50639
K 3
EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

# MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LIV. KÖTET. — ELSŐ RÉSZ.

---

# MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LIV. — ERSTER TEIL.

---

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1936.

EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED FOLYÓIRATOK

# TARTALOMJEGYZÉK.


Lap

Fejér Lipót: A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtagúakról ..... 160—172

Finkey József: Újabb kísérleti adatok a hazai szenek brikettezésének kérdéséhez ..... 139—158

Földvári Aladár: Agyagok iszapolása ammoniumhidroxid-, nátriumoxalát- és nátriummetaszilikát-oldatban ..... 221—277

Földvári Aladár: lásd Vendl Aladár.

Pekár Dezső: Eötvös ingája a francia Limagne-ban..... 117—134

Rédei László: A $t^3—du^3=—1$ Pell-féle egyenletről ..... 1—42

Rédei László: Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben ..... 45—112

Szentpétery Zsigmond: A lillafüredi Szentistván-hegy eruptivumainak általános kőzettani viszonyai ..... 279—306

Takáts Tibor: lásd Vendl Aladár.

Vendl Aladár, Takáts Tibor és Földvári Aladár: Újabb adatok a Börzsönyi-hegység lőszének ismeretéhez ..... 177—206

Zemplén Géza: A rutin glükózid disaccharidjának, a «rutinóz»-nak szerkezete és szintézise ..... 208—219

# MATEMATIKAI
ÉS
# TERMÉSZETTUDOMÁNYI
# ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LIV. KÖTET.

---

# MATHEMATISCHER
UND
# NATURWISSENSCHAFTLICHER
# ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LIV.

---

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1936.

50C39

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

# TARTALOMJEGYZÉK.


| | Lap |
|---|---|
| Apor László: A homlokvarrat jelentőségéről | 908— 915 |
| Barta József: A csavarás problémájának újabb analógiája. | 496— 504 |
| Boros Ádám: Magyarországi hévizek felsőbbrendű növényzete | 588— 591 |
| P. Bozóky László: Újabb vizsgálatok az ionizált oxigénmolekula sávos színképén | 557— 585 |
| Budó Ágoston: A triplett molekulatermekről és a triplett sávok intenzitásáról | 387— 409 |
| Doby Géza: Kísérletek a talaj hasznos nitrogéntartalmának physiologiai-chemiai meghatározására | 831— 858 |
| Endrédy Endre: Chromsav- és bichromát-oldatokban uralkodó egyensúlyokról | 459— 494 |
| Fejér Lipót: A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtagúakról | 160— 172 |
| Finkey József: Újabb kísérleti adatok a hazai szenek brikettezésének kérdéséhez | 139— 158 |
| Finkey József: Előkészítési kísérletek úrkúti mangánércekkel | 860— 880 |
| Földvári Aladár: Agyagok iszapolása ammoniumhidroxid-, nátriumoxalát- és nátriummetaszilikát-oldatban | 221— 277 |
| Földvári Aladár: lásd Vendl Aladár. | |
| Frank Gábor, Patai Imre és Tomaschek Zoltán: Kolloidális szerkezetű grafitrétegek előállítása és vizsgálata | 417— 431 |
| Gelei József: IV. Adatok Szeged környékének ázalékállatka világához | 923— 946 |
| Haranghy László: Édesvízi kagylóink és a *Lythoglyphus naticoides* Fer., mint a szabad vizek öntisztulási képességének tényezői | 952— 974 |
| Konek Frigyes: A chinakémiában bevált parciális vagy differenciáló alkylezés kiterjesztése más biazótos alkaloidokra, mint hydrochininre, sparteinre, peganinra stb. . | 436— 450 |
| Konek Frigyes: Chinazolin típusú alkaloidok viselkedése a differenciáló methylezésnél | 452— 456 |
| Konek Frigyes: A chinidin és hydrochinidin jódmethylátjai | 821— 829 |

Lap

Kutassy Endre: Fődolomit és dachsteinmészkő faunák a Budai-hegységből ..... 1006—1044
Lipka István: Többtagúak irreducibilitásáról ..... 349— 355
Mócsy János: Az izomból kilépett myoglobin viselkedése és változásai a szervezetben ..... 899— 903
Sz. Nagy Béla: Izomorf függvényrendszerekről ..... 712— 734
Nagy Dezső: Kraniometriai vizsgálatok a honfoglaló magyarok lovain ..... 991—1003
Sz. Nagy Gyula: Érintőszingularitásnélküli és zéróindexű síkgörbékről ..... 358— 372
Sz. Nagy Gyula: Maximális indexű térgörbékről ..... 685— 709
Neugebauer Tibor: A kontrapolarizáció elmélete ..... 337— 338
Neugebauer Tibor: Két perturbáció superponálódása a Schrödinger-féle sajátfüggvény második közelítésében .... 805— 806
Patai Imre: lásd Frank Gábor.
Pekár Dezső: Eötvös ingája a francia Limagne-ban ..... 117— 134
Rados Gusztáv: Adjungált determinánsok rangszáma .... 309— 322
Rados Gusztáv: A Kronecker-féle determináns rangszáma.. 325— 335
Rados Gusztáv: Sylvester determinánstételének egy új bebizonyítása ..... 677— 682
Rédei László: A $t^2 - du^2 = -1$ Pell-féle egyenletről ..... 1— 42
Rédei László: Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben ..... 45— 112
Rédei László: Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nyolccal osztható invariánsaira ..... 736— 766
Schaffer Károly: Az átöröklődő szervi idegbántalmak kórszövettani meghatározása ..... 533— 555
Schmid Rezső: Vizsgálatok a szénatom kötőenergiájáról ... 769— 793
'Sigmond Elek: Általános színkulcs az átnézetes talajtérképhez ..... 644— 648
'Sigmond Elek: Általános talajmeghatározó ..... 894— 897
Szent-Györgyi Albert: A biológiai oxidációk mechanizmusa 412— 415
Szentpétery Zsigmond: A lillafüredi Szentistvánhegy eruptivumainak általános kőzettani viszonyai ..... 279— 306
Székessy Vilmos: A boreoalpesi bogarak revíziója összehasonlító anatómiai alapon. II. ..... 918— 921
Széki Tibor: Vizsgálatok a fűszerhatású vegyületek köréből 807— 818
Takáts Tibor: A zsidóvári granodiorit ..... 882— 892
Takáts Tibor: lásd Vendl Aladár.
Tasnádi-Kubacska András: Kihalt gerincesek sérüléseinek törzsfejlődéstani jelentőségéről ..... 979— 981
Tokody László: Adatok a Szepes-Gömöri Érchegység ásványainak ismeretéhez ..... 650— 671

Lap

Tomaschek Zoltán: lásd Frank Gábor.

Vendl Aladár, Takáts Tibor és Földvári Aladár: Újabb adatok a Börzsönyi-hegység löszének ismeretéhez ..... 177— 206

Vitális István: Orygocerasok a sopronvidéki alsópontusi üledékekben s elterjedésük hazánkban és a környező országokban ..... 626— 641

Zemplén Géza: A rutin glükózid disaccharidjának, a «rutinoz»-nak szerkezete és szintézise ..... 208— 219

Zemplén Géza: A robininról, a robinobiózról és a kämpferol-rhamnozidról ..... 375— 385

Zimmermann Ágoston: Functionalis anatomiai szerkezetekről 507— 528

Zimmermann Gusztáv: Adatok az os carpi centrale összehasonlító morphologiájához ..... 597— 623

# INHALTSVERZEICHNIS.


| | Seite |
|---|---|
| Apor, L.: Über das Problem der Frontalnaht | 916— 917 |
| Barta, J.: Eine neuere Analogie des Torsionsproblems | 505— 506 |
| Boros, A.: Die höhere Pflanzenwelt ungarischer Thermen | 592— 596 |
| Bozóky, L. v.: Neuere Untersuchungen über das Bandenspektrum des ionisierten Sauerstoffmoleküls | 586— 587 |
| Budó, A.: Über die Triplett-Molekülterme und über die Intensitäten der Triplett-Banden | 410— 411 |
| Doby, G. v.: Versuche zur physiologisch-chemischen Bestimmung des pflanzenlöslichen Bodenstickstoffs («Stickstoffzahl») | 859 |
| Endrédy, A. v.: Über die Gleichgewichte in Chromsäure- und Bichromatlösungen | 495 |
| Fejér, L.: Über die Potenzreihe und zugehörigen Legendreschen Polynome | 173— 176 |
| Finkey, J.: Neuere Versuchsangaben zur Frage der Brikettierung ungarischer Mineralkohlen | 159 |
| Finkey, J.: Aufbereitungsversuche mit Manganerzen von Úrkút | 881 |
| Földvári, A.: Über die Wirkung einiger Tonstabilisatoren | 278 |
| Földvári, A.: Siehe Vendl, A. | |
| Frank, G., Patai, E. und Tomaschek, Z.: Die Herstellung und Untersuchung von Graphitschichten kolloidaler Struktur | 432— 435 |
| Gelei, J. v.: IV. Beiträge zur Ciliatenfauna der Umgebung von Szeged | 947— 951 |
| Haranghy, L.: Unsere Süsswassermuskeln und der Lithoglyphus naticoides Fer. als Faktoren der Selbstreinigungsfähigkeit der freien Gewässer | 975— 978 |
| Konek, Fr.: Anwendung der partiellen oder differenzierenden Alkylierung auf andere biazotische Alkaloide, wie Hydrochinin, Spartein, Peganin etc. | 451 |
| Konek, Fr.: Verhalten der Alkaloide vom Chinazolintypus bei der differenzierenden Methylierung | 457— 458 |

Seite

KONEK, FR.: Über die Jodmethylate von Chinidin und Hydrochinidin ..... 830
KUTASSY, A.: Faunen aus dem Hauptdolomit und Dachsteinkalk des Budaer Gebirges ..... 1045—1050
LIPKA, ST.: Über die Irreduzibilität von Polynomen ..... 356— 357
MÓCSY, J. v.: Veränderungen und Verhalten des Myoglobins nach seinem Austritt aus dem Muskel ..... 904— 907
NAGY, B. VON SZ.: Über isomorphe Funktionensysteme ... 735
NAGY, D.: Kraniometrische Untersuchungen über die Pferde der Ungarn zur Zeit der Landnahme ..... 1004—1005
NAGY, J. v. Sz.: Über die ebenen Kurven ohne Tangentensingularität und vom Index Null. ..... 373— 374
NAGY, J. v. Sz.: Über die Raumkurven von Maximalindex .. 710— 711
NEUGEBAUER, TH.: Theorie der Ionenlockerung ..... 339— 348
NEUGEBAUER, TH.: Über die Herleitung der Eigenfunktion in zweiter Näherung im Falle einer gleichzeitigen zeitabhängigen und zeitunabhängigen Störung ..... 796— 804
PATAI, E.: Siehe FRANK, G.
PEKÁR, D.: Die Eötvös'sche Drehwage im französischen Limagne ..... 135— 138
RADOS, G.: Über den Rang von adjungierten Determinanten 323— 324
RADOS, G.: Über den Rang der Kronecker'schen Determinanten ..... 336
RADOS, G.: Ein neuer Beweis für den SYLVESTER'schen Determinantensatz ..... 683— 684
RÉDEI, L.: Über die Pell'sche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$ ..... 43— 44
RÉDEI, L.: Über zwei Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper ..... 113— 116
RÉDEI, L.: Einige neue Kongruenzbedingungen für die Anzahl der durch 8 teilbaren Invarianten in der absoluten Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers ..... 767— 768
SCHAFFER, K.: Die histopathologische Bestimmung der hereditär-organischen Nervenkrankheiten ..... 556
SCHMID, R.: Untersuchungen über die Bedingungsenergie des Kohlenstoffatoms ..... 794— 795
'SIGMOND, A. J. DE: A general colourscale using in general soil mapping ..... 649
'SIGMOND, A. J. v.: Allgemeiner Bodenregister ..... 898
SZENT-GYÖRGYI, A.: Mechanismus der biologischen Oxidation 416
SZENTPÉTERY, S. v.: Allgemeine Verhältnisse der Eruptivgesteine des Lillafüreder Szentistván-Berges ..... 307— 308
SZÉKESSY, W.: Revision der boreoalpinen Koleopteren auf vergleichend anatomischer Grundlage. II. ..... 922

Seite

Szőki, T.: Untersuchungen auf dem Gebiete von scharfschmeckenden Acylaminen ..... 819— 820
Takáts, T. v.: Granodiorit von Zsidóvár ..... 893
Takáts, T.: Siehe Vendl, A.
Tokody, L.: Beiträge zur Kenntnis einiger Mineralien des Szepes-Gömörer Erzgebirges (Ungarn) ..... 672— 675
Tomaschek, Z.: Siehe Frank, G.
Tasnádi-Kubacska, A.: Phylogenetisch bedeutungsvolle Kampfspuren bei ausgestorbenen Wirbeltieren ..... 982— 990
Vendl, A., Takáts, T. und Földvári, A.: Über den Löss des Börzsöny-Gebirges ..... 207
Vitális, St. v.: Orygoceras-Arten in den unterpontischen Ablagerungen der Gegend von Sopron, ihre Verbreitung in Ungarn und den benachbarten Ländern ..... 642— 643
Zemplén, G.: Konstitution und Synthese der «Rutinose», der Biose des Glykosids Rutin ..... 220
Zemplén, G.: Über Robinin, Robinobiose und Kämpferol-Rhamnosid ..... 386
Zimmermann, A.: Funktionelle anatomische Strukturen .... 529— 532
Zimmermann, G.: Beiträge zur vergleichenden Anatomie des Os carpi centrale ..... 624— 625

# A $t^2 - du^2 = -1$ PELL-FÉLE EGYENLETRŐL.

RÉDEI LÁSZLÓ-tól. (Mezőtúr.)

Legyen a

$$t^2 - du^2 = \pm 1 \tag{1}$$

PELL-féle egyenletben $d$ racionális egész szám. Ha fennáll az (1) egyenlet $t, u\,(\neq 0)$ racionális egész értékekkel, akkor a $t, u$ számpárt az (1) egyik megoldásának s magát az egyenletet megoldhatónak nevezzük.[1] Érdekességet a kérdés csak akkor nyujt, ha $d$ pozitív és nem teljes négyzet, ezért a jövőben ilyen $d$-kre szorítkozunk. Az (1) alapmegoldásának nevezzük azt a $t=T, u=U$ megoldást, amelyben $T$, $U$ pozitívek s $T$, vele együtt tehát $U$ is lehetőleg kicsiny. Ismeretes, hogy az (1)-nek mindig végtelen sok megoldása van s az összes megoldást a

$$t + u\sqrt{d} = (T + U\sqrt{d})^n \qquad (n=1, 2\ldots) \tag{2}$$

képletből előálló $\pm t$, $\pm u$ számpárok szolgáltatják.

Ha az (1) jobboldalán csak a $-1$ értéket engedjük meg, akkor a megfelelő

$$t^2 - du^2 = -1 \tag{3}$$

egyenlet megoldhatósága általánosságban elintézetlen kérdés. Mielőtt erről közelebbit említenék, utalok a jólismert közvetlen kapcsolatra az (1) egyenlet s az $R(\sqrt{d})$ másodfokú számtest között; ebben a kapcsolatban előkelő szerep jut a (3) egyenlet-

[1] Szokás a PELL-féle egyenletet oly alakban is felvenni, hogy a jobboldalon $\pm 4$ áll. Tudvalevő azonban, hogy a kétféle egyenlet tárgyalása egymásra könnyen visszavezethető, s nevezetesen a megoldhatóság kérdése mindkét egyenletre azonos.

nek, mert ennek megoldhatóságától függ az, hogy az $R(\sqrt{d})$ testben, illetve, ha $d$-nek van teljesnégyzet tényezője, a test megfelelő gyűrűjében (Ring) van-e $-1$ normával bíró egység.

Jóllehet fennáll ez a jólismert kritérium: a (3) egyenlet megoldható vagy nem aszerint, a mint a $\sqrt{d}$ lánctörtkifejtésében a periódus tagszáma páratlan vagy páros — ez a tétel azonban a gyakorlatban alig jelent egyebet, mint a kérdés elodázását, mert a kívánt lánctörtbefejtés nagy számolási nehézséggel jár.

Az újabb években nyertek megállapítást bizonyos tételek,[2] amelyek négyzetmentes $d$-kre vonatkozólag a $d$ törzstényezőiből 2-od és 4-edfokú hatványmaradékjelek segélyével az esetek nagyobb részében eldöntik a (3) megoldhatóságának kérdését.[3]

Ebben a dolgozatban az általános esettel foglalkozom, amelyben ugyanis $d$ teljesnégyzet tényezőt is tartalmazhat s megállapítok olyan tételeket, amelyek az előbbieknek közvetlen általánosításai. Ezekhez az új tételekhez minden eszköz együtt volt már a [2] dolgozatban, de figyelmemet az itteni általános kérdésre csupán P. EPSTEIN időközben megjelent egyik dolgozata[4] terelte.

Jelen dolgozat részletesebb tartalma s beosztása a következő: Az 1. §-ban rámutatok arra, hogy a (3) megoldhatóságának kérdése visszavezethető arra az esetre, amelyben $d = m$ vagy $mq^2$, ahol $m$ négyzetmenetes egész szám, $q$ törzsszám, $(q, m) = 1$. Különböző okokból azonban, amikre részben még rá fogok világítani, részben maguktól értetődők lesznek, a későbbiekben mégsem szorítkozom a most említett esetekre. Így ez az 1. § csak általános tájékozásul szolgál, a nélkül, hogy

[2] Ezekre a tételekre, a másodfokú számtestek elméletével való összefüggésükre s történeti kapcsolataikra nézve a: «RÉDEI L., A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsainak számosságáról, ez az Ért. 51 (1934), 227—254» c. dolgozatra utalok. Különösen a 3. §-beli tétel első kezdetei DIRICHLET-re nyúlnak vissza, amint ez a most idézett dolgozattal való egybevetésből is kitűnik.

[3] Eme tételek használhatóságának gyakoriságát egy ugyanitt megjelenő «Néhány középértékkérdésről a másodfokú számtestekben» c. későbbi dolgozatban meg fogom vizsgálni.

[4] P. EPSTEIN, Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, Journ. f. d. Math., 171 (1934), 243—252.

azután alkalmazásba jönne. A 2. §-ban bebizonyítom EPSTEIN[4] (l. o. 243—248. o,) tételeit jelentékenyen egyszerűbben, valamivel élesebb fogalmazásban. Eme EPSTEIN-féle megállapításoknak egy része a következő: Valahányszor a (3) megoldható, mindannyiszor alkalmunk van az összes $d = A^2 + B^2$ ($A$, $B$ pozitív egész relatív prím számok) előállítások közül egy bizonyosat kitüntetni, amelynek sajátsága többek között az, hogy $A$ előállítható $x$, $y$ racionális relatív prím egész számokkal az $x^2 - dy^2$ főformában s így $A$ négyzetes maradék mod $d$. Ezeket négyzetmentes $d$ esetében én már a [2] dolgozatban (l. o. különösen a [32] jegyzetet) megjegyeztem s az utóbbi tényből ott további következtetéseket vontam le. Itt a 4. §-ban hasonlóan fogok következtetni az általános esetben. Ehhez alkalmazásba jön a 2. §-ból csupán az említett részlet: «$A$ négyzetes maradék mod. $d$», s ekkor közömbös lesz az, hogy $A$ melyik $d = A^2 + B^2$ előállításból vétetett. Ennek a részletténynek bizonyítása akár a [2] dolgozatban követett úton, akár mint az itteni 2. § megfelelő részlete, néhány rövid sorban elintézhető. EPSTEIN a fentebb megbeszélt $A$, $B$ számpárt «Hauptzerlegung»-nak nevezte, én ezt itt a (3)-mal való kapcsolata hangsúlyozása kedvéért a $d$ PELL-féle bázisának nevezem. Erről a már említetteken túl még néhány kisebb megállapítást tartalmaz a 2. §. Jelen dolgozat főtárgya a 3. és 4. §-okban tárgyalandó explicit tételek: ezeket értettem az előbbi bekezdésben s rájuk nézve közelebbről az illető helyekre utalok. Itt a mondott régebbi tételek minden külön fáradság nélkül új bizonyítást nyernek, ami az eddiginél valamivel egyszerűbb. A 3. és 4. §-okból előálló, a (3) megoldhatóságára vonatkozó részint elégséges, részint szükséges feltételeket az 5. §-ban állítom össze végleges formában. A 6. §-ban egyszerű bizonyításban részesítem EPSTEIN-nek a [4] dolgozatban tárgyalt példáját (l. o. 248—252. o). A 7. §-ban a PELL-féle bázis fogalmának alkalmazásaként tekintek olyan $ax^2 + bx + c$ másodfokú függvényeket, amelyek $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ mellett csupa olyan $d$ számokat állítanak elő, amelyek mellett (3) megoldható.

*

Mindvégig megállapodok a következőkben:

Törzsszám jelentsen pozitív racionális törzszámot. A $p, p_1, p_2, \ldots$ jelek legyenek olyan törzsszámok, amelyek nem kongruensek 3-mal mod 4.

Az $a^e \| b$ jelentése legyen: $a^e | b$, $a^{e+1} \nmid b$.

Ha (3) megoldható, akkor $d$-t megengedhetőnek (EPSTEIN szerint «zulässig») nevezem. Ilyenkor $-1$ négyzetes maradék mod $d$, azaz $d$ csupa $p$ törzsszám szorzata és $4 \nmid d$. Ezért a továbbiakban ez utóbbi $d$-kre szorítkozunk. Tudvalevőleg ezek az összes $A^2+B^2$ számok, ahol $A$, $B$ ($\neq 0$) racionális egészek és $(A, B)=1$.

Ha $\alpha$, $\beta$ egész számok $R(i)$-ben ($i^2=-1$), akkor a szokásos $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$ 4-ik hatványmaradékjelt[5] röviden $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$-gyel jelölöm. Kényelem kedvéért kiterjesztem az értelmezést a «$\beta = 1+i$, $\alpha$ racionális egész, $\alpha \equiv 1 \pmod 4$» esetre is, mégpedig legyen akkor $\left(\frac{\alpha}{1+i}\right)_4 = i^{\frac{\alpha-1}{4}}$. Továbbá legyen $\left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_4$, ha a jobboldali tényezők értelmezettek. Hasonlóképpen $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ a 2-ik hatványmaradékjelt jelenti az $R(i)$ testben.

Legyen $N$ a norma jele az $R(i)$ testben. Ha ezenfelül $\alpha$ racionális, $\beta$ csupa elsőfokú törzsideál szorzata $R(i)$-ben és $p | N\beta$, $p \neq 2$ mellett $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1$, akkor legyen $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{N\beta}\right)_4$. — Ezzel az $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ jel értelmezést nyert olyan racionális egész számokra, amelyekre a következők érvényesek: $y$ csupa $p$ szorzata; mindegyikre nézve $x$ négyzetes maradék; $2 | y$ mellett $x \equiv 1 \pmod 4$. — Minthogy $\left(\frac{x}{2}\right)_4 = i^{\frac{x-1}{4}}$, azért $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ $2 | y$ mellett nem mindig racionális. A «$2 \nmid y$» és «$2 | y$, $x \equiv 1 \pmod 8$» esetekben $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ ($= \pm 1$) a szokásos jelentéssel bír; különösen $\left(\frac{x}{p}\right)_4 = 1$ akkor és csak akkor, ha $x$ 4-edfokú hatványmaradék az $R$-ben mod $p$, illetőleg mod 16 a szerint, amint $p \neq 2$ vagy $p = 2$.

Ha $a$, $b$ racionális egész számok és a $b$ minden $x$ törzs-

[5] H. HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II, Jahresb. d. D. Math. Ver., VI. Ergänzungsb. (1930), 49—50. o.

tényezőjére az $\left(\frac{a}{x}\right)$ KRONECKER-féle jel értéke 1, akkor legyen az $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ jel értéke 1. Hasonlóan $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)=-1$ azt jelenti, hogy minden ilyen $\left(\frac{a}{x}\right)=-1$. Más esetekben az $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ jelnek nem tulajdonítunk értelmet, azonban használni fogjuk például az $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)\neq -1$ rövidítést, ami természetesen azt jelenti, hogy nem $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)=-1$.

## 1. §.

Bebizonyítom a következőt:

1. *Tétel. Ha* $p\,|\,d$, $p\neq 2$, *akkor* $d$ *és* $dp^2$ *(azaz* $dp^4$, $dp^6$,... *is) egyszerre megengedhetők vagy nem.*

Ha ugyanis $dp^2$ megengedhető, akkor nyilván $d$ is az. Fordítva, ha $d$ megengedhető s $T$, $U$ a (3) alapmegoldása, akkor a (2) képlet $n=p$ mellett olyan $t, u$ megoldást szolgáltat, amelyre $u=pT^{p-1}U+dg$, $g$ racionális egész. E szerint $p\,|\,u$, ami azt jelenti, hogy $dp^2$ megengedhető s ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. *Tétel. Legyen* $m\,(>1)$ *racionális egész szám.* $dm^2$ *akkor és csak akkor megengedhető, ha minden* $dp^2\,(p\,|\,m)$ *is megengedhető.*

Ha ugyanis $dm^2$ megengedhető, akkor nyilván minden $dp^2(p\,|\,m)$ is az. Ha viszont $p_1, p_2, \ldots, p_k$ az $m$ összes különböző törzstényezői és minden $dp_l^2 (1\leqq l\leqq k)$ megengedhető, akkor legyen $t_l, u_l\,(>0)$ a megfelelő

$$t_l^2 - dp_l^2u_l^2 = -1$$

egyenletnek alapmegoldása. E szerint $t_l, p_lu_l$ megoldása a (3) egyenletnek, azaz (2) szerint

$$t_l + p_lu_l\sqrt{d} = (T + U\sqrt{d})^{a_l},$$

ahol $T$, $U$ ismét a (3) alapmegoldása s $a_l$ pozitív páratlan egész szám. Akkor $n=a_1a_2\ldots a_k$ mellett (2) a (3)-nak olyan megoldását adja, amelyre $p_1p_2\ldots p_k\,|\,u$, azaz $d(p_1p_2\ldots p_k)^2$ megengedhető. Ebből az 1. tétel alapján következik a 2. tétel.

## 2. §.

Bebizonyítom a következő tételt, amelyből az 1°, 2°, 3°, 6° EPSTEIN tételei, közülük a 3° részben tőlem ered, amint ezekről a bevezetésben már szóltam.

**3.** *Tétel.* 1° *Ha az*

$$(x^2 - y^2)\,A - 2xyB = 1 \tag{4}$$

*egyenletben* $x$, $y$, $A$, $B$ *racionális egész számok,* $B \neq 0$, *akkor*

$$d = A^2 + B^2 \tag{5}$$

*megengedhető s*

$$t = (x^2 - y^2)\,B + 2xyA, \tag{6}$$

$$u = \pm (x^2 + y^2) \tag{7}$$

*a* (3) *egyenlet egyik megoldását szolgáltatják.*

2° *A most adott úton minden megengedhető* $d$ *s a* (3) *egyenlet minden megoldása előáll.*

3° *Az* 1°*-ből előálló* $|A|, |B|$ *számok sorrendjükkel együtt csupán* $d$ *által meghatározottak; ezeket a* $d$ PELL*-féle bázisának nevezem, amely értelmezés természetesen csupán megengedhető* $d$*-re vonatkozik. A páratlan,* $A$, $B$ *relatív prímek,* $A$, $-A$, $2B$, $-2B$ *az* $X^2 - dY^2$ *főalakban relatív prím racionális egész* $X$, $Y$ *értékekkel előállíthatók, mégpedig (az* 1° *jeleivel):*

$$A = (Ax - By)^2 - dy^2, \qquad -A = (Ay + Bx)^2 - dx^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 2B &= (A(x+y) + B(x-y))^2 - d(x+y)^2 \\ -2B &= (A(x-y) - B(x+y))^2 - d(x-y)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

*Különösen tehát alkalmas előjellel* $\pm|A|$ *négyzetes maradék mod* $4d$.

4° *A* $d$ PELL*-féle* $|A|, |B|$ *bázisából az* $R(i)$ *testben előálló* $d = (A + Bi)(A - Bi)$ *szorzat tényezői alkalmas sorrendben osztói a* $t + i$, $t - i$ *számoknak, ahol* $t$ *(u-val együtt) a* (3) *bármely megoldása. E szerint az* $|A|, |B|$ PELL*-féle bázis az* $|A|, |B|$ *tagok sorrendjétől eltekintve a* $d$ *és* $t$ *ismeretéből az*

$$(A + Bi) = (d, t + i) \tag{10}$$

*(ideál-) egyenlettel is meghatározható; a sorrend is meghatározott ezáltal, ha* 3° *utolsó megjegyzését is figyelembe vesszük.*

*kivéve ha* $2 \mid d$ *és* $\frac{d}{2}$ *csupa* $8k+1$ *alakú törzsszám szorzata. Különösen tehát, ha* $d = d_0 e^2$ ($d_0$, $e$ *racionális egészek) s így d-vel együtt* $d_0$ *is megengedhető és az utóbbi* PELL*-féle bázisa* $|A_0|, |B_0|$, *akkor ez az A, B-ből (az* $|A_0|, |B_0|$ *sorrendjétől eltekintve) az*

$$(A_0 + B_0 i) = (d_0, A + Bi) \tag{11}$$

*egyenlettel meghatározható.*

5° *Legyen szilárdan megválasztva egy bizonyos megengedhető d s legyen az ő* PELL*-féle bázisa* $|A|, |B|$. *A* (4) *és* (5) *teljesíthető akkor is, ha A, B helyett az* $|A|, |B|$ *számpárt írjuk. A megfelelő x, y párok között van egyetlenegy olyan* $x_0, y_0$ *pár, amelyben* $x_0 > 0$ *és* $x_0^2 + y_0^2$ *minimális.*

*Legyen ezután minden pozitív egész n-nel*

$$f_n(v, w, z) = \sum_{2 \mid k} \binom{n}{k} v^{n-k} w^k z^{\frac{k}{2}}, \tag{12}$$

$$g_n(v, w, z) = \sum_{2 \nmid k} \binom{n}{k} v^{n-k} w^k z^{\frac{k+1}{2}}, \tag{13}$$

*ahol az összegezés kiterjesztendő a páros, illetőleg páratlan* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ *értékre. Végezzük itt a*

$$v = (x_0^2 - y_0^2)|B| + 2x_0 y_0 |A|, \tag{14}$$

$$w = x_0^2 + y_0^2, \tag{15}$$

$$z = A^2 + B^2 \tag{16}$$

*helyettesítést s jelöljük az így előálló értékeket egyszerűen* $f_n$*-nel és* $g_n$*-nel. Legyen végül*

$$x_n = x_0 f_n + (x_0 |B| + y_0 |A|) g_n, \tag{17}$$

$$y_n = y_0 f_n + (x_0 |A| - y_0 |B|) g_n. \tag{18}$$

*Ekkor érvényes a következő:*

*Mindazok az x, y párok, amelyek* (4) *és* (5) *útján a d-t bármilyen A, B értékekkel (amelyekre nézve* 3° *szerint csupán* $A = \pm |A|$, $B = \pm |B|$ *jönnek tekintetbe) előállítják, a következők:* $x_n, y_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ *és az ezekből a tagok előjelének és sorrendjének megváltoztatásával előálló párok.*

*Jelentse továbbá* $(x, y)^a$ *az* $x, y$ *vagy az* $y, x$ *párt a szerint, amint* $a=0$ *vagy* 1, *és jelentse* $\pm(x, y)^a$ *az* $(x, y)^a$, $(-x, -y)^a$ *párok mindegyikét. Akkor érvényes még közelebbről a következő:*

*A* (4), (5), (6) *egyenletek fennállnak, ha* $x, y$; $A, B$; $t$ *helyébe*

$$\pm(x_n, (-1)^b y_n)^a; \tag{19}$$

$$(-1)^{n+a}|A|, (-1)^{n+b}|B|; \tag{20}$$

$$\sigma(-1)^{n+a+b} t_{2n+1} \tag{21}$$

*helyettesíttetnek* $(a, b=0, 1; n=0, 1, 2, \ldots)$, *ahol* $\sigma=-1$ *ha* $y_0<0$, *különben* $\sigma=1$ *és* $t_n$ *(az* $u_n$*-nel együtt) jelenti az* (1) *egyenletnek a* $T, U$ *alapmegoldásból a* (2) *képlettel előállított «n-dik pozitív megoldását». (Hasonló kifejezésmóddal a* $t_{2n+1}$, $u_{2n+1}$ *párt a* (3) *egyenlet* $n+1$*-dik pozitív megoldásának nevezzük. Ebben a beszédmódban* $t_1 = T$, $u_1 = U$ *az* (1)*-nek, valamint a* (3)*-nak is első pozitív megoldása, ami tehát egyszersmind az alapmegoldás.)*

6° *Ha fennáll* (4), *akkor* $A$, $B$ *helyett* $A + 2xym$, $B + (x^2 - y^2)m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *is kielégíti a* (4)*-et. E szerint minden*

$$|A + 2xym|, |B + (x^2 - y^2)m|$$

*pár* Pell*-féle bázis* $(a\ d_1 = (A + 2xym)^2 + (B + (x^2 - y^2)m)^2 = d + 2tm + u^2m^2$ *számhoz, ahol* $d$, $t$, $u$ *jelentését az* (5), (6), (7) *egyenletekből vettük), kivéve, ha* $B+(x^2-y^2)m=0$, *ami csupán az* $A = \pm 1$, $|x|+|y| = 1$, $m = \pm B$ *esetben áll be, ahol az utóbbi előjel alkalmasan választandó. (Ebben a kivételes esetben a fenti számpár az* 1, 0 *számpárba megy át s ugyanekkor* $d_1 = 1$.*)*

Ebből a tételből 1° és (8), (9) közvetlenül igazolhatók. A 6° is részben közvetlenül világos, csak annyit kell megjegyezni, hogy az ottani $d_1$-nek második, $d + 2tm + u^2m^2$ alakját az (5), (6), (7) alapján könnyen kiszámíthatjuk, továbbá még meg kell vizsgálnunk, hogy mikor áll be $B + (x^2 - y^2)m = 0$. Ebben az esetben $x^2-y^2|B$, amiből (4) miatt $x^2 - y^2 = \pm 1$ következik. Ekkor vagy $x = 0$, $y = \pm 1$ vagy $x = \pm 1$, $y = 0$, mindenképpen tehát $xy = 0$ s így (4)-ből $A = \pm 1$. Másrészt a

fentiekből $m = \pm B$ is következik (alkalmas előjellel), miáltal 6°-ot bebizonyítottuk.

A 2° bizonyításához felteszem, hogy $d$ megengedhető s legyen $t, u$ a (3)-nak egyik megoldása. Tekintem a következő ideálokat az $R(i)$ testben:

$$\delta = (d,\ t + i), \tag{22}$$

$$a = (u,\ t + i). \tag{23}$$

A (3)-ból

$$t^2 + 1 = du^2 \tag{24}$$

következik s így

$$N\delta = (d,\ t + i)\,(d,\ t - i) = (d^2,\ d(t + i),\ 2di,\ du^2) = d, \tag{25}$$

mert $u$ páratlan. Hasonlóan:

$$Na = (u^2,\ u(t + i),\ 2ui,\ du^2) = |u|. \tag{26}$$

Ezek szerint

$$N\delta a^2 = du^2 = N(t + i). \tag{27}$$

Általában igaz a következő: Ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ egész ideálok egy $k$ algebrai számtestben, $\mathfrak{a}$ minden törzsideáltényezője osztója $\mathfrak{a}_1$-nek s ez utóbbinak különböző törzsideáltényezői különböző racionális törzsszámok osztói, végül $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{a}_1$ normái egyenlők, akkor $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$. Ezen az alapon (22), (23) s (27)-ből következik:

$$\delta a^2 = (t + i).$$

Ha tehát racionális egész $x, y$, A, $B$ értékekkel

$$a = (x - yi), \tag{28}$$

$$\delta = (B + Ai), \tag{29}$$

akkor

$$(x - yi)^2\,(B + Ai) = (t + i).$$

Az $A$, $B$ számokat (29)-ben választhatjuk úgy, hogy ez az ideálegyenlet a hasonló

$$(x - yi)^2\,(B + Ai) = t + i \tag{30}$$

számegyenletbe megy át. Ha itt a valós s képzetes részeket különválasztjuk, akkor előállnak (4) és (6). Az (5) folyik (22), (24) és (29)-ből s bizonyosan $B \neq 0$, mert különben (4) miatt $A = \pm 1$,

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK

azaz $d=1$, ami lehetetlen. Végül (7) is következik (3)—(6)-ból, amivel 2°-t bebizonyítottuk. Hátra van még a 3°-ban kifejezett egyértelműség, továbbá 4° és 5° bizonyítása.

Először kimutatom a következőket:

a) *Ha* (4)—(6) $x, y, d, A, B, t$ *mellett* $x, y, d, A_1, B_1, t_1$*-re is fennállnak, akkor* $A_1=A$, $B_1=B$, $t_1=t$, *kivéve ha* $d=1+B^2$, $t=\pm B$ *és* $x=0$, $y=\pm 1$, $A=-1$ *vagy* $x=\pm 1$, $y=0$, $A=1$, *de ekkor is* $A_1=A$, $B_1=eB$, $t_1=et$, *ahol* $e=\pm 1$.

A mondott feltételek mellett ugyanis (4) szerint nyilvánvalóan

$$A_1=A+2xym, \quad B_1=B+(x^2-y^2)m,$$

ahol $m$ racionális egész szám és (5) szerint $A_1^2+B_1^2=A^2+B^2(=d)$. Ezekből következik

$$0=2m\left((x^2-y^2)B+2xyA\right)+m^2(x^2+y^2)^2.$$

Ha itt $m\neq 0$, akkor (6) és (7) szerint (az $m=0$ esettel nem kell foglalkoznunk, mert akkor $A_1=A$, $B_1=B$, $t_1=t$):

$$0=2t+mu^2,$$

ahol $u$ értelme ugyanaz, mint (3)-ban. Ezért $(2t, u)=1$, és így $m=2tn$, ahol $n$ is egész szám, egyszersmind $0=1+nu^2$. Akkor $n=-1$, $u=\pm 1$, azaz $x^2+y^2=1$. E szerint $xy=0$, $x^2-y^2=\pm 1$ s így (4)-ből $A=x^2-y^2(=\pm 1)$. Továbbá (5) és (6)-ból $d=1+B^2$, $t=(x^2-y^2)B$ s az előbbiek szerint $m=-2t$, $B_1=B-(x^2-y^2).2t=-B$. Végül $t_1=(x^2-y^2)B_1$ miatt $t_1=-t$. Ha még az $x=0$, $y=\pm 1$ és $x=\pm 1$, $y=0$ eseteket megkülönböztetjük, látjuk az állítás helyességét.

b) $A$ (4)—(6) *egyenletek* $x, y, d, A, B, t$ *mellett a* $\pm(x, (-1)^b y)^a$, $d$, $(-1)^a A$, $(-1)^b B$, $(-1)^{a+b}t$ *értékekkel is fennállnak.* (Itt az 5°-ben bevezetett $(\ldots, \ldots)^a$ jelölést használtam.)

A bizonyításhoz elég annyit megjegyezni, hogy (4)—(6) érvényben maradnak, ha $x, y, A, B, t$ helyett a $-x, -y, A, B, t$ vagy $x, -y, A, -B, -t$ vagy $y, x, -A, B, -t$ értékeket vesszük.

c) *Adott* $d$ *és* $t$ *mellett a* (4)—(6) *egyenletek legfeljebb négy különböző* $x, y$ *értékpár mellett érvényesek.* (Ez lényegében a b) megfordítása.)

Tegyük fel ugyanis, hogy $x$, $y$, $A$, $B$ mellett $x_1$, $y_1$, $A_1$, $B_1$ is kielégítik a (4)—(6) egyenleteket. A (4) és (6)-ból következik (30), érvényes tehát a megfelelő

$$(x_1 - y_1 i)^2 (B_1 + A_1 i) = t + i \tag{31}$$

egyenlet is. Az (5) miatt, ami ugyancsak $A_1$, $B_1$-re is igaz, $N(B_1+A_1 i)=N(B+Ai)\,(=d)$. Minthogy továbbá (30) s (31) miatt $B+Ai$ és $B_1+A_1 i$ mindketten osztói $t+i$-nek, azért hasonlóan mint (27)-nél következik, hogy $(B_1+A_1 i)=(B+Ai)$. Ugyancsak (30) és (31)-ből következik tehát: $(x_1-y_1 i)=(x-yi)$. Ebből $x_1-y_1 i=i^k(x-yi)$ $(k=0, 1, 2, 3)$, amiből **c)** helyessége látható.

Legyen ezek után $t_n$, $u_n$ az (1)-nek (2) által előállított «$n$-edik megoldása», egyszersmind tehát $T=t_1$, $U=u_1$ az alapmegoldás. Akkor a (12), (13)-ban bevezetett jelekkel

$$t_n=f_n(t_1, u_1, d),\ u_n=g_n(t_1, u_1, d) \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Felteszem, hogy $d$ megengedhető s a következőkben legyen $d$ szilárdan megválasztva. A 2° szerint van olyan $x$, $y$ számpár, ami (4)—(6) útján $t_1$-et előállítja. Akkor **b)** szerint a 8-féle $\pm(x, (-1)^b y)^a$ $(a, b = 0, 1)$ értékpár közül 4 a $t_1$-et, a többi 4 $-t_1$-et előállítja, s ezek **c)** szerint az összes ilyenek. Ismét **b)** szerint ama 8 pár között két olyan van, amiket ismét $\pm(x, y)$-nal jelölhetünk, úgyhogy (4)-ben $A$, $B>0$; akkor (6)-ban $t=\sigma t_1$, ahol $\sigma$ egy meghatározott érték $+1$ és $-1$ közül. Ez az $x$ nem lehet zérus, mert akkor (4) miatt $y=\pm 1$, $A=-1$, holott most $A$ pozitív. A tekintett $\pm(x, y)$ párok közül az egyikben tehát, legyen ez $x_0$, $y_0$, az $x_0$ pozitív. Az így egyértelműen meghatározott $x_0$, $y_0$ pár éppen az, amelyet 5° elején követeltünk, mert (7) szerint egyszersmind $(u_1=)\,x_0^2+y_0^2$ minimális. Minthogy $x_0$, $A$, $B>0$, azért (4)-ből azt is látjuk, hogy vagy $0\leqq y_0<x_0$ vagy $y_0<-x_0$ s megfelelőleg $\sigma=+1$, illetőleg $-1$.

Most (12)—(18) szerint bevezetem az $x_n$, $y_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ számokat. A (17), (18) szerint (most $A$, $B>0$):

$$x_n-y_n i=(x_0-y_0 i)f_n+(x_0+y_0 i)g_n(B-Ai).$$

Ebből (5) miatt

$$(x_n-y_n i)^2(B+Ai)=(x_0-y_0 i)^2(B+Ai)f_n^2+(x_0+y_0 i)^2(B-Ai)dg_n^2+ \\ +2(x_0^2+y_0^2)df_n g_n.$$

Minthogy $x_0$, $y_0$ 1°-ban előállítják az $A$, $B$, $\sigma t_1$ számokat, azért

$$(x_0-y_0 i)^2 (B+Ai) = \sigma t_1 + i,$$
$$x_0^2+y_0^2 = u_1.$$

Ezek szerint

$$(x_n-y_n i)^2 (B+Ai) = (\sigma t_1+i) f_n^2 + (\sigma t_1 - i) d g_n^2 + 2u_1 d f_n g_n.$$

Látjuk, hogy a (14)—(16)-beli $v$, $w$, $z$ éppen $\sigma t_1$, $u_1$ illetőleg $d$, így tehát a (12), (13)-ba való behelyettesítéssel előálló $f_n$, $g_n$ (32) szerint épp a $\sigma^n t_n$, $\sigma^{n-1} u_n$ számpár. E szerint

$$(x_n-y_n i)^2 (B+Ai) = \sigma t_1 (t_n^2+du_n^2) + 2\sigma u_1 d t_n u_n + (t_n^2 - du_n^2) i.$$

A valós rész könnyen láthatólag $\sigma t^{2n+1}$, a képzetes rész $(-1)^n$ s így:

$$(x_n-y_n i)^2 ((-1)^n B+(-1)^n Ai) = \sigma (-1)^n i_{2n+1} + i.$$

A valós és képzetes rész szétválasztásával látjuk, hogy $x_n$, $y_n$ az 1° szerint előállítják a $(-1)^n B$, $(-1)^n A$, $\sigma(-1)^n t_{2n+1}$ számokat. Ezt nyertük $n=1, 2, \ldots$ mellett, de hasonló $n=0$ mellett is igaz. A b) szerint ezzel kimutattuk a (19)—(21)-ről szóló állítást. E szerint a (19) alatti párok minden $\sigma_1 t_{2n+1}$ ($\sigma_1 = 1, -1$; $n=0, 1, 2, \ldots$) értéket, azaz minden, a (3) megoldásából eredő $t$ értéket a (4)—(6) által 4-szer előállítanak s így c) szerint más $x$, $y$ pár nem is jő tekintetbe. Minthogy (20) szerint mindezek a párok előállítják a $\pm A$, $\pm B$ értékeket, és a) miatt csak ezeket, ezzel 3°-at és 5°-öt bebizonyítottuk. A 4° ugyancsak világos, részben abból a megjegyzésből, hogy $t$ a (3) fennállása esetén a $d = d_0 e^2$-ből származó $d_0$-hoz is a (3) egyik megoldását szolgáltatja. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

A 3. tétel 3° szerint a megengedhető $d$-k s az olyan $A$, $B$ számpárok, amik PELL-féle bázist alkotnak, egy-egyértelmű vonatkozásban vannak. Ez a vonatkozás azáltal, hogy a PELL-féle bázisok a (4) egyenletből aránylag könnyen megállapíthatók, új lehetőségeket nyujt a megengedhető $d$-k felderítésére. Remélem, hogy erre a tárgyra még visszatérhetek (egyébként a 7. § is ezt a kérdést fogja érinteni) s most csupán a következő észrevételekre szorítkozom.

Ha $d$ megengedhető, akkor a (3) egyik megoldása a következőképpen nyerhető. Először meghatározzuk a

$$d = A^2+B^2 (A, B>0, (A, B)=1, 2\nmid A)$$

előállítások közül azokat, amelyekben $\pm A$ négyzetes maradék mod $4d$. Az ilyen $A, B$ párok közül az egyikkel megoldható a (4) $x, y$-ban, s azután (6), (7) szolgáltatják a (3) megoldását. Ez az út annyiban előnyösebb, hogy a «legkisebb $x, y$» párra (7) szerint $x^2 + y^2 = u$, tehát $|x|, |y| \leqq \sqrt{u}$, ahol $u$ ($t$-vel együtt) a (3) alapmegoldása. Különösen előnyös lehet ez az út a $d = p$ esetben, amikor lényegében csak egy $p = A^2 + B^2$ előállítás van, amiből a PELL-féle bázis is ismeretes.

Figyelemreméltó, hogy a (3) egyenlet megoldható, ha $A, B$ racionális egészek, $A$ páratlan és $A^2 + B^2$ törzsszám.

Érvényes a következő:

d) *Minden* 1, $f$ *(*$f$ *pozitív egész) és minden* $f$, 2 *(*$f$ *páratlan pozitív egész)* PELL*-féle bázis. Ha ellenben* $e (\geqq 3)$ *racionális egész szám, akkor van olyan pozitív és* $e$*-hez relatív prím racionális egész szám* $f$*, hogy sem* $e, f$*, sem* $f, e$ *nem* PELL*-féle bázis.*

Ugyanis pozitív egész $f$ mellett $x = 1$, $y = 0$, $A = 1$, $B = f$ kielégítik a (4) egyenletet. Hasonló igaz pozitív páratlan $f$ mellett az $x = \frac{f+1}{2}$, $y = \frac{f-1}{2}$, $A = f$, $B = 2$ értékekkel. Mindkét esetben tehát $A, B$ tényleg PELL-féle bázis.

Az állítás második felének kimutatásához az alábbi eseteket különböztetem meg:

1. Ha $e (\geqq 4)$ páros, akkor az

$$e^2 + \left(\frac{e^2}{2} - 1\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 (= d)$$

azonosság szerint a fentiek miatt 1, $\frac{e^2}{2}$ a $d$ PELL-féle bázisa, tehát az $e, \frac{e^2}{2} - 1$ számok nem lehetnek semmiféle sorrendben sem PELL-féle bázis tagjai.

2) Ha $e = e'^2$ $(\geqq 9)$, ahol $e'$ pozitív páratlan egész, akkor hasonló mondható az

$$(e'^2)^2 + \left(\frac{e'^3 + e'^2 + 2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e'^3 + e'^2 + 2e'}{2}\right)^2 (= d)$$

azonosságról.

3. Ha $e(\geq 3)$ páratlan egész szám, nem teljes négyzet, akkor legyen mindenekelőtt $\pi$ egy olyan racionális törzsszám, ami az $e$ törzstényezős előállításában páratlan hatványon szerepel. LAGRANGE szerint van olyan $a$ pozitív egész szám, amelyre $a^2+1$ négyzetes nemmaradék mod $\pi$. Az is kiköthető, hogy $a$ az $e$ többi törzstényezőjével és 4-gyel osztható legyen. Akkor a négyzetes reciprocitástétel szerint

$$\left(\frac{a^2+1}{e}\right) = \left(\frac{e}{a^2+1}\right) = \left(\frac{2e}{a^2+1}\right) = -1. \tag{33}$$

Az

$$(a^2+1)\left((a+e)^2+1\right) = e^2+(ae+a^2+1)^2 \,(= d)$$

azonosság szerint $e$, $ae+a^2+1$ semmiféle sorrendben sem lehet PELL-féle bázis, mert ehhez a 3. tétel 3° szerint az kellene, hogy $e$ és $2e$ közül legalább az egyik négyzetes maradék legyen mod $\frac{d}{2}$, ez azonban $a^2+1 \mid d$ és (33) miatt lehetetlen. E mellett a szóbanlevő $e$, $ae+a^2+1$ számok relatív prímek, s ezzel d)-t bebizonyítottuk.

Megjegyzem ezekhez, hogy az 1) és 2) alatt szerepelt $d$-k megengedhetők, míg a 3. alatt a $d$ esetleg nem megengedhető.

Mint most láttuk, minden pozitív páratlan szám szerepel, mint (az $f$, 2) PELL-féle bázis első eleme és minden pozitív egész szám szerepel, mint (az 1, $f$) PELL-féle bázis második eleme. Hasonló további példák:

Ha $f$ páratlan szám, tehát alkalmas előjellel $f \equiv 1 \pmod 4$, akkor

$$|f|, \left|\frac{3f+1}{4}\right|$$

PELL-féle bázisa a

$$d = \frac{1}{16}(25f^2+6f+1)$$

számnak, mert $x=1$, $y=-2$, $A=f$, $B=\frac{3f+1}{4}$ megoldása a (4) egyenletnek. Egyszersmind $t=\frac{1}{4}(25f+3)$, $u=5$ megoldása a (3) egyenletnek.

Ha $f(\neq 0, \pm 2, \pm 6)$ racionális egész szám, tehát az $f$ al-

kalmasan választott előjele mellett van olyan $n(>1)$ páratlan egész szám, amellyel $n \mid f-2$, akkor

$$\frac{1}{2n}|n^2f-f+2|, |f|$$

PELL-féle bázisa a

$$d=\frac{1}{4n^2}(n^4f^2+2n^2f^2+f^2+4n^2f-4f+4)$$

számnak, mert

$$x=\frac{n+1}{2},\ y=\frac{n-1}{2},\ A=\frac{1}{2n}(n^2f-f+2),\ B=f$$

megoldása a (4) egyenletnek. Egyszersmind

$$t=\frac{1}{4n}(n^4f+2n^2f+f+2n^2-2),\ u=\frac{1}{2}(n^2+1)$$

megoldása a (3) egyenletnek.

## 3. §.

Érvényes a következő:

**4.** *Tétel. Ha $d$ nem megengedhető $s$ $t, u$ az (1) alapmegoldása, amellyel tehát*

$$t^2-du^2=1, \tag{34}$$

*akkor*

$$\sqrt{t+u\sqrt{d}}=x\,Q_1\sqrt{P_1}+yQ_2\sqrt{P_2}, \tag{35}$$

*s egyszersmind*

$$x^2P_1Q_1^2-y^2P_2Q_2^2=1, \tag{36}$$

*ahol $x, y, P_1, P_2, Q_1, Q_2$ pozitív egész számok, $P_1, P_2$ négyzetmentesek, $(P_1Q_1,\ P_2Q_2)=1$, $P_1Q_1,\ P_2Q_2>1$, $d=P_1Q_1^2P_2Q_2^2$. Mindezek a mennyiségek $d$ által egyértelműen meghatározottak. Rájuk érvényes még a következő:*

$$\left(\left(\frac{P_2}{P_1Q_1}\right)\right)=\left(\left(\frac{P_1}{P_2Q_2}\right)\right)=1, \tag{37}$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_4=1, \tag{38}$$

*továbbá* ($2 \nmid x$ *és*)

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_4 = \varepsilon\left(\frac{-1}{x}\right). \tag{39}$$

*ahol* $\varepsilon = -1$, *ha* $2 \mid P_2$ *(amikor* $2 \mid y$*) és* $2 \| y$, *különben* $\varepsilon = 1$.

Megjegyzés. Ebből a tételből bennünket főleg (37), (38) érdekelnek, amikre még visszatérünk, a többivel csak teljesség kedvéért foglalkozunk.

Bizonyítás. Legyen $d$ nem megengedhető s legyen $t, u$ az (1) alapmegoldása. Fennáll tehát (34), ami így írható:

$$(t+1)(t-1) = du^2.$$

Nyilván $2 \nmid t$ s így $(t+1, t-1) = 2$, tehát

$$t+1 = 2x^2 P_1 Q_1^2, \quad t-1 = 2y^2 P_2 Q_2^2, \tag{40}$$

ahol $x, y, P_1, P_2, Q_1, Q_2$ pozitív egészek, $d = P_1 P_2 Q_1^2 Q_2^2$. A (40)-ből kivonással következik (36) s ugyancsak következik a (34) figyelembevételével (35) is. Természetesen kiköthető, hogy $P_1, P_2$ négyzetmentesek legyenek, miáltal a követelt egyértelműség bekövetkezik. A (36)-ból $(P_1 Q_1, P_2 Q_2) = 1$ is látható. Továbbá $P_1 Q_1, P_2 Q_2 > 1$, mert $P_1 Q_1 = 1$ mellett $d = P_2 Q_2^2$ lenne, azaz (36)-ból $x^2 - dy^2 = 1$, holott $t, u$ az (1) alapmegoldása ($t > 1$ miatt (40)-ből $x < t$). Még kevésbbé lehet $P_2 Q_2 = 1$, mert akkor (36)-ból $dx^2 - y^2 = 1$ folynék, holott a (3) megoldhatatlan.

A (36)-ból rögtön leolvasható (37) is, ebben csupán a «nevezők» esetleges 2-es törzstényezőjére vonatkozó állítás vizsgálandó meg külön. Minthogy $4 \nmid d$, azért $2 \nmid Q_1, Q_2$ s így csupán a $2 \mid P_1$, $2 \mid P_2$ eseteket kell megkülönböztetnünk. Az első esetben (36)-ból $2 \nmid x$, $y^2 P_2 Q_2^2 \equiv 1 \pmod 8$, azaz $P_2 \equiv 1 \pmod 8$. A második esetben hasonlóan $2 \mid y$, $P_1 \equiv 1 \pmod 8$ következik. Ezzel (37) teljes egészében bebizonyult.

Most kimutatjuk (38)-at és (39)-et. Ehhez csak (36)-ot fogjuk használni, s mivel sem ezen, sem a bebizonyítandó tényeken mitsem változtat, ha $x$ vagy $y$ előjelét megváltoztatjuk, azért ehhez a bizonyításhoz elejthetjük az $x, y > 0$ kikötést. Ezen a jogon ennél a bizonyításnál feltesszük, hogy $x \equiv 1 \pmod 4$ és $2 \nmid y$ mellett $y \equiv 1 \pmod 4$.

Legyen

$$P_1 = 2^{a_1}P_{10},\quad P_2 = 2^{a_2}P_{20},\quad y = 2^a y_0 \tag{41}$$

ahol $P_{10}$, $P_{20}$, $y_0$ páratlan egész számok. Akkor

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_4 = \left(\frac{P_2}{2}\right)_4^{a_1}\left(\frac{P_2}{P_{10}}\right)_4.$$

Az első tényező $i^{\frac{P_2-1}{4}a_1}$, ami helyett $(-1)^{\frac{P_2-1}{8}a_1}$ is vehető, mert $a_1 \neq 0$ mellett $2 \mid P_1$, azaz (37) miatt $P_2 \equiv 1 \pmod 8$. A második tényező helyett vehető

$$\left(\frac{y^2P_2Q_2^2}{P_{10}}\right)_4\left(\frac{yQ_2}{P_{10}}\right),$$

ahol ismét az első tényező (36) miatt $\left(\frac{-1}{P_{10}}\right)_4 = (-1)^{\frac{P_{10}-1}{4}}$, a második tényező (41) miatt

$$\left(\frac{P_{10}}{yQ_2}\right) = \left(\frac{P_1}{yQ_2}\right)\left(\frac{2}{yQ_2}\right)^{a_1} = \left(\frac{P_1}{2}\right)^a\left(\frac{P_1}{y_0Q_2}\right)\left(\frac{2}{yQ_2}\right)^{a_1},$$

amely átalakítás akkor is helyes, ha $2 \mid y$ vagy $2 \mid P_1$ mert akkor (36) és (41) szerint $a_1 = 0$, illetőleg $a = 0$, s a zérus kitevőjű hatvány természetesen 1-nek veendő. Az utolsó kifejezés középső tényezője (36) miatt 1, a másik kettő $(-1)^{\frac{P_1^2-1}{8}a}$, illetőleg $(-1)^{\frac{y^2Q_2^2-1}{8}a_1}$, s mindezt fent figyelembevéve:

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_4 = (-1)^{\frac{P_2-1}{8}a_1 + \frac{P_{10}-1}{4} + \frac{P_1^2-1}{8}a + \frac{y^2Q_2^2-1}{8}a_1}.$$

Az itt levő kitevő csupán mod 2 jön tekintetbe, s így az első és negyedik tag összege helyett $\frac{y^2P_2Q_2^2-1}{8}a_1$ vehető. Ha $a_1 \neq 0$, azaz $2 \mid P_1$, akkor (36) miatt a számláló a vele mod 16 kongruens $P_1-2$-vel helyettesíthető, amit természetesen $a_1=0$ mellett is megtehetünk. A harmadik tag is egyszerűbbel helyettesíthető abból a meggondolásból, hogy $a \neq 0$ mellett $2 \nmid P_1$, s így az előbbi kitevő helyett

$$\frac{P_{10}-1}{4} + \frac{P_1-1}{4}a + \frac{P_1-2}{8}a_1$$

vehető. Ez azonban mindig páros szám, mert vagy $a_1=1$, amikor (36) s (41) miatt $a=0$, s ekkor a középső tag zérus, a szélsők egyenlők, vagy $a_1=0$, amikor a megmaradt tagok összege $\frac{P_1-1}{4}(1+a)$, s ha itt az első tényező páratlan, akkor (36) és (41) miatt $a=1$. Az összeg tehát mindig páros, amivel (38)-at bebizonyítottuk.

A (39) bizonyításához végezzük a

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_4=\left(\frac{P_1}{2}\right)_4^{a_2}\left(\frac{P_1}{P_{20}}\right)_4=(-1)^{\frac{P_1-1}{8}a_2}\left(\frac{x^2P_1Q_1^2}{P_{20}}\right)_4\left(\frac{xQ_1}{P_{20}}\right)$$

átalakítást, amelynél ismét figyelembe vettük, hogy $a_2\neq 0$ mellett (36) miatt $P_1\equiv 1 \pmod 8$. A középső tényező (36) miatt 1, a harmadik tényező értéke:

$$\left(\frac{P_{20}}{xQ_1}\right)=\left(\frac{2}{yQ_1}\right)^{a_2}\left(\frac{P_2}{yQ_1}\right).$$

Itt az első tényező $(-1)^{\frac{x^2Q_1^2-1}{8}a_2}$, a második tényező (36) miatt $\left(\frac{-1}{x}\right)$. Ezek szerint

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_4=(-1)^{\frac{P_1-1}{8}a_2+\frac{x^2Q_1^2-1}{8}a_2}\left(\frac{-1}{x}\right).$$

Az itt levő kitevő helyett $\frac{x^2P_1Q_1^2-1}{8}a_2$ vehető, ami (36) miatt $\frac{y^2P_2Q_2^2}{8}a_2$. Ez csak akkor páratlan, ha $a_2=1$, azaz $2\mid P_2$, $y$ és $2\| y$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

## 4. §.

Most feltesszük, hogy $d$ megengedhető. Következő vizsgálataink azon alapulnak, hogy a 3. tétel 3° szerint van egy racionális egész számokkal való

$$d=A^2+B^2 \quad ((A,B)=1,\ 2\nmid A) \tag{42}$$

előállítás, amelyben $A$ négyzetes maradék mod $4d$, azaz mindenesetre

$$\left(\frac{A}{p}\right)=1 \quad (p\mid d). \tag{43}$$

Ha $\alpha$, $\beta$ egész számok az $R(i)$ testben, és $(\alpha, \beta) = 1$, akkor legyen

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{N\alpha}{\beta}\right)_4 \left(\frac{N\beta}{\alpha}\right)_4^{-1}. \tag{44}$$

Ebből az értelmezésből folynak a következők:

$$(\alpha, \beta)_4 = (\beta, \alpha)_4^{-1}, \tag{45}$$

$$(\alpha\beta, \gamma)_4 = (\alpha, \gamma)_4 (\beta, \gamma)_4, \ (\alpha, \beta\gamma)_4 = (\alpha, \beta)_4 (\alpha, \gamma)_4. \tag{46}$$

Bebizonyítom, hogy ha $\alpha$ primér (azaz $(1+i)^3 \mid \alpha - 1$) vagy $\alpha$ egy primér számnak s egy $(1+i)^e$ hatványnak szorzata, továbbá $\beta$ primér, akkor

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{\alpha'}{\beta}\right), \tag{47}$$

ahol «'» a konjugáltat jelenti $R(i)$-ben. (Természetesen $(\alpha, \beta) = 1$ értendő, különben (47) értelmetlen.)

A (47)-et (46) miatt elég törzsideál $\alpha$-ra bizonyítani, egyébként más esetben (47)-et nem is fogjuk használni.

Ha $\alpha = 1 + i$, akkor az értelmezések s alaptulajdonságok szerint:

$$(1+i, \beta)_4 = \left(\frac{2}{\beta}\right)_4 \left(\frac{N\beta}{1+i}\right)_4^{-1} = \left(\frac{2}{\beta}\right)_4 i^{-\frac{N\beta-1}{4}} = \left(\frac{2}{\beta}\right)_4 \left(\frac{-i}{\beta}\right)_4 =$$

$$= \left(\frac{-2i}{\beta}\right)_4 = \left(\frac{(1-i)^2}{\beta}\right)_4 = \left(\frac{1-i}{\beta}\right).$$

Ebben az esetben tehát helyes (47).

Ha $\alpha$ törzsideál $R(i)$-ben és $\alpha \nmid 2$, akkor a 4-edfokú reciprocitástétel szerint (l. [5] alatt 106. o.)

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{N\alpha}{\beta}\right)_4 \left(\frac{N\beta}{\alpha}\right)_4^{1} = \left(\frac{N\alpha}{\beta}\right)_4 \left(\frac{\alpha}{N\beta}\right)_4^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 \left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)_4 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4^{-1} \left(\frac{\alpha}{\beta'}\right)_4^{-1}.$$

Itt az első s harmadik tényező szorzata 1, a másik két tényező egyenlő, s ebből következik (47).

Mármost (42)-ben $A$ és $B$ előjelét úgy határozzuk meg, hogy

$$\delta = A + Bi \tag{48}$$

vagy $\gamma$-val vagy $(1+i)\gamma$-val legyen egyenlő, megfelelőleg a $2 \nmid d$, illetőleg $2 \mid d$ eseteknek, ahol mindkét esetben $\gamma$ primér egész

szám $R(i)$-ben. Az $A$, $B$ ilyen választása mellett (43) érvényben marad. Az $A$ előjelének változása ott ugyanis csak a 2 törzsszámot érinthetné, a $2 \mid d$ esetben. Ekkor $(1+i)^3 \mid \gamma - 1$ miatt $4 \mid (1+i)\gamma - (1+i)$, azaz $4 \mid \delta - (1+i)$ s így (48) miatt $A \equiv 1 \pmod 4$. E szerint $A$ előjelét (48)-nál épp úgy választottuk, hogy (43) $p=2$-re is érvényes legyen (természetesen ekkor egyszersmind $A \equiv 1 \pmod 8$).

Jelentse $\pi$ a $\delta$-nak egyik törzsideáltényezőjét, mégpedig legyen vagy $\pi = 1+i$ vagy $\pi$ primér. Legyen továbbá

$$\delta = \pi^e \beta, \tag{49}$$

ahol $e$ pozitív egész, $\beta$ egész, relatív prím $\pi$-hez. Célunk most a $(\pi, \beta)_4$ jelt kiszámítani.

Legyen ehhez racionális (egész) $a, b, x, y, X, Y$ értékekkel

$$\gamma = a + bi, \tag{50}$$

$$\pi = x + yi, \tag{51}$$

$$\frac{\gamma}{\pi} = X + Yi, \tag{52}$$

amelyek közül az utolsó csupán $\pi \nmid 2$ mellett értendő.

Legyen *először* $\pi \nmid 2$. Legyen továbbá $\alpha$ értelmezve

$$\gamma = \pi^e \alpha \tag{53}$$

által. Akkor $(\pi, \alpha)_4 = (\alpha, \pi)_4^{-1}$-re (47)-et alkalmazva:

$$(\pi, \alpha)_4 = \left(\frac{\alpha'}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi'^{\,e-1}\alpha}{\pi}\right)\left(\frac{\pi'}{\pi}\right)^{e-1}. \tag{54}$$

A második tényezőre nézve (51) szerint

$$\left(\frac{\pi'}{\pi}\right) = \left(\frac{x-yi}{x+yi}\right) = \left(\frac{2x}{x+yi}\right). \tag{55}$$

Itt azonban

$$\left(\frac{x}{x+yi}\right) = 1, \tag{56}$$

mert ha $p$ a $\pi$-vel osztható törzsszámot jelenti, akkor $p = x^2 + y^2$ miatt, s mert $\pi$ primér volta miatt $x$ páratlan, $1 = \left(\frac{p}{x}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)$,

amely utóbbi nem egyéb, mint (56) baloldala. Az (56) miatt (55)-ből nyilván

$$\left(\frac{\pi'}{\pi}\right)=\left(\frac{2}{p}\right). \tag{57}$$

Az (54)-ben szereplő első tényező (51), (52), (53) miatt a következő:

$$\left(\frac{X-Yi}{x+yi}\right)=\left(\frac{xX-xYi}{x+yi}\right),$$

ahol ismét alkalmaztuk (56)-ot. Itt a «számlálóhoz» a nevező $Yi$-szeresét adva ezt nyerjük:

$$\left(\frac{xX-yY}{x+yi}\right).$$

Itt a nevező helyett ismét $p$ írható, a számláló értéke (50), (51), (52) szerint $a$. Ezt s (57)-et (54)-ben figyelembevéve:

$$(\pi, \alpha)_4=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^{e-1}. \tag{58}$$

Ha most $2\nmid d$, akkor $\delta=\gamma$, továbbá (49) s (53) szerint $\beta=\alpha$, valamint (48) s (50) szerint $A=a$. Most felhasználhatjuk (43)-at, ami miatt (58) jobboldalának első tényezője 1, s így (58)-ból következik

$$(\pi, \beta)_4=\left(\frac{2}{p}\right)^{e-1}, \tag{59}$$

ahol — ismétlem — $p$ a $\pi$-vel osztható törzsszám.

Ha pedig $2\mid d$, akkor $\delta=(1+i)\gamma$ s így (49), (53) szerint $\beta=(1+i)\alpha$. Ezért s (46) miatt

$$(\pi, \beta)_4=(\pi, (1+i)\alpha)_4=(\pi, 1+i)_4\,(\pi, \alpha)_4. \tag{60}$$

Itt az első tényező helyett $(1+i, \pi)_4^{-1}$ vehető, amire (47)-et s a második tényezőre (58)-at alkalmazva, a következőt nyerjük:

$$(\pi, \beta)_4=\left(\frac{1-i}{\pi}\right)\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^{e-1}. \tag{61}$$

A középső tényező ismét $\pi$ nevezővel írható s akkor a két első tényező szorzata

$$\left(\frac{a-ai}{\pi}\right).$$

Minthogy $\pi \mid \gamma$, azért (50)-ből $-ai \equiv -b \pmod{\pi}$, s így az utóbbi jel ismét $p$ nevezővel átmegy a következőbe:

$$\left(\frac{a-b}{p}\right).$$

Minthogy most $\delta = (1+i)\gamma$, ezért (48) (50) szerint $A = a - b$, s így az iménti jel értéke (43) miatt 1. E szerint (61)-ből most is előáll (59).

Legyen *másodszor* $\pi = 1+i$, Akkor $2 \mid d$, $\delta = (1+i)\gamma$ és (49) szerint $e = 1$, $\beta = \gamma$. E szerint most (47) alkalmazásával

$$(\pi, \beta)_4 = (1+i, \gamma)_4 = \left(\frac{1-i}{\gamma}\right).$$

Ennek értéke (50) szerint (l. [5] alatt 96. o.)

$$(-1)^{\frac{a-b-1}{4}}.$$

Mint az imént láttuk ($2 \mid d$ mellett mindig) $A = a - b$, továbbá (43) miatt $A \equiv 1 \pmod 8$, s így ez a hatvány egyenlő 1-gyel. Azaz tehát $(\pi, \beta)_4 - 1$. Minthogy most $e = 1$, azért látjuk, hogy (59) ismét, tehát korlátlanul érvényes.

Érvényes az (59) következő általánosítása:

**5.** *Tétel. Legyen $d$ megengedhető s $d = Pg$ a $d$-nek tetszésszerinti felbontása pozitív egész relatív prím $P$, $g$ tényezőkre. Legyen $P = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_l^{a_l}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_l$ a $P$ különböző racionális törzstényezői, $a_k$ ($k = 1, 2, \ldots, l$) pozitív egész számok és legyen $P_0 = p_1 p_2 \ldots p_l$. Legyenek a $d = A^2 + B^2$ előállításban $A$, $B$ relatív prím racionális egész számok, $A + Bi$ primér vagy egy primér szám $(1+i)$-szerese és $\left(\frac{A}{p}\right) = 1$ $(p \mid d)$; az $A$, $B$ választhatók például úgy, hogy $|A|, |B|$ a $d$* Pell*-féle bázisa. Legyen továbbá $\delta = A + Bi$, $\pi_k = (p_k, \delta)$ ($k = 1, 2, \ldots, l$), $\gamma = (g, \delta)$. Akkor fennáll a következő összefüggés:*

$$\left(\frac{P_0}{\gamma}\right)_4^{-1} \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{gPP_0^{-a_k}}{\pi_k}\right)_4 = \left(\frac{2}{PP_0^{-1}}\right). \tag{62}$$

Megjegyzés. Megegyezünk abban, hogy $\left(\frac{x}{y}\right)_4 = \left(\frac{xz^4}{y}\right)_4$, ahol $x$, $y$, $z$ az $R(i)$ számai, miáltal az $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ értelme tört $x$-re is

kiterjeszthető, azaz a hatványmaradékjelt a szokásos multiplikativ értelemben fogjuk fel. Így értendő már (62) is. Azt is látjuk, hogy a (62)-beli második számláló $\pi_k$-hoz relatív prím. Könnyű látni, hogy $2 \nmid d$ mellett $B$ előjele közömbös.

Bizonyítás. Válasszuk a jelöléseket úgy, mint a tételben. Alkalmazzuk (59)-et a $\pi = \pi_k$ esetre, amikor tehát (49) szerint $e = a_k$:

$$\beta = \gamma \prod_{j=1}^{l}{}' \pi_j^{a_j}$$

ahol a «'» vessző a $j = k$ érték kihagyását jelenti. Hogy ennek az alkalmazásnak semmi akadálya ne legyen, reprezentálhatjuk $\pi_k$-t egy primér számmal, illetve $1+i$-vel, valamint $\gamma$-t is ilyen számok szorzatával, ami (62) fennállását nyilvánvalóan nem érinti. Az (59) baloldalára mindjárt (46)-ot alkalmazva a következőt nyerjük:

$$(\pi_k, \gamma)_4 \prod_{j=1}^{l} (\pi_k, \pi_j)_4^{a_j} = \left(\frac{2}{p_k^{a_k - 1}}\right),$$

ahol megegyezünk abban, hogy $(x, x)_4 = 1$ értendő. A $k = 1, 2, \ldots, l$ értékekre való szorzással (46) szerint előáll

$$(\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_l, \gamma)_4 \prod_{j,k=1}^{l} (\pi_k, \pi_j)_4^{a_j} = \left(\frac{2}{PP_0^{-1}}\right).$$

Erre alkalmazzuk (44)-et. Ezt tehetjük az $(x, x)_4$ alakú tényezőkkel is, ami által jóllehet fellépnek bizonyos $y.y^{-1}$ alakú szorzatok, amelyekben $y$ értelmetlen, ezek azonban később csakhamar maguktól kiesnek, egyezésben azzal, hogy mindenkor $(x, x)_4 = 1$:

$$\left(\frac{P_0}{\gamma}\right)_4 \left(\frac{g}{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_l}\right)_4^{-1} \prod_{j,k=1}^{l} \left(\frac{p_k}{\pi_j}\right)_4^{a_j} \prod_{j,k=1}^{l} \left(\frac{p_j}{\pi_k}\right)_4^{-a_j} = \left(\frac{2}{PP_0^{-1}}\right).$$

Az első szorzatban először $k$ szerint, a másodikban először $j$ szerint szorozva:

$$\left(\frac{P_0}{\gamma}\right)_4 \left(\frac{g}{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_l}\right)_4^{-1} \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{P_0}{\pi_j}\right)_4^{a_j} \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{P}{\pi_k}\right)_4^{-1} = \left(\frac{2}{PP_0^{-1}}\right).$$

Ha az első szorzatban $j$ helyett $k$-t írunk, majd a reciprokra térünk át, akkor éppen (62)-t nyerjük, amivel a tételt bebizonyítottuk.

Az 5. tételnek inkább csak átmeneti jelentőséget tulajdonítunk, mert mint mondottuk, célunk olyan feltételeket keresni, amelyek a $d$ törzstényezői által kifejezettek. Jóllehet a (62)-ben is csupán a $d$ törzsideáltényezői (az $R(i)$ testben) szerepelnek, de hogy a konjugáltak közül mindenkor melyik törzstényező veendő, az függ az ott alapulvett $d = A^2 + B^2$ előállítástól. Ha azonban az 5. tételbeli $d = Pg$ felbontást alkalmasan választjuk, megeshetik, hogy a (62)-ben $(=)_4$ jelekről $(-)_4$ jelekre térhetünk át, mégpedig akkor, ha ott a baloldal olyan

$$\left(\frac{x}{\pi^a}\right)_4^{\pm 1} = \left(\frac{x^a}{\pi}\right)_4^{\pm 1}$$

tényezők szorzataként írható, amelyek mindegyike valós ($x$ racionális egész, $a$ pozitív egész, $\pi$ törzsideál $R(i)$-ben). Ilyenkor ugyanis ama tényezők helyett rendre

$$\left(\frac{x^a}{p}\right)_4$$

írható, ahol $\pi \mid p$. A (62)-ből így előálló feltételek többé a fent mondott irányban semmi kívánnivalót nem hagynak majd maguk után.

Mielőtt a most vázolt utat követnénk, a következőt kívánom megjegyezni. A (62) egyenleteket az (59) egyenletekből nyertük s viszont ezek megvannak azok között. Mégpedig, mint láttuk, minden egyenlet (62) alatt mint néhány (59) alatti egyenlet szorzata állt elő. Az imént bejelentett áttérés a (62)-ből elő fog állítani egy egyenletcsoportot, amit egy pillanatra (62)′-vel jelölök (ez természetesen esetleg kevesebb egyenletből fog állni, mint (62)). Hasonlóan beszélhetünk (59)′-ről is. Mármost, mint mondottam, bár (59)-ből következik (62), mégis lehetséges, hogy (59)′-ből nem következtethető (62)′, azaz utóbbi lényegesen több az előbbinél. (Sőt fennforoghat bizonyos $d$-k mellett az az eset, hogy (59)′ «üres», azaz a mondott átmenet (59) egyik egyenletén sem végezhető el, míg ugyanakkor (62)′ nem üres.) Ez azt jelenti, hogy lényeges lépés volt az (59)-ről a (62)-re következ-

tetni. Egészen hasonló meggondolásból látható, hogy hasonló veszteséget szenvednénk végkövetkeztetéseinkben, ha csupán $m$, $mp^2$ ($m$ négyzetmentes, $p \nmid m$, $p \neq 2$) alakú $d$-ket vontunk volna jelen §-ban tárgyalás alá, amely korlátozás pedig az 1. és 2. tételek alapján indokoltnak látszik. Mindezek maradéktalan megvilágításához később példát fogok bemutatni.

Ezekután bebizonyítom a következőt:

6. *Tétel. Legyen $d$ megengedhető és $d = PQ$ a $d$-nek egy tetszésszerinti felbontása két pozitiv egész relatív prím tényezőre. Jelentse $P_1$ és $P_2$ a $P$ ama különböző racionális törzstényezőinek szorzatát, amelyek $P$-ben pár tlan, illetve páros hatványon fordulnak elő s hasonlót jelentsenek $Q_1$ és $Q_2$ a $Q$-ra nézve. Akkor érvényes a következő: Valahányszor*

$$\left(\left(\frac{P_1P_2}{Q_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_1Q_1}{P_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_2Q_1}{P_1}\right)\right) = 1, \tag{63}$$

*akkor mindig*

$$\left(\frac{P_1P_2}{Q_1}\right)_4 \left(\frac{P_1Q_1}{P_2}\right)_4 \left(\frac{P_2Q_1}{P_1}\right)_4 = \left(\frac{2P_1}{P_2}\right). \tag{64}$$

Használjuk ugyanis ennek a tételnek a jelöléseit és legyen (63) érvényes. Alkalmazzuk továbbá az itt megadott $d = PQ$ felbontásra (62)-őt. Az ottani $P_0$, $g$ helyébe most $P_1P_2$, $Q$ lépnek, azaz ezt nyerjük:

$$\left(\frac{P_1P_2}{\gamma}\right)_4^{-1} \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{QP(P_1P_1)^{-a_k}}{\pi_k}\right)_4 = \left(\frac{2}{P(P_1P_2)^{-1}}\right), \tag{65}$$

ahol most $N\gamma = Q$, $\gamma$ egész ideál az $R(i)$-ben konjugált törzsideáltényezők nélkül, míg $\pi_k$, $a_k$ ($k = 1, 2, \ldots, l$) jelentése hasonló, mint az 5. tételben.

Jelentse egy pillanatra $\pi$ a $\gamma$-nak egyik törzstényezőjét $R(i)$-ben és legyen $\pi^e \| \gamma$. A (65) első tényezője (a $-1$ kitevőtől eltekintve) az összes

$$\left(\frac{P_1P_2}{\pi^e}\right)_4$$

szorzata. Ha $e$ páratlan, azaz $\pi \mid Q_1$, akkor ebben a hatványmaradékjelben (63) első része miatt $\pi$ helyébe $N\pi$ írható, ugyan-

ekkor $(=)_4$ helyett $(-)_4$ jelt írva. Páros $e$ esetében ugyanez tehető, ha megegyezünk abban, hogy $\left(\frac{x}{p}\right) = -1$ mellett is $\left(\frac{x}{p^2}\right)_4 = \left(\frac{x^2}{p}\right)_4$ legyen. Eszerint ama belső tényezőben $\gamma$ helyett $N\gamma = Q$ írható, természetesen most már $(-)_4$ jellel, ha ennek a jelnek értelmét még az $\left(\frac{x}{yz}\right)_4 = \left(\frac{x}{y}\right)_4 \left(\frac{x}{z}\right)_4$ $((y, z) = 1)$ multiplikatív sajátság által biztosítjuk.

A (63) második és harmadik része alapján hasonló végezhető a (65) baloldalának többi tényezőjével, mert ezeknek számlálója $\pi_k \mid P_2$ illetőleg $\pi_k \mid P_1$ mellett, amikor megfelelőleg $2 \mid a_k$ illetőleg $2 \nmid a_k$, teljesnégyzet tényezőtől eltekintve $P_1 Q_1$ illetőleg $P_2 Q_1$-be vihető et.

A (65)-ből tehát ez következik:

$$\left(\frac{P_1 P_2}{Q}\right)_4 \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{QP(P_1P_2)^{-a_k}}{p_k}\right)_4 = \left(\frac{2}{P(P_1P_2)^{-1}}\right), \qquad (66)$$

ahol az első tényező $-1$ kitevőjét most már elhagyhattuk, mert ama tényező értéke $\pm 1$, továbbá $p_k = N\pi_k$ értendő. (Egyszersmind látjuk, hogy (63) nemcsak elégséges, de szükséges feltétel is ahhoz, hogy (62) a fenti átalakítást megengedje.)

A (66)-ot egyszerűbben írhatjuk. A jobboldali nevező a teljesnégyzet tényezők elhagyásával $P_2$-vel helyettesíthető. A szorzatjel alatt megmaradó részt a számláló 4-ik hatvány tényezőinek elhagyásával átalakítjuk. Hogy ezt tehessük, $n_e$-vel $(e = 1, 2, 3, 4)$ jelölöm a $P$ ama különböző $p_k$ törzstényezőinek szorzatát, amelyekre $a_k \equiv e \pmod 4$. Akkor 4-ik hatvány tényezők elhagyásával $P$ helyett $n_1 n_2^2 n_3^3$ vehető, továbbá $P_1 = n_1 n_3$, $P_2 = n_2 n_4$. Ugyanekkor tehát (66)-ban $a_k$ helyébe mindenkor a megfelelő $e$ írható, s egyben összeszorozzuk az egyugyanazon $e$-hez tartozó tényezőket. Végül még $Q$ helyett $Q_1 m^2$-et írunk, ahol $m$ pozitív egész szám, s így (66)-ból a következőt nyerjük:

$$\left(\frac{n_1 n_2 n_3 n_4}{Q_1 m^2}\right)_4 \prod_{e=1}^{4} \left(\frac{Q_2 m^2 n_1 n_2^2 n_3^3 (n_1 n_2 n_3 n_4)^{-e}}{n_e}\right)_4 = \left(\frac{2}{P_2}\right).$$

Látjuk, hogy a négyzetes reciprocitástétel szerint $m^2$ törölhető, s így a baloldal

$$\left(\frac{n_1 n_2 n_3 n_4}{Q_1}\right)_4 \left(\frac{n_2 n_3^2 n_4^3}{n_1}\right)_4 \left(\frac{n_1^3 n_3 n_4^2}{n_2}\right)_4 \left(\frac{n_1^2 n_2^3 n_4}{n_3}\right)_4 \left(\frac{n_1 n_2^2 n_3^3}{n_4}\right)_4.$$

Ez $n_1 n_3 = P_1$, $n_2 n_4 = P_2$ miatt a (66) baloldalától csupán az

$$\left(\frac{n_3 n_4}{n_1}\right)\left(\frac{n_1 n_4}{n_2}\right)\left(\frac{n_1 n_2}{n_3}\right)\left(\frac{n_2 n_3}{n_4}\right)$$

tényezőben tér el, ami azonban a négyzetes reciprocitástétel szerint egyenlő a következővel:

$$\left(\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4}\right) = \left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

Minthogy a fenti egyenletnek és a (66)-nak jobboldalai egymástól ugyanebben a tényezőben térnek el, bebizonyítottuk a 6. tételt.

Mint láttuk, a (62) egyenletekből álltak elő a (64) egyenletek, amelyeknek a (63) feltételek mellett fenn kell állniuk. Ugyanez az út (59)-re alkalmazva egy olyan rendszerhez vezetett volna, ami (64)-ből mindazokat az egyenleteket tartalmazza, amelyekben $P_1 P_2$ törzszám. Ha most például $d = p_1 p_2 p_3 p_4$, ahol $p_1, p_2, p_3, p_4$ olyan különböző páratlan törzsszámok, amelyek egymásnak négyzetes nemmaradékai, akkor azonnal látjuk, hogy a (64)-ben egyetlen olyan egyenlet sem szerepel, amelyben $P_1 P_2$ törzsszám. Minthogy ugyanis $d$ négyzetmentes, most $P_2 = Q_2 = 1$, $P_1 Q_1 = d$, ha tehát $P_1$ törzsszám, akkor a (63) feltétel nem áll fenn. Ellenben a teljes (64) rendszer nem üres, minthogy (63) például $P_1 = p_1 p_2$, $Q_1 = p_3 p_4$ mellett fennáll. Mégpedig (64)-nek a megfelelő egyenlete láthatólag nem olyan, ami azonosan kielégülne. Ezzel a példával megmutattuk, hogy az (59)-ről (62)-re való áttérés nem volt felesleges lépés.

Természetesen a (64) egyenletek általában nem függetlenek egymástól, amiről később még szólunk.

## 5. §.

A 4. és 6. tételekből a $d$ megengedhető voltára vonatkozó feltételeket fogok most összeállítani. Hogy ezt rövidebben tehessem, megállapodok a következőkben:

Legyen $e$ és $f$ a $d$ ama különböző törzstényezőinek szorzata, amelyek $d$-ben páratlan, illetőleg páros hatványon szerepelnek. (Akkor $e>1$, $2\dagger f$.) Egy $a, b$ számpárt $d$-felbontásnak nevezek, ha $a, b$ a $d$-nek pozitív racionális osztói és a $ab = e$. Az $a, b$ és $b, a$ $d$-felbontásokat nem különbözőknek nevezem.

Egy $a, b, c$ számhármast kiegészített $d$-felbontásnak nevezek, ha $a, b$ egy $d$-felbontás és $c$ az $f$-nek pozitív racionális osztója, ismét figyelmen kívül hagyva az $a$ és $b$ sorrendjét. Az $a, b, 1$ kiegészített $d$-felbontást azonosítom az $a, b$ $d$-felbontással. Ha félreértéstől nem kell tartani, elhagyom a «kiegészített» kitételt, ezzel szemben, ha szükséges, a többi $d$-felbontást közönségesnek nevezem.

A $d$-felbontások egy $G$ ABEL-féle csoportot alkotnak az

$$(a, b, c)\,(a_1, b_1, c_1) = (aa_1), (ba_1), (cc_1)$$

szorzási szabály szerint, ahol a jobboldali zárjelek a teljesnégyzet tényezők törlését jelentik, a baloldaliak a szokásos összefoglaló értelemben használtattak. A $G$ alcsoportja a közönséges $d$-felbontások $g$ csoportja. A $G$ typusa $(2, 2, \ldots, 2)$, egységeleme az $1, e, 1$ $(= e, 1, 1)$, amit nem valódi $d$-felbontásnak is nevezek, a többit valódinak. A $G$ és $g$ rendje $2^{\nu-1}$ és $2^{\mu-1}$, ahol $\nu$ és $\mu$ jelentik az $ef$, illetőleg $e$ törzstényezőinek számosságát.

Másodfajúnak nevezek egy $a, b, c$ $d$-felbontást, ha

$$\left(\left(\frac{ac}{b}\right)\right) = \left(\left(\frac{bc}{a}\right)\right) = \left(\left(\frac{ab}{c}\right)\right) = 1,$$

különösen tehát az $a, b\,(=a, b, 1)$ $d$-felbontás másodfajú akkor és csak akkor, ha

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \left(\left(\frac{b}{a}\right)\right) = 1.$$

Másodfajú e szerint a nem valódi $d$-felbontás is.

Bebizonyítom, hogy a másodfajú $d$-felbontások egy $G_2$ csoportot képeznek, amiből az is következik, hogy a közönséges másodfajú $d$-felbontások egy olyan $g_2$ csoportot képeznek, amely $g$-nek és $G_2$-nek metszete (Durchschnitt).

Két tetszésszerinti $d$-felbontást ugyanis a $\Delta = AB, CD, EF$; $\Delta_1 = AC, BD, EH$ alakban vehetünk fel, ahol $A, B, \ldots, H$ pozitív egész számok, $ABCD = e$, $EFH \mid f$. A belőlük összetett $d$-felbontás akkor $\Delta\Delta_1 = BC, AD, FH$. Ha mármost $\Delta$, $\Delta_1$ másodfajúak, akkor (figyelembe veendő, hogy $\left(\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 1$ és $\left(\left(\frac{x}{z}\right)\right) = 1$ együttesen ugyanazt fejezik ki, mint $\left(\left(\frac{x}{yz}\right)\right) = 1$):

$$\left(\left(\frac{ABEF}{C}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{ABEF}{D}\right)\right) = 1;$$

$$\left(\left(\frac{CDEF}{A}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{CDEF}{B}\right)\right) = 1;$$

$$\left(\left(\frac{ABCD}{E}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{ABCD}{F}\right)\right) = 1$$

és

$$\left(\left(\frac{ACEH}{B}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{ACEH}{D}\right)\right) = 1;$$

$$\left(\left(\frac{BDEH}{A}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{BDEH}{C}\right)\right) - 1;$$

$$\left(\left(\frac{ABCD}{E}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{ABCD}{H}\right)\right) = 1.$$

Hasonlóan a bebizonyítandó egyenletek így hangzanak:

$$\left(\left(\frac{BCFH}{A}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{BCFH}{D}\right)\right) = 1;$$

$$\left(\left(\frac{ADFH}{B}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{ADFH}{C}\right)\right) = 1;$$

$$\left(\left(\frac{ABCD}{F}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{ABCD}{H}\right)\right) = 1.$$

Ezt a mindössze 18 egyenletet ugyanebben a sorrendben röviden 11, 12,..., 16; 21,...; ..., 36 által jelölöm. Az 13, 23 egyenletekből $p \mid A$ mellett következik

$$\left(\frac{CDEF}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{BDEH}{p}\right) = 1.$$

Ezekből szorzással előáll

$$\left(\frac{BCFH}{p}\right) = 1,$$

ami éppen a 31 egyenlet fennállását jelenti. Hasonlóan következnek a 32, 33, 34 egyenletek rendre az 12, 22; 14, 21; 11, 24 egyenletpárokból, míg a 35, 36 egyenletek nem egyebek, mint az 16, 21 egyenletek. Az állitást ezzel bebizonyítottuk.

Érvényesek a következők:

7. *Tétel. Ha*

$$\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) = -1 \tag{67}$$

*(tehát nincs olyan $a$, $b$, $c$ kiegészített másodfajú $d$-felbontás, amelyben $c > 1$) és minden $a$, $b$ valódi másodfajú $d$-felbontásra*

$$\left(\frac{a}{b}\right)_4 = \left(\frac{b}{a}\right)_4 = -1 \tag{68}$$

*teljesül, akkor $d$ megengedhető.*

8. *Tétel. Ha van olyan $a$, $b$, $c$ másodfajú $d$-felbontás, amelyre*

$$\left(\frac{ac}{b}\right)_4 \left(\frac{bc}{a}\right)_4 \left(\frac{ab}{c}\right)_4 = -\left(\frac{2a}{c}\right) \tag{69}$$

*teljesül, akkor $d$ nem megengedhető.*

Megjegyzések. A 7. tétel természetesen úgy értendő, hogy ha fennáll (67) és nincs $a$, $b$ valódi másodfajú $d$-felbontás, akkor is megengedhető a $d$. Minthogy egy régebbi tételem szerint az $a$, $b$ valódi másodfajú $d$-felbontások hiánya éppen azt jelenti, hogy a $\sqrt{d}$ testjében a (szűkebb értelemben vett) abszolút osztálycsoportnak nincs 4-gyel osztható invariánsa, és (67) azt jelenti, hogy az $R(\sqrt{d}) = R(\sqrt{e})$ testben az $f$ törzsszámtényezői fel-

bontatlanok maradnak, azért a 7. tétellel együtt fennáll a következő:

9. *Tétel. Ha az* $R(\sqrt{d})$ *másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nincs* 4*-gyel osztható invariánsa és a* $d$ *törzstényezői közül egyik sem esik szét teljesen (azaz két különböző törzsideál szorzatára) az* $R(\sqrt{d})$*-ben, akkor* $d$ *megengedhető.*

A [3] dolgozatban szerepelni fog az az egyébként könnyen kimutatható tény, hogy (68) csak akkor teljesülhet minden $a$, $b$ valódi másodfajú $d$-felbontásra, ha ezek számossága legfeljebb 3 (azaz $g_2$ rendje legfeljebb 4) s ez az imént említett tételem szerint azt jelenti, hogy az $R(\sqrt{d})$ osztálycsoportjában legfeljebb 2 4-gyel osztható invariáns van. Röviden itt is megjegyzem, amire az említett helyen még visszatérek, hogy tehát:

A 7. tétel alkalmazhatósága megszűnik, ha az $R(\sqrt{d})$ test abszolút osztálycsoportjában legalább 3 4-gyel osztható invariáns van. (Hogy ez a 7. tétel alkalmazhatóságára kellemetlen eset elég ritka, arról ott ugyancsak szó lesz.)

Mint láttuk, a (64) egyenletek nem egyebek, mint a (62) egyenletek, ezek pedig az (59) egyenletekből szorzás által álltak elő. Viszont a (69) teljesülése nem mást fejez ki, mint a (64) nem teljesülését (csupán más jelöléssel). Látható ebből, de közvetlenül is könnyen igazolható, hogy (69)-et elegendő a $G_2$ csoport egyik bázisára megvizsgálni, mert ha egy ilyen bázis egyik elemére sem áll fenn (69), akkor hasonló mondható a $G_2$ minden eleméről.

A 7. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy $\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right)=-1$ és hogy minden $a$, $b$ valódi másodfajú $d$-felbontásra (68) fennáll s ennek dacára $d$ mégsem megengedhető. Akkor tehát (a 4. tétel jelöléseivel) fennállnak különösen (37) és (38), továbbá $P_1P_2=e$ és $Q_1Q_2$ összes különböző törzstényezői megegyeznek $f$ törzstényezőivel. Nem lehet $P_1=1$, mert akkor $P_2=e$ s úgy (37) első egyenlete miatt kell, hogy $Q_1=1$ legyen, holott $P_1Q_1>1$. Hasonlóan következik, hogy $P_2\neq 1$. A $P_1,P_2$ tehát valódi $d$-felbontás, továbbá másodfajú, mert (37)-ből következik

$$\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right)=\left(\left(\frac{P_1}{J_2}\right)\right)=1.$$

A (38) azonban ellentmond (68)-nak s ezzel a 7. tételt bebizonyítottuk.

A 8. tétel láthatóan nem egyéb, mint a 6. tétel megfordítása, minthogy az ottani $P_1$, $Q_1$, $P_2$ éppen megfelel a $d$-felbontás értelmezésének.

Látjuk, hogy a 7. tételt úgy is nyerhettük volna, hogy először ugyanezt a tételt $m$ és $mp^2$ alakú $d$-kre vezetjük le, ahol $m$ négyzetmentes pozitív egész szám és $p \nmid m$, azután az 1. és 2. tételeket alkalmazzuk. Ez azonban a tárgyalásban semmi rövidülést nem jelentett volna s egyébként is a 4. tételt teljes általánosságban kívántuk nyerni. Hasonlóan a 8. tételt elég lett volna egyelőre csupán $mn^2$ alakú $d$-kre megállapítani, ahol $m$, $n$ relatív prím négyzetmentes pozitív egész számok ($n \geqq 1$), s azután az 1. tételt alkalmazni, de ez sem jelentett volna számbavehető megtakarítást. Hogy azonban a 8. tétel bizonyítását nem rendezhettük volna be hasonlóan, mint azt most a 7. tételről mondtuk, azt most egy példával megvilágítom (v. ö. a bevezetéssel). Máskép szólva, azt fogom megmutatni, hogy a 8. tételnek $m$ és $mp^2$ alakú $d$-kre vonatkozó részéből nem lehet az 1. és 2. tételek alapján következtetni a teljes 8. tételre ($m$ és $p$ jelentése mint fentebb).

Legyen ugyanis például $d=pqr^2s^2$, ahol $p$, $q$, $r$, $s$ különböző páratlan törzsszámok, amik egymásnak páronként négyzetes nemmaradékai, a $p$, $q$ pár kivételével, amelyre $\left(\frac{p}{q}\right)=1$. Továbbá legyen

$$\left(\frac{p}{q}\right)_4=\left(\frac{q}{p}\right)_4=1 \tag{70}$$

és

$$\left(\frac{pq}{rs}\right)_4\left(\frac{rs}{pq}\right)_4=-\left(\frac{2}{rs}\right). \tag{71}$$

Hogy mindezek a feltételek, mitöbb, végtelen sokszor kielégíthetők, az az $R(i)$ testre vonatkozó DIRICHLET-féle számtani haladvány tételből s a 4-edfokú reciprocitástételből könnyen következik. Most 1, $pq$, $rs$ másodfajú $d$-felbontás s így (71) miatt a 8. tételből következik, hogy $d$ nem megengedhető. Ha azonban a $d=pq$, $pqr^2$, $pqs^2$ számokat tekintjük, azt tapasztaljuk, hogy

egyikre sem tartalmaz a 8. tétel semmi kijelentést. (Hasonló igaz most a 7. tételről, úgyhogy most az utóbb nevezett $d$-knek a viselkedése teljesen felderítetlen marad.) Ugyanis $d=pq$ mellett $p, q\ (=p, q, 1)$ az egyetlen valódi másodfajú $d$-felbontás, ránézve azonban (70) miatt (69) nem teljesül. Szószerint ez igaz $d=pqr^2$-ről és szimmetriaokokból $d=pqs^2$-ről is. Ezzel kimutattuk, amit kívántunk.

Még egy megjegyzés álljon itt a 7., 8. tételek alkalmazhatóságáról. A $d$-t a $p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k}$ alakban gondolom írva, ahol $p_1<p_2<\cdots<p_k$ és $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitív egészek. Az $a_1, \ldots, a_k$; $\left(\frac{p_m}{p_n}\right)$ $(1\leqq m<n\leqq k)$ értékrendszert a $d$ típusának nevezem. Akkor érvényes a következő: Minden típusnál átlagban legalább az esetek felében a 7., 8. tételek segítségével eldönthető, hogy $d$ megengedhető-e vagy nem. Úgy értem ezt, hogy $x_1$-gyel jelölve az $x$ alatt levő egy bizonyos típusú $d$-k számosságát s $x_2$-vel jelölve ezek közül azoknak a $d$-knek számosságát, amelyeknek megengedhető, illetőleg nem megengedhető volta a 7., 8. tételek alapján eldönthető, minden típusra fennáll a következő:

$$\liminf \frac{x_2}{x_1}\geqq\frac{1}{2}\quad (x\to\infty).$$

Megjegyzem, hogy ennél jelentékenyen több is igaz, amely kérdésre más alkalommal vissza akarok térni s ezért az itteni állítást most csak vázlatosan bizonyítom.

Mindenekelőtt fennáll a következő: Ha $\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right)\neq -1$, akkor van legalább egy valódi másodfajú $d$-felbontás.

A bizonyítás egy előbbi dolgozatomra[6] támaszkodva nyerhető. Elég természetesen azzal az esettel foglalkozni, amikor nincs $a, b$ (egyszerű) valódi másodfajú $d$-felbontás, mert különben ez az állítás máris igaz. Ez a [6] dolgozat nyelvén azt jelenti, hogy nincs valódi másodfajú «$D$-felbontás», ahol most $D=e$ vagy $4e$ értendő a szerint, amint $e$ (s vele együtt) $d$ páratlan vagy páros. Ez ismét azt jelenti, hogy az ottani $M_D$ matrix

[6] RÉDEI L.: A másodfokú számtest egyik tételének új bizonyítása ez az Ért., 50 (1934), 219—228.

oszlopaiból képezhető egyetlen «nem független» halmaz az üres halmaz. Másrészt legyen $p$ az $f$-nek egyik olyan törzstényezője, amelyre $\left(\frac{e}{p}\right) = 1$ teljesül, amely $p\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) \neq -1$ miatt létezik. Függesszük az $M_D$ matrixhoz utolsó oszlopul a $\left(\frac{p}{p_k}\right)$ $(k=1, 2, \ldots, t)$ elemeket, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_t$ az ottani jelentéssel bírnak (ezek tehát a $D$ különböző törzstényezői, az ott adott sorrendben). Az így előállott $M$ négyzetes matrix összes soraiból álló halmaz nyilvánvalóan «nem független» s így ama dolgozat 7. pontjának alkalmazásával következik, hogy az $M$ matrix oszlopaiból is képezhető egy, az üres halmaztól különböző «nem független» halmaz. Ez a halmaz a fentiek miatt biztosan tartalmazza az utolsó oszlopot (mert különben ez a halmaz része lenne $M_D$-nek is). A nyert tény könnyen láthatólag éppen azt jelenti, hogy van egy $a, b, p$ alakú (valódi) másodfajú $d$-felbontás, amint ezt állítottuk.

A most nyert tény alapján nyerjük a 7. tételből ennek következő különös esetét, amit érdemesnek tartunk külön megfogalmazni, ami egyébként szószerinti általánosítása egy (négyzetmentes $d$-kre vonatkozó) régebbi tételemnek:

**9a.** *Tétel. Ha nincs valódi másodfajú d-felbontás, akkor d megengedhető.* (Megjegyzendő, hogy ez lényegében nem más, mint a 9. tételnek egy másik alakja, amit az elmondottak alapján könnyen beláthatunk.)

Legyen most már adva egy tetszésszerinti $d$, s tekintsük vele együtt az összes olyan $d_1$ számot, amik $d$-vel hasonló típusúak; ezek minden típus mellett végtelen sokan vannak. Ha $d$-hez nincs valódi másodfajú $d$-felbontás, akkor természetesen hasonló igaz minden $d_1$-ről, s így mindnyájukra alkalmazható a 7. tétel a most említett különös esetében. Most tehát érvényes a fenti állítás (mi több, most $x_2 = x_1$). Ha pedig $d$-hez létezik egy $a, b, c$ valódi másodfajú $d$-felbontás, akkor nyilvánvalóan minden $d_1$-hez is hasonlóan viselkedik az az $a_1, b_1, c_1$ számhármas, amit úgy nyertünk $a, b, c$-ből, hogy a $d$-nek $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ törzstényezőit rendre a $d_1$-nek ugyancsak nagyság szerint rendezett törzstényezőivel helyettesítjük. Kimutatható mármost, hogy az összes ilyen $a_1, b_1, c_1$ hármasokra (asszimptotikus értelemben) az

esetek felében a (69)-hez hasonló egyenlet teljesül, amikor tehát a 8. tétel alkalmazható, amiből az állítás következik. A bizonyításnak ezt a hiányzó részét itt elintézetlenül hagyjuk. Ez hasonló eszközöket kívánna, mint amiket (71) után említettünk s a [3] dolgozatban végzendő megfontolások alapján az itteni hiány könnyen pótolható.

## 6. §.

Jelentsen most $p$ $8k+1$ alakú törzsszámot. Akkor léteznek a $2p = a^2+b^2$, $p=a^2+8\beta^2$ előállítások, ahol $a$, $b$, $a$, $\beta$ racionális egész számok, tehát alkalmas előjellel $a \equiv \pm b \pmod 8$. Tudvalevően az $a$, $b$, $a$, $\beta$ számok az $a$ és $b$ sorrendjétől s az előjelektől eltekintve $p$ által meghatározottak. EPSTEIN [4] (l. o. 248—252. o.) bebizonyította a következő tételt:

*Azok a $p$-k, amelyekre $a$ $(\equiv \pm b) \equiv \pm 3 \pmod 8$, megegyeznek azokkal, amelyekre $2+\beta$, s mindezekre $d=2p$, valamint $d=2p^2$, azaz általában $d=2p^n$ ($n$ pozitív egész) nem megengedhetők.*

Ez a tétel könnyen bizonyítható a 8. tétel alapján, a következő észrevétel segélyével: Mindenkor érvényes

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4\left(\frac{2}{p}\right)_4=\left(\frac{2}{a}\right)=(-1)^{\beta}. \tag{72}$$

Tegyük fel ugyanis, hogy (72) fennáll. Ebből máris következik a tétel első állítása. Látjuk továbbá, hogy $d=2p$ mellett 2, $p$ (azaz 2, $p$, 1), míg $d=2p^2$ mellett 2, 1, $p$ (valódi) másodfajú $d$-felbontás. Mindkettőre a (69) a

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4\left(\frac{2}{p}\right)_4=-1$$

egyenletbe megy át, ami (72) szerint a $2+\beta$ esetben teljesül. A 8. tételből tehát következik EPSTEIN tétele s így csupán (72)-őt kell még bebizonyítanunk.

Alkalmas előjellel feltehető, hogy $a \equiv b \pmod 8$. Akkor [5] (l. o. 96. o.) szerint $p=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ miatt

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4=(-1)^{\frac{a-b}{8}}.$$

Továbbá

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4 = (-1)^{\frac{p-1}{8}}. \tag{73}$$

Ki fogom mutatni, hogy a jobboldalak szorzata $\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}$, ami éppen (72) első felét bizonyítja. Ehhez csak arról kell meggyőződnünk, hogy $16 \mid a-b+p-a^2$, azaz $32 \mid 2a-2b+2p-2a^2$, vagyis $32 \mid 2a-2b+b^2-a^2$, ami $a \equiv b \pmod 8$ miatt nyilvánvaló.

A (72) második fele hasonló számítással bizonyítható, mint amit a 3. §-ban végeztünk, most a $p=a^2+8\beta^2$ egyenlet alapján. Legyen ehhez $\beta = 2^x\beta_0$, ahol $2^x \| \beta$. Akkor $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)_4 = 1$ miatt

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 = \left(\frac{8}{p}\right)_4 = \left(\frac{8\beta^2}{p}\right)_4 \left(\frac{\beta}{p}\right) = \left(\frac{-a^2}{p}\right)_4 \left(\frac{\beta_0}{p}\right) =$$
$$= \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{\beta_0}{p}\right) = \left(\frac{p}{a}\right)\left(\frac{p}{\beta_0}\right) = \left(\frac{2}{a}\right).$$

Másrészt (73) miatt

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4 = (-1)^{\frac{a^2+8\beta^2-1}{8}} = \left(\frac{2}{a}\right)(-1)^{\beta^2} = \left(\frac{2}{a}\right)(-1)^{\beta}.$$

Ezekből szorzással következik (72) második fele, egyszersmind tehát a fenti tétel.

## 7. §.

Bebizonyítom a következőt:

**10.** *Tétel. Ha $d$ egy bizonyos tetszésszerinti megengedhető szám és $t$, $u$ befutja $a$ (3) összes pozitív megoldását, $m$ befutja az összes racionális egész számokat, akkor a*

$$d_1 = d + 2tm + u^2m^2 \tag{74}$$

*számok mind megengedhetők, kivéve ha $d_1 = 1$, ami csupán a $d = 1 + B^2$, $t = B$, $u = 1$, $m = -B$ ($B$ pozitív egész) esetben lehetséges, s az összes így előállott $d_1$ számok különbözők, csupán a következő két kivétellel:* a) *a $d_1 = d$ eset előáll, ha $m = 0$ ($t$, $u$ tetszésszerinti) és ha $d = 1+B^2$, $m = -2B$, $t = B$ $u = 1$;* b) *$d = 1+B^2$ mellett minden $d_1 = 1+B_1^2 (\neq 1, d)$ eset előáll*

*kétszer, mégpedig* $t = B$, $u = 1$, $m = -B \pm B_1$ *mellett* ($B$, $B_1$ *pozitív egészek,* $B_1 \neq B$).

Megjegyzések. Hogy a (74) alatti számok mind megengedhetők az említett $d_1 = 1$ kivétellel, az közvetlenül folyik a (3)-mal együtt fennálló

$$(t + u^2m)^2 - (d + 2tm + u^2m)\,u^2 = -1 \tag{75}$$

egyenletből, de ugyancsak találkoztunk vele már a 3. tétel 6° részében, ahol azonban figyelmünket csupán a PELL-féle bázisokra fordítottuk. Az ottaniakból az is azonnal következik, hogy a $d_1 = 1$ eset csupán a 10. tételben nevezett kivételes esetben állhat be, de ez is azonnal következtethető (75)-ből, mert e szerint a $d_1 = 1$ esetben $(t + u^2m)^2 = u^2 - 1$, amiből $u = 1$, $t = -m$, $d = 1 + m^2$, nyilvánvaló egyezésben a fentiekkel.

Ezek szerint a 10. tételnek egyedüli nem triviális állítása az, hogy szilárd $d$ mellett a (74) alatti számok az ottani korlátozással mind különbözők. Ezt az állítást nem tudom hasonló egyszerűséggel bizonyítani, hanem igénybe veszem a PELL-féle bázisról bebizonyítottakat, felhasználva többek között a 3. tétel 3° részében kifejezett egyértelműséget. Ez a körülmény is hozzájárul ahhoz, hogy jogosultnak lássuk a «PELL-féle bázis» fogalom bevezetését.

Bármennyire kézenfekvő is az a tény, hogy a (74) alatti számok mind megengedhetők, tudtommal ez a figyelmet mindeddig elkerülte. Felvethető a következő általános kérdés: Melyek azok az

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{76}$$

másodfokú függvények, amelyek minden racionális egész $x$ mellett megengedhető $d$ számokat állítanak elő, esetleg közöttük az 1-et.

Erre nézve érvényes a következő: Ha az $f(x)$ diszkriminánsa $b^2 - 4ac = -4r^2 \neq 0$, továbbá a $a = r^2s^2$, ahol $r$, $s$, $b$, $c$ racionális egészek, akkor $f(x)$ a kérdezett függvények közé tartozik.

Ekkor ugyanis nyilvánvalóan $2r \mid b$ s így a

$$\left(\frac{b}{2r} + rs^2x\right)^2 - f(x).s^2 = -1$$

azonosságból folyik az állítás.

Valószínűnek látszik, hogy ezzel az összes kérdezett függvényt felsoroltuk. Mindenesetre a felsorolt függvények közé tartozik (74) is ($m$ helyett $x$-et gondolva). Hasonló igaz az $f(x)=x^2+1$, $(2x+1)^2+4$ példákról, amik tudvalevőleg ugyancsak a kérdezett függvények közé tartoznak. Ugyanez mondható a 2. § végén megadott két példámról (ezekkel ott más célom volt), ha azokban az $f=4x+1$, illetőleg $f=nx+2$ helyettesítést végezzük, valamint C. BODLUND-nak [7]

$$f(x)=\left(px+\frac{q(q^2+1)}{2p}\right)^2+2qx+\left(\frac{q^2+1}{p}\right)^2$$

példájáról, amelyben $p$, $q$ tetszésszerinti racionális egész számok a $p \mid q^2+1$, $2\nmid p$ feltételekkel. Ez utóbbi függvény discriminánsa ugyanis $-4$ (azaz $r=1$) s benne $a=p^2$.

(Fordítva könnyű látni, hogy a fent felsorolt $ax^2+bx+c$ függvények (74)-től nem különböznek lényegesen, mert azok (74)-ből az $r^2x^2+1$ esettől eltekintve mind az $m=rx$ helyettesítéssel előállnak.)

A 10. tétel bizonyítása. Csupán azt kell még kimutatnunk, hogy a (74) alatti $d_1$ számok állandó $d$ mellett mind különbözők, az ott említett *a)*, *b)* kivételekkel. Legyen tehát megadva egy megengedhető $d$ és legyen $A$, $B$ $(>0)$ az ő PELL-féle bázisa. Ismét használni fogom a 3. tétel 5° részében bevezetett $x_n$, $y_n$, $t_{2n+1}$, $u_{2n+1}$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ jeleket. A (19), (20), (21) alattiak szerint (az $a=b=0$ esetre való alkalmazással, amelynél még tekintetbe veendő, hogy most $|A|=A$, $|B|=B$):

$$(x_n^2-y_n^2).(-1)^nA-2x_ny_n.(-1)^nB=1, \tag{77}$$

$$t_{2n+1}=|(x_n^2-y_n^2)B+2x_ny_nA|, \tag{78}$$

amihez, minthogy $t_{2n+1}$, $u_{2n+1}$ a (3)-nak egyik megoldását, mégpedig az $n+1$-dik pozitív megoldást képezik, (7) szerint az

$$u_{2n+1}=x_n^2+y_n^2 \tag{79}$$

egyenlet lép.

---

[7] C. BODLUND: Ett talproblem, Elementär Mat., 17 (1934), 1—4.

A (77)-ből a 3. tétel 6° részének ($m$ helyett $(-1)^n m$-mel való) alkalmazásával következik, hogy az

$$|A + 2x_n y_n m|, \quad |B + (x_n^2 - y_n^2)\, m| \tag{80}$$

számpár PELL-féle bázis egy $d_{mn}$ számhoz, vagy ez a számpár az 1, 0, amikor jelentse $d_{mn}$ az 1-et. E szerint $d_{mn}$ mindenkor a (80) alatti számok négyzetösszege. Ezt kiszámítva az (5), (78), (79) figyelembevételével a következőt nyerjük:

$$d_{mn} = d \pm 2t_{2n+1} m + u_{2n+1}^2 m^2,$$

ahol a jobboldal középső tagjának előjele $m$-től nem függ. Mint hogy $t_{2n+1}$, $u_{2n+1}$ $n=0, 1, 2, \ldots$ mellett befutja a (3) összes különböző pozitív megoldását, azért a $d_{mn}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$) számösszeség megegyezik a (74)-beli összes $d_1$ számmal. Minthogy pedig (80) vagy a $d_{mn}$ PELL-féle bázisa, vagy az 1, 0 számpár, azért a 3. tétel 3° részében kifejezett egyértelműség miatt elegendő azt kimutatnunk, hogy a (80) számpár akkor és csak akkor egyenlő $A, B$-vel, ha $m = 0$ vagy $A = 1$ (tehát $d = 1 + B^2$), $n = 0$ (tehát $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $u_1 = 1$, $t_1 = B$), $m = -2B$, míg az összes többi esetben a (80) számpárok egymástól különbözők, kivéve $d = 1 + B^2$, $n = 0$ mellett (amikor tehát $A = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $u_1 = 1$, $t_1 = B$) olyan két $m$ értéket, amelyek egymástól s 0-tól különböznek s összegük $-2B$, amikor a két megfelelő (80)-beli számpár egyenlő.

Mindenekelőtt megvizsgáljuk, hogy a (80) számpár mikor egyenlő $A, B$-vel. Akkor kell, hogy $x_n y_n m = 0$ vagy $-A$ és $(x_n^2 - y_n^2)\, m = 0$ vagy $-2B$ legyen. Minthogy (77) miatt $x_n$, $y_n$ közül az egyik páros és $A$ páratlan, azért csak $x_n y_n m = 0$ jöhet tekintetbe. Kell tehát, hogy vagy $m = 0$ vagy $m \neq 0$ és $x_n y_n = 0$ legyen. Minthogy (77) miatt $x_n$, $y_n$ relatív prímek, azért az utóbbi esetben $x_n$ és $y_n$ közül az egyik 0 a másik $\pm 1$, amiből (79) szerint $u_{2n+1} = 1$, azaz $u = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ s tovább (78) szerint $t_1 = B$, végül a fentiekből $m = -2B$ következik. Fordítva tüstént következik, hogy a talált esetekben (80) az $A, B$ számpárba megy át, mindez egyezésben az állítással.

A (80)-ban a «| |» jel alatti számokat $a_{mn}$ ill. $b_{mn}$ jelekkel helyettesítve, feltételezem, hogy $a_{mn} = \pm a_{m'n'}$ és $b_{mn} = \pm b_{m'n'}$

($m$, $m'=\pm 1$, $\pm 2, \pm 3, \ldots$; $n$, $n'=0$, 1, 2, ...), továbbá $|a_{mn}|$, $|b_{mn}|$ ($=|a_{m'n'}|$, $|b_{m'n'}|$) $\neq A$, $B$.

Mint már említettük, $x_n y_n$ páros, tehát (80) szerint $a_{mn} \equiv A \pmod 4$. Hasonlóan $a_{m'n'} \equiv A \pmod 4$ s így $A$ páratlan volta miatt a fenti lehetőségek közül csupán $a_{mn} = a_{m'n'}$ jöhet tekintetbe. A (80) miatt tehát

$$x_n y_n m = x_{n'} y_{n'} m'. \tag{81}$$

Ugyancsak fennállnak (77) és (79) mintájára az

$$(x_{n'}^2 - y_{n'}^2).(-1)^{n'} A - 2x_{n'} y_{n'}.(-1)^{n'} B = 1, \tag{82}$$

$$u_{2n'+1} = x_{n'}^2 + y_{n'}^2 \tag{83}$$

egyenletek.

Ezután megkülönböztetem az alábbi 1., 2. eseteket:

1. $b_{mn} = b_{m'n'}$. Akkor (80) szerint

$$(x_n^2 - y_n^2)\, m = (x_{n'}^2 - y_{n'}^2)\, m'. \tag{84, 1}$$

A (77)-et $(-1)^n m$-mel s a (82)-őt $(-1)^{n'} m'$-sal szorozva, a nyert egyenletek baloldalai (81) és (84, 1) miatt egyenlők. Akkor a jobboldalak is egyenlők, azaz $m = \pm m'$. Emiatt a (81), (84, 1) egyenletekből könnyen $x_n^2 + y_n^2 = x_{n'}^2 + y_{n'}^2$, azaz (79) és (83) szerint $u_{2n+1} = u_{2n'+1}$ következik. E szerint $n = n'$ s így (84, 1) szerint $m = m'$.

2. $b_{mn} = -b_{m'n'}$. Akkor $b_{mn} + b_{m'n'} = 0$ s így (80) szerint

$$2B + (x_n^2 - y_n^2)\, m + (x_{n'}^2 - y_{n'}^2)\, m' = 0. \tag{84, 2}$$

Könnyű számítással nyerjük a (77), (81), (82), (84, 2) egyenletekből a következőket:

$$x_n y_n = -\frac{2AB + (-1)^n m + (-1)^{n'} m'}{4Bm}, \tag{85}$$

$$x_{n'} y_{n'} = -\frac{2AB + (-1)^n m + (-1)^{n'} m'}{4Bm'}, \tag{86}$$

$$x_n^2 - y_n^2 = -\frac{2AB - (-1)^{n'} m + (-1)^{n'} m'}{2Am}, \tag{87}$$

$$x_{n'}^2 - y_{n'}^2 = -\frac{2AB + (-1)^n m - (-1)^{n'} m'}{2Am'}. \tag{88}$$

Mindenekelőtt tekintem az $x_n y_n \neq 0$ esetet. Minthogy $x_n$, $y_n$ közül egyik páros, azért $|x_n y_n| \geqq 2$, $|x_n^2 - y_n^2| \geqq 3$. A (81) miatt ugyanekkor $x_{n'} y_{n'} \neq 0$ s így érvényes $|x_{n'} y_{n'}| \geqq 2$, $|x_{n'}^2 - y_{n'}^2| \geqq 3$ is.

Ha $|m| \neq |m'|$, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $|m| > |m'|$. Minthogy (85) jobboldala egész szám, azért ekkor

$$|(-1)^n m + (-1)^n m'| = 2Bq,$$

ahol $q$ pozitív egész szám. Ebből $|m| > Bq$ következik. A (85)-ből tehát $|x_n y_n| \geqq 2$ miatt $2AB + 2Bq \geqq 2.|4Bm| > 8B^2 q$, azaz $A > (4B-1)q \geqq 4B-1$ következik. Még inkább tehát

$$A > 3B.$$

Hasonlóan következik (87)-ből elébb

$$|-(-1)^n m + (-1)^{n'} m'| = 2Ar,$$

ahol $r$ pozitív egész, majd $|m| > Ar$, $|x_n^2 - y_n^2| \geqq 3$ miatt $2AB + 2Ar \geqq 3.|2Am| > 6A^2 r$, azaz $B > (3A-1)r \geqq 3A-1 \geqq 2A$. Ez ellentmond a fenti egyenlőtlenségnek, amiből tehát $|m| = |m'|$ következik.

E szerint vagy (85)-ben vagy (87)-ben a számláló $2AB$. Az előbbi eset lehetetlen, mert akkor $x_n y_n = -\frac{2AB}{4Bm} = -\frac{A}{2m}$ lenne, holott $A$ páratlan. E szerint

$$x_n y_n = -\frac{2AB \pm 2m}{4Bm} = -\frac{AB \pm m}{2Bm},\quad x_n^2 - y_n^2 = -\frac{2AB}{2Am} = -\frac{B}{m}.$$

Ezek közül az első egyenletből $B \mid m$, azaz $|m| \geqq B$ következik, ami ellentmond a második egyenletnek.

A hátralevő $x_n y_n = 0$ esetben (81) szerint egyszersmind $x_{n'} y_{n'} = 0$. Ez, mint már említettük, csupán $n = n' = 0$ mellett lehetséges, amikor $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, és (84, 2) miatt $m + m' = -2B$, valamint (77) miatt $A = 1$.

Fordítva a

$$d = 1 + B^2 (A = 1),\quad n = n' = 0,\quad m + m' = -2B\ (m, m' \neq 0,\ m \neq m')$$

esetben $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ miatt (80) szerint

$$a_{0m} = a_{0m'} = 1,\quad b_{0m} = B + m,\quad b_{0m'} = B + m' = -B - m = -b_{0m},$$

azaz a megfelelő (80) alatti számpárok egyenlők, amivel a (80) után tett megjegyzés szerint a 10. tételt bebizonyítottuk.

Megemlítem, hogy a jelenlevő § némi kapcsolatban van NAGELL egyik dolgozatával,[8] amelyben nem megengedhető $d$-számok hasonló előállításai szerepelnek.

Azt is megjegyzem, hogy a 10. tétel a következő értelemben megfordítható: Ha (74)-ben $t$, $u$ a (34)-nek bármelyik pozitív megoldása, míg $d$ bármilyen 1-nél nagyobb nem teljes négyzet racionális egész szám, akkor az $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ által előállított $d_1$ értékek között csak véges sok megengedhető szám szerepelhet.

Ez egyszerűen így következtethető: Most is fennál egy (75)-höz hasonló egyenlet, azonban $+1$ jobboldallal. E szerint $|t + u^2 m|$, $u$ megoldása az $x^2 - d_1 y^2 = 1$ egyenletnek, mégpedig nyilvánvalóan alapmegoldása még az $x^2 - d_1 y^2 = \pm 1$ egyenletnek is, hacsak $d_1$, azaz $|m|$ elég nagy.

Megjegyzések a korrektúra alkalmával. Hogy a (74) alatti számok megengedhetők, azt már J. ROMERO (Interm. Math., 9 (1902), 182) észrevette.

A (76)-nál kérdezett függvények közé tartozik

$$f(x) = 4u^2x^2 + 4tx + d$$

is, ahol $t$, $u$ most a

$$t^2 - du^2 = -4$$

egyenletnek pozitív páratlan egész számokból álló megoldása. Ezáltal módosulnak a (76) után mondottak, mert most $f(x)$ discriminánsa $-64$ s az $x^2$ együtthatója, $4u^2$ nem osztható 16-tal.

A 6. § tartalma kibővíthető, amire máskor óhajtok visszatérni.

---

[8] NAGELL: Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, Arkiv för Mat., Astr. o. Fysik, 23B/6 (1932), 1—5.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. márc. 18-án tartott ülésében.)

