R_2 testből, amelyekkel szorozva a (8), (9) egyenletek baloldalait, majd összeadva, a nyert kifejezésre azonosan fennáll:

$$\sum_{1 \leqq i < k \leqq t} l_{ik}\,(x_{ik} + x_{ki}) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{m=1}^{r} l_i^m\, \overline{c^m\, x_i} = 0. \tag{10}$$

Ha ez az egyenlet helyes marad a (8), (9) egyenletek baloldalainak a megfelelő jobboldalakkal való helyettesítése után, vagyis ha (10) azonos fennállásából következik

$$\sum_{1 \leqq i < k \leqq t} l_{ik} = 0, \tag{11}$$

akkor ismert, tétel szerint a (8), (9) egyenletrendszernek van megoldása.

A (10) baloldalának második felében az $x_{ik}\,(i, k = 1, 2, \ldots, t)$ együtthatóját jelöljük a_{ik}-val. Akkor a (10) azonos fennállása miatt

$$a_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, t); \qquad a_{ik} = a_{ki} = l_{ik} \quad (1 \leqq i < k \leqq t). \tag{12}$$

Másrészt az a_{ik} részletes alakja:

$$a_{ik} = \sum_{m=1}^{r} l_i^m\, c_k^m \quad (i, k = 1, 2, \ldots, t).$$

E szerint érvényes a következő vektoregyenlet:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{it}) = \sum_{m=1}^{r} l_i^m c^m \quad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{13}$$

(Ez utóbbi egyenletben az l_i^m együtthatók az R testben fogandók fel.)

Minthogy a (13) jobboldala eleme a h barátságos vektorcsoportnak, azért (12) és (13) szerint az (a_{ik}) matrixra alkalmazható az 1. segédtétel. Ismét a (12)-re való tekintettel ezzel épen (11) áll elő, amivel a 2. segédtételt bebizonyítottuk.

3. §.

Jelentse h az összes (t elemű) R_2-beli vektorok H csoportjának egyik tetszésszerinti olyan barátságos alcsoportját, amely az (1, 1,..., 1) vektort tartalmazza. Legyen a h rendje:

$$(h) = 2^r. \tag{14}$$

(Általában is «( )» jelentse a csoport rendjét.)

Jelentse továbbá u a t-nek felfelé kikerekített felét, azaz $u = \frac{t}{2}$ vagy $\frac{t+1}{2}$ a szerint, amint $2 \mid t$ vagy $2 \nmid t$.

Állítom a következőt:

3. *Segédtétel. Mindig*

$$r \leqq u.^5 \tag{15}$$

Jelentse továbbá h' a H mindama c elemeinek összességét, amelyekre a $\{h, c\}$ csoport barátságos. (Általában «$\{\ \}$» jelentse a belézárt elemeken felépülő csoportot.) Akkor az 1. § szerint h' is csoportot alkot. E mellett nyilvánvalóan $h \leqq h'$. (A «$<$» jel úgy is értendő, mint valódi részhalmaz jele.)

Állítom még a következőt:

4. *Segédtétel. Érvényes*

$$(h') = 2^{2u-r}. \tag{16}$$

Minthogy $h \leqq h'$ miatt $(h) \leqq (h')$, azért (14) miatt (16)-ból következik (15). Elegendő tehát csupán (16)-ot bizonyítani. (A (16) a (14) miatt a $(h)\ (h') = 2^{2u}$ szemléletesebb alakban is írható. Természetesen ép (15) miatt h' általában nem barátságos.)

Tekintem mindenekelőtt az $r = 1$ esetet. Most h összes elemei $c_0 = (0, 0,..., 0)$ és $c_1 = (1, 1,..., 1)$. A c_0-sal a H-nak minden eleme barátságos. A c_1-re és a H tetszésszerinti c elemére fennáll $cc_1 = c_1$. Másrészt $\bar{c}_1 = 0$ vagy 1 a szerint, amint

---

[5] Fenti lényegében azonos egy régebbi segédtételemmel a következő helyen: RÉDEI L.: Felső korlát a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai számára, ez az Értesítő, **51** (1934), 220. Most a bizonyítást minden külön fáradság nélkül más úton újra fogjuk nyerni.

$2 \mid t$ vagy $2 \nmid t$. Erre a c, c_1 párra tehát a (7) alakja $\bar{c} = 0\,(2 \mid t)$, illetve $\bar{c} = \bar{c}\,(2 \nmid t)$. Az utóbbi minden c-re teljesül, s így $2 \nmid t$ mellett $h' = H$, $(h') = (H) = 2^t = 2^{2u-1}$. A $\bar{c} = 0$ a H elemeinek pontosan felére teljesül, s így $2 \mid t$ mellett $(h') = \frac{1}{2}(H) = 2^{t-1} = 2^{2u-1}$. Minden esetben igaz a (16).

Legyen ezután $r\,(\geqq 2)$ tetszésszerinti, és feltételezem, hogy (16) helyes minden olyan esetben, amikor h helyébe egy 2^r-nél kisebb rendű, de hasonlóan értelmezett csoport lép.

Legyen $c_1, c_2, \ldots, c_r$ a h-nak egyik független bázisa. Feltehető, hogy $c_1 = (1, 1, \ldots, 1)$. Feltehető, hogy minden más c_i-nek $(i = 2, 3, \ldots, r)$ első eleme 0, mert különben a célnak megfelel a $c_1, c_2 + a_2 c_1, c_3 + a_3 c_1, \ldots, c_r + a_r c_1$ bázis, hogyha itt $a_2, a_3, \ldots, a_r\,(=0, 1)$ alkalmasan választott értékek. A c_r-nek nem minden eleme 0, s így az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ép az ő második eleme 1. Végül feltehető, hogy c_i-nek $(i = 2, 3, \ldots, r-1)$ második eleme is 0, mert különben megfelel egy alkalmasan választott $c_1, c_2 + b_2 c_r, c_3 + b_3 c_r, \ldots, c_{r-1} + b_{r-1} c_r, c_r$ bázis.

Ezekután legyen $h_0 = \{c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}\}$. Minthogy $h_0 < h$, azért h_0 is barátságos, továbbá $c_1 \in h_0$ («$\in$» a tartalmazás jele) és $(h_0) = 2^{r-1}$. Mint h_0-hoz h', úgy tartozzék h_0-hoz h_0'.

Nyilvánvaló, hogy $h' \leqq h_0'$. Továbbá $c_0 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ nem barátságos $c_r = (0, 1, \ldots)$-gyel, ellenben c_0 barátságos c_1-gyel és minden c_i-vel $(i = 2, 3, \ldots, r-1)$, amely utóbbiak mind $(0, 0, \ldots)$ alakúak, és így $c_0 \in h_0'$, $c_0 \notin h'$. Ez az előbbivel együtt azt jelenti, hogy

$$(h_0') \geqq 2\,(h').$$

Legyen másrészt c', c'' két olyan elem h_0'-ből, amelyek nem tartoznak h'-be. Minthogy c', c'' barátságosak h_0 minden elemével és $h = \{h_0, c_r\}$, azért egyikük sem barátságos c_r-rel. Az 1. § szerint tehát $c = c' + c''$ barátságos c_r-rel. Továbbá c a h_0 elemeivel is barátságos, és így $c \in h'$. Ez azt jelenti, hogy a h_0'/h' faktorcsoport rendje 2, azaz

$$(h_0') = 2\,(h').$$

Minthogy a feltevés szerint $(h_0') = 2^{2u-(r-1)}$, azért a (16) bizonyítása megtörtént.

4. §.

A t, u, h, r, h' jelentése legyen ugyanaz, mint a 3. §-ban. Jelentse (t, h, s) az R_2 test olyan t elemű vektoraiból álló $c_1, c_2, \ldots, c_s$ sorozatainak számosságát, amelyekre a $\{h, c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ csoport barátságos, úgy értve ezt, hogy a $c_1, c_2, \ldots, c_s$ sorozatokban a sorrendre is figyelemmel vagyunk. Itt s bármilyen pozitív egész számot jelenthet, továbbá az $s = 0$ esetet is megengedjük, mégpedig $(t, h, 0) = 1$ értendő.

Az itt említett $c_1, c_2, \ldots, c_s$ sorozatokból egy tetszésszerintit C_s-sel jelölök. Legyen $s \geqq 2$. Nyilvánvaló, hogy C_s minden eleme h'-be tartozik. Különösen tehát h'-be tartozik c_s is. Látható továbbá, hogy $c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}$ egy C_{s-1} sorozatot képez (a h helyett) a $\{h, c_s\}$ csoporthoz. Fordítva valahányszor $c_s \in h'$ és $c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}$ egy C_{s-1} sorozatot képez a $\{h, C_s\}$ csoporthoz, akkor mindig $c_1, c, \ldots, c_s$ egy C_s sorozat (a h-hoz). Ezzel bebizonyítottuk egyelőre csupán $s \geqq 2$ mellett a következőt:

$$(t, h, s) = \sum_{c \in h'} \left(t, \{h, c\}, s-1\right) \quad (s \geqq 1). \tag{17}$$

Ugyanez a maradék $s=1$ esetben is igaz, mert ez ekkor így hangzik: $(t, h, 1) = (h')$, s tényleg az értelmezés szerint $(t, h, 1)$ nem egyebet jelent, mint a h' elemeinek számosságát. A (16)-ból akkor mindjárt

$$(t, h, 1) = 2^{2u-r} \tag{18}$$

írható.

A (17) jobboldala két részre bontható a szerint, amint c eleme h-nak vagy nem eleme. Az előbbi esetben $\{h, c\} = h$, továbbá mindig $h \leqq h'$ s így (14) szerint

$$(t, h, s) = 2^r (t, h, s-1) + \sum_{c \in h'-h} \left(t, \{h, c\}, s-1\right), \tag{19}$$

ahol $h'-h$ jelenti a h' mindama elemeinek halmazát, amelyek nem tartoznak h-ba.

Állítom a következőt:

5. *Segédtétel. A (t, h, s) a h-tól csak annyiban függ, hogy függ a h rendjétől, mégpedig*

$$(t, h, s) = \sum_{i=0}^{\frac{s}{2}} \frac{(2^s-1)(2^{s-1}-1)\ldots(2^{s-2i+1}-1)}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2i}-1)} \cdot 2^{2u(s-i)-r(s-2i)-\binom{s}{2}+2\binom{i}{2}}, \tag{20}$$

ahol az összegezés felső határául az $\frac{s}{2}$*-ben foglalt legnagyobb egész szám értendő.*[6] Az összegezendő első tényezője az $i = 0$ esetben 1-nek veendő

A (20) jobboldala ugyanis az $s=0$, 1 esetekben 1-be, illetve 2^{2n-r}-be megy át, s így a definíció és (18) szerint ezekben az esetekben helyes az állítás. A továbbiakban felteszem, hogy $s \geqq 2$ és hogy (20) helyes az s-nek «kisebb» értékeire.

A (19) jobboldalán $(\{h, c\}) = 2(h) = 2^{r+1}$, s így a feltevés szerint az illető összeg tagjai egyenlők. A (14) és (16) figyelembevételével előáll tehát

$$(t, h, s) = 2^r(r, s-1) + (2^{2u-r}-2^r)(r+1, s-1), \tag{21}$$

ahol a (20) jobboldalát (átmenetileg) az (r, s) jellel jelöltem.

A (20)-beli összegezendő első tényezőjét a_{si}-vel, a második tényező kitevőjét b_{rsi}-vel jelölöm. Akkor (21) jobboldalát (20) szerint részletesen kiírva:

$$(t, h, s) = \sum_{i=0}^{\frac{s-1}{2}} a_{s-1,i}\, 2^{b_{r,s-1,i}+r} + \sum_{i=0}^{\frac{s-1}{2}} a_{s-1,i}\, 2^{b_{r+1,s-1,i}+2u-r} - \sum_{i=0}^{\frac{s-1}{2}} a_{s-1,i}\, 2^{b_{r+1,s-1,i}+r}.$$

Az első és harmadik összegben i helyett $i-1$-et írunk, egyszersmind az összegezés határait az 1, $\frac{s+1}{2}$ számokkal helyettesítve. Továbbá figyelembe vesszük azt, hogy

$$b_{r,s-1,i-1} = b_{rsi} - r + s - 2i + 1,$$
$$b_{r+1,s-1,i-1} = b_{rsi} - r.$$

[6] Csupán mellékesen megjegyzem a következőt: A (t, h, s) értelmezéséből azonnal látni, hogy $2 \mid t$ mellett a (20) jobboldala az $r = 1$ helyettesítéssel nem egyéb, mint az R_2-ben képzett ama s soros t oszlopos matrixok számossága, amelyeknek négyzete «sort sorral» kompozícióval csupa zérus elemű matrix.

Ugyancsak a második összegre nézve figyelembe veendő

$$b_{r+1,\,s-1,\,i} = b_{rsi} - 2u + r + 2i.$$

Ezek szerint

$$(t,\,h,\,s) = \sum_{i=1}^{\frac{s+1}{2}} (2^{s-2i+1} - 1)\, a_{s-1,\,i-1}\, 2^{b_{rsi}} + \sum_{i=0}^{\frac{s-1}{2}} 2^{2i} a_{s-1,\,i}\, 2^{b_{rsi}}.$$

Itt az első összeg felső határa $\frac{s}{2}$-vel helyettesíthető, mert $i = \frac{s+1}{2}$ mellett az illető tag első tényezője 0. A második összegben is $\frac{s}{2}$ vehető felső határul, mert $i = \frac{s}{2}$ mellett az $a_{s-1.\,i}$ tényező 0 (általában $a_{si} = 0$, ha $2i > s$). Továbbá

$$(2^{s-2i+1} - 1)\, a_{s-1,\,i-1} = \frac{2^{2i} - 1}{2^s - 1}\, a_{si} \qquad (i \geqq 1),$$

$$2^{2i} a_{s-1,\,i} = \frac{2^s - 2^{2i}}{2^s - 1}\, a_{si} \qquad (i \geqq 0).$$

Ezeket behelyettesítve, ezután az első összegben alsó határul (1 helyett) 0 vehető, ami után a két összeg eggyé összevonható s előáll éppen

$$(t,\,h,\,s) = \sum_{i=0}^{\frac{s}{2}} a^{si}\, 2^{b_{rsi}}.$$

Ezzel az 5. segédtételt bebizonyítottuk.

5. §.

A t, u, h, r jelentése továbbra is legyen ugyanaz, mint a 3. §-ban. Az előbbi 4. §-beli (t, h, s) mellé értelmezzük még a $[t, h, s]$ jelt, ami jelentse a H csoport mindama 2^{r+s} rendű barátságos alcsoportjainak számosságát, amelyek h-t tartalmazzák: Az s itt is bármilyen nem negatív egész szám. Egyébként nyilvánvalóan $[t, h, 0] = 1$, továbbá a 3. segédtétel szerint $[t, h, s] = 0$, ha $s > u - r$.

Ha az itt adott értelmezésben barátságosságról nem beszélünk, akkor ismert dologról van szó, nevezetesen $[t, h, s]_0$-sal

jelölve a H mindama 2^{r+s} rendű alcsoportjainak számosságát, amelyek h-t tartalmazzák, fennáll

$$[t, h, s]_0 = \frac{(2^{t-r}-1)(2^{t-r-1}-1)\ldots(2^{t-r-s+1}-1)}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^s-1)}, \qquad (22)$$

amely képlet a H-nak minden 2^r rendű h alcsoportjára érvényes. (Ettől a megszakítástól eltekintve h továbbra is az eddigi jelentéssel bírjon.)

Állítom a következőt:

6. *Segédtétel. A* $[t, h, s]$ *a* h*-tól csak annyiban függ, hogy függ a rendjétől, mégpedig*

$$[t, h, s] = \frac{(2^{2(n-r)}-1)(2^{2(u-r-1)}-1)\ldots(2^{2(u-r-s+1)}-1)}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^s-1)}. \qquad (23)$$

(A (22)-őt nemcsak hasonlatossága miatt állítottam ide, hanem ez a (23) levezetéséhez alkalmazásba is jön.)

Legyen $s \geqq 1$ és $C_s = c_1, c_2, \ldots, c_s$ egy olyan sorozat, mint a 4. §-ban. Legyen ennek h-rangja i, azaz i a C_s legtöbb olyan $x_1, x_2, \ldots$ elemeinek számossága, amelyekre $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots \in h$ $(a_1, a_2, \ldots = 0, 1)$ csupán $a_1 = a_2 = \cdots = 0$ mellett áll fenn. Akkor $\{h, C_s\}$ a H-nak olyan, h-t tartalmazó h_i barátságos alcsoportja, amelynek rendje: $(\{h, C_s\}) = 2^{r+i}$.

Meghatározzuk azoknak a C_s-eknek számosságát, amelyekre $\{h, C_s\}$ egy bizonyos h_i. Legyen $c_1', c_2', \ldots, c_i'$ a h_i-nek egyik független h-bázisa, azaz $h_i = \{h, c_1', c_2', \ldots, c_i'\}$. Akkor a $\{h, C_s\} = h_i$ esetben

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}c_1' + \cdots + a_{1i}c_i' + a_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_s &= a_{s1}c_1' + \cdots + a_{si}c_i' + a_s \end{aligned}$$

ahol (a_{mn}) $(m = 1, 2, \ldots, s;\ n = 1, 2, \ldots, i)$ egy csupa 0 és 1 elemekből álló olyan matrix, amelynek rangja i, hogyha ezt a matrixot az R_2 testben értjük, továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_s$ a h-nak elemei. Fordítva is minden ilyen (a_{mn}); $a_1, a_2, \ldots, a_s$ rendszer éppen olyan C_s-t szolgáltat, amelyre $\{h, C_s\} = h_i$. Minthogy pedig különböző (a_{mn}); $a_1, a_2, \ldots, a_s$ rendszerek különböző C_s-ekre vezetnek, azért a kérdezett számosság (14) miatt

$$2^{rs}N_{si},$$

ahol N_{si} a tekintett (a_{mn}) matrixok számossága. Az N_{si} is könnyen megállapítható (az (a_{mn}) első oszlopát választhatjuk 2^s-1-féleképpen, ezután a második oszlopot 2^s-2-féleképpen,...), mégpedig

$$N_{si}=(2^s-1)\,(2^s-2)\ldots(2^s-2^{i-1}).$$

Ezek szerint a fenti C_s-ek számossága:

$$(2^s-1)\,(2^{s-1}-1)\ldots(2^{s-i+1}-1)\,2^{\binom{i}{2}+rs}.$$

A most meghatározott számosságot $[t, h, i]$-vel szorozva, nyilvánvalóan előáll azoknak a C_s sorozatoknak számossága, amelyekre $\{h, C_s\}$ bármilyen 2^{r+i} rendű h és H között lévő barátságos csoport. Minthogy az i lehetséges értékei 0, 1,..., s, azért az összes C_s számossága:

$$(t, h, s)=\sum_{i=0}^{s}(2^s-1)\,(2^{s-1}-1)\ldots(2^{s-i+1})\,2^{\binom{i}{2}+rs}\,[t, h, i]. \quad (24)$$

(Ez az $s=0$ esetben is helyes, amikor ugyanis a $[t, h, 0]$ együtthatója 1-nek veendő.)

Ebben s helyébe rendre a 0, 1, 2,..., s számokat írva, az előállt egyenletrendszerből $[t, h, s]$ kifejezhető $(t, h, 0)$, $(t, h, 1)$,..., (t, h, s) által. Mégpedig az 5. segédtétel miatt $[t, h, s]$ sem függ a h különös megválasztásától, s így a 6. segédtétel első állítása helyes. Továbbá a mondottakból s (20)-ból világos, hogy

$$[t, h, s]=f(2^{2u}) \quad (25)$$

s-edfokú polinomja 2^{2u}-nak, részletesen

$$f(x)=a_0x^s+a_1x^{s-1}+\cdots+a_s, \quad (26)$$

ahol az $a_0, a_1,\ldots, a_s$ együtthatók kizárólag r-től és s-től függenek.

Mint fent megjegyeztük, $[t, h, s]=0$, ha $s>u-r$, vagyis, ha $u<r+s$. Azaz egy bizonyos r, s értékpár mellett (25) eltűnik az $u=r, r+1,\ldots, r+s-1$ értékekre. (Más értékek (15) miatt nem jönnek tekintetbe.) E szerint

$$f(x)=a_0(x-2^{2r})\,(x-2^{2\,(r+1)})\ldots(x-2^{2\,(r+s-1)}). \quad (27)$$

Az a_0 is könnyen megadható, mert ez nem egyéb, mint

(20) jobboldalán (az $i = 0$-hoz tartozó tagban) 2^{2us} együtthatója törve (24) jobboldalán $[t, h\ s]$ együtthatójával:

$$a_0 = \frac{2^{-rs-\binom{s}{2}}}{(2^s-1)(2^s-1)\ldots(2^1-1)\,2^{\binom{s}{2}+rs}} \tag{28}$$

A (25) szerint, (27)-ben x helyett 2^{2u}-t helyettesítve, majd a zárjelényezőkből kiemelve a

$$2^{2r}.2^{2(r+1)}\ldots 2^{2(r+s-1)} = 2^{2rs+2\binom{s}{2}}$$

értéket, s (28)-at is figyelembe véve, éppen előáll (23).

6. §.

A végzett előkészületek után rátérünk tulajdonképeni tárgyunkra.

Legyen ismét adva egy tetszésszerinti $t\,(\geqq 2)$ egész szám (a $t=1$ esetet mellőzhetjük). Mind a bevezetésbeli megállapodásokat s jelöléseket ismét érvényesnek vesszük.

Tekintsünk egy tetszésszerinti $\Delta = \mathrm{D}'$, D'' D-felbontást. Akkor

$$\mathrm{D}' = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \ldots p_t^{c_t}, \tag{29}$$

ahol minden c_i értéke 0 vagy 1. Egyszersmind (1) miatt

$$\mathrm{D}'' = p_1^{1-c_1} p_2^{1-c_2} \ldots p_t^{1-c_t}. \tag{30}$$

A Δ-hoz hozzárendelem a $c = (c_1, c_2, \ldots, c_t)$ vektort s ezt a Δ kitevővektorának nevezem. Ha mást nem mondunk, vagy a kifejezések másra nem mutatnak, akkor az ilyen c vektor az R_2 testben értendő. Ezzel az 1. §-beli H vektorcsoport elemei és az összes D-felbontások egy-egyértelmű vonatkozásba jutottak. Megfelelőleg így is beszélünk: Δ a c vektorhoz rendelt D-felbontás.

Nyilvánvaló, hogy ha a Δ, Δ_0 D- felbontásokhoz rendelt vektorok c, c_0, akkor a $\Delta\Delta_0$ összetett D-felbontáshoz rendelt vektor $c+c_0$, vagyis ez a hozzárendelés izomorf vonatkozás a G és H csoportok között. Megfelelőleg beszélhetünk a G-nek egyik g

alcsoportjához rendelt h csoportról, ami a H-nak (ugyanolyan rendű) alcsoportja, s áll a g elemeihez rendelt elmekből.

Meg akarom vizsgálni, hogy milyen T típusok esetében 2-odfajú a tekintett $\Delta = \mathrm{D}', \mathrm{D}''$ D-felbontás.

A (2) a következő alakban írható:

$$\left(\frac{p_k}{p_i}\right) = (-1)^{x_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, t;\ i \neq k). \tag{31}$$

Az ebben szereplő x_{ik} jelek mellé bevezetem még az x_{ii} (= 0 vagy 1) jeleket ($i = 1, 2, \ldots, t$), értelmezve a

$$\sum_{k=1}^{t} x_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t) \tag{32}$$

egyenletek által. (Az $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{tt}$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ jelek is ezentúl rendesen az R_2 testben fogandók fel.)

Legyen a (6)-ban először $p_i \mid \mathrm{D}''$. Akkor a (29) és (31) szerint (6) baloldala:

$$\left(\frac{\mathrm{D}'}{p_i}\right) = \prod_{k=1}^{t} \left(\frac{p_k^{c_k}}{p_i}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{t} c_k x_{ik}}.$$

Hasonlóan írható (6) baloldala a $p_i \mid \mathrm{D}'$ esetében (30) és (31) szerint, azzal az eltéréssel, hogy most a

$$\sum_{k=1}^{t} (1 - c_k)\, x_{ik}$$

kitevő lép fel. E helyett azonban (32) miatt ismét az előbbi összeg vehető. Ha még bevezetjük az

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, t) \tag{33}$$

vektorokat, akkor a szóbanlevő összeg nem egyéb, mint a $\overline{cx_i}$ keresztösszeg, és így (6) a következőképpen alakul:

Lemma. Egy tetszésszerinti Δ D-felbontás, akkor és csak akkor 2-odfajú, ha annak c kitevővektorára teljesül

$$\overline{cx_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{34}$$

Ennek alapján látjuk, hogy mindazoknak a T típusoknak meghatározása, amelyekre egy adott c kitevővektorhoz 2-odfajú

D-felbontások tartoznak, a következőképen történhetik: Választunk egy bizonyos $U = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t)$ főrészt, meghatározzuk az $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{tt}$ olyan értékeit, amelyekkel (34) fennáll, tekintetbe véve, hogy ezen kívül még (32)-nek és (3)-nak is fenn kell állnia, amely utóbbit most már az

$$x_{ik} + x_{ki} = \varepsilon_i \varepsilon_k \qquad (1 \leqq i < k \leqq t) \tag{35}$$

alakban írunk. Ezen az úton (4) szolgáltatja az összes U főrészű T-t. Látjuk, hogy így csupán lineáris egyenletrendszer megoldásával van dolgunk. Természetesen nem minden U-hoz van megfelelő T, amely kérdést ezután vizsgálunk meg.

Ha h tetszésszerinti halmaz a H elemeiből, akkor hU-val jelölöm a cU szorzatoknak halmazát, ahol c befutja a h elemeit. A hU elemeit mindenkor többszörösség nélkül gondoljuk. Ha a h csoport, akkor hU is csoport, mert $cU + c'U = (c + c')\,U$.

Állítom a következőt:

I. *Tétel Legyen adott t mellett g egy olyan 2^r rendű alcsoport az összes* D*-felbontások G csoportjában, amely tartalmazza a* D, 1 *elemet. Legyen h az R_2 test t elemű vektorai H csoportjának az az alcsoportja, amely áll a g elemeinek kitevővektoraiból. Legyen $c^m (m = 1, 2, \ldots, r)$ a h egyik tetszésszerinti olyan független bázisa, amelyben éppen $c^1 = (1, 1, \ldots, 1)$. A 2-odfajú* D*-felbontások G_2 csoportja akkor és csak akkor tartalmazza a g csoportot (jelekben $g \leqq G_2$), ha a* (4)*-beli T típussal fennáll*

$$x_{ik} + x_{ki} = \varepsilon_i \varepsilon_k \quad (1 \leqq i < k \leqq t), \tag{35}$$

$$\overline{c^m x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t;\ m = 1, 2, \ldots, t), \tag{36}$$

ahol x_i a (33)*-beli vektor.*

Akkor, és csak akkor van adott $U = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t)$ főrésszel bíró olyan T típus, amelyre $g \leqq G_2$, ha a hU csoport barátságos, amikor azután a mondott típusok számossága $2^{\binom{t-r+1}{2}}$.

Megjegyzések. Az az itteni kikötés, hogy g tartalmazza a D, 1 elemet, valójában nem jelent megszorítást, mert D, 1 mindig beletartozik G_2-be. A tétel nyilvánvalóan éppúgy igaz akkor is, ha nem kötjük ki azt, hogy az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor tagja legyen a $c^1, c^2, \ldots, c^r$ bázisnak. — Ezzel a tétellel arra is megfeleltünk,

hogy egy D', D'' ($\neq 1$, D; D, 1) D-felbontás milyen T típusok esetében 2-odfajú, ekkor ugyanis $g = \{D, 1; D', D''\}$ veendő, vagyis a tétel magában foglalja a fenti lemmát.

Bizonyítás A tétel első állítása azonnal folyik a fenti lemmából, tekintettel arra, hogy (32) megvan a (36) egyenletei között, s arra, hogy egy csoport 2-odfajú, mihelyt a csoport egyik bázisának elemei 2-odfajúak.

A tétel második állítása úgy fogalmazható, hogy a (35), (36) egyenletrendszer akkor, és csak akkor megoldható, ha a hU csoport barátságos.

Tegyük fel elébb, hogy (35), (36) teljesülnek. A c^m-et a $(c_1^m, c_2^m, \ldots, c_t^m)$ alakban véve fel $(m = 1, 2, \ldots, r)$, hasonlóan járhatunk el, mint a 2. segédtétel megfelelő állításának bizonyításánál. Tekintettel arra, hogy most (8) helyett (35)-tel van dolgunk, előáll

$$\sum_{i=1}^{t} c_i^m \varepsilon_i \cdot \sum_{k=1}^{t} c_k^m \varepsilon_k = \sum_{i=1}^{t} c_i^m c_i^n \varepsilon_i \quad (m, n = 1, 2, \ldots, r),$$

azaz $\overline{c^m U}\,\overline{c^n U} = \overline{c^m c^n U} = \overline{c^m U . c^n U}$, ami a hU barátságosságát jelenti.

Tegyük fel most, hogy hU barátságos. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_e = 1, \quad \varepsilon_{e+1} = \cdots = \varepsilon_t = 0,$$

ahol e a 0, 1, 2..., t számok valamelyike. Az

$$x_{ik} + x_{ki} = 1 \quad (1 \leqq i < k \leqq e),$$
$$\overline{c^m U x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, e;\ m = 1, 2, \ldots, r)$$

egyenletrendszernek, amely csupán az x_{ik} $(i,k = 1, 2, \ldots, e)$ ismeretleneket tartalmazza, a 2. segédtétel szerint (alkalmazva a $t = e$ esetre) van megoldása, mert a $c^m U (m = 1, 2, \ldots, r)$ vektorok barátságosak (az, hogy ezek esetleg nem függetlenek, ebben a kérdésben közömbös). A többi x_{ik}-nak, amelyekben ugyanis i vagy $k > e$, a 0 értéket adva, nyertük a (35), (36) egyik megoldását.

A harmadik (utolsó) állítás a megoldások számosságáról következik a 2. segédtétel rangszámmegállapításából, abból hogy

a szereplő ismeretlenek számossága t^2 s hogy az R_2 test elemeinek számossága 2.

7. §.

Legyen ismét $t(\geqq 2)$ egy bizonyos tetszésszerinti egész szám és legyen $U=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t)$ szilárdan megválasztva. Az U egységeinek számosságát t'-vel jelölöm $(0 \leqq t' \leqq t)$. Továbbá u' jelentse $\frac{t'}{2}$ és $\frac{t'+1}{2}$ közül az egész számot (ezzel u' úgy van t'-höz rendelve, mint a 3. §-ban u a t-hez).

A jövőben a H-nak h alcsoportjainál nemcsak a h csoportnak, hanem a hU csoportnak rendje is fog érdekelni bennünket. Mégpedig minden h-hoz hozzárendelem azt a ϱ, ϱ' számpárt, amelyre $(h) = 2^{\varrho+\varrho'}$, $(hU) = 2^{\varrho'}$. Ezt a ϱ, ϱ' számpárt a h kitevőpárjának nevezem, a nélkül, hogy magára a kifejezésre súlyt akarnék helyezni. Ugyanezt nevezem a G csoport h-hoz rendelt g alcsoportja kitevőpárjának is. Mindig $0 \leqq \varrho \leqq t - t'$, $0 \leqq \varrho' \leqq t'$. Nyilvánvaló, hogy ha h^* a H-nak egy másik alcsoportja és $h \leqq h^*$, akkor a h^* kitevőpárja $\varrho+\sigma$, $\varrho'+\sigma'$ $(\sigma, \sigma' \geqq 0)$.

Legyen továbbá H_0 a H mindama c elemeinek alcsoportja, amelyekre $cU = (0, 0, \ldots, 0)$. Ennek rendje: $(H_0) = 2^{t-t'}$. Jelölje az iménti h-ra h_0 a $h \wedge H_0$ («$\wedge$» a halmazok közös részének jele) csoportot. Akkor fennáll $(h_0) = 2^{\varrho}$.

Jelentsenek ezután h, h^* olyan alcsoportokat a H-ból, amelyek tartalmazzák az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektort s amelyekre a hU, h^*U csoportok barátságosak. A h legyen szilárdan megválasztva, egyébként tetszésszerinti, s legyen ϱ, ϱ' az ő kitevőpárja. Jelentse $(t, U, h, \sigma, \sigma')$ mindazoknak a h^* csoportoknak a számosságát, amelyek h-t tartalmazzák s amelyeknek kitevőpárja $\varrho+\sigma$, $\varrho'+\sigma'$, ahol σ, σ' tetszésszerinti szilárdan megválasztott nem negatív egész számok. A jelen § célja ennek a számosságnak meghatározása. Természetesen nem minden h-hoz és σ, σ' párhoz létezik h^* csoport, de a következőkben ez a kérdés is tisztázódik. Az a feltétel, hogy hU barátságos legyen, a $t' = 0$ esetben semmitmondó, a $t' = t$ esetben pedig azt jelenti, hogy maga h barátságos, s így észrevesszük, hogy az itt bevezetett számosság ezekben a szélső esetekben (22) és (23) által már meg van hatá-

rozva. Ezért az itt következő tárgyalásban feltesszük, hogy $1 \leqq t' \leqq t-1$, de megjegyezzük, amire még rá fogunk mutatni, hogy a nyerendő eredmény a most mellőzött esetekben is helyes lesz.

Nyilvánvalóan elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amelyben az $U = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t)$ 1 elemei megelőzik a 0 elemeket. Ezért feltesszük kényelem kedvéért, hogy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{t'} = 1$, $\varepsilon_{t'+1} = \cdots = \varepsilon_t = 0$.

A h csoportról a következőket figyeljük meg. Egy tetszésszerinti $c = (c_1, c_2, \ldots, c_t)$ vektorból alakított $c' = (c_1, c_2, \ldots, c_{t'})$ t' elemű vektort a c főrészének nevezem. A fenti H_0 nem egyéb, mint a H összes $(0, 0, \ldots, 0)$ főrészű elemeinek a csoportja. Legyen H' az R_2 testben alakított t' elemű vektorok csoportja: $(H') = 2^{t'}$. Legyen továbbá h' a h összes elemei főrészeinek csoportja. Akkor $h' \leqq H'$ és $(h') = 2^{\varrho'}$, utóbbi azért, mert a h' egyegyértelműen izomorf a hU csoporttal.

Minthogy a fenti c-re cU csak abban különbözik c'-től, hogy az utóbbihoz még $t-t'$ számú 0 elem lép, azért $\overline{cU} = \overline{c'}$. Ebből (7) alapján könnyen látható, hogy két (t elemű) x és y vektorra xU és yU akkor és csak akkor barátságosak, ha az x', y' főrészek is ilyenek. Kell tehát, hogy h' barátságos legyen, amiből (15) szerint $(1, 1, \ldots, 1) \in h'$ miatt $1 \leqq \varrho' \leqq w'$ is következik. Egyszersmind természetesen $0 \leqq \varrho \leqq t-t'$. Fordítva minden olyan h csoport, amiről most szó van, a következőképpen szerkeszthető meg. Vesszük a H'-nek egyik tetszésszerinti $2^{\varrho'}$ rendű, az $(1, 1, \ldots, 1)$ elemet tartalmazó barátságos h' alcsoportját, választunk ebben egy olyan független bázist, amely az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektort tartalmazza, mindezeket a bázisvektorokat az R_2-nek $t-t'$ számú elemével kiegészítjük t elemű vektorokká (a H elemeivé), úgy mégpedig, hogy a t' elemű $(1, 1, \ldots, 1)$ vektort a t elemű $(1, 1, \ldots, 1)$ vektorrá egészítjük ki, s akkor ezek az elemek és a H_0-nak egy tetszésszerinti 2^{ϱ} rendű h_0 alcsoportja előállítanak egy kívánt h csoportot.

Ezután h jelentse ismét a fent szilárdan megválasztott csoportot, s most már össze akarjuk számlálni a mondott h^* csoportokat. Ezek is az itt előadott módon szerkeszthetők meg, miközben még figyelembe veendő a $h \leqq h^*$ feltétel. Azaz vesszük

H_0-nak egy a h_0-t tartalmazó $2^{\varrho+\sigma}$ rendű $h_0(\sigma)$ alcsoportját; ezeknek számossága a (22)-beli jelöléssel $[t-t',\ \hat{h}_0,\ \sigma]_0$, ahol $\hat{h}_0$ az a 2^{ϱ} rendű csoport, ami h_0-ból előáll akkor, ha ennek minden vektorából az első t' (zérus) elemet elhagyjuk. Vesszük továbbá H'-nek egy a h'-t tartalmazó $2^{\varrho'+\sigma'}$ rendű barátságos $h'(\sigma')$ alcsoportját; ezeknek számossága a (23)-beli jelöléssel $[t'\ h',\ \sigma']$. Választunk $h'(\sigma')$-ből alkalmasan egy olyan független bázist s ennek vektorait az R_2-ből vett $t-t'$ számú elemmel kiegészítjük H-beli vektorokká úgy, hogy az előállt $c^1, c^2, \ldots, c^{\varrho'+\sigma'}$ vektorok (amik természetesen ugyancsak függetlenek) közül az első ϱ' számú vektor mind eleme legyen h-nak, ami nyilvánvalóan lehetséges. Akkor $\{c^1, c^2, \ldots, c^{\varrho'+\sigma};\ h_0(\sigma)\}$ egy kívánt h^* csoport s ezen az úton minden h^* előáll. Mindezek számosságát úgy nyerjük, hogy az említett két számosságot szorozzuk $2^{\sigma'(t-t'-\varrho-\sigma)}$-val, amely utóbbi tényező abból áll elő, hogy a fent mondott kiegészítés a $c^{\varrho'+1}, c^{\varrho'+2}, \ldots, c^{\varrho'+\sigma'}$ σ' számú vektor mindegyikében $(H_0) = 2^{t-t'}$-féleképpen végezhető, de ezek a módozatok — minthogy az éppen megszerkesztett h^* tartalmazza a $h_0(\sigma)$ csoportot — $(h_0(\sigma)=)\,2^{\varrho+\sigma}$-nként egyugyanazon h^*-ra vezetnek. Ezek szerint érvényes a következő:

$$(t,\ U,\ h,\ \sigma,\ \sigma') = [t-t',\ \hat{h}_0,\ \sigma]_0\,[t',\ h',\ \sigma']\,2^{\sigma'(t-t'-\varrho-\sigma)}. \tag{37}$$

Bevezetem az $\binom{n}{k}$ mintájára az

$$\left\{\begin{matrix}\alpha^n-1\\ \beta^k-1\end{matrix}\right\} = \frac{(\alpha^n-1)(\alpha^{n-1}-1)\ldots(\alpha^{n-k+1}-1)}{(\beta-1)(\beta^2-1)\ldots(\beta^k-1)} \tag{38}$$

jelölést, amelyben k nem negatív egész szám és $\beta \neq 1$. Ha $k=0$, akkor eme jel alatt az 1 értendő. Ez a jel azonban mint az α, β, n, k argumentumok függvénye fogandó fel, úgyhogy például $\alpha = 4$ mellett nem szabad a baloldalon 4^n-1 helyett $2^{2n}-1$-et írni.

Ezután (37) a (22), (23) szerint átmegy a következőbe:

$$(t,\ U,\ h,\ \sigma,\ \sigma') = \left\{\begin{matrix}2^{t-t'-\varrho}-1\\ 2^{\sigma}-1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4^{u'-\varrho'}-1\\ 2^{\sigma'}-1\end{matrix}\right\}2^{\sigma'(t-t'-\varrho-\sigma)}. \tag{39}$$

Mégpedig ez igaz az eddig mellőzött $t'=0$, t esetekben is. Ugyanis

$t'=0$ mellett egy tetszésszerinti h-nak kitevőpárja nem egyéb, mint $\varrho=r$, $\varrho'=0$, ahol 2^r a h rendje, azaz most a (39) baloldala ugyanaz, mint a (22) baloldala az $r=\varrho$, $s=\sigma$ esetben; a jobboldalak is egyeznek $\sigma'=0$ miatt. Hasonló kapcsolatban áll (39) a (23)-mal a $t'=t$ esetben, amikor $\varrho=\sigma=0$, $u'=u$.

Egyszersmind újra leszögezzük, amit már láttunk, hogy (39)-ben $t'\geqq 1$ mellett a $0\leqq\varrho\leqq\varrho+\sigma\leqq t-t'$, $1\leqq\varrho'\leqq\varrho'+\sigma'\leqq u'$, míg $t'=0$ mellett az $1\leqq\varrho\leqq\varrho+\sigma\leqq t$, $\varrho'=\sigma'=0$ esetek jönnek tekintetbe. Ezekben az esetekben a kérdezett számosság létezik s (39) szerint független a h különös megválasztásától.

A (39)-re szükségünk lesz egész terjedelmében, azonban a későbbiek kedvéért itt feljegyezzük annak egy különös esetét, amely vonatkozik a tekintett h csoportok közül mindazoknak a számosságára, amelyek egy szilárd ϱ, ϱ' kitevőpárral rendelkeznek. Ez a számosság előáll a (39)-ből akkor, ha h helyébe a 2 elemű $\{(1, 1,\ldots, 1)\}$ csoportot, azaz ϱ, ϱ' helyett a 0, 1 ($t'\geqq 1$), illetve 1, 0 ($t'=0$) számpárt, továbbá σ, σ' helyett a ϱ, $\varrho'-1$, illetve $\varrho-1$, ϱ' számpárt vesszük. Ezzel nyertük a következőt:

A H csoport ama h alcsoportjainak számossága, amelyekre $(1, 1,\ldots, 1)\in h$, hU barátságos, a h kitevőpárja ϱ, ϱ' (a $t'=0$ esetben $\varrho'=0$ értendő), a következő:

$$\begin{Bmatrix} 2^{t-t'}-1 \\ 2^{\varrho}-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4^{u'-1}-1 \\ 2^{\varrho'-1}-1 \end{Bmatrix} 2^{(\varrho'-1)(t-t'-\varrho)} \qquad (t'\geqq 1) \qquad (40)$$

illetve

$$\begin{Bmatrix} 2^{t-1}-1 \\ 2^{\varrho-1}-1 \end{Bmatrix} \qquad (t'=0). \qquad (40_0)$$

8. §.

Legyen t, U, t', u', h jelentése ugyanaz, mint a 7. §-ban, különösen tehát ismét $(1, 1,\ldots 1)\in h$, $h\leqq H$, hU barátságos. A h legyen szilárdan megválasztva s legyen az ő kitevőpárja ismét ϱ, ϱ'. Most is jelentse g a G-ben h-hoz rendelt alcsoportot.

$N(t, U, h)$-val jelölöm azoknak az U főrészű T típusoknak számosságát, amelyekre $G_2=g$. Szándékom ezt a számosságot meghatározni. (Ez a számosság tekinthető úgy is, mint t, U és

g függvénye, valamint tekinthető a h helyett a g eleve adottnak.) Ezt a feladatot a lehető legáltalánosabban fogalmaztam, mert az I. tétel szerint csak az itt mondott h csoportok jöhetnek tekintetbe. Jóllehet mind az ilyen h csoportra van az I. tétel szerint olyan T, amellyel $g \leqq G_2$, mégis elképzelhető köztük olyan h (azaz g), amelyre $g = G_2$ egyetlen T-vel sem teljesül. Látni fogjuk azonban, hogy ez a lehetőség kizárt.

Az I. tétel szerint $2^{(t-\varrho-\frac{\varrho'}{2}+1)}$ a számossága azoknak az U főrészű T-knek, amelyekre $g \leqq G_2$. Mindezeket a T-ket osztályokba sorolhatjuk, egy osztályba véve közülük azokat, amelyekre G_2 egyugyanazon g^*-gal egyenlő. Az ebben az osztályban levő T-knek számossága éppen $N(t, U, h^*)$, ahol h^* a g^*-hoz rendelt csoport. E szerint fennáll

$$\sum_{h \leqq h^* \leqq H} N(t, U, h^*) = 2^{(t-\varrho-\frac{\varrho'}{2}+1)}, \tag{41}$$

ahol az összegezés (ismét az I. tétel szerint) csupán azokra a h és H közötti h^* csoportokra terjesztendő ki, amelyekre h^*U barátságos.

A (41)-ből következik

$$N(t, U, h) + \sum_{h_1} \sum_{h_1 \leqq h^* \leqq H} N(t, U, h^*) \geqq 2^{(t-\varrho-\frac{\varrho'}{2}+1)},$$

ahol h_1 befutja a h és H közti olyan $2^{\varrho+\varrho'+1}$ rendű csoportokat, amelyekre h_1U barátságos. Az itt levő belső összeg (41) szerint $2^{(t-\varrho-\frac{\varrho'}{2})}$, míg a h_1 csoportok számossága (22) szerint legfeljebb $2^{t-\varrho-\varrho'}-1$, s így a nyert egyenlőtlenségből következik

$$N(t, U, h) \geqq 2^{(t-\varrho-\frac{\varrho'}{2})}. \tag{42}$$

(A követett út szószerint nem járható akkor, ha egyetlen h_1 csoport sincs, de ekkor (42) közvetlenül folyik (41)-ből.) A (42)-ből következik $N(t, U, h) > 0$, amint ezt állítottuk.

Most rátérek az $N(t, U, h)$ pontos meghatározására. Állítom mindenekelőtt, hogy ez a számosság csupán a t, t', ϱ, ϱ' számoktól függ, de nem függ a h különös megválasztásától.

A bizonyításhoz megegyezünk a következőben. Mint láttuk, az összes kitevőpárok a $0 \leqq \varrho \leqq t-t'$, $1 \leqq \varrho' \leqq u'$, $(t' \geqq 1)$ illetve

$1 \leqq \varrho \leqq t$, $\varrho' = 0$ ($t' = 0$) feltételeket kielégítő ϱ, ϱ' egész számokból álló párok. Ha ϱ_1, ϱ_1' egy másik kitevőpár és $\varrho \leqq \varrho_1$, $\varrho' \leqq \varrho_1'$, a nélkül, hogy mindkét helyen az «=» jel lenne érvényes, akkor az utóbbi kitevőpárt az előbbinél magasabbnak nevezem.

A mondottak szerint mindig van egyetlen egy legmagasabb kitevőpár, s ha h bármelyik az ehhez tartozó csoportok közül, akkor (41) baloldalának csak az egyetlen $N(t, U, h)$ tagja van, s így ilyenkor helyes az állítás. Tekintek ezután egy tetszésszerinti h-t a ϱ, ϱ' kitevőpárral s felteszem az állítás helyességét minden magasabb kitevőpár esetére. Nyilvánvalóan elegendő az állítást eme felteves mellett bizonyítani. Tekintem a (41) ama tagjait, amelyeket egy bizonyos $\varrho+\sigma$, $\varrho'+\sigma'$ kitevőpárhoz tartozó h^* csoportok szolgáltatnak, ahol nem $\sigma = \sigma' = 0$. Minthogy szükségképpen σ, $\sigma' \geqq 0$, azért a feltevés szerint a tekintett tagok egyenlők s csupán a t, t' ϱ, σ, ϱ', σ' számoktól függenek. Továbbá ezeknek a tagoknak számossága (39) által van adva, s így ez is csupán ezektől a számoktól függ. Hasonló igaz akkor a mondott tagok összegéről, amiből az állítás már belátható.

Az itt végzett megbeszélés s a most bebizonyítottak szeszerint (41) a

$$\sum_{\sigma,\,\sigma' \geqq 0} (t, U, h, \sigma, \sigma')\, N(t, U, h^*) = 2^{(t-\varrho-\frac{1}{2}\varrho'+1)}$$

alakban írható, ahol h^* helyében mindenkor egy tetszésszerinti olyan csoport értendő a (41)-beliek közül, amelynek kitevőpárja $\varrho+\sigma$, $\varrho'+\sigma'$, s az összeg kiterjesztendő mind az olyan σ, σ' értékekre, amelyekre $\varrho+\sigma$, $\varrho'+\sigma'$ tényleg létező kitevőpár (azaz $0 \leqq \sigma \leqq t-t'-\varrho$, $0 \leqq \sigma' \leqq u'-\varrho'$).

Bevezetem átmenetileg az

$$N(t, U, h) = N(t, t', \varrho, \varrho') \tag{43}$$

jelölést, ami a fentiek szerint indokolt. Egyben (39)-et figyelembe véve, az előbbiből a következőt nyerjük:

$$\sum_{\sigma,\,\sigma' \geqq 0} \left| \begin{matrix} 2^{t-t'-\varrho}-1 \\ 2^{\sigma}-1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 4^{\sigma'}-\varrho'-1 \\ 2^{\sigma'}-1 \end{matrix} \right| 2^{\sigma'(t-t'-\varrho-\sigma)}\, N(t, t', \varrho+\sigma, \varrho'+\sigma') =$$
$$= 2^{(t-\varrho-\frac{1}{2}\varrho'+1)}, \tag{44}$$

ahol az összegezés hasonlóan értendő, mint fent.

Hátra van ennek az egyenletnek feloldása. Ehhez használni fogom a következőt:

7. *Segédtétel. Tetszésszerinti* $\alpha, \beta(\neq 1)$ *és* $y_0, y_1, \ldots, y_b$ *értékek mellett* a

$$\sum_{i=0}^{a} \left\{ \begin{matrix} \alpha^a - 1 \\ \beta^i - 1 \end{matrix} \right\} x_{a-i} = y_a \quad (a=0, 1, \ldots, b) \tag{45}$$

egyenletrendszer egyetlen megoldása,

$$x_a = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \left\{ \begin{matrix} \alpha^a - 1 \\ \beta^i - 1 \end{matrix} \right\} \beta^{\binom{i}{2}} y_{a-i} \quad (a=0, 1, \ldots, b). \tag{46}$$

Elegendő annyit kimutatni, hogy a (46)-nak (45)-be való behelyettesítésével előálló

$$\sum_{i=0}^{a} \sum_{k=0}^{a-i} \left\{ \begin{matrix} \alpha^a - 1 \\ \beta^i - 1 \end{matrix} \right\} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} \alpha^{a-i} - 1 \\ \beta^k - 1 \end{matrix} \right\} \beta^{\binom{k}{2}} y_{a-i-k} = y_a$$

egyenlet minden $a (\geqq 0)$ mellett fennáll. Minthogy a baloldalon y_a együtthatója 1, azért elég kimutatni, hogy ugyanott $y_{a-l} (l=1, 2, \ldots, a)$ együtthatója eltűnik. Ez az együttható részletesen kiírva

$$\sum_{\substack{i+k=l \\ i,\, k \geqq 0}} (-1)^k \frac{(\alpha^a - 1)(\alpha^{a-1} - 1) \ldots (\alpha^{a-i-k+1} - 1)}{(\beta - 1)(\beta^2 - 1) \ldots (\beta^i - 1) \cdot (\beta - 1)(\beta^2 - 1) \ldots (\beta^k - 1)} \beta^{\binom{k}{2}}.$$

Itt a közös számláló törölhető, egyúttal i helyett $l-k$ írható, miután az összegezés a $k=0, 1, \ldots, l$ értékekkel végzendő. Ezután még $(\beta^l - 1)(\beta^{l-1} - 1) \ldots (\beta - 1)$-gyel szorozva előáll

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{(\beta^l - 1)(\beta^l - 1) \ldots (\beta^l - \beta^{k-1})}{(\beta - 1)(\beta^2 - 1) \ldots (\beta^k - 1)}.$$

Itt az összegezendő nem egyéb, mint az

$f(x) = (x-1)(x-\beta) \ldots (x-\beta^{k-1}) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$

polinom a_k együtthatója, s így az $(f(1) =) 0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ tényből következik az iménti összeg eltűnése, azaz a 7. segédtétel helyessége.

Ezután szándékom megoldani a

$$\sum_{i=0}^{a}\sum_{k=0}^{b}\begin{Bmatrix}2^a-1\\2^i-1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}4^b-1\\2^k-1\end{Bmatrix}2^{k(a-i)}x_{a-i,\,b-k}=2^{\binom{a+b+z}{2}} \qquad (47)$$
$$\binom{a=0,\,1,\ldots,\,m}{b=0,\,1,\ldots,\,n}$$

egyenletrendszert, amelyben m, n tetszésszerinti nem negatív egész számok, z határozatlan, s $x_{00}, x_{01}, \ldots, x_{mn}$ az ismeretlenek. Az nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletrendszernek egyetlen egy megoldása van.

Tekintem elébb (47)-nek a $b=0$ esethez tartozó

$$\sum_{i=0}^{a}\begin{Bmatrix}2^a-1\\2^i-1\end{Bmatrix}x_{a-i,\,0}=2^{\binom{a+z}{2}} \qquad (a=0,\,1,\ldots,\,m) \qquad (48)$$

egyenleteit. Ezekből s a 7. segédtételből előáll

$$x_{a0}=\sum_{l=0}^{a}(-1)^l\begin{Bmatrix}2^a-1\\2^l-1\end{Bmatrix}2^{\binom{l}{2}+\binom{a+z-l}{2}} \quad (a=0,\,1,\ldots,\,m). \qquad (49)$$

Ezután (47)-et a

$$\sum_{i=0}^{a}\begin{Bmatrix}2^a-1\\2^i-1\end{Bmatrix}\left(\sum_{k=0}^{b}\begin{Bmatrix}4^b-1\\2^k-1\end{Bmatrix}2^{k(a-i)}x_{a-i,\,b-k}\right)=2^{\binom{a+(b+z)}{2}}$$

alakban irom. Ezt (48)-cal összehasonlítva látjuk, hogy a baloldali zárjelkifejezés nem egyéb, mint (49) jobboldala az $a(=)a-i$, $z(=)b+z$ helyettesítéssel:

$$\sum_{k=0}^{b}\begin{Bmatrix}4^b-1\\2^k-1\end{Bmatrix}2^{k(a-i)}x_{a-i,\,b-k}=$$
$$=\sum_{l=0}^{a-i}(-1)^l\begin{Bmatrix}2^{a-i}-1\\2^l-1\end{Bmatrix}2^{\binom{l}{2}+\binom{a-i+b+z-l}{2}},$$

amely egyenlet érvényes mindama a, b, i nem negatív egész számokra, amelyekre $0\leqq a-i\leqq m$, $0\leqq b\leqq n$. Itt $a-i$ helyett ismét a-t írva, majd 2^{ab}-vel osztva előáll:

$$\sum_{k=0}^{b} \begin{Bmatrix} 4^b-1 \\ 2^k-1 \end{Bmatrix} \frac{x_{a,\,b-k}}{2^{a(b-k)}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{a} (-1)^l \begin{Bmatrix} 2^a-1 \\ 2^l-1 \end{Bmatrix} 2^{\binom{l}{2} + \binom{a+b+z-l}{2} - ab} \quad \binom{a=0,\,1,\ldots,\,m}{b=0,\,1,\ldots,\,n}.$$

A jobboldal függvénye b-nek, amit egy pillanatra y_b-vel jelölve, a 7. segédtétel újbóli alkalmazásával előáll

$$\frac{x_{ab}}{2^{ab}} = \sum_{k=0}^{b} (-1)^k \begin{Bmatrix} 4^b-1 \\ 2^k-1 \end{Bmatrix} 2^{\binom{k}{2}} y_{b-k},$$

azaz (az l összegezési betű helyett i-t írva)

$$x_{ab} = \sum_{i=0}^{a} \sum_{k=0}^{b} (-1)^{i+k} \begin{Bmatrix} 2^a-1 \\ 2^i-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4^b-1 \\ 2^k-1 \end{Bmatrix} 2^{\binom{i}{2} + \binom{a+b+z-i-k}{2} + ak} \quad (50)$$

$$\binom{a = 0,\,1,\ldots,\,m}{b = 0,\,1,\ldots,\,n}.$$

Ezzel nyertük a (47) megoldását.

Ebből a (44) megoldása mint különös eset áll elő. Mégpedig végezzük (47)-ben az $a=t-t'-\varrho$, $b=u'-\varrho'$, $z=t'-u'+1$ helyettesítést s egyben írjunk i, k helyett σ, σ' betűket. Akkor a baloldali együttható s a jobboldal éppen átmennek a (44) megfelelő elemeibe, s ugyancsak egyezést látunk az összegezés határaiban. Ezek szerint a (44) megoldása is ugyanazzal a helyettesítéssel áll elő a (47) megoldásából, azaz:

$$N(t,\,t',\,\varrho+\sigma,\,\varrho'+\sigma') = x_{t-t'-\varrho-\sigma,\,u'-\varrho'-\sigma'}.$$

(Megjegyzendő, hogy míg (47) az ott megadott a, b értékekkel értendő, addig (44) a $0 \leqq \varrho \leqq t-t'$, $1 \leqq \varrho' \leqq u'$ ($t' \geqq 1$), illetve az $1 \leqq \varrho \leqq t$, $\varrho'=0$ ($t'=0$) értékekre veendő, s így ebben a tekintetben nem találunk teljes egyezést, azonban ettől függetlenül az iménti következtetés helyességét biztosítja az, hogy a (44) egyenletrendszer egyértelműen határozza meg az összes $N(t,\,t',\,\varrho,\,\varrho')$ mennyiségeket.) Ezt csupán a $\sigma=\sigma'=0$ esetre alkalmazva, (43) és (50) szerint előáll:

$$N(t, U, h) = \sum_{i=0}^{t-t'-\varrho} \sum_{k=0}^{u'-\varrho'} (-1)^{i+k} \begin{Bmatrix} 2^{t-t'-\varrho}-1 \\ 2^i-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4^{u'-\varrho'}-1 \\ 2^k-1 \end{Bmatrix} 2^{\binom{i}{2}+\binom{k}{2}+(t-\varrho-\varrho'-i-k+1)+(t-t'-\varrho)k}. \tag{51}$$

Mindezeket összefoglaljuk a következő tételben:

II. Tétel. Legyen $t(\geqq 2)$ *és* $U=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t)$ *tetszés szerint szilárdan megválasztva, legyen* t' *az* U *1 elemeinek számossága* $(0 \leqq t' \leqq t)$, *jelentse* u' *a* $\frac{t'}{2}, \frac{t'+1}{2}$ *közül azt, amelyik egész szám és legyen* ϱ, ϱ' *két tetszésszerinti olyan racionális egész szám, amelyekre* $0 \leqq \varrho \leqq t-t'$, $0 \leqq \varrho' \leqq u'$, *továbbá* $t' \geqq 1$ *mellett* $\varrho' \geqq 1$ *és* $t'=0$ *mellett* $\varrho \geqq 1$ *teljesül.*

Az összes D-felbontások G *csoportjának egyik tetszésszerinti* g *alcsoportjához akkor és csak akkor találni olyan* (U *főrészű*) T *típust, amellyel a 2-odfajú D-felbontások* G_2 *csoportja egyenlő* g*-vel, ha* g *tartalmazza a* D, 1 D*-felbontást és a* g *kitevővektorainak* h *csoportjára* hU *barátságos. Ezek között a* g *csoportok között van olyan is, amelyre* $((h)=)(g)=2^{\varrho+\varrho'}$, $(hU)=2^{\varrho'}$ *s ezeknek számossága* (40), *illetőleg* (40_0) *által van adva; ezzel minden kívánt* g *csoportot számba vettünk, ha* ϱ, ϱ' *befutják a fent adott értékeket.*

A mondott g*-re a* $G_2=g$ *feltételt kielégítő* (U *főrészű*) T *típusoknak számossága* (51) *által van megadva.*

A tétel helyességének belátásához csupán még az I. tételre és a (42)-re kell hivatkoznom, amely utóbbi szerint $N(t, U, h)>0$. (Ez a tény az (51)-ről nem könnyen olvasható le.)

9. §.

Legyen t és r $(r \leqq t)$ két adott pozitív egész szám, s H ismét az R_2 test t elemű összes vektorainak csoportja. Eljárást akarok megadni a H összes 2^r rendű barátságos alcsoportjainak megszerkesztésére. (Valójában ezek közül csak azok az alcsoportok érdekelnek bennünket, amelyek az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektort tartalmazzák. Az ilyenek számosságát a (23) adja meg az $r(=)1$, $s(=)r-1$ helyettesítéssel.) Természetesen nem mindig létezik

ilyen csoport, még pedig ehhez, mint ez könnyen látható, most is fenn kell állnia (15)-nek, ami az $r \leqq \frac{t+1}{2}$ alakban írható. Azért ezt az egyenlőtlenséget feltételezhetjük, mert különben a megadandó szerkesztési eljárás kivihetetlen.

Jelentse M az $1, 2, \ldots, r$ elemeknek egyik nem üres részhalmazát; ezek számossága 2^r-1. M_i és M_{ik} jelentsen mindig olyan M-et, amely az i elemet, illetve az i, k elemeket tartalmazza.

Könnyű belátni a következőt:[7] Ha $c^1, c^2, \ldots, c^r$ tetszésszerinti vektorok a H csoportból, akkor egy és csakis egy módon meghatározhatók olyan páronként közös egység nélküli $d_M \left(M \leqq (1, 2, \ldots, r)\right)$ vektorok a H-ból (v. ö. 7. o.) hogy

$$c^i = \sum_{M_i} d_{M_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, r) \tag{52}$$

fennáll, ahol az összegezés az összes M_i halmazra értendő. A H minden 2^r rendű alcsoportjának van olyan $c^1, c^2, \ldots, c^r$ bázisa, amelyre $d_1, d_2, \ldots, d_r \neq (0, 0, \ldots, 0)$. (Ha $M = (i, k, \ldots)$, akkor a megfelelő d_M-et $d_{ik\ldots}$-vel jelölöm.)

A d_M vektoroknak páronként közös egység nélküli volta azt jelenti, hogy $d_M d_{M'} = (0, 0, \ldots, 0)$ $(M \neq M')$. Az (52)-ből tehát következik:

$$c^i c^k = \sum_{M_{ik}} d_{M_{ik}} \qquad (1 \leqq i < k \leqq r). \tag{53}$$

Ha tehát x_M jelenti a $\bar{d}_M$ keresztösszeget, akkor annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a $c^1, c^2, \ldots, c^r$ vektorok barátságosak legyenek, a (7), (52), (63) szerint a

$$\sum_{M_{ik}} x_{M_{ik}} = \sum_{M_i} x_{M_i} \cdot \sum_{M_k} x_{M_k} \qquad [(1 \leqq i < k \leqq r) \tag{54}$$

alakban írható.

Kérdésünk láthatólag az (54) egyenletrendszernek az R_2 testben való megoldásán fordul meg. Ehhez előkészületül megegyezünk a következőkben. Az x_M elemeket, amelyeket az R_2 elemei közül most szabadon választva gondolunk, egy 2^r-1 elemű $[x]$ vektorrá összefoglalva gondoljuk, amelyben M viszi a

[7] V. ö. a [2] alatti dolgozatban 84. o.

helymutató (Stellenzeiger) szerepét. Minden olyan M-re, amely legalább három elemet tartalmaz, jelentse $[M]$ azt az $[x]$ vektort, amelyben $x_M = 1$, $x_{ik} = 1$ $(i, k \in M;\ i < k)$ továbbá páratlan elemszámú M esetén még $x_i = 1$ $(i \in M)$, s az $[M]$ minden egyéb eleme 0. Ezenkívül minden M-re legyen az $[M]_0$ hasonló határozmányokkal értelmezve, csupán az «$x_M = 1$» rész törlendő. Az $[M]_0$-ban az M elemszáma nincs korlátozva s itt M számára kivételesen az üres halmaz is megengedhető, amikor a megfelelő $[0]_0$ csupa 0 elemből áll.

Ezekután, ha az (54) ki van elégítve, beszélhetünk így: az $[x]$ megoldása az (54)-nek. Az olyan megoldást, amelyben minden legalább három elemű M-re $x_M = 0$, alapmegoldásnak nevezzük. Állítom a következőket:

a. Az $[x]$-szel együtt $[x] + [M]$ is megoldása az (54)-nek.

b. Az (54) minden alapmegoldása az összes $[M]_0$.

Legyen ugyanis $[x]$ az (54)-nek egyik tetszésszerinti megoldása s legyen $[M]$ tetszés szerint választva. Azt kell kimutatnunk, hogy az $[y] = [x] + [M]$ vektor is kielégíti az (54)-et, azaz hogy — az x_M-hez hasonló y_M jelölést használva — fennáll

$$\sum_{M_{ik}} y_{M_{ik}} = \sum_{M_i} y_{M_i} \cdot \sum_{M_k} y_{M_k} \qquad (1 \leqq i < k \leqq r). \tag{55}$$

Ha i vagy $k \notin M$, akkor (55) baloldala egyezik (54) baloldalával. Ha pedig $i, k \in M$, akkor (55) baloldalának pontosan csak két tagja különbözik az (54) megfelelő tagjaitól, nevezetesen y_M és y_{ik}, de $y_M = x_M + 1$, $y_{ik} = x_{ik} + 1$ miatt a két jobboldal most is egyenlő. Az (54) jobboldalának első tényezője ugyancsak egyezik az (54) megfelelő tényezőjével akkor, ha $i \notin M$. Ha pedig $i \in M$, akkor pontosan csak az y_M, y_{il} $(l \in M;\ l \neq i)$ elemek és páratlan elemszámú M esetén még az y_i elem tér el az (54) megfelelő elemeitől. Minthogy eme eltérő elemek számossága mindig páros, azért a tekintett tényezők egyenlők. Ugyanígy a második tényezőkkel, amivel az a.-t bebizonyítottuk.

Tekintsünk az (54)-ben ezután csupán alapmegoldásokat. Ilyenkor (54) helyett

$$x_{ik} = S_i S_k \qquad (1 \leqq i < k \leqq r) \tag{56}$$

írható, ahol $S_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ir}$ és $x_{ii} = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ értendő. Könnyű látni, hogy az $[M]_0$ vektorok tényleg kielégítik (56)-ot. Fordítva, ha (56) fennáll, akkor legyen M mindazoknak az i elemeknek halmaza az $1, 2, \ldots, r$ elemek közül, amelyekre $S_i = 1$; legyen m az M elemeinek számossága. Az (56) miatt x_{ik} $(i \neq k)$ akkor és csak akkor 1, ha $i, k \in M$. Egyúttal $i \notin M$ mellett $S_i = 0$ miatt $(x_{ii} =) x_i = 0$, továbbá $i \in M$ mellett $S_i = 1$ miatt $(m-1) + x_{ii} = 1$, azaz $x_i = (m)$ következik, ahol $(m-1)$ és (m) mint az R_2-nek $1'+1+\cdots+1$ $(m-1$-szer), illetve $1+1+\cdots+1$ (m-szer) elemei értendők. Mindezzel a b.-t bebizonyítottuk.

Az a. ismételt alkalmazásával nyilvánvaló, hogy az (54) bármely $[x]$ megoldásához alkalmas $[M']$, $[M'']$,... vektorokat hozzáadva, előáll az (54)-nek egy alapmegoldása, ami a b. szerint valamelyik $[M]_0$, azaz $[x] = [M]_0 + [M'] + [M''] + \cdots$ Fordítva b. és a. szerint minden ilyen $[x]$ megoldása az (54)-nek. (Csak mellékesen megjegyzem, hogy ezek szerint az (54) megoldásainak számossága

$$2^{2^r - 1 - \binom{r}{2}}$$

míg az összes $[x]$ vektorok számossága 2^{2^r-1}.)

Mindezek után érvényes a következő:

8. *Segédtétel. Legyenek t és r adott pozitív egész számok, mégpedig $r \leqq \frac{t+1}{2}$. Az R_2 test t elemű vektorai H csoportjának minden 2e rendű h barátságos alcsoportja előáll a következő úton. Veszünk egy tetszésszerinti $[x] = [M^\circ]_0 + [M'] + [M''] + \cdots$ ($2^r - 1$ elemű R_2-beli) vektort, ahol M° az $(1, 2, \ldots, r)$ halmaz bármely részhalmaza s $M', M'', \ldots$ ugyanannak a halmaznak bármely különböző, legalább 3 elemű részhalmazai. Az $[x]$-nek minden egyes x_M eleméhez a szerint, hogy ez 0 vagy 1, veszünk a t elemű $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor $1_1, 1_2, \ldots, 1_t$ egységei közül páros, illetve páratlan számút, de az $M = (1), (2), \ldots, (r)$ esetekben legalább egyet, s ezeknek az összegét d_M-mel jelöljük, mindezt úgy, hogy a $d_M (M \leqq (1, 2, \ldots, r);\ M \neq 0)$ vektorok képzésénél az $1_1, 1_2, \ldots, 1_t$ egységeket legfeljebb csak egyszer használjuk fel. Akkor az (52)-beli $c^1, c^2, \ldots, c^r$ vektorok előállítanak egyet a mondott h csoportok közül s minden olyan h nyerhető ezen az úton.*

Megjegyzések. Könnyű látni, hogy ez a szerkesztés csak az olyan $[x]$-ek mellett hajtható végre, amelyeknél az 1-gyel egyenlő x_M elemek számosságának és a 0-sal egyenlő x_i elemek kétszeres számosságának összege legfeljebb t. Mindenesetre ekkor az M', M'',... halmazok számossága legfeljebb t. Természetesen a mondott úton ugyanaz a h többször is előáll, de könnyű az eljárást úgy berendezni, hogy minden h-t csak egyszer nyerjünk. Ugyancsak könnyű elérni, hogy csupán az (1, 1,..., 1) vektort tartalmazó h-k álljanak elő, amely eset tulajdonképpen csak egyedül érdekel bennünket a G_2-vel való összefüggés miatt.

*

Összefoglalás. A bevezetésben kitűzött kérdésekre így hangzanak a feleletek:

Az **A**-ra közvetlen feleletet ad a II. tétel.

A **B**-ben kívánt szerkesztést a most mondottak alapján az $U=(1, 1,..., 1)$ esetben elvégzi a 8. segédtétel. Ha $U\neq(1, 1,..., 1)$, akkor nem a h csoportnak, csupán a hU csoportnak kell barátságosnak lennie, s így a 8. segédtétel most is könnyen célhoz visz. Az eljárás részleteitől eltekinthetek.

A **C**-re a II. tételben mondott (40), (ill. (40_0)) részletesebb feleletet ad, mint ahogy az eredeti kérdés szólt. Maga a **C**-ben kérdezett számosság az $U=(0, 0,..., 0)$ esetben (40_0), míg ugyanaz a számosság az $U\neq(0, 0,..., 0)$ esetben úgy áll elő, hogy (40)-et összegezzük a $0\leqq\varrho\leqq t-t'$, $1\leqq\varrho'\leqq u'$, $\varrho+\varrho'=r$ feltételeknek megfelelő ϱ, ϱ' értékekre, ahol r jelentése: $(g)=2^r$.

A **D**-re annyiban ad választ az I. tétel, hogy megadja a $g\leqq G_2$ feltételt kielégítő T-ket. Ha ezt alkalmazzuk azokra a g_1 csoportokra, amelyekre $g<g_1$, $2(g)=(g_1)$ és a h_1U csoport barátságos, ahol h_1 a H-nak g_1-hez rendelt alcsoportja, akkor a megfelelő T-knek az előbbiekből való elhagyásával visszamaradnak a kérdezett T-k.

Az **E**-re közvetlen feleletet ad a II. tételben említett (51).

Az **F**-ben kérdezett számosság ugyancsak felírható a II. tétel alapján, mégpedig az $U\neq(0, 0,..., 0)$ esetben a (40) és (51)-beli számosságok szorzása s hasonló összegezés által, mint fentebb, amivel előáll:

$$\sum_{\varrho,\,\varrho'} \sum_{i=0}^{t-t'-\varrho} \sum_{k=0}^{u'-\varrho'} (-1)^{i+k} \begin{Bmatrix} 2^{t-t'}-1 \\ 2^{\varrho}-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2^{t-t'-\varrho}-1 \\ 2^{i}-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4^{u'-1}-1 \\ 2^{\varrho'-1}-1 \end{Bmatrix} \cdot \tag{57}$$
$$\cdot \begin{Bmatrix} 4^{u'-\varrho'}-1 \\ 2^{k}-1 \end{Bmatrix} 2^{\binom{i}{2}+\binom{k}{2}+\binom{t-r-\frac{i-k+1}{2}}{}+(k+\varrho'-1)(t-t'-\varrho)},$$

ahol az első összegezés a $0 \leqq \varrho \leqq t-t'$, $1 \leqq \varrho' \leqq u'$, $\varrho+\varrho'=r$ feltételek mellett értendő. Ennek helyébe az $U=(0, 0, \ldots, 0)$ esetben (40_0) és (51) alapján

$$\begin{Bmatrix} 2^{t-1}-1 \\ 2^{r-1}-1 \end{Bmatrix} \sum_{i=0}^{t-r} (-1)^{i} \begin{Bmatrix} 2^{t-r}-1 \\ 2^{i}-1 \end{Bmatrix} 2^{\binom{i}{2}+\binom{t-r-i+1}{2}} \tag{57$_0$}$$

lép. (Ezt az utóbbit a [2] alatti dolgozatban a 71—75. oldalakon egyszerűbb alakra hoztam, l. o. a (42) képletet.)

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. dec. 14-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE D-ZERFÄLLUNGEN ZWEITER ART.

Von LADISLAUS RÉDEI, in Mezőtúr.

Bekanntlich ist die Anzahl e_4 der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers aus der Anzahl der D-Zerfällungen 2-ter Art zu bestimmen (s. die Arbeit[1]). Es wird die umgekehrte Frage behandelt, wie die Körperdiskriminanten anzugeben sind, damit e_4 als ein beliebig vorgegebener Wert ausfällt. Die Frage betrifft somit die Gruppe der D-Zerfällungen 2-ter Art und erfordert eine ausführliche Prüfung deren. Dabei führt mich auch der Zweck, in einer späteren Arbeit zu ermitteln, wie oft ein beliebiger fester Wert von e_4 zu erwarten ist unter allen quadratischen Körpern, deren Diskriminante eine feste Anzahl t von verschiedenen Primfaktoren hat. Letztere Frage habe ich in der unter[2] angeführten Arbeit[8] für den Fall schon beantwortet, wenn nur solche positiven Diskriminanten betrachtet werden, die keinen positiven Primteiler der Gestalt $4l+3$ haben. Im wesentlichen wurden in der vorliegenden Arbeit die sich auf den gesagten Spezialfall beziehenden Untersuchungen in den Abschnitten 3, 5, 7, 8 der Arbeit[8] verallgemeinert, nur die Diskriminanten der Gestalt $4n$ (n ung.) wurden ausser Acht gelassen.

---

[8] Die Arbeit [2] ist auch erschienen als: L. RÉDEI, Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper, Journ. f. d. Math., **174** (1935), 15—55.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Dec. 1937.

KÉTATOMOS MOLEKULATERMEK ÁLLANDÓINAK MEGHATÁROZÁSA A PERTURBÁCIÓ ALAPJÁN.

KOVÁCS ISTVÁN-tól.

Elméleti rész.

Mint ismeretes, a kétatomos molekula által kisugárzott vagy elnyelt sávvonalak szabályos elrendeződését és intenzitás eloszlását sokszor megzavarják «perturbációk». A rotációs analízis ilyenkor azt mutatja, hogy a perturbáció székhelye valamelyik meghatározható rotációs termen van és megállapítható, hogy a kérdéses rotációs term magasságában általában mindig található egy más elektronállapothoz tartozó olyan term, mely a perturbációt szenvedővel bizonyos szimmetria kapcsolatba hozható. Ezen utóbbi, a perturbációt okozó termek szintén egy, a perturbáció helyétől eltekintve, szabályos sorozatba tartoznak. Amikor ezen termekre vagy termekről átmenetek nem ismeretesek, e termek szabályos sorozatára jellemző állandók meghatározása csakis a pertubáció alapján lehetséges. Erre vonatkozóan ismeretes már egy gyakorlati eljárás * (1) azonban alkalmazhatósága elméletileg még nincs kellőképpen alátámasztva. E dolgozat célja egyrészt e gyakorlati módszer elméleti alapjait megadni, másfelől lehetséges volt az elmélet alapján két újabb eljárás megállapítása s az intenzitás anomáliák tárgyalása is.

A perturbációelmélet szerint perturbálatlan rendszernek fogva fel a szeparálható hullámegyenlettel jellemezhető molekulamodellt, a perturbációs potentiál matrixelemei a következő kifejezéssel adódnak:

$$H_{ik} = \int \psi_i^* H \psi_k \, dv, \qquad (1)$$

* A számok a dolgozat végén összeállított munkákra vonatkoznak.

ahol ψ_i, illetve ψ_k a perturbálatlan rendszer i, illetve k állapotához tartozó sajátfüggvényeket, H pedig a szeparált hullámegyenletben elhanyagolt részeknek megfelelő operatort jelentik.

Ezen matrixelemek közül KRONIG (2) szerint, csak azok különböznek zérustól, melyeknél:

1. ψ_i és ψ_k ugyanazon J rotációs kvantumszámhoz tartoznak.

2. ψ_i és ψ_k ugyanazon szimmetriatulajdonságokat mutatnak, tehát mind a kettő pozitív vagy negatív, egyenlő magok esetében mindkettő páros vagy páratlan, szimmetrikus vagy antiszimmetrikus.

3. ψ_i és ψ_k-hoz tartozó termek multiplicitása egyenlő.

4. ψ_i és ψ_k által reprezentált állapotokban Λ, az elektronok eredő impulzusmomentumának a magokat összekötő egyenesre való vetülete nem, vagy csak eggyel különbözik. Megjegyzendő még, hogy e feltételeknek egyszerre kell teljesülniök, valamint, hogy a hullámegyenletben elhanyagolt két, egymástól függetlenné tehető tagcsoportnak megfelelő operatorok egyikének tekintetbe vételénél kapjuk azt, hogy az említett matrixelemek akkor különböznek zérustól, ha a többi feltételek teljesülvén, $\Lambda' = \Lambda \pm 1$, míg a másik rész esetében akkor, ha $\Lambda' = \Lambda$.

Az el nem tűnő perturbációs matrixelemek $\Lambda' = \Lambda \pm 1$ esetére KRONIG, (2) illetve VAN VLECK (3) szerint a következők:

$$H(n, v, \Lambda; n', v', \Lambda \pm 1) = 2(BL_x)(n, v, \Lambda; n', v', \Lambda \pm 1) \\ [(J \pm \Lambda + 1)(J \mp \Lambda)]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

ahol n az elektronállapotra jellemző eredő kvantumszám, v a vibráció kvantumszáma. $B = \frac{h^2}{8\pi^2\theta}$, ahol θ a molekula tömegközéppontjára vonatkoztatott tehetetlenségi momentum. L_x az elektronok eredő impulzusmomentuma x irányú komponensének matrixelemeit jelenti.

Mint a perturbáció elméletéből ismeretes, a perturbált sajátértékek meghatározására egy szekularis egyenlet szolgál, melyben éppen az említett matrixelemek szerepelnek. Ezen egyenlet, két oly állapotra vonatkozóan, hol $\Lambda' = \Lambda \pm 1$, a következő alakú:

$$\begin{vmatrix} W_1 - W & H_{12} \\ H_{21} & W_2 - W \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

ahol W_1 és W_2 a perturbálatlan, W a perturbált sajátértékek s $H_{12} = H_{21}$ az előbb közölt matrixelemek.

A továbbiakban egyelőre a $^1\Pi$ és $^1\Sigma$ állapotok közti perturbációt vizsgáljuk, mint amelyre vonatkozóan az eredmények egyrészt a legegyszerűbbek, másrészt a kísérleti adatok bővebbek. Az első állapot azzal van jellemezve, hogy ott $\Lambda = 1$, a második, hogy $\Lambda = 0$. Tekintetbe véve, hogy a $^1\Sigma$ állapot $^1\Sigma^+$, illetve $^1\Sigma^-$ lehet s hogy a $^1\Pi$ állapot a $\Lambda = +1$ és $\Lambda = -1$ beállási lehetőségnek megfelelően kétszeresen degenerált, a szekuláris egyenlet a következőképpen alakul:

$$\begin{matrix} \Pi \\ \Sigma \end{matrix} \left| \begin{matrix} W_1^0 - W & H'_{12} \\ H'_{21} & W_2^0 - W \end{matrix} \right| = 0; \quad \begin{matrix} \Pi \\ \Sigma \end{matrix} \left| \begin{matrix} W_1^0 - W & H_{12} \\ H_{21} & W_2^0 - W \end{matrix} \right| = 0 \qquad (4)$$

ahol:

$$H'_{12} = H'_{21} = [1 - (-1)^{\Sigma}]\, 2^{\frac{1}{2}} (BL_x)(n, v, 0; n', v', 1)\, [J(J+1)]^{\frac{1}{2}}$$
$$H_{12} = H_{21} = [-1 - (-1)^{\Sigma}]\, 2^{\frac{1}{2}} (BL_x)(n, v, 0; n', v', 1)\, [J(J+1)]^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

és az első faktorban szereplő Σ kitevő 0 vagy 1, a szerint, hogy a $^1\Sigma$ állapot $^1\Sigma^+$ vagy $^1\Sigma^-$. Ezen matrixelemek megállapításáról felhasználtuk az $(L_x)(+\Pi; \Sigma) = -(-1)^{\Sigma}(L_x)(-\Pi; \Sigma)$ relációt. (4)

A determinánsban szereplő perturbálatlan energiákat célszerű oly alakban venni tekintetbe, hogy 0 értékű nívónak vesszük az egyik pl. a $^1\Pi$ állapot azon vibrációs nívóját, amelyre épített rotációs nívókon a perturbáció fellelhető. Így lesz:

$$W_1^0 = W_1^{0'} = B_{\Pi}[J(J+1) - 1] \,*$$
$$W_2^0 = C + B_{\Sigma} J(J+1), \qquad (6)$$

ahol B_{Π}, illetve B_{Σ} a $^1\Pi$, illetve $^1\Sigma$ állapot rotációs állandóját, C pedig a $^1\Pi$ állapot 0 értékű s a $^1\Sigma$ állapot azon vibrációs nívója közötti különbséget jelenti, melyre épített rotációs nívók a perturbációt okozzák. (Itt tárgyalásunkban azon esetet vá-

* Itt megelégszünk az energiák kifejezésének ezen alakjával, mivel a további közelítések a végső formuláinkat feleslegesen komplikálnák a nélkül, hogy lényeges eltérést okoznának.

lasztjuk, midőn a $^1\Pi$ állapot van perturbálva egy $^1\Sigma$ állapot által. A fordítottja hasonlóan tárgyalható).

Észrevehető, hogy a szerint, amint a $^1\Sigma$ állapot $^1\Sigma^+$ vagy $^1\Sigma^-$, a (4) determinánsok valamelyikében a nemdiagonális elemek mindig 0-al egyenlők. Ebből az következik, hogy a $^1\Sigma$ állapot a kétszeresen degenerált $^1\Pi$ állapotnak mindig csak egyik komponensét perturbálja, mégpedig a KRONIG-féle feltételeknek megfelelően azt, amelyeknek szimmetria állapota megegyezik a $^1\Sigma$ állapot szimmetriájával.

Számítsuk ki (4)-ből a perturbált energiákat:

$^1\Sigma^+$ esetében:

$$W_1 = \frac{W_1^0 + W_2^0}{2} + \sqrt{\left(\frac{W_2^0 - W_1^0}{2}\right)^2 + H_{12}^2} \tag{7a}$$

$$W_1' = W_1^{0\prime} \tag{7b}$$

$$W_2 = \frac{W_1^0 + W_2^0}{2} - \sqrt{\left(\frac{W_2^0 - W_1^0}{2}\right)^2 + H_1^2} \tag{7c}$$

$^1\Sigma^-$ esetében:

$$W_1 = W_1^0 \tag{7a'}$$

$$W_1' = \frac{W_1^{0\prime} + W_2^0}{2} + \sqrt{\left(\frac{W_2^0 - W_1^{0\prime}}{2}\right)^2 + H_{12}'^2} \tag{7b'}$$

$$W_2' = \frac{W_1^{0\prime} + W_2^0}{2} - \sqrt{\left(\frac{W_2^0 - W_1^{0\prime}}{2}\right)^2 + H_{12}'^2} \tag{7c'}$$

vagy betéve (5) és (6) értékeit s bevezetve az

$$a = 2(BL_x)(n, v, 0; n', v', 1)$$

rövidítést, kapjuk: $^1\Sigma^+$ esetében:

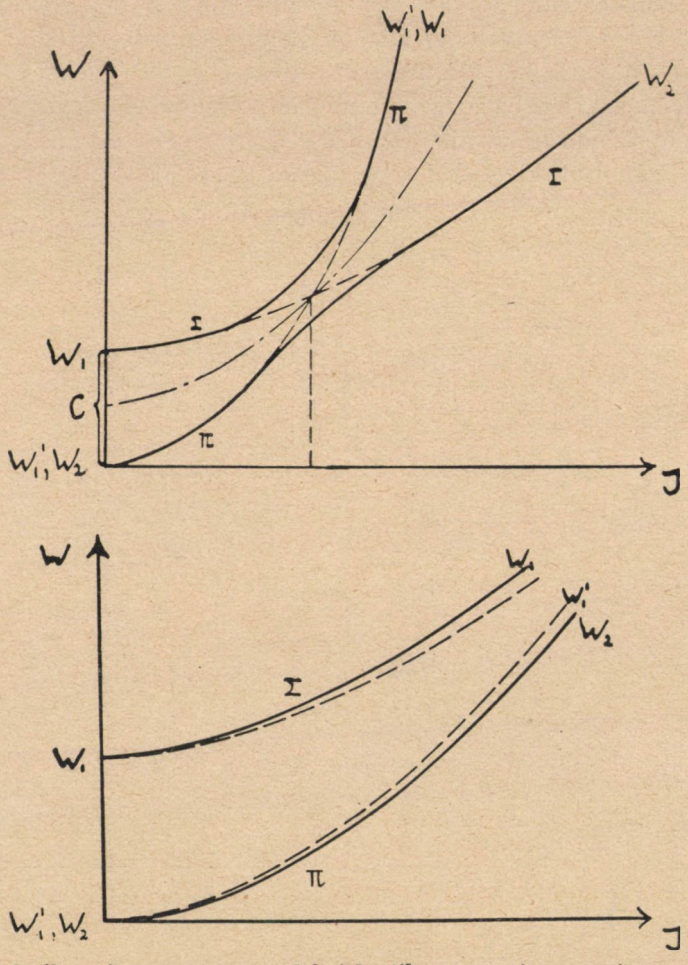
$$W_1 = \frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma + B_\Pi}{2} J(J+1) - \frac{B_\Pi}{2} + \sqrt{\left(\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma - B_\Pi}{2} J(J+1) + \frac{B_\Pi}{2}\right)^2 + 2a^2 J(J+1)} \tag{8a}$$

$$W_1' = B_\Pi [J(J+1) - 1] \tag{8b}$$

$$W_2 = \frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma + B_\Pi}{2} J(J+1) - \frac{B_\Pi}{2} - \sqrt{\left(\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma - B_\Pi}{2} J(J+1) + \frac{B_\Pi}{2}\right)^2 + 2a^2 J(J+1)} \tag{8c}$$

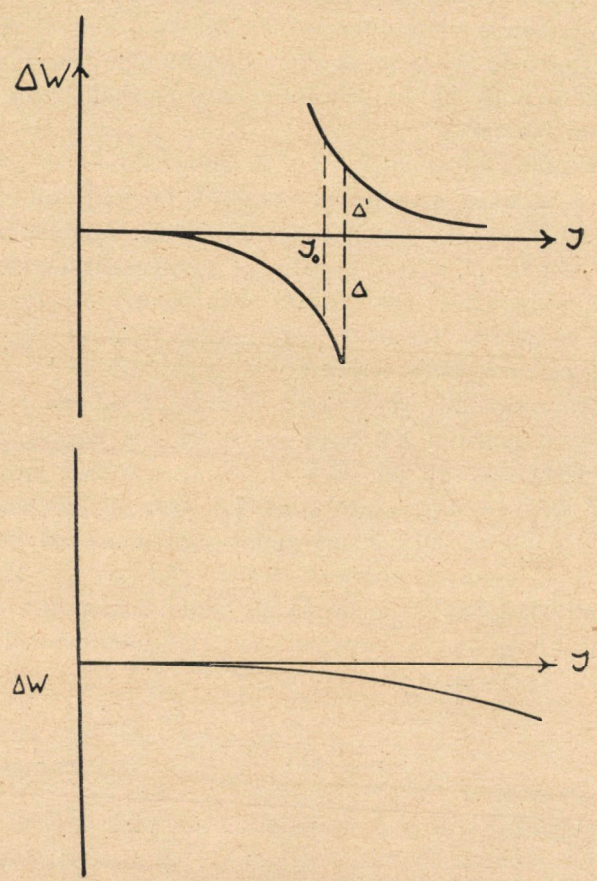
s ugyanezen formulák érvényesek $^1\Sigma^-$ esetére is megfelelő sorrendben írva őket, mivel $W_1^0 = W_1^{0\prime}$.

E formulák adják meg az energia értékeit akkor, mikor egy $^1\Pi$ állapot mellett egy $^1\Sigma$ állapot fut el, akár van kereszt-



1. és 2. ábra. A szaggatott vonalak jelentik az energia menetét azon esetben, ha a két állapot közt nem volna kölcsönhatás, továbbá a $^1\Pi$ állapotnál a nem perturbált komponenst. A kihúzott vonalak az energia értékeinek valóságos menetét adják. Azonkívül az 1. ábrába az arithmetikai közepet is berajzoltuk.

tezés, akár nincs. Keresztezés alatt értendő, hogy, ha J_0-ra, a rotációs kvantumszám egy meghatározott értékére igaz, hogy $J<J_0$ esetben a $^1\Sigma$ állapot energiája nagyobb, illetve kisebb,



3. és 4. ábra. Ezen ábrákban a perturbált és a perturbálatlan energiák közti különbséget mértük fel.

akkor $J>J_0$ esetében kisebb, illetve nagyobb, mint a $^1\Pi$ állapot energiája (1. ábra). J_0 természetesen általában nem egész szám.

Ha keresztezés nem lép fel, akkor a perturbáció abban nyilvánul meg, hogy a $^1\Sigma$ állapot s a $^1\Pi$ állapotnak az előbbivel megegyező szimmetriájú komponense helyükről elmozdulnak úgy,

hogy az elmozdulás ugyanazon állapotnál mindig egyirányú (2. és 4. ábra). Keresztezésnél ellenben a keresztezés helye előtt és után ellenkező irányú (1. és 3. ábra). A következőkben inkább a keresztezéssel járó perturbációval foglalkozunk, mivel egyrészt ez a gyakrabban előforduló eset, másrészt a keresztezéssel nem járó perturbáció esetében a két állapot nem jut olyan közel egymáshoz, hogy az elmozdulásból a perturbáló term állandóit számítani lehetne.

Vizsgáljuk most meg, hogy a perturbáló és az átmenetben résztvevő $^1\Sigma$ term szimmetria viszonyai hogyan befolyásolják a perturbációt a spektroszkópiai észlelésekben. Mivel átmenet csak pozitív és negatív, illetve negatív és pozitív termek között, perturbáció pedig (2) feltétel szerint csak pozitív és pozitív, illetve negatív és negatív termek között lehetséges, mint az 5. ábrából látható, ha az átmenetben résztvevő és perturbáló $^1\Sigma$ term mindkettő $^1\Sigma^+$ vagy $^1\Sigma^-$, akkor csak a P és R ág van perturbálva, ha pedig az említett két term egyike $^1\Sigma^+$, a másika $^1\Sigma^-$, akkor csak a Q ágban van perturbáció. Ez igen fontos megjegyzés s tárgyalásainkban mi is kettéválasztjuk ezen két esetet.

Ezek után a perturbált energiák kifejezésének ismerete alapján megadhatók bizonyos eljárások a perturbáló állapot állandóinak az észlelt adatokból való meghatározására. Képezzük e célból (7), illetőleg (8) alapján a perturbált energiák arithmetikai közepét:

$$\frac{W_1+W_2}{2}=\frac{W_1'+W_2'}{2}=\frac{W_1^0+W_2^0}{2}=$$

$$=\frac{C}{2}+\frac{B_\Sigma+B_{II}}{2}J(J+1)-\frac{B_{II}}{2}. \qquad (9)$$

Tehát a perturbáció a perturbálatlan energiák arithmetikai közepét változatlanul hagyja, s arra nézve szimmetrikus eltéréseket okoz. Mindez azon fordul meg, hogy a (3) és (4) determinánsokban a perturbációs matrix diagonális elemei zérussal egyenlők.*

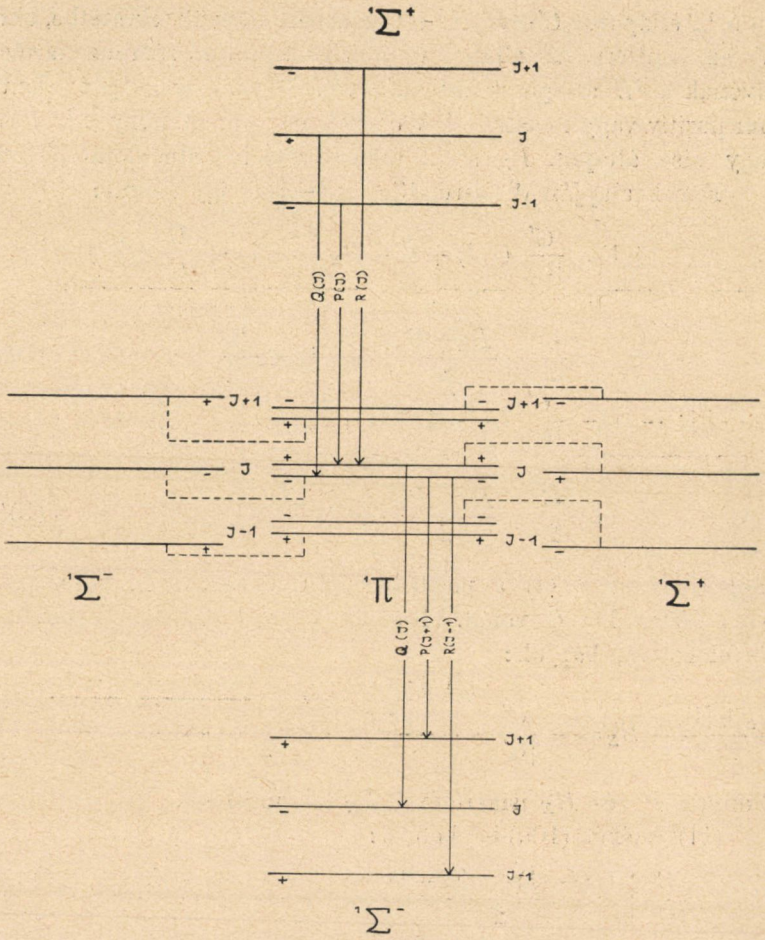
E tény felismerése alapján a perturbáló term állandói C

* Ez két tetszőleges n multiplicitású s egymást perturbáló termekre vonatkozólag is igaz, ahol $\Lambda'=\Lambda\pm 1$. A szekuláris egyenlet ekkor:

$$W^n-(W_1^0+W_2^0+\cdots+W_n^0)W^{n-1}+\cdots=0,$$

ahol a gyökök összege:

$$W_1+W_2+\cdots W_n=W_1^0+W_2^0+\cdots W_n^0.$$



5. ábra. Az itt látható 4 $^1\Sigma$ term közül természetesen egyidejűleg mindig csak egy átmeneti és egy perturbáló tekintendő. A szaggatott vonallal összekötött termek perturbálják egymást.

és B_Σ könnyen kiszámíthatók. Tegyük fel egyelőre, hogy a perturbáció a Q ágban jelentkezik. Ekkor mivel az átmenetben résztvevő $^1\Sigma$ állapot alsó vagy felső állapot lehet, a $^1\Pi$ állapot, mind a perturbált, mind a perturbálatlan helyeken így írható (5. ábra):

$$W_\Pi(J) = C' + B'_\Sigma J(J+1) - \frac{C'}{|C'|} Q(J), \qquad (9a)$$

ha a $^1\Sigma$ állapotot $C'+B'_\Sigma J(J+1)$ alakban vesszük tekintetbe, ahol C' az említett $^1\Sigma$ állapot 0 rotációs kvantumszámhoz tartozó nívónak a $^1\Pi$ állapot 0 értékű nívójától való távolságot jelenti, ami pozitív vagy negatív lehet megfelelően annak, hogy a $^1\Sigma$ felső vagy alsó állapot. B'_Σ a $^1\Sigma$ állapot rotációs állandóját jelenti.

Ennek alapján (9) J-re, illetve $J-1$-re így alakul:

$$\frac{C'+B'_\Sigma J(J+1)-\frac{C'}{|C'|}Q(J)+C'+B'_\Sigma J(J+1)-\frac{C'}{|C'|}Q'(J)}{2}=$$

$$=\frac{C}{2}+\frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}J(J+1)-\frac{B_\Pi}{2} \qquad (10a)$$

$$\frac{C'+B'_\Sigma(J-1)J-\frac{C'}{|C'|}Q(J-1)+C'+B'_\Sigma(J-1)J-\frac{C'}{|C'|}Q'(J-1)}{2}=$$

$$=\frac{C}{2}+\frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}(J-1)J-\frac{B_\Pi}{2}, \qquad (10b)$$

ahol $Q(J)$ és $Q'(J)$ a perturbáció helye környékén ugyanazon J-hez észlelt két Q vonal. (10a) és (10b) különbségét képezve s $2J$-vel osztva, kapjuk:

$$\frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}-B'_\Sigma=-\frac{C'}{|C'|}\,\frac{\frac{Q(J)-Q(J-1)}{2J}+\frac{Q'(J)-Q'(J-1)}{2J}}{2}, \qquad (11)$$

ahonnan B_Π és B'_Σ ismeretével B_Σ kiszámítható.

(11) értékét (10a)-ba betéve:

$$C=-\frac{C'}{|C'|}\left[\frac{Q(J-1)+Q'(J-1)}{2}(J+1)-\frac{Q(J)+Q'(J)}{2}(J-1)\right]+$$
$$+2C'+B_\Pi, \qquad (12)$$

ahol C' a nyilvánvalóan nem perturbált helyekből:

$$C'=\mp\,[Q(J)\mp(B_\Pi-B'_\Sigma)J(J+1)\pm B_\Pi] \qquad (13)$$

alapján számítható $^1\Pi\rightarrow{}^1\Sigma$ átmenetnél a felső, $^1\Sigma\rightarrow{}^1\Pi$ átmenetnél az alsó előjelekkel. (Lásd (9a).)

Így tehát (11) és (12) alapján meghatározhatjuk a perturbáló term állandóit. Ezen első eljárásból kiindulva, kaphatunk egy másik, szemléletesebb eljárást, amely éppen a bevezetésben már említett s sikerrel alkalmazott gyakorlati módszer. (1) Ez

utóbbi módszernek igen nagy haszna van a perturbáció tényének felismerésénél, amely azért is fontos, mivel a perturbációt a spektrumból puszta rátekintéssel nem lehet megállapítani. A mellett azonban e módszer is alkalmas a perturbáló term állandóinak meghatározására. Tekintsük tehát a (11) jobboldalának számlálójában álló kifejezéseket s állítsuk elő a Q vonalakat, mint a termek különbségeit. A perturbációt egyelőre nem véve tekintetbe, a $^1\Pi$, illetve $^1\Sigma$ állapot egyszerű alakban írhatnák, lesz:

$$F_Q(J) = -\frac{C'}{|C'|}\,\frac{Q(J)-Q(J-1)}{2J} =$$

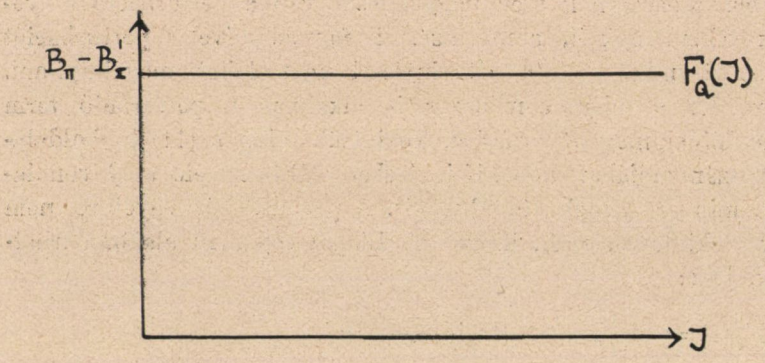
$$= \frac{\left[B_\Pi[J(J+1)-1] - C' - B'_\Sigma J(J+1)\right]}{2J} -$$

$$- \frac{\left[B_\Pi[(J-1)J-1] - C' - B'_\Sigma(J-1)J\right]}{2J} = B_\Pi - B'_\Sigma. \qquad (14)$$

Ha tehát a Q vonalakból a fenti különbséget minden J-re képezzük, akkor, amennyiben perturbáció nincs, egyenes vonalat kell kapnunk, mivel a jobboldal állandó. (6. ábra.)

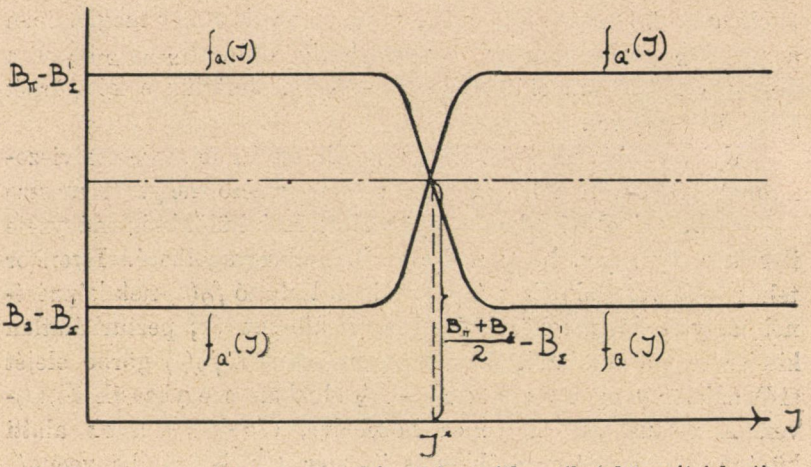
Mikor azonban perturbáció lép fel, akkor, amint az 1. ábrából is látható, mivel a kezdetben $^1\Pi$ állapot a perturbáció után a perturbáló $^1\Sigma$ állapotba megy át, s a $^1\Pi$ állapotnak a perturbáció utáni folytatása kezdetben $^1\Sigma$ állapot volt ennek megfelelően a $B_\Pi - B'_\Sigma$ görbe átmegy a perturbáció után $B_\Sigma - B'_\Sigma$-be s a $B_\Sigma - B'_\Sigma$ a perturbáció után $B_\Pi - B'_\Sigma$-be. Jelöljük e két görbét $f_Q(J)$ és $f_{Q'}(J)$-vel.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy az 1. ábrán feltüntetett viszonyokat tételezvén fel, $J < J_0$-ra a perturbáció helyétől messze $W_2 \sim W_1^0$, mivel (7c)-ben a gyök alatt álló különbség négyzete ilyenkor oly nagy, hogy mellette H_{12}^2 elhanyagolható. Ilyenkor tehát a Q vonalaknak s így az ábrán látható $f_Q(J)$-nek képzésénél nagyon jó megközelítéssel a $^1\Pi$ állapot W_1^0 perturbálatlan kifejezése használható. Ennek megfelelően a $f_Q(J)$ görbe elejét (14) adja, így egyenes lesz $B_\Pi - B'_\Sigma$ alakban s egybeesik $F_Q(J)$-vel. A perturbáció helyéhez közeledve, (7c)-ben a gyök alatti különbség állandóan csökken s itt már H_{12}^2 is számba veendő. A Q vonalak előállításánál tehát a $^1\Pi$ állapot perturbált kifeje-



6. ábra. Itt abscissának J-t, ordinátának $F_Q(J)=B_{\Pi}-B'_{\Sigma}$ értékét mértük fel.

zését, (7c)-t, kell használnunk. Ekkor $f_Q(J)$ megszűnik egyenes lenni s mindinkább lehajlik. $J>J_0$ esetben a perturbáció helyétől ismét távol $W_2 \sim W_2^0$, mivel, hasonlóan az előbbi esethez, H_{12}^2 újból elhanyagolható. Ekkor azonban, mivel a gyök alatti különbség előjele megváltozott s így (7c) a perturbáló $^1\Sigma$ állapotba ment át, (14)-ben a $^1\Pi$ állapot kifejezése helyett a perturbáló $^1\Sigma$ állapot megfelelő kifejezése kerül s görbénk újra egyeneslesz, de már $B_\Sigma - B'_\Sigma$ alakban. Ez adja az $f_Q(J)$ görbe menetét.



7. ábra. A szaggatott vonal a két görbe arithmetikai közepét jelenti. J^* a metszés abscissája.

Az $f_{Q'}(J)$ görbe hasonló módon tárgyalható, csak $B_\Sigma - B'_\Sigma$ alakban indul s a perturbáció után átmegy $B_\Pi - B'_\Sigma = F_Q(J)$-be.

Ezek igazolására s a görbék néhány tulajdonságának vizsgálatára előállítjuk azok analitikus alakját:

$$F_Q(J) = B_\Pi - B'_\Sigma = \frac{[B_\Pi[J(J+1)-1]-C'-B'_\Sigma J(J+1)]}{2J} -$$

$$- \frac{[B_\Pi[(J-1)J-1]-C'-B'_\Sigma(J-1)J]}{2J} \rightarrow$$

$$J < J_0$$

$$\rightarrow \frac{\left\{\left[\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}J(J+1) - \frac{B_\Pi}{2} - G(J)\right] - C' - B'_\Sigma J(J+1)\right\}}{2J} -$$

$$- \frac{\left\{\left[\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}(J-1)J - \frac{B_\Pi}{2} - G(J-1)\right] - C' - B'_\Sigma(J-1)J\right\}}{2J} \rightarrow$$

$$J \sim J_0$$

$$\rightarrow \frac{[C+B_\Sigma J(J+1) - C' - B'_\Sigma(J-1)J]}{2J} -$$

$$- \frac{[C+B_\Sigma(J-1)J - C' - B'_\Sigma(J-1)J]}{2J} = B_\Sigma - B'_\Sigma; \qquad (15)$$

$$J > J_0$$

illetve:

$$B_\Sigma - B'_\Sigma = \frac{[C+B_\Sigma J(J+1)-C'-B'_\Sigma J(J+1)]}{2J} -$$

$$- \frac{[C+B_\Sigma(J-1)J-C'-B'_\Sigma(J-1)J]}{2J} \rightarrow$$

$$J < J_0$$

$$\rightarrow \frac{\left\{\left[\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}J(J+1) - \frac{B_\Pi}{2} + G(J)\right] - C' - B'_\Sigma J(J+1)\right\}}{2J} -$$

$$- \frac{\left\{\left[\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma+B_\Pi}{2}(J-1)J - \frac{B_\Pi}{2} + G(J-1)\right] - C' - B'_\Sigma(J-1)J\right\}}{2J} \rightarrow$$

$$J \sim J_0$$

$$\rightarrow \frac{[B_\Pi[J(J+1)-1]-C'-B'_\Sigma J(J+1)]}{2J} -$$

$$- \frac{[B_\Pi[(J-1)J-1]-C'-B'_\Sigma(J-1)J]}{2J} = B_\Pi - B'_\Sigma = F_Q(J)$$

$$J > J_0 \qquad (16)$$

ahol:

$$G(J) = \sqrt{\left(\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma - B_{II}}{2} J(J+1) + \frac{B_{II}}{2}\right)^2 + 2a^2 J(J+1)} \quad (16a)$$

$$G(J-1) = \sqrt{\left(\frac{C}{2} + \frac{B_\Sigma - B_{II}}{2} (J-1)J + \frac{B_{II}}{2}\right)^2 + 2a^2 (J-1)J} \quad (16b)$$

A (15), illetve (16) középső kifejezései adják az $f_Q(J)$, illetve $f_{Q'}(J)$ görbék analitikus előállítását J függvényeképpen. Elvégezvén az összevonásokat ezek egyszerűbb alakban írhatók:

$$f_Q(J) = \frac{B_\Sigma + B_{II}}{2} - B'_\Sigma + \frac{G(J-1) - G(J)}{2J} \quad (17a)$$

$$f_{Q'}(J) = \frac{B_\Sigma + B_{II}}{2} - B'_\Sigma - \frac{G(J-1) - G(J)}{2J} \quad (17b)$$

Képezvén e két görbe arithmetikai közepét, lesz:

$$\frac{f_Q(J) + f_{Q'}(J)}{2} = \frac{B_\Sigma + B_{II}}{2} - B'_\Sigma \quad (18)$$

A jobboldalon álló mennyiség állandó lévén, a két görbe tehát a *konstans* arithmetikai közepükre nézve szimmetrikus. Tekintetbe véve az $f_Q(J)$ és $f_{Q'}(J)$ képzésének szabályát (18)-nak (11)-el való azonossága rögtön szembetűnik. Következik továbbá (18)-ból, hogy a metszéspont ordinátája is $\frac{B_{II} + B_\Sigma}{2} - B'_\Sigma$ (7. ábra) Ennek, illetve (18) alapján tehát B_Σ meghatározható.

Állapítsuk meg most az $f_Q(J)$ és $f_{Q'}(J)$ metszéspontjának abszcisszáját, tehát J azon értékét, hol a két görbe metszése bekövetkezik. Nyilvánvaló, hogy ez ott lesz, ahol (17*a*) és (17*b*) egyenlők. Ennek feltétele pedig, hogy:

$$\frac{G(J-1) - G(J)}{2J} = 0, \quad (19a)$$

azaz

$$G(J-1) = G(J) \quad (19b)$$

Ide G értékeit beírva (16*a*) és (16*b*)-ből s J-re megoldva, kapjuk:

$$J^* = \sqrt{-\frac{C + B_{II}}{B_\Sigma - B_{II}} - \frac{4a^2}{(B_\Sigma - B_{II})^2}} \sim \sqrt{-\frac{C + B_{II}}{B_\Sigma - B_{II}}} \quad (20)$$

Ugyanis a gyök alatti második tagot el lehet hanyagolni, mivel α^2 a legtöbb esetben igen kis szám még $B_\Sigma - B_\Pi$-hez képest is. Megjegyzendő még, hogy a gyök alatti mennyiség mindig pozitív, mivel C és $B_\Sigma - B_\Pi$ ellenkező előjelűek (1. ábra). J^*-t grafikusan meghatározva (7) ábrából a fenti formulából C közelítő értéke nyerhető:

$$C \sim (B_\Pi - B_\Sigma) J^{*2} - B_\Pi. \tag{21}$$

Összehasonlítjuk most J^*-t J_0-al, vagyis a perturbálatlan termek metszésének abszcisszájával. E metszés nyilván ott következik be, ahol:

$$B_\Pi[J(J+1)-1] = C + B_\Sigma J(J+1) \tag{22}$$

amiből:

$$J_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{C+B_\Pi}{B_\Sigma - B_\Pi}} \tag{23}$$

Ha pedig a gyök alatt $\frac{1}{4}$ t elhagyjuk, ami azért lehetséges, mivel C legtöbbször egynél jóval nagyobb úgy, hogy $|C| \gg |B_\Sigma - B_\Pi|$, s így megközelítőleg:

$$J_0 \sim J^* - \frac{1}{2}, \tag{24}$$

amiből a 7. ábra alapján a termek valódi metszésének a helye rögtön meghatározható.

A következőkben megvizsgáljuk azon esetet, midőn a perturbáció a P és R ágban jelentkezik. Ez, mint az 5. ábrából láttuk, akkor következik be, midőn az átmenetben résztvevő és perturbáló $^1\Sigma$ term mindkettője $^1\Sigma^+$ vagy $^1\Sigma^-$. Ennek folyományaképpen az előzőkben Q vonalakra megállapított formulák módosulást szenvednek s azonkívül külön kell itt tárgyalnunk azon esetet, mikor a $^1\Pi$ alsó s mikor felső állapot. Az első esetben a perturbáció az ugyanazon J-hez tartozó P és R vonalaknál jelentkezik, a másodikban a $(J+1)$-hez tartozó P vonalon s a $(J-1)$-hez tartozó R vonalon. Ez azért van, mivel a vonalak mindig az alsó állapot rotációs kvantumszámai szerint vannak rendezve. A viszonyok az 5. ábrán jól láthatók, mivel ott az egyik Σ felső, a másik alsó állapot.

Első esetben, C' pozitív lévén, a $^1\Pi$ állapot energiája:

$$W_{\Pi}(J)=C'+B'_{\Sigma}(J+1)(J+2)-R(J)=C'+B'_{\Sigma}(J-1)J-P(J).$$

Második esetben, ha C' negatív:

$$W_{\Pi}(J)=C'+B'_{\Sigma}(J+1)(J+2)+P(J+1)=C'+B'_{\Sigma}(J-1)J+R(J-1).$$

Az előzőkhöz hasonlóan számolva kapjuk:

$$\frac{B_{\Sigma}+B_{\Pi}}{2}-B'_{\Sigma}=-\frac{\frac{P(J)+R(J)}{2}-\frac{P(J-1)+R(J-1)}{2}}{\frac{2J}{2}}-$$
$$-\frac{\frac{P'(J)+R'(J)}{2}-\frac{P'(J-1)+R'(J-1)}{2}}{\frac{2J}{2}};\quad C'>0 \qquad (25)$$

ahol $P(J)$ és $P'(J)$, illetve $R(J)$ és $R'(J)$ az ugyanazon J-hez észlelt két P, illetve R vonal. A továbbiakban C-re kapjuk:

$$C=2[C'+B'_{\Sigma}]+B_{\Pi}-$$
$$-\frac{\frac{P(J-1)+R(J-1)}{2}+\frac{P'(J-1)+R'(J-1)}{2}}{2}(J+1)+$$
$$+\frac{\frac{P(J)+R(J)}{2}+\frac{P'(J)+R'(J)}{2}}{2}(J-1); \qquad (26)$$

ha $C'>0$.

Második esetben, tehát, ha a $^1\Pi$ felső állapot:

$$\frac{B_{\Sigma}+B_{\Pi}}{2}-B'_{\Sigma}=\frac{\frac{P(J+1)+R(J-1)}{2}-\frac{P(J)+R(J-2)}{2}}{\frac{2J}{2}}+$$
$$+\frac{\frac{P'(J+1)+R'(J-1)}{2}-\frac{P'(J)+R'(J-2)}{2}}{\frac{2J}{2}} \qquad (27)$$

ha $C'<0$,

illetve C-re:

$$C = 2C' + B_{II} + \frac{\frac{P(J)+R(J-2)}{2} + \frac{P'(J)+R'(J-2)}{2}}{2}(J+1) - \frac{\frac{P(J+1)+R(J-1)}{2} + \frac{P'(J+1)+R'(J-1)}{2}}{2}(J-1) \quad (28)$$

ha

$$C' < 0.$$

Formuláinkat azért írtuk ilyen komplikáltnak tetsző alakban, hogy a Q vonalakra megállapított (11) és (12) formulákkal összehasonlítva az analógiát jobban fellelhessük. Látható, hogy első esetben $Q(J)$-nek itt megfelel $\frac{P(J)+R(J)}{2}$ a második esetben $\frac{P(J+1)+R(J-1)}{2}$ kifejezés. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy ha a ^1II term ugyanazon kvantumszámhoz tartozó két komponense egybeesik, akkor az említett kifejezések között egyenlőség áll fenn, hanem csak azt, hogy az ily módon képezett formulákban $Q(J)$ mindig helyettesíthető a P és R vonalakból képezett fenti kifejezésekkel.

A következőkben definiálhatunk, hasonlóan (14)-hez, egy függvényt, amely:

$$F_{P,R}(J) = -\frac{\frac{P(J)+R(J)}{2} - \frac{P(J-1)+R(J-1)}{2}}{2J} = B_{II} - B'_{\Sigma}, \quad (29)$$

ha

$$C' > 0$$

és

$$F_{P,R}(J) = \frac{\frac{P(J+1)+R(J-1)}{2} - \frac{P(J)+R(J-2)}{2}}{2J} = B_{II} - B'_{\Sigma}, \quad (30)$$

ha

$$C' < 0.$$

Ezek azon esetben érvényesek, mikor nincs perturbáció. (29) és (30) jobboldalának helyességéről könnyen meggyőződhe-

tünk, ha a P és R vonalakat a középső részbe, mint termek különbségeit írjuk be.

Mikor perturbáció lép fel a viszonyok teljesen úgy alakulnak, mint ahogyan ezt már a Q vonalak esetében láttuk. Ekkor is képezhetők az $f_{P,R}(J)$ és $f_{P',R'}(J)$ függvények s analitikai előállításuk teljesen azonos $f_Q(J)$- és $f_{Q'}(J)$-vel úgy, hogy az utóbbi függvényekre tett megállapítások azonosan érvényesek az előbbiekre is.

Mindezeket összefoglalva a perturbáció tényének megállapítására s a perturbáló term állandóinak kiszámítására a következő eljárás adódik:

Előállítjuk legelőször minden J-re mind a Q, mind a P és R vonalakra az F függvényt. Ha Σ állapot perturbál a perturbáció helye környékén vagy F_Q vagy $F_{P,R}$ megszűnik egyenes vonal lenni s átmegy a megfelelő f függvénybe. Abból, hogy vajjon F_Q vagy $F_{P,R}$ hajlik-e el, megállapítható a perturbáló Σ term szimmetriája. Ezután pedig (11), illetve (25) vagy (27) alapján B_Σ, (12), illetve (26) vagy (28) alapján C meghatározható. A (18) és (21) formulák mind a két esetben használhatók.

Ezen eljárások nagy előnye, hogy lehetővé teszik a perturbáció tényének (5) s a perturbáló állapot állandóinak meghatározását a perturbálatlan nívóknak a perturbáció helye környékén való ismerete nélkül.* Hátránya mindössze az, hogy a számításokhoz legalább két olyan rotációs kvantumszám kell, amelyhez két vonalat észlelünk. Singulett termeknél ezideig ez nem túlgyakori eset, aminek az oka a fényképezésnél eddig alkalmazott expoziciós idők rövidségében keresendő.

Hogy azonban az eddigi kísérleti anyagok is mind felhasználhatók legyenek, szükségesnek látszik oly eljárás kidolgozása is, amelynél elegendő ugyanazon rotációs kvantumszámhoz egy vonalpár, vagy akár egy sem szükséges. Ilyen eljárás kidolgozása lehetséges, azonban itt már szükségünk van a perturbáció helye környékén a termek perturbálatlan értékeire is. Bizonyos esetek-

* Megjegyzendő, hogy e módszer a perturbáció tényének megállapítására nemcsak singulett-termek esetében alkalmazható, (6) mivel a görbék szabályos menete multiplett perturbációk esetében is megváltozik.

ben ezt igen könnyű számítani, mert, mint láttuk, a $^1\Sigma$ állapot a $^1\Pi$ állapotnak csak egyik komponensét perturbálja s ha e két komponens perturbáció hiányában egybeesik, akkor a perturbáció helyén a nem perturbált komponens éppen ott halad el, ahol mind a kettő haladna, ha nem volna perturbáció. Ilyenkor tehát a perturbálatlan vonalakból számíthatók a perturbálatlan termértékek. A következő számításokban tulajdonképpen nem is a perturbálatlan energiák értékei, hanem csak a perturbáltaknak az előbbiektől való eltérései szerepelnek. Számítsuk ezeket ki a (7) formulákból.

$$\Delta' = \frac{W_2^0 - W_1^0}{2} + \sqrt{\left(\frac{W_2^0 - W_1^0}{2}\right)^2 + H_{12}^2} \qquad (31a)$$

$$\Delta = \frac{W_2^0 - W_1^0}{2} - \sqrt{\left(\frac{W_2^0 - W_1^0}{2}\right)^2 + H_{12}^2} \qquad (31b)$$

A viszonyok a 3. ábrán jól láthatók, mivel (31a) és (31b) az ott szereplő görbék egyenletei. (31a)-ba behelyettesítve az energiák és a matrixelem kifejezéseit s megoldva B_Σ-ra:

$$B_\Sigma = B_\Pi + \frac{\Delta^{*2} - \Delta^*(C + B_\Pi) - 2a^2 J(J+1)}{\Delta^* J(J+1)} \qquad (32a)$$

ahol $\Delta^* = \Delta$ ill. Δ', Δ és Δ' a saját előjelükkel veendők tekintetbe. (32a)-ben B_Σ-n kívül még két ismeretlen adat C és a szerepelnek. Tehát, hogy az összes adat meghatározható legyen, három különböző Δ-ra van szükségünk, amelyek azonban mind különböző J-khez is tartozhatnak s így vonalpár észlelése egy esetben sem szükséges. Ha azonban ez egy esetben mégis rendelkezésre áll, ami lényegesen gyakoribb az előző eljárásoknál megkövetelt két vonalpárral szemben, akkor a számítás egyszerűbbé válik. Képezve ugyanis (31a) és (31b) szorzatát kapjuk a matrix-elem négyzetére:

$$2a^2 J(J+1) = -\Delta.\Delta' = |\Delta|.|\Delta'|, \qquad (33a)$$

azaz

$$a = \sqrt{\frac{|\Delta||\Delta'|}{2J(J+1)}} \qquad (33b)$$

s (32a)-ba betéve (33a)-t lesz:

$$B_\Sigma = B_{II} + \frac{|\Delta'| - |\Delta| - (C + B_{II})}{J(J+1)} \quad \text{ha} \quad \Delta' > 0 \qquad (32b)$$

$\Delta' > 0$ kikötés természetesen nem megszorítás, mivel Δ és Δ' mindig ellenkező előjelűek s mindig a pozitívot vesszük Δ'-nak.

Így azután a értékét (33b)-ből meghatározva értékét egy következő vagy megelőző kvantumszámhoz tartozó Δ-nak (32a) kifejezésébe behelyettesítve, ennek és (32b) segélyével B_Σ és C kiszámítható.

A következőkben a keresztezéssel járó perturbáció esetében fellépő intenzitásviszonyokkal fogunk foglalkozni. Ehhez a perturbált rendszer sajátfüggvényének ismerete szükséges. E sajátfüggvény a perturbálatlan sajátfüggvényekből a következő módon állítható elő:

$$\psi_i = \sum_k S_{ki} \psi_k^0 \qquad (34a)$$

ahol i és k a mi esetünkben, mivel két állapot kölcsönhatásáról van szó, 1 és 2 lehet. A ψ_i kifejtésének S_{ki} együtthatói a következő lineáris egyenletrendszerekből határozható meg:

$$\begin{aligned} (W_i - W_1^0) S_{i1} - H_{12} S_{i2} &= 0 \\ -H_{21} S_{i1} + (W_i - W_2^0) S_{i2} &= 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2) \qquad (35)$$

ahol W_i-k ($i = 1, 2$) a (7)-ben megállapított perturbált sajátértékeket jelentik, H_{12} értéke pedig (5)-ben található. Mivel ψ_i-k normáltak fennál még az S matrixelemek között:

$$S_{i1}^2 + S_{i2}^2 = 1, \qquad (i = 1, 2) \qquad (36)$$

ami azt mutatja, hogy az S matrix unitär. (35) és (36) alapján S értékeit meghatározva kapjuk:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{H_{12}}{\sqrt{(W_1 - W_1^0)^2 + H_{12}^2}}; & S_{12} &= \frac{W_1 - W_1^0}{\sqrt{(W_1 - W_1^0)^2 + H_{12}^2}} \\ S_{21} &= \frac{H_{12}}{\sqrt{(W_2 - W_1^0)^2 + H_{12}^2}}; & S_{22} &= \frac{W_2 - W_1^0}{\sqrt{(W_2 - W_1^0)^2 + H_{12}^2}} \end{aligned} \qquad (37)$$

Ezek alapján tehát a perturbált sajátfüggvények lesznek:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= S_{11}\psi_1^0 + S_{12}\psi_2^0 \\ \psi_2 &= S_{21}\psi_1^0 + S_{22}\psi_2^0 \end{aligned} \tag{34b}$$

ahová S-nek (37)-ben megállapított értékei beteendők.

A ψ_1^0, illetve ψ_2^0 állapot s egy ψ_τ^0 állapot közti átmenet esetében az elektromos momentum amplitudója a következő kifejezéssel adódik:

$$P_1^0 = \int \psi_1^{0*} P \psi_\tau^0 dv; \quad P_2^0 = \int \psi_2^{0*} P \psi_\tau^0 dv. \tag{38}$$

Az intenzitást pedig, ez arányos lévén az amplitudó négyzetével:

$$I_1^0 = |P_1^0|^2; \quad I_2^0 = |P_2^0|^2 \tag{39}$$

kifejezés adja.

Perturbáció eseteben hasonló módon kell képeznünk az elektromos momentum amplitudóját, csak ott a ψ_1^0 és ψ_2^0 függvények helyét a perturbált sajátfüggvények veszik át:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int \psi_1^* P \psi_\tau^0 dv = S_{11}P_1^0 + S_{12}P_2^0 \\ P_2 &= \int \psi_2^* P \psi_\tau^0 dv = S_{21}P_1^0 + S_{22}P_2^0 \end{aligned} \tag{40}$$

ahol ψ_1 és ψ_2 értékeit (36) adja.

Az intenzitás (40) négyzetével lesz arányos:

$$\begin{aligned} I_1 &= S_{11}^2 I_1^0 + S_{12}^2 I_2^0 + 2S_{11}S_{12}I_{12} \\ I_2 &= S_{21}^2 I_1^0 + S_{22}^2 I_2^0 - 2S_{21}S_{22}I_{12}, \end{aligned} \tag{41}$$

ahol I_{12} a $P_1^{0*}P_2^0$ reális részét jelenti.

Mivel azonban, ha $W_1^0 \rightarrow W_\tau^0$ átmenetek amplitudója 0-tól különbözik, $W_2^0 \rightarrow W_\tau^0$ amplitudója, illetve I_2^0 intenzitása mindig 0, (41) így alakul:

$$\begin{aligned} I_1 &= S_{11}^2 I_1^0 \\ I_2 &= S_{21}^2 I_1^0, \end{aligned} \tag{42}$$

vagy pedig S_{11} és S_{21} értékébe beírva (31) jelöléseit s a H_{12} matrixelem értékét:

$$I_1 = \frac{1}{1+\frac{\Delta'^2}{2a^2J(J+1)}} I_1^0$$
$$I_2 = \frac{1}{1+\frac{\Delta^2}{2a^2J(J+1)}} I_1^0. \tag{43}$$

E formulák alapján ha a értéke már (33)-ból ismeretes, az intenzitások meghatározhatók. Vagy pedig az intenzitás lemérésével a számítható.

Ha egy J-hez sikerült két vonalat észlelni, akkor az ilyen vonalakra formulánk igen egyszerű alakot ölt. Behelyettesítve ugyanis $2a^2J(J+1)$ értékét (33a)-ból (43)-ba kapjuk:

$$I_1 = \frac{|\Delta|}{|\Delta'|+|\Delta|} I_1^0$$
$$I_2 = \frac{|\Delta'|}{|\Delta'|+|\Delta|} I_1^0, \tag{44}$$

ahol a perturbálatlan intenzitáson kívül csak a perturbálatlan helyektől való eltérések szerepelnek.

A formula (44)-es alakjából rögtön következtetéseket vonhatunk az intenzitásviszonyok quantitatív alakulására bizonyos határesetekben. Ha ugyanis Δ, tehát az eredeti termértéktől való eltérés kicsiny az ugyanahhoz a J-hez tartozó Δ'-höz képest, vagyis $J<J_0$ s így $W_2 \sim W_1^0$ akkor:

$$I_1 = 0; \quad I_2 = I_1^0. \tag{45}$$

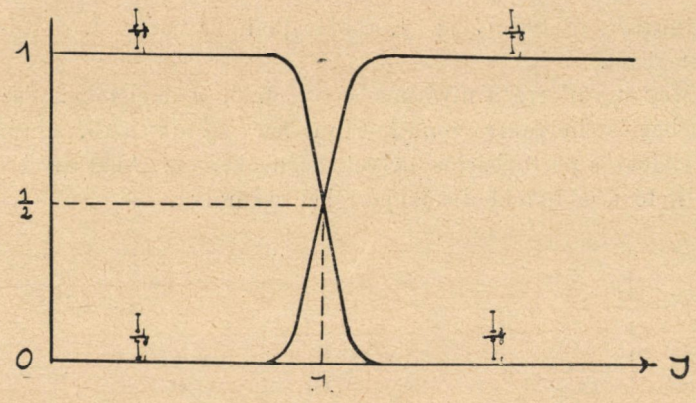
Pontosan az átmetszés helyén, ahol $J = J_0$ és $|\Delta| = |\Delta'|$:

$$I_1 = \frac{I_1^0}{2}; \quad I_2 = \frac{I_1^0}{2} \tag{46}$$

Végül $J > J_0$ esetében, mikor $W_1 \sim W_1^0$

$$I_1 = I_1^0; \quad I_2 = 0. \tag{46}$$

Jól áttekinthetők e viszonyok a 8. ábrán, ahol a perturbált s a perturbálatlan intenzitások viszonyait mértük fel.



8. ábra.

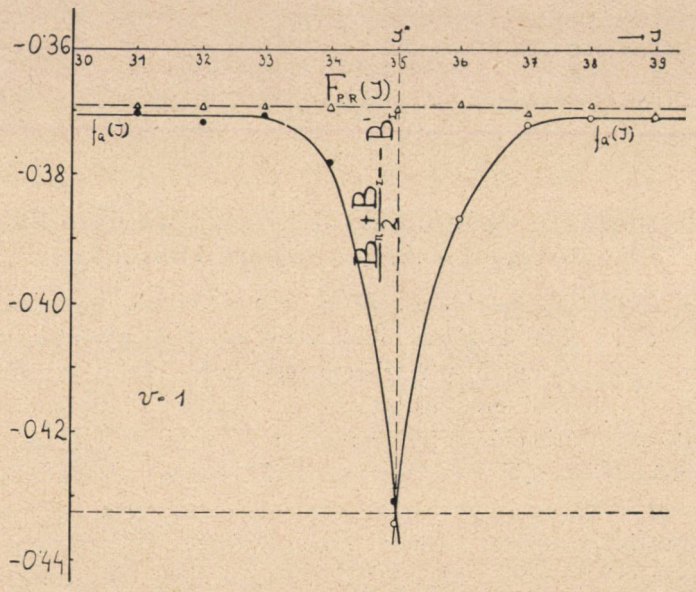
Alkalmazás a szénmonoxid $A^1\Pi$ nívóin észlelhető $I^1\Sigma^-$ nívóktól származó perturbációkra.

Mint COSTER és BRONS, (7) SCHMID és GERŐ, (8) GERŐ, (9) KELEMEN (10) által közöltekből kitűnik az $A^1\Pi$ nívóin számos $^1\Sigma^-$ nívótól származó perturbáció észlelhető. Hogy e perturbációk $^1\Sigma$ nívóktól erednek, az abból következik, hogy az összes idetartozó perturbációs helyeken; úgy a IV. pozitív ($A^1\Pi \rightarrow X^1\Sigma$), ANGSTRÖM ($B^1\Sigma \rightarrow A^1\Pi$) és HERZBERG ($C^1\Sigma \rightarrow A^1\Pi$) sávrendszerekben csak a Q ág van perturbálva. s hogy e $^1\Sigma$ term $^1\Sigma^-$, az az 5. ábra alapján onnan látható, mivel az összes fenti átmenetekben szereplő Σ^1 term ($X^1\Sigma$, $B^1\Sigma$, $C^1\Sigma$) $^1\Sigma^+$ term. Mint a következőkben kitűnik e perturbáló nívók egy $I^1\Sigma^-$-al jelzett elektronterm különféle vibrábiós emeleteihez rendelhetők. Hogy e hozzárendelés véghezvihető legyen, szükséges az $I^1\Sigma^-$ term vibrációs nívóinak magasságát s az ezekhez tartozó B rotációs állandókat ismernünk. Ezek kiszámítására fogjuk az előbbiekben közölt elmélet eredményeit alkalmazni.

Az $A^1\Pi$ nívó $v=1$ vibrációs nívóján a $B^1\Sigma \rightarrow A^1\Pi$ átmenetben $J=35$ közül észlelhető perturbációra, mivel ott két darab egy J-hez tartozó vonalpár áll rendelkezésünkre alkalmazható az első, illetve a második szemléletesebb eljárás. Az alábbi 9. ábrában $f_Q(J)$ és $f_{Q'}(J)$ görbe menetének hasonlósága az elméletileg számítottal (7. ábra) szembetűnő. Az ezen az alapon

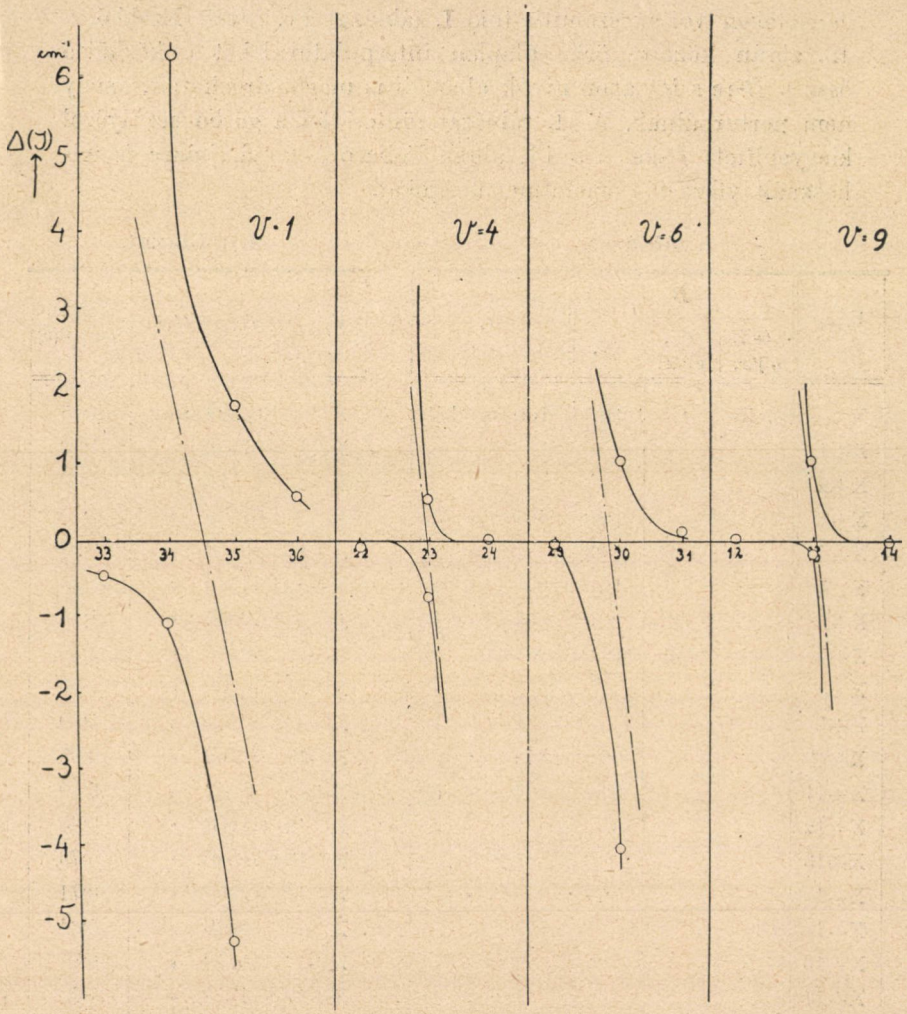
számított B, illetve C az I. táblázatban látható. (I. és II-vel jelzett rovat.)

Még ugyanerre a nívóra s a $v = 4$, 6, 9 emeleteken észlelt perturbációs helyekre vonatkozóan felrajzoltuk a 3. ábrának megfelelően a perturbációs helyek környékén az Δ-kat az összes észlelhető átmenetekből középértéket számolva.



9. ábra.

A legvalószínűbb Δ-k segélyével a $v = 1$ nívón kívül a harmadik eljárás segélyével sikerült a $v = 4$ és $v = 6$ emeleteken észlelhető perturbációból az $I^1\Sigma^-$ megfelelő perturbáló vibrációs nívója B-jét és C-jét meghatározni. (I. táblázat). Az így meghatározott C-k, illetve vibrációs emeletek magasságából, a vibrációs emeletek számát a perturbációs helyekből ismerve, extra- és interpolálva az $I^1\Sigma^-$ vibrációs nívóit a 11. ábrán látható síma görbébe fektettük. Az ily módon meghatározott vibrációs nívómagasságok, illetve C-k és a perturbációs helyek segélyével megállapított B-k a 12. ábrán vannak feltüntetve. Ezek az



10. ábra. A $v = 9$-hez hasonló képet mutat az összes többi fel nem rajzolt perturbáció. Számításra, még a harmadik eljárás alapján sem alkalmasak, mivel a perturbáció nagyon kicsi. Ugyanez magyarázza, hogy a $v = 4$-re számított B érték miért üt ki a 12 görbéből. A legmegbízhatóbb a $v = 1$ kívül még a $v = 6$-ra számított B és C értékek. A szaggatott vonal a változatlanul haladó arithmetikai közepet jelenti.

$A^1\Pi$ $v = 1$, 4, 6, emeletein kívül még a $v = 3, 4,^*$ 5, 8, 9, 11 emeleteken voltak számíthatók. I. táblázat IV. rovat. Ezekből a 12. ábrán közölt görbe alapján interpolálni lehet a közbülső összes B-re s így azon nívók állandói is meghatározhatók, amely nem perturbálnak. A II. táblázat tünteti fel a görbe segélyével kiegyenlített B-ket s a 11. ábrán látható és a számításra is felhasznált vibrációs emeletmagasságokat.

I. táblázat.

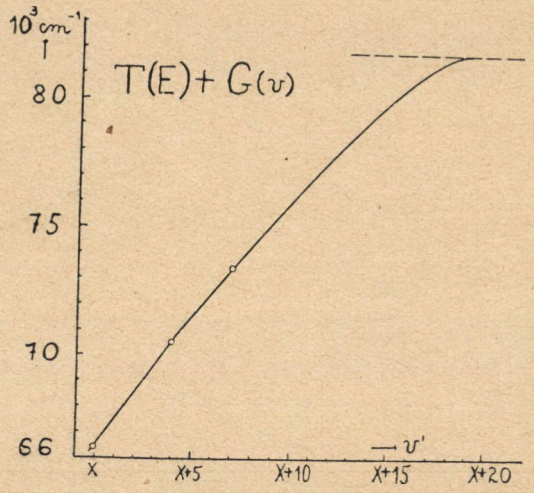
$V_{pert.}$	B			C
	I. és II. eljár.	III. eljár.	IV.	
X	1·45	1·45	1·45	150 cm^{-1} (1)
X+1				
X+2				
X+3			1·25	461 « (3)
X+4		1·33	1·33	91 « (4)
X+5			1·19	1075 « (4)
X+6			1·15	632 « (5)
X+7		1·09	1·09	321 « (6)
X+8				
X+9				
X+10			0·99	471 « (8)
X+11			0·87	105 « (9)
X+12				
X+13				
X+14			0·71	172 « (11)
X+15				
X+16				
X+17				
X+18				
X+19				

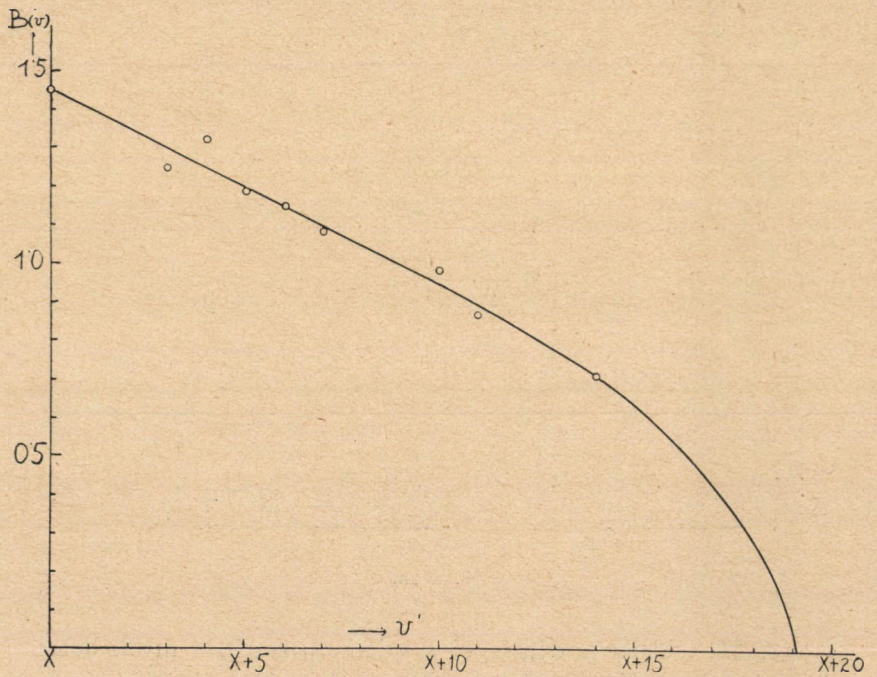
II. táblázat.

$V_{pert.}$	$T(E)+G(v)$	Kiegyenlített $B(v)$
X	66382 cm^{-1}	1·45
X+1	67462 «	1·40
X+2	68518 «	1·35
X+3	69550 «	1·30
X+4	70558 «	1·25
X+5	71542 «	1·20
X+6	72502 «	1·15
X+7	73438 «	1·10
X+8	74350 «	1·05
X+9	75238 «	1·00
X+10	76102 «	0·95
X+11	76942 «	0·90
X+12	77758 «	0·85
X+13	78550 «	0·79
X+14	79318 «	0·71
X+15	80058 «	0·64
X+16	80748 «	0·55
X+17	81344 «	0·43
X+18	81758 «	0·27
X+19	81810 «	0·00

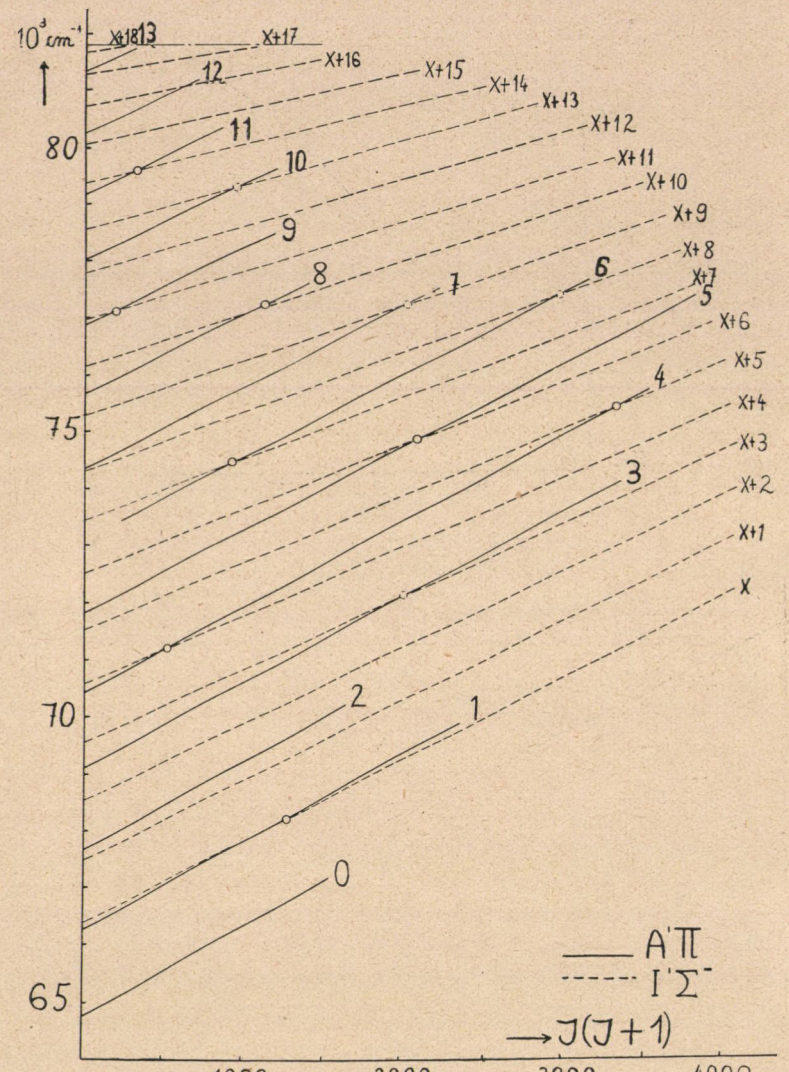
A C rovat zárójelben levő számai az $A^1\Pi$ nívó azon vibrációs kvantumszámait jelentik, mely nívóktól számítjuk az illető C-t.

* $v = 4$ emeleten két perturbáció észlelhető.





11. és 12. ábra. Az első vibrációs kvantumszámot X-el jeiöltük, mivel nem lehet tudni, hogy a $v = 0$ értéktől számítva hanyadik.



13. ábra.

A II. táblázat eredményei alapján a perturbáló nívók beleilleszthetők az $A^1\Pi$ nívói közé. E végből az $A^1\Pi$ vibrációs nívóit $J(J+1)$ függvényeképpen ábrázoltuk (13. ábra). Ilyenkor az

egyes vibrációs nívók olyan egyeneseket adnak, melyeknek iránytangensei a megfelelő B rotációs állandók. Ugyanezen az ábrán ábrázolva az $I^1\Sigma^-$ vibrációs nívóit, szintén egy egyenessereget kell kapunk, melynek az előbbi sereggel való metszéspontjai a már GERŐ (11) rajzában is megjelölt perturbációs helyek s iránytangensei az illető $I^1\Sigma^-$ vibrációs nívóin érvényes B rotációs állandók.

A számítás szerint a rajzban szaggatott körrel megjelölt helyeken is kellene perturbációnak lenni, s hogy ezt nem lehetett észrevenni, annak oka abban keresendő, hogy ugyanazon helyen még egy $^3\Pi$ perturbáció is van, melynek hatása nagyobb e $^1\Sigma^-$ perturbációnál.

Mint látható, a 11. ábrán a vibrációs magasságait feltüntető görbe $v = X + 19$-nél maximumot ad s ugyanitt a B görbe (12. ábra) 0 értéket vesz fel. E maximum magassága körülbelül 81,820 cm^{-1} azaz 10·1 Volt. Ez az egyébként várt eredmény igen jó megegyezésben van a SCHMID és GERŐ (12) által e helyütt jelzett disszociációs energiaértékkel. A SCHMID és GERŐ disszociációs schema szerint a 10·1 Volt magasságban megjelenő $^1D + {}^1D$ atomtermkombináció több Voltnyi határon belül az egyetlen, amiből $^1\Sigma^-$ term származhat. Hogy a perturbációkat okozó term konvergencia helye éppen ide esik, az tehát a SCHMID és GERŐ-schema helytállóságát is bizonyítja.

*

Jelen dolgozat a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült. Az Intézet felszerelését részben az Országos Természettudományi Tanács, részben a Széchenyi Tudományos Társaság által rendelkezésre bocsátott anyagi támogatásnak köszöni. Az utóbbi ajándéka a Monroe automatikus elektromos hajtású 8×8 számjegyes számológép is, amelynek a numerikus számításoknál igen nagy hasznát vettem.

Kedves kötelességemnek tartom, hogy leghálásabb köszönetemet fejezzem ki az Intézet igazgatójának POGÁNY BÉLA műegyetemi ny. r. tanár úrnak, a Magyar Tudományos Akadémia tagjának, aki e vizsgálat elvégzését intézetében megengedte, valamint SCHMID REZSŐ egyetemi m. tanár és GERŐ LÓRAND mű-

egyetemi tanársegéd uraknak, akik a dolgozat készítése folyamán értékes tanácsaikkal állandóan támogattak.

Összefoglalás.

Jelen dolgozat célját a kétatomos molekulák színképein a perturbációkat okozó termek jellemző állandóinak a perturbációadatok alapján való meghatározására az Intézetben kidolgozott gyakorlati eljárás elméleti alátámasztása és az alkalmazhatóság határainak megállapítása képezte.

Kimutatható volt, hogy az egymást metsző perturbált és perturbáló rotációs termek aritmetikai közepei a $\Sigma \leftrightarrow \Pi$ perturbációk esetén valóban úgy haladnak, mint ha perturbációk fel sem lépnének. Továbbá igazolja az elmélet azt a tapasztalatot is, hogy a perturbált rotációs termet tartalmazó sávokra felrajzolt $f_Q(J)$ és $f_{Q'}(J)$ görbék (az irodalomban $B'-B''$ görbe név alatt ismeretes) fel és le, illetőleg le és felszálló ágai egymást egy fél rotációs kvantumszámegységgel előbb metszik, mint maguk a rotációs termek, valamint jogosult a gyakorlati eljárásnak az a feltevése is, hogy a metszéspont a perturbált és perturbáló termekre vonatkozó $f_Q(J)$ és $f_{Q'}J)$ görbék között szimmetrikusan foglal helyet.

A fenti igazolásokon túlmenőleg sikerült a perturbáló term B és C rotációs állandóinak kiszámítására egy olyan eljárást találni, amely sikerre vezet abban az esetben is, ha nem áll rendelkezésre összetartozó perturbált vonalpár. Az elmélet lehetővé teszi továbbá a perturbációs helyek környezetében az intenzitáseloszlás kiszámítását és így ellenőrző módszert nyújt az eltolódások alapján nyert eredményekre vonatkozólag.

Az elméleti vizsgálat és a kísérleti tapasztalatok egybevetésével sikerült ezután felállítani a szénmonoxid $A^1\Pi$ nívójának vibrációs emeletein perturbációkat okozó $I^1\Sigma^-$ term vibrációs és rotációs struktúráját. Kiderült így, hogy $I^1\Sigma^-$ vibrációs termemeletei a CO-alapállapota felett éppen abban az energiamagasságban konvergálnak, — illetőleg az egyes vibrációs termekhez tartozó rotációs állandók a zérushoz tartanak — amely $^1D + {}^1D = 10{\cdot}1$ e. Volt) a CO disszociációra vonatkozólag az

Intézetben felállított schema alapján az $I^1\Sigma^-$ számára legvalószínűbbnek adódott.

Felhasznált irodalom.

1. R. Schmid, L. Gerő: Z. S. f. Phys. **94**. 386. 1935.
2. R. L. Kronig: Z. S. f. Phys. **50**. 353. 1928.
3. J. H. Van Vleck: Phys. Rev. **33**. 467. 1929.
4. M. H. Hebb: Phys. Rev. **49**. 610. 1936.
5. L. Gerő: Z. S. f. Phys **93**. 669. 1935.
6. L. Gerő: Z. S. f. Phys. **95**. 747. 1935.

Ezeken kívül az alkalmazásnál a mérési adatok szempontjából a következő munkákat vettük figyelembe.

7. D. Coster, F. Brons: Physica, **1**. 634. 1934.
8. R. Schmid, L. Gerő: ZS. f. Phys. **93**. 656. 1935.
9. L. Gerő: Z. S. f. Phys. **99**. 52. 1936.
10. Kelemen Szulpic: Dissertacio, 1936. Budapest.
11. L. Gerő: Z. S. f. Phys. **100**. 374. 1936.
12. R. Schmid, L. Gerő: Z. S. f. phys. Chemie. 1937.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15-én tartott üléséből.)

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftwissenschaften. Institutsleiter Prof. B. POGÁNY.

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER ROTATIONS- BZW. SCHWINGUNGS-KONSTANTEN VON ZWEIATOMIGEN MOLEKÜLTERMEN AUF GRUND DER STÖRUNGSDATEN.

Von ISTVAN KOVÁCS.

Vorliegende Arbeit untersucht die theoretischen Grundlagen und den Gültigkeitsbereich eines praktischen Verfahrens, das zur Bestimmung der Schwingungs- und Rotations-Konstanten von solchen zweiatomigen Molekültermen, die sich nur in Störungen offenbaren, in diesen Laboratorium ausgearbeitet wurde. Das Verfahren benutzt die im Störungsgebiet beobachteten Linienverschiebungen.

Es erwies sich, dass die arithmetischen Mittelwerte der sich überschneidenden Termen im Falle einer $\Sigma \leftrightarrow \Pi$ Störung tatsächlich ungestört verlaufen müssen und dass die Überschneidung der auf- und absteigenden Zweige der $(B'-B'')$-Kurven den Banden mit gestörtem oberen, bzw. unteren Zustand bei um eine halbe Einheit kleineren Rotationsquantenzahl eintritt, als die Überschneidung der Terme selbst, in bester Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Auch die Annahme, die sich auf Grund der Versuchsdaten gemacht wurde, dass nämlich derselbe Überschneidungspunkt sich im gleichen Abstand von den, dem gestörten und dem störenden Terme zukommenden $(B'-B'')$-Kurven befinden soll, erhält theoretische Begründung.

Über das hiemit geschilderte Verifizieren des praktischen Verfahrens hinausgehend, gelang es noch eine weitere Methode

herzuleiten, die für die Bestimmung der B- und C-Konstanten des störenden Termes auch dann brauchbar ist, wenn zusammengehörende Linienpaare an der Störungsstelle nicht beobachtet werden können. — Die theoretische Untersuchung der Intensitäts-Verteilung in der Umgebung der Störungen liefert ferner eine Kontrolle hinsichtlich der auf Grund von Linienverschiebungen abgeleiteten Deutung.

Als Anwendung der geschilderten theoretischen Ergebnisse wurden die Störungsstellen am $A^1\Pi$-Zustand des CO-Moleküls — die einen Überkreuzung mit einem $^1\Sigma$-Term zugeschrieben werden können — bearbeitet. Es gelang die komplette Schwingungs- und Rotationsstruktur des störenden $I^1\Sigma^-$-Zustandes aufzustellen und es ergab sich ferner, dass die Schwingungsquanten dieser letzteren eine Konvergenz — die entsprechenden B_v-Werte ein Verschwinden — gerade in der Energiehöhe (nämlich in 10·1 Volt) über dem CO-Grundzustand aufweisen, wo nach den von Schmid und Gerő aufgestellten Dissotiationschema des CO-Moleküls die Lage denjenigen Atomtermkombination (nämlich $^1D+^1D$), die einen $^1\Sigma^-$-Zustand zu bilden allein im Stande ist, zu liegen kommt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

ÚJABB VIZSGÁLATOK A NEMESGÁZOK SZÍNKÉPVONALAINAK ZEEMANN-JELENSÉGÉRŐL.

LŐRINCZI KATALIN-tól.

Bevezetés.

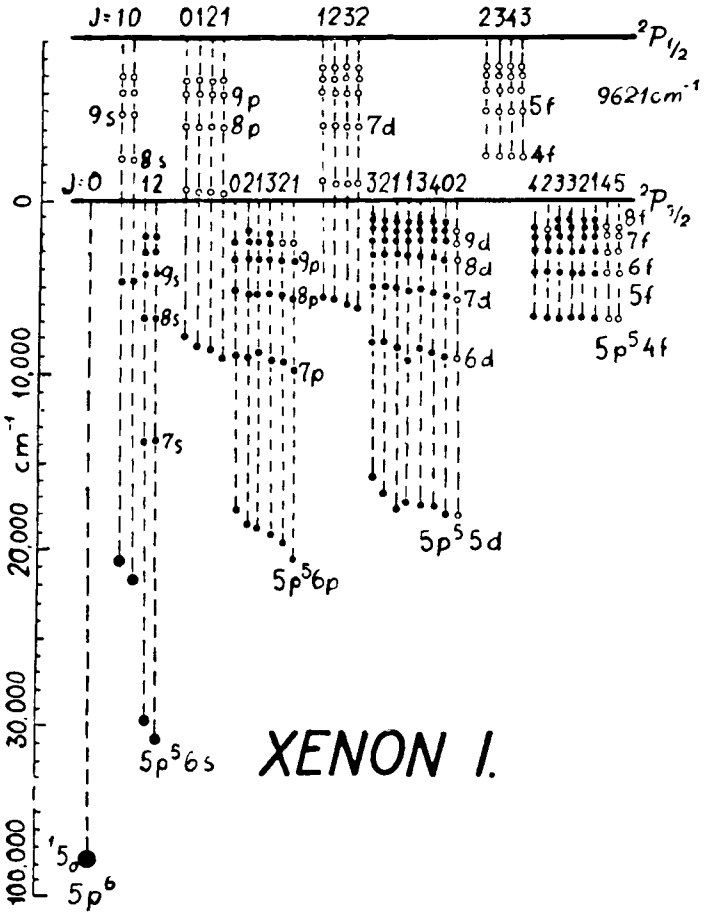
A nemesgázoknak az elemek periodusos rendszerében elfoglalt helyéből következik, hogy a nemesgázmagokat körülvevő legkülső elektron-héj két s és hat p elektronból épül fel, másszóval a héj konfigurációja s^2p^6. Ennek megfelelően a nemesgázatomok alap energiaállapotát (amely a termenergiák skálájában igen mélyen fekszik) $^1S_0$— szimbolummal szokás jelölni.

Ha egy nemesgázatomot valamilyen módon gerjesztünk, akkor legvalószínűbb, hogy a hat p elektron egyike kerül magasabb energiájú állapotba. Mindjobban gerjesztve az atomot, ez az elektron kirepülhet, vagyis az atom ionizálódik. Az egyszer ionizált nemesgázatom elektronkonfigurációja így s^2p^5, ennek megfelelően az ion alaptermjei $^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$; ezek képezik egyszersmind a gerjesztett neutrális nemesgázatom termsorozatainak határait is.

A gerjesztett p elektron állapotai különbözőek lehetnek, származhat pl. s, p, d, ... állapot. Ha a gerjesztett elektron egy s állapotba kerül, vagyis a nemesgáz atomkonfigurációja $ns^2n'p^5n''s$, akkor négy ú. n. s termet kapunk.* Ha a konfiguráció $ns^2n'p^5n''p$, akkor tíz ú. n. p termet kapunk; $ns^2n'p^5n''d$ konfigurációhoz tizenkét d term tartozik, $ns^2n'p^5n''f$-hez pedig

---

* p^5s konfigurációból származó termek a periodusos rendszer felépítésének a PAULI-elvet tekintetbe vevő interpretációja alapján ugyanazok, mint a ps konfigurációból származók. Itt $j_1 = 1/2, 3/2$; $j_2 = 1/2$, tehát $J = 1, 0, 1, 2$.



1. ábra.

tizenkét *f* term.* Az 1. ábra mutatja a xenon I. termsorozatait, a többi nemesgázé ehhez hasonló. (A termekhez PASCHEN a neon I. színképében $s_2 s_3 s_4 s_5$; $p_1 p_2 \cdots p_{10}$ stb. szinbolumokat rendelte, a termeket csökkenő termértékek szerint rendezve.) Mint az a

* *pp* konfiguráció esetén $j_1 = {}^1/_2, {}^3/_2$; $j_2 = {}^1/_2, {}^3/_2$, tehát $J = 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3,$; *pd* esetén $j_1 = {}^1/_2, {}^3/_2$; $j_2 = {}^3/_2, {}^5/_2$, tehát $J = 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4$; stb.

nemesgáztermek relatív energiaviszonyainak, a ZEEMANN-jelenségeknek és a színképvonalak intenzitásának anomáliáiból kitűnt, a nemesgázok atomjaiban az elektronok átmeneti kapcsolásban vannak, azaz nem kapcsolódnak sem az ú. n. $[LS]$, sem a $[jj]$ kapcsolásnak megfelelően. Míg $[LS]$, illetőleg $[jj]$ kapcsolás esetén a termeknek mágneses térben való viselkedését jellemző LANDÉ-féle g faktorok racionális számok, átmeneti kapcsolásnál ez csak kivételkép következik be, azonban a tényleges értékek mindig a két határesetnek megfelelő g-értékek közé esnek, sőt egyes egyszerűbb esetekben aránylag könnyebb meggondolásokkal ki is lehet számítani az átmeneti kapcsolásra érvényes g faktorokat. Így például az $np^5n's$ elektronfigurációnak megfelelő négy term közül a $J = 1$-hez tartozó két term g faktorait LAPORTE és INGLIS (1)* a következő képlettel adják meg:

$$g_{1,2} = 1 + \frac{1}{4} \pm \frac{x+1}{4\sqrt{(x+1)^2+8}}$$

ahol x az ú. n. kapcsolási parameter, melyet a négy term mágneses tér nélküli viszonylagos helyzete határoz meg. $[LS]$ kapcsolás esetén $x = \infty$ és INGLIS és LAPORTE képlete megadja a Landéféle g faktorokat: $g_1 = 1$, $g_2 = 1{,}5$ értékeket. $[jj]$ kapcsolásban $x = 0$ és $g_1 = {}^4/_3$, $g_2 = {}^7/_6$. A képlettel számított g értékek például nemesgázoknál megegyeznek a kísérleti eredményekkel.

Bár a g faktorok függenek a kapcsolástól, azonban egy általános, a kapcsolástól független tétel mégis kimondható egy és ugyanazon elektronkonfigurációhoz tartozó termekre vonatkozóan. Ez a tétel az ú. n. g összegtétel, amely szerint az ugyanazon konfigurációból származó termek közül az egyenlő J értékhez tartozó termek g faktorainak összege a kapcsolástól független. (Az előbbi példában $g_1 + g_2 = 1 + 1{,}5 = {}^4/_3 + {}^7/_6 = 2{,}5$.) Ez a tétel szolgál egyszersmind a kísérleti adatok ellenőrzésére.

Kvantummechanikai meggondolásokkal átmeneti kapcsolás esetében is, elvileg bármely elektronkonfigurációhoz tartozó termek g faktorai kiszámíthatók. Az erre vonatkozó eljárást

---

* Irodalmi utalásokat lásd a dolgozat végén.

JOHNSON és INGLIS (2) dolgozták ki. Ennek alapján INGLIS és GINSBURG (3) a neon I. $np^5n'p$ elektronkonfigurációjára vonatkozólag számítottak is g faktorokat; az általuk megadott végeredmények az észlelési adatokkal tényleg meg is egyeztek. Ezzel szemben TERRIEN és DIJKSTRA (4) szerint az INGLIS és GINSBURG-féle képletek segítségével az argon I. p^5p konfigurációjához tartozó g faktorok és a mérések között több mint 20%-os eltérés mutatkozott. Hasonlóképpen ezen laboratoriumban kísérletileg meghatározott g faktorok sem egyeztek a számítottakkal.

Jelen vizsgálat egyik célja volt ezen eltérés okát felderíteni. A következőkben ezért áttekintjük az egész számítás menetét.

I. A helyes g-formula levezetése.

Az anomális ZEEMAN-effektus kvantummechanikai tárgyalásából $[LS]$ kapcsolás esetén következik, hogy $\mathcal{H}$ nagyságú és z-tengelyirányú külső mágneses tér hatására (αLSJ)-vel jellemzett térm energiájától az $(\alpha LSJM)$-mel jellemzett term energiája

$$H = Mg\frac{eh}{4\pi mc^2}\cdot\mathcal{H}$$

értékkel különbözik, ahol g a LANDÉ-féle g faktor.

Tehát a $\mathcal{H}$ mágneses térből származó H diagonális energiamatrixnak elemei:

$$(\alpha SLJM_j \mid H^M \mid \alpha SLJM_j) = M_j o g \mathcal{H},$$

ahol

$$o = \frac{eh}{4\pi mc^2}.$$

Egy általános átmeneti kapcsolás esetén a külső mágneses értől létrejövő energiamatrixnak egy (αJM)-mel jellemzett termhez tartozó eleme szintén:

$$(\alpha JM_j \mid H^M \mid \alpha JM_j) = M_j o g \mathcal{H},$$

(α az egyenlő J-hez tartozó termek megkülönböztetésére szolgál). Itt azonban g már nem jelenti a LANDÉ-féle g faktort. Kérdés, hogy ezen g faktorokat hogyan lehet meghatározni a termek energiaértékéből és azok relatív helyzetéből.

Ha ismeretes az atom belső energiamatrixa $[LS]$ kapcsolás esetén, akkor létezik egy oly R matrix, amely ezt diagonálissá transzformálja, vagyis oly mátrixszá, amelynek elemei épp a termek energiáit adják. A-val jelölve az atom belső energiamátrixát, definiálunk egy oly R mátrixot, amelyre nézve

$$RAR^{-1} = W \text{ diagonális.} \tag{1}$$

A külső mágneses tértől származó energiamatrixot ugyancsak áttranszformálva egy közbenső kapcsolás esetére, nyerjük:

$$\mathcal{H}Mog' = \mathcal{H}MoRgR^{-1}.$$

Mármost a külső teret felfoghatjuk, mint egy perturbációt. Ilyenkor a $g' = RgR^{-1}$ mátrix elemei a perturbáció elmélet szerint a következők lesznek:

$$g(\alpha J) = \sum_{SL} R(\alpha JSL)\, g(\alpha SLJ)\, R^{*}(\alpha JSL),$$

vagy ha R reális, akkor

$$g(\alpha J) = \sum_{SL} R(\alpha JSL)^2\, g(\alpha SLJ),$$

ahol $g(\alpha J)$ jelenti a J kvantumszámhoz tartozó termek közül az α-val jelölt term g faktorát, $g(LSJ)$pedig a LANDÉ-féle g faktorokat, míg a $R(\alpha JLS)$ a transzformáló mátrix elemeit. Az R mátrix elemeit a következő módon határozzuk meg: (1) mátrixegyenlet komponensekre kiírva lesz

$$\begin{aligned}
&R_{\alpha 1}(A_{11} - W_\alpha) + R_{\alpha 2}A_{21} + \cdots + R_{\alpha n}A_{n1} = 0\\
&R_{\alpha 1}\, A_{12} + R_{\alpha 2}(A_{22} - W_\alpha) + \cdots + R_{\alpha n}A_{n2} = 0\\
&\vdots\\
&R_{\alpha 1}A_{1n} + R_{\alpha 2}A_{2n} + \cdots \qquad\qquad + R_{\alpha n}(A_{nn} - W_\alpha) = 0
\end{aligned}$$

és még n számú ilyen egyenletrendszer, ahol $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n$ áll. Ezen homogén egyenletrendszerekből R elemei meghatározhatók, mert az egyenletrendszer determinánsai zérussal egyenlők. Ugyanis ezen determinánsok egyenlők a szekuláris egyenletet adó determinánssal, ha ebbe a szekuláris egyenlet gyökeit $W_1, W_2, \ldots, W_n$-t helyettesitjük. Így tehát az R matrix elemei az aldeterminánsokkal arányosak, vagyis

$R_{al} = CB_{l1}(W_a)$ ahol B_{l1} az a-dik

egyenletrendszer determinánsának $l1$-dik aldeterminsa. C meghatározható a normálási feltételből:

$$\sum_l R_{al}^2 = 1.$$

A p^5p elektrónkonfigurációhoz tartozó termek (ls) kölcsönhatásából származó energiamátrixok ugyanazok, mintha pp konfigurációról lenne szó, vagyis JOHNSON (5) szerint

$J = 2$

	$^3D_2$	$^1D_2$	$^3P_2$
$^3D_2$	$-\frac{1}{4}(a_1+a_2)$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}(a_1-a_2)$	$\frac{1}{4}(3)^{1/2}(a_1-a_2)$
$^1D_2$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}(a_1-a_2)$	0	$\frac{1}{4}(2)^{1/2}(a_1+a_2)$
$^3P_2$	$\frac{1}{4}(3)^{1/2}(a_1-a_2)$	$\frac{1}{4}(2)^{1/2}(a_1+a_2)$	$\frac{1}{4}(a_1+a_2)$

$J = 3$

	$^3D_3$
$^3D_3$	$\frac{1}{2}(a_1+a_2)$

$J = 1$

	$^3D_1$	$^3P_1$	$^1P_1$	$^3S_1$
$^3D_1$	$-\frac{3}{4}(a_1+a_2)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2}(a_1-a_2)$	$-\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}\right)^{1/2}(a_1+a_2)$	0
$^3P_1$	$\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2}(a_1-a_2)$	$-\frac{1}{4}(a_1+a_2)$	$-\frac{1}{4}(2)^{1/2}(a_1-a_2)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}(a_1-a_2)$
$^1P_1$	$-\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}\right)^{1/2}(a_1+a_2)$	$-\frac{1}{4}(2)^{1/2}(a_1-a_2)$	0	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}(a_1+a_2)$
$^3S_1$	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}(a_1-a_2)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}(a_1+a_2)$	0

A $J = 0$-hoz tartozó termek g faktorai $\frac{0}{0}$-val egyenlők és így ezeket nem is tárgyaljuk.

a_1 és a_2 értéke

$$a_i = \frac{R\alpha^2 Z^4}{4 \cdot 5 n_i^3} \quad \text{ahol} \quad \alpha^2 = \frac{4\pi^2 e^2}{\lambda^2 c^2}$$

a finomstruktura-konstans.

Az elektrosztatikus energiák p^5p elektrónkonfiguráció esetén, ha a $^3D_3$ termet tekintjük kiindulópontnak:

$$\begin{array}{ll} {}^3D_3 : 0 & {}^1D : 12\, G_2 = a \\ {}^3P_2 : \gamma & {}^1P : \; 6\, F_2 = \gamma \\ {}^3S_1 : -\frac{3}{2}\gamma & {}^1S : -9\, F_2 + 6\, G_0 = \delta, \end{array}$$

ahol G_2, F_2, G_0 a SLATER-féle (6) radiális integrálok.

Ha tehát a p^5p elektronkonfigurációból származó termek energiáit a $^3D_3$ termtől számítjuk, akkor ezen termek energiáit adó szekuláris egyenletek bizonyos elhanyagolásokkal (például az egyik elektron spinje és a másik elektron pályaimpulzusa közt fellépő kölcsönhatást) a következők:

$$J = 2$$

$$\begin{vmatrix} -3\zeta - W & -(3/2)^{1/2} 2\theta & 3^{1/2}\theta \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} 2\theta & -2\zeta - W + a & 2^{1/2}\zeta \\ 3^{1/2}\theta & 2^{1/2}\zeta & -\zeta - W + \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$J = 1$$

$$\begin{vmatrix} -5\zeta - W & (5/3)^{1/2}\theta & -\left(\frac{10}{3}\right)^{1/2}\zeta & 0 \\ (5/3)^{1/2}\theta & -3\zeta - W + \gamma & -(2)^{1/2}\theta & \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} 4\theta \\ -\left(\frac{10}{3}\right)^{1/2}\zeta & -(2)^{1/2}\theta & -2\zeta - W + \gamma & \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} 2\zeta \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} 4\theta & \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} 2\zeta & -2\zeta - W - \frac{3}{2}\gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

ahol $\zeta = \frac{1}{4}(a_1 + a_2)$ és $\theta = \frac{1}{4}(a_1 - a_2)$.

---

* Általában az *ls* kölcsönhatásból keletkező energia kifejezésében szereplő $a = \frac{R\alpha^2 Z^4}{n^3 l (l + \frac{1}{2})(l+2)}$.

A $J = 2$-hez tartozó termek LANDÉ-féle g értékei:

	$^3D_2$	$^1D_2$	$^3P_2$
$^3D_2$	$\frac{7}{6}$		
$^1D_2$		1	
$^3P_2$			$\frac{3}{2}$

Tehát egy $J = 2$-hez tartozó W_α energiájú term g faktora bármely átmeneti kapcsolás esetén

$$g = \frac{7}{6} R_{\alpha 1}^2 + R_{\alpha 2}^2 + \frac{3}{2} R_{\alpha 3}^2,$$

ahol $R_{\alpha 1}$, $R_{\alpha 2}$, $R_{\alpha 3}$ a (2) determináns aldeterminánsaiból B_{11}, B_{12}, B_{13}-ból úgy adódik, ha azokba W_α-t helyettesítünk és megszorozzuk a normálási tényezővel

$$C = -\frac{1}{\sqrt{B_{11}^2 + B_{12}^2 + B_{13}^2}} \text{-el.}$$

A $J = 1$-hez tartozó termek LANDÉ-féle g faktorai pedig a következők:

	$^3D_1$	$^3P_1$	$^1P_1$	$^3S_1$
$^3D_1$	$\frac{1}{2}$			
$^3P_1$		$\frac{3}{2}$		
$^1P_1$			1	
$^3S_1$				2

tehát egy $J = 1$-hez tartozó W_α energiájú term g faktorát a

$$g = \frac{1}{2} R_{\alpha 1}^2 + \frac{3}{2} R_{\alpha 2}^2 + R_{\alpha 3}^2 + 2R_{\alpha 4}^2$$

képlet adja meg, ahol $R_{\alpha k}$ a (3) determinánsból adódik.

A $J=2$ esetében az $R_{\alpha' k}$ elemeket részletesen kiírva kapjuk:

$$R_{\alpha' 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\alpha - 2\zeta - W_{\alpha'}}{2^{1/2}\theta}\varrho_{\alpha'} + \frac{\zeta}{\theta}\right] R_{\alpha' 3}$$

$$R_{\alpha' 2} = \varrho_{\alpha'} R_{\alpha' 3}$$

$$R_{\alpha' 3} = \left[{}^1/_3\left(\frac{\alpha - 2\zeta - W_{\alpha'}}{2^{1/2}\theta}\varrho_{\alpha'} + \frac{\zeta}{\theta}\right)^2 + \varrho_{\alpha'}^2 + 1\right]^{-1/2},$$

ahol

$$\varrho_{\alpha'} = \frac{\sqrt{2}(\gamma - W)}{W - \alpha}; \quad \zeta = {}^1/_4(a_1 + a_2); \quad \theta = {}^1/_4(a_1 - a_2).$$

Ezzel szemben INGLIS és GINSBURG képleteiben

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\gamma - W}{\alpha - 4\zeta - W}\right)$$

szerepel. A $J=1$-hez tartozó termek g faktorainak INGLIS és GINSBURG által közölt képletei helyesek.

AZ INGLIS és GINSBURG-nál közölt képletekkel és a helyes formulával számított g faktort a neon I. színkép esetében a $W=128$ cm^{-1} energia mellett az alábbi kis táblázat tartalmazza:

W	g mért	g helyes	g hibás
128	1·137	1·142	1·247.

Az energiamatrix fölállításában történt elhanyagolások miatt a számított és mért energiaértékek között általában mégis marad gyakran számottevő eltérés. Ez az oka annak is, hogy a helyesen számított g faktorok sem egyeznek teljesen a mért eredménnyel. A g faktorok kiszámításánál célszerűbb a mért energiaértékek helyett a számítottakat használni. A helyes képlettel kiszámítva mármost a neon I., argon I., krypton I. és xenon I. termjeinek g faktorait, az I. táblázatot kapjuk:

I. táblázat.

Neon I. $2p^5 3p$

$a_1 = -403$; $a_2 = 40$; $\alpha = 537$; $\gamma = 946$			
$J=1$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
1381	1376	1·34	1·402
1115	1151	0·999	1·046
464	370	0·669	0·627
−1399	−1328	1·984	1·907
$\Sigma g_m = 4{\cdot}992$; $\Sigma g_{sz} = 4{\cdot}982$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
1201	1201	1·301	1·379
658	729	1·229	1·154
167	128	1·137	1·142
$\Sigma g_m = 3{\cdot}667$; $\Sigma g_{sz} = 3{\cdot}675$			

Argon I. $3p^5 4p$

$a_1 = -878$; $a_2 = 68$; $\alpha = 471$; $\gamma = 1070$			
$J=1$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
2033	2030	1·37	1·312
1669	1600	0·825	0·888
624	626	0·82	0·808
−1361	−1305	1·99	1·976
$\Sigma g_m = 5{\cdot}005$; $\Sigma g_{sz} = 4{\cdot}984$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
1827	1728	1·26	1·294
775	908	1·30	1·29
154	120	1·11	1·086
$\Sigma g_m = 3{\cdot}670$; $\Sigma g_{sz} = 3{\cdot}660$			

Argon I. $3p^5 5p$

$a_1 = -977$; $a_2 = 44$; $\alpha = 24$; $\gamma = 454$			
$J=1$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
1516	1542	1·45	1·392
1465	1500	0·61	0·66
208	338	1·01	1·091
−283	−327	1·90	1·885
$\Sigma g_m = 4{\cdot}97$; $\Sigma g_{sz} = 5{\cdot}028$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
1526	1550	1·18	1·184
241	369	1·42	1·401
56	41	1·09	1·086
$\Sigma g_m = 3{\cdot}69$; $\Sigma g_{sz} = 3{\cdot}661$			

Krypton I. $4p^5 5p$

$a_1 = -3632$; $a_2 = 246$; $\alpha = 200$; $\gamma = 1278$			
$J=1$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
5624	5661	1·425	1·392
5311	5342	0·62	0·708
670	828	1·028	1·041
−1125	−1032	1·891	1·907
$\Sigma g_m = 4{\cdot}964$; $\Sigma g_{sz} = 5{\cdot}048$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
5624	5741	1·163	1·194
829	1034	1·40	1·396
13	188	1·116	1·08
$\Sigma g_m = 3{\cdot}679$; $\Sigma g_{sz} = 3{\cdot}670$			

Az I. táblázat folytatása.

Krypton I. $4p^56p$.

$a_1 = -3567$; $a_2 = 44$; $\alpha = 195$; $\gamma = 208$			
$J=1$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
5399	5395	1·384	1·448
5395	5260	0·635	0·614
198	138	1·046	1·084
—229	—294	1·82	1·812
$\Sigma g_m = 4{\cdot}885$; $\Sigma g_{sz} = 4{\cdot}958$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
5399	5450	—	1·168
247	224	1·406	1·343
6	46	1·11	1·156
$\Sigma g_{sz} = 3{\cdot}667$			

Xenon I. $5p^56p$

$a_1 = -7094$; $a_2 = 374$; $\alpha = -24$; $\gamma = 1188$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
10876	10832	—	1·424
9978	10378	0·781	0·733
553	702	1·009	1·099
—1134	—1288	1·75	1·684
$\Sigma g_{sz} = 4{\cdot}940$			
$J=2$			
W_m	W_{sz}	g_m	g_{sz}
10759	10759	1·178	1·164
809	911	1·381	1·407
283	449	1·113	1·096
$\Sigma g_m = 3{\cdot}672$; $\Sigma g_{sz} = 3{\cdot}667$			

II. A nemesgázok színképvonalainak Zeeman-jelenségeire vonatkozó kísérleti adatok kiterjesztése.

A nemesgázok közül először a neonI. színképének ZEEMAN-felbontását vizsgálta meg BACK (7). Az argonI. színképének ZEEMAN-jelenségeivel először BAKKER (8) foglalkozott; ő a $3p^54s$ elektronkonfiguráció termjeinek g faktorait mérte meg. TERRIEN és DIJKSTRA (4) igazolták BAKKER eredményeit és az argonI. színkép ultravörös és ultraibolya részében levő vonalainak mágneses felbontásából levezették $3p^54p$ és a $3p^55p$ konfigurációhoz tartozó termek g faktorait. Kimutatják, hogy a kapcsolás függ az n főkvantumszámtól, mert a $3p^54p$ és a $3p^55p$ termek g faktorai és termmagasságainak relatív helyzete különböző, míg az argon $3p^55p$ termek és a krypton $4p^55p$ termek g értékei és maguknak a termeknek a relatív helyzetei hasonló szerkezetet mutatnak.

A kryptonI. színképvonalainak ZEEMAN-felbontásával először

LOHMANN (9) foglalkozott, kvalitatíve vizsgálta meg az 5570 Å és 5870 Å hullámhosszú vonalak felbontását. Behatóan vizsgálat tárgyává POGÁNY tette a krypton atom színképének ZEEMAN-jelenségét. Először a színkép ultravörös részét (10), majd az ibolya és az ultraibolya részét (11) vizsgálta, és megállapította a $4p^5 5s$, $4p^5 5p$ és $4p^5 6p$ elektrónkonfigurációkhoz tartozó termek g faktorait. POGÁNY (12) foglalkozott a xenonI. színképvonalak ZEEMAN-felbontásával is, és megállapította az $5p^5 6s$, $5p^5 6p$, $5p^5 7p$ konfigurációkhoz tartozó termek nagy részének g faktorait. Jelen vizsgálat folyamán észlelések végeztettek a következő vonalakon:

II. táblázat.

A) Argon I.

λÅ	Szimbolum	Mágneses tér
6766	$2p_6—4s'_1$	15940 GAUSS
6307	$2p_6—5d_3$	15880 «
6296	$2p_2—5s_1''$	15880 «
5912	$2p_{10}—4s_1'$	15880 «
5860	$2p_{10}—3s_2$	15880 «
5834	$2p_6—5s_1''$	15880 «
5558	$2p_{10}—5d_3$	15880 «
5451	$2p_{10}—4s_5$	15880 «
5187	$2p_{10}—5s_1''$	15880 «
4702	$1s_2—3p_{10}$	15900 «
4628	$1s_2—3p_8$	15900 «
4596	$1s_2—3p_7$	15900 «
5162	$2p_{10}—6d_5$	15900 «

B) Krypton I.

λÅ	Szimbolum	Mágneses tér
6504	$2p_8—5d_5$	24000 GAUSS
6488	$2p_7—5d_2$	24000 «
6151	$2p_6—6d_3$	24100 «
		24300 «
6056	$2p_{10}—5d_5$	11230 «
		16160 «
		24100 «
		27300 «
6012	$2p_{10}—5d_3$	11230 «
		16160 «
5993	$1s_4—2p_4$	11230 «
		16160 «
		17000 «
5870	$1s_4—2p_2$	10300 «
5702	$2p_7—7d_1''$	24100 «
		27000 «
4410	$1s_2—3p_3$	15760 «

C) Xenon I.

λÅ	Szimbolum	Mágneses tér
6668	$2p_{10}$—$5d_6$	21300 Gauss
6487	$2p_{10}$—$5d_2$	21100 «
		22400 «
		23000 «
		27300 «
6472	$2p_{10}$—$5d_5$	21100 «
		22400 «
		27300 «
6469	$2p_{10}$—$5d_1''$	24860 «
		21100 «
		22460 «
6198	$2p_{10}$—$4s_5$	24860 «
		23000 «
		27300 «
5895	$2p_{10}$—$6d_2$	24860 «
		21300 «
		23000 «
		27300 «
5875	$2p_{10}$—$6d_5$	24860 «
		21300 «
		23000 «

C) Xenon I.

λÅ	Szimbolum	Mágneses tér
4829	$1s_4$—$3p_7$	15780 Gauss
		22200 «
4734	$1s_4$—$2p_3$	15780 «
		26000 «
4697	$1s_5$—$3p_9$	15780 «
		22200 «
		27500 «
4690	$1s_5$—$2p_4$	22200 «
4671	$1s_5$—$3p_8$	15780 «
		27500 «
		25260 «
4582	$1s_4$—$2p_1$	26000 «
		15780 «
4500	$1s_5$—$2p_2$	15780 «
		26000 «
		27500 «
4078	$1s_4$—$4p_7$	27500 «

Ezek tekintetbevételével a jelenlegi állapot szerint a nemesgáztermek g faktoraira vonatkozó kísérleti adatok az alábbiak:

III. táblázat.

A). Argon I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	g érték
$1s_2$	7504 Å	++	1·10
$1s_4$	7514 «	++	1·40
$2p_2$	7273 «		1·37
	8265 «	++	1·369
	6965 «	+	1·378
$2p_3$	7067 «		1·248
	8408 «	+ és ++	1·248
	7384 «		1·248

A) Argon I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	g érték
$2p_4$	8521 Å	+ és ++	0·819
	7948 «		0·815
$2p_6$	7635 «	+ és ++	1·302
	8006 «		1·300
$2p_7$	7724 «	+ és ++	0·840
	8103 «		0·825
$2p_8$	8425 «	+ és ++	1·121
	8015 «		1·11

III. táblázat folytatása:

A) Argon I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	*g* érték
$2p_{10}$	5451 Å		1·97
$3p_2$	4335 «		1·445
	4181 «	++	1·45
	3948 «		1·45
$3p_4$	4345 «		0·61
	4191 «	++	0·60
$3p_3$	4333 «		1·18
	4044 «	++	1·20
	3947 «		1·17
$3p_6$	4266 «		1·43
	4158 «	++	1·41
$3p_7$	4272 «		1·01
	4164 «	++	1·00
	4596 «		1·01

A) Argon I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	*g* érték
$3p_8$	4300 Å		1·09
	4628 «	++	1·08
$3p_{10}$	4522 «		1·90
	4251 «	++	1·89
	4702 «		1·91
$6d_5$	5162 «		1·49
$5s_1''$	5834 «		1·439
	6296 «		1·441
	5187 «		1·436
$3s_2$	5860 «		1·176
$5d_3$	5558 «		1·409
	6307 «		1·41
$4s'$	6766 «		1·19
	5912 «		1·20

B) Krypton I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	*g* érték
$1s_2$	8508 Å	+	1·26
	7685 «	+	1·23
	5866 «	+	1·24
$1s_4$	8298 «	+	1·25
	8190 «	+	1·27
	7587 «	+	1·24
	5879 «	+	1·241
$2p_2$	8263 «	+	1·163
	5562 «	+	1·19
	5870 «	+	1·16
$2p_3$	8281 «	+	1·425
	7854 «	+	1·45
	5570 «	+	1·45
$2p_4$	8508 «	+	0·619
	8059 «	+	0·67
	5993 «		0·62
$2p_6$	8190 «	+	1·400
	7601 «	+	1·39
$2p_7$	8298 «	+	1·028
	7694 «	+	1·01
$2p_8$	8776 «	+	1·12
	8104 «	+	1·11

B) Krypton I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	*g* érték
$2p_{10}$	8928 Å	+	1·902
	6056 «	+	1·884
	6082 «	+	1·884
$3p_3$	4286 «	+	1·384
	4410 «		1·39
$3p_4$	4425 «	+	0·631
	4300 «	+	0·639
$3p_6$	4273 «	+	1·397
	4453 «	+	1·417
$3p_7$	4463 «	+	1·049
	4282 «	+	1·042
$3p_8$	4318 «	+	1·096
	4502 «	+	1·123
$3p_{10}$	4362 «	+	1·827
	5649 «	+	1·808
	5866 «	+	1·818
$5d_5$	6056 «		1·32
	6504 «		1·33
$5d_3$	6012 «		1·277
$6d_3$	6151 «		1·252
$5d_2$	6488 «		1·247
$7d_1''$	5702 «		0·885

\+ Pogány (10 és 11). — ++ Terrien és Dijkstra (4).

III. táblázat folytatása:

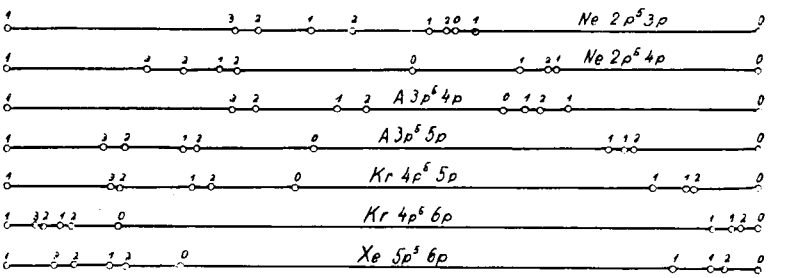
C) Xenon I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	g érték
$1s_2$	8346 Å	+	1·297
$1s_4$	8952 «	+	1·200
$2p_3$	8346 «	+	1·183
	4534 «	+	1·19
	4734 «	+	1·178
$2p_4$	4916 «	+	0·781
$2p_6$	8231 «	+	1·38
	8952 «	+	1·381
$2p_7$	8409 «	+	1·009
$2p_{10}$	6198 «		1·747
	6668 «		1·765

C) Xenon I.

Term. szimbolum	Milyen vonalból	Észlelő	g érték
$3p_6$	4843 Å	+	1·348
$3p_9$	4923 «	+	1·121
$3p_{10}$	4792 «	+	1·732
	5028 «	+	1·738
$3p_7$	4829 «		1·022
$4p_6$	4109 «	+	1·378
$4p_7$	4116 «	+	1·030
$5d_2$	6487 «		1·234
$6d_2$	5895 «		1 266
$5d_5$	6472 «		1·569
$6d_5$	5875 «		1·565
$5d_1''$	6469 «		0·825

A nemesgázok p^5p konfigurációjából származó termek energiáinak relatív helyzetét mutatja a 2. ábra. Mint látszik e neon I. $2p^53p$ konfigurációtól az argon I. $3p^55p$ konfigurációig a termek

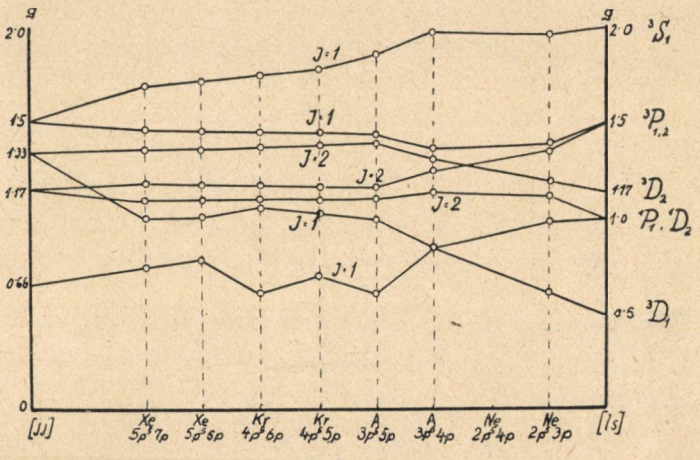


2. ábra. A számok a termekhez tartozó J értékeket jelentik.

relatív helyzetei erősen változnak, míg aztán a xenon $5p^56p$ konfigurációig hasonlóak.

A termek g faktorait a 3. ábra szemlélteti. Ezek értékei is erősen változnak a neon $2p^53p$ konfigurációitól az argon $3p^55p$

+ Pogány (12).



3. ábra.

konfigurációig, míg aztán a g értékek hasonlók és fokozatosan mennek át a [jj] kapcsolásnak megfelelő értékekbe.

III. Kísérleti berendezés.

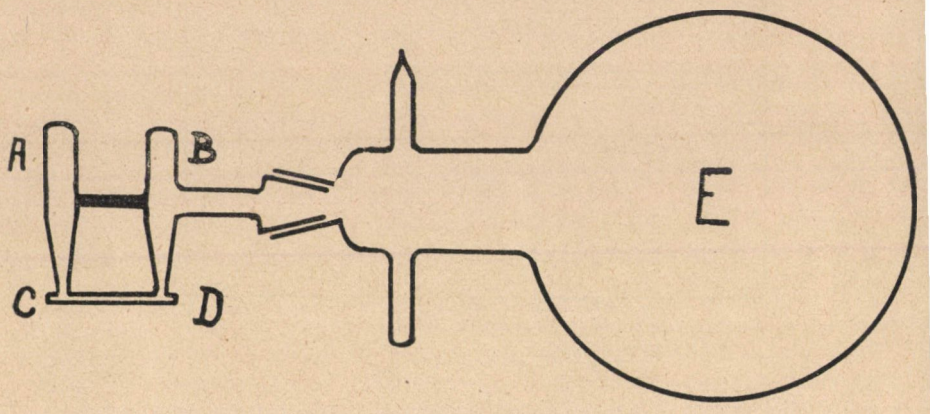
A jelen vizsgálat folyamán észlelésre kerülő színképvonalak relatíve kis intenzitása szükségessé tette a kísérleti berendezés átalakítását.

1. Fényforrás.

Fényforrásul egy nemesgázzal megtöltött és aztán leforrasztott kisülési cső szolgált, melynek alakját 4. ábra mutatja. A és B hengeres részekre két vékony fémlemez van rácsavarva, ezek az elektródok, a tulajdonképpeni fényforrás CD kapilláris, ahonnan a fény C-nél hosszanti irányban jön ki a csőből. A nyomásváltozás megakadályozására szolgál a nagy ürtartalmú E üveggömb. A kvarcból készült CD kapillárist gyakran ki kellett cserélni, mert a kisülés folyamán A és B elektródokról leváló kvarcrészecskék a kapillárisba kerülve, annak C ablakát elhomályosították.

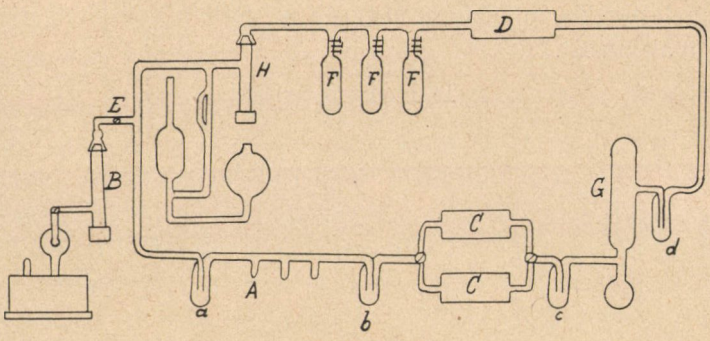
A kisülési csőnek nemesgázzal való megtöltésére először az 5. ábra szerinti berendezést használtuk:

A csövet A-nál felforrasztva, B szivattyúval evakuáltuk, közben a C, D magnézium- és rézoxid kályhákat gázlánggal hevítve, az üveg- és kvarc-fal, valamint a magnézium és réz-



4. ábra.

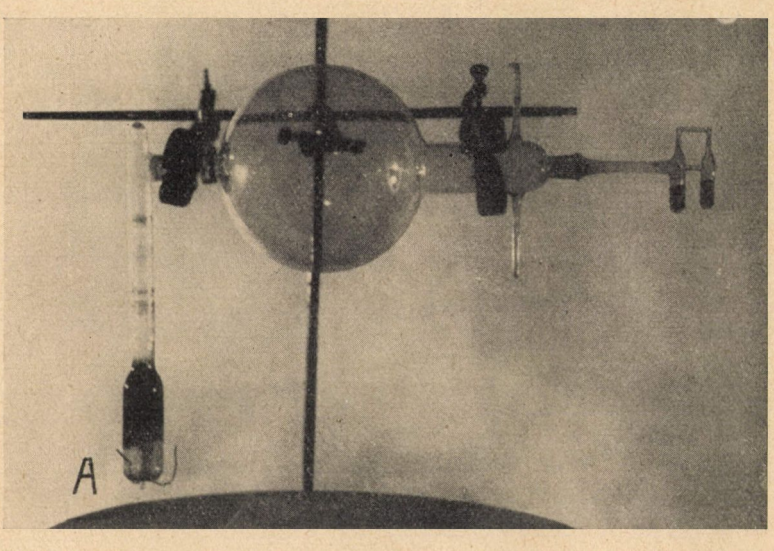
oxid által elnyelt gázok is eltávoztak. Amikor a nyomás 10^{-6} $Hg\ mm$ alá süllyedt, a szivattyút E csappal elzárva, F tartályokból alkalmas redukáló csaprendszerek segítségével lehetett



5. ábra.

a megfelelő nemesgázzal a kisülési csövet lassan megtölteni 1—2 mm nyomásra. A nemesgázban lévő, valamint a csapzsír stb.-ből származó szennyeződést: N, CO, H stb.-t az állandóan hevített rézoxid és magnézium elnyelte, míg a G tartályban

lévő foszforpentoxid a vízgőz elnyeléséről gondoskodott. A szivattyúban keletkezett *Hg*-gőzök pedig *a*, *b*, *c*, *d* kifagyasztókban lecsapódtak. (*a*, *b*, *c*, *d* egy alkohol és szilárd széndioxid-keverékkel megtöltött DEWAR-edénybe volt süllyesztve.) A gáz 1—2 napig cirkulált a tisztító berendezésben, a cirkulációról *H* szivattyú gondoskodott. Amikor a kisülési csőben lévő gázt gerjesztve annak spektruma nem mutatott már semmiféle szennyeződést sem (erről egy kis kézi spektroszkóppal lehetett meggyőződni) a csövet leforrasztottuk.

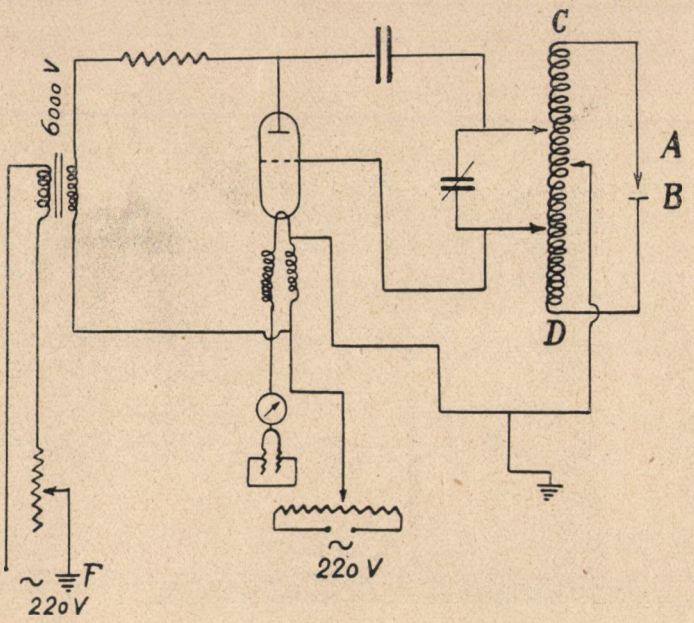


6. ábra. *A* az elektromos kályha.

A csőnek ilymódon történt megtöltése és tisztítása azonban hosszadalmas volt. Ezenkívül a kályhák vascsövei nem tömítettek jól. Ezért később egy más gáztisztító eljáráshoz folyamodtunk. A magnézium- és rézoxidkályhákat leszerelve, helyettük a kisülési csőbe kis elektromos kályhát forrasztottunk, amelyben bárium-magnézium pasztillák voltak. Miután a cső az előbb leírt módon evakuáltatott, a nemesgázzal való megtöltéssel egyidejűleg a bárium-magnéziumot elpárologtattuk: a lecsapódó gőzök elnyelték a szennyeződéseket. Az új kisülési cső alakját a

6. ábra mutatja. Az ilymódon készült csőben a gáz sokkal tisztább lett és a cső órák alatt elkészült.

A kisülési csövet 400 W-os Philips-adócsővel előállított nagyfeszültségű rezgések gerjesztették. A rezgéstkeltő berendezés kapcsolását a 7. ábra mutatja. A kisülési cső A és B közé volt iktatva, CD autotranszformátort addig kellett változtatni, míg a fellépő indukciók, kapacitások és az effektív ellenállás oly



7. ábra.

rezgőkört adtak, hogy a csőben lévő gáz erős fénnyel világított és az adócsőben az anódveszteség nem haladta túl a megengedett nagyságot.

2. Mágneses tér.

A mágneses tér 10,000—27,000 Gauss közt váltakozott. Előállítása eredetileg egy Boas-gyártmányú, de az intézetben léghűtés helyett olaj, illetve vízhűtésre átalakított elektromágnessel történt. (Ugyanis a mágneses térerősség, azaz áramerősség ingadozásai-

nak megakadályozása céljából fontos volt, hogy a környezet hőmérsékletének változásai ne befolyásolják a mágnes tekercseit. Ezért a mágnes szárait duplafalú edény vette körül, amely olajjal volt megtöltve és a két fal között vízvezetéki víz cirkulált.)

A mágneses térerősség számítása ismert felbontású vonalak segítségével történt, vagy pedig oly vonal alapján, amely a g összegtétel alapján a kapcsolástól független felbontást mutat, tehát olyant, mint tiszta $[LS]$ kapcsolás esetén. Pld. a krypton I. 8112 Å hullámhosszúságú vonala, mely az $1s_5-2p_9$ átmenetből származik, a kapcsolástól független felbontást mutat, mert s_5-hez $J=2$ és p_9-hez $J=3$ tartozik és az s termek J értékei közt $J=2$ és a p termek közt $J=3$ csak egyszer fordul elő.

3. Spektrográf.

A ZEEMANN-felbontások mérésére üveg LUMMER-lemez szolgált, mely előfelbontás céljából egy üvegoptikájú, nagy fényerejű ZEISS-spektrográffal volt kombinálva. A LUMMER-lemez ZEISS-gyártmányú, átmérője 240 mm, vastagsága $d=5{,}718$ mm, $BK7$ tipusú üvegből készült.

HARTMANN-formulája a következő

$$n = 1{,}4971 + \frac{91{,}285}{\lambda - 1209},$$

ahol λ Å egységekben használandó.

A felvételek abszolút kiértékelése céljából szükség van a

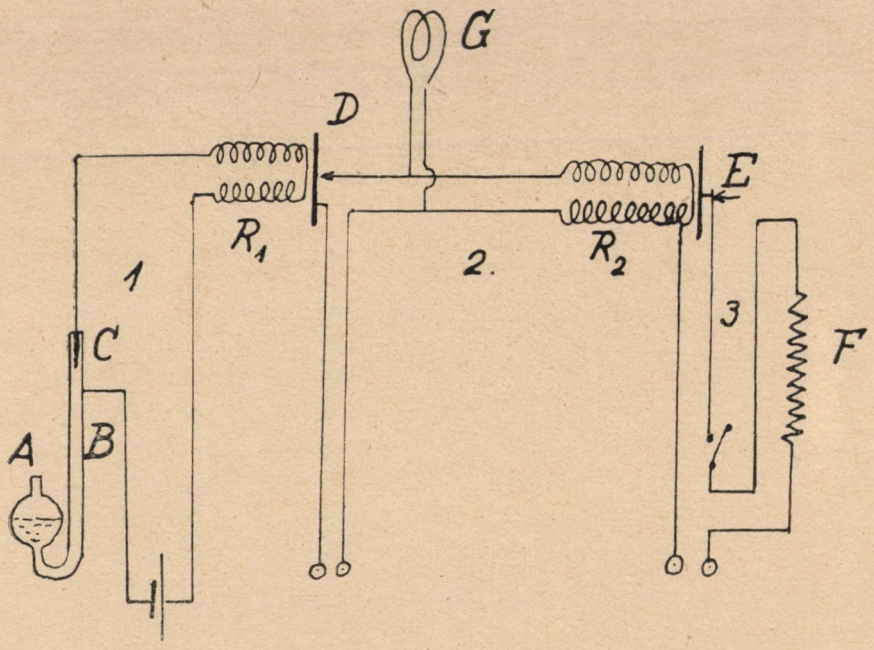
$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{\lambda^2\sqrt{n^2-1}}{2d\left(n^2-1-\lambda n\frac{dn}{d\lambda}\right)}$$

diszperzióintervallum ismeretére. A $\frac{d\lambda}{dk}$ hányados megmondja, hogy mekkora az a $d\lambda$ hullámhosszintervallum a k-ad rendű színképben amely a λ hullámhosszúság k-adik és $k+1$-ik színképe közé esik. (A k-ad rendű $\lambda+d\lambda$ egybeesik a $k+1$-ed rendű λ színképével.)

A kisülési cső kapillárisának C ablakát egy 10 cm gyujtó-

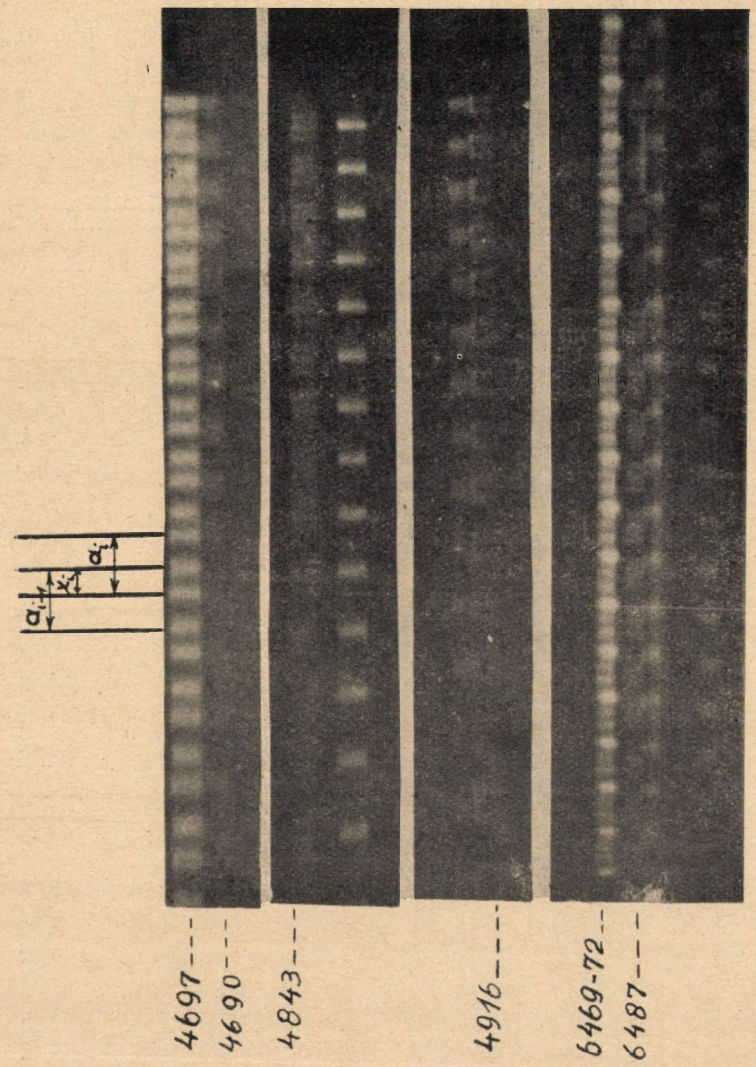
távolságú TESSAR képezte le a spektrograf kollimátorának résére. A fényforrás és a TESSAR között foglalt helyet polarizátorként egy Nicol, a π és σ összetevők elkülönítése céljából.

A hőmérséklet állandóságát az intézet alagsori spektroszkópiai laboratóriumában szokásos hőmérsékletszabályozó készülék biztosította.



8. ábra.

A készülék kapcsolását a 8. ábra mutatja. A spektroszkópszobában van elhelyezve az A önműködő higanykapcsoló. A gömbalakú részben a higany felett éter van, mely éter telített gőzének nyomása 24 C° hőmérsékleten épp akkora, hogy a D szárban lévő higany C csúcshoz ér, vagyis 1. áramkör záródik. Ekkor R_1 szolenoid D kalapácsot magához húzza, így a 2. áramkörben áram nincs és R_2 szolenoid E kalapácsot elengedi, tehát a 3. fűtőkörben sincs áram. Ha a szobában a hőmérséklet csökken, a higany-kontaktus megszakad, D kalapács zárja a 2. áramkört, ezáltal E zárja 3. áramkört és F, a szobában elhelyezett



9. ábra. A xenon I. néhány vonalának ZEEMAN felbontása.

fűtőtest fűt. A 2. áramkörbe párhuzamosan kapcsolt G lámpa ellenőrzésre szolgál. Így a hőmérséklet állandósága akár 1 C° századrészére is biztosítva van.

A felvételekhez ILFORD-gyártmányú «Hypersensitive panchromatic» lemezeket használtam. A LUMMER-felvételek kiértékelése a HUMPHREYS (13), MAC NAIR (14) és POGÁNY által használt lineáris interpolációval történt: Ha egy vonal két mágneses összetevője közt lévő $d\lambda$ hullámhosszkülönbséget akarjuk megmérni (9. ábra), akkor az eljárás a következő: A két vonal x_i távolságát osztjuk az $\frac{a_i+a_{i-1}}{2}$-vel, vagyis x_i-t tartalmazó alaptávolságok középértékével, az így kapott értéket szorozzuk a $\frac{d\lambda}{dk}$ függvényből vett, az illető λ-hoz tartozó $\frac{d\lambda}{dk}$ értékkel. Egy felvételen 15 – 20 rendben megtalálható ugyanaz a mágneses felbontás, egy felvétel tehát ugyanennyi független mérést szolgáltat. A felvételek kimérése az eredeti negatívon ZEISS-komparátorral történt.

*

Jelen dolgozat a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült. Az intézet felszerelését részben az Országos Természettudományi Tanács, részben a Széchenyi Tudományos Társaság által rendelkezésre bocsátott anyagi támogatásnak köszöni. A kísérleteknél használt LUMMER-lemez a Magyar Tudományos Akadémia ajándéka.

Kedves kötelességemnek tartom, hogy leghálásabb köszönetemet fejezzem ki az Intézet igazgatójának, dr. POGÁNY BÉLA műegyetemi ny. r. tanár úrnak, a Magyas Tudományos Akadémia tagjának, aki e vizsgálat elvégzését intézetében megengedte, valamint dr. SCHMID REZSŐ egyetemi m. tanár úrnak, aki a vizsgálat folyamán értékes tanácsaival állandóan támogatott.

Ezúton mondok köszönetet a Ganz-féle Villamossági Művek R. T.-nak, amely a színképek gerjesztéséhez szükséges nagyfeszültségű transzformátort ajándékozta az Intézetnek, továbbá a Vátea Rádiótechnikai Gyár R. T.-nak, amelynek nagylelkű támogatása tette lehetővé a nagyfrekvenciájú adócső többszöri

regenerálását, végül pedig a «Hydroxigén» Gázokat gyártó és Gázokat elválasztó R. T.-nak, amely a kísérleteknél használt szilárd széndioxidot díjtalanul bocsátotta rendelkezésemre.

Összefoglalás.

Jelen dolgozat célja volt egyrészt felderíteni a p^5p konfigurációjú spektrális termek g faktoraira INGLIS és GINSBURG által megadott formulák és a részint TERRIEN és DIJKSTRA, részint e laboratoriumban a megfelelő nemesgáz-termeken végzett észlelések közötti eltérések okát, másrészt kiterjeszteni a nemesgázok vonalainak ZEEMAN-jelenségére vonatkozó kísérleti anyagot, részben a már meglevő észlelések ellenőrzése, részben még nem vizsgált termek tanulmányozása szempontjából.

Kitűnt, hogy az elméleti g formulák és az idevonatkozó nemesgáztermek kísérletileg észlelt g faktorai közötti diszkrepanciának csak kisebb hányada vezethető vissza a levezetés folyamán végzett elhanyagolásokra. Az eltérés főoka ellenben az energiamatrixot diagonálissá transzformáló matrix elemeinek INGLIS és GINSBURG által elvégzett kifejtésébe becsúszott számítási hiba volt, aminek kiküszöbölése után az elméleti formulák, úgy TERRIEN és DIJKSTRA, mint ezen laboratoriumból publikált kísérleti adatokkal — az említett elhanyagolásoknak megfelelő hibahatáron belül — már kifogástalan egyezést mutattak. (I. táblázat.)

A kísérleti anyag kiterjesztésével — miután a vizsgálandó színképvonalaknak a már publikáltakhoz képest aránylag alacsony intenzitása miatt az észlelések elé tornyosuló akadályokat részint a kisülési csövek átszerkesztése, részint a gerjesztési körülmények célszerűbb kialakítása révén sikerült leküzdeni — a jelenleg felderített és a ZEEMAN-jelenség révén identifikált nemesgáztermek rendszerét a szövegben közölt II. és III. számú táblázatok tartalmazzák.

Irodalom.

1. O. LAPORTE, D. R. INGLIS: Phys. Rev. 35. 1337. 1930.
2. D. R. INGLIS and M. H. Johnson: Phys. Rev. 38. 1642. 1931.
3 D. R. INGLIS and GINSBURG: Phys. Rev. 43. 194. 1933.

4. J. Terrien et H. Dijkstra: Journ. de Physique, Ser. 7. Tome 5. 439. 1934.
5. M. H. Johnson: Phys. Rev. 38. 1628. 1931.
6. J. C. Slater: Phys. Rev. 34. 1293. 1929.
7. E. Back: Ann. d. Physik 76. 317. 1925.
8. Bakker C. J.: Nature 1930. 126. 955. és Naturwiss. 1930. 18. 1100.
9. Lohmann: Phys. Rev. 33 297. 1929.
10. Pogány B.: A Magy. Tud. Akadémia Math. és Természettudományi Értesítője, LI. 1934. és Z. f. Phys. 86. 729. 1933.
11. Pogány B.: Z. f. Phys. 93. 364. 1934.
12. Pogány B.: Zeeman Verhandelingen 1935. 336.
13. C. J. Humphreys: B. S. Jour. Research 7. p. 459. 1931.
14. Mac Nair: Phil. Mag. 2. p. 613. 1926.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. március 15.-én tartott üléséből).

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ung. Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften in Budapest. Institutsleiter: Prof. B. Pogány.

NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN ZEEMAN-EFFEKT DER EDELGASLINIEN.

Von KATALIN LÖRINCZI.

Für die Berechnung der g Faktoren im allgemeinen Koppelungsfall der Konfiguration p^5p — intermediär zwischen $[LS]$ und $[jj]$ Koppelung — haben INGLIS und GINSBURG Formeln angegeben die aber (wie aus Arbeiten einerseits von TERRIEN und DIJKSTRA, anderseits von POGÁNY über die ZEEMAN-Effekte der Edelgasbogenlinien hervorgeht) von den experimentellen Daten abweichende Werte liefern. Um die Ursachen dieser Diskrepanz aufzuklären, wurde einerseits die Ableitung der Formeln von neuem durchgeführt, anderseits das Beobachtungsmaterial weiter ausgedehnt.

Es ergab sich, dass der Grösstbetrag der Abweichung einem Rechenfehler, der die Endformeln von INGLIS und GINSBURG entstellt, zuzuschreiben ist; die Vernachlässigungen, die während der Ableitung begangen wurden, spielen dabei eine zwar nicht gänzlich untergeordnete, aber doch ziemlich mässige Rolle. Die richtigen Formeln liefern Werte, die mit den Beobachtungsdaten (im Rahmen der Genauigkeitsgrenzen der Vernachlässigungen) befriedigend übereinstimmen.

Die Ausdehnung der ZEEMAN-Effektbeobachtungen auf bisher nicht untersuchte Edelgaslinien stiess — wegen der verhältnismässig niedrigen Intensitäten dieser — auf bedeutende Schwierigkeiten, die sich nur schwerlich, nach entsprechendem Umbau der Entladungsröhre und der Anregungsapparatur überwinden liessen. Die zur Zeit aufgeklärten und durch ZEEMAN-Effektuntersuchungen verifizierten Terme von Argon, Krypton und Xenon sind in den Tabellen II. und III. des Textes zusammengestellt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

A KOZMIKUS SUGÁRZÁS MÉRÉSE A DOROGI BÁNYÁBAN.

BARNÓTHY JENŐ- és FORRÓ MAGDOLNÁtól.

A kozmikus sugárzás legkeményebb komponensének áthatolóképességét ionizációskamrával újabb időben REGENER,(1) WEISSCHÄDEL (2) a Bodeni-tóban 250 m mélységig (számlálócsővel is (3); CLAY (4) a Vörös-tengerben 270 m-ig, CORLIN (5) svédországi vasbányában 660 m víznek megfelelő réteg mögött mérte, a 785 m mögött talált intenzitást mint az ionizációs kamra saját menetét tekintve, a 660 m mélységben talált intenzitás még meghaladta méréshibájának 27-szeresét. A legújabb időkben NISHINA és ISHII (6) vasúti alagútban 2500 m vízaequivalensig végeztek méréseket, azonban az intenzitáskülönbségek már 490 m-től kezdve a hibahatár alatt maradtak. Koincidencia módszerrel KOHLHÖRSTER (7) a strassfurti sóbányában a kozmikus sugárzást 600 m vízäquivalensig tudta követni. Az intenzitás e mélységben még meghaladta hibájának háromszorosát. Nagyobb mélységekben eddig méréseket nem végeztek.

1936 június és júliusában a Salgótarjáni Kőszénbánya R.-T. dorogi bányájában 315 m mélységben — megfelel 732 m vízäquivalensnek — méréseket végeztünk 3-szoros koincidenciakészülékkel.

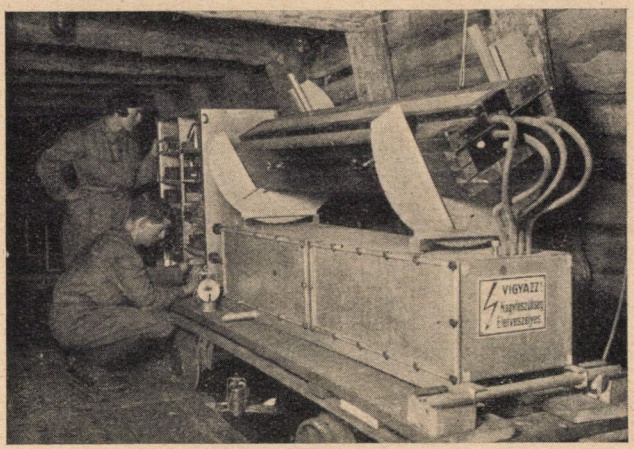
Mérőberendezés. A 2 mm falvastagságú vörösrézcsőből készült számlálócsövek hossza 1 m, belső átmérője 4 cm volt; üvegbe forrasztva 100 mm Hg nyomású Argonnal és 12 mm Hg nyomású Alkohollal töltöttük meg (TROST szerint(8).) Párhuzamos tengelyekkel cinklemezzel bélelt és ugyanilyen válaszfalakkal ellátott faládában nyertek elhelyezést. A faláda két osztókör segítségével a

csőtengelyekkel párhuzamos vízszintes tengely körül forgatható volt és helyzetét 15 fokonként lehetett rögzíteni. Az osztókör alapállása a számlálócsőtengelyek síkjának vízszintes helyzete volt, ennek vízszintes voltát a számlálócsövekre felfektetett libella segítségével állítottuk be és helyességét többször ellenőriztük, azonban nem tapasztaltunk észrevehető eltérést az első beállítástól.

A számlálócsövek működéséhez szükséges 1200 Volt feszültséget Pertrix-anódtelepekből nyertük. A számlálócsövek érzékenységének állandóságáról a BARNÓTHY-féle lökésnagyság-szabályozó gondoskodott. A koincidenciák jelzésére a Fizikai Intézetben immáron több mint 25,000 órán át kipróbált BARNÓTHY-féle koincidenciakapcsolást alkalmaztuk, melynek felbontóképessége $1{,}76 \cdot 10^{-5}$ sec. A koincidenciák regisztrálását egyidejűleg egy telefonbeszélgetésszámoló és egy kronoszkop végezték; utóbbi lényegében egy morsegépből állt, melynél a papírelőtolás sebességét egy óraszerkezet szabályozta. A regisztráló papírszalag kimérése módot adott, a koincidenciák időbeli eloszlásának megfigyelésére. Az egyes csövek beütéseinek számolására egy impulzusszámlálót (9) építettünk a készülékbe, azonban erre csak a külszíni mérésekben volt szükség, mert lent a bányában egy cső beütésszáma átlag percenként csak 67 volt, mely kis beütésszámot a számolószerkezet is kfiogástalanul győzte. Egy cső megszólalási valószínűsége — a 2-es és 3-as koincidenciák viszonyából meghatározva — a felszínen 95%.

A berendezés üzembentartására 110 Volt váltóáram állott rendelkezésünkre; feszültsége azonban úgy hosszantartó és 20%-ot meghaladó ingadozásokat, mint többórás áramszüneteket mutatott. Ezért a feszültséget előbb 220 V-ra feltranszformáltuk, majd pedig vashidrogén ellenállásokkal annyira stabilizáltuk, hogy — mint azt a bekapcsolt regisztráló Voltmérő mutatta — ingadozása $\pm$ 1 Volton belül maradt. A Voltmérő regisztrálópapírjáról az áramszünetek időpontját és tartamát is leolvashattuk. Az elektroncsövek katodját akkumulátorok izzították; az akkumulátorokat pedig egy szárazegyenirányító két szűrőkör közbeiktatásával Puffer-kapcsolásban töltötte. Az anódfeszültséget két párhuzamosan kapcsolt anodegyenirányító szolgáltatta, ködfénycsöves stabilizátorral. Párhuzamosan velük kellő számú száraz telepet kap-

csoltunk, melyek a fűtő akkumulátorokkal egyetemben biztosították a berendezés kifogástalan működését több órán át tartó áramszünetek esetére is, amint azt a regisztrálószalagok révén megállapíthattuk. A nagyfeszültségű telep, az egyenirányító és a koincidenciaberendezés egy-egy vasvázú leforrasztott cinklemezburkolatú dobozban nyert elhelyezést, melyek rácsavarható gumitömítésű fedelekkel vízmentesen elzárhatók voltak. A számlálócsövek fadoboza ugyancsak vízmentesen volt tömítve és hajlékony, árnyékolt, kiskapacitású, vízmentes hozzávezetésekkel csatlakozott

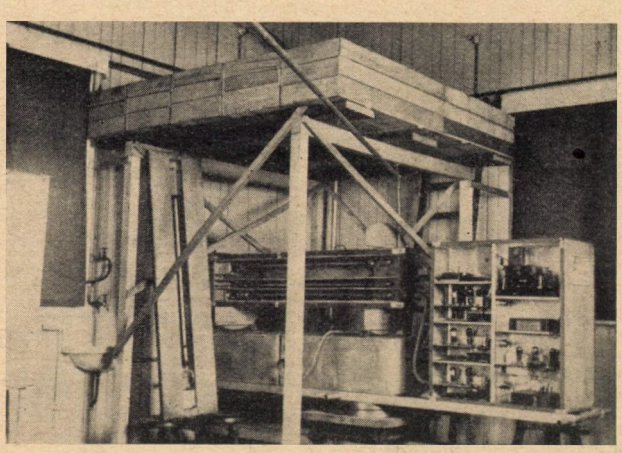


1. ábra.

a koincidenciadobozhoz. Ezen elővigyázatra a vízcsöpögés és a tárna nagy, 95% relatív-nedvessége miatt volt szükség. Megfelelően elhelyezett P_2O_5-ös szárítóedényekkel a relatív nedvességet a dobozokban 65%-ra, a számlálócsövek dobozában pedig 40%-ra tudtuk lenyomni. A készülék egyes részeit egy 3 m hosszú vaskeretre csavaroztuk le, mely rugalmas alátámasztásokkal egy 4-tengelyű tetőkocsin nyugodott. Az egész berendezést — súlya kocsi nélkül 450 kg — működésképes állapotban szállítottuk a tárnába, hol június 1-től augusztus 3-ig megszakítás nélkül üzemben volt. Átlag kétnaponként ellenőriztük működését és az egész idő alatt csupán két ízben mutatkozott üzemzavar, egyszer egy 37 óráig

tartó, az egyik elektroncsövön belül keletkező rövidzárlat folytán, másodszor egy kb. két napig tartó, egy elfelejtett kapcsolás miatt. 1. ábra mutatja a készüléket a tárnában, 2. ábra nyitva, forgóvázon 20 gr/cm^2 szénréteg alatt az intézet tornyában.

Véletlen koincidenciák. A nagy mélységekben várható kis intenzitás miatt a véletlen koincidenciák számának pontos ismerete elengedhetetlen. A koincidenciaberendezés felbontóképességét a Fizikai Intézet tornyában elhelyezett kozmikus sugárzási laboratóriumban mértük, éspedig úgy, hogy 5 m távolságban elhelyezett



2. ábra.

és a záporok (showerek) ellen 3 cm ólommal védett számlálócsövekkel mértük a 2-es koincidenciák számát. Az egyes csövek beütésszáma 693, ill. 720 volt percenként, $23^h\ 10^m$ alatt összesen 407 koincidenciát mértünk, amiből a felbontóképesség $\vartheta = 1{\cdot}76 \pm 0{\cdot}10.10^{-5}$ sec nagyságúnak adódik. 315 m mélységben a csövek beütésszáma percenként középértékben 67-re csökkent és így a bányában a véletlen 2-es koincidenciák száma óránként 0·16 volt. A számlálócsőtengelyek síkjának vízszintes helyzetében azonban a záporok miatt (lásd később) $1{\cdot}58 \pm 0{\cdot}13$ 2-szeres koincidenciát észleltünk óránként. A véletlen 3-as koincidenciák száma a

$$3\,[2.N_{xy}.N_z\vartheta] = 1{\cdot}86.10^{-4}\ \text{Koinc./óra}$$

képletből adódik. (Az egyes számlálócsőpárok koincidencia számaiban (N_{xy}) mutatkozó kis különbségektől eltekintettünk). Vagyis kereken minden 5000-ik órára jutott egy véletlen 3-as koincidencia. Számuk tehát a ténylegesek mellett feltétlenül elhanyagolható.

I. táblázat.

Elrendezés	Abszorbens tömeg 10^2 gr/cm^2	Mérési idő percben	Regrisztrált koincidenciák	Koincidencia óránként	Levonva saját menet
a	837*	8115	278	2·06 ± 0·14	1·77 ± 0·21
h	732	1053	5	0·285 ± 0·163	—
b	825*	8180	135	0·990 ± 0·091	0·777 ± 0·095
c	949*	8125	117	0·863 ± 0·088	0·650 ± 0·092
d	1116*	4599	46	0·600 ± 0·074	0·387 ± 0·079
e	1487*	11058	73	0·396 ± 0·047	0·183 ± 0·055
f	2550*	12440	45	0·217 ± 0·025	0·004 ± 0·038
g	732	13503	48	0·213 ± 0·028	—
j	732	5083	15	0·237 ± 0·054	—
l	732	4723	124	1·58 ± 0·13	1·42 ± 0·13
i	732	1372	3	0·131 ± 0·095	—
k	732	1439	2	0·083 ± 0·059	—
m	732	3848	48	0·74 ± 0.16	0·58 ± 0·16
		83538	939		

Saját menet *b*—*f* elr.-re ..... 0·213±0·028
« « *a* « ..... 0·285±0·16
« « *l* és *m* « ..... 0·16 ±0·01

A mérés kivitele. Sajnos, a mélyebb tárnákban uralkodó bányaléc miatt a dorogi bányában nem tudtunk — mint ahogy eredetileg reméltük — 315 m-nél nagyobb mélységet elérni. Hogy nagyobb rétegvastagságok mögött is végezhessünk méréseket, a számlálócsőtengelyek síkjának különböző ferdítése mellett mértünk.

* Az abszorbens tömegeket a 16 térrész (l. 10. old.) középvonalának rétegvastagságából, a megfelelő érzékenységszámok (E_γ) súlya arányában számítottuk.

A készülék egy oldalharántban úgy volt felállítva, hogy a számlálócsőtengelyek iránya és a forgástengely a haránt hosszirányával párhuzamos volt. Ezen irány az északi iránnyal kelet felé 33°-os szöget zárt be. A tengelysík forgatása a függőlegestől kelet felé történt, miután ebben az irányban a tekintetbe jövő terep felszíne csak kisebb — átlag 20 m-es — magasságkülönbségeket mutatott.

Az egyes irányokban és az egyes elrendezésekben nyert eredmények az I. táblázatban vannak összefoglalva. A számlálócsövek elrendezését a 3. ábra *a*—*m* vázlataiból olvashatjuk ki. A táblázatban megadott közepes hibát, a kronoszkop regisztráló szalag kimérése révén, az egyes egymásután következő koincidenciák időközéből számítottuk. A hibaértékek általában valamivel kisebbek, mint a koincidenciák összszámából számított statisztikus hibák.

Saját menet. Mint az az I. táblázatból kiolvasható, a tengelysík vízszintes helyzetében (*g* elr.) is kaptunk mérhető intenzitást, annak ellenére, hogy a véletlen koincidenciák száma feltétlenül elhanyagolható. A következő kísérletek bizonyítják, hogy ezt a vízszintes helyzetben észlelt intenzitást nem egy vízszintesen beeső sugárzás hozza létre, hanem záporok okozzák:

1. Háromszögelrendezésben (*j* elr.) kb. ugyanakkora erősséget észleltünk, mint vízszintesen (*g* elr.).

2. A 2-es koincidenciák száma vízszintes helyzetben a szélső csövek ugyanakkora tengelytávolsága mellett 7·4-szerese volt a 3-as koincidenciák számának (*l* és *g* elr.), jóllehet, a véletlen koincidenciák száma még 2-es koincidenciák esetében is csak a valódiak 10%-a volt.

3. A 2-es koincidenciák száma a felére csökkent, amikor a csövek felső és egymásfelé fordított oldalait 1·5 cm ólommal burkoltuk (*m*).

A 3-as «záporkoincidenciák»* képezik méréseink számára a saját menetet és számukat az egyes helyzetekben talált intenzitá-

* Záporkoincidencia alatt értjük egyazon korpuszkulazápor egyes sugarai által kiváltott koincidenciákat, ténylegesek alatt pedig az egyetlen részecske áthaladása révén kiváltott koincidenciákat.

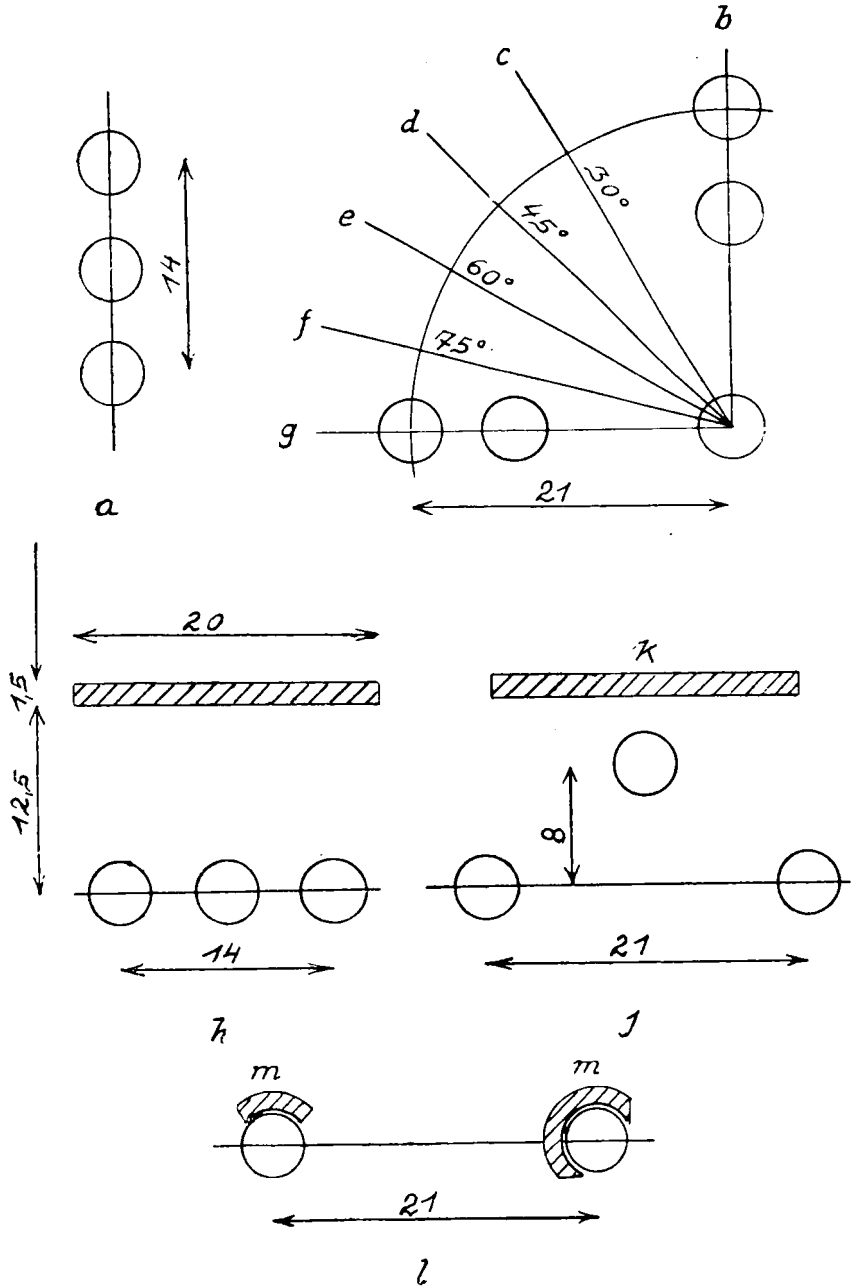
sokból le kell vonni (I. táblázat utolsó oszlopa). Mindenesetre ezáltal jobb hiányában feltételeztük, hogy a záporkoincidenciák száma minden ferdítés mellett egyforma. Valószínű, hogy ez a legferdébb irányokra, 60°-ra és 75°-ra igaz, márpedig ezen irányok intenzitáskülönbségének pontos ismerete a legfontosabb.

Hatótávolság és abszorpcióegyüttható. Először azon feltevés alapján dolgoztuk fel a mérési eredményeket, hogy a beeső primársugár vagy maga váltja ki a koincidenciákat, vagy amennyiben szekundär sugarai révén (vagy záporkorpuszkulákkal), úgy ezek iránya csupán lényegtelenül tér el a primársugár irányától.

Nem tagadható, hogy bányamérésekben az abszorbeálóréteg tömegeloszlását sokkal nehezebben és pontatlanabbul lehet meghatározni, mint vízrétegek alatt végzett mérésekben.(10) Hisszük azonban, hogy sikerült a rétegmeghatározás pontatlanságát annyira csökkenteni, hogy az elért intenzitásmeghatározás pontossága mellett elhanyagolható. A rétegvastagságok meghatározására a következő adatok álltak rendelkezésünkre: egy aerofotografikus felvételek és geodetikus mérések alapján készített 1 : 10,000 léptékű térkép és a tekintetbe jövő 2 km^2-nyi területen 30 fúrólyuk jegyzőkönyve és fúrásmintája. Utóbbiakból megfelelő eloszlásúakat válogattunk ki és 15 drb 1 m-nél nagyobb rétegvastagság fúrásmintájának sűrűségét a Földtani Intézet szívességből meghatározta.

Példaként a II. táblázatban közöljük a mérési helyhez legközelebb eső fúrólyuk adatainak alapján a rétegvastagságok és sűrűségek értékeit.

A számlálócsőberendezés látóterének kiterjedése a tengely irányában 156° és rá merőleges irányban 22°. E látóteret a tengelyirányban a számítások céljára 16 drb 10° hosszúságú térrészre osztottuk. Mindegyik térrész középvonalára, minden egyes állásban felrajzoltuk a térkép és a fúrás jegyzőkönyvek alapján szerkesztett geológiai metszetet 1 : 2500 arányban. A geológiai metszetek alapján az áthatolt rétegvastagságot grafikusan, az abszorbeáló tömeget pedig a fúrásminták fajsúlyából határoztuk meg. A III. táblázatban az így nyert abszorbensvastagságok (d_v) vannak 10^2gr/cm^2 egységben (m. víz) az egyes állásokra (0°, 30°, 45°, 60°) fel-



3. ábra.

II. táblázat.

Réteg-vastagság	Anyag megnevezés	Fajsúly	Anyag-eloszlás %-ban
6·20 m	Sárga lösz	2·02	1·77
27·25 «	Sárga homokkő	2·30	8·89
95·55 «	Szürke márga homokkal	2·26	30·52
51·00 «	Szürke márga	2·30	16·58
40·45 «	« «	2·34	13·38
3·13 «	« «	2·37	1·02
5·80 «	« «	2·32	1·90
1·39 «	« «	2·26	0·44
8·22 «	Világosszürke márga	2·30	2·67
15·50 «	Szürke márga	2·25	4·93
5·91 «	« « homokkal	2·25	1·88
5·90 «	Világosszürke márga	2·28	1·90
26·29 «	Szürke márga	2·35	8·73
16·56 «	Sötétszürke márga	2·28	5·34
0·41 «	Szén	1·45	0·08
	Középsűrűség	2·29	

tüntetve. Az első oszlopban találjuk az egyes térrészek érzékenység számát (E_v) cm² fok²-ben a

$$E_v = \frac{d\,\frac{\beta}{2}}{2}\left[\frac{l}{2}\sin 2\gamma + l\gamma + r\cos^2\gamma\right]_{\gamma_1}^{\gamma_2}$$

formula alapján számítva, hol l és d a számlálócsövek hossza és átmérője, r a két szélső számlálócső tengelyének merőleges távolsága. β a látótér szögnyílása a tengelyirányra merőleges síkban és γ_1, ill. γ_2 a térrész két határa és a látótér középvonala által bezárt szög.

III. táblázat.

ν	E_ν	d_ν 10^2 gr/cm^2 (m. víz)			
		0°	30°	45°	60°
1.	790	2311·5	2311·5	2317·2	2430·0
2.	4414	1482·4	1493·8	1549·0	1735·4
3.	10215	1107·4	1106·3	1136·8	1437·5
4.	17402	912·0	941·8	1085·6	1401·8
5.	25141	749·8	884·4	1020·0	1350·1
6.	32547	714·2	855·6	1002·8	1342·7
7.	38661	702·6	840·6	1000·5	1359·8
8.	42757	718·8	828·0	1016·6	1404·2
9.	42757	747·5	860·2	1045·4	1454·8
10.	38661	778·6	902·8	1089·0	1507·6
11.	32547	798·1	983·2	1171·8	1602·0
12.	25141	836·0	1037·3	1253·5	1702·0
13.	17402	929·2	1093·6	1280·0	1657·2
14.	10215	1223·6	1253·5	1384·6	1650·2
15.	4414	1907·8	1883·7	1902·1	2020·6
16.	790	2700·2	2858·9	2940·6	3054·4

Feltételezve, hogy a sugárrészecskék meghatározott diszkrét hatótávolságúak, úgy az egyes állásokban észlelt intenzitáskülönbségek azáltal jönnek létre, hogy a kevésbbé ferde irányokból, a kisebb rétegvastagságnak megfelelően, a sugárzás az egész látótér nagyobb részében érvényesülhet, mint a ferdébb irányokból. Első közelítésben az egyes térrészeket, ill. érzékenységszámaikat a szerint soroltuk be vagy hagytuk ki, hogy középvonaluk rétegvastagsága egy felvett értéknél kisebb vagy nagyobb. Próbálgatással oly rétegvastagság értéket kerestünk, melyre a látóterek így tekintetbe jövő részei érzékenységszámainak viszonya ugyanaz, mint a mért intenzitások viszonya. Az intenzitásviszonyokat legjobban tudtuk megközelíteni, ha feltételezzük, hogy két komponens létezik, melyeknek hatótávolsága $9{\cdot}0.10^4$, ill. $14{\cdot}2.10^4$ gr/cm^2 körül van. A III. táblázatban a látótereknek ekkor tekintetbe jövő részeit körülhatároltuk. Ezután meghatároztuk az egyes térrésze-

ken belül $9{\cdot}0.10^4$, ill. $14{\cdot}2.10^4$ gr/cm^2 körül 2500—2500 gr/cm^2-ként az egyenlő rétegvastagságú vonalak helyzetét, és interpolációval kiszámítottuk, hogy ennek megfelelően az egyes térrészeket milyen érzékenységi számmal kell tekintetbe vennünk. Ez a pontosabb analízis azt eredményezte, hogy a puhább komponens hatótávolsága $9{\cdot}3\pm0{\cdot}5.10^4$ gr/cm^2, $1{\cdot}3.10^{-6}$ koinc./cm^2 fok^2 óra intenzitás mellett; és a keményebb hatótávolság $14{\cdot}5\pm0{\cdot}6.10^4$ gr/cm^2, $1{\cdot}2.10^{-6}$ koinc./cm^2 fok^2 óra intenzitással. A két komponens intenzitása tehát közel 6,000-red része a tengerszinten észlelhető vertikális koincidenciákénak.

Sajnos, a hatótávolságból a részecskék energiája, még elektronsugárzás feltételezése mellett is, igen nehezen határozható meg, mert az energiaveszteségre vonatkozó, általunk ismert újabb formulák lehetetlenül nagy értékeket szolgáltatnak ily nagy hatótávolságok esetében a kezdeti energiára. Miután valamennyi formula szerint az energiaveszteségek növekvő kezdeti energiával nőnek, nyilván a kezdeti energia alsó határát nyerjük, ha feltételezzük, hogy nagy kezdeti energiákra az energiaveszteségek akkorák, mint amekkorákat kisebb kezdeti energiákra kísérletileg meghatároztak. ANDERSON és NEDDERMEYER (12) szerint 70 és 120.10^6 eVolt kezdeti energia esetében a közepes energiaveszteség 91, ill. 90.10^6 eVolt 1 cm Pb úthosszankénti. Tömegarányosan átszámítva ólomról márgára, az általunk talált két komponens kezdeti energiája $0{\cdot}7.10^{12}$, ill. $1{\cdot}1.10^{12}$ eVolt. BHABHA (12) és BETHE (13) felhívták a figyelmet arra a körülményre, hogy primaer protonsugárzás esetében, a kísérletileg talált hatótávolságokból túlnagy kezdeti energiaértékek következnek, mert a sugárzás útjának egy részét neutronként gyakorlatilag energiavesztesség nélkül teheti meg.

Mérési eredményeinket olyképpen is tárgyalhatjuk, hogy feltételezzük, hogy az intenzitás a rétegvastagsággal exponenciálisan csökken. A tengelysík egyes állásaiban az intenzitást a következő összegképlet állítja elő:

$$J_\alpha = J_0 \sum_{\nu=1}^{\nu=16} E_\nu e^{-\mu d_\nu},$$

ahol J_α az illető állásban mért intenzitás, J_0 a komponens inten-

zitása a légréteg határán E_ν az egyes térrész érzékenységszáma (lásd III. táblázat) és d_ν a hozzátartozó rétegvastagság a térrész középvonalában.

A számítások az IV. táblázatban összeállított abszorpciós-együttható értékekhez vezetnek:

IV. táblázat.

Helyzet	Mélység 10^2 gr/cm^2	μ (cm^2/gr)
0°—30°	830— 958	$1{\cdot}40.10^{-5}$
30°—45°	958—1133	$3{\cdot}00$
45°—60°	1133—1518	$1{\cdot}99$
		Közép: $2{\cdot}13 \pm 0{\cdot}48{\cdot}10^{-5}$
0°—60°*	830—1518	$2{\cdot}14 \pm 0{\cdot}62{\cdot}10^{-5}$

Az itt megadott mélységértékeket az I. táblázat adataiból $\mu = 2{\cdot}2.10^{-5}$ cm^2/gr abszorpciós együtthatóval való korrekció útján nyertük.

KOLHÖRSTER 500 m vízaequivalens alatt $\mu = 1{\cdot}7.10^{-5}$ cm^2/gr értéket talál. A különbség onnan származhatik, hogy KOLHÖRSTER a saját menetben csak a véletlen koincidenciák számát veszi tekintetbe és a záporokat nem.

JÁNOSSY (18) koincidenciaelméletének felhasználásával — azimut-szimmetrikus irányeloszlást tételezve fel a tárnában — az irányeloszlás következő közelítő kifejezéséhez jutunk:

$$R(\vartheta) = R(0).[-0{\cdot}07 + 1{\cdot}47\ \cos^2\vartheta - 0{\cdot}40\ \cos^4\vartheta],$$

hol $R(O) = 2{\cdot}54.10^{-6}$ koincidencia/cm^2, fok^2 óra a függőleges intenzitás.

Korpuszkulazáporok. A saját menet tárgyalásakor rámutattunk azon jelenségekre, melyek bizonyítják, hogy nemcsak a számlálócsövek háromszögelrendezésében, hanem a vízszintes helyzetben

* Miután a 75°-os állásban az intenzitás nulla, e helyzetet nem vettük tekintetbe, jóllehet a hibahatárokon belül hasonló abszorpciós-együttható értékhez vezet.

mért 2-es és 3-as koincidenciák is záporkoincidenciák. Hogy az összehasonlítást a felszínen végzett mérésekkel tökéletesebbé tegyük, az intézet tornyában a készülék felett egy 4 m^2 kiterjedésű 20 gr/cm^2 vastagságú szénréteget helyeztünk el, ugyanolyan magasságban, mint amilyen magasan volt a szénréteg a készülék felett a bányában. E szénrétegre nem annyira azért volt szükség, hogy ugyanolyan atomsúlyú anyag kerüljön a számlálócsövek fölé, mint a réteg, melyben a záporok a bányában kiváltódtak, — hisz a szén atomsúlya igen közel fekszik a levegő atomsúlyához, — hanem hogy a záporkiváltás ugyanolyan geometriai körülmények közt történjék, mint a bányában. (A záporrészecskék hatótávolságának megfelelő levegőréteg 380 m magas, s így e réteg felső részeiben keletkező záporok részecskéi a készülékig érve, már annyira szétszóródtak, hogy nem okozhatnak koincidenciákat.) A következőkben az összehasonlításra felhasznált valamennyi zápormérést ezen szénréteg alatt végeztük.

A számlálócsövek 1·5 cm ólommal való páncélozásával (2-es koincidencia vízszintesen) végzett méréseinkből a záporrészecskék abszorpció együtthatójára az V. táblázatban talált értékeket nyertük.

V. táblázat.

	Intenzitás ólom nélkül	Intenzítás ólommal	μ cm^2/gr-ban
A bányában	$1{\cdot}42 \pm 0{\cdot}13$	$0{\cdot}58 \pm 0{\cdot}16$	$5{\cdot}3.10^{-2}$
Felszínen	$189{\cdot}5 \pm 2{\cdot}2$	$132{\cdot}0 \pm 2{\cdot}7$	$2{\cdot}1.10^{-2}$

A tökéletlen páncélozás miatt az abszorpciós együtthatók vagy 10%-al nagyobbak is lehetnek. Mint látható, a bányában az abszorpció együttható nagyobb, a záporrészecskék energiája tehát valószínűleg kisebb. Másrészt azonban úgy látszik, hogy a csövek felett elhelyezett ólomrétegnek (lásd VI. táblázat), jóllehet, a benne keletkező záporok korpuszkulái mind a három csőbe eljuthatnak, inkább intenzitáscsökkentő hatása van, míg a felszínen az ólom ráhelyezése után is nőtt még a koincidenciaszám.

VI. táblázat.

Elrendezés	Felszínen 20 gr/cm² szén alatt		Bányában szénréteg alatt	
	ólom nélkül	ólommal	ólom nélkül	ólommal
h	$145{\cdot}2 \pm 2{\cdot}3$	$252{\cdot}0 \pm 2{\cdot}0$	$0{\cdot}285 \pm 0{\cdot}163$	$0{\cdot}131 \pm 0{\cdot}095$
j	$49{\cdot}0 \pm 1{\cdot}8$	$85{\cdot}7 \pm 3{\cdot}1$	$0{\cdot}237 \pm 0{\cdot}054$	$0{\cdot}083 \pm 0{\cdot}059$

Ezen összehasonlítás arra utal, hogy a bányában észlelt záporokat, ellentétben a felszínen létező záporkiváltó sugárzással, oly sugárzás váltja ki, mely a nehezebb atomsúlyú, ill. rendszámú anyagban, ólomban, kevesebb záport vált ki, mint a kisebb atomsúlyú, ill. rendszámú szénben.

Rossi és Benedetti (14) és Johnson (15) mérései szerint a korpuszkulazáporok intenzitása magasabb rétegekben lényegesen rohamosabban nő, mint az egymás alatt elhelyezett számlálócsövekkel mért vertikális koincidenciák száma. Ennek megfelelően azt kellene várnunk, hogy az intenzitás mélyebb rétegekben rohamosabban csökkenjék is; valóban Pickering (17) 10 m vízmélységben azt találta, hogyha tengerszinten a korpuszkulazáporok számának viszonya a függőleges állásban mért koincidenciákhoz 1 volt, úgy 10 m mélységben e viszony 0·05-re csökkent. Follett és Crawshaw (16) mérései szerint a záporok és függőleges koincidenciák viszonya 60 m vízaequivalens mélységben közel ugyanannyi, mint tengerszinten. Ezzel szemben a mi méréseink szerint (VII. táblázat):

VII. táblázat.

	Függőleges állás		Háromszögben szén alatt		Zápor / függőleges	
	a. elr.	*b.* elr.	ólom nélkül	ólommal	ólom nélkül	ólommal
Felszínen (J_1)	3445 ± 29	2040 ± 27	$49{\cdot}0 \pm 1{\cdot}8$	$85{\cdot}7 \pm 3{\cdot}1$	0·024	0·042
Bányában (J_2)	$1{\cdot}77^* \pm 0{\cdot}21$	$0{\cdot}777 \pm 0{\cdot}094$	$0{\cdot}237 \pm 0{\cdot}054$	$0{\cdot}083 \pm 0{\cdot}059$	0·305	0·106
J_2/J_1 — — —	0·51 ‰	0·38 ‰	4·8 ‰	1·0 ‰	12·7	2·5

* Függőleges állásban koincidenciák úgy is keletkezhetnek, hogy egy záporrészecske két csövön, egy másik pedig a harmadik csövön halad át; a szorosabb *a* elrendezésben ez az eset gyakrabban fordulhat elő, mint *b* elrendezésben. Ez magyarázza azt a körülményt, hogy *a* elrendezéssel nagyobb abszolút intenzitást [$R(O)$] mértünk.

úgy ólommal, mint ólom nélkül a záporok száma a vertikális intenzitáshoz képest a bányában nagyobb, mint a felszínen.

Véleményünk szerint a magassággal való változás és 10 m mélységig végzett mérések eredményei és FOLLETT és CRAWSHAW, valamint a mi méréseink közti ellentmondást csak úgy kerülhetjük el, ha feltételezzük, hogy két különböző keménységű záporkiváltósugárzás létezik; a puhábbnak nagyobb, a keményebbnek kisebb az abszorpcióegyütthatója, mint a kozmikus sugárzás ionizáló komponenseié tengerszinten.

E két komponens feltételezése mellett a záporok és a vertikális intenzitás viszonyának változását a mélységgel a következőképpen magyarázhatjuk meg. A puhább komponens lényegében csak a légrétegben és az első néhány méter víz- vagy földrétegben vált ki záporokat. JOHNSON magasságméréseiből — a záporkiváltósugárzásra a légréteg határán minden irányú beesést feltételezve ($\Phi(\mu H)$ törvény) (20) $\mu = 3{\cdot}8.10^{-3}$ cm²/gr abszorpcióegyütthatót számíthatunk ki. (JOHNSON a záporok barométer-effektusából $\mu = 4{\cdot}1.10^{-3}$ cm²/gr értékhez jut.) 10 m mélységben az első záporkiváltósugárzás — közepes hatótávolsága 2·5 m víz — majdnem teljesen abszorbeálódott, a kozmikus sugárzás ionizáló komponensei alig gyöngültek, a záporok viszonya a vertikálishoz tehát tengerszinthez képest erősen csökkent. 60 m vízäquivalens mélységben már az ionizáló komponensek erőssége is lényegesen csökkent, míg az áthatolóbb második záporkiváltókomponens lényegében még eredeti intenzitásában van jelen; a viszony tehát akkora lehet, mint tengerszinten. Még nagyobb mélységekben eltűnnek az ionizáló komponensek és csak a második záporkiváltó komponens marad meg: a viszony tehát tengerszinthez képest ismét emelkedhet.

Felvethetjük mármost a kérdést, vajjon a 732 m mélységbe hatoló második záporkiváltó komponens ionizáló-e és hogy ezenkívül észlelhetők-e még ott egyéb ionizáló komponensek, melyek okozhatják a tényleges koincidenciákat. A tényleges koincidenciák egy részét feltétlenül záporrészecskék váltják ki, mert a záporrészecskék hatótávolsága 19 gr/cm² lévén, mind a három csövön a tengely sík irányába is áthaladhatnak. (A csövek közt csak a csőfalaknak megfelelő 9 gr/cm² anyag feküdt.)

A záporrészecskék által kiváltott tényleges koincidenciák számát a következőképpen határozhatjuk meg: Háromszög-elrendezésben 0·237 záporkoincidenciát mértünk óránként. Változatlan elrendezésben, ha a középső csövet kikapcsoltuk, 1·42 2-szeres záporkoincidenciát kaptunk óránként. A középső cső megszólalási valószínűsége (a_u) egy záporon belül fekve 16·7% (VIII. táblázat). Úgy hisszük, nem követünk el túlnagy hibát, ha feltételezzük, hogy egy 2-es, ill. 3-as záporkoincidencia megszólalási valószínűsége, az egy cső megszólalási valószínűségének 2-ik, ill. 3-ik hatványával egyenlő. Így a 2-es és 3-as záporkoincidenciák számából extrapolálhatunk, hogy a záporok mekkora beütésszámot létesítenek egy csőben (N_s).

VIII. táblázat.

	Felszínen 20 gr/cm² szén alatt	A bányában szénréteg alatt
j. elrendezés (háromszög-koinc.) _ _	49·0 ± 1·8	0·237 ± 0·054
l. elrendezés (2-es koincidencia) _ _	189·5 ± 2·2	1·42 ± 0·13
Megszólalási valószínűség_ _ _ _ _	26% (a_o)	16·7% (a_u)

A számítás szerint $N_s = 8{\cdot}5$ beütés óránként.* Hogy e számból a záporkorpuszkulák által kiváltott tényleges koincidenciák számát megkaphassuk, ismernünk kell a záporrészek irányeloszlását. Feltehetjük, hogy ez az irányeloszlás a tényleges koincidenciákat kiváltó sugárzáséval megegyezik (lásd 12. old.); e feltevés mindenesetre jogosult, ha valamennyi koincidenciát záporrészecskék váltják ki. $N_s = 8{\cdot}5$ beütés/óra értékből, a csőfalak abszorbeáló hatását $\mu = 5{\cdot}3.10^{-2}$ cm²/gr arányában tekintetbe véve, nyerjük: $R(O) = 2{\cdot}4.10^{-6}$, míg a koincidencia elméletből a tényleges koincidenciákra $R(O) = 2{\cdot}5.10^{-6}$ koincidencia/cm² fok² óra érték adó-

* Az eredmény helyes ha a részecskék közepes száma a 3-as záporkoincidenciák esetében ugyanannyi (maximalisan 8) mint azon záporokban, melyek egy csővet szólaltatnak meg. Ha a kisebb záporok gyakoriabbak úgy $N_s > 8, 5$.

dott. A különböző módokon nyert $R(0)$ értékek megegyezéséből arra következtethetünk, hogy a tényleges koincidenciákat kizárólag záporrészecskék hozzák létre és egy ionizáló áthatoló komponens vagy egyáltalában nem létezik, vagy ha létezik is, csak lényegtelen mértékben járul hozzá a tényleges koincidenciák létrehozásához. A 8—12. oldalakon számított abszorpcióegyüttható $\mu = 2{\cdot}13.10^{-5}$ cm²/gr és hatótávolságok, tehát a záporkiváltó sugárzásra vonatkoznak. Minthogy a záporrészek iránya kissé eltérhet a primaer sugár irányától az abszorpcióegyüttható értéke a megadottnál valamivel nagyobb lehet. Ezen abszorpcióegyüttható és a záporkorpuszkulák abszorpcióegyütthatójának nagyságából kiszámíthatjuk, hogy a záporkiváltósugarak száma a bányában 2500-szor több kell, hogy legyen, mint a kiváltott záporok száma. Következik tehát, hogy a záporkiváltósugárzás semmiesetre sem lehet maga ionizáló, mert különben az $R(0)$ értékek fenti összehasonlításában a vertikális koincidenciákból nagyságrendekkel nagyobb érték adódott volna.

Sajnos, a bányavezetőség által rendelkezésünkre bocsátható idő korlátoltsága nem engedte, hogy további, esetleg a készülék átépítését is igénylő kísérleteket végezzünk e fontos kérdés tisztázására. Reméljük azonban, hogy a közel jövőben folytathatjuk a kísérleteket.

Az áthatoló záporkiváltósugárzás. Ezen komponens tulajdonságait a következőkben foglalhatjuk össze:

1. Abszorpcióegyütthatója $\mu = 2{\cdot}13.10^{-5}$ cm²/gr.
2. Nem ionizál.
3. A záporkiváltás valószínűsége az anyag növekvő rendszámával csökkenni látszik.

Heisenberg (21) szerint minden záporban neutrinok is keletkezhetnek és ezek képesek újabb másodlagos záporokat kiváltani. Ezen feltevés és a fenti eredmények alapján a záporok létrejöttét 732 m mélységben a következőképpen gondolhatjuk el: A primaer $3{\cdot}8.10^{-3}$ cm²/gr abszorpció együtthatóju záporkiváltósugárzás a légrétegben és az első néhány méter földben primaer záporokat létesít. Ezekben a záporokban neutrinok keletkeznek, melyeknek abszorpció együtthatója $\mu = 2{\cdot}13.10^{-5}$ cm²/gr és így még 732 m

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

mélységben is tudnak másodlagos záporokat kiváltani. Ezen elképzelés helyessége mellett a következő meggondolások és számítások szólnak:

1. A mért abszorpcióegyüttható nagyságából a záporkeltés hatáskeresztmetszetére adódik:

$$\phi = \frac{\mu}{N} = \frac{2 \cdot 13 . 10^{-5}}{3 \cdot 10^{22}} = 0 \cdot 7 . 10^{-27} \text{ cm}^2$$

(hol N az 1 gr márgában lévő atomok száma), míg HEISENBERG szerint a neutrinók záporkiváltási hatáskeresztmetszete nem lehet sokkal kisebb, mint 10^{-26} cm^2. A megegyezés kielégítőnek tekinthető, természetesen azonban lehetne éppúgy elképzelni, hogy a záporokat egy áthatoló gammasugárzás vagy neutronok váltják ki.

2.* Amennyiben a 732 m mélységben észlelhető záporokat a felszíni záporokban keletkező neutrinok váltják ki, úgy azt kellene várnunk, hogy a felszíni és bányában lévő záporok száma legalább nagyságrendileg megegyezzék. Az első záporkiváltó komponens $\mu = 3 \cdot 8 . 10^{-3}$ cm^2/gr ismert abszorpció együtthatójából ki lehet számítani az 1 cm^2 keresztmetszetű oszlopban óránként keletkező záporok számát, hacsak valahol pl. tengerszinten ismerjük az 1 gr/cm^2 anyagban keletkező záporok óránkénti számát. Miután csak viszonylagos értékek meghatározásáról van szó, az 1 cm^2 keresztmetszetű oszlopban keltődő záporok száma helyett, vehetjük a készülék képletes hatásfelületének megfelelő oszlopban keletkező záporok számát, amennyiben úgy a felszínen, mint a bányában ugyanazt a készülék elrendezést használjuk. Az összehasonlításban természetesen figyelembe kell venni, hogy vajjon a készülék megszólalási valószínűsége egy záporra ugyanaz-e a felszínen, mint a bányában. Valószínű ugyanis, hogy a bányában észlelt másodlagos záporokban a részecskék száma kisebb, mint a felszíni záporokban, mely esetben a készülék megszólalási valószínűsége (egy cső megszólalási valószínűségének 3-ik hatványa) a bányában

---

* A 2. és 3. pont alatt felsorolt bizonyításai a neutrinosugárzás valószinűségének, valamint az ehhez szükséges összehasonlító kísérletek az intézet tornyában 20 gr/cm^2 szénréteg alatt BARNÓTHY J.-tól származnak.

(a_u^3) kisebb lesz, mint a felszínen (a_o^3). Hogy feltevésünk valóban helyes, azt a VIII. táblázatból kiolvashatjuk. A készülék képletes hatásfelületének megfelelő oszlopban

$$S = \frac{J_s \mu_2}{a_0^3} \left\{ \int_{H=10^3}^{0} \Phi(\mu_1 H)\, dx + \int_{H=0}^{\infty} \Phi(\mu_1 H)\, dx \right\} = 7{\cdot}3.10^5$$

zápor keletkezik óránként, hol $J_s = 49$/óra, háromszögzáporok száma a felszínen szénréteg alatt; $\mu_2 = 2{\cdot}1.10^{-2}\text{cm}^2/\text{gr}$ a felszíni záporkorpuszkulák abszorpcióegyütthatója; $a_o^3 = 1{\cdot}76.10^{-2}$ a berendezés megszólalási valószínűsége záporokra a felszínen; $\mu_1 = 3{\cdot}8.10^{-3}$ cm²/gr a lágyabb záporkiváltósugárzás abszorpcióegyütthatója; $\Phi(\mu_1 H) =$ mindenirányú beesés esetében az intenzitásváltozás függvénye.

Amennyiben minden felszíni záporban n számú neutrinó keletkezik, úgy ugyanaz az elrendezés a bányában

$$nS\Phi(\mu_3 H)\, \frac{N_c \psi}{\mu_4}\, a_u^3 = n.0{\cdot}152$$

záport fog mérni óránként, hol $\mu_3 = 2{\cdot}13.10^{-5}$ cm²/gr a neutrinósugárzás abszorpcióegyütthatója; $\psi = 0{\cdot}7.10^{-27}$ cm² a neutrinó záporkiváltó hatáskeresztmetszete; $\mu_4 = 5{\cdot}3.10^{-2}$ cm²/gr a záporkorpuszkulák abszorpcióegyütthatója a bányában; $a_u^3 = 0{\cdot}47.10^{-2}$ a háromszögelrendezés megszólalási valószínűsége a bányában; $\Phi(\mu_3 H) = 6{\cdot}76.10^{-2}$ a neutrinosugárzás gyöngülése a tárnáig; $N_c = 5{\cdot}10^{22}$ az 1 gr szénben lévő atomok száma. Valóságban óránként 0·237 záport észleltünk, ebből

$$n = 1{\cdot}5$$

adódik. Anderson (22) statisztikája szerint a legkisebb számosságú záporok a legvalószínűbbek, Heisenberg szerint pedig protonsugárzás által kiváltott primaerzáporokban, a legkisebb számú részecskéből állókban, 1 neutrinó keletkezik záporonként; vagyis n valamivel nagyobbra várható, mint 1. A számszerű megegyezés véletlen is lehet, egy nagyságrendi megegyezés létezése azonban nem tagadható.

3. Ugyancsak inkább neutrinósugárzás mellett szól az, hogy a bányában a záporkiváltás gyakorisága csökkeni látszik a rend-

számmal, mert gammasugárzás esetében BETHE és HEITLER (23) szerint a nagy energiájú fotonok abszorpciója lényegileg elektronpárok, záporok keltése útján történik; az abszorpciókoefficiens tehát arányos a záporkiváltás hatáskeresztmetszetével és nő az abszorbeáló anyag rendszámával. Ezt a tulajdonságot a felszíni záporkiváltósugárzás esetében a kísérletek is igazolták. A bányában észlelt inkább csökkenő gyakoriság fotonsugárzással nem magyarázható, azonban elvárható egy neutrinosugárzás esetében, mert a neutrino záporkiváltási hatáskeresztmetszete HEISENBERG szerint kb. a záporrészecskék közepes energiájának négyzetével fordítva arányos. Amennyiben a részecskék energiája független a rendszámtól, (vagy legfeljebb a rendszám négyzetgyökével nő) úgy nagyobb rendszámú anyagból kevesebb zápor várható, mert az atomok száma — a záporrészek hatótávolságával megegyező vastagságú rétegben — az atomsúly arányában kevesebb. Érdemes volna e fontos kérdést úgy elméletileg, mint kísérletileg alaposabban megvizsgálni, mert talán módot nyujt arra, hogy eldönthessük, vajjon neutrino vagy γ sugárzással állunk-e szemben.

Köszönetünket szeretnénk kifejezni dr. TANGL KÁROLY egyet. ny. r. tanár úrnak fáradozásaiért, mellyel e vizsgálatok véghezvitelét elősegítette és kivitelét akadályozó minden nehézséget elhárított, a Természettudományi Tanácsnak az anyagi támogatásért; a Salgótarjáni Kőszénbánya R.-T. Igazgatóságának és különösképpen dr. SCHMIDT SÁNDOR bányafőtanácsos úrnak a mérés és szükséges segítség engedélyezéséért. VARGHA BÉLA főmérnök úrnak köszönjük dorogi tartózkodásunk alatt mindenkor tanúsított kedves készségét és fáradozásait úgy technikai, mint egyéb téren mutatkozó nehézségek elhárításában. VOGL MÁRIÁNAK a Földtani Intézet kémikusának köszönjük a fúrásminták sűrűségének gondos meghatározását.

Kísérleti Fizikai Intézet, Budapest, 1936. nov. 13.

Irodalom jegyzéke.

1. E REGENER: Zsch. f. Phys. 74, 433, 1932.
2. F. WEISSCHÄDEL: Zsch. f. Phys. 101, 732, 1936.
3. E. REGENER: Naturwiss. 19, 177, 1931.
4. J. CLAY: Physica 1, 363, 1934.

5. A CORLIN: Ann. of the Obs. Lund Nr. 4.
6. Y. NISHINA a. C. ISHII: Nature 138, 721, 1936.
7. W. KOLHÖRSTER: Zsch. f. Phys. 88, 536, 1934.
8. A. TROST: Zsch. f. techn. Phys. 16, 407, 1935.
9. J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ: Phys. Zsch. 37, 208, 1936.
10. E. REGENER: Zsch. f. Phys. 100, 286, 1936.
11. S. H. NEDDERMEYER a. C. D. ANDERSON: Phys. Rev. 48, 486, 1935.
12. BHABA: Nature, 134, 934, 1934.
13. H. BETHE a. F. BACHER: Rev. of Mod. Phys. 8, 121, 1936.
14. B. ROSSI e. S. DE BENEDETTI: Ricerca Scient. 5, II, 119, 1934.
15. TH. H. JOHNSON: Phys. Rev. 47, 318, 1935.
16. D. H. FOLETT a. J. D. CRAWSHAW: Proc. Roy. Soc. London (A) 155, 546, 1936.
17. W. H. PICKERING: Phys. Rev. 47, 423, 1935.
18. L. JÁNOSSY: Zsch. f. Phys. 99, 369, 1936.
19. E. C. STEVENSON a. TH. H. JOHNSON: Phys. Rev. 47, 578, 1935.
20. W. KOLHÖRSTER: Ergeb. d. kosm. Physik. Bd. I. 1931. S. 174.
21. W. HEISENBERG: Zsch. f. Phys. 101, 533, 1936.
22. C. D. ANDERSON: Phys. Rev. 44, 406, 1933.
23. H. BETHE a. W. HEITLER: Proc. Roy. Soc. (A) 146, 183, 1934.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. nov. 23-án tartott üléséből.)

MESSUNG DER ULTRASTRAHLUNG IM DOROGER BERGWERK.

Von J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ.

Mit einer 3-fach Koinzidenzanordnung mit schmalem Gesichtsfeld wurden im Juni und Juli 1936 unweit von Budapest, im Doroger Bergwerk der Salgótarjáner Kohlenbergwerk A.-G. in 732 m Wasseräquivalent Tiefe bei verschiedenen Neigungswinkeln der Achsenebene Messungen mit folgenden Ergebnissen ausgeführt:

1. In 732 m Tiefe ist die Vertikalintensität $R(0) = 2{\cdot}5.10^{-6}$ Koinz./Stunde, cm² Grad², also rund $0{\cdot}32^0/_{00}$ der Intensität in Meereshöhe.

2. Die Intensität der Schauer beträgt in 732 m Tiefe ohne Bleischicht über der Anordnung $4{\cdot}8^0/_{00}$ der Schauerzahl derselben Anordnung in Meereshöhe und mit 1·5 cm Pb-Schicht über den Röhren $1{\cdot}0^0/_{00}$.

3. Sollten die systematischen Koinzidenzen durch Primärstrahlen oder durch solche Sekundärstrahlen ausgelöst worden sein, deren Richtung von der Richtung der Primärstrahlen nur unwesentlich abweicht, so ergeben die Messungen einen Massenabsorptionskoefficienten $\mu = 2{\cdot}13.10^{-5}$ cm²/gr. Für eine Strahlung mit definierter Reichweite finden wir zwei Komponente, die weichere mit einer Reichweite $R = 9{\cdot}3.10^4$ gr/cm² bei einer Intensität von $1{\cdot}3.10^{-6}$ Koinz./Stunde cm² Grad² und eine härtere mit $R = 14{\cdot}5.10^4$ gr/cm² und $1{\cdot}2.10^{-6}$ Koinz./Stunde cm² Grad² Intensität.

4. Die Richtungsverteilung der Koinzidenzierenden Strahlung ist in 732 m Tiefe durch die Näherungsformel:

$$R(\vartheta) = R(0)\,[-0{\cdot}07 + 1{\cdot}47\,\cos^2\vartheta - 0.40\,\cos^4\vartheta]$$

darstellbar.

5. Die Berechnungen führen zu dem Ergebnis, dass auch die systematischen Koinzidenzen ausschliesslich durch Schauerteilchen verursacht worden sind, die durch eine nicht ionisierende Primärstrahlung erzeugt werden, wobei die Primärstrahlung eine Reichweite von mindestens 1200 m Wasseräquivalent besitzen muss.

6. In 732 m. Wasseräquivalent Tiefe beträgt die mittlere Reichweite der Schauerteilchen 40 % der Reichweite der Schauerteilchen Übertag und die mittlere Teilchenzahl 65 % der Teilchenzahl Übertag.

7. Es wird der Versuch gemacht, das grosse Durchdringungsvermögen und die ausschliessliche Existenz von Schauern in grossen Tiefen, durch die Hypothese zu erklären, dass Neutrinos die in den primären Schauern in der Atmosphäre entstehen, in grössere Tiefen herabgelangend, dort sekundäre Schauer erzeugen. Diese Hypothese wird durch die Übereinstimmung des Wirkungsquerschnittes, der Zahl der Neutrinos pro Primär-Schauer und die Abnahme der Auslösewahrscheinlichkeit mit der Ordnungszahl unterstützt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 23. November 1936.)

METEOROLOGIAI ÉS MÁGNESES TÉNYEZŐK HATÁSA A KOZMIKUS SUGÁRZÁSRA II. NAPI MENET.

BARNÓTHY JENŐ és FORRÓ MAGDOLNÁ-tól.

A munka első részében (1) különböző koincidenciaberendezésekkel 20 hónapig folytatott regisztrálás anyagából a napi középértékek alapján meghatároztuk a barométereffektus (BE), a temperaturaeffektus (TE) és a mágneses effektus (ME) nagyságát. Ezen második részben újabb mérési sorozatok hozzávételével a regisztrált anyagot az óraközépértékek szerint dolgoztuk fel, hogy ezekből a napi menet okaira következtethessünk.

A napi menetet először HOFFMANN és LINDHOLM (2) észlelték, azóta az ionizációs kamrával végzett mérésekben úgy teljes páncéllal mint félpáncéllal (2*a*) mindenhol néhány ezrelék nagyságban megtalálták. A KOLHÖRSTER-féle koincidenciamódszerrel napi menetet először mi találtunk 1934 (3)-ben, de e menet amplitudója vagy egy nagyságrenddel nagyobbnak adódott, mint az ionizációs kamra eredményeiből. Mérésünk ezenkívül bebizonyította, hogy először a napi menetet nem okozhatja a levegő változó emanációtartalma, mert a koincidenciamódszer teljesen érzéktelen a radioaktív sugárzásokkal szemben; másodszor pedig, hogy nem okozhatja a menetet egy soláris komponens sem, mert a készülék látóterének mérete kizárta még a Napból jövő szórt sugarak behatolását a készülékbe is. Ezen utóbbi megállapítást későbbi méréseink (4) is igazolták, melyekből kitűnt, hogy nem észlelhető Napból eredő komponens. Az amplitudó nagyságát későbbi méréseink, (5) valamint PRIEBSCH (6) mérései is megerősítették. A napi menet egyértelmű magyarázata eddig nem volt ismeretes.

Arra a lehetőségre, hogy a napi menet oka a földmágnesestér változásában keresendő, először elméleti meggondolásokból Ross GUNN (7) mutatott rá. 1935-ben egy mérési sorozatban (5) a sugárzás erősségének napi menete és a földmágneses tér horizontális összetevőjének óraközepei közt $-0{\cdot}73 \pm 0{\cdot}10$ nagyságu korrelációs együtthatót találtunk.

E második munkában csak olyan csoportok (II., III. és VI.) mérési sorozatait használtuk fel, melyekben a sorozatok egyenletesen, vagy legalább tűrhetően egyenletesen voltak egy év tartamára elosztva. Ez a megszorítás azért vált szükségessé a napi menet pontos meghatározásához, mert az eddigi anyagnak csillagidő szerinti feldolgozása (amennyire ezt már elvégezhettük), valószinűvé teszi a csillagidő-periodicitás létezését. Miután feltehetjük, hogy a csillagmaximumok nagysága egy éven belül nem változik, hatásuk is kiegyenlítődik egyenletesen elosztott mérési sorozatok esetében.

A mérőberendezés egyes részleteit az I. munkában találhatjuk meg. Azonban ismételten meg akarjuk jegyezni, hogy a napi menet pontos meghatározásához a lökésnagyságszabályozó alkalmazását igen fontosnak tartjuk. A TROST (8) nyomán alkohol és argonkeverékkel töltött számlálócsövek beütésszáma az ú. n. feszültségtől független számolásiközben is, kb. 0·06%-al változik egy fok hőmérsékletváltozásra. Feltételezhető, hogy — annak ellenére, hogy az argon+alkohollal töltött csövek megszólalási valószínűsége közel 100% — a készülék a koincidenciákat kiváltó sugarakkal szemben tanúsított érzékenységváltozása ugyanolyan nagyságú mint a csövek beütésszámának változása. Ha a kísérleti helyiségben a hőmérséklet egy nap folyamán 10° C-al változik, úgy ez egy 2-es koincidenciaberendezés esetében a déli maximumnak 1·2%-al való csökkenését eredményezheti az éjjeli értékekhez képest, vagyis a napi menetet teljesen ellensúlyozhatja. Ez esetben még nem is voltunk a számlálócső feszültségének esetleges ingadozásaira tekintettel.

I. táblázatban találjuk az e munkában felhasznált mérési sorozatok jegyzékét, a berendezés fontosabb adataival. (ϑ a szög a számlálócső tengelyek síkja és a merőleges közt.)

I. Táblázat.

Csoport	Sorozat	Mérés ideje	δ	Látótér nyílása	Abszorbens vastagsága cm *Pb*-ben	Regisztrált koincidenciák száma
	18.	1935 okt. 31—nov. 13				
	23.	dec. 19—dec. 31				
	29.	1936 febr. 17—márc. 3				
II.	33.	ápr. 1—ápr. 17	0°	10°×40°	36	217,335
	35.	máj. 8—máj. 24				
	37.	jún. 8—jún. 19				
	40.	úl. 17—aug. 17				
	43.	szept. 16—okt. 2				
	19.	1935 nov. 16—dec. 2				
	25.	1936 jan. 3—jan. 16				
	30.	márc. 3—ápr. 1				
III.	34.	ápr. 21—máj. 7	50°	10°×40°	36	87,979
	36.	máj. 24—jún. 8				
	42.	aug. 25—szept. 16				
	13.	1935 júl. 23—aug. 6				
	24.	dec. 24—jan. 4				
VI.	32.	1936 márc. 20—ápr. 2	0°	164°×60°	0	9.342,010
	44.	szept. 28—okt. 12				
						9.647,324

Hogy valamennyi sorozatnak a statisztikus pontossága egyenlő legyen, csak az argon+alkohol keverékkel végzett mérési sorozatokat használtuk fel, ezenkívül a 17. sorozatot is kénytelenek voltunk kihagyni, miután ennek mérése nem történt óránkénti regisztrálással.

Minden csoport közepes óraértékeit az I. munkában a napiközepekből nyert barométereffektus értékkel (két tizedesre kerekített értékekkel) közepes barométerállásra korrigáltuk. Ezután a statisztikus ingadozás csökkentésére egy 1+4+6+4+1 alakú súlyfüggvénnyel közepeltük az óraértékeket. Ez a súlyfüggvény, nem befolyásolja a hosszúperiódusú napi menetet, előnyeiről más helyen fogunk beszámolni.

Ugyanígy közepeltünk a hőmérséklet és a földmágnesestér

horizontális intenzitásának óraértékei közt. Az így előállított óránkénti közepes koincidenciaszám és a külső hőmérséklet, valamint a mágneses térerősség óraértékei közt CORLIN (9) szerinti többszörös korreláció-számítással nyertük a mágneses effektus és a temperatura-effektus számértékét.

Mágneses effektus.

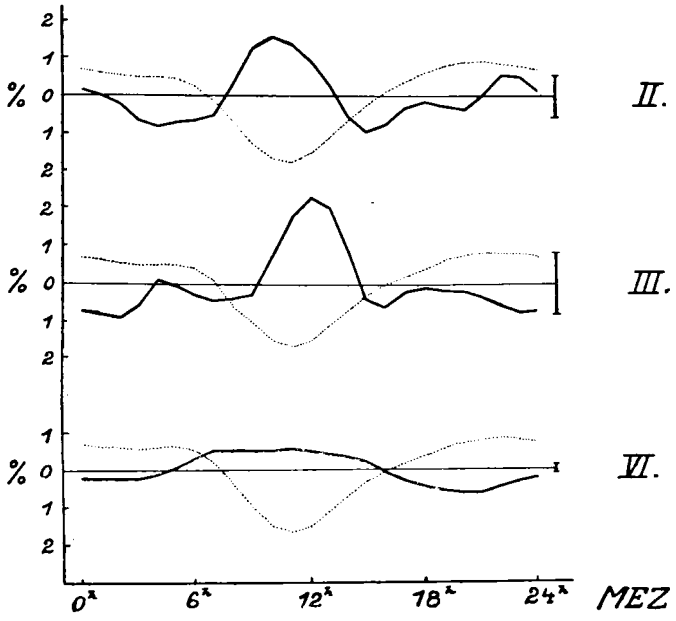
Dr. SCHMIDT A., a wieni meteorológiai és geodinamikai intézet igazgatójának szívessége folytán, egyes mérési sorozatokra megkaptuk a horizontális intenzitás óraértékeit, miután azonban az adatokat valamennyi sorozatra nem tudtuk megszerezni, továbbá kitűnt, hogy a horizontális intenzitás óraértékeinek közepes napi menete egy évre elosztott sorozatok esetében lényegtelenül tér el a Potsdam Seddin (10) obszervatórium 10 évből nyert középértékeitől, utóbbiakat használtuk fel. (A szekularvariáció miatt az abszolut értékben lehetnek kisebb eltérések, ez azonban a számított mágneses effektus nagyságát nem fogja lényegesen befolyásolni.)

A II. táblázatban a mágneses effektus számértékei találhatók az egyes mérési csoportokra.

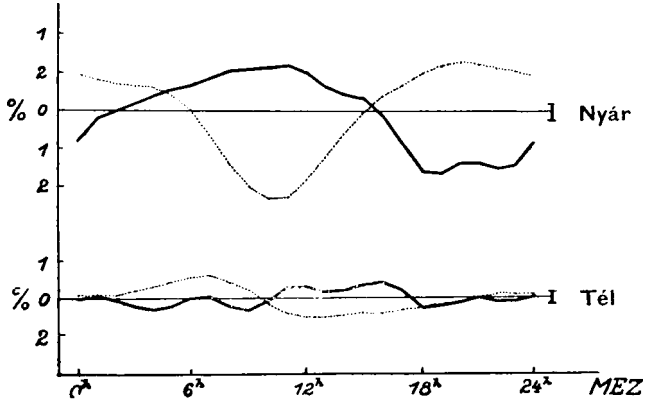
II. Táblázat.

Csoport	Abszorbens vastagság cm *Pb*-ben	Korrelációs együttható	ME % pro 10^{-5} GAUSS
II.	36	$0{,}612 \pm 0{,}130$	$-0{,}057 \pm 0{,}012$
III.	36	$0{,}631 \pm 0{,}126$	$-0{,}070 \pm 0{,}014$
VI.	0	$0{,}891 \pm 0{,}041$	$-0{,}056 \pm 0{,}003$

1. *a)* ábra mutatja az intenzitás egy évi közepes napi menetét (kihuzott vonal) és a horizontális intenzitás változását (pontozott vonal) (10^{-4} Gauss egységben)' az egyes mérési csoportokra. 1. *b)* ábrában a legnagyobb és legkisebb mágneses ingadozású hónapok esetére a legnagyobb pontosságú mérési csoport (VI.) egyes mérési sorozatai külön is fel vannak tüntetve. Mint látható, a kozmikus sugárzás erősségének változása viszonyítva a horizontális intenzitás változásához, mindkettőben közel egyenlő,



1*a.* ábra.



1*b.* ábra.

Ezenkivül, valamennyi mérési sorozatban a korrelációs együttható a barométerre korrigált kozmikus sugárzás napi menete és a földmágneses tér horizontális intenzitásának napi menete közt nagyobb, mint hibájának 4-szerese, sőt a VI. mérési csoportban nagyobb mint hibájának 20-szorosa; ami kellőképpen bizonyítja, hogy a sugárzás erősségének napi menetét lényegében a földmágnesestér ingadozásai hozzák létre.

Temperatura effektus.

A III. táblázatban a temperatura-effektusra nyert értékek vannak összefoglalva, összehasonlításul közöljük ugyanezen mérési csoportokra a TE-re a napi közepekből nyert értékeket is (az újabb mérési sorozatok hozzávonásával).

III. Táblázat.

Csoport	TE % pro Celsius fok	
	napi közepekből	óraközepekből
II.	$+0{,}098 \pm 0{,}194$	$-0{,}053 \pm 0{,}055$
III.	$-0{,}462 \pm 0{,}121$	$+0{,}073 \pm 0{,}059$
VI.	$-0{,}426 \pm 0{,}046$	$-0{,}097 \pm 0{,}017$

Az újabb mérési sorozatok hozzávétele nem befolyásolta egy esetben sem a napi közepekből kapott barométer-effektus számértékét, csupán hibáját csökkentette; evvel szemben a temperatura-effektus esetében a II. és III. mérési csoportokban, melyekben ólomabszorbens volt a csövek közt, a relativ hiba nőtt és csak a VI. csoportban — ólom nélkül — csökkent. Az óraközepekből számítva, ugyancsak csupán a VI. mérési csoport szolgáltat oly effektusértéket, mely hibájának 6-szorosát majdnem eléri, a II. és III. csoportokban (ólommal) az effektus részben negatív, részben pozitív, de minden esetben hibájának nagyságrendjében mozog. Ezen körülmények arra látszanak utalni, hogy egyrészt a TE megszűnik, ha a puhább szórt sugárzást a sugárnyalábból kiszűrjük, másodszor pedig, hogy az óraközepek-

ből számított TE lényegesen kisebb mint a napi közepekből számított érték. Ezen második körülményt valószínűleg úgy lehet megmagyarázni, hogy a déli felmelegedés hatása csak a legalacsonyabb légrétegekben érezhető, mig hosszabb időkön át tekintve, a hőmérsékváltozások közel párhuzamosan haladnak a magasabb légrétegekben is.

Dr. TANGL KÁROLY egyet. ny. r. tanár úrnak hálásan köszönjük munkánkkal szemben tanúsított mindenkori érdeklődését, a Természettudományi Tanácsnak a szükséges anyagi támogatást, dr. RÉTHLY ANTAL, a Meteorológiai és Földmágnességi Intézet igazgatójának a barométer- és temperatura-adatok szíves átengedését. Dr. BAINTNER G., BÉLL B., WINKLER L. és KURTHA G. urak közreműködésének köszönhetjük, hogy e méréseket azokban a hónapokban is folytathattuk, mikor a kozmikus sugárzás mérésével a dorogi bányában voltunk elfoglalva, miért is hálás köszönetet szeretnénk mondani.

Kisérleti Fizikai Intézet, Budapest, 1936. nov. 17.

Irodalom.

1. J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ: Z. f. Phys. 100, 742, 1936.
2. O. HOFFMANN u. F. LINDHOLM: Gerl. Beitr. z. Geophys. 20, 12. 1918.
2*a*. V. F. HESS u. R. STEINMAURER: Berl. Ber. Nr. 14/15, 521, 1933.
3. J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ: Z. f. Phys. 89, 437, 1934.
4. J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ: Z. f. techn. Phys. 16, 395, 1935.
5. J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ: Nature, 136, 680, 1935.
6. J. PRIEBSCH: Wien. Ber. 145, 101, 1936.
7. ROSS GUNN: Phys. Rev. 41, 683, 1932; 45, 900, 1934.
8. A. TROST: Z. f. techn. Phys. 16, 407, 1935.
9. A. CORLIN: Ann. of the Obs. Lund Nr. 4.
10. LANDOLT-BÖRNSTEIN III. Ergänzungsband S. 49, 1935.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. nov. 23-án tartott üléséből.)

METEOROLOGISCH-MAGNETISCHE EINFLÜSSE AUF DIE ULTRASTRAHLUNGSINTENSITÄT II. TAGESGANG.

Von J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ.

Die Messergebnisse von Dauerregistrierungen mit verschiedenen Koinzidenzanordnungen, bei denen die Messreihen über ein Jahr gleichmässig verteilt waren, werden nach Stundenmittelwerten geordnet, auf magnetischen und Temparatur Effekt ausgewertet.

Es wird der Beweis erbracht, dass der tageszeitliche Verlauf der Ultrastrahlungsintensität im wesentlichen durch die tägliche Schwankung des Erdmagnetischenfeldes bedingt ist. Der Magnetische Effekt berechnet sich zu —0·06% pro 10^{-5} Gauss.

Ein Temperatureffekt in der Grösse von —0·1% pro Grad Celsius wurde nur bei der Messgruppe ohne Bleifilterung gefunden, was darauf hinweist, dass er hauptsächlich nur einem Einfluss auf die weicheren Streustrahlen zuzuschreiben ist.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 23. November 1936.)

BAUXITOK KIMUTATÁSA FÖLDMÁGNESES MÉRÉSEKKEL.

PEKÁR DEZSŐ l. tagtól.

I. Bevezetés.

A földmágneses elemek, a Horizontális Intenzitás, a Deklináció és Inklináció abszolút értékeinek meghatározására szerkesztett műszereket már nagyon régóta használják. Nagyemlékű professzorom, Eötvös Loránd báró ugyancsak berendezkedett e mérésekre és geofizikai kutatásaiban nagyon sok ilyen észlelést végzett. Ezek az úgynevezett abszolút eljárások azonban meglehetős körülményesek és hosszadalmasak, amiért is a gyakorlati jellegű geofizikai kutatások részletes felvételeire nem alkalmasak. E célra sokkal megfelelőbbek a könnyen kezelhető relatív eszközök, amelyekkel tulajdonképen csupán a földmágneses elemeknek változásait mérjük, de megfigyeléseinket gyors egymásutánban végezhetjük. Éppen ezért még maga Eötvös mindenekelőtt Kohlrausch variometeréből, ebből a tisztán laboratóriumi eszközből kitünő mezei műszert szerkesztett a *Horizontális Intenzitás* mérésére; továbbá teljesen új módszert dolgozott ki és megfelelő eszközpárt konstruált a *Deklináció* meghatározására.

Sajnos e relatív deklinációs műszereink végképen eltűntek, amikor 1918-ban az októberi kommunista zavargások alkalmával Cegléden, a vasúti állomáson veszteglő műszerkocsijainkat a csőcselék kirabolta. Minden kutatás eredménytelen maradt. Ugyancsak eredménytelen volt az a törekvésem, amidőn ismételten mindent megmozgattam, hogy e különleges eszközök rekonstruálására szükséges összeget előteremtsem. Annyival is inkább sajnálatos ez,

mert Eötvös ezt az új mérési eljárását egyáltalán nem közölte. Két teljesen hasonló műszerrel haladunk a megvizsgálandó terepen, azokkal egyrészt egymást beirányozzuk, másrészt zászlójelekre, egyidejűleg leészleljük az eszközökben lévő mágnesrúd állását. Ily módon a két állomást összekötő egyenes és a mágneses meridiánok által képezett szögeket mérjük le, s a különbség közvetlenül megadja a Deklináció változását. Az egyidejű észleléssel az időbeli változás teljesen kiesik. A két eszközt azonban ugyanazon a helyen egymással össze kell hasonlítanunk, hogy a közöttük mutatkozó állandó különbséget meghatározva, ezzel adatainkat kikorrigálhassuk.

A bányászati célból végzett, gyakorlati jellegű geofizikai kutatásokban ezenkívül még különösen fontos a *Vertikális Intenzitás* ismerete, amely adatokból sok esetben igen hasznos következtetéseket vonhatunk. Éppen ezért már 1930 végén kieszközöltem a m. kir. pénzügyminisztérium hozzájárulását, hogy a vezetésem alatt álló *Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet* részére az Askania-Werke, Berlin-Friedenau cégtől egy Ad. Schmidt-féle Vertikal-Feldwagét beszerezhessek. A műszer lényegében egy horizontális tengely, egy kvarcél körül forgó mágnestű, amelynek egyensúlyi helyzete az egyes észlelési állomásokon a vertikális intenzitás eltérő értékeinek megfelelően megváltozik. Természetesen az eszköz használhatóságának alapfeltétele, hogy az egyensúlyi helyzet teljesen megbízható és állandó legyen, vagyis hogy egyazon vertikális intenzitás értékének megfelelően, változatlanul ugyanazon észlelési eredményeket nyerjük. A műszer szerkesztésének legnehezebb és legkényesebb problémája a kvarcél körüli forgás, hogy a fellépő súrlódások és egyéb zavaró körülmények dacára, a megkívánt nagy érzékenység mellett, az egyensúlyi helyzet tényleg megbízható legyen. Évekig tartó kísérletezéssel azonban sikerült az Askania-Werkének e nehéz feladatot kellőképen megoldani.

Az új műszert mindenek előtt 1931 tavaszán a városi elektromos zavaró hatásoktól mentes helyen, vidéken, Simontornya környékén végzett méréseinkkel kipróbáltuk. Az év nyarán pedig a Túrricse közelében mutatkozó gravitációs minimum környékén végeztünk földmágneses méréseket, annak eldöntésére, hogy e minimumot földalatti sódóm okozza-e? Sajnos, az egyes állomások

megismétlésekor a Vertikal-Feldwage adataiban oly nagy eltérések mutatkoztak, hogy a műszert megbízhatatlansága miatt Berlin-Friedenauba vissza kellett küldenünk javítás végett. A teljesen rendbehozott eszközt még 1932 őszén ugyancsak Simontornya környékén végzett méréseinkkel újból kipróbáltuk, amikor is azt kifogástalannak találtuk.

Ezenkívül, hogy a műszer állandóságát ellenőrizzük, a Hűvösvölgyben, a villamos végállomástól keletre egyazon állandó helyen több heti időközökben ismételt méréseket végeztünk. Természetesen e helyet akként választottuk ki, hogy az úgy a villamosvasúttól, valamint egyéb vezetékektől oly nagy távolságban legyen, hogy azok semmiféle mágneses zavart ne okozzanak. Ez alapállomás koordinátái:

$$\varphi = 47^\circ\ 32'\ 31{\cdot}4''\quad \text{és}\quad \lambda = 36^\circ\ 38'\ 29{\cdot}4''\ \text{Ferrótól.}$$

E helyen minden egyes alkalommal, egyrészt a Vertikal-Felwagehez tartozó galvanometrikus berendezéssel annak állandóját, másrészt a Vertikális Intenzitás értékét határoztuk meg. A végzett mérések szerint a megjavított műszer elég megbízhatónak és állandónak bizonyult.

A *Horizontális Intenzitás* meghatározására már régóta KOHLRAUSCH-féle variometereinket használjuk, amelyeket azonban a mezei mérések céljaira kellőképen átalakítottunk, hogy kényelmes és gyors kezelés mellett, a szabad ég alatti kedvezőtlen körülmények között is, teljesen jó és megbízható adatokat nyujtsanak. E kitűnően bevált eszközeinket még 1931-ben Simontornyán gondosan megvizsgáltuk, állandóikat, és pedig különösen a már régóta nem ellenőrzött temperatura-koefficienseket újból meghatároztuk. Ily módon tehát relatív mágneses műszereinket a mérések végzésére teljesen rendbehoztuk.

A bauxit tudvalevőleg kiváló aluminiumérc, amelynek feltárása különösen hazánkban nagy közgazdasági jelentőségű. Éppen ezért még 1932 végén a m. kir. pénzügyminisztériumhoz intézett felterjesztésemben kifejtettem annak fontosságát, hogy a bauxitokat megfelelő geofizikai eljárással felkutathassuk. Egyúttal reámutattam arra, hogy tekintettel a bauxitok vastartalmára, valószínű, hogy azokat földmágneses mérések segítségével ki-

mutathatjuk. Vertikal-Feldwagénk és KOHLRAUSCH-féle variometereink pedig különösen alkalmasak, hogy e műszerekkel ezen nemcsak tudományos szempontból érdekes, de gyakorlatilag is nagyfontosságú kutatásokat elvégezhessük. E vizsgálatokra legcélszerűbb területnek mutatkozott az *Aluminiumérc Bánya és Ipar R. T.* Gánti bányatelepének környéke, ahol a végzett nagyszámú fúrás alapján a bauxit előfordulás részletesen ismeretes. Még pedig nemcsak a bauxitréteg mélysége és vastagsága, hanem a végzett analízisek alapján, annak minősége, vastartalma stb. is meg van határozva. Különös hálával és nagy köszönettel tartozom dr. HILLER JÓZSEF vezérigazgató úrnak, aki méltányolva vizsgálataink fontosságát, a legnagyobb készséggel megadta az engedélyt arra, hogy a szóbanforgó méréseket Gánti bányaterületükön elvégezhessük. A bányakutatások vezetője, BÖHM FERENC miniszteri tanácsos úr, nagy megértéssel fogadta e tervemet, s ajánlatára a pénzügyminiszter úr meg is bízott e munkálatok elvégzésével. Fogadják ezért e helyről is őszinte köszönetemet.

Mielőtt tulajdonképeni külső munkánkat elkezdettük volna, tájékozódás végett a laboratóriumban egyes bauxitpróbák mágnesezhetőségét, illetve szuszceptibilitását meghatároztuk. E méréseket az Eötvös-féle mágneses tranzlatometerrel végeztük, amely nagy érzékenysége folytán alkalmas a várható kis mágneses hatások meghatározására. E munkálatokat itt nem részletezem, csupán felemlítem, hogy a megvizsgált bauxitok átlagos szuszceptibilitása, $\varkappa = 45.10^{-6}$ CGS. Tehát a bauxitok, dacára a nagy vastartalomnak, a kevéssé mágnesezhető anyagok közé tartoznak. A vas ugyanis olyan vegyületek alakjában fordul elő bennük, amelyek ugyancsak kis mértékben mágnesesek. Éppen ezért csak a kellő pontossággal végzett földmágneses mérések alapján várhatjuk a bauxitok kimutatását.

A munkálatokat két részletben végeztük el. Előbb 1932. december 15-től 22-ig tájékozódás végett a rövid I. és II. szelvényt mértük fel. Ezután a mérési eredményeket Budapesten feldolgoztuk. Az így nyert tapasztalatokra támaszkodva 1933. január 17-től 30-ig folytattuk méréseinket, amikor is a további III., IV., V. és VI. szelvényeket végeztük el.

Személyes vezetésem mellett a méréseket SZECSŐDY MIKLÓS

geofizikusom, továbbá SZILÁRD JÓZSEF és SCHEFFER VIKTOR mérnökök, dacára az abnormálisan kedvezőtlen téli időjárásnak, a legnagyobb készséggel és megbízhatósággal végezték. Ugyancsak ők segédkeztek a mérési adatok feldolgozásában és a kapcsolatos hosszadalmas számítások elvégzésében is. Fáradozásaikért fogadják mindnyájan őszinte köszönetemet.

II. A földmágneses mérések végzése.

A várható aránylag kis hatások miatt e földmágneses méréseinket a szabadban elérhető legnagyobb pontossággal kellett végeznünk. Éppen ezért egyúttal arról is kellett gondoskodnunk, hogy a terep különböző pontjain végzett *Horizontális* és *Vertikális Intenzitás* megfigyelésekkel párhuzamosan egy állandó központi állomáson ezen elemek változásait rövid időközökben folytonosan megfigyeljük, hogy ily módon ezen ú. n. «regisztrált adatok» alapján eredményeinkből a napi járás zavaró hatását kiküszöbölhessük. A Horizontális Intenzitás méréseknél ezt minden további nélkül megtehettük. Két KOHLRAUSCH-féle variometerünk lévén, az egyikkel a felmérendő terepen, a másikkal az állandó regisztráló állomáson dolgoztunk. A Vertikális Intenzitás meghatározására azonban nincs két variometerünk s így ez esetben a regisztráló megfigyelést csak kerülő úton végezhettük volna el, amint azt a Túriricsei gravitációs minimum részletes földmágneses felmérésénél tettük. Az *Inklináció* meghatározására ugyanis megvan a megfelelő műszerünk, amelyet utasításaink szerint még régebben a *Süss Nándor Preciziós Mechanikai és Optikai Intézet R. T.* készített, s amellyel ezt a jellemző szöget a földindukciós elv alapján igen nagy pontossággal lemérhetjük. A Horizontális Intenzitás és az Inklináció egyidejű adataiból pedig a Vertikális Intenzitást közvetlenül kiszámíthatjuk, s így a kívánt regisztrálást elvégezhetjük. Ez a megfigyelési mód azonban meglehetősen körülményes és két észlelőt igényel, amiért is e rövid méréseinkben ezt az eljárást nem alkalmaztuk.

Hogy azonban a Vertikális Intenzitás napi változásait mégis a lehetőségig számításba vehessük, a következő módon jártunk el. A felmérendő vonalat több szakaszra osztottuk. Az első szakaszban

előre haladva, az egymástól kellő távolságban elhelyezett pontokon elvégeztük a méréseket és ezután a szakasz kezdeti állomására visszatérve, ott a mérést megismételtük. Az ismétléskor mutatkozó különbséget azután a közbülső állomások között az idővel arányosan elosztottuk és így számítottuk ki a megfelelő korrekciókat. Ezután az első szakasz utolsó állomásából kiindulva, hasonló módon végeztük méréseinket a második szakaszban és így tovább. Természetesen ezt az eljárást csak a Vertikál-Feldwagénál kellett volna használnunk. Célszerűség és teljesség kedvéért azonban KOHLRAUSCH-féle variometerünkkel és Vertikal-Feldwagénkkal mindig együtt haladtunk s így mindkettővel az ismétlő méréseket is elvégeztük. Ily módon a Horizontális Intenzitásra vonatkozólag a végleges értékeket kétféle módon számíthattuk ki. Egyrészt a megismételt mérések alapján, másrészt a tényleges napi változások tekintetbevételével korrigáltuk a mérések közvetlen adatait. Az ily módon nyert adatok között érdekes és tanulságos összehasonlítást tehettünk.

Amennyiben az egyes szelvények elvégzése több napot vett igénybe, a másnapon való folytatáskor egy előző napi állomást megismételtünk és a későbbi napon meghatározott összes értékeket az észlelt különbségnek megfelelően eltoltuk. Az eszközök állandóiban esetleg fellépő változásokat pedig akként vettük figyelembe, hogy egyrészt KOHLRAUSCH-féle variometereinket több ízben, és pedig egymásközt felcserélve összehasonlítottuk, másrészt a Vertikal-Felwage állandóját központi állomásunkon ugyancsak többször a hozzátartozó galvanometrikus berendezéssel meghatároztuk. A bányatelep közelében elhelyezett R központi regisztráló állomásunk koordinátái :

$$\varphi_0 = 47^\circ\ 22'\ 1{\cdot}9''\quad \text{és}\quad \lambda_0 = 36^\circ\ 3'\ 30{\cdot}4''\ \text{Ferrótól.}$$

III. A földmágneses adatok feldolgozáa.

Már az előzőkben ismertettem azt a mérési eljárást, amellyel a földmágneses elemek napi változásainak befolyását számításba vettük, illetve a közvetlenül meghatározott adatokat korrigáltuk.

Ezenkívül természetesen még egy javítást, a *normális korrek-*

ciót is figyelembe kellett vennünk. Minthogy ugyanis a mágneses zavart okozó földalatti ható tömegekre akarunk méréseinkből következtetést vonni, tulajdonképen végeredményben a *földmágneses anomáliákat*, a normális értékektől való eltéréseket kell meghatároznunk, illetve görbéinkben feltüntetnünk. A normális értékek kiszámítására tulajdonképen a magyar Alföldre már régebben megállapított alábbi formuláinkat használtuk fel:

$$H = H_0 - 0{\cdot}000\,081\,607\,(\varphi - \varphi_0)' + 0{\cdot}000\,007\,08\,(\lambda - \lambda_0)'$$
$$V = V_0 + 0{\cdot}000\,107\,5\quad(\varphi - \varphi_0)' + 0{\cdot}000\,003\,8\quad(\lambda - \lambda_0)'$$

ahol H_0 és V_0 a kiinduló állomáson a Horizontális, illetve Vertikális Intenzitás normális értékét, φ_0 és λ_0 pedig a regisztráló állomásnak az előzőkben már megadott földrajzi szélességét és hosszúságát jelenti; a φ és λ az egyes észlelési helyek koordinátái, továbbá a $(\varphi - \varphi_0)$ és $(\lambda - \lambda_0)$ szögkülönbségek ívpercekben fejezendők ki.

Minthogy azonban az ez alkalommal végzett méréseink aránylag kis területre vonatkoznak, a tényleges számításba bizonyos egyszerűsítéseket vezettünk be. Így a hosszúsággal való kisfokú és éppen ezért elhanyagolható változást nem vettük figyelembe. A szélességi normális korrekciót pedig eredetileg az egyes szelvények kezdeti állomására vonatkoztatva számítottuk ki, illetve végeztük el. Ez esetben ugyanis a tényleges normális érték előzetes ismerete nélkül végezhettük el e számításainkat. Az ily módon korrigált adatok alapján az egyes szelvények görbéit ugyanazon, de tetszőlegesen felvett kezdeti értéktől számítva felrajzoltuk, természetesen külön a Horizontális és külön a Vertikális Intenzitásra vonatkozólag. Az így nyert görbék tulajdonképen már megadják az anomáliák relatív értékeit. Ha azonban a tényleges abszolút értékeket akarjuk feltüntetni, akkor még az abszcissza tengelyt kell megfelelő mértékben utólagosan eltolnunk. A napi változások hiányos megfigyelése miatt ez eltolásoknál az eszközök állandóiban beállott változásokat is figyelembe kellett vennünk. Az ily módon megrajzolt anomáliagörbéknek megfelelő kezdeti, normális értékek az R regisztáló állomásunkra vonatkozólag:

$$H_0 = 0{\cdot}20968\ \text{CGS}.\quad V_0 = 0{\cdot}40650\ \text{CGS}.$$

A földalatti mágneses tulajdonságú anyagok okozta földmágnességi zavarok úgy a Horizontális, valamint a Vertikális

Intenzitásban főleg és legnagyobb mértékben dél-észak irányban haladva mutatkoznak, amiért is kb. ily irányokban fektettük a megvizsgálandó területen áthaladó szelvényeinket. Egyúttal gondot fordítottunk arra, hogy szelvényeink különböző mélységű, vastagságú, minőségű és vastartalmú bauxitok felett haladjanak el. Már itt reá kell azonban mutatnunk arra, hogy a bauxitok fedőrétege és az egyes szelvényekben előforduló sárga agyag is többnyire nagymennyiségű vasvegyületeket tartalmaz. Továbbá hogy a százalékos vastartalom egyáltalában nem határozza meg közvetlenül a szóbanforgó anyag mágnesezhetőségét és arra semmiféle számszerű felvilágosítást nem ad. Ez ugyanis csak az esetben volna lehetséges ha a vas fémes alakban fordulna elő. A mágnesezhetőség tehát elsősorban attól függ, hogy milyen fajta vasvegyületek vannak a kérdéses anyagban.

Szelvényeink állomásait a rendelkezésünkre bocsátott 1 : 2880 méretű bányatérképbe vezettük be. Azok helyét egyes identifikálható fiixpontoktól való távolságok lemérésével állapítottuk meg. Az észleléseket általában egymástól 50—100 méteres távolságokban végeztük. A bauxit határai felett azonban sűrűen, egymástól 12·5—25 méter távolságban helyeztük el állomásainkat, hogy az e helyeken várható mágneses zavart kellően kidolgozhassuk. E nagykiterjedésű térképet e helyen nem közölhetjük, mert a szükséges nagymérvű kicsinyítéskor a részletek összefolynának. A mérési eredményeket feltüntető szelvényekbe azonban az összes állomásokat, az egymástóli távolságoknak megfelelően berajzoltuk.

Összesen hat, kb. dél-észak irányban haladó szelvényt mértünk fel teljes részletességgel. A mérési időrendnek megfelelően az egyes szelvényeket római számokkal, az állomásokat pedig vonalonkint 0, illetve 1-től újra kezdődően, folyó arabs számokkal jelöltük. Szelvényeink együttes hossza 7·5 km, amelyekben összesen 181 állomáson határoztuk meg, úgy a Horizontális, mint a Vertikális Intenzitás értékét. Ezenkívül mind a két adatra vonatkozólag 83 ismétlő mérést, az eszközöknek a központi állomáson való ismételt összehasonlításakor pedig 25 és a Vertikal-Feldwage állandójának meghatározásakor 5 megfigyelést, végül a Horizontális Intenzitás regisztrálására 132 meghatározást végeztünk. Ily

módon e kutatásaink folyamán összesen 690 földmágneses mérés történt, hogy az említett 181 állomás adatait pontosan megkaphassuk.

A mérési adatok feldolgozásánál az előzőkben részletezett módon tekintetbe vettük a mágneses elemek napi változásait és az eszköz állandóiban történt változásokat. Az ily módon korrigált adatok felhasználásával számítottuk ki azután a normális értékektől való eltéréseket, vagyis a földmágneses anomáliákat, amelyet éppen a földalatti mágneses tulajdonságú anyagok okoznak. A méréseinkre és azok feldolgozására vonatkozó táblázatos egybeállításokat e helyen nem közlöm. A számadatok e halmaza ugyanis nem nyujt közvetlen bepillantást az eredményekbe, amit csakis a megfelelő grafikus ábrázolással érhetünk el. E célból a kiszámított anomáliák görbéit «*A Gánti bauxitbánya környékén végzett földmágneses mérések eredményei. 1932/33.*» felírású rajzban tüntettük fel, az ott megadott méretek szerint. Egyúttal az *Aluminiumérc Bánya és Ipar R. T.* részéről nagy előzékenységgel rendelkezésünkre bocsátott geológiai szelvényeket is berajzoltuk, amelyek a bányaterületen végzett nagyszámú fúrás alapján készültek. A szelvényekben a külső térszín emelkedéseit, amelyeken eszközeinkkel tulajdonképpen keresztül haladtunk, nem tüntettük fel, továbbá úgy a vízszintes, mint a függélyes irányban a keresztmetszetet ugyanazon méret szerint készítettük el. A szelvényekre vonatkozólag néhány adatot már az előzőkben közöltünk. Csupán felemlítjük, hogy a *VI.* szelvényben a geológiai metszet egy része az aránylag kevés fúrási adat miatt bizonytalan és éppen ezért nincs berajzolva, de a bauxit itt is előfordul.

Szelvényeinkre vonatkozólag a következő részleteket említhetjük:

Az *I. szelvény* állomásainak száma 25, hossza 0·775 km. A bauxit fölött lévő eocéntakaró 27—29% Fe_2O_3-at tartalmaz.

A *II. szelvény* állomásainak száma 22, hossza 0·550 km. Itt közvetlenül a humusz alatt, felszínesen fordul elő a bauxit és csak a szelvény déli szélén van fedőréteg. A bauxit 15—20% Fe_2O_3-at tartalmaz.

A *III. szelvény* állomásainak száma 42, hossza 1·312 km. A bauxit Fe_2O_3 tartalma 9—26%, a fedő rétegé 27—29%.

A *IV. szelvény* állomásainak száma 28, hossza 0·950 km.

A pisolitos bauxit közvetlen a humusz alatt van, Fe_2O_3 tartalma 12—29%.

Az *V. szelvény* állomásainak száma 18, hossza 0·685 km. A szelvény első felében mélyen fekvő bauxitréteg van, középen dolomit, azután humuszalatti bauxit kibúvás, mely később elmélyül. A bauxit Fe_2O_3 tartalma 6—26%, a fedőréteg egyes helyein lévő sárga agyagé 28—29%.

A *VI. szelvény* állomásainak száma 46, hossza 3·235 km. A geológiai szelvény a kevés fúrás miatt pontosan nem ismeretes. A bauxit nagyobb mélységben fordul elő, Fe_2O_3 tartalma 12—25%, a fedőrétegben végig vonuló sárga agyagé pedig 25—28%.

IV. A földmágneses mérések eredményeiből vonható következtetések.

Mindenekelőtt tisztában kell lennünk azzal, hogy a bauxitelőfordulással kapcsolatban elméletileg miféle földmágneses zavarnak kell mutatkoznia. Az erre vonatkozó számítások szerint azon esetben, ha a föld alatt egy a környezetnél nagyobb mágnesezésű anyag, bauxit fordul elő, akkor a Horizontális Intenzitás anomália görbéjében a bauxit déli szélén egy maximumot, azután tovább haladva, az északi szélén egy minimumot kell kapnunk. Függőleges oldalfalak esetén e szélső értékek éppen a szélek felett, ferde oldalfalak esetén azonban megfelelően eltolt helyeken mutatkoznak. A Vertikális Intenzitásban pedig a bauxittömeg felett egy kiterjedt nagy maximumnak kellene mutatkoznia. Ezt példaképen egy szabályos, egyszerű esetre kiszámítottuk, amikor is a föld alatt egy 20 m mélységben kezdődő, 20 m vastag és 200 m hosszú téglalap keresztmetszetű bauxitvonulat felett haladunk el. Természetesen a számítás azon feltevéssel történt, hogy a bauxittömeg homogénen van mágnesezve. A megfelelő anomáliagörbéket és a hozzátartozó geológiai szelvényt «Számított hatás» jelzéssel a földmágneses anomáliákat feltüntető rajzunk bal felső sarkában láthatjuk.

Ezt a számítást tetszőleges alakú, más keresztmetszetre vonatkozólag is elvégezhetjük. A rendelkezésünkre bocsátott szelvényeknek megfelelően úgy a Horizontális, mint a Vertikális Intenzitás anomália görbéit kiszámítottuk. A mérések útján meg-

határozott és a számított görbék között általában elég jó megegyezést találtunk. E számítási eredmények részletes ismertetésébe azonban e helyen nem bocsátkozhatom. Általánosságban csupán a következőket említem fel. Az anomália görbékből közvetlenül láthatjuk, hogy a bauxitos területeken jelentékenyebb mágneses zavarok mutatkoznak. Főbb vonásokban megtaláljuk a számított példának megfelelő hatásokat, de e mellett még különböző más zavarok is mutatkoznak. Ennek magyarázatát a következő körülményekben találjuk. A bauxitréteg keresztmetszete és mélysége változik. A bauxit minősége is különböző, más és más a vastartalma s eltérő a vaselőfordulás mikéntje, amiért is ennek megfelelően mágnesezhetősége, illetve szuszceptibilitása is változik, tehát a bauxittömeg nincsen homogénen megmágnesezve. Továbbá a sárga agyag és a fedőréteg vastartalma nem egyszer meghaladja a bauxitét, szóval ezek a rétegek ugyancsak mágnesesek. Végül a terep, amelyen szelvényeink áthaladnak, egyáltalán nem sík, sőt egyes helyeken igen tekintélyes emelkedések és mélyedések vannak. E miatt a felszínen észlelhető mágneses hatások ugyancsak megváltoznak. Szem előtt tartva mindezen zavaró hatásokat, az anomáliagörbékben mutatkozó látszólag rendszertelen szabálytalanságokat teljesen megmagyarázhatjuk és számszerűleg igazolhatjuk.

E vizsgálatainkkal végeredményben megállapíthattuk tehát, hogy dacára kevéssé mágneses voltuknak, *a bauxitokat kellő pontossággal és körültekintéssel végzett földmágneses mérésekkel kimutathatjuk* és erre KOHLRAUSCH-féle variometereinket és Vertikal-Feldwagénkat célszerűen felhasználhatjuk. Természetesen még nagyobb biztonsággal és határozottsággal végezhetjük ily irányú kutatásainkat olyan vidékeken, ahol a bauxit vastagabb rétegekben és nem nagy mélységben fordul elő, s ahol csupán kisebbfokú zavaró hatásokra számíthatunk.

Végül kedves kötelességem, hogy hálás köszönetemet fejezzem ki elsősorban dr. HILLER JÓZSEF úrnak, az *Aluminiumérc Bánya és Ipar R. T.* vezérigazgatójának, aki nemcsak a legnagyobb készséggel megadta az engedélyt a Gánti bányaterületen végzendő méréseinkre, de szíves intézkedésével munkálatainkat a legmesszebb menő támogatásban részesítette, s a fúrási adataik alapján szerkesztett geológiai szelvényeket rendelkezésünkre bocsátotta. Buda-

pesten, a központi igazgatóságban dr. KORMOS TIVADAR geológus úr lekötelező szívességgel intézte a kutatásainkkal kapcsolatban felmerülő ügyeket. Gánton, a bányatelepen pedig elsősorban GRAUL RÓBERT igazgató, továbbá NEMES VILMOS főmérnök urak a legnagyobb készséggel minden tekintetben segítségünkre voltak; nemcsak a fúrási adatokat magukban foglaló térképeik alapján a bauxit előfordulására szükséges összes felvilágosítást adták meg, de egyúttal a külső terepen is hasznos tanácsokkal és útbaigazításokkal szolgáltak. Több ízben segítségünkre voltak a terep egyes pontjainak biztos megállapításában és szelvényeink kitűzésében. Fogadják mindannyian hálás és őszinte köszönetemet!

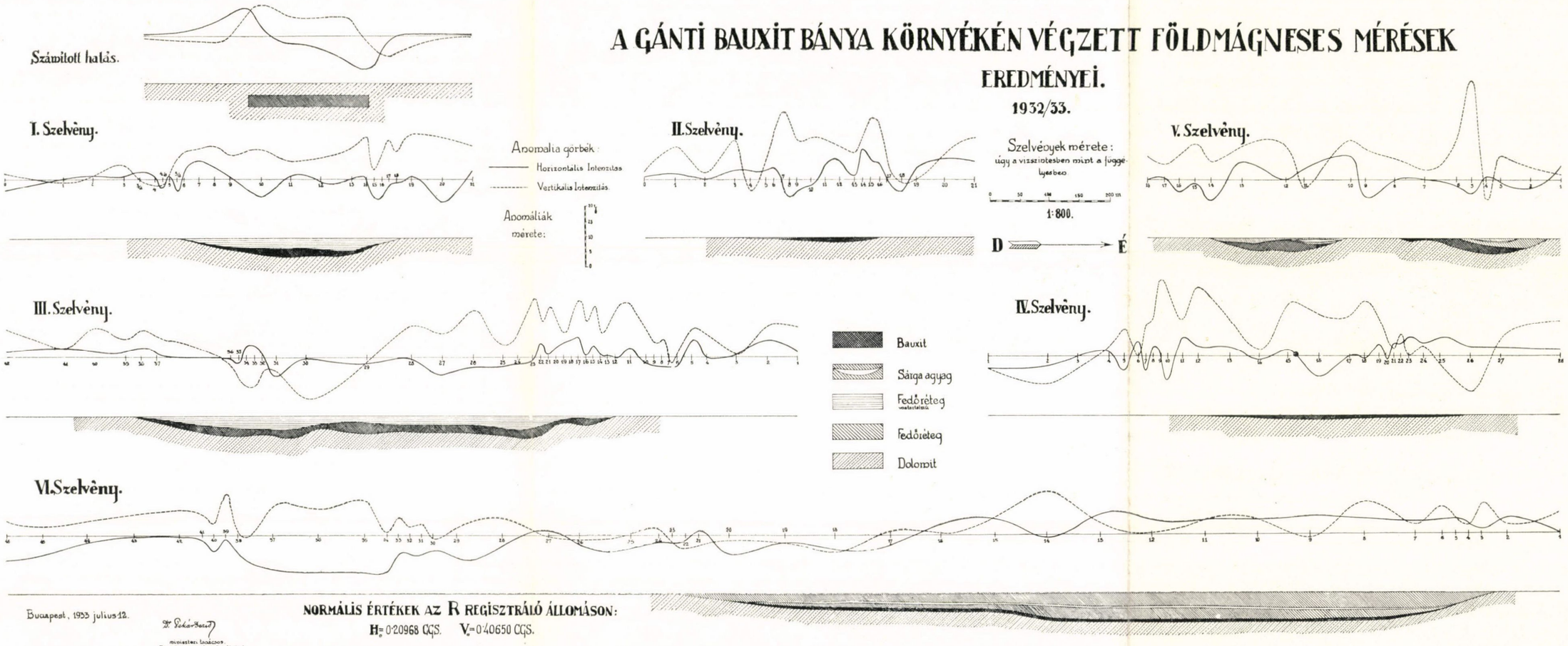
(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1937. ápr. 26-án tartott üléséből.)

Mat. és Term.-tud. Értesitő
LVI. évf. I. tábla. 1937.

Pekár Dezső:
Bauxitek kimutatása.

A GÁNTI BAUXIT BÁNYA KÖRNYÉKÉN VÉGZETT FÖLDMÁGNESES MÉRÉSEK EREDMÉNYEI.

1932/33.



Budapest, 1933 julius 12.

Dr. Pekár Gerő
miniszteri tanácsos
a Báró Eötvös Loránd Geofizikai
kötézet igazgatója.

NORMÁLIS ÉRTÉKEK AZ R REGISZTRÁLÓ ÁLLOMÁSON:

$H_0 = 0{\cdot}20968$ CGS. $V_0 = 0{\cdot}40650$ CGS.

NACHWEIS VON BAUXITEN MIT ERDMAGNETISCHEN MESSUNGEN.

Von DESIDER PEKÁR k. Mitglied der Akademie.

Instrumente zur Bestimmung der absoluten Werte der erdmagnetischen Daten, nämlich der Horizontalen Intensität, der Deklination und der Inklination sind schon seit langer Zeit im Gebrauch. Mein weltberühmter Professor, Baron ROLAND EÖTVÖS, rüstete seine geophysikalische Forschungsexpedition auch mit solchen Instrumenten aus, mit welchen viele Messungen ausgeführt wurden. Diese sogenannten absoluten Methoden sind aber ziemlich umständlich und langwierig, deshalb sind dieselben für die ausführlichen Aufnahmen der praktischen geophysikalischen Forschungen ungeeignet. Für diese Zwecke sind die leicht bedienbaren Relativinstrumente vielmehr zu gebrauchen; damit sind eigentlich nur die Variationen der erdmagnetischen Daten messbar, die Beobachtungen können aber in rascher Folge unternommen werden. Eben deshalb hat noch selbst EÖTVÖS aus dem nur im Laboratorium brauchbaren Variometer von KOHLRAUSCH für die Messung der *Horizontalen Intensität* ein ausgezeichnetes Feldinstrument hergestellt. Ferner hat er für die Bestimmung der *Deklination* eine neue Methode und ein entsprechendes Doppelapparat ersonnen.

Diese Deklinationsapparate sind leider verloren gegangen, als im Oktober 1918 anlässlich der kommunistischen Unruhen unsere am Bahnhof von Cegléd stehende Instrumentenwagen geplündert wurden. Alle Nachforschungen blieben erfolglos. Ebenso erfolglos war mein Bestreben um die Kosten für die Rekonstruktion dieser besonderen Apparate herbeizuschaffen. Es ist dies umsomehr

zu bedauern, da Eötvös diese neue Messungsmethode überhaupt nicht veröffentlicht hatte. Bei diesem Verfahren vermisst man das zu untersuchende Gelände mit zwei gleichgebauten Instrumenten, einerseits visiert man mit den beiden Apparaten gegen einander, anderseits beobachtet man auf Flaggenzeichen gleichzeitig die Lage des im Apparate aufgehängten Magneten. Auf diese Weise werden die durch die Verbindungslinie und die magnetischen Meridiane gebildeten Winkel bestimmt und die Differenz dieser Winkel gibt unmittelbar die Veränderung der Deklination. Infolge der gleichzeitigen Ablesung fällt die zeitliche Variation ganz heraus. Die beiden Instrumente müssen aber an demselben Orte miteinander verglichen werden, um die zwischen ihnen bestehende konstante Differenz zu bestimmen und damit die Messungsergebnisse zu verbessern.

Bei den praktischen geophysikalischen Messungen hat ausserdem noch die *Vertikale Intensität* grosse Bedeutung, da daraus in vielen Fällen sehr nützliche Folgerungen gezogen werden können. Eben deshalb habe ich noch Ende 1930 die Bewilligung des königl. ung. Finanzministeriums erlangt, dass ich für das unter meiner Leitung befindliche «*Baron Roland Eötvös Geophysikalisches Institut*» von den Askania-Werken Berlin-Friedenau eine Vertikal-Feldwage nach Ad. Schmidt zu beziehen könne. Wir führten dann mit unserem neuen Instrument verschiedene interessante Messungen aus.

So haben wir unter anderen die Forschung von Bauxiten versucht. Dies ist bekanntlich ein vorzügliches Aluminiumerz, und die Erschürfung dessen hat besonders bei uns grosse wirtschaftliche Bedeutung. Ich habe noch Ende 1932 in meiner dem königl. ung. Finanzministerium unterbreiteten Eingabe dargelegt, dass die Erschürfung der Bauxitlagerstätten mit entsprechenden geophysikalischen Verfahren von grosser Bedeutung sei. Ich habe darin auch darauf hingewiesen, dass es mit Rücksicht auf das Eisengehalt der Bauxite die erfolgreiche Erschürfung mit erdmagnetischen Messungen wahrscheinlich sei. Unsere Vertikal-Feldwage und unsere Variometer nach Kohlrausch sind besonders geeignet dazu, dass man damit diese nicht nur aus wissenschaftlichem Gesichtspunkte interessante, sondern auch praktisch wichtige Forschungen ausführe. Für diese Aufnahmen zeigte sich die Um-

gebung der Bergwerke der *Aluminiumerz Bergbau und Industrie A.-G.* bei Gánt als besonders geeignet, wo das Vorkommen der Bauxitlagerstätten auf Grund von vielen Bohrungen wohl bekannt ist. Und zwar nicht nur die Tiefe und Mächtigkeit der Bauxitschichten, sondern auf Grund von Analysen sind auch die Qualität, der Eisengehalt usw. festgestellt. Ich schulde besonderen Dank Herrn Generaldirektor Dr. JOSEF HILLER, der die grosse Bedeutung unserer Untersuchungen würdigend erlaubte, dass wir die Messungen auf dem Gebiete der Gánter Bergwerke ausführen.

Zu diesem Zwecke haben wir zuerst unsere relative magnetische Instrumente für die Messungen bereit gestellt. Die Vertikal-Feldwage wurde in der Provinz, in Simontornya, an einem den städtischen elektrischen Einflüssen nicht ausgesetztem Orte ausgeprobt, dann wurden die Konstanten, besonders die seit langer Zeit nicht kontrollierten Temperaturkoeffizienten des Horizontalvariometers von Neuem bestimmt. Ausserdem haben wir zur Orientierung die Magnetisierbarkeit, d. i. die Susceptibilität einiger Bauxitproben im Laboratorium festgestellt. Zu diesen Messungen benützten wir das magnetische Translatometer von EÖTVÖS, welches infolge seiner grossen Empfindlichkeit zur Bestimmung der kleinen magnetischen Wirkungen geeignet ist. Ohne in die Einzelheiten dieser Arbeiten einzugehen, erwähne ich nur, dass die durchschnittliche Susceptibilität der untersuchten Bauxite $\varkappa = 45.10^{-6}$ CGS ist. Die Bauxite gehören daher trotz des grossen Eisengehaltes zu den wenig magnetisierbaren Stoffen. Das Eisen kommt darin nämlich in solchen Verbindungen vor, die selbst mässig magnetisch sind, infolgedessen ist die Erforschung der Bauxite nur mittels sehr genau ausgeführten erdmagnetischen Messungen zu hoffen.

Eben deshalb mussten die täglichen Variationen der erdmagnetischen Daten sorgfältig in Rechnung gezogen werden, Mangels einer entsprechenden lokalen Registrierstation wurde dies so erreicht, dass wir die zu vermessende Linie in mehrere kleinere Abschnitte eingeteilt haben und nach Ausführung der Messungen in den einzelnen Abschnitten, die Beobachtung am Beginnstation wiederholten. Die Ablesungen an den dazwischen liegenden Stationen wurden mit Hilfe der gefundenen Differenz verbessert. Nach der genauen Berechnung der normalen Werte mit unseren

entsprechenden Formeln bestimmten wir die *erdmagnetischen Anomalien*, deren Kurven in der beigefügten Zeichnung im angegebenen Masstabe dargestellt sind. Am oberen linken Teile der Zeichnung ist ein berechneter Fall angeführt. Auch die auf Grund der vielen Bohrungen festgestellten geologischen Querschnitte sind für die vermessenen 6 Linien angegeben. Die gesammte Länge unserer Linien beträgt 7·5 Km, bei welchen wir an 181 Stationen die Werte der Horizontalen und Vertikalen Intensität bestimmt haben. Die Wiederholungen, die vergleichenden, kontrollierenden und registrierenden Beobachtungen mitgezählt, haben wir in diesem Gebiete zusammen 690 erdmagnetische Messungen ausgeführt, um die Werte an den erwähnten 181 Stationen genau zu erhalten.

Unbeachtet der Einzelheiten können wir auf Grund unserer Untersuchungen behaupten, dass trotz der geringer Magnetisierbarkeit *die Bauxite mit Hilfe von sehr genau und mit entsprechender Umsicht ausgeführten erdmagnetischen Messungen erforscht werden können* und dazu das Variometer von KOHLRAUSCH und die Vertikal-Feldwage zweckmässig verwendbar sind. Natürlich gewähren solche Schürfungen noch mehr Sicherheit und Bestimmtheit in Gebieten, wo das Bauxit in mächtigeren Schichten, in mässiger Tiefe vorkommt, und wo man nur mit geringen störenden Wirkungen zu rechnen hat.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

BAUXITOK BERYLLIUMTARTALMÁNAK SZINKÉPANALYTIKAI MEGHATÁROZÁSA.

SZELÉNYI TIBOR-tól.

Bauxitok berylliumtartalmára vonatkozóan mindezideig nem alakult ki egységes vélemény, aminek oka kellőszámú analyzis hiányában keresendő. Feltételezhető, hogy a bauxit, mint egykori kristályos kőzetek aluminiumban gazdag mállási terméke, nagyobb mennyiségben tartalmaz aluminiumhoz vegyileg hasonló elemeket, pl. berylliumot és galliumot.

Ilyen irányú vizsgálatok kémiai és spektrografikus úton már készültek is, de csak kis számban. A bauxitelőfordulások inhomogenitása azonban nagyszámú vizsgálatot követel, lehetőleg ismert összetételű mintákból kiindulva. A gyakorlati szempontból értékes előállítási és kinyerési lehetőségeket VADÁSZ ELEMÉR (2) tárgyilagos becslés alapján minimálisaknak találja. Pontos adatok azonban nem állanak rendelkezésére. Beryllium meghatározásokhoz csak színképanalytikai módszer jöhet számba, mert a legjobb chemiai módszer, az o-oxychinolinos leválasztás is, nagyon nehézkes és sorozatos vizsgálatok végzésére teljesen alkalmatlan. Erre vonatkozó adatokat lásd pl. DITTLER (3).

A m. kir. Földtani Intézet igazgatóságának bölcs előrelátása és a minisztériumok bőkezűsége folytán felállított modern színképelemző berendezés, amely egy Zeiss-féle «Qu 24» jelű kvarcspektrográfból és tartozékaiból áll, lehetővé tette, hogy hazai bauxitok berylliumtartalmára nézve kellőszámú sorozatos analyzis készüljön. A vizsgálatok módszerének leírása, valamint az irodalomban hasonló eljárással készült elemzésekkel való összehasonlítása alkotja jelen dolgozat célját.

Beryllium előfordulása kőzetekben.

V. M. GOLDSCHMIDT a beryllium geokemiájáról szóló munkájában (4) megállapítja, hogy üledékes kőzetek képződésénél a beryllium határozottan az aluminiumot követi. Így agyagpalában, bauxitban és jelenkori tengermélyi (Tiefsee) agyagokban az aluminium tartalommal bizonyos arányos mennyiségben található beryllium.

BeO aránya az Al_2O_2-hoz 1 : 20,000-től 1 : 30,000-ig változik. Ez a kapcsolódás az aluminium és beryllium-hydroxydok közel egyenlő lúgosságának a folyománya. Egy kation annál lúgosabb, minél nagyobb az iónsugara és mentől kevesebb pozitiv töltéseinek száma. E két tényező az aluminium és beryllium esetében messzemenőleg kompenzálja egymást. GOLDSCHMIDT adatai szerint kőzetek általában 0·001—0·005% *BeO*-t tartalmaznak. Ennél több, egészen 0·1%-ig található azonban egyes nefelin szienitekben és pegmatitokban.

Eddigi beryllium meghatározások bauxitokban.

Gánti bauxitok berylliumtartalmát o-oxychinolinnal GEDEON TIHAMÉR határozta meg, de csak 3—4 mintában. Az általa kimutatott 0·1—0·2% *BeO*-t GOLDSCHMIDT magasnak találta, mert színképanalyzissel csak 0·001—0·01% *BeO* volt kimutatható

Fenti és még más analytikusok magas beryllium adata a kémiai eljárás hibáiban keresendő.

Színképanalytikai módszerek általában.

Emissziós színképvizsgálat lényegileg háromféle módon történhet, ú. m. 1. acetilenlángban, 2. kondenzált 8—10,000 V-os szikrában és 3. egyenáramú elektromos ívben. Az első eljáráshoz oldatok szükségesek, amelyek elporlasztva jutnak a lángba. Beryllium esetében az acetilen + préselt levegő lángjának hőmérséklete nem elég magas ahhoz, hogy a *Be*-atomok fénykibocsátására gerjeszthetők legyenek és így egy nagyobb energiájú fényforrás alkalmazása szükséges. Mivel szikrában csak elektromosságot vezető

anyagok vizsgálhatók, bauxitnál és általában kőzeteknél a harmadik, különben legérzékenyebb eljárás, az elektromos ív alkalmazandó.

A színképanalitika fontosságának és fokozatos bővülésének jele, hogy a legújabb magyar irodalomban is több vonatkozó ismertetés és dolgozat jelent meg (13), (14), (15).

Az elektromos ív.

A 10—12 ampére intenzitással szén-elektródok között égő és kézzel állandóan szabályozott ív nagyon nyugtalan fényforrás, ezért sokáig csak minőleges vizsgálatoknál használták és a meghatározás körülményeinek reprodukálhatatlansága miatt a mennyileges analízist nem kísérelték meg.

Ha figyelembe vesszük, hogy

a) szénelektródok között az ív nem egy helyen ég, hanem ide-oda vándorol,

b) a pozitív elektród vájatából az elpárolgás nagyon egyenlőtlen, és pedig kezdetben minimális, majd rohamos,

c) az anyagot a hidegebb negatív elektród vájatába helyezve, előbb olvadékok, salakok keletkeznek, majd frakcionált elpárolgás miatt egyes anyagok koncentrálódva visszamaradnak,

d) az ív hőmérséklete és evvel együtt a fényemisszió is tág határok között változik, mert egyszer több, máskor kevesebb anyag jutván az ívbe, annak ellenállása sohasem állandó,

e) hogy végül rohamos elpárolgásnál az ív belső részét körülvevő hidegebb gőzköpeny a színképvonalakat elnyeli (abszorbeálja), akkor tudjuk csak Goldschmidt és Mannkopff, valamint munkatársaik által kidolgozott eljárást, amelynél a fenti nehézségek ki vannak küszöbölve, kellőképpen értékelni.

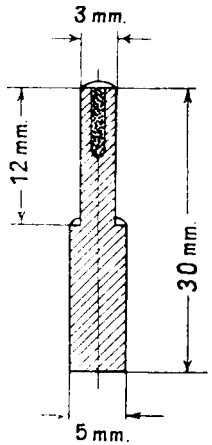
Goldschmidt és Mannkopff eljárása.

Az irodalomban elszórva a Mitteilungen d. Gesellschaft d. Wiss. Göttingen, Chemie d. Erde és Z. f. Physik folyóiratokban közölt és már nagyjából kialakult eljárás a következő:

A porrátört kőzetből 0·0005—0·003 g-nyi mennyiséget, tehát

lényegesen kevesebbet, mint eddig szokás volt, a katód szűk furatába tömünk. A szénelektród méretei a következők:

A furat átmérője 0·7—1·0 mm, mélysége a kőzet forráspontjától függően változó; bauxitnál 4 mm. Mentől alacsonyabb a forrpont, annál mélyebbnek kell lennie a furatnak, hogy a párolgás lassú legyen. A szénelektródoknak az 1. ábrában jelzett 3 mm-es átmérőre való leesztergályozása igen lényeges és azért szükséges, hogy



1. ábra.

a) az ív kis felületen képződjék,

b) katód, alacsonyabb hőmérsékletének dacára, aránylag gyorsan leégjen és így a lemért és a furatba töltött anyag lassankint mind bekerüljön az ívbe.

A katódnak éppen csak a hegye izzik és a szén folytonos leégésével kerülhet csak mindig újabb és újabb kőzet az ívbe. A furat vékonysága miatt az így elkészített elektród úgy is felfogható, mintha a szénelektród anyagában egyenletesen elkeverve tartalmazná a vizsgálandó kőzetet. Ez a feltevés a valósághoz annál is inkább közeljár, mert a beszerezhető legtisztább ívlámpaszén is a legkülönfélébb elemekkel van szennyezve. E. PREUSS (8) 26 elemet mutatott ki benne: *Be, B, Na, Mg, Al, Si, K, Ca, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zn, Ga, Ge, As, Sr, Ag, Cd, Sn, Ba* és *Pb*. Ezek közül különösen zavaró mennyiségben a *Fe, Si, Al, Ca, Mg, Ti, Na, B* és *Cu* vannak jelen, míg a többiek csak nyomokban találhatók. Az utóbbiak erősebb színképvonalaiból az illető elemek jelenlétére következtethetünk. Spektrálanalitikai célra megtisztított szenet egyedül Ruhstrat göttingeni cég állít elő. 200—300 ampére intenzitású áramban olyan magas hőfokra hevíti a szénpálcákat, hogy a szennyező elemek egy-kettő kivételével mind elpárolognak. Bauxitok berylliumtartalmának meghatározásánál szintén célszerű lett volna ilyen Ruhstrat-féle szénelektródokat használni, de a beszerzés nehézségei miatt ezek még rendelkezésemre nem állottak. A vizsgálatokra használt Zeiss-féle szénelektródok 0·0005% *BeO*-t mindig tartalmaztak, úgyhogy a *Be*-tartalom megadása

csak ezen mennyiség fölött volt lehetséges. Ha gyakorlati szempontok tekintetbevételével ez a körülmény közömbös is, az elméleti következtetéseket mégis korlátozza.

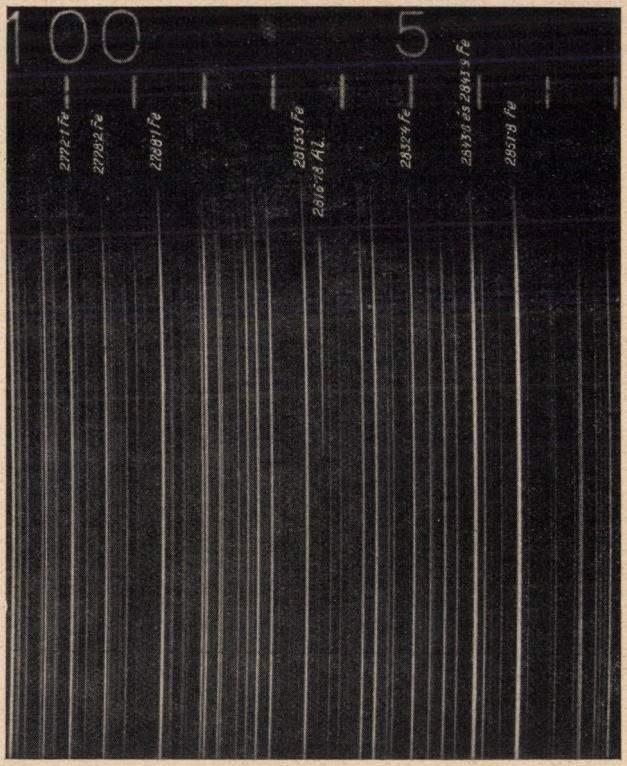
A fent ábrázolt vékony katóddal az anyag teljes és lassú elpárologtatása megoldottnak mondható. A szűk furatba tömött minimális anyag nem alkot változó összetételű olvadékot vagy salakot. A katód hőmérséklete, fehéren izzó hegyét kivéve, sohasem emelkedik annyira, hogy a kőzet a furat mélyebb részeiben is párolgásnak induljon. Az ív teljesen nyugodtan ég, mert csak minimális gőz kerül bele. A különösen kellemetlen lángszerű lobogás elmarad.

MANNKOPF eljárásának legnagyobb érdeme azonban nem az ív égésének a stabilizálása, hanem a kimutatás érzékenységének megnövelése. Ő figyelte meg először, (5) hogy az ívben izzó fémiónok a katód felületén koncentrálódnak. Ha a spektrográfrésre a katód hegyéről jövő sugarakat vetítjük, akkor a színképvonalak intenzitása többszörösen megnövekszik és ezért már kisebb mennyiségben jelenlévő anyagok is kimutathatók.

A jelenséget a mellékelt 2. ábra (fotográfia) mutatja be. A kép felső részén a katód hegyének 2772·1—2851·8 Å között lévő folytonos színképe látható egészen halványan mint széles vízszintes sáv. Az elgőzölgő *Fe*, *Al* stb. függőleges színképvonalai között feltűnik a 2816·18 Å hullámhosszúságú *Al* vonal rövidségével és orsóformájával. A vonal különös alakjának az a magyarázata, hogy ezen a hullámhosszúságon sugárzó aluminiumatomnak egy külső elektronja lehasadt és pozitív töltésű iónná alakulva a katód felületéhez tapad és az elektródok közötti gázoszlopban már nem található. Az az első pillanatban plauzibilis feltevés, hogy a vonalak akkor intenzívebbek, ha az ívbe az izzó anód vájatából egyszerre sok anyag kerül, nem helytálló, mert a sok anyag következtében jól vezető ívben egyrészt a hőmérséklet alacsony, másrészt a külső hideg gőzköpeny is abszorbeál. Sok kísérletet végeztem arra vonatkozóan, hogy a kimutatás érzékenysége nem növelhető-e olyan módon, hogy az anyagot az anódból párologtatjuk ugyan, de a résre a katód hegyét vetítjük. A katód felületén ilyenkor is koncentrálódnak a fémiónok, de az ív fentebb felsorolt hátrányai, mint pl. nyugtalan lobogás stb. mind jelentkeznek.

Ez a megkísérelt módszer nem előnyösebb, mint amelyet MANNKOPFF dolgozott ki.

A katód izzó felületén (Glimmschicht) az egyes fémek nem egyforma mértékben sűrűsödnek. Az effektus annál nagyobb, minél kisebb az elem ionizációs feszültsége. (6) A *Hg*-tól, amelynél



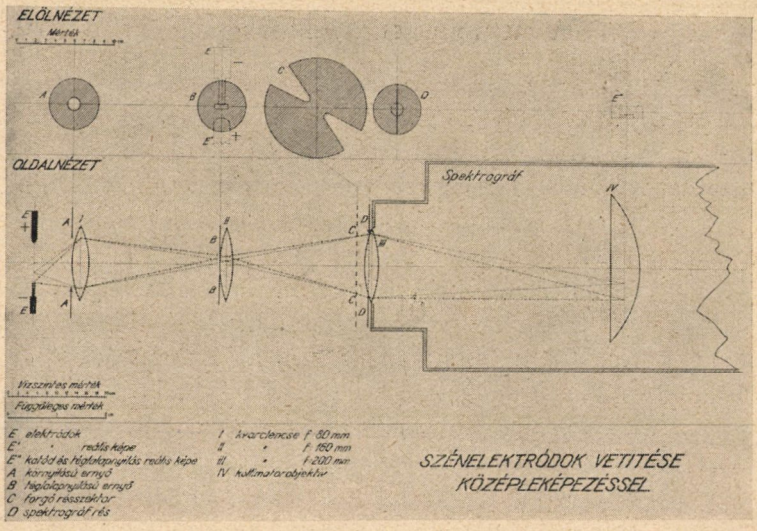
2. ábra.

a jelenség még nem vehető észre, sorban fokozatosan növekszik a következő elemeknél: *Au*, *B*, *Be*, *Zn*, *Ag*, *Cu*, *Cd*, *Si*, *Ti*, *Bi*, *Fe*, *Ni*, *Co*, *Al*, *Ga*, *Hg*, *Ca*, *Li*, *Sr*, *Ba*, *Na*, *K*. A színképvonalintenzitások viszonya: $\frac{\text{a katód felületén}}{\text{a gázoszlopban}}$ a *Be*-nál kb5-tel, a *Cu* és *Ag*-nél 7-tel, míg az alkáliaknál 100-zal! egyenlő.