# ÜBER DIE PELLSCHE GLEICHUNG $t^2 - du^2 = -1$.

Von L. RÉDEI in Göttingen.

Durchwegs bedeutet $d$ eine positive ganze Zahl, die keine Quadratzahl ist, für die $-1$ ein quadratischer Rest ist. Bekanntlich ist sonst die Gleichung

$$t^2 - du^2 = -1 \tag{3}$$

in positiven ganzen Zahlen $t$, $u$ nicht lösbar. Es handelt sich um die $d$, für die diese Gleichung lösbar ist. Die Hauptergebnisse sind die folgenden:

Es werden zunächst die Sätze von P. EPSTEIN [4] mit wenigen Ergänzungen einfacher bewiesen. Ein Teil aus diesen Sätzen ist schon in meiner früheren Arbeit [2] enthalten.

Es bezeichne $e$ und $f$ das Produkt der verschiedenen Primfaktoren von $d$, die in $d$ in einer ungeraden bez. geraden Potenz aufgehen. Ich betrachte «Zahlentripel» $a$, $b$, $c$ aus positiven ganzen Zahlen, wobei $ab=e$, $c \mid f$, nie zwei von $a, b, c$ gleich 1 sind, und $\left(\frac{bc}{p}\right) = \left(\frac{ac}{q}\right) = \left(\frac{ab}{r}\right) = 1$ ist für die Primfaktoren $p, q, r$ von $a, b$ bez. $c$. Es bestehen folgende Verallgemeinerungen der Sätze der Arbeit [2].

Ist $\left(\frac{e}{p}\right) = -1$ für jeden Primzahlfaktor $p$ von $f$ und ist für jedes «Zahlentripel» $a, b, 1$ $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = \left(\frac{b}{a}\right)_4 = -1$, so ist die Gleichung (3) lösbar.

Gibt es wenigstens ein «Zahlentripel» $a, b, c$ mit

$$\left(\frac{bc}{a}\right)_4 \left(\frac{ac}{b}\right)_4 \left(\frac{ab}{c}\right)_4 = -\left(\frac{2a}{c}\right),$$

so ist die Gleichung (3) unlösbar.

In beiden Sätzen bedeutet $(\ )_4$ das rationale biquadratische Restsymbol. Mit Hilfe dieser Sätze lässt sich in einem gewissen Sinne mehr als in der Hälfte aller Fälle entscheiden, ob die Gleichung (3) lösbar ist. Aus dem ersten Satze folgt:

Gibt es keine durch 4 teilbare Invariante in der (im engeren Sinne genommenen) absoluten Klassengruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ und zerfällt in diesem Körper kein Primfaktor von $d$ voll (d. h. in zwei verschiedene Primideale), so ist (3) lösbar.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. März 1935.)

# NÉHÁNY KÖZÉPÉRTÉKKÉRDÉSRŐL MÁSODFOKÚ SZÁMTESTEKBEN.[1]

RÉDEI LÁSZLÓ-tól (Mezőtúr).

Egy előbbi dolgozatomban[2] általánosan meghatároztam a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjában a 4-gyel osztható invariánsok számosságát. Mint ott, itt is az ideálekvivalenciát «szűkebb» értelemben tekintem. Ebben a dolgozatban azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy mily gyakran várható a 4-gyel osztható invariánsok számosságának egy bizonyos tetszésszerinti értéke, és hogy mekkora ennek a számosságnak középértéke. Vizsgálataimat azonban olyan valós testekre korlátozom, amelyeknek discriminánsa nem tartalmaz $4l+3$ alakú pozitív törzstényezőt. Ezekre a testekre tudvalevőleg fennáll az alapegység normája előjelének kérdése (különben ez a norma mindig pozitív). Erre a kérdésre vonatkozik két tétel,[3] ezeket itt röviden mint «$^-$tétel» és «$^+$tétel» fogom említeni, amelyek bizonyos esetekben a test diszkriminánsából kongruenciafeltételekkel az alapegység normájának negatív, illetőleg pozitív voltára következtetnek. Ennek a dolgozatnak második feladata lesz megvizsgálni azt, hogy ezek a tételek milyen mértékben (mily gyakran) alkalmaz-

---

[1] Ezekről a kérdésekről 1934 szeptemberben Bad Pyrmontban a Deutsch. Math. Ver. 10. évgyűlésén előadást tartottam. Ez a dolgozat megjelenik a Journ. f. d. Math. c. folyóiratban is.

[2] RÉDEI L., A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, ez az Ért., 49 (1932), 338—361.

[3] RÉDEI L., A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsainak számosságáról, ez az Ért., 51 (1934), 227—254.

hatók. Ugyancsak a [3] dolgozat alapján foglalkozom a fentiekhez hasonló kérdésekkel a 8-cal osztható invariánsok számosságát illetően, azonban hasonló részletes eredmények nélkül.

Jelentse $t$ a mindenkor tekintett másodfokú számtest diszkriminánsa különböző törzstényezőinek számosságát. Vizsgálataim mindenkor egy szilárd, különben tetszésszerinti $t$ értékre fognak vonatkozni. Ez annyiban célszerű lesz, hogy ezáltal áttekintést fogunk nyerni arról, hogy hogyan alakulnak a viszonyok a különböző $t$ értékek mellett. Az így előálló részleteredményekből azonban nem tudunk hasonló olyan kijelentéseket nyerni, amelyek a $t$-re szabott korlátozástól mentesek. Ennek végső oka abban rejlik, hogy a törzsszámképlet maradéktagjáról elegendő ismereteink nincsenek.

Ha $a$ egy végtelen halmaz különböző pozitív egész számokból, akkor $a(x)$ alatt értem az $a$ mindama elemeinek számosságát, amelyek $x$-nél nem nagyobbak, ahol $x$ tetszésszerinti pozitív szám. Ha azután $f(z)$ egy olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya az $a$ halmaz elemei, akkor a

$$\lim \frac{\sum_{z \in a} f(z)}{a(x)} \qquad (x \to \infty)$$

határértéket az $f(z)$ függvénynek az $a$ halmazbeli középértékének nevezem, vagy röviden az $f(z)$ középértékének, ha az $a$ halmazra vonatkozólag semmi kétség nem forog fenn. Ha ennek a határértéknek a létezése nincs megállapítva, akkor a megfelelő alsó és felső határértéket az $f(z)$ alsó és felső középértékének nevezem.

Ha $b$ az $a$-nak részhalmaza és $f(z)$ úgy van értelmezve, hogy $f(z) = 1$ vagy $0$ a szerint, amint $z$ a $b$-nek eleme vagy nem, akkor az $f(z)$ középértékét a $b$ ($a$-ra vonatkoztatott) valószínűségének nevezem, ami tehát nem egyéb, mint a

$$\lim \frac{b(x)}{a(x)} \qquad (x \to \infty)$$

határérték.

A jelenlevő dolgozat eredményeiből előre megemlítem a következőket:

Mindenkor $e_2$, $e_4$, $e_8$ jelölje a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjában a 2-, 4-, 8-cal osztható invariánsok számosságát. Ha bárhogyan megvannak adva tetszésszerinti páros számok, akkor általában azoknak mintegy fele 4-gyel osztható. Így azt lehetne várni, hogy $e_2 = t-1$ (GAUSS tétele) miatt $e_4$ gyakran megközelíti a $\frac{t-1}{2}$ értéket. Ez azonban távolról sincs így. Mégpedig az $e_4=0$ eset valószínűsége minden $t$ mellett $> \frac{5}{12}$ és hasonló érvényes az $e_4=1$ esetről is, ha $t \geqq 6$. Mi több, az $e_4 \leqq 1$ esetek (egyesített) valószínűsége minden $t$ mellett $> \frac{5}{6}$, úgyhogy tehát $e_4 \geqq 2$ még minden 6-ik esetben sem fordul elő, ha $t \geqq 3$ (ha $t \leqq 2$, akkor $e_4 \geqq 2$ éppenséggel lehetetlen). Hasonlóan például $e_4' \geqq 5$ még minden 20,000-ik esetben sem fordul elő, bármilyen (nagy) is $t$. Mindamellett minden $t$ mellett azok az esetek, amelyekben $e_4 (=0, 1, \ldots, t-1)$ egy tetszésszerinti szilárd érték, pozitív valószínűséggel bírnak, amely növekvő $e_4$-gyel monoton csökken. Különösen annak a valószínűsége, hogy minden páros invariáns 4-gyel osztható ($e_4 = t-1$) legyen, egyenlő $\frac{1}{2^{\binom{t}{2}}}$-vel.

Mint alkalmazás megállapítható az $e_4$ középértéke, szilárd $t$ mellett. Ez a középérték bár $t$-vel maga is növekszik, mégis a 0·764... határ alatt marad. Meglepő kicsiny ez az érték, ha (ismét) meggondoljuk, hogy $e_2 = t-1$ $t$-vel együtt végtelenné válik.

Ellenben az $e_8$ «középértéke» nem mutat fel hasonló erős újabb hanyatlást. Mégpedig az $e_8$ alsó középértéke minden $t (\geqq 2)$ mellett $>0{\cdot}104$, legfeljebb $t=3$ és 5 kivételével, de akkor is ez az alsó középérték $>0{\cdot}93$, illetőleg $>0{\cdot}102$. Ez a viszonylag nagy «középérték» annak köszönhető, hogy már az $e_8=1$ eset meglehetős gyakran előfordul. Ezzel szemben az $e_8 = e_2 (=t-1)$ eset felső valószínűsége nagyon is kicsiny, mégpedig $\leqq \frac{1}{2^{t^2-1}}$, ami egyébként az $e_4 = e_2 (=t-1)$ eset említett kicsiny valószínűsége mellett várható volt. Megemlítem, hogy nem tudtam azt a kérdést eldönteni, vajjon $e_8 = e_2$ előfordul-e minden $t$ mellett.

Az alapegység normája előjelét illetően mindenekelőtt meg-

jegyzem a következőt. A $^-$tételhez DIRICHLET nyujtotta az első példákat, aki a $t=2, 3$ eseteket megvizsgálta. Először ebben a dolgozatban fog kiderülni az az egyébként arithmetikai úton előálló tény, hogy ennek a $^-$tételnek alkalmazhatósága teljesen megszűnik, mihelyt $e_4 \geqq 3$. Ehhez $e_4 \leqq e_2 = t-1$ miatt szükséges, hogy $t \geqq 4$ legyen. Az imént említett $t=2, 3$ példák tehát nagyon egyszerűek voltak ahhoz, hogy belőlük a kérdés természetébe csak közelítőleg is jó bepillantást lehetett volna nyerni.

Általában azt találjuk, hogy szilárd $t$ és $e_4 (\leq t-1)$ mellett azoknak az eseteknek valószínűsége, amelyekben a $^-$tétel alkalmazható, $e_4=0, 1, 2$ és $e_4 \geqq 3$ szerint $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}$, illetőleg 0, amelyekből az első egy régebben ismert tény ismétlése, az utolsó a fentebb említettek következménye. A $^+$tételre nézve a megfelelő valószínűség $1 - \frac{1}{2^{e_4}}$. Jóllehet ezek a valószínűségszámok alakilag csak $e_4$-től függenek, ismételten figyelmeztetek arra, hogy hibás lenne ezeket az eredményeket úgy értelmezni, mintha általuk birtokában lennénk egy olyan kijelentésnek, amely az egy szilárd $e_4$ értékkel képviselt összes esetre vonatkoznék. (Ellenben az említett eredmények helyesek akkor is, ha egy szilárd $t$ helyett az összes, egy szilárd korlát alatt lévő $t$ értékeket megengedjük.) Látjuk, hogy tehát nagy $e_4$ mellett az alapegység normája túlnyomóan pozitív, amint ezt már a [3] dolgozatban sejtettem. A maradékesetek valószínűsége, amelyekben ugyanis sem a $^-$tétel, sem a $^+$tétel nem alkalmazható, ismét szilárd $t$ és $e_4$ mellett rendre az $e_4=0, 1, 2, \ldots$ eseteknek megfelelően $0, \frac{1}{4}, \frac{7}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^{e_4}}, \ldots$ Az $e_4 = 1$ eset tehát ezeknek a tételeknek alkalmazhatóságára nézve a legkedvezőtlenebb.

Az utóbbi s az $e_4$-re vonatkozó megelőző eredményekből olyan kijelentéseket nyerünk a $^-$ és $^+$tételek alkalmazhatóságára nézve, amelyek az összes, egy tetszésszerinti szilárd $t$-vel megadott esetre vonatkoznak. Sokkal hívebben ezek a megállapítások tájékoztatnak bennünket eme tételek alkalmazhatóságáról. Belőlük itt csak a következőket említem: Minden szilárd $t$ mellett a $^-$tétel alkalmazhatóságának valószínűsége $> 0{\cdot}528\ldots$ A $^+$tételre nézve a megfelelő valószínűség $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3}$ között van,

ha $t \geqq 2$. A $^-$tétel tehát hatásosabb, jóllehet ez a tétel $e_4 \geqq 3$ mellett nem alkalmazható. Annak köszönhető ez, hogy az $e_4 \leqq 2$ esetek túlnyomók. Ami a legnagyobb érdeklődésre tarthat számot, az a következő: Minden szilárd $t$ mellett 0·139-nél kisebb azoknak az eseteknek valószínűsége, amelyekben a $^-$ és $^+$tételek nem alkalmazhatók. Ezek a tételek tehát még csak nem is minden 7-ik esetben hagyják az alapegység normája előjelének kérdését eldöntetlenül.

Ezeknek az eredményeknek alapján megközelítő választ adhatunk arra a kérdésre, hogy milyen számossági viszonyban állnak egymással azok az esetek, amelyekben az alapegység normája pozitív, illetőleg negatív. Szó van tehát ezeknek az eseteknek viszonylagos valószínűségéről. Erről NAGELL[4] induktív úton kimondotta azt a sejtést, hogy ez a relatív valószínűség létezik és értéke pozitív valódi tört. Ama korlátozás mellett, hogy csak az egy tetszésszerinti szilárd $t$-hez tartozó eseteket tekintjük, a NAGELL-féle sejtés abban az értelemben igazolható, mégpedig bizonyos tekintetben élesebb alakban, hogy jóllehet a végzett korlátozás mellett sem derül ki a megfelelő viszonylagos valószínűség létezése, megadható azonban a $t$-nek két $f_1(t)$, $f_2(t)$ függvénye úgy, hogy a megfelelő alsó és felső viszonylagos valószínűségek $f_1(t)$ és $f_2(t)$ közé esnek, ahol minden $t(\geqq 2)$ mellett $0<f_1(t)<f_2(t)<1$ fennáll (míg $t=1$ mellett $f_1(1)=0$, $f_2(1)=0$ vehető) és $\lim f_1(t)=0{\cdot}5$, $\lim f_2(t)=0{\cdot}891\ldots$ $(t\to\infty)$, gyors konvergenciával. A mondott korlátozás nélkül a NAGELL-féle sejtésről semmit sem tudok kimondani, azonban úgy látszik, hogyha ez a sejtés helyes, akkor a kérdéses viszonylagos valószínűség a most mondott 0·5 és 0·891... határok közé esik.

A dolgozat közelebbi tartalmára nézve az illető tételekre utalok, figyelmeztetve arra, hogy a VI. tétel (az ottani utolsó megjegyzés kivételével) s a VII. tétel korábbi megállapítások ismétlése.

Az I. rész függvénytani előkészületeket tartalmaz, a II. és

[4] NAGELL, Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2-Dy^2=-1$, Arkiv för Math., Astr. o. Fysik, 23B/6 (1932), 1—5.



EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

IV. részben a $e_4$-et és $e_8$-at illető kérdésekkel foglalkozom s a III. részben tekintem az alapegység normájának kérdését. Ezek közül a IV. részben nem törekedtem az elérhető teljességre.

## I. RÉSZ.

1. Legyen $R$ a racionális számok teste. Az $R(i)$ $(i^2=-1)$ testnek egy $\mathfrak{p}$ egész számát az $R(i)$ test törzsszámának nevezem, ha $(\mathfrak{p})$ törzsideál az $R(i)$ testben. Ezt első- vagy másodfokú törzsszámnak nevezem a szerint, amint az $n(\mathfrak{p})$ norma racionális törzsszám vagy ilyennek a négyzete, azaz a szerint, amint $(\mathfrak{p})$ első- vagy másodfokú törzsideál $R(i)$-ben. Primérnek nevezem az $R(i)$ egyik $\alpha$ egész vagy törtszámát, ha $\alpha\equiv 1 \pmod{(1-i)^3}$, amely kongruencia multiplikativ értelemben veendő.

Mindenkor jelentsenek $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ olyan elsőfokú primér törzsszámokat az $R(i)$ számtestben, amelyekre $n(\mathfrak{p}_1)<n(\mathfrak{p}_2)<\cdots<n(\mathfrak{p}_t)$. Mindég legyen $\mathfrak{P}_t=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_t$.

Jelentse tetszésszerinti pozitív $x$ mellett $\varkappa_t(x)$ mindama $\mathfrak{P}_t$-knek számosságát, amelyekre $n(\mathfrak{P}_t)\leqq x$ $(t=1, 2, 3, \ldots)$.

$\boldsymbol{O}$ és $\boldsymbol{o}$ legyenek a LANDAU-féle függvényjelek, azaz, ha az $f(x)$ valós függvény elegendő nagy $x$-től kezdve pozitív és $x\to\infty$ mellett a végtelenbe növekszik, akkor $\boldsymbol{O}(f(x))$ és $\boldsymbol{o}(f(x))$ olyan (valós vagy komplex) függvényt jelentsenek, amelyekre növekvő $x$ mellett $\dfrac{\boldsymbol{O}(f(x))}{f(x)}$ egy véges korlát alatt marad, illetőleg $\lim \dfrac{\boldsymbol{o}(f(x))}{f(x)} = 0$. Ha $g(x)$ egy másik függvény, akkor $g(x)\sim f(x)$ azt jelenti, hogy $g(x)=f(x)+\boldsymbol{o}(f(x))$.

Érvényes

$$\varkappa_t(x) \sim \frac{1}{(t-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{t-1}}{\log x} \qquad (t=1, 2, 3, \ldots). \quad (1)$$

Ebből a $t=1$ eset, azaz $\varkappa_1$ helyett $\varkappa$-t írva

$$\varkappa(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (2)$$

lényegében nem egyéb, mint a leggyengébb alakban kifejezett törzsszámtétel az $R(i)$ számtestben. Az összes $(\mathfrak{P}_1)=(\mathfrak{p}_1)$ ugyanis,

amelyeknek számossága $\varkappa(x)$, az $R(i)$ összes olyan elsőfokú törzsideálja az $(1-i)$ kivételével, amelynek normája $\leqq x$. Tudvalevőleg helyes a (2), ha a baloldalhoz azokat a másodfokú törzsideálokat is hozzászámítjuk, amelyeknek normája ugyancsak $\leqq x$, amelyek azonban nyilvánvalóan elhanyagolhatók.

Az (1) $t \geqq 2$ mellett LANDAU[5] egyik tétele. Ezt a képletet LANDAU ott ($x$ helyett $\pi$-t írva) az $R$ testre állította fel, a bizonyítás azonban szószerint ismételhető, csupán mindenkor minden pozitív $p(\leqq x)$ törzszám helyett minden az $R(i)$ testben primér elsőfokú törzsszám $(n(\mathfrak{p})=)p(\leqq x)$ normáira végzendők az összegezések, amely normák egyébként a $4l+1$ alakú $p(\leqq x)$ pozitív törzsszámok kétszeres halmaza. Maga ugyanis az ottani (l. o. 203. o.) kiindulópont $\vartheta(x)\,(=\sum_{p\leqq x}\log p) \sim x$ eme változtatás után tudvalevőleg érvényben marad.

2. Jelölje $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}$ a 4-ik hatványmaradékjelt az $R(i)$ számtestben.[6] Legyen $2 \leqq r \leqq l$, ahol $r$, $t$ szilárd pozitív egész számok. Legyen továbbá

$$c = \bar{c}\left(\frac{\mathfrak{p}_r}{\mathfrak{a}}\right)_{i4}, \tag{3}$$

ahol $\mathfrak{a}$ egy olyan hatványszorzat a $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}$ törzsszámokból és az ő konjugáltjaiból, amely nem 4-dik ideálhatvány az $R(i)$ testben és $\bar{c}$ is csupán az itt nevezett törzsszámoktól függ, végül $|\bar{c}| = 1$ (egyszersmind tehát $|c| = 1$). Értelmezem az $x$ pozitív változónak következő komplexértékű függvényét:

$$\varkappa_t(x, c) = \sum_{n(\mathfrak{P}_t)\leqq x} c. \tag{4}$$

Ez természetesen úgy értendő, hogy $c$-ben minden lehetséges olyan $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ rendszer behelyettesítendő, amely (az eddigieken kívül) $n(\mathfrak{P}_t) \leqq x$ által korlátozott, s az így nyert tagok összegezendők.

---

[5] LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I (1909), 208.

[6] HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II, Jahresb. d. D. Math. Ver., VI. Ergänzungsb. (1930), 49—50.

A későbbi vizsgálatokhoz az analytikai-számelméleti alapot (1) mellett a következő képlet szolgáltatja, amelynek bebizonyítása a jelenlévő I. rész egyetlen hátralevő feladata:

$$x_t(x, c) = O\left(\frac{x(\log\log x)^{t-2}}{\log x}\right) \quad (t \geqq 2), \tag{5}$$

*amiből* (1) *miatt*

$$\lim \frac{x_t(x, c)}{x_t(x)} = O \quad (t \geqq 2;\ x \to \infty) \tag{6}$$

*következik.*

Jelentsen $p$ pozitív törzsszámot és $P_t$ egy szorzatot $t$ különböző pozitív törzsszámból. Előbb bebizonyítom a következő két segédtételt:

A. *Segédtétel. Érvényes* $t \geqq 1$ *mellett*

$$\sum_{P_t \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{P_t}}{\log^2 \frac{x}{P_t}} = O\left(\sum_{P_{t-1} \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{P_{t-1}}}{\log \frac{x}{P_{t-1}}}\right), \tag{7}$$

*amely képlet* $t=1$ *mellett mint*

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{p}}{\log^2 \frac{x}{p}} = O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{8}$$

*értendő.*

B. *Segédtétel. Érvényes* $t \geqq 1$ *mellett*

$$\sum_{P_t \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{P_t}}{\log \frac{x}{P_t}} = O\left(\frac{x(\log\log x)^t}{\log x}\right), \tag{9}$$

*különösen tehát* $t=1$ *mellett*

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{p}}{\log \frac{x}{p}} = O\left(\frac{x \log\log x}{\log x}\right). \tag{10}$$

Akkor a (7) és (9)-ből következik

$$\sum_{P_t \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{P_t}}{\log^2 \frac{x}{P_t}} = O\left(\frac{x(\log\log x)^{t-1}}{\log x}\right). \quad (t \geqq 1). \tag{11}$$

A segédtételek bizonyítása. Legyen $2 \leqq u \leqq x$ mellett

$$F(u, x) = \frac{\frac{10x}{u}}{\log^2 \frac{10x}{u}}. \tag{12}$$

Kiszámítom ezzel a függvénnyel az

$$\mathcal{J} = \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du \tag{13}$$

integrált. Érvényes a következő átalakítás:

$$\mathcal{J} = 10x \int_2^x \frac{du}{u \log u (\log 10x - \log u)^2} = 10x \int_{\log 2}^{\log x} \frac{dv}{v(a-v)^2},$$

ahol $v = \log u$ új integrálváltozóként lett bevezetve s egy pillanatra $a = \log 10x$ értendő. Az

$$\frac{1}{v(a-v)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{a-v} + \frac{a}{(a-v)^2}\right)$$

azonosság miatt

$$\mathcal{J} = \frac{10x}{a^2}\left[\log v - \log(a-v) + \frac{a}{a-v}\right]_{\log 2}^{\log x} =$$

$$= \frac{10x}{(\log 10x)^2}\left(\log\log x - \log\log 10 + \frac{\log 10x}{\log 10} - \right.$$

$$\left. - \log\log 2 + \log\log 5x - \frac{\log 10x}{\log 5x}\right).$$

Ebből nyilvánvalóan következik

$$\mathcal{J} = O\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{14}$$

Mármost fennállnak a következők:

1°. $F(u, x) \geqq 0$ $(2 \leqq u \leqq x)$.

2°. Szilárd $x(> 2)$ mellett

$$\frac{F(u, x)}{\log u}$$

$u = 2$-től $u = x$-ig növekvő $u$ mellett sohasem növekszik.

3°. $F(2, x) = o\left(\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du\right)$.

Ezekből az 1°. nem szorul bizonyításra. A 2°. helyett kimutatom, hogy még $F(u, x)$ sem növekszik hasonló feltételek mellett. Az $F(u, x)$ értéke ugyanis a $10x$ tényezőtől eltekintve

$$\frac{1}{u(\log 10x - \log u)^2},$$

elég tehát kimutatni, hogy az itteni nevező $u$ szerinti differenciálhányadosa a $2 \leqq u \leqq x$ közben pozitív. Tényleg ez a differenciálhányados,

$$(\log 10x - \log u)^2 - 2(\log 10x - \log u)$$

a $\log 10x - \log u$ és $\log 10x - \log u - 2 = (\log 10 - \log e^2) + (\log x - \log u)$ tényezők szorzatára esik szét, amelyek a tekintett intervallumban pozitívok. A 3°. is helyes, mert az ő jobboldala (13) és (14) szerint $o\left(\frac{x}{\log x}\right)$, míg a baloldal (12) miatt $O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$.

Az 1°.—3°.-ból [5] (203—204. o.) szerint következik

$$\sum_{p \leqq x}{}' F(p, x) \sim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du,$$

azaz (13) és (14) szerint

$$\sum_{p \leqq x}{}' F(p, x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ha itt $x$ helyett $\frac{x}{10}$-et helyettesítünk, akkor (12) szerint következik (8).

A (7) baloldalát a $t \geqq 2$ esetben a

$$\sum_{P_{t-1} \leqq \frac{x}{10}} \sum_{p_{t-1} < p \leqq \frac{x}{10 P_{t-1}}} \frac{\frac{x}{p P_{t-1}}}{\log^2 \frac{x}{p P_{t-1}}}$$

alakban írhatjuk, amely összeg legfeljebb megnagyobbodik, hogyha a második összeget a 2 és $\frac{x}{10 P_{t-1}}$ határok között levő összes $p$ törzsszámra kiterjesztjük. Ezután a (8)-nak $x$ helyett $\frac{x}{10 P_{t-1}}$-re való alkalmazásával következik (7), amivel az **A.** segédtételt bebizonyítottuk.

Most alkalmazom a már említett $\pi_t(x)$ LANDAU-féle jelt. (Azaz $\pi_t(x)$ az összes $P_t (\leqq x)$ számossága, különösen $\pi_1(x) = \pi(x)$ az összes $p (\leqq x)$ számossága.) Akkor [5] (205. o.) szerint

$$\pi_2(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{p \leqq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right).$$

Amint már említettem, $\pi$-re is ($x$ helyett) fennáll az (1) összefüggés, és így következik

$$\sum_{p \leqq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) \sim 2 \frac{x \log\log x}{\log x}.$$

A baloldal két összeadandóra bontható, úgyhogy elébb a $2 \leqq p \leqq \frac{x}{10}$, majd az $\frac{x}{10} < p \leqq x$ közben összegezünk. Ekkor a második részben az összegezendő tag $\leqq \pi(10) \leqq 10$, míg ugyanitt a tagok számossága $\leqq \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, úgyhogy tehát ez a rész elhanyagolható. E szerint

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{10}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) \sim 2 \frac{x \log\log x}{\log x}.$$

Az összeg jele alatti tag $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$ miatt az

$$\frac{\frac{x}{p}}{\log \frac{x}{p}} + O\left(\frac{\frac{x}{p}}{\log^2 \frac{x}{p}}\right)$$

kifejezéssel helyettesíthető, s így (8) miatt következik (10).

A (9) egyenletet ezután $t$-ről $t+1$-re való következtetéssel bizonyítom. E végből $t$-re feltételezem a (9) helyességét, amit $t = 1$-re épp most bizonyítottunk. A (9) baloldala $t$ helyett $t+1$-gyel így írható:

$$\sum_{P_t \leqq \frac{x}{10}} \sum_{p_t < p \leqq \frac{x}{10 P_t}} \frac{\frac{x}{p P_t}}{\log \frac{x}{p P_t}}.$$

Ez az összeg legfeljebb megnagyobbodik, ha a második összegben a 2 és $\frac{x}{10 P_t}$ közötti összes $p$-vel összegezünk. Akkor (10) miatt a következőt nyerjük:

$$O\left(\sum_{P_t \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{P_t} \log \log \frac{x}{P_t}}{\log \frac{x}{P_t}}\right).$$

Ez ismét legfeljebb megnagyobbodik, ha benne $\log \log \frac{x}{P_t}$ helyett $\log \log x$-et írunk. Ezzel az indukciófeltevés miatt (9)-et, azaz a **B.** segédtételt bebizonyítottuk.

Mármost bebizonyítom az (5) állítást. Az összes $\mathfrak{P}_t$-t az $n(\mathfrak{P}_t) \leqq x$ kikötéssel úgy nyerhetjük, hogy elébb csak a $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}, \mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_t$ rendszert választjuk meg, amelynek az elemeiből álló szorzatot $\mathfrak{P}$-vel jelölve végül megválasztjuk $\mathfrak{p}_r$-t, amit most $\mathfrak{p}$-vel is jelölünk, mindezt úgy, hogy: először $n(\mathfrak{p}_1) < n(\mathfrak{p}_2) < \cdots < n(\mathfrak{p}_{r-1}) < n(\mathfrak{p}_{r+1}) < \cdots < n(\mathfrak{p}_t)$, $n(\mathfrak{P}) \leqq x$, másodszor $n(\mathfrak{p}_{r-1}) < n(\mathfrak{p}) < n(\mathfrak{p}_{r+1})$, $n(\mathfrak{p}) \leqq \frac{x}{n(\mathfrak{P})}$. Megfelelőleg (4)-et a következő alakban írhatjuk:

$$x_t(x, c) = \sum_{n(\mathfrak{P}) \leqq x} \sum_{n(\mathfrak{p}_{r-1}) < n(\mathfrak{p}) < n(\mathfrak{p}_{r+1})} c, \qquad (15)$$
$$n(\mathfrak{p}) \leqq \frac{x}{n(\mathfrak{P})}$$

ahol $c$ is úgy képzelendő, hogy (3)-ban $\mathfrak{p}_r$ helyett $\mathfrak{p}$-t írtunk. A (15) jobboldalát ismét két részre bonthatjuk, az első összegben elébb $\frac{x}{10}$-ig, majd $\frac{x}{10}$-től $x$-ig összegezve. A második részben akkor $n(\mathfrak{p}) \leqq 10$ s e mellett $|c| = 1$, úgyhogy tehát ez az összeg $\leqq \boldsymbol{O}|x_{t-1}(x)|$, minthogy $\mathfrak{P}$ mindenben megfelel $\mathfrak{P}_{t-1}$ értelmezésének. A (15)-ből és (3)-ból következik tehát

$$x_t(x, c) = \sum_{n(\mathfrak{P}) \leqq \frac{x}{10}} \bar{c}\, S + \boldsymbol{O}\big(x_{t-1}(x)\big), \qquad (16)$$

ahol

$$S = \sum_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}}\right)_{i4}, \qquad (17)$$

amely utóbbi összegben $\mathfrak{p}$ hasonló korlátozással értendő, mint (15)-ben. E közben tekintetbe kellett vennünk, hogy a feltevés szerint $\bar{c}$ független $\mathfrak{p}$-től.

Most tekintem az $R(i)$ test összes $4\mathfrak{a}$-hoz relatív prim egész és tört ideálját s ezeket a $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \ldots, \mathcal{H}_f$ sugárosztályokba («Strahlklassen») sorolom mod $4\mathfrak{a}$, ahol $f$ a (véges) sugárosztályszám. Ha eme ideálosztályokból minden elsőfokú törzsideálhoz hozzárendeljük azt a $\mathfrak{p}$ primér törzsszámot az $R(i)$-ből, amely $(\mathfrak{p})$ által az illető ideált előállítja, akkor nyilvánvalóan egy egy-egyértelmű vonatkozást létesítettünk a tekintett törzsideálok s az $R(i)$ összes $4\mathfrak{a}$-hoz relatív prim primér elsőfokú törzsszámai között. Könnyen láthatóan eme vonatkozás útján a (17)-beli $\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}}\right)_{i4}$ a sugárosztálycsoport egyik karakterét szolgáltatja. Mindenekelőtt ugyanis minden sugárosztály tartalmaz egy (sőt végtelen sok) elsőfokú törzsideált, ami $4\mathfrak{a}$-hoz relatív prim, úgyhogy tehát minden $\mathcal{H}_k$ sugárosztályhoz egy karakterérték értelmezve van. Továbbá ez az érték a $\mathcal{H}_k$ által egyértelműen meg van határozva. Ha ugyanis $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_0$ két $4\mathfrak{a}$-hoz relatív prim primér elsőfokú törzsszám az $R(i)$-ben és $(\mathfrak{p}), (\mathfrak{p}_0)$ ugyanabban a $\mathcal{H}_k$

osztályban vannak, akkor a sugárosztálybeosztás értelmezése szerint létezik egy $a$ szám az $R(i)$-ben, úgyhogy

$$(\mathfrak{p}_0) = (a)(\mathfrak{p}) \tag{18}$$

és

$$a \equiv 1 \pmod{4a}. \tag{19}$$

Az utóbbi miatt $a$ primér, továbbá $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_0$ is azok, a (18)-ból következik tehát $\mathfrak{p}_0 = a\mathfrak{p}$. Tekintettel (19)-re tehát $\left(\frac{\mathfrak{p}_0}{a}\right)_{i4} = \left(\frac{\mathfrak{p}}{a}\right)_{i4}$, amint ezt követeltük. Hogy végül $\left(\frac{\mathfrak{p}}{a}\right)_{i4}$ bírja a karaktertől megkívánt multiplikatív tulajdonságot, az a $(-)_{i4}$ jel multiplikatív sajátsága alapján hasonlóan belátható.

Minthogy $a$ nem 4-ik ideálhatvány az $R(i)$-ben, azért a tekintett karakter nem a főkarakter, az tehát 2-od vagy 4-edrendű. Ha tehát $n_e (e=0, 1, 2, 3)$ azoknak a $\mathfrak{H}_k$ $(k=1, 2, \ldots, f)$ osztályoknak a számossága, amelyekre ama karakterérték $i^e$, akkor $n_0 = n_2$ és $n_1 = n_3$ (esetleg $n_1 = n_3 = 0$). Az $S$ tehát a (17)-ben összege $\frac{f}{2}$ számú olyan tagnak, amelynek alakja $N - N_1$ vagy $i(N - N_1)$, ahol $N$ és $N_1$ mindenkor egyik $\mathfrak{H}_k$ olyan $(\mathfrak{p})$ elsőfokú törzsideáljainak számosságát jelenti, amelyek a (15)-beli egyenlőtlenségekkel vannak korlátozva. LANDAU[7] szerint tehát, függetlenül a $\mathfrak{H}_k$ osztálytól

$$N = \frac{1}{f} \frac{x_1}{\log x_1} + O\left(\frac{x_1}{\log^2 x_1}\right),$$

ahol $x_1$ helyébe $\frac{x}{n(\mathfrak{P})}$ gondolandó. Ebből következik

$$N - N_1 = O\left(\frac{x_1}{\log^2 x_1}\right).$$

Hasonló képlet érvényes tehát a (17)-beli $S$-re is. Minthogy $|\bar{c}| = 1$, azért tehát (16)-ból nyerjük a következőt:

$$x_t(x, c) = O\left(\sum_{n(\mathfrak{P}) \leqq \frac{x}{10}} \frac{\frac{x}{n(\mathfrak{P})}}{\log^2 \frac{x}{n(\mathfrak{P})}}\right) + O\left(x_{t-1}(x)\right).$$

[7] LANDAU, Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Zeitschr., 2 (1918), 52—154, Satz LXXXV.

Itt az $n(\mathfrak{P})$ befutja az összes olyan szorzatot $\frac{x}{10}$-ig, amelynek tényezői $t-1$ különböző $4l+1$ alakú pozitív törzsszám, mégpedig minden ilyen szorzatot $2^{t-1}$-szer. Minthogy célunk csupán az (5)-öt bebizonyítani, azért ez a sokszorosság figyelmen kívül hagyható. E szerint itt $n(\mathfrak{P})$ helyett $P_{t-1}$-et írhatunk, amelynek a jelentése ismét hasonló, mint az **A.** segédtételben. Ezzel ugyan az olyan szorzatokat is megengedtük, amelyek tényezői között nem csupán $4l+1$ alakú pozitív törzsszámok szerepelnek, ettől azonban a fenti egyenlet érvényessége csak erősebb lehet. A jobboldal első tagjában azután (11)-et alkalmazhatjuk ($t$ helyett $t-1$-gyel), miáltal az átmegy a következőbe:

$$O\left(\frac{x(\log\log x)^{t-2}}{\log x}\right).$$

A második tag értéke is hasonló az (1) miatt, amivel (5)-öt bebizonyítottuk.

## II. RÉSZ.

**3.** Érvényes a következő.

**C.** *Segédtétel. Legyen megadva* $r(\geqq 0)$ *lineárisan független lineáris alak*

$$l^m(x) = \sum_{k=1}^{t} c_k^m x_k \qquad (m=1, 2, \ldots, r), \tag{20}$$

*ahol* $x_1, x_2, \ldots, x_t$ $(t \geqq 2)$ *változók és a* $c_k^m$ *együtthatók a 2 karakterisztikájú* $R_2$ *törzstest elemei. Legyen azután az* $x_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots, t)$ *új változókkal a következő* $S_t^r$ *lineáris alakrendszer képezve:*

$$l_{ik}(x) = x_{ik} + x_{ki} \qquad (1 \leqq i < k \leqq t), \tag{21}$$

$$l_i^m(x) = \sum_{k=1}^{t} c_k^m x_{ik} \qquad (i=1, 2, \ldots, t;\ m=1, 2, \ldots, r), \tag{22}$$

*úgyhogy tehát* $l_i^m(x)$ *az* $l^m(x)$*-ből azáltal áll elő, hogy az* $x_1, x_2, \ldots, x_t$ *változókat az* $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it}$ *változókkal helyettesítjük. Akkor az* $S_t^r$ *lineárisan független alakjainak számossága, vagyis az* $S_t^r$ *rangja* $t^2 - \binom{t-r+1}{2}$. (Természetesen a (21) alatti

alakok is az $R_2$ testben értendők, úgyhogy mindenkor $\varepsilon x = x$, ahol $\varepsilon$ az $R_2$ egységeleme. Az «üres» alakrendszer is függetlennek tekintendő, ebben az értelemben tehát az $r=0$ esetre az állítás úgy hangzik, hogy a (21) rendszer rangja $t^2 - \binom{t+1}{2} = \binom{t}{2}$.)

Nyilvánvaló, hogy a (21) rendszer tagjai lineárisan függetlenek. Minthogy eme alakok számossága $\binom{t}{2}$, azért a megelőző megjegyzés szerint a segédtétel az $r=0$ esetben igaz. Ugyancsak igaz a segédtétel az $r=t$ esetben. A (22) rendszer alakjai ugyanis nyilvánvalóan függetlenek, s ezek számossága $rt$, az $r=t$ esetben $t^2$. Minthogy ugyanennyi a változók számossága, azért a (21) hozzávételével előálló $S_t^t$ rendszer sem tartalmazhat több lineárisan független alakot, azaz a rang $t^2$, ami ebben az esetben a követelt rangszám.

Feltételezem a segédtétel helyességét $r$ helyett $r-1$ mellett, hogy így az általános érvényességét bizonyíthassam. A fentiek miatt mindjárt feltehetjük, hogy $1 \leqq r \leqq t-1$.

Feltehetjük, hogy (a (20) utolsó együtthatója) $c_t^r \neq 0$, minthogy ez nyilvánvalóan csak az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ változók s az $l^1, l^2, \ldots, l^r$ alakok sorrendjének a kérdése, s ez a segédtétel helyességét láthatóan nem befolyásolja.

Ezután visszavezethetjük az állítást arra az esetre, amelyben $c_t^m = 0$ $(m=1, 2, \ldots, r-1)$. Bevezetjük ugyanis az $l'^m(x) = l^m(x) + c_t^m l^r(x)$ alakokat $(m = 1, 2, \ldots, r-1)$. Ezek az alakok $(l'^r(x) =)\ l^r(x)$-szel együtt ugyancsak függetlenek, ezek is tehát egy (20) rendszert képeznek. Ezek is értelmeznek tehát egy $S_t^r$-hez hasonló $S_t'^r$ rendszert, amely (21)-ből és az

$$\left.\begin{aligned} l_i'^m(x) &= l_i^m(x) + c_t^m l_i^r(x) \quad (m=1, 2, \ldots, r-1), \\ l_i'^r(x) &= l_i^r(x) \end{aligned}\right\} \ (i=1, 2, \ldots, t)$$

alakokból áll. Láthatóan $S_t'^r$ rangja megegyezik $S_t^r$ rangjával. Ennél a rangmeghatározásnál tehát $S_t^r$ helyettesíthető az $S_t'^r$ rendszerrel, vagy, ami ugyanazt jelenti, a bizonyítást a fent mondott esetre korlátozhatjuk.

Legyen tehát $c_t^1 = c_t^2 = \cdots = c_t^{r-1} = 0$, $c_t^r \neq 0$. Bevezetem $x_{ik}$ helyébe az új $y_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, t)$ változókat a következő helyettesítéssel:

$$x_{ik} = y_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, t-1),$$

$$x_{it} = y_{it} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r y_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t-1),$$

$$x_{tk} = y_{tk} + \sum_{i=1}^{t-1} c_i^r y_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, t-1),$$

$$x_{tt} = y_{tt} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r (y_{tk} + y_{kk}).$$

Ez a helyettesítés nyilvánvalóan nem szinguláris, így tehát az $S_r^t$-ből általa előálló $S_t^{\prime\prime r}$ alakrendszer rangja megegyezik az $S_t^r$ rangjával. Ha tekintetbe vesszük, hogy a végzett korlátozás miatt a (22)-beli alakok egyszerűbben, mint

$$\left.\begin{aligned} l_i^m(x) &= \sum_{k=1}^{t-1} c_k^m x_{ik} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r-1), \\ l_i^r(x) &= \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r x_{ik} + x_{it} \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, t)$$

írhatók, akkor az $S_t^{\prime\prime r}$ rendszer könnyen kiszámítható. Mégpedig a következő alakokat nyerjük (itt $l_{ik}''(y)$ és $l_i^{\prime\prime m}(y)$ azokat az alakokat jelentik, amelyek a helyettesítés által $l_{ik}(x)$-ből, illetőleg $l_i^m(x)$-ből előállnak, míg $l_{ik}(y)$ és $l_i^m(y)$ azok az alakok, amelyek $l_{ik}(x)$-ből, illetőleg $l_i^m(x)$-ből előállnak, ha egyszerűen $x_{uv}$ helyett mindenütt $y_{uv}$-t írunk):

$$l_{ik}''(y) = y_{ik} + y_{ki} = l_{ik}(y) \qquad (1 \leqq i < k \leqq t-1),$$

$$l_{it}''(y) = y_{it} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r y_{ik} + y_{ti} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r y_{ki} =$$

$$= l_{it}(y) + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r l_{ik}(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, t-1),$$

ahol az $i > k$ esetben $l_{ik}$ helyett $l_{ki}$ gondolandó,

$$l_i^{\prime\prime m}(y) = \sum_{k=1}^{t-1} c_k^m y_{ik} = l_i^m(y) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, t-1 \\ m = 1, 2, \ldots, r-1 \end{pmatrix},$$

$$l_t^{\prime\prime m}(y) = \sum_{k=1}^{t-1} c_k^m \left( y_{tk} + \sum_{i=1}^{t-1} c_i^r y_{ik} \right) =$$

$$= l_t^m(y) + \sum_{i=1}^{t-1} c_i^r \sum_{k=1}^{t-1} c_k^m y_{ik} = l_t^m(y) + \sum_{i=1}^{t-1} c_i^r l_i^m(y) \qquad (m = 1, 2, \ldots, r-1),$$

$$l_i'^{p}(y) = \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r y_{ik} + y_{it} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r y_{ik} = y_{it} \qquad (i=1, 2, \ldots, t-1),$$

$$l_t'^{r}(y) = \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r \left( y_{tk} + \sum_{i=1}^{t-1} c_i^r y_{ik} \right) + y_{tt} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r (y_{tk} + y_{kk}) =$$

$$= y_{tt} + \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} c_i^r c_k^r y_{ik} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k^r y_{kk} =$$

$$= y_{tt} + \sum_{1 \leqq i < k \leqq t-1} c_i^r c_k^r l_{ik}(y),$$

ahol a legutóbbiban $(c_k^r)^2 = c_k^r$ is tekintetbe vétetett.

Tüstént látni, hogy ez az alakrendszer ekvivalens a következővel:

$$l_{ik}(y) \ (1 \leqq i < k \leqq t); \quad l_i^m(y) \ (i=1, 2, \ldots, t;\ m=1, 2, \ldots, r-1); \quad y_{it} \ (i=1, 2, \ldots, t).$$

Ebből az $S$ alakrendszerből olyan $y_{ik}$-t, amelyben $i = t$ vagy $k = t$, csak a következő $S_t$ részrendszer alakjai tartalmaznak:

$$l_{it}(y) \ (i=1, 2, \ldots, t-1); \quad l_t^m(y) \ (m=1, 2, \ldots, r-1); \quad y_{it} \ (i=1, 2, \ldots, t).$$

Fordítva ezek az alakok csak a most nevezett változókat tartalmazzák. Ha tehát az $S$ rendszer többi alakját egy $S_{t-1}^{r-1}$ rendszerbe foglaljuk, akkor (az $S$ vagyis) az $S_t^r$ rangja az $S_t$ és $S_{t-1}^{r-1}$ rangjainak összege. Ezekből az első rangszám nyilvánvalóan $2t-1$, mert például az $l_{it}(y)$ $(i=1, 2, \ldots, t-1)$ és $y_{it}(i=1, 2, \ldots, t)$ alakok lineárisan függetlenek, míg az $S_t$-ben szereplő változók száma ugyancsak $2t-1$. Ami az $S_{t-1}^{r-1}$ rendszer rangját illeti, ez a rendszer is megfelel az $S_t^r$ definíciójának, hacsak $t-1 \geqq 2$, azaz, ha $t \geqq 3$. Mégpedig ebben az esetben úgy áll elő $S_{t-1}^{r-1}$, hogy az $S_t^r$ definíciójában $t$, $r$, $l^m(x)$ $(m=1, 2, \ldots, r)$ helyébe a $t-1$, $r-1$, $l^m(x)$ $(m=1, 2, \ldots, r-1)$ elemeket vesszük (az, hogy a változókat $x_{ik}$-val vagy $y_{ik}$-val jelöljük, nem jelent semmi lényegest). Ehhez figyelembe veendő, hogy az $l^m(x)$ $(m=1, 2, \ldots, r-1)$ alakok lineárisan függetlenek, mert a (20)-nak egy részrendszerét képezik. Az indukciófeltevés miatt tehát $S_{t-1}^{r-1}$ rangja $(t-1)^2 - \binom{t-r+1}{2}$. Ehhez a fenti $2t-1$ rangszámot hozzáadva tényleg megkapjuk az $S_t^r$ számára a követelt $t^2 - \binom{t-r+1}{2}$ rangszámot.

A teljes bizonyításhoz még meg kell vizsgálnunk a kimaradt $t \leqq 2$ esetet. Minthogy mindig $t \geqq 2$, azért csak $t=2$ jön tekintetbe, s ugyanekkor az $1 \leqq r \leqq t-1$ feltevés miatt $r=1$. Ekkor az $S_2^1$ rendszer az $x_{12}+x_{21}$, $c_1^1 x_{11}+x_{12}$, $c_1^1 x_{21}+x_{22}$ alakokból áll (ugyanis feltettük, hogy $c_2^1 \neq 0$). Ezek mindhárman lineárisan függetlenek s ugyanekkor $S_2^1$ követelt rangszáma $2^2-(\frac{2}{2})=3$, amivel a C. segédtétel bizonyítása megtörtént.

4. Ezután legyen D egy $R(\sqrt{\mathrm{D}})$ valós másodfokú számtest discriminánsa, $4l+3$ alakú pozitív törzstényezők nélkül. A D különböző törzstenyezőinek $t$ számossága legyen szilárdan megválasztva ($t \geqq 1$). A D-t mindenkor a $\mathrm{D}=p_1 p_2 \ldots p_t$ alakban veszem fel, ahol $2 \nmid \mathrm{D}$ mellett $p_1, p_2, \ldots, p_t$ pozitív ($4l+1$ alakú) törzsszámok és $p_1<p_2<\cdots<p_t$, míg $2 \mid \mathrm{D}$ mellett hasonló értendő a $p_1=8$ eltéréssel (ekkor tehát a $p_1<p_2$ követelés elhagyandó). Ezáltal az összes megengedett D és az összes megengedett $p_1, p_2, \ldots, p_t$ rendszer között egy-egyértelmű vonatkozást létesítettünk. Ezután tehát a $p_1, p_2, \ldots, p_t$ változóknak egy függvényét (függvényrendszerét) tekinthetjük, mint a D-nek függvényét (függvényrendszerét). Ezt a felfogást többször érvényre fogjuk juttatni, anélkül, hogy ezt minden alkalommal külön hangsúlyoznánk.

$t \geqq 2$ mellett a

$$T \ldots \left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right), \left(\frac{p_1}{p_3}\right), \ldots, \left(\frac{p_1}{p_t}\right); \left(\frac{p_2}{p_3}\right), \ldots; \ldots; \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right)\right)$$

rendszert a D másodfokú típusának nevezem. A $t=1$ esetben is alaki okokból értelmezem a D másodfokú típusát, amely ekkor az egyetlen 1 elemből álljon ($T=1$). A különböző másodfokú típusok számossága nyilvánvalóan $2^{(\frac{t}{2})}$, amelyek a számtani haladvány tétele és a négyzetes reciprocitástétel szerint mind lehetségesek.

Mindig jelentse $\mathrm{D}(x, t)$ az összes olyan $\mathrm{D}(\leqq x)$ számosságát, amelyekre nézve $t$ egy szilárd érték. Hasonlóan jelentse $\mathrm{D}(x, T)$ az összes olyan $\mathrm{D}(\leqq x)$ számosságát, amelyek egy szilárd $T$ másodfokú típust szolgáltatnak. (Felesleges lenne $\mathrm{D}(x, T)$ helyett egy közelebbi megjelölés, mint például $\mathrm{D}(x, t, T)$, mert $T$ már úgyis egy bizonyos $t$ értéket feltételez.) Érvényes a következő:

I. *Tétel. Minden* $t=1, 2, 3, \ldots$ *mellett*

$$D(x, t) \sim \frac{1}{2^t(t-1)!} \frac{x(\log\log x)^{t-1}}{\log x} \tag{23}$$

*és minden olyan* $T$*-re, amely* $t$*-hez tartozik,*

$$\lim \frac{D(x, T)}{D(x, t)} = \frac{1}{2^{\binom{t}{2}}} \qquad (x \to \infty). \tag{24}$$

Ez a tétel tehát azt mondja, hogy minden szilárd $t$ mellett az összes D között minden másodfokú típus (végtelen sokszor és) egyenlő valószínűséggel fordul elő.

Bizonyítás. A (23) következménye az (1)-nek. Az (1) baloldala ugyanis az összes olyan $\mathfrak{P}_t$ számossága, amelyekre $n(\mathfrak{P}_t) \leqq x$. Másrészt minden $n(\mathfrak{P}_t)$ egy (páratlan) D és minden páratlan $D(\leqq x)$ ezen az úton pontosan $2^t$-szer áll elő. A (23) képlet tehát a páros D-ktől eltekintve, helyes. Az utóbbi összes $D(\leqq x)$ számossága $t \geqq 2$ mellett nyilvánvalóan $\leqq \pi_{t-1}\left(\frac{x}{8}\right) \leqq \pi_{t-1}(x)$, ahol ismét a LANDAU-féle jelölést alkalmaztuk. Mint említettük már, ez a szamosság $O\left(\frac{x(\log\log x)^{t-2}}{\log x}\right)$, ami tehát (23)-ban elhanyagolható. Hasonló a $t = 1$ esetben is igaz, amikor csak egy páros D van. Ezzel a (23)-at bebizonyítottuk.

A (24)-et csupán $t \geqq 2$ mellett kell bizonyítanunk, mivel az a $t=1$ esetre semmit sem mond. Akkor egy $T$ másodfokú típus azáltal van megadva, hogy a $\left(\frac{p_k}{p_l}\right) = a_{kl} (1 \leqq k < l \leqq t)$ egyenleteket előírjuk, ahol minden $a_{kl} (= \pm 1)$ valamilyen szilárdan megválasztott szám. Bevezetem a

$$g = \prod_{1 \leqq k < l \leqq t} \frac{1}{2}\left(1 + a_{kl}\left(\frac{p_k}{p_l}\right)\right) \tag{25}$$

szorzatot. Nyilvánvalóan $g = 1$ vagy 0 a szerint, amint D másodfokú típusa $T$ vagy $T$-től különböző. Érvényes tehát a

$$D(x, T) = \sum_{D \leqq x} g$$

előállítás, ahol az összeg azokra a D-kre értendő, amelyek különböző törzstényezőinek számossága $t$.

A (25) szerint tehát

$$D(x, T) = \frac{1}{2^{(\frac{t}{2})}} \left( \sum_{D \leqq x} 1 + \sum_{D \leqq x} \sum_{c} c \right), \tag{26}$$

ahol $c$ egy szorzatot jelent néhány különböző (legalább 1) $\left(\frac{p_k}{p_l}\right)$ $(1 \leqq k < l \leqq t)$ tényezőből, ellátva egy előjellel, ami csupán az $a_{kl}$ számoktól függ.

A (26)-beli első összeg $D(x, t)$. A (24) bizonyításához a (23) miatt elég tehát azt kimutatni, hogy minden $c$ mellett

$$\sum_{D \leqq x} c = O\left( \frac{x(\log \log x)^{t-2}}{\log x} \right) \tag{27}$$

fennáll.

Mármost $c$-t a négyzetes reciprocitástétel szerint nyilvánvalóan a $c = \bar{c}\left(\frac{a}{p_r}\right)$ alakra lehet hozni, ahol $2 \leqq r \leqq t$, $a$ egy nem üres szorzat néhány különböző elemből $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$ közül és $\bar{c}$ $p_r, p_{r+1}, \ldots, p_t$-től független. Hasonló okokból, mint fent, a (27)-ben figyelmen kívül hagyhatjuk a páros D-ket. Akkor jelentsen $\mathfrak{p}_k (k = 1, 2, \ldots, t)$ olyan primér törzsszámot az $R(i)$ testben, amely osztója $p_k$-nak; e szerint $p_k = \mathfrak{p}_k \mathfrak{p}_k'$, ahol a «'» vonás az $R(i)$-ben a konjugáltra való áttérést jelenti. Tudvalevően

$$\left(\frac{a}{p_r}\right) = \left(\frac{a}{\mathfrak{p}_r}\right)_i,$$

ahol az utóbbi a négyzetes maradékjelt jelenti az $R(i)$ testben. Az $R(i)$ testbeli négyzetes reciprocitástétel és a hatványmaradékjelek alaptulajdonságai szerint tehát tovább nyerjük a következőt:

$$\left(\frac{a}{p_r}\right) = \left(\frac{\mathfrak{p}_r}{a}\right)_i = \left(\frac{\mathfrak{p}_r}{a^2}\right)_{i4}.$$

Minthogy $a^2$ olyan szorzat a $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}$; $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}'$ elemekből, ami a fentebbiek szerint nem 4-dik ideálhatvány az $R(i)$-ben, és $\bar{c}$ is csak ezektől a törzsszámoktól függ (az $a_{kl}$ számokon kívül, amelyek azonban adottaknak tekintendők), vé-

gül $|c| = 1$, azért látjuk, hogy $c$ a (3) alatti definíciónak pontosan megfelel. Gondoljuk ezt a $c$-t a (4)-ben behelyettesítve. Akkor $x_t(x, c)$ pontosan a (27) baloldalának $2^t$-szerese, miután itt, mint említettük, csak a páratlan D-ket vesszük tekintetbe. Ugyanis, mint már mondottuk, minden ilyen D pontosan $2^t$-szer áll elő mint $\mathfrak{P}_t = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_t$ normája, megfelelően a $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}'_k$ konjugáltak közötti szabad választásnak. Maga a mostani $c$ azonban ettől a választástól nem függ, mint ez azonnal látható, amiből az állítás világos. E szerint (5)-ből következik (27), amivel az I. tételt bebizonyítottuk.

(Ezt a bizonyítást kevesebb fáradsággal végezhettük volna egy olyan képlet alapján, amely (5)-höz hasonló, azonban nem az $R(i)$ testben $(-)_{i4}$ jelekkel, hanem az $R$ testben $(-)$ jelekkel nyer kifejezést. Egész terjedelmében az (5)-öt csupán a III. és IV. részben fogjuk alkalmazni.)

5. A [2] dolgozatból említett tétel a most tekintetbe vett másodfokú számtestekre valamivel könnyebben a következőképpen fogalmazható:

A D-t ismét a $p_1p_2 \ldots p_t$ alakban veszem fel, mint a 4.-ben. D-felbontás alatt értek egy olyan D′, D″ számpárt, amelyben $D'D'' = D$ és D′ néhány különböző elem szorzata $p_1, p_2, \ldots, p_t$ közül, beleértve a $D' = 1$ esetet. Ha ezenfelül D′ négyzetes maradék mod D″ és D″ négyzetes maradék mod D′, akkor a D′, D″ D-felbontást 2-odfajúnak nevezem.

Ha D′, D″ és $D'_0$, $D''_0$ két D-felbontás, akkor a belőlük összetett D-felbontásnak nevezem azt a D-felbontást, amely a $D'D'_0$, $D''D'_0$ számpárból az összes $p_k^2$ tényező törlése után előáll. E szerint a szabály szerint az összes D-felbontások egy $G$ ABEL-féle csoportot alkotnak, amelynek típusa $(2, 2, \ldots, 2)$, rendje $2^t$, egységeleme 1, D. Egyszerű számítás szerint a másodfajú D-felbontások a $G$-nek egy $G_2$ alcsoportját alkotják.

A mondott tétel ezután így hangzik: *A másodfokú számtest abszolút osztálycsoportja 4-gyel osztható invariánsainak $e_4$ számossága egyenlő $r-1$-gyel, ahol $r$ a $G_2$ csoport független elemeinek számossága.* (Ez a fogalmazás kissé eltér a [4] dolgozatbeli fogalmazástól, ahol ugyanis két D-felbontást, mint D′, D″ és D′, D″, amelyek tehát csak a tagok sorrendjében térnek el

egymástól, nem különbözőknek tekintettünk, úgyhogy a mostani értelemben $G$ is, $G_2$ is kétszerannyi elemet tartalmaz.) Másképpen mondva

$$2^{e_4+1} = (G_2), \tag{28}$$

ahol a jobboldal a $G_2$ csoport rendjét jelenti.

A **4.**-beli megegyezésnél fogva egy D', D'' D-felbontás, mint a D-nek egy függvénye (helyesebben függvénypárja) tekinthető. Egy D', D'' D-felbontás adva van ugyanis, mint $D' = p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_m}$, $D'' = p_{l_1} p_{l_2} \dots p_{l_n}$, ahol a $k_1, k_2, \dots, k_m$ és $l_1, l_2, \dots, l_n$ indexek két komplementér részhalmazt képeznek az $1, 2, \dots, t$ elemekből. Ha ezeket az indexeket rögzítjük, akkor D' és D'' mint a D egyértékű függvényei tekinthetők. Ennél a felfogásnál egy $\Delta_1 \Delta_2 = \Delta_3$ egyenlet a $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ D-felbontások között a tekintetbe jövő minden D-re érvényben marad. Hasonlóképpen «$G$-nek egyik alcsoportja» és «ennek független bázisa» a D különös megválasztásával szemben, a metrikus tulajdonságoktól eltekintve, invariáns képződmények. Ha pedig csak olyan D-ket tekintünk, amelyek egy szilárd $T$ másodfokú típushoz tartoznak, akkor a «másodfajúság» is az illető D-felbontásnak a tekintett D-ken belül invariáns tulajdonsága, vagyis az egy bizonyos D-felbontásból az összes ugyanolyan másodfokú típussal bíró D-khez rendelt D-felbontások vagy mind 2-odfajúak, vagy egyikük sem az. Ebben az értelemben maga $G_2$, az összes 2-odfajú D-felbontások csoportja (a csoportsajátságokkal együtt) egyedül $T$ által meghatározott, különösen tehát a $(G_2)$ rendszám, és így (28) miatt $e_4$ egyedül a $T$-nek függvénye. (Az itt előadott elv később úgyszólván mindig alkalmazásba jut, valahányszor egyszerre több D-t tekintünk, a nélkül, hogy ezt minden alkalommal említenénk.)

**6.** Jelölje $D(x, t, e)$ mindama $D(\leqq x)$ számosságát, amelyekre $t$ is és $e_4 = e$ is egy-egy szilárd érték ($e = 0, 1, 2, \dots, t-1$). Legyen

$$t_e = \lim \frac{D(x, t, e)}{D(x, t)} \qquad (x \to \infty). \tag{29}$$

Akkor $t_e$ a valószínűsége annak, hogy az abszolút osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsainak számossága pontosan $e$ legyen, mindama $R(\sqrt{D})$ testek közül, amelyeknek discriminánsa pontosan $t$ különböző törzstényezőből van összetéve.

A (29) számlálója nyilvánvalóan összege mindazoknak a $D(x, T)$-knek, amelyekben $T$-re nézve $e_4 = e$. Ezért az I. tételből következik, hogy $t_e$ létezik és

$$t_e = \frac{az\ e_4 = e\text{-}t\ kielégítő\ T\text{-}k\ számossága}{2^{\binom{t}{2}}} \quad (0 \leqq e \leqq t-1). \tag{30}$$

7. A $t_e$ meghatározásához a következőkben felteszem, hogy $t \geqq 2$.

Legyen előttünk egy tetszésszerinti $D = p_1 p_2 \ldots p_t$. Továbbá legyen

$$\left(\frac{p_i}{p_k}\right) = (-1)^{x_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, t;\ i \neq k) \tag{31}$$

és legyen még $x_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ értelmezve

$$\sum_{k=1}^{t} x_{ik} \equiv 0 \pmod 2 \tag{32}$$

által, mindezt úgy értve, hogy $x_{ik} \equiv 0, 1$ $(i, k = 1, 2, \ldots, t)$ legyen. Akkor (31) miatt fennáll az

$$x_{ik} + x_{ki} = 0 \pmod 2 \qquad (1 \leqq i < k \leqq t) \tag{33}$$

összefüggés.

Válasszatok egy D′, D″ tetszésszerinti D-felbontást és legyen

$$D' = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \ldots p_t^{c_t}, \tag{34}$$

ahol $c_i = 0, 1$. Akkor fennáll

$$D'' = p_1^{1-c_1} p_2^{1-c_2} \ldots p_t^{1-c_t}. \tag{35}$$

Értelmezem még az $l(x)$ lineáris alakot mod 2, mégpedig legyen

$$l(x) \equiv \sum_{k=1}^{t} c_k x_k \pmod 2. \tag{36}$$

Nyilvánvalóan a tekintetbe jövő $l(x)$ lineáris alakokat és a D′, D″ D-felbontásokat egy-egyértelműen rendeltük egymáshoz. Állítom a következőt:

A D′, D″ D-felbontás akkor és csak akkor 2-odfajú, ha a (36)-ban hozzárendelt $l(x)$ lineáris alakra nézve az $x_1, x_2, \ldots, x_t$

helyébe a (31), (32) által értelmezett $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it}$ behelyettesítése után fennáll

$$l_i(x) \equiv \sum_{k=1}^{t} c_k x_{ik} \equiv 0 \pmod 2 \qquad (i=1, 2 \ldots, t). \tag{37}$$

Mindenekelőtt tekintsük az 1, D és D, 1 D-felbontásokat. Mindketten az értelmezés szerint 2-odfajúak. Másrészt most a (36)-ban hozzárendelt lineáris alakok $l(x) = 0$, illetőleg $\sum_{k=1}^{t} x_i \pmod 2$, amelyekre (37) azonosan, illetőleg (32) miatt teljesül.

Azután tekintek egy D′, D″ tetszésszerinti D-felbontást, amelyre $1 < D' < D$. Az értelmezés szerint ez 2-odfajú akkor és csak akkor, ha D″ minden $p_i$ tényezőjére

$$\left(\frac{D'}{p_i}\right) = 1 \qquad (p_i \mid D'') \tag{38}$$

és D′ minden $p_i$ tényezőjére

$$\left(\frac{D''}{p_i}\right) = 1 \qquad (p_i \mid D') \tag{39}$$

fennáll.

A (38) helyett $\left(\frac{p_i}{D'}\right) = 1$ is írható. Akkor a baloldal (34) és (31) szerint

$$\left(\frac{p_i}{D'}\right) = \prod_{k=1}^{t} \left(\frac{p_i}{p_k}\right)^{c_k} = (-1)^{\sum_{k=1}^{t} c_k x_{ik}}.$$

A (38) fennállása tehát pontosan azt jelenti, hogy az ittlevő kitevő páros, azaz (37) minden olyan $i$ indexszel fennáll, amelyre $p_i \mid D''$. Hasonlóan (39)-et elébb a $\left(\frac{p_i}{D''}\right) = 1$ alakban írjuk. Akkor a baloldal (35) és (31) alapján hasonló átalakítást enged meg, mint elébb, miután most fellép a

$$\sum_{k=1}^{t} (1 - c_k) x_{ik}$$

kitevő. Ez a kitevő azonban (32) miatt átvihető a megelőzőbe mod 2. E szerint (39) nem egyéb, mint a (37) fennállásának

feltétele a *további* $i$ indexekre nézve, amelyekre ugyanis $p_i | \mathrm{D}'$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Bebizonyítjuk a következőt:

**D.** *Segédtétel. Ha* $G^r$ *olyan alcsoportja az összes* D-*felbontások* $G$ *csoportjának, amely a* D, 1 *elemet tartalmazza és amelynek rendje* $2^r$, *akkor*

$$2^{\binom{t-r+1}{2}}$$

*a számossága mindannak a* $T$ *másodfokú típusnak, amelyre a* $G^r$ *csoport csupa* 2-*odfajú* D-*felbontásból áll.*

$\Delta$-val jelölök ugyanis egy tetszésszerinti D-felbontást és $l(x)$-szel a (34) és (36) által hozzárendelt lineáris alakot mod 2. Nyilvánvaló, hogy ennél a hozzárendelésnél fogva az összes $\Delta$-nak $G$ csoportja (egy-egyértelműen) izomorf az összes $l(x)$ olyan (mod 2) lineáris alak $g$ additív csoportjával, amelyek hasonló alakúak, mint (36). Ebben az izomorf vonatkozásban a $G^r$ alcsoportnak megfelel a $g$-nek egy $g^r$ alcsoportja. Legyen most $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ egy független bázis a $G^r$ alcsoportban, amelynek akkor a $g$ csoportban ugyancsak a $g^r$ alcsoportnak egy $l^1(x), l^2(x), \ldots, l^r(x)$ független bázisa felel meg. A (37)-ről bebizonyították szerint nyilvánvalóan következik, hogy $G^r$ akkor és csak akkor áll csupa 2-odfajú D-felbontásból (ha $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ is 2-odfajúak, azaz), ha az összes $l^1(x), l^2(x), \ldots, l^r(x)$ alakra a (37)-hez hasonló

$$l_i^m(x) \equiv 0 \pmod 2 \quad (m=1, 2, \ldots, r;\ i=1, 2, \ldots, t) \tag{40}$$

kongruenciák fennállnak (itt is az $i$ index jelenti a (31), (32)-beli $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it}$ számok behelyettesítését az $x_1, x_2, \ldots, x_t$ változók helyébe). Minthogy a feltevés szerint $G^r$ tartalmazza a D, 1 D-felbontást, azért szabadságunkban áll a $\Delta_1$=D, 1 választás, ami azután, mint említettük, azt jelenti, hogy

$$l^1(x) \equiv \sum_{k=1}^{t} x_k \pmod 2.$$

Ezek szerint a következőt mondhatjuk: Úgy kereshetjük fel az összes olyan $T$ másodfokú típust, amelyekre a $G^r$ csoport csupa 2-odfajú D-felbontásból áll, hogy a $\left(\frac{p_i}{p_k}\right)$ $(1 \leqq i < k \leqq t)$ jeleknek,

vagyis a (31)-beli hozzárendelésnél fogva az $x_{ik}$ $(1 \leqq i < k \leqq t)$ jeleknek olyan értékeket adunk (utóbbiakra természetesen csupán 0 és 1 jönnek tekintetbe), hogy ezek a belőlük (33) és (32) által meghatározott $x_{ik}$ $(1 \leqq k \leqq i \leqq t)$ értékekkel együtt a (40) kongruenciát kielégítsék. A kérdezett $T$-k számossága tehát a (32), (33), (40) kongruenciarendszer mod 2 különböző megoldásainak számossága. A (40) kongruenciarendszerből azonban az $m=1$ esethez tartozó kongruenciák az $l^1(x)$ különös választása miatt nem egyebek, mint (32). Egyszerűen tehát csupán csak a (33), (40) kongruenciákat kell megoldanunk. Minthogy a maradékosztályok mod 2 ugyancsak egy 2 karakterisztikájú $R_2$ törzstestet alkotnak, azért a **C.** segédtételből következik, hogy az ezeknek a kongruenciáknak baloldalain lévő mod 2 tekintett lineáris alakokból álló rendszer rangja $t^2 - \binom{t-r+1}{2}$. Minthogy az $x_{ik}$ határozatlanok számossága $t^2$, azért a megoldásnál pontosan $\binom{t-r+1}{2}$ számú határozatlan tetszésszerinti értékekkel helyettesíthető. Minthogy minden $x_{ik}$-ra nézve 2 érték (0 és 1) jön tekintetbe, azért a **D.** segédtételt bebizonyítottuk.

**8.** $\{t, G^r\}$ jelentse azoknak a $T$ másodfokú típusoknak számosságát, amelyekre a 2-odfajú D-felbontások csoportja pontosan $G^r$. Minthogy D, 1 mindig 2-odfajú D-felbontás, azért ennek az értelmezésnek csak akkor adunk helyt, ha $G^r$ tartalmazza D, 1-et. Ezt tehát a továbbiakban feltételezzük, egyébként legyen $G^r$ a $G$-nek tetszésszerinti alcsoportja és ebben a jelölésben (mint eddig is) legyen mindig $2^r$ a $G^r$ rendje.

Eme feltevések alatt meg akarjuk határozni $\{t, G^r\}$ értékét. Mindenekelőtt fennáll a következő képlet:

$$2^{\binom{t-r+1}{2}} = \sum_{G^r \leqq G^s \leqq G} \{t, G^s\}, \tag{41}$$

ahol az összeg kiterjesztendő minden $G^r$ és $G$ között fekvő $G^s$ csoportra.

Ez a képlet a következőképpen áll elő: Tekintjük mindazokat a $T$ másodfokú típusokat, amelyekre a 2-odfajú D-felbontások csoportja pontosan $G^s$, amely $G^s$ hasonló feltételeknek tesz eleget, mint a (41)-ben. Ezeknek a $T$-knek számossága a

(41) általános tagja. Ha ezután a $G^s$ csoportot $G^r$ és $G$ között minden lehető és különböző módon változtatjuk, akkor a tekintett összes $T$-k éppen azok, amelyekre a szilárdan választott $G^r$ csoport csupa 2-odfajú D-felbontásból áll, minden ilyen $T$-t egyszeresen számítva. Ezeknek a $T$-knek számossága a **D.** segédtétel szerint a (41) baloldala, amivel ezt a képletet igazoltuk.

Állítom, hogy fennáll általánosan a következő képlet:

$$\{t, G^r\} = \{t-r\}, \tag{42}$$

ahol az újabb $\{\ \}$ jel értelme:

$$\{0\} = \{1\} = 1,$$

$$\{l\} = (2^1-1)(2^2-1)\dots(2^l-1)\frac{2^2.2^4\dots 2^{2\left[\frac{l}{2}\right]}}{(2^2-1)(2^4-1)\dots(2^{2\left[\frac{l}{2}\right]}-1)} \tag{43}$$

$$(l=2,3,\dots),$$

és $[z]$ a $z$ valós számban foglalt legnagyobb racionális egész számot jelenti. (Különösen tehát $\{t, G^r\}$ csupán $t-r$-től függ.)

Mindenekelőtt ugyanis könnyű látni, hogy (41) által minden $\{t, G^r\}$ egyértelműen meghatározott. Ha ugyanis egy szilárd $t$ értéket választunk, akkor (41)-ből az $r=t$ esetre alkalmazva azt nyerjük, hogy $\{t, G^t\} = 1$ (egyébként $G^t=G$). Azután az $r=t-1$ esetre azt nyerjük, hogy $2 = \{t, G^{t-1}\} + \{t, G^t\}$, azaz $\{t, G^{t-1}\} = 1$, ahol $G^{t-1}$ bármelyik olyan $2^{t-1}$ rendű alcsoportja $G$-nek, amely a D, 1 elemet tartalmazza. Ezután kiszámítható $\{t, G^{t-2}\}$, és így tovább általában $\{t, G^r\}$ $(r = t-3, t-4, \dots, 1)$, ha tekintetbe vesszük, hogy (41) jobboldalán egyetlen egy olyan tag van, amelyben $s=r$, míg a többiben $s>r$.

Bebizonyíthatjuk tehát (42)-őt azzal, hogy kimutatjuk annak az egyenletnek helyességét, ami (41)-ből előáll, ha benne minden tagra a (42) helyettesítést elvégezzük.

Tudvalevően $k=t-r$, $l=t-s$ mellett

$$\frac{(2^k-1)(2^{k-1}-1)\dots(2^{k-l+1}-1)}{(2^1-1)(2^2-1)\dots(2^l-1)} \tag{44}$$

egyenlő azoknak a $2^s$ rendű csoportoknak a számosságával, amelyek egy bizonyos $2^t$ rendű $(2, 2, \dots, 2)$ típusú ABEL-féle csoport és az ő egyik szilárd $2^r$ rendű alcsoportja között fek-

szenek, a határok beleértésével. (Eme képlet alatt az $l=0$, azaz az $s=t$ esetben az 1 értendő.)

Gondoljuk (41)-ben a (42)-őt behelyettesítve es foglaljuk együvé a (41) mindama tagjait, amelyek egy szilárd $s$-hez tartoznak. Minthogy ezek közös értéke $\{t-s\}$ és számosságuk (44)-gyel van adva (természetesen ez utóbbit a $k=t-r$, $l=t-s$ értékekkel gondolva), azért csak azt kell kimutatni, hogy ezt a két számot szorozva s ezeket a szorzatokat az $s=r, r+1,\ldots, t$ értékekkel összeadva, összegül a (41) baloldalát nyerjük. Ennek a szorzatnak tényezői tehát a (43) jobboldala az $l=t-s$ értékkel és a (44) a $k=t-r$, $l=t-s$ értékekkel, úgyhogy maga a szorzat

$$a_{kl}=(2^k-1)(2^{k-1}-1)\ldots(2^{k-l+1}-1)\frac{2^2,2^4\ldots2^{2\left[\frac{l}{2}\right]}}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2\left[\frac{l}{2}\right]}-1)}, \quad (45)$$

ami alatt az $l=0$, 1 esetekben $a_{k0}=1$ és $a_{k1}=2^k-1$ értendő. Ezt tehát az $s=r, r+1,\ldots, t$ értékekből fakadó $(t-s=)\,l=0, 1,\ldots, k(=t-r)$ értékekkel kell összegezni. Maga a (41) baloldala mint $2^{\binom{k+1}{2}}$ írható, így tehát a bebizonyítandó egyenlet így hangzik:

$$2^{\binom{k+1}{2}}=2^k+\sum_{l=2}^{k}a_{kl}, \quad (46)$$

ahol már figyelembe vettük, hogy $a_{k0}+a_{k1}=2^k$. Természetesen itt a jobboldal helyett a $k=0$, 1 esetekben $a_{00}$, illetőleg $a_{10}+a_{11}$ értendő. Minthogy $a_{00}=a_{10}=a_{11}=1$, azért mindjárt látjuk, hogy (46) helyes a $k=0$, 1 esetekben. Feltételezem tehát a (46) helyességét a $k-1$ értékig, hogy ebből a $k$ értékkel való helyességre következtessek.

$k=2$ mellett helyes a (46), mert (45) szerint $a_{22}=4$. A következőkben tehát feltehető, hogy $k\geqq 3$.

A (45) alapján mindenekelőtt megfigyeljük a következőket:

$$a_{kl}=\frac{2^k-1}{2^{k-l}-1}a_{k-1,\,l} \qquad (k>l\geqq 2), \quad (47)$$

$$a_{kl}=(2^{k-l+1}-1)\,a_{k,\,l-1} \qquad (2\nmid l;\ k\geqq l\geqq 3), \quad (48)$$

$$a_{kl}=(2^{k-l+1}-1)\frac{2^l}{2^l-1}a_{k,\,l-1} \qquad (2\mid l;\ k\geqq l\geqq 4), \quad (48a)$$

$$a_{kk}=2^k a_{k-1,\,k-1} \qquad (2\mid k;\ k\geqq 4). \quad (49)$$

Ezután kimutatjuk a következő egyenlet helyességét:

$$a_{kl} + a_{k,\,l+1} = 2^k (a_{k-1,\,l-1} + a_{k-1,\,l}) \quad (2 \mid l;\ k > l \geqq 2). \tag{50}$$

A (48) szerint most $a_{k,\,l+1} = (2^{k-l} - 1)\, a_{kl}$, amiből következik, hogy (50) baloldala $2^{k-l} a_{kl}$. Az (50) átmegy tehát az

$$a_{kl} = 2^l (a_{k-1,\,l-1} + a_{k-1,\,l})$$

egyenletbe. Ebből, a baloldalon (47)-et alkalmazva, a következőt nyerjük:

$$(2^k - 1)\, a_{k-1,\,l} = (2^k - 2^l)(a_{k-1,\,l-1} + a_{k-1,\,l}).$$

Ez ismét a

$$(2^l - 1)\, a_{k-1,\,l} = 2^l (2^{k-l} - 1)\, a_{k-1,\,l-1}$$

alakban írható. Nyilvánvalóan következik a fordított úton az (50) helyessége, ha ez az utolsó egyenlet helyes. Utóbbi azonban közvetlen folyománya (48$a$)-nak ($k$ helyett $k-1$-re alkalmazva), ha $l \geqq 4$, míg hasonló a maradék $l=2$ esetben a (45)-ből folyó $a_{k-1,\,2} = (2^{k-1} - 1)(2^{k-2} - 1)\,\frac{2^2}{2^2 - 1}$ és $a_{k-1,\,1} = 2^{k-1} - 1$ következménye. Ezzel (50)-et bebizonyítottuk.

Most már bebizonyítjuk (46)-ot. Ehhez az alábbi két esetet különböztetjük meg:

1. $2 \nmid k\ (k \geqq 3)$. A (46) jobboldalán levő összeget az $(a_{k2} + a_{k3}) + (a_{k4} + a_{k5}) + \cdots + (a_{k,\,k-1} + a_{kk})$ alakban írhatjuk. Minden zárjelkifejezésre alkalmazhatjuk (50)-et, miáltal ez az összeg átmegy a következőbe:

$$2^k \sum_{l=1}^{k-1} a_{k-1,\,l} = 2^k \left((2^{k-1} - 1) + \sum_{l=2}^{k-1} a_{k-1,\,l}\right).$$

Ha ezt (46)-ba behelyettesítjük és $2^k$-val osztunk, akkor előáll egy egyenlet, ami nem egyéb, mint ugyanaz a (46) egyenlet $k$ helyett $k-1$-re értve. Az indukciófeltevés miatt tehát ebben az esetben maga (46) is igaz.

2. $2 \mid k\ (k \geqq 4)$. Most (46)-ot az $(a_{k2} + a_{k3}) + (a_{k4} + a_{k5}) + \cdots + (a_{k,\,k-2} + a_{k,\,k-1}) + a_{kk}$ alakban írjuk. A zárjelkifejezésekkel hasonlóan járhatunk el, mint előbb, s ugyanakkor az utolsó tagra alkalmazzuk (49)-et. További hasonló kezelés után ebben az esetben is az előbbi eredményt nyerjük.

Ezzel bebizonyítottuk (46)-ot s vele együtt (42)-őt is.

9. Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy a (29)-cel értelmezett $t_e$ valószínűséget meghatározhatjuk. Ehhez (30) szerint szükségünk van azoknak a $T$ másodfokú típusoknak számosságára, amelyekre $e_4=e$, ahol $e$ egy szilárd szám $0, 1, \ldots, t-1$ közül. A (28) szerint ezek a $T$ típusok azok, amelyekre az összes 2-odfajú D-felbontások csoportja a $G$-nek egy $G^{e+1}$ alcsoportja, ahol $G^{e+1}$ ismét, mint 8.-ban, a $2^{e+1}$ rendszámmal bír s tartalmazza a D, 1 elemet (mint már többször említettük, D, 1 mindenkor szerepel a 2-odfajú D-felbontások csoportjában). Mármost azoknak a $T$-knek számossága, amelyekhez ebben az értelemben egy bizonyos $G^{e+1}$ tartozik, a (42) szerint $\{t-e-1\}$, vagyis a (43) jobboldala az $l=t-e-1$ értékkel. Másrészt a számbajövő $G^{e+1}$ alcsoportok számossága (44) által az $r=1$, $s=e+1$ vagyis a $k=t-1$, $l=t-e-1$ értékekkel van előállítva (szó van ugyanis ennél az utóbbi számosságnál az összes olyan $2^{e+1}$ rendű csoportról, amelyek a $2^1$ rendű, 1, D és D, 1 D-felbontásokból álló csoport és a $2^t$ rendű $G$ csoport között fekszenek). A mondott két kifejezés szorzata tehát a keresett $T$-k számossága. Ezt a szorzatot (45)-ben egyszer már kiszámítottuk, ahol tehát most $k=t-1$, $l=t-e-1$ helyettesítendő. Ez az $a_{t-1,\,t-e-1}$ kifejezés, ami alatt az ottani megjegyzés szerint az $e=t-2$, $t-1$ esetekben $a_{t-1,\,1}=2^{t-1}-1$, illetőleg $a_{t-1,\,0}=1$ értendő, (30) szerint $2^{\binom{t}{2}}$-vel osztva szolgáltatja a $t_e$ számot. Könnyű átalakítással nyerjük tehát a következőt:

II. *Tétel. A pontosan $t$ különböző pozitív és nem $4l+3$ alakú törzstényezőből összetett discriminánssal bíró valós másodfokú számtestek között*

$$t_e=\frac{1}{2^{\binom{e+1}{2}}}\,\frac{\left(1-\frac{1}{2^{t-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{t-2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^{e+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^{2\left[\frac{t-e-1}{2}\right]}}\right)} \qquad (0\leqq e\leqq t-1) \qquad (51)$$

*a valószínűsége mindazoknak az eseteknek, amelyekben az abszolút osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsainak számossága $e_4=e$. Az $e=t-2$, $t-1$ esetekben* (51) *mint*

$$t_{t-2}=\frac{1}{2^{\binom{t-1}{2}}}\left(1-\frac{1}{2^{t-1}}\right),\quad t_{t-1}=\frac{1}{2^{\binom{t}{2}}} \tag{51a}$$

*értendő.* (Ezekben az esetekben is érvényes (51), ha megegyezünk abban, hogy az (51) második tényezőjében a számláló s ugyancsak a nevező 1-gyel helyettesítendő, ha annak különben nincs értelme. Az (51)-et csupán a $t\geqq 2$ esetre vezettük le, mégis ez a $t=1$ esetben is igaz, amikor ugyanis csupán $1_0$ jön tekintetbe, ami nyilvánvalóan 1-gyel egyenlő.)

Most az éppen nyert $t_e$ valószínűségszámokat nagyságuk tekintetében meg fogjuk vizsgálni. Mindenekelőtt tanulságos a $t_e$ néhány kezdeti értékét az alábbi táblázatban összeállítani (l. a következő oldalt). Ebbe a táblázatba felvettem zárójelben a mindenkori pontos értéket, valamint a közelítő tizedestört értéket is. A táblázat utolsó sorának magyarázata a következő tételben van:

III. *Tétel.* 1°. *Érvényes*

$$\lim t_e=\frac{a}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^e-1)}\qquad (t\to\infty) \tag{52}$$

*(különösen* $\lim t_0=\lim t_1=a$*), ahol*

$$a=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2n-1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{31}{32}\cdots=0{\cdot}4194\ldots \tag{53}$$

2°. *Az* $1_0, 2_0, 3_0, \ldots, t_0, \ldots$ *sorozat monoton csökkenő, mégpedig*

$$1_0>2_0=3_0>4_0=5_0>\cdots$$

3°. *A* $2_1, 4_1, 6_1, \ldots$ *sorozat monoton csökkenő és a* $3_1, 5_1, 7_1, \ldots$ *sorozat monoton növekvő, mégpedig*

$$2_1>4_1>6_1>\cdots;\ 3_1<5_1<7_1<\cdots,$$

*míg a teljes* $2_1, 3_1, 4_1, \ldots$ *sorozat tagjai váltakozva csökkennek és növekszenek:*

$$2_1>3_1;\ 3_1<4_1;\ 4_1>5_1;\ 5_1<6_1;\ldots$$

4°. *Minden szilárd* $e(=2, 3, \ldots)$ *mellett az* $(e+1)_e$, $(e+3)_e$,

| | $e=$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5… |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t=1$ | (1) | | | | | |
| 2 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ 0·5 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ 0·5 | | | | |
| 3 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ 0·5 | $\left(\frac{3}{8}\right)$ 0·375 | $\left(\frac{1}{8}\right)$ 0·125 | | | |
| 4 | $\left(\frac{7}{16}\right)$ 0·4375 | $\left(\frac{7}{16}\right)$ 0·4375 | $\left(\frac{7}{64}\right)$ 0·1093… | $\left(\frac{1}{64}\right)$ 0·0156… | | |
| 5 | $\left(\frac{7}{16}\right)$ 0·4375 | $\left(\frac{105}{256}\right)$ 0·4101… | $\left(\frac{35}{256}\right)$ 0·1367… | $\left(\frac{15}{1024}\right)$ 0·0146… | $\left(\frac{1}{1024}\right)$ 0·0009… | |
| 6 | $\left(\frac{217}{512}\right)$ 0·4236… | $\left(\frac{217}{512}\right)$ 0·4236… | $\left(\frac{1085}{8192}\right)$ 0·1324… | $\left(\frac{155}{8192}\right)$ 0·0189… | $\left(\frac{31}{32768}\right)$ 0·0009… | $\left(\frac{1}{32768}\right)$ 0·00003… |
| ⋮ | | | | | | |
| $\infty$ | $(\alpha)$ 0·4194… | $(\alpha)$ 0·4194… | $\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ 0·1398… | $\left(\frac{\alpha}{21}\right)$ 0·0199… | $\left(\frac{\alpha}{315}\right)$ 0·0013… | $\left(\frac{\alpha}{9765}\right)$ 0·00004… |

$(e+5)_e, \ldots$ *és* $(e+2)_e, (e+4)_e, (e+6)_e, \ldots$ *sorozatok monoton növekvők, mégpedig*

$$(e+1)_e < (e+3)_e < (e+5)_e < \cdots ; \quad (e+2)_e < (e+4)_e < (e+6)_e < \cdots,$$

*míg a teljes* $(e+1)_e, (e+2)_e, (e+3)_e, \ldots$ *sorozat tagjai váltakozva csökkennek és növekszenek:*

$$(e+1)_e > (e+2)_e ; \quad (e+2)_e < (e+3)_e ; \quad (e+3)_e > (e+4)_e ; \ldots$$

5°. *Minden szilárd* $t(=2, 3, \ldots)$ *mellett a* $t_0, t_1, \ldots, t_{t-1}$ *sorozat monoton csökkenő, mégpedig*

$$t_e \leqq \frac{t_{e-1}}{2^e - 1} \qquad (e=1, 2, 3, \ldots), \tag{54}$$

*ahol az «=» jel érvényes akkor és csak akkor, ha* $t-e$ *páratlan. Különösen tehát* $t_0 = t_1$, *ha* $2 \mid t$ *és* $t_0 > t_1$, *ha* $2 \nmid t$.

6°. *Ha* $e \geqq 1$, *akkor*

$$t_e = \frac{q}{2^{\binom{e+1}{2}}} \qquad \left(1 - \frac{1}{2^{e+1}} \leqq q < \frac{3}{2}\right). \tag{55}$$

7°. *A* $2_0+2_1, 3_0+3_1, 4_0+4_1, \ldots$ *sorozat monoton csökkenő, mégpedig*

$$(1 = 1_0 =) 2_0+2_1 > 3_0+3_1 = 4_0+4_1 > 5_0+5_1 = \cdots (> 2a = 0{\cdot}8388\ldots)$$

Ebben a tételben összeállítottam a $t_e$ valószínűségszámok legfeltűnőbb sajátságait. Közülük a 7°. a 2°. és 3°. kiegészítésének tekinthető. A $t_e$ talált sajátságainak kellő méltatását illetően a bevezetésre utalok. Ehhez itt csupán annyit jegyzek még meg, hogy 5°. miatt minden $t$ mellett a leggyakoribbak azok az esetek, amelyekben az abszolút osztálycsoportnak egyetlen 4-gyel osztható invariánsa sincs, csupán páros $t$ mellett még az egyetlen 4-gyel osztható invariáns esete is hasonló gyakori.

Bizonyítás. Ha $t$ a végtelenbe növekszik, akkor (51) második tényezőjében a számláló és nevező a

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\prod_{n=1}^{e}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}, \quad \text{illetőleg} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

számokhoz konvergálnak. Az itt fellépő nevező az (51)-ben szereplő $2^{\binom{e+1}{2}}$-vel szorozva az (52)-beli nevezőt szolgáltatja, míg az ittlevő végtelen szorzatok hányadosa egyenlő az (53)-beli $\alpha$-val. Ebből következik az 1°. helyessége. (Az $e=0$ eset csak annyiban igényel külön megfontolást, hogy akkor az itt fellépett véges szorzat 1-gyel helyettesítendő.)

Bevezetem az $\left(1-\frac{1}{2^z}\right)^*$ rövidítést, ami alatt a zárjelezett kifejezést értem, ha $z$ pozitív páros szám, különben legyen ennek a jelnek értéke 1. Az (51) (és (51$a$)) alapján könnyen megállapítjuk a következő összefüggéseket:

$$(t+1)_e = \frac{1-\frac{1}{2^t}}{\left(1-\frac{1}{2^{t-e}}\right)^*} t_e, \tag{56}$$

$$(t+2)_e = \frac{\left(1-\frac{1}{2^{t+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^t}\right)}{\left(1-\frac{1}{2^{2\left[\frac{t-e+1}{2}\right]}}\right)} t_e, \tag{57}$$

$$t_{e+1} = \frac{1}{2^{e+1}-1}\left(1-\frac{1}{2^{t-e-1}}\right)^* t_e, \tag{58}$$

$$(t+1)_{e+1} = \frac{1}{2^{e+1}-1}\left(1-\frac{1}{2^t}\right) t_e, \tag{59}$$

amelyek általában $0 \leqq e \leqq t-1$ mellett érvényesek, csupán (58) érvényessége van $0 \leqq e \leqq t-2$ által korlátozva.

Az (56)-ból mindjárt következik $(t+1)_e < t_e$, ha $2 \nmid t-e$, $(t+1)_0 = t_0$, ha $2 \mid t$ és $(t+1)_e > t_e$, ha $2 \mid t-e$, $e>0$. A 2°., 3°., 4°. igazolásához tehát csak annyit kell még kimutatnunk, hogy $(t+2)_1 < t_1$, ha $2 \mid t$, $(t+2)_1 > t_1$, ha $2 \nmid t$ és $(t+2)_e > t_e$, ha $e \geqq 2$. Ezek könnyen következnek (57)-ből, mert $e=1$, $2 \mid t$ mellett $(t+2)_e = \left(1-\frac{1}{2^{t+1}}\right) t_e$, míg $e=1$, $2 \nmid t$ mellett és ugyancsak $e \geqq 2$ mellett

$$(t+2)_e > \frac{\left(1-\frac{1}{2^{t+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^t}\right)}{1-\frac{1}{2^{t-1}}} t_e = \frac{2^{2t+1}-3.2^t+1}{2^{2t+1}-4.2^t} t_e > t_e.$$

Az 5°. azonnal következik (58)-ból.

A 3°.-ból folyik a $3_1 < t_1 < 2_1$ $(t \geqq 4)$ egyenlőtlenség. A fenti táblázat szerint $3_1 = \frac{3}{8}$, $2_1 = \frac{1}{2}$, amiből az $e = 1$ esetre következik (55). Az $e \geqq 2$ esetben a 4°. és 1°. miatt

$$(e+2)_e < t_e < (\lim t_e =) \frac{a}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^e-1)} \quad (t \geqq e+3).$$

Ebből (51$a$) szerint következik, hogy az (55)-beli $q$ kielégíti az

$$1 - \frac{1}{2^{e+1}} < q < \frac{a}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^e}\right)}$$

egyenlőtlenséget. Ez érvényes marad akkor is, ha a jobboldalon $e$-t a végtelenbe növeljük. Az (53) szerint akkor ez a jobboldal az $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^3}\right)\cdots$ végtelen szorzat reciprokja. Maga ez a szorzat $> \frac{2}{3}$, amiből $q < \frac{3}{2}$ folyik. A fennmaradt $t = e+1$, $e+2$ esetekben az (55)-beli $q$ számára közvetlenül (51$a$)-ból az 1, illetőleg $1 - \frac{1}{2^{e+1}}$ értéket nyerjük, amivel 6°.-ot bebizonyítottuk.

A 2°. és 3°. miatt $2 \mid t$ mellett $t_0 + t_1 > (t+1)_0 + (t+1)_1$. A 7°.-hez tehát még csak annyit kell kimutatnunk, hogy $2 \nmid t$ mellett eme egyenlőtlenség helyébe egy hasonló egyenlőség lép. Ez tényleg úgy van, mert (58), (56), (59) miatt $t_1 = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right) t_0$, $(t+1)_0 = (t+1)_1 = \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) t_0$. Ezzel a III. tételt bebizonyítottuk.

**10.** Legyen $t = 1, 2, 3, \ldots$ mellett

$$M_t(e_4) = \lim \frac{\Sigma e_4}{\mathrm{D}(x,t)} \quad (x \to \infty), \tag{60}$$

ahol az összegezés a $t$-hez tartozó összes olyan D-re értendő, amelyre $\mathrm{D} \leqq x$, míg $\mathrm{D}(x, t)$ ismét mindezeknek a D-knek számosságát jelenti. E szerint $M_t(e_4)$-nek a szokásos középérték jelentése van, amelyre fennáll a következő:

**IV.** *Tétel. Minden* $t = 1, 2, 3, \ldots$ *mellett létezik mindazon*

*valós másodfokú számtesteket illetően az abszolút osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsai számosságának $M_t(e_4)$ középértéke, amely testek diszkriminánsai pontosan t különböző pozitív és nem $4l+3$ alakú törzsszámból vannak összetéve, mégpedig*

$$M_t(e_4) = \sum_{e=1}^{t-1} e t_e, \tag{61}$$

*ahol $t_e$ az (51)-ben és (51a)-ban van megadva.*

*Érvényes*

$$(0=)\, M_1(e_4) < M_2(e_4) < \cdots < M_t(e_4) < \cdots \tag{62}$$

*és*

$$\lim M_t(e_4) = a \sum_{e=1}^{\infty} \frac{e}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^e-1)} = 0{\cdot}764\ldots \quad (t\to\infty), \tag{63}$$

*ahol a (53) által van adva.* (Az $M_t(e_4)$ néhány kezdőértékét könnyen megadhatjuk a fentebbi táblázat segítségével: $M_2(e_4) = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$, $M_3(e_4) = \frac{5}{8} = 0{\cdot}625$, $M_4(e_4) = \frac{45}{64} = 0{\cdot}703\ldots$, $M_5(e_4) = \frac{743}{1024} = 0{\cdot}731\ldots$, $M_6(e_4) = \frac{24557}{32768} = 0{\cdot}749\ldots$)

Figyelemre méltó, hogy $t_e$-nek a III. tételben 3°. és 4°. alatt leírt nyugtalan viselkedése dacára, az $M_t(e_4)$ $(t=1, 2, 3,\ldots)$ sorozat (62) szerint monoton növekvő.

Bizonyítás. A (60)-beli számláló nyilvánvalóan mint $\sum_{e=0}^{t-1} e\, D(x, t, e)$ írható, ahol $D(x, t, e)$ a (29)-nél bevezetett számosság. Minthogy a II. tétel szerint létezik a (29)-beli határérték, és ez $t_e$-vel egyenlő, azért helyes a (61) is. Ebből és (52)-ből következik (63), minthogy az itt előforduló végtelen sor összetartó.

A fenti példák szerint (62) helyes a $t=4$ indexig (sőt $t=6$-ig). Ezért elég bebizonyítani, hogy

$$M_t(e_4) < M_{t+1}(e_4) \qquad (t \geqq 4).$$

E helyett bebizonyítom a

$$\sum_{e=1}^{t-1} t_e \leqq \sum_{e=1}^{t} (t+1)_e \qquad (t \geqq 2) \tag{64}$$

és

$$\sum_{e=2}^{t-1} (e-1)\, t_e \leqq \sum_{e=2}^{t} (e-1)(t+1)_e \qquad (t \geqq 4) \tag{65}$$

egyenlőtlenségeket, amelyekből azután összeadással a (61) következik.

Az értelmezés miatt ugyanis $t_0+t_1+\cdots+t_{t-1}=1$, amiből következik, hogy a (64) baloldala egyenlő $1-t_0$-sal. Ugyanígy a jobboldal $1-(t+1)_0$. Minthogy a III. tételbeli 2°. szerint $l_0 \geqq (t+1)_0$, azért (64) helyes.

A (65) helyett a későbbiek kedvéért valamivel általánosabban bebizonyítom a következőt:

Ha $a_2, a_3, a_4, \ldots$ pozitív számok és

$$1-\frac{1}{e} \leqq \frac{a_e}{a_{e+1}} < 1 \quad (e=2, 3, 4, \ldots), \tag{66}$$

akkor

$$a_e t_e + a_{e+1} t_{e+1} < a_e (t+1)_e + a_{e+1}(t+1)_{e+1} \quad (2 \mid e;\ 2 \leqq e \leqq t-1;\ t \geqq 4). \tag{67}$$

amely egyenlőtlenség az $e=t-1$ esetben úgy értendő, hogy ekkor a baloldal második tagja (vagyis az értelmetlen $t_t$) 0-sal helyettesítendő. (Természetesen az $a_e$ számoknak $t_e$-vel semmi közük.)

Minthogy $a_e=e-1$ mellett (66) nyilvánvalóan fennáll, azért a (67)-beli állítás helyességéből az $e=2, 4, 6, \ldots, 2\left[\frac{t-1}{2}\right]$ értékekkel való összeadás után tényleg következni fog (65) helyessége.

A bebizonyítandó (67) $a_{e+1}>0$ miatt a

$$t_{e+1} - (t+1)_{e+1} < \frac{a_e}{a_{e+1}}\left((t+1)_e - t_e\right)$$

alakban írható. Ha itt (56), (58), (59) szerint behelyettesítést végzünk és $t_e$-vel osztunk, akkor megfelelőleg a $2 \mid t$ és $2 \nmid t$ eseteknek (amelyek mellett mindenkor $2 \mid e$ figyelembe veendő) könnyű számítással nyerjük az

$$\frac{1}{2^{e+1}-1} \cdot \frac{1}{2^t} < \frac{a_e}{a_{e+1}} \cdot \frac{2^e-1}{2^t-2^e},$$

illetve

$$\frac{1}{2^{e+1}-1}\left(\frac{1}{2^t} - \frac{1}{2^{t-e-1}}\right) < \frac{a_e}{a_{e+1}}\left(-\frac{1}{2^t}\right)$$

egyenlőtlenségeket, amelyekből az utóbbi az $e=t-1$ (azaz $t_{e+1}=0$)

esetben is egy helyes átalakítás következménye, aminek belátásához figyelembe veendő $\frac{1}{2^{t-e-1}} = 1$.

Az első egyenlőtlenség még akkor is helyes marad, ha abban $\frac{a_e}{a_{e+1}}$ helyébe a nála (66) szerint kisebb $1 - \frac{1}{e}$ értéket írjuk és a $2^t - 2^e$ nevezőt a nagyobb $2^t$ értékkel helyettesítjük, mert

$$\frac{1}{2^{e+1}-1} < \left(1 - \frac{1}{e}\right)(2^e - 1) \qquad (e \geqq 2).$$

A második egyenlőtlenség baloldala egyszerűen $-\frac{1}{2^t}$. Helyes tehát (66) miatt ez az egyenlőtlenség is, amivel a (67) állítást s vele együtt a IV. tételt bebizonyítottuk.

## III. RÉSZ.

**11.** Az $\left(\frac{a}{b}\right)_4$ alatt a szokásos «racionális» 4-edfokú hatványmaradékjelt fogom érteni. (Itt tehát $a$, $b$ racionális egészek, a $b$ minden $p$ pozitív türzsténeyezőjére fennáll $p \not\equiv 3 \pmod 4$ és $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$; az $\left(\frac{a}{p}\right)_4$ értéke akkor $+1$ vagy $-1$ a szerint, amint $p \neq 2$ mellett a $z^4 \equiv a \pmod p$ kongruencia és $p = 2$ mellett a $z^4 \equiv a \pmod{2^4}$ kongruencia racionális egész $z$-vel megoldható vagy nem megoldható; összetett $b$ esetében $\left(\frac{a}{b}\right)_4$ értéke a nevező szerinti szokásos multiplikatív sajátság alapján értendő.)

Ha $\Delta = \mathrm{D}', \mathrm{D}''$ tetszésszerinti 2-odfajú D-felbontás, akkor legyen mindvégig

$$a'_\Delta = \left(\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}''}\right)_4, \quad a''_\Delta = \left(\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}'}\right)_4. \tag{68}$$

Célunk az egy bizonyos D-hez tartozó $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ számokat illetően néhány segédtételt megállapítani. Ehhez szükségünk van elébb néhány olyan előkészületre, amely az összes D-felbontás csoportjára vonatkozik.

Kényelmes lesz használni a következő jelöléseket:

Ha $\Delta_k$, $\Delta_l$, $\Delta_m$,... bármilyen D-felbontások, akkor jelentse $\Delta_{klm}\ldots$ a belőlük összetett $\Delta_k\Delta_l\Delta_m\ldots$ D-felbontást.

$C$ jelentse mindenkor az $(1, 2,\ldots, e)$ halmaz bármelyik részhalmazát, közöttük esetleg az «üres» halmazt, ahol $e$ egy szilárd pozitív egész szám. Továbbá $C_a$, $C^b$, $C_{ab}$, $C_a^b$,... jelentsen mindenkor olyan $C$-t, amely rendre: $a$-t tartalmazza, $b$-t nem tartalmazza, $a$-t és $b$-t tartalmazza, $a$-t tartalmazza és $b$-t nem tartalmazza,..., ahol $a$, $b$,... különböző elemek az $(1, 2,\ldots, e)$ halmazból.

Érvényes ezután a következő:

**E.** *Segédtétel. Ha* $\Delta_1$, $\Delta_2$,..., $\Delta_e$ $(1 \leqq e \leqq t)$ *tetszés szerint adott* D-*felbontások, mégpedig* $\Delta_s = \mathrm{D}'_s$, $\mathrm{D}''_s$ $(s=1, 2,\ldots, e)$, *akkor egyértelműen meghatározhatók a* $d_C$ $(C \subset (1, 2,\ldots, e))$ *pozitív egész számok úgy, hogy érvényesek a*

$$\mathrm{D}'_s = \prod_{C_s} d_{C_s},\quad \mathrm{D}''_s = \prod_{C^s} d_{C^s} \qquad (s=1, 2,\ldots, e) \qquad (69)$$

*egyenletek.*

*Bárhogyan van megadva az összes* D-*felbontások* $G$ *csoportjában egy* $2^e$ *rendű* $G'$ *alcsoport, mindig választható ebben egy* $\Delta_1$, $\Delta_2$,..., $\Delta_e$ *(független) bázis úgy, hogy a* (69) *által hozzárendelt* $d_C$ *számok közül* $d_1, d_2,\ldots, d_e > 1$. *Ha azonfelül* $G'$ a $\Delta^* = \mathrm{D}, 1$ *elemet nem tartalmazza, akkor találunk egy* $G''$ *csoportot, ami hasonló rendű, ugyancsak nem tartalmazza a* $\Delta^*$ *elemet és* $\{G'', \Delta^*\} = \{G', \Delta^*\}$, *úgyhogy (*$G'$ *helyett)* $G''$*-ra nézve alkalmas* $\Delta_1$, $\Delta_2$,..., $\Delta_e$ *bázissal* $d_0, d_1, d_2,\ldots, d_e > 1$ *teljesül.* (Itt $d_0$-ban 0 az üres halmazt jelenti, valamint $d_k$-ban $k$ úgy értendő, mint $d_C$, ahol $C$ az $(1, 2,\ldots, e)$ halmaznak az egyetlen $k$ elemből álló részhalmaza $(k=1, 2,\ldots, e)$.)

A (69) követelés szerint ugyanis kell, hogy minden egyes $C$ halmazra teljesüljenek a következő feltételek: $d_C \mid \mathrm{D}'_s$ $(s \in C)$, $d_C \mid \mathrm{D}''_s$ $(s \notin C)$, ahol $s=1, 2,\ldots, e$. Mégpedig látjuk ebből, hogy szükségképpen $d_C$ a most nevezett $\mathrm{D}'_s$ és $\mathrm{D}''_s$ számoknak legnagyobb közös osztója. Ha ugyanis egy $p_k$ a $\mathrm{D} = p_1 p_2 \ldots p_t$ (ez ismét hasonló jelölés, mint 4.-ben) tényezői közül *ugyanazokat* a $\mathrm{D}'_s$, $\mathrm{D}''_s$ számokat osztja s a mellett $p_k \nmid d_C$ lenne, akkor $p_k$ osztója egy másik $d_{C'}$-nek $(C' \neq C)$, minthogy (69) miatt az összes $d_C$ szorzata nyilvánvalóan egyenlő D-vel. Akkor vagy van egy $z$, ami $C'$-ban megvan és $C$-ben nincs meg, amiből a

fentiek szerint $p_k \mid d_{C'}$ miatt $p_k \mid \mathrm{D}'_z$ azaz $p_k \nmid \mathrm{D}''_z$ folyik, ami a $p_k$-ról szóló feltevésnek ellentmond, vagy van egy $z$, ami $C$-ben megvan és $C'$-ban nincs meg, amiből hasonlóan a ($p_k \mid \mathrm{D}''_z$ azaz) $p_k \nmid \mathrm{D}'_z$ ellenmondás folyik.

Fordítva azonnal látjuk, hogy (69) teljesül, ha $d_C$-t, mint a fenti $\mathrm{D}'_s$ ($s \in C$), $\mathrm{D}''_s$ ($s \notin C$) számok legnagyobb közös osztóját értelmezzük. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (69) követelte előállítás egyértelműen lehetséges.

Legyen mármost $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ ($e \geqq 1$) független bázisa a D-felbontások egy $G'$ csoportjának. Legyen $p_k$ a $\mathrm{D}'_1$-nak egyik osztója, ami $\mathrm{D}'_1 > 1$ miatt biztosan létezik. Ha a szükséghez képest a $\Delta_s$ ($s = 2, 3, \ldots, e$) báziselemet a $\Delta_1 \Delta_s$ elemmel helyettesítjük és az új (független) bázist ismét $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$-vel jelöljük, akkor elérhetjük, hogy $p_k \nmid \mathrm{D}'_s$ ($s = 2, 3, \ldots, e$). Akkor (69) miatt $p_k \mid d_1$ (mindenesetre ugyanis $p_k$ osztója egy bizonyos olyan $d_C$-nek, amelyben $1 \in C$, mert különben $p_k \nmid \mathrm{D}'_1$ lenne, és ez a $C$ semmi más $s (\neq 1)$ elemet nem tartalmazhat, mert különben $p_k \mid \mathrm{D}'_s$ lenne). Azután tekintem a $\mathrm{D}'_2$-nak egy $p_l$ osztóját. Most a $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4, \ldots, \Delta_e$ elemeket szorozzuk a szükség szerint $\Delta_2$-vel. Ha az így előálló új bázist ismét $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$-vel jelöljük, akkor mindenekelőtt $p_k$ nem vesztette el előbbi sajátságát $s \neq e$ mellett elérhető, hogy $p_l$ a $\mathrm{D}'_2$-on kívül semmi más $\mathrm{D}'_s$-t nem oszt. Azaz tehát $p_k \mid d_1$ érvényben marad, amihez hasonlóan még $p_l \mid d_2$ lép. Ilyen úton továbbhaladva, látjuk, hogy a $d_1, d_2, \ldots, d_e > 1$ követelés teljesíthető.

A következőkhöz elébb megjegyzem, hogy a $\Delta^* = \mathrm{D}$, 1 D-felbontás hatása az összetevésnél nyilvánvalóan a tagok megcserélése, azaz $\Delta = \mathrm{D}'$, D'' mellett $\Delta\Delta^* = \mathrm{D}''$, D'.

Ha most $G'$ a $\Delta^*$ elemet nem tartalmazza, akkor mindenekelőtt $\Delta^*, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ független bázisa a $G^* = \{G', \Delta^*\}$ csoportnak. Ha most a $\Delta_s$ ($s = 1, 2, \ldots, e$) elemeket a szükség szerint $\Delta_s \Delta^*$-gal helyettesítjük s a $G^*$ nyert új bázisát ismét $\Delta^*, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$-vel jelöljük, akkor elérhető, hogy az új $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ elemekre nézve például $p_1 \mid \mathrm{D}''_s$ ($s = 1, 2, \ldots, e$) teljesül. Ebből (69) miatt következik $p_1 \mid d_0$, azaz $d_0 > 1$. Másrészt ezek a $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ elemek ismét független bázisa egy $G''$ csoportnak, amelyre nyilvánvalóan $\{G'', \Delta^*\} = \{G', \Delta^*\}$ fennáll. Ezután alávetjük a

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ bázist egy hasonló átalakításnak, mint elébb, miáltal ismét $d_1, d_2, \ldots, d_e > 1$ elérhető s e mellett láthatólag nem vész el az elébb szerzett $(p_1 \mid d_0$ azaz) $d_0 > 1$ tulajdonság. Ezzel az **E.** segédtételt bebizonyítottuk.

Érvényes a következő:

**F.** *Segédtétel. Legyen megadva az összes* D*-felbontások csoportjának egy csupa* 2*-odfajú* D*-felbontásokból álló olyan* $G'$ *alcsoportja, amelynek rendje* $2^e$ $(e \geqq 1)$ *és amely a* $\Delta^* = \mathrm{D}, 1$ *elemet nem tartalmazza. Akkor fennállnak a következők:*

1°. *Ha* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ *a* $G'$*-nak egy (független) bázisa és* $\Delta$ *befutja a* $G'$ *minden elemét egy meghatározott sorrendben, akkor az* $a'_\Delta$, $a''_\Delta$*-ból e közben előálló értékrendszer egyedül az* $A = (a'_{\Delta_1}, a'_{\Delta_2}, \ldots, a'_{\Delta_e}; a''_{\Delta_1}, \ldots, a''_{\Delta_e}; a'_{\Delta_{12}}, a'_{\Delta_{13}}, \ldots, a'_{\Delta_{e-1,e}})$ *rendszer által meghatározott, ahol az* $e=1$ *esetben* $A = (a'_{\Delta_1}, a''_{\Delta_1})$ *értendő.* (Ebben az esetben az állítás önként értetődő.)

2°. *Akkor és csak akkor teljesül a* $G'$ *minden* $\Delta$ *elemére*

$$a'_\Delta . a''_\Delta = 1, \tag{70}$$

*ha ugyanez a* $G'$*-nak* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ *független báziselemeire teljesül.*

3°. *A* $G'$*-nak minden* $\Delta (\neq 1, \mathrm{D})$ *elemére csak akkor teljesülhet*

$$a'_\Delta = a''_\Delta = -1, \tag{71}$$

*ha* $e=1$ *vagy* 2.

Elébb kimutatjuk a következő azonosságokat:

$$a'_{\Delta_1} a''_{\Delta_1} a'_{\Delta_2} a''_{\Delta_2} a'_{\Delta_{12}} a''_{\Delta_{12}} = 1, \tag{72}$$

$$a^{(k)}_{\Delta_1} a^{(k)}_{\Delta_2} a^{(k)}_{\Delta_3} a^{(k)}_{\Delta_{12}} a^{(k)}_{\Delta_{13}} a^{(k)}_{\Delta_{23}} a^{(k)}_{\Delta_{123}} = 1 \quad (k=1, 2), \tag{73}$$

ahol $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ tetszésszerinti 2-odfajú D-felbontások.

A (69) szerint ugyanis $\Delta_1 = d_1 d_{12}, d_0 d_2$; $\Delta_2 = d_2 d_{12}, d_0 d_1$, ahol $d_0, d_1, d_2, d_{12}$ pozitiv egész számok. Akkor $\Delta_{12} = \Delta_1 \Delta_2 = d_1 d_2, d_0 d_{12}$. Ezzel a jelöléssel (68) szerint a (72) baloldala így írható:

$$\left(\frac{d_1 d_{12}}{d_0 d_2}\right)_4 \left(\frac{d_0 d_2}{d_1 d_{12}}\right)_4 \left(\frac{d_2 d_{12}}{d_0 d_1}\right)_4 \left(\frac{d_0 d_1}{d_2 d_{12}}\right)_4 \left(\frac{d_1 d_2}{d_0 d_{12}}\right)_4 \left(\frac{d_0 d_{12}}{d_1 d_2}\right)_4 .$$

Ebből az

$$\left(\frac{x}{yz}\right)_4 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)_4 \left(\frac{x}{z}\right)_4 \cdot \left(\frac{x}{z}\right)_4 \left(\frac{y}{z}\right)_4 = \left(\frac{xy}{z}\right)_4$$

szabályok alkalmazásával a következőt nyerjük:

$$\left(\frac{(d_1d_2d_{12})^2}{d_0}\right)_4\left(\frac{(d_0d_2d_{12})^2}{d_1}\right)_4\left(\frac{(d_0d_1d_{12})^2}{d_2}\right)_4\left(\frac{(d_0d_1d_2)^2}{d_{12}}\right)_4.$$

Itt tudvalevőleg törölhetjük egyszerre a «2» kitevőket s a «4 indexeket», miután előáll egy kifejezés, ami a négyzetes reciprocitástétel alapján az 1 értéket adja. Ezzel (72)-őt bebizonyítottuk.

A (73) bizonyításához ismét (69) alapján $\Delta_1 = d_1d_{12}d_{13}d_{123}$, $d_0d_2d_3d_{23}$; $\Delta_2 = d_2d_{12}d_{23}d_{123},\ldots$; $\Delta_3 = d_3d_{13}d_{23}d_{123},\ldots$ írható, ahol a «$\cdots$» pontok helyébe mindenkor $d_0$, $d_1,\ldots$, $d_{123}$ közül a «többi» 4 szorzata veendő. A $d_0$, $d_1,\ldots$ ismét pozitiv egész számok. Helyettük most egyszerűség kedvéért bevezetjük a $d_0=m$, $d_1=a$, $d_2=b$, $d_3=c$, $d_{12}=z$, $d_{13}=y$, $d_{23}=x$, $d_{123}=n$ jelölést. Akkor $\Delta_1 = ayzn$, $mbcx$; $\Delta_2 = bxzn,\ldots$; $\Delta_3 = cxyn,\ldots$ hasonló rövidítéssel, mint elébb. Ezekből következik: $\Delta_{12} = \Delta_1\Delta_2 = abxy,\ldots$; $\Delta_{13} = acxz,\ldots$; $\Delta_{23} = bcyz,\ldots$; $\Delta_{123} = \Delta_{12}\Delta_3 = abcn,\ldots$ A (73) baloldala $k=1$ mellett tehát így írható:

$$\left(\frac{ayzn}{mbcx}\right)_4\left(\frac{bxzn}{macy}\right)_4\left(\frac{cxyn}{mabz}\right)_4\left(\frac{abxy}{mczn}\right)_4\left(\frac{acxz}{mbyn}\right)_4\left(\frac{bcyz}{maxn}\right)_4\left(\frac{abcn}{mxyz}\right)_4.$$

Ez a kifejezés hasonló úton mint fenn átvihető a következőbe:

$$\prod_{u,\,v}\left(\frac{u^2}{v}\right)_4\cdot\left(\frac{(abcxyzn)^4}{m}\right)_4,$$

ahol $u$, $v$ befut minden párt az $a$, $b$, $c$, $m$, $n$, $x$, $y$, $z$ elemekből ($u\neq v$). Nyilvánvaló, hogy itt mindkét tényező önmagában is 1, amivel (73)-at bebizonyítottuk a $k=1$ esetre.

A (73) a $k=2$ esetre hasonlóan bizonyítható, vagy még egyszerűbben a már bebizonyítottak felhasználásával a következőképpen: A (72) baloldalát egy pillanatra $(\Delta_1, \Delta_2)$-vel s a (73) baloldalát $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)^{(k)}$-val jelölöm. Nyilvánvalóan fennáll a

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)'(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)''\,\alpha'^2_{\Delta_1}\alpha''^2_{\Delta_1} = (\Delta_1, \Delta_{23})(\Delta_1, \Delta_2)(\Delta_1, \Delta_3)$$

azonosság. Ebből tényleg következik az állítás, mert a már bebizonyítottak szerint a baloldal első tényezőjének s a jobboldali tényezőknek értéke 1, valamint mindenkor $\alpha'^2_\Delta = \alpha''^2_\Delta = 1$.

A (72) és (73) alapján már közvetlenül nyerhetnénk a segédtétel bizonyítását, ez azonban könnyebb a következő képletek felhasználásával, amelyek amazok általánosításai:

Ha $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ tetszésszerinti 2-odfajú D-felbontások s (ismét) $C$ az $(1, 2, \ldots, e)$ halmaznak egy nem üres részhalmaza, akkor

$$a'_{\Delta_C} a''_{\Delta_C} = \prod_{m \in C} (a'_{\Delta_m} a''_{\Delta_m}) \tag{74}$$

és

$$a^{(k)}_{\Delta_C} = \prod_{\substack{m,\, n \in C \\ m<n}} a^{(k)}_{\Delta_{mn}} \cdot \left(\prod_{m \in C} a^{(k)}_{\Delta_m}\right)^{(C)} \qquad (k=1, 2), \tag{75}$$

ahol $(C)$ a $C$ halmaz elemeinek számossága, úgyhogy tehát (75) jobboldalának második tényezője elmarad, ha ez a számosság páros; a $\Delta_C$ természetesen jelenti az összes olyan $\Delta_z$ szorzatát, amelyben $z$ eleme $C$-nek. (Ezek a képletek valójában nem általánosabbak, mint a $C=(1, 2, \ldots, e)$ felvételhez tartozó eseteik, a képletek fenti alakja azonban az alkalmazásban kényelmesebb.)

A (74) a $(C)=2$ esetben nem egyéb, mint (72), míg ugyanaz a $(C)=1$ esetben triviális. Feltételezzük, hogy (74) helyes a $C$ halmazra, ahol $2 \leqq (C) < e$, s kimutatjuk annak helyességét a $C+r$ egyesített halmazra, ahol $r$ valamelyik, $C$-ben nem szereplő szám az $1, 2, \ldots, e$ közül. Mégpedig a (72)-nek a $\Delta_C$, $\Delta_r$ elemekre való alkalmazásából a következőt nyerjük:

$$a'_{\Delta_{C+r}} a''_{\Delta_{C+r}} = a'_{\Delta_C} a''_{\Delta_C} a'_{\Delta_r} a''_{\Delta_r},$$

ahol ismét tekintetbe vettük, hogy $a'^2_{\Delta} = a''^2_{\Delta} = 1$. Ebből (74) behelyettesítésével azonnal következik annak a $C+r$ halmazra való, azaz általános helyessége.

A (75) triviális a $(C)=1$, 2 esetekben, míg ugyanaz a $(C)=3$ esetben nem egyéb, mint (73). Általánosan tehát a (75)-öt úgy bizonyíthatjuk, hogy bebizonyítjuk annak helyességét egy tetszésszerinti $C+r+s$ halmazra $(r, s \notin C;\ r \neq s)$, feltételezve, hogy (75) helyes a kevesebb elemű $C+r$, $C+s$ halmazokra. Elég természetesen a $(C) \geqq 2$ esettel foglalkozni s feltehető, hogy $r$ és $s$ a $C+r+s$ két legnagyobb eleme. A (73)-nak a $\Delta_C$, $\Delta_r$, $\Delta_s$ elemekre való alkalmazásával a következőt nyerjük:

$$a^{(k)}_{\Delta_{C+r+s}} = a^{(k)}_{\Delta_{C+r}} a^{(k)}_{\Delta_{C+s}} a^{(k)}_{\Delta_{rs}} a^{(k)}_{\Delta_C} a^{(k)}_{\Delta_r} a^{(k)}_{\Delta_s}.$$

A jobboldal 1-ső, 2-dik, 5-dik és 6-dik tényezőjének szorzata (75) alapján könnyen láthatólag

$$\prod_{m\in C}(\alpha^{(k)}_{\Delta_{mr}}\alpha^{(k)}_{\Delta_{ms}})\cdot(\alpha^{(k)}_{\Delta_r}\alpha^{(k)}_{\Delta_s})^{(C)},$$

s ha (75)-öt még a 4-dik tényezőben is figyelembe vesszük, akkor látjuk, hogy (75) a $C+r+s$ halmazra is igaz (tekintetbe veendő az is, hogy a kitevőben $(C+r+s)=(C)+2$ helyettesíthető $(C)$-vel. Ezzel (75)-öt bebizonyítottuk.

Mármost a segédtétel a bebizonyított képleteknek közvetlen következménye. Mégpedig (75)-ből a $k=1$ esetre következik, hogy az 1°. alatti $G'$ minden $\Delta$ elemére $\alpha'_\Delta$ kifejezhető az $A=(\alpha'_{\Delta_1},\ldots;\ \alpha''_{\Delta_1},\ldots;\ \ldots,\ \alpha'_{\Delta_{e-1,e}})$ rendszer elemei által s ezután (74) miatt hasonló igaz $\alpha''_\Delta$-ról. Ezzel 1°.-et bebizonyítottuk. A 2°. azonnal világos (72)-ből. Ha végül $e\geqq 3$, akkor legyen $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ három független elem $G'$-ból. Ezek s a belőlük összetett $\Delta_{12}$, $\Delta_{13}$, $\Delta_{23}$, $\Delta_{123}$ elemek mind különböznek az 1, D D-felbontástól. Mindannyiukra tehát nem állhat fenn (71) a (73) miatt, mert ebben a baloldali tényezők számossága páratlan. Ezzel az **F.** segédtételt bebizonyítottuk.

Ennek a segédtételnek 1°. része kiegészítését találja az alant következő segédtételben, amelynek segítségével ugyanis később bebizonyítjuk, hogy az $A$ rendszer bizonyos értelemben független.