A kimutathatóság határa ilyen módon nagy általánosságban 0·001%-nál van, de egyes elemeknél még alacsonyabb, kivételek az olyan elemek, mint pl. *S*, *Se*, *Te* és *P*, amelyek az ívben molekulákat képezve nem adnak vonalas színképet. (7)

Az ívfény vetítése a résre.

A színképanalizis reprodukálhatóságánál fontos az a körülmény, hogy a fényforrásból a résre hogyan jut a fény. Régebben egyszerűen a rés közelébe hozták a fényforrást, de ennél jobbnak bizonyult kvarclencse segítségével az elektródok megnagyobbított képét a résre vetíteni. A Zeiss-gyár is kidolgozott egy vetítési módot, amelynél a fényforrásnak csak egy diafragmával kiszabott



3. ábra.

kis része kerül a kollimátor lencséjében leképezésre. 3. ábra (fotográfia.)

A középleképezéssel való vetítésnél az elektródok reális képe először a «B» ernyőn keletkezik. Kézi szabályozással elérhető, hogy a katód hegyének a képe *E'* éppen a téglalapnyílásba essék. A III. sz.

lencse arra szolgál, hogy a katód hegyét a kollimátorobjektívbe belevetítse. Így az égés közben folyton változó és kézzel utánaállított ívből, ha kevesebb fény is, de mindig ugyanaz a rész jut a készülékbe. Hogy diafragma alkalmazásával a fénymennyiség kevesebb, nem okoz nehézséget, mert egyrészt csak a katód hegyének a leképezése a fontos, másrészt a szükséges pár perces expozícióidő miatt a fény csökkentésére úgyis forgó rés-szektort kell alkalmazni. (Lásd az ábrát.) A szektor a fénynek pontosan 10%-át engedi csak a spektrográfrésre. A hosszú expozícióidő azért előnyös, mert így a kőzet apróbb párlatfrakcióí, amelyek az előbbi pontban leírt óvintézkedések dacára alacsony forrpontú anyagok jelenlétében, pl.: *Ge*, *Pb* netalán mégis keletkeznének, egy felvételben legyenek összefoglalva.

A mennyileges meghatározás.

Az ívnek stabilizálása megfelelő vetítési móddal karöltve, a mennyileges meghatározásokat is lehetővé teszi. A vonalintenzitás abszolút értékének fotometrálása azonban még nem vezet célhoz, mert hiába tartjuk be pontosan minden felvételnél az expozícióidőt és használunk fel pontosan egyforma anyagmennyiséget, az ív nem ég minden meghatározásnál *teljesen* egyformán. Abszolút vonalintenzitásokból még a láng vagy szikra eljárásoknál sem következtethetünk a koncentrációra. Lényegesen más a helyzet, ha a vizsgálandó anyagban egy ismert koncentrációjú elem vonalintenzitását *viszonyítjuk* a keresett elem vonalintenzitásához. Így már kielégítően pontos adatokat kaphatunk. Célszerűen úgy járunk el, hogy az összehasonlításra szolgáló elemet ismert, pl. 5%-os koncentrációban egyszerűen hozzákeverjük a vizsgálandó kőzethez. Ilyen összehasonlító szerepre alkalmas a *La*, *Co*, *Zr* stb. Ezek az elemek kőzetekben meglehetősen ritkán fordulnak elő és megfelelő összehasonlításokra alkalmas vonalakkal rendelkeznek. A fotometrikus mérésekhez előzetesen olyan ismert-összetételű keverékeket készítünk, amelyek a keresett elemet fokozatosa nnövekvő, pl. 0·0001, 0·001, 0·01, 0·1, 1·0%-os koncentrációban, viszont az összehasonlításra szolgáló elemet mindig egyforma, pl. 5%-os koncentrációban tartalmazzák. A lefényképezett vonalak megmért

feketedésének a logaritmusa lineárisan függ a koncentrációk logaritmusától. Ha tehát az ismert koncentrációsorozatról felvételeinket a fotográflemez feketedési görbéjének lineáris részén végezzük, ami általában lehetséges, úgy az ismeretlen koncentrációt grafikusan, egyszerű lineáris interpolációval meghatározhatjuk.

Az eljárást, amelyet többféle variációban alkalmaznak (lásd BAUER (10), ENGELHARDT (9), STROCK (11) munkáit), csupán csak lényegében vázoltam annál is inkább, mert a Földtani Intézet színképanalitikai laboratóriuma a vizsgálatok végzésekor még fotometerrel nem rendelkezett és így egyszerűbb és sajnos, kevésbbé pontos módszerhez kellett folyamodni.

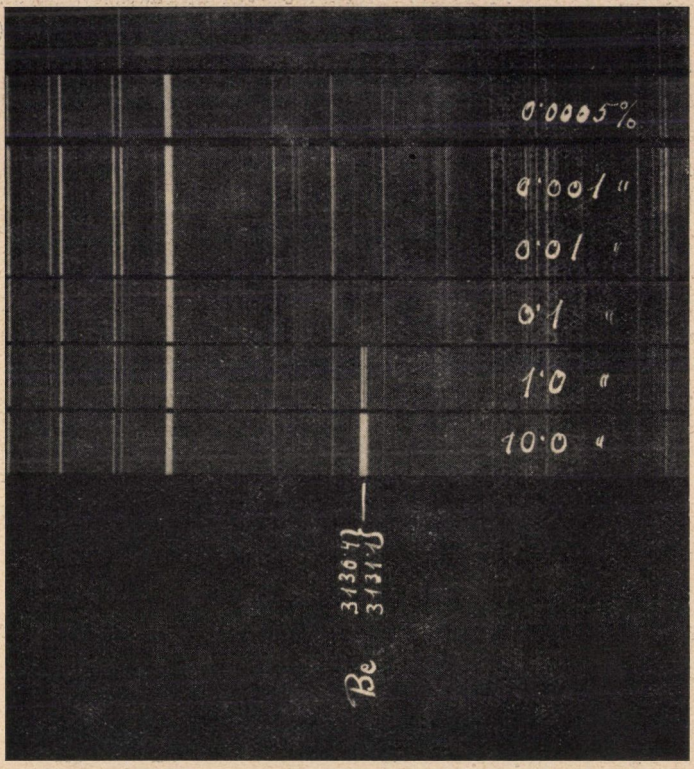
A *Be* esetében kedvező körülmény az, hogyha a koncentrációt 10-nek hatványai szerint növeljük, mindig újabb és újabb jól definiált vonalakat találhatunk. Bizonyos vonalak jelenlétéből vagy hiányából a koncentráció nagyságrendjét tehát megállapíthatjuk. (Az «utolsó vonalak metódusa».) GOLDSCHMIDT a *Be* geokémiájáról öt évvel ezelőtt írt munkájában (4) meghatározásait még szintén evvel az egyszerűbb eljárással végezte. Az általa használt Hilger-féle autokollimaciós spektrográffal, valamint a Földtani Intézet Zeiss-féle «Q 24»-es kvarcspektrográfjával egyformán adódik a következő táblázatos összefüggés:

Beryllium-vonalak intenzitása különböző BeO-tartalom mellett.

Be vonalak hullámhossza:	1.0%	0.1%	0.01%	0.001%	0.0001%	*BeO*
2348·62 Å	e. e.	e.	k.	gy.	—	
2350·78 «	gy. gy.	—	—	—	—	
2494·44 «	k.	gy.	—	—	—	
2494·87 «	k.	gy.	—	—	—	
3130·42 «	k.	k.	gy.	—	—	
3131·06 «	k.	gy.	gy. gy.	—	—	

e. e. = nagyon erős vonal.
e. = erős vonal.
k. = középerős vonal.
gy. = gyenge vonal.
gy. gy. = nagyon gyenge vonal.

A koncentrációra már egyedül a 2348·62 és a 3130·42, 3131·06 Å hullámhosszúságú *Be* vonalintenzitásának egyszerű vizuális becsléséből is következtethetünk. 4. ábra (fotográfia).



4. ábra.

Külön vizsgálatsorozatot végeztem arra vonatkozóan, hogy a vonalak fenti intenzitását a bauxit változó kémiai összetétele nem befolyásolja-e észrevehetően. Háromféle alapösszetételű keveréket készítettem, amelyek egymástól kovasav- és vastartalomban különböztek. Megállapítottam, hogy a változó összetételnek a vonalak intenzitására nincsen látható befolyása.

A meghatározások körülményei.

A használt ív áramerőssége az első 30 másodpercben 4—5 amp. azután 2 percig 12—14 amp. Expositióidő összesen $2^1/_2$ perc. A katod furatába beletömött anyag 0·003 g $\pm$ 10%. A felvételekhez használt fotográflemez a nehéz beszerzési lehetőségek miatt nem volt egészen megfelelő, mert a szemcsézete nem volt elég finom. A lemezeket (Agfa Orange, Isochrom) 18 × 24-es nagyságból kellett a szükséges 6 × 24-es formára elvágni. A spektrográf fényereje 1 : 15· A résnyílás 0·01—0·005 mm. A készülék diszperziója 3100 A-nél

$$R = \frac{\lambda_{3100}}{\delta_\lambda} = 10{,}000.$$

Az ív belső részének hőmérséklete a legújabb és különféleképpen megejtett mérések szerint 6000—7000° C (15).

A vizsgálatok eredményeit az alábbi táblázatban foglaltam össze az irodalomban talált egyéb adatokkal együtt. Összehasonlítás kedvéért agyagok és kaolinföldek *BeO*-tartalmát szintén megvizsgáltam.

Az analyzisek lényeges különbséget nem mutatnak bauxitok és agyagok berylliumtartalma között. Különösen figyelemreméltó az a körülmény, hogy a kaolinokban általában kevesebb a *Be*, holott az ellenkezője volna várható. Pontosabb quantitativ vizsgálatokkal a kaolinok keletkezési körülményeire is rá lehetne világítani.

A táblázati adatok alapján a *Be*-nak bauxitokból való kinyerése semmiesetre sem bír gyakorlati jelentőséggel. Abban az esetben, ha a bauxitot aluminiumra feldolgozzák és az amúgy is keletkező hulladékanyagban, anyalúgban a beryllium koncentrálódik, akkor esetleges kinyerése talán szóbajöhet. Az iparban ilyen irányú kísérletekkel foglalkoznak is.

A dolgozat elkészítésénél különös köszönettel tartozom Emszt Kálmán dr. ny. kísérletügyi főigazgató és Kárpáti Jenő dr. kísérletügyi igazgató uraknak, hogy munkám iránt állandóan érdeklődtek, értékes tanácsaikkal, valamint munkabeosztásommal az analyzisek elvégzését lehetővé tették.

Köszönöm továbbá az Aluminiumipar és Bánya r. t. igazgatóságának, hogy 52 drb pontosan ismert lelőhelyről való és külön e célra megelemzett bauxitmintával jelen dolgozatom elkészítését nagyban elősegítette.

Dr. LIFFA AURÉL ny. m. kir. Földtani Intézeti igazgató úrnak szívességét és fáradságát e helyen is hálásan köszönöm.

Összefoglalás.

GOLDSCHMIDT és MANNKOPFF röviden ismertetett színképanalitikai eljárása szerint bauxitok és az összehasonlítás kedvéért agyag- és kaolinminták berylliumtartalmát határoztam meg. A berylliumtartalomnak csak a nagyságrendje volt tíznek hatványai szerint megadható tekintettel arra, hogy a Földtani Intézet spektrográf berendezése egyelőre csak minőleges vizsgálatok végzését engedte meg. (A mennyileges vizsgálatokra való kiegészítés rövidesen megtörténik.)

A táblázatban felsorolt adatok azt mutatják, hogy a különben kis mennyiségben nagyon elterjedt beryllium bauxitokban sem fordul elő gyakorlati szempontból jelentős mennyiségben.

A bauxitok kémiai összetételéből berylliumtartalmukra, úgy látszik, nem lehet következtetni, illetve az egyes alkatrészekkel való arányosítás kedvéért pontosabb mennyileges meghatározások lennének szükségesek.

Készült a m. kir. Földtani Intézet kémiai laboratóriumában. Igazgató: dr. LÓCZY LAJOS egyetemi ny. r. tanár, Budapest, 1936. december hó.

Táblázat.

I. Goldschmidt elemzései.

Bauxit, fehér «Mine de Blanquette» Franciaország	0·01—0·001 %	*BeO*
« Arkanzas, U. S. A. szulfátgyártáshoz	0·001 «	«
« Eplény, vörös, «cement bauxit»	0·005 «	«
« « fehér	0·01—0·005 «	«
« Gánt, Harasztosbánya «aluminium bauxit»	0·005 «	«
« « « « «vasszegény»	0·01 «	«

II. Schneiderhöhn elemzése (magánközlemény.)

Átlagminta magyarországi bauxitokból	0·005—0·001 % *BeO*

III. Szelényi berylliumelemzései.

a) Bauxitok.

Szám	Lelőhely	*BeO* %	Al_2O_3 %	SiO_2 %	Fe_2O_3 %	TiO_2 %	Izz. veszt.
1.	Knezpolje (Mostartól Ny-ra cca 18 km-re az országút mellett)	0·005	64·77	1·00	20·5	3·2	13·52
2.	« « «	0·001 alatt	64·24	0·84	18·70	3·2	12·99
3.	« « «	0·001	63·40	0·70	19·70	3·3	12·90
4.	« « «	0·005	62·23	0·95	20·2	3·3	13·32
5.	« « «	0·005	64·17	0·95	18·60	3·2	13·08
6.	« « «	0·0005	63·26	1·02	19·5	3·3	12·92
7.	« « «	0·0005	62·46	0·88	20·3	3·1	13·26
8.	« « «	0·001	64·11	0·93	18·9	3·2	12·85
9.	« « «	—	62·12	0·80	20·7	3·2	13·18
10.	« « «	0·005	64·35	1·05	18·4	3·3	12·90
11.	Citluk (Mostartól D-re	0·01	54·80	5·00	12·1	3·0	25·10
12.	« Zitomislic állomással szemben)	0·005— 0·01	44·70	3·80	32·90	2·10	16·50
13.	« «	0·01	56·90	2·00	18·20	3·00	19·90
14.	« «	0·01	57·00	1·40	18·10	3·00	20·50
15.	« «	—	49·15	2·05	25·2	2·4	21·20
16.	« «	—	36·70	26·10	18·4	1·7	17·10
17.	« «	0·0005	43·00	19·15	18·2	1·7	17·95
18.	Páfrányos (Popratina Knez-	0·0001	49·75	11·89	25·00	2·8	12·60
19.	poljén cca 4 km-el túl Ny-felé)	—	57·17	3·01	24·20	3·2	12·42
20.	« « «	0·005— 0·01	56·80	3·18	24·20	3·4	12·42
21.	« « «	0·005— 0·01	58·73	1·65	23·90	3·3	12·42
22.	« « «	0·005— 0·01	56·48	1·30	18·00	1·8	12·42
23.	« « «	0·005	59·21	1·12	23·80	3·1	12·78
24.	« « «	0·01	56·03	8·90	18·70	2·9	13·47
25.	« « «	0·005	50·77	14·56	18·90	2·2	13·57
26.	« « «	0·01	44·36	28·22	12·40	1·6	13·42
27.	« « «	0·01	41·83	30·39	11·60	1·6	14·58

(Folytatás.)

Szám	Lelőhely	*BeO* %	Al_2O_3 %	SiO_2 %	Fe_2O_3 %	TiO_2 %	Izz. veszt.
28.	Harasztos (Gánt)	0·005	59·26	4·08	18·20	2·7	15·76
29.	«	0·01	65·77	3·13	13·30	2·6	14·60
30.	«	0·005	63·35	4·70	14·50	2·6	14·85
31.	«	0·001	67·33	3·62	12·10	2·4	14·55
32.	«	0·001 alatt	66·48	2·80	13·30	2·5	14·92
33.	«	0·001	64·00	2·14	15·00	2·5	16·36
34.	«	0·005	60·76	1·72	18·40	2·0	17·12
35.	«	0·001	62·01	2·97	16·10	2·1	16·82
36.	«	0·005	38·72	34·70	8·3	1·7	16·58
37.	«	0·01	56·85	11·40	14·40	2·0	15·35
38.	Druisi (Dalmacia)	0·005	54·05	1·15	21·8	2·8	20·20
39.	«	0 001	54·07	0·98	22·1	2·7	20·15
40.	«	0·001 alatt	52·70	0·70	23·1	2·7	20·80
41.	«	0·001	54·02	1·68	21·9	3·0	19·40
42.	Meleges (Gánt)	0·001	59·34	6·06	17·9	2·9	13·80
43.	«	0·005	57·76	6·70	19·1	2·5	13·94
44.	«	0·01	56·72	7·38	18·6	2·3	15·00
45.	«	0·005	56·32	8·66	17·5	2·4	15·12
46.	«	0·001	56·14	6·50	19·0	2·1	16·26
47.	«	0·001	56·72	6·50	19·3	1·8	15·68
48.	«	0·005	57·52	6·38	19·8	2·1	15·20

(A bauxitok chemiai elemzési adatait az Aluminiumérc Bánya és Ipar r. t. volt szíves rendelkezésemre bocsátani, amiért e helyen is köszönetet mondok.

49. Rudopolje Gracac közelében (Lika Krbava).
Triaszkori bauxitminták a dolomit alól: *BeO* %
Fehér ... 0·001
50. Lilás, a fekü közelében ... 0·001
51. Vörös, vastartalmu ... 0·01
52. Albioratelep (Bihar m.) Rozlozsnik gyüjtése (1916) 0·005—0·01 között
53. « « « « « 0·005—0·01 «
54. Barátka, Bihar vm. Rozlozsnik gyüjtése (1916) ... 0·005—0·01 «
55. Arsuly « « « « ... 0·005—0·01 «

		BeO %
56.	Jádremete, Bihar vm. Rozlozsnik gyüjtése (1916)	0·005—001 között
57.	Ponicsora « « « «	0·005 «

b) Agyagok (Kalecsinszky gyüjtéséből).

		BeO %
58.	Rákos (Kalecsinszky számozása 173.)	0·0005
59.	Budaujlak (« « 758.)	0·005
60.	Budaörs (« « 41.)	0·005—0·01
61.	Székesfehérvár (« « 907.)	0·005
62.	Beregszász, kaolin (« « 263.)	0·0000!
63.	Boglyas-Telkibánya, kaolin « « 613.)	0·0000!
64.	Sümeg (731.)	0·005
65.	Kőbánya (75.)	0·0 5
66.	Sárospatak (132.)	0·005

c) Kaolinok (Liffa A. gyüjtéséből).

		BeO %
67.	Telkibánya. Agyaggá állott gyúrható zöldköves andezit	0·0005
68.	« Kékesszínű kaolin	0·001
69.	Hollóháza. Riolit mellől (Liffa számozása 18.)	—
70.	Radvány. IX. táró « «	0·01
71.	« III. « « «	0·01
72.	Sárospatak. Kaolin (Liffa számozása 37.)	—
73.	« Lemezes riolit	0·005
74.	« Csokoládébarna agyag a riolit alól	0·05!!
75.	Mád. Kaolin. Barna f. bányából (Liffa számozása 49.)	0·005
76.	Szegi-Long. Kaolin	0·005—0·01

Irodalom.

1. Cyril S. Fox: Bauxite and alumineus laterite. IInd. edition. 1932.

2. Vadász Elemér: Beryllium és nyersanyaga. Bány. Koh. Lapok. LXV. 462. 1932.

3. Dittler u. Kirnbauer: Zeitschr. f. prakt. Geol. 1931.

4. V. M. Goldschmidt und Cl. Peters: Zur Geochemie des Berylliums. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Klasse. 1932. Vol. II. No. 25, 360.

5. R. Mannkopff und Cl. Peters: Über quantitative Spektralanalyse mit Hilfe der negativen Glimmschicht im Lichtbogen. Z. f. Physik 70, 444, 1931.

6. R. Mannkopff: Anrägungsvorgänge und Jonenbewegung im Lichtbogen. Z. f. Physik. 76, 396, 1932.

7. R. MANNKOPFF: Über Elektronendichte und Elektronentemperatur in frei brennenden Lichtbögen. Z. f. Physik. 86, 161, 1933.

8. E. PREUSS: Spektralanalytische Untersuchung der Tektite. Chemie d. Erde IX. 365, 1934/35.

9. W. v. ENGELHARDT: Die Geochemie des Barium. Chem. d. Erde. X. 187, 1936.

10. H. BAUER: Quantitative Spektralanalyse schwer verdampfbarer Stoffe im Lichtbogen, untersucht am Lanthanoxyd. Z. anorg. Chem. 221, 209, 1935.

11. L. W. STROCK: Spektrum analysis with the carbon-arc cathod layer. A. Hilger, ltd. London, 1936.

12. LUNDEGÅRDH: Die quantitative Spektralanalyse der Elemente. 1929. Fischer Verlag.

13. Dr. JASCHIK SÁNDOR és dr. SEELING EGON: A minőségi és mennyiségi emissziós színképelemzés a gyakorlatban. Kísérletügyi Közl. 39, 83, 1936.

14. BARDÓCZ ÁRPÁD: Az emissziós színképelemzés a fémiparban. Mérn. Építész. Egyl. Közl. 70, 298, 1936.

15. OPPELTZ GYŐZŐ: A fizikai módszerek használata a kohászati elemzéseknél. Bány. Koh. Lapok 69, 465, 1936.

A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. 15-én tartott üléséből.)

SPEKTRALANALYTISCHE BESTIMMUNG DES BERYLLIUMGEHALTES DER BAUXITE.

Von T. SZELÉNYI.

Über die Berylliumgehalte der Bauxite gehen die Angaben in den Veröffentlichungen und die allgemeinen Meinungen so ziemlich auseinander. Der gute Grund dafür ist in der verhältnismässig kleinen Zahl der bis jetzt gemachten Analysen zu suchen. In Anbetracht der grossen Inhomogenität und Schwankungen der chemischen Zusammensetzung der Bauxite kann man die Lösung der Frage nur von einer grösseren Zahl systematisch durchgeführter Analysen erwarten. Zu diesem Zwecke kann nur eine spektralanalytische Methode herangezogen werden, da bekanntlich die chemische Abscheidung des Berylliums sehr umständlich und zeitraubend ist.

Zur Durchführung der Analysen im chemischen Laboratorium der Kgl. Ung. Geologischen Anstalt stand ein Quarzspektrograph «Q 24» der Firma C. Zeiss zur Verfügung.

Als Bestimmungsmethode wurde die GOLDSCHMIDT—MANNKOPFF'sche Methode gewählt, die aus zahlreichen Abhandlungen der Literatur wohlbekannt ist. Die Prinzipien, Vorteile und Möglichkeiten der Methode werden im ungarischen Teil meiner Arbeit besprochen.

Auf die mit dem lichtelektrischen (Registrier)-Photometer kombinierte und dadurch auch zu quantitativen Bestimmungen weiterentwickelte Methode mussten wir vorläufig verzichten, da das Geologische Institut zur Zeit noch eines Photometers entbehrt.

Um die Gehalte an Beryllium wenigstens nach Zehnerpotenzen angeben zu können, haben wir die in der Arbeit von GOLDSCHMIDT und PETERS: «Die Geochemie des Berylliums» benutzte Methode der letzten Linien angewendet. Die Analysendaten der hier beigefügten Tabelle wurden danach bestimmt.

Da die von der Firma C. Zeiss bezogenen, an ihrer Oberfläche

gereinigten Kohlen-Elektroden sich nur bei Untersuchungen nach der Funken-Methode, nicht aber bei Gebrauch des Lichtbogens als frei von Berylliumspuren erwiesen (der Gehalt an *BeO* war ungefähr 0·0005%), konnte bedauerlicherweise die Nachweisgrenze nicht unter diesen Gehalt heruntergedrückt werden.

Die näheren Umstände der Bestimmungen waren die folgenden: Zur Analyse abgewogene Substanzmenge 0·003 g ± 10%; Kohleelektroden, die auf einen Durchmesser von 3 mm abgedreht wurden; Zeisssche Zwischenabbildung durch sphärische Quarzlinsen; Belichtungszeit $2^1/_2$ Min.; Stromstärke bei der Zündung 4—5 Amp., die nach 30 Sec. auf 12—14 Amp. gesteigert wurde; Spaltbreite 0·01 mm; es wurde ein rotierender Sektor mit 10% freier Öffnung angewendet; Agfa Isochrom-Platten (der Beschaffung anderer geeigneterer Plattensorten stellten sich im Anfang Schwierigkeiten entgegen); die Entwicklungszeit betrug 8 Min., mit Rodinal 1 : 20.

Zum Vergleich wurden neben Bauxiten auch einige Tone und Kaoline mit in die Untersuchungsreihe aufgenommen. In den Berylliumgehalten der Bauxite und Tone zeigte sich kein wesentlicher Unterschied. Es ist aber auffallend, dass einige Kaoline sehr arm an Beryllium sind, was wohl bei näherer Untersuchung mit der Genesis derselben in Zusammenhang gebracht werden könnte.

Die Bauxite enthalten in Übereinstimmung mit den von GOLDSCHMIDT und PETERS angegebenen Analysendaten im Durchschnitt 0·005—0·01% *BeO*. Es ist scheinbar nicht möglich aus der chemischen Zusammensetzung der Bauxite auf den Berylliumgehalt derselben zu schliessen, beziehungsweise müssten zur Erforschung der Gehaltsproportionen mit den einzelnen Bestandteilen quantitative Bestimmungen herangezogen werden.

Die Daten der Tabelle zeigen, dass das übrigens sehr verbreitete Beryllium auch in den Bauxiten nicht in solchen Mengen vorkommt, dass sich die technische Herstellung daraus rentieren würde, obzwar es in der Industrie an solchen Versuchen nicht fehlt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Februar 1937.)

A HYDROCINCHONIDIN VAGY CINCHAMIDIN α- ÉS β-JÓDMETHYLSZÁRMAZÉKAI.[1]

KONEK FRIGYES l. tagtól.

A hydrocinchonidin vagy cinchamidin alárendelt mennyiségben a természetes chinakéregben is előfordul. Először HESSE — Ann. 214, 1. — figyelte meg az ú. n. homocinchonidinsulfát anyalúgjaiban és elnevezte «cinchamidinnek». Később C. FORST és CHR. BÖHRINGER — Ber. 14, 1270 (1889) — a milanói chiningyárban nyers cinchonidinből is megkapták ezt az alkaloidot, még pedig úgy, hogy a nyers báziselegyet permanganáttal kezelték, amely csak a cinchonidint oxidálja, illetve pusztítja el, nem pedig a vele közösen előforduló hydrocinchonidint. Ők ismerték fel először helyesen a cinchonidin dihydro-származékának. Az első kísérletek, amelyeknek célja ezen hydrobázisnak közvetlen hydrálással való előállítása volt, egyelőre nem vezettek célhoz, hanem olyan termékekhez, amelyek nem az oldalláncban, hanem a chinolinfél pyridingyűrűjében szedték fel a hydrogént és kivétel nélkül nem kristályos amorf anyagok voltak.[2]

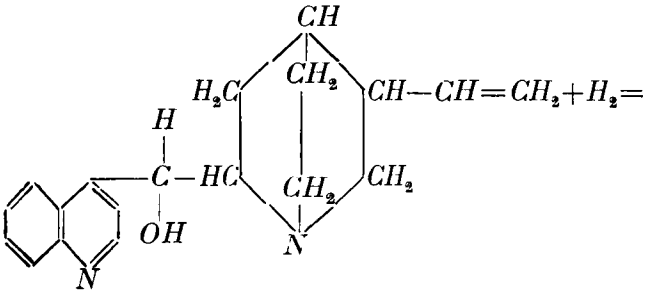
A hydrálási technika fejlődésével sikerült végül H. THRONnak a Verein. Chininfabriken Zimmer et Co. laboratóriumaiban — a 989,664. sz. amerikai, illetve a 234,137. sz. német birodalmi szabadalom (1910. márc. 27-ikéről keltezve) eljárása szerint — a cinchonidint a platinacsoportba tartozó kolloidális fémek jelenlétében hydrogéngázzal úgy hydrálni, hogy az általa kapott termék azonosnak bizonyult a természetes, alkaloiddal, egyszóval dihydrocinchonidin volt, más szóval a hydrogénfelvétel a vinyloldallánc-

[1] VI. közlemény a differenciáló alkilezés gyakorlati alkalmazásáról. Az V. közleményt lásd Math. Term.-Tud. Ért. LV. kötet (1937) 449. l.

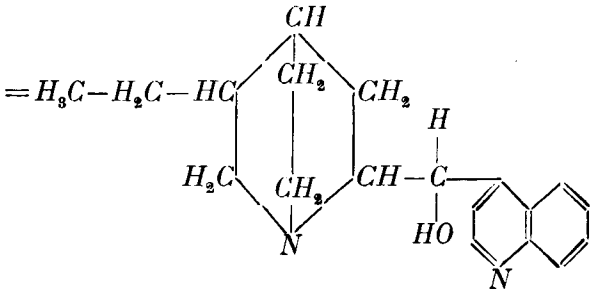
[2] SCHÜTZENBERGER: Ann. 108, 347. — ZORN: Journ. prkt. Chem. N. F. 8 (1873), 293. — KONEK: Monatshefte f. Chemie 16, 321. — LIPPMANN u. FLEISSNER: Monatshefte f. Chemie 16, 630.

ban, nem pedig a pyridingyűrűben történt. Kísérleteimhez is kiindulási anyagul egy ilyen eredetű hydrocinchonidin szolgált, amelyet nehány grammnyi mennyiségben a «Vereinigte Chininfabriken Zimmer et Co.» — Majna melletti Frankfurtból — bocsátott rendelkezésemre; kitüntető szívességéért e helyen is hálás köszönetemet fejezem ki.

Ha feltevésünk helyes, hogy katalytikus hydrálásnál a hydrogén elsősorban a molekula chinuclidin felében levő telítetlen vinylgyököt támadja, illetve telíti, akkor az ezen egyenlet:



cinchonidin $+H_2=$



ω — dihydrocinchonidin.

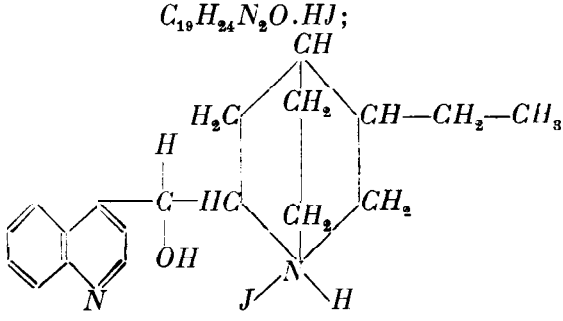
szerint keletkezett dihydrobázisnak is éppúgy bitertiérnek kell lennie, mint az eredeti cinchonidinnek; mivel továbbá a két nitrogénatom kötési viszonyaiban a hydrogénfelvétel változást nem okozott, fel lehetett tenni, hogy a differenciáló alkilezésnek alávetve, a hydrobázis is ugyanúgy fog majd viselkedni, mint maga a cinchonidin, vagy bármely más, ez irányban már megvizsgált bitertiér bázis, és két különböző színű és tulajdonságú — egy színtelen

chinuclidin — és egy színes chinolinjódmethylátot fog majd szolgáltatni.

Kísérleteim eddigi eredményei igazolták ezen per analogiam való következtetés helyességét, bár a sárga színű β-hydrocinchonidinmethyljodid tiszta állapotban való előállításának is ugyanazok a nehézségek szegültek ellene, amelyekkel az előző közleményben [1] tárgyalt stereoizomér hydrocinchonin megfelelő származékának az előállításánál is találkoztam már.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

α-Hydrocinchonidinjódhydrát.[2]



A kísérleteim kiindulási anyagául szolgáló hydrocinchonidin — mint fentebb említettem már — a «Vereinigte Chininfabriken Zimmer et Co.», Frankfurt a. Main, gyárából származott és a tisztasági követelményeknek mindenben megfelelt. A kristályok a nyilt kapillárisban 235°-nál olvadtak, — míg az irodalom 230°-ot ad meg — forró methanolból átkristályosítva nagy üvegfényű kristályok képződtek, amelyek ugyancsak 235—236°-nál olvadtak. Nehezen oldhatók benzolban, methanolban, valamivel jobban ethanolban; 1 g anyag feloldásához 20—25 cm³ forró methanol kellett. A cinchonidintől eltérőleg a hydrobázis permanganáttal szemben elég állandónak bizonyult. A primér vagy α-hydrocin-

[1] V. ö. a hydrocinchoninre vonatkozó IV. közle ényt. Mat. és Természettud. Értesítő LV. kötet (1937), 466. l.

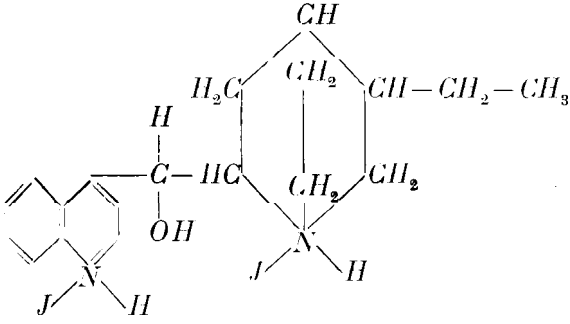
[2] Az egyszerűség kedvéért α-val jelzem a china-alkaloidokban a chinuclidin-β-val a chinolinhelyzetet.

chonidinjódhydrát éppúgy elleneszegül a kristályosodásnak, mint a stereokonfigurációjában vele azonos chininsó. Ha ugyanis 1 g hydrobázist oldunk egy mol. — 3·4 cm³ normal — sósav és 10—15 cm³ forró vízben és a szűrt oldathoz adunk egy mol. — 0·5 g — *KJ*-t, fehér gyantás, nyúlós tömeg alakjában azonnal kicsapódik a jódhydrát. Ez az anyag legtöbbször, még napok múlva is, hidegben, exsikatorban és 110°-nál szárítva megtartotta amorf jellegét, és végül gyengén sárga színű firnisszé zsugorodott össze. Ilyen kellemetlen tapasztalatok után tovább próbálkozva, sikerült egy ízben — és utána többször is — ezt a sót kristályos formában is megkapni, még pedig úgy, hogy a kicsapást langyos közegben és az üvegbottal való szakadatlan karcolás közben végeztem, mikor a kezdetben kaucsukszerű csapadék szemlátomást törmelékes lett és végül egész tömegében megszilárdult. Ilyen alakban le volt szűrhető, vízzel kimosható és át is kristályosítható. Forrón telített vízből, színtelen gyémántfényű finom tűalakú kristályok válnak ki azonnal, amelyek a nyílt kapillárisban 235—236°-nál rubinvörös olajjá olvadnak és az elemzésnél vegytiszta monojodhydrátnak bizonyultak. Így eljárva, egy alkalommal sikerült 4 g hydrobázisból 4 g vízből átkristályosított jódhydrátot kapnom. Ez a tiszta só szolgált kiindulási anyagul a többi származék előállításánál.

Elemzés: 0·2276 g 110°-nál szárított vízből átkristályosított só adott 0·1254 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 29·78%. A $HJ.C_{19}H_{24}N_2O$ képlet szerint a jód (theoret. érték) = 29·95%.

Hydrocinchonidindijódhydrát.

$HJ.C_{19}H_{24}N_2O.HJ$;



Ennek a kétszer savanyú hydrocinchonidinsónak kristályos formában való előállítása semmivel sem könnyebb, mint az előző monojódhydráté. Ha a szabad hydrobázisból indulunk ki és annak 1 g-ját két mol.-6·8 cm^3-normálsósavban oldjuk és két mol. (1·0 g) KJ-al leválasztjuk a bijódhydrátot, az első pillanatban keletkezett csapadék rögtön ismét eltűnik és a sárga oldatból hidegben napok és hetek múlva is mindig csak vörösbarna olajos anyag válik ki; amely a téli hidegnek kitéve, hónapok múlva gömbökbe csoportosult tűalakú kristályokba ment át egy ízben; mivel azonban ezek az olajos résztől nem voltak elválaszthatók és mennyiségük is igen csekély volt, további megvizsgálásuktól és elemzésüktől el kellett tekintenem.

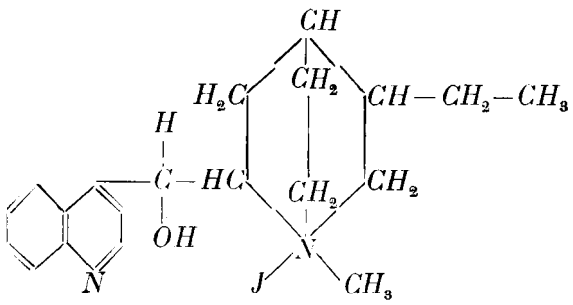
Végül azonban mégis csak sikerült a fent jelzett összetétellel bíró kétszer jódhydrogénsavas hydrocinchonidin birtokába jutni, még pedig úgy, hogy nem a szabad bázisból, hanem annak vegytiszta kristályos monojódhydrátjából indultam ki, s ennek egy molekulasúlyát oldottam egy molek. tizednormál sósavban és hidegen egy molekulának megfelelő jódkáliummal leválasztottam a bijódhydrátot. Az első pillanatban keletkezett csapadék rögtön ismét eltűnik. A gyengén sárgaszínű oldatból a téli hidegben napok múlva váratlanul szép, hosszan elnyúlt finom tűkből álló páfrányszerű vagy tollas kristályok váltak ki; amelyek nedvesen sárgaszínűek, de kénsav alatt exsikatorban vagy 120°-nál kiszárítva téglavörösek lesznek; levegőn ez a szín ismét a sárgába halványul vissza. Elemzés céljából a két ízben kapott kristályokat csak a szűrőn mostam hideg vízzel, de csekély mennyiségük miatt újból való átkristályosításukat nem mertem megkockáztatni.

Elemzés: 66·7 mg 120° száraz só adott 57·8 mg jódezüstöt; ebből a jód (talált érték) = 46·83%. A $C_{19}H_{24}N_2O.(HJ)_2$ képletben a jód (számít. érték) = 46·02%.

A hydrocinchonidin ezen karakterisztikus sója vízben természetesen savanyú reakcióval oldódik.

α-Jódmethylhydrocinchonidin.

$CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O$;



A hydrocinchonidin α- vagy chinuclidin- vagy színtelen jódmethylátjának előállításánál ugyanazt az eljárást követtem, amely stereoizomérje, a hydrocinchonin megfelelő származékának készítésénél célravezetőnek bizonyult.[1] E szerint 1 g hydrobázist oldunk fel 25—30 cm³ forró methanolban; gyorsan lehűtjük és a kristályképződés megindulása előtt hozzámérünk valamivel több mint egy mol. — 1 g — jódmethylt és a tiszta oldatot jól elduga-szolt edényben sötét és hideg helyen állni hagyjuk. Mivel az oldat napok múlva is tiszta és csaknem színtelen maradt, a methanolt a vízfürdőn elűzzük és a félszilárd sárgás maradékot exsikatorban megszárítjuk. Ezt az így kapott lakkszerű nyers terméket forró vízből — amelyben elég jól és csaknem maradék nélkül oldható — csontszénnel kristályosítjuk. A forrón telített oldatból már szűrés közben válik ki az új vegyület cm hosszú, csaknem színtelen tű-alakú kristályok alakjában. Ezeket szűrőre gyüjtve, hideg vízzel mosva, újból átoldjuk forró vízből és így végül színtelen, üvegfényű hosszú tűalakú kristályokat kapunk, amelyek légszáraz állapotban a kapillárisban 251—252°-nál olvadnak, illetve bomlanak. A stereoizomér hydrocinchonin α-jódmethylátjának olvadás-, illetve bomláspontja 257°-nál találtatott.[2] Az exsikatorban és 110°-nál

[1] L. «A hydrocinchonin vagy cinchotin jódmethylátjai» c. IV. közleményt. Mat. és Természettud. Ért. LV. köt. 468 l.

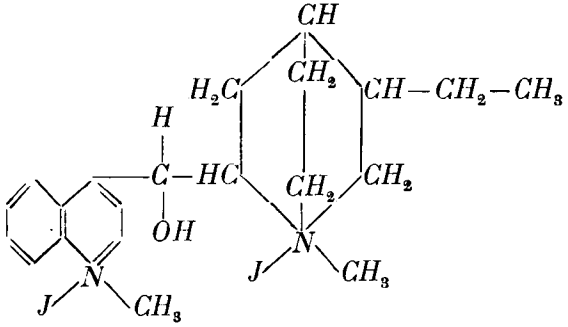
[2] L. c.

megszárított kristályok az elemzésnél a theória megkívánta jódtartalmat mutatták.

Elemzés: 0·1100 g 120° száraz anyag adott 0·0590 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 28·99%. A $CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O$ képletben a jód (számít. érték) = 28·99%.

Hydrocinchonidindijódmethylát.

$CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J$;



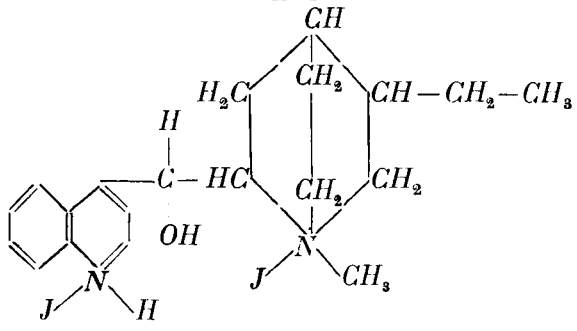
A hydrocinchonidinnek ezt az eleven sárga színű és állandó származékát kétféle úton lehet előállítani, vagy a hydrobázisból magából indulhatunk ki és azt methanollal és két mol. jódmethyllel bombacsőben a forró vízfürdőben hevítjük két óráig; vagy még jobban az előbb leírt színtelen α-jódmethylhydrocinchonidint választjuk kiindulási anyagul, ami azért is előnyösebb, mivel ez a származék jóval könnyebben oldható methanolban, mint maga a hydrobázis és ilyenformán ki lehet kapcsolni a túlsúlyban levő oldószernek a reakció menetét károsan befolyásoló hatását, amely — mint azt eddigi kísérleti tapasztalataim is igazolják — főleg abban az irányban szokott megnyilatkozni, hogy a tömeghatás törvényei értelmében a jódmethyl a túlmennyiségű methanollal reagál főleg és elsősorban, midőn is jódhydrogénsav keletkezik, amely közömbösíti az alkaloid egyik vagy mindkét bázikus centrumát, minek folytán ezek a jódmethyl felvételre képtelenek lesznek. Okulva ezen a tapasztalaton, természetesen az utóbbi utat választottam és a dijódmethylát előállítása céljából nem a hydrobázisból, hanem

annak α-jódmethylszármazékából indultam ki, amelyből például 1 g-ot oldottam 4—5 cm^3 forró methanolban és a bombacsőben kihűlés után hozzámértem valamivel több mint egy mol. jódmethylt és a csövet a forró vízfürdőben két óráig hevítettem. Még melegen kiválik az új vegyület kénsárga kristálytömeg alakjában. Szűrőre visszük, kevés methanollal mossuk és forró methanolból kristályosítjuk. Ebből az oldószerből rozettákba csoportosult kénsárga finom tűalakú kristályok alakjában válik ki az új vegyület. Olvadás-, jobban mondva bomláspontjuk a nyilt kapillárisban 250°, de már jóval előbb barnulnak és feketednek. Az elemzésnél a várt helyes értéket mutatták.

Elemzés: 0·1330 g 110° száraz anyag adott 0·1083 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 44·00%. A $C_{19}H_{24}N_2O.(CH_3J)_2$ képletben a jód (számít. érték) = 43·80%.

α-Jódmethylhydrocinchonidin-β-jódhydrát.

$CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O.HJ;$



A hydrocinchonidinnek ezt a karakterisztikus, remekül kristályosodó származékát aránylag könnyen lehet előállítani, ha például 1 g α-jódmethylhydrocinchonidint oldunk egy mol. 2·3 cm^3 normal sósavban és a tiszta, gyengén sárga oldathoz egy mol. — 0·38 g — jódkáliumot adunk kevés vízben, mire a keresett vegyület sárga kristályos csapadék alakjában rögtön kiválik. Szűrőre hozzuk, kevés hideg vízzel mossuk és kevés forró vízben oldjuk. A szűrt oldatból kihűlés után csakhamar fénylő sárga páfrányszerű lamellákban kristályosodik az új só. Az exsikatorban kénsav alatt

szárított kristályok egy mol. kristályvizet tartalmaznak, amely a szárítóban 120°-nál távozik. Olvadáspontjuk nincs, 225—235° közt megfeketednek és lassan elbomlanak.

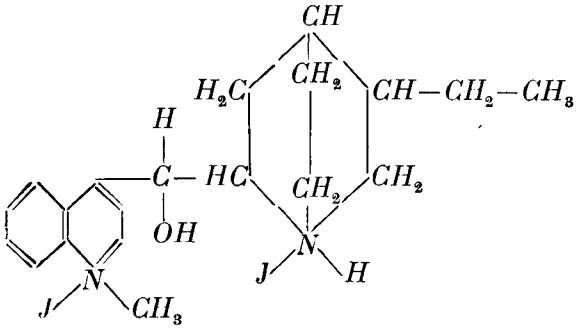
Elemzés: 0·2100 g exsik. száraz anyag 120°-on 0·0062 g vizet veszített, ami 2·95% H_2O-nak felel meg.

A $CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O.\ HJ + H_2O$ képletben a $H_2O = 3{\cdot}08\%$.

A 120°-nál szárított, tehát kristályvízmentes anyagból 0·2015 g adott 0·1656 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 44·42%. A $CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O.HJ$ képletben a jód (számít. érték)=44·87%.

α-Jódhydrogénsavas hydrocinchonidin-β-methyljodid.

$HJ.C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J$;



Ez a narancssárga hydrocinchonidinszármazék, amely izomér az előző fejezetben leírt α-jódmethylhydrocinchonidin-β-jódhydráttal [1] képződik, ha az alkaloid α-jódhydrogén sóját jódmethyllel és methanollal bombacsőben 95—100°-ra hevítjük. Számos kísérlet eredményeként 1 g átkristályosított α-jódhydrátot oldottam 5—6 cm³ forró methanolban és a bombacsőben kihűlés után egy mol. jódmethylt adtam hozzá; a reakció befejezéséhez rendesen elég volt, ha a csövek két óráig lettek a forró vízfürdőben hevítve. Sokszor már a meleg csövekben is kivált a reakciótermék intenzív-

[1] Itt tulajdonkép a helyzeti izoméria egy speciális esetével állunk szemben, amely úgy áll elő, hogy a HJ és a CH_3J helye a két nitrogéncentrumon fel van cserélve. Hogy izomérek, az különben első pillanatra szembetűnik a két vegyület kristályhabitusán és színén, eddigi tapasztalatainkkal egyezően az lesz az erősebben színezett (mélyebb sárga tónus), amelyben a CH_3J a chinolinnitrogénen, tehát β-helyzetben áll.

sárga kristályos massza alakjában. A nyers terméket nem vízben, hanem legcélszerűbben forró methanolban oldjuk. A felére koncentrált oldatokból hidegben csakhamar rozettákba csoportosult finom sárgaszínű tűalakú kristályok válnak ki; ezek exsikatorban, majd 120°-nál kiszárítva, a nyilt kapillárisban 246—247°-nál olvadnak, illetve bomlanak, de már jóval előbb egészen megfeketednek. Az elemzésnél a theória által megkívánt jódtartalmat mutatták.

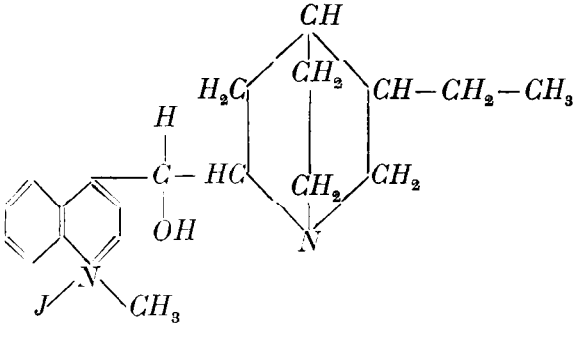
Elemzés: 0·1732 g 110° száraz anyag adott 0·1440 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 44·93%. A $HJ.C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J$ képletben a jód (számít. érték) = 44·88%.

A stereoizomér hydrocinchonin megfelelő származéka 238—40° közt olvad, illetőleg bomlik ugyanolyan jelenségek között.[1]

A hydrocinchonidin ezen szépen kristályosodó jódmethylsójának úgyszólván quantitativ képződésével nyert először kísérleti igazolást, hogy a cinchonidinből katalitikus hydogénezéssel keletkező hydrobázis is csakúgy, mint az összes ez irányban eddig megvizsgált többi hydrochinaalkaloid, szintén bitertiér bázis, amely még intakt chinolingyűrűvel rendelkezik, úgyhogy a hydrogénfelvételnek szükségkép a telítetlen vinyloldalláncban kellett bekövetkeznie, mit, ha az alkaloid nevében is kifejezésre akarunk juttatni, úgy ezt a hydrochinabázist helyesen «ω-dihydrocinchonidin»-nek kell deklarálni.

β-Hydrocinchonidinmethyljodid.

$C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J$;



[1] L. c.

A hydrocinchonidinnek ezt a színes — sárgaszínű — jódmethylszármazékát, amely az előzőleg leírt színtelen jódmethyláttól abban különbözik, hogy a halogénalkyl elemeit nem úgy, mint amaz a molekula chinuclidin-, hanem chinolinfelében tartalmazza: vegytiszta állapotban — az anyag rendkívül bomlékony voltánál fogva — eddig előállítani épúgy nem sikerült, mint a stereoizomér hydrocinchonin-sorozatban.[1] A kísérletek hosszú sorozatából, amely végül is elfogyasztotta az egész értékes kiindulási anyagot, itt csak egy-két fontosabb megfigyelésre kívánok röviden rámutatni. Ha a jódmethylsót akár száraz poralakban, akár hideg vagy meleg vizes oldatban feles ammoniákkal elbontjuk, kaucsukszerű vagy olajos termékeket kapunk, amelyekből kristályos tiszta vegyületet elkülöníteni nem sikerült, sőt annyira alkáliérzékeny a felszabaduló jódmethylát, hogy a feles ammoniák azonnal és mélyrehatóan tovább el- és lebontja, amennyiben gyakran még chinolinszag is határozottan érezhető volt. Ilyen tapasztalatok után a bontási egyenlet:

$$HJ.C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J + NaOH = C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J + NaJ + H_2O$$

szerint megkívánt lúgmennyiségekkel végeztem vagy egy tucat quantitativ kísérletet, de ezeknek az eredménye is elég siralmas volt, akárhogy is változtattam az oldószert, a hőfokot stb. Például: 511·8 mg vegytiszta elemzett sót oldottam 2—3 cm³ forró methanolban és egyszerre adtam hozzá az elbontásához szükséges egy mol. — 9·04 cm³ $\frac{n}{10}$ — nátronlúgot, az erősen sárga színű oldat elszíntelenedett; a téli hidegben hosszabb állás után kevés fakósárga kristály keletkezett, amelyek azonban az elemzésnél 29% helyett 41·06% jódot adtak, amely eredmény a mellett szól, hogy ilyen körülmények között a nagyon híg lúg a sónak csak egy kis töredékét bontotta el, míg főtömegében változatlan maradt. Egy más alkalommal az anyalúgok feldolgozásából származó termék teljesen változatlan sónak bizonyult, amennyiben a kristályok az elemzésnél 44·85% jódot adtak, míg a theoria $HJ.C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J$-ban 44·87%. Aránylag még a legjobb eredményt akkor értem

[1] L. c.

el, midőn 580·8 mg vegytiszta sót metanolos oldatban melegen bontottam 10·3 cm³ $\frac{n}{10}$ lúggal és a termék leválását huzamosabb üvegbotkarcolással igyekeztem előmozdítani; az így kapott barnássárga kristályok kellőképpen tisztítva és szárítva az elemzésnél 36·17% jódot adtak, míg a $C_{19}H_{24}N_2O.CH_3J$ képlet 28·99%-ot kíván. A 7%-os többlet vagy onnan származhatik, hogy a só ismét nem lett teljesen elbontva, vagy pedig onnan, hogy a bontásnál keletkező jódnátrium úgy tapad a kristályok felületéhez, hogy semmiféle tisztítási eljárással onnan el nem távolítható és így a termék jódtartalmát természetesen jelentékenyen növeli. Az így kapott termékeknek végleges megtisztítása egyelőre a drága kiindulási anyag teljes feldolgozása miatt abba kellett, hogy maradjon.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. 15-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE BEIDEN α- UND β-JODMETHYLATE DES HYDROCINCHONIDINS ODER CINCHAMIDINS.[1]

Von FRITZ von KONEK korr. Mitgl.

Anschliessend an seine Versuche über differenzierende Alkylirung biazotischer Alkaloide, berichtet der Vortragende über Erfahrungen mit Hydrocinchonidin. Sein Ausgangsmaterial stammte von der «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co.» in Frankfurt a. Main (für die Überlassung von Versuchsmaterial dankt er auch an dieser Stelle), war durch katalytische Hydrierung aus Cinchonidin gewonnen und erwies sich als identisch mit der natürlich vorkommenden Hydrobase, dem von HESSE aufgefundenen Cinchamidin. Er konnte im Laufe seiner Untersuchung feststellen, dass auch dieses Alkaloid, gleich seinem Stereoisomeren, dem Hydrocinchonin (vergleiche hiezu die IV. Mitteilung) zwei verschiedene, ein farbloses und ein gelbes Jodmethylat liefert, von welchen Letzteres allerdings so zersetzlich und alkaliempfindlich ist, dass es bisher in chemisch reiner Form noch nicht gefasst werden konnte und als jodwasserstoffsaures Salz analysiert wurde. Trotzdem folgt aus seinen Versuchen mit Sicherheit, dass auch Hydrocinchonidin eine bitertiäre Base mit intaktem Chinolinkern ist; die Wasserstoffaufnahme somit ausschliesslich nur in der Vinylseitenkette des Cinchonidins erfolgt sein kann; welche Tatsache wohl am besten durch die Bezeichnung «ω-Dihydrocinchonidin» festgelegt werden kann.

---

[1] Der Einfachheit wegen bezeichnet der Vortragende mit α die Chinuclidin- und mit β die Chinolinstellung der Chinabasen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Februar 1937.)

ADATOK A KEMÉNY AGYVELŐBUROK MŰKÖDÉSBELI SZERKEZETÉRŐL.

ZIMMERMANN GUSZTÁV-tól.

(3 képpel.)

Az agyvelőnek három hártyás burkán kívül található a koponyacsontos tokja, mellyel egy előző dolgozatomban (21) foglalkoztam. A hártyás agyvelőburkok fejlődéstanilag hasonló származásúak a csontos tokkal, miután mindkét rész mesenchymás eredetű. A mesenchymás burok külső rétegéből fejlődnek a koponya fedőcsontjai, a belső rétegéből pedig az agyvelőburkok alakulnak ki. A kezdeti *meninx primitiva* eleinte egységes, később azonban a pachymeninxre és a leptomeninxre különül el; az utóbbi ismét elválik és az arachnoideara és piara tagozódik.

A *pachymeninx*, a dura mater, a koponyaüregben összeköttetésben marad a csontos burokkal. A pia mater vele szemben az agyvelő felületét vonja be. Közbülső helyet foglal el az arachnoidea.

A kemény agyvelőburok irodalmában, különös tekintettel annak *működésbeli szerkezetére*, elsősorban az emberről, a humananatomia köréből, találunk vizsgálatokat. Ilyen irányban úttörő munkát végzett és mintegy az elveket állapította meg e téren Strasser (14), jóformán az ő útmutatása nyomán keletkezett a többi munka. A további kutatók közül kiemelést érdemel Bluntschli (1) és Lanz (8). Összehasonlító vizsgálatokat is végzett Popa (12). Összefoglalva röviden azokat az irányelveket, melyeket a vizsgálatok kiderítettek, csupán a lényegesebb mozzanatokat fogom a következőkben ismertetni.

A kemény agyvelőburok szerkezete a működésbeli alkalmaz-

kodás elvének megfelelően alakul ki. Ez az elv azonban leginkább a dura redőin, *kettőzetein* jut kifejezésre. E szerkezet mechanikai okok hatására állt elő, így elsősorban az agyvelő ellennyomása hatott reá, másfelől azonban lényeges befolyással vannak kialakulására a koponyacsontok növekedése, az ezáltal létrejövő eltolódások és a reájuk ható izomerők. Ez utóbbiak között két systema érdemel figyelmet, az egyik a rágóizmok, a másik a tarkóizomzat rendszere.

Mindezek az említett befolyások a dura *különleges rostrendszereinek* megjelenésében szerepelnek; e rostrendszerek, mint már utaltam reá, az egész kemény agyvelőburok szerkezetében megtalálhatók, hatásuk a fali durán és a kettőzeteken egyaránt érvényesül. A nagyobb mechanikai befolyásoknak azonban főképpen a *kettőzetek* erős rostrendszerei szegülnek ellen, míg a fali durának finomabb rostozata inkább e rendszerek kiegészítésében szerepel. A legkifejezettebben ható erők két irányban csoportosíthatók: egyrészt *hosszanti*, másrészt *haránt*-irányban működőkre. Ennek megfelelően találjuk az egyrészt hosszanti, másrészt harántrostrendszerek által létrejövő jellegzetes megerősítéseket durakettőzetek formájában: az előbbi a *sarlónyúlvány, falx cerebri*, az utóbbi a *sátornyúlvány, tentorium cerebelli*. A sarlónyúlvány az oldalsó összenyomás és a terminalisan ható húzóerők folyamán a koponyán létrejövő hosszirányú megnyúlás ellen hat; míg a sátornyúlvány a dorsalis összenyomatás esetén létrejövő oldalsó megnyúlást akadályozza meg. Mindezek a rostrendszerek a késői fetalis korban és a születés után alakulnak ki.

A kemény agyvelőburok működésbeli szerkezetét *25* különböző fajtájú, korú és nemű kutyán vizsgáltam.

A kemény agyvelőburok fehér, szívós, inas szerkezetű hártya, amely a koponyacsontok *endosteumával összenőtt* és így a koponyaüreg reliefjét követi (21). Egyes részletei különböző mértékben tapadnak a koponyacsontokhoz többnyire külön tapadási rostokkal, melyek leválasztásakor jól előtünnek. Miután ezek főképpen a juga cerebraliakon tapadnak, ezért itt erősebb is a kemény agyvelőburok összefüggése a csontokkal, mint az impressiones digitatae mélyén. A koponya oldalsó falán rendszerint könnyebben levonható a kemény agyvelőburok, ezzel szemben a sziklacsonton, valamint a csontos sátornyúlványon és a koponyaalap különféle

kiemelkedésein erősebben tapad a csontos alapjához. A dura összefüggése a csontos alappal legerősebb a rostalemez tájékán, itt egészben való leválasztása egyáltalában nem lehetséges.

A dura mater *vastagsága* ugyanazon állaton csaknem teljesen állandó, míg egyes fajok, de fajták között lényegesebb eltérést lehet találni. Így rövid- és kerekfejű kutyák durája, degeneratiós jelenségképpen, nagyon vékony, egyébfajtabeli állatok durája vastagsági méretének mintegy egyharmada.

A dura vastagságával arányosan fejlett annak rostos szerkezete is. A koponya oldalsó falán a rostok lefutásában az egyes elemeknek dorsalisan convex ívben való elrendeződése állapítható meg. Más esetekben e helyett a Sylvius-barázdába beemelkedő jugum cerebrale felső végéből mint középpontból, sugárzatosan szétágazó rostlefutás található.

A koponyaüregben, a gerinccsatornával ellentétben, az *epiduralis üreg* hiányzik. Ez az általánosan elfogadott és hangoztatott szabály azonban csak bizonyos korlátozással érvényes a kutyára, mert itt a nyakszirtcsont belső felületén az epiduralis üreg a gerinccsatornáénak folytatásában a sziklacsont caudalis szegélyéig előrehúzódik. Ez az epiduralis üreg a koponyaüregen belül a nyakszirtcsont partes lateraleseinek belső felületén található és a gerinccsatorna epiduralis üregével közlekedik. Ezzel szemben dorsalisan és ventralisan a gerinccsatorna epiduralis üregе a foramen magnum síkjában elzárt.

A gerincvelő kemény burka és az endorhachis az atlas és az epistropheus területén egymástól elkülönülten fordul elő (l. az 1. képen *1'*, *1''*) ,közbezárva a nagyobbrészt laza kötőszövettel kitöltött epiduralis üreget. Dorsalisan a mediansíkban hosszanti lefutású vékony szalag köti össze a kettőt egymással. A membrana atlantoepistrophica dorsalis és a membrana atlantooccipitalis dorsalis területén a laza kötőszöveti összeköttetést szívós összenövés váltja fel. A gerincvelő durájának a membrana atlantooccipitalis dorsalisszal való kapcsolata következtében az epiduralis üreg dorsalisan az atlas cranialis szélén végződik. Az atlas területén ez üreget egy hosszanti szalag osztja ketté, mely a durat az endorhachisszal köti össze (l. az 1. képen *1'—1''*-et összekötő vonalat).

A ventralis részen a dura és az endorhachis között laza kötő-

szöveti összefüggés található. Ezt az izületek területén az izületi tokkal való összenövés váltja fel. Az izületi tokon kívül még a ligamentum transversum dentisszel nőtt szorosan össze a dura, ezzel szemben a ligamenta alaria dentisszel nem függ össze. Nasalis irányban a sinus interoccipitalis ventralis (l. az 1. képen *11'*) fejlettségéhez mérten a dura az incisura intercondyloidea ventralisban vagy ettől nasalisan kisebb-nagyobb távolságban összenőtt az endocraniummal.

A lateralis részeken a koponyaüregben található epiduralis hézag dorsalisan többé-kevésbbé ívelt vonallal határolódik el. E vonal a membrana atlantoccipitalis dorsalis oldalsó széle mentén a nyakszirtpikkely hátulsó nyúlványa és a condylus occipitalis közötti bemetszéstől indul ki. Innen a bütyökcsatorna medialis csontlemezén levő léchez húzódik, melyen megtapad a dura. Így a bütyökcsatornát medialisan határoló csontlemeznek koponyaüregi felületén húzódó csontléc az epiduralis üreget dorsonasalis irányban határolja. Az epiduralis üreg e léc mentén előrehúzódik és nasalisan egészen a foramen jugulareig (l. az 1. képen a *9* sz. előtt és alatt levő lyukat), illetőleg a sziklacsont caudalis éléig terjed. Az epiduralis üreg továbbhaladó széle a basioccipitale és a partes laterales határán a foramen jugularetől a foramen hypoglossihoz húzódik (l. az 1. képe na *11* sz. előtt levő lyukat), ennek lateralis oldalán haladva az incisura intercondyloidea ventralisban vagy ettől kisebb-nagyobb távolságra nasalisan eléri a mediansíkot. Az epiduralis üreg nasalisan ívelt vonalban végződik, vagy pedig a foramen jugulare irányában tölcsérszerűen összeszűkül. Ez az epiduralis üreg magába foglalja a sinus occipitalis ventralist, a foramen condyloideum caudalet és legnagyobb részben a nyakszirtcsontnak, DEXLER leírásában (3) csonkakúphoz hasonlított, csőszerűen kihúzott részének oldalfalára terjed ki, hogy azután kis darabon még a nyakszirtcsontnak nasalisan tekintő felületére is húzódjék.

A kemény agyvelőburok nem csupán a koponyaüreg felületét vonja be, hanem redők, *kettőzetek* vagy nyúlványok (l. az 1. és 3. képen) révén a koponyaüreget egymással közlekedő rekeszekre osztja. A rekeszek határán levő redők a koponyaüreg falán levő convex alapi szélükön a fali durából folytatódnak. Szabad szélük

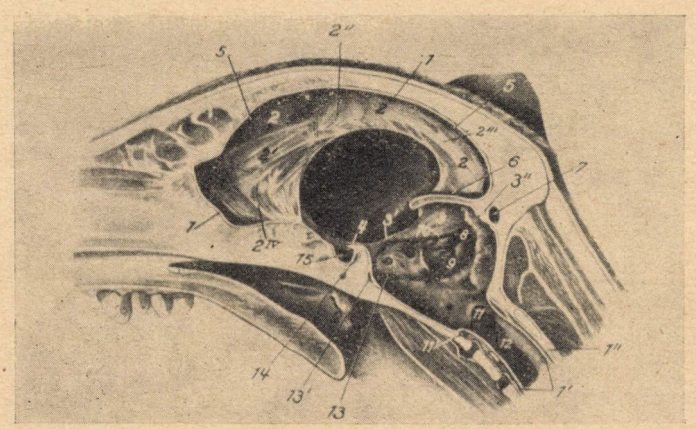
concav és így kerek vagy ovalis nyílást zár közre. A kemény agyvelőburok különféle redői tehát hasonló alapterv szerint épültek fel oly módon, hogy a koponyaüreg egyes rekeszei között a koponya csontos alapjáról kiindulva vitorlaszerűen vannak kifeszítve és külön rostrendszerrel ide megerősítve. Irányulásukban és nagyságukban különböznek egymástól. A redők egy részének csontos váza is van, mások csupán a kemény agyvelőburok kettőzetei, amelyekben azonban csontosodás szintén előfordulhat.

A kemény agyvelőburok redői a következők: 1. a sarlónyúlvány, falx cerebri (l. az 1. képen *2*), 2. a sátornyúlvány, tentorium cerebelli (l. a 3. képen *3*), 3. az agyfüggelék fedele, diaphragma hypophysicum (l. a 3. képen *4*), 4. a szagló agyvelő sarlónyúlványa, falx rhinencephali; ezekhez vehető esetleg függelékképpen még 5. a nyakszirti hasadék dura-redője, plica occipitalis durae matris (l. az 1. képen *3''*).

A *sarlónyúlvány, falx cerebri* (l. az 1. képen *2*), a mediansíkban helyeződő durakettőzet, amelynek alapi széle a crista gallin és a sutura sagittalison van, szabad széle pedig a foramen opticumtól nasalisan indul ki és félkörívben a koponya caudodorsalis részén a csontos sátornyúlvány elülső szögletéig terjed. A falx lemezének vége a csontos sátornyúlvány oromzatán van; két lemeze a kisagysátor nagy agyvelői felületének lemezeibe folytatódik (l. a 3. képen *2*, *3*). A sarlónyúlvány alapi széle a praesphenoidale területén a foramen opticumoktól nasalisan a középvonalban indul ki. E szél nasodorsalisan a csökevényes crista gallin folytatódik, majd a nyílvarrat mentén húzódik tovább caudalis irányban, végül az interparietalen a középsíkban áthúzódva, a processus tentoricus oromzatára tér.

A falx *alapi széle* legnagyobbrészt egységes ívelődésű, határvonala csupán nasalisan a fossa cribrosa területén törik meg. Itt ugyanis a homlokcsont median nyúlványa, a processus frontalis internus, a crista gallival szöget zár be. Ez a nagy- és hosszúfejű kutyákon kifejezett; ezzel szemben a rövidfejűeken egységes ívelődést lehet találni. Ezenkívül a *crista galli* csak kevéssé emelkedik ki és így a falxnak egy nasalis nyúlványa helyettesíti, amely kettéosztja a fossa cribrosat. E függeléknek külön rostszerkezete van.

A sarlónyúlvány *szabad széle* nagyjában félkört ír le (l. az 1. képen *2*), melynek középpontja a szabad szél két végét összekötő egyenes felezőpontján van. A szabad szél ívelődése a sarlónyúlvány egyes részleteinek terjedelmétől függ. A szabad szél nasalisan nagyjában merőlegesen éri a fali durát (l. az 1. képen *2'* mellett),



1. kép. *Tacskó falx cerebrije és tentorium cerebellije* paramedian metszetben, az agyvelő kivétele után, baloldalról való nézetben.
1. dura mater encephali, 1' dura mater spinalis, 1'' a gerinccsatorna endosteuma, endorhachis, 2. falx cerebri, 2' a hosszanti fórostrendszer nasalis része, 2'' ugyanennek harántrostokkal kereszteződő középső része, 2''' audalis része, 2.IV ethmoidalis harántköteg, 3. tentorium cerebelli, 3' plica petroclinoidea lateralis, 3'' nyakszirti dura-redő, 4. diaphragma hypophysicum, 5. sinus sagittalis (schematikusan), 6. sinus rectus (schematikusan), 7. sinus transversus, 8. sinus temporalis, 9. sinus condyloideus dorsalis, 10. sinus petrosus dorsalis, 11. sinus occipitalis ventralis, 11' sinus interoccipitalis ventralis, 12. sinus columnae vertebralis, 13. sinus petrosus ventralis, 13' sinus interpetrosus ventralis, 14. sinus intercavernosus caudalis, 15. sinus cavernosus.

caudalis része (l. az 1. képen 2''' mellett) azonban a tentoriummal való találkozásnál többnyire ívelt lefutásban végződik. Vége vagy egybeesik a csontos sátornyúlvány hegyével, vagy pedig már ettől proximalisan végződik, szabad széle tompaszögben találkozik a csontos sátornyúlvánnyal.

A sarlónyúlvány a koponyaüreg nasalis részén a kétoldali

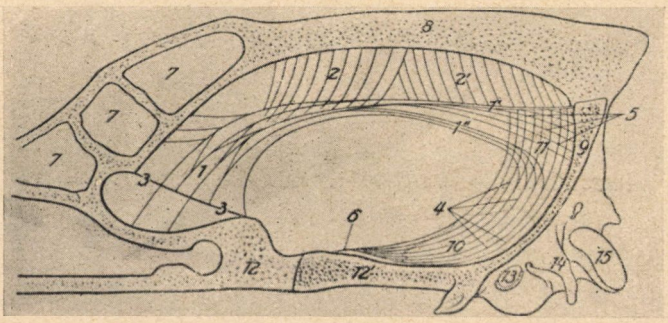
fossa cranii nasalist teljesen elkülöníti egymástól (l. az 1. képen *2'*, *2*^{IV} tájékán). A caudalis rész ezzel szemben csekélyebb mértékben húzódik be a dorsalis oldalról a koponyaüregbe. Az előbbi részlet a sarlónyúlvány homlokcsonti része, az utóbbi pedig a falcsonti része, a kettő találkozásánál a koszorú- és nyílvarrat metszése helyén rendesen a legkeskenyebb a falx (l. az 1. képen a középső *2* tájékán). E részen többé-kevésbbé kifejezett befűződés állapítható meg, amely extrém esetekben szögbentört szabad szél keletkezéséhez vezet. A legszűkebb részlettől caudalis irányban a kiszélesedés csak fokozatos és csekély mértékű, nasalisan hirtelen és jóval nagyobb mértékű.

A sarlónyúlvány durvább és finomabb rostozatot tüntet fel. A rostlefutás a durakettőzet irányának megfelelően legnagyobbrészt hosszanti, sagittalis elrendeződést mutat (hosszanti rostrendszer; l. a 2. képen *1*, *1'*, *1''*), ezenkívül vannak még e rendszereket keresztező rostok, melyek a sarlónyúlvány alapi szélétől ennek szabad széléig terjednek (harántrostrendszer; l. a 2. képen *2*, *2'*, *3*). Ez utóbbi rostféleség kevésbbé kifejezett a hosszanti lefutású rostokhoz képest.

A sarlónyúlvány hosszanti irányban lefutó főrostrendszere a falx alapi szélével párhuzamos lefutású, egy vagy több kötegből áll (l. a 2. képen *1*, *1'*, *1''*). A rostkötegek lefutása vagy egységes ívelődésben halad, vagy részekre tagoltan jelenik meg (Popa ; 12). E részek mindazonáltal functionalis egységbe tartoznak és így helyénvaló ezeket egy rendszerbe összefoglalni. Több rostköteg jelenléte esetén ezek tagoltsága, egymás mellett való helyeződése, a hosszanti tagozódást adja, szemben a harántirányú tagozódással. A hosszanti tagozottságot tehát egymás mellett haladó, nagyrészt egymással párhuzamos rostkötegek jellemzik. E rostkötegek a falx nasalis részén szétszórtan erednek és caudodorsalis irányban enyhén convergálnak, továbbá a falx keskenyebb részletének irányában legyezőszerűen összetérnek (l. a 2. képen *1*), egymással egyesülnek, illetőleg kötegeik egymást keresztezhetik is.

Ez az utoljára említett tagozódás átvezet a harántirányú tagozódáshoz, amennyiben egyes rostkötegek keresztezése helyén elmosódott határú inas foltok keletkeznek, melyek tömegesebbek, vastagabbak, durvább rostozatúak, nem áttetszők; egyes rostok

végei- mások eredéseiül szolgálnak és így egymás után következő szakaszokra tagolják a falx rostozatát. Ezek az inas foltok nagyobb egységes területen is előfordulnak, így különösen a falx hátulsó, parietalis részletén (l. az 1. képen 2‴), ahol nagyobb szilárdság elérésére el is csontosodhatnak. A haránttagozódás inas foltjain vagy inas csíkjain kívül még kisebb tömör foltok, megerősített részletek találhatók a falxon, melyek egyes kötegek találkozásánál



2. kép. *Kutya falx cerebrijének és tentorium cerebellijének rostszerkezete* schematikusan, baloldalról tekintve.

1. a sarlónyúlvány hosszanti főrostrendszerének nasalis része, 1′ ugyanennek caudalis része, 1″ ugyanennek ventralis ága, 2. a sarlónyúlvány harántrostozatának nasalis része, 2′ ugyanennek caudalis része, 3. ethmoidalis harántköteg, 4. a kisagysátornak a crista petrosan eredő rostjai, 5. ugyanennek a nyakszirt- és falközötti csontokon eredő rostjai, 6. plica pteroclinoidea lateralis, 7. homloköböl, 8. koponyatető, 9. halántékcsont (ferde metszetben), 10. sziklacsont (pontozottan), 11. processus tentoricus (pontozottan), 12. koponyalap (hosszmetszetben), 12′ koponyaalap (ferde metszetben), 13. baloldali külső hallójárat nyílása, 14. baloldali torkolati nyúlvány, 15. baloldali nyakszirtbütyök.

jönnek létre; kisebb-nagyobb csontkemény gócok ezek, melyekből esetenként radialisan szétsugárzó rostozat húzódik ki.

A sarlónyúlvány *hosszanti főrostrendszerének* nyalábja, illetőleg nyalábjai a fossa ethmoidalisban erednek. Kiindulásuk ritkábban a crista galliról, gyakrabban egy harántlefutó rostkötegből történik, melyet röviden *ethmoidalis harántkötegnek* lehet nevezni (Popa *j*-rostozata; 12). E köteg a sarlónyúlvány alapi szélének ívelt folytatása, mindkét végén az alapi széllel érintkezik, ebbe átmegy.

A főrostrendszer azonban a sarlónyúlványnak az ethmoidalis haránt kötegből caudalisabban levő részén is eredhet, szétszórt finomabb rostokból, melyek a falx frontalis részén kötegekké csoportosulnak (l. az 1. képen *2'*).

A hosszanti főrostrendszer két részre tagolható, és pedig egy frontalis és egy parietalis részre. A frontalis rész (l. a 2. képen *1*) rostjai rendesen szélesebb területen több köteggé feloldva találhatók. A kötegek caudalis irányban, a nyíl- és koszorúvarrat metszéspontja irányában convergálnak. A hosszanti főrostrendszert a frontale területéről származó rostok egészítik ki és kötik össze a fali durával (l. a 2. képen). A frontale belső felületének *elülső* részéről szélesen lemezszerűen kiterült rostrendszer húzódik ferdén a főrostrendszer dorsalis oldalához; a frontalenak *hátulsó* részén ellenben egyes erősebb kötegek kanyarodnak a fali durából a főrostrendszerhez, melyek között a falx alapi szélén egy-egy agyvelővéna halad át a sinus sagittalishoz. Mindkét rostféleség ferdén, caudalisan hegyesszög alatt tér a főrostrendszerhez, úgyhogy ez caudalis irányban mindinkább erősebbé lesz.

A rostkötegek elrendeződése a falx alakulásában, a szabad szélének irányulásában különféle változatokat okoz. Hosszúfejű kutyák hosszanti főrostrendszere több köteggé feloldva az egész nasalis falxrészleten oszlik el, ilyenkor a szabad szél nem merőlegesen éri a sphenoidalet, hanem a rostozat lefutásának megfelelően ferdén. Olyan esetben viszont, amidőn a hosszanti főrostrendszer csupán a falx nasalis részének dorsalis felét tölti ki, alatta ventralisan a szabad szél mentén finomabb rostozatú részlet foglal helyet és ez esetben a szabad szél merőlegesen éri az ékcsont testét.

A falx caudalis részén két rostköteg halad keresztül nasocaudalis irányban, melyek mindegyike a hosszanti főrostrendszer része. Az egyik rostköteg (l. a 2. képen 1') a falx szabad szélétől vagy ettől dorsalisan egy még később ismertetendő inas lemezből kiindulva ferdén caudodorsalisan átszeli a falx caudalis, parietalis részletét és a koponyatető és a processus tentoricus alkotta szöglet irányában húzódik és itt a crista sagittalis interna két oldalán a hátulsó koponyafal durájába kanyarodik. A másik rostköteg (l. a 2. képen 1'') a falx szabad széle mentén húzódik caudalis irányban és ventralisan concav ívben a hártyás kisagysátor nagy-

agyvelői lemezének rostozatába megy át. Ez utóbbi ventralis ágból azonban szintén húzódhat egy köteg a proc. tentoricus és a koponyatető szöglete irányában.

A sarlónyúlvány nem csupán hosszanti rostrendszereket tüntet fel, hanem harántirányú rostozatok is találhatók benne. A harántirányú rostok dorsoventralisan szelik át a sarlónyúlványt, úgyhogy az alapi és szabad szélt kötik össze egymással (l. a 2. képen *2*, *2'*, *3*).

A *harántrostrendszerek* egyik csoportja a koponyatetőről indul ki (l. a 2. képen *2*, *2'*), distalisan nagyrészt a hosszanti főrostrendszer különböző részleteivel egyesül. A koponyatetői harántrostrendszernek frontalis és parietalis részleteit lehet megkülönböztetni. A kettő egymástól nemcsak a rostok topographiajában különbözik, hanem a két részlet a rostlefutás irányulásában is eltér egymástól (l. a 2. képen). E harántrostrendszer, főképpen a frontalis rész, rostjai a hosszanti főrostrendszerrel találkozva, a koponyatető nem pneumatizált részének megfelelően erős, rostos, inas szerkezetű lemezt adnak, mely gyakran el is csontosodhat. A lemez különleges erősségét a kétféle irányulású rostok sűrű fonadéka adja, amelybe még a fali durából egyéb rostok is besugározhatnak, maguk között a dorsalis agyvelővénák átjárására szolgáló réseket hagyva.

A koponyatető harántrostrendszerének elülső, *frontalis* részletén (l. 2. képen *2*) a rostlefutás nasoventralis irányú. Rostjai a hosszanti főrostrendszerhez a frontale pneumatizált részéről haladó erősítő rostrendszerre merőleges lefutásúak. A harántrostrendszer a koponyatető durájának a dorsalis agyvelővénák torkolata körüli részleténél ered, majd a falx alapi szélén át a sarlónyúlvány lemezébe jut, hol nasoventralis irányulással a főrostrendszer felé halad. Distalis részén nasalis irányba kanyarodik és így fokozatosan egyesül a főrostrendszerrel.

A koponyatetőről eredő harántrostrendszernek *parietalis* részlete (l. 2. képen *2'*) caudoventralis irányulású rostokat tüntet fel, melyek ferdébbek a frontalis részlet rostjainál és a tentoriumtól jövő különféle rostozattal is szöget zárnak be. Ez a rostrendszer is, meg a tentorium rostrendszerei is a hosszanti főrostrendszerben végződnek és ezt az interparietale felé való haladásában erősítik,

illetőleg az errefelé való haladás közben belőle ágaznak ki. Itt is jól előtűnik, mennyire egy functionalis egységet képvisel a falx és a tentorium. Az egyes rostrendszerek nem mereven elkülönült, sajátságos, külön lefutású kötegeket képeznek, hanem éles elhatárolás nélkül többé vagy kevésbbé egymásba átmennek. Variatióik megfigyelése is rávilágít működésbeli alkalmazkodásukra, amennyiben a koponyaüreg különböző formái kapcsán egyes rostrendszerek erősebb, más rostrendszerek gyengébb fejlettsége állapítható meg. E változatoknak különösen sokfélesége található a sarló- és a sátornyúlvány találkozásánál (l. a 2. képen *11* körül), ahol is ezeknek különböző formái, valamint a koponya caudodorsalis szögletének a kutyafajtákon belül való változatos alakulása mind olyan körülmények, melyek a dura szerkezetében itt létrejövő variatiók megmagyarázásához hozzájárulnak.

Egy másik harántrostrendszer az *ethmoidalis harántköteg* (l. az 1. képen 2^{IV} és a 2. képen *3*), amely a foramen opticumok közötti tájékról indul ki, a falx szabad szélének és alapi szélének találkozásától, vagy pedig ettől kisebb-nagyobb nasalis távolságban. Ferdén nasodorsalis irányban húzódik, egységesen kifejezett erős köteg formájában (l. a 2. képen *3*), amely a fossa cribrosa caudalis határaképpen jelölhető meg. Nasodorsalisan a kétoldali crista frontoethmoidalis internanak a mediánsíkban való találkozása helyéhez ér, ahol elérve a sarlónyúlvány alapi szélét, lateralis kanyarodással egy később ismertetendő duraredőben folytatódik.

Az ethmoidalis harántköteg egyes kutyafajták szerint különböző erősségű lehet, e tekintetben úgy a hosszanti főrostrendszer minősége, mint általában a rostozat alakulása irányadó. Az ethmoidalis harántköteget keresztezi a falxnak hosszanti főrostrendszere és nagyrészben belőle is ered. Az ethmoidalis harántköteg lefutása vagy egyenes, vagy ívelt, utóbbi esetben nasalisan convex ívben halad. Rendesen egységes nyalábot képez, de gyengébben fejlett, csökevényes formáinak megjelenésében, több kis párhuzamos nyalábra feloldva is előfordul. Dorsalis harmadának határán keresztezi a hosszanti főrostrendszer legerősebben nyalábja (l. a 2. képen *1*), mely esetenkint belőle indul ki. Találkozási helyén egy, fenn már általánosan vázolt, csomópontszerű megerősítés található, mely mint egy borsónyi elcsontosodott részlet is jelen-

hetik meg. Lehetséges még, hogy az ethmoidalis harántkötegnek a szabad szélhez közel eső részletéből az itt található finomabb rostozatú falxrészletbe dorsalisan irányuló, ferdén kisugárzó rostok haladnak. E rostok a szabad széllel párhuzamos irányulású egyéb rostrendszerekkel szöget zárnak be. Az ethmoidalis harántkötegnek a foramen opticum melletti részén is előfordul megerősített csomópont, illetőleg elcsontosodott részlet.

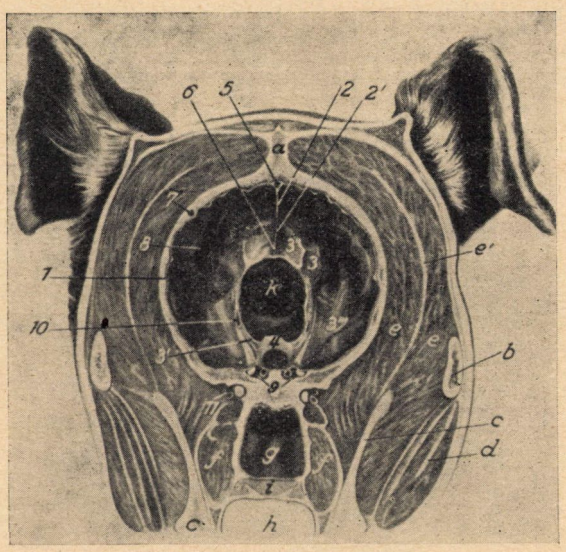
Az ethmoidalis harántköteg caudoventralis vége a praesphenoidalen a középvonalban jól megerősített, de a falx szabad szélén túl semmiféle folytatása nem látszik. Egyes esetekben mégis az ethmoidalis harántköteg két szárra válva a koponya alapján, mint kevéssé elkülönülő és a basalis durából ki nem emelkedő részlet, tovább folytatódik. Az ethmoidalis harántkötegnek e két szára a látólyukak lateralis széle mentén tovahaladva a fissura orbitalis dorsalis falát éri el és itt a processus clinoideus nasalison végződik. Az ethmoidalis harántkötegnek jelentősége a falxnak vitorlaszerűen való kifeszítettségénél van és célja ennek a koponyaalapon való szilárdabb megerősítése; így a vitorlákon levő vízszintes kifeszítőrúd szerepéhez hasonlóan működik. Az ethmoidalis harántkötegnek a falx nasalis része kifeszítésében hasonló működése van, mint a plica petroclinoideanak a falx caudalis része és a tentorium kifeszítésében. A sarló- és sátornyúlvány egysége tehát kifeszített vitorlához hasonlítható, melyen a reáható különböző feszítő és húzóerőkkel szemben kialakult rostrendszerek ismerhetők fel.

A *tentorium cerebelli* a nagyagyvelőt választja el a kisagyvelőtől oly módon, hogy a dorsalis és a lateralis oldalról ferdén előre emelkedik a koponyaüregbe (l. a 3. képen). Nagyagyvelői felülete többé-kevésbbé domború, ezzel szemben kisagyvelői felülete vájt, homorú. Két része különböztethető meg, ezek a csupánhártyás rész (l. a 3. képen *3*) és a csontos alapon helyeződő (*3''*, *3'''*) hártyás részlete, amely közvetetlen folytatása az előbbinek és ebbe a kis- és nagyagyvelői lemezek különválásával megy át. A tentorium cerebellinek csontos alapjául szolgálnak a processus tentoricus és a sziklacsont; közöttük kifeszítve található a csupánhártyás részlet. A csontos sátornyúlvány, *processus tentoricus*, a kutyában kisebb részben az interparietaletól, nagyobb részben a parietaletól származó csontlemez, melynek változatairól, módosulatairól bő-

vebben a csonttani részben emlékeztem meg (21). A sziklacsontot a kisagysátor a crista petrosan éri el, ezen a sziklacsonti él kiegészítésére a processus tentoricus falcsonti részéhez hasonló terjedelmes lemez szolgál. Ilyen crista petrosat csupán a kutyán lehet találni, egyéb állatokon a sziklacsont nagy- és kisagyvelői felületének találkozásánál legfeljebb éles szél különböztethető meg, de a vele összenőtt függelékes csontlemez hiányzik. Emberen pedig csupán tompa szélben érintkezik egymással a sziklacsont jelzett két felülete.

A kisagysátor alapi széle megfelel a meatus temporalis (l. a 3. képen *8*) lefutása vonalának, tehát a redő a koponya halántéki és nyakszirti falából indul ki, innen nasomedialisan irányul. A tentorium cerebelli szabad széle a kis- és nagyagyvelő között közlekedő és az agyvelőtörzs áthatolására szolgáló ovális, kerek vagy szívalakú *nyílást* határol, amely a fényképező lencse rekesznyílásához hasonlítható. E nyílást általánosságban *incisura tentorii cerebelli*nek nevezik, ami helytelennek látszik, mert nem keskeny bemetszés, hanem terjedelmes lyuk található e helyen. Ajánlható lenne ezért e nyílás megjelölésére az incisura helyett a *foramen tentorii cerebelli* név. A foramen tentorii cerebelli (l. a 3. képen *3*, *3'*, *3''*, *3'''* és *4* között) szegélyét a dorsalis, középső részen a processus tentoricus (*3''*) szabad széle adja. A nyílás szegélye itt vagy egységes folytatólagos ívelődéssel megy át a lyuk oldalsó szegélyébe, vagy pedig megtörik a csontos és a csupánhártyás rész határán. A foramen tentorii cerebelli dorsalis széle kétféle formában fordul elő: az első esetben concav széllel határolódik el itt is a nyílás, a második esetben azonban a dorsalis részen nasalisan convex a lyuk széle. Így keletkezik a szívalakú (kártyaszív) foramen tentorii cerebelli. A szívalak basalisan tompán elhatárolt és ezáltal itt lekerekített formája miatt az emlősök szívének csúcsához hasonlítható. A processus tentoricusnak a mediansíkban a foramen tentorii cerebellibe beemelkedő részletét is keményagyvelőburok takarja, jellemző azonban reá, hogy gyakran a foramen tentorii cerebelli oldalsó szélének folytatásában erősebb rostköteg húzódik a csont fölött a falx szabad széle felé. A sarló- és sátornyúlvány találkozásának vonalában halad a sinus rectus (l. a 3. képen *6*). E véröbölnek a keményagyvelőburok redőibe való belépése a processus tentoricus dorsalis felületén, két oldalról a falx két lemezével elhatárolt

lyukon át történik. E lyuk lehet a processus tentoricus szabad szélén, vagy pedig ettől kisebb-nagyobb távolságra caudalisan, illetőleg még a processus tentoricus nasalis csúcsa előtt is beléphet a kemény agyvelőburok kettőzeteibe a falx ventralis, szabad



3. kép. *Aierdaleterrierkorcs tentorium cerebellije* az állkapcsi izület előtt, ferde harántmetszetben, elülről és felülről való nézetben.
1. Dura mater encephali, 2. falx cerebri harántmetszete, 2′ falx cerebri szabadszéle, 3. tentorium cerebelli, 3′ plica petroclinoidea lateralis, 3″ processus tentoricus, 3‴ os petrosum, 4. diaphragma hypophysicum, 5. sinus sagittalis, 6. sinus rectus, 7. falcsonti diploëvena, 8. sinus temporalis, 9. sinus cavernosus (az arteria carotis internaval), 10. sinus petrosus dorsalis, 11. az arteria carotis internanak a foramen caroticum externumon át bocsátott hurokja, *a)* crista sagittalis externa, *b)* arcus zygomaticus, *c)* mandibula, *d)* musculus masseter, *e)* musculus temporalis, e′ a musculus temporalis inas beirata, *f)* musculus pterygoideus, *g)* ductus nasopharyngeus, *h)* szájgaratüreg, *i)* inyvitorla, *k)* foramen magnum.

szélén át. Más esetben a lyukat és a belőle a keményagyvelőburok lemezei között haladó járatot a sinus rectus számára szolgáló csatorna helyettesíti, mely a processus tentoricus hegyétől egészen a canalis transversusig terjedően átfúrja a csontos sátornyúlványt.

A sinus rectusnak a dura kettőzeteibe való belépése helyén az agyvelő kivétele után is mindig rajta lóg az agyvelőkamarától hozzátérő vena cerebri magnanak (Galeni) csonkja.

A foramen tentorii cerebellit dorsalisan a processus tentoricus szabad széle szegélyezi (l. a 3. képen *3''*), e részlete egyes esetekben nagyon kis területre esik (kis formájú tentorium osseum). Tőle lateralisan a tisztán hártyás rész (l. a 3. képen *3*) határolja a sátornyúlvány nyílását. E nyílás a felső szélétől kiindulóan lefelé a sziklacsontig fokozatosan szélesedik, innen kezdve pedig a crista petrosa lemezszerű részének szabad széle mentén a lyuk határa a ventralis irányban convergál. A crista petrosa lemezszerű részletének kezdetén a sinus petrosus dorsalis számára szolgáló hosszantovalis ferde hasadék (l. a 3. képen *10*) látható a sátornyúlvány két lemeze között. Az egyik oldalon ezenfelül még a sinus petrosus dorsalis barázdája is előtűnik. A sinus petrosus dorsalis nyílása szomszédságában hatol az epiduralis üregbe a IV. agyvelőideg, a nervus trochlearis. A véna és az idegnyílásának kölcsönös helyzete egyénenként változó, egyszer az egyik, máskor a másik helyeződik inkább dorsalisan. A sinus petrosus dorsalis nyílása a csont és a dura között található, a csont barázdája a nyílást a ventrolateralis oldalról határolja.

A foramen tentorii cerebelli ventralis szegélyét a dorsum sellae turcicae (l. a 3. képen *4*) adja, erre húzódik reá a tentorium kisagyvelői lemezének a folytatása, amely itt átmegy a koponyaalap durájába. Nem külön redővel vagy éles szél formájában határolódik el ez a részlet, mint más állatfajokon, hanem szélesen és laposan kiterülve húzódik át a dorsum sellae turcicaere. A sziklacsont nasomedialis csúcsa és a töröknyereg támlája közötti részen a durán keresztül élénken áttűnik kék színben a sinus petrosus ventralis. A tentorium cerebelli szabad széléből, a töröknyereg támlája felé áthajló redőtől lateralisan indul ki egy nasalisan haladó redő, a *plica petroclinoidea lateralis* (Koller; 7), amely éles kiemelkedéssel a processus clinoideus nasalishoz tér.

A sátornyúlványt a IV., V. és VI. agyvelőideg fúrja át. Ezek közül az V. átjárására a közismert foramen nervi trigemini szolgál, amely a sziklacsont nasomedialis csúcsa tájékán található, és itt a

crista petrosa lemezes részének tövében közte és a sziklacsont között halad át.

A IV. agyvelőidegpár a sinus petrosus dorsalis nyílása közelében ventrolateralis irányban fúrja át a tentoriumnak ez alsó részletén a durát, hogy a plica petroclinoiden lateralis mentén előrehaladjon. A sinus petrosus dorsalis és a IV. agyvelőideg számára szolgáló nyílás kölcsönös helyzete változó, hol az egyik, hol a másik a dorsalis helyeződésű. Erre a foramen tentorii cerebellinek alakja és a tentorium cerebelli iránya van befolyással.

A nervus abducens a sinus petrosus ventralis lateralis oldalán vagy még a sinus területén hatol át a durán és így ventromedialisan az V.-től halad előre.

A tentorium cerebelli szabad szélének közvetetlen folytatásában van, illetőleg ebbe ívelődéssel átmegy a plica petroclinoidea lateralis (Koller; 7). Kiindulása a sinus petrosus dorsalis nyílásától lateralisan található. Innen a crista petrosa szabad széle mentén nasoventralisan irányul, majd az idegvályúk fölött ferdén elhaladva, a processus clinoideus nasalishoz tér, miközben ellenkezőoldali társával nasalis irányban kissé convergál.

A *tentorium cerebelli* tulajdonképpen nem más, mint a falx caudalis részének kettéhasadása, illetőleg a falx caudalis részének a koponyatetőtől a koponyalaphoz térő meghosszabbítása. Jól kifejezésre jut ez az ember sarló- és sátornyúlványának viszonyában, amennyiben itt a falx cerebri caudalis része két lemezre hasad, melyek a kisagyvelő fölött kínai háztetőhöz hasonlóan lateralisan széjjeltérnek és a crista petrosan megerősítettek. A kisagysátor az emberen a sarlónyúlvány révén van a koponyatető irányában kifeszítve és így a két nyúlvány együtt erős *hordozó berendezést* képez. E berendezést erősíti, illetőleg a sarlónyúlványt a hordozás alól tehermentesíti az állatokon előforduló *processus tentoricus*. A kisagysátor a koponyaalakuláshoz képest is változatos formában jelenik meg, meredekebb és ferdébb helyeződésben található a szerint, amint hosszú- vagy rövidfejű kutya tentoriumáról van szó. Hosszúfejű kutyák tentorium cerebellije ferdébb, rövidfejűeken ezzel szemben meredekebb helyeződésű. A tentorium cerebelli alapi széle és szabad széle nemcsak nem párhuzamos egymással, mint egyébként a falx esetében is, hanem mégcsak

nem is ugyanazon síkban foglal helyet. Az alapi szél rendesen enyhébb lejtésű, míg a szabad szél meredekebb, ilyenformán a tentoriumon hullámzatosság észlelhető, ezzel kapcsolatosan keletkező hullámvölgy ferdén szeli át a sátornyúlvány tisztán hártyás részletét. Az itt található hullámvölgy a meatus temporalis barázdarészének dorsalis végétől kiindulva nasomedialis irányban halad és a szabad szélt a crista petrosanak nasomedialis végénél, a sinus petrosus dorsalis belépési nyílásánál éri el.

A kutya tentorium cerebellijén is lényegében véve az emberéhez hasonló értelmű és rendeltetésű rostozatot találni. A tentorium rostozatában a falxszal ellentétben a két lemez nem hasonló lefutású és erősségű rostokat tüntet fel, hanem a nagyagyvelői és a kisagyvelői lemez különbözhetik egymástól.

A tentorium cerebelli membranaceum vitorlaszerű kifeszítettségéből következik, hogy a benne haladó rostok a megerősített részlet felé convergálva haladnak, illetőleg ettől dviergálóan húzódnak a peripheria felé.

A tentorium cerebelli membranaceum *nagyagyvelői lemezének* egyik rostrendszere a sziklacsontról, ennek crista petrosajáról (l. a 2. képen *4*) indul ki, a rostoknak nagyrésze nasomedialisan convergál és így a plica petroclinoidea lateralisba (l. a 2. képen *6*) folytatódik. E rostrendszer, melyet irányulása szerint *sziklacsonti rostrendszer*nek lehet nevezni, az os petrosum felől legyezőszerűen széjjeltérve a processus tentoricus oldalsó széle és a meatus temporalis barázdarésze felé sugárzik szét. A rostok nem teljesen egyenes lefutásúak, hanem csekély ívelődéssel haladnak. Durvább és finomabb rostozatot lehet itt találni egymás mellett vagy kizárólagosan is. A rostok nagyobb számmal a sziklacsont crista petrosaja lemezszerű részének medialis sarkától indulnak ki, melyek jórészt a plica petroclinoideara is folytatódnak. E rostokhoz társulnak a crista petrosa további lateralis részén kiinduló társaik. Az előbbiek a processus tentoricus oldalsó széle felé, az utóbbiak a meatus temporalis barázdarésze felé irányulnak. A rostok között hosszanti, harántirányú és ferde megerősített kötegek is előfordulnak, melyek rendesen a csontos alapról kiindulva szabálytalan irányban szelik át a sátornyúlvány hártyás részletét.

Az eddig leírt sziklacsonti rostrendszernek vannak még olyan

rostjai is, melyek a crista petrosa lemezszerű részletéről kiindulva az előbbi rostokat keresztezik és így közvetetlenül haladnak a processus tentoricus oldalsó széle felé.

A plica petroclinoidea lateralisból eredő rostok rendesen a processus tentoricus oldalsó széléhez térnek, azonban itt nem végződnek, hanem ennek felületén tovább folytatódva vagy medialisan vagy caudalisan kanyarodnak és így a falx főrostrendszeréhez vagy a koponya hátulsó fáihoz érnek. A sziklacsonti rostrendszer a falxra való áttérésekor a főrostrendszerrel különféle módon functionalis egységbe foglalt. Az első és már leírt összeköttetés az, amely a főrostrendszer caudalis részének *ventralis ága* (l. a 2. képen *1''*) révén jön létre. Ez a falxnak és a tentoriumnak is szabad széle mentén halad és ennek megfelelően átkanyarodása is az egyik redőről a másikra a processus tentoricus hegyénél történik. Azonban ezen kívül is van még összeköttetés a falx hosszanti főrostrendszere és a tentorium sziklacsonti rendszere között és ez a falx-tentoriumi találkozási vonal caudalis részére esik.

A sarlónyúlvány hosszanti főrostrendszerének rostjai közvetetlenül átmehetnek egyes esetekben a sziklacsonti rostok rendszerébe. Ezenkívül még a falx főrostrendszerének a tentoriumra való folytatása előfordulhat mint a sziklacsonti rostokat keresztező rendszer is, ez esetben ugyanis a falxból jövő rostozat a plica pteroclinoidea lateralishoz térő rostokat keresztezi és a crista petrosa dorsolateralis részéhez tér.

A sátornyúlvány nagyagyvelői felületének másik rostrendszere az occipitaletól és az interparietaletól tér a tentorium osseum területére (l. a 2. képen *5*), úgyhogy a csupánhártyás részen ez a rendszer nincs képviselve. E rostok nagyjában nasalis irányban futnak le és ugyancsak a falx caudalis részletébe térnek át, úgy azonban, hogy az előbbieket, közelebbről a sziklacsonti rendszer rostjait derékszögben keresztezik. E *nyakszirti rostrendszer*, mely megfelel a Popa-féle (12) *b*-rostozatnak, a falx hosszanti főrostrendszerében végződik.

A tentorium cerebelli *kisagyvelői lemezén* levő rostok szintén a plica petroclinoidea lateralis felé convergálnak. Innen ívelt lefutásban az occipitale nasalis és a processus tentoricus ventralis

felületére húzódnak, hol ellenkezőoldali társukkal a fossa vermianaban egy egységes rendszerbe egyesülnek, amely a kisagyvelőt főkötőszerűen befoglalja. E rostok lefutása a sulcus occipitalis transversus ventralisszal párhuzamos, az előtte átkapcsolódó rostok finomabb, a tőle caudalisan haladók, melyek az occipitale felületén haladnak át, durvább szerkezetűek.

Abban az esetben, ha a tentorium cerebelli kisagyvelői felületén a rostok a csontos sátornyúlvány területére jutva nem kanyarodnak medialisan, hogy ellenkezőoldali társukkal egységet képezzenek, hanem a crista petrosaból kiindulva legyezőszerűen szétterülő lefutásban húzódnak, akkor a rostok egy része dorsalisan befelé haladó redőt alkotva, kisebb-nagyobb szög alatt behúzódik a *sulcus occipitalis transversus ventralis*ba és ennek a mélyén végződik, ez a *nyakszirti duraredő, plica occipitalis durae matris* (l. az 1. képen *3''*). Ezáltal ez a redő a dura kifeszítésében és megerősítésében fontos szerepet tölt be.

E kétféle rostlefutást, melyek közül az egyik főkötőszerűen átkapcsolódó rostokat, a másik pedig többé-kevésbbé sagittalis irányú rostokat tartalmaz, lehet két külön rostrendszernek minősíteni, éppen úgy, mint ugyannak a rostrendszernek két változatát felfogni.

Az *agyfüggelék fedele, diaphragma hypophysicum* (l. a 3. képen *4*) a töröknyereg támlájáról kiinduló, a horizontalis síkban helyeződő félköralakú redő, mely a hypophysis caudalis részletét takarja. E redő oldalt a két plica petroclinodea lateralisba megy át. Oldalsó részein kevésbbé emelkedik ki, mint caudalisan. A caudalis részen a középvonalban kis darabon a hypophysis összenőtt a diaphragma szabad szélével, itt az agyfüggelék eltávolítása után is kis nyelvszerű nyúlvány marad rajta, mely talán megfelel Koller (7) primaer durájának. A hypophysis fedelének *rostozata* a mediansíktól a dorsum sellae turcicae előtti részről kétoldalt lateralisan divergáló rostokból áll, melyek azután szélesen a plica petroclinoidea lateralisba sugárzanak szét.

A *szaglóagyvelő sarlónyúlványa, falx rhinencephali*, határolja el dorsalisan és lateralisan a fossa cribrosat. A falx rhinencephali kiindulása a falx cerebrinek nasalis részéből történik. A falxon a középvonalban ferdén, nasodorsalisan felemelkedő ethmoidalis

harántköteg (l. a 2. képen *3*) a fossa cribrosanak dorsalis szélét elérve, kétoldalt a homlokcsontok crista frontoethmoidalis internaja mentén lateralisan kanyarodik, e részlete átmegy a szaglóagyvelő sarlónyúlványába.

A szaglóagyvelő sarlónyúlványa a bulbus olfactoriust dorsalisan és lateralisan szegélyezi. A mediansíkhoz képest ferdén helyeződik, caudolateralisan irányul. Két szára közül a nasalis és medialis az ethmoidalis harántköteg felső végén indul ki, nagyjában horizontális helyeződésű és a homlokcsont belső felületén levő crista frontoethmoidalis interna mentén caudolateralisan irányul. A lateralis szára, mely caudalisabban helyeződik, verticalis irányú és a foramen ethmoidale mellett haladva, vége felé fokozatosan csökken, míg a fossa cribrosa alsó részletén elvész a fali durában.

A falx rhinencephali a falx cerebrivel szomszédos részén inkább kiemelkedő, míg tovább lefutásában magassága fokozatosan csökken. Az elülső medianrészlete a sarlónyúlvánnyal és ellenkezőoldali társával hegyes szöget zár be.

Összefoglalás.

A koponyaüreget a keményagyvelőburok béleli, ez kis részlettől eltekintve a csontok *endosteumával összenőtt.* A dura és az endosteum a koponyaüreg nyakszirti részén körülírt helyen elválik egymástól, úgyhogy e helyen laza kötőszövettel kitöltött *epiduralis üreg* található. Ez epiduralis üregnek megfelelően foglalnak helyet a dura venás vezetékei is.

A dura mater a koponyacsontokhoz egyénenkint és helyenkint különböző mértékben megerősített, így a csontok kiemelkedésein, a juga cerebraliakon erősebb a keményagyvelőburok összeköttetése az alappal; egyes helyeken, különösen durvarostú burkok esetén, külön *tapadási rostok* állapíthatók meg.

A dura egyénenkint különböző vastagságú, ezzel arányos a rostozatának minősége is, hosszúfejű fajtákon általában vastagabb, rövidfejűeken vékonyabb.

A keményagyvelőburok azonban a mellett, hogy béleli a koponyaüreget, ezenkívül még nyúlványokat, *kettőzeteket,* redőket

is bocsát abba, melyek révén a koponyaüreg részekre tagozódik. E különböző redők azonos alapterv szerint épültek fel és így szerkezetük is hasonló, csupán irányuk és nagyságuk különbözik egymástól. Jelentőségük nem pusztán a koponyaüreg részekre tagolásában van, hanem elhelyezésük olyan, hogy húzási és nyomási hatásoknak szegülnek ellen és ezek kiegyensúlyozására külön rostrendszerekkel is rendelkeznek. Így a sarlónyúlvány a koponya hosszanti megnyúlása ellen hat, míg a sátornyúlvány az oldalsó ellapulásnak, kiszélesedésnek szegül ellen. E rostrendszerek kifejlődésében lényeges szerep jut egyrészt az agyvelő ellennyomásának, másrészt az agykoponyacsontokra ható izomzat működésének.

A *sarlónyúlvány, falx cerebri* (l. az 1. képen *2*), a két hemisphaeriumot különíti el egymástól, nasalisan teljes dorsoventralis választófalat képezve, caudalisan csupán a felső részen húzódik a féltekék közé. A redő alapi széle a kakastaraj és a nyílvarrat mentén van, szabad széle a kérges testet veszi körül. Szerkezetében egy *hosszanti főrostrendszer* (l. a 2. képen *1*) és több *harántrostrendszer* (l. a 2. képen *2, 3*) állapítható meg, melyek közül kiemelést érdemel az *ethmoidalis harántköteg* (3).

A *kisagysátor, tentorium cerebelli* (l. a 3. képen *3*) a nagy- és a kisagyvelőt különíti el egymástól, harántirányú, ferde helyeződésű választófalat képez, melynek alapi széle megfelel a meatus temporalis lefutása vonalának. Szabad széle az agyvelőtörzs átjárására szolgáló *foramen tentorii cerebellit* határolja. Szerkezetére jellemző, hogy lemezei között csontos részletek vannak. Rostozata a sziklacsont crista petrosajáról (l. a 2. képen *4*) a falx caudalis részére húzódik, egy másik rostrendszere a nyakszirt- és falközötti csontról (l. a 2. képen *5*) ugyancsak a falx caudalis részére, úgy azonban, hogy a kettő keresztezi egymást; továbbá egyénenkint variálva vagy az egyik, vagy a másik rendszer az élesebben elkülöníthető. A kisagyvelői lemezen a rostok *főkötőszerűen* foglalják be a kisagyvelőt.

Az *agyfüggelék fedele, diaphragma hypophysicum* (l. a 3. képen *4*) a hypophysist a nagyagyvelőtől részben választja el. Horizontális redő ez, mely a töröknyereg támláján ered és concav félköralakban az agyfüggelék hátulsó részletét fedi.

A *szaglóagyvelő sarlónyúlványa, falx rhinencephali*, az ethmoida-

lis haránt kötegnek a frontale belső felületén haladó meghosszabbítása, mely ferde síkban haladva elválasztja a bulbus olfactoriust a nagyagyvelőtől. E redő a homlokcsont egy kiemelkedő élén, a crista frontoethmoidalis internan levő megvastagodott dura-részletnek felel meg.

Irodalom.

1. Bluntschli, H.: Zur Frage nach der funktionellen Struktur und Bedeutung der harten Hirnhaut. Roux's Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen. 106. k. 303—319. o. 1925.

2. Bradley, O. Ch.: Thopographical Anatomy of the Dog., II. Edition. London, 1927.

3. Dexler, H.: Über die konstitutionelle Hydrocephalie beim Hunde. Tierärztl. Archiv. III. k. 103—267. o. 1923.

4. Ellenberger—Baum: Systematische und topographische Anatomie des Hundes. Berlin, 1891.

5. Ellenberger—Baum: Handbuch der vergleichenden Anatomie der Haustiere. 17. k., 1932.

6. Hyrtl, J.: Handbuch der praktischen Zergliederungskunst. Wien, 1860.

7. Koller, R.: Zur vergleichenden Anatomie der Hypophysenumgebung. Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 65. k. 183—203. o. 1922.

8. Lanz, T.: Über die Rückenmarkshäute. I. Roux's Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen. 118. k., 252—307. o. 1929.

9. Lesbre, X.: Précis d'anatomie comparée des animaux domestiques. Paris, 1923.

10. Martin, P.: Lehrbuch der Anatomie der Haustiere. 4. k. Stuttgart, 1923.

11. Montané—Bourdelle: Anatomie régional des animaux domestiques. Paris, 1913.

12. Popa, Gr. T.: Structure fonctionelle de la dure mère cranienne etc. Annales Scientif. de l'Univers. de Jassy. 13. k., 119—192. o. 1923.

13. Sisson, S.: The Anatomy of the domestic Animals. 2. k. Philadelphia—London, 1914.

14. Strasser, H.: Über die Hüllen des Gehirnes und des Rückenmarks. Comptes rendues de l'Assoc. des Anat. Paris. 3. k. 175—184. o. 1901.

15. Villiger, E.: Gehirn und Rückenmark. Leipzig, 1922.

16. Zietzschmann, O.: Handbuch der Anatomie des Hundes. 1. k. Berlin, 1936.

17. Zimmerl, U.—Brunni, A. C.—Caradonna, G. B.—Presiuso, L.: Trattato di anatomia veterinaria. Milano, 1929/30.

18. ZIMMERMANN Á.: Háziállatok anatomiája. 2. k. Budapest, 1923.

19. ZIMMERMANN Á.: Fejlődéstan. 2. k. Budapest, 1922.

20. ZIMMERMANN, G.: Über die Dura mater encephali und die Sinus der Schädelhöhle des Hundes. Zeitschr. f. Anatomie und Entwicklungsgeschichte, 106. k. 107—137. o. 1936.

21. ZIMMERMANN G.: Adatok a koponyaüreg összehasonlító csonttanához. (A kutya koponyájának belső reliefje.) Matematikai és Természettudományi Értesítő. LV. k. 811—836. o. 1937.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15-én tartott üléséből.)

BEITRÄGE ZUM FUNKTIONELLEN BAU DER HARTEN HIRNHAUT.

Von GUSTAV ZIMMERMANN.

Die *Dura mater encephali des Hundes* ist grösstenteils mit dem darunter liegenden Endost der Schädelknochen verwachsen und bildet mit dem eine Einheit. Im Bereiche des Occipitale befindet sich jedoch bilateralsymmetrisch eine solche Stelle, wo Dura und Endost sich voneinander trennen und demgemäss ein *Epiduralraum* entsteht. Auch sonst sind kleine spaltförmige Epiduralräume vorhanden, nähmlich an jene Stellen, wo die Sinus durae matris verlaufen.

Die Dura ist von *verschiedener Dicke*, die von individuellen Faktoren bedingt wird, an einem und denselben Tier findet man sie jedoch annähernd gleich dick. Die Befestigung der Dura erfolgt an manchen erhebenden Vorsprüngen des Knochenreliefs (21) mit besonderen *Anheftungsfasern*.

Die harte Hirnhaut teilt die Schädelhöhle durch mehr oder weniger tief eingreifenden *Faltenbildungen* in unvollständig voneinander getrennte Räume. Die Falten erscheinen in ihrer Grundform von gleichem Bau und gleicher Beschaffenheit, sie unterscheiden sich voneinander nur in ihrer Verlaufrichtung und in ihrer Grösse. Ihr Anheftungsgrad befindet sich immer an der Schädelwand befestigt und ist convex, ihr freier Rand ist gegen der Mitte der Schädelhöhle zugekehrt und ist concav. Die Falten werden derart ausgespannt, dass sie verschiedene Krafteinwirkungen ausgleichen können, demgemäss können sie auch *besondere Fasersysteme* aufweisen.

Die *Gehirnsichel, Falx cerebri*, ist in der Medianebene ausgespannt, sie zieht von der Gegend der beiden Opticuslöcher gegen den Scheitel- und der Hinterhauptgegend hin. Hier setzt sie sich, über den Knochenvorsprung des Processus tentoricus hinziehend, in das quergestellte Kleinhirnzelt fort, wobei die Grosshirnlamelle

die Fortsetzung der beiden Sichellamellen darstellt. Die Grosshirnsichel weist Längs- und diese kreuzende Querfasersysteme vor.

Das *Längsfasersystem* (s. Abb. 2, *1*) entspringt an der Crista galli und zieht leicht bogenförmig ausgespannt caudal, wo es sich an der hinteren Schädelwand befestigt. Dieses Längsfasersystem weist zwei Teile auf, und zwar einen *frontalen* und einen *parietalen* Teil. Von ihm spaltet sich eine *ventrale Abzweigung* ab (s. Abb. 2, *1''*), welche zum Kleinhirnzelt hinüberzieht. Das eine *Querfasersystem* (s. Abb. 2, 2, *2'*) setzt sich aus der Dura des Schädeldaches fort und verbindet den Anheftungrand der Sichel mit ihrem freien Rande. Ein anderes quergerichtetes Fasersystem erscheint als die *ethmoidale Querfaserung* (s. Abb. 2, *3*), die die Fossa cribrosa caudal begrenzt und von der Sichel einen nasalen Teil abspaltet.

Das *Kleinhirnzelt, Tentorium cerebelli*, stellt eine schiefe Querscheidewand dar zwischen der grossen und kleinen Schädelhöhle. Ihr Anheftungsrand entspricht der Verlaufslinie des Meatus temporalis. Ihr freier Rand bildet eine blendenlochartige Öffnung iür den Durchtritt des Gehirnstammes. Das Kleinhirnzelt besitzt fm Gegensatz zur Falx cerebri teilweise eine *knöcherne Grundlage*, die durch den Processus tentoricus und der Crista petrosa gebildet wird. Ein Fasersystem des Tentoriums entspringt an der Crista petrosa (s. Abb. 2, *4*), ein anderes am Occipitale und Interparietale (s. Abb. 2, *5*). Diese beiden Systeme kreutzen sich und eines von beiden Fasersystemen erscheint immer mehr vorwiegend. Auf der Kleinhirnfläche des Tentorium cerebelli umgeben die Fasern das Kleinhirn haubenförmig.

Der *Hypophysendeckel, Diaphragma hypophysicum* (s. Abb. 3, *4*), bildet eine horizontale Falte, die von der Türkensattallehne aus in nasaler Richtung zieht und den caudalen Teil der Hypophyse von der grossen Schädelhöhle trennt.

Die *Riechhirnsichel, Falx rhinencephali*, bildet beiderseits die Fortsetzung der ethmoidalen Querfaserung. Sie sitzt an einem besonderen Vorsprung des Stirnbeins, diese entspricht der Crista frontoethmoidalis interna.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

A KONJUGÁTA-SEJTEK PLAZMA-AMŐBÁI.

KÜSTER ERNST-től (Giessen).

(9 szövegközötti rajzzal.)

A plazma-amőbák nem egyebek, mint a protoplazma systrophikus halmozódásai, amelyek, ha mozgékony plazmából keletkeznek, amőbaszerű alakváltozással mozognak. Ily sejteket legkönnyebben a Konjugáták, különösen a Spirogyra-fajok testében tudunk megfigyelni.

A sejtmagnélküli Spirogyra-sejtekben a plazma gyakran tekintélyes nagyságú lencsékké gyűl egybe, amelyek hetekig megmaradnak. Hasonló jelenség figyelhető meg a Zygnema-sejtekben (1. rajz) is. Gyakrabban találhatók azonban kis plazmatikus cseranyaghalmazocskák, amelyek nem mozognak. A plazma-amőbák állománya igen változatos, némelyik egyenletesen szemcsés állományú, mások pedig habos-vakuolás szerkezetűek (2. rajz). Igen érdekes, hogy bizonyos körülmények között a magasabb rendű növények sejtjei is magnélküliek maradnak és tartalmuk plazmatikus «amőbá»-vá halmozódhatik.

A Tradescantia vizsgálatakor szerzett tapasztalatok egybeesnek a Konjugátákra vonatkozólag leírt esetekkel, amelyek alapján feltételezhetjük, hogy a sejtmag elvonása a sejtben lévő korrelációkat megzavarja és plazma-amőbák keletkezésére ad alkalmat. A Spirogyrában előfordul azonban az is, hogy *sejtmagvas* centrifugált sejtekben is megjelennek plazma-amőbák (3., 4., 5. rajz). Ismeretes, hogy a centrifugálás hatásának megszüntével a plazma ismét normálisan szétterül a sejtüregben. Szerző vizsgálatai szerint ez a normális eloszlás nem lesz egyenletes, hanem a proximális csúcson nagyobb tömegű plazma gyűlik meg. Ez az eloszlás külön-

leges mozgási jelenségekkel jár együtt, amelyek lefolyását szerző részletesen ismerteti a szerkezeti változásokkal együtt.

Szerző a következőkben a chémiai hatásokra bekövetkező amőbaképződésekkel foglalkozik. A Spirogyra-tenyészetekhez adott diasztáze gyakran gyors növekedést idéz elő, ami plazma-amőbaképződéssel járó plazmatestsérülést is okoz. Másik hasonló megváltozást okozó anyag az epesavas sók különböző oldata. Szerző ötféle anyaggal végezte kísérleteit. A legjobb eredményeket 0·1—0·5% natrium dehydrocholicum használata által érte el, amellyel a legtöbb amőbaképződést idézett elő. E sók alkalmazása révén keletkezett amőbák szerkezetét szerző részletesen leírja, majd az amőbák és a sejt egyéb alkatrészei, mint pl. a spirális chloroplasta közötti helyzeti kapcsolatokat és ezek megváltozásait kíséri figyelemmel (7. és 8. rajz).

Az a jelenség, hogy a chloroplasták szintén elsodortatnak és összehalmozódhatnak, felvetette azt a kérdést, hogy a vakuolában keletkező csapadékgranulák bejutnak-e az amőbába. A kísérletek negatív eredménnyel jártak.

Az ozmotikus hatásokra bekövetkező amőbakeletkezést, amely a Helodea és a Tradescantia sejtjeiből ismeretes, a Konjugátákban nem lehet megfigyelni.

Végezetül az a kérdés merül fel, hogy normális sejtkeletkezési folyamat során felhalmozódhatik-e belső okok miatt a protoplazma, mint amőbaszerű alakzat. Szerző szerint a felsorolt régebbi megfigyelések közül csak a Couch részéről ábrázolt (9. rajz) plazmahalmozódás tekinthető plazma-amőbának, amely Vaucheria oogonium fejlődésekor normális sejtosztódás folyamán keletkezik.

(Kivonat Szabó Z. l. tagtól).

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. 15-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE PLASMAAMÖBEN DER KONJUGATENZELLE.

Von ERNST KÜSTER (Giessen).

(Mit 9 Figuren im Text.)

Mit den nachfolgenden Seiten möchte ich einige Beiträge zur Kenntnis noch wenig erforschter Erscheinungen bringen, die zu auffallenden Änderungen in der Plasmakonfiguration lebender Pflanzenzellen führen.

Von Plasmaamöben habe ich bei der Schilderung der in Pflanzenzellen verwirklichten Plasmakonfigurationen in denjenigen Fällen gesprochen, in welchen das Protoplasma sich zu ansehnlich grossen beweglichen, oft amöbenhaft wandernden Häufungen zusammenfindet. In der pathologischen Zytogenese lässt sich diese Erscheinung an Objekten verschiedener Herkunft beobachten und durch Eingriffe verschiedener Art hervorrufen.

Die in Rede stehenden Plasmaamöben sind nichts anderes als systrophische Anhäufungen des Protoplasmas. (Vgl. KÜSTER 1910, 1929*b*, 1932, 1935*a*, *b*, 1936*a*; GERM 1932, 1933.) Ist das zur Anhäufung gekommene Protoplasma beweglich, so wird ihm gegenüber der Terminus «Plasmaamöbe» am Platze sein. Vielleicht sind alle Zellenarten, deren Protoplasma zu aktiven Bewegungen fähig ist, irgendwie zur Bildung von Plasmaamöben zu bringen; Plasmaballen, die wir als Plasmaamöben bezeichnen wollen, verändern ständig ihre Form, oder ihre Substanz wird schnell oder langsam durcheinandergewühlt, oder sie rücken mit wechselnder Geschwindigkeit von der Stelle. Am leichtesten gelingt ihre Erzeugung und Wahrnehmung, soweit unsere Kenntnisse schon zu

urteilen gestatten, an den Zellen der Konjugaten, besonders der Spirogyraarten. Auf Konjugaten werden sich auch die nachfolgenden Berichte in erster Linie beziehen.

1. Plasmaamöben in kernlosen Zellen.

Zuerst bin ich auf die Entstehung von Plasmaamöben beim Studium der kernlosen Zellen von Spirogyra aufmerksam geworden, und zwar beim Studium derjenigen, die sich nach WISSELINGH's Schleuderungsverfahren (1900, 1902, 1904, 1909) an Konjugaten leicht erzeugen lassen. (Vgl. auch KÜSTER 1932.)

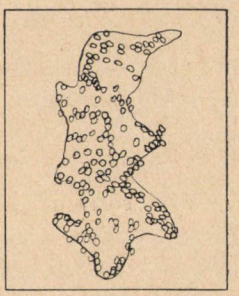


Fig. 1. Plasmaamöbe einer kernlosen Zelle: Zygnema.

Fig. 2. Grosswabige Plasmaamöbe einer kernlosen Zelle: Spirogyra.

In den kernlosen Zellen von Spirogyra sammelt sich das Protoplasma oftmals zu ansehnlich grossen Linsen, die wochenlang erhalten bleiben.

Ganz ähnliche Erscheinungen wie an Spirogyra lassen sich an Zygnema beobachten. Fig. 1 zeigt eine kernlose, farblose Zelle eines Zygnema-Fadens; neben ihr lag eine kernhaltige und plastidenreiche Zelle; das Material war Mitte Juni zentrifugiert, vier Wochen später untersucht worden. Die Amöbe ist ausserordentlich gross; sie nimmt fast die ganze Länge der Zelle in Anspruch; ihr Umriss ist reich gelappt, sehr zahlreiche Gerbstoffbläschen liegen auf oder in ihr. Die Agilität der hier dargestellten Amöbe war auffällig gross.

Sehr viel häufiger als grosse Amöben trifft man in kernlosen

Zellen von Zygnema kleine plasmatische Häufchen von Gerbstoffbläschen an, die wie Inseln auf der im übrigen von ihnen freien Zylinderfläche des Plasmaleibes liegen (KÜSTER 1937). Vielleicht handelt es sich auch bei ihnen um kleine Plasmasystrophen; amöboide Bewegungen habe ich an ihnen mit Sicherheit nicht wahrgenommen.

Die Beschaffenheit der Plasmaamöben, die wir in kernlosen Zellen von Spirogyra finden, wechselt sehr: manche sind gleichmässig in ihrer Substanz und fein gekörnt, andere zeigen grosswabigen, vakuolenreichen Bau (Fig. 2).

Von grossem Interesse ist, dass unter bestimmten Umständen auch die Zellen der höheren Pflanzen kernlos bleiben und ihren plasmatischen Inhalt zu einer «Amöbe» häufen können; BECKER (1932) erreichte dergleichen an Tradescantia-Haaren durch Behandlung der in Teilung begriffenen Zellen mit Methylenblau.

2. Plasmaamöben in geschleuderten kernhaltigen Zellen.

Die an Tradescantia gesammelten Erfahrungen legen zusammen mit den für die Konjugaten beschriebenen Befunden die Annahme nahe, dass in den bisher beschriebenen Fällen die Entziehung des Zellenkernes und die dadurch bewirkte Störung der normalen Korrelationen, insbesondere der normalen Beziehungen zwischen Protoplasma und Kern, irgendwie die Entstehung der Plasmaamöben veranlassen.

Für Spirogyra lässt sich indessen zeigen, dass auch in kernhaltigen geschleuderten Zellen Plasmaamöben erscheinen können.

Die Figuren 3, 4 und 5 zeigen Spirogyra-

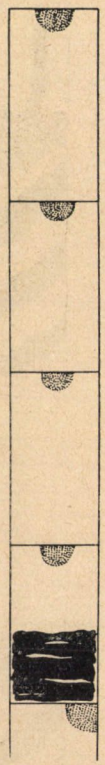


Fig. 3. Plasmaamöben in zentrifugierten, kernhaltigen Zellen; nur an der untersten Zelle sind die Chloroplasten eingetragen, in den anderen nur die Plasmaamöben: Spirogyra.

zellen, die 20 Minuten geschleudert worden waren, bis ihr Vorrat an Chloroplasten in der auf Fig. 3 dargestellten Weise gehäuft am distalen Ende der Zelle lag; vier Tage nach der Behandlung

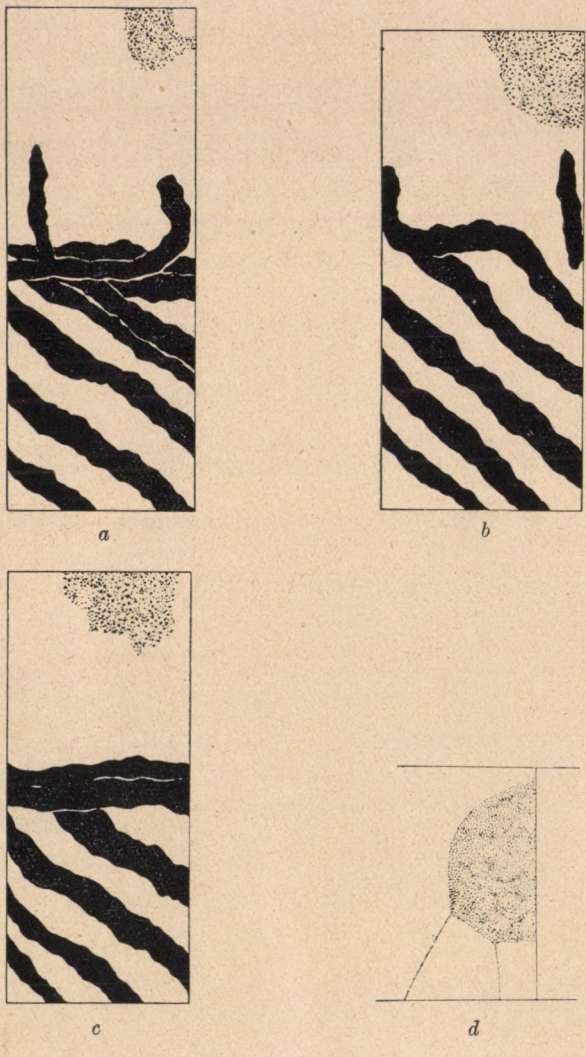
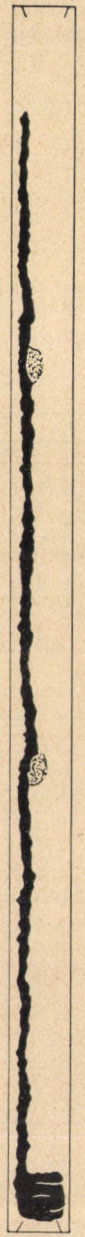
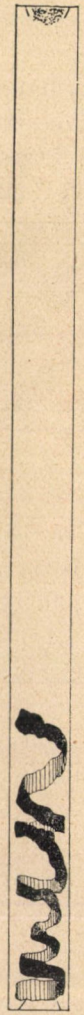
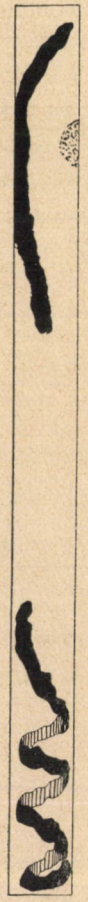


Fig. 4. Wechselnde Formen der Plasmaamöben in drei zentrifugierten Zellen (*a*, *b*, *c*); bei *d* eine mit Plasmafäden ausgestattete Amöbe: Spirogyra.







und später zeigten sich sämtliche Zellen mancher Fäden mit Plasmaamöben ausgestattet, die an der proximalen Querwand lagen.

Die Abbildungen zeigen, wie sehr Form und Lage der Amöben wechseln können; bei Spirogyraarten, deren Querwände gefaltet sind, liegt die Amöbe sehr oft innerhalb der ringförmigen Membranleiste (Fig. 5), in anderen Fällen bei derselben Spezies indessen ausserhalb des Ringes an der Kante der Zelle.

Fig. 5 zeigt die Plasmahäufungen besonders langer Spirogyrazellen, deren Schraubenband bereits im Begriff ist, seinen durch die Schleuderbehandlung gestörten Situs wieder herzustellen. Es zeigt sich, dass nicht in allen Zellen die Plasmaamöben die Querwand aufsuchen, sondern dass sie gelegentlich auch an dem Plastidenbande sich sammeln können oder an einer beliebigen Stelle der Aussenwand im proximalen Teil der geschleuderten Zelle sitzen.

Wie bekannt, wandert das Protoplasma geschleuderter Zellen nach Beendigung der Zentrifugenwirkung zum proximalen Pol zurück und verteilt sich im allgemeinen wieder

Fig. 5. Zellen einer dünnfädigen Spirogyra mit Plastiden und wandständigen Plasmaamöben; die Schraubenbänder befinden sich in den ersten Stadien der Entwirrung.

normal im Zellenlumen; am Zielpunkt dieser den Plasmasitus wieder herstellenden Wanderung fanden wir bei unseren Objekten die Plasmaamöben, als das Resultat eines Transportes, der allzugrosse Mengen von Protoplasma an den proximalen Pol getragen hat, sodass keine gleichmässige Verteilung erreicht, sondern eine neue, der durch Schleuderung bewirkten entgegengesetzt orientierte Ungleichheit der Plasmaaustattung bewirkt wurde.

Fig. 6. Plasmanetz am proximalen Ende einer zentrifugierten Zelle: Spirogyra.

Mit den in geschleuderten Zellen von Spirogyra deutlich wahrnehmbaren Bewegungserscheinungen des Protoplasmas (vgl. KÜSTER 1932) sind die eigenartigen vakuolenreichen Plasmabänder und Plasmastrassen in Verbindung zu bringen, deren Strukturen mit Fig. 6 wenigstens angedeutet werden sollen; es handelt sich bei ihnen um überaus zarte plasmatische Netze, deren Maschen in ständiger Bewegung sich hin und her schieben.

Aus dem Gesagten darf nicht gefolgert werden, dass die Richtung der Zentrifugenbehandlung es ist, die die Lokalisation der Plasmaanhäufung zuverlässig bestimmt. Ich habe zwar gelegentlich Spirogyra-Zellen beobachtet, die in diagonaler Richtung (schiefwinkelig zur Zellenlängsachse) geschleudert worden waren, und in welchen die Plasmaamöben ihren Platz diagonal gegenüber der distalen Häufung gefunden hatten; aber es sind offenbar neben den von aussen wirkenden Faktoren auch innere am Werk, die die Wanderungsrichtung des Protoplasmas und die Lokalisation der Amöben bestimmen; auch in Zellen, die keine Schleuderung erfahren haben, bleibt die Querwand für sehr zahlreiche Fäden der bevorzugte Sitz der Amöben; wir kommen sogleich auf solche Fälle zurück und erinnern schon hier an diejenigen Befunde, durch welche sich für Objekte und Zellen ganz anderer Art dieselbe Bevorzugung der Querwände nachweisen liessen: Sehr auffallend ist die Systrophe, welche in den Haaren von Gaillardia lanceolata

die Mitte der Querwände besetzt (KÜSTER 1935*a*, 257); in den Gameten von Phycomyces kann an den Querwänden eine gewaltige Häufung von Protoplasma eintreten und halbkugelförmig in das Lumen vorspringen (KÜSTER 1935*a*, 31).

Die Restitution des Situs, der durch Zentrifugenbehandlung abnorm geworden ist, wird in Spirogyrazellen mit wechselnder Schnelligkeit erreicht; die Bewegungserscheinungen, welche diese Restitutionen bewirken, bleiben wohl niemals aus. Andererseits darf nicht erwartet werden, dass auch die zur Amöbenbildung führenden Plasmatransporte sich stets und ständig vollzögen; in manchen Spirogyravegetationen und Materialproben sucht man umsonst nach den hier geschilderten Phänomenen, während in anderen Proben alle Fäden und alle Zellen prompt in dem hier zur Diskussion stehenden Sinne reagieren. Welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Zellen auf Schleuderung mit Amöbenbildung reagieren, wissen wir nicht.

3. Amöbenbildung nach chemischen Angriffen.

Ich habe bereits 1932 über Spirogyrakulturen berichtet, die sich zur Untersuchung der Plasmamöben besonders gut eigneten: Zusatz von Diastase zur Kulturlösung ruft oftmals üppiges Wachstum der Fäden hervor, oftmals zugleich Schädigungen des Plasmaleibes, die in der Bildung von Plasmaamöben zum Ausdruck kommen.

Ein weiteres von mir erprobtes Mittel, die Zellen von Spirogyra zur Bildung von Plasmaamöben zu bringen, ist die Behandlung der Objekte mit den Lösungen von gallensauren Salzen.

Ich verwendete folgende Mittel:

1. Fel tauri,
2. glykocholsaures Natrium,
3. dehydrocholsaures Natrium,
4. cholsaures Natrium,
5. oxycholsaures Natrium und
6. Cholsäure.

Am besten bewährte sich dehydrocholsaures Natrium, dessen Lösungen die Spirogyrazellen wenig schädigen und das Protoplasma

im Sinne unserer Versuchsanstellungen beeinflussen, freilich nicht derart zuverlässig, dass wir erwarten dürften, *alle* Zellen zur Amöbenbildung kommen zu sehen; immerhin konnte ich in meinem Material bei früheren Versuchen und namentlich bei den im vergangenen Herbst durchgeführten Serien in jeder Materialprobe nach Behandlung mit 0·1—0·5% Natrium dehydrocholicum eine grosse Zahl von amöbentragenden Fäden beobachten. Wie für andere plasmapathologische Vorgänge gilt auch für die Amöbenbildung der Satz, dass die Spirogyrafäden in ihren Reaktionsweisen sich stark unterscheiden können, andererseits die Zellen eines Fadens oft selbst mit vielen Einzelheiten ihres plasmatischen Geschehens miteinander übereinstimmen.

Die unter dem Einfluss gallensaurer Salze entstandenen Amöben zeigen folgende Eigentümlichkeiten.

Alle von mir untersuchten Spirogyraarten — dünnfädige Arten und eine breite aus dem Formenkreis der Spirogyra setiformis — sind zur Bildung von Amöben befähigt.

Die Zahl der Amöben einer Zelle schwankt zwischen 1 und 8.

Die Amöben liegen bald an einer Querwand, bald an der Aussenwand; sehr oft bildet sich eine grosse Amöbe am Zellkern, den sie umhüllt; zuweilen liegt die Amöbe unmittelbar neben dem Kern, ohne ihn zu umhüllen.

Die Amöben zeigen zumeist ein hohes Mass von Beweglichkeit; sie verändern dauernd ihre Umrisse und wandern langsam von der Stelle; es scheint, dass die zwischen zwei Umgängen der Schraubenbänder liegenden Amöben Schwierigkeiten haben, diese beiden Grenzen zu überschreiten.

Bei Untersuchung mancher amöbenreicher Fäden fällt auf, dass die weitaus meisten Amöben nur bei tiefer Einstellung sichtbar werden, d. h. auf der physikalisch unteren Flanke der Zelle liegen; durch Umklappen des Mikroskopes kann man die Amöben zur Verlagerung zum Erdmittelpunkte hin veranlassen. Solche mechanisch verschiebbaren Amöben liegen entweder frei im Zellsaftraum als intravakuoläres Protoplasma», wie es bereits aus den verschiedensten Zusammenhängen bekannt ist (vgl. KÜSTER 1935*a*, 36), oder sie sind mit dem plasmatischen Wandbelag noch durch feine leicht deformirbare Plasmafäden verbunden; die Frage, ob diese

oder jene Möglichkeit zutrifft, ist im einzelnen Falle schwer zu entscheiden; Tatsache ist, dass auch diejenigen in gallensauren Salzen entstandenen Amöben, die mit breiter Sohle am plasmatischen Wandbelag haften und durch die Schwerkraft nicht verlagert werden, zugleich durch dünne oder derbe Plasmastränge mit dem Belag der gegenüberliegenden Zellenflanke verbunden sein können, nicht anders als die nach Schleuderung entstandenen (Fig. 3, 4).

Die Struktur der in den Lösungen cholsaurer Salze entstandenen Plasmaamöben zeigt wenig Abwechslung; zumeist ist ihre Masse feinkörnig, spongiös punktiert; zuweilen sind sie deutlich vakuolig, seltener grob schaumig. In vereinzelten Fällen ist eine Schichtenbildung zu erkennen — eine grobschaumige Rindenschicht umgibt die innere feinkörnige Masse.

Die Amöben liegen, soweit sie die Aussenwand der Zelle in Anspruch nehmen, auf den Schraubenbändern oder zwischen diesen, ohne dass sie auf die Lage der letzteren irgendwelchen Einfluss gewönnen. Auch Amöben, deren Durchmesser ungefähr dem Radius der Zelle gleichkommt, lassen die Chloroplasten im allgemeinen unbeeinflusst.

In anderen Fällen werden indessen weitgehende Wirkungen der Amöben auf die Konfiguration der Plastiden erkennbar: die Schraubenbänder werden zu der Amöbe hin verlagert; man sieht die Bänder den Plasmaballen umwinden oder umklammern oder die Plastidensubstanz neben oder mit der Plasmamasse einen rundlichen Knäuel bilden, der für das Auge des Mikroskopikers nicht mehr in die einzelnen Windungen der beteiligten Schraubenbänder aufzulösen ist, oder bei dem diese nur stückweise erkennbar sind (Fig. 7). Diese Erscheinungen sind wohl in eine Reihe zu setzen mit der an geschädigten Zellen oft wahrnehmbaren Häufung der Chloroplasten um den Zellenkern, sowie mit SCHÖNLEBER's Kugelsystrophen (1935).

Weitere Beziehungen der Amöben zu den Chloroplasten soll Fig. 8 zum Ausdruck bringen. Es kommt gelegentlich vor, dass sich die Schraubenbänder der Spirogyrazellen stellenweise von der Wand abheben (Plasmoschise, vgl. z. B. SCHÖNLEBER 1935); mir ist wiederholt aufgefallen, dass an der von Schraubenbändern

entblössten Stelle des plasmatischen Wandbelags das Protoplasma zu einer Amöbe sich ballt.

Die Beobachtung, dass die Chloroplasten von den Plasmaamöben gerafft und gehäuft werden können, führt zu der Frage, ob auch die im Zellsaftraum erzeugbaren Niederschlagsgranula in jene gelangen und in ihnen gehäuft werden können. Behandlung mit dehydrocholsaurem Natrium erzeugt in Spirogyrazellen oftmals dichte Niederschläge, die den ganzen Zelleninhalt der Beobachtung entziehen können; nach Zentrifugenbehandlung oder bereits unter der Einwirkung der

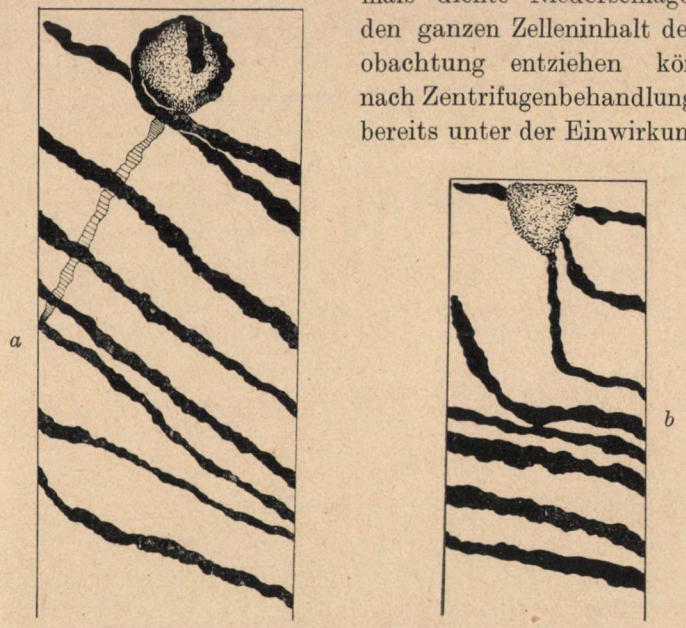


Fig. 7. Ablenkung der Chloroplasten zur Plasmaamöbe hin (*a*); bei (*b*) unvollkommene Umwickelung der Amöben durch Chloroplasten: Spirogyra.

Erdschwere setzt sich der Niederschlag ab, und ein grosser Teil des Zelleninhaltes ist wieder klar, und man überzeugt sich leicht davon, dass die niederschlagreichen Zellen noch am Leben sind. Es gelangt mir indessen nicht, die Granula in die Amöben zu bringen. Die Niederschlagsfüllung des Zellsaftraums macht vielmehr zuweilen den Beobachter auf die Plasmaamöben aufmerksam, die in Profilansicht vor ihm liegen und als ausgesparte klare Hocker von dem trüben Zellsaftraum sich abheben.

Methylenblau wird bekanntlich in den Zellen von Spirogyra reichlich gespeichert und oftmals niedergeschlagen. Die Niederschläge von den Amöben gesammelt oder gehäuft zu sehen, gelangt mir nicht; hie und da begegnet man zwar Anhäufungen agglutinierter Niederschläge des gerbsauren Methylenblaus, die in ihrer Form den von uns beschriebenen Amöben manchmal überraschend ähnlich sind und überdies zuweilen auch an dem von diesen oft bevorzugten Platz, an den Querwänden, sitzen; ihre Formveränderungen sind aber allzu träge, als dass sie mit den Amöben verwechselt werden könnten; es handelt sich bei ihnen um tote Massen eines Zellsaftkolloids.

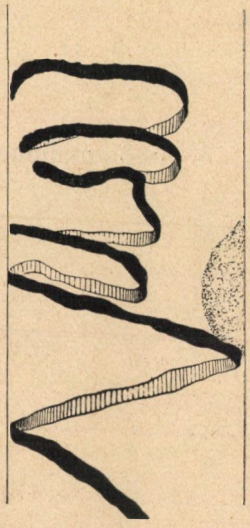


Fig. 8. Lokale Kontraktion des Schraubenbandes und Amöbenbildung an der von den Plastiden geräumten Stelle: Spirogyra.

Zentrifugenbehandlung blauer niederschlagsreicher Zellen führt zur Bildung wolkiger oder scharf umrissener blauer Massen, die gleichmässig gerundet oder zu Zipfeln ausgezogen auf dem an das distale Zellenende geschleuderten Chloroplastenhaufen liegen und zuweilen amöbenähnliche Form haben. Auch hier liegen nach meiner Ansicht lediglich tote kolloide Massen mit methylenblauen Niederschlägen vor.

Die im Protoplasma wie im Zellsaft liegenden natürlichen oder künstlich erzeugten Granula, Kriställchen usw. werden oftmals gleich improvisierten mikrurgischen Werkzeugen dem Mikroskopiker Dienste tun und neue Aufschlüsse gewinnen helfen (vgl. KÜSTER 1929*a*, 1936 *b*); bei unserem vorliegenden Objekte liessen sich die Niederschlagsgranula bisher nicht unseren Fragen dienstbar machen.

4. Amöbenbildung nach osmotischen Angriffen.

Dass nach Behandlung mit wasserentziehenden Mitteln lebhaft bewegliche Plasmaamöben entstehen können, ist (KÜSTER 1910) für die Zellen von Helodea wie für das Stengelparenchym von Tradescantia bekannt. Dieselben Mittel rufen bekanntlich oftmals auch die Bildung ruhender systrophischer Plasmaballen hervor.

Bei Konjugaten haben wir entsprechende Reaktionen nicht beobachtet.

5. Amöbenbildung in der normalen Zytogenese.

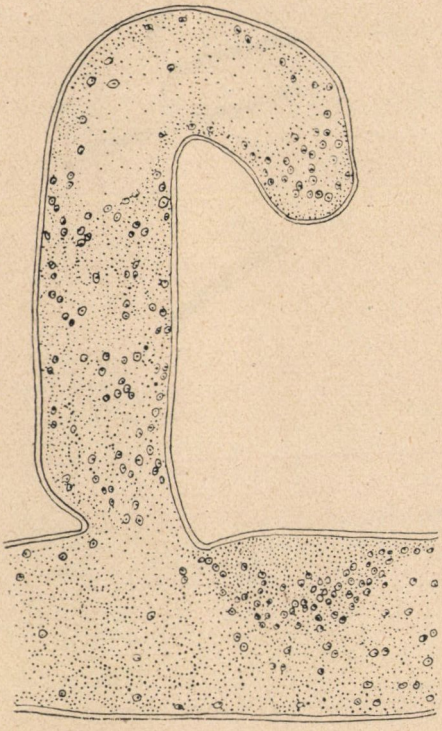


Fig. 9. Systrophische Häufung von «Wanderplasma»: Vaucheria sessilis. Nach COUCH.

Wir legen uns zum Schluss die Frage vor, ob auch beim normalen Ablauf der Zytogenese das Protoplasma durch innere Bedingungen zu amöbenähnlichen Häufungen zusammengeführt werden kann.

Vielleicht dürfen wir hier an gewisse für Vaucheria bekannte «autonome» Plasmawanderungsvorgänge erinnern. OLTMANNS (1895; vgl. HEIDINGER 1908) hat auf die Protoplasmahäufungen aufmerksam gemacht, die nach seiner Auffassung den Transport der überzähligen Kerne aus dem jungen Oogonium in den Faden bewirken, und COUCH (1932) hat schon vor der Entstehung des Oogoniums eine halbkugelige Anhäufung von «Wanderplasma»

am Fusspunkt des zugehörigen Antheridiums bei Vaucheria sessilis festgestellt, das später in das Oogonium, noch später aus diesem in den Faden wandern wird.

Die von COUCH dargestellte Ballung des Protoplasmas (vgl. Fig. 9), die arm an Chloroplasten ist, und zunächst nur in den zur Vakuole gewandten Schichten reichlich Zellkerne enthält, darf vielleicht als eine Plasmaamöbe der normalen Zytogenese den pathologischen Bildungen an die Seite gestellt werden, die wir hier beschrieben haben.

Literatur.

BECKER W. 1932: Vitalbeobachtungen über der Einfluss von Methylenblau und Neutralrot auf den Verlauf von Karyo- und Zytokinese. (Cytologia **4**, 135.)

COUCH, J. N. 1932: Gametogenesis in Vaucheria. (Bot. Gaz. **94**, 272.)

GERM, K. 1932, 33: Untersuchungen über die systrophische Inhaltsverlagerung in Pflanzenzellen nach Plasmolyse I, II, III. (Protoplasma **14**, 566; **17**, 509; **18**, 260.)

HEIDINGER, W. 1908: Die Entwicklung der Sexualorgane bei Vaucheria. (Ber. d. D. Bot. Ges. **26**, 313.)

KÜSTER, E. 1910: Über Inhaltsverlagerungen in plasmolysierten Zellen. (Flora **100**, 267.)

KÜSTER, E. 1929*a*: Beiträge zur zellenphysiologischen Methodik 1. Durchstichversuche an lebenden Protoplasten. (Protopl. **5**, 191.)

KÜSTER, E. 1929*b*: Pathologie der Pflanzenzelle **1**. Berlin.

KÜSTER, E. 1932: Protoplasmabewegungen in zentrifugierten Zellen. (Oberhess. Ges. f. Nat.- u. Heilkunde. Giessen. Naturwiss. Abtl. **15**. 194.

KÜSTER, E. 1935*a*: Die Pflanzenzelle. Jena.

KÜSTER, E. 1935*b*: Systrophe und Messung des Protoplasmas (Beiträge zur zellenphysiologischen Methodik). (Zeitschr. f. wiss. Mikr. **52**, 427.)

KÜSTER, E.: 1936*a*: Über kernlose Zellen. (Cytologia **7**, 264.)

KÜSTER, E. 1936*b*: Über Grübchen im Protoplasma von Phycomyces. (Ber. d. D. Bot. Ges. **54**.)

KÜSTER, E. 1937: Zur Teratologie der Plastiden. (Cytologia — erscheint demnächst.)

OLTMANNS, F. 1895: Über die Entwicklung der Sexualorgane bei Vaucheria. (Flora **80**, 388.)

SCHÖNLEBER, K. 1935: Reizplasmoschise bei Spirogyra. (Planta **24**, 387.)

WISSELINGH, C. v. 1900: Über mehrkernige Spirogyren. (Flora **87**, 378).

WISSELINGH, C. v. 1909: Zur Physiologie der Spirogyrazelle. (Beih. Bot. Zentr. Bl. Abt. 1, **24**, 133.)

WISSELINGH, C. v. 1902: Untersuchung über Spirogyra. 4. Beitrag. (Bot. Zeitung **60**, 115.)

WISSELINGH, C. v. 1904: Over wandvoorming by kernlooze cellen. (Bot. Jaarb. Dodonaea **13**.)

(Aus der Sitzung der III. Klasse der. Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Februar 1937.)

AZ AZOTOBAKTER ELŐFORDULÁSA MAGYAR TALAJOKBAN.

ZUCKER FERENC-től.

A talajban szabadon élő, nitrogént asszimiláló bakteriumok között mindenesetre az Azotobakter (chroococcum, agile) bír a legnagyobb fontossággal, és ennek tulajdonítható, hogy más országok kutatói oly behatóan foglalkoztak elterjedtségével. Az a tény, hogy ezek közül egyesek számos talajban, mások viszont csak elvétve tudták kimutatni, az Azotobakternek a kőzeggel szemben támasztott különleges követelményei mellett nem meglepő, mert mint tudjuk, főleg a reakcióviszonyok, a mész- és foszforállapot, valamint a nitrogén megkötésénél szükséges energia forrásául szolgáló könnyen bomló szerves anyagok mennyisége, ill. egymásközti megfelelő viszonya szabják meg hiányának vagy jelenlétének lehetőségét.

Hazánk talajai, különösen a mezőgazdasági művelés alatt álló talajok, még nem ismertek kellőképpen ebből a szempontból, illetve ismereteink csak kis térre szorítkoznak. Így Fehér (1) egyes erdőtalajok mikrobiológiáját tanulmányozva, azt találta, hogy az Azotobakter azokban csak a nyári hónapokban lelhető fel, amikor az aciditásviszonyok, a hőmérséklet és a nedvesség, valamint a humuszanyagok mennyisége a legkedvezőbb korrelációban vannak a nitrogénkötés szempontjából. Bokor (2) viszont a hazai mészszegény kötött szikesekben csak igen ritkán, míg a szerkezetnélküli, meszet és szódát tartalmazó szikesekben rendszerint talált ugyan Azotobaktert, azonban nitrogénkötés alig volt kimutatható. 'Sigmond, Telegdy-Kováts és Zucker (3) már előzőleg is rámutattak néhány hazai talaj vizsgálata alapján arra, hogy a talaj absorpciós komplexumának állapota és az Azotobakter jelenléte között mily összefüggés mutatkozik, különösen ami a talaj *Ca-*

vagy *Na*-telítettségét illeti; a talajban végbemenő dinamikai folyamatok irányát megszabó eme bázisok közül a *Ca*-ot tartják elengedhetetlenül szükségesnek. Később PRETTENHOFFER (4), BOKORral egybehangzóan, a szerkezetnélküli meszes szódás szikesekben csak $CaSO_2$-al, H_2SO_4-val vagy feltárt bauxittal való javítás után tudta nagyobb mennyiségben kimutatni az Azotobaktert.

Ezek az adatok azonban csak hiányos képet adtak ennek a fontos bakteriumnak elterjedtségéről kultúrtalajainkban és mivel a nagyszámú rendelkezésre álló egyéb vizsgálati adat bőséges alapot nyujtott a qualitativ bakteriologiai vizsgálat eredményeinek összehasonlítására, időszerűnek mutatkozott ezeket a vizsgálatokat elvégezni.

A minták az ország úgyszólván valamennyi talajlaboratoriumából származtak, ami biztosította a lehető egyenletes eloszlást az ország egész területén, valamint hogy a különböző typusok is képviselve legyenek. Főleg kultúra alatt álló területek felés altalajai voltak kiválogatva, ezek mellett azonban több talajszelvény mintái is vizsgálat tárgyát képezték. Habár az Azotobakter kiszáradással szemben nagy ellenállóképességgel rendelkezik és POSCHENRIEDER (5) még 28 évig szárazon tartott talajokból kitenyésztve is erőteljes Azotobakter-fejlődést kapott, legfeljebb 2—3 éves talajminták kerültek vizsgálat alá. A minták származására vonatkozólag az 1. táblázat nyujt felvilágosítást.

1. táblázat.

A vizsgált talajok származása országrészek szerint.

Országrész	Feltalaj (szántott réteg)	Altalaj (kb. 60 cm-ig)	Szelvény (változóan 0— egészen 150 cm-ig)	
			száma	minták száma
Dunántúl	636	238	4	17
Duna-Tiszaköze	172	92	6	33
Északi megyék	82	41	8	31
Tiszántúl	244	107	103	334
Megszállt terület	5	5	—	—
Összesen	1139	483	121	415

Az összesen 2037 talajminta valamennyie légszáraz állapotban, 2 mm-es szitán átszitálva került vizsgálat alá. A vizsgálat 75 cm^3-es ERLENMAYER-lombikokban történt, melyek 15—15 cm^3 tápoldatot tartalmaztak. A tápoldat 1000 cm^3-e 20·0 g mannitot, 0·2 g K_2HPO_4-t, 0·2 g K_2SO_4-t, 0·2 g KCl-t, 0·5 g $MgSO_4$-t és 4·0 g $CaCO_3$-t tartalmazott. A lepipettált tápoldat azután $^1/_2$ órai és $1^1/_2$ atm. való sterilizálás után lett beoltva olyképpen, hogy szennyezések elkerülése céljából a kb. 2—2 g-nyi talajmennyiség adagolására szolgáló kanalak mindenkor alkoholba mártva és leégetve lettek sterilizálva. A beoltott lombikok 28°-os tenyészszekrényben hét napig álltak. Az ezalatt kifejlődött Azotobakterhártya erőssége nyujtott azután felvilágosítást a talajban előforduló Azotobakter mennyiségére, mégpedig:

\+ + + + + (5) az igen erős fejlődést,
\+ + + + (4) az erős «
\+ + + (3) a közepes «
\+ + (2) a gyenge «
\+ (1) az igen gyenge «
0 pedig az Azotobakter hiányát jelentette.

E mellett azonban feljegyzésre került még egyelőre a tenyészet szaga, a zavarodás színe és erőssége, valamint az esetleg keletkezett gázok okozta habzás is.

A vizsgált 1622 talaj közül 1230-ban (75·8%) mutatkozott pozitív fejlődés, míg 392 (24·2%) talajban nem volt kimutatható az Azotobakter jelenléte. A fel- és altalajokban mutatkozó fejlődés különböző fokozatainak megfelelő eloszlást a 2. táblázat adatai tükrözik vissza.

2. táblázat.

Az Azotobakterfejlődés erőssége fel- és altalajokban.

Az Azotobakter-fejlődés		(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Összesen
Feltalajok	szám	187	524	189	105	84	50	1139
	%	16·4	46·0	16·5	9·2	7·4	4·5	100
Altalajok	szám	205	186	51	26	12	3	483
	%	42·4	38·5	10·6	5·4	2·5	0·6	100

A feltalajokban mutatkozó erőteljesebb Azotobakterfejlődés természetes, mert az altalajok gyengébb szellőzöttsége és rendszerinti humuszszegénysége mellett az életkörülmények kedvezőtlenek. Megjegyzendő, hogy a táblázat nem öleli fel a vizsgált szikeseket.

Külföldi adatokkal összehasonlítva azt mondhatjuk, hogy talajainkban az Azotobakter ugyan nem ritka, ill. hasonló mértékben van elterjedve, azonban nem oly nagy számban, mint egyes más országokban. Így pl. Olaszországban (6) 23%-ban, Bajorországban (7) 39%-ban, Japánban (8) 40%-ban, Csehországban (9) 32%-ban vagy Indiában (10) 26%-ban hiányzik a talajokból, azonban míg a mi feltalajaink közül csak 11·9%-ban mutatkozott «erős» vagy «igen erős» fejlődés, addig pl. Bajorországban a talajok 17%-a mutatott ilyen fokú Azotobakter előfordulást.

A talajok mélyebb rétegeit vizsgálva azt látjuk, hogy azokban mind ritkábban fordul elő Azotobakter. Az összes megvizsgált szelvények idevonatkozó adatai a 3. táblázatban vannak felsorolva.

3. táblázat.

Az Azotobakterfejlődés erőssége a vizsgált szelvényekben.

A fejlődés erőssége	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Mélység 0— 15 cm	26	54	13	11	5	—
« 15— 30 «	18	20	3	4	1	1
« 30— 60 «	54	29	3	4	—	—
« 60— 75 «	26	16	2	—	—	—
« 75— 90 «	66	8	—	—	—	—
« 90—120 «	23	3	3	1	—	—
« 120—150 «	3	—	—	—	—	—
Összesen	216	130	24	20	6	1

Megjegyzendő azonban, hogy a 121 szelvény közül 71 eredeti szikes volt, úgy hogy csak 50 sorolható a kultúrtalajok közé. Ezeknek altalajában a 60—90 cm-es rétegben csak 4%-ban és a 90—120 cm-es rétegben csak 0·6%-ban volt Azotobakter feltalálható, — «gyenge», ill. «igen gyenge» fejlődéssel — míg a 120—150 cm-es rétegben egyetlen talajban sem.

Az Azotobakter fejlődésére a talaj reakcióviszonyai, mészállapota, felvehető foszforsavtartalma, a szervesanyag minősége és mennyisége, valamint a szellőzöttség, a nedvesség és hőfok vannak elsősorban befolyással.

Igen sok vizsgálati adat bizonyítja, hogy *pH* 6 alatt az Azotobakter fejlődésében megakad, sőt egyes kutatók úgy vélik, hogy ezen alul el is pusztul. Természetes, hogy evvel szemben az absorpciós komplexum *Ca*-ban való telítettsége mellett, ill. a talaj $CaCO_3$ tartalmának emelkedésével a viszonyok kedvezőbbé alakulnak az Azotobakterre nézve. Valószínű azonban, hogy a fenti határt nem szabhatjuk meg ilyen szigorúan, mert amint arra a

4. táblázat.

Összefüggés a talaj reakciója és az Azotobakter fejlődése között.

pH határok	A fejlődés erőssége feltalajokban						Összesen
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
<—4	1	—	—	—	—	—	1
4—5	11	—	—	—	—	—	11
5—6	23	71	3	—	—	—	97
6—7	67	155	34	7	—	—	263
7—8	48	155	75	38	29	20	360
8—9	23	82	68	49	38	24	284
9—<	—	1	—	—	—	—	1
Összesen	173	464	180	94	67	44	1022
Altalajok							
<—4	1	—	—	—	—	—	1
4—5	6	—	—	—	—	—	6
5—6	13	16	—	—	—	—	29
6—7	63	56	7	1	—	—	127
7—8	72	46	26	11	4	2	161
8—9	44	62	16	9	9	1	141
9—<	1	—	1	—	—	—	2
Összesen	200	180	50	21	13	3	467

4. táblázat adataiból következtethetünk, *pH* 5 és 6 között (H_2O-suspensióban mérve) is találhatunk Azotobaktert a talajban, ha mingyárt igen kis számban is. FEHÉR egyébként erdőtalajokban még *pH* 5 alatt is talált aerob nitrogénkötő bakteriumokat. (1) Ennek magyarázatát abban találhatjuk, hogy a bakteriumegyedek nem egyenletesen eloszolva élnek a talajban, hanem kisebb-nagyobb koloniákban ott, ahol a feltételek a legkedvezőbbek, s mindig találunk savanyúbb talajokban is oly fészkeket, melyek közelében a reakció — ha akár átmenetileg is — magasabb, ill. kedvezőbb. Ilyenkor a nitrogén megkötése majdnem vagy teljesen megszűnik és az Azotobakter a környezetben lévő, a fehérjebontók által mineralizált nitrogént fogja felhasználni.

A 4. táblázat adatai különben világosan szemléltetik az Azotobakter ezirányú igényeit. «Erős» és «igen erős» fejlődést csak a 7-en felüli *pH*-val rendelkező talajoknál tapasztalhatunk, sőt még «közepes» fejlődést is csak igen kis számban 6—7 között, ami mellett megjegyzendő, hogy az ott feltüntetett hét talajnak *pH*-ja is 6·5 felett van. Az a körülmény, hogy a 7—9 *pH*-jú talajok 70%-ában nagyrészt «igen gyenge» vagy «gyenge» a fejlődés, vagy éppenséggel egészen elmaradt, egyéb talajhiányosságokra vezethető vissza.

A reakcióval azonos értelemben mutatkozik a $CaCO_3$-tartalom, ill. a hydrolitos aciditás befolyása. A talaj mésztartalmának a nitrogénkötésre gyakorolt befolyását már BERTHELOT (11) is tapasztalta, az Azotobakter fejlődésére gyakorolt igen kedvező hatását pedig különösen CHRISTENSEN (12) munkáiból ismerjük, míg nálunk TELEGDY-KOVÁTS (13) mutatta ki a *Ca* jelenlétének fontosságát fejlődése szempontjából. Hazai talajaink esetében ez ugyancsak igazolást nyer, amennyiben egyrészt a $CaCO_3$-ra csak qualitative vizsgált 359 feltalaj között csak 24 és a 222 altalaj között csak 75 olyan volt, melyekben az Azotobakter nem volt kimutatható, másrészt pedig — az 5. táblázat adatai szerint — a magasabb $CaCO_3$-tartalmú talajok között több olyant találunk, melyekben erőteljesebb Azotobakter populációra következtethetünk. Amíg ugyanis a 0—0·5, 0·5—1·0 és 1·0—2·0% $CaCO_3$-t tartalmazó talajoknál csak 23, 40, ill. 32%-ban, addig a 2·0—5·0, 5·0—10·0, 10·0—20·0 és 20·0< $CaCO_3$ tartalmú talajok esetében

5. táblázat.

Összefüggés a talaj mésztartalma és az Azotobakter fejlődése között.

$CaCO_3$ tartalom %-ban	A fejlődés erőssége						Összesen
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
Feltalajok							
0— 0·5	1	8	11	2	4	—	26
0·5— 1·0	2	4	3	2	3	1	15
1·0— 2·0	1	7	7	4	3	—	22
2·0— 5·0	1	15	13	10	12	8	59
5·0—10·0	2	13	8	13	10	3	49
10·0—20·0	4	9	10	7	7	3	40
20·0—<	3	4	4	4	1	5	21
Összesen	14	60	56	42	40	20	232
Altalajok							
0— 0·5	3	2	1	2	1	—	9
0·5— 1·0	1	2	—	1	1	1	6
1·0— 2·0	3	3	3	3	1	—	13
2·0— 5·0	4	5	4	2	1	—	16
5·0—10·0	11	7	3	2	—	—	23
10·0—20·0	13	13	5	—	1	1	33
20·0—<	15	16	5	4	3	—	43
Összesen	50	48	21	14	8	2	143

51, 53, 43, ill. 48%-ban mutatkozik «közepes», «erős» és «igen erős» fejlődés.

Ennek éppen ellenkezőjét látjuk, ha a talajok hydrolitos aciditását vesszük tekintetbe. A 6. táblázatban felsorolt adatok azt mutatják ugyanis, hogy a vizsgált 503 mészszegény feltalaj közül 433-ban, vagyis 86%-ban egyáltalán nem, vagy csak «igen gyenge» Azotobakterfejlődés volt tapasztalható, s ugyanilyen viszonyokat találunk az altalajoknál is (89%). A nagyobb hydrolitos aciditással bíró talajok között alig találunk olyanokat, melyekben Azotobakter kielégítő mennyiségben van jelen s a 0—3·0 cm^3

6. táblázat.

Összefüggés a talaj hydrolitos aciditása és az Azotobakter fejlődése között.

Hydrolitos aciditás cm^3	A fejlődés erőssége						Összesen
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
Feltalajok							
0— 1·0	2	4	—	—	—	—	6
1·0— 2·0	8	11	3	1	1	3	27
2·0— 3·0	7	9	6	1	1	2	26
3·0— 5·0	20	36	12	2	3	—	73
5·0— 7·5	27	77	16	1	—	1	122
7·5—10·0	29	59	6	1	—	1	96
10·0—15·0	29	68	4	1	1	—	103
15·0—<	20	27	3	—	—	—	50
Összesen	142	291	50	7	6	7	503
Altalajok							
0— 1·0	2	1	1	—	—	—	4
1·0— 2·0	8	4	4	—	2	—	18
2·0— 3·0	8	5	3	—	—	2	18
3·0— 5·0	34	14	4	3	—	1	56
5·0— 7·5	23	21	—	1	1	—	46
7·5—10·0	13	18	—	—	—	—	31
10·0—15·0	12	18	—	—	—	—	30
15·0—<	9	5	1	—	—	—	15
Összesen	109	86	13	4	3	3	218

hydrolitos aciditás még oly csekély, hogy az Azotobakter — ha egyéb talajhiányosságok nem forognak fenn — a szükséges *Ca*-t még mindig megtalálja a talajban. Megjegyzendő, hogy a kedvezőtlen reakció- és mészviszonyok miatt mutatkozó Azotobakterhiány az ország északi és nyugati részeiből származó talajokban lelhető fel főleg.

A reakcióviszonyok és mészállapot mellett a talaj felvehető foszfortartalma hasonlóképpen nagy kihatással van az Azotobakter

működésére és így a nitrogénkötés intenzitására. Az Azotobakter a foszforral szemben ugyanis szintén nagy igényeket támaszt. STOKLASA (14) szerint száraz anyagában 60% a P_2O_5, ami ezt a nagy P-igényt érthetővé teszi s amint azt számos adat bizonyítja, ebben a tekintetben hasonló érzékenységgel bír, mint a magasabbrendű növények. Az Azotobakter eme sajátságán alapszik a talaj felvehető foszforsavtartalmának megállapítására szolgáló Azotobakter-módszer is.

Hazánk talajai foszforállapotuk tekintetében szegényeknek mondhatók, amit egyrészt igen sok kísérleti adat bizonyít, de e mellett szólnak a vizsgált talajok adatai is, amennyiben azok az Azotobakter-módszer szerint 75%-ban, 'SIGMOND módszere szerint 82%-ban és a NEUBAUER-módszer szerint 88%-ban mutatkoztak könnyen átsajátítható foszforban szegényeknek. Ez a foszforsavszegénység azután a talajok Azotobakter-polpulációjában is visszatükröződik.

A 7.-táblázatban vannak feltüntetve a NEUBAUER-módszerrel nyert és a vizsgálati eredmények összehasonlításából származó adatok.

7. táblázat.

Összefüggés a NEUBAUER szerinti foszforállapot és az Azotobakter fejlődése között.

mg P_2O_5 NEUBAUER szerint	A fejlődés erőssége						Összesen	(3+4+5) %
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		
0— 2·0	45	87	23	9	7	3	174	11
2— 4·0	28	89	34	21	16	11	199	24
4— 6	14	40	17	8	12	2	93	24
6— 8	3	13	3	3	2	2	26	27
8—10	2	5	1	3	1	3	15	47
10—15	1	6	1	4	3	1	16	50
15—<	2	1	2	3	1	1	10	50
Összesen	95	241	81	51	42	23	533	

Az ebből a célból vizsgálat alá vett 533 feltalaj közül «igen erős» és «erős» fejlődést csak 65 mutatott, ellenben 95 olyan talajt

találunk, melyekben az Azotobakter egyáltalában nem volt kimutatható. Az Azotobakterrel szembeni érzékenységet igen szemléltetően mutatják a táblázat utolsó rovatainak adatai, melyek a «közepes», «erős» és «igen erős» fejlődésű talajok százalékos arányát tüntetik fel, amennyiben a NEUBAUER szerint felvehető foszfortartalom emelkedésével párhuzamosan az erőteljesebb Azotobakterfejlődés is mind több talajnál tapasztalható. Így pl. a 2—4 mg P_2O_5 határok közé eső talajok — és ezek között található a legtöbb talaj — csak 24%-ban mutatnak kielégítő Azotobakterfejlődést, míg a 8—10, 10—15 mg P_2O_5 határok közé esők 47, ill. 50%-ban.

Egészen hasonló képet nyujt a 8. táblázat, amelyben a 'SIGMOND-módszerrel nyert adatok — százalékos arányszámokban — nyertek összehasonlítást a vizsgálati eredményekkel: minél gazda-

8. táblázat.

Összefüggés a 'SIGMOND szerinti foszforállapot és az Azotobakter fejlődése között.

'SIGMOND szerint foszforban	A fejlődés erőssége					
	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)
Gazdag	50	40	38	25	4	—
Ellátott	30	25	36	12	4	19
Szegény	20	35	26	63	92	81

gabbak a talajok felvehető foszforban, annál erősebb Azotobakterfejlődést kapunk, viszont minél gyengébbnek mutatkozik az Azotobakter-populáció, annál kevesebb az átsajátítható foszfor. A foszforban való gazdagság vagy szegénység nem lévén azonban egyedüli befolyásoló tényezője az Azotobakter fejlődésének, a viszonosság itt sem teljes, amire egyébként a 9. táblázat adatai is rávilágítanak. Ebben a táblázatban ugyanis az Azotobakter-módszer (P_2O_5) és a jelen vizsgálat adatai vannak egymással szembeállítva (feltalajok). A módszernél foszformentes tápoldatot használunk, úgyhogy a beoltott bakterium a talajból kényszerül felvenni a szükséges foszfort. A 9. táblázat adatai szerint azonban azt látjuk, hogy az

9. táblázat.

Összefüggés a foszfornélküli és teljes tápoldatban mutatkozó Azotobakter-fejlődés között.

Foszforellátottság Azotobakter módszer szerint	A fejlődés erőssége teljes tápoldatban						Összesen
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
(0)	45	157	70	24	19	15	330
(+)	31	105	42	24	12	6	220
(+ +)	23	45	17	14	7	1	107
(+ + +)	11	28	4	1	2	1	47
(+ + + +)	5	2	1	2	4	2	16
Összesen	115	337	134	65	44	25	720

ily módon nyert erős fejlődés nem minden esetben egyértelmű a teljes tápoldatban kapott «erős» vagy «igen erős» fejlődéssel. Más szóval olyan talaj, amelyben van elég felvehető foszfor, még nem bizonyosan gazdag Azotobakterben és viszont, lehet valamely talaj aránylag nem gazdag is foszforban, de egyéb körülmények oly kedvezően alakulnak az Azotobakterre, hogy az igen erőteljes fejlődésnek fog indulni. Itt elsősorban — mint már említést nyert — a rendelkezésre álló szervesanyagok (cellulosbontó mikroorganizmusok), a víz, hőfok és levegő jönnek tekintetbe.

A talaj növénytermelési értelemben vett káligazdagsága nincs különösebb befolyással az Azotobakter elterjedtségére, ill. fejlődésére, mert — habár HUNTER (15) vizsgálatai szerint az Azotobaktersejtek 0·24% P_2O_5 és 3·75—5·15% N mellett 1·2% K_2O-t tartalmaznak — a felvehető K_2O-tartalom mindenkor elegendő a kedvező nitrogénkötés biztosítására. A vizsgált talajoknál, számos esetben, még igen alacsony 'SIGMOND vagy NEUBAUER szerint felvehető K_2O-tartalom mellett is tapasztalható volt «erős» vagy «igen erős» fejlődés.

A talajok vízgazdálkodására és a hőmérsékletre, valamint a szervesanyagok mennyiségére nézve vizsgálatok sajnos, nem történtek. (Az utóbbiakra vonatkozólag egy későbbi munka fog felvilágosítással szolgálni.) Ugyancsak aránylag kevés adat áll ren-

10. táblázat.

Összefüggés a talajok jellege és az Azotobakter fejlődése között.

A talajok jellege	A fejlődés erőssége					
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Feltalajok						
Homok	36	26	13	7	12	6
Vályog	48	151	82	46	36	23
Agyag	38	169	42	12	8	2
Altalajok						
Homok	38	20	5	4	1	—
Vályog	56	54	13	12	5	3
Agyag	53	50	5	1	3	—

delkezésre a talajok szellőzöttségére, ill. kötöttségére vonatkozólag is, habár a 10. táblázat adatai ebben a tekintetben némi felvilágosítással szolgálnak. Ebben a táblázatban a vizsgált fel- és altalajok külön mint homok-, vályog- és agyagtalajok vannak csoportosítva és számuk szerint felsorolva. Az adatokból kitűnik, hogy a kötöttebb, tehát kevésbbé szellőzött agyagtalajokban rendszerint gyengébb fejlődést tapasztalunk, mint a kevéssé kötött vályog- vagy homoktalajokban. Igaz ugyan, hogy a homokokban erőteljesebb Azotobakterfejlődés ritkábban mutatkozik, mint a vályogtalajokban, de ez inkább a homoktalajok tápanyagszegénységére vezethető vissza.

A vizsgált szikesekre vonatkozó eredmények nagyrészt fedik a már említett kutatók ismertetett adatait, amennyiben szintén megállapítható volt, hogy úgy a mészszegény kötött, mint a meszes-szódás szikesek rendkívül szegények Azotobakterben. Még a kedvező szerkezettel, ill. szellőzöttséggel bíró utóbbi szikesek legfelső szintjében is csak «igen gyenge» és csak kivételes esetekben, ha a Na_2CO_3 hiányzott, volt «gyenge» Azotobakterfejlődés észlelhető. Kivételt képeznek természetesen az akár mésszel, akár savanyú hatású anyagokkal javított szikesek, melyek közül az

előzők felső szintjében már a javítást követő évben is «erős» fejlődésnek indult az Azotobakter. Említést érdemel, hogy a békéscsabai öntözött rét 19-es sz. tábláján, melyet 'SIGMOND (16) vizsgálatai alapján ismerünk és ugyanott a HERKE (17) által tanulmányozott rizstelep talajainak felső szintjeiben «erős», sőt egyes esetekben «igen erős» Azotobakterfejlődést tapasztaltunk jeléül annak, hogy a káros sóknak eltávolítása után elszaporodásához a kedvező feltételek már megvoltak. Ugyancsak erős Azotobakterfejlődés mutatkozott néhány szódás-meszes szikes legfelső szintjében, melyek mésszel voltak kezelve. Ez a tény valószínűleg arra vezethető vissza, hogy a meszezéssel egyidejűleg végrehajtott felületes talajlazítás megélénkítette a bomlási folyamatokat és — legalább is átmenetileg — elősegítette az Azotobakter elszaporodását.

Sajnos, a rendelkezésre álló adatok nem nyujtottak kellő felvilágosítást az egyes talajok dinamikájára vonatkozólag, s így azok typusa nem volt megállapítható kétséget kizáróan, tehát további kiterjedt vizsgálatokra lenne szükség, hogy a typusok biologiai egyensúlyának kialakulásában ez a fontos nitrogénkötő bakterium mily helyet foglal el.

Összefoglalás.

Az ország egész területéről begyüjtött 2037 talajminta került vizsgálat alá az Azotobakter elterjedtségére és az azt befolyásoló tényezőkre nézve. A vizsgálatok eredményei azt mutatják, hogy

1. hazánk feltalajainak 24·2%-ában, s altalajainak 42·4%-ában Azotobakter egyáltalán nem fordul elő, ami a külföldi ezirányú adatoknál valamivel kedvezőbb ugyan, de a nitrogéngyüjtés szempontjából kielégítő fejlődés csak 11·9%-ban mutatkozott;

2. a talajok mélyebb szintjeiben az Azotobakter csak igen ritkán fordul elő (kb. 90 cm-ig);

3. az eddigi megfigyelésekkel egybehangzóan, főleg a 7—9 *pH*-jú (H_2O-suspensióban) talajokban találjuk elterjedve, míg ezeken a határokon alul vagy felül kielégítő mértékben rendszerint egyáltalán nem;

4. a magasabb $CaCO_3$-tartalmú talajokban az Azotobakter nagyobb számban fordul elő, mint a mészben szegény talajokban,

ill. mindinkább eltűnik a hydrolitos aciditás emelkedésével. Az ország északi és nyugati részein, az alacsonyabb *pH*-jú talajok zónájában ez a körülmény különösen kifejezésre jut az Azotobakter elterjedését tekintve;

5. az Azotobakter ritkább elterjedtségének egyik oka talajaink foszforszegénysége, amennyiben a NEUBAUER- vagy 'SIGMOND-módszerekkel gazdagnak minősülő talajokban sokkal erőteljesebb fejlődésre következtethetünk, mint a foszforszegényekben. A vizsgálati adatokat az Azotobakterpróba adataival összevetve azonban megállapítható, hogy egyéb biologiai tényezők is gátolhatják vagy elősegíthetik az Azotobakter elterjedését;

6. a talajok káliszegénysége vagy gazdagsága nincs észrevehető kihatással az Azotobakter fejlődésére;

7. főként jobban szellőzött vályogtalajainkban találunk erőteljes Azotobakterfejlődést, míg agyagtalajokban az rendszerint csak igen gyenge, a homoktalajokban pedig főleg azok szegénysége miatt találunk ki nem elégítő életfeltételcket;

8. szikeseinkben rendszerint egyáltalán nem, vagy csak igen gyenge az Azotobakter fejlődése, azonban a megfelelő javítás után azok nem különböznek a kultúrtalajoktól.

Irodalom. — Literatur.

1. FEHÉR, D.: Untersuchungen über die Mikrobiologie des Waldbodens. J. Springer. Berlin, 1933.

2. BOKOR, R.: U. o. Die Mikrobiologie der Szik- (Salz- oder Alkali-) Böden mit besonderer Berücksichtigung ihrer Fruchtbarmachung.

3. 'SIGMOND E., TELEGDY-KOVÁTS L. és ZUCKER F.: Mat. Term.-Tud. Ért. **44**, 527. 1927.

4. PRETTENHOFFER I.: Kísérl. Közl. **37**, 38. 1934.

5. POSCHENRIEDER, H.: Azotobakter als Boden- und Wurzelbakterium. Diss. Weihenstephan. 1926.

6. DE 'ROSSI, G.: Soc. Intern. di Microbiol. Boll. d. Sez. Ital. **4**, 219. 1932. Ref. Centr. Bact. II. **90**, 282. 1934.

7. NIKLAS, H., POSCHENRIEDER, H. és HOCK, A.: Centr. Bakt. II. **66**, 16. 1925.

8. ASO, K. és YAMAGATA, U.: Act. IV. Conf. Int. Pédol. **3**, 192. 1926.

9. NOVÁK, V.: Vestn. Čsl Akad. Zemed. **6**, 480. 1930.

10. WALTON, G. R.: Ref. Centr. Bakt. II. **47**, 535. 1917.

11. Berthelot, M.: Compt. rend. **107**, 372. 1888.
12. Christensen, H.: Journ. Agr. Res. **24**, 289. 1923.
13. Telegdy-Kovács L.: Kísérl. Közl. **30**, 72. 1927.
14. Stocklasa, J. és Doerell, E. G.: Handb. d. biophys. u. biochem. Durchforsch. d. Bodens. P. Parey, Berlin, 1926.
15. Hunter, O. W.: Journ. Agr. Ves. **24**, 263. 1923.
16. 'Sigmond, E.: Verh. I. B. G. II. Komm. B. Budapest. 177, 1929..
17. Herke S.: A Magyar Szikesek. Földm. Min. kiadv. 348, 1934.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. 15-én tartott üléséből.)

VORKOMMEN VON AZOTOBAKTER IN UNGARISCHEN BÖDEN.

Von FR. ZUCKER.

Vom ganzen Gebiet des Landes gesammelte 2037 Bodenproben wurden in phosphor- und kalkhaltiger Vollnährlösung auf ihr Azotobaktervorkommen geprüft und die Befunde mit den übrigen Analysenergebnissen verglichen. Die Untersuchungen ergaben, dass

1. in 24·2% der Oberkrumen und 42·4% der Untergrundsböden Azotobakter vollkommen fehlt. Diese Zahlen zeigen eine etwas günstigere Verbreitung im Vergleich mit anderen Ländern, jedoch konnte eine zur Stickstoffsammlung befriedigende Entwickelung nur in 11·9% der Böden festgestellt werden;

2. in den tieferen Bodenschichten das Azotobakter nur selten anwesend ist (etwa bis 90 cm);

3. mit den bisherigen Befunden in Übereinstimmung, das Azotobakter vorwiegend in den Böden mit *pH* 7—9 (H_2O-Suspension) verbreitet ist, während es über und unter diesen Grenzen in ausreichender Menge gewöhnlich gar nicht vorkommt;

4. die Verbreitung und Anzahl des Azotobakters mit steigendem Kalkgehalt der Böden zunimmt, bezw. mit der steigenden hydrolitischen Acidität abnimmt. Im Norden und Westen des Landes, wo saure Böden häufiger sind, macht sich das Abnehmen besonders bemerkbar;

5. der verminderte Reichtum an Azotobakter auf den Phosphormangel der Böden zurückgeführt werden kann, zumal in den nach NEUBAUER oder 'SIGMOND für phosphorreich gefundenen Böden mehr Azotobakter vorgefunden wurden, als in den phosphorarmen. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse mit jenen der Azoto-

bakterprobe, so ist ersichtlich, dass auch andere biologische Faktoren auf die Entwickelung des Azotobakters hemmend oder fördernd einwirken können;

6. Armut oder Reichtum der Böden an aufnehmbaren Kali auf das Gedeihen des Azotobakters von keinen Einfluss sind;

7. bezüglich starker Azotobakterentwickelung an erster Stelle die besser durchlüfteten Lehmböden stehen, denen die Tonböden bedeutend zurückstehen; die unzulängliche Azotobakterpopulation der Sandböden ist deren Armut an Nährstoffen zuzuschreiben;

8. in den Szik- (Alkali-)Böden meistens überhaupt keine, oder nur sehr schwache Entwickelung des Azotobakters nachgewiesen werden konnte, jedoch können sie nach erfolgreicher Amelioration den Kulturböden gleichgestellt werden.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Februar 1937.)

A GERINCESEK INTRACARDIALIS IDEGRENDSZERE.

ÁBRAHÁM AMBRUS-tól.

(10 szövegközti ábrával.)

A túlélő gerinces szíven végzett élettani megfigyelések, valamint az idegrendszernek a kifejlődését mesterséges beavatkozással meggátló exogastrulatiós vizsgálatok kétségtelenül beigazolták, hogy a szívnek automaciája van, ami azt jelenti, hogy a mozgásához szükséges ingert önmaga termeli s a keletkezés helyéről maga is vezeti tovább. Az újabb vizsgálatok nyomán nagyrészt beigazolódott továbbá az is, hogy az ingertermelésre a szívizomzatnak nem minden része egyformán képes, hanem az izomzatnak csak egyes térbelileg is jól elhatárolt területei vannak felruházva azzal a képességgel, hogy ingert termeljenek, illetőleg a termelt ingert az izomzatnak a többi részével való közlés végett tovább is vezessék. A szívizomzatnak azt a részét, amely az ingert termeli és vezeti, a rendes szívizomzattól specifikus szívizomzat néven szokták megkülönböztetni, és pedig azért, mert külső megjelenésében és belső szerkezetében is bizonyos sajátságokkal van ellátva, amelyek a rendes szívizomzatban hiányoznak. Meg kell jegyeznünk azonban azt is, hogy ingervezetésre a rendes szívizomzat is alkalmas, amint ezt a pitvar falában látjuk, ahol az elsődleges ingerközpontból a másodlagos ingerközponthoz az ingert a rendes izomzat rostjai vezetik.

Mindezek ma körülbelül tényként elfogadott megállapítások, azonban egészen bizonyos az is, hogy a szervezeten belül működő szívre az idegrendszernek úgy serkentőleg, mint gátlólag óriási

hatása van, amit az állatkísérleteken kívül a mindennapi megfigyelés és tapasztalat is elsőrendűen igazol. Az automacia valójában csak látszólagos s teljes mértékben csak akkor érvényesül, ha a szív a szervezet egészéből kikapcsolódik. Különben minden szívmozgást teljesen ural az idegrendszer, amit következtetünk azokból a gyors változásokból, amelyek más szervek működésének a megváltozására vagy központi eredetű hatásokra pillanatok alatt állanak be a szívnek a mozgáscomplexumában. Ezekből a hirtelen beálló eltérésekből már eleve joggal lehet következtetni arra, hogy a szívizomzat idegekben rendkívül gazdag s az izomsejtek, illetőleg az izomrostok között a kapcsolat rendkívül szoros, amit az alábbi vizsgálatok csakugyan igazolnak.

Anyag és módszerek.

Kutatásaim a gerinceseknek összes osztályaira kiterjedtek. Az egyes osztályokon belül a következő állatok szívén végeztem idegtani vizsgálatokat: *Silurus glanis* L., *Rana ridibunda* Laur., *Emys orbicularis* L., *Zamenis gemonensis* Laur., *Gallus domesticus* L., *Epimys norvegicus* Erxl. és *Felis domestica* L. Vizsgálati módszereim az Ehrlich-féle vitalis methylénkékkel való eljárás és az ezüsttel való impregnális Ramón y Cajal és Bielschowsky szerint. Vitalis methylénkékkel újszülött macskáknak a szívét festettem a következőképpen. A chloroformmal narkotizált és elvéreztetett állatoknak a szívébe az aortán keresztül 37 C °-ra felmelegített fiziológiás konyhasóoldatban oldott híg methylénkék oldatot fecskendeztem s azután vártam mindaddig, míg a nyelvet és a kemény szájpadlást beborító nyálkahártya kékülni kezd. Ekkor a szívizomzatból, rendszerint pedig valamelyik pitvarból borotvával vékony metszeteket készítettem s ezeket egészen híg methylénkék-oldatban thermostatba tettem úgy, hogy csak az alsó felük érintkezzék a festékoldattal. Ez a supravitalis festés rendesen csak 3—10 percig tartott. Ezalatt a metszetek megkékültek s már felületes mikroszkópi megtekintésre jól látszott, hogy a vastagabb idegágak pompásan megfestődtek. Az így kezelt metszeteket 24 órára 10%-os ammonium molybdát oldatba tettem, majd pedig vízzel mostam, azután pedig fokozódó töménységű alkoholban

víztelenítettem. Az utóbbi eljárás során azt tapasztaltam, hogy az alacsonyabb töménységű alkoholok a festést gyengítik s éppen azért ezekben aránylag kevés ideig tartottam az anyagot, hanem a tulajdonképpeni víztelenítést többször is váltogatott absolut alkoholban végeztem. Az így kezelt metszeteket xylolban felvilágosítottam s kanadabalzsamban állandósítottam. Néha a vastagabb borotvametszeteket paraffinba ágyaztam s ezekből, hogy az egészen finom strukturák is tanulmányozhatók legyenek, finom metszeteket készítettem. A beágyazással kapcsolatban azt kell megjegyeznem, hogy ezt a lehető leggyorsabban kell végezni, mert a hosszas kezelés erősen gyengíti a festést.

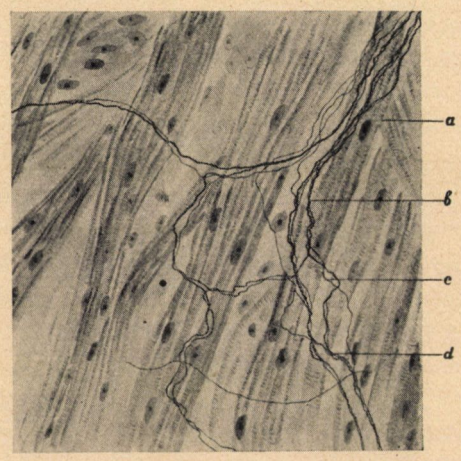
Az így kezelt készítményeken, ha jól ment minden, a festés tökéletesen rögzítődött úgyannyira, hogy — ami általában szokatlan — még a 8—10 esztendővel ezelőtt készült preparátumok színe is teljesen olyan friss és üde, mintha ma festődtek volna. Meg kell azonban jegyeznem, hogy a sok preparátum közül alig akad néhány olyan, amelyik minden tekintetben kifogástalan s amellett időálló volna, úgy, hogy az eljárás rengeteg állatot, óriási türelmet, rendkívül sok időt és végtelen nagy kitartást követel.

A második a Ramón y Cajal-féle totalis impregnáló eljárás urethan fixálás után. Ezzel főleg a halaknak és a békáknak a szívét vizsgáltam. Az eljárás általában eredményre vezetett, de csak pyridinkezelés után. Nagy előnye az, hogy az így kezelt anyagból metszetsorozatot lehet készíteni, azonban hátránya, hogy az idegfestés nem éles, a rostok nem határolódnak el jól a környező szövetelemektől s különösen a széleken sok a műtermék. A siker elsősorban az ezüstözés idejének helyes megválasztásától függ, aminek felismeréséhez a hosszas gyakorlat és tapasztalat vezet.

A harmadik eljárás, amit idegvizsgálataimban általában előszeretettel szoktam követni s amelyet a ma használatos idegkutató módszerek között a legjobbnak tartok, a Bielschowsky-féle ezüstözési eljárás, amelyet urethan, illetőleg formalin fixálás után mindenfajta gerinces-szívnél a legjobb eredménnyel alkalmaztam.

A myocardium idegei.

A gerincesek szívizomzata az idegeit három helyről kapja, nevezetesen a központi idegrendszerből, a sympathikus rendszerből és az intracardialis dúcsejtekből. A központi rostok a vaguson keresztül kerülnek a szívbe, a sympathikus rostok pedig a nyaki sympathikusokból származnak. Az intracardialis dúcsejtek sympathikus sejtek, amelyek részben az intracardialis dúcokban, részben



1. ábra. *Gallus domesticus* L. A szív balkamrájának tangentialis hosszmetszete. BIELSCHOWSKY-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = vastag velőtlen idegrost, *c* = vékony velőtlen idegrost, *d* = idegfonadék.

Abb. 1. *Gallus domesticus* L.: aus einem tangentialen Längsschnitt des linken Ventrikels des Herzens. Silbermethode von BIELSCHOWSKY. *a* = Muskelfaser, *b* = dicker markloser Nervenfaser, *c* = dünner markloser Nervenfaser, *d* = Nervengeflecht.

pedig szabadon, szétszórtan fordulnak elő a pitvaroknak s egészen kivételesen a kamráknak az izomzatában.

A felsorolt idegelemek közül ez alkalommal az idegrostokkal, ezeknek a lefutásával, végződésével és eredetével szándékozom foglalkozni.

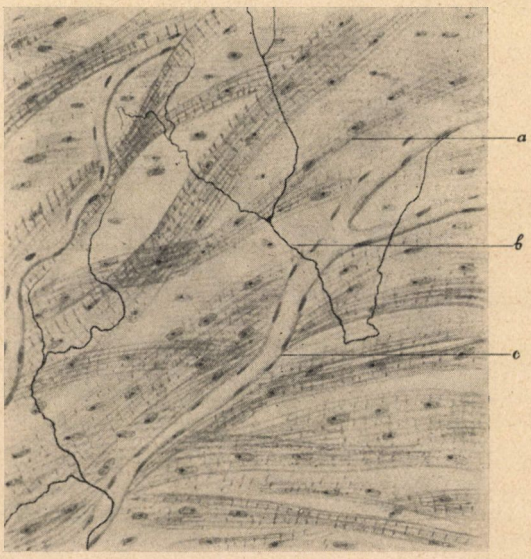
A gerinces szívizomzat idegrostokban felette bővelkedik. Egy jól impregnált készítményen még akkor is, ha vékony a metszet,

a tér minden irányába futó rostoknak hatalmas tömkelege tűnik a szemünkbe. Ezek a rostok az izomsejteknek, illetőleg az izomrostoknak a felületén dús fonadékokat alkotnak (1. ábra). A rostok között, amint ez az első ábrán jól látható, vannak vastagabbak, vékonyabbak, úgy a vékonyak, mint a vastagok átlag hullámos lefutásúak s a BIELSCHOWSKY-preparátumokon símaszélűek. A rostok túlnyomó része, amint az ezüstözött készítményeken is jól kivehető, velőtlen, azonban a mocsári teknősnek és a tyúknak a szívében az olyan rostok sem ritkák, amelyek egészen jól szembetűnő velőhüvellyel vannak körülvéve, amelyet hosszú darabon keresztül lehet követni. A vékony rostok gyakorta keresztezik a vastagabbakat s így főleg a kamrák területén igen jellegzetes laza fonadékok keletkeznek. Ilyenek főleg a *Gallus domesticus* szívén láthatók jól.

A rostok, úgy a vastagok, mint a vékonyak, epilemmalisan s ott, ahol nagyobbacska törzseket alkotnak, az izomrostnyalábok közötti kötőszöveti válaszfalakban futnak. A mikroszkópi képnek, főleg pedig egyes magánosan futó rostoknak a vizsgálatakor gyakran felmerül az a gondolat, hogy hátha a rostok átfúródnak az izomrostokon, azonban az alaposabb vizsgálat mindig azt a meggyőződést érleli meg bennünk, hogy az epilemmalis út mellett foglaljunk állást. A világos és a mikrometercsavarnak az alaposabb kihasználásával kapott sorozatos képek között nem akad ugyanis egy sem egészen olyan, amelyen egész bizonyosak volnánk arról, hogy az izomrostnak a magva és az idegrost egy beállításnál egyforma élesen látszik. Más érvünk pedig, amellyel az epi-, illetőleg hypolemmalis fekvés kérdéséhez hozzászólhatnánk, manapság, sajnos, még nincsen, mert az, hogy az izomrostnak a keresztmetszetén találjuk meg valamely fínom idegrostnak, vagy még inkább neurofibrillának a keresztmetszetét, a jelen esetben egészen illuzóriusnak tűnik fel. Ilyenféle megállapításokra csak egészen vastag rostok volnának alkalmasak, vagy esetleg nagyobbfajta idegvégződések, amik után jelen esetben hiába kutatunk.

A tyúkszívkamra izomzatában a rendes izomszövetben igen gyakoriak az egyesével futó vékony rostok. Ezek rendesen hullámosak, sőt erősen kanyarognak (2. ábra). Az ilyen rostok a mikroszkópi képen nagyon messzire követhetők a nélkül, hogy elágaznának, gyakran keresztül-kasul járnak a hajszáledényeken, de nem

véredénymozgatók. Különleges sajátságuk az, hogy bizonyos út után dichomotikusan oszlanak. Az oszlás helyén rendesen igen feltűnő háromszögalakú megvastagodás szokott lenni, amit a felületes szemlélő hajlandó volna idegsejtnek elkönyvelni s amit a régiek annak is írtak le. A kép különösen akkor csalóka, mikor még egy neurilemmamag is fekszik a roston. Az elágazás egymás-



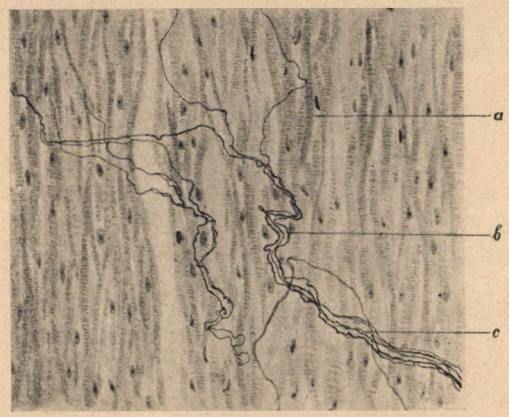
2. ábra. *Gallus domesticus* L. A szív balkamrájának tangentialis hosszmetszete. BIELSCHOWSKY-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = elágazó idegrost, *c* = hajszálér.

Abb. 2. *Gallus domesticus* L.: aus einem tangentialen Längsschnitt des linken Ventrikels des Herzens. Silbermethode von BIELSCHOWSKY. *a* = Muskelfaser, *b* = verzweigender Nervenfaser, *c* = Blutkapillare.

után többször ismétlődhetik, aminek következtében végül egészen neurofibrillajellegű képződmények keletkeznek, amelyek az izomrostok felületéhez símulnak s ezeken fokozatosan elvesznek a nélkül, hogy valamiféle feltűnő terminalis képződménybe mennének át. Néha azonban olyan alakulatokra is akadunk, amelyekben a fínom végágacskák nem végződnek külön, hanem átmennek egy-

másba s így az izomrostokon rendkívül fínom hálózatot alkotnak (10. ábra).

A szívizomzat beidegzését illetőleg nem nagy az eltérés a *Zamenis gemonensis* szívében. A rostoknak a túlnyomó része itt is idegtörzsecskékben halad, egymással meglehetősen párhuzamos, de gyakori az olyan kép is, mikor a szomszédos vékony rostok erősen hullámosak, kiugró részeik egymással gyakran érintkeznek s így egészen hasonló kép jön létre ahhoz, amit HACHIRO SETO az



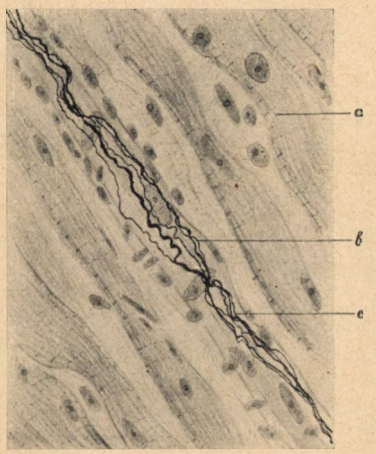
3. ábra. *Zamenis gemonensis* LAUR. A szív kamrájának tangentialis hosszmetszete. BIELSCHOWSKY-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = idegrost, *c* = idegfonadék.

Abb. 3. *Zamenis gemonensis* LAUR.: aus einem tangentialen Längsschnitt des Ventrikels des Herzens. Silbermethode von BIELSCHOWSKY. *a* = Muskelfaser, *b* = Nervenfaser, *c* = Nervengeflecht.

ember szívéből terminalreticulum néven közöl (3. ábra). Azonban ez a terminalreticulumszerű alakulat csak látszat s egyszerűen postmortalis elváltozás vagy rögzítés következtében előálló zsugorodásnak az eredménye, ami tisztán kiviláglik abból, hogy a rostok később szétválnak s külön-külön ugyanolyan számban futnak tova az izomzatban, mint amilyen számban az idegtörzsecskékben voltak. A vékony rostokon nem ritkák a hurokképződmények, amelyeket más gerincesek szívizomzatán nem igen láttam. Az idegtörzsecskékből kilépő rostok itt is, mint a tyúk szívében, egyesével

igen messzire futnak, majd pedig az izomsejtekhez símulnak. Afféle dichotomikus elágazásokat, amelyek azután hálózat alakulásához vezetnének, a *Zamenis gemonensis* szívizomzatában nem tudtam találni. Bizonyos fokig feltűnő jelenség itt az is, hogy nem akadtam olyan vastag, velőhüvelyes rostokra sem, amelyek a tyúkkamra idegrendszerének igen jellegzetes alkatrészei.

A fentiekhez hasonlók a viszonyok az *Emys orbicularis* szívében azzal a különbséggel, hogy itt gyakoriabbak az idegtörzsek,



4. ábra. *Silurus glanis* L. A szív pitvarának a tangentialis hosszmetszete. Bielschowsky-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = idegrost, *c* = idegfonadék.

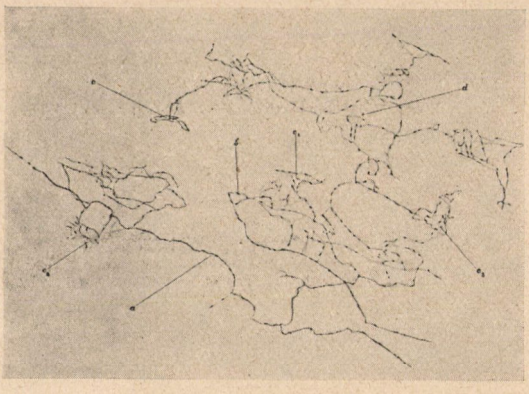
Abb. 4. *Silurus glanis* L. : aus einem tangentialen Längsschnitt des Vorkammers des Herzens. Silbermethode von Bielschowsky. *a* = Muskelfaser, *b* = Nervenfaser, *c* = Nervengeflecht.

ezekben szorosan záródnak a rostok, amelyek mind velőtlenek. Az izomban gyakoriak a velősrostok is, amelyek rendesen magánosan futnak.

Jóval egyszerűbbek a viszonyok a harcsa szívében (4. ábra). Itt az izomzatban fonadékot nem igen találtam. Az idegrostok, amelyek rendesen kevesedmagukkal az epicardiumból kiindulólag merőlegesen futnak a myocardium belsejébe, eddigi tapasztalataim szerint velőtlenek, az izom közepe felé egymástól eltérnek, a divergáló ágak néha elágaznak s az így keletkező igen fínom ágak az

izomsejtekhez tartanak. Nem tartozik a ritka esetek közé az sem, amikor néhány különböző vastagságú velőtlen rost egymás közelében halad s ezt a jellegzetes egyenes társulást igen hosszú darabon keresztül megtartja. Az ilyen rostok, amint ez a 4. ábrán jól látható, kissé hullámos lefutásúak s velőtlenek.

Az eddig ismertetett viszonyoktól sok tekintetben eltér a vitalis methylénkékkel festett macskaszívizom, amely már első megtekintésre ideggazdagabbnak látszik a többi gerincesek szívé-

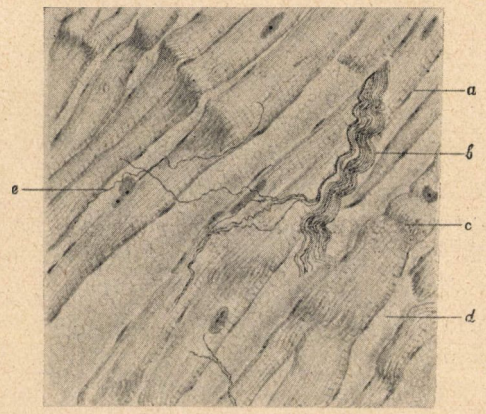


5. ábra. *Felis domestica* L. A szív pitvarának tangentialis hosszmetszete. Ehrlich-féle vitalis methylénkékkel való eljárás. a = idegrost, b = varix, c, c_1, c_2, c_3 = idegvégháló, d = ultraterminalis rost.

Abb. 5. *Felis domestica* L.: aus einem tangentialen Längsschnitt des Vorkammers des Herzens. Vitalmethylenblaufärbung nach Ehrlich. a = Nervenfaser, b = Varix, c, c_1, c_2, c_3 = Nervenendnetz, d = ultraterminaler Nervenfaser.

nél. Az idegrostok, amelyek methylénkékkel elektive színeződtek, mind nagyon vékonyak, varicosusak, többször is elágaznak s ágaik a szomszédos rostoknak hasonló ágaival anastomizálnak. Ilyenformán valóságos hálózat jött létre. A hálózat szemei szűkek, rostjai itt-ott hullámosak, kanyarognak úgy, hogy az alakulat az idegrendszer és az izomrostok közötti bensőleges kapcsolat létesítésére rendkívül alkalmas. Az egész kép könnyen érthetővé teszi azokat a hihetetlenül gyors változásokat, amelyek a más szervek működésében beálló zavarokra, vagy pedig központi hatásokra

pillanat alatt változást létesítenek a szívműködésben. Mindezekhez természetesen még siettetőleg járulnak hozzá a szívvéredényrendszernek a működésében előálló változások, amelyeket a kis edények mentén is jól látható vasomotorok létesítenek. Az idegháló mellett vannak olyan velőtlen rostok is, amelyek messzire futnak anélkül, hogy elágaznának, s majd a halószemek felett, majd pedig ezek alatt kígyóznak tova. Mindezek a viszonyok természetesen csak vastag metszeteken láthatók, amelyeken még az is jól ki-



6. ábra. *Epimys norvegicus* Erxl. A szív balkamrájának a tangentialis hosszmetszete. Bielschowsky-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = idegtörzs, *c* = pars connectiva, d = hajszálér.

Abb. 6. *Epimys norvegicus* Erxl.: aus einem Längsschnitt des linken Ventrikels des Herzens. Silbermethode von Bielschowsky. *a* = Muskelfaser, *b* = Nervenstamm, *c* = pars connectiva, *d* = Blutkapillare.

vehető, hogy a magánosan futó rostok is rendesen véghálóba mennek át (5. ábra). A hálózatban már egyetlen mikroszkópi készítménynek a megtekintésekor is nagy számmal akadunk olyan képződményekre, amelyeket könnyen nevezhetnénk laza véggomolyoknak is, azonban az alaposabb vizsgálat arról győz meg, hogy itt sűrű fonadékokról, illetőleg a legtöbb esetben határozott hálózatról van szó, amelyek közül egyesek kétségtelen véghálóknak látszanak főleg akkor, ha belőlük nincsen további kiágazás. Az ilyen véghálók mellett gyakoriak az olyan hálózatszerű, sűrűbb

szerkezetű, rendesen nagyobb kiterjedésű képződmények is, amelyekből rendesen egy, vagy esetleg több rost lép ki, mely utóbbiakat az érző idegvégtestekből kilépő rostokhoz hasonlóan ultraterminális rostoknak nevezhetünk. Mindezek a viszonyok igen jól látszanak az 5. ábrán, főleg pedig a mikroszkópi készítményen, ha ezen az egyes véghálókat erősebb nagyítással és gondos mikrométercsavarhasználattal vizsgáljuk.

A fehér patkány szívizomzatán, amelyet a BIELSCHOWSKY-módszer szerint kezelt vékony metszeteken vizsgáltam, az idegeknek az elosztását s az izomzathoz való viszonyát csak kis területen kísérhettem figyelemmel (6. ábra). Itt az idegrostok általában vastag törzsekben futnak s túlnyomólag párhuzamosak az izomnyalábok felületével. A rostok általában vékonyak és ugyanabban az idegtörzsben mind velőtlenek, szélük síma, lefutásuk kissé hullámos. Az idegtörzsekből helyenként kisebb törzsek, majd ezekből, vagy pedig egyesével az előbbiekből fínom rostok válnak le, amelyek az izomrostokon epilemmalisan messzire futnak. Olyanféle dichotomikus elágazást, amilyent a tyúk szívében leírtam, a patkányszíven nem észleltem. A vékony velőtlen rostok itt is úgy vesznek el lassanként az izomrostok felületén, amint ezt az eddig tárgyalt szívizomféleségeken láttuk. Hogy olyan sympathikus véghálókra nem akadtam, mint amelyekről fentebb a tyúk, majd pedig a macska szívizombeidegzésénél megemlékeztem, annak semmi különös jelentőséget nem tulajdonítok, sőt ezt egyenesen a kikészítés hiányának tartom. Nem akadtam a metszeteken vastag velős rostokra sem, de ebből sem mernék arra következtetni, hogy az emlős szívben ilyenek nincsenek, legfeljebb talán csak más izomterületen szoktak inkább előfordulni, mint amilyenek az én mikroszkópom alá kerültek.

A myocardium idegvégződései.

A gerinces szívizomzatnak az idegvégződéseivel immáron rendkívül sokan foglalkoztak és mégis, mint BOEKE mondja, «we are still trying to elucidate the way in which these nerve fibers are connected with the contractile elements themselves». Ennek az összefüggésnek felismerése azért olyan nehéz, mert mint STÖHR

helyesen jegyzi meg, egyik idevonatkozó újabb értekezésében, «the heart not contain any endplates similar those in skeletal muscle». Ez az oka annak, hogy a különböző szerzőknek az adatai annyira eltérnek egymástól s a síma izom beidegzése mellett nincs a neurológiának még egy olyan fejezete, amely a mérhetetlen munka dacára annyi találgatásra adott volna okot, mint maga a szív.

RANVIER (1880) aranyozott és osmiumsavval kezelt preparátumai alapján azt állítja, hogy a béka szívizomzatában az idegrostok a mag közelében belépnek az izomsejtbe, de nem végződnek itt, hanem kilépnek s a szomszédos sejtekben tovább folytatódva, egymásba mennek át. A szívizomzat tehát olybá veendő, mintha az izomsejtek az idegrostokra fel volnának fűzve.

OPENCHOWSKY (1883) nem sokkal azután, hogy a RANVIER-féle vizsgálatok napvilágot láttak, ugyancsak aranyozással úgy találta, hogy az idegrostok a kétéltűek szívizomsejtjein gombalakú fejecskékben végződnek és sohasem hatolnak be a sejtnek a protoplasmájába.

A későbbi vizsgálók közül RETZIUS (1876), HEYMANS és DEMOOR, P. JACQUES (1894), SMIRNOW (1890), akik vizsgálataikat a békaszíven az EHRLICH- és GOLGI-féle eljárással végezték, csatlakoznak az OPENCHOWSKY-féle megállapításokhoz.

HOFMANN (1902) közeledik a RANVIER-féle felfogáshoz, mert, bár tagadja az idegrostoknak az izomsejtnek a plasmájába való belépését, úgy találja, hogy az idegrostok teljesen zárt hálózatot alkotnak, szabad végződések egyáltalán nem fordulnak elő.

MICHAILOW (1908), aki újabban a CAJAL-féle módosított eljárással foglalkozott a béka szívbeidegzésével, a két ellentétes nézetet egyesítve vallja, amennyiben azt hirdeti, hogy az idegrostok szabadon végződnek, azonban a neurofibrillák mindig folytatólagosan futnak tovább és sehol sem végződnek szabadon.

MALLARD (1908) a szívizomzat beidegzését tárgyaló tanulmányában arra a következtetésre jut, hogy a szívben egyáltalában nincsen olyan idegvégződés, amely eltérne a símaizom idegvégződéseitől.

SMIRNOW (1900) szerint a velőtlen rostok az izomsejtek között sűrű fonadékot alkotnak s maguk a rostok fínom elágazó rostocskákban végződnek, amelyek azonban nem lépnek be a sejtekbe.

Boeke (1924) a teknős szíven végzett vizsgálatai alapján tagadja a Ranvier-féle tanokat, mert úgy találja, hogy az idegrostok belépnek az izomsejtekbe és intraplasmatikusan fejecskékben végződnek, amelyek igen közel feküsznek a maghoz. Ugyancsak az intraplasmatikus végződés mellett foglal állást Wollard (1926), aki a macskaszíven methylénkékkel végzett vizsgálatokat, amit egy évvel később Tsunoda és Kasahara is megerősített.

Marcus (1928) az emberi szíven végzett vizsgálatai nyomán szintén az intraplasmatikus végződést hirdeti és ugyanezt vallja Lawrentjew (1929) a kutyaszívre vonatkozólag.

Hachiro Seto (1936) tagad minden szabad végződést. Az ő vizsgálatai szerint, melyeket 11 emberi szívből készült több mint 1000 metszeten végzett, a szívizomban nincsenek szabad idegvégződések. A Boeke-féle végfejecskéket Seto a myocardiumban szerinte elég gyakran látható vastag érzőrostok csonkjának tartja s a szívidegrendszer végének a *terminalreticulumot* jelöli meg. A *terminalreticulum* elnevezés Stöhr és Reiser nevéhez fűződik és az ő véleményük szerint «ein wabenartiges Flechtwerk von feinsten Neurofibrillen, das alle Gewebselemente der Erfolgsorgane umhüllt und den eigentlichen Endapparat des vegetativen Nervensystems darstellt». Erről a *terminalreticulumról* a bélcsatorna síma izomzatának a beidegzésével kapcsolatban legújabban már többször esett szó az irodalomban. A búvárok között vannak, akik állítják (Stöhr, Reiser, Sunder-Plasman), és vannak, akik tagadják (Boeke, Ábrahám) ennek a létezését. A terminalreticulumnak a szívizomzatban való jelenlétét elsőnek Hachiro Seto hirdeti, aki úgy találja, hogy az ember szívizomzatában a tertiaer fonadéknak egyes kisebb idegtörzseiből egészen kis nyalábok válnak el, amelyek csak néhány olyan egészen fínom rostból állanak, amelyek csak igen nehezen impregnálhatók s ezek lassacskán az izomrostok közé bújnak. Az ilyen fínom rostocskák a Schwann-féle hártyába vannak beágyazva s egyesek helyenként terminalreticulumot alkotnak, a többiek pedig útjukban több oldalágat adnak, amivel kapcsolatban a Schwann-féle hártya is mindig vékonyabbá válik. Az ilyen módon elvékonyodó rostok aztán végül szintén átmennek a *terminalreticulumba.*

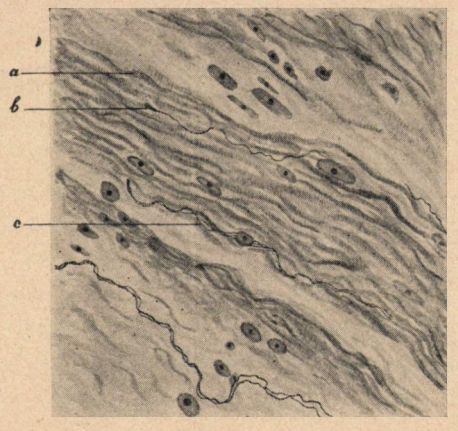
Amint a most vázolt irodalmi áttekintésből látszik, a szív-

izom idegvégződéseit illetőleg a búvárok öt csoportba sorolhatók. Nevezetesen vannak olyanok, akik minden végződési formát tagadnak, vannak olyanok, akik az epilemmalis végződésforma mellett foglalnak állást, vannak olyanok, akik az intraplasmatikus végződés mellett kardoskodnak és vannak olyanok is, akik azt vallják, hogy az idegrostok végződnek, de a neurofibrillák megszakítás nélkül haladnak egyik izomrosttól a másikig. Egészen különleges magánosan álló és újszerű az utolsó álláspont, amely a vegetativ idegrendszer még látható utolsó szakaszának a *terminal-reticulumot* tartja.

Talán kissé furcsa s főleg a nem neurologus számára érthetetlen ez a nagy eltérés, de a szakember nem csodálkozik rajta, hiszen a nagy véleménykülönbségnek az oka, mondhatnám, a tényeknek egyéni meglátásában és sajátságos értelmezésében rejlik, mert nézetem szerint egy ideghisztológus számára nem képzelhető el nehezebb feladat, mint eldönteni azt, hogy valamely sympathikus idegrost csakugyan végződik-e valamely szövetben, vagy pedig nem, és ha igen, akkor hol. Ennek dacára mégis van valami, aminek alapján önálló nézetet vallhatunk, vagy pedig valamelyik már meglévőhöz csatlakozunk és ez a nagy gyakorlattal párosult technika és a kitűnő optikai műszer. Ez a két kutató eszköz és kutatási területnek a nagysága engem arról győzött meg, hogy a szívizomzatban vannak idegvégződések, s ez egyformán vonatkozik úgy a rostokra, mint a neurofibrillákra.

Hogy csakugyan vannak végződések, arról a mocsári teknős szívéből impregnált keszítmények győztek meg legjobban (7. ábra). A teknős szívizomzatában, amely idegtanulmányi célra elsőrendűen alkalmas, amint ezt a 7. ábrán jól lehet látni, van idegvégződés. Mindamellett teljesen megértem a mai kutatóknak s ezek között Hachiro Setonak az aggodalmát, akik az efféle képeket csalóka képeknek mondják, hiszen magam is állandóan hirdetem azt, hogy a végződések megítélésénél a legkitűnőbb preparatum mellett is a legnagyobb óvatosságra van szükség. Ennek dacára határozottan a mellett foglalok állást, hogy az, amit a 7. ábra mutat, csakugyan idegvégződés. Arra természetesen a jelen esetben is lehetne gondolni, hogy ez talán nem más, mint valamely vastagabb rostnak egyik csonkja, vagy pedig a hiányos impregnálás eredménye,

azonban ennek az elgondolásnak határozottan ellene mond a végződésnek hosszúkás, a végén lekerekített lapátalakú volta, amely semmiképpen sem kelti egy elvágott s a végén felduzzadt idegrostnak a képét. A végződés körül periterminalis hálózatot, amilyet Boeke az emlős-szívizomrostok idegvégződései mellől közölt, a metszeteknek a leggondosabb s a legerősebb nagyítással való áttanulmányozása után sem találtam, de nyomát sem találtam a terminalreticulumnak sem. Különben, hogy hogyan vélekedem



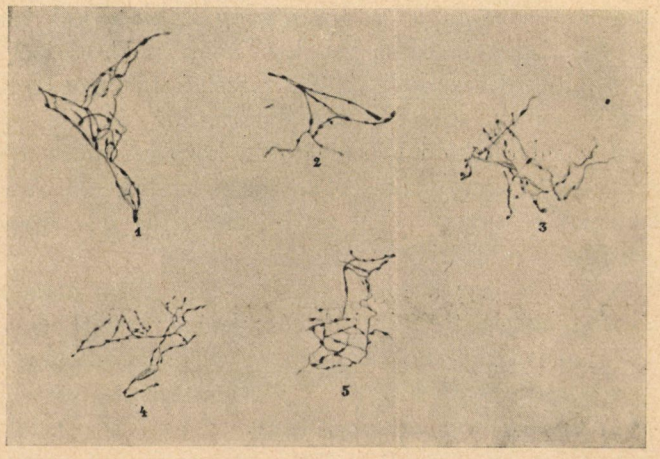
7. ábra. *Emys orbicularis* L. A szív kamrájának tangentialis hosszmetszete. Bielschowsky-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = idegvégződés, *c* = idegrost.

Abb. 7. *Emys orbicularis* L.: aus einem tangentialen Längsschnitt des Ventrikels des Herzens. Silbermethode von Bielschowsky. *a* = Muskelfaser, *b* = Nervenendigung, *c* = Nervenfaser.

erről az egész újdonsült szerkezetről, arra vonatkozólag már úgy a hazai, mint külföldi szakfolyóiratokban nyilatkoztam, a jelen esetben tehát csak azt kell hangsúlyoznom, hogy efféle szerkezetet eddigelé a gerinces-szívizomban sem találtam. Nagyon élesen és elektive festett készítményeken gyakran láttam magam is, hogy a legfinomabb sympathikus rostok különösen akkor, ha már közel vannak ahhoz, hogy a környező sejtekben eltűnjenek, egymáshoz egymásután sokszor közelednek, egymástól távolodnak, egymás alatt és fölött többször áthaladnak, azonban azt, hogy ezek egy-

mással olyan finom véghálózatot alkotnának, amelyben a szívizomnak mindhárom eredetű idegrostjai találkoznának és egymásba mennének, még sohasem láttam. Ilyenformán mai határozott álláspontom az, hogy a gerinces-szívben terminalreticulum nincsen.

A vastag rostoknak a lapátszerű végződésformái mellett, amilyeneket a teknős szívében észleltem, s amelyek nézetem szerint epilemmalisan feküsznek, meg kell emlékeznem azokról a véghálókról, amelyeket a methylénkékkel festett macskaszíven láttam



8. ábra. Idegvéghálók a macskaszív pitvarából. EHRLICH-féle vitalis methylénkékkel való eljárás.

Abb. 8. *Felis domestica* L.: verschiedene Nervenendnetze aus einem tangentialen Längsschnitt des Vorkammers des Herzens. Methylenblaufärbung nach EHRLICH.

(8. ábra). Ezeket a hálókat kétségtelenül idegvégződéseknek kell tartanunk, de semmiesetre sem terminalreticulumoknak, mert hiszen ezekbe csak egyféle rostok lépnek be. A véghálók alakja többféle lehet, amint ez a 8. ábrán jól látszik, de mind megegyeznek abban, hogy aránylag mind nagykiterjedésűek s alkotásukban rendesen csak egyfajta, erősen vékony és varicosus rostok vesznek részt, amelyek kétségtelenül mind sympathikus eredetűek.

Már most azután felmerül az a kérdés, hogy vajjon a most tárgyalt idegvégződések milyen idegnek a végződései. Ez a kérdés

átvezet egy rendkívül fontos s különösen napjainkban nagyon sokat vitatott és úgy élettani, mint belgyógyászati, valamint gyógyszertani szempontból rendkívül fontos kérdéskomplexumhoz, ahhoz t. i., hogy a szívizomban futó idegrostok, illetőleg az izmot ellátó idegek milyen eredetűek.

Az intracardialis idegrostok eredete.

A szívizom mikroszkópikus beidegzésének a vizsgálatakor önkénytelenül felvetődik az a kérdés, hogy azok a rostok, amelyek a különböző izomsejtekhez, illetőleg izomrostokhoz ingerületet visznek, az idegrendszernek melyik részéhez tartoznak. Kérdés, hogy van-e módunk annak az eldöntésére, hogy vajjon a rostok, amelyeket a mikroszkópi képen látunk, központi eredetű vagusrostok-e, a nyaki sympathikusból származó sympathikus rendszerhez tartoznak-e, avagy pedig az intracardialis dúcsejteknek a neuritjei, illetőleg dendritjei.

Ez a kérdés már a régi kutatókat is sokat foglalkoztatta, azonban fogyatékos technikai felkészültségük miatt a kérdést eldönteni nem tudták, holott régen a velőhüvelynek az ottléte, vagy hiánya már döntő lett volna ebben a tekintetben. Ma már nagyobb nehézségekkel állunk szemben, mivel az irodalomban olyan hangok is hallatszanak, hogy a sympathikus rendszerben is vannak velőhüvelyes rostok. Ez a tan természetszerűleg a kérdés eldöntését nagyon megnehezíti ugyan, azonban a végleges megoldást mégsem teszi lehetetlenné, ha meggondoljuk azt, hogy a sympathikus és vagus eredetű rostok között, amely utóbbiak természetszerűleg velősek, igen nagy a kaliberbeli különbség. Ilyenformán tisztán elméleti megfontolás alapján a szívizomzatban lehetnek velőtlen, velőhüvelyes vékony és velőhüvelyes vastag rostok. Most az a kérdés, hogy vajjon ezek a rostok honnan jönnek, illetőleg a vagusrostok meddig mennek a szívizomzatban és maguk a rostok és végződéseik megkülönböztethetők-e a sympathikus rostoktól, illetőleg a vagusvégződések a sympathikus végződésektől, vagyis a kettősség, amely a szív makroszkópikus beidegzésében, élettanában, nemkülönben kór- és gyógyszertanában kétségtelenül bizonyítható, meglátszik-e a mikroszkópi képen. Az is kérdés

továbbá, hogy a kettős beidegzés kiterjed-e a szívnek egész izomzatára, vagy csak bizonyos szívterületekre, továbbá, hogy kettős beidegzés alatt áll-e mind a kétféle szívizomzat, vagy csak az ingervezető rendszernek az izomrostjain érvényesülnek egyszerre, vagy gyors egymásutánban vagus-, illetőleg sympathikushatások.

A legújabb irodalom ezekre a kérdésekre vonatkozólag azt vallja, hogy az izomzatban vagus- és sympathikus rostok egymástól nem különböztethetők meg. Nem ritkák az olyan hangok sem, melyek szerint a vagusrostok csak a pitvarok területére szorítkoznak, illetőleg csak a ganglionokig mennek és olyan nézetben sincs hiány, amely szerint a vagusrostok csak érzőrostok, mint azt napjainkban Hachiro Seto vallja.

Az én vizsgálataim, főleg pedig azok, amelyeket a tyúknak a balkamra izomzatán végeztem, alkalmasak arra, hogy tisztázzam a fentemlített bonyodalmas kérdéseket. Nevezetesen ezekből a vizsgálatokból kiderül, hogy a szívizomzatban vastag velős rostok vannak, amelyek minden kétséget kizárólag vagusrostok, amelyek nem érzők, mint egyesek vallják, hanem mozgatók. Kiderül továbbá az is, hogy a vagusrostok a szívnek kamrájába is lenyúlnak és hogy ugyanaz az izomrost kettős ideghatás alatt áll. Mindezek a viszonyok jól láthatók a következő ábrán, amely a tyúkszív balkamra endocardiumának tangentialis hosszmetszetéről készült (9. ábra). Az ábrán a rendes izomzat rostjai között az izomrostok irányától függetlenül sok idegrostot látunk, amelyeknek legnagyobb része vastagabb, vékonyabb idegtörzsekbe csoportosul. A rostok legnagyobb része rendkívül vékony és hullámos lefutású. Olyan terminalreticulumra emlékeztető jelenségre, amilyenről a *Zamenis gemonensis* szívében már megemlékeztem, itt is gyakran akadunk. A vékony rostok mellett magukban az idegtörzsekben, főleg azonban külön nem ritkák a vastagabb rostok is, amelyek azonban egész külső habitusukban arra utalnak, hogy nem tartoznak a vékony rostoktól eltérő rendszerbe. Ezek mellett azonban vannak aránytalanul vastag rostok, amelyek már annyira elütnek az előbbiektől, hogy már elméleti meggondolás alapján is más rendszerhez tartozónak kell tartanunk.

Hogy ehhez csakugyan jogunk van, sőt ezt tenni egyenesen kötelességünk, arra vonatkozólag teljes felvilágosítást nyujt a

következő rajz (10. ábra). Ezen feltűnő vastag tengelyfonalakat lehet látni, amelyeket vastag velőhüvely vesz körül, amely a BIELSCHOWSKY metszetimpregnálás nyomán igen kitűnően látszik. Ezek a rostok kétségtelenül vagus eredetű rostok, mert ilyen tengelyfonalak, amelyeket ugyancsak vastag velőhüvely venne körül, a sympathikus idegrendszerben nem fordulnak elő. Már most

19. ábra. *Gallus domesticus* L. A szív balkamrájának tangentialis hosszmetszete. BIELSCHOWSKY-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = vékony idegrost, *c* = vastag idegrost, *d* = kötőszövet, *e* = idegtörzs, *f* = hajszálér.

Abb. 9. *Gallus domesticus* L.: aus einem tangentialen Längsschnitte des linken Ventrikels des Herzens. Silbermethode von BIELSCHOWSKY. *a* = Muskelfaser, *b* = dünner Nervenfaser, *c* = dicker Nervenfaser, *d* = Bindegewebe, *e* = Nervenstamm, *f* = Blutkapillare.

az a kérdés, hogy a rostok érző, vagy pedig mozgató rostok. Erre a kérdésre roppant nehéz volna biztos feleletet adni, hiszen általánosan ismeretes tény, hogy a receptor és effector között morphologiailag nem lehet különbséget tenni, azonban mégis vannak olyan jelenségek, amelyek alapján a rostoknak a mozgató voltához semmi kétség nem fér. Ilyen jelenség elsősorban az, hogy a rostok,

amint azt a 10. ábrán jól látjuk, az ingervezető izomzatban futnak, és pedig főként a His-nyaláb kamrakötegeiben, de átterjednek a rendes szívizomzatra is, amiből világosan látszik, hogy a kérdéses

10. ábra. *Gallus domesticus* L. A szív balkamrájának tangentialis hosszmetszete. Bielschowsky-féle eljárás. *a* = izomrost, *b* = ingervezető rost, *c* = velőtlen idegrost, *d* = velős idegrost, *e* = idegvégháló, *f* = hajszálér, *g* = arteria, *h* = kötőszövet.

Abb. 10. *Gallus domesticus* L.: aus einem tangentialen Längsschnitt des linken Ventrikels des Herzens. Silbermethode von Bielschowsky. *a* = Muskelfaser, *b* = reizleitender Muskelfaser, *c* = markloser Nervenfaser, *d* = markhaltiger Nervenfaser, *e* = Nervenendnetz, *f* = Blutkapillare, *g* = Arteria, *h* = Bindegewebe.

rostok csak mozgatók lehetnek. Ezen felfogás mellett szól továbbá az is, hogy a rostok szoros kapcsolatban állanak mind a kétfajta izomzattal. A rostoknak a mozgató voltát igazolja végül az,

hogy a velőhüvelyük nagyon vastag, ami — amint ez az idevonatkozó KISS—MIHALIK-féle vizsgálatokból kiderül — azt bizonyítja, hogy itt csakugyan mozgató rostokkal állunk szemben. Ezekből a megállapításokból tehát kiderül az, amit a nyaki vagus peripherikus csonkjának az izgatása is kétségtelenül bizonyít, hogy a vagus a szívnek mozgató idege, amely átjárja az egész szívizomzatot. Így válnak érthetővé azok a klinikai tapasztalatok is, amelyek a szív rhitmusában beálló zavarok egy részét a vagusnak különböző mértékű tónusára igyekeznek visszavezetni. A 10. ábráról kiderül továbbá az is, hogy a vagusrostok mellett, ezeknek közvetlen szomszédságában finom velőtlen síma szélü tengelyfonalacskák futnak, amelyek helyenként az idegtörzsből kitérnek, magánosan tovahaladnak, majd dichotomikusan ágaznak s a többszörös elágazásból keletkező oldalágacskák egymással anastomizálnak. Eképpen egy rendkívül finom rostokból álló hálózat jön létre, amely a vagus eredetű rostokkal semmiféle kapcsolatban nincsen. Ezek a rostok, amelyeket hol a törzsekben, hol magánosan, igen messzire követhetünk a nélkül, hogy rajtuk a neurilemmán és magvain kívül valami egyebet is látnánk, kétségtelenül sympathikus rostok. Tehát a kamra izomzatában a specifikus szívizomzatban s az ezt közvetlenül körülvevő rendes szívizomzatban egymás mellett kétféle mikroszkópilag elkülöníthető idegrendszer van, amelyek egymásba át nem mennek, ami azt bizonyítja, hogy a vagus és sympathikus rendszer mindvégig megőrzi önállóságát. Ez a megállapítás teljesen fedi tehát az élettani és gyógyszerhatástani kísérletek eredményeit és a klinikai tapasztalatokkal is egészen összhangban van.

A második kérdés az, hogy meddig nyúlnak a vagusnak a mozgató rostjai a szívizomzatban. Erre vonatkozólag a mai irodalom sokszor egészen téves nézetet vall, ami mind a felületes technikai felkészültségre s az eredménytelen, vagy rosszul sikerült idegfestésre, főkép a nem idegtani módszerekkel végzett vizsgálatokra vezethető vissza. Ilyen nézet a többek között az is, amit magyar szerző is igyekezett már népszerűsíteni, hogy a vagusrostok nem érnek le a szívnek a kamrájába. Ezekkel a tanokkal szemben az én preparatumaimról kétségtelenül meg lehet állapítani, hogy a nevezett rostok leterjednek a kamrába is, amiből következik, hogy a

vagushatások itt is úgy érvényesülhetnek, mint akár a pitvarokban.

Mindezekből világosan következik az, hogy a szívizomzat kettős beidegzés alatt áll, a vagus és sympathikus eredetű elemek egymás mellett haladnak, külön végződnek s ennélfogva a tapasztalatilag egészen beigazolt kettős működésnek meg van adva a biztos morphologiai alapja. Következik továbbá az is, hogy az intracardialis idegrendszernek a vizsgálatából nem lehet, de nem is szabad arra következtetni, hogy a neurontan, amelyet eddig a vegetativ idegrendszer területén is érvényesnek tartottunk, mint Seto mondja, arra volna kényszerítve, hogy a reticularismusnak «csináljon helyet», hanem ellenkezőleg, a vagus és sympathikus rendszernek a szívizomzaton belüli egymástól való függetlensége a leghatározottabban amellett szól, hogy a neurontant itt sem lehet és nem szabad feladnunk.

Összefoglalás.

1. A gerinceseknek a szívizomzata idegekben rendkívül gazdag. Az idegrostok az izomsejteknek, illetőleg az izomrostoknak a felületén dús fonadékot, az egészen vékony ágak pedig finom hálózatot alkotnak.

2. Az idegrostok túlnyomó része vékony és velőtlen, de vannak vastag velős rostok is, amelyekre főleg a specifikus szívizomzatban akadunk nagyobb mennyiségben.

3. Mindkét fajta idegrost epilemmalisan, szorosan a sarkolemmához símulva halad, az izomsejteken, illetőleg az izomrostokon át nem fúródik.

4. Az idegrostok közül a vastagok lapátalakúlag kiszélesedve epilemmalisan végződnek, a vékonyak mindenféle végalakulat nélkül vesznek el a sarkolemmán, vagy pedig laza gomolyszerű véghálóba mennek át, amelyből legtöbbször ultraterminalis rost ered.

5. A gerinces szívizomzatban olyanféle alakulat, amelyet Hachiro Seto az ember szívéből terminalreticulum néven írt le, nem fordul elő. Az egészen finom rostok, mielőtt elvesznének a sarkolemmán, egymáshoz sokszor közelednek, egymástól távolod-

nak, egymás fölött és alatt áthaladnak, de terminalreticulumot sohasem alkotnak.

6. A szívizomzat mozgató rostjainak egy részét a vagusból kapja, a másik rész pedig a szívbe lépő sympathikus kötegekből, illetőleg az intracardialis dúcsejtekből ered.

7. A szívizomzat kettős beidegzés alatt áll. A kétféle eredetű rost az izomzatban egymás mellett, egymástól függetlenül halad és külön végződik.

Irodalom.

1. Ábrahám, Ambrus: Beiträge zur Kenntnis der Innervation des Vogeldarmes. Zeitschr. für Zellforsch. u. mikr. Anat. 23. Bd. 5. H. 1936.

2. Boeke, J.: Nerve endigs, motor and sensory In Cytology et cellular Pathology of the Nervous System. Edited by Wilder Penfield. Paul B. Hoeber. — Inc. — New-York, 1932. p. 244.

3. Demoor et Heymanns: Etude de l'innervation du coeur des vertébrés l'aide de la méthode de Golgi. Arch. de biol. 13. (1894.)

4. Hachiro Seto: Mikroskopische Studien zur Innervation des menschlichen Herzens. Arbeiten aus dem Anat. Institut der Kaiserlich-Japanischen Univ. zu Sendai. Heft XIX.

5. Hofmann, F. B.: Das intrakardiale Nervensystem des Frosches. Arch. Anat. und Physiol. Anat. Abt. (1902.)

6. Jacques, P.: Recherches sur les nerfs du coeur chez la grenouille et les mammiféres. Journ. de l'anat. et de la physiol. 1894.

7. Kasahara, J.: Vergleichend-anatomische Studien über die Nervenendigung im Herzmuskel. Mitt. a. d. med. Akad. Kioto. I. (1927.)

8. Kiss, F.—Mihalik, P.: Über die Zusammensetzung der peripherischen Nerven und den Zusammenhang zwischen Morphologie und Funktion der peripherischen Nervenfasern. Zeitschr. für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. Bd. 88. (1928.)

9. Marcus, H.: Über die Innervation des Herzmuskels. Anat. Anz. 59. (1925.)

10. Michailow, S.: Zur Frage über den feineren Bau des intracardialen Nervensystems der Säugetiere. Internat. Monatschr. f. Anat. u. Physiol. 1907—1908.

11. Openchowsky, Th.: Beitrag zur Kenntnis der Nervenendigungen im Herzen. Arch. mikrosk. Anat. 22. (1883.)

12. Ranvier: Lesons d'anatomie générale. Paris, 1880.

13. Smirnow, A.: Über die sensiblen Nervenendigungen im Herzen bei Amphibien und Säugetieren. Anat. Anz. 10. (1900.)

14. Stöhr, Ph. jr.: Nerves of the blood vessels heart, meninges. digestive tract and urinary bladder. In Cytology et cellular Pathology

of the Nervous System. Edite by Wilder Penfield. PAUL B. HOEBER. — Inc. — New-York, 1932. p. 383.

15. STÖHR, PH. jr.: Mikroskopische Studien zur Innervation des Magen-Darmkanals. Z. Zellforsch. 12. (1931.)

16. STÖHR, PH. jr.: Mikroskopische Studien zur Innervation des Magen-Darmkanals. II. Über die Nerven des menschlichen Magens und hre Veränderungen beim Ulkus. Z. Zellforsch. 16. (1932.)

17. STÖHR, PH. jr. : Mikroskopische Studien zur Innervation des Magen-Darmkanals. III. Z. Zellforsch. 21. (1934.)

18. WOLLARD, H. H.: The innervation of the heart. J. anat. 60. (1926.)

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. febr. 15-én tartott üléséből.)

DAS INTRAKARDIALE NERVENSYSTEM DER WIRBELTIERE.

Von AMBROSIUS ÁBRAHÁM.

(Mit 10 Textabbildungen.)

Der Verfasser hat die intrakardiale Nervenfasern bei den folgenden Wirbeltieren: *Silurus glanis* L., *Rana ridibunda* LAUR., *Emys orbicularis* L., *Zamenis gemonensis* LAUR., *Gallus domesticus* L., *Epimys norvegicus* ERXL. und *Felis domestica* L. mit der EHRLICH-schen Methylenblaumethode und mit den Silbermethoden nach RAMÓN Y CAJAL und BIELSCHOWSKY untersucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind die Folgenden.

1. Die Herzmuskulatur der Wirbeltiere ist mit Nerven ausgezeichnet reich versehen. Die Nervenfasern bilden ein dichtes Geflecht an der Aussenfläche der Muskelzellen, respektive Muskelfasern. Die dünnste Nervenfasern bilden manchmal sehr feine, einem lockeren Knäuel nicht unähnliche Netze an den erwähnten Stellen.

2. Die Nervenfasern sind grösstenteils dünn und marklos, aber es gibt auch dicke Fasern, die meist mit einer dicken Myelinscheide versehen sind. Diese markhaltige Fasern sind besonders in der spezifiischen Herzmuskulatur zu finden.

3. Beide Sorte der Nervenfasern laufen epilemmal dicht an der Sarkolemma anliegend, die Muskelzellen respektive Muskelfasern sind von den Nervenfasern nie durchbohrt.

4. Die dicken Nervenfasern endigen epilemmal in der Form einer schaufelförmigen Verdickung, die dünne Fasern verschwinden ohne irgendeine Endformation an dem Sarkolemma, oder gehen in

ein Endnetz über, aus dem ein ultraterminaler Nervenfaser austreten kann.

5. In der Herzmuskulatur der Wirbeltiere gibt es keine solche Formationen, welche aus dem Herz des Menschen unter dem Namen eines *Terminalreticulums* von HACHINO SETO mitgeteilt sind. Die ganz feinen Fasern nähern sich zu einander, sie kreuzen sich sogar vielmals, sie bilden jedoch niemals ein aus vielen Anastomosen bestehendes Terminalreticulum.

6. Ein Teil der motorischen Nervenfasern der Herzmuskulatur kommt aus dem Vagus, der andere Teil stammt aus dem ins Herz eintretenden Sympathikus, respektive aus den Fortsätzen der intrakardialen Nervenzellen.

7. Die Herzmuskulatur der Wirbeltiere steht unter einer doppelten Innervation. Die aus den zwei verschiedenen Systemen entstammende Nervenfasern laufen nebeneinander selbständig und endigen für sich.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Februar 1936.)

ADATOK A FUCHSITEK OPTIKAI ISMERETÉHEZ.

SZÁDECZKY-KARDOSS ELEMÉR-től (Sopron).

A fuchsit újabban számos lelőhelyről ismeretessé vált és a kutatók figyelmét érdekes paragenetikai viszonyai által is magára vonta. Optikai állandói azonban nagyobbrészt mindezideig nem voltak megállapítva a szokásos szabatossággal. Ez részben arra vezethető vissza, hogy a fuchsit rendszerint csak apró, pontosabb mérésekre kevéssé alkalmas pikkelyekben fordul elő.

Alábbi vizsgálatok anyagát főképpen a Kőszegi-hegység fuchsitjei szolgáltatták, melyeket először BANDAT HORST említett 1928-ban, ill. 1932-ben.[1] Ő a velemi szentvidhegyi Szentkúttól nyugatra kb. 50 m-re fekvő lelőhelyről, továbbá ennek közeléből, a Borhavölgyből írta le ezt az ásványt. A Szentkút melletti lelőhelyet magam is megvizsgáltam és az alábbi vizsgálatokat részben az itt gyüjtött anyagon végeztem. A fuchsit apró, 1 mm átmérőt meg nem haladó, smaragdzöld pikkelykéi részben mészfillitben, ill. annak mészlencséiben rendszerint sziderittel együtt, részben pedig porózus limonitot tartalmazó kvarcerekben fordul elő. Már BANDAT említi, hogy a grauwakke övben — amelybe a kőszegi-hegység eme képződményei is sorolhatók — *Cr*-tartalmú kloritpalák ismeretesek és hasonló kloritpala a szentkúti fuchsit-lelőhellyel kapcsolatban is előfordul.

A kőszegi-hegységben szép új fuchsit-lelőhelyet fedezett fel 1934-ben VENDL MIKLÓS egy Rendek községtől nyugatra 1·5 km-re

---

[1] BANDAT, H.: A Kőszeg—Rohonci hegység nyugati részének geológiai viszonyai. Földtani Szemle, I. kötet, 5. füz. Budapest, 1928.

BANDAT, v. H.: Die geologische Verhältnisse des Kőszeg—Rechnitzer Schiefergebirges. Földtani Szemle, Bd. I. Heft 2. Budapest, 1932.

levő útbevágásban. A fuchsit itt is nagyobbrészt kvarcerekben fordul elő porozus limonittal együtt. VENDL professzor úrnak, aki ez új lelőhely anyagát szíves volt nekem feldolgozás végett átengedni, legyen szabad e helyen is hálás köszönetemet kifejezni.

Néhány összehasonlító mérést végeztem ezenkívül zillervölgyi és prägrateni fuchsitanyagon is.

A fuchsit optikai állandóinak megállapításánál abból a körülményből indultam ki, hogy a hasadási lemezkék itt is, mint a többi csillámnál, optikailag pontosan vagy csaknem pontosan orientált metszeteket képviselnek. Nevezetesen a kioltás túlnyomóan párhuzamos ($\gamma' \sphericalangle (001) = 0—1°$) és

$$\text{I. bis } (a) \perp \{001\}.$$

Az ütésidomok segélyével az is megállapítható volt, hogy az optikai tengelyek síkja merőleges a szimmetriasíkra ($b = \gamma$), tehát a vizsgált fuchsit I. fajta csillám. Ugyanerre az eredményre jutott ERB[2] a graubündeni és MOHR[3] a voitsbergi fuchsitek vizsgálatánál.

Eme körülmény felhasználásával történt a főtörésmutatók meghatározása az eljárásoknak olyan kombinációjával, amelyet VENDL MIKLÓS[4] a leuchtenbergitek vizsgálatánál alkalmazott. A hasadási lemezkéken a beágyazási módszer segítségével meghatároztam a β és γ értékeit. A beágyazó keverék törésmutatóját egy ABBÉ—CZAPSKY-féle félgömbös kristályrefraktometeren állapítottam meg *Na*-fényben. Az erős disperzió és színeződés miatt e meghatározások kb. csak $\pm 0{\cdot}001$ pontosságúnak tekinthetők. A Kőszegi-hegységi anyagon végzett mérések a főtörésmutatókat némileg ingadozóknak mutatják. Egy rendeki lemezkén a következő értékeket kaptam:

$$\beta = 1{\cdot}602 — 1{\cdot}604$$
$$\gamma = 1{\cdot}609$$

---

[2] ERB, J.: Ein Vorkommen von Fuchsit (Chrom-Glimmer) in der Schweizer Alpen. Vierteljahrsschr. d. Nat. Ges. Zürich, 43. pp. 276—278 (1898), lásd N. Jb. 1900. I, p. 189.

[3] MOHR, H.: Über einen Fuchsit von Voitsberg in der Weststeiermark, Verh. d. geol. B. A. Jahrgang 1924, pp. 102—109 (1925).

[4] VENDL, M. und ROMWALTER, A.: Beiträge zur Kenntnis der Leukophyllite. Mitt. d. berg- u. hüttenm. Abt. etc. Sopron, Bd. 1930, pp. 366—373.

Egy velemi lemezkén:

$$\beta = 1{\cdot}605$$
$$\gamma = 1{\cdot}607$$

Az α meghatározása a $\beta\perp$ metszeteken, vékonycsiszolatban történt az útkülönbség mérése, ill. a $\gamma-\alpha$ meghatározása alapján, a γ értékéből kiindulva. A felhasznált fuchsitlemezkék vastagságát szomszédos és az optikai tengellyel párhuzamos kvarcszemcsék útkülönbségéből állapítottam meg. E mérésekhez BEREK-féle kompenzátort használtam. A számítások alapjául mindkét helyzetben többször megismételt leolvasások középértéke szolgált. Ily módon a fuchsit kettőstörése fehér fényre a különböző csiszolatokon a következőnek adódott:

Velem I.	0·0355
Velem II.	0·0354
Rendek I.	0·0357
Rendek II.	0·0371

Figyelemreméltó, hogy egy, a normális fuchsitoknál lényegesen halványabb színeződésű rendeki lemezkén aránylag alacsony: 0·032 $\gamma-\alpha$ érték volt megállapítható.

Az eddigi mérések alapján a főtörésmutatók és kettőstörések értékeit fehér fényre a következőkben foglalhatjuk össze ($\gamma-\alpha$ különbségként mindkét lelőhely esetében a magasabb értéket vesszük tekintetbe):

Rendek:

$\alpha = 1{\cdot}572$	$\beta-\alpha = 0{\cdot}031$
$\beta = 1{\cdot}603$	$\gamma-\beta = 0{\cdot}006$
$\gamma = 1{\cdot}609$	$\gamma-\alpha = 0{\cdot}037$

Velem:

$\alpha = 1{\cdot}572$	$\beta-\alpha = 0{\cdot}034$
$\beta = 1{\cdot}605$	$\gamma-\beta = 0{\cdot}002$
$\gamma = 1{\cdot}607$	$\gamma-\alpha = 0{\cdot}035$

A fuchsit főtörésmutatóit illetően eddigelé egyedül LARSENnek[5] a washingtoni anyagra vonatkozó közelítő mérése volt ismeretes, amely szerint: $n = 1{\cdot}595 \pm 0{\cdot}003$.

[5] LARSEN: U. S. Geol. Surv. Bul. 679, pp. 77 és 253 (1921).

A kettőstörés disperziójának megállapítása végett a $\gamma - \alpha$ értékekre vonatkozóan monochromatikus fényben is végeztem méréseket, természetesen minden esetben tekintetbe véve a kompenzátornak a hullámhosszal változó faktorát. Az útkülönbségek megállapításánál a kompenzátorban megjelenő összes elsötétedési sávot végigmértem. *Na*-fényben a különböző sávokra nézve a következő $\mu\mu$-okban számított útkülönbségeket találtam. (A beállítás hatásának szemléltetésére egyik lemezre vonatkozóan közlöm a két szélső értékű adatsort is):

		$\Gamma+2\lambda$	$\Gamma+\lambda$	Γ	$\Gamma-\lambda$	$\Gamma-2\lambda$	Közép-érték
Rendek II.	1. beállítás	1308·6	1313·8	1315·0	1322·7	—	1315·0
Rendek II.	2. beállítás	1290·1	1287·8	1282·0	1270·7	—	1282·7
Velem II.	—	—	1013·3	1014·0	1020·7	1016·4	1016·1

E számokból látható, hogy ugyanazon beállításban a különböző elsötétedési sávok egymással jól megegyező értékeket adnak, viszont a mért útkülönbségek érezhetően függnek a beállítástól, nevezetesen a tükör helyzetétől. Az útkülönbségnek a beállítás szerinti változása egyébként a fehér fénnyel végzett vizsgálatoknál is észlelhető. A $\gamma - \alpha$ különbség helyes értékeként a legmagasabb útkülönbséget adó beállítás adatait fogadtam el. A metszetvastagságok tekintetbevételével *Na*-fényre ily módon a következő $\gamma - \alpha$ értékek adódtak:

Rendek II. ..... 0·0365
Velem II. ..... 0·0351

A napfény hullámhosszúsági súlypontját 550 $\mu\mu$-nak véve, a vizsgált intervallumon belül a kettőstörés a fuchsitnál a hullámhossz növekedésével ily módon csökkenőnek adódik. (Ugyanazon lemezkét a közönséges és *Na*-fényre vonatkozó adatoknál ugyanolyan módon jelöltük.)

A *Li*- és *Tl*-fényben — a használt fényforrás gyengesége következtében — a különböző elsötétedési sávokra vonatkozó mérési adatok erősen és szabálytalanul ingadoznak. (Eme ki nem elégítő adatokat nem közlöm.)

Az optikai tengelyek szögét a hasadási lemezeken csavaros mikrometerokulár segítségével határoztam meg. A tengelyek látszólagos lineáris távolságaként mind a négy helyzetben elvégzett többszöri leolvasás középértékeit vettem tekintetbe. A fuchsit tengelyszögi intervallumára nézve a készülék MALLARD-konstansát egy ismert $2E$-értékű muszkovit-lemezen és egy aragonit-készítményen állapítottam meg. A fuchsit tengelyszöge — hasonlóan a legtöbb csillámhoz — nagymértékben változónak adódott, sőt ugyanazon előfordulás különböző lemezkéin is többfokos ingadozás volt észlelhető.

Alábbi táblázatban összeállítottam a fuchsit $2E$ értékeire vonatkozó saját mérési eredményeimen kívül az irodalomban feltalálható adatokat, továbbá a kőszegi hegységi előfordulásokra nézve a fentebb közölt β-értékek tekintetbevételével a látszólagos tengelyszögből számított valódi tengelyszög-értékeket, végül feltüntettem az irodalomban található eddigi egyetlen, hozzávetőleges $2V$ értéket is.

Lelőhely	Szerző	2E	2V	Megjegyzés
Rendek — — —	SZÁD.	59°17′	35°55′—35°48′	1·602 és 1·604
« — — —	«	55°36′	33°51′—33°49′	β-értékekből
« — — —	«	55°35′	33°58′—33°50′	számítva
Velem — — —	«	62°46′	37°56′	
« — — —	«	61°18′	37°02′	
« — — —	«	57°42′	35°00′	
« — — — —	«	49°14·7′	30°05′	
Zillervölgy— —	«	52°49′	—	
« — —	«	43°16′	—	
Prägraten — —	«	60°02′	—	
« — —	«	55°32′	—	
Graubünden —	ERB.[6]	60°—63°	—	
Voitsberg — —	MOHR.[7]	67°—74°	—	
Montgomery Co.	GILL.[8]	68°14′*(Na)*	—	
«	«	71°24′*(Li)*	—	
Washington— —	LARSEN[9]	közepes	ca 40°	

[6] ERB: L. c. [7] MOHR: L. c.

[8] GILL, A. C.: Note on some minerals from the chrome pits of Montgomery County, Maryland, John-Hopkins Univ., Circ. No. 75, p. 100 és N. Jb. 1890. I. p. 409. [9] LARSEN: L. c.

A látszólagos tengelyszögek erős ingadozása természetesen a valódi tengelyszögek sokkal kisebb ingadozásának felel meg. Ezeket az ingadozásokat a fuchsit esetében a főtörésmutatókon észlelt csekély változások teljesen megmagyarázzák. Alább közöljük a főtörésmutatók alapján számított $2V$ értékeket. Látható, hogy a főtörésmutatók alapján számított értékeken belül maradnak az észlelt látszólagos tengelyszögön alapuló $2V$ értékek.

2V ha:	α	β	γ
50°48′	1·572	1·602	1·609
46°48′	1·572	1·603	1·609
42°30′	1·572	1·604	1·609
27°10′	1·572	1·605	1·607

A tengelyszögek diszperziója meglehetősen erős, éspedig $\varrho < \nu$, mint azt más előfordulásokon is megállapították.

A pleochroizmust uralkodóan a következőnek találtam:

α = zöldeskék,
β = sárgászöld,
γ = kékeszöld.

Bár az abszorpció nem erős, a pleochroizmus alapján a fuchsit rendszerint vékonycsiszolatban is könnyen megkülönböztethető egyéb csillámféleségektől.

Készült a Bánya-, Kohó- és Erdőmérnöki Kar Ásvány-Földtani Tanszékén, Sopronban.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. hó 15-én tartott üléséből.)

BEITRÄGE ZUR OPTISCHEN KENNTNIS DES FUCHSITES.

Von E. v. SZÁDECZKY-KARDOSS (Sopron)

Die optischen Konstanten des Chromglimmers wurden festgestellt.

Die Arbeit erscheint in den Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung a. d. kgl. ung, Palatin-Joseph Universität, Bd. IX. 1937.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, den 15. Februar 1937.)

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Ábrahám, A.: Das intrakardiale Nervensystem der Wirbeltiere ..... 344—345

Barnóthy, J. und Forró, M.: Messung der Ultrastrahlung im Doroger Bergwerk ..... 205—206

Barnóthy, J. und Forró, M.: Meteorologisch-magnetische Einflüsse auf die Ultrastrahlungsintensität. II. Tagesgang 214

Forró, M.: siehe Barnóthy, J.

Konek, Fr.: Über die beiden α- und β-Jodmethylate des Hydrocinchonidins oder Cinchamidins 261

Kovács, St.: Über die Bestimmung der Rotations- bzw. Schwingungs-Konstanten von zweiatomigen Molekültermen auf Grund der Störungsdaten ..... 156—157

Küster, E.: Über die Plasmaamöben der Konjugatenzelle.. 289—302

Lörinczi, K.: Neuere Untersuchungen über den Zeeman-Effekt der Edelgaslinien 183

Pekár, D.: Nachweis von Bauxiten mit erdmagnetischen Messungen ..... 227—230

Rados, G.: Beitrag zur Theorie der algebraischen Zahlkörper 53

Rédei, L.: Über die Verteilung der quadratischen Reste für zusammengesetzte Moduli ..... 84— 88

Rédei, L.: Über die D-Zerfällungen zweiter Art 125

Riesz, Fr.: Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires 46

Szádeczky-Kardoss, E. v.: Beiträge zur optischen Kenntnis des Fuchsites 352

Szelényi, T.: Spektralanalytische Bestimmung des Berylliumgehaltes der Bauxite ..... 247—248

Zimmermann, G.: Beiträge zum funktionellen Bau der harten Hirnhaut ..... 285—286

Zucker, Fr.: Vorkommen von Azotobakter in ungarischen Böden ..... 318—319

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

538 50015

EGY. FOLYÓIRATOK SZEGED

MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVI. KÖTET. — MÁSODIK RÉSZ.

BUDAPESTI KIR. ÜGYÉSZSÉG 1938 MÁR 2 ÁTVETTE

MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVI. — ZWEITER TEIL.

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1937.

EGYETEMI KÖNYVTÁR FŐ[illegible]OK

TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

Barnóthy Jenő és Forró Magdolna: A kozmikus sugárzás csillagidő periodicitása ..... 410—415
Beer Borbála Zsuzsanna: A két szabad vegyértéket mutató *CO*-módosulat színképéről ..... 525—558
Boros János: Ion vezetés vékony kristályrétegekben ..... 655—670
Cotel Ernő: Kerpely Antal hatása a vaskohászati tudományok és a magyar vasipar fejlődésére ..... 688—696
Császár Elemér: A Röntgen-sugárzás energiájának mérése. IV. rész ..... 397—407
Fekete Jenő: lásd Pogány Béla.
Forró Magdolna: lásd Barnóthy Jenő.
Gombás Pál: A fémelektronok eloszlásának meghatározásáról alkalifémek esetében ..... 417—421
Konek Frigyes: Adatok a Cinchona cuprea alkaloidjainak kémiájához ..... 570—580
Lipka István: Mátrixok szorzásáról ..... 376—380
Malán Mihály: Tenyérlenyomat-vizsgálatok ..... 698—726
Neugebauer Tibor: A spektroszkópiai stabilitás tételének alkalmazása az oldatok refrakciócsökkenésének elméletére 441—442
Neugebauer Tibor: A hydromolekulák rezgésfrekvenciáinak kiszámítása ..... 450—451
Papp György: Gammasugarak szóródásánál fellépő mageffektusról ..... 477—491
Pogány Béla és Fekete Jenő: Reflexiós szeizmikus mérések a Nagy-Alföldön ..... 505—522
Preisz Hugó: További vizsgálatok a Pettenkoferiákra vonatkozólag ..... 582—605
Sasvári Kálmán: Az ezüstpermanganát ($Ag\ Mn\ O_4$) kristályszerkezete ..... 493—502
Szabó Zoltán: Új Cephalária Délafrikából ..... 608—609
Szász Ottó: Fourier-sorok részletösszegeiről ..... 382—395
Szepesi Zoltán: A gammasugarak Compton-szórásának intenzitáseloszlásáról ..... 637—652
Szilády Zoltán: A magyarországi legyek synopsisa. V. Tipulidae ..... 622—635
Szőkefalvi Nagy Gyula: Véges fajszámú valós egész függvények képzetes zóróhelyeiről ..... 353—372
Vargha Lajos: Ptygura Tihanyensis n. sp., egy új kerekesféreg-faj a tihanyi belső tóból ..... 612—614
Vitális István: A soproni Virágvölgy fossilis Bagliviái és kortársaik ..... 672—686
Zemplén Géza: A «lusitanicosid»-nak, a Cerasus lusitanica Lois. glükozidjának szerkezete és szintézise ..... 560—568

VÉGES FAJSZÁMÚ VALÓS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK KÉPZETES ZÉRÓHELYEIRŐL.

SZŐKEFALVI NAGY GYULA l. tagtól.

1. Bevezetés.

Az $f(z)$ egész függvényt akkor nevezzük valósnak, ha a valós tengely minden pontjában valós értéket vesz föl. Ha az $f(z)$ valós egész függvény legfeljebb p-fajú egész függvény vagy pedig polinom, ha továbbá $p=2s$ 1 páratlan szám és ha végül γ nem negatív valós szám, akkor a

$$F(z) = e^{-\gamma z^{p+1}} . f(z) = e^{-\gamma z^{2s}} . f(z) \tag{1}$$

egész függvényt p^*-*fajú egész függvénynek*, a γ nem negatív számot pedig a p^*-fajú $F(z)$ egész függvény *magasságának* fogjuk nevezni.

Egy előző dolgozatban[1] értelmeztük 1^*-fajú $F(z)$ egész függvényre vonatkozólag a komplex sík egy $a+ib$ pontjához tartozó kritikus értéket. Ha ez a kritikus érték pozitív, vagy legalább nem negatív, akkor ezzel és az $a+ib$ pont segítségével meghatározhatunk a komplex síkon olyan tartományt, amelyben föltétlenül van az 1^*-fajú $F(z)$ egész függvénynek komplex zéróhelye.

Ennek az értekezésnek célja azoknak a vizsgálatoknak $p^*=(2s-1)^*$-fajú egész függvényekre való kiterjesztése.

A kritikus érték fogalmának általánosítása végett fölveszünk

[1] Vizsgálatok reális polinomok és bizonyos egész függvények zéróhelyeinek helyzetéről. Mat. és Természettudományi Értesítő **50** (1933), 167—194. L. még a következő dolgozatunkat: Algebrai és transzcendens egyenletekről. Ugyanott **52** (1934), 36—53.

a számsíkon s-számú egymástól különböző olyan konjugált komplex számpárt, amelynek ugyanaz a valós részük. Legyenek ezek

$$\begin{aligned} z_1 &= a + ib_1,\ z_2 = a + ib_2, \ldots,\ z_s = a + ib_s, \\ \bar{z}_1 &= a - ib_1,\ \bar{z}_2 = a - ib_2, \ldots,\ \bar{z}_s = a - ib_s. \end{aligned} \tag{2}$$

Ehhez az s számpárhoz hozzárendeljük a

$$\varphi(t) = (t+b_1^2).(t+b_2^2)\ldots(t+b_s^2) \tag{3}$$

s-edfokú polinomot. Föltevésünk szerint ennek a polinomnak zéróhelyei zérótól és egymástól különböznek.

Ezzel a polinommal egyértelműleg van meghatározva az

$$A_k = \frac{1}{\varphi'(-b_k^2)} \qquad (k=1, 2, \ldots, s) \tag{4}$$

s darab szám, ahol $\varphi'(t)$ a $\varphi(t)$ függvény differenciálhányadosa.

Ha bevezetjük az

$$M(z) = \frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{és} \quad N(b) = \frac{M(a+ib) - M(ai-b)}{2bi} \tag{5}$$

jelöléseket, akkor a $p^* = (2s-1)^*$-fajú $F(z)$ egész függvénynek *a* $z_1, z_2, \ldots, z_s$ *pontcsoporthoz tartozó kritikus értékén* a

$$K(z_1, z_2, \ldots, z_s) = \sum_{k=1}^{s} A_k N(b_k) \tag{6}$$

számot fogjuk érteni.

Ha $K(z_1, z_2, \ldots, z_s) > 0$, vagy ha $K(z_1, z_2, \ldots, z_s) < 0$ ugyan, de $K(z_1, z_2, \ldots, z_s) + (p+1)\gamma > 0$, akkor a számsíkon meg lehet határozni olyan véges tartományokat, amelyekben a p^*-fajú $F(z)$ egész függvénynek van komplex zéróhelye. Ilyen tartományokat határolni lehet a (2) alatti $2s$ számú ponton átmenő olyan $4s = (2p+2)$-rendű görbével, amely a Cassini-féle negyedrendű görbék általánosítása.

A $K(z_1, z_2, \ldots, z_s) > 0$ egyenlőtlenség, vagy az ennél kevesebbet kivánó $K(z_1, z_2, \ldots, z_s) + (p+1)\gamma > 0$ egyenlőtlenség fennállása tehát elégséges feltétel arra nézve, hogy a p^*-fajú $F(z)$ egész függvénynek legyenek komplex zéróhelyei. Ha azonban az $F(z)$ függvénynek van képzetes zéróhelye, akkor mindig van a (2) alatti föltételeknek eleget tevő olyan s számpár, hogy $K(z_1, z_2, \ldots, z_s) > 0$

legyen. Ha például $a+ib$ $(b\neq 0)$ az $F(z)$ függvénynek egy zéróhelye, akkor a $z_1, z_2, \ldots, z_s$ pontcsoport mindig megválasztható úgy is, hogy ennek az s számú komplex számnak a legyen a valós része és hogy $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ pozitív legyen.

Mostani vizsgálataink egyszersmind általánosításai a p-fajú egész függvények valós kritikus pontjaira vonatkozó előző vizsgálatainknak.[2] Könnyű ugyanis kimutatni, hogy

$$\lim_{b_1, b_2, \ldots, b_s \to 0} K(z_1, z_2, \ldots, z_s) = \frac{1}{p!} \cdot M^{(p)}(a).$$

2. A kritikus érték kifejezése a függvény zéróhelyeivel és magasságával.

Kimutatjuk a következő tételt:

I. *Ha $a_1, a_2, \ldots$ jelölik a p^*-fajú $F(z)$ egész függvény zéróhelyeit és γ a magasságát, akkor*

$$K(z_1, z_2, \ldots, z_s) = \sum_{k=1}^{s} A_k . N(b_k) = -(p+1)\gamma - \sum \frac{1}{[(a_h-a)^2+b_1^2]\ldots[(a_h-a)^2+b_s^2]}, \tag{7}$$

ahol a második összegben az összegezés az $F(z)$ függvény valamennyi a_h zéróhelyére kiterjesztendő és minden egyes zéróhely annyiszor számítandó, mint ahányszoros zéróhely.

Ennek kimutatására vegyük tekintetbe, hogy az $F(z)$ függvény

$$F(z) = e^{G(z)} . z^{\nu} \prod \left(1 - \frac{z}{a_h}\right) e^{g\left(\frac{z}{a_h}\right)} \tag{8}$$

alakban állítható elő, ahol

$$\begin{aligned} G(z) &= -\gamma z^{p+1} + \gamma_1 z^p + \cdots + \gamma_{p+1}, \\ g\left(\frac{z}{a_h}\right) &= \frac{z}{a_h} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_h}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_h}\right)^p \end{aligned} \tag{9}$$

alakú polinom és $\gamma (\geqq 0)$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p+1}$ valós szám.

[2] Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen. Journal f. d. reine u. angew. Math. 170 (1934), 148—153.

Ebből következik, hogy

$$M(z) = [\log F(z)]' = -(p+1)\gamma z^p + p\gamma_1 z^{p-1} + \cdots + \gamma_p + \\ + \frac{\nu}{z} + \sum\left[\frac{1}{z-a_h} + \frac{1}{a_h} + \frac{z}{a_h^2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{a_h^p}\right]$$

és hogy

$$N(b) = \frac{G'(a+ib) - G'(a-ib)}{2bi} - \frac{\nu}{a^2+b^2} - \\ - \sum\left[\frac{1}{(a_h-a)^2+b^2} - \frac{g'\left(\frac{a+ib}{a_h}\right) - g'\left(\frac{a-ib}{a_h}\right)}{2bi}\right]. \tag{10}$$

A kimondott tétel igazolására szükségünk van még a következő identitásokra

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{b_1^2} + \frac{A_2}{b_2^2} + \cdots + \frac{A_s}{b_s^2} = \frac{1}{b_1^2 . b_2^2 \ldots b_s^2} \\ &A_1 b_1^{2\mu} + A_2 b_2^{2\mu} + \cdots + A_s b_s^{2\mu} = 0, \text{ ha } 0 \leqq \mu \leqq s-2, \\ &A_1 b^{2(s-1)} + A_2 b^{2(s-1)} + \cdots + A_s b^{2(s-1)} = (-1)^{s-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Ezek közül az első s összefüggés a racionális törtfüggvények parciális törtekre való bontása alapján az

$$\frac{1}{(t+b_1^2)(t+b_2^2)\ldots(t+b_s^2)} = \frac{1}{\varphi(t)} = \\ = \frac{A_1}{t+b_1^2} + \frac{A_2}{t+b_2^2} + \cdots + \frac{A_s}{t+b_s^2}, \tag{12}$$

illetőleg a

$$\frac{(-t)^{\mu+1}}{\varphi(t)} = \frac{A_1 b_1^{2(\mu+1)}}{t+b_1^2} + \frac{A_2 b_2^{2(\mu+1)}}{t+b_2^2} + \cdots + \frac{A_s b_s^{2(\mu+1)}}{t+b_s^2} \tag{13}$$

összefüggésekből következik, ha azokban $t=0$ tesszük.

A (11) alatti utolsó összefüggés igazolására t számértékét a $b_1^2, b_2^2, \ldots, b_s^2$ közül a legnagyobbnál is nagyobbnak választjuk, ekkor

$$\frac{1}{t+b_k^2} = \frac{1}{t} - \frac{b_k^2}{t^2} + \frac{b_k^4}{t^3} - \cdots + (-1)^n \frac{b_k^{2n}}{t^{n+1}} + \cdots$$

Ebből a sorfejtésből a (11) alatti első s összefüggés tekintetbe vételével kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{t+b_k^2} = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{s} A_k - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{s} A_k b_k^2 + \cdots =$$

$$= (-1)^{s-1}\frac{1}{t^s}\sum_{k=1}^{s} A_k b_k^{2(s-1)} + \cdots$$

A (12) alatti összefüggés felhasználásával tehát

$$\frac{t^s}{(t+b_1^2)(t+b_2^2)\ldots(t+b_s^2)} = t^s \sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{t+b_k^2} =$$

$$= (-1)^{s-1}\sum_{k=1}^{s} A_k b_k^{2(s-1)} + (-1)^s \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{s} A_k b_k^{2s} + \cdots$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^s}{(t+b_1^2)(t+b_2^2)\ldots(t+b_s^2)} = 1 = (-1)^{s-1}\sum_{k=1}^{s} A_k b_k^{2(s-1)},$$

amivel a (11) alatti utolsó összefüggés is igazolva van.

A (7) alatti egyenlőség igazolására ki kell mutatnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{(a_h-a)^2+b_k^2} = \frac{1}{[(a_h-a)^2+b_1^2]\,[(a_h-a)^2+b_2^2]\ldots[(a_h-a)^2+b_s^2]},$$

$$\sum_{k=1}^{s} A_k \frac{G'(a+ib)-G'(a-ib)}{2bi} = -(p+1)\cdot\gamma, \qquad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{s} A_k \frac{g'\left(\frac{a+ib}{a_h}\right) - g'\left(\frac{a-ib}{a_h}\right)}{2bi} = 0.$$

Ezek közül az első összefüggés a (12) alatti összefüggésből következik, ha abban $t=(a_h-a)^2$ tesszük.

A második összefüggés igazolása végett vegyük tekintetbe, hogy

$$\frac{G'(a+ib)-G'(a-ib)}{2bi} = -(p+1)\gamma\cdot\frac{(a+ib)^p-(a-ib)^p}{2bi} +$$

$$+ p\gamma_1 \frac{(a+ib)^{p-1}-(a-ib)^{p-1}}{2bi} + \cdots$$

képzése miatt a b változónak olyan $p-1=2(s-1)$-fokú polinomja, amely b-nek csak páros hatványait tartalmazza. Ha ezt a polinomot $P(b)$ jelöli, akkor

$$P(b)=-(-1)^{s-1}(p+1)\gamma b^{2(s-1)}+\delta_1 b^{2(s-2)}+\delta_2 b^{2(s-3)}+\cdots+\delta_{s-1}$$

alakú.

A (11) alatti összefüggések fölhasználásával ebből közvetlenül következik a (14) alatti második összefüggés.

Hasonlókép látható be a (14) alatti harmadik összefüggés is, mivel

$$\frac{g'\left(\frac{a+ib}{a_h}\right)-g'\left(\frac{a-ib}{a_h}\right)}{2bi}=\varepsilon_0 b^{2(s-2)}+\varepsilon_1 b^{2(s-3)}+\cdots+\varepsilon_{s-2}$$

alakú polinomja a b-nek.

Ezek alapján a (10) alatti egyenlőségből közvetlenül következik a (7) alatti, ahol a jobboldali összegben az esetleges $\alpha_0=0$ zéróhelyhez tartozó tag is be van foglalva.

A kritikus érték értelmezéséből következik, hogy

$$K(z_1, z_2, \ldots, z_s)=K(\bar{z}_1, z_2, \ldots, z_s)=\cdots=K(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_s),$$

vagyis, hogy a $z_1, \bar{z}_1$; $z_2, \bar{z}_2$; …; $z_s, \bar{z}_s$ s számú konjugált komplex számpárból bármikép ragadva ki egy-egy számot az így kiragadott s számhoz ugyanaz a kritikus érték tartozik. A (7) alatt szereplő összegben a z_k és $\bar{z}_k$ fölcserélésével ugyanis az egyes tagok nem változnak meg.

A (7) alatti összefüggésből következik, hogy csak valós zéróhelyekkel bíró p^*-fajú $F(z)$ függvényre vonatkozólag nemcsak $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)$, hanem $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)+(p+1)\gamma$ is mindig negatív, bármikép választjuk meg az egyenlő valós részekkel bíró és egymástól különböző $z_1, \bar{z}_1$; $z_2, \bar{z}_2$; …; $z_s, \bar{z}_s$ konjugált komplex számpárokat. Ha tehát $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ vagy akár $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)+(p+1)\gamma$ pozitív, akkor az $F(z)$ függvénynek van képzetes zéróhelye.

Ha pedig az $F(z)$ függvénynek van egy komplex $\alpha_0=a+ib_0$ ($b_0>0$) zéróhelye, akkor van ugyanazzal a valós résszel bíró és egymástól különböző olyan s konjugált komplex számpár, amelyekhez tartozó kritikus érték pozitív.

Ennek igazolására úgy választjuk meg a

$$z_1 = a + ib_1,\ z_2 = a + ib_2, \ldots,\ z_s = a + ib_s$$

számokat, hogy az $F(z)$ függvény zéróhelyeitől különbözzenek, hogy továbbá $0<b_1<b_0<b_2<b_3<\cdots<b_s$ legyen. Ekkor b_1 megválasztható a b_0-hoz olyan közel, hogy a

$$\sum_h \frac{-1}{[(a_h-a)^2+b_1^2]\,[(a_h-a)^2+b_2^2]\ldots[(a_h-a)^2+b_s^2]}$$

konvergens összegben az $a_0=a+ib_0$ és az $\bar{a}_0=a-ib_0$ konjugált komplex zéróhelypárra vonatkozó két tagjának összege

$$\frac{2}{(b_0^2-b_1^2)(b_2^2-b_0^2)(b_3^2-b_0^2)\ldots(b_s^2-b_0^2)}$$

olyan nagy pozitív szám legyen, hogy az előbbi összeg negatív valós részű tagjaival és $-(p+1)\gamma$-val összevonva is pozitív maradjon.

A (7) egyenlőséget következőkép is írhatjuk:

$$K(z_1, z_2, \ldots, z_s) = -(p+1)\gamma - \sum \frac{1}{(a_h-z_1)(a_h-\bar{z}_1)(a_h-z_2)(a_h-\bar{z}_2)\ldots(a_h-z_s)(a_h-\bar{z}_s)}.$$

Ebből következik, hogy akkor, amidőn $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_s$ és $\bar{z}_s$ az a valós számhoz közeledik, a $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ határértéke[3]

$$-(p+1)\gamma - \sum \frac{1}{(a_h-a)^{2s}} = -(p+1)\gamma - \sum \frac{1}{(a_h-a)^{p+1}} = \frac{M^{(p)}(a)}{p!}.$$

3. A p^*-fajú $F(z)$ egész függvény komplex zéróhelyeire vonatkozó egyenlőtlenségek.

A (7) alatti egyenlőségnek jobboldalán álló összeget három összegre bontjuk fel. Az összegnek a valós zéróhelyekre vonat-

[3] Lásd a [2] jegyzetben idézett értekezést.

kozó részét Σ_1-gyel jelöljük. A komplex zéróhelyekre vonatkozó összegben a konjugált komplex zéróhelypárokra vonatkozó tagok összege valós. A komplex zéróhelyekre vonatkozó összegben a pozitív, negatív, illetőleg eltünő tagok összegét $2\Sigma_+$, $2\Sigma_-$, illetőleg Σ_0 jellel jelöljük. E szerint a jelölés szerint a Σ_+ és Σ_- összegben egy konjugált komplex zérohelypárt egyetlen tag képvisel és pedig a két zéróhely közül akármelyikhez tartozó tag valós része.

Ezekkel a jelölésekkel a (7) alatti összefüggés következők írható:

$$S = K + (p+1)\gamma + \Sigma_1 + 2\Sigma_+ = -2\Sigma_-, \tag{15}$$

ahol a jobboldalon szereplő összegeknek minden tagja és -1-gyel való szorzás után a baloldalon álló összegnek minden tagja pozitív.

Ha $a_h = x_h + iy_h$ egy olyan zéróhelye az $F(z)$ függvénynek, amelyre vonatkozó tag a Σ_- összegben szerepel, akkor az

$$\begin{aligned}[(a_h-a)^2+b_1^2]\,[(a_h-a)^2+b_2^2]\ldots[(a_h-a)^2+b_s^2] \equiv \\ \equiv U(x_h, y_h) + iV(x_h, y_h) \equiv U_h + iV_h\end{aligned} \tag{16}$$

jelölés bevezetése után a (15) jobboldalán az $a_h = x_h + iy_h$ és az $\bar{a}_h = x_h - iy_h$ zéróhelyekre vonatkozó tagok összege

$$\sum \frac{2U(x_h, y_h)}{U^2(x_h, y_h) + V^2(x_h, y_h)} = \sum \frac{-2U_h}{U_h^2 + V_h^2}. \tag{17}$$

Ezzel a jelöléssel a (15) alatti összefüggés még a következő alakban is felírható:

$$S = K + (p+1)\gamma + \Sigma_1 + 2\Sigma_+ = \sum \frac{-2U_h}{U_h^2 + V_h^2}, \tag{18}$$

ahol a jobboldali összeg az $F(z)$ függvénynek olyan a_h és $\bar{a}_h$ konjugált komplex zéróhelyeire vonatkozik, amelyekre $U_h < 0$.

Ha az $F(z)$ függvénynek csak q számú ilyen a_h, $\bar{a}_h$ zéróhelypárja van (az egyes zéróhelyeket sokszorosságuknak megfelelően számítva), akkor ezeket úgy indexezzük, hogy fönnálljanak a a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{-U_1}{U_1^2 + V_1^2} \geqq \frac{-U_2}{U_2^2 + V_2^2} \geqq \cdots \geqq \frac{-U_q}{U_q^2 + V_q^2}. \tag{19}$$

Ezzel a jelöléssel a (18) egyenlőségből több egyenlőtlenség hozható le. Ezek között az $S>0$ esetben az

$$S \leqq 2q \cdot \frac{-U_1}{U_1^2+V_1^2}, \quad \text{vagy az} \quad U_1^2+V_1^2+\frac{2q}{S}\cdot U_1 \leqq 0 \qquad (20)$$

egyenlőtlenség a legegyszerűbb.

Ezt az egyenlőtlenséget még

$$\left(U_1+\frac{q}{S}\right)^2+V_1^2 \leqq \left(\frac{q}{S}\right)^2,$$

vagy még

$$\left|\left(U_1+\frac{q}{S}\right)+iV_1\right| \leqq \left|\frac{q}{S}\right| \qquad (21)$$

alakban is írhatjuk.

Ha bevezetjük az $a_1=x_1+iy_1=\zeta=\xi+i\eta$ jelölést és tekintetbe vesszük, hogy

$$U_1+iV_1=[(a_1-a)^2+b_1^2]\,[(a_1-a)^2+b_2^2]\ldots[(a_1-a)^2+b_s^2],$$

akkor a (21) egyenlőtlenség

$$\left|[(\zeta-a)^2+b_1^2]\,[(\zeta-a)^2+b_2^2]\ldots[(\zeta-a)^2+b_s^2]+\frac{q}{S}\right| \leqq \left|\frac{q}{S}\right| \qquad (22)$$

vagy

$$\left|(\zeta-z_1)(\zeta-\bar{z}_1)(\zeta-z_2)(\zeta-\bar{z}_2)\ldots(\zeta-z_s)(\zeta-\bar{z}_s)+\frac{q}{S}\right| \leqq \left|\frac{q}{S}\right| \qquad (23)$$

alakban is írható.

Ezek az egyenlőtlenségek nyilvánkép akkor is fennállanak, ha bennük S-et ennél kisebb pozitív számmal helyettesítjük. Így fennállanak akkor is, ha S helyébe a $K+(p+1)\gamma$, K, $(p+1)\gamma$, Σ_1 vagy $2\Sigma_+$ értékeket írjuk be (föltéve, hogy ezek nem negatívok).

A (18) alatti összefüggésből az $S>0$ esetben még a következő egyenlőtlenségek is következnek

$$S \geqq \frac{-2U_1}{U_1^2+V_1^2} \quad \text{vagy} \quad U_1^2+V_1^2+\frac{2}{S}\cdot U_1 \geqq 0, \qquad (24)$$

$$S \geqq 2q\,\frac{-U_q}{U_q^2+V_1^2} \quad \text{vagy} \quad U_q^2+V_q^2+\frac{2q}{S}\cdot U_q \geqq 0. \qquad (25)$$

Az $F(z)$ függvény képzetes zéróhelyei helyzetének tanulmányozása végett a következőkben összefoglaljuk az $U(x, y)=0$ és a

$$G(c) \equiv U^2(x, y) + V^2(x, y) + 2c.U(x, y) = 0$$

görbék nehány tulajdonságát.

4. Az $U(x, y) = 0$ görbékről.

Az előzőkben használt jelölésekkel

$$\begin{aligned}\psi(z) &\equiv [(z-a)^2+b_1^2]\,[(z-a)^2+b_2^2]\ldots[(z-a)^2+b_s^2] \equiv \\ &\equiv (z-z_1)(z-\bar{z}_1)\ldots(z-z_s)(z-\bar{z}_s) \equiv U(x, y) + iV(x, y).\end{aligned} \tag{26}$$

Az $U(x, y) = 0$ görbe egyenletét tehát úgy kapjuk meg, hogy a $\psi(z)$ polinomban $z=x+iy$ tesszük, s azután a polinom valós részét zéróval tesszük egyenlővé. Az ilyen görbéket a matematikai irodalomban stelloidoknak vagy általánosított hiperboláknak is nevezik.[4]

Az $U(x, y) = 0$ görbe a (28) egyenlet miatt keresztülmegy a komplex sík z_1, $\bar{z}_1$, z_2, $\bar{z}_2$, …, z_s és $\bar{z}_s$ pontjain. Mivel ezek a pontok nemcsak a valós tengelyre, az x tengelyre, hanem az $x = a$ egyenesre nézve is szimmetrikus fekvésűek, azért az x tengely és az $x=a$ egyenes az $U(x, y)=0$ görbének tengelye, a $z=a$ pont tehát a görbének középpontja.

A görbének $2s$ aszimptotája van, amelyek mind keresztülmennek a görbe középpontján, s az x tengely pozitív felével $\frac{\pi}{4s}, \frac{3\pi}{4s}, \ldots, \frac{(4s-1)\pi}{4s}$ szögeket alkotnak. Két egymásra következő aszimptota egymással tehát $\frac{\pi}{2s}$ szöget alkot.

Az $U(x, y) = 0$ $2s$-edrendű görbének nincs kivételes (singuláris) *pontja. A görbe sem önmagát, sem a valós tengelyt nem metszi.*

Ha ugyanis az (x_0, y_0) pont kivételes pontja volna az $U(x, y)=0$ görbének, akkor teljesülnie kellene az

$$U(x_0, y_0) = 0,\ U_x(x_0, y_0) = 0,\ U_y(x_0, y_0) = 0$$

[4] Lásd G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. I. Die algebraischen Kurven. (1910), 439—450. l.

egyenletrendszernek. De akkor a $\psi(z)=U(x, y)+iV(x, y)$ valós és képzetes része között fönnálló CAUCHY—RIEMANN-féle differenciálegyenletek miatt teljesülnie kellene az

$$U_x(x_0, y_0)-iU_y(x_0, y_0)=U_x(x_0, y_0)+iV_x(x_0, y_0)=\psi'(x_0+iy_0)=0$$

egyenletnek is.

A $\psi(z)$ polinom zéróhelyei az $x=a$ egyenesre esnek és egymástól különböznek. A $\psi'(z)$ polinom zéróhelyei is erre az egyenesre esnek és egymástól, valamint a $\psi(z)$ polinom zéróhelyeitől különböznek. Az $U(x, y)=0$ $2s$-edrendű görbének az $x=a$ egyenessel a $\psi(z)$ polinom $2s$ zéróhelye a metszéspontja. Ebből következik, hogy a $\psi'(z)$ zéróhelyei közül egy sem eshetik az $U(x, y)=0$ görbére.

Az $U(x, y)=0$ görbének tehát végesben nincs kivételes pontja. De nincs végtelen távol sem, mert a végtelen távoli egyenes $2s$ egymástól különböző pontban, az aszimptoták végtelen távoli pontjaiban metszi a görbét.

A valós tengelynek az $U(x, y)=0$ görbével való metszéspontjaira $y=0$ lévén teljesülnie kell a

$$\psi(x)=[(x-a)^2+b_1^2]\,[(x-a)^2+b_2^2]\ldots[(x-a)^2+b_s^2]=0$$

egyenletnek. Ennek pedig nincs valós gyöke.

Ezzel a kimondott tétel igazolva van.

A párosrendű $U(x, y)=0$ görbe a síkot bizonyos tartományokra bontja. Az egyes tartományokban az $U(x, y)$ függvény előjele ugyanaz. Szomszédos tartományokban az $U(x, y)$ függvény ellenkező előjelű. A valós tengelyt magában foglaló tartományban nyilvánkép $U(x, y)>0$.

Ha $0<b_1<b_2<\cdots<b_s$, akkor a z_1z_2, $\bar{z}_1\bar{z}_2$, z_3z_4, $\bar{z}_3\bar{z}_4$,…,… szakaszok belsejében $U(x, y)<0$, a $\bar{z}_1z_1$, z_2z_3, $\bar{z}_2\bar{z}_3$, z_4z_5, $\bar{z}_4\bar{z}_5$,… szakaszok belsejében ellenben $U(x, y)>0$.

4. Általánosított Cassini-féle görbékről.

A

$$G(c)\equiv U^2(x, y)+V^2(x, y)+2cU(x, y)=0 \qquad (27)$$

egyenlettel előállított görbét a következőkben röviden $G(c)$ görbének fogjuk nevezni. Ennek a görbének egyenletét még

$$[U(x, y)+c]^2+V^2(x, y) = c^2 \text{ vagy még } |\psi(z)+c| = |c| \quad (28)$$

alakban is felírhatjuk

A (28) alatti második egyenletből következik, hogy a $G(c)$ görbe általánosított CASSINI-féle görbe, vagyis azoknak a pontoknak mértani helye, amelyeknek a sík adott $2s$ számú pontjától, a $\psi(z)+c$ polinom zéróhelyeitől való távolságuk összeszorozva állandó szorzatot ad. Ez a szorzat $|c|$-vel egyenlő. A $\psi(z)+c$ polinom zéróhelyei a $G(c)$ görbének gyujtópontjai.[5]

Bármely $G(c)$ görbe keresztülmegy a $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_s$ és $\bar{z}_s$ pontokon. Ezeket a pontokat a $G(c)$ görbék *alappontjainak* fogjuk nevezni. (Természetesen fel kell tételeznünk, hogy a c szám valós.)

Nyilvánvaló, hogy a $G(0)$ görbének csak az alappontok a valós pontjai. Ezek a pontok a görbének izolált kettőspontjai. Ha c elég kicsiny pozitív szám, akkor a $G(c)$ görbe $2s$ darab kis zárt görbéből áll. A c pozitív szám növekedésével ezek a kis zárt görbék is növekednek és közülök kettő-kettő össze is kapcsolódik egy-egy kettőspontban. Ha egy bizonyos c értéknek megfelelő $G(c)$ görbén két zárt görbe egy kettőspontban egyesült, akkor a c további növekedésekor ez a kettőspont eltűnik. Hasonlóképp történik ez, mint ahogyan a CASSINI-féle negyedrendű görbék két oválisa előbb egy BERNOULLI-féle lemniszkáta kettőspontjában egyesül, s azután egy kettőspontnélküli zárt görbébe megy át.

Nyilvánvaló, hogy c pozitív értéke esetén valamennyi $G(c)$ görbe azokban a tartományokban fekszik, amelyekben $U(x, y)<0$. Az ellenkező esetben ugyanis nem állhatna fönn a (27) egyenlet.

Abból, hogy

$$\begin{aligned} &U^2(x, y)+V^2(x, y)+2c_1U(x, y) \equiv \\ &\equiv U^2(x, y)+V^2(x, y)+2cU(x, y)+2(c_1-c)\,U(x, y), \end{aligned} \quad (29)$$

következik, hogy a $c_1>c>0$ esetben a $G(c)$ görbe a $G(c_1)$ görbe belsejében, vagyis abban a tartományban fekszik, amelynek pontjaiban

$$U^2(x, y)+V^2(x, y)+2c_1U(x, y)<0.$$

---

[5] L. a megelőző lapalji jegyzetet.

A $G(c)$ görbe pontjaiban ugyanis a (29) egyenlet baloldala $2(c_1-c)\,U(x, y) < 0$, mivel a $G(c)$ görbe azokban a tartományokban fekszik, amelyeknek pontjaiban $U(x, y) < 0$.

Ha a c paraméter mint pozitív szám megy a végtelenbe, akkor a $G(c)$ görbe az $U(x, y) = 0$ görbébe s a $2s$-szeresen számított végtelen távoli egyenesbe megy át.

Abban az esetben, amikor c negatív, a $G(c)$ görbe az $U(x, y)>0$ egyenlőtlenséggel jellemzett tartományokban fekszik. Ha $0>c>c_1$, akkor a $G(c)$ ismét a $G(c_1)$ görbe belsejében fekszik, vagyis azokban a véges tartományokban, amelyeket a $G(c_1)$ görbe menetei határolnak.

A $G(c)$ görbe negatív c paraméter esetén is (a $2s$-szeresen számított végtelen távoli egyenesen kivül) az $U(x, y)=0$ görbébe megy át akkor, ha $c\to-\infty$.

5. A p^*-fajú egész függvények képzetes zéróhelyeinek fekvésére vonatkozó tételek.

Abban az esetben, amikor a p^*-fajú $F(z)$ egész függvénynek a $z_1, z_2, \ldots, z_s$ pontcsoportra vonatkozó $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ kritikus értéke nem negatív, vagy legalább is $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)+(p+1)\gamma\geqq 0$, akkor a (20) egyenlőtlenségből következik, hogy $U(x_1, y_1)\leqq 0$. Ekkor az $F(z)$ függvénynek mindig van képzetes zéróhelye, mivel a valós tengelyen $U(x, y)>0$.

Kimondhatjuk tehát a következő tételeket:

II. *Ha a p^*-fajú $F(z)$ egész függvényre vonatkozólag az ugyanazon valós résszel bíró és egymástól különböző $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_s, \bar{z}_s$ $(2s=p+1)$ konjugált komplex s számpárhoz tartozó K kritikus érték pozitív, akkor az $F(z)$ függvénynek mindig van képzetes zéróhelye. Ugyanez áll akkor is, ha K negatív ugyan, de $K+(p+1)\gamma>0$, ahol γ az $F(z)$ függvény magassága. Ezekben az esetekben az $F(z)$ függvénynek biztosan van képzetes zéróhelye a komplex síknak abban a tartományában, amelyben a*

$$\psi(z) = (z-z_1)(z-\bar{z}_1)(z-z_2)(z-\bar{z}_2)\ldots(z-z_s)(z-\bar{z}_s)$$

polinom valós része negatív.

III. *Ha a p^*-fajú $F(z)$ egész függvénynek az «a» valós részű $z_1, z_2, \ldots, z_s$ pontcsoporthoz tartozó K kritikus értéke pozitív, vagy ha legalább is $K+(p+1)\gamma<0$, akkor az $F(z)$ függvénynek van legalább egy pár konjugált komplex zéróhelye abban a $\frac{p}{p+1}\pi$ nyilású kettősszögtérben, amelynek csúcspontja a valós tengely «a» pontja, belső szögfelezője pedig a képzetes tengellyel párhuzamos.*

Jelöljük ugyanis ezt a kettősszögteret T-vel, akkor a III. tétel kimutatására csak azt kell igazolnunk, hogy a T tartományon kívüli pontokban a $\psi(z)$ polinom valós része, $U(x, y)$ pozitív.

A (26) egyenlet miatt

$$\begin{aligned}\psi(z) &= U(x, y)+iV(x, y) = \\ &= [(z-a)^2+b_1^2]\,[(z-a)^2+b_2^2]\ldots[(z-a)^2+b_s^2] = \\ &= (z-a)^{2s}+(z-a)^{2s-2}\Sigma b_1^2+(z-a)^{2s-4}\Sigma b_1^2b_2^2+\cdots+b_1^2b_2^2\ldots b_s^2.\end{aligned}$$

Ha ebbe $z-a=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ tesszük, akkor a $\psi(z)$ polinom valós része a

$$\begin{aligned}&\varrho^{2s}.\cos 2s\varphi+\varrho^{2s-2}.\cos(2s-2)\varphi.\Sigma b_1^2+ \\ &\quad+\varrho^{2s-4}.\cos(2s-4)\varphi.\Sigma b_1^2b_2^2+\cdots+b_1^2b_2^2\ldots b_s^2.\end{aligned} \tag{30}$$

alakot veszi föl.

A T tartományon kívül fekvő pontokat a

$$-\frac{\pi}{4s}<\varphi<\frac{\pi}{4s} \quad \text{vagy a} \quad -\frac{\pi}{4s}<\pi-\varphi<\frac{\pi}{4s} \qquad (2s=p+1)$$

egyenlőtlenség jellemzi. Az így jellemzett pontok abban a $\frac{\pi}{2s}=\frac{\pi}{p+1}$ nyilásu kettős szögtér belsejében fekszenek, amelynek az a pont szögpontja és amelynek a valós tengely a szögfelezője. Ennek a kettős szögtérnek belsejében a $\cos 2(s-k)\varphi$ függvény ($0\leqq k\leqq s$) pozitív. Ebből következik, hogy a T tartományon kívül fekvő bármely pontra vonatkozólag a (30) trigonometrikus polinom valamennyi tagja pozitív.

Mivel $S\geqq K+(p+1)\gamma\geqq K$, azért abban az esetben, amikor

$K>0$ vagy legalább $K+(p+1)\gamma>0$, a (20)—(23) egyenlőtlenségekből a következő tételek olvashatók ki:

IV. *Ha a p^*-fajú és γ-magasságú $F(z)$ egész függvénynek a $z_1, \bar{z}, \ldots, z_s, \bar{z}_s$ ($2s=p+1$ ugyanazzal a valós résszel bíró) pontcsoportra vonatkozó K kritikus értéke pozitív és ha az $F(z)$ függvénynek legfeljebb $2q$ olyan zéróhelye van, amelyekben a*

$$\psi(z)=(z-z_1)(z-\bar{z}_1)(z-z_2)(z-\bar{z}_2)\ldots(z-z_s)(z-\bar{z}_s)$$

polinom valós része nem pozitív, akkor az $F(z)$ függvénynek van legalább egy pár olyan komplex z-zéróhelye, amelyekben

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{K}\right|<\frac{q}{K} \quad \text{és} \quad \left|\psi(z)+\frac{q}{(p+1)\gamma}\right|<\frac{q}{(p+1)\gamma},$$

sőt van olyan két komplex zéróhelye is, amelyekben

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{K+(p+1)\gamma}\right|<\frac{q}{K+(p+1)\gamma}.$$

Ilyen két komplex zéróhelye akkor is van az $F(z)$ függvénynek, ha a fölvett pontcsoportban K negatív ugyan, de $K+(p+1)\gamma$ pozitív.

V. *Ha a p^*-fajú és γ-magasságú $F(z)$ egész függvénynek a $z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_s, \bar{z}_s$ pontcsoportra vonatkozó K kritikus értéke vagy legalább is $K+(p+1)\gamma$ pozitív, ha továbbá az $F(z)$ függvénynek legfeljebb $2q$ olyan zéróhelye van, amelyekben a $\psi(z)$ polinom valós része negatív, és ha végül van legalább m olyan valós zéróhelye az $F(z)$ függvénynek, amelyeknek a $z_1, z_2, \ldots, z_s$ pontoktól való távolsága legfeljebb d, akkor az $F(z)$ függvénynek van legalább két olyan komplex zéróhelye, amelyekben*

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{m}d^{p+1}\right|<\frac{q}{m}d^{p+1}.$$

A mondott föltételek teljesülése esetén, sőt akkor is, amikor K negativ, de $K+(p+1)\gamma+\frac{m}{d^{p+1}}$ pozitív, az $F(z)$ függvénynek van olyan két komplex zéróhelye is, amelyekben

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{K+(p+1)\gamma+\frac{m}{d^{p+1}}}\right| \leqq \frac{q}{K+(p+1)\gamma+\frac{m}{d^{p+1}}}.$$

A (18) egyenlőségben ugyanis

$$S \geqq K+(p+1)\gamma+\Sigma_1 \geqq$$
$$\geqq K+(p+1)\gamma+\sum \frac{1}{[(a_h-a)^2+b_1^2]\,[(a_h-a)^2+b_2^2]\ldots[(a_h-a)^2+b_s^2]},$$

ahol az összeg az $F(z)$ függvény valamennyi valós a_h zéróhelyére kiterjesztendő. Az $(a_h-a)^2+b_k^2$ az a_h valós zéróhely és a z_k pont távolságának négyzetét jelenti. Ebből következik, hogy a IV. tétel föltételeinek teljesülésekor

$$\Sigma_1 > \frac{m}{d^{2s}} = \frac{m}{d^{p+1}}$$

és így

$$S > K+(p+1)\gamma+\frac{m}{d^{p+1}}.$$

Ezzel a (20)—(23) egyenlőtlenségek alapján az V. tétel teljesen be van bizonyítva.

VI. *Az előbbi két tételben az a föltétel, hogy az $F(z)$ függvénynek legfeljebb $2q$ olyan zéróhelye van, amelyekben a $\psi(z)$ polinom valós része nem pozitív, helyettesíthető azzal a föltevéssel, hogy az $F(z)$ függvénynek legfeljebb q számú olyan konjugált komplex zéróhelypárja van, amely legalább is $\frac{\pi}{p+1}$ szög alatt látszik a valós tengelynek abból a pontjából, amelyben ezt a tengelyt a z_1 és $\bar{z}_1$ pontokon átmenő egyenes metszi. De érvényben marad az előbbi tétel akkor is, ha az előbbi föltevés helyett azt tételezzük föl, hogy az $F(z)$ függvénynek legfeljebb $2q$ komplex zéróhelye van.*

6. Másféle kritikus érték értelmezése.

Ha $2^r \geqq p+1 > 2^{r-1}$, akkor a p^*-fajú $F(z)$ egész függvényt $(2^r-1)^*$-fajú egész függvénynek is tekinthetjük. A következőkben föltételezzük, hogy $p=2^r-1$.

Ha $N(b)$-t úgy értelmezzük, mint a bevezetésben (5) alatt tettük, akkor könnyen beláthatjuk, hogy $N(b)$ nemcsak b-nek, hanem b^2-nek is egyértékű függvénye.

Ha megalkotjuk a következő függvényeket:

$$Q_1(b^2) = \frac{M(a+ib) - M(a-ib)}{2bi}, \quad Q_2(b^4) = \frac{Q_1(-b^2) - Q_1(b^2)}{2b^2} \tag{31}$$

$$Q_k(b^{2^k}) = \frac{Q_{k-1}(+b^{2^{k-1}}) - Q_{k-1}(-b^{2^{k-1}})}{2b^{2^{k-1}}} \quad (k=3, 4, \ldots, r), \tag{32}$$

akkor az így kapott

$$L(a, b) = L(a, -b) = Q_r(b^{2^r}) = Q_r(b^{p+1}) \tag{33}$$

érték szintén tekinthető a $p^* = (2^r - 1)^*$-fajú $F(z)$ egész függvény egy kritikus értékének. Ez az új kritikus érték a komplex síknak $a+ib$ vagy $a-ib$ pontjához tartozik.

Az új kritikus értékre az I. tételnek megfelelő tétel a következő:

VII. *Ha $a_1, a_2, \ldots$ jelöli a $p^* = (2^r - 1)^*$-fajú egész függvény zéróhelyeit és γ a függvény magasságát, akkor a függvénynek a komplex sík $a+ib$ pontjára vonatkozó $L(a, b)$ új kritikus értékére vonatkozólag*

$$L(a, b) = -(p+1)\gamma - \sum' \frac{1}{(a_h - a)^{p+1} - b^{p+1}},$$

ahol az összegezés az $F(z)$ függvény valamennyi zéróhelyére kiterjesztendő és minden egyes zéróhely annyiszor számítandó, mint ahányszoros zéróhely.

Ennek a tételnek kimutatására először az $F(z) = e^{z^{n+1}}$ $(n+1 \leqq p+1 = 2^r)$ függvényre vonatkozólag számítjuk ki az $L(a, b)$ kritikus értéket. Erre a függvényre

$$Q_1(b^2) = (n+1)\frac{(a+ib)^n - (a-ib)^n}{2bi} =$$

$$= (n+1)\left[\binom{n}{1} a^{n-1} - \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^2 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^4 - \cdots\right]$$

Ennélfogva

$$Q_2(b^4) = \frac{Q_1(-b^2) - Q_1(b^2)}{2b^2} =$$

$$= (n+1)\left[\binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{7} a^{n-7}.b^4 + \binom{n}{11} a^{n-11} b^8 + \cdots\right],$$

$$Q_3(b^8) = \frac{Q_2(b^4) - Q_2(-b^4)}{2b^4} =$$

$$= (n+1)\left[\binom{n}{7} a^{n-7} + \binom{n}{15} a^{n-15} b^8 + \binom{n}{23} a^{n-23} b^{16} + \cdots\right],$$

$L(a, b) = Q_r(b^{2^r}) = Q_r(b^{p+1}) = (n+1)\binom{n}{p} a^{n-p} = n+1$ vagy 0, a szerint amint $n=p$, illetőleg $n<p$.

A (31) és (32) műveleteknek az $1 - \frac{z}{a_h}$ függvényre való alkalmazásával kapjuk, hogy a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ függvényeknek az $1 - \frac{z}{a_h}$ függvényre vonatkozó része rendre

$$-\frac{1}{(a_h-a)^2+b^2}, \quad -\frac{1}{(a_h-a)^4-b^4}, \ldots, \quad -\frac{1}{(a_h-a)^{p+1}-b^{p+1}}.$$

Mivel az $L(a, b)$ függvénynek a $G(z)$, illetőleg a $g\left(\frac{z}{a_h}\right)$ függvényre vonatkozó része $-(p+1)\gamma$, illetőleg 0, azért a most mondottak alapján a (10) tekintetbe vételével a VII. tétel be van bizonyítva.

A II. tételnek megfelel most a következő tétel:

VIII. *Ha a* $p^* = (2^r-1)^*$*-fajú* $F(z)$ *egész függvénynek az* $a+ib$ *komplex pontra vonatkozó* $L(a, b)$ *kritikus értéke pozitív, vagy legalább is* $L(a, b)+(p+1)\gamma > 0$, *akkor az* $F(z)$ *függvénynek van zéróhelye a komplex síknak abban a tartományában, amelynek* z *pontjaiban a* $(z-a)^{p+1}-b^{p+1}$ *polinom valós része negatív.*

Mivel $z-a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ bevezetésével $\omega(z) = (z-a)^{p+1} - b^{p+1} = r^{p+1}[\cos(p+1)\varphi + i \sin(p+1)\varphi] - b^{p+1}$, azért a komplex síknak azokra a pontjaira, ahol az $\omega(z)$ polinom valós része negatív az

$$r^{p+1} \cos(p+1)\varphi - b^{p+1} < 0 \qquad (34)$$

egyenlőtlenség áll. A komplex sík ilyen pontjaiból álló tarto-

mányt az $r^{p+1}\cos(p+1)\varphi = b^{p+1}$ egyenlettel bíró úgynevezett HOLZMÜLLER-féle hiperbola[6] határolja, ez a tartomány összefüggő,

A (34) egyenlőtlenséget kielégítő pontok tartománya a valós tengely $(a-b,\ a+b)$ szakaszát is magában foglalja. A VIII. tétel föltételeinek teljesülésekor csak akkor lehet biztosan következtetni arra, hogy az $F(z)$ függvénynek van képzetes zéróhelye, ha a függvénynek nincs zéróhelye az előbbi szakaszon. Ha tudjuk, hogy az $(a-b,\ a+b)$ szakaszon az $F(z)$ függvénynek legfeljebb m zéróhelye van és ezek mind az $(a-c,\ a+c)$ szakaszban fekszenek $(c<b)$, ha továbbá tudjuk, hogy

$$L(a,\ b) + (p+1)\gamma - \frac{m}{b^{p+1}-c^{p+1}} > 0,$$

akkor a VII. tétel alapján állíthatjuk, hogy az $F(z)$ függvénynek van képzetes zéróhelye abban a tartományban, amelyet a (34) egyenlőtlenség jellemez.

Az előzők alapján nem okoz nehézséget a IV. tételnek megfelelő következő tétel bebizonyítása:

IX. *Ha a* $p^*=(2^r-1)^*$*-fajú és* γ *magasságú egész függvénynek az* $a+ib$ *ponthoz tartozó* $L(a,\ b)$ *kritikus értéke, vagy legalább is az* $L(a,\ b)+(p+1)\gamma$ *összeg pozitív és ha a függvénynek legfeljebb* $2q$ *olyan zéróhelye van, amelyekben az* $\omega(z)=(z-a)^{p+1}-b^{p+1}$ *polinom valós része negatív, akkor az* $F(z)$ *függvénynek van olyan zéróhelye, amelyre vonatkozólag*

$$\left|\omega(z)+\frac{q}{L}\right| < \frac{q}{L},$$

illetőleg

$$\left|\omega(z)+\frac{q}{L+(p+1)\gamma}\right| < \frac{q}{L+(p+1)\gamma}.$$

Ha tudjuk, hogy az $F(z)$ *függvénynek az* $(a-b,\ a+b)$ *számközben* m *zéróhelye van és ezek közül az «*a*» ponttól a legtávolabbi is legfeljebb* $c(<b)$ *távolságra fekszik és ha*

$$L(a,\ b) + (p+1)\gamma - \frac{m}{b^{p+1}-c^{p+1}} = \bar{L} > 0,$$

[6] L. a [4] lapalji jegyzetet.

akkor az $F(z)$ függvénynek van olyan komplex zéróhelye, amelyre vonatkozólag

$$\left|\omega(z)+\frac{2q-m}{2\bar{L}}\right|<\frac{2q-m}{2\bar{L}}$$

negatív.

Ebben a tételben szereplő véges tartományokat az irodalomban kasszinoidoknak[6] nevezett általánosított CASSINI-féle szabályos görbék határolják.

---

[6] L. a [4] lapalji jegyzetet.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. március 15-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE NICHTREELLEN NULLSTELLEN DER REELLEN GANZEN FUNKTIONEN VON ENDLICHEM GESCHLECHT.

Von GYULA (JULIUS) v. SZŐKEFALVI NAGY.

Eine Funktion $f(z)$ ist reell, wenn ihr Wert in jedem Punkte der reellen Achse reell ist. Die Funktion $F(z)$ wird im folgenden eine *ganze Funktion vom Geschlecht* p^* genannt, wenn sie sich in der Form

$$F(z) = e^{-\gamma \cdot z^{p+1}} f(z)$$

darstellen lässt, wo $f(z)$ eine reelle ganze Funktion ist, deren Geschlecht höchstens p ist, $p=2s-1$ eine ungerade Zahl und γ eine nichtnegative Zahl ist.

In dieser Arbeit werden einige Resultate von zwei vorigen Arbeiten des Verfassers verallgemeinert.[1]

Wir nehmen in der komplexen Ebene s voneinander verschiedene konjugiert komplexe Zahlenpaare

$$z_k = a + ib_k, \ \bar{z}_k = a - ib_k \quad (k=1, 2, \ldots, s)$$

mit demselben Realteile a an. Der Gruppe dieser s Zahlenpaare ordnen wir das Polynom

$$\varphi(t) = (t+b_1^2)(t+b_2^2)\ldots(t+b_s^2)$$

---

[1] Vizsgálatok reális polinomok és bizonyos egész függvények zéróhelyének helyzetéről, Matematikai és Természettudományi Értesítő 50 (1933), 167—194. Zur Theorie der algebraischen und gewisser transzendenten Gleichungen, Journal f. d. reine und angew. Math. 172 (1934), 25—36.

zu. Dann führen wir die Bezeichnungen

$$M(z)=\frac{F'(z)}{F(z)},\quad N(b_k)=\frac{M(a+ib_k)-M(a-ib_k)}{2b_k i}\quad (k=1,2,\ldots,s),\quad A_k=-\frac{1}{\varphi'(-b_k^2)}$$

ein. *Der den Punkten* $z_1, z_2, \ldots, z_s$ *zugehörige kritische Wert* der ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p wird durch die Gleichung

$$K(z_1, z_2, \ldots, z_s)=\sum_{k=1}^{s} A_k N(b_k)$$

definiert.

Es werden unter anderem die folgenden Sätze bewiesen:

Ist der kritische Wert $K(z_1, z_2, \ldots, z_s)=K>0$, *oder mindestens* $K+(p+1)\gamma>0$, *so hat die Funktion* $F(z)$ *vom Geschlecht* p^* *mindestens zwei nichtreelle Nullstellen im Gebiet der komplexen Ebene, wo der reelle Teil des Polynoms*

$$\psi(z)=(z-z_1)(z-\bar{z}_1)(z-z_2)(z-\bar{z}_2)\ldots(z-z_s)(z-\bar{z}_s)$$

negativ ist. Dieses Gebiet liegt ganz im Innern des Doppelwinkelraumes von der Öffnung $\frac{p}{p+1}\pi$, *dessen Scheitel der Punkt «a» der reellen Achse ist und dessen innere Winkelhalbierende zu der imaginären Achse parallel ist.*

Hat die Funktion $F(z)$ *höchstens* $2q$ *Nullstellen im Gebiet, wo der reelle Teil von* $\psi(z)$ *negativ ist, und ist* $K>0$, $\gamma>0$, *bzw.* $K+(p+1)\gamma>0$, *so hat* $F(z)$ *nichtreelle Nullstellen auch im endlichen Gebiet, für dessen Punkte z die Ungleichung*

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{K}\right|<\frac{q}{K},\quad \left|\psi(z)+\frac{q}{(p+1)\gamma}\right|<\frac{q}{(p+1)\gamma},$$

bzw.

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{K+(p+1)\gamma}\right|<\frac{q}{K+(p+1)\gamma}$$

besteht. Ist $K+(p+1)\gamma\geqq 0$ *und hat* $F(z)$ *mindestens m solche reelle Nullstellen, deren Abstand von Punkten* $z_1, z_2, \ldots, z_s$ *höchstens d ist, so hat* $F(z)$ *nichtreelle Nullstellen auch im Gebiet, für dessen Punkte z die Ungleichung*

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{m}\,d^{p+1}\right|<\frac{q}{m}\,d^{p+1}$$

oder

$$\left|\psi(z)+\frac{q}{K+(p+1)\gamma+\frac{m}{d^{p+1}}}\right|<\frac{q}{K+(p+1)\gamma+\frac{m}{d^{p+1}}}$$

besteht.

Das Gebiet der komplexen z-Ebene, wo der reelle Teil des Polynoms $\psi(z)$ negativ ist, bzw. wo $|\psi(z)+c|<c$ $(c>0)$ ist, besteht aus mehreren miteinander nicht zusammenhängenden Teilgebieten. Der Rand dieses Gebietes ist eine verallgemeinerte Hyperbel bzw. eine verallgemeinerte Cassinische Kurve. Diese Arbeit untersucht einige Eigenschaften dieser durch $\psi(z)$ spezialisierten Kurven.

Die vorigen Sätze sind auch Verallgemeinerungen einer anderen Arbeit der Verfassers,[2] da

$$\lim_{b_1,\,b_2,\ldots,\,b_s\to 0} K(z_1,\,z_2,\ldots,\,z_s)=\frac{1}{p!}\,M^{(p)}(a)$$

ist.

Verfasser behandelt auch einen anders definierten kritischen Wert.

---

[2] Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen, Journal f. d. reine u. angew. Math. 170 (1934). 148—153.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 15. März 1937.)

MÁTRIXOK SZORZÁSÁRÓL.

LIPKA ISTVÁN-tól.

Legyen x és y két n-ed rendű, négyzetes mátrix. Ha $xy = yx$, akkor azt mondjuk, hogy az x mátrix az y-nal felcserélhető. Ha az x mátrix karakterisztikus gyökei mind különbözők, akkor egy nevezetes tétel[1] szerint x csakis azokkal a mátrixokkal cserélhető fel, amelyek x-nek skalár-együtthatós polinomjai. Ezt a tételt még a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Legyen az x mátrix karakterisztikus polinomja $f(\lambda)$. *Ha $f'(x)$ mátrix nem-szinguláris (vagyis det $f'(x) \neq 0$), akkor x csakis a $\varphi(x)$ alakú mátrixokkal cserélhető fel, ahol $\varphi(x)$ skalár-együtthatós polinom.* Ugyanis, ha $f(\lambda)=0$ egyenlet gyökei mind különbözők, akkor alkalmas $F(\lambda)$ és $G(\lambda)$ polinomokra

$$f(\lambda) F(\lambda) + f'(\lambda) G(\lambda) = 1,$$

ebből pedig, mivel $f(x) = 0$, következik, hogy $|f'(x)|\,|G(x)| = 1$, és így

$$|f'(x)| \neq 0.$$

($|f'(x)|$ az $f'(x)$ mátrixból képezett determinánst jelöli.) Tehát, ha az x mátrix karakterisztikus gyökei mind különbözők, akkor az $f'(x)$ mátrix nem-szinguláris. Megfordítva, ha az $f'(x)$ mátrix nem-szinguláris, akkor $f(\lambda)$ gyökei mind különbözők. Ugyanis ellenkező esetben az $f'(\lambda)$ polinomnak és az x mátrix redukált karakterisztikus polinomjának, $\Phi(\lambda)$-nak volna olyan $d(\lambda)$ közös osztója, amely legalább első fokú. Tehát állanának a következő egyenletek

$$f'(\lambda) = p\,(\lambda)\, d(\lambda) \qquad \text{és} \qquad \Phi(\lambda) = q(\lambda)\, d(\lambda).$$

---

[1] J. H. M. Wedderburn: Lectures on Matrices (1934), Theorem 4, 27 old.

Ekkor, mivel $|f'(x)| \neq 0$, az $f'(\lambda) = p(\lambda)\, d(\lambda)$ egyenletből következnék, hogy $|d(x)| \neq 0$, tehát léteznék a $d(x)$ mátrixnak reciproka: $d^{-1}(x)$. Mivel még $\Phi(x) = q(x)\, d(x) = 0$, ebből az egyenletből következnék, hogy $q(x) = \Phi(x)\, d^{-1}(x) = 0$, ami lehetetlen, mert $q(\lambda)$ polinom foka kisebb, mint a $\Phi(\lambda)$ redukált karakterisztikus polinomé.

Az alábbiakban bebizonyítjuk a következő tételt:

Legyen $f(\lambda)$ az x mátrix karakterisztikus polinomja, és legyen az $f''(x)$ mátrix nem-szinguláris. Akkor az x mátrix csakis az olyan y mátrixokkal cserélhető fel, melyekre fennállanak a következő feltételek

$$y = \varphi(x) + \sqrt{\psi(x)} \tag{I}$$

$$x\sqrt{\psi(x)} = \sqrt{\psi(x)}\, x \tag{II}$$

ahol $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ skalár-együtthatós polinomok.

Bizonyítás. Legyen y egy tetszésszerinti mátrix; jelentsen μ független skalár változót és tekintsük a $z = x + \mu y$ mátrixot. Legyen a z mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n = 0. \tag{1}$$

A b_s együttható μ-nek s-ed fokú polinomja, tehát

$$b_s = a_{s0} + a_{s1}\mu + \cdots + a_{ss}\mu^s, \quad (a_{00} = 1). \tag{2}$$

Ha az x mátrix karakterisztikus egyenlete

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{3}$$

akkor nyilvánvaló, hogy $a_{s0} = a_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. z hatványai szintén a μ polinomjai és a következőképpen fejezhetők ki:

$$z^r = x^r + \mu \begin{Bmatrix} x & y \\ r-1 & 1 \end{Bmatrix} + \mu^2 \begin{Bmatrix} x & y \\ r-2 & 2 \end{Bmatrix} + \cdots + \mu^r y^r \tag{4}$$

ahol a zárójeles $\begin{Bmatrix} x & y \\ s & t \end{Bmatrix}$ szimbólum s számú x és t számú y minden lehető módon képezett szorzatainak az összegét jelenti. ($(s+t)$-ed rendű ismétléses permutációk összege.) Ha b_s és z^r (2) és (4) alatti kifejezését (1)-be helyettesítjük, akkor a független

μ változónak egy azonosan eltűnő polinomját nyerjük s ezért e polinom együtthatóira állanak a következő egyenletek

$$\sum_{i,j} a_{ij} \begin{Bmatrix} x & y \\ n-s-i-j & s-j \end{Bmatrix} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol $\begin{Bmatrix} x & y \\ u & v \end{Bmatrix} = 0$, ha $v < 0$. Ha $s = 2$, akkor az előbbi relációból a következőt nyerjük:

$$\begin{Bmatrix} x & y \\ n-2 & 2 \end{Bmatrix} + a_1 \begin{Bmatrix} x & y \\ n-3 & 2 \end{Bmatrix} + \cdots + a_{n-2} \begin{Bmatrix} x & y \\ 0 & 2 \end{Bmatrix} +$$
$$+ a_{11} \begin{Bmatrix} x & y \\ n-2 & 1 \end{Bmatrix} + a_{21} \begin{Bmatrix} x & y \\ n-3 & 1 \end{Bmatrix} + \cdots + a_{n-1\,1} \begin{Bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} +$$
$$+ a_{22} x^{n-2} + a_{32} x^{n-3} + \cdots + a_{n-1\,2} x + a_{n2} = 0.$$

Legyen most az x mátrix felcserélhető az y-nal, vagyis $xy = yx$, akkor az utóbbi reláció átalakul a következővé

$$\left(\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_1 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} \right) y^2 + g(x) y +$$
$$+ h(x) = 0 \qquad (5)$$

ahol $g(x)$ és $h(x)$ skalár-együtthatós polinomok. Az y^2 együtthatójára a (3) alattiból következik, hogy

$$\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_1 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} = \frac{1}{2} f''(x).$$

Mivel feltételünk szerint $|f''(x)| \neq 0$, azért $f''(x)$ mátrixnak van reciproka s ez, az x mátrixnak skalár-együtthatós polinomja. Ugyanis legyen $f''(x) = X$, akkor az X mátrix karakterisztikus egyenletében, az

$$X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

egyenletben $c_n = |X|$ determináns nem nulla és így létezik az

$$Y = -\frac{1}{c_n} (X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + \cdots + c_{n-1})$$

skalár-együtthatós polinom, melyre nyilván

$$XY = 1.$$

Tehát $Y = X^{-1}$ az x-nek skalár-együtthatós polinomja, mivel $X = f''(x)$. Szorozzuk most meg az $f''(x)$ mátrix reciprokával, az $[f''(x)]^{-1}$-gyel az (5) alatti egyenlet mindkét oldalát, akkor a következő egyenlethez jutunk

$$y^2 + 2[f''(x)]^{-1} g(x)\, y + 2[f''(x)]^{-1} h(x) = 0.$$

E szerint

$$y^2 + p(x)y + q(x) = 0,$$

ahol $p(x)$ és $q(x)$ skalár-együtthatós polinomok. Mivel $xy = yx$, azért az utóbbi egyenlet a következőképpen is írható

$$\left(y + \frac{p(x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{p(x)}{2}\right)^2 - q(x),$$

és e szerint

$$y + \frac{p(x)}{2} = \sqrt{\left(\frac{p(x)}{2}\right)^2 - q(x)}.$$

Ha $-\frac{p(x)}{2} = \varphi(x)$ és $\left(\frac{p(x)}{2}\right)^2 - q(x) = \psi(x)$, akkor $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ skalár-együtthatós polinomok és

$$y = \varphi(x) + \sqrt{\psi(x)}.$$

Mivel $xy = yx$, azért

$$x\sqrt{\psi(x)} = \sqrt{\psi(x)}\, x,$$

s ezzel az (I) és (II) alatti feltételeknek szükséges voltát bebizonyítottuk. Elégséges voltuk, közvetlenül belátható.

Most bebizonyított tételünkből levezethető a következő tétel:

Legyen $f(\lambda)$ az x mátrix karakterisztikus polinomja. Ha az $f(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei mind kétszeres gyökök, azonban az $f'(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei mind különbözők, akkor x csakis azokkal az y mátrixokkal cserélhető fel, melyekre állanak az (I) *és* (II) *alatti feltételek.*

Bizonyítás. Mivel az $f'(\lambda)$ polinom gyökei mind különbözők, alkalmas $g(\lambda)$ és $h(\lambda)$ polinomokra teljesül a következő azonosság

$$f''(\lambda)g(\lambda) + f'(\lambda)h(\lambda) = 1. \tag{6}$$

Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ jelenti az x mátrix különböző gyökeit, akkor

egy ismert tétel[1] szerint az $f'(x)\,h(x)$ mátrix karakterisztikus gyökei az

$$f'(\lambda_1)\,h(\lambda_1),\ f'(\lambda_2)\,h(\lambda_2),\ldots,\ f'(\lambda_m)\,h(\lambda_m)$$

értékek. Mivel feltételünk szerint $f(\lambda)$-nak minden gyöke kétszeres, azért

$$f'(\lambda_1)\,h(\lambda_1) = f'(\lambda_2)\,h(\lambda_2) = \cdots = f'(\lambda_m)\,h(\lambda_m) = 0.$$

E szerint az $f'(x)\,h(x)$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$|\lambda - f'(x)\,h(x)| = \lambda^n,$$

és innen következik, hogy

$$|1 - f'(x)\,h(x)| = 1. \tag{7}$$

Mivel a (6) alattiból meg az következik, hogy

$$|1 - f'(x)\,h(x)| = |f''(x)\|g(x)|$$

azért (7) szerint

$$|f''(x)\|g(x)| = 1.$$

Tehát $|f''(x)| \neq 0$ és így teljesítve van előbbi tételünknek a feltétele.

---

[1] Ld. [1] l. j.; Theorem 5, 30. o.

A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. ápr. 26.-án tartott üléséből.)

ÜBER DAS PRODUKT VON MATRIZEN.

Von STEPHAN LIPKA.

Es seien x und y zwei n reihige quadratische Matrizen. Die Matrix x ist mit der Matrix y *vertauschbar*, wenn $xy = yx$ gilt. Es sei $f(x) = 0$ die charakteristische Gleichung der Matrix x. Ist die Matrix $f'(x)$ nichtsingulär (d. h. Det. $f'(x) \neq 0$) so ist die Matrix x dann und nur dann mit einer Matrix y vertauschbar, wenn $y = \varphi(x)$ gilt, wo $\varphi(x)$ ein Polynom mit skalaren Koeffizienten bedeutet (Satz von FROBENIUS). Die Arbeit enthält die folgenden Ergänzungen dieses Satzes:

I. Es sei $f(x) = 0$ die charakteristische Gleichung der Matrix x. Ist die Matrix $f''(x)$ nichtsingulär, so ist die Matrix x dann und nur dann mit einer Matrix y vertauschbar, wenn x den Gleichungen

$$y = \varphi(x) + \sqrt{\psi(x)} \tag{I}$$

$$x\sqrt{\psi(x)} = \sqrt{\psi(x)}\,x \tag{II}$$

genügt, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Polynome mit skalaren Koeffizienten bedeuten.

II. Es sei $f(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Matrix x. Jede Wurzel der Gleichung $f(\lambda) = 0$ sei eine zweifache Wurzel, aber die Wurzeln der Gleichung $f'(\lambda) = 0$ seien alle einfach. Dann ist die Matrix x dann und nur dann mit einer Matrix y vertauschbar, wenn die Bedingungen (I) und (II) gelten.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. Apr. 1937.)

FOURIER-SOROK RÉSZLETÖSSZEGEIRŐL.

SZÁSZ OTTÓ-tól.

1. §. Bevezetés.

Legyen $f(x)$ valós, 2π szerint periodikus Lebesgue-integrabilis függvény. Fourier-sorba kifejtve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x). \tag{1}$$

Legyenek

$$s_0 = \frac{a_0}{2}, \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

az (1) sor részletösszegei.

PALEY 1932-ben a következő két tételt bizonyította be [3]:[1]

I*a*. Legyen

$$|f(x)| \leqq M \quad \text{a} \quad (-\pi, \pi) \text{ számközben, és} \tag{2}$$

$$a_0 \geqq 0, \quad a_n \geqq 0, \quad b_n \geqq 0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

akkor

$$|s_n(x)| \leqq 10\, M, \quad -\pi \leqq x \leqq \pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

I*b*. Legyen azonkívül $f(x)$ mindenütt folytonos, akkor a Fourier-sora minden számközben egyenletesen összetartó.

A I*a*. tételre FEJÉR [1] egyszerűbb bizonyítást adott és egyúttal a (4) egyenlőtlenséget szigorította. Eredménye

$$|s_n(x)| \leqq 4\, M, \quad -\pi \leqq x \leqq \pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

---

[1] Lásd a dolgozat végén felsorolt irodalmat.

Mindkét szerző az arithmetikai közepek módszerét használja. A cosinus-sorra igen egyszerűen adódik

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \cos \nu x \right| \leqq M, \quad |x| \leqq \pi;$$

ha továbbá általában $s_n = \sum_1^n u_\nu$, akkor az

$$s_n = \frac{s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} + \frac{1}{n} \sum_1^n \nu u_\nu = \sigma_n + \varrho_n \tag{6}$$

azonosság felhasználásával csak σ_n-t és ϱ_n-t kell lebecsülni. De $|\sigma_n| \leqq M$ és ϱ_n becslésére FEJÉR a

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq 2nM, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

egyenlőtlenséget bizonyítja be; ezekből (5) közvetlenül adódik.

A következőkben a Riemann-féle közepek felhasználásával általánosítom PALEY tételeit és élesítem FEJÉR lebecslését. Ez a módszer egyúttal az idézett eredményekre rövidebb bizonyítást ad. Általában a $\sum_0^\infty u_\nu$ sor vagy az $s_n = \sum_0^n u_\nu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sorozat *elsőfajú* RIEMANN-féle *közepei* alatt értjük az

$$R_1(t) = u_0 + \sum_1^\infty u_\nu \left(\frac{\sin \nu t}{\nu t} \right)^2 \text{ sort,}$$

és a *másodfajú* RIEMANN-*féle közepei* alatt az

$$R_2(t) = \frac{2t}{\pi} \left\{ \frac{s_0}{2} + \sum_1^\infty s_\nu \left(\frac{\sin \nu t}{\nu t} \right)^2 \right\} \text{ kifejezést,}$$

ahol

$$\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin \nu t}{\nu t} \right)^2 \quad \frac{\pi}{2t}.$$

Ha $\sum_0^\infty u_\nu = s$ összetartó, akkor, mint ismeretes, $\lim_{t \to 0} R_1(t) = s$ és $\lim_{t \to 0} R_2(t) = s$.

Mivel (1) és (2) szerint

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \varphi(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu \cos \nu x, \quad |\varphi(x)| \leqq M,$$

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \omega(x) \sim \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x, \quad |\omega(x)| \leqq M,$$

tehát külön tárgyalhatjuk a tiszta cosinus-sor és külön a tiszta sinus-sor esetét (2. §). A 3. §-ban a Fourier-integrálokra vezetünk le hasonló tételeket. Külön kiemelem a sinus-sorra itt adódó két extremum-problémát: Legyen

$$\omega(x) \sim \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x, \quad |\omega(x)| \leqq 1, \quad b_\nu \geqq 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots;$$

melyek a legkisebb $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots; \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ állandók, úgy hogy

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \gamma_n . n, \quad \left|\sum_1^n b_\nu \sin \nu x\right| \leqq \delta_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots ?$$

A 2. §. eredményei szerint:

$$\frac{4}{\pi} \leqq \sup \gamma_n \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} < 1{\cdot}38$$

$$1{\cdot}17 < \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx \leqq \delta_n \leqq 1 + \frac{a_0}{\sin^2 a_0} < 2{\cdot}38,$$

ahol a_0 a $2\alpha = \operatorname{tg} \alpha$ egyenletnek a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ közben fekvő egyetlen megoldása. Továbbá $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx = 1{\cdot}17\ldots$ Kimutatjuk még, hogy

$$\max b_1 = \gamma_1 = \frac{4}{\pi}.$$

2. §. Pozitiv együtthatójú Fourier-sorok.

a) A cosinus-sor. Bebizonyítjuk a következő tételt:

IIa. *Legyen* $a_\nu \geqq 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, *és* $\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^2} < \infty$; *ha*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu \left(\frac{\sin \nu x}{\nu x}\right)^2 = R_1(x) \text{ és ha } \lim_{x \to 0} \inf R_1(x) = M,$$

akkor

$$\frac{a_0}{2} \leqq M, \quad \left|\frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \cos \nu x\right| \leqq M, \quad |x| \leqq \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

és $\Sigma a_\nu \cos \nu x$ *egyenletesen összetartó a valós tengelyen.*

A bizonyítás igen egyszerű; nyilván

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \left(\frac{\sin \nu x}{\nu x}\right)^2 \leqq R_1(x).$$

Ha tehát x_1, x_2, x_3,... egy zérushoz tartó pontsorozat, amelynél $\lim_{k\to\infty} R_1(x_k) = M$, akkor nyilván

$$\lim_{k\to\infty} \left\{\frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \left(\frac{\sin \nu x_k}{\nu x_k}\right)^2\right\} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_\nu \leqq M,$$

ahonnan tételünk közvetlenül ered. Ennek folyománya, hogy a $\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_\nu \cos \nu x$ függvény mindenütt folytonos.

Ha, mint PALEY esetében, $\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_\nu \cos \nu x \sim \varphi(x)$ egy Fourier-sor, akkor $R_1(x/2) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \varphi(t)(x-t)\,dt$, és ha $\varphi(t) \leqq M$, akkor $R_1(x/2) \leqq \frac{2M}{x^2}\int_0^x (x-t)\,dt = M$ és a II*a*. tétel alkalmazható.

b) A sinus-sor. Először is $\sum_1^n \nu b_\nu$-t becsüljük le az R_2 Riemann-féle közepek segítségével; e célból a függvényt ismét csak a 0-hely közelében kell korlátoznunk. Bebizonyítjuk a következő tételt:

II*b*. *Legyen* $b_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *és* $\sum_1^\infty \frac{b_\nu}{\nu} < \infty$; *ha*

$$\frac{2x}{\pi} \sum_1^\infty \nu b_\nu \left(\frac{\sin \nu x}{\nu x}\right)^2 = R_2(x) \text{ és ha}$$

$$R_2(x) \leqq \frac{2}{\pi} M \text{ a } 0 < x \leqq \delta \text{ közben,}$$

akkor

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{\pi}{2} M.n, \quad n \geqq \frac{\pi}{2\delta} \text{ értékeire.}$$

A bizonyítás céljából megállapítjuk, hogy

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} \sum_1^n \nu b_\nu \left(\frac{\sin \nu \pi/2n}{\nu \pi/2n}\right)^2 \leqq R_2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqq \frac{2}{\pi} M, \text{ ha } \frac{\pi}{2n} \leqq \delta.$$

De

$$\frac{\sin \nu \frac{\pi}{2n}}{\nu \frac{\pi}{2n}} \geqq \frac{2}{\pi}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

tehát

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{\pi} \sum_1^n \nu b_\nu \leqq M, \quad n \geqq \frac{\pi}{2\delta}.$$

Ha ismét $\sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x \sim \omega(x)$ Fourier-féle sor, akkor $R_2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \int_0^x \omega(t)\,dt$; ha tehát $\omega(t) \leqq M$, akkor $R_2(x) \leqq \frac{2}{\pi} M$ és nyerjük a (7) egyenlőtlenség szigorítását. Hogy melyik a legkisebb állandó, amellyel ott 2 helyettesíthető, az nyilt kérdés. A következőkben becslésünk további finomításával egy $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb állandót találunk. Megelőzőleg röviden levezetjük a fentiekből PALEY I*b*. tételét. Ugyanis

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{1}{n} \sum_1^n \nu b_\nu \left(\frac{\sin \nu \frac{\pi}{2n}}{\nu \frac{\pi}{2n}} \right)^2 \leqq R_2\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega(t)\,dt \to 0,$$

ha $n \to \infty$ (mivel most $\omega(+0)=0$); tehát $\frac{1}{n} \sum_1^n \nu b_\nu \sin \nu x \to 0$ egyenletesen x-ben.

Legyen most (6)-ban $u_n = b_n \sin nx$, akkor $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$ egyenletesen x-ben; és ha $\omega(x)$ folytonos, akkor $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \omega$ egyenletesen x-ben, tehát $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \omega(x)$ egyenletesen x-ben.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

II*c*. *Ha* $b_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, és $\sum_1^\infty \frac{b_\nu}{\nu} < \infty$; *ha továbbá*

$$\frac{2x}{\pi} \sum_1^\infty \nu b_\nu \left(\frac{\sin \nu x}{\nu x} \right)^2 = R_2(x),$$

akkor

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} \cdot n \cdot \frac{\pi}{2} R_2\left(\frac{a_0}{n}\right) < 1{\cdot}38.n. \frac{\pi}{2} R_2\left(\frac{a_0}{n}\right), \quad n \geqq 1,$$

ahol a_0 *a* $2a = \operatorname{tg} a$ *egyenlet egyetlen megoldása a* $0 < a < \frac{\pi}{2}$ *számközben.*

Ugyanis

$$\frac{2x}{\pi} \sum_1^n \nu b_\nu \left(\frac{\sin \nu x}{\nu x}\right)^2 \leqq R_2(x),$$

és

$$\frac{\sin \nu x}{\nu x} \geqq \frac{\sin nx}{nx}, \quad \text{ha} \quad nx \leqq \pi;$$

tehát

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{\pi}{2}\, n\, \frac{nx}{\sin^2 nx} R_2(x), \quad 0 < nx \leqq \pi.$$

De $\frac{a}{\sin^2 a}$ a legkisebb értékét az a_0 helyen veszi fel, és

$$1{\cdot}16 < a_0 < 1{\cdot}17 = a_1, \quad \text{továbbá} \quad \frac{\sin a_1}{a_1} = 0{\cdot}7870.$$

Innen könnyen nyerjük, hogy

$$\frac{a_0}{\sin^2 a_0} < \frac{a_1}{\sin^2 a_1} < 1{\cdot}38.$$

Most

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{\pi}{2} \frac{a_0}{\sin^2 a_0} R_2\left(\frac{a_0}{n}\right).\, n < 1{\cdot}38.\, \frac{\pi}{2} R_2\left(\frac{a_0}{n}\right).n.$$

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

Ha nevezetesen $\sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x \sim \omega(x)$, akkor

$$R_2\left(\frac{x}{2}\right) \leqq \frac{2}{\pi} \sup_{0<t<x} \omega(t);$$

legyen

$$\omega(t) \leqq M, \quad \text{ha} \quad 0 < t \leqq 2a_0 < 2{\cdot}34;$$

akkor tehát

$$R_2(x) \leqq \frac{2}{\pi} M, \quad 0 < x \leqq a_0,$$

és

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} \cdot M.n < 1{\cdot}38\ M.n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8)$$

Legyen

$$\omega(x) = \frac{\pi}{4},\ 0 < x < \pi;\ \text{akkor}\ M = \frac{\pi}{4},$$

és

$$\omega(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1};$$

tehát

$$b_1 = 1 = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Ha tehát γ a legkisebb állandó, úgyhogy

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \gamma . M . n,\quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

akkor

$$1{\cdot}27 < \frac{4}{\pi} \leqq \gamma < 1{\cdot}38.$$

Továbbá, ha $b_n \geqq 0\,(n = 1, 2, 3, \ldots,)$ és ha $|\omega(t)| \leqq M$ $(|t| \leqq \pi)$, akkor (6), (8) és (9) felhasználásával

$$\left|\sum_1^n b_\nu \sin \nu x\right| \leqq M(1+\gamma) \leqq M\left(1 + \frac{a_0}{\sin^2 a_0}\right) < 2{\cdot}38\, M. \tag{10}$$

Jelöljük a legkisebb állandót, amellyel (10) alatt $1+\gamma$ helyettesíthető δ-val, akkor (10) szerint

$$\delta \leqq 1 + \frac{a_0}{\sin^2 a_0} < 2{\cdot}38.$$

Mivel továbbá

$$\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\ \text{ha}\ 0 < x < 2\pi,$$

és

$$0 \leqq \frac{\pi - x}{2} \leqq \frac{\pi}{2},\quad \text{ha}\quad 0 \leqq x \leqq \pi,$$

tehát a jelen esetben $M = \frac{\pi}{2}$. FEJÉR[2] bebizonyította azonban, hogy

$$\max_{|x|\leqq\pi}\left|\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu}\right| = \sum_1^n \frac{1}{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{n+1} \uparrow \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx = 1{\cdot}851936\ldots,$$

---

[2] V. ö. D. JACKSON, Rendic. Circ. Mat. Palermo 32 (1911), 257—262. «↑» monoton konvergenciát jelent.

tehát

$$\delta \geqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx > 1{\cdot}17\ldots$$

Ki mutatjuk még, hogy az $n=1$ esetben (9) alatt γ-t $\frac{4}{\pi}$-vel helyettesíthetjük, azaz $b_1 \leqq \frac{4}{\pi} M$, és az egyenlőség csakis a $\frac{4}{\pi} M \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1}$ sor esetében áll. Ugyanis

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega(x)\sin x dx,$$

és innen, ha $\omega(t) \leqq M$, $b_1 \leqq \frac{4}{\pi}$, és egyenlőség csak az

$$\omega(x) = M,\ 0 < x < \pi$$

esetben áll be.

3. §. Trigonometrikus- és Fourier-integrálok.

a) Bebizonyítjuk a következő tételt:

III*a*. *Legyen $A(u)$ az u pozitív változó sohasem csökkenő függvénye: $A(v) \geqq A(u)$, ha $v > u > 0$; legyen továbbá*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{u^2}\,dA(u) < \infty,$$

úgyhogy

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 dA(u) = J_1(x)$$

feltétlenül és egyenletesen összetartó az $x > 0$ végtelen féltengelyen. Végül tegyük fel, hogy

$$\liminf_{x \to 0} J_1(x) = M;$$

akkor

$$\left|\int_0^t \cos ux dA(u)\right| \leqq M, \text{ ha } x > 0,\ t > 0,$$

és $\int_0^{\infty} \cos ux dA(u)$ *feltétlenül és egyenletesen összetartó a pozitív féltengelyen.*

Ugyanis

$$\int_0^t \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 dA(u) \leqq J_1(x), \quad t > 0,$$

és innen

$$\lim_{x\to 0} \int_0^t \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 dA(u) = \int_0^t dA(u) \leqq \liminf_{x\to 0} J_1(x);$$

ahonnan állításunk közvetlenül folyik.

A IIc-nek a következő tétel felel meg:

III*b*. *Legyen* $B(u)$ *sohasem csökkenő, ha* $u > 0$ *és legyen*

$$\int_1^\infty \frac{1}{u}\, dB(u) < \infty,$$

úgyhogy

$$\frac{2}{\pi}\, x \int_0^\infty \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 u dB(u) = J_2(x), \quad x > 0,$$

létezik. Akkor

$$\int_0^t u dB(u) \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0}\, t \cdot \frac{\pi}{2}\, J_2\left(\frac{a_0}{t}\right), \quad t > 0,$$

ahol a_0 IIc-*ben van definiálva.*[3]

Ugyanis

$$\frac{2x}{\pi} \int_0^t \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 u dB(u) \leqq J_2(x),$$

és

$$\left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sin ut}{ut}\right)^2, \quad \text{ha} \quad 0 < ux < xt \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Tehát $tx = a_0$-t véve

$$\int_0^t u dB(u) \leqq \frac{\pi}{2}\, t\, \frac{a_0}{\sin^2 a_0}\, J_2\left(\frac{a_0}{t}\right), \quad t > 0.$$

---

[3] Nyilván $\int_0^\infty \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 dA(u)$ és $\frac{2x}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 dS(u)$ a Riemann-féle első-, illetőleg másodfajú szummabilitási eljárásnak felelnek meg.

b) Alkalmazás Fourier-integrálokra.

Legyen $g(s$ valós és $\int_0^\infty g(s)ds$, $\int_0^\infty g^2(s)ds$ létezzék; akkor tartozik hozzá egy cosinus-transformált $G(u)$, úgyhogy

$$G(u) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{d}{du} \int_0^\infty g(s) \frac{\sin us}{s}\, ds$$

és

$$g(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{d}{ds} \int_0^\infty g(u) \frac{\sin us}{u} du.$$

Legyen

$$\int_0^t g(s)ds = g_1(t),$$

akkor

$$\int_0^s g_1(t)\, dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{G(u)}{u^2} (1 - \cos su)\, du = 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{G(u)}{u^2} \sin^2 \frac{su}{2} du;$$

tehát

$$\frac{2}{s^2} \int_0^s g_1(t)\, dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty G(u) \left(\frac{\sin \frac{su}{2}}{\frac{su}{2}} \right)^2 du.$$

Tegyük fel, hogy $G(u) \geqq 0$, és hogy

$$\liminf_{s \to 0} \frac{2}{s^2} \int_0^s g_1(t)\, dt = M,$$

akkor a III*a*. tétel értelmében

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty G(u)\, du \leqq M.$$

A $g(s)$ függvényhez ugyancsak tartozik egy sinus-transformált $\gamma(u)$, úgyhogy

$$\gamma(u) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{d}{du} \int_0^\infty g(s)\ \frac{1 - \cos us}{s}\, ds, \tag{11}$$

$$g(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{d}{ds} \int_0^\infty \gamma(u)\ \frac{1 - \cos us}{u}\, du.$$

Innen

$$\int_0^x g(s)\,ds = g_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\gamma(u)}{u} \cdot 2\sin^2\frac{ux}{2}\,du,$$

avagy

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} 2x \int_0^\infty u\gamma(u)\left(\frac{\sin ux}{ux}\right)^2 du = \frac{g_1(2x)}{x}.$$

Legyen most $\gamma(u) \geqq 0$, akkor a IIIb. tétel értelmében

$$\int_0^\infty u\gamma(u)\,du \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{\pi^2}{2}\, tg_1\left(\frac{2a_0}{t}\right) \cdot \frac{t}{a_0}. \qquad (12)$$

Legyen továbbá $g(s) \leqq M$, akkor $g_1(x) \leqq Mx$, $x > 0$, és

$$\int_0^t u\gamma(u)\,du \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \pi^2 Mt, \quad t > 0.$$

Innen közvetlenül adódik:

$$\left|\int_0^t u\gamma(u)\sin us\,du\right| \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \pi^2 Mt, \quad t > 0, \; s > 0. \qquad (12')$$

Tekintsük most a Fejér-féle középnek megfelelő integrált:

$$F(b) = \int_0^b \left(1 - \frac{u}{b}\right) \gamma(u) \sin us\,du.$$

(11)-ből

$$F(b) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^b \left(1 - \frac{u}{b}\right) \sin us \left(\frac{d}{du}\int_0^\infty g(t)\,\frac{1-\cos ut}{t}\,dt\right) du,$$

és parciális integrálással

$$F(b) =$$

$$= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^b \left[\left(1 - \frac{u}{b}\right) s\cos us - \frac{1}{b}\sin us\right] \int_0^\infty g(t)\,\frac{1-\cos ut}{t}\,dt\,du.$$

De feltétlen összetartás folytán az integrálás sorrendje felcserélhető, és így

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}F(b)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{g(t)}{t}\int_0^b\left(s\cos us-\frac{us}{b}\cos us-\frac{1}{b}\sin us\right)(1-\cos ut)\,dudt.$$

Már most

$$\int_0^b \cos us du=\frac{\sin sb}{s}$$

$$\int_0^b \cos us\cos utdu=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin b(t+s)}{t+s}+\frac{\sin b(t-s)}{t-s}\right]$$

$$\int_0^b u\cos usdu=b\frac{\sin bs}{s}-\int_0^b\frac{\sin us}{s}du$$

$$\int_0^b u\cos us\cos utdu=\frac{b}{2}\left[\frac{\sin b(t+s)}{t+s}+\frac{\sin b(t-s)}{t-s}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1-\cos b(t+s)}{(t+s)^2}-\frac{1}{2}\frac{1-\cos b(t-s)}{(t-s)^2};$$

és

$$\int_0^b \sin us\cos utdu=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\cos b(t+s)}{t+s}-\frac{1-\cos b(t-s)}{t-s}\right].$$

Innen

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}F(b)=$$

$$=\frac{1}{2b}\int_0^\infty\frac{g(t)}{t}\left[\frac{1-\cos b(t+s)}{t+s}\frac{t}{t+s}-\frac{1-\cos b(t-s)}{t-s}\cdot\frac{t}{t-s}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{b}\int_0^\infty\left[\frac{\sin^2\frac{b}{2}(t+s)}{(t+s)^2}-\frac{\sin^2\frac{b}{2}(t-s)}{(t-s)^2}\right]g(t)dt.$$

Ha továbbá $g(t)$-t $t<0$-ra a $g(t)=-g(-t)$ egyenlettel definiáljuk, akkor végül

$$F(b)=\int_0^b\left(1-\frac{u}{b}\right)\gamma(u)\sin usdu=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\frac{\sin^2\frac{b}{2}(s-u)}{(s-u)^2}du. \tag{13}$$

Legyen most $|g(u)|\leqq M$, $-\infty<u<\infty$, akkor

$$\left|\int_0^b\left(1-\frac{u}{b}\right)\gamma(u)\sin usdu\right|\leqq\frac{M}{b}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{b}{2}(s-u)}{(s-u)^2}du;$$

de

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{b}{2}(s-u)}{(s-u)^2}du=\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du=\frac{b}{2}\pi,$$

tehát

$$\left|\int_0^b\left(1-\frac{u}{b}\right)\gamma(u)\sin usdu\right|\leqq M\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Végül

$$\int_0^b\gamma(u)\sin usdu=\int_0^b\left(1-\frac{u}{b}\right)\gamma(u)\sin usdu+$$

$$+\frac{1}{b}\int_0^b u\gamma(u)\sin usdu,$$

tehát (12')- és (14)-ből

$$\left|\int_0^b\gamma(u)\sin usdu\right|\leqq M\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}+\pi^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{a_0}{\sin^2 a_0}\right].$$

Ha még feltesszük, hogy $g(u)$ minden helyen folytonos (úgyhogy $g(0)=0$), akkor — a mi (13)-ból könnyen levezethető —

$$\lim_{b\to\infty}F(b)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}g(s)\quad\text{egyenletesen } s\text{-ben.}$$

Továbbá (12)-ből, mivel most $t\eta_1\left(\frac{2a_0}{t}\right) \to 0$,

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \int_0^b u\gamma(u)\,du = 0;$$

és innen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \int_0^b u\gamma(u) \sin us du = 0 \quad \text{egyenletesen } s\text{-ben.}$$

Tehát végül

$$g(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \gamma(u) \sin us du,$$

és az integrál egyenletesen összetartó.

Hasonló módszer alkalmazható akkor is, ha a (3) feltételt a következő általánosabbal pótoljuk:

$$na_n \geqq -K, \quad nb_n \geqq -K, \quad K > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

továbbá bizonyos általánosított $\Sigma(a_n \cos l_n x + b_n \sin l_n x)$ trigonometrikus sorok esetében, ahol $\{l_n\}$ a pozitív számok egy tetszőleges sorozata. Eme általánosításokra más alkalommal térek rá.

Irodalom.

1. L. Fejér, On a theorem of Paley, Bulletin of the American Mathematical Society 40 (1934), 469—475.

2. M. Fekete, Proof of three propositions of Paley, Ibidem 1935, 138—144.

3. R. E. A. C. Paley, On Fourier series with positive coefficients, Journ. London Math. Soc. 7. (1932), 205—208.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. ápr. 26.-án tartott üléséből.)

ÜBER DIE PARTIALSUMMEN FOURIERSCHER REIHEN.

Von OTTÓ SZASZ.

Für die bekannten Sätze von PALEY über Fourier'sche Reihen mit positiven Koeffizienten werden hier sehr kurze Beweise gegeben und die Sätze in neuer Richtung verallgemeinert, sowie die Konstantenabschätzungen verbessert. Insbesondere ergibt sich:

1. Ist $\varphi(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_\nu \cos \nu x$, $a_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, und

$$\liminf_{x \to 0} \frac{2}{x^2} \int_0^x \varphi(t)(x-t)\,dt = M,$$

so ist $\sum a_\nu$ konvergent, und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_\nu \leqq M.$$

2. Ist $\omega(x) \sim \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x$, $b_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, und

$$\frac{1}{x} \int_0^x \omega(t)\,dt \leqq M \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 2a_0 < 2{\cdot}34,$$

so ist

$$\sum_1^n \nu b_\nu \leqq \frac{a_0}{\sin^2 a_0} n.M, < 1{\cdot}38\, M.n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei $a_0 = 1{\cdot}16\ldots$, und $\frac{a_0}{\sin^2 a_0} < 1{\cdot}38.$

Ist ausserdem $|\omega(x)| \leqq M$ für $0 < x < \pi$, so ist

$$\left|\sum_1^n b_\nu \sin \nu x\right| \leqq M\left(1 + \frac{a_0}{\sin^2 a_0}\right) < 2{\cdot}38\, M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ähnliche Sätze gelten für Fourier'sche Integrale.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

A RÖNTGEN-SUGÁRZÁS ENERGIÁJÁNAK MÉRÉSE. IV. RÉSZ.

CSASZÁR ELEMÉR lev. tagtól.

A Röntgen-ergométer első sorban a Röntgen-sugárzás erősségének mérésére való készülék. De jól felhasználható az elnyelt sugármennyiség (dózis) meghatározására is. Legutóbbi dolgozatomban[1] éppen arról emlékeztem meg, hogy mi módon lehet megmérni az ergométerrel a levegő-dózist, vagyis mi módon lehet felhasználni az ergométert a levegővel töltött nagy iónos kamra helyettesítésére. Most arról számolok be, hogy a nagyméretű levegős iónos kamra, mely első sorban dózismérő eszköz, mennyiben alkalmas a sugárzás erősségének megmérésére, vagyis az ergométer helyettesítésére. Más szóval meg akarom jelölni *az iónos kamrával való mérés határait*. Előbb az egynemű, majd az összetett sugárzás esetével foglalkozom.

I. Egynemű sugárzás.

Vizsgáljuk meg előbb ebben az egyszerű esetben, hogy mi módon lehet a megmért iónozási dózisból a sugárzás erősségét kiszámítani. Vegyük fel, hogy J_λ erősségű és λ hullámhosszúságú egynemű sugárzás esik a nagy iónos kamrába és nyílásánál a dózisteljesítmény, az r/mp-ek száma r^*. Minthogy $1r \sim 0{\cdot}107$ erg energiával, az említett helyen az 1 mp alatt 1 kcm levegő által elnyelt energia, vagyis a másodpercre eső térfogati dózis a következő:

$$0{\cdot}107\, r^* \text{ erg/cm}^3\text{.sec} = \varepsilon\, r^*,$$

melyben az ε jelentése nyilvánvaló.

---

[1] Császár E. Mat. és Természettud. Ért. LV. 342. 1937.

Az idézett dolgozatomban használt jelölést bevezetve

$$D^{\text{kcm}}_{\text{mp, lev.}} = \varepsilon r^{*}. \tag{1}$$

Másrészről ismeretes, hogy az I_λ erősségű egynemű sugárzás beesésekor a mp-re eső térfogati dózis levegőben

$$D^{\text{kcm}}_{\text{mp, lev.}} = I_\lambda \bar{\mu} = I_\lambda \left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma_s}{\varrho} \right) \varrho, \tag{1a}$$

ahol $\bar{\mu}$ a valódi elnyelési együttható, μ a gyengítési, σ_s pedig a szórási együttható; ϱ a használt levegő sűrűsége.

Az (1) és (1a) egyenletekből

$$I_\lambda = \frac{\varepsilon r^{*}}{\left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma_s}{\varrho} \right) \varrho}. \tag{2}$$

E képlet alapján kiszámíthatjuk az r/mp egységben mért dózisteljesítményből a beeső egynemű sugárzás erősségét, I_λ-t, vagyis a négyzetcmre merőlegesen másodpercenként beeső energiamennyiséget, ha ismerjük a beeső egynemű sugárzás hullámhosszúságát és vele együtt a nevezőben szereplő együtthatókat. Ha a beeső sugárzás hullámhosszúsága nem ismeretes, akkor könnyen meghatározhatjuk sugárgyengítés útján.

Ezzel a sugárzással könnyű összehasonlítani más erősségű, de ugyanilyen hullámhosszúságú sugárzast, természetesen iónos kamrát használva. Ugyanis a (2) képlet alapján belátható, hogy a sugárerősségek hányadosa egyenlő az r^{*} mennyiségek hányadosával. Sőt különnemű sugárzások erősségét is összehasonlíthatjuk iónos kamrával, ha a hullámhosszúságokat (λ és λ_1), továbbá a (2) képletben szereplő együtthatókat megmérjük. Ugyanis a (2) alapján

$$\frac{I_\lambda}{I_{\lambda_1}} = \frac{r^{*}_\lambda}{r^{*}_{\lambda_1}} \frac{\left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma_s}{\varrho} \right)_{\lambda_1}}{\left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma_s}{\varrho} \right)_{\lambda}}. \tag{3}$$

2. Összetett sugárzás.

Ez esetben ismerni kellene az összetett sugárzás közepes hullámhosszúságát és a neki megfelelő μ és σ_s együtthatókat, hogy a (2) képlet alapján kiszámíthassuk a *sugárzás erősségét*, A közepes gyengítési együttható megmérése végett valamilyen levegő-rendszámú anyagra (pl. víz, cellon) van szükség. Legyen ennek vastagsága d, sűrűsége ϱ_x, ekkor

$$\frac{\mu}{\varrho_x} = \frac{1}{d\varrho_x} \log \frac{I_0}{I}. \tag{4}$$

A jobboldalon szerepel a beeső és a megszűrt sugárzás erősségének hányadosa (I_0/I). Az iónos kamrában mért r_0^* és r^* dózisteljesítmények alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{I_0}{I} = \frac{r_0^*}{r^*} \frac{\left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma_s}{\varrho}\right)}{\left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\sigma_s}{\varrho}\right)_0}, \tag{5}$$

hol a jobboldali számlálóban szereplő együtthatók közepes értékeket jelentenek. Ha felvehetjük, hogy ezeknek az együtthatóknak értéke a sugárzásnak a mérésre használt szűrőn való keresztülhaladása közben lényegesen nem változik meg, akkor fennáll, hogy

$$\frac{I_0}{I} \sim \frac{r_0^*}{r^*}, \tag{5a}$$

vagyis az iónozási dózisteljesítmények hányadosa egyenlő a sugárerősségek hányadosával, mint egynemű sugárzások esetében. Ez az eset forog fenn, ha a Röntgen-lámpából kilépő sugárzást előzetesen legalább 0·5 mm vastag rézszűrővel, vagy ezzel egyenértékű más szűrővel szürjük meg és néhány cm vastag levegő-rendszámú anyagot használunk mérési szűrőnek. Ekkor a közepes gyengítési együtthatóra és közepes hullámhosszúságra a szűrő vastagságától független értéket kapunk. Ez esetben a sugárzás erősségét úgy határozhatjuk meg, mint előbb (2. képlet).

A mondottak helyességéről mérés útján is meggyőződtünk. Az alábbi 1. táblázat első sorában megjelölt körülmények között

megmértük a sugárzás erősségét közvetlenül az ergométerrel és egy nagy iónos kamrával, 19·8 mm vastag cellonréteget[1] használva a közepes elnyelési együttható meghatározására. A mérési eredmények ugyancsak az 1. táblázat első sorában találhatók. Láthatjuk, hogy ez esetben az ergométerrel és az iónos kamrával kapott eredmények elég jól megegyeznek egymással, tehát az iónos kamra felhasználható a sugárzás erősségének megmérésére.

1. táblázat.

Lámpaterhelés	Távolság cm	Sugárszűrő mm	Cellon-szűrő mm	Erősség erg/sec. cm²	
				Ergométer	Iónos kamra
133 kv 4 ma	45	0·5 Cu	19·8	411	422
88 kv 5 ma	45	fekete kartonpapír[3]	1·2	443	136

Ha a sugárzás nincs megszűrve olyan mértékben, mint említettük, hanem pl. csak fekete kartonpapír és vékony alumínium-hártyák szerepelnek szűrő gyanánt, akkor a lágy alkatrészek is benne vannak az összetett sugárzásban és a közepes elnyelési együttható megméréséhez használt szűrő megváltoztatja a sugárzás összetételét; ennek következtében az (5*a*) egyenlet elveszti érvényét és az ergométerrel meg az iónos kamrával kapott sugárerősségek nagyon különböznek egymástól.[2] Erről meggyőz bennünket az 1. táblázat második sora. Ha a mérést igen vékony cellonlemezzel végeznénk, esetleg javulna az eredmény. Viszont

---

[1] A cellon HASE és KÜSTNER mérései szerint nagyon jól felhasználható a levegőre vonatkozó együtthatók közepes értékének meghatározására; Strahlentherapie **30**. 86. 1928.

[2] Ugyanezek a nehézségek forognak fenn, ha az ergométerrel csak a lámpa üvegén keresztül megszűrt lágy sugárzás dózisát akarjuk megmérni. Szerencsére azonban ez a gyakorlatban ritkán fordul elő, mert legalább néhány mm vastag alumínium-szűrőt használnak.

[3] Ehhez járult még 0·02 mm vastag alumínium-hártya az ergométerrel való méréskor és 0·01 mm vastag alumínium + 0·3 mm vastag cellonlemez az iónos kamrával való méréskor.

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

ekkor meg a dózisok alig különböznének egymástól és nagy mérési hibák csusznának be.

Szóval megállapíthatjuk a következő eredményt: ha a sugárzást olyan előzetes szűrésnek vetjük alá, hogy alkalmas vastagságú levegő-rendszámú szűrőt használva az (5a) egyenlet fennáll, akkor használhatjuk az iónos kamrát a sugárzás erősségének megmérésére, különben nem. (Az (5a) egyenlet fennállását persze csak ergométerrel vagy más energiamérővel lehet ellenőrizni.)

Lágy sugárzás esetében gondolni lehetne még spektroszkópiai eljárásra a sugárzás erősségének megmérése végett. Ugyanis ismert nyílású iónos kamrával végigmenve a színképen, megmérhetjük az egyes egynemű alkatrészek energiáját és esetleg az egész energiagörbe alá eső területet. Ez megadja a kristályról visszaverődő sugárenergiát. Kérdés, hogy mekkora a kristályra eső energia. Ennek meghatározása olyan nehéz feladat, hogy ez az út járhatónak alig látszik.

Foglalkoznunk kell még az összetett sugárzások *erősségének összehasonlításával.* Két esettel állunk szemben: az összehasonlítandó sugárzások viszonylagos összetétele megegyező és különböző. A viszonylagos összetétel megegyezése azt jelenti, hogy az összehasonlítandó sugárzások energiagörbéi úgy származtathatók egymásból, hogy egyiknek az ordinátáit egy bizonyos állandóval megszorozzuk. Ez az eset fordul elő például akkor, ha forgó ólom-körcikkel gyengítjük a különben állandó sugárzást, vagy ha a Röntgen-lámpa antikatódjától kétszerháromszor akkora távolságra megyünk. Nyilvánvaló, hogy ez esetekben mind a kemény, mind a lágy alkatrészek benne maradnak a sugárzásban, de az összes alkatrészek ugyanolyan mértékben csökkennek, tehát a színképi tartomány határai ném változnak meg. A második eset, a viszonylagos összetétel megváltozása akkor fordul elő, ha a lámpából kilépő összetett sugárzást valamilyen vastagabb fémszűrővel megszűrjük. Ekkor az energiagörbék nem származtathatók egymásból az előbbi módon, hanem a megszűrt sugárzás színképi tartománya jóval szűkebb, mint a lámpából kilépőé.

Könnyen belátható, hogy az első esetben, midőn megegyező színképi összetételű sugárzások összehasonlításáról van szó, az

iónos kamra felhasználható. Ugyanis a megfelezett vagy harmadolt összetett sugárzásnak a levegőre vonatkozó közepes hullámhossza változatlan, csak erőssége változik meg. Tehát az (5) képlet alapján belátható, hogy a sugárerősségek hányadosa egyenlő lesz a dózisok hányadosával.

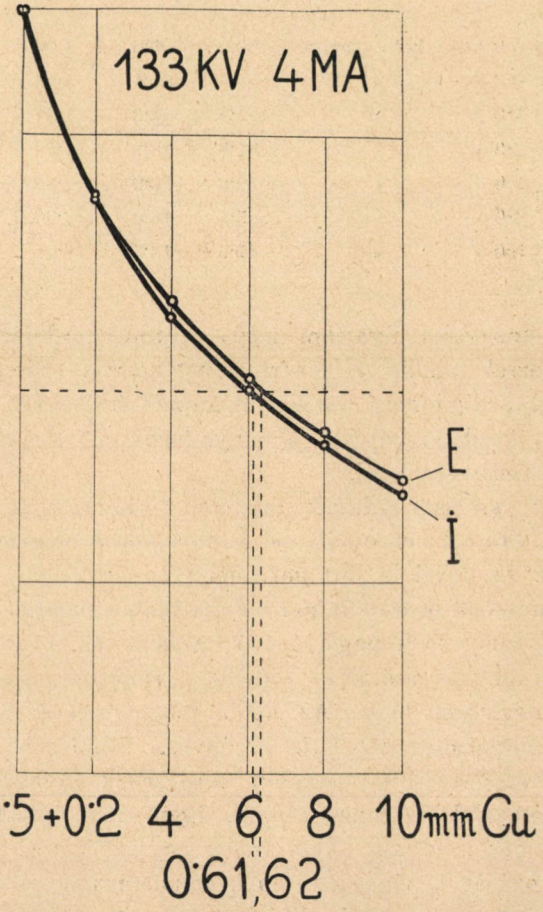
Gyakorlati szempontból jól felhasználható az iónos kamra az összetett sugárzások erősségének összehasonlítására akkor is, ha a sugárzás olyan előzetes szűrésen megy keresztül, hogy a további szűrés közben (bizonyos határig) közepes hullámhossza nem igen változik. Ez az eset forog fenn, ha a lámpa sugárzását legalább 0·5 mm vastag rézszűrőn bocsátjuk keresztül. Ha ez esetben a sugárzás erősségét még tovább csökkentjük az által, hogy újabb és újabb rézszűrőket iktatunk közbe és lépésről lépésre kiszámitjuk a kezdeti és a későbbi kitérések hányadosát, külön az ergométer és külön az iónos kamra mérési adataival, a két esetben elég jól megegyező számértékeket kapunk. Ezt igazolja a 2. táblázat.

2. táblázat.

Lámpa-terhelés	Sugárszűrő mm	Ergométer adatai	Iónos kamra adatai	Ergométer adatainak hányadosa	Iónos kamra adatainak hányadosa
133 kv 4 ma	0·5 Cu	100·0	100·0	1·00	1·00
	0·5+0·2 Cu	76·4	75·0	1·31	1·33
	0·5+0·4 «	61·8	59·5	1·62	1·68
	0·5+0·6 «	51·5	50·0	1·94	2·00
	0·5+0·8 «	44·6	42·8	2·24	2·34
	0·5+1·0 «	38·2	36·3	2·62	2·75

Az eredményeket rajzban is ábrázolhatjuk (1. kép). A szűrő vastagodásakor mind az iónos kamra, mind pedig az ergométer esetében süllyedő (exponenciális jellegű) görbét kapunk, melyek majdnem összeesnek. (Megjegyzendő, hogy a kényelmes ábrázolás végett mind az ergométerrel, mind az iónos kamrával kapott mérési adatokat egy olyan tényezővel szoroztuk meg, hogy a kezdeti értékek megegyezzenek: mindegyik 100 legyen.)

Nem használható fel az iónos kamra az olyan sugárzások erősségének összehasonlítására, amelyeknek viszonylagos összetétele lényegesen különbözik egymástól. Ilyenek pl. a lámpából közvetle-



1. kép. A vízszintes tengelyre a szűrők vastagságát, a függőlegesre pedig az ergométer, illetőleg az iónos kamra adatait mértük fel.

nül kilépő sugárzás és a különféle fémszűrőkön keresztül jutó sugárzás. E sugárzásokra vonatkozó méréseket tartalmazza a 3. táblázat.

A lámpából kilépő sugárzás útjába kezdeti szűrőnek csak fekete kartonlapot tettem, mert az antikatód élénken izzott,

3. táblázat.

Lámpa-terhelés	Sugárszűrő mm	Ergo-méter adatai	Iónos kamra adatai	Ergométer adatainak hányadosa	Iónos kamra adatainak hányadosa
88 kv	0·0 Al+fekete karton[1]	100·0	100·0	1·00	1·00
5 ma	0·5 « «	88·6	60·4	1·13	1·66
	1·0 « «	76·4	43·9	1·31	2·28
	2·0 « «	61·8	28·8	1·62	3·47
	3·0 « «	52·8	20·9	1·89	4·78
	4·0 « «	45·4	16·2	2·20	6·17
	5·0 « «	40·9	13·3	2·44	7·29

majd fokozatosan iktattam közbe aluminium-lemezeket és az ergométerrel mindig megmértem a sugárzás erősségét, a nagy kamrával pedig iónozó hatását. A kapott értékekkel mindig osztottam a kezdeti kitérést; a hányadosok a két esetben nagyon különböznek egymástól.

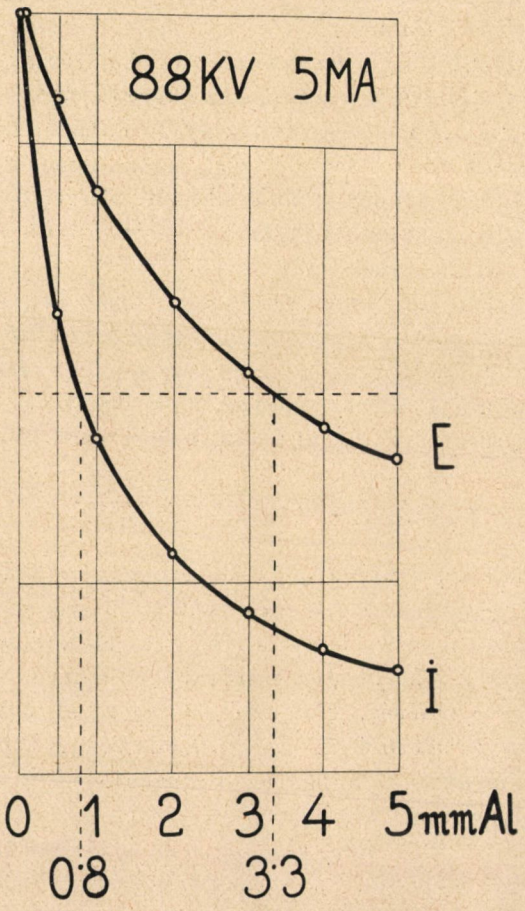
A 3. táblázat adatait rajzban is ábrázolhatjuk (2. kép). Látható, hogy az ergométerrel kapott görbe messze fölötte van az iónos kamrával kapott görbének; ennek az az oka, hogy az aluminium-szűrők csakhamar megfosztják a sugárzást lágy alkatrészeitől, melyeknek nagy iónozó hatásuk van, s így természetes, hogy az iónozás csökken, jóllehet a sugárzás erőssége sokkal kisebb mértékben fogy. (Az előbbi megjegyzés az észlelési adatokra vonatkozólag most is érvényes.) Mindezekből láthatjuk, hogyha tetszésszerinti összetett sugárzások erősségét a dózisok alapján akarjuk összehasonlítani, igen nagy hibába eshetünk.

Hasonló a helyzet akkor is, ha egy izzólámpa fényerősségének változását közönséges fényképezőlemezzel és bolométerrel akarjuk összehasonlítani, miközben folyton vastagodó vörös színszűrőt iktatunk közbe. Ugyanis ekkor a fényképezőlemez feketedése rohamosan csökken, jóllehet a sugárzás erőssége kisebb mértékben fogy; erről a bolométer tesz tanúságot.

Meggyőződtünk arról, hogy különböző összetételű sugárzások

[1] L. a 4. oldal 3. lábjegyzetét.

erősségét a dózisok alapján összehasonlítani nem lehet. Azonban kerülő úton elég jó eredményre juthatunk az iónos kamrával is. Ugyanis alkalmas levegő-rendszámú szűrőt használva, a



2. kép. A koordináták jelentése az 1. kép alatt található.

(2) és (5*a*) képlet alapján jó közelítésben megmérhetjük az összehasonlítandó sugárzások erősségét külön-külön; ekkor természetesen hányadosukat is ismerjük. Az iónos spektrográfiai eljárás ez esetben sem kecsegtet sok reménnyel. Az ergométerrel mindezek a mérések könnyen és pontosan elvégezhetők.

3. A felezőréteg megmérése.

Felezőréteg alatt olyan szűrőt értünk, amely a sugárzás erősségét felére csökkenti. Az orvosi gyakorlatban különösen fontos a felező rézréteg vastagsága, mert a szórt sugárzásból származó dózistöbbletet ennek alapján határozzák meg. Az a kérdés, hogy a felezőréteg vastagsága iónos kamrával mikor mérhető meg és mikor nem. (Az orvosi gyakorlatban általában iónos kamrával mérik meg a felezőréteget, tekintet nélkül a sugárzás összetételére.) Minthogy tulajdonképen összetett sugárzások erősségének összehasonlításáról van szó, a mérési feltételek az előbbiekben meg vannak adva.

Nyilvánvaló, hogy *egynemű sugárzás* esetében iónos kamrával meg lehet mérni a felezőréteg vastagságát. Mégpedig vagy próbálgatás útján határozzuk meg, vagy pedig a sugárzás gyengítési együtthatóját mérjük meg az iónos kamrával és a felezőréteg vastagságát úgy számítjuk ki, a következő képlet alapján

$$d_{\frac{1}{2}} \text{ (cm-ben mérve)} = \frac{0{\cdot}693}{\mu}.$$

Összetett sugárzás alkalmával azonban óvatosan kell eljárnunk. Két eset lehetséges. Előfordulhat, hogy a sugárzás olyan előzetes szűrésen megy keresztül, hogy a felezőréteg közbeiktatása keménységét lényegesen nem változtatja meg, vagyis fennáll az (5*a*) egyenlőség. Ekkor iónos kamrával elég pontosan megmérhető a felezőréteg. Így például az 1. képen látható, hogy 133 kilovolt és 4 milliampère lámpaterheléskor a 0·5 mm-es rézlemezzel megszűrt sugárzást felező rézréteg vastagsága iónos kamrával mérve 0·61 mm, ergométerrel mérve pedig 0·62 mm. A megegyezés kielégítő. Az orvosi gyakorlatban többnyire ilyen jól megszűrt sugárzást felező rézréteg vastagságát mérik meg iónos kamrával. A mondottak alapján ez megengedhető. Ez esetben az *iónozási felező réteg* vastagsága jól megegyezik az ergométerrel mért *valódi felezőréteg* vastagságával. Megváltoznak a viszonyok, ha a megfelezendő sugárzás lágy alkatrészeket is tartalmaz. Ekkor ugyanis a felező rézréteg közbeiktatása a sugárzás összetételét annyira megváltoztatja, hogy az iónozási dózisok

aránya alapján (5*a* képlet) egészen helytelen értéket kapunk a felezőréteg vastagságára. Így például 88 kilovolt és 5 milliampère lámpaterheléskor a lámpából közvetlenül kilépő sugárzás felezőrétege iónos kamrával mérve 0·8 mm vastag aluminium, míg ergométerrel mérve 3·3 mm vastag aluminium (2. kép); tehát *az iónozási felezőréteg vastagsága sokkal kisebb, mint a valódi felezőrétegé.* Ez a tapasztalat meggyőz bennünket arról, hogy a közönséges levegős iónos kamrát (akár nagy, akár kicsi) a valódi sugárfelezőréteg vastagságának meghatározására nem lehet mindig felhasználni, csak akkor, ha a sugárzás előzetesen alapos szűrésen esett át. Az iónos kamrával végzett eddigi felezőréteg-meghatározások, melyek az irodalomban előfordulnak, helyesek maradnak, ha *iónozási felezőrétegre* gondolunk, nem pegig *valódi felezőrétegre.*

*

Mindazok az eltérések, amelyek az iónos kamra és az ergométer adatai között tapasztalhatók, abban lelik magyarázatukat, hogy az iónos kamrával a sugárzás erősségének csak egy töredékét tudjuk megmérni, míg az ergométerrel az egész értékét. Ez még nem volna baj, ha tudnánk, hogy a töredék mekkora. Ezt azonban rendszerint csak egynemű sugárzáskor tudjuk, mert ekkor ismerjük pontosan a valódi elnyelési együtthatot és alkalmazhatjuk a (2) képletet. Máskor csak közelítésekre vagyunk utalva. Azonban lehet iónos kamrával is a teljes sugárerősséget megmérni, ha olyan nagy nyomású vagy nagy atomsúlyú és vastag rétegű gázt veszünk, hogy az iónos kamrából sugárzás nem lép ki, hanem a gáz az egész sugárzó energiát elnyeli és iónozásra fordítja. Persze még ismerni kell egy iónpár képzésére szükséges energia közepes értékét is. Az említett eset fordul elő, mikor lágy sugárzás esik nagynyomású levegős kamrába vagy esetleg más, például xenon-gázzal töltött iónos kamrába.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. dec. 14.-én tartott üléséből.)

DIE ENERGIEMESSUNG DER RÖNTGENSTRAHLUNG. IV. TEIL.

Von E. CSÁSZÁR, Korr. Mitglied der Akademie.

Der Verfasser bestimmt die Bedingungen der Anwendung der grossen, mit Luft gefüllten Ionisationskammer auf die Messung der Intensität der Röntgenstrahlung. (Die Intensität der Röntgenstrahlung ist die in einer Sekunde auf eine zur Strahlrichtung senkrecht gestellte Fläche von 1 cm^2 auftreffende Strahlungsenergie.) Gleichzeitig bestimmt der Verfasser die Bedingungen für die Vergleichung von Strahlungsintensitäten mit Ionisationskammer. Die Kontrollmessungen wurden mit dem vom Verfasser konstruierten Intensitätsmesser (Röntgenergometer) ausgeführt.

Im Falle *homogener Strahlung* verfährt man so, dass man die absorbierte Energie aus der in *r*/sec Einheiten gemessenen Luftdosisleistung berechnet (auf Grund der Zusammenhang $1r \sim 0{\cdot}107$ erg) und dann diese Energie mit dem wahren Absorptionskoeffizienten für Luft dividiert. Homogene Strahlungen gleicher Wellenlänge werden auf Grund ihrer Dosisleistung verglichen; wenn aber die Wellenlängen verschieden sind, müssen auch die Absorptionskoeffizienten bekannt sein.

Im Falle *zusammengesetzter Strahlung* kann man die Intensität aus der Dosisleistung allgemein nicht berechnen, weil der mittlere Wert des wahren Absorptionskoeffizienten für Luft mit der Ionisationskammer zu nicht bestimmen ist.[1] Nur in dem speziellen Falle, als die Strahlung vorläufig so stark gefiltert wird, dass ihr mittlerer Absorptionskoeffizient für Luft bei weiterer Filte-

[1] Mit dünnem Filter aus Luftmaterial wäre die Messung sehr ungenau.

rung mit Luftmaterial von der nötigen Dicke sich wesentlich nicht verändert, nur in diesem Falle ist es möglich die Strahlungsintensität aus der Luftdosis zu berechnen; nämlich nur in diesem Falle kann man den mittleren Wert des wahren Absorptionskoeffizienten mit der Kammer befriedigend bestimmen. Diese Behauptung unterstützt der Verfasser mit Messungsergebnissen. Die Vergleichung zusammengesetzter Strahlungen mit Ionisationskammer ist auch nur im Falle starker Filterung auszuführen. Im Gegenfalle ist das Verhältnis der Dosen vom Verhältnis der Intensitäten eventuell sehr verschieden. Der Verfasser teilt auch diesbezüglich seine Messergebnisse und graphische Darstellungen mit, welche bei 133 KV und 4 MA mit *Cu*-Filtern und bei 88 KV und 5 MA mit *Al*-Filtern erhalten wurden. Im ersten Falle stimmen die Daten der Ionisationskammer und des Ergometers ziemlich gut überein, aber im zweiten Falle wurden grosse Abweichungen gefunden.

Im letzten Teil der Abhandlung beschäftigt sich der Verfasser mit der Bestimmung der *wahren Halbwertschicht*. Seine Messungen erweisen, dass die wahre Halbwertschicht bei zusammengesetzter Strahlung nur nach starker Filterung mit Ionisationskammer bestimmbar ist, sonst bekommt man unrichtige Ergebnisse; z. B. bei 88 KV und 5 MA ohne Filter ist die mit Ergometer gemessene wahre Halbwertschicht 3·3 mm *Al* und die mit Ionisationskammer gemessene 0·8 mm *Al*.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Dezember 1936.)

A KOZMIKUS SUGÁRZÁS CSILLAGIDŐ PERIODICITÁSA.

BARNÓTHY JENŐ- és FORRÓ MAGDOLNÁ-tól.

A Kísérleti Fizikai Intézet Kozmikus Sugárzás Kutató Laboratóriumában 1934. július óta kis látóterű koincidencia készülékkel folytatólagosan mértük a kozmikus sugárzás erősségét. E mérések célja elsősorban az volt, hogy megállapítsuk vajjon a kozmikus sugárzás erősségében észlelhető-e egy csillagidő szerint periodikusan ismétlődő ingadozás. Ilyen periodikus ingadozás amellett szólna, hogy a sugárzás nem érkezik egyenlő erősségben a világür minden tájáról földünkre. A nagyobb intenzitású irányok meghatározása révén remélhető, hogy felvilágosítást nyerünk, hol keresendők a kozmikus sugárzás forrásai. Ezen mérések kapcsán azt is kimutattuk, hogy sem a napból, sem Nova-csillagokból mérhető erősségben kozmikus sugarak nem érkeznek.[1]

A használt készülék látótere észak-dél irányban 10°, kelet-nyugat irányban 40° volt. A használt elrendezések fontosabb adatai az I. táblázatban találhatók. Az I. sorozat kivételével a csövek közé 36 cm ólom abszorbens volt erősítve. A táblázat második oszlopában találjuk a látótér középvonalának a függőlegessel bezárt szögét ; a ferdítés a VIII. csoport kivételével mindenkor a függőlegestől dél felé történt, a VIII. csoportban észak felé. A regisztrálás óránként csillagidő szerint történt.

A kereken 20,000 óra tartamú mérés anyagát csoportonként mindenekelőtt korrigáltuk állandó légnyomás és állandó földmágneses térerősség értékre, más vizsgálatok során ugyanezen

---

[1] BARNÓTHY J. és FORRÓ M.: Z. f. Techn. Phys. 16, 395, 1935; Mat. és Fiz. Lap. 42, 79, 1935; Nature 135, 618, 1935; Nature 136, 680, 1935; Z. f. Phys. 94, 773, 1935; Nature 138, 544, 1936.

I. táblázat.

Csoport	δ	Csövek töltése	E Összabszorbens m vízben	A maximum	
				időpontja	magassága
I.	0°	levegő	10·0	20 2 m	1·06 %
II.	0°	«	14·3	17h 0m	1·04 %
VII.	24° *D*	«	15·2	16h 32m	1·90 %
III.	50° *D*	«	19·9	10h 5m	1·08 %
IV.	64° *D*	«	27·3	5h 56m	0·54 %
II/a	0°	argon + alkohol	14·3	20h 0m	0·59 %
III/a	50° *D*	«	19·9	11h 40m	0·33 %
VIII/a	64° *É*	«	27·3	20h 10m	1·15 %

elrendezésekkel meghatározott barométer[1] és mágneses effektus[2] értékek segítségével. Az egyes csoportokban így nyert korrigált intenzitásmenetet harmonikus analizisnek vetettük alá, melynek segítségével meghatároztuk az első harmonikus hullám amplitudójának nagyságát és a maximum időpontját (I. táblázat 5. és 6. oszlopa). A különböző helyzetekben különböző volt az abszorbeáló réteg vastagsága, egyrészt a csövek közti ólomabszorbens folytán, másrészt mert ferdébb helyzetekben a készülékbe érkező sugarak nagyobb vastagságú légrétegen kénytelenek áthaladni. (I. táblázat 4. oszlop.) A maximumok időpontja és az összabszorbens vastagsága közt az 1. ábrán látható monoton — első közelítésben lineárisnak tekinthető — összefüggést találtuk. A regressziós vonal egyenlete (azon csoportok alapján, hol a számlálócsövek levegővel voltak töltve):

$$y = 29^h37^m - 0{\cdot}90\,E \pm 1^h10^m$$

azon csoportok alapján melyekben a számlálócsövek argon és alkohol keverékével voltak töltve:

$$y = 31^h28^m - 0{\cdot}89\,E \pm 2^h40^m$$

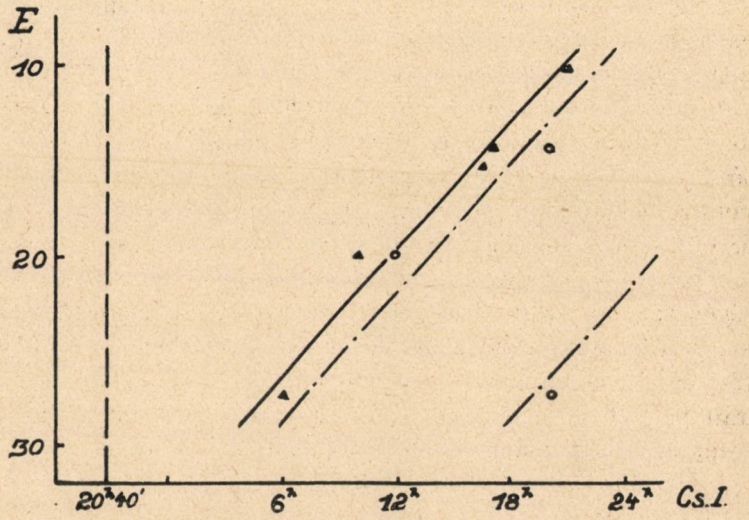
[1] Barnóthy J. és Forró M.: Mat. és Termtud. Értesítő 55, 525, 1937.
[2] Barnóthy J. és Forró M.: Mat. és Termtud. Értesítő

Az a körülmény, hogy ennyire különböző helyzetekben végzett mérések maximuma ily jól illeszthető egy lineáris összefüggésbe, továbbá, hogy az amplitudók közel egyenlők minden helyzetben, arra utal, hogy az erősségbeli változás nem egy interstelláris anizotropia folyománya (amilyen lenne pl. egy erősebb besugárzás a tejútrendszer irányából), hanem naprendszerünk transzlációs mozgásának hatásában keresendő, COMPTON és GETTING[1] hívták fel először a figyelmet arra a körülményre, hogy naprendszerünk transzlációs mozgása következtében a haladás irányából megnövekszik a beérkező részecskék energiája és száma. Ezen irány kulminációja $20^h\,40^m$ csillagidőben következik be (deklinációja $+\,47°$), vagyis, el nem térített sugarakra ekkor kellene kapnunk a maximum időpontját.

Méréseinkben fellelhető maximum azonban ezen időponthoz képest el van tolódva. Ezt úgy magyarázzuk, hogy a kozmikus sugárzás — mint azt más kísérletekből is tudjuk — elektromos töltésű részecskéket is tartalmaz és ezek a földmágneses térben eltérítést szenvednek, ami a maximumok időbeli eltolódását eredményezi. Az összabszorbens növekedésével a sugárzás puhább komponensei mindinkább kiszűretnek, a részecskék átlagos energiája növekszik és ennek megfelelően a földmágneses tér okozta eltérítés csökken. A maximum időpontja tehát mindinkább közeledik a haladási irány kulminációjának időpontjához, melynek az előző nap $20^h\,40^m$-e felel meg (lásd 1. ábra). A regressziós vonal irányából következik, hogy a jelenség létrehozásában túlnyomóan negatív töltésű részecskék szerepelnek. Ezen eltolódás helyes értelmezését igazolja a VIII. mérési csoport maximumának időpontja. A 64° észak felé helyzetben a készülék látótere a sarkcsillag alá irányul, miáltal a készülék látótere 12 órával a haladási irány kulminációja előtt vagy után néz a haladás iránya felé (jobban mondva az ezen irányból érkező részecskék beerező iránya felé) s így az erősségbeli változás hullámának maximuma félnapos fáziseltolással észlelhető. Mint az ábrából láthatjuk, az argon + alkohol töltésű számlálócsövekkel végzett mérések regressziós vonala bár ugyanolyan irányú mint a

[1] COMPTON, A. H. és GETTING, I. A.: Phys. Rev. 47, 817, 1935.

levegőtöltésű csövekkel végzett mérések vonala, — azonban hozzá képest 2 órával későbbi időpontok felé el van tolva. Ennek magyarázata az, hogy a levegőtöltésű számlálócsövek megszólalási valószínűsége csupán 3-ad része az argon+alkohol töltésűeknek. Miután pedig a kisebb energiájú korpuszkuláris részek kevesebb ionpárt termelnek úthosszegységenként, az argon+alkoholos csöveket nagyobb valószínűséggel tudják megszólaltatni s így az argon+



1. ábra.

△ a levegővel töltött csövekkel ⊙ az argon+alkohollal töltött csövekkel végzett mérésekre vonatkozik.

alkoholos csövek nagyobb százalékban mérnek puha sugarat, melyekre az eltérés s így az időbeli eltolás nagyobb.

Compton és Getting kiszámították, hogy a transzlációs mozgás folyományaként koincidencia-készülékre mekkora intenzitásnövekedést kellene észlelnünk a beérkező részek számának (n) megnövekedése folytán. Szerintük

$$\frac{\Delta n}{n} = \left[\frac{1}{(1-\beta)^3} - 1\right].F$$

ahol $F = {}^1/_2\,[\cos\varphi^{max} - \cos\varphi^{min}]$, φ az észlelő zenitje és a mozgás iránya közt bezárt szög, $\beta = 0{,}001$ a mozgás sebessége. A mi földrajzi szélességünk (47°30' N) mellett és az alkalmazott helyzetekben — ha a földmágneses tér eltérítő hatásátaz észak-dél irányban elhanyagoljuk — közepesen $F = 0{\cdot}6$ értékhez jutunk, amiből a várható hullám amplitudójára $\pm 0{\cdot}18\%$ értéket kapunk. Evvel szemben kísérleteinkben a hullám amplitudója középértékben $\pm 0{\cdot}9\%$ nagyságúnak adódott.

Az amplitudó nagyságát a következőkép magyarázzuk. Ugyanezen elrendezésekkel végzett méréseinkből megállapítottuk, (l. c.) hogy a földmágneses tér horizontális intenzitásának 10^{-5} Gaussal való növekedése a sugárzás erősségét $0{\cdot}06\%$-kal csökkenti. A csökkenés nyilván azáltal jön létre, hogy megváltozik az elektromos töltésű részecskék pályája a megváltozott mágneses térben. A pályák pontos alakját nem ismerjük, azonban a pálya minden pontjára érvényes nagy energiák esetében, hogy a görbületi sugár arányos a részecske energiájával és fordítva arányos a mágneses tér erősségével; amíg a változások relatív kicsinyek, a mágneses tér csökkenésének hatása a pálya alakjára tehát egyenértékű lesz a bejövő részecske energiájának megfelelő növekedésével. A transzlációs irányban fellépő energianövekedés folytán előálló intenzitás változás az ismert mágneses effektus segítségével számítható.

Ugyanis

$$\frac{d\left(\frac{\Delta J}{J}\right)}{d\left(\frac{\Delta H}{H}\right)} = -\frac{d\left(\frac{\Delta J}{J}\right)}{d\left(\frac{\Delta E}{E}\right)} = -12; \quad \frac{\Delta J}{J} = 12\frac{\Delta E}{E}.$$

A transzlációs mozgás folytán a részecske energiájának változása $\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{1-\beta} - 1 = 10^{-3}$, és így az intenzitásban észlelhető változás, vagyis a csillagidő periodus hullámának várható amplitudója

$$\frac{\Delta J}{J} F = \frac{\Delta E}{E}.12.0{\cdot}6 = 0{\cdot}7\,\%.$$

Hozzáadva a COMPTON és GETTING számításai alapján nyert $0{\cdot}18\%$ értéket, végeredményben nyerjük, hogy a hullám átlagos magassága $\pm 0{\cdot}9\%$ kellene lenni, igen jó egyezésben a kísérleti értékekkel.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy más számlálócső-elrendezésekre, vagy ionizációs kamrára az amplitudó lehet úgy kisebb mint nagyobb, mert a csillagidő hullám amplitudója részben a mágneses effektus nagyságától függ és ez a különböző berendezésekre különböző. Ionizációs kamra esetében a napi menet[1] és így a mágneses effektus is sokkal kisebb, itt tehát a COMPTON és GETTING által számított hatás dominál és a kísérleti eredményekkel megegyezően[2] sokkal kisebb amplitudó várható. A kísérletek[3] eredménye szerint záporelrendezésben sem sikerült mágneses effektus létezését kimutatni, tehát zápor elrendezésben is csak a COMPTON által számított amplitudót várhatjuk. Valóban a záporméréseinket harmonikusan analizálva, azt találtuk, hogy az első harmonikus hullám maximumának ideje sokkal korábbi órában, kb. déltájban következik be és amplitudójának magassága csupán $\pm 0{\cdot}18\%$, vagyis annyi, amennyit COMPTON számítása után várni lehetett. Érdekes volna zápor elrendezésben különböző vastag rétegek alatt méréseket végezni és így a maximumok időpontját mint az abszorbens vastagságának függvényét ábrázoló görbe irányításából következtetést vonni a záporokat kiváltó sugárzás természetére és a részecskék töltésének előjelére.

A méréseket a Természettudományi Tanács és a Széchenyi Tudományos Társaság támogatásával végeztük. Köszönetet mondunk dr. TANGL KÁROLY egyet. ny. r. tanár úrnak, a Kísérleti Fizikai Intézet igazgatójának mindenkori érdeklődéséért és támogatásáért.

---

[1] HESS, V. F. és ILLING, H. TH.: Terrest. Magn. a. Atm. Electr. March 1936.

[2] ILLING, H. TH.: Terrest. Magn. a. Atm. Electr. June 1936.

[3] FORRÓ M.: Math. Fiz. Lapok, 1937.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

STERNZEITLICHE PERIODE DER ULTRASTRAHLUNGSINTENSITÄT UND IHRE PHASENVERSCHIEBUNG.

Von J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ.

Mit verschiendenen Koinzidenzanordnungen wurden seit July 1934 fortlaufende Messungen ausgeführt die eine sternzeitliche Periodicität in der Ultrastrahlungsintensität ergaben. Der Zeitpunkt des Intensität-Maximums verschiebt sich mit wachsender Absorberdicke gegen frühere Zeiten, verursacht durch die Ablenkung negativ geladener Teilchen in dem erdmagnetischen Feld.
Die Intensitätsschwankung nach Sternzeit wir durch die Translationsbewegung unseres Sonnensystems verursacht. Die grösse der Amplitude ist im Durchschnitt $\pm 0{\cdot}9\%$, in gutem Einklang mit den Berechnungen, wenn man die Veränderung der Bahnkrümmung der Teilchen im Erdmagnetischen-Feld infolge Energieänderung der Teilchen in Betracht zieht.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A FÉMELEKTRONOK ELOSZLÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL ALKALIFÉMEK ESETÉBEN.

GOMBÁS PÁL-tól.

Néhány előző munkában a szerző a fémes kohézió magyarázatára egy módszert dolgozott ki, melynek segítségével az alkalifémek és az alkaliföldfémek állandóit a tapasztalattal jó megegyezésben lehetett meghatározni. Ezekben a munkákban a fémelektronok eloszlását konstansnak vettük. Jelen munka célja, egy közelítő eljárás segítségével alkalifémekben a fémelektronok eloszlását meghatározni.

Egy előző munkában kimutattuk, hogy az alkalifémek rácsenergiája, ha a magasabbrendű kicsiny tagoktól eltekintünk, a a következő formulával állítható elő:

$$U = -\int_\tau \frac{\varepsilon^2}{r}\varrho d\tau - \int_\tau \left((\psi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r}\right)\varrho\varepsilon d\tau + \frac{5}{3}\varkappa_F \int_\tau (\Delta\varphi)^{\frac{3}{5}}\varrho\varepsilon d\tau, \quad (1)$$

ahol ε jelenti a pozitív elemi töltést, r a magtól való távolságot, ϱ a fémelektronok sűrűségét, $d\tau$ a térfogatelemet. τ az a térrész, melyet az 1 elektront tartalmazó elemi gömb foglal el, ψ a mag potenciálja, φ az ion elektronfelhőjének a potenciálja, $-\frac{\Delta\varphi}{4\pi\varepsilon}$ pedig az ion elektronsűrűsége, $\varkappa_F$ a következő numerikus faktor

$$\varkappa_F = \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H. \quad (2)$$

(a_H = első hidrogén-radius)

Ha tehát a valenciaelektronoknak az ion elektronjaival való kicserélési (Austausch) kölcsönhatásától eltekintünk, akkor az

(1) alatti formula szerint a fém rácsenergiájának számításánál, a fémelektronoknak csakis az ionnal való kölcsönhatását kell figyelembe venni. Az (1) alatti formula első két tagja adja az ionnak a valenciaelektronra gyakorolt elektrosztatikus hatását, míg az utolsó tag a PAULI-principium következménye és az úgynevezett FERMI-féle taszítást adja. Amint látható a $-\frac{5}{3}\varkappa_F(\Delta\varphi)^{\frac{2}{3}}$ kifejezést, mint e taszítóerő potenciálját foghatjuk fel. Tehát közelítőleg a PAULI-principiumnak úgy tehetünk eleget, hogy az elektrosztatikus potenciálhoz még hozzávesszük a $-\frac{5}{3}\varkappa_F(\Delta\varphi)^{\frac{2}{3}}$ potenciált. Tehát a következő potenciált vezetjük be:

$$\Psi = \frac{\varepsilon}{r} + \left(\psi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r}\right) - \frac{5}{3}\varkappa_F(\Delta\varphi)^{\frac{2}{3}} \tag{3}$$

Első közelítésben feltehetjük, hogy egy elemi gömbben csak 1 elektron van jelen, vagyis a problémát redukálhatjuk egy egytest problémára. A valenciaelektron saját függvényét χ-t a következő SCHRÖDINGER-egyenletből határozhatjuk meg:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \Delta\chi + (E + \Psi\varepsilon)\chi = 0. \tag{4}$$

Tegyük fel, hogy χ 1-re normált, akkor

$$E = -\int_\tau \chi^* \Psi\varepsilon\chi d\tau - \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \int_\tau \chi^* \Delta\chi d\tau. \tag{5}$$

Mi a (4) egyenlet szigorú megoldása helyett az (5) alatti kifejezésből indulunk ki és χ-t úgy választjuk, hogy E-nek minimuma legyen. Ezáltal χ-nek egy közelítő értékét kapjuk.

Az iont legjobban LENZ és JENSEN függvényeivel írhatjuk le, melyek a következők:

$$\Delta\varphi = \frac{N_\varepsilon}{\lambda^3 P_0}\frac{e^{-x}}{x^3}(1 + c_1 x)^3, \quad \psi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r} = \frac{N\varepsilon}{r}e^{-x}\sum_{i=0}^{4} a_i x^i \tag{6}$$

$$r = \lambda x^2 \tag{7}$$

λ és c_1 paraméterek, melyeket JENSEN több ionra meghatározott.

Hogy lehetőleg egyszerű kifejezéseket kapjunk, χ-t mint x egyszerű kifejezését állítjuk elő, még pedig a következőképpen:

$$\chi = D e^{-\frac{\mu}{2}x} \sum_{i=0}^{n} \gamma_i x^i \qquad (8)$$

D a normálási faktor, μ és a γ_i-k paraméterek, melyeket úgy kell megválasztanunk, hogy E-nek minimuma legyen. Első közelítésben az $i \geqq 2$ indexű tagokat elhagyjuk, miáltal χ a következő kifejezésre redukálódik.

$$\chi = De^{-\frac{\mu}{2}x}(1+\gamma x), \qquad (9)$$

ahol γ_0 helyébe 1-et és γ_1 helyébe γ-t írtunk.

χ-nek a fémben periodikusnak kell lennie. Ezt a feltételt nagyon jó közelítésben a következő feltétellel helyettesíthetjük

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0, \qquad (10)$$

ahol R az elemi gömb sugara.

A (10) alatti feltételből nyerjük, hogy

$$\gamma = \frac{\mu}{2-\mu\xi}. \qquad (11)$$

ahol

$$\xi = \sqrt{\frac{R}{\lambda}}$$

Így tehát már csak egy független paraméterünk van, a μ, melyet abból a követelésből határozunk meg, hogy E minimum legyen.

A (9) alatti kifejezést (5)-be helyettesítve az integráció elvégzése után E-t mint ξ és μ függvényét nyerjük. Célunk, hogy ebből az összefüggésből különböző ξ-kre, pl. a

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$$

értékekre meghatározzuk azokat a μ értékeket, melyeknél az $E(\xi_i, \mu)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeknek rendre minimumuk van. Legyenek ezek a μ értékek a következők:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n.$$

Így minden összetartozó (ξ_i, μ_i) értékpárhoz megállapíthatjuk a hozzátartozó energiát $E_i = E(\xi_i, \mu_i)$-t. A (ξ_i, μ_i) értékpár egyúttal

a ξ_i-hez tartozó sajátfüggvényt, illetve elektroneloszlást is meghatározza.

A különböző ξ_i értékekhez tartozó E_i értékek E-nek ξ-től való függését adják. Legyen az E_i értékeknek a minimuma E_0, mely tartozzon a (ξ_0, μ_0) értékpárhoz. E_0, ξ_0 és μ_0 felelnek meg a stabilis egyensúlyi helyzetnek.

Módszerünket a kálium fémre alkalmazzuk. Eredményeink az 1 táblázatban vannak feltüntetve. A második oszlop tartalmazza azokat az eredményeket, melyeket ebben a munkában értünk el. A harmadikban azok az eredmények állnak, melyeket konstans sűrűségeloszlással számítottunk, mégpedig oly módon, hogy a rácsenergia kifejezésében a magasabbrendű kicsiny tagokat is megtartottuk. A negyedik oszlop a kísérletileg meghatározott állandókat tartalmazza.

	Jelen munka eredményei	Konstans ϱ-val elért eredmények	Kísérleti eredmények
R_0 Å egységekben	2·66	2·67	2·54
E_0 $\frac{\text{kcal}}{\text{Mol}}$ egységekben	116·5	112·4	126·2
S $\frac{\text{kcal}}{\text{Mol}}$ egységekben	16·8	12·7	26·5

Amint a táblázatból kitűnik, az itt kidolgozott módszer segítségével meghatározott állandók a kísérletileg meghatározott konstansokat jobban megközelítik, mint a konstans sűrűségeloszlással számított állandók.

A stabilis egyensúlyi helyzetben és annak környezetében az elektroneloszlás $\chi^*\chi$ az ion elektronfelhőjén kívül csaknem konstansnak adódik, ami megfelel a várakozásunknak. Ugyanis a nátrium-fém esetében WIGNER és SEITZ hasonló eredményre jutottak. Az ionon belül az eloszlás már lényegesen különbözik a konstanstól, de a valódit ebben a térrészben csak közelítőleg írhatja le, mert az iont statisztikai módon kezeltük, aminek megfelelően az ion belsejében az elektroneloszlás számára csak egy átlagértéket kaphatunk. Mivel azonban az ion az 1 elektront

tartalmazó elemi gömbnek csak kis része és mivel az ion elektronfelhőjén kívül, ahol $\Psi = \frac{\varepsilon}{r}$, a közelítésünk lényegesen jobb, eredményeink pontossága kielégítő.

Eredményeinket természetesen mint egy első közelítést kell felfognunk, de ezek pontosságát fokozhatjuk, ha a (8) alatti kifejezésben nemcsak μ-t és γ_1-et, hanem több paramétert tartunk meg.

Elméleti Fizikai Intézet, Budapest, 1937. április.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május hó 24-én tartott üléséből.)

ZUR BESTIMMUNG DER VERTEILUNG DER METALLELEKTRONEN IN ALKALIMETALLEN.

Von PAUL GOMBÁS in Budapest.

In der vorliegenden Arbeit wird auf Grund einer vom Verfasser angegebenen statistischen Methode eine vereinfachte Methode zur Bestimmung der Verteilung der Metallelektronen in Alkalimetallen ausgearbeitet. Für die Metallelektronen des Kaliums erhält man ausserhalb der Atomrümpfe eine konstante Verteilung. Die Resultate werden ausführlich besprochen.

1. §. Einleitung.

Vom Verfasser wurde in einigen früheren Arbeiten[1] eine statistische Methode zur Erklärung der metallischen Bindung und zur Berechnung der wichtigsten Konstanten der Metalle entwickelt. Es wurde angenommen, dass das Metall aus den Ionen und den Metallelektronen aufgebaut sei, wobei wir für die letzteren eine konstante Verteilung ansetzten. Das Ziel war die Berechnung der Gitterenergie, aus welcher wir alle weiteren Konstanten erhielten. Eine mögliche Verbesserung unserer Methode kann man nun dadurch erreichen, dass man die Verteilung der Metallelektronen nicht als konstant annimmt, sondern diese genauer bestimmt. Wir gehen von der Gitterenergie aus. Für diese erhält man nach den zitierten Arbeiten folgenden Ausdruck

$$U = U_C + U_F + U_A + U_K + W_E + W_F + W_A + V + V_P, \qquad (1)$$

[1] P. GOMBÁS, Zs. f. Phys. 94, 473, 1935; 95. 687, 1935; 99, 729, 1936; 100, 599, 1936; 104, 81, 1936 im folgenden als 1 zitiert; 104, 592, 1937.

wo die Zeichen folgende Bedeutung haben: U_C ist die Summe der elektrostatischen Wechselwirkungsenergie der Ionenladung mit den Metallelektronen und der gegenseitigen elektrostatischen Wechselwirkungsenergie der Metallelektronen, U_F bedeutet die Fermische Nullpunktsenergie und U_A die Austauschenergie der Metallelektronen, U_K gibt die elektrostatische Energieverminderung, welche aus der gegenseitigen Wechselwirkung der Metallelektronen mit antiparallelem Spin resultiert. Die Energieterme W_E, W_F und W_A folgen aus dem Eindringen des Metallelektronengases in die Atomrümpfe und zwar bedeutet W_E die zusätzliche elektrostatische Energie, W_F die Erhöhung der Fermienergie und W_A die zusätzliche Austauschenergie, welche aus dem Eindringen des Metallelektronengases resultieren. Die Energien V und V_P sind durch die Rumpfelektronen bedingt und zwar ist V diejenige Energie, welche aus dem Überlappen der Elektronenwolken der Rümpfe resultiert und V_P die gegenseitige van der Waals'sche-Energie der Atomrümpfe.

Wir beschränken uns im folgenden nur auf Alkalimetalle, bei welchen man annehmen kann, dass das Metallelektronengas 1 Elektron pro Ion enthält. In l. c. 1 konnte gezeigt werden, dass man für Alkalimetalle schon eine sehr gute Näherung enthält, wenn man in der Gitterenergie nur jene Energieterme behält, welche aus der Wechselwirkung der Metallelektronen mit den Ionen resultieren, da diese die übrigen bedeutend überwiegen. Die Wechselwirkungsenergie. W_A, welche der Austauschwechselwirkung der Metallelektronen mit den Atomrümpfen Rechnung trägt, kann man wie in l. c. 1 begründet wurde, ebenfalls vernachlässigen. Wie in l. c. 1 gezeigt wurde, kann man die Gitterenergie der Alkalimetalle in guter Näherung durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$U = -\int_\tau \frac{\varepsilon^2}{r}\varrho d\tau - \int_\tau \left(\psi+\varphi-\frac{\varepsilon}{r}\right)\varrho\varepsilon d\tau + \frac{5}{3}\varkappa_F\int_\tau (\Delta\varphi)^{\frac{2}{3}}\varrho\varepsilon d\tau. \quad (2)$$

wo ε die positive Elementarladung r die Entfernung vom Kern und $d\tau$ das Volumenelement bedeutet, ψ ist das Potential des Kernes φ das Potential der Elektronenwolke des Ions und

$\Delta\varphi$ das $4\pi\varepsilon$-fache der Elektronendichte des Ions, ϱ bezeichnet die Dichte der Metallelektronen, $\varkappa_F$ ist folgender Zahlenfaktor:

$$\varkappa_F = \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H \qquad (3)$$

(a_H = erster Hydrogen-Radius)

τ ist derjenige Raumteil, welchen die 1 Ion enthaltende Elementarkugel beansprucht, deren Mittelpunkt mit dem Kern eines Ions zusammenfällt.

Das erste Glied von (2) gibt die elektrostatische Wechselwirkungsenergie der einfachen Ionenladung mit dem Metallelektronengas, das zweite und dritte Glied ist bis auf kleine Grössen von höherer Ordnung mit W_E bzw. W_F identisch.

2. §. Die Fermische Abstossung.

Aus dem Energieausdruck (2) ist nun folgendes zu sehen. In alle drei Gliedern von (2) geht ϱ linear ein. Bei dem ersten und zweiten Glied ist dies selbstverständlich, da es sich um elektrostatische Wechselwirkungen handelt und die Grössen $\frac{\varepsilon}{r}$, bzw. $\psi+\varphi-\frac{\varepsilon}{r}$ welche in den genannten Integralen neben ϱ stehen, die elektrostatischen Potentiale bedeuten. Bemerkenswert ist nun, dass ϱ auch in das dritte Glied linear eingeht. Dieses gibt in erster Näherung die Erhöhung der Fermischen Nullpunktsenergie, welche daraus resultiert, dass das Metallelektronengas in den Rumpf eindringt. Da dieses Glied immer positiv ist, bedeutet dies, dass man um die Metallelektronen in die Atomrümpfe zu drücken Energie aufwenden muss. Dass dies so sein muss, ist sehr leicht einzusehen, da das letzte Glied in (2) eine Folge des Pauli-Prinzips ist, nach welchen sich in einer Elementarzelle des Phasenraumes nur höchstens 2 Elektronen befinden können. Da die Elektronen die tiefsten Elementarzellen des Phasenraumes besetzen, so muss mann, wenn man die Metallelektronen in die Rümpfe drückt, Elektronen in Phasenzellen von höherer Energie heben, was natürlich einen Energieaufwand bedeutet. Das Pauli-Prinzip äussert sich also darin,

dass die Rumpfelektronen auf das Valenzelektron einen Druck, also eine Abstossungskraft ausüben und man kann den Ausdruck $-\frac{5}{3}\varkappa_F(\Delta\varphi)^{\frac{5}{3}}$ anschaulich als das Potential dieser Abstossungskraft ansehen.

Dadurch haben wir uns von jeder Besetzungvorschrift für den Quantenzustand des Valenzelektrons wie schon HELLMANN bemerkte,[2] freigemacht und können die Besetzungvorschrift durch das Abstossungspotential $-\frac{5}{3}\varkappa_F(\Delta\varphi)^{\frac{5}{3}}$ beschreiben. Die elektrostatische Wirkung des gesamten Ions und die Besetzungsvorschrift kann man also durch folgendes Potential beschreiben:

$$\Psi = \frac{\varepsilon}{r} + \left(\psi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r}\right) - \frac{5}{3}\varkappa_F(\Delta\varphi)^{\frac{5}{3}}. \tag{4}$$

In diesem Ausdruck hebt sich im ersten und zweiten Glied $\frac{\varepsilon}{r}$ auf, es ist aber für das folgende zweckmässig diese Gestalt zu behalten.

3. §. Das Variationsprinzip.

Die Elektronenverteilung unter ganz allgemeinen Voraussetzungen zu bestimmen würde zu grossen mathematischen Schwierigkeiten führen, wir begnügen uns daher mit einer Näherung. Wir nehmen an, dass sich in erster Näherung in einer Elementarkugel nur 1 Elektron befindet und wollen die Eigenfunktion dieses Elektrons, welches sich im Potentialfeld (4) befindet, bestimmen. Diese wird durch folgende Differentialgleichung bestimmt

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \Delta\chi + (E + \Psi\varepsilon)\chi = 0. \tag{5}$$

Wenn man annimmt, dass die Eigenfunktion χ auf 1 normiert ist, so folgt für E

$$E = -\int_\tau \chi^* \Psi\varepsilon\chi d\tau - \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \int_\tau \chi^* \Delta\chi d\tau. \tag{6}$$

[2] H. HELLMANN, Acta Physicochimica URSS. 1, 913, 1935.

Anstatt die Gleichung (5) exakt zu lösen, bestimmen wir χ mit Hilfe des Ritz'schen Approximationsverfahrens näherungsweise aus dem Energieausdruck (6). Wir machen also für χ einen Ansatz, welcher dem vorliegenden Problem entspricht und den Randbedingungen genügt. Ausserdem müssen wir auch darauf Rücksicht nehmen, dass unser Ansatz von möglichst einfacher Gestalt sei, da man sonst auf bedeutende mathematische Schwierigkeiten stösst. Um einen möglichst einfachen Ansatz wählen zu können, müssen wir uns zunächst mit dem Rumpf befassen, da die Elektronendichte und das Potential des Rumpfes in die auszuwertenden Integrale eingehen. Die Elektronenverteilung und das Potential des Rumpfes beschreiben wir mit Hilfe der statistischen Funktionen von LENZ und JENSEN.[3] Nach diesen ist

$$\Delta\varphi = \frac{N\varepsilon}{\lambda^3 P_0}\,\frac{e^{-x}}{x^3}\,(1+c_1 x)^3, \quad P_0 = 4(1+9c_1+36c_1^2+60c_1^3) \tag{7}$$

$$\psi+\varphi-\frac{\varepsilon}{r} = \frac{N\varepsilon}{r}\,g(x), \quad g(x) = e^{-x}\sum_{i=0}^{4} a_i x^i \tag{8}$$

$$r = \lambda x^2 \tag{9}$$

λ und c_1 sind Konstanten, welche für mehrere Atome und Ionen bei Jensen tabelliert sind, N bedeutet die Zahl der Elektronen des Atoms oder Ions, die Koeffizienten a_i sind einfache Funktionen von c_1.

Hieraus sieht man, dass $\Delta\varphi$ und $\psi+\varphi-\frac{\varepsilon}{r}$ einfache Funktionen von x nicht aber von r sind. Wenn wir also auf nicht zu grosse mathematische Schwierigkeiten stossen wollen, so müssen wir unseren Ansatz diesem Umstand anpassen. Wir werden also für χ eine möglichst einfache Funktion von x wählen und zwar setzen wir

$$\chi = De^{-\frac{\mu}{2}x}\sum_{i=0}^{n}\gamma_i x^i \tag{10}$$

D ist ein Normierungsfaktor, μ und die γ_i sind aus der Minimumsforderung von (6) zu bestimmen, wobei natürlich $\gamma_0=1$ gesetzt werden darf.

[3] W. LENZ, Zs. f. Phys. 77, 713, 1932; H. JENSEN, Zs. f. Phys. 77, 722, 1932.

Wir führen hier die erste Näherung durch indem wir $n=1$ setzen. Wenn wir noch $r_0=1$ und $\gamma_1=\gamma$ schreiben, erhalten wir

$$\chi = De^{-\frac{\mu}{2}x}(1+\gamma x) \tag{11}$$

χ enthält zwei Parameter μ und γ. Diese sind jedoch von einander nicht unabhängig, denn χ hat noch einer Nebenbedingung zu genügen. Das Gitterpotential ist periodisch, demzufolge muss χ die gleiche Periodizität aufweisen. Wie WIGNER und SEITZ zeigten, kann man diese Bedingung in sehr guter Näherung dadurch erfüllen, dass man fordert, dass der erste Differentialquotient von χ nach r am Rande der Elementarkugel verschwindet, wenn man also

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0 \tag{12}$$

setzt, wo R den Radius der Elementarkugel bedeutet. Wenn wir den zu R gehörenden χ-Wehrt mit ξ bezeichnen, wenn wir also

$$R = \lambda\xi^2 \tag{13}$$

schreiben, so folgt aus (12)

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_{r=R} = \left(\frac{1}{2\lambda x}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_{x=\xi} = \frac{De^{-\frac{\mu}{2}\xi}}{2\lambda\xi}\left[\gamma - \frac{\mu}{2}(1+\gamma\xi)\right] = 0 \tag{14}$$

woraus man für γ erhält:

$$\gamma = \frac{\mu}{2-\mu\xi}. \tag{15}$$

Dadurch wird also γ eine Funktion von μ und ξ. Wir haben also nur mehr einen freien Parameter μ, den wir aus der Minimumsforderung der Energie bestimmen.

Für den Normierungsfaktor D erhält man, da alles kugelsymmetrisch ist, folgende Bestimmungsgleichung

$$\int_0^R \chi\chi^* 4\pi r^2 dr = 8\pi D^2\lambda^3 \int_0^\xi e^{-\mu x}(1+\gamma x)^2 x^5 dx = 1. \tag{16}$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$\int_0^{\xi} e^{-\mu x}(1+\gamma x)^2 x^5 dx = T_0(\xi, \mu) \tag{17}$$

einführen, so folgt

$$D = \frac{1}{[8\pi\lambda^3 T_0(\xi, \mu)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{18}$$

4. §. Bestimmung des Gitterabstandes, der Gitterenergie und der Elektronenverteilung.

Wir gehen nun zur Berechnung von E über. Der Kürze halber führen wir folgende Bezeichnungen ein

$$E_C = -\int_\tau \frac{\varepsilon^2}{r}\chi^*\chi d\tau \quad \text{und} \quad E_K = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \int_\tau \chi^* \Delta\chi d\tau. \tag{19}$$

Uns interessiert die Energie E nur in der Nähe der Gleichgewichtslage, wo die Elementarkugel bedeutend grösser ist als der Atomrumpf. Die Grössen $\psi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r}$ und $(\Delta\varphi)^{\frac{3}{2}}$ nehmen nur im inneren der Elementarkugel bedeutende Werte an und sind im äusseren Teil der Elementarkugel praktisch Null. Man kann also in den Energietermen W_E und W_F die Integration auf den ganzen Raum ausdehnen, was bei der numerischen Durchführung der Rechnungen eine grosse Vereinfachung bedeutet. Man kann also setzen

$$\begin{aligned} W_E &= -4\pi\varepsilon \int_0^{\infty} \left(\psi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r}\right)\chi^*\chi r^2 dr, \\ W_F &= \frac{20}{3}\varkappa_F \pi\varepsilon \int_0^{\infty} (\Delta\varphi)^{\frac{3}{2}}\chi^*\chi\, r^2 dr. \end{aligned} \tag{20}$$

Unser Ziel ist die Energieterme (19) und (20) zu berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} E_C = -\int_\tau \frac{\varepsilon^2}{r}\chi^*\chi d\tau &= -8\pi D^2\lambda^2\varepsilon^2 \int_0^{\xi} e^{-\mu x}(1+\gamma x)^2 x^3 dx = \\ &= -8\pi D^2\lambda^2\varepsilon^2 T_1(\xi, \mu) \end{aligned} \tag{21}$$

wo

$$T_1(\xi, \mu) = \int_0^{\xi} e^{-\mu x}(1+\gamma x)^2 x^3 dx \tag{22}$$

ist

$$E_K = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \int_\tau \chi^* \Delta\chi d\tau = -2\pi\varepsilon^2 a_H \int_0^R \chi^* \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\chi}{\partial r}\right) dr. \tag{23}$$

Woraus durch partielle Integration folgt

$$E_K = 2\pi\varepsilon^2 a_H \int_0^R \frac{\partial\chi^*}{\partial r} \frac{\partial\chi}{\partial r} r^2 dr. \tag{24}$$

Wenn wir berücksichtigen, dass in unserem Falle $\chi^* = \chi$ ist und statt r die veränderliche x einführen, so folgt

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{\pi}{4} D^2\lambda\varepsilon^2 a_H \mu^2\gamma^2 \int_0^{\xi} e^{-\mu x}(\xi^2 - 2\xi x + x^2) x^3 dx = \\ &= \frac{\pi}{4} D^2\lambda\varepsilon^2 a_H T_2(\xi, \mu) \end{aligned} \tag{25}$$

mit

$$T_2(\xi, \mu) = \mu^2\gamma^2 \int_0^{\xi} e^{-\mu x}(\xi^2 - 2\xi x + x^2) x^3 dx. \tag{26}$$

Die Energieterme W_E und W_F kann man einfach berechnen und zwar wird

$$W_E = -4\pi \int_0^{\infty} \frac{N\varepsilon^2}{r} g(x)\chi^*\chi r^2 dr =$$

$$= -8\pi N\varepsilon^2 D^2\lambda^2 \int_0^{\infty} g(x) e^{-\mu x}(1+\gamma x)^2 x^3 dx = -8\pi N\varepsilon^2 D^2\lambda^2 T_3(\xi, \mu) \tag{27}$$

mit

$$\begin{aligned} T_3(\xi, \mu) &= \int_0^{\infty} g(x) e^{-\mu x}(1+\gamma x)^2 x^3 dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+\mu)x}(1+\gamma x)^2 \left(\sum_{i=0}^{4} a_i x^i\right) x^3 dx \end{aligned} \tag{28}$$

$$W_F = \frac{20}{3} \varkappa_F \pi \varepsilon \int_0^\infty \left(\frac{N\varepsilon}{\lambda^3 P_0}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{e^{-\frac{2}{3}x}}{x^2} (1+c_1 x)^2 \chi^* \chi r^2 dr =$$

$$= \frac{40}{3} \varkappa_F \pi D^2 \lambda^3 \left(\frac{N\varepsilon}{\lambda^3 P_0}\right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon \int_0^\infty e^{-(\frac{2}{3}+\mu)x} (1+c_1 x)^2 (1+\gamma x)^2 x^3 dx =$$

$$= \frac{40}{3} \varkappa_F \pi D^2 \lambda^3 \left(\frac{N\varepsilon}{\lambda^3 P_0}\right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon T_4(\xi, \mu) \tag{29}$$

mit

$$T_4(\xi, \mu) = \int_0^\infty e^{-(\frac{2}{3}+\mu)x} (1+c_1 x)^2 (1+\gamma x)^2 x^3 dx. \tag{30}$$

Wenn man noch den Ausdruck für D einsetzt, erhält man für die Energieterme

$$E_C = C_1 \frac{T_1(\xi, \mu)}{T_0(\xi, \mu)}, \qquad C_1 = -\frac{\varepsilon^2}{\lambda} \tag{31}$$

$$E_K = C_2 \frac{T_2(\xi, \mu)}{T_0(\xi, \mu)}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon^2 (b_H}{32\lambda^2} \tag{32}$$

$$W_E = C_3 \frac{T_3(\xi, \mu)}{T_0(\xi, \mu)}, \qquad C_3 = -\frac{N\varepsilon^2}{\lambda} \tag{33}$$

$$W_F = C_4 \frac{T_4(\xi, \mu)}{T_0(\xi, \mu)}, \qquad C_4 = \frac{5}{3} \varkappa_F \varepsilon \left(\frac{N\varepsilon}{\lambda^3 P_0}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{34}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sind von ξ und μ unabhängige Konstanten. Die Berechnung von T_0, T_1, T_2, T_3 und T_4 ist ziemlich mühsam und wird weiter unten besprochen.

Die obigen Ausdrücke stellen die Energieterme als Funktionen von ξ und μ dar. Die Gesamtenergie E setzt sich aus diesen additiv zusammen, es ist also

$$E = E_C + E_K + W_E + W_F. \tag{35}$$

Unser Ziel ist nun folgendes. Wir wollen in der Gleichgewichtslage und in deren Umgebung die Ladungsverteilung, also die Eigenfunktion des Valenzelektrons bestimmen. Dies können wir für eine bestimmte Gitterkonstante, also für einen gegebenen R_i-bzw. ξ_i-Wert folgendermassen durchführen. Da $\xi = \xi_i$ konstant ist, hängt dann E nur mehr vom Parameter

μ ab. Wir haben nun E als Funktion von μ zu bestimmen und das Minimum der Energie festzustellen. Der zu diesem Minimum gehörende μ-Wert, welchen wir μ_i nennen, ist der zu dem betreffenden ξ_i gehörende Wert von μ. Unser Ziel ist also zunächst für verschiedene ξ_i-Werte die zugehörigen μ_i-Werte zu bestimmen. Es seien die verschiedenen ξ-Werte die folgenden

$$\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_i,\ldots,\ \xi_n \tag{36}$$

und nehmen wir an, dass zu diesen der Reihe nach die folgenden μ-Werte gehören

$$\mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_i,\ldots,\ \mu_n \tag{37}$$

Zu jedem zusammengehörenden Wertepaar $(\xi_i,\ \mu_i)$ gehört ein bestimmter Energiewert $E(\xi_i,\ \mu_i)$, welchen wir der Kürze halber mit E_i bezeichnen. Dieser ist das Minimum der Funktion $E(\xi_i,\ \mu)$. Die den obigen Wertepaaren entsprechenden E-Werte seien die folgenden

$$E_1,\ E_2,\ldots,\ E_i,\ldots,\ E_n. \tag{38}$$

Auf diese Weise kann man also die Energie E für verschiedene Gitterkonstanten bestimmen und feststellen, für welche Gitterkonstante die E_i-Werte ein Minimum aufweisen. Dieses Energieminimum, welches also ein Minimum der Energieminimis E_i darstellt, entspricht der stabilen Gleichgewichtslage. Wir bezeichnen diese Energie mit E_0. Das dazugehörige Wertepaar $(\xi,\ \mu)$, welches wir mit $(\xi_0,\ \mu_0)$ bezeichnen, gibt die Gitterkonstante und Eigenfunktion in der Gleichgewichtslage.

Die Eigenfunktion für eine bestimmte Gitterkonstante, bzw. ξ-Wert z. B. für ξ_i ist durch das zusammengehörende Wertepaar $(\xi_i,\ \mu_i)$ festgelegt, da durch diese beiden Parameter die Eigenfunktion eindeutig bestimmt ist.

Wir haben hier die Bestimmung von μ_i, $E_i (i = 1, 2,\ldots, n)$, E_0, μ_0 und ξ_0 in ganz elementarer Weise abgefasst. Bedeutend übersichtlich ist folgende Formulierung: μ_i erhält man als Wurzel folgender Gleichung

$$\frac{\partial E(\xi_i, \mu)}{\partial \mu} = 0 \tag{39}$$

dadurch ist die Eigenfunktion für die Gitterkonstante ξ_i und die Energie $E_i = E(\xi_i, \mu_i)$ festgelegt.

Die Gitterkonstante und die Eigenfunktion in der stabilen Gleichgewichtslage werden durch folgendes Gleichungsystem bestimmt

$$\frac{\partial E(\xi, \mu)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial E(\xi, \mu)}{\partial \mu} = 0 \tag{40}$$

dessen Lösung (ξ_0, μ_0) die Gitterkonstante und die Eigenfunktion in der stabilen Gleichgewichtslage geben. Die dazugehörige Energie ist $E_0 = E(\xi_0, \mu_0)$.

Diese allgemeine Fassung gibt einen besseren Einblick in unsere Methode. Im folgenden können wir aber trotzdem nicht dieser Fassung folgen, da das Lösen der Gleichung (39) und des Gleichungsystems (40) zu grossen mathematischen Schwierigkeiten führen würde. Darum ist es für die praktische Durchführung der Rechnungen bedeutend einfacher der obigen elementaren Denkweise zu folgen.

Zufolge unseres einfachen Ansatzes erhalten wir für die Eigenfunktion nur eine erste Näherung. Man könnte natürlich zu höheren Näherungen übergehen, indem man noch weitere Parameter hinzunimmt. Es zeigt sich aber, dass schon die erste Näherung die wesentlichsten Eigenschaften der Eigenfunktion enthält. Bei der Beurteilung der Näherung haben wir noch folgendes zu berücksichtigen. Die Elementarzelle kann man in der stabilen Gleichgewichtslage praktisch in zwei Teile zerlegen. Und zwar in den inneren Teil, in welchem die Elektronendichte des Rumpfes $\frac{\Delta\varphi}{4\pi\varepsilon}$ und das Potential $\varphi + \varphi - \frac{\varepsilon}{r}$ gross sind und in den äusseren Teil, in welchem diese Grössen praktisch Null sind. In dem äusseren Gebiet steht das Valenzelektron nur unter der Wirkung des Coulomb'schen Potentials der Ionenladung, während im inneren Gebiet zu diesen die im 1. § und 2. § diskutierten Rumpfwirkungen hinzukommen. Da wir diese letzteren mit Hilfe des statistischen Modelles beschreiben, können wir natürlich für die Eigenfunktion im inneren Gebiet nur einen Näherungswert erwarten, welcher die exakte Eigenfunktion nur einigermassen approximiert. Bedeutend besser liegen die Verhält-

nisse im äusseren Gebiet, da man dort das Potential exakt kennt, so dass man erwarten kann, dass in diesem Gebiete die exakte Eigenfunktion durch unsere Näherung gut angenähert wird. Da in der stabilen Gleichgewichtslage das innere Gebiet nur einen kleinen Teil des äusseren beträgt, so ist unsere Näherung gut brauchbar.

5. §. Resultate für das metallische Kalium.

Wir wenden im folgenden unsere Methode auf das metallische Kalium an. Dieses Metall wurde vom Verfasser in einigen früheren Arbeiten ausführlich diskutiert, wobei aber die Verteilung der Metallelektronen als konstant angesetzt wurde. Es soll hier untersucht werden, welche Verbesserung man erzielen kann, wenn man die Elektronenverteilung nach den hier gegebenen Ausführungen bestimmt.

Aus den wellenmechanischen Untersuchungen von Wigner und Seitz[4] geht hervor, dass die Eigenfunktion des Valenzelektrons im metallischen Natrium ausserhalb des Atomrumpfes, also im grössten Teil der Elementarkugel konstant ist. Analoge Resultate liegen für das metallische Lithium vor, welches von Seitz[5] behandelt wurde. Wir werden also für die anderen Alkalimetalle, also auch für Kalium analoge Resultate erwarten. Unser Ansatz gibt eine in der gesamten Elementarkugel konstante Verteilung für $\mu = 0$, womit wir auf unsere früheren Rechnungen zurückkommen. Für Werte von μ deren Absolutwert gross ist, gibt unser Ansatz, da dieser den Faktor $e^{-\mu x}$ enthält, Verteilungen, welche von der konstanten beträchtlich abweichen. Wir werden also erwarten, dass in der Umgebung der Gleichgewichtslage der Betrag der μ_i-Werte möglichst klein ist.

Um die Formeln (31), (32), (33) und (34) für die numerischen Rechnungen brauchbarer zu machen, führen wir folgende Bezeichungen ein

---

[4] E. Wigner u. F. Seitz, Phys. Rev. (2) 43, 804, 1933; (2) 46, 509, 1934 *u.* E. Wigner, Phys. Rev. (2) 46, 1002, 1934.

[5] F. Seitz, Phys. Rev. (2) 47, 400, 1935.

$$I_n(\xi, \mu) = \int_0^{\xi} e^{-\mu x} x^n dx \tag{41}$$

$$K_n(\xi, \mu) = \int_0^{\infty} e^{-(1+\mu)x} x^n dx \tag{42}$$

$$L_n(\xi, \mu) = \int_0^{\infty} e^{-(\xi+\mu)x} x^n dx. \tag{43}$$

Mit Hilfe dieser Integrale kann man die in den Formeln (31) bis (34) vorkommenden Ausdrücke $T_0(\xi, \mu)$, $T_1(\xi, \mu)$, $T_2(\xi, \mu)$, $T_3(\xi, \mu)$ und $T_4(\xi, \mu)$ einfach darstellen. Und zwar ist

$$T_0(\xi, \mu) = I_5 + 2\gamma I_6 + \gamma^2 I_7 \tag{44}$$

$$T_1(\xi, \mu) = I_3 + 2\gamma I_4 + \gamma^2 I_5 \tag{45}$$

$$T_2(\xi, \mu) = \mu^2\gamma^2(\xi^2 I_3 - 2\xi I_4 + I_5) \tag{46}$$

$$T_3(\xi, \mu) = \sum_{i=0}^{4} a_i K_{i+3} + 2\gamma \sum_{i=0}^{4} a_i K_{i+4} + \gamma^2 \sum_{i=0}^{4} a_i K_{i+5} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} T_4(\xi, \mu) = {} & L_3 + 2c_1 L_4 + c_1^2 L_5 + \\ & + 2\gamma(L_4 + 2c_1 L_5 + c_1^2 L_6) + \\ & + \gamma^2(L_5 + 2c_1 L_6 + c_1^2 L_7) \end{aligned} \tag{48}$$

Die Berechnung von I_n kann man für ein gegebenes Wertepaar (ξ, μ) durch folgende Rekursionsformel einigermassen vereinfachen. Mit Hilfe der Substitution $\mu x = y$ erhält man

$$I_n = \frac{1}{\mu^{n+1}} \int_0^{\eta} e^{-y} y^n dy \tag{49}$$

mit

$$\eta = \mu\xi. \tag{50}$$

Wir haben also nur mehr das Integral

$$G_n = \int_0^{\eta} e^{-y} y^n dy \tag{51}$$

zu berechnen und zwar für $n = 3, 4, \ldots, 7$. Dies kann man mit Hilfe der Rekursionsformel

$$G_n = -e^{-\eta}\eta^n + nG_{n-1} \tag{52}$$

ziemlich einfach durchführen. Man hat aber die Rechnungen mit sehr grosser Genauigkeit durchzuführen, da sich besonders für kleine η-Werte bei der Rechnung mit der Rekursionsformel der relative Fehler sehr rasch um einige 10-er Potenzen vervielfacht. In unserem Falle wurden die Rechnungen mit einer 7-stelligen Logarithmentafel durchgeführt, so dass die G-Werte bis zur 5-ten Stelle genau sind.

Die Berechnung der Integrale K_n und L_n ist bedeutend einfacher. Mit der Substitution

$$(1+\mu)x = y \tag{53}$$

erhält man

$$K_n(\xi, \mu) =$$

$$= \frac{1}{(1+\mu)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-y} y^n dy = \frac{1}{(1+\mu)^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{(1+\mu)^{n+1}} \tag{54}$$

und ganz analog

$$L_n(\xi, \mu) = \frac{n!}{(\frac{2}{3}+\mu)^{n+1}}. \tag{55}$$

K_n und L_n sind also ganz einfache Funktionen von μ, während I_n eine bedeutend komplizierte Funktion von μ, ist, da μ auch in der oberen Grenze des Integrals G_n vorkommt.

Mit Hilfe der Formeln (51), (52), (54) und (55) kann man nun alle Grössen berechnen. Wie schon erwähnt, führten wir die Rechnungen für das metallische Kalium durch. Wir bestimmten für mehrere ξ_i-Werte den Parameter μ_i und die Energie E_i. Es ergibt sich gemäss unserer Erwartung, dass der Betrag der μ_i klein ist. Dadurch entsteht eine Vereinfachung. Für kleine μ ist nähmlich die Energie E_K gegenüber den anderen Energietermen sehr klein und kann vernachlässigt werden. Dies folgt daraus, dass E_K zu $\mu^2\gamma^2$ proportional und γ ebenfalls zu μ proportional ist, wodurch sich E_K als eine zu μ^4 proportionale Grösse erweist. Wir führten die Rechnungen mit der Vernachlässigung von E_K durch, was für kleine μ durchaus gerechtfertigt ist.

Wir bestimmten auf die weiter oben geschilderte Weise für

mehrere R_i- bzw. ξ_i-Werte die Konstanten μ_i und E_i, wodurch man E als Funktion von ξ erhält und die stabile Gleichgewichtslage bestimmen kann. Wir geben hier die ziemlich umfangreichen Rechnungen im einzelnen nicht wieder, sondern geben unsere Resultate nur für die Gleichgewichtslage an. Die Konstanten, welche sich auf diese beziehen, bezeichnen wir mit einem Index 0. Die stabile Gleichgewichtslage erhielten wir bei $R_0 = 5{,}0 a_H$ was $\xi_0 = 12{,}674$ entspricht. Die Tabelle 1 enthält für R_0 bzw. ξ_0 die Energien E_C, W_E, W_F und deren Summe E für verschiedene μ-Werte. Die zweite Spalte enthälte die Resultate für $\mu = 0$, was einer konstanten Verteilung entspricht. Alle Energieterme sind in $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ Einheiten angegeben.

Tabelle 1.

μ	0	0·10	0·20	0·25	0·30	0·35	0·40	0·50
E_C	−0·30000	−0·29516	−0·28008	−0·27199	−0·27447	−0.32224	−0·45772	−1·08623
W_E	−0·10296	−0·08883	−0·04812	−0·04891	−0·15367	−0·54449	−1·56209	−6·10973
W_F	+0·22337	+0·20288	+0·14208	+0·13452	+0·24743	+0·70328	+1·91102	+7·31882
E	−0·17959	−0·18111	−0·18612	−0·18638	−0·18071	−0·16345	−0·10879	+1·12286

Durch eine graphische Interpolation erhält man, dass das Minimum der Energiefunktion $E(\xi_0, \mu)$ bei

$$\mu_0 = 0{\cdot}235 \tag{56}$$

liegt. Für die Energie in der Gleichgewichtslage erhält man

$$E_0 = E(\xi_0, \mu_0) = -\,0{\cdot}18640\ \frac{\varepsilon^2}{a_H} \tag{57}$$

Die Fig. 1 stellt die Energie

$$E(\xi_0, \mu) = E_c + W_E + W_F$$

als Funktion von μ auch graphisch dar. Die Ordinate ist stark stark vergrössert, so dass die Vertiefung von E bei $\mu_0 = 0{\cdot}235$ gegenüber $\mu = 0$ sehr stark hervortritt, sie beträgt in wirklichkeit nur rund 4% des Wertes $E(\xi_0, 0)$.

Die Eigenfunktion in der stabilen Gleichgewichtslage ist durch ξ_0 un μ_0 festgelegt und zwar ergibt sich

$$\chi(\xi_0, \mu_0) = D_0 e^{-\frac{\mu_0 x}{2}}(1 + \gamma_0 x) \tag{58}$$

wo

$$D_0 = \frac{1}{[8\pi\lambda^3 T_0(\xi_0, \mu_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\gamma_0 = \frac{\mu_0}{2 - \mu_0 \xi_0}.$$

ist.

Uns interessiert hauptsächlich die Elektronendichte, ϱ, welche man, wie bekannt, aus der Eigenfunktion folgendermassen erhält

$$\varrho = \chi^* \chi \tag{59}$$

In der stabilen Gleichgewichtslage wird also

$$\varrho_0 = D_0^2 e^{-\mu_0 x}(1 + \gamma_0 x)^2 \tag{60}$$

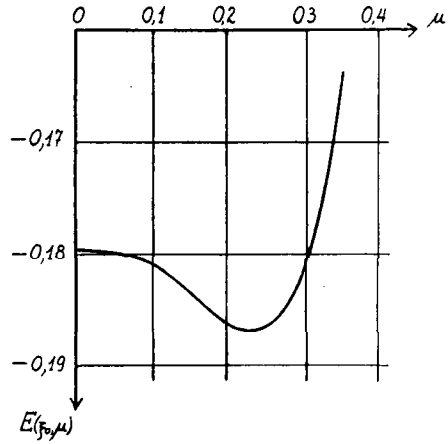


Fig. 1.

Abszisse : μ.

Ordinate : $E(\xi_0, u)$ in $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_H}$ Einheiten.

Oder wenn wir statt x die Variable r einführen, folgt

$$\varrho_0 = D_0^2 e^{-\mu_0 \sqrt{\frac{r}{\lambda}}}\left(1 + \gamma_0 \sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right)^2. \tag{61}$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Fig. 2 dargestellt

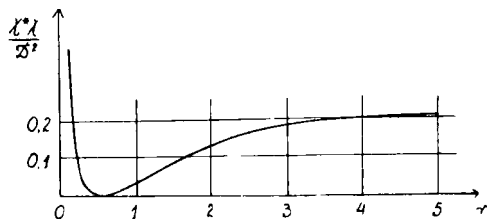


Fig. 2.

Abszisse ; r in a_H Einheiten.

Ordinate : $\frac{\chi^*\chi}{D^2}$ in $\frac{1}{a_H{}^3}$ Einheiten.

Aus Fig. 2 ist zu sehen, dass die Elektronendichte von $r=2{\cdot}5a_H$ an bis $r=R_0=5{\cdot}0\,a_H$ ziemlich konstant verläuft, die Schwankung in diesem Bereich beträgt nur wenige Prozente. Von $r=0$ bis $r=2{\cdot}5\,a_H$, was dem Atomrumpf entspricht, ist der Verlauf der Elektronendichte vom konstanten Wert wesentlich verschieden, was ja auch zu erwarten war. Wie schon früher auseinandergesetzt wurde, kann man natürlich nicht erwarten, dass in dem inneren Gebiet unsere Elektronendichte den exakten Wert genau beschreibt. Im inneren Gebiet sollte im Falle des Kalium die Eigenfunktion des Valenzelektrons drei Knotenstellen aufweisen, während unsere Näherungsfunktion, wie aus dem Verlauf der Elektronendichte zu sehen ist, nur eine Knotenstelle aufweist. Dies ist eine Folge der statistischen Behandlungsweise und ist ziemlich unwesentlich, da das innere Gebiet nur rund $\frac{1}{7}$-des äusseren beträgt, also ziemlich unbedeutend ist.

Alle unsere Resultate, welche sich auf die stabile Gleichgewichtslage beziehen, erhielten wir dadurch, dass wir die zu werschiedenen R_i-bzw. ξ_i-Werten gehörenden μ_i- und E_i-Werte bestimmten, wodurch man E als Funktion von R bzw. ξ darstellen kann. Wir führten die Rechnungen nur in der Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage durch. Das Resultat ist in Fig. 3 dargestellt.

Wie man sieht, liegt das Minimum der Energie, wie schon weiter oben angegeben wurde, bei

$$R_0 = 5{\cdot}0\,a_H \qquad (62)$$

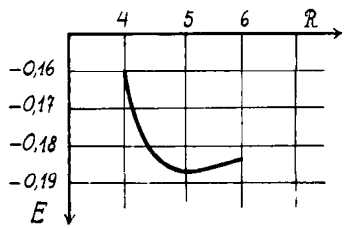


Fig. 3.

Abszisse: R in a_H Einheiten.
Ordinate: E in $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ Einheiten.

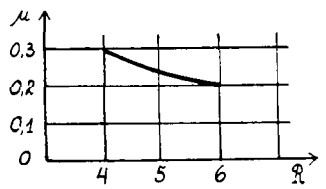


Fig. 4.

Abszisse: R in a_H Einheiten.
Ordinate: μ.

In Fig. 4 stellen wir noch in der Umgebung der Gleichgewichtslage μ_i als Funktion von R_i dar

Aus diesem Diagramm kann man in der Nähe der Gleichgewichtslage für ein beliebiges R_i das zugehörige μ_i entnehmen, wodurch die Energie E_i und die Elektronenverteilung für R_i bestimmt sind.

6. §. Vergleich der Resultate mit der Erfahrung.

Wir wollen nun die wichtigsten Ergebnisse unserer Rechnungen mit der Erfahrung und mit einigen Resultaten, welche wir in früheren Arbeiten erhielten, vergleichen. Um einen besseren Vergleich vornehmen zu können, haben wir die betreffenden Konstanten in der Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

	Resultate der vorliegenden Arbeit	Mit konstantem ϱ erzielten Resultate	Experimentelle Resultate
R_0 in Å Einheiten	2·66	2·67	2·54
E_0 in $\frac{\text{kcal}}{\text{Mol}}$ Einheiten	116·5	112·4	126·2
S in $\frac{\text{kcal}}{\text{Mol}}$ Einheiten	16·8	12·7	26·5

Wie man aus der Tabelle 2 sieht, stimmen die berechneten Konstanten mit den empirischen gut überein. Eine grössere Diskrepanz findet man nur bei der Sublimationswärme, welche man als Differenz der Gitterenergie E_0 und der Ionisierungsenergie des freien Atoms erhält. In der dritten Spalte der Tabelle 2 sind die Resultate zusammengestellt, welche wir in einer früheren Arbeit[6] mit einem konstanten ϱ erhielten. Bei einem Vergleich dieser Konstanten mit den hier erhaltenen ist zu beachten, dass in der zitierten Arbeit in der Gitterenergie auch Glieder von höherer Ordnung berücksichtigt wurden, während

[6] P. Gombás, Zs. f. Phys. 95, 687, 1935.

das hier nicht der Fall ist. Aus der Tabelle 2 sieht man, dass die in der vorliegenden Arbeit mit der verbesserten Dichteverteilung erzielten Resultate gegenüber den Ergebnissen, welche wir mit einem konstanten ϱ erhielten, durchwegs besser sind, also die empirischen Konstanten besser annähern als die früheren Resultate.

Das Resultat, welches wir für die Elektronenverteilung erhielten, entspricht ebenfalls unseren Erwartungen, da es mit den Wigner-Seitzschen Rechnungen im Einklang ist.

Unsere Rechnungen bilden in der vorliegenden Form nur eine erste Näherung. Man könnte aber natürlich auch höhere Näherungen in Betracht ziehen, indem man im Ansatz (10) nicht nur μ und γ_1 berücksichtigt, sondern noch weitere Konstanten hinzunimmt.

Dem Ungarischen Kultusministerium danke ich für die Gewährung eines Forschungsstipendiums. Herrn Professor Dr. R. Ortvay bin ich für die dauernde Förderung meiner Arbeit zu Dank werpflichtet. Besonderer Dank gebührt den Herrn stud. phil. Gy. Péter und J. Bucsy, die die ziemlich mühsamen numerischen Rechnungen durchgeführt haben.

Budapest, Institut für theoretische Physik der Universität, April, 1937.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A SPEKTROSZKÓPIAI STABILITÁS TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA AZ OLDATOK REFRAKCIÓCSÖKKENÉSÉNEK ELMÉLETÉRE.

karai NEUGEBAUER TIBOR-tól.

Mint ismeretes, újabb időben egyes kutatók ismét felteszik, hogy az erős elektrolitoldatokban az ionok egy része nagy koncentrációk esetében mégis asszociálva van, de ez az asszociáció sokkal kisebb, mint az, amely a klasszikus ARRHENIUS-féle elméletből következne. Ennek a felfogásnak egy igen fontos támasztéka a különösen FAJANS és munkatársaitól igen gondosan tanulmányozott refrakciócsökkenése az elektrolitoldatoknak növekvő koncentráció esetében. A nevezett kutatók ezt az ionok asszociációjára vezetik vissza. Evvel a felfogással szemben többször felmerült az irodalomban az az állítás, hogy a refrakciócsökkenés csak a teljesen disszociált ionok elektrosztatikus kölcsönhatásán alapszik. A szerző azonban egy más helyen közölt elméleti munkájában kimutatta, hogy ennek a jelenségnek el kell tűnnie, az észlelt refrakciócsökkenést tehát csak egy tényleges ionasszociáció magyaatja meg.

Egy egészen hasonló jelenség az ú. n. VOIGT-féle tagja az elektrooptikai Kerr-effektusnak, mert ebben az esetben is arról van szó, hogy egy külső tér befolyásolja a polarizálhatóságot, de amíg ez a Kerr-effektusnál a Kerr-kondenzátorban levő állandó elektromos tér, addig a refrakciócsökkenésnél a szomszédionok elektromos tere. Mivel másrészt a Kerr-effektus VOIGT-féle tagjánál a spektroszkópiai stabilitás tételéből levezethető, hogy ez a tag első közelítésben eltűnik, ugyanaz következik a refrakciócsökkenés

elméletére vonatkozólag is, ahol a jelenségnek szintén el kellene tünnie, ha ez tényleg a szabad ionok elektromos terének lenne a következménye. Ez tehát egy újabb bizonyítéka annak, hogy a refrakciócsökkenést csak az ionoknak közvetlen érintkezése magyarázhatja meg.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

ZUR THEORIE DER REFRAKTIONSVERMINDERUNG VON ELEKTROLYTLÖSUNGEN.

Von TH. NEUGEBAUER in Budapest.

Es wird gezeigt, dass die Theorie der Refraktionsverminderung der Elektrolytlösungen und die Theorie des Voigtanteiles beim Kerreffekt ganz ähnlich behandelt werden können, weil es sich im Falle beider Erscheinungen um die Änderung der Polarisierbarkeit in einem äusseren Felde handelt, das beim Kerreffekt das angelegte konstante äussere Feld, bei der Refraktionsverminderung dagegen das elektrische Feld der Nachbarionen ist. Da man es mit Hilfe des spektroskopischen Stabilitätssatzes beweisen kann, dass der Voigtanteil des Kerreffektes in erster Näherung verschwindet, so folgt daraus, dass die Refraktionsverminderung ebenfalls verschwinden müsste, wenn dieselbe nur eine Folge des elektrostatischen Feldes von freien Ionen wäre.

Nach der klassischen Theorie von ARRHENIUS sollte ein Teil der Moleküle von dem gelösten Elektrolyten in undissoziiertem Zustande in der Lösung vorhanden sein. Die moderne Theorie von DEBYE und HÜCKEL[1] betrachtet dagegen die starken Elektrolyte als vollständig dissoziiert und erklärt die bei grösseren Konzentrationen beobachteten Abweichungen von dem Verhalten eines sehr verdünnten Elektrolyten als Folge der elektrostatischen Wechselwirkung der Ionen. Die auf dieser Grundlage aufgebaute Theorie hat man im Falle von nicht sehr grossen Konzentrationen in vollständiger Übereinstimmung mit der Erfahrung gefunden. Bei grösseren Konzentrationen nehmen jedoch die neueren Theorien von NERNST, ONSAGER, BJERRUM, MÜLLER, GRONDWAL, LA MER, SANDVED u. a. an, dass doch ein Teil, der jedoch viel kleiner als

[1] Vgl. z. B. H. FALKENHAGEN: Elektrolyte. Leipzig. S. Hirzel, 1932 und Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Bd. XIV. Berlin. J. Springer, 1932. Artikel von H. FALKENHAGEN.

der nach der elementaren Arrheniusschen Theorie berechneter sein würde, in der Lösung in undissoziiertem Zustande vorhanden ist. Eine wichtige Stütze dieser Auffassung ist die von FAJANS und seinen Mitarbeitern[1] sehr sorgfältig untersuchte Verminderung der Refraktion bei zunehmender Konzentration der Elektrolytlösungen, die sie eben mit Hilfe eines undissoziierten Teiles des Elektrolyten erklären. Gegenüber dieser Auffassung wurde von einigen Autoren der Standpunkt vertreten, dass diese Refraktionsverminderung nur ein Debye-effekt ist, also nicht von einem undissoziierten Teile des Elektrolyts, sondern von der elektrostatischen Wechselwirkung der vollständig dissoziierten Ionen herrührt. Vom Verfasser wurde jedoch gezeigt, dass dieser Debye-effekt der Refraktion in erster Näherung verschwindet, die Refraktionsverminderung also nur von einer unmittelbaren Berührung der Ionen, d. h. von einer Assoziation herrühren kann.[2]

Die Wellengleichung eines Ions, das gleichzeitig von dem elektrischen Vektor der einfallenden Lichtwelle und dem Felde der Nachbarionen gestört wird, lautet folgendermassen:

$$\left(H + V + zA \cos 2\pi\nu t - \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \tag{1}$$

wo H den HAMILTONschen Operator, $A \cos 2\pi\nu t$ den elektrischen Vektor der einfallenden Lichtwelle und V die Störungsenergie des von den übrigen Ionen herrührenden elektrostatischen Feldes bedeutet. Mit Hilfe der aus dieser Wellengleichung berechneten Eigenfunktion zweiter Näherung kann man dann die Refraktion berechnen, die wir gleich in zwei Teile zerlegen:

$$R = R_0 + \Delta R, \tag{2}$$

---

[1] K. FAJANS, H. KOHNER u. W. GEFFCKEN: ZS. f. Elektrochemie, 34, 1, 1928; W. GEFFCKEN und D. PRICE: ZS. f. phys. Chem. (B) 26, 81 1934, wo die neuere Literatur dieser Frage zitiert ist. Die neuesten Untersuchungen rühren von A. KRUIS her. (ZS. f. phys. Chem. (B) 34, 1, 13, 51, 70, 82, 1937.)

[2] TH. NEUGEBAUER: ZS. f. Phys. 99, 677, 1936. Im folgenden als l. c. zitiert.

wo

$$R_0 = \frac{4\pi N}{3} \sum_l \frac{2\bar{\nu}_l \int u_0 z^2 u_0^* d\tau}{h(\bar{\nu}_l^2 - \nu^2)} \tag{3a}$$

und

$$\Delta R = \frac{4\pi N}{3} \sum_l 6 \frac{\int u_0 z^2 V u_0^* d\tau - \int u_0 V u_0^* d\tau \cdot \int u_0 z^2 u_0 d\tau}{h^2 (\bar{\nu}_l - \nu^2)} \tag{3b}$$

ist.[1] N bedeutet die Zahl der vollkommen dissoziiert gedachten Moleküle in der Volumeneinheit, $\bar{\nu}_l$ einen Mittelwert der Eigenfrequenzen des das Molekül aufbauenden l-ten Ions, u_0 ist die Eigenfunktion in nullter Näherung und die Summen werden über alle das Molekül aufbauenden Ionen erstreckt. Von (3*b*) müssen wir den Mittelwert bilden, weil alle Orientierungen des Störfeldes V zur Richtung des elektrischen Vektors der Lichtwelle gleichwahrscheinlich sind. Mit Hilfe des GAUSS'schen Satzes über den Mittelwert einer harmonischen Funktion auf einer Kugeloberfläche [2] lässt es sich jedoch beweisen, dass (3*b*) verschwindet, wenn die Ladungen, welche für die Störungsenergie V verantwortlich sind, ganz ausserhalb der Elektronenwolke des fraglichen Ions, dessen Refraktionsverminderung wir berechnen wollen, liegen.[3] Daraus folgt, dass die Refraktionsverminderung nicht ein Debye-effekt sein kann, also nicht von der elektrostatischen Wirkung anderer freier Ionen herrührt, sondern von einer unmittelbaren Berührung der Ionen und Überdeckung der Ladungswolke derselben verursacht wird.

Eine ganz analoge Frage in der Physik ist auch der Voigtanteil des Kerreffektes. Bekanntermeise besteht der elektrooptische Kerreffekt nach der LANGEVIN—BORNschen Orientierungstheorie darin, dass die Moleküle auch infolge ihres fertigen Dipolmomentes (Dipolglied) und auch infolge ihrer in verschiedenen Richtungen

---

[1] L. c. S. 682.

[2] Vgl. z. B. O. D. KELLOGG: Foundations of Potential Theory. Berlin, J. Springer, 1929. S. 83, 211 und 223.

[3] L. c. S. 683.

verschiedene Polarisierbarkeit (Anisotropieglied) im elektrischen Felde teilweise ausgerichtet werden und dass demzufolge das Gas doppelbrechend wie ein einachsiger Kristall wird. Anderseits muss aber die Polarisierbarkeit von jedem einzelnen Molekül von dem konstanten elektrischen Felde beeinflusst werden, was ebenfalls zu einer Doppelbrechung führt. Das Dipol- und das Anisotropieglied hängen mit dem unsymmetrischen Bau der Moleküle zusammen, das letztere Glied müsste dagegen auch bei kugelsymmetrischen Molekülen auftreten, dieselben sind also zur Beobachtung dieses Gliedes besonders geeignet, weil bei denen die von diesem Gliede herrührende Doppelbrechung nicht von anderen Gliedern verdeckt wird. W. VOIGT hat ursprünglich die ganze Theorie des Kerreffektes auf das Vorhandensein dieses Gliedes zurückgeführt.[1] Wir nennen darum dieses Glied Voigtanteil des Kerr-effektes. Experimentell ist es noch nicht ganz gesichert, ob es so einen allerdings sehr kleinen Effekt bei aus kugelsymmetrischen Molekülen bestehenden Gasen tatsächlich gibt.

Die Kerrkonstante wird meistens mit Hilfe der folgenden Formel definiert:

$$K = \frac{n_p - n_s}{n} \frac{1}{E^2} \tag{4}$$

in der n_p und n_s die Brechungsquotienten der parallel und senkrecht zur Richtung des konstanten äusseren elektrischen Feldes schwingenden Komponenten der Lichtwelle bedeuten. E ist die Intensität des äusseren Feldes. Die Differenz $n_p - n_s$ erhalten wir klassisch aus der folgenden Formel:[2]

$$n_p - n_s = \frac{2\pi N}{n} \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{kT}\{W_1 E + W_2 E^2\}} (B_z - B_x) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\psi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{kT}\{W_1 E + W_2 E^2\}} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\psi}. \tag{5}$$

---

[1] W. VOIGT: Magneto- und Elektrooptik. Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

[2] Vgl. z. B. E. MARX: Handbuch der Radiologie. Bd. VI/2. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1934. Artikel von P. DEBYE, S. 189.

W_1E und W_2E^2 bedeuten die Störungsenergie erster und zweiter Näherung im konstanten äusseren Felde, B_z und B_x sind die optischen Polarisierbarkeiten der Moleküle in einem raumfesten Koordinatensystem parallel und senkrecht zur Richtung des äusseren Feldes und ϑ, φ und ψ bedeuten die drei EULERschen Winkeln. Im Nenner steht das Zustandsintegral. Nach der Quantenmechanik erhalten wir für die selbe Grösse:

$$n_\mu - n_s = \frac{2\pi N}{\bar{n}S} \sum_s e^{-\frac{1}{kT}\{W_{0s} + W_{1s}E + W_{2s}E^2\}} \left\{ \sum_{s'}^{\pi} \frac{2\nu(s's)|P_z(ss')|^2}{h(\nu^2(s's) - \nu^2)} - \sum_{s'}^{\sigma} \frac{2\nu(s's)|P_x(ss')|^2}{h(\nu^2(s's) - \nu^2)} \right\} \tag{6}$$

s und s' bedeuten hier die Gesamtheit aller Quantenzahlen, die $\nu(s's)$ die Eigenfrequenzen, ν die Frequenz des einfallenden Lichtes, die $P(ss')$ die zu einem Quantensprung gehörenden Übergangsmomente, h die PLANCKsche Konstante und S die Zustandssumme, die hier anstatt dem Zustandsintegral der klassischen Theorie steht.

Entwickeln wir die Formeln (5) und (6) nach den im BOLTZMANN-faktor stehenden Grössen W_1E und W_2E^2, so verschwinden die linearen Glieder und die quadratischen führen zu den Formeln der LANGEVIN—BORNschen Orientierungstheorie und zwar sowohl die Entwicklung der klassischen Formel (5), wie auch die von der quantenmechanischen (6), wie das vom Verfasser gezeigt wurde.[1] In der Formel (6) sind aber auch die Eigenfrequenzen $\nu(s's)$ und $P(ss')$ Funktionen des äusseren Feldes, weil sie ja von demselben beeinflusst werden. Berücksichtigen wir diesen Umstand und entwickeln auch noch diese Grössen nach E, so folgen daraus weitere Glieder in der Formel der Doppelbrechung, die den schon erwähnten VOIGT-Anteil des Kerr-effektes darstellen.

Bei diesem Gliede handelt es sich um eine ganz analoge Erscheinung, wie in der Theorie der Refraktionsverminderung von Elektrolytlösungen; die Polarisierbarkeit wird von einem äusseren Felde beeinflusst, beim VOIGT-Anteil des Kerr-effektes ist dieses Feld das konstante elektrische Feld im Kerr-kondensator, bei der

[1] TH. NEUGEBAUER: ZS. f. Phys. 73, 386, 1931 und 86, 392, 1933.

Refraktionsverminderung dagegen das elektrische Feld der anderen Ionen. Mit Hilfe des spektroskopischen Stabilitätssatzes lässt es sich aber beweisen, dass der VOIGT-Anteil des Kerr-effektes verschwindet resp. sehr klein ist.[1] Mathematisch kann man diesen Satz folgendermassen ausdrücken:[2]

$$\sum_{mm} |f_0(nm;\ n'm')|^2 = \sum_{mm'} |f(nm;\ n'm')|^2, \tag{7}$$

wo f_0 irgendeine ungestörte Funktion, f den entsprechenden gestörten Wert derselben, m und m magnetische Quantenzahlen und n und n' die Gesammtheit der übrigen Quantenzahlen bedeuten.

Um (7) auf unseren Fall anwenden zu können, betrachten wir den Klammerausdruck in (6), in dem wir gleichzeitig die Quantenzahlen s und s' in die magnetischen Quantenzahlen m und m' und in die übrigen, die wir mit n und n' bezeichnen, zerlegen. Statt den Eigenfrequenzen $\nu(nm;nm)$ führen wir noch einen Mittelwert derselben $\nu(nn')$ ein. Dann erhalten wir also

$$\sum_m \left\{ \sum_{n'm'}^{\pi} \frac{2\nu(nn')\,|P_z nm;\ n'm')|^2}{h\{\nu^2(nn') - \nu^2\}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n'm'}^{\sigma} \frac{2\nu(nn')\,|P_x(nm;\ n'm')|^2}{h\{\nu^2(nn') - \nu^2\}} \right\}. \tag{8}$$

Aus der in (6) stehenden ersten Summe haben wir in (8) nur die Summation nach m hingeschrieben, da die nach n in unserem Gedankengang unwesentlich ist. Um nun den spektroskopischen Stabilitätssatz anwenden zu können, setzen wir

$$f(nm;\ n'm') = P(nm;\ n'm'). \tag{9}$$

Daraus folgt unmittelbar das Verschwinden von (8), weil eben nach diesem Satze die Summen sich nicht ändern dürfen, wenn das störende elektrische Feld parallel oder senkrecht angenommen wird. In unserem Gedankengang haben wir die Änderung

---

[1] Th. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 82. 660. 1933.

[2] Vgl. z. B. J. H. VAN VLECK: Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Oxford, 1932. S. 139.

der Frequenzen im elektrischen Störungsfelde vernachlässigt, es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass dieselben nur einen sehr kleinen Effekt verursachen können, weil der quadratische Starkeffekt sehr klein ist.

Unsere Herleitung bezüglich des VOIGT-Anteiles beim Kerreffekt lässt sich ohne weiteres auch auf die Refraktionsverminderung von Elektrolytlösungen übertragen, weil es sich dort, wie wir es schon oben besprochen haben, wesentlich um den selben Effekt handelt. Aus dem spektroskopischen Stabilitätssatz folgt also auch, dass die Refraktionsverminderug von Elektrolytlösungen nicht ein Debye-effekt sein kann, sondern von einer unmittelbaren Berührung der Ionen herrühren muss.

Budapest, Institut f. theoret. Physik d. Universität, März 1937.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 24. Mai 1937).

A HIDROMOLEKULÁK REZGÉSFREKVENCIÁINAK KISZÁMÍTÁSA.

karai NEUGEBAUER TIBOR-tól.

Mint ismeretes, a többatomos molekuláknak a közeli infravörösben egy ú. n. rezgési és rotációs spektrumát észleljük. A rezgések, amelyek ebben a munkában egyedül érdekelnek minket, abban állnak, hogy a molekulát felépítő atomok vagy ionok egymáshoz képest mozognak egy kvazielasztikus erő hatására. Egy újabb módszer ezen rezgések frekvenciáinak mérésére a Raman-spektrum észlelése.

A frekvenciák kiszámítása azonban egy igen nehéz feladat, mert egy igen sok részből álló rendszerről van szó. A hidridmolekuláknál valamivel egyszerűbb a helyzet, mivel ebben az esetben legalább a hidrogén egy egészen egyszerű felépítésű atom. A jelen munka célja ezért hidridmolekulák esetében egy módszernek kidolgozása a frekvenciák kiszámítására. Ennek alapgondolata a következő: A centrális atomot körülvesszük egy gömbfelülettel, amelyen a protonok fekszenek, ezen gömbfelületen belül egyszerűen az illető centrális atom saját függvényeit használjuk, míg kívül egy olyan atomét, melynek rendszáma a centrális atom rendszámának és protonok számának az összege. Ezt a modellt használjuk nulladik közelítésben, azon körülményt aztán, hogy a protonok a valóságban a gömbhéjon vannak, mint polarizációs energiát vesszük tekintetbe.

Ez az utóbbi energia éppen a nulladik közelítésnek említett választása miatt kicsiny a többi fellépő energiához képest és azért egészen nyugodtan alkalmazhatjuk a számítására a kvantummechanikai perturbációelméletet. Ha evvel szemben egyszerűen

az ionmodellből indulnánk ki, akkor olyan nagy polarizációs energiák lépnének fel, hogy a perturbációelmélet már nem lenne alkalmazható és az egész számítás keresztülvihetetlen lenne. A már említett nagy elméleti nehézségek miatt a fizikusok igyekeztek a molekulában fellépő erőket valamilyen empirikus törvényszerűség segítségével leírni és azután ezen teljesen önkényesen bevezetett erőket úgy választani, hogy a számított frekvenciák lehetőleg jól egyezzenek a tapasztalattal. A legismertebb és a legjobban bevált ilyen módszer a MECKE-től bevezetett ú. n. valenciaerőmodell. Ezen elgondolás szerint csak azon atomok között hatnak erők, melyek egymással egy vegyérték révén kötve vannak, még pedig egy erőtípus az összekötő egyenes mentén hat, ez a valenciaerő és egy reá merőlegesen, ez a deformációserő. MECKE egy újabb dolgozatában még egy, az összes egymással vegyértékerők által nem kötött atom között működő centrális erővel egészítette ki modelljét. Mivel ez az empirikus módszer különösen alkalmas a kvantumelmélet eredményeivel való összehasonlításra, a jelen dolgozatban ezt használjuk. A számítás eredményei a következők: Hidridmolekuláknál a centrális erőnek a protonok taszítása felel meg, a deformációerőnek a polarizációs energia változása a protonoknak a gömbfelületen való mozgása révén, végül a valenciaerőnek az összes a molekulát összetartó energiának a változása az oka. Evvel az összes empirikusan bevezetett kvazielasztikus erő kvantummechanikailag értelmezve van.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből).

ÜBER DIE BERECHNUNG DER ULTRAROTEN SCHWINGUNGSFREQUENZEN DER HYDRIDMOLEKÜLE.

Von TH. NEUGEBAUER in Budapest.

(Mit 4 Abbildungen.)

Zur Berechnung der physikalischen Konstanten der Hydridmoleküle wird eine Methode angegeben, nach der innerhalb der die Protonen enthaltenden Kugelfläche die Eigenfunktionen des Zentralatoms, ausserhalb dagegen die eines Atoms, dessen Kernladungszahl die Summe der Ordnungszahl des Zentralatoms und der Zahl der Protonen ist, benutzt werden. Mit Hilfe dieses Modells lassen sich die Konstanten des fraglichen Moleküls und besonders die ultraroten Schwingungsfrequenzen verhältnismässig leicht berechnen. Die Ergebnisse werden mit einem Molekülmodell von MECKE verglichen, in dem sowohl Valenz- und Deformationskräfte, als auch Zentralkräfte eingeführt werden. Daraus folgt der quantenmechanische Sinn der empirisch eingeführten Kräfte, und zwar entspricht der Zentralkraft die elektrostatische Abstossung der Protonen, der Deformationskraft die Änderung der Polarisationsenergie im inhomogenen Felde der Protonen und der Valenzkraft die Änderung aller Energieanteile.

Einleitung. Bekannterweise können die ein Molekül aufbauenden Atome oder Ionen gegeneinander Schwingungsbewegungen ausführen, die wir im nahen Ultrarot gelegenen Teile des Spektrums[1] beobachten. Eine neuere Methode zur Messung dieser Frequenzen ist ausserdem die des Ramanspektrums.[2] Die theoretische Berech-

[1] Vgl. z. B. C. SCHAEFER und F. MATOSSI: Das ultrarote Spektrum. Berlin. J. Springer, 1930.

[2] Z. B. K. W. F. KOHLRAUSCH: Der Smekal—Raman-Effekt. Berlin. J. Springer, 1931.

nung dieser Schwingungsfrequenzen aus atomaren Konstanten ist dagegen ein sehr verwickeltes Problem, weil es sich um ein Vielkörperproblem handelt. Etwas übersichtlicher werden jedoch die Verhältnisse im Falle von Hydridmolekülen, weil bei denen wenigstens die Wasserstoffatome ganz einfach gebaut sind. Gehen wir vom Ionenmodell aus, so entstehen weitere Vereinfachungen dadurch, dass wir einfach Protonen, die in die Ladungswolke des negativen Ions eingebettet sind, zu berücksichtigen haben. Es sei noch bemerkt, dass theoretische Berechnungen dieser Eigenfrequenzen im Falle des HCl,[3] des H_2O[4] und des CH_4[5] vorliegen.

§ 1. Eben wegen diesen grossen theoretischen Schwierigkeiten hat man sich bemüht die zwischen den Atomen oder Ionen tatsächlich wirkenden Kräfte mit Hilfe eines Ersatzmodelles zu beschreiben, das man erstens theoretisch leicht behandeln kann und das zweitens die beobachteten Eigenfrequenzen in guter Annäherung beschreibt bzw. mit Hilfe von willkürlichen Konstanten den Beobachtungsergebnissen angepasst werden kann. Besonders zwei solche Ersatzmodelle wurden allgemeiner bekannt; das Zentralkraftsystem und das Valenzkraftsystem.

Das Zentralkraftsystem[6] nimmt an, dass zwischen den Atomen nur entlang ihrer Verbindungsgeraden Kräfte wirken, die in erster Näherung als harmonisch angenommen werden können. Die meisten mit Hilfe dieser Methode durchgeführten Rechnungen haben aber mit der Erfahrung nicht sehr gut übereinstimmende Resultate geliefert. Nur im Falle des CCl_4 kann man von einer guten Übereinstimmung reden.

Das Ersatzmodell des Valenzkraftsystems schliesst sich dagegen viel enger an die chemische Valenzsymbolik an. Nach dieser Methode wird nämlich angenommen, dass Kräfte nur zwischen solchen Atomen wirken, die miteinander durch einen Valenzstrich

---

[3] J. G. Kirkwood: Phys. ZS. 33, 259, 1932; P. Gombás u. Th. Neugebauer: ZS. f. Phys. 92, 375. 1934.

[4] J. H. van Vleck and P. C. Cross: Journ. of. Chem. Phys. 1, 357, 1933.

[5] Th. Neugebauer: ZS. f. Phys. 98, 638. 1936. Im Folgenden als l. c. zitiert.

[6] D. M. Dennison: Phil. Mag. 1, 195. 1926.

gebunden sind. Die grösste Kraftbeanspruchung wird immer bei der Verrückung eines Atoms in dieser Richtung auftreten, ausserdem wird jedoch diese Bindung auch eine Richtungsstabilität besitzen; einer Winkeländerung der Valenzrichtung werden also ebenfalls Kräfte entgegenwirken, die jedoch kleiner als die vorher besprochenen sein werden. Alle Kräfte nehmen wir ausserdem in erster Näherung als harmonisch an, der Potentialansatz einer einfachen Bindung lautet also:

$$P = f(\Delta r)^2 + d_1(r\Delta\varphi)^2 + d_2(r\Delta\psi)^2. \tag{1}$$

Das Valenzkraftsystem wurde zuerst von R. MECKE [7] eingeführt und wird jetzt fasst ausschliesslich benützt. In aliphatischen Verbindungen gibt es ebensoviele Schwingungen entlang der Valenzstriche, als es solche Bindungen der Atome im Molekül gibt, also wenn wir die Zahl der Atome mit N bezeichnen, dann haben wir N—1 solche Valenzschwingungen. Die übrigen Frequenzen entsprechen den Winkelverdrehungen der Valenzrichtungen, dieselben nennen wir Deformationsschwingungen. Die Erfahrung zeigt, dass die Valenzschwingungsfrequenzen die grösseren sind. Im Ganzen besitzt ein aus N Atomen aufgebautes nichtlineares Molekül $3N$—6 Eigenschwingungen. Drei Freiheitsgrade fallen wegen den Ortskoordinaten des ganzen Moleküls und ebenfalls drei wegen den drei Rotationsfreiheitsgraden weg.

§ 2. Um die mit Hilfe unserer weiter unten zu besprechenden quantenmechanischen Methode aus atomaren Konstanten berechneten Eigenfrequenzen der Hydridmoleküle mit den Resultaten des Ersatzmodelles vergleichen zu können, geben wir die von MECKE hergeleiteten Formeln im Falle der Moleküle von Typ XY_1, XY_2 (gewinkelt), XY_3 (vieratomiges Pyramidenmolekül) und XY_4 (Tetraedermolekül) an.[8] In unserer wellenmechanischen Berechnung wird Y immer ein Wasserstoffatom bedeuten, die hier an-

[7] R. MECKE: Bunsentagung. 1930.

[8] Vgl. über die hier erwähnten Molekülmodelle die die zusammenfassende Darstellung von MECKE im Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik. Bd. 9, Abschnitt II. Leipzig, 1934. S. 347.

gegebenen Formeln sind jedoch ganz allgemein gültig. Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$2\pi\nu_f = \sqrt{\frac{f}{m}}, \tag{2a}$$

$$2\pi\delta_d = \sqrt{\frac{d}{m}} \tag{2b}$$

und

$$F_n = 1 + n\frac{m}{M}, \tag{2c}$$

wo m und M die Massen der Atome Y und X, n die Zahl der Atome Y im Molekül und ν_f und δ_d die Frequenzen der Valenz- und Deformationsschwingungen bedeuten. Daraus folgt für das Molekül XY:

$$\nu^2 = \nu_f^2 F_1, \tag{3}$$

für das gewinkelte Molekül XY_2:

$$\left.\begin{aligned} \nu^2(\sigma) &= \nu_f^2\left[1+(F_2-1)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right], \\ \nu^2(\pi)+\delta^2(\pi) &= \nu_f^2\left[1+(F_2-1)\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]+\delta_d^2\left[1+(F_2-1)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und $$\nu^2(\pi)\,\delta^2(\pi) = F_2\nu_f^2\delta_d^2,$$

wo α den Valenzwinkel bedeutet.

Für das Pyramidenmolekül XY_3 erhalten wir die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\nu^2(\pi)+\delta^2(\pi) = \\ &= \nu_f^2[1+(F_3-1)\cos^2\beta]+\frac{6\delta_d^2\cos^2\beta}{1+3\cos^2\beta}[1+(F_3-1)\sin^2\beta], \\ &\nu^2(\sigma)+\delta^2(\sigma) = \\ &= \frac{1}{2}\nu_f^2[2+(F_3-1)\sin^2\beta]+\frac{3\delta_d^2}{2+6\cos^2\beta}[1+\cos^2\beta+\frac{1}{2}(F_3-1)\sin^4\beta], \\ &\nu^2(\pi)\,\delta^2(\pi) = \frac{3F_3\cos^2\beta}{1+3\cos^2\beta}2\nu_f^2\delta_d^2, \\ \text{und}\quad &4\nu^2(\sigma)\,\delta^2(\sigma) = \frac{3[F_3\sin^2\beta+2\cos^2\beta]}{1+3\cos^2\beta}2\nu_f^2\delta_d^2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo β wieder den Valenzwinkel bedeutet.

Endlich folgt für die symmetrischen Tetraedermoleküle des Typs XY_4:

$$\left.\begin{aligned} \nu^2(s) &= \nu_f^2, \\ 2\delta^2(s) &= 3\delta_d^2, \\ 3\,[\nu^2(a)+\delta^2(a)] &= \nu_f^2(F_4+2)+\delta_d^2(2F_4+1) \\ \text{und}\qquad \nu^2(a)\,\delta^2(a) &= F_4\nu_f^2\delta_d^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Es sei noch bemerkt, dass π und σ parallele und senkrechte, s und a symmetrische und antisymmetrische Schwingungen bedeuten.

Von MECKE wurde ausserdem noch ein anderes Molekülmodell eingeführt, in dem ausser den im Valenzkraftsystem angenommenen Kräften auch noch Zentralkräfte zwischen den chemisch miteinander nicht gebundenen Atomen eingeführt werden.[9] Da dieses letztere Modell besonders gut unsere aus der Quantenmechanik hergeleiteten Ergebnisse darstellt, so wollen wir noch die mit deren Hilfe hergeleiteten Formeln angeben um dieselben mit den weiter unten abgeleiteten theoretischen Formeln vergleichen zu können.

Bezeichnen wir die Konstante dieser Zentralkräfte mit z und führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$2\pi\nu_c = \sqrt{\frac{z}{m}}. \tag{7}$$

Die sich auf das zweiatomige Molekül beziehende Formel ändert sich selbstverständlich auch bei Einführung dieser Zusatzkraft nicht. Für das gewinkelte dreiatomige Molekül XY_2 erhalten wir nach MECKE:

$$\nu^2(\sigma) = \nu_f^2\left[1+(F_2-1)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right], \tag{8a}$$

$$\nu^2(\pi)+\delta^2(\pi) = \nu_f^2\left[1+(F_2-1)\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]+\delta_d^2\left[1+(F_2-1)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]+2\nu_c^2 \tag{8b}$$

und

$$\nu^2(\pi)\,\delta^2(\pi) = F_2\left[\nu_f^2\delta_d^2+2\nu_f^2\nu_c^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\delta_d^2\nu_c^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]. \tag{8c}$$

[9] Vgl. auch H. C. UREY u. C. A. BRADLEY: Phys. Rev. 38, 1969. 1931 und R. MECKE: ZS. f. phys. Chem. (B) 16, 409, 421 und 17, 1, 1932.

Für das Pyramidenmolekül XY_3 folgt:

$$\nu^2(\pi) + \delta^2(\pi) = \nu_f^2 [1 + (F_3 - 1)\cos^2\beta] + \\ + \frac{6\delta_d^2 \cos^2\beta}{6 + 3\cos^2\beta} [1 + (F_3 - 1)\sin^2\beta] + 3\nu_c^2, \tag{9a}$$

$$2[\nu^2(\sigma) + \delta^2(\sigma)] = \nu_f^2 [2 + (F_3 - 1)\sin^2\beta] + \\ + \frac{3\delta_d^2}{1 + 3\cos^2\beta} [1 + \cos^2\beta + \tfrac{1}{2}(F_3 - 1)\sin^4\beta] + 3\nu_c^2, \tag{9b}$$

$$\nu^2(\pi)\delta_d^2(\pi) = \frac{3F_3\cos^2\beta}{1 + 3\cos^2\beta} \{2\nu_f^2\delta_d^2 + \nu_f^2\nu_c^2 [1 + 3\cos^2\beta] + \\ + 6\delta_d^2\nu_c^2 \sin^2\beta\} \tag{9c}$$

und

$$4\nu^2(\sigma)\delta^2(\sigma) = \frac{3[F_3 \sin^2\beta + 2\cos^2\beta]}{1 + 3\cos^2\beta} [2\nu_f^2\delta_d^2 + \nu_f^2\nu_c^2(1 + 3\cos^2\beta) + \\ + \tfrac{3}{2}\delta_d^2\nu_c^2 \sin^2\beta]. \tag{9d}$$

Endlich erhielt MECKE für das Tetraedermolekül XY_4:

$$\nu^2(s) = \nu_f^2 + 4\nu_c^2, \tag{10a}$$

$$2\delta^2(s) = 3\delta_d^2 + 2\nu_c^2, \tag{10b}$$

$$3(\nu^2(a) + \delta^2(a)] = \nu_f^2(F_4 + 2) + 6\nu_c^2 + \delta_d^2(2F_4 + 1) \tag{10c}$$

$$3\nu^2(a)\delta^2(a) = F_4(3\nu_f^2\delta_d^2 + 2\nu_f^2\nu_c^2 + 4\delta_d^2\nu_c^2). \tag{10d}$$

§ 3. Zur theoretischen Berechnung der Konstanten dieser Moleküle in dem Falle, dass Y ein Wasserstoffatom bedeutet, sei folgendes bemerkt: Am Einfachsten wäre es vom extremen Ionenmodell auszugehen und immer das dem Molekül XY_n entsprechende negative Ion X^{n-} zu betrachten, in dessen negative Elektronenwolke wir dann die Protonen einsetzen würden, und dann die dabei auftretende Polarisationsenergie, die vom inhomogenen Felde dieser Protonen verursacht wird, zu berechnen. Doch ist dieser Weg nicht gangbar, wie das aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist, in der die Molekülmodelle der Typen XY_1, XY_2, XY_3 und XY_4 durch die bekanntesten Verbindungen HCl, H_2O, H_3N und CH_4 vertreten werden. α bedeutet die Polarisierbarkeit des entsprechenden negativen Ions.[10]

[10] J. H. VAN VLECK: The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Oxford. University Press. 1932. S. 225.

Tabelle 1.

	Cl^-	O^{--}	N^{---}	C^{----}
$\alpha.10^{24}$	3·05	3·89	28·60	2127

Die Konstanten des *HCl*-Moleküls kann man noch tatsächlich ausgehend vom Ionenmodell berechnen, wie das schon öfters mit gutem Erfolg versucht wurde, eben weil die Polarisierbarkeit des Cl^- verhältnismässig klein und gut bekannt ist. Ausserdem ist das Cl^- auch stabil und ist aus den Alkalihalogenidkristallen bekannt, die eben die typischesten Ionenverbindungen sind. Ganz anders liegen dagegen die Verhältnisse bei den darauf folgenden höheren negativen Ionen, die Polarisierbarkeiten werden im Falle deren so gross, dass sie ihre ganze physikalische Realität verlieren und ausserdem sind diese Ionen garnicht existenzfähig, weil die höheren Elektronenaffinitätsenergien alle negativ sind.[11] Den sehr grossen Polarisierbarkeiten würden auch absurd grosse Polarisationsenergien entsprechen, die physikalisch sehr unwahrscheinlich sind und ausserdem sind unsere Formeln zur Berechnung der Polarisationsenergie nur dann sinnvoll, wenn dieselbe im Verhältnis zu den übrigen Energien klein ist, weil die Störungstheorie nur in diesem Falle anwendbar ist.

Die in dieser Arbeit benützte Methode ist hingegen die Folgende: Wir umgeben das fragliche Zentralion mit einer Kugelfläche, welche die Protonen enthält. Innerhalb dieser Kugelfläche berechnen wir die Eigenfunktionen der Elektronen so, ob die Protonen garnicht vorhanden wären, ausserhalb dagegen unter der Annahme, dass die positive Ladung der Protonen sich im Kern des Ions befindet. Die so berechnete Energie betrachten wir als Energie nullter Näherung. Berücksichtigen wir jetzt, dass in der Wirklichkeit die Protonen auf der Kugelfläche angeordnet sind, so folgen daraus Korrektionsglieder, die wir als Polarisationsenergie betrachten. Diese Energie wird eben infolge des hier benützten

[11] Vgl. z. B. J. H. DE BOER: Electron Emission and Absorption Phenomena. Cambridge. University Press. 1935. S. 31.

Modells im Verhältnis zu den anderen klein sein, und wir können darum die quantenmechanische Störungstheorie unbedenklich anwenden. Die konstanten Faktoren der Eigenfunktionen müssen aus den Bedingungen berechnet werden, dass die Eigenfunktionen selbst und deren ersten Ableitungen nach dem Halbmesser der Kugelfläche kontinuierlich ineinander übergehen und ausserdem aus der selbstverständlichen Bedingung, dass jede Eigenfunktion auf eins normiert sein muss. Also dass auf der Kugelfläche

$$(\psi)_i = (\psi)_a, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_a \tag{12}$$

und ausserdem

$$\int_0^R |\psi_i|^2 d\tau + \int_R^\infty |\psi_a|^2 d\tau = 1 \tag{13}$$

ist, wo R den Halbmesser der Kugelfläche, also die Entfernung der Protonen vom Kern bedeutet. Zur numerischen Berechnung der Eigenfunktion kann man die HARTREE'sche[12] oder FOCKsche[13] Methode benützen. Einfacher lassen sich auch diese Funktionen mit Hilfe der von SLATER[14] angegebenen analytischen Funktionen ausdrücken, welche sich sehr gut an die von HARTREE angegebenen numerisch berechneten Eigenfunktionen anschmiegen. Noch viel schneller kommt man zum Ziel, wenn man die ebenfalls von SLATER[15] herrührenden einfachen Eigenfunktionen benützt, bei denen die inneren Nullstellen vernachlässigt sind. In diesem Falle kann zwar (12) nicht mehr befriedigt werden, doch lässt es sich zeigen, dass das bezüglich der berechneten Energie keine wesentliche Vernachlässigung ist, weil eben dort, wo $r = R$ ist, die Eigenfunktionen infolge der positiven Punktladungen der Protonen stark deformiert sein werden. Es ist noch interessant zu bemerken, dass unser Modell weder der Ionen- noch der homöopolaren Bin-

---

[12] D. R. HARTREE: Proc. Camb. Phil. Soc. 24, 89. 1928.

[13] V. FOCK: ZS. für Phys. 61, 126. 1926. Vgl. auch J. C. SLATER: Phys. Rev. 36, 57. 1930.

[14] J. C. SLATER: Phys. Rev. 42, 33. 1932.

[15] J. C. SLATER: Phys. Rev. 36, 57. 1930.

dung entspricht, sondern ein Übergang zwischen beiden ist, was sich darin ausdrückt, dass die Ladung der Elektronenwolke innerhalb der Kugelfläche elektrostatisch nur zum Kern, ausserhalb dagegen sowohl zum Kern als auch zu den Protonen gebunden ist. Die SLATER—PAULING'sche Theorie der gerichteten Valenz[16] ist also in unserem Modell nicht mitberücksichtigt, im Falle des Methans und den analogen Tetraedermolekülen ist das jedoch bedeutungslos, weil sowohl aus der erwähnten Auffassung, wie auch aus unserem Modell die Stabilität des Tetraedermoleküls folgt.[17] Analog ist auch bei der Berechnung der Konstanten der Halogenwasserstoffe der Unterschied zwischen den zwei Auffassungen unbedeutend. Bei den übrigen Hydriden wäre es möglich, dass das hier benützte Modell zu einer etwas anderen Konfiguration führt, unser Modell begünstigt jedoch auch infolge der grösseren Polarisationsenergie die gewinkelten Modelle gegenüber den gestreckten. Eine genaue Berechnung der tatsächlich auftretenden Winkeln wäre nach der hier benützten Methode sehr interessant, ist jedoch schwer durchzuführen, weil man die auftretenden Energieanteile gleichzeitig als Funktion von R und vom Valenzwinkel zu einen Minimum machen müsste.

§ 4. Die in unserem Modell auftretenden Energieanteile sind die Folgenden:

a) Die elektrostatische Energie der Protonen. Dieselbe kann ganz elementar als Funktion der Entfernung der Protonen vom Kern (R) und des Valenzwinkels berechnet werden.

---

[16] J. C. SLATER: Phys. Rev. 38, 1109. 1931; L. PAULING ebenda 37, 1185. 1931.

[17] J. H. DE BOER und A. E. VAN ARKEL haben es versucht das Methanmolekül mit Hilfe von negativen Wasserstoffionen zu berechnen. ZS. f. Phys. 41, 27. 1928.) Die Berechnung von einem Pyramidenmodell wurde von V. GUILLEMIN (Ann. d. Phys. 8. 173. 1926) versucht. Nach der Quantenmechanik und mit Hilfe des homöopolaren Modells haben die Bildungsenergie und die Entfernung der Atome im Methan H. EYRING, A. A. FROST u. J. TURKEVICH (Journ. of. Chem. Phys. 1, 777, 1933); F. SEITZ u. A. SHERMAN (ebenda 2, 11, 1934). WOODS (Trans. Farad. Soc. 28, 897, 1932) und J. H. VAN VLECK (Journ. of. Chem. Phys. 1, 177, 219, 1933 und 2, 20, 297, 1934) berechnet.

b) Die Abstossungsenergie der Protonen auf den Kern, und die elektrostatische Wechselwirkung der Protonen mit der Elektronenwolke. Da die Protonen immer nur innerhalb der äussersten abgeschlossenen Schale der Elektronen liegen, die inneren Schalen dagegen im praktischen Sinne ganz innerhalb unserer Kugelschale, so wollen wir die Ladung derselben nur so berücksichtigen, ob dieselbe im Kern konzentriert wäre. Die übrigbleibende positive Ladung des Kerns bezeichnen wir mit $Z - l = K$. Dann folgt

$$U_2 = n \frac{K - \int_0^R f_i(r)\, dr}{R} \tag{14}$$

im inneren und

$$U_3 = - n \int_R^\infty \frac{f_a(r)\, dr}{r} \tag{15}$$

im äusseren Gebiet. n bedeutet die Zahl der Protonen und $f(r)dr$ die Ladung zwischen zwei Kugelschalen, deren Halbmesser um dr verschieden ist. Dieselbe kann man aus den bekannten Eigenfunktionen berechnen.

c) Die elektrostatische Wechselwirkung von Kern und Wolke:

$$U_4 = - K \left\{ \int_0^R \frac{f_i(r)\, dr}{r} + \int_R^\infty \frac{f_a(r)\, dr}{r} \right\}. \tag{16}$$

d) Die elektrostatische Energie der äusseren abgeschlossenen Schale auf sich selbst:

$$W_5 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\int_0^\varrho f(r)\, dr}{\varrho} + \int_\varrho^\infty \frac{f(r)\, dr}{r} \right\} f(\varrho)\, d\varrho. \tag{17}$$

Die in (17) vorkommenden Integrale müssen wir alle in zwei Teile zerlegen, weil im inneren Gebiet

$$f(r) = f_i(r) \tag{18a}$$

und im äusseren

$$f(r) = f_a(r) \tag{18b}$$

ist. Da wir jedoch bei der Herleitung von (17) die ganze Ladung der Elektronenwolke als räumlich verschmiert angenommen haben, so müssen wir noch unser Ergebnis korrigieren, weil die Ladungswolke eines Elektrons keine elektrostatische Energie auf sich selbst besitzt. Also folgt

$$U_5 = \frac{K-1}{K} W_5. \tag{19}$$

e) Bei der Änderung der Dichte der Elektronenwolke ändert sich auch die Fermienenergie derselben. Am einfachsten können wir diesen Energieanteil mit Hilfe des THOMAS—FERMI-Modells berechnen.[18] Für die knietische Energie folgt also nach dieser Methode:

$$W_6 = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3}\frac{h^2}{\mu}\int_0^\infty d^{5/3}4\pi r^2 dr \tag{20}$$

wo d die Elektronendichte im Volumenelement und μ die Elektronenmasse bedeutet, die estere kann man aus der bekannten Funktion $f(r)$ berechnen. (20) müssen wir ebenso, wie (17) daraufhin korrigieren, dass die Ladung der einzelnen Elektronen keine Fermienergie auf sich selbst besitzt. Mit Hilfe des daraus folgenden Korrektionsfaktors erhält man

$$U_6 = K^{-5/3}(K^{5/3} - K)\, W_6 \tag{21}$$

f) Als letztes und bezüglich unserer Betrachtungen zur Berechnung der Frequenzen der Deformationsschwingungen wichtigstes Glied kommt noch die Polarisationsenergie hinzu. Die allgemeine quantenmechanische Formel zur Berechnung derselben lautet

$$W_P = -\frac{H_1^2(ss) - |H_1(ss)|^2}{h\bar{\nu}}, \tag{22}$$

in der wir statt den im Nenner auftretenden einzelnen Eigenfrequenzen einen Mittelwert derselben, den wir mit $\bar{\nu}$ bezeichnen, eingeführt haben. $H_1^2(ss)$ und $H_1(ss)$ sind folgendermassen definiert:

$$H_1^2(ss) = \int u_s V^2 u_s^* d\tau \tag{23}$$

[18] Vgl. z. B. L. BRILLOUIN: Les statistique quantique. Bd. II. Paris, 1930. S. 296.

und

$$H_1(ss) = \int u_s V u_s^* d\tau, \tag{24}$$

wo u_s die Eigenfunktion des ganzen Ions im Grundzustande und V die Summe aller Störungspotentiale bedeutet. Nach der gewohnten Methode entwickeln wir das von den Protonen herrührende Störungspotential nach Kugelfunktionen.[19] Im inneren Gebiet lautet diese Entwicklung da $R>r$, ist:

$$\begin{aligned} V = \sum_{i=1}^{n}{}' V_i = \sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta_i}} - \frac{1}{R} \right] = \\ = \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{l=1}^{\infty}{}' P_l(\cos\vartheta_i) \frac{r^l}{R^{l+1}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Im äusseren Gebiet dagegen, wo $R<r$ ist:

$$\begin{aligned} V = \sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\vartheta_i}} - \frac{1}{R} \right] = \\ = \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{l=1}^{\infty}{}' P_l(\cos\vartheta_i) \frac{R^l}{r^{l+1}} + \sum_{i=1}^{n}{}' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned} \tag{26}$$

Die P_l bedeuten die gewöhnlichen und nichtnormierten Kugelfunktionen. (Legendre Polynome.) n/R ist bei der Berechnung der, Polarisationsenergie bedeutungslos, weil es eine Konstante ist, n/r ist dagegen eben das von den Protonen verursachte zusätzliche Potential, wenn wir uns dieselben mit dem Kern vereinigt denken. Dieses Potential haben wir aber schon in unserem Modell in der nullten Näherung berücksichtigt und müssen es darum von (26) weglassen. Für das Störungspotential folgt also im äusseren Gebiet:

$$V = \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{l=1}^{\infty}{}' P_l(\cos\vartheta_i) \frac{R^l}{r^{l+1}}. \tag{27}$$

---

[19] Vgl. z. B. JAHNKE—EMDE: Funktionentafeln. II. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig, 1933. S. 173.

In dieser Wahl des Modells liegt der Grund dafür, dass die Polarisationsenergie verhältnismässig klein bleibt; würden wir das Ionenmodell benützen, so wäre erstens die Polarisierbarkeit der sehr lockeren Elektronenwolke absurd gross, zweitens würde dieselbe das grosse Glied n/r in dem Störungspotential noch sehr stark polarisieren. Im Falle von so grossen Polarisationsenergien werden aber die quantenmechanischen Formeln zur Berechnung derselben schon ungültig, weil die nur erste Näherungen sind.

Im speziellen Fall des Methanmoleküls wurden alle diese Energieanteile in einer vom Verfasser veröffentlichten Arbeit berechnet.[20] Hier wollen wir nur soviel bemerken, dass dabei SLATER'sche Eigenfunktionen benutzt und die meisten Integrale mit Hilfe einer Rechenmaschine numerisch berechnet wurden. Beim Methan verschwinden in den Reihenentwicklungen (25) und (27) die von der ersten und zweiten Kugelfunktion herrührenden Glieder wegen der tetraedrischen Anordnung der Protonen.[21] Aus der Rechnung folgt, dass das (negative) Energieminimum bei $R = 2a_H$ liegt, dieser Wert ist vom gemessenen um 2·13% verschieden.

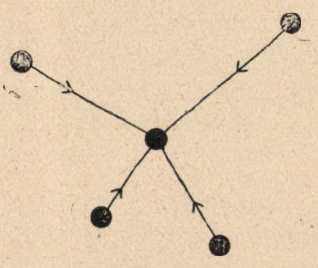


Fig 1.

§ 5. Da wir jetzt alle Energieanteile als Funktion von R (Halbmesser der die Protonen enthaltenden Kugelschale) kennen, so können wir gleich die Frequenz der totalsymmetrischen Eigenschwingung, bei der sich alle Protonen bei Erhaltung der Tetraedersymmetrie den Zentralatom nähern resp. bei Erhaltung dieser Symmetrie um ihre Gleichgewichtslage pendeln (vgl. Fig. 1), aus der Formel

$$\nu = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{E''}{\mu}} \tag{28}$$

berechnen. E'' bedeutet hier den zweiten Differentialquotienten

[20] TH NEUGEBAUER l. c.

[21] Bezüglich der Herleitung dieses Satzes Vgl. TH. NEUBEGAUER: ZS. f. Phys. 95, 717, 1935.

der Energie nach R, bzw. nach der Verschiebung und μ die reduzierte Masse. (Im Falle der $\nu(s)$ Schwingung ist $\mu = 4$ m.) Die numerische Auswertung von (28) ergibt $\nu(s) = 3873$ cm^{-1} gegenüber dem gemessenen Wert 2915 cm^{-1}. Die Übereinstimmung ist also, wenn man die Schwierigkeiten dieser Rechnung und besonders die bei der numerischen Integration notwendigen Vernachlässigungen berücksichtigt, recht befriedigend.

(28) wollen wir jetzt mit den Formeln von MECKE (2), (6), (7) und (10a) vergleichen. Setzen wir (2a) und (7) in (10a) ein, so folgt:

$$\nu(s) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f+4z}{m}}. \tag{29}$$

Aus (28) und (29) erhellt gleich der quantenmechanische Sinn der von MECKE eingeführten Konstanten. Es folgt nämlich

$$\frac{E''}{4} = f + 4z. \tag{30}$$

Die linke Seite ist darum mit vier dividiert, weil wir die ganze Energie nach R differentiiert haben, also mit alle vier Protonen eine infinitesimale Verrückung vornehmen, die Konstanten von MECKE beziehen sich dagegen nur auf ein Proton. Als Wechselwirkung der Protonen kommt in unserer Rechnung nur das unter $a)$ besprochene Glied in Betracht. Dasselbe lautet im Falle des Methans für ein Proton

$$\frac{1}{2}U_1 = \frac{3}{2R\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{31}$$

α bedeutet den Tetraederwinkel.

Also folgt

$$\frac{d^2}{dR^2}\left(\frac{U_1}{4}\right) = 4z. \tag{32}$$

Die zweiten Ableitungen der übrigen Energieanteile sind in der Konstante f enthalten. Die Konstante c in (28) bedeutet die Lichtgeschwindigkeit und ist darum bezüglich unseres Vergleiches

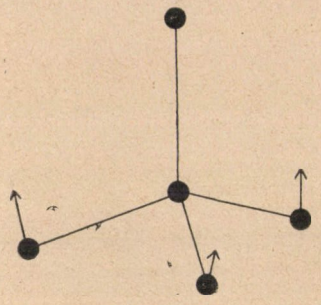


Fig. 2.

unwesentlich; in den Formeln von MECKE ist dieselbe in der Frequenz enthalten.

§ 6. Wir gehen jetzt zur Berechnung der Deformationsschwingung δ (a) über, im Falle der drei Protonen um ihre Gleichgewichtslage so pendeln, dass das Tetraeder in eine gleichseitige Pyramide deformiert wird. Das vierte Proton und der C Kern bleiben in ihrer Gleichgewichtslage. (Fig. 2.) Die Verbindungsgerade derselben wählen wir als Achse. Bei dieser Schwingung ändert sich nur die gegenseitige elektrostatische Energie der Protonen und die Polarisationsenergie.

Da die elektrostatische Abstossungsenergie zweier Protonen

$$W_1 = \frac{1}{2R \sin \frac{\alpha}{2}} \tag{32}$$

ist, so folgt

$$\frac{d^2}{da^2} W_1 = \frac{1}{2R} \cdot \frac{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \tag{33}$$

Die bei dem Pendeln der unteren drei Protonen auftretende Energie setzt sich aus zwei Teilen zusammen, erstens ändert sich die Entfernung der sich bewegenden Protonen vom ruhenden, zweitens ändert sich die Entfernung der sich in Bewegung befindenden untereinander. Die Deformation des Tetraederwinkels zwischen dem ruhenden und den sich bewegenden Protonen wollen wir mit $\Delta\alpha$ bezeichnen. Es fragt sich dann, wie gross die Deformation des Winkels zwischen den sich bewegenden Protonen ist, den wir mit β bezeichnen. Aus dem von einem ruhenden und zwei sich bewegenden Protonen gebildeten sphärischen Dreieck folgt:

$$\cos \beta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha . \cos a, \tag{34}$$

da aber $\cos \alpha = \cos 120° = -\frac{1}{2}$ ist, folgt weiter

$$\cos \beta = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha,$$

also

$$-\sin \beta . \Delta\beta = -3 \sin \alpha . \cos \alpha . \Delta\alpha. \tag{35}$$

Anderseits ist aber $\alpha = 109° 28'$ und $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, also folgt

$$\Delta\beta = -\Delta\alpha, \tag{36}$$

da im undeformiertem Zustande $\sin \beta = \sin \alpha$ ist. Für die ganze bei der Deformation auftretende Energie folgt also, weil das Tetraeder sechs Kanten besitzt:

$$E_1 = \frac{1}{2!} \frac{6}{2R} \frac{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{4} (\Delta\alpha)^2. \tag{37}$$

Die erste Ableitung verschwindet immer, weil es sich um eine Gleichgewichtslage handelt.

Zur Berechnung der Polarisationsenergie benutzen wir das folgende Verfahren: Wir bezeichnen die Winkelkoordinaten einer vom Zentralatom ausgehenden Gerade mit (ϑ, φ). Dann wird diese Gerade mit den vier Tetraederrichtungen die folgenden Winkel einschliessen:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \cos \alpha . \cos \vartheta + \sin \alpha . \sin \vartheta . \cos \varphi, \\ \cos \gamma_2 &= \cos \alpha . \cos \vartheta + \sin \alpha . \sin \vartheta . \cos (120° - \varphi), \\ \cos \gamma_3 &= \cos \alpha . \cos \vartheta + \sin \alpha . \sin \vartheta . \cos (240° - \varphi) \\ \text{und} \quad \cos \gamma_4 &= \cos \vartheta . \end{aligned} \tag{38}$$

Daraus folgt

$$\sum_1^4 \cos \gamma_i = \cos \vartheta (3 \cos \alpha + 1). \tag{39}$$

Die in (39) auf der linken Seite stehende Summe ist aber die Summe der ersten Kugelfunktionen in den Reihenentwicklungen (25) und (27), weil ja

$$P_1 (\cos \gamma_i) = \cos \gamma_i \tag{40}$$

ist. Berücksichtigen wir noch, dass im Tetraeder $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ist, so verschwindet (39), wie das auch sein muss, da wir es schon erwähnt haben, dass in den Reihen erst die dritte Kugelfunktion nichtverschwindende Beiträge zur Energie liefert. Deformieren wir jedoch α, so folgt

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^{4} \cos \gamma_i\right) = -3 \cos \vartheta . \sin \alpha . \Delta\alpha. \tag{41}$$

Zur Berechnung der Polarisationsenergie sei noch Einiges erwähnt. Setzen wir die Reihen (25) und (27) in (23) und (24) ein, und benützen wir gleichzeitig Polarkoordinaten, so folgt gleich, dass im Falle einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung (24) verschwindet, weil nach einem bekannten Satze

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad \text{wenn} \quad l \neq 0 \tag{42}$$

ist. In (23) führen wir noch die schon weiter oben definierte Funktion $f(r)$ ein. Dann haben wir

$$H_1^2(ss) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} f(r) \left[\sum_{i=1}^{4} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \vartheta_i) \frac{r^n}{R^{n+1}}\right]^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \tag{43}$$

im inneren Gebiet. Da wir das Quadrat der Eigenfunktionen im kugelsymmetrischen Falle einfach mit der Dichtefunktion $f(r)$ ersetzt haben, so wurde dadurch das Pauliprinzip vernachlässigt, weil es lässt sich zeigen, dass dieses Verfahren der Benützung einer einfachen Produkteigenfunktion entspricht, anstatt der bekannten antisymmetrischen Determinanteneigenfunktion. Doch ist diese Vernachlässigung bei der Berechnung der Polarisationsenergie ganz unbedeutend.

Wie wir es schon erwähnt haben, verschwinden im Falle des symmetrischen undeformierten Tetraeders die von der ersten und zweiten Kugelfunktion herrührenden Glieder. Im Falle der besprochenen Deformation (Fig. 2) müssen wir jedoch (41) in das Integral einsetzen. Da $f(r)$ von den Winkelkoordinaten nicht abhängt, können wir nach deren (41) gleich integrieren und erhalten:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(3\cos\vartheta\sin\alpha.\Delta\alpha)^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = (3\sin\alpha.\Delta\alpha)^2\frac{4\pi}{3} = 8\frac{4\pi}{3}(\Delta\alpha)^2. \quad (44)$$

Aus (22), (43) und (44) folgt für diesen Energieanteil im inneren Gebiet:

$$E_{P_1 i} = -\frac{8}{3}\frac{1}{h\bar{\nu}}\frac{1}{R^4}(\Delta\alpha)^2\int_0^R f(r)\,r^2 dr. \quad (45)$$

Und analog im äusseren Gebiet

$$E_{P_1 a} = -\frac{8}{3}\frac{1}{h\bar{\nu}}R^2(\Delta\alpha)^2\int_R^{\infty} f(r)\frac{1}{r^4}\,dr. \quad (46)$$

Zur angenäherten Berechnung von $h\bar{\nu}$ verfahren wir folgendermassen: Die Elektronenkonfiguration des Methans ist edelgasartig und ähnelt dem des Neons. Wir benützen also für $h\bar{\nu}$ den sich auf das Neonatom beziehenden Wert, den wir aus der Polarisierbarkeit des Neons, die ja empirisch bekannt ist, erhalten. Da

$$\varkappa = 2\sum_{s'}{}' \frac{|P(ss')|^2}{h\nu(s's)} \quad (47)$$

ist und wir dafür

$$\varkappa = \frac{2\Sigma|P(ss')|^2}{h\bar{\nu}} = \frac{2P^2(ss)}{h\bar{\nu}} = \frac{\frac{2}{3}\int r^2 f(r)\,dr}{h\bar{\nu}} \quad (48)$$

schreiben können und ausserdem auch $f(r)$ für Neon (z. B. nach der THOMAS—FERMI'schen Methode) berechenbar ist, so erhalten wir daraus $h\bar{\nu}$, das wir dann in (45) und (46) einsetzen.

Analog zu (45) und (46) erhalten wir auch das von der zweiten Kugelfunktion

$$P_2(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \quad (49)$$

herrührende Glied:

$$E_{P_2 i} = -\frac{8}{5}\frac{1}{h\bar{\nu}}\frac{1}{R^6}\int_0^R f(r)\,r^4 dr.(\Delta\alpha)^2. \quad (50)$$

Die numerische Berechnung ergibt (l. c. S. 653):

$$\begin{aligned} E_1 &= 0{\cdot}4375\,(\Delta\alpha)^2, \\ E_{P_1 i} &= -\,0{\cdot}1625\,(\Delta\alpha)^2, \\ E_{P_1 a} &= -\,0{\cdot}0481\,(\Delta\alpha)^2, \\ E_{P_2 i} &= -\,0{\cdot}0241\,(\Delta\alpha)^2. \end{aligned} \qquad (51)$$

und

Die Summe dieser Energien bezeichnen wir mit E, für E'' folgt dann $E''=0{,}4054/R^2$, das wir in (28) einsetzen. Zur numerischen Auswertung der letzteren Formel müssen wir noch μ im Falle der $\delta(a)$ Schwingung berechnen.

Bezeichnen wir die Konstante der in unserem Schwingungsproblem auftretenden harmonischen Kraft mit φ, dann folgt für die Bewegung des Kohlenstoffatoms und des oberen Protons

$$(M+m)\,\ddot{x} = \varphi.x, \qquad (52)$$

da aber

$$\Delta x = \Delta\alpha.R.\cos\beta$$

und

$$\beta = \alpha - 90^\circ$$

ist, wo α den Tetraederwinkel bedeutet, so folgt

$$(M+m)\,R\ddot{\alpha}_1 \cos\beta = -\varphi.x. \qquad (53)$$

Für die Bewegung der unteren drei Protonen haben wir dagegen

$$3mR\ddot{\alpha}_2 = -\,\psi.(\alpha_1+\alpha_2), \qquad (54)$$

wo $\alpha_1+\alpha_2=\alpha-\alpha'$ die Änderung des Tetraederwinkels bedeutet.

Aus der Fig. 2 folgt aber weiter, dass

$$\Delta x.\varphi.x = \psi.(\alpha_1+\alpha_2)\,R.\Delta\alpha, \qquad (55)$$

also

$$\varphi.x = \frac{\psi.(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos\beta} \qquad (56)$$

ist.

Aus (53), (54) und (56) erhalten wir

$$R.(\ddot{\alpha}_1+\ddot{\alpha}_2) = -\,\psi.(\alpha_1+\alpha_2)\left\{\frac{1}{3m}+\frac{1}{(M+m)\cos^2\beta}\right\}. \qquad (57)$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3m}+\frac{1}{(M+m)\cos^2\beta} \qquad (58)$$

ist.

Endlich folgt aus (28), wenn wir alle unsere hier hergeleiteten Ergebnisse einsetzen $\delta(a) = 1101$ cm^{-1}. (Gemessen wurde 1304 cm^{-1}.)

Wir sehen also, dass unsere Rechnung vollständig den bekannten experimentellen Befund wiedergibt, dass die Deformationsschwingungen viel kleinere Frequenzen als die Valenzschwingungen haben. Unser Modell zeigt aber auch sehr schön die Ursache von diesem Grössenverhältnis. Bei der Valenzschwingung wurden alle Energieanteile in unserer Rechnung beeinflusst, bei der Deformationsschwingung dagegen nur die elektrostatische Energie der Protonen und die Polarisationsenergie. Beide letzteren Energie anteile sind aber klein im Verhältnis zu den übrigen Energieanteilen. (Vgl. l. c. S. 648. Tabelle 3.)

Unsere aus der Quantenmechanik hergeleiteten Formeln wollen wir jetzt wieder mit (2), (7), (10*c*) und (10*d*) vergleichen. Wir sehen gleich, dass im Falle der Schwingung $\delta(a)$ die von der Deformation des Valenzwinkels herrührende Biegungskraft (2*b*) von der Änderung der Polarisationsenergie, die Zentralkraft (7) dagegen von der Änderung der elektrostatischen Abstossungsenergie der Protonen herrührt. Unsere Formeln stimmen nicht ganz mit den Formeln von MECKE (10*c*) und (10*d*) überein, weil wir um die Rechnung durchführen zu können, die Schwingungsbewegung mehr spezialisiert haben.

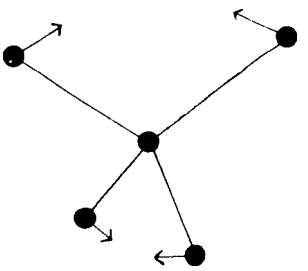


Fig. 3.

§ 7. Zuletzt wollen wir noch die Frequenz der symmetrischen Schwingung $\delta(s)$ berechnen. Kinematisch kann man diese Bewegung so beschreiben, dass alle vier Protonen Ellipsen auf der sie enthaltenden Kugelfläche beschreiben. Demzufolge ist diese Schwingungsbewegung zweifach entartet und wir können sie in zwei Komponenten zerlegen. Beide Komponenten der Bewegung bestehen darin, dass sich die zwei Paare der Protonen entlang ihrer Verbindungslinie auf der Kugeloberfläche nähern. (Fig. 3.)

Zur Berechnung der Änderung der elektrostatischen Energie

während der Schwingung, gehen wir wieder von der Energie eines Protonenpaares

$$W_1 = \frac{1}{2R \sin \frac{\alpha}{2}} \tag{59}$$

aus. Die Änderung des Tetraederwinkels entlang der Verbindungslinie der Protonen sei $2\Delta\alpha$, dann verschiebt sich ein Proton um $\Delta\alpha$. Mit Hilfe von (59) und (33) folgt für die dabei auftretende elektrostatische Energie der beiden Paare:

$$\frac{1}{2!}\,\frac{1}{2R}\,\frac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}\,\frac{1}{4}\,2\,(2\Delta\alpha)^2. \tag{60}$$

Wir müssen aber auch noch diesen Umstand berücksichtigen, dass während der Näherung der zu einem Paare gehörenden Protonen, die nicht zu einem Paare gehörenden sich voneinander entfernen. Zur Berechnung der hierbei auftretenden Winkeldeformation betrachten wir das sphärische Dreieck, das von der ursprünglichen Lage des einen Protons, von der um $R\Delta\alpha$ verschobenen Lage desselben und von einem anderen nicht mit dem vorigen ein schwingendes Paar bildende Proton aufgespannt wird. Die Vergrösserung des Tetraederwinkels zwischen diesen zwei Protonen bezeichnen wir mit $\Delta\gamma$, dann folgt

$$\cos(\alpha+\Delta\gamma) = \cos\alpha\cos\Delta\alpha + \sin\alpha\sin\Delta\alpha\cos 120°, \tag{61}$$

oder

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2}\Delta\alpha. \tag{62}$$

Die ganze Deformation ist also gleich $\Delta\alpha$, da beide Protonen schwingen.

Da vier Kanten des Tetraeders in dieser Weise deformiert werden, so erhalten wir für die Änderung der elektrostatischen Energie :

$$\frac{1}{2!}\,\frac{1}{2R}\,\frac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}\,\frac{1}{4}\,4\,(\Delta\alpha)^2. \tag{63}$$

Aus (60) und (63) folgt endlich

$$E_1 = \frac{3}{4R} \frac{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} (\Delta\alpha)^2. \tag{64}$$

Zur Berechnung der Polarisationsenergie ist es in diesem Falle bequemer ein zu den Tetraederrichtungen anders orientiertes Koordinatensystem einzuführen. Als Achse wählen wir eine Gerade, die beide Winkel, welche die zwei gegeneinander schwingenden Paare miteinander einschliessen, halbiert. Die Winkelkoordinaten einer vom Mittelpunkte ausgehenden Gerade bezeichnen wir mit (ϑ, φ). Die Tetraederrichtungen sollen mit dieser Gerade der Reihe nach die Winkel γ_1, γ_2, γ_3 und γ_4 einschliessen, dann folgt

$$\left.\begin{aligned}
\cos\gamma_1 &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\vartheta + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\vartheta\cos\varphi,\\
\cos\gamma_2 &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\vartheta + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\vartheta\cos(\pi+\varphi),\\
\cos\gamma_3 &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos(\pi-\vartheta) + \sin\frac{\alpha}{2}\sin(\pi-\vartheta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\\
\text{und}\\
\cos\gamma_4 &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos(\pi-\vartheta) + \sin\frac{\alpha}{2}\sin(\pi-\vartheta)\cos\left(3\frac{\pi}{2}+\varphi\right).
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Aus (65) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{4} \cos\gamma_i = 0 \tag{66}$$

und

$$\Delta \sum_{i=1}^{4} \cos\gamma_i = 0. \tag{67}$$

Es treten also auch bei der Deformation keine von der ersten Kugelfunktion herrührende Glieder auf.[22]

---

[22] Bei der Ramanaktiven Deformationsschwingung $\delta(s)$ verschwindet also in der Reihe der Polarisationsenergie auch das von der zweiten Kugelfunktion herrührende Glied während der Schwingung, bei der ultrarotaktiven Deformationsschwingung $\delta(a)$ dagegen nicht, wie ja das auch zu erwarten ist.

Mit Hilfe von (49) folgt weiter:

$$\sum_{i=1}^{4} P_2(\cos\gamma_i) = \frac{3}{2}\left\{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\vartheta + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\vartheta\right\} - 2 = 0 \quad (68)$$

und

$$\Delta\left[\sum_{i=1}^{4} P_2(\cos\gamma_i)\right] = -2\sqrt{2}\left\{1-3\cos^2\vartheta\right\}\Delta\alpha, \quad (69)$$

da im Tetraeder

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

ist.

Analog zu (50) erhalten wir für die Polarisationsenergie im äusseren Gebiet

$$E_{P_2 i} = -\frac{32}{5}\frac{1}{h\bar{\nu}}\frac{1}{R^6}(\Delta\alpha)^2\int_0^R f(r)\,r^4 dr \quad (70)$$

und im inneren

$$E_{P_2 a} = -\frac{32}{5}\frac{1}{h\bar{\nu}}R^4(\Delta\alpha)^2\int_R^\infty f(r)\,r^{-6}dr. \quad (71)$$

Die numerische Berechnung ergibt für E'', wenn wir jetzt nach $2R\Delta\alpha$ differenzieren (l. c. (63)).

$$E'' = 0{\cdot}0572.$$

Diesen Wert setzen wir in (28) ein. Zur Berechnung der reduzierten Masse μ verfahren wir in unserem Falle folgendermassen: Bezeichnen wir die Konstante der quasielastischen Kraft mit φ, dann folgt für die Schwingung des einen Paares

$$mR\ddot{a}_1 = -\frac{1}{2}\varphi.(a_1 + a_2), \quad (72)$$

$$mR\ddot{a}_2 = -\frac{1}{2}\varphi.(a_1 + a_2) \quad (73)$$

und demzufolge

$$mR(\ddot{a}_1 + \ddot{a}_2) = -\varphi.(a_1 + a_2). \quad (74)$$

Daraus folgt das einfache Resultat

$$\mu = m. \quad (75)$$

Die numerische Auswertung ergibt $\delta(s) = 1230$ cm^{-1}, gegenüber dem beobachteten Wert 1520 cm^{-1}.

Ebenso, wie im Falle der weiter oben berechneten anderen Schwingung $\delta(a)$, sehen wir wieder, dass die Frequenz der Deformationsschwingungen viel kleiner ist, weil sich dabei nur die elektrostatische Energie der Protonen und die Polarisationsenergie ändern.

Wir wollen noch unser Ergebnis mit den Formeln von MECKE (2a), (2b), (6), (7) und (10b) vergleichen. Es folgt, dass wieder die «Zentralkraft» von der Änderung der elektrostatischen Energie der Protonen herrührt, die «Deformationskraft» dagegen von der Polarisationsenergie. (10b) können wir folgendermassen schreiben:

$$\delta(s) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{d}{m} + \frac{z}{m}} \tag{76}$$

Dann folgt mit Hilfe von (64), (70) und (71):

$$\frac{3}{2}d = \frac{1}{(2R)^2}\frac{d^2}{da^2}E_1 \tag{77}$$

und

$$z = \frac{1}{(2R)^2}\frac{d^2}{da^2}(E_{P_2 i} + E_{P_2 a}). \tag{78}$$

§. 8. Bei der Berechnung der ultrarotaktiven Valenzschwingung $\nu(a)$ (Fig. 4)[23] wäre es zu berücksichtigen, dass sich bei diesem Schwingungstyp wieder alle Energieanteile ändern, weil erstens das zentrale Kohlenstoffatom nicht in Ruhe bleibt und zweitens auch das Protonentetraeder deformiert wird, so dass die Berechnung eine

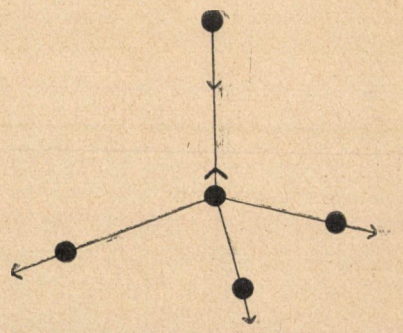


Fig. 4.

[23] Bezüglich der verschiedenen Schwingungen des Methans vgl. D. M. DENNISON: Astroph. Journ. 62, 84, 1925; W. ELERT: ZS. f. Phys. 51, 6, 1928 und CL. SCHAEFER ebenda 60, 586, 1930.

Kombination der beiden Methoden, die wir im Falle der Schwingungen $\nu(s)$ und $\delta(a)$ und $\delta(s)$ angewendet haben, zu betrachten ist. Wir wollen aber auf diese ziemlich langwierige Rechnung nicht mehr eingehen, weil sie bezüglich der quantenmechanischen Deutung des Valenzkraftmodells mehr nichts Neues bringen würde.

Zum Schluss sei es noch bemerkt, dass VAN VLECK und CROSS [24] die Deformationsschwingung des Wassermoleküls $\delta(\pi)$ mit Hilfe des Heitler-London-Modells berechnet und in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung gefunden haben.

Budapest, Institut f. theoret. Physik d. Universität, März 1937.

---

[24] J. H. VAN VLECK u. P. C. CROSS: Journ. of Chem. Phys. 1, 347, 1933.

Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai).

GAMMASUGARAK SZÓRÓDÁSÁNÁL FELLÉPŐ MAGEFFEKTUSRÓL.

PAPP GYÖRGY-től.

Bevezetés.

Valamely közeg dx vastagságú rétegén haladjon át I intenzitású sugárzás; ennek

$$dI = \mu . I . dx$$

része abszorbeálódik. Ezen abszorbeált energia egy része szórt sugárzás, vagy egy más természetű sugárzás alakjában jelentkezik. Éppen ezért a szórt fény vizsgálatából fontos következtetések vonhatók az abszorpcióprocesszusra és megfordítva.

A gammasugarak abszorpciójában jelentős szerepet játszik a röntgensugaraknál ismert COMPTON-effektus[1] és a *fotóabszorpció*. Ennek megfelelően az abszorpció-egyenletben szereplő μ e két részfolyamat szerint

$$\mu = \sigma + \tau$$

összegre bontható, minek jogosultságát kísérletileg több oldalról igazolták.

Igen kemény sugarakra az abszorpció e két folyamattal már nem írható le teljesen. Növekvő rendszámú elemeknél az egy elektronra számított

$$\mu_\varepsilon - \tau_\varepsilon$$

különbséget TARRANT[2] a Z rendszámmal növekvőnek találja. Hasonló eredményre jut CHAO,[3] MEITNER és HUPFELD,[4] JAKOB-

---

[1] SZEPESI Z.: Mat. Termtud. Értesítő. LVI.

[2] TARRANT: Proc. Roy. Soc. 128, 345, 1930; 135, 223, 1935.

[3] CHAO: Proc. Nat. Ac. 16, 431, 1930.

[4] MEITNER és HUPFELD: Naturw. 18, 534, 1930; Zs. f. Ph. 67, 147, 1931.

SEN[1] is. Ezt az új abszorpciót — melynek nagysága kísérleteik szerint egy atomra számítva a rendszám négyzetével nő, s a hullámhossztól való függése a fotóabszorpcióéval éppen ellentétes irányú — az *atommagnak* tulajdonítják.

A kemény gammasugarak szóródásánál ugyancsak fellép a COMPTON-szórástól különböző, *anomális* szórás. E szórt fény vizsgálatára vonatkozó eredmények, sajnos, nem nagyon egyezőek. MEITNER és HUPFELD,[2] MEITNER és KÖSTERS[3] a primer sugárral azonos energiájú szórt fényt talál, míg CHAO,[4] GRAY és TARRANT,[5] HEITING.[6]

$$h\nu \sim {}^1/_2 . 10^6 e.V., \quad \text{illetőleg} \quad h\nu \sim 1 . 10^6 e.V.$$

energiájú sugarakat találnak, melyek intenzitása egy atomra számítva itt is a rendszám négyzetével nő, s CHAO méréseiben a szórási szög e fény intenzitását csak kevéssé befolyásolja.

Ezen abszorpció és szórás magyarázata a pozitronok felfedezése után jórészt sikerült.

ANDERSON és NEDDERMEYER,[7] CURIE és JOLIOT,[8] MEITNER és PHYLIPP[9] rövidesen megmutatták, hogy egy pozitív és negatív elektronból álló elektronpár létrejöhet egy mag erőterében $2mc^2 \sim 10^6 e.V.$-nál nagyobb energiájú gammasugarak materializációja révén. Ennél a folyamatnál mind az energia-, mind az impulzustétel ki van elégítve. Számítás szerint a folyamat valószínűsége növekvő energiával és a rendszám négyzetével nő, mit kísérletileg igazoltak CURIE és JOLIOT,[10] valamint LAURITSEN és CRANE[11] mérései.

Az anomális szórásnál fellépő ${}^1/_2 . 10^6 e.V.$ ill. $1 . 10^6 e.V.$ ener-

---

[1] JAKOBSEN: Zs. f. Ph. 70, 145, 1931.

[2] MEITNER és HUPFELD: Naturw. 19, 775, 1931; Zs. f. Ph. 75, 705, 1932.

[3] MEITNER és KÖSTERS: Zs. f. Ph. 84, 137, 1933.

[4] CHAO: Phys. Rev. 36, 1545, 1930.

[5] GRAY és TARRANT: Proc. Roy. Soc. 136, 632, 1932.

[6] HEITING: Zs. f. Ph. 87, 127, 1934.

[7] ANDERSON és NEDDERMEYER: Phys. Rev. 43, 1034, 1933.

[8] CURIE és JOLIOT: Naturw. 24, 468, 1933.

[9] MEITNER és PHYLIPP: Nature 131, 473, 1933.

[10] CURIE és JOLIOT: Journ. de Ph. et le Rad. 4, 494, 1933.

[11] LAURITSEN és CRANE: Phys. Rev. 45, 1550, 1934.

giájú szórt fényt BLACKETT és OCHIALINI a gammasugarak által (az előbb említett magabszorpcióban) kiváltott pozitronoknak egy-egy elektronnal való megsemmisülésénél fellépő sugárzással azonosítja. E megsemmisülési folyamatnál eltűnő két elektron energiája *két* $^1/_2 . 10^6$ *e. V.* nagyságrendű energiával bíró gammakvantum alakjában lép fel; e folyamat, főleg nagy energiájú pozitronok esetén egy mag erőterében végbemehet a felszabaduló energia *egy* kvantumban való emittálásával is, de az előbbinél jóval kisebb valószínűséggel (FERMI és UHLENBECK,[1] BETHE[2] számításai).

E dematerializációs sugárzás fellépésére közvetlen kísérleti bizonyítékkal szolgált THIBAUD[3] és JOLIOT,[4] majd sokkal tisztább kísérleti körülmények között — mesterséges rádioaktív anyagból kilépő pozitronokkal — LAURITSEN és CRANE[5]; a fellépő gammasugarak energiáját az elméletből várt értékkel egyezőnek találták. Az impulzustétel érvényét ALICHANIAN, ALICHANON és ARZIMOVITCH koincidencia-mérései[6] igazolják.

A MEITNER és munkatársai által talált primer-keménységű sugárzást DEHLBRÜCK[7] az atommag környékén levő negatív energiájú elektronokon való szórással — egy, szükségképpen a klasszikus szórásnak megfelelő szórással — értelmezi. Ezzel szemben GENTNER[8] e sugárzást a szóróközegből kilépő elektronsugárzásnak tulajdonítja, mely a számolócső vagy ionizációs-kamra elé tett abszorpciós közeghez eljutva, ebben fékezési sugárzást hoz létre. Ez nagy abszorbens-rétegvastagság esetén túlnyomó szerephez jut és így egész hamis képet ad a szórt fény keménységéről.

Újabban BOTHE és HORN[9] a *Th* gammasugarainak *Al*-on és *Pb*-on való szóródását vizsgálja a szóróréteg vastagságától függően.

---

[1] FERMI és UHLENBECK: Phys. Rev. 44, 510, 1933.
[2] BETHE: Proc. Roy Soc. 150, 129, 1935.
[3] THIBAUD: Compt. Rend. 197, 1629, 1933.
[4] JOLIOT: Compt. Rend. 197, 1622, 1933.
[5] LAURITSEN és CRANE: Phys. Rev. 45, 430, 1934.
[6] ALICHANIAN, ALICHANON és ARZIMOVITCH: Nature 137, 704, 1936.
[7] DEHLBRÜCK: Zs. f. Ph. 84, 144, 1933; Naturw. 22, 174, 1934.
[8] GENTNER: Naturw. 22, 435, 1933.
[9] BOTHE és HORN: Zs. f. Ph. 88, 683, 1934.

Megállapítják, hogy a COMPTON-szórás mellett fellépő *anomális* szórás a pozitronok megsemmisülésével, a fotó- és COMPTON-elektronok fékezési sugárzásával és többszörös COMPTON-szórással, mint tercier szórással kvantitative értelmezhető. Szorosan e dolgozathoz kapcsolódik GENTNERnek [1] egy munkája: igen vékony lemezeken kezdve a szórás vizsgálatát megállapítja, hogy vékony *Al* és *Pb* lemezen szórt fény intenzitásnövekedése összhangban van a COMPTON-szórás KLEIN—NISHINA [2] és a pozitronok megsemmisülésénél fellépő sugárzásnak BETHE—HEITLER [3] dolgozataiban számított értékével; nagyobb rétegvastagság esetén a fellépő *többszörös* COMPTON-szórás a szórt fény direkt analízisét meghiúsítja.

GENTNER [4] és GENTNER—STARKIEVITZ [5] egy-egy másik dolgozata az ólomnak különböző hullámhosszú gammasugarakkal, ill. különböző elemeknek *ThC''* gammasugaraival mért abszorpciókoefficiensét hasonlítja össze a COMPTON-processzus, fotóabszorpció és párképződés elméletileg KLEIN—NISHINA, HULME és munkatársai,[6] valamint BETHE—HEITLER által számított értékeivel, s az egyezést itt is kielégítőnek találja.

Az irodalomban nincsen a BOTHE—HORN és GENTNER által felállított követelményeknek megfelelő szórási kísérlet, mely elegendő vékony rétegen, kétszeres COMPTON-processzus kizárásával határozná meg a szórt fény *szögtől függő* intenzitáseloszlását, nehéz és könnyű fémeken, s ezek összehasonlításával szolgáltatna adatot a magszórás intenzitáseloszlására, valamint a magszórás nagyságát közvetlenül határozná meg a szóró közegben beálló jelentékeny abszorpció nélkül. Itt akar jelen dolgozat bekapcsolódni az eddigi eredményekbe.

Az *Al*-on és *Pb*-on felvett intenzitás görbe összehasonlításából a *magszórás nagysága a szórási szögtől függetlennek adódik.* A szórt fény keménysége a kísérleti hibákon belül szintén független a

---

[1] GENTNER: Zs. f. Ph. 100, 445, 1936.

[2] KLEIN—NISHINA: Zs. f Ph. 52, 853, 1929.

[3] BETHE—HEITLER: Proc. Roy. Soc. 146, 83, 1934.

[4] GENTNER: Journ. de Phys. el le Rad. 6, 774, 1935.

[5] GENTNER—STARKIEVITZ: Journ. de Phys. le Rad. 6, 340, 1935.

[6] HULME, DOUGALL, BUCKINGHAM és FOWLER: Proc. Roy. Soc. 149, 131, 1935.

szórási szögtől, de a hullámhossz nagyságára jelen dolgozat csak egy összehasonlító módszerrel tud következtetni. A magabszorpció-együttható értéke a kísérletekből meghatározható.

A mérés módszere.

A szórási kísérletek végzéséhez ugyanazt az elrendezést használtam, melyet SZEPESI ZOLTÁN idézett dolgozatának készítésénél kidolgozott. Az aránylag nagy felületű szóróközeget a *Ra* és számolócső körül az egyes szórási szögeknek megfelelő toroidok érintő hengerei mentén helyeztük el azért, hogy a szóróközeg minden pontjából a számolócsőhöz jutó szórt gammakvantum a primer sugárral azonos szöget zárjon be. E szóró közeget a gammasugárforrással és a számolócsővel együtt könnyű faszerkezeten elhelyezve egy nagy előadóterem közepén függesztettük fel, hogy a gammasugaraknak a környező tárgyakon való szóródásának hatását (nulleffektus) csökkentsük. A számolócsőtől a *Ra* direkt sugarait megfelelően méretezett ólomtömbbel árnyékoltuk el.

Minden egyes szögre a számolócsőben a szórt fény által kiváltott lökések számát az

$$n_a = (n_2 - n_1)_a \tag{1}$$

különbség adja, hol n_1: — a nulleffektus — a mindenkori elrendezésnek megfelelően a szóróközeg nélkül n_2: a szóróközeg felállítása után mért lökések száma.

(1) különbség középhibája

$$\Delta n = \sqrt{n_1 + n_2} \tag{2}$$

és így a mérés relatív hibája

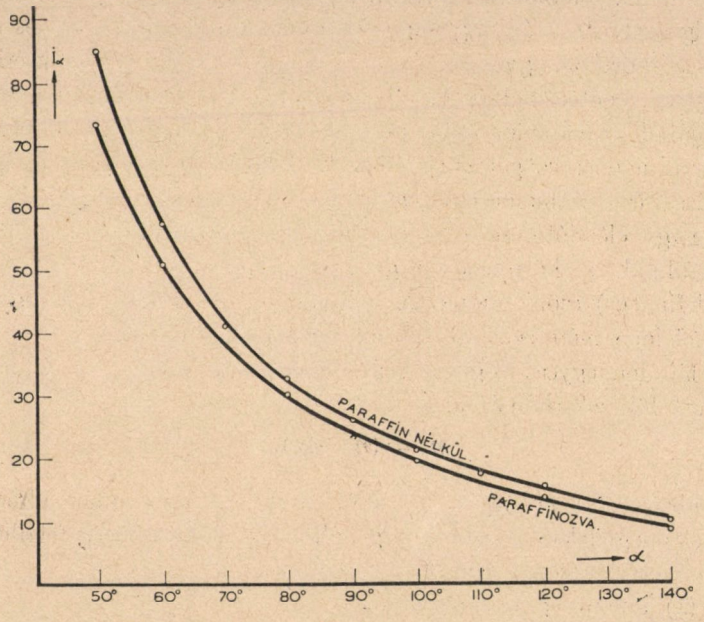
$$r = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2 - n_1}}. \tag{3}$$

Ha ezen n lökésszám t perc alatti lökések száma, akkor a percenkinti ν lökésszám relatív hibája

$$r = \frac{\sqrt{\nu_1 t + \nu_2 t}}{\nu_2 t - \nu_1 t} = \frac{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}}{\nu_2 - \nu_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{3'}$$

az n_1 és n_2 helyett a percenkinti ν_1 és ν_2 lökésszámokat használva.

A ν_1 és ν_2 értékében még egy szórás játszhat jelentős szerepet, mire GENTNER hívja fel a figyelmet: a *Ra*-ot tartalmazó szűrő ólomhengerből s a direkt sugárzásnak kitett ólomtömbökből intenzív pozitron-sugárzás lép ki. Ezek a pozitronok a levegőben vagy a környező tárgyakon, ill. a szóróközegen megsemmisülve



1. ábra.

létrehozzák a két $^1/_2 . 10^6$ *e. V.* energiájú gammasugarat, s ezt szintén méri a számolócső ν_1, ill. ν_2-ben. Ez azután az egész mérést meghamisítja, mert a *gamma+pozitron*-sugárzás, s nem tisztán a gammasugarak által létrehozott szórt fényt mérjük az (1) különbségben. Megszüntethető ez azáltal, ha a kilépő pozitron-sugárzást az ólomtömbökből való kilépésük után mindjárt megsemmisítjük. Ennek elérésére az ólomtömböket kb. 3 mm vastag paraffinréteggel vontuk be. A paraffinozás hatását a *Pb*-on szórt fény mérésénél az 1. ábra mutatja, hol az egyes szögekhez ordinátának a 100 mg. Ra-ra

vonatkoztatott percenkinti lökésszám és a lentebb (13) megadott C_α hányadosa van felrakva. A két görbe közti különbség növekvő α-val csökken. Ez megfelel a különbség iménti értelmezésének: mivel α növekedésével a szóróközeg mind távolabb kerül a preparátumtól, a levegőben történő abszorpció miatt mind kevesebb elektron jut el a szóróközegre.

A mérésekhez egy argon-alkoholgőz keverékével töltött GEIGER—MÜLLER-számolócsövet használtunk. Lökéseit egy kétcsöves kondenzátor-ellenállásos erősítővel felerősítve — egy relais közbeiktatásával — automata telefonszámlálóval regisztráltuk.

Fontos a mérésekhez e mechanikus számolóberendezés τ_0 felbontóképességének ismerete. A számolóberendezés a számolócső lökéseiből azokat, melyek τ_0-nál rövidebb időközökben követik egymást, csak egy lökésnek regisztrálja, s így a valószínűségszámítás szerint percenkinti ν_0 lökés esetén

$$\nu = \nu_0 . e^{-\tau_0 \nu_0} \tag{4}$$

számot mutat. A τ_0 értéke SZEPESI ZOLTÁN dolgozatában leírt módon meghatározva

$$\tau_0 = 6{\cdot}13 . 10^{-4} \text{ min.}$$

Ennek ismeretével minden ν értéket korrigáltunk a

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu \tag{5}$$

különbséggel, mely korrekciót a τ_0-hoz szerkesztett grafikonból lehet leolvasni.

A szórási koefficiens meghatározása.

Valamely közeg df felületelemére érkező N gammakvantum közül dx vastagságú rétegen való áthaladás közben

$$\Delta N = \mu . N . dx \tag{6}$$

gammakvantum szenved abszorpciót; ezen abszorbeált kvantumok helyett a térben fellép *szórt* gammafény alakjában

$$\delta N = (\sigma + \varkappa) . N . dx \tag{7}$$

kvantum, hol σ és $\varkappa$ a COMPTON-, ill. magszórásnak megfelelő szórási koefficiensek. Ebből a szórt sugárzásból a primer sugár irányával α szöget bezáró $d\omega$ térszögben

$$dN_\alpha = \frac{\delta N}{4.\pi}\, d\omega = \frac{\sigma+\varkappa}{4.\pi} \cdot N.dx.d\omega \tag{7'}$$

kvantum halad, ha a szórás *izótrópikus;* ha viszont ez nem áll fenn, egyenletünket akkor is megtartjuk, s a

$$\frac{\sigma+\varkappa}{4.\pi} = \sigma_\alpha + \varkappa_\alpha \tag{8}$$

szórási koefficienshez írunk egy α-tól való függést. Ezek a szórási koefficiensek *Al-* és *Pb*-re kísérletünkből meghatározhatók.

Elrendezésünknél a szóróközegről percenkint a számolócsőhöz jutó szórt gammakvantumok száma k mg. rádium esetén

$$N_\alpha = \int (\sigma_\alpha + \varkappa_\alpha) \frac{k.N_0.F.d}{4\pi.r_1^2.r_2^2}\, df, \tag{9}$$

mely integrál a szóróközeg felületére terjesztendő ki, s ahol $\frac{F}{r_2^2}$ a számolócső térszöge (a preparátumtól r_1 távolságra levő) df felületelemtől, d a szóróréteg vastagsága, N_0 az egy mg. rádiumból percenkint a szűrő ólomhengeren át az egész térbe jutó gammakvantumok száma.

Ezen N_α kvantumból a számolócső statisztikusan minden $\frac{1}{E}$-iket jelzi, s így a szórt gammasugaraktól eredő lökések száma percenkint

$$\nu_\alpha = N_\alpha.E. \tag{10}$$

Hogy az *Al-* és *Pb*-nál fellépő szórást közvetlenül összehasonlíthassuk σ_α és $\varkappa_\alpha$ helyett az egy elektronra vonatkoztatott Σ_α és K_α szórási koefficienseket kell használnunk. Ha az anyag egy cm^3-ében M elektron van, akkor ezek között

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= M.\Sigma_\alpha \\ \varkappa_\alpha &= M.K_\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

összefüggés áll fenn.

A (9)-ben szereplő integrálást elvégezve,[1] a szórási-koefficiens értéke:

$$\Sigma_\alpha + K_\alpha = \frac{\nu_\alpha}{k.C_\alpha} \cdot \frac{l^3}{4.M.m.d.\frac{N_0F.E}{4\pi}}, \qquad (12)$$

$$C_\alpha = \frac{\sin\alpha.\sin(\alpha-2\varphi_1)}{\sin\varphi_1.\sin(\alpha-\varphi_1)} + 2\cos\alpha.\log\frac{\sin(\alpha-\varphi_1)}{\sin\varphi_1}, \qquad (13)$$

hol α_1 és $\alpha-\varphi_1$ a szóróközeg végpontjainak a polárszöge a rádium helyétől számítva. A képletben szereplő többi adatok

$$l = 50 \text{ cm}$$

a rádium és számolócső távolsága, míg az egy cm³-ben levő elektronok száma, a szóróréteg vastagsága és magassága *Al*- és *Pb*-nál

$M_{Al} = 7{\cdot}85.10^{23}$ cm^{-3}	$M_{Pb} = 27{\cdot}4.10^{23}$ cm^{-3}
$d_{Al} = 0{\cdot}198$ cm.	$d_{Pb} = 0{\cdot}052$ cm.
$m_{Al} = 5{\cdot}05$ cm.	$m_{Pb} = 4{\cdot}87$ cm.

A (12)-ben szereplő $\frac{N_0FE}{4\pi}$ kifejezés értékét kísérletileg meghatározhatjuk: k_1 mg. *Ra*-t a szűrő ólomhengerben felállítunk a számolócsőtől r_1 távolságra. A csőhöz percenkint eljutó kvantumok száma

$$N_1 = \frac{k_1.N_0.F}{4\pi r_1^2} \qquad (14)$$

s így a számolócső percenkinti ν lökéseiből

$$\frac{N_0.F.E}{4\pi} = \frac{\nu.r_1^2}{k_1} \qquad (15)$$

A kísérletben itt is

$$\nu = \nu_2 - \nu_1$$

különbség. $k = 1{\cdot}84$ mg. és $r = 183{\cdot}5$ cm esetén

$$\nu_2 = \bar{\nu}_2 + \Delta\nu_2 = 151{\cdot}7 + 21 = 172{\cdot}5$$

ahol $\bar{\nu}_2$ a készülék által percenkint regisztrált lökésszám, $\Delta\nu_2$ az (5) korrekció,

$$\nu_1 = \nu_{kozm} + \nu_{fal} = 19{\cdot}4 + 7{\cdot}5 = 26{\cdot}9$$

[1] Lásd Szepesi Z. dolgozatában.

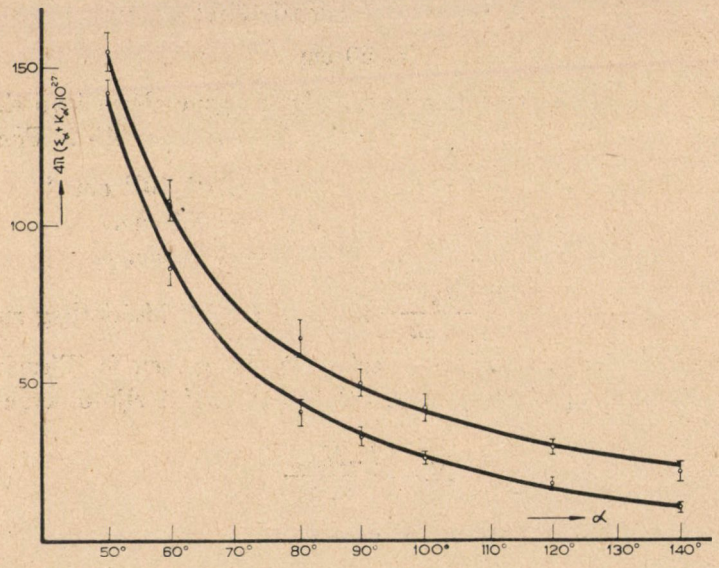
s így

$$\nu = 172{\cdot}5 - 26{\cdot}9 = 145{\cdot}6$$

Ezekkel

$$\frac{N_0 F.E}{4\pi} = 2{\cdot}66.10^6 \text{ cm}^2.\text{min}^{-1}$$

Az intenzitáseloszlás mérési adatai az I. táblázatban és a 2. ábrán vannak feltüntetve. A táblázat első és második oszlopa tartal-



2. ábra.

mazza a 100 mg-ra átszámított (1) lökésszámokat a hozzátartozó (3) statisztikus hibákkal; a negyedik és ötödik oszlop a (12) és (13) alapján számított szórási koefficienseket *Pb*-, ill. (Szepesi Z. méréseiből) *Al*-ra; a közölt hibák a második oszlopban levő statisztikus, s a Szepesi Z. dolgozatában részletezett kísérleti hibákból tevődnek össze. E két oszlopban adott szórási koefficienseket tartalmazza a 2. ábra. A következő oszlopok a *Pb* és *Al* szórási koefficienseinek különbségét, ill. az ezekből az alább, *B)* alatt megadott módon számított magszórási koefficienseket tartalmazzák.

I. táblázat.

α	*Pb*-on szórt fénynél			$4\pi\,(\Sigma_\alpha+K_\alpha)_{Pb}\,.\,10^{27}\,.\,\mathrm{cm}^2$	$4\pi\,(\Sigma_\alpha+K_\alpha)_{Al}\,.\,10^{27}\,.\,\mathrm{cm}^2$ [1]	$4\pi\,.\,0{\cdot}842\,.\,K_{\alpha,\,Pb}\,.\,10^{27}\,.\,\mathrm{cm}^2$	$K_{\alpha,\,Pb}\,.\,10^{28}\,.\,\mathrm{cm}^2$
	$\frac{100\nu_\alpha}{k}$	$\gamma\%$ stat. hiba	$I_\alpha=\frac{100\,.\,\nu_\alpha}{k\,.\,C_\alpha}$				
50°	205	2·85	73·5	155 ±6	142 ±4	13 ±10	12·3± 9·5
60°	152·8	3·1	51·2	108 ±6·5	86 ±5·2	22 ±11·7	20·8±11
80°	93·6	5·2	30·3	64 ±6·4	40·5±4·5	23·5±10·9	22·2±10·3
90°	74	8·8	23·5	49·7±4·5	32·8±3	17 ± 7·5	16 ± 7·1
100°	78	5·75	19·9	42 ±4·2	26 ±2	16 ± 6·2	15·1± 5·9
120°	47	7·4	13·9	29·3±2·7	17·7±2	11·6± 4·7	11 ± 4·5
140°	27·5	12·9	10	21·7±3·2	10 ±1·7	11·7± 4·9	11·1± 4·6

[1] Szepesi Z. dolgozatából.

II. táblázat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	dem.
$\lambda_i X.E.$ [1]	5·57	6·94	8·89	9·89	10·92	13·1	16	20·2	24·2
$N_i\%$ [1]	11·6	35·8	7·3	6·4	18·4	4·2	2·6	1·3	
E_i [2]	2·07	1·79	1·44	1·3	1·18	0·98	0·75	0·54	0·44
$\varkappa_i\,.\,10^{24}\,.\,\mathrm{cm}^2$ [3]	1·6	0·75	0·3	0·1	0·05	—	—	—	
$\varkappa_i\,.\,10^{24}\,.\,\mathrm{cm}^2$ [4]	2·4	1·3	0·45	0·2	0·1	—	—	—	

[1] Ellis-Aston (Proc. Roy. Soc. 129, 180, 1930) adataiból, a 2·5 cm-es ólomhengeren való szűrés figyelembevételével.
[2] Droste (Zs. f. Ph. 100, 529, 1936) számításai alapján.
[3] Bethe-Heitler: Proc. Roy. Soc. 146, 83, 1934.
[4] Jaeger-Hulme: Proc. Roy. Soc. 153, 443, 1936.

Az eredmények diszkussziója.

A) Az *Al*- és *Pb*-hez tartozó intenzitásgörbék (2. ábra) a kísérleti hibákon belül állandó értékkel különböznek: *így a magszórásból eredő fény intenzitása a szögtől függetlennek adódik*, mely eredmény összhangban van BETHE[1] számításaival, s ami a mageffektus irodalmában az első olyan kísérleti eredmény, mely a bevezetésben említett követelményeknek megfelelően volt keresztülvíve.

B) Az ólomatom magszórási koefficiensét az I. táblázatban feltüntetett szórási-koefficiensekből határozhatjuk meg.

Mivel Σ_α a két közegnél ugyanaz, K_α értéke a kísérletek s elméleti számítások egybehangzó eredménye szerint a rendszámmal arányos,

$$K_{\alpha,\,Al} = \frac{13}{82} \cdot K_{\alpha,\,Pb}$$

s így

$$(\Sigma_\alpha + K_\alpha)_{Pb} - (\Sigma_\alpha + K_\alpha)_{Al} = 0{\cdot}842 . K_{\alpha,\,Pb}.$$

A $K_{\alpha,\,Pb}$ értékei ezen összefüggésből számítva az I. táblázat utolsó oszlopában találhatók.

Az *A)* eredmény figyelembevételével, a megadott kísérleti hibahatárokon belül $K_{\alpha,\,Pb}$-ra adódó érték

$$K_{\alpha,\,Pb} = 11{\cdot}9—15{\cdot}5 . 10^{-28} . \mathrm{cm}^2.$$

Ebből az egy elektron szórási-koefficiensét az egész szögtérre kiterjesztett integrálással kaphatjuk, s így egy *ólomatom* magszórási-koefficiense

$$\varkappa_{Pb} = 82 . \int K_{\alpha,\,Pb} . d\omega = 1{\cdot}226 - 1{\cdot}6 . 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2.$$

E kísérleti eredménynek a $\varkappa$ elméletileg számított értékeivel való összehasonlításnál számításba kell venni, hogy a primér gammasugár különböző keménységű sugarak keveréke, melyekre a számolócső érzékenysége más és más, s ismét más az itt fellépő magszórásból eredő fényre.

Ha a primer gammasugárban a fénykvantumok eloszlását a λ_i hullámhosszak szerint N_i számok adják, e sugárra a számolócső

[1] Bethe: loc. cit.

érzékenysége E_i, a magabszorpció-koefficiens számított értéke $\varkappa_i$, akkor a kísérletünknél várt szórási-koefficiens értéke, figyelembe véve, hogy egy abszorbeált kvantum helyett két szórt kvantum lép fel

$$\varkappa_{th} = \frac{\Sigma N_i \varkappa_i 2 E_{\text{dem}}}{\Sigma N_i E_i}$$

A II. táblázatban megadott értékekből a BETHE—HEITLER-féle $\varkappa_i$-vel

$$\varkappa_{th} = 0{\cdot}32.10^{-24} \text{ cm}^2$$

a JAEGER és HULME által számított $\varkappa_i$ értékekkel pedig

$$\varkappa_{th} = 0{\cdot}525.10^{-24} \text{ cm}^2$$

BETHE számításai alapján figyelembe véve azokat a pozitronokat, melyek jelentékeny kinetikus energiával semmisülnek meg, JAEGER és HULME $\varkappa_i$ értékeivel a szórási-koefficiens várt értéke

$$\varkappa_{th} = 0{\cdot}575.10^{-24} \text{ cm}^2$$

A talált kísérleti érték *nagyobb*, mint az elméletből várt érték. Tekintettel arra, hogy $K_{\alpha, Pb}$-nak ez az első abszolút mérése, kísérleti eredményünk nem jogosít még fel arra, hogy valamilyen irányban véglegesen állást foglaljunk. Szükség van ehhez még több, hasonló irányú mérési sorozatra, más összetételű, keményebb s homogénebb primer gammasugarakat használva. Ezzel egyrészt $\varkappa$ értéke jelentékenyen nagyobb, s a kísérlethez hozzáférhetőbb lesz, másrészt a most kapott középérték helyett egy határozott λ-hoz tartozó szórási koefficiens volna meghatározható; ugyancsak ez hozná magával, hogy a fotóelektronok által létesített fékezési-sugárzás, mely mostani méréseinkben még jelentős részt képviselhet, sokkal kisebb mértékben lépne fel.

GENTNER idézett dolgozatában *ThC''* gammasugarainak szóródásánál BETHE—HEITLER magszórási-koefficiensével összeegyeztethető eredményt kap a *Pb* és *Al* szórásának összehasonlításával. Módszere azonban csupán relatív értéket ad, lényegében $\frac{K\alpha}{\Sigma\alpha}$ hányados értékét szolgáltatja.

Ha kísérleti eredményünket e módszerrel számítjuk át, minden egyes szögre az I. táblázatból

$$H_\alpha = \frac{(\Sigma_\alpha + K_\alpha)_{Pb}}{(\Sigma_\alpha + K_\alpha)_{Al}}$$

hányadosokat képezzük, s összehasonlítjuk H_α elméletből számított értékeivel eredményünket az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

α	50°	60°	80°	90°	100°	120°
H_α	1·02—1·15	1·11—1·4	1·28—1·94	1·26—1.81	1·35—1·93	1·35—2·04
$H_{\alpha,th}$[1]	1·057	1·1	1·2	1·26	1·33	1·4

Így e módszerrel számítva a mi *kísérleti eredményünk összeegyeztethető a* JAEGER *és* HULME *által számított x értékekkel.*

Mindamellett fontosabbnak tartjuk az előbbi, abszolút értékekkel való számítást megtartani, s kísérleteinket ebben az irányban kibővíteni. E kísérleteknek *Ra* helyett *Th*-mal, mint sugárforrással való keresztülvitele már tervbe van véve.

*

Kísérleti elrendezésünket fölhasználtuk a szórt fény keménységének abszorpciómérésekkel való tanulmányozásához is. E méréseket közvetlen a számolócső köré helyezett ólomhengerekkel végeztük. E módszernél — ismeretesen — az abszorpciókoefficiens nem adódik közvetlenül, mert a szórt fény által az abszorpciós hengerekben kiváltott sugárzás jelentős része eljut a számolócsőhöz; ez a szóróközeg és a számolócső közelsége miatt különösen a nagy vastagságú hengerek esetén zavaró, mert a henger külső részeit érő szórt sugárzás mind erősebb lesz, s a szórási szög definiált voltát elveszti. Ennek megfelelően, míg az *Al*-on szórt fény abszorpciós görbéinek menete megfelel annak, mit az egyes szögekhez a COMPTON—DEBYE formulával megadott hullámhosszú szórt fény μ_{Pb} abszorpciókoefficiensei alapján várhatunk (a μ_{Pb} értékeket GENTNER idézett dolgozatából véve), addig a *Pb*-on szórt fény abszorpciós görbéi csak kvalitatív eredmények kimondására jogosítanak:

[1] JAEGER és HULME.

a) mivel az 50°, 90° és 120° alatt szórt fénynél mért abszorpciós görbék (logaritmikus skálában felrakva) nagy rétegvastagságok esetén parallel haladnak;

a magszórásból eredő fény keménysége a szórási szögtől független;

b) az ólomtömbök paraffinozása előtt kimért abszorpciós görbék — melyek az előbbiektől ugyanabban különböznek, mint az 1. ábrán megadott két intenzitásgörbe, vagyis itt a szóró ólomlemezeket a primér gammasugárzáson kívül az ólomtömbökből kilépő pozitronsugárzás is éri — nagy rétegvastagság esetén az előbbiekkel ugyancsak parallelek, s így

a magszórásból eredő fény keménysége — a kísérleti hibákon belül — *egyezőnek* adódik *a pozitronok megsemmisülésénél föllépő sugárzás keménységével.*

E mérési eredmények pontosítását és kvantitatív irányban való kiterjesztését fönntartjuk a már említett, további kísérletek számára.

*

Dolgozatomat a m. kir. *Ferencz-József Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében* készítettem, a méréseket az egyetem *Női Klinikájának* tantermében végeztem el.

Ez úton is hálás köszönetemet kell kifejeznem Bay Zoltán dr. egyetemi ny. r. tanár úrnak, az intézet igazgatójának, ki állandó támogatásával és érdeklődésével kísérte munkámat, valamint Berecz János dr. egyetemi ny. r. tanár úrnak, ki megengedte, hogy a klinika mindenkori szabad rádiumkészletét kísérleteimhez felhasználhassam s e kísérletek elvégzésére a klinika tantermét rendelkezésemre bocsátotta. Köszönetet mondok végül a szegedi *Rockefeller-Kutatási Bizottságnak* támogatásáért, mellyel e munka elvégzését lehetővé tette.

Szeged, 1937. május hó.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jún. 7-én tartott üléséből.)

ÜBER DEN KERNEFFEKT BEI DER STREUUNG VON γ-STRAHLEN.

Von G. PAPP

Es wurde die Intensitätsverteilung der an Bleifolien gestreuten γ-Strahlen von *Ra* experimentell bestimmt. Durch Vergleich mit der Streuung an Aluminium ergibt sich die Kernstreuung an Blei in einem Winkelintervall von 90° innerhalb der statistischen und experimentellen Fehlergrenzen als winkelunabhängig. Die Härte dieser gestreuten Strahlung (durch vergleichende Absorptionsmessung bestimmt) entspricht dem bei Positronenvernichtung zu erwartenden Wert. Ein Vergleich zwischen der Kernstreuung und der COMPTON-Streuung ergibt, dass die experimentellen Resultate mit den Rechnungen von JAEGER—HULME und KLEIN—NISHINA in Übereinstimmung gebracht werden können.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Juni 1937.)

AZ EZÜSTPERMANGANÁT *($AgMnO_4$)* KRISTÁLYSZERKEZETE.

SASVÁRI KÁLMÁN-tól, Szeged.

Az ezüstpermanganát első kristálytani vizsgálata MITSCHERLICHtől[1] származik, aki megállapítja, hogy a monoklin kristályrendszerbe tartozik. Ide sorakoznak továbbá RAMMELSBERG[2] és GROTH[3] vizsgálatai. W. BÜSSEM és K. HERRMANN[4] későbbi kutatás során megkapták ugyan az előzők által közölt kristálytani szögeket, de ezek nem feleltek meg a MITSCHERLICH—RAMMELSBERG-féle identifikálásnak. Ezért új és alapos kristálytani vizsgálatot végeztek az ezüstpermanganáton. Ezen újabb vizsgálatokból a kristálytani tengelyarányok

$$a : b : c = 0{\cdot}678(7) : 1 : 0{\cdot}869(2)$$

és a monoklin-rendszer szöge

$$\beta = 92°29'30'' \pm 30''.$$

Ezt az eredményt nemcsak BÜSSEM és HERRMANN, hanem a jelen dolgozat röntgenográfiai kutatásai is megerősítik, amely szerint a következő identitások adódnak

$$I_a = 5{\cdot}66\ \mathring{A}; \qquad a = 5{\cdot}665\ \mathring{A}$$
$$I_b = 8{\cdot}27\ \mathring{A}; \qquad b = 8{\cdot}27\ \mathring{A}$$
$$I_c = 7{\cdot}12\ \mathring{A}; \qquad c = 7{\cdot}127\ A$$

---

[1] MITSCHERLICH: Pogg. Ann. **25.** 301. (1832).
[2] RAMMELSBERG: Handbuch der kryst. Chemie, 199. (1855).
[3] GROTH: Chem. Kryst. Bd. II. 167. (1908.)
[4] W. BÜSSEM u. K. HERRMANN: Zeitschr. für Krist. **74.** 458 (1930).

Ez alapon a tengelyarány

$$a : b : c : = 0{\cdot}685 : 1 : 0{\cdot}8618,$$

ami jól megyegyezik az előző szerint más módon meghatározott tengelyaránnyal.

Az elemi cellában foglalt molekulák száma

$$Z = \frac{V.s}{M.1{,}65} = 4{,}002 \sim 4,$$

ahol V = térfogat, s = sűrűség = 4·49 g/ccm és M = molekulasúly.

A röntgeninterferenciák alapján megállapítják a tércsoportot is. Kevésszámú reflexióikból még sikerül meghatározni, hogy az ezüstpermanganát a C_{2h}^5 tércsoportba tartozik, továbbá arra is következtetnek, hogy az elemi testben az atomok elrendeződése hasonlatosságot mutat a rombos $H2^1$ tipusú kristályokéhoz, csak az MnO_4 tetraéder szenved bizonyos deformációt.

További következtetésekre adataik már nem elegendők. Jelen munka sokkal részletesebb adatok alapján a szerkezet teljes meghatározására irányul.

Kristályok előállítása.

A kristályokat a BÜSSEM és HERRMANN által is alkalmazott MITSCHERLICH-féle eljárás[2] alapján állítottam elő. 5 g $AgNO_3$-t feloldva 100 ccm 80° C vízben hozzáadtam 300 ccm 80° C vízben feloldott 4·66 g $KMnO_4$-hoz. A keletkező $AgMnO_4$ ezen mennyiségű vízben szobahőmérsékleten erősen túltelített. Lassú, körülbelül 48 órán át thermostátban végzett hűtéssel az ezüstpermanganátot kikristályosítottam. Így azonban hosszú, 8—10 mm-es, igen vékony kristályokat kaptam. Mivel ezen kristályokat nem tudtam használni, az oldatot kissé fölhigítva szobahőmérsékleten hagytam napokon át. Az oldatba helyezett üvegpálcán szép tűalakú, de már zömök kristályok képződtek. A kristályok a c tengely irányában nyúltak meg.

---

[1] EWALD—HERRMANN: Zeitschr. für Krist. Strukturbericht.

[2] MITSCHERLICH: Pogg. Ann. 25. 301 (1832).

Az elemi cella.

Az ezüstpermanganáton kristallográfiai vizsgálatokat nem végeztem, hanem a monoklin-rendszer szögét átvettem BÜSSEM és HERRMANN dolgozatából. Ez az érték mindenütt jó egyezést adott.

A röntgenográfiai vizsgálatokhoz *Mo Kα* sugarakat használtam. A kristálytani tengelyek körül 10 cm effektiv átmérőjű hengeres kamrában 15°-os oscillációs fölvételeket készítettem. A kiértékelés a BERNAL-féle[1] diagramm segélyével történt. A BÜSSEM és HERRMANN által jelzett irányok körüli fölvételek szép rétegvonalakat mutattak. Ezek alapján a BERNAL-diagramm segélyével meghatározott identitástávolságok a mérési hibák határain belül jól megegyeznek az előbbiek által adott értékekkel. Így tehát az elemi testben négy molekula van, mint azt az előzőkben már láttuk.

Az igen nagy számban kiértékelt reflexiók (2. tábla) sorozatában a következő észrevételeket tehetjük: A véglapok (*h*00), (0*k*0), (00*l*) sorozatából hiányoznak a páratlan rendű tagok. A (*h*0*l*) sorozatnak hiányoznak azon tagjai, amelyeknél $h+l$ páratlan. A (*hk*0), (0*kl*) és (*hkl*) sorozatok minden rendben megjelennek. Ezek a feltételek a monoklin-rendszerben a $C_{2h}^{5} - P2_1/n$ tércsoportot jellemzik. Ez tehát szintén megegyezik az idézett szerzők eredményével. Ezen tércsoportban szimmetriaközpontok és $(010)_{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}$-ben csúszósíkok vannak, amelyek eltolása $\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)$. Eszerint az általános pozició

$$xyz;\ \bar{x}\bar{y}\bar{z};\ \frac{1}{2}+x, \frac{1}{2}-y, \frac{1}{2}+z;\ \frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}-z;$$

A strukturfaktor pedig

$$A = 4 \cdot \cos 2\pi \left(hx + lz + \frac{h+k+l}{4}\right) \cdot \cos 2\pi \left(ky - \frac{h+k+l}{4}\right).$$

---

[1] BERNAL: Proc. of Roy. Soc. of London **113**. 117 (1927).

Az atomkoordináták meghatározása.

Az atomkoordináták meghatározása a talált reflexiók intenzitása alapján történik, melyet becsléssel határoztam meg. Az intenzitások kiszámításához használt F_0 értékeket (szóróképességeket) az 1. táblában találjuk.

I. táblázat.

Az ezüstpermanganát ionjainak F_0 értéke. (Mo K_α).

$10^{-8}.\frac{\sin\vartheta}{\lambda}$	Ag^+	Mn^{+2}	O^{-2}
0·0	47·0	25·0	10·0
·1	42·8	22·1	7·7
·2	36·9	18·2	4·0
·3	31·5	14·9	2·2
·4	26·9	12·7	1·2
·5	23·8	11·1	0·6
·6	21·3	9·7	—
·7	19·0	8·4	—
·8	17·1	7·5	—
·9	15·3	6·6	—
1·0	14·0	6·0	—
1·1	12·7	5·4	—
1·2	11·7	4·9	—

Az ezüst és mangán F_0 értékeit az Internat. Tab. z. Bestimm. v. Kristallstrukt. 1935-ből, míg az oxigén szórási görbéjét (tekintve, hogy ezen kristály keménysége megfelel a $KClO_3$-nak) W. H. Zachariasen, Zs. f. Krist. **71.** 501. (1929) értékeiből vettem.

A koordináták meghatározásánál a kiindulást a fősorozatok képezték. Hogy a becsléssel nyert intenzitást az egyes atomelrendezéseknél a számítással kapott intenzitással, ill. annak F értékével könnyebben összehasonlíthassam, a következőképen jártam el:

A $(h0l)$ sorozat intenzitásainak gondos összehasonlításánál minden kétséget kizárólag megállapítottam, hogy a $(h0l)$ és $(h0\bar{l})$

reflexiók intenzitása között semmi különbség sincsen. Amint a tércsoport strukturfaktorából nyilvánvaló, ez csak úgy lehetséges, ha vagy az x, vagy a z koordináta értéke az összes atomokra 0 vagy 0·25. Ha szemügyre vesszük a ($h00$) sorozatot, akkor azt látjuk, hogy ennek az intenzitásai fokozatos, ú. n. normális esést mutatnak, amint h növekszik. Viszont a ($00l$) sorozatnál nem látunk ilyen szabályszerűséget. Ez csak úgy magyarázható, hogy az összes atomok x koordinátái igen közel állanak 0 vagy 0·25-höz, a nagyobb szóróképességű ezüst- és mangán-atomok koordinátáinak pedig azonosaknak kell lenniök, mert ellenkező esetben a (200) és a (600) sokkal gyengébb lenne. Ezek szerint a (600) reflexiónál az összes *Ag* és *Mn* szóróképessége teljes mértékben együttműködik, amiből ezen reflexió F értéke kiszámítható és pedig 135-nek adódik. Itt ugyanis az oxigén szórása már elhanyagolható. Ebből az ismert intenzitásformula

$$I = \frac{N^2 e^4 \lambda^3}{4\mu_0 m^2 c^4} \cdot \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{\sin 2\vartheta} F^2 = A_0 \cdot \theta \cdot F^2$$

segítségével a (600) reflexió intenzitása önkényes egységekben kiszámítható és 40,000-et tesz ki az oxigén elhanyagolásával. Tekintettel arra, hogy ezen reflexió intenzitását 6-nak találtam, egy vizuális intenzitás-egységre kereken 7,000 önkényes intenzitás-egység esik. Az önkényes intenzitás-egységet azért számítottam a (600) reflexióból, mert ennek intenzitása a gyengébb expozició folytán sokkal pontosabban becsülhető. Ennek a számnak a segítségével minden vizuálisan becsült intenzitáshoz tartozó F értéket kiszámíthatunk. Nagyon gondosan végzett intenzitásbecsléseink tehát nemcsak kvalitativ összehasonlításokra, hanem kvantitativ számításokra is alkalmasak. Természetesen tisztában kell lennünk azzal, hogy a leggondosabb vizuális becslés sem érheti el az abszolut intenzitásmérések pontosságát, azonban a fenti eljárás az egyszerű kvalitativ összehasonlításoknál lényegesen biztosabb és pontosabb eredményekre vezet, mint az az alábbi táblázatokból jól látható.

2. táblázat.

A reflexiók becsléssel kapott intenzitásai, számított és talált F értékek.

(hkl)	sin ϑ	Int.	F becs.	F szám	(hkl)	sin ϑ	Int.	F becs.	F szám
200	0·126	25·00	150	230	103	0·165	0·5	25	47
400	·252	15	171	195	113	·170	5	79	108
600	·377	6	138	135	212	·170	8	100	111
800	·503	2	100	108	023	·173	1·5	43	57
1000	·628	0·5	57	89	132	·176	3	62	84
					041	·179	10	115	185
020	·086	7	68	14	230	·180	0·5	26	0
040	·172	5	79	41	140	·183	2·5	51	71
060	·258	5	100	93	222	·185	3	64	14
080	·344	1·5	78	100	141	·188	5	83	38
0100	·430	1	62	58	231	·188	4·5	80	73
0120	·515	0·5	50	35	310	·193	0	0	0
0140	·602	0·5	56	60	301	·197	4	76	55
					033	·198	9	115	162
002	·010	8	75	150	042	·199	3	67	41
004	·040	6	95	64	311	·202	2	55	61
006	·090	6	120	122	014	·204	3	68	112
008	·160	1	59	57	320	·207	8	126	106
0010	·249	0·25	35	34	133	·209	7	104	85
0012	·359	0·5	57	52	232	·209	2·5	62	89
					240	·213	4	80	45
011	·066	8	60	35	321	·215	9	120	124
110	·076	0	0	0	114	·216	7	80	98
101	·083	4	48	41	024	·218	2	57	77
111	·093	4·5	54	75	241	·220	6	100	146
021	·100	1	27	47	150	·224	0	0	0
120	·106	10	87	146	330	·228	0	0	0
012	·109	10	84	118	043	·228	0	0	12
121	·119	10	93	161	151	·230	4	83	41
112	·128	10	96	107	242	·235	1	42	40
022	·132	3·5	58	28	233	·235	9	125	151
210	·133	3	53	0	052	·237	2	60	4
031	·138	5	70	77	034	·238	2	60	3
211	·144	3	56	14	204	·240	3·5	80	86
130	·144	0	0	0	152	·246	4·5	92	130
122	·148	5·5	76	56	303	·246	0·25	22	32
220	·152	8	94	64	250	·249	0·125	15	0
131	·153	3·5	62	61	015	·254	0·25	22	36
032	·163	3	60	33	105	·260	2	63	83
202	·164	3	60	67	061	·262	2	64	22

(A 2. táblázat folytatása.)

(hkl)	sin ϑ	Int.	F becs.	F szám	(hkl)	sin ϑ	Int.	F becs.	F szám
053	0·262	1	45	72	082	0·358	1	55	43
025	·264	1	46	70	460	·360	2	78	75
160	·265	6	101	130	027	·360	2	78	34
153	·271	5	103	74	074	·361	3	96	105
402	·274	2·5	73	88	280	·366	2	78	85
062	·276	1·5	57	56	037	·373	1	56	43
035	·281	3	82	76	091	·390	0·5	58	10
260	·287	2·5	75	97	602	·394	1·5	72	69
054	·294	1·5	59	13	084	·398	0·5	42	56
154	·302	3·5	92	100	406	·400	3	102	111
045	·303	4·5	104	105	092	·400	1	59	49
016	·303	3	49	13	018	·402	1	59	79
440	·304	4	99	37	208	·424	1·5	75	55
071	·305	1·5	60	31	480	·426	1	43	82
352	·306	3·5	92	113	0101	·432	1·5	77	76
170	·308	0	0	0	604	·434	2	88	52
026	·312	3	87	48	094	·435	0·5	44	22
072	·317	4	102	111	019	·451	1	64	19
305	·320	1	51	73	109	·456	0·5	46	66
501	·320	2	72	33	011,1	·475	1	67	41
360	·320	6	125	115	507	·480	0·5	48	22
433	·325	7	136	125	011,2	·483	0·5	48	59
064	·326	2	73	48	606	·491	2	97	97
270	·327	0	0	0	01,10	·501	0·5	50	45
404	·328	2	73	55	705	·515	0·25	35	60
206	·330	4·5	110	129	802	·516	1	71	56
073	·336	1	53	59	2,010	·520	0·5	52	33
046	·345	1·5	63	28	804	·549	0·5	53	43
081	·347	3	93	50	901	·570	0·25	38	29
180	·350	2	76	29	806	·596	1	80	82
017	·352	0·25	27	47	014,1	·604	0·25	40	59

Ezek szerint a többi koordináták meghatározásánál is úgy járunk el, hogy a vizuális, ill. önkényes intenzitásegységekből kiszámítjuk az így legjobban megközelíthető F értéket, és a számított F értéket ezzel összehasonlítjuk. A kiindulás most is a fősorozatokból történik. Ugyanis itt csak egy koordinátát kell variálni, ami az esetek számát lényegesen csökkenti. Az y és z koordináták

meghatározása már lényegesen nehezebb, tekintve, hogy a tércsoport alacsony szimmetriájú. Az egész elemi testből az atomközéppontok elhelyezkedése szempontjából csak a szimmetriacentrumok zárnak ki egyes kisebb sávokat, úgyhogy a geometriailag lehetséges poziciók száma minden egyes atomra külön-külön még mindig kétszeresen végtelen sok.

A $(0k0)$ és $(00l)$ sorozatoknál, mivel az oxigének csekély szórásuk miatt nem nagyon befolyásolják a számított F értéket, ezeket egyenlőre figyelmen kívül hagyhatjuk és csupán az ezüst és a mangánnak keresünk olyan elhelyezkedést, melynél a kettő F értékének összege a legjobban megközelíti az előzők szerint kapott ú. n. észlelt F értéket. A nagy $\sin\vartheta$-ju reflexióknál az oxigének már teljesen elhanyagolhatók, úgyhogy itt az F értéket csupán az ezüst és mangán határozzák meg. Ezt figyelembe véve, először azokat a pozíciókat keressük, amelyeknél a magasabb rendű reflexiók kétféle F értéke a legjobban egyezik és azután az alacsonyabb rendű reflexiókra áttérve ezek közül kiválasztjuk azokat, amelyek itt is a legvalószínűbbek. Az így kapott különböző koordinátaértékeket a $(h0l)$, $(hk0)$, $(0kl)$ és (hkl) sorozatok F értékének kiszámításával ellenőriztem. Így már egyértelműen ki tudtam választani a tényleges atomkoordinátákat. Ezekre a következő értékeket kaptam:

$$\begin{aligned} Ag: &\quad y = 0{\cdot}31; &\quad z &= 0{\cdot}34 \\ Mn: &\quad y = -0{\cdot}03; &\quad z &= -0{\cdot}31. \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy az ionok ismert átmérőjű gömböknek tekinthetők, az ezüst és mangán helyzetének megállapítása geometriailag már csak kevés helyet enged meg az oxigénionok számára. Még inkább csökken a lehetőségek száma, ha figyelembe vesszük, az előzőkben tett észrevételünket, amely szerint az oxigének x koordinátáinak is közel 0 vagy 0·25-ben kell lenni. Ilyenformán az MnO_4 tetraéder csak úgy helyezhető el, hogy két oxigén x koordinátája 0·25-ben van, a másik kettő pedig mivel a tetraéder éle 2·6 Å, nem egészen 0-ban, hanem 0·25-től 1·3 Å távolságra, vagyis az egyik 0·02, a másik pedig 0·48-ban van. Ilyen feltételek mellett geometriailag háromféleképpen helyezhetem el a tetraédereket. Természetesen mindegyik eset egy kis intervallumot jelent.

A kis intervallumokon belül a legvalószínűbb az az elhelyezkedés, melynél az atomtávolságok lehetőleg a legegyenletesebbek. Az oxigének így megkapott három lehetséges helyzetében minden reflexióra kiszámítottam az F értéket. Az alacsonyabb rendű reflexiók alapján a három közül röntgenográfiailag a következő elrendezés a legvalószínűbb:

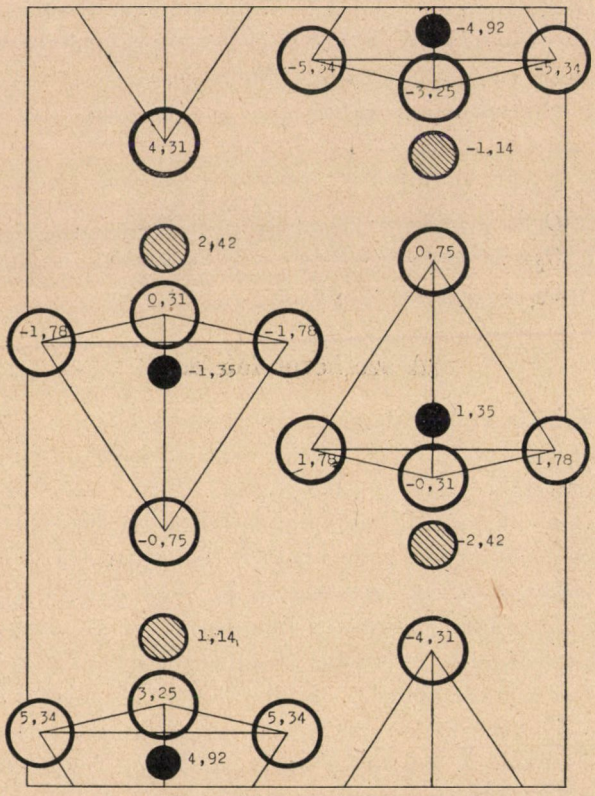
O_1: $y = -0{\cdot}103$; $z = 0{\cdot}456$
O_2: $y = 0{\cdot}175$; $z = 0{\cdot}605$
$O_{3,4}$: $y = -0{\cdot}068$; $z = 0{\cdot}750$.

A szerkezet leírása.

A koordinátaértékek alapján tehát igazolva látjuk azt, amit már az előző szerzők is sejtettek kevés reflexióik alapján, hogy t. i. az ezüstpermanganát a $H2$ típushoz hasonló. Mivel a monoklin-rendszerben vagyunk, a második szimmetriasík ténylegesen nem lép föl, de azt mondhatjuk, hogy bizonyos deformációval mégis jelen van. Az ionok az oxigén egy részének kivételével mind az $x=0{\cdot}25$ ill. $x=0{\cdot}75$ magasságú síkokon helyezkednek el. A mangán ionok az oxigén-tetraéderek belsejében vannak. Ezek a tetraéderek a szerkezetben önálló csoportoknak tekinthetők. Az egyenlő x magasságban levő tetraédereket egy oxigén érintésével az ezüst ionok kapcsolják össze. A különböző x magasságban levő tetraéderek pedig egyik oxigénjük érintkezésével kapcsolódnak egymáshoz.

Az atomelrendeződést könnyen áttekinthetjük az 1. rajzon megadott vetület segélyével, mely a szerkezetet adja a (001) síkra vetítve.

Az ionok távolságait tekintve azt mondhatjuk, hogy eléggé egyenletesen oszolnak meg a cellában. A következő távolságokat figyelhetjük meg. A szomszédos ezüst ionok távolságai 6·30; 6·95; 4·32Å; a mangánok távolságai 5·27; 5·85; 4·25Å; az oxigének a tetraédereken szorosan illeszkednek, míg a szomszédos tetraéderek oxigénjeinek távolságai 4·65; 3·72; 3·10; 2·6Å; ez utóbbi kettő révén érintkeznek a különböző magasságban levő csoportok. Az ezüst-mangán távolságok 4·0; 5·43Å és végül az ezüst-oxigén távolságok 4·51; 4·49; 4·40; 2·25; 2·20Å. Ez utóbbinál köti össze az ezüst az egyenlő magasságban levő tetraédereket.



1. rajz. Az ezüstpermanganát szerkezetének vetülete a (001) síkra. A legnagyobb kör az oxigén, középső az ezüst, legkisebb pedig a mangán helyét jelöli meg. A körök mellé írt számok jelentik az ill. atomnak a magasságát a (001) sík fölött.

Dolgozatomat a szegedi Ferencz József-Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében készítettem. Hálás köszönetet mondok Náray-Szabó István dr. egyetemi m. tanár úrnak, aki támogatásával és állandó érdeklődésével lehetővé tette a dolgozat elkészítését. Itt mondok köszönetet a Széchenyi Tudományos Társaságnak és a Rockefeller-Alapnak is anyagi segítségükért.

Szeged, 1937. május hó.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

DIE KRISTALLSTRUKTUR DES SILBERPERMANGANATS $AgMnO_4$.

Von K. SASVÁRI in Szeged.

Silberpermanganat gehört nach MITSCHERLICH, ferner BÜSSEM und HERRMANN in die holoedrische Klasse des monoklinen Systems mit

$$a : b : c = 0{\cdot}678 : 1 : 0{\cdot}869 ; \qquad \beta = 92^\circ\, 29'\, 30'' \pm 30''$$

Nach den letzteren sind die Kanten des Elementarkörpers $a = 5{\cdot}665$ Å, $b = 8{\cdot}27$ Å und $c = 7{\cdot}127$ Å mit 4 Molekülen in der Zelle. Die Raumgruppe wurde zu $C_{2h}^5 - P2_1/n$ bestimmt und auf eine Ähnlichkeit mit der Barytstruktur (Typ $H2$) hingewiesen.

Die vorliegende Untersuchung erzielt eine vollständige Bestimmung der Struktur. Zu diesem Zweck wurden Oscillationsaufnahmen mit 15° Oscillation um die drei kristallographischen Achsen gemacht; die Indizierung geschah nach der Methode von BERNAL. Durch sorgfältige Schätzung wurden die Reflexionsintensitäten festgelegt.

Da die Reflexionen $(h00)$ einen normalen Abfall zeigen, da ferner die Intensitäten $(h0l)$ und $(\bar{h}0l)$ keine Unterschiede zeigen, müssen entweder alle x, oder alle z-Koordinaten gleich 0 oder 0·25 sein. Die Ionen Ag und Mn und ein Teil der Sauerstoffionen liegen in der Tat in $x = 0{\cdot}25$; die übrigen Sauerstoffionen nahezu aber nicht genau in $x = 0$.

Durch die Betrachtung der Reflexionen höherer Ordnung, wo das Streuvermögen der Sauerstoffatome schon ausser Acht gelassen werden kann, konnten die Koordinaten der Ag und Mn-Ionen bestimmt werden. Nun bleiben geometrisch nur drei Möglichkeiten für die Sauerstoffionen der tetraedrischen (MnO_4) Gruppen übrig.

Auf Grund der Reflexionen niedriger Ordnung konnte zwischen diesen entschieden werden.

Die Koordinaten der Ionen sind die folgenden:

Ag:	$x = 0{\cdot}25$;	$y = \quad 0{\cdot}31$;	$z = \quad 0{\cdot}34$;
Mn:	$x = 0{\cdot}25$;	$y = -0{\cdot}03$;	$z = -0{\cdot}31$;
O_1:	$x = 0{\cdot}25$;	$y = -0{\cdot}103$;	$z = \quad 0{\cdot}456$;
O_2:	$x = 0{\cdot}25$;	$y = \quad 0{\cdot}175$;	$z = \quad 0{\cdot}605$;
O_3:	$x = 0{\cdot}02$;	$y = -0{\cdot}068$;	$z = \quad 0{\cdot}750$;
O_4:	$x = 0{\cdot}48$;		

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

REFLEXIÓS SZEIZMIKUS MÉRÉSEK A NAGY ALFÖLDÖN.

POGÁNY BÉLA r. tagtól és FEKETE JENŐ-től.

Az Eötvös-féle torziós ingával, mint ismeretes, a nehézségerő potenciáljának négy másodrendű differenciálhányadosát lehet lemérni. Ezek közül kettő: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ a két gradiens-összetevő, a földi nehézségerő változását adja meg a vízszintes síkban egy derékszögű koordinátarendszer tengelyei mentén, az eszköz által elfoglalt térben. A derékszögű koordinátarendszer tengelyeit úgy választjuk meg, hogy az X tengely pozitív iránya északra, az Y tengelyé keletre és a Z tengelyé lefelé mutasson. A két gradiens-összetevőből az eredő gradiensérték meghatározható, amelyet nyíllal ábrázolunk. A nyíl mutatja azt az irányt, amelyben a nehézségerő változása a legnagyobb, nagysága pedig arányos ez irányban a nehézségerőnek 1 cm-re eső növekedésével.

Két szomszédos pont között bizonyos megközelítéssel a gradiensértékekből kiszámíthatjuk a nehézségerő különbségét, vagy ha a gradiensértékeket a felszíni és a normális hatással korrigáltuk, *a nehézségerő rendellenességeinek* a különbségét. Ha tehát egy ponton ingamérésekkel a nehézségerő rendellenességének abszolút értékét meghatároztuk, akkor a torziós inga adataiból nyert Δg különbségekből kiszámíthatjuk minden észlelési pontra a rendellenesség értékét. Csak megemlítjük, hogy több észlelési ponton kiszámított rendellenességek értékeit a legkisebb négyzetek módszerével szokás kiegyenlíteni az

$$\int_s \frac{dg}{ds} \cdot ds = 0$$

feltétel mellett, ahol g a nehézségerő gyorsulását, s pedig azt a zárt útvonalat jelenti, amely mentén a Δg értékek számítása történt.

Ha összekötjük azokat a pontokat, amelyeken a nehézségerő rendellenességei ugyanakkorák, görbéket kapunk, amelyeket *izogammáknak* nevezünk. A gradiensek és az izogammák meghatározásából következik, hogy a gradiensek minden pontban merőlegesek az izogammagörbe érintőjére az illető pontban, továbbá, hogy az izogamma értékek, azaz a nehézségerő rendellenességei a gradiensek irányában növekednek és az izogammaközök fordítva arányosak a gradiensek értékeivel.

Ha feltesszük, hogy a felszín alatt csak *két geológiai alakulat* van jelen és ezek önmagukban teljesen *homogének*, azaz sűrűségük állandó, akkor e geológiai alakulatok hatásából származó nehézségerő rendellenességek gradiensei csak az alakulatok alakjától függenek és a két alakulat között levő sűrűségkülönbség csak mint állandó szorzó szerepel. Ebben az esetben a gradiensértékekből számított izogammákat a *fedett alakulat rétegvonalainak* tekinthetjük, amelyeknek közét *közelítőleg* a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\Delta g = 2\pi f(s' - s)\Delta h$$

ahol Δg két szomszédos izogammának megfelelő nehézségerőérték különbsége, f a gravitáció állandója, s a fedő és s' a fekvő réteg állandó sűrűsége, Δh pedig két szomszédos rétegvonalnak megfelelő magasságkülönbség.[1]

Az izogammák ezen értelmezése azonban, amely pedig oly egyszerű összefüggést adna a torziós ingamérések eredményei és a földalatti tömegeloszlás között, szigorúan sohasem és megközelítésben sem mindig érvényes, a következő két oknál fogva:

1. *Az esetek nagyobb részében nemcsak két, hanem három vagy több geológiai alakulat van jelen;*

2. *az alakulatok homogenitása szigorúan sohasem áll fenn.*

Ha több mint két alakulat van jelen, akkor a nyert izogammatérkép bizonyos megközelítésben még szintén visszatükrözteti

[1] Lásd Baron ROLAND EÖTVÖS: Über Arbeiten mit der Drehwage. Bericht an die XVII. allgemeine Konferenz der Internationalen Erdmessung. 1912.

ezeknek alakját, de csak akkor, ha az alakulatok konkordánsak. Diszkordáncia esetében az izogammák a három vagy több diszkordáns alakulat érintkező felületeinek gravitációs hatásából tevődnek össze, amiből az összetevők alakjára külön-külön egyértelműen visszakövetkeztetni nem lehet.

Ha csak két alakulat van jelen, de ezek önmagukban nem homogének, akkor a gradiensek a sűrűségnövekedést is jelzik, ami az izogammákban úgy jelentkezhetik, mintha a nehezebb alakulatban boltozódás lenne, holott a valóságban esetleg ilyen boltozódás nincsen.

A torziós ingamérések eredményeinek értelmezésére az izogammákhoz fűződő módszeren kívül más módok is rendelkezésre állanak. Pl. valamely szelvény mentén megszerkesztett *gradiensgörbéből* is következtethetünk a földalatti tömegeloszlásra. E magyarázatok és következtetések azonban sohasem egyértelműek, mert többféle tömegeloszlás is létrehozhatja ugyanazt a gravitációs hatást. Természetesen, ha biztos geológiai felvételek vagy különösen mélyfúrási adatok állanak rendelkezésre, ezeknek felhasználása nagyban emelheti a torziós inga adataiból megállapított tömegeloszlás valószínűségét.

A *3. ábrán* az izogammák *Hajduszoboszlónál* hatalmas kiterjedésű boltozódás jelenlétét mutatják, amelynek legmagasabb pontja *Hajduszoboszlótól* keletre a legnagyobb értékű izogamma által bezárt területen van.

Az izogammák szerint e maximumtól északkeletre és délnyugatra a kőzet-alakulat, nem nagy hajlással ugyan, de a mélybe süllyed.

Sűrűségmeghatározások, amelyeket az e vidéken lemélyített mélyfúrásból kikerült kőzetmintákon végeztünk, középértékben 0·3 különbséget adtak a kőzet és a fedőréteg között. Ezzel az értékkel számítva a fenti képlet szerint az izogammaközöknek megfelelő magasságkülönbséget, azt kapjuk, hogy a kőzetalakulat a *hajduszoboszlói mélyfúrás* helyén (lásd a *3. ábrán Hajduszoboszló* keleti szélén) 240 méterrel magasabban van, mint a *Debrecentől* északkeletre, a *sámsoni* út mellett fekvő *debreceni* mélyfúrás helyén.

Ezzel szemben a mélyfúrás adatai alapján *Hajduszoboszlónál* a fúró 1556 méterben, a *debreceni* fúrásban pedig 1477 méterben,

azaz 79 méterrel magasabban ütött meg kőzet-alakulatokat, amelyek azonban geológiailag különbözők voltak.

A kőzetek minőségére, illetve azok geológiai korára vonatkozóan természetesen a torziós ingamérésekből semmi következtetést nem vonhatunk.

A torziós ingamérések adataiból, illetve az izogammaértékekből tehát a *Nagy Alföldnek* ezen a helyén a kőzetalakulatok magasságkülönbségeit számítani nem lehet, nyilvánvalóan abból az okból, hogy azok a feltételek, amelyek ilyen számítás alapjául szolgálnak, itt nem állanak fenn.

Máshol, különösen az *Északamerikai Egyesült Államok Texas és Louisiana államaiban*, nem mélyen fekvő sódómok felett végzett torziós ingamérések eredményeiből számított és a sótest mélységére és alakjára vonatkozó adatok a nagy számban lemélyített fúrások eredményeivel sokszor egészen meglepő megegyezést mutattak.

Szükségesnek látszik tehát, hogy az altalaj szerkezeti viszonyainak egyértelmű meghatározására a torziós ingamérések mellett valami más módszert is alkalmazzunk, amellyel az alakulatok mélységét is meg tudjuk határozni.

A torziós ingaméréseket *földmágneses mérésekkel* lehet például kiegészíteni, amikor a torziós ingamérések helyein a földmágnesség rendellenességeit határozzuk meg. A földmágneses anomáliákból csakugyan lehet következtetéseket vonni a földalatti tömegeloszlást illetően, de ez a torziós inga adatait csak akkor támasztja alá, ha a különböző kőzetek vagy egyéb alakulatok mágneses szuszceptibilitása az illető kőzetre vagy alakulatra nézve állandó.

De még a földmágneses anomáliáknak a gravitációs rendellenességekkel való összeesése sem adhat mindig egyértelmű magyarázatot ez anomáliák okáról. Előfordult például, hogy *gránit alapkőzet* felett *(Chicot Area, Arkansas, U. S. A.)* egy helyen hatalmas és teljesen szabályos *gravitációs maximum* mutatkozott a torziós ingamérések adataiban és ugyanott a földmágnesség vertikális intenzitásában $+8000\,\gamma$ rendellenességet kaptak. Az e helyen lemélyített mélyfúrások azonban az alapkőzetnek várt *nagy felboltozódása* helyett annak *vízszintes települését* mutatták és nagy fajsúlyú és erősen mágneses hatású *peridotitot* tártak fel, amely csőszerűen volt az alapkőzetbe beágyazva.

Tévedések elkerülése végett hangsúlyozni kívánjuk azt, hogy nem a torziós inga adatainak a megbízhatóságáról van szó, amelyet már Eötvös 1.10^{-9} C. G. S. pontosságig a legkedvezőtlenebb körülmények között is biztosítani tudott. A torziós inga mérési technikája, különösen ami a mérések könnyebb kivitelét és a mérési időtartam jelentékeny lecsökkentését illeti, azóta is igen nagy fejlődést mutatott. Itt csakis a torziós ingamérések eredményeiből a földalatti tömegeloszlásra vonható következtetésekben sokszor fellépő bizonytalanságról van szó. A fentiek szerint ugyanilyen bizonytalanság kísérheti a földmágneses mérésekből vont következtetéseket is. E bizonytalanság avval függ össze, hogy egy erőtér ismerete alapján az erőteret létesítő tömegeloszlásra egyértelműen következtetni nem lehet.

Egybevetve a geológiai felvételeket, a mélyfúrási eredményeket, továbbá a gravitációs és földmágneses mérések eredményeit, a valóságos tömegeloszlás csak olyan lehet, amely mind a négy módszer nyert eredményeivel összefér. Újabb, az előbbiektől független módszerek alkalmazása a választást szűkebb korlátok közé szorítja és fokozza a valószínűségét annak, hogy a mérések adataival összeférő tömegeloszlás a valóságnak megfelel.

Ilyen újabb módszer a *reflexiós szeizmikus eljárás*, amely az 1920-as évek elején Mintrop által a gyakorlatban először alkalmazott refrakciós szeizmikus módszer után csak 1926 óta ismeretes.

A szeizmikus mérések azon a tapasztalati tényen alapulnak, hogy az altalajban gerjesztett szeizmikus hullámok, talajrezgések, más-más alakulatban más-más sebességgel haladnak és a terjedési sebességek különbsége igen jelentékeny is lehet. Más sebességgel bíró alakulat határához érve a szeizmikus hullámok törést vagy visszaverődést szenvednek és az altalajba behatolt hullámok egy része ismét visszajut a felszínre. Ha megfelelő készülékekkel a felszínre visszaérkezett hullámok megérkezési idejét megállapítjuk, akkor ismerve a robbantás időpontját és a szeizmikus hullámok terjedési sebességét az altalajban, következtetést vonhatunk az alakulatok fekvésére, alakjára és mélységére.

Aszerint, hogy a rétegekben *refrakciót szenvedett*, de ismét a felszínre jutott *hullámok* megérkezését fogjuk fel felvevőkészülékeinkkel, vagy pedig egy nagyobb terjedési sebességgel bíró

réteg határfelületéről *reflektált hullámoknak* a felszínre való visszaérkezését észleljük, megkülönböztetünk *refrakciós és reflexiós szeizmikus módszereket.* Mindkettőnél csak a *longitudinális hullámokat* használjuk fel s a *transzverzális hullámokat* nem vesszük figyelembe.

A szeizmikus hullámok terjedési sebessége első közelítésben

$$v = \sqrt{\frac{E}{D}},$$

ahol E a rugalmassági együttható s D a sűrűség az illető közegre nézve. A különböző geológiai alakulatokban a terjedési sebességek között jelentékeny különbségek vannak és a különböző helyeken található ugyanazon geológiai alakulatokban is a terjedési sebesség igen eltérő lehet. Minden vidékre tehát a terjedési sebességeket külön kell meghatározni, és pedig nemcsak az egyes geológiai alakulatokra nézve külön-külön, hanem ugyanazon alakulatban is több mélységben. Mivel a geológiai alakulatok a legritkább esetben homogének, azaz sűrűségük, de rugalmassági együtthatójuk is a mélységgel változik, a szeizmikus hullámok terjedési sebessége is ugyanabban a közegben a mélységgel változik, és pedig rendszerint növekszik. Ennek következtében a hullámok nem egyenesben terjednek, hanem állandóan kis töréseket szenvedve, kis görbületű görbe vonal mentén haladnak. Pontosabb számításoknál ezt tekintetbe is kell vennünk.

A *refrakciós szeizmikus módszernél* minden mérésnél már a mérési adatokból kiadódik a közép terjedési sebesség, és pedig olyan mélységig, ameddig a felszínre visszaérkezett hullámok lehatoltak. Minél messzebb megyünk el a felvevő készülékkel a robbantási ponttól, annál mélyebbre hatolnak le a szeizmikus hullámok. Ez a tény azonban határt is szab a refrakciós szeizmikus módszer alkalmazhatóságának, mivel a robbantási ponttól messze, pl. 10—15 km-re felállított felvevő készülékhez csak úgy érnek el a nagy utat megtett és törést szenvedett hullámok, ha energiájuk elég nagy, amihez pedig nagytömegű robbantószert (30—500 kg dinamitot) kell felhasználni. Ily nagytömegű robbantószer felrobbantása jelentékeny károkat okozhat, tehát a módszer használhatósági körét tetszésszerinti módon kiterjeszteni nem lehet.

Ezzel szemben a *reflexiós szeizmikus módszernél*, mivel ott a szeizmikus hullámok által megtett út jóval kisebb, mint a refrakciós módszernél, igen kismennyiségű robbantószer (100—1000 g dinamit) elegendő, hogy jól mérhető reflexiós hullámokat kapjunk, amelyek megérkezésének ideje a felszínen elhelyezett felvevő készülékekhez pontosan meghatározható. Azonban a visszavert hullámok megérkezéséből, hacsak nem tudjuk a visszaverő felület mélységét, a terjedési sebességre vonatkozóan semmi következtetést nem vonhatunk. A reflexiós módszernél tehát az altalajban érvényes terjedési sebességeket más módszerrel külön kell meghatározni.

Olyan területen, ahol a közelben mélyfúrás van, a terjedési sebesség meghatározása a fúrólyukba lemélyített felvevő eszköz által történik, amikor is különböző és tetszésszerinti mélységekig lehet a terjedési sebességeket meghatározni. E célból azonban különleges felvevő készülékre és kábelre van szükség. Ilyen berendezés hiányában a mélyfúrás helyén a felszínen végzett reflexiós mérés adataiból is kiszámíthatjuk az altalajban a visszaverő felületig érvényes közép terjedési sebességet. Mélyfúrás hiányában a refrakciós módszer alkalmazásával kell meghatározni a szeizmikus hullámok terjedési sebességét, oly mélységig, ameddig azt az illető helyen a körülmények megengedik.

A *refrakciós módszernél* a felszínen nagymennyiségű dinamit felrobbantása által gerjesztett szeizmikus hullámok minden irányban elterjednek, egyes hullámnyalábok áthatolva a laza, kis terjedési sebességgel bíró felszíni rétegen, a következő, nagyobb terjedési sebességgel bíró réteg felületén törést szenvednek. Bizonyos beesési szög esetén a megtört hullámok a nagyobb terjedési sebességgel bíró réteg határfelületén haladnak tova, majd egy pontban ismét megtörve, egy részük a felszíni rétegen keresztül a felvevő készülékekhez jut. Ezek a hullámok előbb érnek a robbantási ponttól messzebb elhelyezett felvevő készülékekhez, mint a felszíni hullámok, mivel — ha hosszabb utat tesznek is meg — jóval gyorsabban haladnak. Ha a felvevő készülékek a robbantási pontot is magában foglaló egyenes mentén egymástól bizonyos távolságra, pl. 50 m-re vannak felállítva, akkor a hullámoknak az egyes felvevő készülékekhez való megérkezési idejében jól mérhető időkülönbségek jelentkeznek. A refrakciós módszernél a szeizmikus

hullámoknak csak az első megérkezését vesszük figyelembe. Felrajzolván egy derékszögű koordinátarendszerben *az idő-út görbét*, e görbének bármely pontjához húzott *érintő* és az *idő-tengely* hajlásszögének tangense a *terjedési sebesség értékét* adja meg. Ha a felszíni réteg nagyon laza s benne a terjedési sebesség igen kicsiny, akkor az ennek átjárására szükséges idővel az észlelt időket kijavítjuk. Ha a refrakciót előidéző réteg szeizmikusan homogén, azaz benne a szeizmikus hullámok terjedési sebessége állandó, akkor az út-idő görbe egyenes és a felvevőkészülékek messzebbre helyezésével is ez az egyenes folytatódik mindaddig, míg a terjedési sebességben változás nem áll be. Kicsiny, de állandó változás esetén az idő-út egyenesből idő-út görbe lesz, míg nagy, de hirtelen változás esetében az egyenesben vagy a görbében jól észlelhető törést kapunk. Ez az eset áll elő, ha a törést szenvedett, vízszintesen haladó hullámok egy más geológiai alakulat határfelületéhez érnek. Ennek jelenléte és helye tehát az idő-út görbe vagy egyenes törési pontjaiból meghatározható. Különböző irányokban fektetett szelvények mentén történt refrakciós mérésekből a geológiai alakulat alakja is kiadódik.

A *reflexiós szeizmikus módszer* alkalmazása sokkal egyszerűbb. Tekintve a szükséges robbantószer kis mennyiségét, tanácsos a robbantásokkal, hacsak lehet, a felszíni laza réteg alá menni, azáltal, hogy a robbantást a felszíni laza réteg alá mélyített fúrólyukban végezzük. A felszíni laza réteg vastagságát a felvevő készüléktől kis távolságban a felszínen kismennyiségű robbantószer használatával a refrakciós eljárás szerint minden egyes esetben külön határozzuk meg. A felszíni réteg befutásához szükséges idővel a visszavert hullámok terjedési idejét kijavítjuk. E felvételeket nevezzük *korrekciós felvételeknek.*

Minden szeizmogrammon, amely reflexiót mutat, megjelennek a refrakciót szenvedett hullámok is. A megtört hullámok, mivel jóval kisebb utat kell befutniok, mint a visszavert hullámoknak, legelőször jelentkeznek a szeizmogrammokon. A visszavert hullámok megérkezése a visszaverő felület mélységétől, e felületet fedő rétegben a terjedési sebességtől és a felvevő készülékeknek a robbantási ponttól számított távolságától függ. E négy adat között egyszerű összefüggés áll fenn, úgyhogy ha a négy adatból három

ismeretes, akkor a negyedik, rendszerint a visszaverő felület mélysége, kiszámítható.

A refrakciós és reflexiós módszerek között lényeges különbség az, hogy míg az előbbinél *egy* felvevő készülék is elegendő a refrakciós hullám jelzésére, addig a reflexiós módszernél *2, sőt rendszerint 4—6 felvevő készüléket* használnak. Ennek oka abban van, hogy míg a refrakciót szenvedett hullámok első megérkezése mindig s biztosan megállapítható, addig a visszavert hullámok által okozott amplitudó-növekedés aránylag kicsiny és hasonló növekedést külső zavar is előidézhet. Ha ellenben *4—6 felvevő készülék*, amelyek egymástól messzebb vannak felállítva, *közel ugyanazon időben amplitudó-növekedést* jelez, akkor az nem lehet helyi zavar, hanem mélyről jövő hatás.

Mivel az egyes felvevő készülékekhez megérkező visszavert hullámok úthosszában csak kis különbségek lehetnek, a megérkezési idejükben is csak kis időkülönbségek mutatkoznak. A visszavert hullámok biztos felismerése éppen ez alapon azáltal történik, hogy azok megérkezése között csak kis időkülönbségek vannak. Ezekből a kicsiny időkülönbségekből és e különbségek előjeléből azonban ki lehet számítani a *visszaverő felület dőlésének irányát és nagyságát.*

Az *1. ábra* három általunk *Kapuvár* környékén felvett szeizmogramm fényképét tünteti fel, amelyek mindegyikénél hat felvevő készülék volt használatban.

A baloldalon a legfelső vonalban jól látható a robbantási időpont jele, azután jelennek meg az első megérkezésű törést szenvedett hullámok, amelyek között az első és harmadik szeizmogrammban jelentős különbség mutatkozik. A második szeizmogrammban mind a hat felvevő készülék ugyanakkora távolságra volt a robbantási ponttól. Az egy-egy szeizmogrammon később fellépő, majdnem egyidejű amplitudó-növekedések a visszavert hullámoktól származnak. Mindegyik szeizmogrammon több ilyen visszavert hullám megérkezése látható. Ugyanis a körülbelül 1600 m mélyen levő alapkőzet felett, amely a jobboldali utolsó visszaverődést adta, más visszaverő felületek is jelen vannak a kapuvári altalajban.

A szeizmogrammokon alul a 0·002 sec időkülönbségeket jelző

időjelek vannak felrajzolva, amelyek segítségével a robbantástól a hullámok megérkezéséig eltelt idő 0·001 sec pontossággal leolvasható.

Nyilvánvaló, hogy a refrakciós módszernek, amely a hullámoknak csak az első megérkezését használja fel, nincs szüksége olyan érzékeny felvevő készülékekre, mint a reflexiós módszernek, amely a később és aránylag kis energiával megérkező visszavert hullámokat használja fel. Ezért a refrakciós módszer alkalmazásának első idejében megelégedtek a *mechanikus szeizmográfokkal* is, amelyek mechanikus áttételekkel, emelőrendszerekkel nagyították fel és regisztrálták a kis talajrezgéseket. Az ilyen műszer azonban a visszavert hullámok felvételére nem volt alkalmas. Helyüket az *elektromos szeizmográfok* foglalták el, amelyeknél a talaj mechanikai rezgéseit elektromos energiává alakítjuk át, ezeket felerősítjük s a felerősített elektromos impulzusokat igen érzékeny galvanométerekbe vezetve fényérzékeny mozgó papírszalagon rögzítjük.

A talajrezgések átalakítása elektromos energiává többféleképpen történhetik s ennek megfelelően többféle felvevő készülék lehetséges. A főbb típusok a következők:

1. *az elektromágneses típus,*
2. *a kondenzátorrendszerű,*
3. *a piezoelektromos típus.*

Mindegyik típusnál a legfőbb követelmény, hogy igen érzékeny legyen, azaz, hogy a gyengén megérkező talajrezgéseket is felvegye, továbbá, hogy olyan erősen csillapított legyen, hogy az egymást esetleg 0·1 sec időközben követő hullámokat is egymástól szétválasztva mutassa.

A galvanométerrel vagy oszcillográffal szemben pedig a nagy érzékenységen kívül fontos követelmények, hogy

1. a mozgó fényérzékeny papírszalag sebessége legalább is akkora legyen, hogy 1 sec idő alatt legalább 50 cm hosszú papírszalag szaladjon le,

2. hogy a papírszalag sebessége a bekapcsolás pillanatától kezdve állandó legyen.

A *reflexiós szeizmikus mérések* kivitele általában kétféle módon történhetik, t. i. vagy *hálózatosan* vagy *szelvények mentén.* A hálózati rendszert teljesen ismeretlen vidéken alkalmazzák, szabályos

hálózat csúcspontjain határozván meg a visszaverő felület vagy felületek mélységét, valamint e felületek dőlésének nagyságát és irányát. Ez adatokból azután, kellő kiegyenlítés elvégzése után a visszaverő felület rétegvonalas térképét készíthetjük el.

Amilyen jó áttekintést adhat a reflexiós szeizmikus módszer alapján hálózatos rendszerben készült felvétellel nyert rétegvonalas térkép a földalatti tömegeloszlásról, éppoly hosszadalmas és költséges annak elkészítése. Ezért ott, ahol mélyfúrások, geológiai felvételek, vagy másféle geofizikai, pl. torziós ingamérések révén az altalaj szerkezeti viszonyai többé-kevésbbé ismertek, ott rendszerint megelégszünk azzal, hogy a reflexiós szeizmikus méréseket jól kiválasztott szelvények mentén végezzük el. A szelvényeknek lehetőleg merőlegeseknek kell lenniök a hiányosan ismert vagy csak feltételezett földalatti alakulat vonulatára.

Szelvények mentén a robbantási pontok rendszerint 1000—1000 méterre követik egymást, a felvevőkészülékek pedig egymástól 50—50 méterre és a két robbantási pont közé vannak felállítva. A felvevőkészülék minden helyzetében mindkét oldalról végzünk robbantásokat. E mérési módszerrel a szelvény mentén 500 méteres közökben határozzuk meg a visszaverő felületek mélységét és esetleg dőlését is.

Szeizmikus felvételek *hazánkban* először 1934-ben és 1935-ben a *Dunántúlon* folytak, ahol az *European Gas and Electric Company* olaj- és földgázkutatás céljából végeztetett reflexiós szeizmikus felvételeket. E felvételeknél azonban külföldi geofizikusok működtek közre, akik külföldi gyártmányú szeizmográfokat használtak.

A *m. kir. Iparügyi Minisztérium* 1936-ban egy szeizmikus berenoezés beszerzését határozta el, hogy azzal a fennhatósága alá tartozó *Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet* az országban reflexiós szeizmikus méréseket végezzen.

A berendezés megszerkesztésével és elkészítésével az Iparügyi Minisztérium dr. POGÁNY BÉLÁT bízta meg, aki a felvevő készüléket a saját találmánya szerint készítette el, de a berendezés többi részét is az ő útmutatása és felügyelete alatt itthon gyártották, kivéve egy hathurkos oszcillográfot, amely német eredetű (Siemens-féle).

A *Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet* FEKETE JENŐ veze-

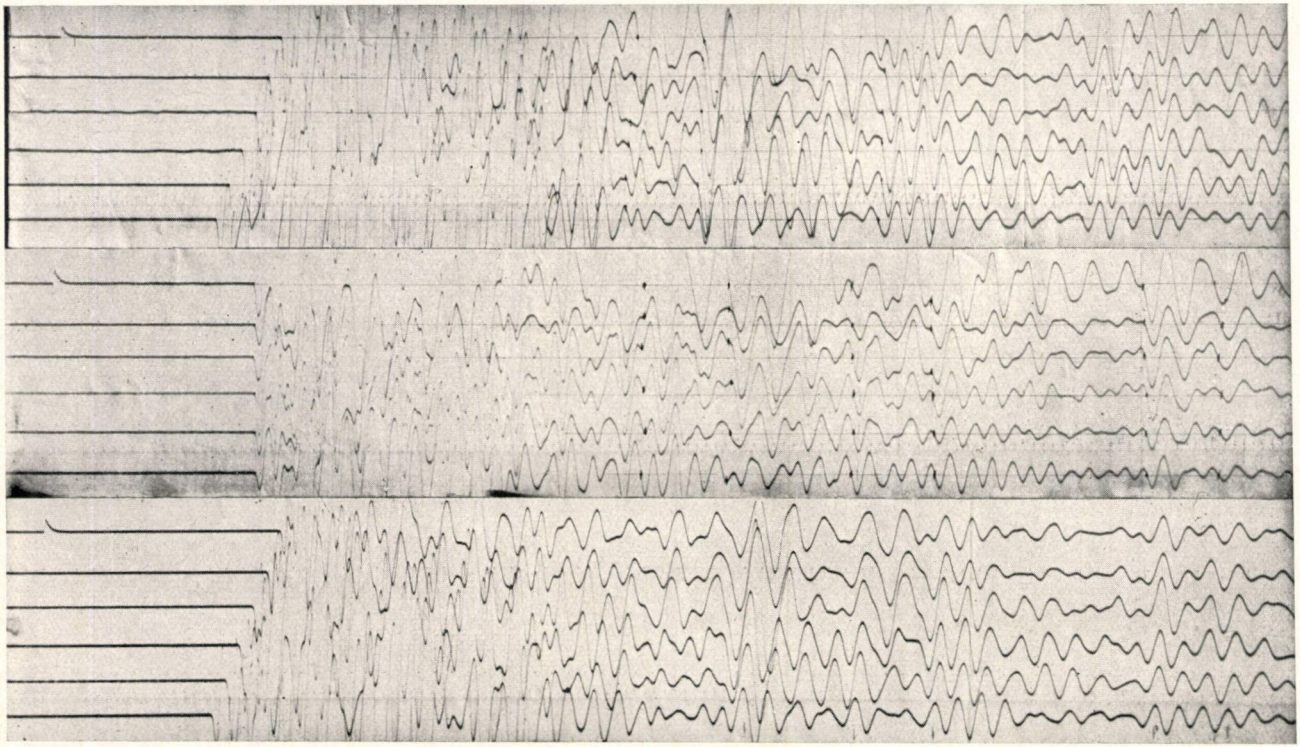
tésével első szeizmikus próbaméréseit, amelyek tulajdonképpen csak az új berendezés szabadban való kipróbálását célozták, az *Őrszentmiklós* határában levő kincstári mélyfúrás közelében kezdte meg. Azt vártuk, hogy az e fúrásban 880 m mélységben megütött eocén mészkő felülete, mint kitűnő visszaverő felület fog szerepelni s ismervén a fúrásból e felület mélységét, az e vidékre érvényes terjedési sebesség is meg lesz határozható.

Azonban a felvételek, amelyeket e fúrás közelében különböző szelvények mentén végeztünk, visszavert hullámokat nem mutattak. A véghezvitt korrekciós mérések azonban jelezték, hogy a mészkövet fedő vastag s szilárd oligocén kiscelli agyagban már az alig 5 méter vastag felszíni réteg alatt is a szeizmikus hullámok terjedési sebessége igen jelentékeny: a felszíni rétegben érvényes 500 m/sec sebességről hirtelen 2600 m/sec-ra ugrik fel. Nagyon valószínű, hogy e sebesség lefelé folytonosan növekszik s 880 m mélységben oly értéket ér el, amely közel áll a mészkőben érvényes terjedési sebességhez. Ebben az esetben természetesen a mészkő nem verheti vissza a szeizmikus hullámokat. Megfelelő berendezés hiánya és egyéb technikai nehézségek miatt a felvevő készüléknek a fúrólyukba való lemélyítését nem tudtuk keresztülvinni és így e kérdést biztosan eldönteni nem lehetett.

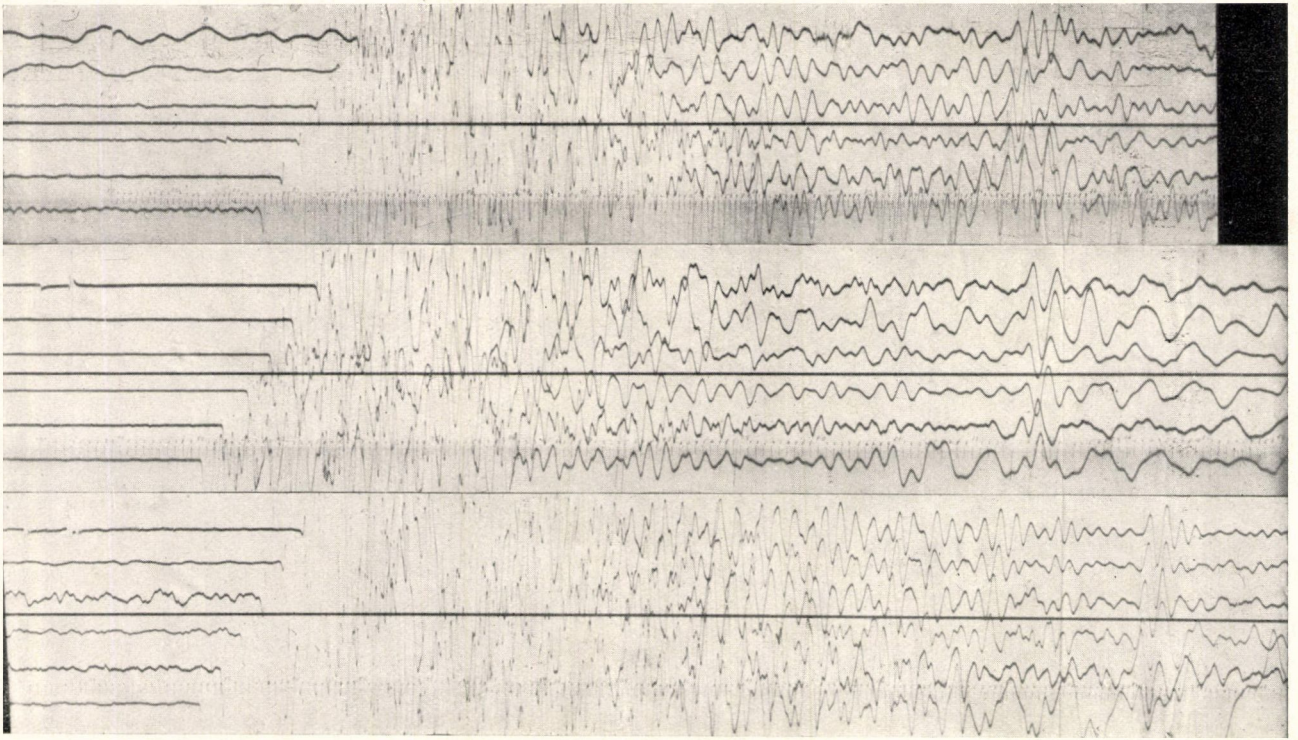
Ezzel szemben a következő próbamérések, amelyeket *Kapuvár* környékén végeztünk, a legszebb reflexiós szeizmogrammokat adták (1. ábra) s így igazolták, hogy az eszköz visszavert szeizmikus hullámok regisztrálására alkalmas. Itt ugyanis a körülbelül 1600 m mélyben fekvő alapkőzet kitűnő visszaverő felületnek bizonyult.

A következő próbamérések színhelye *Budapest* környékén, a *Fót—Rákospalota—Ujpest vonalban* volt. Mivel itt az altalaj szerkezeti viszonyai hasonlóak az *Őrszentmiklós* vidékén találtakhoz, nem sok eredményt várhattunk ezektől a felvételektől. S bár a felvett szeizmogrammok egy részén visszavert hullámok jelentkeztek ugyan, ezek korántsem voltak olyan biztosak és jól definiáltak, mint amilyenek a Kapuvár vidékén nyert szeizmogrammokban jelentkeztek.

Mivel a Nagy Alföld nagy területét behálózó torziós ingamérések eredményei és az ottani mélyfúrások (Hajduszoboszló, Debrecen, Karcag, Tiszaőrs) adatai között ellenmondások jelent-



1. ábra.



2. ábra.

keztek, célszerűnek látszott a tényleges reflexiós szeizmikus méréseket ez ellenmondások kiderítésére a Nagy Alföldön kezdeni meg. Ezért a m. kir. Iparügyi Minisztérium a Püspökladány—Hajduszoboszló—Debrecen szelvénynek reflexiós szeizmikus végigmérését rendelte el. Később kívánatosnak látszott e szelvény meghosszabbítása ÉK felé a *debreceni Nagyerdőn* és a *debreceni mélyfúrásokon* keresztül. A *hajduszoboszlói* gravitációs maximumon keresztül ÉNy—DK irányban tervezett és megkezdett szelvény felmérését a nehéz útviszonyok miatt félbe kellett szakítani.

A szelvény helyzetrajza a 3. ábrán látható. Magát a szeizmikus szelvényt vastag szaggatott vonal ábrázolja. A vonalon levő karikák a robbantási pontokat jelzik.

Az első feladat az e vidékre érvényes terjedési sebesség meghatározása volt, amely célra a *hajduszoboszlói II. számú mélyfúrás* látszott a legalkalmasabbnak. E mélyfúrás 2036 méter mélységet ért el és a fúró 1556 méter mélységben olyan kőzetet ütött meg, amelyet mint visszaverő felületet tekinthetünk. Sajnos, a fúrólyukba megfelelő felvevő készüléket lebocsátani nem lehetett, mivel a szükséges különleges berendezésű felvevő készülék még nem állott rendelkezésre. Így a terjedési sebességnek a mélységgel való változását sem lehetett meghatározni. Refrakciós módszert szintén az erre szolgáló berendezés hiánya miatt nem alkalmazhattunk, hogy ezzel határozzuk meg a különböző mélységekig a terjedési sebességet. Az egyetlen lehetőség a közép terjedési sebesség meghatározása volt a fúrás helyén nyert reflexiókból. E meghatározás szerint a felszíni réteg alatt a visszaverő felületig terjedő rétegekben a *közép terjedési sebesség* 2350 *m/sec-nak* adódott. A későbbi számításokban ezt az értéket használtuk Püspökladánytól Debrecenig s még attól északkeletre is.

Hátrányos volt, hogy *Hajduszoboszló város* területén a felvételeket nem lehetett folytatni, úgyhogy a szelvény folytonosságában itt szakadás van.

Az e vidéken felvett szeizmogrammok legnagyobb részén, amint azt a 2. ábrán látható 3 szeizmogramm is mutatja, jól definiált reflexiók találhatók. Ezek közül is legbiztosabbak mindig azok a reflexiók, amelyek kétségtelenül a kőzetalakulattól származnak. Ezeket *elsőrendű reflexióknak* nevezzük, ellentétben a *másod-*

rendűekkel, amelyek felismerése kevésbbé biztos, mivel csak fedőrétegekbe beágyazott visszaverő felületektől erednek.

A reflexiók közép megérkezési idejét javításnak kell alávetni a felszíni laza rétegekben érvényes kicsiny (körülbelül 500 m/sec) terjedési sebesség miatt, amely a visszavert hullámoknak a felszínre való megérkezését késlelteti. A javított közép megérkezési időből, a felvevő készülékek közepének a robbantási ponttól való távolságából és a közép terjedési sebességből azután egyszerű módon kiszámítható a visszaverő felületek mélysége a robbantási pont és a felvevő készülékek közepe közötti távolság felező pontjára vonatkozóan.

Az egyes felvevő készülékekhez érkező visszavert hullámok megérkezési ideje között talált időkülönbségekből pedig kiszámíthatjuk a visszaverő felület dőlésének irányát és nagyságát.

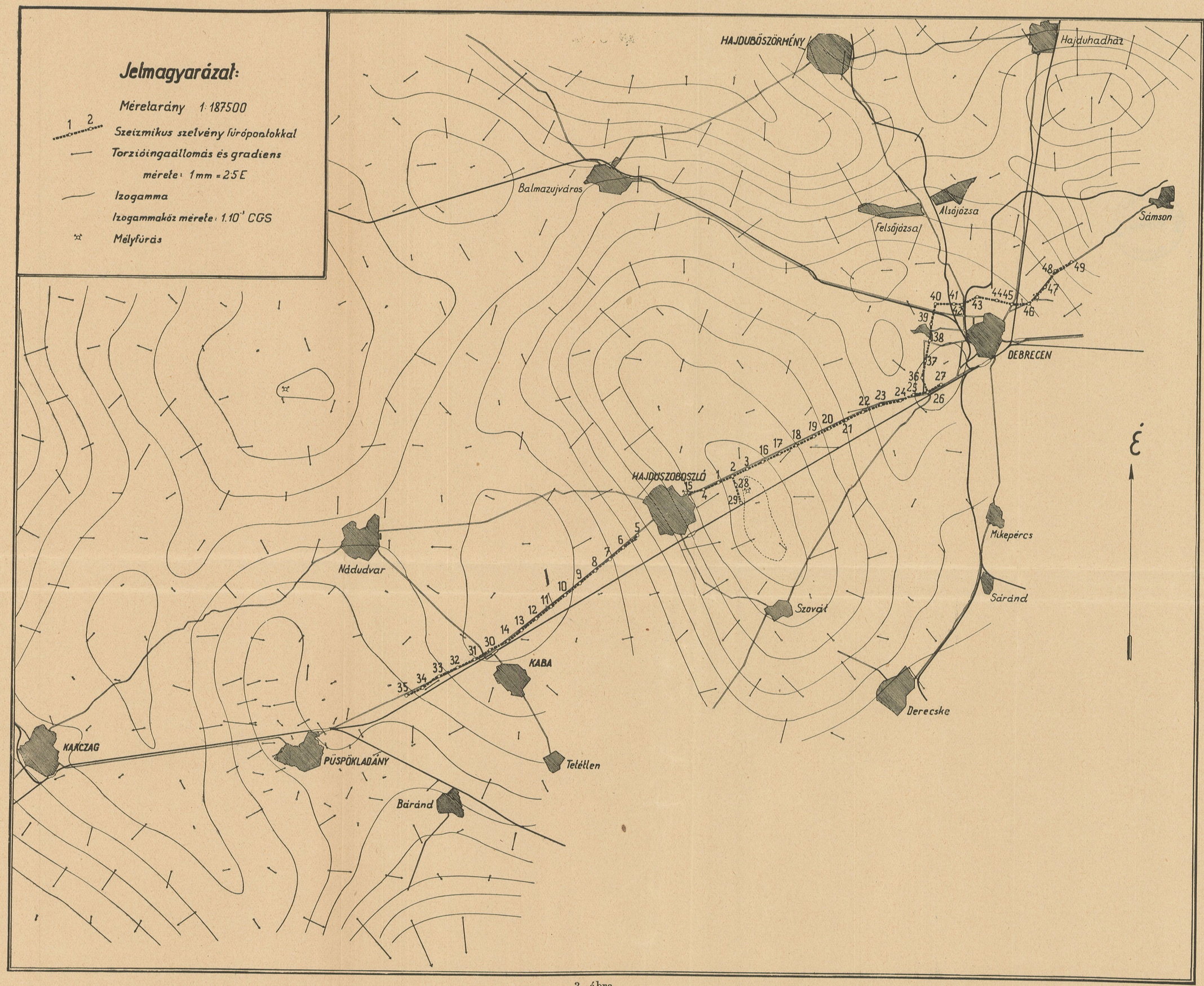
A *Nagy Alföldön* végzett reflexiós szeizmikus mérések eredményeit a 4., 5., 6., illetve a 7., 8., 9. *ábrák* tüntetik fel.

A *4. ábra* a *Hajduszoboszló—Debrecen* vonalban az egyes szelvényekben nyert reflexiókból számított mélységi pontokat és azok valószínű összeköttetését mutatja. A vastag pontok az elsőrendű, a karikák a másodrendű reflexiókból számított mélységi pontokat adják. Tekintve az elsőrendű visszavert hullámok biztosan megállapítható megjelenését, amelyek kétségtelenül ugyanazon kőzettől származnak, azt hisszük, jogosítva vagyunk az ezekből számított mélységi pontok összekötésére. A másodrendű visszaverődésekből számított mélységi pontok összekötése, illetve egyes másodrendű visszaverő felület berajzolása azonban már meglehetősen bizonytalan. A szaggatott vonal a kőzetalakulatnak az izogammák különbségeiből számított magasságkülönbségeit tünteti fel azzal a feltétellel, hogy a hajduszoboszlói mélyfúrás helyén a nagyobb fajsúlyú kőzet 1556 m mélységben van s a sűrűségkülönbség a kőzet és a homogén fedőréteg között 0·3.

Hasonlóképpen az *5. ábra Püspökladány—Hajduszoboszló* és a *6. ábra Debrecen* környékén tünteti fel a visszaverődésekből és az izogammákból számított mélységi viszonyokat.

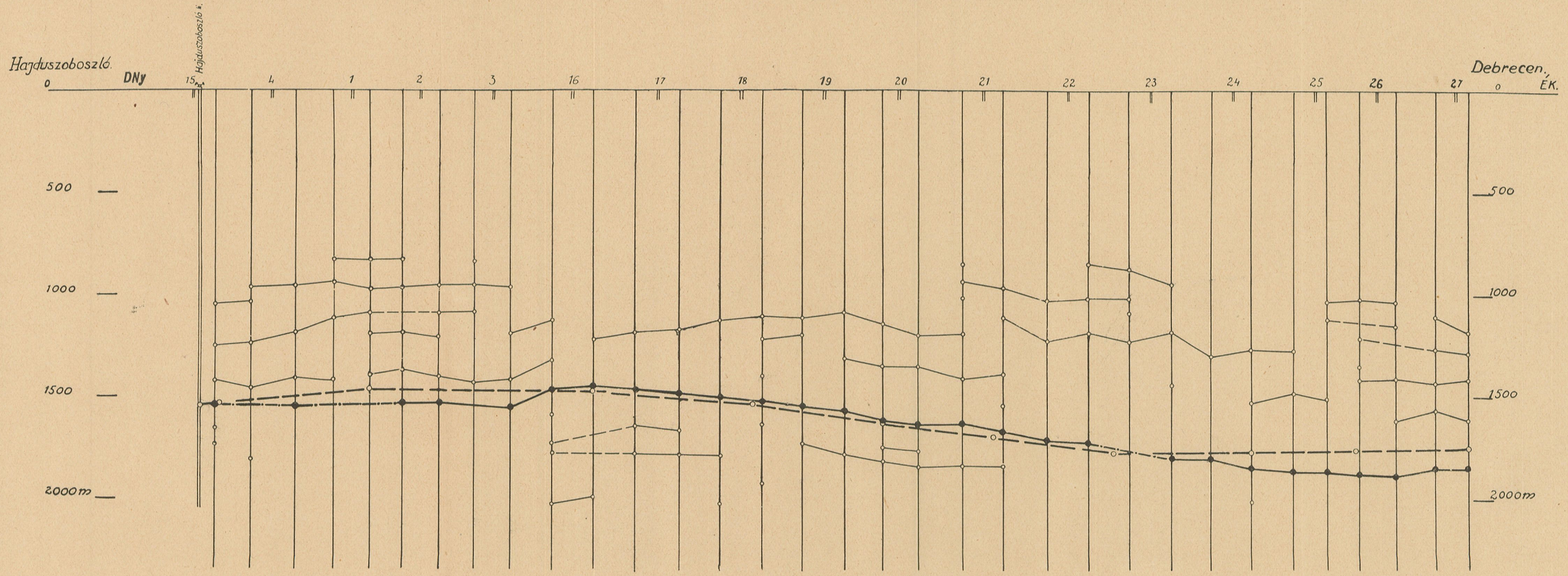
A *4. ábrán* látható, hogy a visszaverő felület legmagasabb pontja a 16. ÉK szelvényben van, 1·5 km-rel északkeletre a gravitációs maximum helyétől.

A Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet által Püspökladány—Hajduszoboszló—Debrecen környékén végzett torziós ingamérések eredményei és a reflexiós szeizmikus szelvények helyszinrajza.



3. ábra.

A Báró Eötvös Lóránd Geofizikai Intézet által 1936. évben Hajduszoboszló—Debrecen vonalban végzett reflexiós szeizmikus mérések eredményei.



Méretarányok:

Horizontális: 1 : 50,000.
Vertikális: 1 : 20,000.

Jelmagyarázat:

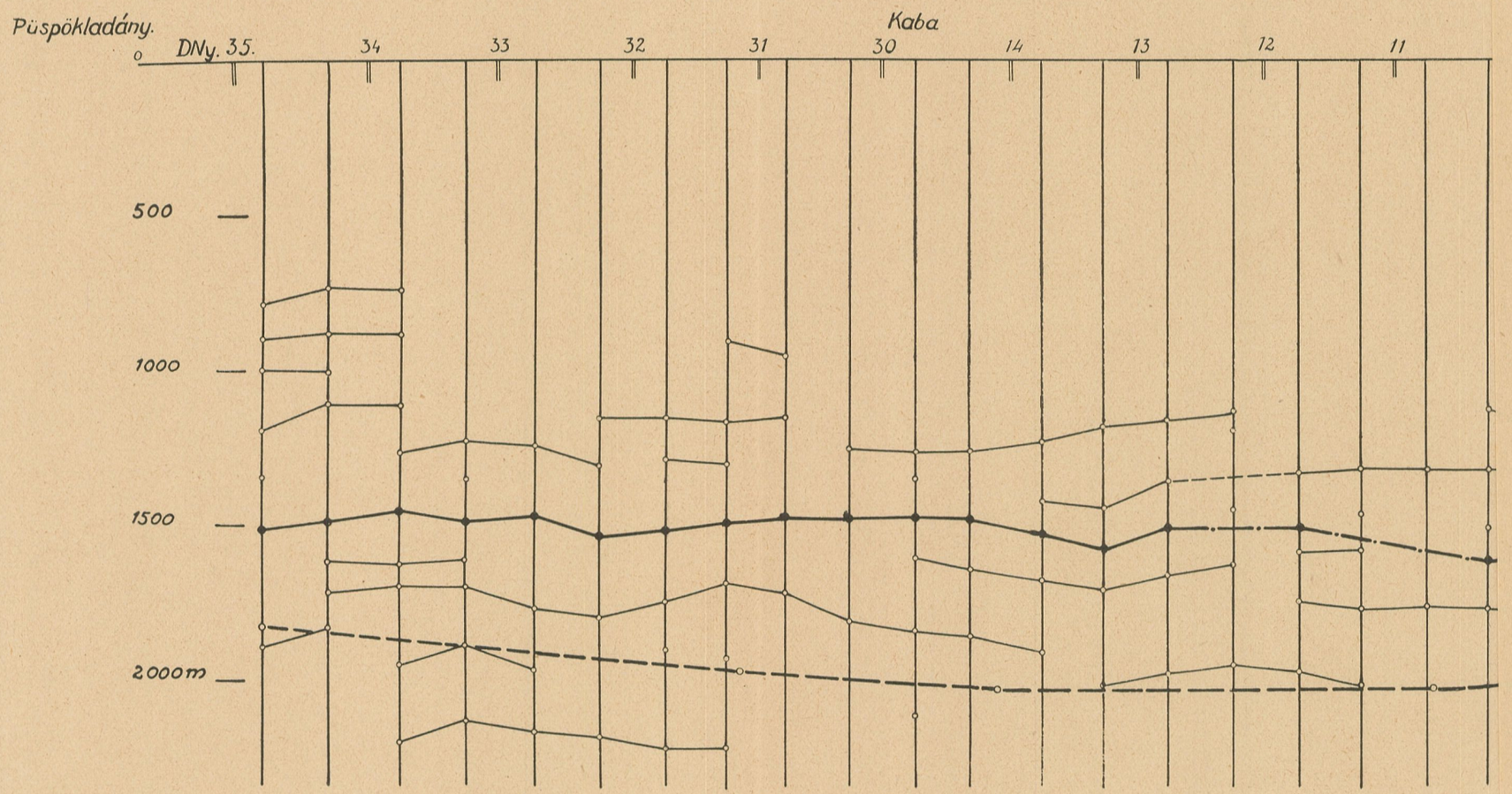
19 — *fúrópont.*

másodrendű } *reflexiós pont.*
elsőrendű }

az alapkőzetnek az izogammatérképből számított mélységi pontja.

4. ábra.

A Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet által 1936. évben Püspökladány—Hajduszoboszló

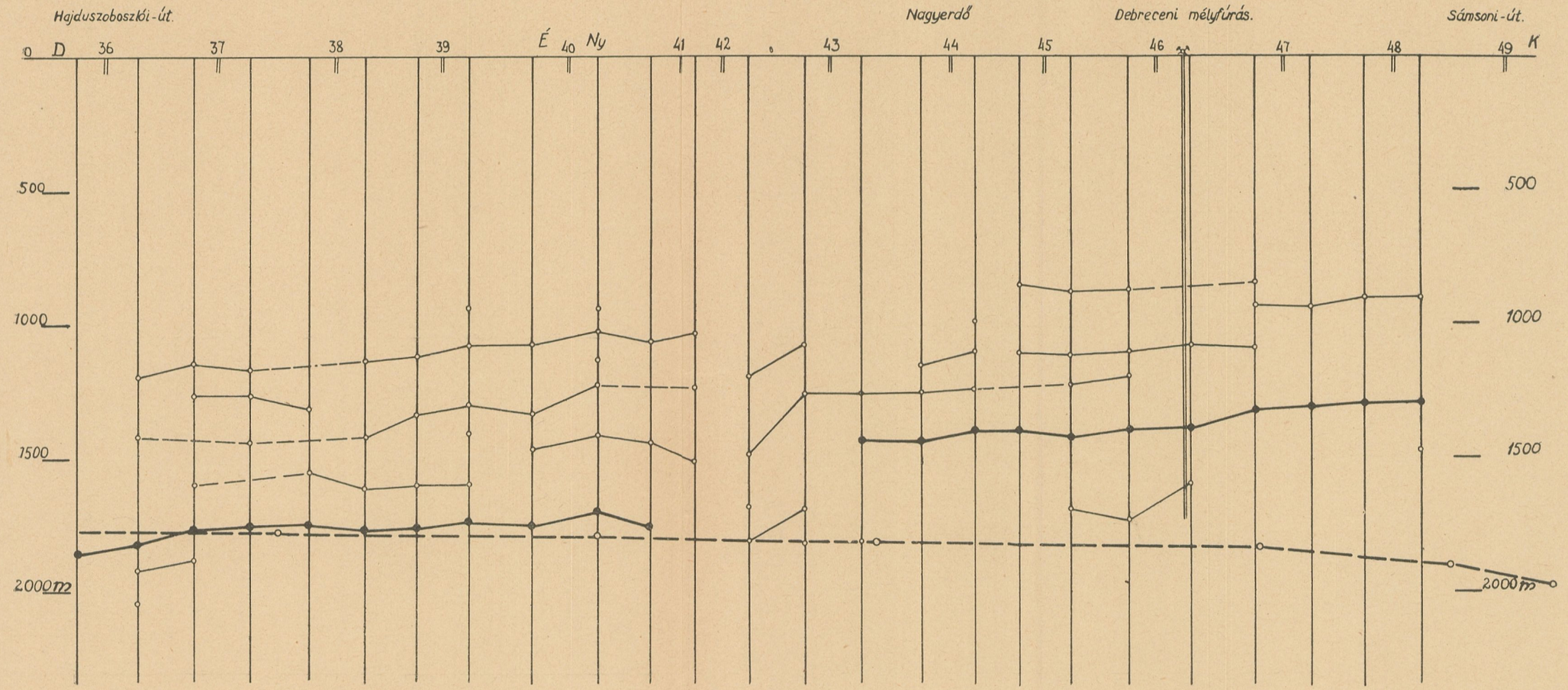


Méretarányok:
Horizontális: 1 : 50,000.
Vertikális: 1 : 20,000.

42 *fúrópon*
másodr
elsőren
az alap

5. ábra.

Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet által 1936. évben Debrecen környékén végzett reflexiós szeizmikus mérések eredményei.



Méretarányok:

Horizontális: 1:50,000
Vertikális: 1:20,000

Jelmagyarázat:

42 *fúrópont.*

másodrendű } *reflexiós pont.*
elsőrendű }

az alapkőzetnek az izogammatérképből számított mélységi pontja.

6. ábra.

Az izogammákból számítva e felület meglepő egyezést mutat e területen a visszaverődésekből számított felülettel. Csak a gravitációs maximum helyén találunk 80 méteres és a 26. sz. robbantási pont környékén 120 méteres eltérést a kétféle módszerrel megállapított felületmélységek között. Ebből arra következtethetünk, hogy e területen a számítás alapjául szolgáló feltevés, t. i. hogy a gravitációs hatás legnagyobb része egy sűrűbb kőzet és a könnyebb fedőréteg válaszfelületétől származik, nagy mértékben teljesítve van.

Az *5. ábrán*, amely a *Püspökladány és Hajduszoboszló* közötti szelvényeket tünteti fel, az elsőrendű visszaverődésekből számított kőzetfelület hullámos felületet mutat, amelynek legmagasabb pontja 1450 m mélységben a 34. ÉK szelvényben, legmélyebb pontja pedig 1620 m mélységben a 10. DNy szelvényben van, ha eltekintünk azoktól a szelvényektől, amelyekben elsőrendű visszaverődéseket nem kaptunk. Ezzel szemben az izogammákból számított kőzetfelület *Kabáig* folyton lejt s *Kabától* keletre 2020 m mélységet ér el. Itt tehát 400—600 méteres eltérés mutatkozik a visszaverő kőzetalakulatnak szeizmikus módszerrel megállapított és az izogammákból számított mélysége között. Minthogy e területen a kőzetalakulatig lehatoló mélyfúrás nincs, annak mélységét pontosan nem ismerjük s így teljes biztossággal nem tudjuk eldönteni, hogy melyik módszer adata helyes.

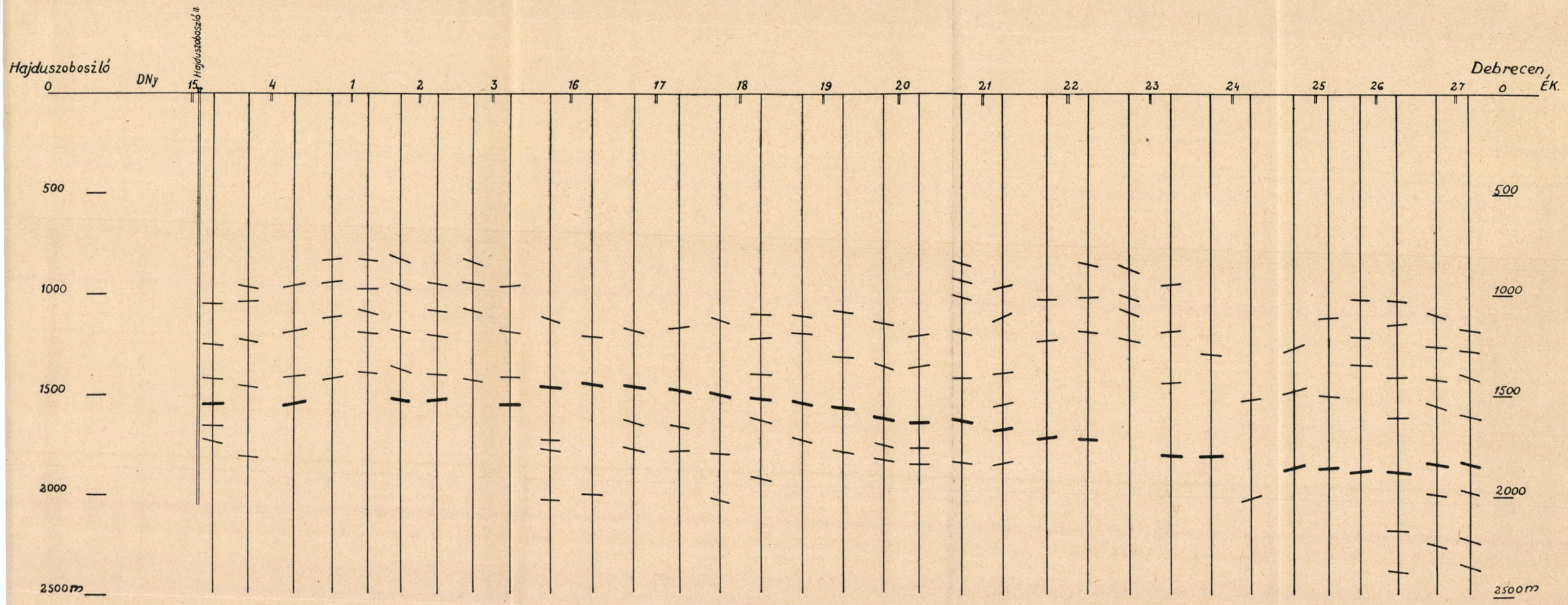
Ha a *6. ábrán a Debrecen* környékén végigfektetett szelvények mentén számított mélységi pontokat vizsgáljuk, látjuk, hogy a szelvény egyik részében, *Debrecentől* nyugatra egészen a 41. sz. robbantási pontig, az izogammákból számított kőzetalakulat-felülete nagy megegyezést mutat a visszaverődésekből számított felülettel. A 41. sz. robbantási ponttól kezdve az izagommaértékeknek, bár lassú, de fokozatos kisebbedése következtében a kőzet felületének az izogammaértékekből számított mélysége egész 1970 méterig süllyed. A reflexiós szeizmikus mérések a 41. és 43. sz. robbantási pontok közötti szelvényekben elsőrendű reflexiókat egyáltalában nem adtak, de a 43. K szelvényben azok ismét megjelentek és innen kezdve az egész felmért területen végig minden szelvényben megkaptuk azokat. Azonban ezekből az első rendű visszaverődésekből számítva a kőzet mélységét, a 43. K

szelvényben azt 1450 m-nek találtuk. Innen kezdve a kőzet felülete kis hullámzással ugyan, de folyton emelkedik és az utolsó, 48. K szelvényben 1300 m mélységet mutat ott, ahol az izogammákból számított mélysége 1890 m lenne. Ezen a területen vannak a *debreceni mélyfúrások*, a várostól északkeletre a *sámsoni* út mentén, amelyeken a szeizmikus szelvények áthaladnak. Az *I. sz. mélyfúrás* 1738 m mély. 1304 m mélységben dacittufás, meszes homokkövet ütött meg a fúró, majd 1477 m mélységben vörhenyes, kavicsos, homokos agyag és homokkő, végül 1532 m mélységben homokkő következett. Hogy e felületek közül melyik a visszaverő felület, az bizonytalan, de a reflexiós szeizmikus mérések szerint a mélyfúrás helyén a kőzet mélységére kapott 1393 méter mindenesetre a fenti három mélység közé esik.

A *visszaverődések hiánya* a 41. és 43. sz. robbantási pontok között nagy valószínűséggel arra vezethető vissza, hogy itt az altalaj szerkezeti viszonyai teljesen megváltoznak s e helyen *hatalmas leszakadás* van, ami esetleg *vetődés* is lehet. Ez esetben azonban nem egy vetődésről, hanem azok egész sorozatáról lehet szó, amelyek mentén a kőzetek annyira össze-vissza vannak töredezve, hogy visszaverődéseket nem adhatnak.

Ami az izogammákból és a szeizmikus reflexiókból számított kőzetmélységek közötti nagy eltéréseket illeti, úgy a *Püspökladány—Hajduszoboszló* vonalban, mint *Debrecentől északra és keletre*, ezek oka kétségtelenül az, hogy az izogammaközöknek megfelelő mélységi viszonyok kiszámítására szolgáló feltevések a valóságban nem teljesülnek. Nagyon valószínű és a debreceni mélyfúrás adatai ezt meg is erősítik, hogy a fenti területen nemcsak két, hanem több különböző alakulat van jelen. Ez esetben az izogammák semmiképpen sem adják meg a kőzetalakulat rétegvonalait s ennek következtében azokból a kőzetfelszín alakját meghatározni nem lehet. A szeizmikus szelvények végigmérésével tehát el lehet dönteni azt, hogy melyek azok a területek, ahol az izogammákat a kőzet rétegvonalainak tekinthetjük (pl. jelen esetben *Hajduszoboszlótól Debrecenig*) és melyek azok a területek, ahol az izogammákból a kőzet mélységére és alakjára vonatkozóan következtetést nem vonhatunk (pl. jelen esetben *Püspökladánytól Hajduszoboszlóig és Debrecentől északra és keletre*).

Báró Eötvös Loránd Geofizikal Intézet által 1936. évben Hajduszoboszló—Debrecen vonalban végzett reflexiós szeizmikus mérések eredményeiből számított rétegdőlések.

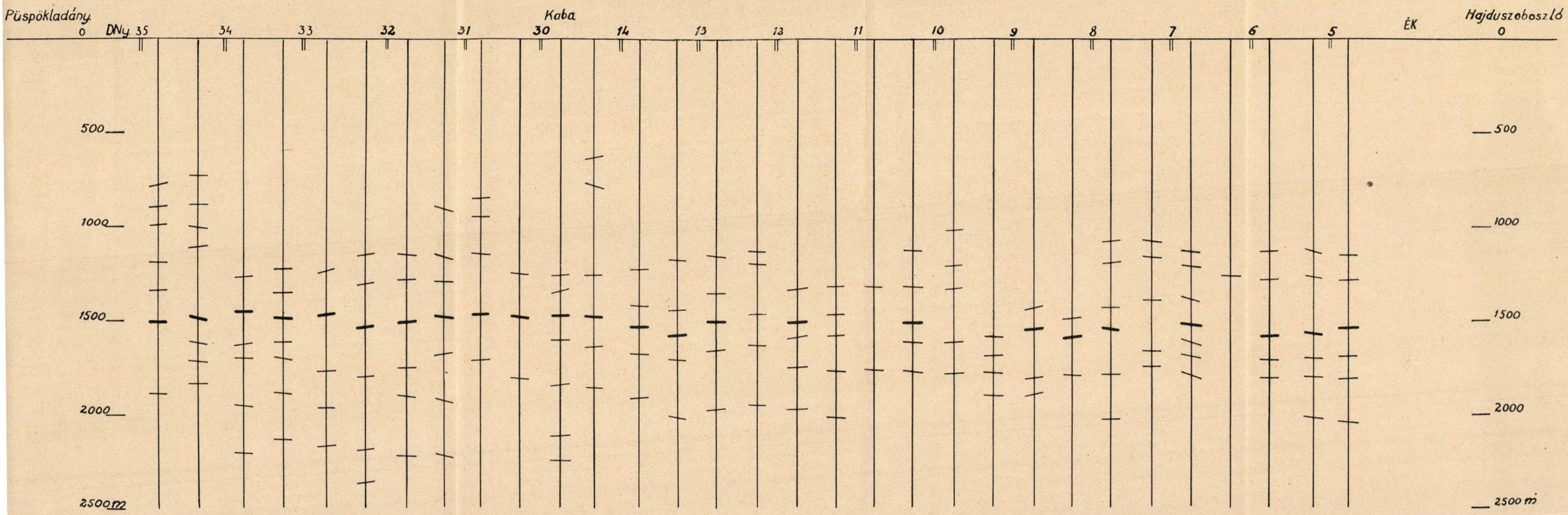


Méretarányok:
Horizontális: 1:50,000.
Vertikális: 1:20,000.

Jelmagyarázat:
19 *fúrópont.*
elsőrendű } *reflexióból számított rétegdőlés.*
másodrendű }

7. ábra.

A Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet által 1936. évben Püspökladány—Hajduszoboszló vonalban végzett reflexiós szeizmikus mérések eredményeiből számított rétegdőlések.



Méretarányok:

Horizontális: 1:50,000.
Vertikális: 1:20,000.

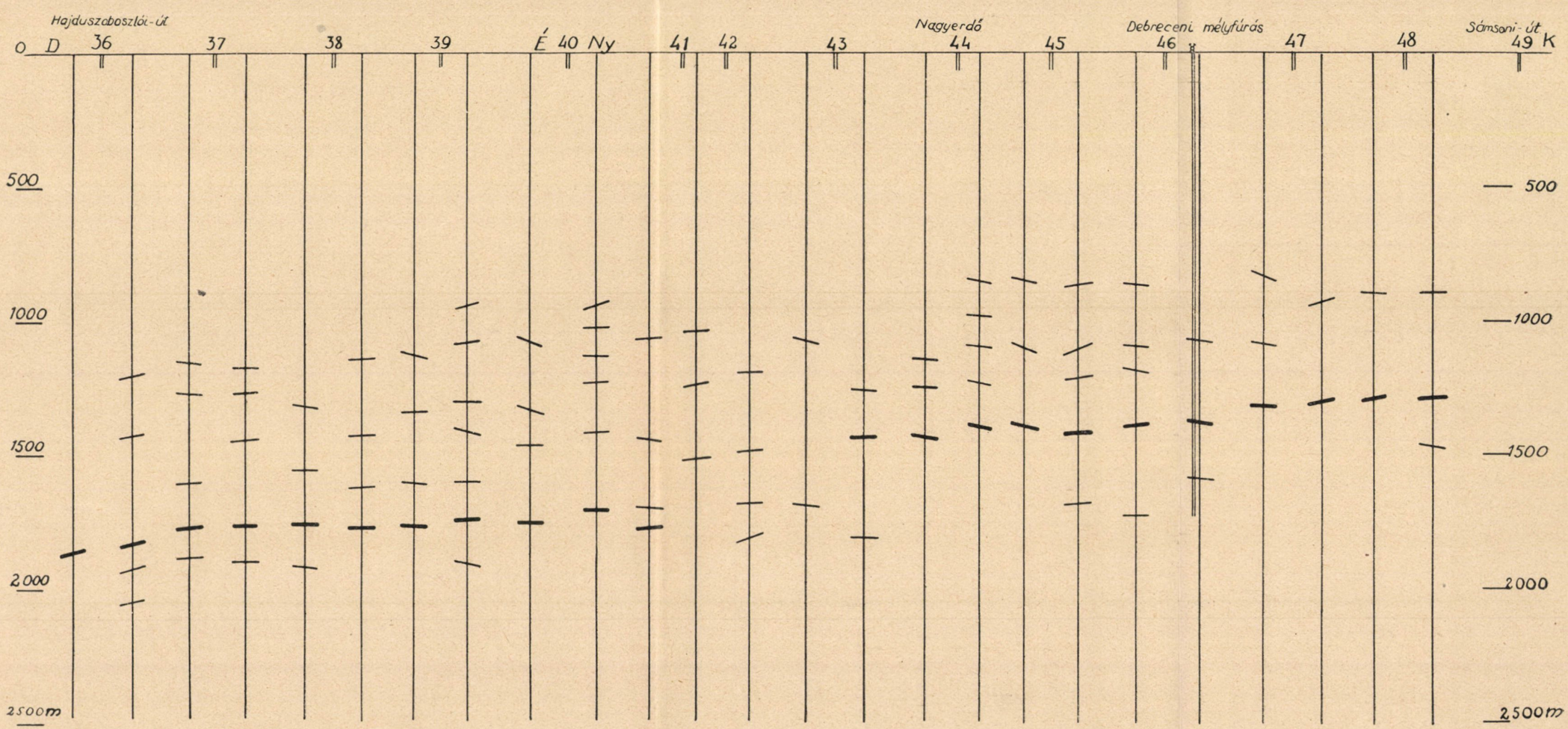
Jelmagyarázat:

12 *fúrópont.*

elsőrendű } *reflexióból számított*
másodrendű } *rétegdőlés.*

8. ábra.

A Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet által 1936. évben Debrecen környékén végzett reflexiós szeizmikus mérések eredményeiből számított rétegdőlések.



Méretarányok:

Horizontális: 1:50,000.
Vertikális: 1:20,000.

Jelmagyarázat:

43 — *fúrópont.*

elsőrendű } *reflexióból számított rétegdőlés.*
másodrendű }

9. ábra.

Hogy mindkét területen az izogammákból számított kőzetmélységek nagyobbak, mint a szeizmikus mérésekből számítottak, valamint a fúrásból megállapítottak, annak valószínűleg az az oka, hogy kicsiny sűrűségű alakulatok vannak jelen ezen a területen s ezek jelenléte a nehézségerő kisebbedését okozza. Erre mutatnak a debreceni mélyfúrásban talált tufák is.

Az *7.*, *8.* és *9. ábrákon* feltüntetett kőzetdőlések kevésbbé meggyőző képet mutatnak, mint a mélységi adatok. Nemcsak a másodrendű, de az elsőrendű visszaverődésekből számított dőlések irányában is jelentékeny ellenmondások találhatók, ha azokat a *4.*, *5.*, *6. ábrákon* feltüntetett kőzetfelületekkel összehasonlítjuk. Másrészről egyes helyeken, mint pl. a *hajduszoboszlói boltozódás keleti szárnyának lejtésénél, teljes a megegyezés a dőlések iránya és nagysága*, valamint a *mélységi pontokat összekötő felület* lejtése között.

A dőlésekben mutatkozó ellenmondások oka talán részint a visszaverő felületek szabálytalanságában, részint a visszavert hullámok megérkezésének kijelelésében elkövetett esetleges hibákban keresendő. Hozzájárul ehhez még az a körülmény, hogy a terjedési sebességre csak egyetlenegy átlagos értéket használtunk, pedig az a mélységgel is változik.

Tekintve, hogy a reflexiós szeizmikus eljárás és az adatok feldolgozása nem általánosan ismert szabályok szerint történik, hanem mindenki saját maga dolgozza ki a felvétel és a számítások módját, bizonyos időre van szükség, míg a leghelyesebb eljárást megtaláljuk.

Természetesen a reflexiós szeizmikus mérések alkalmazhatóságának is vannak határai, amelyek ennek az egyes helyeken meglepően jó eredményeket adó módszernek a használhatóságát korlátozzák. Mint magunk is tapasztaltuk *Őrszentmiklós és Budapest környékén*, a módszer nem mindenütt alkalmazható, hanem csak olyan helyeken, ahol az altalajban jó visszaverő felületek vannak. Ennek feltétele pedig az, hogy a felületekkel elválasztott rétegekben a szeizmikus hullámok terjedési sebességei jelentékenyen különbözzenek egymástól. Ezt a legtöbb esetben még az altalaj szerkezeti viszonyainak ismerete mellett sem lehet előre megmondani, hanem csak tényleges próbamérések kivitele után lehet eldönteni.

Hegyes vidékeken alkalmazva a reflexiós szeizmikus módszert, a szintkülönbségek miatt szükséges javítások szintén jelentős bizonytalanságot hoznak be a mérések eredményeibe.

*

A geofon szerkesztője kötelességének tartja, hogy hálás köszönetét fejezze ki Bornemissza Géza miniszter úr ő excellenciájának a neki előlegezett bizalomért, továbbá a Széchenyi Tudományos Társaságnak, amely különböző típusú geofonok megépítését és ezeknek Várpalotán és Dorogon való kipróbálását hathatós támogatásában részesítette.

Úgy a szeizmikus berendezés megszerkesztésében és laboratóriumi megvizsgálásában, valamint annak a szabadban való kipróbálásában és a tényleges mérések kivitelében többen működtek közre, akik közül elsősorban Bassó Imre műegyetemi tanársegéd és Tafner Tibor tanárjelölt urakat kell megemlítenünk, mint akik a legtöbb segítséget nyujtották. Úgy nekik, valamint a többi közreműködő uraknak hálás köszönetet mondunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15-én tartott üléséből.)

SEISMISCHE REFLEXIONSBEOBACHTUNGEN IN DER UNGARISCHEN TIEFEBENE.

Von BÉLA POGÁNY und JENŐ FEKETE.

Das unter Leitung von JENŐ FEKETE stehende Baron Roland Eötvös Geophysikalische Institut der Sektion für Bergschürfung des Industrieministeriums hat zur Ergänzung der Drehwagebeobachtungen die Durchführung von Beobachtungen nach der seismischen Reflexionsmethode beschlossen. Auf Vorschlag des Institutsleiters hat der Herr Industrieminister den anderen Verfasser mit der Konstruktion der erforderlichen Geophone betraut. Diese haben sich bestens bewährt. Auf den Fig. 1 und 2 sieht man einige der erhaltenen Seismogramme; die Reflexionen erscheinen überaus deutlich.

Die Ergebnisse der von dem Baron Roland Eötvös Geophysikalischen Institute ausgeführten seismischen Messungen in dem Gebiete Hajduszoboszló—Debrecen werden mitgeteilt.

Fig. 3 stellt die Karte der Isogammen dar, die auf Grund der vor etwa einem Jahrzehnt ausgeführten Beobachtungen mit der Drehwage gewonnen wurde.

Auf der Fig. 4 sieht man gestrichelt ausgezogen die Oberfläche des Gesteines, das bei Hajduszoboszló in 1556 m Tiefe angebohrt, auf Grund der Isogammenkarte von hier aus längs des auf der Isogammenkarte gezeichneten Schnittes extrapoliert wurde. Entlang desselben Schnittes wurden die seismischen Beobachtungen ausgeführt. Der am besten ausgeprägten Reflexion entspricht die dick ausgezogene Kurve. Sie stimmt mit der auf Grund der Isogammenkarte berechneten Oberfläche bis westlich von Debrecen

überein. Dort befanden sich drei Sprengpunkte, an denen die am besten ausgeprägte Reflexion überhaupt nicht auftrat, während sie auf den weiteren, nördlich und östlich von Debrecen gelegenen Sprengpunkten wieder erschien, jedoch von etwa 320 m höher kommend. Ähnlich waren die Verhältnisse westlich von Hajduszoboszló.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

A KÉT SZABAD VEGYÉRTÉKET MUTATÓ *CO*-MÓDOSULAT SZÍNKÉPÉRŐL.

BEER BORBÁLA ZSUZSANNÁ-tól.

Bevezetés.

Elemi kémiai megfontolások a szénnek négy, az oxigénnek két vegyértéket tulajdonítanak s mivel mindkét elem értékűsége a gyakorlatban igen nagymértékben állandónak mutatkozik, a *CO* molekula létrejöttét csak vagy vegyértékanomália, vagy szabad vegyértékek feltételezésével tudják értelmezni.

A tapasztalat szerint a szénmonoxid a fizikai és kémiai tulajdonságok tekintetében részint mint a nitrogénhez sok tekintetben hasonló, kifelé közömbös, permanens-gáz természetű anyag mutatkozik, részint mint meglehetősen reakcióképes vegyület, amely fémekkel, klórgázzal stb. könnyen addicionál és mint jellemző atomcsoport, az organikus vegyületek két csoportjában: az aldehidekben és a ketonokban fontos szerepet játszik. Ez utóbbi formájában a két szabad vegyértéket mutató $>C=O$ szimbólummal jelölhető. A tulajdonságok e kettőssége megmutatkozik a szénmonoxid színképében is, amely két termrendszertől származik: egy szingulett és egy vele meglehetősen gyengén kombinálódó triplett rendszertől.

A kémiai kötés kvantumelméleti értelemzése közelebb visz a fenti tények megértéséhez. Ez az elmélet a két atommagot közösen körülvevő elektronpályákkal számol, amelyekben az egyes atomok elektronjai együttesen építik fel az egymásután következő nemesgázhéjakat. A *CO*-ban csupán az $1s$ elektronok azok, amelyek határozottan valamelyik atommaghoz rendelhetők, a többiek pályája mindkét atommagot körülveszi. Ha stabilis a molekula,

akkor ezeknek az elektronoknak töltéssűrűsége aránylag az atommagok közötti részen a legnagyobb, hogy azok taszító hatását a legjobban kompenzálhassák. Az ilyen pályákat befutó elektronokat «kötő» elektronoknak, azokat, amelyek a magok közti töltéssűrűség csökkenését okozzák, «kötés-bontó» elektronoknak nevezik. (A megkülönböztetés az analóg kvantummechanikai elgondolásban a *g* és *u* szimbólumokban nyilvánul.) A *CO* molekula ebben a fogalmazásban alapállapotban a következő elektronokkal bírhat:

$$KKz\sigma^2 y\sigma^2 w\pi^4 x\sigma^2$$

KK a két kiépült *K*-héjat, *z*, *y*, *w*, *x* a felírt sorrendben csökkenő kötési energiájú pályákat jelölik a konvenciók szerint. (1)[1] A *z*, *y*, *w* pályák nyolc elektronja teljesen megfelel az atomok első nemesgázhéjának, az *x* elektronok, amelyek «kötés-bontó» elektronok ezen kívül esnek. Az N_2 molekula, amelynek szintén 14 elektronja van, ugyanezt a konfigurációt mutatja; ezzel magyarázható rokonságuk. A nemesgázhéjon kívül levő két elektron a szénmonoxidot a földalkáliákhoz teszi hasonlóvá, amelyeknek a periódusos rendszerben elfoglalt helyéből következik, hogy szintén két elektronjuk van nemesgázhéjon kívül. Az első földalkáli-fém, a magnézium, tényleg a szénoxidéhoz hasonló termrendszert mutat. A két külső elektron magyarázza a szénmonoxid szingulett és triplett termjeinek felléptét is. A spinek kétféleképpen tevődhetnek össze: parallel és antiparallel formációban. Az első esetben egy az eredő s a megfelelő termek triplettek, az utóbbi esetben eredőjük nulla és a hozzátartozó termek szingulettek. A vegyérték és a multiplicitás a periódusos rendszerben tapasztalt állandó párhuzamos összetartozásából kiindulva a szingulett termeket hozzárendelhetjük a permanens gáznak és a triplett termeket a radikálisnak mutatkozó *CO*-hoz.

Wigner és Witmer nyomán (2) a szén és oxigén atomtermjeinek különböző kombinációiból következtethetünk a *CO* molekula lehetséges elektrontermjeire. A szénatom legstabilisabb $1s^2 2s^2 2p^2$ elektronkonfigurációjához ^3P, ^1D és ^1S atomtermek tartoznak. Kísérletek és elméleti megfontolások azt igazolják azonban, hogy

[1] Irodalmi utalásokat lásd a dolgozat végén.

a szén szilárd kristályrácsában, (3) valamint minden organikus vegyületében nem ezekben, hanem az $1s^2 2s 2p^3$ elektronkonfigurációnak megfelelő — négyvegyértékű — ^5S_u állapotban van. Ha most ehhez a $C(^5S)$ termhez hozzátesszük az oxigén legstabilisabb ^3P termjét, $^3\Sigma^+$ és $^3\Pi$ molekulatermekre jutunk, ami megfelel annak, hogy a CO elektrontermrendszerében a legalacsonyabb triplett termek: az $a^3\Pi$ és az $a'^3\Sigma^+$. A $C(^5S) + O(^3P)$ atomtermkombináció magasságába jut még a $C(^3P) + O(^1S)$ kombináció is, amelyből szintén származhat $^3\Pi$ term. Bár a triplett-felbontások alapján valószínű, hogy az elsőből nyerjük a magasabb energiájú $d^3\Pi$ és a másodikból az $a^3\Pi$ termet, mégis feltételezhető (a későbbiekben igazolódik is), hogy az $a^3\Pi$ és az $a'^3\Sigma^+$ állapotok között, amelyeknek vibrációs emeletei is közel jutnak, perturbáció lép fel s emiatt a megfelelő energiájú molekulák egy bizonyos statisztikai eloszlás szerint mindig hol mint $a^3\Pi$, hol mint $a'^3\Sigma^+$ állapotokban lévők szerepelnek.

Ha ezután továbbmenve a CO triplett termjeiből és újabb oxigéntermekből a CO_2 molekula állapotaira következtetünk, akkor is a kísérletekkel megegyező eredményre jutunk, mert a CO_2 ultraibolya abszorpciós színképén (4) minden disszociációs határ magasságában találunk egy olyan kombinációt, amely «valódi», tehát nemcsak spektroszkópiailag kimutatható, hanem a kémiában is előforduló állapotban lévő disszociációs termékeket szolgáltat. (5) Egyetlen helyen: 12 Voltnál mutatkozik csak egy kevés eltérés, azonban — éppen a jelen dolgozatban eszközölt vizsgálatok eredménye révén — az is eliminálható.

Hogy a többatomos molekulák carbonyl-csoportjai ugyancsak a szénmonoxid termrendszerében található triplett állapotokban vannak, annak is fontos bizonyítéka adódott. V. Henri (6) összehasonlította néhány aldehid és keton, valamint a foszgén: $COCl_2$ Raman- és abszorpciós ultraibolyaspektrumában közösen előforduló és minden bizonnyal a $>CO$ csoporttól eredő vibrációs frekvenciákat a CO-spektrum adataival és azt találta, hogy egy 1720 — 1760 cm^{-1} körüli rezgés az $a^3\Pi$-vel és egy 1180 cm^{-1} körüli rezgés az $a'^3\Sigma$-val jelölt állapot alaprezgésének megfelel. Megállapította ezenkívül azt a tényt is, hogy a szénoxid $X^1\Sigma$ alapállapotához tartozó 2160 cm^{-1} alaprezgést a carbonyl-csoportot tartalmazó

molekulák nem mutatják. Ennek a divergenciának értelmezésében már HENRI is arra az eredményre jutott, hogy az aldehidek, ketonok és foszgén molekuláiban a *CO* $a^3\Pi$ elektronállapotban van s ha a molekulák «aktiváltak», $a'^3\Sigma$ állapotban. Ez a felfogás jól beleillik a carbonyl csoportról az előbbiekben alkotott képbe. Nem gyengíti ezt a feltevést W. A. NOYES (7) megjegyzése sem, aki a frekvenciák egyezését - bár neki még több egyező kísérleti adat állt rendelkezésre az infravörösből is — minden lényegesebb elméleti következmény nélkül való koincidenciának tekintette. Szerinte az $a^3\Pi$ állapot azért nem fordulhat elő az aldehidek és ketonok *CO* csoportjaiban, mert ionizációs potenciálja: 8 Volt, azokénál sokkal alacsonyabb. (Az organikus molekulák ionizációs potenciálját elektronütközési kísérletekből becsülték meg.) NOYES azonban figyelmen kívül hagyta, hogy a $^1\Sigma$ és a $^3\Pi$ állapotok ionizáció révén nem fognak ugyanabba a CO^+ állapotba kerülni, így tehát a $^3\Pi$ állapot ionizációs potenciálja nem számítható ki egyszerűen olymódon, hogy az alapállapot 14,1 Voltnyi ionizációs potenciáljából az $a^3\Pi$ állapot gerjesztéséhez szükséges 6 Voltot levonjuk.

A fentiek szerint tehát a két szabad vegyértéket mutató *CO*-módosulat állapotainak vizsgálatához a triplett termek, legfőképpen az $a^3\Pi$ és $a'^3\Sigma^+$ termek ismerete szükséges. Közülük az $a'^3\Sigma^+$ term, amely a $C(^5S)$-hez tartozók legalacsonyabbika, tekinthető a carbonyl-gyök alapállapotának, az $a^3\Pi$ állapot vibrációs frekvenciájának egyes szerves vegyületekben való felléptét pedig az $a'^3\Sigma^+$ vibrációs nívókkal való rezonancia-kapcsolatnak tulajdoníthatjuk. Jelen dolgozat ezek tanulmányozását tűzte ki célul.

A *CO*-spektrum vizsgálata.

A bevezetésben megjelölt cél szempontjából különösen fontosnak mutatkozott olyan sávrendszerek analízise, amelyek az $a^3\Pi$ és az $a'^3\Sigma^+$ állapotokat tartalmazzák.

Az $a^3\Pi$ elektronterm a *CO* legalacsonyabban fekvő triplett termje és mint ilyen, végállapota a III. pozitív, MERTON—JOHNSON, ASUNDI sávrendszereknek. Rotációs szerkezetére vonatkozólag a legpontosabb adatainkat a DIEKE- és MAUCHLY-tól analizált III. po-

zitív sávrendszer szolgáltatja. (8) DIEKE és MAUCHLY az analízis folyamán a $v=3$ emeletig jutottak el; a $v=4$ emeletre nézve megjegyzik, hogy azon olyan jelenségek mutatkoznak, amelyek tisztázására további vizsgálatok szükségesek. Mivel ez a $v=4$ vibrációs emelet éppen abban a magasságban van, amelyben egyrészt a $C(^3P) + O(^3P)$ disszociációs termékek foglalnak helyet, másrészt a CO_2 ultraibolya abszorpciós színképén észlelhető erős kontinuum és predisszociációs határ egy másik, a négyvegyértékű $C(^5S)$-hez tartozó CO elektronterm jelenlétére is enged következtetni, feltételezhetjük, hogy az itt mutatkozó szabálytalanság vagy az előbbiektől eredő predisszociáció, vagy az utóbbitól eredő perturbáció rovására lesz irandó.

Ennek a kérdésnek vizsgálata érdekesnek mutatkozott a jelen dolgozatban kitűzött cél szempontjából, mert a perturbációban nyilvánuló elektronterm számára a fentiek szerint éppen az $a'^3\Sigma^+$ term jöhetett számba, és ebben az esetben remélhető volt, hogy a $0\rightarrow 4$ III. poz. sáv rotációs analíziséből ennek az elektrontermnek eddig nem ismert legalacsonyabb vibrációs emeletét is sikerül identifikálni. Az $a'^3\Sigma^+$ termnek ugyanis a HOPFIELD—BIRGE abszorpciós ultraibolya sávok, (9) ASUNDI emissziós sávjai,(10) valamint perturbáció- és predisszociációjelenségek révén egész a konvergenciahatárig terjedő mintegy 40 vibrációs emeletét sikerült megtalálni, de tisztázatlan maradt még, hogy melyik ennek az elektrontermnek legalsó, $v=0$-hoz tartozó vibrációs nívója. Már pedig a többatomos molekulák CO csoportjával való összehasonlítás szempontjából a legelső vibrációs termmagasság, azaz ω_e ismerete bír a legnagyobb fontossággal, mert ezek $v=1$-nél magasabb kvantumszámú rezgést nem igen mutatnak. Ugyancsak a rotációs állandók közül is a legelső a legfontosabb, mert a $C—O$ magtávolság mérésére ennek meghatározása jöhet csak tekintetbe.

A vizsgálatok megejtése céljából felvétel-sorozatokat készítettem a szénmonoxid III. poz. sávrendszeréről és végrehajtottam a $0\rightarrow 4$ (3493 Å), $1\rightarrow 4$ (3242 Å), $0\rightarrow 5$ (3699 Å) és $1\rightarrow 5$ (3419 Å) sávok rotációs analízisét.

A felvételek az Intézet 6·5 m sugarú, HOCHHEIM-ötvözettel bevont konkáv rácsán készültek. A rács részletes leírását SCHMID és GERŐ értekezése tartalmazza. (11)

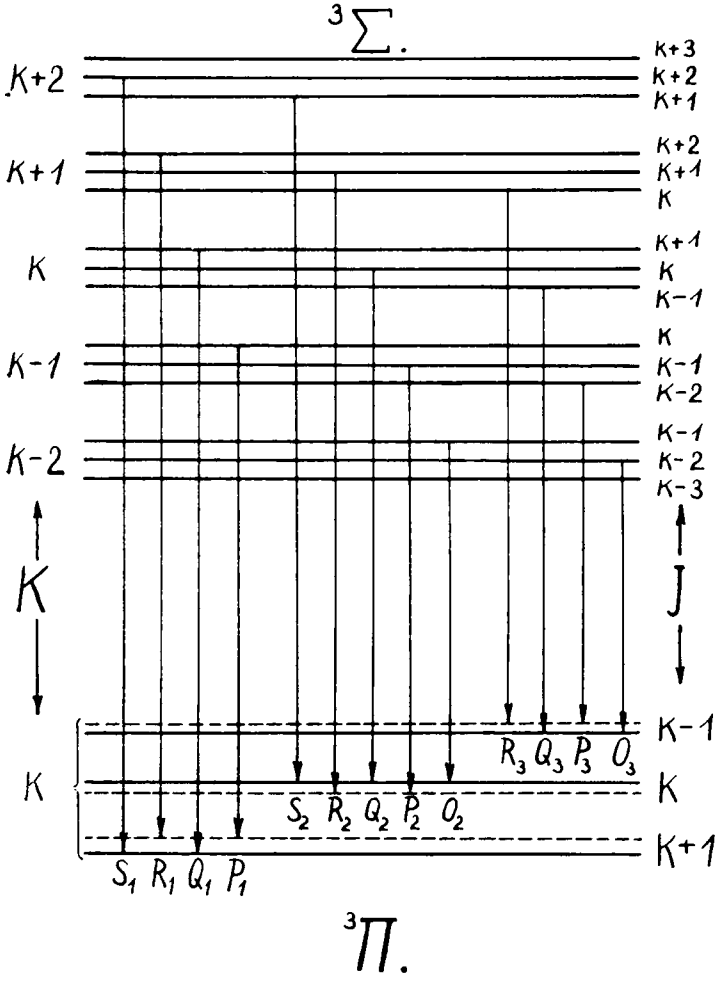
Fényforrásul, az Intézetben kidolgozott módszer szerint, áramló széndioxidban történő GEISSLER-kisülés szolgált. A kisülési cső és az eljárás részletesebb leírása megtalálható GERŐ (12) és KELEMEN (13) dolgozatában. A legalkalmasabb — és így az analízis céljaira felhasznált — felvételek speciális kísérleti adatai a következők voltak: 15 Hg-mm nyomás; 10,000 Volt, 200 mA egyenáram; expozíciós idő 16 óra.

A vonalak ágakba sorozását valamennyi sáv esetében nagymértékben megnehezítette az a körülmény, hogy a sávok kezdőállapotai: a $b^3\Sigma^+$ $v=0$ és $v=1$ termek, sűrű egymásutánban igen erős perturbációkat mutatnak. Ez a vonalak sorrendjét, különösen a $v=1$ kezdőállapotú sávok esetében, jóformán teljesen felforgatja.

Az egyes ágakba sorolt vonalak helyes felismerésének ellenőrzésére az egyedüli támpont volt a $v=0$ kezdőállapot kombinációdifferenciáinak DIEKE és MAUCHLY sávjaiból megállapított sorozata. Ez sem volt azonban használható minden ágra.

Az 1. ábra mutatja a III. poz. sávrendszer ágait DIEKE és MAUCHLY jelölésében, amely a konvencionálistól csak annyiban tér el, hogy ΔK (és nem ΔJ) $= -2, -1, 0, +1, +2$ értékei szerint nevezi el a különböző ágakat O, P, Q, R és S ágaknak. A $b^3\Sigma$ term triplett-felbontása elhanyagolhatóan kicsiny. Az $a^3\Pi$ term komponenseinek kettősségét a Λ-típusú dublett-felbontás okozza, amely perturbációmentes esetben legfeljebb néhány tized cm^{-1}-et tesz ki.* A dublett-komponensek szimmetriája azonban ellentétes és ez okozza, hogy az egymásután következő, tehát váltakozva ellentétes szimmetriájú $b^3\Sigma^+$ emeletekről kiinduló O, P, Q, R és S ágak, hol az egyik, hol a másik dublett-komponenssel kombinálva keletkeznek. Nem képezhető tehát tiszta kezdőállapot-differencia, csak az R—P, ill. S—Q—O ágak között, minden egyéb kombináció tartalmazza a Λ-típusú dublett-felbontást. Addig, amíg ez — perturbációmentes esetben — csekély, ilyen differenciákkal operálva sem követünk el nagy hibát és módunkban áll a Q ágakat az R és P ágakhoz hasonlítva ellenőrizni, amire annál is inkább szükség van, mert az O és S ágak rendesen csak alacsony rotációs kvantumszámig észlelhetők. Ha azonban a

* A $a^3\Pi_0$-term legalsó emelet itől eltekintve.



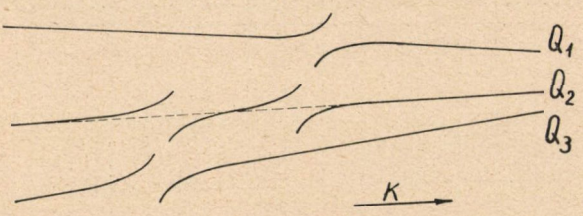
1. ábra.

termeken perturbáció van, akkor igen messze kerülhetnek egymástól a *Λ*-típusú dublett-komponensek, mert éppen ellentétes szimmetriájuk miatt egy bizonyos meghatározott szimmetriával rendelkező term a kettő közül mindig csak az egyiket perturbálja. Ekkor, egy bizonyos kvantumszámon túl, mihelyt az *O* és *S* ágak elfogytak, a *Q*-vonalak helyességének ellenőrzésére nincsen semmi támpont.

A fent vázolt eset következett be a 0⟶4 sáv analízisében.

K=18—20-ig perturbáció-mentesen haladnak a termek; a vonalak sorrendje a szabályszerűség feltételezésével kevés fáradság árán körzővel követhető (l. a sáv reprodukcióját a dolgozat végén). Ezen a helyen mutatja a kezdőállapot az első perturbációt, a vonalak rendje szabálytalan lesz és ettől kezdve megkeresésük pusztán csak próbálgatás útján, a helyes $R(K)$—$P(K)$ kezdőállapot-differenciát mutató vonalak felismerésével sikerül. Így nyertem az R és P ágakat, amelyek több helyen szabálytalanul változó triplett-felbontást mutattak, már ezzel is bizonyítva a végállapot perturbált voltát.

A Q-ágak ellenőrzését $R(K)$—$Q(K)$, ill. $Q(K)$—$P(K)$ differenciákkal kíséreltem meg, azonban ez, mint előre is várható volt,



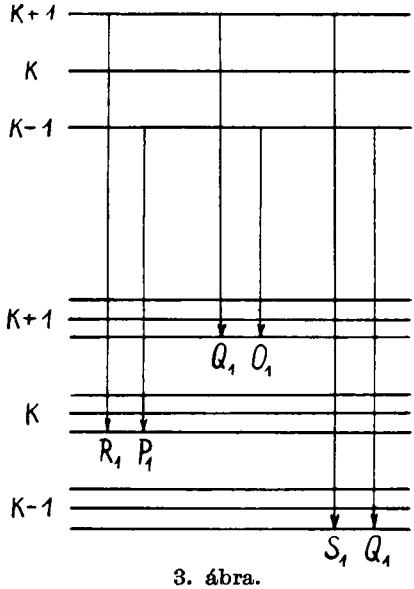
2. ábra.

nem vezetett eredményre. A számított helyektől szabályszerű eltérésben sem találtam vonalakat, ami szintén természetes, mert hiszen az így képezett differenciák egyszerre mutatják két különböző A-típusú dublett-komponens különböző helyen való eltolódásait és ezért egyáltalán nem átnézetes mennyiségek. A következő módon sikerült végre a Q-vonalak felismerése: az első 18 vonalból — az $R_2(K)$—$Q_2(K+1)$ = $2BK$ feltevéssel élve — számítottam a középső term részére egy «effektív» B-értéket, a $BK(K+1)$ formula segítségével felépítettem a középső alsó termeket s azokat a felsőkből kivonva számítottam egy hipotetikus, perturbációmentes Q_2-ágat. Az ettől való eltérések aztán — a Q_1 és Q_3-ágak eltérései is — szabályosak voltak a 2. ábrán látható csak kvalitatív szkéma szerint.

Az 1*a*., *b*. táblázatok tartalmazzák a 0→4 sáv analízisét. Helyszűke miatt eltértünk a táblázatok konvencionális felírási

módjától, amely a perturbációk helyét alternáló oszlopokkal szemlélteti. A végállapot-perturbációk maximumának megfelelő rotációs kvantumszám, amelyre szükségünk van, a későbbi eljárás folyamán amúgyis nagy pontossággal adódik.

Az 1→4 sáv a 0→4 sávból egyszerűen volt számítható. A GERŐ által analizált 1→0 (14) és a DIEKE és MAUCHLY által analizált 0→0 sávok ugyanazon K kvantumszámhoz tartozó Q vonalainak különbségét (a három komponensre középértéket számítva) táblázatba foglaltam és ezt a számoszlopot kellett hozzáadni a 0→4 sáv vonalaihoz, az O, P, Q, R, S ágak számításánál rendre eltolva a számoszlopot $\Delta K = -2$, -1, 0, $+1$, $+2$-vel. Mivel a megfelelő helyeken meg lehetett találni a vonalakat, ez az eljárás egyúttal igazolta a 0→4 sáv analízisének helyességét is. Az 1—4 sáv vonalait a 2*a*., *b*. táblázatok tartalmazzák.



3. ábra.

A 0→5 és 1→5 sávok a végállapoton nem mutatnak perturbációt, ezért analízisük a szokásos módon volt véghezvihető. A 0→5 sáv, amelyet DIEKE és MAUCHLY csak mint rendkívül gyenge és homályos sávot említenek, a kísérleti körülmények megfelelő megválasztása réven egyik felvételen szokatlan élességgel és fényerővel jelent meg, annyira, hogy még az O és S ágakat is sikerült egészen K=38-ig feltalálni, ami más sávoknál nem fordult elő. Mivel éppen ezért Q—O, ill. S—Q differenciát ilyen magas kvantumszámig a DIEKE és MAUCHLY által analizált sávokból nem lehetett számítani, a 0→5 sáv ilyen differenciáit az R—P differenciákkal hasonlítottam össze — amint a 3. ábrából rögtön adódik — $\Delta K = 1$, ill. $\Delta K = -1$ eltolás után és az így nyert értékek

1a. táblázat.

0→4 sáv. λ=3493 Å

K	R_1	R_2	R_3	Q_1	Q_2	Q_3
4	28723·94	28698·65	28675·55			
5	729·25	705·17	683·30	28708·48	28683·00	28661·34
6	735·38	712·26	691·85	710·67	686·00	665·99
7	742·11	719·85	701·29	713·91	690·06	671·24
8	749·15	728·21	710·67	716·59	694·23	677·00
9	756·84	737·18	720·89	720·57	699·30	683·30
10	765·39	746·62	731·62	724·91	705·17	690·06
11	774·62	757·47	743·00	729·97	711·56	697·63
12	784·78	768·46	754·70	736·15	718·67	705·45
13	795·40	779·99	767·07	743·58	726·41	713·91
14	806·70	792·10	779·81	751·19	734·78	723·09
15	818·05	804·09	792·10	759·28	743·58	732·40
16	829·38	816·04	804·90	765·90	752·42	742·11
17	839·54	826·68	816·04	774·01	761·11	751·19
18	846·13	833·68	823·87	780·82	768·46	759·28
19	928·04	915·65	905·70	784·07	772·29	763·65
20	928·70	916·99	907·25	862·63	851·32	843·85
21	938·17	926·78	917·40	859·95	849·26	843·85
22	952·57	941·02	931·97	866·16	{859·95 {851·98	{856·26 {843·85
23	969·24	958·01	948·91	876·78	866·16	856·95
24	987·69	976·05	967·29	889·79	880·08	871·24
25	29007·17	995·15	986·48	904·10	894·84	886·41
26	028·18	29015·06	29006·84	919·06	910·29	902·13
27	{047·90 {017·40	035·51	013·70	934·25	925·52	917·46
28	{060·77 {029·08	{050·49 {027·35	023·28	946·23	938·17	930·34
29	108·00	106·39	100·13	947·41	939·63	931·97
30	125·09	122·14	115·64	29020·56	29013·64	29005·45
31	146·87	143·21	136·70	033·08	027·30	017·85
32	169·87	165·93	159·39	{055·04 {037·89	{052·20 {031·47	035·51
33	192·46	188·15	181·89	064·90	056·34	055·13
34	209·46	204·60	198·56	085·66	077·29	074·35
35	277·42	273·16	266·82	099·40	091·28	088·00
36	292·77	288·25	282·34	164·67	157·03	152·96
37	320·33	312·62	306·96	176·73	169·57	165·51
38	{353·19 {334·05	338·27	332·52	197·96	190·80	186·79
39	361·92	359·15	353·19	220·36	213·43	209·46
40	425·86	421·57	416·52	237·32	230·55	226·86
41	447·20	443·16	437·89	297·41	290·79	287·15
42	475·16	471·07	465·73	315·64	309·24	305·51
43	497·96	494·32	488·91	340·67	334·05	330·23
44	557·72	553·69	548·40	359·99	354·10	350·50
45	583·74	579·85	574·62	416·52	410·64	407·09
46	611·68	607·80	602·76	439·50	433·77	430·13
47				464·51	458·82	455·27
48				517·75	512·30	508·87
49				540·97	535·56	532·51
50				560·74	555·42	552·02
51				615·69	610·37	607·18
52				638·54	633·40	630·82
53				688·54	683·37	681·08
54				734·08	729·05	726·78
55				776·42	771·51	770·17

1b. táblázat.