**G.** *Segédtétel. Legyenek $e$ és $t$ pozitív egész számok:* $1\leqq e\leqq t-1$. *Legyen* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2,\ldots, \mathfrak{p}_t; \mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2,\ldots, \mathfrak{p}'_t$ *összevéve $2t$ jel, amelyekkel egyelőre csak alakilag legyen* $n(\mathfrak{p}_k)=p_k$ $(k=1, 2,\ldots, t)$. *Továbbá jelentsen* $\delta_C$ $\left(C\subset(1, 2,\ldots, e)\right)$ *egy (alaki) szorzatot néhány különböző* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}'_t$ *elemből (esetleg* $d_C=1$*), úgyhogy az összes* $\delta_C$ *szorzata* $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_t$, *továbbá* $\delta_0, \delta_1,\ldots, \delta_e\neq 1$. *Legyen még* $d_C=n(\delta_C)$. *Végül legyen*

$$P=\prod_{1\leqq u<v\leqq t}\left(\frac{\mathfrak{p}_u}{\mathfrak{p}_v}\right)_i^{m_{uv}}\prod_{k=1}^{e}\left(\frac{\Pi d_{C_k}}{\Pi\delta_{C^k}}\right)_i^{a_k}\prod_{k=1}^{e}\left(\frac{\Pi d_{C^k}}{\Pi\delta_{C_k}}\right)_i^{b_k}\prod_{1\leqq k<l\leqq e}\left(\frac{\Pi d_{C_k^l}\Pi d_{C_l^k}}{\Pi\delta_{C_{kl}}\Pi\delta_{C^{kl}}}\right)_i^{c_{kl}},\tag{76}$$

*ahol* $m_{uv}$ $(1 \leqq u < v \leqq t)$, $a_k$, $b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, e)$, $c_{kl}$ $(1 \leqq k < l \leqq e)$ *mindegyikének értéke* 0 *vagy* 1, *s közöttük legalább egynek az értéke* 1 *és a belső szorzatok rendre minden* $C_k$, $C^k, \ldots$ *halmazra kiterjesztendők.* (Ha $e = 1$, akkor a 4-ik szorzat elhagyandó s természetesen az $m_{uv}$, $a_k$, $b_k$ számok között kell az 1-nek előfordulnia.)

*Akkor van egy* $r$ *racionális egész szám* $(2 \leqq r \leqq t)$, *egy a hatványszorzat a* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}; \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_{r-1}$ *elemekből, ami (alakilag) nem* 4*-dik hatvány, és egy* $\bar{P}$ *szorzat olyan* $\left(\frac{x}{y}\right)_{i4}$ *elemekből, ahol* $x, y$ *különböző elemeket jelentenek a* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}; \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_{r-1}$ *sorozatból (esetleg* $\bar{P} = 1$*), úgyhogy fennáll a*

$$P = \bar{P}\left(\frac{\mathfrak{p}_r^*}{\mathfrak{a}}\right)_{i4} \tag{77}$$

*egyenlet, miután* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ *bárhogyan olyan az* $R(i)$ *testben primér elsőfokú törzsszámokkal helyettesítettek, amelyekre* $p_1, p_2, \ldots, p_t$ *különbözők.* (Természetesen eme helyettesítés után a «$'$» vonás és $n$ a konjugáltra való áttérés és a normaképzés jelei, valamint $()_i$ és $()_{i4}$ mint a 2-dik és 4-dik hatványmaradékjelek értendők az $R(i)$ testben.)

A bizonyításhoz felteszem, hogy (76)-ban a megbeszélt behelyettesítés már megtörtént. Ezután a (76) jobboldalát bizonyos olyan átalakításoknak vetem alá, amelyeket «megengedhetőknek» fogok nevezni. Mégpedig ezek a következők legyenek:

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)_{i4} = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_{i4}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_{i4}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)_{i4} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_{i4},$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4} = \left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)_{i4}^3, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}^4 = 1, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_i = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}^2,$$

ahol $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ olyan egész számok $R(i)$-ben, amelyekre az itt előforduló jeleknek értelme van, továbbá

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{i4},$$

ha azonfelül $\alpha$, $\beta$ primérek s közülük az egyik racionális vagy teljes négyzet az $R(i)$-ben. Mindezek az egyenletek mint «meg-

engedhető» átalakítások mindkét irányban alkalmazhatók. Közülük az utolsó a 4-edfokú reciprocitástételnek egyik különös esete (l. pl. [6] 106. o. III.). A «megengedhető» átalakítások nyilvánvalóan nem változtatják meg a (76) jobboldalának értékét, függetlenül a $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ különös megválasztásától.

Mindenekelőtt a (76) jobboldala «megengedhető» átalakításokkal nehány $\left(\frac{p_k}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4}$ tényező szorzatává alakítható. Azután további «megengedhető» átalakításokkal elérhetjük, hogy ebben a kifejezésben $p_s$, $p'_s$ egyáltalában ne forduljanak elő és $\mathfrak{p}_s$ se forduljon elő egyetlen «nevezőben» sem, ahol $s$ egy tetszésszerinti szilárd érték $1, 2, \ldots, t$ közül. Ebben a kérdésben ugyanis csak olyan $\left(\frac{p_k}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4}$ jelekkel van dolgunk, amelyekben $k=s$ vagy $l=s$. Az állítás ezután nyilvánvaló abból, hogy «megengedhető» átalakításokkal:

$$\left(\frac{p_s}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4} = \left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4}\left(\frac{p'_s}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4} = \left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4}\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{p}'_l}\right)^3_{i4} \tag{78}$$

és

$$\left(\frac{p_k}{p_s}\right)_{i4} = \left(\frac{\mathfrak{p}_s}{p_k}\right)_{i4}. \tag{78a}$$

Végül az összes $\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{p}_k}\right)_{i4}$, $\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{p}'_k}\right)_{i4}$, $\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{p_k}\right)_{i4}$ $(k \neq s;\ 1 \leqq k \leqq t)$ alakú tényezők szorzatát «megengedhető» átalakítással átvihetjük egy $\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{a}_s}\right)_{i4}$ kifejezésbe, ahol $\mathfrak{a}_s$ egy hatványszorzat néhány $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}'_k$ törzsszámból $(k \neq s)$. Ezzel a (76)-beli $P$-t átalakítottuk egy olyan szorzattá, amelynek tényezői a mondott $\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{a}_s}\right)_{i4}$ és néhány $\left(\frac{p_k}{\mathfrak{p}_l}\right)_{i4}$ $(k, l \neq s)$. A $P$-nek egy ilyen előállítását a $\mathfrak{p}_s$-re nézve redukáltnak nevezem s magát az $\mathfrak{a}_s$-et a $\mathfrak{p}_s$-hez tartozó «nevezőnek».

A fentiekből egyszersmind látjuk, hogy $P$-nek minden $\mathfrak{p}_s$-re nézve van redukált előállítása. Azt is azonnal látjuk, hogy a $\mathfrak{p}_s$-hez tartozó «nevező» csupán $s$ által meghatározott, eltekintve $R(i)$-beli 4-dik hatvány tényezőktől, amik természetesen nem jönnek tekintetbe. Ha ugyanis $\mathfrak{a}_s$ mellett $m$ is egy $\mathfrak{p}_s$-hez tartozó nevező, akkor $\left(\frac{\mathfrak{p}_s}{\mathfrak{a}_s m^{-1}}\right)_{i4}$ (multiplikativ értelemben!) a két

redukált előállítás alapján kifejezhető mint néhány $\left(\frac{p_k}{p_l}\right)_{i4}$ $(k, l \neq s)$ szorzata, ami nyilvánvalóan csak úgy lehetséges, hogy $a_s m^{-1}$ 4-dik hatvány $R(i)$-ben.

Állítom, hogy van legalább egy $p_s$, amelyhez a hozzátartozó $a_s$ «nevező» nem 4-dik hatvány az $R(i)$-ben.

Először kimutatom, hogy ennek az állításnak helyességéből következik a G. segédtétel. Redukáljuk ugyanis $P$-t a $p_t$-re nézve. Ha $a_t$ nem 4-dik hatvány az $R(i)$-ben, akkor a segédtétel máris helyes $(r=t)$. Az ellenkező esetben a $\left(\frac{p_t}{a_t}\right)_{i4}$ tényező («megengedhető» átalakítások révén) elhagyható s $P$-nek egy olyan alakja áll előttünk, amely csupa $\left(\frac{p_k}{p_l}\right)_{i4}$ $(k \neq l;\ 1 \leqq k, l \leqq t-1)$ tényező szorzata. Ebből (78) és (78$a$) segítségével azonnal nyerhető a $P$-nek redukált előállítása a $p_{t-1}$-re nézve. Ha a nyert $a_{t-1}$ «nevező» nem 4-dik hatvány $R(i)$-ben, akkor ismét helyes a segédtétel $(r=t-1)$. Különben $\left(\frac{p_{t-1}}{a_{t-1}}\right)_{i4}$ ismét eltávolítható s a $P$ megmaradt kifejezése néhány $\left(\frac{p_k}{p_l}\right)_{i4}$ $(k \neq l;\ 1 \leqq k, l \leqq t-2)$ tényező szorzata. Ezzel tovább hasonlóan járhatunk el. Ha nem jutunk elébb célhoz, akkor ezen az úton «megengedhető» átalakítások által a $P = \left(\frac{p_2}{a_2}\right)_{i4}$ redukált előállításhoz jutunk, ahol tehát $a_2$ a $p_2$-höz tartozó «nevező», ami néhány $p_1$, $p_1'$ tényező szorzata (itt a jobboldalon egyéb $\left(\frac{p_k}{p_l}\right)_{i4}$ tényezők természetesen már nem szerepelhetnek). Ez az $a_2$ már bizonyosan nem 4-dik hatvány az $R(i)$-ben, amiből a G. segédtétel következik $(r=2)$. Ellenkező esetben ugyanis mindvégig «megengedhető« átalakítások által a $P=1$ előállításhoz jutottunk, amiből következik, hogy minden $p_s$-hez tartozó «nevező» 4-dik hatvány az $R(i)$-ben, ellentétben a fenti állítással.

E szerint már csak ennek a fenti állításnak helyességét kell bizonyítanunk. Ehhez feltesszük, hogy a $p_1, p_2, \ldots, p_t$-hez tartozó $a_1, a_2, \ldots, a_t$ «nevezők» mindannyia 4-dik hatvány $R(i)$-ben, hogy azután ebből a feltevésből ellenmondást nyerjünk.

A feltevés szerint $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_e \neq 1$. Feltehetjük, hogy $p_t \mid \delta_0$

és $\mathfrak{p}_s \mid \delta_s$ $(s=1, 2, \ldots, e)$, mert ez csupán jelölés kérdése, amiben most semmi sem akadályoz. Válasszunk egy bizonyos $s$-et $(s=1, 2, \ldots, t)$ és törekszünk a hozzátartozó $\alpha_s$ «nevezőt» közvetlenül (76)-ból előállítani. Ez így történhetik: A (76)-ból minden olyan $()_i$ és $()_{i4}$ tényezőt elhagyunk, ahol sem a «számláló» $p_s$-sel, sem a «nevező» $\mathfrak{p}_s$-sel nem osztható. Azután a megmaradt $\left(\frac{a}{\beta}\right)_{i4}$ alakú tényezőket ($a$ racionális, $\beta$ az $R(i)$-ben) helyettesítjük $\left(\frac{p_s}{\beta}\right)_{i4}$-gyel, ha $p_s \mid a$ és $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}_s}\right)_{i4}$-gyel, ha $\mathfrak{p}_s \mid \beta$. Mindez eddig azt jelenti, hogy (76)-ban elhagytuk mindazokat a tényezőket, amik $\alpha_s$-t úgysem befolyásolják. Ezután a $\left(\frac{p_s}{p_k}\right)_i$, $\left(\frac{p_k}{p_s}\right)_i$, $\left(\frac{p_s}{\beta}\right)_{i4}$, $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}_s}\right)_{i4}$ alakú tényezőket egymásközt szorozzuk, ami által előáll a (76) megmaradt jobboldalából egy

$$\left(\frac{p_s}{\xi_s}\right)_i \left(\frac{x_s}{\mathfrak{p}_s}\right)_i \left(\frac{p_s}{\eta_s}\right)_{i4} \left(\frac{y_s}{\mathfrak{p}_s}\right)_{i4}$$

alakú szorzat. A harmadik és negyedik tényezőt (78) és (78$a$)-hoz hasonlóan átalakíthatjuk s hasonlóan járhatunk el a másik két tényezővel, ha ezekben előbb $()_i$ helyett $()_{i4}^2$ jelt írunk. Így azután azt nyerjük, hogy

$$\alpha_s = \xi_s^2 \xi_s'^2 x_s^2 \eta_s \eta_s'^3 y_s, \tag{79}$$

miközben tekintetbe vettük, hogy az $\alpha_s$-ben $R(i)$-beli 4-dik hatvány tényezők mellőzhetők (a végzett számítás közvetlenül a $\xi_s'^6$ tényezőt szolgáltatta volna).

Ezekből a $\xi_s, \ldots, y_s$ mennyiségekből céljainkra elegendő lesz csupán $y_s$ $(s=1, 2, \ldots, e$ és $t)$ és $\eta_t$ kiszámítása.

Az $y_s$-nek $(s=1, 2, \ldots, e)$ a (76)-ból való kiszámításánál tekintetbe kell vennünk, hogy $\mathfrak{p}_s \mid \delta_s$, mégpedig $\mathfrak{p}_s$ a $\delta_s$-ben csupán első hatványon szerepel, míg természetesen $\mathfrak{p}_s \nmid \delta_C$ $(C \neq s)$. Nyerjük tehát (76)-ból a következőt:

$$y_s = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{e} (\Pi d_{Ck})^{a_k} \cdot (\Pi d_{Cs})^{b_s} \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq e \\ k,\, l \neq s}} (\Pi d_{Ck}^{l} \Pi d_{Cl}^{*})^{c_{kl}} \qquad (s=1, 2, \ldots, e), \tag{80}$$

ahol a 2-dik, 3-dik, 5-dik, 6-dik szorzatjel alatt ismét az összes $C_k$, $C^s$,... szerint kell szorozni.

Hasonlóan nyerjük $s=t$ mellett $\mathfrak{p}_t \mid \delta_0$, $\mathfrak{p}_t \dagger \delta_C$ $(C \neq 0)$ miatt a következőt:

$$y_t = \prod_{k=1}^{e} (\Pi d_{C_k})^{a_k} \prod_{1 \leqq k < l \leqq e} (\Pi d_{C_k^l} \Pi d_{C_l^k})^{c_{kl}} \tag{80a}$$

és

$$\eta_t = \prod_{k=1}^{e} (\Pi \delta_{C_k})^{b_k}. \tag{80b}$$

Mármost (79) miatt s mert $x_s$, $y_s$ racionálisak: $\mathfrak{a}_s \mathfrak{a}_s'^{-1} = (\eta_s' \eta_s^{-1})^2$. Minthogy a feltevés szerint $\mathfrak{a}_s$ 4-dik hatvány $R(i)$-ben, továbbá $\eta_s$ és $\eta_s'$ relatív prímek, mert $\eta_s$ néhány $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ szorzata, amelyek között nincsenek konjugáltak, azért következik a megelőző egyenletből, hogy $\eta_s$ ideálnégyzet az $R(i)$-ben $(s=1, 2, \ldots, t)$.

Innét a (79)-ből ezután még az is következik, hogy $y_s$ ideálnégyzet az $R(i)$-ben vagyis egy racionális szám négyzete.

Minthogy $\eta_t$ ideálnégyzet, azért $\eta_t$ különösen $\mathfrak{p}_k$-t $(k=1, 2, \ldots e)$ páros hatványon tartalmazza. A $\mathfrak{p}_k$ kitevője $\eta_t$-ben a (80$b$) alapján könnyen meghatározható. Ehhez ismét figyelembe veendő $\mathfrak{p}_k \mid \delta_k$, $\mathfrak{p}_k^2 \dagger \delta_k$, $\mathfrak{p}_k \dagger \delta_C$ $(C \neq k)$. Ez a kitevő tehát $b_k$ s így ennek párosnak kell lennie. Minthogy $b_k = 0, 1$, azért

$$b_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, e). \tag{81}$$

Minthogy $y_t$ racionális négyzetszám és $j=1, 2, \ldots, e$ mellett $p_j \mid d_j$, $p_j^2 \dagger d_j$, $p_j \dagger d_C$ $(C \neq j)$, azért (80$a$)-ból a $p_j$ pontos kitevőjének összeszámlálásával a következő kongruenciát nyerjük:

$$a_j + \sum_{\substack{1 \leqq k < l \leqq e \\ k \text{ vagy } l = j}} c_{kl} \equiv 0 \pmod 2 \qquad (j=1, 2, \ldots, e). \tag{82}$$

Végül minthogy $y_s$ $(s=1, 2, \ldots, e)$ is racionális négyzetszám, azért $p_j$-vel $(j \neq s;\ 1 \leqq j \leqq e)$ (80) alapján hasonlóan járva el, mint elébb, s egyszersmind (81)-et is figyelembe véve, a következő kongruenciát nyerjük:

$$a_j + \sum_{\substack{1 \leqq k < l \leqq e \\ k,\ l \neq s \\ k \text{ vagy } l = j}} c_{kl} \equiv 0 \pmod 2 \qquad (j, s=1, 2, \ldots, e;\ j \neq s). \tag{83}$$

(82)-ből és (83)-ból kivonással az következik, hogy $c_{js}$ vagy $c_{sj} = 0 \pmod 2$ a szerint, amint $j<s$ vagy $j>s$. Ebből $c_{kl}=0, 1$

miatt $c_{kl} = 0$ $(1 \leqq k < l \leqq e)$ következik. Ezután (82) miatt $a_j \equiv 0 \pmod 2$, azaz $a_j = 0, 1$ miatt $a_j = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, e)$.

A (71) és a most bebizonyítottak miatt (76) átmegy a következőbe:

$$P = \prod_{1 \leqq u < v \leqq t} \left(\frac{p_u}{p_v}\right)_i^{m_{uv}}.$$

amelyben tehát legalább egy $m_{uv}$ kitevő értéke 1. Ha $r$ a legnagyobb érték mindama $v$ közül, amelyekre $m_{uv} = 1$, tehát $2 \leqq r \leqq t$, akkor $P$ (78$a$) miatt «megengedhető» átalakítással a

$$P = \prod_{1 \leqq u < v \leqq r-1} \left(\frac{p_u}{p_v}\right)_i^{m_{uv}} \cdot \left(\frac{p_r}{\mathfrak{a}}\right)_{i4}$$

alakra hozható, ahol $\mathfrak{a} = (p_1^{m_{1r}} p_2^{m_{2r}} \ldots p_{r-1}^{m_{r-1,r}})^2$. Az $\mathfrak{a}$ tehát a $p_r$-hez tartozó «nevező», ami nyilvánvalóan nem 4-dik ideálhatvány az $R(i)$-ben, ellentétben a feltevéssel. Ezzel a G. segédtételt bebizonyítottuk.

**12.** A D-t ismét a $D = p_1 p_2 \ldots p_t$ alakban veszem fel (mint **4.**-ben) és tekintem az összes, egy bizonyos $T$ másodfokú típushoz tartozó D-t. Legyen $G_2$ az összes másodfajú D-felbontások csoportja, ami ismét az összes tekintetbe vett D-re értendő, amint ezt az **5.** végén megbeszéltük. Tekintem azt az $U$ értékrendszert, ami a $T$-ből s az összes (68)-beli $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ elemből áll, miközben itt $\Delta$ befutja a $G_2$ összes elemét egy tetszésszerinti meghatározott sorrendben. Ezt az $U$-t a D negyedfokú típusának nevezem.

Minden $U$ negyedfokú típushoz tartozik tehát egy bizonyos $T$ másodfokú típus, amelyik ugyanis $U$-nak részrendszere. Másszóval minden az $U$ negyedfokú típushoz tartozó D egyszersmind ahhoz a $T$ másodfokú típushoz tartozik, amit $U$ tartalmaz.

A (28) szerint az $U$ a $T$-n kívül még $2^{e_4+2}$ számú $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ elemet tartalmaz, amelyek mindegyikének értéke $\pm 1$. Az utóbbiak között azonban bőven vannak nem független elemek. Mindenekelőtt $a'_\Delta = a''_\Delta = 1$, ha $\Delta = 1$, D vagy D, 1. Továbbá $a'_\Delta = a''_{\Delta_1}$ s ugyancsak $a''_\Delta = a'_{\Delta_1}$, ha $\Delta$ és $\Delta_1$ csak a tagok sorrendjében térnek el $(\Delta = D', D''; \Delta_1 = D'', D')$. Ha tehát meghatározzuk $s$

$G_2$-nek egy olyan $G'$ alcsoportját, ami a $\Delta^*$ elemet nem tartalmazza és $G_2 = \{G', \Delta^*\}$, akkor már a $G'$-nak $\Delta(+1, \mathrm{D})$ elemeivel előálló $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ értékek kimerítenek az $U$-ra nézve minden lehetőséget, minthogy, mint ezt már megjegyeztük, $\Delta$ és $\Delta\Delta^*$ csak a tagok sorrendjében térnek el. Minthogy $G'$ rendje $2^{e_4}$, azért ezeknek az $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ elemeknek számossága még mindig $2(2^{e_4}-1)$. Végül ezek az elemek az **F.** segédtétel szerint mindannyian meg vannak határozva az $A=(a'_{\Delta_1},\ldots, a'_{\Delta_e}; a''_{\Delta_1},\ldots; \ldots, a'_{\Delta_{e-1,e}})$ rendszer által, ahol $e_4 = e$ értendő és $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ a $G'$-nak egyik független bázisa. Az $U$-ban tehát (a $T$-n kívül) legfeljebb $2e_4 + \binom{e_4}{2}$ számú elem fölött rendelkezhetünk szabadon. Hogy ez a szám lejjebb már nem szorítható, azt a következő tételből látjuk, amely tehát az **F.** segédtétel 1°. része megfordításának mondható.

**V.** *Tétel. Legyenek előre megadva: egy $T$ másodfokú típus, amelyre $e_4=e$ $(=0, 1, \ldots, t-1)$; az összes másodfajú* D*-felbontások $G_2$ csoportjának egy olyan $G'$ alcsoportja, amely a $\Delta^*=\mathrm{D}, 1$* D*-felbontást nem tartalmazza és amelyre $G_2=\{G', \Delta^*\}$, amelynek rendje tehát $2^e$; a $G'$-nak egy tetszésszerinti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ független bázisa.*

*A $T$ másodfokú típusú* D*-nek $U$ negyedfokú típusát meghatározza az $A=(a'_{\Delta_1}, a'_{\Delta_2}, \ldots, a'_{\Delta_e}; a''_{\Delta_1}, \ldots, a''_{\Delta_e}; a'_{\Delta_{12}}, a_{\Delta_{13}}, \ldots, a'_{\Delta_{e-1,e}})$ értékrendszer. Bárhogyan vannak $\pm 1$ értékek az $A$ elemeire nézve előírva, van olyan* D*, amelyre $A$ ezt az előírt értékrendszert felveszi. Az adott $T$-hez tartozó $U$-k pontos száma tehát $2^{2e+\binom{e}{2}} = 2^{\frac{e(e+3)}{2}}$.*

*Ha (mint elébb)* $\mathrm{D}(x, T)$ *jelenti az összes $T$ másodfokú típusú* $\mathrm{D}(\leqq x)$ *számosságát s ezek közül* $\mathrm{D}(x, U)$ *számú* D *az $U$ negyedfokú típushoz tartozik, akkor minden (a $T$-hez tartozó) $U$-ra érvényes*

$$\lim \frac{\mathrm{D}(x, U)}{\mathrm{D}(x, T)} = \frac{1}{2^{\frac{e(e+3)}{2}}} \qquad (x \to \infty). \tag{84}$$

Röviden szólva, ez a tétel meghatározza az egy bizonyos $T$-hez tartozó tényleg létező $U$-k számát s kimondja, hogy mindezek egyenlő valószínűek. Az $e_4=0$ esetben helyes ugyan

a tétel, de tartalmatlan, mert akkor csak egy $U$ létezik. Az $e_4=1$ esetben $A$ alatt ismét az $(\alpha'_{\Delta_1}, \alpha''_{\Delta_1})$ rendszer értendő.

A bizonyításnál tehát feltehető, hogy $e_4 \geqq 1$, amiből $t \geqq 2$ következik. Először a tétel utolsó állítását bizonyítom. A tételben nevezett $G'$ csoportot s az ő $\Delta_1, \Delta_2 \ldots, \Delta_e$ bázisát egyelőre válasszuk úgy, hogy a (69)-ben $d_0, d_1, \ldots, d_e > 1$ legyen, ami az **E.** segédtétel szerint lehetséges. A szilárdan megválasztott másodfokú típus legyen $\left(\frac{p_u}{p_v}\right) = x_{uv}$ $(1 \leqq u < v \leqq t)$ által adva, ahol tehát $x_{uv}$ $(= \pm 1)$ tetszés szerint megadott számok. Ezután tetszés szerint választok további meghatározott $y'_k, y''_k$ $(k=1, 2, \ldots, e)$; $z_{kl}$ $(1 \leqq k < l \leqq e)$ számokat, amik mindegyikének értéke ugyancsak $\pm 1$. Legyen ezután

$$g = \prod_{1 \leqq u < v \leqq} \frac{1}{2}\left(1 + x_{uv}\left(\frac{p_u}{p_v}\right)\right) \prod_{k=1}^{e} \frac{1}{2}(1 + y'_k \alpha'_{\Delta_k}) \prod_{k=1}^{e} \frac{1}{2}(1 + y''_k \alpha''_{\Delta_k}) \prod_{1 \leqq k < l \leqq e} \frac{1}{2}(1 + z_{kl}\alpha'_{\Delta_{kl}}). \tag{85}$$

Ha itt behelyettesítünk egy olyan $D = p_1 p_2 \ldots p_t$ számot, amelynek másodfokú típusa $T$, akkor az első tényező értéke 1 s nyilvánvalóan magának $g$-nek értéke 1 vagy 0 a szerint, amint az $\alpha'_{\Delta_k} = y'_k$, $\alpha''_{\Delta_k} = y''_k$ $(k = 1, 2, \ldots, e)$; $\alpha'_{\Delta_{kl}} = z_{kl}$ $(1 \leqq k < l \leqq e)$ egyenletek mind fennállnak vagy nem mind. Mármost ezek az egyenletek meghatároznak egy $U$ negyedfokú típust, amelyhez a $T$ másodfokú típus tartozik, ahogyan ezt fentebb megbeszéltük (ami egyébként közvetlenül az **F.** segédtétel 1° részéből folyik). Erre az $U$-ra nézve tehát fennáll

$$D(x, U) = \sum_{D \leqq x} g, \tag{86}$$

ahol az összegezésben csupán a $T$ másodfokú típusú D-k veendők figyelembe. Ehhez megjegyzendő, hogy a minden egyes $y'_k, y''_k, z_{kl}$ rendszerhez tartozó $U$ létezése még kérdéses, ez éppen a bebizonyítandó tételnek egyik állítása. Más szóval lehetséges, hogy a (86)-beli összeg eltűnik, ami éppen azt jelenti, hogy az illető $U$ nem létezik. Ha azonban megmutatjuk, hogy

$D(x, U)$, amelyre nézve most (86)-ot mint definiciót tekintjük, sohasem zérus, és hogy ránézve (84) is fennáll, akkor éppen bebizonyítottuk a tétel utolsó állítását.

Az I. tétel miatt a (84)-beli követelés így hangzik:

$$\lim \frac{D(x, U)}{D(x, t)} = \frac{1}{2^{\binom{t}{2}+\frac{e(e+3)}{2}}} \qquad (x \to \infty). \tag{87}$$

Bizonyítanunk kell tehát, hogy (86)-ra nézve fennáll (87). A (86)-ban a páros D-ket figyelmen kívül hagyhatjuk, mert mint említettük, azoknak a számossága $O\left(\frac{x(\log\log x)^{t-2}}{\log x}\right)$, míg a (87) baloldalán lévő nevezőre (23) fennáll. Ezután a (86)-beli $g$-t átalakítom a következőképpen: Választok tetszésszerint $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ elsőfokú primér törzsszámokat az $R(i)$ testben úgy, hogy $n(\mathfrak{p}_k)=p_k$ $(k=1, 2, \ldots, t)$ legyen. A (85)-ben előforduló minden $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$, $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)_4$ jelben, ahol természetesen (68) behelyettesítve gondolandó, a «nevezőben» minden $p_k$ tényező helyébe $\mathfrak{p}_k$-t írok $(k=1, 2, \ldots, t)$, ahol azután egyidejűleg az illető jelek az $R(i)$ testben értendők, azaz ezek a jelek az $i$ «indexszel» ellátandók. Tudvalevőleg eközben egyetlen olyan jel sem változtatja meg az értékét, különösen az előforduló $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ jelek azért nem, mert bennük $\Delta$ mindig 2-odfajú D-felbontást jelent, amelyre tehát (68)-ban a «számláló» négyzetes maradéka a «nevezőnek». Ezáltal $g$ átmegy $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$-nek egy függvényébe, amely rendszert most is ugyanúgy értelmeztünk, mint az **1.** elején (különösen $n(\mathfrak{p}_1) < n(\mathfrak{p}_2) < \cdots < n(\mathfrak{p}_t)$). Megfelelőleg azután a (86)-ban mindazzal a $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ rendszerrel, vagyis az **1.** értelmében mindazzal a $\mathfrak{P}_t=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_t$-vel kell összegezni, amelyek most $n(\mathfrak{P}_t) \leqq x$ mellett még úgy vannak korlátozva, hogy az összes $n(\mathfrak{P}_t)$ normák különbözők (amit legkönnyebben például azzal érhetünk el, hogy csupán olyan $\mathfrak{p}_k$-t engedünk meg, amelynek képzetes része pozitív) és $D=n(\mathfrak{P}_t)$ másodfokú típusa $T$. Ezek közül az első korlátozás megszüntetése a $2^t$ tényező hozzájárulását jelenti, minthogy $g$ a megelőzők szerint független attól, hogy $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ a konjugáltak közül hogyan választattak. A második korlátozás minden további nélkül megszüntethető. Ha ugyanis $D = n(\mathfrak{P}_t)$ másodfokú típusa nem $T$, vagyis legalább egy $u, v\,(1 \leqq u < v \leqq t)$ párra

$\left(\frac{p_u}{p_v}\right)_i = \left(\frac{p_u}{p_v}\right) \neq x_{uv}$, akkor $g$ a (85)-beli első tényező miatt zérus. Ha tehát (86) helyébe bevezetjük az

$$f(x) = \sum_{n(\mathfrak{P}_t) \leqq x} g \tag{88}$$

függvényt, ahol $g$ már a $(\,)_i$, $(\,)_{i4}$ jelekkel átírt új alakjában gondolandó, akkor elegendő (87) helyett a

$$\lim \frac{f(x)}{\mathrm{D}(x,\ t)} = -\frac{2'}{2^{\binom{t}{2}} \cdot \frac{e(e+3)}{2}} \qquad (x \to \infty) \tag{89}$$

egyenletet bebizonyítani.

A (85) szerint

$$g = \frac{1}{2^{\binom{t}{2}+\frac{e(e+2)}{2}}} \left(1 + \sum_{P} (\pm 1')\right),$$

ahol $P$ befut minden olyan szorzatot, amelynek tényezői néhány (legalább egy) különböző elem a (85)-beli $\left(\frac{p_u}{p_v}\right)$, $\alpha'_{\Delta_k}$, $\alpha''_{\Delta_k}$, $\alpha'_{\Delta_{kl}}$ elemek közül, amelyek helyébe azután még $(\,)_i$, $(\,)_{i4}$ jelek bevezetendők.

Mármost

$$\sum_{n(\mathfrak{P}_t) \leqq x} 1 \sim 2^t \mathrm{D}(x,\ t),$$

amint ezt az I. tétel bebizonyításánál már láttuk. Ha tehát még bebizonyítjuk azt, hogy

$$\sum_{n(\mathfrak{P}_t) \leqq x} P \quad O\left(\frac{x(\log\log x)^{t-2}}{\log x}\right), \tag{90}$$

akkor (23), (88) miatt nyertük a (89) helyességét.

Ehhez szükségünk van a $P$ közelebbi ismeretére. A $\Delta_k$-t ismét a $\mathrm{D}'_k$, $\mathrm{D}''_k$ alakban veszem fel s ennek a számpárnak tagjait $k = 1, 2, \ldots e$ mellett előállítom (69) szerint, ahol akkor a feltevés szerint $d_0, d_1, \ldots, d_e > 1$. Ha még bevezetem a $\Delta_{kl}\,(= \Delta_k \Delta_l) = \mathrm{D}'_{kl}$, $\mathrm{D}''_{kl}$ jelölést, akkor (69)-ből könnyen kiszámíthatók a következők:

$$\mathrm{D}'_{kl} = Hd_{C'_k} Hd_{C'_l}, \quad \mathrm{D}''_{kl} = Hd_{C_{kl}} Hd_{C^{kl}} \qquad (1 \leqq k < l \leqq e). \tag{91}$$

A $P$ tényezői (68) szerint a következő alakúak:

$$\left(\frac{p_n}{p_v}\right),\ \left(\frac{D'_k}{D''_k}\right)_4,\ \left(\frac{D''_k}{D'_k}\right)_4,\ \left(\frac{D'_{kl}}{D''_{kl}}\right)_4,$$

ahol még (69) és (91) behelyettesítendő s ezután még megteendő a mondott áttérés a $(\ )_l$, $(\ )_4$ jelekre. Ezzel $P$ nyilvánvalóan a (76)-beli alakot nyeri, mégpedig olyan $m_{uv}$, $a_k$, $b_k$, $c_{kl}$ kitevőkkel, amik értéke 0 vagy 1, s közülük legalább egy 1 előfordul, mindenben tehát az ottani feltételeknek megfelelően. A G. segédtétel szerint $P$ tehát a (77) alakra hozható. E szerint $P$ megfelel a (3) alatti $c$ értelmezésének, amiből (4) és (5) szerint (90) következik. Ezzel az V. tétel utolsó állítását bebizonyítottuk.

A bebizonyított részből különösen az következik, hogy az egy bizonyos $T$-hez tartozó tényleg létező $U$-k számossága $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$. Most tekintek egy tetszésszerinti olyan G′ csoportot, amilyent a tételben előre megadtunk, s tekintem ennek egy tetszésszerinti $A_1, A_2, \ldots, A_e$ független bázisát. Minthogy a hozzátartozó $A = (a'_{A_1}, \ldots, a'_{A_e};\ a''_{A_1}, \ldots;\ \ldots;\ a'_{A_{e-1}, e})$ rendszer $\frac{e(e+3)}{2}$ elemből áll, azért a tényleg létező $A$-k számossága is legfeljebb $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$; számolnunk kell ugyanis azzal a lehetőséggel, hogy most az $A$ elemei nem függetlenek. Azonban minden $U$ meghatároz egyetlen $A$-t, mint az ő részrendszerét és az **F.** segédtétel 1°. része szerint két különböző $U$-hoz különböző $A$-k tartoznak. Az utóbbiak számossága tehát $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$ s köztük és az $U$-k között fennáll egy egy-egyértelmű hozzárendelés. Ezzel az V. tételt minden részében bebizonyítottuk.

**13.** A [3] dolgozatból (253. o.) idézek két tételt, amelyekről a bevezetésben már említést tettem ($^-$tétel és $^+$tétel). Bizonyos esetekben ezek a tételek a D-nek $U$ negyedfokú típusáról az $R(\sqrt{D})$ test alapegysége normájának előjelére következtetnek. Ezt az alapegységet $\varepsilon$-nal jelölöm (helyesebben a 4 alapegység egyikét, ez a választás azonban a norma kérdésében közömbös) és az $R(\sqrt{D})$ testben is legyen $n$ a norma jele. Ezek a tételek akkor a következőképen hangzanak, amelyekből az első tétel

itt következő utolsó (eddig figyelmen kívül hagyott) megjegyzése az F. segédtétel 3°. részének és (28) nak közvetlen folyománya:

**VI.** *Tétel (vagy $^-$tétel). Ha minden $\Delta(+1, D; D, 1)$ 2-odfajú D-felbontásra*

$$a'_\Delta = a''_\Delta = -1 \tag{92}$$

*teljesül, akkor $n(\varepsilon) = -1$. Különösen tehát az $e_4 = 0$ esetben (amikor ugyanis nincs egyetlen $\Delta$ sem) mindig $n(\varepsilon) = -1$. Az $e_4 \geqq 3$ esetben ez a tétel nem alkalmazható, mert akkor (92) minden $\Delta$-ra nem állhat fenn.*

**VII.** *Tétel (vagy $^+$tétel). Ha van legalább egy $\Delta$ 2-odfajú D-felbontás, amelyre*

$$a'_\Delta \, a''_\Delta = -1 \tag{93}$$

*teljesül, akkor $n(\varepsilon) = +1$.* Mindkét tételben $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ a (68) szerint értendő. (Figyelembe veendő, hogy mint ezt már említettem, az idézett dolgozatban két D-felbontás mint D′, D″ és D″, D′ nem különbözőknek tekintettek.)

Most meg fogom vizsgálni, hogy ezek a tételek milyen mértékben alkalmazhatók. Választok egy bizonyos $T$ másodfokú típust, amivel tehát egy bizonyos $t$ is meg van adva. Ezután $D(x, T, -)$ jelölje mindama $D(\leqq x)$ számosságát, amelynek másodfokú típusa $T$, s amelyre azonfelül a $^-$tétel alkalmazható. Hasonló értelme legyen $D(x, T, +)$-nak a $^+$tételre vonatkozólag. Legyen akkor

$$T^- = \lim \frac{D(x, T, -)}{D(x, T)} \quad (x \to \infty) \tag{94}$$

és

$$T^+ = \lim \frac{D(x, T, +)}{D(x, T)} \quad (x \to \infty). \tag{95}$$

Hasonlóan legyen $D(x, t, -)$ és $D(x, t, +)$ mindama $D(\leqq x)$ számossága, amelyre a különböző törzstényezők számossága $t$ s azonfelül a $^-$tétel, illetőleg $^+$tétel alkalmazható. Legyen azután

$$t^- = \lim \frac{D(x, t, -)}{D(x, t)} \quad (x \to \infty) \tag{96}$$

és

$$t^+ = \lim \frac{D(x, t, +)}{D(x, t)} \quad (x \to \infty). \tag{97}$$

A $T^-$, $T^+$, illetőleg $t^-$, $t^+$ jelentik tehát azoknak az eseteknek valószínűségét, amelyekben a $^-$tétel, a $^+$tétel alkalmazható mindama $R(\sqrt{D})$ test közül, amelyekre a D discriminánsa másodfokú típusa $T$, illetőleg D különböző törzsténye zőinek számossága $t$.

Végül jelentsék $T^?$ és $t^?$ hasonlóan azoknak az eseteknek valószínűségét, amelyekben a szóbanlévő tételek egyike sem alkalmazható (azaz az $n(\varepsilon)$ előjele kérdéses marad). Ezek a valószínűségszámok tehát

$$T^? = 1 - T^- - T^+ \tag{98}$$

és

$$t^? = 1 - t^- - t^+ \tag{99}$$

által értelmezhetők.

Ezek közül természetesen főleg a $t^-$, $t^+$, valamint $t^?$ valószínűségszámok érdekelnek bennünket. Ezek meghatározása azonban legkönnyebben $T^-$ és $T^+$ meghatározásán keresztül történik. Egyébként sem érdektelen ismerni a $^-$tétel és $^+$tétel alkalmazhatóságának valószínűségét azokban az esetekben, amelyeket (az egy bizonyos $t$-hez tartozó D-k közül) egy bizonyos $T$ kihasít. A $T^?$ és $t^?$ valószínűségszámok is teljes érdeklődésre tarthatnak számot, mert ezek felvilágosítást adnak arról, hogy a szóbanlevő tételek mily gyakran hagyják az $\varepsilon$ normájának előjelét felderítetlenül; ezek a számok tehát, hogy úgy mondjuk, kifejezik ama tételek tökéletlenségi fokát. (Ehhez megjegyzendő, hogy minden látszat szerint ezek a tételek hasonlóan egyszerű kongruenciafeltételekkel aligha egészíthetők ki.[8])

Fennáll a következő:

VIII. *Tétel. Ha a T másodfokú típusra nézve a hozzátartozó másodfokú számtestekben az abszolút osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsainak $e_4$ számossága egyenlő e-vel, akkor az $e = 0, 1, 2$ és $e \geqq 3$ eseteknek megfelelőleg* $T^- = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}$ *és* $T^- = 0$, *továbbá minden e mellett* $T^+ = 1 - \frac{1}{2^e}$. *Ezek a valószínűségek tehát csak annyiban függnek T-től, amennyi-*

[8] A. Scholz: Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$, Math. Zeitschr., 39 (1934), 93—111.

*ben* $e_4 = e$ *függ a* $T$*-től.* (Közülük a «$T^- = 1$, $T^+ = 0$, ha $e = 0$» és «$T^- = 0$, ha $e \geqq 3$» által kifejezett tényeket erősebb fogalmazásban már a $^-$tétel tartalmazza.)

Ezeket a $T^-$, $T^+$ valamint a $T^?$valószínűségszámokat táblázatosan is összeállítom:

| $e_4 =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 ⋯ | $e$ ⋯ | $t-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T^- =$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ | 0 | 0 ⋯ | 0 ⋯ | 0 |
| $T^+ =$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{15}{16}$ ⋯ | $1-\frac{1}{2^e}$ ⋯ | $1-\frac{1}{2^{t-1}}$ |
| $T^? =$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{32}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ ⋯ | $\frac{1}{2^e}$ ⋯ | $\frac{1}{2^{t-1}}$ |

(Ez a táblázat úgy értendő, hogy minden $T$-hez felkeresendő az az oszlop, amely a $T$ által meghatározott $e_4$ értékhez tartozik.)

Bizonyítás. Az $e_4 = 0$ eset ismeretes s ezért tegyük fel, hogy $e_4 = e \geqq 1$, amiből $t \geqq 2$ következik. Először meghatározzuk $T^+$-t, ahol tehát $T$ egy szilárd másodfokú típus s ránézve $e_4 = e$. Válasszunk egy szilárd $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_e$ rendszert úgy, mint az V. tételben. A $^+$tétel alkalmazhatóságának kérdése csupán az $U$ negyedfokú típustól függ. Az V. tétel szerint a $T$-hez tartozó összes $U$ és az összes $A$ rendszer egymást egy-egyértelműen meghatározzák. A (84) miatt tehát úgy nyerjük a $T^+$ valószínűséget, hogy meghatározzuk mindannak az $A$ rendszernek a számosságát, amelyre a $^+$tétel alkalmazható s ezt a számosságot $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$-vel osztjuk.

A mondott számosság úgy határozható meg, hogy az $A$-knak $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$ összes számából levonjuk azoknak az $A$-knak számosságát, amelyekre a $^+$tétel nem alkalmazható, vagyis amelyekkel a (93) egyenlet egyetlen $\Delta$ 2-odfajú D-felbontásra sem áll fenn. Az utóbbi $A$-k tehát azok, amelyeknél (70) minden ilyen $\Delta$-val fennáll. Ehhez az **F.** segédtétel 2° része szerint szükséges és elegendő, hogy az $A = (a'_{\Delta_1}, \ldots, a'_{\Delta_e}; a''_{\Delta_1}, \ldots; \ldots, a'_{\Delta_{e-1}, e})$ összevéve $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$ elemére az $e$ számú $a'_{\Delta_k} a''_{\Delta_k} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, e)$ egyenlet teljesüljön. Minthogy az V. tétel szerint az $A$ elemei egyébként $+1$ közül

tetszésszerint választhatók, és most $\frac{e(e+3)}{2} - e = \frac{e(e+1)}{2}$ elem felett szabadon rendelkezhetünk, azért a keresett számosság nyilvánvalóan $2^{\frac{e(e+3)}{2}} - 2^{\frac{e(e+1)}{2}}$. Ezt $2^{\frac{e(e+3)}{2}}$-vel osztva, tényleg a $T^+$ követelt értékét nyerjük.

$T^-$-ra nézve csupán az $e_4 = e = 1, 2$ eseteket kell vizsgálnunk. Megfelelőleg az V. tétel szerint az $U$-k számossága $2^2=4$, illetőleg $2^5 = 32$. Most is hasonlóan járhatunk el, mint elébb. Most meghatározandó azoknak az $A$ rendszereknek számossága, amelyekre a (92) egyenletek fennállanak, amely szám azután még 4-gyel, illetőleg 32-vel osztandó.

Az $e_4=2$ esetben az 1, D; D, 1 D-felbontásokon kívül, amelyek (92)-ben nem jönnek tekintetbe, csupán a $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_{12}$ D-felbontások 2-odfajúak és még azok, amelyek ezekből a tagok megcserélésével előállnak. A $\Delta$ tagjainak a felcserélése azonban a (68)-beli $a'_\Delta$, $a''_\Delta$ számoknak is csupán a sorrendjét változtatja, úgyhogy tehát a (92) most pontosan annyit követel, hogy $a'_{\Delta_1}$, $a''_{\Delta_1}$, $a'_{\Delta_2}$, $a''_{\Delta_2}$, $a'_{\Delta_{12}}$, $a''_{\Delta_{12}}$ mind $-1$-gyel legyenek egyenlők. Ezek közül az első 5 számmal együtt (72) miatt a 6-dik is $-1$ és ama 5 szám éppen az $A$ rendszert képezi, azok tehát az V. tétel szerint szabadon $\pm 1$-ként választhatók. Nyilvánvalóan tehát egyetlen egy olyan $A$ van, amelyre (92) fennáll. Tényleg tehát ebben az $e_4=2$ esetben $T^- = \frac{1}{32}$.

Az $e_2=1$ eset hasonlóan tárgyalható, amikor (92)-ben az egyetlen $\Delta_1$ D-felbontást kell csak figyelembe vennünk. A (92) követelés tehát így hangzik: $a'_{\Delta_1} = a''_{\Delta_1} = -1$. Ez most is egyetlen $A = (a'_{\Delta_1}, a''_{\Delta_1})$ rendszert határoz meg, amiből $T^- = \frac{1}{4}$ következik. Ezzel a VIII. tételt bebizonyítottuk.

Most már könnyű a $t^-$, $t^+$, $t^?$ valószínűségszámok meghatározása. Közülük $t^+$ így állapítható meg: Tekintjük az összes D-t pontosan $l$ különböző törzstényezővel, közöttük az I. tétel szerint minden $T$ másodfokú típus egyenlő valószínűséggel fordul elő. Egy bizonyos $T$-re $T^+$ a valószínűsége annak, hogy a $^+$tétel alkalmazható legyen, amely $T^+$ csak $e_4$-től függ, s maga $e_4$ a $T$-nek függvénye. Másrészt az $e_4=e$ valószínűsége $t_e$, s így a $^+$tétel alkalmazhatóságának $t^+$ valószínűsége $\sum_{e=0}^{l-1} t_e T^+$, amely

összeg úgy értendő, hogy minden $t_e T^+$ tagban egy olyan $T$ veendő, amelyre $e_4 = e$. Hasonlóan fejezhetők ki $t^-$ és $t^?$ és így a VIII. tétel alkalmazásával nyerjük a következőt:

**IX.** *Tétel. A pontosan* $t\,(=1, 2, 3, \ldots)$ *különböző pozitív* $(\not\equiv (3 \bmod 4))$ *törzstényezőt tartalmazó diszkriminánsú valós másodfokú számtestek között azoknak a valószínűsége, amely testekben a* VI. *és* VII. *tételek (azaz* $^-$*tétel és* $^+$*tétel) révén negatív, illetve pozitív normájú alapegységre lehet következtetni, továbbá ugyanazok között a testek között azoknak a valószínűsége, amelyekben az alapegység normájának előjelét ama tételek nem állapítják meg, rendre a következő képletekkel vannak adva:*

$$t^- = t_0 + \frac{1}{4} t_1 + \frac{1}{32} t_2, \tag{100}$$

$$t^+ = \sum_{e=1}^{t-1}{}' \left(1 - \frac{1}{2^e}\right) t_e = 1 - \sum_{e=0}^{t-1}{}' \frac{1}{2^e} t_e, \tag{101}$$

$$t^? = \frac{1}{4} t_2 + \frac{7}{32} t_2 + \sum_{e=3}^{t-1}{}' \frac{1}{2^e} t_e, \tag{102}$$

*ahol* $t_e$ (51), (51$a$) *által van adva.* A $t=1, 2$ esetekben (100) és (102) helyett $1^- = 1_0 = 1$; $2^- = 2_0 + \frac{1}{4} 2_1 = \frac{5}{8}$; $1^? = 0$; $2^? = \frac{1}{4} 2_1 = \frac{1}{8}$ veendő.

A (101) képlet második alakja $t_0 + t_1 + \cdots + t_{t-1} = 1$ miatt következik az elsőből.

Ennek a tételnek lényeges kiegészítője a következő:

**X.** *Tétel. Érvényes* $(1=)\, 1^- > 2^- > \cdots > t^- > \cdots$ *és*

$$\lim t^- = \frac{121\,a}{96} = 0{\cdot}528\ldots \qquad (t \to \infty). \tag{103}$$

*ahol* $a$ *az* (53)*-beli számot jelenti.*

*Érvényes* $(0=)\, 1^+ < 2^+ < \cdots < t^+ < \cdots$ *és*

$$\lim t^+ = \frac{1}{3} = 0{\cdot}333\ldots \qquad (t \to \infty). \tag{104}$$

*Érvényes* $(0=)\, 1^? < 3^? < 5^? < \cdots$; $(\frac{1}{8}=)\, 2^? < 4^? < 6^? < \cdots$ *és*

$$\lim t^? = \frac{64 - 121a}{96} = 0{\cdot}138\ldots \qquad (t \to \infty). \tag{105}$$

Ehhez itt még feljegyzem a $t^-$, $t^+$, $t^?$ számok néhány kezdőértékét, amelyek a IX. tétel alapján (a 77. oldalon lévő táblázat segélyével) könnyen nyerhetők:

$$1^-=1 \qquad 1^+=0 \qquad 1^?=0$$

$$2^-=\frac{5}{8}=0{\cdot}625 \qquad 2^+=\frac{1}{4}=0{\cdot}250 \qquad 2^?=\frac{1}{8}=0{\cdot}125$$

$$3^-=\frac{153}{256}=0{\cdot}597\ldots \qquad 3^+=\frac{9}{32}=0{\cdot}281\ldots \qquad 3^?=\frac{31}{256}=0{\cdot}121\ldots$$

$$4^-=\frac{1127}{2048}=0{\cdot}550\ldots \qquad 4^+=\frac{161}{512}=0{\cdot}313\ldots \qquad 4^?=\frac{277}{2048}=0{\cdot}135\ldots$$

$$5^-=\frac{4459}{8192}\ 0{\cdot}544\ldots \qquad 5^+=\frac{5265}{16384}=0{\cdot}321\ldots \qquad 5^?=\frac{2201}{16384}\ 0{\cdot}134\ldots$$

A X. tétel bizonyítása. A (100), (51), (51$a$) alapján $t^-$ számára könnyen a következő értéket nyerjük:

$$t^-=\frac{121}{96}\left(1-\frac{\omega}{2^t}\right)\prod_{k=1}^{t-1}{}'\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

ahol $\omega=\frac{4}{121}$ illetőleg $\frac{50}{121}$ a szerint, amint $2\,|\,t$ vagy $2\nmid t$ és a « $'$ » a szorzat jele mellett a páros $k$ értékek kihagyását jelenti. Ebből $2\,|\,t$ mellett következik

$$\frac{(t+1)^-}{t^-}=\frac{1-\frac{25}{121}\cdot\frac{1}{2^t}}{1-\frac{4}{121}\cdot\frac{1}{2^t}},$$

amely érték nyilvánvalóan $<1$. Hasonlóan $2\nmid t$ mellett

$$\frac{(t+1)^-}{t^-}=\frac{1-\frac{2}{121}\cdot\frac{1}{2^t}}{1-\frac{50}{121}\cdot\frac{1}{2^t}}\left(1-\frac{1}{2^t}\right),$$

ami ugyancsak $<1$. A (103) is könnyen következik (100)-ból s abból, hogy $t_0$, $t_1$, $t_2$ (52) szerint $t\to\infty$ mellett rendre az $\alpha$, $\alpha$, $\frac{\alpha}{3}$ értékekhez konvergálnak.

A $t^+ < (t+1)^+$ követelés a megelőző táblázat szerint $t = 0$, 1, 2, 3 mellett helyes. Ugyanazt általánosan bizonyítandó, feltehetjük tehát, hogy ezután $t \geqq 4$. A (101) miatt mindenesetre elég annyit kimutatni, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{2^e}\right) t_e + \left(1 - \frac{1}{2^{e+1}}\right) t_{e+1} < \left(1 - \frac{1}{2^e}\right)(t+1)_e + \left(1 - \frac{1}{2^{e+1}}\right)(t+1)_{e+1} \quad (2 \mid e;\ 2 \leqq e < t;\ t \geqq 4) \tag{106}$$

(ahol az $e = t-1$ esetben ismét $t_t = 0$ értendő) és

$$\frac{1}{2} t_1 + \frac{3}{4} t_2 + \frac{7}{8} t_3 < \frac{1}{2}(t+1)_1 + \frac{3}{4}(t+1)_2 + \frac{7}{8}(t+1)_3 \quad (2 \mid t;\ t \geqq 4). \tag{107}$$

ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a IV. tétel szerint páratlan $t$ mellett mindig $t_1 < (t+1)_1$, azaz $\frac{1}{2} t_1 < \frac{1}{2}(t+1)_1$. Ha ugyanis ehhez az egyenlőtlenséghez az $e = 2, 4, 6, \ldots, t-1$ értékekkel vett (106) egyenlőtlenségeket hozzáadjuk, akkor (101) szerint éppen a $t^+ < (t+1)^+$ egyenlőtlenséget nyerjük páratlan $t$-re ($t \geqq 5$). Hasonló következik páros $t\,(\geqq 4)$ mellett (107)-ből s az $e = 4, 6, \ldots, t-2$ értékekkel vett (106) egyenlőtlenségekből.

A (106) bizonyításához legyen $a_e = 1 - \frac{1}{2^e}$ (ennek az $a_e$-nek semmi köze a $t_e$-vel). Akkor nyilvánvalóan fennáll $1 - \frac{1}{2^e} < \frac{a_e}{a_{e+1}} < 1$, amiből $1 - \frac{1}{e} < 1 - \frac{1}{2^e}\,(e \geqq 2)$ miatt a (66) fennállása következik. Tehát (67) is helyes, ami éppen (106)-ot jelenti.

A (107) bizonyításához mindenekelőtt $t_3$-ra és $(t+1)_3$-ra alkalmazzuk (58)-at és (59)-et, miközben $2 \mid t$ figyelembe veendő. Akkor (107) 8-cal való szorzással a következőbe megy át:

$$4t_1 + \left(6 + \frac{1}{2^t}\right) t_2 < 4(t+1)_1 + 6(t+1)_2.$$

Most $t_2$-re, $(t+1)_1$-re és $(t+1)_2$-re alkalmazzuk még az (58), (56) és (59) képleteket, miáltal $t_1$-gyel való osztás után ez az egyenlőtlenség átmegy a következőbe:

$$4+\left(6+\frac{1}{2^t}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{t-2}}\right)<4\left(1-\frac{1}{2^t}\right)+2\left(1-\frac{1}{2^t}\right).$$

Ez az egyenlőtlenség könnyen igazolható, miáltal $t^+<(t+1)^+$ általánosan helyesnek bizonyult.

Most bebizonyítjuk (104)-et. A (101) és (52) miatt nyilvánvalóan

$$\lim t^+ = 1-\alpha S \qquad (t\to\infty),$$

ahol

$$S=\sum_{e=0}^{\infty}{}'\frac{1}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^e-1).2^e},$$

amely végtelen sorban kezdőtagul ($e=0$) 1 értendő. Akkor

$$S=1+\frac{1}{2}+\sum_{e=2}^{\infty}{}'\frac{1}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^e-1)}-$$
$$-\sum_{e=2}^{\infty}{}'\frac{1}{(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^{e-1}-1).2^e}.$$

Az itt levő első összeg $\alpha$-val való szorzás után (52) szerint átmegy a $\lim(t_2+t_3+\cdots+t_{t-1})=\lim(1-t_0-t_1)=1-2\alpha\,(t\to\infty)$ értékbe. A második összeg 2-vel való szorzás után nyilvánvalóan átmegy az $S-1$ értékbe. Ezek szerint

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}-2-\frac{1}{2}S+\frac{1}{2},$$

amiből $\alpha S=\frac{2}{3}$ következik. A fenti határérték tehát $1-\alpha S=\frac{1}{3}$, amivel (104)-et bebizonyítottuk.

Az $1^?<3^?<5^?<\cdots$ állítás (102) miatt közvetlenül folyik a IV. tétel 3°. és 4°. részeiből. A fenti táblázat miatt $2^?<4^?$ is helyes. A további $4^?<6^?<8^?<\cdots$ követeléshez ismét (102) és a IV. tétel 4°. része szerint elég annyit bebizonyítani, hogy $\frac{1}{4}t_1+\frac{7}{32}t_2$ $(2\mid t;\ t\geqq 4)$ növekszik, ha benne $t$-t $t+2$-vel helyettesítjük. Ennek a kifejezésnek értéke (58) szerint

$$\frac{1}{4}t_1+\frac{7}{32}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{t-2}}\right)t_1=\frac{1}{96}\left(31-\frac{28}{2^t}\right)t_1.$$

Ha $t$ helyett $t+2$-t írunk, akkor ez a kifejezés (57) szerint átmegy a következőbe:

$$\frac{1}{96}\left(31-\frac{7}{2^t}\right)\left(1-\frac{1}{2^{t+1}}\right)t_1.$$

Ez tényleg nagyobb, mint a megelőző kifejezés, amiből az állítás helyessége következik.

A (105) is helyes (99), (103), (104) miatt, amivel a X. tételt bebizonyítottuk.

14. NAGELL [4]-hez csatlakozva, $B(x, t)$-vel és $C(x, t)$-vel jelölöm az összes olyan pontosan $t$ különböző pozitív $(\not\equiv 3 \pmod 4)$ törzstényezőt tartalmazó $D(\leqq x)$ számosságát, amelyekre az $R(\sqrt{D})$ test alapegységének normája negatív, illetve pozitív. A hasonló számosságokat jelentsék $B(x)$ és $C(x)$, hogyha a D törzstényezőinek számossága szabadon változhatik.

Hasonló jelölésekkel, mint (96)-ban és (97)-ben, nyilvánvalóan

$$B(x, t) \geqq D(x, t, -); \quad C(x, t) \geqq D(x, t, +) \tag{108}$$

és

$$B(x, t) + C(x, t) = D(x, t). \tag{109}$$

Ezekből következik

$$\frac{\dfrac{D(x, t, +)}{D(x, t)}}{1-\dfrac{D(x, t, +)}{D(x, t)}} \leqq \frac{C(x, t)}{B(x, t)} \leqq \frac{1-\dfrac{D(x, t, -)}{D(x, t)}}{\dfrac{D(x, t, -)}{D(x, t)}},$$

ha $x$ oly nagy, hogy a nevezők nem tűnnek el. Ebből (96), (97), továbbá a IX. és X. tételek szerint a következőt nyerjük:

**XI.** *Tétel. Érvényes*

$$\frac{t^+}{1-t^+} \leqq \liminf \frac{C(x, t)}{B(x, t)}, \quad \limsup \frac{C(x, t)}{B(x, t)} \leqq \frac{1-t^-}{t^-} \qquad (x \to \infty),$$

*ahol $t^+$, $t^-$ a* IX. *tételben vannak megadva.*

*Az itt megadott $t' = \dfrac{t^+}{1-t^+}$, $t'' = \dfrac{1-t^-}{t^-}$ korlátok $t$-vel monoton növekszenek, s határértékük $\dfrac{1}{2}$, illetőleg $\dfrac{96-121a}{121a}$, ahol $a$ az* (53)*-beli számot jelenti, úgyhogy tehát*

$$0{\cdot}5 \leqq \lim_{t\to\infty}\left(\liminf_{x\to\infty}\frac{C(x,t)}{B(x,t)}\right);$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\limsup_{x\to\infty}\frac{C(x,t)}{B(x,t)}\right) \leqq 0{\cdot}891\ldots\left(=\frac{96-121a}{121a}\right).$$

(Ezeknek a $t'$, $t''$ korlátoknak néhány kezdőértéke: $1'=0$, $1''=0$; $2'=0{\cdot}333\ldots$, $2''=0{\cdot}6$; $3'=0{\cdot}391\ldots$, $3''=0{\cdot}673\ldots$; $4'=0{\cdot}458\ldots$, $4''=0{\cdot}817\ldots$)

*Ezek szerint minden szilárd $t$ mellett $n(\varepsilon)=-1$ gyakoribb, mint $n(\varepsilon)=+1$, de ($t=0$-tól eltekintve) $n(\varepsilon)=-1$ sohasem kétszer olyan gyakori, mint $(n(\varepsilon)=+1$.*

Ez a tétel úgy is értelmezhető, mint valószínűségi kijelentések, amelyekben alsó- és felső viszonylagos valószínűségekről van szó, úgy mint ezt a bevezetésben megbeszéltük.

Mint ezt már említettem, a $B(x)$ és $C(x)$ számosságokról hasonló kijelentéseket nem tudok mondani. Ellenben érvényes a következő tétel, ami $B(x)\geqq B(x,t)$, $C(x)\geqq C(x,t)$ miatt (108), (96), (97), a IX. tétel és (23) alapján azonnal következik:

**XII.** *Tétel. Minden pozitív $t$ és elég nagy pozitív $x$ mellett fennállanak*

$$B(x)>c_1\frac{x(\log\log x)^t}{\log x},\qquad C(x)>c_2\frac{x(\log\log x)^t}{\log x},$$

*ahol $c_1$, $c_2$ csupán $t$-től függő pozitív állandók.*

Különösen ezek közül a $C(x)$-re vonatkozó megbecslés lényegesen jobb az eddig ismerteknél (v. ö. NAGELL [4] dolgozatával).

## IV. RÉSZ.

**15.** Az $e_4$-ről szóló vizsgálatok a II. részben azon alapultak, hogy $e_4$-et meghatározza már a D-nek $T$ másodfokú típusa. A [3] dolgozat szerint ugyancsak fennállnak bizonyos összefüggések $e_8$ és a D-nek $U$ negyedfokú típusa között, amelyek azonban nagyon is lazák ahhoz, hogy belőlük $e_8$-ra nézve hasonló részletes következtetéseket tudnánk vonni. Míg például, mint ezt láttuk, minden gondolható $e_2$, $e_4$ $(0\leqq e_4\leqq e_2)$ végtelen sokszor előfordul, még csak azt sem tudom bebizonyítani, hogy min-

den $e_2$, $e_4$, $e_8$ ($0 \leqq e_8 \leqq e_4 \leqq e_2$) kombináció előfordul. A már együttlévő eszközökkel azonban könnyű azt bebizonyítani, hogy minden $e_2 \geqq 1$, $e_4 = 1$, $e_8 = 0, 1$ kombináció végtelen sokszor előfordul. Meg tudtuk adni pontosan az $M_t(e_4)$ középértéket is. Ezzel szemben a hasonlóan értelmezett $M_t(e_8)$ középérték létezését nem tudom bizonyítani. Csupán abban a helyzetben vagyunk, hogy alsó- és felső korlátokat tudunk megadni a megfelelő $M_t(e_8)$, $\overline{M}_t(e_8)$ alsó- és felső középértékekre. Így pl. könnyű megállapítani, hogy $\underline{M}_2(e_8) = M_2(e_8) = \frac{1}{8}$, $\overline{M}_3(e_8) \leqq \frac{11}{64}$ (amik összehasonlítandók az $M_2(e_4) = \frac{1}{2}$, $M_3(e_4) = \frac{5}{8}$ értékekkel). Úgy látszik, hogy általában $\overline{M}_t(e_8)$ nem lépi túl lényegesen az $\frac{1}{4} M_t(e_4)$ értéket. Minthogy azonban $\overline{M}_t(e_8)$ számára egy lehetőleg jó felső korlát megállapítása az általános esetben tetemes számolásbeli nehézségekkel járna, ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozom. Ellenben könnyű $\underline{M}_t(e_8)$ számára egy elég jónak látszó alsó megbecslést adni. E szerint — egyelőre durván — $\underline{M}_t(e_8) > \frac{1}{8} M_t(e_4)$ ($t \geqq 2$).

*Érvényes a következő*

**XIII.** *Tétel. A pontosan $t$ (= 2, 3, 4...) különböző pozitív* ($\not\equiv 3 \pmod 4$) *törzstényezőt tartalmazó diszkriminánsú valós másodfokú számtestek között azoknak az eseteknek az alsó valószínűsége $\geqq \frac{1}{4} t_1$, amely esetekben a test abszolút osztálycsoportjának pontosan egy 8-cal osztható invariánsa van, ahol $t_1$ (51) által van adva. Egyszersmind tehát ugyanazokban a 8-cal osztható invariánsok számosságának alsó középértéke $\underline{M}_t(e_8) \geqq \frac{1}{4} t_1$.*

A nevezett testek között ugyanis az $e_4 = 1$ eset valószínűsége a II. tétel szerint $t_1$. Ezek az esetek felölelik mindazokat a D diszkriminánsokat, amelyek bizonyos $T$ másodfokú típusokhoz tartoznak. Minden egyes ilyen $T$-hez az V. tétel szerint pontosan négy $U = (a'_\Delta, a''_\Delta)$ negyedfokú típus tartozik, ahol $\Delta(+1, D;\ D, 1)$ egy másodfajú D-felbontás, amelyek mind a négyen egyenlő valószínűek. Minthogy a [3] dolgozat (237. o. I. tétel) szerint az $a'_\Delta = a''_\Delta = 1$ vagyis az $U = (1, 1)$ esetben $e_8 = 1$, azért helyes a tétel.

Érvényes még a következő:

**XIV.** *Tétel. Hasonló feltételek mellett, mint a XIII. tételben, annak a felső valószínűsége, hogy az abszolút osztály-*

*csoport minden páros invariánsa egyszersmind 8-cal is osztható, vagyis hogy* $e_8 = t-1$ *legyen,* $\leqq \frac{1}{2^{t^2}-1}$.

Ha ugyanis $e_8 = t-1$, akkor mindenekelőtt $e_4 = t-1$. Az utóbbinak valószínűsége a II. tétel szerint $t_{t-1} = \frac{1}{2^{\binom{t}{2}}}$. Az I. tétel miatt most csupán egyetlen $T$ másodfokú típus jön tekintetbe, ami ugyanis csupa 1-ből áll. Ehhez a $T$-hez $e_4 = t-1$ miatt az V. tétel szerint pontosan $2^{\frac{(t-1)(t+2)}{2}}$ számú $U$ negyedfokú típus tartozik. A [3] dolgozatból (245. o. III. tétel) következik, hogy az $e_8 = t-1$ esetben szükségképen $U$ csupa 1-ből áll. Minthogy továbbá az összes $U$ egyenlő valószínű, azért egynek a valószínűsége ezek közül $\binom{t}{2} + \frac{(t-1)(t+2)}{2} = t^2 - 1$ miatt egyenlő $\frac{1}{2^{t^2}-1}$-gyel. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. márc. hó 18-án tartott üléséből.)

# ÜBER ZWEI MITTELWERTFRAGEN IM QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPER.[9]

Von L. RÉDEI.

In einer früheren Arbeit[2] habe ich die Anzahl $e_4$ der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe eines quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{D})$ bestimmt, wobei D die Diskriminante des Körpers ist, und die Äquivalenz der Ideale «im engeren Sinne» zu meinen ist. Ich beschäftige mich jetzt mit der Frage, wie oft $e_4$ einen festen Wert annimmt. Dabei beschränke ich mich aber auf den Fall, wo $D>0$ ist und D keinen positiven Primzahlteiler der Gestalt $4l+3$ hat, während ich den allgemeinen Fall einer anderen Arbeit vorbehalte. Der ins Auge gefasste Fall bietet bekanntlich die andere Frage, wann die Grundeinheit eine positive (negative) Norm hat (in den sonstigen Fällen ist diese Norm trivialerweise $+1$). Es bestehen zwei Sätze, die ich hier kurz als Satz I und II bezeichne, mit deren Hilfe sich diese Frage in der Mehrzahl der Fälle beantworten lässt. Diese Sätze schliessen der Reihe nach auf Fälle, in denen die fragliche Norm $-1$ bzw. $+1$ ist. Beide Sätze sind in der Arbeit[3] (S. 259.) zu finden. (Diese Sätze verallgemeinere ich in einer Arbeit in diesem Bande, in der ich mich allgemein mit der Lösbarkeit der Pellschen Gleichung $t^2-du^2=-1$ beschäftige, wobei in $t$ auch beliebige Quadratfaktoren zugelassen sind.) Ich prüfe in

[9] Über diese Arbeit habe ich an der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker Vereinigung im Jahre 1934 in Bad Pyrmont einen Vortrag gehalten.

dieser Arbeit, in welchem Masse diese Sätze I und II anwendbar sind.

Ich bezeichne mit $n$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von D. Dann betrachte ich die ersten $x$ Zahlen D mit einem festen $n$ und ich nehme an, dass darunter genau $x_e$ solche sind, für die $e_4 = e$ ($e = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Der Grenzwert

$$\frac{x_e}{x} \to n_e \quad (x \to \infty)$$

existiert stets und $n_e$ bedeutet also die Häufigkeit der Fälle mit genau $e$ durch 4 teilbaren Invarianten unter allen quadratischen Körpern, deren Diskriminante aus genau $n$ verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist (nach dem Gausschen Satze ist dann $n_0 + n_1 + \cdots + n_{n-1} = 1$). Es gilt

$$n_e = \frac{1}{2^{\binom{e+1}{2}}} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^{e+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^{2\left[\frac{n-e-1}{2}\right]}}\right)}$$

wobei $[z]$ die grösste ganze Zahl $\leqq z$ bedeutet (der Zähler bzw. Nenner des zweiten Faktors ist durch 1 zu ersetzen, wenn $e = n-1$ bzw. $e = n-1$ oder $n-2$). Für wachsendes $n$ strebt $n_e$ rasch dem Werte

$$\infty_e = \frac{a}{(2^2-1)\,(2^3-1)\ldots(2^e-1)}$$

zu (welche Formel für $e = 0, 1$ durch $\infty_0 = a$, $\infty_1 = a$ zu ersetzen ist), wobei $a$ das Eulersche Produkt

$$a = \prod_1^\infty \left(1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right) = 0{\cdot}419\ldots$$

bedeutet.

Ich betrachte jetzt die ersten $x$ Zahlen D mit festem $n$ und $e_4 = e$. Ich nehme an, dass es darunter genau $x_{\mathrm{I}}$, $x_{\mathrm{II}}$, $x_{\mathrm{III}}$ solche gibt, auf die der Satz I, der Satz II bzw. keiner der beiden Sätze sich anwenden lässt. Zunächst bemerke ich, dass

im Falle $e = 0$ $x_{\mathrm{I}} = x$ (also $x_{\mathrm{II}} = x_{\mathrm{III}} = 0$) ist, das mein früherer Satz ist («wenn es keine durch 4 teilbare Invariante gibt, dann ist die Norm der Grundeinheit gleich $-1$»), im Falle $e \geqq 3$ aber $x_{\mathrm{I}} = 0$, d. h. wenn es wenigstens 3 durch 4 teilbare Invarianten gibt, lässt sich der Satz I überhaupt nicht anwenden. Im allgemeinen existieren die Grenzwerte

$$\frac{x_{\mathrm{I}}}{x} \to \mathrm{I}_e, \quad \frac{x_{\mathrm{II}}}{x} \to \mathrm{II}_e, \quad \frac{x_{\mathrm{III}}}{x} \to \mathrm{III}_e \quad (x \to \infty)$$

und haben einen von $n$ unabhängigen Wert. Diese Zahlen bedeuten also die Häufigkeit der Anwendbarkeit der Sätze I bzw. II bzw. die Häufigkeit der Nichtanwendbarkeit unter allen Fällen mit einem festen $n$ und $e$. Es ist

$$\mathrm{I}_0 = 1, \ \mathrm{I}_1 = \frac{1}{4}, \ \mathrm{I}_2 = \frac{1}{32}, \ \mathrm{I}_e = 0 \ (e \geqq 3);$$

$$\mathrm{II}_e = 1 - \frac{1}{2^e} \ (e \geqq 0);$$

$$\mathrm{III}_0 = 0, \ \mathrm{III}_1 = \frac{1}{4}, \ \mathrm{III}_2 = \frac{7}{32}, \ \mathrm{III}_e = \frac{1}{2^e} \ (e \geqq 3).$$

Ähnlich lassen sich Zahlen $\mathrm{I}^{(n)}$, $\mathrm{II}^{(n)}$, $\mathrm{III}^{(n)}$ definieren, indem wir nur $n$ festhalten, so dass dann z. B. $\mathrm{I}^{(n)}$ die Häufigkeit der Anwendbarkeit des Satzes I unter allen Fällen mit einem festen $n$ bedeutet. Diese Zahlen lassen sich aus den vorigen Resultaten berechnen, und zwar

$$\mathrm{I}^{(n)} = \sum_{e=0}^{n-1} n_e \mathrm{I}_e \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

und genau so für II und III statt I. Es bestehen dann die Grenzformeln

$$\mathrm{I}^{(n)} \to \frac{121a}{96} = 0{\cdot}528\ldots; \quad \mathrm{II}^{(n)} \to \frac{1}{3} = 0{\cdot}333\ldots;$$

$$\mathrm{III}^{(n)} \to \frac{2}{3} - \frac{121a}{96} = 0{\cdot}138\ldots \qquad (n \to \infty)$$

wobei $a$ die obige Zahl bedeutet. Es ist übrigens immer $\mathrm{III}^{(n)} < \frac{2}{3} - \frac{121a}{96}$, so dass also für jedes $n$ die Fälle ziemlich

selten sind, in denen sich die Frage der Norm der Grundeinheit mit Hilfe der Sätze I und II nicht entscheiden lässt.

Ich bezeichne mit Nagell[4] mit $B^{(n)}(x)$ und $C^{(n)}(x)$ die Anzahl der Zahlen $D \leqq x$ mit einem festen $n$, für die die Norm der Grundeinheit $-1$ bezw. $+1$ ist. Ähnliche Bedeutung haben $B(x)$ und $C(x)$, jetzt aber ohne jede Einschränkung für $n$. Nagell (a. a. O.) vermutete, dass

$$\frac{C(x)}{B(x)} \to q \qquad (x \to \infty),$$

wobei $q$ ein echter Bruch ist. Es bestehen für jedes $n$ die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\mathrm{II}^{(n)}}{\mathrm{I}-\mathrm{II}^{(n)}} \leqq \liminf \frac{C^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)}, \quad \limsup \frac{C^{(n)}(x)}{B^{(n)}(x)} \leqq \frac{1-\mathrm{I}^{(n)}}{\mathrm{I}^{(n)}},$$

wobei also die links und rechts stehenden Grenzen nach den vorigen gegeben sind und zwischen 0 und 1 liegen. Diese Grenzen streben mit wachsendem $n$ den Werten 0·5 und 0·891... $\left(= \frac{96-121\alpha}{121\alpha}\right)$ zu. Ich spreche die Nagellsche Vermutung dahin verschärft aus, dass $q$ sogar zwischen den zwei letzten Zahlen liegt.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. März 1935.)

# EÖTVÖS INGÁJA A FRANCIA LIMAGNE-BAN.

PEKÁR DEZSŐ I. tagtól.

## I. Bevezetés.

A francia *L'Office National des Combustibles Liquides* 1926 végén hozzám fordult, hogy milyen feltételek mellett volnánk hajlandók a Puy-de-Dôme alatt elterülő Limagne síkságon torziós ingaméréseket végezni. Levélbeli tárgyalásaink eredményeképpen a *Ministère des Travaux Publics* megbízott, hogy a tervbe vett méréseket 1927 nyarán végezzük el. Egyúttal elrendelte, hogy *Clermont-Ferrandban* a *Service des Mines* az expedíció megszervezésével és munkálataival kapcsolatos összes ügyekben segítségünkre legyen. Kedves kötelességemnek tartom, hogy őszinte köszönetemet fejezzem ki G. Daval főmérnök és R. Lévy bányamérnök uraknak, akik lekötelező szívességgel intézték ügyeinket.

Különös köszönettel tartozom a nm. pénzügyminiszter úrnak, valamint a bányakutatások vezetőjének, Böhm Ferenc miniszteri tanácsos úrnak, aki a legnagyobb készséggel hozzájárult ahhoz, hogy e méréseket elvégezhessem, és hogy e célra a *Báró Eötvös Loránd Geofizikai Intézet* műszereit és felszereléseit igénybe vehessem.

A mérésekhez szükséges észlelési felszerelést *Riomba* előre küldettük. Obszervátoraimmal együtt 1927 július 3-án utaztunk el Budapestről, ahová szeptember 26-án tértünk vissza. *Clermont-Ferrandban* megbeszéltük a munkatervet és e célból Ph. Glangeaud professzor úrral is tanácskoztunk a geológiailag várható földalatti alakulatokról. Magát az expedíciót méréseink középpontjában, *Riomban* szerveztük meg, itt állítottuk egybe és egészítettük ki a Franciaországban rendelkezésünkre bocsátott táborozási felszerelést. Úgy ezen, valamint későbbi munkálatainkban M. Gilles nagy buzgalommal segédkezett.

Az egyik mérési állomásról a másikra való szállítást eleintén teherautóval végeztük. A kivételesen sok eső miatt azonban az utak csakhamar annyira elromlottak, hogy kénytelenek voltunk a ló-, illetve ökörvontatásra áttérni. Ezenkívül a gyári elfoglaltsághoz szokott munkásainkkal is sok bajunk volt. Igazán csak RENNER JÁNOS és JAKAB IMRE obszervátoraim fáradhatatlan buzgalmának köszönhettem, hogy július 9-től szeptember 22-ig mégis 65 állomáson végezhettük el méréseinket.

Az ez alkalommal nyert eredmények kívánatossá tették méréseink kiegészítését. Ez irányban folytatott levelezéseink eredményeként a *Ministère des Travaux Publics* újból megbízott, hogy ez újabb méréseinket 1928 nyarán elvégezzük. Mult évi tapasztalataink alapján a *Clermont-Ferrandi Bányahivatal* kijavíttatta és kiegészíttette táborozási felszerelésünket. Különös köszönettel tartozom R. LÉVY főmérnök és M. RICARD bányamérnök uraknak, akik úgy e munkálatokat, valamint összes ügyeinket lekötelező szívességgel intézték. Expedíciós felszerelésünknek naponkinti szállításáról és egyéb szükségleteinkről J. CHAMBARET nagy ügyességgel gondoskodott.

Egyébként méréseinket teljesen hasonló módon végeztük mint előző évben. Tekintettel azonban a majdnem állandó szép időre, gyorsabban haladhattunk. Július 1-től szeptember 30-ig voltunk távol Budapesttől, és a július 6-tól szeptember 26-ig tartó mérésekben 79 állomást végeztünk el. A megfigyeléseket elsősorban RENNER JÁNOS gimnáziumi tanár és OSZLACZKY SZILÁRD obszervátoraim nagy ambícióval és odaadással végezték. Fogadják mindannyian őszinte köszönetemet.

## II. Torziós ingamérések.

A mérést minden állomáson két, egymástól néhány meter távolságban felállított torziós ingával egyidejűleg végeztük, ami azon nem egyszer tekintélyes zavarok kiküszöbölése miatt szükséges, amelyeket az eszközök közvetlen környezetében a talajban előforduló sűrűségegyenetlenségek okoznak. Az egyik egy régebbi típusú kis eszköz, a másik egy legújabb szerkesztésű EÖTVÖS-PEKÁR-féle «Small Original Eötvös made in Hungary» mezei műszer volt.

Az észlelési hálózat kellő megállapítása elsősorban attól függ, hogy milyen földalatti alakulatot szándékozunk felkutatni. Tisztán geológiai kérdés, hogy e vidéken, milyen alakulattal kapcsolatban várható a petróleum előfordulása. Éppen ezért tárgyaltunk GLANGEAUD geológus professzor úrral, aki a vetődések, a törésvonalak felkeresését ajánlotta. E célból eleintén állomásainkat, közel egymáshoz, egyenesvonalban helyeztük el, és pedig kb. merőlegesen a várható törésvonalakra. Később DAVAL főmérnök úr ajánlatára, a földalatti kiemelkedések, az antiklinálisok és dómok kutatására tértünk át, amikor is a kb. háromszöges hálózatban való mérés a legcélszerűbb. Eleintén egymástól kb. 1 km távolságban helyeztük el állomásainkat, később tekintettel az észlelt lassú változásokra, időkímélés céljából e távolságot kb. 1·5 km-re növeltük. Előbb megbízatásunk szerint az állami kutatási terület határain belül végeztük méréseinket, azután azon kívül is több állomáson észleltünk, hogy hozzávetőleges bepillantást nyerjünk a földalatti viszonyokba, amiért is ez állomásokat szabálytalanul és egymástól nagyobb, kb. 2 km távolságban helyeztük el. Ily módon az első évben 90 km$^2$ területet mértünk gravitációsan fel. Sajnos, a hegyek közelsége miatt nyugat felé nem mehettünk el egészen az állami kutatási terület határáig.

A második évben feladatunk elsősorban előző kutatásaink kiegészítése volt. Így *Gerzat*, *Aulnat*, *Pont-du-Château* és *Lussat* közötti területen sűrítettük állomásaink hálózatát, ahol is *Malintrat* közelében előzőleg érdekes gravitációs zavart találtunk. Továbbá más helyi zavarokat mutató vidékeken is új állomásokat tűztünk közbe. Így *Lussat* és *Lignat* között, a *La Tourette* tanya közelében, a *332-es magassági pont* környékén, a *Macholles* és *Chêneboira* tanyák közelében. Ezután a gradiensek irányát követve, a szomszédos területeken kutattunk a petróleum előfordulása szempontjából érdekes földalatti alakulatok után. Néhány állomást az *Allier* folyó tulsó oldalán, *Pont-du-Châteauból* kiindulva, *Bouzel* felé helyeztünk el, hogy a földalatti rétegek folytatólagos emelkedését megállapíthassuk. Végül az északkeleti részt vizsgáltuk meg, és néhány állomást *Sardon* és *Thuret* környékéig előretoltunk. Dacára, hogy az állomások jó része az előző évi hálózat sűrítését célozta, a felmért új terület 108 km$^2$. Ily módon tehát 1927 és 1928-ban

együttesen 198 · km² területet részletesen kidolgoztunk 144 torziós ingaállomással.

Minthogy méréseinkből végeredményben a földalatti alakulatokra akarunk következtetni, szükséges, hogy a föld felszíne feletti, látható tömegek gravitációs hatását figyelembe vegyük. E célból mindenekelőtt 100 m-ig terjedő nivellálással az eszközök környezetében a felszín egyenetlenségeit meg kell határoznunk és ez adatokból a «*terrénhatást*» kiszámítanunk. Ezenkívül a hegyek gravitációs hatását az ú. n. «*kartografikus hatást*» is ki kell számítanunk, ami a rendelkezésünkre bocsátott 1 : 40,000-es térkép magassági vonalai alapján történt. Végül a szabályos földalaknak megfelelően kiszámított «*normális értékeket*» is tekintetbe kell vennünk.

Torziós ingaészleléseinkből közvetlenül az állomás helyén a tényleges, az ú. n. «*teljes értékeket*» nyerjük. Ebből a terrénhatást levonva a «*topografikus értéket*», és folytatólag a normális értékek levonásával a «*topografikus rendellenességeket*», illetve anomáliákat kapjuk, a gravitációs zavar jellemző adatait. Végül, ha még a kartografikus hatást is levonjuk, akkor a «*szubterrán rendellenességeket*» nyerjük, melyek csupán a földalatti tömegek hatásából származnak. Ezen adatokból vonhatjuk le az úgy geológiai, valamint gyakorlati szempontból fontos következtetéseinket, a különböző földalatti alakulatokra vonatkozólag.

Észlelési adatainkat bizonyos fokig már a mezőn feldolgoztuk, hogy a nyert eredményekből közelítő bepillantást nyerjünk a földalatti alakulatokba, s így észleléseinket a kívánatosnak mutatkozó irányokban kiterjeszthessük, viszont egyes felesleges állomások elvégzését megtakaríthassuk. A rendszeres végleges számítást azonban csak a mérések befejezése után végezhettük el, amikor is már az összes adatok rendelkezésünkre állanak.

## III. A torziós ingamérések eredményei.

A torziós inga négy adatot ad meg a nehézségi erő változásaira vonatkozólag. Ez adatokat egy $X$, $Y$, $Z$ derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatva, mint a nehézségi erő potenciálfüggvényének az $U$-nak differenciálquotienseit szokás kifejezni. Rendesen az $X$ tengely észak felé, az $Y$ tengely kelet felé és a $Z$ tengely függőlegesen lefelé mutat.

A meghatározott adatok első ketteje a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ a *nehézségi erő gradiensét* adja meg, és pedig az első annak $X$ tengelymenti, a második pedig az $Y$ tengelymenti komponensét jelenti. Maga a gradiens a nehézségi erő horizontális síkban való változásának mértéke. Ezen adat határozza meg egyrészt, hogy mily irányban haladva legnagyobb e változás, másrészt számértéke megadja, hogy a legnagyobb változás irányában 1 cm-rel előrehaladva, hány *Eötvös egységgel* nő a nehézségi erőnek, a $g$-nek értéke. Fenti adatokból a gradienst, magát a $Gr$-et és annak irányát a $\gamma$-át könnyen kiszámíthatjuk.

A torziós inga másik két adata a $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ a nehézségi erő nívófelületének, szintfelületének *görbületi viszonyairól* nyujt felvilágosítást. Ez adatokból elsősorban a nívófelület főgörbületeinek irányát határozhatjuk meg, melyek egymásra merőlegesek, s amelyek közül az egyikben a legnagyobb, a másikban a legkisebb a felület görbülete.

Ezenkívül ezekből az adatokból az $R = g\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)$ mennyiség értékét számíthatjuk ki, amelyben $g$ a nehézségi erő gyorsulását, $\varrho_1$ a kisebbik, $\varrho_2$ pedig a nagyobbik főgörbületi sugarat jelenti. Ezen $R$ *mennyiség* határozza meg a nehézségi erő azon forgatóképességét, amely a vízszintesben mozgó egyszerű torziós inga rúdját a nagyobb görbületi sugarú főgörbület síkjába igyekszik terelni. Éppen ezért ezt az $R$ mennyiséget *horizontális irányítóképességnek* nevezzük. A két görbületi adatból magát az $R$ értéket és annak irányát a $\lambda$-át egyszerű módon kiszámíthatjuk.

Az észlelési adatokból és a két eszközre külön-külön meghatározott terrénhatásból mindenekelőtt kiszámítottuk a topografikus értékeket. Ezek a közvetlen adatok a mágneses meridiánra vonatkoztak, mert méréseinkkor eszközeinket busszólával állítottuk be a kezdeti I. állásba, a mágneses meridiánba, s ebből kiindulva 120—120° elfordulással végeztük a II. és III. állásban észleléseinket és pedig három teljes sorozatban.

Számításaink fontosabb lépéseit táblázatokban tüntettük elő, és pedig együttesen az 1927 és 1928 évi eredményeket. Az I. táb-

lázatban a két eszközzel meghatározott *topografikus értékek közepeit* a mágneses meridiánra vonatkoztatva és az állomások szélességi és hosszúsági adatait. A II. táblázatban a csillagászati meridiánra vonatkoztatott *topografikus adatokat* és *topografikus rendellenességeket*, amelyeket az általunk meghatározott mágneses deklináció felhasználásával számítottunk ki. A III. táblázatban a csillagászati meridiánra vonatkoztatott *szubterrán rendellenességeket* és a *kartografikus hatásokat*, amelyet a hegyek közelsége miatt az egyes állomásokra külön-külön, s éppen ezért hosszadalmas módon kellett kiszámítani. Különösen a görbületi adatokban tekintélyesek e hatások, amelyek a zavaró tömegekre jóval érzékenyebbek, mint a gradiensek. A IV. táblázatban ugyancsak a *szubterrán rendellenességeket*, és pedig a *gradienseket, horizontális irányítóképességeket* és azok irányait, továbbá a *nehézségi erő értékeit* tüntettük elő, amelyeket az előző táblázat adataiból számítottunk ki. A gradienseket és azok irányát a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$, a horizontális irányítóképességeket pedig a $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ adataiból; végül a nehézségi erő értékeit a mindkét évi állomások együttes hálózatának és a gradienseknek felhasználásával, a hibák kiegyenlítésének módszerével számítottuk ki, ami tekintettel az állomások nagy számára, tekintélyes időt igényelt.

A szubterrán rendellenességeket tanulmányozva, közvetlenül láthatjuk, hogy azok két részből tevődnek össze, az egyik a mélyebben fekvő rétegek, a másik a föld felszínéhez közelebb fekvő tömegek hatásából származik. Következtetéseink szempontjából előnyös, ha ezeket egymástól különválasztjuk, és pedig különösen a gradiensekre és a nehézségi erő értékeire vonatkozólag. A nagy mélységből származó hatásokat «*profundális értékek*»-nek neveztem el. A profundális gradiensek összetevőit akként határoztuk meg, hogy egy-egy állomásra, a közelében nagyobb körzetben lévő állomások megfelelő középértékeit számítottuk ki. Természetesen e számításban mindenkor némi bizonytalanság van attól függően, hogy véletlenül hány és milyen állomások vannak a környezetben. Az állomások megfelelő kiválasztásával azonban e bizonytalanságot majdnem teljesen eltüntethetjük. A profundális adatokban termé-

szetesen az egyébként mutatkozó kisebb szabálytalanságok eltűnnek, mert ezek a nagy mélységnek megfelelően a nagyvonalú, szabályos változásokat adják meg. E tulajdonságukat kifejezve, a profundális adatokat egyúttal «*reguláris értékek*»-nek neveztem. Közbevetőleg csupán felemlítem, hogy már eddig is[1] végeztek néha ily fajta számításokat és a nagyobb mélységből származó hatásokat «regionális értékek»-nek nevezték el. Magam ezt az elnevezést nagyon szerencsétlennek tartom, amely egyáltalán nem találó és könnyen félreértésekre vezethet; éppen ezért ezt nem is használom.

A szubterrán rendellenességekből a profundális adatokat levonva, kapjuk a földfelület közelében fekvő rétegek hatását, amit ennek megfelelően «*proximális értékek*»-nek nevezhetünk. Tekintve, hogy ezek egy-egy kisebb területre, vidékre vonatkozó zavarokat adják meg, egyszersmind «*lokális értékek*»-nek neveztem. Tulajdonképpen ezeket az adatokat nevezhetnők egész találóan «regionális értékek»-nek. Tekintve azonban, hogy egyesek ezt a kifejezést bár helytelenül, de más értelemben használják, félreértések elkerülése végett a regionális elnevezést teljesen mellőztem.

A profundális gradiensek összetevőit a már fentebb részletezett módon kiszámítva, ezekből magukat a gradienseket és azok irányát, továbbá a szokásos módon a profundális nehézségi értékeket határozhatjuk meg. A szubterrán és a profundális gradiensek összetevőinek különbsége, a lokális gradiens összetevőket adja meg, amelyekből folytatólag a lokális gradienseket és a nehézségi erő lokális értékeit számíthatjuk ki. A csillagászati meridiánra vonatkoztatott e szubterrán rendellenességek közül az V. táblázatban csupán a *profundális* és *lokális gradiens összetevőket*, továbbá a *nehézségi erő lokális anomáliáit* tüntettük elő.

E terjedelmes táblázatokat ebben az előírásszerinti rövid cikkemben nem közölhetem, csupán az alábbi *összefoglaló táblázatban* a *gradiensek szubterrán, profundális és lokális összetevőit*, továbbá *a nehézség szubterrán és lokális anomáliáit* tüntettem fel.

[1] Szóban forgó számításaimat még 1928-ban végeztem és 1929 januárjában benyujtott hivatalos francia jelentésemben közöltem; a nyilvános nyomtatott cikk megjelenésére azonban csak most került sor.

| Állomás száma | Gradiens összetevők | | | | | | Nehézségi anomáliák | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | szubterrán | | profundális | | lokális | | szubterrán | lokális |
| | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^3 g$ | $10^3 g$ |
| 1 | — 7·8 | + 9·5 | — 9·2 | + 5·4 | + 1·4 | + 4·1 | + 1·2 | — 0·3 |
| 2 | — 0·2 | — 0·1 | — 9·2 | + 5·4 | + 9·0 | — 5·5 | + 1·7 | 0 |
| 3 | — 12·1 | + 12·5 | — 5·9 | + 7·7 | — 6·2 | + 4·8 | + 2·3 | + 0·3 |
| 4 | — 10·6 | + 9·0 | — 5·9 | + 7·7 | — 4·7 | + 1·3 | + 2·5 | + 0·3 |
| 5 | — 10·4 | + 10·4 | — 5·9 | + 7·7 | — 4·5 | + 2·7 | + 2·8 | + 0·2 |
| 6 | — 8·1 | + 3·8 | — 5·9 | + 7·7 | — 2·2 | — 3·9 | + 3·2 | + 0·2 |
| 7 | — 16·6 | — 2·9 | — 12·4 | + 3·2 | — 4·2 | — 6·1 | + 1·1 | — 0·1 |
| 8 | — 11·0 | + 3·1 | — 12·4 | + 3·2 | + 1·4 | — 0·1 | + 0·8 | — 0·5 |
| 9 | — 14·0 | + 3·2 | — 12·4 | + 3·2 | — 1·6 | 0 | + 1·2 | — 0·6 |
| 10 | + 1·1 | + 7·7 | — 5·9 | + 7·7 | + 7·0 | 0 | + 3·2 | + 0·2 |
| 11 | — 10·6 | + 15·5 | — 9·2 | + 5·4 | — 1·4 | + 10·1 | + 2·2 | 0 |
| 12 | — 10·1 | + 8·5 | — 5·9 | + 7·7 | — 4·2 | + 0·8 | + 3·8 | + 0·1 |
| 13 | — 5·1 | + 8·2 | — 5·9 | + 7·7 | + 0·8 | + 0·5 | + 3·6 | 0 |
| 14 | — 3·1 | + 11·2 | — 5·0 | + 7·4 | + 1·9 | + 3·8 | + 4·7 | + 0·4 |
| 15 | — 5·3 | + 5·9 | — 4·0 | + 7·1 | — 1·3 | — 1·2 | + 5·7 | + 0·7 |
| 16 | — 1·3 | + 2·3 | — 2·5 | + 5·5 | + 1·2 | — 3·2 | + 7·1 | + 0·1 |
| 17 | — 6·4 | + 3·1 | — 5·2 | + 5·2 | — 1·2 | — 2·1 | + 6·1 | + 0·6 |
| 18 | — 1·4 | + 8·2 | — 4·0 | + 7·1 | + 2·6 | + 1·1 | + 5·7 | + 0·7 |
| 19 | — 7·6 | + 7·8 | — 5·0 | + 7·4 | — 2·6 | + 0·4 | + 4·6 | + 0·2 |
| 20 | — 4·0 | + 10·6 | — 9·2 | + 5·4 | + 5·2 | + 5·2 | + 1·7 | — 0·1 |
| 21 | — 8·2 | + 9·9 | — 5·9 | + 7·7 | — 2·3 | + 2·2 | + 2·0 | + 0·1 |
| 22 | — 11·1 | + 9·3 | — 6·1 | + 5·6 | — 5·0 | + 3·7 | + 3·6 | — 0·1 |
| 23 | — 5·4 | + 7·6 | — 6·1 | + 5·6 | + 0·7 | + 2·0 | + 2·8 | — 0·3 |
| 24 | — 10·3 | + 0·8 | — 6·3 | + 3·4 | — 4·0 | — 2·6 | + 4·0 | **0** |
| 25 | — 12·0 | + 4·1 | — 6·3 | + 3·4 | — 5·7 | + 0·7 | + 3·8 | — 0·2 |
| 26 | — 0·7 | — 2·4 | — 7·0 | + 2·0 | + 6·3 | — 4·4 | + 5·3 | + 0·2 |
| 27 | — 9·0 | + 0·8 | — 7·0 | + 2·0 | — 2·0 | — 1·2 | + 5·2 | + 0·3 |
| 28 | — 11·4 | — 3·3 | — 7·0 | + 2·0 | — 4·4 | — 5·3 | + 5·6 | + 0·2 |
| 29 | — 4·8 | — 2·0 | — 6·3 | + 3·4 | + 1·5 | — 5·4 | + 6·1 | 0 |
| 30 | — 6·0 | + 3·6 | — 6·3 | + 3·4 | + 0·3 | + 0·2 | + 6·2 | + 0·4 |
| 31 | — 2·3 | — 2·8 | — 6·3 | + 3·4 | + 4·0 | — 6·2 | + 6·2 | 0 |

| Állomás száma | Gradiens összetevők | | | | | | Nehézségi anomáliák | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | szubterrán | | profundális | | lokális | | szubterrán | lokális |
| | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^3 g$ | $10^3 g$ |
| 32 | — 10·9 | — 0·6 | — 6·3 | + 3·4 | — 4·6 | — 4·0 | + 5·3 | + 0·2 |
| 33 | — 21·2 | + 10·1 | — 6·3 | + 3·4 | — 14·9 | + 6·7 | + 4·3 | — 0·1 |
| 34 | — 8·2 | + 4·6 | — 6·1 | + 5·6 | — 2·1 | — 1·0 | + 5·1 | + 0·4 |
| 35 | — 5·4 | + 0·2 | — 5·2 | + 5·2 | — 0·2 | — 5·0 | + 6·1 | + 0·7 |
| 36 | — 0·6 | + 15·7 | — 6·3 | + 3·4 | + 5·7 | + 12·3 | + 6·2 | + 0·4 |
| 37 | — 0·1 | + 5·0 | — 2·0 | + 2·0 | + 1·9 | + 3·0 | + 7·2 | + 0·5 |
| 38 | — 3·5 | — 0·6 | — 2·0 | + 2·0 | — 1·5 | — 2·6 | + 7·2 | + 0·2 |
| 39 | — 3·0 | — 1·1 | — 4·0 | + 2·5 | + 1·0 | — 3·6 | + 7·9 | + 0·5 |
| 40 | — 12·9 | + 0·9 | — 4·0 | + 2·5 | — 8·9 | — 1·6 | + 9·3 | + 0·9 |
| 41 | — 9·0 | + 9·9 | — 1·1 | + 4·6 | — 7·9 | + 5·3 | + 9·1 | + 0·3 |
| 42 | + 3·2 | + 0·7 | — 1·1 | + 4·6 | + 4·3 | — 3·9 | + 8·9 | + 0·7 |
| 43 | + 6·6 | — 0·1 | — 1·6 | + 3·3 | + 8·2 | — 3·4 | + 7·8 | + 0·4 |
| 44 | — 1·6 | — 0·9 | — 1·1 | + 4·6 | — 0·5 | — 5·5 | + 8·4 | + 0·7 |
| 45 | — 4·0 | + 1·8 | — 1·8 | + 5·0 | — 2·2 | — 3·2 | + 8·5 | + 0·7 |
| 46 | — 3·7 | + 11·7 | — 5·2 | + 5·2 | + 1·5 | + 6·5 | + 7·4 | + 1·0 |
| 47 | + 3·2 | + 2·7 | — 2·4 | + 8·2 | + 5·6 | — 5·5 | + 10·3 | + 1·1 |
| 48 | — 5·9 | + 13·9 | — 3·7 | + 11·8 | — 2·2 | + 2·1 | + 12·0 | + 0·8 |
| 49 | — 0·1 | + 22·0 | — 3·7 | + 11·8 | + 3·6 | + 10·2 | + 14·8 | + 1·4 |
| 50 | — 11·9 | + 6·7 | — 3·7 | + 11·8 | — 8·2 | — 5·1 | + 12·6 | + 1·0 |
| 51 | + 2·5 | + 2·2 | — 1·1 | + 4·6 | + 3·6 | — 2·4 | + 9·3 | + 0·5 |
| 52 | + 1·2 | + 4·3 | — 1·1 | + 4·6 | + 2·3 | — 0·3 | + 9·1 | + 0·7 |
| 53 | + 0·8 | + 6·1 | + 3·6 | + 5·0 | — 2·8 | + 1·1 | + 0·7 | — 0·5 |
| 54 | + 6·0 | + 6·9 | + 6·0 | + 3·5 | 0 | + 3·4 | + 2·2 | — 0·3 |
| 55 | — 3·3 | + 6·8 | + 1·1 | + 6·5 | — 4·4 | + 0·3 | + 1·4 | — 0·4 |
| 56 | + 12·1 | — 3·5 | + 6·0 | + 3·5 | + 6·1 | — 7·0 | + 2·3 | 0 |
| 57 | — 3·5 | + 3·5 | + 1·1 | + 6·5 | — 4·6 | — 3·0 | + 0·3 | — 0·4 |
| 58 | + 5·7 | + 1·9 | + 6·0 | + 3·5 | — 0·3 | — 1·6 | + 0·4 | — 0·2 |
| 59 | — 0·6 | — 2·3 | 0 | + 1·0 | — 0·6 | — 3·3 | 0 | 0 |
| 60 | — 7·8 | + 10·9 | — 2·4 | + 7·1 | — 5·4 | + 3·8 | + 1·6 | + 0·1 |
| 61 | — 6·3 | + 8·0 | — 2·4 | + 7·1 | — 3·9 | + 0·9 | + 2·3 | + 0·1 |
| 62 | — 13·2 | + 6·0 | — 6·3 | + 3·4 | — 6·9 | + 2·6 | + 4·2 | 0 |

| Állomás száma | Gradiens összetevők | | | | | | Nehézségi anomáliák | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | szubterrán | | profundális | | lokális | | szubterrán | lokális |
| | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^5 g$ | $10^5 g$ |
| 63 | − 9·1 | + 4·8 | − 6·3 | + 3·4 | − 2·8 | + 1·4 | + 3·4 | − 0·3 |
| 64 | − 8·3 | − 1·6 | − 6·3 | + 3·4 | − 2·0 | − 5·0 | + 3·6 | − 0·2 |
| 65 | − 14·2 | + 6·1 | − 5·9 | + 7·7 | − 8·3 | − 1·6 | + 1·6 | + 0·1 |
| 66 | − 9·3 | + 8·5 | − 6·3 | + 3·4 | − 3·0 | + 5·1 | + 6·3 | − 0·1 |
| 67 | − 1·4 | + 5·9 | − 2·0 | + 2·0 | + 0·6 | + 3·9 | + 7·1 | + 0·3 |
| 68 | − 5·2 | + 3·1 | − 1·6 | + 3·3 | − 3·6 | − 0·2 | + 7·9 | + 0·7 |
| 69 | − 3·8 | + 5·3 | − 1·8 | + 5·0 | − 2·0 | + 0·3 | + 7·9 | + 0·7 |
| 70 | − 1·6 | + 6·0 | − 1·8 | + 5·0 | + 0·2 | + 1·0 | + 8·0 | + 0·9 |
| 71 | − 3·0 | + 1·4 | − 5·2 | + 5·2 | + 2·2 | − 3·8 | + 7·2 | + 0·6 |
| 72 | − 3·6 | + 6·5 | − 1·8 | + 5·0 | − 1·8 | + 1·5 | + 8·4 | + 0·6 |
| 73 | − 3·6 | + 3·1 | − 1·1 | + 4·6 | − 2·5 | − 1·5 | + 8·3 | + 0·7 |
| 74 | − 2·6 | + 7·4 | − 1·6 | + 3·3 | − 1·0 | + 4·1 | + 7·8 | + 0·6 |
| 75 | + 0·4 | + 1·7 | − 1·6 | + 3·3 | + 2·0 | − 1·6 | + 7·6 | + 0·4 |
| 76 | − 2·1 | − 2·8 | − 1·6 | + 3·3 | − 0·5 | − 6·1 | + 7·6 | + 0·2 |
| 77 | − 8·1 | + 17·5 | − 1·1 | + 4·6 | − 7·0 | + 12·9 | + 8·4 | + 0·6 |
| 78 | + 0·5 | + 10·0 | − 1·1 | + 4·6 | + 1·6 | − 5·4 | + 8·6 | + 0·7 |
| 79 | − 0·7 | + 3·1 | − 1·1 | + 4·6 | + 0·4 | − 1·5 | + 8·7 | + 0·7 |
| 80 | + 1·1 | + 6·7 | − 1·1 | + 4·6 | + 2·2 | + 2·1 | + 8·9 | + 0·6 |
| 81 | − 0·5 | + 3·9 | − 1·1 | + 4·6 | + 0·6 | − 0·7 | + 9·1 | + 0·7 |
| 82 | − 1·3 | + 4·9 | − 1·1 | + 4·6 | − 0·2 | + 0·3 | + 9·1 | + 0·6 |
| 83 | − 3·5 | + 1·2 | − 1·1 | + 4·6 | − 2·4 | − 3·4 | + 9·0 | + 0·7 |
| 84 | − 3·2 | − 1·8 | − 1·1 | + 4·6 | − 2·1 | − 6·4 | + 9·3 | + 0·5 |
| 85 | + 2·2 | + 5·4 | − 2·4 | + 8·2 | + 4·6 | − 2·8 | + 9·7 | + 0·7 |
| 86 | − 5·2 | + 9·4 | − 2·4 | + 8·2 | − 2·8 | + 1·2 | + 9·8 | + 0·6 |
| 87 | − 8·7 | + 10·6 | − 3·7 | + 11·8 | − 5·0 | − 1·2 | + 11·5 | + 1·1 |
| 88 | − 3·1 | + 11·4 | − 3·7 | + 11·8 | + 0·6 | − 0·4 | + 10·8 | + 0·6 |
| 89 | + 0·8 | + 13·9 | − 2·4 | + 8·2 | + 3·2 | + 5·7 | + 10·3 | + 0·6 |
| 90 | + 2·2 | + 3·9 | − 1·1 | + 4·6 | + 3·3 | − 0·7 | + 9·6 | + 0·7 |
| 91 | 0 | + 13·2 | − 1·8 | + 5·0 | + 1·8 | + 8·2 | + 9·4 | + 0·9 |
| 92 | − 9·2 | + 13·2 | − 2·4 | + 8·2 | − 6·8 | + 5·0 | + 10·5 | + 0·7 |
| 93 | − 14·2 | + 17·2 | − 3·7 | + 11·8 | − 10·5 | + 5·4 | + 13·0 | + 1·0 |

| Állomás száma | Gradiens összetevők | | | | | | Nehézségi anomáliák | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | szubterrán | | profundális | | lokális | | szubterrán | lokális |
| | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^3 g$ | $10^3 g$ |
| 94 | + 1·6 | + 12·9 | — 3·7 | + 11·8 | + 5·3 | + 1·1 | + 13·9 | + 1·5 |
| 95 | + 7·3 | + 9·5 | — 7·4 | + 12·2 | + 14·7 | — 2·7 | + 14·9 | + 1·4 |
| 96 | — 1·6 | + 9·8 | — 11·0 | + 12·6 | + 9·4 | — 2·8 | + 19·9 | + 0·7 |
| 97 | — 11·3 | + 9·9 | — 11·0 | + 12·6 | — 0·3 | — 2·7 | + 24·3 | + 1·5 |
| 98 | — 20·2 | + 18·1 | — 11·0 | + 12·6 | — 9·2 | + 5·5 | + 19·1 | + 2·3 |
| 99 | — 11·7 | + 15·5 | — 3·7 | + 11·8 | — 8·0 | + 3·7 | + 11·6 | + 1·1 |
| 100 | — 9·5 | + 19·7 | — 3·7 | + 11·8 | — 5·8 | + 7·9 | + 11·9 | + 1·3 |
| 101 | + 0·5 | + 17·0 | — 2·4 | + 8·2 | + 2·9 | + 8·8 | + 10·3 | + 0·9 |
| 102 | — 1·6 | + 6·0 | — 2·4 | + 8·2 | + 0·8 | — 2·2 | + 9·6 | + 0·5 |
| 103 | + 7·2 | + 1·7 | — 1·1 | + 4·6 | + 8·3 | — 2·9 | + 8·9 | + 0·3 |
| 104 | + 3·3 | — 3·3 | — 1·1 | + 4·6 | + 4·4 | — 7·9 | + 8·8 | + 0·8 |
| 105 | — 1·4 | — 4·6 | — 1·1 | + 4·6 | — 0·3 | — 9·2 | + 9·1 | + 0·3 |
| 106 | 0 | + 0·2 | — 1·1 | + 4·6 | + 1·1 | — 4·4 | + 8·5 | + 0·3 |
| 107 | — 6·3 | — 2·4 | — 4·0 | + 2·5 | — 2·3 | — 4·9 | + 8·3 | + 0·5 |
| 108 | — 3·5 | + 11·0 | — 1·1 | + 4·6 | — 2·4 | + 6·4 | + 8·1 | + 0·4 |
| 109 | — 4·9 | + 4·6 | — 2·0 | + 2·0 | — 2·9 | + 2·6 | + 8·1 | + 0·7 |
| 110 | — 4·8 | + 0·1 | — 2·0 | + 2·0 | — 2·8 | — 1·9 | + 7·6 | + 0·4 |
| 111 | — 5·9 | + 7·4 | — 2·0 | + 2·0 | — 3·9 | + 5·4 | + 7·2 | + 0·2 |
| 112 | — 2·5 | + 7·3 | — 2·0 | + 2·0 | — 0·5 | + 5·3 | + 6·7 | — 0·1 |
| 113 | — 3·4 | — 2·0 | — 2·0 | + 2·0 | — 1·4 | — 4·0 | + 6·6 | 0 |
| 114 | — 8·9 | + 4·1 | — 5·9 | + 7·7 | — 3·0 | — 3·6 | + 3·4 | + 0·1 |
| 115 | + 0·2 | + 14·4 | — 5·9 | + 7·7 | + 6·1 | + 6·7 | + 3·1 | + 0·4 |
| 116 | — 7·6 | + 10·5 | — 5·9 | + 7·7 | — 1·7 | + 2·8 | + 3·1 | + 0·2 |
| 117 | + 4·7 | + 1·8 | — 4·0 | + 7·1 | + 8·7 | — 5·3 | + 6·8 | + 0·6 |
| 118 | — 1·9 | + 11·4 | — 4·0 | + 7·1 | + 2·1 | + 4·3 | + 6·2 | + 0·6 |
| 119 | — 0·6 | + 5·0 | — 2·5 | + 5·5 | + 1·9 | — 0·5 | + 7·4 | + 0·7 |
| 120 | — 5·0 | + 2·9 | — 2·5 | + 5·5 | — 2·5 | — 2·6 | + 8·6 | + 0·6 |
| 121 | — 4·3 | + 6·6 | — 2·5 | + 5·5 | — 1·8 | + 1·1 | + 8·1 | — 0·1 |
| 122 | — 2·6 | + 3·2 | — 2·5 | + 5·5 | — 0·1 | — 2·3 | + 6·8 | 0 |
| 123 | — 4·8 | + 4·3 | — 1·4 | + 6·8 | — 3·4 | — 2·5 | + 6·1 | + 0·6 |
| 124 | — 1·8 | + 1·9 | — 4·0 | + 7·1 | + 2·2 | — 5·2 | + 7·0 | + 0·6 |

| Állomás száma | Gradiens összetevők | | | | | | Nehézségi anomáliák | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | szubterrán | | profundális | | lokális | | szubterrán | lokális |
| | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ | $10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ | $10^3 g$ | $10^3 g$ |
| 125 | − 4·8 | + 12·0 | − 5·0 | + 7·4 | + 0·2 | + 4·6 | + 4·5 | + 0·5 |
| 126 | − 6·0 | + 16·3 | + 1·1 | + 6·5 | − 7·1 | + 9·8 | + 4·4 | + 0·5 |
| 127 | − 4·4 | + 11·2 | + 1·1 | + 6·5 | − 5·5 | + 4·7 | + 2·8 | − 0·1 |
| 128 | + 13·5 | + 0·8 | + 1·1 | + 6·5 | + 12·4 | − 5·7 | + 5·1 | + 0·7 |
| 129 | − 4·8 | + 11·0 | + 3·6 | + 3·0 | − 8·4 | + 6·0 | + 3·6 | + 0·1 |
| 130 | + 9·5 | − 4·4 | + 6·0 | + 3·5 | + 3·5 | − 7·9 | + 3·8 | + 0·2 |
| 131 | + 11·3 | − 6·3 | + 8·4 | + 1·1 | + 2·9 | − 7·4 | + 5·6 | + 0·4 |
| 132 | + 7·1 | + 4·0 | + 6·0 | + 3·5 | + 1·1 | + 0·5 | + 4·4 | + 0·3 |
| 133 | + 6·6 | + 4·7 | + 6·0 | + 3·5 | + 0·6 | + 1·2 | + 5·9 | + 0·7 |
| 134 | + 8·8 | + 5·3 | + 8·4 | + 1·1 | + 0·4 | + 4·2 | + 6·3 | + 0·4 |
| 135 | − 2·1 | − 3·3 | + 3·4 | + 0·4 | − 5·5 | − 3·7 | + 7·1 | + 0·2 |
| 136 | + 5·2 | − 3·3 | + 3·4 | + 0·4 | + 1·8 | − 5·7 | + 7·2 | − 0·4 |
| 137 | + 2·2 | − 0·8 | + 3·4 | + 0·4 | − 1·2 | − 1·2 | + 7·3 | + 0·5 |
| 138 | + 2·8 | + 6·0 | + 4·7 | + 2·0 | − 1·9 | + 4·0 | + 6·9 | + 0·5 |
| 139 | − 0·9 | − 3·7 | + 1·1 | + 6·5 | − 2·0 | − 10·2 | + 5·9 | + 0·2 |
| 140 | + 4·1 | − 4·0 | − 1·4 | + 6·8 | + 5·5 | − 10·8 | + 6·4 | − 0·2 |
| 141 | − 3·3 | + 9·5 | − 2·5 | + 5·5 | − 0·8 | + 4·0 | + 7·7 | − 0·3 |
| 142 | − 13·0 | + 11·2 | − 4·0 | + 7·1 | − 9·0 | + 4·1 | + 9·9 | + 0·3 |
| 143 | − 2·3 | + 4·8 | − 2·5 | + 5·5 | + 0·2 | − 0·7 | + 7·2 | + 0·3 |
| 144 | − 1·5 | + 11·6 | − 4·0 | + 7·1 | + 2·5 | + 4·5 | + 6·6 | + 0·8 |

Különben is a számok e nagy sokasága nem nyujt közvetlen bepillantást eredményeinkbe. E célra sokkal alkalmasabb a grafikus ábrázolás, amint azt a mellékelt I. és II. térképen láthatjuk, amelyekből azután úgy geológiai, mint gyakorlati következtetéseinket levonhatjuk. A rajzok a rendelkezésünkre bocsátott 1 : 40,000-es térképek alapján készültek, és pedig a francia jelentésemhez csatolt eredetiek harmadára kisebbített példányai. Áttekinthetőség céljából térképeinken aránylag kevés topografikus részletet tüntettünk elő, így a vasútvonalakat, az *Allier* folyó, a városok és egyes falvak

körvonalait, valamint az $50^G\,90'$ szélességi és a $0^G\,90'$ hosszúsági köröket.

Az I. térképen a szubterrán anomáliákat tüntettük elő. A kis körök az *észlelési állomások*, amelyeket gondos geodéziai mérésekkel vezettünk be a térképbe; melléjük írva az állomások folyószámát tüntettük fel. A nyilak az irány és nagyság szerint berajzolt *gradiensek;* az állomásokon áthaladó vékony vonalak a *horizontális irányítóképességek*, amelyek a nívófelület legnagyobb görbületi sugarú fősíkjában fekszenek. Az ábrázolás a térképen megadott méretek szerint történt. Minthogy ugyanis rajzunkat harmadára kisebbítettük, az eredeti méretek megfelelően módosultak: a gravitációs adatok ábrázolásában 1 mm $= 3.10^{-9}$ CGS $= 3E$, ahol $E$ a kiváló tudós érdemeinek elismeréseül internacionálisan elnevezett «Eötvös» egységet jelenti; a térkép mérete pedig 1 : 120,000.

A fekete vastagon kihúzott görbék az *izogammák*, amelyek mentén a nehézségi erő értéke változatlanul ugyanaz, s amelyeket a gradiensek adatainak felhasználásával határoztunk meg. Két szomszédos izogamma értékköze $1.10^{-3}$ CGS, erre vonatkozólag természetesen az eredeti térkép adata változatlanul érvényes. Az izogammák mellé írott számok azok értékeit jelzik. Ki kell azonban emelnem, hogy ezek csupán relatív adatok, mert a felmért területen abszolút nehézségi erőmeghatározás nem áll rendelkezésünkre, s így egy tetszés szerint kiválasztott értékből indulhatunk ki. Hogy a negatív értékeket elkerüljük, a nehézségi erő rendellenességét az 59 állomáson O-nak vettük fel.

A II. térképen a szubterrán adatokból a *lokális gradienseket* és a *nehézségi erő lokális anomáliáit előtüntető izogammákat* rajzoltuk meg. Az adatokat általában hasonló módon ábrázoltuk, mint az I. térképen. Tekintettel azonban a kisfokú változásokra, két szomszédos izogamma értékköze csupán $0{\cdot}1.10^{-3}$ CGS. Aránylag kevesebb topografikus részletet tüntettünk elő, hogy az áttekinthetőséget ne zavarjuk.

*Az I. térképen torziós ingaméréseink eredményeiből a következő fontosabb részleteket emelhetjük ki:*

1. A nehézségi erő zavarai elég tekintélyesek. A gradiensek a $27E$, a horizontális irányítóképességek a $42E$ értéket is elérik, térképünkön összesen 24 izogammát rajzolhattunk meg.

2. A gradiensek rendszere általában elég szabályos, legnagyobb részük iránya dél és kelet között fekszik. *Riomból Sardon* felé haladva azonban a gradiensek általában észak és északkelet felé irányulnak.

3. Ennek megfelelően *Riomból Pont-du-Château* felé, avagy *Ennezat* felé, avagy *Sardon* felé, szóval bármely irányban haladva az izogammák értékei nőnek.

4. *Pont-du-Châteautól Bouzel* felé, az *Allier* folyó tulsó oldalán az izogammák növekedése folytatódik.

5. A horizontális irányítóképességek rendszere általában összhangban van a gradiensekkel és izogammákkal. Csupán egyes állomásokon találunk bizonyos szabálytalanságokat, mert ezek sokkal érzékenyebbek a zavaró hatásokra, mint a gradiensek, s így a közeli hegyek és esetleges lokális földalatti tömegek nagyobb mértékben befolyásolják értéküket.

6. Térképünkön az $1.10^{-3}$ CGS közökben megrajzolt izogammákban közvetlenül semmiféle centrális alakulat nem mutatkozik. A gradiensek rendszertelen értékei és az izogammák szabálytalan görbületei azonban egyes helyeken ilyen kis kiterjedésű, lokális alakulatokat árulnak el.

*A II. térképen a lokális szubterrán rendellenességeket tüntettük elő.* Ezek azok a lokális gravitációs zavarok, amelyek reátevődnek a nagyvonalú reguláris, illetve profundális zavarokra. Aránylag elég mérsékeltek e hatások, amiért is az izogammákat $0{\cdot}1.10^{-3}$ CGS értékközökben kellett feltüntetnünk, amint azt a melléjük írott számokból is láthatjuk. E térképünkön már több centrális alakulatot találunk, amelyek részletezésére majd az V. fejezetben visszatérünk, amikor is torziós ingaméréseink eredményeiből a földalatti alakulatokra következtetünk.

A *profundális adatok térképét*, amely a profundális gradienseket és izogammákat tünteti elő, költségkímélésből nem közöljük. Ezen adatok levonásával nyertük az I. térképből a II. térképet. A profundális gradiensek állomásról-állomásra haladva, szabályosan és egyenletesen változnak, látszólagos rendszertelenségeik teljesen eltűntek. Ennek megfelelően a profundális izogammák rendszere lényegében hasonlít az I. térképen levőhöz, azzal a különbséggel, hogy a vonalak egyenetlenségei teljesen kisimultak és a folytonos görbék szabályosan ívéltek.

## IV. Földmágneses mérések.

Következtetéseink elősegítésére földmágneses méréseket is végeztünk. Valamennyi 144 torziós ingaállomásunkon *relatív módon* meghatároztuk a *Horizontális Intenzitás* értékét. E célra KOHLRAUSCH-féle variometerünket használtuk, amelyet a mezei mérésekre könnyen kezelhetővé alakítottunk át, úgyhogy az észleléseket gyorsan, néhány perc alatt s a mellett teljes megbízhatósággal elvégezhettük. Ezenkívül a MOUREAUX-féle mágneses eszközzel kilenc állomáson a *Deklinációt* és ugyancsak kilenc állomáson a *Horizontális Intenzitást abszolút módon* meghatároztuk. A deklináció értékére különben torziós ingaméréseink feldolgozásában is szükségünk volt, amikor is adatainkat a mágneses meridiánról a csillagászatira átszámítottuk.

A földmágneses adatok tudvalevőleg időbeli, napi, évi, százados stb. változásoknak vannak alávetve. Éppen ezért valamely közeli obszervatórium regisztráló adatai alapján az észlelt értékeket egy ugyanazon időpontra kell átszámítanunk. Minthogy egy ilyen francia obszervatórium adatai nem állottak rendelkezésünkre, a korrigálatlan értékekből csupán annyit állapíthatunk meg, hogy a *megvizsgált területen számottevő földmágneses zavarok nincsenek.*

Ez az időbeli korrekció a táblázatos egybeállításban az egyes megfigyelések megadott időpontja alapján bármikor, később is elvégezhető a *Val Joyeux*, vagy esetleg egy, a Limagne síksághoz még közelebb fekvő obszervatórium regisztrált adataival. Lehetséges, hogy e pontosan korrigált értékekben egyes lokális mágneses zavarok mutatkoznak, amelyek azonban mindenesetre csak nagyon mérsékeltek és kis kiterjedésűek lehetnek.

## V. A torziós ingamérések eredményeinek geológiai értelmezése.

Méréseink eredményeit a III. fejezetben részleteztük. Ha már most a megállapított szubterrán anomáliákból a földalatti alakulatokra akarunk következtetni, ez elsősorban a földalatti rétegekre és azok sűrűségére vonatkozó feltevéseinktől függ.

A legegyszerűbb és legvalószínűbb feltevés, hogy lefelé a föld

mélyébe hatolva, a felső kisebb sűrűségű rétegek után nagyobb sűrűségű rétegek következnek. Ebben a gyakran előforduló tényleges esetben az izogammák kb. a mélyben fekvő sűrűbb réteg felületének magassági vonalait adják meg, illetve tulajdonképpen azon képzelt közepes rétegnek, amellyel a ténylegeseket helyettesíthetjük. Ez esetben tehát az izogammák a földalatti rétegalakulatokat közvetlenül előtüntetik. Így egy maximum kiemelkedést, a minimum pedig mélyedést jelent. Két szomszédos izogamma által meghatározott magasságkülönbség pedig elsősorban a rétegek közötti sűrűségkülönbségtől, továbbá bizonyos fokig a földalatti konfiguráció alakjától függ. Például a 0·6 sűrűségkülönbségnek megfelelően, egy izogammaköz kb. 40 m magasságkülönbséget jelent.