K	P_1	P_2	P_3	O_2	O_3	S_1	S_2
3					28634·01		
4		28665·73	28642·94	28654·99	631·35		28720·89
5	28688·07	664·63	642·94	650·04	628·27	28756·84	731·62
6	687·39	663·98	643·90	645·23	625·30	766·31	742·11
7	686·00	663·98	645·23	641·59	623·08	777·45	753·26
8	685·30	664·63	647·02	638·20	621·04		765·90
9	685·30	665·99	649·38	635·65	619·51		778·55
10	686·00	667·63	652·31	633·71	618·22		792·10
11	687·39	670·28	655·83	632·34	618·43	823·87	806·70
12	690·06	673·57	659·92	631·61	618·43	838·50	821·05
13	693·08	677·54	664·63	631·61	619·23		836·24
14	696·90	682·13	669·69	632·34	620·62		851·32
15	701·29	687·39	675·55	633·71	622·44		866·16
16	706·41	693·08	681·71	635·65	625·30	893·69	880·08
17	711·56	698·65	688·07	638·20	628·27		
18	716·59	704·20	694·23	640·69	631·35		
19	720·57	708·48	698·04	650·04	634·01		
20	720·89	709·11	699·30	643·90			
21	796·54	784·78	775·89	641·59			
22	791·27	779·81	770·67				
23	794·78	783·38	774·62				
24	803·20	791·63	782·84				
25	814·43	802·44	793·72				
26	828·30	815·67	807·14				
27	{845·00 814·43	832·64	810·87				
28	{865·32 833·68	{854·72 831·54	827·61				
29	845·00	843·85	837·57				
30	845·50	842·81	836·24				
31	916·47	912·75	906·45				
32	926·07	922·05	915·65				
33	941·02	936·67	930·34				
34	958·01	952·57	946·80				
35	973·48	969·25	962·99				
36	983·93	979·09	973·48				
37	29048·93	29041·25	29035·51				
38	{064·90 046·07	050·49	044·71				
39	072·10	068·60	062·92				
40	092·16	088·00	083·01				
41	106·39	101·89	096·76				
42	163·38	159·39	153·89				
43	178·48	174·47	169·28				
44	200·08	196·12	190·82				
45	217·09	213·57	208·11				
46	270·36	266·82	261·62				

2a. táblázat.

1→4 sáv. λ=3242 Å

K	R_1	R_2	R_3	Q_1	Q_2	Q_3
5	30920·43	30896·42	30875·62	30900·92	30875·62	30854·47
6	924·47	900·92	880·43	901·49	877·47	857·79
7	927·46	905·24	886·63	902·74	878·08	859·55
8	931·85	910·16	892·63	902·74	879·48	862·47
9	935·53	915·93	899·76	902·74	881·65	865·44
10	940·42	922·12	907·58	904·37	884·86	869·05
11	945·62	928·83	914·01	905·24	886·63	872·63
12	951·02	934·56	921·00	906·30	889·74	876·51
13	955·69	940·42	927·46	910·16	892·63	880·43
14	959·62	945·62	932·69		895·25	883·53
15	960·81	946·94	935·53	912·44	896·42	885·44
16	958·29 31089·93	944·47 31076·45	933·55 31066·10	908·63	895·25	885·44
17	081·00	067·94	058·42	902·74 31034·73	889·74 31022·41	880·43 31012·54
18	078·68	066·10	056·26	022·41	010·01	000·97
19	081·00	068·78	058·42	016·56	004·52	30996·31
20	086·95	075·15	065·33	015·75	004·52	997·50
21	094·65	083·06	073·74	018·08	007·58	31001·84
22	102·37	090·93	081·81	022·41	016·56	012·54 000·04
23	107·27	095·87	086·95	026·42	015·75	006·79
24	104·58 228·39	092·77 216·42	084·26 207·86	027·88	018·08	009·39
25	216·42	204·39	195·91	021·08 144·16	011·43 135·47	003·33 126·83
26	219·09	206·43	198·15	128·14	119·29	111·39
27	231·71	219·09	197·43	125·10	116·62	108·82
28	215·37	236·41 213·09	209·39	129·46	120·54	113·80
29	219·92 341·94	218·23 340·29	211·95	133·38	125·82	117·95
30	205·30 320·33	202·37 317·33	195·91	132·24 254·92	125·10 247·46	117·11 239·82
31	319·08	315·79	309·05	112·89 228·39	107·27 222·36	098·11 213·09
32	326·50	322·51	316·22	210·24	203·73 224·47	207·86
33	329·79 445·97	325·60 441·58	319·08 435·03	221·54	213·09	211·95
34	309·05 416·67	303·83 412·38	406·39	223·13 338·95	214·58 331·12	211·95 327·42
35		412·38	406·39	198·79 307·09	198·79 291·32	187·59 296·15
36		415·57	409·98	303·83	296·15	292·77
37				303·83		292·77
38				376·51	369·52	365·93
39				371·96	365·14	361·39
40				355·21	348·87	

2b. táblázat.

K	P_1	P_2	P_3	O_2	O_3	S_1	S_2
5						30944·47	30918·04
6	30881·65	30857·79	30837·48			951·02	927·46
7	877·47	855·07	837·48	30834·73	30816·74	959·62	935·53
8	874·68	852·90	835·42	829·58	812·15	966·85	944·47
9	870·70	851·36	834·73	824·05	807·77	974·62	953·24
10	868·35	849·81	834·73		803·95		963·25
11	866·38	848·69	834·73	814·53	800·17	991·06	972·53
12	865·44	848·69	836·11	810·56	797·21	997·50	981·38
13	863·95	848·69	836·11	806·84	794·26	31006·74	989·13
14	863·04	848·69	836·11	803·51	791·28		994·46
15	861·67	848·69	836·11	800·17	788·85		994·46
16	859·55	846·41	834·73	796·25	785·54		
17	854·47	841·45	831·75	791·28	782·02		
18	{845·59 {977·35	{832·63 {964·76	{823·19 {955·29		774·07		
19	962·27	949·62	939·82		762·42		
20	953·24	941·49	931·85				
21	949·62	938·11	928·83				
22	949·62	938·11	928·83				
23	951·02	939·82	930·65				
24	953·24	941·49	932·69				
25	953·24	940·42	931·85				
26	{945·62 {31068·78	{932·69 {31055·44	{924·47 {31047·49				
27	054·10	041·83	020·18				
28	{056·26 {024·41	{046·39 {022·41	018·78				
29	028·49	027·88	021·08				
30	031·30	028·49	022·11				
31	{027·88 {150·08	{025·41 {146·84	018·08				
32	120·54	{001·84 {117·11	{30996·31 {31112·89				
33	113·80	108·82	102·37				
34	115·00	109·72	103·44				
35	111·39	106·31	{100·49 {216·42				
36	{083·06 {191·07		181·62				
37	187·59	180·37	174·82				
38	{192·81 {173·11	177·60					
39	250·68						

3a. táblázat.

$\rightarrow$5 sáv. $\lambda = 3699$ Å

K	R_1	R_2	R_3	Q_1	Q_2	Q_3
4	27127·13	27102·20	27078·13			
5	131·03	107·68	086·50	27111·28		27064·10
6	136·60	114·20	095·60	112·33	27087·83	069·00
7	142·88	122·29	104·46	115·87	091·95	074·40
8	150·25	131·03	114·20	118·73	096·56	080·55
9	158·20	140·41	124·81	122·29	102·20	087·09
10	167·28	150·43	135·95	128·10	108·34	094·30
11	176·92	161·31	147·68	133·84	115·29	102·20
12	187·45	173·14	159·49	140·07	122·93	110·47
13	198·62	184·82	172·41	147·68	131·03	119·34
14	210·27	197·51	185·55	155·71	140·07	128·99
15	222·56	210·27	198·62	164·40	149·47	138·88
16	234·11	222·56	211·84	173·14	158·87	149·02
17	244·82	234·11	223·64	181·86	168·28	158·87
18	251·39	241·66		189·38	176·39	167·28
19	334·57	324·89	315·09	193·31	180·75	172·41
20	335·73	326·36	317·24	272·53	260·66	252·67
21	345·93	337·00	328·00	270·71	259·15	251·39
22	360·63	352·15	343·46	277·71	266·72	259·15
23	377·78	369·64	361·10	289·22	278·68	271·35
24	396·14	388·39	380·10	303·19	292·98	285·87
25	415·41	407·83	399·88	318·40	308·62	301·73
26	434·84	427·21	419·42	334·57	324·89	318·40
27	450·73	443·83	436·38	350·57	341·12	334·57
28	456·04	449·16	442·29	363·58	354·55	348·54
29	533·24	526·99	519·57	365·71	356·87	351·27
30	549·62	543·33	536·39	439·94	431·52	425·92
31	571·40	565·41	558·54	453·23	444·98	439·38
32	594·98	589·11	582·51	471·87	463·95	458·50
33	618·04	612·63	606·13	492·35	484·52	479·33
34	635·76	630·25	624·17	512·57	505·33	498·92
35	705·00	700·05	693·47	526·99	519·57	514·83
36	721·79	716·21	710·09	593·70	586·20	581·19
37	747·51	742·45	736·46	606·83	599·89	594·98
38	774·37	769·43	763·76	629·36	622·51	618·04
39	795·92	791·08	785·60	653·20	646·54	642·10
40	861·00	856·03	850·50	671·94	665·29	660·95

3b. táblázat.

K	P_1	P_2	P_3	O_2	O_3	S_1	S_2
4	27094·30		27045·06				
5	090·80	27067·36	045·71	27053·24	27031·14	27159·49	
6	088·76	066·26	046·92	047·45	028·51	168·28	27143·89
7	087·09	066·26	048·48	043·73	026·38	179·48	155·71
8	086·50	067·36	050·54	040·76	024·57	190·74	168·28
9	086·50	069·00	053·24	038·43	023·28	201·90	181·86
10	087·83	071·23	056·50	037·23	022·70	215·16	195·27
11	089·86	074·40	060·42	036·41	022·70		210·27
12	092·66	078·13	064·95	035·84	023·28	242·63	225·30
13	096·34	082·70	070·08	036·41	024·57	257·95	240·71
14	100·62	087·83	075·68	037·68	026·38	272·53	256·92
15	105·68	093·52	082·11	039·59	028·94	287·09	272·53
16	111·28	099·83	088·76	042·19	032·16	301·08	287·09
17	117·26	106·19	095·60	045·71	035·84	311·68	297·48
18	122·29	112·33	102·20	048·48	039·59		384·14
19	127·13	117·26	107·68	051·68	042·84	401·06	388·39
20	128·10	118·73	109·45	053·24	045·06	414·50	402·60
21	204·14	195·27	186·79	031·14	043·73	432·10	
22	199·54	190·74	181·86	124·81	117·26	451·88	441·28
23	203·29	195·27	186·79	117·26	110·47	473·81	
24	211·84	204·14	195·86	118·73	111·28	495·71	485·61
25	222·56	215·16	207·18		117·26	517·74	507·86
26	235·02		219·88	132·31	125·84	538·02	
27	247·79	240·71		142·05	135·44	545·49	
28	260·66	253·84	246·54	152·06	145·65	618·04	
29	270·71	264·24	256·92	161·31	155·71		
30	269.82	263·46	256·92	169·34	163·31		
31	341·12	334·57	328·00	165·78	159·49		
32	351·27	345·15	338·57				
33	366·68	360·63	354·55	240·71	235·02		
34	384·14	378·65	372·25	253·84	247·79		
35	401·38	396·14	389·75	267·68	263·46		
36	412·71	407·83	401·38	252·67	277·71		
37	475·95	470·82	465·13		285·87		
38	486·64	481·80	475·95	351·27			
39	505·90	501·44	495·71	358·49			
40	526·99	522·37	516·79				

4a. táblázat.

1→5 sáv. λ=3419 Å

K	R_1	R_2	R_3	Q_1	Q_2	Q_3
5	29322·39	29298·78	29278·42			
6	325.13	302·48	284.39	29303·68	29279·36	29260·01
7	328·45	307·63	289·53	304·58	280·48	263·11
8	332·52	313·29	297·00	304·58	282·34	266·11
9	337·26	319·32	303·68	304·58	284·39	269·40
10	342·24	325·94	311.55	306·96	287·15	273·16
11	347·95	332·52	318·83	309·24	290·79	277·42
12	354·10	339·36	325·94	310·83	293·67	281·69
13	359·15	344·81	333·12	314·08	297·41	285·73
14	363·49	350·50	339·36	316·31	300·50	289·53
15	365·44	353·19	342·24	317·49	302·48	292·13
16	363·49 495·35	351·82 483·65	340·67 473·22	316·31	301·90	292.13
17	486·95	475·76	465·73	310·83 443·16	297·41 429·31	288·25 420·10
18	483·65	474·41	464·51	431·31	417·88	409·62
19	487·82	478·05	468·46	425·86	413·79	405·03
20	494·32	484·93	475·76	425·86	413·79	405·86
21	502·43	493·67	484·93	429·31	417·88	409·86
22	510·78	502·43	493·67	434·42	423·34	415·79
23	516·08	507·89	499·64	439·50	428·88	421·57
24	513·43 636·30	505·55 628·38	497·96 620·94	441·60	431·31	424·44
25	624·66	617·13	609·25	435·83 558·92	425·86	419·40 541·75
26	625·63	618·52	610·82	543·89	534·29	528·10
27	633·40	626·47	619·13	541·75	532·51	526·33
28	642·34	635·59	628·38	547·35	537·54	532·51
29	645·11	638·54 760·78	631·81	552·02	543·44	537·54
30	629·75 744·80	623·44 738·72	617·13 731·95	552·02	543·44	537·79
31	743·66	737·68	730·93	533·42 648·28	525·10 640·13	635·04
32	751·62	745·76	739·34	644·05	636·30	630·82
33	755·55	750·04	743·66	648·96	641·20	636·30
34	735·57	730·07		649·86	642·34	636·30
35				626·47 734·64	619·13	714·48
36				732·60	725·40	720·79
37				734·08	727·65	722·78
38				807·98	801·19	797·13
39				804·90	798·35	794·08
40				789·90	783·18	

4b. táblázat.

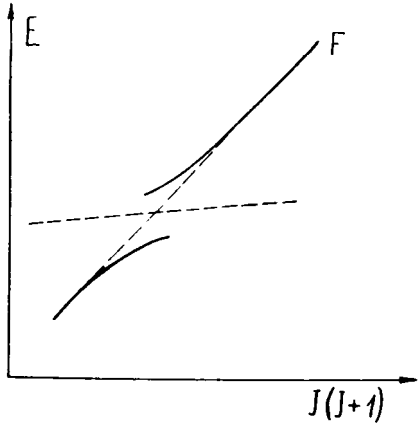
K	P_1	P_2	P_3	O_2	O_3	S_1	S_2
5						293·4795	
6	29281·69	29258·78				354·10	29329·15
7	278·41	257·66	29240·08	29237·32	29219·64	361·92	337·26
8	275·10	255·74	238·89	232·11	215·76	369·11	347·19
9	272·37	254·03	238·89	226·87	211·81	377·63	356·90
10	270·36	253·19	238·89	222·37	208·11	385·88	365·44
11	268·71	253·19	238·89	218·44	204·60	394·92	376·43
12	267·88	253·19	240·08	214·83	202·33		385·88
13	267·37	253·19	241·11	211·81	200·08		394·16
14	266·82	254·03	242·18	208·11	197·96		
15	266·11	254·03	242·67	205·95	195·40		
16	264·34	253·19	242·18	202·33	192·46		
17	260·01	249·08	238·89	198·56	188·82		
18	251·51 383·05	241·11 373·12	231·29 363·49	190·82			
19	369·11	359·15	349·45	180·55	171·44		
20	360·87	351·82	342·24				
21	357·68	348·65	339·36				
22	357·68	349·45	340·67				
23	359·99	351·82	343·28				
24	361·92	354·10	345·81				
25	360·87	353·19	345·81				
26	351·82 475·16	344·81 467·87	337·26 460·69				
27	457·22	450·12	443·16				
28	452·01	445·31	437·89				
29	453·60	447·20	440·18				
30	456·26	450·12	443·16				
31	452·98 575·24	568·96	440·18 561·61				
32	431·31 546·37	540·97	419·40 534·29				
33	539·05	533·42	527·06				
34	540·97	535·56	529·28				
35	539·05 655·01	533·42 649·86	527·06				
36	512·30 620·94	507·89 615·69	501·31 609·25				
37	615·00	610·37	604·06				
38	613·98	609·25	603·58				
39	684·59	680·15	674·66				
40	678·86	673·88	668·75				

igen jól egyeztek. A 3*a*., *b*. és 4*a*., *b*. táblázatok tartalmazzák a 0→5 és 1→5 sávok analízisét.

Az 5., 6. és 7. táblázatok a 0→0, 0→4 és 0→5 sávok tiszta kezdőállapot-differenciáit (5. tábl.), valamint a 0→4 és 1→4 (6. tábl.), 0→5 és 1→5 (7. tábl.) sávok ú. n. kettős végállapot-differenciáit tartalmazzák. Ez utóbbiak részint igazolják a sávok helyes analízisét, részint pedig arra szolgálnak, hogy Budó-nak (15) a triplett termek rotációs állandói meghatározására vonatkozó módszere segítségével ezekből az exakt B és D rotációs állandókat kiszámíthassuk. Ennek a számításnak eredményei: B_4=1,6026 cm^{-1} D_4=—6,3.10^{-6} cm^{-1}, B_5=1,5840 cm^{-1}, D_5=—6,3.10^{-6} cm^{-1}.

Az $a^3\Pi$ elektronterm v=4 vibrációs emeletén észlelt perturbáció vizsgálata.

A perturbáció jelenléte már a 0→4 sáv analízise közben mutatkozott. Főleg a Q ágak felkeresésében alkalmazott módszer világosan mutatta a perturbáció típusát is, t. i. azt, hogy a vonalak szabályos rendjétől való eltérés ezúttal a vonalközök tágulásában nyilvánul. Ennek a ténynek felismerése már leszögezte a perturbáló és perturbált term rotációs állandói különbségének előjelét. Ha ugyanis az alsó termen lévő perturbáció ritkulást eredményez, akkor biztos, hogy a termek menete a perturbáció helyén a 4. ábra szerinti és az energia $\sim J(J+1)$ koordináta rendszerben az $a^3\Pi$ termet átmetsző term iránytangense, amely a rotációs állandót jelenti, csak kisebb lehet azátmetszetténél.



4. ábra.

A perturbáló termre vonatkozó adatok kvantitatív meghatározására azonban ez az eljárás egyáltalán nem alkalmas. A hipotetikus, perturbációmentes vonalak kiszámítása, különösen triplett-esetben sohasem lehet eléggé pontos. Gerő (16) kidolgozott egy

5. táblázat.

$\Delta_2 F'(K)$; $v'=0$

K	$0\rightarrow 0$	$0\rightarrow 4$			$0\rightarrow 5$		
	$R-P$ középérték	R_1-P_1	R_2-P_2	R_3-P_3	R_1-P_1	R_2-P_2	R_3-P_3
3	25·21						
4	32·93		32·92	32·61	32·83		33·07
5	40·61	41·18	40·54	40·36	40·23	40·32	40·79
6	48·15	47·99	48·28	47·95	47·84	47·94	48·68
7	55·98	56·11	55·87	56·06	55·79	56·03	55·98
8	63·75	63·85	63·58	63·65	63·75	63·67	63·66
9	71·52	71·54	71·91	71·51	71·70	71·41	71·57
10	79·28	79·39	78·99	79·31	79·45	79·20	79·45
11	87·08	87·23	87·19	87·17	87·06	86·91	87·26
12	94·69	94·72	94·89	94·78	94·79	95·01	94·54
13	102·39	102·32	102·45	102·44	102·28	102·12	102·33
14	109·87	109·80	109·97	110·12	109·65	109·68	109·87
15	116·75	116·76	116·70	116·55	116·88	116·75	116·51
16	122·99	122·97	122·96	123·19	122·83	122·73	123·08
17	127·96	127·98	128·03	127·97	127·56	127·92	128·04
18	129·45	129·54	129·48	129·64	129·10	129·33	
19	207·52	207·47	207·17	207·66	207·44	207·63	207·41
20	207·75	207·81	207·88	207·85	207·63	207·63	207·79
21	141·66	141·63	142·00	141·57	141·79	141·73	142·21
22	161·29	161·30	161·21	161·30	161·09	161·41	161·60
23	174·48	174·46	174·63	174·29	174·49	174·37	174·31
24	184·38	184·49	184·42	184·45	184·30	184·25	184·24
25	192·65	192·64	192·71	192·76	192·85	192·67	192·70
26	199·56	199·88	199·39	199·70	199·82		199·54
27	202·84	202·90 202·97	202·87	202·83	202·94	203·12	
28	195·36	195·45 195·40	195·77 195·81	195·67	195·38	195·32	195·75
29	262·45	263·00	262·54	262·56	262·53	262·75	262·65
30	279·60	279·59	279·33	279·40	279·80	279·87	279·47
31	230·31	230·40	230·46	230·25	230·28	230·84	230·54
32	243·77	243·80	243·88	243·74	243·71	243·96	243·94
33	251·45	251·44	251·48	251·55	251·36	252·00	251·58
34	251·74	251·45	252·03	251·76	251·62	251·60	251·92
35	303·87	303·94	303·91	303·83	303·62	303·91	303·72
36	308·92	308·84	309·16	308·86	309·08	308·38	308·71
37	271·39	271·40	271·37	271·45	271·56	271·63	271·33
38	287·87	288·29 287·98	287·82	287·81	287·73	287·63	287·81
39	289·97	289·82	290·55	290·27	290·02	289·64	289·89
40	333·72	333·70	333·57	333·51	334·01	333·66	333·71
41	341·05	340·81	341·27	241·13			
42	311·82	311·78	311·68	311·84			
43	319 58	319·48	319·85	319·63			
44	357·54	357·64	357·57	357·58			
45	366·72	366·65	366·28	366·51			
46	341·24	341·32	340·98	341·14			
47	377·75						
48	382·14						
49	354·69						
50	392·26						
51	401·29						
52	402·54						
53	431·53						
54	429·59						

6. táblázat.*

$\Delta_2 F''(K)$; $v''=4$

K	$R_1(K-1)-P_1(K+1)$		$R_2(K-1)-P_2(K+1)$		$R_3(K-1)-P_3(K+1)$	
	$0\rightarrow 4$	$1\rightarrow 4$	$0\rightarrow 4$	$1\rightarrow 4$	$0\rightarrow 4$	$1\rightarrow 4$
5	36·55		34·67		31·65	
6	43·25	42·96	41·19	41·35	38·07	38·14
7	50·08	49·79	47·63	48·02	44·83	45·11
8	56·81	56·76	53·95	53·88	51·91	51·90
9	63·15	63·50	60·58	60·35	58·36	57·90
10	69·45	69·15	66·90	67·24	65·06	65·03
11	75·33	74·98	73·05	73·43	71·70	71·47
12	81·54	81·67	79·93	80·14	78·37	77·90
13	87·88	87·98	86·33	85·87	85·01	84·89
14	94·11	94·02	92·60	92·13	91·52	91·35
15	100·29	100·07	99·02	99·21	98·10	97·96
16	106·49	106·34	105·44	105·49	104·03	103·78
17	112·79	{112·70 112·58	111·84	{111·69 111·84	110·67	{110·36 110·81
18	118·97	118·73	118·20	118·32	118·00	118·60
19	125·24	125·44	124·57	124·61	124·57	124·41
20	131·50	131·38	130·87	130·67	129·81	129·59
21	137·43	137·33	137·18	137·04	136·58	136·50
22	143·39	143·63	143·40	143·24	142·84	143·09
23	149·37	149·13	149·39	149·44	149·13	149·12
24	154·81	154·03	155·57	155·45	155·19	155·10
25	159·39	{158·96 159·61	160·38	{160·08 160·98	160·15	{159·79 160·37
26	162·17	162·32	162·51	162·56		
27	162·86	162·83	160·34	160·04		
28	172·40				176·13	176·35
29	183·58	184·07	184·54	184·60	187·04	186·98
30	191·53	{192·04 191·86	193·64	{192·82 193·45	193·68	193·87
31	199·02	199·79	200·07	{200·53 200·22	199·99	199·60
32	205·28	205·28	206·54	206·97	206·36	206·68
33	211·86	211·50	213·36	212·79	212·59	212·78
34	218·98	218·40	218·90	219·29	218·90	{218·59 218·61
35	225·53	{225·99 225·60	225·51		225·08	224·77
36	228·49		231·97		231·31	231·57
37	227·87		237·76		237·63	
38			244·02		244·04	
39	241·89		250·27		249·51	
40	255·53		257·26		256·43	
41	262·48		262·18		262·63	
42	268·72		268·69		268·61	
43	275·08		274·95		274·91	
44	280·87		280·75		280·80	
45	287·36		286·87		286·78	

* A perturbációk helyén a képezhető kombinációdifferenciák közül csak azokat vettük fel, amelyek a perturbált termnek azonos ágára vonatkoznak.

7. táblázat.

$\Delta_2 F''(K)$; $v''=5$

K	$R_1(K-1)-P_1(K+1)$		$R_2(K-1)-P_2(K+1)$		$R_3(K-1)-P_3(K+1)$	
	$0\rightarrow 5$	$1\rightarrow 5$	$0\rightarrow 5$	$1\rightarrow 5$	$0\rightarrow 5$	$1\rightarrow 5$
5		38·64	35·94		31·21	
6	43·94	43·97	41·42	41·12	38·02	38·34
7	50·10	50·03	46·84	46·74	45·06	45·50
8	56·38	56·08	53·29	53·60	51·22	50·64
9	62·42	62·16	59·80	60·10	57·70	58·11
10	68·34	68·55	66·01	66·13	64·39	64·79
11	74·62	74·36	72·30	72·75	71·00	71·47
12	80·58	80·58	78·61	79·33	77·60	77·72
13	86·83	87·28	85·31	85·33	83·81	83·76
14	92·94	93·04	91·30	90·78	90·30	90·45
15	98·99	99·15	97·68	97·31	96·79	97·18
16	105·30	105·43	104·08	104·11	103·02	103·35
17	111·82	111·98 112·30	110·23	110·71 110·53	109·64	109·38 109·73
18	117·69	117·84	116·85	116·61	115·96	116·28
19	123·29	122·78	122·93	122·59		122·27
20	130·43	130·26	129·62	129·40	128·30	129·10
21	136·19	136·64	135·62	135·48	135·38	135·09
22	142·64	142·44	141·73	141·85	141·21	141·65
23	148·79	148·86	148·01	148·33	147·60	147·86
24	155·22	155·21	154·48	154·70	153·92	153·83
25	161·12	161·61 161·14		160·74 160·51	160·22	160·70 160·25
26	167·62	167·44	167·12	167·01		166·09
27	174·18	173·62	173·37	173·21	172·88	172·93
28	180·02	179·80	179·59	179·27	179·46	178·95
29	186·22	186·08	185·70	185·47	185·37	185·22
30	192·12	192·13	192·42	191·82	191·57	191·63
31	198·35	198·44 198·43	198·18	197·75	197·82	197·73 197·66
32	204·72	204·61	204·78	204·26	203·99	203·87
33	210·84	210·65	210·46	210·20	210·26	210·06
34	216·66	216·50	216·49	216·62	216·38	216·60
35	223·05	223·27	222·42	222·18	222·79	
36	229·05		229·23		228·34	
37	235·15		234·41		234·14	
38	241·61		241·01		240·65	
39	247·38		247·06		246·97	

módszert a perturbációk vizsgálatára, amely fölöslegessé teszi a perturbálatlan helyek ismeretét és csak az egymásután következő vonalak hullámszámainak különbségét használja fel. Formulája szingulett esetben a következő alakban adja a kezdőállapot és a végállapot rotációs állandóinak különbségét:

$$B' - B'' = \frac{Q(K) - Q(K-1)}{2K}.$$

Ha akár a kezdő, akár a végállapot B-je konstans (nincs perturbáció), a jobboldali tört által nyert kifejezések a másik term perturbációját szépen mutatják. Mivel azonban a $0 \rightarrow 4$ sáv mind a kezdő, mind a végállapoton mutat perturbációt, egyik term rotációs állandója sem konstans és a fenti alakban GERŐ formulája sem használható a végállapot perturbációjának elkülönített vizsgálatára. Ezért olyan formulákra volt szükség, amelyek két közös, tehát egyformán perturbált kezdőállapotú sáv adatait olymódon kombinálják, hogy a közös kezdőállapot-perturbációk hatása ne mutatkozzék. Ilyen formulákat a $0 \rightarrow 0$ és $0 \rightarrow 4$ sávokra vonatkozólag a következőkben sikerült felállítani:

$$B_0'' - B_4'' =$$

$\frac{\Delta P_1(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta P_1(K)_{0\rightarrow 0}}{2(K+1)}$	$\frac{\Delta Q_1(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta Q_1(K)_{0\rightarrow 0}}{2(K+1)}$	$\frac{\Delta R_1(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta R_1(K)_{0\rightarrow 0}}{2(K+1)}$
$\frac{\Delta P_2(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta P_2(K)_{0\rightarrow 0}}{2K}$	$\frac{\Delta Q_2(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta Q_2(K)_{0\rightarrow 0}}{2K}$	$\frac{\Delta R_2(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta R_2(K)_{0\rightarrow 0}}{2K}$
$\frac{\Delta P_3(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta P_3(K)_{0\rightarrow 0}}{2(K-1)}$	$\frac{\Delta Q_3(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta Q_3(K)_{0\rightarrow 0}}{2(K-1)}$	$\frac{\Delta R_3(K)_{0\rightarrow 4} - \Delta R_3(K)_{0\rightarrow 0}}{2(K-1)}$

Itt azonban most B_0'' az $a^3\Pi$ állapot $v=0$ emeletének rotációs állandóját jelenti, tehát a term triplett voltától eltekintve állandó mennyiséget. A $\Delta P_1(K)_{0\rightarrow 4}$ kifejezésen értendő a $0 \rightarrow 4$ sávból vett $P_1(K) - P_1(K-1)$ érték, stb. A formulák közül az elsőnek levezetése a következőképen történt:

$$P_1(K) = B'(K-1)K - B_4''(K+1)(K+2)$$
$$P_1(K-1) = B'(K-2)(K-1) - B_4''K(K+1)$$

Ez a felírás feltételezi azt, hogy a $^3\Sigma$ termen az azonos K-hoz tartozó rotációs energiák megegyeznek. A $^3\Pi$ termen a szabály szerinti $F=B''_4J(J+1)$ formulával számítottam az energiákat. (5. ábra.)

Az alsó egyenletet a felsőből kivonva egyszerű átalakítás után nyerjük, hogy

$$B'-B''_4=\frac{P_1(K)-P_1(K-1)+4B'}{2(K+1)}=\frac{\Delta P_1(K)_{0\to4}+4B'}{2(K+1)}.$$

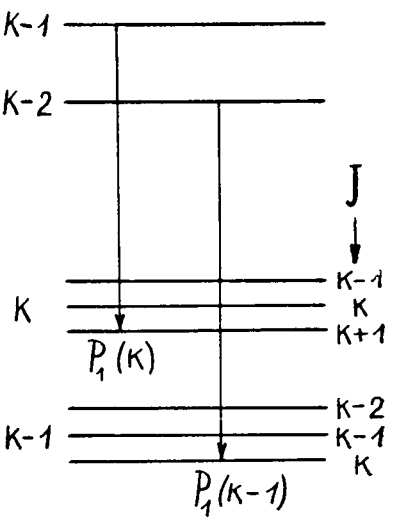
Ez a kifejezés tartalmazza az erősen változó B' értékeket. Ha azonban ugyanilyen alakban felírjuk a $0\to0$ sávra vonatkozólag:

$$B'-B''_0=\frac{\Delta P_1(K)_{0\to0}+4B'}{2(K+1)}$$

és az utóbbi egyenletet az előbbiből kivonjuk, lesz:

$$B''_0-B''_4=\frac{\Delta P_1(K)_{0\to4}-\Delta P_1(K)_{0\to0}}{2(K+1)}$$

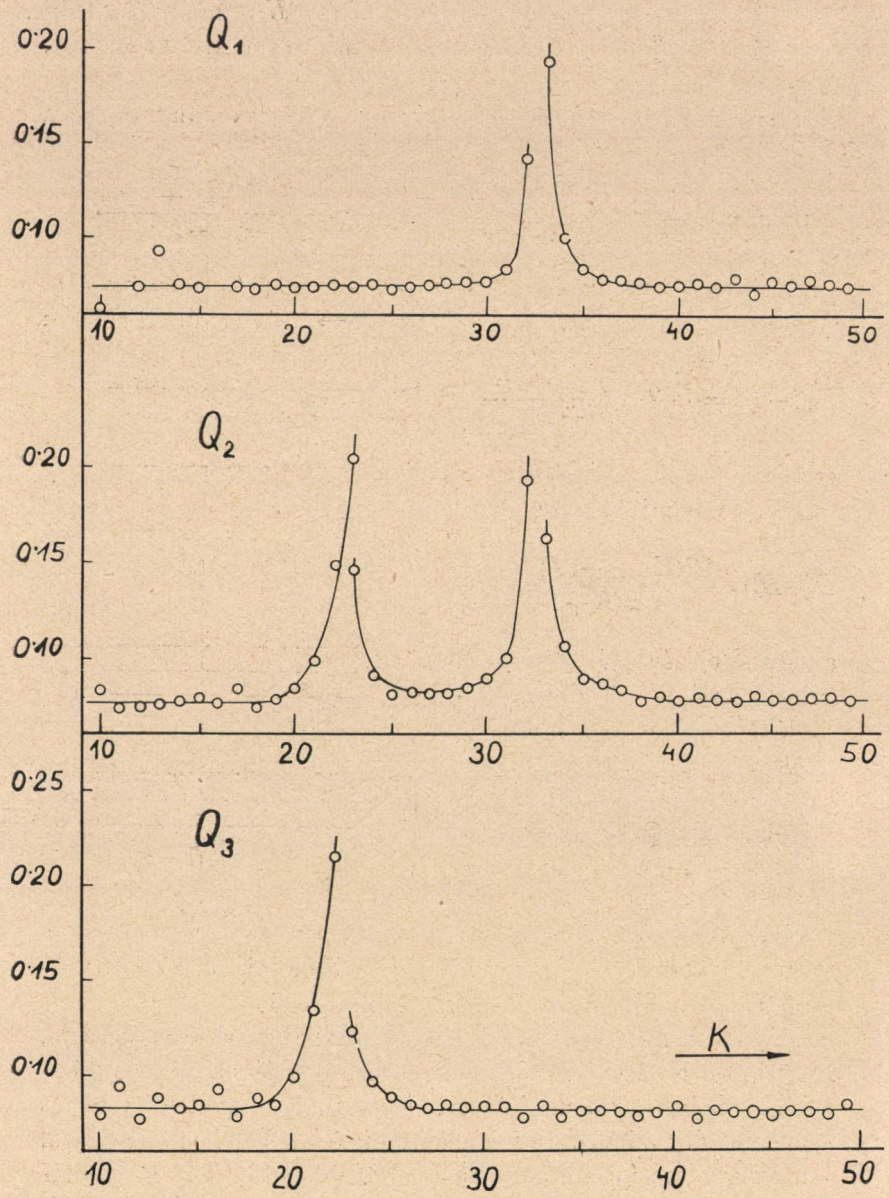
amely kifejezés már B'-t nem tartalmazza. — Teljesen hasonlóképen vezethető le a többi nyolc formula is.



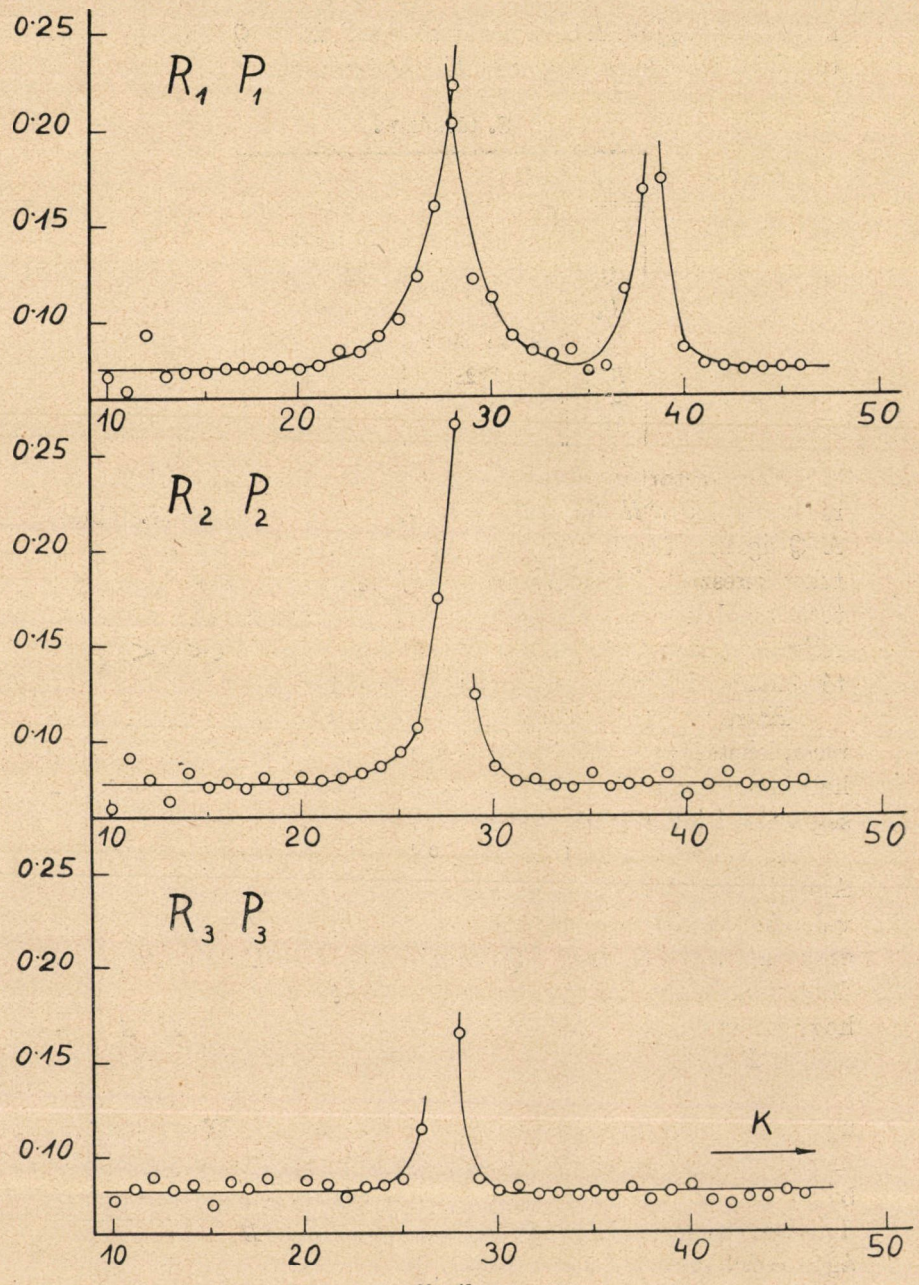
5. ábra.

Ezen formulákat alkalmazva a P, Q, R ágakra, a perturbációknak igen szép, szemléletes képe adódott. (6. ábrák.) A P és R ágaknál nyert eredményekből középértéket lehetett számítani, mivel azok — érthetően — teljesen azonos menetet mutattak.

Az ábrákon összesen nyolc helyen látszik igen éles perturbáció, A görbék fel- és lemenő ágainak metszéspontjához tartozó abszcissza, tehát a perturbáció maximumának megfelelő rotációs kvantumszám mindenütt fél kvantumszámon belüli pontossággal leolvasható. Az így nyert számokból azonban elméleti megfontolások szerint (17) még $^1/_2$-et le kell vonni, hogy az átmetszések


Q1
0·20
0·15
0·10
10
20
30
40
50
Q2
0·20
0·15
0·10
10
20
30
40
50
Q3
0·25
0·20
0·15
0·10
K
10
20
30
40
50

6*a*. ábra.


0·25
0·20
0·15
0·10
R_1 P_1
10
20
30
40
50
0·25
0·20
0·15
0·10
R_2 P_2
10
20
30
40
50
0·25
0·20
0·15
0·10
R_3 P_3
K
10
20
30
40
50

66. ábra.

helyét megkapjuk. A 8. táblázat közli a P, R, ill. Q ágakban a perturbációs helyeknek megfelelő K és J értékeket.

8. táblázat.

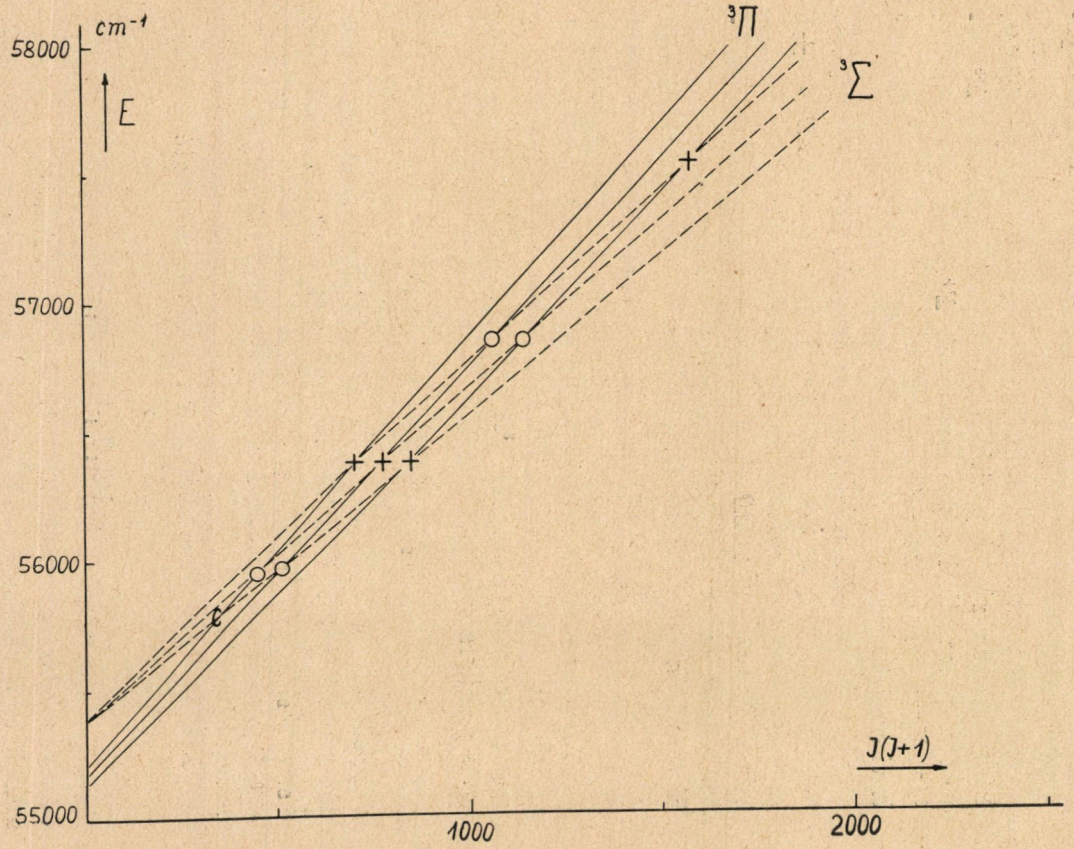
ág	*K*	*J*
Q_1	32·25	33·25
Q_2	22; 32·1	22; 32·1
Q_3	21·6	20·6
R_1P_1	27·4; 38·2	28·4; 39·2
R_2P_2	27·25	27·25
R_3P_3	27·1	26·1

Az összetartozó átmetszési helyek megállapítása céljából ábrázoltam az $a^3\Pi$ termeket $J(J+1)$ függvényében (7. ábra). A Q ágakon észlelt perturbációkat körök, az R, P ágakon észleltеket keresztek jelzik. Az átmetszési pontokat összekötő szaggatott vonalak a perturbáló termeket jelentik. Ez az összekötés teljesen egyértelmű; csak így volt lehetséges a $0<B<B_4$ feltételnek is eleget téve az átmetsző termeket megrajzolni.

Hátra volt még az a kérdés, vajjon milyen típusú az átmetsző term, lehetséges-e a kiválasztási szabályok szerint is mind a nyolc helyen a perturbáció fellépte és ha igen, miért maradt el ez a jelenség a C-vel jelölt átmetszési helyen.

Az, hogy az átmetsző term $^3\Sigma$, egész egyszerűen adódott. Abból, hogy három egyenessel sikerült a pontok összekötése, valószínűvé vált, hogy a term triplett, és abból, hogy egy helyen csak vagy a P, R, vagy a Q ágakat (tehát az $a^3\Pi$ term Λ-típusú-dublettjének mindig csak egy komponensét) perturbálta, kitűnt, hogy komponensei nem degeneráltak, tehát hogy nem Π, Δ stb., hanem Σ term.

A fenti következtetés eredményét helyesnek tételezve fel ugyancsak meg lehetett állapítani a perturbáló $^3\Sigma$ term szimmetriáját, azaz pozitív vagy negatív voltát is. Kronig (18) szabályai szerint a perturbáló és a perturbált term szimmetriatulajdonságai megegyeznek. Vizsgáljuk meg az $a^3\Pi$ term középső ágán észlelt középső perturbációt. Itt az R és P vonalak vannak



7. ábra.

perturbálva. A középső ágban páros kvantumszám esetén a pozitív, páratlan kvantumszám esetén a negatív Λ-típusú dublett-komponensre esnek az R és P ágak, tehát a perturbáló középső term, mely itt keresztülmegy, szintén ugyanígy váltogatja előjelét. Páros kvantumszámnál pozitívok, páratlannál negatívok a Σ^+ termek, a perturbáló középső term tehát Σ^+ és az egész triplett: ${}^3\Sigma^+$. Ugyanerre az eredményre jutunk, bármelyik metszéspontot is vizsgáljuk.

Egy KRONIG-féle másik kiválasztási szabályról fel kell azonban tennünk, hogy itt nem érvényes. KRONIG szerint $\Delta\Omega = 0, \pm 1$ lehetséges csak perturbációkban, esetünkben pedig két átmetszéshelyen ($K=22$ és 21,6) $\Delta\Omega=2$. Ezen azonban nincs mit csodálkoznunk, mert hiszen a fenti kiválasztási szabályt KRONIG tiszta HUND-féle a-esetre vezette le, ami jelen esetben egyáltalán nem tételezhető fel. (19) Viszont itt van a magyarázata annak, miért nem jött létre a C metszéspontban perturbáció: ott ugyanis $\Delta\Omega=3$.

A perturbáló term rotációs állandóját az átmetszési helyekből ki lehetett számítani. Evégből azok termmagasságát pontosan meg kellett állapítani. Az a^3II term középső komponensének egyes pontjaira érvényes, hogy:

$$F_2(J)=55160+BJ(J+1)$$

a másik két komponens egyes pontjainak magasságát pedig ugyancsak ezzel a képlettel lehetett meghatározni, korrigálva $F_3(J)-F_2(J)$, ill. $F_2(J)-F_1(J)$ értékeivel, amelyek a megfelelő kvantumszámoknál a $v=0$, 1, 2, 3 emeletekből kellő pontossággal extrapolálhatók.

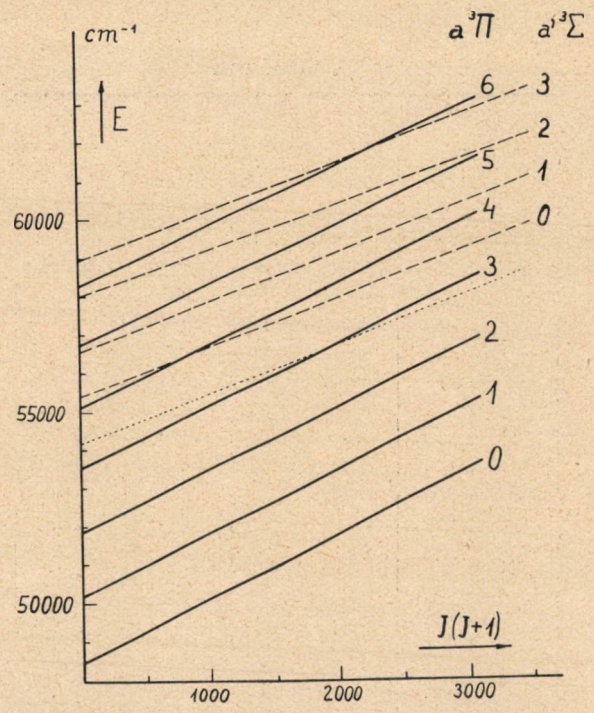
A metszéspontok ordinátáinak ismeretében felírható összesen nyolc egyenlet az alábbi alakban:

$$T+BK_i(K_i+1)=F_i$$

és ezeknek az egyenleteknek kettős kombinációiból B rotációs állandó és T vibrációs termmagasság minden esetben kiszámíthatók. A nyert értékek igen jó egyezést mutattak, középértékük:

$$B=1{,}31 \text{ cm}^{-1}$$
$$T=55380 \text{ cm}^{-1}.$$

Ha ezeket az eredményeket összehasonlítjuk az $a'^3\Sigma$-ra vonatkozó SCHMID és GERŐ által közölt táblázat, valamint $B \sim v$ görbe adataival, (11) tapasztaljuk, hogy sem a vibrációs nívók sorozata, sem a B-görbe nem szenved törést, ha feltesszük, hogy a talált $^3\Sigma^+$ term is ebbe a sorozatba tartozik, éspedig két vibrá-



8. ábra.

ciós emelettel mélyebb, mint az, amelyet eddig $v=0$-val jelöltek. Igazolódott tehát az eredeti feltevés: az $a^3\Pi$ $v=4$ term rotációs analízise kimutatta az $a'^3\Sigma^+$ term legalsó vibrációs emeletét. A 8. ábrából kitűnik, hogy ez a nívó már a legalacsonyabb, mert ha volna még egy mélyebben (az ábrán pontozott vonallal jelölve), úgy annak $J=43$ körül metszeni kellene az $a^3\Pi$ $v=3$ emeletét, ahol DIEKE és MAUCHLY perturbációt nem találtak. Az ábra megmagyarázza azt is, hogy miért perturbáció-mentes a $v=5$ emelet. A $v=6$ termen már alacsonyabb kvantumszámnál történik metszés,

ennek igazolása azonban sajnos, nem történhetett meg, mert a $0 \rightarrow 6$, $1 \rightarrow 6$ sávok nem jelentek meg a felvételeken kellő intenzitással, így rotációs analízisük nem volt véghezvihető.

A 9. táblázat összefoglalja az $a'\Sigma^+$ term rotációs állandóinak s a vibrációs nívók nullahelyeinek sorozatát, amely most már teljesnek mondható.

9. táblázat.

v	B_v	T_v	v	B_v	T_v
0	1·313	55380	23	0·993	78165
1	1·300	56582	24	0·975	
2	1·286	57764	25	0·957	
3	1·273	58926	26	0·939	80452
4	1·259	60069	27	0·919	
5	1·246	61193	28	0·893	
6	1·232	62298	29	0·870	
7	1·219	63383	30	0·845	
8	1·205	64449	31	0·820	84240
9	1·192	65496	32	0·790	84805
10	1·178	66524	33	0·758	85350
11	1·165	67532	34	0·720	85865
12	1·151		35	0·682	86350
13	1·138	69480	36	0·643	86790
14	1·124		37	0·600	87225
15	1·111	71339	38	0·552	87625
16	1·097	72234	39	0·498	88020
17	1·084		40	0·433	88375
18	1·070	73995	41	0·360	88710
19	1·055	74883	42	0·285	
20	1·041	75753	43	0·200	
21	1·026		44	0·108	
22	1·010				

Az elektronterm karakterisztikus állandói: $B_0=1{\cdot}31$ cm^{-1}; $B_e=1{\cdot}320$ cm^{-1}; $\alpha=0{\cdot}0135$; $I_e=20{\cdot}95.10^{-40}$ gcm^2; $r_e=1{\cdot}37$ Å; $\omega_e=1310$ cm^{-1}; $\omega_e x_e=9{\cdot}5$ cm^{-1}; $T_0=55380$ cm^{-1}.

A vizsgálatok eredményeinek közvetlen következménye, hogy — mint már a bevezetésben említettük — az $a'\Sigma^+$ term a szénmonoxid elektrontermrendszerében kb. 0·25 Volttal mélyebbre

került s ezáltal olyan helyen nyert elhelyezést, ahol azt a $CO_2+12{\cdot}0$ Volt$=CO+O$ disszociációs reakcióból várni lehetett. Itt mutatkozott a következtetések és a tapasztalat között az egyetlen eltérés (l. SCHMID és GERŐ (5) alatt idézett cikkében közölt 3. ábrát) és most, hogy ez is eltűnt, semmi sem mond ellent annak a feltevésnek, hogy a széndioxid és valószínűleg a többatomos molekulák carbonyl-csoportjának, valamint a két szabad vegyértéket mutató szénmonoxid-módosulatnak alapállapotát határozták meg a fenti vizsgálatok.

*

Jelen dolgozat a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült. Az Intézet felszerelését részben az Országos Természettudományi Tanács, részben a Széchenyi Tudományos Társaság által rendelkezésre bocsátott anyagi támogatásnak köszöni.

Leghálásabb köszönetemet fejezem ki az Intézet igazgatójának, dr. POGÁNY BÉLA műegyetemi ny. r. tanár úrnak, a Magyar Tudományos Akadémia tagjának, aki a vizsgálatok elvégzését az Intézetben megengedte, valamint dr. SCHMID REZSŐ egyetemi magántanár és dr. GERŐ LÓRÁND műegyetemi tanársegéd uraknak, akik a dolgozat elkészítése folyamán értékes tanácsaikkal állandóan támogattak.

Összefoglalás.

A szénmonoxid kémiai és spektroszkópiai tulajdonságai között megállapítható analógia arra enged következtetni, hogy a $>C=O$ képlettel jellemzett carbonylgyök az $a'^3\Sigma^+$ állapothoz rendelendő. A szén- és az oxigénatommagok ezen módosulatban való távolságának megállapítása céljából szükséges az $a'^3\Sigma^+$ állapot legalsó vibrációs termjére vonatkozó rotációs állandó meghatározása. Bár közvetlen megfigyelésre nincs mód, mégis lehetséges ez azáltal, hogy kimutatható, miszerint az $a^3\Pi$ $v=4$ termen perturbációt okozó molekulaterm mind a szimmetriaviszonyok, mind az abszolútértékek tekintetében pontosan csatlakozik az $a'^3\Sigma^+$ vibrációs termsorozat ismert tagjaihoz és annak legalsó emeleteként interpretálható.

A fenti eredmények az ú. n. III. pozitív $b^3\Sigma^+ \rightarrow a^3\Pi$ CO-sáv-

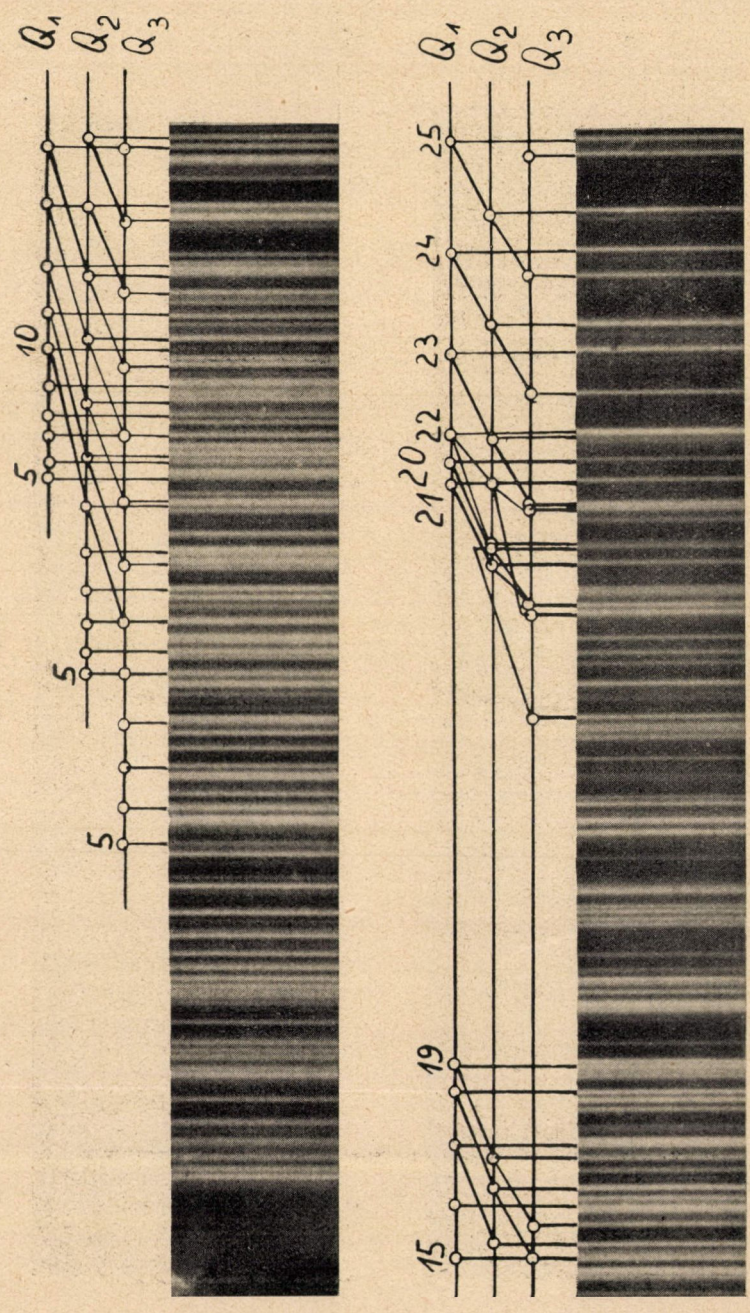
rendszer $0\rightarrow4$, $1\rightarrow4$, $0\rightarrow5$, $1\rightarrow5$, sávjainak a jelen dolgozatban elvégzett rotációs analízisén alapulnak. Mivel a $0\rightarrow4$ és $1\rightarrow4$ sávok kezdő- és végállapotán is fellép perturbáció, itt a rotációs analízist csak azáltal sikerült elvégezni, hogy a $0\rightarrow0$ és $1\rightarrow0$ sávokból való alkalmas kombinációval a kezdőállapotok perturbációját eliminálhattuk. Az a^3II $v=4$ emeleten így tisztán felismerhető volt nyolc átmetszés helye és jellege, amiből viszont a perturbáló term rotációs állandója, termmagassága, multiplicitása és szimmetriája adódott.

A $>C=O$ csoportot jellemző állandókat a 9. táblázat tünteti fel.

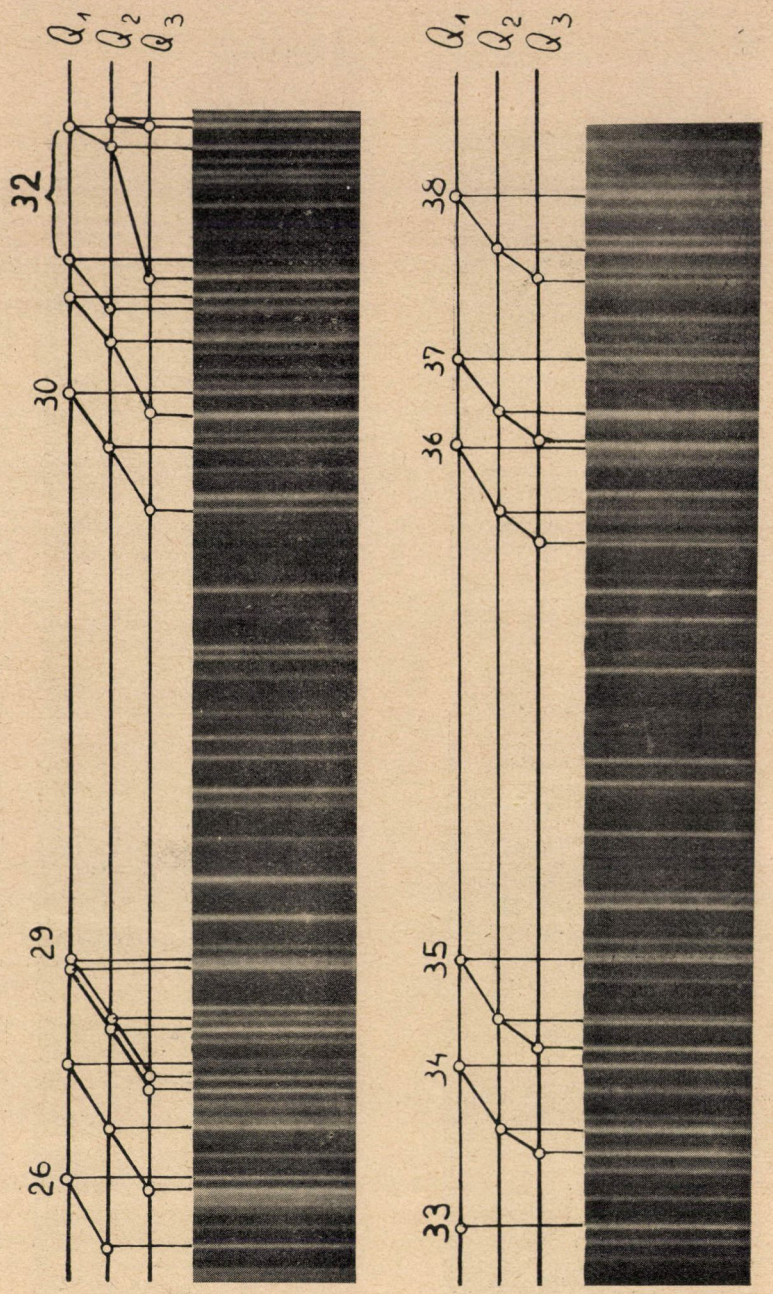
Irodalom.

1. R. S. Mulliken: Rev. of mod. Ph. V. 4. 1932.
2. E. Wigner és E. E. Witmer: Zs. f. Ph. 51. 859. 1928.
3. K. Fajans: Chem. Ber. 53. 643. 1920. és 55. 2826. 1922.
4. H. J. Henning: Ann. d. Ph. 5. F. 13. 599. 1932. és G. Rathenau: Zs. f. Ph. 87. 32. 1933.
5. R. Schmid és L. Gerő: Zs. f. phys. Chem. (B), 36. 105. 1937.
6. M. V. Henri: Comptes Rendus, 199. 849. 1934.
7. W. A. Noyes: Journ. of. Phys. Chem. 41. 81. 1937.
8. G. H. Dieke és J. W. Mauchly: Phys. Rev. 43. 12. 1933.
9. J. J. Hopfield és R. T. Birge: Phys. Rev. 29. 922. 1927.
10. R. H. Asundi: Proc. Roy. Soc. 124. 277. 1929.
11. Schmid R. és Gerő L.: A M. T. Akad. Math. és Termtud. Ért. LVI. 1. 1936.
12. L. Gerő: Zs. f. Ph. 99. 52. 1936.
13. Kelemen Sz.: Pannonhalmi füzetek, 18. 1936.
14. L. Gerő: Zs. f. Ph. 101. 311. 1936.
15. Budó Á.: A M. T. Akad. Math. és Termtud. Ért. LIV. 387. 1936.
16. Gerő L.: A M. T. Akad. Math. és Termtud. Ért. LIII. 2. r. 331. 1935.
17. Kovács I.: A M. T. Akad. Math. és Termtud. Ért. LVI. 1937.
18. R. de L. Kronig: Zs. f. Ph. 50. 347. 1928.
19. R. Schmid: Zs. f. Ph. 89. 701. 1934.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)



9*a*. A *CO* III. poz. sávrendszer 0→4 (3493 Å) sávjának első részlete a *Q*-ágak jelölésével.



9b.

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften. Institutsleiter Prof. *B. Pogány.*

ÜBER DEN GRUNDTERM DER CARBONYLMODIFIKATION VON *CO.*

Von B. ZSUZSANNA BEER.

Nachdem die Annahme, dass der Träger der durch zwei ungesättigte Valenzen charakterisierten $>C=O$-Modifikation zwischen den *CO*-Triplettermen zu suchen sei, sich als vollkommen zulässig erwies, gelangt man schliesslich zu der Folgerung, dass der Grundterm von $>C=O$ identisch mit dem $a'^{3}\Sigma^{+}$ Term, der im *CO*-Spektrum in zahlreichen Übergängen und Störungen sich offenbart, sein muss. Da auf Grund der bisherigen Daten die Lage des untersten Schwingungsniveaus von $a'^{3}\Sigma^{+}$ nicht einwandfrei bekannt war, erscheint ein sicheres Lokalisieren wünschenswert. Dies gelang in der Weise, dass man eine Störung am $v=4$ Schwingungsniveau von $a^{3}\Pi$ der Überkreuzung mit dem $a'^{3}\Sigma^{+}$ $v=0$ Zustand zuschreibt.

An der Hand von lichtstarken Aufnahmen konnte die Rotationsanalyse der $b^{3}\Sigma \rightarrow a^{3}\Pi$ (III. pos.) Banden $0\rightarrow4$, $1\rightarrow4$, $0\rightarrow5$ und $1\rightarrow5$ durchgeführt und am $v=4$ Endzustand die Natur der Störung, sowie die Rotationskonstanten des störenden Termes bestimmt werden. Die acht beobachteten Überkreuzungsstellen definieren klar den $^{3}\Sigma^{+}$-Charakter des störenden Termes und liefern für dessen Rotationskonstante $B=1{\cdot}31$ cm^{-1}; die Höhe des nullten Rotationszustandes kommt dabei zu 55380 cm^{-1} über den *CO*-Grundzustand zu liegen. Eine Mitberücksichtigung der $^{3}\Sigma^{+}$-Typ Störungen am $A^{1}\Pi$ Zustand führt zu eindeutiger Zourdnung der Störung zu dem $v=0$ Zustand von $a'^{3}\Sigma^{+}$.

Die auf Grund von verschiedentlichen Störungen berechneten charakteristischen Konstanten von $a'^{3}\Sigma^{+}$ sind in der Tabelle 9 des Textes angeführt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A «LUSITANICOSID»-NAK, A CERASUS LUSITANICA LOIS. GLÜKOZIDJÁNAK SZERKEZETE ÉS SZINTÉZISE.

ZEMPLÉN GÉZA r. tagtól.

Hürisey és Laforest[1] öt évvel ezelőtt a portugálmeggynek (Cerasus lusitanica Lois) leveles hajtásaiból új kristályos glükozidot különítettek el, melynek a «*lusitanicosid*» nevet adták, és amely emulszin hatására rendkívül lassan szenved hidrolízist. Nemezszerűen egymásba kúszálódó hosszú tűkben kristályosodik, 187—188°-on olvad. Nagyon könnyen oldódik vízben, methylalkoholban és alkoholban, kevéssé ecetéterben, oldhatatlan éterben. Forgatóképességét vizes oldatban:

$$[\alpha]_D = -74,\ 69°\text{-nak}$$

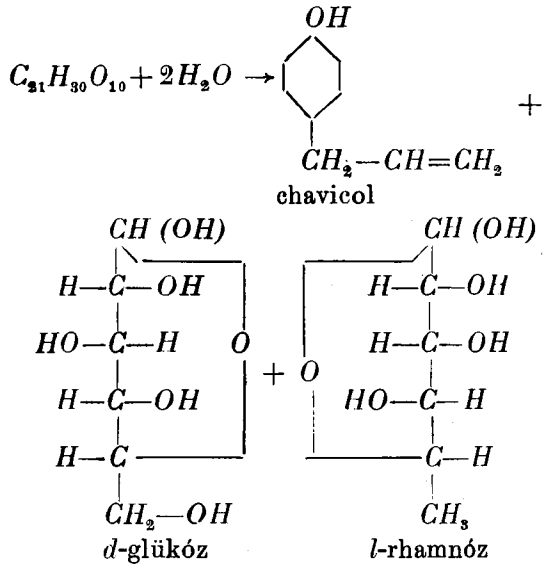
találták.

Két évvel később Hérissey[2] kimutatta, hogy ez a glükozid híg kénsavval *chavicolt* szolgáltat, mint aglükont, továbbá kétféle egyszerű cukrot: *glükózt* és *rhamnózt* a következő szimbolumok szerint:

---

[1] H. Hérisssey és J. Laforest: Comptes rendus **194**, 1095 (1932).

[2] H. Hérissey: Comptes rendus **198**, 265 (1934).



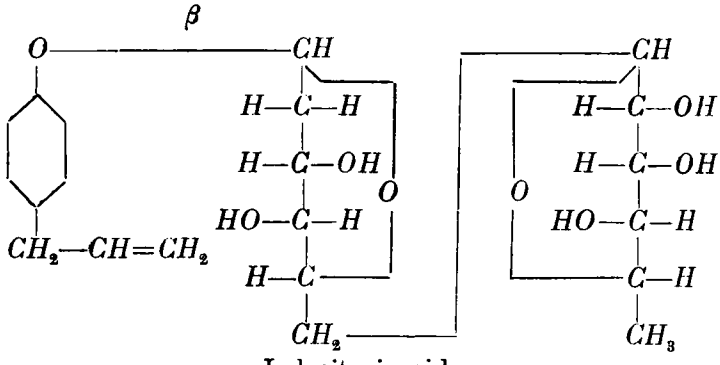
Mivel a chavicolban egyetlen fenolos hidroxil van, nyilvánvaló, hogy a két egyszerű cukor az eredeti glükozidban egy diszaccharid képében szerepel. Egy ilyen diszaccharid a rutinban is jelenlévö és általam szintézissel előállított *rutinóz.*[1]

Mivel jelenleg gondolnom sem lehetett arra, hogy Cerasus lusitanica gallyakat friss állapotban beszerezhessek s így a disachharidot a lusitanicosidból előállítsam, megkíséreltem előállítani a *chavicol-β-rutinozidot* és megvizsgálni, vajjon azonos-e a H. Herissey leírta glükoziddal. Kiderült, hogy *a szintétikus termék minden tekintetben azonos a lusitanicosiddal,* amint azt a következő adatok igazolják.

	Olvadáspont	Forgatóképesség
Lusitanicosid	187°—188°	−74,69° vízben
chavicol-β-rutinozid	188,5°	−73,96° vízben.

Ennek a szintézisnek végrehajtásával a lusitanicosid szerkezete minden részletében ismeretessé vált, és a következő szimbolummal fejezhető ki:

[1] Zemplén Géza: Math. és Természettud. Ért. **54**, 208 (1935).



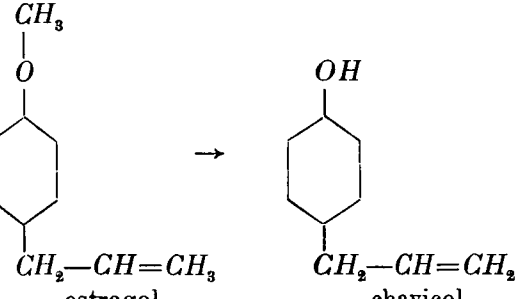
I. lusitanicosid =

β-Chavicol-β-1-l-rhamnozido-6-d-glükóz.

A szintézis menete a következő. Szintétikus *rutinóz heptaacetatot* (II.) először átalakítottam jégecetes brómhidrogén segítségével *α-acetobrómrutinózzá* (III.). Ez a vegyület acetonos-vizes oldatban káliumhydroxyd jelenlétében szolgáltatja a szépen kristályosodó *β-chavicol-rutinozid-acetátot* (IV), mely elszappanosítva szabad glükoziddá, vagyis *lusitanicosiddá* (I.) alakul. (L. 4. és 5. oldalt.)

Ezen kísérletek végrehajtásához szükségem volt chavicolra.

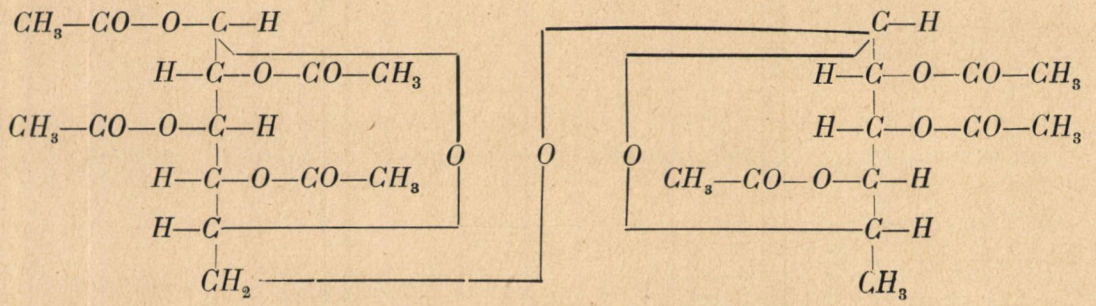
Az eddig ismert módszerek, melyek közül az estragol methylmentesítése látszott legjobbnak, nem adtak kielégítő eredményt. Ellenben célravezetőnek bizonyult az estragolnak GRIGNARD[1] reagenssel olyanfajta methylmentesítése, mint ahogyan azt nemrég SPÄTH[2] alkalmazta.



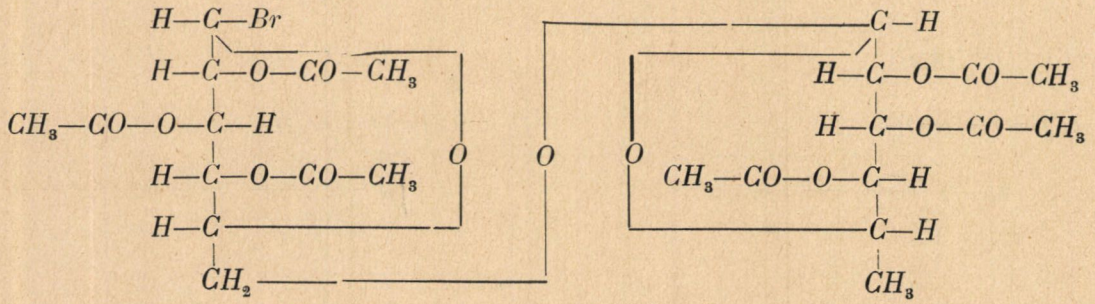
estragol chavicol

[1] V. GRIGNARDt. Comp: rend. **151**, 322 (1910).

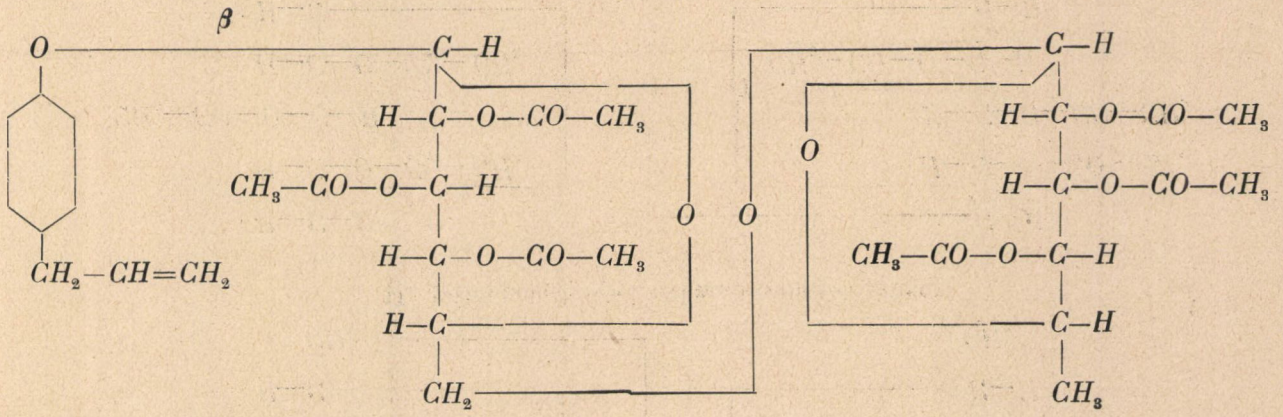
[2] ERNST SPÄTH: Monatsheft f. Chemie **35**, 310 (1914).



II. β-Heptaacetyl-β-1-*l*-rhamnozido-6-*d*-glükóz.



III. α-acetobróm-rutinóz = α-Acetobróm-β-1-*l*-rhamnozido-6-*d*-glükóz.



IV. β-Chavicol-rutinozid-acetat = β Chavicol-β-1-*l*-rhamnozido-6-*d*-glükozid-hexa-acetat.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

Chavicol előállítása estragolból.

200 ccm. abs. ätherhez 72 g. methyljodidot és 12·3 g. apróra vagdalt magnéziumszalagot adunk. A műveletet chlorcalciumos csővel elzárt és visszacsepegő hűtővel ellátott készülékben végezzük. A magnézium oldódása után ledesztilláljuk az äthert először vízfürdőről, azután olajfürdőről 130°-ig. A maradékhoz a hűtőn keresztül részletekben 58 g. estragolt öntünk és az olajfürdőt 160—170°-ra állítjuk be. Körülbelül ¾ órával a 160° elérése után a reakciókeverék felhabzik, úgy, hogy rövid időre meg kell szakítani a melegítést. Közben megsűrűsödik a tömeg és további melegítés közben, amely összesen két óra hosszat tart, kevés habzás mutatkozik. Most a lehült keveréket jéggel elbontjuk, megsavanyítjuk kongóra sósavval és négyszer kirázzuk ätherrel. Az egyesített ätheres oldatokat kioldjuk 10%-os nátronlúggal, a lúgos oldatot egyszer kirázzuk ätherrel, azután megsavanyítjuk kongóra és a felszabadított chavicolt kirázzuk ätherrel. Az ätheres oldatot egyszer vízzel kimossuk, megszárítjuk vízmentes nátriumszulfáttal, az äthert vízfürdőről lehajtjuk, a maradékot pedig 140—155°-os olajfürdőből csökkentett nyomás alatt ledesztilláljuk. Nyertünk 30·8 g. tiszta chavicolt, vagyis az elméleti termelésnek 59%át-.

Acetobróm-rutinóz (III).

$C_{24}H_{33}O_{15}Br$, mol. súly = 641·18.

15 g. Heptaacetyl-rutinózt (II) feloldunk 150 ccm. chloroformban, az oldatot jeges vízben lehűtjük és 37·5 ccm. olyan jégecetes brómhidrogént adunk hozzá, melynek 170 g.-jában 70 g. brómhidrogén van. A reakciókeveréket 1½ órai 0°-on való állás után jeges vízbe öntjük, 4—5-ször kimossuk jeges vízzel, hogy a mosóvíz kongóra semleges legyen, majd a chloroformos oldatot chlorcalciummal szárítjuk, megszűrjük és csökkentett nyomás alatt bepároljuk annyira, hogy éppen ki lehes-

sen önteni a lombikból. Az olajhoz 80 ccm abs. äthert adunk és $^1/_4$ óráig jeges vízben tartjuk. A kivált kristálytömeget leszívatjuk, ätherrel mossuk és vákuumexsikkátorban foszforpentoxid, nátronmész és paraffin fölött megszárítjuk.

Termelés 9·2 g. A kristályok bomlás nélkül 127—128° között olvadnak. Oldhatóságuk megfelel az egyéb acetobrómdissaccharidokénak.

$$[\alpha]_D^{16} = + \frac{1{\cdot}76 \times 10}{0{\cdot}1958} = + 89{\cdot}89°$$ chloroformban

Brómmeghatározás 0·3136 g.: 4·80 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$ — 12·23% *Br*.
$C_{24}H_{33}O_{15}Br$ = 641·18-ra számítva — — — — — 12·46% *Br*.

Az anyalúgból kivált még 2·4 g. kristály. Az összetermelés ezek szerint a számítottnak 75%-a. Ezeknek a kristályoknak olvadáspontja 130·5—131° között van. Egyéb vizsgálati eredményei a következők:

$$[\alpha]_D^{18°} = + \frac{1{\cdot}83 \times 10}{0{\cdot}2018} = + 90{\cdot}68°$$ chloroformban

Brómmeghatározás 0·4520 g.: 6·95 ccm. $^n/_{10}$ $AgNO_3$=12·30% *Br*.
$C_{24}H_{33}O_{15}Br$ = 641·18-ra számítva — — — — —12·46% *Br*.

Hexaacetyl-chavicol-rutinosid (IV).

$C_{33}H_{42}O_{16}$; mol súly 694·34.

2·5 g. acetobrómrutinózt és 1·45 g. chavicolt 18 ccm. acetonban oldunk és az oldathoz 4·8 ccm. vízben oldott 0·6 g. káliumhidroxidot adunk. Az oldat rövid időre zöld színt vesz fel, majd sárgásbarnába, végül vörösbarnába csap át. Ezenkívül körülbelül 20 perccel a lúg hozzáöntése után megtörik az oldat és néhány köbcentiméternyi réteg különül el a folyadék alján. Hat órai szobahőmérsékleten való állás után a reakciókeveréket 150 ccm. vízbe öntjük, 1 ccm. jégecettel megsavanyítjuk és négyszer 15—15 ccm. benzollal kirázzuk. Az egyesített benzolos oldatokat kétszer kimossuk 5%-os nátronlúggal, azután egyszer vízzel, chlorcalciummal megszárítjuk és a szüredéket csökkentett nyomás alatt szárazra pároljuk. A maradékot 5 ccm. methylalkoholban oldjuk. Ebből 0·6 g. fehér kristályos anyag válik ki,

mely 162°-nál zsugorodik és 166·5°-nál olvad. A kristályokat átkristályosítjuk még háromszor 5, 3·5, illetőleg 2·5 ccm. methylalkoholban. Nyerünk 0·3 g. selyemfényű színtelen tűket. Eközben az olvadáspont 171·5°-ra emelkedik.

Redukálóképesség: 0·0546 g.: 0·10 ccm. $^n/_{10}$ $KMnO_4 = O$ redukció.

Forgatóképesség:

$$[\alpha]_D^{18} = \frac{-0{\cdot}34 \times 10}{0{\cdot}0702} = -48{\cdot}43°$$ chloroformban.

Az előbbi reakciót megismételjük háromszoros mennyiségekkel. $2^1/_2$ óra alatt 11 ccm.-nyi az alsó réteg, amely azután már nem növekszik. Összesen $3^1/_2$ órai állás után 450 ccm. vízbe öntjük, 3 ccm jégecettel megsavanyítjuk és 45, majd 3×30 ccm. benzollal kirázzuk. A további feldolgozás ugyanaz, mint az előző kísérletnél. A benzolos oldat maradéka 5 g. olaj, melyet 15 ccm. meleg methylalkoholban oldunk. Belőle 2 g. kristálytömeg válik ki, melynek olvadáspontja 166—166·5°.

Az anyalúgokat csökkentett nyomás alatt bepároljuk. A 2·2 g.-nyi maradékot 2. g. vízmentes nátriumacetattal és 8 ccm. ecetsavanhidriddel melegítjük egy óra hosszat vízfürdőn, majd 25 ccm. vízbe öntjük. Az anhidrid feleslegének elbomlása után kétszer cseréljük az anyalúgot és a kivált kristályokkal kevert olajat először 8, azután 5 ccm. methylalkoholból átkristályosítjuk. Nyerünk még 0·7 g. acetatot, mely 166·5°-on zsugorodik és 170°-nál olvad és melynek forgatóképessége:

$$[\alpha]_D^{18} = -\frac{0{\cdot}74 \times 10}{0{\cdot}1540} = -48{\cdot}06$$ chloroformban.

Lusitanicosid (Chavicol-β-rutinozid).

2 g.-ot a fent leírt Hexaacetyl-chavicol-rutinosidból 6 ccm. abs. methylalkohollal és 2 ccm. $^n/_{10}$ nátrium methyláttal rázunk.[1] Körülbelül 20 perc alatt az anyag szappanosodás közben feloldódik. Körülbelül 4 óra mulva jégecettel az oldatot megsavanyítjuk és másnapig állni hagyjuk, majd csökkentett nyomás

[1] Zemplén Géza: Mat. és Természettud. Ért. 55, 434 (1936).

alatt bepároljuk szárazra. A maradék fehér habot néhány percig melegítjük 25 ccm. äthylacetattal vízfürdőn, mire fehér, túrós tömeggé alakul át. Ezt fél nap mulva leszívatjuk és 50 ccm. äthylacetat + 2·5 ccm. alkohol elegyéből átkristályosítjuk. A kivált anyagot másodszor 5 ccm. propylalkoholból kristályosítjuk át. Nyerünk 0·4 g. színtelen, nemezszerű, egymásba kúszálódott hosszú tűkből álló kristálytömeget, mely a H. HÉRISSEY-féle leírásban foglalt *lusitanicosid* összes tulajdonságait mutatja. Az olvadáspont 188·5°.

Forgatóképesség:

$$[\alpha]_D^{18} = -\frac{0{\cdot}75 \times 10}{0{\cdot}1014} = -73{\cdot}96°$$ vízben.

Redukálóképesség hidrolizis után. A hidrolizist 5 ccm. 2½ %-os kénsavval végeztük 3½ óra hosszat tartó vízfürdőn való melegítéssel. 0·1000 : 22·00 ccm. $^n/_{10}$ $KMnO_4 = 0{\cdot}0762$ g. glükóz; 76·2% glükóz (glükóz = 100).

A két äthylacetatos anyalúg maradékát 4 ccm. propylalkoholból átkristályosítjuk. Ebből további 0·25° g. kristályt kapunk, melynek olvadáspontjai 187·5—188·5. A kikristályosításoknál nyert prophylalkoholos anyalúgokat és a polározáshoz használt vizes oldatot csökkentett nyomás alatt szárazra pároljuk. A 0·9 g. maradékot 50 ccm. äthylacetatból kristályosítjuk át. Nyerünk 0·35 g. apró, sünre emlékeztető kristálydrúzákat, melyeknek olvadáspontja 187°, miután 176°-nál zsugorodni kezdenek. Ennek a terméknek forgatóképessége:

$$[\alpha]_D^{19} = -\frac{0{\cdot}72 \times 10}{0{\cdot}0980} = -73{\cdot}47°$$ vízben.

Jelen dolgozat a M. Tud. Akadémia anyagi támogatásával készült. Ezért az Akadémia vezetőségének hálás köszönetemet fejezem ki.

A kísérletek végrehajtásánál dr. GERECS ÁRPÁD vegyészmérnök úr volt segítségemre, miért is neki köszönetet mondok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15-én tartott üléséből.)

SYNTHESE DES LUSITANICOSINDS, DES GLYKOSIDS AUS CERASUS LUSITANICA LOIS.

Von GÉZA ZEMPLÉN o. M.

Vor 5 Iahren isolierten H. HÉRISSEY u. J. LAFOREST aus den beblätterten Zweigen der portugesischen Kirsche (Cerasus lusitanica Lois.) ein neues Glykosid. die sie *Lusitanicosid* nannten. 2 Jahre später konnte HÉRISSEY zeigen, dass diese Substanz bei der Säurehydrolyse als Aglykon *Chavicol* und als Zuckerkomponente ein Gemisch von *d*-Glykose und *l*-Rhamnose ergibt. Als Ausgangsmaterial der Synthese bediente ich mich der synthetisch dargestellten Heptaacetylrutinose.[1] Diese wurde mit Eisessig und Bromwasserstoff in *α*-Acetobromrutinose überführt und dann in Acetonlösung in Gegenwart von einer wässerigen Lösung von Kaliumhydroxyd mit Chavicol in Reaktion gebracht. Dabei entstand *β*-Chavicol-rutinosid-hexaacetat. Dieses wurde mit geringen Mengen Natriummethylat in methylalkoholischer Lösung bei Zimmertemperatur verseift. Das krystallisiert elhaltene *β-Chavicolrutinosid* zeigte sich in jeder Beziehung identisch mit dem *Lusitanicosid.*

---

[1] GÉZA ZEMPLÉN u. ARPÁD GERECS: Berichte der Deutschen chem. Gesellschaft. **67**, 2049 (1934).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

ADATOK A CINCHONA CUPREA ALKALOIDJAINAK KÉMIÁJÁHOZ.

KONEK FRIGYES l. tagtól.

I. Hydrocuprein.[1]

Dihydrocuprein különféle chinakérgekben — főleg a cinchona cuprea[2] nevű válfajban található és ilyenekből lett először előállítva. Később pedig a korreszpondeáló dihydrochininből a szokásos methyl-fosztás útján nyeretett. Erre vonatkozólag az irodalomban a következő adatokat találjuk: Hesse — Ann. 241., 280 alatt — azt mondja, hogy hydrocuprein keletkezik, ha 1 súlyrész hydrochininsulfatot 8 súlyrész 1.125 fajsúlyú sósavval 6—8 óráig 140—150°-ra hevítünk, mikor is a reakció melléktermékeként methylchlorid távozik. Az oldatot ezután híg nátronlúggal túltelítjük, éterrel kirázzuk és kénsavval pontosan közömbösítjük, mire a hydrocupreinsulfat kicsapódik, amelyet végül ammoniákkal elbontunk. Skraup — Monatsch. f. Chem. 12., 431. — és Pum — ugyanott 16., 73. — szerint jódhydrogénsavas hydrocuprein keletkezik, ha például 5 gram hydrochininjódhydrátot 50 gram tömény, 1·7 fajsúlyú jódhydrogénsavval 3 óráig 100°-ra hevítünk. Újabban a «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co. Frankfurt a. Main» ezt a methylfosztást úgy hajtja végre, hogy a hydrochinint eléggé koncentrált kénsavval hevíti és az így kapott termékben a keletkezett hydro-

[1] VII. közlemény a differenciáló alkylezés gyakorlati alkalmazásáról. A VI. közleményt: «A hydrocinchonidin» stb. lásd Mat.-Termtud. Ért. LVI. kötet (1937) 249. l. alatt.

[2] Nevét onnan kapta, mivel ez a chinakéregféleség színében egy befuttatott rézlemez színére emlékeztet.

cupreint nátronlúggal választja el — amelyben könnyűszerrel oldódik — az esetleg változatlanul maradt hydrochinintől.[1] A szabad bázis éteres oldatából nem kristályosan, hanem amorf firniszszerű massza alakjában válik ki; tisztítására legjobban savanyú sósavas sóját használhatjuk, amely vízben nehezen oldható, úgy hogy ebből a közegből jól kristályosítható. A sókból ammoniákkal leválasztott bázis kristályos poralaku szokott lenni, 2 molekula kristályvízzel. Olvadáspontja 168—170°; vízben nagyon keveset, de alkohol, éter, chloroform és nátronlúgban könnyen és jól oldódik. Lúgos oldatából éterrel nem vonható ki; kémhatása erősen bázikus. Alkoholos oldatát vaschlorid sötétbarnára színezi (nem charakterisztikus); chlórmésszel és ammoniákkal azonban intenzív zöld színreakciót mutat. A sók közül a következők lettek eddig pontosabban jellemezve: savanyú chlorhydrát, $C_{19}H_{24}N_2O_2 \cdot 2HCl + H_2O$, tűk, vagy rhombos oktaéderek, melyek vízben könnyen oldódnak. Hydrocupreinchloroplatinát, $C_{19}H_{24}N_2O_2 \cdot 2HCl \cdot PtCl_4$, narancsvörös, vízben oldhatatlan, finom, lapos tűalakú kristályos csapadék. Hydrocupreinbijodhydrat, $C_{19}H_{24}N_2O_2 \cdot 2HJ + 2H_2O$, híg alkoholból sárga kristályok; olvadás- illetőleg bomláspontjuk 239—240°; vízben és alkoholban is egyaránt könnyen oldódik. Hydrocupreinsulfát $(C_{19}H_{24}N_2O_2)_2 \cdot H_2SO_4$; kis, vízben és alkoholban is nehezen oldható tűalakú kristályok. Hydrocupreintartrat, $(C_{19}H_{24}N_2O_2)_2 \cdot C_4H_6O_6 + 2H_2O$; vízben igen nehezen oldható tűalakú kristályok. Manapság a dihydrocupreinnek gyakorlati jelentősége főleg abban van, hogy közbeeső termék az úgynevezett Morgenroth-féle bázisok előállításánál, amelyek, mint eucupin, optochin, vuzin, stb. a dihydrocuprein különböző alkyléterei. Fiziológiai hatásáról aránylag még keveset tudunk. sokáig azt hitték róla, hogy maláriával szemben teljesen hatástalan, ezzel szemben azonban újabb vizsgálatok kiderítették, hogy a malária-plasmodiákkal szemben hatásos, bár nem olyan mértékben, mint a chinin.

Eddigi kísérleteimből[2] kitűnt, hogy hydrochinin helyesebben α-dihydrochinin a differenciáló alkilezésnél úgy viselkedik,

[1] A «Ver. Chininfabriken Zimmer et Co» Frankfurt a. Main privát közlése nyomán.

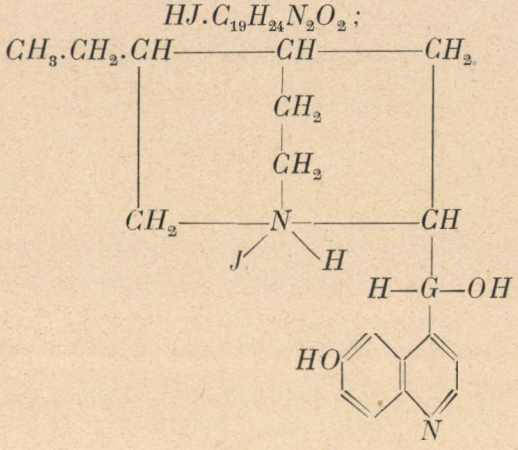
[2] Vesd össze: «A hydrochinin különböző alkylhalogén származékai». Mat. és Termtud. Ért. LIV. kötet (1936), 436. l.

mint a többi, ez irányban eddig megvizsgált chinabázis és sértetlen bitertiér jellegének megfelelőleg két izomér jodmethylátot — egy színtelen chinuclidin vagy α- és egy színes chinolin vagy β-származékot adott. Ez a kísérleti eredmény feljogosít arra a per analogiam következtetésre, hogy hydrocuprein is, amely nem más mint methylfosztott hydrochinin, ennek a műveletnek alávetve hasonlóképpen fog viselkedni. Ennek a kérdésnek kísérleti tanulmányozása annyival is inkább érdekelt, mivel a hydrochininből, a methylcsoport lehasításával keletkezett hydrocuprein ezen művelet folytán egészen más kémiai jelleget kap, amennyiben szabad, phenolos jellegű hydroxyl-csoport keletkezik molekulájában és így eltérőleg a hydrochinintől lúgokban oldható lesz. Egy szóval a probléma az volt: megvizsgálni, hogy egy bitertiér phenolbázis hogyan viselkedik a differenciáló alkylezéssel szemben? Kísérleteim eddigi eredményei igazolták, hogy a per analogiam való következtetés helyes volt és hogy a hydrocuprein is éppúgy, mint a hydrochinin két különböző színű jódmethylátot képez; sőt a kontraszt a két izomér között itt még nagyobb, amennyiben a gyönyörűen kristályosodó színtelen α-származékkal ellentétben a β-jódmethylát úgy látszik egy vörösbarna olajos test marad, amelyet kristályos formába hozni eleddig nem sikerült még.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

α-Hydrocuprein-jódhydrát.

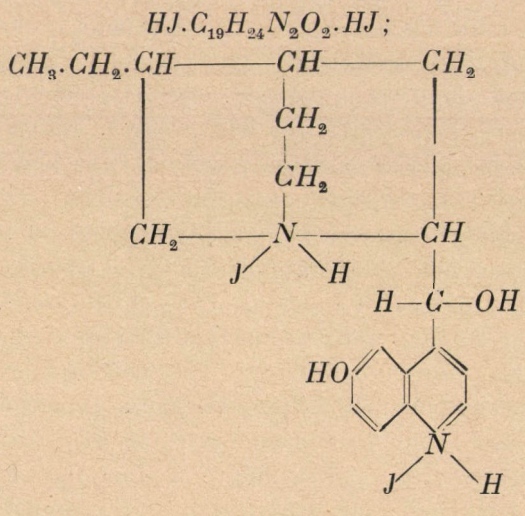
$HJ.C_{19}H_{24}N_2O_2$;



A kísérleteimhez használt hydrocuprein a «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co.» Majna melletti frankfurti gyárából származott és — mint azt fentebb is említettem már — nem a természetes nyersanyagból, a cinchona cuprea kérgéből, hanem műúton, a korrespondeáló hydrochininből lett előállítva a methoxyl-csoport methylgyökének kénsavval való lehasításával. Kitüntető szívességéért, amellyel nevezett alkaloidgyár ezen ritkaságszámba menő készítményt rendelkezésemre bocsátotta, e helyen is hálás köszönetemet fejezem ki. A készítmény a tisztasági követelményeknek mindenben megfelelt. Az irodalomban még fel nem sorolt primér vagy α-jódhydrogénsavas hydrocuprein előállításához vagy a bázisból magából, vagy pedig monochlorhydrátjából lehet kiindulni és ez utóbbinak forró vizes oldatát egy molekula jódkaliummal elegyíteni ; mire a jodid első pillanatra gyantásan azonnal kicsapódik, hogy a karcoló üvegbot alatt csakhamar megszilárduljon. Ez a nyers termék úgy forró vízben, mint forró metanolban is jól oldódik. Forrón telített vizes oldatból szemölcsökbe csoportosult apró tűalakú kristályok válnak ki, amelyek a nyilt kapillárisban 238—240° közt olvadnak, illetve bomlanak, de már jóval előbb feketednek. Elemzésük arra mutat, hogy egy molekula kristályvizet tartalmaznak, amely azonban közvetlenül, az anyag bomlása nélkül nem volt meghatározható. Elemzések: 0·1091 g vízből átkristályosított és 120°-nál szárított anyag adott 0·0550 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 27·24%. I. 0·1071 g vízből kristályosított és 120°-nál szárított só adott 0·0540 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 27·25% II. A $HJ \,.\, C_{19}H_{24}N_2O_2 + H_2O$ képletben a jód (theor. ért.) = 27·73%.

Hydrocupreindijódhydrát.

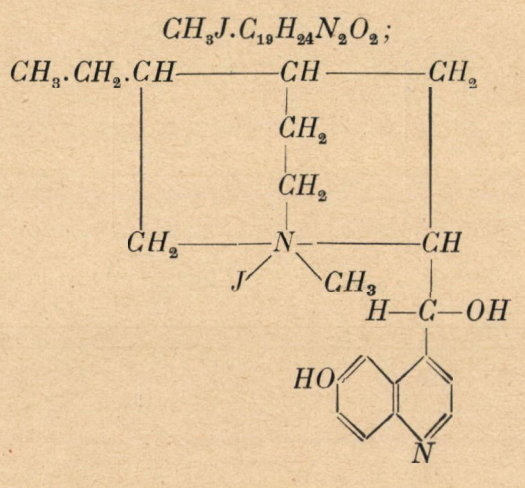
$HJ.C_{19}H_{24}N_2O_2.HJ$;



Az irodalomban egy hydrocupreinbijodhydrátról történik említés, amely vízben, alkoholban könnyen oldódik és két molekula kristályvízzel jegecedik. Előállítására a következő eljárás bizonyult célravezetőnek: 1 gram hydrocupreinmonochlorhydrátot (Zimmer készítmény) feloldunk egy molek. vagyis 2·9 ccm norm. sósav és nehány csepp vízben melegítés közben és a tiszta oldatba két molek., azaz 0·95 gram jódkáliumot adunk, mire az első pillanatban keletkezett olajos csapadék folytonos kavarás közben oldatba megy, majd pedig gyengén sárga színű kristályos tömeg alakjában újból kiválik. A kevés forró vízből való átkristályosításnál is ugyanazzal az óvatossággal kell eljárni, különben csak nehezen kristályosodó vörös olajokat kapunk, amelyek idővel elgyantásodnak és elbomlanak. A kristályos só vízben erősen savanyú kémhatással könnyen oldódik és légszáraz állapotban két molekula kristályvizet tartalmaz, amely 120°—130° között eltávozik. Elemzés: 0·7200 g légszáraz só a szárítóban 120°—130°-nál elvesztett 0·0428 g vizet, amiből H_2O (talált érték) = 5·95%. A $C_{19}H_{24}N_2O_2 . (HJ)_2 + 2H_2O$ képletben a H_2O (theoret. érték) = 5·96%.

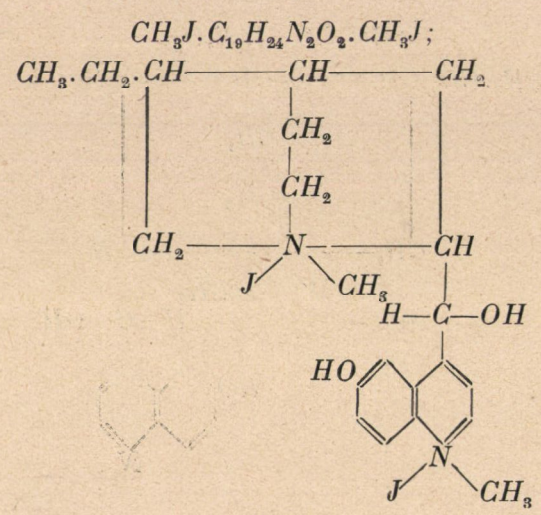
α-Jódmethylhydrocuprein.

$CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O_2$;



A hydrocuprein színtelen, tehát **α-** vagy chinuclidinjódmethylátjának előállításánál ugyanazt az eljárást követtem, amely az analog esetekben, a többi hydrochinabázisnál is bevált. Oldunk például 0·5 gram hydrocupreint (Zimmer) 5—6 ccm methanolban (amelyben könnyen oldódik), hozzámérünk egy molekulának megfelelő jódmethylt és a csaknem színtelen, oldatot jól eldugaszolt edényben sötét helyen egy-két napig magára hagyjuk. Rendesen már egy éjjeli állás után finom tűalakú, kristályokból álló félgömbalakú halmazok képződtek, amelyek az edény fenekét egészen ellepik, miközben az oldat vörösbarna színt öltött. Ezeket legjobb sok forró vízből csontszénnel kristályosítani; a szűrletből az új vegyület színtelen, fénylő tűalakú kristályokban azonnal, úgyszólván quantitativ kiválik. A nyilt kapillárisban 262°-nál olvadnak teljes bomlás közben, de már előbb feketednek, hideg vízben jóformán oldhatatlanok; oldódnak valamelyest alkoholban, főleg melegen. Elemzés: 0·1052 g 120° száraz anyag adott 0·0544 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 27·95%. A $CH_3J\,.\,C_{19}H_{24}N_2O_2$ képletben a jód (theoret. érték) = 27·97%.

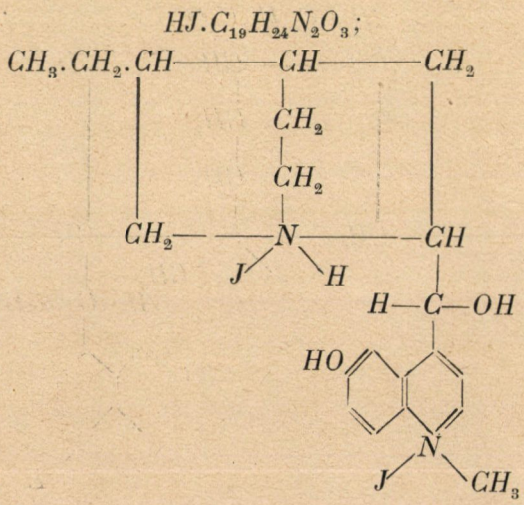
Hydrocupreindijódmethylát.



Ha ezt a karakterisztikus, borostyánkősárga hydrocupreinszármazékot a szabad bázisból kiindulva próbáljuk előállítani, nem igen fogunk célt érni; mint ezt a következő kísérlet, illetve annak eredménye bizonyítja. 500 miligram hydrocupreinbázis kevés methanolban oldva, két molekulánál valamivel több jódmethyllel a bombacsőben a forró vízfürdőben két óráig lett hevítve. A kivált kristályok szokott módon tisztítva az elemzésnél 26·64% jódot adtak; amely eredményből világosan kitűnik, hogy az így kapott termék nem lehet a keresett dijódmethylát, amelynek jódtartalma 42·62%, hanem nem más, mint még nem teljesen tiszta monojódmethylát, melyben a jód 27·97%. Ez a feltűnő eredmény úgy válik érthetővé, ha tekintetbe vesszük, hogy az 500 miligram bázisból a reakció első fázisában keletkezett α-jódmethylát a bombacsőben levő kevés methanolból fokozatosan kivált (teljes feloldásához legalább 50 ccm forró methanol szükséges) és így a feles jódmethyllel reakcióba lépni, azaz dijódmethyláttá átalakulni már nem volt képes. Ilyen tapasztalatok után már most úgy változtattam a kísérleti elrendezésen, hogy nem a szabad bázisból, hanem a vegytiszta (elemzett) α-jódmethylhydrocupreinből indultam ki és abból például 500 miligramot oldottam 50 ccm forró methanol-

ban (ennyi kell) és a bombacsőben lehűtve, adtam hozzá egy molekulánál valamivel több jódmethylt; a csövek két óráig lettek a forró vízfürdőben hevítve. Így eljárva a csövekben kristálylerakódás nem volt észlelhető még huzamosabb ideig tartó hűtés után sem. Ha azonban világos sárgaszínű tartalmukat egyharmadára koncentráljuk, időmulva (gyorsabban, ha az edény falát üvegbottal sűrűn karcoljuk) mézsárga, nagy, konyhasóalakú kristályok képződtek, amelyek szűrve, mosva és még egyszer methanolból átkristályosítva, majd 110—120°-nál megszárítva, a nyilt kapillárisban 238—240° között olvadnak teljes bomlás közben, de már jóval előbb barnulnak és feketednek. Szárításnál fényüket elvesztik. Az elemzésnél a keresett hydrocupreindijódmethylát jódtartalmát mutatták. Elemzés: 62·8 mg 120° száraz anyag adott 49·6 mg jódezüstöt, amiből jód (talált érték) = 42·68%. A $C_{19}H_{24}N_2O_2 . (CH_3J)_2$ képletben a jód (számít. érték) = 42·62%.

β-Jodmethylhydrocuprein-α-jódhydrát.



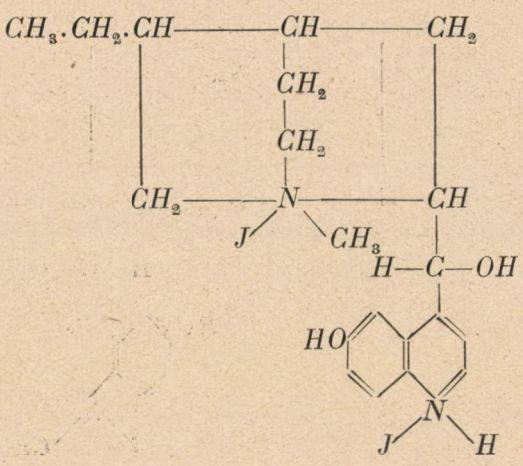
Ez az elevensárga színű hydrocupreinszármazék, amely — mint az a mellékelt szerkezeti képletből is kitűnik — a savionokat a chinuclidinfélben (α-helyzet), a jódmethylt pedig a chinolinrészben (β-helyzet) tartalmazza, aránylag könnyen és quantitativ ered-

ménnyel képződik, ha vízből átkristályosított és 120°-nál szárított α-jódhydrogénsavas hydrocupreint oldunk forró methanolban (1 gram 10—12 ccm-ben), a bombacsőben kihűlt oldathoz egy molekulánál valamivel több jódmethylt adunk és a csöveket két óráig hevítjük a forró vízfürdőben. A vörös színű reakcióoldatból hosszabb állás után sem válnak ki kristályok, ha azonban felére koncentráljuk és az edény fenekét üvegbottal karcoljuk, idővel félgömbalaku kristályhalmazok képződnek, amelyek borostyánkősárga finom tűkből állanak. Forró methanolból átkristályosítva ugyanazokat a jellegzetes formákat kapjuk. A nyilt kapillárisban 248—249°-nál olvadnak teljes bomlás közben, de már 230° körül is megfeketednek. Elemzés: 0·1211 g 110° száraz anyag adott 0·0980 g jódezüstöt, amiből jód (talált érték) = 43·73%. A $HJ \,.\, C_{19}H_{24}N_2O_2 \,.\, CH_3J$ képletben a jód (theroet. érték) = 43·64%.

A só forró vízben és alkoholokban jól, hidegben kevésbbé oldódik.

α-Jódmethylhydrocuprein-β-jódhydrát.

$CH_3J.C_{19}H_{24}N_2O_2.HJ$;



Amilyen könnyű feladat volt az előző fejezetben ismertetett izomér β-jódmethylhydrocuprein α-jódhydrátnak vegytiszta állapotban való előállítása, olyan kísérleti nehézségekkel kellett megküzdeni a mellékelt szerkezettel bíró jódmethylátsónak a készí-

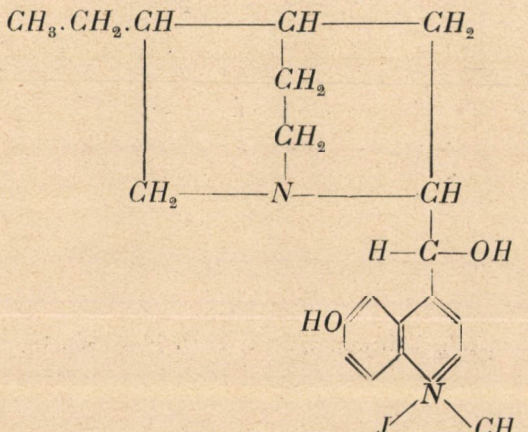
tésénél; amelyet abszolut tiszta állapotban nem is sikerült eddig előállítani és elemezni. A sok kísérleti próbálkozás közül itt csak egyet sorolok fel, amely aránylag még a legtisztább terméket adta. Például: feloldunk 513 miligram vízből, kristályosított (és elemzés szerint vegytiszta) *α*-jódmethylhydrocupreint egy molek. — 1·13 ccm — norm. sósavban és 1—2 ccm vízben s adunk a tiszta oldathoz egy molek. — 187·6 miligram — jódkaliumot; az oldat megsárgul, de csapadék karcolásra sem keletkezik. Hosszabb ideig hidegnek kitéve egy ízben hosszú, finom tűalakú kristályok képződtek, amelyek leszűrve vattaszerű tömeggé álltak össze. Mivel kristályosításuk sem vízből, sem methanolból (rendkívüli oldhatóságuknál fogva) nem sikerült, csak kevés vízzel mosva és szárítva kerültek elemzésre; ennek tulajdonítandó az 1%-os hiány a jódtartalomban.

Elemzés: 0·1274 g 120° száraz anyag adott 0·1000 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 42·42%. A $CH_3J \,.\, C_{19}H_{24}N_2O_2 \,.\, HJ$ képletben a jód = 43·64%.

Ennél jobb eredmény eddig nem volt elérhető.

β-Jódmethylhydrocuprein.

$C_{19}H_{24}N_2.O_2.CH_3J$;



A hydrocupreinnek ezt a színes jódmethylátját, amely a halogénalkylt — nem úgy mint színtelen izomérje — a chinuclidin, hanem a chinolinfélben tartja megkötve: eddig kristályos alakban előállítani nem sikerült. Ha a vegytiszta jódhydrogénsót ezen egyenletnek:

$$HJ \,.\, C_{19}H_{24}N_2O_2 \,.\, CH_3J + NaOH =$$
$$= C_{19}H_{24}N_2O_2 \,.\, CH_3J + NaJ + H_2O$$

megfelelő mennyiségű normál nátronlúggal hozzuk össze, a só vöröses színű szivacsszerű anyaggá változik, amely kénsav alatt szárítva gyantaszerű masszává zsugorodik össze, amelyet kristályos alakba hozni eddig nem sikerült. Ha pedig nagyobb higításban bontjuk el a sót, egy vízben oldhatatlan narancssárga-vörös olajat kapunk amely eddig fagyasztással sem volt szilárd alakba hozható. Nem tartom azonban kizártnak, hogy ez még sikerülhet. De ez az eddigi eredmény is világosan mutatja, hogy a hydrocupreinben is — akárcsak úgymint a többi chinaalkaloidban — két lényegesen különböző nitrogéncentrum létezik; sőt mutatja azt is, hogy kettejük közt a kontraszt még sokkal nagyobb és szembetűnőbb, mint az eddig megvizsgált hasonló esetekben.

Összehasonlítás céljából érdekes lesz ezeket a vizsgálatokat a cupreinre is (amely methylfosztott chininnek tekinthető) kiterjeszteni; egyelőre azonban ez az alkaloid sem a németországi, sem a hollandi gyáraktól nem volt beszerezhető; mert a «Bureau tot Bevordering van het Kinine-Gebruik» — Amsterdam közlése szerint a specialis «Cinchona cupreá»-t már sem Holland-Indiában, sem egyebütt nem kultiválják, úgy hogy ez a kéreg a nemzetközi forgalomban ez idő szerint nem kapható.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jún. 7-én tartott üléséből.)

BEITRÄGE ZUR CHEMIE DER ALKALOIDE VON «CINCHONA CUPREA».

Von FRITZ v. KONEK, korr. Mitglied.

I. Über Hydrocuprein.

In Fortsetzung seiner Versuche über differencierende Alkylirung biazotischer Alkaloide, berichtet der Vortragende über Erfahrungen mit Hydrocuprein, einem Alkaloid der Rinde von «Cinchona cuprea». Sein Ausgangsmaterial stammte aus der «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co. Frankfurt a. Main» (wofür er auch an dieser Stelle höflichst dankt) und war nach eigenem Verfahren durch Entmethyliren aus Hydrochinin gevonnen. Er konnte feststellen, dass auch dieses Alkaloid zwei grundverschiedene Jodmethylate liefert, nämlich ein farbloses α- und ein orangefarbiges β-; welch letzteres bisher allerdings nur als Öl erhalten werden konnte. Er folgert aus diesen experimentellen Erfahrungen, dass auch Hydrocupreni eine bitertiäre Base mit intaktem Chinolinkern — und womöglich noch grösserem Kontrast zwischen den beiden Stickstoffzentren — ist.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Juni 1937.)

TOVÁBBI VIZSGÁLATOK A PETTENKOFERIÁKRA VONATKOZÓLAG.

A II—IV. táblával.

PREISZ HUGÓ r. t.-tól.

Több év előtt (1932 november havában) alkalmam volt e helyen több ábra bemutatása kiséretében e tárgyra vonatkozó első vizsgálataim eredményeiről beszámolni, megállapítva, hogy a Pettenkoferiák valóban oly élőlények, amelyek legapróbb fejlődési alakjai bakteriumoknál jóval kisebbek, ezekbe behatolni képesek és bennük kedvező körülmények között igen nagyra megnőhetnek ezáltal el is roncsolva őket; bizonyos körülmények között azonban aprók maradnak a bakteriumok testében, utóbbiak életképességét nem érintik, sőt utóbbiakkal egyidejűleg oszlanak (ketté hasadnak) és bennük mint endosymbionták nem, vagy csak alig láthatólag tovább élnek mindaddig, amíg oly viszonyok közé nem kerülnek, amelyek továbbfejlődésüket, megnagyobbodásukat előmozdítják.

Ezek a vizsgálataim tulajdonképpen régebbi (1917-beli) észleléseimhez fűződnek, melyeket diphtheriára gyanús gyermek torkából kitenyésztett és a Bacillus mucosus csoportjába tartozó, (a FRIEDLÄNDER-féle pneumobacillussal rokon) bakteriumfajon tenni alkalmam volt.

Említett első előadásom óta a legutóbbi időkig állandóan foglalkoztam ezen apró lényekkel, különös tekintettel fejlődésük, növekedésük menetére, legfőképpen pedig arra nézve, hogy miképpen támadnak a Pettenkoferiáknak ama legapróbb csírái, amelyek bakteriumokba behatolni, azokat inficiálni képesek és amelyeket a Bac. mucosus vizsgálata alkalmával mint apró, nyeles gombácskákat először láttam.

A karbolvizes toluidinkékkel pirosasra festődő (de más módon

is könnyen festhető) apró pont, melyet P(=Pettenkoferia)-tartalmú és pl. 2%-os lithiumchloridos agaron nőtt bakteriumokon vékony nyélen ülve láthatni, nyilvánvalóan már nem a legelemibb alakeleme a P-nak, hanem annak már legalább kezdetleges továbbfejlődési, csirázási állapotában van (l. az II. táblán a 21—24., a III. táblán az 1—3. képet).

Pettenkoferiás olyan bakteriumkulturákban, ahol a PP (= Pettenkoferiák) nagyra nőhettek és meg is érhettek, mint legvégsőbb, legapróbb és legfiatalabb termékeket igen apró, gömbös alakokat ismertem fel, melyek natív készítményben, vagy in situ fedőlemez alatt immersiós lencsével nézve mint legapróbb hólyagocskák mutatkoznak, belsejükben egy sötét ponttal többnyire széli elhelyezkedésben (II. táblán 1., 2.).

Ezeket a legfiatalabb csíráit a PP-nak hólyagcsás csíráknak nevezném, nemcsak mivel maguk legapróbb hólyagcsák benyomását keltik, hanem azért is, mivel nagy és érett PP hólyagszerű képződményeiben mint fészkekben termelődnek. Ezeken, az érett nagy PP által leadott és szabadon fekvő csírákon tudtam a fejlődést figyelemmel kísérni, ami annál szerencsésebb körülmény volt, minthogy a bakterium testébe került fiatal csirák további alakulásának és fejlődésének mikroskopi megfigyelését zavarja és megnehezíti a bakteriumnak magának belső tartalma és ennek megváltozhatása az infekció következtében.

Ezen hólyagcsás csírák növekedése következőképpen alakul. Amikor még alig nagyobbodtak meg, már láthatni bennük finom harántvonalat, mely két egyenlő félre osztja testüket ; esetleg már előbb mutatkozik a csírák közepében egy pontszerű, sötétre festődő testecske (mag?), melyet a harántvonal szintén kettészel, majd a két fél kettéhasad. Ezalatt a csíráknak eredetileg hajszálfinomságú körvonalai többé-kevésbbé erősen megvastagodnak. Mindezek a változások végbemehetnek a nélkül, hogy a csira átmérője többre, mint az eredetinek néhányszorosára (3—5-szörösére) növekedett volna (II. tábla 3—6. kép.).

Az első oszlás után az egyes új fiatalok növekednek és egyideig hasonló módon tovább oszlanak. Bizonyos idő mulva azonban a nagyobbodó fiatal P szerkezete megváltozik annyiban, hogy belsejének nagy részét sötétre festődő anyag (protoplasma) tölti ki,

melyet alig, vagy gyöngén festődő udvar vesz körül; ilyen kép azt a benyomást kelti, mintha ebben a stádiumban az előbb pontszerű centrum megnövekedéséből támadt volna a most sokkal nagyobb sötét középrész. Ebben a fejlődési szakban is tovább folyik a ketté való oszlás, amelynek különböző formái hosszúkás, majd többékevésbbé gubószerűen befűzött, majd 8-as alakok (II. tábla 7., 8. kép.).

Úgy látszik, hogy az ebben a phasisban látható festetlen külső zóna csak ideiglenes alkotó része, burka a P-nak, amelyet további növekedése folytán magáról levet; legalább láttam olyan képeket, amelyekben a belső sötét rész éppen kibúvóban volt a külső héjszerű burokból (II. tábla, a 8. kép-csoportban.).

Ebben az időszakban a PP gömbös alakúak, egyneműek, azaz belső szerkezet nélküliek, natív állapotban kissé zöldesek és erősebben fénytörők, toluidinkékkel jól festődnek sötét kékesibolyára. Továbbá kezd a testükben mutatkozni a nagyon jellemző kiválása hólyagszerű képződményeknek, kezdetben egy, majd több vagy sok, kisebb és nagyobb. Ezek a hólyagok minden tekintetben eltérően viselkednek a zöldes, fénytörő és jól festődő plasmától, amelyben fekszenek, amennyiben színtelenek, nem is festődnek és nem fénytörőek.

Fiatalabb PP plasmájában az első hólyagcsa gyakran a gömbös alak közepében jelenik meg (II. tábla 9.). A hólyagok nagyobbodnak, közben pedig újabbak keletkeznek úgy, hogy a nagyra (10—15μ átmérőre) nőtt P telve lehet kisebb-nagyobb hólyagokkal, melyek között a hézagokat a még fennmaradt plasma tölti ki.

Legszembetűnőbbek a nagy, szabályosan gömbölyded hólyagok, melyek sokszor szorosan a P legkülsőbb rétegeiben helyezkednek el (II. tábla, 10. képben.).

Hólyagok megjelenése a PP további oszlásának egyáltalában nem vet gátat.

Idősebb és nagy PP-ban sokszor nincsenek nagyobb hólyagok, hanem az egész plasmájuk számos apró, kisebb-nagyobb és kevésbbé szabályos alakú hólyagoktól szivacs-, illetve szitaszerűen át van likadva (IV. tábla, 6.).

A hólyagok sokszor egyenletesen vannak a P egész testében eloszolva; nem ritkán azonban csakis vagy főleg a P belső része

mutatkozik hólyagos szerkezetűnek, míg ezt a belső részt a plasmának tömörebb (hólyagmentes vagy hólyagszegény) zónája veszi körül.

Érdekesek a képek, melyek azáltal keletkeznek, hogy a P-ban egy periferiás fekvésű hólyag erősen megnőve, a plasmát az ellenkező oldal felé nyomva azt félholdalakuúvá összelapítja, ami arra mutat, hogy a hólyag nagy nyomás alatt növekszik. Méginkább figyelemreméltó, hogy ilyen alakokból a hólyag szabaddá válhat a plasmától, mely utóbbi mint szabad félhold visszamarad (II. tábla, 10. és 13. képben.).

A plasmás és hólyagos résznek egymástól való különválása kevésbbé szabályos formákban is nyilvánulhat meg, t. i. úgy, hogy a plasma különböző nem szabályos csészévé alakul, melynek homorulatából a belső rész hurkaszerűen kitolul (II. t. 17.) és vagy nyilvánvalóan hólyagos szerkezetű, vagy apró, sötétre festett szemcsékkel telt. A plasmától különvált hólyagos eredetű képződményeknek tartom azokat a több-kevesebb sötét szemcsét tartalmazó halvány gömböket (karikákat), amelyekkel nem ritkán találkoztam (II. t. 16.). Mindezek a képletek legapróbb P-csírák termelésére vannak rendeltetve.

A PP törzsanyaga kétségkívül azoknak protoplasmás része; ez növekszik és bizonyos fejlődési szakban ez termeli és táplálja (legalább bizonyos ideig) a hólyagokat és ezek tartalmát. A hólyagok pedig fiatal csírák fejlődésének fészkei.

Fiatal csírák keletkezését legjobban nagy hólyagokon, lenyomati festett készítményekben tudtam figyelemmel kísérni (2% LiCl- vagy 3—4% $CaCl_2$-tartalmú közönséges agaron nőtt tenyészetekkel dolgozva).

A hólyagok tartalma, nagyoké is, kezdetben homogennek látszik, vagy legalább is határozott szerkezetet nem mutat. Később mindjobban láthatóvá válik a hólyagbennék szemcsézett volta és pedig festetlen készítményekben az által, hogy a szemcsék valamennyire fényesebbek (kissé fénytörőek) lettek, festett készítményekben pedig az által, hogy a színtelen szemcsék kisebb-nagyobb részében egy-egy sötétpirosas apró pont foglaltatik (IV. t. 4., 7.). Ezek a színtelen szemcsék, vagy inkább apró gömböcskék, olykor különböző nagyságúak, a nagyok sokszor kisebbek halmazainak látszanak és valószínű, hogy utólag még több kisebbé esnek szét.

Ha a fiatal csírák megértek, a hólyag a szabad felületén megreped és a csírák kilépnek belőle (IV. t. 7.). Ezek a csírák azonosak azokkal az apró hólyagcsaszerű alakelemekkel, amelyeket natív állapotban is ismételten szabadon láttam és amelyekről már előzőleg szólottam is (II. t. 1., 2.).

Nagy hólyagokban ilyen csírák kisebb-nagyobb csoportjai fejlődnek, de éppúgy támadhatnak kicsiny hólyagokban is. Gyakran láthatni nagyobb PP belsejében (festett készítményen) színtelen kicsiny hézagokat, a fiatal csírákra jellemző sötét pirosas, egy vagy két, esetleg több ponttal, vagy PP szélén apró gödröket (széli kis hólyagokat), s bennük egy-egy sötét pontot. (A II. t. 14. képcsoportjában és a IV. t. 5. ábrájában láthatni ilyeneket.)

Megjegyzendő, hogy a PP — legalább szilárd tápanyagon nőve — lap szerint terjeszkednek, tehát lapos, vékonytestű lények; ennél fogva csakis a legszélsőbb fekvésű hólyagokról állapítható meg, hogy meg vannak-e nyilva vagy nem, míg a P körvonalaitól beljebb eső hólyagokról madártávlatból nem igen ítélhető meg, vajjon nyitva vagy zárva vannak-e.

Mint csíratermelő képződmények említendők, bár ritkábban találkozhatni velük, nagyobb (6—10×10—15μ) méretű, gömbös, vagy tojásdad, vagy kevésbbé szabályos képletek sötétre festődő szemcsékből álló tartalommal. Ezeket csíratömböknek, ha szemcséiknek spórajelleget tulajdonítunk, sporocystáknak is lehet nevezni (II. t. 14. képben balra; 15. ábra. — III. t. 12.).

Ezek a csíratömlők ugyancsak a PP hólyagos részéből fejlődnek és pedig vagy úgy, hogy a plasma mint tömörebb tok burkolja a tömlő szemcsés belsejét, vagy úgy, hogy ez a belső szemcsés rész a plasmából kilépvén, tőle különválik, amely esetben a tömlő fala vonalszerűen vékony (II. t. 13. kép.).

Egyáltalában úgy látszik, hogy a P hólyagja, illetve hólyagos része és plasmája, legalább a fejlődés bizonyos szakán túl, nincsen többé egymásra utalva, hanem elválhatnak egymástól további működésük és rendeltetésük érintése nélkül; a plasmás rész tovább is nő és termel új hólyagokat, a hólyagos részben pedig tovább folyik a szemcsék termelése.

Hogy ezek a tömlők sporocysták és a bennük foglalt szemcsék spórák lennének, azzal nem egyezik az a tény, hogy nemcsak a

különböző cysták szemcséi különböző nagyságúak, de egy cystán belül is kisebb-nagyobb szemcsék vegyesen lehetnek jelen; már pedig a spórák általában mind nagyságra, mind alakra fölötte egyforma képződményekként ismeretesek. Mindamellett lehetséges, hogy a szemcsék méretbeli eltérései abból értelmezendők, hogy a tömlők különböző korúak és ennél fogva a szemcsék (spórák?) a kifejlődés különböző szakában vannak; talán csak a legkisebbek az érettek, míg a nagyobbak még további oszlás előtt állanak, tehát még teljesen kifejlődve nincsenek.

Egészen hasonló, azaz különböző nagyságú, sötétpirosra festődő szemcsék más megjelenési módjával is találkoztam; ugyanis előfordul, hogy szivacs- vagy szitaszerűen átlikgatott nagy PP-ban egyes élesen körülírt, kerekded vagy kevésbbé szabályos területek tele vannak hintve ilyen szemcsékkel. Továbbá pedig nem ritkán láthatni hasonló szemcséket oly készítményekben, ahol nagy PP elhalóban vannak, amikor is feloldódó, szétfolyó és gyöngén festődő anyaguk és környékük többé-kevésbbé sűrűn be van hintve szemcsékkel, amelyek legkisebbjei 1200-szoros nagyításban éppen még meglátható apró pontok. Nem tudnám eldönteni, vajjon ezek az apró szemcsék a P legapróbb élő csírái, vagy pedig valamely alkotó anyagának, chromatinjének élettelen törmeléke.

Szem előtt tartva most már az ismertetett legapróbb képződményeket, ú. m.: a hólyagcsás csírákat, a cystákban termett szemcséket és végre a cystaképződés nélkül keletkezett és épp az imént jelzett szemcséket, felmerül az a kérdés, hogy közülök melyek azok az apró csírák (pontok), amelyeket bakteriumokhoz tapadni és beléjük hatolni látunk. Ezidőszerint ezt a kérdést kísérletileg megközelíteni nem igen lehet, főleg azért, mivel P-mentes bakteriumokat tenyészteni nem tudunk; ennélfogva e kérdésben egyelőre csakis a mikroskopi vizsgálatra vagyunk utalva.

Alkalmas tenyészetekben a bakteriumokat inficiáló legfiatalabb císrázó PP alakilag kicsiny gombostűre vagy apró kalapos gombára hasonlítanak, amint norámlis kicsinységű bakteriumokon tapadva ülnek; állnak pedig pontszerű fejecskéből, melyet rövid, vonalszerű nyél köt össze a bakteriummal. A pontszerű csírarészlet úgy méretre, mint festődésre nézve egyaránt megfelelhetne úgy a hólyagcsásnak nevezett P-csirák jellemző, festődő pontjának, mint

a tömlőkben (cystákban) fejlődő apró szemcséknek, valamint végre nagy PP szétesésében szabaddá való kicsiny szemcséknek is. Minthogy azonban az utóbbi kétféle szemcsék meglehetősen egyenlőtlen méretei nem valószínűsítik azt a föltevést, hogy ők volnának a PP legvégső, azaz legfiatalabb csírái, akár spóráknak, akár elemi testecskéknek nevezzük őket, továbbá mivel semmi jelét nem láttam annak, hogy ezek a szemcsék élnének és növekedni tudnának, ennélfogva nemis ő bennük látom szükségképpen azokat a kicsiny elemeket, melyek csírázásuk alkalmával bakteriumokhoz tapadva nyelükkel beléjük hatolnak. Ellenben lehetségesnek kell tartanom, hogy a hólyagcsás csírák vannak erre képesítve, amit a következőkkel támogathatni vélek.

A hólyagcsás csírákra nézve — amint az előzőkben már kifejtettem — meg tudtam állapítani, hogy ugyanazon tápanyag felületén, ahol keletkeztek, szabadon, azaz bakteriumokon kívül, nőni, oszlani tudnak; hogy bakteriumokba való invázióra is alkalmasak, annak nézetem szerint semmi sem szól ellene. A folyamatot úgy képzelem el, hogy az apró hólyagcsás csira hólyagos részéből lesz a nyél, amely odatapad, majd behatol a bakteriumba, míg a chromatikus pont mint fejecske, legalább még egy ideig, a nyélen ülve marad.

Ha valóban így van, akkor ebből következik, hogy fejlődési körében a P nincs szükségképpen bakteriumokban való együttélésre utalva, hanem hogy csakis körülményektől függ, hogy vajjon a hólyagcsás csírák szabadon, vagy pedig előbb bakteriumokba hatolván fejlődnek-e tovább. Ha azonban nem a hólyagcsás csírák a behatoló és fertőző csírák, akkor föl kellene tételezni, hogy erre a szerepre más apró elemek, ú. m. az említett szemcsék valamelyik félesége van hivatva, ami azonban nem változtat azon, hogy hólyagcsás csírákból kiindulólag — bakteriumok közbejötte nélkül is — végbemehet a PP fejlődési köre egészen a hólyagcsás csírák és a különféle szemcsék újra való képződéséig.

E szerint a PP nem tekinthetők bakteriumok obligát symbiontáinak, hanem csak fakultatív értelemben volnának azok.

A PP és bakteriumok közötti viszony a PP-nak csak azon fejlődési fokán jelezhető symbiosisnak, helyesebben endosymbiosisnak, amidőn és ameddig a PP-nak legapróbb, mint olyanok alig felismerhető alakjai élnek a bakteriumok testében és ennek osz-

lásával (hasadásával) együtt és karöltve oszlanak a nélkül, hogy megnövekednének és a nélkül, hogy az illető bakteriumok életét és életképességét lényegileg károsan befolyásolnák. Ez azonban csak olyan külső föltételek mellett lehetséges, melyek bakteriumokra nézve kedvezőek, PP-nak ellenben éppen csak annyira tűrhetők, hogy tovább vegetálnak ugyan, tovább nőni és fejlődni azonban nem tudnak; ezek a feltételek a bakteriumok tenyésztésére használatos tápanyagokon (pl. húslé-pepton-konyhasó-agaron) nagy mértékben meg vannak adva és ez teszi érthetővé, hogy a bakteriumkutatásnak évtizedek óta világszerte elterjedt gyakorlása ellenére a PP-at már előbb nem ismerték fel.

A kétféle aprólény életföltételeinek ilyenféle tápanyagokon való kiegyensúlyozott volta értelmezi, hogy valamely P-val fertőzött bakteriumfaj ilyen anyagon számtalan továbbtenyésztgetés ellenére és évek multán is még mindig fertőzöttnek bizonyul.

Mihelyt azonban az életfeltételek a PP számára megjavulnak és egyidejűleg a bakteriumokra nézve talán rosszabbodnak, a két mikroba között megbomlik a biológiai egyensúly és sokszor meglepő ilyenkor a PP óriási megnövekedése, ami által a bakteriumok testét megduzzasztják és szét is roncsolhatják. Ilyen viszonyok között eszerint a különben ártatlan PP a bakteriumok veszedelmes és pusztító parazitáivá lesznek. Ismételten volt alkalmam tapasztalni, hogy lithium- vagy calcium-chlorid-tartalmú agartápanyagon, melyen bőségesen nőttek nagy PP, néhány nap multán a reáoltott P-tartalmú bakteriumok végképpen, vagy csak egynéhány csíra kivételével elhaltnak bizonyultak (l. III. t. a közönséges agaron (7) és a lith.-agaron (8) nőtt bakteriumokat).

Addig, amíg a P mint kicsiny endosymbionta a bakterium testében él, valószínűleg az utóbbinak anyagából táplálkozik is; de vajjon ez így marad-e akkor is, amikor a P óriásivá megnövekszik a bakterium testén belül és ez utóbbi is kórosan túlteng és a határfelületén az osmosis-viszonyok is lényegesen megváltozhattak, az kérdéses. Hogy azonban ilyenkor a növekvő PP a bakteriumok anyagát elfogyasztanák, avagy hogy bakteriumokon kívül gyarapodó PP bakteriumokat felfalnának és velük táplálkoznának, ahogyan Kuhn és Sternberg vélik, arra nézve vizsgálataim folyamán a legkisebb támpontot sem találtam. Ellenben láttam

PP-at óriási méretekre megnőni oly tenyészetekben, ahol bakteriumok csak igen-igen gyéren és egyenkint elszórtan voltak láthatók. Minthogy azonban a nagy PP vékony és lapostestű lények, előfordulhat, hogy alattuk vagy fölöttük fekvő pálcikák (bakteriumok) azt a benyomást keltik, mintha a PP felfalták volna őket, valamint megeshetik az is, hogy megnyílt csírahólyagba véletlenül belekerül egy vagy több pálcika, azt a gondolatot keltve, hogy itt a P részéről bakteriumok bekebelezése forog fenn (II. t. 14. csoportban.).

A mikroskopi képek, melyeket P-val fertőzött bakteriumok kedvező tápanyagon nőtt tenyészetei mutathatnak, jellegre nézve nagyon különbözőek lehetnek a szerint, hogy a legszembetűnőbb nagyobb és nagy PP-alakok szabad, azaz bakteriumokon kívül fekvő fiatal csírákból fejlődtek, vagy pedig olyan bakteriumokból, amelyek a symbiontát öröklés folytán tartalmazzák, vagy végre olyanokból, amelyeken a kívülről való infectiónak jelei felismerhetők.

A szabad fiatal csírákból fejlődő P-alakokat jellemzi a szabályos gömb vagy tojásalak (IV. t. 5.), vagy legalább ívelt vonalú konturok (IV. t. 1—4.), amit érthetővé tesz az a körülmény, hogy minden irányban való terjeszkedésüknek akadálya nincs, míg a bakterium hosszúkás alakja, bizonyos mértékben merev külső rétege (ektoplasmája) és belsejének változó ellenállása a benne növekvő P alakulására nem maradhat befolyás nélkül.

Alaktani szempontból nagyon érdekes, hogy a bakterium mint gazdasejt nemcsak adott és többé-kevésbbé merevnek képzelhető formájánál fogva, tehát passziv ellenállása által befolyásolja a fertőzött bakteriumból keletkezhető alakulatokat, hanem az által is, hogy a parasita helyi ingerére ő maga is körülírt túltengésre képes, ami által rajta a parasitának, vagy terjeszkedésének megfelelőleg dúdorok vagy ujjszerű nyulványok támadhatnak (II. t. a 20. képcsoportban a 2. utolsó ábra és a 28.). PP-nak bakteriumok testében való nagyranövése a legkülönösebb formák keletkezéséhez vezethet (II. t. 29—32.).

Az öröklésileg fertőzött bakteriumokban a symbionta csak igen apró formában van jelen. A szokásos tápanyagokon nőtt és normálisnak tekintett bakteriumokban kellő és kíméletes festéssel

sokszor láthatni többnyire a pálcikák tengelyében fekvő sötétre festett pontot, vagy rövid pálcikát a közepén esetleg befűződéssel; sokszor ezeket halványabb festésű udvar veszi körül. Némely vizsgáló ezeket az apró képleteket (II. t. 18., 19.) a bakterium sejtmagvának tekinti, míg mások, akik tagadják, hogy bakteriumnak magva lenne, mint pl. KUHN és STERNBERG, éppen ezeket az apróságokat tartják a fiatal symbiontáknak; annyi bizonyos, hogy méreteikre és festődésre nézve hasonlítanak a nagy PP belsejében sokszor látható pontszerű, világos udvartól környékezett szemcsékre.

Ha ily módon, azaz öröklésileg fertőzött és szokásos tápanyagokon minden feltűnőbb alaki rendellenesség nélkül növő bakteriumokat a PP-nak kedvező tápanyagra átoltunk, élénkebb gyarapodási ingerük sokszor magával hozza hosszabb és vastagabb bakteriumláncok és fonalak keletkezését. Ha azután ezekben a symbiontáknagyra nőnek, a fonalak lefutásában orsó- vagy gömbalakú felfuvódások támadnak sűrűn vagy ritkábban egymás után a szerint, hogy sok vagy kevesebb csíra foglaltatott-e bennük (III. t. 9.).

Formákra nézve legváltozatosabb a tenyészet képe akkor, ha a bakteriumoknak apró P-csírák által való exogen infectiója áll előtérben, amikor is a csíra tapadása és behatolása helyén a bakterium belsejében, de még felületén is, a PP növekedése következtében különleges és keletkezési módjukra jellemző alakulatok támadhatnak.

Az apró, nyeles P-csírák (kicsírázó spórák?) a pálcikák egyik hosszoldalának közepén szoktak tapadni, éppen ott, ahol a bakterium ketté szokott oszlani és az új válaszfal többnyire látható is (III. t. 1—3.). A csírák nyele megrövidülvén, pontszerű fejük ráfekszik a pálcikára és jelentősebb gyarapodás nélkül utóbbiba be is mélyedhet. Sokszor azonban már e folyamat közben a fiatal P terimében megnagyobbodik és a behatolás különböző phasisaiban különböző képeket mutathat. Ekkor mint pálcika tűnik fel, mely szorosan rajta fekszik a bakteriumon, amelynél sokszor alig vékonyabb és tőle csak sokkal sötétebb festődése által különbözik; később beljebb hatolva a bakterium határvonalában, még később ben ennek belfelületén tapadva látjuk (II. t. 20—25.). Egy további

növekedési szakban a kis P már benne fekszik a pálcika testében, többnyire körülvéve egy gyöngén festett keskeny udvartól. A behatolt csíra helyén a bakterium testén nem ritkán púpos, félgömbös vagy hosszabb kinövések támadnak, melyek belsejében ott van a pontszerű vagy nagyobb parasita (II. t. a 20. és 25. ábracsoportban.).

Olykor azonban a fiatal élősdi csak részben merül el a pálcikába, részben pedig kívüle marad; ilyenkor a két kisebb-nagyobb gömböcskét rövid vékony szál köti össze egymással (II. t. 24., 25.).

Ismét máskor a fertőző csirák az odatapadásuk helyén növekednek nagyobb gömbös vagy tojásdad alakokká, melyekből a pálcikák, illetve fonal testébe jobbra és balra egy-egy nyúlvány mélyed gyökér módjára (III. t. 5. — II. t. 26. bal ábra). A csírák tapadási helye, amint már említve volt, rendszerint a pálcikák hasadási pontja; ha ez a hasadás megtörtént, az e helyen ülő fiatal P pedig tovább gyarapszik, nem ritkán megesik, hogy ez által a kettéoszlott pálcika vagy fonal végei a parasita belseje felé vongáltatnak (II. t. 26., 27.). Nem éppen ritkán láthatni azonban azt is, hogy a hasadt bakteriumon ülő parasita is hasadóban van, vagy már ketté is van hasadva.

Bakteriumok legkülsőbb rétegeiből induló és nagyranőtt PP alakilag olyformán ülnek pálcikákon, fonalakon, mint pl. diverticulumok csöves szerveken vagy zsákszerű aneurysmák verőereken (III. t. 6.).

Pettenkoferiás bakteriumtenyészetek mikroskopi képe különben egy- és ugyanazon kísérlet folyamán is lényegesen megváltozhatik. Ha pl. normális tápanyagon nőtt tenyészetet, amely csakis vagy főleg öröklésileg, tehát endosymbiontákkal volt fertőzve, lithium- vagy calcium-chloridos agarra oltunk át, akkor a pálcikák és fonalak belsejéből nőtt orsók és gömbök (gyöngysorok) jellegét várhatjuk, de csak a tenyészet fiatalabb korában, mert ha a körülmények a PP érlelésére kedvezőek voltak, akkor a kép jellege megváltozhatik azáltal, hogy a szabaddá vált hólyagcsás csírák gömbös PP-ká megnőnek, valamint azáltal is, hogy még ép pálcikák körülöttük keletkezett fiatal csiráktól fertőződnek, amikor is belőlük a jellemző inváziós (külső fertőzésből eredő) alakok fejlődnek.

Akár öröklött symbiontából, akár inváziós vagy szabad csí-

rákból indult ki a PP fejlődése, miután nagyra nőttek, belső szerkezetükre nézve lényeges különbségek köztük nem mutatkoznak.

A parasita még az anyasejt (bakterium) hártyáján belül nagyra, $10 \times 15\,\mu$ kiterjedésűre és még nagyobbra nőhet; alakja olykor vaskos orsó, melynek végei átmennek a fonalba, amelyben nőtt; sokszor ilyen nagy orsó közepén harántul keresztül húzódó sötét diaphragma jelzi, hogy az oszlási tevékenység ily nagyra nőtt mikrabákban sem szűnt még meg. Más hasonlóan nagyméretű alakok kevésbbé szabályosak és semmivel sem árulják el, mintha még a bakterium külső rétege (hártyája) venné körül őket.

Az ilyen nagy PP testét a jól festődő plasma és a nem festődő hólyagos elemek alkotják a nélkül, hogy viszonylagos mennyiségük és eloszlásuk valami törvényszerűséget árulna el. Sokszor a hólyagos, szivacsszerűen hézagos állomány az egész képződménynek kisebb-nagyobb középrészét foglalja el, melyet a plasmának többé kevésbbé széles zónája vesz körül. A hólyagos állomány alapanyaga ugyancsak protoplasma, amely a hólyagok közötti hézagokat háló vagy rece módjára tölti ki. A hólyagos állomány karbolvizes toluidinkékkel megfestve, sokszor világosabb és vöröses árnyalatú, míg a tömörebb plasmazóna sötét ibolyaszínű. A hólyagos állomány olykor több-kevesebb sötétpirosra festődő, egyenlőtlen nagyságú és alakú szemcséket tartalmaz; utóbbiakból származnak valószínűleg a hólyagcsacsírákat jellemző, pirosra festődő pontszerű képletek. Olyanféle alakokat, melyeket nagy PP magvainak tekinthettem volna, nem észleltem.

Gyakran azonban a plasma nem mint tömör zóna veszi körül a hólyagos állományt, hanem az egész P hólyagos állomány jellegét mutatja, amit úgy kell értelmezni, hogy a plasma egész tömegében termelt hólyagokat. Utóbbiak lehetnek többé-kevésbbé nagyok vagy kicsinyek egy- és ugyanazon P-n belül is; különös említésre méltó azonban, hogy nem ritkán annyira egyenlő és kicsiny méretűek, hogy valóban kisebb méretű bacillusok és coccusok benyomását és ezzel azt a gondolatot kelthetik, hogy az efféle apró záradékokkal (hólyagcsákkal) telt gömbök esetleg oly képződmények (cysták), melyek bakteriumoknak eddig ismeretlen, akár ivaros, akár ivartalan szaporodására szolgálnak (l. III. t. 10., 11.). Ezt a lehetőséget nem véltem egyszerűen tagadásba vehetőnek, hanem

szükségesnek tartottam tisztázni a kérdést, vajjon a szóban forgó képződmények bakteriumok vagy pedig PP fejlődési körébe tartoznak-e; erre vonatkozott az első előadásom közlésében annak idején kifejezett fenntartás. Azóta számtalan kísérlet és vizsgálat útján meggyőződtem, hogy ezek az alakra és méretre nézve *bakteriform* zárványok nem lehetnek bakteriumok éspedig a következő okoknál fogva. Ha az ilyen bakteriform zárványokkal (apró hólyagokkal) telt nagy képletekből bakteriumok termeltetnének, akkor lenyomati készítményekben, melyek a mikrobákat eredeti helyükön fekve mutatják, bizonyos számaránynak kellene — legalább nagyjában — mutatkoznia a bakteriform apróságokat tartalmazó nagyobb képletek és a körülöttük fekvő szabad bakteriumok között, ami azonban egyáltalában tapasztalható nem volt. A továbbiakban pedig tapasztaltam, hogy idősebb PP belsejében hólygocskáak keletkeznek, kisebbek és nagyobbak vegyesen, olykor azonban meglepően egyforma méretűek és bakteriumokra hasonló alakúak éspedig oly készítményekben, vagy lenyomati készítmények olyan helyein is, ahol bakteriumok egyáltalában láthatóak nem voltak. A bakteriform apró képletekkel telt gömbös, vagy tojásdad, vagy szétesö nagy alakok semmiesetre sem a bakteriumszaporodásra szolgáló képződmények, hanem PP bizonyos fejlődési phasisai, amelyekben alkalmas körülmények között legapróbb P-csirák esetleg még fejlődhetnek ; az apró bakteriform elemek bakteruimvolta ellen szól különben az is, hogy festőanyagokat éppúgy nem vesznek fel, mint a PP egyéb nagyságú és alakú hólyagos elemei sem.

PP a nekik kedvező tápanyagon aránylag alacsony (28° C körüli) hőfokon is gyorsan növekednek. Fertőzött bakteriumok lithiumchloridos agaron és 37°-on 2—3 óra mulva vastagságuknak már 2—5-szörösére duzzadhatnak meg, e tekintetben azonban az egyes bakteriumok között nagy különbség mutatkozhatik, egyesek szobai hőmérsékleten is 10—15 óra mulva 10 μ-nyi átmérőre növekedhetnek meg.

További növésök folytán jóval nagyobb méreteket is érhetnek el (20×23 μ-ig). Valamennyire megnőtt PP esetleg már az első napon belül árulják el pusztulásuk jeleit, aminők többé-kevésbbé halványabb festődés, a körvonalak szétfoszlása és a környezetbe való beolvadás. Ez megtörténhetik a nélkül, hogy az illető PP ma-

gasabb fejlődési fokot értek volna el, vagy hogy megértek volna, azaz anélkül, hogy bennük csirahólyagok és ezekben fiatal csírák (hólyagcsacsírák) fejlődtek volna. Egészen azonos viszonyok között is a nagyra növő PP-nak csak egy része van megérésre képesítve.

Kedvező körülmények között nagy PP széli hólyagaiban már az első félnap mulva láthatni szemcsézettséget, az első nap vége felé pedig már érett csírákat és megnyilt hólyagokat is.

Élve maradt nagy PP még megtarthatják oszlási képességüket, amely bimbózásban is megnyilvánulhat. A P plasmájából kicsiny csücskök (bimbók) nőnek ki közepükön apró hólyagocskával és ebben esetleg sötétre festődő ponttal; a csücsök — leválása után — szabad fiatal P lesz. Máskor a P plasmájából ujjszerű nyúlványok nőnek ki, ezek végéből pedig egy-egy gömbös P fűződik le. Ismét máskor a már szitaszerűen hólyagcsás P-ból bimbószerű nyulványok hajtanak ki, majd le is fűződnek; ilyenkor az így szabaddá vált fiatal P is hólyagos szerkezetű (IV. t. 6.).

A különböző bakteriumfajok Pettenkoferiái között alakilag ugyan mutatkoztak bizonyos, bár nem lényegbe vágó eltérések; de ezek alapján nem tudnék dönteni abban a kérdésben, vajjon a különböző bakteriumfajokban élősködő PP szintén különböző fajúak, vagy pedig csak ugyanegy fajhoz tartozóak-e, éspedig a következő meggondolás alapján.

A fajok szerint különböző bakteriumok többé-kevésbbé bizonyára különböznek chemiai összetételük és termékeik, nemkülönben életműködésük és anyagcseréjük tekintetében, minélfogva ugyanegy P-faj mint symbionta, illetőleg parasita azok mindenikében más-más életfeltételekre talál, ami egyedül is oka lehet a P más-más magatartásának növekedés, fejlődés, morphologia és egyebek tekintetében. E tekintetben majd csak akkor fogunk világosabban láthatni, ha egyrészt tiszta, azaz bakteriummentes PP-at, másrészt P-mentes bakteriumokat tenyészteni és ilyenekkel kísérletezni fogunk tudni.

Ebből a szempontból is nagyon kivánatos volna oly módot találni, amelyen bakteriumkulturákat a velük makacsul együtt élő és szaporodó PP-tól megszabadítani lehetne. Erre irányuló néhány kísérletem a következő volt.

Kiindulva a föltevésből, hogy bizonyos physikalis v. chemiai

behatások PP-kal fertőzött bakteriumtenyészetben elölik a PP-at, míg élve maradnak a bakteriumok, meleg (52—56° C) vízfürdőbe helyeztem ilyen tenyészetet különböző hosszú ideig azzal az eredménnyel, hogy mindazok a bacillusok, amelyek a legnagyobb melegítést még egyáltalában élve kibírták, még mindig PP-tól fertőzöttnek bizonyultak, vagyis másszóval, a PP hővel szemben nem bizonyultak kevésbbé ellenállóknak, mint az illető bakteriumok.

Hasonló negatív volt az eredmény, amidőn friss, tehát baktericid nyúlsavóba kevertem a P-val fertőzött bakteriumokat elvárva, hogy benne a PP esetleg elpusztulnak, a bakteriumok ellenben élve maradnak; a 22 órával később a keverékből kiemelt bacillusok azonban még mindig P-tartalmúnak bizonyultak. Hogy különben az élő szervezet fertőző bakteriumaiban sem pusztulnak el a PP, az kitűnik abból is, hogy egyenesen a beteg szervezet véréből kitenyésztett bakteriumok is fertőzöttek PP-kal (pl. a Bac. typhi, paratyphi, gallinarum stb.).

Röntgensugarak behatása (2400 *r*-ig) sem változtatott a bacillusok P-tartalmán, úgymint chininum bisulfuricum sem; lithiumchloridos, 0·33% chin. bisulf.-tartalmú agaron mindenféle P-alakok nőttek, sőt a róla 6 nap mulva leoltott új lith.-agaron is. Chin. bisulf. 1%-os oldatában $1^1/_2$ óráig időzött bacillusok sem bizonyultak P-mentesnek.

Eddig e szerint nem sikerült bakteriumtenyészeteket PP-tól megszabadítanom.

Egészen addig, amíg TWORT (1915) és d'HÉRELLE (1917) a bakteriophagia jelenségét föl nem fedezték, mikrobiologusok is alig gondoltak még arra, hogy a megláthatás határához közelálló bakteriumok maguk is ki lehetnének téve még kisebb élő lények által való invasiónak. D'HÉRELLE fejezte ki elsőnek azt a nézetét, hogy a bakteriophagiás jelenség lényege bakteriumoknak legapróbb, ezidőszerint meg nem látható, sűrű szűrőkön is átjáró csírák által való fertőződése, minek következtében elhalnak és feloldódnak. Hosszasabb tanulmányaim alapján magam is arra a következtetésre jutottam, hogy a bakteriophagia körébe tartozó minden jelenség az infectiós elmélettel jól értelmezhető és összeegyeztethető.[1]

[1] Die Bakteriophagie, vornehmlich auf Grund eigener Untersuchungen. Jena, 1925. Gustav Fischer.

Azonban mindezideig nem sikerült bizonyítékait szolgáltatni annak, hogy a bakteriophagia oki tényezője, melyet «bakteriophag»-nak szoktak nevezni, valóban mikroorganizmus, úgyhogy a Pettenkoferiák az első és eddig az egyedüli mikróbák, amelyek mint bakteriumokba behatoló és bennük élősködni képes mikróbák teljesen igazolva vannak.

A Pettenkoferiák felfedezői ezeket a mikrobákat egyenesen azonosítják a bakteriophagokkal és a d'HÉRELLE-féle jelenség okozóinak tartják a nélkül, hogy — véleményem szerint — ezt kellőleg megokolnák.

Minthogy nem tarthattam valószínűnek, hogy hosszas bakteriophag-vizsgálataim folyamán a PP elkerülték volna figyelmemet, ha valóban ők volnának a jelenség oki tényezői, ez irányban a következő kísérleteket végeztem.

1. Csészében közönséges agarra kikent Bac. dysenteriae (Shiga-Kruse) felületére tyúkbél kivonatának szüredékét (BERKEFELD szűrőn) csöppentvén, a csöppek helyén tarfoltok (taches vierges) keletkeztek, melyeken elhalt bakteriumok voltak láthatók, de P-alakok nem.

Sertés pankreaskivonat szűredékével hasonló módon néhány P-tartalmú bakteriumfajjal végzett kísérletben a lecsöppentés helyein szintén támadtak tarfoltok, de PP szempontjából a mikroszkop alatt a tarfoltok és környezetük között valamelyes különbség nem mutatkozott.

Különböző szervek (sertés-, marha-, birkapankreas, sertés vékonybél) kivonatával és dysenteriabacillussal (Shiga typusúval) normális agaron kísérletezve, azt tapasztaltam, hogy a marhapankreas kivonatával lecsöppentett helyeken több és nagyobb PP nőttek volt, mint a környezetükben. A marhapankreas e szerint serkentőleg hat a PP növekedésére. Amikor pedig ezt a kísérletet ugyanezzel a marhapankreaskivonattal egyrészt közönséges, másrészt lithiumagarral megismételtem, 7 óra mulva mindkét agarfelület lecsöppentett helyei átlátszóbbak voltak és a rendes agaron hosszabb pálcikákat és fonalakat, elágazó, orsós és gömbös alakokat (5—6μ-ig), lith.-agaron ellenben sokkal kevesebb és kevéssé módosult pálcikákat, 10 óra mulva pedig már ennyit sem mutattak, vagyis a bakteriumok feloldódtak, eltűntek; de ha ennek

oka PP voltak volna, akkor az utóbbi lecsöppentett helyeken tömeges PP-kal kellett volna találkozni.

2. Egy másik kísérleti csoporttal azt kívántam tisztázni, vajjon P-tartalmú bakteriumtenyészetekkel vagy szűrleteivel lehet-e bakteriophagiát előidézni.

Dysenteriabacillusnak (Y törzs) lith.-agaron nőtt 3 napos és mindenféle P-alakokat, valamint apró szemcséket (spórákat?) tartalmazó tenyészetét kevés húslével lekapartam és e nedvvel ugyanezen bacillusnak közönséges agaron készült kikenését pár helyen lecsöppentettem. Az eredmény teljesen negatív volt, amennyiben a lecsöppentett helyek mind makro-, mind mikroszkoposan vizsgálva teljesen úgy mutatkoztak, mint azok környéke.

Továbbá háromféle bakterium (B. coli, paratyphi B, gallinarum) lith.-agaron nőtt tenyészeteit, melyek ugyancsak különféle P-alakokat és legapróbb sötétre festődő szemcséket tartalmaztak, húslevessel leöblítvén, a folyadékokat Berkefeld-féle szűrőn átszűrtem azzal a meggondolással, hogy a szűrőn átjutott legkisebb csírái a PP-nak bakteriophagiát kell létesíteniök, ha a PP valóban okozói ennek a jelenségnek. Az említett 3 bakteriumfajnak szűrletekkel lecsöppentett friss kikenései (közönséges agaron) phagiának semmi jelét nem árulták el, azaz a csöppek helyei minden tekintetben úgy viselkedtek, mint a többi tenyészfelület.

Ezek a kísérleti eredmények magukban véve is arra a következtetésre jogosítanak, hogy a PP nem lehetnek a bakteriophagiának oki tényezői.

Egy tekintetben van bizonyos hasonlatosság bakteriophag és P között, t. i. abban, hogy bakteriumokat mindketten ölnek, csakhogy más-más módon. A bakteriophag öli és feloldja a bakteriumokat, talán oly enzym («lysin») által, amelyet termel, a P ellenben azáltal, hogy a bakteriumok testében nagyra növén őket tönkre teszi; a két hatásnak más-más külső föltételei vannak. A bakteriophaghatás pl. közönséges agaron kifejezett módon megnyilvánul, míg a P bakteriumokat észrevehetően csak olyan mediumon károsíthat meg, amely növekedésének és szaporodásának kedvez, de közönséges agartápanyagon nem.

Mindenesetre nemcsak a bakteriophagia, hanem minden más morphologiai bakteriumtanulmányok közben nem hagyható figyel-

men kívül az a kétségtelen tény, hogy PP mint endosymbionták bakteriumokban igen gyakoriak és hogy adott viszonyok között a belőlük, valamint az általuk fertőzött bakteriumokból keletkező alakok úgyszólva végtelen formagazdagsága fölötte könnyen téves értelmezésekre szolgáltathat okot.

Észrevételek a követett technikára vonatkozólag.

A PP tenyészését előmozdító tápanyagul általában bakteriumtenyésztésre szolgáló agart használtam, amelyhez 2—2½% lithium- vagy 2—4% calciumchloridot kevertem. Az agar (1—1½%) húslével (1 kg húsra 1 l. víz), peptonnal (1%) és konyhasóval (0·5% készült 6·6 pH-ra beállítva. De egészen hasonlóan jó eredmény érhető el a 7·4 pH lúgosságú agarral az említett sók valamelyikének hozzáadásával.

A tenyészeteknek keletkezésük helyén, azaz in situ való vizsgálata mikrocamerában történt; e célból egy csíramentes fedőlemez közepét vékony agarréteggel vontam be és erre a vizsgálandó bakteriumokat finom steril ecsettel elszélesztettem, majd a lemezkét bevont felületével vájt tárgylemez fölé borítván, vaselinával vagy viaszgyertyácskával a kamrácskát lezártam. Ilyen készítmény, ha az agarréteg elég vékony, alkalmas lehet 3·0, sőt 2·0 mm-es immersióval való vizsgálatra is.

Natív állapotban való vizsgálat céljából a tenyészetből egy tűhegynyi részt tárgylemezen 1—2 platinakacsnyi húslevesben vagy agarcső condensatiós vizében elkevertem, fedőlemezzel lefödtem és ezt viasszal lezártam.

Vitalis festéskor hasonló az eljárás, csakhogy a vizsgálati anyagot tárgylemezen, néhány kacsnyi igen erősen higított festékoldatban kevertem el és a lefödés előtt legalább néhány percig állni hagytam, közben a keverést többször megismételgetve.

Száraz és festett fedőlemezes készítmény előállítása végett túlnyomólag a lenyomati eljárást alkalmaztam, amely különösen fiatal, lehetőleg még csak egyrétegű telepek vizsgálatakor tanulságos képeket adhat. A teljesen tiszta, lángon kihevített és kihűlt fedőlemezt kis csiptetővel reáejtjük a tenyészet kívánt helyére,

majd nyomban a csiptetővel a szélét fogva leemeljük ügyelve, hogy e közben oldalmozgatásokat vele ne végezzünk.

Az ilyen lemezt festés előtt a fixálási eljárások valamelyikével (formalinnal, sublimáttal, felosmiumsavval) lehet kezelni; én legtöbbnyire a levegőn való szárítást és utána a gázlángon való háromszori áthúzást alkalmaztam.

Festésre jó eredménnyel használható methylenkék (vizes vagy LÖFFLER-féle oldatban) vagy a GIEMSA-féle eljárás; legtöbbnyire azonban toluidinkéket használtam éspedig karbolvizes oldatban (100 cm^3 5%-os karbolsav + 0·5 g toluidinkék). A rögzített (fixált) fedőlemezre ilyen oldatból néhány csöppet öntünk és 2—5 percig rajta hagyjuk (melegítés nélkül), vízzel lemossuk majd tiszta tárgylemezre fordítva, a fölös vizet róla enyhén reányomott itatós papirral leitatjuk, amikor pedig felülete már száraznak mutatkozik, széleit viaszgyertyaszállal lezárjuk. E szerint a vizsgálati anyagot hajszálnyi vékony vízrétegbe ágyazva látjuk. A karbolvizes toluidinkéknek előnye bizonyos mérvű polychromasiájában rejlik, melynél fogva a PP plasmáját sötét kékesibolyás, hólyagos részeit és a különböző szemcséket ellenben pirosas színben tünteti fel. A festés és vízzel való lemosás utáni futólagos leöblítés alkohollal vagy 1—2%-os ecetsavval a készítményt tanulságosabbá teheti.

AZ ÁBRÁK MAGYARÁZATA.

A II. táblán ábrázolt rajzok készülék nélkül, szabad kézzel készültek; ennélfogva a különböző tárgyak nagyítási foka nem egészen azonos. Nagyításuk körülbelül 1000—1500-szoros körül mozog. A III. és IV. tábla képeinek nagyítása a képmagyarázatban fel van jegyezve.

Rövidítések.

P = Pettenkoferia, *PP* = Pettenkoferiák.

ag = közönséges agar-tápanyag, amint bakteriumok tenyésztésére használatos (húslé, pepton, konyhasó, agar); pH kb 7·4.

li—ag = húslé helyett Liebig-féle húskivonattal (0·5%) 2% *LiCl* hozzáadásával főzve, pH 6·6. (L. a KUHN és STERNBERG által ajánlott agart is: Zentralblatt für Bakter. Originale 121. kötetét.)

ag + *LiCl* = közönséges agarhoz utólag 2 % *LiCl* adva.

szhő = szobai hőmérséklet.

nat = nativkészítmény.

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

leny = lenyomati készítmény.
vit = vitalis festés.
kt = festés karboltoluidinkékkel.
Gi = festés Giemsa-féle oldattal.

II. tábla.

1. *ábra. Bac. dysenteriae* (STRONG): kétnapos lithium-agar tenyészetből, nativkészítmény: apró hólyagcsacsírák egy vagy két sötét ponttal a szélen.

2. *ábra. Bac. suipestifer:* négynapos lith-agar tenyészetből, nativkészítmény: hólyagcsacsírák ú. m. 1. ábrában.

3. *ábra. Bact. coli B:* 24 órás, *ag* + 2% *LiCl*, 22°-on, *leny*, *kt*: apró hólyagcsacsírákból fejlődött fiatal *PP* oszlásban, részben festett szemcsével (mag?).

4. *ábra. Bac. gallinarum* (2): 18 órás *ag* + 2·5% *LiCl*, *szhő*, *leny*, *kt*: oszlásban levő fiatal *PP*.

5. *B. coli B:* 38 ó, *ag* + 2% *LiCl*, 22°, *leny*, *kt:* fiatal *PP*, részben kettéoszlás különböző fokozatain.

6. *ábra. B. gallinarum* (1): 2 napos, *li—ag*, 35°, *leny*, *kt*: fiatal *PP*, egy része oszlófélben.

7. *ábra. B. dysenteriae* (STRONG): 9 napos, húsleves + 2·5% *LiCl*, 37°, fölkent készítmény, *Gi:* tojásdad és befűzött *PP*, hármon burkolat egy csupasz.

8. *ábra. Idem:* 2 napos, *li—ag*, *szhő*, *nat:* 3 befűződött *PP*, kettőn burkolat, egy csupasz; a negyedik kibúvóban van a burokból.

9. *ábra. Idem:* 9 napos, húsleves, 37°, *nat:* 3 zöldes fényű *P* egy-egy hólyagszerű középpel.

10. *ábra. Idem:* kétnapos, *li—ag*, *szhő*, in situ fedőlemez alatt: *PP* kisebb-nagyobb csirahólyagokkal; két félholdalak (= *PP*, melyekből a hólyagos rész különvált, a plasmás rész visszamaradt).

11. *ábra. B. gallinarum* (1), négynapos, agar + 4% $CaCl_2$, 20°, *leny*, *kt: P* egy széli hólyaggal.

12. *ábra. B. coli B*, 60 órás, agar + 4% $CaCl_2$, *szhő*, lenyomat, *kt:* két *P* egy-egy csírahólyaggal; egyik hólyag csúcsában egy chromatinszemcse.

13. *ábra. B. coli B*, kétnapos, *li—ag*, 37°, fölkenés, *kt:* három nagy *P*; a világos, vörösesre festett és szemcsézett belseje a középső figurának a *P* hólyagos részének felel meg, melyet a plasmás anyagnak széles udvara vesz körül, utóbbinak jobb szegélyében fekszik egy kisebb hólyag. A tőle balra eső figurában a sötétre festett szemcsékkel telt csírahólyag nagyobb, a plasmás udvar pedig félholdalakúvá van összenyomva, tőle jobbra pedig egy szemcsés hólyag szabadon (azaz plasma nélkül) látható.

14. *ábra. B. coli B*, háromnapos, *li—ag, szhő, leny, kt:* balról jobb felé 1) csiratömlő (sporocysta?) sötét ibolyára festett szemcsékkel és egy hasonló színű nagyobb röggel, vastag toktól körülvéve; 2. nagy *P* félig kettéhasadva, mindenik felében egy-egy csírahólyag, ezek egyikében két chromatinszemcse; 3. kettéhasadt nagy *P* jobb felének megnyílt csírahólyagjába félig betolult egy bakterium.

15. *ábra. B. coli B*, kétnapos, *li—ag*, kiskamratenyészet, lenyomat, *kt:* csíratömlő (sporocysta?), durvaszemcsés belsővel, vastag héjjal, utóbbi és a szemcsék sötét kékes ibolyára festve.

16. *ábra.* a) *B. dysenteriae* (STRONG), egynapos, 37°, *nat;*

b) *idem*, négynapos, *ag, nat;*

c) *B. typhi*, négynapos, *li—ag*, 35°, *vit, kt;*

mind a három : szabad, azaz a plasmától különvált csírahólyagok (leendő csíratömlők, sporocysták?).

17. *ábra. B. coli B*, 40 órás, agar + 2% *LiCl*, 22°, kikent készítmény, *kt:* nagy *PP* hólyagos, aprószemcsés belseje (leendő csíratömlő) a sötét plasmából, mint csészéből kitolul.

18. *ábra. B. coli B*, kéthónapos, agar, *szhő, vit, kt*: pálcikák (bakteriumok) egy-egy, különböző nagyságú sötét szemcsével, melyre nézve kérdés, vajjon a pálcika normális alakeleme (magva?), vagy pedig fiatal *P*.

19. *ábra. B. typhi* (1), egynapos, *li—ag*, 25°, *leny, kt:* kevéssé duzzadt és sötétebbre festett pálcikák, bennök vörösesre festett szemcsék (magvak vagy *PP*?).

20. *ábra. B. mucosus*, bakteriumalakok különböző korú (négy órától néhány napig) közönséges agartenyészetekből, erősen higított oldatokkal (methylenkék, fuchsin, karbolvizes fuchsin) vitalisan festve: nagyobbára erősen duzzadt bakteriumokon ülő nyeles fiatal *PP*; egyik pálcikának oldali kinövésében egy sötétre festett szemcse (= *P*?); egy másiknak négyfelé álló nyúlványai vannak.

21. *ábra. B. dysenteriae* (STRONG), kétnapos, *li—ag*, 37°, *vit, kt:* bakteriumok rajtülő, illetve részben behatolt nyeles *P*-csírával, illetve már behatolt csírával; az 5. pálcikán fekvő csíra apró hólyagocska egy sötét szemcsével (= hólyagcsacsíra).

22. *ábra. Bact. coli* (1), kétnapos, *li—ag*, 37°, *leny, kt:* pálcikák rajtuk tapadó nyeles csírákkal.

23. *ábra. B. typhi* (2), 18 órás, *li—ag*, 37°, *leny, kt:* pálcikák különböző nagyságú nyeles csírákkal; félig hasadt pálcika (jobboldalt), belsejében a parasitával (?).

24. *ábra. B. parathypi B* (1), *li—ag*, fedőlemezzel lefödve, *szhő*, egy nap múlva lemez leemelve, fixálva, *kt*-nal festve: pálcikákba részben behatolt, illetve pálcikára szorosan reálapuló és egy pálcika félgömbös kinövésében foglalt *P*-csíra.

25. *ábra. B. gallinarum* (1), egynapos, *li—ag*, 37°, lenyomat, *kt:* hasonló alakok, mint a 24. ábrában.

26. *ábra. B. coli B*, 18 órás, *li—ag*, 28° *leny, kt;* balra: a kettéhasadt parasita jobbra és balra egy-egy szárat bocsát a pálcika két szárába; jobbra: a pálcika felületes rétegein nagyobbra nőtt *P* magába vongálja jobbról és balról a pálcika-, illetve fonalvégeket, amelyekkel szervesen összefügg.

27. *ábra. Idem*, egynapos, *li—ag*, 35°, *leny, kt:* hasonló, de nagyobb *P*, mint a 26. ábrában; a szabad szemcsék valószínűleg hólyagcsacsírák (?).

28. *ábra. Idem*, egynapos, *li—ag*, 22°, *leny, kt:* erősebben duzzadt bakterium ujjszerű kinövésekkel a parasita terjeszkedésének irányaiban.

29. *ábra. Idem*, 15 órás, *li—ag*, 22°, *leny, kt:* jellegzetes napoleoni (v. generalis) csákóalak, aminő gyakran támad, ha a *P*-csíra a pálcika egyik oldalán behatol és azt egyoldalúan megduzzasztja, két végébe pedig nyúlványokat bocsát.

30. *ábra. B. dysenteriae* (Strong), egynapos, húsleves, 37°, *nat:* patkóalakú, középrészében a parasita által erősen megduzzasztott bakterium.

31. *és* 32. *ábra. B. coli B*, egy- és kétnapos, *li—ag*, 35°, kiskamra-tenyészet, in situ vizsgálva: bakteriumok belsejében foglalt és bennök nagyranőtt *PP* és ezáltal támadt különféle deformatiók; egy részének belsejében csírahólyagok.

III. tábla.

1. *ábra. Bac. gallinarum*, 18 órás, *li—ag*, 37°, *leny, kt:* pálcikák egy részén rajtülő apró csíra, más részének belsejében sötét szemcse. — 1200: 1.

2. *ábra. Idem*, de nagyítás 1600: 1.

3. *ábra. B. coli B*, 18 órás, *li—ag*, 32°, *leny, kt:* sok pálcika rajtatapadó csírával; néhány nagyobb *PP*, egyiknek világosabb közepében sötétre festett rögöcskék (chromatinszemcsék). — 1000: 1.

4. *ábra. B. coli B*, egynapos, *li—ag*, 22°, *leny, kt:* mérsékelten duzzadt és hosszabb pálcák inhomogen belsővel, rajtuk tapadó, különböző nagyságú fiatal *PP;* több fonal-, illetve pálcikarészlet a benne nagyranőtt parasita által meg van duzzasztva és torzalakú. — 1000: 1.

5. *ábra. B. coli B*, 21 órás, *li—ag*, 22°, *leny, kt:* többé-kevésbbé duzzadt pálcikák, a középrészükön ülő kisebb-nagyobb fiatal *P*-val; némelyikén látni, amint utóbbiból kétfelé egy-egy gyökérszerű szár mélyed a bakterium testébe; az orsóalakúan megduzzadt pálcában látható sötét harántsáv a pálcika és a parasita simultán kettéhasadásának előjele. — 1000: 1.

6. *ábra. B. coli B*, 12 órás, *ag* + 3% $CaCl_2$, *szhő, leny, kt:* hosszú pálcák és kígyózó fonalak, utóbbiak egyikén széles alapon ülő nagy *P* telve számos apró csírahólyaggal. — 1000: 1.

7. *ábra. B. coli B*, kétnapos, *ag*, 20°, kikent készítmény, *kt:* normalisnak tekintett kép. — 1200: 1

8. *ábra. B. coli B*, úgy mint 7. ábra, de *ag* + lithiumon nőtt, lenyomat: különböző nagyságú, hólyagokkal telt *PP*, úgy látszik, hogy legalább egy részük még benne fekszik a bakteriumsejt külső hártyájában. — 1200 : 1.

9. *ábra. B. coli B*, egynapos, *li—ag, szhő, leny, kt:* hosszú bakteriumfonalak és apróhólyagú kisebb-nagyobb *PP*, a kicsinyek a fonalakra gyöngyök módjára látszanak felfűzve, de a nagyok is fonalak lefutásában fekszenek; semmi nyoma nem látszik exogen infectiónak, vagyis fiatal csírák behatolásának és az erre a folyamatra jellemző alakulatoknak. — 820 : 1.

10. *ábra. B. coli B*, egynapos, *ag* + 4% $CaCl_2$, 30°, *leny, kt:* fonalas jellegű tenyészet; egyik fonalból gurdély vagy aneurysma módjára kidomborodik egy nagy, gömbös *P* egyformán apró hólyagokkal telve. — 1200 : 1.

11. *ábra. B. coli B*, kétnapos, *ag* + 3% $CaCl_2$, 32°, kikenés, *kt:* széteső *PP* számos oly kicsinységű hólyagcsával, amekkorák a körülöttük elszórt és rendes nagyságú festett pálcikák. — 1000 : 1.

12. *ábra. B. coli B*, egynapos, *ag* + 2% *LiCl*, 22°, *leny, kt:* nem símán, inkább foszlányosan határolt nagy képlet, sötétre festett szemcsékkel (csíratömlő, sporocysta?). — 1000 : 1.

IV. tábla.

1—6. *ábra. Bact. coli B, ag* + 4% $CaCl_2$, *szhő:* különböző időközökben a tenyésztőfelület más-más helyéről készült lenyomatok, *kt*-nal festve. — 820 : 1.

1. *ábra.* 5 *óra múlva:* fiatal szabad *PP*, mindenik egyik csúcsán fejlődő csírahólyag; egyiken két befűződés (befejezetlen oszlás). — 820 : 1.

2. *ábra.* 8 *óra múlva:* jóval nagyobb szabad *PP*, mint az előbbiek; mindegyikükben egy-egy széli csirahólyag. — 820 : 1.

3. *ábra.* 12 *óra múlva:* még nagyobb *PP* nagy széli és kisebb belső csírahólyagokkal. — 820 : 1.

4. *ábra.* Szintén 12 *óra múlva:* nagy *PP*, széli nagy hólyagaikban szemcsék (fiatal csírák = hólyagcsacsírák) láthatók. — 1000 : 1.

5. *ábra.* 24 *óra múlva:* nagy *PP* között sok jóval kisebb és kicsiny, melyek már az első napon belül támadt fiatal csírákból lettek. — 820 : 1.

6. *ábra.* 48 *óra múlva:* igen nagy, apróbb hólyagoktól szitaszerűen átlikgatott *P* tompa nyúlványokkal; szomszédságában utóbbiakból lefűződés által szabaddá vált fiatal *PP* ugyancsak hólyagos szerkezettel. — 1000 : 1.

7. *ábra. B. coli B*, 18 órás, *li—ag, szhő, leny, kt:* két nagy *P*, a balnak bal szélében egy nagy hólyag megnyílásából támadt gödörben fiatal hólyagcsacsírák fekszenek (apró színtelen kis hólyagcsák egy széli sötétre festett ponttal). — 1600 : 1.

8. *ábra. B. coli B*, 40 órás, *ag* + 2% *LiCl*, 22°, *leny*, *kt:* több nagy *PP*, köztük olyanok, ahol a belső szemcsés rész hurkaszerűen kitólul a plasmás rész kagylóalakú homorulatából (*a*, *b*); az elszórt kokkuszalakú apróságok fiatal *PP*, amint hólyagcsacsírákból lesznek. A kép jobb alsó részében látni egy szabálytalan alakú *P*-t, melynek sötétebb plasmájából a világosabb belső rész szabadon kifelé (a képben fölfelé) áll; utóbbinak felső szegélyében (*c*-nél) észlelhetni öt hólyagcsacsírát. A nagyobb kokkuszszerű gömböcskék némelyike jól szemlélteti összetételét a sötétre festett vastag külső rétegből és a középen fekvő ugyancsak sötét szemcsét (magot) melyet világos udvar vesz körül.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. április 26-án tartott üléséből.)

WEITERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER PETTENKOFERIEN.

Von HUGO PREISZ.

Nach einer ersten, der Ungar. Akademie der Wissenschaften am 21. Nov. 1932. vorgelegten Arbeit über diesen Gegenstand, werden in dieser die seitdem fortgesetzten Untersuchungen bekannt gegeben.

Unter Bedingungen, die für Bakterien allgemein günstig sind, kann das Verhältnis von Bakterien und Pettenkoferien als eine Symbiose betrachtet werden, wobei einerseits die Bakterien in ihrer Form und Lebensfähigkeit nicht oder kaum berührt werden und andererseits die Pettenkoferinen auf einer niederen Stufe und Kleinheit, dabei jedoch vermehrungsfähig bleiben und sich auch gleichzeitig mit den sie beherbergenden Bakterien vermehren. Je mehr sich aber die äusseren Bedingungen (Nährböden) für die Pettenkoferien günstiger, für die Bakterien dagegen gleichzeitig vielleicht gar schlechter gestalten, umsomehr wachsen erstere zu grossen Formen heran was den Tod der Bakterien zur Folge haben kann; auf diese Weise wird aus dem harmlosen Symbionten ein gefährlicher Parasit der letzteren. Die Pettenkoferien sind weder obligate Symbionten, noch obligate Parasiten von Bakterien; auch aus freien jüngsten Keimen wachsen Pettenkoferien zu riesigen Gestalten heran. Es werden dreierlei Formentypen grosser Pettenkoferien unterschieden, je nachdem, ob ihr Wachstum von ererbten Keimen im Innern der Stäbchen, oder infolge exogener Infektion durch eindringende Keimlinge, oder aber von freiliegenden jungen Keimen ausging. — Es wird die Struktur junger und grösserer Pettenkoferien geschildert, ihre Zusammensetzung aus der plasma-

tiechen und blasigen Komponente und ihre verschiedenen Gestaltungen. Die für reifere Pettenkoferien sehr kennzeichnenden Blasen werden als Keimblasen bezeichnet, in denen die allerjüngsten Keime der Pettenkoferien gebildet werden, die als Bläschenkeime benannt sind. Versuche zeigten, dass die Pettenkoferien nicht das bakteriophage Agens sind. — Mehrere Versuche, infizierte Bakterien von Pettenkoferien zu befreien, waren erfolglos. Drei Tafeln sind beigegeben, eine mit zahlreichen gezeichneten Figuren und zwei mit 20 mikrophotograhischen Bildern.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

ÚJ CEPHALARIA DÉLAFRIKÁBÓL.

SZABÓ ZOLTÁN l. tagtól.

Az angol királyi botanikus kert (KEW) a múlt hónapban arról értesített, hogy az 1933. évi transvaali növénygyüjtés anyagában oly Cephalaria példány van, amely nem egyezik az eddig gyüjtött délafrikai Cephalariákkal. A levél kíséretében el is küldötték címemre e növény egy példányát meghatározás végett. Megvizsgálva a növényt megállapítottam, hogy a Délafrikából közölt eddigi Cephalariákkal valóban nem egyezik meg másban, mint az összes afrikai fajokat együttesen jellemző külső csészének szerkezetében. Ennek a jellemvonásnak alapján a délafrikai fajokat a Math. Termtud. Értesítő 1922. évi XXXIX. köteteinek 272. oldalán *Lobatocarpus* név alatt foglaltam össze, mint az *Eucephalaria* subgenus I. sectióját.[1] Ehhez a sectióhoz összesen 13 faj tartozik. A most vizsgálatra kapott példány teljesen beleillik a *Lobatocarpus* sectio keretébe, azonban nem egyezik meg egyik fajjal sem, úgy, hogy mint új fajt írom le. Diagnozisa az angol szöveg után olvasható.

[1] SZABÓ Z.: A Cephalaria genus rendszere. Math. Termtud. Értesítő. XXXIX. 267. old.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. ápr. 26-án tartott üléséből.)

Cephalaria armerioides SZABÓ.

1. A példány alsó része term. nagys. fele. — 2. A középső csomó két levéllel term. nagys. fele. — 3. A virágzat kocsánnyal 0·75-szörösen nagyítva. — 4. Külső, 5—6—7. belső gallér- és murvalevél. — 8. Involucellum és csésze. 9. párta. — 4—9. háromszor nagyítva.

1. Lower part of plant 1 : 2. — 2. Middle leaf pair 1 : 2. — 3. Inflorescence with peduncle 0.75 : 1. — 4—7. Bracts of the involucre from outside towards inside 3 : 1. — 8. Involucel 3 : 1. — 9. Vorolla 3 : 1.

ONE NEW CEPHALARIA FROM SOUTH AFRICA.

By Z. SZABÓ, M. C.

The Director of the Royal Botanic Gardens, Kew., Surrey informed me in February 1937 of a *Cephalaria* specimen from the Transvaal Plant Collection of 1933, which does not correspond to any described species. The Director kindly sent the specimen to me. The material was in good condition and can really not be identified with any of the 13 species sofar known from South Africa. The section *Lobatocarpus* of the genus, being consisted of these 13 species, was described by me on page 272 in Volume 1922 of this Periodical. The new species is belonging to the same section, characterized chiefly by the involucel with four leaflike angular lobes instead of wearing aristate teeths as it can be met with in the other sections. It is of importance that the 13 species occur independently from each other on well separated smaller areas in South Africa. 6 out of the 13 (i. e. *Cephalaria attenuata, scabra, decurrens, rigida, humilis* and *retrosetosa*) are distributed more in the western half of South Africa, the three enumerated first being endemic members of the Cape Flora. *Cephalaria rigida* is representing toward the East, *C. humilis* towards North and East transgressing forms to the Paleotropic Flora, where the latter is joined by the closely related *C. retrosetosa*. Species mainly of South Eastern Africa are *C. natalensis, Galpiniana, Zeyheriana, Wilmsiana, oblongifolia, pungens* and *Götzei*.[1] The one mostly widespread is *C. oblongifolia* i. e. in Natal and environment, the remaining ones are known but from small districts of the provinces Natal, Transvaal, Oranje

[1] Conf. Z. SZABÓ: Diagnoses Cephalariarum novarum. ENGLER'S Botan. Jahrbücher 57. (1922) p. 641—644.

Mosambique; finally *C. pungens* and *Götzei* from tropical East Africa.

Distribution of the South African species can not yet be definitely determined. It can be expected that further studies of the aequatorial and southern Subtropical Flora will supply still many new data which will enable us exactly to determine interrelations and exact distribution of every species.

The new species recently discovered and described below under the name *Cephalaria armeriodes nov. sp.* is again a new proof of the richness of the separated area of the Flora of South Africa. To the 51 Cephalaria species sofar known the new one comes as the 52-th.

Cephalaria armerioides Szabó nov. spec. e sect. Lobatocarpus Szabó.

Rhizoma lignosa, multicephala, caules plures emittens. *Caulis* virgatus, glaber, striatus, pedunculus elongatus, glaberrimus, usque ad 52 cm longus (in herb.). *Folia* omnia integerrima, anguste linearia, 18 cm longa 2 mm lata, omnia glaberrima, subtus subcarinata, supra subcanaliculata, margine revoluta, connata, apice attenuato-cuspidata. *Capitulum* exsiccatum sine floribus cca 15 mm diam. Involucri foliola exteriora late ovata, subacuta, interiora acuminata, paleae cuspidatae vel submucronatae, pungentes, apice castaneae. *Corollae* albae, extus sericeae. *Achenium* immaturum cca 4 mm long., apice dentibus cca 1 mm longioribus calycem aequantibus 4 coronatum, sericeum. Calyx minutissime denticulatus, sericeopilosus.

Herbarium Transvaal Museum. No. 33299 pro: «*Cephalaria attenuata forma?* — Collector R. G. N. Young. Date 9, 11, 33. Coll's No. A223. District Middelburg. Locality Jantesberg.

(*A Magyar Biológiai Kutatóintézet I. osztályának közleménye.*)

PTYGURA TIHANYENSIS n. sp., EGY ÚJ KEREKESFÉREG-FAJ A TIHANYI BELSŐ TÓBÓL.

VARGA LAJOS-tól (Sopron).

(2 szövegközti ábrával a németnyelvű szövegben.)

A tihanyi Belső tó kerekesférgeinek, különösen az ülő életmódot folytató fajoknak felkutatása alkalmával a Biológiai Kutatóintézetbe behozott *Myriophyllum* szárán és levélkéin 1936 nyarán (augusztus) nagyon gyakran találtam egy érdekes, mindig telepet alkotó *Ptygura*-fajt, melyet WEBER—MONTET (4) meghatározó leírása alapján eleinte *Ptygura socialis* WEBER nevű fajnak gondoltam. Hiszen eddig csak erről a fajról volt ismeretes, hogy 5—10—20 egyedből álló telepeket (kolóniákat) alkot. WEBER idevágó dolgozatának és rajzainak (3) áttanulmányozása után azonban meggyőződtem arról, hogy egy eddig ismeretlen, új fajról van szó.

A *Ptygura tihanyensis* n. sp. az említett időben nagyon gyakori volt s egy mikroszkópi készítményben, melyben az állatkák telepét eleven állapotban vizsgáltam, gyakran 3—4 telepet is lehetett látni. Ezek a telepek többnyire 2—5 egyedből állottak s csak egy esetben figyeltem meg olyan telepet, melyben 11 egyed volt együtt. A kolóniák úgy keletkeznek, hogy a leányegyedek az anyaállatkával együtt maradnak, amíg a telep a legnagyobb egyedszámot eléri s azután a helyet nem kapó utódok különválva a növény más helyén, néha az eredeti kolónia közelében, új telepeket alkotnak.

A telep egyedei egy lapos, eléggé szabályos, kerekded vagy hosszúkás fészket építenek maguknak a lábuk vége köré s ennek közepén, lábvégükkel szorosan egymás mellett tapadnak a gazdanövény bőrére (1. ábra). Ebben teljesen eltérnek a *Ptygura socialis*tól, mert ezek egyfelől nagyon ritkán tapadnak

meg a lábukkal egy közös pontban, másfelől a növénynek egészen más helyére is telepednek, ahogyan azt WEBER (3, XXVIII. tábla, 4. rajz) lerajzolja. Nagy a különbség abban is, hogy a *Ptygura socialis* egyedei WEBER szavai szerint «... ont un aspect mucilagineux blanchâtre, qui est causé par la présence de la sécrétion des Rotifères. On ne voit pas de tubes distincts, mais les Oecistes sont plongés dans une masse de consistance identique à celle des tubes des autres espèces de ce genre».

Ezzel szemben a *Ptygura tihanyensis* n. sp. egyedei határozott alakú fészket (ezt nem lehet a többi *Ptygura*-faj zsákjának venni) építenek maguknak. Amikor ebbe egyszerre összehúzódnak, akkor annyira összezsugorodnak, hogy testük felső része a fészek peremsíkjáig sem ér s így jól meg vannak védve, ha egy nagyobb állat, pl. egy árvaszúnyoglárva *(Chironomida)* mászik el fölöttük. Az összehúzódásban rendesen minden egyed résztvesz s olyan egyszerre, hogy szinte közös beidegzettségre lehetne gondolni. Csak egy ízben tapasztaltam, hogy egy ötegyedes telepben a szélső két egyed rövid időre kinyujtózva maradt.

A fészek nagysága a telep egyedeinek száma szerint változó: 0·4—0·6 mm átmérőjű fészkeket figyeltem meg. Anyaga mindig szerves törmelék, mely részben az egyedek ürülékéből, nagyrészt azonban törmelékcsomócskákból áll. Ezeket valamilyen ragasztóanyag köti össze, mert a fészek tömött, eléggé szilárdan összeálló. A fészek építőanyagában elhalt moszatok, néha igen apró *Diatomea*-vázak is vannak s ezek a peremből sokszor kiállanak. Az egyedek lába körül soha sincsen külön zsákszerű cső (tubus). A telep egyedei a peteket mindig a lábuk végéhez ragasztják s így a peték az állatkák összehúzódását nem akadályozzák.

Az egyedek testhosszúsága teljesen kinyujtózkodva 230—320 μ. A láb csak 1—1·3-szer hosszabb, mint a törzs. A *Ptygura socialis* egyedei már sokkal nagyobbak: WEBER adatai szerint 500—800 μ, lábuk pedig kétszer hosszabb a törzsnél. A láb gyengén átlátszó s benne jól fejlett izmok végzik a gyors összehúzást és kinyujtást. A láb végét s ennek útján a gazdanövényen való megtapadás módját nem tudtam megfigyelni, mert a fészek átlátszatlan anyaga ezt megakadályozza.

A törzs egyenletesen keskenyedve megy át a lábba, melyen

nem vettem észre olyan gyűrűzöttséget, illetőleg jól fejlett redőzöttséget, mint amilyent WEBER a *Ptygura socialis* nagyon hosszú, keskeny lábán lerajzol.

A kerékszerv többnyire köralakú, összefüggő koszorút alkot s átmérője az idős egyedeken nagyobb, mint a testé. A fiatal egyedek kerékszervének átmérője azonban a test szélességével egyezik meg. A kerékszervet egyforma hosszúságú csillók alkotják és megszakításnélküli koszorúban növik be (2. rajz). A szájnyílás fölötti tölcsérben (infundibulum) nincsenek meg azok a dudorok, amelyeket WEBER a *Ptygura socialis* egyedein lerajzol («une série de petites protubérances»).

Az idősebb egyedeken sohasem láttam szemeket, de az egészen fiatal egyedek háti oldalán a kerékszerv alatt gyakran láttam két nagyon apró, halványpiros szemfoltot, melyek azonban néhány óra mulva eltűntek. Fajunk ebben a tekintetben megegyezik a *Ptygura socialis*szal, mert ennél is csak a fiatal egyedeknek van meg a kettős szemfoltjuk. Az agydúcot WEBER-hez hasonlóan én sem tudtam megfigyelni. A háti oldalon megvan a háti tapogató.

A kerékszerv alatt a testen nem lehet megkülönböztetni nyaki részt. Itt két dudor emelkedik ki, melyek az oldaltapogatókat hordozzák.

A belső szervek egyébként nem mutatnak különlegességet. A rágószerv a test átlátszatlansága miatt nem figyelhető meg. A gyomor igen nagy és mindig tele van apró algákkal, szerves törmelékkel, melyeket a telep egyedei közös erővel sodornak a vízzel együtt a szájtölcsér felé. Bizonyára a táplálékszerzés céljából alakultak a telepek, mert az egyes egyének sodró hatása nem eléggé erős az aránylag gyenge kerékszerv miatt. Ámde több egyed közös sodróhatása jobban érvényesül: a planktonból és a triptonból több táplálékot tudnak maguk felé sodorni.

A páros gyomormirigyek jól kivehetők. A húgyhólyag a láb kezdete fölött helyezkedik el.

Az itt adott leírás a nőstény állatra vonatkozik, mert hímeket nem figyeltem meg.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. március 15-én tartott üléséből.)

(Aus der I. Abteilung des Ungarischen Biologischen Forschungsinstitutes.)

PTYGURA TIHANYENSIS n. sp., EIN NEUES RÄDERTIER AUS DEM TIHANYER BELSŐ TÓ.

Von LAJOS VARGA (Sopron).

(Mit 2 Abbildungen.)

Ich untersuchte seit 1928 die Rotatorienfauna des Tihanyer Belső tó. Die Resultate dieser Untersuchungen, sowie die nähere Beschreibung dieses Teiches veröffentliche ich in den Arbeiten des Ungarischen Forschungsinstitutes. Hier möchte ich nur die neue Art, die ich im Belső tó entdeckte, näher beschreiben.

Der Tihanyer Belső tó ist sehr reich an submersen Wasserpflanzen (hauptsächlich *Myriophyllum* und *Ceratophyllum*), die theoretisch einer grösseren Menge der festsitzenden (sessilen) Rotatorien eine gute und passende Unterlage darbieten. Da die sessilen Rotatorien der ungarischen Wasserfauna in sehr geringem Masse bekannt sind, setzte ich mir zum Ziele, auch die festsitzenden Rädertiere des Belső tó möglichst gründlich zu erforschen. Im Frühjahr und Sommer (im Spätherbst gehen ja die erwähnten submersen Wasserpflanzen ein) von 1936 brachte ich eine grosse Menge dieser Wasserpflanzen in das Biologische Institut und hier hielt ich sie in kleineren Aquarien und Wasserbehältern. Selbstverständlich stammte das Aquarienwasser von dem Teich selbst. Da das Wasser binnen 5—6 Tagen verdorben war, erneuerte ich den Inhalt der Aquarien dadurch, dass ich sie mit ganz frischem Material füllte.

Von den hereingebrachten Wasserpflanzen untersuchte ich unter Mikroskop, meist mit Binokularmikroskop einen abgeschnitteten Ast von *Myriophyllum* oder *Ceratophyllum*. Fand ich sessile Rotatorien, so schnitt das betreffende Stielchen oder

Blättchen ab, verfertigte ein mikroskopisches Präparat zur Untersuchung in lebendem Zustande und bei stärkerer Vergrösserung. Die *Ptygura*-, *Collotheca*-, *Sinantherina*-Arten usw. lassen sich bekanntlich schwer fixieren, da sie sich bei der kleinsten Berührung oder Änderung der chemischen Zusammensetzung des Wassers zusammenziehen, zu einer formlosen Masse zusammenschrumpfen. Ich untersuchte die Tierchen deshalb meist in lebendem Zustande.

Ich muss eingestehen, dass ich selten eine grössere Freude und Ergötzung genossen habe, als bei der Untersuchung der prächtigen Arten von *Ptygura*, *Collotheca* usw. Das Einziehen der Krone, das Herausstrecken und das Spiel der langen, starren, borstenartigen Zilien und der feinen schwingenden Wimpern stellen ein herrliches Bild dar.

Bald stellte es sich heraus, dass das *Myriophyllum* von den festsitzenden Rotatorien mehr bevorzugt wird, als das *Ceratophyllum*. Ich untersuchte deshalb eine grössere Menge von *Myriophyllum*. Dadurch gelang es mir viele seltene und in der ungarischen Wasserfauna noch nicht beobachtete sessile Arten zu finden.

Im August 1936 fand ich an *Myriophyllum* sehr oft eine interessante, sehr kleine, immer Kolonien bildende *Ptygura*-Art, die ich nach der Beschreibung von WEBER—MONTET (4) zuerst für *Ptygura (Oecistes) socialis* WEBER hielt. Diese Art ist ja bekanntlich die einzige bisher beschriebene, Kolonien bildende *Ptygura*-Art. Sie wurde von WEBER im September 1886 in der Umgebung von Genf entdeckt und 1888 beschrieben (3, S. 15—17, pl. XXVIII, fig. 1—4). Als ich später die bezügliche Abhandlung WEBERS durchstudierte, ist es mir klar geworden, dass unsere Kolonien bildende Art nicht mit der Art von WEBER identifiziert werden kann, und eine nova species darstellt.

Im August 1936 war die neue Art, die ich als *Ptygura tihanyensis* benenne, ziemlich häufig, so dass ich in einem mikroskopischen Präparate, in dem einige Blätter von *Myriopyllum* aufbewahrt waren, oft 2—4 Kolonien beobachtete. Die Kolonien werden von 2—5 Individuen gebildet und nur einmal kam eine Kolonie vor, die aus 11 Individuen bestand. Die Kolonien der *Ptygura socialis* WEBER bestehen dagegen nach WEBERS Angaben aus 5—10—20 Individuen.

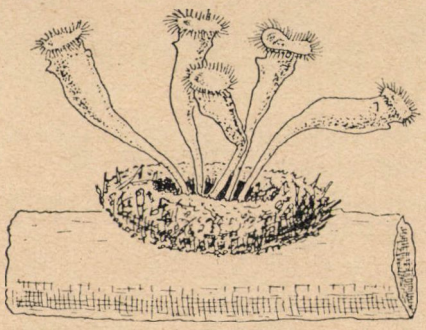
Die Kolonien von *Ptygura tihanyensis* n. sp. entstehen wahrscheinlich dadurch, dass die Tochter-Individuen zusammenbleiben, bis die betreffende höchste Anzahl erreicht wird. Die übrigen Nachkommen müssen am anderen Ort eine neue Kolonie gründen.

Die Individuen der Kolonie bauen sich um ihr Fussende ein Nest (eine rudimentäre Röhre) und in der Mitte dessen haften sie sich mit dem Fuss eng zueinander an den Stengel oder an das Blatt der Wirtspflanze. Das Nest ist flach, mit meist regelmässiger Form, rundlich oder länglich oval. Schon in dieser Hinsicht unterscheidet sich *Ptygura tihanyensis* n. sp. von *Ptygura socialis* WEBER, da die Individuen dieser Art sich nur selten mit ihren Fussenden an einen gemeinsamen Punkt anheften, was an der schönen Abbildung WEBERS gut zu sehen ist (3, pl. XXVIII, fig. 4). Der Unterschied ist aber noch grösser in dem Bau des Nestes. WEBER sagt nämlich (3, S. 15): «Ces groupes, vus à l'oeil nu, ont un aspect mucilagineux blanchâtre, qui est causé par la présence de la sécrétion des Rotifères. On ne voit pas de tubes distincts, mais les Oecistes sont plongés dans une masse de consistance identique à celle des tubes des autres espèces de ce genre».

Die Individuen der Kolonie von *Ptygura tihanyensis* n. sp. bauen sich dagegen ein gut ausgeprägtes Nest, da es kaum als Röhre oder Gehäuse aufgefasst werden kann, wie bei anderen *Ptygura*-Arten. Das Nest entspricht trotz seiner kleinen Dimensionen, seiner ursprünglichen Aufgabe gut: es schützt die Individuen der Kolonie. Als sich alle Individuen der Kolonie plötzlich und auf einmal zusammenziehen, schrumpfen sie so stark zusammen, dass der obere Teil ihrer Körper nicht über dem Rande des Nestes hinausragt. Kriecht z. B. eine *Chironomiden*-Larve über dem Nest vorwärts, so schadet sie den Individuen der Kolonie nicht, da sie zusammengeschrumpft gut geschützt sind (1. Abb.).

Das Zusammenziehen der Individuen ist immer plötzlich und es geschieht für alle so auf einmal, wie wenn sie gemeinsam innerviert wären. Nur in einem einzigen Fall sah ich, dass von den 5 Individuen sich nur 3 einzogen, 2 seitlich stehenden Individuen dagegen auf kurze Zeit ausgestreckt blieben.

Die Grösse des Nestes ist nach der Anzahl der Individuen verschieden: der Durchmesser war im allgemeinen 0·4—0·6 mm. Der Durchmesser der Kolonien von *Ptygura socialis* Weber misst, nach Angabe von Weber—Montet (4), 1·4—2 mm. Das Baumaterial des Nestes besteht meist aus organischem Detritus, teils aus Exkrementkügelchen der Individuen, grössenteils dagegen aus verschiedenen Detritusklümpchen. Die einzelnen Klümpchen müssen mit irgendeinem Sekret zusammengeklebt sein, da das Nest massiv, kompakt, fest und ziemlich hart ist. Aus dem Rande des Nestes stehen auch Skelette verstorbener Algen, winziger Diatomeen heraus (1. Abb.).



1. Abb. *Ptygura tihanyensis* n. sp. — Habitusbild einer Kolonie, an *Myriophyllum*.

Besonderes Gehäuse oder besondere Röhre besitzen die Individuen der *Ptygura tihanyensis* n. sp. nie. Die Subitaneier werden immer dem untersten Fussende angeheftet; auf diese Weise verhindern die Eier das Zusammenziehen der Individuen keineswegs.

Die Körperlänge der Individuen erreicht in vollkommen ausgestrecktem Zustande 230—320 μ (2. Abb.). Sie gehören also zu den kleinsten *Ptygura*-Arten. Die Körperlänge der *Ptygura socialis* Weber dagegen ist nach Weber (3) 500—800 μ. Der Fuss von *Ptygura tihanyensis* ist 1—1·3-mal so lang, wie der Körper. Die Länge des Fusses von *Ptygura socialis* Weber ist zweimal so gross, wie der Rumpf. Der Fuss ist kaum durchsichtig und mit kräftigen Muskeln ausgerüstet, die das Zusammenziehen und Ausstrecken des Körpers verrichten. Das Fussende und die Mechanik des Anheftens des Fusses konnte ich nicht beobachten, da dieses von der opaken undurchsichtigen Masse des Nestes verhindert wird und wegen der Kleinheit der Tierchen gelang es mir nicht, einzelne Individuen von dem Nest und von der Kolonie zu separieren.

Der Rumpf geht gleichmässig verengend in den Fuss über. Der Fuss von *Ptygura tihanyensis* n. sp. ist nur unbedeutend quergestreift und durchaus nicht so geringelt, wie es WEBER an dem langen, dünnen Fuss von *Ptygura socialis* zeichnete.

Die Krone ist nur bei den älteren Individuen breiter als der Rumpf; bei den jüngeren Individuen ist sie nur so breit, manchmal sogar nicht einmal so breit, wie der Rumpf. Die Krone ist fast kreisförmig. Die Zilien des Räderapparates besetzen die Krone ohne dorsale Unterbrechung. Die Länge der Trochus-Zilien ist gleich.

Das Infundibulum ist trichterförmig und es enthält gar keine solche kleine Warzen («une série des petites protubérances»), die sie bei *Ptygura socialis* von WEBER gezeichnet sind.

Da der Körper der *Ptygura tihanyensis* ziemlich undurchsichtig ist, konnte ich die Teile der inneren Organe gründlich nicht beobachten. Wie es mir scheint, ist die innere Organisation von der der anderen *Ptygura*-Arten nicht verschieden.

An den erwachsenen Individuen von *Ptygura tihanyensis* n. sp. konnte ich Augen nicht beobachten. Bei den ganz jungen Tieren dagegen habe ich an dem dorsalen Kronenrand oft zwei sehr kleine, rötliche, fast farblose Augenflecken gesehen, die jedoch beim Wachsen bald verschwanden. In dieser Hinsicht ist unsere Art mit *Ptygura socialis* WEBER verwandt, da auch bei diser Art nur in dem Jugendstadium kleine Augen vorhanden sind.

2. Abb. *Ptygura tihanyensis* n. sp. Unten ein Teil des Nestes der Kolonie.

An der dorsalen Halsregion befindet sich der kurze Dorsaltaster. Weiter unten ventralwärts sind zwei warzenförmige Ventraltaster (2. Abb.). Eine abgesonderte Halsregion kann man nicht unterscheiden.

Der verhältnismässig grosse Magen ist mit kleinsten Algen und Detritusteilchen gefüllt. Diese werden durch das gemeinsame Herbeistrudeln der gleichsam und einheitlich gerichteten Bewegung des Räderorgans in das Infundibulum der einzelnen Individuen befördert. Die unpassenden Triptonteilchen werden schon durch die Trochuszilien beiseite geschafft. Paarige Magendrüsen sind vorhanden. Den Kauapparat (Mastax) kann ich nicht eingehend beschreiben, da alle meine Bemühungen denselben zu beobachten fehlschlugen.

Die kontraktile Blase des Exkretionsorgans liegt über dem Anfang des Fusses.

Alle diese Beschreibungen beziehen sich auf das Weibchen. Männchen konnte ich nicht beobachten.

Die Kolonien von *Ptygura tihanyensis* n. sp. sind sicherlich im Interesse des Nahrungserwerbes entstanden. Die Individuen besitzen ein ziemlich schwaches Räderorgan, welches durch Herbeistrudeln des Wassers kein genügendes Nahrungsmaterial zu beschaffen fähig wäre. 3—4 Individuen dagegen können eine viel stärkere Wasserströmung verursachen und dadurch mehr Nahrung von dem Plankton und Tripton zur Mundöffnung befördern. Und eben diese stärkere Wasserströmung nützen auch andere festsitzende Rotatorien aus! Öfters beobachtete ich nämlich, dass auf den Rand des Nestes die Art *Habrotrocha roeperi* Milne, ein andersmal *Philodina megalotrocha* Ehrbg., oder *Rotaria rotatoria* Pallas sich niederliess, und in dem Herbeistrudeln der Nahrung fleissig teilnahm. Durch das eigene Herbeistrudeln der Nahrung konnte auch der Gast seinen Teil erwerben und auswählen. Wir stehen also vor einem Beispiel des echten Kommensalismus zwischen artlich verschiedenen aber doch verwandten Tieren! Die Nahrung und ihre Quellen sind eben beiderseits dieselben.

Der Kommensalist nahm auch an den anderen Lebenserscheinungen der Wirtstiere teil. Zogen sich z. B. die Individuen der Kolonie von *Ptygura tihanyensis* n. sp. auf einmal zusammen, so zogen sich auch die Kommensalisten zusammen und harrten ruhig in kugeliger Form so lange, bis sich ihre Wirtstiere langsam

und vorsichtig ausstreckten. Auf ein- und demselben Nest habe ich mehr als einen Kommensalisten nie wahrgenommen.

In *Ptygura tihanyensis* n. sp. haben wir eine zweite koloniebildende *Ptygura*-Art vor uns. Nur in den letzten Jahren entdeckte MYERS (2) eine freischwimmende Art: *Ptygura libera* MYERS. Der *Ptygura*-Genus ist also reich an verschiedenen und interessanten Arten.

Ptygura tihanyensis n. sp. benützt zum Festsitzen nur *Myriophyllum*. An anderen submersen Wasserpflanzen beobachtete ich ihre Kolonien niemals. Auch in dieser Hinsicht unterscheidet sich unsere Art von *Ptygura socialis* WEBER, deren Individuen die an anderen Wasserpflanzen sitzenden Algen als Unterlage benützen. WEBER (3) sagt nämlich: «... presque tous fixés vers le même point, qui sert d'attache aux algues sur une autre plante aquatique»; oder «au milieu de cet amas confus d'algues et de matières protoplasmatiques opaques ...» (p. 15).

Auf Grund aller dieser wichtigen Verschiedenheiten musste ich unsere Art als eine nova species auffassen.

Irodalom. – Literatur.

1. HUDSON—GOSSE: The Rotifera: or wheel Animalcules, I—II. London, 1886, 1889.

2. MYERS, FRANK, J.: A new species of Rotatoria *(Ptygura libera)*. Journal of the Royal Micr. Soc., LIV. 1934, 231—233.

3. WEBER, E. F.: Notes sur quelques Rotateurs des environs de Genève. Arch. de Biol. 8, 1888. 647—722. pl. XXVI—XXXVI.

4. WEBER—MONTET: Rotateurs. Catalogue des Invertébrés de la Suisse, fasc. 11. Genéve, 1918.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

A MAGYARORSZÁGI LEGYEK SYNOPSISA. V.

TIPULIDAE.

SZILÁDY ZOLTÁN-tól.

A Tipulidák általában szúnyogtermetű, de a szúnyogoknál jóval nagyobb kétszárnyúak. Népies nevük szerint lószúnyogok, tehát nagy szúnyogok. Régibb munkákban több családot számítottak ide. Csak újabban választották külön a könyökérnélküli és redősszárnyú Liriopidákat (Ptychopteridákat), a többcsápízű (16) Cylindrotomidákat és az együttmaradt fajok két csoportja is családrangra emelkedett: ezek a Limnobiidák és a szorosabb értelemben vett Tipulidák.

Megkülönböztetésük a következő alapon történik:

A) A szárny első hosszanti ere (subcosta) előrehajló és a vége az előszegélyérbe torkollik. A tapogató végíze rövid; kisebb termetű állatok ..... *Limnobiidae.*

B) A szárny első hosszanti ere hátrahajló és a végén a második hosszanti érbe (radiusba) torkollik. A tapogató végíze igen hosszú, ostorszerű ..... *Tipulidae.*

A két család tagjait életszokásaik is megkülönböztetik:

A Limnobiidák lárvái iszapban vagy vízben fejlődnek.

A Tipulidák lárvái földben fejlődnek.

Legtöbb esetben a nagyobb termet, a 2 cm-nél nagyobb hosszúság már elárulja, hogy az illető állat a lószúnyogok családjába tartozik. Éppen ezért a kisebb és gyöngébb testalkotású Limnobiidák sorából meg kell említenünk azt a néhány fajt, amely nagyságával kivételt tesz és így a Tipulidákkal legkönnyebben összetéveszthető. Ezek a következő, könnyen megismerhető állatok.

1. 25—35 mm hosszú, szürketestű állat, színtelen szárnyát egy széles, barna sávokból alakult **A**-alak keretezi, amelynek csúcsa a szárny tövében fekszik. Hegyvidéki állat..... *Pedicia rivosa* L.

2. Tipula-termetű, de feltűnően vastaglábú, vörösbarna állat, hamuszürke torháttal és piszkosbarna, elmosódottan foltos szárnyakkal ..... *Eutonia barbipes* Mg.

3. Legfölebb 16 mm-es testű, de nagyszárnyú állat, teste sárga, barna foltokkal, csíkokkal díszített, szárnya szélén négy, kissé beljebb még egy ötödik barna folttal .. *Limnobia annulus* L.

4. Hasonló termetű, sárgaszárnyú állat, szárnyain két-két barna harántfolttal ..... *Limnobia bifasciata* Schrk.

A Tipulidákat különben leginkább arról ismerjük meg, hogy ormányszerűen megnyúlt fejükön két pár csápfüggelék látszik lenni. Csak az első pár a voltaképpeni csáp, a második a korbácsizületben végződő tapogató. Sokerű szárnyuk és fonalas csápjuk tanúsága szerint igen régi típusú, őskori dipterák. Szúrni nem tudnak, legföljebb lárváik tesznek kárt néha melegágyainkban.

A nemek meghatározó táblázata.

1 A csáp 15—19 ízű. Igen hosszú fejű, fekete-sárga díszítésű állatok ..... *VI. Pales (Nephrotoma).*

— A csáp 13-ízű 2

2 A hímek csápja fésüs 3

— A hímek csápja nem fésűs 5

3 A hím csápja egyoldalúan fésűs, csak a belső szélén visel fésűnyúlványokat. A nőstény csápja kissé lapult, gömbölyded ízekből áll ..... *I. Dictenidia*

— A hím csápja kifelé és befelé, tehát kétsorosan, esetleg háromsorosan fésűs. A nőstény csápízei élesen elkülönültek, tövükön rendesen fogas nyúlvánnyal 4

4 A hím csápja a kettős fésűn kívül alul is nyúlványokat visel (3-fésűs). A nősténynek hosszú tojócsöve van .... *II. Xiphura*

— A hím csápja csak kétsorosan fésűs. A nőstény tojócsöve rövid. *III. Ctenophora*

5 Fekete-sárga díszítésű, fényes testű állatok. A szárny korongsejtjéből három ér fut ki a szegélyhez s ezek közül az első kettő

gyakran egy pontból ered vagy a tövüknél rövid darabon egyesültek ..... *IV. Pachyrhina*

— Másféle színezetű, többnyire fakósárga, barnás vagy szürkés, hamvas állatok. Szárnyuk korongsejtjéből egy különálló és két egyesült ér fut a szegélyhez, ez utóbbiak egyesülése hosszú nyelet formál, amely az egyes ágak $^1/_5$-énél mindig hosszabb. *V. Tipula.*

I. Dictenidia Brullé.

Ebbe a nembe csak egy hazai faj tartozik. Ez fényes fekete, torán rozsdasárga foltokkal vagy sárgahátú, fekete sávokkal. A potroh fekete, vörös tővel és hassal (♂) vagy vörös-fekete csíkokkal (♀). A barnás szárnyak fél harántöve és csúcsfoltja barna: *bimaculata* L.

II. Xiphura Brullé.

1 Fekete-piros tarkázatú állat. Potroha fekete, a nőstényé a tövén piros: ..... *atrata* L.

— Fekete-rozsdavörös tarkázatú állat. Potroha is ilyen (♂) vagy csak a tövén és hasán rozsdabarna: ..... *ruficornis* Mg.

III. Ctenophora Brullé.

1 A szárny foltja nagy, a szárnyjegytől a korongsejtig terjed, sőt gyakran abba is belenyúlik 2

— A szárnyjegy legfölebb a kis harántérig terjed 4

2 A torhát vöröses, három barna sávval. A potroh sárga, fekete övekkel (3) és foltokkal. A szárnyak élénksárgák: Budapest, Kalocsa: ..... *ornata* Mg.

— A torhát fekete ..... 3.

3 A hátsó lábszárak barnaövesek. A fekete potroh sárgán övezett. Az 1. szelvény öve elül, a 2.-é középütt fekszik és kettéosztott. A többiek a szelvény utószélén állnak és igen szélesek: *festiva* Mg.

— A hátsó lábszárak sárgák. A potroh 1. és 2. szelvénye sárgafekete középsávval és az utószegélyt megelőző övvel. A 3. fekete, elül sárga oldalfoltokkal, a következők majdnem egészen sárgák, fekete középfoltokkal: Mehádia, Pápa: .. *elegans* Mg.

4 A potroh vörösessárga, fekete hátfoltok sorával: *pectinicornis* L.
— A potroh fekete, sárga vagy fehér díszítéssel 5
5 A potrohot sárga övek díszítik: ..... *flaveolata* F.
— A potrohot ferdén álló, fehér foltpárok díszítik: .. *guttata* Mg.

IV. Pachyrhina Mcq.

1 A potroh gyűrűsen díszített vagy egészen kékesfekete színű, sárga oldalfoltokkal: ..... I. csoport. *Cingulata.*
— A potroh háta keskeny hosszanti sávot visel vagy egészen sárga: 2,
2 A szárnyjegy sárga vagy halvány: II. csoport. *Pallidistigmata.*
— A szárnyjegy sötétbarna: ..... III. csoport. *Atristigmata.*

1. Cingulata.

1 A potroh kékesfekete, fekete szegélygyűrűkkel és sárga oldalfoltokkal: ..... *pratensis* L.
— A potrohot körülfutó sárga és fekete övek díszítik 2
2 A potroh sárga, az övek helyett széles fekete háromszögekkel: Tihany: ..... *euchroma* Mik.
— A potroh fekete övei körülfutók 3
3 A potroh sárga, keskeny, de középen előreszögellő szegélyövekkel. A tor oldalai sárgák, fekete foltokkal:.. *scalaris* Mg.
— A potroh fekete, 3 széles, párhuzamos sárga övvel és 1—2 pár ugyanilyen folttal. A tor oldalai feketék: ..... *crocata* L.
Ötöves és sárga potrohvégű változat: ..... var. *luteata* Mg.

2. Pallidistigmata.

1 A torhát oldalsávjai egyenesek, 15 mm-nél hosszabb, halványbarna állat. Verestorony, Pelsőc, Vratna: ..... *scurra* Mg.
— A torhát oldalsávjai elül kampósan kihajlók, 14 mm-nél rövidebb állatok 2
2 A billér előtti párna fekete szegélye patkóalakú. A ♀ potrohsávja széles, trapezfoltokból összetett, folytonos: *maculata* Mg.

— A billér előtti párnán csak a billér mellett van fekete szegősáv. A ♀ potrohsávja keskeny, téglaalakú foltokra szakadozott: *lineata* Scop.

3. Atristigmata.

1 A hátsó harántér és a végéből kifutó hosszanti ér szélesen barnaszegélyű s ezért a szárny foltos: ..... *quadrifaria* Mg.
— A szárny színtelen, nem foltos 2
2 Hímek 3
— Nőstények 8
3 A tor oldalsávjai egyenesek 4
— A tor oldalsávjai elül kihajlók, kampósvégűek 6
4 Az ivarszerkezet alján, középen hosszú, hegyes tüskenyúlvány, appendix basalis van: ..... *aculeata* Lw.
— Az ivarszerkezetnek nincsen középső-alsó nyúlványa 5
5 A csáp középső ízei mindkét végükön féloldalasan, bütykösen elszélesedtek. Mehádia, Budapest, Debrecen: *Schummelii* Riedl.
— A csáp középízei hengeresek, alig föltűnő homorúsággal. S.-A.-Újhely, Mehádia: ..... *lunulicornis* Schum.
6 Az ivarszervnek alul gömbösvégű középnyúlványa van: *cornicina* L.
— Az ivarszervnek nincsen alsó középnyúlványa 7
7 Az alsó ivar csúcslemez bozontosan szőrös: ... *analis* Schum.
— Az alsó csúcslemez majdnem csupasz, a felső 2 tompa foggal. A toroldalak sárgák, fekete foltokkal. Hazai előfordulás kétes: *guestfalica* Westh.
8 A torhát oldalsávjai egyenesek 9
— A torhát oldalsávjai kigörbülők, elül kampósan végződnek 10
9 Ivarfüggelékei (cercus) tompavégűek. Hegyi faj: *lunulicornis* Schum.
— Ivarfüggelékei hegyesvégűek: ..... *aculeata* Lw.
10 Az ivarfüggelékek kerekített végűek. A potroh hátisávjának szakaszai a szelvényhatárok előtt elszélesedők: *analis* Schum.
— Az ivarfüggelékek hegyesvégűek 11
11 A hátisáv a potrohon keskenytövű, keskeny, szakadozott: *guestfalica* Westh.

— A hátisáv a potrohon tőben széles és összefüggő, az egyes szelvények végén kiszélesedő: ..... *cornicina* L.

V. Tipula L.

1 A szárny színtelen, csak az előszegély és a szárnyjegy lehet sötétebb, néha az utóbbi mellett még egy világosabb, áttetsző folt látszik: ..... III. csoport. *Subunicolores*

— A szárny csíkozott vagy foltozott, legalább a tengelyér mentén sötétebb 2

2 A szárny előszéle és tengelysávja (az 5. hosszanti ér szegélye) szabadszemmel is látható sötét csíkot alkot: II. csoport. *Striatae*

— A szárny márványozott, sötét alapon világos vagy világos alapon sötét, néha alig észrevehető foltokkal:

I. csoport. *Marmoratae.*

1. Marmoratae.

1 A szárny egyszínű, barna (♀) vagy szürke (♂), két sötétebb folttal a tengelyér mentén. Szürkéssárga vagy barnás, 22—30 mm hosszú hegyvidéki állat: ..... *fulvipennis* Deg.

— A szárny színtelen, sötét foltokkal tarkázott 2

2 A szárny előszélére három nagy, háromszögalakú, barna folt támaszkodik, az utószélet három halványabb szegélyezi. Legnagyobb fajunk: 22—35 mm. Hegyvidékeinken nem ritka:

maxima Poda.

— A szárnyat 3 harántsáv díszíti, csúcsa is füstös, 11 mm. Munkács. E ritka középeurópai faj hímje ismeretlen: ... *trifasciata* Lw.

— A szárny hosszantcsíkozottnak látszik, mert a középtájtól végig a szárnycsúcs alatt végződő színtelen sáv halad 3

— A szárny szabálytalanul foltozott 4

3 A csáp vaskos, hamvasszürke. Selmecbánya: ... *vittata* Mg.

— A csáp vékony, rozsdasárga, csak a vége felé sötétebb. Pomáz:

tenuicornis Schum.

4 A potroh vöröses, széles, bársonyfekete hátsávval. Nagy faj, vastag, barna szárnyerekkel és sárga szárnyjeggyel. Körösmező, M.-Tátra: ..... *saginata* Bergr

— A potroh egyszínű vagy halványbarna sávval díszített 5
5 A tor oldalán széles, barna, ferde sáv fut végig. 16 mm-nél nem nagyobb. Szalonca ..... *rufina* Mg.
A tor oldalán nincsen sötét ferde sáv 6
6 A torhát középrészén 3 előre szétágazó, villát alkotó sötét sáv fut végig, a közbülső sáv vékony, vonalszerű: ... *Trifurcatae*
— A torhát párosan sávozott, 2 vagy 4 sávval 11
7 A csáp 14- (♀) vagy 15-ízű (♂): *Oreomyza*. Ebből az alnemből nálunk egy 15 mm nagyságú faj előfordulása valószínű, ez a hamvasszürke és ugyanilyen csápú, halványan márványozott szárnyú; eddig Ausztriából ismert (a nőstény ismeretlen): *austriaca* Pok.
— A csáp 13-ízű 8
8 A csáp feltűnően rövid, zömök. A szárny márványfoltozata élénk sötétszínű. Nagyszeben, Fuzsine: .. *crassicornis* Zett. Valószínűleg a halvány szárnyfoltos rokona is megvan nyugaton, mert Ausztriából ismeretes: ..... *crassiventris* Riedl.
— A csáp hosszú, vékony 9
9 A szárny élénken márványozott, sötét foltjai élesen határoltak. Hegyvidékeinken mindenütt: ..... *truncorum* Mg.
— A szárny halvány márványzatú, foltjai elmosódók 10
10 A csáp tőizei feketék. A szárny szürkés árnyalatú. A potroh (♂♀) szürke. Hegyvidéki faj: ..... *nervosa* Mg.
— A csáp tőizei sárgák. A szárny sárgás árnyalatú. A potroh (♂♀) vörösessárga, szürke hátisávval. Visegrád, Karszt *pabulina* Mg.
11 A tor hátát 4 egyenlő széles, feketés sáv díszíti, a közbülső kettő néha elül egymásba fogódzó: ..... *Bilineatae* 12
— A tor hátát 4 szürke sáv díszíti, amelyeket barna szegélyvonal kerít be. A 2 középsáv gyakran végig összeforr, úgy hogy szegővonaluk középen egyesül, sőt néha elül elenyészik: *Marginatae* 19

12 A szárny előszélén a szárnyjegyből függő erecske indul kifelé, mert a 2. hosszanti ér nem ér a szegélyérig 13
— A szárny előszélén nincs függőér, a 2. hosszanti ér a szegélyérben végződik 15

13 A potroh szürke, sárga szegélyekkel, a csáp sötétszürke, néha a ♀ csápjának tőízei sárgák. Hegyvidéki faj: *variipennis* Mg.
— A potroh vörösbarna vagy sárga 14
14 A csáp 3—4 tőíze sárga, a potroh sárga vagy vörösbarna. Hegyvidékeinken: ..... *hortulana* Mg.
— A csáp tőíze szürke, csak a csúcsa és a 2—3. íz sárga. A potroh sötétbarna. Pomáz, Debrecen: .... *pseudovariipennis* Czizek
15 A szárnynak holdalakú, áttetsző harántöve van, amely a szárnyjegy előtt kezdődik, a korongsejten fut át és a 4. utószegélysejtben éri el a szárny szélét 16
— A szárny más mintázatú, nincsen halvány harántöve 18
16 A potroh és a csáp hamvasszürke (csak a 2. íz sárga); ♀ 21 mm. A szárny gyöngyházfényű. Bosznia, Badacsony, Bártfa, Magas-Tátra: ..... *irrorata* Mcq.
— A potroh vörösessárga vagy fakósárga hosszanti sávval. A szárnynak nincsen gyöngyházfénye 17
17 Kisebb faj halvány szárnyfoltozattal. Csápja sárga, vége felé sötétebb. Poprád: ..... *hortensis* Mg.
— Nagyobb, 20—24 mm-es faj, sárga csápján keskeny barna gyűrűkkel. Fiume, Herkulesfürdő: ..... *heros* Egg.
18 A ♂ alsó ivarlemeze elálló és 2 rövid karélyban végződik, az ezeket elválasztó bevágás élén fekete fogacskák ülnek. Retyezát, Tihany: ..... *obsoleta* Mg.
— A ♂ alsó ivarlemeze hosszúhegyű, majdnem függélyesen elálló, mélyen hasított és közbül behajló szélű. Nyugati szomszédterületeken: ..... *signata* Staeg.
19 Hamvasszürke testű állat rövid szürke csáppal és halványan foltos szárnyakkal. 18 mm. M.-Tátra: .... *goriziensis* Strobl.
— Vöröspotrohúak sötét potrohsávval 20
20 Kisebb, legföllebb 19 mm-es állatok, a ♂ csápja hosszabb, mint a fej és tor együttes hossza. M.-Tátra: ..... *unca* Wied.
— 20 mm-nél többnyire nagyobb állatok. A ♂ csápja rövid .. 21
21 A ♂ csápízei végeiken bogosan elszélesednek, alul mélyen öblös-szélűek, a ♀ tojócsöve a végén kétkarélyú: .... *excisa* Schum.
— A ♂ csápízei nem bogosak, alsó szélükön nem öblösek, a tojócső nem kétkarélyosan végződik 22

22 A csápok, lábak és a potroh vöröses. A csápízek töve vastagodott. Karszt-hegység, Felvidék: ..... *rubripes* Schum.
— A csápoknak csak a töve vörös, a combok vége és a potroh középsávja sötétebb 23
23 A tojócső karcsú, fokozatosan keskenyedő. A ♂ középső ivarnyúlványának alsó ágán, a csúcshoz közel kis fog van: *scripta* Mg.
— A tojócső vaskos, párhuzamos, csak a végén hegyesedő. A ♂ középső ivarnyúlványának alsó ágán nincs fogacska: *nubeculosa* Mg.

2. *Striatae.*

1 A test kékes hamvasszürke. A szárny előszegélysejtje és szárnyjegye sötétbarna: ..... *caesia* Schum.
— A test barnás színezetű vagy szürke (♂) 2
2 A szárny föltűnően sávos, mert majdnem minden ere barnán szegélyezett. A potroh élénkvörös, barna középsávval. A csáp fekete, csak a 2. íz és az 1. töve sárga: ..... *vernalis* Mg.
— A szárny és a potroh más színezetű 3
3 A szárny előszegélye és a szárnyjegy sötétbarna. 13 mm-nél nem nagyobb nyugati faj: ..... (*marginata* Mg.)
— A szárny előszegélye és a szárnyjegy sötétszürke, a tengelyér szegélye alig látszik. 16—24 mm. Legközönségesebb fajunk: *oleracea* L.
Sárgás szárnyú és vörös potrohú változata .... v. *paludosa* Mg.
— Halvány szárnyszegélyű, többnyire nagy termetű állatok .. 4
4 A csáp és a potroh egészen szürke. A szárny füstös. Nyugati szomszédainknál: ..... (*subnodicornis* Zett.)
— A csáp és a potroh részben sárga. A szárny színtelen 5
5 A csáp töve és az ostorízek tövei sárgák. A potroh szürke, fekete oldalsávokkal: ..... *lateralis* Mg.
— A csáp töve és az ostorízek végei sárgák. A potroh nagyobb része fakósárga. A szárny halvány, a tengelyér szegélye alig látható. Lubló: ..... *limitata* Schum.

3. Subunicolores.

1 A szárny feketés, füstös. Az állat egészben fekete, csak lábai töve sárgás: ..... *nigra* L.
— A szárny halványszürkés vagy sárgás. Nem feketék 2
2 A szárny egyszínű, halványsárga, szárnyjegy nélkül. Vörösessárga színezetű állat, csak a combvégek barnák, a hát középsávja pedig barnásszürke (a toron is). Szalonca: *luteipennis* Mg.
— A szárny más színezetű, a szárnyjegy jól látható 3
3 Nagytermetű szürke állatok. A ♂ csápostora hengeres, egyszerű ízekből áll. Lotriora-völgy: ..... *luna* Westh.[1]
— Kisebbtermetű vagy nem szürke színezetű állatok 4
4 A ♂ csápja a fej és tor hosszánál hosszabb. A ♀ potroha igen hosszú 5
— A ♂ csápja a fej és tor hosszánál rövidebb. A ♀ potroha nem föltűnően hosszú 6
5 A ♂ csápostora fűrészes, az ízek végei megvastagodtak, a középrészük alul ívesen bemélyedő. Alföldünkre jellemző faj: *juncea* Mg.
— A ♂ csápja nem fűrészes. Karszthegység: .... *flavolineata* Mg.
6 A szárny szürke, világos folt nélkül, barna szárnyjeggyel. A potroh hamvasszürke, vörös ivarkészülékkel, amelynek közepén, fönt egy kis fekete kettős púp emelkedik. Magas-Tátra: *pruinosa* Wied
— A szárnynak világos foltja van, vagy a potroh másszínű .. 7
7 Legalább 25 mm hosszú állat. Csápja sárga, barna tőízzel és íztövekkel. Feje sötétbarna. Tora világosabb, majdnem egyesülő sötétbarna sávokkal. Oldalai ólomszürkék. Potroha sötétbarna, sárga szegélyekkel. A szárny erei barnásan szegélyezettek. A holdas tűkörfolt a korongsejtet keresztezi. A 2. utószegélysejt rövidkocsányú. Bosznia: ..... *bosnica* Riedl.
— Kisebb és másféle színezetű állatok 8
8 Hímek 9
— Nőstények 22

[1] A szerzőknél eddig *lunata* L. téves elnevezéssel szerepelt.

9 A fölső ivarlemezek fekete, tövisekkel megrakott bogban végződnek. Vörösessárga állat, szürke torhátán egyetlen barna középsávval és ugyanilyen potrohsávval, hamvasszürke toroldalakkal. A sárgás szárnyon a szárnyjegy és a holdfoltocska alig látszik. Raguza: ..... *lactipennis* LIND.

— A fölső ivarlemezek vége nem fekete 10

10 A szárny holdfoltja csökevényes, csak a szárnyjegy szélességéig terjed. Az ivarszerv közbülső nyúlványai 3 rövid tövishorgot viselnek. Fölső fedőpajzsa széles, szívalakú, végén kétkarélyú, sötétbarna. Kistermetű, fakósárga állat, tora hátán 4 barna, különálló sávval. Krassó, Szalonca: ..... *cacuminata* RIEDL.

— A szárnyak holdfoltja nagyobb terjedelmű 11

11 Az alsó ivarpajzs kajmói töviseket viselnek 12

— Az alsó ivarpajzs kajmóin nincsenek tövisek 18

12 Az alsó ivarpajzs erősen elálló és nagy, aranysárga szőrbojtban végződik, a közbülső ivarlemezek nyúlványa magasan kiemelkedő, 2-alakú. Élénksárga állat, csak a torhátnak két egymástól távolálló, széles sávja szürkés. 12 mm-nél hosszabb. Dalmácia: ..... *affinis* SCHUM.

— Az alsó ivarpajzs nem elálló és nem bojtos végű 13

13 Az alsó ivarpajzs igen széles, kajmói egymástól távolállók, végtüskéik az ivarszerkezet közepébe rejtőztek, görbültek, alig láthatók. Nagy, fakósárga állat, sötét színű, igen nagy ivarkészülékkel. A rövid csápostorízek töve vastag, barna, végük fehéres: ..... *truncata* LW.

— Az alsó ivarpajzs keskenyebb az ivarkészüléknél 14

14 Az alsó ivarkajmók végén 2—2 hosszú tüske áll 15

— Az alsó ivarkajmók végén csak 1—1 tüske áll 16

15 A középivarlemezek egyetlen, kiálló, hajlott dárdahegy-alakú nyúlványban végződnek. Dunántúl, Fuzsine: .. *mellea* SCHUM.

— A középivarlemez 3 tövishegyet viselő nyúlványban végződik. Árvaváralja, Pomáz, Turcsek: ..... *fascipennis* MG.

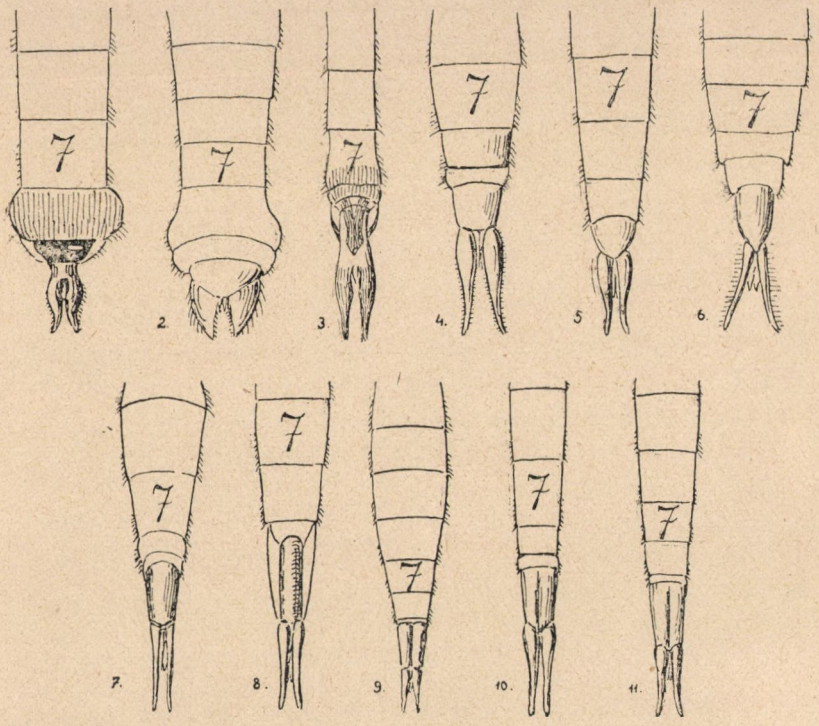
16 Az alsó ivarkajmók töve közt egy hátrafelé irányuló aranyszőrbojt van, a kajmóágak közti tért nem födik harántszőrök: *lunata* L. (*ochracea* MG.)

— Az alsó ivarkajmók töve közt csak fölfelé irányuló szőrök vannak, a kajmók belső szélén álló haránt os sörték a kajmóközi rést rostaszerűen födik 17

17 Kisebb, vörösessárga színezetű állat: .... *peliostigma* SCHUM.
— Nagyobb, szürkésbarna színezetű állat: ..... *selene* MG.
18 Az alsó ivarlemez öbléből aranyos szőrcsomó áll ki 19
— Az alsó ivarlemezen nincsen ilyen aranybojt 21
19 Az aranyszőrbojt lefelé álló, ecsetalakú. 20 mm-nél nagyobb állat. Tengermellék, Mehádia: ..... *pannonica* LW.
— Az aranyszőrbojt lapátszerűen hátrafelé hajló 20
20 A külső alsó ivarkajmó nagy, bunkóalakú. Dalmácia: *humilis* STAEG.
— A külső alsó ivarkajmó kicsiny, kolbászalakú. A csáp fekete gyűrűkkel: ..... *helvola* LW.
— A külső alsó ivarkajmó kicsiny, kolbászalakú. A csáp sötét, nem gyűrűzött. Középeurópai faj, valószínűleg nálunk is megvan: ..... (*cinerascens* LW.)
21 Az ivarkészülék lapos, kicsiny, két oldallemez közé fogott, keskeny, hosszú, nem tüskés alsó nyúlványpárral. A potroh vége sötétszürke, fehér szelvényszélekkel. Horvátország: *livida* VULP.
— Az ivarkészülék nagy, gömbalakú. A két gömbölyded lemez közül kiemelkedő középnyúlványok fekete tüskében végződnek. Pomáz, Abbázia: ..... *appressocaudata* STROBL.
22 A potroh 8. szelvénye erősen kiszélesedő 23
— A potroh 8. szelvénye nem szélesebb a többinél 24
23 A farkfüggelékek keskenyek, sarlóalakúak, kifelé hajlók: *fascipennis* MG.
— A farkfüggelékek szélesek, befelé hajlók: ..... *mellea* SCHUM.
24 A 10. fényesbarna potrohszelvény középen keskenyedő, szélesebb farkfüggelékpárral: ..... *livida* VULP.
— A 10. potrohszelvény nem középen keskenyedő, mindig szélesebb, mint a farkfüggelékek 25
25 A 10. potrohszelvény nem hosszabb, mint aminő széles... 26
— A 10. potrohszelvény megnyúlt, kúpos vagy hengeres ... 27
26 A potroh a 7. szelvény elején a legszélesebb, a 8. szelvény harántos: ..... *affinis* SCHUM.
— A potroh a 6. szelvény elején a legszélesebb, a 8. szelvény hossza és szélessége majdnem egyenlő: ..... *helvola* LW.

27 A potroh legrövidebb, a 8. és 9. szelvénye ennél jóval hosszabb: *cacuminata* RIEDL.

— A potroh legrövidebb, gyakran rejtett szelvénye a 9. 28



Kevéssé ismert Tipula-fajok nősténveinek potrohvégszerkezete.

1. *Tipula fascipennis* MG.
2. « *mellea* SCHUM.
3. « *livida* VULP.
4. « *affinis* SCHUM.
5. « *helvola* LW.
6. « *cacuminata* RIEDL.
7. *Tipula lunata* L. (*ochracea auct.*)
8. « *humilis* STAEG.
9. « *peliostigma* SCHUM.
10. « *lactipennis* LIND.
11. « *selene* MG.

A hosszanti vonalkázás barna színt jelent, a szőrös részletek fakósárga vagy szürkés hamvasok, a domboru rajzzal jelzettek fényes barna, chitines kallozus képződmények. 7. = hetedik szelvény.

28 A potroh 8. szelvénye erősen megrövidült:
lunata L. *(ochracea auct.)*
— A potroh 8. szelvénye kevéssel rövidebb, mint a 7. 29
29 A 10. szelvény háromszor olyan hosszú, mint széles, hengeres:
humilis Staeg.
— A potroh 10. szelvélye legfölebb kétszer olyan hosszú, mint széles, keskenyedő, tehát csonkakúpalakú 30
30 A potroh zömök, szelvényei szélesek: .... *peliostigma* Schum.
— A potroh karcsú, legtöbb szelvénye hosszabb, mint aminő széles 31
31 A 7. szelvény jóval hosszabb, mint széles:.. *lactipennis* Lind.
— A potroh 7. szelvénye széles: ..... *selene* Mg.

A *Tipula appressocaudata* Strobl és *pannonica* Lw. fajokból nőstény példányok nem állottak rendelkezésemre s ezért táblázatomba ezeket nem vehettem föl.

VI. Pales (*Nephorotoma* Mg.)

Egyetlen hazai faja a Pachyrhinákhoz hasonló halványsárga állat, 3 barna torhátsávval és a potrohon ugyanilyen, széles szalaggal, a szárnyjegy körül sötét folttal. Budapest-N.-Szeben:
dorsalis F.

A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15.-én tartott üléséből.

SYNOPSIS DER FLIEGEN UNGARNS V.

TIPULIDAE.

Von Z. SZILÁDY.

Verfasser gibt hier eine Tabelle der bis jetzt aus Ungarn bekannt gewordenen Tipuliden (mit Ausnahme der Limnobiiden) samt Fundortangaben der selteneren Formen. Die bis jetzt nicht bestimmbaren Weibchen der selene-lunata Gruppe wurden durch neue Merkmale der Genitalien gekennzeichnet und getrennt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1937.)

A GAMMASUGARAK COMPTON-SZÓRÁSÁNAK INTENZITÁSELOSZTÁSÁRÓL.

SZEPESIZ OLTÁN-tól.

Bevezetés.

A COMPTON-effektus photon-elméletének érvényességét több kísérleti vizsgálat igazolja. Újabban a photon-elmélet érvénye ellen szóló kísérlet-sorozat [1] jelent meg, de az ezt cáfoló dolgozatok [2] régebbi kísérletekkel [3] együtt elég bizonyítékul tekinthetők a photon-elmélet érvényessége mellett, a kis energiájú röntgen- és a legnagyobb energiájú gammasugarakra egyaránt.

Kevésbbé rendelkezünk pontos és alapos kritika alá vett kísérletekkel, melyek az intenzitásformulák közül való biztos választást engednék meg.

A nagy számmal keresztülvitt abszorpciós mérések [4] nem fogadhatók el döntő bizonyítékul valamely intenzitásformula érvényessége mellett, mert ezek a szórt sugárzás integráljára vonatkoznak s az intenzitáseloszlásról nem adnak felvilágosítást. E mérések alapján csupán annyit állíthatunk, hogy a kemény gammasugarakra a COMPTON,[5] BREIT-DIRAC-GORDON [6] intenzitás-

---

[1] SHANKLAND: Phys. Rev. 49, 8, 1936.

[2] BOTHE-MAIER-LEIBNITZ: Zs. f. Phys. 102, 143, 1936.
PICCARD-STAHEL: Journ. de Phys. et le Ra. 7, 326, 1936.
SHANKLAND: Phys. Rev. 50, 571, 1936; 51, 1024, 1937.

[3] BOTHE-GEIGER: Zs. f. Phys. 32, 639, 1925.
COMPTON-SIMON: Phys. Rev. 26, 289, 1925.

[4] MEITNER-HUPFELD: Zs. f. Phys. 67, 147, 1931.

[5] COMPTON: Phys. Rev. 21, 483, 1923.

[6] BREIT: Phys. Rev. 27, 367, 1926.
DIRAC: Proc. Roy. Soc. 111, 405, 1926.
GORDON: Zs. f. Phys. 40, 117, 1927.

formulák nem lehetnek érvényesek, míg a mérési eredmények a KLEIN-NISHINA[1] formulával összeegyeztethetők.

FRÄNZ[2] és SKOBELZYN[3] dolgozatai, melyekben a szekundér elektronok intenzitáseloszlásával foglalkoznak, nem szolgálnak biztos alapul a döntéshez. Méréseik nem kielégítő pontosságúak (FRÄNZ GEIGER-számolóval, SKOBELZYN WILSON-kamrával dolgozik), bár SKOBELZYN a nála előforduló diszkrepanciákat nem a mérési pontatlanságnak tulajdonítja.

A szekundér gammasugarak intenzitáseloszlásával KOHLRAUSCH,[4] COMPTON,[5] HOFFMANN[6] és CHAO[7] foglalkoztak. Méréseik szintén nem szolgáltatnak elfogadható eredményeket. Náluk nem korrigálható hibákat okoz az árnyékoló ólomtömbökből kilépő positron-sugárzás és a használt szórólemez vastagsága miatt fellépő többszörös COMPTON-szórás. Továbbá, minthogy az intenzitásgörbét relatív értékekkel adják meg, az összehasonlítás nem teljes és méréseik több intenzitásformulával is összeegyeztethetők.

A szórási kísérleteknél fellépő fent említett zavaró effektusokra és azok kiküszöbölésének módjaira BOTHE és HORN,[8] STAHEL és KATELAAR,[9] és GENTNER[10] dolgozatai figyelmeztetnek. GENTNER mérései azt mutatják, hogy a terciér sugárzás aluminiumnál már 3 mm rétegvastagságnál kimutatható s 1 cm rétegvastagságnál oly erős, hogy az eredményeket számba nem vehetően módosítja. A zavaró positron-sugárzást ugyancsak GENTNER szerint az ólomtömböknek pár milliméter vastag paraffinnal való bevonásával csökkenthetjük.

---

[1] KLEIN-NISHINA: Zs. f. Phys. 52, 853, 1929.

[2] FRÄNZ: Zs. f. Phys. 39, 92, 1926.

[3] SKOBELZYN: Zs. f. Phys. 65, 773, 1930; C. R. 194, 1914, 1932.

[4] KOHLRAUSCH: Wiener Berichte 128, 853, 1919; Phys. Zs. 21, 193, 1920.

[5] COMPTON: Phil. Mag. 41, 749, 1921; loc. cit.

[6] HOFFMANN: Zs. f. Phys. 36, 251, 1926.

[7] CHAO: Phys. Rev. 36, 1519, 1930.

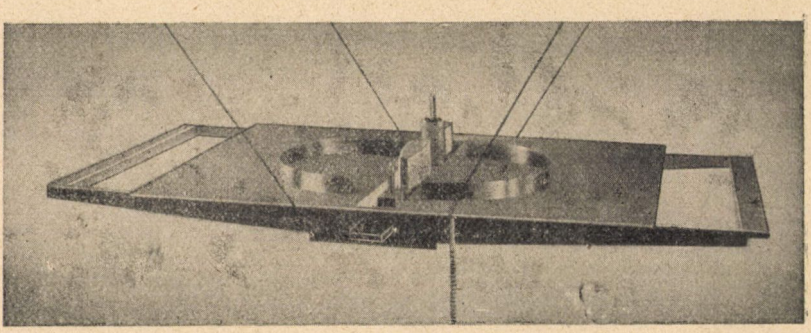
[8] BOTHE-HORN: Zs. f. Phys. 88, 683, 1934.

[9] STAHEL-KATELAAR: Journ. de Phys. et le Ra. 4, 460, 1933.

[10] GENTNER: Zs. f. Phys. 100, 445, 1936.

A módszer leírása.

A szórási kísérleteket eddig általában pár centiméter rétegvastagságú szórólemezekkel végezték. A vastag szórólemezre a szórt gammasugarak intenzitásának kicsiny volta miatt van szükség. Ha a vastagságot csökkentjük, akkor a szórólemez nagyságát kell megfelelően növelnünk, hogy mérhető effektust kapjunk, ekkor azonban rossz szögviszonyokkal kell számolnunk. Nagyobb effektust és jobb szögviszonyokat kapunk a szóróanyag gyűrűs elrendezésével. E módszer használata azonban megfelelő vékony



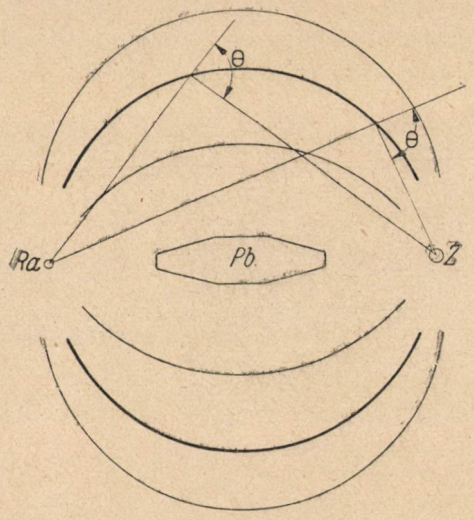
1. ábra.

lemezekkel nehézkes kísérleti elrendezést eredményez. (GENTNER idézett dolgozata.)

A mondottakat figyelembe véve egy új kísérleti elrendezést dolgoztunk ki,[1] melynek fényképét az 1. ábra, schematikus rajzát a 2. ábra mutatja, hol *Ra* a gammasugárforrás, *Z* a számolócső. A felrajzolt körök mentén a rajz síkjára merőlegesen vannak felállítva a szórólemezek. Így minden egyes szórólemez-elemhez tartozó szórási szög θ — ismert geometriai tétel szerint — ugyanaz (eltekintve a szórólemez véges magassága miatt fellépő szögeltéréstől, mellyel később foglalkozni fogunk). A számolócső és a gammasugárforrás a rajz síkjára merőlegesen megfelelő magasságú. A *Pb* ólomtömb a primér sugaraknak a számolócsőtől való elárnyékolására szolgál.

[1] E módszerre dr. BAY ZOLTÁN professzor úr hívta fel figyelmemet.

A fenti módszernek a gyűrűs elrendezéssel szemben előnye, hogy kísérletileg könnyebben megvalósítható. Míg a gyűrűs módszernél a szórógyűrű térbeli pontos beállítása nehezen vihető végbe és a szórási szög változtatása körülményes (GENTNER idézett dolgozatában csupán egy szórási szögnél mér), addig elrendezésünkben a szórólemez beállítása egyszerűen annak az



2. ábra.

előre felrajzolt megfelelő körre való helyezéséből áll. A két módszer szögpontosság szempontjából egyenlően pontos geometriai felépítés mellett körülbelül egyenrangú, de geometriailag pontos felépítés a gyűrűs módszernél nehezen érhető el.

A módszer elmélete.

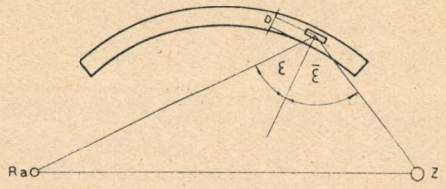
E módszerrel mért effektusból az egyes szórási szögekhez tartozó szórási együtthatókat az alább található egyszerű számítás alapján kaphatjuk meg.

Legyen az M_v héjelektront tartalmazó szórólemez-elemre eső prímér gammasugarak intenzitása (photonok száma négyzet-

centiméterenként és időegységenként) a szórólemez helyén N_0, a θ szórási szög körül egységnyi térszögbe időegységenként szórt gammasugarak száma N_1, akkor a θ szöghöz tartozó egy elektronra vonatkoztatott szórási együttható alatt értjük a

$$\sigma_\theta = \frac{N_1}{N_0 M_v} \qquad (1)$$

hányadost.



3. ábra.

E definiciónak megfelelően a D mélységben lévő dv térfogatú anyagban szóródott kvantumok közül az F felületű számolócsőre eljutó photonok száma (3. ábra):

$$dn_\theta = \frac{Na}{4\pi r_1^2} e^{-\frac{D\mu}{\cos\varepsilon}} \sigma_\theta e^{-\frac{D\bar{\mu}}{\cos\bar{\varepsilon}}} M dv \frac{F}{r_2^2} \qquad (2)$$

hol Na az a mg. rádiumból az időegység alatt kijövő photonok száma, M az egy cm^3 térfogatú szóróanyag elektronjainak száma, r_1 illetve r_2 a sugárforrásnak, illetve a számolócsőnek a szóróanyagtól való távolsága, μ a primér, $\bar{\mu}$ a szórt gammasugarak abszorpcióegyüttható ja a szórórétegben.

Helyettesítve

$$dv = m dD ds$$

(hol m a szóróréteg magassága, dD elemi vastagsága, ds elemi hossza) 2.-be, kapjuk:

$$dn_\theta = \sigma_\theta \frac{NaMmF}{4\pi} \frac{ds dD}{r_1^2 r_2^2} e^{-D\left(\frac{\mu}{\cos\varepsilon} + \frac{\bar{\mu}}{\cos\bar{\varepsilon}}\right)}. \qquad (3)$$

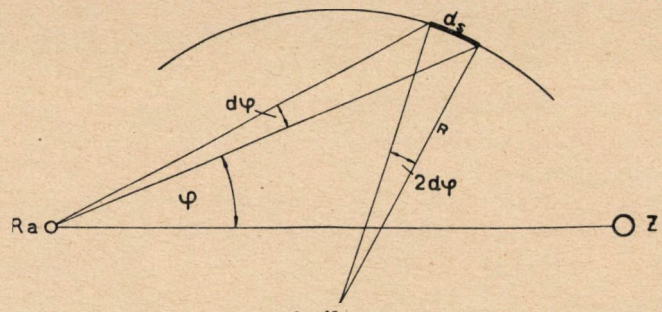
Integrálva (3)-at a szórólemez egész hosszára és vastagságára s kettővel szorozva, minthogy mindkét oldalon egy-egy szórólemez áll, az egységnyi idő alatt a számolócsőre eső photonok száma:

$$n_\theta = \sigma_\theta \frac{NaMmF}{2\pi} \int_0^D \int_0^s \frac{e^{-D\left(\frac{\mu}{\cos\varepsilon} + \frac{\bar{\mu}}{\cos\bar{\varepsilon}}\right)} dD ds}{r_1^2 r_2^2}.$$

A D szerinti integrálást elvégezve:

$$n_\theta = \sigma_\theta \frac{NaMmF}{2\pi} \int_0^s \frac{\left[1 - e^{-D\left(\frac{\mu}{\cos\varepsilon} + \frac{\bar{\mu}}{\cos\bar{\varepsilon}}\right)}\right] ds}{\left(\frac{\mu}{\cos\varepsilon} + \frac{\bar{\mu}}{\cos\bar{\varepsilon}}\right) r_1^2 r_2^2}.$$

Bevezetve az s ívhossz helyett a 4. ábra szerinti φ polárszöget integrációs változóul, a



4. ábra.

$$ds = 2Rd\varphi \qquad \text{(4. ábra)}$$

$$\frac{r_2}{2R} = \sin\varphi\,; \quad \frac{r_1}{2R} = \sin\varphi' = \sin(\theta - \varphi) \qquad \text{(5. ábra)}$$

$$\varepsilon = 90 - \varphi'\,; \quad \bar{\varepsilon} = 90 - \varphi \qquad \text{(5. ábra)}$$

$$R = \frac{l}{2\sin\theta} \qquad \text{(5. ábra)}$$

egyenletek felhasználásával (R a szórókör sugara, l a sugárforrás és a számolócső közti távolság):

$$n_\theta = \sigma_\theta \frac{NaMmF}{2\pi l^3} \sin^3\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\left[1 - e^{-D\left(\frac{\mu}{\sin(\theta-\varphi)} + \frac{\bar{\mu}}{\sin\varphi}\right)}\right] d\varphi}{\left(\frac{\mu}{\sin(\theta-\varphi)} + \frac{\bar{\mu}}{\sin\varphi}\right) \sin^2\varphi \sin^2(\theta-\varphi)} \qquad (4)$$

Az abszorpciós korrekciót képező tagoknál a φ és $\theta - \varphi$ szögek helyett $\frac{\theta}{2}$ középszöget vezetve be és az exponenciális függvényt sorbafejtve:

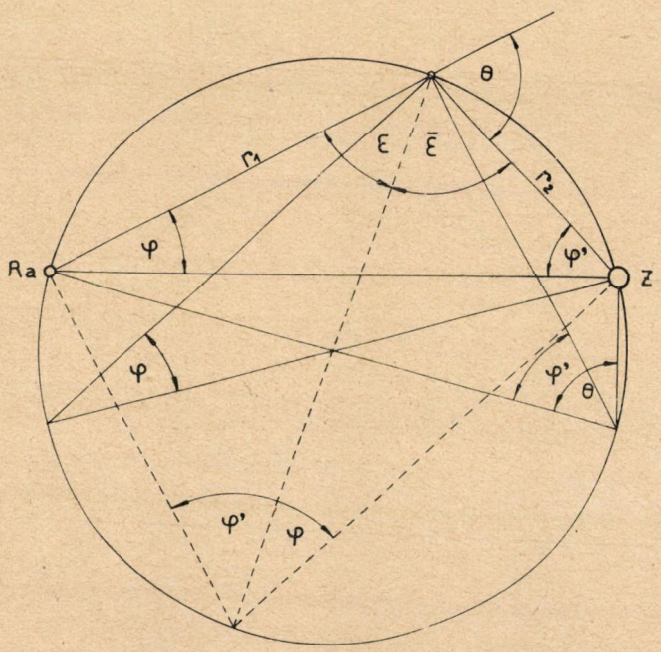
$$n_\theta = \sigma_\theta \frac{NaMmDF}{2\pi l^3} \sin^3\theta \left(1 - \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} - \cdots\right) J_\theta \qquad (5)$$

hol

$$J_\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \sin^2(\theta-\varphi)} \qquad (6)$$

és

$$k = D\frac{\mu+\bar{\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (7)$$



5. ábra.

Az J_θ integrált kiszámítva:

$$J_\theta = 2\left[\frac{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin^2\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2} + \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \log\left(\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\right)^2\right] \qquad (8)$$

(8)-at (5)-be helyettesítve:

$$n_\theta = \sigma_\theta \frac{NaMmDF}{\pi l^3} C_\theta \left(1 - \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} - \cdots\right) \qquad (9)$$

hol

$$C_\theta = \frac{\sin\theta \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2} + \cos\theta \log\left(\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\right)^2. \qquad (10)$$

Ha a szórólemez Ra és Z között szimmetrikusan van elhelyezve, úgy az integrációs határok:

$$\varphi_{1,2}^{0} = \frac{\theta}{2} \pm \frac{90}{2\pi} \frac{s}{R},$$

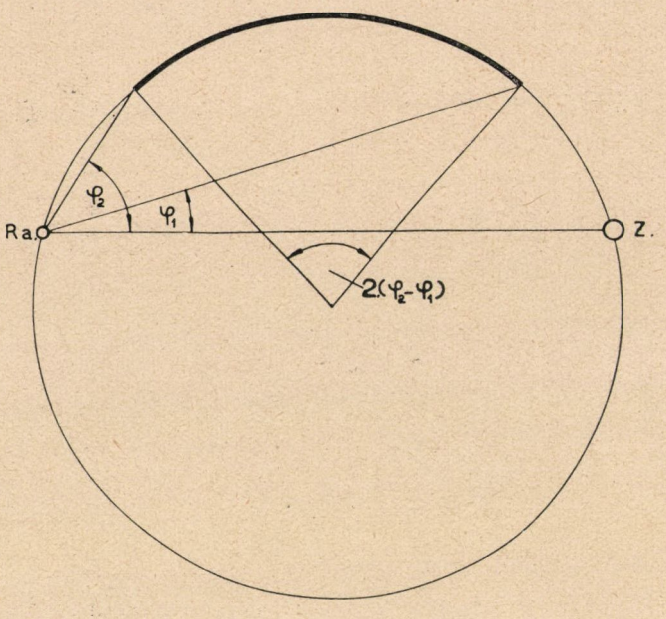
ami a 6. ábra alapján felírt

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{360\, s}{4R\pi}$$

és

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \theta$$

egyenletekből kapható.



6. ábra.

Ha a számolócső statisztikusan minden $\frac{1}{E}$-edik photonra reagál (egyelőre tegyük fel, hogy E független a hullámhossztól), akkor a számolt photonok száma (9)-ből:

$$N_\theta = n_\theta E = \sigma_\theta \frac{NEMmDF}{\pi l^3} C_\theta \left(1 - \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} - \cdots\right). \quad (11)$$

Az NE kiküszöbölhető úgy, hogy megszámoljuk a számolócsőtől r távolságban lévő a_1 mg. radioaktív preparátum által okozott lökések számát. Ezt N_r-rel jelölve:

$$N_r = \frac{Na_1FE}{4\pi r^2}.$$

Ebből

$$NE = \frac{N_r 4\pi r^2}{Fa_1} \quad (12)$$

(12)-őt (11)-be helyettesítve:

$$N_\theta = \sigma_\theta \frac{4aN_r r^2 MmD}{a_1 l^3} C_\theta \left(1 - \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} \cdots\right) \quad (13)$$

(13)-ból az egy elektronra vonatkoztatott szórási együttható:

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{a} \frac{1}{C_\theta} C \frac{1}{1 - \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} - \cdots} \quad (14)$$

hol

$$C = \frac{a_1 l^3}{4N_r r^2 MmD}. \quad (15)$$

Kísérleti elrendezés és mérési adatok.

Kísérleteinknél gammasugárforrásul 2·5 cm ólommal szűrt rádiumot használtunk. A platin-iridium tükbe zárt rádium (egy tü cca. 10 mg rádiumtartalommal) egy 6 cm külső átmérőjű ólomhenger tengelyében állott.

Szóróanyagul a mageffektus csökkentése végett a kis rendszámú aluminiumot választottuk. A szórólemezek vastagsága 0·198 cm volt, melynél a zavaró terciér sugárzás GENTNER szerint már elhanyagolható. A szórólemezek magassága 5·05 cm.

A rádium-számolócső távolsága 50 cm, a Pb ólomtömb 25 cm hosszú.

A számolócső 1·3 cm átmérőjű, 5 cm hosszú, 1 mm falvastagságú rézhenger, 0·2 mm átmérőjű oxydált acélszállal, durán-

üvegben, 100 *tor* argon és 12 *tor* alkoholgőzzel töltve. A szükséges 950 *Volt* feszültséget PERTRIX száraztelep szolgáltatta.

Az egész berendezés vékony falécekből és kartonlapból készült vízszintes lapon állt (1. ábra) egy nagy terem közepén felfüggesztve, hol a legközelebbi faltávolság 3 m.

A zavaró positron-sugárzás csökkentése végett az összes ólomtömbök 3 mm vastag paraffinnal voltak bevonva.

A számolócső lökéseit egy kétfokozatú kondenzátor-ellenállás csatolású erősítő (körülbelül 150-szeres feszültségerősítéssel) és egy relais közbeiktatásával egy telefonszámláló regisztrálta.

A berendezés felbontóképességének mérése úgy történt,[1] hogy egy 2 mg-os rádium preparátummal a számolócsőhöz közelítve leolvastuk a percenkénti maximális lökésszámot. Minthogy a számolt lökések száma:

$$N = N_0 e^{-\tau N_0} \tag{16}$$

(hol N_0 a τ felbontóképességű berendezéshez érkező lökések száma) a mért maximális lökésszámból:

$$\tau = \frac{1}{eN_{\max}}$$

$N_{\max} = 600$/min-mal számolva, berendezésünk felbontóképessége:

$$\tau = 6{\cdot}13.10^{-4}\,\text{min} = 3{\cdot}68.10^{-2}\,\text{sec}$$

A felbontóképességet naponkénti ellenőrzéssel igyekeztünk állandónak tartani. E mellett is, hogy a felbontóképesség ingadozása következtében fellépő hibákat csökkentsük, lehetőleg kevés lökésszámmal dolgoztunk. A méréseknél előforduló legnagyobb lökésszám 210 volt percenként.

A számolt lökéseket a (16)-ik formula alapján korrigáltuk.

A szórási intenzitásokat különbségi méréssel kapjuk úgy, hogy a szóróanyaggal mért percenkénti lökésszámból kivonjuk a szóróanyag nélkül mért percenkénti lökésszámot: a nulleffektust. A nulleffektus oka a kozmikus sugarak jelenléte (percenként 17 lökés) és a környező tárgyak és falak által okozott szórt sugárzás (percenként 142, 26·6 mg rádiummal dolgozva).

[1] VOLZ: Zs. f. Phys. 93, 539, 1935.

Szórás és nulleffektus mérés óránként váltogatták egymást, hogy az esetleg bejövő zavarokat idejében észrevegyük, illetve, hogy azokat kiejtsük.

Minthogy a számolócső a napsugarakra is érzékeny volt, a kísérleteket besötétített teremben végeztük.

A kísérletek körülbelül hat héten keresztül éjjel-nappal megszakítás nélkül folytak.

A kísérleti berendezés eddig meg nem adott adatait az I. táblázat, a mérési eredményeket a II. táblázat tartalmazza.

I. táblázat.

	R cm	s cm	φ_1°	φ_2°	C_θ
50°	32·63	33	39·487	10·513	3·89
60°	28·87	38	48·854	11·146	4·23
70°	26·61	49	61·377	8·623	6·21
80°	25·38	49	67·655	12·345	4·32
90°	25·00	58	78·232	11·767	4·59
100°	25·38	72 −6*	90·636 53·386	9·363 46·617	5·53
120°	28·87	98	108·624	11·376	3·91
140°	38·89	166 +100**	131·143 106·833	8·857 33·167	4·44

II. táblázat.

θ°	N_θ/min	Ra mg	$\frac{N_\theta}{aC_\theta}$	$\sigma_\theta . 10^{26}$	$\frac{1}{1-\frac{k}{2!}+\frac{k^2}{3!}}$	N_θ pontossága %	C_θ pontossága %	$\frac{N_\theta}{C_\theta}$ pontossága %
50°	79·2	26·74	0·735	1·06	1·078	1·4	5	6·4
60°	51·68	26·59	0·459	0·655	1·068	3·5	4·5	8
70°	47·19	26·59	0·286	0·398	1·062	4·5	4·5	9
80°	25·0	26·74	0·215	0·292	1·058	4·5	3·5	8
90°	20·9	26·74	0·174	0·232	1·055	3·3	3·4	6·7
100°	25·7	35·54	0·130	0·168	1·052	5·3	4	9·3
120°	14·79	35·54	0·109	0·137	1·049	6·8	3	9·8
140°	11·1	35·54	0·064	0·074	1·046	7·1	2·9	10

* Középen 6 cm darabon nincs szóróréteg.

** Középen 1 m hosszú lemez magassága 10 cm.

A II. táblázat első három oszlopa példaképen *egy* mérési sorozat adatait tartalmazza. A negyedik oszlop az összes mérésekből adódó középérték felhasználásával kapott szórási együtthható. Ezen oszlopban található értékek már a magszórási együtthatóval, a

$$x = 0{\cdot}02.10^{-26}\ \mathrm{cm}^2$$

értékkel kisebbített szórási együtthatók. E magszórási együtthatót az ólomra kimért értékből[1] kapjuk azzal a feltevéssel, hogy az atomra vonatkoztatott magszórás arányos a rendszám négyzetével.

Az ötödik oszlopban szereplő korrekciós értékek (7. formula) 8 X primér középhullámhosszal és a KLEIN-NISHINA formulából kapott abszorpció együtthatókkal vannak számolva. (A 2·5 cm ólommal szűrt rádium gammasugarainak effektív hullámhossza 7·9 X, a kísérletileg mért totális abszorpció együttható és a KLEIN-NISHINA formula alapján számítva. A gammasugarak összetételét és a számolócső érzékenységét ismerve és ezen adatokkal számolva, az effektív hullámhossz 8·2 X-nek adódik.)

A számolócső hatásfokának mérése (12. formula) $r = 183{\cdot}5$ cm, illetve $r = 401$ cm távolságban $a_1 = 1{\cdot}84$ mg és 9·03 mg rádiummal történt. A mért lökésszámból levonandó a kozmikus nulleffektus és a számolócsőre jutó szórt sugárzás. A szórásnak megfelelő figyelembevételével kapott és a továbbiakban felhasznált értékek:

$$a_1 = 1{\cdot}84\ \mathrm{mg}, \quad r = 401\ \mathrm{cm}, \quad N_r = 32/\mathrm{min}.$$

A mérés pontossága.

A II. táblázat 6-ik oszlopa a statisztikus ingadozás következtében előálló hibákat[2] tartalmazza a

$$p\,\% = \frac{100}{n_2 - n_1}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{t}}$$

[1] PAPP Gy.: Math. Term.-Tud. Értesítő.

[2] POSE: Zs. f. Phys. 67, 194, 1931.

képlettel számolva, hol n_1 a szórólemez nélkül, n_2 a szórólemezzel mért percenkénti lökésszámok, t a mérési idő percekben.

C_θ relatív pontossága:

$$\frac{dC_\theta}{C_\theta} = \frac{\sin^3\theta}{\sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2} (d\varphi_1 + d\varphi_2) \frac{1}{C_\theta}.$$

A II. táblázat 7-ik oszlopában a szórólemezek végeinek 0·5 mm-es határozatlanságából következő szögpontatlanságokkal számított értékek találhatók.

A szórási szögnek a számolócső és a gammasugárforrás véges kiterjedése miatt fellépő pontatlansága egyszerű geometriai számításokkal körülbelül $\Delta\theta_1 = \pm 4°$-nak adódik. A szórófelületnek véges magassága következtében fellépő szögpontatlanság $\Delta\theta_2 \leqq + 1{\cdot}5°$, a

$$\cos(\theta + \Delta\theta_2) = \frac{(2R\sin\varphi_1)^2 + (2R\sin\varphi_2)^2 + 2\left(\frac{m}{2}\right)^2 - l^2}{2\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + (2R\sin\varphi_1)^2}\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + (2R\sin\varphi_2)^2}}$$

képlettel számolva. A megadott szögeltérések a szórólemezek végeire vonatkoznak. A szórólemez közepén a határozatlanságok jóval kisebbek. Pl. $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ értéke 50°-nál 2·5°, 100°-nál 0·8°.

A 15-ik formula szerinti C konstans pontatlansága körülbelül 17%, minthogy:

$$\frac{dC}{C} = \frac{da_1}{a_1} + 3\frac{dl}{l} + \frac{dN_r}{N_r} + \frac{dD}{D} + \frac{dM}{M} + \frac{dm}{m} + 2\frac{dr}{r} =$$
$$= (1 + 6{\cdot}9 + 4 + 1 + 1 + 2 + 1)\,0{\cdot}01 = 16{\cdot}9\%$$

A fenti hibák a geometriai felépítés és a szereplő mérések pontatlansága miatt lépnek fel. Mindegyik hiba a felépítés és a mérések pontosabb keresztülvitele által még csökkenthető. Azonban már ezzel a legelső kísérleti kivitellel is nagyobb pontossággal dolgoztunk, mint az irodalomban hasonló méréseknél általában található.

A kísérleti- és elméleti értékek összehasonlítása.

A mért szórási együtthatókat az elméleti értékekkel a következő összefüggés alapján hasonlítottuk össze:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sum_i \sigma(\lambda_i, \theta)\, N_{\lambda i} E(\lambda_i + \Delta\lambda^\theta)}{\sum_i N_{\lambda i} E(\lambda_i)}, \qquad (17)$$

hol $\sigma(\theta)$ a kísérleti szórási együttható, $\sigma(\lambda_i, \theta)$ a λ_i hullámhosszhoz tartozó elméleti szórási együttható a θ szögnél, $N_{\lambda i}$ a λ_i hullámhosszú sugár relatív intenzitása, $E(\lambda)$ a számolócső relatív érzékenysége a λ hullámhossznál. Az összegezés kiterjesztendő a primér sugárforrásban jelenlévő hullámhosszakra.

A szüretlen rádium gammasugarainak összetétele Ellis és Aston, és Skobelzyn[1] méréseiből ismeretes. A 2·5 cm ólommal szürt rádium gammasugarainak relatív intenzitását, melyet a III. táblázatban látunk, e mérések alapján a Gentner[2] dolgozatából vett abszorpciós együtthatók felhasználásával számítottuk.

III. táblázat.

λ_i X	5·57	6·94	8·89	9·89	10·92	13·1	16·0	20·2
$N_{\lambda i}$	2·17	6·71	1·37	1·20	3·46	0·785	0·494	2·55

A számolócső érzékenységének a hullámhossztól való függését Droste[3] dolgozata és az azzal megegyező eredményeket felmutató saját méréseink alapján vettük figyelembe.[4]

[1] Ellis-Aston: Proc. Roy. Soc. 129, 180, 1930.
Skobelzyn: Zs. f. Phys. 58, 595, 1929.
Ellis-Skobelzyn: Nature 127, 125, 1931.

[2] Gentner: Journ. de Phys. et le Ra. 6, 274, 1935.

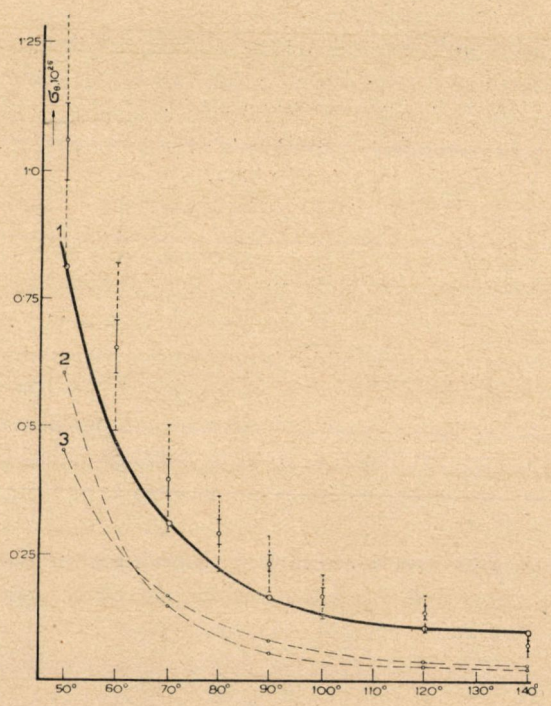
[3] Droste: Zs. f. Phys. 100, 529, 1936.

[4] E kísérleteknél használt $ThB+C$ preparátumot dr. Imre Lajos egyetemi magántanár úr volt szíves rendelkezésemre bocsátani, amiért neki e helyen is köszönetemet fejezem ki.

Az elméleti szórási együtthatókat a KLEIN-NISHINA formulával számítottuk. E szerint:

$$\sigma(\lambda, \theta) = \frac{\lambda + \Delta\lambda^{\theta}}{\lambda} \frac{e^4}{2 m^2 c^4} \left\{ \frac{1+\cos^2\theta}{[1+\alpha(1-\cos\theta)]^3} + \frac{[\alpha(1-\cos\theta)]^2}{[1+\alpha(1-\cos\theta)]^4} \right\}. \quad (18)$$

A 17-ik formula alapján kiszámítottuk öt szórási szögnél a szórási együtthatókat. Ezeknek összehasonlítását a mért adatokkal a 7. ábra mutatja. A kihúzott függőleges vonalak a



7. ábra.

II. táblázat 8. oszlopa szerinti pontatlanságok. A még ehhez járuló *C*-től származó 17%-os pontatlanság, *amely azonban a görbe menetére nincs befolyással,* szaggatott vonallal van jelölve. A kihúzott görbe (1) a 17-ik formula szerint számított elméleti görbe. A 2 görbe a $\lambda = 8X$ effektív hullámhosszal számított

BREIT-GORDON-DIRAC-görbe, a **3** a COMPTON-görbe. (A $\lambda = 8X$-szel számított KLEIN-NISHINA görbe jól simul az **1** görbéhez. V. ö. 12. oldal.)

A 7. ábra szerint *az elméleti és a kísérleti értékek között jó egyezés van. Ez az egyezés a* KLEIN-NISHINA *formulának eddig legjobb kísérleti bizonyítékául tekinthető részben az észlelések pontossága miatt, főként azonban azáltal, hogy a szórási intenzitásokat abszolut értékekben adjuk meg. Méréseink nem egyeztethetők össze sem a* BREIT-GORDON-DIRAC, *sem a* COMPTON-*féle szórási formulával.*

Eredményeink másodsorban alátámasztják a számolócső érzékenységének a hullámhossztól való függésére vonatkozó DROSTE-féle eredményeket, továbbá megerősítik a rádium gammasugarainak összetételére vonatkozó adatokat, melyeket ELLIS és ASTON és SKOBELZYN állapítottak meg.

*

Dolgozatomat a szegedi m. kir. Ferenc-József Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében készítettem. A méréseket az egyetem Női Klinikájának tantermében végeztem el.

Ezúton is hálás köszönetemet fejezem ki BAY ZOLTÁN dr. egyetemi ny. r. tanár úrnak, ki állandó támogatásával és érdeklődésével kísérte munkámat, továbbá BERECZ JÁNOS dr. egyetemi ny. r. tanár úrnak a Női Klinika igazgatójának, ki megengedte, hogy a Klinikán lévő rádiumot használhassam és a Klinika tantermét rendelkezésemre bocsátotta. Köszönetet mondok továbbá a szegedi ROCKEFELLER-KUTATÁSI BIZOTTSÁGNAK támogatásáért, mellyel e munka elvégzését lehetővé tette.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jún. 7-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE INTENSITÄTSVERTEILUNG DER COMPTONSTREUUNG VON γ-STRAHLEN.

Von ZOLTÁN SZEPESI.

Es wurde eine neue Methode zur Untersuchung der Streuung von γ-Strahlen entwickelt, die die Verwendung von dünnen Streuschichten bei einfachem Aufbau, guten Winkelverhältnissen und verhältnismässig schwacher Strahlenqelle ermöglicht. Das Prinzip der Anordnung wird durch Fig. 2. veranschaulicht, wo *Ra* die Strahlenqelle, *Z* das Zählrohr bedeutet. *Pb* ist ein Bleiblock zur Abschirmung der direkten Strahlung. Die streuende Schicht wird — um verschiedene Streuwinkel zu erhalten — nacheinander auf verschiedene Kreise gestellt. Fig. 1. zeigt eine Photographie der verwendeten Anordnung, welche zur Vermeidung von Wandstreuung in der Mitte eines grossen Vorlesungsraumes aufgehängt wurde, wobei die kleinste Wandentfernung cca. 3 m. betrug.

Mit dieser Anordnung wurde die Intensitätsverteilung der Streustrahlen von durch 2·5 cm. gefilterten γ-Strahlen des *Radiums* bei acht verschiedenen Streuwinkeln zwischen 50° und 140° gemessen. Als Streuschicht wurde *Aluminium* von 0·198 cm. Dicke und 5·05 cm. Breite verwendet. Die andere Daten der Anordnung und der Messungen sind in Tab. 1. und Tab. 2. zusammengestellt.

Die Ergebnisse und die aus der Formel von KLEIN-NISHINA berechneten Werte sind in Fig. 7. dargestellt. Die Empfindlichkeitskurve des Zählrohres wurde nach DROSTE und nach eigenen

Messungen berücksichtigt. Für die Intensitätsverteilung der primären γ-Strahlen wurden die von ELLIS und ASTON angegebenen Werte verwendet.

Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den nach der KLEIN-NISHINA Formel berechneten Werten (Kurve 1) ist befriedigend.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Jun. 1937.)

ION VEZETÉS VÉKONY KRISTÁLYRÉTEGEKBEN.

BOROS JÁNOS-tól.

1. Vékony fémrétegek fizikai viselkedésükben lényegesen más tulajdonságokat mutatnak, mint a kompakt anyag. Részletes vizsgálatok tárgya volt azok elektromos vezetőképessége és optikai viselkedése.[1]

Hasonlóképpen várható, hogy mások lesznek a vékony ionvezető rétegeknek is az elektromos vezetési tulajdonságai. Miután a szilárd ionvezetőknél az elektromos vezetés mechanizmusa lényegesen más, mint a fémeknél, a vékony ionrétegeken másféle hatások is várhatók.

A szilárd ionvezetőkön végzett kísérleti vizsgálatok eredményeképpen a vezetésről a következő képünk van. Alacsony hőmérsékleten az elektromos tér hatására túlnyomóan azok a rácselemek mozognak, amelyek a rácsba kevésbbé tökéletesen vannak beépítve. Ezeknek az ionoknak a helyükből való kimozdításához kisebb energiák szükségesek.

Ennek igazolására nagyon sok tapasztalatunk van. Így pl. a mészpát ($CaCO_3$) vezetése sokkal kisebb, mint a mikro-kristályos szerkezetű márványé ($CaCO_3$).[2]

Továbbá egészen általánosan ismert az a tény, hogy a pasztillák sokkal jobb vezetők, mint ugyanazon anyag egykristályai.[3]

---

[1] Pogány: Ann. d. Phys. IV. Bd. 49, 531, 1916; összefoglaló referátumok a kérdésről Reinders—Hamburger: Ann. d. Phys. V. Bd. 10. 649, 1931. Hamburger u. o. 789. és 905. old.

[2] Hevesy: Zs. f. Phys. Bd. 10, 80 és 84. old. 1922.

[3] Gingold: Zs. f. Phys. Bd. 50, 633, 1928; Gyulai: Zs. f. Phys. Bd. 96, 210, 1935; Gyulai: Mat. Termtud. Ért. LIII, 665, 1935.

Ennek pedig az az oka, hogy a pasztillákban egészen kis krisztallitok vannak mindenféle orientációban és itt nagyon sok felületi ion van jelen. Ezek pedig kisebb rácsenergiával bírnak.

Ezen laza ionok vezetése mellett szólnak GYULAI és HARTLY; továbbá KASSEL és SEIDL[1] mérései. Ezek a mérések igazolják, hogy deformáció hatása alatt a vezetésben hirtelen növekedés tapasztalható, mely azonban az idő folyamán lecsökken az eredeti értékre. Az áramnövekedésnek az oka éppen az, hogy a deformáció hatására a kristály belsejében a felületek csúszása következtében sok szabad felület keletkezik sok laza ionnal. A jelenségnek megfordítottját is tapasztalhatjuk: ha a pasztillát mindenoldalú nyomás alá helyezzük akkor a mindenoldalú nyomás hatásaképpen áramcsökkenést tapasztalunk. Ezt a jelenséget GYULAI[2] úgy értelmezi, hogy az összepréselés következtében az ionok, melyek előbb távol voltak egymástól, közelebb kerülnek egymáshoz, nagyobb lesz a közöttük működő erő, vagyis sok felületi ionnak alkalma lesz szomszédjaival szorosabb kapcsolatba lépni.

A látszólag tökéletes egykristályokban is vannak szabad felületek,[3] amiknek létezéséről meggyőződhetünk. Ezek a szabad felületek esetleg már a kristály keletkezésénél jönnek, létre mint növekedési hibák. Ezeken a felületeken elhelyezkedett ionok természetesen kisebb potenciális energiával bírnak mint a rácsba tökéletesen beépült ionok.

A kristály tehát valóságban eltér az «ideális» kristálytól és a «reális kristály» — ahogyan SMEKAL[4] nevezi — mindig bizonyos kristályhibákkal bír.

A vezetőképesség hőmérsékleti függését a van't Hoff egyenlet adja:

$$k = A_1 e^{-\frac{B_1}{T}} + A_2 e^{-\frac{B_2}{T}},$$

[1] GYULAI—HARTLY: Zs. f. Phys. Bd. 51, 378, 1928; GYULAI—HARTLY: Math. Phys. L. 35, 214, 1928; KASSEL: Zs. f. Phys. Bd. 90, 287, 1934; SEIDL: Zs. f. Phys. Bd. 65, 488, 1932; SEIDL: Zs. f. Phys. Bd. 101, 234, 1936.

[2] GYULAI: Zs. f. Phys. Bd. 78, 630, 1932; Mat. Phys. Lapok 40, 56, 1933.

[3] SEIDENTOPF: Phys. Zs. Bd. 6, 855, 1905.

[4] SMEKAL: Strukturempfindliche Eigenschaften der Kristalle, Hb. d. Phys. XXIV/2.

hol k a specifikus vezetőképesség. A_1, A_2 állandók az ion számmal arányos tényezők. B_1, B_2 az «ion kioldási munka» értékek.

Itt az első tag az alacsony hőmérsékleti vezetésre vonatkozik a második a magas hőmérsékleti vezetésre. A kioldási munka értékek a *NaCl* egykristály esetében:

$$B_1 = 10300, \qquad B_2 = 23600.$$

2. *A vékony rétegek szerkezete.* A vezetés szempontjából nagy jelentőséggel bír a réteg szerkezete. A kathód porlasztással és a magas vákuumban való párologtatással (atom vagy molekula sugarak módszere) nyert rétegekre a vizsgálatok azt mutatták [1] hogy a különféle módon nyert fémrétegek kristályos szerkezetűek. Kivétel ez alól csak akkor van, ha a fémréteg nagyon alacsony hőmérsékletű lemezre csapódik le, ekkor a réteg amorf.[2]

A vékony *NaCl* rétegeken végzett DEBYE—SCHERRER felvételeim szerint ezek is kristályosak.

3. Ezután képet alkothatunk a vékony ion-réteg vezetéséről. Mivel a réteg nagyon apró krisztallitokból áll, a réteg nagyon sok felületi — kis potenciális energiájú — ionnal bír, amelyek az elektromos erőtér hatása alatt könnyebben elmozdulhatnak és ezért a vékony rétegeknél a vezetésnek nagyobbnak kell lenni, mint az egykristálynál. SMEKAL szerint [3] a vékony rétegeknél, ha az áramot a felülettel párhuzamosan vezetjük, a vastagság pedig olyan, hogy a térfogat a felülethez képest elhanyagolható és ha felületi ionok vezetnek, a vezetőképesség sokszorta nagyobb, mint a kompakt anyagnál.

A vékony ionvezető rétegek kérdésével eddig csak BLÜH és JOST [4] foglalkoztak egy dolgozatban. BLÜH és JOST 10^{-4}—10^{-5} cm vastagságú α—AgJ rétegeken végeztek méréseket. Ezeket kathódporlasztással nyert ezüst rétegek jódozásával készítették. Az ilyen vékony AgJ kristályrétegeken végzett mérésekből közel ugyanazt

[1] GERLACH: Atomstrahlen, Erg. d. Ex. Nat. III. INGERSOLL: Phys. Rew. **26**, 86, 1925; STEINBERG: Phys. Rew. **21**, 22, 1923; DEMBINSKA: Zs. f. Phys. Bd. 54, 46, 1929.

[2] REINDERS—HAMBURGER: Ann. d. Phys. V. Bd. 10, 649, 1931.

[3] SMEKAL: Zs. f. Phys. Chem. (B), Bd. 6, 73, 1930.

[4] BLÜH—JOST: Zs. f. Phys. Chem. (B) Bd. 1, 270, 1928.

a specifikus vezetőképességet nyerték, mint a kompakt α—AgJ kristályon; vezetőképesség növekedést nem észleltek és ezzel azt vélték igazolni, hogy az α—AgJ rétegekben a vezetés rács ionoknak tulajdonítandó.

GUDDEN[1] azonban STROCK[2] vizsgálatai alapján ezt az eredményt az α—AgJ szerkezetének tulajdonítja. Ugyanis STROCK Röntgen-analizissel megvizsgálta az α—AgJ kristályszerkezetét és azt találta, hogy a J^- köbös tércentrált rácsot alkot, az Ag^+ ionok pedig a nagyobb rácsközökben rendezetlenül helyezkednek el; tehát a J ion-rácsot egy Ag ion-«folyadék» tölti ki. A vezetésben pedig — TUBANDT mérései alapján — 100%-ban kationok vesznek részt.

A vékony rétegeknél nemcsak a specifikus vezetőképesség más, mint az egykristálynál, de a vezetést jellemző temperatura koefficiensek is. Ez a tény különben a pasztilláknál is ismeretes. A pasztillában az elkészítés után a nagy nyomás miatt belső feszülések maradnak, amelyek lassan megszűnnek. Melegítés hatása alatt a változás gyorsul. Az átalakulás ion-mozgással jár, azért, amíg az ionok nincsenek stabilan a rácsba beépülve, addig a pasztilla erős vezetést mutat. A pasztillát állandó hőmérsékleten tartva a vezetés az idő folyamán csökken a szerkezet átalakulása miatt. A teljes kiépülés csak 600—700° C között, több órás temperálás után történik meg. Amíg a labilis állapot tart, addig a kioldási munka az egykristályra jellemző 10300 alatt marad.[3]

Minőségileg hasonló eredményeket nyertem a vékony $NaCl$ rétegeken.

KISÉRLETI RÉSZ.

4. *A rétegek előállítása.* A rétegeket magas vákuumban (szikrakisülés kimarad) való párologtatással (izzított wolfram-csésze) állítottam elő. Az elpárolgó anyag a wolfram-csésze felett elhelyezett üveg- vagy kvarclemezre csapódik le. A recipiens és a szivattyú

---

[1] GUDDEN: Phys. Zs. Bd. 36, 717, 1935.

[2] STROCK: Zs. f. Phys. Chem. (B) Bd. 25, 441, 1934.

[3] Z. GYULAI: Zs. f. Phys. **78**, 630, 1932 és **96**, 210, 1932.

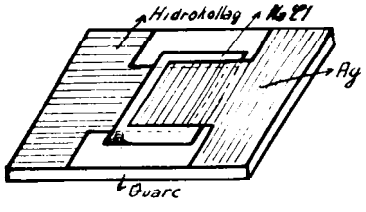
közti térben szilárd CO_2, illetve cseppfolyós levegővel hűtött csapolát alkalmaztam a higanygőzök lecsapására.

Az eddigi méréseimnél *NaCl* (purissimum, MERCK-féle) anyagot használtam. A sót előzőleg 400—500° C-on izzítottam pár óráig, majd achát-mozsárban finom porrá törtem és ezt használtam a vákuumban való elpárologtatáshoz. A lemez hőmérséklete — amelyre a *NaCl* lecsapódott — 20° C volt. Amint az anyag valamilyen átlátszó felületre lecsapódik, itt nem észlelhető mindjárt jelenléte, hanem kb. 20—30 perc multva homályosul el az illető üveg- vagy kvarclemez felülete, jeléül annak, hogy ott kikristályosodott anyag van jelen.

A méréseknél ömlesztett kvarclemezeket használtam, mivel az alapnak jó szigetelőnek kell lenni. A lemezek mérete 22×22 mm^2, vastagsága 2 mm. A mérések hosszanti és keresztirányban történtek. Ez úgy értendő, hogy a hosszanti vezetés esetében az áram útja 2—3 mm és merőleges a rétegvastagság irányára. Keresztirányban az áram útja és iránya megegyezik a rétegvastagsággal.

A lemezre elektrodul hydrokollágot vittem fel, középen 2—3 mm széles sávot hagytam tisztán és ide csapódott le a vékony réteg oly módon, hogy a hydrokollágra is jókora sáv esett a tökéletes kontaktus létesítése céljából.

Keresztirányú vezetésnél a réteg elkészítésének a módja a következő: Megfelelő diafragmák segítségével a hydrokollággal ellátott kvarclemezre *NaCl*-t, erre újra ezüstöt párologtattam, mely elrendezést schematikusan az 1. sz. ábra szemlélteti. Ily módon nyertem azután két 1 cm^2 felületű elektród között elhelyezkedett *NaCl* réteget, amelyen azután az áram keresztirányban halad át. Ilyen esetben a rétegvastagságnak van egy bizonyos alsó határa. Ugyanis a rétegnek olyannak kell lenni, hogy az alapot teljesen befedje, mert különben a reája csapodó ezüst a nyilásokon át a hydrokollággal rövidzárlatot okozna.



1. sz. ábra. A kontaktusok és a sóréteg elrendezése a keresztirányú vezetés esetén.

5. A specifikus vezetőképesség meghatározására szükséges a

rétegvastagság ismerete. A réteg — mikroszkópikusan nézve — nem egyenletes. Ez apró krisztallitok egyenletes eloszlású halmaza, amely nagyon vékony rétegeknél nem is fedi be bizonyos helyeken egészen a lemezt. Ezért csak középértékkel lehet számolni. A rétegvastagság meghatározása tömegmérés segítségével történt. A kvarclemez mellett elhelyezett üveglemezen, mindig azzal egyidejűleg, ismert nagyságú felületet csapattam be. Az anyagot kétszer desztillált vízzel leoldottam. Mikromérleggel megmértem a víz elpárologtatása után a használt platina csésze tömegnövekedését, ebből pedig a középrétegvastagságot kiszámítottam.

A középrétegvastagságok: hosszanti irányú méréseknél 1500—9000 $\mathring{A}$; keresztirányú méréseknél 8000– 30,000 $\mathring{A}$.

6. *A vezetőképesség mérése.* A *NaCl* az ú. n. szigetelő kristályok közé tartozik. Az alaplemez kiválasztása nagy gondot és óvatosságot igényel a méréseknél, mert a lemezre lecsapodó anyag maga is nagy ellenállással bír, a lemez ellenállásának pedig olyan értékűnek kell lenni, hogy annak a vezetése a réteg vezetéséhez képest elhanyagolható legyen. Az ömlesztett kvarclemez ebből a szempontból megfelelő. Mérésekkel ellenőriztem, hogy még 300° C-on is a kvarclemez ellenállása 10^4–10^5-szer akkora, mint a vizsgált *NaCl* rétegé.

A méréseket egyrészt vákuumban, másrészt levegőn végeztem és azt találtam, hogy a kétféle mérés között különbség nincsen. Ezt különben már Blüh és Jost is észlelték és dolgozatukban meg is említik. Éppen ezért, mivel a levegő nem befolyásolja a vezetést és mivel a vákuumban való mérés technikailag körülményesebb, a mérések nagyrészét levegőn végeztem.

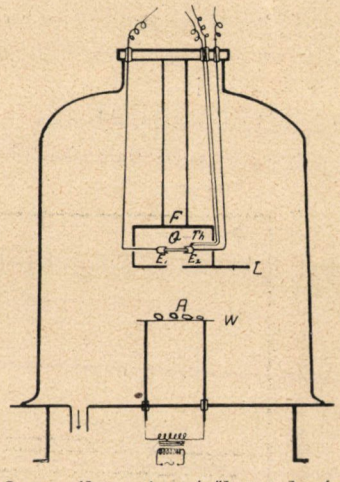
A 2. ábra szemlélteti a burába beszerelt berendezést, mellyel vákuumban mértem. Az elektromos fütőtest belsejében vannak a kvarclemezt tartó rézelektródok. A fűtőtesten alul nyílás van, ezen át párologtatható a só a lemezre. Oldalt pedig van egy tartó az üveglemez számára, amely lemez segélyével a rétegvastagságot határozom meg. Az elektródok egyikében van beforrasztva a hőmérséklet mérésére szolgáló thermoelem. Thermoelemül *Ni—CrNi* thermoelemet használtam, melyet a Physikalische Technische Reichsanstalt 1003. sz. alatt hitelesített. A drótokra mindenütt vékony üvegcsöveket húztam a tökéletes szigetelés kedvéért.

A kivezetés a bura tetején elhelyezett vaslemezen át történt üvegcsövekben. A szigetelés és a bura lezárása pecsétviasszal történt. A szigetelés jóságáról külön ellenőrző mérésekkel győződtem meg.

Lényegében megegyezik ezzel a berendezéssel az is, amellyel levegőn mértem.

Vákuumban 320° C-on túl nem melegíthettem a réteget, mivel ebben az esetben a szigetelésül és a vákuum elzárásául használt anyagok megolvadtak.

A vezetőképesség mérése a vezetés nagyságától függően kétféleképpen történt: nagy ellenállások esetén az áramfeszültség-mérés módszerével. Ekkor egy 10^{-10} Amp. érzékenységű tükrösgalvanometert használtam; a használt feszültség 300 Volt.



2. sz. ábra. A mérőberendezés a vákuumban való méréseknél. *A* elpárologtatandó anyag; E_1, E_2 a lemezt tartó elektródok; *F* az elektromos fűtőtest; Q kvarclemez; *L* az üveglemez tartója; *Th* thermoelem; *W* wolframlemez.

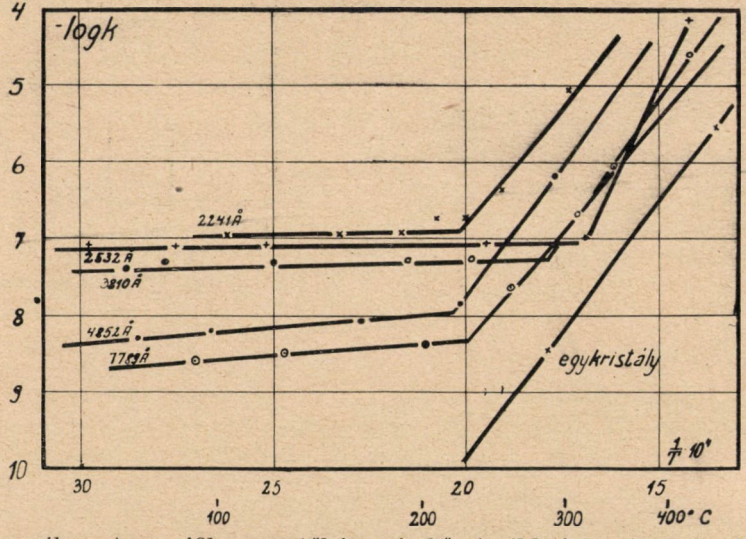
Kisebb ellenállások esetén egy preciziós HARTMANN—BRAUN-féle Wheatstone-híddal mértem. Null eszközül 10^{-5} érzékenységű mutatós, illetve érzékenyebb fokozatban 10^{-7} Volt érzékenységű tükrös galvanometert használtam.

A vezetőképességet 65—450° C hőmérsékleti intervallumban mértem. Alacsonyabb hőmérsékletről kiindulva egy-egy hőmérsékleten kb. félóráig tartottam a réteget és az állandó hőmérséklet beálltakor több leolvasást végeztem.

Néhány mérést végeztem oly módon, hogy a rétegeket 300—400° C-on temperáltam pár óráig. Ezeknél a legmagasabb hőmérsékletről kiindulva a hőmérséklet fokozatos csökkentésével végeztem a méréseket; majd ugyanezt fordítva.

MÉRÉSI EREDMÉNYEK.

7. *A vezetés hőmérsékleti függése.* A fémrétegeken végzett mérések analógiájára először az érdekel, hogy a vékony kristályrétegek specifikus vezetőképessége egyezik-e az egykristály megfelelő adataival. Miután a kristályokon és pasztillákon végzett mérésekből kiderült,[1] hogy erős temperálás után a vezetés állandói lényegesen változnak (belső feszülések megszűnése és rekrisztalli-



3. sz. ábra. A specifikus vezetőképesség hőmérsékleti függése különféle vezető-vastagságok mellett hosszanti irányú vezetésnél. K a specifikus rétegképesség; T az abszolút hőmérséklet.

záció) itt is méréseket végeztem nyers rétegeken és azután temperált rétegeken. A friss rétegeken végzett méréseket tünteti fel a 3. sz. ábra, amely hosszanti irányú vezetésnél adja meg különböző rétegvastagságok esetén a vezetőképesség és a hőmérséklet összefüggését.

Az ordinátára fel van mérve a specifikus vezetőképesség logaritmusa, az abscisszára pedig az abszolút hőmérséklet reciprokja és pedig úgy, hogy balról jobbra haladva emelkedik a hőmérséklet.

---

[1] GYULAI: Zs. f. Phys. Bd. 78, 630, 1932. és KASSEL idézve.

Összehasonlítás céljából fel van rajzolva az egykristály temperatura függése is PHIPPS[1] mérései alapján.

Az ábrából rögtön leolvasható, hogy a rétegek vezetése 10^3—10^5-ször nagyobb, mint az egykristályé. Ezek az értékek változnak a rétegvastagsággal.

A másik szembeötlő eredmény, hogy a van't Hoff görbék kb. 220° C-ig közel vízszintesek és ezen hőmérséklet közelében megtörnek és meredekebben haladnak, mint az egykristály egyenese. Az ábrán felrajzolt görbék mindegyike mellett meg van jelölve a rétegvastagság és látható, hogy a nagyobb rétegvastagsághoz tartozó görbék alatta haladnak a kisebb vastagsághoz tartozó görbéknek — a törési pontig. Tehát a csökkenő rétegvastagságot a specifikus vezetőképesség növekedése kíséri.

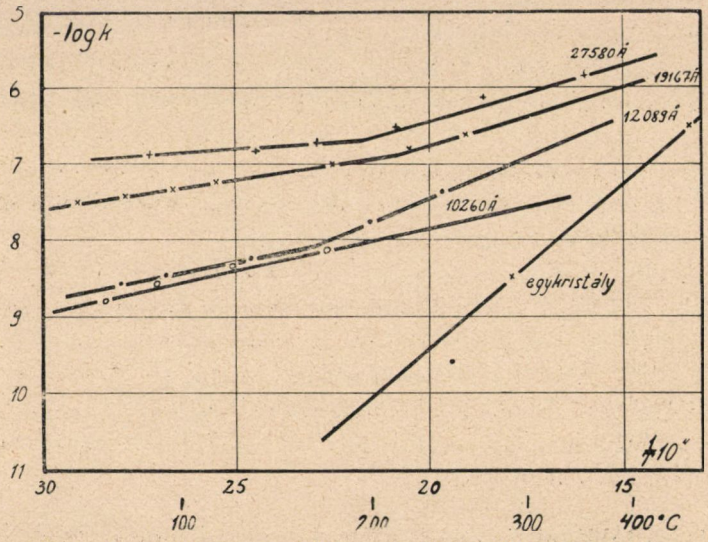
A van't Hoff formulában szereplő A és B állandókat, amelyek a görbe adataiból kiszámíthatók, megadja az 1. táblázat. Minden egyes göréhez két ilyen értékpár tartozik a görbe tört egyenes volta miatt. Alacsony hőmérsékleten — amint a táblázat adataiból kiolvasható — a «kioldási munka»-értékek igen kicsinyek. A törés után azonban már megközelíti vagy túl is haladja az egykristályra vonatkozó B 10300 értéket.

1. sz. táblázat. A vezetés állandói hosszanti irányú vezetésnél.

Mérés sz.	Réteg vast.	A	B	Megjegyzés
18	7789 Å	$2{\cdot}6\times10^{-8}$	849	alacsony h.
18	7789	0·067	7891	magas «
21	3810	$9{\cdot}18\times10^{-8}$	301	alacsony «
21	3810	$6{\cdot}81\times10^{5}$	16667	magas «
22	2532	0·066	7972	magas «
22	2532	0·268	8721	magas, temperált
25	8190	$2{\cdot}36\times10^{-8}$	140	alacsony «
25	8190	$9{\cdot}75\times10^{2}$	13025	magas «
19	4810	$9{\cdot}34\times10^{2}$	11320	magas «
20	14820	$0{\cdot}38\times10^{-2}$	6027	magas «

[1] PHIPPS—LANSING—COOKE: Journ. Amer. Chem. Soc. Bd. 48, 112, 1926.

A keresztirányú vezetés eredményeit láthatjuk a 4. sz. ábrán. A keresztirányú vezetés esetén is nagyobb a vezetés, mint az egykristálynál. Azonban itt a hosszanti irányú vezetés eredményeihez képest más eredményeket kapunk. A keresztirányú vezetésnél a hőmérséklet növekedtével erősebben nő a vezetés, mint a hosszanti



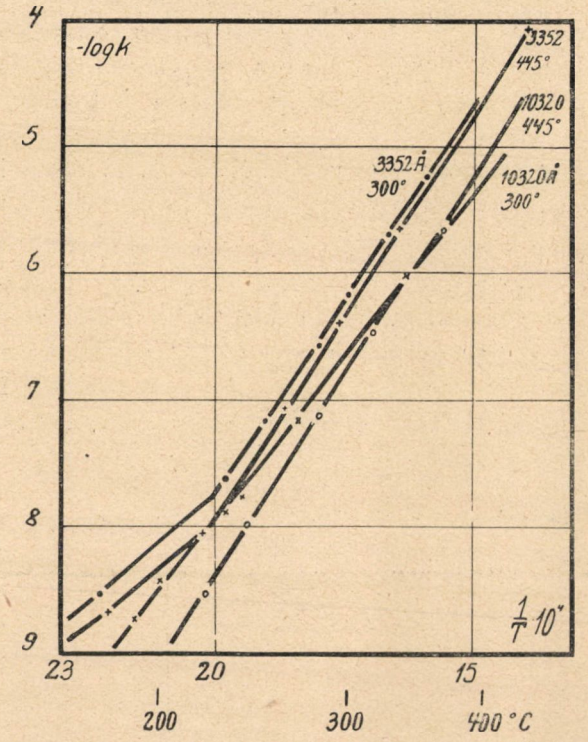
4. sz. ábra. A specifikus vezetőképesség hőmérsékleti függése keresztirányú vezetés mellett.

irányú vezetésnél megfelelő intervallumban. Továbbá itt a kisebb rétegvastagságok kisebb specifikus vezetőképességgel bírnak. A keresztirányú vezetés állandóit megadja a 2. sz. táblázat. A ki-

2. sz. táblázat. A vezetőképesség állandói keresztirányú vezetésnél.

Mérés sz.	Réteg vast.	A	B
34	10260	$3{\cdot}79\times10^{-6}$	2660
36	27598	$2{\cdot}35\times10^{-6}$	1867
37	19167	$9{\cdot}01\times10^{-6}$	1382
39	12089	$1{\cdot}68\times10^{-4}$	4013

oldási munkaértékek itt nagyobbak, mint a hosszanti vezetés alacsony hőmérsékleti vezetéséhez tartozó értékek, de sokkal kisebbek, mint az egykristály alacsony hőmérsékleti vezetésére vonatkozó B; ennek kb. $^1/_3$-része. Ezeket a méréseket mind csak kb. 250° C-ig végeztem, mert ezen a hőmérsékleten túlmenve a Wheatstone-híd null eszköze állandó ingadozásokat mutat. Ennek



5. sz. ábra. Temperált rétegek vezetése hosszanti irányban.

legvalószínűbb oka az, hogy a rétegekben ugrásszerű szerkezeti változások mennek végbe, melyek azután a vezetésben is kimutatható hatásokat idéznek elő. Ilyen áramingadozásokat észlelt pasztillákon Gyulai[1] továbbá mikroszkopikusan figyelt meg rekisztallizációs vizsgálatainál Müller.[2]

[1] Gyulai: Zs. f. Phys. Bd. 96, 210, 1935.
[2] Müller: Phys. Zs. Bd. 35, 647, 1934.

8. *Temperált rétegek vezetése.* Azt találtam, hogy a temperálás hatásaképpen a szerkezet stabilabb formába való átmenetele miatt a réteg jobban reprodukálható vezetőképesség értékkel bír.

Az 5. sz. ábra temperált rétegeken végzett mérések eredményeit adja hosszanti irányú vezetésnél. A temperálásokat 300—400° C végeztem három négy-óráig. Ezen hevítés hatásaképpen csökkenő és növekvő hőmérsékletek mellett mérve a vezetést, a két egyenes mindig összeesett. A temperált rétegek esetében az a törés (3. ábra), amelyik a nem temperált rétegeknél fellép, eltűnt. Az egyenesek hajlásszöge nagyobb lett, azaz a B kioldási munkák nagyobbak lettek.

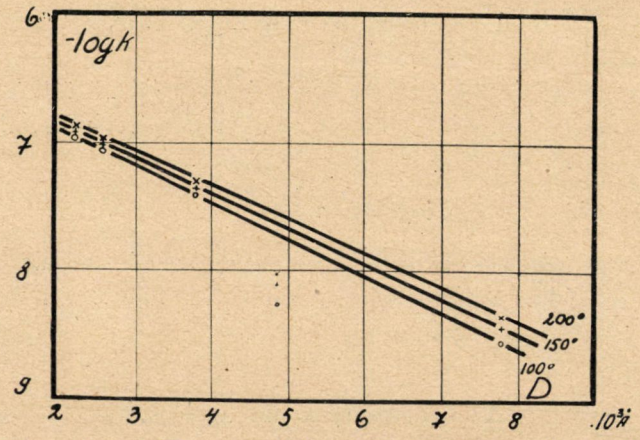
A rétegvastagság szempontjából az 5. ábrán a harmadik számúhoz hasonló eredményeket kapunk. Kisebb rétegvastagságokhoz nagyobb vezetőképesség tartozik. A 3352 $\mathring{A}$ rétegvastagsághoz tartozó egyenesek felette haladnak a 10,320 $\mathring{A}$ vastagsághoz tartozó egyeneseknek. Az ábrán látható két-két egyenlő vastagságú réteg egyszerre készült és ezért a vezetés közel egyező.

A B kioldási munkákat tünteti fel a 3. sz. táblázat. Ezek a B értékek, bár közeledtek egymáshoz, még mindig nagyon különbözők és túl magasak. (L. diskussió.)

3. sz. táblázat. A vezetés állandói temperált rétegeknél, hosszanti irányú vezetés mellett.

Mérés sz.	Réteg vast.	Temperálás hőmérséklete és ideje	A	B
44	10320	445° C; 3 ½ h	$2{\cdot}72\times10^{2}$	17768
46	10320	300° « 3 «	$1{\cdot}96$	10601
48	3352	445° « 3 «	$7{\cdot}03\cdot10^{4}$	14641
49	3352	300° « 3 «	$3{\cdot}12\cdot10^{4}$	14088

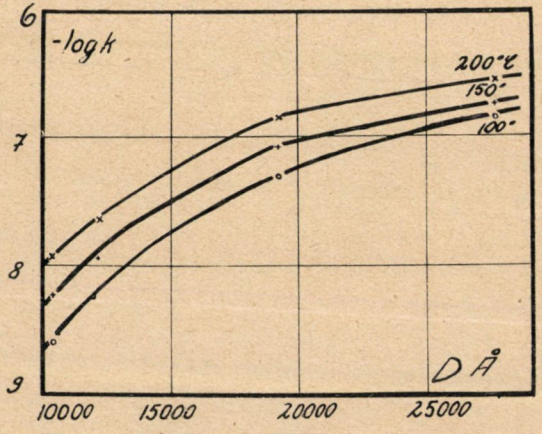
Keresztirányú vezetésnél temperált rétegeken egyelőre nem végeztem méréseket, mert ezeknek a preparátumoknak magasabb hőmérsékleten való hevítése olyan szekundér-folyamatokkal jár, amiknek következményekép vagy nagyon vezetnek, valószínűleg az elektrodok érintkezése miatt, vagy a kontaktusok elromlása miatt nem vezetnek.



6. sz. ábra. A specifikus vezetőképesség függése a rétegvastagságtól hosszanti irányú vezetésnél. K a spec. vezetőképesség, D a rétegvastagság 10^3 Å-ben.

9. *A vezetés függése a rétegvastagságtól.* A specifikus vezetőképesség és a rétegvastagság összefüggését szemlélteti a 6. és 7. sz. ábra.

A hosszanti irányú vezetésnél a csökkenő rétegvastagsággal növekszik a vezetőképesség. Az összefüggés három hőmérsékleten van megadva.



7. sz. ábra. A spec. vezetőképesség függése a rétegvastagságtól keresztirányú vezetésnél.

Keresztirányú vezetésnél az összefüggés más. Itt a növekvő rétegvastagsággal nő a vezetőképesség.

Ha a 6. ábrán feltüntetett k és D (vastagság) közötti összefüggést formulával akarjuk kifejezni, akkor a mért intervallumban érvényes a következő kifejezés :

$$\log k = a - bD$$

a hosszanti irányú vezetésnél. Itt a és b állandók. A vékony fémrétegeknél ehhez a kifejezéshez hasonló összefüggés van az ellenállás és a rétegvastagság között.

Az eredmények discussiója.

10. Ha a kétfajta mérések eredményeit összehasonlítjuk az egykristály vagy pasztillákon mért specifikus vezetőképesség értékekkel, akkor azt találjuk, hogy a vezetés a vékony rétegeknél sokkal nagyobb (3. és 4. ábra). A vékony fémrétegeknél az eredmény ezzel ellentétes, ott a réteg ellenállása növekedett meg.

A vezetőképesség növekedésének az oka az, hogy a rétegben sokkal több laza ion van, mint akár az egykristálynál, akár a pasztillánál. Ez világos is, hiszen a réteg igen sok apró kis krisztallitból lazán épül össze. Nagy azoknak az ionoknak a száma, amelyek felületeken helyezkednek el. Ezek pedig kis potenciális energiával bírnak.

A hosszanti irányú vezetésnél a vezetési áramot a következő részekre oszthatjuk. 1. A krisztallitok belsejében haladó áram, 2. a krisztallitok felületén haladó áram, 3. a két krisztallit érintkezési határán átmenő áram.

Végső eredményben fontos az érintkező felületek mennyisége. Csökkenő rétegvastagsággal a vezetési áram mindinkább a krisztallitok felületén halad. Ezzel tehát a vezetés növekedését a csökkenő rétegvastagsággal egyszerűen értelmezhetjük.

Keresztirányú vezetésnél csak olyan vastag rétegeknél lehetett mérni, amelyeknél a lecsapott *NaCl* már teljesen befedi a lemezt és így az elektrodul lecsapott ezüst nem érintkezhetik a másik elektroddal. A vezetés itt is sokszorta nagyobb, de a rétegvastagságtól való függés éppen a fordítottja a hosszanti irányú

vezetésnél kapott eredménynek. Kisebb rétegvastagságok mellett kisebb. Ezt úgy kell értelmeznünk, hogy a keresztirányú vezetésnél — ha a réteg vastagabb, — több határfelületen kell átmennie az áramnak, mint vékonyabb réteg esetében. Az áram tehát vékonyabb réteg esetén tökéletesebb szerkezeten megy át. Ennek megfelel az a tapasztalat, hogy a temperaturacoefficiens nagyobb, mint a hoszszanti irányú vezetésnél.

Ezzel a képpel tehát indokolhatjuk a vezetőképességnek a rétegvastagságtól való ilyen függését, valamint a nagyobb temperatura coefficienst is.

A vezetés hőmérsékleti függése a nem temperált rétegeknél két egyenes darabból tevődik össze. Nagyon kicsiny törés észrevehető keresztirányú vezetésnél is. Igen valószínű, hogy itt sok olyan másodrendű folyamat indul meg a hőmérséklet emelkedésével, amelyek teljesen elfedik a valódi vezetési jelenséget. Azt is mondhatjuk, hogy a vezetőréteg egy folyamatosan változó átmeneti állapotban van és így a jellemző B állandóról nem is beszélhetünk. Igen valószínű, hogy a vezetési egyenesek meredek emelkedése a kvarc és a *NaCl* kristály nagy mértékben különböző hőkiterjedési együtthatóinak következménye. Ugyanis melegítés következtében a kvarclemez lényegesen nem tágul ki, a réteg kristályai viszont jelentékenyen kitágulnak és így a krisztallitoknak az egymáshoz való szorulása mintegy tökéletesebb érintkezés folytán eredményezi a nagyobb vezetést és így a törés után fellépő nagy B értéket.

A temperált rétegeken nyert eredmények már megbízhatóbbak. A hőmérsékleti egyenes törési pontja sok esetben eltűnt vagy eltolódott, ami jelentékeny belső változásokra mutat. Rekrisztallizáció miatt a szerkezet javult, a krisztallitok nagyobbakká nőttek és ez megnyilvánul úgy a vezetőképesség abszolut értékében, mint a temperatura coefficiensében. A magasabb hőmérsékleten temperált rétegek vezetőképessége kisebb, a temperatura coefficiens nagyobb. Ezek mind a tökéletesebb szerkezet következményei. Bár igen valószínű, hogy a kvarclemez és a *NaCl* kristály hőkiterjedési együtthatóinak nagy különbsége itt is hat és egyelőre ezt a hatást nem lehet a valódi temperatura hatástól szétválasztani. Hogy ez a hatás megvan, erre mutatnak a 3. sz. táblázatban a

17,768 és 10,601 B értékek. T. i. ebben a hőmérsékleti tartományban a B értékek egykristály esetén a 10,300 értéket nem léphetik túl.

Összefoglalás.

1. Párologtatással nyert *NaCl* rétegek elektromos vezetőképességét mértem különböző rétegvastagságok mellett hosszanti és kereszt irányban.

2. Az így nyert rétegeknél az egykristály vezetőképességével szemben sokszorta megnövekedett vezetőképességet kaptam.

3. Hosszanti irányú vezetésnél a vezetőképesség a vastagság csökkenésével növekszik.

4. A vezetés temperatura coefficiense kb. 250° C-ig kis értékkel bír. Ezen túl menve nagyobb temperatura coefficienst nyerünk; másodrendű hatások (köbkitágulásbeli különbségek) túlnyomó befolyásának tulajdonítható ez.

5. Keresztirányú áramnál a rétegvastagsággal a vezetőképesség nő.

6. Temperált rétegeknél a temperálás hatásaképpen jobb szerkezetet nyer a réteg, ami kisebb vezetést eredményez, de még mindig jelentékenyek a másodrendű zavaró hatások.

Méréseimet a M. Kir. Ferenc-József Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében végeztem. Kötelességemnek tartom, hogy köszönetet mondjak dr. Fröhlich Pál egy. ny. r. tanár intézeti igazgató úrnak, aki módot és alkalmat adott ezen vizsgálatok elvégzésére. Köszönettel tartozom továbbá dr. Gyulai Zoltán debreceni egy. ny. r. tanár úrnak, aki technikai, valamint elméleti kérdésekben értékes tanácsaival segített munkámban. Vizsgálataimat a Rockefeller-alapból beszerzett eszközökkel végeztem.

Szeged, Ferenc-József Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézete, 1937.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

IONENLEITUNG IN DÜNNEN KRISTALLSCHICHTEN.

Von J. BOROS, Szeged.

Diese Arbeit wird etwa gleichzeitig in einer deutschen Zeitschrift erscheinen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A SOPRONI VIRÁGVÖLGY FOSSILIS BAGLIVIÁI ÉS KORTÁRSAIK.

VITÁLIS ISTVÁN l. tagtól.

Sopron környékén a *neogén*üledékek egyik legérdekesebb kifejlődése a *Virágvölgy*ben tanulmányozható. A Virágvölgy nevű kertvárosrész Sopron szab. kir. város beltelkeitől északra fekszik, a *Bécsi domb* keleti oldalán. A *Boor*- és a *Schwartz*-féle kavics- és homokfejtők jól feltárták a neogén-lerakódásokat, valamint kövületeiket is.

A Virágvölgy üledékei WOLF HENRIKnek 1869. évben kiadott «*Geologische Karte der Umgebung von Ödenburg*» című térképén *szarmata*-korúaknak vannak feltüntetve. (**1**)

TELEGDI RÓTH LAJOS, az első magyar geológus, aki Sopron vidékén részletes földtani felvételt készített, már 1877. évben észrevette, hogy a sopronvármegyei *Darufalva* (Drassburg) határában a típusos szarmataüledékekre olyan pannoniai pontusi korú, kavicsrétegekkel váltakozó konglomerátum-padok települnek, amelyekben a tömegesen fellépő *Melanopsis Martiniana* FÉR mellett «alárendelt mérvben *szarmát-kövületek* is jelen vannak». (**2**)

Hasonlót figyelt meg *Telegdi* RÓTH LAJOS a sopronvármegyei *Klimpá*tól keletre, «ahol közvetlenül egy konglomerátpad alatt fekvő homoklerakódásban *Melanopsis Martiniana* és *Trochus Podolicus*, *Congeria triangularis* és *Cerithium disjunctum* egymás mellett gyűjthetők. «De — írta TELEGDI ROTH LAJOS — itt is a *Melanopsis Martiniana* feltétlenül az uralkodó alak». «Nem messze innen — fejezte be TELEGDI ROTH LAJOS 1877. évi megfigyeléseinek ide vonatkozó részét — *Melanopsis*, *Congeria*, *Cardium* mellett *foraminiferák* is mutatkoznak e rétegekben«. (**2**. p. 397.)

T. ROTH LAJOS a *szarmata* és a *pontusi* faunának erre a keveredésére, egy időben egymás mellett való élésére vonatkozó megfigyelését 1878. évben a bécsi *Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt* folyóiratában is közölte (3) és az az osztrák szakirodalomban ellentmondást váltott ki. HOERNES REZSŐ reámutatott arra, hogy a szarmata és a pontusi szerves lények nem éltek egyidejűleg egymás mellett, hanem hogy a szarmatakagylók teknői és csigák házai másodlagosan, *bemosás* útján kerültek a pontusi üledékekbe. (4)

Tíz év mulva azonban HOERNES REZSŐ nemcsak hogy elismerte T. ROTH LAJOS megfigyelésének a helyességét, hanem előbb *Zemenye* (Zemendorf) és *Rétfalu* (Wiesen)- *Siklós* (Sigles) vasúti állomása közeléből (5), majd *Darufalva* (Drassburg) határából (6) ő maga írt le olyan lerakódásokat, amelyeket ugyan még a szarmatához vett, de amelyek mint «*átmeneti*», «*maeotiai*» rétegek a pontusi lerakódásokhoz vezetnek át.

Később hasonló szakirodalmi vita folyt le a szarmata-pontusi *átmeneti* üledékekre, illetve kevert faunájukra nézve GORJANIVIĆ-KRAMBERGER KÁROLY horvát és LŐRENTHEY IMRE magyar kutató között.

GORJANOVIĆ-KRAMBERGER 1891. évben Horvátországban, a *Zágrábi hegységben* lelt ilyen szarmata-pontusi átmeneti: «*praepontusi*» üledékeket és kövületeket. (7) A *Vrabče* határából leírt 12 molluscafajból 11 új és így ennek a praepontusi mészmárgának különleges a faunulája. LŐRENTHEY IMRE 1893. évben Szilágy vármegye és Erdély alsó pontusi képződményeiről közölt cikkében élesen szembehelyezkedett a «*praepontusi*» képződmények felállításának a jogosultságával. (8)

Tíz év múlva: 1903. évben azonban LŐRENTHEY maga is azt írta, hogy a krassószörényvármegyei *Szócsán* határában «*teljes biztossággal lehet látni, amint a szarmataemelet egyenletesen észrevétlenül átmegy a pannoniai emeletbe s szépen meg lehet figyelni a fauna lassankénti átalakulását*» és fenntartotta magának a jogot, hogy a szócsáni érdekes lelethely faunáját és felfedezését később részletesen ismertesse. (9) Ennek a nehéz problémának a megfejtését azonban később sohasem kísérelte meg.

Meg kell még említenünk, hogy az orosz kutatók közül SIN-

zov (**10**) 1878. évben Beszarábiában és ANDRUSSOV (**11**) 1886. évben az odesszai mészkőben lelt ilyen «*átmeneti*» képződményt, amelyet ANDRUSSOV először «*praepontusi*»-nak, később pedig «*maeoti*»-nak jelölt.[1]

A szarmata-pontusi «átmeneti», «áthidaló» képződmények problémája tehát mintegy hat évtizedre nyúlik vissza a nélkül, hogy megnyugtatóan megoldódott volna.

SUESS EDE (**12**), WOLF HENRIK, HOERNES REZSŐ és mások a réteg- és őslénytani szempontokon kívül megkísérelték ezt a kérdést általános földtani vizsgálatokkal is megvilágítani, a «*pontien előtti erózió*», illetve «*az eróziós diszkordancia*» segítségével.

Ausztria és Magyarország *szarmata* üledékeiben ugyanis, az oroszországival összehasonlítva, *hézag* mutatkozik, amennyiben az oroszországi *középső és felső szarmata hiányzik.* Ezt az említett szerzők *a pontikumelőtti erózióval* magyarázzák, mások, pl. SCHRÉTER ZOLTÁN (**13**), viszont azzal, hogy *a mi maeotiai és alsópannoniai pontusi üledékeink az oroszországi középső és felső szarmata-képződményekkel equivalenseknek* tekintendők.

A szarmata-pontusi «*átmeneti*» üledékek vitája ma sincsen még lezárva, aminek egyik újabb bizonyítéka a soproni *Virágvölgy* szarmata-pontusi *átmeneti* rétegeinek a problémája. Amíg azonban az említett esetekben két-két kutató, név szerint TELEGDI ROTH LAJOS és HOERNES REZSŐ, illetve GORJANOVIĆ-KRAMBERGER és LŐRENTHEY IMRE eltérő véleménye ütközött össze, a soproni virágvölgyi és a sopronpusztakörnyéki, «átmeneti» üledékek rétegtani beosztására vonatkozólag VENDL MIKLÓS kartársam éveken át a saját megfigyeléseinek olyan értelmezésével kereste a probléma megoldását, hogy ezeket az *átmeneti* üledékeket az 1928. évben közrebocsátott földtani térképén *pontusi*nak (**14**), az 1933/34. évben első ízben revideált térképén «*Übergangsschichten zwischen dem Sarmat u. d. Pannon*» helyzetűnek (**15**) és 1935. évben másodízben revideált térképén *szarmatá*nak (**16**) jelölte.

1936. évben megjelent értekezésében VENDL MIKLÓS kollégám engem is aposztrofál (**17**) és ezzel mintegy meginvitál munkatársnak, amire annyival inkább vállalkozhatom, mivel 1935. év

[1] Palus Maeotis = Azóvi tó.

őszén én is megtekintettem a *Virágvölgy* üledékeit és azóta részletesen tanulmányozom az ott felfedezett érdekes faunulát is.

A soproni Virágvölgy szarmata-pontusi «átmeneti», «maeotiai» üledékeire, főleg meglepően szép és változatos faunulájukra vonatkozó megfigyeléseimet a legnagyobb készséggel bocsátom közre, abban a reményben, hogy ezek a közlések a Virágvölgy átmeneti üledékeinek a problémáját, különösen *őslénytani vonatkozásban*, új oldalról világítják meg.

A saját megfigyeléseim közlése előtt ismertetnem kell azonban röviden VENDL MIKLÓS tanártársamnak a soproni Virágvölgy kavics- és homoklerakódásaira vonatkozó eddigi tanulmányait.

VENDL MIKLÓS kollégám az 1928. évben közrebocsátott «Sopron környékének geológiai térképén» (**14**) a Virágvölgy kavics-homoklerakódásait a *pontusi* üledékekhez, éspedig a sopron-vidéki pontikum felső részéhez tartozóaknak jelölte, szemben a WOLF-féle régi térképpel, amelyen azok *szarmata*-korúaknak voltak feltüntetve (**1**).

VENDL MIKLÓS az 1930. évben «*Sopron környékének geológiája*» című monografikus munkájában (**18**) meg is indokolta, hogy a *Boor*-féle kavics- és homokfejtőben feltárt virágvölgyi üledékeket a bennök tömegesen fellépő *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házai alapján vette *pontusi* jellegűeknek (**18**. p. 97.), a *Schwartz*-féle kavics- és homokfejtő rétegeit pedig azért kellett feltétlenül *pontusi*nak tekintenie, mivel ott a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS gyakori házain kívül egy *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana* FÈR.-házat is lelt. (**18**. p. 98.)

VENDL MIKLÓS ugyan mind a két feltárásban gyűjtött *szarmata*-korú kövületeket is, ámde a *Tapes gregaria* PARTSCH héjai és a *cerithiumok* házai gördítettek, koptatottak, vagyis *másodlagos* helyre hurcolt: *átmosott* példányok voltak. (**18**. p. 97—98.)

VENDL MIKLÓSnak ez a megfigyelése összhangban állott T. ROTH LAJOS 1877. évi és már ismertetett darufalvai és klimpai közlésével.

VENDL MIKLÓS kartársam azonban 1930. évi munkájában rámutatott arra is, hogy *Sopron-puszta környékén* és a *Virágvölgyben* a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS tömeges fellépésével jellemzett üledékeket per analogiam azokkal a *szarmata-pontusi*

*átmeneti rétegek*kel is párhuzamba lehet állítani (**18.** p. 101), amelyeket HOERNES REZSŐ a márcfalvi Kogl és Zemenye között, továbbá Rétfalu—Siklós vasúti állomása közelében ismert fel és amely helyeken HOERNES R. a *Melanopsis impressa* KRAUSS *házaival együtt gyűjtötte a típusos szarmatakövületeket.*

Erre az analógiára való tekintettel VENDL MIKLÓS kollégám 1933—1934. évben újból kiadott földtani térképén a Virágvölgy üledékeit a *szarmata-* és a *pontusi* üledékek között «*átmeneti*» képződményeknek jelölte (**15**); az 1935. évben harmadízben kiadott földtani térképén viszont ezeket az *átmeneti* üledékeket határozottan a *szarmatá*hoz tartozóaknak tüntette fel (**16**), úgy, mint WOLF és HOERNES R., ámde az 1936. évben közölt értekezésében újból éreztette, hogy a *Virágvölgy* felső szarmata határrétegei *átmenettel* kapcsolódnak a pannóniai pontusi üledékekhez. (**17.** p. 5.)

VENDL MIKLÓS tanártársamnak a *Virágvölgy* szarmata-pontusi *átmeneti, maeotiai* üledékeiről kiformálódott véleménye tehát teljesen megegyezik HOERNES REZSŐ azon régebbi megállapításával, hogy ezek a *Melanopsis impressás* üledékek még a *szarmatá*hoz vehetők, de viszont el kell ismerni azt is, hogy amint azt HOERNES R. mondotta, «*Die Grenzschichten mit Melanopsis impressa . . . sind in ihrer stratigraphischen Stellung insoferne unsicher, als man sich ebensogut dahin entscheiden könnte, sie der sarmatischen, wie der pontischen Stufe zuzurechnen*».

HOERNES REZSŐ helyzete azonban *őslénytanilag* annyiban volt előnyösebb, hogy ő Zemenye határában a *Melanopsis impressa* és két varietása: a *Bonelli* és a *carinatissima* társaságában *mikrofaunát* is lelt, nevezetesen *Hydrobia ventrosa* MONT. sp., *Hydrobia Frauenfeldi* M. HÖRN., *Hydrobia (Liobaikalia?) Sopronensis* R. HOERN. és a két utóbbi faj között egy átmeneti forma házait, holott VENDL MIKLÓS tanártársam a Virágvölgy üledékeiben a *másodlagos* helyen levő *szarmata*-kövületek és a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS ép házain kívül más kövületet nem talált, jóllehet — tekintettel a stratigrafiailag vitás helyzetű üledékekre — a Virágvölgy homokját iszapolásnak is alávetette. (**14.** p. 97—98.)

Nagyon örvendek tehát, hogy VENDL MIKLÓS kartársam értékes virágvölgyi kutatásait *kiegészíthetem* annyiban, hogy nekem sikerült a Virágvölgyben olyan érdekes és viszonylag meglepően

gazdag faunulát felfedezni, amely felveheti a versenyt a zemenyei és a darufalvai faunulákkal.

Örömömet még növeli az a körülmény, hogy a virágvölgyi *Boor*-féle kavics- és homokfejtő alsó homokrétegében a mikrofaunula mollusca fajai között megleltem a *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskáit is. Ezt a parányi, különleges házacskájú csigafajt ugyanis, amelyet HOERNES REZSŐ Zemenyében ismert fel új fajként és Sopron város nevéről keresztelt el, eddig senki sem találta meg Sopron fossziliái között.

A *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. épségben megmaradt házacskáival együtt egy olyan csinos, parányi *pontalmyra*-kagylófajt is felismertem, amely *átmeneti* forma a *szarmatá*ban élt *Cardium Pilari* R. HOERN. sp. (**19**) és a *pontusi Limnocardium (Pontalmyra) Andrusovi* LŐRENT. var. *spinosum* LŐRENT. (**20**) fajta között.

A következő sorokban a *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. virágvölgyi házacskáit ismertetem s felsorolom kortársaikat is.

*

A csigák házának a csavarulatai a központi tengely körül általában szorosan egymáshoz símulnak. Néhány csigafaj házának a kanyarulatai azonban dugóhúzószerűen elválnak egymástól. Ilyen pl. a steinheimi édesvízi mészkőből 1867. évben leírt *fossilis Planorbis multiformis denudatus* HILG. (**21**) vagy a mikrofaunából a *Pseudomalaxis corniculum* BOETTGER. (**22**)

Ilyen *evolut* házú, *recens* csigát ismertetett 1875. évben DYBOWSKY (**23**) a keletszibériai Bajkál-tóból *Leucosia Stiedae* néven.

MARTENS 1876. évben a Bajkál-tó evolut csiga-nemének a megjelölésére a *baicalia*, illetve *liobaicalia* elnevezést ajánlotta, mivel a *leucosia* nevet *Fabricius* már 1798-ban egy *rák*-genus jelölésére alkalmazta. (**24**) Így tehát a *Liobaicalia* MARTENS = *Leucosia* DYBOWSKY.

BRUSINA 1892. évben ennek az *evolut*, recens *liobaicalia* genusnak a miniatür *fossilis* mására bukkant a horvátországi *Markuševec pontusi* üledékeiben s minthogy a fossilis házon az embryonalis csavarulat tengelye egyenes vonalban, vagyis hajlás nélkül folytatódik a ház csavarulatának a tengelyében, holott a liobaicaliánál

szöget alkot, azt, mint új nemet, *baglivia* névvel jelölte és a *hydrobiák* családjába osztotta be. (**25**)

Brusina az új *baglivia*-nemnek öt fajat írta le *Baglivia rugulosa, goniogyra, strongylogyra, streptogyra* és *ambigua* néven s azokat «*Iconographia*» című monografiájában rajzban is bemutatta. (**26**)

Hazánkban 1895. évben Lőrenthey Imre lelte az első *bagliviákat Szekszárd*on és *Budapest-Kőbányán*, ugyancsak *pontusi* üledékekben. Lőrenthey a szekszárdi *baglivia*-példányokban új fajt ismert fel és azt *Baglivia spinata* néven írta le. (**27**) A *Kőbányán* talált *bagliviát* is új fajnak vélte és azt először *Baglivia bythinellaeformis* néven említette (**27.** p. 262).

Hoernes Rezső 1897. évben a sopronvármegyei *Zemenye* (Zemendorf) határában a szarmatától a pontusi üledékekhez átvezető s az oroszországi előfordulásról «*maeoti*»-nak elnevezett rétegekben lelt ilyen fossilis csigát és azt, miután sem Brusina, sem Lőrenthey munkájáról nem volt tudomása, a hydrobiákhoz vette és új fajként *Hydrobia (Liobaikalia?) Sopronensis* nov. form.-nak nevezte el. (**5.** p. 72.)

Hoernes R. 1900. évben a sopronvármegyei *Darufalva* (Drassburg) «*maeotiai*» zsákos kavicsában is lelt *liobaicaliákat* (**6.** p. 817), illetve, amint azt Lőrenthey kimutatta (**20.** p. 232), *bagliviákat*. Ugyanakkor azt is megállapította Lőrenthey, hogy a Kőbányán lelt és új fajnak vélt *Baglivia bythinelliaeformis* azonos a *Baglivia Sopronensis* R. Hoern. sp.-el. (**20.** p. 233.)

Lőrenthey 1903. évben a krassószörényvármegyei *Szócsán*ban a szarmata és a pannoniai képződményeket «*áthidaló*» rétegekből, vagyis a *maeotiai* emeletből kérdőjellel a *Baglivia streptogyra* Brus. fajt említette fel. (**9.** p. 62.)

Ezek szerint 1903. évig hét *baglivia*-fajt írtak le, ezek a következők: *Baglivia rugulosa* Brus., *Baglivia goniogyra* Brus., *Baglivia strongylogyra* Brus., *Baglivia streptogyra* Brus., *Baglivia ambigua* Brus., *Baglivia spinata* Lőr. és *Baglivia Sopronensis* R. Hoern. sp.

*

1903. év óta egy emberöltő telt el anélkül, hogy amennyire a részemre hozzáférhető irodalmi adatokból megállapíthattam, valaki újabb *baglivia*-leletről hírt adott volna. Annál nagyobb volt

tehát a meglepetésem, amikor a soproni *Virágvölgy* homokjában a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS társaságában igen sok és nagyon szépen megtartott *baglivia*-házacskára bukkantam.

Baglivia-leletem, amelyet már a sopronvidéki *orygocerasok*ról közölt értekezésemben is jeleztem (**28**), valószínűleg arra vezethető vissza, hogy részemről az üledékekben először iszapolás *előtt* szoktam keresni a mikrofaunát, minthogy, tapasztalat szerint, iszapolás közben a mikrofauna egy része veszendőbe mehet.

*

BRUSINA öt *baglivia*-faját egy-egy sérült vagy néhány töredékes példány alapján írta le. LŐRENTHEY *Baglivia spinata* faját egy egész és 10 sérült, töredékes házacska segítségével állította fel. HOERNES REZSŐ a *Hydrobia (Liobaikalia?) Sopronensis* = *Baglivia Sopronensis* sp.-t szintén kevés, mintegy «két tucat» házacska alapján ismertette. A soproni Virágvölgyben a *Boor*-féle kavics- és homokfejtő alsó homokrétegében több száz példányban gyűjtöttem *baglivia*-házacskákat és azok között a teljesen épek száma is meghaladja a két tucatot. Megleltem a *bagliviák* házacskáit a *Schwartz*-féle virágvölgyi kavics- és homokfejtőben is, ámbár ott ritkábban fordulnak elő.

A soproni Virágvölgy *baglivia*-házacskáinak a hossza (magassága) általában csak 2—3 mm, de akadnak kétszer olyan magas példányok is.

A *baglivia*-házacskáknak az a legszembetűnőbb sajátsága, hogy a *kanyarulatok elválnak egymástól.* A házacskák kanyarulatainak az egymástól való elkülönülése: *evolultsága* nagyon eltérő. Egyes házacskákon a kanyarulatok elkülönülését alig lehet észrevenni, másoknál az evolultság nyomban szembe tűnik.

A kanyarulatok evolultsága általában az utolsó kanyarulatnál a legerősebb s fokozatosan gyengül a megelőző, kisebb kanyarulatok között. Az evolutio rendszerint egyenletes, de egyes házacskáknál az utolsó kanyarulat nagyon erősen evolut és így *eltorzuláshoz* vezet.

A *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskájának a nyílása, az ú. n. «*szájnyílás*» ovális, minthogy a külső és a belső ajak lekere-

kített, hegyes szögben érintkezik a kanyarulat felső, a ház csúcsa felé forduló oldalán. Így áll elő a kanyarulatoknak a csúcsfelőli részén az *él*, amely igen szembetűnő.

A kanyarulatok száma 3—$4^1/_2$ s ennek megfelelően alacsonyabb, zömökebb és magasabb, nyúltabb házacskák keletkeztek. A kanyarulatokon vékony növekedési vonalak mutatkoznak.

A *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskája ugyan viszonylag elég vastag, de mivel a kanyarulatok nem érintkeznek egymással, könnyen elszakadnak. Ez az oka, hogy olyan sok a töredékes példány és hogy többnyire csak kitartó türelemmel talál az ember egy-egy ép házacskát.

A virágvölgyi *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskái megegyeznek azokkal a zemenyei példányokkal, amelyeket HOERNES REZSŐ idézett munkájában a II. tábla 13—16. ábráján rajzban is bemutatott. A LŐRENTHEY által Budapest-Kőbányáról ábrázolt *Baglivia Sopronensis* R. HOERN sp. házacskái kevésbbé hasonlítanak a soproni virágvölgyi *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskáihoz.

*

A soproni Virágvölgyben a *Boor*-féle kavics- és homokfejtő alsó homokrétegében a *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskáival együtt a nagyobb termeténél fogva szembetűnőbb és már VENDL MIKLÓS kartársam által is ismételten említett *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS és varietásain kívül meglepően sok fossilia gyűjthető, különösen a mikrofaunából.

A gyűjtött faunula meghatározása folyamatban van, de már előzetesen is közölhetem, hogy a kövülettársaságban *foraminiferák, modiola-, limnocardium-, pontalmyra-, limnaea-, planorbis-, melanopsis-, hydrobia-, baglivia-, valvata-, neritina*-fajok, *ostracodák* és *halfogak* vannak.

Különösen érdekes egy *limnocardium*, illetve *pontalmyra*-faj,- amelynek a parányi, tövises házacskája a *szarmata*-korú *Cardium squamulosum* PILAR = *Cardium Pilari* R. HOERN., a *maeotiai Cardium praeponticum* KRAMB.-GORJ. és az *alsó pontusi Limnocardium (Pontalmyra) andrusovi* LŐRENTH., illetve annak varietása, a *Limnocardium (Pontalmyra) andrusovi* var. *spinosum* LŐRENT.

között foglal helyet s különösen az utóbbihoz hasonlít. (**20.** p. 178. Taf. XI. Fig. 1—11 és Taf. XII. Fig. 3.)

Ugyanilyen szarmata-pontusi *átmeneti* alak az a parányi *planorbis*-házacska is, amely a *Planorbis vermicularis* STOL. és a *Planorbis (Gyraulus) solenoeides* LŐRENT. között áll, s valószínűleg a *solenoeides*szel azonos. (**20.** p. 190.)

Mint negativumot említem meg, hogy a *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. evolut házacskáival együtt igen sok *hydrobia*-házacskát találtam ugyan, ámde azok nem azonosíthatók a *Hydrobia Frauenfeldi* M. HÖRN. sp. házacskáival, minthogy kanyarulataiknak a száma kevesebb.

A *Boor*-féle virágvölgyi kavics- és homokfejtő alsó homokrétegében homokkő-konkréciók fordulnak elő s azok között *kövületeset* is leltem. Ez a kövületes homokkőkonkréció helyben termett, mivel a felülete érdes, sőt a felszínéből kisebb-nagyobb kvarcszemek állnak ki, vagyis az áthurcolásnak, a gördülésnek a nyomait sem mutatják. Az egyik ilyen helyben termett homokkőkonkrécióban *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS benyomatait, kőmagvait és háztöredékeit, *neritina*-ház felső részének a benyomatát, továbbá *hydrobia*-, *baglivia*-, *limnocardium (pontalmyra)* ház-, illetve teknőrészeket találtam.

A *Boor*-féle virágvölgyi kavics- és homokfejtőben az eddig ismertetett *alsó homokréteg*, úgy amint azt VENDL MIKLÓS kartársam már 1930. évben közrebocsátott monografiájában megállapította, $7^1/_2$—$8^1/_2$ óra irányban lejtősödik három foknyi lejtőszöggel, holott a felette következő laza kavicskonglomerátum-pad, valamint az egymással váltakozó homok- és kavicsrétegek igen meredeken: 26 foknyi lejtőszöggel lejtősödnek. Ezt az *erős diszkordanciát* 1935. évben még én is láttam, a mult évben azonban ezt a meredeken lejtősödő zsákos kavicsot lefejtették.

A *Boor*-féle virágvölgyi kavics- és homokfejtő felsőbb, egymással váltakozó homok- és kavicsrétegeiben a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házain kívül a *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskáit ugyancsak megleltem. Ott azonban a bagliviák és kortársaik gyérebben fordulnak elő, mint az alsó homokrétegben. Viszont gyakoriabbak ebben a felsőbb homok- és kavicsrétegben

a szarmata idősebb üledékeiből átmosott, gördített teknőjű *Tapes gregariák* és a *cerithiumok* erősen lekoptatott házai.