E feltevéssel az *I. térképünkből az alábbi következtetéseket vonhatjuk:*

1. Közvetlenül láthatjuk, hogy *Riomból* kiindulva bármely irányban haladunk, a földalatti rétegek emelkednek.

2. Ennek megfelelően *Riom* környékén egy mélyedés, egy földalatti teknő van.

3. *Riomból Pont-du-Château* felé haladva, kezdetben és utunk végén a földalatti emelkedés meredekebb, mint a középső területen.

4. *Pont-du-Châteauból Bouzel* felé haladva, az *Allier* folyó tulsó oldalán a földalatti rétegek tovább emelkednek.

5. Az izogammák közvetlenül semmiféle centrális alakulatot, földalatti kiemelkedést, dómot nem mutatnak.

6. A kidolgozott terület egyes helyein azonban az izogammák szabálytalan görbületei és a látszólag rendszertelen gradiensek ilyen lokális és kiskiterjedésű földalatti alakulatok előfordulását árulják el.

A II. térképet éppen azért rajzoltuk meg, hogy ezeket a lokális anomáliákat, ezeket a kiskiterjedésű földalatti kiemelkedéseket jobban előtüntethessük, amelyek a mélységben lévő szabályos lejtőkre reátevődnek. Félreértések elkerülése végett azonban reá kell mutatnom arra, hogy itt az izogammák már nem jelentenek magassági vonalakat. Ez az előzőkben tárgyalt értelmezés ugyanis csak abban az esetben érvényes, ha a sűrűbb rétegek nincsenek nagyon közel a felszínhez, hanem nagyobb mélységben fekszenek és elég laposak, vagyis ha a földalatti kiemelkedések vertiká-

lis méretei mérsékeltek a horizontálisakhoz képest. Már pedig a maximumokban a sűrűbb rétegek közel jönnek a felszínhez és így az izogammák közvetlenül a mélységek megállapítására nem alkalmasak.

*E II. térképünkből az alábbi fontosabb részleteket és megfelelő következtetéseinket emelhetjük ki:*

1. *Macholles* tanya közelében, a 115. állomás környékén az izogammákban egy centrális alakulat, egy gravitációs maximum mutatkozik. Úgy ebben, valamint az alább felsorolt többi lokális maximumokban a sűrűbb rétegek közel jönnek a föld felszínéhez. Értesülésünk szerint az e környéken már régebben lemélyített fúrásban petróleumnyomokat találtak.

2. *Malintrat*-tól délkeletre, a 332-es magassági pont közelében, a 104. állomás környékén egy kisebb maximumot találunk. Érdekes, hogy ez a földalatti alakulat egy a felszínen látható kiemelkedéssel esik össze.

3. *Lussat* és *Lignat* között egy tekintélyes maximum van a 47. állomás környékén, ahol a sűrűbb tömegek, a sziklák kibújnak a földből.

4. A *Chêneboira* tanyától nyugatra, a 144. állomás környékén egy kis maximum mutatkozik.

5. Egy másik tekintélyesebb maximum *St. Bauzire*-tól délre, a 46. állomás környékén.

6. Egy maximum *Gerzat*-tól nyugatra, a 30. állomás környékén.

7. Egy kisebb maximum *Malintrat*-tól északra, a 44., 68. és 73. állomás környékén, ahol a sziklák kibújnak és bitumen található.

8. A 128. állomás környékén, *Clerlande* közelében egy maximum terül el, a kevés állomással behálózott területen.

9. A mérési terület határán, *Sardon* közelében, a 137. és 138. állomás környékén egy maximumot találunk, amelynek alakja azonban meglehetős bizonytalan az állomások nem elég sűrű hálózata miatt.

10. A *Coeur* tanya közelében a 33. állomás különleges gradiense oly terület felé irányul, ahol sziklák a felszínre jönnek és ahol bitumen található. Az állomások nem elég sűrű hálózata miatt a földalatti alakulat az izogammákban nem mutatkozik.

11. A maximumokat néhány lényegtelen minimum választja el egymástól.

12. A mérési terület délkeleti részén, az *Allier* folyóval kb. párhuzamosan, az izogammák sűrűbb vonulata tűnik elő.

13. Az izogammák hasonló sűrűbb vonulata halad át a 129., 125., 14., 34., 36., 37. és 38. állomásokon északról dél felé, *Varennes sur Morges*, *Targnat* falvakon át, *Gerzat* és *St. Bauzire* között és *Aulnat*-n át.

14. Az izogammák hasonló, de rövidebb vonulatát találjuk *Riom*-tól délkeletre a 65., 2. és 23. állomásokon át. Az izogammák e három sűrűbb vonulata valószínűleg a földalatti meredekebb lejtők gravitációs hatásából származik, de esetleg vetődések is okozhatják.

15. Az előzőkben részletezett maximumokban, ahol a sűrűbb rétegek közel jönnek a felszínhez, bizonyára petróleum is található. Tekintve azonban, hogy e lokális alakulatok aránylag kis kiterjedésűek, az esetleg előforduló petróleumból csak kisebb mennyiségre számíthatunk.

Éppen ezért véleményem szerint torziós ingaméréseinket a Limagne síkság nagyobb részére kellene kiterjesztenünk, hogy olyan tekintélyesebb földalatti alakulatokat kutassunk fel, ahol nagyobbmennyiségű petróleumelőfordulásra számíthatunk. E célból rendszeres méréseinket akként kellene folytatnunk, hogy mindenkor a már elvégzett állomások eredményeinek útmutatása szerint haladunk tovább.

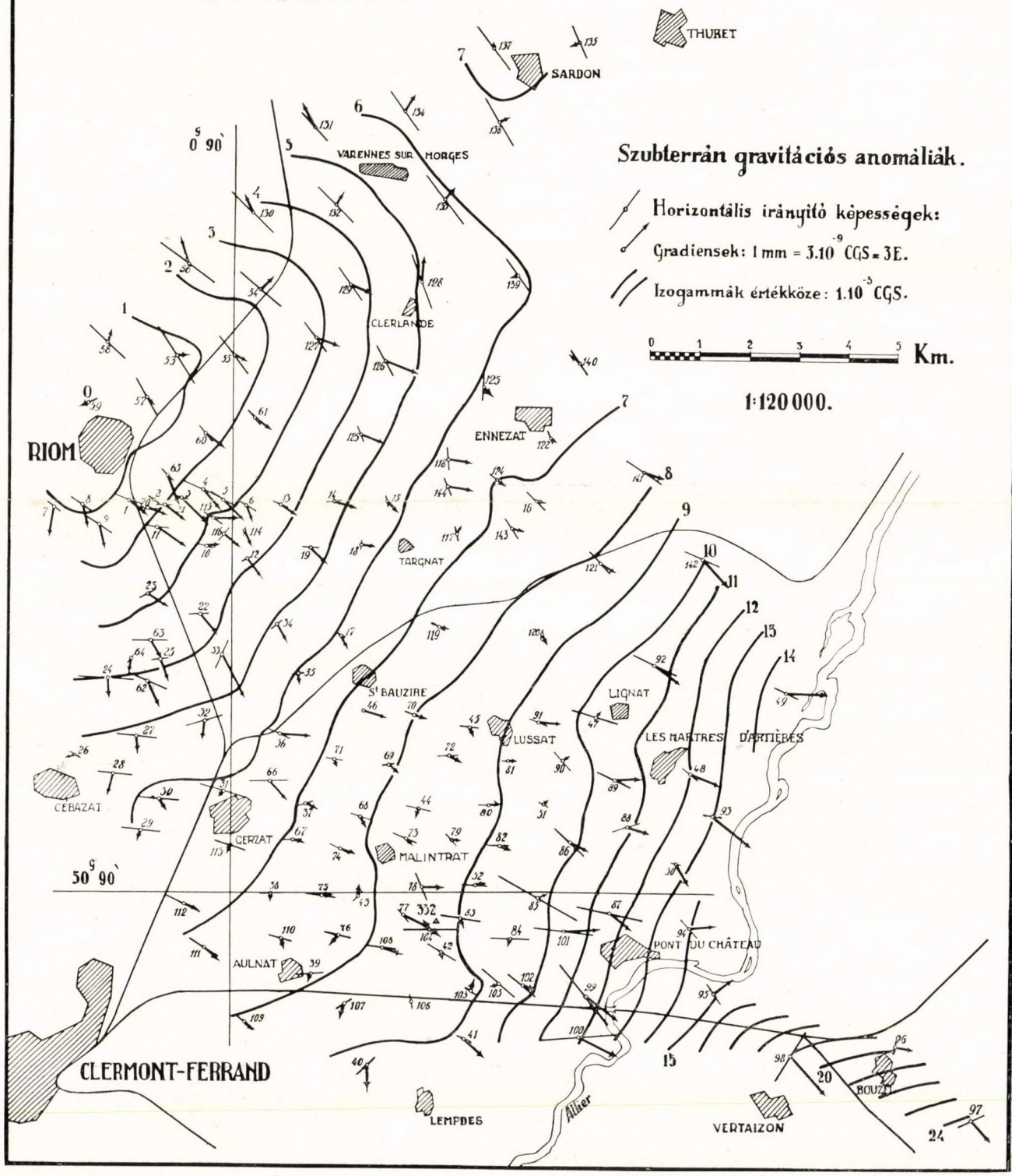
---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1933. június 12-én tartott üléséből.)

# Torziós ingamérések Limagneban

## 1927 és 1928 ban.

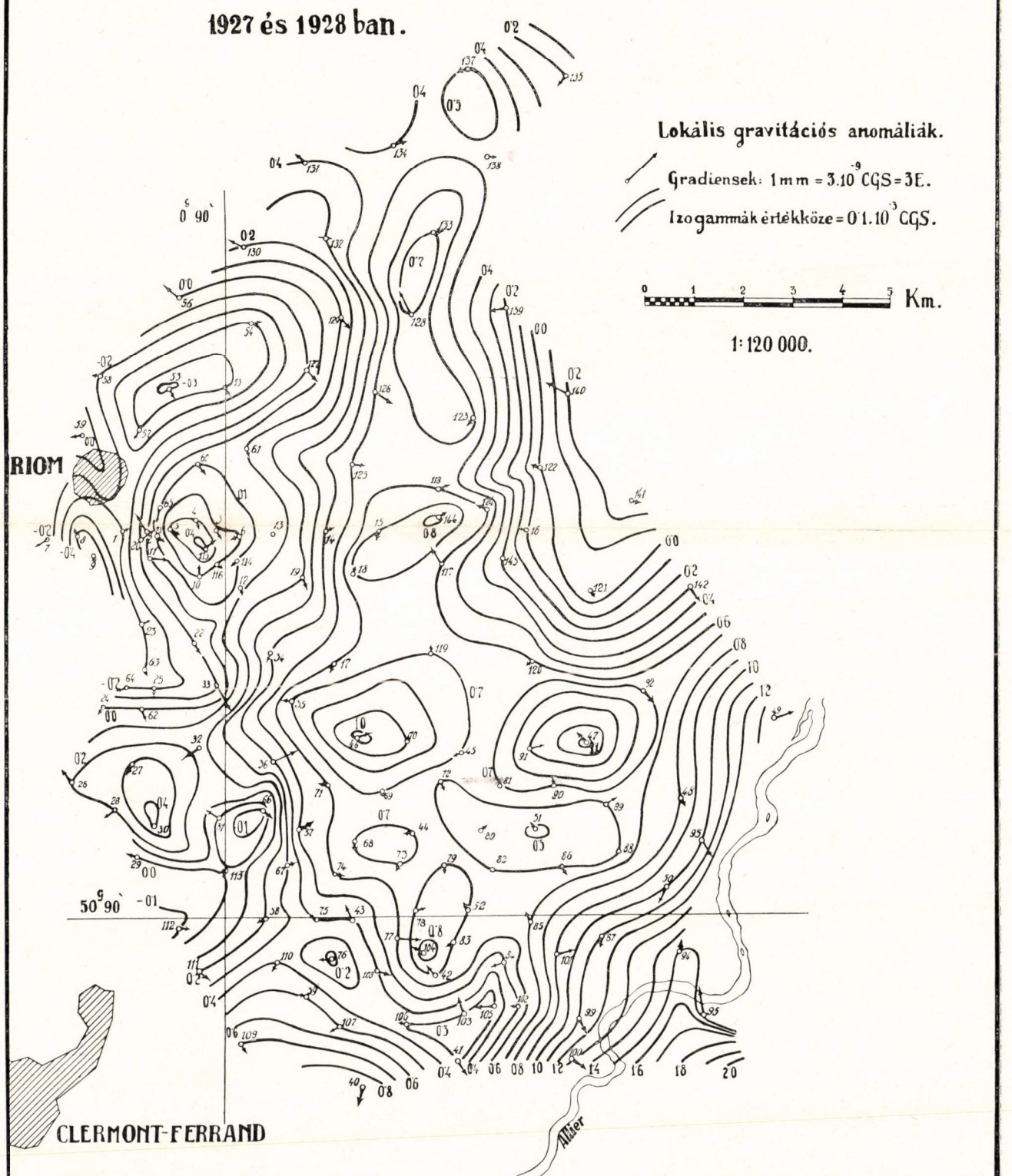
# I. TÉRKÉP.



# Torziós ingamérések Limagneban

## 1927 és 1928 ban.

# II. TÉRKÉP.



# DIE EÖTVÖSSCHE DREHWAGE IM FRANZÖSISCHEN LIMAGNE.

Von DESIDER PEKÁR k. Mitglied der Akademie.

Das französische Amt *L'Office National des Combustibles Liquides* wandte sich Ende 1926 mit der Frage an mich, unter welchen Bedingungen würden wir in der neben dem Berge Puy-de-Dôme sich erstreckenden Ebene Limagne Drehwagemessungen ausführen. Nach brieflichen Verhandlungen hat mich das *Ministère des Travaux Publics* beauftragt, die Messungen im Sommer 1927 auszuführen; mit Rücksicht auf die erhaltenen verheissungsvollen Ergebnissen, wurde ich von neuem aufgefordert, die Aufnahmen im Sommer 1928 zu ergänzen. Bei der Organisierung und in den Feldarbeiten der Expedition standen uns in *Clermont-Ferrand* das *Service des Mines* und besonders die Herren Chef-Ingenieure G. DAVAL und R. LÉVY und Herr Ingenieur M. RICARD zur Hilfe. Die Messungen selbst wurden unter meiner Leitung vom Herrn Gymnasialoberlehrer JOHANN RENNER und von den Herren Observatoren EMERICH JAKAB und SZILÁRD OSZLACZKY ausgeführt. Wir nahmen die Instrumente des *Baron Roland Eötvös Geophysikalischen Institutes* und das Zugehör aus Budapest mit, während die Feldausrüstung von den Franzosen uns zur Verfügung gestellt wurde.

Wir haben an jeder Station mit zwei nebeneinander aufgestellten Drehwagen beobachtet, um die Störungen, welche durch Unterschiede in der Bodendichte nahe des Instrumentes verursacht werden, auszuschliessen. Wir benützten eine ältere kleine Drehwage und ein Feldinstrument neuer Konstruktion von EÖTVÖS-PEKÁR, genannt «Small Original Eötvös made in Hungary». In beiden Jahren haben wir zusammen mit 144 Beobachtungsstationen ein Gebiet

von 198 Km² ausführlich vermessen. Zuerst haben wir auf Anregung des Herrn Prof. PH. GLANGEAUD, in geraden Linien beobachtend, Verwerfungen gesucht, später hat uns Herr Chef-Ingenieur DAVAL die Schürfung nach unterirdischen Domen empfohlen, und demgemäss haben wir ein dreieckiges Netz ausgearbeitet.

Bei der Berechnung haben wir aus den Beobachtungsdaten unmittelbar die *vollen Werte* bestimmt; sodann berechneten wir schrittweise mit Subtraktion des Terraineffektes die *topographischen Werte*, mit Subtraktion der normalen Werte die *topographischen Störungswerte*, zuletzt mit Berücksichtigung der Wirkung der Berge, des sogenannten kartographischen Effektes, die *subterranen Störungswerte*, welche nur die Wirkung der unterirdischen Massen enthalten und so zu geologischen und praktischen Schlussfolgerungen geeignet sind. Diese Werte wurden für alle vier Grössen der Drehwage, nämlich für

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \text{sowie} \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

berechnet. Die beiden ersten dienten zur Bestimmung der Grösse und Richtung der *Gradienten*, die beiden letzteren, die Krümmungsgrössen dagegen zur Berechnung der Grösse und Richtung der *horizontalen Richtkräfte*. Die Ergebnisse wurden einerseits in Tabellen zusammengestellt, anderseits in der beigefügten *I. Karte* in der üblichen Weise graphisch dargestellt. Darin bedeuten die kleinen Kreise die Beobachtungsstationen, die Pfeile die *Gradienten*, die durch die Stationen gezogenen dünnen Striche sind die *horizontalen Richtkräfte*, die Kurven die *Isogammen*, welche die Punkte gleicher Schwerkraft enthalten.

Die subterranen Störungswerte bestehen aus zwei Teilen. Der eine Teil rührt von der Wirkung der tiefgelegenen Schichten her; diesen Teil nenne ich deshalb «*profundalen Wert*», oder auch «*regularen Wert*», weil darin die grosszügigen, regelmässigen Wirkungen enthalten sind. Der andere Teil, welcher durch die Differenz der subterranen Störungswerte und der profundalen Werte gegeben ist, entspringt aus der Wirkung der nahe zur Erdoberfläche gelegenen Schichten, und ich nenne diesen Teil «*proximalen Wert*», oder auch «*lokalen Wert*», da durch diese Werte die für kleinere

Gebiete charakteristischen Störungen bestimmt werden. Ähnliche Berechnungen wurden schon vor der Zusammenstellung meines Berichtes, vor Anfang 1929 von anderen Autoren benützt, welche die profundalen Werte als regional bezeichnet hatten; nach meiner Ansicht ist dies keine günstige und zutreffende Benennung. Eher könnten die lokalen Daten für regional gehalten werden, eben deshalb vermeide ich diese letztere Benennung gänzlich.

Wenn sich in den Isogammen die Wirkung der in grosser Tiefe befindlichen dichteren Massen äussert, bedeuten die Isogammen ungefähr die Schichtenlinien der Oberfläche einer tieferen dichten Schicht mittlerer Lage. So sieht man unmittelbar aus der *I. Karte*, dass sich in der Umgebung von *Riom* eine unterirdische Vertiefung eine unterirdische Mulde befindet. Von hier aus steigen die unterirdischen Schichten in jeder Richtung an, sogar noch am anderen Ufer des Flusses *Allier*. Die Isogammen lassen unmittelbar gar kein zentrales Gebilde, kein unterirdisches Gewölbe, kein Dom hervortreten. Nur einige unregelmässige Krümmungen der Isogammen und die scheinbar einander widersprechenden Gradienten verraten das Vorkommen solcher wenig ausgedehnten lokalen Gebilde.

Die *II. Karte* wurde zu dem Zwecke verfertigt, um diese lokalen Störungen, die wenig ausgedehnten unterirdischen Erhebungen, welche auf den tieferen regelmässig verlaufenden Schichten liegen, besser zum Vorschein zu bringen. Da sich diese Gebilde nahe der Erdoberfläche befinden, verlieren hier die Isogammen die Bedeutung von Schichtenlinien. In den Isogammen dieser Karte findet man mehrere zentrale Gebilde, mehrere unterirdische Erhebungen. In einigen dieser Gebilde fand man schon früher Spuren von Erdöl, oder Bitumen. Es ist möglich, dass man auch anderswo in diesen unterirdischen Erhebungen Erdöl finden würde, doch ist darin die Erdölakkumulation, infolge der geringen Ausdehnung, wahrscheinlich belanglos. Eben deshalb sollte man nach meiner Ansicht die Drehwagemessungen auf ein grösseres Gebiet der Ebene Limagne ausdehnen, und sich der Wegweisung der schon erhaltenen Ergebnissen bedienend, jene bedeutenden unterirdischen Gebilde erforschen, in welchen eine grössere Menge von Erdöl zu erwarten ist.

Wir haben an unseren Drehwagestationen auch erdmagnetische Messungen ausgeführt. Wir bestimmten an den 144 Stationen die *horizontale Intensität* mit relativen Messungen. Ausserdem haben wir mit absoluten Verfahren an 9 Stationen die *Declination*, und an 9 Stationen die *horizontale Intensität* beobachtet. Die Korrektion der zeitlichen Veränderung konnte mangels der Registrierungen eines beständigen erdmagnetischen Observatoriums nicht durchgeführt werden, und so können wir aus den unmittelbar erhaltenen Messungsergebnissen nur soviel feststellen, dass *das untersuchte Gebiet keine bedeutende erdmagnetische Störungen enthält.* Es ist aber möglich, dass nach Ausführung der zeitlichen Korrektion einige mässige Störungen geringer Ausdehnung hervortreten.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 12. Juni 1933.)

# ÚJABB KISÉRLETI ADATOK A HAZAI SZENEK BRIKETTEZÉSÉNEK KÉRDÉSÉHEZ.

(Az ú. n. kolloid-eljárás.)

FINKEY JÓZSEF l. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

A brikettezési eljárások között, úgy a gyártás, mint a felhasználás szempontjából legcélszerűbb és legmegfelelőbb a kötőanyagnélküli eljárás. Németországban ez az eljárás régi keletű. Már a múlt század elején megkezdették az ottani hatalmas mennyiségben előforduló vízdús, lágy, földes barnaszeneknek kötőanyagnélküli brikettezését; eleinte primitív, kézi eljárásokkal. Az 1856-ban bevezetett EXTER-féle préssel ez a probléma tökéletesen meg lett oldva, ami egy, ma már hatalmas barnaszéniparnak vetette meg az alapját. Ennek jelentőségét legjobban elképzelhetjük, ha megemlítem, hogy pl. 1928-ban már 9 millió vagon nyerszenet dolgoztak fel ezzel az eljárással. Az EXTER-féle préssel elért sikerek alkalmat adtak más szenekkel való kísérletekre is, de — egyelőre — minden eredmény nélkül. Ebből lassanként az az — egyébként helytelen — felfogás alakult ki, hogy csak a német barnaszeneket lehet kötőanyag nélkül brikettezni.

A siker az egyik, majd a sikertelenség a másik oldalról arra vezetett, hogy elkezdették a kötőanyagnélküli brikettezés problémáját és feltételeit tudományos alapon végzett kísérletek által kivizsgálni. Az a régi felfogás, hogy a német barnaszeneknek ez a különleges tulajdonsága azok bitumentartalmával van összefüggésben, éspedig azáltal, hogy ezek az anyagok a brikett készítése közben meglágyulnak, s a brikettszénből kipréselődve az apró szénszemecskéket összeragasztják, immár tarthatatlannak bizonyult.

Ezek a szenek brikettezőképességüket ugyanis akkor sem veszítik el, ha bitumentartalmukat benzollal kioldjuk. Hasonlót igazolnak kész brikettek mikroszkópos vizsgálatai is.

Újabb, habár még több tekintetben kiegészítésre szoruló felfogás szerint a kötőanyag nélkül való brikettezés olyan módon megyen végbe, hogy a brikettezendő anyag bizonyos nyomás alatt — átmenetileg — plasztikussá válik, amikor is a nyomásokozta plasztikus deformáció lehetővé teszi, hogy a szénrészecskék felületei olyan közel jussanak egymáshoz, hogy azok az adhézió által összetartva, kellő szilárdságú brikettet adjanak.

A további feladat tehát annak a kérdésnek a tisztázása, hogy mik azok a feltételek, amelyek mellett valamely ásványi szén ezt a plasztikus állapotot adott nyomás alatt felveszi?

E kérdés tanulmányozásával napjainkban sok, főleg német kutató foglalkozik, de a vizsgálatok még ma sem tekinthetők lezártnak. A német kutatók vizsgálatainak, a már eddig is elért sok becses eredmény dacára — a mi szempontunkból — az a fő hibája, hogy ők német szeneket vizsgálnak, a német brikettgyártás feltételei mellett (1000—1200 kg/cm$^2$ maximális nyomás, kb. 40° C kezdő és kb. 100° C végső hőmérséklet, kb. 7 mm maximális szemnagyság stb.).

Egyelőre legfontosabb az a megállapítás, hogy a szén nedvességtartalmának, a brikettezés szempontjából van egy optimális értéke, melyet megfelelő szárítás által kell elérni. Ha a nedvességtartalom bizonyos határon alól vagy bizonyos határ fölött van, a szén elveszíti brikettező képességét. A német barnaszeneknél, melyek nyers állapotban 50—60% nedvességet tartalmaznak, ez az optimális nedvességtartalom átlagban 13·5%.

Hogy az adott problémát világosan átlássuk, ismét hangsúlyozom, hogy kellő szilárdságú brikettet csak akkor fogunk nyerni, ha préselés közben az egyes szénrészecskék felületeit olyan közel hozzuk egymáshoz, hogy azokat az adhézió összetartsa. Ha a szén rideg, akkor az érintkezés és így az adhézió is csak helyenként, kicsiny pontszerű felületek mentén léphet fel, ami nem adhat kellő szilárdságú brikettet. Ha azonban a szén plasztikus, akkor a kellő nagyságú felületi érintkezést és adhéziót lehetővé teszi a nyomásokozta deformáció.

Én ebből a szempontból különös fontosságot tulajdonítok egyes barnaszenek kolloid állapotának, amit ugyancsak ebből a szempontból ERDMANN hangsúlyozott először,[1] a nélkül azonban, hogy a kérdés lényegét részletesebben kifejteni iparkodott volna.

Ismert dolog, hogy újabb felfogás szerint az ásványszeneknek, főleg a fiatalabb barnaszeneknek és ligniteknek egy része hydrophob gél,[2] ahol a víz a diszperziós közeg, míg a szén a diszpergált fázis.

Mivel a német barnaszenek, eltekintve a brikettezésre nem alkalmas, fosszilis fás részektől, kétségen kívül ilyen géleknek tekinthetők, azért a kötőanyagnélküli brikettezés folyamatának a lényegét a következőképpen képzelhetjük el. Ha a nyerszenet úgy szárítjuk, hogy főleg csak a gél-víz maradjon vissza, akkor préselés közben megfelelő nagy nyomást alkalmazva, a gél-vízbe mintegy beágyazott kolloidális dimenziójú szénrészecskék egymáshoz képest elmozdulnak, amit elősegít a hőmérséklet növekedése folytán a gél-víz viszkozitásának a csökkenése is, s így a kívánt deformáció, tehát végeredményben a kellő nagyságú felületi érintkezés és adhézió is létrejön. Nyilvánvaló, hogy minél kisebb a brikettszén-szemecskéknek eredeti nagysága, annál kisebb mértékű deformációval, tehát annál kisebb présnyomás alkalmazásával érhetjük el célunkat, ami gyakorlati szempontból rendkívül fontos megállapítás. Ha a szenet túlszárítjuk, olyan nagy lesz az anyag belső súrlódása, hogy kellő deformációt, tehát szilárd brikettet nem fogunk nyerni, még akkor sem, ha a szenet utólag megnedvesítjük, mert hiszen nemduzzadó gélről van szó. Ha pedig a brikettszén a gél-vizen kívül, a szén pórusaiban, repedéseiben, fölös vizet tartalmaz, ez a brikettnek nemcsak fűtőértékét csökkenti, hanem zárt mintában (mint pl. az EXTER-féle présnél is) a nyomás irányára merőleges rétegeket fog képezni, s az ilyen brikett a mintából kikerülve összerepedezik. Mindezekből megérthető az optimális nedvességtartalom lényege.

Természetes, hogy ez a folyamatnak csupán egyszerű, kvalitatív leírása. Különböző szenekből, ugyanazon kísérleti feltételek

---

[1] ERDMANN—DOLCH: Die Chemie der Braunkohle. Halle. 1927. 142. l.

[2] Egyesek az ilyen szeneket — tévesen — hydrophil gélnek tartják.

mellett is, különböző szilárdságú briketteket kapunk, mert hiszen az egyes szenek fizikai, kémiai tulajdonságai egymástól eltérők. Végeredményben tehát mondhatjuk, hogy ugyanolyan feltételek (nyomás, szemnagyság stb.) mellett vannak kötőanyag nélkül jól brikettezhető, plasztikus-, kevésbbé jól brikettezhető, kevésbbé plasztikus- és nem brikettezhető, rideg szenek.

Hazai barnaszeneink, még a kimondottan géltípusúak is, kevésbbé plasztikusak, tehát kötőanyag nélkül kevésbbé jól brikettezhetők, mint a német, földes barnaszenek. Ebből megérthető, hogy a hazai barnaszenekkel a német mintára végzett kísérletek miért nem jártak eredménnyel.

Az elmondottakból következik, hogy hazai barnaszeneinknél elsősorban a szemnagyságot kell kisebbre venni, mint az a német eljárásnál általában szokásos (kb. 7 mm).

Hogy egyébként azonos feltételek mellett a szemnagyság és a brikett szilárdsága között milyen összefüggés van, azt a következő, *várpalotai* szénnel végzett kísérleteim igazolják. A briketteket hidraulikus préssel készítettem 600 kg/cm² maximális nyomással. A hengeres brikett nyomott lapja 20 cm², magassága 20—24 mm, egy brikett súlya 54—57 g. Az eredeti kb. 50% nedvességet mintegy 17%-ra szárítottam. Kísérleteim szerint ugyanis ekkor kaptam a legjobb szilárdságot. A présnyomást csak 500 kg/cm²-ig fokozva a szilárdság 25—30%-kal csökkent. A présminta elektromos árammal 60—70° C-ra volt állandóan melegítve, s ugyanilyen hőfokra melegítettem préselés előtt a brikettszenet is. A kísérletek főeredményei az 1. táblázatban vannak összeállítva.

**1. táblázat.**

| Szemnagyság mm | Nyomás kg/cm² | Nyomószilárdság kg/cm² | Nedvesség % | Magasság mm | Súly g | Térfogatsúly |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3—0 | 600 | 78·5 | 17·68 | 22·7 | 53·3 | 1·17 |
| 2—0 | 600 | 104·0 | 16·88 | 23·7 | 57·1 | 1·20 |
| 1—0 | 600 | 110·0 | 16·49 | 22·4 | 53·7 | 1·20 |
| 0·5—0 | 600 | 112·6 | 16·26 | 23·0 | 52 3 | 1·14 |
| 0·073—0 | 600 | 124·0 | 17·24 | 21·0 | 54·0 | 1·20 |

E táblázat adataihoz még a következőket jegyzem meg. Mindegyik kísérleti érték több (10—12) kísérletnek a középértéke. Azonos értékeket nyerni, amint a dolog természetéből következik, szinte lehetetlenség, az eltérések azonban általában csekélyek. A részletes adatok közlését éppen ezért helykímélés céljából mellőzhetőnek tartom. Az alsó nyomólap lyukacsos volt (ennek jelentőségét később ismertetem). Amint a táblázat adataiból következik, ha a brikettszén maximális szemnagyságát csökkentjük, a brikett szilárdsága fokozatosan növekedik. Egyébként mindegyik brikettnek a szilárdsága megfelel annak a feltételnek, amit egy kellő szilárdságú brikettől megkívánunk. Kísérleteimet azért végeztem várpalotai szénnel, mivel ez tipikusan gél-szén (ezt igazolja az is, hogy ez a szén a FLEISSNER-féle eljárással szétesés nélkül szárítható, amint azt Várpalotán már több év óta alkalmazzák is). Ezek a kísérletek kétségtelenül igazolják, hogy megfelelő feltételek mellett hazai szénből is lehet kötőanyag nélkül, kellő szilárdságú brikettet előállítani.

A brikettszén szitaelemzését a 2. táblázatban közlöm.

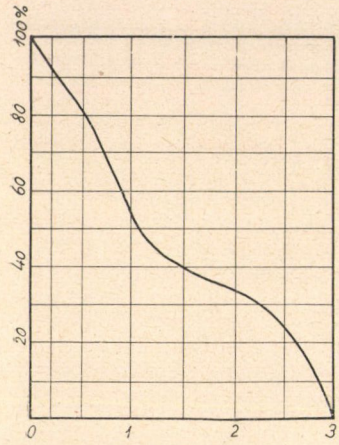
**2. táblázat.**

| Szemnagyság mm | Súly % |
|---|---|
| 3 —2 | 33·65 |
| 2 —1 | 20·80 |
| 1 —0·5 | 26·48 |
| 0·5 —0·2 | 10·83 |
| 0·2 —0·073 | 6·05 |
| 0·073—0 | 2·19 |
| Összesen | 100·00 |

A 3 mm-es anyagnak tehát csak 19%-a finomabb 0·5 mm-nél és 2%-a 0·073 mm-nél. A táblázat adatainak alapján megszerkesztett granulometrikus görbét az 1. ábrán látjuk.

Kevésbbé plasztikus szenekről lévén szó, nem elég csupán a

szemnagyságot csökkenteni, hogy kellő szilárdságú brikettet nyerjünk. Ha ugyanis a brikettet zárt mintában állítjuk elő (mint pl. az EXTER-féle présnél is), úgyhogy a levegő a mintából préselés közben nem távozhatik el, a brikettben légzárványok keletkeznek, melyeknek belső túlnyomása a brikett szilárdságát veszélyeztetheti, ha annak anyaga nem elég plasztikus. Egy 1930-ban megjelent dolgozatomban[1] elméleti megfontolások alapján kimutattam, hogy ez a belső túlnyomás közvetlenül a préselés után, kedvezőtlen körülmények között, a 20 atmoszférát is elérheti. Bár ez a brikett lehűlése után csökken, de még mindig néhány atmoszférát tesz ki. Ha a brikettszén plasztikus, megfelelő deformáció ezt a túlnyomást kiegyenlítheti, ha azonban a brikett anyaga kevésbbé plasztikus, ez a belső nyomás feltétlenül szétrepeszti a már kész brikettet. Ez is egyik ok, amiért a hazai szenekkel végzett brikettezési kísérletek a német eljárás szerint nem vezettek sikerre.



1. ábra.

További fontos feltétel tehát, hogy a briketteket nyitott présmintában készítsük, melyből a bezárt levegő préselés közben eltávozhatik. Ilyen pl. az APFELBECK-féle vagy a közönséges hengeres prés. Ezért használtam én is a kísérleteimnél lyukacsos nyomólapot.

*

Ha a brikettet kötőanyaggal állítjuk elő, akkor a préselésnél alkalmazott nyomás és hőmérséklet alatt a szén a rideg és a kötőanyag a plasztikus rész. Egy ilyen brikett tehát olyan durva diszperz rendszer, melynél a kötőanyag a diszperziós közeg.

---

[1] Die Bedeutung der Lufteinschlüsse und der Entlüftung bei dem Brikettieren. Mitt. d. k. ung. Hochschule für Berg- u. Forstw. Sopron, 1930. 3. 1.

A DELKESKAMP által ajánlott *kolloid-eljárás* kötőanyag gyanánt *szenet* alkalmaz, tehát ez átmenetet képez a kötőanyag nélkül és a kötőanyaggal dolgozó brikettezési eljárások között.[1] Ezt az eljárást a nagyüzemben tudtommal még sehol sem alkalmazzák. Az irodalomban található leírások szerint ennek az eljárásnak a lényege a következő.

«Kötőanyag kolloid-finomságra őrölt (?) szén, melynek mennyisége a brikett súlyának 25—33%-át teszi ki. A megfelelő mennyiségű rész a brikettszénből ki lesz szitálva s görgőmalomban (Kollergang) nedves úton finom, kolloidális péppé lesz őrölve. Rendszerint elegendő 20—30 percig tartó őrlés. Mindenekelőtt kísérleti úton megállapítandó, hogy az illető anyag ilyen módon kolloidális állapotba hozható-e? Főleg a barnaszén bír ezzel a tulajdonsággal. A kolloidális pép erősen össze lesz keverve a tulajdonképpeni brikettszénnel. Az ezt követő préselés barnaszeneknél 250—300, kőszeneknél 300—350 kg/cm$^2$ nyomással történik, vagy meleg, vagy hideg úton.

Előbbi esetben olyan prés használandó, melynél a présminta állandóan 70—80° C-ra melegíthető, s a kipréselt víz a mintából eltávozhatik. A nedvességtartalom a préselésnél 15—20%-kal csökken.

Ha a préselés hideg úton történik, a már összekevert brikettanyag előzetesen szárítandó; barnaszén mintegy 35—40%-ig, kőszén mintegy 15—25%-ig. Ez esetben a préselés bármely közönséges préssel (pl. COUFFINHAL-féle prés) elvégezhető.

Bármelyik eljárással nyert brikett nyomban raktározható és eltüzelhető. Ha a brikett szellős, fedett helyen áll, nedvességtartalma fokozatosan csökken, míg végre légszáraz állapot jön létre».

Ehhez a — mint már említettem — nem tőlem eredő, hanem az irodalomban található leíráshoz elsősorban a következő elvi megjegyzéseket kell fűznöm.

Szó sem lehet arról, hogy görgőmalomban bármilyen szenet

[1] WEINMANN: Die Kolloidbrikettierung. Glückauf. 1926. 35. sz. BRAUNEIS: Das Kolloid-Brikettierungsverfahren. Montan. Rundschau. 1926. 17. sz.

tényleg kolloid finomságra tudjunk őrölni. Hiszen ilyenfokú diszperzitást még az ú. n. kolloidmalmokkal (pl. PLAUSON- vagy SVEDBERG-féle kolloidmalom) sem tudunk elérni. Az elérhető legkisebb átlagos szemnagyság ezeknél is 1 $\mu$, míg görgőmalmoknál kb. 20 $\mu$. Ebből a szempontból tehát a kolloid-eljárás elnevezés nem jogosult.

Másrészt nem találom indokoltnak, hogy az őrlés nedves úton történjék, mert a nedves pépet alig lehet a száraz brikettanyaggal egyenletesen összekeverni, ami pedig egyik főfeltétele az egyenletes szilárdságú brikett előállításának. Természetes, hogy 40—50% nedvességtartalmú szenet nem lehet száraz úton finomra őrölni; 15—16%-ig való szárítás után azonban a legtöbb barnaszén száraz úton jól őrölhető. Ez esetben pedig célszerűbb görgőmalom helyett a szénportüzelésű berendezésekkel kapcsolatban is használt malmokat (pl. háromhengeres-malom) alkalmazni, melyekkel rendszerint 4900 csokor, tehát 0·088 mm maximális szemnagyságra őrölik a tüzelőanyagot. Ez a dimenzió valószínűleg itten is megfelel.

Ha pedig megfontoljuk az irodalomban található ismertetéseknek azt a részét, hogy

«mindenekelőtt kísérleti úton megállapítandó, hogy az illető anyag ilyen módon kolloidális állapotba hozható-e, s hogy főleg a barnaszén bír ezzel a tulajdonsággal»,

akkor nyilvánvaló lesz, hogy bár a finom őrlés elkerülhetetlen, a legelső feltétel mégis az, hogy a kötőanyag gyanánt használt szén kolloid-, azaz gél-szén legyen. Hiszen itten a szilárd kötőanyag egy durva diszperz rendszer, melynek igazi plasztikusságot csak az ad, ha az egyes részecskék önmagukban kolloid diszperz rendszerek. Ebből a szempontból viszont jogosult a kolloid-eljárás elnevezés.

*

Átgondolva a kötőanyagnélküli brikettezésről kialakult nézetemet, melyet értekezésem elején ismertettem; a várpalotai szénnel végzett kísérleteim eredményeit; majd a kolloid-eljárásról elmondottakat: arra a következtetésre jutottam, hogy ez az eljárás, az általam előzetesen elgondolt módosításokkal, hazai szénbányászatunkban nagy fontossággal bírhat, annak dacára, hogy ez a

nagyüzembe, tudtommal, még nem lett bevezetve. Az igazi kötőanyagnélküli brikettezés hazai szeneinknek csak csekély részénél jöhet szóba, míg a legtöbbnél csak igen finom szemnagyság és igen magas nyomás alkalmazása mellett várható jó eredmény, ami az eljárás rentabilitását veszélyezteti.[1]

Hazai szénbányáink általában kötőanyaggal és pedig szurokkal készítik a brikettet. Ennek a kötőanyagnak előnye, hogy a brikettet vízállóvá teszi, de néhány kellemetlen tulajdonsága közismert. Alig hihető, hogy a szénfogyasztó közönség a szurkos brikettet igazán megkedvelje, s az hazai szénbányáinknak egy biztosan s nagy mennyiségben elhelyezhető terméke legyen. Azt sem szabad elfelejteni, hogy a kötőanyag gyanánt használt kőszénkátrányszurkot külföldről kell behozni. A hazai barnaszénszurokkal végzett kísérletek mindeddig nem vezettek eredményre. Egyébként a kőszénkátrányszurok kellemetlen tulajdonságait ez sem nélkülözi.

Szóba jöhet, mint hazai kötőanyag, a lisztből készült csiriz is, melyet több bányánk már ki is próbált. Előnye a tulajdonképpeni bitumen hiánya, de hátránya, hogy a nedvességet nem bírja. Ha meg sem ázik, a legtöbb pincében szétmállik és megpenészesedik. Laboratóriumi kísérletekkel kimutattam,[2] hogy az ilyen briketteket teljesen vízállóvá s a penészesedéssel szemben ellenállóvá tehetjük, ha azokat utólag hazai nyers-barnaszénkátránnyal impregnáljuk. Bár a kötőanyagot ilyen módon utólag bitumenessé tesszük, annak mennyisége mégis sokkal kevesebb, mint a szuroké, tehát annak kellemetlen tulajdonságai nagyrészt elmaradnak, s másrészt a kötőanyag ekkor teljesen hazai származású. Igaz viszont, hogy a lisztnek nem az az igazi rendeltetése, hogy brikettgyári nyersanyag legyen.

A kolloid-eljárás, ha eredményre vezet, feltétlenül előnyösebb. Hiszen a kötőanyag itten a legsilányabb, hulladék porszén,

---

[1] Itt megjegyzem, hogy pl. Pécsett is készítenek brikettet finom porszénből, kötőanyag nélkül Apfelbeck-féle préssel. Az így előállított ú. n. «Dunabrikettet» azonban a bánya csak korlátolt mennyiségben tudja értékesíteni, a szurokkal készült tojásbrikettek mellett.

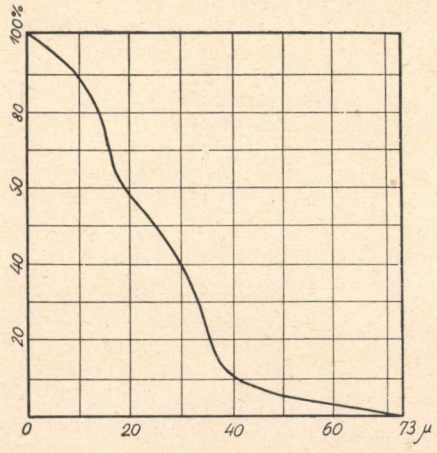
[2] Brikettierungsversuche mit ungarischen Braunkohlen. Mitt. d. k. ung. Hochschule für Berg- u. Forstw. Sopron, 1933. 7. l.

amit egyébként alig lehet értékesíteni, s az így előállított brikett a szurok kellemetlen tulajdonságait nélkülözi, vízzel szemben nem kevésbbé ellenálló, mint maga a szén. Az ilyen brikett bevezetése közgazdasági szempontból is eredményességgel biztat.

Ezek a meggondolások bírtak arra, hogy ezzel az eljárással részletes laboratóriumi kísérleteket végezzek, melyekről s azok eredményeiről a következőkben számolhatok be.

*

Kötőanyag gyanánt (elektromótorral hajtott dörzsmozsárral) 0·073 mm maximális szemnagyságra őrölt, *várpalotai* szénport használtam, miután előzetesen 16—17% nedvességtartalomig kiszárítottam. A kötőanyag gyanánt használt szén megválasztásánál azoknak a kísérleteknek az eredményeire voltam tekintettel, melyeket ennek a szénnek kötőanyagnélküli brikettezése alkalmával elértem; amivel természetesen nem állítom azt, hogy hazánkban ez az egyedüli szén, mely erre a célra alkalmas. Mivel a megadott szemnagyságbeli finomságnál a szitaelemzés már nem használható, a granulometrikus elemzést a VENDL MIKLÓS-féle regisztráló iszapolókészülékkel határoztam meg. A granulometrikus görbét a 2. ábrán látjuk, míg a fontosabb számszerű értékeket a 3. táblázatban állítottam össze.



2. ábra.

Amint látjuk, a 10 $\mu$-nál finomabb részek mennyisége mindössze 10·5%, az átlagos szemnagyság pedig 24·5 $\mu$, úgyhogy kolloid diszperzitásról tényleg szó sem lehet.

Részletes kísérleteimet mostan is azokkal a tipikus hazai szenekkel végeztem, mint amelyeket — már idézett brikettezési kísérleteim alkalmával — más eljárás szempontjából vizsgálat

3. táblázat.

| Szemnagyság $\mu$ | Súly % |
|---|---|
| 73—70 | 0·3 |
| 70—60 | 2·7 |
| 60—50 | 2·5 |
| 50—40 | 5·5 |
| 40—30 | 15·5 |
| 30—20 | 32·5 |
| 20—10 | 30·5 |
| 10—0 | 10·5 |
| Összesen | 100·0 |

tárgyává tettem, éspedig a várpalotai ligniten kívül a komlói, tatabányai, nagybátonyi, dorogi, diósgyőri, brennbergi és kisterenyei szenekkel. Kísérleteimnél a már említett hidraulikus prést használtam. A brikettek készítésénél mindig 600 kg/cm² maximális nyomást alkalmaztam, úgyhogy a végső nyomóerő $20 \times 600 = 12{,}000$ kg volt, bár a kísérleti préssel 900 kg/cm² nyomás is elérhető. Az említett nyomást azonban — legalább is egyelőre — elegendőnek tartom. Miként már említettem, az irodalomban található adatok szerint a brikettszénhez hozzáadandó finom szénpor megfelelő mennyisége 25—33% között van, amiért is kísérleteimet 20, 25, 30, 35 és 40%, 73 $\mu$-nál finomabb szénpor hozzáadása mellett rendszeresen végeztem el. A kb. 17—18% nedvességtartalmú finom szénport a megfelelő mennyiségű 3—0 mm-es brikettszénnel[1] jól összekevertem, majd 70—80° C-ra felmelegítettem, s így adtam kb. 55 g-os adagokban,[2] az ugyanakkora hőfokra felmelegített, 20 cm² keresztmetszetű, hengeres présmintába. Az így előállított briketteket nyolc nap mulva nyomás által széttörtem, hogy nyomószilárdságukat meghatározzam.

[1] Ezeknek a brikettszeneknek granulometrikus görbéit már említett «Brikettierungsversuche stb.» című dolgozatomban közöltem.

[2] A mintába mindig 100 cm³ laza anyagot adtam egyszerre.

Ehhez a szilárdsági kísérlethez fontosnak tartom a következők megjegyzését.

A brikettek szilárdságának megítélése többféle eljárás alapján történhetik,[1] de ezek egyike sem ad és nem is adhat, a kérdéses tulajdonságot pontosan kifejező számszerű értékeket, mert hiszen a brikett gyakorlati szilárdsága, melyet az a berakás, áttöltés, raktározás stb. alkalmával tanúsít, a tulajdonképpeni mechanikai szilárdságon kívül sok más körülménytől is függ, így pl. a brikett alakjától, nagyságától, a kezelés módjától, a raktárhely hőmérsékletétől, nedves, avagy száraz voltától stb. Ha azonban valamely eljárást rendszeresen alkalmazunk, hosszabb megfigyelés alapján megállapíthatjuk azt a legkisebb szilárdsági számot, mely bizonyos nagyság és alak mellett a brikett tartósságát meghatározza. Az általam készített brikettek hengeres alakjára való tekintettel legmegfelelőbb és legegyszerűbb a nyomószilárdság meghatározása. Hosszas (sokszor hónapokig tartó) megfigyelések alapján arra a következtetésre jutottam, hogy az általam használt alak és nagyság mellett a brikett kellő tartóssággal bír, ha annak nyomószilárdsága legalább 75 kg/cm$^2$. A továbbiakban közölt szilárdsági számok megítélésénél tehát ezt a tapasztalati adatot kell alapul venni.

Ha a brikettszénhez adott finom szénpormennyiséget változtatjuk, a nyert brikettek szilárdsága is kell, hogy változzék. A finom szénpornak, mint kötőanyagnak, rendeltetése ugyanis az, hogy a brikettszén szemei között levő durva hézagokat lehetőleg tökéletesen kitöltse. Préselés előtt az egyenletesen összekevert anyag természetesen még laza. Ha ezt az anyagot megfelelő nyomás alkalmazásával fokozatosan tömörítjük s a kötőanyag szemecskéi nemcsak kellő finomsággal, hanem kellő plasztikussággal (gélszén!) is bírnak, akkor célunkat elérhetjük, feltéve, hogy közben kellő légtelenítésről is gondoskodunk. Maga a tulajdonképpeni kötés pedig lényegében mostan is éppen úgy megyen végbe, amint azt a kötőanyagnélküli brikettezés folyamatának vázolásánál ismertettem.

Nyilvánvaló tehát, hogyha a kötőanyag százalékos mennyi-

[1] FINKEY JÓZSEF: Az ásványszenek brikettezése. Sopron, 1930. 10. l.

ségét növelem, általában a brikett szilárdságának is növekedni kell. Kevés mennyiségű kötőanyag hozzáadása mellett ugyanis a hézagok kitöltése s így az adhéziós kötés is kevésbbé tökéletes lesz. A kötőanyag mennyiségét fokozatosan növelve, a szilárdság szempontjából két fő határesetet képzelhetünk el. Mindaddig, míg a hézagoknak a kísérletek egyéb feltételeitől (nyomás stb.) függő, gyakorlatilag tökéletes kitöltése bekövetkezik, a brikett szilárdságának növekednie kell. Ha azonban ezt a határt már elértük s a kötőanyag mennyiségét kisebb mértékben növeljük, — tekintve, hogy a kötőanyag is még durva diszperz rendszer és nem tökéletesen plasztikus — a már elért adhéziós kötést megzavarhatjuk, aminek következménye a brikett szilárdságának csökkenése lehet. Ha ezután is növeljük a kötőanyag mennyiségét, a brikettszénszemek teljesen be lesznek ágyazva a kötőanyagba, a szilárdság ismét növekedni fog, természetes azonban, hogy nem lehet nagyobb annál, amit a kötőanyag, ugyanazon feltételek között, önmagában brikettezve elér. Kísérleteim szerint ez az érték várpalotai szénpornál, 24·5 $\mu$ átlagos szemnagyság, 16—18% nedvesség, 600 kg/cm$^2$ maximális nyomás stb. mellett kb. 124 kg/cm$^2$.

Az elérhető eredmény azonban nemcsak a kötőanyagtól, hanem a brikettszéntől, annak ridegségétől, felületi tulajdonságaitól, granulometrikus összetételétől, szilárdságától stb. is függ.

Ha a brikettszén maga is többé-kevésbbé plasztikus, ez csak elősegíti az eredményt; éppenúgy az is, ha kevésbbé szilárd, mert ekkor préselés közben, részben össze is töredezik, ami megkönnyíti az egyes szemek kellő elhelyezkedését. A granulometrikus összetétel pedig annyiban bír fontossággal, hogy minél nagyobb az eredeti hézag és szabad felület, annál több kötőanyagra van szükség.

*

Gyakorlati szempontból már most a következő két kérdés megoldása bír fontossággal:

1. Készíthető-e ezzel az eljárással kellő szilárdságú brikett?

2. Ha igen, milyen feltételek mellett és különösen milyen minőségű és mennyiségű kötőanyag hozzáadásával?

Miután a kísérleti feltételeket, valamint a kötőanyag min

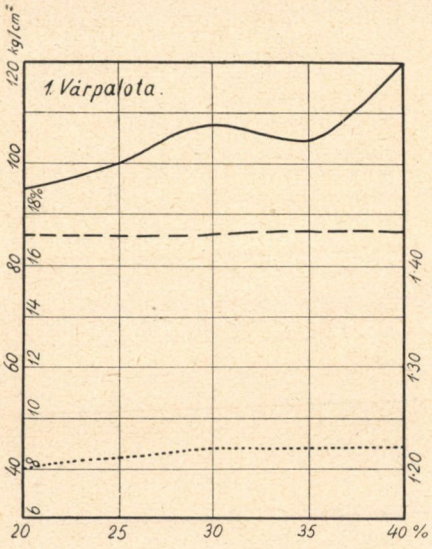
ségét már részletesen ismertettem, most még a kötőanyag mennyisége és a brikettek szilárdsága közötti összefüggést kell megállapítani.

Az ezirányú kísérleteim eredményeit a már említett nyolc hazai szénre vonatkozólag a 4. táblázatban állítottam össze, míg e táblázat főbb adatait a 3—10. ábrákon grafikusan tüntettem fel.

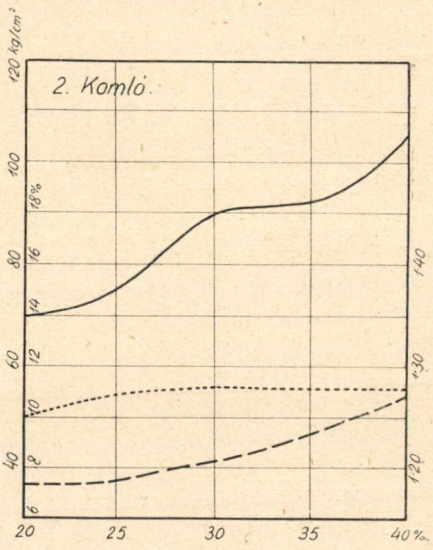
Ezeken az ábrákon a szintes tengelyre a százalékos finom pormennyiség, a függélyes tengelyre pedig a szilárdság (teljes vonallal kihúzva), nedvességtartalom (szakadozott vonallal kihúzva) és térfogatsúly (pontozott vonallal kihúzva) lett felmérve.

Mielőtt a kísérletekből levonható következtetéseket ismertetném, meg kell vizsgálni a kísérletek adatainak a megbízhatóságát, annyival is inkább, mert hiszen olyan kísérletekről van szó, melyeket teljesen azonos feltételek mellett rekonstruálni szinte lehetetlenség. Így pl. hogy a mintába adott anyag hőmérséklete, nedvességtartalma, kezdő tömörítése stb. ugyanaz legyen, az csak megközelítőleg, de abszolút pontossággal nem valósítható meg; hacsak nem akarjuk a kísérleteket rendkívüli mértékben komplikálni és hosszadalmassá tenni. Ez egyébként azért is felesleges, mert ezeknek a feltételeknek az azonosságát az üzemben sem lehet abszolút pontossággal betartani. Ha pedig a kellő szilárdságú brikett gyártásának a feltétele a megállapított feltételek abszolút pontos állandósága volna, az ilyen eljárást a gyakorlatban amúgy sem lehetne használni.

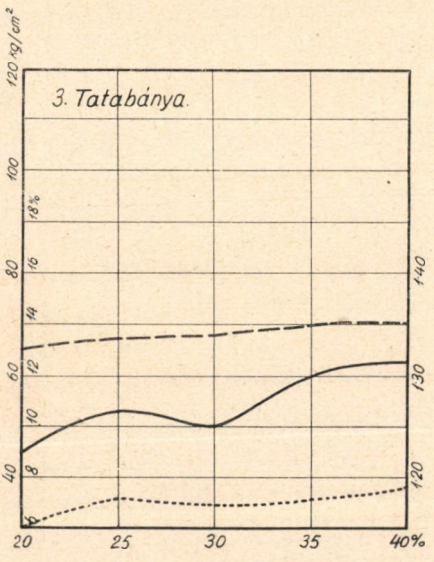
Ami a táblázat egyes kísérleti adatait illeti, azok mindegyike 10—12 kísérleti eredménynek a középértéke. Mivel a középértéktől való eltérések itten is csekélyek, a részletes adatok közlését helykímélés céljából itten is mellőzöm. Ebből a szempontból tehát az egyes adatok feltétlenül helyesek. Külön meg kell azonban vizsgálni azt, hogy a táblázatban a kötőszénpor százalékos mennyisége és a brikett szilárdsága között leolvasható összefüggés tényleg fennáll-e, azaz utóbbira nem voltak-e befolyással más olyan tényezők, melyek a kísérlet alkalmával nem vétettek kellően figyelembe. Itt főleg a nedvességtartalomról és a brikett térfogatsúlyáról lehet szó, mely utóbbi — ugyanazon nyersanyaggal dolgozva — bizonyos mértékben a brikett tömörítésének is a foka,



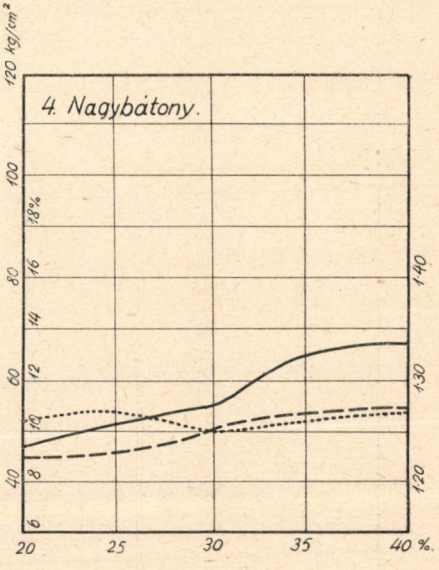

3. ábra.




4. ábra.



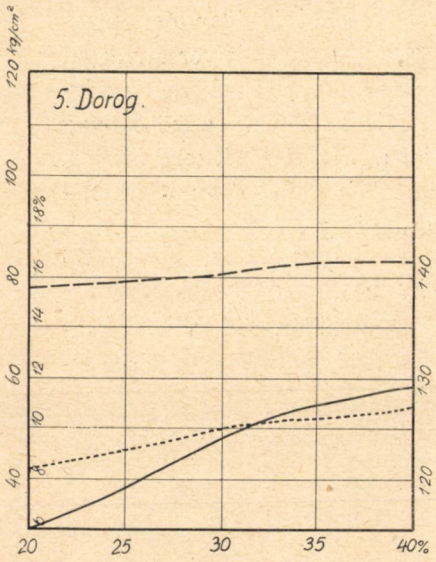

5. ábra.



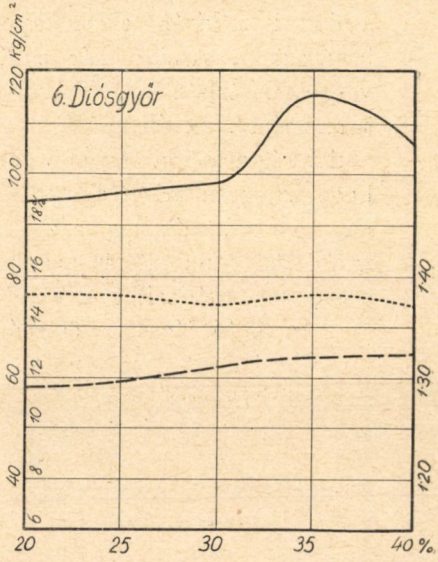

6. ábra.

4. táblázat.

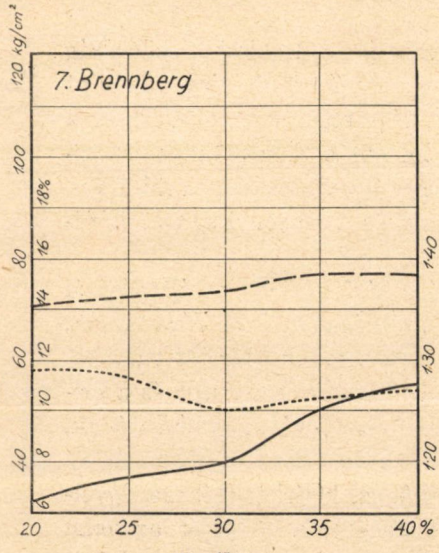
| Sorszám | Brikettszén eredete (Szemnagys. és eredeti nedv. tart.) | Várpalotai szénpor −73 μ % | Nyomószilárdság kg/cm² | Nedvesség % | Magasság mm | Súly g | Térfogatsúly |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | *Várpalota.* (3—0 mm, 36·37 %) | 20 | 95 | 17·15 | 24·2 | 58·2 | 1·20 |
| | | 25 | 100 | 17·17 | 23·4 | 56·8 | 1·21 |
| | | 30 | 108 | 17·23 | 23·2 | 56·8 | 1·22 |
| | | 35 | 104 | 17·38 | 22·8 | 55·5 | 1·22 |
| | | 40 | 120 | 17 44 | 22·0 | 53·9 | 1·22 |
| 2. | *Komló.* (3—0 mm, 3·17 %) | 20 | 70 | 7·36 | 22·2 | 55·6 | 1·25 |
| | | 25 | 75 | 7·53 | 21·7 | 55·1 | 1·27 |
| | | 30 | 90 | 8·22 | 20·7 | 52·9 | 1·28 |
| | | 35 | 92 | 9·32 | 20·9 | 53·5 | 1·28 |
| | | 40 | 105 | 10·75 | 20·2 | 51·9 | 1·28 |
| 3. | *Tatabánya.* (3—0 mm, 12·14 %) | 20 | 45 | 12·97 | 25·6 | 58·9 | 1·15 |
| | | 25 | 53 | 13 48 | 24·2 | 56·7 | 1·18 |
| | | 30 | 50 | 13·63 | 25·0 | 58·4 | 1·17 |
| | | 35 | 60 | 14·01 | 24·2 | 57·1 | 1·18 |
| | | 40 | 63 | 14·02 | 24·0 | 57·2 | 1·19 |
| 4. | *Nagybátony.* (3—0 mm, 6·90 %) | 20 | 47 | 9·01 | 23·2 | 58·6 | 1·26 |
| | | 25 | 51 | 9·21 | 23·5 | 59·9 | 1·27 |
| | | 30 | 55 | 10·13 | 23·6 | 58·9 | 1·25 |
| | | 35 | 65 | 10·69 | 22·4 | 57·0 | 1·27 |
| | | 40 | 67 | 10·90 | 22·4 | 56·8 | 1·26 |
| 5. | *Dorog.* (3—0 mm, 16·64 %) | 20 | 30 | 15·74 | 23·4 | 56·9 | 1·21 |
| | | 25 | 38 | 15·88 | 23·6 | 58·5 | 1·23 |
| | | 30 | 48 | 16·10 | 22·7 | 57·0 | 1·25 |
| | | 35 | 54 | 16·58 | 21·9 | 55·2 | 1·26 |
| | | 40 | 58 | 16·59 | 21·3 | 54·5 | 1·27 |
| 6. | *Diósgyőr.* (3—0 mm, 30·22 %) | 20 | 95 | 11·66 | 21·5 | 59·5 | 1·38 |
| | | 25 | 96 | 11·81 | 21·4 | 59·2 | 1·38 |
| | | 30 | 98 | 12·40 | 21·3 | 58·4 | 1·37 |
| | | 35 | 115 | 12·85 | 20·3 | 56·3 | 1·38 |
| | | 40 | 105 | 13·07 | 19·9 | 54·7 | 1·37 |
| 7. | *Brennberg.* (3—0 mm, 13·03 %) | 20 | 32 | 14·14 | 23·7 | 61·1 | 1·29 |
| | | 25 | 37 | 14·50 | 23·4 | 59·7 | 1·28 |
| | | 30 | 40 | 14·72 | 24·0 | 60·0 | 1·25 |
| | | 35 | 50 | 15·29 | 23·1 | 58·4 | 1·26 |
| | | 40 | 55 | 15·30 | 21·9 | 55·5 | 1·27 |
| 8. | *Kisterenye.* (3—0 mm, 20·37 %) | 20 | 73 | 16·80 | 21·9 | 57·2 | 1·30 |
| | | 25 | 75 | 17·03 | 21·4 | 57·0 | 1·33 |
| | | 30 | 87 | 17·25 | 21·8 | 57·4 | 1·31 |
| | | 35 | 88 | 17·40 | 21·0 | 55·9 | 1·33 |
| | | 40 | 103 | 17·62 | 20·7 | 54·4 | 1·31 |



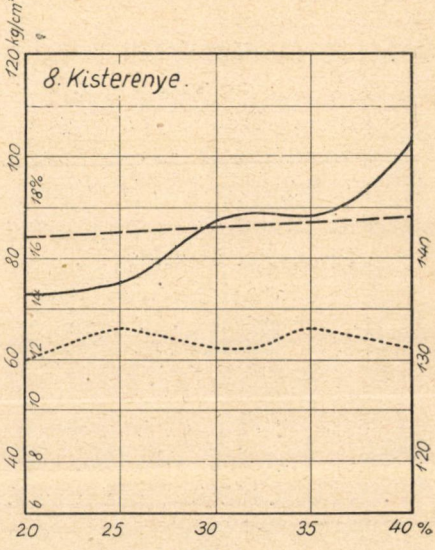

7. ábra.




8. ábra.




9. ábra.




10. ábra.

amiért is a kísérletekkel kapcsolatban ezeket is állandóan meghatároztam. Amint már említettem, ugyanazon nyersanyaggal végzett kísérletek alkalmával igyekeztem a brikettek nedvességtartalmának az állandóságát elérni. Mivel azonban a kötőanyag nedvességtartalma nagyobb volt, mint a brikettszéné, természetes, hogy az egyes brikettek nedvességtartalma annál nagyobb, minél nagyobb a kötőanyag százalékos mennyisége. A nedvességtartalmak között az eltérés azonban olyan csekély, hogy az semmi esetre sem módosíthatta a szilárdsági értékeket lényegesen.

Az 5. táblázatban összeállítottam a szilárdsági értékek legnagyobb különbségét és az ennek megfelelő nedvesség- és térfogatsúlybeli különbségeket.

**5. táblázat.**

| Kísérlet sorszáma | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Legn. szilárdságkülönbség % | 26·3 | 50·0 | 40·0 | 42·6 | 93·3 | 21·0 | 71·8 | 29·1 |
| Nedv. tartalom különbsége % | 0·29 | 3·39 | 1·05 | 1·89 | 0·85 | 1·19 | 1·16 | 0·82 |
| Térfogatsúly-különbség „ „ | 0·02 | 0·03 | 0·04 | 0·00 | 0·06 | 0·00 | —0·02 | 0·01 |

A szilárdságbeli különbséget mindig a legkisebb szilárdság százalékában adtam meg. Tekintettel a táblázat adataira, valamint arra a körülményre, hogy a nedvességtartalom növekedésével a szilárdság nem mindig növekedik, hanem olykor csökken is, belátható, hogy a nedvességtartalom csekély változása semmi esetre sem módosíthatta lényegesen a százalékos pormennyiség és szilárdság közötti összefüggést.

Lényegében ugyanez mondható a térfogatsúlyok változásáról is, amiért is ezt illetőleg csupán az 5. táblázat utolsó sorára utalok, hol a megfelelő térfogatsúlykülönbségek vannak összeállítva.

Ezzel tehát kimutattam, hogy a porszén mennyisége és a brikett szilárdsága között megállapított összefüggést megbízhatónak, helyesnek kell elfogadni.

A 4. táblázat szerint az 1., 3. és 6. sz. kísérleteknél megfigyelhető a szilárdságnak átmeneti csökkenése, a többinél azonban nem. Ennek oka abban keresendő, hogy a finom por mennyiségé-

nek a változtatása 5%-onként történt, amely mennyiségek mellett a kritikus érték túl lett haladva. Erre mutat a táblázatban két egymást követő s egymáshoz igen közel eső szilárdsági szám is (pl. a 2. kísérletnél 90—92 kg/cm², a 4.-nél 65—67 kg/cm² és i. t.).

Látjuk a táblázatból azt is, hogy a *várpalotai, komlói, diósgyőri* és *kisterenyei* szénből feltétlenül lehet ezzel az eljárással kellő szilárdságú brikettet előállítani, míg a tatabányai, nagybátonyi, dorogi és brennbergi szénből előállított briketteknél a szilárdság nem megfelelő. A sikeres kísérleteknél 25—30% finom szénpor hozzáadása általában elegendő, sőt a várpalotai és diósgyőri szenekből már 20%-nak a hozzáadása mellett is jóminőségű brikettet lehet előállítani. Ha pedig az egyes szenek fizikai tulajdonságait tekintjük, úgy kitűnik, hogy azok, melyekből nem nyertem kellő szilárdságú briketteket, tehát a tatai, nagybátonyi, dorogi és brennbergi szenek, mind kemények és szilárdak, a többiek pedig lágyabb és kevésbbé szilárd szenek. Mindez kellő magyarázatát adja az egyes kísérletek sikerének, avagy sikertelenségének.

A négy sikeres kísérletsorozat elegendő ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy melyek azok a hazai főbb széntípusok, melyeknél ez az eljárás alkalmazható, és hogy megítélhessük ennek az eljárásnak gyakorlati jelentőségét is. Ha több előfordulás nem is jöhetne szóba, mint a várpalotai lignit, a dunántúli liasz-szén s salgótarjáni és borsodi szenek, helyesebben lignitek, már ez is feltétlenül nagy nemzetgazdasági jelentőséget ad ennek az eljárásnak.

Ami pedig a sikertelen kísérleteket illeti, egyrészt nincsen kizárva, hogy a kísérleti feltételek (elsősorban a présnyomás) megfelelő változtatásával esetleg ezeknél is jó eredmény érhető el ; másrészt nem feltétlenül szükséges, hogy egy és ugyanazon eljárás szerint bármely hazai szénből jóminőségű brikett legyen gyártható, mikor sok hazai szén fizikai tulajdonsága lényegesen eltér egymásétól.

Ha szénnel, mint kötőanyaggal készítünk brikettet, jóformán a szilárdság az egyedüli tényező, amire különös tekintettel kell lennünk, mert hiszen egy így készült brikett egyebekben éppen úgy viselkedik, mint maga a szén. A szilárdság szempontjából nagy fontossággal bír a brikett nagysága, súlya és alakja. Kisebb

brikettek, ugyanolyan présnyomás alatt, nagyobb szilárdságot nyernek, mint a nagyobbak; egyenlő szilárdság mellett is tartósabbak, különösen, ha alakjuk is megfelelő, tehát élekkel, melyek könnyen letöredeznek, nem bírnak. Ebből a szempontból igen célszerű a tojásalak. A tojásbrikettek súlya általában 35—135 g között változik, legtöbbször 60—70 g. Ha a brikett szilárdsága megfelelő, a szokásosnál jóval kisebb, kb. diónagyságú brikettek, a legtöbb tüzelőberendezésben kitűnően eltüzelhetők. Ilyen 17—18 g súlyú dióbrikettek (kb. 3 cm átmérőjű gömb) az ismertetett eljárással, aránylag mérsékelt présnyomással igen nagy szilárdsággal lennének előállíthatók s ezeket a szénfogyasztók feltétlenül megkedvelnék.

Másrészt igaz, hogyha a brikett súlyát csökkentjük, általában a prés teljesítménye is kisebbedik. Azonban ezen is lehet javítani. Legújabb, bár más kötőanyaggal végzett németországi kísérletek [1] igazolják, hogyha a préselést megelőzőleg a brikettanyagot helyesen készítjük elő, akkor a hengeres présekkel kerületi sebessége, tehát teljesítménye is a normális értéknek kb. háromszorosára fokozható (30 cm/sec helyett 90—100 cm/sec; s ennek megfelelően 15 t/h helyett 45—50 t/h). Szerintem ez lenne az az út, melyet brikettgyárainknak követni kellene.

*

Az előzőkben ismertetett kísérleteket a Széchenyi Tudományos Társaság anyagi támogatásával végeztem, amiért e helyen is hálás köszönetet mondok.

[1] Glückauf. 1931. 44. sz.

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1935. ápr. 15-én tartott üléséből.)

# NEUERE VERSUCHSANGABEN ZUR FRAGE DER BRIKETTIERUNG UNGARISCHER MINERALKOHLEN.

(Das sog. Kolloidverfahren.)

Von JOSEF FINKEY, korr. Mitglied.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin Josef-Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, Bd. VII. 1935.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. April 1935.)

# A HATVÁNYSORRÓL ÉS A VELE KAPCSOLATOS LEGENDRE-FÉLE TÖBBTAGÚAKRÓL.

FEJÉR LIPÓT r. tagtól.

1. Ismeretes, hogy STIELTJESnek nevezetes egyenlőtlenségeket köszönhetünk a közönséges Legendre-féle polynomokra vonatkozólag. Az a törekvésem, hogy ezek számára lehetőleg egyszerű és átlátszó bizonyításokat nyerjek, vezetett engem már régebben arra, hogy, általánosan, *bármely* valós együtthatójú

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{1}$$

hatványsorhoz határozott módon egy

$$P_0(\cos\theta),\ P_1(\cos\theta),\ P_2(\cos\theta),\ldots,\ P_n(\cos\theta),\ldots \tag{2}$$

polynomsorozatot rendeljek, amelyet a hatványsor Legendre-polynomjainak neveztem. Azt is mondhatom, hogy bármely valós tagokkal bíró

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots \tag{3}$$

végtelen számsorozathoz a Legendre-polynomoknak egy végtelen sorozata tartozik. A $P_n(\cos\theta)$ polynomokat az $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$ sorozatból a következőképen származtatom. Képezem (esetleg csak formálisan) az

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{4}$$

hatványsort, a $z$ komplex változó helyébe először az $re^{i\theta}$, azután az $re^{-i\theta}$ értéket írom, és az így nyert, $r$ hatványai szerint haladó hatványsorokat CAUCHY szorzási szabálya szerint összeszorzom. Ily módon az

$$F(re^{i\theta})F(re^{-i\theta}) = |F(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{ni\theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{-ni\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta).r^n \tag{5}$$

hatványsort nyerem, amelyben a $P_n(\cos\theta)$-val jelölt $n$-indexű együtthatóra a

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ki\theta}.a_{n-k}e^{-(n-k)i\theta} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} e^{(2k-n)i\theta} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \cos(n-2k)\theta =$$
$$= 2a_0a_n \cos n\theta + 2a_1a_{n-1}\cos(n-2)\theta +$$
$$+ 2a_2a_{n-2}\cos(n-4)\theta + \cdots \qquad (6)$$

képlet érvényes. Itt az utolsó tag $2a_\nu a_{\nu+1}\cos\theta$, ha $n=2\nu+1$, és $a_\nu^2$, ha $n=2\nu$. Látjuk, hogy $P_n(\cos\theta)$ a $\theta$-ban $n$-edrendű trigonometrikus cosinuspolynom, és így a $\cos\theta=x$ változóban $n$-edfokú racionális egész függvény. $P_n(x)$ páros vagy páratlan függvénye az $x$-nek, a szerint, amint $n$ páros vagy páratlan. Mármost az így értelmezett $P_0(\cos\theta)$, $P_1(\cos\theta)$, $P_2(\cos\theta)$,..., $P_n(\cos\theta)$,... polynomokat nevezem az $F(z)$ függvény, vagy az $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$ hatványsor, vagy végre egyszerűen az $a_0$, $a_1$,..., $a_n$,... végtelen számsorozat Legendre-féle polynomjainak. Úgy nyertem őket, hogy az $F(z)=F(re^{i\theta})$ függvény abszolút értékének a négyzetét, vagyis az $|F(re^{i\theta})|^2$ függvényt, a $z=re^{i\theta}$ független változó $r$ abszolút értékének hatványai szerint sorba fejtettem; az ebben a sorban föllépő, $\theta$-tól függő együtthatók az $F(z)$ hatványsor Legendre-polynomjai. Megjegyzem, amennyiben a (4) alatti $F(z)$ hatványsor összetartó, ha $|z|<1$, akkor az (5) alatti hatványsor is összetartó, ha $0 \leqq r < 1$ és $\theta$ tetszőleges valós szám.

Legnevezetesebbek az

$$F(z) = \frac{1}{(1-z)^\varrho} \qquad (7)$$

függvény Legendre-polynomjai, amikor is a (4) alatti hatványsor az

$$\frac{1}{(1-z)^\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots(\varrho+n-1)}{1.2.3.\ldots.n} z^n \qquad (8)$$

binomiális sor. A $\varrho$ alatt mindig valós számot értek. Az $(1-z)^{-\varrho}$ függvényhez tartozó Legendre-polynomokat legtöbbször ultra-

szferikus polynomoknak szokás nevezni. Lássunk három speciális esetet, a $\varrho$ különböző értéke szerint.

Ha $\varrho = \frac{1}{2}$, akkor binomiális sorunk

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5. \ldots .(2n-1)}{2.4.6. \ldots .2n} z^n, \tag{9}$$

és így

$$|F(re^{i\theta})|^2 = F(re^{i\theta}) F(re^{-i\theta}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-re^{i\theta}}} \frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}, \tag{10}$$

úgy, hogy ebben az esetben $P_n(\cos\theta)$ Legendre-polynomunk a közönséges $X_n(\cos\theta)$ LEGENDRE-féle polynom, vagyis $P_n(\cos\theta) = X_n(\cos\theta)$.

Ha $\varrho=1$, akkor

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{11}$$

és így

$$|F(re^{i\theta})|^2 = F(re^{i\theta}) F(re^{-i\theta}) = \\ = \frac{1}{1-re^{i\theta}} \frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}. \tag{12}$$

Minthogy

$$\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} r^n, \tag{13}$$

azért ebben az esetben $P_n(\cos\theta)$ Legendre-polynomunk azonos a $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ függvénnyel, amelyet másodfajú CSEBISEV-féle polynomnak is szokás nevezni, és $U_n(\cos\theta)$-val jelölni. Most tehát

$$P_n(\cos\theta) = U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{14}$$

A harmadik eset, $\varrho=0$, némi óvatosságot igényel. A (8)-hoz tartozó $P_n(\cos\theta)$ Legendre-polynomot előbb osszuk el $\varrho$-val ($n \geqq 1$), és csak azután hagyjuk a $\varrho$ értékét zérushoz konvergálni; akkor azt találjuk, hogy $\varrho^{-1}.P_n(\cos\theta)$ határértéke (a $2n^{-1}$ tényezőtől eltekintve) $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, vagyis az ú. n. elsőfajú CSEBISEV-

féle polynom. Látjuk tehát, hogy a $\varrho=0$ értéknek megfelelő Legendre-polynomok lényegben megegyeznek az elsőfajú CSEBISEV-féle polynomokkal.

2. Az általános Legendre-féle polynomokat «Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome» (Mathematische Zeitschrift, 24. kötet, 285—298. oldal, Berlin, 1925) című dolgozatomban vezettem be, és vizsgáltam őket abban az esetben, amidőn az

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{15}$$

sorozat tagjai nemnegatív számok, és *monoton* fogynak, vagyis

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq \cdots \geqq 0. \tag{16}$$

Így például egyszerűen kimutattam, hogy a (16) alatti föltétel mellett a $\theta$ minden valós értékére a

$$|P_n(\cos\theta) - P_{n+2}(\cos\theta)| \leqq 7a_\nu \tag{17}$$

egyenlőtlenség érvényes, bármi legyen is az $n$ index értéke. Itt $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, vagyis az $\frac{n}{2}$-ben foglalt legnagyobb egész szám. (Föl van tételezve továbbá, ami különben lényegtelen megszorítás, hogy $a_0=1$). Ez a (17) alatti egyenlőtlenség egy STIELTJEStől talált, és a közönséges Legendre-polynomokra vonatkozó egyenlőtlenségnek nagymérvű általánosítása. Kiemelem, hogy ez az egyenlőtlenség érvényes az összes ultraszferikus polynomokra, ha $0<\varrho\leqq 1$; ekkor ugyanis a (16) alatti föltétel ki van elégítve (és $a_0=1$).

3. Lényegesen továbbhaladt az általános $P_n(\cos\theta)$ Legendre-polynomok vizsgálatában SZEGŐ, éspedig «Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome» (Math. Zeitschrift, 25. kötet, 172—187. oldal, Berlin, 1926), továbbá «Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions» (legközelebb megjelenik a Transactions of the American Mathematical Society nevű folyóiratban) című dolgozataiban. Ő figyelmét nemcsak a $P_n(x)$ polynomokkal kapcsolatos becslési kérdésekre, hanem e polynomok zérushelyeire is irányította, és első dolgozatában például azt az eredményét

közli, hogy a $P_n(x)=0$ egyenlet gyökei mind valósak, egymástól különbözők és a $-1<x<1$ számközben feküsznek, ha az

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots \tag{18}$$

generátorsorozat számai mind pozitívok, és ha továbbá

$$\frac{a_1}{a_0} \leqq \frac{a_2}{a_1} \leqq \frac{a_3}{a_2} \leqq \cdots \leqq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \cdots . \tag{19}$$

Szegő bizonyítása egy Pólya-féle tételen nyugszik. Második dolgozatában pedig Szegő egy nevezetes általános tétele segítségével továbbmenőleg kimutatja, hogy, ha $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\pi$ jelölik a $P_n(\cos\theta)$ gyökeit a $(0,\ \pi)$ számközben, akkor

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n+1}\pi < \theta_k < \frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}\pi, \qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n, \tag{20}$$

ismét csak annyit tételezve fel a (18) alatti pozitív tagú $\{a_n\}$ sorozatról, hogy az a (19) alatti föltételnek tesz eleget. Megjegyzem, hogy a közönséges $X_n(\cos\theta)$ Legendre-polynomok esetében, sőt általánosabban a $P_n(\cos\theta)$ ultraszferikus polynomok esetében is, az $\{a_n\}$ sorozat valóban eleget tesz a (19) alatti föltételnek, ha $0<\varrho<1$, úgyhogy tehát az általános (20) alatti Szegő-féle egyenlőtlenségek speciálisan az ultraszferikus polynomok gyökeire is érvényesek.

4. Ami azonban különösen a közönséges Legendre-féle polynomnak, és általánosabban a már tekintett ultraszferikus polynomoknak $\theta_1,\ \theta_2,\ldots,\ \theta_n$ gyökeit illeti, úgy ezek számára *szűkebb* elkülönített határolóintervallumok is ismeretesek, mint a (20) alatti Szegő-félék. Körülbelül 40 évvel ezelőtt Markoff és Stieltjes egymástól függetlenül a következő nevezetes tételt találták:

Jelöljék $t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n$ a $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ elsőfajú Csebisev-féle polynomnak a $(0,\ \pi)$ közbe eső gyökeit, növekedésük sorrendjében, azaz legyen

$$t_k = \frac{k-\frac{1}{2}}{n}\pi, \qquad k=1,\ 2,\ldots,\ n. \tag{21}$$

Jelöljék továbbá $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ másodfajú CSEBISEV-féle polynomnak a $(0, \pi)$ közbe eső gyökeit, növekedésük sorrendjében, azaz legyen

$$u_k = \frac{k}{n+1}\pi, \qquad k=1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Akkor, ha $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ jelölik a $P_n(\cos\theta)$ ultraszferikus polynom gyökeit, szintén növekedésük sorrendjében, és $0<\varrho<1$, úgy érvényesek a

$$t_k < \theta_k < u_k, \tag{23}$$

vagyis a

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\pi < \theta_k < \frac{k}{n+1}\pi \tag{24}$$

egyenlőtlenségek, ahol $\theta_k$ jelzi a $P_n(\cos\theta)$ ultraszferikus polynomnak a $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ számközbe eső bármely gyökét. (Elég ezekre a gyökökre szorítkozni, mert $P_n(x)$ vagy páros vagy páratlan $x$-ben.) Másszóval a (24) alatti egyenlőtlenség érvényes, ha

$$k = 1, 2, \ldots, n' = \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{25}$$

(Megjegyzem, hogy ha $n$ páratlan, akkor $\left(n'-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} = n'\frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2}$, úgyhogy ebben az esetben a (24) alatti $n'$ kettős egyenlőtlenség közül a legutolsó valójában a $\theta_{n'} = \frac{\pi}{2}$ egyenlőséggel pótolandó.)

5. Mármost újabban azt találtam, hogy az *általános* $P_n(\cos\theta)$ LEGENDRE-féle polynom $\theta_k$ gyökei is ezekbe a szűkebb, (24) alatti MARKOFF—STIELTJES-féle közökbe esnek, ha az $\{a_n\}$ generátorsorozatot a (19) alatti SZEGŐ-félénél erősebb megszorításnak vetem alá. Érvényes ugyanis a következő tétel:

*Ha az*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{26}$$

*végtelen sorozat totálisan monoton, akkor a hozzátartozó, ((6) alatt értelmezett)* $P_n(\cos\theta)$ *Legendre-polynomnak a* $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ *közbe*

*eső és nagyság szerint rendezett* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n'}$ *gyökei minden* $n$*-re a megfelelő* MARKOFF—STIELTJES*-féle közökbe esnek, vagyis*

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\pi < \theta_k < \frac{k}{n+1}\pi, \tag{27}$$

*ha*

$$k = 1, 2, \ldots, n' = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Az alatt, hogy a (26) alatti $\{a_n\}$ sorozat totálisan monoton, szokásosan a következőt értem. Ha $a_n \geqq 0$ az $n$ minden nemnegatív egészszámú értékére és ha egyszersmint $\Delta a_n = a_n - a_{n+1} \geqq 0$, akkor azt mondom, hogy az $\{a_n\}$ sorozat monoton. Ha továbbá még $\Delta^2 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqq 0$ is érvényes, akkor az $\{a_n\}$ sorozatot kétszeresen monotonnak nevezem, és í. t., ha egyszerre $a_n \geqq 0$, $\Delta a_n \geqq 0$, $\Delta^2 a_n \geqq 0, \ldots$, $\Delta^k a_n \geqq 0$ érvényes, akkor az $\{a_n\}$ sorozatot $k$-szorosan monotonnak, vagy még $k$-ad rendben monotonnak is nevezem. Itt $\Delta^\nu a_n$ jelenti az $n$-től függő $a_n$ szám $\nu$-edik differenciáját, vagyis

$$\Delta^\nu a_n = a_n - \binom{\nu}{1} a_{n+1} + \binom{\nu}{2} a_{n+2} - \cdots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} a_{n+\nu}. \tag{28}$$

Mármost az $\{a_n\}$ sorozatot nyilván akkor nevezem totálisan monotonnak, ha bármilyen magas rendben monoton, vagyis, ha

$$\Delta^k a_n \geqq 0, \qquad n=0, 1, 2, \ldots; \; k=0, 1, 2, \ldots .$$

6. Az 5. pontban fogalmazott tételem bizonyítása főleg két tételre támaszkodik. Az *első* STIELTJES és HAUSDORFF tétele. HAUSDORFF tétele így hangzik. Ha $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ tetszésszerinti, a jelzett értelemben totálisan monoton számsorozat, akkor létezik egy olyan $\varphi(t)$ függvény, hogy

$$a_n = \int_0^1 t^n d\varphi(t), \qquad n=0, 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Itt $\varphi(t)$ a $t$ valós változó valós függvénye, amely a $0 \leqq t \leqq 1$ számközben korlátos, nemnegatív és monoton növekedő (nem fogyó), és amelyre nézve $\varphi(0) = 0$, továbbá $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(t+0) + \varphi(t-0)\right)$

érvényes, ha $0 < t < 1$. HAUSDORFF tétele úgy is mondható ki, hogy létezik egy a jelzett tulajdonságokkal bíró $\varphi(t)$ függvény, amely szerint a $0 \leqq t \leqq 1$ közre alkalmazott tömegterhelésnek (Massenbelegung) momentumai rendre az adott $a_0, a_1, a_2, \ldots$ totálisan monoton sorozat számaival egyenlők. Megemlítem, hogy az ultraszferikus $P_n(\cos\theta)$ polynomok esetében (mindig a $0 < \varrho < 1$ megszorítás mellett) létezik egy pozitív és a $0 < t < 1$ közben folytonos és integrálható $f(t)$ sűrűségfüggvény is, amelyre

$$a_n = \int_0^1 f(t)\, t^n dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{30}$$

Ugyanis, ha

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sin \varrho\pi \, \frac{1}{t^{1-\varrho}(1-t)^{\varrho}}, \tag{31}$$

akkor

$$a_n = \frac{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots(\varrho+n-1)}{1.2.3.\ldots.n} = \int_0^1 f(t)\, t^n dt, \tag{32}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots ; \; 0 < \varrho < 1.$$

A közönséges Legendre-polynomok a $\varrho = \frac{1}{2}$ értéknek felelnek meg; ekkor tehát az $a_n = \dfrac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.2n}$ generatorszámok az

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \tag{33}$$

sűrűségfüggvény momentumai. A *második* tétel, amelyre támaszkodom, a totálisan monoton $\{a_n\}$ sorozathoz tartozó Legendre-polynomoknak egy új analytikai előállítása. Ez az előállítás a következőképen hangzik. Tegyük föl talán, hogy létezik egy a $0 < t < 1$ közben nemnegatív, de nem azonosan eltűnő $f(t)$ *sűrűség*-függvény, amely mellett

$$a_n = \int_0^1 f(t)\, t^n dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{34}$$

Tekintettel a (6) alatti értelmezésre, egy csapásra nyerjük, hogy

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \cos(n-2k)\,\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left( \int_0^1 f(t)\, t^k dt \right) \cdot \left( \int_0^1 f(u)\, u^{n-k} du \right) \cos(n-2k)\theta = \tag{35}$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 f(t) f(u) \left( \sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \cos(n-2k)\theta \right) dt\, du =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 f(t) f(u) k_n(t, u; \theta)\, dt\, du,$$

és ez a kettős integrál szolgáltatja a $P_n(\cos\theta)$ említett új analytikai előállítását. ((33)-ra való tekintettel, a *közönséges* $X_n(\cos\theta)$ LEGENDRE-féle polynom esetében ez az előállítás a következőképen alakul:

$$X_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{tu(1-t)(1-u)}} \left( \sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \cos(n-2k)\theta \right) dt\, du.)$$

Látjuk, hogy a (35) alatti kettős integrál integrandusában a generatorsorozatot meghatározó $f$ sűrűségfüggvényen kívül a

$$k_n(t, u; \theta) = \sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \cos(n-2k)\theta, \tag{36}$$

$\theta$-ban $n$-edrendű trigonometrikus cosinuspolynom szerepel. Ámde egyszerű számolás (egy véges geometriai haladvány összegezése) mutatja, hogy a $\theta$-nak ez a fontos elemi $n$-edrendű cosinuspolynomja: $k_n(t, u; \theta)$, amely (36) által a $t, u$ parameterek minden értékére definiálva van, a következő alakkal bír:

$$k_n(t, u; \theta) = p_n \cos n\theta + q_n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \tag{37}$$

ahol

$$p_n = p_n(t, u; \theta) = (t^2 - 2tu\cos 2\theta + u^2)^{-1} \cdot (t-u)(t^{n+1} - u^{n+1}), \tag{38}$$
$$q_n = q_n(t, u; \theta) = (t^2 - 2tu\cos 2\theta + u^2)^{-1} \cdot tu(t^n + u^n). \tag{39}$$

E szerint, ha $t>0$, $u>0$ és $0<\theta<\pi$, akkor

$$p_n(t, u; \theta) \geqq 0, \quad q_n(t, u; \theta) > 0, \tag{40}$$

és így (35)—(40) alapján a $P_n(\cos\theta)$ Legendre-polynomra a következő felbontást kapjuk:

$$P_n(\cos\theta) = A_n(\theta)\cos n\theta + B_n(\theta) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \tag{41}$$
$$= A_n(\theta)\, T_n(\theta) + B_n(\theta)\, U_n(\theta),$$

ahol az $A_n(\theta)$ és $B_n(\theta)$ függvények a $0<\theta<\pi$ közben folytonos és pozitív függvények. A $P_n(\cos\theta)$ (35) alatti, kettős integrállal kifejezett alakjából tehát arra következtettünk, hogy esetünkben a $P_n(\cos\theta)$ Legendrepolynom homogén-lineáris módon állítható elő a $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ és $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(\cos\theta)$ elsőfajú és másodfajú Csebisev-féle polynomokkal, éspedig úgy, hogy az előállításban szereplő $A_n(\theta)$ és $B_n(\theta)$ faktorok folytonosak és határozottan pozitívok a $0<\theta<\pi$ közben. Ugyanez érvényes, ha az $\{a_n\}$ totálisan monoton sorozat momentum-előállításához nem közönséges, hanem Stieltjes-féle integrál szükséges. E (41) alatti fölbontásból azonban az 5. pontban kimondott általános tételem már egy csapásra adódik, éspedig egy egyszerű okoskodás alkalmazásával, amelyet már Szegő is használt második dolgozatában. Ha ugyanis ujra $t_1, t_2, \ldots, t_n$, illetőleg $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jelentik a $T_n(\cos\theta)=0$, illetőleg $U_n(\cos\theta)=0$ egyenleteknek (21), illetőleg (22) alatt megadott gyökeit, akkor (41) alapján

$$P_n(\cos t_k) = (-1)^{k+1}.B_n(t_k)\ \operatorname{cotg} t_k$$
$$P_n(\cos u_k) = (-1)^k\ .A_n(u_k)\cos u_k,$$

és igy, ha $0<t_k<\dfrac{\pi}{2}$, $0<u_k<\dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{signum} P_n(\cos t_k) = (-1)^{k+1},$$
$$\operatorname{signum} P_n(\cos u_k) = (-1)^k,$$

amivel az 5. pontban kimondott tételem, amely szerint totálisan monoton $\{a_n\}$ generátorsorozat esetén a megfelelő általános $P_n(\cos\theta)$ Legendre-polynom gyökei a Markoff—Stieltjes-féle közökbe esnek, bizonyítva van.

Megjegyzem, hogy ez a bizonyítás, amely az $a_n$ számok momentum-alakjára van alapítva, új még a közönséges $X_n(\cos\theta)$ Legendre-féle polynomok esetében is.

7. Az előző pontokban az

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \qquad (42)$$

hatványsorhoz tartozó Legendre-féle polynomokkal foglalkoztam abban az esetben, amelyben az $\{a_n\}$ együtthatósorozat totá-

lisan monoton. E pontban egy tételt közlök, amely az ilyen hatványsor

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \qquad a=0, 1, 2, \ldots, \tag{43}$$

*részletösszeg*einek az $F(z)$ határfüggvényhez való konvergenciájának a mikéntjére ad nevezetes fölvilágosítást. Ez a tétel így hangzik:

*Ha az*

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{44}$$

*hatványsorban az*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{45}$$

*együtthatósorozat totálisan monoton, akkor a* $|z| < 1$ *egységkör minden egyes z pontjában*

$$|F(z)| \geqq |F(z) - s_0(z)| \geqq |F(z) - s_1(z)| \geqq \cdots \geqq |F(z) - s_n(z)| \geqq \cdots, \tag{46}$$

*ahol* $s_n(z)$ *jelöli a* (44) *alatti hatványsor*

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{47}$$

*részletösszegét.*

Látjuk tehát, hogy totálisan monoton együtthatósorozattal bíró hatványsor $s_0(z)$, $s_1(z)$, $s_2(z), \ldots, s_n(z), \ldots$ részletösszegei növekedő indexxel mindig jobban és jobban közelítik meg a végtelen hatványsor összegét, éspedig a $|z| < 1$ egységkör minden egyes belső pontjában. (Tudomásom szerint az ilyen hatványsorok részletösszegeinek a végtelen összeghez való «monoton konvergenciáját» még az

$$\frac{1}{(1-z)^\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots(\varrho+n-1)}{1.2.3.\ldots.n} z^n \qquad (0<\varrho<1) \tag{48}$$

binomiális sor speciális esetében sem vették észre.) Lényegesen továbbmenőleg még azt is találtam, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor $s_n(z)$ szeletei már akkor is bírnak a szóbanforgó (46) alatti tulajdonsággal, ha az $\{a_n\}$ sorozat háromszorosan monoton. Végre Szegő kimutatta, hogy a (46) alatti egyenlőtlenségek kétszeresen monoton $\{a_n\}$ együtthatósorozat esetében is érvényesek.

Viszont, ha $\{a_n\}$ csak egyszeresen monoton, akkor (46) már nem szükségképen érvényes. Például az

$$F(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{49}$$

hatványsor esetében a (46) alatti egyenlőtlenségsorozat első egyenlőtlensége így hangzik:

$$|e^z| \geqq |e^z - 1|, \tag{50}$$

vagyis, ha $z$ valós és negatív érték,

$$e^z \geqq \frac{1}{2}. \tag{51}$$

Látjuk tehát, hogy ez esetben az (50) alatti egyenlőtlenség a $|z| < 1$ egységkör azon belső $z$ pontjaira nézve, amelyek a negatív valós tengely $-1 < z < -\log 2$ intervallumában vannak, *nem* érvényes.

8. Minthogy (46) szerint

$$|F(z)| \geqq |F(z) - s_n(z)|, \tag{52}$$

azért

$$|s_n(z)| \leqq 2|F(z)|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{53}$$

Érvényes tehát a következő tétel:

*Ha az* $F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ *hatványsorban az* $\{a_n\}$ *együtthatósorozat totálisan monoton, akkor a* $|z| < 1$ *egységkör minden belső* $z$ *pontjában a hatványsor összes részletösszegeinek abszolút értéke* $\leqq 2|F(z)|$, vagyis

$$|s_n(z)| \leqq 2|F(z)|, \quad |z| < 1; \; n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{54}$$

Szegő imént jelzett eredményére való tekintettel még azt is mondhatjuk, hogy az (54) alatti becslés már kétszeresen monoton $\{a_n\}$ együtthatósorozat esetében is érvényes.

Közönségesen $s_n(z)$ abszolút értékét az $F(z)$ függvény abszolút értékének az *egész* $|z| < 1$ körre vonatkozó, mondjuk $M$-mel jelölt felső határával szokás fölülről határolni. Az (54) alatti egyenlőtlenségben az a nevezetes, hogy abban az $s_n(z)$ abszolút értékének felső határolása *ugyanazon* $z$ értékhez tar-

tozó $F(z)$ függvényérték abszolút értékével eszközöltetik. Ilyen természetű becslést találunk RIESZ MARCEL, CHAPMAN, SZEGŐ és a szerző dolgozataiban.

9. Az előzőekben fölemlítettem néhány tételt az *egynél magasabb* rendben monoton együtthatósorozattal bíró hatványsor szeleteire, továbbá a totálisan monoton együtthatósorozattal bíró hatványsorhoz tartozó Legendre-polynomokra vonatkozólag. Számos más idevágó eredményt, továbbá részletes kifejtéseket tartalmaznak következő dolgozataim: «Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge» (megjelenik a Transactions of the American Mathematical Societyben), «Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendrepolynome» (megjelenik a Proceedings of the Cambridge Philosophical Societyben). Utalok továbbá SZEGŐvel írt dolgozatunkra: «Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge» (megjelenik a Prace Matematyczno—Fizyczne nevű varsói folyóiratban). Az első két dolgozatomban például egyszerűen kimutatom, hogy $F(z)$ *egyrétű* (schlicht) az egész $|z|<1$ egységkörben, ha $\{a_n\}$ együtthatósorozata négyszeresen monoton. Úgy látszik, hogy az a praemissa, mely szerint az $F(z)$ $\{a_n\}$ együtthatósorozata *többszörösen monoton*, szerencsésen van választva, és még további eredmények várhatók. *Egyszeresen* monoton $\{a_n\}$ esetére talán ABEL és SCHLÖMILCH tétele a legrégibb: $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$ az egész $|z|=1$, $z\neq 1$, körvonalon konvergens, ha $\{a_n\}$ egyszeresen monoton és $\lim_{n=\infty} a_n=0$.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. június hó 3-án tartott üléséből.)

# ÜBER DIE POTENZREIHE UND DIE ZUGEHÖRIGEN LEGENDRESCHEN POLYNOME.

Von LEOPOLD FEJÉR, o. Mitglied.

Verfasser hat schon vor zehn Jahren bemerkt, dass die Abschnitte

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \tag{1}$$

und die zugehörigen Legendreschen Polynome[1]

$$P_n(\cos\theta) = 2a_0 a_n \cos n\theta + 2a_1 a_{n-1} \cos(n-2)\theta + \\ + 2a_2 a_{n-2} \cos(n-4)\theta + \cdots \tag{2}$$

einer Potenzreihe

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{3}$$

einige besondere Eigenschaften besitzen, falls die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ der Potenzreihe nichtnegativ und *monoton fallend* ist. Nachdem inzwischen Herr G. Szegő auf diesem Gebiete wesentlich weiter vorgedrungen ist, wird in der vorangehenden Note

---

[1] Hier ist das letzte Glied $2a_\nu a_{\nu+1}\cos\theta$, wenn $n=2\nu+1$, und $a_\nu^2$, wenn $n=2\nu$. — Die von mir betrachteten Legendrepolynome $P_n(\cos\theta)$ sind die Koeffizienten der Entwicklung von $|F(re^{i\theta})|^2$ nach Potenzen von $r$, d. h. es ist

$$|F(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n.$$

$P_n(\cos\theta)$ ist eine ganze rationale Funktion $n$-ten Grades in $\cos\theta = x$, die gerade oder ungerade ist, jenachdem $n$ gerade oder ungerade ist. Wenn $F(z)=(1-z)^{-\varrho}$, so sind die $P_n(\cos\theta)$ die s. g. ultrasphärischen Polynome; ist hier $\varrho = \frac{1}{2}$, so erhält man die gewöhnlichen Legendreschen Polynome $X_n(\cos\theta)$.

die engere Prämisse an die Spitze gestellt, dass die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *mehrfach monoton*,[2] oder eventuell *total monoton*[2] ist. Es gelten dann merkwürdige Sätze, von welchen hier nur die beiden folgenden, als charakteristische Beispiele, erwähnt werden sollen.

*Ist die Zahlenfolge*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{4}$$

*totalmonoton, so sind die Wurzeln der algebraischen Gleichung* $P_n(x) = 0$ *sämtlich reell, voneinander verschieden und liegen im Intervalle* $-1 < x < 1$. *Bezeichnen* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *die in das Intervall* $0 < \theta < \pi$ *fallenden, und der Grösse nach geordneten Wurzeln der Gleichung* $P_n(\cos\theta) = 0$, *so gilt*[3]

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n} < \theta_k < \frac{k}{n+1}\pi, \tag{5}$$

*für*

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n' = \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{6}$$

Dieser Satz ist eine beträchtliche Verallgemeinerung eines MARKOFF—STIELTJES-schen Satzes, nach welchem die Wurzeln des gewöhnlichen Legendreschen Polynoms (ja sogar die der ultrasphärischen Polynome, wenn $0 < \varrho < 1$) derselben Ungleichung (5) genügeleisten. Die Beweisgrundlage meines allgemeinen Satzes besteht wesentlich darin, dass ich die Zahlen $a_n$ der totalmonotonen Folge $\{a_n\}$ nach Herrn HAUSDORFF als STIELTJES-sche

---

[2] $a_n$ heisst bekantlich $k$-fach monoton, wenn

$$\Delta^\nu a_n = a_n - \binom{\nu}{1} a_{n+1} + \binom{\nu}{2} a_{n+2} - \cdots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} a_{n+\nu} \geqq 0,$$

für

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots k;\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und total monoton, wenn

$$\Delta^k a_n \geqq 0,$$

für

$$k = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

[3] $\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\pi = t_k$ sind die Wurzeln der Gleichung $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta = 0$, $\frac{k}{n+1}\pi = u_k$ sind die Wurzeln der Gleichung $U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = 0$.

Momente ausdrücke, und dadurch das entsprechende allgemeine Legendresche Polynom $P_n(\cos\theta)$ in der neuen Form eines Doppelintegrals [4] erhalte.

Der zweite Satz, den ich hier anführe, bezieht sich auf die Partialsummen der Potenzreihe und lautet:

*Ist die Zahlenfolge*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots \tag{7}$$

*totalmonoton und*

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots,\ |z| < 1, \tag{8}$$

*so gelten für die Partialsummen*

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{9}$$

*die Ungleichungen* [5]

$$|F(z)| \geqq |F(z) - s_0(z)| \geqq |F(z) - s_1(z)| \geqq \cdots \geqq |F(z) - s_n(z)| \geqq \cdots \tag{10}$$

*an jeder inneren Stelle z des Einheitskreises* $|z| < 1$.

Dieser Satz besagt, dass die Partialsumme $s_n(z)$ an jeder einzelnen inneren Stelle des Einheitskreises $|z| < 1$ die Funktion $F(z)$ immer besser und besser approximiert, wenn $n$ nacheinander die Zahlen 0, 1, 2,... durchläuft. Ich habe bemerkt, dass dieser Satz schon richtig ist, wenn die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ der Potenzreihe mindestens dreifach monoton ist, und *nicht* richtig ist, wenn $\{a_n\}$ einfach monoton ist. Anschliessend hat

---

[4] Hier sei die Formel wenigstens für das gewöhnliche Legendresche Polynom $X_n(\cos\theta)$ angegeben. Es ist

$$X_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{tu(1-t)(1-u)}}\left(\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k}\cos(n-2k)\theta\right) dt\,du.$$

[5] Aus $|F(z)| \geqq |F(z) - s_n(z)|$ folgt die bemerkenswerte obere Abschätzung

$$|s_n(z)| \leqq 2|F(z)|, \tag{11}$$
$$|z| < 1;\ n = 0, 1, 2,\ldots .$$

In der Regel wird $|s_n(z)|$ von oben durch die obere Grenze $M$ von $|F(z)|$ für den *ganzen* Kreis $|z| < 1$ abgeschätzt; hier, im Falle einer mehrfach monotonen Koeffizientenfolge $\{a_n\}$, durch den Wert von $|F(z)|$ an der Stelle $z$ *selbst*. Abschätzungen solcher Natur findet man in Arbeiten von Marcel Riesz, Chapman, Szegő und des Verfassers.

endlich Herr SZEGŐ bewiesen, dass der Satz auch dann noch gültig ist, wenn $\{a_n\}$ mindestens zweifach monoton ist.

Zahlreiche weitere Resultate für Potenzreihen,[6] ihre Abschnitte und ihre Legendrepolynome, falls die Koeffizientenfolge mehrfach monoton ist, weiter ausführlichere Darstellung und eingehende Literaturangaben findet man in den folgenden Arbeiten: L. FEJÉR: «Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge» (erscheint demnächst im Transactions of the American Mathematical Society), L. FEJÉR: «Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge» (erscheint demnächst im Proceedings of the Cambridge Philosophical Society), L. FEJÉR und G. SZEGŐ: «Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge» (erscheint demnächst im Prace Matematyczno-Fizyczne).

Meine in diesem Fragenkreis an die Spitze gestellte Prämisse: die Koeffizientenfolge der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei *mehrfach* oder *totalmonoton*, scheint sachgemäss zu sein, und es sind hier sicher noch weitere Resultate zu erwarten.

---

[6] Ich erwähne nur den folgenden Satz:
Ist $\{a_n\}$ vierfach monoton, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *schlicht* für $|z| < 1$.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 3. Juni 1935.)

# ÚJABB ADATOK A BÖRZSÖNYI-HEGYSÉG LÖSZÉNEK ISMERETÉHEZ.

VENDL ALADÁR r. tagtól.
TAKÁTS TIBOR és FÖLDVÁRI ALADÁR vendégektől.

## Telepedés és szerkezet.

A tanulmányozott börzsönyi-hegységi löszminták legnagyobb része dr. PAPP FERENC gyüjtése és a következő helyekről valók:

1. *Zebegény* a Duna partjáról, az újvölgyi patak torkolatától délkeletre mintegy 100 m-re, 115 m t. sz. feletti magasságból. Fekvője a Duna hordaléka. A minta nem a fekvő közeléből, hanem magasabbról való.

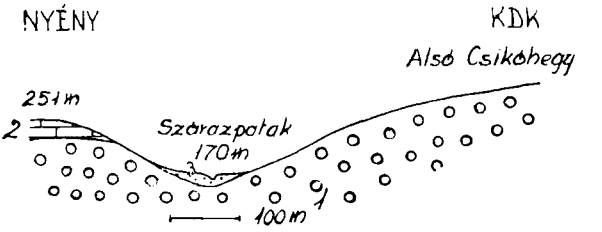
2. *Zebegény*, a vasúti állomástól ÉÉNy-ra a Malomhegyre vezető mélyútból, mintegy 140 m t. sz. feletti magasságból. Fekvője pleisztocén dunai homok. A megvizsgált minta azonban a fekütől távolabbi, magasabb részből származik.

3. *Szob*, az Újvölgy nyugati oldaláról, mintegy 125 m t. sz. feletti magasságból, az újvölgyi üdülőtelep nyugati meredek löszfalából. Fekvője pleisztocén dunai kavicsos homok.

4. *Zebegény*, a Malomhegy (228·7 m) tetejének keleti oldaláról, mintegy 210 m t. sz. f. magasságból. Fekvője horzsaköves, breccsás hipersztén-amfibolandezittufa.

5. *Zebegény*, az Újvölgy (Bészobi-patak) baloldalán, az újvölgyi üdülőtelep keleti szélén vezető út mellett levő andezittufa feltárás fölött, mintegy 130 m t. sz. f. magasságban. Közvetlen fekvője horzsaköves, breccsás hipersztén-amfibolandezittufa.

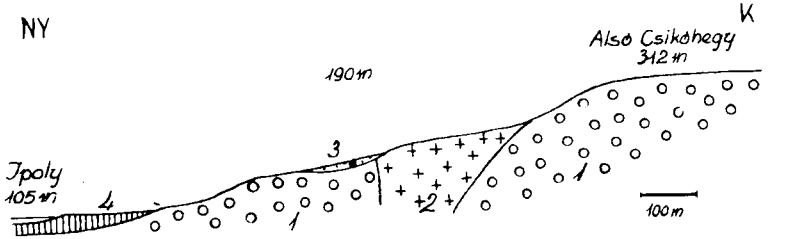
6. *Ipolydamásd*, a Szárazpatak balpartjáról, mintegy 170 m t. sz. f. magasságból (1. ábra). Fekvője hipersztén-amfibolandezit-breccsa.




1. ábra. Az ipolydamásdi Szárazpatak szelvénye. 1 = hipersztén-amfibolandezitbreccsa; 2 = lajtamészkő (kavicsos); 3 = lösz. (Az 1—5. ábra Papp Ferenc szerint.)

7. *Letkés* határában a *Széppataki-puszta* mintegy 212 m t. sz. f. magasságból. A lösz fekvője: hipersztén-amfibolandezit-breccsa.

8. *Ipolydamásd*, az Alsó-Csikóhegy nyugati oldaláról, mintegy 190 m t. sz. f. magasságból (2. ábra). Fekvője a nyugati nagyobb

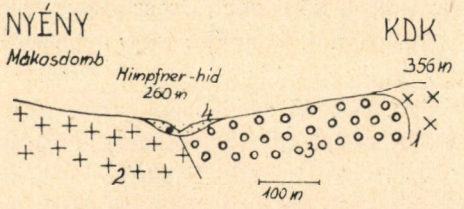



2. ábra. Az ipolydamásdi Alsó Csikóhegy nyugati részének szelvénye. 1 = hipersztén-amfibolandezitbreccsa; 2 = biotitos hipersztén-amfibolandezit; 3 = lösz; 4 = holocén.

részen hipersztén-amfibolandezit-breccsa, a keleti, kisebb részen biotitos hipersztén-amfibolandezit (Papp Ferenc szerint: 49% alapanyag, 34% labrador, 10% zöldamfibol, 2% hipersztén, 1% biotit, 1% érc, 3% chlorit).[1]

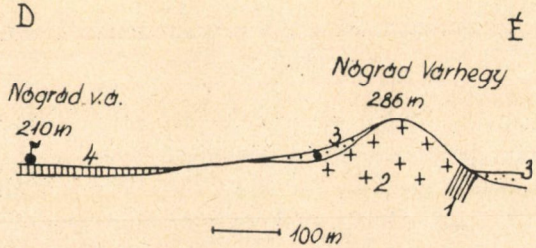
[1] Papp Ferenc: A Börzsönyi-hegység eruptív kőzetei. A Magyar Tud. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője, XLIX. 1932. 431—464.

10. *Márianosztra*, a *Csákhegy** nyugati oldaláról, mintegy 220 m t. sz. f. magasságból. Fekvője biotitos hipersztén-amfibolandezit. Szelvényét dr. PAPP FERENC a Földtani Közlönyben (LXIII. kötet, 68. lap) közölte.




3. ábra. A márianosztrai Himpfner-híd környékének szelvénye. 1 = vörös amfibolandezit; 2 = hipersztenes biotit-amfibolandezit; 3 = hipersztén-amfibolandezitbreccsa; 4 = lösz.

11. *Márianosztra*,* a Himpfner-híd mellől, mintegy 275 m t. sz. f. magasságból. (3. ábra) Fekvője: hipersztenes biotit-amfibolandezit és hipersztén-amfibolandezit-breccsa.




4. ábra. A nógrádi Várhegy szelvénye. 1 = kontaktpala; 2 = biotitdácit; 3 = lösz; 4 = holocén.

12. *Letkés*, a Középhegy nyugati oldaláról mintegy 190 m t. sz. f. magasságból. Fekvője miocén homok. A próba a fekvőkőzet közeléből származik.

13. *Letkés*, a községtől mintegy 2 kilométerre délkeletre levő

* A *-gal jelölt mintákat ásványtani szempontból VENDL ALADÁR: «A Börzsönyi-hegység néhány löszéről» című dolgozatban tanulmányozta. A Magyar Tud. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője. LIII. 1935, 181—201.

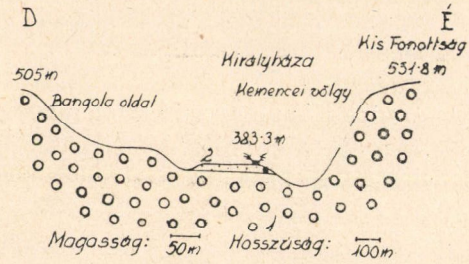
vízmosásból, mintegy 125 m t. sz. f. magasságból. Fekvője: letkési agyag.

14. *Letkés*, a Középhegy nyugati gerincéről, mintegy 220 m t. sz. f. magasságból. Fekvője: amfibolandezit-breccsa.

15. *Nagybörzsöny*, a községből, Grósz János telkéről, mintegy 225 m t. sz. f. magasságból. Fekvője: felső oligocén homok.

16. *Nógrád*, a Várhegy déli oldaláról (4. ábra), mintegy 240 m t. sz. f. magasságból. Fekvője: biotitdácit.

17. *Kemence, Királyháza* a vadászkastély mellől (5. ábra), 383·3 m t. sz. f. magasságból. Fekvője: hipersztén-amfibolandezit-tufa.




5. ábra. A kemencei völgy szelvénye. 1 = kovásodott hipersztén-amfibolandezittufa; 2 = lösz.

Végül megvizsgáltuk összehasonlításképpen a pleisztocén Dunának aprószemű, ártéri üledékét a következő lelőhelyről:

9. *Ipolydamásd*, az Alsó Csikóhegy nyugati lejtőjéről, mintegy 130 m t. sz. f. magasságból. Fekvője: hipersztén-amfibolandezit-breccsa.

A megvizsgált löszök szerkezete lényegében ugyanolyan, mint a budapestkörnyéki löszé. A királyházai lösz azonban már erősen mésztelenedett, mállott, valószínűleg átmosott löszagyag, tehát nem jellegzetes lösz.

## Mechanikai összetétel.

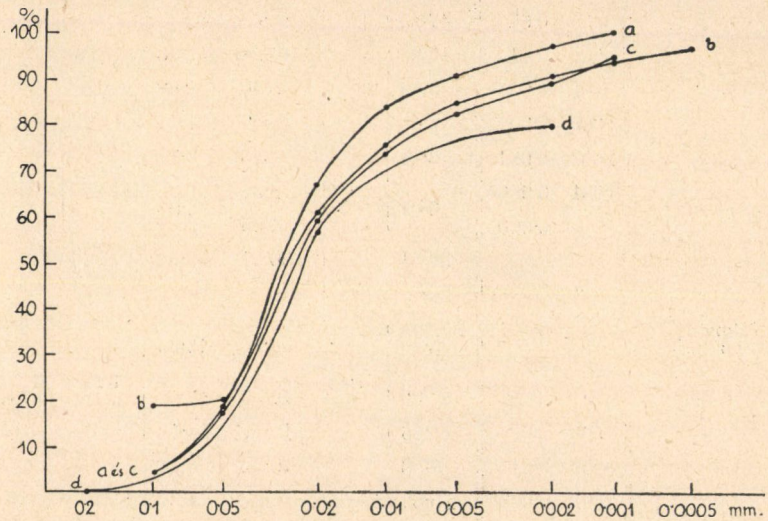
A mechanikai elemzéseket ugyanazokkal a módszerekkel végeztük, mint amelyekkel a budapestkörnyéki löszt tanulmányoztuk.[1]

[1] VENDL A.—TAKÁTS T.—FÖLDVÁRI A.: A budapestkörnyéki löszről. Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője. LII. 1934. 713—787.

**I. táblázat.**

| | Szemcse-átmérő mm | Köhn-féle pipetta-készülékkel | | | | | | Atterberg-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | | 2. 0·1 n $(H_4N)OH$-ban | | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | | |
| 5. *Zebegény, Újvölgy baloldala.* | >0·2 | 4·20 | 66·56 | 19·27 | | 4·39 | 59·44 | 0·19 |
| | 0·2—0·1 | | | | | | | |
| | 0·1—0·05 | 15·11 | | 0·49 | | 13·08 | | 57·12 |
| | 0·05—0·02 | 47·25 | | 40·62 | | 41·97 | | |
| | 0·02—0·01 | 16·92 | 29·76 | 14·83 | | 13·40 | 29·22 | |
| | 0·01—0·005 | 6·59 | | 8·70 | | 8·68 | | 22·33 |
| | 0·005—0·002 | 6·25 | | 6·42 | | 7·14 | | |
| | 0·002—0·001 | 3·18 | 3·19 | 3·26 | | 5·27 | 11 31 | |
| | 0·001—0·0005 | 0·01 | | 2·37 | | 6·04 | | 20·36 |
| | <0·0005 | | | 4·05 | | | | |
| | | 99·51 | | 100·01 | | 99·97 | | 100·00 |
| 16. *Nógrád, Várhegy.* | >0·2 | 35·22 | 77·48 | 38·48 | | 43·26 | 81·27 | 2·52 |
| | 0·2—0·1 | | | | | | | |
| | 0·1—0·05 | 27·60 | | 17·55 | | 23·82 | | 66·84 |
| | 0·05—0·02 | 14·66 | | 17·17 | | 14·19 | | |
| | 0·02—0·01 | 9·58 | 20·55 | 10·22 | | 6·36 | 15·39 | |
| | 0·01—0·005 | 5·89 | | 6·37 | | 4·82 | | 23·16 |
| | 0·005—0·002 | 5·08 | | 5·69 | | 4·21 | | |
| | 0·002—0·001 | 1·96 | 1·96 | 2·51 | | 2·06 | 3·35 | |
| | 0·001—0·0005 | 0·00 | | 2·02 | | 1·29 | | 7·48 |
| | <0·0005 | 0·00 | | | | | | |
| | | 99·99 | | 100·01 | | 100·01 | | 100·00 |
| 17. *Kemence, Királyháza.* | >0·2 | 2·17 | 42·48 | 0·88 | | 1·77 | 35·03 | 0·33 |
| | 0·2—0·1 | | | | | | | |
| | 0·1—0·05 | 8·41 | | 5·61 | | 6·13 | | 35·52 |
| | 0·05—0·02 | 31·90 | | 30·26 | | 27·13 | | |
| | 0·02—0·01 | 22·19 | 52·53 | 21·68 | | 18·82 | 39·92 | |
| | 0·01—0·005 | 13·87 | | 12·44 | | 11·54 | | 35·99 |
| | 0·005—0·002 | 16·47 | | 10·24 | | 9·56 | | |
| | 0·002—0·001 | 1·13 | 5·03 | 7·04 | | 6·55 | 25·05 | |
| | 0·001—0·0005 | 3·90 | | 11·89 | | 18·50 | | 28·16 |
| | <0·0005 | | | | | | | |
| | | 100·04 | | 100·04 | | 100·00 | | 100·00 |

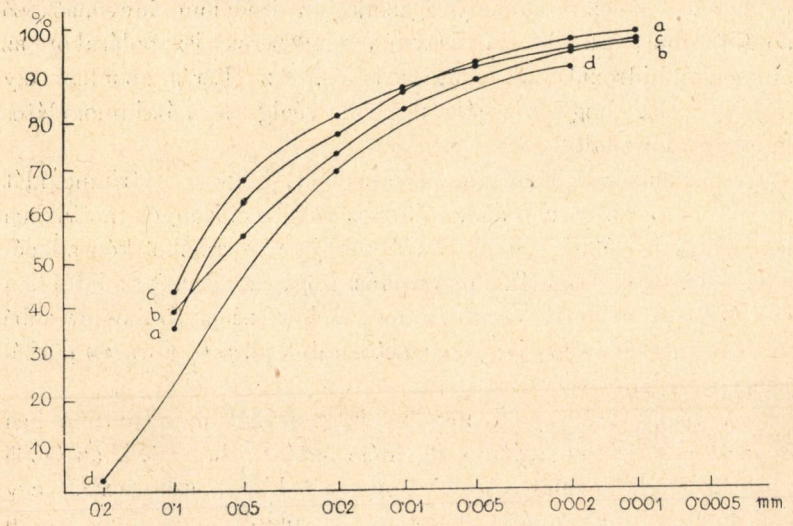
Összehasonlítás céljából három löszt (5., 16., 17.) a KÖHN-féle pipetta-készülékkel desztillált vízben, 0·1 normál ammoniumhidroxidban és 0·005 normál nátriumoxalátban iszapoltunk; ugyanezeknek a löszöknek mechanikai elemzését az ATTERBERG-féle készülékben is elvégeztük. Az 5. számú lösz képviseli a normális, kalciumkarbonátdús lösz típusát. A 16. számú a kalciumkarbonátban szegény és durvaszemű lösz típusa; a 17. számú kalcium-



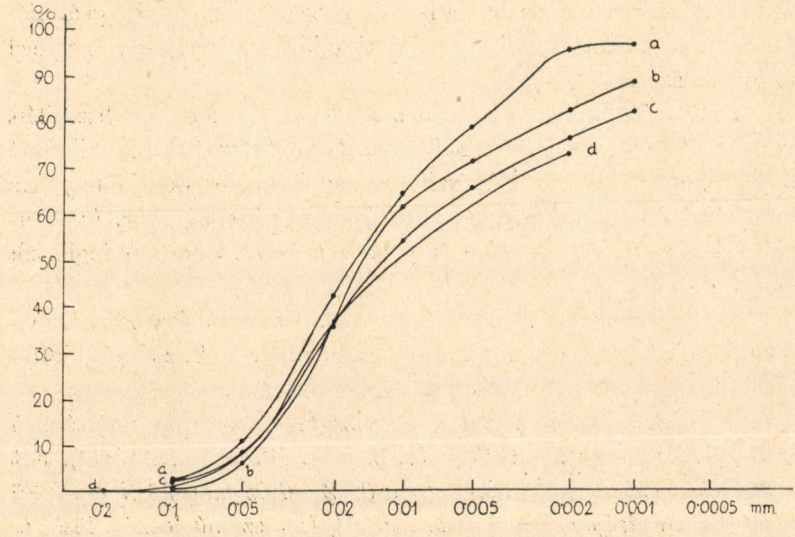

6. ábra. Az 5. számú lösz szemcseeloszlási görbéi. $a$ = desztillált vízben; $b$ = 0·1 normál ammoniában; $c$ = 0·005 normál nátriumoxalátban; $d$ = az ATTERBERG-féle módszerrel.

karbonátmentes, erősen agyagos, nyirokszerű. Az eredményeket az I. táblázat és a 6., 7. és 8. ábra tünteti fel.

A táblázat adatai szerint megint az ATTERBERG-féle készülékkel nyertünk a kolloid szemnagyságú részletből legtöbbet; ezeket az értékeket legjobban megközelítik az 0·005 normál nátriumoxaláttal megállapított eredmények. A legjobb a megegyezés a 17. számú, kalciumkarbonátmentes kőzet adatai között. A 16. számú minta elemzésekor a 0·1 normál ammoniumhidroxiddal végzett iszapolás a 0·002 mm-nél kisebb átmérőjü részletből valamivel többet határozott meg, mint az 0·005 normál nátriumoxalátos




7. ábra. A 16. számú lösz szemcseeloszlási görbéi. A jelzések ugyanazok, mint a 6. ábrán.