VENDL MIKLÓS kollégám 1935. évben olyan konkréciókat is lelt ebben a felsőbb, egymással váltakozó homok- és kavicsrétegösszletben, amelyekben ép *Tapes gregaria* teknők, ép *cerithium*-házak láthatók. Ezek az idősebb szarmatakonkréciók azonban, amint azt 1936. évi értekezésében VENDL MIKLÓS tanártársam is említi, *mádoslagos* helyen fekszenek (17. p. 5): a felszínükön felismerhetők az áthurcolódás, a koptatódás, a gördülés nyoma is.

*

A soproni Virágvölgyben a *Boor*-féle kavics- és homokfejtőtől kelet-délkeletre a *Schwartz*-féle kavics- és homokfejtőben is jól fel vannak tárva a szarmata-pontusi «*átmeneti*» vagy «*maeotiai*» üledékek. A *Schwartz*-féle kavics- és homokfejtő kőzettani és rétegtani viszonyait részletesen ismertette már VENDL MIKLÓS kollégám. Ő fedezte fel itt is a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házait.

Meg kell említenem, hogy a *Schwartz*-féle virágvölgyi kavics- és homokfejtő két bányából áll. VENDL MIKLÓS tanártársam az egyikről *szelvényt* is közölt (**18.** p. 97. 13. kép). VENDL M. a szelvényen *e*-vel jelölt alsó, aprókavicsos rétegben ismerte fel az apró *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házakat a görgetett *tapesek* és *cerithiumok* társaságában. Részemről a *c*-vel jelölt konglomerátumszerű durva kavicspad és a *b*-vel jelzett szürke homok között is leltem *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házakat, sőt a másik bányában a kavicskonglomerátum-pad fölött három apró kavicsos homokrétegben is találtam *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házakat.

A *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS házak azonban nem a legjobb megtartásúak. A legépebb házakat a kitermelt kavics- és homokrakáson gyűjtöttem. Helyesen jegyezte meg VENDL MIKLÓS kollégám, hogy az *impressa*-házak viszonylag feltűnően aprók. A leggyakoribb köztük az a forma, amelyet HOERNES REZSŐ, a Zemenyén gyüjtöttek közül, *átmeneti* alakként rajzolt le (**4**. Taf. II. Fig. 1.) a var. *Monregalensis* SACCO felé. SACCO a *Melanopsis impressa* var. *Monregalensis*-t a *helvetien*ből írta le. (**29.**) Talál-

tam azonban olyan nagy *impressa*-házat is, amely a HÖRNES MÓR által *típus*ként lerajzolt *Melanopsis impressa* KRAUSS házzal azonos.[1]

Részemről a *Schwartz*-féle virágvölgyi kavics- és homokfejtőkben is találtam iszapolás nélkül igen sok *Baglivia Sopronensis* R. HOERN. sp. házacskát, bár nem olyan szép megtartásban, mint a *Boor*-féle kavics- és homokfejtő alsó homokrétegében.

A *bagliviák*kal együtt gyűjtöttem a *Schwartz*-féle kavics- és homokfejtőben is *foraminiferákat, congeria-, limnocardium-, pontalmyra-, planorbis-, melanopsis-, hydrobia-, valvata*-fajokat és igen sok *ostracodát*. Itt a *mikrofauna* is rosszabb megtartású, mint a *Boor*- féle kavics- és homokfejtő alsó homokrétegében. Egy-egy *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS ház fövenyéből azonban 10—15 darab parányi fossilia is előkerült.

*

VENDL MIKLÓS tanártársam *Sopron*- és *Piusz-puszta* környékén is jelzett szarmata-pontusi «*átmeneti*» üledékeket. Megtekintettem azokat is. Helyszíni és laboratóriumi tanulmányaim alapján különösen a *sopronpusztai szarmata üledéket találtam részletesebb feldolgozásra méltónak*. Az ott gyüjtött fauna meghatározása folyamatban van, s már most jelezhetem, hogy az jóval változatosabb és gazdagabb, mint ahogyan azt az eddigi kutatások elénk tárták. Különös kiemelést érdemel, hogy sikerült ott felismernem azt a parányi *serpulidát*, amelyet az osztrák szaktársak eleinte *nubeculariának* véltek és amely téves meghatározás alapján azután az orosz stratigrafusok azt hihették, hogy Ausztria területén is lerakódott az oroszországi *nubeculariás középső* szarmata.

A *nubecularia-probléma* újabb megvilágítását azért is szükségesnek vélem, mivel TELEGDI ROTH LAJOS, aki a magyar geológusok közül elsőként ismertette és térképezte részletesen Sopron környékének, illetve a Lajta-hegységnek a földtani viszonyait, 1883—1884. évben *Rétfalu* (Wiesen) vasúti állomása közelében szarmatakövületek társaságában a *Melanopsis impressa* KRAUSS házával együtt a *Nubecularia heliciformis* EICHW. sp.-t is említette. (**30.**)

[1] *Melanopsis impressa* KRAUS néven a szerzők egymástól erősen eltérő házakat jelölnek.

Irodalom.

1. Wolf, Heinrich: Die Stadt Oedenburg und ihre Umgebung. Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt. XX. Band. 1870. Wien. p. 15—64. Mit einer Karte: *Geologische Karte der Umgebung von Ödenburg* entworfen i. J. 1869 von Heinrich Wolf.

2. Roth Lajos 1877. évi sopronvármegyei földtani felvételi jelentése. Földtani Közlöny. Hetedik évf. Budapest, 1877. p. 394—398.

3. Mitteilungen der Geologen der ung. geolog. Anstalt über ihre Aufnahmsarbeiten im Jahre 1877. Verhandlungen der K. K. Geologischen Reichanstalt. Jg. 1878. Wien, 1878. p. 20.

4. Hoernes, R.: Ein Beitrag zur Kenntnis der sarmatischen Ablagerungen von Wiesen im Oedenburger Comitate. Verhandl. d. k. k. Geolog. Reichsanstalt. Wien, 1878. p. 98.

5. Hoernes, R.: Sarmatische Conchylien aus dem Oedenburger Comitat. Jahrbuch der k. k. Geolog. Reichsanstalt. XLVII. Bd. 1997. Wien, 1898. p. 57—94. Mit einer lithogr. Tafel (Nr. II) und zwei Zinkotypien im Texte.

6. Hoernes, R.: Die vorpontische Erosion. Sitzungsberichte der Matem.-Naturw. Klasse d. k. Akad. d. Wissensch. CIX. Bd. Abt. I. Wien, 1900. p. 811.

7. Gorjanović-Kramberger, Carl: Das Tertiär des Agramer Gebirges. Jahrbuch der k. k. Geolog. Reichsanstalt. XLVII. Bd. 1897. Wien, 1898. 549—566. Mit 3 Zinkotypien im Text.

8. Lőrenthey Imre: Adatok Szilágy megye és az erdélyi részek alsópontusi lerakódásainak ismeretéhez. Orvos-Termtud. Értesítő 1893. évf. II. Termtud. Szak. 195. l.

9. Lőrenthey Imre: A szarmata és a pannoniai képződményeket áthidaló rétegeknek egy classicus lelethelye Magyarországon. Földtani Közlöny. XXXIII. k. Budapest, 1903. p. 60—61.

10. Sinzov: Geologische Beschreibung Bessarabiens u. der angrenzenden Teile des Cherson'schen Gouvernements. Materialien z. Geologie Russlands. Bd. XI. 1878.

11. Andrussow, N.: Die Schichten von Kamysch-Burun und der Kalkstein von Kertsch. Jahrbuch der k. k. Geolog. Reichsanstalt. 1886. p. 127—140.

11*a*. Andrussow, N.: Der Kalkstein von Kertsch und seine Fauna. St. Petersburg, 1890.

11*b*. Andrussow, N.: Kurze Bemerkungen über einige Neogenablagerungen Rumäniens. Verhandl. der k. k. R.-A. 1895. Nr. 7. p. 189.

12. Suess, E.: Das Antlitz der Erde. 2. Aufl. Wien, 1892.

13. Schréter Zoltán: A magyarországi szarmatarétegek rétegtani helyzete. Koch-emlékkönyv. Budapest, 1912. p. 127—137.

14. Vendl Miklós: Sopron környékének geológiai térképe. —

Geologische Karte der Umgebung von Sopron. Entworfen von Prof. Dr. MIKLÓS VENDL. Mérték. Masstab : 1 : 25,000. *Erdészeti Kísérletek.* 1930. XXXII. k.

15. VENDL, MIKLÓS: Geologische Karte der Umgebung von Sopron. M. 1 : 50,000. Daten zur Geologie von Brennberg und Sopron. A m. kir. Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskola bányászati és kohászati osztályának *Közleményei.* 1933. évf. V. k. — *Mitteilungen* der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Hochschule für Berg- und Forstwesen zu Sopron. Ungarn. Band V. 1933.

15*a*. VENDL, M.: Geologischer Führer für die Studienreise des Arbeitsausschusses des Internationalen Verbandes forstlicher Forschungsanstalten im Jahre 1934. Sopron, 1934.

16. VENDL MIKLÓS: Sopron környékének földtani térképe. 1 : 25,000. 1935. Közölve HEIMLER KÁROLY: Sopron topografiája c. munkában. 1936.

17. VENDL MIKLÓS: Sopron város földjének földtani felépítése. HEIMLER KÁROLY: Sopron topografiája. Sopron, 1936. p. 18—25.

18. VENDL MIKLÓS: Sopron környékének geológiája. II. rész: A neogén és a negyedkor üledékei. Erdészeti Kísérletek. 1930. XXXII. k.

19. PILAR, G.: Trećegorje i podloga mu u Glinskom Pokupju. (Das Tertiärgebirge und seine Unterlage an der Glinaer Culpa.) Rad der südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste. Bd. XXV. Zagreb, 1873.

20. LŐRENTHEY, I.: Die Pannonische Fauna von Budapest. Palaeontographica. 48. Bd. Stuttgart, 1901—1902. p. 367.

21. HILGENDORF: Über Planorbis multiformis im Steinheimer Süsswasserkalk. Monatsberichte der Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1867. p. 483.

22. ZILCH, A.: Zur Fauna des Mittel-Miocäns von Kostej (Banat). Typus-Bestimmung und Tafeln zu O. Boettger's Bearbeitungen. Senckenbergiana. Frankfurt a. M. 1934. Bd. 16. Tafel 7. Fig. 19.

23. DYBOWSKY, W.: Die Gasteropoden des Bajkal-Sees. Memoire de l'Akad. Imp. d St. Pétersbourg. Bd. XXII. St. Pétersbourg. 1875.

24. MARTENS: N. DYBOWSKI: «Die Gasteropoden—Fauna des Baikal-Sees». Jahrbücher d. Deutschen Malakozoologischen Gesellsch. 3. Jg. 1876. p. 183.

25. BRUSINA, S.: Fauna fossile terziaria di Marku'evec in Croazia. Con un elenco delle Dreissensidae della Dalmatia, Croazia e Slavonia. Glasnika hrvatskoga naravoslovnoga družtva. God. IV. Agram, 1892.

26. BRUSINA, S.: Iconographia molluscorum fossilium in tellurae tertiaria Hungariae, Croatiae, Slavoniae, Dalmatiae, Bosniae, Herzegovnae, Serbiae et Bulgariae inventorum. Atlas. Zagrabiae. 1902. Tab. X. Fig. 30—50.

27. LŐRENTHEY, E.: Neuere Daten zur Kentnnis der oberpontischen

Fauna von Szegzárd. Természettudományi Füzetek. (Museo Naturali Hungarico Budapestinensí Vulgato.) Bd. XVIII. Heft 3—4. Budapest, 1895. p. 316.

28. VITÁLIS ISTVÁN: Orygocerasok a sopronvidéki alsópontusi üledékekben és elterjedésük hazánkban és a környező országokban. A M. Tud. Akad. Mat. és Termtud. Értesítője. LIV. k. Budapest, 1936. p. 626—641. — Orygoceras-Arten in den unterpontischen Ablagerungen der Gegend von Sopron, ihre Verbreitung in Ungarn und den benachbarten Ländern. Math. und Nat.-Wissenschaftl. Anzeiger d. Ung. Akad. der Wissensch. Bd. LIV. Budapest, 1936. p. 643.

29. SACCO, F.: Aggiunte alla Fauna malacologica estramarina fossile del Piemonte e della Liguria. M. d. r. Accademia d. scienze di Torino Ser. II. Tom. XXXIX. 1888. p. 8. (d. S. A.) Taf. II. Fig. 10—12.

30. L. ROTH V. TELEGD: Umgebungen von Kismarton (Eisenstadt). Erläuterungen zur geologischen Spezialkarte der Länder der ungarischen Krone. Blatt C. 6. 1: 144,000. Mit zwei lithografirten Tafeln. Budapest, 1884. p. 36.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. április 26-án tartott üléséből.)

DIE FOSSILEN BAGLIVIEN DES BLUMENTALES (VIRÁGVÖLGY) BEI SOPRON UND IHRE BEGLEITFAUNA.

Von I. VITÁLIS.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den *Mitteilungen* der Berg- und Hüttenmännischen Abteilung der Kgl. ung. Palatin Josef-Universität für technische und Wirtschafts-Wissenschaften.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

KERPELY ANTAL HATÁSA A VASKOHÁSZATI TUDOMÁNYOK ÉS A MAGYAR VASIPAR FEJLŐDÉSÉRE.

COTEL ERNŐ-től.

A dátumok találkozásának véletlen játéka, hogy id. KERPELY ANTALT a kiváló mérnököt hírneves tanárt, írót és tudóst, aki mostanában lenne százéves, a Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya pontosan 60 évvel ezelőtt, 1877. május 24-én választotta meg az Akadémia levelező tagjának. Mai megemlékezésünkkel tehát KERPELY ANTAL születésének centenáriumát, akadémiai tagságának pedig hatvanadik évfordulóját ünnepeljük. KERPELY élete és működése igen bőségesen rászolgált erre a szerény ünneplésre, mert élete nemes, szerény és tiszta, munkája fáradhatatlan, tanítása bölcs, tudományos kutatása és írói működése az egész világon elismert és nagyértékű. KERPELY tudományos írói működésének azért van olyan nagy nemzetközi tekintélye, mert munkái nemcsak magyar nyelven, hanem — Ausztriában és főleg Németországban — német nyelven is megjelentek.

KERPELY ANTAL nagyszabású, több vonatkozásban korszakalkotó működésének keretét életpályájának néhány határkövével megjelölhetjük. Aradon született 1837. február 5-én. A tehetséges és korán árvaságra jutott KERPELY már diákéveiben érezte, hogy csak annyi sikert fog az élettől kicsikarni, amennyit tisztán a saját ereje, tudása és szorgalma révén magának megszerezni képes lesz. Úgy tanult, úgy dolgozott, úgy készült hát az életre, hogy sikerrel mérkőzhessen azokkal a pályatársakkal, akiknek a tehetségükön és szorgalmukon kívül egyéb támaszuk is volt. Hogy mekkora tudással került ki a gyakorlati életbe, azt mi sem bizonyítja jobban, mint

az a rendkívül eredményes munka, amelynek mindjárt első főnökei voltak lelkes és hálás tanúi. Még nem volt 30 éves, mikor gyakorló mérnök korában az addiginál jobb, tartósabb vascsöves léghevítőt szerkeszt és szabadalmat nyer a vasnak legveszedelmesebb fertőzményeitől való megtisztítására s azt a gyakorlatban is kipróbálja. A gyakorlati élet, a vasgyártás egész területén kiválónak bizonyul. Még alig töltötte be harmincadik életévét, amikor közismert nagy tudása és gyakorlati sikerei alapján kinevezik a Bányászati és Erdészeti Akadémia kohászati tanszékének tanárává. Ezzel az időponttal indul meg KERPELY ANTAL pályafutásának igazi tündöklése. Előadásának egyszerűsége és világos értelme kiváló tanárrá, tudományának mélysége és rendkívüli erejű irodalmi hajlandósága pedig olyan neves kutatóvá és íróvá tette, amilyet a világ vaskohászata csak keveset ismer. Harminchét éves korában már olyan nagy nemzetközi tekintélye van a vaskohászati tudományok terén, hogy 1874-ben fényes ajánlat kíséretében meghívást kapott Németország akkor leghíresebb bányászati főiskolájának, a freibergi akadémiának vaskohászati tanszékére. De KERPELY nem fogadja el a kitüntető meghívást, hanem továbbra is kitart hazája vaskohászatának szolgálatában. Sajnos, 1881-ben viszont enged saját kormánya felszólításának, elhagyja a tanári katedrát és miniszteri tanácsosi minőségben elvállalja a magyar állam vas-, acél- és gépgyárainak legfőbb vezetését. Úgy látszik, hogy azok a szálak, amelyek a vasipari gyakorlathoz fűzték, erősebbek voltak, mint talán maga is szerette volna. Mert, hogy az új munkakör nem szerzett neki annyi igazi lelki örömet, mint a professzorság és az írói működés, abban nem lehet kétségünk. De hát lehet-e ezen csodálkozni?! A vasművek legfőbb igazgatása az ő magasröptű lelkét is a gazdasági realitások korlátai közé kényszerítette, míg azelőtt szabadon szállt a lelke ideálok után. Tizennégy évig irányította az állami vasműveket, amelyeket sorban korszerűen átépített és átszervezett. Vajdahunyadon tekintélyes új gyárat létesített, Nagymagyarország legnagyobb vasérckincsének gazdaságos és céltudatos kihasználása érdekében. Érdemeiért az uralkodó előbb a vaskoronarenddel, később a Lipót-renddel tüntette ki. Ötvennyolc éves korában vonult nyugalomba és hetven éves korában, 1907-ben halt meg Selmecbányán.

A hatás, amelyet KERPELY nemes és munkás élete korára és az utókorra gyakorolt, kettős volt: amíg alkotó munkássága, kezdeményezései és kritikái átformálják a magyar vasipart, amelynek fejlődési irányát világosan megjelölte, addig egymást sűrűn követő magyar és német tudományos művei, amelyek közül nem egy határozottan úttörő volt, megtermékenyítik az egész világ kohómérnökeinek gondolkozását. A hazai és a külföldi hatásnak ez a csodálatos harmóniája igen ritka jelenség még a kiválasztottak legkiválóbbjai között is. KERPELY magyarul is sokat írt, de főleg a német és ezek között is a Németországban megjelent művei azok, amelyek KERPELYT világhírűvé tették. A 70 év előtti, az abszolutizmus kábulatából ébredező Magyarország íróinak magyar szava nem hallatszott messzire. KERPELY tehát — érezve nagy tehetségének rendkívüli erejét — főleg Németország tudományos irodalmán át férközött hozzá a világ vaskohászatának művelőihez. A tudományos irodalomban olyan nemzetközi elismerésben van része, hogy hírneves német kortársa és pályatársa LEDEBUR ADOLF az ő szinte klasszikus vaskohászattanában, amelyet több idegen nyelvre is lefordítottak, igen sűrűn és nagy tisztelettel idézi kitűnő magyar riválisának kutatásait. KERPELY azonban nemcsak LEDEBURra, hanem az egész szakirodalomra olyan mély és tartós hatást gyakorolt, hogy a mult század utolsó és a XX. század első évtizedében megjelent összefoglaló vaskohászati művek valamennyiében többszörösen is ott csillog a kutató KERPELY ANTAL világmárkás neve.

Hatása a magyar vaskohászatra és a vasiparra már akkor megkezdődött, mikor első üzemi szolgálata idején alkotó, feltaláló, újító, korszerűsítő készségével új irányt adott a vas- és acéliparnak. Növekedett ez a hatás és a kohászati nevelésre is kiterjedt, mikor — már mint kezdő tanár — sürgeti, szorgalmazza a magyarnyelvű előadások meghonosítását, ami a hetvenes évek elején valóra is válik. Döntő hatása van a magyar vaskohászati tudományok fejlődésére KERPELY amaz elhatározásának, amellyel 1872-ben az eladdig közös kohászati (vas- és fémkohászati) tanszékből önálló vaskohászati tanszéket létesített. Most már egyedül a vaskohászati tudományok művelésének szenteli egész tehetségét és a munka olyan iramát diktálja a maga számára, amelynek alig van párja a műszaki tudományok irodalmában.

Tudományos irodalmi művei közül *elsőnek* nemcsak azért foglalkozom *Magyarország vaskövei és vasterményei* című könyvével, mert azt a Tud. Akadémia a MARCIBÁNYI-díjjal tüntette ki, hanem azért is, mert ebben a munkájában férkőzhetünk hozzá legjobban KERPELY szellemének magasrendűségéhez, újító, javító szándékának erkölcsi és hazafiúi eredetéhez. Ebben a művében, amelyet a *Természettudományi Társulat* megbízásából írt (megjelent 1877-ben), az 52. oldalon a következőket írja: *A természet titkainak kutatása legkedvesebb foglalkozásaink egyike. Ha siker koronázza, hálátlanossá és érdekessé válik, ha a titok leplét nem sikerült leemelnünk, fokozott igyekezettel folytatjuk vizsgálódásainkat. A vasnak benső természetébe hatolni kétszeresen hálátlan munka, mert egyrészt a tudománynak, másrészt a vasipari gyakorlatnak teszünk vele szolgálatot.* Íme KERPELY ANTALnak tudományos hitvallása és gyakorlati életcélja, — három rövid mondatban, ahogyan ő maga megírta!

KERPELYnek ezt a munkáját elsősorban az *alaposság* és a *tudományos lelkiismeretesség* jellemzi. Részletesen leírja és kitűnő ábrákon mutatja be vegyelemző módszereit és készülékeit, minden szakember számára lehetővé téve az *ellenőrzés* munkáját. «*Vasiparunk alapfeltételeinek olyan hű képét igyekeztem adni*, — írja többek között — *amilyet eddig más országról adni még senkinek sem sikerült.*» Ismételten rámutat a hazai vasércterületeknek arra a gyakran tapasztalható sajátságára, hogy az érc kémiai összetétele helyek és mélységi szintek szerint erősen ingadozik, amivel a kémiai laboratóriummal nem rendelkező vasgyárak nem vetettek, nem vethettek számot. Éppen ezért sürgeti, hogy minden kohótelepen, vas- és acélgyárban *feltétlenül alkalmazzanak vegyészt is, vagy olyan kohászt, aki jártas a kémiai elemzésben is.* Ő maga is elméletileg és gyakorlatilag képzett elemző kohász volt s ő honosította meg a selmeci főiskolán a vasipari elemzések rendszeres elméleti és gyakorlati oktatását. Az onnan kikerült fiatal kohómérnökök kitűnően beváltak ezen a téren is.

KERPELY ebben a művében nem elégedett meg azzal, hogy a vasércek teljes vegyi összetételét közölje. Az elemzési adatokból azt is kimutatja, hogy száz rész *Fe*-ra mennyi fertőzmény esik, valamint kiszámítja és közli, hogy a magyar vasércek meddő részében *milyen a bázisok és a savak aránya*. Közli azért, hogy az érdek-

lődő kohász azonnal és hosszas számítás nélkül tájékozódhasson abban a tekintetben, hogy a kérdéses ércfajta kohósításakor a helyes salakképzéshez mennyi és milyen kémiai jellegű pótlékanyagra lesz szüksége. Igazán találóan mondja KERPELY ennek a könyvének 5. oldalán, hogy ércelemzéseit — igen fáradságos munka árán — azért egészítette ki ezekkel az adatokkal, hogy ezen a kényelmessé tett úton *a legkonokabb empirikus* is kedvet kapjon ahhoz, hogy metallurgiai munkáját tudományos alapra helyezze. Tudta jól, hogy ez az út fog vezetni a metallurgia tudományának és a magyar vasiparnak korszerű fejlődéséhez.

Mikor áttekinti e művének ötévi fáradságos adatgyüjtését és eredményeit, megnyugodva állapítja meg, hogy: *Lendületes, hatalmas fejlődésre képes vasiparnak minden alapfeltételét megtaláljuk nyersanyagainkban és csak rajtunk mulik ezt az iparágat hazánkban olyan polcra emelni, amely azt, mint a többi iparágnak úttörőjét, méltán megilleti.* KERPELY fáradozása nem volt hiábavaló! Az ő munkájának és tanításának hatása alatt fejlődött a magyar vasipar korszerűvé és tekintélyessé.

Akadémiai székfoglaló gyanánt 1877. november 5-én mutatja be a III. osztály ülésén *A vas kémiai alkata és keménysége közötti vonatkozások* című munkáját. A vasuti sínkopás mértékének lehető csökkentésére gondolva állítja előtérbe az acél keménységének fontosságát és rendszeres kísérletsorozattal kutatja a kémai összetétel és a keménység összefüggéseit. Nagy nehézség állott előtte, minthogy abban az időben még nem állt szabatos keményvizsgáló módszer rendelkezésre. Az akkortájt széltében használt azt a módszert, amely 5 kg-os súlynak 1 m-es magasságból való ejtésével dolgozott, KERPELY durvának, kezdetlegesnek és megbízhatatlannak találta. Röviddel keménységvizsgálatainak megkezdése előtt VON WALTENHOFER prágai műegyetemi tanár felhívja a szakemberek figyelmét arra, hogy az acélok keménységének mérésére az *elektromagnetikus* módszer is alkalmas lehet. Minthogy WALTENHOFER elve föltétlenül helyes és KERPELY is megállapítja, hogy az áramot vezető tekercs az acélpróba rúdját annál nagyobb erővel húzza magába, minél keményebb, illetőleg karbondúsabb az acélpróba anyaga, azonnal ehhez a módszerhez nyúl. Minthogy azonban előkísérletei során fogyatékosnak találja a WALTENHOFER ajánlotta mérőműszert,

selmeci tanártársának SCHWARTZ OTTÓnak, a kitűnő fizikusnak útbaigazításai alapján átdolgozza WALTENHOFER műszerét, amelynek munkája így válik megbízhatóbbá. Az értekezés a WALTENHOFER—KERPELY-*féle elektromagnetikus mérőműszer* rajzát is közli. KERPELY lelkiismeretességére vall, hogy próbasorozatának keménységi számait a régi módszerrel is, meg az új WALTENHOFER—KERPELY-féle módszerrel is megállapította abból a célból, hogy mind a két módszer megbízhatóságának mértékéről tájékozást nyujtson.

Érdekes, hogy a keménységnek az acél mágneses tulajdonságai alapján történő meghatározása, amelyet a BRINELL-sajtó módszere azóta évtizedeken át teljesen háttérbe szorított, az új, svédországi eredetű és *Carbometer*nek nevezett mágneses műszer révén napjainkban újra bevonult a vasipari üzemi keménységvizsgálat műszerei közé. KERPELYt tehát ezen a ponton is igazolta a történeti fejlődés.

KERPELYnek nevezetes és nagyon értékes munkája a magyarul 1877-ben Selmecbányán, németül pedig 1878-ban Leipzigben megjelent *A vaspályasínek tulajdonságaira vonatkozó kísérletek és tanulmányok* című könyve. E kísérleteknek az volt a legfőbb céljuk, hogy tárgyilagos alapon tegyék lehetővé annak a kérdésnek az eldöntését, vajjon a magyar államvasut az eladdig kizárólag alkalmazott forrasztott acélanyagú sínek használatáról áttérjen-e a folyasztott anyagú, tehát BESSEMER-, vagy MARTIN-acélból készült sínek használatára. Érdekes és jellemző KERPELY biztos ítéletére, haladó és bölcs gondolkozására, hogy habozás nélkül az újgyártású folyasztott anyagú acélsínekért száll síkra, holott a kísérletsorozat eredménye nem mindenben volt kedvező az új anyagra, az akkor már kitűnő minőségben gyártott forrasztott acélanyaggal szemben. KERPELY mégis jól belelát a jövőbe és megállapítja, hogy a folyasztott acélból való sínek anyagának sokkal nagyobb tömörsége, egyenletessége, illetőleg a rétegezettségtől való teljes mentessége olyan nagy előny, amely a sínek kopásának lényeges csökkentését s ezzel a pálya tartósságának növekedését fogja biztosítani. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy — ha még élnének — azoknak sem kellene pirulniok, akik a kétféle (a sínfejben kemény, a síntalpban pedig szívós) anyagból kombinált forrasztott sínek mellett fog-

laltak állást. A haladó idők ezeknek is sokban igazat adtak; KERPELYnek föltétlenül és az egész vonalon, mert ma már kizárólag folyasztott acélból való síneket használunk, a kétféle anyagból forrasztott sínek híveinek pedig annyiban, mert legújabban a kanyarulatos hegyi pályák és túlságosan igénybe vett pályaszakaszok síneinek fejét megint vagy *külön keményebb acélanyagból készítik* («kompaund»-sínek), vagy megfelelő *hőkezeléssel utólagosan megkeményítik*, hogy a sínfej kopását csökkenthessék.

Kísérleti módszerének és fejtegetéseinek szelleme olyan magasrendű, hogy KERPELYnek ez a munkája úgy itthon, mint Németországban és messze azon túl is a legnagyobb figyelemben részesült. A munka ábrái mai szemmel nézve is tökéletesek. Az ábrák lenyomatai a magyar kiadás számára is Németországban készültek, STEINMETZ és BORNEMANNnál Meissenben. Ez a munkája is világosan érzékelteti, hogy KERPELY működése igazán korszakalkotó, utat mutató, gondolatokat ébresztő, nevelőhatású volt.

Kisebb munkái közül, amelyek mind a Tud. Akadémiában kerültek bemutatásra és mint az Akadémia kiadványai jelentek meg, megemlítem *A Martin-acél tulajdonságainak ismeretéhez*, *Az acél megkülönböztető jelei* és *A magyar vasipar jövője* című munkáit. A két első külföldön is megjelent. Itt kell megemlékeznem a magyar vasiparról írt összefoglaló nagy monografiájáról is, amely magyarul csak részleteiben, szakcikkek alakjában, önálló könyv alakjában pedig németül jelent meg *Das Eisenhüttenwesen in Ungarn* címmel. Az alkotmányos élet ébredése után fejlődésnek indult magyar vasipar adatainak olyan tökéletes, megbízható és bőséges forrása ez a munka, amelyből mi szerény utódok gyakran merítettünk és gyakran fognak meríteni a mi utódaink is. Mikor 1884-ben a magyar vasipar jövőjével foglalkozik az Akadémia ülésén, vázolja a vaspiac akkori lanyhaságát és kutatja azokat a területeket, amelyeket a vasipar számára még feltárhatóknak vél. Így jut el ahhoz a gondolathoz, hogy a vasuti felépítmény számára *vasalzatokat*, *vastalpakat* ajánljon a tölgyfatalpak helyett. Az idők rövidesen úgy változnak, hogy a vasipar a megszokott vasáruk gyártását is alig győzi és a vasuti acéltalpak használata a magyar államvasutakon csak napjainkban indult meg. KERPELY tehát ezen a vonalon is messze előrelátott a távoli jövőbe.

A vaskohászati tudományok területén egész Európában feltűnést keltett KERPELYnek *Die Anlage und Einrichtung der Eisenhütten* című 832 oldalas nagy és alapvető műve, amelyet 7 kis szövegkötetben és 7 nagyalakú ábráskötetben adott ki az 1873—1884. években ARTHUR FELIX, neves lipcsei kiadócég. Ez a munka egy új tudománynak, a vasipari teleptervezés rendszertanának alapvetése, amelyre KERPELY előtt senki sem mert vállalkozni. Ez — a szó legszorosabb értelmében vett úttörő munka nagy tekintélyt, tiszteletet és dicsőséget hozott szerzőjének szerte a világon, ahol vasat gyártottak és a metallurgia tudományával foglalkoztak. Magyar nyelven ez a könyv nem jelent meg. Viszont csak magyar nyelven adta ki *A vaskohászat gyakorlati és elméleti kézikönyve* című kétkötetes kiváló munkáját, amelyet elsősorban a magyar szakközönségnek, főleg pedig saját hallgatóinak szánt. Ezt a művét a magyar kormány kétezer forint tiszteletdíjjal jutalmazta.

KERPELY nagyszerű munkásságának és dicsőségének koronája az a Németországban megjelent tudományos évkönyv, amelyet *Berichte über die Fortschritte der Eisenhüttentechnik* címmel neves leipzigi kiadó megbízásából 1866-ban még mint gyakorló mérnök indított meg. A vaskohászat állandó fejlődésének évenkénti eredményeiről ezekben az évkönyvekben — később mint tanár, majd végül mint vezérigazgató — húsz éven át magyar tudós tájékoztatja a világot! Valami olyan páratlanul álló jelenség ez, amelyből nemcsak KERPELY ANTALra, hanem hazájának műszaki kultúrájára is sok dicsőség sugárzik vissza.

Ennek a modern magyar műszaki kultúrának KERPELY itthon is lelkes, keményszavú, edzett harcosa volt. Ő nevelte az alkotmányos élet ébredése után a magyar vaskohómérnökök új, a haladás iránt fogékonyabb nemzedékét és világosan látta, hogy a magyar vasipar állami és magán üzemeiben, főleg a vezető állásokban sűrűn alkalmazott idegen, legtöbbnyire német kohómérnökre nincsen többé szükség. Beszél, ír, agitál a magyar kohómérnökök kizárólagos alkalmazása érdekében. A fejlemények mindenben KERPELYt igazolták. A magyar vas- és acélipar színvonala 2—3 évtized alatt — tisztán magyar mérnökök vezetésével — eléri a külföldi vas- és acélipar színvonalát s a magyar vaskohómérnökök külföldön is

nagy sikert aratnak. A magyar BREUER JÓZSEF a *Skoda*-művek helyettes vezérigazgatója lesz, saját fia, ifj. KERPELY ANTAL pedig az osztrák alpesi bánya- és kohóvállalat vezérigazgatója, aki — mint a mai idők gázfejlesztőrendszerének, a forgó-hamurácsos gázfejlesztőnek feltalálója — szintén nagy nevet vív ki magának és megkapja Németország vaskohómérnökei egyesületének legnagyobb kitüntetését, a CARL LUEG-emlékérmet. Azóta is sok magyarnevelésű vaskohómérnök vetette meg szilárdan a lábát a közeli és távoli külföldön. Semmi kétség; a világversenyben is helytálló magyar kohásznevelésnek KERPELY vetette meg az alapját.

Ha KERPELY óriási munkásságának ehhez a vázlatához még hozzáteszem, hogy 1871-től 1881-ig, vagyis tíz éven keresztül, a *Bányászati és Kohászati Lapok*-nak szerkesztője és időnként szinte egyetlen írója is volt, akkor az emberi munkabírásnak olyan csodálatos képe tárul elénk, amelynek alig-alig akad párja valahol. A régóta érzett tisztelet mellett őszinte csodálat ébredt a lelkemben e nagy magyar érték emléke iránt, mikor e szerény megemlékezés adatgyüjtése alkalmából magam elé raktam KERPELY ANTALnak a Műegyetem könyvtáraiban megtalálható sok-sok munkáját. Neki sohasem volt elég a munkából; nem fáradt el, minden befejezett alkotása új munka kezdésére ösztönözte. Hű maradt életideáljához; egy hosszú életen át tanult és tanított, kutatott és alkotott!

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

DIE WIRKUNG ANTON RITTER V. KERPELY'S AUF DIE ENTWICKLUNG DES EISENHÜTTENWESENS UND DIE UNGARISCHEN EISENINDUSTRIE.

Von ERNST COTEL.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der Berg- und Hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin-József-Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften. Band IX. 1937.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

TENYÉRLENYOMAT VIZSGÁLATOK.

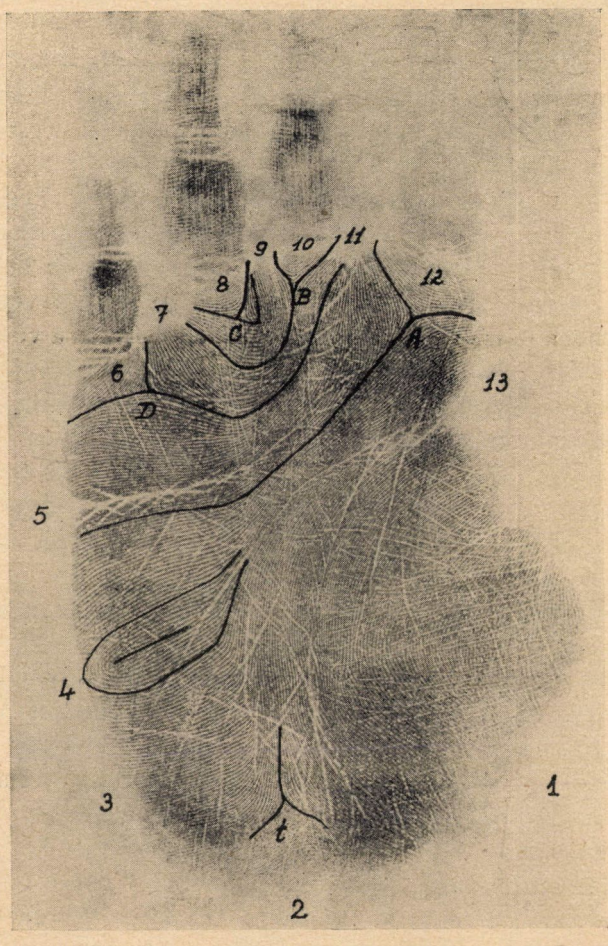
MALÁN MIHÁLY-tól.

Az ember kezének és lábának a bőre erősen különbözik a többi testrész bőrétől, mert a tenyéri illetve a talpi oldalon rajta finom lécrendszer fejlődött ki az ú. n. *dermatoglyphák* vagy *papillaris lécekből*. Ezek az embryonalis életben fejlődő lécek (cristae cutaneae) átlagban 0·2 mm vastagságban emelkednek ki az őket határoló árkokból (sulci cutanei), különféle lefutásúak és többször különböző alakokat az ú. n. mintákat (Figurae tactiles v. patterns) alkotnak. Lefutásuk és alaktípusaik az egész élet folyamán nem változnak.

Ennek a már PURKINJE (1823) és ALIX (1867) által is ismert lécrendszernek főleg lenyomatokon való tanulmányozása vezetett azután leginkább FAULDS, HERSCHEL, GALTON és WELCKER úttörő munkássága következtében a gyakorlatilag oly fontos daktyloskopia kifejlődésére, amely az ujjak hegyén lévő lécrendszerek különböző alakkombinációi alapján az egyéni identifikálás kérdését megoldotta.

A tenyér és talp bőrlécrendszerével — nem lévén annyira az érdeklődés középpontjában — aránylag sokkal kevesebben foglalkoztak. HAGEN és FÜLLEBORN készítették az első tudományos célzatu lenyomatokat és a tenyéren WILDER, a talpon pedig SCHLAGINHAUFEN vizsgálatai indították meg a rendszeres kutatásokat.

A tenyér bőrlécrendszerének a lenyomatok alapján való tanulmányozása azt eredményezte, hogy a tenyér bőrén a 2—5 ujj alatt 3—3 lécecske egy-egy vagyis összesen 4 delta vagy *triradiusban* fut össze (triradii metacarpophalangeales). A triradiusban talál-



1. ábra.

Balkéz lenyomata a tenyérvonalakkal és végződésekkel.
(Formula 11.9.7.5 — t — L^r 0.0.L^r.0)

kozó 2—2 rövidebb lécecske *(radians)* egy-egy ujjat fog közre, míg a hosszabb léc *(fővonal)* a tenyérfelszín különböző területére fut. (1. ábra.)

E fővonalvégződések közelebbi megjelölésére azután WILDER a tenyér határának különböző területeit a thenartól kiindulva körben a mutatóujj és a hüvelykujj közti területig megszámozta, még pedig akként, hogy a thenartól a kisujjig terjedő terület 1—5 számot, az ujjak alatt lévő a 2—2 rövid radianstól közrefogott terület mindig páros számot visel 6—12-ig, a 2—2 szomszédos triradius radiansa közötti rész az ú. n. *interdigitalis* köz pedig 7—13-ig terjedő páratlan számokkal bír. A fővonal végződését jelölő számok adják az ú. n. *tenyérformulát*, amelyben a végződések a kisujj alatti triradiusból kiinduló fővonaltól a mutatóujj irányában haladva vannak feltüntetve. A tenyérformulákban, vagyis a fővonalak lefutásában az egyes fajták között először WILDER, majd SCHLAGINHAUFEN bizonyos különbségeket állapítottak meg. Ugyancsak faji eltérések mutatkoztak a thenar, hypothenar, valamint az interdigitalis közökben lévő minták és a tenyér tövén lévő carpalis triradiusok előfordulásában, ami azután a tenyérlenyomatoknak a fajkutatás céljaira való felhasználását megerősítette.

Főleg az utóbbi időben foglalkozott több szerző (LOTH, HASEBE, KUBO, KEITH, SHINO, CUMMINS, CUMMINS és MIDLO, MIYAKE, STEGGERDA, ABEL, FLEISCHHACKER, BISWAS) a WILDER által kidolgozott úton a dermatoglyphák faji különbségeivel, mert a kérdés jelentősége ujabban nagyban növekedett. Ugyanis miközben BONNEVIE-nek sikerült az ujjlécrendszer öröklődése és fejlődésének vitás kérdéseit tisztáznia, több szerző főként H. WILDER, CARRIÉRE, GANTHER és ROMINGER, LAUTERBACH, NEWMAN, REICHLE, CUMMINS és M. WENINGER örökléstani munkái a tenyérvonalak és minták öröklődésének sok részletkérdését megoldották. Majd pedig E. FISCHER kezdeményezésére VERSCHUER az aszimmetriák problémáját, SCHAEUBLE a triradiusok keletkezésének, WÜRTH a tenyérráncok kialakulásának problémáját fejtette meg, míg MEYER-HEYDENHAGEN nagyszabású összefoglaló ikervizsgálati eredményei alapján a tenyérvonalak és minták öröklődését kétségtelenné tette.

Mivel pedig faji bélyeg csak öröklődő bélyeg lehet, a tenyérvonalak és minták öröklődésének megállapítása igazolta a tenyérvonalak és mintáknak a fajkutatás céljaira való felhasználását.

A budapesti kir. magy. Pázmány Péter Tudományegyetem Közegészségtani Intézetének Örökléstani és Eugéniai Osztályán folyó ikervizsgálatok lehetőséget adtak nagyobb mennyiségű tenyérlenyomat begyüjtésére. Ezeket használtuk fel a mult esztendő folyamán Csik Lajos dr.-ral örökléstani vizsgálatainkra, amelyekkel Meyer-Heydenhagen vizsgálatait igazoltuk és újabb irányban kiegészítettük. Nem lévén érdektelen a tenyérvonalak és minták előfordulásának hazai populatióban végzett vizsgálatok alapján való fajanthropologiai feldolgozása sem, az intézet igazgatójának Darányi Gyula dr. egyetemi ny. r. tanár úrnak szíves engedelmével, melyért ezúton is hálás köszönetemet fejezem ki, a nagyszámú zsidó ikrek és a Geipel által ajánlott eljárás szerint az egypetéjű ikrek másodszülöttei kirekesztése után (vagyis csak egy személyt számítva az egypetéjű azonos örökítőanyaggal bíró párokból) e célból egyrészt az örökléstani vizsgálatokra felhasznált, másrészt az azóta begyüjtött újabb anyagot vizsgáltam meg.

Vizsgálatra került 100 férfi és 100 nő mindkét kezének, vagyis összesen 400 kéznek a Geipel által részletesen leírt módszer szerint vízzel lemosható Kores-Stampo festékkel készült lenyomata, melyeket a Wilder, Cummins és társai által közösen kidolgozott módszer szerint dolgoztam fel.

A *fővonalak végződéstípusait* és *tenyérformuláit* meghatározva nemek szerint elkülönítettem.

A végződéskombinációk száma a férfiak tenyerén több volt, mint a nők tenyerén.

Az előfordult típusokat az alábbi táblázatok mutatják:

1. táblázat.

A különböző fővonalvégződések gyakorisága a megvizsgált férfiak kezén.

Végződés-típus	Bal-kéz	Jobb-kéz	Össze-sen	%	Végződés-típus	Bal-kéz	Jobb-kéz	Össze-sen	%
11.11.11.5	—	1	1	0·5	9.9.5.3	5	1	6	3·0
11 11.9.5	—	3	3	1·5	9.7.5.5	9	7	16	8·0
11.10.8.5	—	1	1	0·5	9.7.5.4	1	1	2	1·0
11.9.9.5	—	1	1	0·5	9.7.5.3	8	10	18	9·0
11.9.7 5	18	32	50	25·0	9.0.5.5	2	—	2	1·0
11.9.7.4	2	4	6	3·0	9.0.5.4	1	—	1	0·5
11.9.7 3	9	15	24	12·0	9.0.5.3	1	1	2	1·0
11.9.5.3	1	1	2	1·0	8.6.5.5	—	1	1	0·5
11.7.9.5	—	1	1	0·5	7.9.7.5	—	1	1	0·5
11.7 9 3	—	1	1	0·5	7.9.5.5	1	—	1	0·5
11.7.7.5	8	1	9	4·5	7.9.5.4	1	—	1	0·5
11.7.7 3	4	1	5	2·5	7.9.5.3	1	2	3	1·5
11 x 7 5	1	—	1	0·5	7.7.5.3	1	—	1	0·5
11 x.7.3	1	—	1	0·5	7.5.5.5	5	1	6	3·0
11.0.7 5	3	3	6	3·0	7.5.5.4	—	1	1	0·5
11.0.7.4	1	—	1	0·5	7.5.5.3	10	7	17	8·5
9 9 5.5	5	2	7	3·5	7.5.5.1	1	—	1	0·5
	53	67	120	60·0		47	33	80	40 0

A formulák közül 11.11.11.5, 11.9.9.5, 11.7.9.5, 9.0.5.4, 8.6.5.5, 7.9.7.5, 7.9.5.4, 7.7.5.3, 7.5.5.4 és 7.5.5.1 vagyis összesen 10 végződéstípus csak a férfiak kezén fordul elő, s a nőkön nem található.

A SCHLAGINHAUFEN szerint az összes fajoknál előforduló, de különböző eloszlású típusok közül a legnagyobb százalékban a férfiaknál a 11.9.7.5 fordul elő, az esetek negyedrészén lévén meg, ezzel szemben a 9.9.5.5 formula csak 3·5%, a 9.7.5.5 már 8%-ban, a 7.5.5.5 pedig 3·0%, míg a 7.5.5.3 típus 8·5%-ban található.

A nők kezén kevesebb a típusok száma, melyek eloszlását a 2. táblázaton kísérhetjük figyelemmel.

2. táblázat.

A különböző fővonalvégződések gyakorisága a megvizsgált nők kezén.

Végződéstípus	Balkéz	Jobbkéz	Összesen	%	Végződéstípus	Balkéz	Jobbkéz	Összesen	%
11.11.9.5	—	1	1	0·5	9.9.7.3	1	—	1	0·5
11.11.9.3	—	2	2	1·0	9.9.5.5	4	1	5	2·5
11.10 8 5	—	1	1	0·5	9.9.5.4	—	1	1	0·5
11.9.7.5	21	41	62	31·0	9.9.5.3	8	1	9	4·5
11.9.7.4	—	2	2	1·0	9.7.5.5	6	6	12	6·0
11.9.7.3	9	12	21	10·5	9.7.5.4	2	2	4	2·0
11.7.9.3	—	1	1	0·5	9.7.5.3	13	6	19	9·5
11.7.7.5	6	2	8	4·0	9.0.7.5	—	1	1	0·5
11.7.7.3	5	3	8	4·0	9.0.5.5	2	—	2	1·0
11.7.7.2	1	—	1	0·5	9.0.5.3	2	1	3	1·5
11.x.7.5	2	2	4	2·0	7.9.5.5	1	—	1	0·5
11.x.7.3	1	2	3	1·5	7.9.5.3	—	1	1	0·5
11.0.9.5	1	—	1	0·5	7.7.5.5	1	1	2	1·0
11.0.7.5	3	3	6	3·0	7.5.5.5	8	4	12	6·0
11.0.7.4	1	—	1	0·5	7.5.5.3	2	3	5	2·5
	50	72	122	61·0		50	28	79	39 0

A táblázatból kitűnik, hogy a 11.7.7.2, 11.0.9.5, 9.9.7.3, 9.9.5.4, 9.0.7.5 vagyis összesen 5 formula kizárólag a nőkön észlelhető, míg a férfiakon nem található meg. 24 végződéstípus mind a férfiakon, mind a nőkön előfordul.

Az összes fajokra jellemző formulák közül a 11.9.7.5 a férfiaknál valamivel nagyobb számban az eseteknek közel egy harmadában (31%) a 9.9.5.5 csak 2·5, a 9.7.5.5 és a 7.5.5.5 ellenben egyenkint 6, s végül 7.5.5.3 típus 2·5%-ban volt meg, s így ezeknek előfordulási arányszáma is különbözött a férfiaknál talált arányszámoktól.

A végződéstípusok vizsgálatánál feltűnik, hogy *a nagyobb számú*, vagyis WHIPPLE szerint *az igen magas differenciálódást jelentő formulák mind a férfiak, mind a nők jobbkezén sokkal nagyobb számban fordulnak elő*, míg a kisebb számú formulák a balkézen találhatók nagyobb mértékben.

Összesítve a férfiak és nők adatait a *végződéstípusok előfordulása* és *százalékszámai* az alábbi módon alakulnak :

3. táblázat.

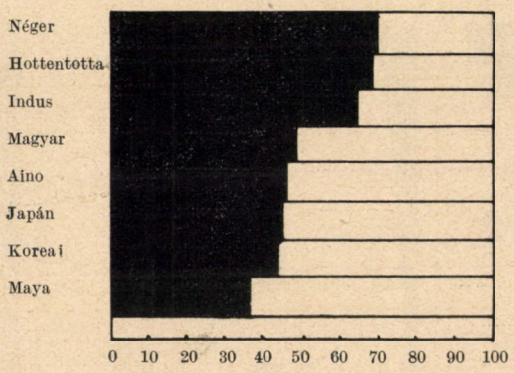
A különböző vonalvégződések gyakorisága a megvizsgált férfiak és nők kezén együttesen.

Végződés-típus	Bal-kéz	Jobb-kéz	Össze-sen	%	Végződés-típus	Bal-kéz	Jobb-kéz	Össze-sen	%
11.11.11 5	—	1	1	0·25	9.9.5.4	—	1	1	0·25
11.11.9 5	—	4	4	1·00	9.9.5.3	13	2	15	3·75
11.11.9.3	—	2	2	0·50	9.7 5.5	15	13	28	7·00
11.10.8.5	—	2	2	0·50	9 7.5.4	3	3	6	1·50
11.9.9.5	—	1	1	0·25	9.7.5.3	21	16	37	9·25
11.9.7.5	39	73	112	28·00	9.0.7.5	—	1	1	0·25
11.9.7.4	2	6	8	2·00	9.0.5.5	4	—	4	1·00
11.9 7.3	18	27	45	11·25	9.0.5.4	1	—	1	0·25
11.9.5.3	1	1	2	0·50	9.0.5.3	3	2	5	1·25
11.7.9.5	—	1	1	0·25	8.6.5.5	—	1	1	0·25
11.7.9.3	—	2	2	0·50	7 9.7.5	—	1	1	0·25
11.7.7.5	14	3	17	4·25	7.9.5.5	2	—	2	0·50
11.7.7.3	9	4	13	3·25	7.9.5.4	1	—	1	0·25
11.7.7.2	1	—	1	0·25	7.9.5 3	1	3	4	1·00
11.x.7.5	3	2	5	1·25	7.7.5.5	1	1	2	0·50
11.x.7.3	2	2	4	1·00	7.7.5.3	1	—	1	0·25
11.0.9.5	1	—	1	0·25	7.5.5.5	13	5	18	4·50
11.0.7.5	6	6	12	3·00	7.5.5.4	—	1	1	0·25
11.0.7 4	2	—	2	0·50	7.5.5.3	12	10	22	5·50
9.9.7.3	1	—	1	0·25	7.5.5.1	1	—	1	0·25
9.9.5.5	9	3	12	3·00					
	108	140	248	62·00		92	60	152	38·00

A férfiakon és nőkön együtt véve a 11.9.7.5 típus 28%-ban a 9.9.5.5 csak 3%-ban, a 9.7.5.5—7·0%ban, a 7.5.5.5 összesen 4·5%-ban, a 7.5.5.3 pedig 5·5%-ban fordul elő. Vagyis a tenyérlenyomatokon az összes fajoknál fellelhető alapformulák 48·0%-ban találhatók meg. (**2. ábra.**)

Az összes típusok közül a legnagyobb számban fordul elő a 11.9.7.5 formula, a kisujji triradiusból kiinduló fővonal (D fővonal) ugyanis az esetek 58·75%-ban végződik a mutató- és középső-ujj közötti számmal jelzett területen, s így *a legtöbb esetben a legmagasabb típust képviseli.*

Úgy a százalékos eloszlásban (28%), mint az előforduló 11.9.7.5 formulának a jobb- (65·2%) és a balkéz (34·8%) közötti eloszlásában a tenyérlenyomatainkon kapott eredmények egészen



2. ábra. A minden fajnál előforduló formulák %-a.

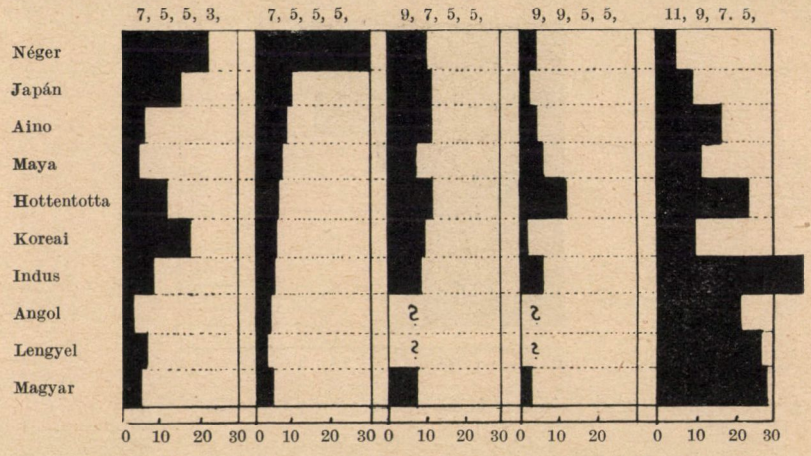
közel állanak a Loth által a lengyelek tenyérlenyomatai feldolgozása útján nyert adatokhoz, amint azt az alábbi összeállítás mutatja:

Végződéstipus	Lengyelek (Loth):	Budapesti anyag:
11.9.7.5	27·2%	28·0%
9.9.5.5	6·2%	3·0%
7.7.5.5	0·0%	0·5%
7.5.5.5	2·8%	4·5%
7.5.5.3	6·2%	5·5%

Ugyancsak közel megegyezik a 11.9.7.5 formulának a jobb- és balkéz között való eloszlása, amelyet Loth 63% : 37%-ban talált.

Ebben az esetben tehát vizsgálataink megerősítik a Fleisch-

HACKER által összefoglalt ama megállapítást, hogy a magasabb formulák főleg fehéreknél, azonkívül hottentották és hinduknál fordulnak elő, míg az alacsony formulák a négerek, japánok és koreaiak sajátosságait képezik. FLEISCHHACKERnek azt az állítását, hogy a 7.5.5.3 formula ott, ahol magasabb formulatípusok vannak aránylag több, míg 7.5.5.5 csak kevesebb, lévén ez utóbbi típus az alacsonyabb formulával bíró fajtáknál erősebben képviselve, eredményeink is támogatják. (3. ábra.)



3. ábra. A fő formulatípusok %-a egyes fajtáknál.

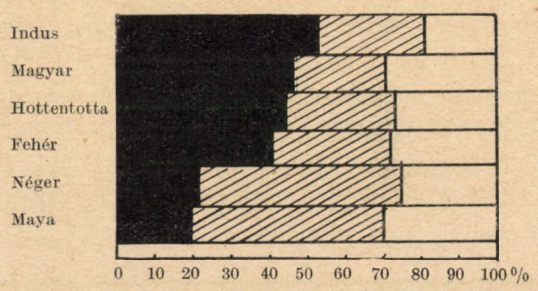
Ezzel ellentétben néhány szerző olyirányú megállapítását, hogy a csak baloldalon található végződések variációinak száma felülmúlja a csak jobboldalon előforduló végződéstípusok számát, nem észleltem. A *legtöbb típus mindkét kézen fordult elő* (46·3%), s míg a férfiakon a csak jobbkézen, és a csak balkézen található típusok száma egyenlő, a nőknél a csak jobbkézen található típusok száma több, s így végeredményben is a férfiak és nők egybevevésével a csak jobbkézen előforduló formulák száma nagyobb a csak balkézen előfordulóknál. (4. Táblázat)

4. táblázat.

A végződéstipusok száma.[1]

Végződéstipus	Férfiak		Nők		Férfiak és nők	
	Számszerint	%	Számszerint	%	Számszerint	%
Csak a jobbkézen	9	26·5	8	26·7	12	29·3
Csak a balkézen	9	26·5	6	20·0	10	24·4
Jobb- és balkézen	16	47·0	16	53·3	19	46·3
Összesen	34	100·0	30	100·0	41	100·0

Ebben a tekintetben anyagunk különbözik az eddigi összes vizsgálatok eredményeitől. Érdekes lenne a LOTH által megvizsgált lengyelekkel való egybevetés, azonban ezeket a relációkat LOTH nem tette vizsgálat tárgyává, s így csak a többi szerzők eredményeire vagyunk utalva. (4. ábra.)



4. ábra. A csak jobboldalt (fehér) baloldalt (vonalkás) és mindkétoldalt (fekete) előforduló minták %-ban.

A fentebb tárgyalt SCHLAGINHAUFEN által felállított minden fajra jellemző főtenyérvonaltípusokkal szemben, — amelyekről már említettük, hogy azok eloszlása az egyes fajoknál más és más arányszámot ad, — WILDER a típusokat egyszerűsítette, amennyiben csak a kisujji (*D*) gyűrűsujji (*C*), valamint a nagyujji (*B*) triradius-fővonal lefutását vette a faji különbségek meghatározó

[1] A férfiak és nők egyesített rovatának eltérése a férfiak és nők külön rovatának összegétől abban adódik, hogy az összesítésnél vannak olyan típusok, amelyek az egyik nemnél a bal és a másiknál a jobb ézen fordulnak elő vagy közösek.

alapjául, s a fővonal (*A*) végződéseit az 1—5 helyzetig egybevonta.

Az ő megállapítása szerint a *fővonalak eloszlásában 2 főtípus van* a 11.9.7.(1—5) és a 7.5.5.(1—5) forma. Az előbbi a fehér ember sajátja (*«white formulae»*) az utóbbi a négeré (*«negro formulae»*). Ezekkel a formulákkal szemben a 9.7.5.(1—5) formula nem fogható fel ennyire specializálódottnak, s így változó az arányszáma az egyes fajok között.

Ez a megállapítás tényleg így is van, ha csak fehérek és négerek képezik az összehasonlítás tárgyát, de ha más fajokat is bevonunk, legalább is az elnevezés helytelenné válik, mivel a japánoknál HASEBE szerint, s azóta más szerzők szerint több mongol fajtájú népnél éppen a «néger» formula van nagyobb számban. A hinduknál és a hottentottáknál ellenben a «fehér» formula fordul elő nagyobb mértékben. Ez azonban nem jelenti a formulák ilyen alkalmazásának csődjét, mivel sem a hinduk sem a hottentották akár jellegeik, akár eredetük tekintetében nem sorozhatók a négerekkel egy csoportba. Úgy látszik azonban, hogy a mongolok és a négerek ebben a jellegben hasonlóságot mutatnak, vagyis mind a kettőnél az alacsonyabb differenciáltságot, vagy jobban kifejezve az erősebb ulnaris fejlődési tendenciákat jelentő kisebb formulák dominálnak.

A WILDER-féle módszer szerint már most a 3 főtípus a következőképpen oszlik el anyagunkban:

5. táblázat. A fővégződéstipusok (tenyérformula) előfordulása.

Végződéstípus		11.9.7.(1—5)		9.7.5.(1—5)		7.5.5.(1—5)	
		Számszerint	%	Számszerint	%	Számszerint	%
Férfiak	Balkezén _ _	29	14·50	18	9·00	16	8·00
	Jobbkezén _	51	25·50	18	9·00	9	4·50
	Mindkét kézen	80	40·00	36	18·00	25	12·50
Nők	Balkezén _ _	30	15·00	21	10·50	10	5·00
	Jobbkezén _	55	27·50	14	7·00	7	3·50
	Mindkét kezén	85	42·50	35	17·50	17	8·50
Férfiak és nők együtt	Balkezén _ _	59	14·75	39	9·75	26	6·50
	Jobbkezén _	106	26·50	32	8·00	16	4·00
	Mindkét kézen	165	41·25	71	11·75	42	10·50

A táblázatból világosan kitűnik, hogy a jobbkézen ez a beosztás szerint is *több* a magasabb típus, mint a balkézen, míg az alacsonyabb kategoriákban mindig több százalékot találunk a balkézen, mint a jobbon. Nemi különbségek határozottan nincsenek kifejezve. A legmagasabb kategória 41·25%-ban a legalacsonyabb (néger-mongol formula) csak 10·5% fordul elő, míg a középső (9.7.5.(1—5)) típus 17·75%-ban található meg, s így ezek a WILDER által bevezetett főtípusok az esetek 61%-ban vannak meg, míg a hátralévő 39% megoszlik a különleges többi típus összessége között.

Mivel az összes szerzők megegyeznek abban, hogy a tenyér bőrlécrendszerének eltéréseit nem szükséges túl nagy anyagon tanulmányozni,[1] így a mi a budapesti lakosságból begyüjtött anyagunkat nem tul nagy terjedelme ellenére is — tekintettel Budapest felszívó hatására — bizonyos tágabb értelmezésben az ország lakosságában előforduló típusok keresztmetszetének foghatjuk fel, és nem lesz hiábavaló az eddigi fontosabb rendszeres vizsgálatok eredményeivel a mi WILDER-féle fővonal főtípusaink százalékszámait egybevetni.

6. táblázat.

A — *D, C, B* — fővonalak WILDER szerinti végződéstipusai %-ban kifejezve és külföldi vizsgálatok eredményeivel egybevetve.

Szerző	ABEL	WILDER	CUMMINS	MALÁN	ABEL	SCHLAGINHAUFEN	BISWAS	HASEBE	CUMMINS	SHINO	HASEBE
Megvizsgált kezek száma	135	400	600	400	28	52	100	110	37	616	552
D. C. B vonal	Eszkimó	Európai		Budapesti	Eszkimódán keres.	Előindiai	Hindu	Aino	Indián	Kinai	Japán
7 5 5 ⎫	6·6	9·0	10·1	10·5	14·2	15·4	18·0	19·1	29·0	32·0	33·0
9.7.5 ⎬	41·4	16·7	26·2	17·75	35·7	11·5	15·0	18·2	49·2	19·3	16·9
11.9.7 ⎭	30·3	27·7	31·0	41·25	28·4	44·2	46 0	18·2	7·2	18·1	17·7
Összesen	78·3	53·4	67·3	69·90	78·3	71·1	79·0	55·5	85·4	69·4	67·6

[1] Wilder (1904) ezt írja: «The number sufficient to obtain reliable averages is not necessarly a large one, as it has been shown, that from ets of 13 individuals similar results are obtained».

A táblázat jól mutatja az eddigi vizsgálatok sorában a budapesti megvizsgáltak fővonal végződéstípusainak eloszlását. Sajnos LOTHnak az adatai nincsenek részletezve, s így e táblázatba nem voltak bevehetők. Mindenesetre azonban a táblázatba berajzolt nyíl irányából, amely egy-egy vizsgálaton belül a típusok számának gyarapodását mutatja, jól kivehető, hogy *a hazai tenyérvonal típusok a progresszív irányba tartoznak*, vagyis a magasabb formula felé mutatnak emelkedést. A legmagasabb formulák száma az európaiak között a legtöbb, de nem éri el a hinduk magas formuláinak számát. Ez utóbbiaktól a mi tenyérlenyomataink főleg abban különböznek, hogy a *legalacsonyabb típus lényegesen kisebb mértékben található közöttük*, mint a hinduknál. A hazai tenyérlenyomatok az *eddigi európai vizsgálatok között a legtöbb* 11.9.7 *típust adják*, viszont a legalacsonyabb formulák száma közel megegyező. Így azután az eltérés a középső csoport rovására megy, illetve a másik vizsgálattal szemben a nagyobb számmal észlelt 11.9.7 fővonaltípus javára irandó.

Végeredményben azonban a WILDER-féle típusfelosztás is azt eredményezi, amit a SCHLAGINHAUFEN minden fajban található (allrassisch) formulái csoportosítása adott, hogy *a hazai anyagon előforduló tenyérlenyomatokon a fővonalak végződése* az esetek zömében *a magasabb*, vagyis az ulnaris oldalról radialis irányban való erősebb, illetve korábban meginduló bőrlécfejlődés következtében előálló *típusokat mutatja*.

Ezt mutatja a fővonalvégződésekre vonatkozó táblázatos összeállítás is, amely szerint a radiális irányba az ulnaris oldalról kiinduló *D* fővonal zöme a 11-es helyen, vagyis a II. digitális közben végződik, ezzel szemben az ulnáris irányba haladó középső ujj alatti *B* fővonal az esetek nagyrészében a 7-es tehát a *D* fővonal fejlődése által bezárt területen fekszik.

A fővonalak végződését az alábbi táblázatban foglaltam össze:

7. táblázat. A fővonalak végződése.

Végződés	Baloldalt				Jobboldalt			
	A	*B*	*C*	*D*	*A*	*B*	*C*	*D*
0	—	—	17	—	—	—	9	—
x	—	—	5	—	—	—	4	—
1	1	—	—	—	—	—	—	—
2	1	—	—	—	—	—	—	—
3	82	—	—	—	71	—	—	—
4	9	—	—	—	11	—	—	—
5	107	102	26	—	118	62	16	—
6	—	—	—	—	—	—	1	—
7	—	97	65	32	—	125	43	21
8	—	—	—	—	—	2	—	1
9	—	—	87	70	—	10	11	41
10	—	1	—	—	—	2	—	—
11	—	—	—	98	—	1	7	137

Az egyes fővonalak végződéseinek eltérését még jobban mutatja a következő százalékos összeállítás:

8. táblázat. A fővonalak végződése %-ban.

Végződés	*D* fővonal			*C* fővonal			*B* fővonal			*A* fővonal		
	Balkéz	Jobbkéz	Átlag	Balkéz	Jobbkéz	Átlag	Balkéz	Jobbkéz	Átlag	Balkéz	Jobbkéz	Átlag
0	—	—	—	8·5	4·5	6·50	—	—	—	—	—	—
x	—	—	—	2·5	2·0	2·25	—	—	—	—	—	—
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·5	—	0·25
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·5	—	0·25
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	41·0	35·5	38·25
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4·5	5·5	5·0
5	—	—	—	13·0	8·0	10·50	51·5	31·0	41·0	53·5	59·0	56·25
6	—	—	—	—	0·5	0·25	—	—	—	—	—	—
7	16·0	10·5	13·25	32·5	21·5	27·00	48·5	62·5	55·5	—	—	—
8	—	0.5	0·25	—	—	—	—	1·0	0·5	—	—	—
9	35·0	20·5	27·75	43·5	59·0	51·25	—	5·0	2·5	—	—	—
10	—	—	—	—	1·0	0·50	0·5	—	0·25	—	—	—
11	49·0	68·5	58·75	—	3·5	1·75	—	0·5	0·25	—	—	—

A négy vonalból a legtöbb az 5-ös területen, vagyis az ú. n. háromujji tenyérránc végén, illetve a végződés és kisujj valamint a végződés és az ötujji-ránc közötti területen végződik, mégpedig mind a jobb- mind a baloldalon a legtöbbször az *A* fővonal. Az 5-ös végződésen kívül még igen sok 3-as végződése is van az *A* fővonalnak, az 1, 2 és 4 végződés már csak csekély számban fordul elő. 5-nél magasabb végződést nem találtam. Ezzel szemben a *B* fővonal 5-nél alacsonyabban nem fut, s zömét a 7 majd az 5-ös pozició adja, míg az ezeknél magasabb véghelyzetek száma aránylag igen kevés. A *C* fővonal végződéseinek zöme a 9 területre esik, jelentékeny számban végződik azonban a 7-es területen is, míg egy tizede jut az 5-ös területen ér véget. Kb. minden 16-ik lenyomaton a *c* triradius hiányzott és minden 50-ik lenyomaton *x* alakot, vagyis csökevényesen lerövidült fővonalat találtam. A *C* fővonalnak 1—4 és 8-as végződése nem fordult elő, a 10 és 11-es véghelyzetek száma pedig igen csekély volt. Végül a *D* vonal a 7—11 helyzetben végződött, még pedig valamennyi vonal között a legnagyobb számban végződött a 11 helyzetben, kevesebb 9 és még kevesebb 7-es végződése volt.

Így tehát a *B fővonal erősen ulnaris*, míg a *D fővonal kizárólag erős radialis tendenciát* mutat. A jobb- és balkézen azonban a végződéseknél már számbavehető különbséget találunk. Általában véve minden fővonalnál a jobbkéz fővonala nagyobb arányban szerepel a magasabb végződéseknél. Ez utóbbiakat pedig, amint már említettem, progresszivebb formának tartják, s így a jobbkéz progreszszívebb formákkal bírna, amit WILDER a jobbkezűséggel igyekezett magyarázni. Mindenesetre azonban a két kéz bőrpárnázatának különböző fejlődési intenzítását és irányát mutatja ez a jelenség, aminek következtében — amint azt FLEISCHHACKER megállapította — a jobbtenyér papilláris redői inkább haránt, míg a baltenyéré inkább hosszant futnak.

Ha az egyes fővonalakhoz a legtöbbszöri végződés számát hozzáfűzzük akkor A_5, B_7, C_9, D_{11} *képletet* kapunk, mely megegyezik a WILDER által az európai eredetű amerikaiak és SCHLAGINHAUFEN által a hindukon talált képlettel, s így természetszerűleg *megerősíti* azt, amit a fővonal kombinációk elfordulása vizsgálata alkalmával találtunk.

Ezekután térjünk át a tenyér proximalis szélén a thenar és hypothenar között előforduló *axialis triradius*, vagy *triradius carpalis* helyzetének ismertetésére. Ez a triradius carpalis 3 sugara a thenart, hypothenart és a kéztövet választja el. A proximalis részen lévő triradiust *t*-vel, magasabban fekvőt *t'*, vagy *t'*-vel, az egészen az ulnaris oldalon magasan fekvő triradiust t^u-val jelöljük, míg több triradius jelzésére a helyzetnek megfelelő több jelzést alkalmazunk.

A triradiusok előfordulását a legjobban a következő csoportosításban tanulmányozhatjuk:

9. táblázat. Az axialis triradiusok helyzete és előfordulása.

Axialis trir.	Férfiak			Nők			Férfiak és nők együttesen					
	Bal-kéz	Jobb-kéz	Mindkét kéz	Bal-kéz	Jobb-kéz	Mindkét kéz	Bal-kéz	%-ban	Jobb-kéz	%-ban	Mindkét kéz	%-ban
t __ __	71	67	128	50	60	110	121	60·5	127	63·5	248	62·00
t' __	11	9	20	28	18	46	39	19·5	27	13·5	66	16·50
t'' __	8	5	13	4	4	8	12	6·0	9	4·5	21	5·25
t^u __	1	—	1	—	1	1	1	0·5	1	0·5	2	0·50
tt' __	2	3	5	4	6	10	6	3·0	9	4·5	15	3·75
tt'' __	1	7	10	9	6	15	10	5·0	13	6·5	23	5·75
tt^u __	—	4	4	—	1	1	—	—	5	2·5	5	1·25
$tt't^u$	—	—	—	1	—	1	1	0·5	—	—	1	0·25
p __ __	6	5	11	4	4	8	10	5·0	9	4·5	19	4·75

A táblázat világosan mutatja, hogy a carpalis vagy axialis triradius az esetek két harmadában a szokásos helyzetben, egy hatodában magasabban és egy huszadában egészen magas helyzetben feküdt. A többi esetben — leszámítva egy ulnarisan és magasan fekvő triradiust — kettő, illetve egy esetben három triradius volt (összesen 11%). Feltűnő, hogy carpalis triradius nélküli lenyomat az úgynevezett *p* (*parting*) helyzet aránylag kevés volt (4·75%), s így az általam megvizsgált kezeken a carpalis triradius redukciója nem nagy mértékű. Ebben tehát a FLEISCHHACKER által kiemelt csoportok közül *a magas fővonalformula* (triradiusformula) *és kisfokú carpalis triradius redukcióval* bíró csoportba tartozik anyagunk.

Így azután észleleteink HASEBE-nak azt az állítását, hogy a triradius carpalis redukciója a tenyérvonalak transversalis állásával függ össze a hindukon tapasztaltakhoz hasonlóan tarthatatlanná teszik, mert hiszen a budapesti tenyérlenyomatokon is a magas vonalvégződéstípusok, vagyis transversalis fővonalhelyzet mellett a carpalis triradius csak igen csekély számban hiányzik.

A további összehasonlítást a régi vizsgálatokkal a methodikai differenciák lehetetlenné teszik, ezért térjünk át az *interdigitalis közökben* előforduló mintatípusok tárgyalására. Minden *interdigitalis közt* (*area*) 1—1 basalis triradius választ el egymástól. Az I. interdigitalis közt a thenarhoz szokták számítani s így csak a mutató és középső ujj közötti II. (11-el jelzett), a középső- és gyűrűsujj közötti III. (9-el jelzett) és a gyűrűsujj és kisujj közti IV. (7-el jelzett) interdigitalis közben található mintákat fogom tárgyalni. Ezeken a területeken vagy nem találunk *semmiféle mustrázatot* (*O = Open field*) vagy *egyszerű hurkot* (*L=Loop*) vagy *melléktriradiussal bíró hurkot* (*D*), vagy *örvényt* (*W=whorl*) esetleg *mintamaradványt* (*V=vestige*) vagy *vonalsokszorosodást* (*M=multiplication*), néha pedig ezeknek kombinációját találjuk.

A megvizsgált tenyérlenyomatokon az interdigitalis közökben az egyes mintatípusok az alábbi módon oszlottak meg:

10. táblázat.

Az interdigitális minták a férfiakon.

Minta	II. Area			III. Area			IV. Area		
	Balkéz	Jobbkéz	Együtt	Balkéz	Jobbkéz	Együtt	Balkéz	Jobbkéz	Együtt
O _ _ _	93	88	181	50	35	85	39	57	96
M _ _	1	1	2	—	—	—	3	1	4
V _ _ _	—	—	—	2	—	2	3	2	5
L _ _	—	—	—	48	63	111	35	29	64
D _ _ _	6	11	17	—	1	1	13	8	21
W _ _	—	—	—	—	1	1	1	1	2
L/V _ _	—	—	—	—	—	—	2	—	2
L/L _	—	—	—	—	—	—	1	—	1
L/D _ _	—	—	—	—	—	—	3	2	5

A férfiakon talált minta előfordulási arányszámoktól nem sokban különböznek a nőkön talált adatok, mint az a következő összeállításban szemügyre vehető:

11. táblázat.

Az interdigitális minták a nőkön.

Minta	II. Area			III. Area			IV. Area		
	Balkéz	Jobbkéz	Együtt	Balkéz	Jobbkéz	Együtt	Balkéz	Jobbkéz	Együtt
O _ _ _	96	94	190	55	34	89	41	55	96
M _ _	2	—	2	—	—	—	1	3	4
V _ _ _	1		1	2	—	2	2	5	7
L _ _	—	—	—	39	62	101	38	25	63
D _ _ _	1	6	7	2	4	6	14	11	25
W _ _	—	—	—	—	—	—	—	1	1
L/V _ _	—	—	—	1	—	1	—	—	—
L/L _	—	—	—	—	—	—	1	—	1
L/D _ _	—	—	—	1	—	1	3	—	3

Már e két táblázat megvizsgálásával láthatjuk, a minták %-os eloszlását feltüntető táblázaton (12. táblázat) még jobban szembetűnő körülményt, hogy a kis számú modifikált mintától eltekintve az interdigitalis közökben 3 lehetőséggel találkozunk. Még pedig vagy valódi «*Figura tactilis*» vagyis *egy újabb triradius* (melléktriradius) van ott hurok esetleg egyéb mintával néha anélkül is, vagy újabb triradius nélkül *a basalis triradius proximalis radiusa alkot hurokmintát*, végül pedig *teljes redukciót* vagyis a minta hiányát észlelhetjük.

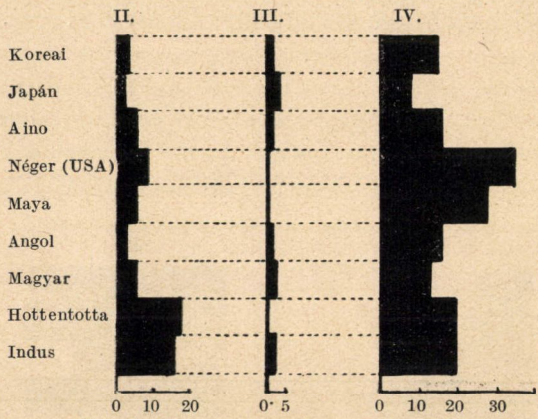
Az egyes interdigitalis közök közt eltérés van e tekintetben. A *második interdigitalis* areaban csak az esetek 7·25%-ban van minta. A leggyakoribb a teljes redukció: 92·75%. A *harmadik interdigitalis* közben a legtöbb a minta (56·5%) még pedig majdnem mind hurok és annak kombinációja (53·5%). Végül a *negyedik* közben 52% a minták gyakorisága még pedig aránylag sok melléktriradiusszal.

12. táblázat.

Minták az interdigitális közökben %-ban kifejezve.

Minta		Férfiaknál %-ban	Nőknél %-ban	Összes jobbkézen		Összes balkézen		Valamennyi kézen	
				Számszerint	%	Számszerint	%	Számszerint	%
II. Interdigitális köz	*O*	90·5	95·0	182	91	189	94·5	371	92·75
	M	1·0	1·0	1	0·5	3	1·5	4	1·00
	D	8·5	3·5	17	8·5	1	3·5	24	6·00
	V	—	0·5	—	—	1	0·5	1	0·25
III. Interdigitális köz	*O*	42·5	44·5	69	34·5	105	52·5	174	43·50
	V	1·0	1.0	—	—	4	2·0	4	1·00
	L	55·5	50·5	125	62·5	87	43·5	212	53·00
	D	0·5	3·0	5	2·5	2	1·0	7	1·75
	W	0·5	—	1	0·5	—	—	1	0·25
	L V	—	0·5	—	—	1	0·5	1	0·25
	L D	—	0·5	—	—	1	0·5	1	0·25
IV. Interdigitális köz	*O*	48·0	48·0	112	56·0	80	40·0	192	48·00
	M	2·0	2·0	4	2·0	4	2·0	82	2·00
	V	2·5	3·5	7	3·5	5	2·5	12	3·00
	L	32·0	31·5	54	27·0	73	36·5	127	31·75
	D	10·5	12·5	19	9·5	27	13·5	46	11·50
	W	1·0	0·5	2	1·0	1	0·5	3	0·75
	L V	1·0	—	—	—	2	1·6	2	0·50
	L L	0·5	0·5	—	—	2	1·0	2	0·50
	L D	2·5	1·5	2	1·0	6	3·0	8	2.0

Oldaldifferenciáltság az összes hurok, illetve melléktriradiusokat számításba véve csak az előbbieknél látható, amennyiben a jobbkezeken valamivel több a hurok. Viszont ez is az interdigitalis közök szerint változik s főleg a III. közben a jobbkézen előforduló sokkal nagyobb számú huroknak köszönhető. A IV. közben evvel ellentétben, habár sokkal kisebb mértékben, de a balkézen van több hurokminta.



5. ábra. A melléktriradius gyakorisága az interdigitalis körökben.

Ami a *mintatípusokat* illeti az összes közöket számítva 7·2%-ban találtam melléktriradiust és 28·7%-ban hurokmintát, míg az esetek 61·4%-a (II—IV. Interdigitaleig) mintanélkül volt.

A főbb mintatípusok eloszlását az alábbi összesítés szemlélteti:

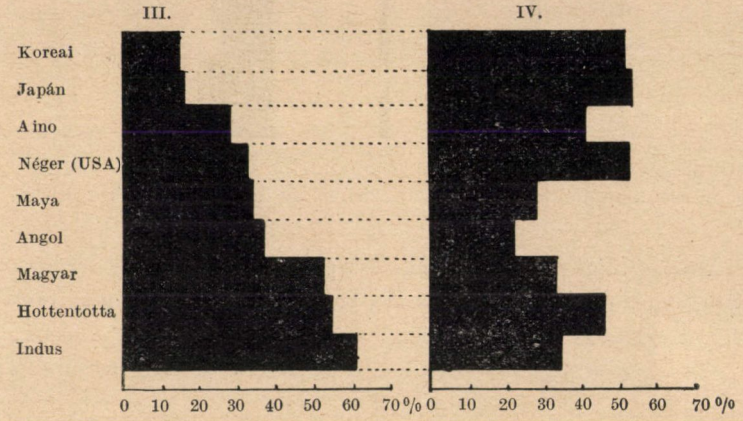
13. táblázat.

A főbb interdigitális minták %-ban.

Minta	II.	III.	IV.	II. és IV. aránya	III. és IV. aránya
	interdigitális köz				
Hurok (*L*, *L*/*L*, *L*/*V*) ...	—	53·25	32·75	—	1 : 0·61
Melléktriradius (*D*, *D*/*L*	6·0	2·0	13·5	1 : 2·25	1 : 6·75
Minta nélkül (*O*) ...	92.75	43·5	48·00	1·9 : 1	1 : 1·13

A táblázatba a kettős alakokat is beleszámítottam. A minták arányát is feltüntettem az egyes közök szerint. A melléktriradiusok előfordulási aránya a II. és IV. köz között lényegesen kisebb, mint a WILDER által az európaiakra megállapított arány (1 : 7·5), de több mint SCHLAGINHAUFEN által az előindiaiakon észlelt viszony (1 : 1·26). (5. ábra.) A hurokminták aránya pedig a két legtöbb mintát tartalmazó III. és IV. közben (1 : 0·61) megegyezik a WILDER által európaiakon vagy a BISWAS által hindukon talált aránnyal s így az eddigi megállapításokkal összhangban van.

Ami a *hurkok* abszolút számát illeti, a 11. 9. 7. és 5. végződési típus nagy gyakoriságának megfelelően igen sok hurok képződhetik a *III. interdigitalis* közökben, s így e tekintetben is lenyomataink *a több hurokképződéssel bíró fajták csoportjába sorolhatók*, viszont ezzel ellentétben a *IV. interdigitalis* közben *kevesebb a hurok alak*, mint azoknál a fajtáknál, ahol az alacsonyabb végződéstípusok



6. ábra. Hurok (loop)-minta gyakorisága a III. és IV. interdigitalis közben.

következtében a III. közben lévőknél több hurok fejlődésre van lehetőség. A *hurkok arányszámát* illetőleg a III. interdigitaleban az eddig *észlelt arányszámoknál nagyobb* a IV. interdigitalis térben pedig CUMMINS és WILDER *európai anyaga közötti mértékben találtam e minta előfordulását.* (6. ábra.)

A *minták kombinációi* is jellegzetesek lévén a főbb kombinációs típusokat összeállítottam (14. táblázat). A három mintamentes interdigitale előfordulása igen ritka (csak SCHLAGINHAUFEN előindiai vizsgálatában van kevesebb), ugyanez áll a második és harmadik mintamentes és hurkos negyedik interdigitale kombinációjára *(OOL)*, míg a második és negyedik mintamentes és hurkos harmadik interdigitalis köz kombinációja *(OLO)* igen gyakori (csak az előbbi szerző talált többet). A többi szerző által e szempontból megvizsgált fajták erősen eltértek (japán, kínai, koreai, ajnó, hottentotta).

14. táblázat.

Az interdigitális közök főbb mintakombinációi.

Minta kombináció	Férfiak				Nők				Férfiak és nők együtt			
	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%-ban	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%-ban	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%-ban
O–O–L ⎓ ⎓	34	26	60	30·0	36	23	59	29·5	70	49	119	29·75
O–L–O ⎓	27	43	70	35·0	28	48	76	38·0	55	91	146	36·5
O–O–O ⎓ ⎓	7	3	10	5·0	8	5	13	6·5	15	8	23	5·75

Ezután térjünk át a *thenar* és *hypothenaron* található minták ismertetésére, tekintettel arra, hogy e területek mustrázatában is faji különbségek mutatkoztak. A thenarhoz hozzászámítjuk a hüvelyk és mutatóujjak közötti első interdigitalis közben talált mintákat is.

Az egyes minták a *thenaron* az alábbi mértékben fordultak elő:

15. táblázat.

A thenaron előforduló minták.

Minta	Férfiak				Nők				Férfiak és nők együtt					
	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%	Balkéz	%	Jobbkéz	%	Mindkét kéz	%
O	76	92	168	84·0	83	92	175	82·5	159	79·5	184	92·0	343	85·75
L	10	4	14	7·0	4	3	7	3·5	14	7·0	7	3·5	21	5·25
L/L	2	0	2	1·0	2	0	2	1·0	4	2·0	—	—	4	1·00
L/Q	1	—	1	0·5	1	1	2	1·0	2	1·0	1	0·5	3	0·75
Q	2	1	3	1·5	1	2	3	1·5	3	1·5	3	1·5	6	1·50
V	6	2	8	4·0	8	2	10	5·0	14	7·0	4	2·0	18	4·50
S	1	1	2	1·0	1	—	1	0·5	2	1·0	1	0·5	3	0·75
W	2	—	2	1·0	—	—	—	—	2	1·0	—	—	2	0·50

A thenaron lényeges nemi különbséget a mintás és nem mintás terület eloszlásában nem találtunk. Oldalkülönbség azonban szembeszökő a jobbkézen csak 8%-ban találunk mintákat, míg a balon 20·5%-ban. A minták közül a legtöbb a hurok alak, valamennyi hurokféleséget egybevonva 7·75%-ot kapunk. Néhány töredékminta (vestige) van még számbavehető arányban képviselve (4·5%). A *thenaron előforduló hurokminták arányszáma* az általunk megvizsgált tenyérlenyomatokat *elválasztja a hinduk és előindiaiktól*, akikkel eddig több jellegben megegyeztek, mivel azoknál közel két akkora számban található a hurokminta a thenaron. Így azután a *thenarminták előfordulása az európai vizsgálatokon* és a *mongol népeken talált arányszámokhoz áll a legközelebb* a mi anyagunkon, mivel azok is a kisszámú thenar mintával bíró csoportba tartoznak. Érdekes, hogy a Loth által megvizsgált lengyel tenyérlenyomatokon 14% minta volt. Ő azonban csak a valódi mintákat számította s így még akkor is, ha a hurkok fentebbi összevont számához az örvényfigurákat hozzáadnánk a nálunk lévő 8·25% igazi minta arányszáma lényegesen kevesebb, mint az általa észlelt előfordulási arány.

Ami a *hypothenar mintá*kat illeti éppúgy mint más vizsgálók itt a mustrázatnak sokkal nagyobb gazdagságát észleltem. A hypothenaron sok az ív alak *(A=Arch)*, melyet a triradius nélkül ívben futó papillaris lécek jellemeznek. Az egyes minták nyilásának irányát a mintajelzés mellé fűzött betűvel (u-ulnaris, r-radialis, c-carpalis) jelezzük. Ezek az irányjelzések, melyek a hypothenar mintáinak fejlődési mikéntjére engednek következtetni még tarkábbá teszik a hypothenaron talált minták összeállítását, amint azt az alábbi táblázatos összeállítás határozottan mutatja: (16) táblázat.)

Az összeállításból kitűnik, hogy 23 különböző mintakombináció fordul elő. A minták száma a nők hypothenarján valamivel több, s főleg az ív *(Arch)* minták találhatók nagyobb számmal, míg a hurok minták száma valamivel kisebb. Az ívek száma a baloldalt a hurkok száma a jobboldalt nagyobb. Az ívek túlnyomó többsége ulnaris irányban nyilik ezzel szemben a tényleges «figura tactilis»-t alkotó hurkok többsége radialis irányú.

Ha a míntákat összevonjuk, akként hogy a kettős mintákat

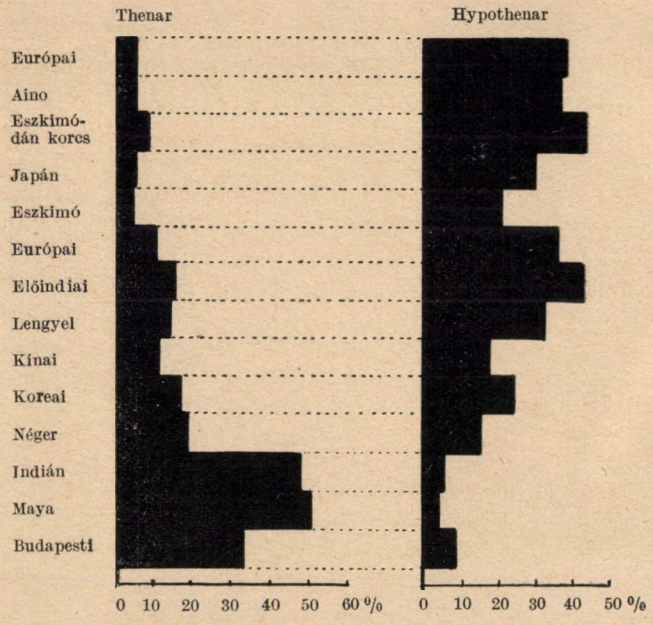
16. táblázat.

A hypothenaron előforduló minták.

Minta	Férfiak				Nők				Férfiak és nők együtt					
	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%	Balkéz	Jobbkéz	Mindkét kéz	%	Balkéz	%	Jobbkéz	%	Összesen	%
A^u	57	41	98	49·0	58	55	113	56·5	115	57·5	96	48·0	211	52·75
A^r	2	3	5	2·5	—	4	4	2·0	2	1·0	7	3·5	9	2·25
A^c	1	—	1	0·5	—	—	—	—	1	0·5	—	—	1	0·25
A^u/A^u	1	1	2	1·0	—	3	3	1·5	1	0·5	4	2·0	5	1·25
$A^u A^c$	7	8	15	7·5	9	4	13	6·5	16	8·0	12	6·0	28	7·00
A^r/A^c	1	—	1	0·5	—	1	1	0·5	1	0·5	1	0·5	2	0·50
W	—	—	—	—	—	1	1	0·5	—	—	1	0·5	1	0·25
L^u	7	11	18	9·0	6	6	12	6·0	13	6·5	17	8·5	30	7·50
L^r	15	22	37	18·5	14	17	31	15·5	29	14·5	39	19·5	68	17·00
L^c	4	5	9	4·5	2	1	3	1·5	6	3·0	6	3·0	12	3·0
L^r/L^c	1	1	2	1·0	—	1	1	0·5	1	0·5	2	1·0	3	0·75
L^c/L^u	1	1	2	1·0	2	—	2	1·0	3	1·5	1	0·5	4	1·00
$L^r L^u$	—	—	—	—	5	1	6	3·0	5	2·5	1	0·5	6	1·50
S	—	3	3	1·5	—	2	2	1·0	—	—	5	2·5	5	1·25
V/A^u	—	1	1	0.5	—	1	1	0·5	—	—	2	1·0	2	0·50
V/A^c	—	1	1	0·5	—	—	—	—	—	—	1	0·5	1	0·25
A^u/L^u	—	2	2	1·0	—	2	2	1·0	—	—	4	2·0	4	1·00
A^u/W	2	—	2	1·0	—	—	—	—	2	1·0	—	—	2	0·50
$A^u A^c/L^r/L^u$	—	—	—	—	—	1	1	0·5	—	—	1	0·5	1	0·25
$L^r/A^u/A^c$	1	—	1	0·5	1	—	1	0·5	2	1·0	—	—	2	0·50
$L^u A^u/A^c$	—	—	—	—	1	—	1	0·5	1	0·5	—	—	1	0·25
$L^c A^r$	—	—	—	—	1	—	1	0·5	1	0·5	—	—	1	0·25
$A^r A^c/L^u$	—	—	—	—	1	—	1	0·5	1	0·5	—	—	1	0·25

a figurák egyszerű típusai közé soroljuk akkor a 0·75% örvény és ugyanannyi mintamaradványt (V) mutató lenyomattal szemben 256 vagyis 64% ív alakot és 138 azaz 34·5% hurkot találunk.

A *hurok mintáknak ez az előfordulási* aránya valamivel *több* a Loth által vizsgált *lengyeleken* és a Wilder-féle *európaiakon lévőknél, de szorosan ezekhez csatlakozik.* Ennél több hypothenar minta csak az ainók, a Cummins által vizsgált európaiak és az előindiaiak tenyérlenyomatain volt.



7. ábra. Figurae tactiles a thenar és hypothenaron.

A valódi *thenar* és *hypothenar* minták[1] előfordulási számának a többi megvizsgált különböző fajtákhoz való viszonyát a következő táblázat tűnteti fel, amelyben különösen szembeszökik a thenar és hypothenar mintázat arányszámának változása az egyes fajták szerint.

[1] vagyis ív és mintatöredék, valamint sokszorosodást nem számítva.

17. táblázat.

A thenar és hypothenar minták gyakorisága %-ban és egymáshoz való viszonyuk az egyes fajtáknál.

	Fajta (vizsgáló)	Thenar	Thenar és hypothenar aránya	Hypothenar
1.	Erópai (CUMMINS)	5·5	1 : 6·7	37·1
2.	Ainó (HASEBE)	5·5	1 : 6·6	36·4
3.	Eszkimó-dán korcs (ABEL)	7·5	1 : 5·9	42·8
4.	Japán (HASEBE)	5·3	1 : 5·5	29·3
5.	Eszkimó (ABEL)	4·4	1 : 4·7	20·7
7.	Európai (WILDER)	10·0	1 : 3·6	36·0
7.	Előindiai (SCHLAGINHAUFEN)	15·3	1 : 2·7	42·5
5.	Hindu (BISWAS)	13·0	1 : 2·5	32·0
9.	Lengyel (LOTH)	14·0	1 : 2·3	32·0
10.	Kínai (SHINO)	11·4	1 : 1·4	16·9
11.	Kóreai (MIYAKE)	16·5	1 : 1·4	23·5
12.	Hottentotta (FLEISCHHACKER)	21·0	1 : 0·71	15·0
13.	Néger (WILDER)	18·7	1 : 0·78	14·6
14.	Indián (CUMMINS)	48·0	1 : 0·11	5·4
15.	Maya (WILDER)	50·0	1 : 0·09	4·7
	Budapestiek	8·25	1 : 4·27	35·25

A táblázat % számaiba a valódi mintának számító örvény alakokat is bevettem. E szerint a *hypothenar* és *thenar minták arányszámá*ban anyagunk a WILDER *európai* és ABEL *eszkimó* vizsgálatán talált arányszáma között áll. Ennek kapcsán meg kell még azt is jegyezni, hogy ABEL grönlandi eszkimókat vizsgált, s ezek nem tekinthetők teljesen tiszta eszkimóknak, mint ahogy a WILDER és CUMMINS adatai közötti eltérések is abból adódhatnak, hogy mindketten Amerikába átszármazott európaiakat (anglo-amerikaiakat) vizsgáltak, európai fajtípusok közelebbi megjelölése nélkül.

Mindenesetre azonban a táblázatból is határozottan látszik, hogy a hypothenar mintákat illetőleg a legmagasabb, a thenar mintákat illetőleg pedig a legalacsonyabb csoportba tartozik anyagunk.

*

Ezekután *foglaljuk össze* a 400 budapesti tenyérlenyomat alapján végzett *vizsgálatunk eredményét*, amely eredményből a hazai tenyéri fővonalak előfordulása és típusaik eloszlására nézve hozzávetőleges tájékoztatást kaphatunk.

A *tenyérformulát* vagyis a fővonalak lefutását illetőleg azt tapasztaltuk, hogy a *hazai tenyérlenyomatok a magas tenyérformulával, vagyis a magas fővonalvégződéssel bíró fajták közé* (fehérek, hinduk, grönlandi eszkimók, hottentották) *sorolhatók*, amennyiben úgy mint ezeknél a 11. 9. 7. 5 mintatípus a túlnyomó. *A férfiaknál több a végződéstípus*, mint a nőknél, *a nagyobbszámú formulák inkább a jobbkézen fordulnak elő, a legtöbb formula mind a két kézen van*, a legkevesebb csak a balkézen. A WILDER-féle beosztás ugyanazokra az eredményekre vezet, mint SCHLAGINHAUFEN «minden fajra vonatkozó» (allrassissch) formulái. A WILDER-féle beosztás alapján a hazai tenyérlenyomatok a hinduk és hottentottáktól már elkülönülnek, mivel az utóbbiakban sokkal nagyobb az ú. n. néger-mongol alacsony formula előfordulása.

A *metacarpophalangeális triradiusok*ból kiinduló fővonalak végződéseinek csoportosítása ezeket az eredményeket megerősíti. A végződésekből képezett *képlet* u. i. *szintén igen magas.*

A *carpalis triradius a legtöbb esetben meg van*, s így a magas formula ellenére *sem mutat redukciót.*

Az *interdigitalis közökben a hurokminták aránya megegyezik* az egyéb fehér, valamint a hindukon tapasztaltakkal, míg *a mellék-triradiusokat* illetőleg a *kettő között* van, de a *többi fajtól erősen különbözik. A mintakombinációk* hasonló eredményre vezetnek.

A *hypothenaron igen sok, a thenaron kevés figura tactilist találunk*, az előbbit illetőleg az európai és hindu csoport közepén, az utóbbiban az európaiak között (a legkisebb értéket adók között) találjuk anyagunkat. A *thenar* és *hypothenar minták közötti arány a magasabbak közé tartozik* s ismét elválasztja a hazai tenyérlenyomatokat a hindu és hottentottáktól, amelyeket ebben a tekintetben nagyobb differencia különít el. Ebben a jellegben eltérnek a hazai lenyomatok a lengyelek lenyomataitól is, amelyekkel pedig sok tekintetben hasonlóságot mutattak.

Végeredményben a magas végződéstípushoz tartozó fehér-hottentotta-hindu csoport fehér ágába tartoznak lenyomataink, a hindu és

hottentotta ágtól főleg az interdigitalis melléktriradiusos minták és a hypothenar, illetve thenar minták gyakoriságában erősen különböznek, de egyik-másik jellegben eltérnek az eddig megvizsgált európaiaktól is, s így a *tenyérlenyomatok vizsgálata is bizonyítja azt,* hogy *hazánk lakossága különleges faji összetétellel bír.*

Irodalom.

1. Abel, W.: Papillarmuster ostgrönlandischer Eskimos. Wiss. Erg. d. Grönland Expedition. A. Wegener. Bd. VI. 1933.

2. Abel, W.: Über die Frage der Symmetrie d. menschl. Fingerbeere u. d. Rassenunterschiede d. Papillarmuster. Biol. Gen. Bd. IX, 2, 1933.

3. Abel, W.: Hand- und Fingerabdrücke von Feuerländern. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. XXXIV, 1934.

4. Biswas, P. C.: Über Hand- und Fingerleisten von Indern. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. XXXV, 1936.

5. Bonnevie, K.: Was lehrt die Embryologie d. Papillarmuster über ihre Bedeutung als Rassen- und Familiencharakter? Zs. f. ind. Abstammung und Vererb.-Lehre. Bd. 50, 1929. és 69, 1931.

6. Carrière, R.: Über Erblichkeit und Rasseneigentümlichkeit der Finger u. Handlinienmuster. Arch. f. Rassen u. Ges. Biol. Bd. 15, 1923.

7. Cummins, H.: Dermatoglyphics of Indian. Amer. Journ. o. Phys. Anthr. Vol. XV, 1930.

8. Cummins, H. and Midlo Ch.: Palmar and Plantar Epidermal ridge Configuration (Dermatoglyphics) in European—Americans. Am. Journ. of Phys. Anthr. Vol. 9, 1926.

9. Cummins, H., Keith, H., Midlo, C., Montgomery, R. B., Wilder, H. H, and Wilder, I. W.: Revised Methods of Interpreting and Formulating Palmar Dermatoglyphics. Am. Journ. of. Anthr. Vol. XII, 1929.

10. Csik L. és Malán M.: Zur Erblichkeit d. Hauptlinien u. Muster d. menschl. Hand. Zs. f. menschl. Konst. u. Vererb.-Lehre, Bd. 21, 1937.

11. Fischer, E.: Erbanlagen für Tastleisten u. Handfurchen in Baur, Fischer, Lenz, Menschl. Erbl.-Lehre u. Rassenhyg. Aufl. IV, Bd. I. 1936, 135—156. lap.

12. Fleischhacker, H.: Untersuchungen ü. d. Hautleistensystem d. Hottentotten-Palma. Anthr. Anz. XI, 1934.

13. Galton, F.: Finger prints. London, 1892.

14. Geipel, G.: Anleitung zur erbbiologischen Beurteilung d. Finger- u. Handleisten. München, 1936.

15. Hasebe, K.: Über das Hautleistensystem der Vola u. Planta d. Japaner u. Ainos, Arb. Anat. Inst. Sendai, Bd. I. 1918.

16. Herschel, W.: Skin furrows of the Hand, Nature, Bd. 23, 1890.

17. Loth, E.: Anthropologische Untersuchungen ü. d. Hautleistensystem d. Polen. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. 13, 1910.

18. Martin, R.: Bau u. Struktur d. Hand. Lehrbuch d. Anthr. 2. Aufl. S. 459—471. Jena, 1928.

19. Meyer—Heydenhagen, G.: Die palmaren Hautleisten bei Zwillingen. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. XXXIII, 1934.

20. Miyake, H.: Über das Hautleistensystem d. Vola d. Koreaner. U. o. Bd. XXV, 1926.

21. Newman, H. H.: Palmprint patterns of twins, J. Hered. Bd. XXII, 1931.

22. Schaeuble, J.: Die Entstehung d. palmaren digitalen Triradien. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. XXXI, 1933.

23. Schlaginhaufen, O.: Das Hautleistensystem der Primatenplanta unter Mitberücksichtigung der Palma. Morph. Jahrb. Bd. XXXIII és XXXIV, 1905.

24. Schlaginhaufen, O.: Zur Morphologie der Palma u. Planta der Vorderinder u. Ceyloner. Zs. f. Ethnologie, Bd. 38, 1906.

25. Shino, K.: Hautleistensystem der Chinesen, Jap. J. med. Scienc. Vol. 2. Nr. 2. 1925.

26. Steggerda, I. D.: Palmar dermatoglyphics in negro-white crosses. (In «Race crossing in Jamaica».) Carn. Inst. of. Wash. Publ. Nr. 395, 1929.

27. Verschuer, O.: Die biol. Grundlagen d. menschl. Mehrlingsforschung. Zs. ind. Abst. u. Vererb.-Lehre. Bd. 61, 1932.

28. Weninger, M.: Familienuntersuchungen ü. d. Hautleistenverlauf am Thenar und ersten Interdigitalballen d. Palma. Mitt. Anthr. Ges. Wien, LXV. 1935.

29. Whipple, I.: The ventral surface of the mammalian chiridium with special reference to the conditions found in man. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. VII. 1904.

30. Wilder, H. H.: On the disposition of the epidermic folds upon the palms and soles of primates. Anat. Anz. 13, 1897.

31. Wilder, H. H.: Palms and soles, Am. Journ. Anat. Vol. 1, 1902.

31. Wilder, H. H. Racial differences in palm and sole configuration. Am. Anthr. N. S. VI, 1904. és Am. Anthr. XV, 1913.

33. Wilder, H. H.: Racial differences in palm and sole configuration. Palm and sole prints of Japanese and Chinese. Am. J. Phys. Anthr. 5, 1922.

34. Wilder, H. H.: Palm and sole studies. Biol. Bull. Vol. 49, 1916 és Vol. 50, 1926.

35. Würth, A.: Die Entstehung der Beugefurchen d. menschl. Hohlhand. Zs. f. Morph. u. Anthr. Bd. XXXVI, 1937.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. április 26-án tartott üléséből.)

HANDABDRUCK-UNTERSUCHUNGEN.

Von M. MALÁN.

Der Verfasser hat insgesamt 400 Handabdrücke untersucht, welche gelegentlich bei den Zwillingsuntersuchungen des Hygienischen Institutes der Budapester Universität aufgenommen wurden. Er hat die eineiige Zwillinge nur einmal in Rechnung genommen. Die Untersuchung hat das folgende Resultat ergeben.

Die Budapester Handabdrücke zeigen hohe Handformeln. also sie gehören zu den Rassen mit hochzahligen Hauptlinienendigungen (Weisse, Inder grönländische Eskimos, Hottentotten), weil so wie bei diesen die Formel 11.9.7.5 vorwiegend ist. Bei den Männern kommen mehrere Formelarten vor, als bei den Frauen. Die höherenFormeln finden wir vielmehr auf den rechten Händen. Die meisten Formelarten sind an den beiden Händen vorhanden, dagegen die wenigsten auf der linken Hand. Die Einteilung nach WILDNER ergibt die ähnlichen Resultate, als die «allrassischen» Formeln SCHLAGINHAUFEN's. Auf Grund der WILDER'schen Einteilung können wir die einheimischen Palmarabdrücke schon von jenen der Inder und Hottentotten unterscheiden, weil bei den letzteren kommen viel mehr negro-mongolische, niedrige Formeln vor.

Die Gruppierung der Endigungstypen der Hauptlinien bestätigen diese Resultate. Aus den häufigsten Endigungen gebildete Formel ist auch sehr hoch (A_5 B_7 C_9 D_{11}).

Der carpale Triradius findet sich in der Mehrzahl der Fälle vor und so zeigt es trotz der hohen Formeln keine Reduktion.

Das Verhältnis der Schleifenmuster in den drei interdigitalen Areae übereinstimmt mit den Weissen und Indern. Die Zahl der Nebentriradien liegt zwischen den beiden, aber sie weicht von den

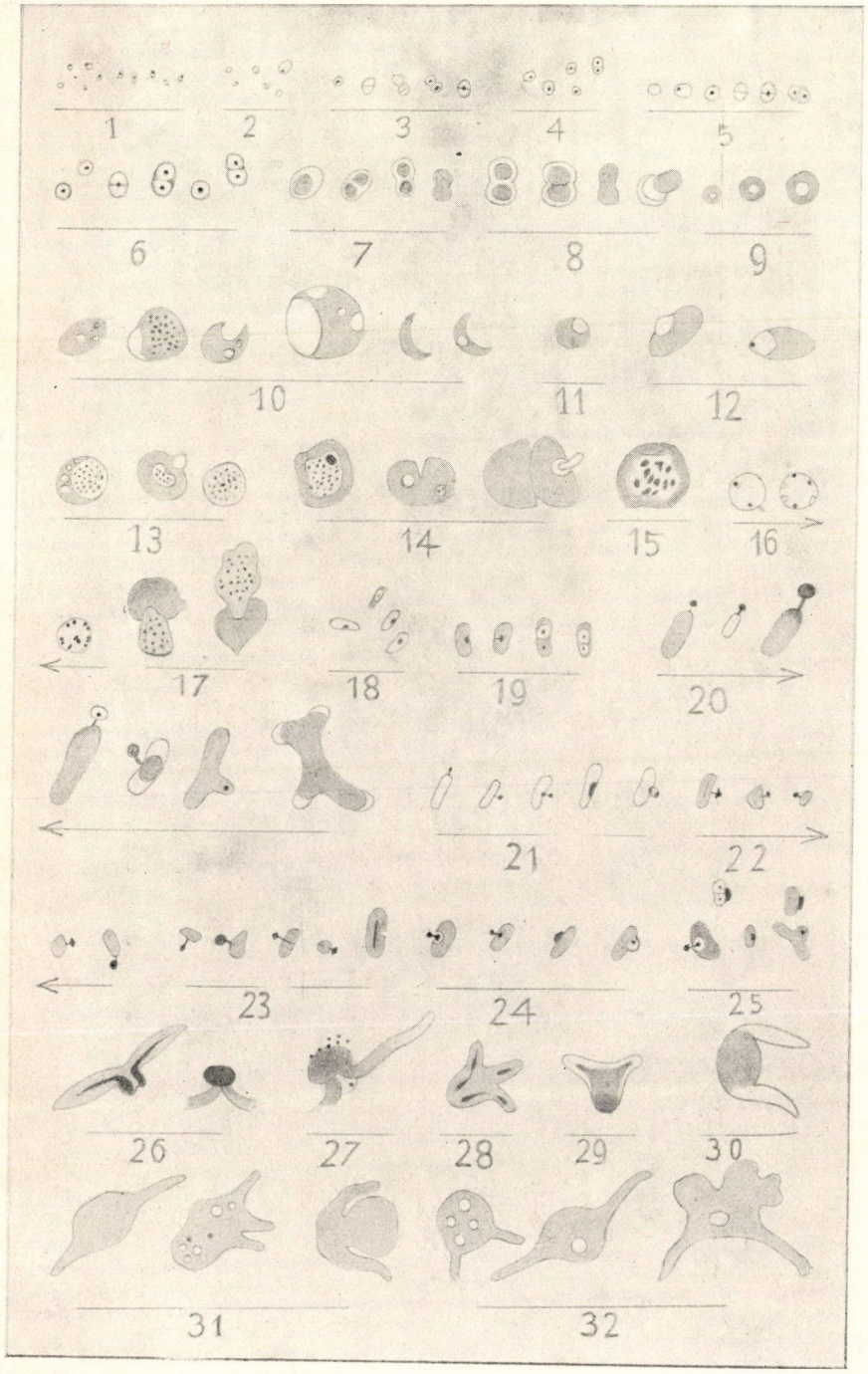
anderen Rassen sehr ab. Die Musterkombinationen geben ähnliches Resultat.

Auf dem Hypothenar finden wir in einem sehr hohen Prozentzahl echte Muster (Figurae tactiles), so dass das Material nach dieser Zahl in die Mitte der weissen-indischen Gruppe gehört. Am Thenar sind dagegen nur sehr wenige Muster, wie bei anderen Europäern. Das Verhältnis zwischen den Muster von Thenar und Hypothenar repräsentiert einen höheren Wert und trennt wiederum in grösserem Masse die einheimischen Handabdrücke von denen der Inder und Hottentotten. Diesbezüglich weichen die Handabdrücke auch von denen der Polen ab, mit welchen sie in vielen Hinsichten, eine grössere Übereinstimmung besassen.

Letzten Endes gehören die Budapester Handabdrücke mit ihrem hohen Endigungstyp zum weissen Zweig der Weissen-Inder-Hottentotten-Gruppe. Sie weichen vom Indischen und Hottentotten-Zweig hauptsächlich durch die Häufigkeit der interdigitalen Triradien und Hypothenar- und Thenar-Muster stark ab. Sie weichen aber einigermassen von den bisher untersuchten Europäern auch ab und so beweist auch die Untersuchung der Handabdrücke, dass die Bevölkerung Ungarns eine spezifische Rassenzusammensetzung besitzt.

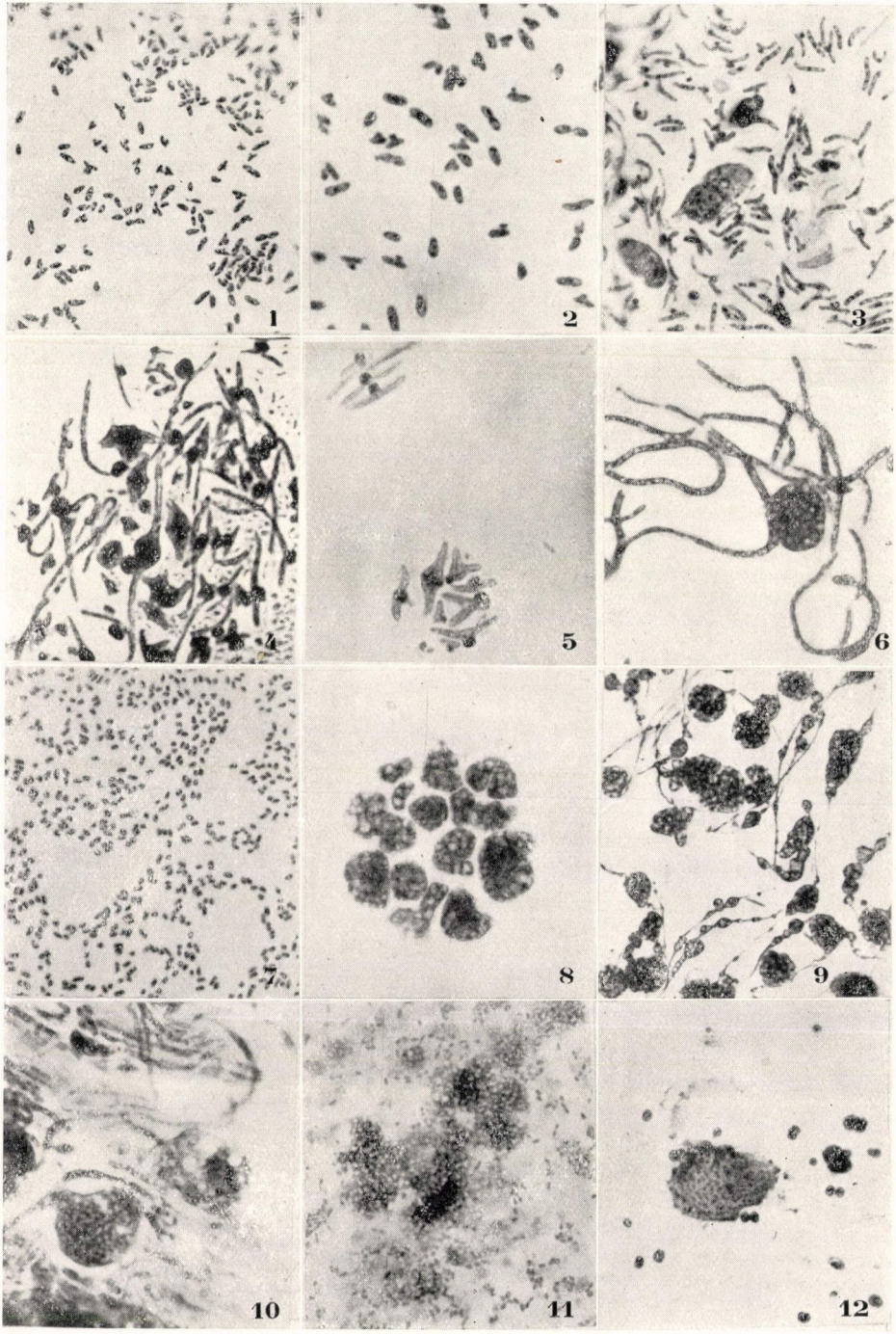
(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

Preisz Hugó: További vizsgálatok a Pettenkoferiákra vonatkozólag.

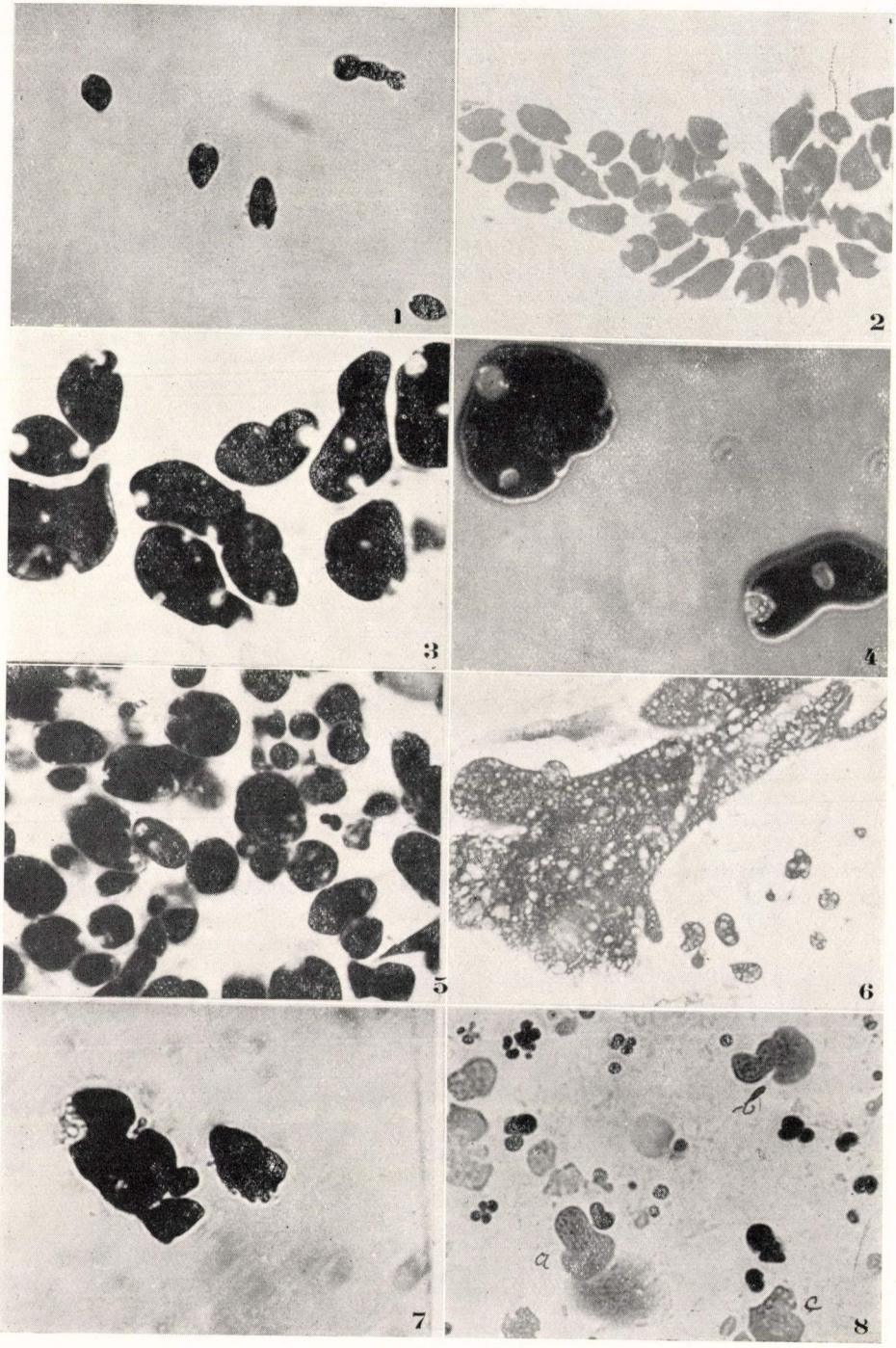


Ad nat. dol. Preisz.

Preisz Hugó: További vizsgálatok a Pettenkoferiákra vonatkozólag.



Preisz Hugó : További vizsgálatok a Pettenkoferiákra vonatkozólag.

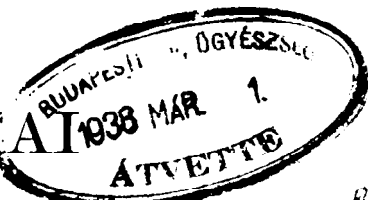


INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
Barnóthy, J. und Forró, M.: Sternzeitliche Periode der Ultrastrahlungsintensität und ihre Phasenverschiebung	416
Beer, B.: Über den Grundterm der Carbonylmodifikation von *CO*	559
Boros, J.: Ionenleitung in dünnen Kristallschichten	671
Cotel, E.: Die Wirkung Anton Ritter v. Kerpely's auf die Entwicklung des Eisenhüttenwesens und die Ungarische Eisenindustrie	697
Császár, E.: Die Energiemessung der Röntgenstrahlung. IV. Teil	408—409
Fekete, J. siehe Pogány, B.	
Forró, M. siehe Barnóthy, J.	
Gombás, P.: Zur Bestimmung der Verteilung der Metallelektronen in Alkalimetallen	422—440
Konek, F.: Beiträge zur Chemie der Alkaloide von «Cinchona cuprea»	581
Lipka, St.: Über das Produkt von Matrizen	381
Malán, M.: Handabdruck—Untersuchungen	727—728
Neugebauer, T.: Zur Theorie der Refraktionsverminderung von Elektrolytlösungen	443—449
Neugebauer, T.: Über die Berechnung der ultraroten Schwingungsfrequenzen der Hydridmoleküle	452—476
Papp, G.: Über den Kerneffekt bei der Streuung von γ-Strahlen	492
Pogány, B. und Fekete, J.: Seismische Reflexionsbeobachtungen in der Ungarischen Tiefebene	523—524
Preisz, H.: Weitere Untersuchungen über Pettenkoferien	606—607
Sasvári, K.: Die Kristallstruktur des Silberpermanganats $Ag\,Mn\,O_4$	503—504
Szabó, Z.: One new Cephalaria from South Africa	610—611
Szász, O.: Über die Partialsummen Fourier'scher Reihen	396
Szepesi, Z.: Über die Intensitätsverteilung der Comptonstreuung von γ-Strahlen	653—654
Szilády, Z.: Synopsis der Fliegen Ungarns V. Tipulidae	636
Szökefalvi Nagy, J.: Über die nichtreellen Nullstellen der reellen ganzen Funktionen von endlichem Geschlecht	373—375
Varga, L.: Ptygura Tihanyensis n. sp., ein neues Rädertier aus dem tihanyer Belső Tó	615—621
Vitális, I.: Die Fossilen Baglivien des Blumentales (Virágvölgy) bei Sopron und ihre Begleitfauna	687
Zemplén, G.: Synthese des Lusitanicosids, des Glycosids aus Cerasus Lusitanica Lois	569

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

53/50639



MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVI. KÖTET. — HARMADIK (UTOLSÓ) RÉSZ.

MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVI. — DRITTER (LETZTER) TEIL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1937.

VILLAMOS MOZDONYOK HAJTÓMŰVÉNEK DYNAMIKUS IGÉNYBEVÉTELE KERÉKCSUSZÁS KÖVETKEZTÉBEN.

† KANDÓ KÁLMÁN lev. tagtól.*

Mindaddig, amíg a kerekek csúszás nélkül gördülnek a síneken, lényegesen nagyobb erő a hajtóműben nem léphet fel, mint amennyi a kerekek és a sínek közötti surlódás legyőzésére szükséges. Az a különbség, amivel a hajtómű által a kerekeknek átadott erő a kerék és sín közötti surlódást túlhaladhatja, a kerekek megcsúszása előtt csak néhány százalék; a *kerekek megcsúszása után azonban elméletileg korlátlanul, a gyakorlatban valamelyik alkatrész töréséig, fokozódhatik.*

Amint a továbbiakban látni fogjuk, ezek a *dynamikus túlerők lengések kíséretében lépnek fel és a lengés amplitudójával nőnek.*

A motor forgó tömege a kerekek forgó tömegével a hajtómű révén rugalmas kapcsolatban van. Tehát ezek a tömegek egymáshoz képest lengésbe jöhetnek. A szabad lengés frequenciája

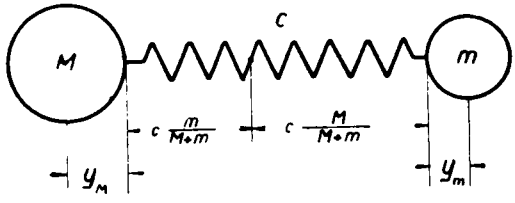
---

* Előterjesztette Hoor Tempis Móric r. t., aki a hátrahagyott értekezést az elhunyt szerző sógorától dr. Pósch Gyula úrtól, 1937. tavaszán vette át előterjesztés céljából.

Kandó Kálmán lev. tag az értekezést már 1930 őszén fejezte be és székfoglalónak szánta. 1931. évi január 13-án váratlanul bekövetkezett halála óta a család — nem tudva azt, hogy az értekezést tagtársunk halála után is lehet az Akadémia színe elé terjeszteni — a hagyatéki tárgyak között őrizte az értekezést.

Az értekezés tárgya ma is korszerű, a levezetett eredmények újdonságukból és jelentőségükből most — hat és fél év multán — semmit sem veszítettek.

$f = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$ lengés percenkint, ahol M a mótor forgó tömege, m a kerekeké (mindkettő a forgattyú sugárra vonatkoztatva), c m/kg pedig a hajtómű rugalmassága (a hajtómű hosszváltozása méterben egy kg erő hatása alatt, a forgattyú körön mérve). Ez a képlet nem veszi tekintetbe a lengést csillapító erők befolyását, azért a valóságnál valamivel nagyobb értékeket ad, ha a csillapítás nem elhanyagolható. A vizsgált esetekben azonban rendesen beérhetjük azzal a pontossággal, amit ez a képlet nyujt. Az igazolása az ismert $f = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{1}{Mc}}$ képletre való visszavezetéssel a következő módon történhetik: Lengés következtében a két tömeg közös tömegközéppontja nem változtatja a helyét, tehát lengési elongációik y_M és y_m állandóan a tömegekkel fordított arányban vannak, $\frac{y_M}{y_m} = \frac{m}{M}$ és így a hajtóműnek (az ábrán c rugó által jelképezve) egy pontja állandóan



1. ábra.

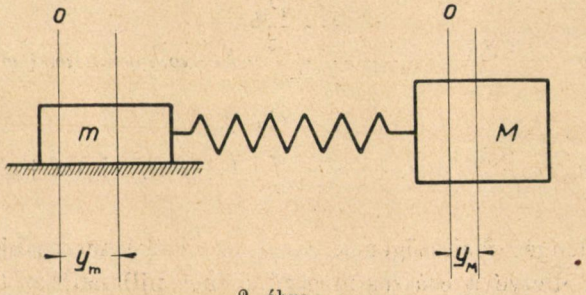
nyugalomban marad. A hajtóműnek ezen pont által elválasztott két részének a rugalmassága az elongációkkal van egyenes arányban, tehát az M felőli rész rugalmassága $c\frac{m}{M+m}$; az m felőlié pedig $c\frac{M}{M+m}$. Mivel a nyugalomban levő pontot úgy is tekinthetjük, mintha az egy végtelen nagy tömeghez volna kötve, f fenti képletébe akár M-et és $c\frac{m}{M+m}$-et, akár m-et és $c\frac{M}{M+m}$-et helyettesítve, megkapjuk a két tömeg közös lengési frequenciáját $f = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$. A továbbiakban a lengési frequencia — f — helyett a képletek egyszerűsítése végett a lengési szög sebességét

$\frac{\pi}{30} f = \omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$ vezetjük be. Addig, amíg a kerekek a síneken nem csúsznak, a lengési szögsebesség kicsiny, mert a kerekek tömege a kerék-sín tapadás következtében a mozdony egész tömegével merev kapcsolatban van. A szekrény és a kerékagyak rugalmassága t. i. a hajtómű rugalmassága mellett elhanyagolható, viszont a mozdony kapcsolata a vonattal a vonóhorog és az ütközők rugói következtében olyan laza, hogy a vonat tömege ezekben a lengésekben már nem vesz részt. A lengési szögsebességet tehát úgy számíthatjuk, mintha a kerekek tömege m a mozdony egész tömegével M_1 megnőtt volna. A szögsebesség ebben az esetben

$$\omega' = \sqrt{\frac{M+m+M_1}{M(m+M_1)c}}$$

lesz.

Ha az időt a két különböző szögsebességű lengési szakasz kezdetétől, tehát a kerékcsúszás kezdetétől, illetőleg annak megszüntétől számítjuk, az M és m, illetőleg $M+m$ tömegek lengését a következő képletek adják az idő függvényében:



2. ábra.

A tömegek elmozdulása (lásd 2. ábrát).

$$y_M = y_0 + v_0 t + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} \frac{t^2}{2} + P_0 c \frac{m}{M+m} + A_M \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

$$y_m = y_0 + v_0 t + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} \frac{t^2}{2} - P_0 c \frac{M}{M+m} - A_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

P a motor által kifejtett erő,

P_{cs} a kerekek megcsúszásához szükséges erő,

$\frac{P_{cs}}{z}$ a surlódási erő kerékcsúszás közben,

P_0 a hajtóműben fellépő erők algebrai középértéke, t. i. az az erő, amely akkor lépne fel, ha lengés nem volna.

Mind a négy erő a forgattyú sugárra van vonatkoztatva.

$P_0 c$ a hajtómű hosszváltozása a P_0 erő hatása alatt.

y_0; v_0 az M és m tömegek közös tömegközéppontjának kezdeti elmozdulása és kezdeti sebessége.

$\frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m}$ az az állandó gyorsulás, amivel $P-\frac{P_{cs}}{z}$, a külső erők eredője az M és m tömegek közös tömegközéppontját gyorsítja.

A_M és A_m az M és m tömegek lengési amplitudói.

A sebességek

$$v_M = \frac{dy_M}{dt} = v_0 + \frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t - \omega A_M \sin(\omega t+\varphi), \tag{3}$$

$$v_m = \frac{dy_m}{dt} = v_0 + \frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t + \omega A_m \sin(\omega t+\varphi). \tag{4}$$

A lengés fázisszögének φ-nek az értékét megszabják a megcsúszás, illetve a csúszás megszűnésének pillanatában ($t=0$) levő viszonyok.

A hajtómű hosszváltozása:

$$y_M - y_m = P_0 c + (A_M + A_m)\cos\varphi = P_{cs} c. \tag{5}$$

A mótor és a kerekek tömegének sebességkülönbsége:

$$v_M - v_m = -\omega(A_M+A_m)\sin\varphi = \Delta v. \tag{6}$$

A megcsúszás pillanatában:

$$A_m = \frac{M}{m} A_M$$

lévén

$$A_M + A_m = \frac{M+m}{m} A_M = \frac{M+m}{M} A_m .$$

(5)-ből és (6)-ból

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\Delta v}{\omega (P_{cs}-P_0)c}\right) \tag{7}$$

és

$$A_M + A_m = \sqrt{(P_{cs}-P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega}\right)^2} . \tag{8}$$

A hajtóműben fellépő erő maximuma:

$$\frac{1}{c}(y_M - y_m) = P_0 + \frac{A_M + A_m}{c} . \tag{9}$$

Ez Δv-től függ és Δv-vel együtt *tetszőleges értéket* vehet fel.

Óvatos indítás.

Vizsgáljuk előbb azt a különleges esetet, amikor a megcsúszás pillanatát megelőzőleg még nincsen lengés, tehát $\Delta v = 0$. Ez a gyakorlatban megfelel annak az esetnek, amikor megfeszült vonóhorgokkal óvatosan indítunk, amikor a mótor ereje P lassan növekedve éri el a P_{cs} értéket. A megcsúszás pillanatában $t=0$, $v_0=0$, $P=P_{cs}$, tehát $\varphi=0$,

$$P_0 = P_{cs}\left[\frac{1}{z} + \frac{m}{M+m}\left(1-\frac{1}{z}\right)\right] \text{ és } A_M + A_m = c(P_{cs}-P_0)$$

$$A_m = \frac{M}{M+m}(A_M+A_m) = \frac{P_{cs}cM}{M+m}\left[1-\frac{1}{z}-\frac{m}{M+m}\left(1-\frac{1}{z}\right)\right].$$

Ezeket helyettesítve, (4) egyenletbe és elrendezve, a kerekek sebessége:

$$v_m = P_{cs}\frac{1-\frac{1}{z}}{M+m}\left(t+\omega\frac{cM^2}{M+m}\sin\omega t\right) =$$

$$= P_{cs}\frac{1-\frac{1}{z}}{M+m}\left(t+\frac{M}{\omega m}\sin\omega t\right).$$

A kerékcsúszás megszűnik abban a pillanatban, amikor $v_m=0$ lesz, vagyis

$$\frac{\omega t}{\sin(\omega t)} = -\frac{M}{m}. \tag{10}$$

Mivel $\frac{\omega t}{\sin(\omega t)}$ legkisebb negatív értéke $-4{\cdot}6$ (ez $\omega t = 257\frac{1}{2}°$-nál van) fenti egyenletet $\frac{M}{m} < 4{\cdot}6$ értékei már nem elégíthetik ki. Más szóval, *ha a motor forgó tömege nem éri el a kerekek forgó tömegének a 4·6-szorosát és óvatos indítás dacára a kerekek megcsúsznak, mert P eléri P_{cs} értékét, a megcsúszás csak akkor szűnik meg, ha a motor ereje P lecsökken. Viszont, ha a csúszás nem szűnik meg, akkor a bekövetkező lengés sem okoz nagyobb erőt, mint P_{cs}, mert $y_M - y_m$ maximuma*

$$P_0 + \frac{A_M + A_m}{c} = P_0 + \frac{c(P_{cs}-P_0)}{c} = P_{cs}.$$

Valamivel nagyobb erők lépnek fel a hajtóműben, ha v_m egy pillanatban 0 lesz, a csúszás rövid időre megszűnik és az $\omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$ szögsebességű lengés átmegy $\omega' = \sqrt{\frac{M+m+M_1}{M)m+M_1)c}}$ szögsebességű lengésbe.

Vizsgáljuk meg azt a határesetet, amikor $\frac{M}{m} = 4{\cdot}6$. A csúszás $t = \frac{\omega t}{\omega} = \frac{257\frac{1}{2}°}{360\omega} 2\pi = \frac{4{\cdot}49}{\omega}$ mp-ig tart. Ezalatt a $\frac{P_{cs}}{z}$ erő gyorsítja az egész vonatot. A csúszás megszűnésének a pillanatában a kerekek sebessége egyenlő a mozdony és a vonat együttes sebességével.[1] Ez azonban a pár század mp-ig tartó csúszás alatt olyan kis értéket ér el, hogy bátran elhanyagolhatjuk, tehát az ω' szögsebességű lengés amplitudói az (1) és (2) képletek szerint lesznek:

$$y'_M - y'_m = P'_0 c + (A'_M + A'_m)\cos(\omega' t' + \varphi') \tag{11}$$

[1] Minden erő, tömeg és sebesség a forgattyúk sugarára van vonatkoztatva. Az elmozdulások, sebességek, gyorsulások és az erők irányát pozitívnak vesszük, ha az a mozdony előrehaladásának felel meg. Így p. o., ha a mozdony előttünk balról jobbra halad, a kerekek és a motor forgásának pozitív iránya megegyezik az óramutatóéval.

és a sebességei a (3) és (4) képlet szerint:

$$v'_M - v'_m = -\omega'(A'_M + A'_m)\sin(\omega' t' + \varphi'). \qquad (12)$$

Ha az időt ebben a lengési szakaszban a csúszás megszűnésének a pillanatától számítjuk, akkor ebben a pillanatban $t' = 0$; $t = t_0$ és $\omega t_0 + \varphi = 257\frac{1}{2}°$ lévén

$$(y'_M - y'_m) = (y_M - y_m)_{t=t_0} = P_0 c + (A_M + A_m)\cos 257\tfrac{1}{2}° = P_{cs} c \frac{1}{z}.$$

$$(v'_M - v'_m) = (v_M - v_m)_{t=t_0} = -\omega \quad (A_M + A_m)\sin 257\tfrac{1}{2}° =$$

$$= -\,0{\cdot}8\omega P_{cs} c\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

Ezen értékek segítségével e (11) és (12) képletből kiszámíthatjuk φ' és $A'_M + A'_m$ értekeit. Ez utóbbi

$$A'_M + A'_m = P_{cs} c\left(1 - \frac{1}{z}\right)\sqrt{1 + 0{\cdot}64\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2}$$

és a hajtóműben fellépő maximális erő a (9) képlet szerint:

$$P_{cs} + \frac{A'_M + A'_m}{c}$$

lenne, ha a kerekek újbóli megcsúszása az erő növekedésének gátat nem vetne. Most azonban a kerekekkel együtt a mozdony egész tömege lengésben lévén, a lengő tömegeket gyorsító erőnek (az egész erő n-ed részének) egy kisebb része a kerekek tömegét gyorsítja és így a kerekek megcsúsztatásában nem vesz reszt. Ezért a hajtóműben $\left(1 + \frac{1}{n}\,\frac{m}{m+M}\right) P_{cs}$ erőnek kell fellépni, hogy a kerekek újból megcsússzanak. Ha $z = 3$, $n \cong \frac{3}{2}$-nek vehető fel. A kerekek tömege m az egész mozdony tömegének M_1-nek csak kb. 5%-a lévén, a további számítás egyszerűsítése végett vegyük fel $\frac{M_1}{m}$ viszonyszámot állandónak, $\frac{M_1}{m} = 20$-nak. A megcsúsztatáshoz e szerint kell

$$\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{1+20}\right) P_{cs} \cong 1{\cdot}03 P_{cs}$$

erő a hajtóműben. Így újbóli megcsúszás pillanatában

$$y'_M - y'_m = 1{\cdot}03 P_{cs}$$

és

$$\cos\,\omega' t'_0 + \varphi') = \frac{1{\cdot}3 P_{cs} c - P'_0 c}{A'_M + A'_m}.$$

Mivel ebben a lengési szakaszban

$$P'_0 = P = P_{cs}\cos(\omega' t'_0 + \varphi') = \frac{0{\cdot}03 P_{cs} c}{A'_M + A'_m}$$

és

$$\sin(\omega' t'_0 + \varphi') = \sqrt{1 - \left(\frac{0{\cdot}03 P_{cs} c}{A'_M + A'_m}\right)^2},$$

$$\Delta v'' = -\omega'(A'_M + A'_m)\sin(\omega' t'_0 + \varphi') = -\omega'\sqrt{(A'_M + A'_m)^2 - (0{\cdot}03 P_{cs} c)^2}$$

és az újbóli megcsúszás utáni lengés amplitudói

$$A''_M + A''_m = \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v''}{\omega}\right)^2} =$$

$$= P_{cs} c\left(1 - \frac{1}{z}\right)\sqrt{\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + 0{\cdot}64 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{0{\cdot}03}{1 - \frac{1}{z}}\right)^2}.$$

Mivel

$$\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = \frac{\frac{M + M_1 + m}{M(M_1 + m)c}}{\frac{M+m}{Mmc}} = \frac{\frac{M}{m} + \frac{M_1}{m} + 1}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)\left(\frac{M_1}{m} + 1\right)},$$

a határesetnek megfelnlően pedig $\frac{M}{m} = 4{\cdot}6$ és $\frac{M_1}{m} \cong 20$-nak vétetett fel, $\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = 0{\cdot}218$ és $A''_M + A''_m = 1{\cdot}237 P_{cs} c\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ lesz.

A hajtóműben a második megcsúszás után fellépő legnagyobb erő pedig:

$$P_{\max} = P_0 + \frac{A'_M + A''_m}{c} = P_{cs}\left(1{\cdot}415 - \frac{0{\cdot}415}{z}\right).$$

Ez már teljes mértékben létrejön, mert a kerekek a mozdony tömegétől függetlenül lengenek és az egész tömeget gyorsító dynamikus túlerőt egyedül veszik fel. Ha a csúszás nélkül és

csúszás közben a kerekek és a sínek között fellépő súrlódási tényezők viszonyszámát $z=3$-nak vesszük fel, ami homokozás nélkül száraz síneken körülbelül megfelel a valóságnak, a hajtóműben fellépő maximális erő:

$$P_{\max} = 1{\cdot}28 P_{cs}$$

l esz.

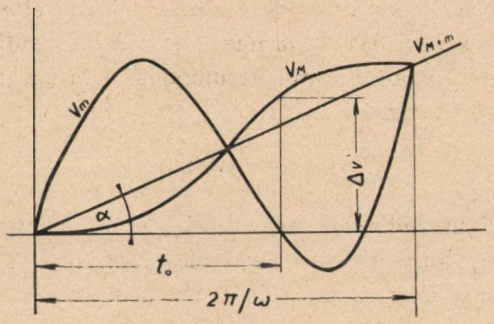
Tehát a másodszori megcsúszás után a maximális erő 28%-kal nagyobb, mint az első megcsúszás után volt. Ebben az állapotban a kerekek csúszása már nem szűnik meg többé, hacsak a mótor ereje P nem csökken.

Amint az előbbiekben láttuk, a mótor és a keréktömegek viszonyszámának $\frac{M}{m} < 4{\cdot}6$ értékei mellett az óvatos indításnál bekövetkezett kerékcsúszás nem szűnik meg, mert a kerekek sebessége v_m nem lehet 0. Viszont $\frac{M}{m} > 4{\cdot}6$ értékei mellett a csúszás hamarabb szűnik meg, mint a vizsgált esetben $\left(\frac{M}{m} = 4{\cdot}6\right)$ és így v_0 és vele együtt a lengési amplitudók és a dynamikus túlerők is kisebbek lesznek. Ezért a fent kiszámított 28%-ot abszolút maximumnak tekinthetjük, amelyet óvatos indításnál a dynamikus többleterő nem lép túl, hacsak $\frac{M}{m}$ nem olyan nagy, hogy a másodszor megindult kerékcsúszás is megszűnhetik. Lássuk, mik ennek a feltételei?

Az világos, hogy $\frac{M}{m}$-nek lényegesen nagyobbnak kell lennie, mint 4·6, különben a másodszor megindult kerékcsúszás nem szűnhetnék ismét meg. Az első csúszási szakasz tehát rövidebb tartamú, mint $\frac{257\frac{1}{2}^\circ}{360\omega} \cdot 2\pi = \frac{4{\cdot}49}{\omega}$. A tartama $t_0 \cdot \frac{\pi}{\omega}$ és $1{\cdot}43\,\frac{\pi}{\omega}$ között lesz, tehát $\pi < \omega t_0 < 1{\cdot}43\pi$.

A 3. ábra tünteti fel a v_M és v_m sebességeket az idő függvényében. v_{M+m} az M és m tömegek közös tömegközéppontjának a sebessége

$$v_{M+m} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m}\,t \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m}.$$



3. ábra.

Az első megcsúszás után a lengések amplitudói a (8) képlet szerint

$$A_M + A_m = \sqrt{(P_{cs}-P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega}\right)^2},$$

ahol $\Delta v = 0$ és $P = P_{cs}$ lévén

$$P_0 = P_{cs}\left[\frac{1}{z} + \frac{m}{M+m}\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]$$

és

$$P_{cs} - P_0 = P_{cs}\frac{M}{M+m}\left(1-\frac{1}{z}\right),$$

amiből

$$A_M + A_m = P_{cs}\frac{Mc}{M+m}\left(1-\frac{1}{z}\right). \qquad (13)$$

A csúszás megszűnik, ha $v_m = 0$, ami bekövetkezik, ha

$$\frac{\omega t_0}{\sin \omega t_0} = -\frac{M}{m};^1$$

tehát

$$t_0 = -\frac{M}{m\omega}\sin \omega t_0$$

idő múlva. Ha a második lengési szakasznak az időszámítását

---

[1] Lásd (10) képletet.

az első csúszás megszüntétől kezdjük, ebben a pillanatban $t = t_0$ és $t' = 0$, tehát

$$(y_M - y_m)_{t=t_0} = (y'_M - y'_m)_{t'=0} \text{ és } (v_M - v_m)_{t=t_0} = (v'_M - v'_m)_{t'=0} = \Delta v'$$

és az (1), (2), (3), (4), (10) és (12) képletek szerint lesz

$$P_0 c + (A_M + A_m)\cos \omega t_0 = P'_0 c + (A'_M + A'_m)\cos \varphi'$$

és

$$-\omega (A_M + A_m)\sin \omega t_0 = -\omega'(A'_M + A'_m)\sin \varphi'$$

$$P'_0 = P = P_{cs}$$

$$P_0 - P_{cs} = -P_{cs}\frac{M}{M+m}\left(1 - \frac{1}{z}\right) = -\frac{A_M + A_m}{c}.$$ [1]

A behelyettesítéseket elvégezve, az első kerékcsúszás megszűnése utáni ω' sszögsebességű lengési szakasz amplitudóit kapjuk:

$$A'_M + A'_m =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 (A_M + A_m)^2 \sin^2 \omega t_0 + [(A_M + A_m)\cos \omega t_0 + (P_0 - P_{cs})c]^2}$$

$$A'_M + A'_m = (A_M + A_m)\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \sin^2 \omega t_0 + (\cos \omega t_0 - 1)^2}.$$

Mivel ebben a lengési szakaszban $P'_0 = P$ és óvatos indításnál $P = P_{cs}$, az újbóli megcsúszás akkor fog bekövetkezni, amikor

$$\frac{y'_M - y'_m}{c} = P_{cs} = P'_0$$ [2]

és

$$\cos(\omega' t' + \varphi') = 0,$$

tehát

$$\Delta v'' = v'_M - v'_m = \omega'(A'_M + A'_m).$$

A második csúszás amplitudói a (8) képlet szerint lesznek

$$A''_M + A''_m = \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v''}{\omega}\right)^2} =$$

$$= (A_M + A_m)\sqrt{1 + \sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2}.$$

[1] Lásd (13) képletet.

[2] A mozdony tömegét M_1-et a kerék tömegéhez, m-hez képest ∞-nek vesszük fel. Ez akkor, ha $P = P_{cs}$ alig befolyásolja az eredményt.

A kerekek sebessége ebben a lengési szakaszban a (4) képlet szerint lesz

$$v''_m = v''_0 + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t'' + \frac{M\omega}{M+m}(A'_M + A''_m)\sin(\omega t'' + \varphi''),$$

ha a másodszori megcsúszás pillanatában $t'' = 0$.

$$v''_0 = \frac{M}{M+m} \Delta v''$$

és

$$\frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} = \frac{A_m + A_M}{Mc}$$

értékeket v''_m egyenletbe behelyettesítve lesz

$$v''_m = (A_M + A_m)\left[\frac{Mv}{M+m}\sqrt{\sin^2\omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \cos\omega t_0 - 1)^2} + \frac{t''}{Mc} + \right.$$

$$\left. + \frac{M\omega}{M+m}\sin(\omega t'' + \varphi'')\sqrt{1 + \sin^2\omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 (\cos\omega t_0 - 1)^2}\right].$$

Annak a feltétele, hogy a második csúszás is megszűnjék és így egy harmadik megcsúszás is bekövetkezhessék, az, hogy $v''_m = 0$ lehessen.

Ha $v''_m = 0$ egyenletet ωMc-vel megszorozzuk és $(A_M + A_m)$ $\sin(\omega t'' + \varphi'')$-vel elosztjuk, $\omega^2 = \frac{M+m}{Mmc}$ behelyettesítjük és az egyenletet rendezzük, lesz:

$$0 = \frac{\omega t''}{\sin(\omega t'' + \varphi'')} + \frac{M}{m}\left(\frac{\sqrt{\sin^2\omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 (\cos\omega t_0 - 1)^2}}{\sin(\omega t'' + \varphi'')} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1 + \sin^2\omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 (\cos\omega t_0 - 1)^2}\right).$$

$\frac{M}{m}$ legkisebb értékének megfelel jó megközelítéssel

$$\frac{\omega t''}{\sin(\omega t'' + \varphi'')} \cong -4{\cdot}6 - 0{\cdot}98\varphi'',$$

ahol

$$\varphi'' = \operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{\sin^2\omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2(\cos\omega t_0 - 1)^2}\right)$$

és

$$\sin(\omega t'' + \varphi'') \cong -0{\cdot}98.$$

Ha $\frac{M_1}{m} \cong 20$-nak vesszük. (A kerekek tömege az egész mozdony tömegének 5%-a; mindkettő a forgattyú sugárra vonatkoztatva):

$$\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + \frac{\frac{M+M_1+m}{(M_1+m)Mc}}{\frac{M+m}{Mmc}} = \frac{21+\frac{M}{m}}{21+21\frac{M}{m}}.$$

Ha fenti egyenletbe ezeket és (10) képlet szerint $\frac{M}{m} = \frac{\omega t_0}{\sin\omega t_0}$ értéket behelyettesítjük, az már csak ωt_0 ismeretlent tartalmazza, tehát ωt_0-nak egy értéke elégíti csak ki. Ez $\omega t_0 = 5{\cdot}63 = 322°40'$, amiből $\frac{M}{m}$ legkisebb értéke, ami mellett óvatos indításnál ($P = P_{cs}$) még egy harmadik megcsúszás is bekövetkezhetik: $\frac{M}{m} = 9{\cdot}3$.

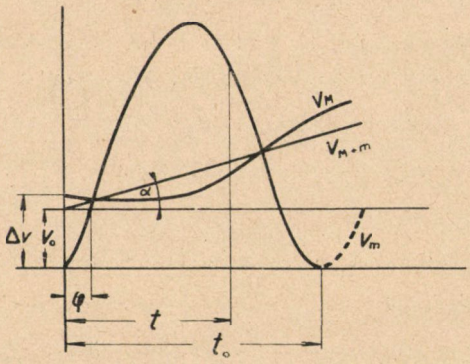
Ha $\frac{M}{m} < 9{\cdot}3$, a kerekek másodszori megcsúszása már végleges. Látható tehát, hogy $\frac{M}{m}$-nek növekvő értékei és a sorozatos megcsúszások lehetséges száma között összefüggés van. A sorozatos megcsúszások folyamán viszont az egymást követő lengési szakaszok kezdetén fellépő sebességkülönbség és vele együtt a lengések amplitudója, valamint a hajtóműben fellépő maximális erő növekszik. Az ilyen sorozatos megcsúszás, az ú. n. r e z g ő c s ú s z á s (chattering slip) ismert jelenség. Egyike azoknak a jelenségeknek, amelyek a villamos mozdony szerkesztőknek már sok gondot okoztak. A chattering slip azonban eddig csak Amerikában volt behatóbb tanulmány tárgya, ott is csak a fellépő rúderők és a lengési frequenciák megmérésére szorítkoztak, a jelenség lényegét elméleti kutatás tárgyává nem tették. Tekintettel arra, hogy a villamos hajtóművekben a legnagyobb erők legtöbbször rezgő csúszással kapcsolatban lépnek fel, érdemes ezt a jelenséget behatóbban megvizsgálni.

Rezgő csúszás (Chattering slip).

Lássuk a sorozatos kerékmegcsúszás bekövetkezésének a feltételeit az utolsóelőtti megcsúszást követő lengések viszonyait vizsgálva, és pedig általánosságban, amikor a mótor ereje P kisebb, mint amennyi a kerekek megcsúsztatásához szükséges (P_{cs}).

A kerékcsúszás t. i. megindulhat $P<P_{cs}$ esetében is lökések következtében, de az is lehetséges, hogy a csúszást egy $P=P_{cs}$ erő indította meg és közben a mótor ereje csökkent.

Vegyük fel P nagyságát P_{cs}-hez viszonyítva $P=\frac{P_{cs}}{K}$-nak, ahol $1 \leqq K < z$. A mótor és a kerekek sebességeit v_M és v_m ebben az utolsó megcsúszást követő állapotban a 4. ábra mu-



4. ábra.

tatja. A jelzések ugyanazok, mint a 3. ábrán voltak, azzal a különbséggel, hogy $v_0>0$. Ha az időszámítást a megcsúszás pillanatával kezdjük, akkor *ebben a pillanatban* $t=0$ és az (5) és (6) egyenletekből, mint előbb

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\Delta v}{\omega c (P_{cs}-P_0)}\right) \tag{7}$$

és

$$A_M + A_m = \sqrt{(P_{cs}-P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega}\right)^2} \tag{8}$$

$P=\frac{P_{cs}}{K}$ értékét a

$$P_0 = \frac{P_{cs}}{z} + \frac{m}{M+m}\left(P - \frac{P_{cs}}{z}\right)$$

egyenletbe helyettesítve lesz:

$$P_0 = P_{cs}\left(\frac{1}{z}\,\frac{M}{M+m} + \frac{1}{K}\,\frac{m}{M+m}\right),$$

a (7) egyenlet szerint

$$\Delta v = -\,\omega c P_{cs}\left(1 - \frac{1}{z}\,\frac{M}{M+m} - \frac{1}{K}\,\frac{m}{M+m}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

és a (8) egyenlet szerint a lengések amplitudóit az

$$A_M + A_m = P_{cs}c\left(1 - \frac{1}{z}\,\frac{M}{M+m} - \frac{1}{K}\,\frac{m}{M+m}\right)\frac{1}{\cos\varphi}$$

egyenlet adja. Mivel

$$v_0 = \frac{M}{M+m}\,\Delta v$$

és

$$A_m = \frac{M}{M+m}\,(A_M + A_m),$$

a (4) egyenlet szerint

$$v_m = P_{cs}c\left[\frac{M\omega}{M+m}\left(1 - \frac{1}{z}\,\frac{M}{M+m} - \frac{1}{K}\,\frac{m}{M+m}\right)\operatorname{tg}\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}{c(M+m)}\,t + \frac{M\omega}{M+m}\left(1 - \frac{1}{z}\,\frac{M}{M+m} - \frac{1}{K}\,\frac{m}{M+m}\right)\frac{\sin(\omega t+\varphi)}{\cos\varphi}\right].$$

Annak a feltétele, hogy ez a lengési szakasz legyen a sorozatos megcsúszások között az utolsó, az, hogy ne lehessen $v_m = 0$. A határesetet tehát $\frac{M}{m}$-nek az a legkisebb értéke adja, amely mellett $v_m = 0$ még lehetséges. Ebben az esetben még egy utolsó megcsúszás következik.

Ha v_m-et $\dfrac{M+m}{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z}\right)P_{cs}}\,\omega$-val szorozzuk, $\omega^2 = \dfrac{M+m}{Mmc}$ behelyettesítése után

$$v_m \frac{(M+m)\omega}{\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{z}\right)P_{cs}} = -\left(\frac{M}{m}+1\right)\frac{1-\frac{1}{z}\frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m}+1}-\frac{1}{K}\frac{1}{\frac{M}{m}+1}}{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}\operatorname{tg}\varphi +$$

$$+\omega t_0+\left(\frac{M}{m}+1\right)\frac{1-\frac{1}{z}\frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m}+1}-\frac{1}{K}\frac{1}{\frac{M}{m}+1}}{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}\frac{\sin(\omega t_0+\varphi)}{\cos\varphi}=0.$$

Amint később látni fogjuk

$$\left(\frac{M}{m}+1\right)\frac{1-\frac{1}{z}\frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m}+1}-\frac{1}{K}\frac{1}{\frac{M}{m}+1}}{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}=\frac{1+\frac{M}{m}-\frac{1}{z}\frac{M}{m}-\frac{1}{K}}{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}$$

-nek, mint K, z és $\frac{M}{m}$ függvényének külön jelentősége van, azért az írás egyszerűsítése végett jelöljük Φ-vel.

$$\Phi=\frac{1+\frac{M}{m}-\frac{1}{z}\frac{M}{m}-\frac{1}{K}}{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}. \qquad (14)$$

Tehát lesz

$$v_m \frac{(M+m)\omega}{\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{z}\right)P_{cs}} = -\Phi\operatorname{tg}\varphi+\omega t_0+\Phi\frac{\sin(\omega t_0+\varphi)}{\cos\varphi}=0$$

és

$$\Phi=\frac{\omega t_0}{\sin(\omega t_0+\varphi)}\;\frac{\cos\varphi}{\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega t_0+\varphi)}-1}. \qquad (15)$$

Φ-nek és vele együtt $\frac{M}{m}$-nek az a legkisebb értéke, amely adott φ és K értékek mellett $v_m = 0$ egyenletet még kielégíti, $\frac{d\Phi}{d(\omega t_0)} = 0$-nak felelnek meg, amiből

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega t_0 - \omega t_0 \cos \omega t_0}{1 - \omega t_0 \sin \omega t_0 - \cos \omega t_0}. \tag{16}$$

A (14) egyenlet megadja Φ-t $\frac{M}{m}$, K és z függvényében, a (15) egyenlet a Φ-t φ és ωt_0 függvényében, a (16) egyenlet pedig φ-t ωt_0 függvényében adja meg.

Ezek azok a határértékek, amelyek mellett $v_m = 0$ még lehetséges, tehát még egy utolsó megcsúszás következhetik.

Lássuk mik lesznek a lengések amplitudói és milyen dynamikus túlerőket okoznak azok a hajtóműben az utolsó megcsúszás után.

Az utolsóelőtti megcsúszás megszűnésének a pillanatában tehát a következő, ω' szögsebességű csúszásmentes lengési szakasz kezdetén lesz

$$\begin{aligned}(y_M - y_m)_{t=t_0} = (y'_M - y'_m)_{t'=0} &= P_0 c + (A_M + A_m)\cos(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= P'_0 c + (A'_M + A'_m)\cos\varphi' \\ (v_M - v_m)_{t=t_0} = (v'_M - v'_m)_{t'=0} &= -\omega(A_M + A_m)\sin(\omega t + \varphi) = \Delta v' = \\ &= -\omega'(A'_M + A'_m)\sin\varphi'.\end{aligned}$$

Ezen egyenletekből az utolsóelőtti csúszás megszüntét követő lengések amplitudói:

$$A'_M + A'_m =$$

$$= \sqrt{[(P_0 - P'_0)c + (A_M + A_m)\cos(\omega t + \varphi)]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 (A_M + A_m)^2 \sin^2(\omega t_0 + \varphi)},$$

ahol

$$P_0 - P'_0 = P_0 - P =$$

$$= P_{cs}\left[\frac{1}{z} + \frac{m}{M+m}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{K}\right] = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{K}\right)\frac{M}{M+m} P_{cs}$$

és az előbbiek szerint

$$A_M + A_m = \frac{P_{cs} c}{\frac{M}{m} + 1}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z}\right)\frac{\Phi}{\cos\varphi}.$$

Ezeket behelyettesítve $A'_M+A'_m$ egyenletébe, lesz

$$A'_M + A'_m =$$

$$= P_{cs}c\frac{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}{\frac{M}{m}+1}\sqrt{\left(\frac{\Phi\cos(\omega t_0+\varphi)}{\cos\varphi}-\frac{M}{m}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}}.$$

A kerekek újbóli, mármost utolsó megcsúszása bekövetkezik, amikor

$$y'_M - y'_m = P'_0c + (A'_M+A'_m)\cos(\omega' t'_0+\varphi') = 1{\cdot}03P_{cs}c.$$

Mivel $= P'_0 = \frac{P_{cs}}{K}$

$$\cos(\omega' t'_0+\varphi') = \frac{P_{cs}c\left(1{\cdot}03-\frac{1}{K}\right)}{A'_M+A'_m}$$

és

$$\sin(\omega' t'_0+\varphi') = \sqrt{1-\left(\frac{P_{cs}c\left(1{\cdot}03-\frac{1}{K}\right)}{A'_M+A'_m}\right)^2}.$$

Ebben a pillanatban

$$\Delta v'' = (v'_M-v'_m)_{t'=t'_0} = -\omega'(A'_M+A'_m)\sin(\omega' t'_0+\varphi') =$$

$$= -\omega'\sqrt{(A'_M+A'_m)^2-\left[P_{cs}c\left(1{\cdot}03-\frac{1}{K}\right)\right]^2}.$$

Az utolsó megcsúszást követő lengések amplitudói a 8. egyenlet szerint lesznek.

$$A''_M + A''_M = \sqrt{(P_{cs}-P_0)^2c^2+\left(\frac{\Delta v''}{\omega}\right)^2}$$

Az írás egyszerűsítése végett legyen

$$B = \left(\frac{A'_M+A'_m}{P_{cs}c}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{K}-\frac{1}{z}}{\frac{M}{m}+1}\right)^2\left[\left(\frac{\Phi\cos(\omega t_0+\varphi)}{\cos\varphi}-\frac{M}{m}\right)^2+\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}\right]$$

és

$$A''_M + A''_m = P_{cs} c \sqrt{\left(1 - \frac{P_0}{P_{cs}}\right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[B - \left(1{,}03 - \frac{1}{K}\right)^2\right]}.$$

A hajtóműben az utolsó megcsúszás után fellépő legnagyobb erő lesz

$$P_{\max} = P_0 + \frac{A''_M + A''_m}{c}$$

és

$$\frac{P_{\max}}{cs} = \frac{P_0}{P_{cs}} + \sqrt{\left(1 - \frac{P_0}{P_{cs}}\right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[B - \left(1{,}03 - \frac{1}{K}\right)^2\right]}, \quad (17)$$

ahol

$$\frac{P_0}{P_{cs}} = \frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}{\frac{M}{m} + 1} \quad \text{és} \quad \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = \frac{21 + \frac{M}{m}}{21 + 21\,\frac{M}{m}}.$$

A 17. képlet használatát megkönnyíti az 5-ik számú ábra, mely a $\Phi = \dfrac{1 + \frac{M}{m} - \frac{1}{z}\,\frac{M}{m} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}$-nek a (15) és (16) egyenletek segélyével kiszámított

$$f(\Phi) = \frac{\Phi \cos(\omega t_0 + \varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{és} \quad f_1(\Phi) = \frac{\Phi^2 \sin^2(\omega t_0 + \varphi)}{\cos^2 \varphi}$$

értékeit adja.

Hozzávetőleges számítás alapjául felvehető $z = 3$-nak, ami száraz sineken homokozás nélkül az álló és a csúszó súrlódási tényező viszonyszámának jó átlagos értéke. A 6. ábrában feltüntetett diagramm $z = 3$ értékeinek megfelelő, a $\frac{P_{\max}}{P_{cs}}$-nek (17) képlet szerint számított értékeit $\frac{1}{K}$ és $\frac{M}{m}$ függvényében adja.[1, 2]

---

[1] A $\frac{P_{\max}}{P_{cs}}$ görbéknek 1 felé konvergáló részeit már nagy mértékben befolyásolja az önkényesen felvett $\frac{M}{m} = 20$ érték, azért azokat a diagrammban már nem tüntettük fel.

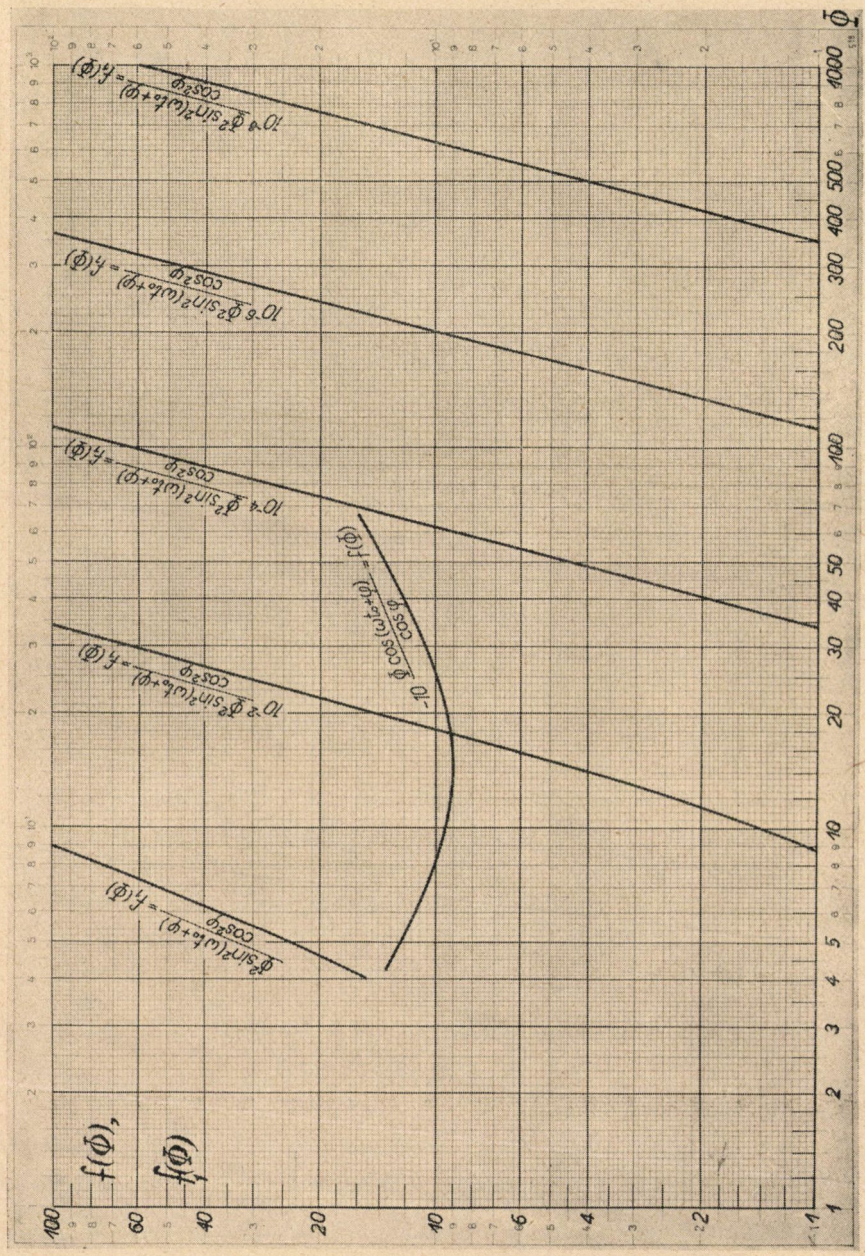
[2] Az 5. és 6. ábrán feltüntetett függvényértékeket br. Kornyi László főmérnök számította és ő készítette az ábrák eredeti vázlatait is. Szívességét hálásan köszönöm.

Amint látható, a lehetséges legnagyobb erő nagyobb, ha a mótor és a kerekek tömegének viszonyszáma $\frac{M}{m}$ nagyobb. Ugyancsak nagyobb a lehetséges legnagyobb erő, ha K nagyobb. Tehát arra a látszólag lehetetlen eredményre jutunk, hogy a *hajtóműben kerékcsúszás alkalmával fellépő igénybevétel annál nagyobb, minél kisebb a mótor által kifejtett erő.*

A görbék mutatják, hogy nagy erők léphetnek fel akkor is, ha a mótor és a kerekek forgó tömegének viszonyszáma $\frac{M}{m}$ kicsiny, tehát egyedül a tervezéssel, a tömegek arányának megfelelő megválasztásával a veszedelmes igénybevételek lehetőségét teljesen nem szüntethetjük meg, csak a mértéküket csökkenthetjük. Fontosabb az, hogy P_{cs}-nél lényegesen kisebb mótorerőnél kerékcsúszás ne következhessék be, vagyis hogy az első megcsúszás előtt a hajtóműben lengések ne legyenek és hogy a megcsúszás után azonnal ne csökkenjék a mótor ereje. Ez az utóbbi rendesen csak kis mértékben következik be, mert a mótor sebessége a kerékcsúszás első pillanatában alig változik. A lengésmentes indítás azonban bizonyos körülmények között csak nehezen kerülhető el. Az a mód, ahogy közvetlen a bekapcsolás után a motor vonóerejét szabályozzuk, lényeges befolyással van a keletkező lengések nagyságára és ezekkel a kerékcsúszással kapcsolatban fellépő dynamikus túlerőkre.

A szokásos lépcsős szabályozás mellett alig kerülhető el a hajtómű lengése a mótor bekapcsolása után. Hiába vannak a szabályozónak finom fokozatai, az egyik fokozatról a másikra történő átkapcsolás pillanatában a mótornak épp hátrafelé lehet elongatiója, úgy hogy a vonóerőnek óvatos fokozása mellett is minden további kapcsolással növekvő lengések léphetnek fel. Amint könnyen belátható, ezeknek a lengéseknek az amplitudója a legkedvezőtlenebb esetben, t. i. akkor, ha a következő fokozatra való kapcsolás mindig pontosan akkor történik, amikor a mótor elongatiója hátrafelé maximum, elérheti a $\frac{P}{c}$ értéket,[1] ahol

[1] Ebben az esetben is, mint eddig mindig, eltekintettünk a lengést csillapító körülményektől.


f(Φ),
f₁(Φ)
Φ
$10^{-4}\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}=f_1(\Phi)$
$10^{-6}\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}=f_1(\Phi)$
$10^{-4}\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}=f_1(\Phi)$
$10^{-2}\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}=f_1(\Phi)$
$\frac{\Phi^2\sin^2(\omega t_0+\varphi)}{\cos^2\varphi}=f_1(\Phi)$
$-10\frac{\Phi\cos(\omega t_0+\varphi)}{\cos\varphi}=f(\Phi)$

5. ábra.

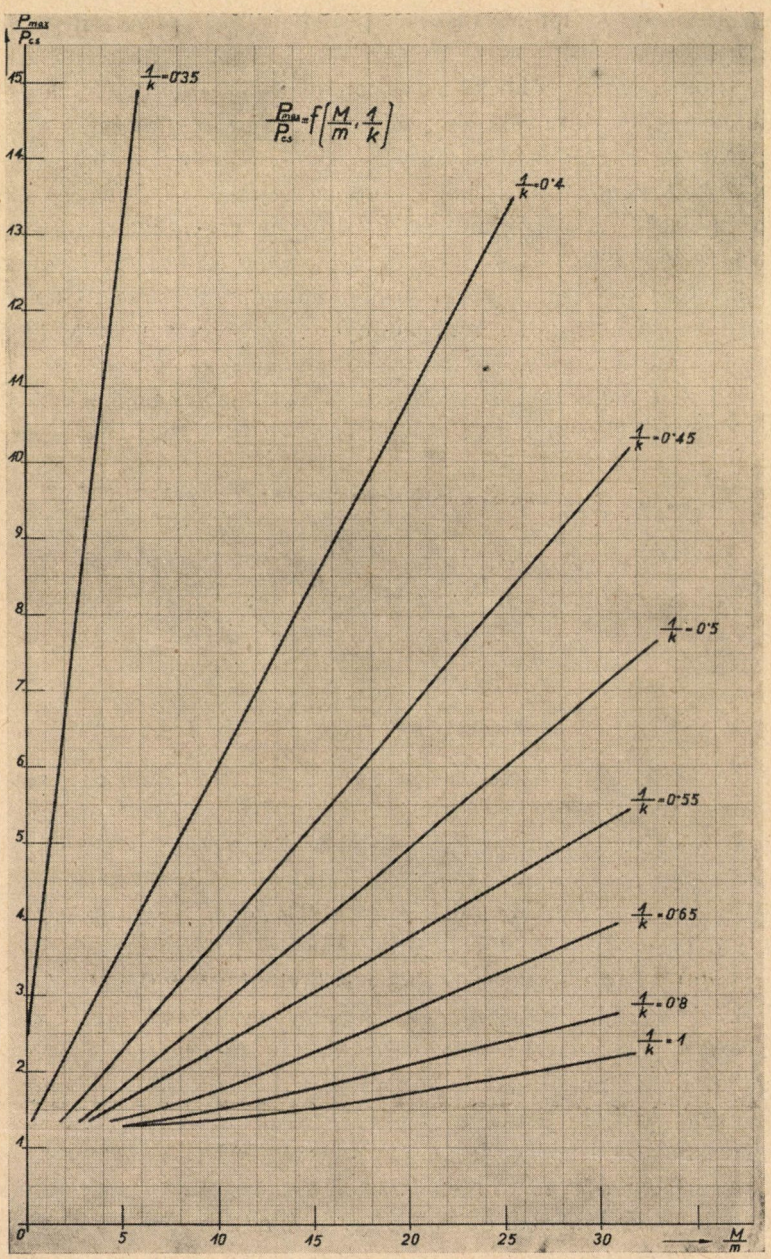
P a mótor vonóereje azon a fokon, amelyre utoljára kapcsoltatott és c a hajtómű rugalmassága. Tehát a megcsúszás $P=\frac{1}{2}P_{cs}$ erőnél is bekövetkezhetik. Ennek a valószínűsége annál nagyobb, minél kevesebb szabályozó fokozaton át éri el a motor az $\frac{1}{2}P_{cs}$ erőt. Ha már az első bekapcsolással eléri, akkor elkerülhetetlen, hogy a kerékcsúszás $P=\frac{1}{2}P_{cs}$-nél következzék be. Ha több fokozaton át éri el, akkor a valószínűség kisebb, de a sok indítás egyikénél, másikánál mégis csak megközelíti a lengés amplitudója a $\frac{P}{c}$ értékét.

A hajtóműben levő holtjáték a lengés gerjesztését még fokozhatja. A 7. sz. ábrán vázolt elrendezés azt az esetet mutatja, amikor a hajtóműben s játék van. M_1, m és M mint előbb a mozdony a kerekek és a mótor tömegét és c a hajtómű rugalmasságát jelképezik. A P erő által kifejtett munka $P(s+Pc+A_M)$, ahol A_M a motor lengésének az amplitudója. Ez a munka egyenlő a hajtóműben, mint rugóban, felhalmozott munkával, $\frac{(P.c+A_M)^2}{2c}$-vel. Amiből

$$A_M = P.c.\sqrt{1+\frac{2s}{P.c}}$$

P nagysági rendje 10^4 kg; c-é pedig 10^{-7} m/kg; tehát P_c nagysági rendje 10^{-3} m $= 1$ mm lévén, $s = 1{\cdot}5$ mm összes játék a hajtóműben már megkettőzheti a lengési amplitudót. $1^1/_2$ mm, sőt annál nagyobb holt játék azonban fogaskerekes hajtóműveknél már új állapotban is lehetséges, azért az ilyen hajtóműveknél lépcsős szabályozásnál számítani kell azzal, hogy $P<\frac{P_{cs}}{z}$ mótor erőnél is megcsúszhatnak a kerekek és az $\frac{M}{m}$ viszonyszám nagysága szerint mint legnagyobb erő a hajtóműben, esetleg P_{cs} többszöröse léphet fel.

A fogaskerék alkalmazása azonban nemcsak az elkerülhetetlen holtjátékkal, hanem azáltal is fokozza a kerékcsúszás folytán fellépő dynamikus túlerőket, hogy a számításba jövő $\frac{M}{m}$

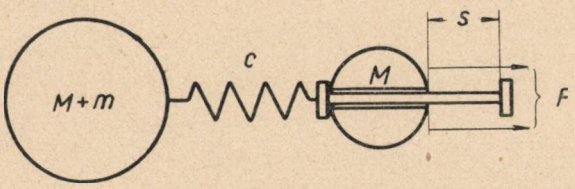

$\frac{P_{max}}{P_{cs}}$
$\frac{P_{max}}{P_{cs}} = f\left(\frac{M}{m}, \frac{1}{k}\right)$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}35$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}4$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}45$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}5$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}55$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}65$
$\frac{1}{k} = 0{\cdot}8$
$\frac{1}{k} = 1$
0
5
10
15
20
25
30
$\frac{M}{m}$

6. ábra.

tömeg-viszonyszámot a fogaskerék-áttétel viszonyának négyzete arányában növeli.

Sokkal kedvezőbbek a viszonyok vizi indítónál, ahol a mótor erejének növekedése folytonos, ami egyértelmű azzal, mintha a kapcsolási fokozatok száma végtelen volna. Csak arról kell gondoskodni, hogy a mótor erejének a kifejlődése úgy történjék, hogy a hajtómű hosszváltozása aperiodikusan következhessék be. Ez tekintettel arra, kogy a mótor lengési frequentiája, amikor a kerék nem csúszik, másodpercenként 10 lengés körül vagy azon felül van, könnyen elérhető, a nélkül, hogy ezzel a mozdony megindulását érezhetően késleltetnők.

Rezgő csúszás bekövetkezhetik menetközben is, ha a mozdony menetsebessége összeesik valamelyik kritikus sebességgel,



7. ábra.

amikor a hajtómű rugalmasságának a ciklikus változása, vagy valami kiviteli pontatlanságból folyó ciklikus szögsebesség ingadozás lengéseket gerjeszt. Ha ezeknek e lengéseknek az amplitudói elég nagyok arra, hogy a hajtóműben fellépő erőt egy pillanatra P_{cs} fölé emeljék, a kerékcsúszás bekövetkezhetik P_{cs}-nél lényegesen kisebb mótorerő mellett is, és a rezgő csúszás megindul. Ezért szükséges, hogy a kiviteli pontatlanság és az elaszticitás ciklikus ingadozása gondos tervezéssel és a kivitel szigorú ellenőrzésével bizonyos határok alá szoríttassék. A tapasztalat t. i. azt mutatja, hogy a lengések gerjesztéséhez bizonyos nagyságú kiviteli pontatlanság kell; azon alul lengések nem keletkeznek. A lengésgerjesztő okok kiküszöbölése azonban egyedül nem elegendő, mert menetközben rezgőcsúszás lengések nélkül is megindulhat azáltal, hogy egy pillanatban a keréknyomás, vagy a kerék és sín közötti súrlódás csökken, p. o. akkor, ami-

kor a kerék nagy sebességgel áthalad egy meglazult sínkötésen.[1] Ha a tengelyek csatlórudakkal vannak összekötve, azok megakadályozzák, hogy egyes tengelyek kerekei külön megcsússzanak. *Egyes* hajtásnál azonban ez megtörténhetik és így menetközben egyes tengelyek időközönkénti rezgő csúszása elkerülhetetlen.

Hogy fogaskerekes egyes hajtásoknál eddig több baj nem történt, annak az a magyarázata, hogy az ilyen egyes hajtások alkatrészeit gyakorlati tapasztalatok hiányában rendesen túlméretezik eltérően a forgattyús és csatlórudas hajtásoktól, amelyeknek a méretezésében a gőzmozdonyok hajtóműveivel szerzett tapasztalatokra támaszkodva a tervezők merészebbek szoktak lenni. Ezért épp azokkal az egyes hajtásokkal voltak bajok, ahol a méretezés «gondos számítások» alapján történt. Az ezeknél bekövetkezett ismételt csaptörésekből a számítás alapjául vett erőknél lényegesen nagyobb erők fellépésére következtethetünk. Hogy a törést okozó dynamikus túlerők milyen nagyok, azt mutatja az a körülmény, hogy amikor bizonyos hajtóműben a gyengének bizonyult alkatrészeket erősebbekkel cserélték ki, a kerekek küllői kezdtek törni.

Összefoglalva az eredményeket, megállapítható, hogy:

1. Nagy tévedés azt hinni, hogy a kerekek megcsúszása a hajtóműben fellépő erőt P_{cs} értékre korlátozza. Ellenkezőleg épp a kerékcsúszás következtében léphetnek fel P_{cs} többszörösét elérő dynamikus túlerők.

2. A rezgő csúszás nem resonantia jelenség. Bekövetkezhetik a mótor forgó tömegének önlengési frequentiájától függetlenül bármilyen sebességnél, még állásból való indításnál is, de kiválthatja resonantia okozta lengés is azáltal, hogy a kerékcsúszást megindítja.

3. Rezgő csúszásra annál hajlamosabb a szerkezet, minél nagyobb a mótor forgó tömege a kerekekéhez viszonyítva

[1] Amerikában a két sín kötéseit fél sínhosszal eltolva szokták elhelyezni. Nálunk a sínkötések rendesen egymással szemben vannak, tehát ugyanannak a tengelynek mindkét kereke egy időben fut át a sínkötésen.

$\left(\frac{M}{m}\right.$ viszonyszám$\left.\right)$ és annál nagyobbak a keletkező dynamikus túlerők, minél nagyobb az $\frac{M}{m}$ viszonyszám.

4. A rezgő csúszás nemcsak forgattyús és csatlórudas hajtóművekben léphet fel, hanem az úgynevezett egyes hajtásokban is, sőt ezek még hajlamosabbak a rezgő csúszásra, ha fogaskerék áttételük van, egyrészt a mótor tömegének megnövekedett hatása, másrészt a fogaskerekeknél elkerülhetetlen holtjáték miatt.

5. Lépcsős kapcsolásnál elkerülhetetlen, hogy már a megcsúszás előtt lengések keletkezzenek és hogy így indításnál egyszer-másszor rezgő csúszás jöjjön létre. Vízindítónál ellenben helyes szerkezettel a lengésmentes indítás egyszersmindenkorra biztosítható.

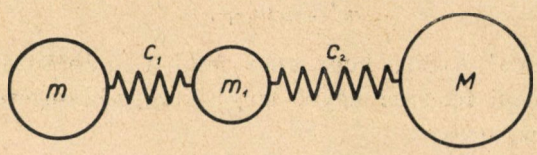
6. A menetközben fellépő rezgő csúszás a resonantiát okozó körülmények (ú. m. ciklikusan változó hajtómű elaszticitás, kiviteli pontatlanságok, stb.) kiküszöbölésével csak akkor szüntethető meg, ha több tengely van rudakkal összekapcsolva, egyes hajtásoknál azonban nem, mert ezeknél a keréknyomásnak zökkenések okozta pillanatnyi csökkenése is megindíthatja a csúszást.

Három tömegű hajtóművekben kerékcsúszás következtében fellépő erők.

Eddig olyan hajtóműveket vizsgáltunk, amelyekben a mótor és a kerekek tömege mellett a hajtómű tömege elhanyagolható. *Rugózott agyú fogaskerék hajtásnál* azonban — ha a nagy fogaskerék nem a jármű tengelyén, hanem előtéttengelyen van, amely a kerekekkel, csatló-rudakkal, vagy elasztikus, vagy csuklós kapcsolással van összekötve — az előtét tengelyen levő fogaskerék (forgattyú ellensúly, stb.) tömege már nem hanyagolható el a kerekek és a motor forgó tömege mellett. Ilyen esetben *számításba kell venni ezt a harmadik tömeget is,* amely a másik kettővel rugalmas kapcsolatban van és így azokhoz képest külön lengésbe jöhet. Az ilyen három tömegű rendszernek tehát több szabad lengési frequentiája van, a szerint, hogy hol keletkez-

hetnek lengési csomópontok, azaz a hajtóműnek olyan pontjai, amelyek lengés közben a helyüket nem változtatják.

A 8. sz. ábrán feltüntetett vázlat három tömegű lengő rendszert jelképez, ahol m a kerekek, m_1 az előtét tengely, és M a mótor forgótömege, c_1 a csatló rudak vagy a csuklós (eset-



8. ábra.

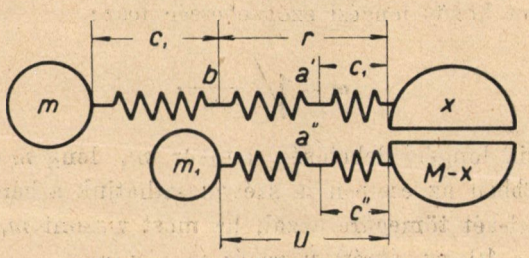
leg rugós) kapcsolás, c_2 pedig a fogaskerék-agy rugóinak az elaszticitását jelképező rugó.

A szerint, hogy mc_1 vagy Mc_2 nagyobb, a lengési csomópont m_1-től balra vagy jobbra keletkezik és vagy m leng m_1-el és M-el szemben, vagy M leng m_1-el és m-el szemben. Tegyük fel az utóbbit. A lengési frequentia, vagy ennek a 2π-szerese a lengési szögsebesség: ω a következő meggondolás alapján számítható ki:

Képzeljük M-et két részre vágva, x-re és $M-x$-re és c_2 rugót vele egyenértékű két rugóval, r-el és u-val helyettesítve (lásd a 9. sz. ábrát), aminek a feltétele, hogy

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{u} \tag{1}$$

legyen. Az u rugó $M-x$-et m_1-el, az r rugó pedig x-et c_1 rugóval köti össze. Így két kettős tömegű lengő rendszer keletkezik, amelyeknek a csomópontjai a'-nál és a''-nál vannak.



9. ábra.

Annak a feltétele, hogy ennek a két rendszernek a szabad lengési szögsebessége ugyanaz legyen, az, hogy

$$xc' = (M-x)c'' \tag{2}$$

$$xc' = m_1(u-c'') \tag{3}$$

és

$$xc' = m(c_1+r-c') \tag{4}$$

legyen. Annak pedig, hogy ezen felül a 8. ábrán feltüntetett három tömegű rendszer egyik lengési szögsebességével is megegyezzék, az, hogy

$$\frac{c'}{r} = \frac{c''}{u} \tag{5}$$

legyen, mert csak ebben az esetben maradhat lengés közben m_1 a c_1 rugó végével, b-vel, x, $M-x$-el és a két csomópont a' és a'' egymással együtt. E nélkül a 8. ábrán és a 9. ábrán feltüntetett két rendszer nem volna egyenértékű.

Így öt egyenletünk van öt ismeretlennel, x, r, u, c' és c''. Ezekből r, u, c' és c'' kiküszöbölésével kapjuk x-re mint egyedüli ismeretlenre az

$$mc_1x^2+[(m+m_1)Mc_2-(M+m_1)mc_1]x-mM^2c_2=0 \tag{6}$$

egyenletet. Ennek két gyöke közül egyik mindig vagy negatív, vagy nagyobb mint M, ami fizikai lehetetlenség, tehát csak egy lengési szögsebesség lehetséges, úgy, hogy M leng m_1-el és m-el szemben.

x segítségével kiszámítható

$$c' = \frac{m}{x+m}\left(c_1+c_2\frac{M}{x}\right) \tag{7}$$

és a keresett közös lengési szögsebesség lesz:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{xc'}}. \tag{8}$$

A másik lengési lehetőség, amikor m_1 leng m-el és M-el szemben. Ebben az esetben is szétválaszthatjuk a háromtömegű rendszert két-két tömegűre azzal, ha most viszont m_1-et vágjuk ketté (lásd a 10. sz. ábrát) x_1-re és m_1-x_1-re.

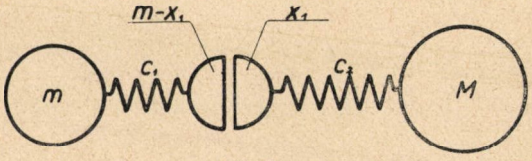
Annak a feltétele, hogy ennek a két rendszernek a lengési szögsebessége egymás között és a 8. ábrán feltüntetett három tömegű rendszer második, most keresett lengési szögsebességével megegyezzék, az, hogy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m+m_1-x_1}{m(m_1-x_1)c_1}} = \sqrt{\frac{M+x_1}{Mx_1c_2}} \tag{9}$$

legyen, amiből

$$(mc_1-Mc_2)x_1^2+[(m+m_1)Mc_2+mMc_1-mm_1c_1]x_1=mm_1Mc_1=0.$$

Ennek az egyenletnek is egyik gyöke mindig vagy negatív, vagy nagyobb, mint m_1, ami fizikai lehetetlenség, tehát ebben



10. ábra.

az esetben is csak egy lengési szögsebesség van, ω_1, amit a 9. egyenlet ad a $0 < x_1 < m_1$ gyökkel.

Ismerve a két lehetséges szabad lengés szögsebességét, ω-t és ω_1-et, felállíthatjuk a háromtömegű lengő rendszer egyenleteit kerékcsúszás állapotában.

A három tömeg elmozdulása a t idő-pillanatban

$$y_M = Y+v_0t+\frac{P-\frac{Pcs}{z}}{M+m_1+m}\frac{t^2}{2}+P_{01}c_1+P_{02}c_2- \tag{10}$$
$$-Y_0+A_M\cos(\omega t+\varphi)+A_{1M}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$

$$y_{m_1} = Y+v_0t+\frac{P-\frac{Pcs}{z}}{M+m_1+m}\frac{t^2}{2}+P_{01}c_1-Y_0- \tag{11}$$
$$-Am_1\cos(\omega t+\varphi)-A_{1m1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$

$$y_m = Y+v_0t+\frac{P-\frac{Pcs}{z}}{M+m_1+m}\frac{t^2}{2}-Y_0- \tag{12}$$
$$-A_m\cos(\omega t+\varphi)+A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1).$$

Ahol P a mótor ereje, P_{cs} a kerék megcsúsztatáskor szükséges erő. Y a közös tömegközéppont kezdeti elmozdulása ($t=0$ pillanatban)

$$Y = \frac{MP_{cs}(c_1+c_2)+m_1P_{cs}c_1}{M+m_1+m}$$

v_0 a három tömeg közös tömegközéppontjának kezdeti sebessége és

$$\frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}$$

ugyanannak a gyorsulása.

$$P_{01}=\frac{P_{cs}}{z}+\frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}m \tag{13}$$

a c_1 rugóban a lengésmentes feszültség kerékcsúszás közben,

$$P_{02}=\frac{P_{cs}}{z}+\frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}(m_1+m) \tag{14}$$

ugyanaz a c_2 rugóban.

Y_0 a tömegközéppont eltolódása m-hez viszonyítva a P_{01} és P_{02} erők hatása alatt

$$Y_0=\frac{M(P_{01}c_1+P_{02}c_2)+m_1P_{01}c_1}{M+m_1+m}.$$

A_M, A_{m1} és A_m a három tömeg ω szögsebességű lengésének amplitudói. A_{1M}, A_{1m1} és A_{1m} ugyanazok ω_1 szögsebességnél.

A tömegek sebességei a t idő pillanatban:

$$v_M=\frac{dy_M}{dt}=v_0+\frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}t-\omega A_M\sin(\omega t+\varphi)- \tag{15}$$
$$\omega_1A_{1M}\sin(\omega_1t+\varphi_1)$$

$$v_{m1}=\frac{dy_{m1}}{dt}=v_0+\frac{P-\frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}t+\omega Am_1\sin(\omega t+\varphi)+ \tag{16}$$
$$+\omega_1A_{1m1}\sin(\omega_1t+\varphi_1)$$

$$v_m = \frac{dy_m}{dt} = v_0 + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} t + \omega A_m \sin(\omega t+\varphi) - \omega_1 A_{1m} \sin(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (17)$$

A gyorsulás pedig:

$$\frac{d^2y_M}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} - \omega^2 A_M \cos(\omega t+\varphi) - \omega_1^2 A_{1M} \cos(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (18)$$

$$\frac{d^2ym_1}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} + \omega^2 A_{m1} \cos(\omega t+\varphi) + \omega_1^2 A_{1m1} \cos(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (19)$$

$$\frac{d^2y_m}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} + \omega^2 A_m \cos(\omega t+\varphi) - \omega_1^2 A_{1m} \cos(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (20)$$

Ha az időt a kerékmegcsúszás első pillanatától számítjuk ($t=0$), a tömegek elmozdulása lesz ebben a pillanatban:

$$y_{M(t=0)} = Y + P_{01}c_1 + P_{02}c_2 - Y_0 + A_M \cos\varphi + A_{1m} \cos\varphi_1 = P_{cs}(c_1+c_2) \quad (21)$$

$$y_{m1(t=0)} = Y + P_{cs}c_1 - Y_0 - A_{m1} \cos\varphi - A_{1m1} \cos\varphi_1 = P_{cs}c_1 \quad (22)$$

$$y_{m(t=0)} = Y - Y_0 - A_m \cos\varphi + A_{1m} \cos\varphi_1 = 0. \quad (23)$$

Ugyancsak így a gyorsulások a $t=0$ idő pillanatban:

$$\frac{d^2y_M}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} - \omega^2 A_M \cos\varphi - \omega_1^2 A_{1M} \cos\varphi_1 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^2y_{m1}}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} + \omega^2 A_{m1} \cos\varphi + \omega_1^2 A_{1m1} \cos\varphi_1 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d^2y_m}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} + \omega^2 A_m \cos\varphi - \omega_1^2 A_{1m} \cos\varphi_1 = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{m}. \quad (26)$$

A 21. és 24. egyenletből:

$$A_M \cos\varphi = \frac{\omega_1^2[P_{cs}(c_1+c_2) - Y - P_{01}c_1 - P_{02}c_2 + Y_0] - \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad (27)$$

és

$$A_{1M} \cos\varphi = P_{cs}(c_1-c_2) - Y - P_{cs}c_1 - P_{cs}c_2 + Y_0 \quad A_M \cos\varphi. \quad (28)$$

A 22. és 25. egyenletből:

$$A_{m1} \cos\varphi = \frac{\omega_1^2[P_{cs}c_1 - Y - P_{01}c_1 + Y_0] - \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (29)$$

és

$$A_{1m1} \cos\varphi = Y + P_{01}c_1 - Y_0 - P_{cs}c_1 - A_{m1} \cos\varphi. \quad (30)$$

A 23. és 26. egyenletből:

$$A_m \cos\varphi = \frac{\omega^2(Y_0 - Y) + \left(P - \frac{P_{cs}}{z}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M+m_1+m}\right)}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (31)$$

és

$$A_{1m} \cos\varphi_1 = Y_0 \quad Y + A_M \cos\varphi. \quad (32)$$

A $t=0$ időpillanatban a három tömeg sebessége:

$$v_{M(t=0)} = v_0 - \omega A_M \sin\varphi - \omega_1 A_{1M} \sin\varphi_1 \quad (33)$$

$$v_{m1(t=0)} = v_0 + \omega A_{m1} \sin\varphi + \omega_1 A_{1m1} \sin\varphi_1 \quad (34)$$

$$v_{m(t=0)} = v_0 + \omega A_m \sin\varphi - \omega_1 A_{1m} \sin\varphi_1, \quad (35)$$

ahol

$$v_{m(t=0)} = 0; \; v_0 = \frac{M v_{M(t=0)} + m_1 v_{m(t=0)}}{M+m_1+m}. \quad (36)$$

Ha a 27—32. egyenletekből A_M, A_{1M}, A_{m1}, A_{1m1}, A_m és A_{1m} értékeit 33., 34. és 35. egyenletekbe behelyettesítjük, négy lineáris egyenletet kapunk öt ismeretlennel: v_0, $v_{M(t=0)}$ $v_{m1(t=0)}$, $\operatorname{tg}\varphi$ és $\operatorname{tg}\varphi_1$ számára. Ha az öt közül egy adva van, a többi négy kiszámítható a négy egyenletből.

A hajtórudakban fellépő legnagyobb erő

$$P_{\max} = P_{01} + \frac{A_m - A_{m1} + A_{1m} + A_{1m1}}{c_1},$$

a fogaskeréken pedig

$$P_{\max}=P_{02}+\frac{A_M+A_{m1}+A_{1M}+A_{1m1}}{c^2}.$$

Ha a kerékmegcsúszást közvetlenül megelőzőleg a hajtómű lengésmentes, vagyis nemcsak $v_{m(t=0)}=0$ hanem $v_{M1(t=0)}=0$ és $v_{m1(t=0)}=0$, akkor $v_0=0$, $\operatorname{tg}\varphi=0$, $\operatorname{tg}\varphi_1=0$ és $\cos\varphi=\pm 1$ és $\cos\varphi_1=\pm 1$.

A Norfolk & Western vasút $1B+B1$ mozdonyain végzett mérések.

Ezek a mérések azt mutatták, hogy rezgő csúszásnál a hajtóműben fellépő legnagyobb erő a kerék kerületére vonatkoztatva eléri az adhaesiosúly 110%-át. Ha a kerék és sín közötti surlódás tényezőjét 0·3-nak vesszük fel, ez az eredmény $\frac{P_{\max}}{P_{cs}}=3{\cdot}67$-nek felel meg. A legnagyobb erő tehát a kerekek megcsúsztatásához szükséges erőnek a 3·67-szorosa.

Vizsgáljuk meg milyen üzemviszonyok felelnek meg ennek a maximális erőnek az alábbiakban levezetett képletek szerint.

A vizsgálat tárgyát képező mozdony hajtóműve három tömegű rendszert képez. Rugós fogaskerekekkel a motor előtét tengelyt hajt, amely forgattyúkkal és csatlórudakkal van a kerekekhez kapcsolva.

A motor forgó tömege $M = 7600$ kg
az előtét tengelyé $m_1 = 684$ «
a kerekeké [1] $m = 1040$ «

A csatlórudak, forgattyúk, stb
rugalmassága $c_1 = 1{\cdot}66 \quad 10^{-8}$ m/kg
a rugós fogaskerékagyé $c_2 = 3{\cdot}7 \quad 10^{-8}$ «

A kerekek megcsúsztatásához szükséges erő [2] $P_{cs}=42000$ kg.

---

[1] A kerékabroncsok félig kopott állapotban vannak számítva.

[2] A kerék és sín közötti surl. tényező csúszás nélkül 0·3-nak, csúszásnál 0·1-nek van felvéve, tehát $z=3$.

A fenti adatok mind a forgattyú-sugárra vannak vonatkoztatva.

A kerékcsúszásnál lehetséges két lengési szögsebesség a 7. és 8. képletek szerint:

$$\omega = 128{\cdot}6 \qquad \omega_1 = 415{\cdot}1.$$

A 27—32. képletekkel kiszámított lengési elongaciok ugyancsak kerékcsúszás közben

$A_M \cos\varphi = 2{\cdot}04.10^{-4}$; $A_{m1} \cos\varphi = 7{\cdot}30.10^{-4}$; $A_m \cos\varphi = 10{\cdot}14.10^{-4}$
$A_{1M} \cos\varphi_1 = 0{\cdot}02.10^{-4}$; $A_{1m1} \cos\varphi_1 = 0.87.10^{-4}$; $A_{1m} \cos\varphi_1 = 0{\cdot}42.10^{-4}$.

Tekintettel a hajtóműben a fogaskerekek miatt már új állapotban is elkerülhetetlen holtjátékra, nem tehető fel, hogy a a hajtómű a megcsúszás pillanatában lengésmentes és így a kerékcsúszás $P = P_{cs}$ mótorerőnél indul meg. A csatlórúd fejekben új állapotban a játék egyenkint 0·036—0·9 mm. Az összes játék a fogaskerekekkel együtt az egész hajtóműben, tehát legalább 3 mm-re tehető már új állapotban.

A számítás egyszerűsítése céljából tekintsünk el az m_1 tömeg befolyásától és számítsuk $v_{M(t=0)}$-t úgy, mintha az indítási lökés energiáját a motor tömege M venné fel.

A legkisebb mótorerő P, amely s holtjáték mellett a kerekek megcsúszását előidézheti, a $P_{cs} = P\sqrt{1 + \frac{2s}{P(c_1+c_2)}}$ egyenletet[1] elégíti ki. Ebből

$$P = -\frac{s}{c_1+c_2} - \sqrt{\left(\frac{s}{c_1+c_2}\right)^2 + P_{cs}^2}.$$

Ha $P_{cs} = 42000$ kg, $s = 3.10^{-3}$ m; $c_1 = 1{\cdot}66\ 10^{-8}$ m/kg,

$c_2 = 3{\cdot}7\ 10^{-8}$ m/kg, akkor $P = 14000$ kg.

Tehát a kerékcsúszás ilyen körülmények között $\frac{P}{P_{cs}} = \frac{1}{K} = \frac{1}{3}$ viszonyszám mellett is lehetséges, ha a P erőt a mótor

[1] Lásd a 22. oldalon $A_M = P.c\sqrt{1 + \frac{2s}{Pc}}$ egyenletet.

már az első bekapcsolás pillanatában azonnal kifejti. Ez a körülmény maga megmagyarázza a nagy dynamikus túlerők fellépését. A két tömegű rendszerekre jellegzetes $\frac{M}{m}$ viszonyszáma helyett vehetjük a jelen esetben az ω_1 szögsebességű lengés figyelmen kívül hagyásával $\frac{A_m \cos\varphi}{A_M \cos\varphi} = \frac{10{\cdot}14}{2{\cdot}04} \cong 5$ viszonyszámot.

A 6. ábra szerint az $\frac{M}{m} = 5$ és $\frac{1}{K} = 0{,}4$ értékeknek $P_{max} = 3{\cdot}67\ P_{cs}$ maximális erő felel meg. Tehát már akkor is ha $P = 0{\cdot}4$. $P_{cs} = 16800$ kg mótorerő mellett következik be a kerékcsúszás, a megfigyelt legnagyobb erő, mely a hajtóműben felléphet: $3{\cdot}67$. $P_{cs} = 154000$ kg. Ez pedig, amint láttuk lehetséges, ha a mótor bekapcsolása durván történik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. ápr. 26.-án tartott üléséből.)

ÜBER DIE DYNAMISCHE BEANSPRUCHUNG DER TRIEBWERKE ELEKTRISCHER LOKOMOTIVEN BEI RADGLEITUNG.[1]

Vom corr. M. KOLOMAN v. KANDÓ. †

So lange die Räder der Lokomotive auf den Schienen rollen ohne zu gleiten, können im Triebwerk nicht wesentlich höhere Kräfte auftreten, als zur Überwindung der Reibung zwischen Schiene und Rad notwendig sind. Der Unterschied, um den die durch das Triebwerk an die Räder übermittelten Kräfte die Reibung zwischen Rad und Schiene übersteigen können, kann vor Eintritt des Gleitens nur einige Prozent betragen. Nach dem Eintritt des Gleitens jedoch können diese Kräfte theoretisch unbegrenzt, in Wirklichkeit aber bis zur Bruchgrenze irgendeines Bestandteiles ansteigen. Es wird gezeigt, dass diese dynamischen Wirkungen mit Schwingungen einhergehen und mit der Amplitude der Schwingungen zunehmen.

Bezeichnet M die rotierende Masse des Antriebsmotors,

---

[1] Postume Antrittsvorlesung. Der im Januar 1931 verstorbene Verfasser hatte die Absicht, diese Abhandlung — die bereits im Herbst 1930 abgeschlossen war — als Antrittsvorlesung in der III. Cl. der Akad. d. Wiss. vorzulegen. Er wollte jedoch die vorliegende Arbeit durch Mitteilung seiner neueren Erfahrungen ergänzen, konnte aber — im besten Schaffen vom Tode hinweggerafft — seine Absicht nicht mehr ausführen. Die vorliegende Abhandlung, deren Vorhandensein den Kollegen des Verfassers bekannt war, wurde aus dem litterarischen Nachlass des Verfassers durch Herrn Hofrat Dr. Julius von Posch dem o. M. Moritz v. Hoor-Tempis zur Verfügung gestellt und von diesem in der Sitzung der III. Cl. der Akad. d. Wiss. am 26. IV. 1937. vorgelegt.

m die Masse der Räder, P die vom Antriebsmotor ausgeübte Kraft, P_{cs} die zur Einleitung des Gleitens notwendige Kraft, $\frac{P_{cs}}{z}$ die Reibung während des Gleitens, P_0 den algebraischen Mittelwert der durch das Antriebswerk übermittelten Kräfte, wenn keine Schwingungen auftreten würden, c (m/kg) die elastische Längenänderung des Triebwerkes (alle Kräfte auf den Radradius bezogen) und f die Frequenz der Schwingungen, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Schwingungen

$$\omega = \frac{\pi}{30} f = \sqrt{\frac{M+m}{M.m.c}}.$$

Tritt kein Gleiten ein, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Schwingungen unbedeutend, denn die Masse der Räder ist als mit der Masse der Lokomotive in starrer Verbindung befindlich zu betrachten. Bei Berechnung der Winkelgeschwindigkeit kann also an Stelle der Radmasse m die um die Masse der Lokomotive vergrösserte Masse $m + M_1$ in die Formel eingesetz werden und es wird

$$\omega = \sqrt{\frac{M + m + M_1}{M(M_1 + m)c}}$$

Bezeichnen A_M und A_m die Schwingungsamplituden der Massen M und m, y_M und y_m die Verschiebung der Massen, v_M und v_m die Geschwindigkeit der Massen und φ den Phasenwinkel der Schwingungen, so gilt für die Längenänderung des Triebwerkes die Gleichung.

$$y_M - y_m = P_0 . c + (A_M + A_m) \cos \varphi = P_{cs} . c$$

und für die Differenz der Geschwindigkeit der zwei Massen die Gleichung

$$\Delta v = v_M - v_m = -\omega (A_M + A_m) \sin \varphi.$$

Im Eintrittsmoment des Gleitens ist $A_m = \frac{M}{m} \cdot A_M$,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\Delta v}{\omega (P_{cs} - P) c} \right)$$

und

$$A_M + A_m = \sqrt{(P_{cs}-P_0)^2c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega}\right)^2}.$$

Das Maximum der im Antriebswerk auftretenden Kraft $\frac{1}{c}(y_M - y_m)$ beträgt $P_0 + \frac{A_m + A_M}{c}$ und kann als Funktion von Δv beliebige Werte erreichen.

Es wird gezeigt, dass für $\frac{M}{m} < 4{\cdot}6$ bei vorsichtigem Anfahren nach Eintritt des Gleitens das Gleiten nicht aufhört. Mit zunehmendem Wert des Verhältnisses $\frac{M}{m}$ steigt die Zahl der möglichen, auf einander folgenden Radgleitungen und im Laufe der sich wiederholenden Gleitungen (klapperndes Gleiten, chattering slip) steigen die zu Beginn des Gleitens auftretenden Geschwindigkeitsunterschiede Δv und die Schwingungsamplituden und mit diesen auch die im Triebwerk auftretenden maximalen Kräfte. Da in den Triebwerken elektrischer Lokomotiven die grössten Beanspruchungan in den meisten Fällen bei klappernder Gleitung eintreten, werden die Bedingungen für den Eintritt des klappernden Gleitens untersucht.

Das aus der Gleichung 17. berechnete Verhältnis $\frac{P_{\max}}{P_{cs}}$ der während des klappernden Gleitens auftretenden grössten Kraft und der zur Einleitung des Gleitens notwendigen Kraft (wenn man die durchschnittliche Verhältniszahl der Reibungskoeffizienten der stehenden und gleitenden Reibung auf reinen Schienen $z = 3$ gesetzt, was als guter Durchschnittswert gelten kann) ist als Funktiou des Verhältnisses $\frac{M}{m}$ in Fig. 6. dargestellt[1] u. zw. für verchiedene Werte

$$\frac{P}{P_{cs}} = \frac{1}{K}; \quad \left(1 \leqq K < z\right).$$

[1] Die Curvenwerte der Figuren 5. und 6. wurden mit Hilfe der Formeln 15., 16. und 17. durch Herrn Oberingenieur Br. LADISLAUS KORÁNYI berechnet.

Die Kräfte, die während der klappernden Gleitung auftreten können, steigen mit der Verhältniszahl der Motor- und Radmassen $\frac{M}{m}$ an und nehmen auch mit wachsendem K zu. Aus Fig 6. ist ersichtlich, dass auch bei kleines Wertes des Verhältnisses $\frac{M}{m}$ — für kleine Werte $\frac{1}{K}$ — das Maximum der auftretenden Kräfte die zur Einleitung des ersten Gleitens nötige Kraft um ein vielfaches übersteigen kann.

Durch entsprechende Bemessung der Massen M und m kann also nur das Maximum der möglichen grössten Beanspruchungen herabgemindert, nicht aber deren Möglichkeit überhaupt ausgeschlossen werden. Zur Vermeidung grosser Beanspruchungen ist es vor Allem wichtig dafür zu sorgen, dass das Gleiten der Räder bei wesentlich geringeren Kräften als P_{cs} nicht eintreten könne, d. h. also vor dem ersten Angleiten im Triebwerk keine Schwingungen auftreten und nach dem Angleiten die Antriebskraft des Motors nicht plötzlich abnehme.

Die Art der Regelung der Zugkraft des Motors ist also von entscheidendem Einfluss auf die Grösse der auftretenden Schwingungen und der hiedurch entstehenden dynamischen Überanspruchungen.

Es ist klar, dass bei der gebräuchlichen stufenweisen Regelung — selbst bei feinen Abstufungen — das Auftreten von Schwingungen im Triebwerk nicht vermieden werden kann. Die Anregung solcher Schwingungen wird durch den toten Gang im Triebwerk bedeutend gefördert. Zahnradübertragungen vergrössern vermöge des unvermeidlichen toten Ganges die Möglichkeit bedeutender Überanspruchungen bei Radgleitungen auch darum, weil das Massenverhältnis $\frac{M}{m}$ im quadratischen Verhältnis der Zahnradübersetzung zur Geltung kommt.

Klappernde Gleitung der Räder kann nicht nur bei unvorsichtigem Anfahren, sondern auch während der Fahrt eintreten, wenn die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive mit irgendeiner kritischen Geschwindigkeit zusammenfällt, z. B. wenn durch cyklische elastische Verschiebungen im Triebwerk, oder durch Ungenauigkeiten in der Ausführung des Triebwerkes verursachte

cyklische Änderungen der Winkelgeschwindigkeit, Schwingungen angeregt werden. Genügen die Amplituden dieser Schwingungen, um die im Triebwerke auftretende Kraft momentan über die zum Angleiten nötige Kraft P_{cs} zu erhöhen, so kann bei einer Antriebskraft $P < P_{cs}$ klappernde Gleitung eingeleitet werden.

Die Erfahrung zeigt, dass zur Anregung der Schwingungen die Ausführungsfehler eine Mindestgrenze überschreiten müssen und unter dieser Grenze keine Schwingungen auftreten können. Es ist also unerlässlich, durck sorgfältige Bemessung und sorgfältige Ausführung die durch Elastizität und Genauigkeitsfehler verursachten cyklischen Schwingungen auf ein Mindestmass herabzudrücken.

Das Angleiten eines Rades kann aber auch erfolgen, wenn die Reibung zwischen Schiene und Rad plötzlich abnimmt, z. B. bei hoher Fahrgeschwindigkeit das Rad über eine gelockerte Schienenverbindung geht. Sind die Radachsen durch Stangenkupplungen verbunden, so wird dadurch das Angleiten einzelner Räderpaare verhindert. Bei Anwendung der mit grosser Genauigkeit ausführbaren gemeinsamen Triebstangenantriebe und der Flüssigkeitsregelung des Motors wird die Möglichkeit von gefährlichen Überanspruchungen praktisch ausgeschaltet.

Das Ergebnis der Obigen Ausführungen und Beobachtungen kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Es ist ein Irrtum zu glauben, dass die im Triebwerk auftretende Kraft durch das Angleiten auf den Wert P_{cs} begrenzt wird, der zur Einleitung des Gleitens notwendig ist. Im Gegenteil: eben durch die Radgleitung können dynamische Kräfte ausgelöst werden, die die Kraft P_{cs} vielfach übersteigen.

2. Die klappernde Gleitung (chattering slip) kann nicht als Resonanz-Erscheinung angesprochen werden und kann unabhängig von der Eigen-Schwingungsfrequenz der rotierenden Massen bei einer beliebigen Geschwindigkeit — auch beim Anfahren — ausgelöst werden. Resonanzerscheinungen können bei der Anregung der klappernden Gleitung insoferne mitspielen, als sie die Gleitung selbst einleiten.

3. Die Geneigtheit des Systems zur klappernden Gleitung ist umso grösser, je grösser das Verhältnis $\frac{M}{m}$ der rotierenden Masse M des Motors zur Radmasse m ist; die entstehenden dynamischen Zusatzkräfte sind umso höher, je grösser die Verhältniszahl $\frac{M}{m}$ ist.

4. Klappernde Gleitung tritt nicht nur bei Kurbelantrieben und Kuppelstangenantrieben, sondern auch bei den sogenannten Einzelantrieben ein. Einzelantriebe besitzen besonders dann eine grosse Neigung zur klappernden Gleitung, wenn sie Zahnradübertragungen haben, da die vergrösserte Wirkung der rotierenden Motormasse und der bei Zahnradübertragungen unvermeidliche tote Gang zur Geltung kommt.

5. Bei Stufenregelung is das Auftreten von Schwingungen unvermeidlich und es kann daher häufig beim Anfahren klappernde Gleitung angeregt werden. Durch Anwendung von Flüssigkeitsreglern und bei richtiger Konstruktion kann ein schwingungsfreies Anfahren ein- für allemal gesichert werden.

6. Klappernde Gleitung während der Fahrt kann selbst bei Wegfall der Resonanz-Erscheinungen auslösenden Ursachen (elastische cyklische Änderungen im Triebwerke, Genauigkeitsfehler in der Ausführung, u. s. w.) nur dann vermieden werden, wenn mehrere Radachsen durch Kuppelstangen verbunden werden. Bei Einzelantrieben kann das Auftreten klappernder Gleitung während der Fahrt nicht vermieden werden, da momentane Abnahme des Raddruckes bei einem Rad das Gleiten einleiten kann.

Als Beispiel wird eine elektrische Lokomotive der Norfolk and Western Railway angeführt (Type $1B+B1$, rotierende Masse des Motors $M = 7600$ kg, Masse der Vorgelegswelle $m = 684$ kg, Masse der Räder $m = 1040$ kg, Elastizität der Kupplungsstangen, Kurbeln u. s. w. $c_1 = 1{\cdot}66.10^{-8}$ m/kg, Elastizität der gefederten Zahnradnabe $c_2 = 3{\cdot}7.10^{-8}$ m/kg, die für $z = 3$ zur Einleitung der Radgleitung notwendige Kraft $P_{cs} = 42000$ kg, das Gesamtspiel der Kupplungsstangen und der Zahnräder ist selbst bei

genauster Ausführung auch im neuen Zustand mindestens gleich 3 mm zu setzen).

Erfolgt das Angleiten bei einer Antriebskraft $P=0{\cdot}4.P_{cs}=$ $=16800$ kg, so entspricht dem Verhältnis $\frac{M}{m}=5$ (Figur 6) $\frac{P_{max}}{P_{cs}}=3{\cdot}67$. Es kann also bei klappernder Gleitung das Maximum der auftretenden Kräfte $P_{max}=42000.3{\cdot}67$ in runder Zahl 154000 kg (!) erreichen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

CSONKAMAGYARORSZÁG ÉS A KÜLFÖLD ELEKTROMOS ENERGIAGAZDÁLKODÁSÁNAK FEJLŐDÉSI IRÁNYZATA ÉS AZ IPARI TELEPITÉS SÜRGŐS FELADATAI.

HOOR-TEMPIS MÓRIC l. tagtól.

A tek. Akadémia III. osztály elé terjesztett dolgozataimban [1] kimutattam, hogy a művelt államok gazdasági tevékenységének fenntartására szükséges mechanikai munkamennyiség, a lakosonkénti géphányadok, az elektromos energiahányadok stb. fejlődési irányzatát ábrázoló időgörbék teljesen hasonlóak. Zavaró tényezők, gazdasági válságok e fejlődési irányzatot megzavarhatják, de a zavaró tényezők hatásának elmúltával a válság előtti fejlődési irányzatba való visszatörekvés félreismerhetetlen. A gazdasági tevékenységben lefolyó, egyenként nem követhető találkozások és kölcsönhatások beláthatatlan sokaságának rendeződése révén átlagállapot fejlődik, mely kifelé az ipari tevékenység fejlődését jellemző időgörbék hasonlatosságában és az ipari tevékenységi volumen energiagazdaságtani vonatkozásait jellemző állandókban nyilvánul.

---

[1] HOOR-TEMPIS MÓRIC: «A művelt nemzetek mechanikai munkaszükséglete. I. közl.» Mat. és Termtud. Ért. XXXVIII. köt. 293. o. és II. közl. u. ott XXXVIII. köt. 306. o. — «Az elektromos művek terhelési diagrammjai és az energiagazdálkodás javítása»; u. ott XXXVIII. köt. 315. o. — «A munkásonkénti géphányad, a termelékenység, az átlagos kereset és a gyártással termelt értékemelkedés összefüggése»; u. ott L. köt. 259. o. — «A művelt nemzetek gazdasági tevékenységének különféle ágazataiban fogyasztott évi energiamennyiség viszonyának állandósága»; u. ott L. köt. 281. o. — «A művelt államok lakosonkénti géphányadának és évenkénti mechanikai munkatermelésének évtizedes fejlődési irányzata»; u. ott LIII. köt. 279. o. — «Csonkamagyarország és a külföldi lakosonkénti géphányadai és az évenként fogyasztott mechanikai munkamennyiség»; u. ott LIII. köt. 293. o.

A következőkben azokról a vizsgálatokról számolok be, amelyeket az 1930-ban bekövetkezett általános gazdasági válság hatása dolgában végeztem, annak a kérdésnek az eldöntésére. hogy a művelt államok energiagazdálkodásának fejlődési irányzatát a mintegy három évig tartó gazdasági válság megváltoztatta-e és hogy ezidőszerint érvényesül-e a régi fejlődési irányzat visszaállítására irányuló rendeződési törekvés.

A megvizsgált esetek sorából bemutatom például *Budapest* Székesfőváros Elektromos Művei évenkénti elektromos energialeadásának időgörbéit.

Megállapítottam, hogy a válság előtti időben az 1924—1929 időközben az évenkénti energialeadás K_t — úgy mint azt egyik idézett dolgozatomban más államokra és fogyasztóterületek energiafogyasztására nézve kimutattam — a t időnek exponenciális függvénye és igen nagy megközelítéssel

$$K_t = 143{\cdot}3 \,.\, 10^6 \,.\, e^{0{\cdot}08374 \,.\, t}; \quad t_0 = 1924$$

függvénnyel ábrázolható.

A gazdasági válság hatása alatt 1929—1932-ig a K_t fejlődés menete erősen meglassúbbodott, de 1932-től kezdve ugyancsak nagy megközelítéssel

$$K_t = 238{\cdot}1 \,.\, 10^6 \,.\, e^{0{\cdot}08687 \,.\, t}; \quad t_0 = 1932$$

exponenciális függvénnyel ábrázolható.

A fenti együtthatókkal kiszámított K_t értékek és az egyes években valósággal leadott K_v kwó mennyiségek közötti különbségeket a K_v százalékában a következő táblázat adja:

Év	$\frac{K_t - K_v}{K_v}(100)$	Év	$\frac{K_t - K_v}{K_v}(100)$
1924	0	1932	0
1925	−0·53	1933	+0·60
1926	+0·92	1934	−0·207
1927	−1·30	1935	+0·57
1928	−0·96	1936	0
1929	+1·38		

A hatványkitevők állandóiból látható, hogy 1932-től kezdve a válság előtti fejlődési irányzat ismét helyreállt, sőt gyorsabbodott.

A megvizsgáltam esetek sorából még *Kanada* válság előtti és a válság utáni elektromos energiatermelésének időgörbéit akarom ismertetni.

Az 1921-től 1928-ig terjedő időközben az évenkénti energiatermelés a

$$K_t = 5{\cdot}614.10^9.e^{0{\cdot}15296t};\ t_0 = 1921 -$$

exponenciális függvénnyel az 1932—1935-ig terjedő időközben pedig a

$$K_t = 16{\cdot}338.10^9.e^{0{\cdot}12396t};\ t_0 = 1932 -$$

függvénnyel ábrázolható. A számított értékeknek a valóságos értékektől való legnagyobb eltérése — a valóságos értékek százalékában kifejezve: +2·33% 1925-ben és —2·97% 1934-ben. A K_t kwó termelésből és a lakosság számából számított elektromos energiahányad 1929-ben 1795 kwó volt, a gazdasági válság hatása következtében 1932-ben 1502 kwó-ra süllyedt, de az újból megindult haladó irányzat folyamán 1935-ben már a 2097 kwó-t érte el.

Kanada elektromos energiatermelésének zömét — 1935-ben 19,281.881,000 kwó-t, a 23.283.033,000 kwó-nyi egész *kanadai* termelésből — *Ontario* és *Quebec* tartományok vízerőművei szolgáltatták. E két tartomány lakosszáma 1935-ben kereken 6.660,000 volt. A két tartomány együttes elektromos energiatermelésének fejlődését az 1921—1924 időközben a

$$K_t = 4{\cdot}599.10^9.e^{0{\cdot}195133.t};\ t_0 = 1921 -$$

az 1925—1928 időközben a

$$K_t = 8{\cdot}563.10^9.e^{0{\cdot}16687.t};\ t_0 = 1925 -$$

és az 1932—1935 időközben pedig a

$$K_t = 12{\cdot}749.10^9.e^{0{\cdot}13791.t};\ t_0 = 1932 -$$

exponenciális függvénnyel ábrázolhatjuk. Az e két tartomány *együttes* energiatermeléséből és lakosszámából számított fejenkénti elektromos energiahányad 1929-ben a 2530 kwó-t érte el. A gazda-

sági válság következtében 1932-ben 2005 kwó-ra süllyedt, de ez évtől kezdve — ismét a gyorsuló irányzatot követve — 1935-ben a 2895 kwó-t érte el. Jóllehet e két tartomány fejenkénti kwó hányada nagyon megközelíti az eddig elért legnagyobb elektromos energiahányadot (*Norvégországban* 1935-ben 2990 kwó), a fejlődés haladó irányzata tovább tart, másszóval a 2900 kwó körüli fejenkénti hányadok korántsem tekinthetők felső határnak. Európában *Norvégország* után *Svájc* érte el eddig a legnagyobb kwó hányadot. 1935-ben az összes termelésből (5705 millió kwó) számított fejhányad lakosonként kereken 1370 kwó és a Svájcban maradt energiából (4306 millió kwó) számított fejhányad 1032 kwó volt.[1]

A többi európai állam évi fejenkénti elektromos energiahányada az 1000 kwó-nál kisebb, *hazánkban* az összes villamos energiatermelésből számított hányad pedig 1936-ban mindössze csak kereken 100 kwó volt.

Már kimutattam, hogy hazánk elektromos energiafogyasztás dolgában sorrendileg sokkal szerényebb helyen következik, mint amilyen gazdasági fejlettsége és gépi kultúrája fokának megfelel. A hatalmas előny, amelyet a helyes energiagazdálkodás dolgában az *Amerikai Egyesült Államok*, *Finnország*, *Kanada*, *Norvégország*, *Olaszország*, *Svájc* és *Svédország*, a többi európai államnal szemben elértek, nem a véletlennek, hanem a céltudatos, tervszerű munkának, az előrelátó törvényhozói intézkedések egész sorának köszönhető.

Az egyes államok vagy gazdasági területek elektromos energiafogyasztásának fejlődési irányzatát jellemző időgörbék exponenciális jellegét és a fejlődés teljes analógiáját megállapítva és az energiafogyasztást elemezve, azt látjuk, hogy a gazdasági válság után is a háztartások egyre fokozottabb mértékben veszik igénybe az elektromos energiát a szükséges meleg fejlesztésére és a földművelő üzemek és a mezőgazdasági ipari üzemek is áttérnek a villamos energia alkalmazására ott, ahol vízerőművekben vagy nagy korszerű hőerőművekben termelt olcsó energia országszerte rendelkezésre áll.

---

[1] Lásd a M. és T. Ért. LIII. köt. 297. o. közöltem táblázatot.

Újabb vizsgálataim eredményét röviden a következőben foglalom össze:

1. Abból a tényből, hogy az elektromos energiafogyasztás mindenütt, ahol és amikor a gazdasági tevékenységek szabad játékát helytelen beavatkozások vagy általános gazdasági válságok nem zavarják, a t idő exponenciális függvénye és az utolsó gazdasági válság után is hasonló törvényszerűséggel növekszik, — tehát az elektromos energiafogyasztás évenkénti gyarapodása a mindenkori fogyasztással arányos — következik, hogy gazdasági kényszer, az elektromos energia alkalmazásával elért hasznos eredmény készteti a gazdasági tevékenységet az elektromos energia egyre fokozottabb alkalmazására.

2. A gépi kultúrára áttért államok gazdasági tevékenységében nagyobbára ugyanazok a közlekedési eszközök, ugyanazok az őstermelő és technikai eljárások és eszközök használtatnak és a gazdasági tevékenységet irányító alaptényezők is azonosak. Ezért kétségtelen, hogy az elektromos energia gazdaságos alkalmazását elősegítő, másutt bevált korszerű technikai eszközök és törvényhozói intézkedések nyomán az elektromos energiafogyasztás fejhányada mindenütt fokozatosan közeledni fog a *Svájcban* vagy *Kanadában* elért fejhányadokhoz. Hazánkban is avval kell számolnunk, hogy a jelenleg mintegy 100 kwó-nyi fejenkénti elektromos energiahányad néhány év alatt annak többszörösére fog növekedni, ha az elektromos energia korszerű olcsó termelését és szétosztását biztosító technikai létesítményekkel, okos törvényhozói és közigazgatási intézkedésekkel, külföldi minta szerint, a fejlődés feltételeit biztosítjuk és lehetővé tesszük, hogy hazánk gazdasági tevékenységének minden ága az elektromos energia alkalmazásának hasznait élvezhesse.

3. *Budapest Székesfőváros Elektromos Művei* energialeadásának időgörbéjéből a közeljövőben várható energialeadást extrapoláció útján meghatározva, megállapíthatjuk, hogy Budapest székesfőváros területén (amelynek ellátására leadott elektromos energia 1936-ban 337,003.299 kwó-t ért el), 1938-ban kereken 400 millió, 1940-ben 477 millió, 1945-ben 736 millió és 1950-ben 1137 millió kwó-nyi energialeadással kell számolnunk. E számított energialeadásoknak — a terhelési csúcsnak 4000 órás várható

használati idejével számítva — 1938-ban 100,000 kw-nyi, 1940-ben 119,500 kw-nyi, 1945-ben 184,000 kw-nyi és 1950-ben —284,000 kw-nyi terhelési csúcs felel meg. Minthogy ezidőszerint a Székesfővárosi Elektromos Művek üzemeiben dolgozó korszerű gépi készenlét — a szükséges tartalékok és az elavult művek gépi készenlétének levonása után — csak 110,000 kw, a székesfővárosnak a várható elektromos energiaszükségletnek biztosítására 1945-ig kereken —80,000 és 1950-ig összesen —175,000 kw újabb gépi készenlétről és a szükséges elosztó berendezéseknek létesítéséről kell gondoskodnia, máskülönben a késedelmeskedéssel a székesfővárosban a gazdasági tevékenységet és a fogyasztóközönség gazdaságos ellátását mesterségesen fékezné.

4. *Csonkamagyarországnak* a közeljövőben várható elektromos fejhányadait a fejlődés eddigi időgörbéiből extrapolálva, fentidézett egyik dolgozatomban megadtam az 1935—1955-ig terjedő időközben várható fejhányadok felső és alsó határát.[1] Az utolsó három év fejlődési menetét, különösen a háztartások és a kis- és középipari fogyasztás várható fejlődését figyelembevéve, arra az eredményre jutok, hogy hazánk fejenkénti elektromos energiahányada az idéztem dolgozatban megadott *felső* határokat, tehát 1945-ben kereken 235 kwó-t, 1950-ben 380 kwó-t és 1955-ben 630 kwó-t el fogja érni vagy nagyon meg fogja közelíteni, feltéve, hogy a növekvő elektromos energiaszükséglet fedezésére az energiát olcsón termelő, egymással országos hálózatban kooperáló korszerű erőművek és országos vezetéki rendszerek fognak idejekorán épülni és kellő törvényhozói intézkedés az elektromos energiaszolgáltatásban és az árszabásokban rendet fog teremteni.

5. A tapasztalás azt bizonyítja, hogy korszerű hőerőművekben — már 30 kg/cm² üzemi túlnyomású gőzerőművekben is — a leadott kwó-t a csúcsnak átlag 4000—4500 évi használati óraszáma mellett 3500 caloria szén-egyenértékkel termelhetjük. A mai átlagos szénáraknak megfelelően ez annyit jelent, hogy a bányavidékeken épülő, hulladékszenekkel tüzelő, korszerű hőerőművek átlagban nem több, mint 1·1 fillérnyi szénköltséggel termelhetik a kwó-t. (A nagyobb üzemi túlnyomásokra, így pl. 70 kg/cm² vagy

[1] Lásd: M. és T. Ért. LIII. köt.. 302 oldal.

ennél nagyobb gőznyomásokra való áttérés — bár a hőgazdálkodás hatásfokának javulásával jár — hazánkban nem ajánlatos, mert a nagyobb kw-kénti fajlagos építési költségből származó évi tőketehertöbblet a szénértékben való megtakarítást egyensúlyozza és e nagynyomású berendezések gyártása hazánk nehéziparának korlátozott piacánál fogva gépi iparunkat hátrányos helyzetbe hozná.) A korszerű, hulladékszenekkel tüzelő gőzerőművekkel, a kwó-kénti szénköltségek kedvező alakulásánál fogva olyan államokban is biztosíthatjuk az olcsó elektromos energiával való ellátást és evvel az elektromos energia általános és folyton fokozódó használatát, amelyek nagyobb, olcsó vízierőkkel nem rendelkeznek.

6. A nagy-vasúti elektromos vontatással mindenütt, így hazánkban is elért kedvező eredmények, a felsővezetékes közúti társaskocsik, a nagyvárosokban a postai és egyéb teherforgalmat ellátó akkumulátoros elektromos közúti gépjárművek olcsó üzemi költségei arra utalnak, hogy hazánkban is e téren a külföld példáját kövessük és ez üzemeket fejlesszük, annál is inkább, mert a belső égésű motorok levegőt rontó hatása a nagyvárosokban károsan jelentkezik. Eddig nagyobb ásványolajforrásokkal hazánkban nem rendelkezvén, ásványolajtermékeket használó járóműveknek villamos járóművekkel való pótlása külkereskedelmi vonatkozásban is kívánatos.

7. Amíg a villamosításban előrehaladott államok egyikébenmásikában a háztartások évenkénti elektromos energiafogyasztása országos átlagban a 400 kwó-t meghaladja, sőt *Kanada* és *Norvégország* egyes fogyasztási területein a 4500 kwó-t is eléri, addig pl. a Budapesten bekapcsolt háztartási fogyasztók évi átlagos fogyasztása 1929-ben 193 órával kulminált és 1936-ban 143 kwó-ra csökkent. A nemzetközi statisztikából megállapítható, hogy a villamos energiát háztartási főzési célokra is használó háztartások átlagos évi kwó-összfogyasztása meghaladja az 1000 kwó-t, az energiát melegvíz készítésére is használó háztartások átlagos évi fogyasztása pedig a 4000 kwó-t is eléri.

8. A művelt nyugati államokban a kis- és háziiparnak korszerű munkagépek alkalmazása révén való kifejlesztése, az ipari termelésnek decentralizációja és a falvakba, valamint vidéki városokba

való kitelepítése általánosan vallott szükség. Elég, ha a *Belgiumban, Franciaországban, Norvégiában, Svájcban* elért eredményekre utalok. *Nagybritannia* ipari telepítési és termelési politikájában a «rural resettlement and decentralisation of industry» szigorú következetességgel megvalósított vezérelv. Ez volt egyik indító ok, mely az angol törvényhozást 1926-ban arra késztette, — «Electric (Supply) Act, 1926» — hogy az elektromos energiatermelés korszerűsítésére és nagyfeszültségű távvezetékek építésére *Nagybritanniában* 31·5 millió fontnyi összeget bocsásson a köznek rendelkezésére.

Hazánkban az ipari termelés kitelepítése, részben a háziiparba való visszatelepítése honvédelmi, munkásjóléti, általános gazdasági és társadalompolitikai szempontokból egyaránt sürgős. Egyes nemesítő ipari és mezőgazdasági ipari termelési ágaknak a háziipari és kisipari, sőt középipari keretben a vidékre, különösen a falvakba való visszatelepítése — a *falu iparosítása* — a külföldön szerzett tapasztalások szerint az egyetlen mód, amely mezőgazdasági népességünk kereseti viszonyainak javítására alkalmas és lehetővé teszi azt, hogy a mezőgazdasági tevékenységben évszakok szabta munkaszünetek ideje hasznos kereső munkával kitöltessék. Mindennek alapfeltétele azonban, hogy a háziipari és kisipari mellékfoglalkozás a gazdát, a mezőgazdasági munkást és ezek családját ne vonja el egészen a háztartási és házkörüli teendőktől.

A míg a népművészeti vagy iparművészeti jellegű termékek háziipari és kisipari kézimunkával való előállítása eredményes, addig a tömegfogyasztás tárgyát képező ipari cikkek vagy szerkezeti alkatrészek háziipari és kisipari keretekben való készítése a falvakban és városokban egyaránt csak akkor vezethet hasznos eredményre, ha korszerű termelőeszközöket, korszerű munkagépeket használunk és a szükséges eredmény elérésére a napi munkaidőnek csak egy részét kell az ipari termelésre fordítani és így a háztartási és házkörüli teendők is elláthatók. A külföldi tapasztalás szerint mindennek alapfeltétele az olcsó elektromos energia és az elektromotorral hajtott korszerű munkagép, továbbá a nyersanyagok beszerzésének és a termelés értékesítésének szövetkezeti keretben való megszervezése. Ily módon teremthetjük meg a foglalkozásnak társadalompolitikai szempontból leghelyesebb

módját, a vegyest ipari és földművelő termeléssel foglalkozó munkást. Hazánkban is, mint mindenütt, a falu iparosítása nagyban meg fogja növelni a mezőgazdasági lakosság elektromos energiában való fogyasztóképességét. A megnövekedett fogyasztás viszont az energia átlagköltségének és evvel átlagárának csökkentését fogja lehetővé tenni, ami — az átlagárak és a fejhányad közötti korrelációnál fogva — ismét az energiafogyasztás fejlődési irányzatát fogja gyorsítani.

9. Energiagazdálkodásunk rendszeres fejlesztésére az energiagazdálkodást valóban irányító, *alkotó* törvényhozói intézkedésekre van szükség. E tekintetben a külföldi törvényalkotások a gyakorlatban nagyszerűen bevált mintákkal szolgálnak. Elég, ha az *Amerikai Egyesült Államok*, *Norvégország*, *Svájc* és *Svédország* törvényalkotásaira és elsősorban a *kanadai* tartományok idevonatkozó törvényeire («The Power Commission Act of Ontario R. S. O. 1914. c. 29» és ennek póttörvényei, valamint *Quebec*, *Nova Scotia*, *New Brunswick* tartományok hasonló törvényei), továbbá a fentidéztem 1926.-i angol elektromos törvényre utalok. «A villamos energia fejlesztéséről, vezetéséről és szolgáltatásáról» szóló 1931. évi XVI. tc. nem alkotó törvény és eddig semmi néven nevezendő kézzelfogható eredménnyel nem járván, sürgős kiegészítésre szorul. Mindenekelőtt törvényhozói intézkedéssel kellene megakadályozni azt, hogy továbbra is az egyéni törpe erőművek sora létesüljön és az egységes, tervszerű megoldásokban felhasználható tőke gazdaságtalanul dolgozó törpeművekben leköttessék. Az e téren uralkodó anarchia akadálya az egészséges fejlődésnek és megnehezíti azt, hogy a nemzetek gazdasági versenyében a haladó irányzatot megtartsuk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. 15-én tartott üléséből.)

DER ENTWICKLUNGSGANG DER ELEKTRISCHEN ENERGIEWIRTSCHAFT IN TRIANON-UNGARN UND IM AUSLAND UND DIE DRINGENDEN AUFGABEN DER GEWERBESIEDLUNG.

Von MORITZ von HOOR-TEMPIS, korr. Mgl.

Der Verfasser hat bereits nachgewiesen (siehe die zitierten Abhandlungen), dass das zur Abwicklung der wirtschaftlichen Tätigkeit der zivilisierten Staaten notwendige Arbeitsintegral, die Maschinenquote und die elektrische Energiequote je Kopf überall einen analogen Entwicklungsgang zeigen. Störende Einflüsse, wirtschaftliche Krisen verlangsamen oder hemmen vorübergehend den Entwicklungsgang, doch ist nach Aufhören der störenden Einwirkungen das Bestreben zur Herstellung des Entwicklungsganges und Gleichgewichtes vor der Störung ganz unzweideutig erkennbar.

Verfasser untersucht die durch die letzte allgemeine Wirtschaftskrise verursachten Störungen im Jahrzehntegang der obenerwähnten energiewirtschaftlichen Grössen und stellt fest, dass das Bestreben nach Einstellung des Entwicklungsganges vor der Störung auch gegenwärtig zur Geltung kommt. Es werden als Beispiele die Zeitkurven der Energieabgabe in *Budapest*, ferner in *Kanada* und in den Kanadischen Provinzen *Ontario* und *Quebec* angeführt. Die Tatsache, dass auch nach Erreichung von Energiequoten über 2000 KWh je Kopf und Jahr die Energieabgabe eine exponentielle Funktion der Zeit ist, sagt soviel dass die jährliche Zunahme der Energieabgabe der jeweiligen gesammten Energieabgabe proportional ist. Die stetige Zunahme des elektrischen

Energiebedarfes ist also die Folge eines wirtschaftlichen Zwanges; eine Folge der Erkenntnis dass die fortschreitende Verwendung elektrischer Energie wirtschaftlichen Nutzen bringt. In *Norwegen* erreicht die elektrische Energieabgabe je Kopf und Jahr 2990 KW. In *Kanada* betrug die Energiequote im Jahre 1929 1795 KWh und sank im Jahre 1932 auf 1502 KWh stieg aber seither fortlaufend und erreichte im Jahre 1935 2097 KWh. Die aus der gesamten Energieabgabe der Kanadischen Provinzen *Ontario* und *Quebec* gerechnete durchschnittliche Kopfquote erreichte im Jahre 1935 2895 KWh.

Der Entwicklungsgang der Kopfquote beweist dass Kopfquoten von 2900 KWh keineswegs als obere Grenze der möglichen Entwicklung anzusprechen sind.

In Europa führt nach **Norwegen** die Schweiz mit einer Kopfquote von 1032 KWh (nach Abzug der aus dem Lande ausgeführten Energiemenge). Die elektrische Energiequote der übrigen europäischen Länder ist geringer als die Energiequote der Schweiz und erreicht in Ungarn im Jahre 1936 gar nur 100 KWh. Die Energiequote Ungarns ist ein Bruchteil jener Energiequote die dem wirtschaftlichen Entwicklungsgrad des Landes entsprechen würde.

Der bedeutende Vorsprung den in der elektrischen Energiewirtschaft *Finnland, Italien, Kanada, Norwegen, Schweden,* die *Schweiz* und die *Vereinigten Staaten Nord-Amerikas* erreicht haben, ist nicht einen Zufall, sondern der zielbewussten, weitblickenden Arbeit und einer Reihe zweckmässiger gesetzgeberischer Massnahmen zuzuschreiben.

Verfasser berechnet die zur Versorgung *Budapests* mit elektrischer Energie notwendige Energieabgabe für das Jahr 1945 mit 736 millionen KWh und für das Jahr 1950 mit 1137 Millionen KWh. Durch Extrapolation aus dem bisherigen Entwicklungsgang der elektrischen Kopfquote Ungarns wurde die Kopfquote für 1945 mit 235 KWh und für 1955 mit 630 KWh berechnet.

Es wird auf die Bedeutung der elektrischen Energie zur Versorgung des Wärmebedarfes für Kochzwecke hingewiesen. Die Erfahrung zeigt ferner, dass die Dezentralisierung der industriellen Betriebe und die Industrialisierung des Dorfes im Rahmen der

kleingewerblichen und hausgewerblichen Betriebe von entscheidender Bedeutung für die Verbesserung der Volkswohlfahrt und des Einkommens der landwirtschaftlichen Bevölkerung ist. Eine Grundbedingung dafür ist jedoch der Elektromotor, billige elektrische Energie und die Versorgung der hausgewerblichen und kleingewerblichen Betriebe mit modernen Arbeitsmaschinen, die kollektive Beschaffung der Rohstoffe und die Verwertung der Erzeugnisse auf genossenschaftlicher Grundlage. Auf diesem Wege kann der sozialpolitisch so sehr erwünschte Typus des landwirtschaftlichen Arbeiters geschaffen werden, der zugleich gewerblicher Arbeiter ist.

Gesetzgeberische Massnahmen, z. B. nach dem Muster der Kanadischen Power Commissions usw. sind dringend notwendig. Das ungarische Energiegesetz — Gesetzartikel XVI. 1931 — ist kein konstruktives, sondern ein rein administratives Gesetz und konnte bisher auch keine greifbaren Ergebnisse zeitigen. Eine entsprechende novellarische Ergänzung ist dringend notwendig.

Nur durch vollgerichtiges Schaffen und Tätigung der im Auslande bewährten gesetzgeberischen Massnahmen lässt sich der rasche Fortschritt in der elektrischen Energiewirtschaft sichern, der unerlässlich ist um den Platz eines Staates im wirtschaftlichen Wettbewerb der Völker zu sichern.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Februar 1937.)

OLYAN MAXIMÁLIS INDEXŰ FELÜLETEKRŐL, AMELYEKNEK EGYIK KÖPENYE MÁSODRENDŰ TORZFELÜLET.

SZŐKEFALVI NAGY GYULA l. tagtól.

1. Bevezetés.

Felületen olyan zárt felületet fogunk érteni, amelynek minden pontjában az érintésponttal folytonosan változó érintősíkja van, és amelynek valamint érintőkúpjainak minden síkmetszete elemi síkgörbékből és azonkívül esetleg teljes egyenesekből és izolált kettőspontokból áll. Elemi síkgörbén véges számú konvex ívből összerakható olyan zárt görbét értünk, amelynek minden pontjában az érintésponttal folytonosan változó érintője van. Egy elemi görbének sem lehet egyenes darabja, sem pedig szögpontja.

Az előbbi tulajdonságokkal bíró G síkmetszet, görbe rendszámán a görbe és a sík egy tetszőleges egyenese közös pontjainak maximális számát értjük, ha ezeket a közös pontokat megfelelő sokszorossággal számítjuk. Ha az e egyenes mint k-szoros egyenes hozzátartozik a G görbéhez és ha a G görbének az e egyenesen kívüli része G_1 görbe, akkor az e egyenesnek a G görbével való közös pontjainak számát úgy kapjuk meg, hogy az e egyenesnek a G_1 görbével való közös pontjainak számához hozzáadjuk k-t mint az e egyenes k (összeeső) egyenessel való közös pontjainak a számát. Ezt a számot kapjuk akkor is, ha a G görbének a hozzá nem tartozó, de az e egyenes felé tartó e' egyenessel való közös pontjai számának határértékét vesszük.

Egy felület rendszáma a felület és egy tetszőleges egyenes metszéspontjai számának maximuma, máskép kifejezve a felület

síkmetszetei rendszámainak maximuma. Az előbb adott értelmezés szerint tehát véges lehet olyan felület rendszáma is, amelyen egyenesek (véges vagy végtelen nagy számban) fekszenek. A felület indexe a felület és egy tetszőleges egyenes közös pontjai számának minimuma.

A felületnek olyan zárt és önmagában összefüggő legkisebb részét, amely az adott értelmezés szerint maga is felület, köpenynek nevezzük. Egy felület több köpenyből is állhat, de föltételezzük, hogy ezek közül egy sem sík vagy pont.

A többköpenyű felület akkor reducibilis, széteső, ha köpenyei beoszthatók két vagy több olyan csoportba, hogy az egyes csoportokba foglalt köpenyek alkotta felületek rendszámainak összege a felület rendszámával egyenlő. Ha a felület egyköpenyű, vagy ha többköpenyű, de nem reducibilis, akkor irreducibilis.

A maximális indexű felületekre vonatkozólag szerzőnek [1] és C. JUEL [2] dán matematikusnak vannak általános vizsgálatai.

A másodrendű felületek mind maximális indexűek és vagy ovaloidok, (amelyek egészen végesbe projiciálhatók), vagy kúpfelületek, vagy pedig algebrai torzfelületek. Egy másodrendű felület pontjai mind elliptikusak, parabolikusak, ill. hiperbolikusak a szerint, amint a felület ovaloid, kúp-, ill. torzfelület.[3]

Az olyan többköpenyű maximális indexű felületekre, amelyeknek van másodrendű köpenyük, a következő tételek ismeretesek:

Egy többköpenyű maximális indexű felületnek csak egy ovaloidköpenye lehet.[4] Ha van a felületnek ovaloidköpenye, akkor

---

[1] SZ. NAGY GY.: *a)* «Über Flächen vom Maximalindex». Math. Annalen 98 (1927), 657—683.

b) «Maximális indexű felületek». A Szent István Akadémia Értesítője 9 (1924), 117—132. Az *a)* dolgozat előbb közölt kivonata.

c) «Maximális indexű felületekre vonatkozó vizsgálatok». Mat. és Term.-Tud. Értesítő 53 (1935), 420—474.

d) «Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex». Acta Scient. Math. Szeged 7 (1935), 244—248.

Ezeket a dolgozatokat *a*, *b*, *c*, ill. *d* betűvel fogjuk idézni.

[2] C. JUEL: «Über Flächen von Maximalindex». Kgl. Danske Videns kab. Selskab. Math.-fys. Meddelelser. (6), 5 (1924), 1—40.

[3] Az irodalmat illetően lásd *a*. 660.

[4] *a*, 660—662.

torzfelületköpenye nem lehet.[5] Egy ovaloidköpennyel is bíró többköpenyű maximális indexű felületnek rendszáma és indexe nem változik meg akkor, ha belőle az ovaloidköpenyt eltávolítjuk, vagy egy olyan ovaloiddal helyettesítjük, amely az eredeti ovaloidnak belsejében fekszik.[6]

Ha a többköpenyű maximális indexű felületnek van egy másodrendű (vagy akármilyen rendű) kúpfelületköpenye, akkor — legfeljebb egy ovaloid kivételével — valamennyi köpenye kúpfelület; a köpenyek között akárhány lehet másodrendű.[7]

Van olyan maximális indexű felület, amely két másodrendű torzfelületköpenyből áll.[8]

Ezeket az eredményeket kiegészítjük a következő tételekkel:

Ha egy többköpenyű maximális indexű felületnek van másodrendű torzfelületköpenye, akkor ennek a köpenynek elhagyása után kapott felület is maximális indexű; rendszáma és indexe kettővel kisebb, mint az eredeti felületnek megfelelő két száma.

Nincsen olyan maximális indexű felület, amelynek köpenyei között kettőnél több másodrendű torzfelület volna.

Azt a kérdést, hogy létezik-e olyan maximális indexű felület, amelynek van másodrendű torzfelületköpenye és van olyan köpenye is, amely csak véges számú egyenest tartalmaz, függőben kell hagynunk.

2. Másodrendű torzfelületköpennyel bíró maximális indexű többköpenyű felületek reducibilitása.

Kimutattuk a következő tételt:[9]

Ha egy H másodrendű torzfelület és egy F m-edrendű egyköpenyű felület irreducibilis, ill. reducibilis maximális indexű felületet alkot, akkor az F felületnek a H felület mindkét alkotóseregével m—2, ill. m közös alkotója van.

---

[5] *c*, 429—432; *d*, 244—248.
[6] *c*, 429—432; *d*, 244—248.
[7] *a*, 662—663, 670—671.
[8] *a*, 672—675; C. Juel id. h. 10.
[9] *c*, 435.

Kimutatjuk, hogy a H és F felület együtt nem alkothat irreducibilis maximális indexű felületet. Igaz a következő általánosabb tétel is:

I. *Ha a többköpenyű maximális indexű n-edrendű F felületnek H egy másodrendű torzfelületköpenye és ha F' jelöli a felület többi köpenyéből álló felületet, akkor F' maximális indexű (n—2)-rendű felület. Az F felület tehát reducibilis. Az F' felületnek a H másodrendű torzfelület mindkét alkotóseregével n—2 közös alkotója van.*

A H torzfelület egy alkotóján átmenő egy σ sík a maximális indexű F felületnek érintősíkja, az érintésponton átmenő és a σ síkban fekvő egyenesek tehát n pontban metszik az F felületet.[10] A σ sík az F felületből maximális indexű n-edrendű G síkgörbét, a H felületből két egyenest vág ki. A σ sík tehát az F' felületből (n—2)-edrendű maximális indexű G' görbét metsz ki. Az sincs kizárva, hogy a G görbe n egyenesre esik szét, amikor a G' görbe n—2 egyenesből áll.

Ebből következik, hogy a térnek bármely olyan egyenese, amely a H felületet metszi, az F' felületet vagy n—2, vagy n—4 pontban találja. Ha ugyanis az e egyenes a H felületet egy P pontban metszi és ha e' a H felületnek P-n átmenő egyik alkotója, akkor az e benne van a H felület e' alkotóján átmenő (e, e') síkban.

Annak igazolására, hogy az F' felület maximális indexű, csak azt kell még bebizonyítanunk, hogy az F' felületet a térnek olyan f egyenesei sem találhatják (n—2)-nél több pontban, amelyeknek a H felülettel nincs közös pontjuk. (Az F' felülethez tartozó f egyeneseknek az F' felülettel való közös pontjainak számát úgy számítjuk, mint a bevezetésben mondottuk.)

Ha az F' felület nem volna (n—2)-edrendű, akkor szükségképen n-edrendű volna. Ekkor volna a térben olyan f egyenes, amelynek az F' felülettel n közös pontja volna. Ennek az f egyenesnek a térben való mozgatásával lehetne olyan f' egyenest találni, amely az F' felületet egy P' pontjában érintené és vele n közös pontja volna, s így nem volna közös pontja a H felülettel.

Jelölje G, G', ill. K az F, F', ill. H felületből az F' felület P' pontjához tartozó σ érintősík által kimetszett görbét. G nyilvánkép

[10] *a*, 658.

maximális indexű n-edrendű görbe, K pedig kúpszelet, amely P'-n nem megy át. Mivel σ a P' pontban az F felületnek is érintősíkja, azért a σ síknak P'-n átmenő e' egyenesei a G görbét n pontban találják. Ezek közé az e' egyenesek közé tartozik az f' egyenes is, amelynek a K kúpszelettel nincs közös pontja és hozzátartoznak olyan egyenesek is, amelyek a K kúpszeletet metszik. A P' pontból lehet tehát húzni érintőket a K kúpszelethez. Ha k_1 és k_2 ez a két érintő, akkor ezek is hozzátartoznak az e' egyenesekhez.

Ha az f' kezdőhelyzetből kiindulva egy e' egyenest a P' körül megforgatunk, akkor forgatás közben az e' egyenes és a G görbe metszéspontjainak száma akkor sem változhatik, ha e' a k_1 vagy k_2 érintőt átlépi. Ekkor azonban a G' és K görbékkel való metszéspontok számai közül az egyik kettővel csökken, a másik ugyanannyival nő. Mivel ez a fogyás és növekedés egyszerre történik, azért a határhelyzetben, vagyis az e' egyenesnek a k_1 vagy k_2 helyzetében az n-edrendű G görbével $n+2$ közös pontja volna. Ez azonban akkor is lehetetlen, ha föltételezzük, hogy a k_1 és k_2 egyenes hozzátartozik az F' felülethez és így a G' görbéhez.

Ha ugyanis m olyan egyenes tartozik a G görbéhez, amely átmegy a P' ponton, akkor ezeknek eltávolítása után a G görbéből visszamaradó G^* görbe $(n—m)$-edrendű és maximális indexű. Ezt a görbét a P' ponton átmenő e' egyeneseknek legfeljebb $n—m$ pontban kellene találniok. Az e' egyenesnek a k_1 helyzetében azonban a K kúpszelettel két közös pontja van, azonkívül $n—m$ közös pontja van a G^* görbéből a K kúpszelet eltávolítása után kapott görbével is. A k_1 egyenesnek tehát több közös pontja van a G^* görbével, mint ennek a rendszáma, ami pedig lehetetlen.

E miatt az ellentmondás miatt lehetetlen az a föltevés, hogy az F' felületnek n a rendszáma. Az F' rendszáma tehát $n—2$, az F felület tehát a H és F' felületekre szétesik.

Az I. tétel teljes bebizonyításához még annak a kimutatása szükséges, hogy a H felület alkotói $n—2$ pontban találják az F' felületet. Ez pedig abból következik, hogy a H másodrendű torzfelület egy e alkotóján átmenő egy σ sík az F felületet az e alkotó egy P pontjában érinti. A σ síknak a P ponton átmenő egyenesei és így az e alkotó is n pontban találják az F felületet és $n—2$ pontban az F' felületet.

3. Csupa másodrendű torzfelületekből álló maximális indexű felületek.

Kimutattuk a következő tételt:[11]

Nincs olyan maximális indexű felület, amely három vagy háromnál több torzfelületköpenyből állana, föltéve, hogy ezek közül legalább egynek kettőnél nagyobb a rendszáma. Van azonban olyan kétköpenyű maximális indexű felület, amelynek köpenyei másodrendű torzfelületek és van olyan is, amelynek egyik köpenye n_1-, a másik pedig n_2-rendű, ahol n_1 és n_2 legalább kettővel egyenlő tetszőleges egész szám.

Ennek a tételnek kiegészítésére bebizonyítjuk a következő tételt:

II. *Nincs olyan maximális indexű felület, amely három vagy háromnál több másodrendű torzfelületköpenyből állana.*

Ez a tétel az előzőt a következőkép bővíti ki:

III. *Nincs olyan maximális indexű felület, amely három vagy háromnál több torzfelületköpenyből állana.*

A II. tétel bebizonyítására föltételezzük azt, hogy az F maximális indexű felület $H_1, H_2, \ldots, H_m$ másodrendű torzfelületköpenyből áll és azt, hogy $m \geqq 3$. Ekkor az F felületnek $2m$ a rendszáma és m köpenye közül bármely kettőnek négy közös alkotója van.[12] A négy közös alkotó közül mindkét torzfelületen kettő az egyik, kettő pedig a másik alkotósereghez tartozik.

A $H_1, H_2, \ldots, H_m$ felületek közül bármely kettő maximális indexű negyedrendű és bármely három maximális indexű hatodrendű felületet alkot. Ez abból következik, hogy a tér egy egyenesének a $H_1, H_2, \ldots, H_m$ felületek közül legfeljebb eggyel nincs közös pontja.

Jelölje F_{123} a H_1, H_2, H_3 köpenyekből álló maximális indexű felületet, F_{12}, F_{13}, ill. F_{23} pedig azt a negyedrendű maximális indexű felületet, amelynek H_1 és H_2, H_1 és H_3, ill. H_2 és H_3 a köpenyei.

A H_1 és H_2 négy közös alkotója közül legyen e_{12} és e'_{12} két

---

[11] *c*, 449; *a*, 672—674; C. Juel id. h. 10—12; *c*, 451—456.

[12] *a*, 669.

kitérő egyenes. Ezek mindkét torzfelületen egy alkotóseregbe tartoznak. A H_1 és H_3 négy közös alkotója közül kettő, f_{13} és f'_{13} metszi a H_1 felület e_{12} és e'_{12} alkotóját.

Ha P ill. P' az e_{12} és f_{13}, ill. e'_{12} és f'_{13} egyenesek metszés pontja, akkor ez a két pont a H_1, H_2 és H_3 felületeknek közös pontja. E három felületnek a P ill. P' ponton átmenő alkotópárjait

$$e_{12} \text{ és } f_1, \quad e_{12} \text{ és } f_2, \quad g_3 \text{ és } f_{13}$$

illetőleg

$$e'_{12} \text{ és } f'_1, \quad e'_{12} \text{ és } f'_2, \quad g'_3 \text{ és } f'_{13}$$

alkotóknak nevezhetjük. Itt f_1 és f'_1, f_2 és f'_2, f_{13} és f'_{13}, g_3 és g'_3 kitérő egyenespárt jelent.

Az e_{12} és f_{13}, ill. e'_{12} és f'_{13} a H_1 felületen két alkotóseregbe tartozó alkotók, ennélfogva nem eshetnek össze. Ebből következik, hogy a H_2 és H_3 felületnek a P ill. P' ponton átmenő közös alkotójára nézve csak az

$$a) \quad e_{12} \equiv g_3, \qquad b) \quad f_2 \equiv f_{13}, \qquad c) \quad f_2 \equiv g_3$$

illetőleg

$$a') \quad e'_{12} \equiv g'_3, \qquad b') \quad f'_2 \equiv f'_{13}, \qquad c') \quad f'_2 \equiv g'_3$$

eshetőségeket kell megvizsgálnunk.

a) Ha $e_{12} \equiv g_3$, akkor az $e \equiv e_{12} \equiv g_3$ egyenes a H_1, H_2 és H_3 felület közös alkotója. Ekkor az $e' \equiv e'_{12} \equiv g'_3$ is közös alkotója a három felületnek, mivel a *b')* és a *c')* eset nem lehetséges.

Ha ugyanis f'_2 az f'_{13}-vel összesnék, akkor az $f'_2 \equiv f'_{13} \equiv f'$ közös alkotója volna a H_1, H_2 és H_3 felületnek. Ekkor azonban az e és f' egyenesek metszéspontjában ugyanaz az (e, f') sík volna a három felületnek az érintősíkja. Ebből azonban az következnék, hogy az (e, f') síkhoz egy elég közeli párhuzamos síkban lehetne olyan h egyenest találni, amelynek a H_1, H_2, H_3 felületek közül legalább kettővel nem volna közös pontja. Az F_{123} felület tehát nem lehetne maximális indexű.

Ha pedig $f'_2 \equiv g'_3$ volna, akkor a g'_3 mint a H_2 felületnek az e'_{12}-vel nem ugyanabba az alkotóseregbe tartozó alkotója metszené az $e \equiv e_{12} \equiv g_3$ egyenest. Ekkor azonban a H_3 felület $e \equiv g_3 \equiv e_{12}$ alko-

tója metszené ennek a felületnek a P' ponton átmenő mindkét alkotóját, a g'_3 és az f'_{13} alkotókat. Ez pedig lehetetlen.

b) Ha $f_2 \equiv f_{13}$, akkor az $f \equiv f_2 \equiv f_{13}$ és egyszersmind az $f' \equiv f'_2 \equiv f'_{13}$ egyenes a H_1, H_2 és H_3 felület közös alkotója volna, mivel ekkor az *a')* és *c')* eset nem fordulhat elő.

Ha ugyanis $e'_{12} \equiv g'_3$ volna, akkor a három torzfelületnek közös alkotója volna az $e' \equiv e'_{12} \equiv g'_3$ egyenes és közös érintősíkja volna az (e', f) sík. Ekkor azonban nem lehetne 4 az F_{123} felület indexe.

Ha pedig $f'_2 \equiv g'_3$ volna, akkor a H_3 felület $f \equiv f_2 \equiv f_{13}$ alkotója ennek a felületnek P'-n átmenő $g'_3 \equiv f'_2$ és f'_{13} alkotói közül egyiket sem metszhetné.

c) Ha végül $f_2 \equiv g_3$, akkor $f'_2 \equiv g'_3$, mivel ekkor sem az *a')*, sem a *b')* eset nem lehetséges. Ha ugyanis $e'_{12} \equiv g'_3$, ill. $f'_2 \equiv f'_3$ volna, akkor ebből az előbbiek szerint az következnék, hogy $e_{12} \equiv g_3$, ill. $f_2 \equiv f_3$, ami pedig a föltételezett $f_2 \equiv g_3$ összefüggésnek ellentmond.

Ezzel valamennyi esetre bebizonyítottuk azt, hogy a H_1 és H_2, H_1 és H_3, ill. H_2 és H_3 torzfelületpárnak van a P és P' pontokon átmenő és egymást nem metsző közös alkotópárja.

Ha σ a P és P' ponton átmenő olyan sík, amely a H_1, H_2, H_3 felület egy alkotóját sem tartalmazza, akkor ez a sík a három felületből K_1, K_2, ill. K_3 kúpszeletet vág ki.

A K_1, ill. K_2 kúpszelet, továbbá a H_1 és H_2 felületnek a P és P' ponton átmenő és egymáshoz kitérő helyzetű közös alkotópárja mint vezérvonalak egyértelműleg meghatározzák a H_1, ill. H_2 felületet, amivel egyszersmind meghatározzák az F_{12} felületet is. Hasonlókép határozható meg az F_{13}, ill. F_{23} felület két kúpszelettel és a PP' pontpáron áthaladó egy megfelelő kitérő egyenespárral.

A térnek bármely g egyenese a negyedrendű maximális indexű F_{12} felületet legalább két pontban találja. Olyan g egyenesekre, amelyek a H_1 és H_2 felület e_{12} vagy e'_{12} közös alkotóját metszik, ez az állítás nyilvánvaló. Föltételezzük tehát azt, hogy a g egyenes az e_{12} és e'_{12} egyenesek közül egyiket sem metszi. A g, e_{12} és e'_{12} egyenesek által meghatározott másodrendű H torzfelület a σ síkot a P és P' ponton átmenő egy K kúpszeletben metszi. Állítjuk, hogy a K kúpszeletnek a K_1 és K_2 kúpszeletek közül legalább az egyikkel a P és P' ponton kívül is van közös pontja.

Ha ugyanis Q_1 és Q_2 pontban metszi a g egyenes a H_1 felületet,

akkor az e_{12} és e'_{12} egyeneseknek a Q_1, ill. Q_2 ponton átmenő közös szelője a H_1 és H felület közös alkotója. Ez a két közös alkotó olyan két pontban metszi a síkot, amely a K és K_1 kúpszeletnek P és P'-től általában különböző közös pontja. (Egy ilyen pont akkor eshetik össze a P-vel, ha ott a K és K_1 kúpszelet egymást érinti.)

Ha K a P és P' ponton átmenő és a σ síkban fekvő tetszőleges kúpszelet, akkor K-nak a K_1 és K_2 kúpszeletek közül legalább az egyikkel a P és P' pont beszámításával négy közös pontja van. Az F_{12} maximális indexű felületet ugyanis bármely olyan egyenes, amely rajta fekszik a K, e_{12} és e'_{12} vezérvonal által meghatározott másodrendű H torzfelületen, legalább két pontban találja.

Ebből következik, hogy a K_1 és K_2 kúpszeletből álló maximális indexű negyedrendű C_{12} síkgörbét a P és P' ponton átmenő bármely K kúpszelet a PP' pontpárba eső négy ponton kívül még vagy négy vagy két pontban találja.

A C_{12} görbének a σ sík egy körére vonatkozó poláris ábrája olyan negyedosztályú maximális osztályindexű C'_{12} síkgörbe, amely két egymást nem metsző K'_1 és K'_2 kúpszeletből áll. Ennek a C'_{12} görbének a P, ill. P' pont poláris p, ill. p' egyenese kettősérintője.

Mivel a C_{12} görbét a P és P' ponton átmenő bármely K kúpszelet a P és P' pontba eső négy metszésponton kívül még metszi, azért a C'_{12} görbének a p és p' egyenest érintő bármely K' kúpszelettel a pp' érintőpárba eső négy érintőn kívül van még közös érintője. Ez azonban akkor és csak akkor következik be, ha a C'_{12} görbe K'_1 és K'_2 kúpszeletének kölcsönös helyzete a következő:[13]

Ha a p és p' egyenesek által határolt egyik szögteret csúcsszögének terével együtt S_1, a S_1 két mellékszögterét pedig S_2 jelöli, akkor a C'_{12} két kúpszelete közül az egyiknek az S_1 szögtérben, a másiknak az S_2-ben kell feküdnie.

Ha ugyanis mindkét kúpszelet az S_1-ben feküdnék, akkor volna az S_2-ben a p és p' egyenesektől érintett olyan K' kúpszelet, amely a K'_1 és K'_2 kúpszeleteket két-két pontban metszené. Ennek a K' kúpszeletnek a K'_1 és K'_2 kúpszeletekkel csak két-két érintője (a p és p' érintő) volna közös.

---

[13] *a*, 668—669.

Mivel az F_{12}, F_{13} és F_{23} felületeket a P és P' pontokon átmenő egy-egy kitérő egyenespár és két-két kúpszelet meghatározza, azért a P és P' pontoknak nemcsak a K_1K_2, hanem a K_1K_3 és K_2K_3 kúpszeletpárra is megvan a poláris ábrán megvilágított tulajdonságuk.

Ha tehát K'_3 jelöli a K_3 kúpszeletnek az előzőkben fölvett körre vonatkozó poláris ábráját, akkor a K'_1, K'_2, K'_3 kúpszelet közül bármely kettőnek olyannak kell lenni, hogy az egyik a S_1, a másik a S_2 szögtérben feküdjék. Ez azonban lehetetlen. Ha ugyanis K'_1 az S_1-ben van, akkor a K'_2 és K'_3 kúpszeletnek az S_2-ben kell feküdnie, de akkor a K'_2 és K'_3 közül mindkettő ugyanabban az S_2 szögtérben van.

Ha tehát föltételezzük, hogy az F_{123} felület maximális indexű, akkor az F_{12}, F_{13} és F_{23} felületek nem lehetnek mind maximális indexűek, noha abból, hogy F_{123} maximális indexű felület, az következik, hogy az F_{12}, F_{13} és F_{23} mind maximális indexű.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy nincs olyan maximális indexű felület, amely három vagy több másodrendű torzfelületköpenyből állana.

Ezzel a II. és a III. tétel teljesen be van bizonyítva.

4. Másodrendű torzfelületköpennyel is bíró maximális indexű felületek másodrendű torzfelületköpenyeinek száma.

Az I. és II. tétel alapján kimondható a következő tétel:

IV. *Egy maximális indexü felületnek sem lehet kettőnél több másodrendű torzfelületköpenye.*

Tegyük fel ugyanis azt, hogy az n-edrendű maximális indexű F felületnek köpenyei között m számú másodrendű torzfelület van. Ha ezeket H_1, H_2, . . ., H_m jelöli, akkor az F felület az I. tétel értelmében a H_1 felületre és az F felület többi köpenyéből álló $(n-2)$-edrendű maximális indexű F_1 felületre esik szét. Hasonlókép a H_2 felületre és az F_1 felület többi köpenyét tartalmazó $(n-4)$-edrendű maximális indexű F_2 felületre esik szét az F_1 felület. Az F felület tehát szétesik a H_1 és H_2 felületekre és az F felület többi köpenyétől alkotott maximális indexű $(n-2)$-edrendű F_2 felületre.

Az eljárás folytatásával azt kapjuk, hogy a F felület az H_1, $H_2, \ldots, H_m$ másodrendű felületekre és a felület többi köpenyéből álló maximális indexű $(n-2m)$-edrendű F_m felületre szétesik. De akkor a H_1, $H_2, \ldots, H_m$ felületekből álló felület $2m$-edrendű és maximális indexű. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha m kettőnél nem nagyobb.

Ezzel a IV. tétel be van bizonyítva.

5. Magasabbrendű torzfelületköpennyel bíró maximális indexű reducibilis felületek.

Kimutatjuk a következő tételt:

V. *Ha a maximális indexű n-edrendű F_n felületnek van egy k-adrendű $(k \geqq 3)$ F_k torzfelületköpenye és a felület többi köpenye egy $m=(n-k)$-adrendű F_m felületet alkot, akkor F_m is egyköpenyű torzfelület.*

Ha ugyanis e az F_k torzfelületnek egy közönséges alkotója, akkor az e egyenes az F_m felületet m pontban találja. Az F_k felületnek az e egyenes egy P közönséges pontjához tartozó σ érintősíkjában a P ponton átmenő egyenesek ugyanis, mint az F_n felületnek is érintői az F felületet n pontban találják, amelyek közül $m=n-k$ pont esik az F_m felületre. A bevezetésben mondottak értelmében m pontban találja az F_m felületet az e alkotó is.

A között az m pont között, amelyekben az e egyenes az F felületet találja, nem lehet érintéspont vagy csúcspont. Az ellenkező esetben ugyanis volna az e egyenes szomszédságában olyan egyenes, amelynek $n-4$ közös pontja volna az F_n felülettel, mivel az e egyenes a P pontban is érinti a felületet.

Ebből következik, hogy az F_m felületnek az F_k torzfelület alkotóival való közös pontjai m egyenesen vannak. Ezek közül azonban nem lehet kettőnél több egymástól különböző. Az ellenkező esetben ugyanis az F_k felület mint három egyenes közös szelőinek összessége másodrendű torzfelület volna.

Ha g_1 és g_2 az F_k és F_m felületnek ez a két közös egyenese, akkor az előbbiek szerint ennek a két egyenesnek az F_m felületen együttvéve m a sokszorossága. Ha Q az F_m felületnek a g_1 és g_2 egyeneseken kívül fekvő egy tetszőleges pontja, akkor a Q ponton

átmenő és a g_1 és g_2 egyeneseket metsző f egyenes teljesen hozzátartozik az F_m felületéhez. Az ellenkező esetben ugyanis ez az f egyenes legalább $m+1$ pontban találná az m-edrendű F_m felületet.

Ezzel ki van mutatva, hogy az F_m felület torzfelület.

Mivel a III. tétel értelmében egy maximális indexű torzfelületnek nem lehet három, vagy háromnál több köpenye, azért az F_m felület nem állhat egynél több köpenyből.

Ezzel az V. tétel teljesen be van bizonyítva.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. április 26-án tartott üléséből.)

ÜBER FLÄCHEN VOM MAXIMALINDEX MIT MINDESTENS EINER REGELFLÄCHENSCHALE ZWEITER ORDNUNG.

Von GYULA (JULIUS) v. SZ. NAGY.

In einer vorigen Arbeit[1] hat der Verfasser den folgenden Satz bewiesen:

Es gibt keine Fläche vom Maximalindex, die aus drei oder mehr Regelflächenschalen besteht, wenn die Ordnung von mindestens einer Regelflächenschale grösser als zwei ist.

Dieser Satz wird jetzt durch den folgenden Satz ergänzt:

Es gibt keine Fläche vom Maximalindex, die mehr als zwei Regelfläche nschalen zweiter Ordnung besitzt. Es gibt also keine Fläche vom Maximalindex, die aus mehr als zwei Regelflächenschalen besteht.

Es werden auch die folgenden Sätze bewiesen:

Ist H eine Regelflächenschale zweiter Ordnung einer mehrschaligen Fläche n-ter Ordnung vom Maximalindex, so bilden die übrigen Schalen eine Fläche $(n-2)$-ter Ordnung vom Maximalindex.

Hat eine Fläche F_n n-ter Ordnung vom Maximalindex eine Regelflächenschale F_k k-ter Ordnung $(k>2)$, und bilden die übrigen Schalen von F_n eine Fläche F_m von $m=(n-k)$-ter Ordnung, so ist F_m eine einschalige Regelfläche.

---

[1] Untersuchungen über die Flächen vom Maximalindex. Math. und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ungarischen Akademie d. Wiss. 58 (1935), 420—474, insbes. S. 449.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

EGY SZÉLSŐÉRTÉKFELADAT A DETERMINÁNS-ELMÉLETBEN.

SZEKERES GYÖRGY- és TURÁN PÁL-tól

E dolgozatban a következő problémával fogunk foglalkozni; keresendő azon n-edrendű determinánsok maximális abszolút értéke, melyek $(+1)$ és (-1)-ből, mint elemekből képzelhetők. HADAMARD klasszikus determinánstételéből rögtön adódik felső becslésül, hogy ha e maximum értékét M_n-el jelöljük,

$$M_n \leq n^{\frac{n}{2}}. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy HADAMARD becslése pontos akkor és csak akkor, ha a determináns olyan, hogy bármely két különböző sor kompozituma 0; ha tehát létezik (± 1) elemekből képzett n-edrendű ilyen tulajdonságú determináns, mint nevezni fogjuk, U_n-determináns, akkor extrémproblémánk meg van oldva. Ez utóbbi kérdést először SYLVESTER[1] vetette fel, aki az $n=2^k$ $(k=1, 2, \ldots)$ esetekre igen egyszerű módon konstruált U_n-determinánst. Más speciális alakú n-ekre PALEY[2]-nek sikerült U_n-determinánst szerkesztenie; így pl. az $n = p + 1$ esetekre, ahol p tetszőleges $(4k-1)$ alakú primszám. Páratlan n-re nyilván nem létezhetik U_n-determináns; de könnyen belátható[3] az is, hogy csak $n \equiv 0$ mod 4 létezhetik. Viszont e feltétel valószínűleg elégséges is;

---

[1] J. J. SYLVESTER: «Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices ...» Phil. Mag. (4) 24. (1867). 461—475.

[2] R. E. A. C. PALEY: «On orthogonal matrices.» Journal of Mathematics and Physics. 1933. 311—320.

[3] Pl. PALEY l. c.

PALEY az $n = 92, 116, 156, 172, 184, 188$ esetek kivételével minden más esetet elintézett 200-ig. PALEY tételéből, mint ERDŐS PÁL megjegyezte és a nagyprimszámtételből rögtön következik, hogy ha a tetszőleges kis pozitív szám, $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$-ra

$$M_n > n^{\frac{n}{2}}(1-\varepsilon)^n. \tag{2}$$

U. i. könnyen belátható, hogy M_n n-el együtt monoton nő és a $(4k-1)$ alakú primszámok «közel» vannak egymáshoz, t. i. a hányadosuk 1-hez tart. COLUCCI [1] és utána BARBA [2] kimutatták, hogy $n \not\equiv 0 \bmod 4$-re M_n lényegesen kisebb és pedig páratlan n-re

$$M_n < (2n-1)^{\frac{1}{2}}(n-1)^{\frac{n-1}{2}} \sim \sqrt{\frac{2}{e}}\, n^{\frac{n}{2}} \tag{3}$$

ha $n \to \infty$. Tehát M_n függeni fog n számelméleti jellegétől.

Az alsó becsléseket mindig azáltal nyerték, hogy effektíve konstruáltak egy-egy nagy abszolút értékű determinánst. Következőkben azáltal következtetünk «nagy» abszolút értékű ± 1 elemű determináns létezésére, hogy kimutatjuk, hogy már az összes ilyen (2^{n^2} számú) determináns négyzetes és biquadratikus közepei is nagyok; pontosan, ha általában

$$\frac{1}{2^{n^2}} \sum_{\varepsilon_{ij}=\pm 1} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \cdots \varepsilon_{1n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n1} \cdots \varepsilon_{nn} \end{vmatrix}^k = S_n^{(k)} \tag{4}$$

akkor

$$S_n^{(2)} = n! \tag{5a}$$

$$S_n^{(4)} = n!^2 \psi(n) \tag{5b}$$

ahol $\psi(1)=1$, $\psi(2)=2$ és

$$\psi(n) = \psi(n-1) + \frac{2}{n}\psi(n-2). \tag{6}$$

---

[1] COLUCCI: «Sui valori massimi dei determinanti ad elementi $+1$ e -1.» Gior. di Matem. di Battaglini. Vol. XLIV.

[2] G. BARBA: «Intorno al theorema di Hadamard sui determinanti a valore massimo.» Gior. di Matem. Battaglini Vol. LXXI.

(5*a*) és (5*b*) érdekessége a relatiók érdekessége mellett a probléma szempontjából qualitative az, hogy mutatja, hogy sok ilyen determináns értéke aránylag nagy, ami a determinánsstrukturára is fényt vet; quantitative pedig, mivel pozitív számok maximuma nem kisebb a számtani középnél, (5*a*) *kezdettől fogva* adja, hogy

$$M_n \geqq \sqrt{n!}$$

(5*b*)-ből kis számolás után ugyanosak kezdettől fogva pl.

$$M_n > \frac{1}{4}\sqrt{n!}\,\sqrt{n}.$$

Általában $S_n^{(2k)}$-ra nem tudtunk ilyen egyszerű formulát kapni; pedig már egy, az $S_n^{(2k)}$-ra fix n mellett $k \to \infty$-re vonatkozó *asymtotikus* formula az elemekből ismert

$$M_n = \lim_{k \to \infty} \sqrt[2k]{S_n^{(2k)}} \tag{7}$$

formula miatt *pontosan* adná M_n-et. De ki tudjuk mutatni, hogy $k > \frac{1}{2}n!$-ra a következő alakú formula áll:

$$S_n^{(2k)} = \sum_{\mu=0}^{\frac{1}{2}n!} \left[\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \left(e^x - e^{-x}\right)^{2\mu} \left(e^x + e^{-x}\right)^{n!-2\mu} \right]_{x=0} \left[\sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}n!} c_{\mu\nu} S_n^{(2\nu)} \right] \tag{8}$$

ahol a $c_{\mu\nu}$ számok csak n, μ, ν-től függenek, *k-tól nem*. Azaz $S_n^{(2k)}$ (8) által oly alakban van előállítva, melyben azon tagok viselkedése $k \to \infty$-re, melyekben k egyáltalán előfordul, könnyen uralható és a tagok száma se függ k-tól. A $c_{\mu\nu}$ számok egy linearis egyenletrendszerből adódnak, melynek determinánsa $2!\ 4!\ \ldots (n!)!$; azonban eddig használható formában nem tudtuk őket nyerni.

Nézzük (5*a*) és (5*b*) bizonyítását. Legyen

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \cdots \varepsilon_{1n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_1} \cdots \varepsilon_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

egy tetszőleges, ± 1 elemekkel alkotott n-edrendű determináns; ekkor

$$\Delta(\varepsilon) = \sum_P (-1)^{I(P)} \varepsilon_{1i_1} \varepsilon_{2i_2} \cdots \varepsilon_{ni_n},$$

ahol P azonos az $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ permutatióval, $I(P)$ jelenti P inverziói számát és a P-szerinti összegezés azt jelenti, hogy P az összes permutatiókon végigfut. Azaz

$$\Delta(\varepsilon)^l = \sum (-1)^{(I(P_1)+\cdots+I(P_l)} (\varepsilon_{1\mu_1} \varepsilon_{2\mu_2} \cdots \varepsilon_{n\mu_n}) \cdots (\varepsilon_{1\varrho_1} \varepsilon_{2\varrho_2} \cdots \varepsilon_{n\varrho_n}), \quad (10)$$

ahol $P_1 \equiv (\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n), \ldots P_e \equiv (\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n)$ és $P_1, P_2, \ldots P_l$ függetlenül végigfutnak az $1, 2, \ldots n$ elemek összes permutatióin. $\Delta(\varepsilon)^l$ ezen alakját kell most az ε-okra összegezni. Cseréljük fel az ε-ok és P-k összegezési sorrendjét, azaz (10)-ből ragadjunk ki egy tagot, ezt összegezzük előbb az ε-k szerint. Ha a kiragadott tag a lehetséges szorzások elvégzése után

$$(-1)^{I(P_1)+\cdots+I(P_l)} \varepsilon_{11}^{\alpha_{11}} \varepsilon_{12}^{\alpha_{12}} \ldots \varepsilon_{nn}^{\alpha_{nn}}$$

alakú, akkor az $\varepsilon - k$ szerint összegezve

$$(-1)^{I(P_1)+\cdots+I(P_l)} \left(\sum_{\varepsilon_{11}=\pm 1} \varepsilon_{11}^{\alpha_{11}}\right) \left(\sum_{\varepsilon_{12}=\pm 1} \varepsilon_{12}^{\alpha_{12}}\right) \ldots \left(\sum_{\varepsilon_{nn}=\pm 1} \varepsilon_{nn}^{\alpha_{nn}}\right)$$

hez jutunk. Azaz, ha csak egyetlen a_{ik} páratlan, az összeg 0, ha mindegyik a_{ik} páros, akkor 2^{n^2}. Azaz nyertük, hogy

$$S_n^{(l)} = \sum_{\mathfrak{A}_n^{(l)}} (-1)^{I(P_1)+\cdots+I(P_l)} \quad (11)$$

ahol $\mathfrak{A}_n^{(l)}$ tehát oly l-es permutatiórendszerek összessége, hogy

$$\begin{matrix} P_1 \equiv (\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ P_l \equiv (\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n) \end{matrix} \quad (12)$$

alakba írva minden oszlopban minden elem páros sokszor fordul elő. $\mathfrak{A}_n^{(l)}$-ben persze lesznek oly rendszerek is, melyekben ugyanazon permutatiók szerepelnek, csak más sorrendben.[1] Ha l páratlan, akkor $\mathfrak{A}_n^{(l)}$ nyilván üres, azaz $S_n^{(l)} = 0$, ami természetes

[1] Talán nem érdektelen, de nagyon nehéznek látszó kérdés az, hogy hány ily l-es permutatiórendszer képezhető az $1, 2, \ldots n$ elemek összes permutatióiból. Triviális csak az $-f(n, l)$-el jelölve ezen rendszerek számát — hogy $f(n, 2d-1) = 0$, $d = 1, 2, \ldots$ és $f(n, 2) = n!$.

is. Ha $l=2$, akkor mivel $\mathfrak{A}_n^{(2)}$ permutatiórendszerei nyilván azonos permutatiópárak, jelen esetben (11) összeg minden tagja $+1$ és $\mathfrak{A}_n^{(2)}$ $n!$ rendszert tartalmaz. Ezzel (5a) igazolva van.

Nézzük most (5b)-t, illetve foglalkozzunk (11) jobboldalán álló összeggel, ha $l=4$. Előbb egy egész egyszerű reduktio, ami különben tetszőleges páros l-re is elvégezhető. Legyen $\mathfrak{B}_n^{(4)}$ azon részhalmaza $\mathfrak{A}_n^{(4)}$-nek, melyre $P_1 \equiv (1, 2, \ldots n)$. $\mathfrak{A}_n^{(4)}$ minden egyes permutatiorendszere oszlopcserékkel átvihető $\mathfrak{B}_n^{(4)}$ egy rendszerébe; az inverzió-összeg az oszlopcserékkel paritásra nézve nem változott, hisz szomszédos oszlopok cseréjénél minden sorban az inverziók száma eggyel nőtt vagy fogyott és 4 sor van. $\mathfrak{B}_n^{(4)}$ minden permutatiorendszerét nyilván $n!$-szor kaptuk meg; azaz

$$S_n^{(4)} \equiv \sum_{\mathfrak{A}_n^{(4)}} (-1)^{I(P_1)+I(P_2)+I(P_3)+I(P_4)} = n! \sum_{\mathfrak{B}_n^{(4)}} (-1)^{I(P_1)+\cdots+I(P_4)} \equiv$$

$$\equiv n!\,\varphi(n) \ldots \qquad (13)$$

(a második összegben $I(P_1)$-et csak a symmetria miatt írtuk le még egyszer.)

$\mathfrak{B}_n^{(4)}$ minden permutatiórendszeréhez egy k egész számot rendelünk hozzá a következőkép. $\mathfrak{B}_n^{(4)}$ definitiója szerint az utolsó oszlopban biztos szerepel legalább kétszer az n elem. Ha mindnégy elem ezen oszlopban n-es, akkor legyen $k=0$. Ha csak kettő, akkor a másik két elem az oszlopban szintén egyenlő egymással, legyen ez a_1. Ekkor vegyük az a_1-ik oszlopot; $\mathfrak{B}_n^{(4)}$ definitiója szerint legalább két drb a_1-es szerepel benne. De több nem is szerepelhet, mert valamelyik két permutatióban a_1 csak az *utolsó* elem. Az a_1-ik oszlopban tehát két drb a_1-es áll és két drb. más, mondjuk a_2-es. Ekkor az a_2-ik oszloppal folytatjuk ezen operatiót addig, míg egy oly a_k-hoz jutunk, hogy az a_k-ik oszlopban két drb. a_k-as és két drb. n-es áll. A szimmetria miatt jelöljük n-et a_0-al. Az $(a_0, a_1 \ldots a_k)$ variációt nevezzük a permutatiórendszer cyklusának. Nyilván $0 \leqq k \leqq n-1$. $\mathfrak{B}_n^{(4)}$-et vágjuk szét n osztályra úgy, hogy egy osztályba kerüljenek azon permutatiórendszerek, melyekre k ugyanaz. A $k=0$ osztállyal, illetve az idetartozó rendszerekre vonatkozó $\Sigma(-1)^{I(P_1)+\cdots+I(P_4)}$ összeggel hamar végzünk; az utolsó oszlopot elhagyva a $k=0$ osztály rendszereinek egy-egy értelmű leképezését nyertük $\mathfrak{B}_{n-1}^{(4)}$ rendszereire

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK

és minden permutatiórendszerre a transformatio után nem változott az inverziós-összeg. E rész tehát $\varphi(n)$-hez $\varphi(n-1)$-el járul hozzá. Legyen most $1 \leqq k \leqq n-1$; ezen osztály rendszereit $\mathfrak{B}_n^{(4)}{}_{k-1}$-re fogjuk leképezni azáltal, hogy az a_0-ik, a_1-ik,... a_k-ik oszlopokat elhagyjuk. Először lássuk be, hogy ezen oszlopok elhagyása oly négyes permutatiórendszerekhez vezet, melyre az inverzióösszeg paritása nem változott. U. i. oszlopcserékkel, melyek, mint láttuk, az inverzióösszeg paritását nem változtatják, elérhető, hogy ezek az utolsó $(k+1)$ oszlopot alkossák. k definitiójából következik, hogy a négy permutatio szétesik két párra, melyek mindegyike olyan, hogy az utolsó $(k+1)$ helyen rendre ugyanazon elemek állanak. Az általánosság rovása nélkül legyenek e párok (P_1, P_2), illetve (P_3, P_4). Ha P_1 és P_2-ből az utolsó $(k+1)$ elemet elhagyjuk, az $I(P_1)+I(P_2)$ összeg paritása nem változott; u. i. az utolsó $(k+1)$ elem egymás között alkotott inverziói P_1 és P_2-ben természetesen azonosak, továbbá az első $(n-k+1)$ elemnek az utolsó $(k+1)$-el alkotott inverziói is, mivel P_1 és P_2 első $(n-k-1)$ eleme csak sorrendben különbözik egymástól. Ugyanez áll a (P_3, P_4) párra is. Tehát a paritás tényleg nem változott. Fixáljuk az $(a_0, a_1, \ldots a_k)$ cyklust és tekintsük csak $\mathfrak{B}_n^{(4)}$-nek ehhez tartozó permutatiorendszereit. Ekkor az oszlopok áthúzása után a $(-1)^{I(P_1)+\cdots+I(P_4)}$-ekből $(-1)^{I(Q_1)+\cdots+I(Q_4)}$-ek lesz, ahol a $Q-k$ $(n-k-1)$ elemből[1] képzett permutatiók oly négyes permutatiórendszerei, melyekre (12) feltétel fennáll n helyett $(n-k-1)$-el. Viszont *mindegyik* ilyen (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) permutatiorendszerhez tartozik fordítva (P_1, P_2, P_3, P_4) rendszer és pedig, mivel $\mathfrak{B}_n^{(4)}$ definitiója miatt $P_1 \equiv (1, 2, \ldots n)$, éppen három; u. i., ha az adott (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) rendszerből és adott $(a_0, a_1, \ldots a_k)$ cyklusból rekonstruálni akarjuk (P_1, P_2, P_3, P_4)-et, akkor az a_0-ik oszlop megadása után, ami háromfélekép lehetséges,[2] a rekonstrukció már nyilván egyértelmű. Azaz $\mathfrak{B}_n^{(4)}$-

[1] T. i. azon elemekből, melyek megmaradnak, ha $(1, 2, \ldots n)$-ből $(a_0, a_1 \ldots a_k)$-t elhagyjuk.

[2] T. i. $\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_1 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 \\ a_1 \end{Vmatrix}$ és $\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_0 \end{Vmatrix}$.

nek $(a_0, a_1, \ldots a_k)$ cyklusú permutatiórendszereire összegezve $3\varphi(n-k-1)$-et kapunk. $(a_0, a_1, \ldots a_k)$-ban $(a_1, \ldots a_k)$-t végigfuttatva $(1, 2, \ldots \overline{n-1})$ összes variációin nyerjük a k-ik osztályt; erre kiterjesztett összeg tehát

$$3\binom{n-1}{k} k!\, \varphi(n-k-1)$$

azaz

$$\varphi(n) = \varphi(n-1) + 3\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-1}{k} k!\, \varphi(n-k-1) \tag{14}$$

$\varphi(\nu)$ helyett $\nu!\,\psi(\nu)$-t írva (13) és (14)-be nyerjük, hogy

$$S_n^{(4)} = n!^2 \psi(n) \tag{15a}$$

ahol

$$n\psi(n) = \psi(n-1) + 3\sum_{k=0}^{n-2}\psi(k). \tag{15b}$$

(15b)-be n helyett $(n-1)$-et írva és levonva nyerjük (6)-ot. Hogy $\psi(1)=1$ és $\psi(2)=2$, direkt számolással nyerhető (15a)-ból.

Hátra van még (8) formula igazolása. Jelentsék $P_1, P_2, \ldots P_{n!}$ az $1, 2, \ldots n$ elemek permutatióit lexikografikus sorrendben.[3] Igazoljuk mindenekelőtt a következő lemmát:

$$\psi(k, l, n) \equiv \sum_{\mu_i \geqq 0} \frac{(2k)!}{(2\mu_1+1)! \ldots (2\mu_{2l}+1)!\,(2\mu_{2l+1})! \ldots (2\mu_{n!})!} = \tag{16}$$

$$(2\mu_1+1)+\cdots+(2\mu_{2l}+1)+2\mu_{2l+1}+\cdots+2\mu_{n!}=2k$$

$$= \frac{1}{2^{n!}}\left[\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(e^x - e^{-x})^{2l}(e^x + e^{-x})^{n!-2l}\right]_{x=0}.$$

Ugyanis baloldal nem más, mint $(2k)!$-szorosa x^{2k} együtthatójának

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{\infty}\frac{x^{2\mu_1+1}}{(2\mu_1+1)!}\right)\cdots\left(\sum_{\mu_{2l}=0}^{\infty}\frac{x^{2\mu_{2l}+1}}{(2\mu_{2l}+1)!}\right)\left(\sum_{\mu_{2l+1}=0}^{\infty}\frac{x^{2\mu_{2l+1}}}{(2\mu_{2l+1})!}\right)\cdots\left(\sum_{\mu_{n!}=0}^{\infty}\frac{x^{2\mu_{n!}}}{(2\mu_{n!})!}\right) =$$

$$= (e^x - e^{-x})^{2l}(e^x + e^{-x})^{n!-2l}\frac{1}{2^{n!}}$$

-ben, amivel a Lemma igazolva is van. A Lemma alapján például könnyű volna $\psi(h, l, n)$-et egy, binomiális együtthatókra

[3] Ekkor $P_\mu < P_\nu$ jel azt fogja jelenteni, ha P_μ előbb áll a sorban, mint P_ν.

vonatkozó *kétszeres* összeggel kifejezni a (16)-ban álló $n!$-szoros helyett, de ezt nem részletezzük.

Mármost $S_n^{(2k)}$ (11) alatti alakjában fogjuk össze $\mathfrak{A}_n^{(2k)}$ azon permutatiórendszereit, melyek csak a permutatiók sorrendjében különböznek egymástól. Ekkor

$$S_n^{(2k)} = \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n!} = 2k}' \frac{(2k)!}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_{n!}} (-1)^{\lambda_1 I(P_1) + \cdots + \lambda_{n!} I(P_{n!})}, \tag{17}$$

ahol az összegezés oly $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n!})$ értékrendszerekre terjesztendő ki, hogy a P_1 permutatiót λ_1-szer, $P_{n!}$ permutatiót $\lambda_{n!}$-szor véve (12) feltételt kielégítő $2k$-as permutatiórendszert nyerjünk. Tekintsük azon $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n!})$ értékrendszereket, melyekben $\lambda_{\varrho_1}, \lambda_{\varrho_2}, \ldots, \lambda_{\varrho_{2l}}$[1] páratlanok, a többi λ páros és (17) feltétel ki van elégítve; ezekre az összeg értéke nyilván

$$(-1)^{I(P_{\varrho_1}) + \cdots + I(P_{\varrho_{2l}})}\, \psi(k, l, n). \tag{18}$$

Most $\varrho_1, \ldots, \varrho_{2l}$-et futtassuk végig $(1, 2, \ldots, n!)$ elemek összes $2l$-es kombinatióin; ekkor ezen összeg értéke (18) miatt

$$\psi(k, l, n) \cdot \sum_{\mathfrak{G}_{2l}} (-1)^{I(P_{\varrho_1}) + \cdots + I(P_{\varrho_{2l}})}, \tag{19}$$

ahol $\mathfrak{G}_{2l}$ azon $2l$-es permutatiórendszerek összessége, melyekre $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{2l}$ és (12) feltétel ki van elégítve. Tehát (19) második tényezője $l \leqq \frac{1}{2} n!$ miatt *már k-tól nem függ*; jelöljük ezt $A(n, l)$-el. Ekkor (17)-ből nyilván

$$S_n^{(2k)} = \sum_{l=0}^{\frac{1}{2} n!} \psi(k, l, n)\, A(n, l). \tag{20}$$

Jegyezzük meg, hogy $A(n, 0) = 1$, $\psi(k, k, n) = (2k)!$ és $\psi(k, l, n) = 0$, ha $l > k$; ugyanis ekkor $2k$-t nem lehet $2l$ számú páratlan egész szám összegéül előállítani. Azaz $k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2} n!$-t beírva nyerjük, hogy

---

[1] $\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{2l}$ és $0 \leqq l \leqq \frac{1}{2} n!$. A ϱ-kat fixálva képzeljük egy pillanatra.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 . A(n, 0) \\
S_n^{(2)} &= \psi(1, 0, n) . A(n, 0) + 2! A(n, 1) \\
&\vdots \\
S_n^{(n!)} &= \psi\left(\frac{n!}{2}, 0, n\right) \cdot A(n, 0) + \psi\left(\frac{n!}{2}, 1, n\right) A(n, 1) + \cdots + \\
&\qquad + (n!)! A\left(n, \frac{n!}{2}\right),
\end{aligned} \tag{21}
$$

amivel az állítás igazolva van, mert

$$
A(n, l) = \frac{1}{2! 4! \ldots (n!)!} \sum_{\substack{l = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2} n! \\ \mu = 0}}^{\frac{1}{2} n!} c_{\mu l} S_n^{(2\mu)}.
$$

Még csak azt jegyezzük meg, hogy a $c_{\mu l}$-eket adó determinánsokat egész elemi, magasabb differentiálhányadosokként előállítható függvények alkotják; ilyenkép a $c_{\mu l}$-ek előállíthatók többváltozós elemi függvények partiális deriváltjaiként az origóban, de ez sem ad jól kezelhető kifejezést.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

ÜBER EIN EXTREMALPROBLEM IN DER DETERMINANTENTHEORIE.

Von G. SZEKERES und P. TURAN.

Es wird das folgende, in der Literatur mehrfach vorkommende Problem behandelt: wie gross kann der absolute Wert einer Determinante von n-tem Grade sein, welche aus den Elementen $+1$ und -1 gebildet ist? Wenn man dieses Maximum mit M_n bezeichnet, folgt aus dem Determinantensatze von HADAMARD, dass $M_n \leqq n^{\frac{n}{2}}$ ist. Als untere Abschätzung bewies Herr P. ERDŐS für $n > n_0(\varepsilon)$, dass $M_n > n^{\frac{n}{2}}(1-\varepsilon)^n$ ist. Wir beweisen in dieser Note, dass der quadratische bezw. biquadratische Mittelwert[1] *aller* Determinanten n-ten Grades mit den Elementen ± 1 (also Determinanten von der Anzahl 2^{n^2}), exact $\sqrt{n!}$ bezw. $\sqrt[4]{n!^2\psi(n)}$ ist, wo $\psi(1)=1$, $\psi(2)=2$ und $\psi(n)=\psi(n-1)+\frac{2}{n}\psi(n-2)$. Aus diesen Formeln folgt qualitative, dass es «viele grosse» Determinanten solcher Art gibt und quantitave, dass für *alle* n z. B. $M_n > \sqrt{n!}$ ist. Wenn wir die $2k$-te Potenzmitteln dieser Determinanten, $B_n^{(2k)}$, berechnen könnten, oder nur *asymptotisch*, bei fixem n für $k \to \infty$, wäre das Extremalproblem offenbar gelöst; aber eine solche Formel konnten wir bis jetzt nicht in

---

[1] D. h. die Ausdrücke $\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_m^2}{m}}$ bezw. $\sqrt[4]{\frac{a_1^4+\cdots+a_m^4}{m}}$.

brauchbarer Form darstellen. Wir wissen nur, dass für $k > \frac{1}{2}n!$ eine Formel von der Gestalt

$$B_n^{(2k)} = \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}n!} \left[\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (e^x - e^{-x})^{2\nu} (e^x + e^{-x})^{n!-2\nu} \right]_{x=0} \left[\sum_{\mu=0}^{\frac{1}{2}n!} c_{\mu\nu} B_n^{(2\mu)} \right]$$

gilt, wo die $c_{\mu\nu}$ *von k unabhängige* Constanten bedeuten, die in Determinantenform gegeben sind.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24-en Mai 1937.)

EGY ÚJ SZÁMELMÉLETI JEL, ALKALMAZÁSSAL A MÁSODFOKÚ SZÁMTESTEK ELMÉLETÉRE. I.

RÉDEI LÁSZLÓ-tól (Mezőtúr).

Legyenek a_1, a_2, a_3 $4l+1$ alakú 1-től különböző négyzetmentes racionális egész számok, legyenek ezek relatív prímek (nem szükségképpen páronként relatív prímek) és az a_1 legyen négyzetes maradék az a_2a_3 minden, az a_1-ben nem foglalt törzstényezőjére nézve. Akkor van két $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ relatív prím egész ideál a $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ testben úgy, hogy ezek normája a_2, illetve a_3, ahol R a racionális számok teste. Ha van egy olyan α_2 szám a k_1-ben, hogy $\alpha_2 \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{a}_2$, $\alpha_2 \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod 4$,[1] ha továbbá az $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right)$ 2-odfokú hatványmaradékjel értéke (ami most biztosan zérustól különböző) független az $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, α_2 elemek különös megválasztásától, akkor ezt a csupán az a_1, a_2, a_3 számhármastól függő értéket $\{a_1, a_2, a_3\}$-mal jelölöm. Valahányszor tehát ez a $\{\}$ jel létezik, akkor az ő értéke 1 vagy -1. Mint ezt látni fogjuk, létezik ez a jel például akkor, ha a_1, a_2, a_3 különböző páratlan törzsszámok, az a_1, a_2 közül legalább az egyik pozitív és $\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \left(\frac{a_1}{a_3}\right) = \left(\frac{a_2}{a_3}\right) = 1$.

Az 1. §-ban megvizsgálom, hogy mely esetekben létezik az $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel. A létezés feltétele általában az a_1, a_2, a_3

---

[1] Az $x \underset{(2)}{=} y$ úgy értendő, mint $x = yz^2$, ahol z ugyanannak a csoportnak egyik eleme, amelyben x, y értelmezve vannak, s hasonlóan értendő az $x \underset{(2)}{\equiv} y \pmod m$ is. Az (α) főideált α-val jelölöm. A kongruenciát multiplikatív értelemben veszem; természetesen így lesz értendő a hatványmaradékjel is. A fenti két összefüggés a k_1 test zérustól különböző ideáljainak, illetve számainak (multiplikatív) csoportjában értendő.

törzsténye zőiből alakított 2-odfokú hatványmaradékjelekkel fejezhető ki.

A 2. §-ban megállapítom az $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_1, a_3\}$, továbbá bizonyos kevés korlátozás mellett az $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\}$ reciprok összefüggéseket. Ha különösen a_1, a_2, a_3 pozitívok, akkor mindhárom argumentumra nézve teljes a reciprocitás: $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\} = \cdots = \{a_3, a_2, a_1\}$. Ezenkívül a $\{\ \}$ jel multiplikatív mindhárom argumentumban, azaz például $\{a, a_2, a_3\}\{b, a_2, a_3\} = \{ab, a_2, a_3\}$, ahol az ab-ből az esetleges teljesnégyzet tényezők törlendők s az $a=b$ esetben az (értelmetlen) jobboldal helyett 1 értendő, és az összefüggés fennáll már akkor, ha a benne szereplő 3 $\{\ \}$ jel közül legalább 2 létezik, amikor is szükségképpen létezik a harmadik $\{\ \}$ jel is.

A 3. § alkalmazást tartalmaz a 2-odfokú számtestek («szűkebb» értelemben) abszolút osztálycsoportjára. Legyen ebben e_2, e_4, e_8 a 2-, 4-, illetve 8-cal osztható invariánsok számossága. Az e_2 ismeretes GAUSS szerint. Az e_4-et és e_8-at én meghatároztam,[2, 3] az utóbbit később H. REICHARDT[4] is, s ezután én még két ízben visszatértem a kérdésre, [5, 6] de az e_8-nak eme eddigi különböző meghatározásmódjai közül egyik sem teljesen kielégítő, mindegyik tartalmaz ugyanis bizonyos önkényesen választandó elemeket, amely körülmény mind az eredmény áttekinthetőségének, mind az alkalmazhatóságnak rovására ment. Itt sikerült a kérdést véglegesen lezárni. Mégpedig az e_8 az e_4-éhez hasonló meghatározást nyer, azzal az eltéréssel, hogy míg az e_4 (az R-ben értelmezett) $(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})$ jelek által, addig az e_8 $\{\ \}$ jelek által nyer kifejezést.

---

[2] RÉDEI L.: A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, ez az Ért., 49 (1932), 338—361.

[3] RÉDEI L.: A másodfokú számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai, ez az Ért., 50 (1933), 195—215.

[4] H. REICHARDT, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journ. f. d. Math., 170 (1933), 75—82.

[5] RÉDEI L.: A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsairól, ez az Ért., 51 (1934), 227—254.

[6] RÉDEI L.: Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsaira, ez az Ért., 54 (1936), 736—766.

A 4. §-ban néhány példát tárgyalok.

Megjegyzések. Egy $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel rendjének nevezem az $a_1a_2a_3$ különböző törzstényezőinek számosságát. Az emlitett multiplikatív sajátság alapján egy $\{\}$ jelt esetleg előállíthatunk alacsonyabb rendű tényezők szorzataként úgy, hogy a tényezők nem tartalmaznak más törzstényezőket, mint amik már az eredeti $\{\}$ jelben is szerepeltek. Ha ilyen előállítás nem lehetséges, akkor irreducibilis $\{\}$ jelről beszélek. Az e_8 meghatározásánál fontos kérdés a $\{\}$ jeleket előállítani irreducibilis tényezők által, de sem erre a kérdésre általánosságban megfelelni nem tudok, sem azt nem tudom eldönteni, hogy az irreducibilis $\{\}$ jelek rendje korlátos-e. A 4. §-beli példák kapcsán fogunk találkozni irreducibilis $\{\}$ jelekkel.

Az $\{a_1, a_2, a_3\}$ jelnek fenti értelmezése helyett egy más értelmezésből fogok kiindulni, amely a fentebbinél általánosabb s a tárgyalásra alkalmasabb, felölelve páros a_1, a_2, a_3 értékeket is. A fent az 1., 3. §§-ról, s kevés módosítás után a 2. §-ról mondottak valójában már az ilyen általánosabb $\{\}$ jelekre értendők.

Bizonyos esetekben a $\{\}$ jel kifejezhető (az R-ben értelmezett) $(\equiv)_4$ 4-edfokú hatványmaradékjel által. (A $(\equiv)_4$ jel hasonlóan értendő, mint a [6] dolgozatban, 739. o.) Ha például p, q olyan $4l+1$ alakú pozitív törzsszámok, amelyekre $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, akkor $\{p, q, p\} = \left(\frac{q}{p}\right)_4$.

Egy későbbi dolgozatban az itteniek alapján be fogom bizonyítani, hogy végtelen sok olyan 2-odfokú számtest van, amelyben e_2, e_4, e_8 tetszés szerint előre megadott értékek, természetesen az $e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq 0$ korlátozással. (Ez előtt még az sem volt ismeretes, hogy $e_8 \geqq 2$ végtelen sokszor bekövetkezik.)

*

Megállapodunk a következőkben:

Latin, görög, gót betűk jelentsenek racionális számot, algebrai számot, illetve ideált, hogyha mást nem mondunk. Különösen p és $\mathfrak{p}$ jelentsenek törzsszámot, illetve törzsideált.

A $\mathfrak{p}$ kitevője $\mathfrak{b}$-ben az a legnagyobb n racionális egész szám, amelyre $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}^n}$ a $\mathfrak{p}$-re nézve egész. Jelekben: $\mathfrak{p}^n \| \mathfrak{b}$.

Páratlan és páros azt jelentse, mint 2-höz prím, illetve nem prím.

Test alatt az R fölött végesfokú algebrai számtestet értek. A jólhangzás kedvéért néhol test helyett számtestet mondok. «K/k test» jelentse ugyanazt, mint «K relatív test a k test fölött». A relatív diszkrimináns és relatív norma jele: $D_{K/k}$, $N_{K/k}$. A $k=R$ esetben egyszerűen: D_K, N_K.

2-odfokú testekben jelentse «$'$» a konjugáltra való áttérést.

Ha $a(\neq 0)$, $\mathfrak{p}$ egy k testbe tartoznak és $a \underset{(2)}{\not\equiv} 1$, akkor $\left(\frac{a|k}{\mathfrak{p}}\right)$ értéke legyen $1, -1, 0$ a szerint, amint $\mathfrak{p}$ a $k(\sqrt{a})/k$ testben teljesen felbomlik, felbontatlan marad vagy elágazik, míg $a \underset{(2)}{\equiv} 1$ mellett legyen $\left(\frac{a|k}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Az $\left(\frac{a|k}{\mathfrak{p}}\right)$ helyett legtöbbször $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right)$-t írok. Összetett nevezőre az $\left(\frac{a}{ab}\right) = \left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$ értelmezés veendő. Tudvalevőleg páratlan a mellett $\left(\frac{a}{a}\right)$ egyezik a 2-odfokú hatványmaradékjellel, míg páros $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}^n \| 2$ mellett $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right) = 1, -1, 0$ a szerint, amint $a \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n+1}}$ vagy $a \underset{(2)}{\not\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n+1}}$ és $a \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n}}$ vagy $a \underset{(2)}{\not\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n}}$, amely legutóbbi eset mindenesetre beáll akkor, ha $\mathfrak{p}$ kitevője a-ban páratlan.

Diszkriminánsszám ugyanazt jelenti, mint diszkriminánsa egy 2-odfokú számtestnek. Törzsdiszkrimináns az olyan diszkriminánsszám, amelynek nincsenek különböző törzstényezői. Ezek: -4, 8, -8 és a $4l+1$ alakú törzsszámok. A diszkriminánsszámok nem egyebek, mint az összes $d_1 d_2 \ldots d_t$ szorzatok, ahol $d_1, d_2, \ldots, d_t$ páronként relatív prím törzsdiszkriminánsok. Ezeket az illető diszkriminánsszám törzsdiszkriminánstényezőinek nevezem; ezek a sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározottak.

1. §.

1. Legyen megadva három racionális egész szám: a_1, a_2, a_3. Közülük a_1, a_2 legyenek diszkriminánsszámok, a_3 legyen a $0, \pm 1$ számoktól különböző és négyzetmentes.

Jelölje k_1 az $R(\sqrt{a_1})$ testet s legyen $\mathfrak{a}_3$ egy olyan ideál,

amely előáll az a_3-ból akkor, ha ennek minden racionális törzstényezőjét helyettesítjük az utóbbinak a k_1 testbeli egyik törzsideáltényezőjével.

Definíció. *Ha van olyan zérustól különböző a_2 szám a k_1 testben, amelyre*

$$N_{k_1}a_2 \underset{(2)}{=} a_2 \tag{1}$$

és a $k_{12}=k_1(\sqrt{a_2})$ testre nézve

$$N_{k_1}(\mathfrak{D}_{k_{12}/k_1}) = a_2, \tag{2}$$

továbbá van olyan a_3, amellyel

$$\left(\frac{a_2}{a_3}\right) \tag{3}$$

nem zérus, végül a (3) összes zérustól különböző értékei egymással egyenlők, akkor ezt a csupán az a_1, a_2, a_3 számhármastól függő értéket $\{a_1, a_2, a_3\}$-mal jelölöm.

E szerint, ha létezik a $\{\}$ jel, akkor ennek az értéke egy meghatározott szám 1 és -1 közül.

Annak megvizsgálásához, hogy a $\{\}$ jel mikor létezik, több előkészületre van szükségünk.

2. Az a_2 jelentsen mindig egy az (1), (2) tulajdonságokkal rendelkező számot. Azt csak később fogjuk megvizsgálni, hogy mely a_1, a_2 számpárokhoz van legalább egy a_2. Előbb bebizonyítjuk a következőt:

Ha létezik egy a_2, akkor

$$a_1 = S_{k_1}a_2 + 2\sqrt{N_{k_1}a_2}\,(=(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2'})^2) \tag{4}$$

egy az a_2-höz hasonlóan értelmezett szám, amely (az a_1, a_2 helyett) az a_2, a_1 számpárhoz tartozik.

Jelentse k_2 az $R(\sqrt{a_2})$ testet. Az (1) miatt a_1 a k_2 testbe tartozik. Továbbá $N_{k_2}a_1=(S_{k_1}a_2)^2-4N_{k_1}a_2=(a_2-a_2')^2$, s így a_1-re is fennáll az (1)-nek megfelelő tulajdonság.

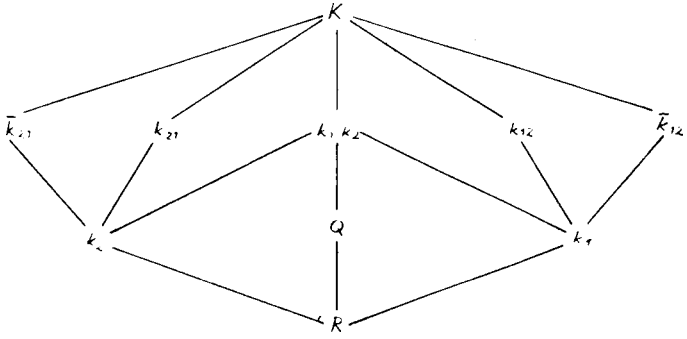
A (4) miatt érvényes a következő:

$$a_1a_2=(a_2+\sqrt{N_{k_1}a_2})^2, \tag{5}$$

ahol a zárjelbeli szám benne van a k_1k_2 összetett testben.

Ha $a_1=a_2$, akkor $k_1=k_2$, azaz $k_1k_2=k_1$, s így az (5) szerint $k_{12}=k_1(\sqrt{a_2})=k_1(\sqrt{a_1})$. Ekkor tehát (2)-vel együtt a hasonló tulajdonság az a_1-re is fennáll.

E szerint elegendő még az $a_1 \neq a_2$ esettel foglalkoznunk. Tekintsük a következő testeket:



(Az alulról felfelé haladó ferde vagy függőleges egyenesek a «része» tényállást tüntetik fel.) Itt $k_{21}=k_2(\sqrt{a_1})$, $K=R(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_2})$, végül $\bar{k}_{12}=k_1(\sqrt{a'_2})$, $k_{21}=k_2(\sqrt{a'_1})$.

Az (1) miatt a K galoistest. A K nem abeltest, mert ha S és T a K galoiscsoportjának két olyan eleme, amelyekre $S\sqrt{a_2}=\sqrt{a_2}$, $S\sqrt{a_2}=\sqrt{a'_2}$, $T\sqrt{a_2}=\sqrt{a_2}$, $T\sqrt{a_2}=-\sqrt{a_2}$, akkor az (1) miatt $T\sqrt{a'_2}=-\sqrt{a'_2}$, s így $TS\sqrt{a_2}=T\sqrt{a'_2}=-\sqrt{a'_2}$, míg $ST\sqrt{a_2}=S\sqrt{a_2}=\sqrt{a'_2}$. Minthogy K 8-adfokú, azért az ő galoiscsoportja csak a 8-adrendű diedercsoport vagy a quaterniók csoportja lehet. Minthogy ezeknél a valódi alcsoportok számossága 8, illetve 4, azért a GALOIS elmélet alapján a két eset közül csak az előbbi lehetséges s egyszersmind látjuk, hogy a fenti sémában minden testet megadtunk R és K között.

Minthogy K/k_1 4-edfokú, s mint ilyen abeltest, és nem ciklikus, azért az osztálytestek elméletének vezető-diszkriminánsképlete[7] szerint

$$D_{K/k_1}=D_{k_1k_2/k_1}\cdot D_{k_{12}/k_1}\cdot D_{\bar{k}_{12}/k_1}.$$

[7] HASSE, Bericht I, Satz 16.

Itt a két utolsó tényező egymásnak konjugáltjai a k_1 testben, tehát

$$D_{K/k_1} = D_{k_1k_2/k_1} \cdot N_{k_1}(D_{k_{12}/k_1}).$$

Éppen így

$$D_{K/k_2} = D_{k_1k_2/k_2} \cdot N_{k_2}(D_{k_{21}/k_2}).$$

HILBERT relatívdiszkrimináns képlete szerint

$$(D_{k_1k_2} =)\ a_1^2 N_{k_1}(D_{k_1k_2/k_1}) = a_2^2 N_{k_2}(D_{k_1k_2/k_2})$$

és

$$(D_K =)\ a_1^4 N_{k_1}(D_{K/k_1}) = a_2^4 N_{k_2}(D_{K/k_2}).$$

A négy utóbbi egyenletből tekintettel arra, hogy $N_k(\cdots)$ mindig racionális, előáll a következő:

$$a_1^2\left(N_{k_1}(D_{k_{12}/k_1})\right)^2 = a_2^2\left(N_{k_2}(D_{k_{21}/k_2})\right)^2.$$

Figyelembe véve még a (2)-őt, következik a hozzá hasonló $N_{k_2}(D_{k_{21}/k_2}) = a_1$, amivel az állítást bebizonyítottuk.

3. Állítom a következőt:

Akkor és csak akkor létezik legalább egy a_2, ha

$$a_1 > 0 \quad \textit{vagy} \quad a_2 > 0, \tag{6}$$

$$2 \dagger (a_1, a_2), \tag{7}$$

$$\left(\frac{a_i}{p}\right) = 1, \qquad (p \mid a_1a_2;\ p \dagger a_i;\ i = 1, 2) \tag{8}$$

$$\left(\frac{a_1a_2}{p}\right) = 1. \qquad (p \mid (a_1, a_2)) \tag{9}$$

A bizonyításnál a 2. miatt az a_1, a_2 számok sorrendje tetszés szerint felcserélhető.

Tegyük fel, hogy létezik egy a_2. Akkor az (1)-ből azonnal következik (6).

A továbbiakhoz kimutatom előbb a következő ***a.*** és ***b.*** alattiakat, amelyeket később is fogunk használni. Legyen ezekben k tetszésszerinti test, legyen $K = k(\sqrt{a})$ olyan test, hogy K/k 2-odfokú, legyen továbbá $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^2$, ahol $\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{L}$ páros törzsideálok k-ban, illetve K-ban, végül $u = 0$ vagy 1, a szerint, amint $\mathfrak{l}$ kitevője a-ban páros vagy páratlan.

a. Ha $\mathfrak{l}^1 \| 2$, akkor $\mathfrak{l}^{2+u} \| D_{K/k}$.

b. Ha $\mathfrak{l}^2 \| 2$, és $\alpha \not\equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$, akkor $\mathfrak{l}^{4+u} \| D_{K/k}$.

Minthogy α-t a k testnek bármilyen zérustól különböző négyzetszámával szorozhatjuk, azért feltehető, hogy $\mathfrak{l}^0 | \alpha$ (azaz α egész mod $\mathfrak{l}$) és $\mathfrak{l}^2 \nmid \alpha$, vagyis akkor éppen $\mathfrak{l}^u \| \alpha$. Legyen A egy olyan szám a K-ban, amelyre $\mathfrak{L}^1 \| A$, mégpedig legyen $A = \xi + \eta\sqrt{\alpha}$, ahol ξ, η a k-ban vannak. Legyen $\bar{A} = \xi - \eta\sqrt{\alpha}$. Minthogy egyszersmind $\mathfrak{L} | \bar{A}$, azért $\mathfrak{L} | 2\xi$, $\mathfrak{L}^2 | \xi^2 - \alpha\eta^2$, azaz $\mathfrak{l} | 2\xi$, $\mathfrak{l} | \xi^2 - \alpha\eta^2$. Jelentse v az $\mathfrak{L}$ kitevőjét a $\frac{\bar{A}}{A} - 1 = \frac{-2\eta\sqrt{\alpha}}{A}$ számban. Más szóval $\mathfrak{L}^{1+v} \| 2\eta\sqrt{\alpha}$. Itt figyelembe veendő $\mathfrak{L}^u \| \sqrt{\alpha}$. Az *a.* esetben tovább fennállnak még: $\mathfrak{l}^0 | \xi$, $\mathfrak{l}^0 | \eta$, $\mathfrak{l}^0 \| \eta$, $1 + v = 2 + u$. A *b.* esetben $\mathfrak{l}^{-1} | \xi$, $\mathfrak{l}^{-1} | \eta$. Nem lehet $\mathfrak{l}^{-1} \| \eta$, mert akkor $\mathfrak{l} | \xi^2 - \alpha\eta^2$ miatt ellenkezésbe jutunk az $\alpha \not\equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$ feltevéssel. E szerint $\mathfrak{l}^0 | \eta$, $\mathfrak{l}^0 \| \eta$, $1 + v = 4 + u$. Ezzel mindkét esetben helyesnek bizonyult az állítás.[8]

Ezután bebizonyítom a (7)-et. Ha $2^2 \| a_1$, $2^2 \| a_2$ lenne, akkor $a_1 = -4ab$, $a_2 = -4ac$, ahol a, b, c páratlan egész számok, $a \equiv b \equiv c \pmod 4$. Az (1) miatt fennáll egy $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ $(z \neq 0)$ alakú egyenlet, amely azonban nyilvánvaló ellentmondást tartalmaz. A 2. miatt elegendő tehát még annyit kimutatni, hogy a $2 | a_1$, $2^3 | a_2$ feltevésből is ellentmondás következik. Ebben az esetben ugyanis $2 = \mathfrak{l}^2$, ahol $\mathfrak{l}$ törzsideál a k_1 testben. Továbbá (1) miatt az $\mathfrak{l}$ kitevője a_2-ben páratlan, tehát $a_2 \not\equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$. Ezek szerint alkalmazható a *b.* (a K/k helyett) a k_{12}/k_1 testre, s így $\mathfrak{l}^4 | D_{k_{12}/k_1}$. Ez ellentmond a (2)-nek, amivel a (7)-et bebizonyítottuk.

A (8)-nak páratlan p-re vonatkozó része és (9) azonnal következnek az (1)-ből. Hátra van még kimutatni a (8)-nak a $p = 2$ értékhez tartozó egyenletét. Ez csupán a $2 | a_1 a_2$ esetben jön tekintetbe. A (7) és 2. miatt feltehető, hogy $2 | a_1$, $2 \nmid a_2$. Ekkor $2 = \mathfrak{l}^2$, ahol $\mathfrak{l}$ törzsideál a k_1 testben. A (2) szerint

[8] HASSE, Bericht I*a*, 251 (6).

$\left(\frac{a_2}{\mathfrak{l}}\right) \neq 0$. Minthogy $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{a_2'}{\mathfrak{l}}\right)$, azért[9] $\left(\frac{N_{k_1} a_2}{\mathfrak{l}}\right) = 1$, azaz (1) miatt $\left(\frac{a_2 | k_1}{\mathfrak{l}}\right) = 1$. Minthogy az $R(\sqrt{a_2})$ diszkriminánsa páratlan, azért nevezőtranszformációval[10] előáll $\left(\frac{a_2 | R}{2}\right) = 1$. Ezzel a (8)-nak még hiányzó egyenletét is bebizonyítottuk.

Fordítva tegyük fel, hogy (6)—(9) fennállnak. A (7) és a fenti megjegyzés szerint elegendő a $2 \dagger a_2$ esetet tekintenünk. Eme feltevések mellett tudvalevőleg van az

$$x^2 - a_1 y^2 - a_2 z^2 = 0 \tag{10}$$

egyenletnek olyan megoldása x, y, z egész számokban, amelyekre $(x, y, z) = 1$, $2 | y$ és $x + y\sqrt{a_1} \equiv 1 \pmod 4$, amely utóbbi feltétel kizárólag az x előjelének alkalmas megválasztását kívánja. Állítom, hogy $a_2 = x + y\sqrt{a_1}$ eleget tesz az (1), (2) feltételeknek.

Ezek közül az (1) azonnal következik (10)-ből. Továbbá a $k_{12} = k_1(\sqrt{a_2})$ testre nézve k_{12}/k_1 2-odfokú és $a_2 \equiv 1 \pmod 4$ miatt D_{k_{12}/k_1} páratlan. Minthogy a_2-nek nincs racionális osztója, azért $a_2 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{m}^2$, ahol $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{m}$ egész ideálok a k_1-ben, $\mathfrak{a}_2$ négyzetmentes és $N_{k_1}\mathfrak{a}_2 = a_2$. Akkor[11] $D_{k_{12}/k_1} = \mathfrak{a}_2$, ami éppen a (2) fennállását jelenti, amivel az állítást bebizonyítottuk.

4. Ettől kezdve már mindig feltételezzük a (6)—(9) fennállását, vagyis legalább egy a_2 létezését. Külön is megjegyezzük, hogy a (8)-nak $i = 1$ esete szerint az a_2 a k_1 testben csupa 1-sőfokú törzsideál szorzatára bomlik.

---

[9] Könnyen látható, hogy $\left(\frac{\alpha | k}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta | k}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha\beta | k}{\mathfrak{l}}\right)$, ha $\mathfrak{l}$ 1-sőfokú páros törzsideál a k-ban és a baloldali tényezők zérustól különböznek.

[10] HASSE, Bericht II, 52 (8). Ez a képlet természetesen nem alkalmazható minden további nélkül páros nevező esetében is, mert ilyenkor az általunk használt $\left(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)$ jel nem egyezik a (2-dik) hatványmaradékjellel. Ha azonban az ottani feltételeken kívül $\mathfrak{t}$ páros törzsideál az Ω testben és az ő kitevője $N_{\Omega|k}\mathfrak{t}$-ben 1, úgyhogy tehát ez utóbbi ideál egy $\mathfrak{r}$ törzsideál a k testben, akkor az a képlet a mostani $\left(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)$ jelekre is érvényben marad. Ez tüstént következik abból, hogy most $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{r}^n}$ és $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{t}^n}$ egyidőben állnak fenn, amely kongruenciák a k, illetve Ω testben értendők. Ezzel a megjegyzéssel biztosítottuk azt, hogy az idézett képletet mindig helyesen fogjuk alkalmazni.

[11] HASSE, Bericht I a, 250 (2).

A jövőben jelentsen $\mathfrak{a}_2$ egy olyan ideált, ami előáll úgy, hogy vesszük az a_2 összes különböző p osztójának egy-egy $\mathfrak{p}$ törzsideáltényezőjét a k_1 testből s ezeket összeszorozzuk, mindegyiket olyan kitevővel véve, ami a megfelelő p-nek az a_2-beli kitevője. (Figyelmeztetek arra, hogy a (3)-beli $\mathfrak{a}_3$ éppen úgy van rendelve az a_3-hoz, mint az $\mathfrak{a}_2$ az a_2-höz.) Akkor az $\mathfrak{a}_2$ csupa 1-sőfokú törzsideál szorzata, közöttük nincsenek különböző konjugáltak és

$$N_{k_1}\mathfrak{a}_2 = a_2. \tag{11}$$

Állítom a következőt:

A (2) *alatti* D_{k_{12}/k_1} *egyenlő valamelyik* $\mathfrak{a}_2$*-vel.*

Az nyilvánvaló, hogy a D_{k_{12}/k_1} páratlan törzsideáltényezői megegyeznek valamelyik $\mathfrak{a}_2$ törzsideáltényezőivel. Ezért a $2 \nmid a_2$ esetben máris helyes az állítás, s a $2 \mid a_2$ esetben is csak még a páros törzsideálok vizsgálandók meg. Ekkor $2 = \mathfrak{l}\mathfrak{l}'$, ahol $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ különböző törzsideálok a k_1-ben. A (2) miatt feltehető, hogy $\mathfrak{l} \mid D_{k_{12}/k_1}$. Ezek szerint alkalmazható a 3. ***a.*** a k_{12}/k_1 testre. Minthogy most éppen $2^{2+u} \| a_2$, azért nyilvánvalóan helyes az állítás.

5. Állítom a következőt:

A (2) *helyettesíthető a (gyengébb)*

$$\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \tag{2'}$$

feltétellel, ahol $\mathfrak{p}$ *az összes* k_1*-beli törzsideált jelenti.*[12] (A «$\longleftrightarrow$» jelentése «akkor és csak akkor, ha».)

Ha ugyanis fennáll (1) és (2), akkor 4. miatt fennáll (2') is. Fordítva az (1) és (2') teljesüléséből hasonló úton mint 4.-ben (ismét a 3. ***a.*** felhasználásával) következik a (2) teljesülése.

6. A 4. (vagy e helyett épp oly jól a (2')) alapján mondhatjuk azt, hogy minden a_2-höz tartozik egy bizonyos $\mathfrak{a}_2$ ideál. Fordítva ilyenkor azt is mondjuk, hogy a_2 az $\mathfrak{a}_2$-höz tartozik.

---

[12] Pontosabban: a (6)—(9) fennállása esetén a_2 az (1), (2) helyett (1), (2') által értelmezhető. Világos a fent következőkből, hogy (6)—(9) helyett itt elegendő (7), (8) fennállása.

Természetesen most még elképzelhető olyan $\mathfrak{a}_2$, amelyhez nem tartozik egy a_2 sem. Egyelőre bebizonyítjuk a következőt:

Ha egy bizonyos $\mathfrak{a}_2$*-höz tartozik egy* a_2*, akkor az ehhez az* $\mathfrak{a}_2$*-höz tartozó összes ilyen számok nem egyebek, mint az összes* $a\gamma^2 a_2$*, ahol* γ *bármely zérustól különböző szám a* k_1 *testből és* $a(=1$ *vagy) az* a_1 *néhány különböző törzsdiszkriminánstényezőjének szorzata.*

Mindenekelőtt az $a = \frac{a_1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a_1}}\right)^2$ összefüggésből látjuk, hogy az a helyett a γ alkalmas megválasztása után mindig vehető $\frac{a_1}{a}$. Ez azt jelenti, hogy az állításban páratlan a értékekre szorítkozhatunk.

Világos ezután az állítás egyik fele, az ugyanis, hogy a_2-vel együtt $a_2^* = a\gamma^2 a_2$ is az $\mathfrak{a}_2$-höz tartozik, mert az a_2^*-re is fennáll az (1), továbbá az a ideálnégyzet a k_1-ben és $a \equiv 1 \pmod 4$, s így a_2^*-re fennáll a (2′) is.

Tartozzanak most a_2, a_2^* egy ugyanazon $\mathfrak{a}_2$-höz, és legyen $\omega = a_2^* a_2^{-1}$. Minthogy (1) és (2′) mind a_2-re, mind a_2^*-re fennállnak, azért $N_{k_1}\omega_{(2)}1$ és $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ a k_1-nek minden $\mathfrak{p}$ törzsideáljára, legfeljebb a $\mathfrak{p} \mid (\mathfrak{a}_2, 2)$ kivétellel. Ebben az utóbbi esetben $2 \mid \mathfrak{a}_2$, $2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}' \nmid \mathfrak{a}_2$, tehát $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 0$, azaz $\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Itt nyilvánvalóan ω' helyébe ω vehető, s e szerint a mondott kivétel nem lehetséges. Ebből következik, hogy vagy $\omega_{(2)}1$, amikor az állítás máris helyes, vagy a $k_1(\sqrt{\omega})/k_1$ test 2-odfokú és elágazásnélküli. Akkor, mint ismeretes, $k_1(\sqrt{\omega}) = k_1(\sqrt{a})$, ahol $a \mid a_1$, $a \equiv 1 \pmod 4$. Ebből $\sqrt{\omega} = \alpha + \beta\sqrt{a}$, ahol α, β számok a k_1-ben. Négyzetreemeléssel előáll $\alpha\beta = 0$, s így $\sqrt{\omega} = \beta\sqrt{a}$, $\omega = a\beta^2$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

7. Ha $\mathfrak{a}$ tetszésszerinti ideál a k_1 testben, akkor jelentse $S_p\mathfrak{a}$ azt az ideált, amely $\mathfrak{a}$-ból előáll azáltal, hogy az ő törzstényezős előállításában a p törzsideáltényezőit konjugáltjaikkal helyettesítjük. Legyen továbbá $S_pS_q \ldots S_t\mathfrak{a} = S_{pq\ldots t}\mathfrak{a}$, és legyen S_1 az azonos helyettesítés.

Nyilvánvaló, hogy az összes különböző $\mathfrak{a}_2$ közülük egy bizonyosból előáll az $S_m\mathfrak{a}_2$ alakban, hogyha az m az a_2-nek

a_1-hez prím összes racionális négyzetmentes osztóját jelenti. Minden ilyen m-re jelentse d_m az a_2 mindama törzsdiszkriminánstényezőinek szorzatát, amelyek m-hez nem prímek ($d_1 = 1$ értendő). Állítom a következőt:

Ha a_2 az $\mathfrak{a}_2$-höz tartozik, akkor $d_m a_2$ az $S_m \mathfrak{a}_2$-höz tartozik. Ezzel és 6.-tal nyilvánvalóan megadtuk az összes a_2-őt.

Ismét az a_2 számoknak az (1), (2') általi értelmezését tartva szem előtt, páratlan m mellett nyilvánvaló az állítás helyessége, minthogy most $d_m = \pm m$, $d_m \equiv 1 \pmod 4$.

Páros m esetében legyen $b = (a_1, a_2)$, $b \equiv 1 \pmod 4$, $bc = a_2$, végül m_0 a c mindama különböző törzstényezőinek szorzata, amelyek m-nek nem osztói. Világos, hogy $\mathfrak{a}_2'$-höz hozzátartozik a_2', s ez utóbbi helyébe (1) és 5. miatt rendre $a_2 a_2$, $b a_2 a_2$, $c a_2$ vehető. Másrészt $S_m \mathfrak{a}_2 = S_{m_0} \mathfrak{a}_2'$, s így az m_0 páratlan volta miatt az $S_m \mathfrak{a}_2$-höz hozzátartozik $d_{m_0} c a_2 = d_m a_2$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

8. Az $\mathfrak{a}_2$ legyen ezentúl tetszés szerint választva, s a_2 tartozzék ehhez az $\mathfrak{a}_2$-höz, egyébként ugyancsak tetszés szerint választva.

A (2') szerint a (3) alatti jel akkor és csak akkor zérustól különböző, ha $(a_2, \mathfrak{a}_3) = 1$. Ilyen $\mathfrak{a}_3$ létezésének nyilvánvalóan az a feltétele, hogy az (a_2, a_3) minden p osztójára $\left(\frac{a_1}{p}\right) = 1$ legyen. Ez az egyenlet a (8)-nak $i = 1$ esete szerint helyettesíthető a $p \nmid a_1$ feltétellel. Ezzel a következőt nyertük:

Akkor és csak akkor vesz fel a (3) zérustól különböző értéket is, ha

$$(a_1, a_2, a_3) = 1. \tag{12}$$

Az is világos, hogy a (12) teljesülése esetén minden $\mathfrak{a}_2$-höz van olyan $\mathfrak{a}_3$, amellyel $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$. Ettől kezdve (12)-őt is feltételezzük s egyszersmind megegyezünk abban, hogy az $\mathfrak{a}_3$-at mindig az $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$ feltételnek megfelelően választjuk. Mindezzel pontosan azokat az eseteket zártuk ki, amelyekben a (3) zérus.

9. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy elegendő azokkal az esetekkel foglalkoznunk, amikor a_3 a k_1 testben csupa 1-sőfokú törzsideál szorzatára bomlik.

Legyen ugyanis m egy tetszésszerinti olyan racionális egész szám, amelyre $(a_2, m) = 1$. Akkor a (2) szerint egyszersmind $(D_{k_{12}/k_1}, m) = 1$, és így számlálótranszformációval[13] előáll a következő:

$$\left(\frac{a_2 | k_1}{m}\right) = \left(\frac{N_{k_1} a_2 | R}{m}\right) = \left(\frac{a_2}{m}\right).$$

Ezután állítom a következőt:

$$Ha \left(\frac{a_1}{p}\right) = -1 \quad és \quad p \dagger a_3, \quad akkor$$

$$\{a_1, a_2, pa_3\} = \left(\frac{a_2}{p}\right) \{a_1, a_2, a_3\}. \tag{13}$$

Ez természetesen úgy értendő, ha az itteni két $\{\}$ jel közül az egyik létezik, akkor a másik is létezik és fennáll (13).

Ha ugyanis a_3-at pa_3-mal felcseréljük, akkor a_3 helyébe pa_3 lép és $p \dagger a_2$ miatt egyszersmind $(a_2, pa_3) = 1$. Ugyanekkor a fentiek szerint (3) mindig az $\left(\frac{a_2}{p}\right)$ tényezőt kapja, s így nyilvánvaló az állítás helyessége.

10. A (13)-hoz kapcsolódva megállapodunk a következő értelmezésben:

Tisztának nevezzük az $\{a_1, a_2, a_3\}$ jelt akkor, ha a_3 a k_1 testben csupa 1-sőfokú törzsideál szorzatára bomlik, azaz, ha

$$\left(\frac{a_1}{p}\right) = 1. \qquad (p | a_3 \,;\, p \dagger a_1) \tag{14}$$

A (13) szerint a nem tiszta $\{\}$ jelek könnyen visszavezethetők hasonló tiszta jelekre.[14] Ezért elegendő csak az utóbbi esettel foglalkozni, miért is a jövőben feltételezem a (14) fennállását. Akkor egyszersmind fennáll $N_{k_1} a_3 = a_3$.

11. Most már megvizsgáljuk, hogy adott a_2, a_3 mellett a (3) mikor független az a_2 különös megválasztásától. Ehhez a

---

[13] HASSE, Bericht II, 73, IV. Ez a képlet sem alkalmazható minden további nélkül páros nevezőre is, de a fent következő alkalmazások helyességéről páros nevező esetében könnyen meggyőződhetünk.

[14] Különösen, ha $\left(\frac{a_1}{p}\right) = -1$ $(p | a_3)$, akkor $\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{a_2}{a_3}\right)$.

6. szerint nyilvánvalóan szükséges és elegendő az, hogy az a_1-nek minden d törzsdiszkriminánstényezőjére

$$\left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1 \tag{15}$$

legyen. Itt a baloldal kifejezhető R-beli ($\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$) jelek által. Ehhez a következő 1), 2) eseteket különböztetem meg:

1) $(d, \mathfrak{a}_3) = 1$. Minthogy az $R(\sqrt{d})$ test diszkriminánsa d, azért nevezőtranszformációval előáll

$$\left(\frac{d|k_1}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{d|R}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right).$$

2) $(d, \mathfrak{a}_3) \neq 1$. Legyen $\mathfrak{p} = (d, \mathfrak{a}_3)$, ahol $\mathfrak{p}$ szükségképpen törzsideál k_1-ben és legyen p $\mathfrak{p}$-vel osztható. A (15) baloldala helyett $a_1 = (\sqrt{a_1})^2$ miatt

$$\left(\frac{d}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{d}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{d}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{da_1}{\mathfrak{p}}\right)$$

vehető. Az utóbbi szorzat tényezői az 1)-hez hasonlóan átalakíthatók, mert az első tényező nevezője $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{p}^2 \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{p}}$ magprím («kernprím») a d-hez, míg a második tényezőre nézve ($d = a_1$ mellett ennek értéke 1) $d \neq a_1$ mellett az $R(\sqrt{da_1})$ testnek $\frac{a_1}{d}$ diszkriminánsa prím a $\mathfrak{p}$-hez. Így előáll a következő:

$$\left(\frac{d}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{da_1}{\mathfrak{p}}\right).$$

Ezzel a következőt nyertük:

Adott $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *mellett* a (3) *akkor és csak akkor független az* a_2 *különös megválasztásától, ha*

$$\left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1, \qquad (\mathfrak{p}|a_1;\ \mathfrak{p}+\mathfrak{a}_3) \tag{16}$$

$$\left(\frac{d}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{da_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \qquad (\mathfrak{p}|(a_1, \mathfrak{a}_3)) \tag{16'}$$

ahol d *mindenkor az* a_1*-nek azt a törzsdiszkriminánstényezőjét jelenti, amely* $\mathfrak{p}$*-vel osztható.*

Ettől kezdve feltételezzük a (16), (16′) teljesülését is. Akkor a (3) értéke már csupán az $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ pár függvénye.

12. Még csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a (3) mikor nem függ az $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ pár különös megválasztásától sem. Ezek lesznek azok az esetek, amikor a $\{\}$ jel létezik.

Nyilvánvaló, hogy egy bizonyos $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ pár által minden más ilyen pár az $S_m\mathfrak{a}_2$, $S_m\mathfrak{a}_3$ alakban van megadva, ha itt az m minden négyzetmentes racionális egész számot jelent. Természetesen elegendő az $m \mid a_2a_3$, $(m, a_1) = 1$ esetekre szorítkozni. Az is világos továbbá, hogyha a (3) bármely $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ pár esetében minden a $p \mid a_2a_3$, $(p, a_1) = 1$ feltételeket kielégítő p mellett változatlan marad az $S_p\mathfrak{a}_2$, $S_p\mathfrak{a}_3$ párra való áttérésnél, akkor a (3) egyáltalán független az $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ pár különös megválasztásától.

Mármost a mondott p-k mellett az $S_p\mathfrak{a}_3$ ideálnégyzet tényezőtől eltekintve nem egyéb, mint $p\mathfrak{a}_3$ vagy $\mathfrak{a}_3$, a szerint, amint $p \mid a_3$ vagy $p \nmid a_3$. Ehhez még 7.-et is figyelembe véve, a (3) a mondott áttérésnél rendre a következő kifejezésekbe megy át:

$$\left(\frac{da_2}{\mathfrak{a}_3}\right), \qquad (p \mid a_2 ;\ p \nmid a_3)$$

$$\left(\frac{a_2}{p\mathfrak{a}_3}\right), \qquad (p \nmid a_2 ;\ p \mid a_3)$$

$$\left(\frac{da_2}{p\mathfrak{a}_3}\right), \qquad (p \mid (a_2, a_3))$$

ahol — ismétlem — csupán a $p \nmid a_1$ esetek tekintendők, továbbá d jelentése ugyanaz, mint a jelen 12. végén. Ezeket rendre az alábbi 1)—3) alatt átalakítom:

1) $d \nmid a_3$ miatt nevezőtranszformációval előáll

$$\left(\frac{da_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{d}{a_3}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right),$$

ahol az utolsó szorzat első tényezője természetesen az R-ben értendő.

2) $p \nmid a_2$ miatt számlálótranszformációval a következőt nyerjük:

$$\left(\frac{a_2}{p\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{a_2}{p}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{a_2}{p}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right).$$

3) A most tekintendő esetben feltehető, hogy $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{a}_2$, ahol $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, míg $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ különböző törzsideálok a k_1 testben. Legyen egy pillanatra $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$. Akkor

$$\left(\frac{da_2}{pa_3}\right) = \left(\frac{da_2}{\mathfrak{p}'\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{da_2}{\mathfrak{p}'}\right)\left(\frac{da_2}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{da_2}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{da_2}{\mathfrak{a}}\right) =$$

$$= \left(\frac{da_2a_2}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{d}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{da_2}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{d}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{da_2}{p}\right)\left(\frac{d}{pa_3}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}}\right).$$

Ezek szerint érvényes a következő:

A (3) *akkor és csak akkor nem függ az* $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *pár különös megválasztásától, ha*

$$\left(\frac{d}{a_3}\right) = 1, \qquad (p \mid a_3;\ p \dagger a_1a_3) \qquad (17)$$

$$\left(\frac{a_2}{p}\right) = 1; \qquad (p \mid a_3;\ p \dagger a_1a_3) \qquad (17')$$

$$\left(\frac{d}{pa_3}\right)\left(\frac{da_2}{p}\right) = 1, \qquad (p \mid (a_2, a_3)) \qquad (17'')$$

ahol d mindenkor az a_2*-nek azt a törzsdiszkriminánstényezőjét jelenti, amely p-vel osztható.* (A (17″)-ben (12) miatt felesleges a $p \dagger a_1$ kitétel.)

13. Amint láttuk, az $\{a_1, a_2, a_3\}$ akkor és csak akkor létezik és tiszta, ha (6), (7), (8), (9), (12), (14), (16), (16′), (17), (17′), (17″) fennállnak. Mindezek (6), (7) és (12) kivételével az alábbi (18)—(21)-ben összefoglalhatók. A (13)-at is figyelembe véve, a következőt nyerjük:

I. tétel. *Az* 1.*-ben értelmezett* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *jel létezik és tiszta akkor és csak akkor, ha* $(a_1, a_2, a_3) = 1$, *az* a_1, a_2 *közül legalább az egyik pozitív és közülük legalább az egyik páratlan, továbbá az* $a_1a_2a_3$*-nak p törzstényezőire fennáll*

$$\left(\frac{a_i}{p}\right) = 1, \qquad (p \dagger a_i;\ i = 1, 2) \qquad (18)$$

$$\left(\frac{d}{a_3}\right) = 1, \qquad (p \dagger a_3) \qquad (19)$$

$$\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right) = 1, \qquad (p \mid (a_1, a_2)) \tag{20}$$

$$\left(\frac{d}{pa_3}\right)\left(\frac{da_i}{p}\right) = 1, \qquad (p \mid (a_3, a_i);\ i=1, 2) \tag{21}$$

ahol d mindenkor az a_1, a_2 közül legalább az egyiknek p-vel osztható törzsdiszkriminánstényezője.[15]

Ha még $m(\neq \pm 1)$ tetszésszerinti olyan négyzetmentes racionális egész szám, amelynek minden egyes p törzstényezőjére $\left(\frac{a_1}{p}\right) = -1$, akkor $\{a_1, a_2, a_3\}$-mal együtt létezik az $\{a_1, a_2, ma_3\}$ jel is, ez nem tiszta, és fennáll

$$\{a_1, a_2, ma_3\} = \left(\frac{a_2}{m}\right)\{a_1, a_2, a_3\}.$$

(Itt $a_3 = 1$ is megengedhető, amikor a jobboldal második tényezője törlendő.)

Az itt megadott eseteken kívül a $\{\ \}$ jel sohasem létezik.

2. §.

14. Ezentúl csak olyan a_1, a_2, a_3 számhármasokat fogok tekinteni, amelyekre $\{a_1, a_2, a_3\}$ létezik. Szándékom ennek a jelnek további tulajdonságait megvizsgálni. Az I. tétel szerint szerint elegendő csupán tiszta $\{\ \}$ jelekkel foglalkozni. Állítom a következőt:

II. tétel. *Ha $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiszta, akkor $\{a_2, a_1, a_3\}$ is létezik és tiszta, továbbá*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_1, a_3\}. \tag{22}$$

---

[15] A fenti feltételek láthatóan nem függetlenek. Törölhető például a (19)-nek és a (20)-nak egy-egy tetszésszerinti egyenlete, mint a többi feltétel következménye. Ugyanis $a_1 = ab$, $a_2 = ac$ írható, ahol a, b, c páronként relatív prím diszkriminánsszámok (vagy közülük némelyik 1). Az $\left(\frac{a_1}{c}\right)\left(\frac{a_2}{b}\right)\left(\frac{-a_1a_2}{a}\right)$ értéke a négyzetes reciprocitás tétel szerint 1, másrészt ez a kifejezés szorzással áll elő a (18) néhány egyenletének s a (20) összes egyenleteinek baloldalaiból. A (19)-ről szóló állítást elég arra az esetre bizonyítani, amikor éppen $p \mid a_1$. Közvetlen számítás helyett belátható az állítás abból, hogy a (15) egyenletek baloldalainak szorzata $\left(\frac{a_1}{a_3}\right) = \left(\frac{(\sqrt{a_1})^2}{a_3}\right) = 1$.

Minthogy a tiszta $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel létezésének feltételei az I. tétel szerint az a_1, a_2 számokban szimmetrikusak, azért csupán (22) szorul bizonyításra.

Feltehető, hogy $a_1 \neq a_2$, mert különben (22) máris helyes. Ismét legyen $k_2 = R(\sqrt{a_2})$. Az a_3-nak bármely p osztója (18) szerint a k_1, k_2 testek mindegyikében csupa 1-sőfokú törzsideál szorzatára bomlik. Továbbá $(a_1, a_2, a_3) = 1$ miatt p nem ágazik el a k_1, k_2 testek mindegyikében, tehát p a $k_1 k_2$ összetett testben is csupa 1-sőfokú törzsideálra bomlik.

Legyenek a_2, a_3 ismét úgy választva, hogy a (3) nem tűnik el. Akkor

$$\left(\frac{a_2 \mid k_1}{\mathfrak{a}_3}\right) = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

A fentiek szerint van egy olyan $\mathfrak{A}_3$ egész ideál a $k_1 k_2$ testben, amelyre

$$N_{k_1 k_2/k_1} \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{a}_3.$$

Minthogy $\mathfrak{a}_3$-mal együtt $\mathfrak{A}_3$ is prím a D_{k_{12}/k_1}-hez, azért nevezőtranszformációval előáll

$$\left(\frac{a_2 \mid k_1 k_2}{\mathfrak{A}_3}\right) = \left(\frac{a_2 \mid k_1}{\mathfrak{a}_3}\right) = \{a_1, a_2, a_3\}, \tag{23}$$

ahol az előbbi miatt $N_{k_1 k_2} \mathfrak{A}_3 = a_3$.

Legyen a_1 ismét a (4)-beli szám. Akkor (23)-hoz hasonlóan

$$\left(\frac{a_1 \mid k_1 k_2}{\mathfrak{B}_3}\right) = \{a_2, a_1, a_3\}, \tag{24}$$

ahol $\mathfrak{B}_3$ egész ideál $k_1 k_2$-ben és $N_{k_1 k_2} \mathfrak{B}_3 = a_3$. Egyszersmind (5) miatt

$$\left(\frac{a_1 \mid k_1 k_2}{\mathfrak{B}_3}\right) = \left(\frac{a_2 \mid k_1 k_2}{\mathfrak{B}_3}\right). \tag{25}$$

Világos, hogy $\mathfrak{A}_3$ és $\mathfrak{B}_3$ törzsideáltényezői konjugált párokba foglalhatók. Ha $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ egy ilyen pár, úgyhogy $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{B}_3$, akkor (23), (24), (25) miatt mindenekelőtt igaz az, hogy

$$\left(\frac{a_2 \mid k_1 k_2}{\mathfrak{P}}\right), \quad \left(\frac{a_2 \mid k_1 k_2}{\mathfrak{Q}}\right)$$

mindketteje zérustól különböző. Továbbá alkalmas konjugáltra való áttéréssel $\mathfrak{Q}$ átmegy $\mathfrak{P}$-be, míg ugyanakkor a_2 átmegy egy β számba, mégpedig $\beta = a_2$ vagy a_2'. Mindkét esetben az (1) miatt $a_2\beta$ négyzetszám a k_1k_2 testben. Ezért a tekintett két $(\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})$ jel egymással egyenlő, s így ugyancsak egyenlők a (23)-beli első $(\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})$ jel és (25) jobboldala. A (24)-et is figyelembe véve, ezzel bebizonyítottuk (22)-őt s így egyszersmind a II. tételt.

15. A következőkben a $\{\}$ jelnek is «multiplikatív» értelmezést adunk a következőképpen: Tetszésszerinti zérustól különböző x, y, z mellett legyen

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1x^2, a_2y^2, a_3z^2\},$$
$$\{x^2, y, z\} = \{x, y^2, z\} = \{x, y, \pm z^2\} = 1.$$

Nyilvánvaló, hogy ezek a határozmányok ellentmondástól mentesek. Általuk nem történt a $\{\}$ jel fogalmának lényeges kiterjesztése, csupán a jelölésben értünk el nagyobb kényelmet.

Állítom a következőt:

III. tétel. *A tiszta* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *jel multiplikatív mindhárom argumentumban, azaz*

$$\{a, a_2, a_3\}\{b, a_2, a_3\} = \{ab, a_2, a_3\}, \tag{26}$$

$$\{a_1, a, a_3\}\{a_1, b, a_3\} = \{a_1, ab, a_3\}, \tag{26'}$$

$$\{a_1, a_2, a\}\{a_1, a_2, b\} = \{a_1, a_2\ ab\}, \tag{26''}$$

amely képletek közül bármelyik helyes már akkor, ha a benne szereplő három $\{\}$ *jel közül legalább kettő létezik és tiszta, s akkor létezik és tiszta a fennmaradt harmadik* $\{\}$ *jel is.*[16]

A II. tétel miatt (26) és (26') egymásból folynak, s így elegendő csupán (26')-t és (26'')-t bizonyítani.

Először bebizonyítom (26')-t. Mindkettőben elegendő azt az esetet tekinteni, amikor a baloldali tényezők léteznek és tiszták. Feltehető, hogy a_1, a, b diszkriminánsszámok és $a_3 (\neq \pm 1)$ négyzetmentes. Feltehető még, hogy $a \neq b$, mert különben a (26') baloldali tényezői egyenlők s a jobboldal értéke 1, úgyhogy ekkor

[16] A (26') nem tiszta $\{\}$ jelekre is érvényes.

a (26′) csupán azt a magától értetődő tényt fejezi ki, hogy minden létező tiszta $\{\ \}$ jelre $\{\ \}^2=1$.

Legyen α és β egy-egy olyan szám a k_1 testből, amely az 1.-beli a_3 helyébe lép akkor, ha $a_2=a$, illetve b. Akkor az (1)-nek és (2′)-nek megfelelően fennállnak.

$$N_{k_1}\alpha \underset{(2)}{\equiv} a,\quad N_{k_1}\beta \underset{(2)}{\equiv} b, \tag{1_{ab}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)=0 \longleftrightarrow \mathfrak{p}\mid \mathfrak{a},\quad \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)=0 \longleftrightarrow \mathfrak{p}\mid \mathfrak{b}, \tag{$2'_{ab}$}$$

ahol $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ az α-hoz, illetve β-hoz tartoznak. A 7. szerint (az $a_2=b$ esetre való alkalmazással) lehetséges α és β olyan megválasztása, hogy az $\mathfrak{ab}$ szorzatnak nincsenek különböző konjugált törzsideáltényezői. Akkor van egy olyan $\mathfrak{a}_3$ egész ideál a k_1 testben, amelyre $N_{k_1}\mathfrak{a}_3=a_3$ és $(\mathfrak{ab},\mathfrak{a}_3)=1$. Az I. tétel szerint

$$\{a_1, a, a_3\}=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}_3}\right),\ \{a_1, b, a_3\}=\left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}_3}\right). \tag{3_{ab}}$$

Jelölje a_2 az $R(\sqrt{ab})$ test diszkriminánsát. Akkor $a_2 \underset{(2)}{\equiv} ab$. E szerint (26′) jobboldala az $\{a_1, a_2, a_3\}$ alakban jelentkezik, s így azt kell kimutatni, hogy ez a $\{\ \}$ jel létezik és egyenlő a (26′) baloldalával.

Legyen $a_2=\alpha\beta$, továbbá $\mathfrak{a}_2$ egész ideál a k_1-ben, $\mathfrak{a}_2\mid\mathfrak{ab}$, $N_{k_1}\mathfrak{a}_2=a_2$. Ezek által $\mathfrak{a}_2$ egyértelműen van meghatározva és $\mathfrak{a}_2 \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{ab}$.

Állítom mindenekelőtt, hogy α, $\mathfrak{a}_3$ kielégítik az (1), (2′) feltételeket. Minthogy a $2\mid a_1$ esetben $2\dagger a$, $2\dagger b$, $2\dagger a_2$, tehát mindig $2\dagger(a_1, a_2)$, azaz fennáll (7), továbbá a feltételekből könnyen következik (8) is, végül $\mathfrak{a}_2$ megfelel a 4.-beli értelmezésnek, azért a [12] jegyzet szerint az itteni állítással együtt valójában azt bizonyítjuk be, hogy a_2 az $\mathfrak{a}_2$-höz tartozik.

Az (1) fennállása azonnal folyik (1_{ab})-ből.

Minthogy $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{a\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, azért a $(2'_{ab})$-ből könnyen láthatóan következik a (2′)-nek az összes $\mathfrak{p}$-re vonatkozó állítása, kivéve csupán a $\mathfrak{p}\mid(2,\mathfrak{ab})$ esetet (ilyen $\mathfrak{p}$ legfeljebb egy van). A következőkben azonban látni fogjuk, hogy az ilyen $\mathfrak{p}$ sem kivétel.

Csupán a $2 \mid ab$ esettel kell foglalkoznunk. Ekkor $2 \nmid a_1$, $2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}')$ és $(2'_{ab})$ miatt $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 0$, $\left(\frac{a_2'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Ez utóbbiból és (1)-ből következik, hogy $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right)$ az $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right)$-vel együtt zérus vagy nem zérus. Minthogy $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}'}\right)$, s ennek a közös értéknek zérus vagy nem zérus volta a $k_1(\sqrt{a_2})/k_1$ test diszkriminánsának páros, illetve páratlan voltát jelenti, s ez $2 \nmid a_1$ miatt ismét éppen azt jelenti, hogy $2 \mid a_2$, illetve $2 \nmid a_2$, azaz hogy $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2$, illetve $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}_2$, azért a legutóbbi állítást bebizonyítottuk.

Az itt meghatározott $a_2 = \alpha\beta$-re s a (3_{ab})-beli $\mathfrak{a}_3$-ra fennáll

$$\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \{a_1, a, a_3\}\{a_1, b, a_3\}.$$

Ebből mindenekelőtt azt a tényt szögezzük le, hogy most van a (3)-nak zérustól különböző értéke, ami továbbá éppen egyenlő a (26′) baloldalával. Legyen ezután $\left(\frac{a_2^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right)$ egy bármely másik (3) alatti olyan jel, amely nem zérus. Kimutatjuk, hogy ez is egyenlő a fenti szorzattal. Ezzel akkor be is bizonyítjuk a (26′)-ről szólt állítást, mert a jobboldal tiszta volta már következik a baloldali tényezők hasonló voltából.

A feltevések szerint fennállnak

$$\{a_1, a, a_3\} = \left(\frac{\alpha^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right), \quad \{a_1, b, a_3\} = \left(\frac{\beta^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right),$$

ahol a számlálók az α, β számokhoz hasonlóan értelmezett alkalmas számok. A 6. és 7. szerint $a_2^* \underset{(2)}{=} r a_2$, $\alpha^* \underset{(2)}{=} s\alpha$, $\beta^* \underset{(2)}{=} t\beta$, ahol r néhány olyan törzsdiszkriminánsszorzata, amelyek mindegyike a_1, a_2 közül legalább az egyiknek törzsdiszkriminánstényezője, és s, t hasonló jelentéssel bírnak az a_1, a, illetve a_1, b számpárra vonatkozólag. Akkor

$$\left(\frac{a_2^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right) = \left(\frac{r a_2}{\mathfrak{a}_3^*}\right) = \left(\frac{r\alpha\beta}{\mathfrak{a}_3^*}\right) = \left(\frac{rst\alpha^*\beta^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right) =$$

$$= \left(\frac{rst}{\mathfrak{a}_3^*}\right)\left(\frac{\alpha^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right)\left(\frac{\beta^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right) = \left(\frac{rst}{\mathfrak{a}_3}\right)\{a_1, a, a_3\}\{a_1, b, a_3\},$$

ahol az utolsó szorzat első tényezőjében a számláló racionális volta miatt nyilvánvalóan megengedett volt az $\mathfrak{a}_3^*$-ról $\mathfrak{a}_3$-ra való áttérés.

A (15) és 12. 1) szerint az $\{a_1, a_2, a_3\}$ létezéséből s tiszta voltából az következett, hogy $\left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$, ha d az a_1, a_2 közül legalább az egyiknek törzsdiszkriminánstényezője. Ezt az a_2 helyett az a és b számokra alkalmazva előáll $\left(\frac{rst}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$, s ezzel a (26')-t bebizonyítottuk.

Most bebizonyítom (26")-t. Feltehető, hogy a_1, a_2 diszkriminánsszámok és a, b mindegyike ± 1-től különböző négyzetmentes egész szám. Továbbá feltehető, hogy $a \neq \pm b$.

Legyen a_3 az a négyzetmentes racionális egész szám, amelyre $a_3 \underset{(2)}{=} ab$. Akkor $a_3 \neq \pm 1$. A (26") jobboldala az $\{a_1, a_2, a_3\}$ alakban jelentkezik, s így azt kell kimutatni, hogy ez a $\{\ \}$ jel létezik (ami akkor nyilvánvalóan tiszta) és egyenlő a (26") baloldalával.

A jelenlevő a_1, a_2, a_3 számhármashoz biztosan van olyan a_2, $\mathfrak{a}_3$ pár, amelyre a (3) alatti jel létezik és nem zérus. Egy a_2 létezését feltételezi ugyanis már például az $\{a_1, a_2, a\}$ létezése. A kívánt $\mathfrak{a}_3$ létezését pedig biztosítja az, hogy fennáll a (2'), továbbá a-val és b-vel együtt a_3 is csupa 1-sőfokú törzsideáltényezőre bomlik a k_1 testben és prím az (a_1, a_2)-höz.

Tekintsünk ezután egy tetszésszerinti olyan (3) alatti jelt, amely nem zérus. Tartozzék az ebben lévő a_2 az $\mathfrak{a}_2$ ideálhoz. Akkor fennáll $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$. Ha $m = (a, b)$, akkor van olyan $\mathfrak{m}$ egész ideál a k_1 testben, amelyre $N_{k_1}\mathfrak{m} = m$ és $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{m}) = 1$. Legyen még $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_3, a)$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_3, b)$. Akkor $a_3 = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m}$ miatt $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{ab}$, továbbá $N_{k_1}(\mathfrak{am}) = a$, $N_{k_1}(\mathfrak{bm}) = b$, valamint $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{am}) = (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{bm}) = 1$. Ezek szerint a (3) értéke

$$\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{a_2}{\mathfrak{ab}}\right) = \left(\frac{a_2}{\mathfrak{am}}\right)\left(\frac{a_2}{\mathfrak{bm}}\right) = \{a_1, a_2, a\}\{a_1, a_2, b\}.$$

Ezzel egyszerre bebizonyítottuk az $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2, ab\}$ létezését s a (26") fennállását, és így a III. tételt is.

16. Állítom a következőt:

IV. Tétel. *Ha az* 1.*-beli* a_1, a_2, a_3 *számhármast alávetjük annak a további megszorításnak, hogy* a_3 *is diszkriminánsszám, továbbá* a_2 *és* a_3 *pozitívok és páratlanok, végül* $2^2 \| a_1$ *mellett* $\left(\frac{a_3}{2}\right) = 1$, *akkor az I. tétel első része egyszerűbben így hangzik: Az* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *jel létezik és tiszta akkor és csak akkor, ha* $(a_1, a_2, a_3) = 1$ *és az* $a_1 a_2 a_3$*-nak* p *törzstényezőire fennáll*

$$\left(\frac{a_i}{p}\right) = 1, \qquad (p \nmid a_i;\ i=1,2,3) \tag{27}$$

$$\left(\frac{-a_i a_j}{p}\right) = 1. \qquad (p \mid (a_i, a_j);\ 1 \leqq i < j \leqq 3) \tag{28}$$

Ugyanekkor $\{a_1, a_3, a_2\}$ *is létezik és tiszta, továbbá*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\}. \tag{29}$$

Megjegyzések. A (29)-et (22)-vel kiegészítve előáll a következő:

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\} = \{a_2, a_1, a_3\} = \{a_3, a_1, a_2\}. \tag{29'}$$

Ha még a_1 is pozitív és páratlan, azaz, ha a_1, a_2, a_3 mindhárman pozitív páratlan diszkriminánsszámok, akkor

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \cdots = \{a_3, a_2, a_1\}, \tag{29''}$$

amely összefüggés kiterjesztendő az a_1, a_2, a_3 elemeknek mind a 6 permutációjára. Az 1.-beli összes a_1, a_2, a_3 számhármasokra már csak azért sem áll fenn (29), mert a jobboldal értelmetlenné válhatik. Lehetséges lenne a (29)-et valamivel általánosabban fogalmazni, de ettől eltekintek.

A bizonyításnál a páratlan p-ket mindig a $4l+1$ alakban gondolom megadva. Akkor az I. tételben $2 \nmid p$ mellett mindig $d=p$. Minthogy most $2 \nmid a_3$, $a_3 > 0$, azért a (21)-ben $2 \nmid p$, és így az ottani szorzat első tényezője a négyzetes reciprocitás tétel miatt $\left(\frac{-pa_3}{p}\right)$. A második tényező $\left(\frac{pa_i}{p}\right)$, s ezzel (21) átment a (28)-nak $i = 1, 2$; $j = 3$ eseteibe. A (20)-szal együtt épp előállt a teljes (28). Ugyancsak átmegy a (19) a (27)-nek $= 3$ esetébe, csupán a $2^2 \| a_1$ esetben nem áll elő ezen az

úton a (27)-nek $\left(\frac{a_3}{2}\right) = 1$ egyenlete, ez utóbbit azonban belevettük a IV. tétel kezdeti feltevései közé. A (18)-cal együtt előállt a teljes (27), amivel a tétel első részét bebizonyítottuk.

Ha továbbá tekintetbe vesszük, hogy az itteni feltételek az a_2, a_3 számokra nézve szimmetrikusak (amihez az is figyelembe veendő, hogy a $2^2 | a_1$ esetben a (27)-nek $i = 2$ esete szerint $\left(\frac{a_2}{2}\right) = 1$ is fennáll), akkor látjuk, hogy $\{a_1, a_2, a_3\}$-mal együtt $\{a_1, a_3, a_2\}$ is létezik és tiszta. Kimutatandó tehát csupán még a (29).

Tekintek ismét egy olyan a_2, a_3 párt, amelyre (3) nem zérus, tehát

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{a_2}{a_3}\right).$$

Tartozzék a_2-höz az $\mathfrak{a}_2$ ideál. Akkor $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$, $a_2 \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{a}_2$ és, mivel most $\mathfrak{a}_2$ páratlan, $a_2 \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod 4$. Elemi ideálelméleti tétel szerint feltehető, hogy a_2 egész és páratlan.

Az a_2, a_3 számokban uralkodó szimmetria miatt, tekintettel még 7.-re is, van egy olyan a_3 egész szám a k_1-ben, amelyre

$$\{a_1, a_3, a_2\} = \left(\frac{a_3}{a_2}\right),$$

úgyhogy $a_3 \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{a}_3$ és a_3 páratlan, végül az (1)-hez hasonlóan $N_{k_1} a_3 \underset{(2)}{\equiv} a_3$. Ebből és az (1)-ből $N_{k_1} a_2$, $N_{k_1} a_3 > 0$. Nyilvánvalóan feltehető még $(a_2, a_3) = 1$. Akkor a k_1 testre vonatkozó négyzetes reciprocitás tétel alkalmazásával a következőt nyerjük:

$$\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{a_2}{a_3}\right) = \left(\frac{a_3}{a_2}\right) = \left(\frac{a_3}{\mathfrak{a}_2}\right).$$

Mindezekből következik (29), amivel a IV. tételt bebizonyítottuk

17. Jóllehet már az 1.-beli definíció utasítást ad minden létező $\{\ \}$ jel meghatározására, mégis célszerű a következőt feljegyezni:

Minden az 1.-ben értelmezett létező tiszta $\{a_1, a_2, a_3\}$ *jel értéke meghatározható így: Vesszük az*

$$x^2 - a_1 y^2 - a_2 z^2 = 0 \qquad (10)$$

egyenletnek egy olyan megoldását racionális egész x, y, z értékekkel, amelyekre $(x, y, z) = 1$ és $2 | a_1$ mellett $2 | y$, míg $2 | a_2$ mellett $2 | z$ teljesül, végül az x előjelét úgy választjuk, hogy $x \equiv a_1 a_2 yz + 1 \pmod 4$. Legyen ezután a $2 | y$ és $2 \dagger y$ eseteknek megfelelően $a = x + y\sqrt{a_1}$, illetve $a = 2(x + y\sqrt{a_1})$, továbbá legyen α egy olyan egész ideál az $R(\sqrt{a_1})$ testben, amelynek normája a_3 és amelyre $\left(\frac{a}{\alpha}\right) \neq 0$. Akkor

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{a}{\alpha}\right).$$

Nyilvánvaló ugyanis, hogy x páratlan, míg y és z közül az egyik és csakis egyik páros. A $2 | y$ esetben $2 \dagger a_2$ s így ekkor a (10)-nél mondottak s az 1.-beli definíció alapján helyes az állítás. A $2 \dagger y$ esetben $2 | z$ és $2 \dagger a_1$, úgyhogy ekkor a 2. alkalmazásával könnyen célhoz jutunk.

3. §.

18. Legyen megadva egy tetszésszerinti $R(\sqrt{D})$ 2-odfokú számtest, ahol D a test diszkriminánsa. Legyen t a D különböző törzstényezőinek számossága. Jelentse $e_{2^n} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ugyanúgy, mint a bevezetésben, az $R(\sqrt{D})$ abszolút osztálycsoportjában a 2^n-nel osztható invariánsok számosságát. Itt csupán e_2, e_4, e_8 fognak közelebbről érdekelni bennünket.

A kérdés kulcsa tudvalevőleg az n-edfajú D-felbontások ismerete. (Az «1-sőfajú» kitételt el fogom hagyni.) Emlékeztetek a következőkre:

Az n-edfajú D-felbontások $(2, 2, \ldots, 2)$ típusú (véges) abelcsoportot alkotnak, s a független elemek számossága egyenlő e_{2^n}-nel. A D-felbontások azok a D_1, D_2 számpárok, amelyekben D_1, D_2 diszkriminánsszámok, megengedve a $D_1 = 1$ vagy $D_2 = 1$ eseteket is, és $D_1 D_2 = D$. A D_1, D_2 és D_2, D_1 D-felbontások nem különbözőknek tekintendők. A különböző D-felbontások számossága 2^{t-1}, s így egyszersmind $e_2 = t - 1$ (Gauss tétele). A csoport összetevési szabálya így szól: a D_1, D_2 és E_1, E_2 D-felbontásokból összetett D-felbontás alkalmas négyzetszámtényezők törlése

által áll elő a D_1E_1, D_2E_1 számpárból. Akkor 2-odfajú a D_1, D_2 D-felbontás, ha

$$\left(\frac{D_i}{p}\right) = 1 \qquad (p|D\,;\ p\nmid D_i;\ i=1,2) \tag{30}$$

(RÉDEI L.[17]). Akkor 3-adfajú a D_1, D_2 2-odfajú D-felbontás, ha bármely az $a_1=D_1$, $a_2=D_2$ értékekhez (1), (2) által meghatározott $a_2=a$ számhoz[18] találni egy olyan $\bar{D}$ szorzatot a D néhány különböző törzsdiszkriminánstényezőjéből, hogy a D-nek a $k_1=R(\sqrt{\bar{D}_1})$ testbeli p törzsideáltényezőire

$$\left(\frac{a\bar{D}}{\mathfrak{p}}\right) \neq -1 \qquad (\mathfrak{p}\,|\,D) \tag{31}$$

(H. REICHARDT[19]).

Legyen $D = d_1d_2\ldots d_t$, ahol $d_1, d_2, \ldots, d_t$ a D törzsdiszkriminánstényezői egy tetszésszerinti, de szilárdan megválasztott sorrendben. Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_t$ a D különböző törzstényezői úgy, hogy $p_i \mid d_i$ $(i=1, 2, \ldots, t)$. Legyen M_2 a következő t-soros négyzetes matrix:

$$M_2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{d_1D}{p_1}\right) & \left(\frac{d_2}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{d_t}{p_1}\right) \\ \left(\frac{d_1}{p_2}\right) & \left(\frac{d_2D}{p_2}\right) \quad \left(\frac{d_t}{p_2}\right) \\ \vdots & \\ \left(\frac{d_1}{p_t}\right) & \left(\frac{d_2}{p_t}\right) \quad \left(\frac{d_tD}{p_t}\right) \end{vmatrix} \tag{32}$$

Eme matrix sor- és oszlopindexeiként (a szokásos $1, 2, \ldots, t$ helyett) a $p_1, p_2, \ldots, p_t$, illetve $d_1, d_2, \ldots, d_t$ számokat tekintem. E szerint az M_2-nek p_i, d_j indexű tagja $\left(\frac{d_j}{p_i}\right)$, csupán a főátló elemeiben illesztendő a számlálóhoz még a D tényező.

A (31)-beli α-hoz tartozzék ((2') szerint) az $(\mathfrak{a}_2=)\,\mathfrak{a}$ ideál (természetesen változatlanul $a_1=D_1$, $a_2=D_2$ értendő). A nagyobb

---

[17] L. a [2] alatti dolgozatban 340, 359—360.

[18] Most fennállnak (6)—(9), illetve közülük a (9) tárgytalan. Mégpedig (30) átmegy (8)-ba, s (6) a négyzetes reciprocitás tételből folyik.

[19] L. a [4] alatti dolgozatban 82. Figyelembe veendő a fenti 5. is.

világosság kedvéért leszögezem, hogy $(a, a')=1$, $aa'=D_2$. Legyen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ rendre a $p_1, p_2, \ldots, p_t$ törzsszámoknak az a törzsideáltényezője a k_1 testben, amelyre $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}_1}\right), \left(\frac{a}{\mathfrak{p}_2}\right), \ldots, \left(\frac{a}{\mathfrak{p}_t}\right)$ egyike sem tűnik el; a (2') szerint ezzel $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ egyértelműen meghatározottak. Legyen egyszersmind

$$x_i = \left(\frac{a}{\mathfrak{p}_i}\right). \qquad (i=1, 2, \ldots, t) \tag{33}$$

A 6. és 7. alapján a-val együtt $a\bar{D}$ is egy a_2 szám, s így (a helyett) $a\bar{D}$ is meghatároz egy (a $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ sorozathoz hasonló) $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t$ sorozatot, úgyhogy $\left(\frac{a\bar{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_1}\right), \left(\frac{a\bar{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_2}\right), \ldots, \left(\frac{a\bar{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_t}\right)$ nem tűnnek el. Akkor a (31) feltétel helyett

$$\left(\frac{a\bar{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right) = 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, t) \tag{31'}$$

írható.

Minthogy vagy $\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i$ vagy $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i' \neq \mathfrak{p}_i$, és az (1) szerint $aa' \underset{(2)}{\equiv} D_2$, továbbá mindig $\left(\frac{D_1}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1$, azért az $\left(\frac{a\bar{D}}{\mathfrak{p}_i'}\right) = \left(\frac{a'\bar{D}}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left(\frac{a\bar{D}D_2}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left(\frac{a\bar{D}D}{\mathfrak{p}_i}\right)$ átalakítás figyelembevételével látjuk, hogy mindig $\left(\frac{a\bar{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right) = \left(\frac{a}{\mathfrak{p}_i}\right)\left(\frac{\bar{D}D^u}{\mathfrak{p}_i}\right)$, ahol $u=0$ vagy 1. Az u természetesen függ az i-től. Mindenesetre $\left(\frac{\bar{D}D^u}{\mathfrak{p}_i}\right) \neq 0$, s így könnyen láthatóan kiköthető, hogy a $p_i | \bar{D}$ esetben $u=1$, a $p_i \nmid \bar{D}$ esetben $u=0$ legyen. Egyszersmind $\left(\frac{\bar{D}D^u}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left(\frac{\bar{D}D^u}{p_i}\right)$, s így a (31') feltétel helyett

$$x_i\left(\frac{\bar{D}D^u}{p_i}\right) = 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, t) \tag{31''}$$

írható. Figyelembe véve az u jelentését, e helyett a következő vehető:

$$x_i \prod_{d_j | \bar{D}} a_{p_i d_j} = 1, \qquad (i=1, 2, \ldots, t) \tag{31'''}$$

ahol $a_{p_i q_j}$ az M_2-nek a p_i, d_j indexű eleme, és a szorzatban d_j befutja a D összes törzsdiszkriminánstényezőit.

Ha M_x jelenti azt a matrixot, ami az M_2-ből előáll az által, hogy az M_2-höz hozzáveszünk még egy oszlopot, amely az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ elemekből áll, akkor a (31‴) éppen annak a feltétele, hogy az M_2 és M_x matrixok multiplikatív rangjai[20] egyenlők legyenek. Tekintettel arra, hogy egy matrix multiplikatív rangja akár mint a legtöbb független sor, akár mint a legtöbb független oszlop (a «független» mindig multiplikatív függetlenséget jelent) számossága értelmezhető, a mondott feltétel úgy is kifejezhető, hogy valahányszor m a D-nek olyan négyzetmentes osztója, hogy

$$\prod_{p_i \mid m} a_{p_i q_j} = 1, \quad (j=1, 2, \ldots, l) \tag{34}$$

akkor mindig ($\Pi x_i =$)

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right) = 1, \tag{35}$$

ahol $\mathfrak{m}$ a fenti $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ törzsideálok közül mindazoknak a szorzata, amelyek m-nek osztói. A (34) az I. tétel szerint éppen annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a $\{D_1, D_2, m\}$ jel létezzék,[21] s a (35) épp azt mondja, hogy ilyenkor egyszersmind ez a jel egyenlő 1-gyel. Ezzel a következőt nyertük:

A D_1, D_2 *2-odfajú* D-*felbontás akkor és csak akkor* 3-*adfa ú, ha minden létező* $\{D_1, D_2, m\}$ *jel egyenlő* 1-*gyel* (m D).

20. Állítom a következőt:

Ha D_1, D_2; E_1, E_2 2-*odfajú* D-*felbontások és* F_1, F_2 *a belőlük összetett* D-*felbontás, továbbá* m *négyzetmentes osztója* D-*nek, akkor*

$$\{D_1, D_2, m\}\{E_1, E_2, m\} = \{F_1, F_2, m\}, \tag{36}$$

feltéve, hogy az itteni három { } *jel közül legalább az egyik létezik, amikor is a másik kettő is létezik (s mindhárom tiszta).*

---

[20] L. a [6] alatti dolgozatban 747.

[21] A (34) részletesen kiírva a (30) figyelembe vételével épp a (19), (21) feltételeket adja, míg a (30) maga épp (18)-ba megy át, s a (20) most tárgytalan, amint ezt már egyszer megjegyeztük. Természetesen $\{D_1, D_2, m\}$ tiszta.

Mint említettük, a (36) baloldala első tényezője létezésének feltétele a (34). Ez független a D_1, D_2 2-odfajú D-felbontás különös megválasztásától. E szerint a (36) bizonyításánál mindjárt feltehető, hogy az ottani $\{\ \}$ jelek mindhárman léteznek.

Nyilvánvalóan egyértelműen meghatározhatók az R, S, T, U úgy, hogy ezek mindegyike diszkriminánsszám vagy 1 legyen és — miután F_1, F_2 sorrendjét a II. tétel értelmében alkalmasan választottuk — fennálljanak a következők:

$$D_1 = RS,\ D_2 = TU;\ E_1 = RT,\ E_2 = SU;\ F_1 = ST,\ F_2 = RU.$$

Látjuk, hogy az R, S, T, U számok páronként relatív prímek s közülük legalább háromnak az előjele egymással megegyezik. Akkor a bebizonyítandó (36) így hangzik:

$$\{RS,\ TU,\ m\}\ \{RT,\ SU,\ m\}\ \{ST,\ RU,\ m\} = 1. \qquad (36')$$

A (18) feltételekből világos, hogy a D minden egyes p törzstényezőjére az

$$\left(\frac{R}{p}\right),\ \left(\frac{S}{p}\right),\ \left(\frac{T}{p}\right),\ \left(\frac{U}{p}\right)$$

értékek közül mindazok egyenlők, amelyekben a számláló és nevező egymáshoz prímek. (Ama négy $\left(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\right)$ jel között mindig három ilyen van.) Válasszunk egy tetszésszerinti q páratlan $4l+1$ alakú törzsszámot úgy, hogy q előjele azzal az előjellel egyezzék, amit az R, S, T, U számoknak legalább hárma közösen bír, továbbá $(q, D)=1$ és

$$\left(\frac{qR}{p}\right) = \left(\frac{qS}{p}\right) = \left(\frac{qT}{p}\right) = \left(\frac{qU}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid D) \qquad (37)$$

legyen, amely (37)-ből mindig törölve gondolandó az a tag, amelyben a számláló és nevező egymáshoz nem prímek. Ilyen q az előbbi megjegyzés és a számtani haladvány tétele értelmében létezik.

Állítom, hogy

$$\begin{gathered}\{qR,\ qS,\ m\},\ \{qR,\ qT,\ m\},\ \{qR,\ qU,\ m\},\\ \{qS,\ qT,\ m\},\ \{qS,\ qU,\ m\},\ \{qT,\ qU,\ m\}\end{gathered} \qquad (38)$$

mindannyian léteznek. (Természetesen akkor ezek a jelek mind tiszták.)

Elegendő a létezést eme 6 jel közül például $\{qR, qS, m\}$-re bebizonyítani. (Ha ugyanis az R, S, T, U számok sorrendjét bárhogyan felcseréljük, akkor ez csak azt hozza magával, hogy a (36′) baloldali tényezői is egymással felcserélődnek, tekintettel a II. tételre.) Minthogy $(qR, qS, m)=1$, qR, qS diszkriminánsszámok, a qR, qS közül legalább az egyik pozitiv és közülük legalább az egyik páratlan, azért az I. tétel szerint csupán még a (18)—(21) feltételeknek az $a_1=qR$, $a_2=qS$, $a_3=m$ esetre való teljesülése vizsgálandó meg.

A (18) teljesül a (37) szerint.

A (21) pl. az $i=1$ esetre így hangzik: $\left(\frac{d}{pm}\right)\left(\frac{dqR}{p}\right)=1$, ahol $p\,|\,(m, R)$ és d az R-nek p-vel osztható törzsdiszkrtminánstényezője. Minthogy ugyanerre a p-re ugyancsak (21)-ből az $\{RS, Ti, m\}$-re való alkalmazással $\left(\frac{d}{pm}\right)\left(\frac{dRS}{p}\right)=1$ következik, azért (37) miatt a kérdéses egyenlet helyes.

A (19)-ből csupán a $p=q$ eset kérdéses, továbbá (20)-ban csupán ugyancsak $p=q$ lehetséges, s így a [15] jegyzet szerint helyes a (38)-ról szóló állítás.

Ha most a (38)-beli hat $\{\}$ jelt rendre 1—6-tal jelölöm, akkor a (36′) baloldala a II. és III. tételek alkalmazásával a következő szorzatba megy át:

$$(23.45)\,(13.46)\,(15.26).$$

Ennek a szorzatnak értéke 1, amivel az állítást bebizonyítottuk.

21. A III. tétel szerint mindazokból az m számokból, amelyeket a 19.-ben behoztunk, kiválasztható egy $m_1, m_2, \ldots, m_e$ 2-független bázis, ahol akkor 2e az *összes* olyan m számok számossága.[22] Minthogy pedig mindezek az m számok azok, amelyekre (34) fennáll, azért $e=t-r_2$, ahol r_2 az M_2 matrix

[22] Egy csoport 2-független bázisa egy olyan lehető kevés elemű $x_1, x_2, \ldots, x_e$ sorozat a csoport elemeiből, amellyel a csoport minden x elemére teljesül $x \underset{(2)}{=} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_e^{n_e}$ alkalmas $n_1, n_2, \ldots, n_e$ kitevőkkel.

multiplikatív rangja, miközben most a rangnak «a legtöbb (multiplikatív) független *sorok* számossága» jelentését tartottuk szem előtt.

Másrészt világos, hogy az M_2 tetszésszerinti különböző $d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_n}$ indexű oszlopainak szorzata akkor és csak akkor (1, 1,..., 1), ha a $d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_n} = D_1$ szorzatra nézve D_1, $\frac{D}{D_1}$ 2-odfajú D-felbontás, s az ilyen D_1-ek számossága 2^{e_4+1}, ugyanis 2-szer annyi, mint a különböző 2-odfajú D-felbontások számossága, s így egyszersmind $r_2 = t - e_4 - 1$. E szerint $e = e_4 + 1$, s az előbbi m számoknak 2-független bázisa az $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ alakban jelentkezik.

Legyen $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, e_4)$ a 2-odfajú D-felbontásoknak egy független bázisa és legyen

$$M_4 = \begin{Vmatrix} \{D_1', D_2', m_1\} & \{D_1'', D_2'', m_1\} \cdots \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, m_1\} \\ \{D_1', D_2', m_2\} & \\ \vdots & \\ \{D_1', D_2', m_{e_4+1}\} & \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, m_{e_4+1}\} \end{Vmatrix} \tag{38}$$

Világos a 19. és a III. tétel alapján, hogy egy D_1, D_2 2-odfajú D-felbontás már akkor (egyszersmind csak akkor) 3-adfajú, hogyha $\{D_1, D_2, m_i\} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, e_4 + 1)$. Tovább ebből s (36)-ból az is következik, hogy a független 3-adfajú D-felbontások számosságára, ami nem egyéb, mint e_8, fennáll $e_8 = e_4 - r_4$, ahol r_4 az M_4 matrix multiplikatív rangja. A (34)-nél mondottakat is figyelembe véve, előállt a következő:

V. Tétel. *Egy tetszésszerinti D_1, D_2 2-odfajú D-felbontás akkor és csak akkor 3-adfajú, ha a D-nek minden olyan négyzetmentes m osztójára, amelyre $\{D_1, D_2, m\}$ létezik, ennek a jelnek értéke egyszersmind 1-gyel egyenlő.*

Mégpedig mindazok az m számok, amelyekre $\{D_1, D_2, m\}$ létezik, (bármelyik D_1, D_2-re nézve) megegyeznek azokkal a $p_x p_y \ldots p_u$ $(1 \leqq x < y < \cdots < u \leqq t)$ szorzatokkal, amelyekre nézve a (32) alatti M_2 matrix $p_x, p_y, \ldots, p_u$ indexű (azaz x-, y-,..., u-dik) sorainak szorzata csupa (t-számú) 1; számosságuk 2^{e_4+1} (ebbe az $m = 1$ esetet is beleszámítottuk, egyébként azonban az m-nek úgyis közömbös előjelét figyelmen kívül hagytuk).

Ha ezeknek az m számoknak egy tetszésszerinti 2-független bázisa $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$, *akkor már a* $\{D_1, D_2, m_i\} = 1$ $(i=1, 2, \ldots, e_4+1)$ *fennállásából következik a* D_1, D_2 3-*adfajú volta.*

Az $R(\sqrt{D})$ *testre vonatkozólag* $e_8 = e_4 - r_4$, *ahol* r_4 *a* (38) *alatti* M_4 *matrix multiplikatív rangja.*

Megjegyzések. Amint fentebb láttuk, $e_4 = t-1-r_2$, azaz $e_4 = e_2 - r_2$, ahol r_2 az M_2 multiplikatív rangja. E szerint e_4 és e_8 alakilag hasonló meghatározást nyertek. Ha a D_1, D_2 és D_2, D_1 D-felbontásokat különbözőknek tekintjük (ami már eddig is több vizsgálatban célszerűnek mutatkozott), akkor M_4 helyébe természetszerűleg egy e_4+1 soros négyzetes matrix lép, a nélkül, hogy a multiplikatív rang megváltoznék, s mivel másrészt az M_2 egy e_2+1 soros négyzetes matrix, azért így a hasonlóság még teljesebbé tehető.[23]

4. §.

22. Ezután csupán olyan $\{a_1, a_2, a_3\}$ jeleket fogok tekinteni, amelyekben a_1, a_2, a_3 mindhárman páratlanok. Akkor feltehető, hogy a_3 is diszkriminánsszám. Továbbá a páratlan törzsszámokat (az $a_1 a_2 a_3$ törzstényezőit) mindig $4l+1$ alakúaknak veszem fel. Akkor a (19)-ben és (21)-ben mindig $d=p$. Ezek baloldalai helyett

---

[23] Legyen $\Delta = D_1, D_2$ egy tetszésszerinti D-felbontás. Jelentse $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ $(p \mid D)$ a $\left(\frac{D_1}{p}\right)$ vagy $\left(\frac{D_2}{p}\right)$ értéket a szerint, amint $p \mid D_2$ vagy $p \mid D_1$. Ha továbbá m négyzetmentes osztója D-nek és $p, q, r, \ldots$ az m törzstényezői, akkor legyen $\left(\frac{\Delta}{m}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right)\left(\frac{\Delta}{q}\right)\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdots$ Ha pedig $\{D_1, D_2, m\}$ létezik, akkor ezt $\{D_1, D_2, m\} = \{D_2, D_1, m\}$ miatt egyszerűbben $\left\{\frac{\Delta}{m}\right\}$-mel jelölhetjük. Nyilvánvaló, hogy az $e_4 = e_2 - r_2$ akkor is érvényes marad, ha az M_2 helyett egy $\left(\left(\frac{\Delta}{m}\right)\right)$ $e_2+1\,(=t)$ soros négyzetes matrixot veszünk, ahol m és Δ sor-, illetve oszlopindexnek tekintendő, mégpedig ezek befutják a D összes négyzetmentes osztóinak egy 2-független bázisát, illetve az összes D-felbontások csoportjának egy független bázisát (most is a D_1, D_2; D_2, D_1 D-felbontások különbözőknek tekintendők). Az M_4 pedig (a fenti módosítással értve) a $\left(\left\{\frac{\Delta}{m}\right\}\right)$ e_4+1 soros négyzetes matrixként jelentkezik, ahol Δ befutja a 2-odfajú D-felbontások csoportjának egy független bázisát, az m befutja a fenti $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ sorozatot.

nyilvánvalóan $\left(\frac{|a_3|}{p}\right)$, illetve $\left(\frac{-p|a_3|}{p}\right)\left(\frac{pa_i}{p}\right)=\left(\frac{-|a_3|a_i}{p}\right)$ írható. Ha tehát bevezetjük az $\overline{a}_1=a_1$, $\overline{a}_2=a_2$, $\overline{a}_3=|a_3|$ jelölést, akkor a (18)—(21) feltételek a következő egyszerűbb alakban írhatók:

$$\left(\frac{\overline{a}_i}{p}\right)=1, \qquad (p\,|\,a_1a_2a_3\,;\ p+a_i\,;\ i=1,2,3) \tag{39}$$

$$\left(\frac{\overline{a}_i\overline{a}_j}{p}\right)=1. \qquad (p\,|\,(a_i,a_j)\,;\ 1\leqq i<j\leqq 3) \tag{40}$$

23. Tekintem azt az esetet, amikor az a_1, a_2, a_3 számok közül kettő egyenlő. A II. tétel miatt elegendő az $\{a, a, b\}$, $\{b, a, a\}$ eseteket tekinteni. Mindkét esetben kell, hogy $(a, b)=1$ legyen.

Az $\{a, a, b\}$ jelben (40) miatt $\left(\frac{1}{p}\right)=1$ $(p\nmid a)$, azaz az a törzsdiszkriminánstényezői mind pozitívok. A (39) miatt az a, b számpár 2-odfajú D-felbontás (az ab diszkriminánshoz).

A $\{b, a, a\}$ jelben (39) miatt az a, b ismét 2-odfajú D-felbontás, továbbá $\left(\frac{a|a}{p}\right)=1$ $(p\nmid b)$. A (40) szerint $\left(\frac{a|a|}{p}\right)=1$ $(p|a)$. Vagy pozitív tehát az a, s ekkor minden törzsdiszkriminánstényezője is ilyen, vagy negatív az a, s ekkor a b törzsdiszkriminánstényezői pozitívok.

Ebben az utolsó esetben a-t a b-vel felcserélve, ezután minden esetben az a összes törzsdiszkriminánstényezői pozitívok (egyébként a, b ezután is 2-odfajú D-felbontás) s így mindhárom esetet felöleli a következő két 1°, 2° állítás.

1°. $\{a, a, b\}=\left(\frac{2}{a}\right)^u\left(\frac{b}{a}\right)_4$, $\{a, b, a\}=\{b, a, a\}=\left(\frac{b}{a}\right)_4$,

ahol $u=0$ vagy 1 a szerint, amint $b>0$ vagy <0.

2°. Ha $b<0$, akkor $\{a, b, b\}=\{b, a, b\}=\left(\frac{b}{a}\right)_4$.

Tekintem elébb a $\{b, a, a\}$ jelt. Ennek értéke $\left(\frac{a|R(\sqrt{b})}{a'}\right)$, ahol a az 1.-beli a_2-nek megfelelő szám, amelyhez (2′) szerint tartozzék egy a ideál. Legyen mégpedig a a 17. szerinti $a=2(x+y\sqrt{b})$ alakban megadva, ahol most

$$x^2-by^2-az^2=0,$$

$2 \mid z$. Minthogy $\mathfrak{a} \mid a$, $(\mathfrak{a}', a) = 1$, $\mathfrak{a}' \mid a'$, azért $\left(\frac{a}{\mathfrak{a}'}\right) = \left(\frac{a-a'}{\mathfrak{a}'}\right) = \left(\frac{4y\sqrt{b}}{\mathfrak{a}'}\right) = \left(\frac{y}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{b}}{\mathfrak{a}'}\right)$.

Általában igaz a következő: Ha p $4l+1$ alakú pozitív törzsszám, m nem teljes négyzet racionális egész szám, $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$, $\mathfrak{p}$ a p-nek egyik törzsideáltényezője az $R(\sqrt{m})$ testben, akkor $\left(\frac{\sqrt{m}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)_4$. Ha ugyanis $\left(\frac{\sqrt{m}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, akkor a $\mathfrak{p}$ 1-sőfokú volta miatt $\sqrt{m} \equiv x^2 \pmod{\mathfrak{p}}$, azaz $m \equiv x^4 \pmod{\mathfrak{p}}$, $m \equiv x^4 \pmod{p}$. Ha fordítva fennáll az utóbbi kongruencia, akkor nyilván $\left(\frac{\sqrt{m}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$.

E szerint a fenti $\left(\frac{\sqrt{b}}{\mathfrak{a}'}\right)$ értéke $\left(\frac{b}{a}\right)_4$, továbbá $\left(\frac{y}{a}\right) = \left(\frac{a}{y}\right) = 1$, s így tényleg $\{b, a, a\} = \left(\frac{b}{a}\right)_4$. A II. tétel miatt egyszersmind $\{a, b, a\} = \left(\frac{b}{a}\right)_4$.

Az 1° alatt még hátralévő $\{a, a, b\}$ jelre nézve mindenekelőtt világos a IV. tétel szerint, hogy csak a $b<0$ esettel kell foglalkoznunk. Láthatólag van az $R(\sqrt{a})$ testben két olyan α, β egész szám, hogy $\{a, a, b\} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\{a, b, a\} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ahol α-t ismét a 17. szerinti $\alpha = x + y\sqrt{a}$ $(2 \mid y)$ alakban vesszük fel, úgyhogy

$$x^2 - ay^2 - az^2 = 0,$$

$x \equiv y+1 \pmod 4$, továbbá $N_{R(\sqrt{a})}\beta_{(2)} \mid b$ és $(2\alpha, \beta) = 1$. Minthogy $a \mid x$ és $a\left(\frac{x}{a}\right)^2 = y^2 + z^2$, azért $|x| \equiv 1 \pmod 4$, továbbá $2^1 \| y$, illetve $4 \mid y$ a szerint, amint $\left(\frac{2}{a}\right) = -1$ vagy 1, s így az x, a, a' számok előjele megegyezik $\left(\frac{2}{a}\right)$ előjelével. Minthogy pedig $b<0$ miatt $\beta\beta' < 0$, azért $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. E szerint most $\{a, a, b\} = \left(\frac{2}{a}\right)\{a, b, b\}$, amivel az 1°-et bebizonyítottuk.

A 2° alatti $\{b, a, b\}$ értéke $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{b}}\right)$, ahol α ismét az 1.-beli α_2-nek megfelelő szám. Feltehető, hogy α egész és $(\alpha, 2\sqrt{b}) = 1$. Akkor $b<0$ miatt $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{b}}\right) = \left(\frac{\sqrt{b}}{\alpha}\right) = \left(\frac{\sqrt{b}}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)_4$, ahol $\mathfrak{a}$ a

(2′) szerint az α-hoz tartozó ideál. Ezek szerint a 2° is helyes.

Megjegyzések. Mint a bevezetésben már említettem, látjuk, hogy a $\{\ \}$ jel általánosítása a $(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})_4$ jelnek. Azonban a $\{\ \}$ jelek nem ölelik fel az összes $(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})_4$ jelt. Ha pl. p, q, r pozitív törzsszámok és $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{r}{p}\right)=-1$, $\left(\frac{q}{r}\right)=1$, akkor $\left(\frac{qr}{p}\right)_4$ létezik, másrészt azonban, mint ez könnyen belátható, nem létezik egyetlen olyan $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel sem, amelyben a_1, a_2, a_3 a pqr-nek 1-nél nagyobb osztói és $pqr \mid a_1a_2a_3$. Annál kevésbbé állítható elő $\left(\frac{qr}{p}\right)_4$ valamely $\{\ \}$ jel által.

24. Ha p, q, r pozitív törzsszámok és $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=1$, akkor $\{p, q, r\}$ létezik, s (29″) szerint a p, q, r sorrendje közömbös. A III. tétel és 23. 1° szerint most minden olyan $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel, amelyben $a_1a_2a_3$ csupán a p, q, r törzstényezőket tartalmazza, előállítható olyan szorzatként, amelynek tényezői $\{p, q, r\}$ és $\left(\frac{p}{q}\right)_4$, $\left(\frac{p}{r}\right)_4$,... közül vannak.

Hasonló érvényes több törzsszám esetére is. Mégpedig, ha $p_1, p_2, \ldots, p_t$ pozitív törzsszámok és $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1$ $(1\leqq i<j\leqq t)$, akkor a belőlük összeállított $\{\ \}$ jelek kifejezhetők $\{p_i, p_j, p_l\}$ $(1\leqq i<j<l\leqq t)$ és $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4$ $(i, j=1, 2, \ldots, t;\ i\neq j)$ jelek által. Ugyanezek a jelek az V. tétel szerint az $R(\sqrt{p_1p_2\ldots p_t})$ testre nézve meghatározzák az e_s-at (most $e_2=e_4=t$ 1).

Tekintem a $p=13$, $q=17$, $r=257$ és $p=13$, $q=17$, $r=433$ példákat. Mindkét esetben $\left(\frac{p}{q}\right)_4=1$, $\left(\frac{q}{p}\right)_4=-1$, $\left(\frac{p}{r}\right)_4=-1$, $\left(\frac{r}{p}\right)_4=-1$, $\left(\frac{q}{r}\right)_4=1$, $\left(\frac{r}{q}\right)_4=-1$, ellenben $\{13, 17, 257\}=-1$, $\{13, 17, 433\}=1$. Ebből látjuk, hogy a $\{\ \}$ jel általában nem fejezhető ki az R-ben értelmezett $(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})$, $(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})_4$ jelek által.

25. Állítom, hogy ha $\{a_1, a_2, a_3\}$ létezik és tiszta, továbbá $a_1a_2a_3\underset{(2)}{\equiv}1$ és $a_3<0$, akkor $\{a_1, a_2, a_3\}=\left(\frac{2}{a}\right)$, ahol $a=(a_1, a_2)$. (Ilyenkor a $\{\ \}$ jelt nem valódinak nevezhetjük, amikor ugyanis az ő értéke kifejezhető az R-ben értelmezett $(\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot})$ jel által. V. ö. a [14] jegyzettel.)

A feltevés szerint ugyanis $a_1 = ab$, $a_2 = ac$, $a_3 = bc$, ahol a, b, c páronként relatív prím négyzetmentes páratlan egész számok és $bc < 0$. A 17. szerint $\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{x + y\sqrt{ab}}{bc}\right)$, ahol

$$x^2 - aby^2 = acz^2 = 0,$$

$2 | y$, $x \equiv y + 1 \pmod 4$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ egész ideálok $R(\sqrt{a_1})$-ben, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$, $(\mathfrak{c}, x + y\sqrt{ab}) = 1$. Akkor

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{x}{b}\right)\left(\frac{2x}{c}\right) = \left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{x}{bc}\right) = \left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{bc}{x}\right) \operatorname{sgn} x,$$

ahol $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$. Látható, hogy $\left(\frac{-bc}{x}\right) = 1$, s így az utóbbi szorzat értéke

$$\left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)\operatorname{sgn} x = \left(\frac{2}{c}\right)(-1)^{\frac{x-1}{2}} = \left(\frac{2}{c}\right)(-1)^{\frac{y}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{2}{ac}\right) = \left(\frac{2}{a}\right).$$

Ezzel az állítás igazolva van.

26. Két negatív törzsszámból nem lehet «valódi» $\{\}$ jelt alkotni. Ha ugyanis p, q negatív törzsszámok, akkor feltehető, hogy $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Ha ezután az $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel létezik és az a_1, a_2, a_3 mindegyike a p, q, pq számok valamelyike, akkor 23. miatt az a_1, a_2, a_3 csupán a p, q, pq számoknak egy permutációja lehet, mégpedig a (39), (40) feltételeknek megfelelően csupán a $\{p, pq, q\}$, $\{pq, p, q\}$ esetek lehetségesek. Ez a két $\{\}$ jel egymással egyenlő, s a 25. szerint (közös) értékük $\left(\frac{2}{p}\right)$.

27. Megvizsgálom, hogy három különböző negatív p, q, r törzsszámból micsoda $\{\}$ jelek alkothatók. Feltehető, hogy $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = 1$ vagy $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1$. Az utóbbi eset nem ad alkalmat egy $\{a_1, a_2, a_3\}$ jel megszerkesztésére sem, mert (39) miatt kellene, hogy $a_1 = pqr$, s ugyanígy $a_2 = pqr$ legyen, ami 23. miatt lehetetlen. A maradék előbbi esetben könnyen láthatólag kell, hogy a_1, a_2 mindegyike a p, pq, qr, pqr számok és a_3 az r, pq, qr, pqr számok közül legyen, s így csupán az

$x_1=\{p, pq, r\}$, $x_2=\{p, pq, qr\}$, $x_3=\{p, qr, r\}$, $x_4=\{p, qr, pq\}$, $x_5=\{p, qr, pqr\}$, $x_6=\{pq, pqr, r\}$ jelek jönnek tekintetbe. Azonban $x_1x_2=\left(\frac{2}{p}\right)$, $x_1x_3=\left(\frac{2}{p}\right)$, $x_3x_4=1$, $x_5=1$, $x_6=\left(\frac{2}{pq}\right)$, s ezért ujságot csak az egyetlen $\{p, pq, r\}$ jel szolgáltat.

Ennek a jelnek az értéke meghatározható például a következőképpen: Vesszük az

$$u^2-pv^2+qw^2=0$$

egyenletnek egy megoldását relativ prím racionális egész u, v, w számokban. Biztosan $2\nmid v$, $2\mid uw$, s így a v előjele választható úgy, hogy $v\equiv uw+1 \pmod 4$ legyen. Ha még $\mathfrak{r}$ jelenti az r-nek azt a törzsideáltényezőjét az $R(\sqrt{p})$ testben, amelyre $\left(\frac{\sqrt{p}}{\mathfrak{r}}\right)=1$, akkor

$$\{p, pq, r\}=\begin{cases}\left(\frac{u+v\sqrt{p}}{\mathfrak{r}}\right) & (2\mid u)\\ \left(\frac{2}{r}\right)\left(\frac{u+v\sqrt{p}}{\mathfrak{r}}\right) & (2\mid w).\end{cases}$$

Ugyanis $(pv)^2-pu^2=pqw^2$, s így 17. szerint a $2\mid u$ és $2\mid w$ eseteknek megfelelőleg $\{p, pq, r\}=\left(\frac{pv+u\sqrt{p}}{\mathfrak{r}}\right)$, illetve $\left(\frac{2(pv+u\sqrt{p})}{\mathfrak{r}}\right)$.

28. Tekintem az $R(\sqrt{pqrs})$ testet, ahol p, q, r, s olyan negatív törzsszámok, amelyek közül mindegyik négyzetes maradék minden mögötte álló elemre nézve. Akkor a (32)-beli M_2 matrix a következőbe megy át:

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Most pq, rs az egyetlen 2-odfajú valódi D-felbontás, tehát $e_4=1$, továbbá az V. tételbeli m_1, m_2 sorozat számára qr, s vehető, s akkor a (38)-beli M_4 matrix a következő

$$\begin{pmatrix}\{pq, rs, qrs\}\\ \{pq, rs, s\}\end{pmatrix}.$$

Minthogy

$$\{pq, rs, qrs\} = \{p, rs, qrs\} = \{p, rs, pq\} =$$
$$= \{p, pq, rs\} = \{p, pq, r\}\{p, pq, s\},$$

$$\{pq, rs, s\} = \{p, rs, s\}\{q, rs, s\} = \left(\frac{2}{p}\right)\{p, pr, s\}\cdot\left(\frac{2}{q}\right)\{q, qr, s\},$$

azért $e_8 = 1$ akkor és csak akkor, ha $\{p, pq, r\}\{p, pq, s\} = 1$, $\{p, pr, s\}\{q, qr, s\} = \left(\frac{2}{pq}\right)$.

Minthogy a 27.-beli p, q, r törzsszámokkal az $R(\sqrt{pqr})$ testre nézve ($e_4 = 1$ és) $e_8 = 1$ akkor és csak akkor, ha $\left(\{p, qr, r\} =\right)\left(\frac{2}{p}\right)\{p, pq, r\} = 1$, azért az előbbi így is mondható: Az $R(\sqrt{pqrs})$ testben $e_8 = 1$ akkor és csak akkor, ha az e_8 értéke egyrészt az $R(\sqrt{pqr})$, $R(\sqrt{pqs})$ testekre egymással egyenlő (t. i. 0 vagy 1), másrészt az $R(\sqrt{prs})$, $R(\sqrt{qrs})$ testekre ugyancsak egymással egyenlő (t. i. 0 vagy 1).

29. Legyenek p, q, r különböző pozitív törzsszámok. Tekintem azt a két esetet, amikor

$$1)\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = 1,$$

illetve

$$2)\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = -1.$$

Mindkét esetben létezik $\{pq, pr, qr\}$. Az 1) esetben — amint ezt 24.-ben már érintettük — a $\{pq, pr, qr\}$ előállítható a következő szorzatalakban:

$$\{p, p, q\}\{p, p, r\}\{p, r, q\}\{p, r, r\}\{q, p, q\}\{q, p, r\}\{q, r, q\}\{q, r, r\}.$$

Itt a 3-dik s 6-dik tényezők mint egyenlők elhagyhatók, s így 23. 1° szerint

$$\{pq, pr, qr\} = \left(\frac{pq}{r}\right)_4\left(\frac{pr}{q}\right)_4\left(\frac{qr}{p}\right)_4.$$

Hasonló egyenlet a 2) esetben, jóllehet a bal- és jobboldalak most is léteznek, *nem érvényes*, amint ezt alább egy példán kimutatom. Egyáltalán most a $\{pq, pr, qr\}$ jelt nem lehet olyan $\{a_1, a_2, a_3\}$ jelek szorzataként előállítani, amelyek mindegyikében a_1, a_2, a_3 törzstényezői mind a p, q, r közül vannak, és az $a_1a_2a_3$

szorzat 6-nál kevesebb törzstényezőből áll. Most a $\{pq, pr, qr\}$ kiszámításánál nem tudom elkerülni egy határozatlan egyenlet megoldását. A leggazdaságosabb meghatározásmód a következő: Ha

$$pu^2 - qv^2 \quad rw^2 = 0,$$

ahol u, v, w relatív prím racionális egész számok és $2 \mid v$, akkor

$$\{pq, pr, qr\} = \left(\frac{2}{r}\right)\left(\frac{-1}{u}\right).$$

(Minthogy p, q, r sorrendje bárhogyan felcserélhető, azért célra vezet egy bármilyen $\pm pu^2 \pm qv^2 \pm rw^2 = 0$ egyenlet is.) Mivel ugyanis $(pu)^2 - pqv^2 = pru^2$, azért a 25.-höz hasonlóan

$$\{pq, pr, qr\} =$$
$$= \left(\frac{pu}{q}\right)\left(\frac{2pu}{r}\right) = \left(\frac{2}{r}\right)\left(\frac{u}{qr}\right) = \left(\frac{2}{r}\right)\left(\frac{qr}{u}\right) = \left(\frac{2}{r}\right)\left(\frac{1}{u}\right).$$

Pl. $13.3^2 - 5.4^2 - 37.1^2 = 0$ miatt $\{13.5, 13.37, 5.37\} = -\left(\frac{2}{37}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) = 1$, míg ugyanekkor $\left(\frac{13.5}{37}\right)_4\left(\frac{13.37}{5}\right)_4\left(\frac{5.37}{13}\right)_4 = -1$.

30. Legyenek p, q, r, s pozitív törzsszámok, egymásnak páronként négyzetes nemmaradékai. Akkor az $R(\sqrt{pqrs})$ testben $e_4 = 2$, továbbá pq, rs; pr, qs független 2-odfajú D-felbontások. Az M_4 számára vehető a következő matrix:

$$\begin{pmatrix} \{pq, rs, pq\} & \{pr, qs, pq\} \\ \{pq, rs, pr\} & \{pr, qs, pr\} \\ \{pq, rs, pqrs\} & \{pr, qs, pqrs\} \end{pmatrix}.$$

Ehhez elegendő a $\{pq, pr, qs\}$, $\{pq, pr, qr\}$, $\left(\frac{rs}{p}\right)_4$, $\left(\frac{rs}{q}\right)_4$, $\left(\frac{qs}{p}\right)_4$, $\left(\frac{qs}{r}\right)_4$ jeleket kiszámítani. Most is célhoz jutunk, mint 29. 2) alatt, egyetlen határozatlan egyenlet megoldásával.

Könnyű ezt is általánosítani olyan $R(\sqrt{D})$ esetre, amelyben a D tetszésszerinti számú olyan pozitív törzsszám szorzata, amelyek egymásnak négyzetes nemmaradékai (v. ö. 24.). Ebben az általánosabb esetben is kijövünk a fenti «szerkezetű» $\{\}$ jelekkel.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

EIN NEUES ZAHLENTHEORETISCHES SYMBOL MIT ANWENDUNG AUF DIE THEORIE DER QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPER.

Von L. RÉDEI in Mezőtúr (Ungarn.)

Es seien a_1, a_2, a_3 relativ prime (nicht notwendig paarweise relativ prime) von 1 verschiedene quadratfreie, ganz rationale ungerade Zahlen von der Gestalt $4l+1$, und a_1 sei ein quadratischer Rest für einen jeden solchen Primfaktor von a_2a_3, der zu a_1 prim ist. Dann gibt es zwei relativ prime ganze Ideale $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ in $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ mit der Norm a_2, bzw. a_3, wobei R der Körper der rationalen Zahlen ist. Lässt sich $\mathfrak{a}_2$ durch Multiplikation mit dem Quadrat von einem Ideal in k_1 in ein Hauptideal (a_2) verwandeln, so dass a_2 ein (in multiplikativem Sinne) quadratischer Rest mod 4 ist, ist dabei der (offenbar von Null verschiedene) Wert von dem 2-ten Potenzrestsymbol $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{a}_3}\right)$ in k_1 von der besonderen Wahl der Elemente $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, a_2 unabhängig, so bezeichne ich diesen vom Tripel a_1, a_2, a_3 bestimmten Wert mit $\{a_1, a_2, a_3\}$. Sind a_1, a_2 nicht beide negativ und ist für die rationalen Primteiler p von $a_1a_2a_3$ $\left(\frac{a_i}{p}\right) = 1$ $(p \nmid a_i;\ i = 1, 2, 3)$, $\left(\frac{-\bar{a}_i\bar{a}_j}{p}\right) = 1$ $(p \mid (a_i, a_j);\ 1 \leqq i < j \leqq 3)$, wobei $\bar{a}_1 = a_1$, $\bar{a}_2 = a_2$, $\bar{a}_3 = |a_3|$, so existiert $\{a_1, a_2, a_3\}$. Es besteht dann $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_1, a_3\}$ und im Falle $a_3 > 0$, auch $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\}$. Immer ist $\{\ \}$ multiplikativ in allen drei Argumenten, d. h. z. B. $\{a, a_2, a_3\}\{b, a_2, a_3\} = \{ab, a_2, a_3\}$, welche Gleichung in Kraft tritt, wenn zwei von den darin vorkommenden Symbolen $\{\ \}$ existieren, so dass dann notwendig auch das dritte Symbol

$\{\ \}$ existiert; dabei ist aus ab der darin enthaltene grösste Quadratfaktor zu streichen und es ist $\{a_1, a_2, a_3\} = 1$ zu verstehen, wenn eines von a_1, a_2, a_3 gleich 1 ist. Als Ausgang wird statt der obigen eine andere Definition gewählt, die auch andere Tripel a_1, a_2, a_3 umfasst, darunter auch solche mit $2 \mid a_1 a_2 a_3$. Die Resultate erleiden dann wenig Modifikationen.

Ist $k = R(\sqrt{D})$ ein beliebiger quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante D, so ist die Anzahl e_8 der durch 8 teilbaren Invarianten in der (im «engeren» Sinne) absoluten Idealklassengruppe bestimmt durch folgenden Satz: Es ist eine D-Zerfällung D_1, D_2-ter Art, dann und nur dann von der 3-ten Art, wenn jedes existierende Symbol $\{D_1, D_2, m\}$ den Wert $+1$ hat, wobei m die quadratfreien Teiler von D bedeutet. Bekanntlich ist die Anzahl von diesen D_1, D_2 gleich 2^{e_8}. Dadurch hat die schon mehrmals erörterte Frage von e_8 einen Abschluss bekommen. (All die m, die in Betracht kommen, lassen sich leicht bestimmen, und man kann sich immer mit $e_4 + 1$ von ihnen begnügen, wobei e_4 die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten ist. Die Sätze über e_4 und e_8 lassen sich formal ähnlich abfassen.)

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

MÁSODFOKÚ SZÁMTESTEK ABSZOLÚT OSZTÁLYCSOPORTJÁNAK 2-, 4- ÉS 8-CAL OSZTHATÓ INVARIÁNSAI.

RÉDEI LÁSZLÓ-tól. (Mezőtúr.)

Ez a dolgozat csatlakozik egy elébbi dolgozatomhoz,[1] s egyetlen tárgya bebizonyítani a következőt:

Van végtelen sok olyan 2-adfokú számtest, amelyre nézve e_2, e_4, e_8 *tetszésszerinti előre megadott értékek, természetesen az* $e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq 0$ *korlátozással.*

Legyen u, v, w három tetszésszerinti nemnegatív egész szám az $u \geqq v \geqq w \geqq 0$ korlátozással. Legyen $t = u + 1$ és legyenek p_1, p_2, ..., p_t olyan különböző $4k+1$ alakú pozitív törzsszámok, hogy a $d = p_{v+1}p_{v+2}\ldots p_t$ diszkriminánshoz ne létezzék egyetlen valódi 2-odfajú D-felbontás sem,[2] míg p_1, p_2, ..., p_v mindegyike négyzetes maradék mod d. Legyen $D = p_1 p_2 \ldots p_t$. Akkor az $R(\sqrt{D})$ testre nézve $e_2 = t - 1 = u$. Továbbá láthatóan egy tetszésszerinti D_1, D_2 D-felbontás akkor és csak akkor 2-odfajú, ha $d \mid D_1$ vagy $d \mid D_2$. E szerint $\frac{D}{p_i}$, p_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ egy független bázis a 2-odfajú D-felbontások csoportjában. Ebből $e_4 = v$. Elegendő még azt bebizonyítani, hogy végtelen sokféleképpen lehetséges a p_1, p_2, ..., p_t sorozat különös megválasztása úgy, hogy $e_8 = w$.

Az I (38)-ban válasszuk a 2-odfajú D-felbontások csoportjának fenti bázisát. Ugyanott az m_1, m_2, ..., m_{e_4+1} sorozatul

---

[1] RÉDEI L.: Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére I, ez a kötet, 807—847. Ezt a dolgozatot I-gyel idézem.

[2] RÉDEI L.: A másodfajú D-felbontásokról, ez az Ért., 56 (1937), 89—124.

$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_v$ vehető, ahol d-t az egyöntetűség kedvéért p_0-sal jelölöm (p_0 általában nem törzsszám!). Akkor

$$M_4 = \begin{pmatrix} \{p_1 D, p_1, p_0\} & \{p_2 D, p_2, p_0\} & \ldots & \{p_v D, p_v, p_0\} \\ \{p_1 D, p_1, p_1\} & \{p_2 D, p_2, p_1\} & \ldots & \{p_v D, p_v, p_1\} \\ \vdots & & & \\ \{p_1 D, p_1, p_v\} & & & \{p_v D, p_v, p_v\} \end{pmatrix}.$$

Tekintem az

$$S_v = (\{p_i, p_j, p_l\}) \qquad (0 \leqq i \leqq j \leqq l \leqq v)$$

értékrendszert, ahol az $i=j=l$ esetek mellőzve gondolandók. Látjuk az I-nek II., III., IV. tételeiből, hogy az M_4 minden eleme előállítható az S_v néhány elemének szorzataként, mégpedig az előállítás egyértelmű, ha ismétlődő tényezőket nem engedünk meg. Ugyanis például:

$$\{p_1 D, p_1, p_0\} = \{p_0, p_0, p_1\}\{p_0, p_1, p_2\}\{p_0, p_1, p_3\} \ldots \{p_0, p_1, p_v\},$$
$$\{p_1 D, p_1, p_1\} = \{p_0, p_1, p_1\}\{p_1, p_1, p_2\}\{p_1, p_1, p_3\} \ldots \{p_1, p_1, p_v\}.$$

Azt is látjuk, hogy — ha az M_4-et egy pillanatra az (a_{ij}) $(i=0, 1, 2, \ldots, v;\ j=1, 2, \ldots, v)$ alakban vesszük fel — az a_{ii} $(i=1, 2, \ldots, v)$ elemnek egyik tényezője $\{p_0, p_i, p_i\}$, de egyébként az S_v-nek

$$T = (\{p_0, p_i, p_i\}) \qquad (i=1, 2, \ldots, v)$$

részrendszere az M_4 elemeinek tényezőiben nincs képviselve. Ha tehát a T elemei között pontosan x számú -1 van, míg az S_v minden egyéb eleme $+1$, akkor az M_4 multiplikatív rangja x, s egyben az I-nek V. tétele szerint $e_8 = e_4 - x$. E szerint az eredeti állítást is bebizonyítottuk, ha igaz a következő:

a. A $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_v$ végtelen sokféleképpen választható úgy, hogy az S_v egy tetszésszerinti előre megadott értékrendszerbe megy át ($v \geqq 1$).

(A $v=0$ esetben ugyanis már $e_4=0$, annál inkább $e_8=0$, s ekkor az eredeti állítás úgy szól, hogy minden e_2 mellett végtelen sokszor bekövetkezik $e_4=0$, amely kérdést én már régebben igenlően elintéztem.)[3]

[3] RÉDEI L.: Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben ez az Ért., 54 (1936), 45—112.

Nyilvánvalóan elegendő a következőt bebizonyítani:

b. Bármilyen $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{v-1}$ mellett a p_v végtelen sokféleképpen választható úgy, hogy az $(S_v - S_{v-1} =)$

$$T_v = \left(\left\{p_i, p_j, p_v\right\}\right) \qquad (0 < i < j \leqq v)$$

értékrendszer tetszés szerint előre megadott értékrendszerbe megy át, ahol az $i = j = v$ eset mellőzve gondolandó $(v \geqq 1)$.

Jelentse k_i az $R(\sqrt{p_i})$ testet $(i = 0, 1, \ldots, v-1)$, legyen a_{ij} egy olyan szám a k_i testben, amely az I 1.-beli a_2-nek az $a_1 = p_i$, $a_2 = p_j$ esetben megfelel $(0 \leqq i < j \leqq v-1)$, legyen ω_i olyan egész szám az $R(\sqrt{-1})$ testben, amelynek normája p_i és $\omega_i \equiv 1 \pmod{(1-\sqrt{-1})^3}$ $(i = 0, 1, \ldots, v)$, legyen $\mathfrak{p}_i$ a p_v-nek egyik törzsideáltényezője a k_i testben $(i = 0, 1, \ldots, v-1)$.

Az I 23. szerint $i = 0, 1, \ldots, v-1$ mellett

$$\left\{p_i, p_v, p_v\right\} = \left(\frac{p_i}{p_v}\right)_4 = \left(\frac{\sqrt{p_i}}{\mathfrak{p}_i}\right),$$

$$\left\{p_i, p_v, p_v\right\}\left\{p_i, p_i, p_v\right\} = \left(\frac{p_i}{p_v}\right)_4 \left(\frac{p_v}{p_i}\right)_4 = \left(\frac{\omega_i}{\omega_v}\right),^4$$

továbbá az I 1. szerint

$$\left\{p_i, p_j, p_v\right\} = \left(\frac{a_{ij}}{\mathfrak{p}_i}\right). \qquad (0 \leqq i < j < v)$$

Nyilvánvaló, hogy a **b.** állításban a T_v helyébe vehető az itteni

$$\left(\frac{\sqrt{p_i}}{\mathfrak{p}_i}\right), \left(\frac{\omega_i}{\omega_v}\right), \left(\frac{a_{ij}}{\mathfrak{p}_i}\right) \qquad (1)$$

jelek összesége.

Tekintettel arra, hogy $\omega_v, \mathfrak{p}_i$ a p_v-nek az $R(\sqrt{-1}), k_i$ testekbeli két különböző törzsideálja közül szabadon választhatók $(i = 0, 1, \ldots, v-1)$, azért nevezőtranszformációval látjuk, hogy az itteni összes nevezők helyébe minden további változás nélkül a p_v-nek a $K_{v-1} = R(\sqrt{-1})k_0k_1\ldots k_{v-1}$ testbeli egyik tetszésszerinti $\mathfrak{P}$ törzsideáltényezője vehető, úgyhogy akkor az előállt

---

[4] L. az I [5] alatti dolgozat 242. o. 5. sor.

$$\left(\frac{\sqrt{p_i}}{\mathfrak{P}}\right), \left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{P}}\right), \left(\frac{\alpha_{ij}}{\mathfrak{P}}\right) \tag{2}$$

jelek mind a K_{v-1} testben értendők. Nyilvánvalóan a $\mathfrak{P}$ 1-sőfokú.

Fordítva, ha $\mathfrak{P}$ a $D_{K_{v-1}}$-hez prím 1-sőfokú törzsideál a K_{v-1} testben, akkor a (2) megegyezik az (1)-gyel, ahol akkor $p_v = N_{K_{v-1}}\mathfrak{P}$ értendő. Ismert tétel[5] szerint elegendő tehát azt bebizonyítani, hogy mind a (2) rendszerbeli számlálók 2-függetlenek a K_{v-1} testben, azaz, hogy egy

$$\prod_{i=0}^{v-1}(\sqrt{p_i})^{x_i} \prod_{i=0}^{v-1} \omega_i^{y_i} \prod_{0 \leqq i < j \leqq v-1} \alpha_{ij}^{z_{ij}} = \alpha^2 \tag{3}$$

összefüggés, amelyben minden baloldali kitevő 0 vagy 1 és α a K_{v-1} testben van, csak akkor állhat fenn, ha mindezek a kitevők eltűnnek.

Tegyük fel ezért a (3) fennállását. Feltehető, hogy minden α_{ij} egész szám. Legyen $\mathfrak{P}_i$ a p_i-nek egyik törzsideáltényezője a K_{v-1} testben ($i=0, 1, \ldots, v-1$). Akkor

$$q_i = (\mathfrak{P}_i \overline{\mathfrak{P}}_i \ldots)^2,$$

ahol $\mathfrak{P}_i, \overline{\mathfrak{P}}_i, \ldots$ különböző konjugáltak és q_i olyan törzsszám, amely osztója p_i-nek ($i=1, 2, \ldots, v-1$ mellett $q_i = p_i$). Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{P}_i$ kitevője a (3) minden tényezőjében páros, csupán a $(\sqrt{p_i})^{x_i}$-ben ez a kitevő x_i, kell tehát, hogy $x_i = 0$ legyen ($i=0, 1, \ldots, v-1$). Ezzel (3) átment a következőbe:

$$\prod_{i=0}^{v-1} \omega_i^{y_i} \prod_{0 \leqq i < j \leqq v-1} \alpha_{ij}^{z_{ij}} = \alpha^2. \tag{3'}$$

A $v=1$ esetben az egész baloldal $\omega_0^{y_0}$, továbbá $(K_{v-1}=)$ $K_0 = R(\sqrt{-1})k_0$, amiből könnyen láthatóan $y_0 = 0$, vagyis ekkor az állítás helyes.

A még hátralévő $v \geqq 2$ esetben a (3') baloldala a $K_{v-2} = R(\sqrt{-1})k_0 k_1 \ldots k_{v-2}$ testben van, s így $K_{v-1} = K_{v-2}(\sqrt{p_{v-1}})$ miatt nyilván $\alpha = \beta$ vagy $\beta\sqrt{p_{v-1}}$, ahol β a K_{v-2} testben van. Legyen $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}$ a p_{v-1}-nek egy-egy törzsideáltényezője rendre

[5] HASSE, Bericht Ia, Satz 11.

az $R(\sqrt{-1}), k_0, k_1, \ldots, k_{v-2}$ testekben, mégpedig legyenek ezek a konjugáltak közül úgy választva, hogy $\left(\frac{\omega_{v-1}}{\mathfrak{q}}\right) = 0, \left(\frac{a_{i,v-1}}{\mathfrak{q}_i}\right) = 0$ $(i=0, 1, \ldots, v-2)$; különösen akkor $\mathfrak{q} = \omega_{v-1}$. Az I (2') szerint a (3') alapján

$$\mathfrak{q}^{y_{v-1}} \prod_{i=0}^{v-2} \mathfrak{q}_i^{z_{i,v-1}} \underset{(2)}{=} 1 \text{ vagy } p_{v-1}, \tag{4}$$

amely egyenlet a K_{v-2} testre értendő.

A p_{v-1}-nek a K_{v-2} testbeli törzsideáltényezői a $(\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{q}}_0, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{v-2})$ alakban állnak elő, ahol $\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{q}}_0, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{v-2}$ rendre a $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}$ ideálok egy-egy konjugáltját jelentik ($\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ vagy $\mathfrak{q}'$; $\bar{\mathfrak{q}}_0 = \mathfrak{q}_0$ vagy $\mathfrak{q}_0'; \ldots$). A (4) baloldalán a $(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}_0', \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}')$ kitevője páros (mégpedig zérus), s így a jobboldalon csak az 1 lehetséges. Minthogy továbbá a $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_0', \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}')$ törzsideál kitevője $\mathfrak{q}$-ban 1, míg ugyanaz prím a $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}$ mindegyikéhez, azért $y_{v-1} = 0$. Hasonlóan lehet következtetni a $z_{i,v-1}$ $(i = 0, 1, \ldots, v-2)$ eltünésére a $(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}_0', \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}', \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_{i+1}', \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}')$ törzsideál segélyével. Ezzel előállt (3')-ből a

$$\prod_{i=0}^{v-2} \omega_i^{y_i} \prod_{0 \leq i < j \leq v-2} a_{ij}^{z_{ij}} = \beta^2$$

egyenlet, amely a (3')-nek mindenben megfelel, csupán v helyébe $v-1$ lépett. Az eljárás ismétlésével következik minden y_i, z_{ij} eltűnése, amivel a (3)-ról szóló állítást s vele együtt eredeti állításunkat is bebizonyítottuk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

DIE DURCH 2, 4 UND 8 TEILBAREN INVARIANTEN IN DER ABSOLUTEN KLASSENGRUPPE DER QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPER.

Von LADISLAUS RÉDEI in Mezőtúr (Ungarn).

Ansschliessend an die vorangehende Arbeit beweise ich, dass es unendlich viele solche quadratischen Zahlkörper gibt, für welche e_2, e_4, e_8, die Anzahl der durch 2, 4, bzw. 8 teilbaren Invarianten in der (im «engeren» Sinne) absoluten Idealklassengruppe, beliebig vorbestimmt sind, natürlich mit der Einschränkung $e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq 0$.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1936.)

A SZÉNMONOXID «3A» SÁVRENDSZERÉNEK ROTÁCIÓS ANALIZISE.

SCHMID REZSŐ- és GERŐ LORÁND-tól.

A szénmonoxid ultraibolyában fekvő sávrendszerei közül időrendben elsőnek a III. pozitiv [$b^3\Sigma \rightarrow a^3\Pi$] majd a IV. pozitív [$A^1\Pi \leftrightarrow X^1\Sigma$] és végül a Cameron [$a^3\Pi \leftrightarrow X^1\Sigma$] sávok rotációs analizisei készültek el.[1] Az ú. n. $3A$ sávokról azonban a legújabb időkig csak annyit sikerült kimutatni, hogy a végállapotuk azonos az $a^3\Pi$ állapottal és mivel csak egyetlen: $v' = o$ sávsorozat észlelhető belőlük, arra is lehetett következtetni, hogy az egyelőre c-vel jelölt kezdőállapotukon predisszociáció lép fel. Ez utóbbiról — egy hozzávetőleges analizis[2] révén, amely a kezdő állapot rotációs állandóját kb. $1{\cdot}9 \pm 0{\cdot}1$ cm^{-1}-nek adta meg, — valószínűvé vált, hogy ugyanaz az atomterm-kombináció okozza, mint a HERZBERG [$B^1\Sigma \rightarrow A^1\Pi$] és az $E \rightarrow X^1\Sigma$ sávokon észlelt predisszociációkat és amelynek a CO-alapállapot feletti magassága 11·54 Voltnak adódott. Tisztázatlan maradt azonban a $3A$ sávok c-kezdőállapotának karaktere. Ez jórészt annak tulajdonítható, hogy a $3A$ sávok a közönséges kisülési körülmények között a IV. pozitiv sávrendszer sávjai közé ékelődve és azok által meglehetősen eltakarva jelennek meg. Feltétlenül szükségessé tette azonban a $3A$ sávok rotációs szerkezetének felderítését az a tény, hogy az ibolya felé árnyékolt $3A$ sávok és a vörös felé árnyékolt IV. pozitiv sávok éppen olyan helyeken

[1] Az idevonatkozó dolgozatok bibliografiáját l. szerzőknek a Mat. Termtud. Értesítőben, 1937-ben megjelent és a szénmonoxid energiaállapotairól szóló dolgozatában: LV. 691, 1937.

[2] R. SCHMID, Phys. ZS. 37. 55, 1936.

keresztezik egymást és okoznak vonalösszeeséseket, ahol a IV. poz. sávvonalak közül bizonyosak predisszociáció következtében intenzitás csökkenést mutatnak; az említett összeesések pedig éppen ez utóbbiakat zavarják meg.

A $3A$-sávok volnalsűrűsége azonban olyan nagy és az egyes ágak között is oly nagy számmal fordulnak elő összeesések, hogy eredményt a rotációs analizis végbevihetősége terén csak akkor remélhetünk elérni, ha legalább a IV. pozitiv sávokkal való összeesésektől sikerül megszabadulni. Ez bekövetkezett, amidőn a szokásos gerjesztési körülményeket elhagyva, a kisülési csőbe a szénmonoxidot csak igen kis koncentrációkban vittük bele. Gyakorlatilag oly módon jártunk el, hogy egy kb. 60—70 cm hosszú és kb. 2 cm átmérőjű GEISSLER csövet — ⌊⌋-formájut választottunk — amelybe kvarcköpennyel ellátott szénelektródok voltak forrasztva, pár Hg-milliméter nyomású neon gázzal töltöttünk meg; az intenziven kimelegített csőfalból és az elektródokból felszabaduló gázokat báriumgőz alkalmazásával lehetőleg tökéletesen megkötöttük, majd a cső egy oldalnyulványában elhelyezett és előzetesen átolvasztott káliumklorátból kevés oxigént fejlesztettünk, mely azután a szénelektrodok anyagával CO-vá alakult. A kisülés színképének látható részében erős Ne-vonalak mellett inkább csak C_2-sávok jelentek volt meg, az ultraibolya részben azonban a CO és CO^+ sávok aránylag nagy intenzitással mutatkoztak. Míg abban az esetben, ha a kisülést tiszta szénoxidban vagy széndioxidban tartjuk fenn, a IV. pozitiv sávok — a nyomástól függően természetesen — de mégis nagyobbrészt a magasabb vibrációs és rotációs emeletekig kifejlődve jelennek meg, a Ne-gázban végbemenő kisülésből csak az alacsonyabb rotációs és vibrációs emeletekről induló sávok, illetőleg sávvonalak lépnek fel intenzivebben. A IV. pozitiv sávok által így szabadon hagyott helyeken csaknem tisztán jelentek meg a CAMERON-sávok mellett a $3A$, sőt egy eddig ismeretlen sávrendszer sávjai is.[1] Az áramsűrűség és a gázösszetétel szerencsés eltalálásánál az Intézet 6·5 m sugarú, 30.000 karcolatú (pro hüvelyk) HOCHHEIM-ötvözettel bevont rácsának első rendjében pár órai expozició alatt fényképezhetők voltak a $3A$ sávok

[1] L. R. SCHMID u. L. GERŐ, Naturwissenschaften **25**. 90, 1937.

kitűnő feloldás és a rotációs analizis céljára már megfelelő pontosságot nyujtó 1·3Å/mm diszperzió mellett.

Felhasználva a 3*A* és III. poz. sávok végállapotának közös voltából folyó kombináció-differencia egyezések szükségességét, sikerült a 0→1, λ=2389Å, 0→2, λ=2489Å és 0→3, λ=2596Å 3*A* sávok vonalait a következő 12 ágba besorozni:

fej képzők: O_3, O_2, P_3, P_2, P_1, Q_1
nem képeznek fejet: Q_3, R_3, Q_2, R_2, R_1 és S_1.

Az ágak jelzésére itt és az 1—3. táblázatokban ugyanazokat a szimbolumokat használtuk, amiket DIEKE és MAUCHLY[1] annak idején a III. poz. sávok analizisénél bevezettek volt. A fenti felsorolás az ibolya felé árnyékolt sávok vörös felöli szélétől (ahol az O_3 fejet találjuk) a rövidebb hullámhosszak felé halad. A 4. táblázat tartalmazza az analizált három sáv közös kezdőállapot — dupladifferenciáit, az összes ágakból számítva. Bár a számos összeesés következtében a számoszlopokban egy meghatározott K-rotációs kvantumszám mellett az eltérések sokkal inkább mutatkoznak itt mint pl. a IV. poz. sávok esetében, mégis kétségtelennek látszik, hogy lényegében ugyanazzal a kombináció-differencia-oszloppal állunk szemben mind a háromszor hat esetben, azaz a *c*-kezdőállapot multiplett-felbomlása nem lehet számottevő. — Mindent tekintetbe véve, a *c* kezdőállapot számára a $c^3\Sigma^+$ szimbolum, illetőleg karakter adódik, mint amelyből a kombináció-differencia-egyezéseken kívül az aránylag legerősebb P_3, Q_3, O_2, P_2, Q_2, R_2, Q_1, R_1 és a csak valamivel gyöngébb O_3, R_3, P_1, S_1 ágak, a tapasztalattal teljes összhangzásban, származhatnak. A közös kezdőállapot-differenciák számtani középértékét tartalmazza az 5. táblázat, amelyből a $c^3\Sigma$-term rotációs állandójára 1,9563 cm^{-1}, a $c^3\Sigma$-term «nullahelyének» pedig a CO-alap állapot feletti magasságára 92,077·4 cm^{-1} adódik.

A 6. táblázat tartalmazza a (9→18) IV. poz. sáv és a (0→1) 3*A* sáv vonalai között fellépő összeeséseket. Ennek alapján most már kétségtelen, hogy a IV. poz. sávok v'=9-es felső vibrációs

[1] G. H. DIEKE and J. MAUCHLY, Phys. Rev. **43**. 12. 1933.

1. táblázat.

$c^3\Sigma \rightarrow a\ ^3\Pi_0$ átmenetek.

K	$S_1(K)$	$R_1(K)$	$Q_1(K)$	$P_1(K)$	
0		41931·33*			
1		933·37		41921·76	
2	41952·26*	936·28*		916·19	
3	960·08*	938·94		911·22	
4	967·74*	942·14*		907·21	
5	975·80*	946·93*	41925·91	904·47*	
6	984·47*	952·26*	927·83*	902·34*	
7	994·93	958·60	929·39	900·33*	
8	42006·34	965·82	931·33*	899·61*	
9	018·27	974·17*	936·28*	899·61*	
10	031·19	982·79	940·88	900·33*	
11	044·68	992·42	946·93*	902·34*	
12	058·88	42002·35	953·64	904·47*	
13	073·37	012·91	960·08*	907·21	
14		024·44	967·74*	911·22	
15		036·51	975·80*	916·19	$0 \rightarrow 1$ sáv, $\lambda = 2389$ Å
16			984·47*	921·76	
17					
18					
0	40253·71	40245·77			
1	258·55	246·55		40231·68	
2	264·53	248·22*		227·39	
3	272·39	251·35		223·54*	
4	280·88	255·45	40237·59*	220·48*	
5	290·36*	261·37	239·05*	218·44	
6	299·70*	267·03	240·83	216·08	
7	310·57	274·26	244·51*	215·47*	
8	322·08	281·92	248·22*	215·47*	
9	333·71	290·36	252·35*	216·08	
10	347·94	299·70	257·07	217·33	
11		309·51	263·75	219·50	
12		320·11	270·30	222·28*	
13		332·23	277·76*	225·82	$0 \rightarrow 2$ sáv, $\lambda = 2489$ Å
14			286·60	229·97	
15			295·56	236·01	
16			304·96	242·08	
17				249·27	
18					
0					
1					
2		38591·83*			
3		595·66	38583·35*		
4	38625·05*	600·25*	583·35*		
5	634·24	605·67	584·17	38563·33	
6	644·65	611·99*	585·78*	561·73	
7	655·84*	619·17	588·76*	560·60	
8	667·52	627·30*	592·81	560·60	
9	680·08	636·06*		561·73	
10		645·61	603·66	563·33	
11		655·84*		565·20	
12		666·86	617·29*	568·60*	
13		678·66	625·05*	572·84*	$0 \rightarrow 3$ sáv, $\lambda = 2506$ Å
14		689·92		577·55*	
15		702·57		583·35*	
16					
17					
18					

2. táblázat.

$c^3\Sigma \rightarrow a\ ^3\Pi_1$ átmenetek.

K	$R_2(K)$	$Q_2(K)$	$P_2(K)$	$O_2(K)$	
1	41895·26	41887·01*	41882·37*		
2	899·61*	889·58*	880·81*	41877·25*	
3	905·75*	891·32*	879·00*	872·00	
4	912·78	893·43*	877·25*	866·86*	
5	919·98	896·47*	877·25*	861·71*	
6	927·83*	900·33*	877·25*	857·52*	
7	936·28*	904·47*	877·25*	854·18*	
8	945·45	909·55*	879·00*	851·01	
9	955·98	914·94	880·81*	848·69	
10	964·80	921·27	882·37*	846·68*	
11	974·17*	927·83*	884·26*	845·71*	
12	986·92	934·90	888·71	845·71*	
13	997·61*	942·14*	891·32*	845·71*	
14		950·50		845·71*	$0 \rightarrow 1$ sáv, $\lambda = 2389$ Å
15					
16					
17					
18					
19					
1		40202·84			
2		204·76			
3		206·44			
4		208·67*	40192·33*	40181·44	
5		211·71	192·33*	177·15*	
6		215·47*	192·33*	173·03*	
7		220·48*	193·19	169·79*	
8		225·82*		167·12	
9		231·68*	196·74*	165·12	
10		237·59*	199·36	163·41	
11		244·51*	201·95*	163·09*	
12		252·35*	205·49*	163·09*	
13		261·37*	209·21		
14		269·70			
15		278·82			
16		287·86			
17		297·77			
18		308·44			$0 \rightarrow 2$ sáv, $\lambda = 2489$ Å
19					
1	38552·63*	38545·70*	38542·21*		
2	558·80*	547·50	540·01*	38534·98*	
3	565·60*	549·42*	538·81*	530·22*	
4	572·84*	552·63*	537·56	525·78*	
5	580·21	556·28*	536·98*	521·60	
6	588·76*	560·97*	536·98*	517·59*	
7	597·21	565·60*	538·81*	514·55*	
8	607·04	570 70	540·01*	512·38*	
9	617·29*	577·55*	542·21*	510·60*	
10	627·30*	584·51	545·70*	509·66*	
11	638·45	591·83	549·42*	509·66*	
12	649·73*		553·52*	509·66*	
13			558·80*	510·60	
14				512·38	
15					
16					
17					
18					$0 \rightarrow 3$ sáv, $\lambda = 2596$ Å
19					

3. táblázat.

$c^3\Sigma \rightarrow a\ ^3\Pi_3$ átmenetek.

K	$R_3(K)$	$Q_3(K)$	$P_3(K)$	$O_3(K)$	
2					
3	41880·81*	41865·63	41854·18*	41846·68*	
4	889·58*	870·39*	854·95	843·30*	
5	898·80*	875·62	856·00	840·36*	
6	909·55*	880·81*	857·52*	837·91*	
7	917·77	887·01*	859·17	835·91*	
8	927·83*	893·43*	861·71*	834·12*	
9	938·20	898·80*	863·92	832·37*	
10	949·04	905·75*	866·86*	831·64*	
11	960·08*		870·39*	831·64*	
12	972·80		874·74	831·64*	
13	984·47		879·00*	832·37*	
14	997·61*		884·26*	834·12*	
15	42011·23		889·58*	835·91*	
16	025·64		896·47*	837·91*	
17	039·92		902·34*	840·36*	
18	054·86		909·55*	843·30*	
19	070·70			846·68*	
20					
2					
3	40196·74*	40180·36	40169·09	40161·72*	
4	205·49*	185·47	169·79*	158·22*	
5	214·03	190·57	171·16	155·58*	
6	223·54*	195·79	173·02*	153·41*	
7	233·33	201·95*	174·74	151·64*	
8	243·72	208·67*	177,15*	150·09*	
9	255·45	215·47*	180·10	149·34*	
10	266·23	222·28*	183·59	148·77*	
11	277·76*	230·96	187·42	148·77*	
12		239·05*	192·33*	149·34*	
13			196·74*	150·09*	
14			201·95*	151·64*	
15				153·41*	
16				155·58*	
17				158·22*	
18				161·72*	
19					
20					
2					
3	38541·04	38525·78*	38513·16	38505·86*	
4	549·42*	530·22*	514·55*	502·52*	
5	557·80	534·98*	515·65	500·03*	
6	567·60	540·01*	517·59*	497·97*	
7	578·57	545·70*	519·54	496·16*	
8	589·47	553·52*	522·37	495·29*	
9	600·25*	560·97*	525·78*	494·66*	
10	611·99*	568·60*	529·56	494·66*	
11	623·21	576·64	533·76	495·29*	
12	636·06*	585·78*	538·81*	496·16*	
13	649·73*		544·29	497·97*	
14			550·37	500·03*	
15			556·28*	502·52*	
16				505·86*	
17					
18					
19					
20					

$0 \rightarrow 1$ sáv, $\lambda = 2389$ Å

$0 \rightarrow 2$ sáv, $\lambda = 2489$ Å

$0 \rightarrow 3$ sáv, $\lambda = 2596$ Å

4. táblázat.

Kezdőállapot differenciák.

K	$S_1(K-1)-Q_1(K-1)$	$R_1(K)-P_1(K)$	$R_2(K)-P_2(K)$	$Q_2(K+1)-O_2(K+1)$	$R_3(K)-P_3(K)$	$Q_3(K+1)-O_3(K+1)$	
1		11·61	12·89	12·33			
2		20·09	18·80	19·32		18·95	
3		27·72	26·75	26·57	26·63	27·09	
4		34·93	35·53	34·76	34·63	35·26	
5		42·46	42·73	42·81	42·80	42·90	
6	49·89	49·92	50·58	50·29	52·03	51·10	
7	56·64	58·27	59·03	58·54	58·60	59·31	
8	65·54	66·27	66·45	66·25	66·12	66·43	
9	75·01	74·56	75·17	74·59	74·28	74·11	
10	81·99	82·46	82·43	82·12	82·18		
11	90·31	90·08	89·91	89·19	89·69		
12	97·75	97·88	98·21	96·43	98·06		
13	105·21	105·70	106·29	104·79	105·47		$0 \rightarrow 1$ sáv, $\lambda = 2389$ Å
14	113·29	113·22			113·35		
15		120·32			121·65		
16					129·17		
17					137·58		
18					145·31		
1		14·87					
2		20·83				18 64	
3		27·81		27·23	27·65	27·25	
4		34·97		34·56	35·70	34·99	
5	43·29	42·93		42·44	42·87	42·38	
6	51·31	50·95		50·69	50·52	50·31	
7	58·87	58·79		58·70	58·59	58·58	
8	66·06	66·45		66·56	66·57	66·13	
9	73·86	74·28		74·18	75·35	73·51	
10	81·36	82·37		81·42	82·64	82·19	
11	90·87	90·01		89·26	90·34	89·71	
12		97·83					$0 \rightarrow 2$ sáv, $\lambda = 2489$ Å
13		106·41					
14							
15							
16							
17							
18							
1			10·42	12·52			
2			18·79	19·20		19·92	
3			26·79	26·85	27·88	27·70	
4			35·28	34·68	34·87	34·95	
5	41·70	42·34	43·23	43·38	42·15	42·04	
6	50·07	50·26	51·78	51·05	50·01	49·54	
7	58·87	58·57	58·40	58·32	59·03	58·23	
8	67·08	66·70	67·03	66·95	67·10	66·31	
9	74·71	74·33	75·08	74·85	74·47	73·94	
10		82·28	81·60	82·17	82·43	81·35	
11		90·64	89·03		89·45	89·62	
12		98·26	96·21		97 25		
13		105·82			105·44		$0 \rightarrow 3$ sáv, $\lambda = 2596$ Å
14		112·47					
15		119·22					
16							
17							
18							

5. táblázat.

A $c^3\Sigma$, $v=0$ állapot rotációs termdifferenciái (a 4. táblázat középértékei).

Rotációs kvantumszám	$\Delta_2 F(K)$, középérték	Egymástól független megfigyelések száma
$K=$ 1	12·44	6
2	19·39	9
3	27·22	13
4	35·01	13
5	42·65	16
6	50·61	17
7	58·55	17
8	66·47	17
9	74·49	17
10	82·07	15
11	89·87	14
12	97·54	9
13	105·65	8
14	113·08	4
15	120·40	3
16	129·17	1
17	137·58	1
18	145·31	1

6. táblázat.

(9 → 18) IV. poz. sáv $P(J)$				(0 → 1) $3A$ sáv $R_3(K)$
$P(22)$	normális intenzítás			
$P(23)$	lecsökkent	«	predisszociáció	
$P(24)$	«	«		
$P(25)$	erősödő	«	kezdődő összeesés	$R_3(17)$
$P(26)$	erős	«	pontos «	$R_3(16)$
$P(27)$	gyöngülő	«	részleges «	$R_3(15)$
$P(28)$	gyönge	«		

emeletén fellépő predisszociáció következtében beálló intenzitás csökkenést tényleg a $3A$-sávvonalakkal való összeesések fedik el helyenként. Az összeesésektől mentes helyeken kivétel nélkül mindenütt bekövetkező intenzitáscsökkenés bizonyítja a predisszociáció reális voltát.

Jelen dolgozat a Magyar Királyi József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizikai intézetének spektroszkópiai laboratóriumában készült. Az intézet felszerelését az Országos Természettudományi Alap, a Széchenyi Tudományos Társaság, továbbá a Magyar Tudományos Akadémia és a Rockefeller-Alapítvány támogatásainak köszöni és dr. POGÁNY BÉLA műegyetemi ny r. tanár vezetése alatt áll.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jún. 7-én tartott üléséből.)

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften in Budapest.)

ROTATIONSANALYSE DER «3A» BANDEN DES KOHLENOXYDS.

Von R. SCHMID und L. GERŐ.

Die sogenannten $3A$ ($c \rightarrow a^3\Pi$)-Banden des CO (in der Spektralregion 2200—2600 $\mathring{A}$) sind mit grosser lichtstärke aus einer GEISSLER-Entladung, aufrechterhalten in gereinigten Neongas, das aber noch extra mit Spuren von Sauerstoff vermischt wurde und zwischen quarzumhüllten Kohleelektroden dem hochgespannten Wechselstrom ausgesetzt war, photographiert worden. Die Platten I. Ordnung des grossen «Hochheimisierten», 30,000 Furchen/Zoll Gitters zeigten die Banden $(0 \rightarrow 1)$, $(0 \rightarrow 2)$ und $(0 \rightarrow 3)$ bei 2389, 2489 und 2596 $\mathring{A}$ in einer Dispersion von etwa $1{\cdot}3\,\mathring{A}$/mm und genügender Auflösung zur Rotationsanalyse. — Dies resultierte — unter Berücksichtigung der Kombinationsdifferenzen des $a^3\Pi$-Zustandes, die aus der Analyse der III. pos. Banden ($b^3\Sigma \rightarrow a^3\Pi$) bekannt sind — in der Einreihung der Linien der $3A$ Banden in zwölf Zweigen, wovon sechs und zwar O_3, O_2, P_3, P_2, P_1 und Q_1 (aufgezählt in der Reihenfolge der abnehmenden Wellenlängen der Köpfe und bezeichnet nach der Art der ziemlich ähnlichgebauten III. pos. Banden) Kantenbildend sind, während die übrigen: Q_3, R_3, Q_2, R_2, R_1 und S_1 ohne Kanten nach Violett abschattiert verlaufen. Der Charakter des oberen zustandes ergibt sich somit zu $^3\Sigma$ (ohne angebbare Triplett-Aufspaltung). Die Rotationskonstante des $c^3\Sigma$-Termes berechnet sich aus dreimal sechs Obererzustand-Doppeltkombinationsdifferenzenserien zu 1,9563 cm^{-1}, die Höhe des nullten $c^3\Sigma$-Termes über dem CO-Grundzustand zu 92,077·4 cm^{-1}.—

Ein Vergleich der Linien der violettabschattierten (0→1) 3A Bande mit denen der rotabschattierten (9→18) IV. pos. ($A^1\Pi \rightarrow X^1\Sigma$)-Bande zeigt, dass es zur Überlagerungen der Linien der zwei Banden kommen kann, die dann das Prädissoziationsphenomän am $A^1\Pi(v=9)$ Zustand teilveise überdecken können. Nach Aufklärung dieses Tatbestandes erscheint nun das Existenz der Prädissoziation erwiesen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Juni 1937.)

SZÉNTARTALMÚ VEGYÜLETEK ÉS GYÖKÖK KÉPZŐDÉSI ÉS DISSZOCIÁCIÓS ENERGIÁIRÓL. I.

SCHMID REZSŐ- és GERŐ LORÁND-tól.

A képződési és disszociációs energiák meghatározására általában három módszer áll rendelkezésre: a termikus, az elektronütköztetési és a spektroszkópiai. A termikus adatok rendesen szilárd szénből és (kétatomos) hidrogén, oxigén, nitrogén stb. gázokból kiinduló reakciók hőszínezetére vonatkoznak s így a vegyületek disszociációs energiáit csak a szén párolgási hőjének, valamint a szereplő kétatomos gázok disszociációs energiáinak ismerete esetén számíthatjuk ki belőlük. Az elektronütköztetési kísérletek a molekulák fokozatos, vagy teljes szétbontásához szükséges energiát, mint a disszociációtermékek «megjelenési potenciálját» megadják ugyan, sőt a velük kapcsolatos tömegspektroszkópiai vizsgálat révén az egyes disszociációtermékeket identifikálni is lehet, azonban sok esetben nem dönthető el pusztán az ütköztetési kísérletek alapján, hogy a kapott disszociációtermékek egyetlen elemi aktus útján keletkeztek-e, vagy pedig szekundér reakciók, rekombináció stb. folyamán. Nem kapunk azonkívül arról sem felvilágosítást, hogy a keletkezett atomok, ill. molekulák az alapállapotukban, vagy valamelyik gerjesztett energiaállapotukban jelennek-e meg. A spektroszkópiai disszociációs energia-meghatározás viszont nemcsak hogy megadja a disszociációtermékek gerjesztési állapotát, hanem sokszor nagyságrendekkel ad pontosabb eredményt, mint a többi módszer.

A spektroszkópiai disszociációenergiameghatározások háromféle módon történhetnek: a spektrumban fellépő sávkonvergenciák, kontinuumok vagy predisszociációk révén.

a) *Konvergenciahatárok.* Amennyiben abszorpciós sávok konvergenciahatáráról van szó, a konvergenciahatár energiamagassága közvetlenül hozzárendelhető valamelyik disszociációhatárhoz. Ha emissziós sávok konvergenciahatára figyelhető meg, akkor ehhez még hozzá kell adni a sávok alsó állapotának esetleges gerjesztési energiáját; ennek meghatározása azonban — az esetek túlnyomó nagy többségében — semmi nehézséget sem okoz. Mindenesetre a konvergenciahatárok megfigyelése a spektroszkópiai disszociációenergiameghatározások legmeggyőzőbb és legbiztosabb módja.

b) *Kontinuumok.* A kontinuumok megjelenési formáját rendesen a felső, magasabb energiaállapotuk potenciálgörbéje (illetve többatomos molekuláknál: potenciálfelülete) határozza meg. Ha a felső állapot stabilis, azaz ha a potenciálfüggvényének van véges magtávolságoknál minimuma, akkor a disszociált állapotba való átmenetnek megfelelő abszorpciós kontinuum rendesen a diszkrét abszorpciós sávok konvergenciahatárához csatlakozik. Ha a felső elektronterm repulzív, akkor a kontinuumot nem előzik meg diszkrét sávok. Ilyenkor a folytonos abszorpciónak rendesen éles vörös felé eső határa van és a határ közvetlenül hozzárendelhető egy disszociációs helyhez. A kontinuummal kapcsolatos disszociáció mindig egy elemi aktusban játszódik le; (a disszociációtermékek gerjesztett állapotban is keletkezhetnek s ebben az esetben a disszociáció után még maguk is átalakulhatnak, ami azonban a spektroszkópiai eredményt már nem befolyásolja.)

c) *Predisszociáció.* A predisszociáció létrejövetelében szerepet játszik a predisszociáló és a predisszociációt okozó term. Az előbbi potenciálgörbéjének minimummal kell rendelkeznie, az utóbbié lehet repulziv is. A predisszociációhelyhez a predisszociációt okozó term disszociáció-határát kell hozzárendelnünk. Kétatomos molekuláknál — mint a *CO* színképén részletesen láttuk (1) — a predisszociációhely nem szokott jelentékenyen a határ fölött feküdni. Többatomos molekulák esetében egyes szerzők felteszik, hogy a predisszociáció csak jóval a határ elérése után, néha több elektronvolttal magasabban következik be. Kísérleti bizonyíték azonban nincsen erre. Azokban az esetekben, amiket így értelmeztek, sorra sikerült kimutatni, hogy részben az újabb és pontosabb, spektroszkópiai adatok felhasználása, részben más értelmezés révén ez a nagy differencia jórészt eltüntethető. De ha a régebben feltételezett több voltnyi kinetikus energiát a többatomos molekulák predisszociációjánál nagymértékben valószínűtlennek kell is tartanunk, annyi bizonyos, hogy ezeknek a molekuláknak komplikáltabb szerkezete és nagyobbszámú szabadságfoka miatt a disszociációnál nagyobb kinetikai energiára számíthatunk, mint a kétatomos molekuláknál. Ezenkívül, minthogy a többatomos molekulák spektruma úgy vibrációs, mint rotációs szerkezet tekintetében sokkal komplikáltabb a kétatomosokénál, a predisszociáció helyének pontos meghatározása is meglehetős nehézségekkel járhat.

Így a kísérleti eredmények értelmezésénél nem követelhetünk akkora pontosságot, mint a kétatomos molekuláknál.

A kötési és disszociációs energiák termikus, elektronütköztetési és spektroszkópiai úton történő meghatározására a széntartalmú vegyületek körében nagyszámú kísérlet történt. Minél jobban szaporodtak azonban a kísérleti eredmények, annál inkább kitűnt, hogy mekkora nehézségekbe ütközik azoknak egységes szempont szerint való rendezése. A rendszerint legnagyobb relativ pontosságú spektroszkópiai adatok a disszociációs energiák számára olyan alacsony értékeket adtak, amelyek semmiképen sem voltak összhangban a többi eredménnyel. Tipikusan ilyen volt a szénoxid esete: a predisszociációk észlelésén alapuló 6·9 Volt disszociációenergia szinte elfogadhatatlanul alacsonynak tűnt fel akkor, amikor egyéb kísérletek (szénpárologtatás, elektronütköztetés stb.) egyértelműen 10 Voltnál magasabb disszociációs energia mellett szóltak.

A megoldást a *CO* esetében azáltal sikerült megtalálnunk, hogy annak keletkezésénél a szénatom ^3P alapenergiaállapotán kívül ^5S energiaállapotát, azaz «négyvértékű» módosulatát is tekintetbe vettük (2). Feltételeztük, hogy «szabad» szénatomok — akár elektronütköztetés, akár a szilárd szén elpárologtatása, akár széntartalmú vegyületek termikus disszociációja folytán — mindig a négyértékű ^5S állapotban keletkeznek. A *CO* alapállapota ezzel szemben abból a «kétértékű» elektronkonfigurációjú szénből épül fel, melyhez a szénatom ^3P alapállapota is tartozik. Az itt nyert tapasztalatok alapján időszerűvé vált annak a megvizsgálása, hogy vajjon nem volna-e lehetséges a széntartalmú vegyületek nagy számánál észlelt ellentmondásokat, főként a spektroszkópiai és más módszerek eredményeinek divergenciáját kiküszöbölni ugyanezen az úton? Kiindulópontul néhány olyan feltevést választottunk, melyeknek jogosságát, mint a következőkben látni fogjuk, a széntartalmú vegyületek egész soránál a spektroszkópiai és egyéb adatok széles skálája igazolja s amelyek az egész kiterjedt kísérleti anyag feldolgozása során egyetlen egy ellentmondásra sem vezettek. Ezek a következők :

A szabad szénatom mindig az $1s^22s2p^3$ elektronkonfigurációhoz tartozó ^5S energiaállapotban jelenik meg és ugyanebben az elektronkonfigurációban, ill. állapotban vesz részt a közönséges

hőmérsékleten stabil vegyületekben, amelyek olyan felépítésűek, hogy a szénnek mind a négy «vegyértéke» telítve van, azaz a kettes főkvantumszámú héjban helyetfoglaló mind a négy elektron (egy $2s$ és három $2p$) mint kötőelektron szerepel. Ezzel szemben azokban a gyökökben, melyekben a négy vegyérték némelyike szabadon marad s melyek éppen ezért közönséges hőmérsékleten szabad állapotban nem ismeretesek (pl. CH, CH_2, stb.), szerep jut az $1s^2\,2s^2\,2p^2$ elektronkonfigurációjú «kétértékű» szénnek is. Feltevésünk szerint ezeknek a gyököknek alapállapota a szén ^3P alapállapotából épül fel ugyan, van azonban egy másik, ennél néhány Volttal magasabban fekvő, többé-kevésbbé metastabil elektrontermjük, mely viszont már ^5S szenet tartalmaz. Amennyiben egy vegyértékanomáliát nem mutató szénvegyület valamilyen reakcióban egy vegyértékanomáliát mutató gyökre bomlik, a disszociáció első lépésében mindig ebbe a gerjesztett elektrontermbe történik, amely azután tovább alakulhat pl. a ^3P szénből felépülő és mélyebben fekvő termhez tartozó állapotba.

A széntartalmú vegyületek között a CO molekula különleges helyet foglal el: $X^1\Sigma$ alapállapota ugyanis a szén alapelektronkonfigurációjából épül fel és ennek ellenére mégis nagymértékben stabil, kémiai értelemben vett vegyületet alkot. Ennek az okát abban ismertük fel, hogy a $C(^5S) + O(^3P)$ atomtermkombinációval — amelyből a CO szintézis kiindulhat — pontosan egy energiamagasságban van a $C(^3P) + O(^1S)$ termkombináció is. Ez a két atomtermkombináció, illetve a belőlük származó molekulatermek igen szoros rezonancia-viszonyban vannak egymással, mint azt a spektrumban észlelt számos perturbáció igazolja. (3) Ez a rezonancia teszi lehetővé, hogy az ^5S szénhez tartozó $a'^3\Sigma$ CO-állapot alatt mintegy 6·8 voltnyira levő $X^1\Sigma$ alapállapot olyan nagyfokú stabilitást mutathasson.

A CH gyök energiaállapotai.

A CH gyök szabad állapotban közönséges hőmérsékleten nem fordul ugyan elő, de szenet és hidrogént tartalmazó kisülésekben a CH molekula önálló jelenlétét igazoló sávos színképe mégis megjelenik. Így a spektrum alapján módunkban van a $(C—H)$ kötésre jellemző energiaállapotokat tanulmányozni.

A CH molekula színképén három sávrendszer ismeretes. A 0, 0 vibrációs átmenetek megfelelő sávok 4300, 3900 és 3150 Å-nél

vannak; az első $^2\Delta \rightarrow {}^2\Pi$, a másik kettő $^2\Sigma \rightarrow {}^2\Pi$ eletronátmenethez tartozik. Mindhárom sávnak közös a végállapota: a *CH* molekula $X^2\Pi$ alapállapota.

Mulliken (4) szerint a 3900 Å-nél levő sáv kezdőállapota $^2\Sigma^-$, a 3150 Å-nél levőé pedig $^2\Sigma^+$ term. Hogy a két $^2\Sigma$ term szimmetriája ellenkező, az abból következik, hogy pl. a *Q* ágak az egyik sávban az $X^2\Pi$ alapállapot Λ-típusú dublettjének nem ugyanarra a komponensére érkeznek, mint a másik sávban. Hogy azonban a kettő közül melyik Σ^+ és melyik Σ^-, azt pusztán a sávok szerkezetéből eldönteni nem lehet. Mulliken azon az alapon foglalt a fenti megjelölés mellett állást, hogy az egyes *C*+*H* atomtermkombinációkból leszármaztatható molekulaállapotokat igyekezett a *CH* színképén észlelt termekkel azonosítani. Az atomtermek kombinálásánál a hidrogénatommak csak ^2S alapállapotát kell tekintetbe venni, mert a legalacsonyabb gerjesztett termje is igen magasan fekszik. A szén alap-elektronkonfigurációjához tartozó termjei ^3P, ^1D és ^1S. Az ezekből származó molekulatermek a következők:

$^2S + {}^3P$	..... $^2\Pi$, $^2\Sigma^-$, $^4\Pi$, $^4\Sigma^-$
$^2S + {}^1D$	..... $^2\Delta$, $^2\Pi$, $^2\Sigma^+$
$^2S + {}^1S$	..... $^2\Sigma^+$

Mulliken az alap $X^2\Pi$ és a 3900 Å sáv felső $B^2\Sigma$ termjét a $C\ (^3P) + H\ (^2S)$ termlonbinációhoz rendelte hozzá, a *B* term ezek szerint $^2\Sigma^-$ lenne. A 4300 Å sáv $A^2\Delta$ felső állapota $C\ (^1D) + H\ (^2S)$-be disszociálna; ugyanígy a 3150 Å sáv $C^2\Sigma$ felső állapota, mely, minthogy a $B^2\Sigma$-val ellenkező szimmetriájú, $^2\Sigma^+$ lenne.

Mulliken a *CH* disszociációs energiáját kb. 4 Voltra becsülte. Ebben az esetben a *B* term disszociációs energiája, mely 3·2 Voltnyira van az alapállapot felett, mintegy 0·8 Volt lenne. Már ez a disszociációs energia is valószínűtlenül kicsi, de teljesen lehetetlenné teszi ezt az értelmezést a *CH* disszociációs energiájának időközben mintegy 3·4 Voltban történt megállapítása. Így a *B* term disszociációs energiájára mindössze 0·2 Volt maradna.

A *CH* molekula pontos disszociációs energiájának meghatározása predisszociációk észlelése alapján történt. Shidei (5) szerint a $B^2\Sigma$ term $v=0$, $K=17$-nél és $v=1$, $K=7$-nél instabilissé válik és «forgás következtében szétesik». Ezektől a kvantumszámoktól

kezdve a vonalak intenzítása hirtelen zérusra csökken, az ágak megszakadnak.

SHIDEI mint «forgás következtében történő szétesést» értelmezte ezt a jelenséget. Ez annyiban különbözik a predisszociációtól, hogy itt magának a szétesőmolekulatermnek a határgörbéje (1) mentén történik a szétesés, míg a predisszociációnál egy idegen, a predisszociációt okozó, term határgörbéje mentén. Ha a határgörbe a B term saját határgörbéje lenne, akkor a határgörbe $J=0$-hoz tartozó pontjánál, azaz kb. 28000 cm^{-1} energiamagasságban kellene a B term konvergenciahelyének feküdnie és ugyanitt a rotációs állandónak is zérusra kellene lecsökkennie. Ez pedig teljesen lehetetlen, minthogy egyrészt a két ismert, a $v=0$ és 1-hez tartozó vibrációs emelet mintegy 2000 cm^{-1}-re van egymástól s így a konvergencia-határnak még igen messze kell lennie, másrészt ugyanennek a két vibrációs emeletnek a rotációs állandója $B_0=12{\cdot}65$ cm^{-1} ill. $B_1=11{\cdot}17$ cm^{-1}, tehát ki van zárva, hogy a következő, B_2, már zérus legyen. Így egészen biztos, hogy a B term nem disszociál $C\,(^3P)+H\,(^2S)$-be, a belőle kiinduló sávokon észlelt effektus pedig közönséges predisszociáció. A predisszociációs határgörbe alakjából ítélve, a predisszociációt egy nemrepulziv term okozza, mely a $C\,(^3P)+H(^2S)$ atomtermkombinációból épül fel. Minthogy a $^2\Sigma^-$ és $^4\Sigma^-$ a B-vel ellenkező szimmetriájuk miatt nem jöhetnek tekintetbe, a predisszociációt az $X^2\Pi$ alapállapot okozhatja. A disszociációs határgörbe alapján az alapállapot s ezzel egyszersmind a CH molekula disszociációs energiája mintegy 3·4 Voltban állapítható meg.

A $B^2\Sigma$ term a fentiek szerint nem származhat a $C\,(^3P)+H(^2S)$ atomtermkombinációból, hanem minden valószínűség szerint a $C\,(^1D)+H\,(^2S)$-ből. Ebből azonban csak Σ^+ term származhat, így arra kell következtetnünk, hogy a B term $^2\Sigma^+$ szimmetriájú. Ebben az esetben viszont a C-nek $^2\Sigma^-$-nak kell lennie és $C\,(^3P^*)+H\,(^2S)$-be disszociálnia, a hol a $^3P^*$term a szénnek1 s^22s^22p3s elektronkonfigurációjához kell tartozzék; semmivel sem valószínűtlenebb azonban, hogy a C állapot tulajdonkép a négyértékű szénből felépült $(^5S+^2S)$ konfigurációnak megfelelő $^4\Sigma^-$termmel azonos, mert bár az is mert CH elektron-termeket az eddigi kutatók nem a négyértékű szén alapállapotához, az ^5S-hez rendelték hozzá, az esetben, ha

valamely szerves vegyületről szabad CH gyök válik le, akkor annak mégis a C (^5S)-hez tartozó energiaállapotban kell lennie, tekintve, hogy a szén valamennyi szerves vegyületben ebben az energiaállapotban szerepel. A C (^5S) + H (^2S) atomtermkombinációból — egy sextett termen kívül — $^4\Sigma^-$ molekulaterm származik. Hogy ezt a CH-spektrum termjeivel eddig nem azonosították az érthető abból, hogy az ismert CH-termekre való átmenet interkombinációs sávrendszer lenne s így, kiválasztási elvbe ütközvén, igen kis intenzitású. Mint azonnal látni fogjuk azonban, a Σ^- CH termnek legalább az energiamagassága a C—H kötést tartalmazó vegyületek színképe és az azokon végzett elektronütköztetési kísérletek alapján mégis megbecsülhető és jól összeegyeztethető a C-termnek az $X^2\Pi$-termtől számított távolságával.

Acetylen.

Acetylengázban Tate, Smith és Vaughan (6) végeztek elektronütköztetési kísérleteket. Az általuk megfigyelt ionok az észlelési potenciálokkal és a kísérleti hibahatárok feltüntetésével az 1. táblázat első két rovatában szerepelnek. A harmadik rovat az ütközésnél keletkezett összes termékeket tartalmazza, a negyedik pedig az ezek keletkezéséhez szükséges energiákat. Ezeknek az energiáknak az összege, valamint a kísérleti adatoktól való eltérés a két utolsó rovatba van felvéve.

A $C_2H_2^+$, C_2H^+ és C_2^+ ionok keletkezési potenciáljának magyarázata kézenfekvő. Feltéve, hogy a C_2H_2, C_2H és C_2 molekulák ill. gyökök ionizációs potenciálja nem nagyon különbözik egymástól, egy-egy H atom leválasztásához szükséges energia mintegy 6 Voltnak, azaz 138 Kcal-nak adódik. Az acetylen molekulában a szénatomok természetszerűleg ^5S állapotukban vannak; ugyanígy a belőle egy, illetve két H atom leválása útján keletkezett C_2H és C_2 molekulákban. Ez a C_2 nem azonos a spektroszkópiában ismert C_2 ($^3\Pi$) alapállapottal, melynek keletkezésénél a kétvegyértékű szén alaptermjei is szerephez jutnak. A két hidrogén leválása után megmaradt két ^5S állapotú szénatom ugyanis egy $^1\Sigma^*$-gal jelölt, gerjesztett molekulatermet alkot, mely bizonyos szempontból analogonja a CO-ban fontos szerepet játszó $a'^3\Sigma^+$ termnek.

1. táblázat. Acetylen.

Ion	Keletkezési potenciál	Összes ütköztetési termék	Energiaszükséglet		Δ
$C_2H_2^+$	$11{\cdot}2\pm0{\cdot}1$	$C_2H_2^+$	$I(C_2H_2)$	11·2	0
C_2H^+	$17{\cdot}8\pm0{\cdot}2$	$C_2H^+ + H$	$I(C_2H)+Sp(H)$	17·5	0·3
C_2^+	$23{\cdot}8\pm0{\cdot}3$	$C_2(^1\Sigma^*)^+ + 2H$	$I[C_2(^1\Sigma^*)]+2Sp(H)$	23·5	0·3
CH^+	$22{\cdot}2\pm0{\cdot}5$	$CH^+ + C(^5S) + H$	$I[CH(^3\Pi)]+Sp(CH)+D[CH(^3\Pi)]+A[C(^5S)]$	22·3	−0·1
C^+	$24{\cdot}5\pm1{\cdot}0$	$C^+(^4P)+CH(^4\Sigma^-)+H$	$I[C(^5S)]+Sp(CH)+A[CH(^4\Sigma^-)]+D[CH(^3\Pi)]+A[C(^5S)]$	24·5	0
H^+	$25{\cdot}6\pm1{\cdot}0$	$H^+ + H + C_2(^1\Sigma^*)$	$I(H)+2Sp(H)$	25·5	0·1
	$21{\cdot}7\pm1{\cdot}0$	$H^+ + H + C_2$	$I(H)+2Sp(H)-A[C_2(^1\Sigma^*)]$	21·5	0·2

H^+ ion két, egymástól kb. 4 Voltnyira lévő energiamagasságnál keletkezik. Mivel mindkét esetben a kísérlet szerint csak a $H^+ + H + C_2$ felbomlás jöhet tekintetbe, a 4 Volt csak a C_2 «aktiválási energiája», azaz a C_2 ($^1\Sigma^*$) állapotnak a C_2 alapállapot fölötti energiamagassága lehet.

Az acetylenszintézis hőszínezetének felhasználásával (7) az acetylen molekulának két $X^2\Pi$ alapállapotú CH molekulára való bontásához szükséges energia a következőképen adódik:

$C_2H_2 \rightarrow 2C_{gr} + H_2$	+ 54·9 Kcal
$H_2 \rightarrow 2H$	— 102·4 Kcal
$2C$ gr $\rightarrow 2C$ (^5S)	— 340·0 Kcal
$2C$ (^5S) $\rightarrow 2C$ (^3P)	+ 192·0 Kcal
$2C$ (^3P) $+ 2H \rightarrow 2CH$ ($X^2\Pi$)	+ 156·4 Kcal
$C_2H_2 \rightarrow 2CH$ ($X^2\Pi$)	— 39·1 Kcal (= 1·7 Volt).

Ennek alapján értelmezhető a CH^+ és C^+ ionok keletkezési potenciálja. A CH ionizálásához — a CH^4-en végzett ütköztetési kísérletekkel összhangban (l. a következő fejezetet) — kb. 13 Volt szükséges. A melléktermékként keletkezett C atom az ^5S állapotban van. A 24·5 ± 1·0 Voltnál keletkezett C^+ ion az ^5S állapot ionizációja révén létrejött ^4P állapotban van, az ugyanakkor keletkezett CH pedig az előző fejezetben említett és a négyvegyértékű szénhez tartozó $^4\Sigma^-$ állapotban. Ennek a $^4\Sigma^-$ állapotnak az energiamagassága a C^+ ion keletkezési potenciáljából a következőképen adódik:

$C_2H_2 \rightarrow C^+$ (^4P) $+ H + CH$ ($^4\Sigma^-$)	— 24·5 Volt
$2\,CH$ ($X^2\Pi$) $\rightarrow C_2H_2$	+ 1·7 Volt
C (^3P) $+ H \rightarrow CH$ ($X^2\Pi$)	+ 3·4 Volt
C (^5S) $\rightarrow C$ (^3P)	+ 4·2 Volt
C^+ (^4P) $\rightarrow C$ (^5S)	+ 12·2 Volt
CH ($X^2\Pi$) $\rightarrow CH$ ($^4\Sigma^-$)	— 3·0 Volt

A 2. táblázat a keletkezési potenciálok értelmezésénél felhasznált energiaértékeket tartalmazza elektronvolt és kilogrammkalória egységekben. I ionizációs potenciált, Sp leválasztási energiát, D disszociációs energiát, A pedig gerjesztési (aktiválási) energiát jelent.

2. táblázat. Acetylen.

	Volt	Kcal
$I(C_2H_2)$	11·2	258
$I(C_2H)$	11·5	265
$I[C_2(^1\Sigma^*)]$	11·5	265
$I[CH(^3\Pi)]$	13	300
$I[C(^5S)]$	12·2	280
$I(H)$	13·5	310
$Sp(H)$	6	138
$Sp(CH)$	1·7	39
$D[CH(^3\Pi)]$	3·4	77
$A[C(^5S)]$	4·2	96
$A[C_2(^1\Sigma^*)]$	4	92

Az acetylenben végzett elektronütköztetési kísérletek fenti értelmezésével szemben BLEAKNEY, CONDON és SMITH (8) a szén párolgási hőjére 5·8 Voltot (azaz 133 Kcal-t) véve alapul, 14·6 Voltot kaptak az acetylen disszociációs energiája számára. Ez ellen az interpretáció ellen azonban több súlyos ellenvetés merül fel. A C_2 molekula ionizációs energiája ugyanis 14·7 Voltnak adódnék, ami biztosan túl magas érték, mert a C_2H_2 és C_2H ionizációs potenciáljai is 11·2 — 11·5 Volt körül vannak. $I(C_2)$-re 11·5 Voltot elfogadva azonban, amikor is a két H atom leválasztásához egyformán 6—6 Volt szükséges, a C_2 disszociációs energiájára csak 14·6—2×6=2·6 Volt maradna, ami egészen biztosan kevés. Így a vázolt értelmezés az egyedül lehetséges, azaz

$$C_2H_2 \rightarrow 2C\ (^5S) + 2H - 387{\cdot}5\ \text{Kcal}\ (=16{\cdot}8\ \text{Volt}).$$

A spektroszkópiai adatok mind kitűnő egyezésben vannak az elektronütköztetések fenti értelmezésével. PRICE (9) az acetylen abszorpciós színképén található két Rydberg-széria közös határát 11·35 Voltban állapította meg, ami az elektronütköztetéssel nyert $I(C_2H_2) = 11{\cdot}2 \pm 0{\cdot}1$ Volttal egybeesik.

PRICE 1520Å-nél predisszociációt észlelt. Szerinte itt, azaz 8·1 Volt = 187 Kcal energiamagasságban van a hármas $C{\equiv}C$

kötés disszociációs helye, azaz ezen a helyen az acetylen két egyforma CH gyökre disszociál.

Az elektronütköztetések eredményei alapján arra következtettünk, hogy az acetylennek két alapállapotú CH-ra való szétválasztásához kb. 1·7 Volt szükséges. Minthogy az acetylénben a két szénatom ^5S állapotú, az acetylén-alapállapot nem alapállapotú CH molekulákra bomlik, hanem a négyvegyértékű szénhez tartozó $^4\Sigma^-$ állapotúakra. A Price által észlelt predisszociációból ezek energiamagassága a következőképen adódik:

$$\begin{array}{l} {}^1/_2\, C_2H_2 \rightarrow CH\,(^4\Sigma^-) - 4{\cdot}05 \text{ Volt} \\ CH\,(X^2\Pi) \rightarrow {}^1/_2\, C_2H_2 + 0{\cdot}85 \text{ Volt} \\ \hline CH\,(X^2\Pi) \rightarrow CH\,(^4\Sigma^-) - 3{\cdot}2 \text{ Volt} \end{array}$$

kitűnő egyezésben az elektronütköztetések alapján nyert 3·0 Volttal.

Hese, Rose és Dohna (10) 1834 Å-nél kezdődő abszorpciós kontinnumot találtak acetylenben. Ez a 6·73 Voltnyi energiamagasság (Herzberg (11) szerint 6·57 Volt) egy H atom leválasztásának felel meg. Az elektronütköztetési adat erre kb. 6 Volt. Az egyezés még jobbá tehető, ha tekintetbe vesszük, hogy az egyik hidrogénatomnak pl. H^+ ion formájában való leválasztásakor a másik H atom mintegy 0·7 Volt-nyi elektronaffinitással (l. alant a methánnál) H ionná alakulhat.

Methán.

A methánban végzett elektronütköztetési kísérletek közül L. G. Smith (12) adatai a legújabbak és legpontosabbak. Az észlelt pozitiv és negativ ionok keletkezési potenciáljának interpretálását Smith L_c=123·6 kcal alapján kísérelte meg, így azonban természetszerűleg több ellentmondásra jutott és az egyes ionok keletkezésénél igen nagy, sokszor 4—5 elektronvoltot kitevő kinetikus energiát kellett felvennie. Ily nagy kinetikus energiával bíró ionok keletkezése azonban teljesen valószínűtlen. A disszociációs folyamatoknál fellépő kinetikus energiák nagyságáról ugyanis a disszociációs határgörbék nyujtanak felvilágosítást (1) s ezek — az eddigi tapasztalatok szerint — olyan alakúak, hogy a disszociációs energia 10—15%-án felüli kinetikus energia csak a legritkább esetben lép-

het fel. Így pl. ha CH_4-ben C^+ ion keletkezik, akkor, mivel a methán teljes disszociációjával kell számolnunk, 1·5—2 Volt kinetikus energia várható; viszont egy CH_3^+ ion keletkezésénél, minthogy csak egy H atom leválásáról van szó, csak néhány tized Volt kinetikus energia valószínű.

A 3. táblázat adatai szerint CH_4^+ ion 13·1+0·4, CH_3^+ pedig 14·4±0·4 Voltnál keletkezik. Ebből arra lehetne következtetni, hogy vagy egy H atom leválasztásához alig egy Volt energia szükséges, vagy a CH_3 ionizációs potenciálja 10 Volt alatt van. Mindkét feltevés a legnagyobb mértékben valószínűtlen; a $CH_4 \rightarrow CH_3+H$ folyamat energiaszükséglete minden eddigi számítás szerint is 4—5 Volt körül van, a CH_3 ionizációs potenciálja pedig nem különbözhet ennyire $I(CH_4)$, $I(CH_2)$ és $I(CH)$-tól, melyek mind 13 Volt körül vannak.

A megoldás itt is a négyvegyértékű szénből felépült állapotok figyelembevételével történhet. A CH_4 molekula maga mindenesetre ^5S szénatomból van felépítve, minthogy a szénnek mind a négy vegyértékét lefoglalja egy-egy H atom. A CH_3-nak azonban, melyben «szabad» vegyérték is van, nemcsak ^5S, hanem ^3P szénből felépült módosulatát is feltételezhetjük. Feltéve, hogy ez a $CH_3[^3P]$-vel jelölt módosulat kb. 3 Volttal van a CH_3 $[^5S]$ alatt és a CH_2^+ ion ennek az ionizációja révén jön létre, keletkezési potenciálja egyszerűen és ellentmondások nélkül megmagyarázható. Ugyanígy a kétféle CH_2^+ ion keletkezése is értelmezhető azon az alapon, hogy a $CH_2[^5S]$—$CH_2[^3P]$ energiakülönbségre kb. 2 Voltot veszünk fel. E mellett még az alacsonyabb keletkezési potenciálnál egy H_2 molekulának rekombináció útján való keletkezésével is számolnunk kell.

A CH_4 disszociációs energiája a szén párolgási hője, a methánszintézis hőszínezete és az ismert spektroszkópiai adatok segítségével a következőképpen számítható:

$$\begin{aligned} CH_4 &\rightarrow C_{gr} + 2H_2 - 19 \text{ Kcal} \\ C_{gr} &\rightarrow C\,(^5S) - 170 \text{ Kcal} \\ 2H_2 &\rightarrow 4H - 206 \text{ Kcal} \\ \hline CH_4 &\rightarrow C\,(^5S) + 4H - 395 \text{ Kcal } (=17{,}2 \text{ Volt}). \end{aligned}$$

3. táblázat. Methán.

Ion	Keletkezési potenciál	Összes ütköztetési termék	Energiaszükséglet		Δ
H^+	$22{\cdot}7\pm0{\cdot}5$	$H^+ + H + CH_2$	$I(H) + 2Sp(H)$	22·1	+0·6
H^+	$29{\cdot}4\pm0{\cdot}6$	$H^+ + 3H + C(^5S)$	$I(H) + D(CH_4) - E[C(^5S)]$	29·2	+0·2
H_2^+	$27{\cdot}9\pm0{\cdot}5$	$H_2^+ + 2H + C(^5S)$	$I(H_2) + D(CH_4) - D(H_2)$	28·1	−0·2
H_3^+	$25{\cdot}3\pm1{\cdot}0$	$H_3^+ + H + C(^5S)$	$I(H_3) + D(CH_4) - D(H_3)$	24·7	+0·6
C^+	$26{\cdot}7\pm0{\cdot}7$	$C^+(^4P) + 2H + H_2$	$I[C(^5S)] + D(CH_4) - D(H_2)$	24·9	+1·8
CH^+	$23{\cdot}3\pm0{\cdot}6$	$CH(^2\Pi)^+ + 3H$	$I[CH(^2\Pi)] + 3Sp(H) - A[CH(^4\Sigma^-)]$	22·9	+0·4
CH_2^+	$15{\cdot}7\pm0{\cdot}5$	$CH_2[^3P]^+ + H_2$	$I(CH_2[^3P)] + 2Sp(H) - D(H_2) - A(CH_2)$	15·1	+0·6
CH_2^+	$22{\cdot}9\pm0{\cdot}8$	$CH_2^+ + 2H$	$I(CH_2) + 2Sp(H)$	22·1	+0·8
CH_3^+	$14{\cdot}4\pm0{\cdot}4$	$CH_3[^3P]^+ + H$	$I(CH_3[^3P]) + Sp(H) - A(CH_2)$	14·3	+0·1
CH_4^+	$13{\cdot}1\pm0{\cdot}4$	CH_4^+	$I(CH_4)$	13·0	+0·1
H^-	$6{\cdot}1\pm0{\cdot}3$	$H^- + H + CH_2[^3P]$	$2Sp(H) - A(CH_2) - E(H)$	5·9	+0·2
H^-	$6{\cdot}9\pm0{\cdot}8$	$H^- + H_2 + CH(^4\Sigma^-)$	$3Sp(H) - D(H_2) - E(H)$	7·7	−0·8
H^-	$7{\cdot}3\pm1{\cdot}0$	$H^- + H + CH_2$	$2Sp(H) - E(H)$	7·9	−0·6
H^-	$18{\cdot}0\pm0{\cdot}6$	$H^- + H_2 + CH(^2\Pi)^+$	$3Sp(H) + I[CH(^2\Pi)] - A[CH(^4\Sigma^-)] - D(H_2) - E(H)$	17·7	+0·3
C^-	$27{\cdot}4\pm0{\cdot}6$	$C(^5S)^- + H_2^+ + 2H$	$D(CH_4) + I(H_2) - D(H_2) - E[C(^5S)]$	26·6	+0·8
CH^-	$10{\cdot}2\pm0{\cdot}3$	$CH(^2\Pi)^- + 3H$	$3Sp(H) - A[CH(^4\Sigma^-)] - E[CH(^2\Pi)]$	9·9	+0·3
CH^-	$24{\cdot}5\pm0{\cdot}5$	$CH(^2\Pi) + H^+ + 2H$	$3Sp(H) + I(H) - A[CH(^4\Sigma^-)] - E[CH(^2\Pi)]$	23·4	+1·1
CH_2^-	$8{\cdot}9\pm0{\cdot}3$	$CH_2^- + 2H$	$2Sp(H) - E(CH_2)$	8·6	+0·3
CH_2^-	$23{\cdot}4\pm0{\cdot}6$	$CH_2 + H^+ + H$	$2Sp(H) + I(H) - E(CH_2)$	22·1	+1·3

4. táblázat. Methán.

	Volt	Kcal
$I(H)$	13·5	311
$I(H_2)$	15·4	354
$I(H_3)$	14	322
$I[CH(^3\Pi)]$	13	300
$I(CH_2)$	13·5	311
$I(CH_2[^3P])$	13	300
$I(CH_3[^3P])$	13	300
$I(CH_4)$	13	300
$I[C(^5S)]$	12·2	280
$Sp(H)$	4·3	100
$D(CH_4)$	17·2	398
$D(H_2)$	4·5	102
$D(H_3)$	5·5	127
$A[CH(^4\Sigma^-)]$	3	69
$A(CH_2)$	2	46
$A(CH_3)$	3	69
$E(H)$	0·7	16
$E[C(^5S)]$	1·5	35
$E(CH)$	~ 0	~ 0
$E(CH_2)$	~ 0	~ 0

Ámbár valószínű, hogy a négy H atom leválasztásához nem egészen pontosan egyforma energia szükséges, nem követünk el nagy hibát, ha egy-egy hidrogénkötésre egyformán 4·3 Voltot számítunk. Ennek alapján megbecsülhetjük a CH molekula $^4\Sigma^-$ állapotának energiamagasságát is, mely, mint említettük, a CH-nak a négy vegyértékű szénhez tartozó módosulata. Ugyanis:

$$\begin{aligned} CH\,(X^2\Pi) \rightarrow C\,(^3P) + H\,(^2S) &\quad -3{\cdot}4 \text{ Volt} \\ C\,(^3P) \rightarrow C\,(^5S) &\quad -4{\cdot}2 \text{ Volt} \\ C\,(^5S) + H(^2S) \rightarrow CH\,(^4\Sigma^-) &\quad +4{\cdot}3 \text{ Volt} \\ \hline CH\,(X^2\Pi) \rightarrow CH\,(^4\Sigma^-) &\quad -3{\cdot}3 \text{ Volt.} \end{aligned}$$

A szabad C^+ ion a methánban végzett elektronütköztetéseknél is ^4P állapotában keletkezik. Mivel az észlelési potenciál csak 26·7 Volt és a szükséges disszociációs és ionizációs energia 17·2+12·2=29·4 Voltot tesz ki, itt is H_2 rekombinációt kell feltételeznünk. Hogy csak az egyik hidrogén-atompár képez ennek folyamán molekulát, az talán azzal magyarázható, hogy a négy $C—H$ kötést létesítő elektron közül az egyik $2s$, a másik három pedig $2p$ elektron s így az egyik atompár $2s+2p$, a másik $2p^2$ elektron konfigurációban lép kölcsönhatásba, melyek (a CH_4 disszociációja után) nem egyformán viselkednek; az egyik párból két H atom, a másikból egy H_2 molekula lesz. A fennmaradó kb. 1·8 Voltnyi energiafölösleg mintegy 10%-át teszi ki a methán disszociációs energiájának s így a disszociáció határgörbéjéről mondottak alapján mint a disszociációtermékek kinetikus energiája jelentkezik.

A H_2 molekula ionizációs potenciálja számára a legpontosabb adatok preionizációjelenségek révén kaphatók (13). A H_3 molekula keletkezési, ill. ionizációs potenciálját 5·5, ill. 14 Voltra becsültük.

Az észlelt negatív ionok keletkezési potenciáljainak értelmezése szintén kielégítő módon sikerül. Elektronaffinitásul a hidrogénatomnál — SMITH nyomán — 0·7 Voltot vettünk fel, a szénatomnál pedig (az ^5S állapotban) 1·5 Voltot. A CH és CH_2 (10) elektronaffinitása mindössze néhány tized Voltra becsülhető.

A methán síképén 1870Å körül észleltek kontinuumot (10), ami kb. 152 kcal energiamagasságnak felel meg. Mint láttuk, egy H atom leválasztásához 98—99 kcal energia szükséges; ha tehát ez a kontinuum a $CH_4 \rightarrow CH_3+H$ disszociációs folyamatnak felelne meg, több mint 50 kcal energiafölösleg maradna, amit mint a CH_3 gyök «aktiválási energiáját» kéne megmagyaráznunk. A CH_3 gyök valódi alapállapota azonban még kb. 3 Volttal alacsonyabban fekszik, mint az ^5S szénből felépült, mely a CH_4-ből egy H atom leválasztása útján nyerhető, úgyhogy a disszociációtermékként nyert CH_3 majdnem 120 kcal-ra lenne gerjesztve, ami biztosan nagyobb a disszociációs energiájánál s így a fent feltételezett disszociációs folyamat igen valószínűtlen.

Az észlelt kontinuumot nem előzik meg konvergáló diszkrét sávok, tehát minden valószínűség szerint olyan elektronátmenettől

származik, melynek felső termje repulzív. Ez annyit jelent, hogy az abszorbeált fénykvantum hatására a kémiai kötést létesítő valamelyik elektron pályát változtat oly módon, hogy ezáltal «kötő»-elektronból «kötést lazító» elektronná válik, a megfelelő kötés felbomlik s a molekula disszociál.

A methánban a szénatom ^5S állapotában van jelen azaz $1s^2\,2s2p^3$ elektronkonfigurációban. A $2s$ és $2p$ elektronok mint kötőelektronok szerepelnek, innen van a szén négy vegyértéke. Feltéve, hogy a fényabszorpció hatására valamelyik $2p$ elektron az üresen maradt $2s$ pályára megy vissza, a $2s$ elektronok zárt héjat alkotnak és így a kémiai kötésben többé már nem vesznek részt. A szén visszatért az alapállapotához tartozó $1s^2\,2s^2\,2p^2$ elektronkonfigurációba. Ilymódon csak két szabad vegyértéke maradt, tehát nem egy, hanem két H atomnak kell leválnia; a megmaradt CH_2 gyök viszont a kétvegyértékű szénhez tartozó legalacsonyabb energiájú állapotában lesz, mely, mint az elektronütköztetési kísérletekből adódott mintegy 2 Volttal fekszik a négyvegyértékű szénhez tartozó CH_2 állapot alatt. A

$$CH_2 \rightarrow CH_2\,[^3P] + 2H$$

disszociációs folyamat energiaszükséglete tehát $2\times 98-46=150$ kcal, ami igen jól megfelel az észlelt kontinuum helyének.

Erősen alátámasztja a fenti értelmezést, hogy a methán valamennyi halogénderivátumának színképén 2000—3500Å között talált kontinuumok keletkezése mind hasonlóképpen magyarázható, ha feltesszük, hogy a CH_2-höz hasonlóan a CHX és CX_2 gyököknek is van $C\,(^3P)$-hez tartozó termje, mely 1—2 Volttal az ^5S-hez tartozó term alatt fekszik (X itt halogénatomot jelent).

Az 5. táblázat a methán halogén derivátumainak képződési hőjét (Q_f), (14) disszociációs energiáját (D) és a talált kontinuumok vörös felé eső határát kcal-ban tartalmazza. (15) A disszociációs energiák egy-két kcal pontossággal a következő kötési energiákból tehetők össze:

$C-H$	kötés	98 kcal
$C-Cl$	«	75 kcal
$C-Br$	«	66 kcal
$C-J$	«	51 kcal.

5. táblázat. Methánhalogenidok.

Molekula	Q_f	D	Kontinuum	Disszociációtermékek	Energiaszükséglet	Δ
CH_4	19	395	152	$CH_2 + H + H$	196	44
CH_3Cl	20	370	142	$CH_2 + H + Cl$	173	31
CH_3Br	9	360	118	$CH_2 + H + Br$	164	46
CH_3J	—5	344	96	$CH_2 + H + J$	149	53
CH_2Cl_2	22	346	136	$CHCl + H + Cl$	173	37
CH_2Br_2	1	327	113	$CHBr + H + Br$	164	51
CH_2J_2	—25	298	85	$CHJ + H + J$	149	64
$CHCl_3$	24	323	134	$CHCl + Cl + Cl$	150	16
$CHBr_3$	—6	296	99	$CHBr + Br + Br$	132	33
CHJ_3	—44	254		$CHJ + J + J$	102	
CCl_4	26	300	124	$CCl_2 + Cl + Cl$	150	26
CBr_4	—12	266	81	$CBr + Br + Br$	132	51
CJ_4				$CJ_2 + J + J$	102	

A legrészletesebb mérési adatok a CH_2J_2 molekula abszorpciós színképén észlelt kontinuumról állanak rendelkezésre, ezért ezt a molekulát választjuk példának. Disszociációs energiája így számítható:

$$\begin{aligned} CH_2J_2 &\rightarrow C_{gr} + H_2 + J_2 + 25 \text{ kcal} \\ C_{gr} &\rightarrow C\,(^5S) - 170 \text{ kcal} \\ H_2 &\rightarrow 2H - 102 \text{ kcal} \\ J_2 &\rightarrow 2J - 51 \text{ kcal} \\ \hline CH_2J_2 &\rightarrow C + 2H + 2J - 298 \text{ kcal.} \end{aligned}$$

Mint látható, ez tényleg összetehető két $C—H$ és két $C—J$ kötésből:

$$2 \times 98 + 2 \times 51 = 298 \text{ kcal.}$$

Az abszorpciós kontinuum vörös felé eső határát Henrici (15) 3342 Å-nél észlelte, ami 85 kcal-nak felel meg. Egy H és egy J atom leválasztásához a fentiek szerint kb. 149 kcal szükséges, a megmaradó CHJ molekula ^5S-hez tartozó állapotának gerjesztési energiájára tehát mintegy 64 kcal, azaz 3 Voltnál valamivel kevesebb marad.

HENRICI három helyen figyelt meg intenzitásmaximumot a kontinuumban. Ha feltesszük, hogy tulajdonképpen három különböző kontinuum összeeséséről van szó, akkor az első maximumot a kontinuum vörös határához rendelve megbecsülhetjük, hogy a másik két maximumhoz tartozó határ körülbelül mekkora energiamagasságnak felel meg. Így mintegy 133, illetve 142 kcal energiamagasságot kapunk. A 85 és 133 kcal határ távolsága kb. a $C—H$ és $C—J$ kötések energiakülönbségének felel meg, a második maximum tehát a

$$CH_2J_2 \rightarrow CJ_2\,[^3P] + 2H$$

folyamathoz tartozhat. A harmadik határ lehetséges értelmezése pedig:

$$CH_2J_2 \rightarrow C\,(^5S) + H_2 + J_2 - 145 \text{ kcal.}$$

A fenti három disszociációs folyamatnak a három észlelt kontinuumhatárhoz, ill. abszorpciómaximumhoz való hozzárendelése tehát megnyugtató eredményre vezet. Meglepő azonban, hogy a $CH_2J_2 \rightarrow CH_2 + 2J$ folyamatnak megfelelő kontinuumot nem észlelték, illetve, hogy az első észlelt kontinuumot nem ehhez rendelték hozzá; várható volna ugyanis, hogy az a folyamat menjen végbe a legnagyobb intenzitással, amelyiknek a legkisebb az energiaszükséglete. Azonban a négy kötőelektron a methánban nem létesít egészen egyforma kötést, hanem a $2s$ elektron a többinél valamivel erősebbet. Ezért, ha egy, két, vagy akár három H atomot halogénnel helyettesítünk, a halogén atomok kötése mindig $2p$ elektronokkal történik, a $2s$ elektron pedig megmarad $C—H$ kötőelektronnak. Így akármelyik $2p$ elektron tér is vissza fényabszorpció következtében $2s$ pályára, a leváló atomok közül legalább az egyik mindig H-atom lesz.

Jelen dolgozat a Magyar Királyi József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizikai intézetének spektroszkópiai laboratóriumában készült. Az intézet felszerelését az Országos Természettudományi Alap, a Széchenyi Tudományos Társaság, továbbá a Magyar Tudományos Akadémia és a Rockefeller-Alapítvány támogatásainak köszöni és dr. POGÁNY BÉLA műegyetemi ny. r. tanár vezetése alatt áll.

Irodalom.

1. Schmid Rezső és Gerő Loránd: Mat. és Termtud. Ért. **LV.** 691. 1937.

2. R. Schmid, L. Gerő: ZS. f. phys. Chemie (B). **36.** 105. 1937.

3. Beer Borbála Zsuzsanna: Mat. és Termtud. Ért. 1937.

4. R. S. Mulliken: Phys. Rev. **30,** 785, 1927.

5. T. Shidei: Jap. Journ. of Phys. **11,** 23, 1936.

6. J. T. Tate, P. T. Smith and A. L. Vaughan: Phys. Rev. **43,** 1054, 1933.

7. G. S. Parks and H. M. Huffman: The Free Energies of Some Organic Compounds, NY, 1932.

8. W. Bleakney, E. V. Condon, L. G. Smith: Journ. Phys. Chem. **41,** 197, 1937.

9. W. C. Price: Phys. Rev. **47,** 444, 1935.

10. H. Hese, A. Rose und R. Gräfin zu Dohna: ZS. f. Phys. **81,** 745, 1933.

11. G. Herzberg: Trans. Faraday Soc. **27,** 378, 1931.

12. L. G. Smith: Phys. Rev. **51,** 263, 1937.

13. H. Beutler u. H. O. Jünger: ZS. f. Phys. **100,** 80, 1936.

14. F. R. Bichowsky and F. D. Rossini: The Thermochemistry of Chemical Substances, NY, 1936.

15. A. Henrici: ZS. f. Phys. **77,** 35, 1932.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jún. 7-én tartott üléséből.)

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften in Budapest.)

ÜBER DIE BILDUNGS- UND SPALTUNGSENERGIEN VON ORGANISCHEN VERBINDUNGEN UND RADIKALE. I.

Von R. SCHMID und L. GERŐ in Budapest.

Die beobachtete Bandenkonvergenzen, Kontinua und Prädissoziationsstellen in den Spektren vieler Kohlenstoffverbindungen, ferner die durch Elektronenstossversuchen feststellbare Erscheinungspotentiale der Dissoziations — bzw. Ionisationsprodukten derselben lassen sich einfach auf Grund des einheitlichen Gesichtspunktes deuten, dass diese «valenzchemisch normale» Verbindungen als Dissoziationsendprodukt immer Kohleatome im Vierwertigen ^5S Zustand liefern, wobei die Verdampfungswärme der festen Kohle, wie von den Verfassern an anderer Stelle [ZS. f. phys. Chemie (*B*) **36.** 105. 1937.] angegeben wurde, mit der Wärmetönung der Reaktion: $C\ (^5S) \rightarrow C$ fest $+$ 170 kcal gleichgesetzt werden soll.

Die Bildungs— bzw. Spaltungsenergien der Radikale CH, CH_2, CH_3, usw. — die nach der chemischen Terminologie «wegen unabgesättigte Valenzen nicht stabil sein können» — erklären sich einfach dadurch, dass man hier — und nur hier — die $1s^2\,2s^2\,2p^2$, also «zweiwertige» Konfiguration der Kohle als Baustein der untersten Zustände dieser Radikale in Betracht zieht. Es ergibt sich, dass der Energieabstand der zwei Modifikationen dieser Radikale [mit $C(1s^2\,2s^2\,2p^2)$ und $C(1s^2\,2s\,2p^3)$] gleich mit etwa 3—4 Volt angesetzt werden darf. CO nimmt dabei eine Sonderstellung ein, indem — durch die zufällige gleichheit der Termabständen $C(^5S) - C(^3P)$ und $O\ (^1S) - O\ (^3P)$ — die unterste Kombination zwar von $C\ (1s^2\,2s^2\,2p^2)$ aufgebaut, aber doch äusserst stabil ist.

Die von den Verfassern für die kohleenthaltenden Moleküle vorgeschlagene Dissoziationsschema scheint umso mehr eine Realität zu besitzen, weil dadurch alle experimentell zugängliche Dissoziationserscheinungen der erwähnten Verbindungen eine befriedigende Erklärung erhalten und man kommt auch im Falle der Elektronenstossversuche mit einem kleinen und durchaus plausieblen Überschuss an kinetischer Energie aus während bei den bisherigen Deutungen (alle Kohlenstofferbindungen aus nur ^3P ($1s^2\,2s^2\,2p^2$)-Kohleatome aufgebaut) erheblich grössere Energieüberschusse und ziemlich divergierende Konzequenzen mit ins Kauf genommen werden mussten.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Juni 1937.)

A ZIRKONSZILICID $ZrSi_2$ SZERKEZETE.

NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN-tól.

Több évvel ezelőtt H. SEYFARTH[1] meghatározta a zirkonszilicid szerkezetét, mely e meghatározás szerint $ZrSi_2$ molekulákból áll. A Zr—Si távolságot mindössze 0·56 $\mathring{A}$-nek találta, ami erősen ellentmond a ma már meglehetős biztonsággal ismert atomátmérőknek, mert ezek alapján a távolságnak 2·7 $\mathring{A}$ körül kell lenni. Mint az alábbiakban kimutatom, a SEYFARTH által meghatározott szerkezet teljesen téves; egyszersmind meghatározom a szerkezetet, mely összhangban van az ismert atomátmérőkkel és kielégítően egyezik a megfigyelt intenzitásokkal.

A rombos rendszerű elemi test élei SEYFARTH szerint

$$a = 3{\cdot}72\ \mathring{A} \qquad b = 14{\cdot}61\ \mathring{A} \qquad c = 3{\cdot}67\ \mathring{A}$$

Feltéve, hogy a kristály a holoéderes osztályba tartozik, ami ellen semmi adat sem szól, a hiányzó reflexiókból a D_{2h}^{17} — Cmcm tércsoportra következtethetünk. Az elemi testben négy molekula $ZrSi_2$ foglal helyet.

Ebben a tércsoportban kétféle tükörsík van jelen, amelyek közül az (100) lappal párhuzamosak egymástól 1·83 $\mathring{A}$ és a (001) lappal párhuzamosak, 1·83 $\mathring{A}$ távolságra vannak egymástól. Már most nincs okunk annak a feltételezésére, hogy a zirkonszilicid iónrácsot alkotna; eltekintve attól, hogy önálló sziliciumiónok nem ismeretesek, nem lehetne a polaris vegyértékeket kielégíteni. Így tehát a szerkezetet zirkon- és sziliciumatomok alkotják. Minthogy a Zr atom átmérője 3·10 $\mathring{A}$ és a sziliciumatomé 2·34 $\mathring{A}$, világos, hogy mindkétféle atomnak az (100) síkokon kell helyet foglalnia, mert különben a tükörsíkok aszimmetrikusan metszenék őket.

[1] Z. f. Kristallogr. 67, 294 (1928).

Ugyanez az okoskodás érvényes azonban a (001) síkokra is. Így tehát az atomok csakis a két tükörsík metszésvonalain, vagyis a digonális tengelyeken foglalhatnak helyet.

Ezen felismerés által a szerkezet meghatározása igen nagy mértékben egyszerűsödik, mert a fenti tércsoportban a mondott digonális tengelyeken négyes helyzetek vannak egy szabadon választható koordinátával $0, y, \frac{1}{4}$; $0, \bar{y}, \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-y, \frac{3}{4}$. Meg kell tehát határozni a 4 Zr atom y, 4 Si atom y és 4 Si atom y koordinátáit.

A D_{2h}^{17} tércsoport strukturamplitudója a fenti speciális helyzetekre a következő egyszerű alakot ölti

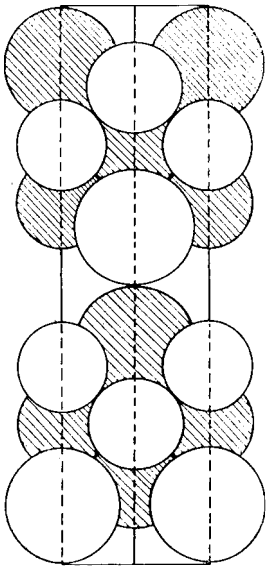
$$S = 4 \cos 2\pi(ky - \tfrac{1}{4}) \cos 2\pi l/2$$

A $h00$, $00l$ és $h0l$ reflexióknak (melyeknél h és l mindig 2 többszörösei) tehát maximális intenzitású ú. n. normális reflexióknak kell lenniök. Ez a tény fentiek alapján a tércsoportból, a cella méreteiből és az atomátmérőkből kétségtelenül következik. Ezzel ellentétben SEYFARTH a 400 reflexiót «gyenge» intenzitásúnak becsüli és olyan szerkezetet ad meg, mely ezt kielégíti. Azonban felvételének reprodukcióján jól látható hogy a 004 és a 400 reflexiók nem választhatók el egymástól; számított távolságuk a SEYFARTH által használt filmátmérőnél 0·4 mm. Ezzel szemben a reflexió szélessége mintegy 2 mm. Ez a reflexió tehát magában foglalja a 004 és 400 reflexióit, melyeknek intenzitásai összeadódnak. A belső szélen megfigyelt «gyenge» reflexió nem reális, miáltal az erre épített szerkezet is megdől.

Hogy a szerkezetben a zirkonatomok egymástól való távolságai ne térjenek el túlságosan, y koordinátájukat mintegy 0·103—0·108 közt kell keresni. Jó egyezést kapunk y=0·106 értékkel. SEYFARTH körülbelül ezt a paramétert választotta és minthogy a zirkonatomok szóróképessége túlnyomó, érthető, hogy számított és megfigyelt intenzitásai nem térnek el jobban, mint ahogy megadja. Mindazonáltal ezek az intenzitásszámítások nem használhatók, mert eltekintve attól, hogy a polarizációs- és LORENZ-faktort elhanyagolja, a szóróképességnek a tükrözési szöggel való változását is teljesen figyelmen kívül hagyva a sziliciumnál 14 és a zirkonnál 40 értékkel veszi számításba. Tudjuk azonban, hogy sin ϑ/λ=0·1

esetén a *Si* szóróképessége 11·3, a *Zr* szóróképessége 36·3, viszont sin $\vartheta/\lambda = 0{\cdot}6$ esetén 5·0, ill. 17·4. A talált intenzitások, úgy látszik, nagyobb tükrözési szögeknél szintén túl vannak becsülve.

Ha a zirkonatomok helyzetét megállapítottuk, a sziliciumok számára kevés lehetőség marad. Figyelembevéve a megadott atomátmérőket a *Si* atomok számára $y = 0{\cdot}75$ és a *Si* atomokra $y = 0{\cdot}355$ adódnak ki. Ezekkel a paraméterekkel kiszámítva a zirkonszilicid reflexióinak intenzitását azt látjuk, hogy a kapott értékek SEYFARTH becsült intenzitásaival jól egyeznek (1. táblázat);[1] f_0 értékeket THOMAS—FERMI szerint az Internationale Tabellen z. Bestimmung v. Kristallstrukturen-ből vettem. ϑ egyenlő $\frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{\sin 2\vartheta}$ kifejezéssel.



1. rajz.

Amint látjuk, az egyezés a mintegy 100 reflexiónál egy-két kivétellel nagyon kielégítő. Ilyen kivételek a már említett (400) reflexión kívül pl. (0, 14,3) melynek számított intenzitása kb. 0, a talált ellenben «közepes», továbbá (151) és (153), melyeknek számított intenzitása 17·0, ill. 4·5, azonban SEYFARTH nem találta őket. Valószínűleg azonban kísérleti hibákról van szó; ezt bizonyítja egyrészt több mint 90 reflexió intenzitásának jó egyezése, melyek részben igen magas indexűek, másrészt pedig a plauzibilis szerkezet.

Az 1. rajzon látható, hogy a zirkonszilicid kimondott «réteges rácsot» alkot. A (010) lap szerint tökéletes hasadásnak kell jelen lenni. Bár az igen sovány irodalomban erre nem találunk adatot, SEYFARTHnak az a megjegyzése, hogy ezek a lapok minden kristályon jól és tükrözőleg vannak kiképződve, a hasadás jelenlétére mutat.

A szerkezetben minden zirkonatomnak következő szomszéd-

[1] Az intenzitások jelzése: ie = igen erős; e = erős; k = közepes; gy = gyenge; i gy = igen gyenge.

1. táblázat.

A $ZrSi_2$ reflexióinak számított és becsült intenzitásai ($CuK\alpha$).

Indexek	sin ϑ	ϑ	F	$F^2.10^{-3}$	Int. (becs.)	Megjegyzés
002	419	1·88	—182	62·2	e	összeesik 200
004	838	1·29	122	19·2	e	
020	105	9·3	—20	3·7	—	közel áll a primer sugárhoz
040	210	4·5	—118	62·6	e	
060	316	2·8	— 92	23·6	k—e	
080	421	1·85	113	23·5	gy—k	
0100	526	1·3	21	0·6	e	összesik 062-vel
0120	631	1·1	14	0·2	i gy	
0140	736	1·0	—81	6·5	e	
0160	842	1·28	—12	0·2	gy	
0180	947	2·7	25	1·7	k	
200	413	1·9	182	63·0	i e	összeesik 002
400	827	1·3	122	19·4	gy ?	« 044, l. szövegben
110	213	4·5	82	30·2	e	
130	260	3·4	—16	1·0	gy	
150	334	2·5	—110	30·3	i e	
170	421	1·8	—38	2·6	—	
1,11,0	614	1·1	68	5·1	k	
1,13,0	714	1·0	17	0·3	gy	
1,15,0	815	1·2	—84	8·5	e	összeesik 193
1,17,0	918	2·0	42	3·5	i e	« 1,15.2
220	426	1·8	—15	0·4	—	
240	464	1·6	—84	11·2	k—e	« 042
260	520	1·3	—74	8·8	i e	« 062
310	622	1·1	52	2·9	—	
330	640	1·0	—10	0·1	—	
350	674	1·0	—79	6·2	gy	
370	713	1·0	—26	0·7	—	
420	834	1·3	—11	0·2	—	
440	851	1·4	—63	5·6	—?	összeesik 044
460	885	1·6	—55	4·8	gy—k	
202	590	1·1	—148	24·0	gy—k	
204	934	2·4	110	29·0	e	
402	926	2·4	—110	29·0	k ?	összeesik 204
021	234	3·9	—167	104·2	i e	
022	432	1·8	— 16	0·5	gy	
023	637	1·0	57	3·2	k—e	
024	834	1·3	— 12	0·2	—	
041	297	3·0	— 75	16·9	k	
042	469	1·6	84	11·2	k—e	
043	662	1·0	53	2·8	i e	összeesik 0,12,1
044	864	1·4	— 85	10·1	gy—k	összeseik 440
061	379	2·1	60	7·6	e	
062	524	1·3	74	7·2	e	összeesik 260
063	703	1·0	— 43	1·8	k—e	
064	895	1·7	— 54	5·0	i e	

(Az 1. táblázat folytatása.)

Indexek	sin ϑ	θ	F	$F^2.10^{-3}$	Int. (becs.)	Megjegyzés
081	470	1·6	108	18·6	e	összeesik 042 (l. film)
082	593	1·1	— 97	10·2	gy	
083	756	1·1	— 85	8·0	k	összeesik 0,12,2
084	937	2·4	71	12·0	gy	
0101	566	1·1	25	0·7	gy	
0102	672	1·0	— 26	0·7	k—e	
0121	665	1·0	—114	13·0	i e	összeesik 043
0122	757	1·1	37	1·5	k	« 083
0123	890	1·7	92	14·4	e	
0141	765	1·1	— 4	0·02	gy—k	
0142	847	1·35	— 75	7·6	i e	
0143	968	3·8	, 4	0·07	k	
0161	867	1·5	84	10·6	k—e	
0162	940	2·5	11	0·3	gy	
0181	969	3·8	55	11·5	i e	
111	300	2·9	— 62	11·2	k	
112	470	1·6	— 61	6·3	k—e	összeesik 171
113	664	1·0	47	2·2	k—e	« 192
114	864	1·5	38	2·2	k	
131	334	2·55	—159	64·5	i e	összeesik 150
132	493	1·5	12	0·2	gy	
133	680	1·0	114	13·0	e	összeesik 331
134	878	1·55	— 10	0·2	k—e	« 1,11,3
151	394	2·05	91	17·0	—	
152	536	1·15	90	9·3	k—e	
153	710	1·0	— 67	4·5	—	
154	902	1·8	— 68	8·3	e	
171	471	1·6	68	7·4	k—e	összeesik 112
173	757	1·0	— 52	2·7	k	
191	557	1·2	28	0·9	gy—k	
192	665	1·0	— 90	8·1	k—e	összeesik 113
193	813	1·2	— 23	0·6	e	« 1,15,0
1,11,1	650	1·05	— 86	7·8	k	
1,11,3	880	1·6	72	8·3	k—e	összeesik 134
1,13,1	744	1·0	— 68	4·6	k	
1,13,3	952	2·9	37	4·0	k—e	
1,15,1	842	1·3	— 2	0	i gy	
1,15,2	917	2·0	68	9·3	i e	összeesik 1,17,0
1,17,1	941	2·5	81	16·4	i e	
221	475	1·6	— 68	7·4	k	
222	597	1·1	15	0·2	—	
223	758	1·0	54	2·9	k	
224	937	2·5	— 9	0·2	—	
331	673	1·0	—115	13·1	e	összeesik 133
332	764	1·0	10	0·1	—	
333	896	1·7	94	12·4	e	
241	510	1·4	— 60	5·0	i gy	
242	625	1·1	75	6·2	gy	
261	560	1·2	48	2·8	k	
262	668	1·0	64	4·1	k	
263	815	1·2	40	1·9	gy—k	

sága van. Egy másik zirkonatom 3·60 Å és két zirkonatom 3·72 Å távolságban; továbbá négy *Si* atom 2·66 Å, két *Si* atom 2·79 Å és két *Si* atom 2·83 Å távolságban. Az általánosan elfogadott atomátmérőkkel számítva a zirkon-zirkon minimális távolsága 3·10 Å, a zirkon-szilicium távolság pedig 2·72 Å. Minden sziliciumatomot négy zirkonatom veszi körül a fent megadott távolságokban. Van továbbá két szomszédos *Si* atom 2·38 Å, két másik 2·40 Å és végül négy *Si* 2·66 Å távolságban.

Szeged, Elméleti Fizikai Intézet.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

DIE STRUKTUR DES ZIRKONIUMSILICIDS $ZrSi_2$.

Von ST. v. NÁRAY-SZABÓ.

Für Zirkonsilicid wurde an Stelle der von SEYFARTH angegebenen die folgende Struktur (neuer *Typ*) gefunden: Die Elementarzelle hat die Kanten $a=3{\cdot}72$ Å, $b=14{\cdot}61$ Å, $c=3{\cdot}67$ Å; Raumgruppe D_{2h}^{17} — Cmcm, 4 Moleküle in der Zelle. Alle Atome liegen an den digonalen Achsen in den Lagen 0, y, $\frac{1}{4}$ usw. Der Parameter der Zirkonatome beträgt $y=0{\cdot}106$, der Siliciumatome I: $y=0{\cdot}750$ und der Siliciumatome II: $y=0{\cdot}355$. Zirkonsilicid bildet ein Schichtengitter aus ungeladenen Atomen.

Szeged, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A MEDIUM ARITMETIKO-GEOMETRIKUM ÉS A MODULFÜGGVÉNY ELEMI ELMÉLETÉRŐL.

BARNA BÉLÁ-tól.

1. Dolgozatom tárgya az az összefüggés, mely a komplex változós medium aritmetiko-geometrikum és a modulfüggvény elmélete között áll fönn és amelynek rendszeres fölépítését DÁVID LAJOS értekezéseiből ismerhetjük meg részletesen.[1]

Az alábbiakban oly útat jelölünk ki, amely elemi segédeszközök alkalmazásával s egyszersmind a legrövidebben vezet el a medium aritmetiko-geometrikum elméletéből a modulfüggvényhez.

Hogy ennek az elemi módszerekkel kidolgozott útnak a megállapítása az elmélet szempontjából nem közömbös, arra nézve megemlítem, hogy pl. a medium aritmetiko-geometrikum végtelen sok értéke közötti (alább előforduló) összefüggéshez vezető ily eljárás hiányát már SCHLESINGER, a Gauss-hagyaték alapos ismerője is megemlíti.[2]

2. Könnyebb áttekinthetőség kedvéért fölsorakoztatjuk azokat az eredményeket, melyeket az alábbiakban felhasználunk. Ezekhez, mint DÁVID idetartozó értekezéseiből kitűnik, kizárólag elemi függvénytani úton is eljuthatunk.

---

[1] L. L. v. DÁVID, Aritmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion. Journal für die reine und angew. Math. Bd. 159. (1928) 154—170. — Továbbá: DÁVID, Az elliptikus modulfüggvény új, independens elmélete. Math. és Term. Tud. Értesítő. 33. (1915) 271—330.

V. ö. H. GEPPERT, Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Mathematische Annalen 99. (1928) 162—180. E dolgozat a DÁVID-féle elmélet geometriai kiegészítését tartalmazza.

[2] L. SCHLESINGER, Über Gauss, Arbeiten Zur Funktionentheorie. (1933) 93. és az e résszel kapcsolatos 128. jegyzet.

I. A tetszőleges a, b komplex számpárból kiinduló

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_n.b_n},\quad c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \text{in inf.}\ a_0=a,\ b_0=b)$$

algoritmus bármely[3]

$$\left\|\begin{matrix} a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ \text{in inf.} \\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ \text{in inf.}\end{matrix}\right\|$$

matrixát alkotó két végtelen sorozatnak közös $M(a, b)$ határértéke van. Ezen $M(a, b)$ értékek egyike mindig a 0, melyhez $ab(a^2-b^2)\neq 0$ esetén *(amit az alábbiakban mindvégig feltételezünk)* a végnélkül oszcilláló[4] matrixok és csak azok vezetnek.

II. Az $M(a, b)$ értékek között arc a — arc $b \neq \pm\pi$ esetén van egy és csakis egy oly $\overline{M}(a, b)$, melyre vonatkozólag bármely $M(a, b)$ esetén $|\overline{M}(a, b)| \geqq |M(a, b)|$ teljesül. Ehhez az értékhez az a matrix vezet, melyben a $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ két érték közül mindig azt választjuk, amelyre vonatkozólag $\Re\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)>0$ Ha pedig arc a — arc $b=\pm\pi$, akkor két abszolút értékre nézve maximális $\overline{M}(a, b)$ érték van: $\overline{M}(a_1, b_1)$ és $\overline{M}(a_1, -b_1)$. Ezek az $\overline{ab}$ egyenesre vonatkozólag szimmetrikus helyzetűek.[5]

III. Bármely 0-tól különböző $M(a, b)$ értékhez tartozik egy olyan nem-negatív ν egész szám, hogy[6]

$$M(a, b)=\overline{M}(a_\nu, b_\nu).$$

IV. Mindig található az $M(a_n, c_n)$ értékek között oly $M^*(a_n, c_n)$, melyre vonatkozólag az

$$\overline{M}(a, c)=2^n.M^*(a_n, c_n)$$

egyenlőség teljesül.[7]

---

[3] A $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ kétértékűsége miatt számosság szerint 2^n a_n, b_n számpár van, tehát ugyanazon a, b számpárból kiindulva végtelen sok különböző matrix állítható elő. L. DÁVID idézett első értekezését, 155.

[4] Az «oszcillálásra» vonatkozólag l. u. o., 156.

[5] L. u. o., 157.

[6] L. u. o., 156.

[7] L. u. o., 160.

V. Bármely $M(a, b)$ érték esetén $\eta \cdot M(a, b) = M(\eta \cdot a, \eta \cdot b)$ (η tetszőleges).

VI. $\overline{M}(1, z)$ egyértékű analitikus függvény a negatív valós tengely mentén fölmetszett egész komplex síkban.[8]

VII. Bármily úton közeledjék a z komplex változó a 0 pont felé, mindig érvényes a

$$\lim_{z \to 0} \overline{M}(1, z) \log z = -\frac{\pi}{2}$$

egyenlőség.[9]

3. Legelső feladatunk az $\overline{M}(1, z)$, $\overline{M}(1, -z)$ és $\overline{M}(1, \sqrt{1-z^2})$ függvények között egy összefüggésnek megállapítása. Legyen egyszerűség céljából bármely n esetén $M(a_n, c_n)$ a IV. értelmében az $\overline{M}(a, c)$-hez rendelt érték. Mivel az $\overline{M}(a, b)$ értékhez vezető algoritmus bármely a_n, b_n számpárja esetén $\overline{M}(a_n, b_n) = \overline{M}(a, b)$, azért IV. szerint

$$\frac{M(a_n, c_n)}{\overline{M}(a_n, b_n)} \frac{\overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)} = \frac{1}{2^n},$$

tehát

$$u_n = \frac{\overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)} \frac{M(a_n, c_n)}{\overline{M}(a_n, b_n)} \log \frac{4a_n}{c_n} = \frac{1}{2^n} \log \frac{4a_n}{c_n}. \qquad (1)$$

Az egyszerű számítással igazolható

$$\frac{4a_n}{c_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \sqrt{\frac{4a_{n+1}}{c_{n+1}}}$$

képletből következik továbbá, hogy — mindenütt a logaritmus főértékét véve —

$$\log \frac{4a_n}{c_n} = \log \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} \log \frac{4a_{n+1}}{c_{n+1}} + 2\varepsilon_n \pi i, \qquad (2)$$

hol $\varepsilon_n = 0, \pm 1$. Az (1) és (2) képletekből tehát:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\varepsilon_n \pi i \right]$$

---

[8] L. u, o., 162.

[9] L. szerző, Ein Limessatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Journal für die reine und angew. Math. Bd. 172. (1934) 86–88.

és így

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots \tag{3}$$

miatt végül is:[10]

$$\frac{\bar{M}(a, b)}{\bar{M}(a, c)} \lim \frac{M(a_n, c_n)}{\bar{M}(a_n, b_n)} \log \frac{4a_n}{c_n} = \\ = \log \frac{4a}{c} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\varepsilon_n \pi i\right]. \tag{4}$$

A baloldalon szereplő határértéket kell még kiszámítanunk. Ezt megkönnyíti az

1. *segédtétel:* Az $M(1, z)$ függvény bármely egyértékű, 0-tól különböző ágára vonatkozólag teljesül a

$$\lim_{z\to 0} M(1, z) \log z = -\frac{\pi}{2}$$

egyenlőség, bármily úton közeledik a z a 0 pont felé.

Az $\bar{M}(1, z)$ függvényágra vonatkozólag ezt VII. kimondja. Hogy állításunk bármely más függvényág esetén is igaz, azt a következőkép láthatjuk be: Legyen a szóbanforgó függvényág $M(1, z)$. Ehhez tartozik oly nem negatív ν egész szám, hogy

$$\bar{M}(a_\nu, b_\nu) = M(1, z) \tag{5}$$

(III.), ahol az a_ν, b_ν számpár az 1, z számpárból kiinduló algoritmus ν-edik tagja és $a_\nu = a_\nu(z)$, $b_\nu = b_\nu(z)$ a z-nek algebrai függvénye. Könnyen igazolható n-ről $(n+1)$-re való következtetéssel, hogy bármely n esetén[11]

$$\lim a_n = 2^{-n}, \quad \lim b_n = 0, \quad \lim \frac{\log z}{\log \frac{b_n}{a_n}} = 2^n. \tag{6}$$

Az (5) egyenlőségből következik továbbá, hogy

$$\lim M(1, z) \log z = \lim \bar{M}(a_\nu, b_\nu) \log z,$$

[10] Az itt következő logarithmikus sor (valós esetre vonatkozólag) már GAUSSnál is szerepel (Werke III. 1878., 377.). L. még DÁVID, A GAUSS-féle med. arithmetico-geometricum algorithmusának és általánosításának elmélete ... (Doktori Ért.) 1903.

[11] E pontban $\lim_{z\to 0}$ helyett többször írunk alájegyzés nélküli lim jelt.

amiből az V. alapképlet alkalmazásával és némi átalakítással a

$$\lim M(1, z) \log z = \lim \left[a_\nu \cdot \frac{\bar{M}\left(1, \frac{b_\nu}{a_\nu}\right) \log \frac{b_\nu}{a_\nu} \cdot \log z}{\log \frac{b_\nu}{a_\nu}} \right]$$

egyenlőséget nyerjük. A jobboldali határérték azonban a (6) képletek felhasználásával

$$\lim \bar{M}\left(1, \frac{b_\nu}{a_\nu}\right) \log \frac{b_\nu}{a_\nu}$$

alakban írható. Mivel pedig $\lim \frac{b_\nu}{a_\nu} = 0$, VII. alapján végül is a kimondott segédtételt kapjuk:

$$\lim M(1, z) \log z = \lim_{\frac{b_\nu}{a_\nu} \to 0} \bar{M}\left(1, \frac{b_\nu}{a_\nu}\right) \log \frac{b_\nu}{a_\nu} = -\frac{\pi}{2}.$$

Ezek után egyszerűen meghatározhatjuk a (4) baloldalán szereplő határértéket. Célunknak megfelelően elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, ha $a = 1$, $b = \sqrt{1-z^2}$, $c = z$. Az $\bar{M}(1, \sqrt{1-z^2})$ és $\bar{M}(1, z)$ függvények egyértékűségének biztosítása végett állapodjunk meg abban, hogy a négyzetgyöknek azon értékét választjuk, melynek valós része pozitív, továbbá zárjuk ki a z változónak negatív, valamint 1-nél nagyobb pozitív értékeit.

Vegyük most már figyelembe, hogy 1. segédtételünk szerint bármely 0-tól különböző $M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right)$ függvényértékre nézve:

$$\lim_{\frac{c_n}{a_n} \to 0} M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right) \log \frac{c_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2}.$$

Mivel pedig $\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} a_n = \bar{M}(1, z)$, e képlet így is írható:

$$\lim_{n \to \infty} a_n M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right) \log \frac{c_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2} \bar{M}(1, z),$$

azaz (V.)

$$\lim_{n \to \infty} M(a_n, c_n) \log \frac{c_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2} \bar{M}(1, z).$$

Innen pedig már következik, hogy bármely 0-tól különböző, tehát a (4) képletben szereplő $M(a_n, c_n)$ értékre vonatkozólag is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(a_n, c_n)}{M(a_n, b_n)} \log \frac{4a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2}.$$

Ezt a (4) képletbe helyettesítve, következik a

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, z)} = \log \frac{4}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\varepsilon_n \pi i\right] \quad (7)$$

egyenlőség. Helyettesítsük itt z helyébe a $(-z)$ számot. Ekkor — az előbbi korlátozásoknak megfelelően — kizárva a z összes valós értékeit, kapjuk hogy

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, -z)} = \log \frac{4}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\varepsilon_n \pi i\right].$$

A (7) képletet ez utóbbival egybevetve most már:

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, z)} - \frac{M(1, \sqrt{1-z^2})}{M(1, -z)}\right] = \log(-z) - \log z. \quad (8)$$

Ha itt z a felső félsíkban van, akkor $0 < \arc z = \varphi < \pi$ és

$$\log(-z) = \log|z| - i(\pi - \varphi),$$
$$\log z = \log|z| + i\varphi,$$

tehát

$$\log(-z) - \log z = -i\pi;$$

ha pedig $-\pi < \arc z < 0$, akkor ugyanígy nyerjük, hogy

$$\log(-z) - \log z = +i\pi.$$

Mindkét esetet összefoglalva, (8)-ból végül is az adódik, hogy

$$\frac{1}{M(1, z)} - \frac{1}{M(1, -z)} = \frac{-\operatorname{sgn} \Im(z).2i}{M(1, \sqrt{1-z^2})}. \quad (9)$$

E képletben a $\sqrt{1-z^2}$ azon értékét kell választanunk, melynek valós része pozitív. E korlátozó feltevéstől azonban megszabadulhatunk, ha itt a $\sqrt{1-z^2}$ ez értéket z helyébe írjuk. Ekkor $\sqrt{1-z^2}$ helyett $\sqrt{z^2}$ irandó, tehát $\Re(z) > 0$ esetben z,

$\Re(z) < 0$ esetben pedig $(-z)$. Az így előálló két képletből (9) figyelembevételével következik az

$$\frac{1}{M(1, z)} = \frac{1}{M(1, -z)} - \frac{\operatorname{sgn} \Im(z).2i}{M(1, -\sqrt{1-z^2})} - \frac{\operatorname{sgn} \Im(z) \cdot \operatorname{sgn} \Im(\sqrt{1-z^2}).4}{M(1, \varepsilon.z)}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \Re(z) \tag{10}$$

képlet. Mivel pedig — a $\sqrt{1-z^2}$ valós része pozitív lévén —

$$\operatorname{sgn} \Im(z).\operatorname{sgn} \Im(\sqrt{1-z^2}) = -\operatorname{sign} \Re(z),$$

azért (10) így írható:

$$\frac{1}{M(1, z)} = \frac{1}{M(1, -z)} - \frac{\operatorname{sgn} \Im(z).2i}{M(1, -\sqrt{1-z^2})} + \frac{\varepsilon.4}{M(1, \varepsilon z)}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \Re(z).$$

A (9) és (11) képleteket összefoglalja az

1. *tétel: Tetszőleges z komplex szám esetén, hacsak*[12] $\Re(z).\Im(z) \neq 0$,

$$\frac{1}{M(1, z)} - \frac{1}{M(1, -z)} = \frac{-\operatorname{sgn} \Im(z).2\iota}{M(1, \sqrt{1-z^2})} + \varkappa \frac{\varepsilon.4}{M(1, \varepsilon.z)} \quad (\varepsilon = \operatorname{sgn} \Re(z)),$$

hol $\varkappa = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ *aszerint, hogy* $\Re(\sqrt{1-z^2}) \gtrless 0$.

[12] Képletünk érvényessé tehető az $\Re(z) = 0$ és $\Im(z) = 0$ esetekben is, ha ezeket határesetek gyanánt fogjuk fel, de ezekre a képletekre nincs szükségünk. Csak példaképp álljanak itt — mint meglehetős bonyolult számítások eredményei — a következő idevágó képletek:

Ha z valós és $-1 < z < +1$, akkor

$\sqrt{1-z^2} > 0$ esetben $\dfrac{1}{M(1, z)} = \dfrac{1}{M(1, -z)} \pm \dfrac{\operatorname{sgn} z.2i}{M(1, \sqrt{1-z^2})}$,

$\sqrt{1-z^2} < 0$ esetben $\dfrac{1}{M(1, z)} = \dfrac{1}{M(1, -z)} \mp$

$$\mp \frac{\operatorname{sgn} z.2i}{M\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{2}, \pm i \left|\sqrt{1-z^2}\right|\right)} - \frac{\operatorname{sgn} z.4}{M(1, -|z|)},$$

ahol

$$M(1, -|z|) = M\left(\frac{1-|z|}{2}, \pm i \left|\sqrt{z}\right|\right)$$

s egyidejűleg a felső, illetőleg az alsó jelek választandók.

E tételből alább alkalmazandó képleteket vezethetünk le, ha z helyett rendre a $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{ic}{b}, \frac{ib}{c}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{ic}, \frac{c}{ib}$ számokat írjuk és az V. képletet alkalmazzuk. Így nyerjük például:

$$\frac{1}{M(a,b)} = \frac{1}{M(a,-b)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{b}{a}\right).2i}{M(a,c)} + \varkappa\frac{\varepsilon 4}{M(a,\varepsilon b)} \tag{12}$$

$$\left(\varepsilon = \operatorname{sgn}\Re\left(\frac{b}{a}\right)\right), \text{ hol } \varkappa = \begin{cases}0\\1\end{cases} \text{ aszerint, hogy } \Re\left(\frac{c}{a}\right) \gtrless 0,$$

$$\frac{1}{M(b,a)} = \frac{1}{M(b,-a)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{a}{b}\right).2i}{M(b,ic)} + \varkappa\frac{\varepsilon 4}{M(b,\varepsilon a)} \tag{13}$$

$$\left(\varepsilon = \operatorname{sgn}\Re\left(\frac{a}{b}\right)\right), \text{ hol } \varkappa = \begin{cases}0\\1\end{cases} \text{ a szerint, hogy } \Re\left(\frac{ic}{b}\right) \gtrless 0.$$

3. Az előbbiek alapján nem nehéz az $M(a, b)$ és $M(a, c)$ függvények egyértékű ágai közötti összefüggések megállapítása. Értsük a továbbiakban c_n alatt a $\sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ azon értékét, amelyre vonatkozólag

$$\Re\left(\frac{c_n}{a_n}\right) \geqq 0. \tag{14}$$

Mindenekelőtt az $M(a_1, c_1)$ függvényt állítjuk elő $M(a, b)$ és $M(a, c)$ segítségével. Mivel

$$M(a_1, c_1) = \frac{1}{2} M\left(a+b, \sqrt{(a-b)^2}\right),$$

ha (1. eset) $\Re\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \geqq 0$, akkor (14) szerint II. alkalmazásával:

$$M(a_1, c_1) = \frac{1}{2} M(a, c). \tag{15}$$

Ha azonban (2. eset) $\Re\left(\frac{a-b}{a+b}\right) < 0$, akkor $\sqrt{(a-b)^2}$ két értéke közül $(b-a)$ választandó s így ugyancsak II. alkalmazásával:

$$M(a_1, c_1) = \frac{1}{2} M(b, \pm ic), \tag{16}$$

ahol a felső vagy alsó jel érvényes az $\Re\left(\frac{ic}{b}\right) \gtrless 0$ eseteknek megfelelően.

Ha $\Re\left(\frac{ic}{b}\right) > 0$ (2. a, eset), akkor a (13) képletben $x = 0$, s ha az így adódó egyenlőséget az ugyancsak $x = 0$ helyettesítéssel ((14)) a (12)-ből származóval egybevetjük, azt nyerjük, hogy

$$\frac{1}{M(b, ic)} = \frac{1}{M(a, c)} - \frac{\operatorname{sgn} \Im\left(\frac{b}{a}\right).i}{M(a, b)},$$

tehát (16) alapján:

$$\frac{1}{M(a_1, c_1)} = \frac{2}{M(a, c)} - \frac{\operatorname{sgn} \Im\left(\frac{b}{a}\right).2i}{M(a, b)} . \tag{17}$$

Ha pedig $\Re\left(\frac{ic}{b}\right) < 0$ (2. b, eset), akkor az 1. tételből (12) és (13) módján $z = \frac{ic}{b}$, illetőleg $z = \frac{b}{ic}$ helyettesítéssel nyert képletek alkalmazásával az

$$\frac{1}{M(a_1, c_1)} = \frac{-\operatorname{sgn}\left[\Re\left(\frac{b}{a}\right)\Im\left(\frac{ic}{b}\right)\right].2}{M(a, c)} + \frac{\operatorname{sgn} \Im\left(\frac{ic}{b}\right)2i}{M(a, b)} \tag{18}$$

eredményhez jutunk. A (16), (17) és (18) képleteket összefoglalva végül is

$$\frac{1}{M(a_1, c_1)} = \frac{2k}{M(a, c)} + \frac{2li}{M(a, b)} \tag{19}$$

alakban írhatjuk, hol $k \neq 0$ és l alkalmasan választott egész számok.

E képlet segítségével az $M(a_1, b_1)$ értéket is előállíthatjuk $M(a, b)$ és $M(a, c)$ által. Ha ugyanis $\Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) > 0$, akkor nyilván

$$M(a_1, b_1) = M(a, b); \tag{20}$$

ha azonban $\Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) < 0$, akkor $M(a_1, -b_1) = M(a, b)$ (II). A (12) képletet ($\Re\left(\frac{c_1}{a_1}\right) > 0$ miatt) $x = 0$ értékkel a, b, c helyett az a_1, b_1, c_1 számokra alkalmazva s figyelembevéve a (19) képletet, az

$$\frac{1}{M(a_1, b_1)} = \frac{1}{M(a, b)} \pm \frac{4ki}{M(a, c)} \pm \frac{4l}{M(a, b)}$$

eredményhez[13] jutunk. Ezt és a (20) képletet röviden

$$\frac{1}{M(a_1, b_1)} = \frac{4K+1}{M(a, b)} + \frac{4Li}{M(a, c)} \tag{21}$$

alakban foglalhatjuk össze, hol K és L alkalmasan választott egész számok. A (19), (21) és III. felhasználásával, n-ről $(n+1)$-re való következtetést alkalmazva pedig egyszerűen kimutatható a

2. *segédtétel:* Bármely $M(a_n, c_n)$ és $M(a_n, b_n)$ érték ($n \geqq 1$) előállítható

$$\frac{1}{M(a_n, c_n)} = \frac{2k_n}{M(a, c)} + \frac{2l_n i}{M(a, b)},$$
$$\frac{1}{M(a_n, b_n)} = \frac{4K_n+1}{M(a, b)} + \frac{4L_n i}{M(a, c)}$$

alakban, hol k_n, l_n, K_n, L_n kellően választott egész számok.

Jelöljék az a, c kezdőelemekből kiinduló medium aritmetikogeometrikum algoritmus általános tagjait $\bar{a}_n, \bar{c}_n$, azaz legyen

$$\bar{a}_{n+1} = \frac{\bar{a}_n + \bar{c}_n}{2}, \quad \bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n \cdot \bar{c}_n} \quad (\bar{a}_0 = a, \ \bar{c}_0 = c),$$

továbbá

$$\bar{b}_n = \sqrt{\bar{a}_n^2 - \bar{c}_n^2} \quad \left(\Re\left(\frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_n}\right) \geqq 0\right).$$

Alkalmazzuk most előbbi segédtételünket az $M(\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ és $M(\bar{a}_n, \bar{c}_n)$ függvényekre:

[13] A megfelelő előjel egyértelműen meghatározható, de kifejezése bonyolult lévén, a fenti egyszerűbb írásmódot használjuk. Ezt annál inkább tehetjük, mert az alábbiakban az előjel pontos értéke nem lényeges.

3. *segédtétel:* Bármely $\overline{M}(\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ és $\overline{M}(\bar{a}_n, \bar{c}_n)$ érték ($n \geqq 1$) előállítható

$$\frac{1}{\overline{M}(\bar{a}_n, \bar{b}_n)} = \frac{2\bar{k}_n}{\overline{M}(a, b)} + \frac{2\bar{l}_n i}{\overline{M}(a, c)},$$

$$\frac{1}{\overline{M}(\bar{a}_n, \bar{c}_n)} = \frac{4\bar{K}_n + 1}{\overline{M}(a, c)} + \frac{4\bar{L}_n i}{\overline{M}(a, b)}$$

alakban, hol $\bar{k}_n$, $\bar{l}_n$, $\bar{K}_n$, $\bar{L}_n$ kellően választott egész számok.

A 2. és 3. segédtételből III. figyelembevételével következik végül a

2. tétel: Az $M(a, b)$ és $M(a, c)$ függvények bármely egyértékű ága — a 0-t kivéve — előállítható

$$\frac{1}{M(a, b)} = \frac{\alpha}{\overline{M}(a, b)} + \frac{\beta i}{\overline{M}(a, c)}, \quad \frac{1}{M(a, c)} = \frac{\gamma i}{\overline{M}(a, b)} + \frac{\delta}{\overline{M}(a, c)}$$

alakban, hol α, β, γ, δ kellően választott egész számok és $\alpha, \delta \equiv 1$, $\beta, \gamma \equiv 0 \pmod 4$.

E tételt az alább értelmezendő $\omega(\lambda)$ függvény vizsgálatánál fölhasználjuk.

4. Az ω-függvényt az

$$\omega(\lambda) = i \frac{M(1, \sqrt{1-\lambda})}{M(1, \sqrt{\lambda})}$$

egyenlőséggel értelmezzük. E végtelen sokértékű függvénynek egyelőre csak egyik ágát, az

$$\omega(\lambda) = i \frac{\overline{M}(1, \sqrt{1-\lambda})}{\overline{M}(1, \sqrt{\lambda})} \quad \left(\Re(\sqrt{1-\lambda}) \geqq 0,\ \Re(\sqrt{\lambda}) \geqq 0\right) \qquad (22)$$

függvényt tárgyaljuk részletesebben. A VI. alapján közvetlenül belátható, hogy *ez a negatív reális tengely és az $(1, +\infty)$ félegyenes mentén felmetszett λ-síkban egyértékű reguláris-analitikus függvény.*

Írjuk (22)-ben a λ helyett a $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ kifejezést:

$$\overline{\omega}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)=i\,\frac{\overline{M}\left(1,\sqrt{1-\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right)}{\overline{M}\left(1,\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right)} \tag{23}$$

$$\left(\Re\left(\sqrt{1-\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right)\geqq 0,\ \Re\left(\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right)\geqq 0\right),$$

s innen

$$\overline{\omega}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)=-\frac{1}{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \tag{24}$$

Másrészt (23)-ban a számlálót és nevezőt $\sqrt{\lambda}$-val szorozva és V.-öt alkalmazva:

$$\overline{\omega}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)=i\,\frac{\overline{M}(1,\sqrt{\lambda})}{\overline{M}(\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda-1})}\ ; \tag{25}$$

továbbá a (12) és (13) képleteket $a=1$, $b=\sqrt{\lambda}$ helyettesítésekkel alkalmazva — tekintettel arra, hogy $\operatorname{sgn}\Im(\lambda)=\operatorname{sgn}\Im(\sqrt{\lambda})=$ $=-\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)-$

$$\frac{1}{\overline{M}(1,\sqrt{\lambda})}=\frac{1}{\overline{M}(1,\sqrt{\lambda})}-\frac{\operatorname{sgn}\Im(\lambda).2i}{\overline{M}(1,\sqrt{1-\lambda})}$$

és

$$\frac{1}{\overline{M}(1,\sqrt{\lambda})}=\frac{-1}{\overline{M}(1,-\sqrt{\lambda})}+\frac{\operatorname{sgn}\Im(\lambda)\,2i}{\overline{M}(\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda-1})}.$$

E két utóbbi egyenlőség egybevetése arra vezet, hogy

$$\frac{1}{\overline{M}(\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda-1})}=\frac{1}{\overline{M}(1,\sqrt{1-\lambda})}-\frac{\operatorname{sgn}\Im(\lambda).i}{\overline{M}(1,\sqrt{\lambda})},$$

amiből (25) révén egyszerű számítással

$$\overline{\omega}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)=\frac{\varepsilon.\omega(\lambda)-1}{\overline{\omega}(\lambda)} \tag{26}$$

adódik, hol — mint alább is — $\varepsilon=\operatorname{sgn}\Im(\lambda)$.

A (24) és (26) képletek segítségével meggyőződhetünk a következő transzformáció-képletek helyességéről:

$$\overline{\omega}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\overline{\omega}(\lambda)}{1-\varepsilon.\omega(\lambda)},\quad \overline{\omega}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = \overline{\omega}(\lambda)-\varepsilon,\quad \omega\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = \frac{1}{\varepsilon-\overline{\omega}(\lambda)},\quad \omega(1-\lambda) = \frac{-1}{\overline{\omega}(\lambda)}. \tag{27}$$

Keressük föl ezek után a λ-sík képét az ω-síkban. Elég pl. csak a felső félsíkot leképeznünk, mivel az így nyert képet a képzetes tengelyre tükrözve, az alsó félsík képét is megkapjuk.

A (0, 1) intervallum bármely λ-értékének pozitív valós $\overline{M}(1, \sqrt{1-\lambda})$ és $\overline{M}(1, \sqrt{\lambda})$ felel meg és míg λ ezen intervallumot bejárja, addig $\overline{M}(1, \sqrt{1-\lambda})/\overline{M}(1, \sqrt{\lambda})$ a $(+\infty, 0)$ intervallumon halad végig. A (0, 1) intervallumnak a képe tehát az ω-síkban a pozitív képzetes tengely, és pedig

$$\lambda = 0 \text{ és } \omega = i.\infty$$
$$\lambda = 1 \text{ és } \omega = 0$$

egymásnak megfelelő pontok.

Az $(1, +\infty)$ félegyenes *felső* szegélyének leképezésénél a (27) képletek közül a harmadikat használjuk föl. Ennek segítségével meggyőződhetünk arról, hogy az $\overline{\omega}$-függvény e félegyenest az $\omega = \frac{1}{2}$ körül $\frac{1}{2}$ sugárral leírt kör felső félsíkba eső ívére képezi le, úgy, hogy

$$\frac{1}{1-\lambda} = 0 \quad \text{és} \quad \overline{\omega}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = 0,$$
$$\frac{1}{1-\lambda} = +\infty \text{ és } \overline{\omega}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = 1$$

egymásnak megfelelő pontok.

Végül a negatív valós tengely *felső* szegélyének leképezését a (27) képletek közül a második alkalmazása által tanulmányozhatjuk. Mivel — a négyzetgyökök valós része pozitív lévén — $\operatorname{sgn} \Im\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\right) = -\operatorname{sgn} \Im(\sqrt{\lambda}) = -\varepsilon$, és mivel feladatunknak megfelelően $\operatorname{sgn} \Im\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\right) = +1$, azért az alkalmazott képlet

$$\overline{\omega}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = \overline{\omega}(\lambda)+1$$

alakot ölt. Innen pedig közvetlenül belátható, hogy a negatív valós tengely felső szegélyének az ω-síkban az $(1, 1+i.\omega)$ félegyenes felel meg és pedig

$$\text{a } \frac{\lambda}{\lambda-1} = 0 \quad \text{pontnak} \quad \omega\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = 1+i.\infty,$$

$$\text{a } \frac{\lambda}{\lambda-1} = -\infty \text{ pontnak} \quad \omega\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = 1$$

a képe.

Mindezekből következik, hogy *az* $\omega(\lambda)$ *függvény a* λ*-síkot* az ω*-sík oly körívnégyszögére képezi le, melyet az* $\omega = \frac{1}{2}$ ill. $\omega = -\frac{1}{2}$ *középpontú* $\overset{\frown}{(0, 1)}$ *és* $\overset{\frown}{(0, -1)}$ *felső félsíkbeli félkörök és az* $(1, 1+i.\infty)$ és $(-1, -1+i.\infty)$ *egyenesek határolnak.*

Magának a végtelen sokértékű $\omega(\lambda)$ függvénynek bármely egyértékű ága a 2. tétel segítségével kifejezhető kapcsolatban áll e függvény $\bar{\omega}(\lambda)$ ágával. E tételből következik ugyanis, hogy az $M(1, \sqrt{1-\lambda})$ és az $M(1, \sqrt{\lambda})$ függvények bármely ága

$$\frac{1}{M(1, \sqrt{1-\lambda})} = \frac{\alpha}{\bar{M}(1, \sqrt{1-\lambda})} + \frac{i\beta}{\bar{M}(1, \sqrt{\lambda})},$$

illetőleg

$$\frac{1}{M(1, \sqrt{\lambda})} = \frac{\gamma i}{\bar{M}(1, \sqrt{1-\lambda})} + \frac{\delta}{\bar{M}(1, \sqrt{\lambda})}$$

összefüggésben áll az $\bar{M}(1, \sqrt{1-\lambda})$ és $\bar{M}(1, \sqrt{\lambda})$ függvényekkel, hol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ az ottani jelentésűek. E képletekből pedig egyszerűen következik a

3. tétel: Az $\omega(\lambda)$ *bármely ága előállítható e függvény* $\bar{\omega}(\lambda)$ *ága segítségével*

$$\omega(\lambda) = \frac{\delta.\bar{\omega}(\lambda)+\gamma}{\beta.\bar{\omega}(\lambda)+\alpha}$$

alakban, hol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *kellően választott egész számok és*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 4.$$

A 3. tétel alapján az általános $\omega(\lambda)$ függvénynek megfelelő leképezés is elintézhető ismert módon. Most még az invers $\lambda(\omega)$ függvénnyel, az ú. n. *modulfüggvénnyel* akarunk foglalkozni.

5. Tekintettel arra, hogy az $\overline{\omega}(\lambda)$ által történő leképzésben előálló körívnégyszög belsejének pontjai és a λ-sík pontjai kölcsönösen és egyértelműen felelnek meg egymásnak, közvetlenül belátható a

4. tétel: A $\lambda(\omega)$ függvénynek az ω-síkbeli $(0,\ 1,\ -1,\ i.\infty)$ körívnégyszög egyik alaptartománya, melyet függvényünk a $(0,-\infty)$ és az $(1,+\infty)$ félegyenesek által felmetszett egész λ-síkra képez le.

A fentebb levezetett transzformáció-képletek alapján hasonló képletek nyerhetők a modulfüggvényre vonatkozólag is.

Vegyük tekintetbe, hogy ([(27)])

$$\omega\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = \overline{\omega}(\lambda) - \operatorname{sgn}\Im(\lambda),$$

vagyis, mint az előbbi leképezésből következik,

$$\overline{\omega}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = \overline{\omega}(\lambda) - \operatorname{sgn}\Re(\overline{\omega}).$$

Véve mindkét oldal λ-függvényét, nyerjük:

$$\lambda(\omega \pm 1) = -\frac{\lambda(\omega)}{\lambda(\omega)-1},$$

s még egyszerűbben a (27) alatti negyedik képletből:

$$\lambda\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1 - \lambda(\omega).$$

E két eredményből már következik az

5. tétel: $\lambda = \lambda(\omega)$ az ω összes lineáris unimoduláris transzformációjában csak a következő hat értéket veheti föl:[19]

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

[19] V. ö. v. DÁVID, Arithmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion. 169.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. márc. 15.-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE ELEMENTARE THEORIE DES ARITHMETISCH-GEOMETRISCHEN MITTELS UND DER MODULFUNKTION.

Von B. BARNA.

Diese Arbeit soll eine elementare Behandlung des zwischen der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion bestehenden Zusammenhanges geben. Der vollständige und möglichst elementare Aufbau dieser Theorie wurde zuerst von L. v. DÁVID ausführlich behandelt;[1] im folgenden wollen wir aber einen ganz elementaren Zugang zur Modulfunktion bezeichnen, der von der DÁVID-schen Theorie in zwei Punkten abweicht. Es ist uns nämlich gelungen die Verwendung der sog. LEGENDRE-schen Differentialgleichung, sowie die der ϑ-Reihen vermeiden.[2]

Dies wurde dadurch erreicht, dass ich durch die Anwendung des in meiner Doktordissertation bewiesenen Limessatzes.[3]

$$\lim_{z \to 0} M(1, z) \log z = -\frac{\pi}{2}$$

[1] L. v. DÁVID, Arithmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion. Journal für die reine und angew. Math. 159. (1928) — Vergl. H. GEPPERT, Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels (Math. Ann. 99. 1928), wo diese v. DÁVID-sche Arbeit nach der geometrischen Seite hin ergänzt wurde.

[2] Der Mangel z. B. eines solchen elementaren, zum Zusammenhang der unendlich vielen Werte des a.-g. Mittels führenden Verfahren wurde schon von L. SCHLESINGER bemerkt. (S. Über GAUSS Arbeiten zur Funktionentheorie. 1929. S. 93.)

[3] VERFASSER: Ein Limessatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Journal für die reine und angew. Math. 172. (1934.)

die Formel

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(a,\,b)}{M(a,\,\sqrt{a^2-b^2})}=\log\frac{4a}{\sqrt{a^2-b^2}}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{1}{2^n}\left[\log\frac{a_n}{a_{n+1}}+2\varepsilon_n\pi i\right]\quad(\varepsilon_n=0,\,\pm1)$$

ganz elementar abgeleitet habe. Da hier die Glieder der unendlichen Reihe vom Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{a^2-b^2}$ unabhängig sind, folgt die Formel:

$$\frac{1}{M(a,\,b)}=\frac{1}{M(a,\,-b)}-\frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{b}{a}\right).2i}{M(a,\,\sqrt{a^2-b^2})},\quad\left(\Re\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)>0\right).$$

Durch die wiederholte Verwendung dieses Ergebnisses gelangen wir einerseits zum zwischen den Werten der Funktionen $M(a,\,b)$ und $M(a,\,\sqrt{a^2-b^2})$ bestehenden Zusammenhang

$$\frac{1}{M(a,\,b)}=\frac{a}{M(a,\,b)}+\frac{i.\beta}{M(a,\,\sqrt{a^2-b^2})},$$
$$\frac{1}{M(a,\,\sqrt{a^2-b^2})}=\frac{i.\gamma}{M(a,\,b)}+\frac{\delta}{M(a,\,\sqrt{a^2-b^2})},$$

anderseits können wir auf die Funktion

$$\bar\omega(\lambda)=i\frac{M(1,\,\sqrt{1-\lambda})}{M(1,\,\sqrt{\lambda})}\quad\left(\Re(\sqrt{1-\lambda})>0,\ \Re(\sqrt{\lambda})<0\right)$$

sich beziehende Transformationsformeln ableiten, z. B.

$$\bar\omega\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)=\omega(\lambda)-\varepsilon,\ \bar\omega\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)=\frac{1}{\varepsilon-\bar\omega(\lambda)}\quad(\varepsilon=\operatorname{sgn}\Im(\lambda)).$$

Nunmehr kann man zeigen, das die λ-Ebene und das Kreisbogenviereck mit den Eckpunkten $\omega=0,\,+1,\,i.\infty,\,-1$ ein-eindeutig und konform mit Hilfe der Funktion $\bar\omega(\lambda)$ auf einander abgebildet sind, und dass die inverse Funktion $\lambda(\omega)$ — die sog. *Modulfunktion* — bei unimodularen linearen Transformationen von ω nur die sechs Werte eines Doppelverhältnisses annimmt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. März. 1937.)

A SZILÁRD HELIUM KÉMIAI KÖTÉSÉRŐL.

GOMBÁS PÁLtól.

Ebben a munkában a szilárd Helium kémiai kötésével foglalkozunk. Főcélunk annak a kimutatása, hogy a szilárd Helium kötése nem lehet fémes kötés.

Általában négyféle kémiai kötést különböztetünk meg. Úgymint heteropoláris, homöopoláris, fémes és VAN DER WAALS-féle kötést.

A heteropoláris kötés typikus példáit nyujtják az ionkristályok. Ennél a kötésnél az összetartó erők legnagyobb része a pozitív és negatív ionok között működő COULOMB-erőkből származik. A taszítóerők főrészét pedig az úgynevezett FERMI-féle taszítóerők alkotják, melyek a PAULI-principium következményei, vagyis onnan származnak, hogy a fázistér elemi cellájában csak két elektron lehet jelen. Szigorú kvantummechanikai módszereket az ionkristályok kötéseinek megvizsgálására csak a legegyszerűbb, esetben, a *LiH* esetében lehetett alkalmazni. Oly anyagoknál, melyek ionjai sok elektronnal rendelkeznek, statisztikai módszerekkel lehetett jó eredményeket elérni.

A homöopoláris kötésnél az egyes alkatrészek teljesen egyenértékűek és semlegesek. Ennek a kötésnek typikus példáját nyujtja a H_2 molekula. Ezt a kötést elméletileg számítani sokkal komplikáltabb és csak az új elméletek segítségével volt keresztülvihető. Amint a kvantummechanikai kutatásokból következik, a homöopoláris kötést a kicserélési erők (Austausch-Kräfte) létesítik, melyeket csak a kvantummechanikai alapon lehet értelmezni.

A kémiai kötés harmadik fajtája, amely bennünket ebben a munkában különösebben érdekel, a fémes kötés. Ezt a következő

kritériumok jellemzik. Először is a fémes kötésnél az alkotórészek egyenértékűek, vagyis a fém atomokból van felépítve. Másodszor, a fémek gázállapotban csak nagyon instabil molekulákat alkotnak. Harmadszor pedig, ami a legfontosabb, fémekben az alkotórészek, vagyis atomok külső elektronhéjában levő elektronok száma kicsi. Ez az utolsó kritérium nagyon fontos, mert az első kettő a harmadik nélkül nem elegendő a fémes kötés jellemzésére. Ugyanis vannak szigetelők is, melyek atomrácsot alkotnak, pl. a gyémánt és a nemesgázok szilárd állapotban. Ezek tehát kivételt alkotnak az első kritérium alól. Továbbá a nemesgázok molekulái szintén nagyon instabilak, így tehát ezek kivételt alkotnak a második kritérium alól. Az első két kritérium csak a harmadikkal együtt elegendő a fémes kötés jellemzésére. Elméleti szempontból először HABER és THOMSON foglalkoztak a fémekkel, de az ő heteropoláris fémelméletüket a röntgenografikus vizsgálatok megdöntötték. Később SLATER hullámmechanikai alapon tárgyalta a fémes kötést, de inkább csak kvalitatív eredményekre jutott. Lényeges haladást jelentettek ezen a téren WIGNER és SEITZ vizsgálatai, kik a *Na* fém fontosabb állandóit a tapasztalattal jó megegyezésben határozták meg. A szerző statisztikai elgondolások segítségével dolgozott ki egy módszert, mellyel szintén értelmezni lehet a fémek kötését. Ezzel a módszerrel sikerült az alkáli és alkáli földfémek fontosabb állandóit a tapasztalattal jó megegyezésben meghatározni. A következőkben is ezt a módszert fogjuk alkalmazni. Az újabb elméletek alapján a fémes kötés okát abban kell látnunk, hogy a fémben a valenciaelektron átlag hosszabb ideig tartózkodik a mag közelében, mint a szabad atomban.

Végül még röviden rátérünk a VAN DER WAALS-féle kötésre, ami alatt a kémiai kötésnek azt a faját értjük, melyet a VAN DER WAALS-féle polarizációs erők hoznak létre. Ennek a kötésnek typikus példáit szolgáltatják pl. a szilárd H_2, *HF*, *HCl*, *HBr*, *HJ* és a szilárd nemesgázok rácsai. A klasszikus elméletek ezt a kötést nem tudták értelmezni és csak a hullámmechanika alapján sikerült ezt a kötést megmagyaráznia LONDONnak. Az ő eredményei szerint atomi rendszerek között ható VAN DER WAALS-féle erők a távolság 6-ik hatványával fordítva arányosak.

E rövid áttekintés után rátérünk a szilárd Helium kémiai

kötésének megvizsgálására, mégpedig különösen annak a kimutatására, hogy a szilárd Helium nem lehet fém. Elméleti szempontból ugyanis a fenti kritériumok alapján fémes Helium létezése lehetségesnek látszik. Ugyanis a Heliumatom elektronhéja teljesen hasonlóan van felépítve, mint a földalkáliák legkülső elektronhéja, vagyis benne két s elektron foglal helyet. Továbbá, minthogy a Helium elektronhéjában, mely egyúttal a legkülső elektronhéja is, csak két elektron foglal helyet és mivel a fémes kötés egyik legfontosabb kritériuma, mint láttuk, az, hogy a legkülső elektronhéjban az elektronok száma kicsi legyen, ezért elméleti szempontból nem látszik valószínűtlennek, hogy a szilárd Helium fémes tulajdonságokat mutasson. A számítások azonban ennek ellenkezőjéről győznek meg.

A továbbiakban egy, a szerzőnek több előbbi munkájában kidolgozott módszerét alkalmazzuk, melynek segítségével a fémes kötés nagyon egyszerűen tárgyalható. Mivel a Helium legkülső és egyúttal egyetlen elektronhéjának elektronkonfigurációja teljesen hasonló a földalkáliatomok legkülső elektronhéjának konfigurációjához, a szilárd Heliumra a földalkáliákra kidolgozott módszert fogjuk alkalmazni. A módszerünkre vonatkozóan az idézett munkákra utalunk és itt csak a legfontosabb kifejezéseket adjuk meg. Mivel a Heliumnak a két s elektronon kívül több elektronja nincs, azért a rácsenergia kifejezése a következőre redukálódik:

$$U = U_C + U_F + U_A + U_K, \tag{1}$$

ahol U_C az elektrostatikus energia, mely a magoknak az elektronokkal és az elektronoknak egymásközti kölcsönhatásából származik, U_F az elektronoknak Fermi-féle nullaponti energiája, U_A pedig az elektronoknak kicserélési (Austausch) energiája. U_K az az elektrosztatikus energiacsökkenés, mely az antiparallelspinű elektronok kölcsönhatásából származik.

A számítások egyszerűen vihetők keresztül és a következő eredményre vezetnek:

$$U = -\,1{\cdot}72\,\frac{\varepsilon^2}{a_H} = -\,46{\cdot}2\ e\text{-Volt} \tag{2}$$

A sublimációenergiára, S-re, a következő összefüggés érvényes:

$$S = U - J_1 - J_2 \tag{3}$$

ahol J_1 és J_2 a szabad Heliumatom első, ill. második ionizációs energiája, melyek értéke a következő:

$$J_1 = 24{\cdot}5 \text{ } e\text{-Volt}, \quad J_2 = 54{\cdot}2 \text{ } e\text{-Volt} \tag{4}$$

Ha a (3) alatti összefüggésben U-t, J_1-et és J_2-t pozitív előjellel vesszük figyelembe, akkor S számára nyerjük:

$$S = -32{\cdot}5 \text{ } e\text{-Volt} \tag{5}$$

Az S számára nyert negatív érték azt mutatja, hogy a fémes Helium instabilis, mert a fémes Helium energiája kisebbnek adódott, mint a szabad atom energiája. Ez tehát azt bizonyitja, hogy fémes Helium nem létezhet.

Még arra az eshetőségre is lehetne gondolni, hogy a Helium két s elektronja közül csak az egyik viselkedik úgy, mint egy fémelektron. De ha ezt az eshetőséget végigszámítjuk, szintén negatív sublimáció energiát kapunk.

A kísérleti adatok eredményeinket teljes mértékben megerősítik. Ugyanis azt találták, hogy a folyékony Helium specifikus elektromos ellenállása 10^{15} Ohm cm nagyságrendű, amiből következik, hogy a folyékony Helium és így minden bizonnyal a szilárd Helium is, nem fém.

Eredményeink tehát azt mutatják, hogy a szilárd Helium kötése nem lehet fémes kötés. Mivel természetesen ionkötés sem lehetséges, továbbá, mivel több oknál fogva homöopoláris kötés is valószínűtlen, arra az eredményre jutunk, hogy a szilárd Helium kémiai kötése VAN DER WAALS-féle kötés.

Tehát látjuk, hogy aránylag egyszerű elméleti meggondolásokkal sikerül egyes egyszerűbb anyagok kémiai kötéséről ismereteket szereznünk. A fenti vizsgálat ezenkívül még azt a célt is szolgálja, hogy egy, a fémek kohéziójának számítására a szerző által kidolgozott statisztikai módszert még jobban alapozzon meg, mert ezzel a módszerrel egyrészt a fémek állandóit a tapasztalattal jó megegyezésben lehet meghatározni, másrészt pedig segítségével ki lehet mutatni, hogy bizonyos egyszerű anyagok, mint pl. Hydrogén és Helium szilárd állapotban nem mutathatnak fémes tulajdonságokat.

Elméleti Fizikai Intézet, Budapest, 1937, március.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE CHEMISCHE BINDUNG DES FESTEN HELIUMS.

Von PAUL GOMBÁS in Budapest.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Bindung des festen Heliums zu untersuchen und hauptsächlich mit Hilfe einer vom Verfasser ausgearbeiteten Methode zu zeigen, dass ein metallischer Zustand des festen Heliums nicht existieren kann. Zunächst wird eine kurze Zusammenfassung über die verschiedenen Typen der chemischen Bindung gegeben, wobei insbesondere die Kriterien der metallischen Bindung diskutiert werden. Hiernach wird nach sehr einfachen Rechnungen gezeigt, dass der Betrag der Gitterenergie eines metallischen Heliums kleiner wäre als der Betrag der Summen der Ioniesierungsenergien des freien Heliumatoms, was bedeutet, dass ein metallischer Zustand des festen Heliums nicht existiert. Nach den experimentellen Untersuchungen von WOLFKE und KEESOM ist das flüssige Helium ein guter Isolator, woraus man schliessen kann, dass für das feste Helium dasselbe zutrifft, was mit unseren Resultaten im besten Einklang ist. Da eine Ionenbindug im Falle des Heliums unmöglich ist und auch eine homöopolare Bindung sehr unwahrscheinlich erscheint, kommen wir zu dem Schluss, dass das feste Helium durch VAN DER WAALSsche Kräfte zusammengehalten wird.

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit der Bindung des festen Heliums, und zwar ist unser Ziel, zu zeigen, dass ein metallischer Zustand des festen Heliums nicht existiert. Bevor wir auf die diesbezüglichen Betrachtungen eingehen, geben wir eine kurze Übersicht der verschiedenen chemischen Bindungsarten.

Man unterscheidet vier Bindungsarten, und zwar: 1. Heteropolare Bindung, 2. Homöopolare Bindung, 3. Metallische Bindung und 4. VAN DER WAALSsche Bindung, welche man auch Bindung durch Polarisation nennt. Wir fassen nun die wesentlichsten Kennzeichen der einzelnen Bindungsarten kurz zusammen.

Die heteropolare Bindung entsteht durch die gegenseitige

Anziehung von entgegengesetzt geladenen Ionen. Den wesentlichsten Teil der Bindungsenergie gibt hier die COULOMBsche Wechselwirkungsenergie der Ionen. Wie aus den neueren Untersuchungen hervorgeht, sind die Abstossungsenergien zwischen den Ionen, welche der starken elektrostatischen Anziehnng das Gleichgewicht halten, nicht klassischen Ursprungs, sondern können erst mit Hilfe der neueren Theorien gedeutet werden. Und zwar konnte gezeigt werden, dass die Ursache dieser Abstossungskräfte im wesentlichen das PAULI-Prinzip ist, demzufolge sich in einer Zelle des Phasenraumes nur höchstens zwei Elektronen befinden können. Die typischesten Beispiele dieser Bindung sind die Alkalihalogenidmoleküle, oder die Alkalihalogenidkristalle, welche also aus positiven Alkali und negativen Halogen Ionen aufgebaut sind. Die exakte wellenmechanische Behandlung dieser Bindungsprobleme stosst auf sehr grosse Schwierigkeiten, und zwar hauptsächlich auf mathematische Schwierigkeiten, welche im Falle des quantenmechanischen Mehrkörperproblems auftreten. Eine exakte quantenmechanische Behandlung konnte nur im einfachsten Falle, und zwar beim *LiH* durchgeführt werden,[1] da sowohl das Li^+ Ion wie das H^- Ion nur 2—2 Elektronen besitzt. In allen anderen Fällen, wo die Ionen elektronenreicher sind, konnte die quantenmechanische Behandlungsweise nicht mehr exakt durchgeführt werden, in diesen Fällen ist man auf Näherungsverfahren angewiesen, und zwar hauptsächlich auf statistische Methoden. Die statistische Methode von THOMAS und FERMI wurde von LENZ und JENSEN abgeändert[2] und zur Berechnung von Kristalleigenschaften und besonders zur Berechnung der Bindung brauchbar gemacht. Mit Hilfe dieser Methode konnten dann einige Kristalle sowie *RbBr*, *KCl* und *LiBr* mit gutem Erfolg behandelt werden.[3] Wir möchten noch hervorheben, dass neuerdings die THOMAS—FERMI—DIRACsche statistische Verteilung von JENSEN zur statischen Berechnung der

[1] E. A. HYLLERAAS: ZS. f. Phys. 63, 771, 1930.

[2] W. LENZ: ZS. f. Phys. 77, 713, 1932. H. JENSEN: ZS. f. Phys. 77, 722, 1932.

[3] H. JENSEN: ZS. f. Phys. 77, 722, 1932; TH. NEUGEBAUER u. P. GOMBÁS: ZS. f. Phys. 89, 480, 1934; P. GOMBÁS: Math. és Fiz. Lapok XLI, 55, 1934; ZS. f. Phys. 92, 796, 1934.

Gittereigenschaften der gesamten Alkalihalogenidreihe herangezogen wurde.[4] Ausserdem gab in letzter Zeit LANDSHOFF mit Hilfe der HARTREE—FOCKschen Eigenfunktionen eine quantenmechanische Behandlung des *NaCl* Kristalls.[5]

Theoretisch bedeutend schwieriger zu fassen ist die homöopolare Bindung, bei welcher die Bausteine vollkommen gleichartig und elektrisch neutral sind. Das typischeste Beispiel dieser Bindungsart ist das H_2 Molekül. Es ist bekannt, dass die klassische Theorie diese Bindung überhaupt nicht erklären konnte und dass erst die quantenmechanischen Untersuchungen eine Erklärung gaben. Wie aus den grundlegenden Arbeiten von HEITLER und LONDON[6] folgt, wird die homöopolare Bindung durch die sogenannten Austausch-Kräfte bewirkt. Die Schwierigkeiten zur theoretischen Behandlung dieser Bindung sind hier bedeutend grösser als im Falle der heteropolaren Bindung, da man hier mit statistischen Ansätzen nicht auskommt und man auf andere Näherungsmethoden angewiesen ist, welche nur in den einfachesten Fällen zu befriedigenden quantitativen Resultaten führten.

Wir kommen nun auf die für das folgende wichtige metallische Bindung zu sprechen. Die wichtigsten Merkmale dieser Bindung sind die folgenden. In einem typischen Metallkristall ist jedes Atom gleichwertig. Das Metall ist also aus Atomen aufgebaut. Dieses Merkmal ist aber zur Charakterisierung der metallischen Bindung nicht genügend, da es auch Nichtleiter gibt, welche aus Atomen aufgebaut sind, z. B. der Diamant, oder die Edelgase im festen Zustande. Wenn man aber von einigen Ausnahmefällen absieht, so kann man behaupten, dass die Nichtleiter im allgemeinen in Molekülgitter kristallisieren und dementsprechend auch im Gaszustande Moleküle bilden. Dagegen bilden die Metalle im allgemeinen nur sehr wenig stabile Moleküle. Z. B. ist die Dissoziationsenergie des H_2 Moleküls 4,7 *e*-Volt, während die der Alkalimetalle weniger als 1 *e*-Volt beträgt. Es gibt aber auch hier Ausnahmen, z B. die Edelgasmoleküle, welche ebenfalls sehr unstabil sind.

[4] H. JENSEN: ZS. f. Phys. 101, 164, 1936.
[5] R. LANDSHOFF: ZS. f. Phys. 102, 201, 1936.
[6] W. HEITLER u. F. LONDON: ZS. f. Phys. 44, 455, 1927.

Die hier angeführten zwei Kriterien, welche die metallische Bindung charakterisieren, sind notwendige, aber nicht durchaus ausreichende Kriterien. Eine notwendige und zugleich ausreichende Bedingung findet man nun darin, dass in Atomen, welche Metallbausteine sind, die Zahl der Elektronen in der äussersten Elektronenschale möglichst klein sein muss. Die theoretische Behandlung der metallischen Bindung wurde zuerst von HABER und THOMSON versucht.[7] Die elektrostatische Metallgittertheorie von HABER wurde jedoch durch den experimentellen Befund widerlegt. Später führte SLATER theoretische Untersuchungen auf Grund der Wellenmechanik durch,[8] welche jedoch hauptsächlich nur kvalitative Resultate gaben. Einen wesentlichen Fortschritt bedeuteten die wellenmechanischen Untersuchungen von WIGNER und SEITZ, die für *Na* schon gute kvantitative Resultate erzielten.[9] In letzter Zeit wurde vom Verfasser eine statistische Methode entwickelt,[10] welche eine Erklärung der metalischen Bindung gibt und welche wir im folgenden benutzen werden. Mit Hilfe dieser Methode konnten die wichtigsten Konstanten der Alkali- und Erdalkalimetalle in sehr guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund berechnet werden. Nach den modernen Auffassungen erklärt sich die Bindung der Metalle dadurch, dass sich das Elektron im Metall im Durchschnitt längere Zeit in Kernnähe aufhält als im freiem Atom.

Zum Schluss befassen wir uns noch mit der VAN DER WAALSschen Bindung. Die typischesten Beispiele dieser Bindungsart geben die Edelgase im festen Zustande, bei welchen die Bausteine die Atome sind und einige Molekülgitter, z. B. das feste H_2, *HF*, *HCl*, *HBr*, *HJ*, in welchem die Gitterbausteine die Moleküle bilden. Es blieb lange Zeit unerklärt, durch welche Kräfte die neutralen Atome bezw. Moleküle zusammengehalten werden. Zur Erklärung

---

[7] F. HABER: Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 1117, 1911; Berliner Ber 1919, S. 506 u. 990. J. J. THOMSON: Phil. Mag. 43, 721, 1922; 44, 657, 1922.

[8] J. C. SLATER: Phys. Rev. (2), 35, 509, 1930.

[9] E. WIGNER u. F. SEITZ: Phys. Rev. (2), 43, 804, 1933; (2), 46, 509, 1934 u. E. WIGNER: Phys. Rev. (2), 46, 1002, 1934.

[10] P. GOMBÁS: ZS. f. Phys. 94, 473, 1935; 95, 687, 1935; 99, 729, 1936; 100, 599, 1936; 104, 81, 1936 u. 104, 592, 1937. Die letztgenannte Arbeit wird im folgenden als 1 zitiert.

dieser Kräfte wurden auf Grund der klassischen Theorien eine Reihe von Versuchen angestellt, welche aber zu keinem befriedigendem Resultat führten. Eine konsequente Theorie dieser Kräfte wurde auf wellenmechanischem Wege von LONDON gegeben,[11] nach welcher zwischen neutralen Atomen und Molekülen zur 6-ten Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Polarisationskräfte auftreten. Nach den Untersuchungen von LONDON ist die Ursache der Anziehung anschaulich darin zu suchen, dass in einem Atom der Kern mit den Elektronen einen alternierenden Dipol darstellt, dessen Kraftfeld in einem anderen Atom ein elektrisches Moment induziert, welches eine solche Richtung hat, dass zwischen den beiden Atomen eine Anziehungskraft resultiert.

Nach dieser Zusammenfassung der verschiedenen Bindungsarten, gehen wir nun dazu über die Bindung des festen Heliums zu untersuchen, insbesondere zu zeigen, dass dieses in einem metallischen Zustande nicht existieren kann. Und zwar wenden wir bei unseren Ausführungen das vom Verfasser an anderer Stelle[12] ausgearbeitete statistische Metallmodell an.

In einer früheren Arbeit[13] konnte unter anderen gezeigt werden, dass das feste Hydrogen in einem metallischen Zustande nicht existieren kann. Das Hydrogenatom ist in gewisser Hinsicht den Alkaliatomen ähnlich, und zwar hat sowohl das Hydrogenatom als die Alkaliatome ein *s* Elektron. Der Unterschied besteht nur darin, dass bei dem Hydrogen der Atomrumpf fehlt, bzw. diesen der blosse Kern representiert. Zufolge dieser Ähnlichkeit war es vom theoretischen Standpunkte aus interessant zu untersuchen, ob ein metallischer Zustand des festen Hydrogens existenzfähig ist. Die theoretischen Untersuchungen zeigten im besten Einklang mit dem experimentellen Befund, dass das feste Hydrogen in einem metallischen Zustande nicht existieren kann.

Vom theoretischen Standpunkte aus ist noch das Helium von Interesse. Das Heliumatom hat bekanntlich zwei 1*s* Elektronen,

---

[11] F. LONDON: ZS. f. Phys. 63, 245, 1930; ZS. f. Phys. Chem. (B), 11, 222, 1930.

[12] P. GOMBÁS (l. c.).

[13] P. GOMBÁS: ZS. f. Phys. 99, 729, 1936.

die äusserste Elektronenschale ist also der äussersten Elektronenschale der Erdalkaliatome ähnlich, welche ebenfalls aus zwei s Elektronen besteht. Ausserdem bildet bekanntlich das Helium sehr instabile Moleküle, was, wie wir weiter oben sahen, dafür sprechen dürfte, dass ein metallischer Zustand des Heliums existenzfähig ist. Ausserdem scheint auch die geringe Zahl der Elektronen in der äussersten Elektronenschale einen metallischen Zustand zu unterstützen. Die nachfolgenden einfachen Überlegungen zeigen jedoch, dass ein metallischer Zustand des Heliums nicht stabil ist. Ähnliche Untersuchungen für die anderen Edelgase durchzuführen wäre von bedeutend geringerem Interesse, da bei diesen die Zahl der Elektronen in der äussersten Elektronenschale so gross ist, dass ein metallischer Zustand gänzlich unwahrscheinlich ist. Ausserdem würde man auch auf grosse mathematische Schwierigkeiten stossen.

Wir berechnen nun nach dem vom Verfasser in einigen früheren Arbeiten ausgearbeiteten statistischen Metallmodell die Gitterenergie eines metallischen Heliums. Für die Gitterenergie eines Metalles erhält man nach diesen Arbeiten pro Ion folgenden Ausdruck:

$$U = U_C + U_F + U_A + U_K + W_E + W_F + W_A + V + V_P \quad (1)$$

U_C bedeutet die Summe der COULOMBschen Wechselwirkungsenergie der Ionenladung mit dem Elektronengas der Metallelektronen und der gegenseitigen elektrostatischen Wechselwirkungsenergie der Metallelektronen, U_F gibt die FERMIsche Nullpunktsenergie, U_A die Austauschenergie der Metallelektronen, U_K bezeichnet die Energieverminderung der elektrostatischen Wechselwirkungsenergie der Metallelektronen mit antiparallelem Spin. Die Energieanteile W_E, W_F und W_A representieren die Wechselwirkungsenergie der Metallelektronen mit dem Atomrumpf, und zwar bedeutet W_E die elektrostatische Energieverminderung, W_F die Erhöhung der FERMIschen Nullpunktsenergie und W_A die Verminderung der Austauschenergie, welche daraus resultieren dass die Metallelektronen in die Atomrümpfe eindringen. Die Energieanteile V und V_P tragen der gegenseitigen Wechselwirkung der Atomrümpfe Rechnung und zwar bedeutet V die Summe der

aus der gegenseitigen Überdeckung der Rümpfe resultierenden elektrostatischen und FERMIschen (und eventuell Austausch-) Energie, während V_P die VAN DER WAALSsche Energie der Atomrümpfe bezeichnet.

Da sich im Helium Atom in der äussersten Schale zwei s Elektronen befinden, wenden wir für das Helium die für die Erdalkalimetalle hergeleiteten Ausdrücke an. Die Energieterme W_E, W_F, W_A, V und V_P verschwinden, da diese durch die Elektronen des Atomrumpfes bedingt sind und beim Helium der Rumpf durch den blossen Kern dargestellt wird. Man erhält also für die Gitterenergie

$$U = U_C + U_F + U_A + U_K \tag{2}$$

Die einzelnen Energieterme hat man aus den folgenden Formeln zu berechnen:

$$U_C = -\int_\tau \frac{2\varepsilon}{r} \Delta\Phi \frac{d\tau}{4\pi} - \int_\tau \Phi\Delta\Phi \frac{d\tau}{4\pi} \tag{3}$$

$$U_F = x_F \int_\tau (\Delta\Phi)^{\frac{5}{3}} \frac{d\tau}{4\pi} \tag{4}$$

$$U_A = -x_A \int_\tau (\Delta\Phi)^{\frac{4}{3}} \frac{d\tau}{4\pi}. \tag{5}$$

Die Berechnung von U_K ist nicht so einfach und wurde von WIGNER durchgeführt,[14] der seine Resultate graphisch darstellte. Die von WIGNER angegebene Kurve kann man in dem für uns wichtigem Intervall durch folgende einfache Funktion approximieren:

$$U_K = -2\frac{0{\cdot}06.2^{\frac{1}{3}}\varepsilon^2}{r_s} = -\frac{0{\cdot}151\varepsilon^2}{r_s}. \tag{6}$$

Da diese nur einen geringen Beitrag zur gesamten Gitterenergie gibt, ist der durch die rohe Approximation verursachte Fehler enwesentlich.

Die Bedeutung der in den Energietermen vorkommenden Zeichen ist folgende: ε ist die positive Elementarladung, r die

[14] E. WIGNER: Phys. Rev. (2) 46, 1002, 1934.

Entfernung vom Kern, τ ist der Raumteil den die ein Ion enthaltende Elementarkugel beansprucht r_s bezeichnet den Radius dieser Kugel, Φ bedeutet das elektrostatische Potential der Metallelektronen und $\Delta\Phi$ das $4\pi\varepsilon$-fache der Dichte der Metallelektronen. Mit denselben Annahmen wie in *l.c.*1 erhält man

$$\Delta\Phi = \frac{6\varepsilon}{r_s^3}, \quad \Phi = -\frac{1}{2}\Delta\Phi\left(r_s^2 - \frac{r^2}{2}\right). \tag{7}$$

$\varkappa_F$ und $\varkappa_A$ sind folgende Zahlenfaktoren:

$$\varkappa_F = \frac{3\pi^2}{10}\left(\frac{3}{4\pi^2}\right)^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H, \quad \varkappa_A = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}, \tag{8}$$

wo a_H den ersten Hydrogen-Radius bezeichnet.

Nach Durchführung der Integrationen erhält man für die Gitterenergie folgenden einfachen Ausdruck:

$$U = -\frac{A}{r_s} + \frac{B}{r_s^2} \tag{9}$$

wo $-\frac{A}{r_s}$ die Summe der Glieder (3), (5) und (6) darstellt, während $\frac{B}{r_s^2}$ die Energie U_F representiert. Die Bedeutung der Konstanten ist folgende:

$$A = 4{\cdot}906\varepsilon^2 \tag{10}$$

$$B = 2{\cdot}6\tfrac{3}{4}\varkappa_F\varepsilon^{\frac{5}{3}} = 3{\cdot}508\varepsilon^2 a_H. \tag{11}$$

Den Wert von r_s in der Gleichgewichtslage, welchen wir mit R bezeichnen erhält man aus folgender Gleichung:

$$\frac{dU}{dr_s} = 0 \tag{12}$$

woraus

$$R = \frac{2B}{A} = 1{\cdot}43a_H \tag{13}$$

folgt. Durch Einsetzen dieses Wertes in (9) erhält man für das Minimum der Gitterengerie

$$U = -\frac{A^2}{4B} = -1{\cdot}72\frac{\varepsilon^2}{a_H} = -46{\cdot}2\,e\text{-Volt}. \tag{14}$$

Die Gitterenergie ist die Summe der Ionisierungsenergien und der Sublimationsenergie. Es ist also

$$U = J_1 + J_2 + S \tag{15}$$

wo J_1 die erste und J_2 die zweite Ionisierungsenergie des freien Heliumatoms bedeutet und S die Sublimationsenergie des metallischen Heliums bezeichnet. In der Relation (15) hat man U mit positiven Vorzeichen zu nehmen, wie dies üblich ist, da man J_1, J_2 und S ebenfalls mit positivem Vorzeichen anzugeben pflegt. Die empirischen Werte für J_1 und J_2 sind die folgenden:

$$J_1 = 24{\cdot}5 \text{ } e\text{-Volt} \tag{16}$$

$$J_2 = 54{\cdot}2 \text{ } e\text{-Volt}. \tag{17}$$

Mit diesen Werten und mit dem in (14) angegebenen Resultat für U folgt für S

$$S = U - J_1 - J_2 = -32{\cdot}5 \text{ } e\text{-Volt}. \tag{18}$$

Man erhält also für die Sublimationsenergie des metallischen Heliums einen relativ grossen negativen Wert. Daraus ist folgendes zu schliessen. Das metallische Helium ist instabil und zwar hätte man pro Atom eine grössere Energie als 32,5 e-Volt, also pro Mol eine grössere Energie als 750 kcal aufzuwenden um es zusammenzuhalten. Während bei stabilen Gebilden, z. B. bei den stabilen Metallen man eine positive Sublimationsenergie erhält, welche von der Grössenordnung von 1—2 e-Volt ist.

Man könnte nun noch daran denken, dass sich eventuell nur das eine Elektron des Heliumatoms als Metallelektron betätigt, dass also die Zahl der Metallelektronen pro Atom nicht 2, sondern 1 beträgt. Man kann aber an Hand der vom Verfasser über die Nichtexistenz des festen Hydrogens gegebenen Ausführungen sehr leicht einsehen, dass man auch in diesem Falle eine negative Sublimationsenergie erhält, was bedeutet, dass die Rechnungen auch in diesem Falle zur Nichtexistenz eines metallischen Zustandes des festen Heliums führen.

Der expreimentelle Befund bestätigt vollkommen unsere Resultate. Zwar wurden für das feste Helium bis jetzt nur ziemlich wenige Untersuchungen durchgeführt, für das flüssige Helium

liegen jedoch einige Resultate vor, aus welchen man eindeutig schliessen kann, dass ein metallischer Zustand des Heliums nicht existiert. So z. B. wurde von WOLFKE und KEESOM der specifische elektrische Wiederstand des flüssigen Heliums bestimmt,[15] wobei sich ergab, dass dieser Wert von der Grössenordnung 10^{16} Ohm cm ist, der einem guten Isolator entspricht.

Aus unseren Resultaten geht also hervor, dass die Bindung des festen Heliums keine metallische Bindung ist. Ausserdem kann selbstverständlich auch keine Ionenbildung vorliegen. Gegen eine homöopolare Bindung sprechen auch mehrere Gründe, und zwar hauptsächlich der, dass die äusserste Elektronenschale des Heliumatoms eine abgeschlossene Schale ist, in welchem die Spine der beiden Elektronen abgesättigt sind. Wir kommen also zu dem Schluss, dass das feste Helium durch VAN DER WAALSsche Kräfte zusammengehalten wird. Diesbezügliche experimentelle Untersuchungen liegen nocht nicht vor.

Aus dieser Untersuchung ist zu sehen, dass man mit Hilfe theoretischer Überlegungen in einfachen Fällen über die chemische Bindung wichtige Aussagen machen kann. Ausserdem trägt die vorliegende Arbeit auch dazu bei, zu zeigen, dass die vom Verfasser für die metallische Bindung ausgearbeitete Methode konsequent ist, indem diese die Bindung der Alkali und Erdalkalimetalle erklärt und zugleich der Nichtexistenz eines metallischen Zustandes des Hydrogens und Heliums Rechnung trägt.

Dem ungarischen Kultusministerium danke ich für die Gewährung eines Forschungsstipendiums. Herrn Professor Dr. R. ORTVAY bin ich für sein fördendes Interesse zu Dank verpflichtet.

Budapest, Institut f. theoretische Physik der Universität, März, 1937.

---

[15] WOLFKE u. KEESOM: Physica, 3, 823, 1936.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ugarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

AZ ADSZORPCIÓS MAXIMUM.

FINKEY JÓZSEF l. tagtól.

A flotációs előkészítő eljárással előállított ásványos hab képződésénél nagy fontossággal bírnak különböző felületi, adszorpciós jelenségek. Ezeknek kísérleti és elméleti vizsgálataival foglalkozva — többek között — a következő eredményre jutottam.

Nemelektrolit anyagok oldatának fizikai adszorpciójánál, mint ismeretes, érvényes az

$$u = -\frac{c}{RT} \cdot \frac{\partial a}{\partial c} \tag{1}$$

GIBBS-féle egyenlet,[1] hol u az adszorbens felületegysége által adszorbeált oldott anyag mennyisége mólokban, c az oldat koncentrációja mól/l-ben, a az oldat felületi feszültsége dyn/cm-ben, R az egyetemes gázállandó, T pedig az abszolút hőmérséklet. Az 1. egyenletből következik, hogy adszorpció pozitív értelemben csak akkor mehet végbe, ha

$$\frac{\partial a}{\partial c} < 0,$$

vagyis, ha az oldott anyag *kapilláraktív* anyag.

Ha ismerjük (állandó hőmérsékletet feltételezve) az

$$a = f(c)$$

összefüggést, akkor az 1. egyenletből meghatározhatjuk az

$$u = \varphi(c)$$

függvényt is.

---

[1] H. FREUNDLICH: Kapillarchemie. 1. kiad. Leipzig, 1909. 51. l. és 4. kiad. I. k. 1930. 57. és köv. l.

FREUNDLICH szerint[1] az aktív anyagok oldatának felületi feszültsége, állandó hőmérsékleten, — tág határokon belől — elegendő pontossággal kiszámítható az

$$a = a_0 - sc^{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

empirikus képletből, hol a_0 a tiszta oldószer ($c=0$) felületi feszültsége, $s>1$ és $n>1$ pedig két, kísérleti adatokból meghatározható állandó.

Ha a és c között az összefüggést a 2. egyenlet alapján, grafikusan megszerkesztjük, egy olyan n-ed rendű parabolát kapunk, melynek tengelye párhuzamos a c-tengellyel.

A 2. egyenlet szerint c növekedésével a határtalanul csökkenik. $a=0$, ha

$$c = \left(\frac{a_0}{s}\right)^n,$$

azontúl pedig negatív. Ugyancsak a 2. egyenletből:

$$\frac{\partial a}{\partial c} = -\frac{s}{n} \cdot c^{\frac{1}{n}-1},$$

tehát

$$u = \frac{s}{nRT} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \alpha c^{\frac{1}{n}} \tag{3}$$

hol α egy új állandó.[2]

u és c között az összefüggést a 3. egyenlet szerint ugyancsak egy n-ed rendű parabola adja, melynek tengelye a c-tengely. Ugyanezen egyenlet szerint c növekedésével u értéke határtalanul növekedik. Ezt az egyenletet, mely az ismert *adszorpciós izotermákat* adja, általánosan használják.[3]

Ismert dolog, hogy úgy a 2., mint a 3. képlet csak *megközelítő*

---

[1] U. ott 1. kiad. 65. l.

[2] A 3. egyenletet WILH. OSTWALD—BOEDECKER-féle adszorpciós függvénynek is szokták nevezni.

[3] L. pl. C. DRUCKER—E. PROSKAUER: Physikalisch-chemisches Taschenbuch. Leipzig, 1933. II. k. 150—151. l. — W. A. ROTH: Chemiker Kalender. Berlin, 1928. III. k. 350. l. — BUZÁGH A.: A kolloidok természettudományi jelentősége. Budapest, 1931. 81. l. — GOMBOCZ E.: Természettudományi Lexikon. Budapest, 1934. 8—11. l. stb.

pontosságú K. SÖLLNER szerint[1] a 3. egyenlet által meghatározott, ú. n. *általános izoterma* rendszerint nem érvényes igen kis koncentrációnál; nagy koncentráció mellett pedig mindig elveszíti érvényét, de — különösen oldatoknál — általában ezt az empirikus képletet használjuk, mert nem ismerünk jobb és teorétikusan is megalapozott összefüggést, mely tágabb koncentrációs határon belől megfelelő pontosságú értékeket adna.

A 3 egyenlet szerint a koncentráció növekedésével az adszorbeált anyagmennyiségnek határtalanul kellene növekedni, holott a valóságban egy meghatározott koncentrációnál *adszorpciós maximumot, telítettségi állapotot* észlelhetünk.[2]

Ha tehát c-nek azt az értékét, mely mellett u maximum, c_m által jelöljük, akkor megállapíthatjuk, hogy a 2. és 3. egyenlet — igen kis koncentrációktól eltekintve — csak akkor érvényes, ha

$$c < c_m.$$

Ha kapilláraktív anyagok vizes oldatának felületi feszültségét — állandó hőmérsékleten — különböző koncentráció mellett meghatározzuk, rendszerint azt találjuk, hogy a értéke eleinte rohamosan, később mindlassabban csökkenik, s végül eljutunk egy olyan $c=c'$ koncentrációhoz, melyen túl a állandó, vagy gyakran növekedik is. Tehát

$$\left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)_{c'} = 0.$$

Az 1. egyenlet szerint $u=0$, ha

$$c = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial a}{\partial c} = 0,$$

vagyis u-nak c e két értéke között maximuma van.[3]

Az általános összefüggést az 1. ábrán látjuk grafikusan feltüntetve, ahol a mellett

$$-\frac{\partial a}{\partial c}$$

---

[1] C. DRUCKER—E. PROSKAUER id. m. 151. l.

[2] BUZÁGH id. m. 82. l.

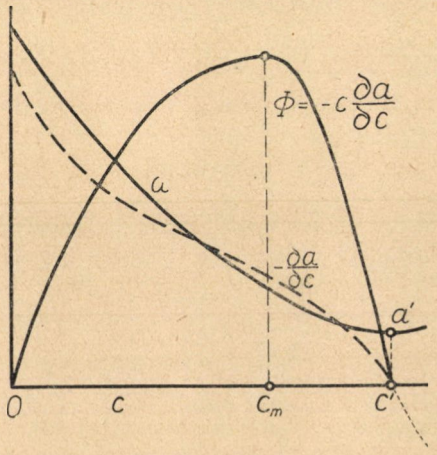
[3] J. FINKEY: Über die Theorie des Schwimmverfahrens. Bányászati és Kohászati Osztály Közleményei. Sopron, 1929. 49—70. l.

és az u-val arányos

$$\Phi = -c.\frac{\partial a}{\partial c}$$

függvények görbéi is meg vannak szerkesztve (T = konstans).

Nyilvánvaló, hogy a-nak ezt a változását nem lehet jól megközelíteni egy olyan parabolával, melynek tengelye a c-tengellyel



1. ábra.

párhuzamos, mert ekkor c növekedésével a határtalanul csökkenik. Mivel ugyanis $n>1$, azért

$$\frac{1}{n} - 1 = \frac{1-n}{n} = -\nu,$$

ahol $\nu > 0$, úgyhogy

$$\left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)_0 = -\frac{s}{nc^{\nu}} = -\infty.$$

Tehát az a-tengely a 2. egyenlet által meghatározott parabola érintője, úgyhogy e képlet szerint c igen kis értékei mellett a értéke olyan rohamosan csökkenik, ami a valóságban ritkán észlelhető. Éppen úgy a 3. egyenletből:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0 = +\infty,$$

amiből ugyancsak az következik, hogy igen kis koncentráció mellett u értéke rendkívül nagy mértékben növekedik.

A GIBBS-féle egyenlet érvényességét feltételezve, ha az $a=f(c)$, vagy $u=\varphi(c)$ függvények egyikét ismerjük, abból a másik meghatározható. Ez a két függvény tehát ebből a szempontból egyenértékű egymással, s az egyik jobb, vagy kevésbbé jó pontossága meghatározza a másikét is.

Vizsgálataim eredményének kellő megítélhetése végett meg kell említenem egyéb ismert képleteit is a felületi feszültségnek és az abszorpciós izotermának.[1]

A legrégibb és legegyszerűbb izoterma-képlet a HENRY-féle (1803), mely szerint:

$$u = ac,$$

hol a egy állandó. Ez nem egyéb, mint a FREUNDLICH-féle izoterma, ha $n=1$. Nyilvánvaló, hogy ez a képlet csak rendkívül kicsiny koncentráció mellett lehet érvényes, ahol az adszorpciós görbe egy rövid kezdő íve megközelítően az érintővel, vagy húrral helyettesíthető. Érvényességi határa tehát feltétlenül szűkebb, mint a FREUNDLICH-féle izoterma-egyenletnek. Egyébként ebből és az 1. egyenletből következik az

$$a = a_0 - sc$$

lineáris összefüggés.

A FREUNDLICH-féle izotermával, mint görbével már tágabb koncentrációs határon belől megközelíthető a valóságos u függvény. Mivel azonban ennek értéke c-vel együtt határtalanul növekszik, érvényessége jóval előbb megszűnik, mint az adszorpciós telítettség, illetőleg maximum.

Újabban gyakran idézik az

$$a = a_0 [1 - \alpha \ln(c/\beta + 1)]$$

[1] A következőkben közölt képleteket rendszerint némi átírással adom meg, hogy azok eddigi jelöléseimmel összhangban legyenek. Így pl. a felületi feszültségnél a helyett gyakran alkalmazzák a σ, az adszorpciónál pedig u helyett az A vagy α jelölést is. E képleteket rendszerint olyan alakra hozom, hogy a vagy u értékét közvetlenül adják meg. A különböző képletekben ugyanazon betűvel, pl. s vagy α által jelölt állandók, természetesen, nem egyenlők egymással.

alakban is írható SZYSZKOWSKI-féle képletet is,[1] mely gyakran jobb eredményt ad, mint a FREUNDLICH-féle 2. egyenlet. Ezt a nézetet vallja maga FREUNDLICH is idézett munkájának 4. kiadásában (I. k. 82. l.), de mindemellett ő is a 3. izoterma egyenletet tartja legmegfelelőbbnek (u. ott 93., 155. 244. és 253. l.), amiből viszont a GIBBS-féle egyenlet érvénytelensége következnék.

A SZYSZKOWSKI-féle képlet egyébként a LANGMUIR-féle

$$u = \frac{\alpha}{1/c+\beta}$$

izoterma képletből[2] vezethető le a GIBBS-féle egyenlet révén, e két képlet tehát egymással egyenértékű.

LANGMUIR képlete szerint $u=0$, ha $c=0$ és c végtelen növekedésével az

$$u_{max} = \alpha/\beta$$

véges határérték felé konvergál.

Azt lehetne ebből következtetni, hogy a LANGMUIR-féle egyenlettel tágabb koncentrációs határon belül lehet u értékét megfelelő pontossággal kiszámítani, mint a FREUNDLICH-féle egyenletből. Ezzel szemben gyakran tapasztalható, hogy az utóbbi egyenlettel jobban fejezhetők ki az adszorpciós viszonyok, mint a LANGMUIR-félével.[3] Utóbbi egyenlet egyébként teorétikus megfontolások alapján lett levezetve.

Csak a teljesség kedvéért említem meg a

$$cu' = au.e^{\frac{u(u'-u)}{\beta u'}}$$

G. C. SCHMIDT-féle egyenletet, mely komplikált alakja miatt is kevésbbé alkalmas gyakorlati számításra s egyébként is kevésbbé jó értékeket ad, mint a FREUNDLICH-féle izoterma-képlet.[4] Fenti képletben u' u-nak telitettségi értéke.

Az elmondottakból következik, hogy α-nak az értéke inkább

---

[1] Z. physikal Chemie. 1908. 385. l.

[2] J. Amer. Chem. Soc. 1917. 1885. l.

[3] BUZÁGH id. m. 82. l.

[4] O. BLÜH—N. STARK: Die Adsorption. Braunschwig, 1929. 12. l.

megközelíthető egy olyan n-ed rendű parabolával, melynek tengelye az a tengellyel párhuzamos és tengelypontja $c=c'$-hez tartozó $a_{min}=a'$-ben van. Ebben az esetben a 2 egyenlet helyett írható, hogy

$$a = a' + \alpha(c'-c)^n, \tag{4}$$

hol α és $n>1$ két, kísérletileg meghatározható állandó.

A 4. egyenletből:

$$\frac{\partial a}{\partial c} = -n\alpha(c'-c)^{n-1}, \tag{4a}$$

tehát:

$$u = \frac{\alpha n c}{RT}(c'-c)^{n-1}, \tag{5}$$

vagy

$$u = Kc(c'-c)^{n-1}, \tag{6}$$

hol K egy új állandó. A 4a. egyenletből következik, hogy

$$\frac{\partial a}{\partial c} = 0,$$

ha $c=c'$; továbbá 5. és 6.-ból hogy

$$u = 0,$$

ha $c=0$ és $c=c'$, e két szélső érték között pedig

$$u > 0.$$

A 4—6. egyenletek tehát eleget tesznek a kísérleti eredmények és a GIBBS-féle egyenlet által megkövetelt általános feltételeknek, feltéve, hogy

$$c \leqq c'.$$

$c>c'$ és az ehhez tartozó egyéb értékek nem érdekelnek bennünket.

A 4a. és 5. egyenlet szerint:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)_0 = -n\alpha c'^{(n-1)} \neq -\infty$$

és

$$\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0 = \frac{\alpha n c'^{(n-1)}}{RT} \neq +\infty.$$

Mindkét differenciálhányadosnak annál nagyobb az abszolút értéke, minél nagyobb n és a.

A 6. egyenlet szerint (T=konstans) u értéke akkor maximum, ha

$$\frac{du}{dc} = K\left[(c'-c)^{n-1} - (n-1)c(c'-c)^{n-2}\right] = 0,$$

vagyis ha

$$c = c_m = \frac{c'}{n}. \tag{7}$$

Az elmondottak alapján valószínű, hogy az általam megadott 4—7. *empirikus képletek* pontossága nagyobb és alkalmazhatósága tágabb koncentrációs közön belől van, mint az eddig ismert és használt egyéb képleteknek.

Ennek igazolására a következőkben két példát ismertetek, melyek egyikét saját kísérleteim, másikát idegen helyről származó kísérletek adatainak felhasználásával tárgyalok.

A flotációs előkészítő eljárásnál használt kémiai reagensek közül különös fontossággal bírnak a kapilláraktiv *habképző anyagok*, melyek vizes oldatban a víz felületi feszültségét lényegesen csökkentik, s ezáltal azt tartós habképzésre alkalmassá teszik.

Legfontosabb habképző anyag a *fenyőtűolaj* (pine oil), mely nem egységes vegyület. Főbb alkotó részei: pinen, fellandren, szilvesztren, bornilacetát, kadinen. Fontosabb alkotó részeinek $C_{10}H_{16}$ tapasztalati képlete szerint, molekulasúlya kb. 136. Aktivitása, az összetétel szerint változó. Ugyanannak a fenyőtűolajnak az aktivitása is változik (csökkenik) idővel, oxidáció következtében.

Fenyőtűolaj-oldat felületi feszültségét — különböző koncentráció mellett — sztalagmométerrel határoztam meg. A felületi feszültséget az

$$a = \frac{a_0 n_0}{n}$$

képletből számítottam ki, hol a_0 =75 dyn/cm a tiszta víz felületi feszültsége a kísérlet hőmérsékletén (20° C), n_0=20·60 a tiszta (desztillált) víz cseppszáma, n pedig az oldat cseppszáma.[1]

[1] Tekintettel a fenyőtűolaj fajsúlyára (0·87) és csekély mennyiségére (1-enként kevesebb, mint 0·72 g), az oldat fajsúlyát — a mérési eljárással elérhető pontosság figyelembevételével — a vizével vettem egyenlőnek.

Kísérleteim adatait, a következőkben ismertetendő kiegészítésekkel, az 1. sz. táblázatban állítottam össze.

1. sz. táblázat.

Koncentráció c		Cseppszám n	Felületi feszültség a dyn/cm		
mg/l	millimól/l		mért	kiegyenlített	számított
0	0	20·60	75·0	75·0	75·5
27·6	0·203	21·22	72·8	73·4	74·0
55·2	0·406	21·44	72·0	72·0	72·6
110·5	0·812	22·25	69·4	69·4	69·9
165·8	1·192	22·60	68·3	67·1	67·6
221·0	1·618	23·70	65·1	65·1	65·4
276·3	2·031	24·29	63·6	63·6	63·4
331·5	2·437	25·00	61·8	62·1	61·9
386·8	2·844	25·30	61·0	61·0	60·6
442·0	3·250	25·43	60·7	60·0	59·9
552·2	4·062	26·47	58·3	58·3	58·3
663·0	4·875	26·55	58·2	58·2	—
718·0	5·280	26·51	58·3	58·3	—

A megadott koncentrációhoz tartozó, s kísérletileg megmért felületi feszültségek értékeit a 2. ábrán vastag, kis körök által jelöltem. Ezek a pontok jól kiegyenlíthetők a vastag vonallal kihúzott Ia. görbe által. Eltérés csak négy pontnál van. Az 1. sz. táblázatba ezeket a grafikusan kiegyenlített értékeket is felvettem.[1]

Összehasonlítás céljából feltüntettem a 2. ábrán egy kilenc évvel ezelőtt (más helyről származó fenyőtűolajjal) meghatározott a—c-görbét is, melyet *II.* által jelöltem.[2]

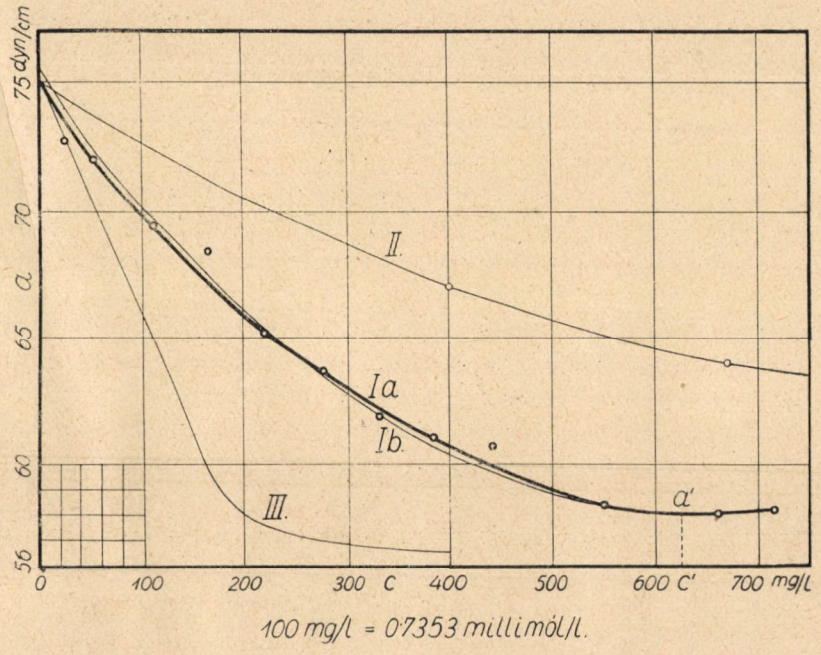
A *III.* görbe pedig A. W. FAHRENWALD által ugyancsak fenyőtűolajra meghatározott a—c-görbe.[3]

---

[1] A megfelelő értékeket az eredeti, nagyméretű rajzból mértem le.

[2] J. FINKEY id. m.

[3] Trans. Amer. Inst. Min. Eng. 1924. 661. l.



2. ábra.

Amint ezekből látható, a különböző fenyőtűolajak aktivitása lényegesen különbözhetik egymástól, ami a flotációs gyakorlat szempontjából rendkívül nagy fontossággal bír.

Az *Ia.* görbéről lemérhető, hogy

$$c' = 625 \text{ mg/l} = 0{\cdot}004\ 594 \text{ mól/l}$$

és

$$a' = 58{\cdot}1 \text{ dyn/cm.}$$

Az *a*—*c*-görbe elég jó megközelítéssel meghatározható az

$$a = 58{\cdot}1 + 825760\ (0{\cdot}004594 - c)^2$$

egyenlet által. *a*-nak ebből az egyenletből kiszámított értékeit is feltüntettem az 1. sz. táblázatban. Az így kiszámított értékekkel megszerkesztett, s vékony vonallal megrajzolt *a*—*c*-görbét a 2. ábrán *Ib.*-vel jelöltem.

A 7. egyenletből következik, hogy

$$c_m = 312 \text{ mg/l} = 2{\cdot}297 \text{ millimól/l}.$$

Kísérleteim szerint tényleg ezen koncentráció közelében volt a legerősebb habképződés megfigyelhető.

A flotációs gyakorlatban a habképző anyagok koncentrációja az úsztató fürdőben 10—200 mg/l szokott lenni,[1] mihez képest az előbb megadott érték túlnagynak látszik, ami azonban könnyen megmagyarázható. Kísérleteimnél az oldószer desztillált víz volt, míg a gyakorlatban a flotálást elektrolit-oldatban végzik el, ami a habképződést elősegíti. Azonkívül a gyakorlatban habképző anyagon kívül mindig adnak gyüjtőanyagot is a fürdőhöz, ami általában ugyancsak kapilláraktiv anyag.[2] Végül, amint az a 2. ábrából is következik, a kísérleteimnél használt fenyőtűolaj kevésbbé aktiv volt.

Egyébként a flotációs gyakorlatból is jól ismert tény, hogy a habképző anyag mennyiségét fokozatosan növelve, a habképződés eleinte fokozatosan erősödik, majd maximumot elérve csökkenik, s végül meg is szűnik.

A 7. egyenlet szerint könnyen meghatározható a 4. egyenlet exponense, ha a kísérleti adatok alapján az a—c-görbét, s ebből az u-val arányos Φ függvényt megszerkesztjük. Így, pl. az 1. ábrában:

$$c_m = 0{\cdot}667 \; c',$$

tehát

$$n = 1/0{\cdot}667 = 1{\cdot}5.$$

a értéke most már egyszerűen meghatározható c és a összetartozó értékpáraiból.

Képleteim további igazolására egy idegen helyről származó kísérletsorozat adatainak az átszámítását is bemutatom.

TRAUBE több eziránvú kísérleti adatát (Lieb. Ann. 1891. 27. l.) FREUNDLICH részletesen foldolgozta.[3] Idézett könyvének

---

[1] L. pl. FINKEY JÓZSEF: A flotációs ásványelőkészítő eljárás. Sopron, 1937. 58. l.

[2] U. ott 30., 36. és 61. l.

[3] FREUNDLICH id. m. 1. kiad. 66. l.

11. ábrájából az izobutilalkohol a—c-görbéjét kiválasztva, a értékét 0·1 c-egységenként lemértem.[1]

Ugyanerre a görbére FREUNDLICH — a 2. egyenletnek megfelelően — az

$$a = 75{\cdot}8 - 66{\cdot}7\, c^{0{\cdot}615}$$

egyenletet adja meg.

Az összetartozó értékeket a 2. sz. táblázatban állítottam össze.

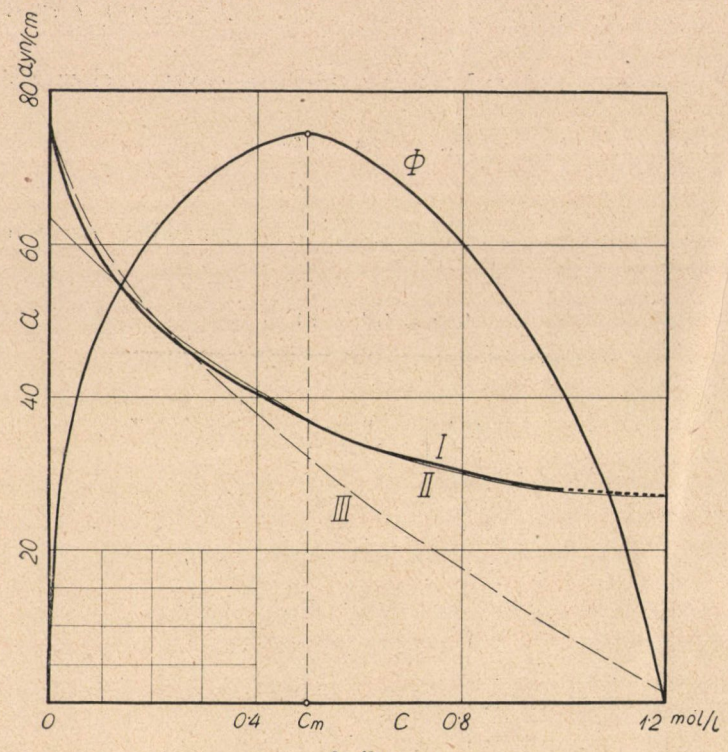
2. sz. táblázat.

c mól/l	a dyn/cm		
	kísérlet szerint	FREUNDLICH sz. számítva	FINKEY sz. számítva
0·	75·8	75·8	63·6
0·1	57·7	59·6	56·8
0·2	50·0	51·0	50·7
0·3	44·5	44·0	45·4
0·4	41·0	37·8	41·0
0·5	37·0	32·3	37·1
0 6	34·0	27·1	34·1
0·7	32·0	22·2	31·7
0·8	30·5	17·6	29·8
0·9	29·0	13·3	28·8
1·0	28·0	9·1	27·7
1·1[2]	27·5	5·1	27·3
1·2[2]	27·2	1·2	27·2

A 3. ábrán *I*-gyel jelöltem a vastag vonallal kihúzott, eredeti kísérleti görbét, *III*.-mal pedig a vékony szakadozott vonallal kihúzott, s a FREUNDLICH-féle egyenletből kiszámított görbét. Úgy a 2. sz. táblázatból, mint a 3. ábrából kitűnik, hogy a FREUNDLICH-

[1] Az ábrán 1 dyn/cm=2 mm, így a értéke elég pontosan lemérhető. A kísérleti adatok 15°C-ra vonatkoznak.

[2] Extrapolált érték.



3. ábra.

féle képlet csak $c=0{\cdot}2—0{\cdot}3$ között ad elfogadható pontosságú értékeket, valamint $c=0$ közvetlen közelében.

Az *I.* görbe *extrapolálása* által nyerjük, megközelítőleg, hogy

$$c' = 1{\cdot}2 \text{ mól/l}, \qquad a' = 27{\cdot}2 \text{ dyn/cm}.$$

A *Φ*-görbe megszerkesztéséből adódik továbbá, hogy

$$c_m = 0{\cdot}5 \text{ mól/l},$$

tehát a 7. képletből:

$$n = 2{\cdot}4.$$

A 4. képlet alapján nyerjük az *I.* görbe megközelítő egyenletét:

$$a = 27{\cdot}2 + 23{\cdot}5\,(1{\cdot}2—c)^{2{\cdot}4}.$$

a-nak fenti egyenletből kiszámított értékei ugyancsak megtalálhatók a 2. sz. táblázatban, a 3. ábrán pedig a megfelelő, s *II.*-vel jelölt görbe folytonos vékony vonallal van kihúzva.

Látható, hogy az általam megadott képletből számított értékek

$$c = 0{\cdot}1 - 1{\cdot}2$$

határok között igen jól megközelítik a kísérleti értékeket, jóllehet előbbieket az extrapólálás bizonytalansága is terheli.

Az 1. egyenletből következik, hogy az adszorpciós maximumnak is $c_m = 0{\cdot}5$ mól/l koncentrációnál kell lenni, s ezután u folytonosan kisebbedik, míg $c' = 1{\cdot}2$ mól/l közelében nulla lesz.

Természetes, ennek további feltétele, hogy az 1. egyenlet a megadott koncentrációs határon belől érvényes legyen, valamint, hogy az adszorptiv is megfelelő oldhatósággal bírjon.

Az általam megadott képletek, mindkét példa szerint, $c=0$ közelében adják a legkevésbbé jó eredményt, előnyük azonban egyéb képletekkel szemben, hogy számszerűleg is kifejezésre juttatják az adszorpciós maximumot és a második nulla értéket, véges koncentráció mellett, ami a GIBBS-féle egyenletnek szükségszerű következménye, de az eddigi egyéb képletekben nem jutott kifejezésre.[1]

Egyébként azonban — pl. az utolsó példában — az a és így az u vagy Φ görbének $c<0{\cdot}1$ értékek melletti pontatlansága grafikusan kiegyenlíthető, mert $c=0$ mellett $a=a_0$ és $u=\Phi=0$.

Az előzőkben publikált új képletek, természetesen, empirikus képletek, melyek az apoláros adszorpcióra csak formális felvilágosítást adnak.

---

[2] LANGMUIR és G. C. SCHMIDT képletei csak telítettséget határoznak meg. Valódi maximumot, amit helytelenül «negativ adszorpció»-nak neveznek, SCHMIDT—WALTER és GUSTAFSON kísérletileg is megfigyeltek. (BLÜH—STARK id. m. 96. l.)

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

ÜBER DAS MAXIMUM DER ADSORPTION.

Von JOSEF FINKEY, korr. Mitglied.

Bei der physikalischen Adsorption von Nichtelektrolyt-Lösungen ist die an der Flächeneinheit des Adsorbens adsorbierte Stoffmenge u eine Funktion der Konzentration c und der Temperatur T, d. h.

$$u = f(c, T).$$

Wenn T = konstant ist, dann ist u eine Funktion nur von c. Die so erhaltene Gleichung ist die Formel der *Adsorptionsisotherme*.

Nach der alten Formel von *Henry* ist

$$u = ac,$$

wo a eine Konstante ist. Diese Formel kann höchstens bei sehr kleinen Werten von c annehmbare Werte geben.

Nach der meist benutzten Formel der sog. *allgemeine Isotherme* (FREUNDLICH) ist

$$u = ac^{\frac{1}{n}},$$

wo a eine Konstante und $n>1$ ist. Nach dieser Formel wächst u mit c ohne Grenze, jedoch kann man bei bestimmten Konzentrationen eine *Adsorptionssättigung* bzw. ein *Adsorptionsmaximum* beobachten. Sie gilt daher nur für Konzentrationen vor dem Werte der Sättigung bzw. des Maximums. Sie verliert ihre Gültigkeit häufig auch im Gebiet ganz kleiner Konzentrationen.

Nach der Isothermenformel von *Langmuir* ist:

$$u = \frac{a}{1/c+\beta},$$

wo α und β zwei Konstanten sind. Nach dieser Formel nähert sich der Wert von u asymptotisch dem Werte

$$u_{max} = \alpha/\beta,$$

und erreicht denselben bei $c=\infty$.

Nach Untersuchungen des Verfassers soll u bei bestimmten $c=c_m$ ein echtes Maximum erreichen, so dass sie bei $c>c_m$ wieder abnimmt. Diese sog. «negative Adsorption» ist tatsächlich beobachtet, z. B. durch SCHMIDT—WALTER und GUSTAFSON.

Nach der neuen Isothermenformel des Verfassers ist

$$u = Kc\,(c'-c)^{n-1},$$

wo K eine Konstante und $n>1$ ist. c' ist derjenige Wert von c, bei dem

$$\frac{\partial a}{\partial c} = 0,$$

wo a die Oberflächenspannung der Lösung bedeutet. Nach dieser Formel ist $u=0$, wenn $c=0$ und $c=c'$ ist. u erreicht sein Maximum bei der Konzentration:

$$c_m = c'/n.$$

Hierbei wird die Gültigkeit der bekannten GIBBS-schen Gleichung, sowie eine entsprechende Löslichkeit des Adsorptivs angenommen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

PROTOPLAZMATIKAI TANULMÁNYOK ÉLVEFESTÉSSEL ÉS PLAZMOLIZISSEL.

CHOLNOKY BÉLÁ-tól.

Az V. táblával.

Az újabban végzett ilyen irányú vizsgálatok s azok egymásnak ellentmondó eredményei szükségessé tették, hogy a festékanyagok behatolását és felhalmozódását új vizsgálatok tárgyává tegyem. Kísérleti anyagnak különösen alkalmasnak látszottak az algasejtek, mert nem kell őket előbb szöveti kapcsolataikból kiszakítani ahhoz, hogy vizsgálhatókká váljanak, továbbá elegendő a festékanyagokat abban a mediumban feloldani, amelyben élnek, tehát könnyű ellenőrzőkultúrák életbentartása és vizsgálata.

Ezek a meggondolások vezettek, amidőn vizsgálataimat a *Spirogyrák* nehány faján, főképpen a *S. decimina* és *S. maiuscula* sejtjein végeztem. Nehány *Mougeotia*-sejtet is megvizsgáltam.

Kísérleteimhez methylenkék, methylzöld, methylibolya, gentianaibolya és vízben oldható safranin rendszerint 0·01%-os oldatait használtam. A vizsgálatokat egyrészt festékoldatokban kultivált növényeken, másrészt fedőlemez alatt, festékoldatok beszivatásával végeztem. Mivel a közeg hidrogenionkoncentrációja, a fény stb. faktorok a festékfelvételt lényegesen befolyásolják, oldószernek mindig magát a kulturmediumot használtam fel, hogy így az oldatban levő esetleges egyéb anyagok okozta eltéréseket kikapcsolhassam. A festékoldatokkal készített kultúrák mellett mindig megfelelő ellenőrző tenyészeteket tartottam s legtöbbször fajtiszta tenyészetekkel («Spezies-Reinkulturen») dolgoztam.

A részletes eredményeket s azok irodalmi vonatkozásait e dolgozat német szövegében közlöm, itt csupán összefoglalásképpen a következőket tartom célszerűnek ismertetni:

Mindenekelőtt sikerült megállapítani, hogy a behatoló festékmolekulák a sejtek plazmájából egyes molekulákat vagy molekulacsoportokat kicsapnak s ezekkel valószínűleg vegyileg egyesülnek. Ezt bizonyítja, hogy a sejtekbe behatoló festék színe megváltozik. A szín elváltozása függ a sejt faji hovátartozásától is, más pl. a *Spirogyra*, mint a *Mougeotia* sejtjeiben.

A behatoló festék eleinte csak diffuz színeződést okoz, valószínűleg azért, mert a keletkező festékvegyület-szemcsék (a plazmakolloidok egyes fázisainak s a festék molekuláinak vegyülete) eleinte a mikroszkópikus láthatóság határain alul maradnak. Hogy azonban szemcsék keletkeznek, az abból is következik, hogy a diffuz színeződés után csakhamar nagy tömeg apró festékvegyületszemcse jelenik meg a plazmában. Ezek eleinte Brown-féle mozgásokat végeznek, utóbb megnövekednek, összetapadnak s a sejt belsejében felhalmozódnak. A felhalmozódás s a szemcsék keletkezése egyáltalában nemcsak a vakuolumokban figyelhető meg, szóval a festék nemcsak a vakuomban gyülemlik össze, hanem ellenkezőleg a protoplaszt minden részében.

Felhalmozódás megfigyelhető a chloroplasztokban és a sejtmagokban is, de csupán a mérgezés igen előrehaladott állapotában, mutatva, hogy az egyes szervek a kívülről behatoló anyagok számára nem egyformán permeabilisek.

A felhalmozódó festékmolekulák a plazmakolloidok életfontos fázisaival lépnek kapcsolatba s ezzel ezeket az alkotóelemeket a további életműködések folyamából kizárják. Ezzel a festékbehatolás és felhalmozódás folyamata a sejtre nézve halálossá válik. A kísérletek folyamán egyetlen esetben sem sikerült festékoldattal már kezelt sejtet tartósan életben tartani, kivétel nélkül valamennyi, még a legkezdetlegesebb állapotban levő is, elpusztult, legalábbis osztódásra képtelennek bizonyult, azaz a magosztódás kezdetén tönkrement. Igy az élvefestés okozta folyamat lethalisnak és irreverzibilisnek bizonyult.

A felhalmozódás s az azt megelőző behatolás folyamán a plazmakolloidok bizonyos fázisai tehát kicsapódnak (Entmischung) s ezek a kicsapódó kolloidok kisebb térfogatra férnek el, mint amekkorát életükben betöltöttek. Olyanféle módon kontrahálódnak tehát, mint a vakuolumok a vakuolum-kontrakciónak nevezett

folyamat alatt. Ez utóbbival azonban az itt lejátszódó jelenségek nem téveszthetők össze, mert rendesen nemcsak a vakuolum, hanem sok más szerv is résztvesz benne, így, pontosan megállapíthatóan, a sejtmag is. A kontrakciójelenségek a vizsgálatok szerint inkább kollapszusnak foghatók fel.

Mivel a kontrahálódó rész nemcsak a vakuolumok összességét, azaz a vakuomot foglalja magában, a vakuolumokat burkoló elméletileg feltételezett tonoplazma létezése mellett nem bizonyít, sőt ellenkezőleg. Mivel a kontrahálódó rész határozottan elkülönülő, ozmotikus rendszernek látszik, valószínű, hogy ezeket a területeket haptogen hártyák borítják.

Bizonyos jelenségekből arra következtethetünk, hogy ha a vakuolumokat nem is határolja tonoplazma, a protoplaszt felületén minden valószínűség szerint van plazmolemma.

Különösen világosan felismerhető a haptogenhártyák, a plazmolemma s egyes szerveket (kromatofór, sejtmag) burkoló hártyák viselkedése a plazmolízis folyamán.

Plazmolitikus vizsgálatok bizonyítják azt is, hogy az élvefestett sejtek plazmájának viszkozitása a folyamat kezdetén erősen emelkedik, mert a sejtekben mindenfelé, teljesen váratlan helyeken is, negativ plazmolízis-helyek keletkeznek, sőt sokszor a WEBER-féle görcsös plazmolízisre emlékeztető állapotok jönnek létre.

A mérgezés előrehaladtával a viszkozitásviszonyok teljesen megváltoznak, egészen szokatlan jelenségek mutatkoznak, amelyek részletes ismertetése itt mellőzhető. Fontos azonban felemlíteni, hogy az erősen mérgezett sejtekben a plazmolízis folyamán különösen jól látható, hogy az egyes szervek önállóan működő ozmotikusan hatékony területekké alakulhatnak, sőt a plazmában is keletkezhetnek részletek egészen önálló ozmotikus képességekkel.

Ezek a jelenségek nemcsak arra vallanak, hogy haptogenhártyák keletkezhetnek, hanem arra is, hogy a festékfelvétel és felhalmozódás következtében a sejtek organellumainak korrelációja megszűnik. E nélkül elképzelhetetlen lenne az egyes szervek önálló működése. Különösen feltűnő ez amiatt, mert az ozmotikus hatékonyság nem egyszerre, hanem egymásután, az egyes szervekben más-más időpontban szűnik meg.

Élvefestés után már a plazmolízis maga is igen káros folyamat,

de különösen veszedelmes a deplazmolízis. Ezután az ismételt plazmolízis vagy egyáltalán nem, vagy, csak nagyon tökéletlenül sikerül. Különösen erősebben mérgezett sejteknél szembeötlő ez a hatás s ezek viselkedése arra vall hogy az élvefestés mindenekelőtt a plazma szemipermeabilitását szünteti meg s így a plazmolízis alatt és után a deplazmolízis folyamán a sejtből életfontos alkotórészek távoznak, vagy méginkább, a környezetből a rendesnél nagyobb mennyiségben kerülnek be anyagok, amelyek így ártalmasakká válhatnak.

A festékfelvétel a sejtmag szerkezetében is különleges elváltozásokat okoz, amelyek folyamán a magburkon belül periferikus, teljesen szemcsementes tér keletkezik s ezen belül helyezkednek el a sejtmag szemcséi (chromiolumok) és azok közepén a karyozóma. A chromiolumok lassanként teljesen eltűnnek, a szemcsementes tér növekedik, majd a magára maradó karyozóma vakuolizálódik s rövidesen fel is bomlik. Ebben az állapotban azonban a protoplaszt pusztulása is be szokott következni, sőt rendesen a mag festékfelvétele csak egészen előrehaladott mérgezés esetén indul meg. Így a mag élvefestését már a nekrobiózishoz kell számítani.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jan. 18-án tartott üléséből).

PROTOPLASMATISCHE UNTERSUCHUNGEN DURCH LEBENDFÄRBUNG UND PLASMOLYSE.

Von B. J. v. CHOLNOKY.

Mit Tafel V.

In Folgenden möchte ich einige Beobachtungen über die zytologische Wirkung von Farbstofflösungen mitteilen, die die Permeabilitätsprobleme jedoch nur ganz oberflächlich berühren sollen. Aus diesem Grunde wurden die Vorbedingungen der Farbstoffaufnahme, die Untersuchung der fördernden und hemmenden Faktoren ausser Acht gelassen und nur eine möglichst weitgehende Ausschaltung aller, die Wirkungsweise der aufgenommenen Farbstofflösungen irgendwie beeinflussenden Einwirkungen angestrebt. Um diesen Zweck je leichter erreichen zu können, habe ich Kulturen von verschiedenen *Spirogyra*-Arten angelegt, in welchen ich teils das ursprüngliche, allerdings sorgfältig filtrierte Medium, teils aber das USPENSKISche (1924) Medium als Kulturflüssigkeit verwendet habe. Letzteres hat sich ziemlich gut bewährt, obzwar manche Arten dieses — wie es scheint — nicht vertragen können. Zur Auflösung der Farbstoffe wurde stets das Kulturmedium selbst verwendet, in welchem die Pflanzen schon längere Zeit hindurch gut gediehen. Die Kontrollexemplaren wurden in dem farbstofflosen ursprünglichen Medium belassen. Um die Farbstoffaufnahme von Anfang an studieren zu können, habe ich die Versuchsexemplare sehr oft auch unter dem Deckglas behandelt. Ebenso wurden von Exemplaren, die mir einer weiteren Beobachtung wert erschienen, auch Hängetropfenkulturen angelegt. Die in der USPENSKISchen Lösung gezüchteten Kulturen waren nach 1—2 Monaten (nach mehrmaligen Überimpfen) fast absolute Reinkulturen, jedenfalls konnten sie als gute Speziesreinkulturen betrachtet werden, in welchen auch

normale Kopulation zu beobachten war. Die so kultivierten *Spirogyra*-Arten konnten daher später auch bestimmt werden und so stellte es sich heraus, dass die folgenden Versuche hauptsächlich mit den Arten *Spirogyra decimina* (MÜLL.) CZURDA und *S. maiuscula* (KG.) CZURDA ausgeführt wurden. Ausserdem sind auch andere Arten unter den mit Farbstofflösungen behandelten *Spirogyra*-Spezies, da aber die meisten Versuche am leichtesten mit den regelmässig kultivierten Arten ausgeführt werden konnten, ist die Anzahl der Versuche mit anderen Arten gegenüber denjenigen, die mit den obengenannten Arten ausgeführt worden waren, ganz verschwindend gering. Nebenbei habe ich Farbstoffspeicherung auch bei einigen *Mougeotia*-Zellen untersucht, die ich zufälligerweise in einer Rohkultur gefunden habe. Eingehendere Untersuchung dieser Zellen konnte nicht durchgeführt werden, da die Kulturversuche mit dem sehr knappen Material versagten.

Die zu Kulturzwecken benützten Farbstofflösungen wurden stets in einer Konzentration von 0·01% hergestellt, bei welcher die Kultur mindestens einige Stunden lang doch möglich war. Zu Untersuchungen unter dem Deckglas bediente ich mich — um die Vorgänge etwas zu beschläunigen — 0·1%-iger Lösungen, in welchen — wie die Erfahrung lehrte — die Farbstoffaufnahme schneller vor sich ging. Da mir aber zur Vornahme quantitativer Messungen entsprechende Mittel nicht zur Verfügung standen, möchte ich diese Frage hier nur kurz berühren und feststellen, dass bei zunehmenden Farbstoffkonzentrationen im Aussenmedium — bis zu einer gewissen Grenze — eine Beschleunigung der Farbstoffaufnahme bei allen von mir untersuchten Farbstoffen zu konstatieren war, wodurch eher die Beobachtungen von M. BROOKS-MOLDENHAUER (1932 bei Ortho-Chlorophenol-Indophenol und Orthokresol), als die von M. V. HOMES (1933 bei Methylenblau) bestätigt werden. Während der Untersuchungen konnten die *pH*-Werte mangels entsprechender Einrichtungen ebensowenig, wie die Schnelligkeit der Permeation gemessen werden, und da die Azidität des Mediums für die Farbstoffaufnahme ausschlaggebend zu sein scheint (vgl. z. B. PRÁT, 1931*b*), habe ich getrachtet, die Unterschiede in der Azidität womöglich auszuschalten. Deshalb habe ich die Farbstoffe in dem Kulturmedium selbst aufgelöst. So

war die Azidität des Kulturmediums und des Lösungsmittels praktisch gleich hoch. Das gleiche gilt auch von den durch die Schwankungen der Lichtintensität und Beleuchtungsdauer verursachten Veränderungen der Farbstoffaufnahme (vgl. LEPESCHKIN 1930*a*, A. MODER 1932) indem ich alle Kulturen unter vollkommen gleichen Lichtverhältnissen aufbewahrt habe.

Die von der Fa. HOLLBORN (Leipzig) bezogenen Farbstoffe, die bei den Untersuchungen Verwendung fanden, sind folgende: Methylenblau, Methylgrün, Methylviolett, Gentianaviolett und Safranin wasserlöslich. Einige Versuche wurden auch mit Neutralrot angestellt, die Ergebnisse dieser Versuchsreihe sollen aber hier überhaupt nicht berührt werden, da mir von diesem Farbstoff in einer zuverlässlich reinen Qualität nur sehr knappe Mengen zur Verfügung standen und ich die wenigen Befunde nachträglich noch durch neue Untersuchungen werde ergänzen müssen. Jedenfalls lassen diese wenigen Versuche darauf schliessen, dass die Aufnahme und Speicherung des Neutralrots im wesentlichen denselben Gesetzmässigkeiten folgt, wie die im Folgenden für andere Farbstoffe festgestellt wurden.

Nach den Beobachtungen von GICKLHORN (1929*a*), GICKLHORN und MÖSCHL (1930), GUILLERMOND (1930), WEBER (1930*a* und *b*) speichert die lebende Pflanzenzelle die aufgenommenen Farbstoffe in erster Linie in den Vakuolen auf. Bei den Versuchen der genannten Autoren spielen Neutralrot und Methylenblau die grösste Rolle. Allerdings hat eben GICKLHORN (1929*b*) in einer zusammenfassenden Veröffentlichung mitgeteilt, dass in den Zellen von *Ceratophyllum demersum* und *C. submersum* die aufgenommenen Farbstoffmengen auch im Zytoplasma angehäuft werden. Es muss dieser Fall jedoch als eine Ausnahme betrachtet werden, da die Anhäufung der Farbstoffe in den Vakuolen so eindeutig und allgemein angenommen wird, dass z. B. BECKER (1932*a*) schon über «Vakuolarfarbstoffe» spricht und scheint mit diesem Ausdruck zu meinen, dass die beiden Farbstoffe Neutralrot und Methylenblau stets nur in den Vakuolen gespeichert werden können. Die Färbungsversuche mit den *Spirogyra*-Zellen scheinen diese Ergebnisse nicht zu bestätigen.

Bei einer nicht näher bestimmten, langzelligen *Spirogyra*-Art

z. B. habe ich in den anfänglichen Zuständen der Färbstoffspeicherung stets die der Abb. 2 ähnlichen Bilder gesehen. Sie lassen deutlich erkennen, dass sich die Farbstoffsubstanzen hauptsächlich in der Nähe des Chloroplastenbandes in der Form von unregelmässigen körnigen Ansammlungen angehäuft haben. Die Plastiden der *Spirogyra*-Arten sind, wie erst kürzlich bekannt wurde (vgl. die Zusammenfassung bei CZURDA 1932, oder die neuesten Untersuchungen von SAKAMURA 1933) rinnenförmig, und werden durch das «Rinnenplasma» (SAKAMURA, 1933) ausgefüllt. Dieses Plasma gehört keinesfalls zu dem Vakuom und deshalb kann es nicht bezweifelt werden, dass die hier vorhandenen Farbstoffkörner mindestens teilweise im Plasma der *Spirogyra*-Zelle eingelagert sind, da sie meistens reichlich auch in dem Rinnenplasma vorhanden zu sein pflegten (vgl. Abb. 2 und 3. Auf der letzteren ist die Farbstoffspeicherung im Rinnenplasma nach Behandlung mit Methylenblaulösung dargestellt). Die Färbungen mit Gentianaviolett zeigen deutlich, dass die meisten Farbstoffklümpchen sich in der Nähe des Chromatophors anhäufen (Abb. 2). Hiemit soll jedoch keinesfalls behauptet werden, dass in dieser Erscheinung eine allgemein gültige Regelmässigkeit der Farbstoffspeicherung zum Ausdruck lange, bei *Spirogyra* konnte Sie aber stets beobachtet werden, besonders in den Zellen, in welchen die steileren Windungen der Plastiden die klare Beobachtung begünstigen. Allerdings muss schon jetzt bemerkt werden, dass neben den Farbstoffklumpen auch eine diffuse Färbung des Zellkörpers beobachtet werden kann, die sich aber keinesfalls nur auf das Vakuom erstreckt und die schon vor dem Auftreten der Farbstoffklumpen gleich am Anfang der Farbstoffaufnahme in Erschei ung tritt. Aehnlich verhalten sich auch die Zellen der *Mougeotia* (Abb. 1), in welchen die Anhäufung der Farbstoffkörnchen eben wegen des einfacheren Baues der Zellen immer deutlich hervortrat. Hier waren die Farbstoffkörner immer auffallend regelmässig kugelig und ziemlich gross. Bei *Spirogyra* sind die Körner verhältnissmässig klein und verkleben sich sehr schnell zu grösseren Massen, wodurch es hier zur Bildung von unregelmässigen Gebilden kommt. Da die Farbstoffkörner bei *Mougeotia* stets gröber sind (sie verkleben sich nur nach einem

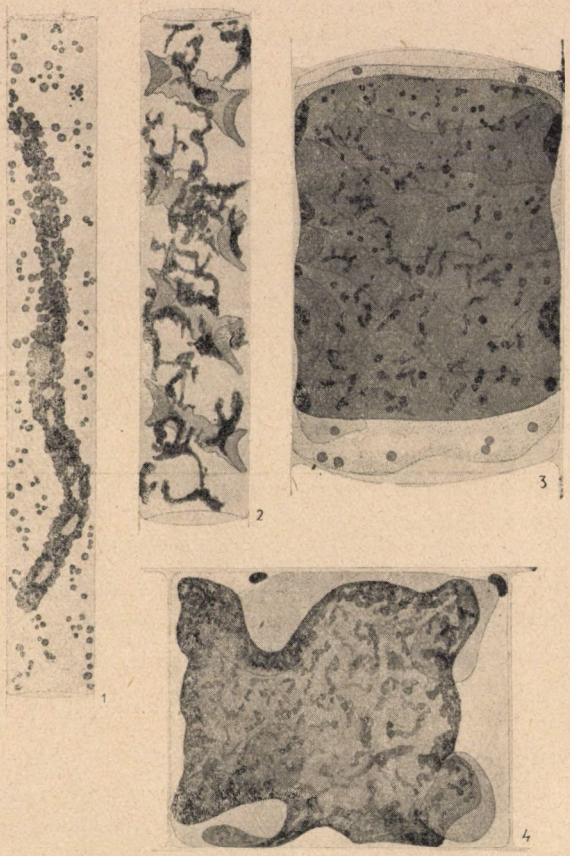


Abb. 1. *Mougeotia* sp. Lebendfärbung mit Gentianaviolett. Vergr. 500/1. — Abb. 2. *Spirogyra* sp. Lebendfärbung mit Gentianaviolett. Vergr. 500/1. — Abb. 3. *Spirogyra decimina*, Lebendfärbung mit Methylenblau. Vergr. 1000/1. — Abb. 4. *Spirogyra decimina*, Lebendfärbung mit wasserlöslichem Safranin. Vergr. 1000/1.

entsprechenden Wachstum), scheinen die Farbstoffansammlungen in den *Mougeotia*-Zellen regelmässiger zu sein.

Bei *Mougeotia* fällt auch eine andere Eigentümlichkeit auf, die bei *Spirogyra* in weit geringerem Masse beobachtet werden konnte. Die Lebendfärbungsversuche mit Gentianaviolett (Abb. 1)

ergaben nämlich nicht bläulichlila gefärbte Kugeln, wie dies nach der Farbe der wässerigen Lösung des Farbstoffs zu erwarten wäre, sondern die Körnchen waren immer ausgesprochen rötlich. Bei *Spirogyra* konnte ebenfalls stets eine Veränderung der Farbentönung festgestellt werden, besonders bei Benützung von Gentianaviolett und Methylviolett, bei Verwendung von Methylenblau war dagegen die Farbstoffansammlung stets kaum von der Farbe der wässerigen Lösung verschieden. Im Gegenteil bildeten sich nach Einwirkung von Methylenblaulösungen in den *Mougeotia*-Zellen gänzlich farblose, stark lichtbrechende Kügelchen aus, die sich — von ihrer Farblosigkeit abgesehen — in jeder Hinsicht den rötlichen Körnchen von Gentianaviolett ähnlich verhielten. Aus dieser Aenderung der Farbentönung muss unbedingt gefolgert werden, dass der Farbstoff während der Passage durch die *Mougeotia*-Protoplasten eine Veränderung erlilt, d. h. der Farbstoff sich in den Zellen nicht in seiner ursprünglichen chemischen Konstitution anhäuft. M. Irwin hat ähnliches bereits bei Verwendung von Methylenblau (1929 und 1931*b*), Brillantkresylblau (1931*a*) und Krystallviolett beobachtet, auch konnte sie auf spektrophotometrischem Wege feststellen, dass in die Zelle nur die freien Farbstoffbasen eingedrungen waren, wo sie dann nicht mehr zu dem ursprünglichen Farbstoff zurückgebildet worden waren. Nach ihren Feststellungen kann bei Verwendung von Methylenblau das Farbsalz nur in dem Falle in die Zelle eindringen, wenn die Plasmahaut schon irgendwie beschädigt ist. Augenscheinlich können diese Behauptungen durch meine Beobachtungen nicht bestätigt werden, und wenn die Befunde von Fr. Irwin für die *Valonia*- und *Nitella*-Zellen zutreffend sind — was zu bezweifeln eben auf Grund der Untersuchungen von Gicklhorn (1929*a*) berechtigt zu sein scheint, da Gicklhorn eine chemische Bindung der Farbstoffe mit den Lipoiden feststellen konnte — können sie für *Spirogyra* und *Mougeotia* nicht zutreffen. Es ist nämlich kaum anzunehmen, dass in meinen Präparaten, in welchen in überwiegender Mehrzahl *Spirogyra*-Fäden vorhanden waren, eben die wenigen *Mougeotia*-Zellen unversehrt und alle *Spirogyra*-Zellen schon beschädigt worden wären, da ich ja — wie schon gesagt — sehr konsequent eine vollkommen farblose Anhäufung (Farbstoffbase nach Irwin) in *Mou-*

geotien und eine normal blau gefärbte Ansammlung (Farbstoffsalz nach IRWIN) aber in den *Spirogyra*-Zellen feststellen konnte. Es ist, nach meiner Meinung, von weit grösserer Wahrscheinlichkeit, dass die durch die Plasmahaut eintretenden Farbstoffmoleküle in den Zellen sofort zu gewissen Verbindungen des Protoplasten chemisch gebunden werden und deshalb das Verhalten der Moleküle mit einem Schlag verändert wird, wodurch auch der Umschlag des Farbentons leicht erklärlich ist. Was die *pH*-Messungen von M. IRWIN betrifft, so scheinen diese im ersten Augenblick wirklich ihre Meinung zu bestätigen, wenn man jedoch bedenkt, dass alle Baustoffe der Zelle im Laufe der Lebendfärbung eine tiefgreifende Veränderung erleiden, so kann es uns nicht Wunder nehmen, dass die Azidität derselben sich verändert. Im folgenden sollen diejenigen Veränderungen noch eingehend besprochen werden, die die Zellen durch die Lebendfärbung erleiden müssen und die selbstverständlich auch Veränderungen in *pH* aller Zellbestandteilen hervorrufen müssen. Diese Veränderungen können selbst die von den Farbstoffmolekülen entstandenen mehr oder minder lockeren Verbindungen verursachen, wie es besonders nach den Untersuchungen von BROOKS-MOLDENHAUER (1932) eine gewisse Wahrscheinlichkeit hat.

Aus alledem folgt, dass die in die Zelle eintretenden Farbstoffmoleküle schon im Zytoplasma zu gewissen Molekülen der Plasmakolloide gebunden werden, die nach dieser chemischen Veränderung nicht mehr ihre ursprüngliche kolloidale Form behalten können. So lassen sich die Entmischungserscheinungen am leichtesten verstehen, da eine solche sofort nach Beginn der Lebendfärbung zu beobachten ist. Eine diffuse Färbung ist allerdings ebenfalls immer zu sehen, aber in dem diffus gefärbten Raum werden die durch Entmischung entstandenen Körner immer zahlreicher und grösser, so dass in Kürze die den Abb. 3 und 4 ähnlichen Bilder entstehen. Die diffuse Färbung findet ihre Erklärung wahrscheinlich darin, dass in besagten Fällen neben den Verbindungen mit den Molekülen des Plasmas auch eine wässerige Farbstofflösung vorhanden ist. Allerdings ist auch die Erklärung möglich, dass die durch Entmischung entstandenen Körnchen am Anfang noch unter den Grenzen der mikroskopischen Sichtbarkeit liegen. Die Entstehungsweise der gröberen Farbstoffkörnchen scheinen die

letztere Annahme zu bestätigen. Letztere Annahme wird auch dadurch bestätigt, dass in den *Mougeotia*-Zellen nach Behandlung mit Methylenblau keine diffuse Färbungen nachgewiesen werden konnten, zeigend, dass die Farbstoffmoleküle gleich in eine farblose Verbindung umgewandelt wurden. Diese Umwandlung kann aber nur an Hand einer Entmischung zustande kommen.

Die Beobachtungen GICKLHORN's (1929*a*) haben bereits dargetan, dass die in die Zelle eingedrungenen Farbstoffe aus dieser, während deren Lebensdauer nicht mehr entfernt werden können. Diese Beobachtungen werden durch die Tatsache noch mehr bestätigt, dass neuerdings mit Hilfe von Mikroinjektionen Farbstoffe (PLOWE, 1931*b*) in die Vakuolen (und auch in das Zytoplasma) injiziert worden sind, die nicht mehr herausdiffundierten (undzwar nach PLOWE nicht einmal vom Plasma in das Vakuol oder umgekehrt- So ist erstens gezeigt, dass die Farbstoffe nicht nur von den Stoffen der Vakuole sondern auch von denen des Plasmas gewisse zur Entmischung zwingen, zweitens dass weder der Farbstoff selbst, noch die Farbstoffverbindung die Zelle verlassen kann. Wenn es sich also bei der Entmischung um lebenswichtige Stoffe handelt, ist der Vorgang irreversiebel und immer letal. Das konnte ich selbst wiederholt beobachten. Ich habe des öfteren versucht Zellen, die nur wenige Minuten der Wirkung einer 0·01%-igen Farbstofflösungen ausgesetzt waren, dadurch zu retten, dass ich sie schon in einem anfänglichen Grad der diffusen Färbung wieder im farbstofflosen Medium weiter zu kultivieren versuchte. Die Versuche zeitigten stets einen vollständig negativen Erfolg, da die diffuse Färbung in den *Spirogyra*-Zellen gar bald in eine Entmischung überging, indem zuerst die die BROWN'sche Molekularbewegungen zeigenden Körnchen erschienen, die später — je nach der Menge des aufgenommenen Farbstoffes — in grösseren oder kleineren Gruppen vereinigt zu Stillstand gebracht wurden und schliesslich zum Absterben der Zelle führten. Das Leben solcher in Vergiftungszustand befindlicher Zellen konnte mitunter noch Tage lang dauern, eine Heilung konnte aber nie beobachtet werden. Besonders auffallend war das völlige Unterbleiben jedweder Kern- und Zellteilungen, obzwar die Kerne mindestens zu Beginn des Vorganges keinerlei Degenerationserscheinungen zeigten. Das

Fehlen des Teilungsprozesses könnte teilweise sicherlich auf Grund der Untersuchungen von W. A. BECKER (1929, 1932*a* und *b*) Erklärung finden, dem es gelang Unregelmässigkeiten der Kernteilungen in den meristematischen Zellen höherer Pflanzen während der Lebensfärbung festzustellen, die ganz bestimmt zu einem Absterben von denjenigen Zellen geführt haben, die in seinen Untersuchungsmaterialen zu einer Teilung geschritten sind. BECKER behauptet zwar, dass die sehr starken Verdünnungen der Farbstoffe die tödliche Wirkung dieser Stoffe ausschaltet, meiner Meinung nach könnte diese Erscheinung jedoch vielmehr daher rühren, dass die meristematischen Zellen in diesen dünnen Lösungen überhaupt kein Farbstoff speichern konnten, da die spärlichen Farbstoffmoleküle schon früher durch andere Zellen (Epidermis) zurückgehalten worden waren. Bei meinen *Spirogyra*-Versuchen konnten nämlich auch bei sehr starker Verdünnung (1 : 500,000) dieselben schädigenden Einwirkungen beobachtet werden, vorausgesetzt, dass die Lösung in einer unbegrenzten Menge der Zelle zur Verfügung stand. Dass diese Beobachtungen zellphysiologisch sehr wohl verständlich sind, zeigen auch die Untersuchungen von KERR (1933), der an Wurzelhaaren feststellen konnte, dass die in das Vakuole injizierte ansonsten gänzlich harmlose Salze tiefgreifende Veränderungen hervorrufen können, die das Absterben der Zelle verursachen, obzwar in seinen Untersuchungsobjekten Entmischungserscheinungen nicht nachweisbar waren (es konnte höchstens Koagulation festgestellt werden). Das gleiche gilt auch in Bezug auf die Beobachtungen von A. ZELLER (1931), der bei marinen Rotalgen schon dadurch eine letale Wirkung erzielen konnte, dass er seine Versuchsobjekte vorübergehend (manchmal bis 30 Minuten lang) in Kulturmedien versetzte, die die Salze des Meerwassers nur teilweise enthielten. Zweifelsohne haben in besagten Fällen annähernd dieselbe Ursachen zum Absterben der Zellen beigetragen, wie bei den mit Farbstoffen behandelten Zellen. Bedauerlicher Weise wurde eine eingehende zytologische Beobachtung der so behandelten Zellen nicht durchgeführt. Allerdings konnte ZELLER das Absterben erst nach 120 Stunden feststellen, von einer Heilung konnte aber auch in diesen Fällen nicht die Rede sein. Das gleiche gilt auch für die vital gefärbten *Spirogyra*-Zellen.

Wenn die Farbstoffaufnahme nicht künstlich unterbrochen wurde, speicherten die *Spirogyra*-Zellen bis zu einem Grad den zur Verfügung stehenden Farbstoff. Inzwischen vermehrten sich die durch Entmischung entstandenen Körnchen immer mehr und verloren zusehends die Fähigkeit der Molekularbewegung. Dieser Umstand lässt sich teilweise durch die Erhöhung der Viskosität in der plasmatischen Umgebung erklären (vgl. z. B. WEBER 1930 *a* und *b*), die — wie später noch gezeigt werden soll — ebenfalls eine Wirkung der Lebendfärbung ist, und die nicht immer klar beobachtet werden kann, da durch das Verklumpen der anfangs klienen und freistehenden Körnchen die Molekularbewegungen ebenso unmöglich gemacht werden. Letztere Annahme wird dadurch bewiesen, dass in Zellen, in welchen die grossen Klumpen schon unbewegt liegen, die kleineren Brocken noch immer lebhafte Bewegungen ausführen können.

Wenn die Anzahl der Farbstoffkörnchen schon eine beträchtliche ist, erscheint plötzlich unter dem Mikroskope ein Teil der Zelle gänzlich ohne diffuse Färbung (dieser Teil enthält höchstens vereinzelte Farbstoffkörnchen), während der andere Teil duffus gefärbt und mit kleineren und grösseren Farbstoffklümpchen vollgestopft ist (z. B Abb. 3, *Spirogyra decimina*, Methylenblau). Von einer Vakuolenkontraktion im Sinne HÖFLER's (1928*a* und *b*) oder WEBER's (1930 *a* und *b*) kann hier nicht die Rede sein, da ja, wie aus Abb. 3 ersichtlich, in dem sich kontrahierenden Anteil nicht nur die Vakuole, sondern auch manche plasmatischen Bestandteile der Zelle beteiligt sind. Diese Tatsache wird vor allem dadurch bewiesen, dass das Rinnenplasma SAKAMURA's (1933) ebenfalls zu dem genannten kontrahierenden Teil gehört. Dieses Plasma ist reichlich mit Körnern der Farbstoffverbindung vollgestopft und besonders am Rande der Zelle gut sichtbar. Es liegt noch teilweise in der Rinne des Chromatophors, teilweise sind aber schon gewisse Abschnitte bereits von der Plastide losgelöst (links oben). Von den übrigen Plasmateilen ist das Rinnenplasma aber auch in diesen Abschnitten scharf abgetrennt und durch Heben und Senken des Tubus war der Zusammenhang mit den noch normal liegenden Teilen immer feststellbar. Später werden allerdings diese anfangs so scharfen Grenzen immer verschwomme-

ner und am Ende steht ein einheitlicher, kontrahierter Körper vor uns, der einstweilen in Fortsätzen und Anhängseln ihre Beziehungen zu dem Rinnenplasma verrät (Abb. 4, Safranin wasserlöslich). Alle diese in Zusammenziehung befindlichen Plasmapartien können wahrscheinlich aus rein mechanischen Gründen der Hauptmasse nicht folgen, und so bilden sich hier und da auch in der nicht kontrahierten Masse kleine Kugeln und Tröpfen aus, die nach der Menge des enthaltenen Farbstoffes manchmal heller (Abb. 3), in anderen Fällen aber auffallend dunkel gefärbt sind (Abb. 4). Die Intensität der Färbung ist aber keinesfalls von der Qualität, des Farbstoffes oder von den Eigenschaften der Zelle abhängig, sie scheint vielmehr gänzlich zufällig zu entstehen. Die sich nicht kontrahierenden, ungefärbten Teile sind stets feinkörnig, undzwar so feingekörnt, wie es das unversehrte Plasma der betreffenden Zelle nie zu sein pflegt. Die Zusammenziehung der sich kontrahierenden Teile verursacht oftmals einen Kollapsus des ganzen Protoplasten, das sich demzufolge von den Wandungen abhebt und ein wenig der kontrahierenden Masse folgt. In anderen Fällen kann eine solche nicht kontrahierte Masse überhaupt nicht festgestellt werden. In solchen Fällen liegen im Lumen der Zelle ausschliesslich die gefärbten kontrahierten Massen und von diesen mehr oder minden getrennt die Überreste der stark veränderten Chromatophoren. Sonst wird der Raum im Zellumen von einer hyalinen Flüssigkeit erfüllt, die in ihren Eigenschaften wahrscheinlich nur in sehr geringem Masse von denen des Kulturmediums verschieden ist (Abb. 4, 5, 6 u. 7). Auch diese Erscheinungen sind nicht von der Qualität der gebrauchten Farbstoffe abhängig und scheinen vielmehr den Grad des Vergiftungszustandes der Zellen anzuzeigen, da in den Zellen, die mehr Farbstoff gespeichert haben, die farblose und feinkörnige Plasmamasse nicht vorhanden war (Ausnahmen konnten in manchen Fällen festgestellt werden). In manchen Zellen (Fadenstücken) kann man demnach der Vakuolenkontraktion ganz ähnliche Zustände beobachten (Abb. 5) und nur wenn die Genese dieser Fälle bekannt ist, kann ihre wirkliche Natur richtig beurteilt werden, obzwar die Tatsache, dass der Kern stets in der kontrahierten Masse eingeschlossen ist, ermöglicht die Erkenntnis der prinzipiellen Verschiedenheit der hier beschriebenen Erscheinun-

gen von den kontrahierten Vakuolen HÖFLER's (1928*a* und *b*) oder WEBER's (1930*a* und *b*). Ich konnte ausserdem auch Fälle beobachten, die vollkommen dem durch WEBER (1930*a*) als Aggregation beschriebenen Vorgang ähnlich waren (Abb. 6 und 7). In diesen Fällen zerfielen nämlich die sich kontrahierenden Plasmamassen

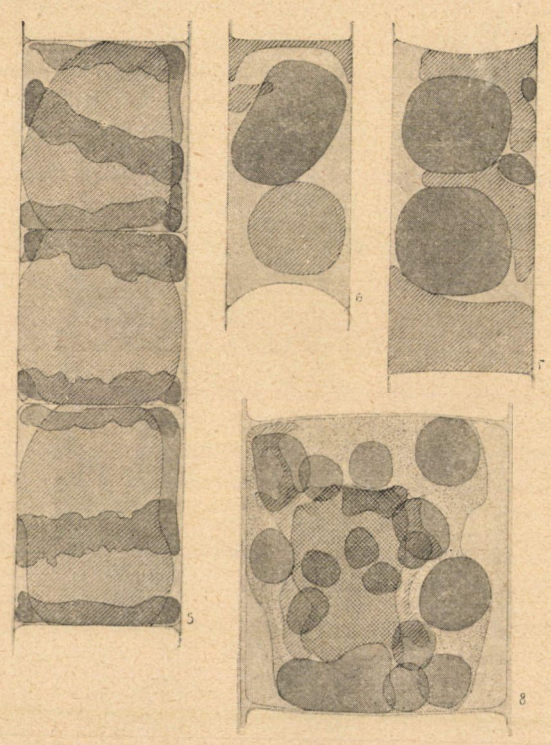


Abb. 5—7. Fadenstücke und Zellen von *Spirogyra decimina* nach Lebendfärbung mit Gentianaviolett. — **Abb. 8.** Zelle von *Spirogyra maiuscula* nach Lebendfärbung mit Methylenblau. Vergr. überall 500/1.

in kleinere Brocken, die sich alle einzeln rasch abrunden und von denen einer auch den Kern enthielt. In solchen Zellen waren nur noch Überreste der Chromatophoren sichtbar, sonst war der ganze Raum mit einer optisch leeren, homogenen, vollkommen körnchenlosen Flüssigkeit erfüllt.

Die hier beschriebenen Erscheinungen sprechen jedenfalls

dafür, dass — zumindest bei *Spirogyra* — die farbstoffbindenden Substanzen nicht nur im Vakuom lokalisiert sind, sondern dass sich diese auch im Plasma verteilt vorfinden. Nach den Feststellungen von GICKLHORN (1929*a*) handelt es sich hier unbedingt um eine Entmischungserscheinung, wobei jedoch bemerkt werden muss, dass die durch Entmischung von dem kolloidalen Verband losgerissenen Phasen, die am Anfang nur in einzelnen Brocken und Klumpen optisch manifestiert sind, langsam zu einer einheitlichen Masse zusammenzutreten und sich von den durch die Farbstoffmoleküle ungestörten Phasen loszutrennen bestrebt sind. Die ungefärbten Phasen gehen wahrscheinlich sehr leicht zugrunde und so bleibt im Lumen der Zelle nur ein optisch homogenes Sol und die Reste der Plastiden übrig. Da die durch die Farbstoffe gestörten Kolloide einen Wasserverlust erleiden, zieht sich die gefärbte Masse zusammen, was ja auch bei der richtigen Vakuolenkontraktion der Fall ist (vgl. WEBER, 1930*b*, der bei Untersuchung von *Elodea*-Zellen nachweist, dass die Vakuolen zu Gunsten des Plasmas Wasser abgeben).

Es fragt sich demnach, wie es möglich sei, dass während im Falle von höheren Pflanzen hauptsächlich nur eine Kontraktion der Vakuole beschrieben wurde, bei *Spirogyra* die Kontraktion eines guten Teils des Plasmas beobachtet werden konnte, ferner ob die hier beschriebenen Erscheinungen irgendwie mit den bisherigen Beobachtungen in Einklang gebracht werden können. Ganz abgesehen davon, dass im Falle von höheren Pflanzen vielleicht auch andere Bestandteile der Zellen mit dem Inhalt der Vakuole zusammen der Kontraktion unterlegen (vor allem das intravakuoläre Plasma KÜSTER's, 1932) ist nur die morphologische Lokalisierung der gefärbten (farbstoffbindenden) Kolloide der einzige Beweis für die Voraussetzung, dass sich hier nur die Vakuolen kontrahieren. Die Richtigkeit dieser Annahme scheint auch durch die Behauptung von WEBER (1930*b*: 108) bestätigt zu werden, der bezüglich des Beginnes der Vakuolenkontraktion meint, dass in diesem Zustand «die Konturen der Zentralvakuole scharf und deutlich« hervortreten. Wenn aber bisher die Konturen nicht scharf und deutlich waren, wie konnte man feststellen, ob nur die Vakuole, oder aber auch andere, eventuell nur geringe Teile des

Plasmas, die aber teoretisch doch eine Bedeutung haben, an der Erscheinung teilgenommen haben?

M. IRWIN (1932*a*) hat festgestellt, dass bei den *Nitella*-Zellen das Farbstoffspeicherungsvermögen der Vakuolen sehr stark von dem *KCl*-Gehalt derselben abhängig ist. Ebenso gehört die Tatsache hieher, dass DUFRENOV und LABROUSSE (1930) — obzwar ihre Versuche zytologisch nicht ganz exakt durchgeführt worden waren — in verschiedenen Zellen der *Nicotiana*-Pflanzen verschieden intensive Farbstoffspeicherungsvermögen beobachtet haben. Ebenso konnte GICKLHORN (1931) feststellen — dass in den Zellen der Drüsenhaare von *Geranium*-Arten die Möglichkeiten der Farbstoffaufnahme sehr stark von der Funktionsfähigkeit der Zellen abhängig sei. Ähnliche Resultate erhielt B. KEDROWSKY (1931) gelegentlich der Untersuchung der *Drosera*-Tentakeln, bei denen er beobachten konnte, dass nur die gänzlich entwickelten Verdauungszellen farbstoffbindende Substanzen enthalten — die schon funktionsunfähigen oder einen Verdauungsprozess eben beendeten Zellen diese Substanzen fast völlig entbehren. Wenn wir noch hinzufügen, dass WEBER (1932*a*) ähnliches bei den Hydathoden von *Veronica beccabunga* beobachtete, kann wohl mit Sicherheit angenommen werden, dass die Farbstoffspeicherungsfähigkeit der Zellen von dem Vorhandensein oder Fehlen gewisser Stoffe abhängig ist, die bei den Versuchsobjekten der bisherigen Untersuchungen hauptsächlich in den Vakuolen lokalisiert waren. Hauptsächlich, aber nicht ausschliesslich, denn PFEIFFER (1930) hat während seiner Untersuchungen mit den nackten Protoplasten von *Solanum nigrum* beobachtet, dass eine, wenn auch geringe Farbstoffspeicherung auch im Zytoplasma erfolgt. Hier waren auch im Zytoplasma Stoffe vorhanden, die die Farbstoffe binden konnten. Es wäre demnach im Falle von *Spirogyra* vorauszusetzen, dass die bei der Bindung der Farbstoffe wichtige Substanzen auch im Plasma, so auch in dem Rinnenplasma SAKAMURA's (1933) lokalisiert sind, die dann eine Entmischung erleiden müssen.

Bei der Bindung der Farbstoffe müssen die Lipoide eine sehr wichtige Rolle spielen, wie es schon GICKLHORN (1926*a*) gezeigt hat. Die Lipoide sind nach den neueren Untersuchungen eben in den Vakuolen ständig vorhanden (vgl. z. B. GICKLHORN, 1932*b*

bei *Allium cepa*, SHINKE und SHIGENAGA, 1933, die Lipoiden sogar in der Karyolymphe nachgewiesen haben). Das wurde auch bei den Lebendfärbungsversuchen immer wieder nachgewiesen. In dem Zytoplasma müssen aber ebenso Lipoide vorhanden sein, von denen einige ganz bestimmt als farbstoffbindende Substanzen funktionieren können. Wenn sie schon Farbstoffmoleküle gebunden haben, — wie es bei *Spirogyra* der Fall war — dann müssen sie in den meisten Fällen auch eine Entmischung erleiden. So treten die veränderten Moleküle zusammen und die dadurch entstandenen Massen kontrahieren ebenso, wie die Vakuolen der Zellen von höheren Pflanzen, bezw. richtiger, wie die als Vakuom betrachteten Anteile des Protoplasten. Die Wahrscheinlichkeit dieser Meinung wird einerseits durch die Versuche erhöht, in welchen die Entmischung der in Plasma vorhandenen Lipoide auf anderem Wege erreicht werden konnte (tröpfige Entmischung der Plasmalipoide durch Röntgenbestrahlung, NADSON und ROCHLIN, 1933), da dann die Möglichkeit einer solchen Entmischung nicht mehr zu leugnen ist. Andererseits muss die Richtigkeit der hier mitgeteilten Erwägungen schon deshalb anerkannt werden, weil PEKAREK (1933) mit einer Metode der «doppelten Erstpassagezeiten» eine relativ sehr hohe Viskosität der Vakuolen festgestellt hat und SAKAMURA (1933) sich aus verschiedenen, hier nicht näher zu erörternden Gründen berechtigt fühlt, zu behaupten, dass das Sol der Vakuolen eben bei *Spirogyra* ein stark hydratisierter Teil des Protoplasmas sei. Seiner Ansicht nach ist das Rinnenplasma weniger hydratisiert, jedoch immer noch hinreichend dünnflüssig. Dementsprechend konnte auch eine starke Anhäufung des Farbstoffs im Rinnenplasma beobachtet werden, da die Entmischung in dünneren Kolloiden leichter, als in den halbflüssigen zustande kommen kann — vorausgesetzt natürlich, dass das Plasma im übrigen von den gleichen Phasen, wie die Vakuolen zusammengesetzt ist. Somit wäre also die Möglichkeit einer Entmischung im Zytoplasma durch Fabrstoffaufnahme bewiesen, und es können die hier mitgeteilten Beobachtungen insoferne mit den bisherigen Beobachtungen über Vakuolenkontraktion durch Vitalfärbung in Einklang gebracht werden, als bei den höheren Pflanzen geringere, bei den *Spirogyra*-Zellen dagegen grössere Teile des Plasmas an der Kontraktion teilnehmen.

Man könnte gegen das hier gesagte allerdings einwenden, dass in den bisheringen Erwägungen das Tonoplasma als Abgrenzung der Vakuolen absolut nicht berücksichtigt wurde. Es soll die Existenz des Tonoplasten im Laufe unserer Erörterungen weder abgelehnt, noch bestätigt werden, ich vermochte aber an Hand diser Untersuchungen in keinem einzigen Fall das Tonoplast zu sehen oder seine Existenz mit unbedingter Sicherheit festzustellen. Wie eben die neueren Untersuchungen dargetan, ist die Tonoplastenfrage noch vollkommen unentschieden. Die Auseinandersetzungen von CHAMBERS und HÖFLER (1931), von HÖFLER (1931, 1932) oder PLOWE (1931*a*) scheinen das Vorhandensein von Grenzschichten an der Oberfläche der Vakuolen zu beweisen, wenngleich ein grosser Teil dieser Untersuchungen nicht an unversehrten Zellen vorgenommen wurde. Die Ausbildung von solchen Membranen ist eben durch die Störung des zellulären Gleichgewichts mehrfach beobachtet (oben wurden bereits die Untersuchungen von WEBER, 1930*b* zitiert, in welchen festgestellt wird, dass die Konturen der Vakuolen erst durch die Einwirkung von Farbstofflösungen scharf hervortreten; FUKUDA 1832 berichtet, dass sich bei Erfrieren der Zellen eine Grenzschicht rings um die Vakuolen ausbildet). WEBER (1932*b*) erbringt sehr triftige Argumente dafür, dass alle diejenigen Beobachtungen, die scheinbar das Vorhandensein des Tonoplasten beweisen sollen, nicht unbedingt überzeugend sind. Seine Auffassung, dass nämlich hier wahrscheinlich meistens von Haptogenmenbranen die Rede sei, scheint mir ziemlich überzeugend zu sein. Die in den Abhandlungen von CHAMBERS und HÖFLER (1931) und HÖFLER (1931, 1932) beschriebenen, mikrochirurgisch freipräparierten Häute der Vakuolen müssen nicht unbedingt auch in der unversehrten Zelle vorhanden sein, da ja auch bei den freipräparierten Plasmatropfen eine Hautbildung konstatiert werden konnte, die bei gewissen Aussenbedingungen konsequent eintritt, in anderen Fällen (*Ca*-Mangel, Vorhandensein von *K*) wieder unterbleibt (LINSBAUER 1932, 1933 bei *Nitella*-Zellen, in welchen Fällen LINSBAUER ausgesprochen von Haptogenmembranen spricht und diese Gebilde ausdrücklich für von dem Plasmalemma der lebenden Zellen verschieden hält). Wenn wir noch hinfügen, dass sich aus Modellexperimenten und Permeabilitätsuntersuchungen von MOND

(1930) und anderer ein derart komplizierter Bau der Plasmamembrane ergab, dass die beobachteten Tatsachen mit einer einfachen Hautschicht keinesfalls erklärlich wären, müssen wir das Vorhandensein des Tonoplastes nicht unbedingt als bewiesen betrachten.

Soviel muss jedenfalls festgestellt werden, dass sich eine Haptogenmembran im Falle der *Spirogyra*-Zelle auch um die sich kontrahierenden farbstoffspeichernden Teilen bilden kann und dass ausserdem die Farbstoffe nicht nur das Plasma, sondern auch die Grenzschicht des Plasmas stark beeinflussen können, wodurch auch die Tonoplasten — vorausgesetzt, dass solche überhaupt vorhanden sind — funktionsfähig gemacht werden können. Wie die Kontraktion gewisser Plasmateile und auch das später noch mitzuteilende zeigen wird, fungieren in diesen vitalgefärbten Zellen die Haptogenmembranen rings um die kontrahierenden Teile ebenso, wie die theoretischen Tonoplasten um die Vakuolen fungieren müssten.

Aus dem gesagten erhellt, warum die Tonoplastenfrage nur in dem hier mitgeteilten Masse erörtert wird, ist doch diese Frage bei der Erklärung des Tatsachenmaterials eigentlich bedeutungslos. Im folgenden soll dagegen mehrfach nachgewiesen werden, dass das Plasmalemma (Grenzschicht) bis zu seinem Absterben als semipermeable Haut wirksam bleibt (inwieweit hir die nicht angefärbten Teile des Zytoplasmas mit einwirken, soll unentschieden bleiben).

Abb. 3 u. 8 beweisen jedenfalls, dass das Plasmalemma und die Haptogenmembran rings um den angefärbten Teilen als osmotisch wirksame Häute fungieren, wofür an Hand der später zu schildernden Plasmolyseversuche noch eingehender Beweise erbracht werden sollen. Die richtigen Tonoplasten rings um die Vakuolen konnten nie als solche beobachtet werden, denn diese Membranen können in den lebenden und unversehrten *Spirogyra*-Zellen nicht entdeckt werden. Trotzdem habe ich manchmal Bilder gesehen, die auf das tatsächliche Vorhandensein von osmotisch wirksamen Haptogenmembranen schliessen liessen. So konnte ich des öfteren, besonders nach Einwirkung von Methylenblau beobachten, dass sich in der gänzlich desorganisierten Zelle einzelne

mit einer Haut abgegrenzten Abschnitte als osmotisch wirksame Partien zeigten (Abb. 9, die ganz weiss gelassenen Räume). Diese

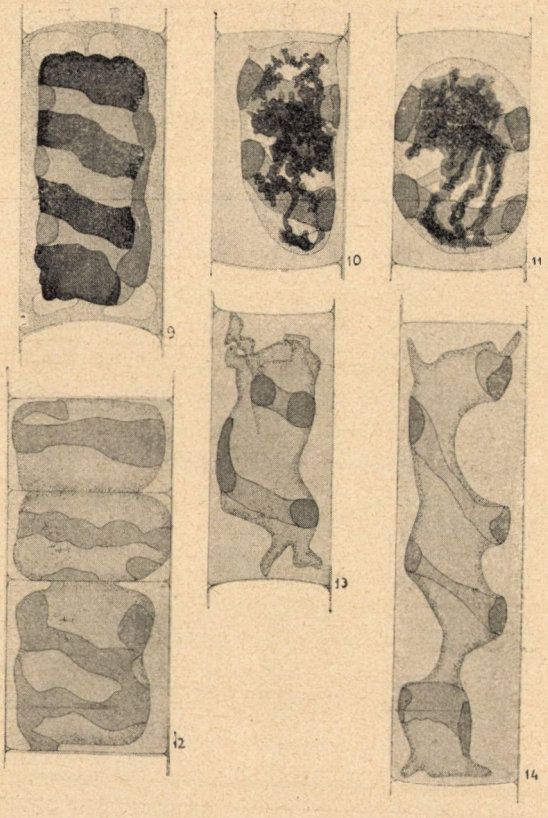


Abb. 9. Zelle von *Spirogyra decimina* nach Lebendfärbung mit Methylenblau. — Abb. 10 und 11. Zellen von *Spirogyra decimina* nach Lebendfärbung mit Methylgrün und Plasmolyse durch Rohrzuckerlösung. — Abb. 12 und 13 Fadenstück, bezw. Zelle von *Spirogyra decimina* nach Lebendfärbung mit Methylenblau und Plasmolyse durch Rohrzuckerlösung. — Abb. 14. Zelle von *Spirogyra* sp. nach Lebendfärbung mit Gentianaviolett plasmolysiert durch Kalisalpeterlösung. — Vergr. überall 500/1.

Räume sind aber unbedingt kleiner, als die eigentlichen Vakuolen der Zelle, so dass sie höchstens einen Teil der Vakuole darstellen. In diesem Falle ist aber gewiss kaum anzunehmen, dass die Häute,

die diese Vakuolenreste umgeben, mit den Tonoplasten der unversehrten Zelle identisch seien. Diese Annahme könnte schon darum nicht zu Recht bestehen, weil die *Spirogyra*-Zellen eine grosse, einheitliche Vakuole besitzen, die stark vergifteten Zellen aber stets mehrere derartige Räume aufweisen, die also unbedingt durch Zerfall der Vakuole entstehen mussten. Dass dabei das Tonoplast nicht unversehrt bleiben konnte, ist ja wohl selbstverständlich. Es muss des weiteren bemerkt werden, dass mir die Ableitung dieser Räume von den Vakuolen in keinem einzigen Falle möglich war und so können sie sowohl beliebige andere Abschnitte der Zelle als auch Vakuolen darstellen. Es fragt sich, ob es nicht zweckmässiger wäre, anzunehmen, dass hier gewisse Partien des Protoplasten (samt den Vakuolen, Chondriom usw.) in gewissen Hinsichten noch lebensfähig (oder mindestens osmotisch wirksam) geblieben seien, die sich mit einer Haptogenmembran von den übrigen bereits abgestorbenen Partien abgetrennt haben. Die Fähigkeit zur Ausbildung von Haptogenmembranen wäre auch eine genügende Erklärung der Tatsache, dass sie am Leben, d. h., osmotisch wirksam bleiben konnten. Die Entscheidung der Frage, inwieweit diese Erörterungen der Wirklichkeit entsprechen und ob die von CHAMBERS und HÖFLER (1931) bezw. HÖFLER (1931, 1932) beschriebenen für mit Tonoplasma umgebene Vakuolen gehaltene Gebilde identisch mit den hier beschriebenen osmotisch wirksamen Räumen seien, muss späteren Untersuchungen überlassen werden.

Bevor wir eine Beschreibung der durch Plasmolysieren nachweisbaren Veränderungen des Protoplasten geben, muss erst noch das Verhalten der Chromatophoren geschilden werden. Die Untersuchungen von SAKAMURA (1933) haben es bewiesen, dass das Chloroplastenband der *Spirogyra*-Zelle aus einem Kolloid mit relativ hoher Viskosität besteht (vgl. auch GICKLHORN, 1932*c*), dabei jedoch mit einer Plasmahülle von noch höherer Viskosität umgeben ist. Bei der Einwirkung von Farbstofflösungen scheint erstens das schon genannte «Rinnenplasma», dann aber auch die stark viskose Plasmahülle geschädigt zu sein. Dementsprechend kann das Chromatophorenband seine ursprüngliche Form nicht beibehalten. In den Anfangsstadien der Vergiftung (bei Methylenblau allerdings

erst nach längerer Einwirkung) verschwinden die feinen Verzweigungen und Ausstülpungen der Plastiden (vgl. Abb. 2, 3, 5), so wird der Querschnitt des Chromatophors binnen kürzester Zeit ellipsoidisch (bei Plasmolyse konnte GICKLHORN 1932*a* ebenfalls Formveränderungen, allerdings in entgegengesetztem Sinne, nachweisen). Später wird meistens die Einheitlichkeit des Chloroplasten aufgehoben, was in bester Übereinstimmung mit den Behauptungen von SAKAMURA (1933) und GICKLHORN (1932*c*) steht, da der Zerfall sehr gut dadurch zu erklären ist, dass die Hülle der Plastiden durch Entmischung desorganisiert wird. Die einzelnen Teile des zerfallenen Plastiden zeigen das Bestreben sich abzurunden (Abb. 4). Manchmal wird das Chloroplast in viele kleine Tropfen (Abb. 8), in anderen Fällen wieder in wenige verschiedene grosse Brocken zerstückelt (Abb. 7), manchmal kommt es auch vor, dass das Chromatophor einheitlich bleibt und sich in diesem Zustand abzurunden strebt (Abb. 6). Dass bei der Abrundung die grösste Rolle die Desorganisation der Plastidenhülle spielt, scheint mir nicht zweifelhaft, in zweiter Linie ist aber auch die Herabsetzung der in normalem Zustand hohen Viskosität der Plastiden dafür verantwortlich zu machen (vgl. GICKLHORN, 1932*c*; CHOLNOKY, 1931). Die Schwankungen in der Viskosität der Plastiden konnte auch Frl. E. GRATZY-WARDENGG (1931) beobachten in Form einer Viskositätsverringerung der Plastiden in kränklichen Zuständen bei den Prothallien von *Struthiopteris* und *Nephrodium*. Die Verringerung der Viskosität ist wahrscheinlich auch dafür verantwortlich, dass die Pyrenoide in diesem Zustand meistens zugrunde gehen. Diese Gebilde verlieren nämlich ihre Stärkehülle und die einzelnen, von dem Pyrenoid losgelösten Körner liegen zerstreut in der Chloroplastenmasse.

Die Stoffe der Plastiden selbst scheinen durch die Färbemittel recht wenig angegriffen zu werden, da eine Lebendfärbung der Chromatophoren nur als nekrobiotisches Phänomen eintritt (eine Ausnahme hievon ist Safranin wasserlöslich, das manchmal schon früher eine leichte diffuse Färbung verursachen kann). Die diesbezüglichen Beobachtungen stimmen vollkommen mit den Ergebnissen von WEBER (1930*b*) überein, der die Vitalfärbung der Chromatophoren bei *Helodea* beobachtet hat.

Über weitere protoplasmatische Veränderungen der vital gefärbten *Spirogyra*-Zellen geben uns Plasmolyseversuche interessante Aufschlüsse. In dieser Beziehung sind unsere bisherigen Kenntnisse noch ziemlich mangelhaft, obzwar die Plasmolyse bei mehreren Zellen auch nach Lebendfärbung beobachtet wurde. Schon GICKLHORN (1929*a*) hat nach Vitalfärbung Plasmolysen hervorgerufen, wollte aber mit diesem Verfahren ausschliesslich das Verhalten des Zellsaftes und des darin gelösten Farbstoffs prüfen. KUNZE (1931) konnte mit Plasmolysen nach Vitalfärbung feststellen, dass die Vakuolenkontraktion durch Plasmolyse ausgelöst wird. Über die zytologischen Einzelheiten berichtet er nichts. WEBER (1930*b*) beschreibt solche Plasmolysen. In seiner Abhandlung gibt er in Wort und Bild die Einzelheiten des Vorganges bei *Helodea*-Zellen. Auf Grund seiner Versuche konnte er Verschiedenheiten in der Permeabilität und Veränderungen in der Viskosität nachweisen. Da seine Abhandlung sich hauptsächlich mit dem Verhalten der Vakuolen beschäftigt, sind seine Auseinandersetzungen in manchen Hinsichten viel zu kurz gefasst.

Meine diesbezügliche Untersuchungen ergaben die folgenden Resultaten:

In sehr anfänglichen Stadien der Lebendfärbung, in denen die Protoplasten noch gleichmässig diffus gefärbt waren, konnte eine Erhöhung der Viskosität konstatiert werden. Abb. 12—14 zeigen *Spirogyra*-Zellen in diesem Anfangsstadium plasmolysiert. Die auf Abb. 12 dargestellten besonders kurzen Zellen zeigen einen ausdrücklich negativen Plasmolyseort an der Querwand, wo sonst nur in seltenen Lebensperioden ein solcher nachgewiesen werden konnte (vgl. CHOLNOKY, 1931). Dieser negative Plasmolyseort kann nur von einer höheren Viskosität des Plasmaschlauchs herrühren, was besonders in den späteren Phasen der Färbung klar hervortritt (Abb. 13), in welchen sich recht abenteuerlich hervorspringende Plasmafortsätze ausbilden, die die Erhöhung des Viskosität klar anzeigen. Manchmal kann die noch immer höhere Viskosität der Plastiden (oder der die Plastiden umgebenden Plasmahülle) ebenfalls nachgewiesen werden, welche oft als negative Plasmolyseorte hervorspringen (Abb. 14).

Später, in vorgeschritteneren Stadien der Lebendfärbung ver-

ändern sich die Verhältnisse gänzlich, In manchen Zellen kontrahieren sich sowohl die gefärbten als auch die ungefärbten Anteile der Zellen, in welchen letzteren auch die Reste der Plastiden mitgeschleppt werden (Abb. 18). In anderen Fällen kann ausschliesslich eine Zusammenziehung der gefärbten Anteilen nachgewiesen werden (Abb. 15, 16, 17), die die Voraussetzung zu stützen scheinen, dass hier nur die Grenzschichten (Haptogenmembranen) der gefärbten Teile osmotisch wirksam geblieben sind. Die Plastiden verhalten sich ganz wie vom Verbande der Zelle losgelöst und während sie in manchen Zellen ihre ursprüngliche Form mindestens annähernd beibehalten (Abb. 15), zerfallen sie in anderen, besonders in denen, wo sie durch die Färbung in mehrere Brocken zerteilt wurden, manchmal in ganz unregelmässigen Klumpen und Knäueln (Abb. 16, 17).

Augenscheinlich ist in diesen Zellen das Plasmalemma schon nicht mehr sichtbar. Die Flüssigkeit, die das Zellumen dieser Zellen ausfüllt, ist optisch homogen und scheint ein Kolloid mit sehr niedriger Viskosität zu sein. Diese Homogenität ist unbedingt eine Folge der Farbstoffeinwirkung, durch welche die Plasmalipoide — und wahrscheinlich auch andere Phasen des Plasmas — zu einer Entmischung gezwungen werden. Im Übrigen ist diese auffallende Homogenität auch in denjenigen Zellen bemerkbar, in welchen das Plasmalemma osmotisch noch wirksam ist (Abb. 18—20). Hier muss allerdings bemerkt werden, dass die auf den Abbildungen sichtbaren Punkte nur eine technische Darstellungsweise sind und sie den wahren Verhältnissen keinesfalls entsprechen.

Abb. 18—20 zeigen aber ebenfalls, dass die Viskosität dieser Abschnitte unbedingt eine niedrige sein muss, da eine konvexe Plasmolyseform sehr leicht erzielbar ist. Der gefärbte Teil — der manchmal einheitlich, manchmal in kleinere Stücke zerfallen erscheint — wird durch den Wasserentzug zusammengezogen. Diese Abschnitte scheinen manchmal, wenn auch mit höherer Viskosität gänzlich flüssig zu sein (Abb. 18, 19), in anderen Fällen sind sie aber gewiss dem Gelzustande nahe und sind demzufolge von besonders hoher Viskosität (in diesen zuletzt genannten Fällen können manchmal im Plasma ganz kleine regellos umherliegende Brocken entstehen, die wahrscheinlich von dem Rinnenplasma her-

stammen und mit der Zusammenziehung des Plasmaschlauches nicht Schritt halten konnten. Die Zusammenziehung zeigt auch Abb. 17 gut, wo die Reste des Rinnenplasmas durch zwei hervorragende Spitzen noch immer erkenntlich gemacht werden). Die Überreste der Plastiden sind in diesen Zellen meistens abgerundet, bei ihnen konnte auch eine Volumveränderung während der Plasmolyse festgestellt werden, die wahrscheinlich mit einer osmotischen Wirksamkeit der Plastidenhaut zusammenhängt. Diese — allerdings heute noch nicht mit der nötigen Genauigkeit nachgewiesene — Meinung scheinen auch die Beobachtungen von PLOWE (1931*a*) zu bestätigen, laut welcher der Zellkern ein selbständiges osmotisches System darstellt. Die Möglichkeit einer ähnlichen Erscheinung bei den Plastiden kann teoretisch nicht geleugnet werden, besonders nicht in den durch Farbstoffeinwirkungen beeinflussten Zellen, wo sich Haptogenmembranen auch dort ausbilden können, wo sie in normalen Zellen nicht vorkommen.

Die relative Menge der farblosen Plasmateile unterliegt starken Schwankungen. Abb. 24 zeigt ausser einer enorm hohen polaren Viskosität in der Nähe der Querwände auch eine gewisse Menge des körnchenlos gewordenen Plasmas, das in seinen optischen Eigentümlichkeiten vollkommen mit den bei Abb. 18—21 besprochenen übereinstimmt. Bei näherer Untersuchung der auf Abb. 24 dargestellten Zelle muss jedoch festgestellt werden, dass die ungefärbten Plasmaabschnitte hier ebenfalls von einer geringeren Viskosität sind. Die farblosen Partien runden sich nämlich regelmässig konvex ab, die gefärbten Teile zeigen dagegen ganz unregelmässige Konturen, die mich sehr lebhaft an die Krampfplasmolyse von WEBER (1925) erinnern. Die Überreste der Plastiden nehmen eine mittlere Stellung ein.