8. ábra. A 17. számú lösz szemcseeloszlási görbéi. A jelzések ugyanazok mint a 6. ábrán.

módszer. Ez az eredmény igazolja az irodalom idevonatkozó adatát, mely szerint kovasavdús rendszerek iszapolásakor az ammoniumhidroxid használata előnyös. Az eltérés azonban oly csekély volt, hogy vizsgálatainkban végig a nátriumoxalátos módszert használtuk.

Az elemzésekből megállapítható volt, hogy a nátriumoxalát az 0·001 mm-nél kisebb átmérőjü részecskéket bizonyos mértékben koagulálja és 0·001—0·002 mm átmérőjü részecskéket képez belőlük. Néha ez a koagulálás olyan erős, hogy az elemzési adatokban erősen megnyilvánul s a grafikon megfelelő részének többé-kevésbbé hirtelen megtörésében is észrevehető, mint pl. a 6. ábra «c» görbéjének a végén.

A budapestkörnyéki löszök vizsgálatából még feltűnőbben látszott a nátriumoxalátnak ilyenféle hatása,[1] hogy t. i. az 0·005 normál nátriumoxalát az 0·001 mm-nél kisebb szemecskék egy részét részben koagulálja, vagy esetleg oldott anyagokat kicsap olyan szemecskék alakjában, melyek átmérője 0·001 és 0·002 mm közt ingadozik.

Tehát a nátriumoxalátos módszer sem ér el teljes diszperziót. Minthogy azonban a löszben a kolloid részecskék mennyisége általában kevés szokott lenni, gyakorlati eljárásnak teljesen megfelel ez a módszer.

Ezen előtanulmányok után a végleges elemzéseket desztillált vízben és 0·005 normál nátriumoxalátban végeztük. A kiinduló anyag mennyisége, az előkészítés és az iszapolás módja ugyanaz volt, mint a budapestkörnyéki löszök tanulmányozásakor. Az eredményeket a II. táblázatban és a 9., 10. és 11. ábrában foglaltuk össze.

Az eredmények megítélésekor a 9. számú pleisztocén Dunahomokot ki kell kapcsolnunk a lösz-csoportból. A 17. számú, királyházai löszagyagot sem lehet figyelembe vennünk.

A táblázat adatai szerint a megvizsgált löszök nagymértékben megegyező szemcseeloszlásúak (v. ö. a 9., 10. és 11. ábrával). Ezt a szemcseeloszlást jellemzi, hogy a *0·02—0·05 mm közti átmérőjü szemek mennyisége a legnagyobb*, 23·52% (12. számú letkési lösz) és

[1] L. c. 730.

**II. táblázat.**

| Szemcse-átmérő mm | Desztillált vízben | | 0·005 n nátrium-oxalátban | | Desztillált vízben | | 0·005 n nátrium-oxalátban | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. *Zebegény. Dunapart.* | | | | 4. *Zebegény. Malomhegy.* | | | |
| >0·1 | 4·37 | | 13·23 | | 4·88 | | 3·47 | |
| 0·1—0·05 | 24·98 | 64·49 | 13·17 | 62·57 | 12·79 | 56·83 | 11·84 | 55·56 |
| 0·05—0·02 | 35·14 | | 36·17 | | 39·16 | | 40·25 | |
| 0·02—0·01 | 16·68 | | 12·38 | | 19·62 | | 16·03 | |
| 0·01—0·005 | 7·58 | 32·65 | 9·44 | 27·69 | 8·17 | 37·38 | 9·71 | 32·51 |
| 0·005—0·002 | 8·39 | | 5·87 | | 9·59 | | 6·77 | |
| 0·002—0·001 | 2·85 | 2·85 | 7·93 | 9·76 | 2·40 | 5·77 | 5·34 | 11·93 |
| <0·001 | | | 1·83 | | 3·37 | | 6·59 | |
| | 99·99 | | 100·02 | | 99·98 | | 100·00 | |
| | 2. *Zebegény.* | | | | 5. *Zebegény. Újvölgy baloldala.* | | | |
| >0·1 | 4·08 | | 3·51 | | 4·20 | | 4·39 | |
| 0·1—0·05 | 17·18 | 55·15 | 17·56 | 56·38 | 15·11 | 66·56 | 13·08 | 59·44 |
| 0·05—0·02 | 33·89 | | 35·31 | | 47·25 | | 41·97 | |
| 0·02—0·01 | 15·38 | | 11·77 | | 16·92 | | 13·40 | |
| 0·01—0·005 | 18·51 | 41·11 | 10·92 | 29·47 | 6·59 | 29·76 | 8·68 | 29·22 |
| 0·005—0·002 | 7·22 | | 7·78 | | 6·25 | | 7·14 | |
| 0·002—0·001 | 1·52 | 3·70 | 10·25 | 13·10 | 3·18 | 3·19 | 5·27 | 11·31 |
| <0·001 | 2·18 | | 2·85 | | 0·01 | | 6·04 | |
| | 99·96 | | 99·95 | | 99·51 | | 99·97 | |
| | 3. *Szob. Újvölgy.* | | | | 6. *Ipolydamásd. Szárazpatak.* | | | |
| >0·1 | 4·44 | | 6·28 | | 2·99 | | 3·04 | |
| 0·1—0·05 | 9·15 | 48·17 | 10 89 | 49·10 | 12·73 | 55·75 | 12·44 | 55·38 |
| 0·05—0·02 | 34·58 | | 31·93 | | 40·03 | | 39·90 | |
| 0·02—0·01 | 21·73 | | 14·95 | | 23·25 | | 19·57 | |
| 0·01—0·005 | 10·91 | 47·71 | 11·17 | 35·35 | 8·39 | 38·77 | 10·36 | 38·29 |
| 0·005—0·002 | 15·07 | | 9·23 | | 7·13 | | 8·36 | |
| 0·002—0·001 | 0·37 | 4·16 | 7·94 | 15·70 | 1·93 | 4·53 | 2·28 | 6·36 |
| <0·001 | 3·79 | | 7·66 | | 2·60 | | 4·08 | |
| | 100·04 | | 100·05 | | 99·05 | | 100·03 | |

**II. táblázat.** (Folytatás.)

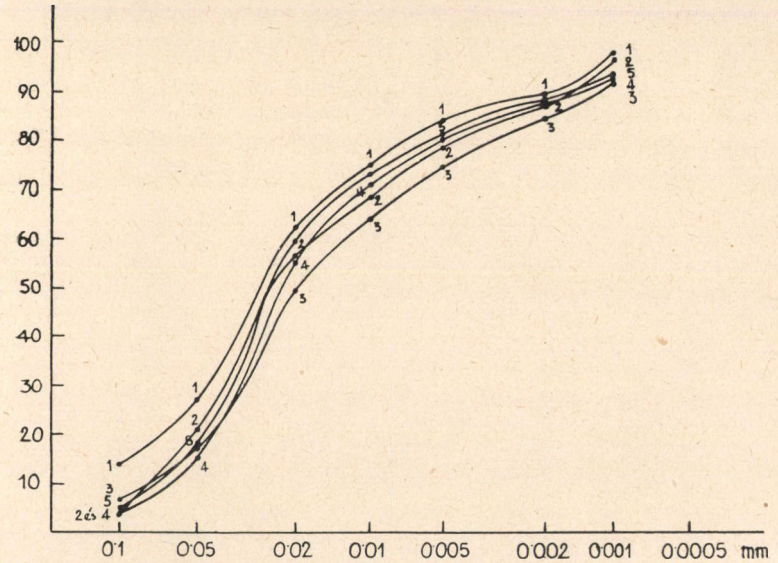
| Szemcse-átmérő mm | Desztillált vízben | | 0·005 n nátrium-oxalátban | | Desztillált vízben | | 0·005 n nátrium-oxalátban | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7. *Letkés. Széppataki-puszta.* | | | | 10. *Márianosztra. Csákhegy.* | | | |
| >0·1 | 4·45 | | 8·85 | | 14·40 | | 14·36 | |
| 0·1—0·05 | 12·45 | 56·42 | 12·28 | 59·22 | 8·79 | 58·89 | 2·63 | 50·82 |
| 0·05—0·02 | 39·52 | | 38·09 | | 32·70 | | 33·83 | |
| 0·02—0·01 | 21·53 | | 14·38 | | 21·38 | | 19·17 | |
| 0·01—0·005 | 15·90 | 41·06 | 9·14 | 31·14 | 10·09 | 40·17 | 13·38 | 41·72 |
| 0·005—0·002 | 3·63 | | 7·62 | | 8·70 | | 9·17 | |
| 0·002—0·001 | 0·73 | 2·46 | 5·52 | 9·61 | 3·08 | 3·71 | 3·68 | 7·44 |
| <0·001 | 1·73 | | 4·09 | | 0·63 | | 3·76 | |
| | 99·94 | | 99·97 | | 99·77 | | 99·98 | |
| | 8. *Ipolydamásd. Alsó Csikóhegy.* | | | | 11. *Márianosztra. Himpfner-hid.* | | | |
| >0·1 | 14·18 | | 9·22 | | 7·47 | | 9·75 | |
| 0·1—0·05 | 12·66 | 67·75 | 13·73 | 63·37 | 12·22 | 55·23 | 10·43 | 53·51 |
| 0·05—0·02 | 40·91 | | 40·42 | | 35·54 | | 33·33 | |
| 0·02—0·01 | 11·14 | | 11·04 | | 21·97 | | 17·70 | |
| 0·01—0·005 | 8·09 | 28·61 | 7·29 | 26·26 | 10·69 | 44·20 | 11·49 | 37·31 |
| 0·005—0·002 | 9·38 | | 7·93 | | 11·54 | | 8·12 | |
| 0·002—0·001 | 0·00 | 3·63 | 8·47 | 10·40 | 0·59 | 0·59 | 4·32 | 9·42 |
| <0·001 | 3·63 | | 1·93 | | 0·00 | | 5·10 | |
| | 99·99 | | 100·03 | | 100·02 | | 100·24 | |
| | 9. *Ipolydamásd. Alsó Csikóhegy.* (Pleisztocén homok). | | | | 12. *Letkés. Középhegy, nyugati oldal.* | | | |
| >0·1 | 12·65 | | 14·10 | | 12·44 | | 20·61 | |
| 0·1—0·05 | 32·08 | 81·22 | 32·42 | 75·37 | 36·24 | 76·13 | 27·11 | 71·24 |
| 0·05—0·02 | 36·49 | | 28·85 | | 27·45 | | 23·52 | |
| 0·02—0·01 | 10·84 | | 8·83 | | 8·69 | | 8·18 | |
| 0·01—0·005 | 4·48 | 17·41 | 7·52 | 21·14 | 5·63 | 20·84 | 7·17 | 17·70 |
| 0·005—0·002 | 2·09 | | 4·79 | | 6·52 | | 2·35 | |
| 0·002—0·001 | 0·22 | 1·38 | 2·44 | 3·47 | 0·49 | 3·06 | 4·14 | 11·08 |
| <0·001 | 1·16 | | 1·03 | | 2·57 | | 6·94 | |
| | 100·21 | | 99·98 | | 100·03 | | 100·02 | |

**II. táblázat.** (Folytatás.)

| Szemcse-átmérő mm | Desztillált vízben | | 0·005 n nátrium-oxalátban | | Desztillált vízben | | 0·005 n nátrium-oxalátban | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 13. *Letkés. Délkeleti vízmosás.* | | | | 16. *Nógrád. Várhegy.* | | | |
| >0·1 | 1·75 | 62·62 | 10·05 | 62·41 | 35·22 | 77·48 | 43·26 | 81·27 |
| 0·1—0·05 | 17·67 | | 13·00 | | 27·60 | | 23·82 | |
| 0·05—0·02 | 43·20 | | 39·36 | | 14·66 | | 14·19 | |
| 0·02—0·01 | 16·62 | 35·34 | 14·71 | 26·85 | 9·58 | 20·55 | 6·36 | 15·39 |
| 0·01—0·005 | 10·67 | | 7·36 | | 5·89 | | 4·82 | |
| 0·005—0·002 | 8·05 | | 4·78 | | 5·08 | | 4·21 | |
| 0·002—0·001 | 0·09 | 2·01 | 4·67 | 10·68 | 1·96 | 1·96 | 2·06 | 3·35 |
| <0·001 | 1·92 | | 6·01 | | 0·00 | | 1·29 | |
| | 99·97 | | 99·94 | | 99·99 | | 100·01 | |
| | 14. *Letkés. Középhegy nyugati háta.* | | | | 17. *Kemence. Királyháza.* | | | |
| >0·1 | 4·37 | 58·30 | 8·20 | 56·81 | 2·17 | 42·48 | 1·77 | 35·03 |
| 0·1—0·05 | 10·93 | | 13·79 | | 8·41 | | 6·13 | |
| 0·05—0·02 | 43·00 | | 34·82 | | 31·90 | | 27·13 | |
| 0·02—0·01 | 17·40 | 38·44 | 16·28 | 31·49 | 22·19 | 52·53 | 18·82 | 39·92 |
| 0·01—0·005 | 15·30 | | 8·32 | | 13·87 | | 11·54 | |
| 0·005—0·002 | 5·74 | | 6·89 | | 16·47 | | 9·56 | |
| 0·002—0·001 | 0·64 | 3·28 | 4·16 | 11·65 | 1·13 | 5·03 | 6·55 | 25·05 |
| <0·001 | 2·64 | | 7·49 | | 3·90 | | 18·50 | |
| | 100·02 | | 99·95 | | 100·04 | | 100·00 | |
| | 15. *Nagybörzsöny.* | | | | 13 *jellegzetes lösz középértéke.* (A 9., 12., 16. és 17. minta kivételével). | | | |
| >0·1 | 11·92 | 64·10 | 14·14 | 57·24 | 6·42 | 59·02 | 8·35 | 57·06 |
| 0·1—0·05 | 14·46 | | 14·82 | | 13·93 | | 12·28 | |
| 0·05—0·02 | 37·72 | | 28·28 | | 38·67 | | 36·43 | |
| 0·02—0·01 | 17·73 | 31·43 | 14·25 | 32·93 | 18·57 | 37·44 | 15·05 | 32·40 |
| 0·01—0·005 | 8·17 | | 9·62 | | 10·70 | | 9·76 | |
| 0·005—0·002 | 5·53 | | 9·05 | | 8·17 | | 7·59 | |
| 0·002—0·001 | 1·89 | 4·15 | 4·87 | 9·85 | 1·48 | 3·38 | 5·75 | 10·55 |
| <0·001 | 2·26 | | 4·98 | | 1·90 | | 4·80 | |
| | 99·68 | | 100·01 | | 99·84 | | 100·01 | |

47·25% (5. számú zebegényi lösz) között ingadozik. Ezenkívül azonban az 0·1 és 0·05 mm s a 0·02—0·01 mm közti átmérőjü szemcsék mennyisége is elég tekintélyes. Mégpedig a 0·02—0·01 mm átmérőjű szemcsék átlag nagyobb mennyiségben fordulnak elő, mint a 0·1—0·05 mm átmérőjűek. Ebből a szempontból tehát a Börzsönyi-hegység és a budapestkörnyéki megvizsgált lösz megegyező.

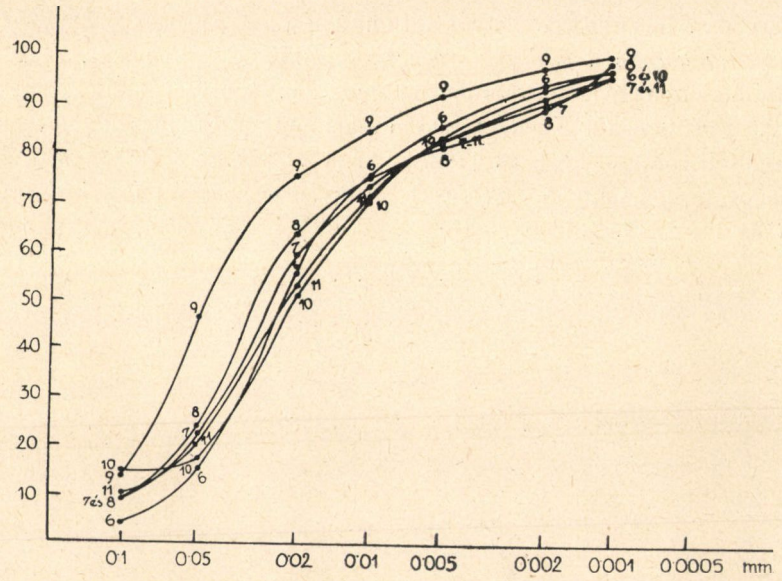
Kissé eltérő mechanikai összetételű a 16. számú nógrádi lösz. Ebben aránylag sok a durva — 0·1 mm-nél nagyobb átmérőjű —



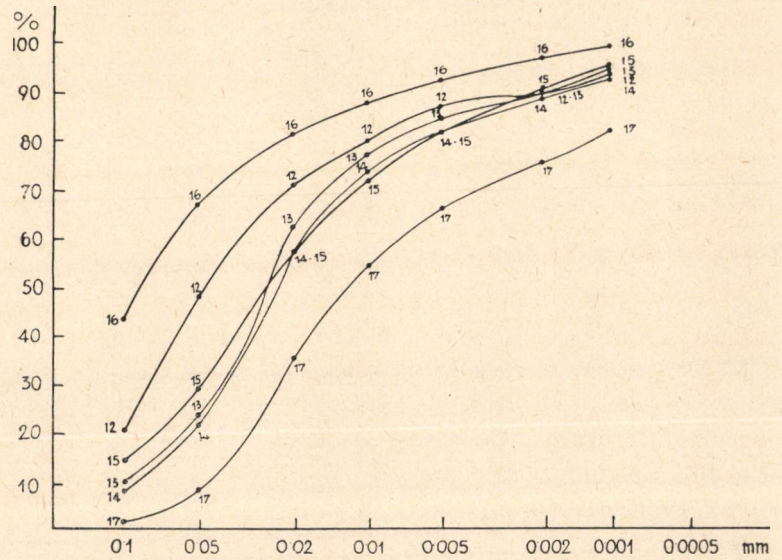

9. ábra. Az 1., 2., 3., 4. és 5. számú lösz szemcseeloszlási görbéje a pipetta-módszer alapján 0·005 normál nátriumoxaláttal.

szemcse. Ez a kőzet a többi löszhöz képest meglehetősen durva szemcséjű. Ez a lösz a hegység eruptiv területének keleti szélén fordul elő, ott, hol nagy területet borító harmadkori üledékek uralma kezdődik. Magát a nógrádi Várhegyet is homokos lerakodások veszik körül. Valószínű, hogy ennek a lösznek erősen homokos jellege onnan ered, hogy a környező homokokból elég sok durva kvarcszemet vitt magával a szél nyugat felé. A kvarcszemek egyik része azonban a fekvő kőzetből, a dácitból származik.

Igen érdekes a 12., 13. és 14. számú letkési lösz elemzési adatai-

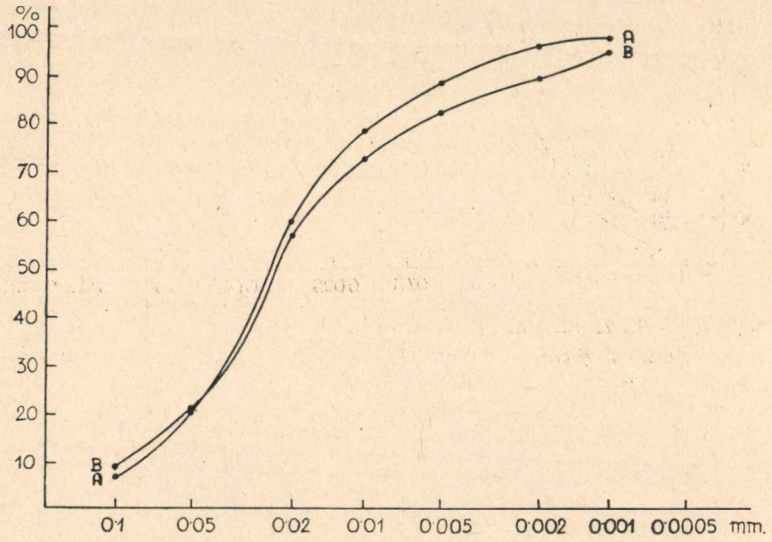



10. ábra. A 6., 7., 8., 10., 11. számú lösz és a 9. számú pleisztocén homok szemcseeloszlási görbéje. A meghatározás módja ugyanaz, mint az előbbi ábrára vonatkozólag.




11. ábra. A 12., 13., 14., 15., 16. és 17. számú lösz szemcseeloszlási görbéje. A meghatározás módja ugyanaz, mint a két előző ábrára vonatkozólag.

nak összehasonlítása. Ebből kitűnik, hogy a *homokos fekvőkőzet, illetőleg környezet a durva szemcsék mennyiségét megnöveli.* A 12. számú lösz az alatta lévő miocén homok közeléből származik. Ennek a lösznek összetételében az 0·05 mm-nél nagyobb szemcsék mennyisége elég nagy (48·68 és 47·77%). A 13. és 14. számú löszben az 0·05 mm-nél nagyobb szemcsék mennyisége azonban jóval kisebb (19·42 és 23·05%, illetőleg 15·30 és 21·99%). A két utoljára említett




12. ábra. A 13 jellegzetes lösz szemcseeloszlásának középértékét feltüntető görbék. *A* = desztillált vízben; *B* = 0·005 normál nátriumoxalátban.

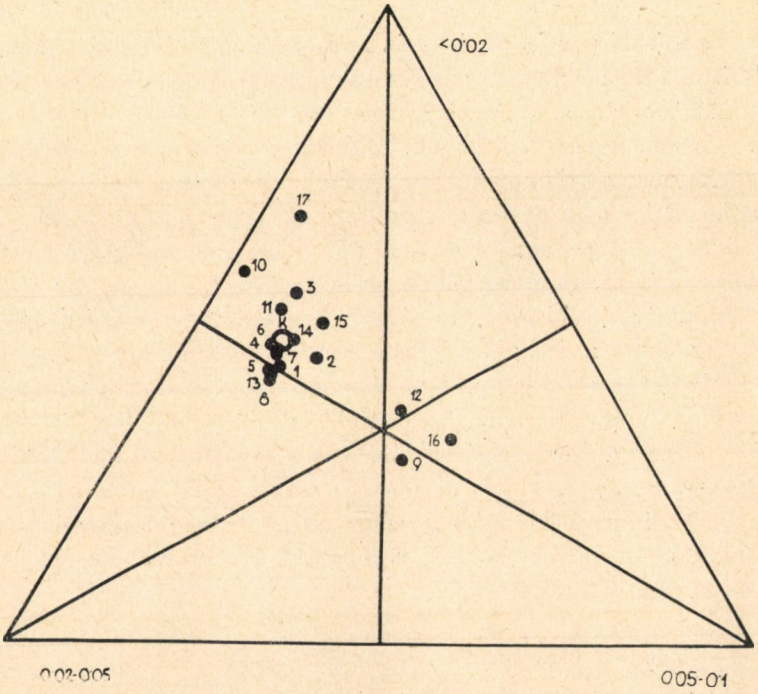
lösz nem homokon, hanem agyagon (13. számú) és amfibolandezit-breccsán terül el.

Már a budapestkörnyéki lösz tanulmányozásakor feltünt, hogy a durva homokos fekvő kőzeten, vagy közvetlenül a durva homok közelében levő löszben a nagyobb szemcsék mennyisége megnőhet. A budafoki löszben például mintegy 8 súlyszázaléknyi 2 mm-nél nagyobb átmérőjű szem volt.[1]

A 13 jellegzetes lösz mechanikai elemzési adataiнak közép-

[1] VENDL A.—TAKÁTS T.—FÖLDVÁRI A.: l. c. 750.

értékét a II. táblázat utolsó két rovata tünteti fel. A középérték kiszámításakor a 9. számú pleisztocén dunai homokot, a 12. számú durva homokos löszt, mely a homokos fekvő közeléből való, továbbá a 16. számú durva löszt és a 17. számú löszagyagot nem vettük figyelembe. *Ezek az adatok lényegileg megegyeznek a budapestkörnyéki*




13. ábra. A megvizsgált üledékek projekciópontja háromszögdiagrammban. *K* = középérték. Az értékek a 0·005 normál nátriumoxalátoldatban végzett meghatározások eredményei.

*löszök megfelelő középértékeivel.* A 12. ábra két görbéje is ugyanolyan lefutású mint a budapestkörnyéki löszökről szerkesztett megfelelő görbék. A görbék a legmeredekebbek az 0·05 és 0·02 mm között lévő szemnagyságnak megfelelő szakaszon.

A <0·02, 0·02—0·05 és 0·05—0·1 mm átmérőjű szemcsék mennyiségéből szerkesztett háromszögdiagrammban (13. ábra) a jellegzetes 13 lösz projekciópontja közel egymáshoz egy zárt mező-

ben helyezkedik el. Ezek a pontok ugyanazon a területen vannak, mint a budapestkörnyéki löszök megfelelő projekciópontjai. Ez a terület részben fedi a széltől szállított valódi eolikus üledékek számára KÖLBLTŐL[1] meghatározott mezőt.

A durvább szemű homokosabb löszök (12., 16. számú) és a 9. számú pleisztocén homok projekciópontja a 0·05—0·1 csúcs felé tolódott el a jellegzetes löszmezőtől. A 17. számú, királyházai löszagyag projekciópontja pedig — az apróbbszemű összetételnek megfelelően — a <0·02 csúcs felé került.

A középértékek fontosabb számai és a KÖLBL[2]-féle számok közt bizonyos megegyezést találunk. A jellegzetes tizenhárom lösznek 0·005 normál nátriumoxalátban nyert középértéke a 0·05 és 0·02 mm közötti szemnagyságra vonatkozólag 36·43%, a 0·02 mm-nél kisebbre vonatkozólag 42·95%. A desztillált vízben végzett meghatározások szerint a megfelelő értékek 38·67%, illetve 40·78%. A budapestkörnyéki löszökre nézve is ezekhez nagyon közeli értékeket nyertünk: nátriumoxalátban a 0·05 és 0·02 mm közötti szemnagyságra vonatkozólag 32·11%, a 0·02 mm-nél kisebbre 47·07%; desztillált víz esetében a megfelelő értékek: 33·80%, illetőleg 42·47%. Mind a két terület löszeinek középértékei valamivel nagyobbak KÖLBL[2] számainál.

A 0·002 mm-nél kisebb (nyersagyag), 0·002—0·02 (iszap) és a 0·02 mm-nél nagyobb (homok) szemcsenagyságú részletekre vonatkozó középértékek:

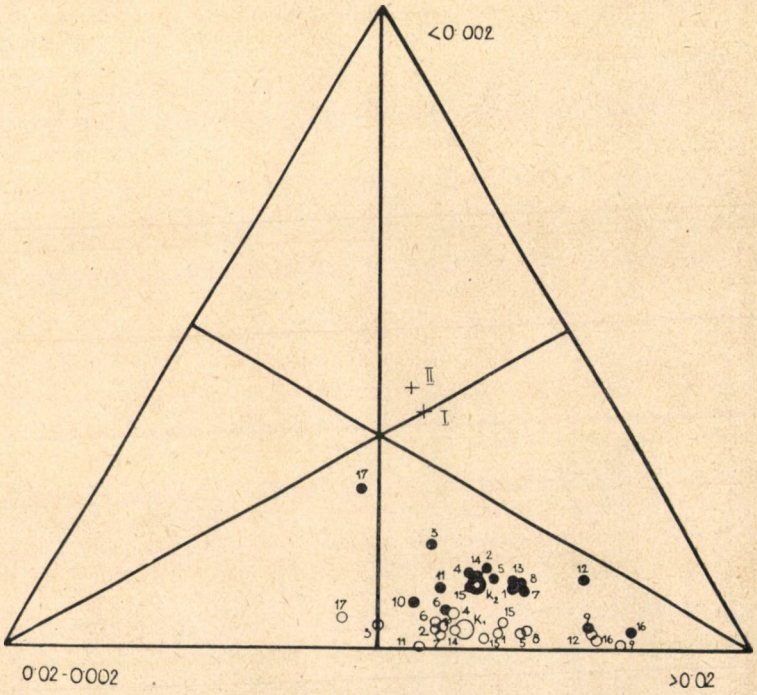
| szemcsenagyság ..... | >0·02 | 0·02—0·002 | <0·002 mm |
|---|---|---|---|
| desztillált vízben ..... | 59·02% | 37·44% | 3·38% |
| nátriumoxalát-oldatban | 57·06% | 32·40% | 10·55% |

A megfelelő pontokat ($K_1$ és $K_2$), valamint mind a 17 megvizsgált üledék iszapolási eredményének megfelelő projekciópontokat háromszögdiagrammban a 14. ábra tünteti fel. A két kissé durvább szemű lösznek (12. és 16. szám) és a pleisztocén dunai homoknak (9. szám) megfelelő pontok a háromszög >0·02 csúcsa közelében

[1] KÖLBL, L.: Über die Aufbereitung fluviatiler und äolischer Sedimente. Min. u. Petr. Mitt. 41. 1931. 129—144.

[2] KÖLBL, L.: Studien über den Löss. Mitt. d. Geol. Ges. in Wien. 23. 1930. 85—121.

helyezkednek el. Tehát jól jelzik a kissé durvább szemnagyságú összetételt. Viszont a 17. számú löszagyag a kissé felfelé, — a $<0{\cdot}002$ csúcs felé — eltolódott pontban jelentkezik. Összehasonlításul feltüntettünk még két pontot Ballenegger Róbert[1] nyomán, me-




14. ábra. A pipettamódszerrel megvizsgált 17 üledék $<0{\cdot}002$, $0{\cdot}002$—$0{\cdot}02$ és $>0{\cdot}02$ mm szemcsenagyságra vonatkozó értékeinek s a 13 jellegzetes löszre vonatkozó adatok középértékeinek projekciópontjai háromszögdiagrammban. A körök desztillált vízben, a pontok 0·005 normál nátriumoxalátban meghatározott értékek. $K_1$ = a desztillált vízzel; $K_2$ = 0·005 normál nátriumoxaláttal nyert középértékek. *I* = magyarádi nyirok, *II* = mádi nyirok.

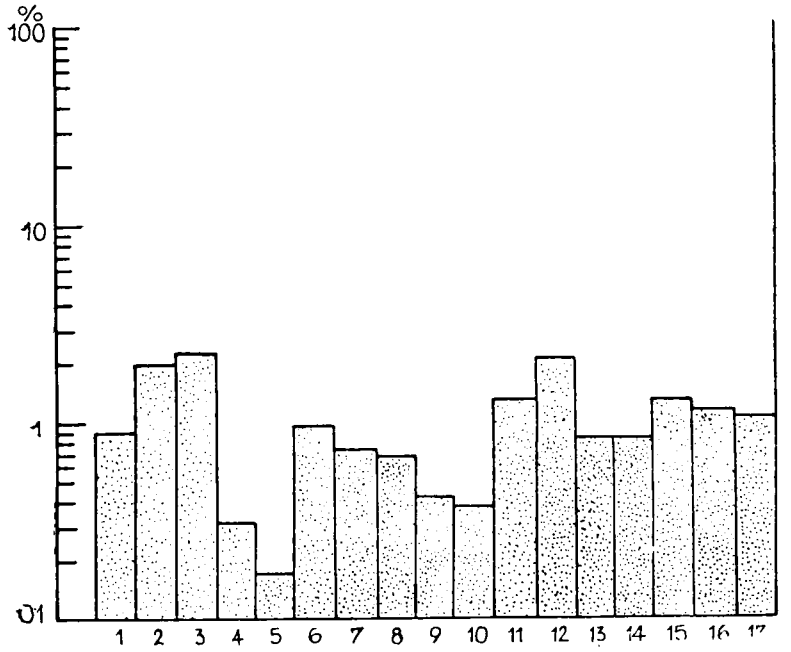
lyek a magyarádi (I.) és mádi (II.) nyirok mechanikai összetételét szemléltetik. Amint látszik a löszagyag mechanikai összetétele lényegesen különbözik a hegyaljai nyirokétól.

[1] Ballenegger R.: Magyarországi talajtípusok mechanikai vizsgálatának eredményei. A m. kir. Földtani Int. Évi Jelentése 1915-ről. 496.

## Ásványtani vizsgálat.

A löszmintákat a mikroszkópos vizsgálatokra éppen úgy készítettük elő, mint a budapestkörnyéki löszöket. Mindig 80 g löszből indultunk ki.

A III. táblázaton látjuk az elválasztások eredményét. A 15. ábra a 2·9-nél nagyobb sűrűségű szemcsék mennyiségét tünteti fel




15. ábra. A 2·9-nél nagyobb sűrűségű szemcsék mennyisége a 0·02 mm-nél nagyobb szemek súlyszázalékában.

a 0·02 mm-nél nagyobb szemek súlyszázalékában. A súlyszázalékot logaritmusos skála ábrázolja.

A szemcsenagyság és a nagysűrűségű ásványok mennyisége közt nincs általános érvényű összefüggés, azaz a durvábbszemű lösz nem okvetlenül tartalmaz több nehéz ásványt is. Vagyis a nehezebb szemcsék szerepe nem fogható fel egyszerűen úgy, hogy a növekedő sűrűség szerepe a szél szállító erejével szemben teljesen olyan jellegű volna, mint a szemcsenagyság növekedésének befolyása.

**III. táblázat.**

| A lösz száma | A feldolgozott anyag mennyisége g-ban | A 0·02 mm-nél nagyobb átmérőjű szemek mennyisége | | A 2·9-nél nagyobb sűrűségű szemek | | A 2·9-nél nagyobb sűrűségű szemcsék mennyisége a 0·02 mm-nél nagyobb átmérőjű szemcsék súly %-ában |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | g-ban | súly %-ban | mennyisége g-ban | feldolgozott anyag súly %-ában | |
| 1 | 80 | 55·45 | 69·31 | 0·4993 | 0·62 | 0·90 |
| 2 | 80 | 46·68 | 58·35 | 0·8986 | 1·12 | 1·93 |
| 3 | 80 | 40·21 | 50·26 | 0·9059 | 1·13 | 2·25 |
| 4 | 80 | 51·61 | 64·51 | 0·1598 | 0·20 | 0·31 |
| 5 | 80 | 55·29 | 69·11 | 0·0960 | 0·12 | 0·17 |
| 6 | 80 | 44·79 | 55·99 | 0·4317 | 0·54 | 0·96 |
| 7 | 80 | 59·51 | 74·39 | 0·4366 | 0·55 | 0·73 |
| 8 | 80 | 57·42 | 71·77 | 0·3828 | 0·48 | 0·67 |
| 9 | 80 | 66·84 | 83·55 | 0·2808 | 0·35 | 0·42 |
| 10 | 80 | 55·71 | 69·64 | 0·2082 | 0·26 | 0·37 |
| 11 | 80 | 51·56 | 64·45 | 0·6603 | 0·83 | 1·28 |
| 12 | 80 | 64·61 | 80·76 | 1·3466 | 1·68 | 2·08 |
| 13 | 80 | 56·40 | 70·50 | 0·4757 | 0·59 | 0·84 |
| 14 | 80 | 52·82 | 66·02 | 0·4439 | 0·56 | 0·84 |
| 15 | 80 | 54·89 | 68·61 | 0·6980 | 0·87 | 1·27 |
| 16 | 80 | 64·13 | 80·16 | 0·7204 | 0·90 | 1·12 |
| 17 | 80 | 44·06 | 55·07 | 0·4577 | 0·57 | 1·04 |

A börzsönyi-hegységi löszökön megfigyelhető azonban, hogy a közvetlenül a homokos üledékek felett, vagy közelében települt löszben a *legnagyobb a nehéz ásványok mennyisége*. Így a 2. és 3. számú lösz pleisztocén dunai homokon telepszik, a 12. számú miocén homokon. Mind a három minta a lösz aljából, a fekvőkőzet közeléből való. A budapestkörnyéki löszök közül is azokban volt legtöbb nagyobb sűrűségű ásvány, melyek közvetlenül durvább törmelékes kőzetek fölött települtek.

A vulkáni eredetű kőzetek fölött települt löszökben (5., 7., 8., 10., 14. számú lösz) a nehéz ásványok mennyisége alig valamivel nagyobb a budai hegyek mészkövein nyugvó löszökben talált értékeknél. Vagyis a vulkáni eredetű kőzet és a mészkő, mint fekvő, a fölötte levő lösz ásványainak mennyisége szempontjából nem nagyon különbözik. Minőség tekintetében azonban általában azt tapasztaljuk, hogy a mészkövekre települt lösz alsó része aránylag sok mészkőszemcsét tartalmaz (Lásd a budapestkörnyéki löszök[1] közül az 1., 4., 5. és 9. számú mintát.). Érdekes azonban, hogy a Börzsönyi-hegységben a völgyekben, vagy egykori völgyekben vulkáni eredetű kőzetekre települt löszök aránylag sok nehéz ásványt tartalmaznak. (6., 11., 17. számú lösz.) Lehet, hogy ezt a többletet talán a felszínen, a lejtőkről bemosott nehéz ásványok idézik elő. Csak több vulkáni terület löszének részletes tanulmányozása után fog eldőlni, hogy ez a megfigyelés mennyire általános érvényű.

A szétválasztott részletek mindegyikét megvizsgáltuk mikroszkóppal, lényegében olyan módszerekkel, mint a budapestkörnyéki löszt. A vizsgálatok folyamán megint elsősorban a nagyobb mennyiségben jelenlévő és jellegzetes ásványokat tartottuk szem előtt. Ritkaságokat külön nem kerestünk.

Az ásványtani vizsgálatok részletes eredményei lényegükben ugyanazok, mint amelyeket a Börzsönyi-hegység négy löszének tanulmányozása alapján közöltünk.[2]

Az ásványszemcsék a börzsönyi-hegységi löszben is szögletesek. Ez a szögletesség azonban — éppenúgy, mint a budapestkörnyéki

[1] L. c. 751.

[2] VENDL A.: A Börzsönyi-hegység néhány löszéről. Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője. LIII. 1935. 181—201.

löszökben — jóval gyengébb mint a folyami homok szögletessége, szilánkossága ; úgyhogy a löszt a szemcsék alakja révén a tisztán folyami finomszemű homoktól meg lehet különböztetni. Viszont azonban jóval kevésbbé koptatott, mint a jellegzetes futóhomok szemecskéi.

A meghatározott ásványok ugyanazok, mint amelyeket a négy, már előbb megvizsgált löszben megállapítottunk.[1] Néhány megfigyelésről azonban meg kell külön emlékeznünk:

A megvizsgált löszök között vannak olyanok, melyeknek kalcit-tartalma igen kicsiny (Nógrád, Nagybörzsöny). A királyházai löszagyag csak nyomokban tartalmaz a mikroszkópos vizsgálat szerint kalcitot. A kémiai elemzés a megvizsgált mintában nem is tudott $CO_2$-t mérhető mennyiségben kimutatni. Ez a lösz, miként a mállott, löszagyaggá alakult löszök általában, elvesztette eredeti kalciumkarbonát tartalmát. Lehet, hogy talán a nógrádi és a nagybörzsönyi lösz is már kissé átalakult ugyanilyen módon.

Érdekes, hogy a nógrádi löszben a *barnásszínű, zárványos apatit* aránylag ritka. Ez a lösz harmadkori homokos üledékek területével körülvett. Valószínű, hogy ezekben az üledékekben a barna apatit vagy csak igen alárendelt szerepű, vagy talán teljesen hiányzik.

Feltűnő, hogy ugyancsak a nógrádi löszben aránylag kevesebb a *barna amfibol*, mint a hegység belsejében, a tulajdonképeni nagy eruptiv területen előforduló löszben. A *hipersztén* mennyisége is kicsi. Mind a két ásvány az eruptiv terület kőzeteiben fordul elő nagyobb mennyiségben. Ezek helyett azonban a nógrádi lösz aránylag több *muszkovitot* és *kloritot* tartalmaz, mint a többi börzsönyi-hegységi lösz. Igen valószínű, hogy ezeknek az ásványoknak egy része a harmadkori csillámos, homokos üledékekből származik.

Az andaluzitot, sillimanitot és a korundot az említett dolgozatban felsorolt löszökön kívül több megvizsgált próbában megállapítottuk, pl. a nógrádi löszben néhány szép, erősen pleochroós andaluzitot s szálas, pamatos kifejlődésű sillimanitot találtunk. A csákhegyi löszben a talált sillimanit a főtengely két vége felé szálasan szétbomlott.

A *vörösbarna biotitok* tengelyszöge néha elég nagy, néha 25°—

[1] Vendl A.: l. c. 184—200.

30°-ot is elér. Így pl. a 7. számú széppataki löszben levő biotitokon 27°—30°-ot is mértünk. A vörösbarna biotitok némelyike idiomorf, hatszögletes körvonalú (6. számú lösz), azaz a prizmazóna is jól kifejlődött.

A *baueritosodott biotit* mennyisége változó.

A *hipersztén* némelykor a főtengellyel párhuzamosan rostos: a rostos részek sárgák, s csak a nem rostos eredeti részleteken látszik a normális pleochroizmus. A rostos részek valószínűleg limonitos átváltozási termékek. Ezenkívül basztitosodó hipersztének is akadnak.

*Limonit*pszeudomorfoza főleg hipersztén, néha amfibol után elég elterjedt. Némelyik szemecske magvában még megvan az eredeti, el nem bomlott, pleochroós hipersztén (pl. 17. számú lösz).

A *titanit*szemecske közepében ritkán rutilt találunk. (12. számú lösz.)

*Spinell* (zöld színnel átlátszó) egy-egy szemecskéje a 12. és 13. számú mintában is előfordult. Miként idézett közleményünkben említettük, a spinell a Börzsönyi-hegység némely kontaktmetamorf kőzetében ismeretes Papp Ferenc[1] közlése szerint.

Az ásványtani vizsgálat *általános* eredménye is lényegében ugyanaz, mint amelyet négy lösznek tanulmányozása alapján kimondhattunk. A meghatározott ásványok ugyanazok, mint aminőket a budapestkörnyéki löszben megállapítottunk. Az ásványok minőségében tehát nem állapítható meg különbség.

A budapestkörnyéki lösztől lényeges eltérés mutatkozik azonban akkor, ha a nagysűrűségű ásványok egymáshoz viszonyított mennyiségét vizsgáljuk meg.

Mindegyik lösz nagysűrűségű részletében a barna amfibol és a hipersztén az uralkodó. Különösen a durvábbszemű részlet (>0·02 mm) tartalmaz sok barna amfibolt és hipersztént. A nagysűrűségű részlet legnagyobb szemcséi főleg barna amfibolból és hiperszténből állanak.

A budapestkörnyéki löszben a nagysűrűségű részlet (a csillámok kivételével) átlag 30 térfogat % amfibolt és 5 térfogat %

[1] Papp F.: l. c. 438. — A Börzsönyi-hegység andezit- és dácitkontaktusai. Földtani Közlöny. LXII. 1932. 122—129.

piroxént, főleg hipersztént tartalmazott. Az amfibol nagyobb része zöld amfibol volt.

A börzsönyi-hegységi löszökben is a nagysűrűségű részletben (a csillámok kivételével) az amfibol és a piroxén (főleg hipersztén) mennyiségének összege nagyjában átlag szintén ugyanennyi, t. i. 35—40 térfogat % körül ingadozik. Az amfibol és hipersztén egymáshoz való viszonya azonban más, mint a budapestkörnyéki löszben, t. i. a börzsönyi-hegységi löszben a hipersztén mennyisége megközelíti az amfibolét, sőt néha el is éri. Ritkán az amfibol és a hipersztén mennyiségének összege a nagysűrűségű részlet térfogatának felét is eléri. Néhány számadat a következő:

A 17. számú kőzetben az amfibol (főleg barnaszínű) és a hipersztén együtt a nehéz részletnek mintegy 40 térfogat %-a, ebből mintegy 40% barna amfibol, a többi hipersztén. A 11. számú löszben a nagysűrűségű részletnek több mint a fele (51 térfogat %) barna amfibol és hipersztén; ebből az amfibol mintegy 55 térfogat %, a többi hipersztén. A 10. számú löszmintában a nehéz ásványok közül a barna amfibol és a hipersztén együtt mintegy 38 térfogat %; ebből mintegy 58 térfogat % amfibol, a többi hipersztén.

Lényegileg hasonlít a barna amfibol és a hipersztén eloszlása a többi megvizsgált löszmintában is.

Ezek a megfigyelések természetesen főként a durvább szemnagyságú részletre vonatkoznak, mert az igen apró szemecskék meghatározása gyakran kivihetetlen. Eltérések főként csak abban mutatkoznak, hogy a barna amfibolok és a hipersztének egymáshoz való viszonylagos mennyisége ingadozik.

A 16. számú mintában aránylag kevés barna amfibolt s igen kevés hipersztént találtunk. Ez a lösz — mint fentebb már jeleztük — az eruptiv terület keleti szélén fordul elő, ott, hol a homokos üledékek uralma kezdődik; magát a dácitból álló nógrádi Várhegyet (melyen ez a lösz előfordul) is homokos lerakodások veszik körül. Itt az eruptiv területre jellemző ásványok már csak jóval kisebb szerepűek. A barna amfibolok s a hipersztének a Börzsönyi-hegység andezitjainak jellegzetes ásványai.

Az ásványtani vizsgálatok ezek szerint *megerősítették szélesebb alapon azokat a megállapításokat, melyeket* Vendl A. *a Börzsönyi-hegység néhány löszéről című dolgozatban közölt.*

## Kémiai összetétel.

A kémiai elemzéseket TAKÁTS TIBOR készítette. Az eredményeket a IV. és V. táblázat foglalja össze.

A táblázat adataiból kitűnik, hogy az elemzett löszök kémiai összetétele igen különböző. Néhány számot itt is kiemelünk: az $SiO_2$ 54·75% és 75·83%, az $s$ 67·68 és 85·49, az $si$ 206 és 584 között ingadozik; a $CaO$ is tág határok között változik: 0·51% illetőleg (ha a királyházai erősen mésztelenedett lőszagyagtól eltekintünk) 0·73% és 8·72%, a $CO_2$ 0·16% és 11·02% között ingadozik.

Miként már a budapestkörnyéki lösz tárgyalásakor hangsúlyoztuk, a teljes kémiai elemzés eredményei nem alkalmasak a széltől szállított eredeti anyag összetételének megítélésére. Ezért most is a $CO_2$ mennyiségéből kiindulva a számított $CaCO_3$ és $MgCO_3$ mennyiségét, valamint a $H_2O_{-110}$-et kivontuk s a maradt értékeket százalékban fejeztük ki. A VI. táblázat tartalmazza az átszámított összetétel percentszámait; a VII. táblázat a megfelelő OSANN- és NIGGLI-féle értékeket tünteti fel.

A két táblázat adataiból látszik, hogy az oxidok értékei sokkal kevésbbé ingadoznak, mint az eredeti elemzések eredményei szerint. Az ingadozás aránylag kicsi, körülbelül olyan, mint a budapestkörnyéki löszök elemzéseinek megfelelő értékeiben. Az $SiO_2$ 66·03% és 76·74% között (a hét minta közül hatban 66·03% és 74·84% között), az $Al_2O_3$ 10·94% és 15·88% közt, az $Fe_2O_3$ 2·76% és 4·99% közt (hat mintában 3·15% és 4·99% között), az $Na_2O$ 1·18% és 1·76% között, a $K_2O$ 1·45% és 1·88% között. Az OSANN-féle értékek a következők: $s$=77·10—85·67 (a budapestkörnyéki löszökre vonatkozólag 77·02—83·43), $a$=7·8—12·0 (a budapestkörnyékiekre 7·3—9·7), $f$=15·4—22·3 (20·3—22·7). A NIGGLI-féle értékek a következő számok közt ingadoznak: $si$=332—593 (332—499), $al$=44—54·5 (39·5—50·0), $fm$=24·0—41·5 (34·0—45·0), $alk$=14·0—19·0 (13·0—18·0).

Ezekből a számokból az tűnik ki, hogy valamennyi elemzett lösz közelítőleg azonos összetételű. Az ingadozások alig nagyobbak, mint azoknak a laza üledékeknek kémiai összetételében előforduló különbségek, melyekből a löszök származhatnak. Ez a jelenség és a löszök ásványtani összetétele is arra vall, hogy a

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

## IV. táblázat.

Kémiai összetétel.

| | $SiO_2$ | $TiO_2$ | $Al_2O_3$ | $Fe_2O_3$ | $FeO$ | $MnO$ | $MgO$ | $CaO$ | $Na_2O$ | $K_2O$ | $H_2O+$ | $H_2O-$ | $P_2O_5$ | $CO_2$ | $SO_3$ | $Cl$ | Összeg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Zebegény .... | 54·75 | 0·84 | 10·67 | 2·09 | 0·19 | 0·07 | 4·98 | 8·72 | 0·97 | 1·17 | 3·62 | 0·64 | 0·07 | 11·02 | 0·07 | 0·12 | 99·99 |
| 6. Ipolydamásd . | 63·67 | 1·10 | 13·77 | 4·39 | 0·29 | 0·11 | 1·92 | 2·70 | 1·65 | 1·36 | 4·84 | 2·02 | 0·15 | 1·69 | 0·07 | 0·07 | 99·80 |
| 10. Márianosztra . | 56·81 | 0·91 | 13·42 | 3·98 | 0·22 | 0·11 | 1·22 | 7·45 | 1·41 | 1·58 | 4·93 | 1·34 | 0·05 | 6·13 | 0·08 | 0·11 | 99·70 |
| 11. Márianosztra . | 59·14 | 1·08 | 13·25 | 4·47 | 0·30 | 0·09 | 3·02 | 4·26 | 1·51 | 1·76 | 5·12 | 1·72 | 0·17 | 3·92 | 0·05 | 0·13 | 99·99 |
| 15. Nagybörzsöny . | 68·15 | 1·04 | 13·35 | 4·18 | 0·30 | 0·06 | 1·08 | 1·18 | 1·32 | 1·54 | 4·91 | 1·96 | 0·21 | 0·26 | 0·85 | 0·04 | 100·43 |
| 16. Nógrád ..... | 75·83 | 0·76 | 10·81 | 4·06 | 0·22 | 0·05 | 0·20 | 0·73 | 1·16 | 1·79 | 3·07 | 0·58 | 0·11 | 0·16 | 0·11 | 0·11 | 99·75 |
| 17. Királyháza ... | 73·95 | 1·35 | 11·74 | 3·11 | 0·30 | 0·15 | 0·30 | 0·51 | 1·30 | 1·86 | 3·95 | 1·04 | 0·11 | — | 0·01 | 0·17 | 99·85 |

## V. táblázat.

Osann- és Niggli-féle értékek.

| | $s$ | $A$ | $C$ | $F$ | $T$ | $n$ | sor | $k$ | $a$ | $c$ | $f$ | $si$ | $qz$ | $al$ | $fm$ | $c$ | $alk$ | $k$ | $mg$ | $ti$ | $p$ | $h$ | $co_2$ | $so_3$ | $cl$ | $c/fm$ | Metszet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Zebegény ... | 67·68 | 2·05 | 5·61 | 17·00 | — | 5·61 | $\beta$ | 1·67 | 2·5 | 6·8 | 20·7 | 206 | +81 | 23·5 | 34·5 | 35·0 | 6·5 | 0·44 | 0·81 | 2·99 | 0·11 | 53·54 | 56·71 | 0·20 | 0·77 | 1·01 | VI. |
| 6. Ipolydamásd | 76·42 | 2·91 | 3·42 | 7·67 | 3·25 | 6·50 | $\beta$ | 2·39 | 6·2 | 7·3 | 16·4 | 319 | +170 | 40·5 | 32·5 | 14·5 | 12·5 | 0·35 | 0·44 | 5·17 | 0·33 | 114·53 | 11·55 | 0·27 | 0·60 | 0·45 | IV. |
| 10. Márianosztra | 71·20 | 2·92 | 6·85 | 9·26 | — | 5·75 | $\beta$ | 1·76 | 4·6 | 10·8 | 14·6 | 244 | +103 | 34·0 | 21·5 | 34·0 | 10·0 | 0·43 | 0·36 | 3·66 | 0·10 | 89·57 | 35·87 | 0·26 | 0·80 | 1·58 | VII. |
| 11. Márianosztra | 72·21 | 3·11 | 5·48 | 9·83 | 0·78 | 5·66 | $\beta$ | 1·83 | 5·1 | 8·9 | 16·0 | 255 | +111 | 33·5 | 35·5 | 19·5 | 11·0 | 0·43 | 0·55 | 4·38 | 0·31 | 98·50 | 23·11 | 0·16 | 0·96 | 0·56 | IV. |
| 15. Nagybörzsöny | 80·77 | 2·65 | 1·47 | 5·92 | 5·07 | 5·66 | $\beta$ | 3·26 | 7·9 | 4·4 | 17·7 | 414 | +259 | 48·0 | 31·0 | 7·5 | 14·0 | 0·44 | 0·32 | 5·95 | 0·55 | 139·16 | 2·15 | 3·87 | 0·40 | 0·25 | II. |
| 16. Nógrád ..... | 85·49 | 2·53 | 0·87 | 4·00 | 3·71 | 4·98 | $\gamma$ | 4·09 | 10·3 | 3·5 | 16·2 | 584 | +414 | 49·0 | 27·5 | 6·0 | 17·5 | 0·50 | 0·08 | 5·50 | 0·37 | 93·67 | 1·66 | 0·65 | 1·43 | 0·22 | II. |
| 17. Királyháza . | 85·18 | 2·78 | 0·62 | 3·58 | 4·44 | 5·14 | $\gamma$ | 3·96 | 11·9 | 2·7 | 15·4 | 565 | +390 | 53·0 | 24·0 | 4·0 | 18·5 | 0·49 | 0·14 | 9·69 | 0·46 | 127·18 | 0 | 0·05 | 2·20 | 0·17 | II. |

## VI. táblázat.

Atszámított kémiai összetétel.

| | $SiO_2$ | $TiO_2$ | $Al_2O_3$ | $Fe_2O_3$ | $FeO$ | $MnO$ | $MgO$ | $CaO$ | $Na_2O$ | $K_2O$ | $H_2O+$ | $P_2O_5$ | $SO_3$ | $Cl$ | Összeg |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Zebegény | 72·24 | 1·11 | 14·08 | 2·76 | 0·25 | 0·09 | 1·53 | — | 1·28 | 1·54 | 4·78 | 0·09 | 0·09 | 0·16 | 100·00 |
| 6. Ipolydamásd | 67·78 | 1·17 | 14·66 | 4·67 | 0·31 | 0·12 | 2·04 | 0·59 | 1·76 | 1·45 | 5·15 | 0·16 | 0·07 | 0·07 | 100·00 |
| 10. Márianosztra | 67·21 | 1·08 | 15·88 | 4·65 | 0·26 | 0·13 | 0·14 | — | 1·67 | 1·87 | 5·83 | 0·06 | 0·09 | 0·13 | 100·00 |
| 11. Márianosztra | 66·03 | 1·21 | 14·79 | 4·99 | 0·33 | 0·10 | 2·79 | — | 1·69 | 1·96 | 5·72 | 0·19 | 0·06 | 0·14 | 100·00 |
| 15. Nagybörzsöny | 69·63 | 1·06 | 13·64 | 4·27 | 0·31 | 0·06 | 1·10 | 0·87 | 1·35 | 1·57 | 5·01 | 0·21 | 0·87 | 0·05 | 100·00 |
| 16. Nógrád | 76·74 | 0·77 | 10·94 | 4·11 | 0·22 | 0·05 | 0·20 | 0·54 | 1·18 | 1·81 | 3·11 | 0·11 | 0·11 | 0·11 | 100·00 |
| 17. Királyháza | 74·84 | 1·37 | 11·88 | 3·15 | 0·30 | 0·15 | 0·30 | 0·52 | 1·32 | 1·88 | 4·00 | 0·11 | 0·01 | 0·17 | 100·00 |

## VII. táblázat.

Osann- és Niggli-féle értékek az átszámított kémiai összetétel alapján.

| | $s$ | $A$ | $C$ | $F$ | $T$ | $n$ | sor | $k$ | $a$ | $c$ | $f$ | $si$ | $qz$ | $al$ | $fm$ | $c$ | $alk$ | $k$ | $mg$ | $ti$ | $p$ | $h$ | $co_2$ | $so_3$ | $cl$ | $c/fm$ | Metszet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Zebegény | 82·81 | 2·52 | 0 | 5·27 | 6·88 | 5·60 | $\beta$ | 4·06 | 9·7 | 0 | 20·3 | 476 | +317 | 54·5 | 30·5 | 0 | 14·5 | 0·44 | 0·49 | 5·50 | 0·24 | 105·03 | 0 | 0·44 | 1·78 | 0 | I. |
| 6. Ipolydamásd | 78·49 | 3·01 | 0·72 | 7·91 | 6·14 | 6·48 | $\beta$ | 2·86 | 7·7 | 1·8 | 20·4 | 360 | +204 | 46·0 | 37·0 | 3·5 | 14·0 | 0·35 | 0·44 | 4·66 | 0·35 | 91·25 | 0 | 0·29 | 0·64 | 0·09 | I. |
| 10. Márianosztra | 79·36 | 3·28 | 0 | 6·44 | 7·64 | 5·76 | $\beta$ | 3·04 | 10·1 | 0 | 19·9 | 380 | +216 | 53·0 | 31·0 | 0 | 16·0 | 0·43 | 0·31 | 4·58 | 0·14 | 109·88 | 0 | 0·37 | 1·26 | 0 | I. |
| 11. Márianosztra | 77·10 | 3·33 | 0 | 9·53 | 6·71 | 5·68 | $\beta$ | 2·61 | 7·8 | 0 | 22·2 | 332 | +174 | 44·0 | 41·5 | 0 | 14·5 | 0·43 | 0·50 | 4·56 | 0·39 | 95·92 | 0 | 0·24 | 1·12 | 0 | I. |
| 15. Nagybörzsöny | 81·08 | 2·66 | 1·07 | 5·94 | 5·52 | 5·68 | $\beta$ | 3·37 | 8·2 | 3·3 | 18·4 | 424 | +267 | 49·0 | 31·5 | 5·5 | 14·0 | 0·43 | 0·32 | 4·86 | 0·55 | 101·61 | 0 | 3·98 | 0·51 | 0·18 | II. |
| 16. Nógrád | 85·67 | 2·55 | 0·64 | 4·00 | 3·95 | 4·98 | $\gamma$ | 4·16 | 10·6 | 2·7 | 16·7 | 593 | +422 | 50·0 | 28·0 | 4·5 | 17·5 | 0·50 | 0·08 | 4·46 | 0·37 | 80·17 | 0 | 0·65 | 1·44 | 0·16 | II. |
| 17. Királyháza | 85·16 | 2·78 | 0·63 | 3·58 | 4·44 | 5·14 | $\gamma$ | 3·96 | 11·9 | 2·7 | 15·4 | 566 | +391 | 53·0 | 24·0 | 4·0 | 19·0 | 0·48 | 0·14 | 7·81 | 0·36 | 100·82 | 0 | 0·05 | 2·18 | 0·18 | II. |

tanulmányozott löszök lényegében ugyanabból a laza üledékből származnak.

## A Duna pleisztocén homokjáról.

Már a budapestkörnyéki löszről írt közleményünkben kimondottuk, hogy a budapesti lösz nehéz ásványainak egymáshoz való viszonyos mennyisége, valamint jellegzetes ásványainak fontosabb tulajdonsága ugyanaz, mint a Duna homokjában. Ebben a dolgozatban azonban nem közöltük a pleisztocén Duna homokjának ásványaira vonatkozó vizsgálatok eredményeit.

Részletesen tanulmányoztuk a budai ópleisztocén dunai üledéket. A megvizsgált homokok közül kettő a *kiscelli párkánysíkról* származott, a *Szépvölgy* torkolatából, a völgy baloldaláról, a téglagyár telepe fölött levő homokból. Az egyik a homok alsó részéből, mintegy 141 m t. sz. feletti magasságból való. A másik ugyancsak az ópleisztocén dunai homoknak a felső részéből, mintegy 142 m t. sz. feletti magasságból.

Miként már Koch Antal[1] leírása óta jól ismeretes, itt a pleisztocén dunai homokon travertinó települ s a travertinóra rakódott le az a hulló por, mely a lösz anyagát alkotja. A lösz tehát fiatalabb, mint a pleisztocén Duna üledéke. Nem lehet itt arra gondolni, hogy a Duna üledéke mosódott volna ki a löszből, mert hiszen mikor a Duna ezeket a homokokat lerakta, lösz itt még nem is volt.

A tanulmányozott harmadik homokminta az *óbudai temető* DNy-i oldalán levő útról mintegy 140 m t. sz. feletti magasságból való. Felette travertinó, a fölött pedig lösz telepszik.[2] A lösz és a homok egymáshoz való helyzete tehát teljesen ugyanaz, mint a kiscelli párkánysíkon.

Aprólékos részletességgel tanulmányoztuk még az egyik pleisztocén dunai homokot. Ez a homok a Börzsönyi-hegység déli részéből Ipolydamásd közeléből, az *Alsó Csikóhegy* nyugati aljáról mintegy 130 m t. sz. f. magasságból származik. Fekvője: hipersztén-

---

[1] Koch Antal: A kiscelli párkánysík geológiai szelvényének mintája. Földtani Közlöny XXIX. 1899. 33—37.

[2] Schafarzik Ferenc—Vendl Aladár: Geológiai kirándulások Budapest környékén. Budapest, 1929. 185.

amfibolandezitbreccsa. Ez a homok jóval finomabb szemű mint a budaiak s meglehetősen összeálló ártéri üledék.

A három budai pleisztocén homok mechanikai összetételét, — 0·005 normál nátriumoxaláttal a KÖHN-féle pipettakészülékkel végzett elemzés alapján, — a következő táblázat tünteti fel. (A >0·1 mm-es szemcséket ATTERBERG-féle készülékben határoztuk meg.)

**VIII. táblázat.**

| | Szépvölgy, alsórész | Szépvölgy, felsőrész | Óbuda |
|---|---|---|---|
| >0·2 | 2·94 | 30·72 | 3·54 |
| 0·2—0·1 | 20·30 | 23·27 | 35·02 |
| 0·1—0·05 | 24·45 | 31·40 | 36·99 |
| 0·05—0·02 | 31·39 | 7·02 | 9·95 |
| 0·02—0·01 | 9·86 | 2·68 | 4·25 |
| 0·01—0·005 | 4·83 | 1·53 | 5·47 |
| 0·005—0·002 | 2·51 | 1·02 | 1·45 |
| 0·002—0·001 | 3·32 | 1·15 | 1·79 |
| <0·001 | 0·40 | 1·27 | 1·56 |
| | 100·00 | 100·06 | 100·02 |

Az ipolydamásdi homok mechanikai összetétele a börzsönyi löszökre vonatkozó II. táblázat 9. rovatából tűnik ki.

A homokmintákat a mikroszkópos vizsgálatokra éppen úgy készítettük elő, mint a budapestkörnyéki löszöket.[1] A budai homokokból 150 g-t dolgoztunk fel az ásványtani vizsgálat céljára. A 2·9-nél nagyobb sűrűségű részlet mennyisége a négy homokban, — a 0·02 mm-nél nagyobb átmérőjű szemek súlyszázalékában kifejezve, — a következő: Szépvölgy alsó rész : 1·00%, Szépvölgy felső rész 2·61%, Óbuda: 1·59%, Ipolydamásd: 0·42%.

A szépvölgyi feltárás felső részéből származó homok meg-

[1] VENDL A.—TAKÁTS T.—FÖLDVÁRI A.: A budapestkörnyéki löszről. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője. LII. 1934. 713—784.

lehetősen durva szemcséjű, miként a mechanikai összetételt feltüntető számokból kitűnik. Az óbudai homok már jóval apróbb szemű, a szépvölgyi feltárás alsó részéből való még finomabb szemű. Az ipolydamásdi homok igen finomszemű ártéri üledék; mechanikai összetétele a börzsönyi lösz összetételétől főként abban tér el, hogy a 0·02 mm-nél nagyobb átmérőjű szemcsék mennyisége több, mint a löszökben az átlagos mennyiség, továbbá, hogy a 0·02—0·002 mm átmérőjű szemcsék mennyisége lényegesen kisebb mint a jellegzetes löszökben (lásd a II. táblázat végén a börzsönyi lösz középértékeit feltüntető rovatokat is).

Tehát a vizsgálatra igen eltérő mechanikai összetételű pleisztocén homokokat választottunk ki. Mindegyik homokmintát jellemzi, hogy az ásványszemek legtöbbje éles, szilánkos, jóval szögletesebb, mint a megvizsgált löszminták szemecskéi. Érdekes továbbá, hogy a szemecskéken, — nemcsak a vastartalmúakon (biotit, klorit, amfibol stb.), hanem a többieken is, — gyakran *limonitfoltok* esetleg többé-kevésbbé teljes *limonitbekérgezések* fordulnak elő. Általában a szemek felülete gyakran jóval mállottabb, mint a löszben. Azonkívül apró, gyakran agyaggal kevert *limonitcsomók* is elég gyakoriak. Némelyik homokban annyi a limonitos termék főleg kérgezések alakjában, hogy első tekintetre sárgásnak látszik. Így a szépvölgyi felső homok, az óbudai homok sárgásszínű, a szépvölgyi alsó homok kevésbbé sárga; az ipolydamásdi azonban szürke, mert szemecskéin jóval ritkább a limonit.

A négy homokmintában meghatározott ásványok ugyanazok, mint aminőket a budapestkörnyéki és a börzsönyi-hegységi löszben és a holocén Duna homokjában megállapítottunk. Az ásványok mennyiségi eloszlása is lényegében ugyanaz. Csak a csillámok látszanak másként eloszolva lenni, mint a löszökben. Nevezetesen a Duna holocén és pleisztocén homokjában egyaránt a csillámok a nagyobb ásványok közt is sűrűn előfordulnak. A löszökben ellenben a csillámok általában jóval kisebbek és ezért a szétválasztáskor — miként a budapestkörnyéki lösz muszkovitjával kapcsolatban említettük — főként az apróbb szemcséjű részletekben gyülnek össze. Mivel a megvizsgált homokokban a csillámok nagyok, úgy tűnik fel, mintha ezek a homokok jóval több csillámot tartalmaznának, mint a löszök.

Az amfibolok közt a zöld amfibolok vannak túlsúlyban. Az ipolydamásdi homokban azonban valamivel több barna amfibol és több hipersztén fordul elő, mint a budapesti homokpróbákban. A barna amfibol és a hipersztén legnagyobb része a Börzsönyi hegységből jutott az ipolydamásdi homokba.

A nagysűrűségű ásványok mennyisége — integrációs asztallal való mérések és becslések alapján — a következő:

A három budai homokban: amfibol 25—30 térfogat %, piroxén (túlnyomóan hipersztén) 5—10%, gránát 30%, érc 25%, disztén, apatit, zirkon, rutil és mások mintegy 10%.

Az ipolydamásdi homokban: amfibol 25%, piroxén (túlnyomólag hipersztén) 10%, gránát 30%, érc 25%, disztén, apatit, zirkon, rutil s mások mintegy 10%.

Ha ezeket az egymásközt megegyező értékeket összehasonlítjuk a budapestkörnyéki löszök megfelelő számadataival (amfibol 30 térfogat %, piroxén (főleg hipersztén) 5%, gránát 30%, érc 25%, disztén, apatit, zirkon, rutil s mások 10%), kitűnik, hogy a nehéz ásványok mennyisége lényegileg ugyanaz a homokokban, mint a löszben. Ezeknek az értékeknek jól megfelel a Börzsönyi-hegység löszeiben megállapított átlagos 30—40% amfibol + piroxén (főleg hipersztén) is.

A megegyezés semmiesetre sem véletlen s csak úgy magyarázható meg, ha a *löszt lényegében a nála idősebb pleisztocén dunai homokból kifújtnak fogjuk fel.*

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. június 3-án tartott üléséből.)

# ÜBER DEN LÖSS DES BÖRZSÖNY-GEBIRGES.

Von A. VENDL, T. TAKÁTS und A. FÖLDVÁRI.

Die Arbeit erscheint in deutscher Sprache in der Zeitschrift «Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie».

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 3. Juni 1935.)

# A RUTIN GLÜKÓZID DISACCHARIDJÁNAK, A «RUTINÓZ»-NAK SZERKEZETE ÉS SZINTÉZISE.

ZEMPLÉN GÉZA r. tagtól.

A rutin nevű glükózidot 1842-ben fedezte fel WEISS[1] a Ruta hortensis nevű növényben. Később ZWENGER és DRONKE,[2] SCHUNK,[3] főképen pedig E. SCHMIDT[4] és tanítványai: WALIASCHKO,[5] BRAUNS,[6] és WUNDERLICH[7] foglalkoztak vele tüzetesebben. A rutin jelenléte nemcsak a Ruta hortensisre szorítkozik, hanem rendkívül elterjedtnek bizonyult a legkülönfélébb növényekben. A Sophora japonica[8] fejletlen rügyeiben, az Eschscholtzia californicaban[9] (5%-nyi mennyiségben) a Capparis spinosa[8] virágrügyeiben, a Globularia alypum, a Fagopyrum esculentum, az Osyris compressa, az Eucalyptus macrorhynchus[10] leveleiben is jelen van.

E nagy elterjedtségének köszönhető, hogy eleinte nem ismerték fel azonosságát a rutinnal, miért is lassan kiderült, hogy

---

[1] WEISS, Chem. Zentralbl. 1842, 903.
[2] ZWENGER és DRONKE, Ann. d. Chem. 123, 145 (1862).
[3] SCHUNK, Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. 21, 299 (1888).
[4] E. SCHMIDT, Arch. d. Pharm. 242, 210 (1904); 246, 214 (1908).
[5] WALIASCHKO, Arch. d. Pharm. 242, 225 (1904).
[6] BRAUNS, Arch. d. Pharm. 242, 547, 556 (1904).
[7] WUNDERLICH. Arch. d. Pharm. 246, 224, 241, 256 (1908).
[8] ROCHLEDER, HLASIVETZ, Liebigs Annalen 53, 385.
[9] SANDO és BARTELEK, Chem. Zentralbl. 1910 II, 1388.
[10] E. SCHMIDT, Arch. d. Pharm. 242, 210 (1904); 246, 214 (1908).

más néven szereplő glükózidokat is a legrégibb eredetű *rutin* név illeti meg.

Rutinnak bizonyultak a *Melin* és *Phytomelin.*[1]

Az *Osyritrin,*[2] *Myrticolorin*[2] és a *Sophorin*nak nevezett glükózidról is kimutatták, hogy nem egyebek rutinnál.[3]

Az árvácskafélék sárga festékanyaga, mely régebben *Violaquercitrin* néven volt ismeretes, szintén azonos a rutinnal.[4]

Az *Eldrin*nek elkeresztelt glükózid, mely a kanadai bodzának, Sambucus canadensis L. virágaiban fordul elő, szintén rutinnak bizonyult.[5]

C. Charaux[6] a következő növényeknek virágaiból állította elő a rutint kristályos állapotban: Pavia californica, Heracleum spondylium L., Solanum tuberosum L., Sambucus nigra L., Galium cruciatum és a következő növények leveleiből: Capparis spinosa L., Sophora japonica, Solanum Lycopersicum L., Nicotiana glauca, Hyperium pendulum L., Hedera helix L., Lithospermum officinale.

Újabb időben elkülönítették a rutint a Salix triandra L. leveleiből,[7] a Forsythia pendula L. friss virágaiból,[8] a Bupleurum falcatum L. ernyősvirágúnak leveles szárából,[9] a fehérvirágú Rhododendron rosmarinifoliumból.[10]

---

[1] Van Rijn—Dieterle Die Glykoside II. kiadás 1931., 248. lap.

[2] A. G. Perkin, Chem. Zentralbl. **1910 II**, 138.

[3] H. ter Meulen, Rec. trav. chim. Pays-Bas **42**, 380 (1923); Chem. Zentralbl. **1923 III**, 859.

[4] Geoffrey Saunders Currey. Proc. Royal Society London Serie B. **96**, 374 (1924); Chem. Zentralbl. **1924 II**, 1596.

[5] Charles E. Sando és John Uri Leoyd, Journ. Biol. Chem. **58**, 737 (1924); Chem. Zentralbl. **1924 I**, 2273.

[6] C. Charaux, Bull. Soc. Chem. Biol. **6**, 641 (1924); Chem. Zentralbl. **1924 II**, 2665.

[7] M. Bridel és C. Béguin, Comptes rendus **183**, 231 (1926); Chem. Zentralbl. **1926 II**, 1920.

[8] J. Gollan, Bull. Soc. Chim. biol. **11**, 1164 (1929); Chem. Zentralbl. **1930 II**, 3586.

[9] J. Rabaté, Bull. Soc. Chim. biol. **12**, 974 (1930); Chem. Zentralbl. **1931 I**, 1773.

[10] Nakaoki, Journ. Pharm. Soc. Japan **52**, 198 (1932); Chem. Zentralbl. **1933 I**, 2121.

A paradicsom szára apró cseppeket izzad ki, melyekből rutint lehetett leválasztani.[1]

Megtalálták a rutint a dohánylevelekben is, és a kész feldolgozott árúknak különféle színe (világos vagy sötét dohány) épen a jelenlevő rutinnak oxidációs állapotától függ.[2]

Már a *Schmidt*-féle iskola bebizonyította, hogy a rutin meleg savakkal végrehajtott hidrolizis útján quercetinre, mint aglükonra és glükózra meg rhamnózra bomlik, mint cukorkomponensekre. A hidrolizist a következő szimbolum jelképezi:

$$\underset{\text{rutin}}{C_{27}H_{30}O_{15}} + 2H_2O \rightarrow \underset{\text{quercetin}}{C_{15}H_{10}O_7} + \underset{\text{glükóz}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\text{rhamnóz}}{C_6H_{12}O_5}$$

Hogy a rutinban a két egyszerű cukor: a glükóz és a rhamnóz, eredetileg egy disaccharid formájában van jelen, azt Charaux[3] bizonyította be olyképen, hogy a rutint enzimes úton bontotta meg. Az enzimet a Rhamnus utilis magjából készítette. Ennek hatására quercetin mellett amorf cukrot kapott, amelyet közelebbről nem volt képes megvizsgálni, de amelynek tulajdonságai arra vallottak, hogy disaccharid.

A disaccharid csoportnak a quercetin aglükonba való bekapcsolására vonatkozólag Attree és Perkin[4] végeztek vizsgálatokat olyképen, hogy rutint diazometán segítségével pentamethyléterré alakítottak. Ennek a hidrolizise 5, 7, 3′, 4′ tetramethoxyflavonolt szolgáltatott, miből következik, hogy a cukorcsoport a pyronmag hidroxiljába kapcsolódik a következő szimbolum szerint:

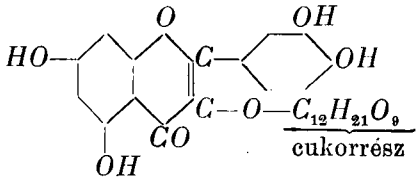
---

[1] B. K. Blount, Journal chem. Soc. London 1933, 1528; Chem. Zentralbl. **1934 I**, 1506.

[2] Hiroshi Hasegawa, Bull. agricult. chem. Soc. Japan **7**, 73 (1931); Chem. Zentralbl. **1932 I**, 3510.

[3] C. Charaux, Comptes rendus **178**, 1312 (1924); Chem. Zentralbl. **1924 II**, 49.

[4] Gordon Frederick Affree u. Arthur George Perkin Journ. Chem. Soc. London **1927**, 234; Chem. Zentralbl. **1927 I**, 2427.




Felderítetlen volt azonban mindezideig a disaccharid mineműsége, hogy a rhamnóz vagy a glükózrész kapcsolódik-e a quercetinhez, és ismeretlen volt a glükóznak és rhamnóznak egymással való kapcsolata.

Ennek a kérdésnek a tanulmányozása céljából csak a rutin enzimes bontását választhattam, mert hiszen ilyen körülmények között marad érintetlenül a glükózrhamnóz kapcsolat.

Az enzimes bontás után elkülönített amorf disaccharidot, hogy származékokká alakíthassam, először is megacetyleztem. Gyönyörű szép, kristályos acetyltermékhez jutottam, amelynek részletes vizsgálata megmutatta, *hogy minden tekintetben azonos az általam nemrégen leírt, szintézis útján előállított β-Hepta-acetyl-β-1-l-rhamnozido-6-d-glükózzal.*[1]

A szintétikus és a rutinból származó disaccharidnak azonosságát igazolták a további átalakulások is. Mindkét heptaacetylvegyület titántetrachlorid hatására ugyanazt az *α-acetochlor-β-1-l-rhamnozido-6-α-glükózt* szolgáltatta, melyből methylalkoholos oldatban ezüstcarbonáttal melegítve mindkét esetben ugyanaz a *β-1-methyl-hexaacetyl-β-1-l-rhamnozido-6-d-glükóz* keletkezett.

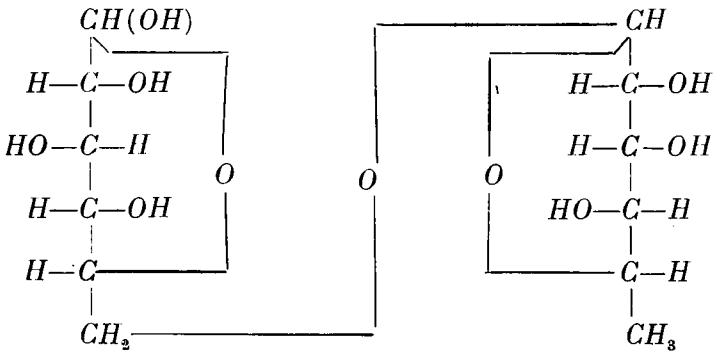
Az eredmény azért meglepő, mert a glükóz és rhamnózból felépített disaccharidok, hacsak egyféle oxigénhíd-rendszert veszünk is alapul, számszerint 18 kombináció szerint lehetnek felépítve, s e 18 eshetőség közül szintézissel épen azt állítottam elő, amely a természetes rutinóznak megfelelő. Mivel pedig a szintézissel készült terméknek szerkezetéhez kétség nem férhet, *ezáltal a természetes rutinóznak a szerkezetét felderítettem és egyszersmint a szintézisét is végrehajtottam.*

A kétféle vegyületsor azonosságát a következő táblázatnak adatai igazolják:

[1] Zemplén Géza, Mat. és Term. Ért. 53, 231 (1935).

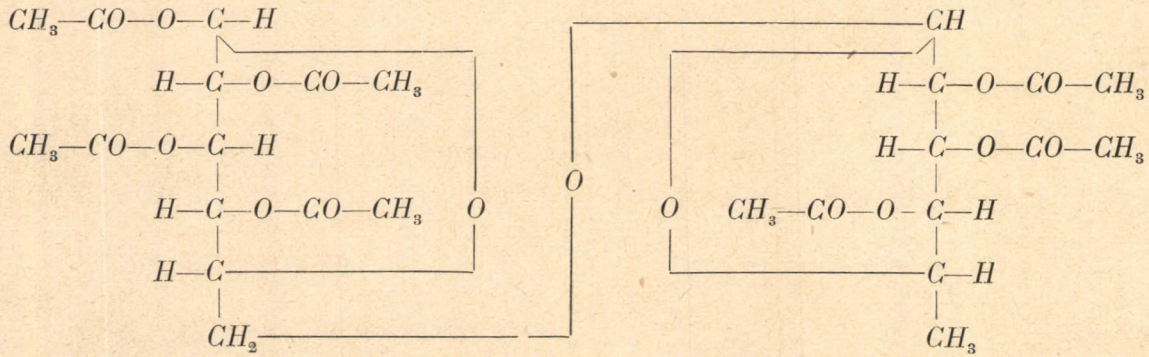
| A készítmény neve | Olvadáspont | Keverék olvadáspont | $(\alpha)_D$ chloroformban |
|---|---|---|---|
| $\beta$-Heptaacetyl-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz, szintétikus I. | 168—169° | 168·5° | −28·84° |
| $\beta$-Heptaacetyl-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz, rutinból készített I. | 168·5—169° | | −28·54° |
| $\alpha$-Acetochlor-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz, szintétikus II. | 150·5—151° | 148—149° | +65·88° |
| $\alpha$-Acetochlor-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz, rutinból készített V. | 150—150·5° | | +66·50° |
| $\beta$-1-Methyl-hexaacetyl-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz, szintétikus III. | 139·5—140° | 139—140° | −45·91° |
| $\beta$-1-Methyl-hexaacetyl-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz, rutinból készített III. | 138—139° | | −45·19° |

Ezek alapján a rutinóznak szerkezete a következő szimbolumnak megfelelő,

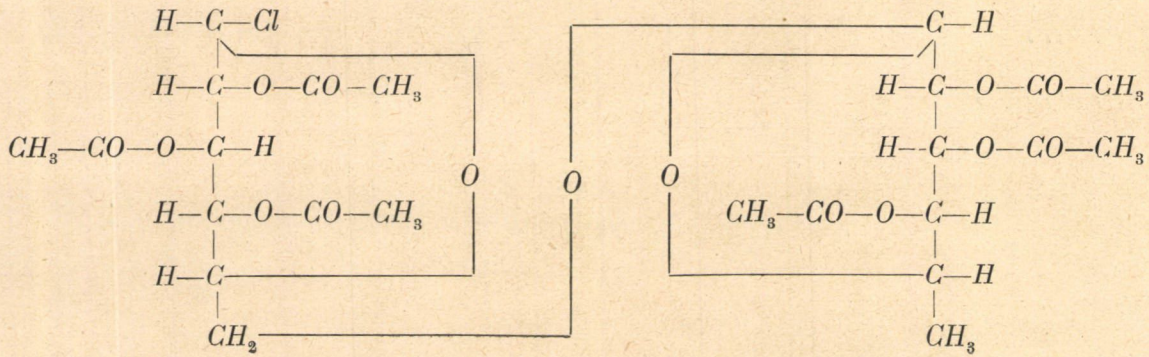



rutinóz

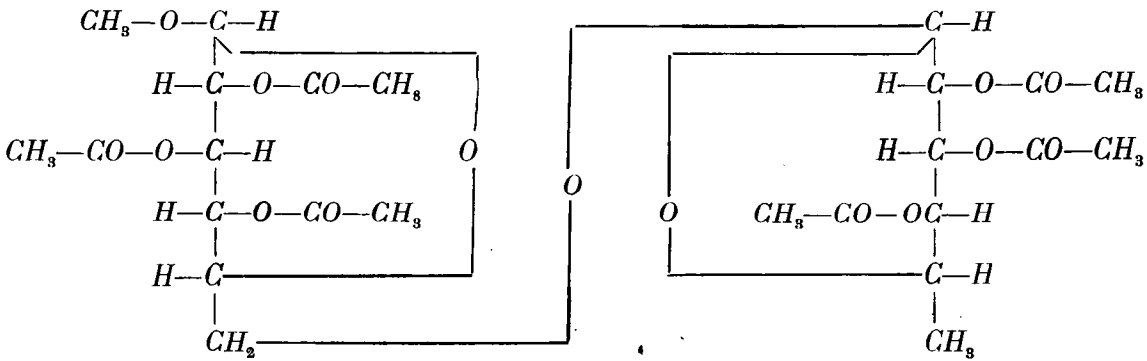
a táblázatban szereplő római számokkal jelölt származékok pedig a következők:



I. β-Heptaacetyl-β-1-*l*-rhamnozidó-6-*d*-glükóz

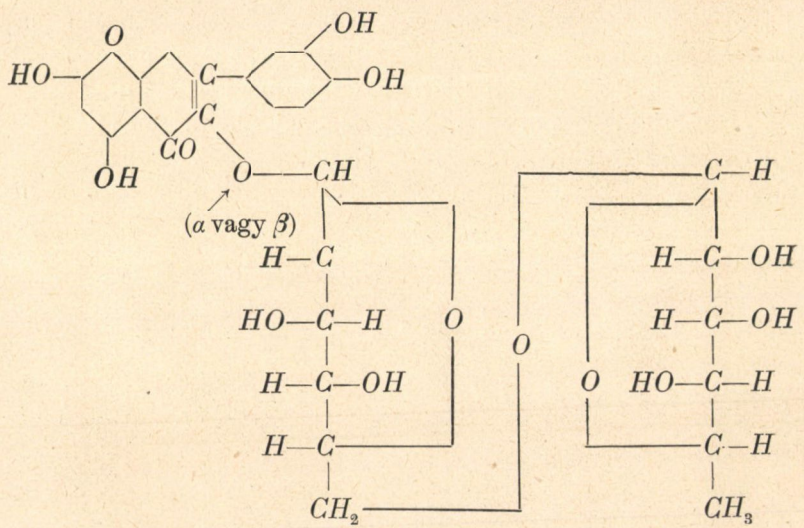


II. $\alpha$-Acetochlor-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz



III. $\beta$-1-methyl-hexaacetyl-$\beta$-1-$l$-rhamnozido-6-$d$-glükóz.

A *rutint* magát pedig a következő szimbolum illeti meg, amelyben a quercetin és a disaccharid között lévő kapcsolatra nézve nincsen eldöntve, hogy $\alpha$, vagy pedig $\beta$ jellegű:




Mivel pedig a *Datiscin* nevű glükózidra nézve CHARAUX[1] kimutatta, hogy a Rhamnus-mag enzimje ugyanúgy bontja, mint a rutint, vagyis hogy belőle egy disaccharid keletkezik, melyet a rutinnal tart azonosnak, jelen vizsgálataim a Datiscin glükózid szerkezetét is tisztázzák a cukorrészre vonatkozólag.

Lehetséges, hogy a *lusitanicosid*nak[2] nevezett glükózidban, mely a Cerasus lusitanica Lois. leveleiben fordul elő, a *p*-allylphenol aglükón mellett szintén a rutinóz alakjában van a rhamóz és a glükóz egymáshoz kapcsolva. Ezt a kérdést szintézis útján igyekszem tisztázni.

## KÍSÉRLETI RÉSZ.

### I. β-Heptaacetyl-β-1-*l*-rhamnozido-6-*d*-glükóz.

*Rutinból.* A Rhamnus utilis magvakat alkoholban való áztatás után megszárítjuk, durván megőröljük, majd megszitáljuk.

---

[1] C. CHARAUX, Comptes rendus **189**, 1419 (1925); Chem. Zentralbl. **1925 II**, 408.

[2] H. HÉRISSEY és J. LOCFOREST, Comptes rendus **194**, 1095 (1932); Chem. Zentralbl. **1932 II**, 232, H. HÉRISSEY, Comptes rendus **198**, 265 1934; Chem. Zentralbl. **1934 I**, 2137; Journ. Pharm. Chim. [8] **16**, (124), 513 (1932); Chem. Zentralbl. **1933 I**, 2121.

Ilyenkor a magőrlemény átesik a szitán, és visszamarad a mag héj. A magőrleményt a zsír eltávolítása végett éterrel extraháljuk, majd hideg alkohollal kilúgozzuk és megszárítás után finom porrá őröljük. A port addig áztatjuk alkoholba, mindig megújítván az alkoholt a leszűrt magporon, amíg az alkohol színező anyagokat már nem vesz fel (3—4 áztatás). A megszárított porból toluol jelenlétében kioldjuk vízzel az enzimet és azt alkohollal csapjuk ki, majd leszűrjük és szobahőmérsékleten megszárítjuk.

2 g enzimport feloldunk 500 ccm vízben, hozzáadunk 10 g finoman porított rutint, és éterrel telítve a keveréket, szobahőmérsékleten állni hagyjuk. Külsőleg különösebb változást nem veszünk észre, de a hidrolizis végefelé nehezebben ülepszik a csapadék. Időnként a szüredékben megállapítjuk 2—2 ccm-es mintákban a redukció növekedését. Ha ez eléri 2 ccm-re a 3 ccm $^n/_{10}$ káliumpermanganatoldat fogyasztást, ami körülbelül két hét alatt szokott bekövetkezni, az enzimes bontás be van fejezve. Most leszűrjük az egész keveréket, a szüredékhez addig adunk 20%-os frissen készített higanyacetatoldatot, amíg csapadék képződik a rutinózt kísérő szennyezésektől, a szüredéket kénhidrogénnel higanymentessé tesszük, s a víztiszta szüredéket vákuumban besűrítjük, majd többször vákuumban alkohollal való szárazra párlás útján víztelenítjük. A maradékot 5 g vízmentes nátriumacetat és 25 ccm homológmentes ecetsavanhydriddal 1 óra hosszat melegítjük vízfürdőn, majd 60 ccm vízbe öntjük. Az acetat rövid időn belül kikristályosodik. Másnap leszívatjuk, kimossuk és megszárítjuk. Kapunk 4·7 g nyers terméket. Ezt először 30, másodszor 10 ccm forró alkoholból kristályosítjuk át, mire 2·7 g szép nagy kristályokból álló készítményt kapunk. Ebből az acetátból 6-szoros átkristályosítás után 1, 2 g-ból (minden ízben 3·5 ccm alkoholt használva fel az oldáshoz) nyertünk 0·85 g tiszta terméket, melynek olvadáspontja 168·5—169°, és forgatóképessége:

$$[\alpha]_D^{20} = \frac{10 \times -1{\cdot}17}{0{\cdot}4100} = -28{\cdot}54^\circ \text{ chloroformban.}$$

*Szintétikus termék.* Olvadáspontja 168—169°. Természetes ruti-

nózzal való keverékolvadáspont 166°-nál kezd zsugorodni, 168·5°-nál megolvad. *Forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{20} = \frac{10 \times -1{\cdot}22}{0{\cdot}4230} = -28{\cdot}84 \text{ chloroformban.}$$

## II. α-Acetochlor-β-1-*l*-rhamnozido-6-*d*-glükóz.

A) *Rutinból előállított rutinózacetatból.* 2 g acetatot 14 ccm alkoholmentes abs. chloroformban oldunk, ehhez adunk 6 ccm alkoholmentes abs. chloroformban oldott 0·6 g titántetrachloridot. Chlorcalciumos csővel elzárt összeköszörült visszacsepegő hütős készülékben 3 óra hosszat forraljuk vízfürdőn a reakciókeveréket, majd jégre öntjük, leválasztjuk a chloroformos réteget és savmentessé mossuk jeges vízzel, majd chlorcalciummal megszárítjuk és a szüredéket vákuumban szárazra pároljuk. A maradékot kétszer átkristályosítjuk 8—8 ccm forró alkoholból. Nyertünk 1·4 g terméket, melynek tulajdonságai a következők:

*Olvadáspont:* 148·5°-nál kezd zsugorodni, 150—150·5°-nál olvad. Keverék olvadáspont a szintétikus termékkel: 148—149°.

*Forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{20} = \frac{10 \times 1{\cdot}31}{0{\cdot}1970} = +66{\cdot}50° \text{ (chloroformban).}$$

*Chlormeghatározás:* 0·2970 g: 4·74 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$
= 5·66% *Cl*

$C_{24}H_{33}O_{15}Cl$ (596·44)-re számított érték: 5·94% *Cl.*

B) *Szintétikus β-Heptaacetyl-β-1-l-rhamnozido-6-d-glükózból.* 2 g anyagot teljesen az előbbi leírás alapján dolgoztunk fel. Nyertünk 1·45 g chlorterméket, melynek tulajdonságai a következők:

*Olvadáspont:* 149°-nál kezd zsugorodni, 150·5—151°-on olvad.

*Forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{20} = \frac{10 \times 1{\cdot}34}{0{\cdot}2034} = +65{\cdot}88° \text{ (chloroformban).}$$

*Chlormeghatározás:* 0·2992 g: 4·88 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$
= 5·77% *Cl*
$C_{24}H_{33}O_{15}Cl$ (596·84)-ra számított érték: 5·94% *Cl*.

### III. β-1-Methyl-hexaacetyl-β-1-*l*-rhamnozido-6-*d*-glükóz.

*Rutinból előállított termékből.* 1 g acetochlorterméket 15 ccm abs. methylalkoholban oldunk és 1 g száraz ezüstcarbonátot adva hozzá 1 óra hosszat forraljuk vízfürdőn visszacsepegő hűtő alatt. A szüredéket vákuumban szárazra pároljuk és a maradékot 3—3 ccm forró alkoholból kétszer átkristályosítjuk. A készítmény (0·70 g) selyemfényű kristálykákat alkot és következő tulajdonságokat mutat.

*Olvadáspont*: 138—139°. Keverékolvadáspont a szintétikus termékkel: 130—140°.

*Forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{20} = \frac{10 \times -0{\cdot}93}{0{\cdot}2058} = -45{\cdot}19°$$ chloroformban.

*Methoxylmeghatározás:* 4·670 mg: 1·898 mg *AgJ*
= 5·37% $CH_3O$
$C_{25}H_{36}O_{16}$ (592·29)-ra számított érték: 5·24% $CH_3O$.

*Szintétikus α-acetchlor-β-1-l-rhamnozido-6-d-glükózból készített termék.* 1 g-ot teljesen az előbbivel azonos körülmények között dolgoztunk fel. Kaptunk 0·75 g terméket, melynek tulajdonságai a következők:

*Olvadáspont:* 139·5—140°.

*Forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{20} = \frac{10 \times -0{\cdot}90}{0{\cdot}1960} = -45{\cdot}91°$$ chloroformban.

*Methoxylmeghatározás:* 5·140 mg: 2·030 mg *AgJ*,
= 5·22% $CH_3O$
$C_{25}H_{36}O_{16}$ (592·29)-ra számított érték: 5·24% $CH_3O$.

A leírt kísérletek végrehajtásánál GERECS ÁRPÁD dr. vegyészmérnök úr volt segítségemre, miért is neki köszönetemet fejezem ki.

*

A kutatásokhoz a «*Rockefeller Foundation*» anyagi áldozatokkal járult hozzá, miért is hálás köszönetet mondok.

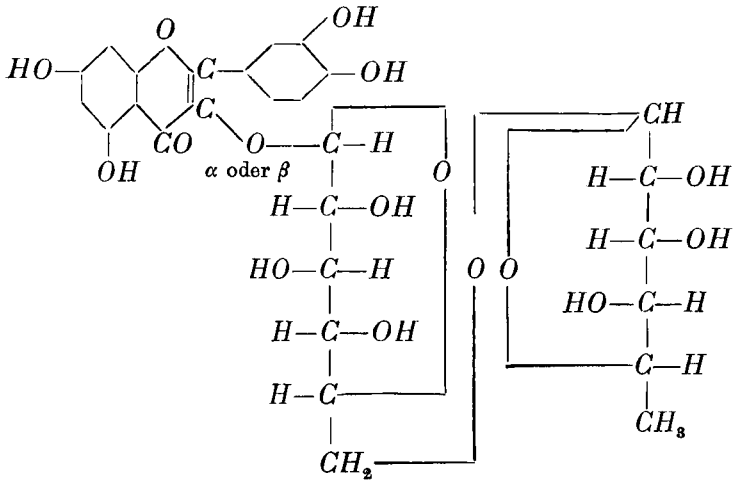
---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. ápr. 15-én tartott üléséből.)

# KONSTITUTION UND SYNTHESE DER «RUTINOSE», DER BIOSE DES GLYKOSIDS RUTIN.

Von GÉZA ZEMPLÉN o. M.

Die bei der enzymatischen Spaltung des Rutins entstehende amorphe Biose wurde in ihr gut krystallisierendes Heplaacetat überführt; dieses erwies sich als identisch mit der vom Verfasser bereits (Mat. és Természettud. Ért. *53*, 231 (1935)) synthetisierten *Heptaacetyl—(6—β—l—rhamnosido)—β—d—glükose.* — Zum Beweis wurden noch die *Acetochlorverbindung* und das *β—Methylglykosidhexaacetat* aus dem natürlichen und dem synthetischem Präparat hergestellt und als identisch befunden. Unter Berücksichtigung der Befunde von ATTREE u. PERKIN (Zentralblatt *1927 I.* 2427) ergibt sich für Rutin die folgende Formel, in der nur unentschieden ist, ob die Rutinose mit dem Quercetin in α- oder β-Konfiguration verknüpft ist.




Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. Apr. 1935.)

# AGYAGOK ISZAPOLÁSA AMMONIUMHIDROXID-, NÁTRIUMOXALÁT- ÉS NÁTRIUMMETASZILIKÁT-OLDATBAN.

FÖLDVÁRI ALADÁR-tól.

## I. Bevezetés.

Az üledékes kőzetek vizsgálatakor egyik legfontosabb mérhető tulajdonság a kőzet szemcsenagyságának a megállapítása. Erre a célra igen sok iszapoló készüléket és eljárást használnak. Aránylag kevés vizsgálatot végeztek azonban a különféle módszerekkel nyert értékek összehasonlítására. A vizsgálatok legfontosabb megállapítása körülbelül abban foglalható össze, hogy minden kőzetféleség más eljárást igényel. Az alábbiakban megpróbáltam az agyagos kőzetek legfontosabb csoportjainak a vizsgálatára alkalmas eljárást megállapítani, főleg hazai kőzetek alapján.

Az iszapolásra részben az ATTERBERG-féle készüléket, részben a KÖHN-féle pipettakészüléket használtam. Az ATTERBERG-féle készülék előnye, hogy az elektrolitok koaguláló hatását figyelmen kívül hagyhatjuk, hátránya, hogy az üledékes kőzetek $CaCO_3$ tartalma oldódik, továbbá, hogy az agyag adszorpciós komplexuma kilúgzódik és helyébe hidrogénion lép. Az ilyen hidrogénezett agyag pedig egészen más tulajdonságú, elsősorban a diszperzitásfoka különbözik az eredeti agyagétól. Az ATTERBERG-féle eljárással készült elemzések összehasonlítás szempontjából fontosak, mivel a többi eljárás közül azt lehet legjobbnak minősíteni, mely adott esetben az ATTERBERG-féle eljárással kapott eredményt legjobban megközelíti. (Ez alól a szabály alól azonban kivételek is vannak.) C. CORRENS és W. SCHOTT legújabb vizsgálatai szerint, ha az ATTERBERG-féle eljárásnál desztillált víz helyett 0·1 n ammonium-

hidroxidot használunk iszapolásra, akkor a $CaCO_3$ nem oldódik és az ATTERBERG eljárás legfőbb hibaforrását kiküszöbölhetjük.

Vizsgálataim legnagyobb részét a pipettakészülékkel végeztem. Ennél a vizsgálati módszernél a kőzetekben levő elektrolitok a belőlük készített szuszpenziót koagulálják, tehát ebben az esetben a koaguláció megszüntetéséről kell gondoskodni. G. WIEGNER a talajokat dializissel szabadítja meg az elektrolitoktól, a kimosást az oldat vezetőképességének a mérésével ellenőrzi. Üledékes kőzeteknél ez az eljárás nem használható, mivel a rendszerint magas $CaCO_3$, esetleg $CaSO_4$ tartalom miatt igen hosszú ideig tart a kimosás, másrészt a kőzet anyagának tekintélyes részét kioldanánk, már pedig az üledékes kőzetek vizsgálatánál éppen az eredeti kőzet összetételét keressük. E miatt nem használható a talajok vizsgálatánál gyakran alkalmazott eljárás sem, amely szerint a vizsgálati anyagból a zavaró karbonátokat sósavval kioldják.

Így csak egy módszer marad a koaguláció megakadályozására; megfelelő stabilizáló anyagot kell használni az agyag-szuszpenzió készítésénél. Kísérleteim elsősorban a legfontosabb stabilizáló anyagok hatásának az összehasonlítására szolgálnak. Mivel a vizsgált agyagok kémiai összetétele is szerepet játszhat az egyes stabilizátorok diszpergáló hatásában, a kísérleti anyag összeválogatásánál lehetőleg az összes gyakoribb agyagféléket tekintetbe vettem. Végül igyekeztem az agyagokban leggyakrabban előforduló elektrolitok hatását is tanulmányozni, hogy milyen elektrolitkoncentrációhatárig képes megakadályozni a használt stabilizátor a koagulációt.

Mivel az előzetes kísérletek azt mutatták, hogy az agyag-szuszpenziók idővel megváltoznak, külön kísérletsorozatban vizsgáltam a különböző stabilizáló anyagokkal kezelt szuszpenziók változásait is. A szuszpenziók változását az I. táblázat mutatja. Egy hónapi állás után ritkán maradt változatlan a szuszpenzió, vagy diszpergálódott, vagy még gyakrabban koagulált.

Hasonló megfigyelést végzett POSEWITZ G. a kiscelli agyagok vizsgálatánál, ahol 0·1 n ammoniumhidroxid oldatban készült szuszpenzióit a következő változást mutatták: az 1. szuszpenzió tartalmazott a kísérlet kezdetén 0·002 mm-nél kisebb szemcsét 31·37%-ot, egy heti állás után 39·39%-ot; a 2. szuszpenzió a kísérlet kezdetén 25·98%-ot, egy heti állás után 32·80%-ot.

## I. táblázat.

| Szemcse átmérő-mm-ben | Felső oligocén tengeri agyag. Pacsirta-hegy $CO_2 = 13\,24$ % 0·005 n nátrium-oxalátban | | Felső oligocén tengeri agyag. Törökbálint, téglagyár $CO_2 = 11{\cdot}95$ % | | | | Eocén operkulinás agyag. Tatabánya $CO_2 = 18{\cdot}70$ % | | | | Édesvízi pannon agyag. Budaörs | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0·005 n nátrium-oxalátban | | 0·1 n ammonium-hidroxidban | | 0·005 n nátrium-oxalátban | | 0·1 n ammonium-hidroxidban | | 0·1 n ammonium-hidroxidban | |
| | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* |
| >0·1 | 0·63 | 0·00 | 4·05 | 0·00 | 4·47 | 0·00 | 1·46 | 0·00 | 0·00 | 0·26 | 0·00 | 0·00 |
| 0·1—0·05 | 0·73 | 5·46 | 0·66 | 2·91 | 2·24 | 5·37 | 2·50 | 7·43 | 4·37 | 1·56 | 0·00 | 0·00 |
| 0·05—0·02 | 11·65 | 11·10 | 11·60 | 17·37 | 19·67 | 16·52 | 10·00 | 7·35 | 10·97 | 8·59 | 0·52 | 0·00 |
| 0·02—0·01 | 15·22 | 88·30 | 13·01 | 10·05 | 16·99 | 14·11 | 13·79 | 25·44 | 16·80 | 15·09 | 3·76 | 1·59 |
| 0·01—0·005 | 18·37 | | 13·06 | 14·46 | 17·62 | 18·27 | 18·02 | | 18·60 | 19·77 | 5·54 | 5·96 |
| 0·005—0·002 | 26·57 | koagulált | 19·24 | 18·87 | 15·83 | 18·54 | 24·22 | koagulált | 20·57 | 22·81 | 16·21 | 16·59 |
| 0·002—0·001 | 16·38 | | 9·99 | 10·14 | 7·78 | 11·82 | 14·83 | | 9·86 | 12·66 | 14·33 | 15·59 |
| 0·001—0·0005 | 10·40 | | 18·20 | 21·07 | 8·05 | 9·27 | 13·28 | | 9·51 | 7·89 | 13·39 | 16·02 |
| <0·0005 | — | | 9·52 | 7·58 | 7·33 | 13·43 | 1·90 | | 10·71 | 11·36 | 46·22 | 43·91 |
| Az elemzésnél felhasznált anyag g-ban | 99·95 | 104·86 | 99·33 | 102·45 | 99·98 | 107·33 | 100·00 | | 101·39 | 99·99 | 99·97 | 99·66 |
| | 9·5239 | 11·3477 | 10·6053 | 11·3428 | 11·1824 | 7·4448 | 11·6004 | 12·1084 | 11·6682 | 11·5307 | 9·5623 | 10·0671 |

*A* = a szuszpenzió elkészítése után azonnal vizsgálva, *B* = a szuszpenzió elkészítése után 4 heti állás mulva vizsgálva.

## II. Az agyag-szuszpenziók előkészítése.

Az agyag-szuszpenziók előkészítése a következőképpen történt. A körülbelül 10 g súlyú 105°C-on kiszárított anyagot porcellán-csészében vízzel szétáztattam és ujjal eldörzsöltem és a vízben lebegő részt az iszapoló hengerbe töltve az eljárást addig folytattam, míg az egész anyag az iszapoló hengerbe került. A mechanikai diszpergálásnak az irodalomban ismertetett módjai közül ezt tartottam legegyszerűbbnek és a vizsgálatok szerint ez a módszer elég jó eredményeket ad. A hosszú ideig való rázás R. Bradfield vizsgálatai szerint az agyag mesterséges szétdarabolásához vezet.

A kellő mennyiségű stabilizáló anyagot előre belemértem az iszapoló hengerbe, úgyhogy az agyagszuszpenzió azonnal koncentrált stabilizáló anyaggal érintkezett és fokozatosan higult fel a szuszpenzió hozzáadásakor a kellő mértékig. Ha eleinte a koncentráltabb stabilizáló anyag koagulációt okozott is (pl. ammoniumhidroxid esetében), a higítás folyamán ez a koaguláció megszűnt és a koagulált részecskék újra szétestek. Az ammoniumhidroxid kezdeti koncentrációja körülbelül 2 n volt, a nátriumoxaláté pedig körülbelül 0·1 n. Azért célszerű ilyen koncentráltabb stabilizáló anyagból kiindulni, mivel a stabilizátor adszorpciósebessége a koncentrációval nő. Néhány anyagnál megpróbáltam a szükséges ammoniumhidroxid-mennyiséget a szuszpenziókhoz utólag hozzáadni. Ilyenkor a stabilizáló hatás kissé megkésve jelentkezett, különösen humusztartalmú agyagoknál.

C. Correns és W. Schott kísérletei szerint a minta 105° C-on való kiszárítása az apróbb részek mennyiségét csökkentette, különösen 5 $\mu$-nál kisebb részeknél jelentkezett ez a hatás. Vizsgálataimnál mégis 105° C-on szárított anyagot használtam, ugyanis bányanedves anyaghoz nem juthattam, továbbá mivel a geológiai mult folyamán a legkülönbözőbb és ma már ellenőrizhetetlen folyamatokon keresztülment agyagokat mintegy közös nevezőre hozza ez az eljárás.

A mérések szobahőmérsékleten, közelítőleg 20° C-on történtek; mivel megfelelő termosztát nem állott rendelkezésre, a szuszpenziók hőmérséklete egy-két fokot változhatott a kísérlet közben. Ennek a hőmérsékletingadozásnak a hatása jelentkezik a grafiko-

nok kissé szabálytalan voltában, a kísérletek lényegét azonban ez a kísérleti hiba nem érinti.

Mivel az előzetes kísérletek azt mutatták, hogy a szuszpenziók elkészítésük után a 4—5. napon adták a legmagasabb értéket az apró szemcsék mennyiségére, ezért a 0·01 mm, 0·005 mm, 0·002 mm és 0·001 mm átmérőjű részecskék meghatározását a 4—5. napon végeztem. A nagyobb szemcséknél ez a hatás sokkal kevésbbé jelentkezett, tehát a 0·02 mm, 0·05 mm és 0·1 mm átmérőjű részek meghatározása a szuszpenzió elkészítése napján történt.

Az esési időkre vonatkozólag a KÖHN-féle táblázatot használtam. Az összes vizsgált anyagok sűrűségét 2·7-nek vettem, mivel a stabilizáló anyagok hatását minden egyes anyagnál azonos időben akartam vizsgálni. Ez az önkényes eljárás a szemcsenagyságok meghatározásánál kis hibát okozott, azonban itt, ahol nem annyira az egyes kőzetek abszolút szemcsenagyságának a megállapítása, mint inkább az egyes stabilizátorok hatásának az összehasonlítása volt a főszempont, ez a hiba elhanyagolható; illetőleg mivel valamennyi stabilizátornál ugyanaz a hiba szerepelt, tulajdonképpen kiküszöbölődik.

A szuszpenziók változásainak a vizsgálatánál természetesen már a szuszpenzió elkészítése napján kezdtem a méréseket.

A használt iszapolási idők 10 cm magas vízoszlopra:

| | | |
|---|---|---|
| 0·1 | mm | 12″ |
| 0·05 | « | 44″ |
| 0·02 | « | 4′27″ |
| 0·01 | « | 18′10″ |
| 0·005 | « | $1^h$13′ |
| 0·002 | « | $7^h$35′ |
| 0·001 | « | $30^h$15′ |
| 0·0005 | « | 5 nap $1^h$ |

## III. A használt peptizáló (stabilizáló) anyagok.

A stabilizáló anyagok hatásuk alapján három csoportba sorolhatók; minden csoportnak jellegzetes hatása van, mely különösen a szuszpenzió időben való változásaiban mutatható ki, továbbá

abban jelentkezik, hogy csak bizonyos határozott kémiai összetételű szuszpenzióknál használhatók előnyösen az egyes peptizáló anyagok.

1. csoport. Ide tartoznak mindazon elektrolitok, melyek *OH* ionokat szolgáltatnak nagyobb mennyiségben. Elsősorban az alkálifémek bázisai, továbbá az alkálifémkarbonátok és alkálifémek gyenge organikus savakkal képezett sói. Mindezen anyagok az *OH* ionok elektromos feltöltő hatása következtében stabilizálnak. Kísérleteimnél a 0·1 *n* ammoniumhidroxidot használtam, ezt a töménységet ajánlja WIEGNER. A stabilizáló anyagok ugyanis csak bizonyos koncentráció intervallumban diszpergálnak, e koncentráció alatt az *OH* ionok által szolgáltatott elektromos mennyiség nem elegendő a szuszpenzió feltöltésére, az optimális koncentráció fölött pedig előtérbe lép a mellékion erőteljesebb adszorpciója (WIEGNER), amely végül elektromos kiegyenlítődéshez és koaguláció hoz vezet.

A mellékionnak az optimális koncentrációban is jelentkező káros hatása csökkentése végett lehetőleg olyan vegyületet szokás alkalmazni, melynek mellékionjai a legkisebb koagulációt okozzák. Az alkálifémek bázisainál a *Li* adja a legjobb diszperziót, azonban a *Na* vagy $(NH_4)$ ion is csak kevéssel rosszabb diszperziót ad és így gyakorlatilag az olcsóbb *Na* vagy $(NH_4)$ bázisok használhatók.

Mivel a pipettamódszernél a szuszpenzióban lebegő szilárd anyag mennyiségét vízfürdőn való elpárologtatással mérjük, célszerűbb az $(NH_4)OH$-t használni, mivel ez beszárításkor $NH_3$ és $H_2O$-ra bomlik és a rendszerből távozik. *NaOH* használatánál a beszárításkor a levegő $CO_2$ tartalma rovására $Na_2CO_3$ képződik és ez a változatlan *NaOH*-val együtt visszamarad és mennyiségével növeli a szuszpenzió száraz maradékának a súlyát. Ennek a súlytöbbletnek a korrekciója végett a tiszta *NaOH* oldat szárazmaradékát is mérjük és levonjuk a szuszpenzió szárazmaradékának a súlyából. Ez a korreckció azonban a *NaOH*-ból képződő bizonytalan mennyiségű $Na_2CO_3$ miatt sohasem tökéletes. (Megjegyzendő, hogy az $(NH_4)OH$ beszárításakor is képződik kevés $(NH_4)CO_3$.

A 2. csoportba azon stabilizáló anyagok tartoznak, melyek a koagulációt okozó ionokat oldhatatlan vegyület képződése közben

a szuszpenzióból eltávolítják. Az agyagoknál főleg a *Ca* ionok okozzák a legerősebb koagulációt. A *Ca* ionok hatásának a leküzdésére az *OH* ionok stabilizáló hatása rendszerint nem elegendő; ilyen esetekben a 0·005 *n* nátriumoxalátoldatot használják. A nátriumoxalát hatása részben az oldott *Ca* ionok oldhatatlan kalciumoxalát alakjában való eltávolításán alapszik. A kísérleteim határozottan ilyen folyamatra utalnak. Mások a nátriumoxalát hidrolízisekor képződő *OH* ionok stabilizáló hatásának tulajdonítják az oxalátok peptizáló sajátságát. Valószínűleg komplex hatása van a nátriumoxalátnak, részben oldhatatlan kalciumoxalát képződik, de a reakció folyamán $Na_2CO_3$ is képződik és ennek a hidrolízise szolgáltat *OH* ionokat, melyek a lebegő részeket feltöltik.

Az időállósági kísérletekből mindenesetre egy az *OH* peptizátoroktól eltérő sajátos oxalát-hatást lehet kimutatni, különösen az allophanszerű agyagoknál.

A kísérlet folyamán képződő kalciumoxalát-csapadék a szuszpenzió legkisebb szemcséinek mennyiségét növeli. Mivel egy liter 0·005 *n* nátriumoxalátban 0·67 g oldott nátriumoxalát van, ez a mennyiség 0·5 g $CaCO_3$-t képes lekötni (0·22 g $CO_2$-t és 0·28 g *CaO*-t). Ha ennél a kritikus mennyiségnél több $CaCO_3$ van a szuszpenzióban, úgy a reakció végén, mikor már az összes oxalát kalciumoxaláttá alakult, a fölöslegben lévő *Ca* ionok koagulálják a szuszpenziót. Mivel a vizsgált szuszpenziók legnagyobb része a kritikus $CaCO_3$ mennyiségnél többet tartalmazott, valóban megfigyelhető volt a szuszpenzió hirtelen koagulációja. (A $CaCO_3$ és a nátriumoxalát reakciója aránylag lassú folyamat, mivel a $CaCO_3$ csak nehezen oldható és így egyszerre csak kevés oldott *Ca* ion van jelen a szuszpenzióban.)

Ha feltételezzük, hogy az összes oxalát kalciumoxaláttá alakult ($CaC_2O_4 \cdot H_2O$), úgy a szuszpenzióban 0·73 g szilárd kalciumoxalát van, ez a mennyiség egy 10 g szilárd anyagot tartalmazó szuszpenzióban 7·3%-kal növeli a legkisebb részek mennyiségét. Ha a különböző peptizáló anyagokkal készült szuszpenziók $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséinek mennyiségét összehasonlítjuk, látjuk, hogy különösen az allophan-szerű agyagoknál a nátriumoxaláttal nyert értékek a többi peptizáló anyaggal nyert értékeket 7·3%-nál jóval nagyobb %-kal haladják meg. Tehát a nátriumoxalát jobb disz-

pergáló-képességét nem lehet egyszerűen az oldhatatlan kalciumoxalát képződésére visszavezetni, hanem egy sajátságos oxalát-hatásban kell keresni. Hogy ilyen csapadékképződés valóban beáll, azt az egyik csapóföld nátriumoxalátos szuszpenziójának a vizsgálatából látjuk, ahol idővel a $< 0{\cdot}002$ mm-es részek mennyisége 100% fölé nőtt. Ez a jelenség nem magyarázható mással, mint hogy a szuszpenzióban oldott anyagokból csapadék képződött.

Ez a csapadékképződés azonban a pipettázó módszernél ki nem küszöbölhető hibát okoz. A $0{\cdot}005$ $n$ nátriumoxalát-oldat szárazmaradéka 0·67 g literenkint. A szuszpenzió szárazmaradékának a mérésénél ezt a mennyiséget le kell vonni. (10 $cm^3$ szuszpenzió bepárologtatásakor 0·0067 g-ot.) Azonban ilyenkor már az oxalát egy része nem oldott állapotban van jelen, hanem igen fínom eloszlású csapadék alakjában a legfínomabb szemcséjű frakcióban koncentrálódik. A nagyobb szemcsék mérésénél tehát a 10 $cm^3$ szuszpenzió bepárologtatásakor az oldott oxalátmennyiségre 0·0067 g-nál kevesebbet kellene levonni. Viszont a legkisebb frakció szárazmaradékának mérésekor az összes kalciumoxalát-csapadékot is le kellene vonni. Mivel a képződő csapadék mennyisége a kísérlet folyamán ismeretlen, ezeket a korrekciókat nem tudjuk elvégezni. Csupán azt állapíthatjuk meg, hogy a nátriumoxaláttal készült mechanikai elemzéseknél az egyes szemcsenagyságokra nyert százalékok összeadásánál nem 100·00%-t, hanem a képződő csapadék mennyiségének megfelelően 100·00%-nál nagyobb összeget kapunk.

A mellékion hatásának a csökkentése végett itt is szokás lithiumoxalátot használni. Kísérleteimnél végig az olcsóbb nátriumoxalátot használtam.

A peptizáló anyagok 3. csoportjába azok az anyagok tartoznak, melyek a szuszpenzió szemecskéit védőhártyával vonják be és így a koaguláló ionokat távoltartják. (Védőkolloid hatás.) Kísérleteimnél a nátriummetaszilikát (vízüveg) kereskedelmi 36—38°Bé oldatából 1 $cm^3$-t adtam 1 liter szuszpenzióhoz. A tiszta vízüvegoldat szárazmaradékát itt is meghatároztam, mivel ezt korrekció végett a szuszpenzió szárazmaradékából le kell vonni, miként az a nátriumoxalátos eljárásnál is történt. (10 $cm^3$ szuszpenzió bepárologtatásakor a bennefoglalt vízüveg szárazmaradéka a

használt vízüveg minősége szerint 0·0053 g-tól 0·0063 g-ig változott).

A vízüvegoldatban mindig van kovasav-szol, továbbá a hidrolíziskor képződő *NaOH* miatt *OH* ionok is. (A kereskedelmi áru már szennyezésként is tartalmaz szabad kovasavat és *NaOH*-t.) Az időállósági kísérletek szerint itt nem *OH*-hatás, hanem a kovasav-szol védőkolloid-hatása mutatható ki. Ez főleg a szuszpenzió változatlanságában és elektrolitokkal szemben tanusított relatív ellenállóképességében mutatkozik.

Lehetséges, hogy vízüveg használatánál is képződik a jelenlévő $CaCO_3$ hatására oldhatatlan csapadék (kalciummetaszilikát). Ezt kimutatni nem tudtam. Ellene szól az, hogy a vízüveggel peptizált kréta-szuszpenziók legfinomabb lebegő részei maradéktalanul oldódtak sósav hozzáadására.

A vízüveg-stabilizátor hibaforrásai : 1. nem állandó összetételű, 2. a közeg viszkozitását ellenőrizhetetlenül növeli, 3. a kísérleti eszközöket megtámadja.

Ha a vízüveg a víz viszkozitásának a növelésével hat, akkor különösen az apróbb szemcsék esési sebességét csökkenti, így ha a tiszta vízre érvényes esési időket használjuk, tulajdonképpen az apróbb szemcsék mennyiségét nagyobbnak mérjük.

## IV. Kalciumkarbonáttartalmú tengeri agyagok.

Az első vizsgálatokra a kémiai és ásványtani szempontból jól tanulmányzott oligocénkori «kiscelli agyagot» választottam. Vendl Aladár professzor úr szívességéből megkaptam az eredeti anyagot, melyet kiscelli agyag tanulmányaiban feldolgozott és így vizsgálataim szorosan kapcsolódnak az ő munkájához. Ebben a sorozatban képviselve van a kiscelli agyag valamennyi fontosabb típusa, oxidált és oxidálatlan, karbonátdús és szegény, humusztartalmú, valamint az örsödi keserűvíz-telepekről származó szulfátos talajvíztől átjárt agyag.

Vendl A. szerint a kiscelli agyag legfinomabb, mikroszkóp alatt még felismerhető részei muszkovit és kalcitból állanak. Feltehető tehát, hogy ebben az üledékben az agyagos rész (kolloidok) főleg muszkovitból áll.

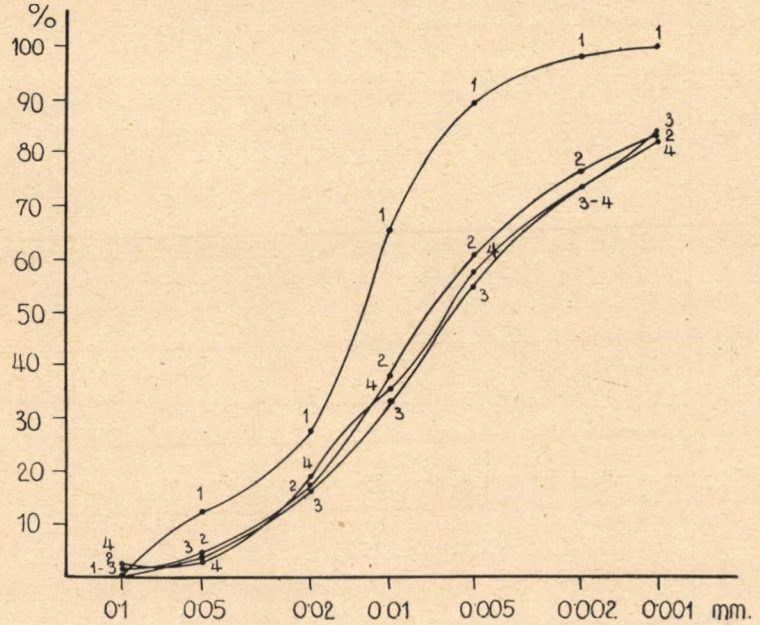
## II. táblázat.

Karbonátdús kiscelli agyagok szemcsenagysága súly %-ban.
Az ATTERBERG-féle értékek és a kémiai elemzések VENDL A. nyomán.

| | Szemcse átmérő mm-ben | Pipetta-módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium meta-szilikátban | |
| | | 7·0019* | 7·8472* | 7·3511* | 8·2798* | |
| *Gellért-hegy.* | >0·1 | 0·00 | 1·62 | 0·00 | 1·93 | |
| Kékszínű agyag. | 0·1—0·05 | 12·28 | 2·68 | 4·08 | 0·96 | |
| $CO_2 = 14·15$ % | 0·05—0·02 | 14·85 | 12·87 | 12·79 | 15·94 | |
| $CaO = 17·55$ % | 0·02—0·01 | 38·56 | 20·90 | 16·87 | 16·79 | |
| $SO_3 = 0·13$ % | 0·01—0·005 | 23·71 | 22·43 | 21·36 | 21·98 | |
| | 0·005—0·002 | 13·00 | 16·18 | 18·64 | 15·94 | |
| | 0·002—0·001 | 2·71 | 6·37 | 10·34 | 8·45 | 27·71 |
| | <0·001 | 0·00 | 16·95 | 16·19 | 18·00 | |
| | | 8·5286* | 8·3930* | 7·0582* | 6·8391* | |
| *Gellért-hegy.* | >0·1 | 1·76 | 0·36 | 0·00 | 3·07 | |
| Sárgaszínű agyag. | 0·1—0·05 | 4·22 | 4·41 | 5·53 | 4·09 | |
| $CO_2 = 8·96$ % | 0·05—0·02 | 14·77 | 15·61 | 12·04 | 14·33 | |
| $CaO = 13·93$ % | 0·02—0·01 | 54·76 | 16·80 | 16·29 | 21·64 | |
| $SO_3 = 0·19$ % | 0·01—0·005 | 18·88 | 20·02 | 17·14 | 18·72 | |
| | 0·005—0·002 | 4·69 | 19·30 | 20·97 | 16·23 | |
| | 0·002—0·001 | 0·59 | 9·65 | 9·92 | 5·41 | 31·12 |
| | <0·001 | 0·35 | 13·82 | 18·56 | 16·52 | |
| | | 5·8435* | 7·6736* | 7·5789* | 6·2419* | |
| *Szépvölgy.* | >0·1 | 0·00 | 0·91 | 3·43 | 0·16 | |
| Kékszínű agyag. | 0·1—0·05 | 7·87 | 4·17 | 6·46 | 13·62 | |
| | 0·05—0·02 | 15·75 | 15·51 | 9·37 | 8·65 | |
| | 0·02—0·01 | 32·00 | 17·98 | 16·49 | 20·99 | |
| | 0·01—0·005 | 35·59 | 20·85 | 14·12 | 12·66 | |
| | 0·005—0·002 | 7·36 | 19·68 | 23·62 | 20·35 | |
| | 0·002—0·001 | 2·23 | 3·65 | 7·65 | 5·13 | 19·92 |
| | <0·001 | | 17·60 | 18·87 | 18·42 | |
| | | 6·7933* | 6·1156* | 8·1603* | 8·7302* | |
| *Óbuda.* | >0·1 | 2·80 | 0·16 | 0·00 | 0·00 | |
| Bohn-téglagyár agyagja. | 0·1—0·05 | 2·50 | 3·27 | 3·90 | 6·07 | |
| $CO_2 = 1·64$ % | 0·05—0·02 | 13·10 | 16·84 | 13·00 | 16·15 | |
| $CaO = 1·58$ % | 0·02—0·01 | 26·05 | 22·89 | 17·26 | 21·76 | |
| $SO_3 = 0·49$ % | 0·01—0·005 | 16·05 | 14·88 | 16·43 | 17·75 | |
| | 0·005—0·002 | 19·87 | 18·48 | 18·54 | 17·98 | |
| | 0·002—0·001 | 3·39 | 7·19 | 9·81 | 8·93 | 20·56 |
| | <0·001 | 16·19 | 16·35 | 19·50 | 10·19 | |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban

Megerősíti ezt a felfogást F. K. Schlünz és C. W. Correns a kiscelli agyaghoz hasonló septáriás agyagon végzett vizsgálata Az oxidálódott sárga kiscelli agyagban a vasoxid is részt vesz a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék anyagában.