Die farblose Plasmaabschnitte können auch gänzlich fehlen. In diesen Fällen kann aus der Form der Plasmolyse auf das Vorhandensein einer gemeinsamen osmotisch wirksamen Hülle geschlossen werden, die vielleicht mit dem Plasmolemma identisch ist. Der Zustand der plasmolysierten Zellen auf Abb. 23 kann ohne Voraussetzung eines solchen gemeinsamen Plasmolemmas nicht erklärt werden, da sonst ja die Reste der Plastiden keinesfalls so fest an die gefärbten Anteile des Protoplasten geprässt

wären. Die Einzelheiten der Schwankungen in der Viskosität können ohne weiteres von Abb. 23 abgelesen werden.

Auf Grund des Gesagten kann demnach festgestellt werden, dass in den farbstoffspeichernden Zellen die einzelnen Bestandteile des Plasmas nacheinander ihre osmotische Wirksamkeit einbüssen und dass diese osmotische Inaktivierung der betreffenden Grenzschichten nicht immer in der gleichen Reihenfolge geschieht. Allerdings darf aber auch behauptet werden, dass die gefärbten Anteile relativ lange osmotisch wirksam bleiben, d. h. dass sie noch relativ lange Lebenserscheinungen zeigen. Diese Feststellungen müssen zu der Folgerung hinleiten, dass die Farbstoffaufnahme der Zellen — obzwar diese immer ein letales Phänomen ist — in erster Linie nicht diejenigen Stoffe beschädigt, die die Farbstoffmoleküle mit sich reissen, sondern ganz im Gegenteil, dass die Lebendfärbung am ehesten in denselben Plasmateilen das rascheste Absterben und Desorganisation verursacht, die die Farbstoffmoleküle nicht speichern, von den farbstoffspeichernden Lipoiden aber beraubt und eben demzufolge funktionsunfähig gemacht werden.

Für die Richtigkeit des gesagten boten manche, mit Methylenblaulösung behandelten Zellen ein noch schöneres Beispiel. In diesen war bereits alles abgestorben, also funktionsunfähig, nur gewisse Teile des Protoplasten ragten aus den abgestorbenen Massen hervor, die noch plasmolysierbar waren, und die einen, von den übrigen Abschnitten verschiedenen, mehr violettblauen Farbenton aufwiesen. Wenn ich die Genese dieser Bilder unter dem Mikroskop nicht genau und wiederholt kontrolliert hätte, wäre ich ganz gewiss der Meinung, dass diese mit konvexen Grenzflächen versehenen Partien eigentlich Überreste des Vakuoms seien, und dass die, diese Räume umgebenden, auch optisch manifestierten Häute eigentlich mit dem Tonoplast identisch wären (Abb. 25). Davon kann aber sicherlich nicht die Rede sein und eben deshalb habe ich schon oben auf den problematischen Wert der mikrochirurgischen Operationen (CHAMBERS und HÖFLER, 1931; HÖFLER, 1931), die nach durch verschiedene Manipulationen erreichte Desorganisation des Protoplasten die Vakuolen auszupräparieren trachteten, hingewiesen, da — nach den hier mitgeteilten — diese osmotisch noch funktionsfähigen Überreste nicht ausschliesslich von den

Vakuolen entstammen. Die osmotische Funktionsfähigkeit wird auch durch die Möglichkeit der Deplasmolyse, die mir bei entsprechender Vorsicht gelang, bis zu einem gewissen Grad bewiesen, am Ende aber stets zu einer vollkommenen Desorganisation führte.

Die Deplasmolyse war auch bei den anderen Typen der vital gefärbten *Spirogyra*-Zellen stets ein sehr schädlicher Eingriff. Die Schädigung entsteht wahrscheinlich dadurch, dass sich die Permeabilität der osmotisch noch funktionsfähigen Häute verändert. Dass diese Annahme vollkommen begründet zu sein scheint, wird in erster Linie durch die Untersuchungen von WEBER bewiesen, der mehrfach beobachten konnte, dass die Plasmolyse-Permeabilität durch verschiedene Faktoren gesteigert werden kann (Al-Salze bei *Spirogyra*, 1932*c*; Gallensalze kombiniert mit neutralsalze, 1932*d*; Harnstoff, 1931*a*; Narkotika, 1931*b*) und dass die Permeabilität selbst von der Plasmolyse stark beeinflusst wird. Diese Ergebnisse wurden auch durch HUBER und SCHMIDT (1933) bestätigt.

Meiner Meinung nach vermögen Stoffe, infolge herabgesetzter Semipermeabilität einesteils die Zelle verlassen, anderenteils aber können Stoffe auch in das Zellinnere eindringen, Stoffe, die sonst höchstens nur in einem ganz geringen Masse aufgenommen würden. Hiemit soll jedoch keinesfalls gesagt werden, dass die Plasmolyse nur deshalb schädlich wäre, weil durch sie gewisse lebenswichtige Stoffe die Protoplasten verlassen (ALBACH, 1931), da diese Meinung ja weder mit den oben zitierten bisherigen Beobachtungen, noch mit meinen eigenen Befunden in Einklang gebracht werden könnte. Ebensowenig dürfte eine Erklärungsweise der beobachteten Tatsachen als richtig angesprochen werden, die die starke Schädigung des Plasmas ausschliesslich mit der Annahme erklären wollte, dass die eintretenden Stoffe, für welche die Plasmahaut sonst in hohem Grade unpassierbar ist, die starken Veränderungen verursachten. Die beiden Faktoren dürften allerdings mitwirken, aber ausser diesen sind gewiss auch andere vorhanden. In erster Linie muss angenommen werden, dass die Veränderungen der Plasmakolloide — die durch die Lebendfärbung schon stark beeinflusst wurden — ebenfalls schädigend wirken. Von diesen Veränderungen wären in dieser Beziehung Entmischung und Schwankungen im Dispersionsgrad zu nennen.

Nach einer Lebendfärbung zeigen sich die auch in normalem Zustand vorkommenden Veränderungen durch Plasmolyse weit ausdrücklicher. Die Begründung dieser Tatsache scheint mir nicht ganz einfach zu sein, dafür dürfte vielleicht die Herabsetzung der sonst strengen Korrelation der einzelnen Organellen und Bestandteilen verantwortlich gemacht werden. Diese Erscheinungen sind die Folgenden: die Plasmolysierbarkeit der vitalgefärbten Zellen wird nach einer Deplasmolyse in auffallender Weise herabgesetzt (Abb. 27). In extremen Fällen konnte ich auch eine vollkommene Unplasmolysierbarkeit beobachten (Abb. 29). In den letzteren Fällen kann — vorausgesetzt dass die Zellen bei den energischeren Eingriffen nicht ohne weiteres absterben — durch Steigerung der Konzentration oder durch Änderung der Plasmolytika eine anfängliche Plasmolyse in Form von einigen wenigen positiven Plasmolyseorten eintreten, diese verschwinden aber wieder sehr bald. Sehr auffallend war der Umstand, dass in diesen Fällen öfters Dimensionsänderungen der Organellen innerhalb der Zelle zu beobachten waren. In der auf Abb. 29 dargestellten Zelle, konnte ich eine Zusammenziehung der Chromatophoren infolge Einwirkung von Rohrzuckerlösung beobachten, in welchem Plasmolytikum sonst keine Plasmolyse entstand. Einen ähnlichen Vorgang konnte ich bei der sehr schlecht sichtbaren Kern nur recht unvollkommen Beobachten, so dass sich eine osmotische Wirksamkeit der Kernhaut nicht mit der notwendigen Genauigkeit nachweisen liess.

Die Erschwerung der Plasmolysierbarkeit hängt teilweise auch mit einer Erhöhung der Viskosität des Protoplasten zusammen. Diese Erscheinung kann besonders in Zellen nachgewiesen werden, die einer nicht allzu lange dauernden und nicht besonders starken Lebendfärbung ausgesetzt waren. Bei diesen geht die erste Plasmolyse auf die schon beschriebene Art und Weise vonstatten, die Deplasmolyse verursacht keine bedeutenderen Veränderungen, die wiederholte Plasmolyse jedoch zeigt ein von dem bisher bekannten abweichendes Bild. Das Plasma wird in einer Anzahl dünnerer oder dickerer Fäden ausgezogen, negative Plasmolyseorte entstehen auf ganz unerwarteten Stellen (Abb. 30). All dies aber ist nur durch eine erhöhte Viskosität zu erklären.

Eine weitere recht beachtenswerte Tatsache ist, dass die gefärbten Anteile des Plasmakörpers — besonders nach Behandlung mit gewissen Farbstoffen — die Deplasmolyse schon nicht mehr mitmachen und bereits während der ersten Plasmolyse absterben. Sie behalten die ursprüngliche Form, die sie durch die erste Plasmolyse erhielten bei und werden höchstens verschoben, jedoch kaum verändert, so dass ihre hohe Viskosität nicht bestritten werden kann. Diese Absonderung der gefärbten Teile darf allerdings mit den früher beschriebenen Beobachtungen durch Methylblaufärbung nicht verwechselt werden, da es sich dort um eine durch lange Einwirkung der Farbstoffe verursachte Desorganisation und auf diesem Wege entstandene gefärbte und doch am Leben gebliebene Reste des Plasmakörpers handelt, die nichts mit den hier beschriebenen Tatsachen zu tun haben, da hier am Entstehen der gefärbten und absterbenden Klumpen in erster Linie die Plasmolyse mitgewirkt hat.

Durch die Plasmolyse werden hier allerdings gefärbte und funktionslos gewordene Plasmateile in Klumpen vereinigt, die aber nichts mit der Kappenplasmolyse von HÖFLER (1928*a* und *b*), oder Vakuolenkontraktion von WEBER (1930) zu tun haben. Die hier gesehenen gefärbten Teile stellen ebensowenig, wie die oben beschriebenen, durch Methylenblau verursachte Desorganisation entstandenen noch plasmolysierbaren Körper, Überreste des Vakuoms oder das Vakuom selbst dar.

Alldies steht im besten Einklang mit den über die Aufnahme und Speicherung der Farbstoffe in lebenden Zellen zu Beginn dieser Erörterungen gesagten, wo die Speicherung als ein nicht nur auf das Vakuom beschränktes Phänomen angesprochen wurde. Falls wir die beiden Vorgänge, also einerseits die Anhäufung der Stoffe, die mit den Farbstoffmolekülen eine Verbindung innerhalb der Zelle eingingen und die durch die Plasmolyse zu- und aneinander gepresst wurden und andererseits die Kontraktion der Vakuole durch Plasmolyse oder durch andere Beeinflussungen, miteinander vergleichen, lassen sich vielleicht die Beobachtungen von GICKLHORN und WEBER (1926) über Plasmolyse der Epidermis- und Mesophyllzellen von *Echium italicum* besser verstehen, da bei diesen Zellen vielleicht ein ähnlicher Vorgang beobachtet wurde.

Zusammenfassend durfte es vielleicht zweckmässig sein zu wiederholen, dass die sog. Vakuolenkontraktion eine von der Verballung der Farbstoffverbindungen vollkommen unabhängige Erscheinung ist, ungeachtet des Umstandes, dass die Farbstoffspeichunerung infolge normaler vitaler Vorgänge (wie bei *Echium*), oder infolge Farbstoffaufnahme vor sich ging. Diese Phänomene können zwar mitunter in Verbindung stehen (in Fällen, wo die Farbstoffverbindung in einem mit der Vakuolenflüssigkeit mischbaren Solzustand verharrt; vgl. z. B. WEBER bei *Elodea*, 1930*b*). Im Falle einer Farbstoffverbindung im Gelzustand oder aber in einem unvermischbaren Sol ist nach der Wasseraufnahme des sog. Vakuoms die Trennung der beiden Vorgängen sofort offensichtlich (*Echium* bei GICKLHORN und WEBER, 1926, oder die jetzt beschriebenen Fälle bei *Spirogyra*, ja wahrscheinlich auch die Farbstoffkugeln bei GICKLHORN, 1929*a*). Es wäre also keinesfalls richtig in allen Fällen über Vakuolenkontraktion zu sprechen, in welchen die gefärbten Anteile eine Neigung zur Verballung und Kontraktion zeigen (wie bei *Spirogyra*) und eben auf Grund der hier mitgeteilten Beobachtungen wäre es gänzlich verfehlt, alles für Vakuom zu halten, was Farbstoff enthält. Die Unmöglichkeit dieser Meinung wurde ja schon oben eingehend besprochen und soll hier nur insoferne wiederholt werden, als die farbstoffbindenden Stoffe ja keinesfalls nur von dem Vakuom, sondern auch von anderen Teilen der Zelle mitgerissen werden.

Die sehr komplizierte Lokalisierung der Farbstoffverbindungen, die keinesfalls derartig vereinfacht werden kann, wie z. B. durch Annahme einer ausschliesslichen Speicherung in den Vakuolen und Bindung durch die Stoffe der Vakuolen zeigten besonders einige Präparate, die ich durch Fixierung mit OsO_4-Gemische und nachträglicher Färbung hergestellt habe. Die OsO_4-Lösung wurde durch die Körnchen der Farbstoffverbindungen reduziert, und so erschienen diese Körnchen ganz opak, ein Beweis, dass hier wirklich Lipoide, oder mindestens auch Lipoide in der Bindung der Farbstoffe eine Rolle spielen. Eben deshalb konnten die Zellen, die einer längeren Wirkung der Farbstofflösungen ausgesetzt waren, in diesem Zustand überhaupt nicht untersucht werden. Die Zellen, die nicht besonders viel Farbstoffverbindungen

enthileten, zeigen denen auf Abb. 31 dargestellten ähnliche Zustände. Dass hier von einer Speicherung in den Vakuolen nicht die Rede sein kann, ist selbstverständlich.

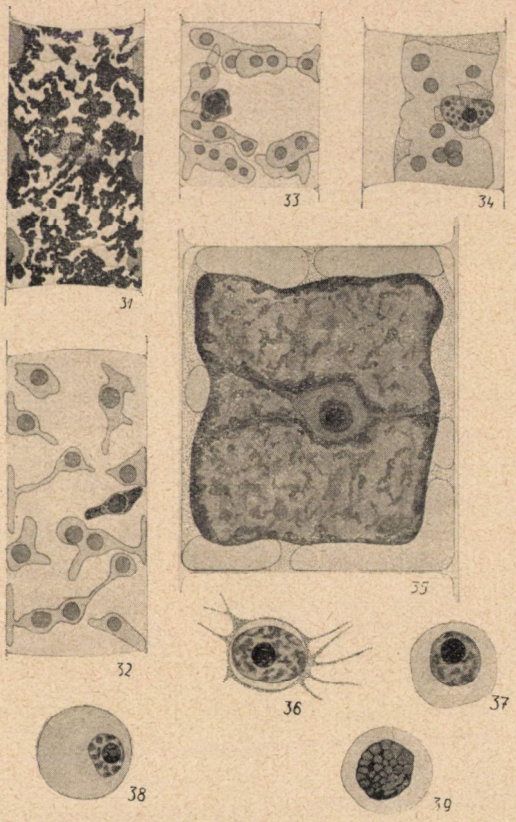


Abb. 31—34. Nach Lebendfärbung mit Gentianaviolett durch Flemming-sche Flüssigkeit fixierte und Hämatoxylin-Eosin gefärbte Zellen von *Spirogyra decimina*. — Abb. 35. Zelle von *Spirogyra maiuscula* nach Lebendfärbung mit Methylenblau. — Abb. 36—39. Desorganisation des Kernes von *Spirogyra maiuscula* nach Lebendfärbung mit Gentianaviolett. — Vergr. überall 500/1.

Nach einer Behandlung mit H_2O_2 und nachheriger Färbung mit Hollborn's Hämatoxylin-Eosin waren auch die mit Farbstoffkörnchen vollgestopften Zellen zu einer zytologischen Untersuchung

geeignet. Diese lassen erkennen, dass die Plastiden in vorgeschritteneren Stadien der Farbstoffspeicherung in kleine Teile zerfallen (Abb. 32, 33) und auch ihre ursprüngliche Lagerung in der Zelle verlieren. Auch die im Zustand der Plasmolyse fixierten und gefärbten Zellen zeigen ähnliches Verhalten (Abb. 34). Am interessantesten sind aber die eigentümlichen Veränderungen des Kernes.

In den anfänglichen Stadien der Farbstoffspeicherung (Abb. 31) zeigt der Kern noch keinerlei Veränderungen. Die Chromiolen sind noch immer auf normale Weise verteilt, höchstens ihre Lage und Form dürfte als nicht ganz normal angesprochen werden. Später (Abb. 34) werden aber die einzelnen Chromiolen zu grösseren Gruppen vereinigt. In diesem Zustand ist also auch im Kern ein Entmischungsvorgang eingetreten und scheinen die Chromiolen eben diejenigen Stoffe zu sein, durch welche die Farbstoffmoleküle gebunden werden. In späteren Phasen verschrumpft sich der Aussenkern immer mehr, die Chromiolen sind bereits in ganz unregelmässigen Klumpen angehäuft (Abb. 32 und 34), das Karyosom ist beträchtlich vergrössert.

Es ist ziemlich wahrscheinlich, dass die in das Innere der Zellen eingedrungenen Farbstoffmoleküle einen Weg in den Kern gefunden haben. Hier spielt sich dann ein zu dem in der Zelle beobachteten ähnlicher Vorgang ab. Durch die eindringenden Farbstoffmoleküle wird das kolloidale Gleichgewicht der Kernstoffe gestört. Einige von diesen werden durch Entmischung und chemische Bindung inaktiviert und so auch die Lebensfunktionen des ganzen Organells unmöglich gemacht. Der Eintritt der Farbstoffmoleküle in den Kern ist am Anfang gar nicht zu beobachten und kann nur in den Zuständen nachgewiesen werden, in welchen die Zelle schon die Symptome weitgehender Vergiftung zeigt. Der Annahme scheint also ziemlich berechtigt zu sein, dass die Farbstoffmoleküle zuerst die Kernmembran verändern und für andere Moleküle passierbar machen, wahrscheinlich ebenfalls durch Ausschaltung gewisser Kolloide (Lipoide?). So wird auch das Austreten gewisser Moleküle und die dadurch verursachte Schrumpfung des Kerns leicht verständlich. Im Vergleich mit den Befunden BECKER's (1932*a* und *b)* kann ich vielleicht hier meiner Meinung dahin Ausdruck verleihen, dass die Lebendfärbungsversuche während der

Kernteilung eben deshalb so spontan Letal wirken (wie ich es auch bei *Melosira arenaria* konstatieren konnte, vgl. CHOLNOKY, 1934), weil dort der geschilderte osmotische Schutz der Kernstoffe durch die Kernhaut naturgemäss wegfällt. BECKER konnte zwar Lebendfärbungen erzielen, allerdings musste er immer mit sehr verdünnten Lösungen arbeiten, die die Desorganisationsvorgänge verlangsamen konnten und ausserdem hat er auch in den sog. «gelungenen» Fällen immer wieder Unregelmässigkeiten beobachtet. Seine Beobachtungen sind demnach die besten Beweise dafür, dass die älteren Beschreibungen über Lebendfärbung der Kerne nicht stichhaltig sind und dass die durch dieses Verfahren sichtbar gemachten Strukturen keinesfalls als Bestandteile der normalen Ruhekerne gelten können.

Zu diesen Beobachtungen an fixierten und gefärbten Zellen seien noch folgende Bemerkungen hinzugefügt: A. GONCALVES DA CUNHA (1929 und 1932) hat durch Lebendfärbung in manchen Z llen von höheren Pflanzen teils in dem Vakuom, teils in dem Protoplasma Gebilde nachgewiesen, die dem GOLGI'schen Netz recht ähnlich waren und die durch ihn als mit dem gesagten identischen Gebilde betrachtet worden sind, die später im Vakuom lokalisiert, wären. GICKLHORN (1932*d*), hat sich allerdings schon mit grösserer Vorsicht über diese auch von ihn beschriebenen Gebilde geäussert und diese zwar recht ähnlich, aber nicht identisch mit dem GOLGI-Apparat gefunden. BANK (1933) spricht sich schon deutlich darüber aus, dass diese Gebilde ihre Entstehung einem Entmischungsvorgang zu verdanken haben. In anbetracht dessen, dass die Entstehung dieser Gebilde hier klar verfolgt und auch die Tatsache gezeigt werden konnte, dass sie neben anderen Bestandteilen auch den hauptsächlichen Teil der lipoiden Phase der Plasmakolloiden darstellen, darf vielleicht die Meinung von GONCALVES DA CUNHA — nach welcher diese Gebilden Bestandteile der ruhenden normalen Zellen wären, die einen Entwicklungsvorgang durchmachen sollten, usw. — als nicht stichhaltig erklärt werden, da sie ja ihre Entstehung ausschliesslich der letalen Entmischung zu verdanken haben, und in unversehrten Zellen gänzlich fehlen.

Mit dem oben Mitgeteilten soll keinesfalls gesagt werden, dass

der GOLGI-Apparat aller Zellen eine Art Kunstprodukt darstelle, wenngleich es hervorgehoben werden muss, dass die GOLGI'schen Apparate in jedem einzelnen Falle gründlich daraufhin untersucht werden müssen, ob sie nicht vielleicht einem ähnlichen Vorgang ihr Zustandenkommen zu verdanken haben.

Zum Schluss scheint es mir zweckmässig, auch einiger Beobachtungen zu gedenken, die ich die Zellkerne betreffend an einem günstigen Material ausführen konnte.

Schon BECKER (1929, 1932*a* und *b*, 1933) hat mehrfach darauf hingewiesen, dass die Karyokinese durch Lebendfärbung sehr schädlich beeinflusst wird. Wir finden bei ihm ausführliche Beschreibungen der Degenerationen. Unter anderen Autoren betont es auch WEBER (1930*b*), dass das Eindringen der Farbstoffe in die Kerne ein letales Phänomen sei und dass kurz nachher das Absterben der betreffenden Zellen unvermeidlich eintritt. Konnte doch Frl. PLOWE (1931*a*) feststellen, dass der Kern ein eigenes osmotisches System darstelle und so ist wohl selbstverständlich, dass die Kerne erst später durch die eindringenden Farbstoffe angegriffen werden. Diesbezügliche Einzelheiten haben wir schon früher besprochen, hier nur soviel, dass die Degenerationserscheinungen nach den ersten Spuren eines Eindringens der Farbstoffe rasch vor sich gehen, zeigend, dass die Kernstoffe die Farbstoffmoleküle recht lebhaft speichern und dass die Kernvergiftung nur durch die schon beschriebene Tätigkeit der Kernmembran so lange verhindert werden konnte.

Interessante Degenerationserscheinungen konnte ich in den Zellen der Art *Spirogyra maiuscula* — in welchen die Kerne auch im lebenden Zustand sehr wohl sichtbar sind — beobachten.

Die Ruhekerne der genannten Art sind immer Linsenförmig und durch dünnere oder dickere Plasmastränge in der Mitte der Zelle aufgehängt. Am Anfang der Lebendfärbung nimmt der Kern sehr rasch eine Kugelrunde Form an. Gleichzeitig sind in dem Kernraume zwei voneinander scharf getrennte Abschnitte sichtbar. In den periphären Teilen sieht man eine durch homogene Masse ausgefüllte Hohlkugel, in deren Mitte die eigentlichen Kernsubstanzen zu schweben scheinen (Abb. 36). In dieser Zeit ist die Farbstoffspeicherung in der Zelle schon stark vorgeschritten und

die Stoffe, die die Farbstoffmoleküle gebunden haben, nehmen meistens eine zentrale Lage ein. In der Mitte dieser Massen ist der Kern und die aufhängenden Plasmastränge gut sichtbar (Abb. 35). Nur nebensächlich sei hier bemerkt, dass die Anhäufung der Farbstoffe in diesen Fällen wirklich nicht als eine ausschliesslich auf das Vakuom beschränkte Erscheinung angesehen werden kann, da die Farbstoffspeicherung der Plasmastränge und die gleiche des Kerns selbst in einer tadellosen Weise nachweisbar ist.

Nach dem Entstehen des periphären homogenen Raumes, verlieren die chromatischen Bestandteile ihre bisherige feinkörnige, gleichmässige Verteilung und erscheinen immer mehr in kleineren oder grösseren Flocken, die manchmal einer anfänglichen Prophase recht ähnliche Bilder ergeben (Abb. 26). Die Nukleolen sind noch immer unversehrt, aber auch diese beginnen sich zu färben. Nach wenigen Minuten dehnt sich der homogene Raum auf Kosten des inneren aus. Der Vorgang ist kaum anders zu deuten, als dass hier zuerst eine Entmischung und nachher eine Lösung und Desorganisation der Kernstoffe stattgefunden hat.

Wenn von diesem inneren scharf umgränzten körnigen Raum nur mehr noch ganz verschwindend kleine Überreste vorhanden sind, zeigen sich auch im Nukleolus Veränderungen. Die bisherige vollkommene Homogenität wird durch kleine vakuolenartige Gebilde aufgehoben (Abb. 38). Diese Vakuolen vermehren und vergrössern sich, bis schliesslich — vorausgesetzt, dass das Absterben der Zelle nicht früher eintrat — im Kernraum nur das stark vakuolisierte Nukleolus sichtbar bleibt (Abb. 39). Dieser Zustand wird niemals lange beständig, und ist das Absterben immer nur die Frage von wenigen Minuten.

Diese Art der Kerndegeneration kann selbstverständlich weder mit der wohlbekannten Karyorhexis, noch mit der Pyknose verglichen werden. Sie muss deshalb als eine die Vitalfärbung in manchen Fällen charakterisierende Degenerationserscheinung angesprochen werden. Da aber Pyknose, Karyorhexis und auch andere Arten der Kerndegeneration durch verschiedene Übergangsstadien miteinander verbunden sind, halte ich die Neubenennung des beschriebenen Prozesses für ganz verfehlt.

Zusammenfassung.

1. Die Farbstoffe werden nicht nur in dem Vakuom, sondern auch in dem Plasma, später auch in allen Organellen der Zelle gespeichert.

2. Die gespeicherten Farbstoffmoleküle werden während des Eintrittes chemisch verändert. Diese Veränderungen sind auch von der artlichen Zugehörigkeit der untersuchten Zellen abhängig.

3. Die Farbstoffmoleküle zwingen gewisse Moleküle des Plasmas und des Vakuoms, an welche sie gebunden wurden, zu einer Entmischung.

4. Die Farbstoffmoleküle verursachen eine Entmischung mancher lebenswichtigen Stoffe. Da diese Entmischungen irreversibel sind, sind sie auch letal.

5. Die Stoffe des Plasmas, durch die der Farbstoff gebunden wurde, kontrahieren sich auf eine Weise, die in mancher Hinsicht der Vakuolenkontraktion ähnlich, aber von dieser doch grundsätzlich verschieden ist.

6. Hand in Hand mit der Kontraktion geht auch ein Kollapsus des Zellkörpers. Manchmal können aber die ungefärbten Bestandteile der Zellen nicht beobachtet werden.

7. Die kontrahierenden Anteile bilden eine Haptogenmembran aus. Diese Haptogenmembranen sind nicht mit dem teoretischen Tonoplast der unversehrten Zelle identisch.

8. Die Lebendfärbung verursacht am Anfang eine allgemeine Erhöhung der Plasmaviskosität. In vorgeschritteneren Zuständen zeigt die Plasmolysekontraktion der Zellbestandteile grosse Abweichungen von denen der normalen Zellen. In manchen Fällen erweisen sich die Organellen als selbständige osmotisch wirksame Systeme.

9. Manche Erscheinungen deuten auf das unbedingte Vorhandensein des Plasmalemmas hin.

10. Die osmotische Aktivität der einzelnen Zellbestandteile geht als Folge der Lebendfärbung nacheinander aber in verschiedener Reihenfolge verloren.

11. Nach Lebendfärbung erweisen sich die Plasmolyse und Deplasmolyse weit schädlicher, als bei normalen Zellen. Die Er-

klärung der Erscheinungen ist in der durch die Lebendfärbung verursachten Entmischung der Stoffe der osmotisch wirksamen Häute zu suchen.

12. Das Verhalten der Kerne während der Lebendfärbung zeigt ganz besondere Einzelheiten, die hier nicht näher erörtert werden können.

Zitierte Literatur.

Albach, W., 1931.: Über die schädigende Wirkung der Plasmolyse und Deplasmolyse. Protoplasma, 12: 255—267.

Bank, O., 1933.: Die Entmischung des vitalgefärbten Zellsaftes der Zwiebelepidermis. Ebenda, 18: 620—627.

Becker, W. A., 1929.: Influence des colorants vitaux sur le caractère de la cinése somatique. Acta Soc. Bot. Polon., 6: 214—229.

Becker, W. A., 1932*a*.: Über die Vitalfärbung der Zellplatte. Protoplasma, 15: 478—481.

Becker, W. A. 1932*b*.: Recherches expérimentales sur la cytocinèse et la formation de la plaque cellulaire dans le cellule vivante. Acta Soc. Bot. Polon., 9: 3.

Becker, W. A., 1933.: Vitalbeobachtungen über den Einfluss von Methylenblau und Neutralrot auf den Verlauf von Karyo- und Cytokinese. Beitrag zur Pathologie der Mitose. Cytologia, 4: 135—157.

Brooks—Moldenhauer, M., 1932.: The penetration of 1-naphthol-2-sulphonate indophenol, o-chlorophenol indophenol and o-cresol into Valonia ventricosa J. Agardh. Nr. XIII. Protoplasma, 16: 345—356.

Chambers, R. and K. Höfler, 1931. : Micrurgical studies on the tonoplast of Allium cepa. Protoplasma, 12: 338—355.

Cholnoky, B., 1934.: Untersuchungen über den Plasmolyse-Ort der Algenzellen. III. Die Plasmolyse der ruhenden Zellen der fadenbildenden Konjugaten. Protoplasma, 12: 321—337.

Cholnoky, B., 1931.: Plasmolyse und Lebendfärbung bei Melosira. Protoplasma, 22: 161—172.

Czurda, W., 1932.: Zygnemales. Heft 9 der Süsswasserflora Mitteleuropas usw. Herausg. von Prof. Dr. A. Pascher, Jena.

Dufrenoy, J. et F. Labrousse, 1930.: Influence du pH du milieu de culture sur la pénétration de rouge neutre dans les cellules du tabac. Ann. Épiphyties, 16: 95—102.

Fukuda, Y. 1932.: A study on the conditions of complety frozen plant cells, with special reference to resistence to cold. Bot. Mag. Tokyo, 46: 239—246.

Gicklhorn, J., 1929*a*.: Beobachtungen über die vitale Farbstoffspeicherung, Kolloidchem. Beihefte, 28: 367—382.

GICKLHORN, J., 1929*b*.: Kristalline Farbstoffspeicherung im Protoplasma und Zellsaft nach vitaler Färbung. Protoplasma, 7: 341—352.

GICKLHORN, J., 1931.: Plasmolyseorte verschiedener Entwicklungsstadien einer Zelle. Protoplasma, 12: 79—85.

GICKLHORN, J., 1932*a*.: Vorübergehende Formänderungen von Plastiden während der Plasmolyse. Protoplasma, 15: 79—85.

GICKLHORN, J., 1932*b*.: Intrazelluläre Myelinfiguren und ähnliche Bildungen bei der reversiblen Entmischung des Protoplasmas, Protoplasma, 15: 90—109.

GICKLHORN, J., 1932*c*.: Über aktive Chloroplastenkontraktion bei Spirogyra und den Aggregatzustand der Spiralbänder. Protoplasma, 17: 571—592.

GICKLHORN, J., 1932*d*.: Beobachtungen zu Fragen über Form, Lage und Entstehung des Golgi-Binnenapparates. Protoplasma, 15: 365—395.

GICKLHORN, J. und L. MÖSCHL, 1930.: Vitalfärbung und Vakuolenkontraktion an Zellen mit stabilem Plasmaschaum. Protoplasma, 9: 521—535.

GICKLHORN, J. und F. WEBER, 1926.: Über Vakuolenkontraktion und Plasmolyseform. Protoplasma, 1: 427—432.

GONCALVES DA CUNHA, A., 1929.: Remarques sur la cytologie du bourgeon d'Elodea canadensis. Arch. Protist. d. Sc. Biol., 2: 242—285.

GONCALVES DA CUNHA, A., 1932.: Remarques sur la cytologie du développement de la graine de blé. C. R. Séanc. Biol. Paris, 110: 1043—1044.

GRATZY—WARDENGG, E., 1931.: Degeneration von Chloroplasten an Farnprothallien. Protoplasma, 14: 52—63.

GUILLERMOND, A., 1930.: Le vacuome des cellules végétales. Protoplasma, 9: 133—174.

HOMES, M. V., 1933.: Recherches sur la perméabilité cellulaire des algues marines. Arch. Zool. Expér. et Gén., 75: 75—101.

HÖFLER, K., 1928*a*.: Über Kappenplasmolyse. Ber. d. D. Bot. Ges., 46: (73)—(82).

HÖFLER, K., 1928*b*.: Über sichtbare Veränderungen am lebenden Protoplasten, hervorgerufen durch Salze. Anz. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl. 65: 220—221.

HÖFLER, K., 1931.: Die Permeabilitätsproblem und seine anatomischen Grundlagen. Mikrurgische Versuche zum Hautschichtenproblem. Ber. d. D. Bot. Ges., 49: (79)—(95).

HÖFLER, K., 1932.: Zur Tonoplastenfrage. Protoplasma, 15: 462—477.

HUBER, B. und H. SCHMIDT, 1933.: Plasmolyse und Permeabilität. Protoplasma, 20: 203—208.

IRWIN, M., 1929.: Spectrophotometric studies of penetration

V. Resemblances between the living cell and an artificial system in absorbing methyleneblue and trimethyl thionine. Journ. Gen. Physiology, 12: 407—418.

IRWIN, M., 1931*a*.: Studies on penetration of dyes with glass electrode. IV. Penetration of brillant cresyl blue into Nitella flexilis. Journ. Gen. Physiology, 14: 1—17.

IRWIN, M., 1931*b*.: Studies on penetration of dyes with glass electrode. V. Why does Azure B penetrate more readily than methylene blue or crystall violet. Jorn. Gen. Physiology, 14: 19—29.

IRWIN, M., 1932*a*.: Relation of absorption coefficients to rate of penetration of dye into the cell. Proc. Soc. Exper. Biol. and Med., 29: 993—995.

IRWIN, M., 1932*b*.: Cell models representing various types of living cells. Proc. Soc. Exper. Biol. and Med. 29: 995—996.

KEDROWSKY, B., 1931.: Vitalfärbungen. Protoplasma, 13: 389—396.

KERR, TH., 1933.: The injection of certain salts into the protoplasm and vacuoles of the root hairs of Limnobium spongia. Protoplasma, 18: 420—440.

KUNZE, R., 1931.: Der Einfluss der Wasserstoffionkonzentration auf die Vakuolenkontraktion vitalgefärbter Elodea-Zellen. Protoplasma, 12: 161—166.

KÜSTER, E., 1932.: Über Protoplasmatentakeln und Vakuolenzerklüftung. Ber. d. D. Bot. Ges., 50: 123—133.

LEPESCHKIN, W. W., 1930.: Light and the permeability of protoplasm. Amer. Journ. of Bot., 17: 953—970.

LINSBAUER, K., 1932.: Untersuchungen über die Einwirkung von Kalzium- und Kaliumlösungen auf das Protoplasma von Chara. Anz. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl. 69: 219—221.

LINSBAUER, K., 1933.: Untersuchungen über Plasma und Plasmaströmung an Charazellen. V. Untersuchungen des Protoplasmas mittels der Ausflussmethode. Protoplasma, 18: 554—595.

MODER, A., 1932.: Beiträge zur protoplasmatischen Anatomie des Helodea-Blattes. Protoplasma, 16: 1—55.

MOND, R., 1930.: Einige Untersuchungen über die Struktur und Funktion der Zellgrenzschichten. Protoplasma, 9: 318—330.

NADSON, G. A. et E. J. ROCHLIN, 1933.: L'effet des rayons X sur le protoplasme, le noyau et le chondriome de la cellule végétale d'après les observations sur le vivant. Protoplasma, 20: 31—41.

PEKAREK, J., 1930*a*.: Absolute Viskositätsmessung mit Hilfe der BROWN'schen Molekularbewegung. I. Prinzip der Methode, Voraussetzungen, Fehlerquellen der Messungen. Protoplasma, 10: 510—532.

PEKAREK, J., 1930*b*.: Absolute Viskositätsmessung mit Hilfe der BROWN'schen Molekularbewegung. II. Viskositätsbestimmung des Zellsaftes der Epidermiszellen von Allium cepa und des Amoeben-Protoplasmas. Protoplasma, 11: 19—48.

PEKAREK, J., 1933.: Absolute Viskositätsmessungen mit Hilfe der BROWN'schen Molekularbewegung. Protoplasma, 18: 1—53.

PFEIFFER, H., 1930.: Über einige Experimente mit Indikatoren und anderen Farbstoffen an Plasmatropfen und nackten Protoplasten auf reifen Beeren von Solanum nigrum. Cytologia, 2: 67—76.

PLOWE, J. Q., 1931*a*.: Membranes in the plant cell. I. Morphological membranes at protoplasmic surfaces. Protoplasma, 12: 196—220.

PLOWE, J. Q., 1931*b*.: Membranes in the plant cell. II. Localization of differential permeability in the plant protoplast. Protoplasma, 12: 221—240.

PRÁT, S., 1931.: Über Vitalfärbung der Meeresalgen. Protoplasma, 13: 397—401.

SAKAMURA, T., 1933.: Beiträge zur Plasmaforschung an Spirogyra-Zellen. Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 5, 2: 287—316.

SHINKE, N. and M. SHIGENAGA, 1933.: A histochemical study of plant nuclei in rest and mitosis. Cytologia, 4: 189—221.

USPENSKI, E. E., 1924.: Contributions to the study of the action of differents quantities of iron. Transactions Inst. Fertilisers U. S. S. R. 23.

WEBER, F., 1925.: Krampf-Plasmolyse bei Spirogyra. PFLÜGER's Archiv f. d. ges. Physiol. 206: 629—634.

WEBER, F., 1930*a*.: Vakuolen-Kontraktion, Tropfenbildung und Aggregation in Stomata-Zellen. Protoplasma, 9: 128—132.

WEBER, F., 1930*b*.: Vakuolen-Kontraktion vital gefärbter Elodea-Zellen. Protoplasma, 9: 106—119.

WEBER, F., 1931*a*.: Harnstoff-Permeabilität ungleich alter Stomata-Zellen. Protoplasma, 14: 75—82.

WEBER, F., 1931*b*.: Plasmolyse-Resistenz und Permeabilität bei Narkose. Protoplasma, 14: 179—191.

WEBER, F., 1932*a*.: Protoplasmatische Ungleichheit morphologisch gleicher Zellen. Protoplasma, 15: 291—293.

WEBER, F., 1932*b*.: Plasmalemma oder Tonoplast? Protoplasma, 15: 453—461.

WEBER, F., 1932*c*.: Aluminiumsalz-Wirkung und Plasmolyse-Permeabilität. Protoplasma, 17: 471—475.

WEBER, F., 1932*d*.: Gallensalzwirkung und Plasmolysepermeabilität. Protoplasma, 17: 102—107.

ZELLER, A., 1931*a*.: Resistenzversuche an Rotalgen. Anz. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl. Abt. I., 140: 152—153.

ZELLER, A., 1931*b*.: Resistenzversuche an Rotalgen. Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl., Abt. I., 140: 543—552.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Januar 1937.)

A MAGYARORSZÁGI MEDVEÁLLATOCSKÁK.

IHAROS ALFONZ-tól.

A VI—IX. táblával.

Hazánk állatvilágában még mindig vannak állatosztályok, melyek fajainak elterjedéséről, életkörülményeiről és rendszertani viszonyairól keveset tudunk.

Ilyen kevéssé kutatott és ismert állatcsoport a Tardigradák, a medveállatocskák osztálya. Ha a magyar Faunakatalógusba beletekintünk, azonnal feltűnik, hogy ezen osztály kimutatott fajainak száma rendkívül csekély, mert csupán csak három fajt találunk felsorolva (1. p. 6).

E fajok a következők: 1. «*Macrobiotus Hufelandi* S. Schultze I. Budapest, in stagnis rivisque inter algas secundum Th. Margó. 2. *Arctiscon tardigradum* Doy. I. Budapest, sub muscis tectorum antiquorum, teste Th. Margó.[1] 3. *Echiniscus testudo* Doy. V. Kolozsvár, sub muscis tectorum antiquorum».

Ezek után csak 18 év múlva találkozunk egy újabb adattal. Daday «A magyarországi tavak halainak természetes tápláléka» című munkájában 10 lelőhelyről említi meg a *Macrobiotus macronyx* Doy. fajt. (6. Bp. 1897. Ordo: Tardigrada p. 6.)

Ismét tizenhárom év szünet következik. 1910-ben jelent meg Richters munkája, melyben három fajt sorol fel hazánk területéről. (9. p. 7—10.)

E fajok a következők: 1. *Macrobiotus Harmsworthi* Murr. 2. *M. ambiguus* Murr. 3. *M. Breckneri* Richters sp. n. (*Hypsibius Dujardini* Marcus szerint). (2. p. 499.) E fajok lelőhelye a Bulea-tó volt.

---

[1] Th. Margó: Budapest és környéke állattani tekintetben. Bp. 1879.

Ezután megint hosszú idő tellett el, míg újabb adatok kerültek elő. Dr. DUDICH ENDRE 1932—1933-as években Bars megyében gyüjtött mohában és vízben élő Tardigradákat. Az anyagot MARCUS német búvár, a medveállatocskák legjobb ismerője vizsgálta át és határozta meg a talált tizenkét fajt. Az eredmény még publikálatlan. Szóbeli közlés útján a következő fajok neveit kaptam meg. *Macrobiotus intermedius* PLATE, *M. dispar* J. MURR., *M. Hufelandi* C. A. S. SCHULTZE, *Hypsibius (Diphascon) brevipes* in litt. MARCUS,[1] *H. (Isohypsibius) nodosus*, J. MURR., *H. (Isohypsibius) megalonyx* THULIN, *H. (s. str.) pallidus* THULIN, *H. (s. str.) convergens* URB., *H. (s. str.) Oberhaeuseri* DOY., *H. (s. str.) microps* THULIN, *H. (s. str.) novemcinctus* n. sp. MARCUS, *Echiniscus* sp. indet. MARCUS.

E fajok két lelőhelyről kerültek elő.

A Felvidéken BARTOŠ E. végez kutatásokat, melyek tekintélyes számmal és sok új fajjal gyarapítják a történelmi Magyarország Tardigrada-faunáját. (2. p. 50—58 ; 3. p. 99—107 ; 4. p. 257—260 ; 5. p. 139—143.) BARTOŠ eddig a következő fajokat gyüjtötte:

1. *Hypsibius hypostomus* BARTOŠ.
2. *Hypsibius calcaratus* BARTOŠ.
3. *Hypsibius rugosus* BARTOŠ.
4. *Hypsibius clavatus* BARTOŠ.
5. *Hypsibius arcuatus* BARTOŠ.
6. *Hypsibius ornatus* RICHT.
7. *Hypsibius tuberculatus* PLATE.
8. *Hypsibius nodosus* J. MURR.
9. *Hypsibius Sattleri* RICHT.
10. *Hypsibius papillifer* J. MURR.
11. *Hypsibius prosostomus* THULIN.
12. *Hypsibius tetradactyloides* RICHT.
13. *Hypsibius Augusti* J. MURR.
14. *Hypsibius Dujardini* DOY.
15. *Hypsibius microps* THULIN.
16. *Hypsibius pallidus* THULIN.
17. *Hypsibius megalonyx* THULIN.
18. *Hypsibius Oberhaeuseri* DOY.
19. *Diphascon scoticum* J. MURR.
20. *Diphascon oculatum* J. MURR.
21. *Diphascon Recamieri* RICHT.
22. *Diphascon alpinum* J. MURR.
23. *Milnesium tardigradum* DOY.
24. *Macrobiotus occidentalis* J. MURR.
25. *Macrobiotus macronyx* DUJ.

[1] A két új faj leírását MARCUS a «Das Tierreich» c. sorozatban megjelent monographiájában közölte (13.), tanulmányom benutatása után, ezért ezeket csak a függelékben tudtam felvenni.

26. *Macrobiotus Pullari* J. Murr.
27. *Macrobiotus Hufelandi* C. A. S. Schultze.
28. *Macrobiotus echinogenitus* Richt.
29. *Macrobiotus coronifer* Richt.
30. *Macrobiotus Richtersi* J. Murr.
31. *Macrobiotus intermedius* Plate.
32. *Macrobiotus Harmsworthi* J. Murr.
33. *Macrobiotus areolatus* J. Murr.
34. *Macrobiotus Schultzei* Greeff. (a *M. Huf.* synonymja).
35. *Parechiniscus chitonides* Cuénot.
36. *Bryodelphax parvulus* Thulin.
37. *Echiniscus Wendti* Richt.
38. *Echiniscus quadrispinosus* Richt.
39. *Echiniscus quadrispinosus f. brachispinosus* Bartoš.
40. *Echiniscus quadrispinosus f. cribrosus* J. Murr.
41. *Echiniscus quadrispinosus f. fissispinosus* J. Murr.
42. *Echiniscus merokensis* Richt.
43. *Echiniscus merokensis f. suecicus* Thulin.
44. *Echiniscus Blumi* Richt.
45. *Echiniscus bisetosus* Heinis.
46. *Echiniscus Trisetosus* Cuénot.
47. *Echiniscus testudo* Doy.
48. *Echiniscus testudo f. quadrifilis* (*E. testudo* Doy.)
49. *Echiniscus testudo f. trifilis* (*E. trifilis* Rahm.)
50. *Echiniscus dearmatus* Bartoš.
51. *Echiniscus fortis* Bartoš.
52. *Echiniscus Marinellae* Bartoš.

A lelőhelyek száma 32-nél több, mert négy faj esetében Bartoš nem sorol fel minden termőhelyet, hanem csak általánosan említi meg, pl. «sok helyen vagy mindenütt előfordul».

A legutóbb Török Piroska mutatott ki Budapest vízvezetéki vizéből két fajt:

1. *Macrobiotus ampullaceus* Thulin.
2. *Hypsibius Schaudini* Richt. (10. p. 653.)

A kimutatott irodalmi források hű tükrét adják annak, amit eddig hazánk Tardigradáiról tudunk.

Ilyen előzmények után kezdtem tanulmányozni hazánk Tardigrada-faunáját. Célom az volt, hogy a lehetőségekhez képest minél teljesebb számban összegyüjtsem történelmi Magyarország

területén fellelhető fajokat és chorologiájuk tisztázásához hozzájáruljak. Munkámban felsorolom mindazon fajokat, melyeket a hazai és külföldi irodalomban történelmi Magyarországra vonatkozólag találtam és a névsort kiegészítem az általam gyüjtött fajokkal.

Értekezésemben nem tudok *részletes* képet adni a fauna területen élő Tardigrada-fajokról, mert a tervszerű és hézagmentes kutatáshoz sem elegendő idő, sem pénz nem állott rendelkezésemre. Ennek megfelelően amennyiben lehetséges volt, az ország különböző helyeiről szerzett mohák és kisebb részben zuzmók Tardigrada-faunáját vizsgáltam át. Bár medveállatocskák nemcsak moha- és zuzmó-biotopokban élnek, mégis egyedül ezen biotopok Tardigrada-faunájával foglalkoztam. Ennek két oka volt. Nevezetesen: meglehetősen nagy mennyiségben kaptam mohát más gyüjtőktől. Így Dudich Endre, Jávorka Sándor, Szepesfalvi Lajos, Visnya Aladár, Kesselyák Adorján, Pákay Arnold, Kárpáti Zoltán, Kleiner Endre urak szíves jóindulatából, valamint egyetemi kollégáim útján az ország legkülönbözőbb részeiből kaptam anyagot, melyért ezúton is hálás köszönetemet fejezem ki. Az általam bejárt területeken is az említett anyagot tudtam a legjobban begyüjteni, meg az érdeklődésem is főleg ezekre irányult. Más biotopok, pl. a vizek Tardigrada-faunájának felkutatását és megvizsgálását egy későbbi időpontban kívánom elvégezni, rendszeres gyüjtés alapján. Mindazonáltal ez nem jelenti azt, hogy munkámban csak a mohákban élő Tardigradákkal foglalkozom. Felvettem az ismertté vált vízi fajokat is. Dudich Endre anyagában, amelyet Marcus vizsgált át, számos vízből gyüjtött Tardigrada volt.

Gyüjtési módom a következő volt. A moha és zuzmó gyüjtésekor nagy gondot fordítottam arra, hogy a gyüjtési terület legkülönbözőbb pontjairól és termőhelyeiről szerezzem be az anyagot. Így külön gyüjtöttem a nedvesebb és szárazabb helyekről, fákról, talajról és háztetőről stb. Az anyag különböző tulajdonságú termőhelyek szerinti osztályozását és feldolgozását azonban nem tudtam mindig rendszeresen keresztülvinni, mert sok olyan anyagot kaptam, melyről a gyüjtők nem jegyezték fel a termőhely közelebbi mineműségét. Éppen ezért vizsgálataim eredményeit nem is osztályoztam ilyen szempontok szerint, hogy elkerüljem a téves adatokat.

A begyüjtött anyagot 24 órán át vízben áztattam, azután többször jól kimostam. Az áztatóvízből lerakódott törmelékanyagot PETRI-csészében preparálómikroszkóp alatt átvizsgáltam. A benne talált Tardigradákat pipettával szippantottam ki és tárgylemezen kinyujtóztatott állapotban mikroszkóp alatt határoztam meg. Állandó készítmények előállításához gelatinglicerint használtam. Célomnak ez az egyszerű és gyors eljárás felelt meg a legjobban.

Amilyen szűkreszabott a magyar Tardigradákra vonatkozó irodalom, olyan nagyszámú értekezés található a külföldi irodalomban. Éppen e miatt szükségtelennek tartom, hogy a medveállatocskák általános szervezeti viszonyaival és rendszertani helyzetével hosszasabban foglalkozzam. Munkámban csak rövid, diagnózisszerű jellemzésüket kívánom adni, egyebekben pedig utalok MARCUS idevágó két nagyobb munkájára, melyekben e kérdéseket kimerítően tárgyalja. Ugyanitt megtalálható a Tardigradákra vonatkozó irodalom jegyzéke is. A munkák címe:

1. E. MARCUS: Bärtierchen (Tardigrada) (in: F. DAHL: «Die Tierwelt Deutschlands», Teil 12, Jena, 1928, pp. VIII+230, fig. 265).

2. E. MARCUS: Tardigrada (in: H. G. BRONNS: «Klassen und Ordnungen des Tierreichs», Bd. V. Abt. IV. Buch. 3. Leipzig, 1929, pp. VIII+608, fig. 398, Tafel 1.)

A Tardigradák rövid jellemzése.

A Tardigradák mindenütt megtalálhatók: szárazföldön, édes- és tengervízben, a trópusokon és a sarkvidékeken stb. Alakjukat tekintve kicsi, mikroszkópikus medvékre emlékeztetnek, innét vették a magyar elnevezésüket. Latin nevük lassú mozgásukra vonatkozik. Nagyságuk még a legnagyobb fajoké is, alig haladja meg az 1 mm-t. MARCUS szerint az eddig ismert Tardigradák közül a legkisebb az *Echiniscus intermedius:* 51 μ, a leghosszabb pedig az *Arctiscon tardigradum* és a kanadai *Macrobiotus Hufelandi:* 1200 μ (l. p. 2—3). Én ezeknél nagyobb fajt is találtam vizsgálataim közben: *Macrobiotus Harmsworthi,* melynek hosszúsága 1360—1400 μ volt.

A Tardigradák teste hengeres, háthasi irányban kissé lapított. Öt szelvény alkotja: egy feji és négy törzsi szelvény. A törzsön

négy pár karmos vagy tapadó lapokkal bíró ujjakat viselő lábat találunk. A lábaknak *saját* izomzatuk van, mely a törzs izomzatával egyetemben síma izomelemekből áll. A testüket erős cuticula fedi, mely nem chitin, hanem albuminoid, lúgban oldható anyag.

Színük ráeső fényben sárga, vörösesbarna, téglavörös, rózsaszín, zöldes vagy lilás; áteső fényben színtelenek.

Jellemző elkülönítő bélyegeik a tőröcskékkel fegyverzett szájkészülék, a garatfő berendezése, valamint a karmok alakja.

Idegrendszerük a garatfeletti és garatalatti dúcból meg a hasdúclánccból áll. Bélcsatornájuk elő-, közép- és utóbélre tagolódik. Kezdete a szájnyílás, melynek helyzete ventroterminális. Egyes fajoknál határozottan ventrális, másoknál terminális. A szájnyílás mögött a szájüreg van, mely a szájcsőben folytatódik. Ez utóbbi a *Hypsibius* nem esetében hosszú és hajlott garatcsővé nyúlik meg. A szájcső a garatfőbe nyílik; ezen a helyen cuticuláris képletek: apophysisek vannak, melyek a már beszívott táplálóknak a szájcső felé való visszaömlését akadályozzák meg. A garatfő alkotását és a szúrókészülékeket (stilettek) illetőleg lásd a bővebb ismertetést (p. 9).

A garatfőből rövid nyelőcső vezet a gyomorba, melyen számos tágulat lehet. A bélcsatorna végső része az utóbél, melybe az Eutardigradáknál az ivari kivezetőjáratok nyílnak.

Az előbéllel kapcsolatosak az ú. n. «nyálmirigyek», melyek vedléskor a tőröcskéket hozzák létre.

A középbél és utóbél határán foglalnak helyet a kiválasztószervek, a Malpighi-féle edények.

A végbél egyes sejtjei szintén mirigyeknek tekinthetők; nagyobbak a többi végbélsejtnél és bennük vakuolák találhatók. Működésük azonban még nem ismeretes.

A Tardigradák váltivarúak; petékkel szaporodnak s már a kibúvó fiatalok hasonlítanak a kifejlett példányokhoz.

Bővebben csak azokat a szerveket ismertetem, melyek rendszertani szempontból fontosak és a meghatározásban szerepelnek. Fontos elkülönítő bélyegek a fej függelékeinek jelenléte vagy hiánya, a lábak, a karmok, a garatfő szerkezete és alkotása, a Malpighi-féle edények, a kloaka, a gonoporus előfordulása, továbbá a cuticula szerkezete, kialakulása és függelékei. Ezeknek a bélye-

geknek eltérései alapján lehet a Tardigradákat elkülöníteni. Így pl. a Tardigradák osztályát két rendre bonthatjuk fel.

Bélyegek	I. rend: Heterotardigradák	II. Eutardigradák
Feji függelékek	Vannak	———
Lábak	A középső rész a proximális részbe behúzható, a negyedik pár lábon tüskeredő van	A láb egységes, a középső rész nem húzható be a proximális részbe, tüskeredő nincs
Karmok	Egyformák (Homonychia, homodactylia)	Különböző alkotásúak (Heteronychia)
Garatfő	Rövid ovális; a garatszegély tagolatlan; a tőröcskék hosszúak és egyenesek, vékonyak	Hosszúkás vagy némely esetben rövid ovális, a garatszegély tagolt, a tőröcskék rövidek és hajlottak, vastagok
MALPIGHI-féle edények	Nincsenek	Vannak
Kloaka	Nincs	Van
Gonoporus	Van	Nincs
Cuticula	Erősen fejlett és lemezekre osztott	Lágy és nem tagolódik lemezekre

Lássuk ezeket a bélyegeket külön-külön.

1. *A fej függelékei* lehetnek szemölcsök: papilla cephalica, clava és lehetnek serte vagy fonálszerűek: cirrus medianus, cirri mediales interni és externi, cirri laterales, mely utóbbi a törzs és a fej határán van.

Ezeket a függelékeket a garatfeletti dúc látja el idegekkel, valószínűleg érzékszervek. (L. az 1—6. képeket, I. T.) Ilyen függelékeket csak a Heterotardigradáknál találunk, az Eutardigradáknál nem. Kivétel az *Arctiscon tardigradum*, melynek hat szájkörüli szemölcse és mögöttük távolabb még két lateralis fejszemölcse van, mely utóbbiak valószínűleg a Heterotardigradák papilla cephalicajának felelnek meg.

2. *A lábak* alkotása kétféle. A Heterotardigradáknál cuticuláris ráncok által határolt külső tagoltságot találunk: proximális, me-

diális és distális lábrészeket. Mint már említettem, a mediális rész a proximális részbe behúzható. Az *Echiniscus, Pseudechiniscus* és *Parechiniscus* nemeknél tüskeredő jelzi a mediális és proximális rész határát. Az Eutardigradáknál egységes a láb, sem külső tagoltság, sem tüskeredő nincs.

A lábak a testfal kitüremkedései és izület nélkül csatlakoznak a törzshöz (7. kép).

3. A *karmok* alkata a két rendnek megfelelően eltérő. A Heterotardigradáknál egyszerű horogalakú képletek. Van külső és belső karom; a belsőknek közel az alapi részhez mellékhorog fordulhat elő, a külsőkön pedig az alapi részen tüskék lehetnek. E rendnél tapadó lapokkal ellátott ujjak *(Batillipes)* vagy karmos ujjak *(Halechiniscus)* is előfordulhatnak. Az ujjak cuticulacsövek, epidermis és izomzat nélkül (l. p. 6).

A karmok száma a fiatal állatoknál kettő, kifejletteknél négy. Az *Echiniscoidesnél* 5—9 lehet a számuk. Az ujjak száma 4—5-ig terjedhet. A karmokat a köztük kifeszülő rugalmas karombőr köti össze (13—18. képek).

Az Eutardigradáknál a karmok alakja generikus bélyeg. Minden nemnek jellemző karomtypusa van. Itt már a külső és belső karmok, alakjukat tekintve, meglehetősen eltérhetnek egymástól. A karmokon fő- és mellékág különböztethető meg. A főágon mellékcsúcsok vannak.

A *Macrobiotus* és *Hypsibius* nemeknél különböző karomtípusok vannak, melyeket a határozótáblákban ismertetek.

A *Macrobiotus* nemnél a láb terminális részén, a karmok alapi részéhez közel egy cuticuláris képződmény jelenik meg: a lunula, mely a fajokra jellemző is lehet. Némelykor hiányzik vagy nehezen észlelhető (10—12. képek).

A karmokat a lábakban lévő epidermoidalis eredetű, ú. n. «karommirigy» hozza létre a vedlések folyamán. A határozótáblában *karmok* alatt mindig egy láb külső és belső karmát kell érteni.

4. A *garatfő* gömbölyded-, ellipszoid- vagy körtealakú, háromrekeszű képlet, melyet izom- és hámsejtek alkotnak. Ezek radiális, interradiális és perradiális szimmetriatengelyek szerint helyezkednek el Így triadokat és hexadokat alkotnak

A garatfő feladata az, hogy szívóműködésével az állat által

felszúrt növényi sejtek folyékony anyagát a bélcsatornába felszívja. A garatfő üregét cuticula béleli ki. Belső szegélyei cuticuláris vagy meszes anyagú szilárdító képletek. A Heterotardigradákná a szilárdító szegély egységes és tagolatlan, az Eutardigradáknál pedig *pálcikákra* és *rögöcskékre* (macroplacoidok) tagolt. A pálcikák és az utánuk előforduló *komma* (microplacoid) kifejlődése és száma a fajokra jellemző. Az *Arctiscon* nemnél nincs szilárdító szegély.

5. A *szájkészülék* részei közt jellemző a *tőröcskék* jelenléte (8—9. képek). A tőröcskék a Heterotardigradáknál egyenesek, az Eutardigradáknál hajlottak. A szúrókészülékek alakja tőrhöz vagy árhoz hasonlít. Részben cuticuláris, részben meszes anyagból állanak. Rajtuk megkülönböztetünk hegyes *disztális véget*, vastagabb és néha duzzadt *középső részt* és kétágú *alapi részt:* a *furcát*. A tőröcskéket *tartók* rögzítik a szájcsőhöz. A tartók ívesen hajlott képletek, melyek a szájcsövön és a furcán tapadnak. A tőröcskéket izmok mozgatják előre és hátra. A tőröcskék a *tőrhüvelyeken* át jutnak be a szájüregbe, illetőleg ezen át a szabadba. Ezekkel szúrják fel a Tardigradák a növényi sejteket, melyeknek nedvével táplálkoznak. A Tardigradák csak növényi anyagokkal élnek. Néhány irodalmi adat megemlíti ugyan, hogy egyes nemek állati anyagokat is felvesznek, de ez nem a rendes táplálékuk. Leginkább az *Arctiscon* táplálkozik állatokkal (Nematodákkal, Rotatoriákkal stb.) (19. kép.)

6. A *Malpighi-féle edények* a kiválasztás szolgálatában állanak. A közép- és utóbél határán találhatók, de csak az Eutardigradáknál fordulnak elő. Három mirigyből állanak : kettő oldalt foglal helyet, ezek a tulajdonképpeni *Malpighi-féle edények*. A harmadik a bélcsatorna háti részén helyezkedik el, ez az ú. n. dorsalis mirigy. Szövettani felépítésük megegyező; mindegyik három-három laposmagvú sejtből áll (l. p. 11). Bennük nitrogéntartalmú kristályos termékek halmozódnak fel. A *Malpighi-féle edények* nagyságával fordított arányban áll a gyomorban található ú. n. bélkristályok mennyisége, melyek szintén bomlástermékek.

7. A *kloaka* a *Batillipes* nemnél és az Eutardigradáknál fordul elő, a végbél hátulsó része, amelybe az ivarjáratok is belenyílnak.

8. A *gonoporus* (ivarnyílás) hosszanti vagy harántnyílás,

melyen át a *gonoductusok* (ivarvezetékek) nyílnak a szabadba. A *Tetrakentron* és az *Echiniscoideák* esetében az utolsó lábpár *között* van, a többinél ventrálisan az utolsó lábpár *előtt* foglal helyet. A nyílást cuticuláris redők veszik körül.

9. A *cuticula* mint már említettem, lehet gyengébben fejlett és síma, tagolatlan, valamint erősen fejlett és lemezekre osztott. Egyes nemeknél díszített: pontok, szemölcsök, tüskék stb. lehetnek rajta. Ha lemezekre tagolt, akkor a következő lemezeket különböztetjük meg: *Echiniscus* nem esetében *fej-, váll-* vagy *első törzsilemez*, második és harmadik *páros törzsilemezek*, első, második és harmadik *köztilemez* és *véglemez*. Lehetnek még oldalt *melléklemezek* is.

A *Pseudechiniscus* nemnél négy törzslemez és négy köztilemez van. A köztilemezek közül egyik vagy másik el is maradhat. E lemezeknek két része van: az első rész a *dorsalis-intersegmentalis rész*, a második a *transversalis-intersegmentalis* rész. E részek közül egyik vagy másik nem mindig fejlődik ki.

A véglemezen oldalt erős bevágás van, miáltal a lemez lóherelevél alakot ölt (l. p. 11). E lemez némelykor facettázott, kisebb lemezekre osztott lehet.

A cuticulán tüskék, fonál- vagy serteszerű képletek lehetnek, melyeknek száma és előfordulási helye fajokra jellemző bélyeg. E függelékek helyeit betűkkel jelölik. Így: a cirrus lateralis helye: «*a*». Az oldalsó törzsi függelékek helyei: «*b*», «*c*», «*d*», «*e*». Dorzolateralis függelékek helyei: «b_1», «c_1», «d_1». A háti függelékek helyei: «b_2», «c_2», «d_2» (20–21. képek).

A cuticula vagy színtelen, illetőleg halványszürke, vagy színezett. A színt karotin és lutein anyagok adják, de a testüreget kitöltő testnedv és a gyomor tartalma is módosíthatják. Az idősebb Tardigradák lilás színűek. Ez az öregedés jele.

A meghatározásban szerepelhetnek a peték is, melyeknek díszítése szintén faji bélyeg lehet. Azonban nem sorolhajtuk őket az elsőrendű bélyegek közé, mert vannak fajok, melyeknek petéi többféleképpen lehetnek díszítettek és nem is ismeretesek minden fajnál. Azonkívül nagyon sok pete van, melyről még nem derült ki, hogy melyik fajhoz tartozik.

Miután az elmondottakban ismertettem a meghatározásban

felhasználható bélyegeket, közlöm az eddig talált hazai fajok meghatározótábláit.

Osztály: Tardigrada.

Rendek.

1*a*. A fejen függelékek vannak. A karmok vagy ujjak egyformák és külön állanak ..... *I. Heterotardigrada.*

1*b*. A fejen nincsenek függelékek vagy csak hat szájkörüli szemölcs és két oldalsó fejszemölcs van. A karmok nem egyformák, a fő- és mellékág bazálisan összenőtt egymással. Ujjak nincsenek. *II. Eutardigrada.*

A *Heterotardigrada* rend *alrendjei.*

1*a*. A lábak terminális végződései ujjak *I. Arthrotardigrada.*[1]

1*b*. A lábak terminális végződései karmok. *II. Echiniscoidea.*[2]

Az *Echiniscidae család nemei.*

1*a*. A cuticula nem fejlődött ki páncélszerűen 2

1*b*. A cuticula páncélszerűen fejlett 3

2*a*. A cuticulán, a háton és oldalt apró szemölcsök vannak. A lábakon négy karom van. A clava hegyes *Oreella* J. Murr.[1]

2*b*. A cuticulán nincsenek szemölcsök. A lábakon 5—9, néha 11 karom van. A clava tompa, szemölcsszerű *Echiniscoides* Plate.[1]

3*a*. A cuticula gyengén páncélszerűen fejlett, a lemezek nem különülnek el élesen. A testen csak egy függelék van: a cirrus lateralis. A lábakon négy karom van. A negyedik lábpáron tüskeredő nincs ..... *Parechiniscus* Cuénot.

3*b*. A cuticula erősen páncélszerű, a lemezek élesen elkülönülnek egymástól. Több függelék fordulhat elő 4

4*a*. Három törzslemez és három köztilemez van. A lábakon négy karmot találunk, a belsőkön mellékhorog ül, a külsőkön pedig alapi tüske van. A negyedik lábpáron tüskeredő van *Echiniscus* Thulin.

---

[1] Nálunk nem fordulnak elő.

[2] Ebbe az alrendbe csak az *Echiniscidae* család tartozik.

4*b*. Négy törzslemez van, az utolsó az ú. n. pseudosegmentalis lemez. A lábakon négy karom van, a belsőkön mellékhorgok vannak, a külsőkön alapi tüske nincs ..... *Pseudechiniscus* THULIN.

A *Parechiniscus* nem *fajai.*

E nemet eddig csak egy faj képviseli.

1. Az állat színtelen vagy halványszürke. Egyebekben lásd a nem jellemzését ..... *Parechiniscus chitonides* CUÉNOT.

Az *Echiniscus* nem *alnemei.*

1*a*. A cuticula páncéllemezekre tagolódik, 5—6 köztilemez van, melyek közül az utolsó a véglemezhez csatlakozik. A köztilemez dorzális-intersegmentális része erősebben fejlett, mint a transversalis-intersegmentalis rész. A véglemezen nincsen kétoldalt bevágás ..... *Bryodelphax* THULIN.

1*b*. A véglemezen kétoldalt bevágás van 2

2*a*. Öt szabadon álló köztilemez van. A dorzális-intersegmentális rész még erősebben fejlett, mint az előző alnem esetében.

Hypechiniscus THULIN.[1]

2*b*. A köztilemez dorzális-intersegmentális része nem fejlődött ki, míg a transversalis-intersegmentalis rész jól fejlett. A pseudosegmentalis lemez hiányzik ..... *Echiniscus s. str.* THULIN.

Bryodelphx alnem *fajai.*

Ezen alnemből eddig csak egy faj ismeretes hazánk területéről.

Csak egy függelék van: a cirrus lateralis. A fej eleje feltűnően lekerekített. A cuticula színtelen, a szemek téglavörösek. Három köztilemez van. A véglemez facettázott.

Bryodelphax parvulus (THULIN).

Az *Echiniscus s. str.* alnem *csoportjai.*

1*a*. A törzsön csak «*a*» helyen van oldalfüggelék.

arctomys-csoport.

1*b*. Más helyeken is vannak függelékek 2

[1] Hazánkban nem fordul elő.

2*a*. Minden függelék tüske vagy serte... *a spinulosus-csoport.*

2*b*. A függelékek hajszerűek is lehetnek 3

3*a*. Mind az öt lehetséges helyen *(a, b, c, d, e)* van oldalsó függelék ..... *scrofa-csoport.*

3*b*. Nem minden helyen van függelék. 4

4*a*. A cirrus lateralison kívül még több függelék is lehet 5

4*b*. A cirrus lateralison kívül még három más oldalfüggelék is van ..... *Blumi-csoport.*

5*a*. A cirrus lateralison kívül még két másik függelék is van. *granulatus-csoport.*

5*b*. A cirrus lateralison kívül még csak egy oldalfüggelék van. *biunguis-csoport.*[1]

Az arctomys-csoport *fajai.*

1*a*. Csak «*a*» helyen van függelék. *Echiniscus Wendti* RICHT.

1*b*. «*a*» helyen kívül még a háton «c_2» és «d_2» helyeken vannak függelékek ..... *Echiniscus canadensis* J. MURR.

A spinulosus-csoport *fajai.*

1*a*. A cirrus lateralison kívül oldalt csak «*c*»-nél van függelék, amelyik tüske. A háton «c_2»-nél haj, «d_2»-nél tüske van. *Echiniscus bisetosus* HEIN.

1*b*. A cirrus lateralison kívül oldalt még két függelék van: «*c*»-nél serte, «*d*»-nél tüske. A háton «c_2»-nél haj, «d_2»-nél tüske található ..... *Echiniscus trisetosus* CUÉNOT.

A scrofa-csoport *fajai.*

1*a*. Az összes oldalfüggelék serte. A háton «c_2» és «d_2» helyeken tüske van. A harmadik köztilemez hiányzik. *Echiniscus simba* MARCUS.

1*b*. Az összes oldalfüggelék hosszú 2

2*a*. A véglemez facettázott. A háton csak «c_2» helyen van függelék. ..... *Echiniscus merokensis f. suecicus* THULIN.

2*b*. A véglemez nem facettázott 3

---

[1] Faunánkban nincs képviselője.

3*a*. A harmadik köztilemez kifejlődött és mellék közti lemezek is vannak. A háton «c_2» és «d_2» helyeken tüskék vannak.

Echiniscus quadrispinosus RICHT.

3*b*. A harmadik köztilemez megjelenik, de mellék közti lemezek nincsenek. A háton «b_2», «c_2» és «d_2» helyeken rövid tüskék vannak.

Echiniscus Creplini C. A. S. SCHULTZE.

A Blumi-csoport *fajai.*

1*a*. «*b*»-nél függelék van 2

1*b*. «*b*»-nél függelék nincs 4

2*a*. «*d*»-nél függelék nincs. A háton «c_2»-nél tüske jelenik meg.

Echiniscus testudo (DOY).

2*b*. «*d*»-nél tüske van 3

3*a*. A háton «c_2»-nél haj, «d_2»-nél tüske fejlődött ki.

Echiniscus Blumi RICHT.

3*b*. A háton «c_2» és «d_2»-nél tüskék vannak.

Echiniscus fortis BARTOŠ.

4*a*. «*c*»-nél rövid tüske van. A háton «b_1», «c_1», «d_1» és «c_2» és «d_2»-nél tüskék vannak ..... *Echiniscus Marinellae* BARTOŠ.

4*b*. «*e*»-nél hosszú haj van 5

5*a*. «*c*», «*d*», «*e*»-nél hosszú hajszerű képletek vannak. A véglemez facettázott ..... *Echiniscus merokensis* RICHT.

5*b*. «*c*», «*d*»-nél serte, «*e*»-nél hosszú haj van, a háton «c_2» és «d_2» helyeken serték ülnek. A véglemez nem facettázott.

Echiniscus bartramiae IHAROS.

A granulatus-csoport *fajai.*

1*a*. «*d*»-nél nincs függelék. A háton «d_2»-nél tüske van.

Echiniscus trifilis RAHM.

1*b*. «*d*»-nél van függelék. A háton «c_2»-nél haj, «d_2»-nél pedig tüske található ..... *Echiniscus granulatus* (DOY.)

Pseudechiniscus nem *fajai.*

1*a*. Csak «*a*» helyen van függelék. A lemezek szélei egyenesek.

Pseudechiniscus suillus (EHRBG.)

1*b*. «*a*» helyen kívül még «*c*»-nél találunk hosszú függeléket. A törzslemezek rostralis szélei íves csúcsban megtörtek.

Pseudechiniscus transsylvanicus IHAROS.

II. rend: Eutardigrada.

Határozótábla az *Eutardigrada* rend *családjai* számára.

1*a*. Feji függelékek nincsenek. A szájnyílást nem zárják el cuticularis lemezek. A tőröcskék erősen fejlettek. A garatfőben szilárdító berendezés van. A karmok nem egyforma alkotásúak. 1. cs. *Macrobiotidae*.

1*b*. A fejen függelékek vannak. A szájnyílást cuticularis lemezek zárják be. A tőröcskék gyengén fejlettek. A garatfőben szilárdító berendezés nincs. A karmok egyforma alkotásúak. 2. cs. *Arctiscidae*.

I. A *Macrobiotidae* család *nemei*.

1*a*. A cuticula lágy, nem páncélszerű. A fejen nincsenek függelékek. A karmok egyenlő nagyok; a főágak egymás felé, a mellékágak pedig egymással ellenkező irányba hajlanak. *Macrobiotus* THULIN.

1*b*. A cuticula lágy. A fejen nincsenek függelékek. A karmok nem egyenlő nagyok; a külsők nagyobbak, mint a belsők. A karom főága jóval hosszabb a mellékágnál és befelé előre hajlik, míg a mellékág kifelé és hátra irányul ..... *Hypsibius* THULIN.

A *Macrobiotus* nem *csoportjai*.

1*a*. A cuticula díszített ..... *aculeatus*-csoport.

1*b*. A cuticula nem díszített 2

2*a*. A garatfőben az apophysiseken kívül három macroplacoida és komma van ..... *intermedius*-csoport.

2*b*. A garatfőben az apophysiseken kívül két macroplacoida és komma van ..... *Hufelandi*-csoport.

Az *aculeatus*-csoport *fajai*.

E csoportból eddig csak egy faj került elő Magyarország területéről.

A garatfőben egy hosszabb és egy rövidebb pálcika van, a komma nem mindig fejlődik ki. *Macrobiotus occidentalis* J. MURR.

Az *intermedius*-csoport *fajai.*

1*a*. A garattőben három egyenlő nagy rögöcske és kicsi komma van. A szájcső szűk ..... *Macrobiotus intermedius* PLATE.

1*b*. A garatfőben három pálcika van 2

2*a*. A garatfőben komma nincs *Macrobiotus furcatus* EHRBG.

2*b*. A garatfőben komma van 3

3*a*. A garatfő rövid ovális; az első vagy a második pálcika a legrövidebb. A cuticula sötéten színezett. Szem nincs. A peték héja a kúpalakú díszítések között mezőcskékre oszlik (areolák). Testnagysága 1000 μ körül van. *Macrobiotus Richtersi* J. MURR.

3*b*. A garatfő hosszúkás ovális; a harmadik pálcika a leghosszabb. Az állat színe halványsárga. Szem van. A peték héja a díszítések (szemölcsök) között síma. Testnagyság 651 μ-ig. *Macrobiotus Harmsworthi* J. MURR.

A *Hufelandi*-csoport *fajai.*

1*a*. A cuticulán a második és harmadik lábpár között két kúpalakú függelék van. A karmok főága háromszor akkora, mint a mellékág ..... *Macrobiotus dispar* J. MURR.

1*b*. A cuticulán nincs függelék a második és a harmadik lábpár között 2

2*a*. A negyedik lábon szemölcsös dúdor van. A karmok az Echinogenitus-típusba tartoznak. (A fő- és mellékág hegyesszöget alkot egymással és egyenlő hosszúak; a karom V-alakú.) *Macrobiotus echinogenitus* RICHT.

2*b*. A negyedik lábon nincs szemölcsös dúdor 3

3*a*. A garatfőben rövid macroplacoidok vannak. A karmok a Hufelandi-csoportba tartoznak .... *Macrobiotus coronifer* RICHT.

3*b*. A garatfőben hosszú macroplacoidok vannak 4

4*a*. A hosszú pálcikák egyenlő nagyok, komma nincs. A karmok a macronyx-csoportba tartoznak. (A főág nagyon hosszú, a mellékág rövid és egymással hegyesszöget zárnak be.) *Macrobiotus macronyx* DUJ.

4*b*. A hosszú placoidok különböző nagyságúak; komma van, vagy hiányzik 5

5*a*. Komma van. A karmok a Hufelandi-típusba tartoznak. A fő- és mellékág félig összenőtt egymással.

Macrobiotus Hufelandi C. A. S. Schultze.

5*b*. Komma nincs 6

6*a*. A karmok rövidek és vaskosak, a főág erősen hajlott.

Macrobiotus ampullaceus Thulin.

6*b*. A karmok nem ilyenek 7

7*a*. A karmok főága vékony és gyengén hajlott, a macronyx-típusba tartoznak. A garatfő rövid, ovális. A petéken öt- vagy hatszögletű alappal bíró kúpok vannak. Nagysága 863 μ.

Macrobiotus ambiguus J. Murr.

7*b*. A karom fő- és mellékága kb. egyenlő nagy, V-alakban állanak 8

8*a*. A garatfő hosszúkás, ovális. A tőröcskék a furca előtt kihasasodnak. A cuticula színtelen. Testnagyság 312 μ.

Macrobiotus dubius J. Murr.

8*b*. A garatfő rövid, ovális. A tőröcskék a furca előtt nem hasasodnak ki. A cuticula barnásan színezett, a festék sávokban helyezkedik el. Nagyság 570 μ. ..... *Macrobiotus Pullari* J. Murr.

A *Hypsibius* nem *alnemei*.

1*a*. A karmok az ú. n. első típusba tartoznak. Felépítésük a következő: a külső karom törzse az alapi részből + főágból áll; merev. A főág proximális része éppen olyan vastag, mint a disztális rész. A külső karom alig hosszabb, mint a belső. Mindkét karom főága egyenlő vastag ..... *Calohypsibius* Thulin.

1*b*. A karmok két részből állanak 2

2*a*. A karmok a második típusba tartoznak; két részből állanak: bazális és terminális részből. Az alapi részt a bázis és a mellékág alkotja, a terminális rész pedig a főág, mely a bázissal mozgékonyan függ össze ..... *Isohypsibius* Thulin.

2*b*. A karmok alapi része ívesen hajlott 3

3*a*. A garatcső rövid ..... *Hypsibius s. str.* Thulin

3*b*. A garatcső hosszú és hajlott ..... *Diphascon* Thulin.

A *Calohypsibius* alnem *fajai.*

Ebből az alnemből csak egy faj került elő hazánk területéről az eddigi vizsgálatok eredménye alapján.

A szem helyén szemölcs van. A cuticula díszített, nyolc haránt-sorban tüskék ülnek rajta, melyek között apró szemölcsök vannak. A szájcső rövid. A garatfőben két rögöcske van, komma nincs. A karmok kicsinyek ..... *Hypsibius ornatus* (Richt.)

Az *Isohypsibius* alnem *csoportjai.*

1*a*. A cuticula díszített; lehetnek rajta ráncok, tompa kúpok vagy hegyes szemölcsök. A test zömök, legszélesebb a második és harmadik lábpár között. A karmok nagyok.... *tuberculatus*-csoport.

1*b*. A cuticula nem díszített 2

2*a*. A test nyulánk, a végtagok rövidek, a karmok nagyok. *prosostomus*-csoport.

2*b*. A test karcsú, a végtagok hosszúak. A cuticulán esetleg apró szemölcsök lehetnek. ..... *annulatus*-csoport.

A *tuberculatus*-csoport *fajai.*

1*a*. A garatfőben három macroplacoida van, komma nincs. 2

1*b*. A garatfőben két macroplacoida van, komma nincs. 3

2*a*. A garatfőben három egyenlő hosszú macroplacoida van. A cuticulán kihegyesedő szemölcsök ülnek.

Hypsibius papillifer (J. Murr.)

2*b*. A garatfőben három különböző nagyságú macroplacoida van 4

3*a*. A cuticulán félgömbalakú kiemelkedések és két sorban fekete foltok vannak. A kúpokon és köztük a cuticulán nincsenek apró szemölcsök ..... *Hypsibius calcaratus* Bartoš.

3*b*. A cuticulán és a kúpalakú díszítésein apró szemölcsök ülnek, festékfoltok nincsenek 5

4*a*. A két első garatpálcika egyenlő hosszú, a harmadik ezeknél hosszabb. A cuticula húsz ráncot alkot.

Hypsibius arcuatus Bartoš.

4*b*. A két első macroplacoida rögöcske, a harmadik hosszú

pálcika. A cuticulán tompa szemölcsök vannak, melyek között a cuticula sokszögletű mezőcskékre osztott.

Hypsibius Sattleri (Richt.)

5*a*. A cuticulán 10 harántsorban félgömbalakú kiemelkedések vannak. Az állat sohasem színes. *Hypsibius tuberculatus* (Plate.)

5*b*. A cuticulán 12 sorban szemölcsös dúdorok helyezkednek el. Az állat színe a testnedvtől halaványsárga.

Hypsibius nodosus (J. Murr).

A *prosostomus*-csoport *fajai.*

1*a*. A garatfőben három macroplacoida és komma van .. 2

1*b*. A garatfőben három pálcika van, komma nincs.

Hypsibius areolatus (J. Murr.)

2*a*. A két első pálcika egyenlő hosszú, a harmadik hosszabb.

Hypsibius prosostomus (Thulin.)

2*b*. A garatfőben három rögöcske van.

Hypsibius Schaudini (Richt.)

Az *annulatus*-csoport *fajai.*

1*a*. A garatfőben két vékony egyenlő hosszú pálcika van, komma nincs. A karmok főága nagyon hosszú és csak az alapján egyesülnek a mellékággal. .... *Hypsibius megalonyx* (Thulin.)

1*b*. A garatfőben három pálcika van, komma nincs 2

2*a*. A pálcikák közül az első a legrövidebb, a harmadik a leghosszabb. A karmok egyenlő nagyok, a fő- és mellékág kb. egyenlő hosszú ..... *Hypsibius tetradactyloides* (Richt.)

2*b*. A pálcikák között a második a legrövidebb. A karmok főága jóval hosszabb, mint a mellékága.

Hypsibius Augusti (J. Murr.)

A *Hypsibius s. str.* alnem *fajai.*

1*a*. A cuticula sávosan színezett. A külső karom alapi része erősen fejlett és hosszú. A garatfőben egy ovális pálcika és egy kisebb rögöcske van ..... *Hypsibius Oberhaeuseri* (Doy.)

1*b*. A cuticula nem színes 2

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

2*a*. A garatfőben két egyenlő hosszú pálcika és komma van.
Hypsibius Dujardini (Doy.)

2*b*. A garatfőben két különböző nagyságú vagy két egyenlő nagy pálcika, ill. rögöcske van, de komma nincs 3

3*a*. A garatfőben két egyenlő nagy macroplacoida van .. 4

3*b*. A garatfőben két különböző nagyságú macroplacoida van. 5

4*a*. A macroplacoidák szögletesek. A külső karom mellékága akkora, mint az alapi rész. A garatfő gömbölyded.
Hypsibius pallidus Thulin.

4*b*. A macroplacoidok oválisak. A külső karom mellékága nagyobb, mint a karom alapi része. A garatfő hosszúkás, ovális.
Hypsibius microps (Thulin.)

5*a*. A pálcikák aránya 3 : 2. A szájnyílás szabályosan helyezkedik el, a fej homloki része egyenes
Hypsibius converyens (Urb.)

5*b*. Az első pálcika hosszabb, mint a második. A szájnyílás ventrálisan fekszik, a fej homloki része kidomborodik.
Hypsibius hypostomus Bartoš.

A *Diphascon* alnem *fajai*.

1*a*. A garatfő gömbölyded, benne két egyenlő nagy vaskos macroplacoida és komma van. Szem van.
Hypsibius oculatus (J. Murr.)

1*b*. A garatfő nem gömbölyded, hanem hosszúkás ovális vagy körtealakú 2

2*a*. A garatfőben két különböző nagyságú pálcika és komma van 3

2*b*. A garatfőben három különböző nagyságú pálcika van. Komma van vagy hiányzik 4

3*a*. A cuticula nem szemölcsös. *Hypsibius Recamieri* (Richt.)

3*b*. A cuticula szemölcsös ..... *Hypsibius rugosus* Bartoš.

4*a*. Komma van 5

4*b*. Komma nincs..... 6

5*a*. Szem nincs. A belső karom rövid és vastag; a külső karom főága hosszú és vékony. Testnagyság 360 μ-ig terjed.
Hypsibius alpinus (J. Murr.)

5*b*. Szem van. A belső karom kisebb, mint a külső, de nem vaskos. A külső karom főága rendesen fejlett. Testnagyság 224 μ-ig.

Hypsibius Stappersi (RICHT.)

6*a*. A cuticula szemölcsös. A garatfő hosszúkás ovális. A harmadik pálcika vége buzogányszerűen megvastagodott.

Hypsibius clavatus BARTOŠ.

6*b*. A cuticula nem szemölcsös. A garatfő körtealakú.

Hypsibius prosirostris (THULIN.)

II. család: *Arctiscidae*.

E családból csak egy nem és egy faj ismeretes.

Arctiscon SCHRANK nem.

A száj körül hat szemölcs van, mögöttük hátrább két oldalsó fejszemölcs található. A garatfőben szilárdító berendezés nincs. A karmok egyenlő nagyok és egyformák.

E nemből egyetlen faj ismeretes: *Arctiscon tardigradum* DOY.

A fajok részletes leírása.

1. *Parechiniscus chitonides* CUÉNOT. (8. p. 303.)

E fajba tartozó egyedek testhosszúsága a negyedik lábpár leszámításával 200 μ-ig terjedhet. Az állat színtelen, vagy halványszürke. Szem van. A cuticula dorzálisan erősen vastagodott, oldalnézetben fésű szerűnek látszik. A háton gyöngén elhatárolt lemezek vannak. A lemezek határa caudális irányban élesebb, mint rostralisan. A véglemez lekerekített, a közepén nincsen tüske. A véglemez durván skulpturált, más lemezeken a skulptura finom pontokból áll és a lábakra is átterjed. A fej függelékei a következők: cirrus medialis internus és externus, papilla cephalica és a clava. A törzs és a fej határán előforduló cirrus lateralis hajszerű. A tövében levő cláva rövid szemölcs alakú. A garatfő rövid ovális, csak kevéssel szélesebb mint hosszú. A tőröcskéket a szájcsőhöz nem rögzítik tartók. Az első lábpáron dorzális tüske van, a negyedik lábpáron pedig szemölcs fordul elő. Mindegyik lábon négy karom van; a

belsőkön mellékhorgok fordulnak elő. A peték száma kettő, alakjuk ovális, átmérőjük 50 μ. A fiataloknak két karma van. Testhosszúságuk 102 μ-től kezdődik.

Előfordulási helye: III.[1] Osobita-hegy (Liptói-havasok). (23. kép.)

2. *Bryodelphax parvulus* (Thulin). (8. p. 306.)

Testnagyság kicsi: 175 μ. A cuticula szinezete halványszürke, vagy egészen színtelen és csak a szemfesték téglavörös színű. A skulptura sűrűn elhelyezett nagyon apró szemcsékből áll, melyek között némelykor szabálytalanul megjelenő nagyobb rögöcskék vannak. Egyes esetekben a skulptura a páros törzslemezeken középütt egy sáv alakjában gyengébben fejlődik ki. Az első és második köztilemez két-két részre tagolt és így öt köztilemez alakult ki. A véglemez facettázott, két oldalt bemetszés nincs. A fej első része feltűnően lekerekített. A feji függelékeknek vastagodott alapi része van. A garatfő körte, vagy majdnem szívalakú. A szájcső szűk; tőrtartók vannak. A negyedik pár lábon régebbi leírások szerint tüskeredő nincs, Marcus azonban talált olyan példányokat, melyeken volt. A belső karmokon kicsi mellékhorgok vannak. A peték száma 3. (25. kép.)

Előfordulási helyei: III. Kocshegy (900 m), és Síphegy (1169 m).

3. *Echiniscus Wendti* Richt. (8. p. 319.)

A testnagyság 300 μ-ig terjed. A kétkarmú fiatalok nagysága 140—150 μ, 80 μ hosszú cirrus lateralissal. A cirrus lateralis a kifejlett állatoknál nagyon hosszú. A clava megnyúlt. Az állat színe vörös, még a szemek is. A cuticula skulpturája némelykor finomabb, máskor durvább szemcsékből áll, melyeket finom hálószerű szegélyek kötnek össze. A törzslemezeken skulptura nélküli harántsávok vannak. A harmadik köztilemez hiányzik. A véglemezen két oldalt nincs bevágás. A lábak rövidek és vastagok, az első lábpáron kicsi hegyes tüske, a negyedik lábpáron pedig

[1] A helységnevek előtt álló római számok a Faunakatalógus megfelelő kerületeit jelzik.

tompa szemölcs és tüskeredő van. A külső karmok símák, a belsőkön erős mellékhorgok vannak. A peték száma 4. (26. kép.)

Előfordulási helyei: III. Trencsénteplic, Gyömbér (1900 m), Deménfalvi-barlang.

4. *Echiniscus canadensis* J. Murr. (8. p. 324.)

Testnagysága több, mint 300 μ. A háton «c_2» helyen hajszerű függelék van, «d_2»-nél pedig tüske. A cuticula erősen fejlett. A színe vörös, a skalpturája közepes nagyságú, szabályosan és sűrűn elhelyezett pontokból áll, melyek olyanok, mintha lapos, széleikkel egymást érintő szemcsék volnának. A harmadik köztilemez hiányzik. A páros törzslemezek közepén skulptura nélküli harántsáv van. A véglemezen bevágások vannak. A negyedik lábon tüskeredő van. A belső karmok mellékhorgokat viselnek, a külső karmok alapi részén egyenes tüskék vannak. A peték száma 1—4-ig. (27. kép.)

Előfordulási helye: II. Nagygencs, Kőszeg.

5. *Echiniscus bisetosus* Hein. (8. p. 335.)

A testnagyság közepes, 224—300 μ-ig terjed. A cirrus lataeralis hosszú, fonál alakú. A törzsön «*c*»-nél rövid tüske, «*d*»-nél még kisebb tüske van. A háton «c_2»-nél hosszú fonálszerű függelék foglal helyet. A caticula lemezei sűrűn szemcsézettek. A harmadik köztilemez hiányzik, a véglemezen két oldalt nincs bemetszés. A cuticula színe vörösesbarna. A negyedik lábpáron tüskeredő van, a belső karmokon kicsi mellékhorgok ülnek. A peték vörösbarna színűek, számuk 4—5. (24. kép.)

Előfordulási helyei: III. Veličná (Nagyfalu), IV. Zábreči (Zábrod).

6. *Echiniscus trisetosus* Cuénot. (2. p. 53.)

Hosszúság 270 μ. Az oldalsó függelékei «*a*», «*c*» és «*d*» helyeken vannak, hosszú hajszerű képletek. A háton «c_2»-nél hosszú haj, «d_2»-nél rövid tüske van. A caticula erősen szemölcsözött. A véglemezen oldalt kis bevágások vannak. E fajnak sok variációja ismeretes. Ugyancsak sok az aszimmetrikusan fejlett pél-

dány is. (28. kép.) BARTOŠ a következő aszimmetrikus formákat írta le.

1. aszimmetrikus típus. Mindkét oldalon «*a*» és «*c*» helyen van függelék, «*d*»-nél csak a jobb oldalon található. A háton «c_2» és «d_2» helyeken vannak függelékek. Igy az állat jobb oldala trisetosus, a baloldala pedig MARCUS által leírt Echiniscus sp. 36-hoz hasonlít. (8. p. 385.)

2. aszimmetrikus típus. Mindkét oldalon «*a*» helyen van függelék, «*d*»-nél a jobboldalon, «*c*»-nél tüskék vannak. A háton «c_2» és «d_2» helyeken tüskék ülnek. Az állat jobboldala trisetosus, a baloldala bisetosus.

3. aszimmetrikus típus. «*a*» és «*d*»-nél van függelék, azonban «*d*»-nél csak a jobboldalon. E függelékek hosszú hajszerűek; «*c*»-nél tüske van. A háton csak «c_2»-nél fejlődik ki függelék.

E variációsorozat a függelékek redukciója folytán jön létre. Először «*c*»-nél következik be a hajszerű függelékek visszafejlődése, azonban nem tűnik el teljesen, hanem tüskévé alakul át. A «*d*» helyen csak ezután következik be a redukció, először csak egyik oldalon, BARTOŠ által talált példányokon mindig a baloldalon kezdődik. A jobboldalon megmarad a függelék, csak megrövidül. Végül bekövetkezik a háton a «d_2» helyen lévő függeléknek a redukciója, mely el is tűnik.

Előfordulási helyei: II. Nagygencs, Kőszeg, III. Nagybeszterce, Bziny (Bezine), H. Lehota (Abaszállás), Kocshegy, Árvaváralja.

Az általam talált példányok között aszimmetrikus alak nem fordult elő.

7. *Echiniscus merokensis* RICHT. *forma suecicus.* (8. p. 342.)

A kifejlett példányok testhosszúsága 245 μ, a kétkarmú fiataloké 80—103 μ. A cuticula függelékei oldalt «*a*, *b*, *c*, *d*» és «*e*» helyeken hajak, a háton «c_2»-nél tüske. Az alaptípustól abban tér el a forma suecicus, hogy «*b*» helyen is van függeléke és a többi függeléke is erősebben fejlett. Eltérést mutat még a testnagyság, a cuticula skulpturája, a lábak és a karmok tekintetében is, valamint a függelékek hosszúsága és ezeknek a testnagysághoz való viszonyában. Ez utóbbi eltéréseket THULIN egy táblázatban tünteti fel. (7. p. 70.)

A forma suecicus fejlődése folyamán egy olyan stádiumon megy át, mely a típusnak felel meg.

Előfordulási helye: III. Osobitá.

8. *Echiniscus simba* MARCUS. (8. p. 346.)

E faj egyedei közepes nagyságúak: hosszúságuk 235 μ. A feji függelékek a cirrus medianus kivételével mind megvannak. Oldalsó függelékei mind az öt lehetséges helyen előfordulnak. A «*b*» és «*e*» helyeken tüskék, «*c*»-nél pedig hosszú hajszerű függelék van. A háton «c_2» és «d_2»-nél tüskék találhatók. A «d_2»-nél lévő tüske, valamint a «*b*»-nél lévő függelék is gyakran nem fejlődik ki. A cuticula szinezete a téglavöröstől a cseresznyepirosig változik. A szemük is vörös színű. A páncélzat erősen fejlett. A cuticula skulpturája, különösen a véglemezen, durva szemölcsökből áll, melyek szabálytalanul és sűrűn helyezkednek el. A második köztilemez csak a második törzslemezzel határos. A harmadik köztilemez hiányzik. A véglemez lóherelevél alakú. A negyedik pár lábon tüskeredő van. A belső karmokon mellékhorgok ülnek. (22. kép.)

Előfordulási helyei: V. Vöröstoronyi szoros, Déva, Vargyas (Hargita), Pareng.

9. *Echiniscus Creplini* C. A. S. SCHULTZE (spec. dub. et. inquir. 8. p. 350).

Testnagysága 270 μ. A fejfüggelékek erősen fejlettek, a lateralis függelékek fonálszerűek és mind az öt lehetséges helyen kifejlődnek. A háton «b_2», «c_2» és «d_2» helyeken kicsi tüskék vannak. A cuticula skulpturáját nagy, fénytörő pontok képezik. A harmadik köztilemez kifejlődött. A véglemez lóherelevél alakú. Az állat színe vörös. Az első lábon dorzálisan kicsi tüske ül. A negyedik lábpáron nincs tüskeredő, a belső karmokon mellékhorog nem található.

Előfordulási helye: I. Pomáz. (137. kép.)

10. *Echiniscus quadrispinosus* RICHT. (8. p. 351.)

Meglehetősen nagy állatok: 270 μ hosszúak. A fiatalok testnagysága 84 μ. A feji függelékek jól fejlettek. Tőröcsketartó van.

A test oldalán mind az öt helyen hosszú, hajszerű függelékek vannak, melyek hátrafelé mindig hosszabbak lesznek. Dorzálisan «c_2» és «d_2» helyeken erős tüskék ülnek. A cuticula skulpturája nagy, különálló pontokból áll. A fiatal példányok cuticulája gyengén szemcsézett. Mind a három köztilemez kifejlődik. A véglemez lóherelevél alakú, rajta skulptura nélküli harántsáv van. Az első köztilemezhez két oldalsó mellék köztilemez, a második köztilemezhez pedig csak egy köztilemez csatlakozik. Az első lábpáron kicsi hegyes tüske van. A negyedik lábpáron tüskeredő fejlődik ki. A belső karmokon mellékhorgok nincsenek. A peték száma 4—5.

Előfordulási helyei: I. Zsíroshegy, — II. Zákány, Veszprém (Várvölgy), Kőszeg, Irrottkő (830 m), — III. Ihrács, Árvaváralja. (148. kép.)

E fajon belül több formát lehet megkülönböztetni. Így 1. *forma cribrosus* J. Murr.

A skulpturája kicsi és nagy pontokból áll. A váll- és a véglemezen keresztalakú, skulptura nélküli sávok vannak. Abban különbözik a típustól, hogy nincsenek mellék köztilemezei és a belső karmokon mellékhorgok vannak. Ennél a formánál az oldalsó függelékek egészen rövidek is lehetnek, esetleg «*b*»-nél hiányozhat is. Ezenkívül a hátifüggelékek is elmaradhatnak, legfeljebb «d_2»-nél jelenik meg egy kicsi háromszög alakú csúcs. A peték száma 3.

2. *Forma fissispinosus* J. Murr.

E forma abban tér el a típustól, hogy oldalt «*d*»-nél kettős függelék jelenik meg, a háton pedig «d_2»-nél nagyon rövid tüske fejlődik ki. Oldalt «*b*»-nél és a háton «b_1»-nél a függelékek el is maradhatnak.

3. *Forma brachyspinosus* Bartoš.

E formának összes oldalfüggelékei nagyon rövidek.

11. *Echiniscus merokensis* Richt. (8. p. 363.)

E fajba közepes testnagyságú példányok tartoznak. Hosszúságuk 224 μ. A kétkarmú fiatalok testnagysága 83—132 μ. A cirrus lateralis hossza 45 μ, a «*c*»-nél lévő hajszerű függelék 59 μ hosszú «*d*»-nél 48 μ hosszúságu haj, a «*c*»-nél pedig 54 μ hosszú ugyancsak hajszerű függelék van. E két utolsó függelék némelykor

kettőzött is lehet. A háton «c_2»-nél hosszú függelék van, «d_2»-nél pedig tüske vagy hosszabb függelék is lehet. Az állatok rendesen vörösen színezettek, ritkán színtelenek. A cuticula lemezek skulptu-ráját finomabb és durvább szemcsék adják, mely utóbbiak szabálytalanul helyezkednek el. Mind a három köztilemez kifejlődött. A második és harmadik páros törzslemezen középütt skulptura nélküli harántsáv húzódik és a lemezek elülső szélén redő van. A véglemez facettázott, egy elülső és két oldalsó lemezkére tagolódik; azonkívül két oldalán bevágás van. Az első törzs-, vagy vállemezen gyakran egy skulptura nélküli, középen elhelyezkedő folt van. Az első lábpáron kicsi tüske van, a negyedik lábpáron pedig szemölcs és tüskeredő foglal helyet, mely utóbbi 8—12 fogacskából áll. A belső karmokon mellékhorog van. A peték száma 3, a színük vöröses. A fiatal kétkarmú példányok hátán nincs függelék, oldalt is csak «*a*»-nál és «*e*»-nél fordulnak elő függelékek.

Előfordulási helyei: III. Gyömbér, Deménfalvi-barlang, Osobita-hegy, Alsókubini hegyek. (82. kép.)

12. *Echiniscus bartramiae* Iharos. (11. p. 219.)

Testnagyság a lábak nélkül 321 μ; kétkarmú fiatal példányokat nem találtam. A fejfüggelékek: cirrus medianus internus és externus, erősen fejlett papilla cephalica, cirrus lateralis és clava. A cirrus lateralis hossza 96 μ. A törzsön oldalt «*c*»-nél 85 μ hosszú, hajszerű függelék, «*d*»-nél 71 μ hosszú, «*e*»-nél pedig 100 μ hosszú hajszerű függelék van. A háton «c_2» és «d_2» helyeken erős tüskék ülnek, melyeknek hosszúsága 50 μ. A cuticula színe vörösbarna. A szem vörös színű. A cuticula skulpturája finom szemcsékből áll. A cuticula összes lemezei mind megtalálhatók. A véglemez kétoldalt bemetszett. A negyedik pár lábon tüskeredő van. A belső karmokon mellékhorgok ülnek. A karmok hosszúsága 28 μ. E fajt Irottkőn II. (790 m) gyüjtött *Bartramia pomiformis* mohában találtam. Leginkább az *Echiniscus simbához* hasonlít, eltér tőle a testnagyságban, hiányzik a harmadik köztilemez, a «*d*»-nél lévő tüske kifejlődésében és a többi függelék hosszúsági viszonyában. A mohát dr. Visnya Aladár gyüjtötte. (133. kép.)

A típus a magángyüjteményemben van.

13. *Echiniscus Marinellae* Bartoš. (5. p. 141.)

Testnagyság közepes: 216 μ. A fiatal állatok testnagysága 162 μ. «*a*» helyen fonálalakú függelékek, «*c*»-nél tövis, «*d*»-nél pedig szinte tüske fordul elő. A cirrus medialis internus hossza 8 μ, a c. m. externus hosszúsága 13·5 μ, a c. lateralis pedig 46 μ hosszú. Oldalt «*c*»-nél 60 μ hosszú, «*d*»-nél pedig 70 μ hosszú hajszerű függelék van, «*e*»-nél kicsi tövis foglal helyet. A testszín vörösbarna, a szem színe fekete. A lemezek skulptúráját sokszögletű szemecskék alkotják. Az első köztilemez kicsi, a második nagy és ötszögletű, a harmadik pedig hiányzik. A vállemez erősen fejlett, a hátsó részén két kicsi tövist visel. Hasonlóan az első és második páros törzslemezek hátsó szélén két-két kicsi tövist találunk. A véglemez lóherelevél alakú, a bemetszések nem épszélűek. A negyedik lábpáron szemölcs és tüskeredő van, mely utóbbit négy tövis alkot. A belső karmokon mellékhorog taklálható. (147. kép.)

Előfordulási helye: III. Kis-Fátra (1500 m).

14. *Echiniscus fortis* Bartoš. (5. p. 140.)

A testnagyság 300 μ. A cirrusok töve kiszélesedett. Oldalt «*a*», «*b*», «*c*» és «*d*» helyeken hosszú függelékek vannak; «*a*»-nál 87 μ, «*b*»-nél 100 μ, «*c*»-nél 120 μ, «*d*»-nél 162 μ a hosszúságuk. A háton «c_2»-nél hosszabb és hajlott, «d_2»-nél pedig vastagabb és egyenes tüskék vannak. A fiatal példányoknál oldalt csak «*a*» és «*b*» helyen vannak függelékek, a háton «c_2» és «d_2»-nél hosszabb képletek. A cuticula és a szem színe vörös. A lemezek skulptúráját félgömbalakú szemecsék alkotják, melyeket hatszögletű mezők vesznek körül. A fej széles, a vállemez erősen fejlett, a harmadik köztilemez megjelenik. A véglemezen oldalt bevágás van. A belső karmokon mellékhorog, külsőkön pedig egyenes, bazális tüske van. A negyedik lábpáron helyetfoglaló tüskeredőt 12 fogacska alkotja. A peték száma 2. (138. kép.)

Előfordulási helyei: III. Kriván (1711 m), Hrustinka-völgy (1000 m), Kečka-hegy (1230 m), Koritnyica, IV. Pietros (2022 m).

15. *Echiniscus Blumi* Richt. (8. p. 367.)

E faj példányai a közepesnél nagyobbak. Hosszúságuk 450 μ. A fiatalok testhosszúsága 120—160 μ. A törzsön oldalt «*a*», «*b*», «*c*» és «*d*» helyeken találunk hosszú függelékeket. Egyes esetekben ezeknek az oldalfüggelékeknek rövid meggörbült mellékága is lehet. A háton «c_2»-nél fonálszerű függelék, «d_2»-nél pedig tüske van. Gyakran «*e*»-nél is találunk egy rövid, széles alapú tüskét. Fiatal egyedeknél csak «*a*», «*c*» és «*d*» helyeken vannak hosszabb függelékei, «*e*»-nél rövid hegyes tüske található. A háton «c_2»-nél fonálszerű képlet, «d_2»-nél pedig tüske van. A cuticula skulpturája finomabb, vagy durvább szemcsékből áll. A szemcsék a mikroszkop tubusának emelésekor világos gyűrűknek látszanak, melyeknek belseje sötét tér, középütt világos folttal. A tubus süllyesztésekor pedig sötét szegélyű világos foltoknak tűnnek fel. A páros törzslemezeken világos, skulptura nélküli harántsáv van. A harmadik köztilemezt a véglemez és a harmadik törzslemez között lévő elhatárolt rész képviseli. A véglemezen kétoldalt bevágások vannak, nem facettázott. Az első lábon kicsike tüske ül, a negyediken pedig szemölcs és tüskeredő van, mely utóbbi 6—8, kicsi tüskékből áll. A belső karmokon mellékhorgot, a külsőkön pedig 2—3 egyenes bazális tüskét találunk. E faj nagyon hasonlít az Echiniscus granulatus fajhoz. (53. kép.)

Előfordulási helye: III. Veličná (Nagyfalu).

16. *Echiniscus testudo* (Doy). (8. p. 371.)

Az idetartozó állatok hosszúsága 330 μ. A kétkarmú fiatalok 100—120 μ hosszúak. A cirrus lateralis a legrövidebb függelék, «*b*» és «*c*» helyeken előforduló függelékek hosszabbak, az «*e*»-nél lévő függelék a leghosszabb. A háton «c_2»-nél nincsen tüske, csak a lemez hátsó széle emelkedik a rendesnél valamivel feljebb. «d_2»-nél közepes nagyságú tüske található. A fiatal egyedeknél csak «*a*» és «*c*» helyeken találunk függeléket. A színezet vörösbarna. A cuticula skulpturája egyszerű és egyenletesen elosztott pontokból áll. A harmadik köztilemez hiányzik. A véglemez lóherelevél alakú, nem facettázott. A negyedik lábpáron tüskeredő van. A belső

karmokon mellékhorog nincsen. A peték barnásvörös színűek, számuk 5—8. Alakjuk gömbölyű, vagy kissé ovális. (135. kép.)

Előfordulási helye: III. Skalka.

E fajnak két formája fordul elő: f. trifilis és f. quadrifilis.

17. *Echiniscus trifilis* Rahm. (8. p. 375.)

E faj egyedei közepes nagyságúak: 360 μ a testhossz. A cirrus lateralis hosszú, hajszerű, «*c*» és «*e*»-nél szintén hosszú függelékek vannak; az utóbbi helyen lévő függelék kétszer olyan hosszú lehet, mint a «*c*»-nél levő. Fiatal példányoknál csak «*e*» helyen találunk függelékeket. A háton «d_2»-nél tüske van. A cuticula skulpturája nagy, meglehetősen egyenletesen elosztott, ovális szemcsékből áll. A harmadik köztilemez szintén ilyen skulpturájú. A véglemez lóherelevél alakú, rajta skulptura nélküli harántsáv van. A negyedik pár lábon tüskeredő és tompa szemölcs van. A karmokon mellékhorog nincs. A peték száma 4. (151. kép.)

Előfordulási helyei: I. Remete-hegy, III. Szarvaskő.

18. *Echiniscus granulatus* (Doy.) (8. p. 378.)

A testnagyság 375 μ. A fiatal állatoké 161—178 μ. A következő függelékek fordulnak elő: cirrus lateralis, «*c*» és «*d*»-nél hosszú, hajszerű függelékek. A háton «c_2»-nél hosszú hajszerű függelék van, azonban az általam talált példányoknál e helyen erős tüske fejlődött ki. «d_2»-nél szintén erősen fejlett tüske van, «*e*»-nél pedig rövid, háromszögletű képlet. A cuticula színe vörösbarna. A cuticula skulpturája a mikroszkop tubusának emelésekor világos színű foltokká bomlik szét, melyeket sokszögletű határok vesznek körül, a közepük pedig sötét. A tubus süllyesztésekor világos alapon sötét gyűrűk látszanak. A negyedik pár lábon tüskeredő és a külső oldalon szemölcs fordul elő. A belső karmokon mellékhorog van. Az első és második láb külső karmai símák, a harmadik és negyedik láb külső karmain pedig 1—3 egyenes tüske van. E fajnál sok varietast találunk; az eltérések a függelékek számában és ságában nyilvánulnak meg. (136. kép.)

Előfordulási helyei: I. Pomáz, Zsíroshegy. II. Kőszeg.

19. *Pseudechiniscus suillus* (Ehrbg.). (8. p. 388.)

E faj példányainak testhosszúsága 260 μ, leszámítva a lábakat. A fiatal példányok 86—118 μ hosszúak. A papilla cephalica hosszúkás. A cirrus lateralis meglehetősen rövid serte, az alapi része kúpalakúan vastagodott. A törzsön más függelék nem fejlődött ki. A szem színe fekete és nem vörös, mint az Echiniscus és a Pseudechiniscusoknál szokott lenni. A lemezek finoman szemcsézettek, a legfinomabban a fej, a váll, a második és harmadik törzslemez és a pseudosegmentális lemez. A második és harmadik törzslemez elválasztóvonalai gyakran csak a hiányzó szemcsézettség által tűnnek ki. Az első és második köztilemez tagolt. A negyedik törzslemez gyakran egy skulptura nélküli sáv által két részre van osztva. Az általam talált példányok fejlemezét világos, skulptura nélküli vékony sávok lemezkékre osztják. A lábak hosszúak és vékonyak, a dorzális felületük finoman szemcsés. A negyedik lábon tüskeredő nincs, a belső karmokon kicsi mellékhorgok ülnek. A peték száma 1—4, a színük szürkéssárga halavány vörösig (131—132. képek.)

Előfordulási helyei: II. Irottkő, III. Vihnye, Osobita, Trencsénteplic, V. Vöröstoronyi-szoros, VI. Herkulesfürdő.

20. *Pseudechiniscus transsylvanicus* Iharos. (11. p. 219.)

A testnagyság 342 μ, a lábak nélkül. A cirrus lateralis alapi része szemölcsszerűen fejlett. A törzsön «c»-nél egy hosszú, hajszerű függelék van. Az állat színe vörösbarna, a skulpturája finom szemcsékből áll, mely a lábakra is átterjed. A lemezek teljes számban megvannak. A véglemez lóherelevél alakú. A páros törzslemezek széle a köztilemezek felé ívesen megtört. A negyedik köztilemez gyengén fejlett, vagy csak a cuticula erősebb kialakulása helyettesíti. A véglemez széle a negyedik köztilemez felé ívesen bemetszett. A lábak hossza 50 μ, ebből a karomra 10 μ esik. A lábon tüskeredő nincs, valamint a belső karmokon is hiányzik a mellékhorog. (134. kép.)

E fajt a Vöröstoronyi szorosból kapott mohában találtam, melyet dr. Kárpáti Zoltán gyüjtött.

A típikus alak a gyüjteményemben van.

21. *Macrobiotus occidentalis* J. MURR. (8. p. 405.)

E fajnak nagyon jól fejlett példányai vannak. A testnagyság 800 μ-ig terjed. A cuticula skulpturája szabálytalanul elosztott pontokból áll, melyek áteső fényben sötétek; némelykor hiányozhatnak. Az állat színtelen, egyes példányoknál a test felső részén kicsi fekete pontok vannak. A testnedv és a benne levő raktározó sejtek narancssárgák. A gyomor és a peték sötétvörösek. Szem előfordul. A szájnyílás körül nincsenek lemezek. A szájcső tág, caudálisan szűkebb lesz, de a garatfő előtt ismét kitágul. A garatfő rövid ovális, benne két pálcika van; az első háromszor olyan hosszú, mint széles; a második pedig csak kétszer olyan hosszú, mint széles. Komma némelykor megjelenik. A mellékkarom a főággal félig összenőtt, mely utóbbin két mellékcsúcs van. A lunula a kifejlett példányoknál fogazott, a fiataloknál pedig síma és gyöngén fejlett. A peték gömbölyűek és díszítettek. A díszítést egymástól kissé távolfekvő kúpok alkotják, melyek vékony, hajlott nyúlványban végződnek. (141. és 149. kép.)

Előfordulási helyei: I. Remete-hegy, Kápolna, II. Tapolca, Rohonc, Borostyánkő, III. Leveled-puszta,[1] Nagybeszterce, Fakóvezekény, Veličná (Nagyfalu), Árvaváralja, Trencsénteplic. IV. Zabreči (Zábrod),

22. *Macrobiotus Richtersi* J. MURR. (8. p. 408.)

E faj nagyságra nézve a legnagyobb fajok közé tartozik. Egyedeinek testhosszúsága 1000 μ körül van. A cuticula sötéten pontozott. A szem nem látható. A szájnyílást két lemezkoszorú veszi körül: egy belső, melyben 8 hosszúra nyúlt lemez van és egy külső, melyet szintén 8, de sokkal rövidebb lemez alkot. A szájcső nagyon tág, rostrálisan egyenesen halad, a garatfő előtt azonban ventralisan görbült. A garatfő rövid ovális, kb. 80 μ hosszú. A garatfőben három vékony pálcika és egy komma van. Az első és második garatpálcika kb. négyszer, a harmadik körülbelül ötször olyan hosszú, mint széles; egyes esetekben az első és harmadik pálcika

[1] Fakóvezekény mellett.

egyenlő hosszú, középső rövidebb. A tőröcskék nagyon vastagok. A karomágak vékonyak és félig összenőttek egymással. A főágon két mellékcsúcs van. A peték nagyon díszesek, kúpok és sokszögletű mezők vannak rajta. A peték a díszítésekkel együtt 120 μ, azok nélkül 75 μ. (143—146. képek.)

Előfordulási helyei: I. Tápiószele, Pomáz, Visegrád, II. Doroszló, Rohonc, Pinkaóvár, Balatonarács, Tihany, Fertőhomok, Balf, Felsőcsatár, Bozsoki völgy, Irottkő, III. Rudnói völgy, Peszér, Újbánya, Turzó-hegy, Zsolna, Jasenová (Jaszenova).

23. *Macrobiotus intermedius* Plate. (8. p. 416.)

Közepes nagyságú példányai vannak; a test hosszúsága 339 μ. A fej elülső felülete a szájnyílástól egyenesen halad felfelé, nem pedig ferdén hátra, mint a többi fajoknál. Az állat színtelen, vagy pedig szürkésbarna színű. A festékanyag sávokban fordul elő. Szem többnyire megjelenik. A szájnyílás körül nincs cuticuláris lemezkoszorú. A szájcső szűk, a garatfő előtt dorzálisan hajlott (konvex). A garatfő majdnem gömbölyű, benne erősen fejlett apophyzisek, három gömbölyded szemecske és kicsi komma van. A karom főága két csúcsot visel és a mellékággal háromnegyedrészben összenőtt. A peték kicsinyek kb. 50 μ átmérőjűek., (142. és 152. kép.)

Előfordulási helyei: I. Óhuta, II. Kőszeg, Oszkó, Zákány, III. Garamkovácsi, Garamszőllős, Rudnói völgy, Újbánya, Thurzó-hegy, Bresztova, Zverovka, Osobita, Kocs-hegy, Arany-hegy (Pöstyén mellett.)

24. *Macrobiotus Schultzei* Greeff. (2. p. 58.)

Az állat színezete erősen barna. A szem nem látszik. A szájcső nagyon tág. A garatfőben három pálcika van, melyek közül a középső a legrövidebb. A komma nagy és távol helyezkedik el a pálcikáktól.

Előfordulási helyei: III. Gyömbér, Síp-hegy, Alsókubini hegyek, Szucsány, H. Lehota (Abaszállás) és Osobita.

E fajt Marcus a *Macrobiotus Hufelandi* C. A. S. Schultze synonim nevei között említi. (8. p. 439.)

25. *Macrobiotus Harmsworthi* J. MURR. (8. p. 419.)

Az állat nagysága 651 μ. A testüreget kitöltő testnedvtől az állat sárga színezetet nyer. Szemfolt van, de kicsi kiterjedésű. A szájnyílás körül egy lemezkoszorú van. A szájcső nagyon tág, a garatfő hosszúkás ovális, benne jól fejlett apophyzisek, három garatpálcika és komma van. A tőröcskék majdnem egyenesek. A karmok egyenlő nagyok, a mellékág a főághoz félig hozzánőtt. A főágon mellékcsúcsok vannak. A lunula az első három lábpáron síma, a negyediken rovátkolt. A peték gömbölyűek, kúpokkal díszítettek, átmérőjük 130 μ. (31—33. képek.)

Előfordulási helyei: I. Pomáz, Visegrád, Pesthidegkút, Óhuta, Tápiószele, II. Kőszeg, Nemescsó, Pokolfalu, Alsóbeled, Sopron, Pornóapáti, Mencshely, Szőllős, Nárai, Bikal, III. Vasberzence, Vihnye, Krasznahorka, Thurzó-hegy, Árvaváralja, Pucov (Pucó), Síp-hegy, Jastraba (Karvaly), V. Bulea-tó, Vöröstoronyi szoros, Bucsecs, Vargyas, Beocsin, VI. Herkulesfürdő.

26. *Macrobiotus furcatus* EHRBG (8. p. 476.).

MARCUS által közölt leírás szerint a testnagyság 260 μ (8. p. 427). Az általam talált egyedek testnagysága az utolsó lábpár nélkül 330 μ volt. A cuticula finoman szemcsézett. A szemecskék a mikroszkóp tubusa magasságának változtatásakor világos vagy sötét foltocskáknak tünnek fel. A test színtelen vagy halványsárgás színű. Szemeket a talált példányokon nem lehetett látni, míg a leírás szerint előfordulnak. A garatfő alakja hosszúkás ovális, hosszúsága 35 μ, szélessége 27 μ. Benne három kb. egyenlő nagyságú garatrögöcskét találunk; a leírás szerint a két utolsó pálcika hosszabb mint az első. Komma nincs. A szájcső nagyon szűk, 3 μ széles. Hossza 44 μ; nem halad egyenesen, hanem enyhén S alakban hajlott. Az apophysisek meglehetősen fejlettek. A tőröcskék vékonyak. A karmok a Hufelandi-típusba tartoznak. E fajból három példányt találtam Echiniscus- és Hypsibius-fajok társaságában. A vizsgált anyagot a Magyar Nemzeti Múzeum könyvtárából kaptam. A fentebb említett helyen található leírás és a hozzátartozó rajz után nem tudtam pontosan eldönteni, hogy az általam

talált példányok azonosak-e a Macrobiotus furcatus-fajjal, vagy új fajhoz tartoznak-e. (126—127. képek.)

Előfordulási helyei: III. Trencsénteplic.

27. *Macrobiotus macronyx* Duj. (8. p. 431.)

E faj példányai jókora nagyságot érnek el, hosszúságuk 1000 μ is lehet. A cuticula nem tüntet fel skulpturát; színtelen. Szempigment van, de némelykor nem jelenik meg. A szájcső tág. A garatfő rövid ovális, benne két egyenlő hosszú, kb. 2 μ vastag pálcika van. A második pálcika esetleg háromszor olyan hosszú lehet, mint az első. Komma nincs. A tőröcskék erősek, kard-alakúak. A karmok egyformák, a főág nagyon erősen fejlett és hajlott, a mellékág kicsi. Az első három lábpáron nagyon rövid mellékhorog is van. Ez állat a petéit a levedlett cuticulába rakja. Édes vízben Diatomeák és Oscilláriák között él, de gyakran található vízzel elöntött mohák között is (51—52. képek.)

Előfordulási helyei: II. Balaton, Tatatóvárosi-tó, Környei-tó, Velencei-tó, Fertő-tó. III. Háromszög-tó, Gecel, Magas-tátra, (2006 m), V. Zenoga-tó, Katonai-tó, Cegei-tó, Mezőtóháti-tó, Bulea-tó.

28. *Macrobiotus ambiguus* J. Murr. (8. p. 433.)

Az állatok hossza 863 μ a lábak nélkül. A fiatal példányok cuticulája színtelen, de az állat némelykor sárga színt kap a testnedvtől. Az idősebb állatok barnák. Szem van. A szájnyílást cuticuláris lemezek veszik körül. A szájcső 5—10 μ tág. A garatfő rövid ovális, benne nagy apophysisek és két pálcika van. Az első pálcika kétszer olyan hosszú, mint a második. Komma nincs. A tőröcskék hajlottak, széles furcájuk van. A karmok olyanok, mint a Macrobiotus macronyx-fajé. A peték szabadon találhatók, gömbölyűek, átmérőjük 115—130 μ. Díszítésük sokszögletű alappal bíró kúpokból áll. (93—95. képek.)

Előfordulási helye: III. Magastátra.

29. *Macrobiotus ampullaceus* THULIN. (8. p. 434.)

Egyedei meglehetősen nagyok: elérik az 530 μ nagyságot. Szem van. A szájcső tág, egyenesen halad. A garatfő hosszúkás ovális, benne két vékony pálcika van. A karom főága vastag, hajlott. Rajta két mellékcsúcs van. A mellékág gyengén fejlett és vékony. A peték szabadon találhatók, rajtuk meglehetősen nagy, hegyes kúpalakú díszítések vannak, melyeknek alapja hatszögletű. A peték száma 3. (83—85. képek.)

Előfordulási helye: I. Budapest.

30. *Macrobiotus dispar* J. MURR. (8. p. 435.)

Az állat nagysága 600 μ. A cuticula síma, azonban a második és harmadik lábpár között két kúpalakú nyúlványa van, melyek gyakran hiányozhatnak. Az állat színtelen, némelykor sárga vagy barna. A szem jól feltűnik. A szájnyílás körül lemezkoszorú helyezkedik el. A szájcső tág. A garatfő nagy, rövid ovális, benne jól fejlett apophysisek és két pálcika van. Az első pálcika középütt befűződött és kétszer olyan hosszú, mint a második. Komma nem fejlődött ki. A tőröcskéknek nagyon széles furcájuk van. A karmok a macronyx-típusba tartoznak; nagy és hajlott főáguk van, melyen két egyenes mellékcsúcs foglal helyet. A mellékág az első három lábpáron nagyon rövid és gyenge, míg a negyedik lábpáron a mellékág nagysága a főág nagyságának felel meg. A petéket külön rakja le az állat. Az alakjuk gömbölyded, átmérőjük 90 μ. Díszítésüket egymástól távol álló kúpok adják. (119—121. és 130. képek.)

Előfordulási helyei: III. Nagysalló, Garamveszele, Garamkovácsi.

31. *Macrobiotus dubius* J. MURR. (8. p. 436.)

A testnagyság 312 μ[1]. Színtelen. Szem egyeseknél van, másoknál nincs. A garatfő hosszúkás ovális alakú, benne meglehetősen gyengén fejlett apophysisek és két pálcika van. A pálcikák közül az első olyan, mintha két részből olvadt volna össze és két-

[1] Az általam talált példányok között 760 μ nagyságú is előfordult.

szer olyan hosszú, mint a második. A tőröcskék a furcához közel kidomborodnak. A karmok az Echinogenitus-típusba tartoznak, vagyis V alakúak; a mellékág a főág kétharmadrészéig ér. A két ág kb. 30°-os szöget zár be. E fajnak petéit is megtaláltam, melyek eddig ismeretlenek voltak. Alakjuk gömbölyű, díszítésüket hegyes kúpok és szemölcsök alkotják. Átmérőjük 32 μ. (100—101 képek.)

Előfordulási helyei: III. Szarvaskő. V. Cserna-völgy (Herkulesfürdő).

32. *Macrobiotus Pullari* J. Murr. (8. p. 437.)

E fajba tartozó állatok testnagysága 570 μ. A cuticula színezete barnás, a festékanyag sávokban jelenik meg. A garatfő majdnem gömbölyű, benne két pálcika van. Az első középütt befűződött és kétszer olyan hosszú, mint a második. Komma nincs. A karmok V alakúak, a fő- és mellékág csak bazálisan nőtt össze egymással, hosszúságuk kb. egyenlő. A peték gömbölydedek, vagy oválisak is lehetnek, átmérőjük 75—90 μ. Számuk 2—6. A peték díszítése rövid, hegyes kúpocskákból áll. (43—45. képek.)

Előfordulási helyei: II. Gödörháza, III. Rohács, Jaszenova.

33. *Macrobiotus Hufelandi* C. A. S. Schultze. (8. p. 439.)

E faj a legnagyobb a Tardigradák között. Testnagyság 1200 μ-ig terjed. Az idősebb állatok színe sötétbarna. A szem némelykor előfordul, máskor hiányzik. A szájnyílást lemezek veszik körül. A szájcső tág, a garatfő előtt egyenes, némelykor azonban gyengén ventrálisan görbült. A garatfő nagy, ovális. Az apophysisek közepesen fejlettek; a garatfőben két pálcika és komma van. Az első pálcika kb. kétszer olyan hosszú, mint a második, gyakran középütt befűződött, sőt egyes esetekben két részre is válik, mely esetben három garatpálcikát találunk. A tőröcskék erősek és görbültek. A karom tömör, a mellékág a főág feléig hozzánőtt az utóbbihoz; a főágon két mellékcsúcs van. A fiatal állatoknál a mellékág nem nőtt össze a főággal, hanem a karom V alakú. A negyedik lábpáron a két karomág jobban elhajlik egymástól, mint a többi lábon. A petéket egyenként rakja le az állat, számuk meglehetősen nagy lehet. A levetett cuticulában is találunk petéket. A szabadon

lerakott peték díszítettek, a díszítést adó képletek bázisa széles, kúpalakú, felfelé szűkül, majd a végén ismét talpszerűen kiszélesedik, mely véglapnak a széle síma vagy fogazott is lehet. A díszítés alapját gyöngykoszorúhoz hasonló vastagodás veszi körül. E faj lelőhelyeinek felsorolását nem tartom fontosnak, mert majdnem mindenütt előfordul (66—68. képek.)

34. *Macrobiotus echinogenitus* Richt. (8. p. 446.)

Testnagyságra nézve e faj is a meglehetősen nagy fajok közé tartozik. Egyedeinek testnagysága 750 μ-ig terjed. A cuticula színtelen, idősebb példányoknál barnás. A szem jól észrevehető. A szájcső tág. A garatfőben az apophysisek gyakran alig látszanak, rajtuk kívül még két kb. egyenlő nagy pálcika és komma van. A tőröcskék hajlottak. A lábon szemölcsös dudor foglal helyet. A karomágak a fiatal példányoknál erősen szétállanak, később szűkebb V alakban hajlanak egymáshoz, míg az idősebbek felveszik a típikus alakot. Lunula van, mely síma, vagy fogazott lehet. A peték gömbölyűek, a peteburkon hegyes vagy tompa kúpok, esetleg félgömbalakú dudorok vannak. (36—39. képek.)

Előfordulási helyei: III. Osobita-hegy, Gyömbér, Síp-hegy, Trencsénteplic. IV. Volovec (Volóc).

35. *Macrobiotus coronifer* Richt. (8. p. 449.)

Ebbe a fajba tartozó egyedek testnagysága 1072 μ. Az állat színtelen, csak a testnedvben lebegő raktározósejtek chrom- vagy okkersárgák. Nagy szemfoltok vannak. A garatfő rövid ovális, majdnem gömbölyded, benne erősen fejlett apophysisek és két rövid pálcika van. Mindegyik pálcika másfélszer olyan hosszú, mint széles. Komma nincs. A tőröcskék hajlottak. A fiatal példányok karomhossza 21 μ, a kifejlettéké 27 μ. A karmok a Hufelandi-típusba tartoznak. Lunula van, melyen 10—14 finom tüskét találunk. A peték szabadon fordulnak elő, alakjuk ovális. Díszítésüket nagyon hegyes, sűrűn elhelyezkedő tüskék adják. (114—115. képek.)

Előfordulási helye: III. Gyömbér.

36. *Hypsibius ornatus* (RICHT.) (8. p. 467.)

A testnagyság 160—175 μ között ingadozik. Az állat színtelen. A szem hiányzik, s a helyén két szemölcs van. A háton és a test oldalain nyolc harántsorban elhelyezkedő, soronkint 8—12 tüske fordul elő. Az első harántsor az első lábpár magaslatában, utolsó pedig a negyedik lábpár felett foglal helyet, mely utóbbiban különösen hosszú tüskék vannak. A fejen és a tüskesorok között apró gyöngyszerű cuticuláris képletek vannak. A szájcső nagyon szűk s a garatfő előtt hajlott. A garatfő gömbölyded és viszonylagosan nagy. Benne két kerek rögöcske van, komma nincs. A tőröcskék gyengék és majdnem teljesen egyenesek. A karmok kicsinyek, a főágakon két mellékcsúcs van. Egy láb belső és külső karma egyformán fejlett. A peték száma 2. (116—118. képek.)

Előfordulási helyei: III. Liptói havasok, Brestov, Osobita, Gyömbér, Deménfalva. IV. Volovec (Volóc),

37. *Hypsibius arcuatus* BARTOŠ. (3. p. 99, 106.)

A testnagyság 178—276 μ között van. A cuticula síma, nincsenek rajta szemölcsök. A testnedv és a raktározó sejtek halványsárgás rózsaszínűek. A cuticulán 20 nem egyforma széles és magas ránc domborodik. Rendszerint két széles ránc között van egy keskenyebb és egy alacsonyabb. Csak az első és a második, valamint a harmadik és negyedik szélesebb ráncok között találunk két keskenyebb ráncot. A szájcső közepe széles, a vége keskenyedik. Az apophysisek jól fejlettek. A garatfő gömbölyű, benne három pálcika van. Az első kettő egyenlő hosszú, 2 μ. és egymáshoz közel vannak, a harmadik pedig távolabb helyezkedik el és valamivel hosszabb az előbbieknél, 2·7 μ. Komma nincs, a karmok viszonylagosan hosszúak. (97—99. képek.)

Előfordulási helye: III. Trencsénteplic.

38. *Hypsibius tuberculatus* PLATE. (8. p. 476.)

Egyedeinek testnagysága 245—302 μ. A háton 10 harántsorban, kúpalakú kiemelkedések vannak. A 3., 5., 7. sorban hat, az 1. és 10. sorban öt, a 2., 4., 6., 8. sorban négy, a 9. sorban pedig két

kiemelkedés van. A cuticula hálózatosan szemölcsözött. Az állatok színtelenek, a gyomorsejtek színe sárga. Szem van. A garatfő ovális, benne apophysisek és két pálcika van, melyek közül az első valamivel hosszabb mint a második. A karmoknak rövid alapi része van. A főágon két mellékcsúcs foglal helyet. A peték száma 3—5. Alakjuk ovális. (54—56. képek.)

Előfordulási helyei: I. Mezőcsát, Jászberény, III. Szarvaskő, Kuzminó (Beregszilvás), Záskalie (Zászkal), Veličná (Nagyfalu).

39. *Hypsibius nodosus* (J. Murr.) (8. p. 478.)

A test hosszúsága 500 μ. A cuticulán 12 harántsorban elhelyezkedő, szemölcsös kúpok vannak, közöttük a cuticula síma vagy finoman pontozott. Az állat gyakran sárgaszínű. Szem van. A garatfő rövid ovális, 50 μ hosszú. Benne hosszúkás apophysisek és két pálcika van, melyek közül az első kétszer olyan hosszú, mint a másik. Komma nincs. A karmok kicsinyek. A külső karom fő- és mellékága 75°-os, a belső karom fő- és mellékága pedig 90°-os szöget zárnak be. A két karom főága majdnem egyenlő hosszú. A karmok alapi részén harántszegély van. A peték száma 9, színük fehér vagy barna. (76—78. képek.)

Előfordulási helyei: I. Aquincum, Pomáz, Visegrád, Vác, II. Doroszló, Rum, Rohonc, Sopron, Sümeg, III. Záskalie (Zászkal). Pucov (Pucó).

40. *Hypsibius Sattleri* (Richt.) (8. p. 479.)

A testnagyság 242 μ-ig terjed. Szem van. A feji rész finoman szemcsézett, vagy majdnem síma. A cuticula az oldalakon, a háton és részben a lábakon is apró szemölcsökkel van borítva, melyek jól kivehető sokszögletű mezőket alkotnak. Azonkívül a háti részen, nevezetesen a szem mögött és a caudális testrészen, hegyes kúpok helyezkednek el 8, 9 harántsorban. Mindegyik sorban kb. négy ilyen képlet foglal helyet. E kúpok némelykor szabálytalanul szétszórva fordulnak elő és hegyes tüskékkel váltakoznak. A garatfő rövid, benne két kerek rögöcske és mögöttük egy rövid pálcika van. Komma nincs. A karmok meglehetősen egyenesek, a hegyük előtt élesen hajlottak. A fő- és mellékágak nem egészen hegyes

szöget zárnak be egymással. A peték száma 2—4, átmérőjük 33×45 μ. (89—92. képek.)

Előfordulási helye: III. Síp-hegy (1168 m).

41. *Hypsibius papillifer* (J. Murr.) (8. p. 480.)

A testhosszúság 250 μ-ig terjed. A háti részen, az oldalakon, valamint a lábak alapi részén szemölcs alakú nyúlványok vannak, melyeknek csúcsa tüskeszerű. Az állat színtelen. Szem van. A garatfő hosszúkás ovális, benne három egyenlő nagyságú pálcika van, melyek kb. kétszer olyan hosszúak mint szélesek. Komma nincs. A tőröcskék erőteljesen fejlettek és görbék. A külső és belső karmok nem egyenlő nagyságúak. A peték száma 5. (48—50. képek.)

Előfordulási helyei: III. Gyömbér (2000 m), Osobita (1678 m).

42. *Hypsibius calcaratus* Bartoš. (4. p. 258.)

Példányainak testhosszúsága 135—189 μ között ingadozik, a test a második és a harmadik lábpár között a legszélesebb. Az egész cuticulát apró szemölcsök fedik. Az idősebb példányoknál fekete színű foltok vannak, melyek két hosszanti sorban helyezkednek el. A test oldalán a fekete foltok szabálytalanul jelennek meg. A gyomorsejtek színe sárga, egyébként az állat színtelen. A szemek 4—10 kicsi fekete szemfoltból állanak. A szájnyílás ventrálisan fekszik. A szájcső nagyon rövid, 13·5 μ és alig 1 μ tág. A garatfő kicsi, gömbölyded, hossza 13·5 μ, szélessége 12·5 μ, benne két pálcika van, melyek közül az első hosszabb, mint a másik. Komma nincs. A tőröcskék nagyon rövidek és vékonyak. A karmok eltérő alakúak. (128—129. képek.)

Előfordulási helye: III. Rozsutec.

43. *Hypsibius Schaudini* (Richt.) (8. p. 482.)

A testnagyság közepesnél nagyobb: 368 μ. Szem van. A szájcső 3 μ széles, a garatfő gömbalakú; átmérője 41 μ. A garatfőben három nagyságban elölről hátrafelé növekedő rögöcske és komma van. A karmok hosszúságra nézve különböznek egymástól; a fő- és mellékág csak bazálisan egyesültek egymással. A külső karom

főága vékony, hosszúsága a negyedik lábpáron 20 μ. Az állat három símahéjjú petét rak, melyek átmérője 72 μ. (105—106.képek.)

Előfordulási helye: I. Budapest.

44. *Hypsibius prosostomus* (Thulin.) (8. p. 483.)

E fajt Marcus Hypsibius teradactylus néven írta le (7. p. 192.).

A testnagyság 325—445 μ között ingadozik. A cuticula színtelen. A szájnyílás előre irányul, a szájüreg meglehetősen nagy. A szájcső tág. A garatfő ovális, benne három pálcika és komma van. A két első pálcika egyenlő hosszúságú és közvetlenül egymás után következnek, a harmadik hosszabb és bizonyos távolságban következik a második pálcika után. A tőröcskék rövidek és a furca előtt élesen hajlottak. Egy láb mindkét karma igen egyenlőtlenül hosszú. A karomágak erősen széjjelágaznak. A hátsó karom főága vékonyabb mint a mellékág. A karombőr a főág proximális, gyengén fénytörő és distalis része között lévő jelzett határon végződik. A főágon két kicsi mellékcsúcs van. A peték száma 3—13, símák, alakjuk ovális. Átmérőjük 52 × 39 μ. (74—75. képek.)

Előfordulási helyei: I. Aquincum, Turkeve, Rákos, II. Vassurány, III. Rudnói-völgy, Rohács, Osobita, Síp-hegy, Trencsénteplic, Pöstyén, Baniková (2178 m).

45. *Hypsibius areolatus*. (J. Murr.) (8. p. 517.)

E fajt Murray *Macrobiotus areolatus* néven írta le. E fajba tartozó példányok testnagysága 700 μ. A fiatal állatok színtelenek, az idősebbek sötétbarnák. Szem van. A szájcső az elején szűk, a garatfő előtt nagyon tág. A garatfő rövid ovális, benne három vékony, egyenlő nagyságú, gyengén hajlott pálcika van. A komma nem fejlődik ki. A tőröcskék erősek és a furca előtt hajlottak. A karmok kb. egyenlő nagyok, a fő- és mellékág csak bazálisan nőttek egymáshoz. A főágak jóval hosszabbak mint a mellékágak. A peték átmérője 100 μ. A peteburkon nagy, hegyes kúpok vannak, melyek között a peteburok sokszögletű mezőkre tagolódik. E mezőcskék eredetileg hatszögűek, de egy haránt szegély két ötszögletes mezőre osztja őket. (86—88. képek.)

Előfordulási helye: III. H. Lehota (Nagyfalu).

46. *Hypsibius megalonyx* (THULIN.) (8. p. 489.)

Az állatok nagysága 900 μ. A cuticula síma. A szájnyílást cuticuláris lemezek veszik körül. A szájüreg fala egyszerű gyűrűkből áll. A garatfő fiatal egyedeknél gömbölyded, a kifejlett példányoknál pedig hosszúkás ovális. Benne kicsi apophysisek és két egyenlő pálcika van. Komma nincs. A végtagok hosszúak. A karmok nagyok, a karomágak vékonyak és hosszúak. A fő- és mellékág csak bazálisan nőttek egymáshoz. A hímeknél a külső karom bázisán rövid vaskos és hajlott karom van. A peték száma húsznál is több, alakjuk ovális. A peteburok síma. (112—113. képek.)

Előfordulási helyei: II. Csorna, Mucsi, III. Nagysalló, Körmöcbánya, Kocs-hegy, Holica-hegy (Holic).

47. *Hypsibius tetradactyloides* (RICHT.) (8. p. 491.)

E fajba tartozó egyedek nagysága MARCUS szerint, 500 μ, az általam talált példányok között 640 μ nagyok is voltak. A garatfő hosszúkás ovális. A garatberendezés három hosszúkás pálcikából áll, melyek közül az első a legkisebb, az utolsó a leghosszabb. Komma nincs. A tőröcskék kard alakúak. A karmok alakja eltérő; a főág 20 μ hosszú. Az állatokban négy petét találtam, melyeknek alakja ovális. A hosszabbik átmérőjük 107 μ. A peték száma 2—8-ig terjedhet. (102—104. képek.)

Előfordulási helyei: II. Kőszeg, Irottkő, Bozsoki völgy, III. Rohács, Osobita-hegy.

48. *Hypsibius Augusti* (J. MURR.) (8. p. 492.)

Az állatok testhosszúsága 757 μ-ig terjedhet. A gyomor barnás színezetű, egyébként az állat színtelen. Szemfesték nem fejlődött ki. A garatfő ovális, hosszúsága 75 μ. Benne apophysisek és három vékony pálcika van, melyek közül a középső a legrövidebb. Komma nincs. Egy lábnak a karmai hosszúságban alig különböznek egymástól, kb. 22 μ hosszúak. A főágon két mellékcsúcs van. A peték száma 1—8-ig terjed, de 20—30 is lehet. Átmérőjük 115 $\times$ 92 μ. (63—64. képek.)

Előfordulási helye: III. Rohács.

49. *Hypsibius Dujardini* (Doy). (8. p. 497.)

A testnagyság közepes, vagy annál nagyobb; 500 μ-ig terjedhet. A szemfesték legtöbbször kifejlődik. A szájnyílás ventralisan irányul. A szájcső rövid és szűk. Rajta horogalakú izomtapadási hely van. A garatfő ovális, benne apophysisek és kb. két egyenlő hosszú pálcika van, melyek aránya 3:2 is lehet. Komma van. A tőröcskék csak gyengén hajlottak, a furca erősen fejlett és szétágazó. A karmok különböző nagyságúak. A külső karom főága hosszú; két mellékcsúcsot visel és a bazális részével a mellékághoz nőtt. A peték a levedlett cuticulában találhatók. Számuk 3—30. A peteburok síma. (72—73. képek.)

Előfordulási helyei: I. Solymár, II. Bozsoki völgy, Vassurány, Vis, Nagykanizsa, Szilsárkány, Cák, III. Rohács, V. Bulea-tó (2300 m).

50. *Hypsibius convergens* (Urb.) (8. p. 501.)

E faj egyedeinek hosszúsága 400 μ. Az állatok fehéresen áttetszők. Szemfesték van. A szájcső meglehetősen szűk, hosszú és hajlott; rajta horogalakú izomtapadási hely van. A garatfő hosszúkás ovális, benne apophysisek és két garatrögöcske van, melyeknek aránya 3:2. Komma nincs. A külső és belső karmok különböző hosszúak. A külső karom mellékága hosszabb, mint a bazális rész, a belső karom pedig a bázissal egyenlő hosszú. A peték száma 1—7-ig terjed; levetett cuticulában találhatók. Alakjuk gömbölyű, a peteburok síma. (65. és 69. kép.)

Előfordulási helyei: III. Lekér, Rudabánya, Zebegény, Piszince, Jósvafő.

51. *Hypsibius Oberhaeuseri* (Doy.) (8. p. 510.)

Közepes testnagyságú példányai vannak. A cuticula általában síma. Skulptura nincs; vannak azonban olyan példányok, melyeknek a hátán vagy csak caudalisan szemcsézettség lép fel. A szemcsék 3 μ átmérőjűek lehetnek. E formát Richters *Hypsibius Oberhaeuseri granulatus*nak nevezi.[1] (p. 8.) A fiatalok színtelenek,

[1] Richters F.: Moosbewohner (in: Wiss. Ergebn. Schwed. Südp.-Exped., Vol. 6, fig. 2, p. 1—16, Stockholm, 1908).

az idősebbek pedig erősen lilásvörösen színezettek. A festékanyag kilenc harántszalag alakjában helyezkedik el. E színezet és a sávok nagyon jellemző bélyeget adnak. A szemfesték csak a fiatal állatnál tűnik elő, az idősebbeknél a test színe elnyomja. A garatfő rövid ovális, benne apophysisek és két garatrögöcske van, melyek közül az első hosszabb és ovális, a második kisebb és majdnem gömbölyű. Komma nincs. A külső és belső karom különböző alakú. A külső karom főága hosszú és nagyon vékony, rajta két mellékcsúcs helyezkedik el. A mellékág erősen hajlott, rövidebb, mint a karom bazális része, mely jóval hosszabb, mint a *Hypsibius pallidus* esetében. A belső karom zömök, a főága vastagabb, mint a külső karomé és erősen hajlott. A karombőr közel a főág bazális részéhez végződik. A hímeknél a negyedik lábpár külső oldalán lapos szemölcs van, mely a nőstényeknél hiányzik vagy csak gyengén fejlett. A peték kicsinyek félgömbalakú képletek díszítik és legtöbbször szabadon lerakva találhatók. (79—81. képek.)

Előfordulása helyei: I. Nagysvábhegy, Visegrád, Pesthidegkút, Kápolna, Tápiószele, Törökszentmiklós, II. Vanyarc. Nagygencs, Csorna, Lendvaújfalu, Kőszegi-hegyek, Tihany, Gánt, Hanság, Sövénykút-puszta, Felsőcsatár, Szilsárkány.

52. *Hypsibius microps* (Thul.) (8. p. 508.)

Az ide tartozó állatok testhosszúsága 295 μ. A cuticula színtelen és síma. A szemfesték szétszórtan álló foltokban jelenik meg. A test nyúlánk; legszélesebb a második és harmadik lábpár között. A fej homloki része a szájnyílástól meredeken halad felfelé. A szájcső vékony, hajlott és rajta horgas izomtapadási hely van. A garatfő gömbölyű, apophysisei nagyok, benne két egyenlő nagyságú pálcika van. Komma nincs. A karmok viszonylagosan nagyok. A peték a levetett cuticulában találhatók, számuk 4-ig terjedhet. Alakjuk ovális, a peteburok síma. (57—58. képek.)

Előfordulási helyei: III. Körmöcbánya, Lekér, Osobita-hegy, Síp-hegy, Kocs-hegy (1613), Trencsénteplic.

53. *Hypsibius pallidus* Thul. (8. p. 510.)

A test hosszúsága 318 μ. A gyomorsejtek színe sárga, egyébként az állat színtelen. Szemfesték legtöbbször előfordul. A garatfő

gömbölyű, benne apophysisek és két egyenlő hosszú pálcika van. Komma nincs. A karmok hasonlítanak a *Hypsibius Oberhaeuseri* karmaihoz, csakhogy a *Hypsius pallidus*nál a külső karomnak rövidebb bazális része van. A karombőr a főág feléig ér el. A peték száma 2—5, a peteburok síma. (70—71. képek.)

Előfordulási helyei: II. Ludad, Tihany, III. Körmöcbánya, Saskőváralja, Pacsai-tető, Trencsénteplic, Jósvafő, Verestó, Rohács, Osobita-hegy, Vasilov (Vasziló), Nemesztovó, H. Lehota (Abaszállás), Veličná (Nagyfalu), Árvaváralja. IV. Lőcse, Kuzmino (Beregszilvás), V. Vöröstoronyi szoros.

54. *Hypsibius hypostomus* Bartoš. (4. p. 257.)

Az ide tartozó példányok 270 μ hosszúak. A cuticula síma. A testnedv vörösesbarna színű, valószínűleg a növényi tápanyagtól. Szemfesték van. A szájnyílás ventralis, a fej homloki része előre kidomborodik. A szájcső szűk és a garatfő előtt erősen hajlott. A garatfő majdnem egészen gömbölyű, benne két rövid garatpálcika van. Komma nincs. A karmok különböző alakúak, a külsők nagyobbak, mint a belsők. A peték nagyok és barna színűek. A levetett cuticulában Bartoš csak egy petét talált. (122. kép.)

Előfordulása helye: III. Magas-Tátra (2503 m).

55. *Hypsibius scoticus* (J. Murr.) (8. p. 529.)

A test hosszúsága 378 és 462 μ között váltakozik. Az állat színtelen, a szemfesték sem fejlődik ki. A szájcső szűk és hosszú, mint a garatfő, mely elől keskenyedik és hátrafelé szélesedik. A garatfőben három pálcika van, melyek közül a középső a legrövidebb. A komma is kifejlődött. A tőröcskék caudalis irányban nagyon szétágaznak. A karmok meglehetősen nagyok, karombőr van. (107—109. képek.)

Előfordulási helyei: I. Rákos. II. Rendek, Pinkaóvár, Ják. III. Körmöcbánya, Leveled-puszta, Thurzó-hegy, Rohács, Banikov, Igló.

56. *Hypsibius prosirostris* (THUL.) (8. p. 532.)

A test alakja meglehetősen hosszúkás. A testnagyság 247—321 μ között változik. A cuticula síma, az állat színtelen. A garatfő szabálytalan alakú, benne három pálcika van, melyek közül az első a legrövidebb és a harmadik a leghosszabb. Komma nincs. A szájcső garatcsővé nyúlik meg, mely a garatfő előtt erősen hajlott. A tőröcskék vékonyak, a karmok hasonlítanak a *Hypsibius Oberhaeuseri* karmához. (96. kép.)

Előfordulási helye: II. Rum.

57. *Hypsibius oculatus* J. MURR. (8. p. 534.)

A példányai közepes nagyságúak, hosszúságuk 374 μ. Az állat színtelen. Szemfesték van. A szájcső vékony, hosszú garatcsővé nyúlik meg, mely erősen hajlott. A garatfő 33 μ hosszú, 26 μ széles. Benne apophysisek, két zömök garatpálcika és komma van. A karmok erősek; a külső karom főága bazális részétől kezdve 21 μ hosszú. A peték száma 3—5. Alakjuk ovális, áte mérőjük 51 × 63 μ. (59—60. képek.)

Előfordulási helye: III. Gyömbér.

58. *Hypsibius Recamieri* (RICHT.) (7. p. 173.)

A testnagyság 416 μ-ig terjed. Szem van. A száj- és a garatcső szűk és nagyon hosszú. A garatfő hosszúkás ovális, 34 μ hosszú és 24 μ széles; benne két vékony pálcika és komma van. Az első pálcika hosszabb, mint a második. (61—62. képek.)

Előfordulási helyei: II. Sopron. III. Jasenová (Jaszenova, Alsókubin mellett).

59. *Hypsibius alpinus* (J. MURR.) (7. p. 173.)

Nagysága 365 μ-ig terjedhet. A cuticula nem színezett, a szemfesték sem fejlődött ki. A testalak karcsú, hosszúkás. A garatfő ovális, benne három pálcika és komma van. Az első pálcika a legvékonyabb és a legrövidebb, a harmadik pedig a leghosszabb és a legvaskosabb. A tőröcskék rövidek, a szájcső vékony és hosszú garatcsővé nyúlik meg. A belső karom rövid és zömök, a külső

karom főága nagyon hosszú és rajta kicsi mellékcsúcsok vannak. A peték száma 8, átmérőjük 48 μ. (46—47. képek.)

Előfordulási helye: III. Hladovka, Záskalie (Zászkal), Árvaváralja, Kocshegy, Gyömbér, Trencsénteplic, Igló.

60. *Hypsibius Stappersi* Richt. (8. p. 538.)

Kicsi, a testnagyság 224 μ. Az állat színtelen, a szemfesték kifejlődött. A szájcső, valamint a garatcső is nagyon szűk, átmérőjük 1 μ. A garatfő rövid ovális, 24 μ hosszú, 14 μ széles. Benne három pálcika van, melyek nagysági sorrendben következnek egymásután. A komma kifejlődött. (34—35. képek.)

Előfordulási helye: III. Körmöcbánya.

61. *Hypsibius clavatus* Bartoš. (4. p. 259.)

A testnagyság közepes, 203—211 μ-ig. A cuticula sima, kivéve a test végét és a negyedik lábpárt, melyeken a cuticulát vastag, sokszögletű szemecskék borítják. A szájnyílás terminálisan fekszik A szájcső szűk (1·4 μ) átmérőjű, hosszúsága 24 μ. A garatcső hosszú és hajlott. A garatfőben három garatpálcika van, az első és a második egyenlő hosszú, a harmadik hosszabb és a végén buzogányszerűen vastagodott. Komma nincs. A lábak rövidek, szemfesték nem fejlődik ki. A karmok nagyok, a belső karom rövidebb, mint a külső. A főágak erősen hajlottak, mellékcsúcsaik jól fejlettek. E faj petéi ismeretlenek. (139—140. képek.)

Lelőhely: III. Čierny vevrch Istebné-nél (880 m Feketehegy).

62. *Hypsibius rugosus* Bartoš. (4. p. 258.)

A test hosszúsága 157 és 311 μ között ingadozik. A test legszélesebb a második és harmadik lábpár között. A cuticula színtelen és rajta szabályosan elhelyezkedő apró szemcsék vannak, amelyek a harmadik lábpár mögött erősebben fejlettek és jobban láthatók. A szemfesték kifejlődött és 6—8 foltban helyezkedik el. A szájcső 21·6 μ hosszú és nagyon szűk. A garatcső hajlott. A garatcső átmérői 25·2 × 21·6 μ. Benne két pálcika és komma van. Az első pálcika kétszer olyan hosszú, mint a második. A karmok

nagyok, a főágakon két mellékcsúcs van. A peték száma 2—5. (110—111. képek.)

Előfordulási helyei: III. Karlik-völgy (Mosovce) Mosóc mellett.

63. *Arctiscon tardigradum* Doy. (8. p. 547.)

E faj a legnagyobb Tardigrada fajok közé tartozik. Példányainak hosszúsága 1200 μ, szélességük 500—600 μ. A test alakja nyúlánk, elől és hátul elvékonyodott. A cuticula skulpturát nem tüntet fel, csupán gyűrűforma redőket alkot; a színezet halavány rózsaszín, sárga vagy barna szemcsézettel az epidermis (hypodermis) sejtjeiben. A szemfesték kifejlődött. A szájnyílás subterminalis, a szájüreg tág és kinyujtható. A szájnyílást hat rövid rostralis szájszemölcs veszi körül, melyek szimmetrikusan helyezkednek el. A szemölcsök nagysága nem egyenlő; a dorsalisak nagyobbak, a ventralisak kisebbek. E szemölcsökkel váltakozva fordulnak elő a szájnyílást elzáró cuticula-lemezkék. A szájszemölcsök mögött laterocaudalisan mindkét oldalon egy-egy szemölcs van, mely az Echiniscoideák fejszemölcsének felel meg. A szájcső nagyon tág és rövid; a garatfőtől három haránttredő választja el. A garatfő körtealakú, hosszú, benne semmiféle szilárdító-berendezés sincs. A tőröcskék rövidek és gyengén fejlettek. A három első lábpár egyenlő nagyságú, a negyedik lábpár rövidebb és közvetlenül a test meghosszabbodásának látszik. Minden lábon két karom van. Van hosszú és vékony, meglehetősen egyenes, csupán a csúcsánál hajlott főág, melynek alapi részén tompa, úgynevezett ujjszemölcs van. A főágtól ventralisan helyezkednek el a kapaszkodóhorgokkal ellátott bazális karmok. A kapaszkodókarom 1—4 ágú rövid és széles karom. A peték levetett cuticulában találhatók, számuk 18 is lehet. Színük világosbarna vagy rózsaszínű, az alakjuk ovális. A peték hosszúsága 132 μ, szélességük 70—88 μ. (123—125. képek.)

Előfordulási helyei: I. Budapest, Törökszentmiklós, Kápolna, Zsíroshegy. II. Nagycsákány, Szentgyörgy-hegy, Velem, Jeli, Tapolcafő, Vassurány, Hanság, Mecsekhegy, Vép. III., Vanyarc, Szarvaskő. VI. Csernavölgy (Herkulesfürdő).

Függelék.

Dolgozatom bemutatása után három közlemény jelent meg (11—13.), amely hazai Tardigradákkal foglalkozik. Az egyikben (11.) leírtam a *Pseudechiniscus transsylvanicus* és *Echiniscus bartramiae* nevű új fajokat. Mivel eredeti kéziratom ezeknek a leírását már tartalmazta, tekintetbe vételük nem ütközött akadályba. Másik dolgozatomban (12.) a Kőszeg környékén talált medveállatocskákat ismertetem. A harmadik MARCUS nagy rendszertani monografiája (13.). Ez előző munkái (7., 8.) után nem sok újat hozott, azonban benne jelent meg a dr. DUDICH ENDRE által gyűjtött két új faj leírása. Ezeket alább közlöm.

«Species incertae sedis» címen rendszertani szokás szerint azokat a leleteket ismertetem, amelyeknél a faj valamely okból nem volt meghatározható, vagy pedig a faj rendszertani helyzete bizonytalan.

64. *Hypsibius (Diphascon) brevipes* MARCUS. (13. p. 302.)

A test hosszúsága 350 μ. A lábak rövidek. A cuticula síma, színtelen. A béltartalom zöldesszinű. A garatfő 29 μ hosszú, 24 μ széles, benne két pálcikát találunk; az első másfélszer hosszabb, mint a második. A szájcső szűk, 2 μ széles. A karmok kicsinyek és hasonlóak egymáshoz.

A peték még ismeretlenek.

MARCUS a vizsgált anyagban olyan példányt is talált, amelynek garatfőjében három pálcika volt.

A *Hypsibius brevipes* szájkészüléke és alakja szerint legjobban a *Hypsibius bullatus*hoz hasonlít. Ettől abban különbözik, hogy cuticulája síma és karmai zömökebbek.

A síma cuticulával rendelkező fajok közül a *Hypsibius Recamieri* áll a legközelebb hozzá garatberendezése alapján. Azonban a *Hypsibius Recamieri* garatfője szűkebb, nyelőcsöve hosszabb és karmai is nagyobbak.

A *Hypsibius brevipes* még a következő fajokhoz hasonlít: *Hypsibius oculatus*, *H. spitzbergiensis*, *H. angustatus* és *H. Belgicae*. Ezektől a nyelőcső hosszúságában, a garatpálcikák nagyságában és a karmok hosszában különbözik.

Előfordulási helye: III. Barsmegye: Lekér.

65. *Hypsibius novemcinctus* MARCUS. (13. p. 281.)

Ezen új fajba tartozó állatok testnagysága 240 μ. Fiatalok még nem kerültek elő. A kifejlett állatokon 9 barna harántsáv húzódik keresztül. A szemfolt hiányzik. A cuticula síma, nem tűntet fel semmi skulptúrát. A szájcső nagyon szűk, 1·6 μ széles, rajta horgas izomtapadási hely van. A garatfő rövid-ovális, 24 μ hosszú és 19 μ széles; benne két pálcika található. Az első 3—4 μ hosszú, a második 2·4 μ hosszú, szélességük 1·2 μ. Komma nincs. A karmok hasonlítanak a *Hypsibius Oberhaeuseri* karmaihoz, csak annyi az eltérés, hogy a hátsó lábon a mellékág hosszabb, mint az alapi része és a főág terminális része gyengén függ össze az alappal. A főág mellékcsúcsai nagyon kicsinyek.

A peték simák, levetett cuticulában találhatók.

Ez a faj nagyon hasonlít a *Hypsibius Oberhaeuseri*'hez, a különbség közöttük abban áll, hogy a peték simák és hiányoznak a festékmentes hosszanti sávok a *Hypsibius novemcinctuson.*

Lelőhelye: III. Garamszőlős.

Species incertae sedis.

66. *Hypsibius* sp. *(cf. Hypsibius nodosus.)*

Ezen meghatározatlan fajt egy levedlett cuticula képviseli, melyben nyolc pete volt. A cuticulán apró szemölcsöket viselő kiemelkedések vannak. A cuticula sokszögletű mezőcskék hálózatának látszik, melyeknek szegélye vastagodott, a közepük vékonyabb és mélyebb. A karmok a *Hypsibius nodosus* karmaihoz hasonlítanak. A garatberendezést nem találtam meg, így a fajt pontosan nem tudtam meghatározni. A levedlett cuticula nagysága kb. 500 μ, a petéké 100 μ.

Lelőhelye: II. Doroszló.

67. *Hypsibius sp. indet.*

Ezen meghatározhatatlan fajból csak egy pete került elő, melyet Cákon tölgyfáról gyüjtött mohában találtam. Átmérője 34 μ. Díszítését hengeralakú csapocskák alkotják, melyek sűrűn helyezkednek el egymás mellett. (41. kép.)

68. *Macrobiotus sp. indet.*

E fajból három petét találtam Veszprém környékén gyüjtött mohában. Színük barna, a díszítésük kúpalakú kiemelkedésekből áll, melyek között a peteburok sokszögletű mezőcskékre tagolódik. E petékről az eddigi határozókulcsok szerint még nem lehetett megállapítani, hogy melyik fajhoz tartoznak. (40. kép.)

69. *Echiniscus dearmatus* Bartoš. (5. p. 139.)

E fajt azért sorolom a függelékek közé, mert nagyon hasonlít az *Echiniscus Wendtihez*, mely faj az *Echiniscus arctomys*-csoportba tartozik. Az *Echiniscus dearmatus* a leírásban található bélyegei alapján szintén az *arctomys*-csoportba volna sorozandó, azonban Bartoš e fajt az *Echiniscus trisetosus* Cuénot fajcsoportba osztja azon az alapon, hogy a függelékek redukálódtak.

A cuticula skulptúrája durva szemcsékből áll. Függelékek csak «*a*» helyen vannak. A harmadik közti lemez hiányzik. A negyedik lábon tüskeredő és szemölcs van. (42. kép.)

Előfordulási helye: III. Alsókubini-hegyek (1345 m).

70. *Echiniscus sp. indet.* Marcus.

E fajt Marcus dr. Dudich Endre által Bars megyében gyüjtött anyagban találta, melyet a sérült példányról nem tudott meghatározni.

A vizsgált biotopok Tardigrada-anyagának faji összetétele.

Összesen 230 helyről állítottam össze adatokat az irodalom és a magam gyüjtése alapján. Ezek közül 189 helyen fordultak elő Tardigradák. Az általam átvizsgált 137 helyen a fajok összetétele a következő volt:

E. Marcus: Tardigrada (in: Das Tierreich. Lfg. 66. 1936. pp. XVIII + 340.)

64	helyen	1	magányos	fajt	találtam
37	«	2	«	«	együtt
19	«	3	«	«	«
9	«	4	«	«	«
6	«	5	«	«	«
1	«	6	«	«	«
1	«	7	«	«	«

Az egyes nemek előfordulásával kapcsolatban a következőket kívánom megemlíteni:

1. A *Parechiniscus*-nem fordul elő a legkisebb faji számban és a legkevesebb lelőhelyen az eddigi eredmények szerint. Lelőhelyének száma 1.

2. A *Pseudechiniscus*-nem már valamivel nagyobb számban, de még mindig kevés helyről ismeretes. Lelőhelyeinek száma 10. Leggyakrabban előforduló faja a *Pseudechiniscus suillus* (Ehrbg.).

3. Az *Echiniscus*-nem nagy számban és több helyről ismeretes. Lelőhelyeinek száma 55. Leggyakoribb faja az *Echiniscus quadrispinosus* Richt. Ezen nem az előbbiekkel együtt inkább a magasabban fekvő lelőhelyekről került elő.

4. A *Hypsibius*-nem több, mint 151 helyről ismeretes. Leggyakoribb fajai: *Hypsibius Oberhaeuseri* (Doy.), *Hypsibius nodosus* J. Murr., *Hypsibius palldius* Thulin., *Hypsibius scoticus* J. Murr., *Hypsibius prosostomus* (Thulin.).

5. A *Macrobiotus*-nem majdnem mindenütt megtalálható. Alig van anyag, melyben *Macrobiotus Hufelandi* C. A. S. Schultze elő nem fordulna. Nagyon gyakoriak még a *Macrobiotus Harmsworthi* J. Murr., *Macrobiotus Richtersi* J. Murr., *Macrobiotus intermedius* Plate, *Macrobiotus macronyx* Duj. fajok.

6. Az *Arctiscon*-nemet csak egy faj képviseli. E faj szintén kevés helyen fordult elő, lelőhelyeinek száma gyüjtéseim alapján 14. Bartoš több helyen megtalálta, azonban a lelőhelyeket nem sorolta fel.

A lelőhelyeken előforduló faj- és egyedsűrűség szempontjából nagyon jó helyek a falusi házak szalmatetőin élő mohák, valamint a hűvös, hegyes vidékek erdőtalaját borító mohapárnák. A fatörzseken található mohák már csak másodrendű lelőhelyek vol-

tak. A városi házak cseréptetőin szerényen meghúzódó mohák meglehetősen szegény Tardigrada-faunát mutattak. Különösen ritkán találni Tardigradákat a nagyobb városok háztetőin élő mohákban, mert a sok korom, por és füst nagyon kedvezőtlen viszonyokat teremt a medveállatocskák számára. Barlangokban eddig még nem találtam Tardigradákat. Átvizsgáltam az Aggteleki cseppkőbarlang egyes részeit, a Szent Anna-barlangot Lillafüreden és a budapestkörnyéki barlangokat. A barlangok bejáratánál találhatók ugyan Tardigradák, de ezek a külső biotopokból származnak.

Vizsgálataim eredménye 39 faj, melyek közül 9 új adat Magyarországra nézve. A többi 26 faj irodalmi adat, melyeket gyüjtéseim közben még eddig nem találtam meg.

Hazai faunánkban új Tardigrada-fajok a következők: *Pseudechiniscus transsylvanicus* n. sp., *Echiniscus simba* Marcus, *Echiniscus Creplini* C. A. S. Schultze, *Echiniscus trifilis* Rahm., *Echiniscus bartramiae* n. sp., *Echiniscus canadensis* J. Murr., *Hypsibius prosirostris* (Thul.), *Hypsibius Stappersi* (Richt.), *Marcobiotus dubius* J. Murr.

E fajok közül az irodalomban is újnak bizonyult kettő: *Pseudechiniscus transsylvanicus* Iharos és *Echiniscus bartramiae* Iharos.

Kétségtelen, hogy a további kutatások még újabb fajokat is kimutatnak hazánk területéről.

Irodalom.

1. A Magyar Birodalom Állatvilága, III. Arthropoda. Bp. 1900.

2. Bartoš, E.: Příšěvek k poznání Tardigrad Č. S. R. I. (Časopis Čs. Spol. Ent. XXXI, p. 50—58, 1934.)

3. Bartoš, E.: Příšěvek k poznání Tardigrad Č. S. R. II. (Časopis Čs. Spol. Ent. XXXI, p. 99—107, 1934.)

4. Bartoš, E.: Vier neue Hypsibiusarten aus der Tschechoslowakei. (Zool. Anz. Bd. 110, Heft 9—10, p. 257—260, 1935.)

5. Bartoš, E.: Neue Echiniscus-Arten der nördlichen Slowakei. (Zool. Anz. Bd. 111, Heft 5—6, p. 139—143, 1935.)

6. Daday J.: A magyarországi tavak halainak természetes tápláléka. Budapest, 1897.

7. Marcus, E.: Bärtierchen. (in: Fr. Dahl: Die Tierwelt Deutschlands. usw. Teil 12, Bd. IV, 1928.)

8. Marcus, E.: Tardigrada. (in: H. G. Bronn: Klassen und Ordnungen des Tierreichs. Abt. IV. Bd. V. Buch 3. 1929.)

9. Richters, F.: Tardigrada aus den Karpathen. (Zool. Anz. Bd. 36, No. 1, p. 7—10, 1910.)

10. Török Piroska: A budapesti vízvezetéki víz szüredékének faunája. (Mat. és Termtud. Értesítő, LIII. p. 637—664, 1935.)

11. Iharos, A.: Zwei neue Tardigraden-Arten (Zool. Anz. Bd. 115, p. 219—220, 1936.)

12. Iharos A.: Medveállatocskák Kőszeg vidékéről (Vasi Szemle, IV, 1937, p. 269—272).

13. Marcus, E.: Tardiprada (Das Tierreich, Lfg. 66, 1936).

(Készült a Pázmány Péter Tudományegyetem Állatrendszertani Intézetében.)

Ábramagyarázat.

I. tábla.

1. *Batillipes.* (8. p. 37. fig. 24.)
   a: cirrus medianus, *b*: cirrus medialis internus, *c*: cirrus medialis externus, *d*: cirrus lateralis, *e*: clava.
2. *Echiniscoides.* (8. p. 37. fig. 24.)
3. *Macrobiotus Hufelandi.* (8. p. 37. fig. 24.)
   sz: szem.
4. *Tetrakentron.* (8. p. 37. fig. 24.)
   le: lobus externus, *li*: lobus internus.
5. *Echiniscus parvulus.* (8. p. 37. fig. 24.)
   pc: papilla cephalica.
6. *Arctiscon* (8. p. 37. fig. 24.
   szsz: szájszemölcsök, *fsz*: fejszemölcs, *lm*: lobus medianus.
7. *Batillipes mirus* lába (8. p. 24. fig. 14.)
   de: lateralis tüske, *db*: tüske, *di*: középső lábrész, *cd*: caudalis középtüske, *ch*: a tapadólap megvastagodása, *hl*: tapadólap, *kd*: karommirigy, *pro*: proximalis lábrész, *z*: ujj.
8. Tőröcske: Heterotardigradáknál.
9. Tőröcske: Eutardigradáknál.
10. *Macrobiotus coronifer* lunulája.
11. *Macrobiotus echinogenitus* lunulája.
12. *Macrobiotus Hufelandi* lunulája.
13. *Arctiscon tardigradum* karma. (8. p. 26. fig. 16.)
14. *Hypsibius convergens* karma. (8. p. 26. fig. 16.)
    b: a karom alapi része, *i*: belső karom, *ä*: külső karom.
15. *Hypsibius ornatus* karma. (8. p. 26. fig. 16.)
    h: a karom főága, *n*: a karom mellékága, *ns*: mellékcsúcsok, *kh*: karombőr.
16. Kifejlett *Macrobiotus Hufelandi* karma.
17. Fiatal *Macrobiotus Hufelandi* karma.

18. *Echiniscus Blumi* karma.
19. Szájkészülék. (8. p. 73. fig. 42.)
mw: a szájüreg fala, *ss*: a tőröcskék hüvelye, *sh*: a hüvelyek tartója, *s*: tőröcske, *st*: tőröcskék tartója, sm_1 és sm_2: musculi pro- és retractores, sm_3: musculus retractor, sm_4 és sm_5: musculi compressores, sm_6: m. compr. obliquus, *f*: furca, *ap*: apophysisek, *sl*: a garatfő belső szegélye, *ko*: komma, *sk*: garatfő, *oe*: nyelőcső.
20. A cuticula lemezei és függelékei. (8. p. 8—9. fig. 8—9.) *Echiniscus*-típus.
21. A cuticula lemezei és függelékei. (8. p. 8—9. fig. 8—9.) *Pseudechiniscus*-típus.
k: fejlemez, *sI*: első törzs- vagy vállemez, 1, 2, 3: köztilemezek, *I*, *II*, *III*, *IV*: páros törzslemezek, *V*: véglemez. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: az oldalfüggelékek helyei, b_1, c_1, d_1: a dorso, lateralis függelékek helyei, b_2, c_2, d_2: a háti függelékek helyei, *pa*: a láb oldalán levő tüske, *do*: tüskeredő, *h*: a külső karom alapi részén ülő tüske, *k*: a véglemez oldalbevágása.
22. *Echiniscus simba* MARCUS.
23. *Parechiniscus chitonides* CUÉNOT. (8. p. 303. fig. 139.)
24. *Echiniscus bisetosus* HEIN. (8. p. 336. fig. 175.)
25. *Bryodelphax parvulus* (THULIN). (8. p. 307. fig. 141. C.)
26. *Echiniscus Wendti* RICHT. (8. p. 320. fig. 155.)
27. *Echiniscus canadensis* J. MURR.
28. *Echiniscus trisetosus* CUÉNOT.

II. tábla.

29. *Macrobiotus* sp. pete.
30. *Macrobiotus* sp. pete.
31. *Macrobiotus Harmsworthi* J. MURR. (8. p. 419, fig. 258.)
32. *Macrobiotus Harmsworthi* pete.
33. *Macrobiotus Harmsworthi* karmok.
34. *Hypsidius Stappersi* (RICHT.) szájkészülék.
35. *Hypsidius Stappersi* (RICHT.) karmok.
36. *Macrobiotus echinogenitus* RICHT. pete. (8. p. 447. fig. 283)
37. *Macrobiotus echinogenitus* karmok.
38. *Macrobiotus echinogenitus* garat.
39. *Macrobiotus echinogenitus* karmok oldalról.
40. *Macrobiotus* sp. pete.
41. *Hypsibius* sp. pete.
42. *Echiniscus dearmatus* BARTOŠ (5. p. 140.)
43. *Macrobiotus Pullari* J. MURR. pete.
44. *Macrobiotus Pullari* J. MURR. karmok.
45. *Macrobiotus Pullari* J. MURR. garat.

46. *Hypsibius alpinus* (J. Murr.). (8. p. 536. fig. 374.) Szájkészülék.
47. *Hypsibius alpinus* karmok.
48. *Hypsibius papillifer* (J. Murr.) garat. (8. p. 481. fig. 323.)
49. *Hypsipius papillifer* karmok.
50. *Hypsibius papillifer.*
51. *Macrobiotus macronyx* Duj. (8. p. 431. fig. 269.) garat.
52. *Macrobiotus macronyx* karmok.
53. *Echiniscus Blumi* Richt.
54. *Hypsibius tuberculatus* Plate. (8. p. 476. fig. 319.)
55. *Hypsibius tuberculatus* garat.
56. *Hypsibius tuberculatus* karmok.
57. *Hypsibius microps* Thul. (8. p. 509. fig. 345.) garat.
58. *Hypsibius microps* karmok.
59. *Hypsibius oculatus* (J. Murr.) karmok.
60. *Hypsibius oculatus* garat.
61. *Hypsibius Recamieri* (Richt.) garat.
62. *Hypsibius Recamieri* karmok.
63. *Hypsibius Augusti* (J. Murr.) (8. p. 493. fig. 333) karmok.
64. *Hypsibius Augusti* garat.
65. *Hypsibius convergens* (Urb.) (8. p. 502. fig. 339) garat.
66. *Macrobiotus Hufelandi* karom.
67. *Macrobiotus Hufelandi* fiatal állat karma.
68. *Macrobiotus Hufelandi* pete.
69. *Hypsibius convergens* (Urb.) karmok.
70. *Hypsibius pallidus* Thul. garat.
71. *Hypsibius pallidus* karmok.
72. *Hypsibius Dujardini* (Doy.) karmok.
73. *Hypsibius Dujardini* garat.
74. *Hypsibius prosostomus* (Thul.) (8. p. 483. fig. 326) karmok.
75. *Hypsibius prosostomus* garat.
76. *Hypsibius nodosus* J. Murr. (8. p. 478. fig. 321.)
77. *Hypsibius nodosus* karmok.
78. *Hypsibius nodosus* garat.

III. tábla.

79. *Hypsibius Oberhaeuseri* (Doy.) (8. p. 511. fig. 347.)
80. *Hypsibius Oberhaeuseri* karmok.
81. *Hypsibius Oberhaeuseri* garat.
82. *Echiniscus merokensis* Richt. (8. p. 364, fig. 207.)
83. *Macrobiotus ampullaceus* Thul. (8. p. 434. fig. 271) pete.
84. *Macrobiotus ampullaceus* karom.
85. *Macrobiotus ampullaceus* garat.
86. *Hypsibius areolatus* (J. Murr.) (8. p. 518. fig. 382) garat.
87. *Hypsibius areolatus* karom.

88. *Hypsibius areolatus* pete.
89. *Hypsibius Sattleri* (Richt.) (8. p. 480. fig. 322.)
90. *Hypsibius Sattleri* az első láb karma.
91. *Hypsibius Sattleri* garat.
92. *Hypsibius Sattleri* a negyedik láb karma.
93. *Macrobiotus ambiguus* J. Murr. (8. p. 433. fig. 270) negyedik láb karma.
94. *Macrobiotus ambiguus* garat.
95. *Macrobiotus ambiguus* első láb karma.
96. *Hypsibius prosirostris* (Thul.)
97. *Hypsibius arcuatus* Bartoš. (3. p. 99.)
98. *Hypsibius arcuatus* karmok.
99. *Hypsibius arcuatus* karmok.
100. *Macrobiotus dubius* J. Murr. (8. p. 437. fig. 273) garat.
101. *Macrobiotus dubius* karom.
102. *Hypsibius tetradactyloides* (Richt.)
103. *Hypsibius tetradactyloides* karom.
104. *Hypsibius tetradactyloides* garat.
105. *Hypsibius Schaudini* (Richt.) (8. p. 482. fig. 325) garat.
106. *Hypsibius Schaudini* karom.
107. *Hypsibius scoticus* (J. Murr.) garat.
108. *Hypsibius scoticus* negyedik láb karma.
109. *Hypsibius scoticus* második láb karma.
110. *Hypsibius rugosus* Bartoš (4. p. 259) garat.
111. *Hypsibius rugosus* karom.
112. *Hypsibius megalonyx* (Thul.) (8. p. 490. fig. 331) garat.
113. *Hypsibius megalonyx*.
114. *Macrobiotus coronifer* Richt. (8. p. 450. fig. 284) garat.
115. *Macrobiotus coronifer* karom.
116. *Hypsibius ornatus* (Richt.) (8. p. 468. fig. 312.)
117. *Hypsibius ornatus* karom.
118. *Hypsibius ornatus* garat.
119. *Macrobiotus dispar* J. Murr. (8. p. 435. fig. 272) első láb karma.
120. *Macrobiotus dispar* tőröcske.
121. *Macrobiotus dispar* hátsó láb karma.
122. *Hypsibius hypostomus* Bartoš. (4. p. 257.)
123. *Arctiscon tardigradum* Doy.
124. *Arctiscon tardigradum* karom.
125. *Arctiscon tardigradum* garat.
126. *Macrobiotus furcatus* Ehrbg.
127. *Macrobiotus furcatus* petéjének díszítése.
128. *Hypsibius calcaratus* Bartoš. (4. p. 259.)
129. *Hypsibius calcaratus* Bartoš karom.
130. *Macrobiotus dispar* J. Murr.

IV. tábla.

131. *Pseudechiniscus suillus* (Ehrbg.)
132. *Pseudechiniscus suillus* (Ehrbg.) Marcus után.
133. *Echiniscus bartramiae* Iharos.
134. *Pseudechiniscus transsylvanicus* Iharos.
135. *Echiniscus testudo* (Doy.)
136. *Echiniscus granulatus* (Doy.).
137. *Echiniscus Creplini* C. A. S. Schultze.
138. *Echiniscus fortis* Bartoš. (5. p. 141.)
139. *Hypsibius clavatus* Bartoš (4. p. 260) karom.
140. *Hypsibius clavatus* Bartoš.
141. *Macrobiotus occidentalis* J. Murr.
142. *Macrobiotus intermedius* Plate garat.
143. *Macrobiotus Richtersi* J. Murr. garat.
144. *Macrobiotus Richtersi* pete.
145. *Macrobiotus Richersi* pete.
146. *Macrobiotus Richtersi* karom.
147. *Echiniscus Marinellae* Bartoš. (5. p. 141.)
148. *Echiniscus quadrispinosus* Richt.
149. *Macrobiotus occidentalis* J. Murr. garat.
150. *Macrobiotus occidentalis* J. Murr. karom.
151. *Echiniscus trifilis* Rahm.
152. *Macrobiotus intermedius* Plate karom.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. febr. 17-én tartott üléséből.)

DIE TARDIGRADEN DES HISTORISCHEN UNGARNS.

Von A. IHAROS.

Mit Tafel VI—IX.

Der Verfasser berichtet zusammenfassend, teils auf Grund eigener Untersuchungen, teils auf Grund der Literatur, über die Bärtierchen des historischen Ungarns. Sein eigenes Material stammte von 137 verschiedenen Fundorten her und lieferte 39 Arten, darunter waren 9 *(Echiniscus simba, Creplini, trifilis, canadensis, Hypsibius prosirostris, Stappersi. Macrobiotus dubius)* für das Faunengebiet neu und zwei haben sich sogar als für die Wissenschaft neu erwiesen *(Echiniscus bartramiae. Pseudechiniscus transsylvanicus)*. Samt den litterarischen Angaben werden 65 sichere und 5 unsichere Arten aufgeführt. Der ungarische Text enthält eine historische Übersicht der Literatur, morphologische Einleitung, Bestimmungstabellen für die Ordnungen, Unterordnungen, Familien, Gattungen und Arten, sowie in systematischer Reihenfolge die Beschreibungen und Fundorte der nachgewiesenen Arten. Zum Schluss gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die artliche Zusammensetzung der Tardigradenfauna verschiedener Biotope und teilt die benutzte Literatur mit.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 17. Februar 1936.)

VASVÁRI MIKLÓS 1936. ÉVI KISÁZSIAI KUTATÓ ÚTJÁNAK ÁLLATTANI EREDMÉNYEI.

1.

Puhatestű állatok (Mollusca.)

12 ábrával.

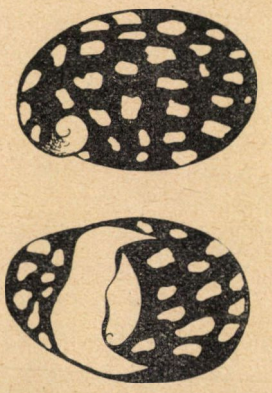
WAGNER JÁNOS-tól.

Vasvári Miklós 1936. évi kisázsiai kutatóútjáról 432 darabból álló Mollusca-anyagot is hozott magával. Az 52 különböző alakot magába foglaló szép kis gyüjteményben több érdekes, ritkább faj is akadt, olyanok, amelyek a Magyar Nemzeti Múzeumban még egyáltalában nem voltak meg. A Molluscák legnagyobb részét szárazföldi tüdőscsigák (Pulmonata, Stylommatophora) alkotják, rajtuk kívül néhány tüdős- és kopoltyús vízicsiga, valamint egy kagylófaj szerepel a gyüjtésben. Az anyag egy része csak száraz állapotban került a kezeimhez, másik részét azonban alkoholban konzerválta a gyüjtő, s ez utóbbin azután nemcsak az egyes fajok héjtani sajátságait tanulmányozhattam, hanem bonctani vizsgálatokra is alkalmam nyílott. A gyüjtött anyag részletes felsorolása alább következik, ez előtt azonban még fel kell említenem a különböző fajok termőhelyeit. Ezek a következők: Tekir-Dagh (Rodostó), Stambul különböző pontjai, Brussa, az Apolló-tó (Aboliont-tó) Brussa közelében, az Olympos (Ulu-Dagh), Ankara és környéke (Halkoran, Kayas, Gari Ciflik, Karacabey, Emir-Göl és Kissil-Ka-Haman), Samsun (a Fekete tenger partján) Tokat és Bafra.

1. *Theodoxus (Theodoxus) fluviatilis* L.

Apolló-tó. (102 példány.)

102 darab különböző rajzolatú példány. Legnagyobb részük sötétszürkés alapszínű és fehér foltokkal díszített (1. ábra), de akadnak zeg-zúgos vonalakkal ellátott és hálózatos rajzolatú héjak is. A legtöbbje meglehetősen apró, csak a legnagyobbak érték el a 10 mm hosszúságot. A *Theodoxus fluviatilis* elterjedése Európán keresztül kelet felé egészen a Kaukázusig nyúlik.



1. ábra. (Abbild.) A *Theodoxus (Theodoxus) fluviatilis* L. egy példányának héja felülről és alulról tekintve. A kép a világos foltok elhelyezkedését szemlélteti. (Eine Schale von oben und von unten. Das Bild zeigt die Verteilung der hellen Punkte.) Apolló-tó (Apolló-Teich).

2. *Vivipara costae* HELDR. (?).

Apolló-tó.

Két egészen fiatal példány, melyeket nem lehetett teljes pontossággal meghatározni.

3. *Melanopsis (Melanopsis) praerosa* L.

Apolló-tó.

E fajnak 13 példánya került elő. A Földközi-tengermelléki országokban mindenütt elterjedt. Megvan Marokkóban, Algirban, Spanyolországban, Toskanában, Görögországban és az Egei-tenger szigetein, Kis-Ázsiában, a Transkaukázusban, Palesztinában, Syriában és Mesopotámiában. A Kisázsiában előforduló földrajzi fajtáját a modern systematikusok *Melanopsis praerosa Ferussaci* ROTHnak nevezik.

4. *Lymnaea (Radix) ovata* DRAP.

Tokat, Vilayet, 4 példány.

5. *Lymnaea (Radix) peregra* MÜLL.

Apolló-tó (1 példány), Halkoran (5 péld.), Kayas (1 péld.).

A meghatározás csak a héj sajátságai alapján történt, mivel anatomiai vizsgálatra az anyag nem volt alkalmas. A *Radix*-ok az egész palaearktikus régióban elterjedtek.

6. *Planorbis* sp.

Gari Ciflik, Ankara közelében.

Egy egészen apró, közelebbről meg nem határozható héjtöredék.

7. *Lauria (Lauria) cylindracea* DA COSTA.

Stambul, Jedikule (6 péld.), Ulu-Dagh, Olympos (2 péld.).

A *Lauria cylindracea* formaköre a Balti-, Óceáni- és Középtengeri partvidékek országaiban terjedt el. Egészen a Kaukázusig ismeretes.

8. *Orcula scyphus* L. PFEIFFER.

Tokat (5 péld.).

E Kisázsiában számos helyen előforduló fajból csak tokati példányaim vannak. Régebbi irodalmi adatok (13, p. 86) a *scyphust* Görögországból és a görög szigetekről is felsorolják, azonban ezek az előfordulások az újabb vizsgálatok szerint még megerősítésre szorulnak (2, p. 557). A modern rendszerezők ezt a fajt az *Orculella* STEENBERG genusba osztják és a *doliolum* földrajzi fajtájának tekintik. A *doliolum* földrajzi rasszkörének feldolgozása — ez a Pyreneusoktól kezdve Közép- és Déleurópán át egészen Syriáig, Kisázsiáig és Arméniáig terjed — mindenesetre igen hálás feladat lenne, nemcsak állatföldrajzi, hanem rendszertani szempontból is.

9. *Mastus (Mastus) carneolus* MOUSS.

Stambul (1 péld).

A Márvány-tenger szigetein, valamint Stambulban és Stambul környékén él. A *Mastus pupá*nak ez a kisázsiai rokonfaja különösen kicsiny és karcsú termetével tűnik ki. Az én példányom magassága 9, szélessége alig 4 mm. Héja vékony, egyetlen szájszéli bütyke gyengén fejlett.

10. *Zebrina (Zebrina) detrita* MÜLL.

Emir-göl (3 péld.).

E faj Dél- és Középeurópán át kelet felé az Egei- és a Feketetengerig ér el. Konstantinápoly környékén az igen nagy házzal kitűntetett *Zebrina detrita inflata* KOB. nevű délkeleti fajtája él, az én példányaim azonban nem ehhez a rasszhoz tartoznak. A legnagyobb héj hossza 22, szélessége 10 mm volt.

11. *Antichondrus tournefortianus* FÉR.

Tokat (18 péld.).

Ebből az igen ismert kisázsiai fajból mindössze Tokat környékéről kerültek elő példányok.

12. *Chondrus zebra* OLIV.

Stambul (2 péld.), Kayas (3 péld.), Ankara (2 péld.).

Gyakori faj, amelynek különböző alakjai Görögországban, a görög szigeteken és Kisázsiában élnek.

13. *Ena Friwaldszkyi* PFEIFFER.

Brussa (1 péld.).

Egyetlen sérült példánya került csak elő.

14. *Jaminia (Chondrula) lamelliferus* RM.

Tokat (1 péld.).

VASVÁRI mindössze egy példányát gyüjtötte. A Magyar Nemzeti Múzeum Állattárában vannak héjak a Dardanellák vidékéről és Tokatból.

15. *Oligoptychia laevicollis* (PARR.) CH.

Tokat (8 péld.)

Néhány ép és több töredékes példányát találtam a tokati gyüjtésben. A M. N. Múzeumnak már voltak példányai ugyanonnan.

16. *Euxina maesta* FÉR.

Stambul (1 péld.).

17. *Euxina corpulenta* PFEIFFER.

Stambul (1 péld.), Bafra (2 péld.).

Az *Euxinák* közül mindössze ez a két faj került elő. Jellemző kisázsiai alakok, nevezetes sajátságuk, hogy szájuk széle körös-körül apró ráncokkal, redőkkel van ellátva.

18. *Papillifera bidens* L.

Stambul (23 péld.).

Csak Stambulból került elő. A Földközi-tenger partvidékén és a szigeteken általánosan elterjedt.

19. *Clausilia* sp.

Stambul (1 péld.).

Egy közelebbről meg nem határozható *Clausilida*-héjtöredék.

20. *Pleurodiscus balmei erdelii* ROTH.

Stambul (1 péld.).

Egyetlen, kissé sérült példánya került elő. Legnagyobb átmérője még így is meghaladta a 9 mm-t. Ez a faj több földrajzi fajtára hasadozva a Földközi-tenger partvidékén és annak szigetein él. Törzsfaja a *Pleurodiscus balmei balmei* POT. et MICH. Algirban, Sziciliában, Szardiniában és Dél-Olaszországban él, a *P. balmei sudensis* L. PFEIFF. nevű fajta Kréta-szigetét lakja, a *P. balmei erdeli* ROTH pedig néhány görög szigeten, Rhodoson, Konstantinápoly vidékén és Kisázsiában terjedt el. Valószínűleg csak a partok közelében él.

21. *Oxychilus nitidissimus Moussoni* KOB.

Stambul (1 péld.).

Egyetlen fiatal példányát Konstantinápolyban gyüjtötte VASVÁRI, ahol csak ez az alfaj fordul elő. A törzsalak *(nitidissimus nitidissimus)* Albániában és Görögországban él, más földrajzi fajtái pedig a görög szigeteket népesítik be.

22. *Oxychilus cyprius borealis* Kob.

Samsun (3 péld.).

Egy közepesnagyságú és két egészen fiatal állat háza. Az eredetileg Cyprusról leírt fajnak ez a földrajzi fajtája Kisázsia északi partjain él. A Magyar Nemzeti Múzeumban vannak *O. cyprius* példányok Brussából és Smyrnából is.

23. *Oxychilus deila* Bgt.

Bafra (1 péld.).

Egyetlen példánya Bafrából származik. A ház legnagyobb átmérője 13 mm.

24. *Retinella camelina frondosula* Mouss.

Stambul (3 péld.), Karacabey (2 péld.).

A törzsalaknál domborúbb tekercsű, barnás-szarúszínű, alsó felén világosabb. Legnagyobb példányai 8 mm átmérőjűek voltak.

25. *Retinella* sp.

Karacabey (1 péld.), Stambul (3 péld).

Négy darab egészen fiatal állat héja, amelyek nem voltak közelebbről meghatározhatók.

26. *Limax (Limax) flavus ecarinatus* Bttgr.

Stambul (12 péld.), Bafra (5 péld.), Tekir-Dagh (1 péld.).

A Kaukázusban és Kisázsiában a mi közönséges *flavus*unknak ez a fajtája el. Különösen jellemzi az, hogy taraja hiányzik vagy csak egészen gyengén fejlett. Hátának hátsó részén a bőr kis mezőcskéi nagyon szorosan fekszenek egymás mellett és határozatlan sorokban rendeződtek el. A hát középvonalában keskenyebbek és hosszanti irányban jobban megnyúltak, mint a test két oldalán, ahol szemcseszerűen helyezkednek el (1, p. 186—187.). Míg nálunk a *flavus* a szabadban nem igen fordul elő, hanem főleg az emberi háztartások egyik követője, addig Kisázsiában még a szabadban is mindenütt megtalálható.

27. *Agriolimax (Agriolimax) agrestis reticulatus* Müll.?

Bafra (6 péld.).

Hat darab meglehetősen nagy *Agriolimax*, melyek azonban valószínűleg a rossz konzerválás következtében annyira tönkrementek, hogy biztos meghatározásuk nem volt lehetséges.

28. *Agriolimax Ananowi* Simr.

Stambul (11 péld.).

Fiatal, nagyon különböző színű állatok. Színezetük az egészen világos hússzínűtől a sötétszürkéig változik és akadnak közöttük sötétpiros pigmenttel tarkítottak is. Bőrük igen finom, pajzsuk hosszúkás alakú, farkuk kihegyesedő. Anatómiailag több állatot is megvizsgáltam, ivarszerveik azonban még fejletlenek voltak. A leírások alapján csak az *Agriolimax Ananowi*val tudtam őket azonosítani; ez a faj eddigi ismereteink szerint a Kaukázusban és a Bosporus vidékén él. (4, p. 100, és 7, p. 159—160.).

29. *Agriolimax* sp.

Ulu-Dagh, Olympos (2 péld.).

Két darab aprótermetű, retikulált rajzolatú állat, melyeknek közelebbi meghatározása nem volt lehetséges.

30. *Agriolimax berytensis* Bgt.

Kissil ka haman (1 péld.).

Rossz állapotban lévő sötét színezetű állat, melyet csak az *Agriolimax berytensis*szel tudok azonosítani. Ez a faj Görögországtól kezdve egészen Syriáig és Palesztináig terjedt el.

31. *Mesolimax (Mesolimax) Brauni* Pollira.

Samsun (3 péld.), Tokat (11 péld.).

Kisebb-nagyobb példányok igen jól konzervált állapotban. Barnásszínűek, hátukon és pajzsukon sötétebbek, talpukon világosabb okkerbarnák, héjuk centrális nukleusszal ellátott. A legnagyobb példányok hossza a 40 mm-t éri el. A talp középső pásztájának barázdái ferde szögben találkoznak, akárcsak a *Milax*-ok esetében, míg belső szervezetükre jellemző, hogy bélcsatornájuk

négy kanyarulatot ír le, a radula középfoga háromhegyű, az oldalfogak kéthegyűek, az ivarszervek pedig a *Limax*-okéhoz hasonlók. Így ez az érdekes nem a *Milax*ok (héj és talp), az *Agriolimax*ok (radula és bélcsatorna) és a *Limax*ok (ivarszervek) különböző bélyegeit egyesíti magában. A Magyar Nemzeti Múzeum gyüjteményében ez a genus eddig még nem volt képviselve, fajai különben sem gyakoriak. A *Mesolimax Braunit* az irodalom Kisázsiából, a Herceg-szigetekről, Görögországból és Keletruméliából sorolja fel (4, p. 105.).

32. *Milax (Subamalia) Strandi* H. WAGN.

Stambul (13 péld.).

Egy felnőtt és 12 fiatal, részben egészen kicsiny példány, jellemző színezettel és anatómiával. (10, p. 331—334). Ezideig csak Stambulból és környékéről ismerjük.

33. *Milax (Milax) Kusceri* H. WAGN.

Stambul (1 péld.).

Jellemző rajzolatú és színezetű példány. Ezt a fajt Szerbiából, Nis környékéről írtam le (9, p. 72—74), később Bulgária több pontjáról is előkerült (11, p. 57—58). Feltehető, hogy a Balkánon másutt is elterjedt.

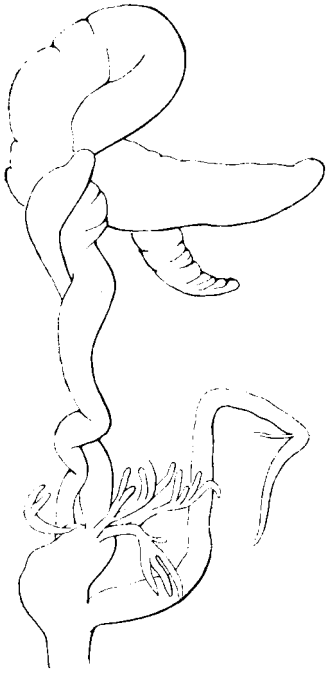
34. *Milax (Milax) gracilis* LEYD.

Stambul (2 péld.).

Fiatal példányok jellemző színezettel és rajzolattal. Tarajuk világosszínű és egészen a pajzsig ér el. Középső talppásztájuk sötétebb, a két szélső világosabb. Hosszúságuk kb. 2—2·5 cm. Anatomiai vizsgálatuk némi nehézséggel járt, mivel konzerválásuk nem volt teljesen kielégítő. Az ivarszervek alkotásáról a következőkben számolhatunk be (2. ábra): a penis és az epiphallus nagyjából egy-

2. ábra (Abbild.).
Milax (Milax) gracilis LEYD.
Az ivarszervek végső részei.
(Die Endteile der Geschlechtsorgane). Stambul.

forma hosszúak, a visszahúzó izom kb. a két szerv határán található; a párzótáska nyele jóval vastagabb, mint a női vezeték, végtartálya a nyéltől élesen elválik, a vége pedig csúcsban hegyeződik ki. A járulékos mirigyek jól fejlettek. A *Milax gracilis* eléggé messze elterjedt faj; Középeurópától kezdve Magyarországon és Erdélyen át egészen a Krim-félszigetig található.



3. ábra (Abbild.).
Helicella (Cernuella) virgata variabilis DRAP. Ivarkészülék. (Geschlechtsapparat). Stambul.

35. *Milax* sp.

Stambul (1 péld.).

Egy közelebbről meg nem határozható fiatal példány.

36. *Helicella (Cernuella) virgata variabilis* DRAP.

Stambul (10 péld.), Karacabey (5 péld.), Ankara (2 péld.).

Anatomiailag egy stambuli példányát vizsgáltam meg (3. ábra). Ivarszerveire különösen jellemző az egyetlen nyíltok, a villásan hasított járulékos mirigyek, a hosszúkás-tojásalakú bursa copulatrix, valamint a penis rövid flagelluma. Ismert mediterrán faj, amelynek TAYLOR nem kevesebb, mint 150 synonymáját sorolja fel. Elterjedési területe az angol és az Atlanti-Óceáni partvidéktől kezdve a Földközi-tenger országain át egészen a Fekete-tengerig nyúlik.

37. *Helicella (Helicella) obvia* HARTM.

Tokat (3 péld.).

Tokatból három üres héj került elő, melyeket csak ezzel a fajjal tudok azonosítani. A legnagyobbik példány átmérője a 20 mm-t meghaladta.

Méretek.

Példány	Szélesség	Magasság
1.	21 mm	11 mm
2.	20 «	10·5 «
3.	20 «	11 «

38. *Helicella (Helicella) spirula* WESTL.

Emir-göl (3 péld.), Kayas (5 péld.), Ankara (6 péld.).

Valamennyien magas, tornyosházú példányok, a leglaposabbak még az ankaraiak. A felnőtt példányok méretei a következők:

	Példány	Szélesség	Magasság
Kayas	1.	20 mm	14 mm
	2.	18 «	13 «
Emir-göl	1.	18 «	13·5 «
	2.	18·5 «	14 «
Ankara	1.	21 «	15 «
	2.	18 «	11 «
	3.	19 «	13 «
	4.	18 «	11 «

Nemcsak a héj egyéb sajátságaiból, hanem egyedül a méretekből is nyilvánvaló tehát, hogy egy, az *obvia*tól eltérő alakkal van dolgunk. A FUCHS és KÄUFEL által megadott, az *obvia dobrudschaera* vonatkozó adatok mindenesetre lényegesen eltérnek a föntiektől (2, p. 633). A héjak spirális díszítésűek, köldökük szűk, színük tiszta fehér vagy barna sávokkal díszített. Az emir-göli és a kayasi példányokon anatomiai vizsgálatokat is végeztem (4. és 5. ábrák). Ivarszervükre jellemző a két nyíltok jelenléte, továbbá a párzótáska alakja, a párzótáska nyelének hossza, a járulékos mirigyek elrendeződése és a penis sajátságai. Anatómiáját először A. J. WAGNER tisztázta (8, p. 17. Taf. 18, fig. 111. a-c). Az *obvia* és a *spirula* közti összefüggés még ma sincsen tisztázva. FUCHS és KÄUFEL a *spirula*t az *obvia* formakörébe osztják, én azonban a fentiek alapján nem tartom valószínűnek a két alak földrajzi rasszkörök szerint való összefüggését. Kisázsiában mind a két faj egymás közelében él és egymástól jól megkülönböztethető. Ezért, amit

e két fajról a *spirula* ceglédi előfordulásával kapcsolatban írtam (12, p. 86—87), azt ezekkel az újabb leletekkel megerősítve vallom. A *Helicella spirula* hazánktól kezdve a Balkán-félszigeten át egészen a Fekete-tengerig terjedt el.

4. ábra (Abbild.).
Helicella (Helicella) spirula Westl. Ivarkészülék. (Geschlechtsapparat). Emir-göl.

5. ábra (Abbild.).
Helicella (Helicella) spirula Westl. Ivarkészülék. (Geschlechtsapparat). Kayas.

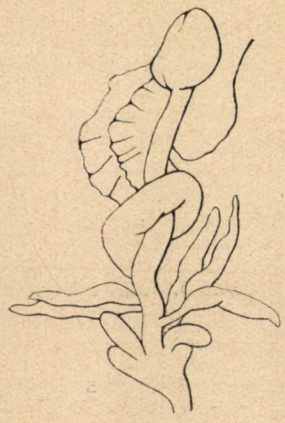
39. *Helicella (Xeropicta) Krynickii* Andr.

Stambul (4 péld.), Karacabey (4 péld.).

Kisázsiában messze elterjedt, igen változékony faj. Fuchs és Käufel legújabban Makedoniából is kimutatták (2, p. 634). Több karacabeyi példányt anatomiailag is megvizsgáltam. Az ivarszervek jellemző sajátságait az alábbiakban foglalhatom össze (6. és 7. ábrák): jellemző a penis erősen fejlett kúpos függeléke, amely az atrium közelében csatlakozik a párzószervhez. Négy nyíltokja van,

ezek közül azonban csak a belsők tartalmaznak 1—1 kicsiny, hegyes nyilat. A nyálmirigyek száma átlag nyolc. A párzótáska nyele meglehetősen hosszú. A végtartály a nyéltől élesen határolódik el.

6. ábra (Abbild.). *Helicella (Xeropicta) Krynickii* ANDR. Ivarkészülék. (Geschlechtsapparat). Karacabey.



7. ábra (Abbild.). *Helicella (Xeropicta) Krynickii* ANDR. A női ivarkészülék végdarabjai. (Die Endteile des weiblichen Geschlechtsorganes). Karacabey.

A penis rövid és vastag, a hengeres epiphallus sokkal hosszabb és vékonyabb. A flagellum közepes hosszúságú, vékony, kihegyesedő. A retraktor-izom az epiphallus és a penis határán helyezkedik el.

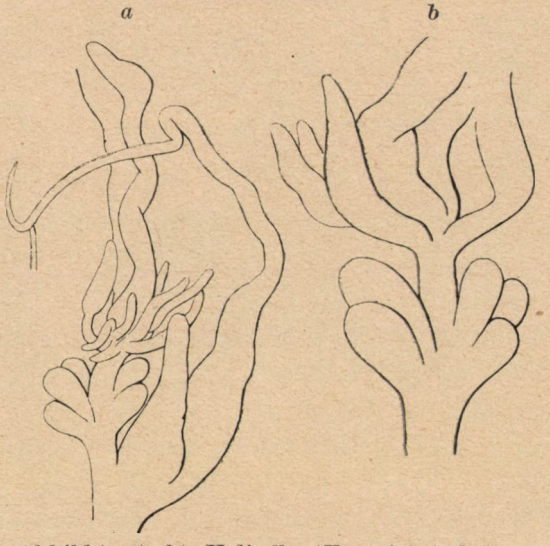
40. *Helicella (Xeropicta) derbentina* KRYN.

Karacabey (6 péld.), Tokat (3 péld.).

E Kisázsiában messze elterjedt faj néhány példányát VASVÁRI a fenti termőhelyeken gyüjtötte. Anatomiailag úgy karacabeyi (8. ábra), mint tokati példányokat tanulmányoztam (9. ábra). Sajnos, a *Xeropicta* alnemen belül ezen az alapon fajokat elhatárolni igen nehéz, itt a héjtani sajátságok gyakran sokkal előnyösebb útbaigazítással szolgálnak. Ezt a tényt már HESSE is világosan felismerte és leszögezte (6 p. 30). A *derbentina* ivarkészüléke is annyira

8. ábra (Abbild.). *Helicella (Xeropicta) derbentina* KRYN. Az ivarkészülék végső részei. (Die Endteile der Geschlechtsorgane). Karacabey.

hasonlít az előző fajéhoz, hogy annak leírását helykímélés céljából el is hagyom és csupán annyit kívánok megjegyezni, hogy a *Krynickii* penisflagelluma általában hosszabb (4—6 mm), a *derbentináé* pedig mindössze 2 mm. A két faj anatomiájában ez az egyetlen megkülönböztetésre alkalmas, látzólag állandó bélyeg (8. ábra). Mint érdekességet meg kell még említenem, hogy az egyik tokati példánynak 5 darab közel egyenlő fejlettségű nyíltokja volt. Tekintve, hogy az ilyfajta rendellenességek igen ritkák, fontosnak tartottam ezt a megfigyelésemet írásban és képben is közölni (9. ábra).



9. ábra (Abbild.). a), b) *Helicella (Xeropicta) derbentina* KRYN.
a) Az ivarkészülék végső részei öt nyíltokkal. (Die Endteile des Geschlechtsapparates mit fünf Pfeilsäcke).
b) Az öt nyíltok erősebben nagyítva. (Die fünf Pfeilsäcke stärker vergrössert). Tokat.

41. *Helicella (Trochoidea) pyramidata* DRAP.

Karacabey (7 péld.).

A legnagyobb példányok átmérője 10 mm-en felül van, magasságuk pedig a 9 mm-t is eléri. A *Helicella pyramidata* a Földközi-tenger partvidékén általánosan elterjedt.

42. *Helicella (Trochoidea) pyramidata minor* BGT.

Kayas (1 péld.).

43. *Helicella* sp.

Tokat (3 péld.).

Három fiatal állat héja, amelyeket közelebbről meghatározni nem volt lehetséges.

44. *Cochlicella acuta* MÜLL.

Stambul (9 péld.).

A Földközi-tenger partvidékén elterülő országokban mindenütt elterjedt.

45. *Theba (Theba) syriaca* EHRBG.

Tokat (5 péld.).

Elterjedése a görög partoktól kezdve néhány szigeten (Kréta, Rhodos, Cyprus) át Kisázsiába, Syriába és Palesztinába nyúlik. A gyüjtött példányok közül egyet anatomiailag is megvizsgáltam. Erre a fajra is az ivarszervek végső darabjai jellemzőek, nevezetesen a penis hosszúkás függeléke, a bursa copulatrix alakja, valamint a járulékos mirigyek. Ez utóbbiak magányosak vagy elágazók, azonban mindig közös száron foglalnak helyet (10. ábra).

10. ábra (Abbild.). *Theba (Theba) syriaca* EHRBG. Az ivarszervek végső darabjai. (Die Endteile der Geschlechtsorgane). Tokat.

46. *Theba (Paratheba) fruticola* KRYN.

Tokat (3 péld.).
Egy felnőtt és két fiatal állat háza.

47. *Metatheba orientalis* P. HESSE.

11. ábra. (Abbild.). *Metatheba orientalis* P. HESSE. Ivarkészülék. (Geschlechtsapparat). Tokat.

Tokat (5 péld.).

Három felnőtt és két fiatal példány. Ezt a fajt régebben a balkáni *Theba carascaloides* BGT-vel tévesztették össze, mígnem P. HESSE kimutatta, hogy a kisázsiai alak nemcsak külön faj, hanem egyúttal egy külön nemnek a képviselője is, amelyet ő *Metathebanak* nevezett el (3, p. 9—16). A *Metatheba* nemzetség anatomiailag abban különbözik a *Thebatól*, hogy penisfüggeléke nincsen, retraktora ellenben van. A tokati példányokból egyet anatomiailag is megvizsgáltam s az ivarkészülék sajátságait az alábbiakban ismertetem (11. ábra): Az uterus sokkal hosszabb, mint a nagyon rövid vagina; a bursanyél meglehetősen hosszú, tojásalakú végtartállyal; a járulékos mirigyek villásan osztottak; a penis az epiphallusnál vastagabb, utóbbi nagyjából hengeres alakú, a hegyesen végződő flagellum kb. 7 mm hosszú.

48. *Eobania vermiculata* MÜLL.

Stambul (34 péld.).

Felnőtt és fiatal példányok. A Földközi-tenger környékén elterülő országokban mindenütt messze elterjedt faj.

49. *Helix (Helix) figulina* (PARR.) RM.

Tokat (3 péld.).

Egy példányát anatomiailag is megvizsgáltam. Ivarkészülékének fontosabb sajátságait a következőkben ismertetem: a párzótáska vége elágazó, azaz a nyél még egy rövid, úgynevezett «diverticulum»-ot is visel; nyele vékony, a női vezetéké ellenben vastag és izmos; egyetlen jól fejlett nyíltokja van, a függelékes mirigyek hosszúak és vékonyak; a penisen az igen hosszú flagellum érdemel említést (12. ábra).

12. ábra (Abbild.). *Helix (Helix) figulina* (PARR.) RM. Az ivarkészülék végső darabjai. (Die Endteile der Geschlechtsorgane.) Tokat.

50. *Helix (Helix) lucorum radiosa* L.

Stambul (1 péld.), Tokat (2 péld.).

Ez a faj számos alakban terjedt el Olaszországtól kezdve a Balkán-félszigeten át egészen Kisázsiáig és Mezopotámiáig.

51. *Helix (Cryptomphalus) aspersa* MÜLL.

Stambul (10 péld.).

Nyugateurópában, a Földközi-tengermelléki országokban és Előázsiában mindenütt elterjedt.

52. *Pisidium (Eupisidium) cinereum* ALDER.

Ulu Dagh, Olympos (1 péld.), Gari Ciflik, Ankara (1 péld.).

Összefoglalás.

Vasvári Miklós kisázsiai kutatóútjának gyüjtéséből 52 különböző alakhoz tartozó, 432 darab puhatestű állat került elő, köztük több ritkább és érdekesebb faj. Említésreméltó a *Theodoxus fluviatilis* gyakorisága az Apolló-tóban, továbbá a számos példányban előkerült fajok közül fel kell sorolnunk a *Limax flavus ecarinatust*, amely Kisázsiában a szabadban is él, valamint a *Mesolimax Braunit*, az *Agriolimax Ananowit* és a *Milax Strandit*. A *Milax Kusceri* szerbiai és bulgáriai termőhelyek után most Kisázsiából is előkerült, ahol a *Milax gracilis* szintén megtalálható. Az elevenen hozott és a helyesen konzervált állatokon anatomiai vizsgálatokat is sikerült végeznem. Boncolásra kerültek a következő fajok: *Agriolimax Ananowi*, *Mesolimax Brauni*, *Milax Strandi*, *Milax gracilis*, *Helicella virgata variabilis*, *Helicella spirula*, *Helicella Krynickii*, *Helicella derbentina*, *Theba syriaca*, *Metatheba orientalis*, *Helix figulina*. A *Helicella spirula* vizsgálataim alapján önálló fajnak tekintendő. A Tokatból származó *Helicella derbentina* példányok között egy rendellenes szervezetűt találtam, amelynek ivarkészülékén nem négy, hanem öt darab közel egyenlő fejlettségű nyíltok alakult ki. A gyüjtés révén olyan fajok is kerültek a Magyar Nemzeti Múzeum Állattárába, amelyek ott még nem voltak képviselve (*Mesolimax Brauni*, *Agriolimax Ananowi*, *Metatheba orientalis*, stb.). Számos alak új termőhelye vált ismeretessé s ezáltal elterjedésükről tisztább képet nyertünk.

Irodalom. — Literatur.

1. Boettger, O.: Sechstes Verzeichnis transkaukasischer, armenischer und nordpersischer Mollusken. Jahrb. Deutsch. Malak. Ges. 8, 1881.

2. Fuchs, A. und Käufel, F.: Anatomische und systematische Untersuchungen an Land- und Süsswasserschnecken aus Griechenland und von den Inseln des Aegäischen Meeres. Archiv f. Naturgesch. N. F. 5, 1936.

3. Hesse, P.: Helix frequens Mousson. Mitteil. Kaukas. Mus. 6, 1914.

4. Hesse, P.: Die Nacktschnecken der palaearktischen Region. Abhandl. Archiv f. Molluskenkunde, 2, 1926.

5. HESSE, P.: Zur Anatomie und Systematik palaearktischer Stylommatophoren. Zoologica, 31, 1931.

6. HESSE, P.: Zur Anatomie und Systematik palaearktischer Stylommatophoren. Zoologica, 33, 1934.

7. SIMROTH, H.: Die Nacktschneckenfauna des Russischen Reiches. St. Petersburg, 1901.

8. WAGNER, A. J.: Über schalentragende Landmollusken aus Albanien und Nachbargebieten. Denkschr. Mathem.-Naturw. Klasse Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Wien, 91, 1914.

9. WAGNER, H.: Die in die Unterfamilie Parmacellinae gehörenden Formen des Naturhistorischen Museums in Wien. Annal. Naturhist. Mus. Wien, 46, 1931.

10. WAGNER, H.: Neue Beiträge zur Molluskenfauna Konstantinopels. Folia Zoolog. et Hydrobiol. 5, 1934.

11. WAGNER, H.: Die Nacktschnecken des königlichen Naturhistorischen Museums in Sofia. Mitteil. Königl. Naturw. Inst. Sofia, 7, 1934.

12. WAGNER, H.: Helicella (Helicella) spirula Ceglédről. Állattani Közl. 32, 1935.

13. WESTERLUND, C. A.: Fauna der in der palaearktischen Region lebenden Binnenconchylien. 3, 1887. (Buliminus, Sesteria, Pupa usw.)

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

ZOOLOGISCHE ERGEBNISSE DER FORSCHUNGSREISE N. VASVÁRI'S IN KLEINASIEN (1936.).

I.

Weichtiere (Mollusca).

Mit 12 Abbildungen.

Von HANS WAGNER.

Zusamenfassung.

Die kleinasiatische Molluskenausbeute Dr. N. VASVÁRI's aus dem Jahre 1936 enthält insgesamt 432 Exemplare, die 52 verschiedenen Formen angehören. Bemerkenswert ist das häufige Auftreten von *Theodoxus fluviatilis* im Apolló-See, ferner die grössere Anzahl von *Limax flavus ecarinatus* (in Kleinasien freilebend!), *Mesolimax Brauni, Agriolimax Ananowi* und *Milax Strandi. Milax Kusceri* wurde nach den Balkanfunden auch von Konstantinopel festgestellt, so auch *Milax gracilis.* Anatomische Untersuchungen wurden an folgenden Arten ausgeführt: *Agriolimax Ananowi, Mesolimax Brauni, Milax Strandi, Milax gracilis, Helicella virgata variabilis, Helicella spirula, Helicella Krynickii, Helicella derbentina, Theba syriaca, Metatheba orientalis* und *Helix figulina. Helicella spirula* wird als selbständige Art aufgefasst. Unter den *Helicella derbentina*-Exemplaren von Tokat fand der Verfasser bei seinen Untersuchungen ein abnormales Stück, an dessen Genitalien nicht vier, sondern fünf, nahezu gleichstark entwickelte Pfeilsäcke aufzufinden waren (Abb. 9.). Durch diese Ausbeute gelangten in die Zoologische Abteilung des Ungarischen Nationalmuseums mehrere solche Arten, die wir noch nicht im Besitze hatten (Z. B. *Mesolimax Brauni, Agriolimax Ananowi, Metatheba orientalis,* usw.).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A VILLÁNYI HEGYSÉG FELSŐPLIOCÉNKORI CSONTBRECCIÁINAK FÖLDTANI VISZONYAI ÉS A LELŐHELYEK TÖRTÉNETE.

KORMOS TIVADAR-tól.

A tárgyra vonatkozó első adatokat PETÉNYI SALAMON JÁNOSnak köszönhetjük, aki az Akadémia kiadásában 1864-ben megjelent «Hátrahagyott Munkái»-ban számolt be az 1847. évben Beremenden, KUBINYI FERENCcel együtt végzett ásatásainak az eredményéről.

1847-től 1897-ig, tehát ötven esztendőn keresztül, PETÉNYI első híradásától eltekintve, a beremendi csontbrecciának az irodalomban semmi nyomát sem találjuk. Az első újabb adatok NEHRINGtől származnak (1897—1898), majd MÉHELY (1908, 1914) és e sorok írója (1911—1913) következnek, akik a további kutatásoknak irányt szabnak.

A Villányi Hegység felsőpliocénkori lelőhelyeinek (Beremend, Csarnóta, Villány, Nagyharsányhegy stb.) rendszeres kiaknázása már a háború utáni időre, helyesebben az utolsó tizenöt évre esik. Ezen idő alatt e sorok írója évente néha több ízben is felkereste a szóbanlévő helyeket és lassanként páratlanul gazdag és változatos emlősfaunát gyüjtött össze, amelynek segítségével a csontbrecciák kora és közelebbi rétegtani helyzete immár kétséget kizáróan megállapítható volt.

Amint már régóta sejtettük, e jelentős baranyamegyei üledékek nem a pleisztocénből valók, hanem egységesen felsőpliocénkoriak és nagyjából azonosak az angolországi «Cromerian» s a franciaországi «Villafranchien-Saint-Prestien» képződményeivel. Faunájuk egységesen meleg (mediterrán-subtropusi) jellegű, a beléjük temetett emlősfajok legtöbbje s a nemek egyrésze is kihalt s a tudo-

mányra újnak bizonyult. A fauna szoros kapcsolatban van egyfelől az angolországi, németalföldi, németországi és franciaországi hasonló korú és természetű képződmények faunájával, másfelől pedig Kelet-Ázsia (főként Kína) pliocénkori és mai állatvilágával.

A baranyamegyei felsőpliocén fauna regionális elterjedését bizonyítja az a tény, hogy a Magyarországról leírt kihalt nemek és fajok az utóbbi évek során egymásután előkerülnek más országokban is, így elsősorban Németországban és Hollandiában, ahol a magyarországi kutatások eredményei alapján szintén mind világosabban bontakozik ki a jégkorszakot közvetlenül megelőzött időszaknak, az ú. n. preglaciális kornak az élővilága. Ez az állattársaság a jégkorszak beköszöntével eltűnt Európából és legfőljebb a délibb fekvésű területeken maradtak fenn egy ideig elszórt reliktumai. Az itt szóban lévő «meleg» fauna azonban a jégkorszakban már nem élt Európában és mindazok a kísérletek, melyek ezt a faunát ismételt «meleg» interglaciális időszakokban szerepeltetik, a ténybeli alapot nélkülözik és meghiusultaknak tekinthetők. Az északi jégtakaró s az alpesi jégárak visszahúzódásaival kapcsolatos üledékek ennek a faunának nyomát sem tartalmazzák s egészen bizonyos, hogy az «interglaciális» (helyesebben «interstadiális») periódusok éghajlata távolról sem volt olyan természetű, hogy a felsőpliocénkori mediterrán jellegű állatvilág (antilopok, vízilovak, majmok, tobzoskák, kardfogú tigrisek, varanusok stb.) klímakövetelményeinek megfelelt volna.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 24-én tartott üléséből.)

ZUR GESCHICHTE UND GEOLOGIE DER OBERPLIOCÄNEN KNOCHENBRECCIEN DES VILLÁNYER GEBIRGES.

Von THEODOR KORMOS.

Die erste Nachricht über die knochenführende rote Breccie der Villányer Berge verdanken wir SALOMON JOHANN v. PETÉNYI und FRANZ v. KUBINYI, die den, 1847 bekannt gewordenen, klassischen Fundort in Beremend zuerst ausgebeutet haben.

PETÉNYI, geboren am 30. Juli 1799, gestorben am 5. Oktober 1855, wirkte vorerst als evangelischer Priester, von 1834 an jedoch als Kustos des ungarischen Nationalmuseums. Der wackere Ornithologe befasste sich auch mit Paläontologie und bearbeitete einen Teil seiner Fossilfunde von Beremend.

Is seinen hinterlassenen und von der Ung. Akademie der Wissenschaften 1864 verausgabten Werken (1) berichtet er — auf S. 37—39 und 42—43 — über die Fundumstände in den folgenden :[1]

«Als am 27. April 1847 im oberen, südöstlich von der Drau gelegenen» — fürstlich Schaumburg-Lippe'schen — «Steinbruch grössere Felsblöcke von der längeren, nordwestlichen Felswand abgesprengt wurden, kamen plötzlich früher niemals beobachtete, mit rostroter Knochenbreccie erfüllte Vertikalspalten zum Vorschein».

Die erste Nachricht über diesen Fund kam durch den Gemeinderat Friedrich Werther aus Ofen, in Form eines Handstückes der genannten Knochenbreccie an die Kgl. Ung. Naturwissenschaftliche Gesellschaft, welche sich mit dieser Angelegenheit gleich bei ihrer

[1] Übersetzung aus dem ungarischen Originaltext.

nächsten Generalversammlung, unter dem Präsidium des damaligen Fürstbischofs von Ungarn, des Kardinals Johann v. Scitovszky befasste und die nähere Erforschung des Fundortes beschloss. Zur Lösung dieser Aufgabe wurden Franz v. Kubinyi und J. S. v. Petényi nach Beremend entsandt, die bereits am 9. Juli dort angekommen, bis zum 11. Abend ununterbrochen an der Bergung der noch dort befindlichen Fossilien arbeiteten und eine grosse Anzahl kleiner Knochen sammelten.

«Als wir von Beremend zurückkehrten», — schreibt Petényi — «betraute uns die Kgl. Ung. Naturwiss. Gesellschaft mit der geologischen und paläontologischen Beschreibung des soeben ausgebeuteten Beremender Steinbruchs und es wurde beschlossen, dass unsere wissenschaftliche Arbeit im nächsten Band der Jahrbücher der Gesellschaft verausgabt werden soll.

«Es folgten aber, leider, bald unglückliche Zeiten, die in diesem Lande jede wissenschaftliche Bestrebung und Vorwärtskommen auf mehrere Jahre hemmten. Ich unterliess aber auch während dieser Zeit nicht — so weit das überhaupt möglich war — an der Vergleichung, Sortierung und Bestimmung der Beremender Knochenreste zu arbeiten, und wurde immer mehr durch die Freude belohnt, die meisten, wenigstens der Klassen und Gattungen nach, ordnen zu können und ich konnte sie schon im Jahre 1850 unter ihren Familiennamen der von mir im Ung. Nationalmuseum aufgestellten Ur-Vertebraten-Sammlung einreihen.

«Da ich mich jedoch früher mit der Paläontologie nie ernstlich befasst habe» ... «und unser Museum die für paläontologische Untersuchungen nötige Literatur, Skelette, ja sogar einen Präparator entbehrt; gestehe ich ein, dass ich mich beim besten Willen unfähig fühle, die mir anvertraute Aufgabe vollkommen zu lösen. Ich wandte mich deshalb an den berühmten Paläontologen: Herrn Hermann v. Meyer in Frankfurt a. Main und übersandte ihm die besten Stücke der Beremender Tierreste mit dem Ersuchen, er möge so freundlich sein, diese zu bestimmen und zu beschreiben.

«Herr H. v. Meyer hatte auch wirklich die Güte, die ihm zugesandten Reste zu überprüfen und teilte mir in seinem sehr geschätzten Briefe v. 3. Juni 1851 seine lehrreichen Notizen mit, welche er dann später, d. i. am 21. Juni desselben Jahres im Dr. C. K.

LEONHARD's und Dr. G. H. BRONN's «Neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geognosie, Geologie und Petrefaktenkunde» Jahrg. 1831, p. 679 veröffentlichte, mich gleichzeitig darauf aufmerksam machend, dass ich neben der richtigen Bestimmung der Ordnungen und Gattungen der sonstigen Beremender Fossilien die sehr kleinen Hamsterreste mit jenen der Mäuse verwechselte, wofür ich ihm an dieser Stelle bestens danke».

Nachdem PETÉNYI's hinterlassene Werke bloss in ungarischer Sprache erschienen und infolgedessen den internationalen Fachkreisen nicht leicht zugänglich sind, halte ich es für angezeigt, auch einen Teil dieses MEYER'schen Briefes, welcher auf S. 77—78 des obzitierten Werkes veröffentlicht wurde, hier wiederzugeben:

«Über die mitgeteilten Gegenstände bin ich leider nicht im Stande, die gewünschten Aufschlüsse jetzt schon zu geben. Es werden hiezu Vergleichsmittel erfordert, die man selbst in grösseren Museen nicht antrifft, und nach und nach erst zusammen zu bringen sind. Ich habe daher mehrere dieser Gegenstände gezeichnet, und bin dadurch imstande, mit der Zeit eine genaue Bestimmung derselben zu geben. Die Ermittlung der Species der übersendeten Gegenstände ist umso schwieriger, da wohl die meisten Reste von lebenden Species herrühren werden, von denen die Skelete nicht vollständig angefertigt sind.

«Eine entschieden neue Species habe ich unter den mitgeteilten Gegenständen nicht gefunden, ich würde sonst gern Ihrem Wunsche entsprechen, und dem Herrn v. KUBINYI der Anerkennung seiner Verdienste dargebracht haben. Haben Sie die Güte mich sowohl diesem, als seinem Herrn Bruder angelegentlichst zu empfehlen.

«Unter Wiederholung des besten Dankes für Ihre gefälligen Mitteilungen und in der Hoffnung, Ihnen später über die Gegenstände genaueren Aufschluss geben zu können, habe ich die Ehre hochachtungsvoll zu sein Euer Wohlgeboren ergebenster Diener HERM. v. MEYER m. p. Frankfurt a. Main, den 3. Juni 1851».

PETÉNYI, der biedere Priester und der eifrige, hochverdiente Forscher war um diese Zeit, leider schon kränklich und erlag vier Jahre später, in seinem 55. Lebensjahr seiner Krankheit. Seine fleissige Arbeit über die Fauna von Beremend, in welcher er *trotz* der obigen Meinung H. v. MEYER's gar manches neue richtig

erkannt und beschrieben hat, lag bei seinem frühzeitigen Tode bereits halb fertig und wurde dann 11 Jahre später unabgeschlossen verausgabt.

Ein Teil der PETÉNYI'schen Ausbeute liegt bis heute unausgepackt und unbearbeitet im Keller des Ung. Nationalmuseums. Ein kleinerer Teil des Materials gelangte nach Wien und von dort zwecks Bearbeitung zu Professor NEHRING, der unter den ihm vorgelegten Belegen Repräsentanten mehrerer neuen Formen *(Spalax priscus, Dolomys Milleri)* erkannte und beschrieb (2*a*—*b*. 1897—1898). Er war auch der erste, der unter diesen Resten solche einer fossilen Bisamspitzmaus erkannte und darüber 1890, auf S. 192 seiner «Tundren und Steppen» auch kurz berichtete. Bereits im Jahre 1898 stellte v. MÉHELY für NEHRING's *Spalax priscus* die neue Gattung *Prospalax* auf (3), und in seinem 1914 erschienenen Werk über die wurzelzähnigen Wühlmäuse Ungarns («Fibrinae Hungariae») (4) befasste er sich ausführlich mit Resten der letzteren Gruppe, welche aus Beremend stammen. In 1913 befasste sich BOLKAY mit den Reptilien und Amphibien unseres Fundortes und beschrieb auf Grund eines, aus Beremend stammenden Dentale-Fragmentes seine neue Art *Varanus deserticolus* (5), welche später (1918) durch Frhr. v. FEJÉRVÁRY mit *Varanus marathonensis* WEITH. identifiziert wurde (6).

Der Verfasser dieser Zeilen beschrieb 1913 die durch NEHRING erkannte, aus Beremend stammende, jedoch unedite Bisamspitzmaus *(Desmana Nehringi)* (7) und versuchte im Jahr 1920 ein provisorisches Bild der Fauna dieses Fundortes zu entwerfen (8). Wie die neueren Aufsammlungen und die monographische Bearbeitung des ganzen Materials gezeigt haben, war diese Übersicht noch sehr unvollständig und verfrüht. Auch bezüglich der Fundorte müssen meine damaligen Angaben berichtigt werden. Ich habe in meinem betr. Bericht (S. 459) erwähnt, dass — obwohl in den Spalten des grossen fürstlich SCHAUMBURG-LIPPE'schen Steinbruches Terrarossa vorkommt — dort keine Spur von fossilen Knochen gefunden werden konnte. Ich war damals in der Meinung, dass die Fundstelle PETÉNYI's jener alte Steinbruch war, welcher an der Ostseite des Beremender Weinberges gelegen ist, und wo ich selbst meine erste Ausbeute an Mikromammalien usf. sammeln

konnte. Hier wurde auch der zweite *Prospalax*-Unterkiefer seitens v. MÉHELY entdeckt. Ich bildete daher diesen Steinbruch auf Fig. 4, S. 460 meines Berichtes als PETÉNYI's «locus classicus» ab. Durch spätere Nachfragen bei ansässigen alten Leuten ergab es sich jedoch, dass die letztere Stelle zu Zeiten PETÉNYI's *noch gar nicht eröffnet war;* ferner fanden es sich auch beim weiteren Abbau des Kreidekalkes im grossen, alten, fürstlichen Steinbruch teils mit lockerer, weichselroter Terrarossa, teils mit sehr harter, recht altertümlich aussehender Knochenbreccie erfüllte Nester, aus welchen während der letzten zehn Jahre, mit tüchtiger Hilfe des Herrn Bergmeisters ECKERT, manches wertvolle Material — darunter auch Unika (z. B. ein Unterkieferpaar von *Helarctos arvernensis*, die prachtvolle Typus-Mandibel von *Erinaceus Lechei*, das Unterkieferfragment eines juvenilen *Makaken*, schöne Reste von *Pannonictis* und *Pliovormela*, von *Capreolus*, *Tragelaphus*, *Procaptomceras*, ferner zahlreiche Kleinsäugerreste und eine herrliche Platte mit einem — **auf Fig. 10 abgebildeten** — ungeheueren Exemplar von *Ophisaurus pannonicus*) — gerettet werden konnten. Es kann demnach wohl kein Zweifel mehr bestehen, dass PETÉNYI seinerzeit gleichfalls in dem, damals bereits bestandenen, fürstlich SCHAUMBURG-LIPPEschen Steinbruch seine Schätze sammelte. Bei einem Grossbetrieb, wie hier, ist es ja selbstverständlich, dass die Höhlungen, Spalten und Klüfte der Steinbruchwänder mit dem voranrückenden Abbau verschwinden, wogegen andere zum Vorschein kommen und neu aufgeschlossen werden. Gelegentlich meiner ersten Anwesenheit in Beremend konnte ich keine solche antreffen, später wurden aber durch den weiteren Abbau von neuem knochenführende Spalten und Höhlungen aufgeschlossen.

Das mesozoische Schollengebirge der Villányer Gegend, innerhalb welchem die Kreidekalkscholle von Beremend eine alleinstehende Insel darstellt, ist heute grösstenteils mit einer — an den weniger steilen Nordlehnen oft 10—15 m mächtigen — Lössablagerung bedeckt. Unter dieser Decke lassen sich — wie das schon seitens v. LÓCZY jr. (9) richtig erkannt wurde — vielfach unverkennbare Spuren einer tiefgreifenden Karsterosion beobachten. Am Mészkőhegy («Kalkberg») bei Villány zeigt der Kalkstein des

Oxford-Argovien eine sehr charakteristische Karrenoberfläche, welche ebensogut auf die dalmatinische Adriaküste passen würde. Deutliche Karrenspuren fand v. Lóczy auch in den Dolomitsteinbrüchen zwischen Siklós und Vokány, westlich von Villány, sowie im Steinbruch am östlichen Abhang des Nagyharsányberges bei Villány («Harsányer Spitz»). Er erklärt diese Spuren als «Zeugen eines jungtertiären oder pleistozänen Wüstenklimas, beziehungsweise anhaltender Deflationsperioden» (Lóczy, (9) S. 807). Ich kann ihm diesbezüglich insofern beipflichten, dass wir hier tatsächlich mit den Spuren einer, im Pliocän begonnenen und vielleicht bis zum Beginn der quartären Eiszeit andauernden Verkarstung *unter einem mediterran gearteten Klima* zu tun haben. Ebenso wie heute auf den Karbonatgesteinen des Mediterrangebietes, ist auf dieser alten Karstoberfläche Terrarossa in regionaler Verbreitung entstanden.

Wie Graf Leiningen (10, S. 39) sehr richtig bemerkt, «kann unter dem Mediterranklima mit seinen sehr heissen Sommern, langen Trockenperioden und nicht kalten Wintern Eisen aus den Verwitterungsprodukten nicht verloren gehen, zumal Humus mangelt, so muss es ja im Laufe der Zeit zu einer Anhäufung von Eisen kommen, selbst wenn das Muttergestein ursprünglich wenig davon enthielt». Dadurch ist die rote Farbe unserer Terrarossa entstanden. Die Roterde bildet sich aus dem kalkhaltigen, bzw. dolomitischen Muttergestein derart, dass Kalk und Magnesia durch kohlensäurehaltiges Wasser aufgelöst und in der Regenperiode fortgeführt werden (10, S. 46). «Wenn man bedenkt, — sagt Graf Leiningen — dass in den meisten Kalkgebirgen Schichten vorkommen (oder früher vorhanden waren und längst verwittert sind), die solches, rötlich gefärbtes Material (vorgebildete Roterde) enthalten, wenn man ferner erwägt, dass die Roterdebildung mindestens schon seit der jüngeren Tertiärzeit andauert,[1] und wenn man endlich noch an die zweifellos sehr häufigen und gründlichen Umlagerungen in älterer und neuerer Zeit denkt, so müssen in Kalkgebieten (auf welche ja die Roterde beschränkt ist) und bei

[1] Sicher schon seit dem Mesozoikum (Bauxitablagerungen des Trias, der Jura und Kreide.) — Verfasser.

mediterran geartetem Klima (der geologischen Vergangenheit und der Jetztzeit) schliesslich Roterdebildungen von regionalem Charakter entstehen, (bzw. entstanden sein), wie das tatsächlich der Fall ist». (10, S. 42, 43.)

An den Karrenflächen der Villányer Berge ist die derart entstandene Roterde in einer Mächtigkeit von 1—5 m entwickelt. Wir haben hier mit einem, stellenweise Bohnerze führenden, lebhaft- oder dunkelroten, kolloidalen Ton zu tun, welcher — ebenso wie der Bauxit — normalerweise *keine* Fossilien enthält. Letztere wurden zersetzt und als Kalk-, etc. Lösungen fortgeführt, wogegen die kolloidalen Verwitterungsprodukte, welche an dem rauhen Felsen kleben, in den Höhlungen, Spalten und Klüften desselben liegen geblieben sind. Die chemische Zusammensetzung der Roterden des Villányer Gebirges ist durch den verhältnismässig geringen Eisen- und Wassergehalt charakterisiert. *Zehn* Analysen, die ich Herrn Ing. d. Chemie T. v. GEDEON verdanke, ergaben im Durchschnitt:

53·00% SiO_2
29·55% Al_2O_3
8·30% Fe_2O_3
0·70% TiO_2
und 8·43% H_2O

Es handelt sich demnach um *echte fossile Roterden*, die den Kiselsäuregehalt der heutigen Terrarossa der französischen Riviera und den Tonerde- und Eisengehalt einzelner istrianischen Roterden aufweisen.

Betreffs der Altersbestimmung dieser Roterden beruft sich L. v. LÓCZY jr. (9 S. 791—792) auf mich und verweist dieselben teilweise in das obere Pliocän, teilweise aber in das Pleistocän. Die eingehende Revision der früher zum Vorschein gekommenen paläontologischen Belege, sowie die Bearbeitung der überaus reichhaltigen neueren Belegserien haben gezeigt, *dass es sich hier ausschliesslich um Ablagerungen des obersten Pliocäns handelt, welche faunistisch und erdgeschichtlich am besten mit dem englischen Cromerian und dem französischen Villafranchien-Saint-Prestien parallelisiert werden können.*

In einzelnen, sich unter der einstigen Karstoberfläche befindlichen Spalten, Klüften oder sonstigen Hohlräumen des mesozoischen Kalksteines, welche ihre Entstehung teils tektonischen Bewegungen, teils der Karsterosion zu verdanken haben, **blieben die Knochenreste unter günstigen Bedingungen erhalten.** Mitunter können — wie das am Kalkberg bei Villány der Fall ist — bei der Bildung dieser Höhlungen auch Thermalquellen mitgespielt haben. Während der Bildung der Roterden dienten diese Hohlräume als Schlupfwinkel oder als Frassplätze von Tieren; und auch die Kadaver und Knochen verendeter Tiere wurden durch Regengüsse von der Oberfläche in diese eingewaschen. Die kleineren Hohlräume, welche den durchsickernden Karstwässern weniger ausgesetzt waren und deshalb trockener geblieben sind, dienten als Winterschlupfwinkel von Schlangen und Fröschen sowie als Wohnräume von Füchsen, verschiedenen Musteliden und Raubvögeln (Eulen). An solchen Stellen ist vielfach lockere, nachträglich *nicht zusammengekittete* Terrarossa anzutreffen, welche an einzelnen Punkten (Kalkberg und Somssichberg bei Villány, Beremend, Csarnóta, Nagyharsányberg) viele Knochenreste — besonders solche von Schlangen — enthält. An solchen trockenen Stellen wurden die Knochen nicht aufgelöst, sie sind im Gegenteil meist sehr gut und frisch erhalten. Das ist auch die Art des Vorkommens der unzähligen Knochen von Kleinsäugern und Vögeln am Somlyóberg bei Püspökfürdő gewesen, wo die Reste der Mikrofauna noch vor einigen Jahren massenhaft gesammelt werden konnten. Durch die gütige Mühe meines alten Freundes: Herrn Prof. M. Tóth (Nagyvárad, heute Rumänien) erhielt ich von dort im Jahre 1926 noch reiche Serien von Kleinsäugern. Auch heute ist der klassische Fundort noch nicht ganz erschöpft; zu Pfingsten 1931 konnten wir wenigstens mit meinem, seitdem leider dahingeschiedenen Freunde: Prof. Frh. v. Fejérváry eine weitere ansehnliche Kollektion von dort mitbringen.

In zweiter Linie konnten die Knochen eben dadurch erhalten geblieben sein, dass sie in solchen Hohlräumen zur Ablagerung gelangten, wo die Zirkulation des Karstwassers gerade eine sehr rege war. An solchen Stellen, wo die Abbröckelung der Kalktrümmer von den stets feuchten Höhlenwänden fortwährend andauerte,

wurden diese durch die Kalklösungen wieder zusammengekittet und die mit Kalksinter rasch inkrustierten Knochen zwischen diesen eingeschlossen. Durch die rapide Verdünstung eines Teiles der Karstfeuchtigkeit nach Regengüssen (bei rasch zunehmender Temperatur) bildete sich aus den Kalklösungen oft kristalliner Calcit, welcher die Knochen und die Kalktrümmer so fest verkittet, dass das Herauspräparieren der Knochenreste die grössten Schwierigkeiten bereitet. Es kommt natürlich auch vor, dass zwischen den so entstandenen Kalkknochenbreccien ein rötlichbrauner kalkhaltiger Detritus — umgelagerte, eingeschwemmte, mit Kalkschlamm vermengte Terrarossa — eingeschlossen ist. In solchen, leider nicht sehr häufigen, Fällen sind die sonst fest verkitteten Knochen leicht aus den Breccien herauszukriegen. Es kommt auch vor, dass Knochenreste ohne Kalktrümmer durch Sinter festgehalten werden. Es liegen mir solche Hamsterreste vom Nagyharsányberg vor, ferner besitze ich Handstücke von Beremend, welche aus Tausenden von Schlangenknochen, durch Kalksinter zusammen gekittet, bestehen und als reine «Schlangenbreccie» bezeichnet werden können. Ich habe von dort auch kleinere Handstücke voll mit Myriapoden, welche ihre Fossilisation bloss der raschen Infiltration durch Kalkspatlösungen verdanken.

Grössere Höhlen welche als Wohn- und Frassplätze von Raubtieren dienten, habe ich in Beremend, bei Csarnóta, sowie am Kalkberg *(Pannonictis)* und Nagyharsányberg (Füchse) bei Villány vorgefunden.

*

Als ich vor vierundzwanzig Jahren die mir bereits bekannten Fundorte des Villányer Gebirges, an welchen Vertebratenreste der sogenannten «Forest Bed-Fauna» vorkommen, abermals besuchte, gelang es mir oberhalb der Eisenbahnstation Villány eine damals noch unbekannte wichtige Fundstelle solcher Reste zu entdecken, welche sich später als die ausgiebigste unter allen erwies.

Gegenüber der Eisenbahnstation Villány erhebt sich der aus triadischen und jurassischen Schichten bestehende Kalkberg (Mészkőhegy), an welchem mehrere grosse Kalksteinbrüche angelegt sind. Im obersten dieser Steinbrüche (Besitztum der erzherzoglich

Friedrich'schen Domänen), welcher in W—O Richtung aufgeschlossen ist, wurde der Kalkstein in bedeutendem Umfange bis zu einer Tiefe von 20—22 m abgebaut. An der Nordseite dieses alten, seit langer Zeit ausser Betrieb stehenden, Steinbruches befindet sich Callovien-Kalk, wogegen an der Südseite bereits der darauffolgende Oxford-Argovien-Kalk ansteht. Beide Bildungen sind hoch aufgerichtet und von Querspalten tektonischen Ursprunges durchsetzt, welche teilweise mit Kalktrümmern und Terrarossa erfüllt sind. Die mächtigste, N—S laufende Spalte befindet sich in der Nordostecke des Steinbruches, wo genau zu beobachten ist, dass diese, mit Kalkschutt und Terrarossa erfüllte, tiefziehende, Spalte sowohl die Callovien als die Argovien-Schichten durchsetzte. Spuren dieser Spaltausfüllung sind auch an der gegenüber liegenden südlichen Steinbruchwand vorhanden, wo aber, wenigstens in den unteren zugänglichen Partien, Knochenreste sehr selten sind. Bis zum April 1931 konnte ich an dieser Stelle nichts nennenswertes sammeln, dann aber fand ich einige, während des Winters von hoch oben herabgestürzte und seitdem ziemlich verwitterte Knochenbreccienblöcke, welche mit kleinen Knochen erfüllt waren. Nach dem Schlämmen des ganzen herabgestürzten und verwitterten Materials stellte es sich heraus, dass dasselbe — ausser zahlreichen Schlangen-, Ophisaurier- und Froschresten auch eine Anzahl Zähne und Mandibelfragmente von *Lagurus pannonicus*, *Pitymys arvaloides* und *Pitymys gregaloides* etc., d. i. Reste solcher Formen enthält, welche an der *Nordseite niemals gefunden werden konnten, dagegen aber in der «Upper Freshwater Bed»-Fauna des Nagyharsányberges* (östliche Spitze, sog. «Harsányer Spitzbruch») *häufig sind*. Unter den zahlreichen Wühlmauszähnen, welche aus dem geschlemmten Material der Südseite gewonnen werden konnten, befand sich kein einziger von *Mimomys pliocaenicus*, *Reidi*, *Newtoni* und *pusillus*, wogegen die glücklicherweise teils noch erhalten gebliebene Knochenbreccie der Nordseite *Hunderte* von Resten dieser Arten lieferte. An der Südseite sammelte ich dagegen Einige Mandibel von *Mimomys intermedius*, welcher an der anderen Seite nicht vorkommt. Es kann m. E. keinem Zweifel unterliegen, dass wir hier mit den Resten zweier verschiedenen Faunen zu tun haben. Wie sich aber die zwei, gegenüber liegenden Fundstellen

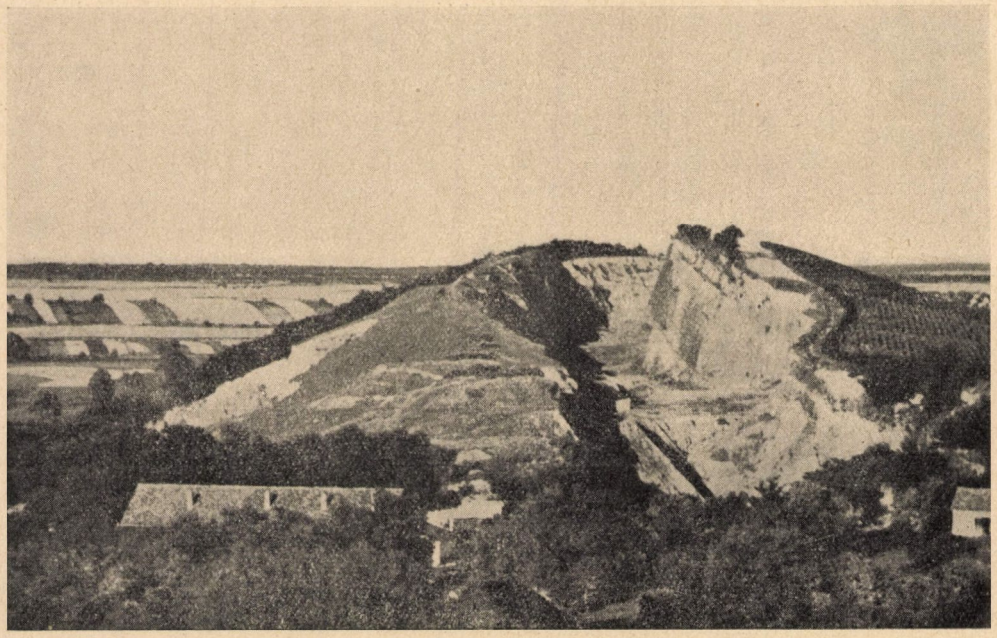


Fig. 1. Panorama des Villányer Kalkberges mit dem grossen, alten, erzherzoglichen Kalksteinbruch von den Somssichberger Weingärten aus gesehen (von der Richtung West gegen Ost). Links im Hintergrund die wichtigste Fundstelle der Villányer Gegend. (Aufnahme von H. Tengler).

stratigraphisch gegeneinander verhalten, lässt sich heute — nachdem der dazwischen gelagerte Kalkstein, mit dem grössten Teil der einstigen Spaltausfüllung zusammen abgebaut wurde — leider nicht mehr feststellen.

Die in meinen Arbeiten als «Villány-Kalkberg» angeführte *Hauptfundstelle*, welche sich schon unter dieser Bezeichnung in die Fachliteratur eingebürgert hat, befindet sich, wie gesagt, in der Nordostecke des Steinbruches (S. Fig. 1.) und besteht aus dem, im Callovienkalk erhalten gebliebenen Teil der einstigen Ausfüllung, welche Knochenreste verschiedenster Tiere in grosser Zahl enthielt. Die Form dieses, von mir seitdem langsam abgetragenen (S. Fig. 2—4.) Fundortes — von Seiten der Villányer deutschen Bevölkerung «rotes Mandl» genannt — war die einer steilwandigen Knochenbreccien-Säule, wie sie in den Steinbrüchen der Villányer Berge oft anzutreffen ist. Die mitunter lockere, grösstenteils aber feste, und stellenweise sehr harte Knochenbreccie, deren *Kalkmantel ringsherum abgebaut wurde*, ist auf dem Callovienkalk gelagert, welcher des darauf liegenden «unbrauchbaren» Materials wegen in Form eines keilförmigen Vorsprunges glücklicherweise stehen gelassen wurde. Die Höhe der, von der Steinbruchwand etwa 8—10 m gegen S vorspringenden Säule betrug cca 16 m. Von einzelnen, mit lockerer Terrarossa ausgefüllten und mit einer Tropfsteinkruste bedeckten und vielfach Spuren von Thermalwirkungen aufweisenden kleinen Aushöhlungen, welche wenige, aber sehr gut erhaltene Reste von Kleinsäugern (u. a. mehrere Crania von *Beremendia fissidens*, usf.) lieferten, abgesehen, bestand die Säule vorwiegend aus harter Knochenbreccie, aus welcher die Knochenreste mitunter sehr schwer herauszupräparieren sind. Da die Säulenwände anfangs auch sehr steil waren, (S. Fig. 2.) konnte man hier ohne die notwendigen Vorkehrungen nichts anfangen. Da ich bei der ersten Gelegenheit, als ich diesen Fundort entdeckte, keine Zeit mehr zur Verfügung hatte, musste die nähere Untersuchung dieser interessanten Fundstelle damals auf eine bessere Gelegenheit verschoben werden. Diese Gelegenheit liess allerdings lange auf sich warten. Die Ereignisse des Weltkrieges, sowie die darauffolgenden unruhigen Zeiten hinderten mich sehr lange an der Ausbeutung dieser neuen Fund-

stelle, bis ich endlich zehn Jahre später, in 1922 Gelegenheit fand, dort mit dem Sammeln zu beginnen. Seitdem besuchte ich jedes Jahr, oft jährlich drei-viermal Villány, um meine von dort stammenden Kollektionen zu ergänzen. Die Materialien haben sich besonders in den letzten zehn Jahren so wesentlich vermehrt, dass an die monographische Bearbeitung derselben bereits vor Jahren

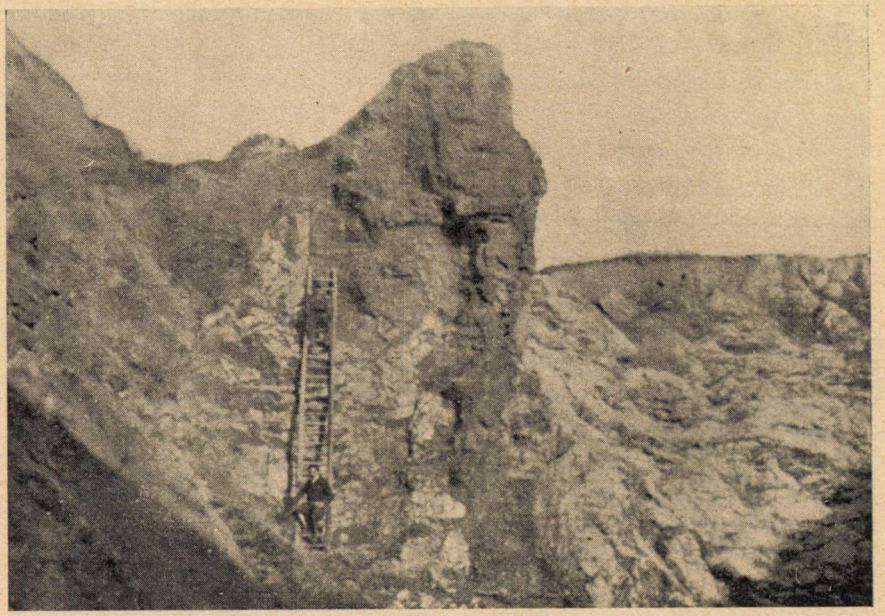


Fig. 2. Das «Rote Mandl», die wichtige Hauptfundstelle im grossen erzherzoglichen Steinbruch des Villányer Kalkberges am Anfang der Ausgrabungen. (Aufnahme von TH. KORMOS.)

gedacht werden konnte. Nach Vollendung dieser Arbeit wurden sämtliche Originale (Gattungs- und Speciestypen) teils im Museum der Kgl. Ung. Geologischen Anstalt, te ls in der zoologischen Abteilung des Ungarischen Nationalmuseums untergebracht.

In Villány befinden sich ausser den Fundstellen am Kalkberg noch zwei Punkte, wo Spuren von Knochenbreccien vorhanden sind. In den Malmkalksteinbrüchen des Somssichberges, welcher eigentlich nur die westliche Fortsetzung des Kalkberges ist, kann

man noch heute spärliche Reste einer fest verkitteten, roten Knochenbreccie beobachten, in welcher jedoch trotz eifrigsten Suchens bloss wenige Schlangenreste und kleine, unbrauchbare Knochensplitter zu finden waren. Dem in dieser Gegend kartierenden weil. Chefgeologen KARL HOFMANN ist vor etwa 35 Jahren noch gelungen, an dieser Stelle besser erhaltene Hamsterreste zu sammeln. Heute scheint dieser Fundort an brauchbaren Fossilien schon vollkommen steril zu sein. Obwohl auch in einigen anderen, kleineren Steinbrüchen des Somssichberges mehr oder weniger Terrarossa vorhanden ist, gelang es mir nie, aus denselben etwas nennenswertes zu sammeln. Dasselbe gilt auch für die Steinbrüche von Villány-Kövesd.

Erst im vergangenen Sommer, als ich mit Unterstützung der hohen Ung. Akademie der Wissenschaften eine neue Sammeltour in die Villány—Beremender Gegend unternehmen konnte, gelang es mir, am Somssichberg, oberhalb des Weingartens des Herrn Bartonicsek, eine Stelle zu entdecken, wo auf eine Fläche von einigen Quadratmetern feste rote Knochenbreccie anstehend war. Ich habe dieses Material bis auf einen kleinen Rest abtragen lassen und gewann daraus wohlerhaltene Reste einer kleinen Fauna, unter deren Vertreter *Mimomys pliocaenicus* besonders häufig war.

Vier km westlich von Villány, in dem oberhalb der nach Siklós—Pécs führenden Landstrasse gelegenen Gemeindesteinbruch («Harsányer Spitz»), befindet sich — am Ostfusse des Nagyharsányberges (S. Fig. 5) — ein weiterer, seit HOFMANN bekannter, gewöhnlich unter der Bezeichnung «Nagyharsányberg» erwähnter Fundort. Von der Landstrasse abzweigend gelangt man nach einigen Minuten in den alten Steinbruch, dessen Wände aus hoch emporgerichteten und von Brüchen durchsetzten Malmkalksteinbänken bestehen. Gleich im Vordergrund steht eine freie Brecciensäule, welche aus einem festverkitteten Gemenge von Terrarossa und Kalksteintrümmern aufgebaut ist (S. Fig. 6—7). In den Spalten und Fugen dieser Säule sind Tausende von Schlangenresten eingeschlossen, Säugetierreste dagegen sind hier selten. Ausser einigen Wolfszähnen und Fragmenten grösserer, unbestimmbarer Langknochen konnte ich an dieser Stelle nur Hasenreste, sowie einige Hamster- und Wühlmauszähne und Mandibelbruchstücke sammeln. Unter den letzteren

befanden sich die — seinerzeit durch v. MÉHELY beschriebenen — Reste von *Mimomys pliocaenicus* und *Mimomys Newtoni* und von hier stammt auch der von NEHRING zuerst mitgeteilte Unterkiefer

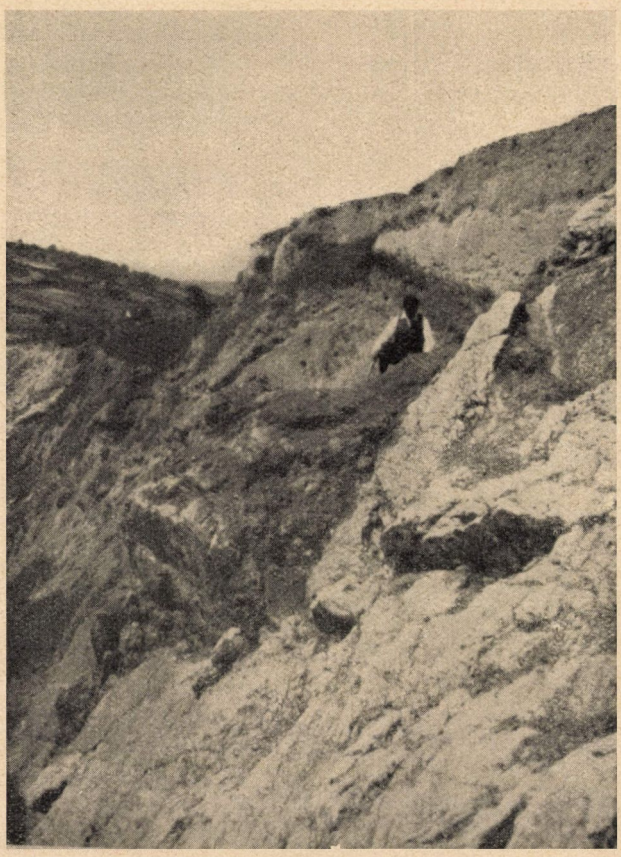


Fig. 3. Das «Rote Mandl», die wichtige Hauptfundstelle am Villányer Kalkberg, im vorgeschrittenen Stadium der Ausgrabungen (1932, Aufnahme von H. TENGLER).

(Speciestypus) von «*Spalax*» *priscus*, welcher später v. MÉHELY als Anlass zur Errichtung der Gattung *Prospalax* gedient hat. In meinem vorläufigen Bericht über die präglacialen Bildungen des Villányer Gebirges (8, S. 455) erklärte ich es als wahrscheinlich,

dass der betreffende Unterkiefer von *Prospalax* seitens HOFMANN in den kleinen Höhlungen der östlichen Steinbruchwand — welche hier als die eigentliche Fundstellen von Säugerresten zu betrachten sind — gefunden wurde. Nach meinen wiederholten Sammelexkursionen während der letzten 15 Jahre, sowie nach gründlicher Bearbeitung des Fossilienmaterials halte ich das nunmehr für ausgeschlossen. *Prospalax* scheint bereits gegen Ende des unteren

Fig. 4. Das «Rote Mandl», die wichtige Hauptfundstelle am Villányer Kalkberg nach Abtragung des grössten Teiles der Brecciensäule (Aufnahme von H. TENGLER).

Cromerians ausgestorben zu sein und es fand sich nicht die geringste Spur desselben in der — zwar sehr reichen, aber sicher jüngeren — Fauna des Nagyharsányberges. Nachdem aber *Mimomys pliocaenicus* und *Mimomys Newtoni* hier ebensowenig aufzufinden waren, muss ich voraussetzen, dass die Einschlüsse der erwähnten Brecciensäule älter sind als die aus den gegenüber liegenden alten Fuchslöchern gesammelte reiche Mikrofauna. Diese Vermutung liegt umso näher, zumal uns ein ähnlicher Fall, wie wir es gesehen haben, auch im erzherzoglichen Steinbruch am Villányer Kalkberg vorliegt. Die dortige Hauptfundstelle: die Brecciensäule an der

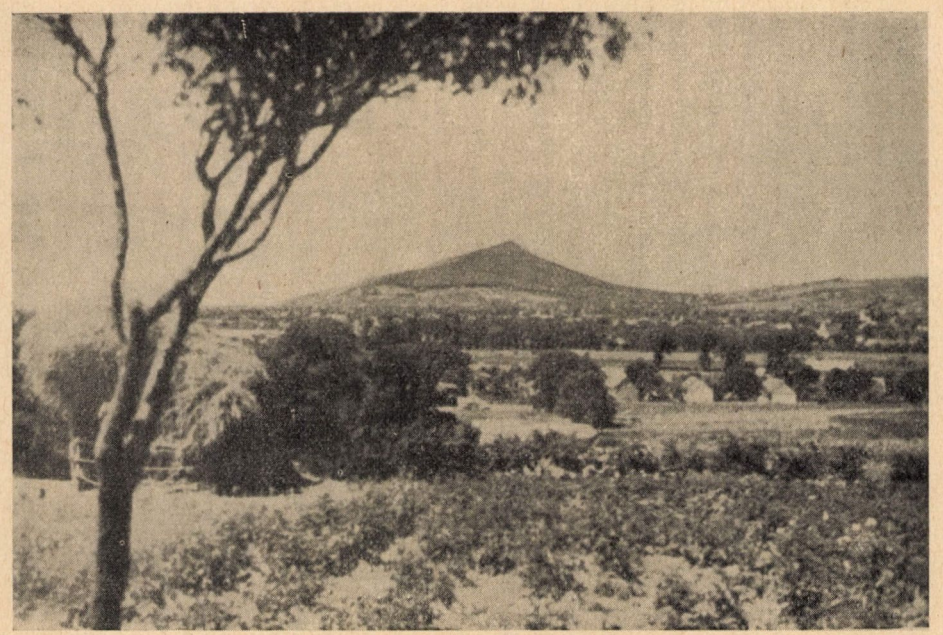


Fig. 5. Panorama des Nagyharsányberges von Nordwest. Nordseite bewaldet, Südseite vollkommen kahl. Links, am Fusse des Berges, befindet sich der Harsányer «Spitzbruch». (Aufnahme von H. TENGLER Villány).

Nordwand, enthielt von oben bis unten ausschliesslich Reste einer *einheitlichen* Fauna, welche in das *untere* Cromerian gereiht werden muss, wogegen aus der Spaltausfüllung der gegenüberliegenden, südlichen Steinbruchwand unverkennbare Reste der «Upper Freshwater Bed-Fauna» (*oberes* Cromerian) zum Vorschein kamen. Dasselbe dürfte auch im «Harsányer Spitzbruch» der Fall sein.

Unweit dieser Brecciensäule, in einem etwas höheren Niveau, habe ich an der östlichen Steinbruchwand kleine Höhlungen entdeckt und freigemacht, welche mit einem bräunlichen, lehmigen Sediment ausgefüllt waren und eine Unmenge von Knochenresten — hauptsächlich solche von Hasen, Hamstern und Wühlmäusen — enthielten. Diese Fundstellen sind m. E. als oberpliocäne Fuchslöcher, d. i. als Wohn- und Frassplätze des kleinen, zierlichen Steppenfuchses unseres Cromerian *(Vulpes praecorsac)* anzusprechen. Die Knochenreste sind nachträglich mit Kalksinter inkrustiert und teilweise verkittet worden und sind von vorzüglicher Erhaltung. Es befindet sich hier eine der zwei Stellen im Villányer Gebirge, wo *Mimomys intermedius*, zusammen mit den Gattungen *Lagurus*, *Arvicola* und *Microtus* aus oberpliocänen Ablagerungen gesammelt werden konnte. Die zweite derartige Fundstelle ist jene an der Südseite des Steinbruches am Villányer Kalkberg.

Neben den alten Fuchsbauen des Harsányer Spitzbruches, deren knochenführende, kalkig-tonige Ausfüllung lebhaft an die — allerdings noch etwas jüngere — präglaciale Ablagerung der kleinen Höhle am Gesprengberg bei Brassó in Siebenbürgen erinnert, fanden sich in den Spaltausfüllungen des Malmkalksteins auch Knochenreste grösserer Tiere (Wolf, Bär, Pferd, Rind, Hirsch, Thar, Antilopen etc.), die teilweise Mahlzeitüberreste der hier gehausten Wölfe sein dürften. In meinem oben erwähnten Bericht (8, S. 455—456) habe ich 29, grösstenteils noch unbestimmte, oder nur provisorisch determinierte Säugetierarten vom Nagyharsányberg angeführt. Unter diesen befanden sich auch *Mimomys pliocaenicus*, *M. Newtoni* und *Prospalax priscus*, die aber nach den oben gesagten aus *dieser* Fauna ausgeschieden und dem *unteren Cromerian* zugewiesen werden müssen. Die übrige, aus den Spalten und Höhlungen der östlichen Steinbruchwand stammende Fauna

ist ganz einheitlich und gehört ohne Zweifel dem *oberen Cromerian*, d. i. dem Horizont des englischen «Upper Freshwater Bed» der Forest Bed-Serie an. Als phylogenetischer und erdgeschichtlicher

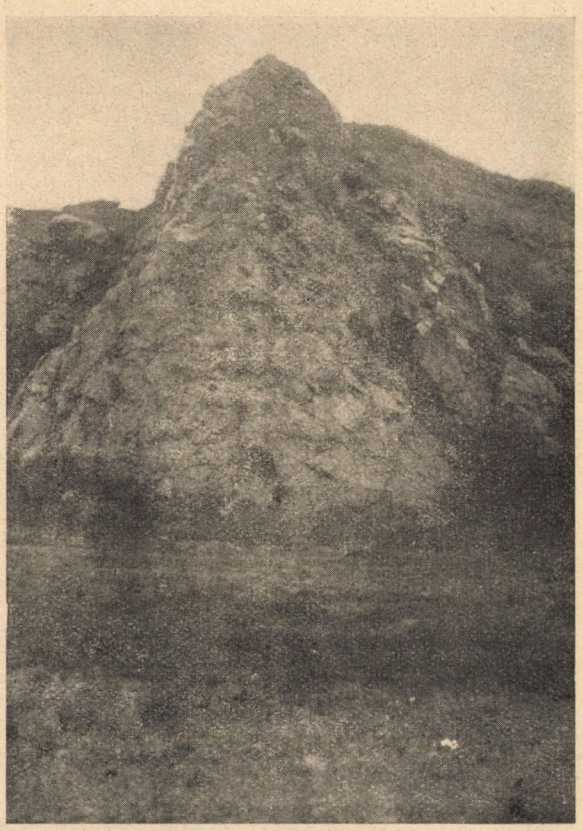


Fig. 6. Knochenbrecciensäule im Harsányer «Spitzbruch» (Fundstelle des Typus-Exemplars von *Prospalax*); im Hintergrund rechts die alten Fuchslöcher mit etwas jüngerer Fauna. (Aufnahme von P. Szabó, Pécs).

Übergang zwischen diesen zwei Tiergesellschaften dient die eigentümliche, reiche Fauna des Somlyóberges bei Püspökfürdő, deren Analogon in den Villányer Bergen bisher nicht nachgewiesen werden konnte.

Knochenreste kommen auch in dem — am westlichen Fusse des Nagyharsányberges, im Dorf Nagyharsány selbst angelegten — Kreidekalksteinbruch vor. Wir wollen diese Fundstelle in den folgenden als «Nagyharsány, Mauthner'scher Steinbruch» bezeichnen. Die Matrix, welche dort als Spaltausfüllung auftritt, ist von jener der übrigen Fundorte grundverschieden. Sie ist ein sonderbarer, *geschichteter*, ziegelroter Kalkmergel, welche wenige, aber wohlerhaltene Fossilreste enthält. Die Fundstelle liegt, leider, hoch an einer fast vertikalen Felswand und ist infolgedessen derzeit schwer zugänglich. Aus unten herumliegenden Blöcken konnte ich 1932—1933 trotzdem einige guterhaltene Reste von *Pliovormela beremendensis* und *Beremendia fissidens* retten, deren Erhaltungszustand für etwaige weitere Funde recht viel versprechend ist. Der hier vorhandene *ziegelrote* Kalkmergel muss in Wasser abgelagert sein; die Knocheneinschlüsse sind sicher eingeschwemmt.

Weiter westlich von Nagyharsány, in der Umgebung von Siklós, sollen in früheren Jahren in mehreren Steinbrüchen Knochenreste zum Vorschein gekommen sein, doch sind diese verschleppt worden, so dass ich leider nichts mehr davon zu Sicht bekam. Erst vor drei Jahren erfreute mich Herr Prof. St. Boros (Pécs) mit einem schönen oberen Backenzahn von *Rhinoceros etruscus*, welcher nördlich von Siklós, im «Zuhánya» genannten Steinbruch der Firma Seenger, Budapest, angeblich mit anderen Resten zusammen gefunden wurde. Aus dieser Gegend kann man also noch weitere Funde erwarten, was umso wichtiger wäre, da es sich angeblich meist um Knochen grosser Tiere, d. i. um Reste handelt, die in den anderen Steinbrüchen der Villányer Berge überaus selten sind.

Weit wichtiger sind vorläufig die Steinbrüche etwa 7 km nordwestlich von Siklós, um den 204 m hohen Sattel zwischen den Bergrücken Tenkes (408 m) und Nagycser (270 m), welche als Fundstellen von fossilen Knochen zuerst durch weil. M. v. Pálfy entdeckt und von mir das erstemal im Jahr 1910 ausgebeutet wurden.

Der eine Fundort befindet sich gleich neben der Landstrasse Siklós—Pécs, u. zw. an der westlichen Seite derselben, wo der Triaskalk in mehreren kleinen Steinbrüchen aufgeschlossen ist (S. Fig. 8.).

Fig. 7. Knochenbrecciensäule im Harsányer «Spitzbruch» von Nord aus gesehen. Im Hintergrund die Ebene der Beremender Gegend. (Aufnahme von P. Szabó, Pécs).

In einem dieser alten Brüche fand ich 1910 eine kleine, etwa 20 m^3 umfassende Brecciensäule, welche als unbrauchbares Material glücklicherweise stehen gelassen wurde. Es handelte sich natürlich auch hier um eine einstige Höhlenausfüllung, deren Material aus

eckigen Triaskalktrümmern, mit Calcit und einer lehmigen, braungelben Terrarossa fest verkittet, bestand. Die Breccie enthielt ziemlich viel Knochen, welche schneeweiss und, sofern sie nicht zerbissen oder infolge Gebirgsdruck zertrümmert worden sind, vorzüglich erhalten waren. Ich liess damals die Säule bis auf einen kleinen, damals noch sehr harten Rest, fast vollständig abtragen und rettete daraus jene interessante kleine Fauna, deren erste, unvollkommene Beschreibung 1911 im Jahresbericht der K. u. Geol. Reichsanstalt erschienen ist (11). Der seinerzeit dort gelassene Rest verwitterte während zwanzig Jahren so weit, dass wir daraus mit Frau und Herrn v. STEININGER aus Villány im Oktober 1930 noch schöne Varanwirbeln und andere Knochenreste bergen konnten.

Westlich vom erwähnten Steinbruch, auf dem etwa 30—40 m höher gelegenen Karstplateau befinden sich eine Anzahl weiterer Steinbrüche, in deren obersten eine andere, aus *hochroter*, teilweise fester Knochenbreccie aufgebaute Säule ansteht. An dieser Stelle, welche ich zur Unterscheidung von dem oben beschriebenen *unteren* Steinbruch als den *oberen* Bruch von Csarnóta bezeichne, ist es mir gelungen, den Unterkiefer eines juvenilen Affen *(Inuus)* auszugraben. Meine späteren Sammelexkursionen ergaben hier wertvolle Belege von *Antilopen, Cerviden* usf. Auch wurden von hier die neuen Gattungen *Baranomys* und *Baranogale* beschrieben, wogegen die im unteren Steinbruch vorgefundene Tiergemeinschaft durch die Anwesenheit von schönen *Panther*resten, sowie durch den prächtigen Unterkiefer von *Nyctereutes Petényii* und die durch Frh. v. FEJÉRVÁRY ausführlich beschriebenen Reste von *Varanus marathonensis* berühmt geworden ist (S. Fig. 9.).

In den obigen habe ich über die bisher bekannt gewordenen Fundstellen der oberpliocänen Fauna der Villányer Gegend ausführlich berichtet. Aus den beobachteten Tatsachen geht es klar hervor, dass die Villányer Berge und die, südlich von denselben allein stehende Kreidescholle von Beremend während des ganzen Oberpliocäns trocken gestanden haben müssen und unterdessen einem intensiven Verkarstungsvorgang ausgesetzt waren. Die eigentümliche, reiche Tierwelt des «Cromerian» bevölkerte die ganze Gegend; Überreste derselben müssen noch unter der,

mitunter sehr mächtigen, Lössdecke in vielen Spalten und Karsthöhlungen der oberpliocänen Landoberfläche versteckt liegen. Durch die Eröffnung neuer Steinbrüche oder von dem weiteren, intensiveren Abbau der älteren können demzufolge weitere ausgiebige Fundstellen der so wichtigen Belege des südungarischen «Cromerian» erhofft werden.

Fig. 8. Karstfläche am Kis-Cser Berg bei Csarnóta (im Hintergrund der Tenkes-Berg), in den Steinbrüchen stellenweise mit anstehenden Knochenbreccien. (Aufnahme von P. Szabó, Pécs).

Was nun den klimatischen Charakter und die erdgeschichtliche Position unserer Faunen betrifft, erkannte ich schon vor 25 Jahren die engen Beziehungen derselben mit jener des englischen «Forest Bed», und nachdem ich vom Anfang an der festen Überzeugung war, dass die in Frage stehende Tiergesellschaft *älter als die quartäre Eiszeit* ist, nannte ich dieselbe dem alten englischen Beispiel folgend *präglacial*. Mit diesem Vorgehen sollte einer Hinaufschie-

bung dieser Fauna in die quartäre Eiszeit vorgebeugt werden; noch mehr wollte ich aber damit *gegen die Einreihung derselben in eine der sogenannten «warmen» Interglacialzeiten Protest erheben.* Es war mir stets widersinnig, von solchen innerhalb der pleistocänen Eiszeit Europas zu hören und nie liess mich der Gedanke frei, dass bei der Voraussetzung der stratigraphisch *nicht einwandfrei nach-*

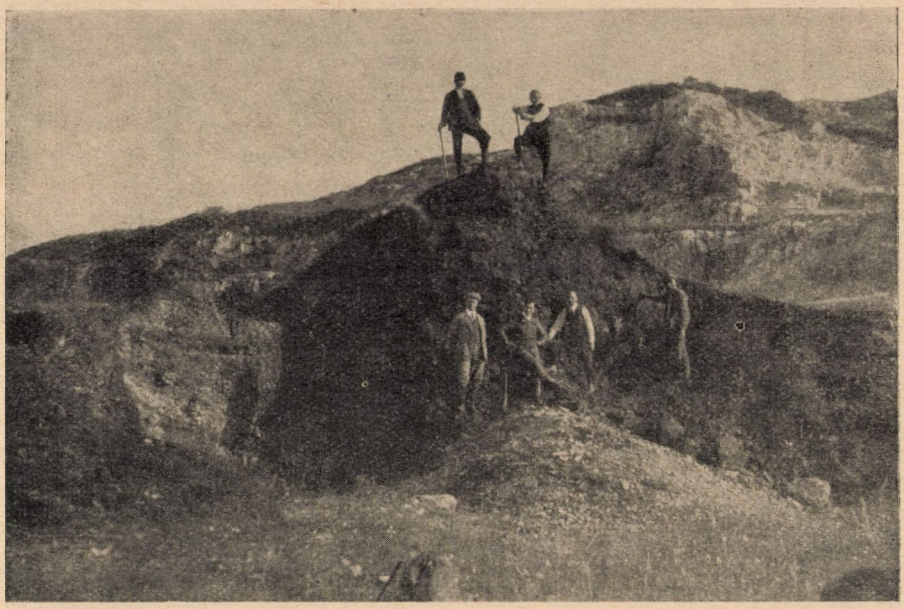


Fig. 9. Ein Teil der auf Fig. 8 sichtbaren Steinbrüche am Kis Cser-Berg bei Csarnóta, mit der Hauptfundstelle (Knochenbrecciensäule) von Antilopen, Affen, *Baranomys* usw. (Aufnahme von P. Szabó, Pécs).

weisbaren «warmen Interglacialfaunen» die irrtümliche Beurteilung der einschlägigen paläozoologischen Belege oft mitgespielt haben muss, und dass von dem näheren Studium derselben ganz andere Resultate zu erwarten wären.

Ich habe nun ein Viertel Jahrhundert im Dienste dieses Gedankens verbracht. Der Weg, den ich gegangen bin, war ziemlich unbetreten und vielfach mit Dornen umsäumt. Ich musste aber weiter und hoffe nun endlich meinem Ziele — wenn auch das von

meinen Gegnern heute noch nicht anerkannt wird — dem Ziel nahe zu sein! Ich wagte es jedenfalls, die unterdessen von mir durchforschte neue Welt und deren bisher unzugängliche Geheimnisse zu entschleiern, und versuchte zu zeigen, wie das *eigentliche Bild dieser so oft verkannten Tiergesellschaft* am Ende des Pliocäns aussah (12 *a—k*). Ich hoffe nun in der folgenden Zusammenfassung

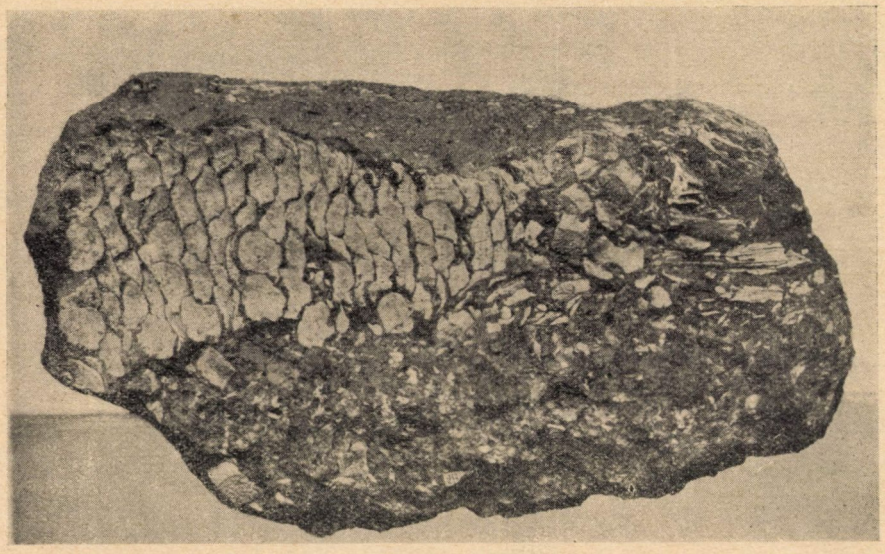


Fig. 10. *Ophisaurus pannonicus* KORMOS; Schädelteile und ein Teil des Halspanzers eines Riesenexemplars aus Beremend. (Ges. KORMOS). Harte, rote Knochenbreccie mit Calcitadern. Verkleinert. Eigentum der Miner.-Paläont. Sektion des Ung. Nationalmuseums (Nr. W 147). Mit Genehmigung des Herrn Direktors V. ZSIVNY.

Beweise dafür erbringen zu können, dass diese Fauna mit ihren, grösstenteils ausgestorbenen Arten und den vielen erloschenen Gattungen gegenüber der im allgemeinen «*kalten*» Fauna der Eiszeit vollkommen fremd dasteht, und dass dieselbe — wie das für ähnliche Faunen seitens der englischen Geologen seit jeher richtig angenommen wird — sicher noch dem oberen Pliocän angehört. Einzelne *Relikte* dieser oberpliocänen Fauna gehen freilich an geeigneten Stellen Europas in das ältere Quartär hinauf und ver-

binden somit das letztere mit dem Pliocän. Das Gros dieser Säugetierwelt geht jedoch über die Grenzen des Pliocäns nicht hinaus. Auch die Relikte verschwinden bald und nur verhältnismässig wenige Stämme leben in ihren mehr oder weniger umgeänderten, den neuen Lebensverhältnissen angepassten Nachkommen weiter. Ich muss hier gleich betonen, dass die heutigen nächsten Verwandten der südungarisch-mitteleuropäischen Oberpliocänfauna grösstenteils *nicht in Europa*, sondern *im fernen Osten:* in *Asien*, ja sogar *Ostasien* leben; dieser Umstand verleiht unserer Fauna einen gut ausgeprägten, nicht zu verkennenden asiatischen Charakter.

Das ungarische «Cromerian» ist bisher — ausser den Fundorten von Püspökfürdő und Brassó in Siebenbürgen (heutiges Rumänien) — nur aus dem Villányer Inselgebirge bekannt, wo es durch die Fundorte Beremend, Csarnóta, Siklós, Nagyharsány, Villány-Kalkberg (Nordseite), Villány-Somssichberg, Nagyharsányberg (Harsányer Spitz) und Villány-Kalkberg (Südseite) vertreten ist. Die Fauna der ersten sechs Fundstellen gehört dem *unteren* (dem englischen «Norwich» und «Weybourne Crag» gleichkommenden), die der zwei letzteren dem *oberen Cromerian* (Horizont des engl. «Upper Freswater Bed») an. Ich übergebe nun die revidierte Faunenliste der Fundstellen das erstemal der Öffentlichkeit:

UNTERES CROMERIAN.

1. Beremend.

Talpa praeglacialis KORM.
« *gracilis* KORM.
Desmana Nehringi KORM.
Galemys Semseyi KORM.
a *Erinaceus Lechei* KORM.
Beremendia fissidens (PET.)
Soriculus Kubinyii KORM.
a *Pachyura hungarica* KORM.
Myotis baranensis KORM.
Myotis sp. indet.
Rhinolophus aff. *ferrum equinum* SCHREB.
a *Rhinolophus euryale praeglacialis* KORM.
Ochotona sp. indet.
Pliolagus beremendensis KORM.
Hypolagus brachygnathus KORM.
Hystrix sp. indet.
Prospalax priscus (NHRG.)

Cricetus cricetus praeglacialis SCHAUB
Allocricetus Bursae SCHAUB
Allocricetus Éhiki SCHAUB
Apodemus sp. indet.
Dolomys Milleri NHRG.
Mimomys pliocaenicus F. MAJ.
Mimomys Newtoni F. MAJOR
« *Reidi* HINTON
Lagurus pannonicus KORM.
Linx lynx Strandi KORM.
Alopex praeglacialis KORM.
Nyctereutes Petényii KORM.
Helarctos arvernensis CROIZ. et JOB.
a *Putorius Stromeri* KORM.
Mustela palerminea PET.
Pliovormela beremendensis KORM.
Pannonictis pliocaenica KORM.
Pannonictis Pilgrimi KORM.
Sus sp. indet.
Capreolus aff. *pygargus* GR.
Tragelaphus cf. *torticornis* AYM.
Procamptoceras cf. *brivatense* SCHAUB
Inuus cf. *florentinus* COCCHI

(Die mit *a)* bezeichneten Arten kommen nur an der betreffenden Fundstelle vor.)

2. Csarnóta.

Talpa praeglacialis KORM.
Galemys Semseyi KORM.
Erinaceus sp. indet.
Beremendia fissidens (PET.)
Petényia hungarica KORM.
Crocidura Kornfeldi KORM.
Rhinolophus sp. indet.
Pliolagus beremendensis KORM.
Hypolagus brachygnathus KORM.
Prospalax priscus (NHRG.)
a *Baranomys Lóczyi* KORM.
Dolomys Milleri KORM.
a « *hungaricus* KORM.
Panthera sp. indet.
Epimachairodus hungaricus KRETZOI
Canis mosbachensis SOERGEL
Nyctereutes Petényii KORM.
Mustela palerminea PET.
Baranogale Helbingi KORM.
Pannonictis pliocaenica KORM.
Rhinoceros etruscus FALC.
Cervus (?Rusa) sp. indet.
Megaceros cf. *Dupuisi* STEHLIN
Alces sp. indet.
Capreolus aff. *pygargus* GR.
Tragelaphus cf. *torticornis* AYM.
Procamptoceras cf. *brivatense* SCHAUB
Hemitragus cf. *Bonali* HARLÉ & STEHLIN
Inuus cf. *florentinus* COCCHI

4. Nagyharsány, Mauthner'scher Bruch.

Beremendia fissidens (Pet.)
Crocidura sp. indet.
Allocricetus sp. indet.
Pliovormela beremendensis Korm.

3. Siklós (Zuhánya.)

Rhinoceros etruscus Falc.
Cervus (?Rusa) sp. indet.

5. Villány—Kalkberg (Nordseite.)

Talpa praeglacialis Korm.
« *gracilis* Korm.
Desmana Nehringi Korm.
Erinaceus sp. indet.
Sorex praearaneus Korm.
« *minutus* L.
Beremendia fissidens (Pet.)
Petényia hungarica Korm.
Soriculus Kubinyii Korm.
Crocidura Kornfeldi Korm.
Myotis baranensis Korm.
« *Steiningeri* Korm.
« *Schaubi* Korm.
« *Wüsti* Korm.
a *Vespertilio Majori* Korm.
a *Eptesicus praeglacialis* Korm.
Rhinolophus aff. *ferrum equinum* Schreb.
a *Manis hungarica* Korm.
Pliolagus beremendensis Korm.
Hypolagus brachygnathus Korm.
Citellus primigenius Korm.
Hystrix sp. indet.
Felidae gen. indet.
Canis mosbachensis Soergel
« *lupus* subsp. indet.
Vulpes (?vulpes L.)
Alopex praeglacialis Korm.
Vulpes praecorsac Korm.
Ursus (*arctos*-Gruppe)
Helarctos arvernensis Croiz. et Job.
Mustela palerminea Pet.
Pliovormela beremendensis Korm.
a *Glis Hofmanni* Korm.
« sp. indet.
a *Eliomys* sp. indet.
Prospalax priscus (Nhrg.)
Cricetus cricetus praeglacialis Schaub
Allocricetus Bursae Schaub
« *Éhiki* Schaub
Apodemus cf. *sylvaticus* L.
« sp. indet.
Dolomys episcopalis (Méh.)
a *Mimomys rex* Korm.
« *pliocaenicus* F. Major
Mimomys Newtoni F. Major

Mimomys Reidi HINTON
« *pusillus* MÉHELY
Evotomys (*glareolus*-Gruppe)
Lagurus pannonicus KORM.
Leo sp. indet.
Panthera sp. indet.
Epimachairodus hungaricus KRETZOI
Linx lynx Strandi KORM.
Felis sp. indet.
Baranogale Helbingi KORM.
Pannonictis pliocaenica KORM.
« *Pilgrimi* KORM.
Rhinoceros cf. *etruscus* FALC.
Equus sp. indet.
Cervus sp. indet.
Capreolus sp. (?*pyargus*-Gruppe)
Bovidae gen. et sp. indet.
Tragelaphus cf. *torticornis* AYM.
Procamptoceras cf. *brivatense* SCHAUB
Hemitragus cf. *Bonali* HARLÉ et STEHLIN

6. Villány—Somssichberg.

Talpa praeglacialis KORM.
Sorex sp. indet.
Beremendia fissidens (PET.)
Prospalax priscus (NHRG.)
Allocricetus sp. indet.
Mimomys pliocaenicus F. MAJOR
Mimomys Newtoni F. MAJOR
« *pusillus* MÉH.

OBERES CROMERIAN.

7. Nagyharsányberg (Harsányer «Spitz».)

Talpa praeglacialis KORM.
« *gracilis* KORM.
a *Sorex margaritodon* KORM.
« *runtonensis* HINTON
Beremendia fissidens (PET.)
Crocidura sp. indet.
Myotis Wüsti KORM.
a « *emarginatus* GEOFFR.
a « *dasycneme* BOIE
Hypolagus brachygnathus KORM.
a *Lepus* sp. indet.
Citellus primigenius KORM.
a *Sicista praeloriger* KORM.
f *Prospalax priscus* (NHRG.)
Cricetus cricetus praeglacialis SCHAUB
a *Cricetus cricetus runtonensis* NEWTON
a *Cricetulus* sp. indet.
Apodemus cf. *sylvaticus* L.
Dolomys episcopalis (MÉH.)
f *Mimomys Newtoni* F. MAJOR
f « *pliocaenicus* F. MAJOR

Mimomys intermedius NEWTON
a « *Fejérváryi* KORM.
a *Evotomys Hintoni* KORM.
a *Arvicola* aff. *bactonensis* HINTON
Lagurus pannonicus KORM.
a *Pitymys vetus* KORM.
a *Pitymys gregaloides* HINTON
Pitymys arvaloides HINTON
a *Microtus arvalinus* HINTON
a « *nivalinus* HINTON
a « *nivaloides* F. MAJOR
a « *ratticepoides* HINTON
« sp. (*nivalis*-Gruppe)
Canis lupus subsp. indet.
a « (?*Thos*) sp. indet.
Vulpes cf. *vulpes* L.
« *praecorsac* KORM.
Alopex praeglacialis KORM.
Ursus (*arctos*-Gruppe)
Mustela palerminea PET.
a « *praenivalis* KORM.
Pannonictis Pilgrimi KORM.
a *Equus Marxi* REICHENAU
a *Cervus* cf. *ctenoides* an *dicranius* NESTI
Bovidae gen. et sp. indet.
Tragelaphus aff. *torticornis* AYM.
Procamptoceras cf. *brivatense* SCHAUB

(Die mit *f)* bezeichneten Formen konnten während den neueren Ausgrabungen nicht wiedergefunden werden).

8. Villány Kalkberg, Südseite.

Talpa gracilis KORM.
Desmana Nehringi KORM.
Sorex cf. *runtonensis* HINT.
Beremendia fissidens (PET.)
Crocidura cf. *Kornfeldi* KORM.
Cricetus cric. praegl. SCHAUB
Cricetus cric. runtonensis HINT.
Mimomys intermedius NEWT.
Evotomys sp. indet.
Lagurus pannonicus KORM.
Pitymys arvaloides HINTON
Microtus sp. indet.
Alopex praeglacialis KORM.
Mustela palerminea PET.

*

Die verwandtschaftlichen Beziehungen, welche obige Fauna mit der Säugetierwelt des Oberpliocäns verknüpfen, sind viel inniger, um unbeachtet gelassen zu werden. Die überwiegende Mehrzahl der ausgestorbenen Arten, das Vorhandensein ausgestorbener Gattungen, wie *Beremendia, Petényia, Epimachairodus, Pliovormela, Baranogale, Pannonictis, Trogontherium, Prospalax,*

Allocricetus, *Pliolagus*, *Hypolagus*, *Baranomys*, *Mimomys*, *Procamptoceras*, ferner solcher, deren Vertreter heutzutage in weit entfernten zoogeographischen Distrikten leben (*Soriculus*, *Manis*, *Lagurus*, *Tragelaphus*, *Hemitragus* usf.), sprechen entschieden für das *pliocäne Alter dieser Fauna*. Sie gehört gewiss dem Oberpliocän an und ist erdgeschichtlich mit den verschiedenen Horizonten des englischen «Cromerian» und des französischen «Villafranchien-Saint-Prestien» zu parallelisieren.

Wenn auch verschiedene Elemente unserer Fauna aus — teilweise zum Oberpliocän, teilweise zum Pleistocän gerechneten — synchronischen Ablagerungen Englands, Hollands, Deutschlands, Frankreichs, Österreichs, Italiens usf. schon früher bekannt gewesen sind, konnte die oben erwähnte Parallelisierung erst auf Grund der Neubearbeitung der Wühlmäuse des englischen Cromerian seitens HINTON durchgeführt werden. Dieser englische Forscher war der erste, der die Stratigraphie der oberpliocänen Crags und der sogen. «Forest Bed Serie» mit den Tatsachenbefunden der ökologischen Paläozoologie und Abstammungslehre in *Einklang* zu bringen versuchte. Nichts beweist den Erfolg dieses Versuches besser, als dass es auch mir gelungen ist, die Aufeinanderfolge der verschiedenen Ablagerungen des ungarischen «Cromerian» mit Hilfe desselben einwandfrei festzustellen. Die Beziehungen, welche zwischen der Fauna des englischen und südungarischen Oberpliocäns bestehen, können schon auf Grund der Wühlmäuse als recht innige genannt werden. Noch viel inniger werden sich aber diese Verbände gestalten, sobald die Neubearbeitung der Gesamtfauna des englischen Cromerian durchgeführt sein wird. Die Revision wirkt bei dieser Fauna, deren *eigentlicher Charakter* infolge irrtümlicher Bestimmungen so lange verschleiert war, gewissermassen als Enthüllung, welche die *richtige Beurteilung* dieser sonderbaren Tiergesellschaft ermöglicht.

Die Folgeerscheinungen jener Erkenntnis, welche in der monographischen Bearbeitung der oberpliocänen Säugetierfauna Südungarns wurzelt, gelangen auch in der ausländischen Fachliteratur immer mehr zur Geltung.

S. SCHAUB (Basel) schreibt in seiner zusammenfassenden Arbeit über «Quartäre und jungtertiäre Hamster» (1930) wie folgt:

«In den letzten Dezennien haben sich nun die Belegmaterialien für die präglazialen Hamster so beträchtlich vermehrt, dass es nicht zu verantworten wäre, sie noch länger unbearbeitet liegen zu lassen. Im Hinblick auf die Bälde zu erwartende Publikationen der Fauna von Villány durch TH. KORMOS und die immer stärker sich geltend machende Bedeutung präglazialer Formen für die Geschichte der europäischen Tierwelt sollte der Versuch gewagt werden, diesen verbreitungsgeschichtlich so überaus interessanten Dokumenten soviel Belehrung als möglich abzugewinnen».

In dieser Publikation wurden sechs verschiedene Hamsterformen des ungarischen Präglazials, darunter auch die neue Gattung *Allocricetus* bekannt gemacht.

Im selben Jahr gab S. SCHAUB eine Übersicht der fossilen Sicistinae, in welcher *Sicista praeloriger* KORM. des ungarischen Präglazials ausführlich beschrieben und schön abgebildet ist.

1930 war für mich das Jahr der Überraschungen. Unter den letzteren hat mich am meisten FLORIAN HELLER's erste Mitteilung über die Forest-Bed-Fauna der Sackdillinger Höhle in Oberpfalz (16), erfreut, welche uns die erste Nachricht über das Vorkommen von zwei PETÉNYI'schen Arten: *Beremendia fissidens* (PET.) und *Mustela palerminea* PET. in Deutschland brachte. In einer nächsten, kurzen Veröffentlichung über präglaziale Knochenfunde in der Moggaster-Höhle (Fränkische Schweiz) nimmt HELLER bereits entschieden für das «jüngstpliocäne» Alter der betreffenden Funde (*Mimomys*-Fauna) Stellung (17).

Nachdem ich ein Jahr später die sonderbare Musteliden-gattung *Pannonictis* aufgestellt und publiziert habe (18), ist im Januar 1932 eine Publikation GUY E. PILGRIM's über die Genera *Trochictis, Enhydrictis* und *Trocharion* erschienen (19), in welcher der Autor sich auch mit *Pannonictis* eingehend befasst und bezüglich der systematischen Stellung derselben sich meiner Meinung anschliesst. Er sagt diesbezüglich folgendes:

«It seems that the genera *Tayra, Grison, Enhydrictis, Pannonictis, Trochictis* and KORMOS has surmised, the large Mustelid described by ZDANSKY (1927) under the name Mustelid gen. indet., sp. n., may be united into one group distinguished from the *Melinae* . . .» (S. 848) — und weiter: — «We come now to the group

of genera typified by the living *Grison* and *Tayra*, allies of which have fortunately been discovered in the Upper Pliocene as *Pannonictis* . . .» (S.863).

Im Jahr 1932 ist auch eine vorläufige Mitteilung SCHAUB's über die, ihm zur Bearbeitung anvertrauten Ruminantier des ungarischen Präglacials erschienen (20). Es hat sich nun herausgestellt, dass die, seinerzeit von FREUDENBERG unter dem Namen «*Antilope Jaegeri*» aus dem ungarischen Präglacial angeführte Schraubenhörnige Antilope (21) nichts mit der genannten Form zu tun hat, sondern in die nächste Verwandschaft von *Tragelaphus torticornis* AYMARD, einer bezeichnenden Antilopenart des französischen Villafranchien, gehört. Gleichzeitig wurden aber auch: *Procamptoceras* cfr. *brivatense* SCHAUB, eine Gemsenantilope des französischen Oberpliocäns, sowie *Hemitragus* cfr. *Bonali* HARLÉ & STEHLIN, ein Ovicaprine (Thar) des Quartärs der Dordogne, ferner *Cervus* cfr. *Dupuisi* STEHLIN, *Cervus* cfr. *ctenoides* an *dicranius* NESTI usf. angeführt. SCHAUB bemerkt dazu, dass «Die Untersuchung der praeglacialen Ruminantierfauna das überraschende Resultat ergab, dass in dieser Tierwelt Genera vertreten sind, die bisher nur aus pliocaenen Ablagerungen bekannt waren. *Procamptoceras* und der *Tragelaphine* sind zum ersten Mal in einem Sediment bekannt geworden, das jünger als die der klassischen oberpliocaenen Fundorte Val d'Arno und Perrier incl. Senéze ist. Diese Tatsache könnte zugunsten eines pliocaenen Alters des ungarischen Praeglacials geltend gemacht werden. Es soll an diesem Orte nicht näher auf diese Frage eingetreten werden, da sie nicht an Hand der Ruminantier allein, sondern nur auf Grund einer vollständigen Faunenliste diskutiert werden kann». — Ich glaube nun durch die Veröffentlichung der vollständigen Faunenliste den ***unumstösslichen*** Beweis des oberpliocänen Alters unserer Präglacialfauna dargebracht zu haben.

Im Jahr 1933 hat HELLER einen Nachtrag zur Fauna der Sackdillinger Höhle veröffentlicht (22), in welchem einige frühere Bestimmungen korrigiert und von Vertretern der ungarischen Präglacialfauna *Talpa gracilis* KORM., *Talpa praeglacialis* KORM., *Beremendia fissidens* (PET.) KORM., *Allocricetus Bursae* SCHAUB, *Evotomys Hintoni* KORM., *Mustela praeglacialis* KORM. und

Mustela palerminea PET. angeführt werden. Kurz nach dem Erscheinen dieses Aufsatzes hat GEORG BRUNNER (Nürnberg) die Resultate seiner Ausgrabungen in der Sackdillinger Höhle publiziert (23), und gleichzeitig weitere Arten des ungarischen «Cromerian» für Deutschland festgestellt (*Meles atavus* KORM., *Sicista praeloriger* KORM., *Cricetus cricetus praeglacialis* SCHAUB, *Dolomys episcopalis* (MÉH.), *Mimomys pusillus* MÉH. und *Francolinus Čapeki* LAMBRECHT.)

Im Schlussheft der von J. J. A. BERNSEN begonnenen und nach seinem Tode von Frl. A. SCHREUDER beendeten Revision der fossilen Säugetierfauna von Tegelen (24) führt die Verfasserin in ihrer Zusammenfassung *Hypolagus brachygnathus* KORM., *Pannonictis Pilgrimi* KORM. und *Pannonictis pliocaenica* KORM. unter den Mitgliedern der Tegelenfauna an und stellt fest, dass:

«The mammalian fauna of Tegelen is equivalent to the famous fauna of Val d'Arno superiore in Italy, of Senèze (Haute Loire) and other localities in Italy and France, of the Norwich Crag in England, and to the Fauna of Beremend, Csarnóta and Villány (Kalkberg) in Hungary: all fauna's ot the Villafranchien type». (Op. cit. S. 13.) Die Entdeckung der zwei ungarischen *Pannonictis*-Arten, sowie der Gattung *Hypolagus* im holländischen Tegelen-Clay ist in zwei anderen Abhandlungen SCHREUDER's (25, 26) ausführlich beschrieben. In einer ihrer neuesten Publikationen (1936) berichtet Verfasserin auch über das Auffinden von *Dolomys Milleri* NHRG. und *Mimomys pusillus* MÉH., zweier wurzelzähniger Wühlmäuse des ungarischen Cromerian-Villafranchien in niederländischen Tiefbohrungen (27).

Einen weiteren, grossen Fortschritt in Bezug auf die ehemalige Verbreitung unserer oberpliocänen Säugetierfauna bedeutet HELLER's Entdeckung in der Gundersheimer Gegend (Rheinhessen), wo er in den dortigen Karsthohlräumen eine reiche, 40 Arten zählende oberpliocäne Säugetierfauna bergen konnte. Von den von hier beschriebenen Lokalformen von Fledermäusen (etwa ein Dutzend Arten) und von den näher nicht bestimmten Formen abgesehen, sind fast sämtliche Arten dieser Fauna mit den Vertretern unserer oberpliocänen Tiergemeinschaft identisch. Es ist überaus wichtig, dass es HELLER gelungen ist, aus der Fauna von

Gundersheim ausser *Beremendia* auch die bisher nur aus Ungarn bekannt gewesenen Gattungen *Petényia, Baranomys, Ungaromys,* sowie die aus Ungarn beschriebenen Arten *Desmana Nehringi* KORM., *Galemys Semseyi* KORM., *Vulpes praecorsac* KORM. und *Lagurus pannonicus* KORM. (neben *Talpa gracilis, T. praeglacialis, Mimomys pliocaenicus, pusillus, Reidi* und *Newtoni, Hystrix* sp., *Hypolagus brachygnathus* und *Macacus (Inuus)* cf. *florentinus* etc.) nachzuweisen (28).

In der Einleitung dieser Arbeit HELLER's bekommen wir folgendes zu lesen:

«Fossile Faunen, die man im allgemeinen als Oberpliocän oder präglacial anspricht, wurden im Laufe der letzten Hundert Jahre aus den verschiedensten Teilen Europas bekannt. Ihr wirkliches Alter und damit ihre Bedeutung wurde indessen manchmal bis in die jüngste Zeit herein nicht richtig erkannt, und so wurden sie bald als altquartär, bald als interglazial, bald auch als jungdiluvial bis postglazial bezeichnet. Nie bezweifelt wurde von den schon länger bekannten Fundorten eigentlich nur das oberpliocäne Alter der fossilreichen Ablagerungen in Mittel- und Oberitalien (z. B. Val d'Arno) und in der Auvergne (Perrier). Dagegen musste sich das «präglaziale» Forest Bed Englands an der Küste von Norfolk die verschiedenartigsten Datierungen gefallen lassen, woran wohl in erster Linie die oberflächliche Betrachtung der geborgenen Fossilreste schuld ist. Die ältesten Faunenlisten dieser Ablagerungen enthalten noch zahlreiche Namen rezenter Arten, die später gestrichen werden mussten, als eine genauere Nachprüfung ergab, dass die fossilen Formen mit den rezenten Arten doch nicht vollkommen übereinstimmen. Ähnlich erging es den etwa gleichaltrigen Funden aus anderen Ländern, so vor allem aus Ungarn, die ursprünglich ebenfalls fast durchweg mit rezenten Arten identifiziert wurden. Erst die gründlichen Untersuchungen von MÉHELY und KORMOS haben eigentlich Klarheit darüber geschaffen, dass die betreffenden Fossilreste nichts mehr mit heute lebenden Arten zu tun haben, sondern längst ausgestorbenen Tierformen angehören» (28, S. 99—100.).

*

Ich habe in den obigen versucht eine kurze Zusammenfassung der geologischen Verhältnisse und der Geschichte der Säugetierfauna des ungarischen Oberpliocäns zu geben, welcher am Ende auch einiges über das ausländische Vorkommen und die regionale Verbreitung derselben zugefügt wurde. Über die Herkunft und Abstammung dieser Fauna, speziell über die asiatischen Relationen derselben musste ich, des Raummangels wegen, an anderer Stelle (29) berichten und verweise auf meine diesbezügliche Abhandlung.

Literaturnachweis.

1. Petényi J. S.: Hátrahagyott munkái. Pest, 1864.

2*a*. Nehring, A.: Über mehrere neue *Spalax*-Arten. Sitz. Ber. d. Ges. neturforsch. Freunde zu Berlin. 1897.

2*b*. Nehring, A.: Über Dolomys nov. gen. foss. Zool. Anz., No. 549. Berlin, 1898.

3. Méhely, L.: *Prospalax priscus* (Nhrg.). die pliocäne Stammform der heutigen Spalax-Arten. Ann. Mus. Nat. Hung., VI. Budapest, 1908.

4. Méhely, L.: Fibrinae Hungariae. Die ternären und quartären wurzelzähnigen Wühlmäuse Ungarns. Ann. Mus. Nat. Hung., XII, 1914.

5. Bolkay, St.: Additions to the fossil Herpetology of Hungary from the Pannon. and Praegl. Period. Mitt. a. d. Jahrb. d. k. ung. Geol. Reichsanstalt. XXI. Budapest, 1913.

6. Fejérváry, Baron G. J. de: Contributions to a monography on fossil Varanidae and on Megalanidae. Ann. Mus. Nat. Hung., XVI. Budapest, 1918.

7. Kormos, Th.: Trois nouvelles espèces fossiles des desmans en Hongrie. Ann. Mus. Nat. Hung. XI. Budapest, 1913.

8. Kormos, Th.: Die präglazialen Bildungen des Villányer Gebirges und ihre Fauna. Jahresber. d. k. u. Geol. Reichsanst. für 1916. Budapest, 1920.

9. Lóczy, L. v. jr.: Die geologischen Verhältnisse der Villányer und Báner Gebirge. Földtani Közlöny, XLII. Budapest, 1912.

10. Leiningen, W. Graf zu: Entstehung und Eigenschaften der Roterde. Internat. Mitteil. f. Bodenkunde. Berlin—Wien, 1917.

11. Kormos, Th.: Canis Petényii n. sp. und andere interessante Funde aus dem Komitat Baranya. Mitt. a. d. Jahrb. d. k. u. Geol. Reichsanst. XIX. 4. Budapest, 1911.

12*a*. Kormos, Th.: Die präglazialen Feliden von Villány (Südungarn). Folia Zool. et Hydrobiol. IV. Riga, 1932.

12*b*. Kormos Th.: Die Füchse des ungarischen Oberpliozäns. Ibidem, IV. Riga, 1932.

12.*c*. KORMOS, TH.: Die Wölfe des ungarischen Oberpliozäns. Ibidem, V. Riga, 1933.

12*d*. Neue und wenig bekannte Musteliden aus dem ungarischen Oberpliozän. Ibidem, V. Riga, 1934.

12*e*. KORMOS, TH.: Manis hungarica n. sp., das erste Schuppentier aus dem europäischen Oberpliozän. Ibidem, VI. Riga, 1934.

12*f*. KORMOS, TH.: Baranomys Lóczyi n. g. n. sp., ein neues Nagetier aus dem Oberpliozän Ungarns. Állattani Közlemények, XXX. Budapest, 1933.

12*g*. KORMOS, TH.: Zur Frage der Abstammung eurasiatischer Hasen. Ibidem, XXXI. Budapest, 1934.

12*h*. KORMOS, TH.: Die perlzähnige Spitzmaus (*Sorex margaritodon* KORM.) und das Anpassungsproblem. Ibidem, XXXII. Budapest, 1935.

12*i*. KORMOS, TH.: Neue Insektenfresser, Fledermäuse und Nager aus dem Oberpliozän der Villányer Gegend. Földt. Közlöny, LXIV. 1934.

12*k*. KORMOS, TH.: Gedanken über die vorglazialen Wühlmäuse Ungarns. Fol. Zool. et Hydrobiol., VIII. Riga, 1935.

13. HINTON, M. A. C.: Monograph of Voles and Lemmings (Microtinae) living and extinct. Vol. I. London, 1926.

14. SCHAUB, S.: Quartäre und jungtertiäre Hamster. Abhandl. d. Schweiz. Pal. Ges. III. Basel, 1930.

15. SCHAUB, S.: Fossile Sicistinae. Ecl. geol. Helv., 23, 2. Basel, 1930.

16. HELLER, FL.: Eine Forest-Bed-Fauna aus der Sackdillinger Höhle (Oberpfalz). N. Jahrb. f. Min. etc. Bd. 63. Abt. B, 1930.

17. HELLER, FL.: Jüngstpliozäne Knochenfunde in der Moggaster-Höhle (Fränkische Schweiz). Zentralbl. f. Min. etc. Jahrg. 1930. Abt. B. No. 4.

18. KORMOS, TH.: Pannonictis pliocaenica, n. gen., n. sp., a new Giant Mustelid from the Late Pliocene of Hungary. Ann. Inst. Reg. Hung. Geol. XXIX. Budapest, 1931.

19. PILGRIM, GUY E.: The Genera Trochictis, Enhydrictis, and Trocharion, with Remarks on the Taxonomy of the Mustelidae. Proc. Zool. Soc. of London, 1932. Part 4.

20. SCHAUB, S.: Die Ruminantier des ungarischen Praeglacials. Ecl. geol. Helv. 25, No. 2. Basel, 1932.

21. FREUDENBERG, W.: Die Säugetiere des älteren Quartärs von Mitteleuropa. Geol. u. pal. Abhandl. N. F. 12. H. 4/5. Jena, 1914.

22. HELLER, FL.: Ein Nachtrag zur Forest-Bed-Fauna aus der Sackdillinger Höhle (Oberpfalz). Zentralbl. f. Min. etc. Jahrg. 1933, Abt. B. N. 1.

23. BRUNNER, G.: Eine präglaziale Fauna aus dem Windloch bei Sackdilling (Oberpfalz). N. Jahrb. f. Min. etc. Bd. 71. Att. B. 1933.

24. BERNSEN, J. J. A.: Eine Revision der fossilen Säugetierfauna

aus den Tonen von Tegelen. IX. Naturhist. Maandblad, 22. No. 11, 23. No. 4, 6, 7. Maastricht, 1933—1934.

25. SCHREUDER, A.: A note on the Carnivora of the Tegelen Clay, with some Remarks on the Grisoninae. Arch. Néerl. de Zool., II. 1, 1935.

26. SCHREUDER, A.: Hypolagus from the Tegelen Clay ; with a note on recent Nesolagus. Ibidem, II. No. 2—3, 1936.

27. HELLER, FL.: Eine oberpliozäne Wirbeltierfauna aus Rheinhessen. N. Jahrb. f. Min. etc. Bd. 76, Abt. B. 1936.

28. KORMOS, TH.: Zur Frage der Abstammung und Herkunft der quartären Säugetierfauna Europas. Festschrift z. 60. Geburtstage von Prof. E. STRAND, Vol. III. Riga, 1937.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai. 1937.)

AZ ÉLŐLÉNYEK FEJLŐDÉSE SZABÁLYOSSÁGÁNAK A MAGYARÁZATA.

KÖVESSI FERENC-től.

Az erjesztő sejtek (Saccharomyces spec.) fejlődésében uralkodó törvényszerűségeket kifejező hullámgörbék megszerkesztése a kísérleti adatokból. A hullámgörbék aperiodusos és periodusos komponensei.

A VII. közlemény összefoglalása.

Szerző ezen VII. közleményében, az V. és VI. tanulmányaiban található kísérleti adatok alapján megrajzolja a hullámfelület metszeteiből kialakuló hullámgörbéket és azok tengelyét, azután megállapítja. hogy a hullámgörbék két komponensből állanak, egyik s_h a hullámgörbe *tengelye*, mely az aperiodusosan csillapított rezgőmozgás egyenletével írható le, tehát

$$s_h = a_1 e^{-r_1 t} \frac{e^{+t\sqrt{r_1^2 - w_1^2}} - e^{-t\sqrt{r_1^2 - w_1^2}}}{2} \cdots\cdots\cdots (8a) \cdots (14a)^1$$

a másik s_p, maga a hullámgörbe, mely azonos a periodusosan csillapított rezgőmozgás egyenletével:

$$s_p = a_2 e^{-r_2 t} \cos\left(t\sqrt{w_2^2 - r_2^2}\right) \cdots\cdots\cdots (8b) \cdots (16b)$$

---

[1] Az egyenletek számozásánál kétféle zárójelbe foglalt számot látunk. Ezek közül az első például *(8a)* mindig a *Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Anzeiger*-ben német nyelven megjelent közleményekre vonatkozik, míg a második például (14*a*) mindig az *Erdészeti Kiserletek*-ben magyar nyelven megjelent közlemények képleteit idézi.

az egész y mozgás pedig mint e két egyenlet összege adódik, tehát

$$y = s_h + s_p, \cdots\cdots\cdots\cdots (11)\cdots(19).$$

illetve:

$$y = a_1 e^{-r_1 t} \sinh (M_1 t) + a_2 e^{-r_2 t} \cos (M_2 t), \cdots\cdots (11b)\cdots(20b)$$

ahol a_1, r_1, w_1, M_1; a_2, r_2, w_2 M_2 koefficienseket jelent, t a folyó időt és $e = 2{\cdot}71828$, a természetes logarithmus alapját jelenti,

$$\sinh (M_1 t) = \frac{e^{+t\sqrt{r_1^2 - w_1^2}} - e^{-t\sqrt{r_1^2 - w_1^2}}}{2},$$

végül $M_1 = \sqrt{r_1^2 - w_1^2}$, $M_2 = \sqrt{w_2^2 - r^2}$.

A tanulmány bővebben német nyelven az itt következő közleményben olvasható, részleteit 14 ábra teszi könnyebben érthetővé.

*

Ezen VII. közlemény magyar nyelvű szövege eredeti teljes terjedelmében megjelenik az «*Erdészeti Kísérletek*»-ben, Sopron. Műegyetem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. dec. 14-én tartott üléséből.)

ERLÄUTERUNGEN DER GESETZMÄSSIGKEITEN IM ABLAUFE DER LEBENSERSCHEINUNGEN LEBENDER WESEN.

Von FRANZ KÖVESSI (Budapest).

VII. Mitteilung.

In der Entwicklung der Gärungspilze (Saccharomyces spec.) herrscht eine Gesetzmässigkeit. Konstruktion der sie ausdrückenden Wellenkurven auf Grund der Versuchsangaben.

Die aus einer Einzelzelle zu verschiedenen Zeiten stammenden Nachkommen zeigen eine S förmige Kurve in ihrem Entwicklungsgange. Gegenstand dieser und weiterer Untersuchungen ist die *Analyse und Kinetik der Erscheinung* auf Basis der aus den Versuchsergebnissen und der in meiner VI. Mitteilung[1] Fig. 8 gezeigten Wellenoberfläche.

Diese Wellenoberfläche zeigt auf der Abszisse die Entwicklungszeit der Mutterkultur und bezeichnet auf der Ordinate die Grösse der Entwicklung mit CO_2. Die Figuren 9 und 10 der VI. Publikation zeigen die mit den Ordinaten und

---

[1] Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften Band LII. pp. 613—690. Budapest, 1935. Franklin.

— Mathematikai és Természettudományi Értesítő, a M. Tud. Akadémia III. osztályának folyóirata LII. kötet 613—690. lap. Budapest, 1935. Franklin.

— «Erdészeti Kísérletek» XXXV. kötet 335—395. lap. Sopron, 1933. Főiskola.

Abszissen parallelen Schnitte. Aus Bequemlichkeitsgründen füge ich hier diese 3 Figuren bei, weil wir sie bei den folgenden Erörterungen ständig brauchen. Die letzteren 9. und 10. Wellenkurven zeichnete ich aber nicht vollständig, weil *die Achsen*

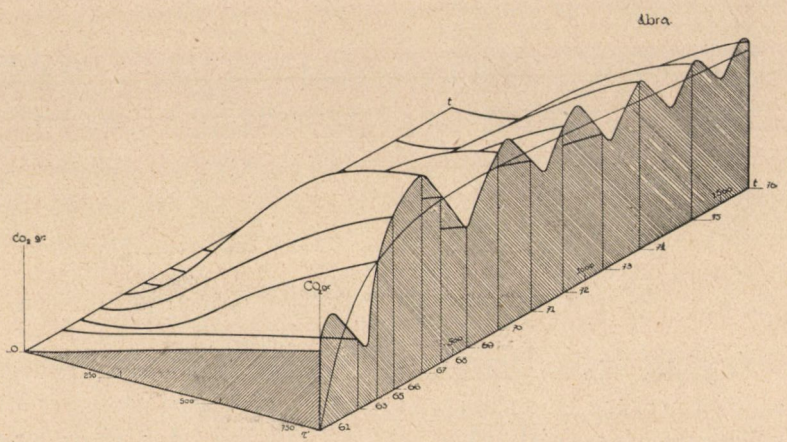


Fig. 8/*a*. Bild jener Wellenoberfläche, welche ich aus der *S*-förmigen Kurve konstruierte, die die Entwicklung der aus der 61. Mutterkultur stammenden 63—76. Nachkommenschaft zeigt. Hergestellt aus den Versuchsangaben der V. Mitteilung, in der VI. Mitteilung beschriebenen Weise. Ich habe nämlich aus den von der Nachkommenschaft produzierten CO_2-Angaben die *S*-förmigen Kurven auf Kartonpapier aufgezeichnet, die Zeichnungen den Konturen entsprechend ausgeschnitten, die Ausschnitte entsprechend ihrer Überimpfungszeit gereiht, wobei die Höhen der *S*-förmigen Kurven Schwingungen zeigen, die die in der Figur sichtbaren Wellenoberflächen ergeben. Wenn wir diese Wellenoberfläche mit der Abscisse t und gleichzeitig mit einer mit der CO_2-Ordinatenachse paralellen Fläche gleichgiltig wo schneiden, so wird der Schnitt das Bild einer Wellenkurve zeigen. Die in der Figur dargestellte Wellenkurve zeigt einen Schnitt aus der Zeit $\tau = 32$ Tage des Lebens der Nachkommen. In diese Wellenkurve ist auch deren Achse eingezeichnet.

dieser Kurven fehlen. Wollen wir den Ablauf der Wellenbewegung rechnerisch verfolgen, so wird der den Wert der Achse anzeigende Ausdruck ein wesentlicher Bestandteil jener Funktion sein, den wir mit derselben beschreiben. *Daher müssen*

wir auf das Studium der Achse besonderes Gewicht legen. Aus dieser folgt natürlich die eingehende Untersuchung der Eigenschaften der Wellenlinie.

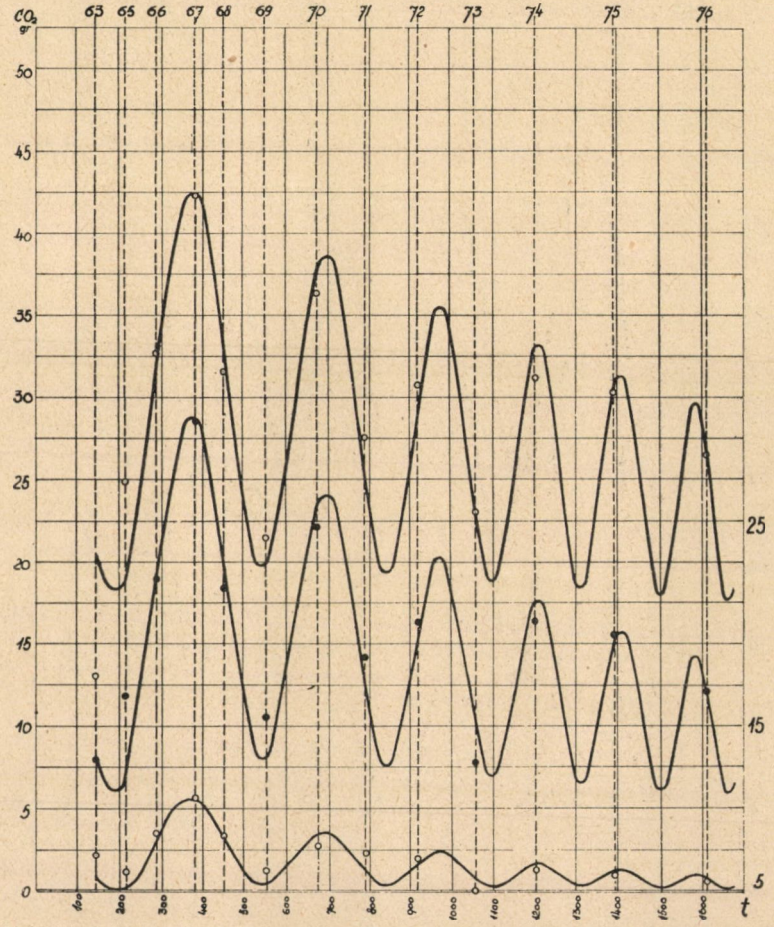


Fig. 9. Wellenkurve konstruiert aus der Arbeitsfähigkeit in 5, 15 und 25 Tagen der Nachkommen Nr. 63—76, nach Angaben der Tab. XVII der VI. Mitteilung.

Zum klareren Verständnis des erwähnten Zusammenhanges verfertigte ich die Fig. 11—21, die ich nach den Angaben der Tabellen XVII. *a*, XVII. *b*, XVII. *c* und XVII. *d* (S. 681—684)

zeichnete und zwar auf Grund der in 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75 und 100 Tagen produzierten CO_2 Mengen, so, dass in jeder Zeichnung auf die Abszisse die *laufende Zeit t der*

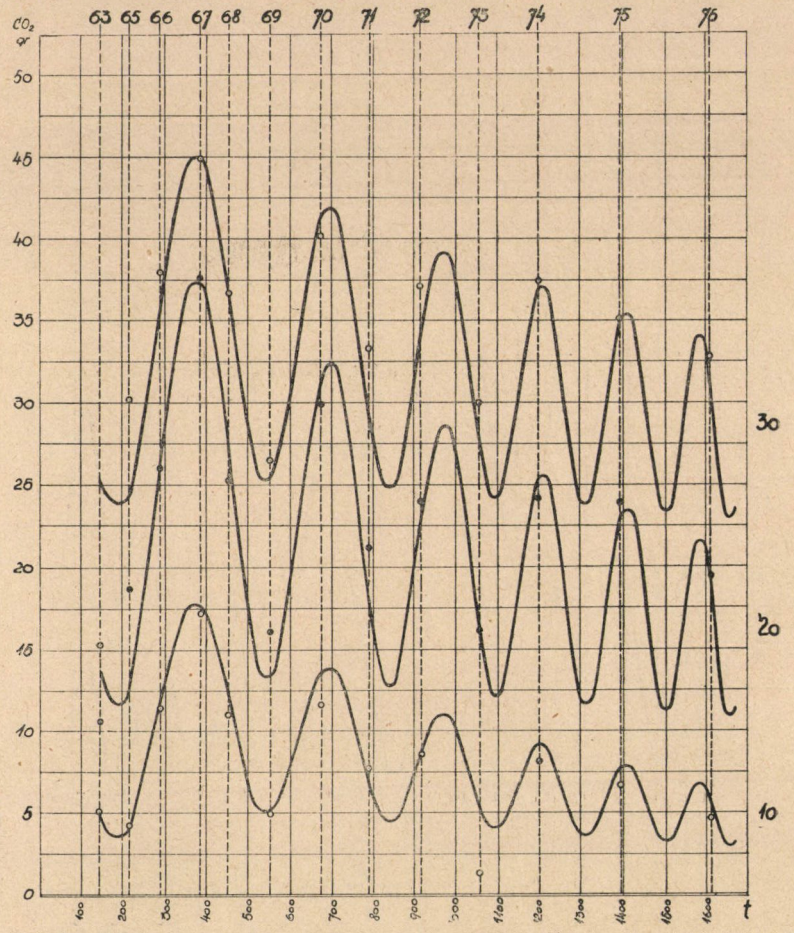


Fig. **10.** Wellenkurve, konstruiert aus der Arbeitsfähigkeit in 10, 20 und 30 Tagen der Nachkommen Nr. 63—76, nach Angaben der Tab. XVII der VI. Mitteilung.

Mutterkultur aufgetragen wurde. Der Anfangspunkt der Abszisse stimmt mit der *Impfungszeit der Mutterkultur* überein. Die zu den von hieraus gerechneten Überimpfungs-Zeitpunkten gehö-

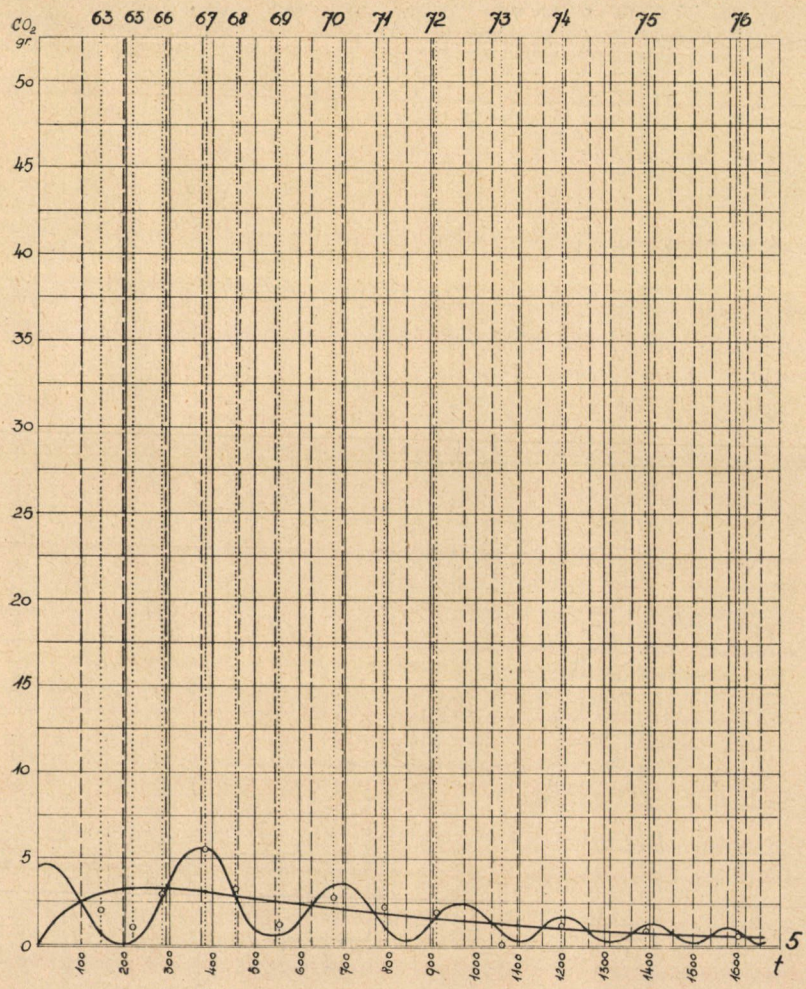


Fig. **11.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. 8/*a*, am **5**-ten Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. 8/*a* ersichtlichen Methode erzeugt und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abscisse ist, am Ende des 5-ten Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist mit dem durchschnittlichen Werte der Wellenkurve.

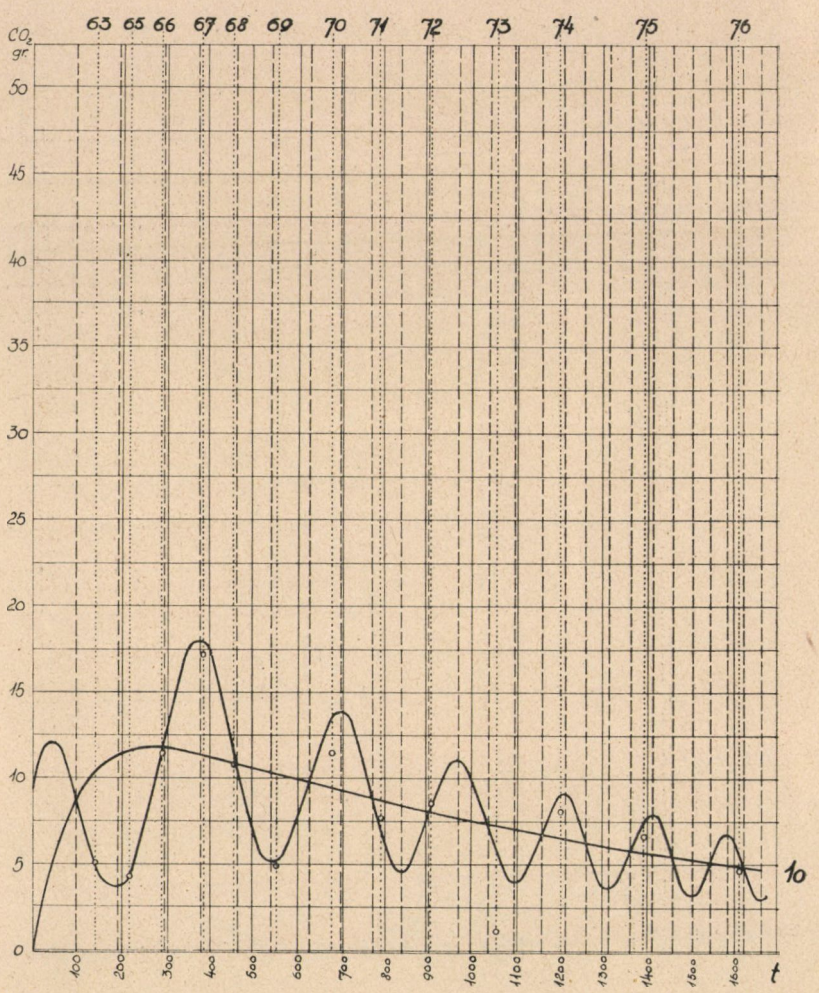


Fig. **12.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a*, am **10**-ten Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 10-ten Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchschnittlichen Werte der Wellenkurve.

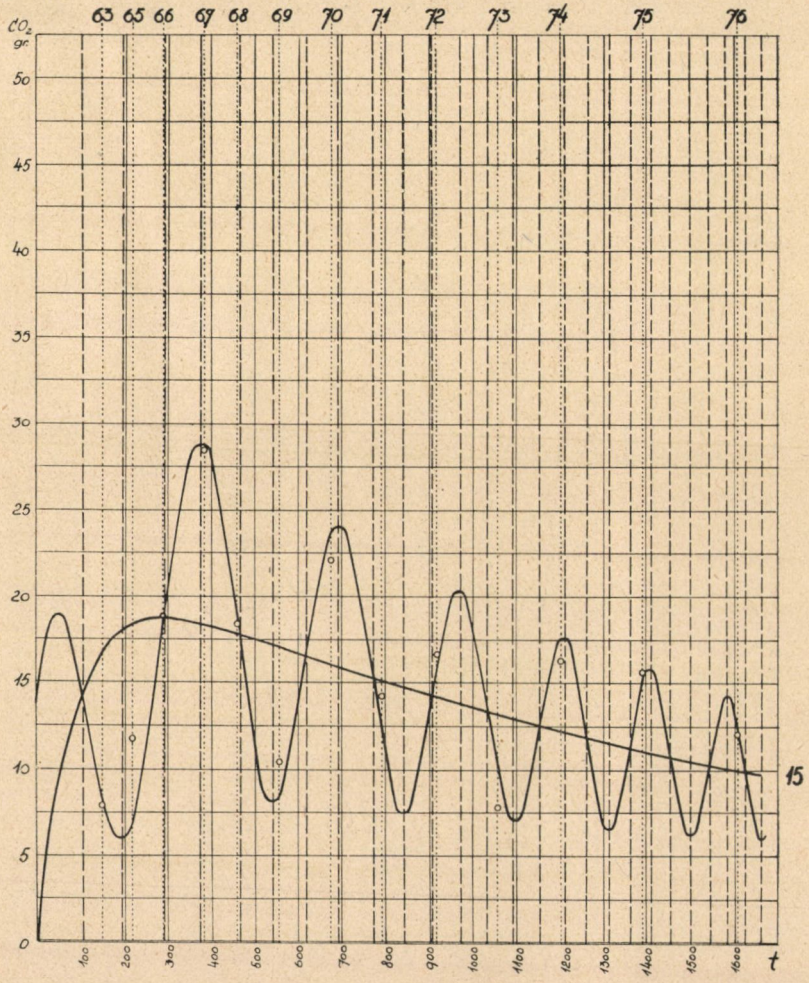


Fig. **13.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a*, am **15**-ten Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 15-ten Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchschnittlichen Werte der Wellenkurve.

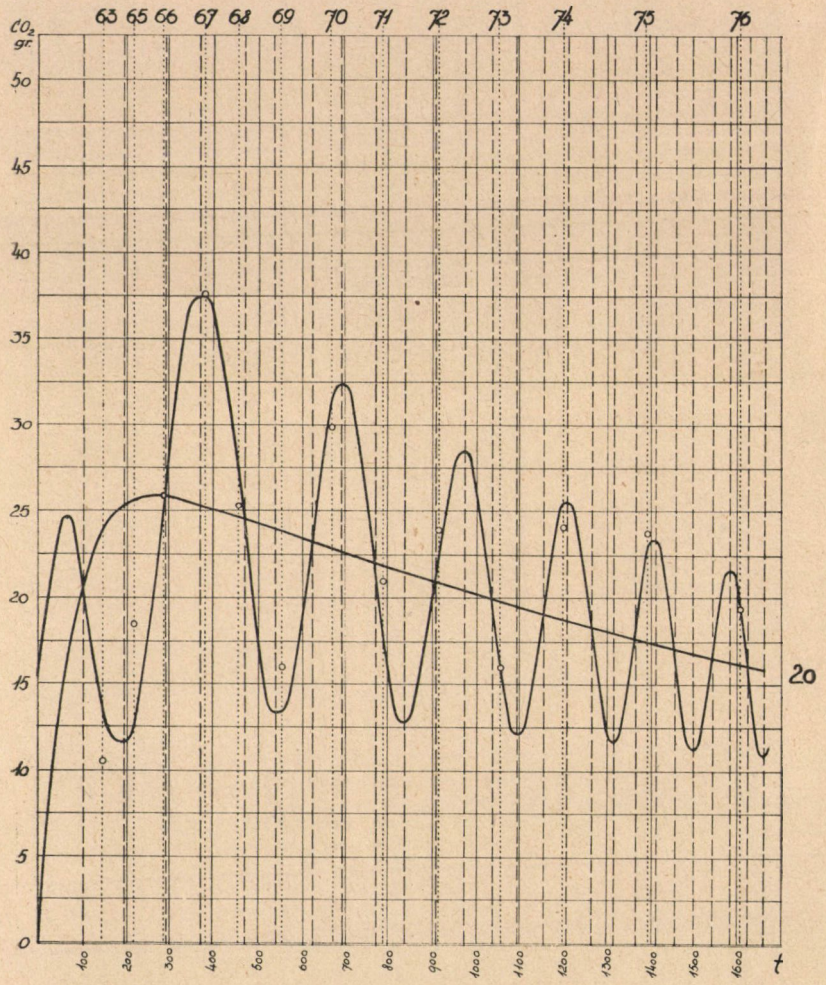


Fig. **14.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. 8/*a*, am **20.**½ Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. 8/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichnete Abszisse ist, am Ende des 20. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich dem durchsichtlichen Werte der Wellenkurve ist.

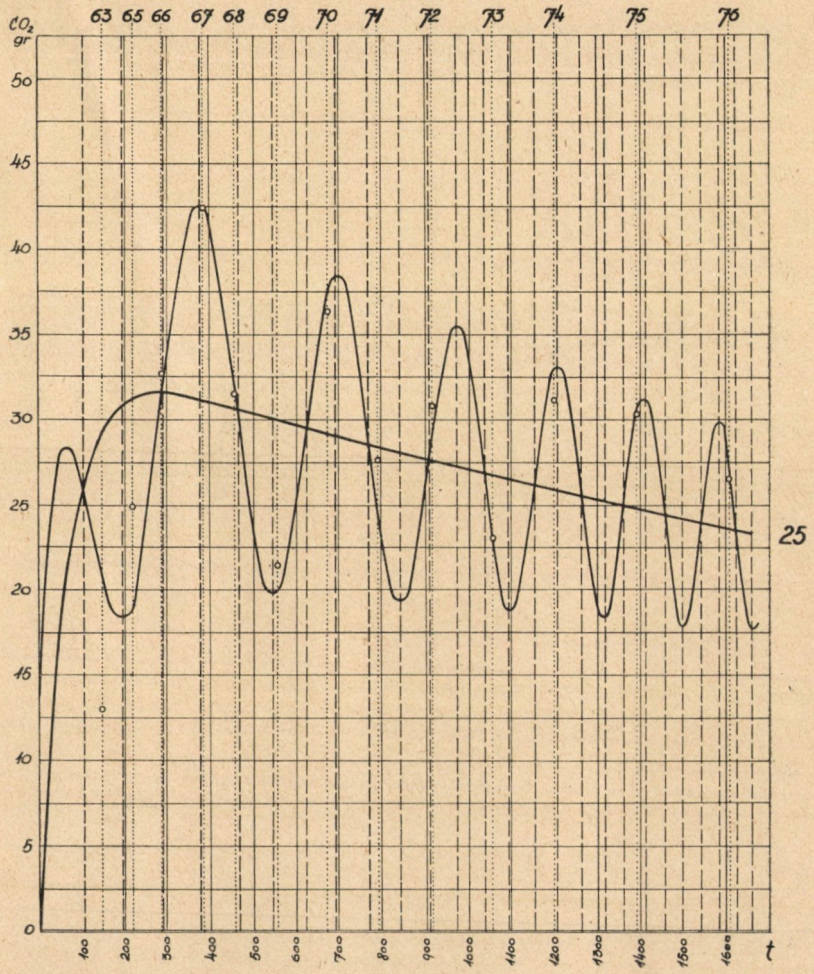


Fig. **15.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. 8/*a*, am **25.** Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 25. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchschnittlichen Werte der Wellenkurve.

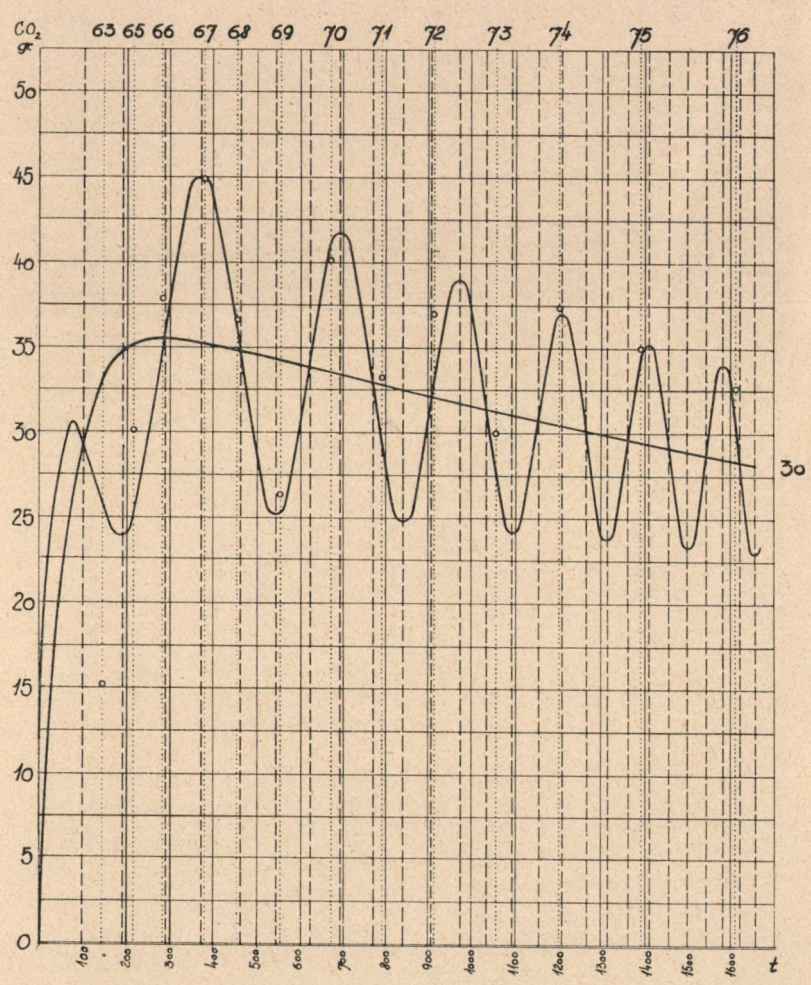


Fig. **16.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a* am **30.** Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 30. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchschnittlichen Werte der Wellenkurve.

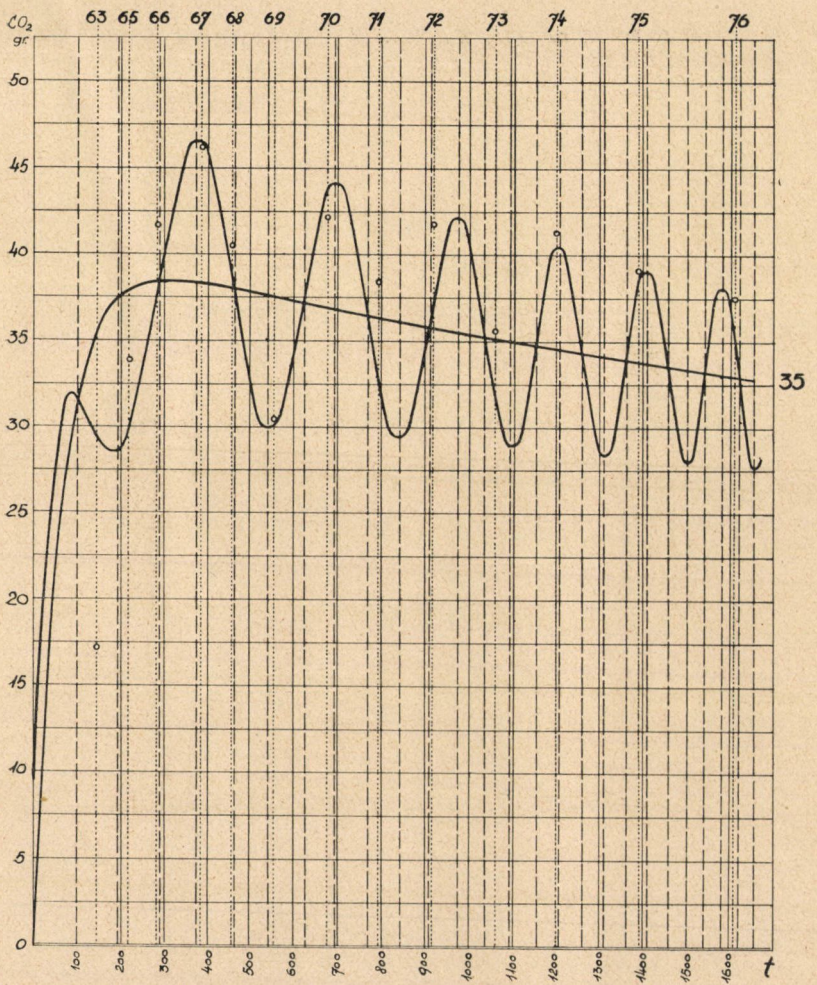


Fig. **17.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a* am **35.** Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinaten und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 35. Tages der τ-Achse. In die auf dieser Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durcsichtlichen Werte der Wellenkurve.

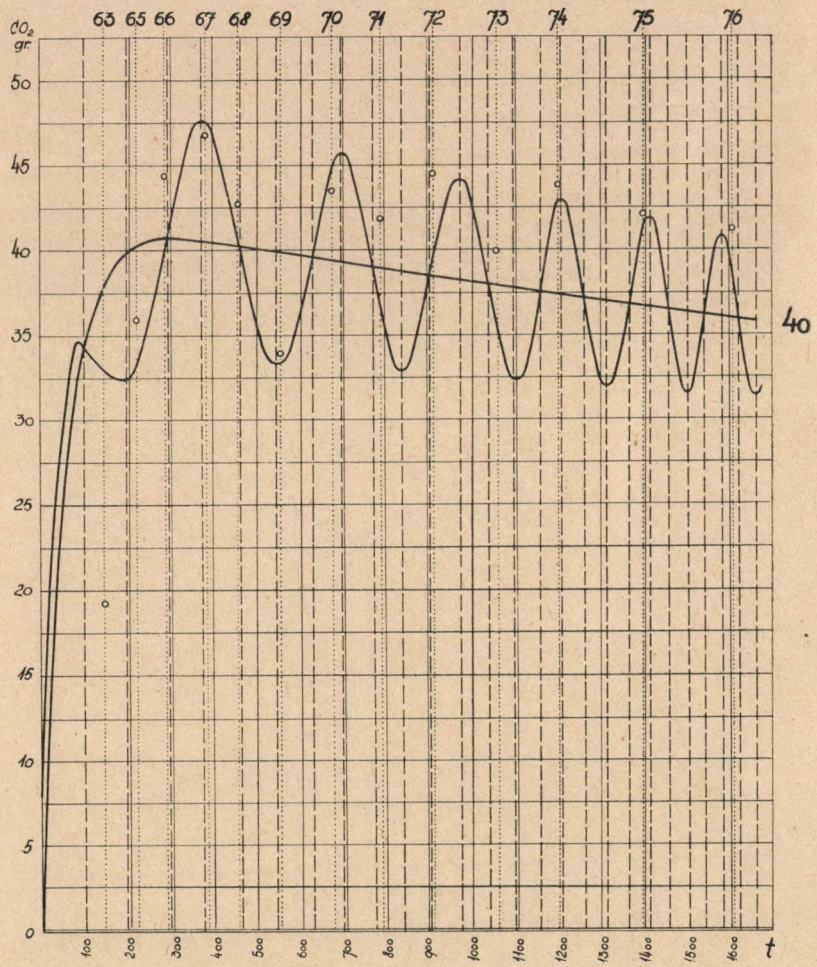


Fig. **18.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfiäche der Fig. 8/*a* am **40.** Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. 8/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 40. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchschnittlichen Werte der Wellenkurve.

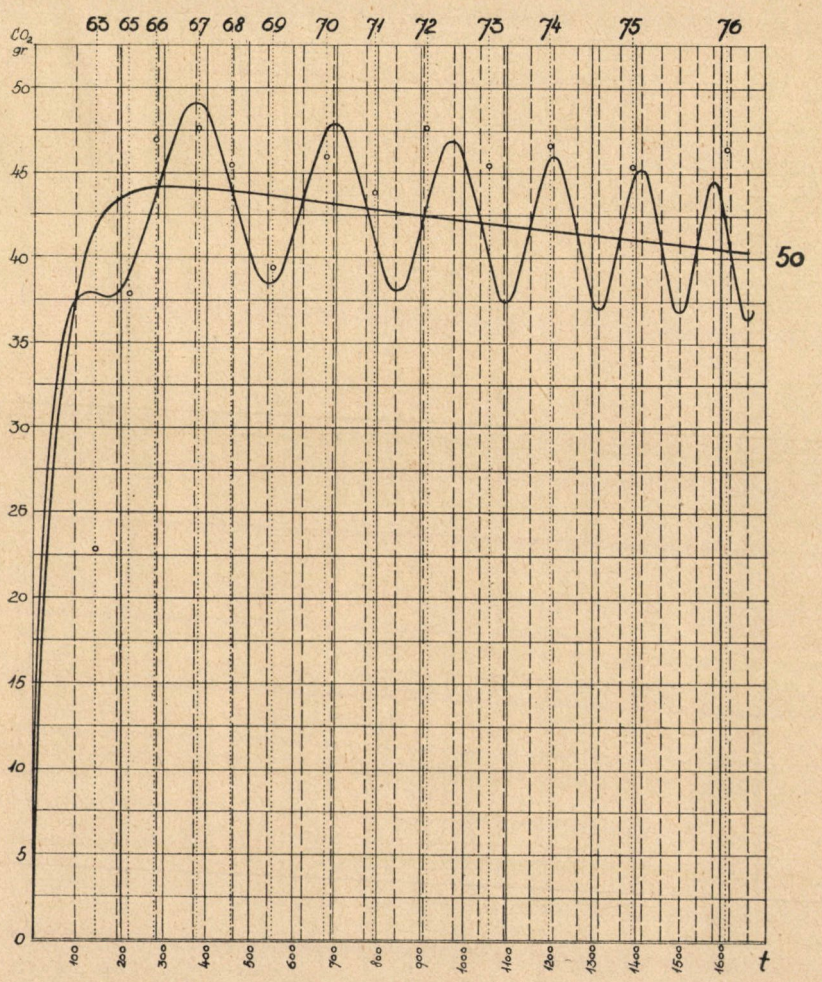


Fig. **19.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a* am **50.** Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 50. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchsichtlichen Werte der Wellenkurve.

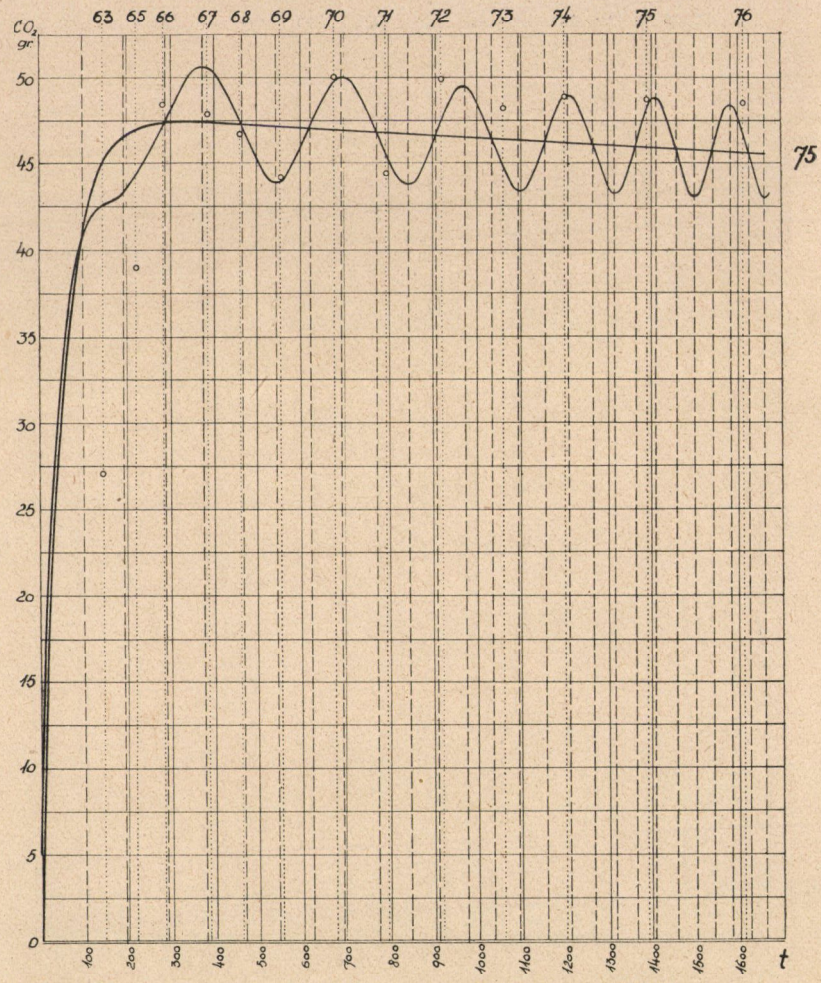


Fig. **20.** Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a* am **75.** Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/*a* ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 75. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchsichtlichen Werte der Wellenkurve.

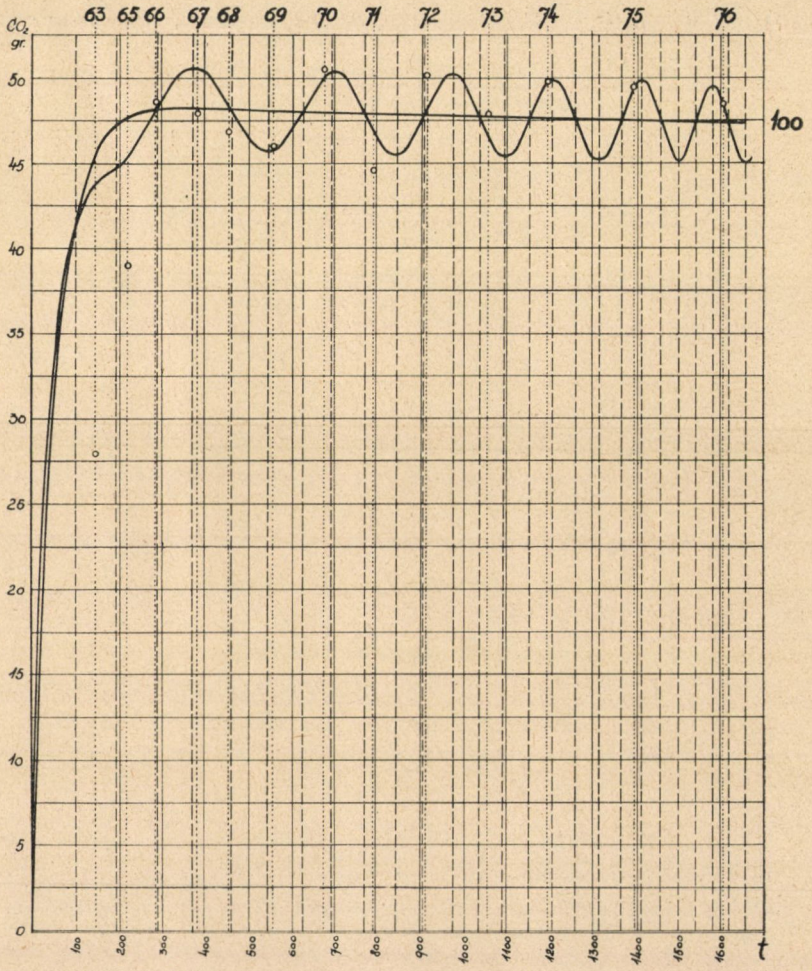


Fig. **21**. Zeigt einen Schnitt der Wellenoberfläche der Fig. **8**/*a* am 100. Tag der Nachkommenentwicklung. Der Schnitt wurde mit der in Fig. **8**/a ersichtlichen Methode erzeugt, und zwar mit einer Ebene, die parallel der mit CO_2 bezeichneten Ordinate und der mit t bezeichneten Abszisse ist, am Ende des 100. Tages der τ-Achse. In die auf diese Weise sich bildende Wellenkurve ist auch die Achse der Wellenkurve hineingezeichnet, die annähernd gleich ist dem durchsichtlichen Werte der Wellenkurve.

rigen Ordinaten sind die von den entsprechenden Nachkommen in der gleichen t Zeit produzierten CO_2 Grössen, und zwar:

in Fig. 11 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 5$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 12 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 10$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 13 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 15$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 14 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 20$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 15 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 25$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 16 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 30$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 17 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 35$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 18 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 40$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 19 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 50$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 20 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 75$ Tagen produzierte CO_2 Menge
in Fig. 21 die von den Nachkommen No 63—75 in $\tau = 100$ Tagen produzierte CO_2 Menge.

Die Punktreihe, welche wir aus den Versuchsergebnissen erhalten, geben annähernd eine Kurve, welche das Aussehen der periodisch gedämpften Schwingungskurve zeigt. Gelang es mir die Wellenkurve zu zeichnen, so geschah die Konstruktion ihrer Achse derart, dass ich die Halbierungspunkte zweier aufeinander folgender Wellenamplituden als Punkte der Achse annahm und sie miteinander verband. Wie aus der Figur ersichtlich ist die Achse nicht parallel mit der Abszissenachse t, sie ist auch nicht geradlinig, sondern nähert sich asymptotisch der Abszisse.

Vergleichen wir die Fig. 11—21, so sehen wir die charakteristischen Angaben, dass sowohl die Anfangsamplituden der einzelnen Wellenkurven, als auch der durch sie legbaren Achsen

je nach den einzelnen Kurven verschiedene Grössen zeigen. Die Ordinaten der Achsen und auch die Ordinaten, die zu denselben Wellenkurvenabszissen gehören, werden in jeder folgenden Figur immer höher: die Kurven steigen. Hingegen steigt nicht konstant die Anfangsamplitude der Wellenkurven, weil sie in beiden einzelnen Kurven nur eine gewisse Zeit lang anhält, während sie den späteren τ Zeitpunkten entsprechend gradatim sinkt und, wie später noch davon die Rede sein wird, sozusagen den aperiodisch gedämpften Gang verfolgt.

Aus den Zeichnungen ist auch gut zu ersehen, dass der in ihnen beschriebene Vorgang *aus der Summierung der Ordinaten (Superposition) der Achsenkurve und Wellenkurve entsteht.*

Die hier theoretisch untersuchten 2 Komponentenkurven sind identisch mit jenen 2 Kurven, deren Vorhandensein ich in meinen IV. Mitteilung gelegentlich der theoretischen Erörterung der Zellteilung ableitete, beschrieb, in Zeichnungen, Funktionen und Tabellen veranschaulichte. Nur mit dem Unterschiede, dass ich dort die Wellenkurven mit geradlinigen Achsen zeichnete, wodurch sie ein einfacheres Bild ergeben, wie die in Fig. 11—21 dargestellten, in welchen die Wellenkurve zur *aperiodischen Achse* hinzuaddiert wird. Die Zerlegung in 2 Kurven, d. h. Komponenten sah ich bereits, wie aus dem Text ersichtlich, schon damals.[1]

Die wellenförmige Kurve wird durch die Gleichung der periodisch gedämpften Schwingung, ihre Achse hingegen durch die Gleichung der aperiodisch gedämpften Schwingung dargestellt.

Ich erachte es als meine Aufgabe, im Folgenden die Funktionen, die in ihnen vorkommenden *Koeffizienten* und die anderen *Komponenten* eingehend zu untersuchen.

In meinen früheren Studien legte ich schon dar, dass sowohl die *periodische*, als auch die *aperiodische* Schwingungsbewegung aus einer gemeinsamen Differentialgleichung entsteht,

---

[1] *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte* Bd. XXXVII. 1930. p. 152 (Sep. 82 S.) 8—26. Zeile. — *Acta Biotheoretica* Series A. Vol. 1. Pars 1—2, 1935 Resumé p. 132. 13—16 Zeilen.

welche ich gelegentlich der Ableitungen in den früheren Mitteilungen mit (6) bezeichnete. Also

$$\frac{d^2s}{dt^2} + w^2 s + 2r\frac{ds}{dt} = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

wobei s die zur Zeit t gehörige Elongation bedeutet und proportional zum Ablauf irgendeiner in der Zeit ablaufenden Lebenserscheinung angenommen werden kann. ds/dt und d^2s/dt^2 bedeuten den ersten, beziehungsweise den zweiten Differentialquotienten, w und r sind Konstanten.

Die absoluten und relativen Werte von w und r können sich ändern und wenn $r > w$ ist, so bekommen wir als Lösung der Differentialgleichung eine *aperiodische Funktion*, ist aber $r < w$, so wird das Ergebnis eine *periodische Funktion* sein, hingegen, wenn $r = w$ ist, so tritt der sogenannte Grenzfall ein. In der IV. Mitteilung, Fig. 2—10 sind die 3 Möglichkeiten bildlich dargestellt. (Berichte XXXVII. pp. 149—157. Sep. Abd. pp. 79—87. 1930.)

Die Lösung dieser mit (6) bezeichneten homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gehört nicht zur Aufgabe dieser Arbeit, Interessenten können sie in den Handbüchern der theoretischen Physik finden.[1] Die Beschreibung der aperiodischen Schwingung sehen wir bereits in der I. Mitteilung (1929 *a*—1929 *b*) dann in der III.[2] (1929 *d*). Mit ihrer Hilfe ist

---

[1] Fröhlich: Az elméleti Physika Kézikönyve. I. kötet. Kinematika. Budapest, 1892, § 96. 133. l.

Szily K.: Mechanika II. kötet. Dinamika. Budapest, 1920.

Chwolson. O. D., Traité de Physique. Paris, 1906. T. 1. fasc. 1.

— Lehrbuch der Physik. 2. Auflage. Bd. IV. 2. 85—90. Fr. Vieweg. Braunschweig, 1927.

Haas, A., Einführung in die theoretische Physik. Berlin und Leipzig, Gruyter et Comp. 1930. p. 136—151.

Geiger—Scheel: Handbuch der Physik. Bd. V. s. 323 uff. I. Springer 1927.

Müller—Pouillet: Lehrbuch der Physik. 11. Aufl. Bd. I. T. 1. S. 371—405. Fr. Vieweg. Braunschweig, 1929.

[2] Kövessi F.: Matematikai és Természettudományi Értesítő 1929. évi XLV. kötet, 657. lap és 679. lap.

die Wellenachse gut ausdrückbar. Da $r > w$ ist, folgt laut Gleichung (8) der III. Mitteilung:

$$s_h = \frac{v_{01}}{\sqrt{r_1^2 - w_1^2}} e^{-r_1 t} \frac{e^{+t\sqrt{r_1^2-w_1^2}} - e^{-t\sqrt{r_1^2-w_1^2}}}{2} \cdots\cdots (8a)\cdots(14a)^1$$

wobei s_h die Elongation bedeutet, und proportional zu irgendeiner Lebenserscheinung ist. Den Index h in der Formel der aperiodischen (s_h *sin. hyperbolikus*) Funktion benütze ich, um dieselbe von der später zu behandelnden s_p periodischen Funktion unterscheiden zu können; t ist die Zeit; w_1 ist die Konstante der quasi-elastischen Kraft; r_1 ist der Koeffizient der die aperiodische Dämpfung, resp. den biomotorischen Widerstand ausdrückt; v_{01} ist die Anfangsgeschwindigkeit und $e = 2{\cdot}71828\ldots$ ist die Basis des natürlichen Logarithmus. Mit Hilfe der Bezeichnungen

$$M_1 = \sqrt{r_1^2 - w_1^2}$$

und

$$a_1 = \frac{v_{01}}{\sqrt{r_1^2 - w_1^2}} = \frac{v_{01}}{M_1} = \text{die grösste Elongation}$$

folgt aus (8*a*)

$$s_h = a_1 e^{-r_1 t} \frac{e^{+M_1 t} - e^{-M_1 t}}{2} \cdots\cdots (8a)\cdots(14a)$$

Oder da

$$\frac{e^{+M_1 t} - e^{-M_1 t}}{2} = \sinh(M_1 t)$$

ist, wobei $\sinh(M_1 t)$, die zum $(M_1 t)$ Argumentum gehörige hyperbolische sinus-Funktion bedeutet.

— Matematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 1929. Bd. 36 s. 38 und s. 94 (8)., auch Sep. Abdr. pp. 62—99.

— Erdészeti Kísérletek. 1929. XXXI. k. 272. l. (1) és 1931. XXXIII. évf. 8. lap (14).

[1] Von den zum Numerieren der Gleichungen in Klammern gestellten 2 Ziffern bezieht sich die erste (z. B. (8*a*)) auf die im *Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Anzeiger* in deutscher Sprache erschienene Mitteilung, während sich die zweite (z. B. (14*a*)) auf die in ungarischer Sprache erschienenen *Erdészeti kísérletek* bezieht.

Mit ihrer Hilfe können wir *(8a)* (14*a*) einfacher schreiben[1]

$$s_h = a_1 e^{-r_1 t} \sinh (M_1 t)., \ldots\ldots (8a) \ldots (14a)$$

Die Gleichung, welche die Funktion der periodisch gedämpften Schwingung ausdrückt, sahen wir bereits in meiner IV. Mitteilung[2] wo ich die aus der Änderung der numerischen Werte der Koeffizienten folgenden Kurvenänderungen in Figuren und Tabellen gezeigt habe. Da $r_2 < w_2$ ist, wird $\sqrt{r_2^2 - w_2^2}$ imaginär, also

$$\sqrt{r_2^2 - w_2^2} = i\sqrt{w_2^2 - r_2^2}$$

daraus wird mit Hilfe von *(8)*.

$$s_p = \frac{v'_{02}}{i\sqrt{w_2^2 - r_2^2}} e^{-r_2 t} \frac{e^{+(i\sqrt{w_2^2 - r_2^2})t} - e^{-(i\sqrt{w_2^2 - r_2^2})t}}{2}, \ldots\ldots (16)$$

und daraus folgt weiter

$$s_p = \frac{v'_{02}}{\sqrt{w_2^2 - r_2^2}} e^{-r_2 t} \frac{e^{+(i\sqrt{w_2^2 - r_2^2})t} - e^{-(i\sqrt{w_2^2 - r_2^2})t}}{2i} \ldots\ldots (16a).$$

Der letzte Faktor dieser Gleichung wird nach der Eulerschen Relation:

$$\frac{e^{+(i\sqrt{w_2^2 - r_2^2})t} - e^{-(i\sqrt{w_2^2 - r_2^2})t}}{2i} = \sin\left(t\sqrt{w_2^2 - r_2^2}\right) = \sin M_2 t.$$

Berücksichtigen wir diese und die unten angegebenen Bezeichnungen, so kommen wir zu der folgenden ausserordentlich einfachen Gleichung:

$$s_p = Ae^{-r_2 t} \sin (M_2 t)., \ldots\ldots (8b) \ldots (16b)$$

---

[1] Ligowski, W., Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen. Nebst einem Anhange enthaltend die Theorie der Hyperbelfunktionen. Berlin, 1890. Ernst et Korn.

[2] Kövessi F. Matematikai és Természettudományi Értesítő 1929. XLVI. kötet 468. lap (16) (16*a*) (16*b*).

Kövessi F.: Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 1930. s. 153 (sep. s. 83) (8) *(8a)*.

Kövessi F.: Erdészeti Kísérletek. 1931. évf. XXXIII. kötet 143—144. lap (16) (16*a*) (16*b*).

in welcher A, M_2, r_2, w_2 und t reale Grössen sind. Die Buchstaben bedeuten: s_p ist die Elongation der periodisch gedämpften Schwingung, die proportional zu irgend einer Lebenserscheinung angenommen werden kann, p ist der Index zum Ausdruck der Periodizität, durch welchen wir ihn von der sin *hyperbolikus* s_h Funktion unterscheiden; t ist die laufende Zeit; w_2 ist der Koeffizient von der die periodische Bewegung veranlassenden Kraft; r_2 ist der Koeffizient der periodischen Dämpfung, resp. des biomotorischen Widerstandes; v_{02} bedeutet die Anfangsgeschwindigkeit; $e = 2{\cdot}71828\ldots$ ist die Basis des natürlichen Logarithmus; sin $(M_2 t)$ resp. cos $(M_2 t)$ sind die trigonometrischen Funktionen des Argumentes $(M_2 t)$; neben der Zeit t ist $M_2 = \sqrt{w_2^2 - r_2^2} = 2\,\pi/T$, wobei $\pi = 3{\cdot}14159$ die LUDOLFsche Zahl bedeutet; T ist die Schwingungsdauer.

Eine andere hier benützte Abkürzung ist noch:

$$A = \frac{v_{02}}{\sqrt{w_2^2 - r_2^2}} = \frac{v_{02}}{M_2} = \text{Amplitudo},$$

also die grösste Elongation der Bewegung.

Addieren wir die beiden Gleichungen und bezeichnen die Summe derselben mit y, so folgt:

$$y = s_h + s_p, \ldots\ldots\ldots (11) \ldots (19)$$

respektive:

$$y = a_1 e^{-r_1 t} \frac{e^{+M_1 t} - e^{-M_1 t}}{2} + A e^{-r_2 t} \sin M_2 t, \ldots\ldots (11a) \ldots (20a)$$

oder nach einen später zu besprechenden Umformung:

$$y = a_1 e^{-r_1 t} \sinh (M_1 t) + a_2 e^{-r_2 t} \cos (M_2 t), \ldots (11b) \ldots (20b).$$

Mittels dieser Gleichung können wir einen beliebigen Punkt eines beliebigen Schnittes der Wellenoberfläche ausrechnen, wenn wir vorher aus den Versuchsergebnissen die Koeffizienten r_1, w_1, v_{01}, resp. r_2, w_2, v_{02}, die sich auf den Schnitt beziehen, festgestellt haben. Die Ausrechnung dieser Koeffizienten verspricht sehr aufschlussreich zu sein, denn wenn wir sie kennen, können wir

Schlüsse ziehen auf die im Lebewesen wirkende biomotorische Kraft w_1 und w_2, auf den biomotorischen Widerstand r_1 und r_2, auf die Amplitude a_1 und a_2, und auf die Anfangsgeschwindigkeit v_{01} und v_{02}. In Laufe der Berechnungen werden wir Gelegenheit haben eine Reihe anderer Faktoren, ihre Grössen und ihre Änderungen kennen zu lernen, wodurch es uns gelingen wird den ganzen Komplex besser zu durchschauen.

Wegen Raummangels, nach welchem ich mich richten muss, werde ich die mit Gleichung *(11b)* ausgeführten numerischen Berechnungen und andere Erörterungen in meiner nächsten Publikation eingehend behandeln.

Zusammenfassung der VII. Publikation.

Verfasser zeichnet in dieser VII. Publikation auf Grund der Versuchsergebnisse (V. und VI. Publ.) die aus dem Schnitten der Wellenoberflächen sich ergebenden Wellenkurven und deren Achsen und konstatiert, dass diese aus 2 Komponenten bestehen, deren eine s_h die Achse der Wellenkurve ist, die mit Hilfe der Gleichung der aperiodisch gedämpften Schwingung beschrieben werden kann, also

$$s_h = a_1 e^{-r_1 t} \frac{e^{+t\sqrt{r_1^2 - w_1^2}} - e^{-t\sqrt{r_1^2 - w_1^2}}}{2}, \ldots (8a) \ldots (14a)$$

und die andere s_p, ist die Wellenkurve selbst, die mit der Gleichung der periodisch gedämpften Schwingung identisch ist:

$$s_p = a_2 e^{-r_2 t} \cos\left(t\sqrt{w_2^2 - r_2^2}\right), \ldots\ldots (8b) \ldots (16b)$$

und die ganze Bewegung y stimmt überein mit der Summe dieser beiden Gleichungen:

$$y = s_h + s_p, \ldots\ldots\ldots (11) \ldots (19).$$

respective y kann folgendermassen ausgedrückt werden:

$$y = a_1 e^{-r_1 t} \sinh(M_1 t) + a_2 e^{-r_2 t} \cos(M_2 t) \ldots (11b) \ldots (20b).$$

v_0, a_1, r_1, w_1, M_1, a_2, r_2, w_2 M_2 Koeffizienten; t die laufende Zeit und $e = 2{\cdot}71828$ die Basis des natürlichen Logarithmus und

$$M_1 = \sqrt{r_1^2 - w_1^2},\ \sinh(M_1 t) = \frac{e^{+M_1 t} - e^{-M_1 t}}{2};\ M_2 = \sqrt{w_2^2 - r_2^2}\ \text{ist.}$$

Die Details werden durch Fig. 14 leichter verständlich gemacht.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Dec. 1936.)

AZ ÉLŐLÉNYEK FEJLŐDÉSE SZABÁLYOSSÁGÁNAK A MAGYARÁZATA.

KÖVESSI FERENC-től.

Az erjesztő sejtek (Saccharomyces spec.) fejlődésében uralkodó törvényszerűségeket kifejező hullámgörbéknél szereplő aperiodusos tengely tanulmányozása és coefficienseinek kiszámítása.[1]

VIII. közlemény összefoglalása.

Szerző az V. és VI. tanulmányok folyamán bemutatott kísérleti adatok közötti összefüggést, a VII. közleményben látott egyenletek segélyével részletesen analysálja, jelen VIII. közleményben pedig a hullámgörbék s_h jelzésű tengelye tetszésszerinti pontjának kiszámításához vezető műveleteket részletesen leírja.

A tanulmány fejezetei a következők:

1. A tengely coefficienseinek kiszámításához szükséges adatok megállapításáról.

2. A t és τ betűkkel jelzett időszámítások közötti különbségről és a közöttük fennforgó összefüggésről.

3. Az aperiodusos tengely coefficienseinek kiszámítási módjáról.

4. Az w_1, r_1, a_1 coefficiensek kiszámításáról, $\tau = 30$ napi metszetnek megfelelő hullámgörbe tengelyének adatai alapján.

5. Az aperiodusos függvény coefficienseinek kiszámításához használandó adatok előzetes megvizsgálásáról.

6. Az w_1, r_1, a_1 coefficiensek kiszámítása az összes hullámgörbék tengelyénél.

---

[1] Ezen vizsgálatok elvégzésénél előnyösen használtam a v. Harbou-féle *Integro-differentiator* készüléket, melyet az *Országos Természettudományi Tanács* támogatásával szereztem be. A hathatós segítségért ezen alkalommal is őszinte köszönetemet fejezem ki.

7. Az aperiodusos tengely tetszésszerinti pontjainak kiszámítása w_1, r_1, a_1 coefficiensek segélyével.

8. A különféle hullámgörbékhez tartozó tengelyek összehasonlításáról.

9. A tengelymaximumhoz tartozó időpontnak és a maximum számértékének kiszámításáról.

10. A tengelymaximumok biologiai jelentőségéről.

Ezen vizsgálatok eredményét a 10. pont alatt úgy foglalja össze a szerző, hogy kifejti, hogy a hullámgörbe aperiodusos tengelye futásának és az s_h *alakú fejlődési pályamaximum időpontjának és maximumértékének ismerete nemcsak elméleti jelentőségű, de annak fontos gyakorlati haszna is van. Elsősorban például a szaporodás, a nemesítés, az öröklés biologiájának tanulmányozása, főleg pedig a fajbiologia terén. Ezeknek az ismereteknek a birtokában valamely tulajdonság maximális kitenyésztésének tudatos irányítói lehetünk.* Mert ha akár egyes vegetativ sejtekből (például *Saccharómyces* spec.-ből) származó tiszta tenyészetet, az egymásután következő maximumok időpontjában rendszeresen átoltva, folytonosan maximális értékükben kiválasztunk és tovább tenyésztünk, vagy ivaros úton az egymásután következő generációknál (akár beltenyésztésnél, akár keresztezésnél) úgy az anyát, mint az apát ebben az állapotban párosítjuk és a maximális irányban fokozódó, mindig jobb képességű utódokat állandóan figyelemmel kísérjük, majd kellően selectáljuk, idővel olyan legmagasabbfokú jótulajdonsággal bíró utódot vagy utódokat kaphatunk, milyenhez egyébként csak véletlenül, hosszú kísérletezés, nagy tömeggel, nagy türelemmel végzett terjedelmes tenyésztési körülmények mellett juthatunk.

Természetesen a munkaképességi, vagyis potentiális tulajdonságok nemcsak a tengely értékével, hanem a hullámgörbe hullámzó értékeivel is összefüggésben vannak, ezért ezeket az eddigi ismereteket ki kell egészítenünk, a potentiál periodusos hullámzásával együttjáró változásokból következő ismeretekkel. A hullámgörbe értéke a tengelyhez, mint a VII. közleményben láttuk, előjele szerint hozzáadódik. Mivel pedig a hullámgröbe sinus-cosinus görbe jellegű, aminek előjele egy periodus alatt is változik, vagyis mint a VII. közlemény 11—21. számú ábrákon láthatjuk, egyik félperiodus alatt a tengelyhez hozzáadódik, másik félperiodus

alatt abból levonódik, természetesnek látszik, hogy az utódok potentiálja és az azzal összefüggő összes tulajdonságok is folyton és tág határok között változnak.

Az idevonatkozó szabályszerűség ismertetését és az abból levonható következtetéseket részletesebben nem lehet tárgyalni, míg a hullámgörbe viselkedésének szabályait meg nem ismertük. Ha a következő közlemények alapján ezekkel is tisztában leszünk, akkor fog a Szerző erre a kérdésre ismét visszatérni.

A tanulmányt 9 táblázat és 9 darab grafikai rajz teszi világosabbá és könnyebben érthetővé.

(Bemutattatott a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának 1937. évi Január hó 18-án tartott rendes ülésében.)

Ugyanezen VII. és VIII. sz. közlemény teljes szövege szerint *magyar nyelven* megjelenik az *Erdészeti Kísérletek*-ben Sopron, Műegyetem.

ERLÄUTERUNGEN DER GESETZMÄSSIGKEITEN IM ABLAUFE DER LEBENSERSCHEINUNGEN LEBENDER WESEN.

Von FRANZ KÖVESSI. (Budapest.)

VIII. Mitteilung.

Untersuchung und Berechnung der Koeffizienten der aperiodischen Achse der Wellenlinie, welche die Entwicklung der Gärungspilze (Saccharomyces spec.) beschreibt und ihre Gesetzmässigkeit darstellt.[1]

In meiner VII. Mitteilung sind die abgeleiteten und eingehend besprochenen zwei Gleichungen zu finden. Beginnen wir unsere Untersuchung mit der *die Achse ausdrückenden aperiodischen Funktion.* (8)

In erster Linie müssen wir die zur Berechnung nötigen Daten zusammenstellen, auf deren Basis wir dann zur Entwickelung der Koeffizienten übergehen können.

1. *Mitteilungsdaten, die zur Berechnung der Achsenkoeffizienten nötig sind.*

Zur Berechnung jedes Achsenkoeffizienten müssen wir die den vier Zeitpunkten entsprechenden s_h-Grössen kennen; u. z. die Grössen $s_h(0)$, $s_h(300)$, $s_h(600)$ und $s_h(900)$, in der Entwicklung der Mutter zur Zeit $t = 0$, $t = 300$, $t = 600$ und $t = 900$

[1] Bei diesen Untersuchungen machte ich vorteilhaften Gebrauch vom v. HARBOU-schen *Integro-differenziator*, den ich mit Beihilfe des *Landes-Naturwissenschaftlichen Landes-rates* anschaffte. Für diese Hilfe drücke ich auch auf diesem Wege meinen aufrichtigen Dank aus.

Stunden. Ich konnte sie feststellen, indem ich auf der in meiner VII. Mitteilung (S. 18.) beschriebenen Weise in die Wellenkurven die Achsen hineinzeichnete und ihren numerischen Wert an den zu den Mutterzeitpunkten $t = 0$, $t = 300$, $t = 600$, $t = 900$ gehörigen Ordinaten abmass. Diese Zeichnungen fertigte ich ähnlich

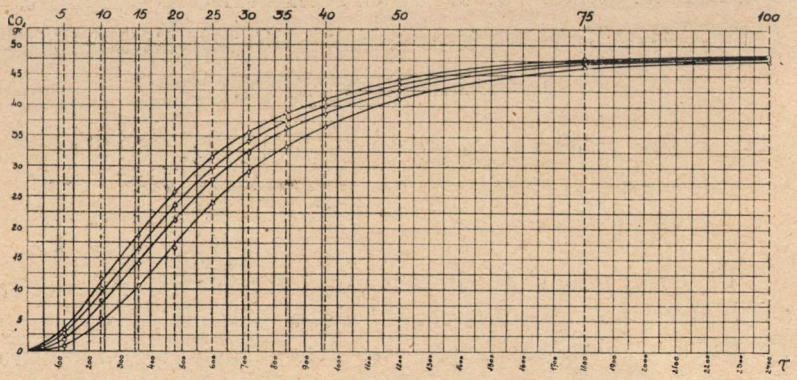


Fig. **22.** Die Schnitte der Wellenoberfläche der Fig. 8/*a* sind auch zu sehen; diese zeigen charakteristische Angaben über die Achsen der hiebei zustandekommenden Wellenlinien. (Die Wellenoberfläche schnitt ich mit einer mit t und gleichzeitig mit CO_2-Achse parallelen Ebene an mehreren Stellen, u. z. dort, wo $\tau = 5$, $\tau = 10$, $\tau = 15$, $\tau = 20$, $\tau = 25$, $\tau = 30$, $\tau = 35$, $\tau = 40$, $\tau = 50$, $\tau = 75$ und $\tau = 100$ Tage war.) Die Grössen der CO_2-Ordinaten fasste ich in die Tab. XVIII entsprechend den Abszissen $t = 0$, $t = 300$, $t = 600$, $t = 900$, $t = 1500$ Stunden, und um sie anschaulicher zu machen, fertigte ich aus ihnen die Fig. 22. Hier ist deutlich zu erkennen, dass die Achsen der aperiodischen Kurven und die Schnittpunkte der einzelnen Ebenen sich auf einer S-förmigen Kurve anordnen. In dieser Figur gehört die oberste S-förmige Kurve zu $t = 300$ Stunden nach der Überimpfung aus der Mutterkultur, die zweite zu $t = 600$ die dritte zu $t = 900$ die vierte, unterste zu $t = 1500$ Stunden.

den Fig. 11—21, doch in grösserem Format auf Millimeterpapier an, an welchen die Messungen, resp. die Ablesung der Achsenpunkte an den Ordinaten leicht und genau ausführbar war. Auf diese Weise holte ich mir die Angaben betreffend die dem 5., 10., 15., 20., 25., 30., 35., 40., 50., 75., 100. Tag zugehörenden Wellenoberflächen, deren Schnitte Wellenlinien ergeben; deren Achsen

XVIII. Tabelle.

Die Daten welche sich auf die Kurven beziehen, die in den mit den t und CO_2 Achsen parallelen Schnitten liegen und sich im Leben der Mutter auf die Zeiten 0, 300, 600 und 900 Stunden beziehen, geben die von der Nachkommenschaft in 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75 und 100 Tagen entwickelten CO_2 Mengen an, die in der 3, 4, 6 und 8 Spalte der Tabelle enthalten sind. Den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen den Grössen zeigt Figur 22. Die auf Grund dieser Angaben entwickelten Koeffizienten w_1 r_1, M_1, a_1, v_{01} sind in der Tab. XXI. eingetragen

Entwicklungszeit der Nachkommen		Die Lebensfunktion der Nachkommen, dargestellt mit Hilfe der seit der Überimpfung entwickelten Menge CO_2 (Angegeben in gr Gewicht).								$\frac{s_3}{\sqrt{\frac{s_2 s_4}{3}}} < 2$
		$t_1=0$	$t_2=300$		$t_3=600$		$t_4=900$		$t_n=1500$	
Tage	Stunden	nach soviel Stunden, soviel CO_2 gr								
		$4s_1$	$4s_2$	s_2	$4s_3$	s_3	$4s_4$	s_4	$4s_{t=1500}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	120	0	3·250	0·812,0	2·350	0·587,50	1·500	0·375	0·55	1·843
10	240	0	11·742	2·935,5	10·025	2·506,85	8·127	2·031,75	5·30	1·777
15	360	0	18·750	4·687,5	16·750	4·187,50	14·400	3·600	10·60	1·765
20	480	0	25·814	6·454,5	23·538	5·884,50	21·073	5·268,25	16·87	1·748
25	600	0	31·500	7·875,0	29·750	7·437,50	27·800	6·950	24·00	1·741
30	720	0	35·500	8·875,0	33·980	8·495,00	32·240	8·060	29·10	1·740
35	840	0	38·500	9·625,0	37·500	9·375,00	36·200	9·050	33·30	1·740
40	960	0	40·750	10·187,5	39·800	9·950,00	38·660	9·665	36·50	1·736
50	1200	0	44·100	11·025,0	43·420	10·855,0	42·570	10·642,5	41·00	1·731
75	1800	0	47·400	11·850,0	47·120	11·780,0	46·700	11·675	46·00	1·738
100	2400	0	48·160	12·040,0	48·100	12·025,0	47·900	11·975	47·30	1·734

sind es, die ich suchte, und deren Ziffern fügte ich in die XVIII. Tabelle ein, und schliesslich, um die zwischen ihnen herrschende Gesetzmässigkeit klarer zu sehen, verfertigte ich nach ihnen die Fig. 22.

2. *Über den Unterschied der mit t und τ bezeichneten Zeiten und über ihren Zusammenhang.*

Bei Betrachtung der Fig. 22 wird es auffallen, dass ich auf der horizontalen Achse die *Entwicklungszeit der Nachkommen* nicht mit t bezeichnete, mit welchem ich die Überimpfungszeit der Mutterzellen, also den Beginn der Nachkommenkulturen benannte, sondern mit τ, obwohl ich auch diese Zeit mit Minuten, Stunden, Tagen mass. Jedoch ich musste diese im Interesse der räumlichen Darstellung in der Fig. 8/*a* und des Verständlichmachens unterscheiden von der mit t bezeichneten laufenden Zeit der Mutterkultur.

Wir verstehen die Situation, wenn wir die Fig. 8/*a* betrachten. In dieser Figur sind die Vorgänge räumlich dargestellt, so dass wir hinten links drei sich im O-Punkte schneidende, in Wirklichkeit drei aufeinander senkrechte Gerade sehen: Die eine steht lotrecht und ist mit CO_2 bezeichnet. Diese Gerade ist die Ordinate, auf welche die in den Zeiten erhaltene CO_2-Grössen aufgetragen sind. Die Zweite, ebenfalls mit dem Anfangspunkte O geht von der linken Seite der Figur auf der letzten Linie senkrecht nach rechts, und wegen der Perspektive nach oben und ist an ihrem Ende mit t bezeichnet. Diese Achse ist die Abszisse, auf welcher abzulesen ist, wann ich aus der Mutterkultur, zu den verschiedenen Zeiten der Zellentwicklung, die einzelnen Nachkommen übergeimpft habe. Die Impfungszeit der Mutter ist mit O bezeichnet, dann kommen in der Reihe die Nachkommen Nr. 63, 65, 66, 67..., 75, so wie wir diese Nummern auf der der hintersten, mit t bezeichneten Abscisse parallelen, vordersten, ebenfalls mit t bezeichneten Linie sehen. Die dritte Achse, die vom O-Punkte am linken Rande der Figur hervorkommt, bezeichnet ebenfalls die Zeit, und zwar jene Zeit, während welcher sowohl die Mutter, wie auch die Nachkommen ihre individuelle Lebensfunktion, z. B. die CO_2-Bildung seit dem Zeitpunkte t_n ausübten. Diese Zeit ist mit τ bezeichnet.

Bezeichnen wir den Zeitpunkt der n-ten Impfung mit t_n, so ist der Zusammenhang zwischen t und τ mit Hilfe der der Gleichung

$$t = t_n + \tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

ausgedrückt.

Der Unterschied in der Darstellung zwischen diesen in zweierlei Zeiten vor sich gehenden Entwicklung besteht darin, dass wenn wir die Vorgänge an mit der τ Achse parallelen Schnittflächen beobachten (wie aus Fig. 8/*a* ersichtlich), so zeigt jeder Schnitt der Wellenoberfläche ein *S*-förmiges Bild. In dieser Richtung dominiert der *individuelle oder ontogenetische* Charakter der Zellen. Das bedeutet soviel, dass der ontogenetische Charakter den gelegentlich der Überimpfung von Eltern gleicher potentialer Eigenschaften stammenden filogenetischen Charakter verdeckt.

Hingegen parallel mit der t-Achse, also senkrecht auf die τ-Achse geführte Schnitte, wie aus Fig. 8/*a* am 32. Tage geführten Schnitt ersichtlich, ergeben Wellenlinien. Diese Wellenlinie kommt infolge des fortwährenden Wechsels in der Arbeitsfähigkeit (Potential) der sich in der Mutter kultur stets erneuernden Zellgenerationen zustande, und wie ich in meiner VI. Mitteilung (Anzeiger 1935, S. 667 u. f.) nachwies, hängt sie mit der phylogenetischen Entwicklung zusammen. Die individuellen oder potentialen Eigenschaften, welche die Nachkommenzellen aus den Mutterzellen brachten, unterscheiden sich von der vorausgegangenen Generation periodisch und dadurch wird die CO_2-Produktion der nacheinander folgenden Nachkommen, trotz der gleichen physikalischen, chemischen und anderen äusseren Verhältnissen, ein sehr verschiedenes Resultat ergeben. Kurz ausgedrückt: Bei dieser Versuchsanordnung dominieren die potentialenen Eigenschaften über die äusserlich einwirkenden Faktoren, was wir im Falle der reinphasigen Mutterkulturen klar erkennen können.

Wenn wir senkrecht auf die τ-Achse in den Punkten $\tau = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75, 100 Tage Serienschnitte machen, können wir leicht erkennen, dass die aus einem beliebigen Punkte der t-Achse ausgehenden CO_2 Grössenreihe entlang der Schnittkurve der *S*-förmigen Kurven entsprechende Erhöhungen zeigt, wie dies aus Fig. 8/*a*, resp. aus Fig. 22 genau ersichtlich ist.

In Fig. 22 sind die τ Zeiten auf der horizontalen Achse, das heisst Abszisse, unten *in Stunden* angegeben, auf der obersten Linie geben die Ziffern 5, 10, 15, 20, 25, 30 etc. die τ Zeiten *in Tagen* an, auf welche sich die Flächenschnitte beziehen.

Um die Zeichnung leichter zu konstruieren und um sie leichter verständlich zu machen, zeichnete ich diese Zeiten mit gestrichelten Linien, auf welche ich die in Tabelle XVIII angegebenen numerischen Grössen auftrug.

In Fig. 22 sind vier *S*-förmige Kurven eingezeichnet auf Grund von Schnitten, die bei $\tau = 5, 10, 15 \ldots 100$ Tagen angefertigt wurden. Die oberste entspricht einer Überimpfung aus der Mutterkultur bei $t_n = 300$, die zweite bei $t_n = 600$, die dritte bei $t_n = 900$ und die unterste bei $t_n = 1500$ Stunden.

Bei dieser Gelegenheit wird es zweckmässig sein, nochmals darauf aufmerksam zu machen, dass die mit der in Fig. 8/*a* gezeichnete Wellenoberfläche eine die Zeit t darstellende Abszissenachse hat; die Achsen der Wellenlinien, die bei parallel mit der Abszisse geführten Schnitten entstehen, haben einen s Charakter, also einen aperiodische Schwingung zeigenden, während die Komponenten der Schnitte, die parallel mit der τ Zeit zeigenden Achse geführt wurden, zur Funktion S gehören. Diese Beobachtung wird uns später wichtige Anwendungen ermöglichen.

3. *Methode zur Berechnung der Koeffizienten der aperiodischen Achse.*

Wenn wir die zur Berechnung benötigten Angaben in der oben angegebenen Weise in der Tab. XVIII zusammengestellt haben, dann folgt die Berechnung der Koeffizienten der Achsen mit Hilfe der Gleichung, die die aperiodisch gedämpfte Schwingungsbewegung ausdrückt.

Das allgemein Wissensnotwendige zur Berechnung der Koeffizienten und der s-Grössen finden wir in der I. Mitteilung sub (1), (2), (3). (Berichte 1929, S. 38, im Separatabdruck S. 12.), ferner ebenda die zur Rechnung nötigen Ableitungen bei den Gleichungen 1*a)*, 1*b)*, 1*c)*, 1*d)* auf S. 54—55, im Separatabdrucke auf S. 28—29. Ebendaselbst in der Tab. II. (S. 56, im Separatabdrucke S. 30—31) zeigte ich auch ein Beispiel, wie die Koeffizienten w_1, r_1, a_1, b_1 aus-

gerechnet werden. In der III. Mitteilung gelang es mir, auf Grund von biologischen Erwägungen die bisher verwendete Gleichung derart zu vereinfachen (Berichte 1929, S. 93—95, im Separatabdruck S. 67), dass ich die in der Gleichung vorkommenden Koeffizienten a und b durch einen gemeinsamen Koeffizienten $a = -b$ ersetzte, wodurch die Zahl der Koeffizienten in den Gleichungen (8). (14). sich auf drei reduzierte, d. h. auf w, r und a. Die biologischen Erwägungen zeigen nämlich, dass zu Beginn der Entwicklung, also zur Zeit $t = 0$, $s = 0$ ist, was in der Gleichung so ausgedrückt wird, dass die Kurve durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, in welchem Falle sich in den Gleichungen (14), (14*a*) und (14*b*) die Vereinfachung von selbst ergibt, deren Anwendung viele Vorteile bietet.

4. *Berechnung der Koeffizienten* w_1, r_1 *und* a_1, *auf Grund der Daten, welche sich aus der Achse der dem 30-tägigen Schnitt entsprechenden Wellenkurve ergeben.*

Zur Berechnung der Koeffizienten w_1, r_1, a_1 brauchen wir bei dieser Methode, wie auch bei unseren vorherigen Rechnungen 4 Daten, s_1, s_2, s_3 und s_4, deren erste bei $t_0 = O$, $s_1 = O$ sein wird, während die Ordinaten zu den Punkten s_2, s_3, s_4 aus den experimentellen Daten zu entnehmen sind. In meiner I. Mitteilung (Berichte 1929, S. 52—59 und Separatabdruck S. 26—33) erläuterte ich, dass die zur Berechnung benötigten s_1, s_2, s_3 und s_4 voneinander in gleicher λ Entfernung liegen müssen. Von diesen drei Versuchspunkten ist es zweckmässig den Punkt s_2 beim Maximum der gedämpften Schwingungsbewegung oder in seiner Nähe anzunehmen, während die anderen so zu wählen sind, dass zwischen ihnen gleichförmig $t_2 - t_1 = \lambda$, $t_3 - t_2 = \lambda$ und $t_4 - t_3 = \lambda$, Zeitintervall sei, denn unter diesen Bedingungen ist die Lösung der Gleichungen erleichtert. Die in der Tabelle XVIII. den Zeitpunkten $t=0$, $t=300$, $t=600$ und $t=900$ entsprechenden s_0, s_{300}, s_{600} und s_{900} correspondiren nach dieser Bedingung.

Um Irrtümer zu vermeiden muss ich erwähnen, dass ich um Zeit und Arbeit zu sparen, die Differenzierungen statt in je einer Stunde, in Zeitintervallen von je vier Stunden ausführte. Dies bezieht sich sowohl auf die jetzt erwähnten Untersuchungen, wie auch auf die

in der VI. Mitteilung, Tabelle XVII. angegebenen Koeffizienten berechnung der Wachstumskurven. Da in unseren Berechnungen die *Stunde* als *Einheit der Zeit* gilt, können wir Verwirrungen nur so vermeiden, wenn wir die auf vier Stunden bezogenen CO_2-Differenzen mit vier dividieren. Somit wird

$$\frac{S_n - S_{n-4}}{t_n - t_{n-4}} = \frac{4\Delta S_n}{4\Delta t_n} = \frac{4s_n}{4} = s_n$$

wobei $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$, die CO_2 Zunahme pro Stunde und $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = 1$ Stunde bedeutet.

Aus diesen s die nunmehr auf die Zeiteinheit sich beziehenden Differenzgrössen bedeuten, berechnete ich die Koeffizienten w_1, r_1 und a_1.

Für die geplanten Berechnungen sind die Grössen $4s$, wie auch s in den Kolonnen 4, 5, 6, 7, 8, 9 der Tab. XVIII. ersichtlich.

Natürlich, wenn der auf obige Weise berechnete Differenzquotient s_n sich auf das einstündige Wachstum bezieht, so müssen wir, wenn wir das vier Stunden entsprechende $S_n - S_{n-4} = 4\Delta S_n = 4s_n$ Wachstum (CO_2) kennen wollen, die Grösse s_n mit 4 multiplizieren.

Sodann gibt es auch in folgender Gleichung der Koeffizienten $a = -b$ eine Änderung gegen die jetzt benützte und in meiner I. Mitteilung auf Tabelle N° 2 (Berichte 1929, S. 56, Separatabdruck S. 30) dargelegten Rechnungsmethode; deshalb wird es am zweckmässigsten sein, wenn ich die Berechnungsmethode von w_1, r_1 und a_1 an einem Beispiele klar mache.

Nehmen wir z. B. jenen Schnitt der Wellenoberfläche, der den von den Nachkommen in $\tau = 30$ Tagen entwickelten CO_2-Grössen entspricht; seine Daten finden wir in der Tab. XVIII. Die danach gezeichnete Kurve enthält Fig. 16.

Sowohl bei dieser, wie bei allen anderen Berechnungen der Wellenachsen, nahm ich einheitlich Intervalle von $x = 300$ Stunden an. Auf diese Weise wird $4s$, wie erwünscht, in der Nähe des Maximalwertes der aperiodischen Kurve liegen, dabei ist das dem $4s_4$ entsprechende $t = 900$ Stunden ein genügend grosses Zeitintervall, um in der Gleichung nicht allzuweit extrapolieren zu müssen, wenn wir den entferntesten Wert, etwa bei $t = 1670$ Stunden ausrechnen wollen.

Entnehmen wir nun aus der Tab. XVIII. jene Daten, die sich auf die Achse dieser Wellenkurve beziehen, welche wir erhalten, wenn wir die CO_2 entwickelnde Arbeitsfähigkeit der Nachkommen auf einer Fläche auftragen und bei $\tau=30$ Tage einen Schnitt machen. Da sehen wir, dass

$$\begin{aligned} 4s_1 &= 0{\cdot}00 & s_1 &= 0{\cdot}000 \\ 4s_2 &= 35{\cdot}50 & s_2 &= 8{\cdot}875 \\ 4s_3 &= 33{\cdot}98 & s_3 &= 8{\cdot}495 \\ 4s_4 &= 32{\cdot}24 \text{ und} & s_4 &= 8{\cdot}060 \end{aligned}$$

ist.

Die in der letzten Kolonne stehenden und je einer Stunde entsprechenden s Daten liefern die Grundlage der Berechnung. Den Gang der Koeffizientenberechnung zeigt Tab. XIX, in der ich die Originalformel der aperiodischen Funktion, und auch die zur Erleichterung der Berechnung umgewandelten Formeln angebe, sodann zeige ich sämtliche Rechnungsarbeiten von Schritt zu Schritt. In dieser Tabelle sind die Formeln und die auszuführenden Rechnungsarbeiten mit *stehenden* lateinischen Buchstaben, resp. arabischen Ziffern, hingegen die Rechnungen selbst mit *kursivschrift* gesetzt.

Es ist zweckmässig bei derartigen Rechnungen ähnliche gedruckte Formulare zu benützen, da mit ihnen die Arbeit einheitlicher, schneller und übersichtlicher sein wird, und eine gewisse Gruppe von Irrtümern seltener vorkommen werden.

Zur Tab. XIX. ist jede spezielle Erklärung überflüssig. Wenn wir w_1, r_1 und a_1 kennen, so müssen wir in die aperiodische Funktion w_1, r_1 und a_1 einsetzen und dann erhalten wir s_h oder $4.s_h$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt t, wie wir dies aus Tab. XX. bei $t=300$ Stunden sehen können.

Die schöne Übereinstimmung stammt daher, dass wir diesen Punkt der Kurve auch bei der Berechnung der Achsenkoeffizienten benützten.

XIX. Tabelle.

Ein Beispiel, wie die Koeffizienten w_1, r_1, M_1, a_1 und v_{01}, der aperiodischen Schwingung berechnet werden.

$$s = \frac{a_1}{2}\left[e^{-(r_1-M_1)t} - e^{-(r_1+M_1)t}\right]$$

$\lambda = 300$ Stunden

$D = e^{-(r_1-M_1)t}$ $E = e^{-(r_1+M_1)t}$	$t_1 = 0 \quad s_1 = 0{\cdot}000 : 4 = 0{\cdot}000 \quad 2s_1 = 0{\cdot}000$ $t_2 = 300 \quad s_2 = 35{\cdot}50 : 4 = 8{\cdot}875 \quad 2s_2 = 17{\cdot}750$ $t_3 = 600 \quad s_3 = 33{\cdot}98 : 4 = 8{\cdot}495 \quad 2s_3 = 16{\cdot}990$ $t_4 = 900 \quad s_4 = 32{\cdot}24 : 4 = 8{\cdot}060 \quad 2s_4 = 16{\cdot}120$	$s = \frac{a_1}{2}(D-E)$ $S = \frac{a_1}{2}(\beta E - \alpha D + C_0)$

$z+\zeta = \frac{s_1s_4-s_2s_3}{s_1s_3-s_2s_2} = \frac{0{\cdot}000.8{\cdot}060-8{\cdot}875.8{\cdot}495}{0{\cdot}000.8{\cdot}495-8{\cdot}875\ 8{\cdot}875} = \frac{-8{\cdot}495}{-8{\cdot}875} =$	$0{\cdot}957{,}183$	$= B$
$z\ .\ \zeta = \frac{s_2s_4-s_3s_3}{s_1s_3-s_2s_2} = \frac{8{\cdot}875.8{\cdot}060-8{\cdot}495.8{\cdot}495}{0{\cdot}000.8{\cdot}495-8{\cdot}875\ 8{\cdot}875} = \frac{-0{\cdot}632{,}525}{-78{\cdot}765{,}6} =$	$0{\cdot}008{,}030{,}47$	$= C$
$B^2 = 0{\cdot}916{,}199$ $-4C = -0{\cdot}032{,}122$ $0{\cdot}884{,}077 = F$	$\log F = 0{\cdot}946{,}490{,}09 - 1 =$ $= 1{\cdot}946{,}490{,}09 - 2 : 2 = 0{\cdot}973{,}245 - 1$ $N \log 0{\cdot}973{,}245 - 1 = R =$	$0{\cdot}940{,}254$	$= R$
$z = \frac{+B+\sqrt{B^2-4C}}{2} = \frac{+B+R}{2} = \frac{0{\cdot}957{,}183+0{\cdot}940{,}254}{2} = 0{\cdot}948{,}718$		$0{\cdot}948{,}718$	$= z$
$\zeta = \frac{+B-\sqrt{B^2-4C}}{2} = \frac{+B-R}{2} = \frac{0{\cdot}957{,}183-0{\cdot}940{,}254}{2} = 0{\cdot}008{,}465$		$0{\cdot}008{,}465$	$= \zeta$
$x = \frac{-\log z}{\lambda \log e} = \frac{-(0{\cdot}977{,}137-1)}{130{\cdot}288{,}3} = \frac{+(0{\cdot}022{,}863)}{130{\cdot}288{,}3} = 0{\cdot}000{,}175{,}48 = x =$	$0{\cdot}000{,}175{,}48$	$= r_1 - M_1$
$y = \frac{-\log \zeta}{\lambda \log e} = \frac{-(0{\cdot}927{,}627-3)}{130{\cdot}288{,}3} = \frac{+(2{\cdot}072{,}373)}{130{\cdot}288{,}3} = 0{\cdot}015{,}906 \quad = y =$	$0{\cdot}015{,}906$	$= r_1 + M_1$
$r_1 = \frac{y+x}{2} = \frac{0{\cdot}016{,}081{,}5}{2} = 0{\cdot}008{,}040{.}75$	$0{\cdot}008{,}040{,}75$	$= r$
$M_1 = \frac{y-x}{2} = \frac{0{\cdot}015{,}730{,}5}{2} = 0{\cdot}007{,}865{,}25$	$0{\cdot}007{,}865{,}25$	$= M_1$
$w_1^2 = r_1^2 - M_1^2 = (r_1 - M_1)(r_1 + M_1)$ $w_1^2 = 0{\cdot}000{,}175{,}5\ 0{\cdot}015{,}906 = 0{\cdot}000{,}002{,}791{,}503$ $\log w_1 = 0{\cdot}445{,}838{,}1 - 6 : 2 = 0{\cdot}222{,}919{,}1 - 3$ $r_1^2 > w_1^2$; $\quad N \log 0{\cdot}222{,}919 - 3 =$	$0{\cdot}001{,}670{,}78$	$= w_1$
Berechnung von a_1 aus s_1, s_2, s_3, s_4 nach Muster der folgenden Tabelle XX.		
$a_2 = \frac{2s_2}{(D_2-E_2)} = \frac{17{\cdot}750}{0{\cdot}940{,}257} = 18{\cdot}877_8$		
$a_3 = \frac{2s_3}{(D_3-E_3)} = \frac{16{\cdot}990}{0{\cdot}899{,}99} = 18{\cdot}877_9$	$18{\cdot}878$	$= a_1$
$a_4 = \frac{2s_4}{(D_4-E_4)} = \frac{16{\cdot}120}{0{\cdot}853{,}89} = 18{\cdot}878_3$	$9{\cdot}439$	$= \frac{a_1}{2}$
$\alpha = \frac{1}{r_1-M_1} = \frac{1}{0{\cdot}000{,}175{,}5} = 5{,}698{\cdot}00$	$5{,}698{\cdot}00$	$= \alpha$
$\beta = \frac{1}{r_1+M_1} = \frac{1}{0{\cdot}015{,}906} = 62{\cdot}869$	$62{\cdot}869$	$=$
$5635{\cdot}131 = \alpha - \beta = C_0$	$5635{\cdot}131$	$= C_0$

XX. Tabelle.

Ein Beispiel zur Berechnung von a_1 und v_{01}, wenn $t=300$ ist. Wir haben

$$\frac{(S_n-S_{n-4})}{(t_n-t_{n-4})}=\frac{4\Delta S}{4\Delta t}=s=\frac{a_1}{2}\left[e^{-(r_1-M_1)t}-e^{-(r_1+M_1)t}\right].$$

Es sei abgekürzt

$$D=e^{-(r_1-M_1)t}$$

und

$$E=e^{-(r_1+M_1)t},$$

dann wird

$$s=\frac{a_1}{2}\,(D-E);$$

und daraus

$$a_1=\frac{2s_{300}}{(D-E)_{t=300}}.$$

Wenn

$$(r_1-M_1)=0{\cdot}000{,}1755.$$
$$(r_1+M_1)=0{\cdot}015{,}906$$

und

$$s_{t=300}=35{\cdot}50:4=8{\cdot}875$$
$$t=300 \text{ stunden}$$

ist, dann folgt aus

$$D=e^{-(r_1-M_1)t}$$

$\log D=-(r_1-M_1)\,t.\log e=-(0{\cdot}000{,}175{,}5).300.0{\cdot}434{,}294{,}5=-(0{\cdot}022{,}865{,}6)=$
$=0{\cdot}977{,}134{,}4-1$; Num log. $0{\cdot}977{,}134{,}4-1=0{\cdot}948{,}712=D.$

Analog erhalten und aus

$$E=e^{-(r_1+M_1)t}$$

$\log E=-(r_1+M_1)\,t\log e=-(0{\cdot}015{,}906.300.0{\cdot}434{,}294{,}5=-(2{\cdot}072{,}366)=$
$=0{\cdot}927{,}634-3$; Num log. $0{\cdot}927{,}634-3=0{\cdot}008{,}465{,}14=E$

$$D=0{\cdot}948{,}712$$
$$E=0{\cdot}008{,}465$$
$$\overline{D-E=0{\cdot}940{,}247}$$

und weiter

$$a_1=\frac{2s_{300}}{(D-E)_{t=300}}=\frac{2.8{\cdot}875}{0{\cdot}940{,}247}=\frac{17{\cdot}750}{0{\cdot}940{,}247}=18{\cdot}878=a_1.$$

Nachdem wir a_1 kennen, ist auch v_{01} berechenbar.

$$v_{01}=a_1M_1=18{\cdot}878\times0{\cdot}007{,}865{,}2=0{\cdot}148{,}48.$$

5. Vorläufige Betrachtung der Daten, die zur Berechnung der aperiodischen Funktions-Koeffizienten benützt werden.

Diese Berechnung hat einen kritischen Punkt, auf den wir achten müssen. Die Funktion der aperiodischen Schwingungsbewegung gibt nur dann eine Lösung, wenn die Diskriminante $=D=\sqrt{B^2-4C}$ eine reale Grösse ist, also nach Tab. XIX wenn $B^2>4C$ ist. Vor Beginn der Koeffizienten-Berechnung können wir ohne Untersuchung der Daten aus s_1, s_2, s_3 und s_4 nicht erkennen, wie die Diskriminante sein wird, daher müssen wir oft mit grossem Zeitverlust einhergehende Proben machen, bis wir uns davon überzeugen. Zur Vermeidung dieser Bemühungen prüfen wir, welche vorausgehende Aufklärungen wir auf Grund der Grössen von s_1, s_2, s_3 und s_4 erhalten könnten.

Vorerst müssen wir zur Kenntnis nehmen, dass die Versuchsangaben nicht absolut genau sind, daher enthalten die aus ihnen hergestellten Zeichnungen und die aus diesen entnommenen Achsenwerte etwa einen $\pm 5\%$-igen oder eventuell einen noch grösseren Fehler. Der wirkliche Achsenwert bewegt sich natürlich meistens an der Grenze der aperiodischen und periodischen Funktionen. Die aperiodische Schwingung ist aber, wie aus meiner IV. Mitteilung Fig. 2—10 und Tabellen klar zu sehen ist, gerade an dieser Grenze am empfindlichsten. Hier ändert schon ein Unterschied von 0·001% oder ein noch kleinerer den Charakter der Funktion und aus der realen wird eine imaginäre, oder aus der aperiodischen wird eine periodische Funktion. Die Diskriminante der Achse kann jedoch, wenn der Versuch die Zeichnung und das Ablesen richtig geschah, nicht anders als *real sein*. Daraus folgt, dass der erwähnte Fehler wahrscheinlich, beim Zeichnen der Wellenkurve oder ihrer Achse sich einschlich und dadurch wird die Diskriminante irreal sein. Um der Ergebnislosigkeit unserer Rechnung zu vermeiden, ist es zweckmässig die von unserer Zeichnung entnommenen Grössen zu prüfen, den Fehler zu suchen und ihn innerhalb der Versuchsfehlergrenze ohne die in der Tabelle XVIII. und Fig. 22 dargestellte *S*-förmige Kurve in ihrer Wertharmonie zu ändern, so zu korrigieren, dass die Grössen den Ansprüchen der Versuchs-

angaben, des Achsenganges und der Rechnungen möglichst genau entsprechen.

Ich machte die Erfahrung, dass s_3 am heikelsten und am häufigsten fehlerhaft sei, daher ist es am besten s_2 und wenn möglich, auch s_4 unverändert zu lassen und in erster Annäherung s_3, also die Zeichnung der Achse durch eine kleine Grösse so abzuändern, dass die oben angegebene Ungleichheit $B^2 > 4C$ schon befriedigt sei.

Ich führte oben bereits aus, dass im Laufe der auf Tab. XIX vorgeschriebenen Rechnungen nach mehrfachen Probieren, der richtige s_3 Wert der Achse gefunden werden kann, doch ist dies ein gar langwieriger Vorgang, daher können wir statt herumzuprobieren auf Grund folgender Überlegung eine orientierende Rechnung ausführen.

Es sei die Diskriminante

$$D = \sqrt{B^2 - 4C},$$

wobei, wie die Ableitung und Tab. XIX zeigt,

$$B = \frac{s_1 s_4 - s_2 s_3}{s_1 s_3 - s_2 s_2}, \quad \text{und} \quad C = \frac{s_2 s_4 - s_3 s_3}{s_1 s_3 - s_2 s_2};$$

ist. Da bei unseren Rechnungen die erste Grösse, also s_1 bei $t = 0$ verschwindet, so vereinfachen sich B und C bedeutend. Daher wird die Discriminante

$$D = \sqrt{\frac{s_2^2 s_3^2}{s_2^2 s_2^2} + 4\,\frac{s_2 s_4 - s_3^2}{s_2^2}};$$

Da beim Grenzübergang der periodischen und aperiodischen Funktionen die Diskriminante gleich Null ist, so folgt

$$D = \sqrt{\frac{s_3^2}{s_2^2} + \frac{4 s_2 s_4}{s_2^2} - \frac{4 s_3^2}{s_2^2}} = 0;$$

demzufolge muss auch die unter der Quadratwurzel stehende Grösse verschwinden, also

$$4 s_2 s_4 - 3 s_3^2 = 0;$$

anders ausgedrückt:

$$3 s_3^2 = 4 s_2 s_4 \quad \text{oder} \quad s_3^2 = \frac{4}{3} s_2 s_4.$$

Daraus folgt

$$s_3 = 2\sqrt{\frac{s_2 s_4}{3}} \quad \text{respect.} \quad \frac{s_3}{\sqrt{\frac{s_2 s_4}{3}}} = 2, \ldots\ldots (22)$$

Wenn (22) gleich 2 ist, so wäre $D=0$, d. h. der Vorgang würde sich gerade an der Grenze zwischen Periodizität und Aperiodizität abspielen. Da aber *die Achsen wirkliche aperiodische Funktionen sind,* muss der Faktor des Wurzelzeichens kleiner als 2 sein. In einer Formel ausgedrückt, muss folgende Ungleichheit bestehen:

$$\frac{s_3}{\sqrt{\frac{s_2 s_4}{3}}} < 2 \text{ oder } s_3 < 1{\cdot}1547\sqrt{s_2 s_4} \ldots\ldots\ldots (23)$$

In Tab. XVIII, Kolonne 11 stellte ich von $\frac{s_3}{\sqrt{\frac{s_2 s_4}{3}}}$ die numerischen Werte der auf $\tau = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75, 100$ Stunden sich beziehenden Kurvenschnitte zusammen. Wir sehen, dass sie zwischen 1·85 und 1·73 liegen, also das Postulat der Ungleichheit (23) befriedigen.

Ich muss betonen, dass die Korrektur der Grössen nicht über die Grenzen der Versuchsfehler hinausgehen soll, denn das ginge auf Kosten der Wahrheit und überdies würden zu grosse Korrekturen mit den Versuchsangaben nicht übereinstimmen. Nur eine solche Korrektur ist richtig und anwendbar, bei welcher die Rechnungen übereinstimmen mit den aus den genauen Versuchsangaben konstruierten Kurven.

6. Berechnung der Koeffizienten w_1, r_1 und a_1 *bei sämtlichen Achsen der Wellenkurven.*

Nunmehr führen wir die Rechnungen in der Reihenfolge durch, wie sie in Tab. XIX. und XX. gezeigt sind; aus den Grössen s_1, s_2, s_3 und s_4 der Tab. XVIII. berechnen wir w_1, r_1, M_1, a_1 und v_{01} entsprechend der 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75 und 100-tägigen Entwicklung und fassen die erhaltenen Koeffizienten ähnlich der Tab. XXI. zusammen. Sodann konstruieren wir aus ihnen ein

XXI. Tabelle.

Die Mutterkultur N° 61 zeigt, wenn man durch ihre Wellenoberfläche S Schnitte legt, Wellenlinien, zu deren Achsenwertberechnung die Koeffizienten w_1, r_1, M_1, a_1 und v_1 notwendig sind, deren Zusammenfassung in der XVIII. Tabelle angegeben ist. Man sieht, dass sich alle Koeffizienten ändern, sobald die Nachkommen 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 75 und 100 Tage alt geworden sind. Die Änderung der Koeffizienten ist aus den Figuren 23—27 zu ersehen.

Entwicklungszeit τ der Nachkommen		Die Grössen der aperiodischen Achsen-Koeffizienten				
Tag	Stunden	w_1	r_1	$M_1=\sqrt{r_1^2-w_1^2}$	a_1	$v_1=a_1 M_1$
1	2	3	4	5	6	7
0	0	—	—		—	—
5	120	0·003,482,2	0·004,658,2	0·003,086,5	3·084	0·009,519
10	240	0·002,703,3	0·005,503,32	0·004,793,69	7·698	0·036,902
15	360	0·002,385,6	0·005,841,73	0·005,332,97	11·387	0·060,721
20	480	0·002,245,9	0·007,003,44	0·006,633,56	14·698	0·097,500
25	600	0·001,862,43	0·007,771,92	0·007,545,47	17·041	0·128,582
30	720	0·001,670,73	0·008,040,745	0·007,865,25	18·878	0·148,480
35	840	0·001,414,38	0·008,030,00	0·007,905,00	20·154	0·159,317
40	960	0·001,299,19	0·008,764,51	0·008,667,69	21·092	0·182,819
50	1200	0·001,097,57	0·009,163,98	0·009,098,02	22·586	0·205,488
75	1800	0·000,761,44	0·009,688,48	0·009,658,52	23·986	0·231,669
100	2400	0·000,521,12	0·009,697,01	0·009,682,99	24·254	0·234,851

Graphikon, um die zeitlichen Grössen und Änderungen der Koeffizienten t und τ studieren zu können. Von den in Tab. XXI. enthaltenen Koeffizienten können wir sofort bemerken, dass sie nach der Zeit t in *erster Annäherung* einen konstanten Charakter zeigen, was auch daraus zu ersehen ist, dass die Gleichung von s, bei gleichbleibenden Koeffizienten w_1, r_1 und a_1 zu jedem beliebigen

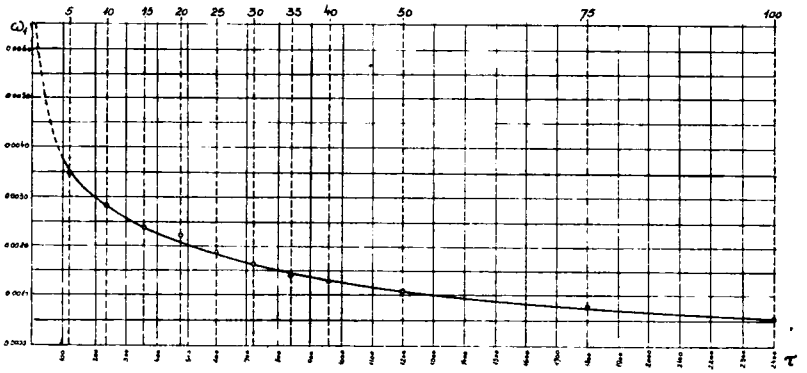


Fig. 23. Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achsen durch die Gleichung der aperiodischen Schwingung ausgedrückt werden. In dieser Gleichung kommt der Koeffizient w_1 vor. Die Grössenänderungen von w_1 je nach der Zeit $t=0{\cdot}00$, $t=300$, $t=600$, $t=900$ Stunden, in welcher nach der Überimpfung aus der Mutterkultur die Nachkommen entstehen. Die Grösse von w_1 wird auf Grund der in $\tau=5$, $\tau=10$ $\tau=15$, $\tau=20$, $\tau=25$, $\tau=30$, $\tau=35$, $\tau=40$, $\tau=50$, $\tau=75$, $\tau=100$ Tagen produzierten CO_2 gr Mengen mit Hilfe der in der Tab. XVIII, Kolonne 3, 5, 7, 9 gegebenen Daten ausgerechnet. Die errechneten w_1 Grössen sind in Tab. XXI, Kolonne 3 eingetragen. Die Kurve w_1 ist auf Grund dieser Angaben gezeichnet.

Zeitpunkt t mit den Versuchsangaben ziemlich gut übereinstimmt, während in der Funktion der Zeit τ, wie wir aus der $\tau=5$, $\tau=10$, $\tau=15\ldots$ Tagen entsprechenden Daten der Tabelle ersehen, sich w_{τ_1}, r_{τ_1}, a_{τ_1} und $v_{0\tau_1}$ in ihren Grössen veränderlich ergeben.

Die in der Zeit τ sich ändernden Koeffizienten w_1, r_1, M_1, a_1 und v_{01} sind in den Fig. 23—27 dargestellt. Auf die Abszissen sind bei jedem Koeffizienten die Zeit τ aufgetragen. Auf den Ordinaten

sind die den 5, 10, 15, 20...100-tägigen Entwicklungszeiten entsprechenden Grössen w_1, r_1, M_1, a_1, $v_{0\tau_1}$ angegeben, sodann sind die gewonnenen gleichartigen Punkte miteinander verbunden.

Die Grösse w_1 das ist der die biomotorische Kraft der Kultur charakterisierende Koeffizient, wie in Fig. 23 zu sehen ist, zeigt, dass die Entwicklung zu Beginn am stärksten ist, und von da an

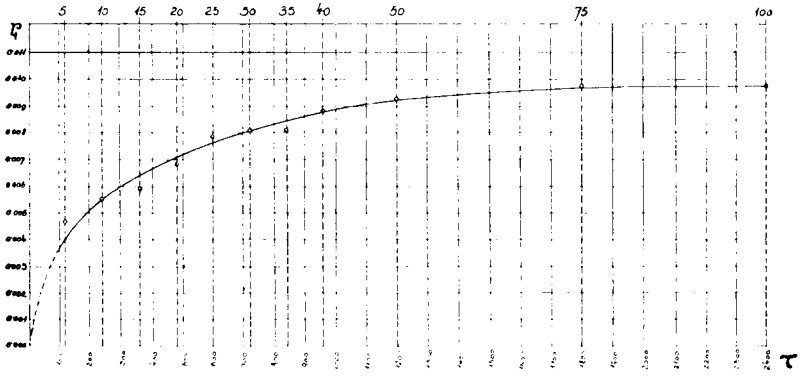


Fig. **24.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achsen durch die Gleichung der aperiodischen Schwingung ausgedrückt wird. In dieser Gleichung kommt der Koeffizient r_1 vor; die Grössenänderung von r_1 je nach der Zeit $t = 0$, $t = 300$, $t = 600$, $t = 900$ Stunden, in welcher nach der Überimpfung aus der Mutterkultur die Nachkommen entstehen. Die Grösse von r_1 wird auf Grund der in $\tau = 5$, $\tau = 10$, $\tau = 15$, $\tau = 20$. $\tau = 25$, $\tau = 30$, $\tau = 35$, $\tau = 40$, $\tau = 50$, $\tau = 75$, $\tau = 100$ Tagen produzierten CO_2 gr Mengen mit Hilfe der in der Tab. XVIII, Kolonne 3, 5, 7, 9 gegebenen Daten ausgerechnet. Die errechneten r_1 Grössen sind in Tab. XXI, Kolonne 4 eingetragen. Die Kurve r_1 ist auf Grund dieser Angaben gezeichnet.

nimmt sie mit Zunahme der Zeit τ sukzessiv, nach dem Gange einer exponentialen Funktion mit negativem Exponenten ab.

Aus dem Gang der *Grösse* r_1, sehen wir in Fig. 24, dass der biomotorische Widerstand r_1 zu Beginn der Entwicklung sehr klein ist, und mit der τ Zeit sich fortwährend vergrössert. Ihr Gang ähnelt der *S*-förmigen Funktion der ontogenetischen Entwicklung. Ergebnisse von Versuchsreihen, die erst noch auszuführen sind,

werden erweisen, wie weit der Gang dieser Kurve mit der Gleichung von S übereinstimmt.

Die Grösse M_1, die aus $M_1 = \sqrt{r_1^2 - w_1^2}$ abgeleitet ist, ähnelt dem Gange des grösseren Wertes des unter dem Wurzelzeichen befindlichen ersten Gliedes. Da in der aperiodischen Funktion r_1 stets grösser ist also w_1, wird der Gang von M_1, wie aus Fig. 25 ersichtlich,

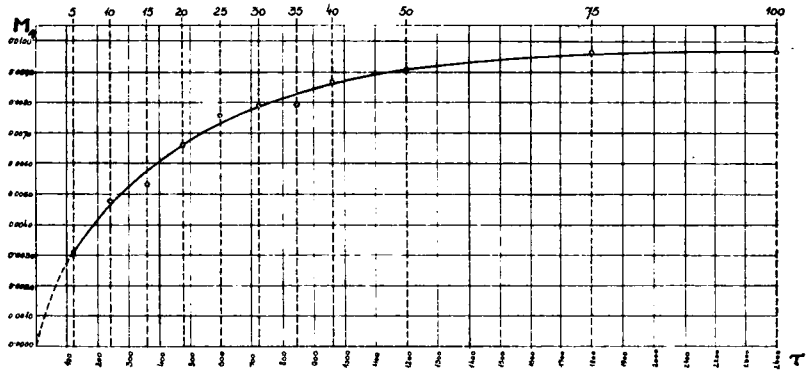


Fig. **25.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achsen durch die Gleichung der aperiodischen Schwingung ausgedrückt wird. In dieser Gleichung kommt der Koeffizient M_1 vor ; die Grössenänderung von M_1 je nach der Zeit $t=0$, $t=300$, $t=600$, $t=900$ Stunden, in welcher nach der Überimpfung aus der Mutterkultur die Nachkommen entstehen. Die Grösse von M_1 wird auf Grund der in $\tau = 5$, $\tau = 10$, $\tau = 15$, $\tau = 20$, $\tau = 25$, $\tau = 30$, $\tau = 35$, $\tau = 40$, $\tau = 50$, $\tau = 75$, $\tau = 100$ Tagen produzierten CO_2 gr Mengen mit Hilfe der in Tab. XVIII, Kolonne 3, 5, 7, 9 gegebenen Daten ausgerechnet. Die errechnete Grösse M_1 ist in Tab. XXI, Kolonne 5 eingetragen. Die Kurve M_1 ist auf Grund dieser Angaben gezeichnet.

ein etwas verzerrtes Bild von r_1 ergeben. M_1 ist in der Tat zu Beginn der Entwicklung klein, mit dem Fortschreiten der Zeit τ vergössert es sich, ebenso wie auch r_1. Eine besondere Gleichung um M_1 auszudrücken ist überflüssig, denn in $M_1 = \sqrt{r_1^2 - w_1^2}$ ist es bereits enthalten.

Die Grösse a_1 ist, wie aus Fig. 26 ersichtlich, anfangs klein, mit dem Fortschreiten der Zeit τ nimmt sie rasch zu, ihre Kurve

steigt rasch, im Alter verflacht sie. Sie zeigt genau die *S*-förmige Kurve der ontogenetischen Entwicklung. Spätere Erfahrungen werden erst erweisen, ob sie wirklich und immer diesen Gang haben werde.

Die Grösse $v_1 = a_1 M_1$ besteht also aus dem Produkt der vorhergeschilderten Koeffizienten a_1 und M_1. Ihren *S*-förmigen Ver-

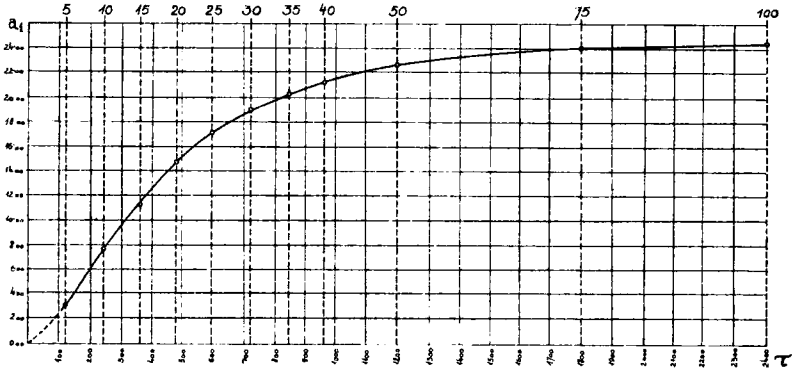


Fig. **26.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achse durch die Gleichung der aperiodischen Schwingung ausgedrückt wird. In dieser Gleichung kommt der Koeffizient a_1 vor; die Grössenänderung von a_1 je nach der Zeit $t = 0$, $t = 300$, $t = 600$, $t = 900$ Stunden, in welcher nach der Überimpfung aus der Mutterkultur die Nachkommen entstehen. Die Grösse von a_1 wird auf Grund der in $\tau = 5$, $\tau = 10$, $\tau = 15$, $\tau = 20$, $\tau = 25$, $\tau = 30$, $\tau = 35$, $\tau = 40$, $\tau = 50$, $\tau = 75$, $\tau = 100$ Tagen produzierten CO_2 gr Mengen, mit Hilfe der in Tab. XVIII, Kolonne 3, 5, 7, 9 gegebenen Daten ausgerechnet. Die errechneten a_1 Grössen sind in Tab. XXI, Kolonne 6 eingetragen. Die Kurve a_1 ist auf Grund dieser Angaben gezeichnet.

lauf zeigt Fig. 27. Im Verlaufe der Entwicklung ist v_1 klein und mit dem Fortschreiten der Zeit τ erhöht sie sich.

7. Berechnung eines beliebigen Punktes der aperiodischen Achse und ihrer Integralwerte, mit Hilfe der Koeffizienten w_1, r_1 *und* a_1.

Durch das Einsetzen der Koeffizienten w_1, r_1 und a_1 in die, aperiodische Funktion (8*a*), (14*a*) können wir bequem die, eine

beliebige t Zeit betreffende s_n Grösse einer beliebigen Schnittachse auf die Weise berechnen, wie ich dies in Tab. XXII. bei der 30-tägigen Achse $s_{ht=300}$ zeigte.

Um die Wellenkurven genauer studieren zu können, benötigen wir auch die Angaben über die s Grössen der Achsen in entsprechend kurzen Zeitintervallen. Später werde ich sie in einer der

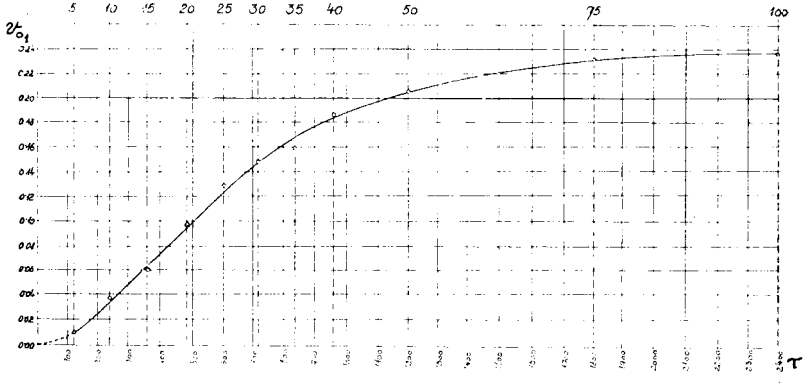


Fig. **27.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achsen durch die Gleichung der aperiodischen Schwingung ausgedrückt wird. In dieser Gleichung kommt der Koeffizient v_{01} vor; die Grössenänderung von v_{01} je nach der Zeit $t=0$, $t=300$, $t=600$, $t=900$ Stunden, in welcher, nach der Überimpfung aus der Mutterkultur, die Nachkommen entstehen. Die Grösse von v_{01} wird auf Grund der in $\tau = 5, \tau = 10, \tau = 15, \tau = 20, \tau = 25, \tau = 30, \tau = 35, \tau = 40, \tau = 50, \tau = 75, \tau = 100$ Tagen produzierten CO_2 gr Mengen mit Hilfe der in Tab. XVIII, Kolonne 3, 5, 7, 9 gegebenen Daten ausgerechnet. Die errechneten v_{01} Grössen sind in Tab. XXI, Kolonne 7 eingetragen. Die Kurve v_{01} ist auf Grund dieser Angaben gezeichnet.

letzten Tabellen angeben, zu dem Zwecke um zu den im folgenden zu berechnenden periodischen Kurven den entsprechenden Wert der Achsen hinzuzugeben, damit wir sodann die ganze Wellenkurve erhalten.

Im Laufe der weiteren Erläuterungen benötigen wir ebenfalls den Wert des Integrals von der Achsengleichung s_h welchen wir mit S bezeichnet haben. Wie dieser mit Hilfe der, in den

XXII. Tabelle.

Ein Beispiel zur Berechnung der Achse s_h bei $t=300$.

$$s_h = \frac{a_1}{2} \cdot [e^{-(r_1-M_1)t} - e^{-(r_1+M_1)t}].$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$D = e^{-(r_1-M_1)t}$$

und

$$E = e^{-(r_1+M_1)t},$$

dann folgt

$$s_h = \frac{a_1}{2}(D-E).$$

Wenn nun die Koeffizienten dieselben sind, wie in Beispiele der N° XIX., also

$$(r_1-M_1) = 0{\cdot}000{,}175{,}5$$
$$(r_1+M_1) = 0{\cdot}015{,}906$$

und

$$a_1 = 18{\cdot}878$$
$$t = 300 \text{ stunden},$$

dann folgt aus

$$D = e^{-(r_1-M_1)t}$$
$$\log D = -(r_1-M_1)\, t \log e = -(0{\cdot}000{,}175{,}5 \,.\, 300 \,.\, 0{\cdot}434{,}294{,}5) =$$
$$= -(0{\cdot}022{,}865{,}6) = 0{\cdot}977{,}134{,}4 - 1$$
$$\text{Num log } 0{\cdot}977{,}1344 - 1 = 0{\cdot}948{,}712 = D_{300},$$

und analog aus

$$E = e^{-(r_1+M_1)t}$$

folgt:

$$\log E = -(r_1+M_1)\, t \log e = -(0{\cdot}015{,}906 \,.\, 300 \,.\, 0{\cdot}434{,}294{,}5 =$$
$$= -(2{\cdot}072{,}366) = 0{\cdot}927{,}634 - 3$$
$$\text{Num log } 0{\cdot}927{,}634 - 3 = 0{\cdot}008{,}465{,}14 = E_{300}.$$

Also erhalten wir

$$D = 0{\cdot}948{,}712$$
$$E = 0{\cdot}008{,}465$$
$$(D-E)_{t=300} = 0{\cdot}940{,}247$$

und

$$s_{h_{t=300}} = \frac{a_1}{2}(D-E)_{300} = \frac{18{\cdot}878}{2} \cdot 0{\cdot}940{,}247 = 8{\cdot}875$$
$$4s_{h_{t=300}} = 2a_1 (D-E)_{t\ 300} = 2 \,.\, 18{\cdot}878 \,.\, 0{\cdot}940{,}247 = 35{\cdot}500.$$

Vorigen angegebenen Gleichungen der Koeffizienten w_1, r_1, M_1 a_1, ausgerechnet wird, wollen wir des leichteren Verständnisses halber an Hand eines Beispieles erklären. Es befindet sich in der Tabelle XXIII.

8. Vergleich der zu den verschiedenen Wellenkurven gehörenden Achsen.

Hier mache ich auf die nach Angaben der Tab. XXII. berechneten und nach diesen Daten verfertigten Fig. 28 aufmerksam. Wir sehen hier, dass von den Achsen jede nachfolgende einen höheren Verlauf hat. Auch ihre Formen sind nicht genau gleich. Darin stimmen sie alle überein, dass sie anfangs rasch ansteigen, bis zu einem Maximum, von dort fallen sie successiv, gemäss den Gesetzen der aperiodischen Schwingung. Das Fallen geht bei den Kulturen am 50., 75., 100. Tag der Entwicklung, also zum Schluss langsamer vor sich, während es bei den Achsen der 20-, 15-, 10-, 5-tägigen Entwicklung, also zu Beginn der Entwicklungszeit rascher eintritt. Im allgemeinen ist das Fallen der Achse in der Zeit t umso grösser, je kleineren τ entsprechenden Zeiten entsprechende Wellenoberflächenschnitte wir machen.

Diese eigentümliche Form des Achsenverlaufes ist eine innere Eigenschaft der aperiodischen Funktion, *die Veränderung ihrer Höhe und Form folgt aus der vorhergezeigten Grössenänderung der Koeffizienten*, und diese aus der Änderung der biologischen Verhältnisse. Später, *wenn wir die Abhängigkeit der Koeffizienten von den biologischen Verhältnissen* studieren werden, müssen wir uns mit dieser Erscheinung eingehend beschäftigen.

9. Berechnung der zu den Achsenmaxima gehörigen Zeitpunkte und seiner numerischen Werte.

Der Vollständigkeit halber muss ich hier über *den Maximalwert der Achsen und dem Zeitpunkt, an dem das Maximum eintritt*, sprechen.

Wollen wir den Wert des Kurvenmaximums kennen, so können wir ihn aus der Funktion $s_h(8a)$ $(14a)$. leicht errechnen. Vorerst müssen wir den Zeitpunkt kennen, an welchem das Maxi-

XXIII. Tabelle.

Ein Beispiel zur Berechnung der S, Integral der Gleichung der Achse s_h bei t=300, nach der Formel:

$$S = \frac{a}{2}\left[-\frac{1}{r_1-M_1}e^{-(r_1-M_1)t} + \frac{1}{r_1+M_1}e^{-(r_1+M_1)t} + \frac{1}{r_1-M_1} - \frac{1}{r_1+M_1}\right].$$

Wir führen die folgenden Bezeichungen ein:

$$\frac{1}{r_1-M_1} = \alpha, \quad \frac{1}{r_1+M_1} = \beta, \quad \alpha - \beta = C$$

und

$$D = e^{-(r_1-M_1)t}; \quad E = e^{-(r_1+M_1)t}$$

dann folgt

$$S = \frac{a_1}{2}[\beta E - \alpha D + C].$$

Wenn nun die Koeffizienten dieselben sind wie in den Beispielen der Tabellen XIX, XX und XXII waren, also:

$(r_1-M_1) = 0{\cdot}000{,}175{,}5$	$a_1 = 18{\cdot}878$, $\frac{a_1}{2} = 9{\cdot}439$
$(r_1+M_1) = 0{\cdot}015{,}906$	$\alpha = 5698{\cdot}00$, $\beta = 62{\cdot}869$
$t = 300$ stunden	$C = 5635{\cdot}131$

dann folgt aus

$$D = e^{-(r_1-M_1)t}$$

$$\log D = -(r_1-M_1)\, t \log e = -0{\cdot}000{,}175{,}5 \,.\, 300 \,.\, 0{\cdot}434{,}2945 =$$
$$= -0{\cdot}022{,}865{,}6 = 0{\cdot}977{,}1344 - 1$$
$$\text{Num log } (0{\cdot}977{,}1344 - 1) = 0{\cdot}948{,}712 = D$$

und analog aus.

$$E = e^{-(r_1+M_1)t}$$

folgt:

$$\log E = -(r_1+M_1)\, t \log e = -(0{\cdot}015{,}906 \,.\, 300 \,.\, 0{\cdot}434{,}2945) =$$
$$= -(2{\cdot}072{,}366) = 0{\cdot}927{,}634 - 3$$
$$\text{Num log } (0{\cdot}927{,}634 - 3) = 0{\cdot}008{,}465{,}14 = E$$

$$-\alpha D = -5698{\cdot}00 \,.\, 0{\cdot}948{,}712 = -5405{\cdot}761$$
$$\beta E = \quad 62{\cdot}869 \,.\, 0{\cdot}008{,}465 = \quad 0{\cdot}532$$
$$(\beta E - \alpha D) = -5405{\cdot}229$$
$$C = \quad 5635{\cdot}131$$
$$(\beta E - \alpha D + C) = \quad 229{\cdot}902$$

$$S = \frac{a_1}{2}[\beta E - \alpha D + C] = 9{\cdot}439 \,.\, 229{\cdot}902 = \quad 2170{\cdot}04 = S.$$

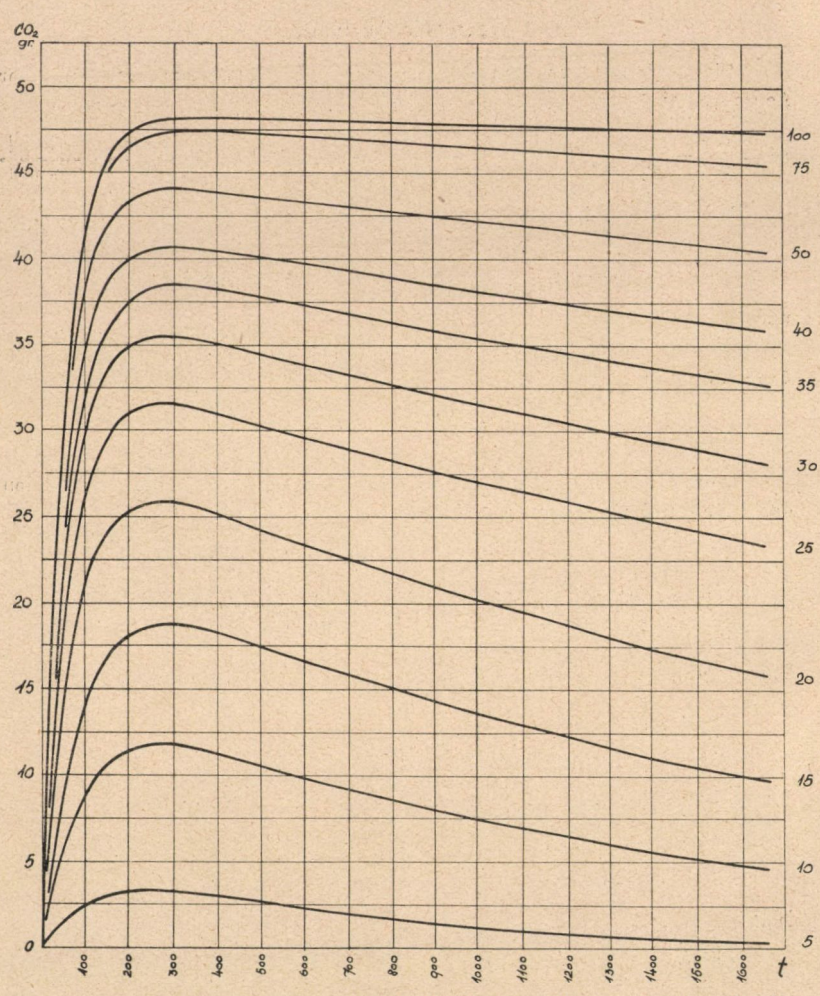


Fig. **28.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenkurven entstehen, deren Achsen verlauf in dieser Zeichnung verglichen wird. Die bei den Berechnungen fungierenden w_1, r_1, a_1, M_1, v_{01} Koeffizienten und die anderen Angaben, die zur Zeichnung der Achsen nötig sind, sind mit denen, die in den Fig. 11—21 vorkommen, identisch. Die Theorie und praktische Ausführung der Berechnung ist im Text niedergelegt. Die theoretischen Schlussfolgerungen werden in meiner späteren Mitteilung veröffentlicht.

mum auftritt, diese Zeit setzen wir in der Gleichung s_h als t ein und dann haben wir den Wert des Maximums von der Kurve s_h erhalten.

Wir können die Zeit des Maximums aus der Funktion $\frac{ds_h}{dt}=v_1$, das ist der zeitliche erste Differentialquotient von s_h errechnen

$$v_1 = \frac{ds_h}{dt} = -\frac{a}{2} e^{-rt} [(r_1 - M_1) e^{+M_1 t} - (r_1 + M_1) e^{-M_1 t}] \ldots (12)$$

Die aperiodische Funktion s_h hat dort ihr Maximum, wo die Geschwindigkeit gleich Null ist. Die Gleichung der Geschwindigkeit wird dann gleich Null, wenn der in der eckigen Klammer der Gleichung (12) befindliche Wert verschwindet.

Demzufolge wird:

$$(r_1 - M_1) e^{M_1 t} - (r_1 + M_1) e^{-M_1 t} = 0.$$

Daraus folgt

$$(r_1 - M_1) e^{M_1 t} = (r_1 + M_1) e^{-M_1 t}$$

und weiter

$$t = \frac{1}{M_1 \log e} \log \sqrt{\frac{r_1 + M_1}{r_1 - M_1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Wenn wir das auf diese Weise erhaltene t in die Funktion *(8a)*, *(14a)* einsetzen, bekommen wir den Wert der Maximalelongation der Kurve, von welcher angefangen mit Zunahme der Zeit das s_h ununterbrochen gegen die Abszissenachse sich nähert. In Tab. XXIV. ist in einem praktischen Beispiele die Berechnung gezeigt, einer 30-tägigen Entwicklung gehörigen Achsenmaximum-Zeit t_{max}, und des zu dieser gehörigen $s_{h\,max}$. Auf diese Weise habe ich t_{max} und $s_{h\,max}$ für sämtliche Achsen ausgerechnet und sie in Tab. XXV. zusammengefasst.

Wenn wir den Zusammenhang zwischen der der Maximumzeit t_{max} und der den einzelnen Kurven entsprechenden Zeit τ untersuchen, so finden wir, dass der Mittelwert der Zeit t_{max} gleich 299, oder rund 300 Stunden beträgt, nichtsdestoweniger nimmt t_{max} nach einer geringen Wellenschwankung (s. Fig. 29) mit t gleichzeitig zu, so dass zwischen t_{max} und τ ein funktionsähnlicher

XXIV. Tabelle.

Beispiel 1. Berechnung des Zeitpunktes des Maximums $= t_{max}$.
Beispiel 2. Berechnung des Maximums der Funktion $= s_{max}$

ad: 1. Der zum Maximum gehörende Abszissenwert t_{max} tritt ein, wenn

$$t_{max} = \frac{1}{M_1 \log e} \log \sqrt{\frac{r_1 + M_1}{r_1 - M_1}}$$

ist.

Wenn die Koeffizienten die Folgenden sind

$$\begin{matrix} M_1 = 0{\cdot}007{,}865{,}25 \\ r_1 = 0{\cdot}008{,}040{,}75 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} r_1 + M_1 = 0{\cdot}015{,}906 \\ r_1 - M_1 = 0{\cdot}000{,}175{,}5 \end{matrix}$$

so folgt

$$\frac{1}{M \log e} = \frac{1}{0{\cdot}007{,}865{,}25 \,.\, 0{\cdot}434{,}294{,}5} = \frac{1}{0{\cdot}00\ 3{,}15{,}83} = 292{\cdot}75$$

$$\log \sqrt{\frac{r_1 + M_1}{r_1 - M_1}} = \frac{1}{2} \log \frac{0{\cdot}015{,}906}{0{\cdot}000{,}175{,}5} = \frac{\log 90{\cdot}632{,}47}{2} = \frac{1{\cdot}957{,}284}{2} = 0{\cdot}978{,}642.$$

Also

$$t_{max} = 292{\cdot}75 \,.\, 0{\cdot}978.64 = 286{\cdot}5 \text{ Stunden.}$$

ad: 2. Der Wert des Maximums der s_{max} bei $t_{max} = 286{\cdot}5$ ist in Stunden ausgedrückt

$$s_{max} = 2a_1 (D - E)_{t = 286{\cdot}5}.$$

Mit Hilfe der Koeffizienten

$$\begin{matrix} r_1 + M_1 = 0{\cdot}015{,}906 \\ r_1 - M_1 = 0{\cdot}000{,}175{,}5 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} t = 286{\cdot}5 \\ a_1 = 18{\cdot}878 \end{matrix}$$

folgt aus

$$D = e^{-(r_1 - M_1)t}$$

$$\log D = -(r_1 - M_1)\, t \log e = -(0{\cdot}000{,}175{,}5 \,.\, 286{\cdot}5 \,.\, 0{\cdot}434{,}294{,}5) =$$
$$= -(0{\cdot}021{,}836{,}6) = 0{\cdot}978{,}163 - 1$$
$$\text{Num log } 0{\cdot}978{,}163 - 1 = 0{\cdot}950{,}96 = D$$

u nd analog

$$E = e^{-(r_1 + M_1)t}$$

$$\log E = -(r_1 + M_1)\, t \log e = -(0{\cdot}015{,}906 \,.\, 286{\cdot}5 \,.\, 0{\cdot}434{,}294{,}5) =$$
$$= -(1{\cdot}979{,}11) = 0{\cdot}020{,}89 - 2$$
$$\text{Num log } (0{\cdot}020{,}89 - 2) = 0{\cdot}010{,}49 = E.$$

Also haben wir

$$\begin{matrix} D = 0{\cdot}950{,}96 \\ E = 0{\cdot}010{,}49 \\ \hline (D - E)_{t = 286{\cdot}5} = 0{\cdot}940{,}47 \end{matrix}$$

$$s_{t = 286{\cdot}5} = \frac{a_1}{2} (D - E) = 9{\cdot}439 \,.\, 0{\cdot}940{,}47 = 8{\cdot}877$$

$$4 s_{t = 286{\cdot}5} = 2a_1 (D - E) = 8{\cdot}887 \times 4 = 35{\cdot}50.$$

XXV. Tabelle.

Angabe der Grössen, der im Versuch N° 61 bei den Nachkommen fungierenden Zeitpunkte der Maxima und Werte, bezogen auf in verschiedenen τ Zeiten ausgeführten Schnitte S. Fig. 29 u. 30.

Entwicklungszeit τ der Nachkommen		Der Achsenmaximum	
		t_{max} Zeit	t_{max} Wert
Tage	Stunden	Stunden	CO_2 gr.
1	2	3	4
0	0	—	—
5	120	258·78	3·28
10	240	279·00	11·76
15	360	289·59	18·76
20	480	271·90	25·86
25	600	279·26	31·52
30	720	286·51	35·50
35	840	306·38	38·48
40	960	299·57	40·75
50	1200	309·05	44·13
75	1800	334·95	47·42
100	2400	373·45	48·22
	Mittelwert $t =$	$= 299{\cdot}-$	

Zusammenhang zu bestehen scheint. Dieser Zusammenhang hat in erster Annäherung linearen Charakter. (S. Fig. 29.)

Die Maxima erscheinen stets auf den mit der Achse t der Wellenoberfläche parallelen Schnitten. Diese Maxima erscheinen auf den mit den τ und CO_2 Koordinaten parallelen Schnitten, und wie aus Fig. 30 ersichtlich, zeigen eine S-förmige Kurve. Sie können

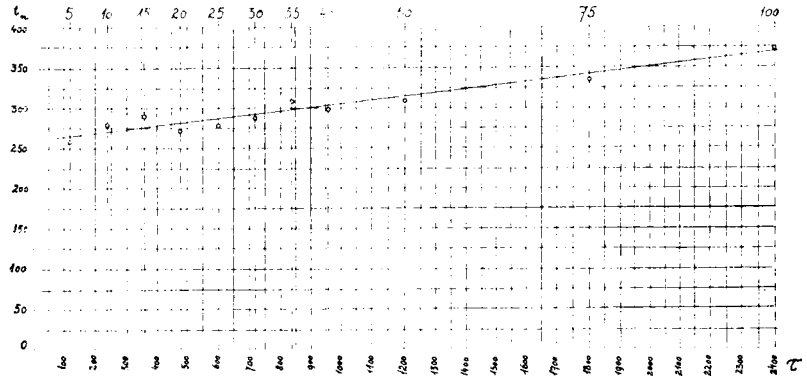


Fig. **29.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achsen durch aperiodische Kurven ausgedrückt werden. Die Fig. zeigt die Veränderungen ihrer *Maximum-Zeiten*. Man erkennt, dass mit dem Wachstum der τ Zeit die Schnitte der Wellenoberfläche nach $\tau = 5$, $\tau = 10$, $\tau = 15$, $\tau = 20$, $\tau = 25$, $\tau = 30$, $\tau = 35$, $\tau = 40$, $\tau = 50$, $\tau = 75$, $\tau = 100$ Tagen die Zeitpunkte t_{max} nicht gleich gross sind, sondern beim ersten $\tau = 5$ ist t_5 am niedrigsten, und bei $\tau = 100$ ist t_{100} höchstwertig, während bei den zwischenfallenden τ_n Schnitten die t_m Zeitwerte in erster Annäherung eine lineare Steigung zeigen. Die als Basis der Berechnung dienenden Daten sind auf Tab. XXIV, in Kolonne 2 und 3 zu finden. Nähere Angaben über die Berechnung sind im Texte nachzulesen.

also mit dem Integral der Funktion s_h ausgedrückt werden. Vgl. *(8a)*, (14*a*).

Die ersten Differentialquotienten der S-förmigen Kurven ergeben, wie ich dies in der I. Mitteilung nachwies, ebenfalls eine aperiodische s_h Kurve. Somit hat *im Laufe der ontogenetischen Entwicklung jede Zelle, jedes ein- oder vielzellige Wesen ein Arbeitsfähigkeits- oder potentiales Maximum*, dessen Zeit und Grösse aus

den vorhergegebenen Gleichungen und Rechnungsgange leicht bestimmbar ist, und zweckmässig benützt werden kann, wie ich dies im weiteren zeigen werde.

10. Über die biologische Bedeutung der Achsenmaxima.

Die Kenntnis der Achse und des Maximumzeitpunktes der *s*-förmigen Entwicklungskurve ist nicht nur von theoretischer

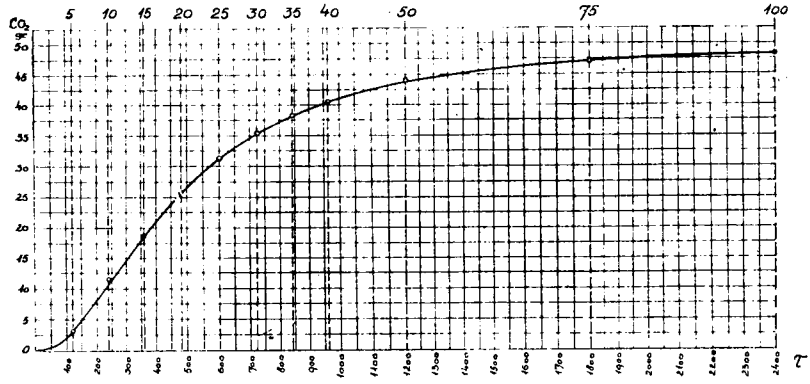


Fig. **30.** Die in Fig. 8/*a* dargestellte Wellenoberfläche wird durch eine Ebene geschnitten, wodurch Wellenlinien entstehen, deren Achsen durch aperiodische Kurven ausgedrückt werden. Wenn wir ihre Maximumpunktreihe, wie sie in τ Zeit erfolgen, ordnen, erhalten wir das in dieser Figur gezeigte *S*-förmige Bild. Die Schnitte mit der Ebene, auf deren Grund die Berechnungen gemacht wurden, erfolgte zum $\tau = 5$, $\tau = 10$, $\tau = 15$, $\tau = 20$, $\tau = 25$, $\tau = 30$, $\tau = 35$, $\tau = 40$, $\tau = 50$, $\tau = 75$, $\tau = 100$ tägigen Alter der Nachkommen. Die für die Berechnung nötigen Angaben sind auf Tab. XXIV, in Kolonne 2 und 4 zu finden. Nähere Angaben über die Berechnung sind im Texte angegeben.

Bedeutung, sondern ist auch von praktischem Wert; in erster Linie bei Untersuchungen über die Biologie der Vermehrung, Veredlung, Vererbung und hauptsächlich auf dem Gebiete der Rassenbiologie. *Im Besitze dieser Kenntnisse können wir bewusst dahin wirken, dass irgend welche Eigenschaft bis zum Maximum herausgezüchtet werde.* Wenn wir eine Reinkultur, die aus einer einzelnen vegetativen Zelle stammt, zu den nacheinander folgenden Maximumzeitpunkten systematisch überimpfen, sie immer bei ihrem Maxi-

mumwerte aussuchen und fortpflanzen, oder bei geschlechtlicher Fortpflanzung (sei es bei Insucht oder Kreuzung), sowohl den Vater als die Mutter in diesem Zustande paaren und die immer bessere Fähigkeiten aufweisenden Nachkommen aufmerksam verfolgen und entsprechend selektieren, so werden wir mit der Zeit Nachkommen mit so viel höherwertigen Eigenschaften erzielen, wie wir sie sonst nach vielen Versuchen, mit grossen Mengen bei grosser Ausdauer nur zufällig einmal erhalten.

Die Arbeitsfähigkeit, *die potentiale Eigenschaften* hängen natürlich *nicht nur mit dem Achsenwerte, sondern auch mit den wellenförmig sich ändernden Werten der Wellenkurve zusammen*, daher müssen wir unsere bisherigen Kenntnisse ergänzen mit der Erkenntnis, dass mit der periodischen Schwingung des Potentiales Veränderungen vor sich gehen. Der Wert der Wellenkurve wird zur Achse je nach dem Vorzeichen hinzugesetzt, und da die Wellenkurve einen sinus-cosinus-Charakter hat, deren Vorzeichen auch innerhalb einer Periode sich ändert, so zwar, dass er während einer Halbperiode zur Achse addiert und in der anderen subtrahiert wird,wird natürlich auch das Potential und die mit ihm zusammenhängenden Eigenschaften fortwährend und innerhalb weiter Grenzen schwanken. (S. IV. Mitteilung, Berichte 1930, S. 152, Sep. S. 82.)

Die hierauf sich beziehende Gesetzmässigkeit und der aus ihr ableitbaren Folgen kann ich solange nicht erörtern, bis wir nicht die Gesetze, nach welchen die Wellenkurven ablaufen, kennen. Sobald wir auf Grund meiner nächsten Publikation mit ihnen ins Reine kommen, werde ich auf diese Frage zurückkommen.

ZUSAMMENFASSUNG DER VIII. PUBLIKATION.

Verfasser analysiert in der vorliegenden VIII. Mitteilung die in der V. und VI. Mitteilung veröffentlichten Versuchsangaben, deren Zusammenhang miteinander in der VII. Mitteilung durch Gleichungen explicit ausgedrückt wird, u. zw. werden die zur Berechnung eines beliebigen Punktes der mit s_h bezeichneten Wellenkurvenachse benötigten Rechnungen ausführlich beschrieben.

Die einzelnen Kapitel sind die folgenden:

1. Mitteilungsdaten, die zur Berechnung der Achsenkoeffizienten nötig sind.

2. Über den Unterschied der mit t und τ bezeichneten Zeiten und über ihren Zusammenhang.

3. Methode zur Berechnung der Koeffizienten der aperiodischen Achse.

4. Berechnung der Koeffizienten w_1, r_1 und a_1 auf Grund der Daten, welche sich aus der Achse der dem 30-tägigen Schnitt entsprechenden Wellenkurve ergeben.

5. Vorläufige Betrachtung der Daten, die zur Berechnung der aperiodischen Funktions-koeffizienten benützt werden.

6. Berechnung der Koeffizienten w_1, r_1 und a_1 bei sämtlichen Achsen der Wellenkurven.

7. Berechnung eines beliebigen Punktes der aperiodischen Achse und ihrer Integral-Werte, mit Hilfe der Koeffizienten w_1, r_1 und a_1.

8. Vergleich der zu den verschiedenen Wellenkurven gehörigen Achsen.

9. Berechnung des zum Achsenmaximum gehörigen Zeitpunktes und seines numerischen Wertes.

10. Über die biologische Bedeutung der Achsenmaxima.

Unter 10. fasst der Autor das Endergebnis seiner Untersuchungen zusammen, indem er ausführt, dass *die Kenntnis des Zeitpunktmaximums und des Maximalwertes nicht nur eine theoretische Bedeutung besitze, sondern auch für die Praxis wichtig sei. Besonders auf dem Gebiete der Vermehrung, der Veredelung, dem Studium der Vererbungsbiologie, besonders aber der Rassenbiologie. Im Besitze dieser Erkenntnisse können wir zielbewusst irgendeine Eigenschaft bis zum Maximum herauszüchten.* Denn wenn wir aus einer einzelnen vegetativen Zelle (z. B. *Saccharomyces* spec.) stammende Reinkultur in den nacheinander eintretenden *Maximumzeitpunkten* systematische Überimpfungen vornehmen und weiterzüchten, oder bei der geschlechtlichen Fortpflanzung in den aufeinenderfolgenden Generationen den Vater und die Mutter zu diesen Zeiten paaren, sodann aus den Nachkommen die besser befähigten aufmerksam beobachten und selektieren, können wir mit der Zeit

Nachkommen erzielen von so ausgezeichneten Eigenschaften, wie wir sie sonst nur zufällig, nach in grossen Mengen mit viel Geduld ausgeführten Züchtungen erreichen können.

Natürlich stehen die Arbeitsfähigkeit, d. h. die potentialen Eigenschaften nicht nur mit dem Achsenwerte, sondern auch mit dem schwankenden Werte der Wellenkurve im Zusammenhange, daher müssen wir die bisherigen Erkenntnisse ergänzen mit denen, die sich aus den periodischen wellenförmigen Veränderungen ergeben. Die Ordinaten der Wellenkurve wird, wie aus der VII. Mitteilung ersichtlich, mit dem richtigen Vorzeichen zu der Achse hinzuaddiert. Da aber die Wellenkurve einen sinus-cosinus-Charakter hat und deswegen ihr Vorzeichen sich auch innerhalb einer Periode ändert, so wird sie, wie aus den Fig. 11—21 der VII. Mitteilung ersichtlich, sich während der einen Halbperiode zur Achse hinzuaddieren, in der anderen von ihr subtrahieren und entsprechend müssen natürlich das Potential und die mit ihm zusammenhängenden Eigenschaften ständig und innerhalb weiter Grenzen variieren.

Die Darstellung der sich hierauf beziehenden Gesetzmässigkeiten und der aus ihnen ableitbaren Konsequenzen können solange nicht eingehender behandelt werden, bis wir die Gesetze, nach denen sich die Wellenkurven verhalten, nicht erkennen. Sobald wir im Verlaufe der nächsten Mitteilungen darüber klargeworden sind, wird Verfasser auf diese Frage wieder zurückkommen.

Die Arbeit wird durch 9 Tabellen und 9 graphischen Figuren klarer und leichter verständlich gemacht.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Januar 1937.)

A MYTILUS MINIMUS POLI. ÉS AZ OSTREA PLICATA CHEMN. MÉRGEZŐ HATÁSÁNAK ÖSSZEFÜGGÉSE A KAGYLÓK ÉLETVISZONYAIVAL.

HARANGHY LÁSZLÓ-tól.

Régtől fogva megfigyelték, hogy bizonyos ehető kagylók, elsősorban a feketekagyló *(Mytilus edulis)*, továbbá az osztriga *(Ostrea edulis)* súlyos mérgezéseket okozhatnak. Azonban a kagylómérgezésről sokáig tiszta képet nyerni nem lehetett, mert kezdetben a romlott kagylók által okozott közönséges élelmiszermérgezéseket, a kagylófogyasztás nyomán beállott allergiás kórképeket, a fertőzött kagylók által támadt paratyphusos, typhusos megbetegedéseket egyformán a kórkép fogalma alá vonták, míg elsősorban Wilhelmshavenben olyan kagylómérgezéseket észleltek, melyek határozottan igazolták, hogy bizonyos esetekben a teljesen friss kagylók is gyorsan lefolyó, súlyos mérgezést okozhatnak. Ugyanis Wilhelmshavenben 1885-ben, a hadikikötőnek egy elzárt részéből kisebb hajót húztak ki s a hajón megtapadó *Mytilus edulis*-okat többen elfogyasztották. Ezek közül 19-en betegedtek meg, mégpedig 4-en halálosan, 10-en súlyosan s 5-en könnyebben. Aki sok kagylót fogyasztott el, annál rögtön az étkezés után súlyos mérgezési tünetek léptek fel, akik kevesebbet ettek, csak órák múlva betegedtek meg. A mérgezés torokszárazsággal kezdődött, majd acut peripheriás bénulások, curara mérgezéssel megegyező kórkép lépett föl s a halál néhány óra alatt, megtartott eszmélet mellett, többnyire beszédzavarok, hidegérzés kíséretében asphyxia tünetei között állott be. A mérgezéseket Virchov, Salkowsky, Wolff és Brieger vették vizsgálat alá. Megállapították, hogy

5—6 kagyló elfogyasztása már súlyos, heves mérgezési tüneteket vált ki. Egereknél kellő mennyiségű kagylóméreg bőralatti befecskendezése után néhány perc mulva a hátulsó lábon bénulás mutatkozik. Az állat hátulsó lábait húzva, nyugtalanul, féregszerűen mozog, majd a teljes peripheriás bénulás képében, laposan a földön elterül, fejét emelni nem tudja s végül heves dispnoe kíséretében rendszerint eldöglik. A vizsgálatok megállapították, hogy a wilhelmshaveni öbölben levő kagylók közül csak azok voltak mérgezőek, melyek a lezárt dokkban éltek, a nyílt kikötőben levők már nem. A wilhelmshaveni mérgezések bebizonyították, hogy a kagylómérgezés úgynevezett paralytikus formája önálló kórkép, mely a romlott, fertőzött kagylók által okozott megbetegedésektől és a kagylófogyasztással kapcsolatos allergiás állapotoktól élesen elkülönítendő. A mérgezések nagyon ritkák, bár az újabb időben Amerikában egyre több paralytikus kagylómérgezést írtak le. Brieger vizsgálatai szerint a wilhelmshaveni kagylók mérgező anyagát a mytilotoxin képezte, azonban mások ezt az anyagot nem találták meg. A kagylómérgezés hatóanyagát 1935-ben Müller isolálta s ő, valamint Prinzmetal, Sommer, Kellaway megállapították, hogy a méreg centrálisan és peripheriásan ható neurotoxin, mely centrálisan a respiratorikus és a cardiovascularis centrumokat érinti s nagy adagja a légzőközpontokra gyakorolt hatása miatt, csaknem azonnali halált idéz elő. A méreg peripheriásan a motorikus és sensorikus idegvégkészülékekre hat. A méreg savanyú közegben a forralást órákon át eltűri, ellenben lúgos közegben hamarosan elpusztul. A savanyú oldat szárazra bepárologtatható s a maradék 7 percig 110 fokon hevíthető. A méreg alkohollal jól kivonható s hatásossága Salkowsky szerint alkoholos oldatban a legnagyobb. Úgy ezen, valamint egyéb közelebbről le nem írt tulajdonságai nyilvánvalóan mutatják, hogy a méreg nem egyszerű bacteriális eredetű endotoxin, mely a táplálkozás közben jutna a kagyló testébe.

A kagylóméreg keletkezését illetően határozott megállapításaink máig sincsenek. A wilhelmshaveni mérgezéssel kapcsolatban eleinte arra gondoltak, hogy a mérgező feketekagyló önálló kagylófaj. (Crumpe szerint *Mytilus venenosus*, Lohmeyer után *Mytilus edulis* var. striatus). A vizsgálatok azonban csakhamar kimutatták,

hogy a wilhelmshaveni kagylók leírt külső sajátságai a feketekagylónál rendkívül gyakori egyéni variátióknak felelnek meg s a kagylók tökéletesen azonosak a nem mérgező feketekagylókkal. Egyébként is WOLFF vizsgálataiból kiderült, hogy ha a wilhelmshaveni kagylókat néhány hétig tiszta vízben tartják, mérgező sajátságaikat elvesztik, viszont a mérges kagylók lelőhelyét képező Wilhelmshaveni-öbölben tartott más helyről származó kagylók ugyanezen idő alatt mérgezőkké válnak. Ilyen módon egyesek arra gondoltak, hogy Wilhelmshavenben a tengervíz tartalmaz mérgező anyagot, esetleg a hajófenékről kioldott rezet s a kagylók a mérget csupán magukba veszik. Azonban a tengervíz 100 liternyi mennyisége bepárologtatva sem mutatott mérgező hatást s bár THESEN vizsgálatai bebizonyították hogy a kagylók a vízben oldott mérgeket magukba vehetik, a kagylóméreg ilyen eredete eddig határozottan igazolható nem volt. VIRCHOW a méreg keletkezését kagylók megbetegedésével hozta kapcsolatba s többen, különösen BANDI, a kagylómérget a bacteriumokból, mások újabban mérgező Dinoflagellátákból származtatják. Egyesek a mérget az ivaréréssel hozzák összefüggésbe s a nemi mirigyek váladékának tekintik. Vizsgálataim szerint az ivaréretlen állatok mérgező hatása az ivarérettekét olykor még felül is múlja.

A kagylómérgezéssel foglalkozó különböző elméletek túlnyomórésze egy tekintetben megegyezik, hogy a mérges kagylók a tenger áramlásából kirekesztett, többnyire szennyezett vízű, zárt helyen élnek s ezen körülménynek a mérgező hatás kifejlődésében valamilyen szerepe van. A jelenség magyarázata azonban bizonyos nehézségekkel jár. Legyen szabad röviden ilyen szempontból a következőkre hivatkoznom: Az utóbb említendő vizsgálataim szerint az átvizsgált kagylók közül a Mergellina-öbölből származó *Mytilus minimus* és *Ostrea plicata* kisebbfokban mérgezőeknek bizonyultak. A Mergellina öbölrészt a Nápolyi-öböl nyugati felében egy keskeny kiugró földnyelv határolja, úgy hogy az öböl észak felé nyitott. Az öbölrész bejárata széles, mivel azonban vize aránylag sekély, nagyobb hajók nem használják. Az öböl belsejében levő mólóknál rendszerint számos halászhajó és csónak tartózkodik s a partrész a halászok állandó gyülekezőhelye. Az elmondottak szerint a szennyezéseknek kitett öbölrész nem alkot ugyan

teljesen nyilt vízterületet, de széles kapun át a nagy öböl vizével állandóan közlekedik. Ezzel szemben a Nápoly melletti Baja közelében lévő ősi osztrigatelep, a Lago del Fusaro, a nyilt tengertől teljesen el van zárva s a tengerrel csupán keskeny csatornák kötik össze és a benne lévő osztrigák mégsem mutatnak semmiféle mérgező hatást. Hasonló a helyzet a tarantói osztrigáknál. A híres, régi tarantói osztrigatenyészet a tengertől két keskeny csatornával elzárt Mare Piccolóban van, melyben a viszonyok még annál is inkább kedvezőtlenebbek, mert míg a Fusaro-tó mellett nagyobb település nincs, addig a kb. 55 ezer lakosú Taranto, közvetlenül a Mare Piccolo belső oldalán terül el s itt van Olaszország egyik legnagyobb hadikikötője. Az elmondottak tehát határozottan azt mutatják, hogy magábanvéve azon körülmény, hogy a mérgező tulajdonságú kagylók a víz áramlásából kirekesztett zárt s kisebb-nagyobb fokban szennyezett helyen élnek, a mérgező hatás keletkezését még nem magyarázza. A kérdés vizsgálata céljából különböző helyről származó Venus, Mytilus és Ostrea kagylókat, különböző bacillusemulsiót tartalmazó, 25°-os tengervízben tartottam és a kísérleteket olyan Seitz-szűrőn átszűrt tengervízben ismételtem meg, melynek oxygentartalmát kagylókkal kimerítettem. Többszöri próbálkozás után sikerült azt a legkisebb oxygenmennyiségű vizet megtalálni, melyben a bélben fellelt tusszemcsék tanúsága szerint, a kagylók még táplálékot felvettek. Az ilyen tengervízben végzett kísérletek arra az eredményre vezettek, hogy a Mergellina-öbölből származó *Mytilus minimus* és *Ostrea plicata* 168 óra mulva súlyosan mérgező hatásúvá válik és az ilyen kagylókkal etetett vagy beoltott állatokon a kagylómérgezések jellegzetes képe mutatkozik, ellenben sem a Mergellina-öbölből, sem a Nápolyi-öböl egyéb részéből származó Venus-kagylók, sem a terranovai *Mytilus edulis*ok, sem a fusaroi s speziai és tarantói osztrigák a mérgező hatás nyomát sem mutatták. Ezeket a kísérleteket a következő módon végeztem: A vizsgálathoz olyan egy liternyi előzőleg Seitz-szűrőn átszűrt, 25 C°-os, meghatározott *pH*-jú tengervizet használtam, melyben előzőleg a vizsgálatnál szereplő azonos fajú állat több (4—10) hasonló súlyú, pontosan megtisztított példányát hét napig tartottam. Az ilyen tengervizet Bacillus fluorescens liquefaciens 24 órás tenyészetéből készített emulsióval

kevertem s a víz csíraszámát 1.000 000-ra állítottam be. Ezután a vízhez 1 cm³ 0·5%-os nutrose s 2 cm³ 1%-os szőlőcukoroldatot adtam s a víz hőmérsékét költőszekrényben 25 fokra emeltem. Hasonló módon készítettem külön-külön kísérleti folyadékot *Bacterium coli*val, *Proteus vulgaris*szal és *Bacillus paratyphi* B. SCHOTTMÜLLERrel. Mindenik kísérleti edénybe egy-egy pontosan megtisztított s alkohollal ledörzsölt héjú kagyló egy-egy példányát helyeztem s a folyadék csíraszámát 12 óránként HELBER—GLEEN bacteriumszámláló kamara segítségével leolvastam. Az ilyen irányú meghatározások azt mutatták, hogy a kagylók jelenlétében a víz csíraszáma mindenhol rohamosan csökken. A venus-kagylókkal végzett kísérletekben a víz csíraszáma 48 óra alatt 10.000 alá süllyedt és 156 óra mulva még a legnehezebben derítő osztrigáknál is a 10 000 alá esett holott ugyanekkor a controllkísérletben 600,000 fölött állott. Hét nap mulva a kísérletet megszakítottam s az állatokból kivonatot készítettem. Az eljárásnál általában THESEN útmutatásait követtem s a következőképpen jártam el: Az állatokat héjukból kifejtve, 1—2 percig forrásban levő vízbe dobtam, majd a megkeményedett állattesteket quarzhomokkal eldörzsölve, olyan tízszeres mennyiségű vízzel higítottam fel, melybe 1% mennyiségű $^1/_{10}$ normál sósavat adtam. A folyadékot három órán keresztül vízfürdőben forraltam s vattán megszűrve, az eredeti mennyiségre bepárologtattam és a vékony szirupszerű folyadékot kétszer annyi concentrált alkohollal felhigítottam. A félórai állás után támadt csapadékot megszűrve, az alkoholt elpárologtattam s a maradékot destillált vízzel olyan módon higítottam fel, hogy az oldat súlya a kagylósúly egyharmadának feleljen meg s ismét megszűrve, pár csepp chloroformmal conserváltam. A folyadékot subcutan, intraperitonealisan és intravenásan, tömények vagy tízszeresen felhigítva s használat előtt $^1/_{10}$ normal natriumcarbonat-oldattal pontosan közömbösítve alkalmaztam. A méreg hatását patkányon, egéren, tengeri malacon s nyúlon próbáltam ki. A méreg mindenik állaton mérgezést váltott ki. A 20 g súlyú egereknél a mérgezés képe a következő volt: 0·06 cm³ Mytilus minimus-kivonat befecskendezése esetén 1—1·5 perc mulva 1—2 rángás után az állat asphyxia képében elpusztult. 0·01 cm³-nyi kivonat intraperitonealisan befecskendezve, a követ

kező tüneteket váltotta ki: 1—2 perc mulva az állat nyugtalan lett, szőrét borzolta, majd újabb 1—2 perc mulva hátulsó lábbénulás mutatkozott s az állat menés közben hátsó lábát húzta. Két-három perc mulva a bénulás fokozódott, az állat imbolygó, bizonytalan járással féregszerűen mozgott, miközben a hátsó lábak bénultan, kinyujtva állottak. Végül az állat fejét tartani nem tudta, féloldalra dőlt. Néhány perc után laposan elterült vagy hátára fordult s az életet csupán a heves dispnoés légzés jelezte s néhány perc után az állat többnyire elpusztult és így az egész mérgezés rendszerint 10—20 perc alatt zajlott le. Máskor az órákon keresztül hátán fekvő, erősen dispnoés állat teljesen magához jött s a bénulások eltüntek. Néha a hátsó lábak bénulása állandósult vagy teljes haemiplegia lépett fel s az ilyen állatok oldalra feküdve csúsztak s 1—4 hét alatt elpusztultak. A táplálékhoz kevert kagylókivonat nagyobb adagja szintén súlyos mérgező hatást fejtett ki.

A különböző bacteriumokkal végzett kísérletek között annyiban mutatkozott eltérés, hogy a *Bacillus paratyphi* B. Schottmüller emulsióval kevert tengervízben tartott Mytilus minimus mérgező hatása a többi kagylókét sokszorosan felülmúlta, mert a 20 gr-os egér már 0·001 cm^3 kivonat intraperitonealis oltása után eldöglött. Miután a kagylóméreg rendkívüli resistentiája, specifikus pharmacologiai hatása a paratyphus endotoxinnal való azonosságát kizárja, a jelenség bizonyára azzal magyarázható, hogy a *Bacillus paratyphi* B. Schottmüller megemésztésével szabaddá váló endotoxin a kagyló oxydatiós viszonyait, anyagcseréjét, esetleg májszövetét károsítja s a mérgező hatás kifejlődésének kedvez.

A mérgessé vált kagylók semmiféle külső jellegzetességet nem mutattak, ellenben a Thesen által 1902-ben említett azon megállapítás, hogy a patkányok a mérgező kagylókat felismerni képesek, jól megfigyelhető volt. A patkányok a kagylókat rendszerint mohón megeszik és a ketrecbe helyezett osztrigákat azonnal megrohanják. A mérgező osztrigákat a patkányok szintén azonnal körülvették azonban egyik sem harapott bele s még akkor sem fogyasztották el ha az állatokat megelőzően éheztettem. Hogy a mérgező sajátság valamilyen szaggal áll összefüggésben azt hatá-

rozottan bizonyította azon megfigyelésem, hogy ha a patkányok orrát novocainnal érzéstelenítettem, az állatok a mérges kagylókat is mohón elfogyasztották s $^1/_4$ óra mulva már a súlyos mérgezés tüneteit mutatták.

Kísérleteim tehát arra engedtek következtetni, hogy ha a *Mytilus minimus* és az *Ostrea plicata* kagylókat rossz oxydatiós viszonyok között túlnyomólag bacteriumtáplálkozásra szorítjuk, a kagylók mérgezőekké válnak. Miután azonban a *Venus verrucosa*, *Mytilus galloprovintialis* s *Ostrea edulis* mérgesekké tehetők nem voltak, felvetődött a kérdés, hogy kísérleteimben nem csupán a mergellinai kagylók méreghatásának fokozódásáról van-e szó. Ezen lehetőség vizsgálatánál Richet megfigyeléseiből indultam ki. Tudvalevőleg a nevezett szerző az *Actinia* és a *Mytilus* mérgező sajátságaival foglalkozott s megállapította, hogyha az *Actinia* és a mérges kagylók kivonatával beoltott állatok a mérgezést kiheverik, túlérzékennyé válnak s három hét mulva a méreg igen kis mennyisége elegendő halálos mérgezés kiváltásához. Az anaphylaxia fogalmához vezető Richet-féle kísérletek taglalása ezen közlemény kereteit messze túlhaladná s így csupán azon megjegyzésre szorítkozhatom, hogy Richet kísérleteiben a valódi anaphylaxiás jelenségek és a méreghatás bonyolult módon szövődtek össze, mert a kagylóknak, más helyen ismertetendő vizsgálataim szerint is, igen erős anaphylactisáló hatása van s a Richet által leírt shockban úgy anaphylaxiás, mint toxikus jelenségek érvényesültek. A Richet-féle elgondolás alapján azon kérdést, hogy a Mergellina-öböl kagylói nem mutatnak-e kisfokban mérgező hatást, olyan módon vizsgáltam, hogy kisebb mérgező adaggal kiváltott, jellegzetes mérgezésen átment állatokat három hét mulva a Mergellina-öbölből frissen kivett, azonos kagyló nagymennyiségű kivonatával oltottam be, feltételezve, hogy a kagylóban jelenlevő méregnyomok elegendők lesznek a Richet-féle jelenség kiváltásához. Az eredmény rendkívül szembeötlő módon mutatkozott, mert az állatok heves mérgezés képében pusztultak el s a jellegzetes bénulásos állapot rajtuk kifejezetten felismerhető volt. A kísérletekben azt is megállapítottam, hogy a kagylók mérgező tulajdonságaikat aránylag gyorsan elvesztik, mert a három hétig friss, áramló vízű aquariumban tartott mergellinai kagylók kivonatával a Richet-féle kísérlet eredménye-

sen kiváltható nem volt. Tehát a mérgező hatás egy reversibilis folyamat, nem a kagylótest irreparabilis megbetegedése.

Az elmondottak szerint kísérleteimben a kagylók mérgező hatása nem újonnan keletkezik, hanem egy meglevő kisebbfokú méreghatás fokozódásának eredménye és a Mergellina-öbölből 1936. júliusában halászott *Mytilis minimus* és *Ostrea plicata* kagylók már eleve mérgezőek, csakhogy a méreg olyan kismennyiségű, hogy a kagylók elfogyasztása mérgezést nem vált ki. Figyelembe veendő ilyen szempontból az is, hogy a *Mytilus minimus* és az *Ostrea plicata* silány minőségű, kis kagylók, melyeket a Nápolyban olcsó, jóminőségű ehető osztriga helyett, még a szegény néposztály sem tart érdemesnek elfogyasztani s így érthető, hogy a mergellinai halászok között kagylómérgezés nem fordult elő. Miután azonban kísérleteimben két tényező, nevezetesen a tökéletlen oxydatiós viszonyok és a túlnyomólag bacteriális eredetű táplálék váltotta ki a mérgező anyag gyors felszaporodását, valószínűnek mondható, hogy a mérgező hatás keletkezése 1936. júliusában a Mergellina-öbölben is ugyanazon tényezőkhöz volt kötve és a máshonnan származó kagylók kísérleteimben azért nem váltak mérgezővé, mert a folyamathoz szükséges rendellenes viszonyok kifejlődéséhez a kísérletben szereplő időnél sokkal tetemesebb idő szükséges. A tökéletlen oxydatiós viszonyok szerepére utal azon megfigyelésem is, hogy a Mergellina-öbölből kapott Venus-kagylók a kísérletekben nem váltak mérgezővé, mert ezen kagyló derítési jelzője, oxygenszükséglete a *Mytilus minimus*nál jóval kisebb s amikor a megállapításaim szerint egyik legrosszabb vízderítési jelzőjű és jóval nagyobb oxygenszükségletű *Mytilus minimus*on a tökéletlen oxydatiós viszonyok következménye már kimutatható, a Venusnál ilyen hatás még nem jelentkezik. Hasonló körülmények magyarázzák azon kísérleteimet is, hogy az *Anodonta* és az *Unio* kagylók hónapokon keresztül a mérgezésre legkedvezőbb feltételek között tartva, mérgezővé nem válnak. Ugyanis WEINLAND kimutatta, hogy a tavikagyló oxygenszükséglete rendkívül kicsi s így a jó és rossz oxydatiós viszonyok határa egymáshoz nagyon közel áll s így az oxydatiós viszonyok kisfokú megromlása hatástalan, a nagyobbfokú rosszabbodás pedig már a táplálkozás teljes beszüntetését vonja maga után, amikor viszont a mérgező hatás

keletkezéséhez szükséges másik előfeltétel, a túlnyomólag bacteriális táplálkozás, hiányzik.

Az elmondottak figyelembevételével az aránylag sekély Mergellina-öböl *Mytilis minimus* és *Ostrea plicata* kagylóinak 1936. júliusában észlelt kisfokú mérgező hatása azzal magyarázható, hogy a tenger áramlásából részben kirekesztett öbölben 1936. júliusában az oxydatiós viszonyok rosszabbak voltak, mint a nyílt vízterületen s a szennyezett vízben a kagylók táplálékát képező nanoplankton főleg bacteriumokból állhatott. Ezzel szemben a nyílt tengertől teljesen elrekesztett, állóvízű Fusaro-tóban az oxydatiós viszonyok kedvezőtlenebbek ugyan, mint a nyilt tengeren, de a szennyezésektől teljesen megóvott osztriga-pad mikroplanktonja a kagylóknak bőséges, nem bacteriális eredetű tápanyagot nyujt s így itt a kagylómérgezés veszélye nem fenyeget. Viszont a szintén zárt vízű s emellett szennyezéseknek kitett Tarantói-öböl egyike azon földközi-tengeri kikötőknek, melynek bejáratánál az árapályokozta áramlás legerősebben mutatkozik s ezenfelül az öböl faunája nagyon gazdag. Tehát az öböl vizének időnkénti kicserélődése és a bő, sokoldalú tápanyag, akadályozza meg a kagylók mérgező tulajdonságának kifejlődését. Az elmondottak figyelembevételével természetesnek látszik, hogy a kagylómérgezés ritka, ugyanis az oxydatiós viszonyok bizonyos korlátolt határok közötti megromlása és a természetes tápanyag hiánya s ezzel kapcsolatban túlnyomólag bacteriumokból álló táplálék szükséges ahhoz, hogy a kagylók mérgezőekké váljanak. Ha viszont a szennyezettség nagyon erős és az oxydatiósviszonyok megromlása túl nagy, a kagyló táplálkozása szünetel és így mérgezőhatás nem fejlődhet ki. Ha ezenfelül figyelembe vesszük, hogy a víz hőmérséklete a kagyló táplálékfelvételét, légzését messzemenőleg befolyásolja s ilyen módon a kagylóméreg képződésére közvetve a víz hőmérsékletének is nagy hatása van, megállapítható, hogy a kagylóméreg csak az említett tényezők ritka, bizonyos határig terjedő, együttes megváltozása esetén fejlődhet ki. Ilyenkor is elsősorban olyan kismennyiségű méreg keletkezik, hogy a kagylók elfogyasztása súlyos, klinikailag felismerhető mérgezést nem okoz s a halálos kagylómérgezés csak hosszabb ideig, rendkívül kivételes viszonyok között élő kagylók elfogyasztása után támadhat. Vizsgálataim szerint a kagylóméreg

nyomainak kimutatása a RICHET-féle kísérlettel jól sikerül s így a különböző kagylókitermelésre szánt helyek ilyen szempontból való vizsgálata annál is inkább fontosnak látszik, mert a méreg nyomait tartalmazó kagylók élvezetének eltiltása, lelőhelyeik oxydatiós viszonyainak, szennyezettségének javítása a súlyos mérgezéseket megakadályozhatja.

Összefoglalás.

A nápolyi Mergellina-öbölből 1936. júliusában kifogott *Mytilus minimus* POLI. és *Ostrea plicata* CHEMN. 25 C°-os vízben, kedvezőtlen oxydatiós viszonyok között tartva és túlnyomólag bacteriumokból álló táplálékra szorítva, mérgezőekké váltak s a *Mytilus*-kagylók THESEN szerint készített kivonatának 0·01 cm^3-e intraperitonealisan 20 gr-os egérbe oltva, halálos, jellegzetes lefolyású paralyticus kagylómérgezést váltott ki. RICHET anaphylaxiás kísérleteinek elvei szerint végzett további vizsgálatoknál kiderült, hogy az 1936. júliusában halászott, említett fajú mergellinai kagylók már eleve kisfokban mérgezőek. Ugyanis a súlyos kagylómérgezésből felépült kísérleti állatokat három hét mulva, friss mergellinai kagylók kivonatával beoltva halálos lefolyású mérgezés támadt, világosan mutatva, hogy a méreg csekély nyomai már a friss kagylókban is jelen vannak. Miután a kísérletekben a méreghatás fokozódása az oxydatiós viszonyok megromlása és a túlnyomólag bacteriumokból álló táplálék hatása alatt következett be, valószínűnek mondható, hogy a mérgező tulajdonság keletkezése a Mergellina-öbölben is ugyanezen tényezőkhöz van kötve. Az említett kagylók mérgező tulajdonsága múlékony jelenség, mert a három hétig friss, áramló vízű aquariumban tartott kagylók mérgező hatása teljesen eltűnt s a RICHET-féle kísérlet az ilyen kagylókkal kiváltható nem volt.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. junius 7-én tartott üléséből.)

ÜBER DEN ZUSAMMENNHANG VON GIFTWIRKUNG UND LEBENSWEISE DER MUSCHELN MYTILUS MINIMUS POLI. UND OSTREA PLICATA CHEM.

Von LADISLAUS HARANGHY, Privatdozent, Primarius.

Wenn *Mytilus minimus* und *Ostrea plicata* aus der Mergellina-Bucht Neapels stammende Muscheln in Wasser von 25°, unter schlechten Oxydationsverhältnissen und bei vorwiegend aus Bakterien bestehender Nahrung gehalten wurden, so wirkten sie stark giftig. 0·01 cm^3. des nach THESEN bereiteten Extraktes von derartigen *Mytilus*-Muscheln intraperitoneal in eine 20 gr. schwere Maus eingeimpft, führte zu einer sehr charakterisierten, tötlichen, paralytischen Muschelvergiftung. Aus anderen Gebieten stammende Miesmuscheln und Austern blieben unter obigen Bedingungen stets vollkommen ungiftig. Weitere im Sinne der Anaphylaxie-Versuche RICHET's ausgeführte Untersuchungen ergaben, dass die im Monat Juli 1936 gefischten Muscheln aus der Mergellina-Bucht selbst in frischem Zustand schwach toxisch wirkten. Wurden nämlich Mäusen drei Wochen nach überstandener, schwerer Muschelvergiftung Extrakt frischer Muscheln aus der Mergellina-Bucht eingespritzt, so entwickelte sich bei diesen eine tötliche Vergiftung. Da nun im Laufe der Versuche unter dem Einfluss sich verschlimmernder Oxydationsverhältnisse und überwiegend aus Bakterien bestehender Nahrung eine Steigerung der Giftwirkung zutage trat, dürfte die Giftigkeit der erwähnten frischen, mergelliner Muscheln eine Folge ähnlicher Milieu-Umstände sein. Diese Giftigkeit ist eine vergängliche Erscheinung, da in frischem, fliessenden Wasser gehaltene Muscheln ihre Giftigkeit nach drei Wochen gänzlich verloren und da die derart ungiftig gewordenen Muscheln selbst im Versuche RICHET's zu keinen Vergiftungserscheinungen führten.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der. Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Juni 1937.)

TITÁNMAGNETITES KŐZETEK A SZARVASKŐI VASKAPU VIDÉKÉRŐL.

SZENTPÉTERY ZSIGMOND l. t.-tó

A X—XIV. táblával.

A Bükkhegység gabbroidális vonulatának a déli részén, a Vaskapu mellett differenciációs eredetű tekintélyes ultrabázit tömeg[1] van, melynek keleti és északkeleti oldalán gabbrószegély, sőt keleti aljában a diabáz is kimutatható. Úgy az ultrabázitot, mint a gabbrót aránylag nagy titánmagnetit-tartalom jellemzi.

Ezt az ultrabázitot már a hegység régi kutatói is ismerték. Eltekintve ezektől a régi leíróktól, akik közül KOBELL az itteni peridotitot ásványnak tartva, wehrlitnek keresztelte el, különösen említésre méltó PÁLFY MÓRIC 1910. évi leírása(6). PÁLFY a leíráson kívül becses számításokat is végzett az érces tömeg mennyiségére nézve. Meg kell említenem azt is, hogy SZABÓ JÓZSEF 1871-ben már a diabázt is felsorolja(2). A lelőhely környékét SCHRÉTER ZOLTÁN vette fel geológiailag részletesen(7). A Majorhegyet és a Vaskaput az ultrabázit-lelőhellyel 1917-ben vizsgáltam meg először s a tömeg genezisét másnak találtam, mint az előző kutatók (8); azóta több ízben átkutattam, legrészletesebben 1935-ben, főleg a származásra vonatkozólag, de több ízben foglalkoztam magukkal a kőzetekkel is (9—13, 15). Az eredményeket az újabbi kutatások és vizsgálati eredmények alapján a következőkben foglalhatom össze:

Az előfordulás Szarvaskő községtől DK-re, a Vaskapu É-i oldalán, a Kecskefark és Zsindelbányarom erdőrészben van, ahol a Majorhegy oldalától délfelé egészen a Határlápáig nyomozható.

[1] Ultrabázitnak nevezem összefoglaló névképpen, a hosszadalmasság elkerülése végett az itt előforduló gabbróperidotit, peridotit, gabbropiroxenit, piroxenit, gabbróamfibololit, amfibololit stb. stb. kőzetfajtákat.

Egy tekintélyes bányatáró, alatta egy kisebb kutatótáró, felette apró kutatólyukak, a Majorlápa és a Határlápa feltárása könnyítik meg a kutatás munkáját. A K-i lejtőn legalul ofitdiabáz (amfibolaugitdiabáz) bukkan fel apróbb nagyobb sziklákban, ez rövidesen átmegy gabbródiabázba (amfibolaugitbiotitgabbródiabáz) ez viszont gabbróba (diallágaugitamfibolgabbró). A gabbró Ny-felé több helyütt erősen bázisossá válik és a hegyoldal középső részén, de néhol a Majorlápában is legtöbbször fokozatosan megy át ultrabázitba. Magát az ultrabázitot felülről karbonüledék, a Ny-i oldalon egy helyütt diabáz fedi. É-on a Majorhegy magasabb részein szpilitdiabáz van.

Ezek közül a tulajdonképpeni titánmagnetites kőzetek a gabbrók és ultrabázitok, mert a diabázfajták érce uralkodólag ilmenit, a savanyú telérek és teleptelérek kőzeteiben pedig minimális az érc, különben is többször van bennük kiképződve különkülön a magnetit és ilmenit.

A hipabisszikus ofitdiabáz a jelenlegi felületnek ezen a helyén mélyebb szintben van, mint a mélyebbi típusú gabbró és peridotit. Ennek a sajátságos helyzetnek az okát már régebben kifejtettem, (8, 12), itt csak annyit említek, hogy a vidéken általánosan tapasztalható összeszakadozás, vetődések egész sora meglehetős jó támaszpontot nyujt a tektonikai magyarázathoz.

A szarvaskői gabbroidális vonulatnak ez a déli bázisos szegélye magmabeli differenciálódás folytán jött létre, mint ahogy ez hozta létre legnagyobb részben magának a vonulatnak sokféle fajtából álló kőzetsorozatait is(10). A differenciálódás itt a déli részen főleg a nagy ultrabázittömegnek és a savanyú teléreknek, telepteléreknek a képződésében nyilvánult, habár több adatból itt-ott még slires szétválásra is lehet következtetni. A képződött bázisos és savanyú kőzetek között itt is több helyütt megtaláljuk a fokozatos átmenetet, ami a vonulatnak É-ra eső főrészében szinte tökéletesenk mondható. Ugyancsak meg van a fokozatos átmenet a különböző szinteken képződött tagok kristályossági foka között is, úgy, mint a vonulat főrészében. A kőzetek azonossága, valamint az előfordulási viszonyok nagy hasonlósága kétségtelenné teszik, hogy ez a déli rész szervesen összefügg a főtömeggel a széles üledéktakaró alatt, amely közöttük az Egervölgy mentén húzódik.

Az eredeti gabbrómagmából (8) származott sokféle kőzet képződésénél, az egész vonulatot tekintve, a normális és likvációs differenciálódáson kívül itt-ott a beolvasztás is közrejátszik, de itt az ultrabázit vidékén főleg csak a kristályosodási termékek gravitációs elkülönülésére gondolok (12). Az asszimilációs jelenséget itt csakis a széleken tudtam kimutatni, ahol az ásványképzőkben valamivel gazdagabb részek érintkeztek a homokos üledékkel. Itt fejlődött ki a kvarcdiabáz, kvarcdioritporfirit stb. A Majorlápában található savanyú pegmatit és aplittelérek az ultrabázisos részek leválásának az eredményei. A slires szétválásra csak a Majorlápa sziklavölgyében és pár helyütt a vaskapui bánya szelvényénél lehet következtetni.

A Majorlápában, amely az eruptiv testet kb. 200 m hosszúságban vágja keresztül, az ultrabázit csak pár kisebb helyen jelenik meg, s így váltakozik a gabbróval. Az egyes kőzeteknek egymásba való átmenete néha elég gyors, de azért megvan a fokozatosság. Vannak azonban élesebb határok is, mint pl. alulról számított kb. 191 m-nél. Az ilyen helyeken arra gondolok, hogy a likváció folytán már egymásban oldhatatlan részekre tagolt magmában utólagos mozgások történtek, amidőn a már elkülönült magmarészek egymásba hatoltak, de egymással már nem vegyültek. Ezeken a helyeken néha alig pár dm-es területen szabálytalanul váltakoznak egymással a főleg földpátból álló, főleg femikus ásványokból álló és főleg titánmagnetitből álló részek vagy a normális gabbroid részek a peridotittal. Vannak tisztán titánmagnetitből álló zsinórok és fészkek is. Ezek és más észleletek alapján azt is fel kell tételezni, hogy a likváció folytán származott magmarészek egyike hígabb-folyós is volt, mint a másik.

A gabbrófajták kőzettani változatosságát a femikus ásványok paragenezise, éspedig főleg a diallág, hipersztén és amfibol egymáshoz viszonyított mennyiségének a folytonos változása, olykor valamelyiknek a hiányzása idézi elő. Ehhez járul még az is, hogy ezek mellett szerepel a diopszid, az augit, olykor a biotit, ritkán az olivin és broncit is, változó mennyiségben. A titánmagnetit a normális gabbróban is állandóan jelentékeny, de csak ritkán nagymennyiségű, úgyhogy csak ritkán bír osztályozó szereppel.

Az említett femikus ásványok kombinációi több ízben és elég

gyorsan, de majdnem mindig fokozatos átmenetekkel változnak. Ezt a változást ebben a nagyjában hasonló vegyi összetételű gabbrórészben bizonyára több fizikokémiai körülménynek az összejátszása idézte elő. Magyarázatul az ásványképzők szerepén kívül természetesen még a nyomási és hőmérsékbeli különbözőségeket, ill. ezek csökkenési gyorsaságának a különbözőségét is fel kell vennünk. Az ásványképzők szerepének megítélésénél bizonyos körülmények, aminő pl. az amfibol nagy gyakorisága, különösen megszívlelendők. Az amfibol gyakorisága kérdésénél két körülmény látszik fontosnak. Az egyik az, hogy az amfibol képződésének és megmaradásának az intervalluma nagyon tág határok között ingadozik, a másik az, hogy az itteni gabbroidmagma az amfibollal szemben nagy oldási képességgel bírt. Ennek tulajdonítható, hogy vannak kőzetek, melyekben az amfibolnak a kiválása már a diallág képződésének bizonyos stádiumában megkezdődött, a diallággal pertitesen össze is szövődött, de csak az összes többi alkatrészek kiválása után fejeződött be. Egyes kőzetekben pedig az amfibol legnagyobb részben, sőt néha egészben is a legutolsó kiválási termék, amely az összes többi ásványokat magábazárta. Megjegyzem még, hogy az amfiból képződésénél szereplő ásványképzők hatásának tulajdonítom azt a jelenséget, hogy az amfibolban különösen gazdag kőzetek (gabbróamfibololit, amfibololit stb.) úgy a gabbrók, mint az ultrabázitok között a legnagyobb szeműek, olykor egyenesen durvaszeműek.

De az olivines gabbrók is jó példái ennek a változóságnak ebben a nagyjában homöokémiai gabbrósorozatban («izotektikus» differenciálódás Doelter), hiszen az olivin megjelenése szintén nem okoz a gabbróknál nagyobb vegyi eltérést sem a kovasav, sem a *FeMg*-oxidok tekintetében. Éppen ez a vegyi hasonlóság mutatja, hogy a femikus ásványoknak ezt a változó paragenezisét nem idegen anyagnak (karbonüledék) a beolvadása idézi elő, amire régebben gondoltam, hanem főleg a fizikokémiai viszonyok változásának a hatása.

A Vaskapu vidékén a gabbrók közt legtöbb a *diallágamfibolgabbró*, melyben a femikus szilikátok közül hol a diallág, hol az amfibol uralkodik, ritka és kevés a biotit. A diallág mellett majdnem mindegyik kőzetben (úgy a gabbróban, mint az ultrabázitban) van

több-kevesebb egyéb monoklin piroxén (diopszid, augit, titánaugit) is, de mivel ezek együttes mennyisége is rendesen alárendelt a diallág mellett, olykor pláne csekély is, azért a kőzetelnevezéseknél legtöbbször egyedül csak a diallágot említem. Ritka eset, hogy ezek közül valamelyik egyenértékű a diallággal, ilyen kőzet a *diallág-augitgabbró*, melyben a diopszidaugit lényeges a diallágon kívül. Meglehetős gyakori a *diallággabbró* minimális amfibollal és az *amfibolgabbró*, minimális diallággal, mindkettőben szórványos a biotit. A Majorlápa eruptivumának felső részén uralkodik az *amfibolbiotitgabbró* gyakran kevés augittal, mellette szórványos a *biotitamfibol-augitgabbró*. A Majorlápa alsó részén gyakori a *diallághipersténgabbró*, benne néha az amfibol is szerephez jut: *diallághipersténamfibolgabbró*, mely a vonulat É-i főrészének uralkodó gabbrófajtája, és amelyet ezért annak idején szarvaskői normális típusú gabbrónak neveztem(8). Sajátságos az olivin szerepe ebben a vaskapui részben: jóformán csak a peridotitkiválás mellett lévő keskeny övre szorítkozik és ott se mindenütt található. Ez az *olivingabbró* igen hamar átmegy gabbróperidotitba, ill. peridotitba. Igen ritka a *troktolit*, mely itt olyan, hogy a túlnyomólag uralkodólag földpátból álló kőzetben kevés olivinszem van. Megemlítendő még a *titánmagnetitgabbró*, mely a Majorlápában fordul elő pár helyen és vagy az anortózithoz közeledő gabbrófajta, vagy pedig diallág-amfibolgabbró megy át ilyen kőzetbe, mely itt-ott tiszta ércsávokkal is váltakozik

Éppen így változik az uralkodó femikus ásványoknak a mennyisége az ultrabázisos széli kiválásban, ahol uralkodó a peridotit, alárendelt a diallágit, nagyon szórványos az amfibololit. A gabbrók és ultrabázitok közt minden lehető átmenet megvan. Ilyen átmeneti kőzet a *gabbródiallágit*, uralkodó diallággal, kevés augit-, diopszid-, broncit- és amfibollal, mely néha felszaporodik, szórványos a biotit. Ritka a *gabbróamfibololit*, rendesen több kevesebb monoklin piroxénnel. A leggyakoribb átmeneti tag a *gabbróperidotit* diallággal és amfibollal.

Az olivinkőzetek közül a leggyakoribb a *diallágamfibolperidotit* (wehrlit Tröger, 10% amfibollal), melyben azonban hol a diallág, hol az amfibol az uralkodó az olivin mellett. A titánmagnetit gyakran nagyon megnövekszik: az olyan *titánmagnetitperidotit* nagyon

gyakori, melyben a diallág és amfibol mennyisége erősen megnövekedik az olivin rovására De vannak titánmagnetitben nagyon gazdag olyan kőzetek is, melyekben csak a diallág szerepel a magnetit és olivin mellett. A normális *diallágperidotit* (wehrlit W. Hommel és Niggli) meglehetősen ritka. Az amfiboldiallágperidotit több helyen átmegy *amfibolperidotit*ba, mely gyakran igen nagyszemű. Az amfibolperidotit is gyakran megy át titánmagnetitperidotitba. Ritkán, de előfordul a *diallagbroncitperidotit* minimális amfibollal. Mindezekben a peridotitokban majdnem mindig megtaláljuk az említett egyéb monoklin piroxéneket is. Pár helyütt minimális plagioklászt is tartalmaznak.

Elég gyakori a *diallágit*, mely mindig tartalmaz felszaporodó amfibolt, úgyhogy gyakoribb kőzet az *amfiboldiallágit*, mint a tiszta diallágit. Mindkettőben megtaláljuk a diopszidot, augitot és broncitot, gyakran az olivint is. A broncit néha jelentős mennyiségű: *broncitdiallágit*. Az *amfibololit* nagyon ritka, pláne tiszta típusban. Legtöbbször tartalmaz kevés olivint, diallágot, néha plagioklászt is. Mindig nagyszemű. A legtisztább amfibololit a Majorlápában fordul elő (240 m táján).

Az előadottakból látnivaló, hogy az itt felsorolt gabbró- és ultrabázit-fajtákat nem lehet egymástól élesen elkülöníteni. Tiszta típus alig van, uralkodnak az átmeneti fajták. Éppen ezért az is helyesebbnek látszik, ha ezeket az egymásba szinte lépésről lépésre átmenő kőzeteket a lényeges ásványok után nevezzük el, nem pedig a nagyon keveset vagy semmit ki nem fejező helyi nevekkel (wehrlit, lherzolit stb.). A tárgyalt területen még a legállandóbb a diallágamfibolgabbró és diallágamfibolperidotit, nagyjában egyenlően lényeges diallággal és amfibollal, de ezekben is állandóan változik a nem lényeges alkatrészek szerepe, úgyhogy ezek gyakran válnak szintén lényegessé.

Előfordulási viszonyok. Ami az egyes nagyobb csoportok előfordulását illeti, arra általában azt mondhatom, hogy a gabbrófajták a legszebb kifejlődésben a Majorlápa néha egészen jól bejárható feltárásában találhatók, a peridotitfajták pedig legjobban a vaskapui bányatáróban tanulmányozhatók.

A körülbelül 600 m hosszú Majorlápa szűk árka legtöbb-

ször annyira telve van kőtörmelékkel, fatörzsdarabokkal, a meredek hegyoldalakról lemosott talajjal, hogy csak több évi megfigyelés alapján tudok megközelítő képet adni az eruptív test helyzetéről.

Alulról számítva körülbelül a 122 m táján vastag dörzsbreccsiával kezdődik az eruptívum, mely az itt erősen átalakított karbonüledék alól bukkan ki. Elváltozott, részben kihengerelt, diorit felé hajló gabbró van itt szálban, mely körülbelül 7 m-el feljebb üdébb bázisos, sőt itt-ott erősen bázisos amfibolgabbróba megy át. Eltekintve a kőzeteket áthálózó préhnites-kálcitos erektől, vannak benne egyes vékony plagiaplittelérek is, melyek mentén sok apatit van a gabbróban. Egy helyütt anortózitslirt is találtam. 148 m táján van az egyik ultrabázit sáv, mely több méter hosszban követhető az árok mentén apróbb, nagyobb sziklákban: gabbróperidotit és peridotit, helyenként igen sok titánmagnetittel, mely itt-ott külön is kivált zsinórok, fészkek alakjában. A gabbró és ultrabázit nem mindenütt megy át fokozatosan egymásba, érintkezésük néhol arra vall, hogy a már likvációt szenvedett magmában utólagos mozgások voltak. Ez után olyan kevert öv van, ahol gyorsan következik egymásután a diallággabbró, anortózitgabbró igen sok titánmagnetittel (kb. 155 m), diallághiperszténgabbró broncittal és amfiboldiallággabbró, olykor 20 mm-es amfibolszemekkel. A 170 m táján diallágaugitgabbró kezdődik, ez a 180 m körül bázisos diallághiperszténgabbróba (gabbrópiroxenit) megy át, melyben beerbachit telér is van a plagiaplit teléren kívül. Vagy 10 m-el tovább egy kis sziklapadnál gabbróperidotit és titánmagnetitperidotit kezdődik, ezt a 206 m táján telérekkel átjárbázisos diallágamfibolgabbró váltja fel. Ez rövidesen augithiperszténdiallággabbróba megy, de már a 223 m táján saussurites diallágaugitgabbró van. Ez felfelé a 226 m táján erősen bázisos lesz és amfibolos gabbródiallágit váltja fel. Majd diallággabbró és diallágamfibolgabbró következik, itt-ott a régi begyógyult törési vonalak mentén saussurites, préhnites és uralitos állapotban. Benne a 230 m táján tekintélyes (0·5 m-es) dioritpegmatittelér van, mely KÉK-i irányú. Majd pirites bázisos amfibolgabbró következik, mely a 233 m táján még bázisosabb lesz: gabbróamfibololit, ez

rövidesen (235 m) durvaszemű amfibololitba, ez pedig uralitos amfibolgabbróba megy át. Fentebb bázisos biotitaugitamfibolgabbró, azután a 250 m táján biotitamfibolgabbró kezdődik, mely helyenként igen sok apatitot tartalmaz. A 262 m táján biotitanortózitgabbró, majd utána a savanyú biotitamfibolgabbró (közelebbről: gabbródiorit, dioritgabbró, anortózitgabbró) egészen a karbonüledékből álló nagy fal aljáig, a 279 m tájáig tart, ahol eltűnik az üledék alatt. Ez a savanyú gabbró sok helyütt erősen elváltozott, erek és telérek sűrűn hálózzák át. A majdnem 5 méter magas sziklafal felső részén az üledékfoszlány után ismét fel-feltűnik a gabbró az árok feltárásában, de teljesen elváltozott állapotban, majd a hatalmas kvarcdioritos teleptelér (11) következik és tart körülbelül a 325 m tájáig, ahol végződik is az eruptívum és csak messze fent a Majorhegyen bukkan elő a diabáz.

Az érintkezési termékek egész sora jelzi az eruptívum hatását. Leggyakoribbak a különböző csillámszarukövek, melyek mellett kordierites és gránátos szarukövek is akadnak. Azután különböző kristályos homokkövek, különféle foltospalák stb. a gyakoriak. Az átvágás felső részén vörös és barna jáspissziklák, hematittal telített kvarcitos termékek találhatók az eruptív test mellett. Az olykor méteres átmérőjű jáspistömbök az árok alsóbb részeibe is lekerültek.

Közvetlen a Vaskapu mellett, a Zsindelorom erdőrész déli részén a Határlápában sokkal kisebb helyen jut napvilágra a titánmagnetites gabbroid kőzet. Körülbelül 50 m hosszúságban mindenütt erősen elváltozott gabbró van szálban, melynek még meghatározható darabjai diallágamfibolgabbrónak bizonyultak. Az erős elváltozás, elmállás és az ároknak törmelékkel töltött volta kevés megfigyelést enged.

A Vaskapui (zsindeloromi erdő) bányatáró nagyobb része az ultrabázitot tárja fel. A táró hossza 31·8 m[1] és egy törési vonal mentén hagyták abba, ahol erősen el van változva. Iránya K—Ny-i és belőle a 28 m-nél ágazik el az É-i irányú mellékjárat, mely 7·7 m hosszú.

[1] PÁLFY 1906-ban azt írja (4. p. 481), hogy a bányatáró 50—60 m mély. Lehet, hogy egy másik táróról van szó, de ilyet nem ismerek. (Az ú. n. alsótáró csak apró kutató táró.) Az általam ismertetendő bányatáróban jól látszik, hogy eredetileg se volt hosszabb.

A bányatárónak szabadon lévő előterében csak a mállási agyagba beágyazott nagyobb darabokban és a kimállott gömbökben találunk valamivel üdébb kőzetet: ez bázisos diallágamfibolgabbró, helyenként sok szerpentinesedett olivinnel. Az egyes szögletes és gömbölyded darabokat összefoglaló vörösessárga és barnássárga agyagban gyakoriak e gabbrónak kissé elváltozott ásványai, de főleg limonitos agyagból áll sok szerpentines és titanitos résszel.

A táró eleje a 8·25 m-ig szintén elváltozott kőzetekből áll, sok benne a dörzsbreccsiával jelzett vetődés, melyek mentén préhnit-kalciterek hálózzák át. Főleg az olivin változott el, néhol azonban a plagioklász is. Egyes helyeken az egész kőzet szerpentinné lett, míg máshol a barna amfibol és diallág elég jól megmaradt. Az egész sorozat amfiboldiallágolivingabbró, ahol t. i. meghatározható.

A 8·5 m-nél kevert öv kezdődik, melyben az olivingabbró egyrészt amfiboldiallágperidotittal, másrészt plagioklászitba átmenő gabbróval váltakozik. Ez a 4 m vastag öv több helyen dörzsbreccsiás és e helyeken erősen elváltozott. Helyenként igen sok benne az apatit és titanit. A 12·5 m-nél kezdődik az igazi ultrabázit, amely 2 m hosszan lényegében amfibolperidotit és amfiboldiallágperidotit, de közben olivingabbró is van. A 14·25—17·75 m részben nagyszemű diallágamfibololit, amfibolbroncitdiallágit, diallágit és titánmagnetitperidotit váltakozik, egymástól alig szétválasztható átmenetekben. Vannak közben aprószemű részek is. Az olivin általában nem nagyszerepű, csak a 17·25 m-nél, ahol a dunit típushoz közeledő peridotit van.

A titánmagnetit nagy szerepre jut a 17·75 m-től kezdve, néhol összefüggő halmazokat is alkot. Így a 18 m-nél titánmagnetitdiallágit van broncittal és minimális olivinnel, 18·5 m-nél titánmagnetitdiallágperidotit kevés amfibollal, a 20·25 m-nél titánmagnetitamfibolperidotit, az előbbiből fokozatosan kifejlődve. Majd a 21 méternél nagyszemű amfibolbroncitdiallágit, a 21·75 m-nél szintén nagyszemű elég jó típusú diallágamfibololit. következik, utána megint peridotitfajták helyenként igen sok titánmagnetittel. Ebben a sorozatban (17·75—31·8 m) az amfibol, diallág és olivin szerepe folytonosan változik, de olyan peridotit nincs közöttük, amelyből teljesen hiányozna akár az amfibol, akár a diallág.

Tiszta típus nincs, csak ahhoz közeledő fajták. Így pl. a dunitban (23 m) van kevés diallág, sőt plagioklász is, az amfiboldiallágitban (23·75, 25·25, 25·75—26, 30·75—31 m) mindig van olivin, éspedig változó mennyiségben, gyakori a bronzit is; az aránylag legtisztább típust a 25·75 m-nél gyüjtöttem. Titánmagnetitperidotit lelőhelyek közül e sorozatban a 26·75—27, 31·5—31·75 m a legfontosabb. A titánmagnetitdiallágit elég jó típusa a 30·25 m-nél van stb.

Jellemző ebben az utolsó sorozatban, hogy ez is össze van szakadozva és a vetődési irányok mentén dörzsbreccsiás, sőt néha ki is van hengerelve; ezeken a helyeken főleg az olivin változott el, mindig titanitos kiválás mellett. Olykor az egész kőzet szerpentinné vált (24, 27·25—27·75, 30·75 m stb.), a vasérc azonban nagyrészben üde maradt. A törési vonalak mentén pirit is képződött. A gömbös elválás úgy az üde, mint a szerpentinesedett kőzeteknél gyakori. A táró legvégén ismét erősen össze van szakadozva az elváltozott gömbös és sokszögű elválású kőzet.

A 28 m-nél kiágazó északi mellékjárat kőzete változóan piroxenit és peridotit. A járat első felében uralkodó a peridotit, éspedig amfibolperidotit és amfiboldiallágperidotit, a másik felében az amfiboldiallágit, de a tiszta típushoz még közeledő sincs közöttük. A valóságban mind átmeneti kőzetek a diallágit és peridotit között.

Fiziografiai adatok. A tárgyalt titánmagnetites kőzetek közül a gabbró-fajták, kivéve a szélső fácieseket, így a diorithoz, máshol az anortózit felé közeledő gabbrókat és a telérek, teleptelérek savanyú kőzeteit, egymástól jóformán csakis az uralkodó femikus szilikátásványok (diallág, amfibol) egymáshoz való mennyiségbeli viszonyában különböznek. Az olivin a gabbrókban csakis a peridotit kiválás vékony szegélyére szorítkozik, az olivinnel korreláns hipersztén pedig meglehetős szórványos, míg a broncit csak némely ultrabázitban nagyobb mennyiségű. A titánmagnetit minden fajtában jelentékeny, olykor nagyon sok. A gabbrófajták fokozatosan mennek át az átmeneti kőzeteken keresztül az ultrabázitokba, a kevés földpátot tartalmazó vagy egészen földpátmentes peridotitba, piroxenitbe és amfibololitba. Ilyenformán éles határt alig lehet vonni köztük. Az összes kőzetek között tapasztalható átmenetek is mutatják a közös magmából való differenciációs származást. Az ultrabázitokban is a femikus alkotórészek: olivin, diallág és amfibol

egymáshoz való viszonyának folytonos változása adja meg a változatosságot, éppúgy, mint a gabbróknál, a titánmagnetit szerepe is éppen úgy nagyon változó.

Mindezekből már most az következik, hogy legmegfelelőbb, ha az ásványok részletes tárgyalásánál az összes titánmagnetites kőzetek ásványait együtt tárgyalom, hiszen eltekintve az izomorf vegyületeknél egészen természetesen előforduló vegyi különbségektől, fajta tekintetében nincsen nagy különbség az egyes kőzetekben fellépő azonos nevű alkotórészek között. Úgy értendő ez, hogy az a biotit, az a barna amfibol, az a plagioklász, amely a gabbrókban található, csak ritkán tér el minimális mértékben is attól a diallágtól, amfiboltól stb., amely az ultrabázitokban található, sőt köztük legfeljebb igen finom optikai különbséget lehet csak tenni, ami azonban a fajtát sem változtatja. Az az olivin pl., amely a troktolitban előfordul, a legtöbbször egyáltalában nem különbözik a peridotitok olivinjétől, legfeljebb néha van csak pl. a fénytörésben, az optikai tengelyszög nagyságában némi kis különbség. Csekély különbség csak abban van pl., hogy a gabbrókban is elég szórványos hipersztént a peridotitokban főleg a broncit helyettesíti. De broncit előfordul a gabrókban is. *Semmi különös ok sem indokolná tehát, hogy az ásványokat a kőzet fajtája szerint tárgyaljam külön-külön.*

A gabbrók és peridotitok, így a diallágitok is általában középszemű kőzetek, átlag 3—4 mm szemnagysággal. A szemnagyság azonban nem egyenlő, még egy nagyobb kézi példány keretén belül sem, de maga az amfibol is különbözik a többi alkotórésztől, rendesen jóval nagyobb, gyakran sokszorta nagyobb. Az amfibolban különösen gazdag kőzetek többi alkotórészei is nagyobbak, mint a megadott nagyság. Ilyen amfibolban gazdag kőzetek azok is, melyek a táró 14·2—17 m között fordulnak elő, ahol az ásványszemek átlag is elérik a 8 mm nagyságot. Valamivel még nagyobb szeműek az amfibololitok, úgy a táróban, mint különösen a Majorlápában, ahol a 20 mm szemnagyság is előfordul. A főalkatrészek közül a legapróbb kristályokat a titánmagnetit és az olivin alkotja, (különösen aprók az említett kutatólyukakban); legváltozóbb a diallág nagysága. Az üde kőzeteknél a diallág, broncit és amfibol széles hasadási lapjain a poikilites szerkezet szabad szemmel is jól látható.

Üde állapotban a gabbrófajták világosabb vagy sötétebb szürkék, az ultrabázitok feketék. A gabbrók a saussuritesedésnél világosabb szürkék, zöldesszürkék lesznek, ha pedig uralitosak is, akkor különböző árnyalatú zöldek. Az ultrabázitok az elváltozásnál és elmállásnál megsárgulnak vagy sárgásbarna, vörösbarna színűek lesznek.

A mikroszkópi vizsgálat eredményei a következők:

Az izometrikus vagy kissé megnyúlt széles lemezalakú *plagioklász* fajtája a *labradorandezin*től az *anortit*ig (Ab_{54}—Ab_6) változik, és úgy tapasztaltam, hogy ez *a fajtabeli különbség nem nagyon igazodik szorosan az illető kőzet bázisosságához*, amennyiben peridotitban is találtam labradort és gabbróban is anortitot. Csakis az említett savanyú gabbrófáciesekben (dioritgabbró, anortózitgabbró) van *oligoklászandezin*ig felemelkedő földpát. A legjobb alakú, sőt automorf kristályok csak ott fordulnak elő, ahol amfibolba vagy diallágba egyesével vannak bezárva. Egyes esetekben a hiperszténnel, ritkán az olivinnel és titánmagnetittel szemben is megőrzik jó alakjukat vagy legalább is nem szabálytalanabbak, mint ezek. Ezzel ellenkezőleg azt is többször tapasztaltam, hogy a diallággal, sőt az amfibollal érintkező kristályok is xenomorfok. Legrosszabb alakúak az olivinben különösen gazdag földpátos peridotitokban, ahol valóban hézagkitöltő szereppel bírnak. *A plagioklász kiválása tehát megkezdődött a hipersztén, illetve olivin képződése idején és végződött az amfibol kiválása elejével együtt.*

A plagioklászkristályok mindig ikersávosak, albit, periklin és karlszbádi ikrek. Vannak azután pontosan meg nem határozható ikerszerű összenövések is. Az ikeregyének száma azonban csak ritkán nagy, egy-egy széles táblában gyakran csak kevés, ritkán több vékony ikersáv látható. Így van ez a Majorlápa dioritgabbrójában is, ahol gyengén kifejezett zónás szerkezet is észlelhető. Zárványként a kőzetek minden ásványa előfordul a plagioklászban, ritkán még az amfibol is, sajátságos, hogy az olivin még ritkábban. Gyakran tartalmaz gáz- és folyadékzárványokat.

Az elváltozás általában nem gyakori a plagioklásznál, főleg a törési, szakadási vonalak mentén találunk ritkán teljesen elválto-

zott földpátot. Egyébként olykor még ott is üde, ahol a femikus ásványok legnagyobb része elváltozott, viszont vannak olyan helyek, ahol a földpát változott el, pedig az amfibol, néha a diallág is üde. Leggyakoribb elváltozási mód a *saussuritesedés*, de a *préhnitesedés* is előfordul, különösen a telérek mentén és az üledéktakaró szomszédságában. Az epidot a nagyon változó összetételű saussurithalmazokon kívül is előfordul bomló földpátban, ezenkívül klinozoizit is. Ritka a *fehércsillám* és *kalcit képződés*. Az erősen elváltozott földpátoknak belsejét szürke, sötétszürke agyagos termék borítja, melyben néha a saussuritásványok is felismerhetők. A külső rész gyakran üde. Ez mutatja a zónás felépítést, habár az üde kristályokon ez nem is látszik. A femikus ásványok elváltozási termékei még az üde földpátok hasadásaiba, repedéseibe is benyomulnak, különösen a szerpentines termékek, amelyek néha majdnem az egész földpátanyagot kiszorították helyéből.

A femikus szilikátásványok között a legáltalánosabb a diallág és az amfibol. A diallág gyakran valamivel több, mint az amfibol, de kevés helyen uralkodik túlnyomóan, így némely gabbrókban és a diallagitokban. Az amfibol is ritkán uralkodik a diallág felett, eltekintve természetesen az amfibololitoktól.

A *diallág* halványbarna vagy majdnem színtelen, csak ritkán élénkebb barna vagy halvány zöldesbarna. Néha gyenge színváltozást is mutat. Fénytörése s vele kettőstörése tág határok között változik, $n_g - n_p$ középértéke 0·27, $n_g : c = 38° - 42°$-ig emelkedik, tengelyszöge $= 59°$ s nem igen változik. Kristályai rendesen xenomorfok, gyakran poikilitesek a sok ásványzárványtól. Automorf vagy ahhoz közeledő, gyakran kissé legömbölyödött kristályokban főleg csak amfibolban fordul elő, de elég jó alakú kristály van néha a gabbrókban szabadon is, ahol itt-ott még a földpáttal szemben is megőrzi automorfiáját. Arra nézve nem találtam adatot e kőzetekben, hogy a diallág mennyisége irányadó volna a jó kristályalak létrejötténél. Inkább azt hiszem, hogy a magmának mindenkori fizikokémiai állapota volt az irányadó úgy a diallágnak, mint a többi alkatrésznek kiválási idejére. Az olivinben gazdag peridotitokban, de gyakran a földpátban gazdag gabbrókban is teljesen xenomorf széles lemezalakú átmetszetekben jelenik meg. Olykor iker a harántlap (100) szerint, éspedig vagy 2—3 széles ikeregyén-

ből vagy pedig sok vékony ikerlemezből van összetéve, a bázis (001) szerint pedig mindig sok igen fínom ikeregyén nő össze. Gyakran szövődik össze barnaamfibollal. Az összeszövődésnél rendesen a diallág uralkodik, igen ritkán az amfibol. Az utóbbi esetben éppúgy szétszórva jelennek meg a különben egy kristályhoz tartozó diallágszemek, mint az előbbi esetben az amfiboléi. Az összeszövődés leginkább a pertiteshez hasonló, néha azonban határozottan pegmatitszerű. A diallágot áthálózó amfibol gyakran nem tartozik ahhoz az amfibolkristályhoz, amely közvetlenül érintkezik kívül a diallággal vagy azt éppen körülveszi. De összeszövődik a diallág rendkívül fínom lemezesen egy másik piroxénnel is, amely ott, ahol közelebbről meghatározható, broncitnak bizonyult. Az összeszövődés olyan, hogy a hasadási irányok összeesnek mindkét piroxénnél, amelyek közül majdnem mindig a diallág uralkodik. Az összeszövődés nem mindig terjed ki az egész kristályra. Egyes esetekben a diallággal összeszövődő másik piroxén szintén egyhajlású, de közelebbről meg nem határozható. Valószínűleg diopszid vagy augit. Az egymással összekristályosodott piroxének gyakran még amfibollal is bensően összeszövődtek.

A zárványok közül érdekesek a meglehetős gyakori fínom opák (részben bizonyosan vasérc) zárványok, melyek bizonyos metszetekben (leginkább az n_m-re merőleges metszetekben) igen vékony szálaknak vagy tűknek látszanak, máshol néha szabálytalan alakú lemezeknek. Egyes esetekben meghatározhatólag a bázis (001) síkjában vannak elhelyezkedve. Valószínű hogy ezek a nagyjában egyformán orientált zárványok okozzák a diallágnak helyenként látható fémes fényét. Ezek a zárványok a teljes elváltozásnál hematittá ill. limonittá válnak bő titanitkiválással vagy a nélkül, tehát csak részben állanak titánvasércből. A származó titanit olykor fínom zsinórok képében mutatkozik a bázisra merőleges metszetekben.

A diallág az előre haladó elváltozásnál elvörösödik vagy megbarnul a benne lévő vasérczárvány olykor eloszlik az egész kristályban és a hematitos vagy limonitos titanithalmazok a kristályoknak főleg a belső részét majdnem egészen átlátszatlanná teszi. De ez nem mindig van így, hiszen gyakran még az erősen, sőt teljesen elváltozott diallágban is megmarad a jellemző vasérctű-hálózat.

De válik ki a diallágból az elváltozásnál újabb vasérc is, éspedig úgy látom, annál több, minél nagyobb magának a kőzetnek a vasérctartalma. A diallág elváltozásánál a vasércen kívül főleg uralit, ritkábban klorit származik, mindig bőséges titanitkiválás mellett. *Igazi rostos amfibolok főleg csak azokban a kőzetekben képződnek a diallágból, amelyekben erős dinamikai nyomokat találunk.* A diallágot átszövő amfibol gyakran üde marad a diallág teljes elváltozásakor is, néha még akkor is, amidőn a diallág körül lévő barnaamfibol is zöld színt ölt. A peridotitok nagyobb fokú szerpentinesedésénél a diallág is szerpentinné válik, ilyenkor azonban sokszor megmarad benne a jellemző vaséretű-rendszer. Olykor azonban teljesen eltűnik, különösen, midőn a rostos szerpentin jellemző alakban képződik ki, ami ritka eset.

Majdnem minden gabbróban és peridotitban vannak olyan monoklin piroxének, amelyek a diallág szerkezetét nem mutatják. Ezek közül könnyű elkülöníteni a ritkábban előjövő ibolyásbarna augitot, melynek optikai tulajdonságai olykor elég jól egyeznek a *titánaugit*éval, habár annak erős színeződését, diszperzióját és egyéb tulajdonságait ritkán éri el teljesen ($n_g - n_p$ kb. 0·026, $n_g : c$ max.$=49°$, $2V=+57°$). Mennyisége mindenütt kevés. Meglehetősen nehéz elválasztani a diallágtól a hasonlóan világos színű vagy színtelen vagy igen halványzöldes *diopszidot* (egy esetben, melyhez hasonló gyakori, kettőstörése ($n_g - n_p$) kb. 0·030 $n_g : c = 40°$, $2V = +59°$, de állandóan változnak összesértékei), hiszen még maga a diallágszerkezet se terjed ki mindig az egész piroxénkristályra, az elváltozásnál pedig néha el is mosódik. Ez a diopszid több helyütt közeledik a közönséges augit felé. A *közönséges augit* pedig éppen gyakori, habár csak kevés esetben éri el a diopszid mennyiségét. Optikai tulajdonságai szintén változók (egy esetben pl. kettőstörési értéke 0·023 volt $n_g : c=50°$, $2V=60°$). A diallággal szemben ezeknek az utóbbi piroxénfajtáknak mennyisége legtöbbször alárendelt, csak ritkán egyenértékűek azzal. Alakjuk ott, ahol diallággal érintkeznek, nem rosszabb, de nem is igen jobb, a földpáttal szemben hol automorfok, hol nem, az amfibollal szemben legtöbbször automorfok. Még a legjobb alakja van a titánaugitnak. Gyakran kettes vagy hármas ikrek a (100) szerint, ritkán a lemezes ikerszerkezet is felismerhető a (001) szerint. Elváltozásuk

nagyjában olyan, mint a diallágé, ahol t. i. egyáltalában különbséget lehet köztük tenni ilyenkor. Az elváltozásnál egyikből több, a másikból kevesebb titanit válik ki.

A rombikus piroxének közül a *broncit* a gyakoribb, amely a diallággal való említett összenövésen kívül szabadon is gyakran előfordul piroxenitben és peridotitban, de gabbróban és gabbroid ultrabázitban is találtam. Alakja legtöbbször olyan széles xenomorflemez, mint a diallágé. Vasérc-, tiatanit- és rutilzárványok gyakoriak benne. Optikai tulajdonságai kissé változók, de általában a rendesek. Egy esetben pl. kettőstörésének értéke 0·008, $2V=90°$, de a többi megmért eset is hasonló ehhez. A *hipersztén* csak a Majorlápa gabbróiban fordul elő, legalább is eddig csak ott találtam. Alakja automorf vagy ahhoz közeledő hosszúkás, vagy igen hosszú oszlop. Optikai tulajdonságaiban gyakran a broncit felé hajlik. A legnagyobb kettőstörés, amit mértem e kőzet hiperszténjeinél: 0·012, ennek volt a legkisebb tengelynyílása: 84°. A többi megmért hipersztén értékek többé-kevésbbé a broncit értékeihez közeledtek. Pleochroizmusa változó, általában nem valami erős. A legerősebb: n_g=szürkészöld, n_m=halvány sárgásbarna, n_p=rózsaszínű, világos vörösbarna, sárgás árnyalattal. Vasérczárványokat, sőt orientált vasérctűket titanit- és rutilkristálykákat úgy a broncit, mint a hipersztén tartalmaz.

Mindkét rombikus piroxén főleg uralitosodik, az uralit viszont kloritba megy át, de találtam básztit-, sőt iddingszitképződést is. Az utólagos ásványokban a vasérc és titankiválás általános. Általában előbb elváltoznak, mint a monoklinpiroxének.

Az eredeti *barna amfibol* mennyisége nagyon változó, de optikai tulajdonságai se állandók. Fénytörése nagyon változó, de kettőstörése is úgy, hogy 0·019—0·025 között változik, n_g:*c*-vel legtöbbnyire 10° körül van, de 0°-tól 14°-ig változik, $2V=80—81°$. Pleochroizmusa is különböző és nagyon változó abszorpciói erősségű: n_g= sötétbarna, vörösbarna, barnásfekete és sárgásbarna, n_m= barna, sötétbarna, barnássárga, n_p= világos, de élénk sárgásbarna, világos barnássárga, világos sárga. A tengelyek abszorpciója $n_g \geqq n_m > n_p$. Alakja majdnem mindig teljesen xenomorf, a legtöbb helyen utolsó kristályosodási terméknek látszik, s mint ilyen, *a poikilites szerkezeteknek a legjobb kifejezője*. Csak rit-

kán (dioritgabbró) kissé jobb alakú. Általában a legnagyobb ásványa e kőzeteknek, nagysága 25 mm-ig emelkedik, olykor némi fémfénye is van. Színe barna vagy sötétbarna, néha (a tárában elég gyakran) vörösbarna. A diallágot gyakran körülveszi vagy a pertiteshez hasonlóan szövődik össze vele, úgyhogy főtömege mindig kívül van. A többi alkatrészhez viszonyítva meglehetősen indifferens az elváltoztató hatásokkal szemben, még a szerpentinesedett, sőt a préhnitesedett kőzetekben is gyakran üde, sőt eredeti szerkezetét is megtartotta. De elváltozik a barna amfibol is, világosabb színű amfibolba (zöld amfibol, uralit, aktinolit, tremolit) megy át. Ebben nincs különbség a barna és vörösbarna amfibol közt. Ritkán változik egyenesen kloritba (rendesen a másodlagos amfibolok kloritosodnak), ennél gyakoribb még a szerpentinesedés is, mellyel együtt kvarcosodás is észlelhető. Az amfibol eredeti földpátzárványai is kvarcosodásnak indultak.

A legtöbb helyütt kétségtelen, hogy a szórványos *zöld amfibol* másodlagos ásvány. Egészen üde kőzetekben nem is fordul elő. Leginkább ki lehet mutatni az utólagos származást akkor, amidőn — mint a Majorlápa egyes préselt, összegyűrődött gabbrójában — barna amfibolból képződik, melynek olykor csak egyik része válik zöld, világoszöld színűvé. Ilyenkor utólagos vasérchalmazkák, titanitszemecskék mindig vannak benne. Egyes esetekben monoklinpiroxénből származott. Optikai tulajdonságairól felemlítem, hogy pleochroizmusa változó: n_g = élénk zöld, olajzöld, néha kékeszöld, n_m = zöldessárga, néha barnás árnyalatú, n_p = világossárga halvány barnássárga, kettőstörése 0·024-ig emelkedik, $n_g : c = 18^\circ$ körül változik. Gyakran megy át a végein aktinolitba, máshol kloritosodik.

Sokkal gyakoribb az *uralit*, amely úgy a gabbrókban, mint az ultrabázitokban előfordul. A tárgyalt zöld amfiboltól főleg abban különbözik, hogy még egyetlen kristályon belül sem egységes színű, erősebben és gyengébben színezett részek vannak benne, kettőstörési színe, sőt még elsötétedése sem egységes: legtöbbször a hullámoshoz hasonlít. Az elsötétedés alapján néha rostos szerkezetűnek is látszik. Előfordul, hogy az egyébként összefüggő utólagos amfibolszem egyik fele zöld amfibol, másik fele uralit. A két rész egymástól nemcsak szerkezetében, hanem színe erősségében is

különbözik. Az uralit jóval gyengébb színű, mint az ugyanazon kőzetben lévő zöld amfibol. Pleochroizmusa: n_g = zöld, n_m = kissé világosabb zöld, n_p = világos sárgászöld, halvány zöldessárga. Minden uralitban van titanit, néha sok.

Az uralit gyakran szétrostozódik a lemezek végein, sőt néha még a belső részében is van nyoma a rostos szerkezetnek. De az igazi rostos amfibolok (tremolit és aktinolit) is előfordulnak. Úgy a Majorlápa, mint a Kecskefark gabbrójában találunk ilyeneket. Több esetben egyenesen a barna amfibolból ágaznak ki, máskor egyes fészkeket alkotnak a kristály belsejében. Ilyen utólagos amfibol fészkek a diallágban is kimutathatók.

Az *aktinolit*-rostok legtöbbször merevek, párhuzamosak vagy kissé sugarasak, ecsetszerűek. Az egyes rostkötegek azonban néha meghajolnak, olykor többszörösen is. Azt tapasztaltam, hogy a barna amfibolból származó aktinolit valamivel erősebb színű, mint a diallágból vagy zöld amfibolból képződők. A barna amfibolból kiinduló rostok bizonyos kis távolságig megőrzik a barna színt és pleochroizmust, majd rövidesen megzöldülnek és elhalványulnak Ebből következik, hogy először széthasadozik a barna amfibol és csak azután változik el vegyileg. Szórványosan a zöld amfibolnál is tapasztaltam hasonló jelenséget. Az aktinolit egyébként halványzöld színű a normális gyenge pleochroizmussal.

A teljesen színtelen *tremolit* olykor szintén a barna amfibolból vagy diallágból indul ki, legtöbbször azonban az aktinolitrostok válnak a végeik felé színtelenekké. Amennyiben a tremolit szabadon fordul elő a kőzetben, akkor vagy olyan, mint az aktinolit, t. i. merev, vagy csak kissé hajló rostokban jelenik meg, vagy pedig igen fínom, olykor hajlongó kúszált szálas, néha hajszerű halmazokat alkot.

Említettem, hogy azok a kőzetek, melyekben ezek a rostos amfibolok nagyobb mennyiségben fordulnak elő, gyakran erős dinamikai hatásokat mutatnak. Ezekben a kőzetekben az amfibol, a diallág is össze van néha gyűrve, egyes jobb alakú amfibolkristályok többszörösen meg vannak hajolva stb.

A leírt utólagos amfibolok közül csak az aktinolit és a tremolit nem maradtak meg az eredeti ásvány keretén belül, rendesen kinyúlnak a pszeudomorfózából a szomszédos femikus szilikát-

ásványokba és a földpátok elváltozott részeibe. Az uralit és a zöld amfibol megőrzi ugyan az eredeti ásvány alakját, de rendesen több, kissé különbözően is orientált kristály képződik az eredetileg egy amfibolból vagy piroxénből. Különösen az uralitpszeudomorfózák néha valósággal mozaikszerű képet nyújtanak, ahol az egyes uralitlemezek határai nem is mindig élesek.

Az *olivin* a gabbrókőzetekben meglehetős ritka, míg az ultrabázitokban majdnem általános, csakis pár amfibololit előfordulásban nem tudtam kimutatni. Mennyisége nagyon változó. Legtöbbször még a peridotitban se sok és csak egyes esetekben uralkodik túlnyomóan, annyira, hogy a kőzet majdnem teljesen csak olivinből és titánmagnetitből áll. Alakja izometrikus, gyakran legömbölyödött, csak ritkán egészen jó alakú zömök oszlop. A jó kristályalakot a plagioklász s a titánmagnetit csak ritkán akadályozza. Gyakori azonban a korrózió, néha még a diallágba vagy amfibolba bezárt olivin is erősen korrodált. Kisebb-nagyobb beöblösödő üregeiben a később kivált ásványok képződtek ki. Innen van néha az a látszat, mintha az olivinben benne lévő amfibol, diallág, pár esetben biotit, eredeti zárvány volna, pedig csak az olivinnek a csiszolat síkjában átmetszett felszívódási üregeibe benyúló vagy ott kiképződött ásványok részei.

Rendesen színtelen, nagyon szórványosan halvány zöldessárga. Egyéb optikai tulajdonságai közül felemlítem, hogy kettőstörése kissé változó az egyes előfordulási helyek szerint, a két szélső érték 0·033—0·037. Tengelynyílása 87°—89° az n_p-nél. Ritkán teljesen tiszta, az eredeti zárványokon kívül (titánmagnetit, pikotit, kromit, apatit stb.) néha elég sok opák tű, lemezke és parányi pontszerű szemcse van benne, olykor különösen az utóbbiak, egyes irányok szerint sorakoznak. A bennük lévő titánmagnetit rendesen apróbb, mint a többi ásványban lévő vagy szabad kristály, *tehát az olivin korán körülzárta.* Az olivin a szélein egyes kőzetekben, de nem gyakran, elvörösödik. Elváltozásánál néha sok, máskor kevés vasérc válik ki, mely olykor egyes sávok vagy az eredeti hasadások mentén halmozódik föl.

A legüdébb olivines kőzetek a bányatáróban fordulnak elő, de az olivin még ezekben is gyakran van elváltozóban, különösen a táró elején és végén; a Majorlápa több helyén még ott is elválto-

zott, ahol a többi alkotó rész majdnem egészen vagy teljesen üde. Azt tapasztaltam továbbá, hogy az *olivint átalakító hatások nem működtek egyenletesen még kisebb területen sem.* Az elváltozott olivint és üde olivint tartalmazó kőzetek szeszélyesen váltakoznak. A vetődések, szakadások mentén, melyek a vidéken gyakoriak, mindig egészen elváltozott az olivin, de csak közvetlen a törés mellett, tehát az átalakító faktorok nem lehettek nagyon intenzívek. Van sok olyan kézi példány, melynek egyik felében teljesen elváltozott az olivin, másik felében teljesen üde. Sőt még egy kis vékony csiszolat keretén belül is észlelhetjük ezt. Ugyancsak itt láthatjuk a rendkívül fínom vékony repedések hatását is, melyek mentén szintén átalakult vagy átalakulóban van az olivin. Az elváltozott olivint tartalmazó rész, melyben a többi alkotórész gyakran üde maradt, rövidesen átmegy a teljesen üde részbe. Az is előfordul, hogy egy-egy nagyobb olivinkristálynak a repedés felé eső része szerpentin szalagokkal van áthálózva, a másik fele üde. Bőven vannak azonban olyan kőzetek is, melyekben nemcsak az olivin, hanem az összes többi femikus szilikátásvány is szerpentinné változott.

Az olivinből legtöbbször erősen színezett és változó megjelenésű iddingszit származott, míg a normális krizotil szinte ritkaság. A szerpentinesedést az említett vasércen kívül gyakran bő titanitkiválás is kíséri, mely néha valósággal telezsúfolja a szerpentinpszeudomorfózát. De titanit lett az olivint néha nagy mértékben átszövő eredeti vasérc legnagyobb része is. Ritka és az olivinnek csak kis részére terjed ki a pilitképződés. A Majorlápában és a bányatáró szabadon lévő előterében a bázisos olivingabbróban és peridotitban olyan pszeudomorfózák is vannak olivin után, melyeknek hálózatát szerpentin és vasérc alkotja, a háló szemeit pedig kvarc és kalcedon tölti ki. A szerpentines elváltozás a hosszanti és haránt hasadások mentén hálózza át az olivint. A legtöbb ilyen kezdődő elváltozás szalagos szerkezetet hoz létre, a szalagok húzódási irányára merőlegesen állanak a szerpentinrostok és fínom lemezek.

A szalagos szerkezet azonban a továbbhaladó elváltozás folyamán elmosódik és az egész, valóban jó alakú pszeudomorfóza sűrű szerpentinhalmazzá vagy pedig nagyjában egységes iddingszit-

lemezek halmazává változik. Olykor egyetlen iddingszitkristály tölti ki a pszeudomorfózát.

A *biotit* még kis mennyiségben sem gyakori ezekben a titánmagnetites kőzetekben. Számottevő mennyiségben a Majorlápa felső részén találtam: bázisos és savanyú gabbróban, mely dinamikailag meglehetősen metamorph. A biotitlemezek itt 3 mm nagyságot is elérnek. Kis vagy igen kis mennyiségben a terület más részein gabbróban és peridoitban is előfordulnak, tekintet nélkül arra, hogy a kőzetek üdék vagy elváltozásnak indultak. Ezekben a kőzetekben apró, legfeljebb 1 mm-es lemezeket alkot, melyek magnetit és olivin között, magnetit és plagioklász között, olivin és augit között, diallág és plagioklász között stb., stb. találhatók. Ezek a társásványok a legtöbb helyen üdék. A magnetitet a biotit néha körül is veszi. De találtam biotitot az olivin rezorpciós üregében is, eléggé elváltozott állapotban.

A Majorlápa említett kőzeteinek nagy biotitlemezei erősen össze vannak ráncosodva, sőt többszörösen is össze vannak hajtogatva, széleik rojtosak. De kissé ráncosak a másutt előforduló apró lemezkék is. A biotit mindig xenomorf, színe általában barna, legélénkebb színű a majorlápai, mely barnásvörös. Kettőstörése általában igen erős, 0·038—0·048-ig. Tengelyszöge mindig igen kicsiny, alig pár foknyi, legtöbbször pedig egytengelyűnek látszik. Pleochroizmusa változó: n_g (és n_m) = sötétvörösbarna, élénk barnásvörös, sötét sárgásbarna, n_p = igen halványsárga, halványbarna, majdnem színtelen. De találtam vérvörös (n_g) és majdnem színtelen (n_p) pleochroizmust is. Elváltozása főleg az elszíntelenedésben nyilvánul, de helyenként pennin is képződött belőle. Mindkét folyamat bő vasérc és titanitkiválással van kapcsolatban.

Ugyancsak itt említem meg azt a sajátságos csillámszerű ásványt, amely leginkább az elváltozott gabbróperidotitban, de másutt is előfordul. Nyilvánvalóan olivinből származott utólagos termék, olykor egészen kitölti az eredeti olivinkristályt. Kissé ráncos lemezeiben a kitűnő bázisos hasadáson kívül gyakran arra merőleges hasadás is látható. Pleochroizmusa nagyon különböző: n_g (és n_m) = sárgásbarna, egészen sötétbarna, n_p = világos, de élénksárga. Legnagyobb kettőstörése 0·048 körül van, de változó. Tengelyképe annyira zavaros, hogy csak néhol lehet következtetni negatív

charakterére és arra, hogy talán egytengelyű. Nagyon gyakran annyira hasonló az ugyanazon kőzetben lévő majdnem egytengelyű iddingszithez, hogy alig lehet köztük különbséget tenni.

A *titánmagnetit* mennyisége állandóan változik, de csak a savanyú gabbrókban és némely amfibololitban kevés, míg a többi kőzetben kivétel nélkül jelentékeny, egyesekben pedig a femikus szilikátásványokkal egyenrangú, sőt néha uralkodik is. A nagyon részletes volummetrikus mérések alapján kiderült, hogy eltekintve az ércben különösen gazdag fajtáktól, s gabbrókban átlag 8%, a gabbroid ultrabázitokban 15%, az ultrabázitokban átlag 21% a titánmagnetittartalom, ami azonban egyesekben 50%-ig is felmegy, az érces fészkekben, zsinórokban és sávokban pedig 90% volt a legnagyobb a megmért esetekben. Amidőn a titánmagnetit a normálisnál nagyobb mennyiségű, elég gyakran összefüggő vastag hálózatot alkot, amibe a többi alkotórész bele van ágyazva. Ennél a szideronites szerkezetnél a vasérc gyakran kifejezetten hézagkitöltő szereppel bír. Így pl. egyes peridotitokban az olivinszemek körül vékonyabb a vasércháló, míg a 3—4 olivinszem találkozási hézagában annyira össze van gyűlve az érc, hogy valóságos csomókat alkot. Kétségtelen azonban, hogy a titánmagnetit a legtöbb helyen az első kristályosodási termékek közé tartozik és ezért azokon a helyeken, ahol nem halmazban lép fel, hanem egyesével, ott gyakran automorf, bár kisebb-nagyobb fokú legömbölyödés majdnem általános. Néha ilyen automorf szemekből állanak a nagyobb összegyülemlések, sőt sávok is. Ha közelebbről vizsgáljuk a legömbölyödött szemeket, egyes esetekben fel lehet ismerni, hogy a gömbölyű oldalak voltaképpen egy görbe vonal mentén sorakozó parányi egyenes lapokból állanak. *Tehát a sokszoros összenövés is előidézi a legömbölyödést*, így tehát némely különálló szem nem egyes kristály, hanem egymással összenőtt kristálykák társasága. De az is bizonyos, hogy a legömbölyödés okát gyakran másban kell keresni, korrózióban vagy esetleg eredeti ilyen kiképződésben. Mind a mellett vannak bőven egészen éles körvonalú teljesen szabályos kristályok, különösen a nagy diallaglemezekben észleltem ilyeneket, de ritkán olivinben is előfordulnak. Az amfibolban lévők többször legömbölyödöttek, mint nem, amit az amfibolnak legtöbbször késői kiválása kellően megindokol.

A kristályok és az egyes szemeknek látszó teljesen összenőtt halmazkák nagysága legtöbbször csak valamivel kisebb, mint a többi alkotórészeké. A legnagyobb automorfkristály nagysága a 3 mm-t is eléri. Ezek a nagy kristályok és szemek olyan kőzetekben fordulnak elő, melyek amfibolban gazdagok. Azt is ki lehet mondani általánosságban, hogy a gabbrókban jóval apróbbak az egyes szemek, mint az ultrabázitokban, amelyekben tehát a kristályosodását elősegítő fizikokémiai viszonyok hosszabb ideig voltak állandók. A sliresen kivált érchalmazok szélessége a felületen egy esetben 10 cm volt, mindenütt máshol sokkal vékonyabbat találtam. Az egyes alkotó szemek, amennyiben t. i. megkülönböztethetők, ezekben a sávokban nem igen haladják túl az 1 mm-t.

Ami a titánmagnetitnek a többi ásványhoz való viszonyát illeti, arra nézve a következő változó viszonyokat találjuk: az olivinnel szemben csak részben őrzi meg automorf alakját, az olivinben gyakori, sőt majdnem általános mint zárvány, míg benne csak szórványos az olivinzárvány. Ez utóbbi esetben vagy olyan a megjelenés, hogy az olivint nem egyetlen titánmagnetitkristály, hanem halmaz veszi körül, amelynek egyes szemei jól megkülönböztethetők, vagy pedig összefolyó, egységes az egész vasérckeret. A plagioklásszal szemben jóval többször automorf, mint nem, de elég gyakori, hogy a plagioklász automorf vége belenyúlik a vasércszembe. A pyroxénnel és amfibollal szemben majdnem mindig automorf, de ez alól is van, bár ritkán, kivétel. Az amfibol épp úgy, mint a biotit, néha vékony hártyaképpen veszi körül. Az apatitzárvány közönséges a titánmagnetitben.

A titánmagnetit részletes kalkografiai vizsgálatát egyik tanítványom, Vidacs Aladár dr. vállalta, azért a szerkezetre vonatkozó saját vizsgálataimból csak annyit említek, hogy fémmikroszkóp alatt legtöbbször homogénnek látszik. Néhol azonban világosabb és valamivel sötétebb, erősebb és valamivel gyengébb fémfényű részek (magnetit és ilmenit) különböztethetők meg a kristályokban, amely részek néha vonalkásan, másutt teljesen szabálytalanul váltakoznak egymással. Előfordul az az eset is, hogy a kristály legnagyobb része erősebb fémfényű, világosan reflektáló magnetit és ebben vannak kis számmal valamivel sötétebbszürke parányi szemek vagy halmazok. De megfordítva gya-

koribb. Az is előfordul, hogy a világosszürke magnetitben valamivel sötétebb szürke, de egyáltalán nem szabályosan elhelyezett lécszerű képződmények vannak. Szabályos rajzolatokat nem láttam, talán a részletes vizsgálatok ilyeneket is ki tudnak mutatni. Azt már most is meglehet állapítani, hogy a magnetit és ilmenit viszonya azon a kevés helyen, ahol egyáltalában elkülönültek egy kristály keretén belül, feltűnően változó.

Jellemző a titánmagnetitre a nagyon változó elbomlási mód. A kezdődő elbomlás egyik gyakori módja az, hogy a kristály a szélein kezd titanittá alakulni, amely vékonyabb-vastagabb kéregben borítja az egyik oldalán, néha egészen körül is veszi az ércszemet. Egy másik elváltozás az, amelynél a még nagyjában üde ércszemet ráeső fényben vörös vagy barna erek hálózzák át. A teljes elváltozásnak egyik gyakori módja az, amelynél limonittá vagy hematittá változik el, bő titanit kiválása mellett, egy másik gyakori eset az, amidőn titanitosodik. A képződő titanit az esetek nagy számában nem tiszta, bensőleg van keveredve limonittal, vannak azonban xenomorf tiszta szemcsékből álló titanithalmazok is. A titanitos limonithalmazok szélein is előfordulnak ilyen tiszta szemecskék. Előfordul az is, hogy teljes egészében világos színű leukoxénné alakul a titánmagnetit, melyben az ércreliktumok szabálytalan szemcse- vagy pálcikaalakúak. Olyan rácsos szerkezetet, amely az ilmenitből származott leukoxén belsejére annyira jellemző és ami az itteni diabázokban valósággal általános, egyáltalában nem találtam, habár ilyent említenek is. (6) Egyik ritka eset az is, hogy a titánmagnetitkristály vagy annak egy része, vagy egy halmazból egyetlen kristály sötétbarna, csak kissé áttetsző anyaggá változik, mely körül azonban titánitkiválás nincs. Egyes ilyen sötétbarna pszeudomorfózákban a közelebbi vizsgálatnál parányi erős fénytörésű és magas kettőstörési színű pelyheket, szálakat, halmazokat különböztethetünk meg. Ez a barna anyag ráeső fényben épp úgy fehéres szürke, mint akár a limonitos titanithalmazok ugyanilyen fényben.

Említettem, hogy a femikus szilikátásványok elváltozásánál is válik ki vasérc, mégpedig néha tekintélyes mennyiségben, rendesen titanit társaságában. Ha az ilyen utólagos vasérc változik el, teljesen limonittá vagy hematitos limonittá lesz, de titanitkiválás

nélkül. Megemlítem még, hogy a titánmagnetit csakis a nagyobb-mérvű titanitosodással veszti el eredeti alakját, míg a leukoxén-, limonit- vagy hematitképződésnél rendesen megmarad a pszeudomorfózák jó alakja. Az illető kőzet teljes szerpentinesedésénél azonban az elváltozott titánmagnetit anyaga eloszlik az egész kőzetben.

Igen ritka, akkor is minimális mennyiségű a *kromit*, amelyet barna és vörösbarna színnel áttetsző parányi oktaéderekben főleg az olivinben találtam, megtaláltam azután még a szerpentinben is. Van még a kőzetekben sárga és sárgásbarna, néha jól átlátszó spinellfajta is, melynek tulajdonságai leginkább a *pikotit*ra vallanak. Sokkal fontosabbnak látszik e kőzetekre nézve az *apatit*, mely a Majorlápának és a Kecskefark K-i alsóbb részének gabbrójában a normális kis mennyiségű, a Vaskapui táró ultrabázitjában csak kevés helyen lehet még minimális mennyiségben is kimutatni, míg ugyancsak a táróban a 10—12·25 m között olyen olivingabbró és gabbróperidotit fordul elő, részben elváltozott állapotban, melynek egyes részeiben feltűnő sok az apatit, legfeljebb 0·6 mm hosszú, de rendesen sokkal apróbb kristályokban. Ugyancsak sok apatit van a Majorlápa egyik részében (250 m), amfibolbiotit-gabbróban. Az egyes karcsú vagy kissé zömökebb oszlopok gyakran össze vannak repedezve, sőt töredezve. A *cirkon* csak a Majorlápa feltárásában volt kimutatható, ahol az egyik diallággabbróban (146 m) 0·8 mm-es cirkonkristályt is találtam. Az árok savanyú pegmatitjaiban gyakori a cirkon. A *rutil* meglehetős ritka, főleg a Majorlápa savanyúbb gabbróiban és biotitos kőzeteiben fordul elő, néha szagenithálózat alakjában.

A *pirit* meglehetős gyakori kis mennyiségben a Majorlápa gabbróiban, ahol még üde kőzetek elválási lapjain is megtalálható vékonyabb-vastagabb bevonatok alakjában, melyek a vékony csíszolatokban hosszú zsinórok alakjában jelentkeznek. Előfordul azonban apróbb-nagyobb halmazokban is. Ezek a halmazok jellemző szivacsszerű kiképződésűek. Találtam továbbá titánmagnetittel összenőve, sőt ritkán annak alakjában is. Gyakori benne az apró magnetitreliktum, sőt egyes halmazokban titanit is van, jeléül a titánmagnetit előzetes elbomlásának. A pirit igen ritka az ultrabázitokban.

Mindezen kőzetek utólagos ásványait röviden már az eredeti ásványok tárgyalásánál megneveztem, azért itt mindössze csak a következőket említem: A klorit legnagyobb része *pennin*, kis része *klinoklór*. A pennin legtöbbször radiális pikkelyes kiképződésű, a klinoklór már valamivel jobb alakú lemezeket formál. Előfordul a *ripidolit* is, sugarasan elhelyezett vagy szabálytalanul összekúszált halmazokban. Az epidotfajták közül leggyakoribb a közönséges *epidot*, amely sárgászöld (pisztacit) hosszúkás kristályokban, de leginkább szemcsehalmazokban található. Vele együtt előfordul hasonló megjelenésben a *klinozoizit*, amely azonban átlag jobb alakú és nagyobb oszlopokat alkot. Ritkább már a *zoizit β*, zömök, apró, víztiszta oszlopokban. Egy pár amfibolban gazdag kőzetben (diallágit) *ortit* is előfordul, meglehetős szabálytalan szemcsékben, olykor pleochroos udvarral. A saussuritben itt-ott *gránát* is található, rendesen parányi szabálytalan és színtelen szemcsékben.

Míg a klorit és az epidot legnagyobb része szétszórva található a kőzetekben, addig a *préhnit* leginkább egyes erek mentén fordul elő, mindössze a teljesen elváltozott gabbrókban találjuk nagyobb fészkekben vagy az egész kőzetekben eloszolva. Jellemző száras és legyezőszerűen divergáló lemezes halmazokban vagy szabálytalan széles, nem egységes lemezekben jelenik meg.

A szerpentinfajták közül mindenütt uralkodik az *iddingszit*, míg a *krizotil* és *básztit* nagyon szórványos és kevés. Az iddingszit nemcsak megjelenésében, hanem tulajdonságaiban is különbözik az egyes helyek szerint. A pszeudomorfózák alakja néha még a teljesen szerpentinné vált kőzetekben is felismerhetővé teszi az eredeti ásvány alakját, melyen belül gyakran egységes iddingszitlemez van. A pszeudomorfózák szélei gyakran magnetitesek, de a belsejében is vannak magnetitsávok. Az iddingszit színe: világos citromsárga, narancssárga, narancsvörös, vörösbarna, zöldesbe hajló barna. Pleochroizmusa még egy ugyanazon kőzetben is változó: néha igen erős, máskor az erős szín mellett is gyenge, olykor csak az abszorpció-különbségben nyilvánul. Az n_g és n_m színe és abszorpciója mindig erősebb, mint az n_p-é. Pár gyakoribb pleochroizmus a következő: n_g és n_m = sötét gesztenyebarna, egészen sötét barnászöld, feketészöld, sötét vörösbarna, sötét sárgásbarna és sötét barnássárga, n_p- = világos sárgásbarna,

világos sárgásvörös, világos vörösbarna, világos zöldesbarna, élénk citromsárga. Tengelyszöge is változó, néha alig nyílnak széjjel a tengelyei, máskor határozottan kéttengelyű, a legnagyobb tengely nyílást 25°-nak találtam az n_p körül. Kettőstörése is nagyon változó, a legnagyobb 0·045 volt. Valószínű, hogy az iddingszit elnevezés alatt többféle ásványt vagy különböző elváltozási stádiumokat kell érteni.

A Vaskapu bányatárójának szabadon lévő előterében az iddingszit-hálózat belsejében *kvarc*szemek is előfordulnak. De megjelenik a kvarc a prehniterekkel és halmazokkal kapcsolatban, sőt önállóan vastag telérekben is úgy a gabbróban, mint a táró ultrabázitja több helyén.

A másodlagos ásványok között a legritkább a *kalcit*, amely leginkább egyes telérek mentén fordul elő, de megjelenik a teljesen elváltozott földpátban, sőt néha a femikus ásvány-pszeudomorfózákban is.

Petrokémiai adatok. A tárgyalt kőzetekre vonatkozólag, a régibb vagy nem teljes elemzéseket nem számítva (**4**–**6**), 12 olyan elemzés áll rendelkezésemre, melyeknek kőzeteit közelebbről is megvizsgáltam. Ezek közül 6 drb-ot már közöltem az alább megjelölt helyeken, 6 elemzés új. Ezenkívül van még 2 olyan elemzés, amely a kőzetből kiválasztott titánmagnetitre vonatkozik. A megelemzett kőzetek a következők:

1. Diallaggabbró, Majorlápa kb. 227 m. Elemezte Emszt Kálmán dr. 1930, az elemzést közöltem: Földtani Közlöny. LX. k. 64. l. Budapest, 1930.

2. Diallagamfibolgabbró, Vaskapu bányatáró előtere. Elemezte: Polner Ödön, 1933.

3. Amfibolgabbrópiroxenit, Majorlápa kb. 180 m. Elemezte: Polner Ödön, 1935.

4. Diallagamfibolgabbróperidotit, Majorlápa 145 m. Elemezte: Emszt Kálmán dr., 1930. Az elemzést közöltem: Földtani Közlöny, LX. k. 61. l. Budapest, 1930.

5. Titánmagnetitgabbróperidotit, Majorlápa, kb. 150 m. Elemezte: Emszt Kálmán dr., 1935. Az elemzést közöltem: Földtani Közlöny, LXV. k. 311. l. Budapest, 1935.

6. «Wehrlit», Vaskapui (Kecskefark) bányatáró vége (31·8 m?).

Elemezte: Emszt Kálmán dr., 1906. Az elemzést közölte: Pálfy Móricz dr.: Földtani Közlöny, XL. k. 483. l. Budapest, 1910.

7. Amfibolperidotit, Vaskapui bányatáró 15·2 m. Elemezte: Emszt Kálmán dr., 1930. Az elemzést közöltem: Földtani Közlöny, LX. k. 61. l. Budapest, 1930.

8. Amfiboldiallágit, Vaskapui bányatáró 22·7 m. Elemezte: Polner Ödön, 1935.

9. Amfiboldiallágit, nagyszemű, ugyanott 15·7 m. Elemezte Polner Ödön, 1935.

10. Titánmagnetitperidotit ,Majorlápa, kb. 192 m. Elemezte: Emszt Kálmán dr., 1930. Az elemzést közöltem: Földtani Közlöny, LX. k. 61—62. l. Budapest, 1930.

11. Titánmagnetitanortózitgabbró, Majorlápa, kb. 155 m. Elemezte: Polner Ödön, 1933.

12. Titánmagnetitdiallágperidotit, aránylag kevés olivinnel, Vaskapui bányatáró 18·5 m. Elemezte: Polner Ödön, 1936.

E megelemzett kőzetek ásványos összetételére vonatkozó volummetrikus mérések eredményeit nem tartom feleslegesnek közölni. Ezek az értékek középértékek, t. i. a megelemzett kőzetek különböző részeiből több vékonycsiszolatot készíttettem és az ezekre vonatkozó mérések eredményei alapján számítottam ki az alábbi számokat. A táblázatban megadott «Egyéb» kifejezés a minimális mennyiségű ásvány összeségére (apatit, rutil, pikotit stb.) vonatkozik. A diallágot és a többi monoklinpiroxént itt egybeszámítottam, mert ezekben a megelemzett kőzetekben a monoklinpiroxének közül a diallág az uralkodó és nem is lehet mindig élesen elkülöníteni pl. a diopszidtól. Általában mondhatom, hogy ez a kvantitatív összetétel néha még egyetlen (a megelemzett) kőzetpéldányban is elég tág határok között változik, különösen tapasztaltam ezt a Majorlápa ultrabázitjainál.

	Pl	Di	Am	Ol	Mt	Br	Bi	Egyéb
1. Diallággabbró	52	30	3	—	8	4	2	1
2. Di. am. gabbró	57	22	10	4	6·5	—	—	0·5
3. Am. gabbrópiroxenit	16	42	21	—	13	6·5	—	1·5
4. Di. gabbróperidotit	10	20	16	24	20	—	8	2
5. Mt. gabbróperidotit	19	24	7	21	28	—	—	1
6. «Wehrlit»	—	23	19	32	25	—	—	1
7. Amfibolperidotit	—	6	38	25	22	3	5	1
8. Amfiboldiallágit	—	43	24	6	20	6	—	1
9. Amfiboldiallágit	—	54	19	4	14	8	—	1
10. Mt. peridotit	—	10	3	50	30	2	4	1
11. Mt. an. gabbró	54	7·5	—	—	37	—	—	1·5
12. Mt. di. peridotit	—	34	8	21	36	—	—	1

(*Rövidítések:* Pl=plagioklász, Di=diallág, diopszid, diopszidaugit, titánaugit. Am=barna és sötétbarna amfibol. Ol=olivin. Br=broncit. an=anortózit. Bi=biotit. Mt=titánmagnetit.)

Az eredeti elemzések adatai a következők:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SiO_2=	45·01	41·30	35·02	33·52	32·66	32·58	32·21	31·80	30·82	29·62	28·30	22·50
TiO_2=	3·55	2·99	5·98	7·71	23·16	6·07	9·29	16·80	18·80	8·73	15·20	15·00
Al_2O_3=	15·36	19·93	10·40	4·68	9·30	1·51	2·95	2·10	2·80	3·21	14·31	nyom
Fe_2O_3=	4·61	5·76	6·70	7·12	6·34	7·88	3·79	6·84	1·50	8·14	8·70	21·40
FeO=	9·83	8·05	17·70	28·61	14·98	29·85	28·55	19·10	22·15	33·84	20·00	25·56
MnO=	0·21	0·44	0·49	0·40	0·31	0·29	0·30	0·53	0·77	0·37	0·58	0·87
MgO=	4·48	4·45	10·05	12·25	3·65	14·46	15·28	12·30	13·68	12·90	1·02	7·95
CaO=	10·74	11·00	9·15	2·92	7·99	5·60	4·90	9·20	7·68	1·18	9·35	6·35
Na_2O=	2·99	1·24	0·80	1·39	0·77	0·45	1·57	0·94	0·56	1·33	1·96	0·10
K_2O=	nyom	0·21	0·12	nyom	—	nyom	nyom	0·08	0·22	nyom	0·12	0·22
P_2O_5=	0·05	0·31	0·43	0·09	0·15	—	0·06	nyom	nyom	0·14	0·26	nyom
$+H_2O$=	2·40	3·59	2·79	0·99	0·44	1·08	1·09	0·52	0·13	0·81	0·48	—
$-HO_2$=	0·23	0·17	0·10	0·15	0·11	—	0·11	0·38	0·49	0·12	0·10	0·25
	99·46	99·44	99·73	99·83	99·86	99·77	100·10	100·56	99·66	100·39	100·38	100·20
Töm.	2·991	2·823	2·982	3·350	3·392	3·410	3·422	3·480	3·435	3·596	3·481	3·835
											2·917	3·322

Általában tehát *bázisos kőzetek*, és pedig úgy a gabbrók, mint különösen az ultrabázitok. A gabbrók mindegyike bázisosabb, mint a gabbrók középértéke. Ez a bázisosság nemcsak a kovasav kisebb mennyiségében, de egyebek mellett a vasoxidok nagy mennyiségében is nyilvánul. Ezzel ellentétben a *MgO* jóval kevesebb a normálisnál, ugyanezt lehet mondani a gabbróknál a *CaO*-ra is. Egy másik még jellemzőbb tulajdonsága e kőzeteknek: *a titánsav aránytalanul nagy mennyisége*. Ez annyira feltűnő, hogy valóban a legfontosabb provincia-bélyegnek látszik, főleg ha a gabbroid-vonulatnak nemcsak e tárgyalt kis részét, hanem az egész vonulat gabbró és ultrabázit kőzeteit tekintetbe vesszük. (12) Ez a titántartalom nézetem szerint is nemcsak a titánmagnetithez van kötve, hanem jelentékeny mennyiségűnek kell lenni a femikus szilikátásványokban is. Erre TRÖGER (**14**) és KUNITZ (**16**) is rámutat pontos számítások alapján és részletesen ki is fejtik. A szarvaskői kőzetekben is ezt bizonyítja a titánaugit jelenlétén kívül a szintagmatit felé hajló amfibolnak, de a biotitnak is az elbomlásánál származó sok titanitos bomlási termék, de bizonyítani látszik az is, hogy nem mindig azokban a kőzetekben van a legtöbb TiO_2, amelyekben a legtöbb a titánmagnetit. Még az olivinből is jelentékeny mennyiségű titántartalmú bomlási termék származik a szerpentinesedésnél. Jellemző, hogy még az olivinben gazdag peridotitokban (6. és 10. sz.) is *kevés aránylag a MgO*, majdnem ugyanannyi van az igen kevés olivint tartalmazó diallágitokban (8. és 9. sz.). Ez arra enged következtetni, hogy az olivin meglehetős szegény lehet forszterit-molekulában.

Mindezek a viszonyok még jobban kitűnnek, ha az egyes csoportok szerint foglaljuk össze az eredeti elemzéseket:

	Gabbró 1, 2, 11	Gabbroid ultrabázit 3, 4, 5	Piroxenit 8 és 9	Peridotit 6, 7, 10 és 12
SiO_2=	38·20	33·75	31·31	29·23
TiO_2 =	7·24	12·28	17·80	9·77
Al_2O_3=	16·53	8·12	2·46	1·92
Fe_2O_3=	6·36	6·72	4·17	10·30
FeO=	12·62	20·43	20·63	29·45
MnO=	0·41	0·40	0·65	0·46
MgO=	3·30	8·67	12·99	12·65
CaO=	10·39	6·68	8·44	4·51
Na_2O=	2·09	0·98	0·75	0·86
K_2O=	0·11	0·04	0·15	0·05
P_2O_5=	0·20	0·22	—	0·05
$+H_2O$=	2·15	1·40	0·24	0·74
$-H_2O$=	0·16	0·12	0·50	0·12
	99·76	99·81	100·10	100·11

Ebből az összeállításból több jellemző tulajdonság tűnik ki. *A vasoxidok mennyiségének a növekedése nem áll egyenes arányban a MgO növekedésével.* Ezt megfigyelhetjük a gabbroid ultrabázitoktól egészen a peridotitig. A *MgO* nem a peridotitban a legnagyobb, aminek oka a fentemlítettek mellett a nagy magnetittartalom is lehet. Azután az is jellemző, hogy ebben a már erős differenciálódás következtében létrejött kőzettömegben nem tűnik fel a differencálódás menete olyan szabályosnak, mintha az egész szarvaskői gabbroidális tömeget az ő összes differenciációs termékeivel tekintetbe vesszük, (12) amidőn a differenciálódás valóban szabályszerűnek mondható.

Elég jó áttekintést ad a molekula %-ok összefoglalása is:

	Gabbró 1, 2, 11	Gabbroid ultrabázit 3, 4, 5	Piroxenit 8 és 9	Peridotit 6, 7, 10, 12
SiO_2=	43·68	36·95	32·51	30·64
TiO_2=	6·30	10·26	13·86	7·78
Al_2O_3=	11·16	5·27	1·50	1·17
FeO=	18·02	24·39	21·66	34·55
MgO=	5·66	14·04	20·23	19·84
CaO=	12·72	7·92	9·39	5·09
Na_2O=	2·28	1·04	0·75	0·87
K_2O=	0·08	0·03	0·10	0·04
P_2O_5=	0·10	0·10	—	0·02
	100·00	100·00	100·00	100·00

Elég jól lehet látni, hogy *a kovasav fogyásával csökken az Al-oxidnak és az alkáliáknak a mennyisége, de növekednek a (FeMg)-oxidok, továbbá azt is, hogy a CaO is csökken a kovasav fogyásával,* mindössze a piroxenitnél van visszaugrás. Ez azonban természetes, hiszen itt a *CaO*-tartalmú piroxének viszik a főszerepet. Jól kitűnik ennél az összeállításnál is a TiO_2 változó szerepe és az, hogy különösen nagy a piroxenitekben, továbbá az amfibolban és piroxénben szintén elég gazdag gabbroid ultrabázitokban. De épp ilyen jól látszik a vas és *Mg*-oxidok szerepe és egymáshoz való viszonya, hogy tehát a vasoxid mindenütt uralkodik, mindössze a piroxenitben egyenlő a *MgO*-val.

Az A. Osann-féle típusértékek és ezek alapján a rendszerbe való beosztás a következő: (L. 33. old.).

Az s értéke a nagy titánsav-tartalom miatt állandóan nagyobb annál, amit ezeknél a bázisos kőzeteknél várnánk. Épp ez az oka, hogy az 5. sz. gabbróperidotitot szinte csak erőszakkal lehet beosztani. Osann rendszerébe, mert ilyen értékek mellett igazi rokonkőzet nem akad. E kőzetnek a kovasavtartalma ugyanis csak 32·66%, míg a 468. tumleoi olivingabbróban, amelyik mellé kénytelen voltam beosztani, a kovasav 46·09%. Amennyiben azonban a TiO_2-t nem számítjuk az *s*-hez, akkor úgy a 99. (Lherz), mint a 105. (Avezac) típusok kőzete rokon hozzá. Éppen így nehéz a

	1	2	11	3	4	5	6	7	8	9	10	12
s =	53·16	50·29	46·47	43·07	41·61	56·95	38·12	40·17	46·06	46·68	38·22	37·17
A =	3·23	1·54	2·31	0·93	1·42	0·85	0·45	1·56	1·01	0·70	1·36	0·26
C =	6·84	12·00	7·54	5·74	1·50	5·48	0·46	0·22	0·27	1·02	0·64	—
F =	26·67	22·48	33·70	43·39	52·51	30·42	60·06	56·25	51·38	49·88	57·72	62·57
a =	2·5	1·5	1·5	0·5	1	0·5	0·5	1	0·5	0·5	0·5	—
c =	5·5	10	5	3·5	1	4·5	0·5	0	0	0·5	0·5	—
f =	22	18·5	23·5	26	28	25	29	29	29·5	29	29	30
n =	10	9	9·6	9	10	10	10	10	9·4	8	10	4·2
sor =	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	δ
k =	0·89	0·90	0·74	0·71	0·64	1·22	0·59	0·60	0·79	0·83	0·56	0·59
Tipus=	83	89	83	99	102	78	101	101	94	66	103	101
Rokonkőzet=	gabbró 503	gabbró 549	gabbró 511	Ariegit 593	Schriesheimit 601	Oliv. gabbró 468	Wehrlit 596	Wehrlit 598	Koswit 557	Piroxenit 387	Hornb. perid. 609	Kimberlit 600

11. sz. magnetitanortózitgabbró beosztása. Ha azonban levonjuk a belőle kvantitatíve meghatározott titánmagnetitet, akkor a következő értékeket kapjuk:

Kőzet	s	A	C	F	a	c	f	n	sor	k
11. sz.	53·92	3·44	10·58	17·85	3·5	10	16·5	9·6	α	0·90
90. sz.	54·93	3·01	12·20	16·15	3	11·5	15·5	9·2	α	0·92

Ez a 90. sz. rokonkőzet a Richterhof-típusba tartozó anortózitgabbró, melynek értékei elég jól egyeznek a majorlápai anortózitgabbróéval.

Ezek az OSANN-féle értékek nagyon jól mutatják a szarvaskői gabbroidális magmából differenciálódott kőzetek ama általános vonását, hogy *az alkáliviszony (n) különösen nagy számot ad*, kivétel ez alól mindössze a 12. sz. peridotit, melyben különben sincs földpát. Az OSANN-féle háromszögben a IV. szextánsba esnek, éspedig a gabbrók részben a bázisos gabbrók közé, részben a gabbroid-ultrabázitokkal és ultrabázitokkal együtt a piroxenit-peridotit csoportban helyezkednek el az F sarok közelében.

A NIGGLI–BECKE-féle értékek:

	1	2	11	3	4	5	6	7	8	9	10	12
si =	107	96	62	68	61	86	55	56	59	59	50	39
ti =	5·6	5·2	25	8·6	10	46	7·5	12	23	27	10	20
qz =	—21	16	—56	—38	—49	—21	—49	—54	—49	—47	—58	—63
al =	21·5	27·5	18·5	12	5	14·5	1·5	3	2	3	3·5	0
fm =	44	42	55	67·5	87	61	87·5	85·5	77	79·5	92·5	87·5
c =	27·5	27·5	22	19	5·5	22·5	10	9	19	16	2	12
alk =	7	3	4·5	1·5	2·5	2	1	2·5	2	1·5	2	0·5
k =	0	·09	·03	·09	0	0	0	0	·05	·11	0	·58
mg =	·36	·36	·06	·42	·38	·23	·40	·46	·46	·50	·35	·23
m =	4	4	3	3	1	3	1/2	1	2	2	1	2
Magma =	Gabbró H. P. gabbró	Ossipit P. H. gabbró	Issit N. gabbró	H. Pirox. P.	Peridotit	Issit Hornbl.	Peridotit	Peridotit	H. Pirox. Per.	H. Pirox. Per.	Peridotit	Peridotit

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ξ =	28	30	13	7	16	2	5	4	4	5	23	0·5
η =	49	55	31	10	37	11	12	21	19	5	40	12
ζ =	34	30	20	8	24	11	11	21	17	4	26	12·5
ϑ_{011} =	10·2	17·3	7·4	1·7	8·8	0·7	0·3	0	1	1	9·9	0·3

A NIGGLI-féle értékekből tűnik ki leginkább a bükkhegységi gabbroidális kőzetek különös tulajdonsága, hogy *a MgO még az olivinben gazdag kőzetekben is alárendelt a vasoxidokkal szemben*, továbbá, hogy *a piroxenitekben ez az arány kedvezőbb a MgO-ra, mint a peridotitokban*. Természetesen ismerni kellene a kőzetek olivinjének a vegyi összetételét, hogy ennek okát megtaláljuk, de eddig még nem sikerült az olivinnek tiszta állapotban való kiválasztása. Az optikai tulajdonságok mindenképpen közönséges olivinre, nem pedig vasolivinre utalnak. Jellemző továbbá az alkáliszám (*k*), valamint a titánsavszám (*ti*) is. A *Ca*-oxidszám (*c*) nagyon változó,

annyi azonban szabályos, hogy a legkisebb értéke a legnagyobb *fm* számú peridotitban van, a legnagyobb pedig a legkisebb *fm* számú gabbrókban. Az *al* szám kissé rendszertelen nagysága részben az amfibol nagyon változó mennyiségében leli magyarázatát. Általában mind negatív kvarcszámú kőzet.

Amerikai norma és rendszertani helyzet:

	1	2	11	3	4	5	6	7	8	9	10	12
or =	—	1·22	0·72	0·72	—	—	—	—	0·50	1·28	—	—
ab =	25·26	10·48	16·56	6·76	11·74	6·50	3·82	13·26	7·97	4·72	11·27	—
an =	28·47	48·15	29·86	24·41	6·53	21·91	2·08	1·00	1·25	4·50	2·78	—
hy =	13·06	20·23	—	1·42	10·33	24·29	4·21	—	—	—	3·36	—
di =	14·77	3·50	—	19·12	7·50	12·87	19·98	3·30	38·70	30·95	1·64	39·11
ol =	1·72	—	5·98	22·36	37·43	—	45·45	52·45	9·46	19·65	51·70	—
mt =	6·68	8·35	12·62	9·71	10·33	—	11·41	5·50	9·91	2·18	11·81	31·02
il =	6·75	0·11	28·88	11·35	14·65	7·87	11·54	17·65	31·92	35·72	16·38	28·50
ru =	—	2·94	—	—	—	19·02	—	—	—	—	—	—
hm =	—	—	—	—	—	6·34	—	—	—	—	—	—
ap =	0·14	0·71	0·59	0·99	0·20	0·35	—	0·14	—	—	0·34	—
Q =	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·77
cs =	—	—	4·61	—	—	—	—	5·61	—	—	—	—
ns =	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·20
ks =	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·35
Hely a rendszerben	III.5. "4.5.	(II)III. 5.(4)5. (4)5.	III. 5. 4. 5.	IV.2" 3.1.3.	IV" 2. "4. 1. 3".	IV.3. 1.1.4.	V.2. (3) 4. 1. 3.	IV(V) 2."5. 1. 3.	V.1. 3. 2. 1. 3.	IV. V. "3.(2)3. 1. 3.	IV(V). 2"."5. 1. 3".	V(3)4. 1. 1. (3)4.

A norma képzése nem könnyű dolog ezekben a rendesen sok titánmagnetitet tartalmazó kőzetekben. Így pl. ha a 11. sz. titánmagnetitanortózitgabbrót a rendes módon kezeljük, akkor a nála sokkal bázisosabb auvergnos subrangba jut, ha ellenben kivonjuk belőle a nagy titánmagnetit-tartalmat, akkor a neki jobban megfelelő hessos szubrangba (II. 5., 4., 5.) kerül. Még nehezebb ügy az 5. sz. titánmagnetitgabbróperidotit. Ennél ugyanis a titánsav óriási mennyisége az oka, hogy ebben az olivines kőzetben olivin nem képezhető a normában, továbbá ha rendes módon állítjuk fel a normát, akkor majdnem 8% kvarcot kell kimutatnunk (I). Ha

pedig az egész *FeO*-ot a *TiO* lekötésére használjuk fel, akkor meg a kvarc majdnem 10%-ig emelkedik (II):

	Q	*ab*	*an*	*di*	*hy*	*mt*	*il*	*ap*
I.	7·79	6·50	21·91	12·87	7·15	9·19	21·60	0·35
II.	9·64	6·50	21·91	16·13		9·19	26·28	0·35

Hogy tehát mégis szabad kvarc ne legyen ennek az olivines kőzetnek a normájában, úgy jártam el a táblázatban feltüntetett norma felállításánál, hogy a hipersztén képzésénél a maradék *MgO*-hoz annyi *FeO*-t adtam, amennyi éppen szükséges volt a kovasav lekötésére. Így azután több mint ötször annyi a fenti norma hipersztenjében a *FeO*, mint a *MgO*. Szintén a nagy titánmágnetit-mennyiség az oka, hogy a 12. sz. valóban ultrabázisos peridotitban sem képezhettem olivint, ellenben kvarcot igen, de ezen már nem lehetett segíteni.

Eltekintve ezektől az esetektől, a vaskapui kőzetek azokban a szubrangokban, melyeknek már van képviselőjük, valóban meglehetősen közeli rokon kőzetek közé jutnak.

A kiválasztott titánmagnetit. A kiválasztott és megelemzett két titánmagnetit két teljesen különböző kőzetből való. Az egyik a Majorlápából (kb. a 185 m tájáról) származó 11. sz. titánmagnetitanortozitgabbróból, a másik a vaskapui bányatáróból (18·5 m) gyüjtött 12. sz. titánmagnetitperidotitból. Mindkét kőzetből Clerici-oldattal (thalliummalonát-formiát, töm. 4·2) történt a kiválasztás. A kiválasztást és az elemzést Polner Ödön vegyészmérnök végezte.

A majorlápai anortózitgabbró tömöttsége a kiválasztás előtt 3·481, az érc kiválasztása után 2·917 volt, a kiválasztott érc (I) tömöttsége 4·725.

A bányatáró említett peridotitjának eredeti tömöttsége 3·835, a kiválasztás után 3·322, a kiválasztott érc (II) tömöttsége 4·620.

Eredeti elemzések		Osann értékei		Niggli értékei		Amerikai norma	
I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
SiO_2 = 0·10	2·54	s =30·92	41·10	si = 0·2	5	ol = 1·89	fo=4·01
TiO_2 =32·20	41·30	A = —	—	qz =−99·8	−35	cs = —	2·35
Al_2O_3= 1·74	...	C = —	—	ti = 47	66	$MgAl_2O_4$= 2·38	—
Fe_2O_3=23·98	11·49	F =67·67	58·90	al = 2	—	$MgTiO_3$ = —	2·66
FeO =40·10	38·60	a = —	—	fm = 98	96·5	mt =35·40	16·66
MnO = 0·42	1·01	c = —	—	c = —	3·5	il =61·21	72·73
MgO = 0·70	3·18	f =30	30	alk= —	—	ru = —	1·24
CaO = —	1·53	n = —	—	k = —	—	V. 5. 5.	V. 5. 5.
99·24	99·65	k = 0·45	0·69	mg= 0·02	0·10	1. 5.	1.(4)5.
		T = 1·31	—	m = 1	1		

Ha már most a képletet akarjuk felállítani, hagyjuk el a valószínűleg csak hozzákeveredett anyagokat, akkor a majorlápai gabbró titánmagnetitjénél (I), ill. a bányatáró titánmagnetitjénél (II) a következő vegyületekkel van dolgunk:

	Mol. prop.	Képlet.
I.	$MgAl_2O_4$ — — 346 $FeFe_2O_4$ — — 2998 $FeTiO_3$ — — — 8126	$MgAl_2O_4.9FeFe_2O_4.23FeTiO_3$
II.	$MgTiO_3$ — — — 754 $FeFe_2O_4$ — — 1436 $FeTiO_3$ — — — 9570	$MgTiO_3.2FeFe_2O_4 13FeTiO_3$

Ha a $MgAl_2O_4$-et, illetve a $MgTiO_3$-at elhagyjuk, akkor a molekuláris proporció, ill. a képlet a következő:

	Mol. prop.	Képlet.
I.	$FeFe_2O_4$ — — — 2998 $FeTiO_3$ — — — 8126	$2FeFe_2O_4.5FeTiO_3 = Fe_7^{II}Fe_4^{III}Ti_5O_{23}$.
II.	$FeFe_2O_4$ — — 1436 $FeTiO_3$ — — — 9570	$FeFeO_4.6FeTiO_3 = Fe_7^{II}Fe_2^{III}Ti_6O_{22}$.

Oxidokban kifejezve:

I. Fe_2O_3 — — — — 1499
FeO — — — — 5628
TiO_2 — — — — 4025
$\Big\}$ $2Fe_2O_3.7FeO.5TiO_3 = Fe_7^{II}Fe_4^{III}Ti_5O_{26}$

II. Fe_2O_3 — — — — 718
FeO — — — 5503
TiO_2 — — — — 4785
$\Big\}$ $Fe_2O_3.7FeO.6TiO_3 = Fe_7^{II}Fe_2^{III}Ti_6O_{22}$.

Nyilvánvaló tehát, hogy a két különböző helyről és különböző kőzetből származó titánmagnetit között elég nagy a különbség még így nagyjában véve is: a peridotit ércében kb. kétszer annyi az ilmenitmolekula, mint a gabbró ércében. Úgy látszik, hogy az erősebben diferenciált termékbe, a peridotitba a titánoxidból is nagyobb mennyiség került a bázisokkal együtt és ez a titánoxid az ércben is nagyobb mennyiségben halmozódott fel. Másrészről az is érdekes, hogy a peridotit ércében viszont a ferrioxid jóval kevesebb, mint a gabbróéban. A peridotitban a titánoxid mintegy helyettesíti a ferrioxidot. Ha ez így van, *ez is alátámasztja azt a felfogást, hogy a titánium a titánmagnetitben mint* Ti_2O_3 *volna jelen.*

Összefoglalás.

A Bükkhegység gabbroidális vonulata sok különleges sajátossága folytán valóban egészen jól körülhatárolható kőzetterületnek fogható fel, amely éppen legfontosabb jellemző tulajdonságaiban alapvetőleg különbözik pl. úgy a Persányihegység, mint az Erdélyi Érchegység gabbroid területeitől.

Ennek a vonulatnak ismertetett kisterjedelmű déli részét minden jellemző vonása összefűzi a vonulat főrészével. Itt külön ki kell emelnem azt, hogy az egész területen, úgy a szorosabb értelemben vett gabbroidális részben, mint az ultrabázisos részben a nagyjában egyforma, ill. nagyon hasonló vegyi összetétel mellett is állandó és folytonos változást tapasztalhatunk. Állandó a változás bizonyos határok között úgy a különben azonos nevű ásványok optikai viselkedésében, amit természetesen ezeknek az izomorf vegyületeknek kisebb mértékű vegyi különbözősége okoz, mint ezeknek az ásványoknak asszociációjában, ami e kőzetek ásványos

összetételének, tehát a kőzetfajtáknak finom, de állandóan hullámzó változását idézi elő.

Ezt az állandó változást úgy fogom fel, mint a differenciálódás egyenes következményét. Ellenmondásnak látszik, de valóság, hogy ez a természetes folytonos változás, ez az úgyszólva: *állandóságnélküli állapot voltaképpen a legállandóbb általános jellemző tulajdonsága a terület összes tűzeredésű kőzeteinek*, az egész kőzetterületnek. Állandó bélyeg tehát az állandóság hiánya, — és ez a déli rész, ahová pedig a differenciálódás következtében főleg az ultrabázisos részek koncentrálódtak, ebben a tekintetben is nagyon jól képviseli az egész tűzeredésű tömeget.

Irodalom.

1. Szabó József: Heves és külső Szolnok megyék földtani leírása. Magy. orv. és term.-vizsg. stb. Munkálatai. 79—81. l. Budapest, 1869.

2. Szabó József: A wehrlit Szarvaskőről, mint összetett kőzet. Földtani Közlöny. I. k. 18—29. l. Budapest, 1871.

3. Szabó József: A wehrlit Szarvaskőről. Földt. Közl. VII. k. 169—181. Budapest, 1877.

4. C. v. John: Olivingabbró von Szarvaskő. Verhandl. d. k. k. Geol. Reichsanst. 1885. p. 317—318. Wien.

5. C. v. John: Wehrlit (Diallagperidotit) aus der nördl. Umgebung von Erlau in Ungarn. Jahrb. d. k. k. Geol. Reichsanst. Bd. LVII. p. 435. Wien. 1907.

6. Pálfy Móric: A szarvaskői wehrlittömzs. Földt. Közl. XL. k. 518—525. Budapest, 1910.

7. Schréter Zoltán: Eger környékének földtani viszonyai. A m. kir. Földt. Int. évi jelentése 1912-ről. 133 l. Budapest, 1914.

8. Szentpétery Zsigmond: Diósgyőr és Szarvaskő vidéki paleo- és mezoeurptivumok földtani viszonyai. A m. kir. Földtani Int. évi jel. 1917—1919-ről. 75—88 l. Budapest, 1923.

9. S. v. Szentpétery: Allgemeine Charakteristik d. basischen Eruptivzuges im Bükkgebirge. Acta. Scient. Natural. T. I. p. 113—124. Szeged, 1924.

10. Szentpétery—Emszt: A gabbrómagma differenciálódási termékei Szarvaskő környékén. Földt. Közl. LVI. k. 62—63. l. Budapest, 1927.

11. Szentpétery—Emszt: Petrokémiai adatok Szarvaskő vidékéről. Földt. Közl. LVIII. 109—114. l. Budapest, 1929.

12. Szentpétery—Emszt: Kőzettípusok Szarvaskőről. Földt. Közl. LX. 57—67. l. Budapest, 1931.

13. Szentpétery Zsigmond: A bükkhegységi gabbroidtömeg kőzeteinek magmatikus képződése. Akadémiai Mat. és Term.-tud. Értesítő. XLIX. 399—430. l. Budapest, 1933.

14. E. Tröger: Der Gehalt an seltenen Elemente d. Eruptivgest. Chemie der Erde. Bd. IX. p. 286—310. Jena, 1934.

15. Szentpétery—Emszt: Einige Differentiate und endogene Kontaktgesteine von Szarvaskő. Földtani Közl. LXV. p. 305—314. Budapest, 1935.

16. W. Kunitz: Die Rolle des Titans etc. Neues Jb. B. Bd. LXX. A. p. 385—466. Stuttgart, 1936.

Ezenkívül használtam természetesen A. Osann, P. Niggli, Fr. Becke, Washington stb. közismert elemzés-átszámítási könyveit, ill. értekezéseit.

TÁBLAMAGYARÁZAT.

X. tábla.

1. Gabbróperidotit fokozatos átmenetele anortózitgabbróba, Majorlápa a 146 m táján. Az eredeti nagyságnak kb. a fele.

2. Szabálytalanul keveredett peridotit és gabbrórészek. A kép közepén összegyűrődött titánmagnetites sáv húzódik. Majorlápa a 191 m táján. Az eredeti nagyságnak kb. a fele.

3. Gabbró és titánmagnetitperidotit egymásba hatolt slirrészletei. A kép felső részén szabálytalan titánmagnetit sáv, kissé lentebb vékony titánmagnetit zsinór van. Majorlápa a 191 m táján. Az eredeti nagyságnak kb. a fele.

4. Gabbró, anortozit és titánmagnetitperidotit slirrészek egymással keveredve. Majorlápa a 146 m táján. Az eredeti nagyságnak kb. a fele.

XI. tábla.

1. Diallágamfibolperidotit, bányatáró 22·75 m. A titánmagnetit az olivines részben xenomorf. a diallágban automorf. 1 Nicol, 8-szoros nagyítás.

2. Titánmagnetitperidotit kevés diallággal és amfibollal. bányatáró 16·25 m. Szideronites szerkezet. 1 Nic. 10-szeres.

3. Diallágperidotit kevés amfibollal, bányatáró 27 m. Hézagkitöltő titánmagnetit. 1 Nic. 24-szeres.

4. Diallágbroncitperidotit, Majorlápa, 197 m táján. Poikilites diallágban titánmagnetit és olivinkristályok. 1 Nic. 24-szeres.

5. Titánmagnetitamfibolperidotit, bányatáró 13 m. Szöveti kép. 1 Nic. 25-szörös.

6. Gabbródiallágit, Majorlápa 228 m táján. Szivacsos pirithalmaz üde titánmagnetit társaságában. 1 Nic. 24-szeres.

XII. tábla.

1. Dunithoz közeledő peridotit, bányatáró 17·25 m. Szöveti kép. 1 Nic. 12-szeres.

2. Amfiboldiallágperidotit, bányatáró 24·75 m. Szerpentinesedő olivinkristályok. 1 Nic. 24-szeres.

3. Diallágamfibolperidotit egyik olivinszegény részlete. Bányatáró É-i mellékjárata 4·5 m. Szélein veresedő olivinben elváltozó amfibol. 1 Nic. 35-szörös.

4. Saussurites olivingabbró, bányatáró 13·5 m. Titanitkiválás szerpentinesedett olivinkristályokban. 1 Nic. 35-szörös.

5. Olivines részlet amfiboldiallágitból, Majorlápa 227 m táján. A képen látható nagyobb olivinszem szerpentinné vált. 1 Nic. 24-szeres.

6. Amfibolbroncitdiallágit minimális olivinnel. Majorlápa 210 m táján. Szöveti kép. 1 Nic. 20-szoros.

XIII. tábla.

1. Amfiboldiallágit szórványos olivinnel, bányatáró É-i mellékjárata 3·75 m. Diallág és barna amfibol összeszövődése. + Nic. 24-szeres.

2. Amfibolbroncitdiallágit, bányatáró É-i mellékjárata 4·25 m. Diallág és barna amfibol összeszövődése. + Nic. 35-szörös.

3. Diallággabbró, bányatáró előtere. Elváltozó diallág ikerkristályok. 1 Nic. 48-szoros.

4. Diallággabbró, Zsindeloromi (Kecskefark) erdő alsóbb része alsó bányatáró mellől. Diallág és broncit lemezes összenövése. + Nic. 167-szeres.

5. Diallághiperszténgabbró, Majorlápa 175 m táján. Szöveti kép. + Nic. 28-szoros.

6. Amfiboldiallággabbró, Majorlápa 230 m táján. Poikilites sötétbarna amfibol. + Nic. 16-szoros.

XIV. tábla.

1. Bázisos biotitamfibolaugitgabbró, Majorlápa 248 m táján. Összeráncosodott biotitlemezek és aktinolitrostok. 1 Nic. 36-szoros.

2. U. a. Majorlápa 249 m táján. Kloritosodó kőzetben gyűrt biotitlemezek. 1 Nic. 60-szoros.

3. Gabbrópiroxenit, Majorlápa 186 m táján. Szöveti kép. + Nic. 36-szoros.

4. Olivingabbró, bányatáró 12 m. Iddingszittel áthálózott plagioklászok. 1 Nic. 28-szoros.

5. Diallágaugitgabbró, Majorlápa 178 m táján. Szöveti kép. + Nic. 28-szoros.

6. Titánmagnetitben gazdag beerbachit, Majorlápa 187 m táján. Szöveti kép + Nic. 35-szörös.

A vizsgálatokat a Rockefeller Foundation műszereivel végeztem

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. április 26-án tartott üléséből.)

TITANOMAGNETITHÄLTIGE GESTEINE DER VASKAPUGEGEND BEI SZARVASKŐ.

Von S. v. SZENTPÉTERY.

Mit Tafel X—XIV.

Titanomagnetithältige Gesteine des Bükkgebirges sind die Gabbros und die ultrabasischen Differentiationsproducte, die am besten an der N-Seite des Vaskapu (Eisernes Tor) an den Hügeln Kecskefark und Zsindelorom zu forschen sind. Die Bächer und die kleineren Grubenstollen schliessen die Gesteine verhältnismässig gut auf. Der Titano magnetitinhalt beträgt in den Gabbros durchschnittlich 8%, in den gabbroiden Ultrabasiten 15%, in den eigentlichen Ultrabasiten (Pyroxenit, Peridotit) 21%; in einzelnen Gesteinen aber auch 50%; in erzigen Nestern, Schnüren und Schlieren 90%. Die Analysen der aus den Gesteinen gesonderten Titanomagnetite zeigen einen auffallend grossen TiO_2-Inhalt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 26. April 1937.)

A SÁGHEGY FELÉPÍTÉSE ÉS VULKÁNOLOGIAI VISZONYAI.

JUGOVICS LAJOS-tól.

A Sághegy a Kis Magyar Alföld déli részén, Celldömölk—Mesteri és Ság községek között — a győr—szombathelyi vasúti fővonal mentén — emelkedik. A lapos tetejű, csonka kúpalakú, 291 m. t. sz. feletti magas hegy hirtelen emelkedik ki a Marcal folyócska átlag 130—140 méteres síkságából. Tájképileg is igen érdekes látványt nyujt a síkságból hirtelen, cca 160 m-rel kinyúló, kettős csonkakúpalakú, elliptikus körvonalú hegy, melynek hossztengelye északdéli irányú. (6. és 7. sz. fénykép.)

A Sághegy kiterjedésére nézve jellemző adat, hogy lapos teteje 50 katasztrális hold, majdnem teljesen sík terület. Ezt a lapos tetőt valószínűleg nemcsak a természet pusztító erői formálták ilyenre, hanem részben emberi kéz munkájának is az eredménye. A hegy tetején végzett legújabb történeti kutatások és ásatások[1] azt tanúsítják, hogy a Sághegy tetejét már az ősember lakóhelyül választotta, mert az neki meredek oldalaival és a síkságból való hirtelen kiemelkedettségével természetes védelmet nyujtott.

---

[1] Lázár Jenő mérnök, a bazaltbánya jelenlegi vezetője és tulajdonosa már évek óta ásatásokat végez a Sághegy tetején. A bazaltkitermelés előtt lépésről-lépésre felásatja és begyüjti a hegytető felső laza rétegeit, melyekből igen érdekes őstörténelmi maradványok kerültek elő. Ásatásai eredményét most dolgozza fel, de engedélye alapján megállapításainak eredményét közölhetem. Eszerint a Sághegy lapos tetején már a neolith-kor embere letelepedett és ettől az időtől kezdve a bronz-, hallstatti korokon át egészen a rómaiakig állandóan emberi lakóhely volt. A hegy tetejét körülvevő primitiv várfalmaradványok valószínűleg a település utolsó korszakából maradtak fenn.

A Sághegy alsó, lankás lejtőit ma szőlőkultúra borítja, míg a felső meredekebb részének kőzetét a «Sághegyi Bazaltbánya R.-T.» termeli ki. A kőbányaüzem nagy terjedelme, modern berendezése, a kitermelt bazalt mennyisége is bizonyítja, hogy a kőzet jó útépítő anyag.

A Sághegy geológiai és kőzettani szempontból önállóan és összefoglalóan még nincsen tanulmányozva. Az eddig megjelent és a dolgozat végén felsorolt szakmunkák többnyire csak részletkérdéseket tárgyalnak, vagy általános geológiai szempontból foglalkoznak a Sághegggyel.

A sághegyi bazaltbánya üzeme hatalmas lépésekkel halad előre, a hegy felső részét egy-két évtized alatt lefejtik, elhordják és az egykori vulkáni kúpnak kevés nyoma marad. Ezért tartom különösen fontosnak, hogy a Sághegy geológiai felépítésére és kőzeteinek sajátságaira vonatkozó sokéves megfigyeléseimet részletesen közöljem.

Sághegyi vizsgálataimban és felvételi munkámban lelkes megértéssel támogatott néhai Lázár Ferenc úr, a bányavállalat egykori vezetője és tulajdonosa. Kedves kötelességet teljesítek, mikor szíves támogatását e helyen is megemlítem és megköszönöm.

A Sághegy geológiai és vulkánologiai viszonyai.

A Sághegy kettős csonkakúp alakja és geológiai felépítése között szoros összefüggés állapítható meg. A hegy alsó része, a lankásabb oldalú csonkakúp — mely átlag 200—210 m magasságig emelkedik — laza üledékes kőzetekből van felépítve, míg a felső része — a meredekebb oldalú csonkakúp — vulkáni működés eredménye, eruptív kőzetekből: bazaltokból és bazalttufából áll.

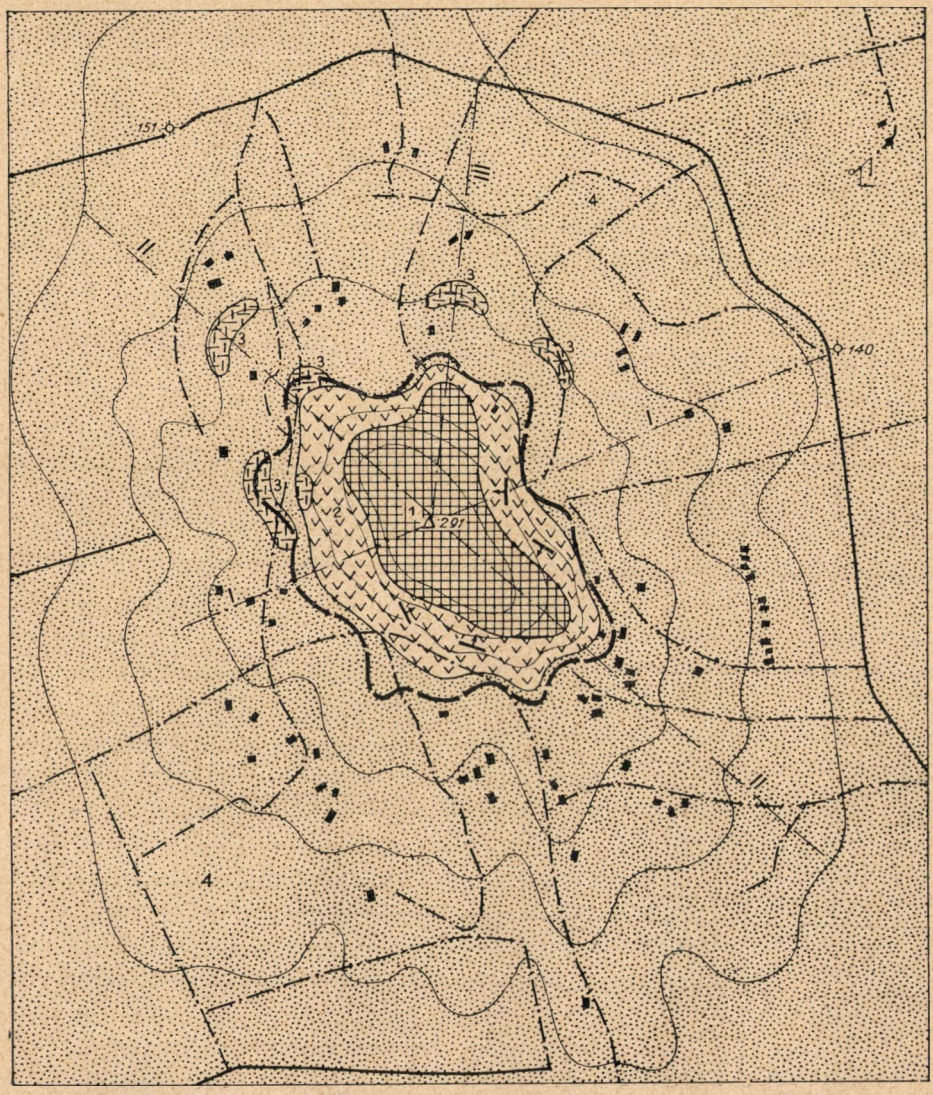
A hegy alsó részét felépítő üledékes kőzetek: homok, homokos kavics és agyag, részletesebb tanulmányozása a hegy alsó, lankás, szőlőkertekkel borított oldalain nem igen lehetséges, mert ott feltárások nincsenek. A bazaltbányászat sem érintette ezeket a képződményeket, mert a bazalt és ezen üledékes rétegek közé tekintélyes vastag bazalttufatömegek települtek, melyeket már nem bányásznak. A bányaüzem csak annyiban és ott tárta fel ezeket a képződményeket, ahol a bányaépületek és siklópályák alapozása

azt szükségessé tette. A bányaépületek a hegy keleti oldalán, kb. 200 m magasságban helyezkednek el, az üledékes rétegek feltárásai tehát e szintben találhatók. Azonkívül ebből a magasságból, a kőtörőberendezéstől kiindulva, siklópálya vezet a hegy lábáig, melynek alapozásánál szintén megbontották a hegy alsó, üledékes rétegeit. Ezeken kívül a hegy ÉNy-i, Felsőmesteri felé néző lankás oldalán is találtam még néhány mélyebb kőfejtőgödröt, melyekben az üledékes rétegeket tanulmányozhatjuk. Ez utóbbi feltárások helyén — még az 1880—90. években — a tetőről leomlott bazalttömegeket fejtették házépítésre, részben útkavicsolásra. Az építéshez szükséges homokot és agyagot szintén a hegyoldalból, a bazaltkőfejtőgödrök mellől termelték ki.

Ezek a feltárások, sajnos, mindössze 2—3 m mélységig bontották meg az üledékes rétegeket, úgyhogy azoknak települését és egyéb sajátságait részletesen tanulmányozni nem igen lehetett. Annyi megállapítható, hogy ezeknek az üledékes képződményeknek kifejlődése és települése a hegy minden oldalán hasonló. A bazalttufával határos, felső rétegek mindenütt homokból állanak, ennek rétegei közé, a mélység felé sárga, majd kékesszürke vékonyabb agyagrétegek települnek. A homokrétegek közé pedig helyenként kavics, illetve kavicsos homokrétegek ékelődnek. A rétegek települése általában nyugodt, csak a vulkáni képződmények közelében, főleg a hegy keleti oldalán találtam néhány törést, melyek mentén ezek a rétegek csekélyebb dőlésváltozást mutatnak, amit a vulkáni működés hatásának tulajdonítok.

A Sághegy üledékes rétegeiben kövületet nem találtam, de tudomásom szerint az előttem kutató Böckh János, Hofmann Károly, id. Lóczy Lajos és Vitális István sem találtak, aminek oka nemcsak a feltárások hiányában, hanem ezeknek a képződményeknek kövületszegénységében is keresendő. A hegy alsó részét felépítő üledékes rétegek kormeghatározását kövület hiányában csak a környező területeket felépítő képződményekkel való összehasonlítás alapján végezhetjük.

A környező síkságot és halomvidéket, vagyis a Kis Magyar Alföldet felépítő képződmények — eltekintve egyes helyeken a felszínen található fiatalabbkorú, durvább törmelék- és kavicsrétegektől — a felső pannoniai kor tengeréből rakódtak le. Ezt már



Sághegy geologiai térképe.

Méret = 1 : 19200.

1. ábra.

id. Lóczy Lajos a Balaton és tágabb környékét tárgyaló monografikus munkájában (8) saját és más kutatók vizsgálatai alapján kimutatta. A pannoniai képződmények vastagsága, a legújabb petróleumkutató mélyfúrások adatai alapján az 1500 métert is jóval meghaladják. Egykori szintjük kb. 250—270 m. t. sz. feletti magasságig nyomozható. A pontusi tenger eltűnése után uralkodó szárazföldi sivatagos klíma azonban alaposan lepusztította ezeket a képződményeket, úgyhogy az ezután működő vulkánosság már alacsonyabb és változó magasságú halomvidéken működött. A kiömlő lávából és vulkáni törmelékekből keletkezett bazalt- és bazalttufatömegek lenyomták és a további elhordástól, elpusztulástól megvédték az alattuk települő laza rétegeket, míg a környező, be nem borított területek laza képződményei ezalatt hatalmas arányokban tovább pusztultak.

A Sághegy vulkáni kúpja tehát megvédte az elhordástól az alatta települő laza kőzeteket. Ugyanakkor a környező térszín folytonosan mélyült, aminek arányában a Sághegy kiemelkedett. A Sághegy alsó részének üledékes képződményei tehát az egykori pannoniai-pontusi rétegösszletből maradtak fenn, egykorúak és szervesen összefüggnek a környező síkság hasonló képződményeivel. A 3. ábra I. sz. vázlatos szelvényében a Sághegy eredeti alakját, illetve a vulkáni kúpnak és környékének lepusztulását kíséreltem meg ábrázolni, látható, hogy a környező síkság mélyülésével arányosan, az egykori hatalmas vulkáni kúpból tekintélyes bazalttufa és bazalttömegek pusztultak le.

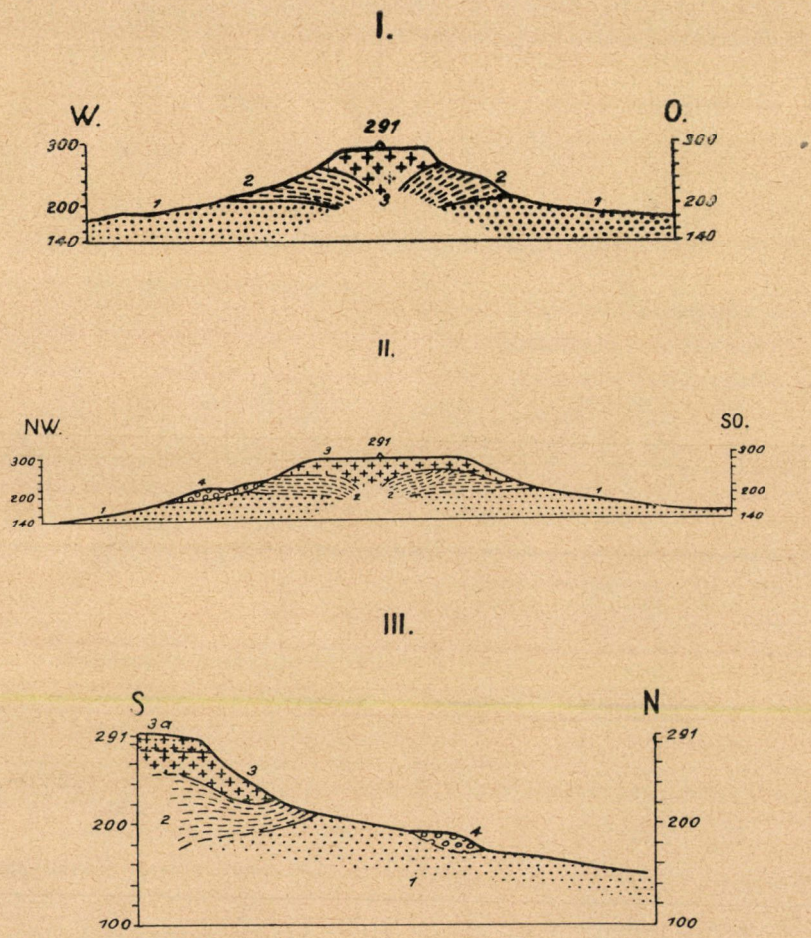
A Sághegy lankás D—DK-i lejtőin, a pannoniai pontusi rétegeken, kisebb foltokban a lőszt is megtaláltam.

A térszín a mai Sághegy helyén és környékén, a vulkáni működés megindulásakor, kb. 200—210 m körül változó, hepehupás volt.

A vulkáni működésben négy kitörési fázis különböztethető meg, melyek egymásután a következő képződményeket hozták létre:

Első kitörés nagytömegű törmelékszórás volt, melyből a Sághegy tekintélyes vastag bazalttufa rétegei keletkeztek.

Második kitörés bőséges lávafolyás volt, mely a Sághegy bazaltjának főtömegét szolgáltatta.



1. homok-agyag (Pontusi)
2. Bazalttufa
3. Alsó bazalt[1]
3a. Felső bazalt és dolerit
4. Bazaltomlás

Alapméret: 1 : 12.500.

2. ábra.

[1] Az I. és II. szelvényben az egész bazalttömeget jelöli.

Harmadik kitörés az előbbinél kisebb tömegű lávafolyás, melynek megmerevedéséből a felső (kokkolitos) bazaltréteg keletkezett.

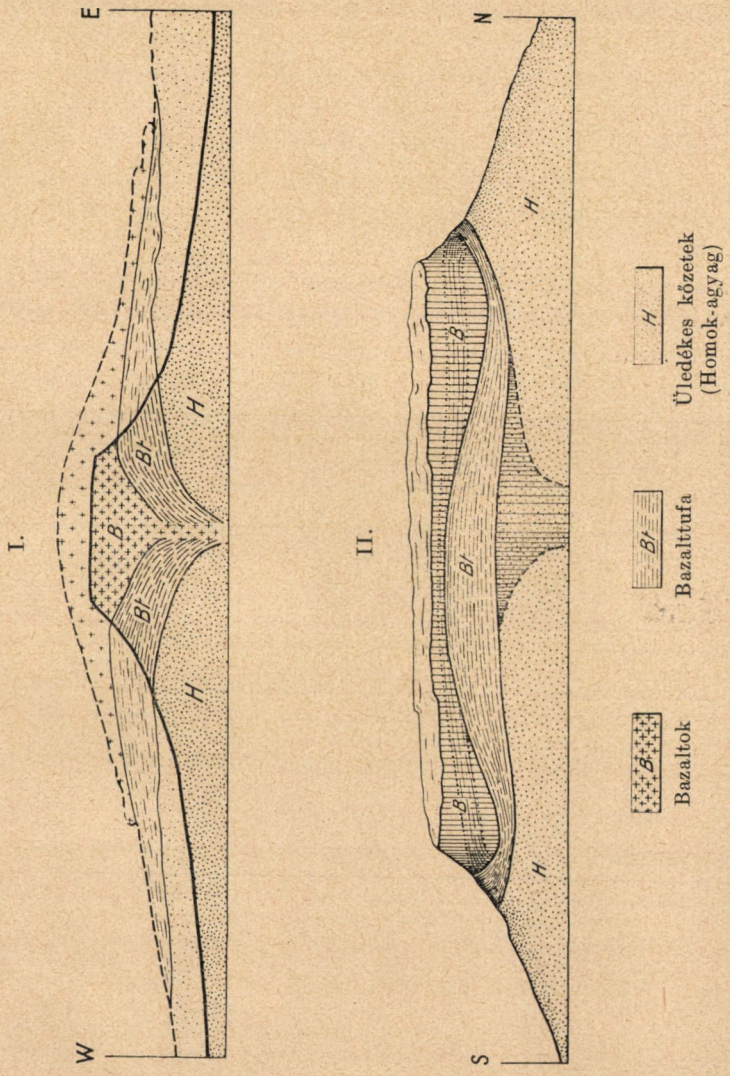
A negyedik kitörés anyaga nem jutott a felszínre, mert a magma a felső bazalt üregeibe, hasadékaiba nyomult és ott mint nagyszemű dolerit merevedett meg.

A vulkáni kitörések által létrehozott morfológiai viszonyokat a kőbányaüzem feltárásaiban tekinthetjük át. Napjainkban a Sághegy keleti és déli oldala van feltárva és lebontva, míg a többi része érintetlen, fűvel, bozóttal benőtt meredek lejtő, melyeken csak néhány kiálló bazalt- és bazalttufaszikla jelzi a kétféle kőzet elterjedését.

A mérések bizonyítják, hogy a bazalttufarétegek a Sághegy keleti és nyugati oldalán érték el a legmagasabb, 260—250 m t. sz. f.-i magasságot. Tekintve, hogy a törmelékszórás 200—210 m magas felszínen kezdődött, megállapíthatjuk, hogy a vulkáni működés igen nagy törmeléktömegeket hozott felszínre. A kitörés hevességét viszont a bazalttufa anyagának változatossága árulja el.

A bányafeltárások igen jó áttekintést adnak a törmelékszórás irányáról és az egykori kráter körüli elhelyezkedéséről is. Megállapítható, hogy a törmeléktömegek, az egykori kráter körül, elliptikus alakú, hatalmas tölcsérszerű medencét formáltak, majdnem észak-déli irányú hossztengellyel. Ennek a centrális tufatölcsérnek rétegei a hegy keleti oldalán, két helyen is, kihajoltak és két kisebb, ugyancsak medenceszerű mélyedést formáltak, melyek a központi medencével szervesen összefüggnek. Valószínű, hogy e két kisebb tufamedencét a törmelékszórás alkalmával a törmeléknek, talán a szél által is irányított szóródása, illetve változó lerakódása hozta létre. A tufamedencék környékén a rétegekben törés nincs, tehát azok képződése sem a rétegek elmozdulásának, sem pedig a későbbi erózió ilyen irányú munkájának nem tekinthető.

A törmelékszórást követő lávafolyások ezeket a kisebb tufamedencéket is kitöltötték, úgy hogy azok csak a kőbányászat előrehaladása nyomán tárultak fel. Megemlítem, hogy a medencékben található bazaltot már kitermelték és azokban, különösen a délkeleti medencében a Sághegy legjobb kőzetanyagát nyerték.


I.
E
W
H
Bt
B
Bt
H
II.
N
S
H
B
Bt
B
H
Bazaltok
Bt
Bazalttufa
H
Üledékes kőzetek
(Homok-agyag)

3. ábra.

A két tufamedencéről megfigyelésem és mérésem alapján a következőket közlöm.

A nagyobbik tufamedence a hegy északkeleti oldalán mélyül és a tufarétegek a medence fenekén 222 m-es t. sz. feletti magasságot árulnak el, ami azt bizonyítja, hogy az egykori pontusi térszint 15—20 m vastagságon borították. A Sághegyen a bazalt legmélyebb szintjét éppen e tufamedence fenekén találjuk. E pontnál mélyebben, a hegy északi lejtőin nem szálban álló, hanem a tetőről lecsúszott bazalttömegek fordulnak elő.

A másik tufamedence a hegy délkeleti részén mélyül és rétegei a medence fenekén 230 m magasságot érnek el. A fentieknek megfelelően a Sághegy keleti felében a bazalttufa településében kétirányú dűlést állapíthatunk meg: a hegy É-i felében általában Ny—ÉNy-i dűlésűek, míg a hegy D-i felében DK—ÉK-i dűlést árulnak el, tehát a rétegződés a keleti oldalban antiklinális szerű felemelkedést mutat, mely a felső bányaszintekben felállított «Trianoni kereszt» alapzatában kulminál. A bazalttufának ezt az elhelyezkedését a 3. ábra II. sz. közölt vázlatos tömbszelvénye demonstrálja. A két tufamedencét felépítő tufarétegek nemcsak településük, hanem anyagukra nézve is némi különbséget árulnak el.

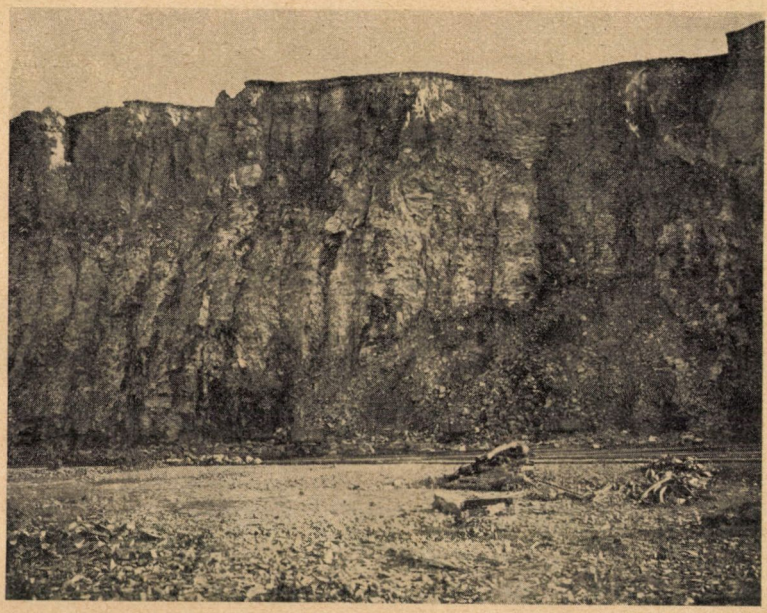
A DK-i medencét felépítő tufarétegek nyugodt településűek, anyaguk erősen homokos és agyagzárványokkal van tele. Az ÉK-i medence tufarétegei erősen változó, hullámos településűek. Ez a tufa anyagára nézve is különbözik az előbbiektől, túlnyomóan vulkáni törmelékből áll, lávától erősen átitatott szívós, porózus kőzetanyaga helyenként elveszti rétegzettségét, tömeges lesz. A hegy belsejében — a gyanítható kráter irányában feltárt tufatömegekben mind gyakoribbak lesznek a méteres átmérőjű, esetleg nagyobb lávafoszlányok és bombák.

A Sághegy Ny-i felén tekintélyes vastagságban észlelhető bazalttufarétegek — amennyire a mai feltárási viszonyok látni engedik — nyugodtabbak és igen lankásan dűlnek a hegy centruma felé.

A törmelékszórás a Sághegyen valószínűleg nem volt folytonos, abban megszakítások lehettek, amit a 5. sz. fényképen bemutatott diszkordáncia is tanusít. Ez a fénykép a III. sz. kőfejtőből, a törő-

höz vezető hatalmas siklóbevágás felső, a «Trianoni kereszt» alatti részét ábrázolja.

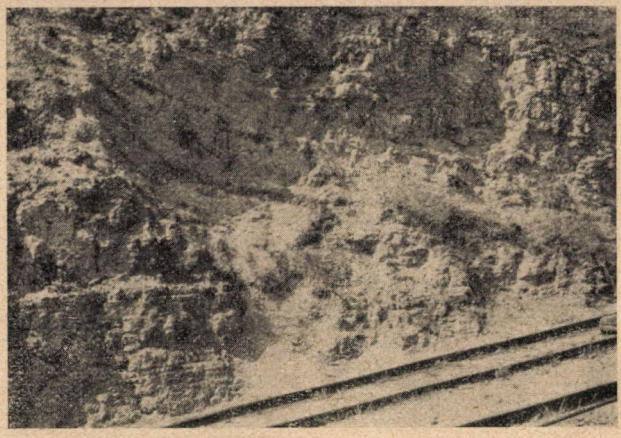
A vulkáni működésben a törmelékszórást lávafolyások követték, melyek között három, egymásutáni kitörést lehet megkülönböztetni.



4. ábra. *A III. számú (felső) kőfejtő képe.* A Sághegy K—ÉK-i oldalának felső részét tárja fel. Az alsó réteges nagyobb tömegű kőzet, az «alsó-bazalt», melyet a föléje települt nem réteges, ú. n. «kokkolitos» bazalttól, (mely a dolerittelereket tartalmazza), vékony lávaréteg választ el.

Az első lávakitörés a leghatalmasabb, igen nagy tömegű lávát szolgáltatott, mert a belőle keletkezett bazalttömeg sokkal nagyobb, mint az utána következő két kitörésé. Az első kitörés anyaga, az «alsó bazalt», majdnem mindenütt réteges (pados) elválású kőzet, csak helyenként mutatott rövid, szabálytalan, néha oszlopszerű tömeget. Az alsó bazalt összvastagsága méréseim szerint 20—55 m között változik. Az erős vastagságbeli ingadozásnak az oka, hogy a kifolyt láva a tufafelszín minden egyenetlenségét kitöltötte.

A következő (második) lávakitörés az előzőnél sokkal kevesebb lávát juttatott a felszínre, a megmerevedéséből keletkezett bazalttömeg eredeti vastagságára nézve adatunk nincsen. Mai erősen lepusztult rétegének vastagsága átlag 10—15 m között változik. Ezt a kőzetet, «a felső bazaltot», az alsó réteges bazalttól megkülönbözteti az, hogy mindig szabálytalan, nagy, néha méteres átmérőjű tömböket formál. A hegy északkeleti részén ezek a tömbök több méter átmérőjű szabálytalan, oszlopszerű és a balatonvidéki



5. ábra. *Egymásra diszkordánsan települő bazalttufa-rétegek.* A III. sz. kőfejtőtől a kőtörőhöz vezető siklóbevágás falának egy részlete. A «Trianoni-kereszt» alatt.

bazalthegyek «kőzsák»-jaira emlékeztető tömegben különülnek el egymástól. Az alsó és felső bazaltrétegeket néha kb. 1 m vastag lávaréteg választja el. A 4. sz. fénykép a hegy keletifelét feltáró III. sz. kőfejtőt ábrázolja, ahol a két bazalttömegtelepülése és a közéjük begyűrődött lávaréteg is jól látható.

A harmadik és utolsó lávakitörés anyaga nem jutott a felszínre, hanem az előző lávafolyás már kihűlt bazalttömegének kontrakciós hasadékaiba, üregeibe nyomult és ott mint kristályosszemcsés szövetű kőzet [dolerit] merevedett meg.

Ezzel a nagyszemű dolerites teléreket szolgáltató kitöréssel a sághegyi vulkáni működés be is fejeződött. Az építés munkáját

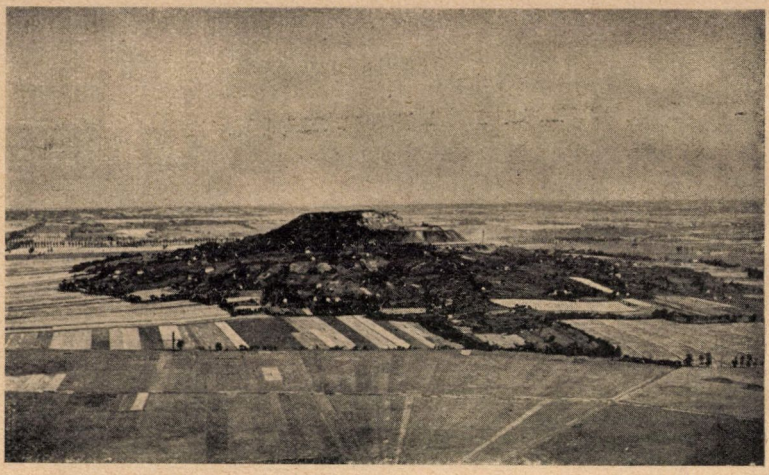
a pusztulás váltotta fel, mely az egykori vulkáni kúpot minden irányban koptatta és pusztította, amint azt a 3. ábra I. sz. rajzában mutatom be. A természet pusztító munkáját az ősember folytatta, aki a hegy tetejét lakóhelyül választotta és azt sík területté alakította. Később történelmi időszakokban a Sághegy már nem szolgált állandó emberi lakóhelyül, lankásabb oldalán mezőgazdasági, főleg szőlőkultúra fejlődött ki. A hegynek ezt az érintetlen alakját a mult század 80—90-es éveiben készült fénykép mutatja. [1. sz. fénykép.] Körülbelül az 1911. év táján meginduló Sághegyi Bazaltbánya R.-T. üzeme a hegy felső kúpját lassan elhordja és mai, megváltozott alakját a 7. számú légifénykép ábrázolja.

6. ábra. *A Sághegy képe* — északkeleti irányból nézve — a bazaltbányászat kezdete előtt (az 1890-es években készült fénykép.)

A Sághegyet felépítő üledékes és vulkáni eredetű képződmények elterjedését a mellékelt 1 : 19200 méretű geológiai térképen közlöm (1. ábra). A vulkáni kőzeteknek egymáshoz, valamint a pannoniai-pontusi korú üledékekhez való viszonyát és helyzetét három geológiai szelvényben rögzítettem meg (2. sz. ábra). A szelvények iránya a geológiai térképen jelölve van. Tekintettel arra, hogy a kőbányaüzem a Sághegyen igen kedvező feltárási viszonyokat teremtett, a geológiai szelvényekben azokat az irányokat, melyeket pontosan mérhettem, folytonos vonallal húztam ki, míg a szaggatott vonalak azokat a kőzethatárokat jelzik, melyeknél csak következtettem a különböző képződmények települését.

Többéves vizsgálataim alapján a Sághegy eróziójára, pusztulására nézve sok érdekes megfigyelésem van, melyekből az egykori, a mainál jóval nagyobb tömegű és kiterjedésű vulkán morfológiai viszonyaira következtethetünk.

Megállapítható, hogy az egykori vulkáni kúp magassága idők folyamán a környező térszín folytonos mélyülése következtében relative növekedett.



7. ábra. *A Sághegy képe* — délnyugatról nézve — az 1929. évből. (A m. kir. Állami Térképészeti Intézet légifelvétele.)

A laza alapzat pusztulásával meredekké vált lejtőkön azonban a súlyos vulkáni kőzetek is leszakadoztak és lecsúsztak, tehát maga a vulkáni kúp is kisebbedett. Hasonló változások a jelenben is megfigyelhetők.

Megállapítottam, hogy a Sághegy az északi részén pusztult a legnagyobb mértékben, mert ebben az oldalban, kb. 170—200 m magasságban, már az üledékes rétegek szintjében, találjuk a legtöbb bazaltsuvadást. A tetőről lecsúszott bazalttömegek több különálló kis dombot, vagy karéjszerű kiemelkedést alkotnak. Összesen öt nagyobb bazalt- és egy bazalttufaomlást találtam és jelöltem meg a geológiai térképen, de a szőlők között még több kisebb omlás is van. A legnagyobb omlás a hegy északnyugati

oldalán, Felsőmesteri falu irányában található, melyben id. Lóczy Lajos kisebb oldalkráter létezését gyanította és 1915-ben megjelent dolgozatomban (9) én is annak jeleztem. Azóta végzett részletesebb megfigyeléseim és különösen az újabb feltárások alapján bebizonyosodott, hogy ez is csak bazaltomlás. Az utóbbi évek súlyos gazdasági viszonyai következtében ugyanis a tulajdonosok egymásután tárták fel ezeket a kis omlásokat, anyagukat kitermelték és mint zúzottkövet eladták. A megbontott vagy kitermelt dombok bazaltanyagáról könnyű volt megállapítani, hogy azok nem szálban álló, hanem lecsúszott bazalttömegek. Érdekes, hogy ezeknek az omlásoknak anyaga mindig az alsó bazaltból való. Az egyik keleti omlás anyaga pedig teljesen bazalttufából áll.

A sághegyi bazaltvulkán szerkezete, illetve pusztulására vonatkozólag, a lankás lejtőkön található bazaltomlásokon kívül még kőfejtő feltárások is érdekes adatokat szolgáltatnak, melyeket más alkalommal fogok ismertetni.

A Sághegyet felépítő kőzetek elterjedését, települési viszonyait, tömegeik arányát a 3. ábra II. számú vázlatos tömbszelvényében próbáltam bemutatni.

M. Kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gazdasággeológiai Intézete.

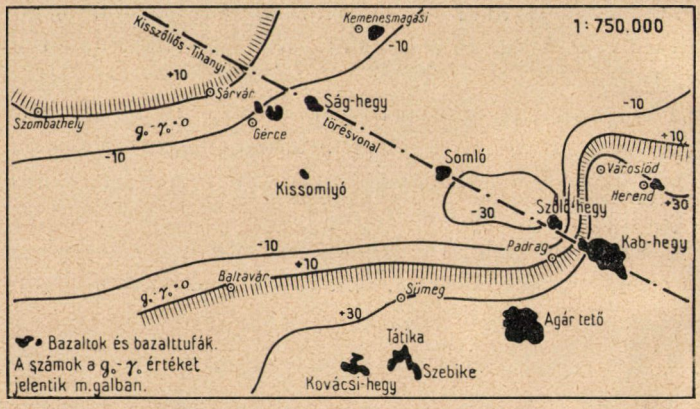
Budapest, 1937. április havában.

Sághegyen 1884-ben Sterneck Róbert eszközölt ingaméréseket és ezeket később a Balaton környékén is folytatta. 1891. év nyarán báró Eötvös Loránd munkatársaival ugyancsak a Sághegy platóján végzett torziós ingaméréseket. Mindezekből az ingamérésekből a Sághegy és távolabbi környékének geológiai viszonyaira nézve érdekes következtetéseket vonhatunk le. A geofizikai méréseket és értelmezésüket Fekete Jenő tanár úr, főbányatanácsos, a báró Eötvös Loránd geofizikai intézet vezetőjének irányítása mellett tanítványa, Erdélyi Fazekas János egyet. gyakornok volt szíves összeállítani.

GEOFIZIKAI FÜGGELÉK.

Összeállította: ERDÉLYI FAZEKAS JÁNOS.

STERNECK RÓBERT 1884. évben végzett a Sághegyen ingaméréseket (12). Báró EÖTVÖS LORÁND munkatársaival: TANGL KÁROLY, KÖVESLIGETHY RADÓ és BODOLA LAJOS urakkal 1891 nyarán szintén a Sághegy platóján eszközölt torziós ingaméréseket (13). Később 1901. évben STERNECK az ingaméréseket a Balaton



8. ábra. A Sághegy és távolabbi környékének ingamérései.

környékére is kiterjesztette (14). Mindezek a mérések megengedik, hogy a Sághegyre és távolabbi környékére «bizonyos mértékben» vázlatszerű geológiai következtetéseket vonhassunk le. A «bizonyos mérték»-et nyomatékkal kell hangsúlyozni, mert egyrészt az észlelési állomások száma kevés, másrészt báró EÖTVÖS LORÁND alább említett munkájában, (13) a STERNECK-féle ingaméréseket és a torziós

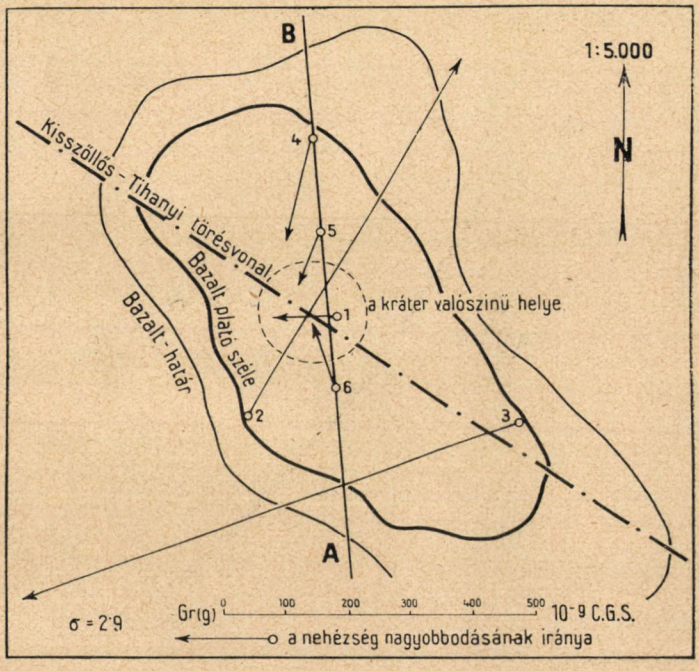
12. Mitteilungen des k. k. Militärgeographischen Instituts Bd. V. 1884.

13. Br. EÖTVÖS LORÁND: A nehézség és a mágneses erő nivófelületeinek és változásainak meghatározásáról. Math. és Fizikai Lapok. 1902. IX. kötet 376. old.

14. A Balaton Tudományos Tanulmányozásának Eredményei. Geofizikai rész. Budapest, 1908. I. kötet 1. rész.

inga adatai között eltérést állapít meg, ami a mérési eredmények interpretációjánál óvatosságra int.

A mérési módszereket illetőleg az idézett munkákra kell hivatkozni. Itt azonban meg kell említeni azt a lehetőséget, hogyha egy ingaállomás oly helyre van telepítve, ahol subterrán mélyrehatható szerkezeti fellazulás van, amely eset a STERNECK sághegyi



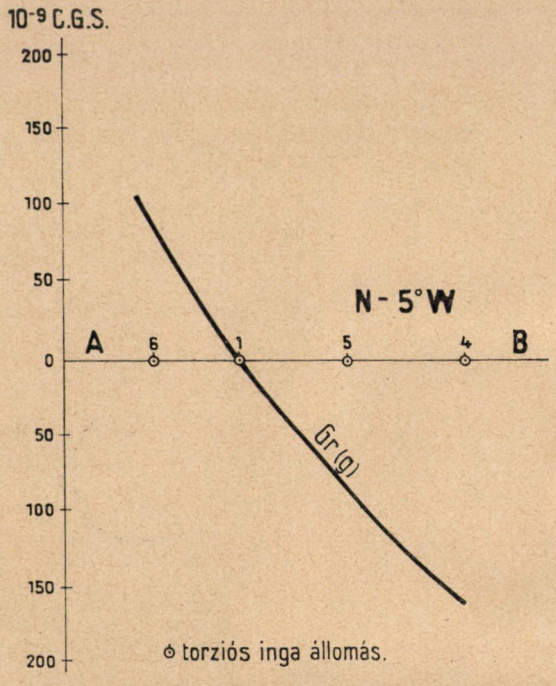
9. ábra. A sághegy tetején végzett torzios ingamérések.

platón elhelyezett ingaállomásánál is fennállhat, úgy igen könnyen ellentmondás állhat elő az inga és a torziós inga adatai között, aminek érthető magyarázata a két módszer különbözőségében van. A geológiai szerkezeti sajátságok variációja, tehát lényeges szerepet játszik és a térbeli gravitációt «speciálisan» módosíthatja. Előállhat az az eset, hogy míg ez a «speciális hatás» az egyik módszerben nem mutatkozik, a másikban pregnánsan megnyilvánul.

A fenti körülményeket figyelembe véve a mérések vázlatos

geológiai interpretációja az alábbiakban foglalható össze. Ezen interpretációs munkához számos igen becses adatot és értékes tanácsot kaptam FEKETE JENŐ tanár úrtól, a báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet vezetőjétől, kinek e helyről is hálás köszönetemet fejezem ki.

Sághegy vulkáni kúpja a normálisnál kisebb gravitációs mezőben fekszik (8. ábra) mely negatív karakterű területet két,



10. ábra. Grádiens görbe az A—B szelvény mentén.

ÉK—DNy csapásirányú, normálisnál nagyobb gravitációs vonal fog közre. A Sághegy maga a nyugati, pozitív karakterű terület peremához közel azon a ponton helyezkedik el, mely találkozója az ÉK—DNy pozitív peremiránynak és erre merőlegesen haladó, geológiailag is megfigyelt Kisszőlős—Tihany-i szeizmotektonikai vonalnak. (A Sághegy bazaltkúpja ebben az irányban megnyúlt.) A pozitív és negatív karakterű gravitációs mezőny úgy értelmezendő, mint két subterrán geoantiklinális közé fogott subterrán

geosynklinális, mely süllyedő jellegű. Ezen süllyedési határsík és a már említett Kisszőlős—Tihany-i szeizmotektonikai vonal találkozópontján játszódik le a sághegyi vulkánizmus, a bazaltot tehát mélyreható szerkezeti felszakadás hozza felszínre. A pozitív és negatív karakterű terület közti normális zóna kompenzált átmeneti övnek tekintendő.

A Kisszőlős—Tihany-i tektonikus vonal mélyszerkezeti és regionális karakterű, amit Szentes Ferenc egyet. tanársegéd geotektonikai vizsgálatai is igazolnak, kinek közlése szerint ezen a területen a variskum orogén csapásirányára merőlegesen, egy ÉNy—DK irányú törésvonal van. Ezen tektonikus vonal egyik részlete az említett Kisszőlős—Tihany-i irány, az erre merőleges csapásirányú, pozitív karakterű subterrán geoantiklinálisok valószínűleg idősebb képződményeket reprezentálnak. Ezeket a megállapításokat az 8. sz. ábra szemlélteti.

Eötvös báró és munkatársai a Sághegy bazaltplatóján hat állomáson végeztek torziós ingaméréseket (9. ábra), melyeknek eredményei valamelyest a vulkáni kráter helyének kikutatását is lehetővé teszik. A 10. ábra szerint A—B szelvénymenti gradienskörbe azon pontja, ahol az értékek leesnek a kráter körülbelüli helyét jelöli. A platószélén kapott nagy gradiens értékek a morfológia okozta háttértömeghiány és a frontális rész nagy sűrűségű bazalttömegeivel magyarázhatók. A plató közepén ez a hatás már kompenzálódik.

Irodalom.

1. Beudant: Voyage mineralogique et geologique en Hongrie pendant l'année 1818. Paris 1822. t. II. Chap. XVII et XVIII et t. III. Chap. VI.

2. Fuchs, Th: Beiträge zur Kenntnis fossiler Binnenfaunen. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt, 1870. Bd. 20. V. H.

3. Inkey Béla: Két magyarhoni doleritről. Földtani Közlöny. VIII. kötet, 1878. 223. lap.

4. Hofmann Károly: A Déli-Bakony bazaltkőzetei. Magyar kir. Földtani Intézet évkönyve. Budapest, 1875/78. 428. l.

5. Böckh János: A Bakony déli részének földtani viszonyai. M. kir. Földtani Intézet évkönyve. III. kötet, 1879.

6. Vitalis István: Adatok a Balaton-felvidék bazaltos kőzeteinek ismeretéhez. Földtani Közlöny. XXXIV. 1904. 377—399.

7. VITÁLIS ISTVÁN: A balatonvidéki bazaltok. Budapest, 1909. 47. l.

8. ID. LÓCZY LAJOS: A Balaton környékének geológiai képződményei. Budapest, 1913.

9. JUGOVICS LAJOS: Az Alpok keleti végződése alján és a vasvármegyei Kis Magyar Alföldön felbukkanó bazaltok és bazalttufák. A m. kir. Földtani Int. évi jelentése 1915. 63—66. oldal.

10. FERENCZI ISTVÁN: Geomorfológiai tanulmányok a Kis Magyar Alföld déli öblében. Földtani Közlöny, 1924. LIV. kötet. 17—38. oldal.

11. JUGOVICS LAJOS: Cordierit-tartalmú zárványok a sághegyi bazaltban. Mat. és Természettud. Értesítő. LI. kötet. 1934. p 472—493.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1934. április 23-án tartott üléséből.)

DER AUFBAU UND DIE VULKANOLOGISCHEN VERHÄLTNISSE DES SÁGBERGES.

Von L. JUGOVICS.

Der im südlichen Teile der Kleinen Ungarischen Tiefebene, im Eisenburger Komitat sich erhebende, flachgipflige, stumpfkegelförmige Ságberg (291 m) erhebt sich plötzlich aus der durchschnittlich 130—140 m. ü. M. Ebene. Zwischen der doppelten Stumpfkegelform und dem Aufbau ist ein enger Zusamenhang fest zustellen, namentlich werden die unteren Böschungen aus losen Sedimentgesteinen, die oberen, steilen Böschungen aus Basalttuffen und Basalt aufgebaut.

Den unteren Teil des Berges bilden Sedimentgesteine: Sand, Sandiger-Kies, Schotter und Ton. In diesen war es unmöglich irgendwelche Fossilien zu finden. Das Alter der Sedimente ist daher nur auf Grund eines Vergleiches mit den umgebenden Schichten zu bestimmen. Die das Ságberg umgebende Ebene und Hügellandschaft, die sog. Kleine Ungarische Tiefebene, aufbauenden Schichten, abgesehen von dem an der Oberfläche zu findenden jüngeren Schotter, lagerten sich in dem pannonisch-pontischen Meere ab. Die Dicke dieser Schichten beträgt nach den neuesten Petroleum-Tiefbohrungen mehr als 1500 m. und die Oberfläche dürfte 250—270 m. heutiger Seehöhe erreicht haben.

In dem nach dem Verschwinden des pontischen Meeres herrschenden kontinentalen Wüstenklima wurden diese Sedimente stark abgetragen, so das sich die späteren vulkanischen Ereignisse in einer niedrigeren Hügellandschaft abspielten.

Die Basalte und Basalttuffen der im südlichen Teile der Kleinen Ungarischen Tiefebene tätigen Vulkane bedeckten und beschützen die losen Sedimentgesteine von der Abtragung, während die Zerstörung der Sedimente in der Umgebung in grossem Maßstabe fortschritt. Infolgedessen hebten sich die Basaltkuppen aus der umgebenden Landschaft heraus. Die Basaltkuppe des Ságberges beschützte auch die unter ihr liegenden losen Sedimentschichten von der Abtragung und das untere Niveau der Eruptivmasse bezeigt das Mass der Abtragung zur Zeit der Eruption. Auf Grund obigen sind die unteren Sedimentschichten des Ságberges ebenfalls Ablagerungen des pannonisch-pontischen Meeres.

In der vulkanischen Tätigkeit des Ságberges kann man vier Eruptionphasen erkennen:

1. Starke Streuung von lockerem Material, das mächtige Basalttuffschichten bildete.

2. Reichlicher Lavafluss, der die Hauptmenge des Ságberger Basaltes, den schichtigen unteren Basalt lieferte.

3. Geringere Lavaförderung. (Oberer Basalt.)

4. Grobkörniger Dolerit, der nicht an der Oberfläche, sondern in Hohlräumen und Klüften des oberen Basaltes erstarrte.

Die Pendelmessungen, die von Robert Sterneck im Jahre 1884 auf dem Plateau des Ságberges und später in 1901 auf der ferneren Umgebung ausgeführt waren, ermöglichen die regionalen Anomalien der Schwereverhältnisse des Gebietes skizzenhaftig darzustellen.

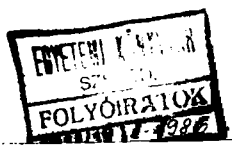
Die von Baron Roland von Eötvös auf dem Plateau des Ságberges im Jahre 1891 durchgeführten Drehwaagemessungen liefern ebenfalls wichtige Ergebnisse für die Erforschung der Lage des vulkanischen Kraters.

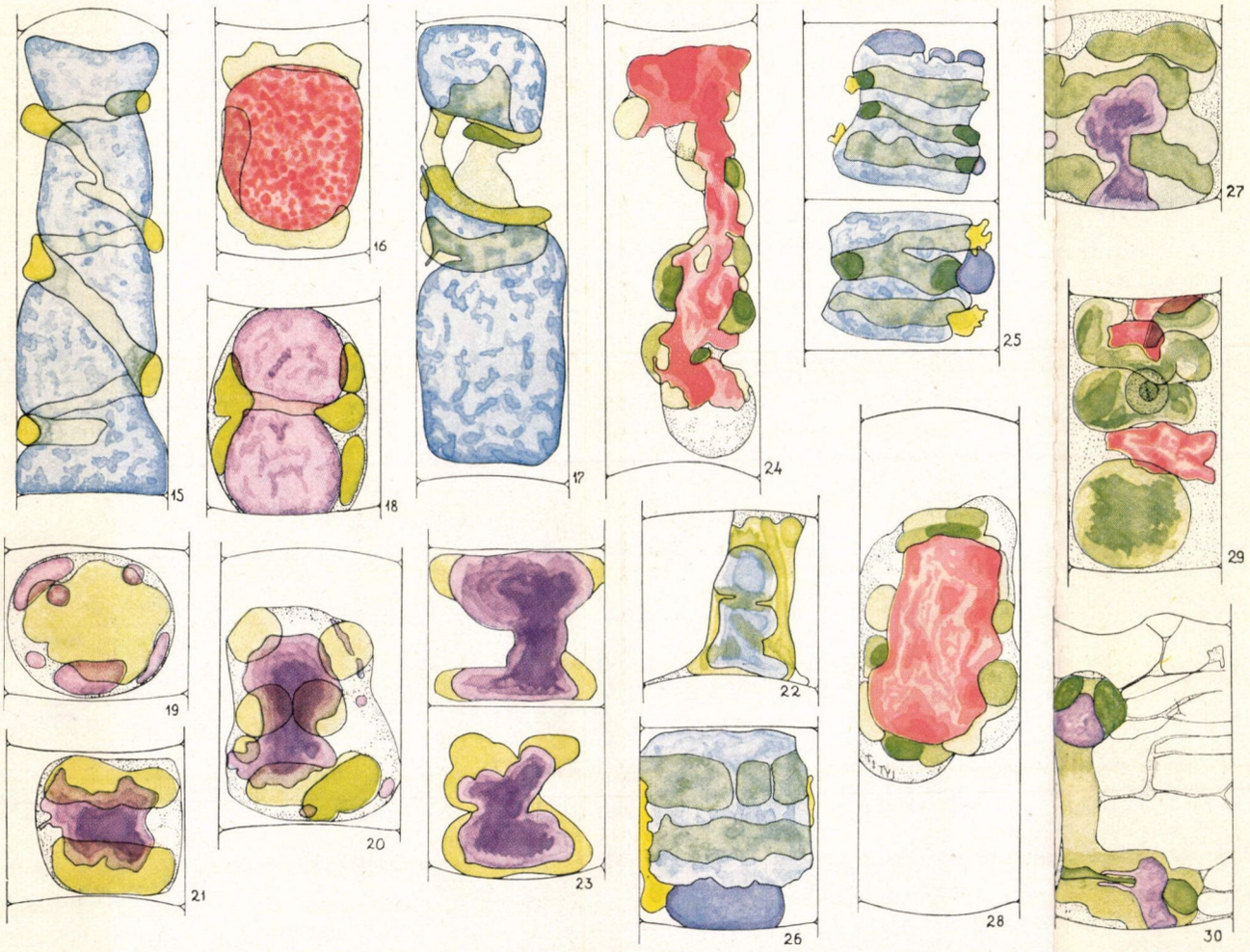
Das geophysikalische Bild verrät, dass der Kegelstutz des Ságberges auf dem Rand einer negativen Störungszone liegt, welche von zwei durch positive Schwerekraftsanomalien charakterisiertan Gebieten eingefasst wird. Dieses Gravitationsfeld ist durch mehrere Bruchlinien gekreuzt, von welchen die sogenannte Kisszőllős—Tihany seismotektonische Störungslinie bei dem Ausbruch des Ságerges die grösste Rolle spielte.

Das negative Störungsgebiet lässt sich als eine sinkende

Geosynklinale zwischen den variscischen Orogenen des tieferen Baues vorstellen. Die hier die tieferen Krustenteilen beeinflussenden Störungen hatten die grossen Basalteruptionen verursacht. Das Gravitationsbild der geophysikalischen Messungen gibt also den Nachweis des interessanten Zusammenhanges der tieferen Strukturen und Eruptionserscheinungen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 28. April 1934.)

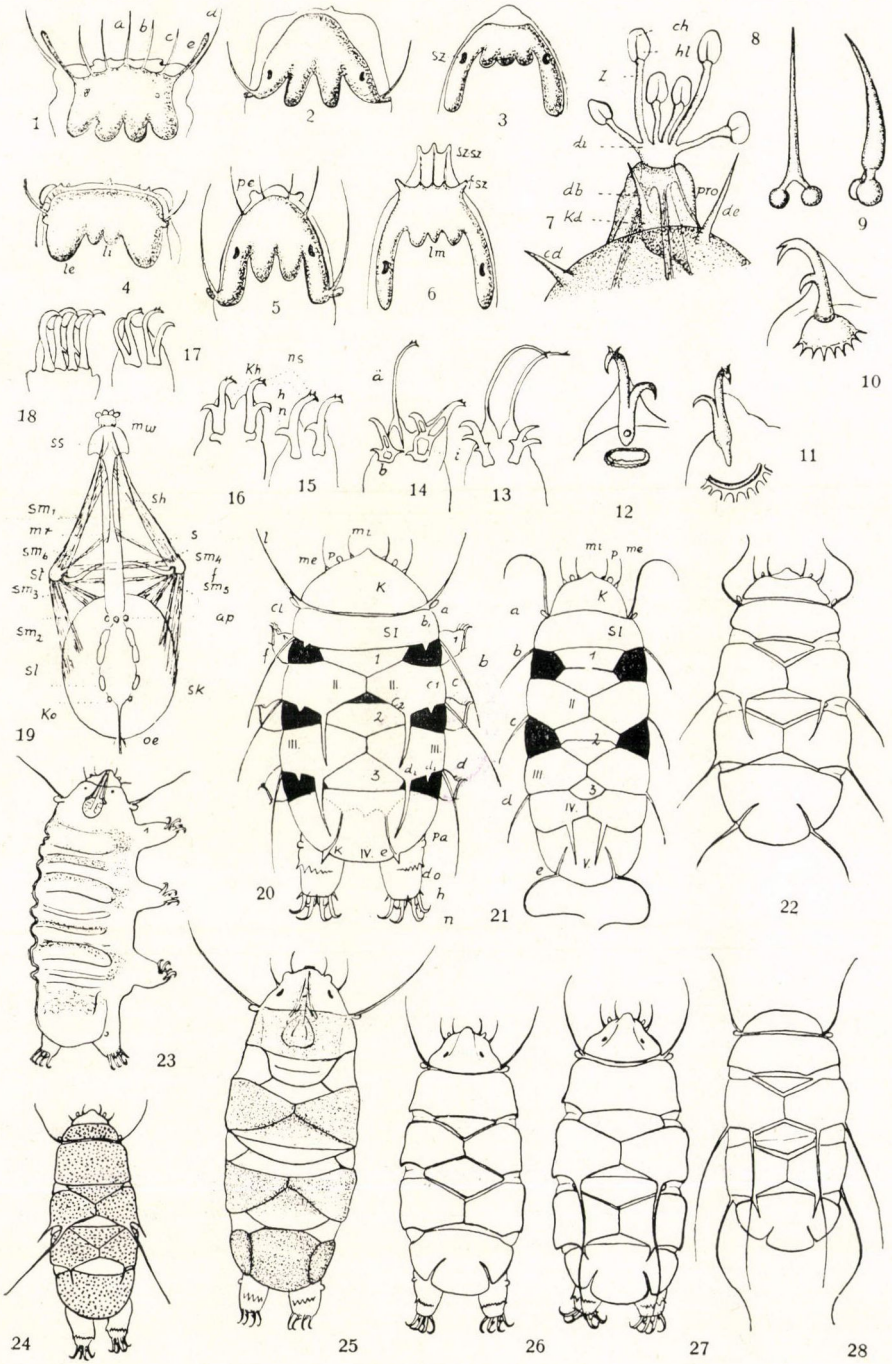




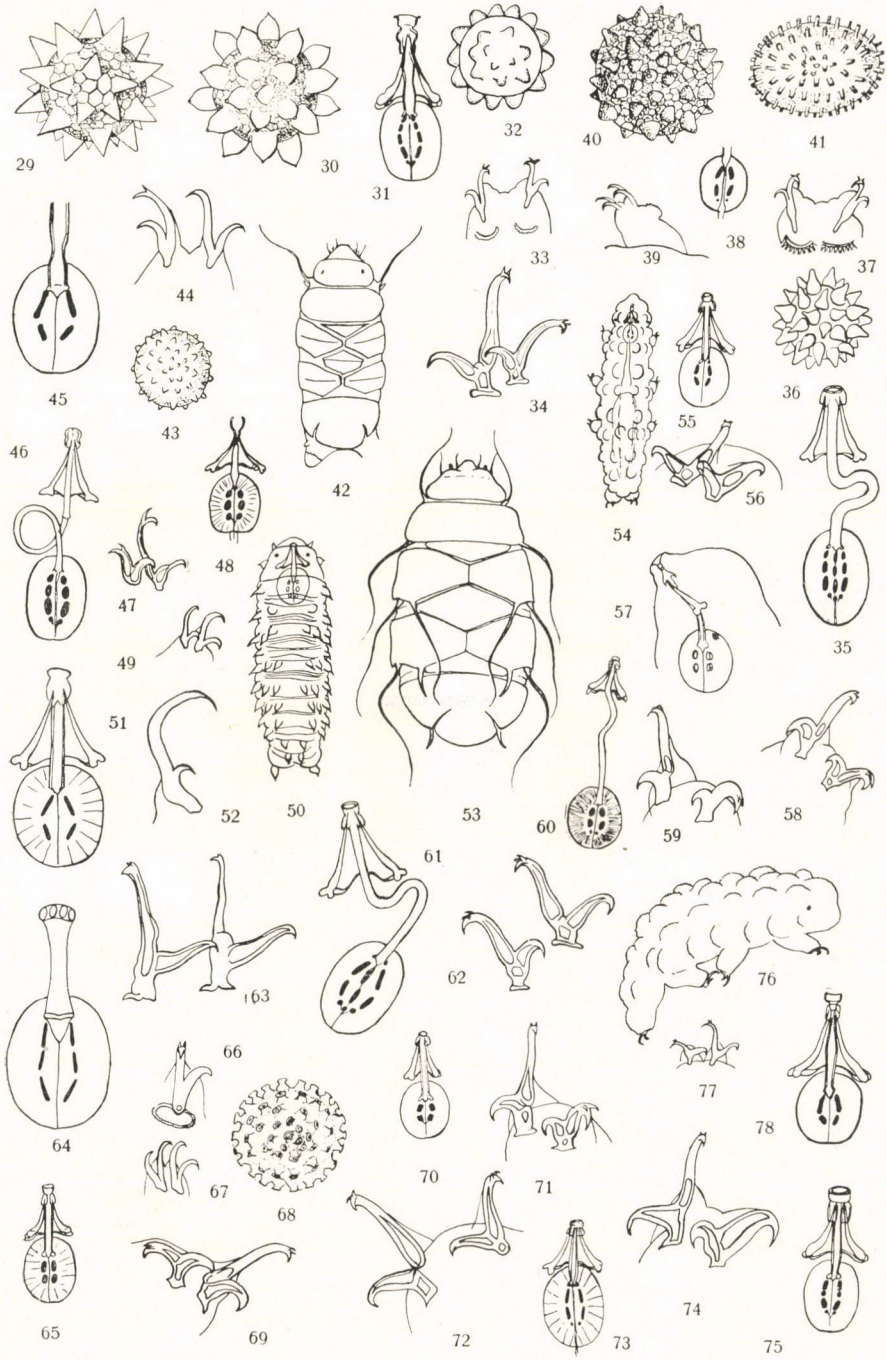
Zellen und Fadenstücke von *Spirogyra decimina* nach Lebendfärbung und Plasmolyse.

Abb. 15. Farbstoff: Methylenblau, Plasmolyse. — Abb. 16. Farbstoff: Safranin wasserlöslich, Plasmolyse. — Abb. 17. Farbstoff: Methylenblau, Plasmolyse. — Abb. 19, 20, 21, 23. Plasmolysen nach Behandlung mit Gentianaviolett. — Abb. 22. Plasmolyse nach Behandlung mit Methylenblau. — Abb. 24. Plasmolyse nach Behandlung mit wasserlöslichem Safranin. — Abb. 25 und 26. Plasmolysen nach Behandlung mit Methylenblau. — Abb. 27. Deplasmolyse nach Behandlung mit Gentianaviolett und Plasmolyse. — Abb. 28 und 29. Deplasmolysen nach Behandlung mit wasserlöslichem Safranin und Plasmolyse. — Abb. 30. Wiederholte Plasmolyse nach Behandlung mit Gentianaviolett, Plasmolyse und Deplasmolyse. — Vergr. überall 500/1.

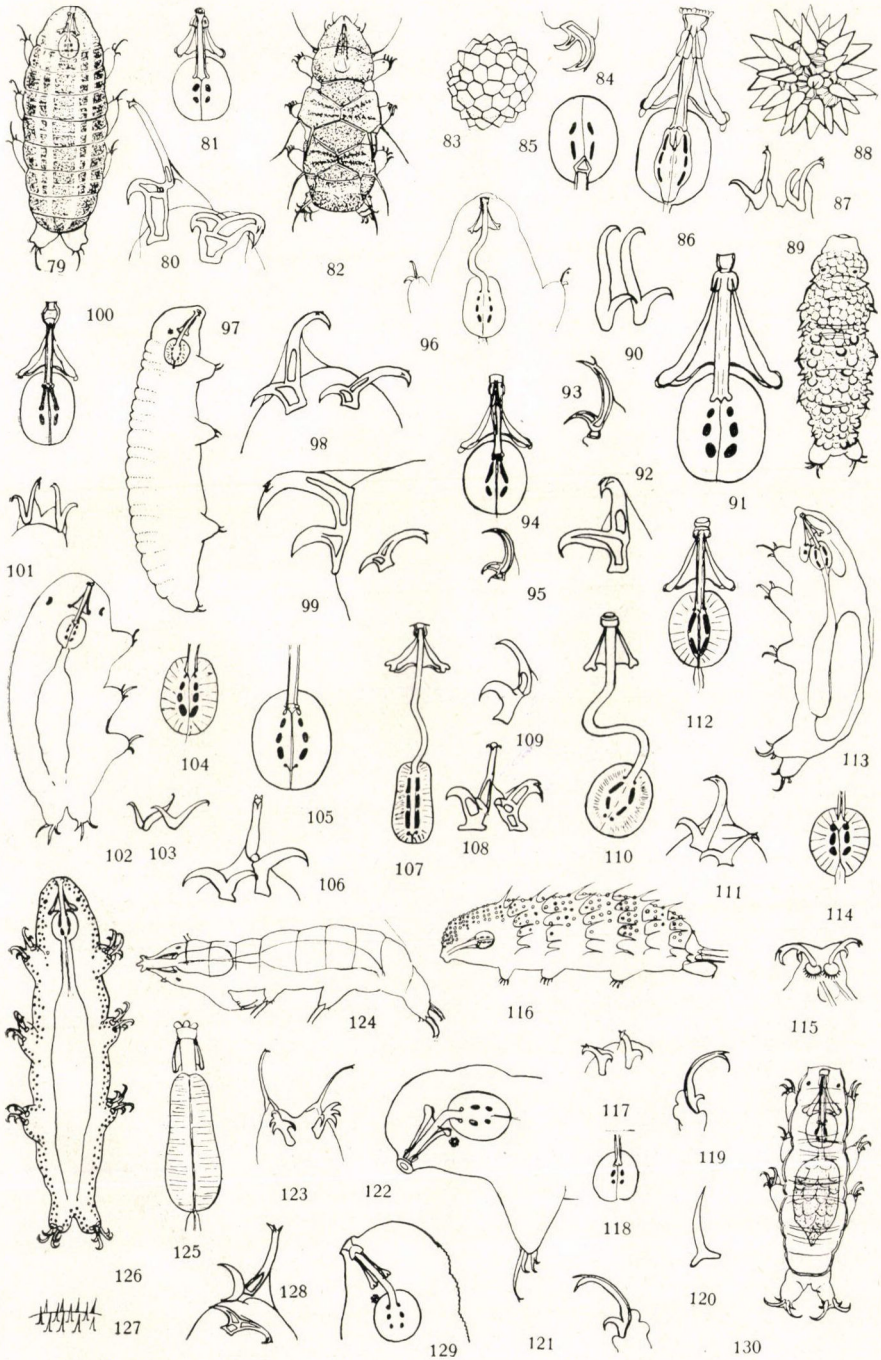
Iharos Alfonz:
A magyarországi medveállatocskák.



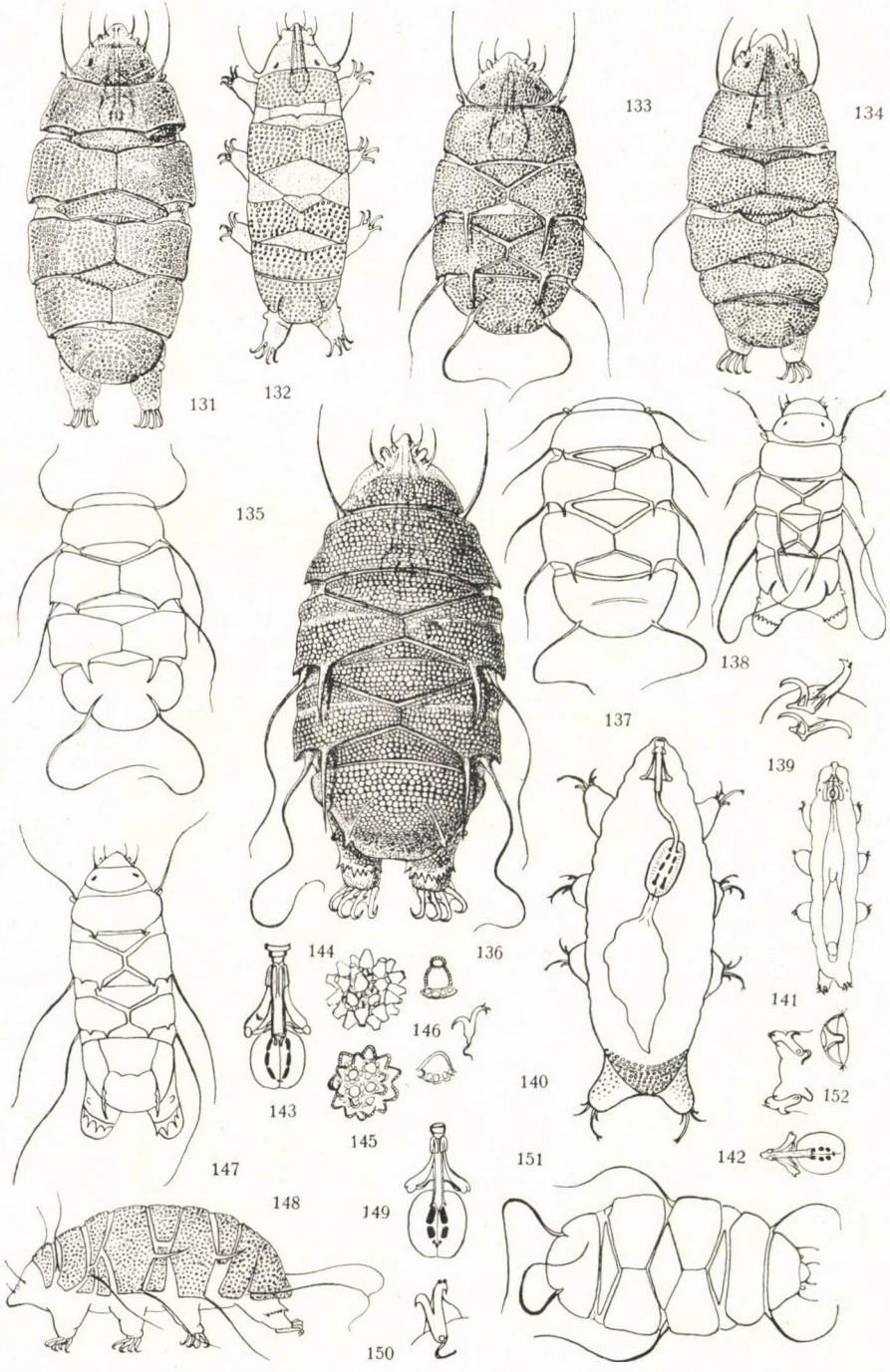
Iharos Alfonz:
A magyarországi medveállatocskák.

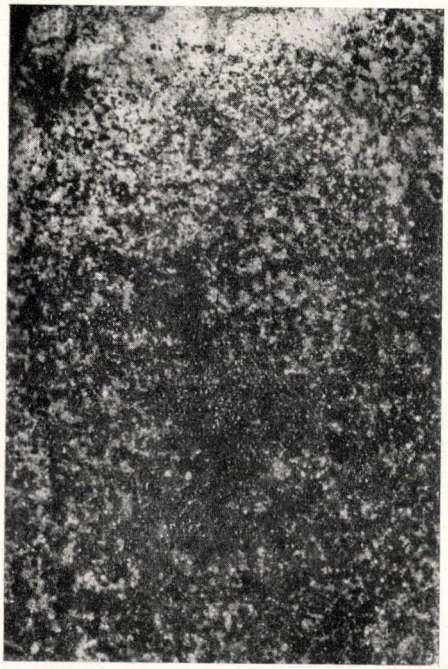


Iharos Alfonz:
A magyarországi medveállatocskák.



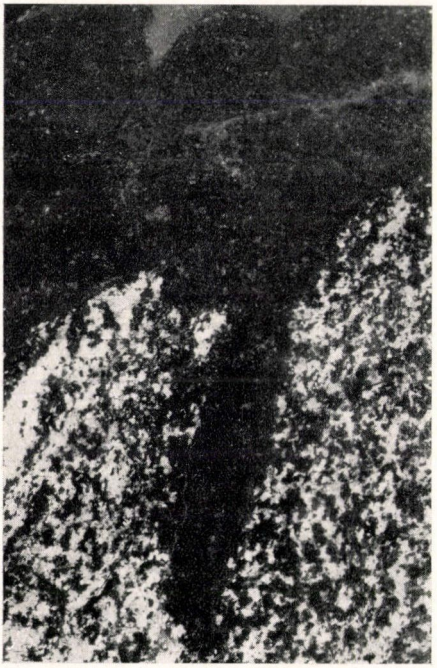
Iharos Alfonz:
A magyarországi medveállatocskák.



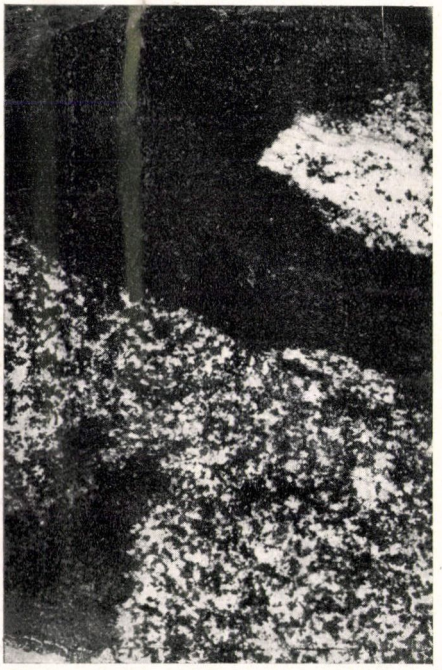


1.

2.



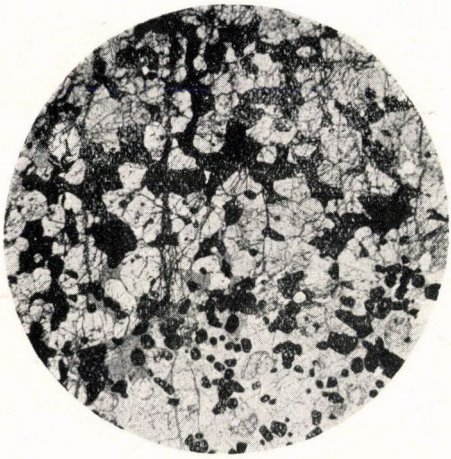
3.



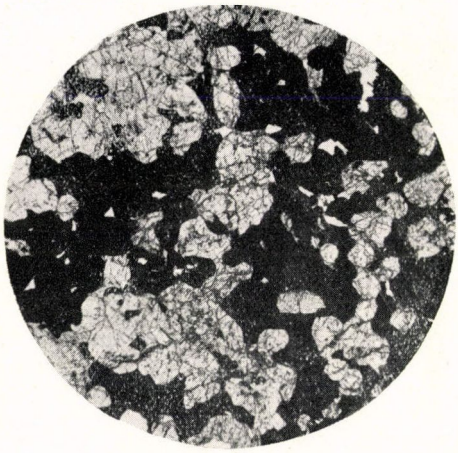
4.

Szentpétery Zsigmond:
Titánmagnetites kőzetek.

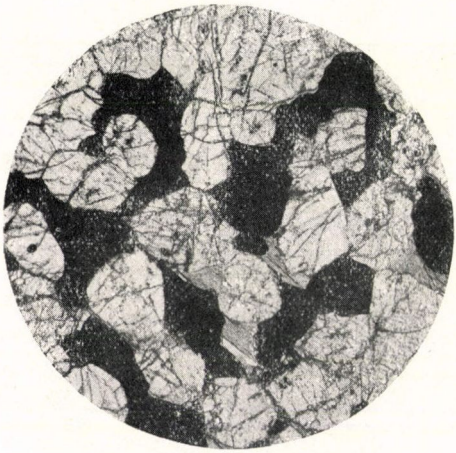
1.



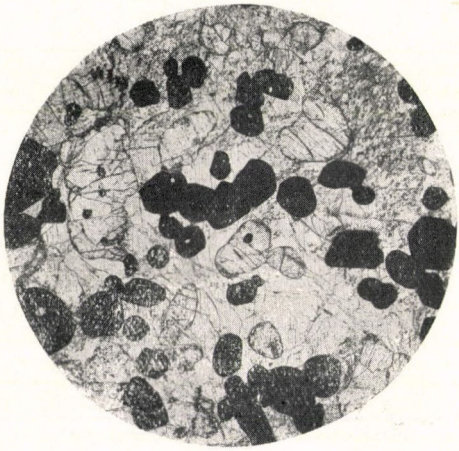
2.



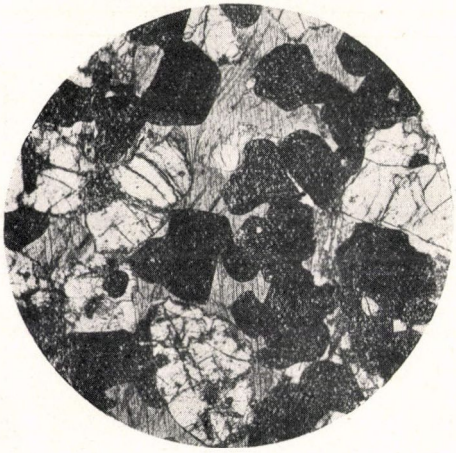
3.



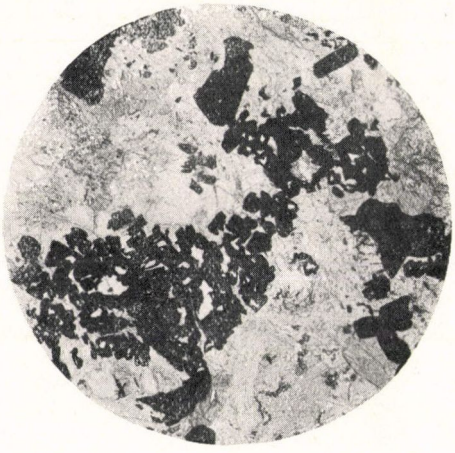
4.



5.

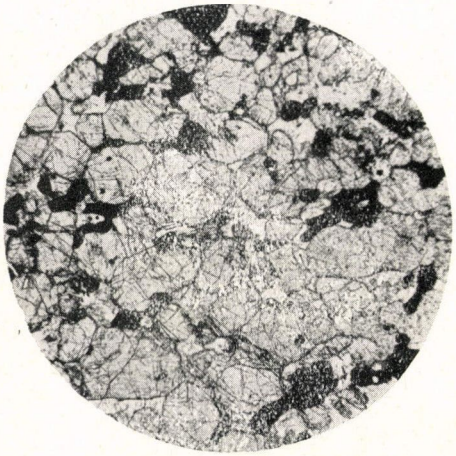


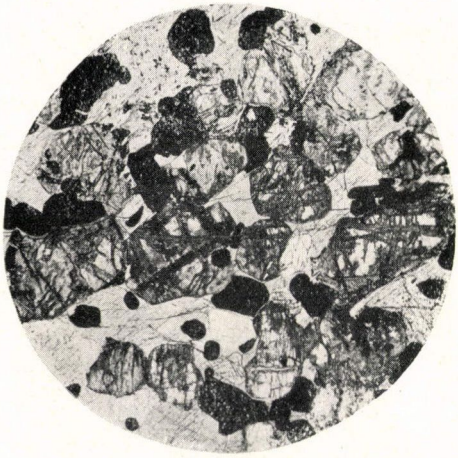
6.



Szentpétery Zsigmond:
Titánmagnetites kőzetek.

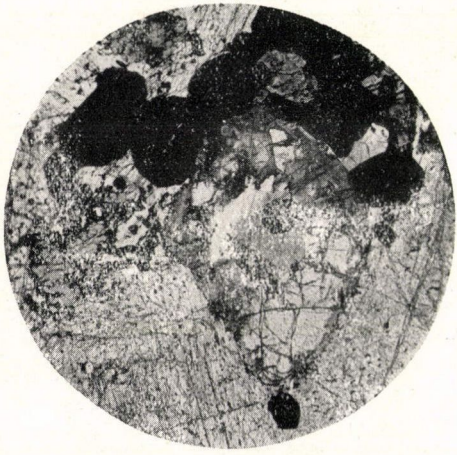
1.

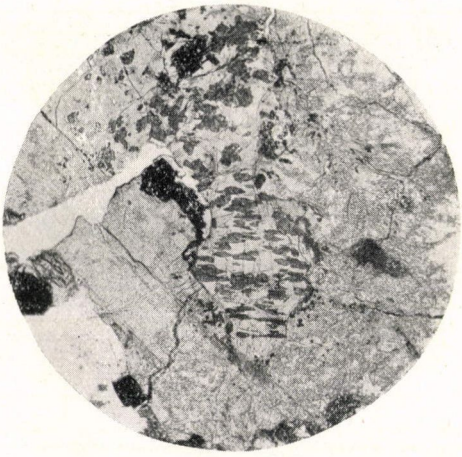




2.

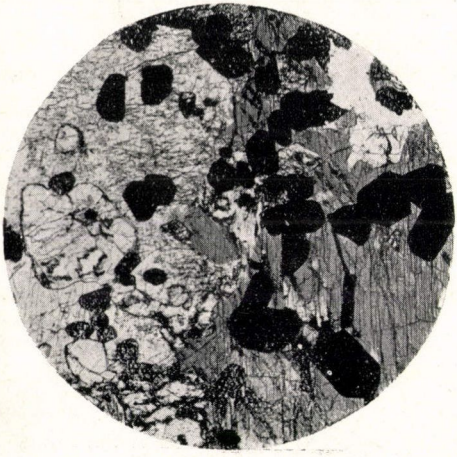
3.

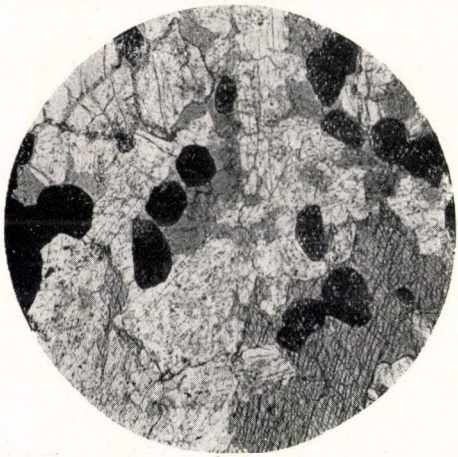




4.

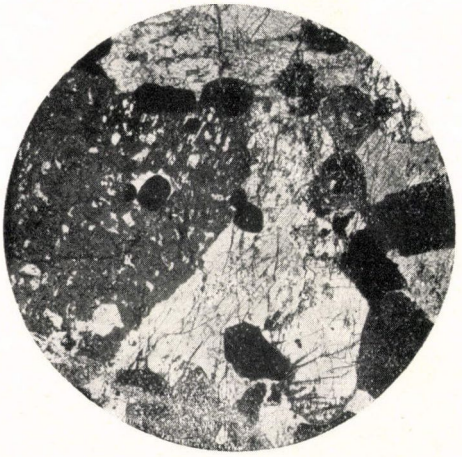
5.



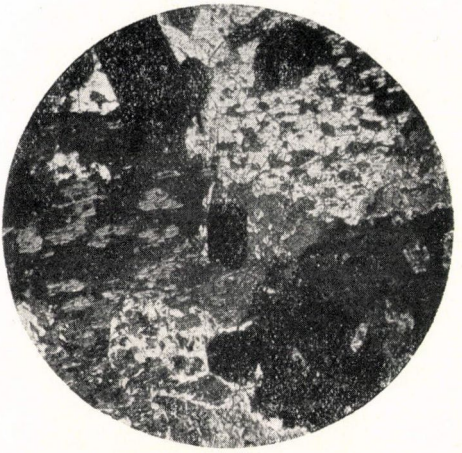


6.

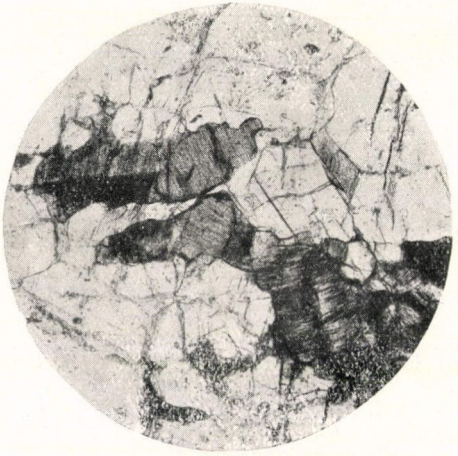
Szentpétery Zsigmond:
Titánmagnetites kőzetek.



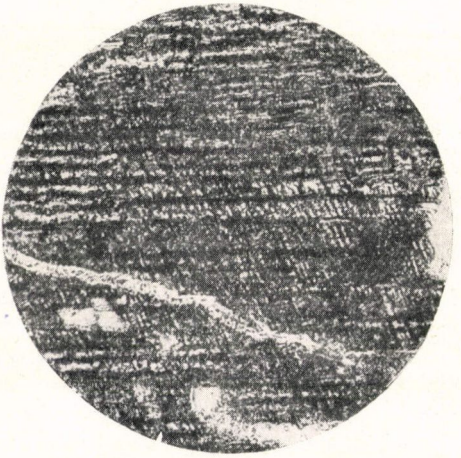
1.



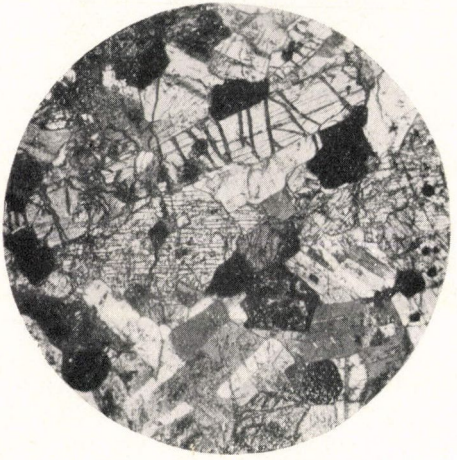
2



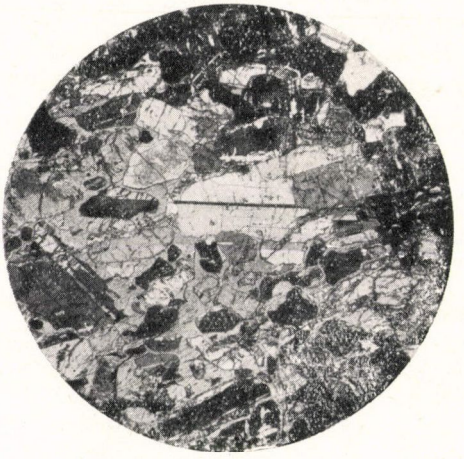
3.



4.



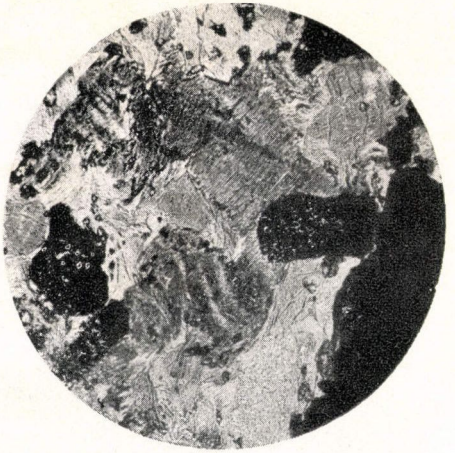
5.



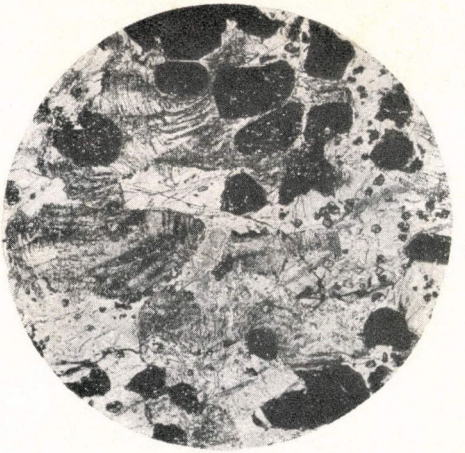
6.

SZEGED

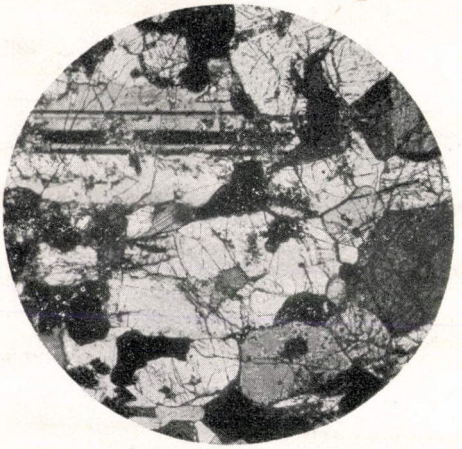
1.



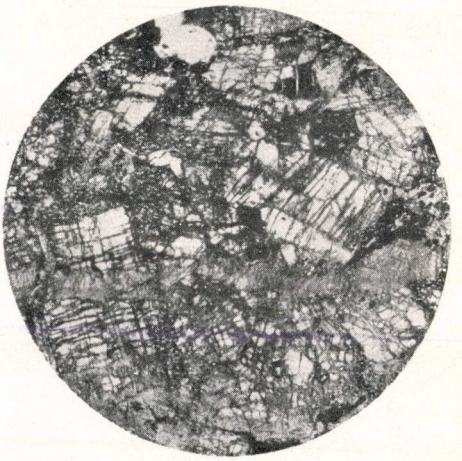
2.

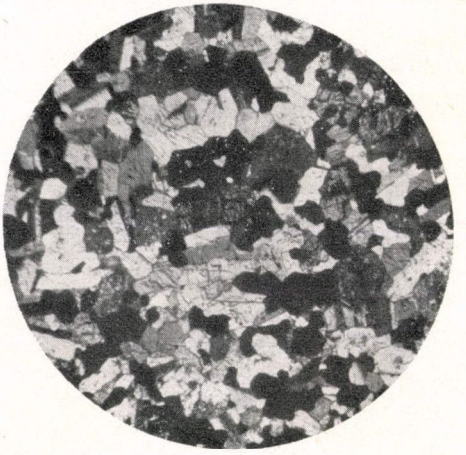


3.



4.



5.

6.