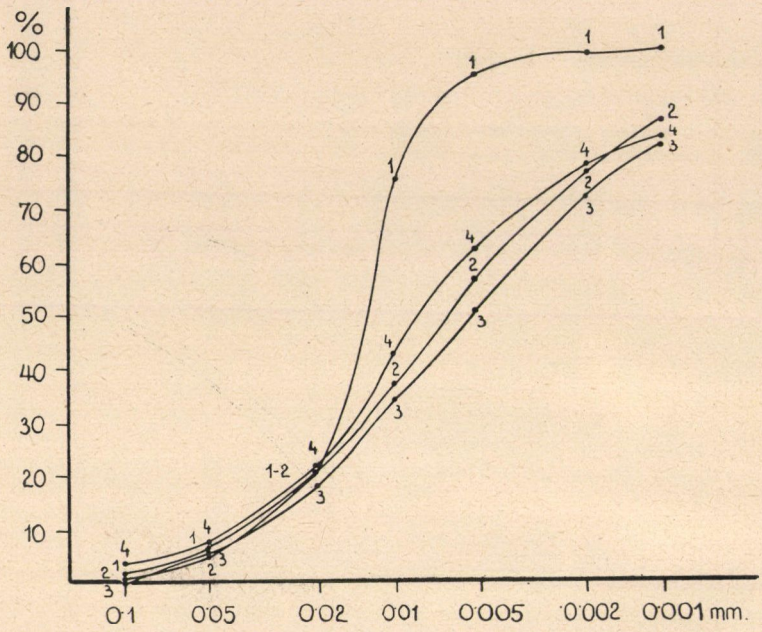

1. ábra. Gellérthegyi kék kiscelli agyag szemcseeloszlása.

Az összes táblázatokban és a hozzájuk tartozó ábrákon a jelölés a következő:

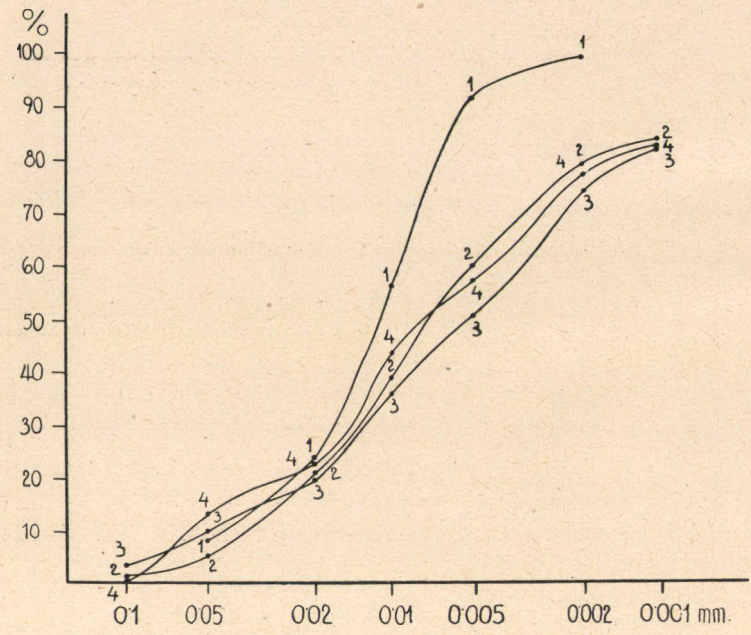
1. = diszperzió desztillált vízben.
2. = diszperzió 0·1 n ammoniumhidroxidban.
3. = diszperzió 0·005 n. nátriumoxalátban.
4. = diszperzió nátriummetaszilikát-oldatban.

Ahol eltérés van, ott a megfelelő ábránál található a jelmagyarázat.

A gellérthegyi kék és sárga, továbbá a szépvölgyi kékszínű kiscelli agyag karbonátdús és az ezekből készült összes szuszpenziók a kritikus $CaCO_3$ mennyiségnél többet tartalmaznak. Az oldható szulfátok mennyisége 0·13—0·19% volt (Vendl A.). Ezen agyagoknál a nátriumoxalát adta a legnagyobb diszperzitást. (II. táblázat és 1—3. ábra.)




2. ábra. Gellérthegyi sárga kiscelli agyag szemcseeloszlása.




3. ábra. Szépvölgyi kiscelli agyag szemcseeloszlása.

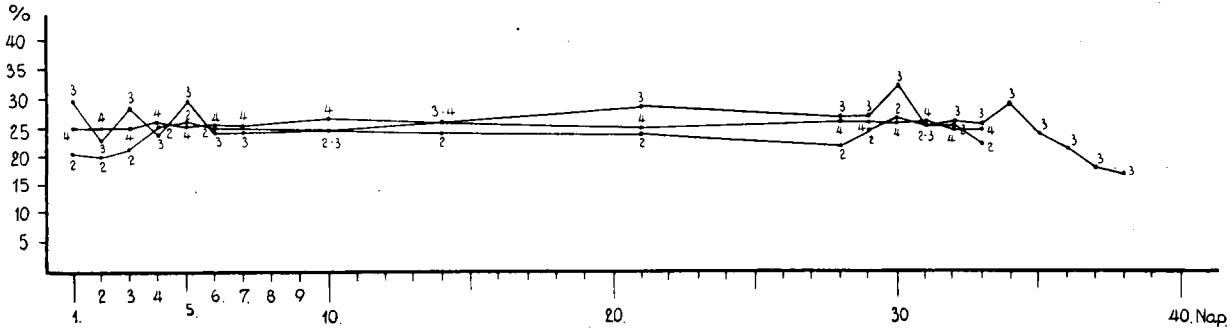
## III. táblázat.

Karbonátdús agyag-szuszpenziók változása. A < 0·002 mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban. — 2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. nátriummetaszilikát oldatban.

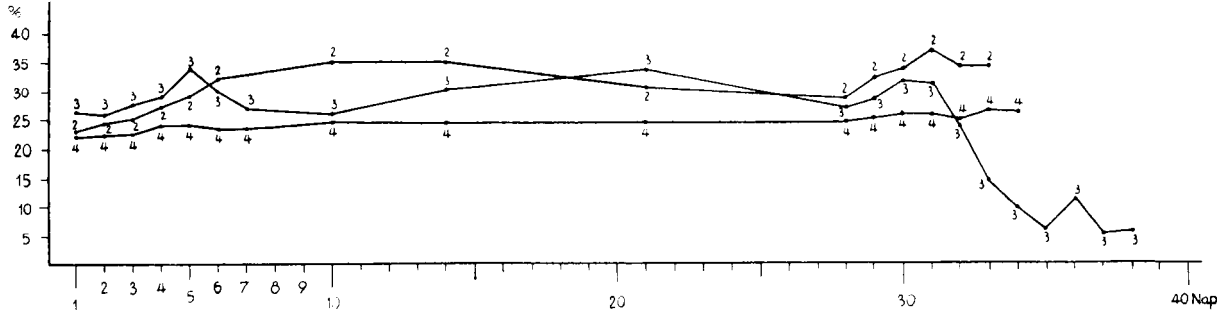
| A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | *I. Gellért-hegy*, kékszínű agyag | | | *II. Gellért-hegy*, sárgaszínű agyag | | | *III. Szépvölgy*, kékszínű agyag | | | | *IV. Óbuda* Bohn-téglagyár agyagja, | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 2*a*** | 3 | 4 | 2 | 2*a*** | 3 | 4 |
| | 9·7167* | 11·0756* | 10·9065* | 8·0963* | 10·9749* | 9·9038* | 7·7909* | 9·2334* | 11·7293* | 10·2387* | 7·8333* | 11·7134* | 11·6874* | 10·0771* |
| 1 | 20·69 | 29·43 | 25·14 | 23·10 | 26·51 | 22·31 | 18·87 | 17·98 | 25·15 | 22·46 | 18·89 | 2·82 | 25·24 | 22·63 |
| 2 | 19·97 | 23·11 | 24·86 | 24·58 | 26·06 | 22·62 | 20·67 | 20·14 | 21·65 | 22·08 | 20·04 | 18·53 | 26·61 | 21·83 |
| 3 | 21·51 | 28·62 | 24·77 | 24·83 | 27·34 | 22·62 | 22·08 | 20·14 | 23·36 | 22·27 | 19·15 | 19·38 | 27.72 | 22·72 |
| 4 | 25·22 | 24·20 | 25·96 | 27·30 | 28·98 | 24·03 | 20·92 | 21·01 | 23·27 | 22·08 | 21·19 | 20·32 | 31·57 | 22·72 |
| 5 | 26·12 | 29·52 | 25·69 | 28·90 | 33·99 | 23·93 | 24·64 | 22·09 | 27·92 | 21·19 | 21·32 | 21·26 | 30·71 | 22·92 |
| 6 | 24·81 | 24·74 | 25·51 | 31·99 | 30·25 | 23·63 | 21·57 | 23·83 | 26·69 | 21·68 | 23·23 | 22·11 | 31·49 | 22·82 |
| 7 | — | 24·38 | 25·78 | — | 27·16 | 23·53 | — | — | 23·62 | 20·61 | — | — | 30·03 | 22·03 |
| 10 | 24·50 | 24·65 | 26·42 | 35·33 | 26·24 | 24·64 | 24·74 | 22·64 | 24·22 | 20·71 | 24·00 | 22·20 | 30·46 | 22·63 |
| 14 | 23·98 | 25·91 | 25·96 | 34·83 | 30·71 | 24·64 | 21·31 | 23·50 | 26·17 | 21·19 | 21·83 | 22·28 | 31·83 | 22·53 |
| 21 | 24·29 | 28·44 | 25·32 | 30·51 | 33·53 | 24·33 | 22·59 | 22·42 | 28·22 | 22·56 | 21·83 | 22·54 | 30·72 | 23·32 |
| 28 | 22·03 | 27·27 | 25·87 | 28·78 | 26·97 | 24·44 | 23·73 | 22·53 | 25·32 | 22·27 | 23·88 | 23·73 | 32·86 | 23·62 |
| 29 | 24·50 | 27·36 | 26·14 | 32·11 | 28·70 | 24·84 | 25·03 | 24·69 | 25·32 | 21·88 | 24·64 | 24·07 | 32·17 | 23·22 |
| 30 | 26·45 | 31·87 | 26·33 | 33·47 | 31·62 | 25·44 | 23·75 | 22·96 | 27·54 | 22·66 | 24·00 | 23·65 | 33·03 | 23·12 |
| 31 | 25·42 | 25·73 | 25·78 | 36·44 | 31·07 | 25·34 | 24·26 | 25·88 | 26·69 | 21·68 | 24·89 | 24·67 | 33·62 | 22·92 |
| 32 | 25·73 | 25·82 | 25·04 | 34·09 | 23·51 | 24·33 | 24·90 | 23·72 | 17·31 | 22·17 | 25·02 | 24·42 | 34·57 | 23·32 |
| 33 | 22·74 | 25·64 | 25·32 | 33·97 | 13·94 | 26·03 | 23·87 | 24·04 | 8·95 | 22·37 | 23·36 | 23·73 | 33·97 | 23·22 |
| 34 | — | 28·98 | — | — | 9·57 | 25·55 | — | — | 3·50 | 20·61 | — | — | 34·91 | 23·23 |
| 35 | — | 23·92 | — | — | 6·10 | — | — | — | 0·00 | — | — | — | 33·54 | — |
| 36 | — | 21·76 | — | — | 10·93 | — | — | — | 0·00 | — | — | — | 34·05 | — |
| 37 | — | 17·88 | — | — | 5·28 | — | — | — | 0·00 | — | — | — | 32·17 | — |
| 38 | — | 17·06 | — | — | 5·56 | — | — | — | 0·00 | — | — | — | 34·82 | — |

* A szuszpenzió készítésére használt anyag mennyisége gr-ban.

** 2*a*-val jelzett szuszpenzióknál a szükséges ammoniumhidroxid mennyiséget a kész szuszpenzióhoz utólag adtam hozzá.



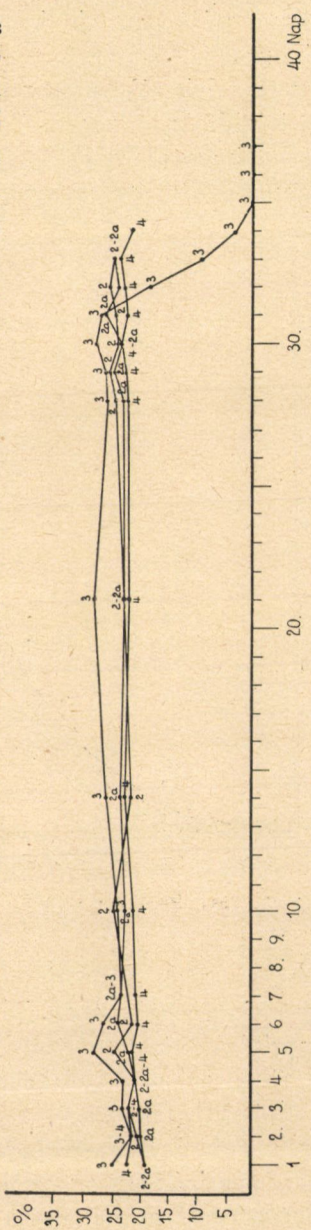

4. ábra. Gellérthegyi kék kiscelli agyag-szuszpenzió $<0.002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.




5. ábra. Gellérthegyi sárga kiscelli agyag-szuszpenzió $<0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.

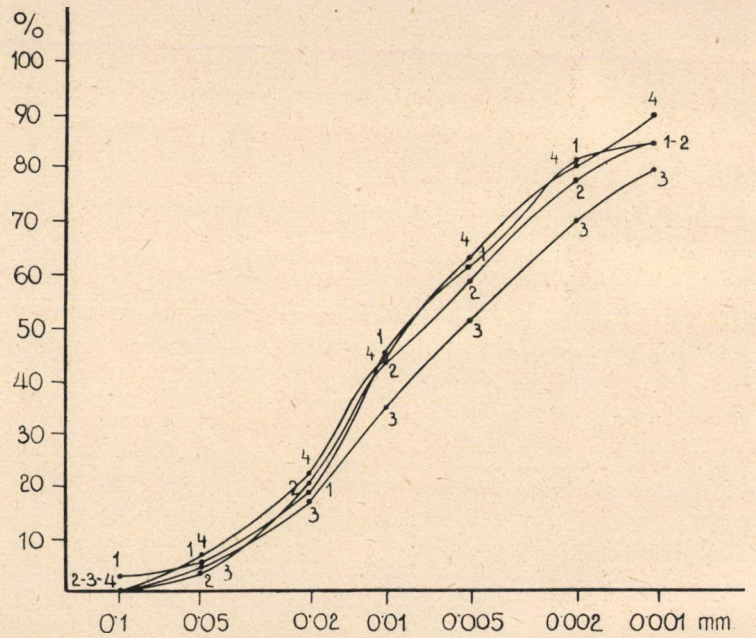
Mivel a szuszpenziók $CaCO_3$ tartalma a kritikus mennyiséget meghaladta, a nátriumoxaláttal kezelt szuszpenziók bizonyos idő mulva koaguláltak. A koagulálás itt a 4. hét után következett be. Megfigyelhető továbbá itt is a lösz szuszpenzióknál már leírt jelenség, t. i., hogy a nátriumoxalát a 0·001 mm-nél kisebb részek mennyiségét csökkenti (koagulálja).

Feltűnő a nátriummetaszilikátos szuszpenzió változatlansága (III. táblázat és 4—6. ábra). A szuszpenziók idővel való elváltozását ábrázoló 4—6. ábrán egyrészt a stabilizátorok sajátos hatását látjuk, másrészt a sűrűbben vagy ritkábban bekövetkezett felrázás mechanikai hatását. Az első héten naponta végeztem a meghatározásokat, a szuszpenziókat így naponta fel kellett ráznom. Ez a naponkint bekövetkező rázás a szuszpenziót eleinte diszpergálta, azonban még az első héten megfordult a rázás hatása és egyenesen koaguláló hatású volt. A diszperzitás általában a 4—5. napon érte el a maximumot. A kísérlet végén, amikor újra naponkint ráztam fel a szuszpenziókat, ismét az első napokban tapasztalt diszpergáló hatást tapasztaltam, ezt azonban csakhamar újra koagulálás váltotta fel.




6. ábra. Szépvölgyi kiscelli agyag-szuszpenzió < 0·002 mm-es szemcséi mennyiségének változása. 2a = 0·1 n. ammoniumhidroxidos szuszpenzió, de a szükséges ammoniumhidroxid-mennyiség az előre elkészített szuszpenzióhoz utólag hozzátéve.

Egészen sajátságos viselkedést mutatott az óbudai Bohn-téglagyár agyagja. Ez aránylag sok szenesedett növényi lenyomatot tartalmazott, tehát sok húmuszanyagot. A húmuszanyag jelenléte egymaga is stabilizáló hatású. Továbbá a szuszpenziók a kritikus $CaCO_3$ mennyiségnél kevesebbet tartalmaztak, így tehát a nátrium-oxalátos szuszpenzió sem koagulált. A kísérlet végéig abnormális



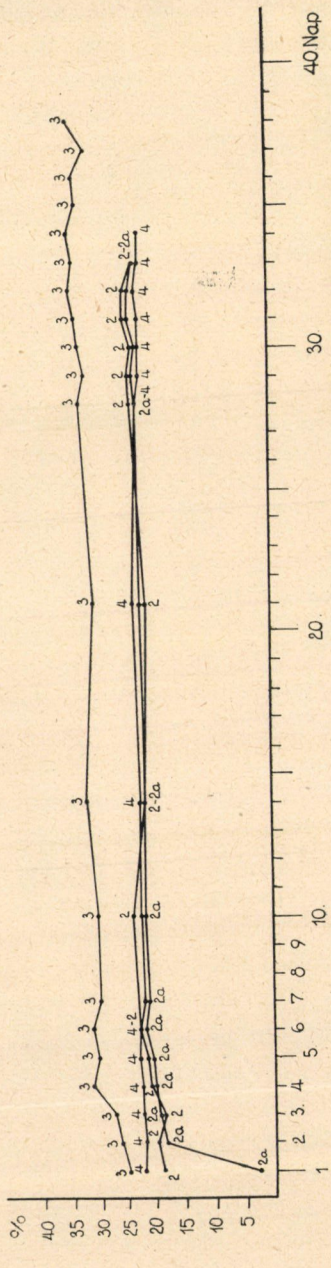

7. ábra. Óbuda, Bohn-téglagyári kiscelli agyag szemcseeloszlása.

emelkedést mutatott a nátriumoxalátos szuszpenzió a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemek mennyiségében. Hogy itt az oxalát a szénrészecskék tovább aprítását végezte-e vagy a húmuszanyaggal alkotott csapadékot, eldönteni nem tudtam. A kísérletek számszerű eredményeit a II. és III. táblázat és a 7—8. ábra tünteti fel.

A szépvölgyi és Bohn-téglagyári agyagnál a 0·1 $n$ ammoniumhidroxiddal peptizált szuszpenziókat kétféle módon készítettem el. A 2. számú szuszpenzióknál a szükséges ammoniumhidroxid mennyiséget már előre belemértem az iszapoló hengerbe, (mint azt az összes

kísérletnél tettem). Így ezekben az agyagrészecskék mingyárt körülbelül 2 *n* ammoniumhidroxiddal érintkeztek és a szuszpenzió elkészítése folyamán hígultak fel a kellő koncentrációig. A 2a.számú szuszpenzióknál a már kész szuszpenzióhoz utólag adtam hozzá a szükséges mennyiségű ammoniumhidroxidot. A III. táblázatból és a 6. és 8. ábrából láthatjuk, hogy az előbbi eljárás a helyes, mivel a második eljárással előkészített szuszpenzióknál az ammoniumhidroxid kisebb kezdeti koncentrációja miatt az *OH* ionok adszorpciója lassúbb és ez a szuszpenzió diszpergálásában késést okoz. Különösen jól látszik ez a késés a Bohn-téglagyár húmusztartalmú agyagánál (8. ábra). Itt az első eljárással előkészített szuszpenzió a $< 0{\cdot}002$ mm-es részekre az első napon 18·89%-ot, a második eljárással előkészített pedig csak 2·82%-ot adott és csupán a harmadik napon vált egyformává a két érték.

Igen érdekes volt az örsödi Saxlehner-féle keserűvíztelepről származó kőzetek viselkedése. A vizsgált kékszínű agyag 0·65%, a sárga agyag




8. ábra. Óbuda, ¶ Bohn-téglagyári kiscelli agyag-szuszpenzió $<0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása. 2a = 0·1*n* ammoniumhidroxidos szuszpenzió, de a szükséges ammoniumhidroxidmennyiség az előre elkészített szuszpenzióhoz utólag hozzátéve.

pedig 0·84 % $SO_3$-at tartalmazott. Kísérleteim szerint ilyen magas szulfáttartalom mellett már a 0·005 *n* nátriumoxalát nem képes kellő diszperzitást elérni, itt a sókoncentráció iránt érzéketlenebb nátriummetaszilikát adta a legjobb eredményt. A kísérletek eredményét a IV. táblázat tünteti fel. Megjegyzendő, hogy e minták vizsgálatánál nem ugyanabból a kőzetdarabból indultam ki, melyet VENDL A. használt a vizsgálataihoz, ezért tehát a meglehetősen durvaszemű üledék mechanikai összetétele sem egyezik teljesen az ő eredményeivel. Az oldott sók eltávolításának a hatását a sárga agyagon vizsgáltam. E kőzetből dekantálással eltávolítottam az oldható sók nagyrészét; ha az ilyen módon előkészített próbák elemzését összehasonlítjuk a teljes sótartalmú próbák elemzéseivel, rögtön szembetűnik az ilyen kilúgozott adszorpciós komplexumú agyagok eltérő diszperzitásfoka. A szuszpenziók a kritikus $CaCO_3$ tartalomnál többet tartalmaztak. Az agyagban lévő adszorbeált elektrolitokról a keserűvizek kémiai összetétele és VENDL A. ásványtani vizsgálata tájékoztat, mely utóbbi szerint különösen sok gipsz található ez agyagokban. A 0·005 *n* nátriumoxalát hatástalan voltát talán éppen ez a magas $CaSO_4$ tartalom okozza, mivel a $CaSO_4$ sokkal jobban oldódik a $CaCO_3$-nál és így a rendelkezésre álló peptizáló hatású oxalátot hamarább leköti kalciumoxalát alakjában, mint a $CaCO_3$. Ezt megerősíti az, hogy a dekantálással a szulfátoktól és egyéb könnyen oldható sóktól nagyrészt megszabadított agyag már a 0·005 *n* nátriumoxaláttal adta a legerősebb diszperziót, bár $CaCO_3$ tartalma alig változott meg a dekantálás következtében.

Ezen vizsgálatok eredményére támaszkodva használta POSEWITZ G. a rókushegyi kiscelli agyagok vizsgálatánál (mintái magas szulfáttartalmúak voltak) az ilyen esetben legalkalmasabb nátriummetaszilikát stabilizátort. Kísérletei szerint még a 0·59% $SO_3$ tartalmú talajvízben végzett iszapoláskor is a nátriummetaszilikát teljes diszperzitást biztosít. (A saját kísérleteimben az agyagszuszpenziók $SO_3$ tartalma 0·1% alatt volt.)

Mindezen kísérletek alapján megállapítható, hogy a stabilizátorok közül a nátriummetaszilikát hatása terjed ki a legnagyobb elektrolitkoncentráció-intervallumra és ezért használata különösen a magasabb sótartalmú agyagoknál nélkülözhetetlen.

## IV. táblázat.

Szulfátdús kiscelli agyagok szemcsenagysága súly %-ban.
Az ATTERBERG-féle értékek és a kémiai elemzések VENDL A. nyomán.

| | Szemcse-átmérő mm-ben | Pipetta-módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 n ammonium-hidroxid-ban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-meta-szilikát-ban | |
| | | 6·1915* | 6·7491* | 5·8948* | 6·9449* | |
| *Örsöd.* | >0·1 | 21·64 | 2·07 | 10·86 | 19·29 | |
| Kékesszürke agyag 8 m mélységből. | 0·1—0·05 | 18·41 | 39·12 | 17·48 | 14·26 | |
| | 0·05—0·02 | 35·21 | 28·89 | 31·55 | 28·65 | |
| $CO_2$ = 7·70 % | 0·02—0·01 | 15·51 | 11·56 | 10·35 | 12·53 | |
| $CaO$ = 8·97 % | 0·01—0·005 | 3·39 | 8·00 | 14·76 | 12·10 | |
| $SO_3$ = 0·65 % | 0·005—0·002 | | 4·15 | 9·84 | 6·34 | |
| | 0·002—0·001 | 5·81 | 1·04 | 1·19 | 1·87 | 1·19 |
| | <0·001 | | 5·19 | 3·90 | 5·33 | |
| | | 7·6892* | 7·7743* | 9·9157* | 9·7931* | |
| *Örsöd.* | >0·1 | 6·50 | 3·99 | 9·28 | 6·02 | |
| Sárgaszínű agyag 2 m mélységből. | 0·1—0·05 | 15·61 | 13·25 | 12·10 | 18·89 | |
| | 0·05—0·02 | 38·24 | 54·28 | 18·76 | 27·37 | |
| $CO_2$ = 10·29 % | 0·02—0·01 | 29·52 | 2·19 | 23·65 | 17·36 | |
| $CaO$ = 12·93 % | 0·01—0·005 | 3·90 | 14·54 | 30·15 | 11·33 | |
| $SO_3$ = 0·84 % | 0·005—0·002 | 1·21 | 7·59 | 4·94 | 10·82 | |
| | 0·002—0·001 | 4·68 | 0·77 | 0·10 | 4·39 | 8·54 |
| | <0·001 | 1.17 | 3·34 | 1·01 | 5·00 | |
| | | 6·2882* | 8·5384* | 7·4810* | 8·9723* | |
| *Örsöd.* | >0·1 | 7·79 | 10·30 | 6·01 | 10·59 | |
| Sárgaszínű agyag 2 m mélységből. | 0·1—0·05 | 22·10 | 18·86 | 20·85 | 15·57 | |
| Az oldható sók nagyrésze dekantálással eltávolítva. | 0·05—0·02 | 23·85 | 20·61 | 14·57 | 20·51 | |
| | 0·02—0·01 | 23·22 | 14·17 | 10·83 | 16·05 | |
| | 0·01—0·005 | 12·40 | 12·30 | 11·50 | 11·81 | |
| | 0·005—0·002 | 7·47 | 12·53 | 14·70 | 13·71 | |
| | 0·002—0·001 | 2·07 | 5·15 | 16·31 | 6·80 | |
| | <0·001 | 1·02 | 6·09 | 5·21 | 4·90 | |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.

Ha a különböző módszerekkel elérhető diszperzitásfokot vizsgáljuk, akkor az ATTERBERG készülékkel nyert értéket teljes diszperziónak tekintve (100%), a többi módszerrel nyert érték a következő: (V. táblázat). Amint látjuk az ilyen agyagoknál a pepti-

**V. táblázat.**

**A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék relatív mennyisége kiscelli agyagszuszpenziókban, a különböző módszerek szerint. ATTERBERG-féle érték = 100 %.**

***A*** = a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék abszolút mennyisége súly %-ban
***B*** = a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék relatív mennyisége az ATTERBERG-értékhez (100·00%) viszonyítva.

| | | Pipetta-módszerrel KÖHN-féle készülékben | | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 n ammonium hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium metaszilikát oldatban | |
| *Gellért-hegy.* Kékszínű | *A* | 2·71 | 23·32 | 26·53 | 26·45 | 27·71 |
| | *B* | 9·78 | 84·19 | 95·78 | 95·49 | 100·00 |
| *Gellért-hegy.* Sárgaszínű | *A* | 0·94 | 23·47 | 28·48 | 21·93 | 31·12 |
| | *B* | 3·02 | 75·42 | 91·52 | 70·47 | 100·00 |
| *Szépvölgy.* Kékszínű | *A* | 2·23 | 21·25 | 26·52 | 23·55 | 19·92 |
| | *B* | 11·19 | 104·67 | 133·15 | 118·22 | 100·00 |
| *Óbuda.* Bohn-téglagyári agyag | *A* | 19·58 | 23·54 | 29·31 | 19·12 | 20·56 |
| | *B* | 95·23 | 114·49 | 142·56 | 93·00 | 100·00 |

zált szuszpenziók az ATTERBERG-féle módszerrel kapott értékhez elég közelálló eredményeket, sőt különösen a nátriumoxalátos szuszpenziók magasabb értéket is adnak.

## V. Lösz-szuszpenziókkal végzett kísérletek.

A lösz-szuszpenziókkal végzett kísérletek nagy részét VENDL A., TAKÁTS T.—FÖLDVÁRI A. már más helyen közölték. Az alábbiakban csupán az általuk vizsgált 3. számú pacsirtahegyi és 12. számú

ördögormi lösz-szuszpenziók változásait, mint új kísérleteket ismertetem. (VI. táblázat és 9—10. ábra.)

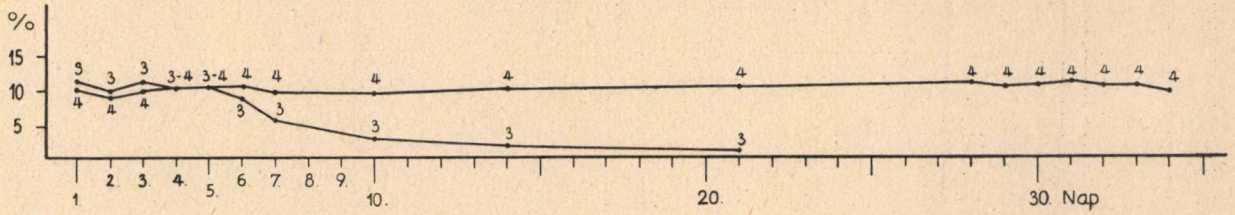
**VI. táblázat.**

Löszszuszpenziók változása. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban. 3. 0·005 n nátriumoxalátban — 4. nátriummetaszilikátban.

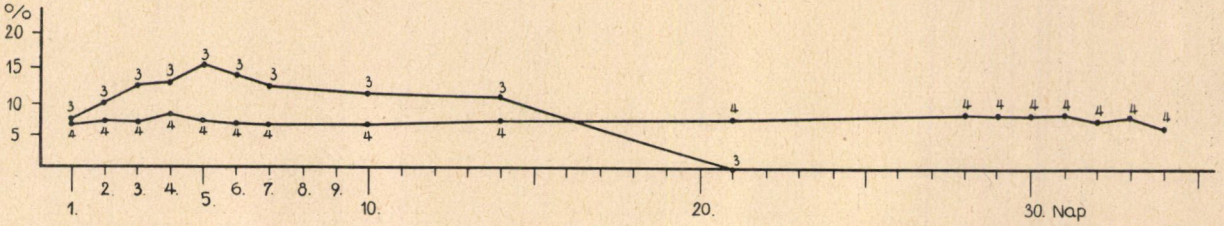
| A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | *Pacsirtahegy* $CO_2 = 13{\cdot}02$ % $CaO = 12{\cdot}39$ % $SO_3 = 0{\cdot}02$ % $Cl = 0{\cdot}02$ % | | *Ördögorom* $CO_2 = 13{\cdot}51$ % $CaO = 13{\cdot}54$ % $SO_3 = 0{\cdot}17$ % $Cl = 0{\cdot}08$ % | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 3 | 4 |
| | 11·5903* | 10·1862* | 12·4696* | 10·8000* |
| 1 | 11·30 | 10·41 | 7·70 | 6·94 |
| 2 | 9·83 | 9·72 | 9·78 | 7·31 |
| 3 | 11·47 | 10·01 | 12·67 | 7·41 |
| 4 | 10·35 | 10·31 | 12·83 | 8·61 |
| 5 | 10·44 | 10·41 | 15·32 | 7·31 |
| 6 | 8·88 | 10·45 | 13·87 | 6·94 |
| 7 | 5·95 | 9·43 | 12·27 | 6·94 |
| 10 | 2·76 | 9·62 | 11·47 | 7·22 |
| 14 | 1·90 | 10·11 | 11·23 | 7·41 |
| 21 | 0·86 | 10·01 | 0·24 | 7·31 |
| 28 | — | 10·41 | — | 7·87 |
| 29 | — | 10·11 | — | 8·24 |
| 30 | — | 10·01 | — | 7·96 |
| 31 | — | 10·41 | — | 7·96 |
| 32 | — | 10·11 | — | 7·04 |
| 33 | — | 10·11 | — | 7·50 |
| 34 | — | 9·03 | — | 6·20 |

* A szuszpenzió készítésére felhasznált anyag mennyisége gr-ban.

Amint látható, a lösz-szuszpenzióknál is a 0·005 *n* nátriumoxalát adja a legmagasabb értéket a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyiségére. Azonban az ilyen szuszpenziók nagyon kevéssé állandók, a koaguláció már az 1. vagy 2. héten bekövetkezik.




9. ábra. Pacsirtahegyi lösz-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.




10. ábra. Ördögormi lösz-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.

A legnagyobb diszperzitást a 4—5. napon mutatják a szuszpenziók. Valamennyi szuszpenzió $CaCO_3$ tartalma nagyobb volt a kritikus értéknél. A nátriummetaszilikátos szuszpenziók itt is nagyon állandóak.

A lösz-szuszpenziók csekély stabilitása meglepő a kiscelli agyag vizsgálatok alapján. A lösz-szuszpenziók sem tartalmaznak több $CaCO_3$-ot, sem az egyéb oldható sók mennyisége ($SO_3$, $Cl$) nem nagyobb. A szuszpenziók stabilitása ezek szerint tehát nem annyira a $CaCO_3$ abszolút mennyiségétől, mint inkább a jelenlévő *Ca* ionok reakcióképességétől függ. A kiscelli agyag $CaCO_3$ tartalmát főleg kristálydarabkák, továbbá állati héjtöredékek alkotják. Ezek koaguláló *Ca* ionokat csak a szemcsék és kristályok lassú oldódása folytán szolgáltatnak. A lösz $CaCO_3$ tartalmának nagyrésze azonban a többi ásványszemen alkot vékony hártyát és ez a nagyfelületű eloszlási állapota a gyorsabb oldódás miatt gyorsabb kalciumoxalátképződést, a stabilizáló oxalátionok gyorsabb eltávolítása miatt gyorsabb koagulációt okoz. Másrészt a löszök adszorpciós komplexuma sok *Ca* iont tartalmaz, az ilyen adszorbeált *Ca* ionok, mint azt később a nyirok vizsgálatánál fogjuk látni, igen gyorsan reagálnak a nátriumoxaláttal.

A különféle stabilizáló anyagokkal kezelt lösz-szuszpenziók

**VII. táblázat.**

$A <$ 0·002 mm-es szemcsék relatív mennyisége löszszuszpenziókban különböző módszerek szerint. ATTERBERG-féle érték = 100 %

$A$ = a $<$ 0·002 mm-es szemcsék abszolút mennyisége súly %-ban.
$B$ = a $<$ 0·002 mm-es szemcsék relatív mennyisége az ATTERBERG-értékhez (100 %) viszonyítva.

| | | Pipetta-módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 n ammoniumhidroxidban | 3. 0·005 n nátriumoxalátban | 4. nátriummetaszilikátban | |
| *Pacsirtahegy* | *A* | 1·84 | 6·88 | 11·43 | 10·01 | 25·30 |
| | *B* | 6·09 | 27·19 | 45·18 | 39·57 | 100·00 |
| *Ördögorom* | *A* | 5·14 | 12·54 | 13·71 | 6·94 | 21·28 |
| | *B* | 24·20 | 58·93 | 64·43 | 32·61 | 100·00 |

diszperzitásfoka az ATTERBERG-féle készülékben nyert értékhez viszonyítva sokkal rosszabb, mint a kiscelli agyag-szuszpenzióké. A legjobb diszperzitás is csak 72% körül mozog, az átlag 60% körül van, sok esetben ennél is sokkal alacsonyabb értéket mértem. Ilyen esetekben sokszor a 0·1 *n* ammoniumhidroxidoldat is magasabb értéket adott. Ezeknél a túlgyorsan koaguláló lösz-szuszpenzióknál ajánlatos lehet a nátriummetaszilikát használata, mint azt más alkalommal ismertetni fogom. Az itt közölt két löszmintára vonatkozó diszperzitásfokokat a VII. táblázat tünteti fel.

## VI. Kréta-szuszpenziók vizsgálata.

Az eddig vizsgált szuszpenziók $CaCO_3$ tartalma a kőzet egyéb anyaga mellett háttérbe szorult. A Rügen-szigeti nyers kréta azonban közel 100% $CaCO_3$ tartalmú. A kőzet kissé márgaszerűen összeálló, de hosszabb ideig vízben áztatva szétkenhető. Rügeni kréta-szuszpenziókat vizsgált újabban R. LOEBE és R. KÖHLER is, méré-

**VIII. táblázat.**

Rügeni kréta szemcsenagysága súly %-ban.

| | Szemcseátmérő mm-ben | Pipetta-módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban |
| | | 6·3256* | 5·4202* | 4·5168* |
| *Kréta* Rügen | >0·1 | 0·00 | 0·00 | 0·00 |
| | 0·1—0·05 | 0·00 | 0·00 | 0·00 |
| | 0·05—0·02 | 4·90 | 3·69 | 5·98 |
| | 0·02—0·01 | 4·90 | 28·23 | 4·87 |
| | 0·01—0·005 | 60·71 | 35·98 | 17·05 |
| | 0·005—0·002 | 24·98 | 24·54 | 39·19 |
| | 0·002—0·001 | 1·74 | 7·19 | 29·45 |
| | <0·001 | 2·85 | 1·85 | 3·54 |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.

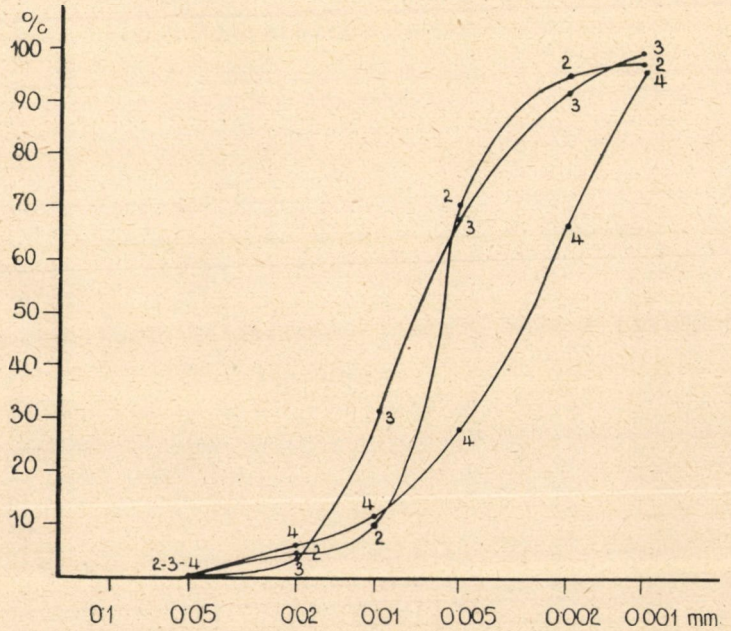
## IX. táblázat.

Krétaszuszpenziók változása. A < 0·002 mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban.

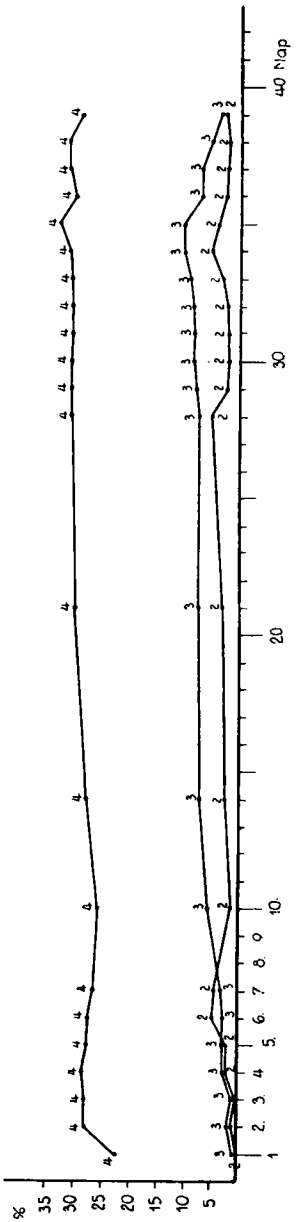
2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. Nátrium-metaszilikát-oldatban.

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 14 | 21 | 28 |
| 2. 7·3177 gr | 0·14 | 0·82 | 0·00 | 1·78 | 2·19 | 4·37 | 4·10 | 1·50 | 2·32 | 2·87 | 4·78 |
| 3. 7·7204 « | 0·39 | 1·68 | 1·03 | 2·33 | 2·46 | 2·98 | 3·24 | 5·44 | 6·86 | 7·51 | 7·64 |
| 4. 7·7110 « | 22·56 | 28·14 | 28·01 | 28·66 | 27·75 | 27·75 | 26·33 | 26·07 | 28·01 | 29·96 | 30·35 |

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 2. 7·3177 gr | 2·32 | 2·05 | 2·05 | 1·91 | 3·14 | 4·92 | 4·26 | 2·46 | 2·18 | 2·05 | 2·60 |
| 3. 7·7204 « | 8·16 | 8·42 | 8·68 | 8·68 | 9·20 | 9·84 | 10·49 | 7·13 | 6·99 | 4·79 | 3·37 |
| 4. 7·7110 « | 30·74 | 30·61 | 30·74 | 30·35 | 30·35 | 31·00 | 32·42 | 29·83 | 30·87 | 30·87 | 29·18 |




11. ábra. Rügeni kréta szemcseeloszlása.




12. Rügeni kréta-szuszpenzió < 0·002 mm-es szemcséi mennyiségének változása.

seim az ő értékeikkel elég jól egyeznek, annak ellenére, hogy ők vizsgálataikhoz iszapolt krétát használtak. Kísérleteim szerint kréta-szuszpenzióknál a nátriummetaszilikát a többi peptizáló anyag hatását messze felülmúlja. Esetleges oldhatatlan kalciummetaszilikát képződését nem tartom valószínűnek, mivel a vízüveggel stabilizált szuszpenzió legfínomabb lebegő részei is maradék nélkül oldódtak sósav hozzáadására. A kísérletek eredményét a VIII—IX. táblázat és a 11—12. ábra foglalja össze.

A szuszpenziók változásánál a 2. szuszpenzió szabálytalan viselkedését a folyadék felületén megtapadt krétarészecskék okozták, amelyek a pipettázáskor szabálytalan mennyiségben a pipettába kerültek. A 3. szuszpenziónál a kísérlet vége felé szépen megfigyelhető a kalciumoxalátcsapadék képződése, a maximum elérése után pedig a gyors koaguláció.

Itt említhetem meg egy, a Gellérthegyről származó budai márga iszapolásának eredményeit. (Vendl A.—Takáts T.—Földvári A.: A budapestkörnyéki löszről.) A $CO_2$ tartalom után ítélve (33·86%), több mint fele $CaCO_3$ volt. Az iszapolási eredmények szerint a legjobb diszperzitást a 0·1 $n$ ammoniumhidroxid adta, a 0·005 $n$ nátriumoxalátos szuszpenzió csupán a 0·01 $n$ ammoniumhidroxidnak megfelelő értéket adta. E példából is látszik, hogy nemcsak a krétánál, de

egyéb igen magas $CaCO_3$ tartalmú anyagoknál sem ad a nátriumoxalát megfelelő értéket, ezeknél a használatát kerülni kell.

Érdekes összehasonlításra ad alkalmat e budai márga elemzése Sztrókay K. vizsgálataival. Sztrókay vizsgálatai szerint a budai márga sokkal több $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsét tartalmaz. A nagy különbség abból származik, hogy Sztrókay kemény, nem iszapolható márgáiból csak úgy tudott szuszpenziót készíteni, ha sósavval kioldotta a karbonátokat és a kőzet szétesett maradékát vizsgálta. E kísérletek eredményeként kimondhatjuk, hogy szedimentpetrográfiai vizsgálatoknál laza (= iszapolható) kőzet csak laza kőzettel, megszilárdult (= csak sósavas oldás után iszapolható) kőzet csak szilárd kőzettel hasonlítható össze. A két kőzetcsoportot a különböző kezelés miatt nem szabad és nem is lehet összehasonlítani. Ha például genetikai szempontból mégis szükséges a szemcsenagyságok összehasonlítása, ez csak olyan laza szedimenttel végezhető, melyet iszapolás előtt szintén sósavas kezelésnek vetünk alá.

## VII. Szikes talajok szuszpenziója.

Az alkálikarbonátokkal telített talajok a bennük felgyülemlett $Na_2CO_3$ miatt már a természetben erősen diszpergáltak. Vizsgá-

**X. táblázat.**

Kúnszentmiklósi szikes talaj szemcsenagysága súly %-ban.

| | Szemcse-átmérő mm-ben | Pipetta-módszerrel, Köhn-féle készülékben | | | | Atterberg-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban | |
| | | 8·9555* | 8·8901* | 8·2360* | 10·4103* | |
| *Kúnszent-miklós,* Szikes talaj | >0·1 | 1·11 | 0·79 | 0·85 | 3·17 | |
| | 0·1—0·05 | 4·58 | 4·27 | 0·17 | 2·11 | |
| | 0·05—0·02 | 9·94 | 10·12 | 10·08 | 10·28 | |
| | 0·02—0·01 | 18·76 | 18·11 | 12·63 | 18·53 | |
| | 0·01—0·005 | 19·09 | 20·25 | 19·79 | 21·13 | |
| | 0·005—0·002 | 22·89 | 20·58 | 24·89 | 23·34 | |
| | 0·002—0·001 | 11·17 | 10·35 | 11·41 | 8·16 | 43·41 |
| | <0·001 | 12·62 | 15·52 | 18·70 | 13·25 | |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.

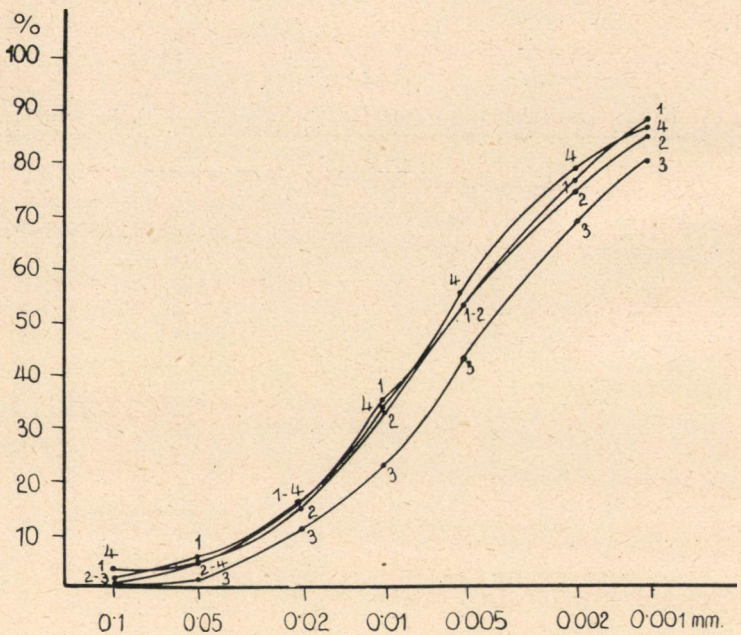
## XI. táblázat.

Szikes talaj szuszpenzióinak változása. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban.

1. Desztillált vízben. — 2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. Nátriummetaszilikát-oldatban.

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 14 | 21 |
| 1. 9·6353 gr | 24·08 | 22·83 | 24·80 | 22·11 | 17·54 | 14·74 | 15·05 | 7·47 | 6·85 | 5·40 |
| 2. 9·9520 « | 23·61 | 25·68 | 24·92 | 26·53 | 25·72 | 27·83 | 27·23 | 27·63 | 27·73 | 28·74 |
| 3. 8·4957 « | 18·13 | 21·42 | 25·66 | 28·60 | 31·78 | 31·43 | 33·78 | 32·37 | 32·25 | 22·36 |
| 4. 8·5517 « | 25·26 | 21·40 | 25·84 | 23·85 | 23·74 | 23·85 | 26·66 | 25·72 | 24·91 | 23·39 |

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 1. 9·6353 gr | 7·68 | 7·26 | 7·58 | 8·09 | 6·85 | 6·95 | 5·81 | 6·33 | 6·02 |
| 2. 9·9520 « | 28·74 | 29·23 | 31·95 | 30·45 | 30·95 | 30·95 | 30·25 | 30·45 | — |
| 3. 8·4957 « | 3·77 | 2·12 | 1·41 | 1·65 | 1·53 | 0·94 | 0·47 | — | — |
| 4. 8·5517 « | 24·79 | 24·21 | 25·02 | 27·36 | 25·96 | 24·56 | 24·67 | 24·67 | 28·18 |




13. ábra. Kunszentmiklósi szikes talaj szemcseeloszlása.

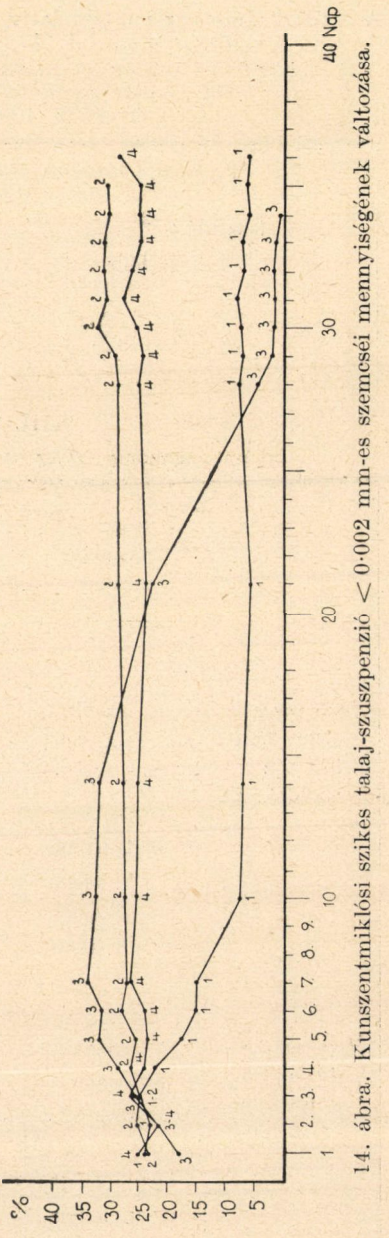
lati anyagul a kúnszentmiklósi Cigányrét szikes talaját választottam. A vizsgálat eredményeit a X—XI. táblázat és a 13—14. ábra mutatja.

A természetes $Na_2CO_3$ tartalom kezdetben körülbelül a 0·1 *n* ammoniumhidroxidnak megfelelő diszperzitást (*OH* hatás) okoz, azonban a szuszpenzió nem stabilis, hamar koagulál, körülbelül a lösz-szuszpenziókkal egyidőben. A 0·005 *n* nátriumoxalát itt is a legmagasabb értéket adja a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsékre, a kőzet $CaCO_3$ tartalma hatására azonban elég hamar koagulál (hamarább, mint a desztilláltvizes szuszpenzió). Végül a nátriummetaszilikát itt is nagyon stabilis szuszpenziót ad.

A diszperzitás foka az ATTERBERG-féle értékekhez viszonyítva a XII. táblázatban látható.

## VIII. Húmusz-gazdag agyag vizsgálata.

Már a BOHN-téglagyár agyagjának a vizsgálatánál feltűnt a húmusztartalom különleges szerepe. Az ammoniumhidroxidos szuszpenzióknál az ammoniumhidroxid először, úgy látszik, a húmuszt telíti és csak azután hat stabilizálólag. A nátriumoxalát pedig a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék




14. ábra. Kúnszentmiklósi szikes talaj-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.

## XII. Táblázat.

A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék relatív mennyisége szikes talajban különböző módszerek szerint. ATTERBERG-féle érték $= 100$ %

$A =$ a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék abszolút mennyisége súly %-ban.
$B =$ a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék relatív mennyisége az ATTERBERG-értékhez (100 %) viszonyítva.

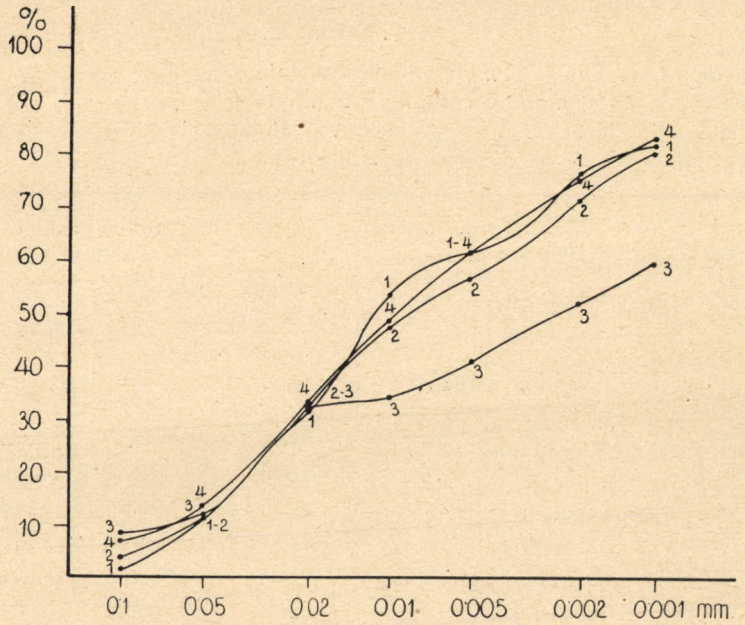
| | Pipetta-módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban | |
| *A* | 23·79 | 25·87 | 30·11 | 21·41 | 43·41 |
| *B* | 54·80 | 59·60 | 69·36 | 49·32 | 100·00 |

## XIII. táblázat.

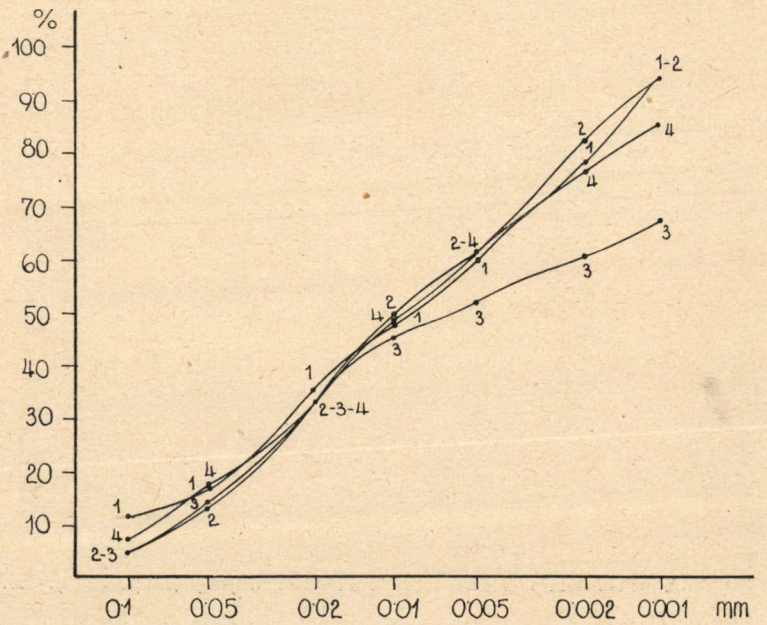
Húmuszgazdag agyag szemcsenagysága súly %-ban.

| | Szemcse-nagyság mm-ben | Pipetta-módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban |
| | | 8·6285* | 9·3243* | 14·8967* | 8·6813* |
| *Természetes állapotban*, humusz tartalommal. | $>0{\cdot}1$ | 2·20 | 3·86 | 8·26 | 7·14 |
| | 0·1—0·05 | 9·16 | 7·18 | 3·22 | 6·33 |
| | 0·05—0·02 | 20·28 | 21·02 | 20·27 | 19·35 |
| | 0·02—0·01 | 21·67 | 15·55 | 11·81 | 15·20 |
| | 0·01—0·005 | 7·42 | 8·47 | 7·12 | 12·44 |
| | 0·005—0·002 | 15·18 | 14·91 | 10·74 | 14·63 |
| | 0·002—0·001 | 5·68 | 8·58 | 7·59 | 7·60 |
| | $<0{\cdot}001$ | 17·73 | 20·38 | 31·08 | 17·28 |
| | | 8·4282* | 9·2408* | 15·9885* | 11·4460* |
| *$H_2O_2$-vel oxidálva*, humuszanyag nélkül. | $>0{\cdot}1$ | 11·75 | 5·41 | 5·44 | 7·51 |
| | 0·1—0·05 | 4·75 | 7·78 | 8·63 | 9·70 |
| | 0·05—0·02 | 18·63 | 20·33 | 19·20 | 16·51 |
| | 0·02—0·01 | 12·58 | 16·00 | 11·57 | 14·77 |
| | 0·01—0·005 | 12·46 | 11·68 | 6·69 | 12·76 |
| | 0·005—0·002 | 18·63 | 20·76 | 8·82 | 15·03 |
| | 0·002—0·001 | 14·95 | 11·57 | 6·63 | 9·26 |
| | $<0{\cdot}001$ | 6·29 | 6·38 | 33·02 | 14·51 |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.




15. ábra. Prügyi nem oxidált mocsárföld szemcseeloszlása.




16. ábra. Prügyi oxidált mocsárföld szemcseeloszlása.

## XIV. táblázat.

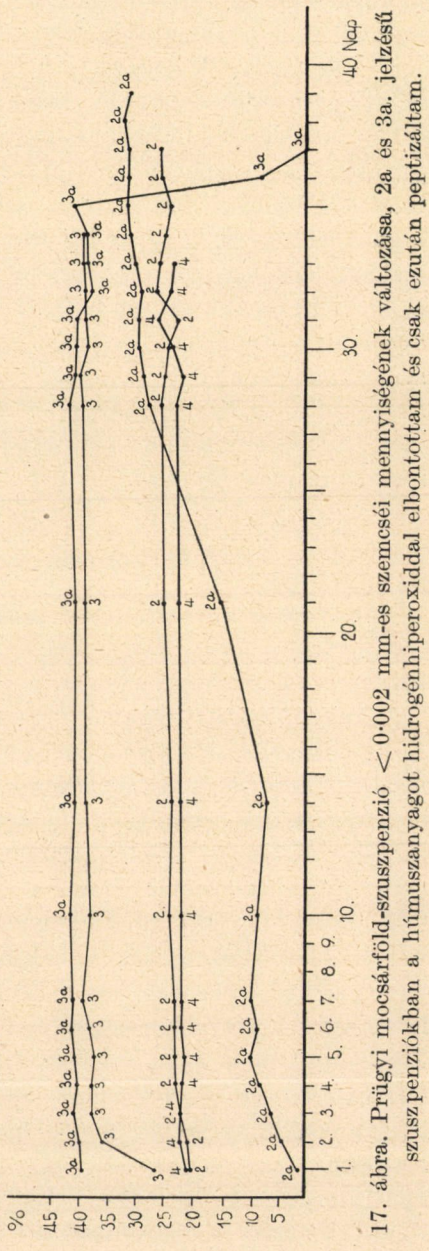
Húmusztartalmú és eloxidált húmusztartalmú agyagszuszpenziók változása. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban. — 2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. nátriummetaszilikátban.

| A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | Humusztartalmú szuszpenziók | | | Humusznélküli szuszpenziók | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 |
| | 11·5745* | 12·7774* | 10·2867* | 9·6493* | 11·1722* |
| 1 | 20·65 | 26·45 | 21·09 | 1·35 | 39·65 |
| 2 | 21·16 | 36·16 | 22·16 | 4·46 | 40·19 |
| 3 | 21·86 | 37·80 | 22·16 | 6·63 | 41·00 |
| 4 | 23·15 | 38·19 | 21·87 | 8·60 | 40·73 |
| 5 | 22·90 | 37·41 | 21·58 | 9·85 | 41·17 |
| 6 | 23·24 | 38·43 | 22·16 | 9·02 | 41·44 |
| 7 | 23·07 | 39·37 | 22·16 | 9·85 | 41·17 |
| 10 | 23·85 | 37·88 | 21·97 | 9·22 | 41·53 |
| 14 | 23·59 | 39·13 | 21·87 | 7·77 | 40·91 |
| 21 | 24·89 | 39·21 | 22·46 | 15·65 | 41·17 |
| 28 | 25·66 | 39·44 | 22·94 | 27·67 | 41·80 |
| 29 | 25·05 | 40·23 | 22·07 | 28·29 | 40·64 |
| 30 | 24·62 | 38·74 | 23·82 | 29·43 | 40·64 |
| 31 | 22·98 | 39·13 | 26·15 | 29·33 | 40·64 |
| 32 | 26·44 | 39·13 | 24·11 | 29·12 | 38·67 |
| 33 | 26·09 | 39·29 | 23·72 | 29·85 | 39·03 |
| 34 | 24·97 | 39·29 | — | 30·88 | 38·94 |
| 35 | 24·11 | — | — | 31·51 | 41·08 |
| 36 | 25·57 | — | — | 30·99 | 8·50 |
| 37 | 26·26 | — | — | 31·19 | 0·00 |
| 38 | — | — | — | 31·92 | 0·00 |
| 39 | — | — | — | 31·09 | 0·00 |

* A szuszpenzió készítésére felhasznált anyagmennyiség gr-ban.

mennyiségét emeli feltűnő módon. Vizsgálati anyagul e kérdés tanulmányozására a Tiszapart diluviális fekete agyagrétegét, egykori mocsárföldet (szurokföld) használtam. A minta Prügy községből való. A fekete agyagot egyrészt természetes állapotban vizsgáltam, másrészt a húmuszanyagot vízfürdőn hidrogénhiperoxiddal főzve oxidáltam és ezt a húmuszmentes anyagot vizsgáltam.

A XIII. táblázat szerint a húmuszanyag eltávolítása az ammoniás szuszpenzióban káros hatású volt, a nátriumoxalátos szuszpenzió pedig változatlanul magas értéket adott a $<$ 0·002 mm-es szemek mennyiségére; tehát nem az oxalát és húmusz anyag egymásra hatása okozza a $<$ 0·002 mm-es szemcsék mennyiségének a növekedését. Az ammoniás oldatban a húmusz védőkolloid hatása nyilvánvaló, a húmusz oxidálása után az ammoniumhidroxid nem képes a szuszpenziót kellőképpen stabilizálni (15—16. ábra), mivel a húmusz oxidációjánál organikus savak képződnek, melyek az ammoniumhidroxid hatását közömbösítik; másrészt úgy látszik, hogy a




17. ábra. Prügyi mocsárföld-szuszpenzió $<$ 0·002 mm-es szemcséi mennyiségének változása, 2a és 3a. jelzésű szuszpenziókban a húmuszanyagot hidrogénhiperoxiddal elbontottam és csak ezután peptizáltam.

húmusz által lekötött kationok a húmusz oxidációjakor felszabadulnak és az agyag-szuszpenziót koagulálják.

A szuszpenziók változásait a XIV. táblázat és a 17. ábra szemlélteti. Igen érdekes, hogy az eloxidált húmusz-tartalmú szuszpenzió 0·1 *n* ammoniumhidroxid hatására lassan diszpergálódik. Ez a jelenség ismét szépen bizonyítja a húmusz peptizáló hatását, másrészt valószínűvé teszi, hogy az oxidáció folyamán a húmusz nem bomlik el teljesen $CO_2$- és $H_2O$-ra, hanem közbeeső oxidációs termékek, organikus savak is képződnek, ezeket az ammoniumhidroxid előbb telíti és csak ezután fejtheti ki peptizáló hatását. Az oxidált húmuszú nátriumoxalátos szuszpenzió is a húmusz stabilizáló szerepét mutatja, mert a húmuszától megfosztott szuszpenzió a kísérlet végén koagulált. A kísérlet azt is bizonyította, hogy akár jelen van a szuszpenzióban a húmusz, akár nincs, a nátriumoxalát egyformán magas értéket ad a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyiségére.

## IX. Vörösagyag és nyirok.

A vörösagyag (terra rossa) vizsgálatát egy, a Bakony hegységben krétakori mészkőről, Úrkút község közelében gyüjtött mintával végeztem.

A nyirokkőzet fogalma meglehetősen tisztázatlan. Szabó József eredetileg a nyirkot löszszerű $CaCO_3$ mentes kőzetnek írja le, mely nemcsak eruptív kőzetek területén, hanem pl. a Budai-hegységben is megtalálható a hegytetőkön, míg a lösz a mélyebb helyeken található. A leírás alapján ez a kőzet nagyon hasonlít a német irodalom löszagyagjára (Lösslehm), mely alatt kilúgzott löszt értenek. Ilyen kőzetet vizsgált Vendl A.—Takáts T.—Földvári A. a Börzsönyi hegységből Királyházáról.

A nyirok nevet azonban maga Szabó J. is az eruptív kőzetek, főleg a riolit, terra rossa-szerű málladékára is használta. Ilyen, a Tokaji-hegység aljáról, Tiszalucról való narancssárgaszínű 3·40—5·10 m mélységből szedett mintát kaptam vizsgálatra Timkó I. úrtól.

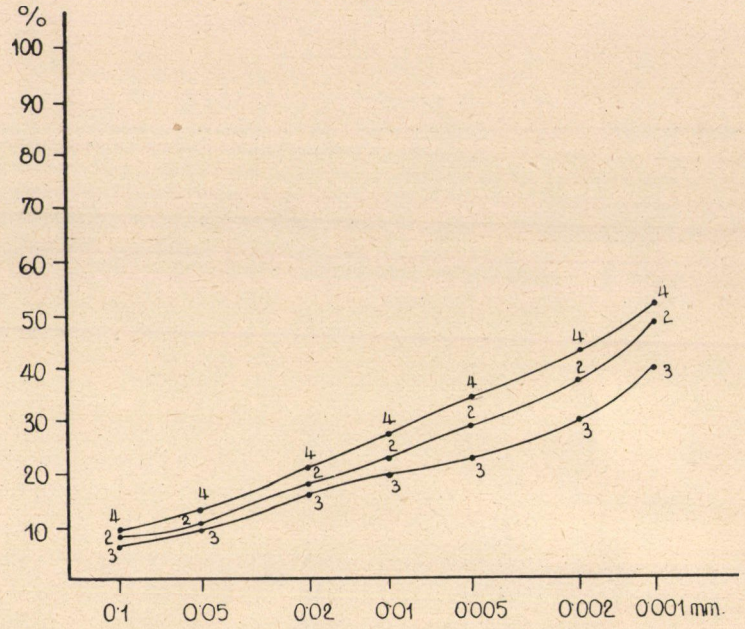
A közeli vidékről való nyirok kémiai vizsgálatát végezte Endrédy E. és kimutatta, hogy az adszorpciós komplexumában igen sok *Ca* van. Az összes eddig vizsgált agyagminta közül ez a nyirok koagulált a leggyorsabban. A XV. táblázat és 18—19. ábra

## XV. táblázat.

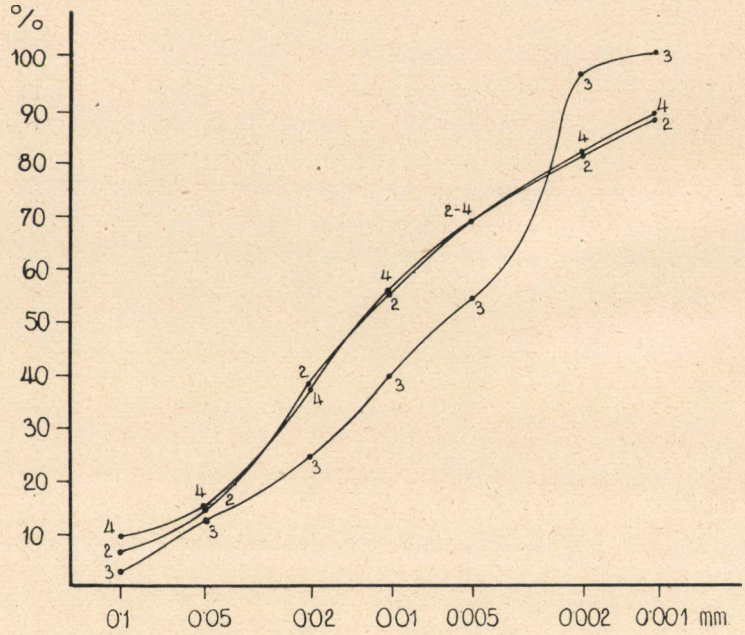
Vörösagyagok szemcsenagysága súly %-ban.

| | Szemcse átmérő mm-ben | Pipetta módszerrel, Köhn-féle készülékben | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban |
| | | 7·8999* | 9·5239* | 8·5828* |
| *Úrkút, Vörösagyag.* | >0·1 | 7·85 | 6·09 | 9·79 |
| | 0·1—0·05 | 2·66 | 3·78 | 3·84 |
| | 0·05—0·02 | 7·47 | 6·19 | 7·34 |
| | 0·02—0·01 | 4·43 | 3·99 | 6·19 |
| | 0·01—0·005 | 6·20 | 3·04 | 6·64 |
| | 0·005—0·002 | 8·48 | 6·72 | 8·85 |
| | 0·002—0·001 | 11·01 | 9·45 | 9·09 |
| | <0·001 | 51·90 | 60·69 | 48·35 |
| | | 8·1674* | 6·7385* | 9·6040* |
| *Tiszalucz, Nyirok.* | >0·1 | 6·73 | 3·12 | 9·79 |
| | 0·1—0·05 | 7·35 | 9·50 | 4·69 |
| | 0·05—0·02 | 23·75 | 11·72 | 23·12 |
| | 0·02—0·01 | 16·53 | 15·28 | 18·01 |
| | 0·01—0·005 | 13·71 | 14·55 | 12·29 |
| | 0·005—0·002 | 12·25 | 41·70 | 13·64 |
| | 0·002—0·001 | 7·71 | 4·16 | 6·87 |
| | <0·001 | 12·00 | 0·00 | 10·51 |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.




18. ábra. Úrkúti vörösagyag szemcseeloszlása.




19. ábra. Tiszaluci nyirok szemcseeloszlása.

foglalja össze a mérési eredményeket. A vörösagyagnál a nátriumoxalát, a nyiroknál az ammoniumhidroxid adta a legerősebb diszperziót. Megjegyzendő, hogy a nyirok nátriumoxalátban oly gyorsan koagulált, hogy a szuszpenzió elkészítése napján voltam kény-

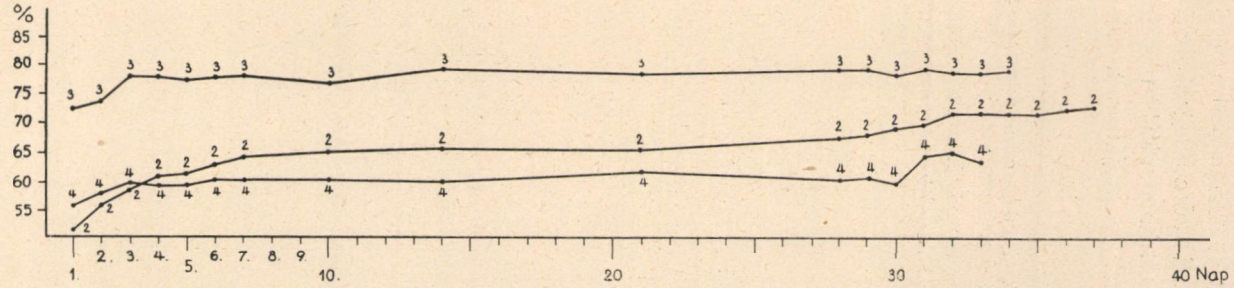
**XVI. táblázat**

Vörösagyag szuszpenziók változása. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban.

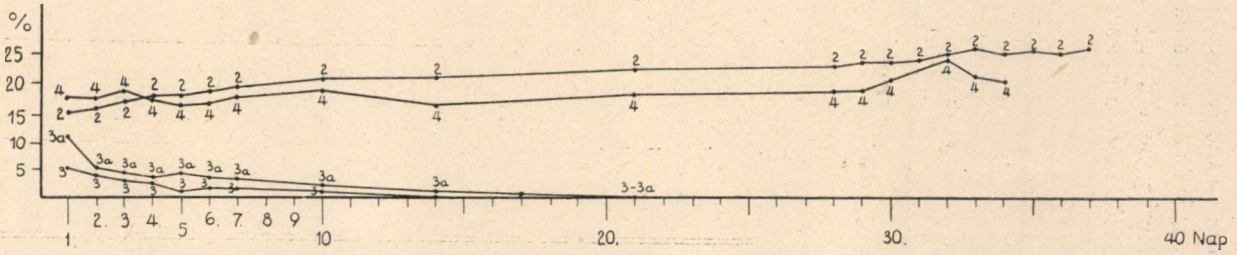
2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. nátriummetaszilikát-oldatban.

| A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | *Úrkút*, vörösagyag | | | *Tiszalúcz*, nyirok | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| | 10·5865* | 11·3569* | 9·9962* | 13·1597* | 13·6555* | 8·2756* | 10·2362* |
| 1 | 51·67 | 72·55 | 56·02 | 15·35 | 5·71 | 11·00 | 17·58 |
| 2 | 55·92 | 73·70 | 58·22 | 16·11 | 3·81 | 5·44 | 17·49 |
| 3 | 58·75 | 78·10 | 59·82 | 17·25 | 2·86 | 4·35 | 18·76 |
| 4 | 60·93 | 78·01 | 59·52 | 18·24 | 2·49 | 3·50 | 17·19 |
| 5 | 61·40 | 76·87 | 59·32 | 18·24 | 0·81 | 4·23 | 16·31 |
| 6 | 63·00 | 77·57 | 60·42 | 18·77 | 1·39 | 3·50 | 16·41 |
| 7 | 63·95 | 78·19 | 60·42 | 19·15 | 1·54 | 3·26 | 17·39 |
| 10 | 65·08 | 76·69 | 60·62 | 20·29 | 1·25 | 2·18 | 18·56 |
| 14 | 65·37 | 78·98 | 59·92 | 20·59 | 0·22 | 0·85 | 16·12 |
| 21 | 65·25 | 78·63 | 61·42 | 21·66 | 0·00 | 0·00 | 17·29 |
| 28 | 67·07 | 79·16 | 60·12 | 22·19 | 0·00 | — | 17·39 |
| 29 | 67·73 | 78·98 | 60·62 | 22·42 | — | — | 17·49 |
| 30 | 68·48 | 78·01 | 59·42 | 22·42 | — | — | 19·73 |
| 31 | 68·95 | 78·81 | 64·13 | 22·80 | — | — | 23·15 |
| 32 | 70·84 | 78·63 | 64·32 | 24·16 | — | — | 20·12 |
| 33 | 70·84 | 77·93 | 63·13 | 24·85 | — | — | 18·95 |
| 34 | 70·75 | 78·63 | — | 23·86 | — | — | — |
| 35 | 71·22 | — | — | 24·62 | — | — | — |
| 36 | 71·41 | — | — | 24·16 | — | — | — |
| 37 | 71·98 | — | — | 25·23 | — | — | — |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.




20. ábra. Úrkúti vörösagyag-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.



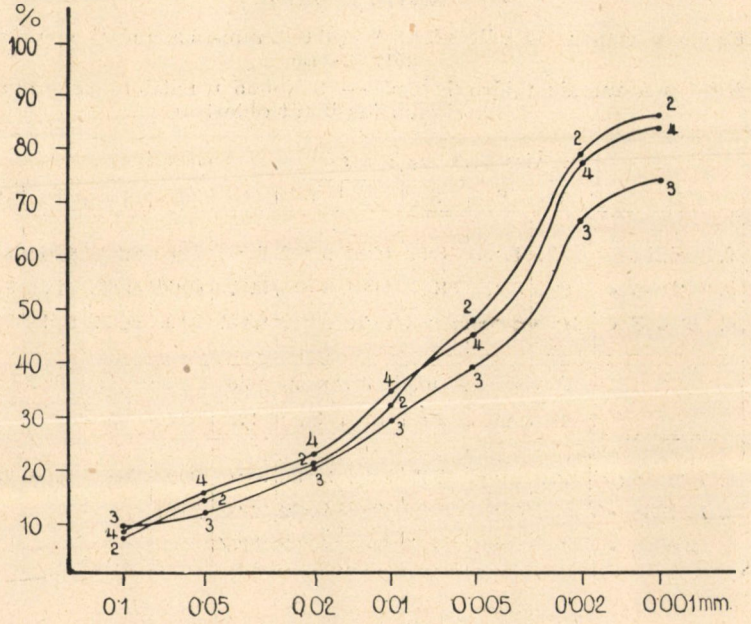

21. ábra. Tiszaluci nyirok-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.
3a. szuszpenzió a 3. szuszpenziónál kisebb koncentrációjú.

## XVII. táblázat.

**Kaolin szemcsenagysága súly %-ban.**

| | Szemcse átmérő mm-ben | Pipetta módszerrel, Kőhn-féle készülékben | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban |
| | | 5·9893* | 7·0542* | 6·9043* |
| *Tálya* Kaolin | >0·1 | 7·01 | 9·07 | 8·13 |
| | 0·1—0·05 | 7·01 | 2·55 | 6·80 |
| | 0·05—0·02 | 6·18 | 7·65 | 6·97 |
| | 0·02—0·01 | 11·02 | 8·65 | 12·28 |
| | 0·01—0·005 | 16·03 | 10·35 | 10·62 |
| | 0·005—0·002 | 31·06 | 27·64 | 32·18 |
| | 0·002—0·001 | 7·18 | 7·51 | 6·80 |
| | <0·001 | 14·53 | 27·93 | 16·26 |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.




22. ábra. Tályai kaolin szemcseeloszlása.

telen a finom szemcséket is meghatározni, míg a többi vizsgált anyagnál, mint már a bevezetésben említettem, ezek meghatározása a 4—5. napon történt.

A szuszpenziók változásait a XVI. táblázatban és a 20—21. ábrában látjuk. A nyirok 0·005 *n* nátriumoxalátos szuszpenziójának a vizsgálata felvetette a kérdést, hogy nem lehetne-e a kritikus $CaCO_3$-nál többet tartalmazó szuszpenziók vizsgálatánál a nátriumoxalát-oldat koncentrációját emelni úgy, hogy az oxalát legyen feleslegben? Vizsgálataim szerint 40—50 g löszt tartalmazó szuszpenzióknál már a 0·01 *n* nátriumoxalát-oldat is gyors koagulációt okozott. A 0·005 *n*-nál nagyobb koncentrációjú nátriumoxalát-oldatban már a mellékion koaguláló hatása kezd érvényesülni. Célravezetőbb a $CaCO_3$ gazdag agyagoknál a szuszpenzióban az agyag koncentrációját csökkenteni addig, amíg a $CaCO_3$ a kritikus mennyiség alá csökken.

A nyiroknál a XVI. táblázat adatai szerint a szuszpendált nyirok mennyiségének csökkentése jó hatású volt. A kérdés teljes tisztázásához azonban több kísérletre volna szükség.

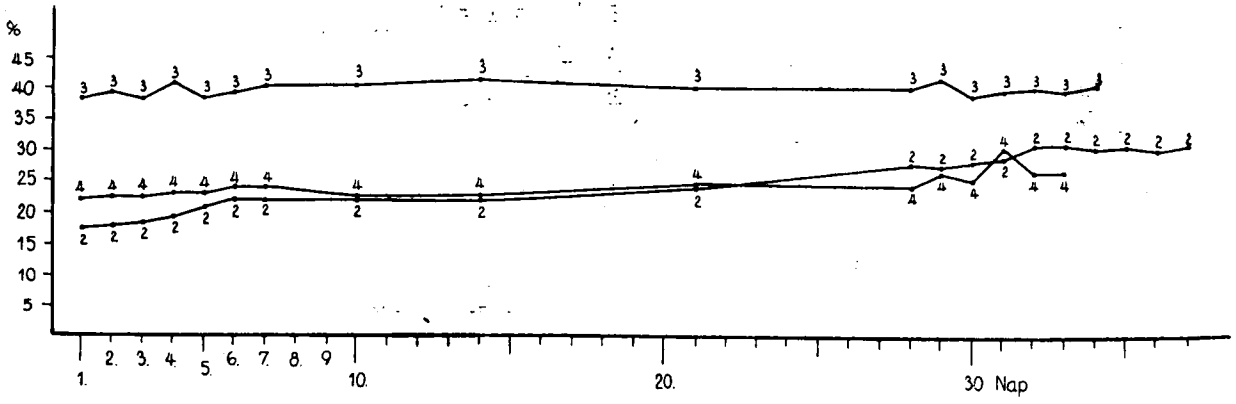
### XVIII. táblázat.

Kaolin szuszpenziók változása. A $<$ 0·002 mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban.

2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. nátriummetaszilikát-oldatban.

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 14 | 21 |
| 2. 10·2212 gr | 17·51 | 17·90 | 18·69 | 19·67 | 21·23 | 22·21 | 22·02 | 22·01 | 22·11 | 24·07 |
| 3. 10·1936 « | 38·65 | 39·73 | 38·65 | 41·01 | 38·55 | 39·73 | 40·52 | 40·32 | 41·50 | 39·93 |
| 4. 9·0043 « | 21·88 | 22·43 | 22·43 | 23·10 | 23·10 | 23·87 | 23·99 | 22·99 | 22·99 | 24·43 |

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 2. 10·2212 gr | 27·39 | 27·00 | 27·88 | 28·27 | 30·62 | 31·11 | 30·23 | 30·62 | 29·84 | 31·21 |
| 3. 10·1936 « | 40·22 | 41·40 | 38·36 | 39·63 | 40·22 | 39·34 | 40·61 | — | — | — |
| 4. 9·0043 « | 23·87 | 26·21 | 24·99 | 29·21 | 26·65 | 26·54 | — | — | — | — |




23. ábra. Tályai kaolin-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.

## X. Kaolin.

Az Eperjes—Tokaji-hegységbeli Tálya vidékéről riolitból képződött kaolint vizsgáltam. A minta sok durva ásványszemet tartalmazott, az apró szemcsék mennyisége aránylag kevés volt. A XVII. táblázat és a 22. ábra szerint ennél a kőzetnél a nátriumoxalát adja a legjobb diszperziót.

A szuszpenziók változását a XVIII. táblázat és a 23. ábra tünteti fel.

## XI. Diatomaföld.

Szurdokpüspökiről való fínoman réteges mintát vizsgáltam. A különböző stabilizátorok közel azonos eredményt adnak, a nátriumoxalát adja a legmagasabb értéket az apró szemcsékre. A nátriumoxalátos szuszpenzió idővel koagulál, valószínűleg adszorbeált *Ca* ionok hatására. Az eredményeket a XIX—XX. táblázat és a 24—25. ábra foglalja össze.

**XIX. táblázat.**

Diatomaföld szemcsenagysága súly %-ban.

| | Szemcse átmérő mm-ben | Pipetta módszerrel, Köhn-féle készülékben | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát-oldatban |
| | | 6·3319* | 7·3336* | 6·6610* |
| *Szurdok-püspöki*, Diatomaföld. | >0·1 | 2·05 | 0·00 | 3·90 |
| | 0·1—0·05 | 1·10 | 3·27 | 2·40 |
| | 0·05—0·02 | 11·37 | 9·00 | 10·36 |
| | 0·02—0·01 | 6·79 | 5·86 | 8·41 |
| | 0·01—0·005 | 19·26 | 17·73 | 17·87 |
| | 0·005—0·002 | 23·85 | 25·64 | 25·07 |
| | 0·002—0·001 | 13·58 | 13·36 | 12·01 |
| | <0·001 | 21·95 | 25·64 | 22·97 |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.

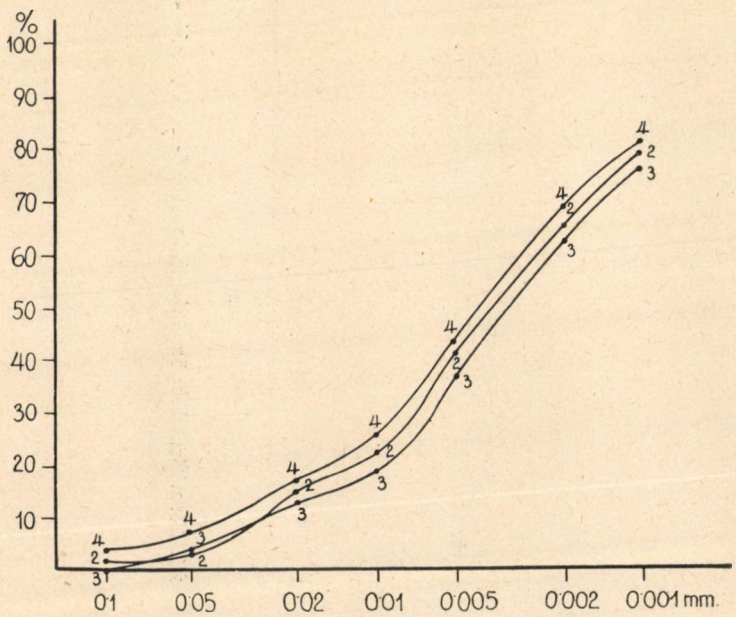
## XX. táblázat.

Diatomaföld szuszpenziók változása. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban.

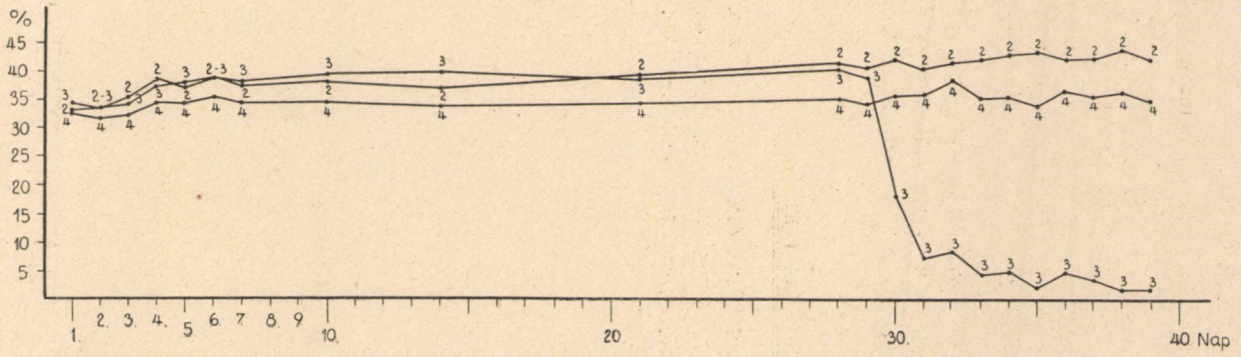
2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátriumoxalátban. — 4. nátrium-metaszilikátban.

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 14 | 21 | 28 |
| 2. 5·7361 gr | 32·78 | 33·47 | 34·79 | 38·35 | 36·99 | 38·53 | 36·78 | 37·83 | 37·13 | 39·05 | 41·14 |
| 3. 6·6579 « | 33·95 | 33·34 | 34·10 | 37·25 | 37·40 | 38·75 | 37·55 | 38·45 | 39·35 | 38·41 | 39·81 |
| 4. 6·4308 « | 32·66 | 31·57 | 31·88 | 34·21 | 34·06 | 35·15 | 34·21 | 34·06 | 33·28 | 34·21 | 34·52 |

| | A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 2. 5·7361 gr | 40·27 | 41·32 | 40·10 | 41·14 | 41·49 | 41·84 | 42·36 | 41·67 | 41·32 | 43·06 | 41·67 |
| 3. 6·6579 « | 38·41 | 17·57 | 7·21 | 7·81 | 4·06 | 4·36 | 2·03 | 4·06 | 3·00 | 2·70 | 2·40 |
| 4. 6·4308 « | 34·06 | 35·46 | 35·76 | 37·79 | 34·52 | 34·99 | 33·76 | 35·92 | 34·99 | 35·76 | 34·06 |




24. ábra. Szurdokpüspöki diatomaföld szemcseeloszlása.




25. ábra. Szurdokpüspöki diatomaföld-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.

## XII. Vulkáni tufa.

A vulkáni kőzetek közül egy mesterséges őrledéket, a Hungaria puzzolán A-jelzésű trasszanyagot vizsgáltam. A mintához JÁKY J. egyetemi magántanár úr szívességéből jutottam. A mérési eredmények szerint ez az anyag még a diatomaföldnél is indifferensebb a különböző stabilizátorokkal szemben. Az ilyen kevéssé reakcióképes és elektrolitokban szegény anyagnál úgy látszik mindegy, hogy milyen stabilizátort használunk. Érdekes, hogy ezeknél az elektrolitszegény anyagoknál a rendesen használt stabilizátormennyiség néha kissé koagulálja a szuszpenziót. Ilyenkor a rendesnél hígabb stabilizátorkoncentrációt kell alkalmazni. A mérési eredményeket a XXI. táblázat és a 26. ábra mutatja.

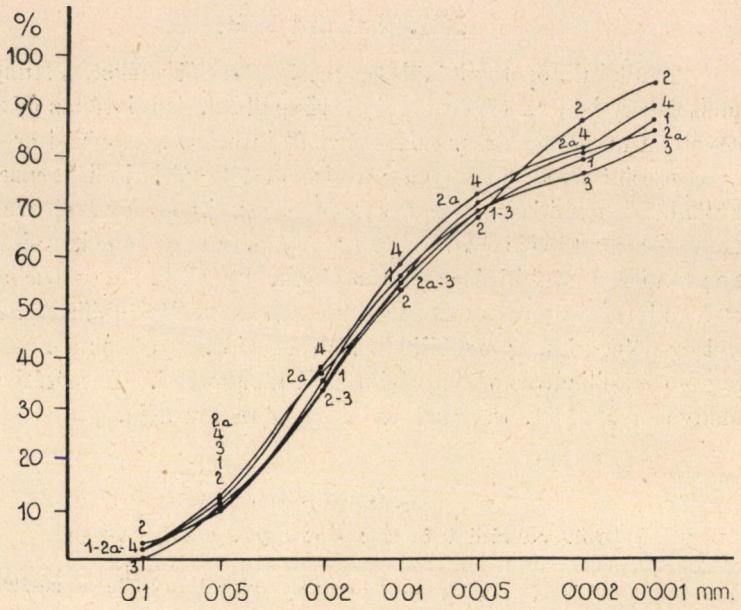
**XXI. táblázat.**

Őrölt vulkáni tufa szemcsenagysága súly %-ban

| | Szemcse átmérő mm-ben | Pipetta módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1. desztillált vízben | 2a 0·01 n ammon. hidroxidban | 2. 0·1 n ammon. hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát oldatban |
| | | 10·2240* | 10·8116* | 10·6284* | 8·1478* | 11·0149* |
| *Hungária* puzzolán A. | >0·1 | 1·86 | 2·22 | 2·73 | 0·12 | 2·00 |
| | 0·1—0·05 | 9·29 | 10·08 | 9·22 | 10·56 | 9·71 |
| | 0·05—0·02 | 24·26 | 24·14 | 23·24 | 22·46 | 25·33 |
| | 0·02—0·01 | 20·54 | 17·67 | 20·51 | 21·97 | 21·88 |
| | 0·01—0·005 | 12·91 | 16·19 | 14·40 | 13·50 | 13·80 |
| | 0·005—0·002 | 10·66 | 9·80 | 18·82 | 8·10 | 8·90 |
| | 0·002—0·001 | 7·43 | 5·46 | 7·34 | 6·87 | 8·44 |
| | <0·001 | 12·91 | 14·43 | 3·76 | 16·45 | 9·90 |

## XIII. Csapóföldek (kallóföldek).

Főleg bázikus eruptív kőzetek mállástermékei ezek a nagy adszorpcióképességű agyagok. A külföldi irodalomban Bleicherde, fuller earth néven szerepelnek. Az agyagos részük főleg az «allophan-agyagok» gyüjtőnév alatt ismert vegyületekből áll. Az egyik megvizsgált kőzet a tétényi platóról leírt mállott dácittufa, mely a




26. ábra. Vulkáni tufa-őrledék szemcseeloszlása, 2a = 0·01 *n* ammoniumhidroxidban.

szarmata mészkőben alkot vékony réteget. A mészkőkörnyezetből ezen kőzet adszorpciós komplexumába sok *Ca* ion kerülhetett.

A másik vizsgált kőzet a budapesti Városligetben végzett újabb kutató fúrásokból, középső miocén agyagok közül került elő Frissen sötétzöldszínű kővelőszerű lágy tömeget alkot, melyben sűrűn behintett biotit- és mállott földpátszemek láthatók. Kiszáradva világos zöldesszürke színű lesz.

Különösen a tétényi anyagnál a nátriumoxalát igen erős diszperziót okoz. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyiségének a növeléséhez kétségkívül hozzájárult a kalciumoxalát-csapadék képződése, továbbá az, hogy a sűrű szuszpenzió a nagyobb ásványszemekkel szemben nehéz folyadékként viselkedett, úgyhogy nyolc órai ülepedés után is lehetett a szuszpenzió legfelsőbb rétegében is szabad szemmel jól kivehető lebegő szemcséket látni. Mivel az allophanagyag szuszpenziója a nagyobb szemcsék esési sebességét ennyire lecsökkentette, ezek hosszú ideig lebegve maradtak és látszólag

a finomabb szemcsék mennyiségét növelték. Mindezek a jelenségek azonban nem elegendők a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége ilyen nagyarányú megnövekedésének a magyarázatához. Kétségtelen, hogy az allophanagyagoknál egy sajátságos oxaláthatás jelentkezik, melyet a többi stabilizátor hatása meg sem közelít.

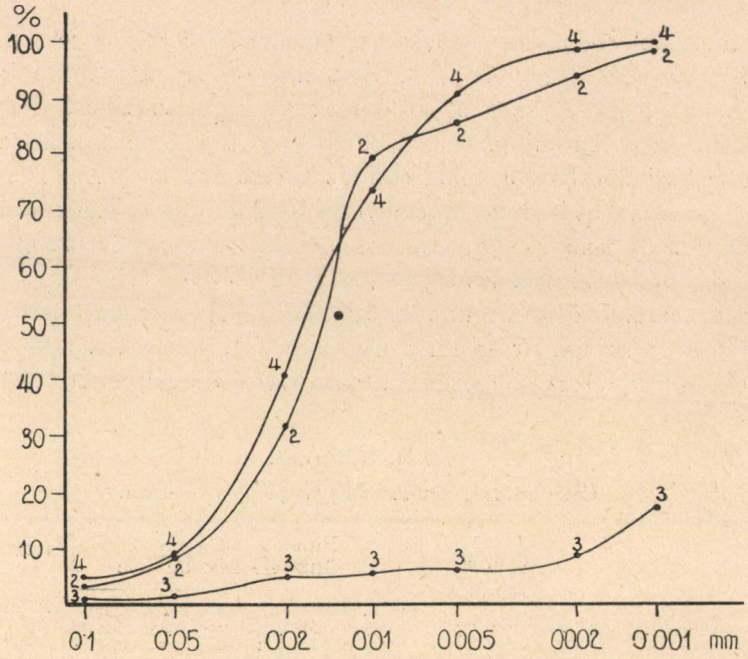
Feltűnő az is, hogy a tétényi anyag ATTERBERG-féle készülékben készült elemzése nagyon alacsony értéket adott a $< 0{\cdot}002$ mm-es részek mennyiségére. Ez a jelenség a hasonló kőzeteknél (pl. bentonit szuszpenzióknál) kimutatott tixotropiával állhat összefüggésben. A számszerű eredményeket a XXII. táblázat és a 27—28. ábra mutatja. A szuszpenziók változásának a vizsgálatánál a tétényi

**XXII. táblázat.**

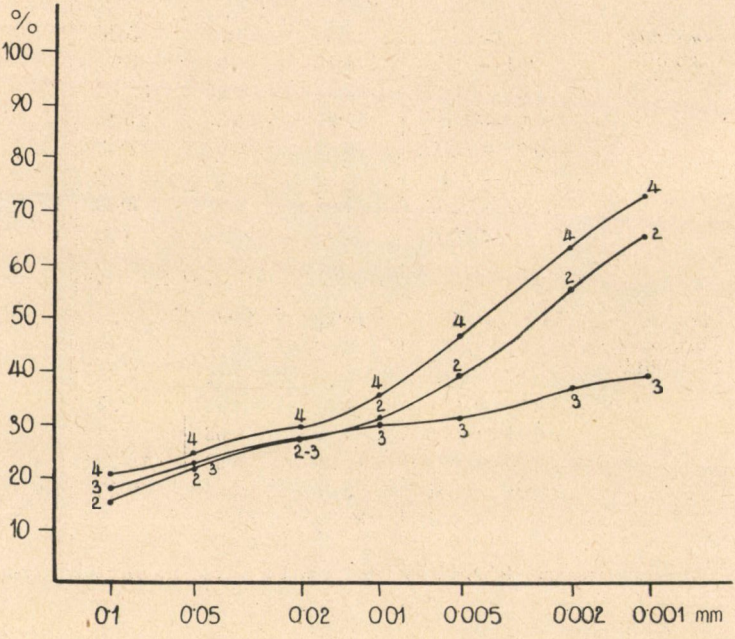
Csapóföldek szemcsenagysága súly %-ban.

| | Szemcse átmérő mm-ben | Pipetta módszerrel, KÖHN-féle készülékben | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 2. 0·1 n ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 n nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát oldatban | |
| | | 10·3243* | 10·1380* | 9·9219* | |
| *Nagytétény*, Csapóföld. | >0·1 | 3·20 | 1·18 | 5·44 | |
| | 0·1—0·05 | 4·75 | 0·00 | 3·02 | |
| | 0·05—0·02 | 23·34 | 2·65 | 32·35 | |
| | 0·02—0·01 | 47·75 | 0·69 | 32·45 | |
| | 0·01—0·005 | 6·59 | 0·00 | 17·13 | |
| | 0·005—0·002 | 8·33 | 2·76 | 7·56 | |
| | 0·002—0·001 | 4·65 | 8·88 | 3·43 | } 12·20 |
| | <0·001 | 1·36 | 82·86 | 0·00 | |
| | | 10·3966* | 11·1829* | 12·7917* | |
| *Budapest, Városliget*, Csapóföld. | >0·1 | 15·29 | 17·88 | 20·56 | |
| | 0·1—0·05 | 6·16 | 4·83 | 3·44 | |
| | 0·05—0·02 | 5·00 | 4·11 | 5·32 | |
| | 0·02—0·01 | 4·14 | 3·31 | 6·25 | |
| | 0·01—0·005 | 7·98 | 0·63 | 10·87 | |
| | 0·005—0·002 | 16·26 | 5·63 | 16·26 | |
| | 0·002—0·001 | 9·62 | 2·06 | 9·38 | } 58·85 |
| | <0·001 | 35·59 | 61·52 | 27·91 | |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.




27. ábra. Tétényi csapóföld szemcseeloszlása.




28. ábra. Városligeti csapóföld szemcseeloszlása.

anyag nátriumoxalátos szuszpenziójában a $< 0{\cdot}002$ mm-es részek mennyisége idővel 100% fölé emelkedett, ez az emelkedés csupán a szuszpenzióban lévő oldott anyagokból keletkező csapadék képződésével magyarázható. (XXIII. táblázat és 29—30. ábra.)

A különböző csapóföld-szuszpenziók diszperzitás foka az ATTERBERG-féle értékhez (= 100%) viszonyítva a XXIV. táblázatban látható.

## XIV. A koaguláció lefolyása.

Az előbbiekben a szuszpenziók állásakor megfigyelhető változást a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyiségének a mérésével rögzítettem. Ezek az értékek azonban csupán a szuszpenziók legapróbb szemcséinek a változásáról adnak számot, azonban hogy a nagyobb szemcsék mennyisége miként változik, vagy hogy az apró szemcsék koagulálásakor milyen nagy szemcsék keletkeznek, ezekből a kísérletekből megállapítani nem lehetett.

A nagyobb szemcsék változásait is vizsgálni ugyanazon szuszpenzióban nem nagyon lehetett. Ugyanis a pipettás eljárásnál a kísérlet folyamán a szuszpenzió mennyisége kevesebb lesz. (Minden meghatározás 15—20 $cm^3$ szuszpenziót igényel.) Ha ugyanazon szuszpenzióban több szemcsenagyságra vonatkozó mérést végeztem volna, úgy a szuszpenzió mennyiségének a rohamos csökkenése miatt a koaguláció menetét végigkísérni nem lehetett volna. Másrészt, ha egy szuszpenzióból különféle nagyságú szemcséket veszek ki, úgy idővel a szemcsék aránya megváltozik a szuszpenzióban.

A különböző nagyságú szemcsék mennyiségének a változását egy aránylag rövid idő alatt koaguláló anyag, a pacsirtahegyi lösz nátriumoxalátos szuszpenzióján tanulmányoztam. A löszből négy teljesen azonos koncentrációjú szuszpenziót készítettem; az egyik szuszpenzióban a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyiségét, a másodikban a $< 0{\cdot}005$ mm-es, a harmadikban a $< 0{\cdot}01$, a negyedikben a $< 0{\cdot}02$ mm-es részek mennyiségét, illetőleg ennek változását mértem. A mérési eredményeket a XXV. táblázat és 31. ábra mutatja. A kísérletekből látható, hogy míg a $< 0{\cdot}002$ mm-es részek már a 4. napon kezdenek koagulálni, addig a $< 0{\cdot}005$ mm-es részek csak a 14. napon, a $< 0{\cdot}01$ mm-es részek a 18. napon, a $< 0{\cdot}02$ mm-es részek pedig csak a 26. napon.

## XXIII. táblázat.

Csapóföld szuszpenziók változása. A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék mennyisége súly %-ban. — 2. 0·1 n ammoniumhidroxidban. — 3. 0·005 n nátrium-oxalátban. — 4. nátriummetaszilikát-oldatban.

| A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | *Nagytétény*, csapóföld | | | *Budapest, Városliget*, csapóföld | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 |
| | 12·6405* | 11·2126* | 11·7798* | 12·6739* | 12·6996* | 11·7457* |
| 1 | 4·83 | 71·26 | 2·21 | 55·63 | 66·30 | 54·15 |
| 2 | 4·83 | 91·41 | 3·40 | 57·13 | 67·64 | 54·32 |
| 3 | 5·54 | 93·91 | 2·89 | 58·62 | 66·85 | 54·23 |
| 4 | 6·57 | 95·16 | 2·63 | 60·36 | 68·11 | 53·47 |
| 5 | 5·93 | 93·64 | 2·12 | 59·97 | 66·14 | 53·72 |
| 6 | 5·93 | 94·00 | 2·80 | 61·39 | 66·30 | 54·06 |
| 7 | 5·77 | 95·60 | 3·06 | 59·65 | 67·33 | 54·74 |
| 10 | 6·80 | 94·80 | 2·63 | 61·39 | 67·56 | 54·40 |
| 14 | 6·80 | 97·12 | 2·21 | 62·02 | 67·80 | 53·38 |
| 21 | 7·12 | 97·84 | 2·89 | 65·49 | 70·40 | 53·89 |
| 28 | 9·65 | 100·24 | 2·72 | 67·93 | 73·55 | 54·49 |
| 29 | 9·41 | 100·78 | 3·40 | 67·70 | 74·80 | 55·25 |
| 30 | 8·86 | 102·48 | 3·56 | 66·37 | 74·41 | 55·25 |
| 31 | 9·57 | 102·98 | 4·07 | 66·28 | 75·28 | 57·04 |
| 32 | 10·44 | 99·89 | 3·31 | 61·23 | 75·59 | 56·36 |
| 33 | 10·84 | 100·24 | 3·56 | 68·88 | 75·99 | 54·91 |
| 34 | 9·26 | 99·44 | — | 66·91 | 78·66 | — |
| 35 | 10·21 | 100·33 | — | 74·09 | — | — |
| 36 | 10·68 | 100·69 | — | 66·59 | — | — |
| 37 | 11·39 | 104·44 | — | 69·12 | — | — |
| 38 | — | 100·15 | — | — | — | — |

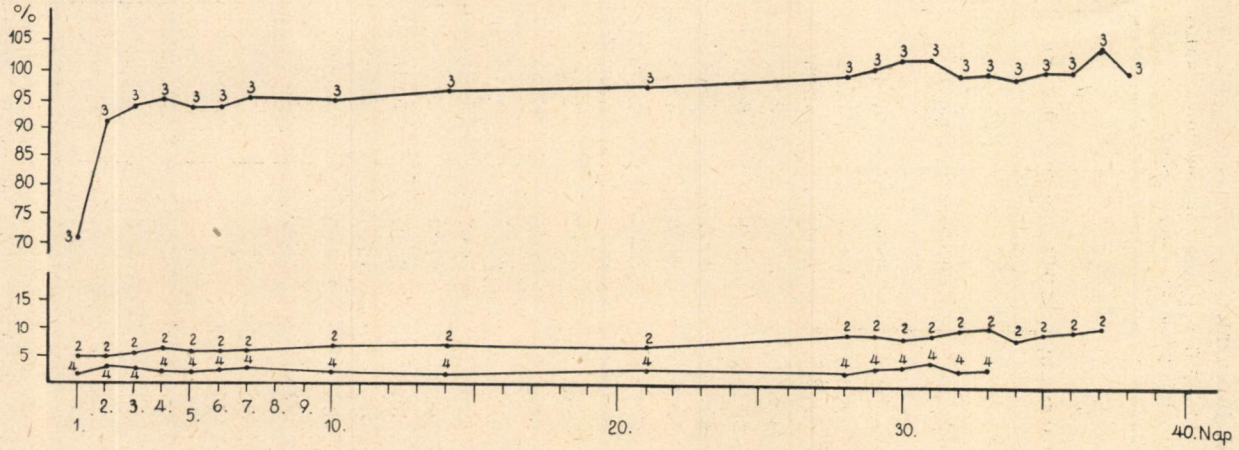
## XXIV. táblázat.

A $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék relatív mennyisége csapóföldekben különböző módszerek szerint. ATTERBERG-féle érték = 100 %.

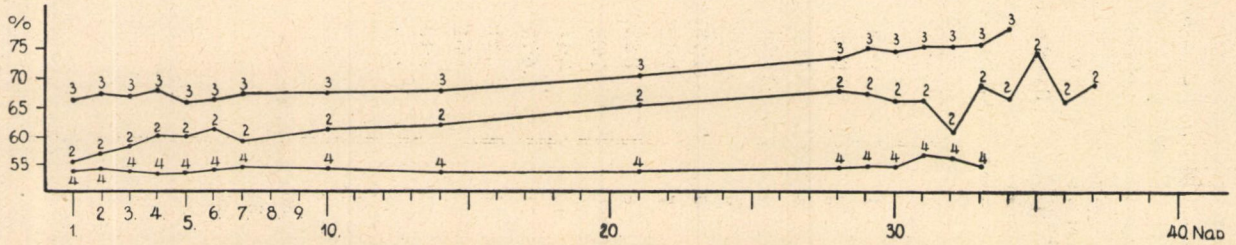
$A$ = a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék abszolút mennyisége súly %-ban.
$B$ = a $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcsék relatív mennyisége az ATTERBERG-értékhez (100 %) viszonyítva.

| | | Pipetta-módszerrel, KHÖN-féle készülékben | | | ATTERBERG-féle készülékben |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 2. 0·1 ammonium-hidroxidban | 3. 0·005 nátrium-oxalátban | 4. nátrium-metaszilikát oldatban | |
| *Nagytétény*, Csapóföld | *A* | 6·01 % | 91·74 % | 3·43 % | 12·20 % |
| | *B* | 49·26 % | 751·97 % | 28·11 % | 100·00 % |
| *Budapest, Városliget*, Csapóföld | *A* | 45·21 % | 63·58 % | 37·29 % | 58·85 % |
| | *B* | 76·82 % | 108·04 % | 63·36 % | 100·00 % |

* A szuszpenzió készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.




29. ábra. Tétényi csapóföld-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.




30. ábra. Városligeti csapóföld-szuszpenzió $< 0{\cdot}002$ mm-es szemcséi mennyiségének változása.

## XXV. táblázat.

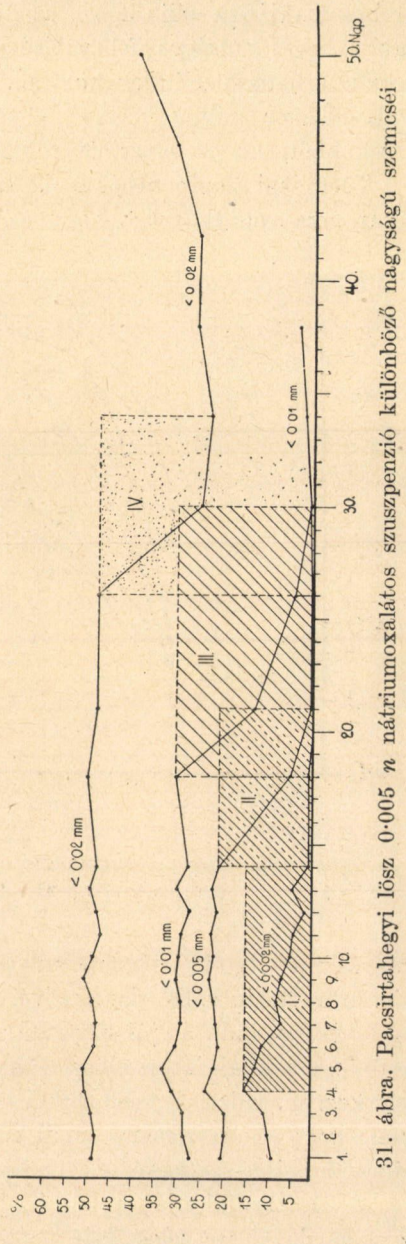
*Pacsirtahegyi lösz* szuszpenzió különböző nagyságú szemcséinek változása 0·005 n nátriumoxalát-oldatban, súly %-ban.

| A vizsgálat napja a szuszpenzió elkészítésétől számítva | *a* < 0·002 mm | *b* < 0·005 mm | *c* < 0·01 mm | *d* < 0·02 mm |
|---|---|---|---|---|
| | 9·9705* | 9·8885* | 9·8762* | 9·8878* |
| 1 | 9·13 | 19·92 | 27·24 | 49·15 |
| 2 | 9·83 | 19·72 | 28·45 | 48·34 |
| 3 | 11·03 | 19·72 | 28·45 | 49·25 |
| 4 | 14·94 | 23·56 | 31·29 | 50·67 |
| 5 | 13·04 | 22·15 | 33·01 | 50·87 |
| 6 | 11·73 | 20·83 | 30·17 | 48·54 |
| 7 | 7·12 | 21·34 | 28·86 | 48·75 |
| 8 | 8·22 | 22·02 | 28·96 | 49·15 |
| 9 | 7·02 | 23·16 | 29·87 | 51·07 |
| 10 | 5·11 | 22·04 | 29·57 | 48·95 |
| 11 | 4·71 | 22·45 | 29·20 | 47·13 |
| 12 | 2·21 | 21·34 | 27·64 | 48·04 |
| 13 | 4·51 | 22·65 | 30·07 | 49·46 |
| 14 | 1·10 | 20·83 | 27·34 | 47·94 |
| 18 | 1·20 | 5·16 | 30·07 | 50·16 |
| 21 | — | 0·61 | 13·37 | 47·84 |
| 26 | — | 0·71 | 4·05 | 47·84 |
| 30 | — | 0·91 | 0·40 | 25·49 |
| 34 | — | — | 2·02 | 22·86 |
| 38 | — | — | 3·64 | 26·30 |
| 42 | — | — | — | 26·40 |
| 46 | — | — | — | 31·96 |
| 50 | — | — | — | 40·96 |

* A szuszpenziók készítésénél felhasznált anyag mennyisége gr-ban.

Vagyis a koaguláció fokozatosan halad a nagyobb szemcsék felé. A 31. ábra I. mezején a $< 0{\cdot}002$ mm-es részekből 0·002—0·005 mm nagyságú pelyhek képződtek. A II. mezőben már 0·005—0·01 mm-es a koagulum nagysága, a III. mezőben 0·01—0·02 mm közt mozog, végül a IV. mezőben már $> 0{\cdot}02$ mm-es szemcsék is képződtek. Érdekes azonban, hogy a folyamat ennél az anyagnál és az adott koncentrációban megállt, sőt ettől kezdve a pelyhek szétesése kezdődött, mutatva, hogy a $> 0{\cdot}02$ mm-es pelyhek kevéssé stabilisak és már a leggyengébb rázásnál újra szétesnek. Sőt az ábrán a $< 0{\cdot}01$ mm-es görbe lassú emelkedése jelzi, hogy már a kisebb pelyhek szétesése is megkezdődött. Ez a kísérlet jól megvilágítja, hogy a koagulációnak felső határa van, mely az adott szuszpenzió és elektrolit-koncentrációtól függ, megfigyeléseim szerint és mások vizsgálatai szerint is, a képződő pelyhek nagysága növekvő elektrolit-koncentrációval nő.

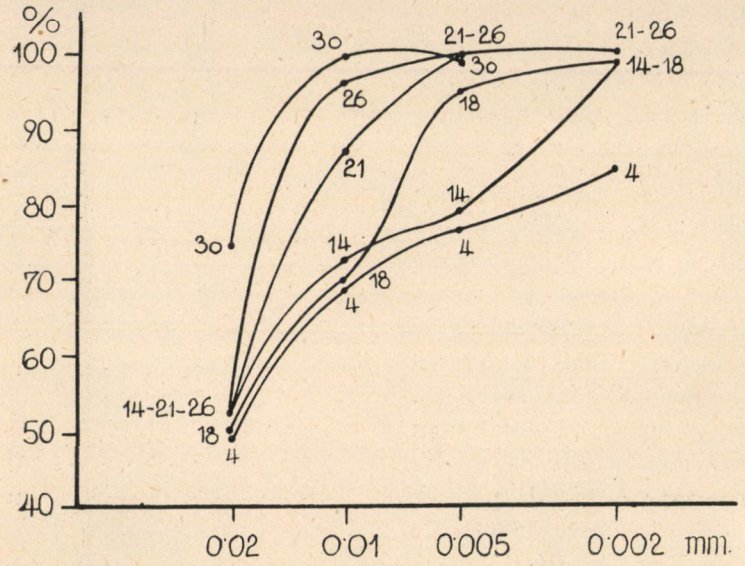
A természetben ez a koaguláció-határ megszabja, hogy adott esetben milyen nagyságú




31. ábra. Pacsirtahegyi lösz 0·005 *n* nátriumoxalátos szuszpenzió különböző nagyságú szemcséi mennyiségének a változása.

pelyhek alakjában válik le egy szediment kőzet és egyúttal határt szab a kőzet túlságos fellazulásának is. Ezen eljárás segélyével megállapítható közelítőleg, hogy pl. tengeri szedimentek (agyagok) lerakódásakor milyen nagyságú pelyhek képződtek a primér részecskékből, adott sótartalmú tengervíz hatására.

Technikai szempontból pedig azért fontos, mert mértéket szolgáltat arra vonatkozólag, hogy pl. egy vízzáró agyagréteg adott




32. ábra. Pacsirtahegyi lösz szemcseeloszlása.
A 4., 14., 18., 21., 26. és 30. napon.

sótartalmú talajvíz hatására milyen mértékig lazulhat fel, vagyis milyen mértékig válik vízvezetővé. Azt hiszem, hogy igen sok esetben a hosszú időn át jól szigetelő agyagrétegből való hirtelen vízbetörések a talajvízben oldott sók lassú koaguláló hatása folytán keletkeznek. Kőzetek mechanikai elemzésénél pedig nyilvánvalóvá teszi, hogy a koagulációra annál kevésbbé kell tekintettel lennünk, minél durvább szemcsék meghatározásával elégszünk meg.

A 31. ábra alapján a 4., 14,. 18., 21., 26. és 30. napon a löszszuszpenzió szemcseeloszlását a 32. ábra mutatja. Amint a 32.

ábrából látjuk, a szuszpenzió a 4. napon még «agyag» stádiumban van; a 14. napon már a koaguláció következtében a $< 0{\cdot}002$ mm-es részekből 0·002—0·005 mm-es pelyhek képződtek, a szuszpenzió a «fínom iszap» stádiumba került; a 18. napon már a $< 0{\cdot}005$ mm-es részek nagyrésze is eltűnt, a szuszpenzió a «középszemű iszap» stádiumba került. A későbbiek folyamán a kőzet a «durva iszap», sőt a 30. napon már a «fínom homok» stádiumba került.

Vizsgálatokat végeztem arra vonatkozólag is, hogy az ilyen nátriumoxaláttal peptizált lösz-szuszpenziókra miként hat a rázás? Közelítőleg 50 g löszt tartalmazó szuszpenziókban a naponta kétszeri ötperces felrázás hatására már a 6. napon bekövetkezett a koaguláció, míg a nyugodtan állni hagyott (csupán a mérés elvégzésénél az 1., 2., 8., 9., 16., 17., 20., napon egyszeri öt perces rázást elszenvedett) szuszpenzió csak a 20. napon mutatott hasonló koagulációt. Itt a rázás a $CaCO_3$ és a nátriumoxalát közt lejátszódó reakciót gyorsította meg.

## XV. Összefoglalás.

1. A legtöbb kőzetnél a 0·005 *n* nátriumoxalát adja a legfínomabb eloszlású szuszpenziót.

2. Igen magas $CaCO_3$ tartalmú, továbbá $CaSO_4$, valamint sok elektrolitet tartalmazó agyagoknál a nátriummetaszilikát-oldat használata biztosítja a legjobb diszperzitást.

3. A *Ca* koaguláló hatása nem a jelenlevő *Ca* mennyiségétől, hanem a reakcióképességétől függ, a legerősebb koagulációt az adszorbeált *Ca* ionok okozzák a nátriumoxalátos szuszpenzióban.

4. Allophanszerű agyagoknál a nátriumoxalát sajátszerű, a többi stabilizátor hatását messze felülmúló diszperzitást biztosít.

5. A húmusztartalom eltávolítása szedimentkőzetek mechanikai elemzésénél káros hatású, mivel a szuszpenzió stabilitását csökkenti és *OH* tartalmú stabilizátoroknál a szuszpenzió diszperzitását is rontja.

Dolgozatom befejeztével hálás köszönetet mondok Vendl Aladár műegyetemi tanár úrnak egyrészt azért, hogy a szedimentpetrográfiai vizsgálati módszerekre megtanított, másrészt,

hogy kísérleti anyagát rendelkezésemre bocsátotta és a vizsgálatok elvégzését lehetővé tette.

M. Kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Ásvány- és Földtani Intézete.

## Felhasznált irodalom.

BALLENEGGER R.: A tokaj—hegyaljai nyiroktalajról. Földtani Közlöny XLVII. 1917.

BALLENEGGER R.: A termőföld.

R. BRADFIELD: Reaktionen des kolloidalen Tones. J. physic. Chem. 35. 1931. (C. W. CORRENS, Mineralogische und Petrographische Mitteilungen 1933. Referátum alapján.)

BUZÁGH E.: Ueber die Strömungsdoppelbrechung und Thixotropie der Bentonit Suspensionen. Kolloid Zeitschrift. 46. 1928.

A. CASAGRANDE: Die Aräometer-Methode zur Bestimmung der Kornverteilung von Böden und anderen Materialien. 1934.

C. W. CORRENS—W. SCHOTT: Über den Einfluss des Trocknens auf die Korngrössenverteilung von Tonen. Kolloid Zeitschrift 65. 1933.

C. W. CORRENS—W. SCHOTT: Vergleichende Untersuchungen über Schlämm- und Aufbereitungsverfahren von Tonen. Kolloid Zeitschrift 61. 1932.

ENDRÉDY E.: A borsodi nyiltártér talajainak vizsgálata. A m. kir. Földművelésügyi Minisztérium Kiadványai 1934. 2. sz. SAJÓ E.—TRUMMER A.: A magyar szikesek.

FÖLDVÁRI A.: A tervezett újabb városligeti artézi kút előkészítő fúrásai. Földtani Közlöny LXII. 1932.

H. FREUNDLICH: Kapillarchemie 1930.

FREUNDLICH—SCHMIDT—LINDAU: Über die Thixotropie von Bentonit Suspensionen. Kolloidchemische Beihefte. 36. 1932.

R. GALLAY: Beitrag zur Kenntnis der Tonkoagulation, Kolloidchemische Beihefte 21. 1925.

H. GESSNER: Die Schlämmanalyse. 1931.

M. KÖHN: Beiträge zur Theorie und Praxis der mechanischen Bodenanalyse. Landwirtschaftl. Jahrb. 67. 1928.

W. C. KRUMBEIN: The dispersion of fine-grained sediments for mechanical analysis. Journal of Sedimentary Petrology 3. 1933.

R. LOEBE—R. KÖHLER: Beitrag zur Praxis der Sedimentationsanalyse. Mitteilungen aus den Laboratorien der Preussischen Geologischen Landesanstalt Heft 17. 1932.

R. LOEBE—R. KÖHLER: Zur Frage der Zuverlässigkeit der mechanischen Bodenanalyse. l. c. Heft. 18. 1933.

F. Neumaier: Ueber Vorbehandlungsverfahren der Sedimente zur Schlämmanalyse. Centralblatt für Mineralogie etc. Abt. A. 1935.

Olmstead—Lyle—Middleton: A pipette method of mechanical analysis of soils based on improved dispersion procedure. Technical Bulletin No. 170. U. S. Department of Agriculture. 1930.

G. A. Posewitz: A Rókushegy geológiája, különös tekintettel a suvadásokra 1935.

F. K. Schlünz: Mikroskopische und chemische Untersuchungen zweier Tone. Chemie der Erde. 8. 1933.

Sztrókay K.: A budai márga kőzettani vizsgálata. Földtani Közlöny LXII. 1932.

Vendl A.: A kiscelli agyag. M. kir. Földtani Intézet Évkönyve. XXIX.

Vendl—Takáts—Földvári: A budapestkörnyéki löszről. Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője LII. 1934.

Vendl M.: Biotitos dácittufa Kistétényről. Földtani Közlöny L. 1920.

G. Wiegner: Der Einfluss von Elektrolyten auf die Koagulation von Tonsuspensionen. Mitteilung aus dem agrikultur-chemischen Laboratorium der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich.

G. Wiegner: Ueber den Einfluss verschiedener Vorbehandlungs-Methoden auf den mit Hilfe des Schlämm-Apparates von Wiegner—Gessner ermittelten Dispersitätsgrad von Bodensuspensionen. Actes de la IVème Conférence Internationale de Pédologie, Rome : vol. II. 1926.

G. Wiegner: Dispersität und Basenaustausch. l. c. vol. II. 1926.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. jún. 3-án tartott üléséből.)

# ÜBER DIE WIRKUNG EINIGER TONSTABILISATOREN.

Von A. FÖLDVÁRI.

Die Arbeit erscheint in deutscher Sprache in der Kolloid-Zeitschrift.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 3. Juni 1935.)

# A LILLAFÜREDI SZENTISTVÁN-HEGY ERUPTIVUMAINAK ÁLTALÁNOS KŐZETTANI VISZONYAI.

SZENTPÉTERY ZSIGMOND l. tagtól.

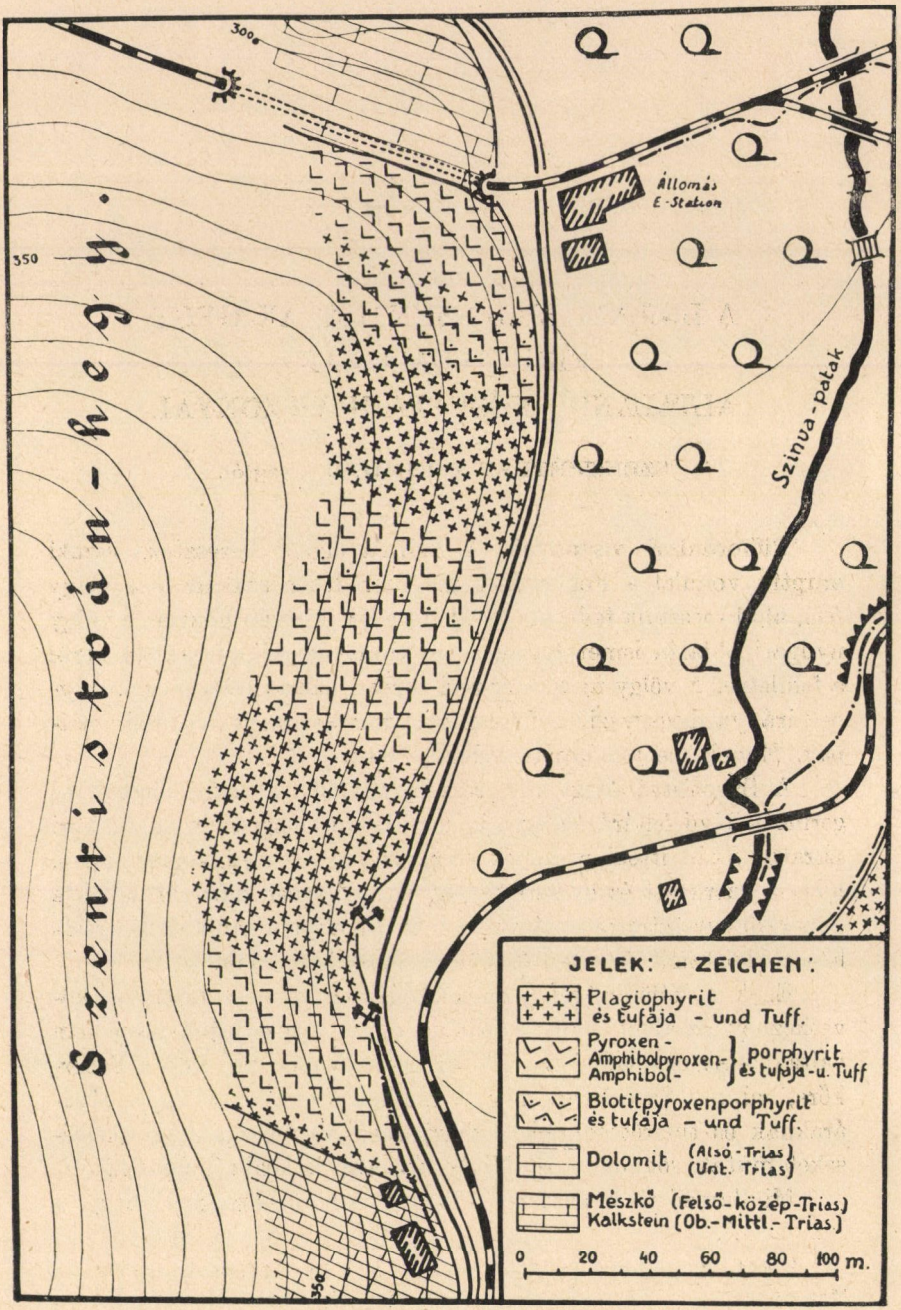
**Előfordulási viszonyok.** A Szinvavölgyet keresztező északi eruptív vonulat a Fehérkőhegynél meredeken szakad le a völgy felé, ahol mésztufa fedő alá kerül, de a Szentistván-hegyen, a völgy nyugati oldalán ismét hatalmasan kimeredő sziklafalakban kerül a felületre. A völgy maga egy régi törésvonalnak felel meg, amelynek iránya megegyezik a feltételezett régibb préselés csapásirányának. Ennek mentén lapelvetődés történt.

A Szentistván-hegy alsó részén, továbbá a hegy oldalán és gerincén lévő feltárások igen jó bepillantást engednek az egykori sztratovulkán itteni részének szerkezetébe és meggyőznek arról, hogy a szerkezet és összetétel nagyban-egészben hasonló ugyan a Fehérkőhegy sztratovulkáni részéhez, amelyet a mult évben részletesen leírtam,[1] de jelentős különbségek is vannak.

Ezek a különbségek azonban egészen természetszerűleg következnek az alkotásból : habár az egyes főkőzetfajok hasonlóan váltakoznak egymással az egykori sztratovulkánnak úgy a Fehérkőre, mint a Szentistván-hegyre eső részében, de az egyes lávaáraknak és tufarétegeknek a kiterjedése, vastagsága nagy eltéréseket mutat, sőt más kőzetfajták lávaárai is közbeékelődtek.

Mindamellett nem járt különös nagy nehézséggel, hogy a

[1] Acta ch. mineralog. et ph. Tom. IV. p. 18—123. Szeged, 1934. — Matematikai és Természettudományi Értesitő. LII. k. 253—286. l. Budapest, 1935.


Szentistván-hegy.
300
350
350
Állomás
E-Station
Szinva-patak
JELEK: - ZEICHEN:
Plagiophyrit
és tufája - und Tuff.
Pyroxen-
Amphibolpyroxen-
Amphibol-
porphyrit
és tufája-u. Tuff
Biotitpyroxenporphyrit
és tufája - und Tuff.
Dolomit (Alsó-Trias)
(Unt. Trias)
Mészkő (Felső-közép-Trias)
Kalkstein (Ob.-Mittl.-Trias)
0 20 40 60 80 100 m.

Szentistván-hegy eruptív részét is úgy osszam be, olyan övekre tagoljam, mint a fehérkői részt. Öt öv van itt is, amelyen belül 32 kőzetsort kell megkülönböztetnünk a váltakozó kőzetfajták szerint, valamint ezeknek tömeges és törmelékes kifejlődései alapján.

A résztvevő kőzetfajták a következők:

1. Plagiofiritek,[2] amelyek között az oligoklászporfirittől a labradorporfiritig minden fajta megvan, sőt káliumban gazdag *alkáliplagiofiritek* is előfordulnak, bárha nagyon alárendelten és az egyes lávapadokban úgyszólván csak egyes nagy szabálytalan részek alakjában. Az alkáliplagiofiritek képződését utólagosnak tartom és káligazdagodásra vezetem vissza.[3] A plagiofiritek gyakran salakosak, sőt olykor breccsiás lávasalakok. A tömeges kőzetpadokkal tufarétegsorozatok váltakoznak, melyekben a hamu, ásvány- és agglomerátos tufák minden fajtája megtalálható.

2. Piroxénporfiritek, amelyekben azonban a piroxén csak pszeudomorfózákban fordul elő. Ezeknek a pszeudomorfózáknak az alakja és a nem erősen elváltozott kőzetekben a kitöltő anyaga is augitra vall. Olykor hiperszténalak is előfordul, de erre nem mertem biztosan következtetni. Ezek a piroxénporfiritek úgy lávaárakban, mint tufarétegekben uralkodnak a sztratovulkán átmetszetében. Gyakran tartalmaznak amfibolt, sőt fokozatosan mennek át az amfibolporfiritekbe. A biotit is elég gyakori bennük.

Ezek az uralkodó kőzetfajok. A többiek nagyrészben átmeneti fajták, csak igen ritkán tiszta típusok.

---

[2] A plagiofirit elnevezést már régóta használom mindazokra a kőzetekre, amelyek anyagának túlnyomó nagy része plagioklászból áll és a femikus ásványtartalom igen csekély. Bizonyos, hogy egyes esetekben kissé önkényes az elnevezés ezeknél a néha igen erősen elváltozott kőzeteknél, amelyekből a femikus bomlási termékek a későbbi folyamatok következtében ki is lúgzódhattak, mint arra már több helyütt rámutattam (Mat. és Természettud. Értesítő. LII. k. 264. l. Acta ch. mineralog. ph. Tom. IV. p. 30 stb.). Ilyen esetek azonban ritkák és ezek elkerülésére csak azokat vettem az erősen elváltozott kőzetek közül ide, melyek típikus plagiofiriteknek a rétegsorozataiban fordulnak elő.

[3] Acta ch. mineralog. ph. Tom. IV. p. 185—188. Szeged, 1935.

3. Amfibolporfiritek, amelyek meglehetős vastag kőzetsorozatokat alkotnak a piroxénporfirit-övekben. Az amfibol szintén csak pszeudomorfózákban fordul elő, amelyek azonban egészen jellegzetesek. Legtöbbször van bennük több-kevesebb piroxén, úgyhogy a *piroxénamfibolporfiritek* még gyakoribbak, mint a tiszta amfibolporfiritek.

4. Biotitporfiritek, amelyek tiszta állapotban főleg csak a hamútufák között fordulnak elő. A piroxénnek a nyomai sokszor kimutathatók, olykor az amfibolé is: *biotitpiroxénporfirit, biotitpiroxénamfibolporfirit.* Ha nagyban nézzük a dolgot, azt kell mondani, hogy a biotittartalmú porfiritekben legtöbbször uralkodik a piroxén, és csak ritkán nevezhetők biotitporfiritnek.

A külső felvételi munkánál már évek óta foglalkoztat az a probléma, hogy minő viszonyban vannak az egyes erősen összepréselt és meredeken felállított kőzetsorozatok az egykori lávaömlések és tufahullások által létrehozott képződményekkel? Minő kőzetsorozat felel meg pl. egy-egy lávaárnak?

Több izben tapasztaltam, hogy nemcsak az egyes övekben, hanem még az egyes kőzetsorozatokon belül is több ízben váltakoznak a salakos részek a tömör kőzetfajtákkal, továbbá egy és ugyanazon kőzetsorozatban is többször ismétlődik a holokristályos, hipokristályos és üveges szerkezet. Egy-egy vastagabb tömeges kőzetpadban mindenféle kifejlődést megtalálunk, a rákövetkezőben ismét. Egy-egy kőzetsorozatban pedig több ilyen kőzetpad is van. Így van ez a folyásos szerkezettel is, amely egyetlen kőzetsorozat keretén belül is többször ismétlődik, habár az ilyen folyásos részek helyzete korántsem olyan szabályos, mint a többi főbb szerkezeté. Sokszor azt a benyomást nyertem, hogy a folyásos szerkezet még egyetlen lávaár ugyanazon szintjében se állandó. Itt-ott nagyobb helyeken megvan, azután pl. tömör vagy mandulaköves kőzet váltja fel.

A szerkezeti formák ilyen váltakozásából már most azt következtetem, hogy nemcsak az egyes nagy egységek, tehát maguk az övek felelnek meg külön kiömlési időszaknak, ha-

nem ezen belül is némelyik vastagabb kőzetsorozat többszörös lávaömlésnek az eredménye. Az a körülmény pedig, hogy az egyes tömeges kőzetsorozatokat tufarétegek, és pedig olykor még így összepréselt állapotban is tekintélyes vastagságú tufarétegek választják el, arra enged következtetni, hogy *a lávaömlésekből származó tömeges kőzetsorozatok képződése között meglehetős hosszú idő telt el, amely időt a törmelék hullása töltötte ki*, eltekintve a közbeeső esetleges nyugalmi időktől.

Az a körülmény, hogy a tufasorozatok általában jóval vékonyabbak, mint a tömeges kőzetekből álló sorozatok, az részben talán a préseléssel is összefüggésben áll, amennyiben a laza tufarétegek erősebben összepréselődhettek.

Szintén a képződésre jellemző, hogy a vastagabb tufarétegek között vékony lávaármaradványok is előfordulnak.

A tömeges porfiritsorozatokban a hozzájuk meglehetős szabályosan, fokozatos átmenettel csatlakozó salakos részek gyakran hosszasan követhetők a lávarétegek irányában, máskor hamar eltűnnek, majd újra kibukkannak. Ezektől a normális porfiritekbe fokozatosan átmenő lávasalakoktól különböznek azok a teljesen szabálytalanul megjelenő salakrészek, amelyeket a normális szerkezetű kőzettől éles határ választ el. Ezeket az idegeneknek látszó salakrészeket a lávafolyás idejéből fennmaradt hatalmas zárványoknak tartom. Ugyanilyen természetűek a porfiritekben található hatalmas tufazárványok, melyek között szintén bőven vannak salakos részek. *A láva ugyanis az előtte már lerakódott vulkáni törmelék egyes részeit, valamint az alatta lévő lávaár felületén képződött és attól elvált salakos részeket a vulkán lejtőjén maga előtt tolta, majd magába zárta.*

A feltárt részekben egymás alatt, a mai állapotnak megfelelőbben, tehát helyesebben egymás mellett következő részekben, túlságosan szabályosan váltakoznak egymással a főleg piroxénporfiritből és főleg plagiofiritből álló övek. A helyzet nagyban nézve olyan, hogy középen van egy hatalmas piroxénporfiritöv (73 m), ettől jobbra és balra egy-egy plagiofiritöv nagyon különböző vastagságban (43 és 76 m), legkívül ismét piroxénporfiritek vannak mindkét oldalon, szintén különböző vastagságban (45 és

60 m), ezek burkolják a hegynek eruptív részét a mészkő- és dolomittömegek felől.

Az eruptív résznek, ennek a hatalmas préselt sztratovulkánrésznek a mai helyzetét fentidézett dolgozatomban (lásd 1. jegyzet alatt) már részletesen ismertettem. Itt csak azt említem meg, hogy a vidék földtani viszonyainak kiváló kutatója, SCHRÉTER ZOLTÁN, legújabban megjelent munkájában[4] azt a sötétszürke dolomitot, amelyet régebben karbonnak tartott, kövületek alapján alsótriásznak határozta, az eruptív területtől délre következő világosszürke és fehér mészkövet pedig közép-felsőtriászkorúnak. Ezekután természetesen az ő elnevezéseit fogom használni. Ugyancsak ezen munkájában SCHRÉTER a Szentistván-hegy eruptív vonulatáról azt jegyzi meg, hogy a közép-felsőtriász mészkövek felett, «áttolódott helyzetben kb. 15 km hosszúságban az egyik porfiritoid vonulat fekszik».

Az eruptív terület tehát két triászkorú képződmény között fordul elő, a felsőtriász-mészkőtől mindenütt tektonikai határ választja el. Az egyes tömeges kőzetpadok és tufarétegek meredeken vannak felállítva, átlag 46° alatt dőlnek ÉÉK = 23° felé, az összes mérések középeredményeként. A határoló két triászképződmény az érintkezéshez közel valamivel meredekebb dőlésű. A csapásirány ugyanaz, mint a Fehérkőnél: NyÉNy—KDK (átlagban 290°—110°). Ez az irány adja meg az eruptív testnek a főjellegét, bár ezenkívül még más palássági irányt is találunk. Nagyon el van mosódva ez a másik irány, alig pár helyütt lehet tisztán látni, így a lillafüredi posta mellett, azután a III. öv. 8. sorozatában s még pár ponton. Mindezeken a helyeken nagyjában É—D-inek mutatkozik, amelynek megfelelően hatalmas nagy palalapok, elválási felületek vannak. Ezeknek dőlése jóval meredekebb, mint az újabb palásságé.

A tektonikai folyamatok következtében az egész területen összeráncosodtak a képződmények, a ráncok később el is torzultak

---

[4] Földtani Közlöny. LXV. k. 90—105. l. Budapest, 1935. Meg kell jegyeznem, hogy SCHRÉTER már régebben is hangoztatta e képződmény egy részének alsótriász-korát, mint azt én már 1929-ben közöltem is: Acta ch. mineralog. et ph. Tom. I. p. 73. jegyzet alatt.

a szakadások, vetődések, rátolások következtében. Hajlandó vagyok újabban SCHRÉTER felfedezései alapján úgy fogni fel a dolgot, hogy az eruptívum és az alsótriász dolomit egymással szemben eredeti helyzetben vannak és együttesen tolódtak rá a felső-középtriászmészkőre. Igaz, hogy a tapasztalt települési sorrendet másképp is fel lehet fogni; ha t. i. a Vesszős-Jávor hegyek porfirittufa vonulatából indulunk ki, akkor észak felé haladva, ezen rajta találjuk a Fehérkő és a Szentistván-hegyen az alsótriász dolomitos mészkövet, márgapalát stb., majd a közép-felsőtriász mészkövet. Ezt a hármas csoportot a Szentistván-hegyen a csendőrlaktanya irányában, a Fehérkövön a fürdőalkalmazotti házak irányában felváltja a másik hármastagú pikkely, amelynek első tagjára, a porfiritre és tufájára a vasúti alagutak táján alsótriász dolomit, erre a Dolka-vonulat középrészén a közép-felsőtriász mészkő telepszik. Így fogva fel a dolgot, a pikkelyekben résztvevő csoportok egyes tagjainak a települése normálisnak látszik. Ez a feltevés nem mond ellent az előbbi feltevésnek, mert rátolás bizonyosan történt az eruptívum és a közép-felsőtriász mészkő jelenlegi határán. A dolomit és az eruptívum egymással érintkező részei nagyjában egyidősek. A főráncokon kívül egész sorozat apróbb gyűrődés, ránc is képződött. [1]

A kinetikus mozgásokat számtalan dörzsbreccsiás hely, vonal jelzi, amelyek párhuzamosak vagy közel párhuzamosak a főpalásság irányával, csak szórványosan keresztezik nagyobb szögek alatt annak irányát. A dörzsbreccsiákat főleg kalcit, valamivel ritkábban kvarc ragasztja össze, néha pedig az összes utólagos termékek résztvesznek a megerősítésben.

Maga a préselés még egy és ugyanazon kőzetsorozatban is különböző fokú az egyes helyek szerint. Így pl. a tömeges porfiritsorozatokban egyes helyeken egészen jó tömeges típusú maradt a kőzet, míg ugyanazon sorozat más szintjében már vékony palásra van préselve, sőt néha ki is van hengerelve a mozgások helyén. A tufák általában sokkal többet szenvedtek a préselés által, természetesen erősebben át is alakultak. De ez csak általánosságban érvényes, mert több példa van az ellenkezőre is.

**Elváltozás.** Az átalakító és elváltoztató hatásokról és azok sorrendjéről már részletesen megemlékeztem a Fehérkő kőzeteiről írt említett munkámban (lásd 1. jegyzet alatt), úgyhogy itt csak a Szentistván kőzeteire közelebbről vonatkozó tulajdonságokról számolok be. Általánosságban azt kell mondanom, hogy a Szentistván-hegy feltárt részeinek kőzetei erősebben elváltoztak, átalakultak, mint a Fehérkő kőzetei. Olyan üde és ép típusokat, mint ott leírtam, itt nem találtam.

*A préselési és a geotermikus hatások alatt történt átalakulás és a pneumatohidatogénes anyagok által okozott elváltozás általánosnak mondható, de mégis olyan, hogy sok helyütt igen erős, máshol kevésbbé erős, megint máshol egyenesen gyenge. De mindenütt kimutatható.* Az átalakulás, elváltozás foka még egy és ugyanazon kőzetsorozat ugyanazon kőzetpadjában is különböző az egyes helyek szerint. Néhol olyan erős, hogy még a tömeges kőzetek is teljesen elváltoztak, de azért az eredeti eruptív szerkezetnek mindenütt maradt valami nyoma. Ugyanezt a különböző fokú átalakulást tapasztalhatjuk a tufáknál is. Pl. az első övet befejező vastag tufasorozatban vannak egyes, csak kisebb fokban átalakult hamutufák, amelyeknek főtömege ma is amorf, viszont ugyancsak ebben a sorozatban vannak teljesen átalakult és elég nagy szeművé átkristályosodott tufák is.

Előre kell bocsátanom, hogy az alapanyag (ill. kötőanyag) elváltozását és átkristályosodását, főleg a kisebb mértékű kvarcosodás esetében, nem igen lehet különválasztani azoknál a kőzeteknél, amelyekről feltételezhető, hogy eredetileg üvegesek voltak. Bizonyos, hogy ezek közül a legnagyobb kristályossági fokot érték el a legerősebben elváltozott: kvarcosodott, szericitesedett, kalcitosodott stb. kőzetek. Sok jel mutat arra, hogy az átkristályosodás a geotermikus hatásra vagy préselés közben történt. Innen van, hogy az egyes új kristálykák elhelyezkedése a palásság síkját követi. De ugyancsak a palásság síkját követi a pneumatohidatogénes folyamatok termékeinek legnagyobb része is. Ennek esetleg az lehet az oka, hogy talán még akkor is voltak utóvulkáni hatások, amidőn a mészkőtömegek lerakodása folytán a megterhelés, esetleg már a préselés is beállott vagy talán a kezdetleges kristályossági fokú vagy éppen amorf hidroternális anyagok ez utóbbi folyamatok

(geotermikus és dislokációs hatások) alkalmával kristályosodtak ki, ill. váltak erősebben kristályosakká.

A vegyi és ásványos elváltozások egy része éppúgy a préselés hatása alatt származott, mint a mechanikai átalakulás. Ezeket úgy szembeállítani, mint a VAN HISE-elvből folyna, nem lehet. Így pl. vannak egyes sorozatokban igen erősen összezúzódott és összepréselt részek, amelyek vegyi és ásványos összetétel tekintetében is majdnem teljesen elváltoztak. Viszont vannak kevésbbé összepréselt, de vegyileg erősen elváltozott részek, végül olyan részek, amelyeknél a mechanikai hatás igen csekély, de kisfokú a vegyi elváltozás is. Ezt a kérdést egyébként mással kapcsolatban a fehérkői kőzeteknél is tárgyaltam. Itt csak azt említem meg, hogy a préselés hatásait újabban nagyon szabatosan vezeti le NIGGLI egyik nagy munkájában, mely most került kezeimbe.[5] NIGGLI gondolatmenetéből már most önként következik az, hogy a destruktív és konstruktív dinamikai átalakulásnál egy bizonyos stádiumban egyensúly állhat elő, tehát az illető kőzettömegrészben egyformán lehetnek kataklasztos és újólag átkristályosodott részek. Ez könnyen bekövetkezhetik akkor is, ha pl. a préselés nem volt elég erős arra, hogy az átalakulást teljessé tehette volna, vagy pedig a kőzettömegben lévő ki nem szorítható víz bizonyult kevésnek arra, hogy a feloldást teljessé tehette volna. Ilyen esetekre bőven van példa a Szentistván-hegyen. A sok közül itt csak azt az esetet említem, amidőn egy ugyanazon kőzettömegben vannak igen erősen kataklasztos, de vegyileg elég üde földpátok, továbbá teljesen szétpréselt és vegyileg is teljesen elváltozott földpátok, rendesen egészen átalakult alapanyagban.

Ilyen esetben arra is lehet gondolni, hogy talán már az előzetes pneumatohidatogénes és geotermikus hatások végeztek részleges vagy általánosan erős vegyi elváltoztatásokat, míg a rákövetkező préselés itt-ott főleg csak dinamikai hatást gyakorolt, bár esetleg erősíthette a vegyi hatást is.

---

[5] GRUBENMANN—NIGGLI: Die Gesteinsmetamorphose. I. Berlin, 1924.

*Jellemző, hogy általában az alapanyag és a porfiros földpátok különbözőképpen reagáltak az elváltoztató hatásokra.* Egyes kőzetekben a földpátok, más kőzetekben az alapanyag változott el erősebben. Olykor aránylag elég üdék a földpátok a teljesen átalakult alapanyagban is, máskor teljesen el vannak változva az olyan alapanyagban, amelyben az eredeti szerkezet és alkotórészek még egészen jól felismerhetők. De talán leggyakoribb az az eset, amidőn úgy az alapanyag, mint a porfiros ásványok elváltoztak. Ez a kérdés egyébként összefügg az alapanyag eredeti kifejlődési fokával is, de főleg az elváltoztató folyamatok milyenségével.

Az alapanyag kiképződésénél tehát nem mindig, sőt talán többnyire nem lehet megállapítani, hogy utólagos átkristályosodás vagy elváltozás történt-e, miután úgy a metaszomatikus gáz- és folyadékalakú oldatok, mint a megterhelés, majd a préselés is alapvető változásokat idéztek elő (tektonoblasztikus deformáció SANDER). Eredeti kristályosodásra csak a lécalakú földpátmikrolitos alapanyagnál lehet biztosra következtetni. Az utólagos átkristályosodás termékeinek formája egészen más. Több jel mutat egyes helyeken arra, hogy az utólagos átkristályosodás a katakláziszt kísérte vagy azután történt, de viszont az is egészen természetes, hogy a pneumatohidatogénes folyamatokból származó anyagok részben már eredetileg is azonnal kikristályosodhattak a bejutásuk után, sőt velük együtt kikristályosodott az általuk feloldott anyagnak egy része is. Ilyen esetre gondolok a mirmekitképződésnél akkor, amidőn a kvarccal összeszövődött földpát egészen üde.

Az elváltozásnál az eredeti szerkezet még leginkább megmaradt a kalcitosodott kőzetekben, de már a kvarcosodásnál legtöbbször erősebb az átalakulás: a kovasavas oldatok még a holokristályos alapanyagokból is kioldottak egyes részeket, ahol a kovasav mint kvarc vagy kalcedon csapódott le, vagy a feloldott földpátanyaggal együtt mint mirmekit képződött ki. A hipokristályos alapanyagoknál az üveges rész, valamint maguk az üveges alapanyagok a dolog természete szerint sokkal inkább átalakultak és az átkristályosodási termékek, valamint a bejutott anyagok kristályos halmazaivá váltak. Izotrop rész kevés helyütt maradt meg, még az eredeti üvegek, mint a horzsakő, szurokkő stb. maguk is legnagyobbrészben átkristályosodtak, ill. elváltoztak.

Némely esetben az látszik valószínűnek, hogy a pneumatohidatogénes működés folytán meglehetősen elváltozott kőzetek az óriási karbonáttömegek lerakódása következtében geotermikus hatások alá kerültek, majd a bekövetkező préselés folytán még inkább erősödött az átalakulás. A préselésnek törés nélkül átalakító hatását Niggli idézett munkájában (p. 231) úgy fejezi ki, hogy a préselés folytán már kis oldatmennyiségek is erős reakcióképességet idéznek elő és ilyenkor a préselés mint katalizátor működik, továbbá: hogy az erős préselés folytán feloldott anyagok a nyomási árnyékban csapódnak le.

Tehát az átalakulásnak nagyon sokféle fajtája mehetett itt a Szentistván-hegyen végbe.

Nagyon sok probléma merül fel ezen elváltozott kőzetek tanulmányozásánál. Például: mi lehet az oka annak, hogy *a tanulmányozott terület összes kőzeteinél egy bizonyos fokú szericitesedés úgy az aránylag legüdébb, mint az igen erősen elváltozott, tehát kvarcosodott fajtáknál is általános jelenség, míg a többi elváltozási módok csak helyenként lépnek fel.*

Tegyük fel, hogy itt is az a természetes folyamat játszódott le, hogy először a pneumatohidatogénes anyagok végezték elváltoztató hatásukat és csak azután a geotermikus és a préselési folyamatok. A pneumatohidatogénes folyamatok a dolog természete szerint csakis egyes helyeken változtatták meg a kőzeteket, ahol t. i. működtek, akár autopneumatolizisnak, akár kata-, mezo- vagy epitermális hatásoknak tulajdonítjuk azokat. Ezeken a helyeken azután pl. az eredetileg üveges részek helyén is kristályos halmazok léphettek fel, mégpedig az egész területet tekintetbe véve, egyenlőtlenül, mert csak lokálisan. Így ez a pneumatohidatogénes szericitesedés is csak lokális lehetett.

A területen nyert tapasztalatokból azonban azt lehet következtetni, hogy maga a préselés sem okozott a törési átalakulás mellett egy általános elváltozást és átkristályosodást. Ez is bizonyos lokális jelleggel bírt. Azokon a helyeken, ahol a préselés erősebb volt, erősebb is az átalakulás, az anyagok kicserélődése stb. Egyes anyagok valóban a kisebb nyomásnak kitett helyekre

vándorolhattak, mint NIGGLI írja, de bizonyosnak látszik, hogy más anyagok itt maradtak és a bejutott új anyagokkal újabb vegyületekbe léptek. Az egyenlőtlen hatások miatt tehát a szericitesedés itt se lehetett általánosan egyenletes.

Az általános szericitesedés megmagyarázásánál tehát csak az segíthet, ha felvesszük az említett geotermikus metamorfózist, amely a dolog természete szerint legalább nagyjában az egész területen egyenletes lehetett, tehát általános szericitesedést idézhetett elő. Az előzetes pneumatohidatogénes hatás és az utólagos diszlokációs hatás csak a mai állapotban észlelhető lokális (mennyiségbeli) különbözőségeket hozhatta létre.

A tanulság ebből az, hogy azokon a helyeken, ahol egyáltalában van pneumatohidatogénes termék (kvarc, calcit, klorit stb.), ott semmikép se lehet megállapítani a szericitről, akár nagy, akár kis mennyiségű, hogy minő származású. Kezdődhetett a képződése a pneumatohidatogénes stádiumban, általánossá válhatott a geotermikus hatás folytán és lokálisan újraéledhetett és erősödhetett a préselés alatt.

*Az átalakulási termékeknek, így a szericitnek is nemcsak a mennyisége, hanem a kristályossági foka is lokálisan különböző.* Az előadottak alapján ez szintén egészen jól megmagyarázható, ha felvesszük az egymásután következő képződési stádiumokban a továbbkristályosodást.

A szericitesedés alkalmával meglehetős sok kovasav szabadul fel. Ez a kovasav rendesen mint kvarc válik ki, de szolgálhat alapul albitképződésre (bár a nátrontartalom legnagyobb része eltávozik), sőt mirmekitképződésre is. A kőzetekben levő fölös kovasav legnagyobb része azonban, a megjelenési viszonyokból ítélve, bizonyára a pneumatohidatogénes kovasavas oldatokból került be ezekbe a porfiritekbe és tufáikba.

A mirmekit képződésére újabbi vizsgálataim alapján a következőket mondhatom: A kőzetek alapanyagába a kovasav már szericitesedett földpátok közé hatolt be, azokat

részben feloldotta. A feloldott földpátanyag egy részével mirmekites összeszövődést hozott létre, a megmaradt földpátszemcséket és reliktumokat pedig úgy foglalta össze, hogy az összeszövődés néha a mirmekiteshez, néha pedig a poikiliteshez hasonlít. Mirmekiteshez hasonlít akkor, ha az egyes nagyobb szemcséknek csak egyes részeit oldotta ki a kovasavas oldat, mondjuk az erősebben elváltozott (talán részben kalcitosodott) részeket és az így likacsossá vált földpátban azután mint olyan kvarc merevedett meg, mely minden részében egyszerre sötétedik. A poikiliteshez hasonlít akkor, ha a földpátból több szemcsereliktumot, pelyhet, néha jó alakú kristálylécecskét foglalt össze a bizonyos nagyságú helyeken belül szintén egységesen sötétedő kvarc. Gyakran az egész alapanyag ilyen apró mirmekit és mirmekitszerű szemcsék halmazából áll.

Hasonlóképpen történt a porfiros földpátok egyes részeinek, főleg széleik egyes helyeinek a mirmekitesedése, ahol szintén a kilúgzott helyekre, likacsokba nyomult be a kovasav és mint egységesen sötétedő kvarc kristályosodott ki. Nagyon ritkán az egész porfiros földpát ilyen zavaros mirmekitszerű részecskék halmazává vált.

Ilyen mirmekitképző szerepet esetleg a szericitesedésnél kiváló kovasav is betölthetett, bár a legtöbb esetben úgy látszik, hogy ez a kovasav inkább egyes önálló kvarcszemcsék és halmazok alakjában kristályosodott ki.

A mirmekit kvarca legtöbbször tartalmaz szericitet, elkülönült pikkelyek, rostok és ezek apró halmazai alakjában. A szericitet a benyomuló kovasav nem tudta úgy feloldani, mint a földpátot, tehát ezt is magába zárta.

*A mirmekitet ezekben a kőzetekben eredeti (likvidmagmatikus) képződménynek tartani nem tudom.* Majdnem mindig olyan kőzetekben fordul elő, amelyekben szabad kvarc kiválását még feltételezni sem lehet, részben pedig legalább is nem valószínű. De nem szericitesedhetett a már kiképződött mirmekit földpátja először csak az említett geotermikus periódusban sem, mert akkor hogyan magyaráznánk a mirmekit kvarcába olyan gyakran bezárt szericitet. Az azonban már valószínű, hogy az első szericitesedési periódusban történt elváltozás a későbbi folyamatok (geotermikus, préselési) hatása alatt erősbödött.

Említettem, hogy a tufák általában erősebben elváltoztak, mint tömeges kőzeteik. A nagyfokú elváltozás a törmelékes szerkezetet is jórészben megsemmisítette, úgyhogy gyakran csak a földpátok töredék volta vagy egyenesen szilánkalakja és csoportosulási formája mutatja, hogy nem tömeges kőzettel van dolgunk. Különösen a kvarcosodásnál válik gyakran a kötőanyag egészen finom, olykor egyenletes felzitté. Ezekben a kőzetekben a porfiros földpátok is erősen elváltoztak, néha annyira, hogy az alakjuk se vehető ki pontosan. Ekkor különösen nehéz az eredeti tufaszerkezetet felismerni. Elmosódnak még az apró agglomerátok határai is, különösen a mirmekitképződésnél. A felismerés tehát majdnem lehetetlen. Segítségünkre jön azonban az, hogy itt is, mint a Fehérkőnél, a legnagyobbfokú elváltozás mellett is akad minden kőzetpadban olyan hely, ahol meghatározható kőzeteket lehet gyüjteni. A lokális teljes elváltozás tehát e tekintetben nem akadályozza meg az eredeti kőzetfaj megállapítását, éppen a lokálisan üdébben megmaradt kőzetrészek segélyével.

Ami az egyes elváltozási módok fellépését illeti, erre nézve a fehérkői kőzeteknél már leírt esetekhez még a következőket jegyzem fel:

A salakos lávák főleg meszesedtek, és pedig néha annyira átitatódtak kalcittal, hogy ez teljesen elfedte az egyes részeket. A kalcit kioldása után az eredeti szerkezet a legtöbb esetben egészen jól előtűnik, tehát a kalcit nem alakította át teljesen az ellepett részeket. Egyes esetekben azonban a kalcit kioldása után egészen likacsossá válik vagy éppen szétesik a kőzet, tehát erős elváltozás történt. Ilyen esetben a LEHMANN-féle elmeszesedésre gondolok, amit a beolvasztott préeruptív mészkő anyagának a lehűlés folyamán történő kiválása idéz elő.

A kalcitot a salakos lávákból még a később bekövetkezett kvarcosodás se tudta teljesen kiszorítani, habár az eltolásnak tipikus példáira akadunk is.

Az elmeszesedésre jellemző, hogy egyes tufarétegeknek, de a tömeges kőzetpadoknak is egyes részei teljesen elmeszesedtek, míg a közöttük lévő részek teljesen vagy majdnem kalcitmentesek, noha az eltolásnak nyoma sincs. Ez a lokális szénsavas hatásra

enged következtetni. Így van ez a lávasalakoknál is, melyek közt teljesen kalcitmentesek is vannak.

*A kvarcosodás elég szabálytalan fellépése az egyes kőzetpadokban és tufarétegekben, illetőleg azokban való foltszerű előfordulása, továbbá a váltakozása az egyes rétegekben azt bizonyítja, hogy a kovasavas kigőzölgések és források csak bizonyos pontokon működtek, továbbá, hogy ez a működés az egyes kitörések vagy kitörési sorozatok között is folyamatban volt, tehát nemcsak egy olyan nagyobb ciklus befejeződése után, amely időt, mondjuk, egy kőzetöv képvisel. Így van ez a kalcitosodásnál is,* amely egy ugyanazon kőzetsorozatban is többször ismétlődik, sőt egy ugyanazon kőzetpadnak különböző helyein is különböző mérvű, helyenként pedig egyáltalában nem észlelhető. Érdekes, hogy a kvarcosodott részeket tartalmazó kőzetpadok kalcitosodott részekkel bíró kőzetpadokkal is váltakoznak. Az meg éppen gyakori, hogy ugyanazon kőzetpadnak egyes részei kalcitosodtak, más részei kvarcosodtak, sőt egy ugyanazon helyen is előfordul mindkettő.

Ezeket a viszonyokat, pl. egyes elváltozások foltszerű megjelenését természetesen csak olyan helyeken lehet tanulmányozni, ahol nagyobb kőzetpadfelületek vagy nagyobb tufarétegfelületek vannak szabadon, ahol tehát egy szintben lehet nagyobb területen észlelni az elváltozási módokat. Ilyenek azonban, sajnos, ritkák ebben a feltárássorozatban, amely majdnem éppen merőleges az eredeti településre. Főleg csak a hegy oldalán felmenet találunk ilyen nagyobb lapokat.

*Azért nem lehet tehát a lávaömlések és tufahullások hosszú sorozatából felépült eme sztratovulkán képződményeire egészen részletes sorrendet megállapítani, hogy minő egymásutánban történtek az elváltozások, mert ugyanazon folyamatok a képződés különböző fázisaiban megismétlődtek.* Általában azonban a LEHMANN által megállapított sorrend[6] a másodlagos anyagok kiválására nézve itt is érvényes, mint az számtalan esetben tapasztaltam.

De nemcsak a pneumatohidatogénes anyagoknál nem lehet az apró részletekig menő képződési sorrendet megállapítani, de az egyszerű keringő oldatokból lecsapódott anyagokra nézve sem,

---

[6] Neues Jahrb. Bd. 64. Abt. p. 549—592. Bd. 67. p. 69—117 etc.

mert ezek az egyáltalán semmi vagy csak kisebb átalakító hatást gyakorló oldatok helyenként egészen jól keveredhettek a késői termális oldatokkal, főleg, ha a hidatogénes működés többször megismétlődött az egész sztratovulkán kiképződése keretén belül, az egyes kitörési ciklusokban és azok végén. De erőssé tehette ezek hatását a nyomás és préselés.

**Az egyes alkatrészek elváltozása.** Ami már most az egyes kőzetrészek elváltozásait illeti, ezekre nézve pár megfigyelésem a következő:

Az alapanyagnál, ill. a kötőanyagnál mindazok az elváltozási módok megvannak, amiket általánosságban elmondtam. Különösen érdekesek itt az átkristályosodás és elváltozás különböző módosulatai és egymással való kombinációi. A plagiofiritek alapanyaga általában véve kvarcosan, földpátosan és szericitesen alakult át, a bejutott anyagok közül fontos itt a kovasav és a kálitartalmú oldat; a piroxénporfiritek alapanyaga pedig főleg kalcitosan, kvarcosan, kloritosan és szericitesen változott át, itt különösen fontos a szénsavas hatás. De csak általánosságban lehet ezt mondani, mert pl. a piroxénporfiriteknél és amfibolporfiriteknél is gyakori a főleg kvarcból, mirmekitből és szericitből álló, teljes egészében átalakult alapanyag, továbbá a plagiofiriteknél is gyakori a kalcitosodás.

A porfiros földpátoknál figyelemre méltó, hogy a szericitesedés ritkán teljes, tehát ritkák a csak szericitből álló pszeudomorfózák. Még az erős szericitesedésnél is gyakran marad valami kevés földpátreliktum. Ellenben, ha a szericitesedés kvarcosodással társul, akkor teljesen átalakulnak a földpátok, sőt gyakran maga a kvarcosodás is teljes elváltozással jár. Nem ritka a teljesen kialakult pszeudomorfóza akkor is, ha a szericitesedés kalcitosodással társul, de a kalcit egyedül is alkot pszeudomotfózákat földpát után, így az elmeszesedett salakos lávákban, szórványosan a tufákban is.

A földpátok kristályalakja legjobban megmarad a kalcitosodásnál, míg a szericitesedésnél gyakran elromlik a forma. Legritkábban marad meg a kristályalak a kvarcosodásnál és a mirmekitképződésnél, bár a kvarcosodásnál is képződnek néha éles körvonalú pszeudomorfózák.

Az elváltozás következtében az alapanyagnak és a porfiros földpátoknak a határvonalai sok helyütt elmosódtak. Különösen a kvarcosodás produkál ilyen eseteket. Ilyenkor a legnagyobb a kölcsönhatás az alapanyag és a porfiros földpát anyaga között. Az elváltozásnál jól követhető fokozatosságot találunk az ikersávok és a zónák eltűnésében is.

A kalcitosodásnál az a sajátságos, hogy az ilyen kőzetekben a pszeudomorfózák mellett aránylag üde eredeti porfiros földpátok is vannak, továbbá ugyancsak ilyen elmeszesedett kőzetekben vannak erősen szericitesedett földpátok is. Az előbbi esetben azt kell mondanunk, hogy az elmeszesedés nem egyformán hatott minden egyes földpátra, az utóbbi esetben pedig az a lehetőség, hogy a szericitesedés már részben lezajlott akkor, amidőn a mezo- és epitermális szénsavas oldatok teljessé tették az elmeszesedést, vagy pedig az, hogy egyes kalcitosodott földpátoknál a szericitesedés eltoló hatása érvényesült. Nézetem szerint az előbbi feltevés sem mond ellent a LEHMANN-féle elváltozási sorrendnek, hiszen a magmából kivált kalciton kívül ő is feltételez újabb kalcitgenerációt. A Szentistván kőzeteiben pedig legalább is három kalcitgenerációt lehet megkülönböztetni.

A porfiros földpátoknál az erős mechanikai és az erős vegyi elváltozás sokszor együtt lép fel, sokszor külön-külön. A mechanikai átalakulások folyamán egyes hosszúkás oszlopalakú földpátok elgörbültek, olykor többszörösen is, legtöbbször azonban a diszlokáció ereje darabokra törte szét a földpátot. A darabokra szétnyomott földpátokat szericit, kvarc, még ritkábban kalcit ragasztja össze. A két utóbbi ragasztó ásvány a préselésnek nagyon különböző fokait mutatja. Néha igen erősen, néha gyengén vagy egyáltalán nem kataklasztos, a rendesen erősen hullámos elsötétedésű földpát mellett. Ez nyilván mutatja a különböző idejű származást. A leggyakoribb ragasztóanyag, a szericit rendesen a földpátdarabok közti résekben, ezekre merőleges pikkelyekben képződött ki, ami miatt párhuzamos rostos szerkezetet mutat bizonyos átmetszetekben.

A tömeges porfiritekben átlag nincsenek annyira összepréselve a porfiros földpátok, mint a tufákban, de ez is csak általánosságban mondható.

A szosszüritesedés a porfiros földpátoknál egyáltalán nem általános jelenség, még a legbázisosabb fajtáknál sem, sőt még egy és ugyanazon kőzetpadban sem, pedig fajtabeli különbséget ugyanazon kőzetdarab szosszürites és nem szosszürites földpátjai között nem találtam. A szosszüritesedés különben is ritkán terjed ki az egész földpátkristályra, hanem főleg csak egyes részeire. A pirites kőzetekben talán a leggyakoribb ez az elváltozás.

A porfiros femikus ásványokra jellemző az, hogy az amfibol nem nagyon állandó alkotórész, még a piroxénamfibolporfirit-kőzetsorozatokban sem. Olykor uralkodó, máshol alig van. Lehet, hogy itt is olyan piroxénesedésnek volt alávetve, mint az a neovulkáni andezitekben gyakran észlelhető.[7]

Az amfibol- és piroxénpszeudomorfózákban majdnem minden utólagos ásvány megjelenik, amelyik a kőzetben előfordul. De meg kell különböztetni itt az eredeti bomlási termékeket és az utólagos kitöltőanyagokat. A legüdébb kőzetek amfibol-pszeudomorfózáiban a magnetiten kívül kloritot, piroxén-pszeudomorfózáiban pedig főleg kloritot és kalcitot találunk. Az erősebben elváltozott kőzetek mindkét fajta pszeudomorfózájában az említettek mellett, vagy azok nélkül találunk kvarcot, gyakran szericitet, limonitot, pisztacitot, klinozoizitot, prehnitet stb.

A rendesen erősen széthasadozott biotit főleg magnetitesedett, alárendelten kloritosodott, néha elszíntelenedett, mint a pirites kőzetekben is. A biotitból pennin és ripidolit vált ki a kloritosodásnál. Ez a pennin több esetben megfigyelhetőleg erősebb színezésű, mint az, amelyik a piroxénből vagy amfibolból származott.

Az eredeti magnetitnek hematitos és limonitos bomlási termékei közül rendesen ott van a titanitos termék. A szétnyomott magnetit-kristályokat sokszor szericit ragasztja össze. Az utólagos magnetit-halmazok körül titanitos termékeket nem találtam, bár ezek is gyakran elváltoztak.

**Ritkább elváltozási módok.** Az egyes kevésbbé gyakori elváltozásokra vonatkozólag a következő megfigyeléseket is tettem:

Az *epidotosodás*, eltekintve a szosszürit epidotjától, főleg

[7] Acta Litt. ac Scient. Sect. Scient Nat. Tom. II. p. 117—130. Szeged, 1926.

azokban a kőzetekben észlelhető, amelyekben kvarcosodás is van, vagy éppen erős. Ezekben a kőzetekben mindig van több-kevesebb kalcitreliktum is. Az epidot (pisztacit és klinozoizit) az erekben és lencsékben is főleg kvarchoz van kötve, gyakran automorf a kvarccal, de xenomorf a kalcittal szemben. Ugyancsak így fordul elő a kvarcosodott földpátokban is. Többször ki lehet mutatni, hogy kalcitból v. földpátból képződött a kovasavas oldat hatására. Ezeknél az epidot-fajtáknál majdnem gyakoribb *zoizit β* látszólag nincsen összefüggésben a kvarcosodással.

A *kaolinosodást* csak az aránylag legüdébb kőzetekben észleltem. Rendesen csak csekély mértékű szericitesedéssel együtt fordul elő. A kaolinos földpátokban csak nagyon apró szericitpikkelyek vannak.

Az *albitképződés* főleg a szericitesedéssel kapcsolatos, de előfordul a kalcitosodó földpátokban is. Itt-ott megtaláljuk az albitot a salakos lávák hólyagüregeiben kvarccal együtt, sőt önállóan is alkot mandulákat és egyes nagyobb mandulaszerű halmazokat.

A *magnetitesedés* elég gyakori, de mindig kismérvű. Nagyjában olyan, mint a Fehérkő kőzeteiben. (Id. h.: Math. LII. p. 264. Acta... IV. p. 49,99 stb.) Itt mindössze az erekben előforduló magnetitet említem fel, amely a képződött repedéseknek talán a legrégibb töltelékeként szerepel. A magnetit ezekben nemcsak magukra az erekre szorítkozik, hanem azok mentén átjárta az alapanyagot, sőt gyakran az útjába eső porfiros ásványokat is. Gyakran úgy tűnik fel, mintha a vasérces oldat nem teljesen szilárd kőzetekbe hatolt volna be. Innen volna magyarázható, hogy az ilyen magnetites részek olykor fokozatosan mennek át a normális alapanyagba. Ez azonban ritkább eset.

Jellemző ezekre a gyakran zeg-zugos lefutású magnetites erekre, hogy néha össze vannak ráncosodva, gyakrabban elszakadoztak és el is vetődtek. Gyakori eset, hogy az egymással néha nagyjában párhuzamos magnetiterek sorozatát epidotos, kvarcos, kalcitos stb. erek szelik át. Ugyancsak előfordul az is, hogy ez az újabb ér egyszersmind vetődési sík is a magnetiterekre nézve.

Megjegyzendő azonban, hogy *slírszerű magnetites kiválás* is van a kőzetekben, amidőn ezeknek a magnetites sávoknak az iránya összeesik az eredeti lávafolyás irányával. Ezeknek az el-

mosódott határvonalú slíreknek a képződése természetesen még a likvidmagmatikus stádiumban történt.

**Eltoló hatás.** Az egyes pneumatohidatogénes anyagok egymásra és az elváltozási termékekre határozott hatást gyakoroltak. Ilyen hatásokat különösen a kvarcosodásnál észleltem. Ez a hatás azonban nagyon változó. A megfigyelt esetekből azt következtetem, hogy a legerősebb feloldó és eltoló hatással a kalcitra volt, de eltolta részben a kloritot, sőt kis részben a szericitet, talán a limonitot is. Legnehezebben tudott elbánni a szericittel, mint a mirmekit esetében fentebb említettem.

A kovasavnak a kloritra gyakorolt hatására jellemző, hogy vannak olyan piroxénporfirit- és amfibolporfirit-padok, amelyek általában nagyon gazdagok kloritban, de egyes foltokban, olykor több négyzetméteres felületeken is, ahol a kvarcosodás erős, a klorit részben vagy nagyrészben eltávozott. Ez kitűnik egyébként a vegyi elemzésekből is, amennyiben az erősen kvarcosodott kőzetekben nemcsak a *Na*- és *Ca*-oxidok mennyisége csekély, de feltűnő kicsiny a *FeMg*-oxidok mennyisége is.

A kalcitot teljesen vagy majdnem teljesen eltolta a behatoló kovasav. Az aránylag üdébb kőzetek piroxén-pszeudomorfózáiban mindig van több-kevesebb kalcit, ami azonban az erősen kvarcos kőzetekből eltűnt, helyében kvarc vált ki. A kőzetben magában és a hólyagűrökben lévő kalcithalmazkáknak néha a belsejét, máskor más részeit olyan kvarchalmaz foglalja el, amelyben mindig van több-kevesebb kalcitreliktum, olykor igen jó R-ekben. Ilyen reliktumok még olyan kvarcfészkekben is nagyon gyakoriak, amelyek körül már nincsen is kalcit. Egyes erekben azonban a behatoló kovasav mellett megmaradt a kalcit is.

A pneumatohidatogénes és a bomlási folyamatoknál képződött kovasavas oldatokból kivált apróbb nagyobb kvarcszemcsék, szemcsehalmazok és kalcedonhalmazok vagy elég egyenletesen vannak eloszolva a kovásodásnak kitett kőzetrészekben, vagy pedig itt is foltosan vannak elhelyezkedve. A kvarcszemcsék és halmazok gyakran mennek át mirmekitbe azokon a helyeken, ahol a kovasavas anyag az elváltozott földpátos alapanyagot nem tudta teljesen eltolni. A mirmekitnek a kiindulópontjait olykor egyes nagyobb kvarcszemcsék képezik, amelyek vagy eredeti

hólyagűrökben, vagy pedig utólagos kioldásból származó likacsokban képződtek ki. A kvarcosodás által megtámadott porfiros földpátoknak a szélein néha mirmekitkoszorú képződött, mely itt-ott apró kalcitreliktumokat is tartalmaz. A kvarccal összeszövődött földpát jóval savanyúbb, mint a porfiros földpát, egyes ritka esetekben albitnak vagy ehhez közelálló földpátnak volt határozható. Orientációja néha majdnem vagy egészen megegyezik a porfiros földpátéval. Máskor csak kvarcágak, szálak és rostok járják át a megtámadott porfiros földpát széleit.

A kőzetnek megtámadott részeit a behatoló (idegen) és a kőzetben képződött kovasav sokkal egyenletesebben járja át, mint a kalcit. Így a bázisosabb (piroxénporfirit stb.) tufákat a klorit is. A klorit azonban általában nem nagy mennyiségű, a plagiofiritekben pedig legtöbbször csak minimális, néha azonban felszaporodik, ami a Niggli-féle elv (a nyomási árnyékban való lecsapódás) alapján természetes. Ez a külső megjelenésben is feltűnik. Egyes kőzetsorozatokban úgy látszik, mintha a kvarcosodási folyamat már akkor állott volna be, amidőn a plagioklászban lévő kálitartalom, esetleg a káligazdagodás anyagával együtt, már a szericit alkotórészévé vált. Ez a szericitesedésnél kiváló fölös kovasav esetében pláne természetes is. Ez az oka, hogy a kvarcosodás a kálitartalmat nem távolította el a kőzetekből, vagy legalább is nem olyan mértékben, mint a kovasavtól elvált *Na*- és *Ca*-oxidokat. Az olyan kőzetekben, amelyek nem voltak kitéve a kvarcosodás hatásának vagy legalább is erős hatásának, ezek a kissé szericitesedett földpátok nagyjában ilyen állapotban meg is maradtak, az erősen kvarcosodott kőzetekben azonban nagy részben teljesen elbomlottak.

**Értöltelékek.** A repedésekbe és az elválások réseibe lerakódott termális és poszttermális anyagok nagyon változatos képet nyujtanak úgy a kifejlődési folyamatra, mint a kitöltő anyagokra nézve. Rendesen zeg-zugos lefutású vékonyabb-vastagabb erek ezek, vagy pedig a palásság, ill. az eredeti rétegesség síkjában kifejlődött hosszúra nyúlt lencseszerű képződmények, amelyek gyakran megvastagodnak vagy lassan kiékülnek, eltűnnek és kis távolságban ismét előbukkannak. Gyakran telepszerű képződmények. Kitöltőanyaguk főleg kalcit, klorit, kvarc, magnetit, hematit,

limonit, ritkábban epidot, prehnit stb. A paragenezis nagyon különböző, sőt nem is tudtam benne rendszert találni. Leggyakoribbak a kvarc-klorit, kvarc-kalcit-klorit, kalcit-epidot, kvarc-epidot, kvarc-prehnit-kalcit társaságok. A telepek alkotásában ritkán vesz részt a magnetit, de akkor rendesen nagy mennyiségben.

Még azokban az erekben, lencsékben és ásványtelepekben is, melyekben a kalcit nem lényeges alkotórész, megvan a kalcitnak a szórványos reliktuma. Ezek a reliktumok részben erősen kataklasztos szemcsék és szemcsehalmazok, részben igen jó alakú R-ek. A kovasavas oldat tehát csak részben oldotta fel a kalcitot. A feloldott anyagnak egy része eltávozott, kis része újra kikristályosodott az itt kifejlődött nagy nyomás mellett, és pedig előbb, mint maga a kovasav. Ennek a következménye, hogy a xenomorf kvarcszemcsék automorf kalcitkristályokat vesznek körül. Az erek kvarca részben szintén igen erősen kataklasztos, részben gyengén vagy egyáltalán nem. Egyes lencsékben a kvarc néhol automorf a kalcittal szemben, de viszont ugyanezen kvarc gyakran tartalmaz igen éles kalcit R-eket.

Már ez a pár adat is bizonyítja, hogy mindkét ásványnál több generációval van dolgunk a repedéskitöltéseknél is.

**Az elváltozás hatása a vegyi összetételre.** A pneumatohidatogénes folyamatok egyes oldatainak eltoló hatásával van összefüggésben, hogy az ott említett földpátképző anyagok tekintetében nagy veszteség állott be. De helyenként az igen erős elváltozás a többi ásványok anyagának egy részét is eltávolította.

Miután a földpátképző anyagok közül az *Al*-oxid bizonyul a legindifferensebbnek az eltoló hatásokkal szemben, azért néha igen erősen megnövekszik, úgyhogy egyes kőzetek majdnem elvesztették eruptív vegyi jellegüket. Az eruptív jelleg elmosódását elősegíti a kovasav nagymérvű felszaporodása is. A Szentistvánhegyen szórványosan előforduló káligazdagodás még ezekben a kőzetekben is csak részben pótolta az eltávozott földpátképző vegyületeket, úgy hogy még ezekben a kőzetekben is mindig marad telítetlen *Al*-oxid. A többi erősen elváltozott kőzetekben teljesen eltolódott az arány a földpátképző elemek között, természetesen az eruptív jelleg rovására.

Hogy ha a különbözőképpen elváltozott kőzetek vegyi össze-

tételét a mikroszkópi képpel hasonlítjuk össze, egyes kőzetekben az alkáliákban való szegénység, máshol a *Ca*-oxidban való szegénység, megint máshol mindkettőnek a kis mennyisége a feltűnő, tehát az egyes elváltozási folyamatok hol az egyikre, hol a másikra voltak hatással, hol pedig mindkettőre. Erre nézve, sajnos, még nincsenek pontos és teljesen biztos megállapításaim, eddig azonban úgy látom, hogy a kvarcosodás főleg a *Ca*-oxidnak, olykor a *FeMg*-oxidoknak, néha és csak kis mértékben az alkáliáknak az eltávolításában működött közre, a szericitesedés főleg a *Na*-oxid mennyiségét, a kalcitosodás mindkét alkália mennyiségét kisebbítette. De ezeket csak általánosságban merem még mondani, mert valószínű, hogy mindegyik pneumatohidatogénes folyamat hatással volt az eredeti összetétel megváltozására.

Jellemző, hogy az elváltozás milyen nagy kiegyenlítő hatást gyakorolt a különböző kőzetek vegyi összetételére nézve. Az egyes nagyon különböző kőzeteket vegyileg sokszor majdnem a megtévesztésig közel hozza egymáshoz.

Itt tekintetbe kell azt venni, hogy a megelemzett kőzetekben a kimutatott kovasavnak a mennyisége csakis a kis mértékben elváltozott kőzetekben lehet, annyira amennyire, irányadó a meghatározásra az osztályozásra nézve. Az erősebben elváltozottaknál, főleg a kvarcosodottaknál, már nem lehet alapul venni.

E mellett több esetben tapasztaltam azt is, hogy olyan kvarcosodott piroxénporfiriteknél vagy amfibolporfiriteknél, amelyeknél a mikroszkópi vizsgálattal csak kevés utólagos kvarcot lehet biztosan észlelni, a vegyi elemzés feltűnően sok kovasavat mutat ki, néha többet, mint az általában jóval savanyúbb normális plagioklasporfiritekben. Ilyen esetekben arra kellett gondolnom, hogy a kőzetbe bejutó kovasav amorf v. kriptokristályos állapotban maradt meg a különben is csak részben átkristályosodott alapanyagban. És valóban több esetben sikerült kimutatni a legerősebb nagyítással (18*b* × *V*), hogy az egyenletesnek látszó alapanyagrészekben rendkívül finom mikrofelzitszerű részek képződtek ki. Ezenkívül még az elemzési anyagnak leggondosabb kiválogatásánál se lehet elkerülni, hogy olyan finom kvarceres részek ne kerüljenek az elemzendő darabokba, amelyek megaszkóposan nem látszottak és a megelemzendő darabokból készített nagyszámú vékonycsiszolatba

sem kerültek bele ilyen részek. *A kimutatott kovasavtartalom tehát nem igen jellemző ezekre az elváltozott kőzetekre,* még azokra a gondosan kiválasztott példányokra sem, amelyek elemzés alá kerültek.

De amint fentebb említettem, a pneumatohidatogénes anyagok eltoló és hozzáadó hatása folytán is nagy változások történtek a kőzet összetételében, amelyek a végeredményben szintén kiegyenlítő hatást gyakorolhattak a különböző kőzetek vegyi összetételére. Így pl. a piroxénporfiriteknél és amfibolporfiriteknél nemcsak az alkáliák és a *Ca*-oxid, hanem az *FeMg*-oxidok eltávozását is tapasztaltam az elváltozások folyamán (pl. kvarccal, kalcittal stb. kitöltött femikus pszeudomorfózák). Már most az itt-ott fellépő káligazdagodás azt hozta magával, hogy a kőzet nemcsak nagy kovasavtartalmúvá, hanem néha meglehetős nagy alkálitartalmúvá is változott, ezenkívül a kilúgzás folytán a monoxidok mennyisége nagyon megkevesbedett, olyan csekély lett, mint a hegynek aránylag legsavanyúbb kőzeteiben, a plagiofiritekben. Pedig ezekben a kvarcosodott kőzetekben a még jól felismerhető piroxén- és amfibolpszeudomorfózák mennyisége akkora, hogy eredetileg bizonyosan bázisosabb kőzetek: piroxén- vagy amfibolporfiritek voltak, csakhogy a pszeudomorfózákat ma már jórészben kvarc tölti ki. A plagiofiritek közt is bőven vannak olyan fajták, melyekben az alkáli és *Ca*-oxidtartalom alaposan megkisebbedett az elváltoztató hatások folytán, a *FeMg*-oxidok mennyisége pedig eredetileg is kevés volt. Hozzájárul még az, hogy az *Al*-oxid-fölösleg mindegyik elváltozott kőzetben kimutatható.

Ezek alapján tehát a vegyi hasonlóság elérésére a Szentistvánhegy kőzeteinél minden lehetőség meg volt adva.

Nyilvánvaló ezekből, hogy ezeknél az elváltozott kőzeteknél milyen fontos a részletes mikroszkópi vizsgálat, hogy a fajtát, illetőleg a származást pontosan megállapíthassuk.

**Vegyi elemzések.** A vegyi elemzésre szolgáló anyagot úgy választottam ki, hogy egyrészről a megelemzendő kőzet jól képviselje az illető kőzetsorozatot, illetőleg annak bizonyos részét, másrészről azonban arra is tekintettel voltam, hogy olyan legyen, amely az alkotó vegyületek egymáshoz való viszonya tekintetében még magán viselje a kőzet eredeti összetételének típusát, tehát a lehetőség szerint legalább aránylag üde legyen. Ezeken kívül

összehasonlítás céljából több olyan erősebben elváltozott kőzet is elemzés alá került, amelyek a még megmaradt jellemző vonások alapján jól identifikálhatók voltak, hogy az elváltozások által okozott vegyi eltolódásokat is láthassam.

Magukat a kvantitatív vegyi elemzéseket legnagyobb részben tanársegédemnek, POLNER ÖDÖN vegyészmérnök úrnak köszönhetem, aki 20 elemzést készített e kőzetekből. Ezenkívül még egy régebbi elemzés is rendelkezésemre áll, melyet Dr. EMSZT KÁLMÁN kísérletügyi főigazgató úr készített egy bázisosabb piroxénporfiritből. Ez alkalommal csak pár elemzést közlök, a többit majd akkor, amidőn a kőzetek részletes fiziográfiáját közzéteszem.

Az aránylag legüdébb kőzetek közül a következőknek elemzését mutatom be:

1. Plagiofirit, IV. öv, 1. kőzetsorozat. Kissé szericitesedett de általában elég üde. Tömöttség: 2·703.

2. Amfibolpiroxénporfirit, III. öv, 4. sorozat. Szericitesedő kőzet, meglehetős kovasavfelesleggel. Tömöttség: 2·785.

3. Piroxénporfirit, V. öv, 1. sorozat. Földpátja elég üde, de alapanyaga elváltozóban van. Tömöttség: 2·803.

Az elváltozott, de még jól meghatározható kőzetek közül a következőknek közlöm a vegyi összetételét:

4. Plagiofirittufa, IV. öv, 4. sorozat. Szericitesedett és kvarcosodott kőzet, melyben a földpátok szétesése meglehetősen előrehaladt. A kilúgzás igen erős az alkáliák tekintetében. Tömöttség: 2·725.

5. Piroxénporfirit, I. öv, 1. sorozat. Erősen kvarcosodott kőzet, melyben a szericitesedés is jelentékeny. Alapanyaga főleg kvarcos és mirmekites, legüdébb földpátja is szericites, a pszeudomorfózákat (földpát és sok fémikus ásványpszeud.) kvarc és szericit töltik ki. Az alkáliák kilúgzódása erős. Tömöttség: 2·760.

6. Plagiofirit, II. öv, 1. sorozat. Kvarcosodott és szericitesedett kőzet, a kalcitosodásból csak apró reliktumok maradtak. Utólagos káligazdagodás valószínű. Tömöttség: 2·710.

7. Amfibolporfirittufa, III. öv, 2. sorozat. Alapanyaga szericites, mirmekites és kalcitos. A kvarcosodás főleg csak a mirmekitképződésben nyilvánul. Utólagos alkáligazdagodás itt is valószínű. Tömöttség: 2·759.

8. Piroxénporfirittufa biotittal, I. öv, 9. sorozat. Ez a szürkészöld nagyporfiros tufa a legerősebben elváltozott kőzet az összes megelemzett kőzetek közül, pedig mikroszkóp alatt egészen jól meghatározható tufatípus. Erősen kvarcosodott és kilúgzódott. Meglehetősen szericites is. Tömöttség: 2·750.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $SiO_2$ ..... | 61·56 | 54·66 | 50·06 | 63·32 |
| $TiO_2$ ..... | 1·58 | 1·38 | 0·96 | 1·21 |
| $Al_2O_3$..... | 16·09 | 17'03 | 19·56 | 15·70 |
| $Fe_2O_3$ ..... | 6·17 | 4·31 | 1·41 | 4·82 |
| $FeO$..... | 1·52 | 2·95 | 6·51 | 3·16 |
| $MnO$ ..... | 0·31 | 0·08 | 0·06 | 0·09 |
| $MgO$ ..... | 0·79 | 4·12 | 3·27 | 1·13 |
| $CaO$ ..... | 2·94 | 6·59 | 6·60 | 4·18 |
| $Na_2O$..... | 4·88 | 2·90 | 3·67 | 2·48 |
| $K_2O$..... | 2·11 | 2·62 | 0·37 | 1·67 |
| $P_2O_3$ ..... | 0·21 | 0·08 | 0·04 | 0·18 |
| $H_2O$..... | 1·48 | 3·00 | 5·83 | 1·66 |
| $H_2O$..... | 0·08 | 0·18 | | 0·12 |
| | 99·72 | 99·50 | $SrO$ = 0·04 | 99·72 |
| | | | 98·38 | |

| | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $SiO_2$ ..... | 61·80 | 63·47 | 59·99 | 73·31 |
| $TiO_2$ ..... | 1·44 | 2·62 | 1·71 | 1·63 |
| $Al_2O_3$ ..... | 16·64 | 18·39 | 18·46 | 15·02 |
| $Fe_2O_3$ ..... | 4·16 | 3·78 | 4·64 | 1·80 |
| $FeO$..... | 3·42 | 0·76 | 1·88 | 0·86 |
| $MnO$ ..... | nyom | 0·12 | 0·10 | nyom |
| $MgO$ ..... | 1·34 | 0·78 | 1·01 | 0·45 |
| $CaO$ ..... | 4·62 | 2·05 | 3·21 | 0·37 |
| $Na_2O$..... | 1·58 | 3·36 | 3·60 | 1·47 |
| $K_2O$..... | 2·82 | 3·01 | 2·14 | 2·32 |
| $P_2O_3$ ..... | 0·23 | 0·33 | 0·20 | nyom |
| $H_2O$..... | 1·44 | 1·52 | 1·77 | 2·28 |
| $H_2O$..... | 0·09 | 0·13 | 0·11 | 0·14 |
| | 99·58 | 100·32 | $CO_2$ = 1·76 | 99·65 |
| | | | 100·58 | |

A 3. számú kőzetet dr. Emszt Kálmán, a többit Polner Ödön elemezte.

Ezek az elemzések elég jó példák arra, hogy az elbomlási folyamat, valamint a metaszomatikus anyagveszteség és nyereség mennyire megváltoztatja a kőzetek vegyi szerkezetének alapvető vonásait. De arra is jó példák, és pedig a 4. és 5., továbbá a 6. és 7. számú kőzetek egymással szemben, hogy az egyforma elválto-

zási módok a végeredményben az egyes különböző kőzetek összetételének egymáshoz való közeledését, tehát a különbségek kiegyenlítődését is előidézte, mint fentebb említettem. A 8. sz. kőzet vegyi elemzése pedig jól mutatja azt, hogy az erős elváltozás folytán a kőzetnek még az eruptív vegyi jellege is elmosódik.

## TÁBLAMAGYARÁZAT.

### I. tábla.

1. Plagiofirittufa, II. öv, 4. sor. Kvarcosodott kötőanyagba beágyazott automorf kalcit R-ek és szabálytalan kalcit-reliktumok. 1 Nicol. 46 × nagyítás.

2. Amfibolpiroxénporfirit, III. 3. Elmeszesedett kőzetben kalcitér, hullámosan elgörbült lemezekkel. 1 Nic. 40 ×.

3. Erősen préselt plagiofirittufa, II. 2. Szericitesedett ráncos kötőanyagban orsószerűleg kihegyezett, összezúzott plagioklászok. 1 Nic. 21 ×.

4. Ugyanaz. + Nic. 24 ×.

5. Plagiofirit, IV. 1. Sávosan szericitesedett és kvarcosodott alapanyagban széttört plagioklász. + Nic. 42 ×.

6. Plagiofirittufa, V. 4. Egyenletesen szericitesedett kötőanyagban üde plagioklásztöredékek és szilánkok. 1 Nic. 11 ×.

### II. tábla.

1. Plagiofirit, IV. 5. Kalcedonos alapanyagban részben kvarcosodó plagioklászok. 1 Nic. 62 ×.

2. Salakos plagiofiritláva, IV. 5. Kalcedonos alapanyagban kvarccal kitöltött mandulák és szericitesedő földpátok. 1 Nic. 22 ×.

3. Erősen préselt salakos piroxénporfiritláva, I. 3. Kvarccal és kalcedonnal kitöltött, kinyujtott mandulák és kalcitosodó kihengerelt földpátok látszanak a kloritból és kalcitból álló alapanyagban. 1 Nic. 21 ×.

4. Plagiofirit, IV. 5. Szimmetrikus kiképződésű jáspisér. + Nic. 10 ×.

5. Ugyanaz. Achátrészlet. + Nic. 10 ×.

6. Plagiofirit, IV. 5. Vastagabb és vékonyabb kalcit-kvarcerekkel átszelt magnetiterek. 1 Nic. 21 ×.

### III. tábla.

1. Plagiofirit, IV. 5. Titanitos kloritér mentén elvetődött, részben slirszerű magnetitér. 1 Nic. 49 ×.

2. Biotitporfirittufa, I. 9. Széthasadozott biotitlemez, szericitesedett és kloritosodott kötőanyagban. 1 Nic. 56 ×.

3. Piroxénbiotitporfirittufa, I. 9. Széthasadozott és összegyűrődött biotitlemez szericitesedett kötőanyagban. 1 Nic. 64 ×.

4. Erősen préselt plagiofirit, IV. 5. Orsószerűleg kihegyesedő, töredezett, magnetiteres földpátkristályok szericitesedett kötőanyagban. 1 Nic. 22 ×.

5. Plagiofiritláva, IV. 5. Barnásfekete alapanyagüveggel telezsúfolt plagioklászkristály, sötét üvegbe beágyazva. 1 Nic. 32 ×.

6. Plagiofirit-salaktufa, IV. 5. Szericites hamuba beágyazott salakdarabok és plagioklásztöredékek. A salakdarabok mandulái szericittel és kalcittal vannak kitöltve. 1 Nic. 21 ×.

A vizsgálatokat a ROCKEFELLER-alap műszereivel végeztem.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. május 13-án tartott üléséből.)

# ALLGEMEINE VERHÄLTNISSE DER ERUPTIVGESTEINE DES LILLAFÜREDER SZENTISTVÁN-BERGES.

Von S. v. SZENTPÉTERY.

(Auszug.)

Die grössten petrologischen Einheiten des stratovulkanischen Teiles des Szentistvánberges sind die Zonen, deren jede dem Abwechseln der massigen Porphyrite und den Porphyrittuffen entsprechend, in mehrere Serien eingeteilt werden können. Diese Gesteinsserien sind solche Einheiten, von denen einzelne im grossen und ganzen je einem Lavaerguss entsprechen, andere hingegen Produkte mehrerer Lavaergüsse sind. Dies kann man einerseits durch die Verschiedenheiten der Gesteine, anderseits durch die sich abwechselnden verschiedenen Strukturformen beweisen, besonders aber auf Grund mehrfacher Wiederholung der schlackigen Lavaoberflächen. Einzelne massige Gesteinsserien werden durch Tuffschichten abgeteilt. Diese Tuffschichten sind in einem gepressten Zustande auch noch ziemlich mächtig. Somit konnte zwischen der Bildung der verschiedenen, oft sich wiederholenden Lavaergüssen ein ziemlich langer Zeitraum vergehen, in dem loses Material ausgeworfen wurde; Ruhepausen können auch stattgefunden haben.

Sämtliche Gesteine des eruptiven Zuges sind gepresst, ausserdem haben sie auch vielerlei chemische Umänderungen erlitten. Wichtigste Umänderungen sind folgende: Verkalkung, Chloritisierung, Serizitisierung und Silifizierung; Umänderungsarten minderer Bedeutung sind auch vorhanden. Die allgemeinste Um-

änderungsart ist die Serizitisierung; die übrigen haben einen lokalen Charakter. Aber auch die Serizitisierung ist an einigen Stellen, manchmal sogar in derselben Lavaschicht verschieden. Die eine Umänderungsart wird meistens von einer anderen begleitet. Die stärkste Umformung hat die Silifizierung hervorgerufen, da diese nicht nur die einzelnen Gemengteile der Gesteine, sondern auch die Umänderungsprodukte verdrängte. Die chemische Zusammensetzung wurde oft verändert, dass manchmal sogar der eruptive Charakter des Gesteins verwaschen wurde. So können ursprünglich verschiedene Gesteine eine ähnliche chemische Zusammensetzung erreichen.

Der steil gefaltete und schieferig gewordene Zug liegt unter dem untertriassischen Dolomit und wurde mit demselben auf obertriassischen Kalkstein geschoben. Die ganze Masse zeigt ein ziemlich übereinstimmendes Fallen im Mittelwert von 46° nach NNO = 23°, mit einem Streichen OSO—WNW (im Mittelwert 110°—290°), ähnlich der angrenzenden Karbonatgesteine, die aber ein steileres Fallen zeigen. Die Schieferung stimmt an den meisten Stellen mit der Schichtung der Tuffe und im allgemeinen mit der ursprünglichen Lagerung des ganzen Stratovulkans überein. Der Zug ist aber nicht nur gefaltet, sondern auch zerrissen. Die sehr häufigen Verwerfungs- und Dislokationslinien zeigen zahlreiche Zonen von Reibungsbreccien an. Es ist zu bemerken, dass die Lage der Bewegungs- und Verwerfungsebenen mit der Schieferungsfläche meistens übereinstimmt.

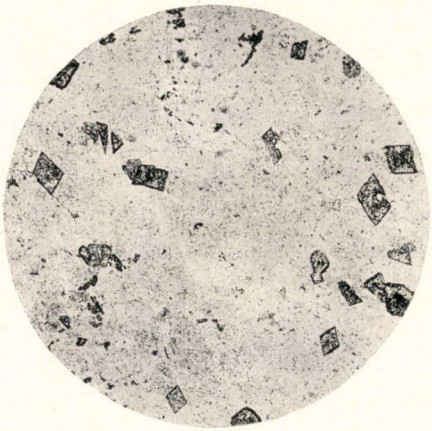
Die Untersuchungen sind mit der Hilfe des Rockefeller-Fondes durchgeführt.

---

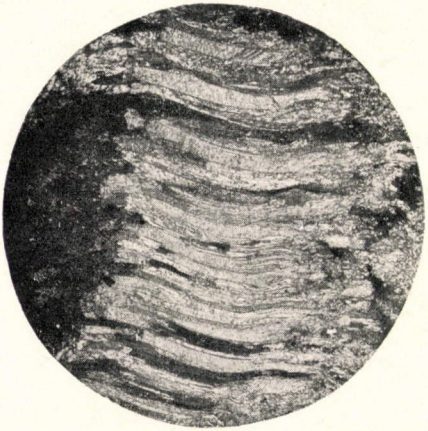
(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Mai 1935.)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

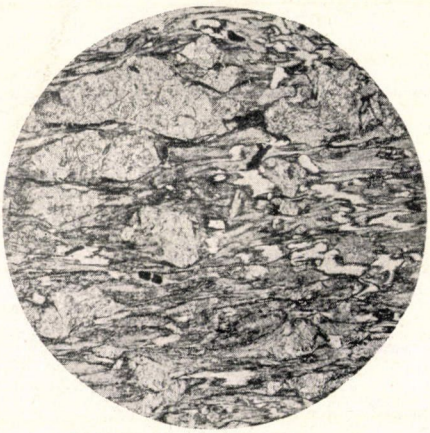
**Szentpétery: Szentistván-hegy eruptivumai.**



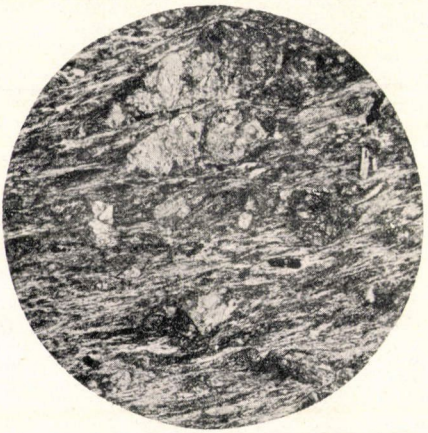
1.



2.



3.



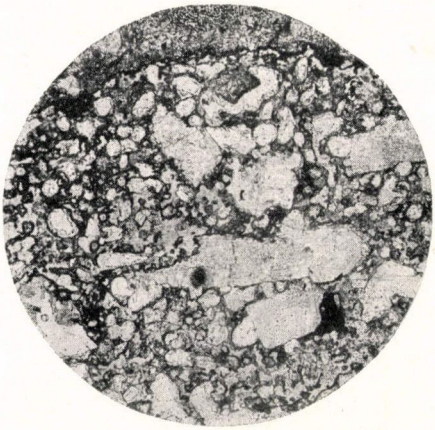
4.

5.

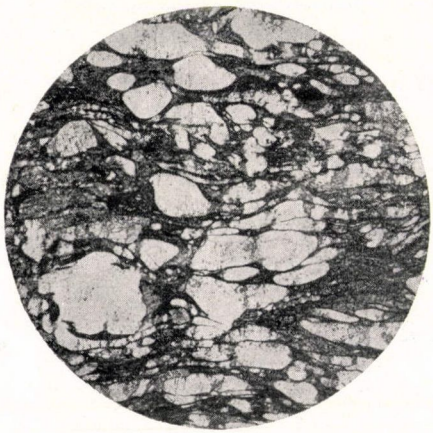
6.

**Szentpétery: Szentistván-hegy eruptivumai.**

1.



2.

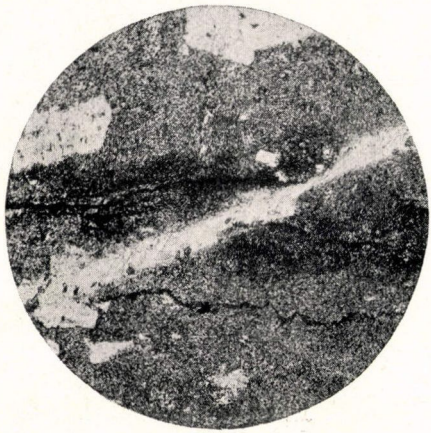


3.

4.

5.

6.

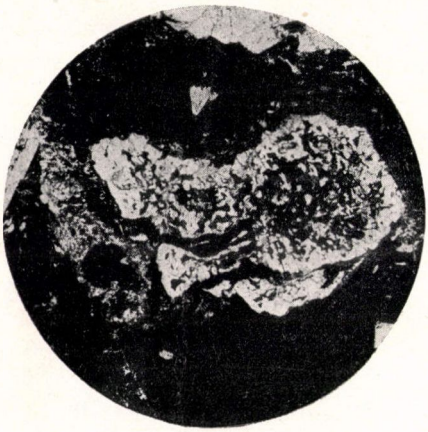


1.

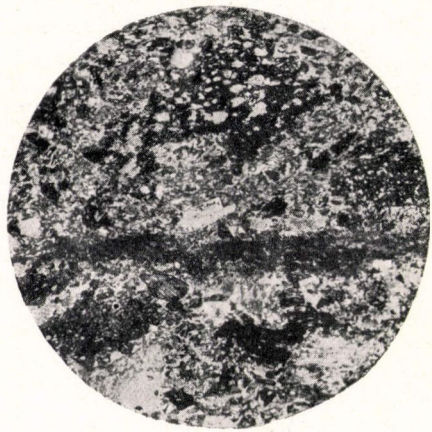
2.

3.

4.



5.



6.

# INHALTSVERZEICHNIS.


| | Seite |
|---|---|
| FEJÉR, L.: Über die Potenzreihe und die zugehörigen LEGENDREschen Polynome | 173—176 |
| FINKEY, J.: Neuere Versuchsangaben zur Frage der Brikettierung ungarischer Mineralkohlen | 159 |
| FÖLDVÁRI, A.: Über die Wirkung einiger Tonstabilisatoren | 278 |
| FÖLDVÁRI, A.: Siehe VENDL, A. | |
| PEKÁR, D.: Die Eötvössche Drehwage im französichen Limagne | 135—138 |
| RÉDEI, L.: Über die PELLsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$ | 43—44 |
| RÉDEI, L.: Über zwei Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper | 113—116 |
| SZENTPÉTERY, S. v.: Allgemeine Verhältnisse der Eruptivgesteine des Lillafüreder Szentistván-Berges | 307—308 |
| TAKÁTS, T.: Siehe VENDL, A. | |
| VENDL, A., TAKÁTS, T. und FÖLDVÁRI, A.: Über den Löss des Börzsöny-Gebirges | 207 |
| ZEMPLÉN, G.: Konstitution und Synthese der «Rutinose», der Biose des Glykosids Rutin | 220 |

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

50639

# MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LIV. KÖTET. — MÁSODIK RÉSZ.

# MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LIV. — ZWEITER TEIL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1936.

# TARTALOMJEGYZÉK.


| | Lap |
|---|---|
| Barta József: A csavarás problémájának újabb analógiája | 496—504 |
| Boros Ádám: Magyarországi hévizek felsőbbrendű növényzete | 588—591 |
| P. Bozóky László: Újabb vizsgálatok az ionizált oxigénmolekula sávos színképén | 557—585 |
| Budó Ágoston: A triplett molekulatermekről és a triplett sávok intenzitásáról | 387—409 |
| Endrédy Endre: Chromsav- és bichromát-oldatokban uralkodó egyensúlyokról | 459—494 |
| Frank Gábor, Patai Imre és Tomaschek Zoltán: Kolloidális szerkezetű grafitrétegek előállítása és vizsgálata... | 417—431 |
| Konek Frigyes: A chinakémiában bevált parciális vagy differenciáló alkylezés kiterjesztése más biazótos alkaloidokra, mint hydrochininre, sparteinre, peganinra stb... | 436—450 |
| Konek Frigyes: Chinazolin típusú alkaloidok viselkedése a differenciáló methylezésnél | 452—456 |
| Lipka István: Többtagúak irreducibilitásáról | 349—355 |
| Sz. Nagy Gyula: Érintőszingularitásnélküli és zéróindexű síkgörbékről | 358—372 |
| Neugebauer Tibor: A kontrapolarizáció elmélete | 337—338 |
| Patai Imre: lásd Frank Gábor. | |
| Rados Gusztáv: A Kronecker-féle determináns rangszáma.. | 325—335 |
| Rados Gusztáv: Adjungált determinánsok rangszáma | 309—322 |
| Schaffer Károly: Az átöröklődő szervi idegbántalmak kórszövettani meghatározása | 533—555 |
| 'Sigmond Elek: Általános színkulcs az átnézetes talajtérképhez | 644—648 |
| Szent-Györgyi Albert: A biológiai oxidációk mechanizmusa | 412—415 |
| Tokody László: Adatok a Szepes-Gömöri Érchegység ásványainak ismeretéhez | 650—671 |
| Tomaschek Zoltán: lásd Frank Gábor. | |
| Vitális István: Orygocerasok a sopronvidéki alsópontusi üledékekben s elterjedésük hazánkban és a környező országokban | 626—641 |
| Zemplén Géza: A robininról, a robinobiózról és a kämpferolrhamnozidról | 375—385 |
| Zimmermann Ágoston: Functionalis anatomiai szerkezetekről | 507—528 |
| Zimmermann Gusztáv: Adatok az os carpi centrale összehasonlító morphologiájához | 597—623 |

# ADJUNGÁLT DETERMINÁNSOK RANGSZÁMA.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

Legyen adva a

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n$-edfokú determináns és jelöljük az

$$1, 2, \ldots, n$$

elemeknek

$$\nu = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n=k+1)}{1.2.\ldots.k}$$

számban lévő ismétlésmentes $k$-adosztályú kombinációit rendre az

$$1, 2, \ldots, \nu$$

számokkal úgy, hogy például

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = i$$
$$(k_1, k_2, \ldots, k_k) = k,$$

akkor a

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1}\, a_{i_1 k_2} \ldots a_{i_1 k_k} \\ a_{i_2 k_1}\, a_{i_2 k_2} \ldots a_{i_2 k_k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_{i_k k_1}\, a_{i_k k_2} \ldots a_{i_k k_k} \end{vmatrix}$$

$k$-adfokú determinánst a $A$ $k$-adfokú minorának a

$$D_k(A) = \begin{vmatrix} A_{11}\, A_{12} \ldots A_{1\nu} \\ A_{21}\, A_{22} \ldots A_{2\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ A_{\nu 1}\, A_{\nu 2} \ldots A_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$k$-adfokú determinánst a $A$ determináns $k$-dik adjungált vagy $k$-dik derivált determinánsának nevezzük.

A jelen dolgozatban a $D_k(A)$ adjungált determináns rangszámának meghatározását tűzzük magunk elé feladatul. Az idevágó, kissé körülményes vizsgálódás eredményét a következő tétel fejezi ki:

*Ha az eredeti A determináns rangszáma r-rel egyenlő, akkor a k-dik adjungált determinánsának rangszámát a*

$$\varrho = R[D_n(A)] = \left(\frac{r}{k}\right) = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{1.2\ldots k}$$

*binomiális együttható szolgáltatja.*

Végül e tételnek néhány alkalmazását mutatjuk be.

## 1. $D_k(A)$ rangszáma nem lehet $\varrho$-nál kisebb.

Áttérve főtételünk bebizonyítására, mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ez az

$$r = n$$

esetben helyes. Ugyanis ekkor

$$A \neq 0;$$

de akkor egyszersmind

$$D_k(A) \neq 0,$$

mert FRANKE tétele szerint

$$D_k(A) = A^{\binom{n-1}{k-1}};^1$$

de zérustól különböző determinánsnak rangszáma fokszámával lévén egyenlő és $D_k(A)$ fokszáma

$$\nu = \binom{n}{k},$$

a bebizonyítandó tétellel összhangban találjuk, hogy a tárgyalt esetben

$$R[D_k(A)] = \nu = \binom{n}{k} = \binom{r}{k}.$$

---

[1] FRANKE tételének bebizonyítása «Zur Theorie der adjungierten Substitutionen» című értekezésemben található. Math. Annalen 48. k. 414. l.

Most már könnyen kimutatható, hogy egész általánosságban

$$R[D_k(A)] \geqq \varrho = \binom{r}{k},$$

azaz, hogy az $A$ $k$-dik adjungált determinánsának rangszáma a tételben kijelentett rangszámnál kisebb nem lehet.

Ugyanis az, hogy $A$-nak rangszáma $r$-rel egyenlő, annyit jelent, hogy $A$ $r$-edfokú minorai között legalább egynek értéke a zérustól különböző, míg az $r$-diknél magasabb fokú minorai mindannyian eltünnek.

Legyen $A$-nak egy ilyen zérustól különböző $r$-edfokú minora

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} \dots a_{i_1 k_r} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} \dots a_{i_2 k_r} \\ \cdot & \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} \dots a_{i_r k_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A $k > r$ esetet kizárhatjuk, mert ha

$$k > r,$$

akkor, mivel $A$-nak minden az $r$-edfokánál magasabb fokú minora zérussal egyenlő, a $D_k(A)$ determinánsnak tehát minden eleme zérussal lévén egyenlő, $D_k(A)$ rangszáma is zérussal lesz egyenlő, tehát a tételünkkel megegyezően

$$R[D_k(A)] = 0 = \binom{r}{k},$$

úgyhogy a $k > r$ esetre a tétel helyessége ezzel ki lévén mutatva, ezentúl feltehetjük, hogy

$$k \leqq r.$$

De ekkor a $\Delta$-nak $k$-dik adjungált determinánsa képezhető, és mivel

$$\Delta \neq 0$$

egyszersmind

$$D_k(\Delta) \neq 0.$$

De a $D_k(\Delta)$ determináns, amelynek fokszáma

$$\binom{r}{k} = \varrho$$

a $D_k(A)$ determinánsnak $\varrho$-adfokú minora, mert $D_k(A)$ az $A$ determináns összes $k$-adfokú minorait elemekül tartalmazza. Ilymódon tehát $D_k(\Delta)$-ról kimutattuk, hogy $D_k(A)$-nak van $\varrho$-ad-fokú el nem tűnő minora, és így ki van mutatva, hogy

$$R[D_k(A)] \geqq \varrho = \binom{\varrho}{k}.$$

Ha sikerülne annak a kimutatása, hogy $D_k(A)$-nak rangszáma $\varrho$-nál nagyobb sem lehet, akkor ezzel be volna bizonyítva, hogy $D_k(A)$-nak rangszáma pontosan $\varrho$-val egyenlő. Mivel ennek kimutatása kissé körülményes, a tárgyalás nagyobb áttekinthetősége kedveért a következő kis fejezetben összeállítok néhány matrix- és determináns-elméleti segédtételt, amelyeknek a főtételnek bebizonyításában szerepük lesz.

## 2. Definíciók és segédtételek.

1. *Az*

$$\begin{matrix} \mathfrak{A} = \| a_{ik} \| = (a_{ik}) \\ \mathfrak{B} = \| b_{ik} \| = (b_{ik}) \end{matrix} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*matrixok egyenlők, ha az*

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

$n^2$ *számú egyenlőség fennáll.*

2. *Az* $\mathfrak{A}$ *matrix rangszáma alatt az*

$$A = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*determináns rangszámát értjük.*

3. *Az* $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *matrixok összetételét vagy szorzatát a*

$$\mathfrak{C} = (c_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

matrix szolgáltatja, amelynek elemeit a

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*egyenlőségek szolgáltatják,* úgyhogy a $\mathfrak{C}$ matrix $i$-dik sorának $k$-dik eleme az $\mathfrak{A}$ $i$-dik és a $\mathfrak{B}$ $k$-dik oszlopának belső szorzatával egyenlő.

A $\mathfrak{C}$ összetett matrixot így jelöljük:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

ahol megjegyezzük, hogy általánosságban

$$\mathfrak{AB} \neq \mathfrak{BA},$$

azaz a szorzás művelete általánosságban nem kommutatív.

Valamely $\mathfrak{A}$ matrix transzponált (FROBENIUS szerint konjugált) matrixa $\mathfrak{A}'$ úgy keletkezik, hogy $\mathfrak{A}$ sorait oszlopoknak írjuk.

Az $\mathfrak{A}$ matrix $k$-dik konjugált matrixa, $D_k(\mathfrak{A})$, alatt az $|\mathfrak{A}|$ determináns $k$-dik konjugált determinánsának matrixa értendő.

E fogalmak bevezetése után a következő tétel mondható ki.

*Ha*

$$\mathfrak{A} = \|a_{ik}\|, \quad \mathfrak{P} = \|p_{ki}\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*két tetszésszerinti n sorú és n oszlopú matrix, akkor fennáll a következő egyenlőség:*

$$D_k(\mathfrak{AP}) = D_k(\mathfrak{A})\, D_k(\mathfrak{P}). \qquad (E)$$

Ennek a tételnek bebizonyítása «Az adjungált bilineár alakok elméletéhez» címen a Math. és Természettud. Értesítő XIV. köt. 166—168. lapokon található.[1]

4. *Ha az $\mathfrak{A}$ matrix rangszáma $r$-rel egyenlő, akkor mindig található olyan*

$$\mathfrak{P} = (p_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*matrix, amelynek*

$$P = |p_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

*determinánsa a zérustól különböző, és amellyel az $\mathfrak{AP}$ szorzatot képezvén, oly matrix adódik, amelynek utolsó $n-r$ számú oszlopában minden elem zérussal egyenlő.*

Ha az $\mathfrak{A}$ matrix rangszáma $r$-rel egyenlő, akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineár egyenletrendszernek $n-r$ számú lineárisan független gyökrendszere van. Legyenek ezek

---

[1] V. ö. még GROSSCHMID LAJOS «Másodfokú alakok algebrája» című művében a 320—321. lapokon foglalt tárgyalásokkal.

$$\begin{matrix} p_{1r+1},\ p_{2r+1},\cdots,\ p_{nr+1} \\ p_{1r+2},\ p_{2r+2},\cdots,\ p_{nr+2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ p_{1n},\quad p_{2n},\quad \cdots,\ p_{nn} \end{matrix} \qquad e)$$

úgyhogy tehát az

$$a_{i1}p_{1k} + a_{i2}p_{2k} + \cdots + a_{in}p_{nk} = 0 \qquad (f)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n;\ k=r+1,\ r+2, \ldots, n)$$

egyenlőségek fennállanak. Minthogy az ($e$) alatti $n-r$ megoldás lineárisan független a

$$\left\| \begin{matrix} p_{1r+1}p_{2r+1}\cdots p_{nr+1} \\ p_{1r+2}p_{2r+2}\cdots p_{nr+2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ p_{1n}\quad p_{2n}\quad \cdots p_{nn} \end{matrix} \right\|$$

matrixból alakítható $(n-r)$-edfokú determinánsok között legalább egy olyan van, amelynek értéke a zérustól különböző; de akkor a

$$\begin{matrix} p_{11},\ p_{21},\cdots,\ p_{n1} \\ p_{12},\ p_{22},\cdots,\ p_{n2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ p_{1r},\ p_{2r},\cdots,\ p_{nr} \end{matrix}$$

elemek végtelen sokféleképen meghatározhatók úgy, hogy a

$$P = \left| \begin{matrix} p_{11}\,p_{12}\cdots p_{1r}\,p_{1r+1}\cdots p_{1n} \\ p_{21}\,p_{22}\cdots p_{2r}\,p_{2r+1}\cdots p_{2n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ p_{n1}\,p_{n2}\cdots p_{nr}\,p_{nr+1}\cdots p_{nn} \end{matrix} \right|.$$

determinánsnak értéke a zérustól különböző legyen. Most már nyilvánvaló, hogy ha az $\mathfrak{A}$ matrixot jobboldalról a

$$\mathfrak{P} = (p_{ik}) \qquad (i,\ k=1, 2, \ldots, n)$$

matrixxal szorozzuk a szorzatot a következő egyenlőség szolgáltatja

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \left\| \begin{matrix} a'_{11}\,a'_{12}\ldots a'_{1r}\,0\ 0\ldots 0 \\ a'_{21}\,a_{22}\ldots a'_{2r}\,0\ 0\ldots 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ a_{n1}\,a'_{n2}\ldots a'_{nr}\,0\ 0\ldots 0 \end{matrix} \right\|,$$

ahol

$$a'_{ik} = a_{i1}p_{1k} + a_{i2}p_{2k} + \cdots + a_{in}p_{rk} \qquad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots,n;\\ k=1,2,\ldots,r)\end{matrix}$$

és az utolsó $n-r$ oszlop minden eleme az ($f$) alatti egyenlőségek miatt zérussal egyenlő.

5. *Ha valamely $\nu$-edfokú determináns $\varrho+1$ számú ($\varrho<\nu$) sorában az utolsó $\nu-\varrho$ számú elem zérussal egyenlő, akkor maga a determináns is zérussal egyenlő.*

Ha ugyanis a determinánst a fent említett $\varrho+1$ sorból álló sorkombinació szerint LAPLACE tétele alapján kifejtjük, akkor e sorkombináció minden $(\varrho+1)$-edfokú minorában legalább egy oszlop minden eleme zérussal lévén egyenlő, maguk ezek a minorok, és így LAPLACE tétele szerint a $\nu$-edfokú determináns is zérussal egyenlő.

### 3. A $D_k(A)$ rangszáma $\varrho$-nál nagyobb sem lehet.

Ha a $A$ determinánsnak és így a $\mathfrak{A}$ matrixnak is rangszáma $r$-rel egyenlő, akkor a 2. fejezet 4. pontjában kifejtettek szerint a zérustól különböző $P$ determinánssal bíró $\mathfrak{P}$ matrix meghatározható olymódon, hogy

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P} = (a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots, a'_{ir}, 0, 0, \ldots, 0) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

legyen. Az $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ matrixnak zérustól különböző $k$-adfokú minorai csakis az első $r$ oszlop alkotta oszlopkombinációból adódhatnak; ezeknek száma minden $k$ sorból álló sorkombinációban a

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{1.2.\ldots.k} = \varrho$$

binomiális együtthatóval egyenlő; míg azok a minorok, amelyek az $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ matrix utolsó $n-r$ oszlop valamelyikét tartalmazó oszlopkombinációból adódnak, mindannyian zérussal egyenlők. Ennek következtében az $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ matrix $k$-dik adjungált matrixa a következő alakú:

$$D_k(\mathfrak{A}\mathfrak{P}) = \left\| \begin{matrix} \overbrace{A'_{11}\,A'_{12}\ldots A'_{1\varrho}}^{\varrho} & \overbrace{0,\,0,\ldots,0}^{\nu-\varrho} \\ A'_{21}\,A'_{22}\ldots A'_{2\varrho} & 0,\,0,\ldots,0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\ldots\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\ldots\quad\cdot \\ A'_{\nu 1}\,A'_{\nu 2}\ldots A'_{\nu\varrho} & 0,\,0,\ldots,0 \end{matrix} \right\|, \qquad \text{(I)}$$

ahol

$$\nu = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots.k}.$$

Más oldalról a 2. fejezet 3. pontjának ($E$) alatti egyenlőségenél fogva

$$D_k(\mathfrak{A}).D_k(\mathfrak{B}) = D_k(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \tag{II}$$

Tehát a $D_k(\mathfrak{A}).D_k(\mathfrak{B})$ szorzatot szolgáltató matrix azonos az (I) alattival, és így kell, hogy a megfelelő elemeik egyenlők legyenek. Ebből a következő tétel adódik:

7. *Ha a* $D_k(\mathfrak{A})$ *matrix sorait a* $D_k(\mathfrak{B})$ *matrix utolsó* $\nu-\varrho$ *oszlopainak barmelyikével komponáljuk, a kompozíció eredménye zérussal egyenlő.*

Ez annyit jelent, hogy ha

$$D_k(\mathfrak{A}) = \|A_{gh}\| \qquad (g, h=1, 2, \ldots, \nu)$$

és

$$D_k(\mathfrak{B}) = \|P_{gh}\|, \qquad (g, h=1, 2, \ldots, \nu)$$

akkor a következő egyenlőségek állanak fenn

$$A_{g1}P_{1h} + A_{g2}P_{2h} + \cdots + A_{g\nu}P_{\nu h} = 0. \qquad (h)$$
$$(g=1, 2, \ldots, \varrho;\ h=\varrho+1, \varrho+2, \ldots, \nu)$$

Legyen most már

$$M = \begin{vmatrix} A_{g_1h_1} & A_{g_1h_2} & \ldots A_{g_1h_{\varrho+1}} \\ A_{g_2h_1} & A_{g_2h_2} & \ldots A_{g_2h_{\varrho+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ A_{g_{\varrho+1}h_1} & A_{g_{\varrho+1}h_2} & \ldots A_{g_{\varrho+1}h_{\varrho+1}} \end{vmatrix}$$

a $D_k(A)$ determinánsnak tetszésszerinti $(\varrho+1)$-edfokú minora. Be fogjuk róla bizonyítani, hogy értéke zérussal egyenlő. A $M$ minor $\nu$-edfokú determináns alakjában így írható:

$$M = \left.\begin{vmatrix} A_{g_1h_1} & A_{g_1h_2} & \ldots & A_{g_1h_{\varrho+1}} & A_{g_1h_{\varrho+2}} & \ldots & A_{g_1h_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{g_{\varrho+1}h_1} & A_{g_{\varrho+1}h_2} & \ldots & A_{g_{\varrho+1}h_{\varrho+1}} & A_{g_{\varrho+1}h_{\varrho+2}} & \ldots & A_{g_{\varrho+1}h_\nu} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}\right\} \nu-\varrho \tag{III}$$

Ha most már a (III) alatti determinánst $M$-et a

$$D_k(P) = |P_{gh}|$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots \nu)$$

determinánssal, miután ennek soraira az $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & \nu \\ g_1, & g_2, & \ldots & g_\nu \end{pmatrix}$, oszlopaira pedig a $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & \nu \\ h_1, & h_2, & \ldots & h_\nu \end{pmatrix}$ permutációt alkalmaztuk, úgy szorozzuk, hogy a (III) alattinak sorait a $D_k(P)$ oszlopaival kompónáljuk, akkor a 7. pont *h)* alatti egyenlőtségeinél fogva oly $\nu$-edfokú determináns fog adódni, amelynek első $\varrho+1$ sora mindegyikében az utolsó $\nu - \varrho$ elem zérussal egyenlő. De akkor a 2. fejezet 1. pontja szerint a

$$M.D_k(P) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

egyenlet fog fennállani. Mivel a $P$ determináns a zérustól különböző, a $D_k(P)$ determináns is különbözik a zérustól, de akkor a (IV) alatti egyenlőségből következik, hogy

$$M = 0,$$

azaz a $D_k(P)$ determináns tetszésszerinti $(\varrho + 1)$-edfokú minora zérussal egyenlő, tehát a $D_k(P)$ rangszáma

$$R[D_k(P)] \leqq \varrho,$$

azaz ez a rangszám $\varrho$-nál nagyobb sem lehet és mivel az 1. fejezetben kimutattuk, hogy e rangszám $\varrho$-nél kisebb sem lehet, végül következik, hogy

$$R[D_k(P)] = \varrho = \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{1, 2 \ldots, k}.$$

amivel a bevezetésben fölállított tétel be van bizonyítva.

Talán nem lesz felesleges a kissé szövevényes viszonyokat egy kidolgozott példán áttekinteni.

Legyen

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0:$$

nyilvánvaló, hogy $A$ rangszáma

$$r = 3.$$

Ha

$$k = 2,$$

akkor $A$-nak 16 másodfokú minora a következők:
az első és második sorból

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

az első és harmadik sorból

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

az első és negyedik sorból

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

a második és harmadik sorból

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

a második és negyedik sorból

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

a harmadik és negyedik sorból

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

E szerint

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Minthogy a $D_2(A)$ determináns 3., 5., és 6. oszlopának minden eleme zérussal egyenlő, minden 4-edfokú minora zérussal egyenlő; mivel pedig a 3., 5, 6. sorok és oszlopok törléséből keletkező

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3-adfokú minor a zérustól különböző, a $D_2(A)$ rangszáma 3-mal egyenlő, összhangban a fent bebizonyított tétellel, amely szerint

$$R[D_2(A)] = \binom{3}{2} = 3.$$

## 4. Néhány alkalmazás.

1. A Jacobi-féle adjungált determináns esetében

$$k = n - 1,$$

ha az

$$A = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

fokszáma $n$. A Jacobi-féle adjungált determináns így írható:

$$D_{n-1}(A) = \left| \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

az előzőkben kifejtett tételek szerint az

$$R[D_{n-1}(A)] = \binom{r}{n-1}$$

képlet szolgáltatja a Jacobi-féle adjungált determináns rangszámát. Ez csak két esetben lesz a zérustól különböző:

1. eset, ha

$$r = n,$$

ekkor

$$R[D_{n-1}(A)] = \binom{n}{n-1} = n.$$

Ez triviális eredmény, mert az, hogy

$$r = n$$

azt jelenti, hogy

$$A \neq 0;$$

de ekkor $D_{n-1}(A)$, amely a JACOBI-féle tételnél fogva a

$$D_{n-1}(A) = A^{n-1}$$

egyenletnek tesz eleget. szintén a zérustól különböző, azaz rangszáma $n$-nel egyenlő.

2. eset, ha

$$r = n - 1,$$

ekkor

$$R[D_{n-1}(A)] = \binom{n-1}{n-1} = 1,$$

azaz a JACOBI-féle adjungált determinánsnak már minden másodfokú minora zérussal egyenlő. Innen adódik ez a gyakran használt egyenlőség

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial a_{ii}} & \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \\ \frac{\partial A}{\partial a_{ki}} & \frac{\partial A}{\partial a_{kk}} \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial a_{ii}} \frac{\partial A}{\partial a_{kk}} - \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \frac{\partial A}{\partial a_{ki}} = 0. \qquad (h)$$

Ha

$$r < n - 1,$$

akkor

$$R[D_{n-1}(A)] = 0,$$

azaz a JACOBI-féle determinánsnak minden eleme zérussal egyenlő. Innen rögtön adódik a következő, különben ismeretes tétel:

2. *Eltűnő determináns* JACOBI-*féle adjungált determinánsú rangszáma* 0 *vagy* 1.

A $(h)$ alatti egyenlőségből közvetlenül folyik a következő tétel:

*Ha valamely n-edfokú szimmetrikus determináns rangszáma* $n - 1$, *akkor* $(n - 1)$-*edfokú főminorai között legalább kettő van, amelynek értéke a zérustól különböző.*

Ugyanis, ha $A$ rangszáma $n-1$, akkor $(n-1)$-edfokú minorai között legalább egy van, amelynek értéke a zérustól különböző. Legyen pl.

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \neq 0,$$

akkor mivel $A$ symmetrikus

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ki}} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}},$$

tehát $\frac{\partial A}{\partial a_{ki}}$ is különbözik a zérustól és így a ($h$) alatti egyenlőség a következőbe megy át

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ii}} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_{kk}} = \left(\frac{\partial A}{\partial a_{ik}}\right)^2 \neq 0$$

és így csakugyan az $A$-nak

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ii}}, \quad \frac{\partial A}{\partial a_{kk}}$$

főminorai a zérustól különbözők.

4. Ennek az imént bebizonyított tételnek általánosítása a következő tétel:

*Ha valamelyik szimmetrikus determináns $r$-edrangú, akkor $r$-edfokú főminorai között legalább kettőnek értéke különbözik a zérustól.*

Ha $A$ ez az $r$-edrangú szimmetrikus determináns, akkor $r$-dik adjungált determinánsának a $D_r(A)$-nak rangszáma

$$R[D_r(A)] = \binom{r}{r} = 1,$$

tehát $D_r(A)$-nak már minden másodfokú minora zérussal egyenlő.

Mivel $A$ rangszáma $r$, az $r$-edfokú minorai között vannak a zérustól különböző értékűek. Egy ilyen legyen

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} \cdots & a_{k_1 k_r} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} \cdots & a_{i_2 k_r} \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ a_{i_r} & a_{i_r k_2} \cdots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

legyen továbbá

$$A_{ii} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_1 i_r} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \cdots a_{i_2 i_r} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} \cdots a_{i_r i_r} \end{vmatrix} \qquad A_{kk} = \begin{vmatrix} a_{k_1 k_1} & a_{k_1 k_2} \cdots a_{k_1 k_r} \\ a_{k_1 k_1} & a_{k_2 k_2} \cdots a_{k_2 k_r} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ a_{k_r k_1} & a_{k_r k_2} \cdots a_{k_r k_r} \end{vmatrix}$$

az $A$-nak az a két főminora, mely az

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_r), \text{ illetve } k = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$$

kombinációknak megfelel, akkor

$$\begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} = 0,$$

mint $D_r(A)$ determinánsnak másodfokú minora zérussal egyenlő; tehát

$$A_{ii} A_{kk} = A_{ik} A_{ki},$$

ahol az

$$A_{ki} = \begin{vmatrix} a_{k_1 i_1} & a_{k_1 i_2} \cdots a_{k_1 i_r} \\ a_{k_2 i_1} & a_{k_2 i_2} \cdots a_{k_2 i_r} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ a_{k_r i_1} & a_{k_r i_2} \cdots a_{k_r i_r} \end{vmatrix},$$

ez azonban az $A$ determináns szimmetrikus voltánál fogva $A_{ik}$-val egyenlő, tehát

$$A_{ii} A_{kk} = A_{ik}^2$$

és mivel

$$A_{ik} \neq 0,$$

az $A_{ii} A_{kk}$ is különbözik a zérustól és így két, a zérustól különböző $\nu$-adfokú főminor létezét kimutattuk.[1]

---

[1] A jelen folyóirat 53. k. 696. lapján «Indukált helyettesítések determinánsának rangjáról» címen megjelent dolgozatomban a 697. l. szöveg alatt közölt egyik segédtétel általánosságban nem helytálló és csak speciális esetekben érvényes, és a bebizonyítás, amelyet adtam, csak e speciális esetekre helytálló. Csak speciális esetekben igaz, hogy valamely determináns rangszáma megegyezik a karakterisztikus egyenletének zérustól különböző gyökeinek számával. Valójában e rangszám a zérustól különböző gyökeik számánál kisebb nem lehet és fordítva a zérustól különböző gyökök száma a determináns rangszámánál nagyobb nem lehet.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# ÜBER DEN RANG VON ADJUNGIERTEN DETERMINANTEN.

Von GUSTAV RADOS o. Mitglied.

Es sei gegeben die Determinante

$$A = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und man bezeichne die wiederholungsfreien Kombinationen $k$-ter Klasse von

$$1, 2, \ldots, n$$

in irgendwelcher Reihenfolge durch die Zahlen

$$1, 2, \ldots, i, \ldots, k, \ldots, \nu$$

$$\nu = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$$

bezeichnet; es seien zwei dieser Kombinationen

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$
$$j = (j_1, j_2, \ldots, j_k),$$

alsdann ist

$$A_{ij} = |a_{i_g j_h}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, k)$$

ein Minor $k$-ten Grades von $A$ und die Determinante $\nu$-ten Grades

$$D_k(A) = |A_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

die $k$-te andjungierte Determinante von $A$.

Im vorausstehenden Artikel wird der nachfolgende Satz bewiesen:

*Ist die Rangzahl einer Determinante gleich r, alsdann ist der Rang ihrer k-ten adjungierten Determinante gleich dem Binominalkoefficienten*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{1.2.\dots k}.$$

Es folgen noch einige Anwendungen dieses Lehrsatzes, vermittels dessen der Nachweis einer Reihe von Sätzen sich wesentlich vereinfacht.

So ergibt sich ganz unmittelbar der Satz, *dass der Rang der $(n-1)$-ten adjungierten Determinante einer verschwindenden Determinante gleich* 0 *oder* 1 *ist.*

Auch der Satz, *dass in einer symmetrischen Determinante r-ten Ranges unter Hauptminoren r-ten Grades wenigstens zwei von Null verschiedene vorkommen,* ist eine unmittelbare Folge unseres Satzes.[1]

---

[1] Berichtigung. In einer Arbeit «Über den Rang der Determinante induzierter Substitutionen» (Math. u. Naturw. Anzeiger der Ung. Akademie d. Wiss. Bd. 53 pag. 609) habe ich den Beweis auf den Hülfsatz I. gestüzt, der jedoch nur in speziellen Fällen giltig ist. Nur in speziellen Fällen stimmt die Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Determinante mit deren Rang überein. In Wirklichkeit ist der Rang grösser oder gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln und umgekehrt ist die Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln kleiner oder gleich dem Range der Determinante. Der Beweis des Hauptsatzes ist demnach nur für spezielle Fälle geleistet.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. November 1933.)

# A KRONECKER-FÉLE DETERMINÁNS RANGSZÁMA.

RADOS GUSZTAV r. tagtól.

Ha adva vannak az

$$\mathfrak{A} = \underset{(i,\ k=1,2,\ldots,\ m)}{\| a_{ik} \|} = (a_{ik}), \quad \mathfrak{B} = \underset{(g,\ h=1,\ 2,\ldots,\ n)}{\| b_{gh} \|} = (b_{gh})$$

matrixok, akkor az

$$\left\| \begin{array}{l} a_{11}b_{11} \ldots a_{1m}b_{11}\ a_{11}b_{12} \ldots a_{1m}b_{12} \ldots a_{11}b_{1n} \ldots a_{1m}b_{1n} \\ \vdots \\ a_{11}b_{n1} \ldots a_{1m}b_{n1}\ a_{11}b_{n2} \ldots a_{1m}b_{n2} \ldots a_{11}b_{nn} \ldots a_{1m}b_{1n} \\ a_{21}b_{11} \ldots a_{2m}b_{11}\ a_{21}b_{12} \ldots a_{2m}b_{12} \ldots a_{21}b_{1n} \ldots a_{2m}b_{1n} \\ \vdots \\ a_{21}b_{n1} \ldots a_{2m}b_{n1}\ a_{21}b_{n2} \ldots a_{2m}b_{n2} \ldots a_{21}b_{nn} \ldots a_{2m}b_{nn} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} \ldots a_{mm}b_{11}\, a_{m1}b_{12} \ldots a_{mm}b_{12} \ldots a_{m1}b_{1n} \ldots a_{mm}b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{n1} \ldots a_{mm}b_{n1} a_{m1}b_{n1} \ldots a_{mm}b_{n2} \ldots a_{m1}b_{nn} \ldots a_{mm}b_{nn} \end{array} \right\|$$

matrixot, mely

$$\nu = m.n$$

sorból és oszlopból áll, az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ matrixok KRONECKER-féle szorzatának fogjuk nevezni és így jelölni:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

a műveletet pedig, amellyel ezt a matrixot képezzük, KRONECKER-féle szorzásnak nevezni.

Az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ matrix determinánsa az

$$A = |a_{ik}|, \quad B = |b_{gh}|$$
$$(i, k=1, 2, \ldots m) \quad (g, h=1, 2, \ldots, n)$$

determinánsoknak KRONECKER-féle determinánsa

$$C = |\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|.$$

E determinánsról 1886-ben függetlenül KRONECKERtől, a következő tételt bizonyítottam be: (Math. és Term. Értesítő IV. k. 268. l.)

$$C = \varepsilon A^n, B^m, \tag{I}$$

ahol

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}}.$$ [1]

A jelen dolgozatban a KRONECKER-féle determináns rangszámának meghatározásával foglalkozom. Az erre vonatkozó vizsgálódások eredményét a következő tétel fejezi ki:

*Ha az A determináns rangszáma* $r_1$, *a B determinánsé* $r_2$, *akkor a*

$$C = |\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$$

KRONECKER-*féle determináns rangszáma*

$$\varrho = r_1 . r_2.$$

E tétel helyessége evidens, midőn

$$r_1 = m, \; r_2 = n,$$

amikor

$$A \neq 0, \; B \neq 0$$

lévén,

$$C = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2} \frac{n(n-1)}{2}} A^n B^m$$

is a zérustól különböző. Tehát rangszáma a fokszámával megegyező és így $C$-nek rangszáma

$$R(C) = mn = r_1 . r_2.$$

---

[1] Ezt az előjelmeghatározást «Über die Verallgemeinerung eines KRONECKERschen Determinantensatzes» című értekezésemben adtam (Journal für die reine u. angewandte Mathematik 162. k. 199. l.)

Sokkal szövevényesebb tételünknek bebizonyítása, ha az $A$ és $B$ determinánsok nem mindketten a zérustól különböző értékűek. Ezért a bebizonyítás nagyobb áttekinthetősége érdekében a felhasználandó matrixelméleti fogalmakat és segédtételeket külön fejezetben állítom össze.

## 1. Matrixelméleti segédtételek.

1. Az

$$\mathfrak{A} = \| a_{ik} \|, \quad \mathfrak{B} = \| b_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

egyenlők, ha az

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

$m^2$ számú egyenlőség fennáll.

Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ matrixok összegén a

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \| a_{ik} + b_{ik} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

matrix; az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ közönséges szorzatán az

$$\mathfrak{A}.\mathfrak{B} = \| a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{im} b_{mk} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

matrix értendő.

Amíg az összeadás művelete commutativ, a szorzás művelete általánosságban nem ilyen.

Az $\mathfrak{A}$ matrix transzponált (Frobenius szerint konjugált) matrixa $\mathfrak{A}'$ az a matrix, amelynek sorai az $\mathfrak{A}$ matrix oszlopaival megegyezők.

A közönséges szorzás művelete általánosítható derékszögű matrixokra, amelyek egyikében a sorok száma ugyanaz, mint a másikban az oszlopoké, és az oszlopok száma ugyanakkora, mint a másikban a soroké.

Ha

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad (m < n)$$

$m$ sorú és $n$ oszlopú matrix és

$$\mathfrak{B} = \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{array} \right\|$$

$n$ sorú és $m$ oszlopú matrix, akkor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ közönséges szorzatát a

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}.\mathfrak{B} = \underset{(i,\, k=1,\, 2,\, \dots,\, m)}{\| a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn} \|}$$

matrix definiálja.

Egyszerű számítással verifikálható a következő egyenlőség

$$\sum_{(i)} \left\| \begin{array}{ccc} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_m} \\ . & \dots & . \\ a_{mi_1} & \dots & a_{mi_m} \end{array} \right\| . \left\| \begin{array}{ccc} b_{1i_1} & \dots & b_{mi_m} \\ . & \dots & . \\ b_{1i_m} & \dots & b_{mi_m} \end{array} \right\| = \binom{n-1}{m-1} |\mathfrak{C}|, \qquad \text{(II)}$$

amely a megfelelő determinánstételtől eltér, a mit matrixok és determinánsok összeadására vonatkozó eljárások különböző volta magyaráz.

2. *Legyenek*

$$\mathfrak{A} = \underset{(i,\, k=1,\, 2,\, \dots,\, m)}{\| a_{ik} \|} \qquad \mathfrak{B} = \underset{(g,\, h=1,\, 2,\, \dots,\, n)}{\| b_{gh} \|}$$

$$\mathfrak{P} = \left\| \begin{array}{cccc} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ p_{1m} & p_{2m} & \dots & p_{mm} \end{array} \right\|, \quad \mathfrak{Q} = \left\| \begin{array}{cccc} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{array} \right\|$$

*tetszésszerinti matrixok, akkor fennáll a következő egyenlőség:*

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}).(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}')' = (\mathfrak{B}, \mathfrak{Q}) \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{P}), \qquad \text{(III)}$$

*ahol a vesszős jelzés a transzponált matrix jele.*

Az

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \underset{(i,\, k=1.\, 2,\, \dots,\, m)}{\| f_{ik} \|}$$

közönséges szorzatban

$$f_{ik} = a_{i1}p_{k1} + a_{i2}p_{k2} + \cdots + a_{im}p_{km}$$

és a

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{D} = \|\varphi_{gh}\|_{(g,\,h=1,\,2,\,\ldots,\,n)}$$

közönséges szorzatban

$$\varphi_{gh} = b_{g1}q_{h1} + b_{g2}q_{k2} + \cdots + b_{gn}q_{hn}.$$

Alakítsuk most az $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{P}'\times\mathfrak{D}'$ KRONECKER-féle szorzatoknak közönséges szorzatát az

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}).(\mathfrak{P}'\times\mathfrak{D}')' = t,$$

akkor a nyerendő matrix általános eleme úgy adódik, hogy az $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})$-nek

$$a_{i1}b_{k1}\ldots a_{im}b_{k1}a_{i1}b_{k2}\ldots a_{im}b_{k2}\ldots a_{i1}b_{kn}\ldots a_{im}b_{kn}$$

sorát a $(\mathfrak{P}'\times\mathfrak{D}')'$-nek

$$p_{g1}q_{h1}\ldots p_{gm}q_{h1}p_{g1}q_{h2}\ldots p_{gm}q_{h2}\ldots p_{g1}q_{hn}\ldots p_{gm}q_{hn}$$

oszlopával komponáljuk. A kompozíció eredménye

$$\begin{aligned} &b_{k1}q_{h1}(a_{i1}p_{g1} + a_{i2}p_{g2} + \cdots + a_{im}p_{gm}) + \cdots + \\ &\qquad + b_{kn}q_{kn}(a_{i1}p_{g1} + a_{i2}p_{g2} + \cdots + a_{im}p_{gm}) = \\ &= (a_{i1}p_{g1} + a_{i2}p_{g2} + \cdots + a_{im}p_{gm})(b_{k1}q_{h1} + b_{k2}q_{h2} + \cdots + b_{kn}q_{hn}) = \\ &= f_{ig}\varphi_{kh}. \end{aligned}$$

Ennek következtében

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}).(\mathfrak{P}'\times\mathfrak{D}')' =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \varphi_{11}f_{11}\ \varphi_{12}f_{11}\ \cdots\varphi_{1n}f_{11}\ \cdots\varphi_{11}f_{1m}\ \varphi_{12}f_{1m}\ \cdots\varphi_{1n}f_{1m} \\ \vdots \\ \varphi_{11}f_{m1}\varphi_{12}f_{m1}\cdots\varphi_{1n}f_{m1}\cdots\varphi_{11}f_{mm}\varphi_{12}f_{mm}\cdots\varphi_{1n}f_{mm} \\ \vdots \\ \varphi_{n1}f_{11}\ \varphi_{n2}f_{11}\ \cdots\varphi_{nn}f_{11}\ \cdots\varphi_{n1}f_{1m}\ \varphi_{n2}f_{1m}\ \cdots\varphi_{nn}f_{1m} \\ \vdots \\ \varphi_{n1}f_{m1}\varphi_{n2}f_{m1}\cdots\varphi_{nn}f_{m1}\cdots\varphi_{n1}f_{mm}\varphi_{n2}f_{mm}\cdots\varphi_{nn}f_{mm} \end{array} \right\| =$$

$$= (\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}) \times (\mathfrak{A}\mathfrak{P}),$$

ezzel a (III) alatti egyenlőség helyessége ki van mutatva.

3. *Legyen az*

$$\mathfrak{A} = \| a_{ik} \|_{(i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, m)}$$

*rangszáma* $r_1$ *a*

$$\mathfrak{B} = \| b_{gh} \|_{(g,\, h=1,\, 2,\, \ldots,\, n)}$$

*rangszáma* $r_2$ *akkor mindig találhatók a*

$$\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} p_{11}\, p_{21} \cdots p_{m1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ p_{1m} p_{2m} \cdots p_{mm} \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{Q} = \begin{Vmatrix} q_{11}\, q_{21} \cdots q_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ q_{1n} q_{2n} \cdots q_{nn} \end{Vmatrix}$$

matrixok úgy, hogy determinánsaik

$$|\mathfrak{P}| \neq 0 \qquad |\mathfrak{Q}| \neq 0$$

*legyenek és e mellett az* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}$ *matrix utolsó* $m - r_1$ *oszlopában, a* $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$ *matrixnak utolsó* $n - r_2$ *oszlopában az összes elemek zérussal legyenek egyenlők.*

E tétel részletes bebizonyítását «Az adjungált determinánsok rangszáma» című dolgozatomban közöltem. (L. jelen Értesítő 53. k.)

A 2. pont jelöléseinek fölhasználásával

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1r_1} & \overbrace{0 \quad 0 \ldots 0}^{m-r_1} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2r_1} & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mr_1} & 0 \quad 0 \ldots 0 \end{Vmatrix} \tag{IV}$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{Q} = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1r_2} & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2r_2} & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nr_2} & 0 \quad 0 \ldots 0 \end{Vmatrix} \tag{V}$$

4. A (III) alatti identitás figyelembe vételével most már következik, hogy ha $\mathfrak{A}$ rangszáma $r_1$, a $\mathfrak{B}$-é pedig $r_2$, akkor az $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}')'$ szorzat egyenlő az (V) és (IV) alatti matrixok KRONECKER-féle szorzatával. Tekintettel arra, hogy e matrixban

csak az első $r_2$ oszlopban, illetve az első $r_1$ oszlopban vannak a zérustól különböző elemek, az (V) és (IV) alatti matrixok KRONECKER-féle szorzata oly matrix lesz, amelynek csak az első $r_1 r_2 = \varrho$ számú oszlopában vannak zérustól különböző elemek, míg a többi $mn - r_1 r_2 = \nu - \varrho$ számú oszlopában minden elem zérussal egyenlő. Így végül a következő fontos segédtétel adódik:

5. *Ha az* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ *matrix sorait a* $(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}')'$ *matrix utolsó* $\nu - \varrho$ *számú oszlopainak bármelyikével komponáljuk, a kompozíció eredménye a zérussal egyenlő.*

## 2. A főtétel bebizonyítása.

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, *hogy a* KRONECKER*-féle determinánsnak,* $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$*-nek, rangszáma a*

$$\varrho = r_1 r_2$$

*szorzatnál kisebb nem lehet, ha* $r_1$ $\mathfrak{A}$*-nak,* $r_2$ *pedig a* $\mathfrak{B}$*-nek rangszáma.*

Ha ugyanis az $\mathfrak{A}$ matrixnak rangszáma $r_1$, akkor az $|\mathfrak{A}|$ determináns $r_1$-edfokú minorai között legalább egynek értéke különbözik a zérustól. Legyen egy ilyen

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_{r_1}} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_{r_1}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_{r_1} k_1} & a_{i_{r_1} k_2} & \dots & a_{i_{r_1} k_{r_1}} \end{vmatrix}$$

és hasonlóképpen a $|\mathfrak{B}|$ determinánsnak van a zérustól különböző $r_2$-edfokú minora. Legyen ilyen

$$N = \begin{vmatrix} b_{g_1 h_1} & b_{g_1 h_2} & \dots & b_{g_1 h_{r_2}} \\ b_{g_2 h_1} & b_{g_2 h_2} & \dots & b_{g_2 h_{r_2}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{g_{r_2} h_1} & b_{g_{r_2} h_2} & \dots & b_{g_{r_2} h_{r_2}} \end{vmatrix}$$

Az $M$ és $N$ KRONECKER-féle determinánsa,

$$M \times N =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} b_{g_1h_1} & a_{i_1k_2} b_{g_1h_1} & \cdots & a_{i_1k_{r_1}} b_{g_1h_1} & \cdots & a_{i_1k_1} b_{g_1h_{r_2}} & a_{i_1k_2} b_{g_1h_{r_2}} & \cdots & a_{i_1k_{2r_1}} b_{g_1h_{r_2}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i_1k_1} b_{g_{r_2}k_1} & a_{i_1k_2} b_{g_{r_2}k_1} & \cdots & a_{i_1k_{r_1}} b_{g_{r_2}k_1} & \cdots & a_{i_1k_2} b_{g_{r_2}h_{r_2}} & a_{i_1k_2} b_{g_{r_2}h_{r_2}} & \cdots & a_{i_1k_{r_1}} b_{g_{r_2}h_{r_2}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i_{r_2}k_1} b_{g_{r_2}h_1} & a_{i_{r_1}k_2} b_{g_{r_2}k_2} & \cdots & a_{i_{r_1}k_{r_1}} b_{g_{r_2}h_1} & \cdots & a_{i_{r_1}k_1} b_{g_{r_2}h_{r_2}} & a_{i_{r_1}k_2} b_{g_{r_2}h_{r_2}} & \cdots & a_{i_{r_1}k_{r_1}} b_{g_{r_2}h_{r_2}} \end{vmatrix}$$

nyilván az $|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|$ $mn=\nu$-edfokú determinánsnak minora, amelynek fokszáma

$$\varrho = r_1 r_2$$

és értéke,

$$M \times N = (-1)^{\frac{r_1(r_1-1)}{2}\,\frac{r_2(r_2-1)}{2}} M^{r_2} N^{r_1},$$

a zérustól különböző, mert

$$M \neq 0, \quad N \neq 0.$$

Ennek következtében az $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})$ determinánsnak rangszáma legalább $\varrho$, azaz $\varrho$-nél kisebb nem lehet, mert van olyan $\varrho$-adfokú minora, amelynek értéke a zérustól különböző.

Ha sikerülne még annak a kimutatása is, hogy az $|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|$ determinánsnak összes $(\varrho+1)$-edfokú minorai zérussal egyenlők, akkor $|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|$ rangszáma $\varrho$-nál nagyobb sem lehet és így $|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|$ rangszáma

$$R[\,|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|\,] = \varrho = r_1 r_2,$$

amivel a főtételünk helyessége ki volna mutatva.

Legyen az $|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|$ determinánsnak egy tetszésszerinti $(\varrho+1)$-edfokú minora

$$C = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \cdots & c_{i_1 k_{\varrho+1}} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \cdots & c_{i_2 k_{\varrho+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{i_{\varrho+1} k_1} & c^{i}_{\varrho+1 k_2} & \cdots & c_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+1}} \end{vmatrix}$$

akkor Laplace tétele alapján a $C$ így is írható:

$$C = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \cdots c_{i_1 k_{\varrho+2}} & c_{i_1 k_{\varrho+2}} & \cdots c_{i_1 k_\nu} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \cdots c_{i_2 k_{\varrho+1}} & c_{i_2 k_{\varrho+2}} & \cdots c_{i_2 k_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ c_{i_{\varrho+1} k_1} & c_{i_{\varrho+1} k_2} & \cdots c_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+1}} & c_{i_{\varrho+1} k_{\varrho+2}} & \cdots c_{i_{\varrho+1} k_\nu} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(VI)}$$

Ha a $C$-t (VI) alatti alakjában a $|\mathfrak{P}'\times\mathfrak{Q}'|$ determinánssal, miután ennek sorára és oszlopaira az

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, & \\ i_1, & i_2, \ldots, & i_\nu \end{pmatrix}$$

illetve

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, & \nu \\ k_1 & k_2, \ldots, & k_\nu \end{pmatrix}$$

permutációkat alkalmaztak, úgy szorozzuk, hogy a $C$ determináns sorait a $|(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}')|$ oszlopaival komponáljuk, akkor az 1. fejezet 5. pontjában foglalt segédtétel folytán oly determinánst kapunk, amelynek első $\varrho+1$ sorából álló sorkombinációból álló matrixban $\nu - \varrho$ számú oszlopnak minden eleme zérussal egyenlő; de akkor e matrixból alakítható minden $(\varrho+1)$-edfokú determinánsnak legalább egyik oszlopában minden elem zérussal lévén egyenlő, LAPLACE tétele szerint maga a determináns is zérussal egyenlő. Tehát

$$C.\,|(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}')'| = 0. \tag{VII}$$

Mivel pedig

$$|(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}')'| = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}} |\mathfrak{P}'|^n . |\mathfrak{Q}'|^m$$

és

$$|\mathfrak{P}| \neq 0, \quad |\mathfrak{Q}| \neq 0,$$

tehát

$$|(\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}')'| \neq 0$$

és így végül a (VII) alatti egyenlőségből következik, hogy

$$C = 0,$$

azaz az $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$ KRONECKER-féle determinánsnak tetszésszerinti $(\varrho+1)$-edfokú minora eltűnik és így $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$-nak rangszáma

$$R(|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|) = \varrho = r_1 r_2,$$

amivel a főtételünk teljesen be van bizonyítva.

Legyen szabad az itt elemzett viszonyokat egy egyszerű példával illusztrálnom. Legyen

$$m = 2, \; n = 2, \; r_1 = 1, \; r_2 = 2,$$

$$|\mathfrak{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

és így

$$|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

Mivel

$$r_1 = 1$$

az $|\mathfrak{A}|$ determináns értéke zérussal egyenlő, de elsőfokú minorai, azaz elemei között van a zérustól különböző. Legyen ez például $a_{11}$, akkor az

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

egyenlőségből következik, hogy

$$a_{22} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}},$$

de akkor $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$ így írható:

$$|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}a_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}b_{11} & a_{21}b_{12} & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}b_{21} & a_{21}b_{22} & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^2 \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

tehát $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$ oly negyedfokú determináns, amelynek csak két különböző sora van és így minden harmadfokú minorának két sora azonos lévén, annak értéke zérussal egyenlő. $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$-nek rangszáma tehát 2-nél nagyobb nem lehet. De ez a rangszám 2-nél kisebb sem lehet, mert az $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$-nek következő másodfokú minora

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a zérustól különböző, mert

$$a_{11} \neq 0 \text{ és } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

mivel $r_2 = 2$. Így tehát csakugyan $|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|$ rangszáma

$$R[|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|] = 2 = 1.2 = r_1.r_2.$$

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. dec. 16-án tartott üléséből.)

# ÜBER DEN RANG DER KRONECKERSCHEN DETERMINANTEN.

Von o. Mitglied GUSTAV RADOS.

Im vorstehenden Aufsatz wird den nachfolgende Satz bewiesen. Ist die Determinante

$$A = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

vom Range $r_1$ und

$$B = |b_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

vom Range $r_2$, alsdann ist der Rang der KRONECKERschen Determinante,

$$A \times B = |a_{i1} b_{g1}\ a_{i2} b_{g1} \ldots a_{im} b_{g1}\ a_{i1} b_{g2}\ a_{i2} b_{g2} \ldots a_{im} b_{g2}\ a_{im} b_{gn} \ldots$$

$$\ldots a_{i2}\ b_{gn}\ a_{im} b_{gn}|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ g = 1, 2, \ldots, n)$$

gleich dem Produkt $r_1 r_2$.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Dezember 1935.)

# A KONTRAPOLARIZÁCIÓ ELMÉLETE.

Karai NEUGEBAUER TIBOR-tól.

K. FAJANS és G. Joos figyelték meg először, hogy egy kristály molrefrakciója nem állítható elő egyszerűen, mint az ionok molrefrakciójának összege, hanem annál kisebb vagy nagyobb. Az előbbi esetet refrakciócsökkenésnek, az utóbbit kontrapolarizációnak nevezzük. Elemi úton egyik jelenség sem magyarázható meg, mert a kristály belső elektromos tere és a fényhullám elektromos tere egyszerűen superponálódnak.

A hullámmechanikai perturbációelmélet alkalmazása céljából először a kristály belső elektromos terétől és a fényhullámtól perturbált sajátfüggvényt kell kiszámítanunk, második közelítésben (5). A sajátfüggvény segítségével azután meghatározhatjuk az ionokban indukált dipolmomentumot (7), mely két részből áll, az egyik független az időtől (13) és a mi problemánk szempontjából érdektelen, a másik az időben periodusos (14). Ezen utóbbi momentummal (15) és (16) formulák segítségével kiszámíthatjuk a molrefrakciót (17). A molrefrakció képlete ismét két tagra bontható. Az elsőben (18) nem szerepel a kristály belső potenciálja. Ez tehát egyszerűen a gázalakú ionok refrakciójának az összege. A második (19) a belső tér és a fényhullám elektromos terének a kölcsönhatását tartalmazza, másszóval a refrakció megváltozását a kristályképződésnél. A potenciál menetéből az anionban és a kationban (21) ezen tag előjele meghatározható. Az eredmény azt mutatja, hogy az anion refrakciója a kristályképződésnél csökken, míg a kationé nő. Mivel azonban az anion polarizálhatósága általában sokkal nagyobb, mint a kationé, végered-

ményben refrakciócsökkenést figyelhetünk meg, csak az alkalifluoridoknál, melyeknél az anion igen kicsiny, áll elő az ellenkező eset. A kontrapolarizáció (ionlazítás) nagyságrendjét ezen esetben (20) és (22) formulák segítségével és a táblázatokban közölt adatokkal meghatározhatjuk. Az eredmény egyezésben van a tapasztalattal.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október hó 14-én tartott üléséből.)

# THEORIE DER IONENLOCKERUNG.

Von TH. NEUGEBAUER in Budapest.

Es wird gezeigt, wie man mit Hilfe der quantenmechanischen Störungstheorie, die bei Alkalifluoriden beobachtete Ionenlockerung erklären kann. Zu diesem Zwecke wird die vom konstanten inneren Felde im Kristall und von dem alternierenden Felde der Lichtwelle gestörte Eigenfunktion in zweiter Näherung und dann mit deren Hilfe das induzierte Moment berechnet. Der zeitabhängige Teil desselben hängt dann in einer einfachen Weise mit der Molrefraktion zusammen. Das erste Glied in der Formel dieser Molrefraktion gibt die Refraktion der getrennten Ionen, das zweite dagegen enthält die Wechselwirkung vom Kristallfeld und Licht. Die Abschätzung der Grössenordnung dieses Gliedes ist in Übereinstimmung mit den Messungsergebnissen von FAJANS und Joos.

Die Refraktion der edelgasähnlichen Ionen ist keine Konstante, sondern ändert sich ein wenig bei der Molekül- und Kristallgitterbildung. Diese Erscheinung wurde besonders von K. FAJANS und G. Joos[1] und ihren Schülern sehr sorgfältig untersucht. Der häufigste Fall ist der, dass bei der Kristallgitterbildung die Refraktion abnimmt; also eine Verfestigung der Ionen vorliegt, ausserdem kommt besonders bei Alkalifluoriden auch der entgegengesetzte Fall vor, die Refraktivität nimmt zu, diese Erscheinung ist unter dem Nahmen Ionenlockerung (Kontrapolarisation) bekannt. Die Ionenverfestigung kann man verhältnismässig einfach erklären,[2] die Lockerung ist dagegen nach der einfacheren Theorie ganz unerklärlich.

Mit Hilfe von punktförmig gedachten Nachbarionen kann man dagegen weder die Verfestigung, noch die Lockerung der

[1] K. FAJANS und G. Joos, ZS. f. Phys. 23, 1, 1924.

[2] TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 94, 655, 1935.

Ionen erklären. Um das zu zeigen, nehmen wir an, dass der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle $\mathfrak{E}_z = A \cos 2\pi\nu t$ ist, bezeichnen wir ausserdem die Komponenten des von den Nachbarionen herrührenden Feldes mit $E_x$, $E_y$ und $E_z$ und die Polarisierbarkeit des ganzen Ions, oder die von einem Teil desselben mit $\alpha$, so haben wir für das induzierte Moment in der $z$ Richtung

$$\mu_z = (E_z + A \cos 2\pi\nu t)\,\alpha \tag{1}$$

die Wirkungen des statischen Feldes im Kristall und die von dem alternierenden Felde der Lichtwelle superponieren sich also ganz ungestört, so dass von einer Wechselwirkung keine Rede sein kann, Ausserdem ist auch das von den punktförmig gedachten Nachbarionen herrührende Feld sehr klein, weil infolge der hohen Kristallsymmetrie die Wirkungen der Nachbaren sich fast ganz aufheben.[3]

Die Wellengleichung unseres Problems lautet folgendermassen

$$\left(H - \frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial t}\right) u e^{\frac{2\pi i E'}{h} t} = -(\mathfrak{E}z + V)\, u e^{\frac{2\pi i E'}{h}}, \tag{2}$$

wo $H$ den Hamiltonschen Operator und $E'$ den gestörten Eigenwert bedeuten. Die auf der rechten Seite stehenden Störungsglieder rühren von der einfallenden Lichtwelle und vom konstanten Felde der Nachbarionen her. Das letztere Glied bedeutet aber nicht das Potential der punktförmig gedachten Nachbarionen, da wie erwähnt, deren ihre Wirkung sich mit grosser Annäherung aufhebt,[4] sondern rührt von der Überdeckung der Elektronenwolken des Anions und des Kations her, dem zufolge der eindringende Teil der Wolke des einen Ions dem inneren Felde in der Elektronenwolke des anderen ausgesetzt ist. Dieses Feld verschwindet nicht mehr infolge der Kristallsymmetrie. In unseren Rechnungen benützen wir immer als Einheit der elektrischen Ladung die Ladung des Elektrons, um nicht den Faktor $e$ überall hinschreiben zu müssen.

---

[3] Vgl. TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 90, 693, 1934, und ebenda 95, 717, 1935.

[4] TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 95, 717, 1935.

Für die gestörte Eigenfunktion des Grundzustandes ergibt die Störungstheorie:

$$\psi = \psi_0 + \sum_k{}' \frac{\int \psi_0 V \psi_k^* d\tau \,.\, \psi_k}{h\nu(0,k)} + \frac{1}{2}\sum_k{}' \int \psi_0 A z \psi_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i(\nu_k+\nu)t}}{h\{\nu(0,k)+\nu\}} + \frac{e^{2\pi i(\nu_k-\nu)t}}{h\{\nu(0,k)-\nu\}} \right\} u_k. \tag{3}$$

Der Strich am Summenzeichen bedeutet, dass in der Summe das Glied $k=0$ nicht vorkommt.

Das erste Glied auf der rechten Seite ist die ungestörte Eigenfunktion, das zweite Glied ist die erste Näherung der von dem inneren Felde der Nachbarionen herrührenden Störung und das dritte Glied ebenfalls die erste Näherung der vom alternierenden elektrischen Felde der Lichtwelle berührenden Störungsgliedes der Eigenfunktion. Im letzten Gliede haben wir für das Potential der Lichtwelle $z\mathfrak{E}=zA\cos 2\pi\nu t$ gesetzt.

Da die Änderung der Refraktion nur im durchsichtigen Gebiet der Kristalle gemessen wurde, das genügend weit entfernt von den Resonanzfrequenzen des Kristalls liegt, können wir (3) gleich vereinfachen. Statt den einzelnen Frequenzen $\nu(0,k)$ führen wir einen Mittelwert der Frequenzen ein, den wir mit $\bar{\nu}$ bezeichnen. In (3) können wir dann alle drei Nenner in genügender Näherung mit diesem Mittelwert ersetzen. Also:

$$\psi_0' = \psi_0 - \frac{\sum_k{}' \int \psi_0 (V + zA\cos 2\pi\nu t)\,\psi_k^* d\tau \,.\, \psi_k}{h\bar{\nu}} = \psi_0 - \frac{\sum_k{}' \int \psi_0 (V + z\mathfrak{E})\,\psi_k^* d\tau \,.\, \psi_k}{h\bar{\nu}}. \tag{4}$$

Um die Wechselwirkung des konstanten Kristallfeldes und der Lichtwelle berechnen zu können, müssen wir, wie wir sehen werden, die zweiten Näherungen des induzierten Momentes kennen. Zur Berechnung derselben benötigen wir aber auch die zweite Näherung der Eigenfunktion,[5] mit der wir unsere Gleichung (4) ergänzen:

[5] Vgl. z. B. J. H. Van Vleck, The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Oxford. 1932. S. 133.

$$\psi_0' = \psi_0 - \frac{\sum' \int \psi_0 (V + z\mathfrak{E})\, \psi_k^* d\tau \,.\, \psi_k}{h\bar{\nu}} + \frac{\sum'_{kl} \int \psi_k (V + z\mathfrak{E})\, \psi_l^* d\tau \,.\, \int \psi_l (V + z\mathfrak{E})\, \psi_0^* d\tau \,.\, \psi_k}{(h\bar{\nu})^2} \,. \tag{5}$$

Die zweite Näherung der Eigenfunktion haben wir gleich in derselben angenäherten und vereinfachten Form geschrieben, wie wir das bei der Herleitung von (4) getan haben.

Die zweite Näherung der Eigenfunktion enthält noch ein Glied

$$-\sum_k \frac{H_1(k, 0) \,.\, H_1(00) \,.\, \psi_k}{\{h\nu(k, 0)\}^2} \,, \tag{6}$$

dasselbe ist aber in unserem Gedankengang ganz unwesentlich, weil wenn wir in $H_1(00)$ unsere Störungsglieder einsetzen, verschwindet das vom der Lichtwelle herrührende Glied, weil es in $z$ linear ist.

Mit Hilfe der gestörten Eigenfunktion erhalten wir das induzierte Dipolmoment:

$$\mu_z = \int \psi_0' z \psi_0' d\tau = -2 \frac{\sum'_k \int \psi_0 (V + z\mathfrak{E})\, \psi_k^* d\tau \,.\, \int \psi_k z \psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}} + \frac{\sum'_{kl} \int \psi_0 (V + z\mathfrak{E})\, \psi_k^* d\tau \,.\, \int \psi_k z \psi_l^* d\tau \,.\, \int \psi_l (V + z\mathfrak{E})\, \psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu})^2} + 2 \frac{\sum'_{kl} \int \psi_k (V + z\mathfrak{E})\, \psi_l^* d\tau \,.\, \int \psi_l (V + z\mathfrak{E})\, \psi_0^* d\tau \,.\, \int \psi_k z \psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu})^2} \,. \tag{7}$$

Mit Hilfe der folgenden Regel der Matrizenmultiplikation

$$\sum_k H(lk)\, H(km) = H^2(l, m) \tag{8}$$

die wir in unserem Falle folgendermassen schreiben

$$\sum'_k H(0k)\, H(k0) = H^2(00) - |H(00)|^2 \tag{9}$$

können wir (7) vereinfachen und erhalten

$$\mu_z = -2\frac{\int\psi_0 z(V+z\mathfrak{E})\psi_0^* d\tau - \int\psi_0 z\psi_0^* d\tau \cdot \int\psi_0(V+z\mathfrak{E})\psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}}$$
$$+3\left\{\frac{\int\psi_0 z(V+z\mathfrak{E})^2\psi_0 d\tau - 2\int\psi_0(V+z\mathfrak{E})\psi_0^* d\tau\cdot\int\psi_0 z(V+z\mathfrak{E})\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu})^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\int\psi_0(V+z\mathfrak{E})\psi_0^* d\tau\cdot\int\psi_0 z\psi_0^* d\tau\cdot\int\psi_0(V+z\mathfrak{E})\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu})^2}\right\}. \quad (10)$$

Eine weitere Vereinfachung von (10) entsteht dadurch, dass nach den Auswahlregeln

$$\int\psi_0 z\psi_0^* d\tau = 0 \quad (11)$$

ist.

Das induzierte Dipolmoment $\mu_z$ zerlegen wir jetzt in zwei Teile. Im ersten das wir mit $m_z$ bezeichnen, fassen wir die Glieder zusammen, die konstant sind, im zweiten dagegen diejenigen, die das alternierende Feld der Lichtwelle enthalten. Also haben wir:

$$\mu_z = m_z + \mathfrak{m}_z \quad (12)$$

$$m_z = -2\frac{\int\psi_0 z V\psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}} + 3\frac{\int\psi_0 z V^2\psi_0^* d\tau - 2\int\psi_0 z V\psi_0^* d\tau\cdot\int\psi_0 V\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu})^2}, \quad (13)$$

$$\mathfrak{m}_z = -2\frac{\int\psi_0 z^2\mathfrak{E}\psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}} + 3\frac{2\int\psi_0 z^2\mathfrak{E}V\psi_0^* d\tau - 2\int\psi_0 V\psi_0^* d\tau\cdot\int\psi_0 z^2\mathfrak{E}\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu})^2} + \cdots \quad (14)$$

Die weiteren Glieder von $\mathfrak{m}_z$, die wir nicht mehr hingeschrieben haben, enthalten die in $\mathfrak{E}$ quadratischen Glieder, die uns in dieser Arbeit nicht interessieren.

Das erste Glied auf der rechten Seite von (13) bedeutet das vom inneren Felde im Kristall induzierte Moment. Dasselbe interessiert uns aber bei der Berechnung der Refraktivität garnicht. Übrigens verschwindet auch dieses Moment infolge der Kristallsymmetrie für jedes einzelne Ion in einem Koordi-

nationsgitter. In den Schichten- und Molekülgittern verschwindet es zwar nicht immer, wenn man die Integration nur auf ein einzelnes Ion ausdehnt, aber das ganze Moment eines Kristalls ist immer gleich Null. Eingefrorene elektrische Momente gibt es, abgesehen von sehr seltenen Ausnahmsfällen, überhaupt nicht. Das zweite Glied von (13) ist eine zweite Näherung des ersten und ist für unser Problem ebenfalls unwesentlich. Mit Hilfe von (14) können wir den Brechungsexponent des fraglichen Stoffes nach der Formel:[1]

$$-\frac{\mathfrak{N}\mathfrak{m}_z}{\mathfrak{E}}=\frac{3}{4\pi}\,\frac{n^2-1}{n^2+2}, \tag{15}$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit und $n$ den Brechungsindex bedeuten, berechnen. $\mathfrak{m}_z$ soll im Folgenden die Summe der im Kation und Anion induzierten Momente bedeuten.

Weiter erhalten wir, wenn wir das Molvolumen $v$ einführen und $v\mathfrak{N}=N$ setzen, wo $N$ die Loschmidtsche Zahl bedeutet

$$-\frac{N\mathfrak{m}_z}{\mathfrak{E}}=\frac{3}{4\pi}R \tag{16}$$

$R$ ist die Molrefraktion.

Aus (14) und (16) folgt weiter:

$$\begin{aligned}R=\frac{4\pi N}{3}\Bigg\{&2\,\frac{\int_A \psi_0 z^2\psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}_A}+2\,\frac{\int_K \psi_0 z^2\psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}_K}\\&-6\,\frac{\int_A \psi_0 z^2 V\psi_0^* d\tau-\int_A \psi_0 V\psi_0^* d\tau\,.\int \psi_0 z^2\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu}_A)^2}\\&-6\,\frac{\int_K \psi_0 z^2 V\psi_0^* d\tau-\int_K \psi_0 V\psi_0^* d\tau\,.\int_K \psi_0 z^2\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu}_K)^2}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Die ersten zwei Glieder auf der rechten Seite enthalten nicht das Störungspotential $V$, bedeuten also die Refraktion von freien gasförmigen Ionen. Die letzten zwei dagegen ent-

[1] Das negative Verzeichen ist eine Folge davon, dass wir $-e$ als Einheit der Ladung gewählt haben.

halten die Wechselwirkung von Felde der Lichtwelle und des inneren Kristallfeldes. Dieselben bedeuten also die Änderung der Refraktion bei der Kristallgitterbildung.

Also können wir setzen:

$$R_0 = \frac{8\pi N}{3}\left\{\frac{\int_A \psi_0 z^2 \psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}_A} + \frac{\int_K \psi_0 z^2 \psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}_K}\right\} \tag{18}$$

und

$$\Delta R = -\,8\pi N\left\{\frac{\int_A \psi_0 z^2 V\psi_0^* d\tau - \int_A \psi_0 V\psi_0^* d\tau \cdot \int_A \psi_0 z^2\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu}_A)^2} + \frac{\int_K \psi z^2 V\psi_0^* d\tau - \int_K \psi_0 V\psi_0^* d\tau \cdot \int_K \psi_0 z^2\psi_0^* d\tau}{(h\bar{\nu}_K)^2}\right\}. \tag{19}$$

Die in (19) vorkommenden Frequenzmittelwerte können wir nach der gewohnten Methode berechnen, in dem wir in der Formel der Polarisierbarkeit dieselbe Umformung wie in (4) durchführen und dann aus dem empirisch bekannten Wert der Polarisierbarkeit und aus der Verteilung der Ladungsdichte, die wir etwa nach der Hartreeschen oder Thomas-Fermischen Methode als bekannt betrachten können, $\bar{\nu}$ berechnen[6] also

$$\alpha = \frac{2\int \psi_0 z^2 \psi_0^* d\tau}{h\bar{\nu}}. \tag{20}$$

Diesen Wert für $\bar{\nu}$ können wir dann in (19) einsetzen.

Eine weitere Frage ist, die Berechnung von $V$. Bezeichnen wir mit $Z$ die Kernladung und mit $f(\varrho) = \psi\psi^*$ die elektrische Dichte in der Entfernung $\varrho$ vom Kern, dann haben wir:

$$V(r) = \frac{Z - \int_0^r f(\varrho) 4\pi\varrho^2 d\varrho}{r} - \int_r^\infty \frac{f(\varrho)}{\varrho} 4\pi\varrho^2 d\varrho \tag{21}$$

Aus (21) ist zu ersehen, dass für ein positives Ion $V$ immer positiv sein muss, da wir ja $r$ nicht so weit verschieben können, dass das Integral gleich $Z$ wird. Bei negativen Ionen gibt es

[6] Vgl. TH. NEUGEBAUER und P. GOMBÁS, ZS. f. Phys. 89, 480, 1934.

dagegen eine Entfernung $r_0$ bei der das Potential negativ wird. Daraus folgt, dass in diesem Falle, in dem ein negatives Ion vom Felde der positiven gestört wird, immer eine Refraktionsverminderung, also eine Verfestigung des Ions vorliegt. Da ausserdem in den meisten Fällen, die Polarisierbarkeit des negativen Ions viel grösser, als dieselbe vom positiven Ion sein wird, so wird die Refraktionsverminderung bei der Kristallgitterbildung weitaus der häufigste Fall sein, ganz im Einklang mit der Erfahrung. Betrachten wir jetzt den entgegensetzten Fall. Das positive Ion soll vom Felde der angrenzenden negativen gestört werden. In einem Teil des negativen Ions ist zwar das Potential positiv, in diesen Teilen aber, wo sich die Elektronenwolken überdecken und die in Folge der schweren Durchdringbarkeit der Wolken nur am «Rand» der Ionen liegen können, wird dieses Potential vorwiegend negativ sein. Daraus folgt, dass in diesem Falle die Refraktion vergrössert wird. Wie erwähnt wird aber die Verfestigung des negativen Ions die Lockerung des positiven meistens stark überkompensieren. Nur im Falle, das grosse Kationen mit sehr kleinen Anionen ein Gitter bilden, kann die Lockerung vorherrschend werden. Das ist bei den Fluoriden der Alkalien der Fall. In unserer Tabelle I. sind die Molrefraktionen [7] Ionisierungsenergien und empirische Radien [8] der fraglichen Ionen zusammengestellt. In der Tabelle II. dagegen die entsprechenden Refraktionsvergrösserungen nach den Messungen von K. Fajans und G. Joos.[9]

**Tabelle I.**

| | $F^-$ | $Na^+$ | $K^+$ | $Rb^+$ | $Cs^+$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_0 . 10^8$ cm | 1·33 | 0·98 | 1·33 | 1·49 | 1·65 |
| Ionisierungsenergie $h\nu . 10^{12}$ erg | 6·36 | 75·6 | 50·4 | 25·5 | — |
| $R_0$ | 2·80 | 0·20 | 2·23 | 3·58 | 6·24 |

[7] K. Fajans und G. Joos l. c.

[8] V. M. Goldschmidt, Fortschr. d. Mineralogie. 15, 73, 1931.

[9] K. Fajans und G. Joos l. c.

**Tabelle II.**

| | *NaF* | *KF* | *RbF* | *CsF* |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta R$ | 0·02 | 0·13 | 0·36 | 0·47 |

Da die Dichterverteilung in den Elektronewolken des Anions und Kations bekannt ist, könnten wir die Vergrösserung der Refraktion mit Hilfe von numerischen Integrationen berechnen. Doch da wir statt den Frequenzen einen Mittelwert eingeführt und auch andere Vernachlässigungen gemacht haben, wäre eine strenge numerische Berechnung nicht mehr gerechtfertigt.

Dazu kommt noch, dass infolge des Pauliprinzips die Elektronenwolken sich abstossen und darum deformiert werden.

Darum wollen wir uns damit begnügen, zu zeigen, dass die abgeschätzte Refraktionsverminderung von der richtigen Grössenordnung ist.

Wir nehmen also an, dass wir in (19) statt $V(r)$ irgendeinen Mittelwert einführen können, den wir dann vor das Integralzeichen schreiben. Bezeichnen wir denselben mit $\bar{V}$, dann folgt aus (18) und (19)

$$\Delta R \sim R_0 \frac{3\bar{V}}{h\bar{\nu}}. \tag{22}$$

Um den numerischen Wert von den vor $R$ stehenden Faktor abschätzen zu können, setzen wir für $h\bar{\nu}$ die Ionisierungsenergie des fraglichen Kations ein. Die Grössenordnung von $\bar{V}$ bestimmen wir dagegen so, dass wir $\bar{V} = \frac{1}{r_0}$ setzen, wo $r_0$ den empirischen Radius des Fluorions bedeutet, weil die Ionen eben am «Rand» am polarisierbarsten sind. Es fragt sich nun noch, wie gross dieser Teil des Kations ist, wo das Feld des Anions diesen maximalen Wert erreicht, oder dazu nahe kommt. Im Steinsalztyp hat jedes Ion sechs Nachbaren und wir werden keinen grossen Fehler begehen, wenn wir annehmen, dass ca. ein zehntel Teil der Wolke unter der Wirkung dieses Feldes steht. Wenn wir die numerischen Rechnungen durchführen, so erhalten wir z. B. für *NaF* für diesen Faktor 0·06 und ähnlich

für $KF$ 0·1 und für $RbF$ 0·2. Mit Hilfe dieser Werte folgen aus (22) die in Tabelle III. angegebenen berechneten Refraktionserhöhungen.

**Tabelle III.**

| | $Na$ | $K$ | $Rb$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta R_K$ | 0·012 | 0·22 | 0·71 |

Die in der Tabelle II. angegebenen kleinen Werte für $KF$ und besonders für $NaF$ sind wegen der angenäherten Kompensation der Wirkungen des Kations und Anions ungewiss, darum wollen wir die Letztere nicht mit der Erfahrung vergleichen.

Aus unseren Tabellen ist zu ersehen, dass die Grössenordnung der berechneten Ionenlockerungen tatsächlich mit den beobachteten übereinstimmt. Formel (19) erklärt also wirklich die bei der Kristallgitterbildung beobachtete Vergrösserung der Refraktion.

Budapest, Institut f. theoret. Physik d. Universität, September 1935.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# TÖBBTAGÚAK IRREDUCIBILITÁSÁRÓL.

LIPKA ISTVÁN-tól.

1. Legyen

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1}$$

olyan polinom, amelynek együtthatói racionális egészszámok. O. PERRON-tól származik a következő tétel.[1] *Ha $f(x)$ polinom együtthatói kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:*

$$|a_1| > 1 + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|, \qquad a_n \neq 0, \tag{2}$$

*akkor a polinom irreducibilis a racionális számok testében.* Ez a tétel egyszerű következménye D. E. MAYER egy tételének.[2] Ugyanis a (2) feltétel szerint $x^{n-1}$ együtthatójának abszolút értéke nagyobb, mint a többi együttható abszolút értékének összege és így MAYER nevezett tétel szerint az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan $n-1$ gyöke van az egységkörben. Tehát ha az $f(x)$ polinom felbomlanék két egész együtthatós polinom szorzatára, akkor e két polinom közül az egyiknek minden gyöke az egységkörbe esnék. Ez utóbbi gyökök szorzatának értéke azonban egész szám lenne, mert a polinom legmagasabb fokú tagjának együtthatója: 1 és konstans tagja nullától különböző egész szám. Tehát $f(x)$ polinom nem lehet reducibilis a racionális számok

---

[1] O. PERRON: Algebra II. kötet (1933), 35. old. J. HADAMARD: Remarques sur deux résultats dus à M. Demoulin et à M. Perron. Soc. Math. d. France. Compt. Rend. d. Séanc. 62 (1934), 25. old.

[2] D. E. MAYER: Sur les équations algébriques. Nouv. Ann. Math. (3) 10 (1891) 111—124. old. Ld. még A. COHN: Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. Math. Zeitschr. 14 (1922), 110—148. o., 123. o.

testében. Megjegyezzük, hogy L. BERWALD egy tétele[3] szerint a (2) alatti feltetel a következő gyengébbel is helyettesíthető:

$$|a_1| > |1 + a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|.$$

Ugyancsak PERRON-tól származik a következő tétel.[4] *Legyen az* (1) *alatti polinomban* $a_2$ *együttható pozitív és álljon a következő egyenlőtlenség*

$$\sqrt{a_2} \geqq 4^{n-1}(|a_1| + |a_3| + \cdots + |a_n|), \quad a_n \neq 0,$$

*akkor a polinom irreducibilis a racionális számok testében.* A következőkben megmutatjuk, hogy az utóbbi feltételben szereplő $4^{n-1}$ faktor *lényegesen kisebbel* helyettesíthető, amennyiben bebizonyítjuk a következő tételt:

I. *Ha az* (1) *alatti* $f(x)$ *polinomban az* $a_2$ *együttható pozitív és teljesül a következő egyenlőtlenség*

$$\sqrt{a_2} > \sqrt{5}(|a_1| + |a_3| + \cdots + |a_n|), \quad a_n \neq 0, \tag{3}$$

*akkor a polinom irreducibilis a racionális számok testében.*

Segédtétel. *Legyen* $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ *valós együtthatós egyenlet és jelentse* $-N$ *az egyenlet negatív együtthatói közül a legnagyobb abszolút értékűt, akkor az egyenlet bármely pozitív gyöke kisebb, mint* $1 + N$.[5]

Az I. tétel helyessége közvetlenül belátható az $n = 2$ esetben. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $n > 2$. Könnyen belátható az is, hogy az (1) alatti $f(x)$ polinomnak pontosan $n-2$ gyöke van az egységkörben, ha áll a (3) alatti feltétel. Ugyanis legyen

$$|a_1| + |a_3| + \cdots + |a_n| = A,$$

akkor (3) szerint $a_2 > 5A^2 \geqq 5A$, mert $|a_n| \geqq 1$, $n > 2$ és így $A \geqq 1$. Mivel még $5A > A + 1$, azért $a_2 > A + 1$; ebből meg

---

[3] L. BERWALD: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. Math. Zeitschr. 37 (1933). 61—76. o., 75. o.

[4] O. PERRON: Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen. Journal f. d. Math. 132 (1907), 288—307. o., 301. o. VI. tétel. H. L. DORWART: Irreducibility of polynomials. The Amer. Math. Monthly 42 (1935), 369—381. o.

[5] Lásd pl. BIEBERBACH—BAUER: Algebra (1928), 129. o.

MAYER-nek előbb említett tétele szerint következik, hogy $f(x)$ polinomnak pontosan $n-2$ gyöke van az egységkör belsejében. Most megmutatjuk, hogy az $f(x)$ polinomnak egy valós gyöke sem fekszik az egységkörön kívül. Ugyanis legyen először $x$ pozitív, ekkor, mivel $a_2 > 0$,

$$|f(x)| \geqq a_2 x^{n-2} - x^n - |a_1| x^{n-1} - |a_3| x^{n-3} - \cdots - |a_n|,$$

e szerint

$$|f(x)| > 0, \tag{4}$$

ha

$$a_2 > x^2 + |a_1| x + |a_3| \frac{1}{x} + \cdots + |a_n| \frac{1}{x^{n-2}}. \tag{5}$$

De segédtételünk értelmében $f(x)$ pozitív gyökei kisebbek, mint $1 + A$, mivel az $a_2$ együttható pozitív. Tehát $f(x)$-nek nincsen pozitív gyöke az egységkörön kívül, ha a (4) alatti $|f(x)| > 0$ egyenlőtlenség fennáll az $1 \leqq x \leqq 1 + A$ intervallumban. Ez (5) szerint bekövetkezik, ha

$$a_2 > (1 + A)^2 + |a_1| (1 + A) + |a_3| + \cdots + |a_n|,$$

azaz, ha fennáll a következő egyenlőtlenség

$$a_2 > (1 + A)^2 + |a_1| (1 + A) + A. \tag{6}$$

Továbbá, mivel $|a_n| \geqq 1$ és $n > 2$, azért $|a_1| \leqq A - 1$ és így (6) alatti egyenlőtlenség biztosan fennáll, ha

$$a_2 > 2A^2 + 3A,$$

és még inkább fennáll, ha $a_2 > 5A^2$, mivel a $A \geqq 1$. De az $a_2 > 5A^2$ egyenlőtlenség nem más, mint a (3) alatti feltétel. Ezzel megmutattuk, hogy $f(x)$-nek az egységkörön kívül nincsen pozitív gyöke. De negatív gyöke sincs $f(x)$-nek az egységkörön kívül. Ugyanis írjunk $f(x)$-ben az $x$ helyébe $-x$-et, ahol $x > 0$ és vizsgáljuk az $f(-x) = (-x)^n + a_1 (-x)^{n-1} + a_2 (-x)^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ egyenlet pozitív gyökeinek a számát az egységkörön kívül. Ha ebben az egyenletben $x^n$ együtthatóját pozitívnak vesszük, akkor az $x^{n-2}$ együtthatója is pozitív lesz, mert $n$ és $n-2$ paritása megegyezik. Mivel még a $\pm f(-x)$ együtthatóira áll a (3) alatti egyenlőtlenség, következik az előbbi eredményünkből, hogy $f(-x)$-

nek nincs pozitív gyöke az egységkör külsejében, vagyis $f(x)$-nek negatív gyök sincs az egységkörön kívül. De az előbb megmutattuk, hogy $f(x)$-nek pontosan $n-2$ gyöke van az egységkör belsejében, így hát a körön kívül fekvő két gyöke, konjugált komplex gyökpár. Tehát ha $f(x)$ felbomlanék két egész együtthatós polinom szorzatára, akkor az egyik polinom gyökei egyrészt mind az egységkör belsejébe esnének, másrészt szorzatuk zérótól különböző egész szám lenne, ami lehetetlen.

Az I. tétel bebizonyításában szereplő (6) alatti becslésből kitűnik, hogy a (3) *alatti feltételt a következővel is helyettesíthetjük*:

$$\sqrt{a_2} > \sqrt{2}(1+|a_1|+|a_3|+\cdots+|a_n|).$$

Az utóbbi feltétel kevesebbet követel, mint a (3) alatti, abban az esetben, amikor $A>1$; ez nyilván bekövetkezik pl. akkor, amikor az $f(x)$ polinomnak legalább négy tagja nullától különböző.

I'. *Legyen az* (1) *alatti* $f(x)$ *polinom fokszáma* $n\geqq 4$. *Legyen* $a_4>0$ *és álljon a következő egyenlőtlenség*

$$\sqrt[4]{a_4} > \sqrt[4]{2}(1+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_5|+\cdots+|a_n|), \quad a_n \neq 0 \quad (3')$$

*akkor* $f(x)$ *vagy irreducibilis a racionális számok testében, vagy pedig felbomlik két irreducibilis tényezőre.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $f(x)$ polinomnak nincsen valós gyöke az egységkörön kívül. Legyen

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_5|+\cdots+|a_n| = A.$$

Mivel $a_4>0$, azért előbbi segédtételünk szerint $f(x)=0$ pozitív gyökei kisebbek, mint $1+A$. Tehát $f(x)$-nek nincsen pozitív gyöke az egységkörön kívül, ha $|f(x)|>0$ az $1\leqq x\leqq 1+A$ intervallumban. Az utóbbi egyenlőtlenség nyilván fennáll, ha

$$a_4 > x^4+|a_1|x^3+|a_2|x^2+a_3|x|+|a_5|\frac{1}{x}+\cdots+|a_n|\frac{1}{x^{n-4}}, \quad (5')$$

az $1\leqq x\leqq 1+A$ intervallumban. Mivel $|a_1|\leqq A$, $|a_2|\leqq A$, $|a_3|\leqq A$, azért az (5') alatti egyenlőtlenség fennáll, ha

$$a_4 > x^4+A(x^3+x^2+x)+|a_5|\frac{1}{x}+\cdots+|a_n|\frac{1}{x^{n-4}},$$
$$1\leqq x\leqq 1+A.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség pedig nyilván teljesül, ha

$$a_4 > (1+A)^4 + A\{(1+A)^3 + (1+A)^2 + (1+A)\} + A. \qquad (6')$$

Azonban könnyű számolás mutatja, hogy

$$2(1+A)^4 > (1+A)^4 + A\{(1+A)^3 + (1+A)^2 + (1+A)\} + A,$$

ennélfogva a (6') alatti egyenlőtlenség biztosan fennáll, ha $a_4 > 2(1+A)^4$, vagyis ha teljesítve van a (3') alatti feltétel. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $f(x)$-nek nincsen pozitív gyöke az egységkörön kívül. Mivel $n$ és $n-4$ paritása megegyezik, könnyen belátható, hogy $f(x)$-nek negatív gyöke sincs az egységkörön kívül. Azonban $f(x)$-nek MAYER tétele szerint $n-4$ gyöke van az egységkörben, tehát az egységkör külsejébe két konjugált komplex gyökpár esik. Ennélfogva $f(x)$ a racionális számok testében nem bontható fel kettőnél több tényezőre, és így az $I'$ tételt bebizonyítottuk.

2. D. E. MAYER-nek az 1. részben alkalmazott tételéből levezethetők még a következő irreducibilitási tételek:

II. *Legyenek* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tetszésszerinti, de fix egész számok, akkor az*

$$f(x) = a_0 p + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

*polinom irreducibilis a racionális számok testében, ha* $p$ *elég nagy prímszám.*

Bizonyítás. Legyen az $f(x)$ polinom reciproka

$$f^*(x) = a_0 p x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

és legyen $\varrho$ egy tetszésszerinti kis pozitív szám. $f^*(x) = 0$ egyenletnek minden gyöke a $\varrho$ sugarú körbe esik, ha

$$|a_0| p\varrho^n > |a_1|\varrho^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|\varrho + |a_n|.$$

Ez utóbbi feltétel nyilván teljesül, ha $p$ elegendő nagy. Most már tegyük fel, hogy $f^*(x)$ két alacsonyabbfokú polinom szorzatára bomlik, akkor

$$f^*(x) = (pa_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r)(\beta_0 x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_s).$$

A $\beta_0 x^s + \cdots + \beta_s$ polinom gyökeinek szorzata $\pm \frac{\beta_s}{\beta_0}$, ahol $\beta_0$ az $a_0$ osztója és $\beta_s$ az $a_n$ osztója. E szerint a $\frac{\beta_s}{\beta_0}$ szorzat abszolút

értéke nem lehet tetszésszerinti kicsiny, holott a gyökök a tetszésszerinti kis $\varrho$ sugarú körbe esnek.

III. *Legyenek* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tetszésszerinti, de fix egész számok, és* $a_1 \neq 0$, *akkor az*

$$f(x) = a_0 p^k + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

*polinom irreducibilis, ha* $p$ *prímszám és* $k$ *elegendő nagy pozitív egész szám.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(x)$ polinom reciproka $f^*(x)$, két alacsonyabbfokú polinom szorzatára bomlik, akkor

$$a_0 p^k x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n =$$
$$= (a_0 p^\varkappa x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r)(\beta_0 p^{k-\varkappa} x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_s).$$

Mivel $a_1 = a_0 p^\varkappa \beta_1 + a_1 \beta_0 p^{k-\varkappa} \neq 0$, nyilvánvaló, hogy $\varkappa \leqq m$, ha $p^m$ a $p$ prímszám legmagasabb olyan hatványa, amellyel a nullától különböző $a_1$ osztható. E szerint a felbontásban szereplő első polinom gyökeinek szorzata: $\pm\frac{a_r}{a_0 p^\varkappa}$ nem lehet tetszésszerinti kicsiny, holott e gyökök MAYER tétele szerint tetszésszerinti kicsinyek lesznek, ha $k$ elegendő nagy.

A II. és III. tételből könnyen következik L. WEISNER következő tétele:[6]

*Legyen* $f(x)$ *olyan racionális egész együtthatós polinom, amelynek legalább egy gyöke racionális szám, és legyen* $c$ *fix egész szám, akkor az* $f(x) + cp$ *polinom irreducibilis, ha* $p$ *elegendő nagy prímszám. Továbbá* $f(x) + cp^k$ *irreducibilis, ha* $p$ *prímszám,* $f'(0) \neq 0$, *és* $k$ *elegendő nagy pozitív egész szám.*

Legyen ugyanis $\frac{\alpha}{\beta}$ az $n$-edfokú $f(x)$ polinom racionális gyöke, akkor az $x = \frac{\alpha}{\beta} + y$ transzformációt végezve

$$f(x) + cp^k = f\left(\frac{\alpha}{\beta} + y\right) + cp^k,$$

---

[6] L. WEISNER: Criteria for the irreducibility of polynomials. Bulletin of the American Math. Soc. 40 (1934), 864—870. old.

melynek mindkét oldalát $\beta^n$-nel szorozva nyerjük a következő egész együtthatójú polinomot:

$$\beta^n\left(f(x)+cp^k\right) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}y + \beta^n cp^k.$$

Erre a polinomra alkalmazható a III. tétel.

Legyenek az (1) alatti $f(x)$ polinom együtthatói pozitív egész számok és tekintsük a DESCARTES-féle koordinátasíkban azt a poligont, amelynek csúcsai: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, a_1)$,..., $(n, a_n)$, $(n+1, 0)$. Ezt a poligont az $f(x)$-hez tartozó «koefficiens-poligon»-nak nevezzük.

IV. *Ha az $f(x)$ polinom együtthatói pozitív egész számok és az $f(x)$-hez tartozó koefficiens-poligon az $(1, a_1)$ csúcsban konkáv, a többi csúcsban pedig konvex, akkor $f(x)$ irreducibilis a racionális számok testében.*

Bizonyítás. Legyen az $f(x)$ polinom reciproka $f^*(x)=x^nf\left(\frac{1}{x}\right)$. Szerzőnek egy tétele[7] szerint az $f^*(x)$ polinomnak pontosan egy gyöke van az egységkör belsejében, továbbá $f^*(x)$ a kör kerületén nem tűnik el. E szerint az $f(x)$ polinomnak pontosan $n-1$ gyöke van az egységkör belsejében, és így a PERRON-féle irreducibilitási tételnél alkalmazott okoskodás szerint $f(x)$ polinom irreducibilis, a racionális számok testében.

Pl. az $f(x) = x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$ polinom irreducibilis a IV. tétel szerint. Ez utóbbi polinom irreducibilitása a PERRON-féle tételből nem következik, mivel itt $|a_1| < 1 + |a_2| + |a_3| + |a_4|$.

---

[7] LIPKA ISTVÁN: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten, Acta Szeged 5 (1931) 69—77. o. III. tétel.

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# ÜBER DIE IRREDUZIBILITÄT VON POLYNOMEN.

Von STEFAN LIPKA.

Sind die Koeffizienten des Polynoms

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

ganze rationale Zahlen, so werden die folgenden Sätze bewiesen:

I. *(Verallgemeinerung eines Satzes von* O. PERRON*) Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ der Ungleichung*

$$|a_1| > |1 + a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| \qquad (a_n \neq 0)$$

*genügen, so ist $f(x)$ irreduzibel.* (Unter der Irreduzibilität wird stets Irreduzibilität im Körper der rationalen Zahlen verstanden).

II. (*Verschärfung eines Satzes von* PERRON) *Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ der Bedingung $a_2 > 0$ und ausserdem der Ungleichung*

$$\sqrt{a_2} > \sqrt{5}\,(|a_1| + |a_3| + |a_4| = \cdots + |a_n|), \quad (a_n \neq 0)$$

*genügen, so ist $f(x)$ irreduzibel.* (Bei PERRON steht der Faktor $4^{n-1}$ statt $\sqrt{5}$).

II'. *Ist $a_2 > 0$ und*

$$\sqrt{a_2} > \sqrt{2}\,(1 + |a_1| + |a_3| + \cdots + |a_n|),$$

*so ist $f(x)$ irreduzibel.*

III. *Ist $n \geqq 4$, $a_4 > 0$ und*

$$\sqrt[4]{a_4} > \sqrt[4]{2}\,(1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_5| + \cdots + |a_n|), \quad (a_n \neq 0)$$

*so ist $f(x)$ entweder irreduzibel, oder das Produkt zweier irreduzibler Polynome.*

IV. *Sind* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *feste ganze Zahlen und ist* $p$ *eine genügend grosse Primzahl, so ist*

$$g(x) = a_0 p + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

*irreduzibel.*

V. *Sind* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *feste ganze Zahlen und* $a_1 \neq 0$, *so ist* $g(x) = a_0 p^k + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *irreduzibel, falls* $p$ *eine Primzahl und* $k$ *eine genügend grosse positive Zahl bedeutet.*

VI. *Sind die Koeffizienten von* $f(x)$ *ganze positive Zahlen und ist das Koeffizientenpolygon von* $f(x)$ (d. h. das Polygon mit den Eckpunkten: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, a_1), \ldots, (n, a_n)$, $(n+1, 0)$) *im Punkte* $(1, a_1)$ *konkav und in den anderen Eckpunkten konvex, so ist* $f(x)$ *irreduzibel.*

Aus den Sätzen IV, V folgt leicht ein Satz von L. WEISNER.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. November 1935.)

# ÉRINTŐSZINGULARITÁSNÉLKÜLI ÉS ZÉRÓINDEXŰ SÍKGÖRBÉKRŐL.

SZŐKEFALVI NAGY GYULA l. tagtól.

## 1. Bevezetés.

Síkgörbén a következőkben olyan folytonos és az érintésponttal folytonosan változó érintővel bíró egy menetből álló zárt síkgörbét fogunk érteni, amely véges számú konvex ívre bontható.

A síkgörbe indexe azoknak a (valós) metszéspontoknak minimális száma, amelyekben a görbét síkjának egy egyenese metszheti. A zéróindexű síkgörbe síkjában van tehát olyan egyenes, amely a görbét nem találja. Egy olyan centrális projekció, amely ezt az egyenest a sík végtelen távoli egyenesébe viszi át, a zéróindexű síkgörbét a sík egy körének belsejében fekvő görbébe projiciálja. Föltételezhetjük tehát, hogy a zéróindexű síkgörbe már végesben fekszik.

A végesben fekvő és érintőszingularitásnélküli síkgörbék tulajdonságaival egy előző dolgozatunkban foglalkoztunk.[1] Az ilyen görbék közül azokat, amelyeknek páratlan, illetőleg páros számú $c$ csúcspontjuk van, $G'_c$, illetőleg $G''_c$ görbéknek neveztük.

Ebben a dolgozatban főleg a $G''_c$ görbék kettőspontjainak számával fogunk foglalkozni. Idézett dolgozatunkban ezt a kérdést csak abban az esetben sikerült megoldanunk, amikor a között

---

[1] Sz. Nagy Gyula: Érintőszingularitásnélküli, végesben fekvő síkgörbékről, Matematikai és Természettudományi Értesítő 47. kötet (1930), 693—715. old. Ezt a dolgozatot a következőkben röviden A alatt fogjuk idézni.

a $c$ ív között, amelyekre a $G_c''$ görbét csúcspontjai fölbontják s amelyeket a görbe *főíveinek* neveztünk, van kettősponttal bíró főív.

## 2. Kapcsolt pontpárok és kapcsolt ívek egy $G_c''$ görbén.

Egy $G_c''$ görbének a síkjában fekvő akármelyik egyenesnek két párhuzamos érintője van.[2] Az ilyen érintőpárok érintéspontjait *kapcsolt pontpároknak* nevezzük. Egy kapcsolt pontpárt tehát tehát az a tulajdonsága jellemzi, hogy pontjaiban a görbének érintői egymással párhuzamosak. Egy kapcsolt pontpár két pontja a $G_c''$ görbét olyan két nyitott görbére bontja fel, amelyeknek totális görbülete $\pi$.[3]

A $c$ számú csúcspont és ezeknek kapcsolt pontjai a $G_c''$ görbét $2s(\leqq 2c)$ számú konvex ívre bontják. Ezek közül az ívek közül két-két konvex ív olyan vonatkozásban van egymással, hogy az egyiken fekvő pontokhoz kapcsolt pontok mind a másik konvex íven fekszenek és megfordítva. Két ilyen konvex ívet *kapcsolt íveknek*, *kapcsolt ívpárnak* nevezünk. Egy kapcsolt ívpár végpontjai páronkint kapcsolt pontpárok, amelyeknek két-két pontja közül legalább az egyik csúcspont.

Ha a $G_c''$ görbe csúcspontjai között nincs kapcsolt pontpár, akkor a görbén $c$ számú kapcsolt ívpár van. Ha ellenben a $c$ csúcspont között $q$ számú kapcsolt pontpár van, míg a többi $c-2q$ csúcspont között nincs kapcsolt pontpár, akkor a $G_c''$ görbén levő kapcsolt ívpárok száma $c-q=s$.

Mivel $0 \leqq q \leqq \frac{c}{2}$, azért $\frac{c}{2} \leqq s = c - q \leqq c$.

Ki fogjuk mutatni a következő tételt:

1. *Ha egy $G_c''$ görbe $s$ számú kapcsolt ívpárból áll, akkor a görbének legfeljebb $\frac{c(c-3)}{2} + s$ kettőspontja lehet.*

Ez a tétel a következő tételünkből hozható le:[4]

Egy $G_c''$ görbének legfeljebb egy főíve metszheti önmagát,

[2] A, 695—696. oldal.

[3] A, 696—697. oldal.

[4] A, IX. tétel, 698. oldal.

de az sem egynél több pontban. A görbén egymásután következő két főív csak akkor metszheti egymást, ha az egyik főív önmagát is metszi. A két főív metszéspontjainak száma ebben az esetben sem lehet egynél több. Két nem szomszédos főív legfeljebb két pontban metszheti egymást.

Ebből a kapcsolt ívpárok értelmezése alapján a következő tétel következik:

Egy $G_c''$ görbének olyan főíve, amely nem tartalmaz kapcsolt ívpárt, önmagát nem metszheti. Két olyan főív, amelyek együttesen sem tartalmaznak kapcsolt ívpárt, nem metszi, illetőleg legfeljebb egy pontban metszi egymást, a szerint, amint a két főív $G_c''$ görbén szomszédos, illetőleg nem szomszédos. Egy kapcsolt ívpárt tartalmazó főív legfeljebb eggyel több pontban metszheti önmagát, mint egy olyan főív, amelyen nincs kapcsolt ívpár. Két olyan főív, amelyek együttvéve tartalmaznak kapcsolt ívpárt, legfeljebb eggyel több pontban metszi egymást, mint amennyiben hasonló tulajdonságú, (a görbén egymásra következő, illetőleg nem következő), de kapcsolt ívpárt nem tartalmazó két főív egymást metszheti.

Egy olyan főívnek ugyanis, amely önmagát metszi, vannak párhuzamos érintői, s így van rajta kapcsolt pontpár és ezzel együtt kapcsolt ívpár. Egy ilyen főívnek egy kapcsolt pontpárja közé eső íve $\pi$ teljes görbültségű és így magában foglalja a görbe kiegészítő darabján fekvő pontok kapcsolt pontjait. Ha tehát van a $G_c''$ görbének önmagát metsző főíve, akkor ez a főív és a többi $c-1$ főív közül akármelyik tartalmaz együttesen egy kapcsolt ívpárt, amelyből az egyik ív az önmagát nem metsző főív, a másik pedig ennek a főívnek kapcsolt íve.

Ha pedig két főív egymást $A$ és $B$ pontban metszi, akkor az $AB$ egyenessel mindkét főívnek van egy-egy párhuzamos érintője. A két főíven van tehát kapcsolt pontpár és így kapcsolt ívpár is.

Ha nem vesszük figyelembe, hogy egy $G_c''$ görbén kapcsolt ívpárok is vannak, akkor a görbén legfeljebb $\frac{c(c-3)}{2}$ kettőspontot számolhatunk össze, mivel kapcsolt ívpárt nem tartalmazó főív önmagát, kapcsolt ívpárt nem tartalmazó szomszédos két

főív egymást nem metszheti, és mivel kapcsolt ívpárt nem tartalmazó nem szomszédos két főív egymást legfeljebb egy pontban metszheti. Egy olyan főíven vagy főívpáron, amelyen van kapcsolt ívpár, a metszéspontok száma legfeljebb eggyel nagyobb, mint akkor volna lehetséges, ha a főíven, illetőleg főívpáron nem volna kapcsolt ívpár.

Ha tehát $s$ kapcsolt ívpárból áll a $G_c''$ görbe, akkor az előbb a kapcsolt ívpárok figyelembe vétele nélkül összeszámlált kettőspontokhoz legfeljebb $s$ újabb kettőspont járulhat, mert csak $s$-félekép lehet a $c$ főív közül egy vagy két főívet kiválasztani úgy, hogy azon, illetőleg azokon legyen kapcsolt ívpár. Ebből következik, hogy az $s$ kapcsolt ívpárból álló $G_c''$ görbének legfeljebb $\frac{c(c-3)}{2} + s$ kettőspontja lehet.

Ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

Minthogy $s \leqq c$ és $\frac{c(c-3)}{2} + c = \frac{c(c-1)}{2}$, azért igaz a következő tétel is:

II. *Egy $G_c''$ görbének legfeljebb $\frac{c(c-1)}{2}$ kettőspontja lehet.*

Minthogy van olyan $G$ görbe, amelynek $\frac{c(c-1)}{2}$ kettőspontja van,[5] azért még a következő tételt is kimondhatjuk:

III. *A $G_c''$ görbék kettőspontjainak maximális száma $\frac{c(c-1)}{2}$. Ezt a maximális számot csak olyan $G_c''$ görbe érheti el, amelynek $c$ számú csúcsérintője közül nincs két párhuzamos.*

## 3. Egy kettőspont átvágása és a keletkezett szögpontok lekerekítése, illetőleg kihegyezése.

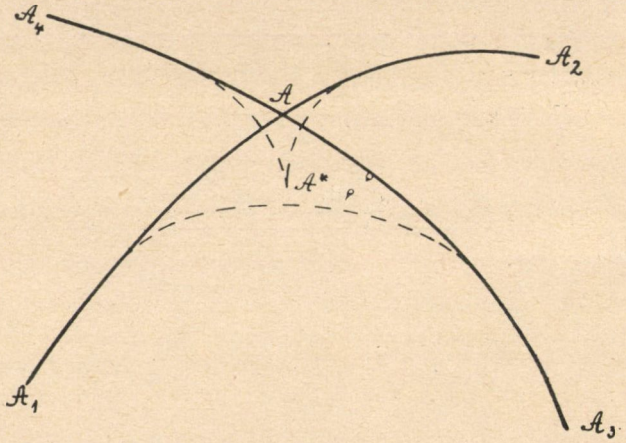
Elemi íven folytonos érintővel bíró konvex ívet értünk. Ha az $A_1A_2$ és $A_3A_4$ elég kicsiny elemi ívek egymást egyetlen egy pontban, $A$-ban metszik, akkor az $AA_1$ és $AA_3$, $AA_1$ és $AA_4$, $AA_2$ és $AA_4$, $AA_2$ és $AA_3$ ívpárok az $A$ pontban négy szögpontot alkotnak. Ezeket a szögpontokat az alkotó elemi ívpárokkal együtt $A_1AA_3$, $A_1AA_4$, $A_2AA_4$, $A_2AA_3$ szögpontoknak fogjuk nevezni. E közül a négy szögpont közül nyilvánkép egy

[5] A, 704. oldal.

és csak egy tartozhatik konvex tartomány határához. Ezt a szögpontot *konvex szögpontnak* fogjuk nevezni. Ha $A_1AA_3$ a konvex szögpont, akkor az $A_2AA_4$ szögpontot *konkáv szögpontnak*, az $A_1AA_4$ és $A_2AA_3$ szögpontokat *konvex-konkáv szögpontoknak* fogjuk nevezni. (L. az 1. ábrát.)

Az $A$ metszéspont, kettőspont *átvágása* a konvex szögpontnak a konkávtól való elválasztása, levágása.

Egy $G_c''$ görbének bármely valódi kettőspontja két elég kicsiny elemi ívnek metszéspontja.




1. ábra.

A $G_c''$ görbe egy $P$ csúcspontjában ugyanis csak akkor metszheti önmagát, ha a $P$ csúcspont $p$ érintője $P$-ben egyszersmind a görbének $P$-n átmenő másik ívét is érinti. Ez azonban lehetetlen, mivel ekkor $p$ kettősérintő volna.

A $G_c''$ egy $A$ *kettőspontjának átvágása* az $A$ kettőspontban egymást metsző elég kicsiny elemi ív metszéspontjának átvágása.

Ki fogjuk mutatni a következő tételt:

IV. *Egy $G_c''$ görbét bármely valódi kettőspontjának átvágása két zárt részre, pszeudomenetre bontja föl.*

Ennek a tételnek kimutatása végett tegyük föl, hogy a $G_c''$ görbe $A$ kettőspontjában a görbe elég kicsiny $A_1A_2$ és $A_3A_4$ elemi ívei metszik egymást és hogy $A_1AA_3$ a görbe $A$ kettőspontjában a konvex szögpont.

Ha az $A$ pontból az $AA_1$ elemi íven kiindulva a folytonos érintő irányában mindaddig haladunk a $G_c''$ görbén, amíg az $A$ ponthoz először visszaérkezünk, akkor az $A_3A$ elemi íven jutunk vissza az $A$-hoz.

Nem juthatunk ugyanis $A$-hoz az $A_2A$ íven vissza, mert ha ezen az elemi íven jutnánk $A$-hoz vissza, akkor a $G_c''$ görbe nem lehetne egymenetű. De az $A$-hoz való visszaérkezés nem történhetik az $A_4A$ elemi íven sem, mivel a görbén való továbbhaladás alatt az érintő állandóan ugyanabban az értelemben fordul el és mivel az $A_4A$ íven $A_4$-ből kiindulva az érintő ellenkező értelemben forog az érintéspont körül, mint az $AA_1$ íven $A$-tól kezdve.

Ezzel ki van mutatva az előbb kimondott tétel, mert azalatt, amíg az $AA_1$ íven $A$-ból kiindulva és a görbén folytonos érintővel tovább haladva $A$-hoz ismét visszajutunk, az $A_1AA_3$ konvex szögpont két ívét befutjuk, de nem futjuk be az $A_2AA_4$ konkáv szögpont egyik ívét sem. A konvex és a konkáv szögpont tehát két különböző pszeudomenethez tartozik.

A $G_c''$ görbe $A$ kettőspontjának átvágása után a kapott $G_1$ és $G_2$ pszeudomenetek közül az egyiken a konvex, a másikon a konkáv szögpont van rajta. Föltesszük, hogy $G_2$-n van a konvex szögpont rajta.

Ha $\alpha$ jelöli azt a $\pi$-nél kisebb szöget, amelyet a konvex szögpont $A$ pontjához tartozó két félérintő egymással alkot, akkor a $G_2$, illetőleg $G_1$ pszeudomenetnek nyilvánkép egy $2\pi - \alpha$, illetőleg $\alpha$ a teljes görbültsége.

Ha az $A$ konvex szögpontot *lekerekítjük*,[6] akkor ezáltal a $G_2$ pszeudomenetet nyilvánkép egy $2\pi$ teljes görbülettel bíró olyan $G_2^*$ görbébe alakítjuk át, amelynek bármely irányban két párhuzamos érintője van. Ha ennek a görbének nincs kettősérintője, akkor $G_c''$ görbe. Nincs kizárva azonban az az eset, hogy a $G_2^*$ görbének kettősérintője is van.

A $G_1$ görbe konkáv szögpontjának bizonyos folytonos de-

---

[6] C. JUEL: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. Mém. de. L'Akad. Royal des Sc. et des Lettres de Danemark, 7. série, Sect. des. Sc. t. XI. n 2 (1914), 123—125. oldal.

formációjával, a konkáv szögpont *kihegyezésével* a $G_1$ görbét egy $G'_{c_1}$ görbébe vihetjük át.

Ha ugyanis $A_2AA_4$ a konkáv szögpont, akkor az $A_2AA_4$ ív helyettesíthető $A_2A^*$ és $A^*A_4$ elemi ívekből álló olyan $A_2A^*A_4$ ívvel, amelynek $A^*$ pontja elsőfajú csúcspont, és amelynek végpontjaiban ugyanazok a félérintők, mint az $A_2AA_4$ ív végpontjaiban. A deformáció elvégezhető úgy, hogy az $A^*$ az $A$ ponthoz akármilyen közel essék. (L. az 1. ábrát.)

A $G_1$ görbéből ezzel az eljárással a konkáv szögpont kihegyezésével kapott görbe nyilvánkép $G'_{c_1}$ görbe.

Az $A_1AA_3$ konvex szögpont lekerekítése után az $A_2AA_4$ konkáv szögpont kihegyezése nyilvánkép elvégezhető úgy, hogy az $A_1AA_3$ konvex szögpontot helyettesítő elemi ívnek és az $A_2AA_4$ konkáv szögpontot helyettesítő $A_2A^*A_4$ ívnek ne legyen közös pontja. (Lásd az 1. ábrát.)

Ennek alapján kimondhatjuk a következő tételt:

V. *Egy $G''_c$ görbe egy kettőspontjának átvágásával és azután a kapott konvex, illetőleg konkáv szögpont lekerekítésével, illetőleg megfelelő kihegyezésével két görbére bontható fel. Ezek közül az egyik $G'_{c_1}$ görbe, a másik pedig vagy $G''_{c_2}$ görbe vagy legalább bír egy $G''_{c_2}$ görbének azokkal a tulajdonságaival, hogy bármely irányban két érintője van és hogy nincs inflexiós érintője; kettősérintője azonban lehet. Az így kapott két görbének együttvéve eggyel több csúcspontja van, mint a $G''_c$ görbének. Azoknak a pontoknak együttes száma pedig, amelyekben a két görbe önmagát és egymást metszi, eggyel kevesebb, mint azoknak a pontoknak száma, amelyekben a $G''_c$ görbe önmagát metszi.*

## 4. A $G'_c$ görbék kettőspontjainak száma.

A $G'_c$ görbék kettőspontjai számának meghatározására szükségünk van a $G'_c$ görbékre vonatkozó következő tételre:

VI. *A páratlan számú $c$ csúcsponttal bíró, érintőszingularitásnélküli és végesben fekvő $G'_c$ görbéknek $d$ kettőspontszámai*

$$d = \frac{c-3}{2} + 2k \quad \left(\leqq \frac{c(c-3)}{2}\right)$$

*alakú számok, ahol k nem negatív egész számokat jelent.*

A $G'_c$ görbék kettőspontszámának maximuma[7] $\frac{c(c-3)}{2}$. Ebből következik, hogy $c=3$ esetben $d=0$ és $k=0$. Ebben az esetben tehát a VI. tétel fennáll.

Föltételezzük, hogy a VI. tétel minden olyan páratlan $c$-re fennáll, amely nem nagyobb, mint egy páratlan $c_0 (\geqq 3)$ egészszám. Ki fogjuk mutatni, hogy ekkor a tétel olyan $G'_{\bar{c}}$ görbékre is igaz, amelyeknek csúcspontszáma $\bar{c} = c_0 + 2$.

A $G'_{c_0+2}$ görbét egy kettőspontjának átvágása szintén két pszeudomenetre bontja fel, amelyeknek együttes teljes görbültsége $\pi$. A konvex szögpontot tartalmazó pszeudomenet a konvex szögpont lekerekítésével egy $G'_{c_1}$ görbébe megy át. Hasonlókép $G'_{c_2}$ görbe lesz a konkáv szögpontot tartalmazó pszeudomenet a konkáv szögpont kihegyezésével. Ezt a kihegyezést azonban úgy végezzük el, hogy a konvex szögpont lekerekítésekor és a konkáv szögpont kihegyezésekor deformált két ívnek ne legyen közös pontja. (L. az 1. ábrát).

Ha $d_1$, $d_2$, illetőleg $d_{12}$ jelöli a $G'_{c_1}$ és $G'_{c_2}$ görbék kettőspontjainak, illetőleg metszéspontjainak számát, akkor nyilvánképen fennállanak a következő egyenlőségek

$$c_1 + c_2 = \bar{c} + 1 = c_0 + 3 \quad \text{és} \quad d = d_1 + d_2 + d_{12} + 1. \qquad (1)$$

Minthogy egy $G'_c$ görbének legalább három csúcspontja van, azért fennállanak egyszersmind a következő egyenlőtlenségek

$$c_1 \geqq 3, \; c_2 \geqq 3 \quad \text{és így} \quad c_1 \leqq c_0, \; c_2 \leqq c_0. \qquad (2)$$

Föltevésünk és ezen egyenlőtlenségek alapján tehát fönnállanak a $G'_{c_1}$ és $G'_{c_2}$ görbék kettőspontjainak számára a

$$d_1 = \frac{c_1-3}{2} + 2k_1, \; d_2 = \frac{c_2-3}{2} + 2k_2, \; d_{12} = 2k_{12} \qquad (3)$$

---

[7] A, 702. oldal. Lásd H. Brunn: Über Kurven ohne Wendepunkte, München 1889, 21. oldal.

egyenletek, ahol $k_1$, $k_2$ és $k_{12}$ nem negatív egész számok. Az utolsó egyenlőség amiatt igaz, mert két páros görbének páros számú metszéspontja van.

Az (1) és (3) összefüggések alapján

$$d = d_1 + d_2 + 1 + d_{12} = \frac{(c_1+c_2-1)-3}{2} + 2(k_1+k_2+k_{12}) =$$

$$= \frac{\bar{c}-3}{2} + 2k,$$

ahol $k$ nem negatív egész szám. Ezzel a VI. tétel be van bizonyítva.

## 5. A $G_c''$ görbék kettőspontszámának alsó határa.

Ki fogjuk mutatni a következő tételt:

VII. *Ha $G_c^\star$ inflexiós érintőnélküli és végesben fekvő olyan síkgörbe, amelynek $c$ számú elsőfajú csúcspontja van és amelynek bármely irányban két különböző vagy összeeső érintője van, akkor a $G_c^\star$ görbe legalább $\frac{c}{2} - 2$ pontban metszi önmagát. Ezeknek a metszéspontoknak $d$ száma minden esetben $d = \frac{c}{2} - 2 + 2k$ alakú, ahol $k$ nem negatív egész szám.*

Mivel a $G_c^\star$ görbéhez a sík végtelen távoli pontjaiból két érintő húzható, azért osztályszáma páros. Ebből következik, hogy $c$ is páros szám. Mivel a görbének nincs inflexiós pontja, azért a görbének befutásakor az érintő állandóan ugyanabban az értelemben fordul, teljes görbültsége ennek alapján $2\pi$.

Föltételezhetjük, hogy a $G_c^\star$ görbének azok a pontjai, amelyekben önmagát metszi, mind közönséges kettőspontok, mert ha nem volnának ilyenek, akkor olyan folytonos deformációval, amely a görbe csúcspontjainak és kettőspontjainak számát nem változtatja meg, a $G_c^\star$ görbe egy hasonló tulajdonságú olyan görbébe vihető át, amelyre a föltevés fönnáll.

Az olyan $G_c^\star$ görbe, amelynek nincs kettőspontja, maximális osztályindexű. Az ilyen görbe ugyanis két tartományra bontja fel a síkot, az egyiknek pontjaiból, (amely a sík végtelen távoli pontjait tartalmazza), két-két érintő húzható a görbéhez, a másiknak pontjaiból pedig vagy egy érintő sem húzható a görbéhez, vagy

pedig négy-négy érintő húzható. Egy tartomány pontjaiból nyilvánkép ugyanannyi érintő megy a görbéhez, mert egy tartomány két pontja mindig összeköthető olyan vonallal, amely sem a görbét, sem pedig (nem létező) valós inflexiós érintőit nem metszi.

A kettőspontnélküli $G_c^\star$ görbe tehát vagy másodosztályú és zéró osztályindexű síkgörbe, ovális, amely egyszersmind $G_0''$ görbe, vagy pedig negyedosztályú és kettős osztályindexű síkgörbe. Ez a görbe elsőfajú maximális osztályindexű síkgörbe, mivel a síknak az a tartománya, amelynek pontjaiból a görbéhez minimális számú, azaz két-két érintő húzható, kétszeresen összefüggő.[8] Az ilyen görbének tehát $c=n-2+2p=4-2+2=4$ csúcspontja és $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1=\frac{(4-1)(4-2)}{2}-1=2$ számú kettőséríntője van.[9]

Ennek kettőspontnélküli $G_0''$, illetőleg $G_4^\star$ görbének tehát

$$d=\frac{c}{2}-2+2k \tag{4}$$

számú kettőspontja van, ahol $k$ nem negatív egész szám (és pedig egy, illetőleg zéró).

Föltételezzük, hogy minden olyan páros $c$-re, amely nem nagyobb, mint a páros $c_0$ szám, a $G_c^\star$ görbék kettőspontjainak száma (4) alakú, ahol $k$ nem negatív egész szám. Ki fogjuk mutatni, hogy kettőspontok száma akkor is ilyen alakú, ha a csúcspontok száma $\bar{c}=c_0+2$.

A $G_{c_0+2}^\star$ görbe egy kettőspontjának fölvágásával és azután a kapott konvex, illetőleg konkáv szögpont lekerekítésével, illetőleg alkalmas kihegyezésével olyan $G_{c_1}'$ és $G_{c_2}^\star$ görbékre bomlik fel, hogy

$$c_1+c_2=\bar{c}+1=c_0+3 \quad \text{és} \quad d=d_1+d_2+d_{12}+1, \tag{5}$$

[8] Sz. Nagy Gyula: Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, Math. Annalen 89 (1923), 32—75. oldal, 90 (1924), 152—153. oldal; különösen 49—51. oldal.

[9] Sz. Nagy Gyula: Maximális osztályindexű síkgörbék jellemző számairól. Mat. és Természettud. Ért. 43 (1926), 290—306; Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximal-Klassenindex, Math. Annalen 100 (1928), 164—178.

ahol $d_1$, $d_2$, illetőleg $d_{12}$ a $G'_{c_1}$, $G^*_{c_2}$ görbék kettőspontjainak, illetőleg metszéspontjainak számát jelenti. Ez a 3. § alapján $G^*_c$ görbékre is minden további nélkül belátható.

A $d_{12}$ szám itt is páros, mivel a páros $G'_{c_1}$ és $G^*_{c_2}$ görbéknek párosszámú metszéspontjuk van. Ennélfogva $d_{12} = 2k_{12}$, ahol $k_{12}$ nem negativ egész szám.

Az (5) alatti első egyenlőségből következik, hogy vagy

$$c_2 = 0 \quad \text{és} \quad c_1 = \bar{c} + 1 = c_0 + 3, \tag{6}$$

vagy

$$2 \leqq c_2 \leqq c_0 \quad \text{és} \quad c_1 = c_0 + 3 - c_2 \geqq 3. \tag{7}$$

Az első esetben a $G^*_{c_1}$ görbe ovális és így

$$d_2 = 0, \; d_1 = \frac{(\bar{c}+1)-3}{2} + 2k_1 = \frac{\bar{c}}{2} - 1 + 2k_1.$$

Az (5) alatti összefüggések alapján tehát

$$d = d_1 + d_2 + d_{12} + 1 = \frac{\bar{c}}{2} + 2(k_1 + k_{12}) = \frac{\bar{c}}{2} - 2 + 2(1 + k_1 + k_{12}).$$

A második esetben $c_2 \leqq c_0$ lévén

$$d_2 = \frac{c_2}{2} - 2 + 2k_2, \; d_1 = \frac{c_1 - 3}{2} + 2k_1, \; d_{12} = 2k_{12},$$

ennélfogva

$$d = d_1 + d_2 + d_{12} + 1 = \frac{c_1 + c_2 - 1}{2} - 2 + 2(k_1 + k_2 + k_{12}) =$$

$$= \frac{\bar{c}}{2} - 2 + 2k.$$

Ezzel a VII. tétel be van bizonyítva.

Egyszersmind bebizonyítottuk a következő tételt:

VIII. *A $G''_c$ görbék kettőspontjainak számai*

$$d = \frac{c}{2} + 2(k-1) \leqq \frac{c(c-3)}{2}$$

*alakú egész számok, ahol $k$ nem negatív egész számokat jelent.*

Előző dolgozatomban kimutattam,[10] hogy egy olyan $G_c''$ görbének, amelynek egy főíve önmagát metszi, legalább $\frac{c}{2}$ számú kettőspontja van. Másrészt bármely $c$ páros számhoz van olyan $G_c''$ görbe, amelynek pontosan $\frac{c}{2}$ számú kettőspontja van.[11]

Minden valószínűség szerint $\frac{c}{2}$ a $G_c''$ és $\frac{c}{2} - 2$ a $G_c^*$ görbék kettőspontjainak minimuma, úgyhogy a VIII. tételben $k$ csak pozitív egész számokat jelenthet. Ennek a valószínűségnek pontos bebizonyítása azonban nekem nem sikerült.

## 6. A $G_c''$ görbék külső és belső ívei.

A $G_c''$ görbét csúcspontjai és kettőspontjai bizonyos számú ívre bontják fel. Ezek közül az ívek közül egy ív *külső ív*, ha a sík végtelen távoli pontjaiból a görbe átlépése nélkül elérhető, az ellenkező esetben az ív *belső ív*. A külső ív *konvex*, illetőleg *konkáv* a szerint, amint a sík végtelen távoli pontjaiból annak konvex, illetőleg konkáv oldala érhető el.

Ki fogjuk mutatni a következő tételt:

IX. *Bármely $G_c''$ görbe érintőinek a görbével való metszéspontjai közül az illető érintőn a két szélső metszéspont konkáv külső ívnek pontja.*

Jelöljük $P_1$- és $P_2$-vel azt a két szélső metszéspontot, amelyben a $G_c'$ görbét egy $P_0$ pontjához tartozó $p_0$ érintő a görbét metszi. E szerint a jelölés szerint a $G_c''$ görbének a $p_0$ egyenes $P_1P_2$ szakaszán kívüli darabjával legfeljebb a $P_0$ érintéspontja lehet közös.

A $P_1$ és $P_2$ pontok a $G_c''$ görbét $G_1$ és $G_2$ ívekre bontják fel. E két ív közül azt, amelynek a $p_0$ érintővel van párhuzamos érintője, $G_2$-vel fogjuk jelölni.

Induljon ki most a $P_1$ pontból a $G_1$ íven egy $P$ pont és fussa be a $G_1$ ívet. Jelölje $Q$ a $P$ ponthoz tartozó érintőnek a $p_0 \equiv P_1P_2$ egyenessel való metszéspontját.

Mialatt a $P$ pont a $G_1$ íven $P_1$-ből $P_2$-ig halad, azalatt a $Q$ pont nem juthat el a $p_0$ egyenes végtelen távoli pontjába,

[10] A, 707. oldal.

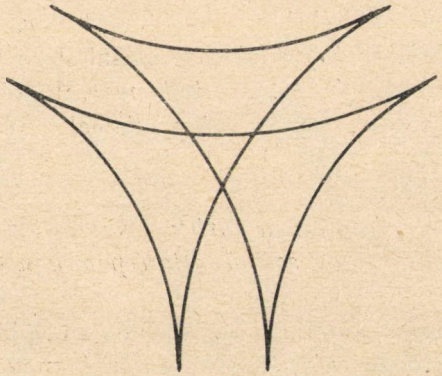
[11] A, 712. oldal.

mivel a $G_1$ ívnek a $p_0$ egyenessel nincs párhuzamos érintője. Ha $P$ a $P_0$-ba jut, akkor nyilvánkép $Q$ is összeesik $P_0$-lal.

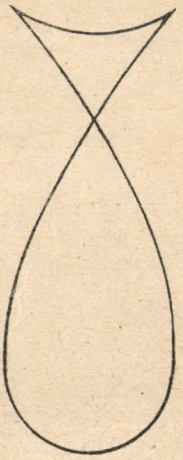
A $P$ pont haladása közben a Q pont haladásértelmét csak akkor változtathatja meg, amikor a $P$ pont a $G_1$ íven a $p_0$ egyenest átlépi, mivel a $G_1$ görbének nincs inflexiós érintője.

Ezekből most már következik, hogy a $P$ pontnak a $G_1$ íven $P_1$-től $P_2$-ig való haladása közben a $Q$ pont a $P_1P_2$ intervallumban mozog.

Mivel a $G_1$ ívnek a $P_1$ vagy $P_2$ ponttal szomszédos pontjaihoz tartozó érintők csak akkor metszhetik a $P_1P_2$ szakaszt, ha



2. ábra.



3. ábra.

ennek a szakasznak pontjaiból $P_1$-ben és $P_2$-ben a $G_1$ ív konvex oldala érhető el, azért ezzel a IX. tétel be van bizonyítva.

A IX. tételből következik a következő tétel:

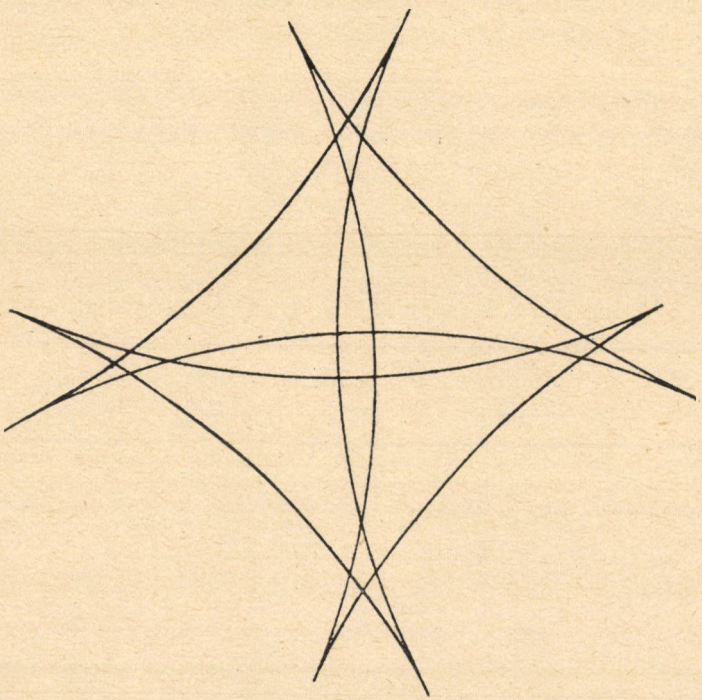
X. *Oválisokon kívül nincs más olyan $G_c''$ görbe, amelynek külső ívei mind konvexek volnának.*

Ha ugyanis $G_c''$ egy ilyen görbe, akkor külső íveinek egy végpontja sem lehet csúcspont vagy kettőspont.

Az $AB$ és $AC$ külső ívek közös $A$ végpontja nem lehet csúcspont, mert ha az volna, akkor a két ívnek $A$-hoz elég közeli pontjaiban az érintő metszené a másik külső ívet és egy

ilyen érintővel a $G_c''$ görbéből kimetszett két szélső metszéspont a IX. tétel értelmében konkáv külső íven feküdnék.

Ha pedig kettőspont volna a $G_c''$ görbén az $AB$ és $AC$ külső ívek $A$ végpontja, akkor e két külső ívnek $A$ végponttal bíró elég kicsiny darabjai nyilvánképen konkáv szögpontot alkotnának, mivel a sík végtelen távoli pontjaiból a görbe átlépése



4. ábra.

nélkül mindkét külső ívnek konvex oldala érhető el. A konkáv szögpontot alkotó két elemi ív közül akármelyiknek az $A$ ponthoz elég közeli pontjaiban meghúzott érintő pedig nyilvánkép metszi a másik elemi ívet, az ilyen érintővel a $G$ görbéből kivágott két szélső metszéspont tehát konkáv külső íveken feküdnék.

Ezekből az ellentmondásokból következik, hogy a csupa konvex külső ívekkel bíró $G_c''$ görbének nincs sem szinguláris pontja, sem szinguláris érintője. Az ilyen görbe tehát ovális.

A X. tétel kiegészítésekép kimondhatjuk a következő tételt:

XI. *Van olyan $G_c''$ görbe, amelynek összes külső ívei konkávok, van olyan is, amelynek külső ívei részben konvexek, részben konkávok.*

Ennek a tételnek megfelelő legegyszerűbb két görbét a 2., illetőleg 3. ábra mutatja.

Mivel egy elemi ív konvex oldalán az elemi ívhez elég közel fekvő pontokból az elemi ívhez két érintő húzható, és mivel egy $G_c'$ görbéhez a sík végtelen távoli pontjaiból csak egy érintő húzható, azért nyilvánvaló a következő tétel:

XII. *Bármely $G_c'$ görbének összes külső ívei konkávok.*

A 2. ábra olyan $G_c''$ görbét állít elő, melynek bármely két párhuzamos érintője egymástól ugyanakkora távolságra van. Ilyen szempontból ez a görbe általánosított állandó szélességű görbének tekinthető.

A 2., illetőleg 3. ábrán előállított görbe osztályindexe nyilvánkép 2, illetőleg 0. Ebből következik a következő tétel:

XIII. *A $G_c''$ görbék osztályindexüket tekintve kétfélék: zéró vagy kettősosztályindexűek. Azok a görbék, amelyeknek van konvex külső ívük, mind zéróosztályindexűek.*

A tétel második része meg nem fordítható, mivel vannak csupa konkáv külső ívekkel bíró és zeró osztályindexű $G_c''$ görbék. Egy ilyen görbét állít elő a 4. ábra.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. okt. 14-én tartott üléséből.)

# ÜBER DIE EBENEN KURVEN OHNE TANGENTENSINGULARITÄT UND VOM INDEX NULL.

Von JULIUS v. SZŐKEFALVI NAGY.

Unter einer Kurve verstehen wir hier eine einzügige ebene Elementarkurve, d. h. eine einzügige geschlossene ebene Kurve, die aus endlichvielen Elementarbogen besteht und keine Ecke und keine gerade Strecke besitzt.

Eine Kurve $G_r'$ bzw. $G_r''$ bedeutet eine im Endlichen liegende Kurve mit $r$ Spitzen erster Art ohne Tangentensingularität, je nachdem $r$ eine ungerade bzw. gerade Zahl ist.

Im Anschluss an eine vorige Arbeit des Verfassers[1] werden besonders die Kurven $G_r''$ behandelt.

Zwei Punkte einer Kurve $G_r''$, in denen die Tangenten parallel sind, werden *konjugierte Punkte* der Kurve genannt.

*Wird eine Kurve $G_r'$ von den $r$ Spitzen und von ihren konjugierten Punkten in $2s$ Bogen geteilt, so kann die Kurve höchstens $\frac{r(r-3)}{2}+s$ Doppelpunkte haben. Eine Kurve $G_r''$ kann also höchstens $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkte haben.*

*Die Anzahl $d$ der Doppelpunkte einer Kurve $G_r''$ hat die Form*

$$d=\frac{r-3}{2}+2(k-1)\left(\leqq\frac{r(r-1)}{2}\right),$$

*wo $k$ eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet.*

---

[1] Über im Endlichen liegende ebene Kurven ohne Tangentensingularität, Math. und Naturwiss. Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wiss. Bd. 47 (1930), 693—713 (ungarisch) mit einer deutschen Zusammenfassung 714—715.

Bedeutet $G_r^*$ eine im Endlichen liegende ebene Kurve ohne Wendetangente und mit $r$ Spitzen, die in jeder Richtung zwei verschiedene oder zusammenfallende Tangenten besitzt, so hat die Anzahl der Doppelpunkte der Kurve $G_r^*$ wieder die vorige Form $d = \frac{r-3}{2} + 2(k-1)$, wo $k$ eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet.

Eine Kurve $G_r''$ wird von ihren Spitzen und Doppelpunkten in eine gewisse Anzahl der Bogen geteilt. Einer von diesen Bogen wird ein *äusserer Bogen* genannt, wenn man aus den unendlichfernen Punkten der Ebene ihn erreichen kann, ohne die Kurve übertreten zu müssen. Ein Bogen ist ein *innerer Bogen,* wenn er kein äusserer Bogen ist.

Ein äusserer Bogen ist konvex bzw. konkav, je nachdem man aus den unendlichfernen Punkten der Ebene ihre konvexe bzw. konkave Seite erreichen kann.

*Die zwei äusseren Schnittpunkte, in denen eine Kurve $G_r''$ von einer Tangente geschnitten wird, liegen immer auf konkaven äusseren Bogen der Kurve.*

*Es gibt ausser den Ovalen keine anderen Kurven $G_r''$, die nur konvexe äussere Bogen haben. Es gibt Kurven $G_r''$, deren äussere Bogen lauter konkav sind. Es gibt auch Kurven $G_r''$, deren äussere Bogen teils konvex, teils konkav sind.*

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

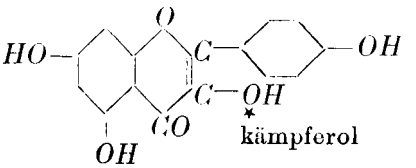
# A ROBININRÓL, A ROBINOBIÓZRÓL ÉS A KÄMPFEROL-RHAMNOZIDRÓL.

ZEMPLÉN GÉZA r. tagtól.

A robinint ZWENGER és DRONKE[1] különítette el először az ákácvirág kivonatából. Később SCHMIDT,[2] WALIASCHKO[3] és PERKIN[4] foglalkoztak vele részletesebben. Megtalálták újabban a fehér- és kékvirágú Vinca minor virágában is.[5]

WALIASCHKO vizsgálataiból ismeretes, hogy ez a sárgaszínű flavonolglükozid híg savakkal bontva kämpferolra és 3 molekula egyszerű cukorra bomlik; utóbbi közül 2 molekula az *l*-rhamnózzal azonos, a harmadik pedig *d*-galaktóz.

A kämpferol szerkezete régóta tisztázódott[6] és a következő szimbolumnak megfelelőnek bizonyult:



kämpferol

Ellenben a három cukormolekulának a kapcsolódási módja egymáshoz és a kämpferol hidroxiljaihoz sokáig ismeretlen maradt.

---

[1] ZWENGER és DRONKE: Annalen der Chem. u. Pharm. 1861, Suppl. II. 257. l.

[2] E. SCHMIDT: Arch. der Pharmazie 242. 220 (1904); Apotheker Zeitung 1901. 357.

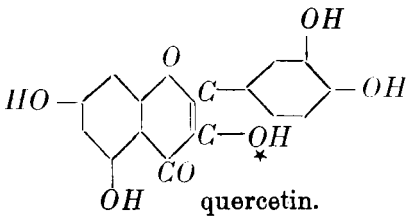
[3] WALIASCHKO: Arch. d. Pharm. 242, 383. (1904).

[4] A. G. PERKIN: Journ. Chem. Soc. 81, 473. (1902).

[5] RABATÉ. Chem. Zentralblatt 1933. I. 2262.

[6] V. KOSTANECKI és TAMBOR: Ber. d. Deutch. Chem. Ges. 37, 792 (1904).

ATTREE és PERKIN [1] vizsgálataiból, melyek a quercetinglükozidokra vonatkoznak, tudjuk, hogy bennük a cukorcsoportok a csillaggal jelölt hidroxilba vannak éterszerűen bekapcsolva. Mivel pedig a quercetin igen közelálló rokona a kämpferolnak, az analógiákon alapulva következtetni lehet, hogy a robininglükozidban is az analóg helyen történik a cukorcsoportok bekapcsolódása a csillaggal jelölt helyen:



quercetin.

Viszont ebből az következik, hogy a robrininban a három cukormolekula egymással anhidridszerűen összekapcsolva egy trisaccharid formájában szerepel.

Ezt a tényt bizonyítaná CHARAUX [2]-nak munkája, mely szerint sikerült volna neki enzímes bontás útján a kämpferol anyalúgjából egy trisaccharidot elkülöníteni, melyet *robinóz*-nak nevezett el, de melyet élesen jellemezni nem tudott.

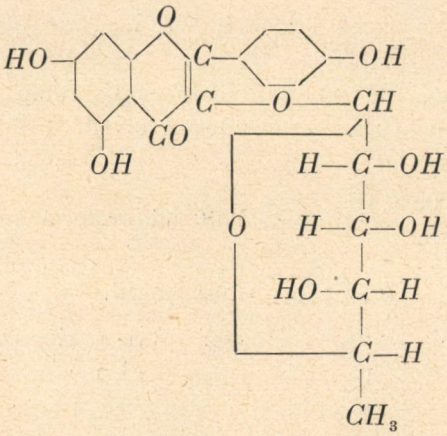
Érdemesnek tartottam ezt a kérdést vizsgálat tárgyává tenni és a következő eredményt értem el:

A rhamnus utilis magjából előállított enzimkészítmény elbontja a robinint, de nem abban az irányban, ahogyan azt CHARAUX leírta, amennyiben az általa kämpferolnak nézett sárga festék nem a kämpferol maga, hanem annak rhamnózzal létesített glükozidja, a *kämpferol-rhamnozid* nevű új glükozid, melynek szerkezete a következő szimbolumnak megfelelő:

---

[1] ATTREE és PERKIN: Journ. Chem. Soc. London 1927, 234.

[2] C. CHARAUX: Bull. Soc. Chim. Biol. 8, 915 (1926); Chem. Zentralblatt 1926. II. 2922.



Ugyanekkor a vízben oldható anyalúgból nem trisaccharid különíthető el, hanem disaccharid, melyet «*robinobióz*»-nak nevezek el és melynek szerkezete olyan, hogy a rhamnóz első szénatomja kapcsolódik bele a galaktóznak valamelyik távolabb eső hidroxiljába, és a galaktóznak első szénatomja szabad. Ezt bizonyítja a robinobióznak hypojodittal való oxidációja, melyben a rhamnóz érintetlenül fellelhető, míg a galaktózrész galaktonsavvá alakul.

Ezek alapján most már bizonyos, hogy a robininban a kämpferol trisaccharidhoz van kötve, amely trisaccharidot azonban eddig nem különítették el és amely trisaccharid úgy van felépítve, hogy benne a galaktóz foglal középen helyet, kétoldalt pedig egy-egy rhamnózmolekula helyezkedik el. Szimbolikusan következőképpen érzékíthetjük a szerkezetét:

rhamnóz — galaktóz — rhamnóz.

## KÍSÉRLETI RÉSZ.

### Robinin-acetat.

14·5 g robinint 100 ccm ecetsavanhidriddal és 15 g vízmentes nátriumacetattal 1 óra hosszat melegítünk vízfürdőben, majd a reakciókeveréket vízbe öntjük. A kivált olaj keverés közben hamarosan megszilárdul. Másnap leszívatjuk a porrá szét-

hulló csapadékot, vízzel kimossuk és megszárítjuk. Termelés 21 g fehér por.

*Olvadáspont:* 135°-on kezd összeesni, azután lassan megpuhul és 175°-on színtelen folyadékká olvad.

*Optikai vizsgálat:*

$$[\alpha]_D^{26} = \frac{-3{\cdot}08 \times 10}{0{\cdot}3214} = -\ 95{\cdot}83°$$ chloroformban.

## Kämpferol-rhamnozid.

A robininnak enzimes bontása után a kivált citromsárga csapadékot leszűrjük, megszárítjuk és legkényelmesebben extraháló készülékben alkohollal kioldjuk. Az alkoholos oldatból extrahálás közben kezd a kämpferol-rhamnozid egy része kiválni; a többi kinyerhető az alkoholos oldatnak csökkentett nyomás mellett való bepárlásánál. A tisztítás szintén forró alkoholban való oldás és lehűlés, illetőleg az anyalúgoknak bekoncentrálása útján történik. 180 g robininból nyertem kereken 70 g tisztított anyagot és körülbelül 30 g nyersterméket. A 180 g robinint 100 kg szárított ákácvirágnak feldolgozása útján kaptam ki.

A kämpferol-rhamnozid citromsárga, apró kristályokat alkot, melyek levegőn 60—70° között szárítva még kristályvizet tartalmaznak. A kristályvíz meghatározására 1·6336 g vákuumban foszforpentoxid felett szárított anyagot 97°-nál szárítottam tovább. A súlyveszteség 0·0674 g volt, vagyis 4·13%. Ha a kämpferol-rhamnozidra 1 molekula kristályvizet számítunk ($C_{21}H_{20}O_{10} + H_2O$), akkor a számított kristályvízmennyiség: 4·0%. A vízmentes anyag gázfejlődés közben 230°-nál bomlik. Acetonban jól oldódik, methyl- és äthylalkoholban melegen is nehezen; hideg vízben, benzolban, chloroformban, benzinben nem oldódik.

*Redukálóképesség hidrolízis után.* A meghatározás úgy történt, hogy a lemért vízmentes anyagot 20 ccm 1%-os sósavval két órahosszat forraltuk visszacsepegő hűtő alatt, a kivált kämpferolt leszívattuk, kimostuk, az anyagot semlegesítettük és meghatároztuk az oldat redukálóképességét. 0·1997 g szárított anyag fogyasztott 20·70 ccm $^n/_{10}$ $KMnO_4$-et = 0·0712 g glükóz, vagyis 35·7% (glükóz = 100).

## A kämpferol-rhamnozid hidrolízise, a kämpferol és a rhamnóz elkülönítése.

10 g kämpferol-rhamnozidot 500 ccm 1%-os sósavval forralunk két órahosszat. Lehűtés után leszívatjuk az oldatot a kämpferolról. Az oldatból ezüstcarbonáttal kicsapjuk a sósavat, a megszűrt oldatból pedig kénhidrogénnel az oldatba ment ezüstöt. Derítés és szűrés után csökkentett nyomás alatt 100 ccm-nyire pároljuk be az oldatot. Újbóli derítés és szűrés után folytatjuk a vákuumbepárlást szirupsűrűségig, majd a szirupot kristályosító csészébe öntve és forró alkohollal utánaöblítve rhamnózhidráttal beoltjuk, és hagyjuk néhány napig kristályosodni. Köpcös kristályokban válik ki a ramnózhidrát. Amikor már alig van anyalúgja a sok kristálynak, kevés alkohollal elkeverjük, alaposan leszívatjuk és a kristályokat 10 ccm forró alkoholban oldjuk. Egyheti állás után leszívatjuk a szintelen kristályokat és vakuumexszikkátorban foszforpentoxid fölött megszárítjuk; termelés 2·15 g. Az alkoholos anyalúg lassú bepárolgása útján még 0·8 g kissé tapadós és kissé színezett terméket nyertünk.

A tiszta termék 93·5—94°-nál olvad.

*Kristályvíztartalom:* 0·6220 g anyag 105°-on szárítva, súlyveszteség 0·0616 g, vagyis 9·90%. $C_6H_{12}O_5+H_2O$ képletből számított kristályvíztartalom: 9·89%.

*Optikai forgatóképesség:* 5 órával a vízben való feloldás után

$$[\alpha]_D^{25} = + \frac{10 \times 0{,}29}{0{\cdot}3402} = + 8{\cdot}53°$$ vízben.

Ezek az adatok az *l*-rhamnózhydrátra jellemzők.

A hidrolízis másik terméke, melyet elkülönítettünk, a kämpferol. Ez a hidrolízis folyamán mint citromsárga apró tűkből álló csapadék jelenik meg, amelyről a rhamnóz oldatát leszűrtük. A csapadék kimosás és megszárítás után 6·6 g volt. Ezt 110 ccm forró alkoholban oldottuk és 100 ccm forró vizet adva az oldathoz, átkristályosítottuk. Másnap leszívattuk és 50%-os alkohollal mostuk, majd megszárítottuk. Súlya 5·9 g.

*Kristályvíztartalom:* 97°-ig 0·45%-ot veszít. Ez az anyag 120°-on tovább szárítva lead 6·07% vizet (1·0646 g : 0·0646 g-ot).

Számított kristályvíztartalom $C_{15}H_{10}O_6+H_2O$ képletet véve alapul: 5·92%.

A termék az irodalomban leírt színes fémlakkokat mind adja.

## Kämpferol-rhamnozid-acetat.

2·5 gr kämpferol-rhamnozidot 2·5 g vízmentes nátrium-acetattal és 12·5 ccm ecetsavanhidriddel megacetylezünk 1 óra hosszat vízfürdőn való melegítéssel, azután 30 ccm vízbe öntjük. Másnap cseréljük az anyalúgot, mire víz alatt szétporíthatóvá válik. Leszívatás után 8 ccm alkoholban oldjuk, derítjük és szűrjük, majd 60—80 ccm vízbe csepegtetjük be. A kivált pelyhes anyagot leszívatjuk és vákuumexszikkátorban szárítjuk. Termelés 3·1 g fehér, amorf por, mely jól oldódik methylalkoholban, alkoholban, benzolban, chloroformban, vízben nem, benzínben melegen is nagyon nehezen.

Hajszálcsőben melegítve 116°-nál kezd összeesni, azután fokozatosan puhul és 159°-nál színtelen folyadékká olvad.

*Optikai forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{26} = \frac{-3{\cdot}10 \times 10}{0{\cdot}4032} = -76{\cdot}88°$$ chloroformban.

## Rhamnosido-galaktóz (Robinobióz).

100 g robinint 5 liter vízben szuszpendálunk, melyben előzetesen 4 g Rhamnus utilis enzimport[1] oldottunk fel. A keveréket éterrel dezinficiáljuk. Néhány nap mulva sűrű zöldessárga kocsonyává válik az egész tömeg. Ez a kocsonya napok mulva kezd lassan kiengedni, folyton hígabbá válik, egyszersmind kezdenek megjelenni benne a kämpferol-rhamnozid apró kristályai. Körülbelül három hét mulva a bontás be van fejezve, ami arról ismerhető fel, hogy a szüredéknek redukálóképessége két különböző időszakban kivett mintában többé már nem változik. A csapadékról az oldatot leszűrjük, 20%-os merenziacetat-oldattal addig elegyítjük (nehány ccm), míg új csapadék hozzáadására

[1] G. Zemplén u. Árpád Gerecs: Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft 68, 1320. (1935).

már nem keletkezik. A higanyacetát hatására kivált csapadékot leszűrjük, majd kénhidrogén bevezetésével kicsapjuk a higanyfelesleget és a megszűrt és szénnel megderített oldatot csökkentett nyomás mellett 40°-on szirupsűrűségűre párologtatjuk. A szirupot abszolut-alkoholba öntjük, a kivált anyag fölött az alkoholt több ízben cseréljük, azután alkohol alatt szétporítjuk, leszívatjuk és vákuumexszikkatorba foszforpentoxid fölött megszárítjuk. Nyertünk 13 g hófehér, meglehetősen higroszkópos port.

*Nedvességtartalom:* 1·5006 g anyag foszforpentoxid fölött vákuumban 90°-on megszárítva veszít 0·1530 g nedvességet: 10·20%-ot.

*Redukálóképesség:* 0·1020 g anyag, fogyaszt 13·20 ccm $^n/_{10}$ $KMnO_4$ oldatot = 0·0436 g glükóz = 47·6% száraz anyagra számítva (glükóz = 100).

*Redukálóképesség hidrolízis után:* 0·0576 g anyagot 10 ccm 5%-os sósavval két óra hosszat forraltunk visszacsepegő hűtőn, majd az oldatot lúggal hűtés közben lesemlegesítve mértük a redukcióképességét BERTRAND szerint. Elfogyott 14·02 ccm $^n/_{10}$ $KMnO_4$ = 0·0565 glükóz = 89·0% száraz anyagra számítva (glükóz = 100).

*Optikai forgatóképesség* vízben néhány perccel a feloldás után:

$$[\alpha]_D^{25} = + \frac{10 + 0{\cdot}08}{0{\cdot}3280} = + 2{\cdot}44°,$$ ez száraz anyagra számítva $= +2{\cdot}72°$. 15 óra mulva $[\alpha]_D^{25} = 0°$.

A redukálóképesség és a forgatóképesség adatait CHARAUX a *robinóz* nevű trisaccharidjára vonatkozólag megadta, egyéb támaszpontot összehasonlítás céljából munkájában nem találunk. A robinózra nézve megad körülbelül 44%-nyi redukciót (glükóz = 100), $[\alpha]_D$-re pedig vizes oldatban két perccel a feloldás után + 5·17°-ot és végső $[\alpha]_D$-re +1·94°-ot. Ha tekintetbe vesszük, hogy amorf készítményről van szó, nem kételkedhetünk benne, hogy CHARAUX-nak ugyanaz a termék volt kezében, mint nekem, de nem vizsgálta meg rendszeresen, és így elkerülte figyelmét az, hogy nem trisaccharidal, hanem disaccharidal van dolga. Hogy a cukor valóban disaccharid, még pedig *l-rhamnosido–d-galaktóz*, azt a következő kísérletek igazolják.

*A rhamnóz meghatározása methylfurfurolphloroglucid alakban.* 0·2042 g anyag, a sósavas TOLLENS-féle módszer szerint desztillálva adott 0·0980 g methylfurfurolphloroglucidot. Ez megfelel 53·4% rhamnózhydrat-nak száraz anyagra számítva.

Ugyanezt a meghatározást elvégeztük a hypojodittal oxidált anyagban. 0·2022 g anyaghoz hozzáadtunk 25 ccm $^n/_{10}$ jódoldatot és rázás közben 40 ccm $^n/_{10}$ *NaOH* oldatot. 15 perc mulva az oldatot 4·5 ccm n. kénsavval megsavanyítottuk és híg biszulfitoldattal ráztuk, amíg a jód színe éppen eltűnt. Most konz. sósavval beállítjuk az oldatot 12%-nyi sósavtartalomra és rendes metylfurfuroldesztillációnak vetjük alá. Nyertünk 0·0486 g methylfurfurolphloroglucidot, ami megfelel 0·0784 g rhamnózhidrátnak = 43·2% száraz anyagra számítva.

Ezek a meghatározások azt bizonyítják, hogy a robinobióz mellett az anyagban kereken 10%-nyi szabad rhamnóz is van. Ennek eredete minden valószínűség szerint a kämpferol-rhamnozidnak az enzimes bomlásából ered.

*A galaktóztartalom meghatározása.* VAN DER HAAR[1] szerint történt, a galaktóznak híg salétromsavval nyálkasavvá való átalakítása útján. 0·2090 g anyag adott 0·0476 g nyálkasavat = 0·0784 g galaktóz, vagyis 41·8% száraz anyagra számítva.

*

A termék további tisztítását az acetylvegyületen keresztül végeztük. Sajnos, ez a termék sem volt kristályos állapotba hozható, ami könnyen érthető, ha elgondoljuk, hogy a rhamnóz acetylvegyületei is nagyon rosszul kristályosodnak. Az acetylvegyületből azonban el tudtunk jutni a jól kristályosodó *acetochlorrobinobiózhoz*, belőle pedig a chlornak methoxylcsoporttal való kicserélése útján a robinobióznak *β-methylglükozidjához*, mely szintén jól kristályosodó termék.

## Robinobióz acetat szabad robinobiózból.

Az egyesített alkoholos anyalúgokat, melyből a szabad robinobiózt leválasztottuk, csökkentett nyomás mellett bepárologtat-

[1] VAN DER HAAR: Anleitung zum Nachweis, Trennung und Bestimmung der Monosaccharide. Gebr. Borntraeger Berlin, 1920. 123 l.

tuk és a maradékot 30 g vízmentes nátriumacetattal es 120 ccm ecetsavanhidriddel megacetyleztük egy óra hosszat tartó vízfürdőn való melegítés útján, majd a reakciókeveréket 350 ccm vízbe öntöttük. Másnap kivontuk chloroformmal az acetyltermékeket, savmentessé mostuk, chlorcalciummal az oldatot megszárítottuk, csökkentett nyomás alatt szárazra pároltuk, a maradékot kevés alkoholban feloldottuk és vízbe öntöttük. A kivált anyagot víz alatt szétporítottuk és leszívatás, kimosás után vákuumexszikkátorban foszforpentoxid fölött megszárítottuk. Nyertünk 21 g fehér port, mely alkohol és methylalkoholban, továbbá chloroformban könnyen oldódik, s amelynek tulajdonságai a következők.

*Olvadáspont:* 70°-nál kezd zsugorodni, azután fokozatosan puhul, 113°-nál átlátszó folyadékká olvad.

*Redukálóképesség:* 0·1548 g : 12·20 ccm $^n/_{10}$ $KMnO_5$ = 0·0400 g glükóz = 25·8% (glükóz = 100).

*Redukálóképesség hidrolízis után:* Hidrolízis tartama két óra, 5%-os sósavval. 0·1032 g : 14·53 ccm $^n/_{10}$ $KMnO_4$ = 0·0484 g glükóz = 46·9% (glükóz = 100).

*Optikai forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{26} = -\frac{0{\cdot}45 \times 10}{0{\cdot}2310} = -19{\cdot}23°$$ chloroformban.

## Robinobióz-acetat acetochlor-robinobiózból.

1 g acetochlor-robinobiózt 0·5 g ezüstacetattal és 3 ccm ecetsavanhidriddel két óra hosszat melegítünk vízfürdőn. A vízbeöntött reakciókeveréket az anhidrid elbomlása után chloroformmal kioldjuk, a vizes chloroformos oldatot az ezüstsók eltávolítása végett leszívatjuk, a chloroformos részt elkülönítjük, háromszor vízzel mossuk, chlorcalciummal megszárítjuk és csökkentett nyomás alatt szárazra pároljuk. A maradékot kevés ecetsavanhidridben oldjuk és az oldatot vákuumdesztillációnak vetjük alá, hogy a chloroformot teljesen elűzzük. Most az anyagot vízbe öntjük, a kivált olajat víz alatt szétdolgozzuk, míg porrá hullik szét, majd leszívatjuk, vízzel mossuk és vákuumexszikkátorban foszforpentoxid és nátronmész fölött megszárít-

juk. Nyertünk 0·8 g fehér port, mely methylalkoholban, alkoholban és chloroformban jól oldódik, és következő tulajdonságokkal bír.

*Olvadáspont:* 78° körül zsugorodik, 116°-nál színtelen folyadékká olvad.

*Redukálóképesség:* 0·1004 g : 7·84 ccm $^n/_{10}$ $KMnO_4$ = 0·0251 g glükóz = 25·0 (glükóz = 100).

*Redukálóképesség hidrolízis után:* (2 óra, 5%-os sósav): 0·1014 g : 14·52 ccm. $^n/_{10}$ $KMnO_4$ = 0·0483 g glükóz = 47·6 (glükóz = 100).

*Optikai forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{23} = -\frac{0{\cdot}29 \times 10}{0{\cdot}1958} = -14{\cdot}81°$$ chloroformban.

## α-Acetochlor-robinobióz.

5 g robinobióz-acetatot, mely a nyers robinobiózból készült, 35 ccm alkoholmentes chloroformban oldunk és 1·5 g titántetrachlorid chloroformos oldatával elegyítjük, majd három óra hosszat hagyjuk állni szobahőmérsékleten. Összeöntéskor sárga csapadék válik ki, amely azután fokozatosan feloldódik, az oldat pedig megsötétedik. Most jeges vízbe öntjük, vízzel savmentesre mossuk, chlorcalciummal megszárítjuk és a szüredéket csökkentett nyomás mellett sűrű olajra bepároljuk. Az olajat 20 ccm absz. éterben oldjuk és hagyjuk 2—3 óra hosszat szobahőmérsékleten, majd félóra hosszat jeges vízben kristályosodni. — A kristályokat leszívatjuk, éterrel mossuk, majd vákuumexszikkátorban megszárítjuk. Termelés 1·1 g. Mikroszkóp alatt apró csónakformájú kristályok láthatók, melyek gömbökké állnak össze.

*Olvadáspont:* 178° gázfejlődés és bomlás közben.

*Chlortartalom:* 0·2078 g : 3·46 ccm. $^n/_{10}$ $AgNO_3$ = 5·90% *Cl.* Acetochlor-robinobiózra (596·72)-re számított érték 5·94% Cl.

*Optikai forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{22} = -\frac{0{\cdot}09 \times 10}{0{\cdot}2022} = -4{\cdot}45°$$ chloroformban.

Megismételtük a kísérletet a következő mennyiségekkel: 18 g acetat, 120 ccm chloroformban és 5·4 g titántetrachlorid

54 ccm chloroformban, és kaptunk 4·25 g terméket, melynek sajátságai a következők:

*Olvadáspont:* 180°-on gázfejlődés és bomlás közben.

*Chlortartalom:* 0·2050 g: 3·26 cm $^n/_{10}$ $AgNO_3$=5·64% *Cl.*

*Optikai forgatóképesség:*

$$[\alpha]_D^{26} = -\frac{0{\cdot}15 \times 10}{0{\cdot}2968} = -5{\cdot}05°$$ chloroformban.

*Galaktóz meghatározás* VAN DER HAAR szerint: 0·4018 g: 0·0718 g nyálkasav = 0·1124 g galaktóz =28·0%.

Számított galaktóztartalom: 30·18%.

*Rhamnózhydrát tartalom:* 0·3938 g: 0·0702 g methylfurfurolphloroglucid = 0·1168 g rhamnózhydrát = 29·7%.

Számított rhamnózhydráttartalom: 30·52%.

### β-Methyl-robinobiozid-acetat.

1 g acetochlor-robinobiózt 1 g ezüstcarbonat jelenlétében 15 ccm methylalkohollal egy óra hosszat forralunk visszacsepegő hűtő alatt. A szüredéket csökkentett nyomás alatt szárazra pároljuk és a maradékot 1 g vízmentes nátriumacetattal és 3 ccm ecetsavanhidriddel megacetylezzük, majd a reakciókeveréket vízbe öntjük. Másnap a kivált kristályokat leszivatjuk és megszárítjuk. A kapott 0·7 g nyerstermékét 2·5 ccm forró alkoholból átkristályosítjuk és vákuumexszikkátorban foszforpentoxid fölött megszárítjuk. Kitermelés 0·56 g apró kristályos, színtelen vegyület.

*Olvadáspont:* 153·5—154·5°.

*Methoxyltartalom:* 5·430 mg: 2·090 mg. $AgJ$ = 5·09%. $C_{25}H_{36}O_{16}$ = 592·29-re számított methoxyltartalom 5·24%.

*Optikai forgatóképesség:*

$$[\alpha]_{Di}^{24} = -\frac{0{\cdot}32 \times 10}{0{\cdot}1268} = -25{\cdot}24°$$ chloroformban.

A kísérletek végrehajtásánál GERECS ÁRPÁD úr volt segítségemre, miért is neki köszönetet mondok. Köszönettel tartozom továbbá a «*Rockefeller Fundation*»-nek anyagi támogatásáért.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott üléséből.)

# ÜBER ROBININ, ROBINOBIOSE UND KÄMPFEROL-RHAMNOSID.

Von GÉZA ZEMPLÉN o. M.

Bei der Spaltung des Robinins mit einem Enzym aus den Samen von Rhamnus utilis erhielt *Charaux* neben Kämpferol ein wenig charakterisiertes Trisaccharid, das er Robinose nannte. Dieses Trisaccharid ergibt bei der Spaltung des Robinins mit verdünnten Säuren 1 Mol. Galaktose und 2 Mol. Rhamnose. Um die Robinose besser kennen zu lernen, habe ich die Spaltung des Robinins näher untersucht, jedoch ein durchaus von *Charaux* verschiedenes Resultat erhalten. Bei der enzymatischen Spaltung bildet sich kein Kämpferol, sondern Kämpferol-l-rhamnosid. Aus den Mutterlaugen desselben konnte ich einen amorphen, farblosen Zucker isolieren, der in seinen Eigenschaften der von *Charaux* beschriebenen Robinose sehr ähnlich ist. Die Untersuchung dieser Substanz zeigte, dass nicht eine Triose, sondern eine Biose vorliegt, und zwar, wie dies die Oxydation mit Hypojodit beweist, eine l-Rhamnosido-d-galaktose, die ich *Robinobiose* nenne. Die Acetylverbindung dieser Biose ist noch ein amorphes, farbloses Pulver, sie kann aber in eine gut krystallisierende $\alpha$-Aceto-chlorverbindung übergeführt werden, die dann ein ebenfalls gut krystallisierendes $\beta$-Methylrobinobiosid liefert. Aus den Versuchen folgt, dass in der bisher noch nicht isolierten Robinose die Reihenfolge der Monosen folgende ist.: l-Rhamnose-d-Galaktose-l-Rhamnose.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# A TRIPLETT MOLEKULATERMEKRŐL ÉS A TRIPLETT SÁVOK INTENZITÁSÁRÓL.

BUDÓ ÁGOSTON-tól.

Míg a kétatomos molekuláknál a dublett-termek energiáit és a termek közötti átmenetek valószínűségeit (s így a vonalak intenzitásait) az elmélet az összes kísérletileg tanulmányozott esetre vonatkozólag a tapasztalattal egyezésben szolgáltatta, addig a triplett-termeknél ezek nincsenek az általános esetben meghatározva. Innen van, hogy a triplett-termeknél az elméleti határesetekre levezetett formulák alapján számított állandók csak «effektívek», a vonalaknak mért és az elméletből adódó hullámszámai között nincs jó megegyezés, a rotációsanalízis is nehezebb, a vonalak intenzitásait elméletileg nem számíthatjuk ki. A jelen dolgozat célja ezen hiányok pótlása, valamint a nyert eredményeknek a tapasztalattal való összehasonlítása.

Az $f$ elektront tartalmazó kétatomos molekula problémájának megoldása az egyes elektronok spinjeit is tekintetbevéve $2f$ számú szimultán hullámegyenlet integrálására vezethető vissza.[1*] Bizonyos tagok elhanyagolása mellett mindegyik hullámegyenlet szeparálható három részre, amelyek közül az első az egyes elektronok mozgását, a második a magok rezgését, a harmadik a magok forgását meghatározó koordinátákat tartalmazza s a két utóbbi rész mindegyik hullámegyenletnél ugyanazon alakú. Azokban az esetekben, amelyek az ismert HUND-féle vektormodell $a$ és $b$ eseteinek felelnek meg (kvantumszámok az $a$ esetben $\Lambda$, $\Sigma$, $\Omega$, J, a $b$ esetben $\Lambda$, $S$, $K$, $J$), ez a szeparáció keresztülvihető, az első esetben főképen a rotáció és a spin precesszió

* A számok a dolgozat végén összeállított munkákra vonatkoznak.

közötti, a másodikban az elektronok rezultáns impulzusmomentuma és a spin közötti kölcsönhatást kifejező tagok elhanyagolása által. A rotációs energia a két esetben:[2]

$$W_{a\,\mathrm{rot}} = B\,[J\,(J+1) - \Omega^2] \tag{1}$$

$$W_{b\,\mathrm{rot}} = B\,[K(K+1) - \Lambda^2]. \tag{2}$$

A hullámegyenletben elhanyagolt tagok befolyása a perturbációelmélettel vehető számba. Hill és Van Vleck dublett-termeknél a $b$ esetből kiindulva kapták az energiát az általános esetben, a jelen triplett-feladatnál az $a$ esetből indulunk ki, mert így egyrészt a perturbációs matrix elemei könnyebben megállapíthatók, másrészt a későbbi intenzitásformulák egyszerűbben megkaphatók.

A kvantummechanikai perturbációelmélet szerint a perturbált rendszer $W$ energiáját és koordinátáit meghatározhatjuk, ha találunk egy olyan unitär $S$ matrixot, hogy

$$SHS^{-1} = W \tag{3}$$

diagonális matrix legyen. Itt $H = W_a + H_p$, ahol $W_a$ a kiindulásul szolgáló alaprendszer energiája s mint ilyen, diagonális matrix, $H_p$ pedig a perturbációs matrix. Az $a$ esetben könnyen számbavehető a $\vec{\Lambda}$ és $\vec{S}$ vektorok mágneses természetű kölcsönhatása. Erről feltehetjük, hogy a «cosinus-törvénynek» engedelmeskedik, azaz $A\,(\vec{\Lambda}_x\vec{S}_x + \vec{\Lambda}_y\vec{S}_y + \vec{\Lambda}_z\vec{S}_z)$ alakú. A $z$-tengelynek a molekula tengelyét választva $\vec{\Lambda}_x = \vec{\Lambda}_y = 0$, $\vec{\Lambda}_z = \Lambda$, $\vec{S}_z = \Sigma$ s így ezen kölcsönhatásból származó energia $A\Lambda\Sigma$. Továbbá, mivel az $\vec{S}$ spin és vetülete a molekulatengelyre $\Sigma$ éppen úgy viselkednek, mint $\vec{J}$ és vetülete $\Omega$, (1) alapján a spinnek rotációsenergiája $B\,[S(S+1) - \Sigma^2]$ lesz, úgyhogy az $a$ esetben az energia, ha még $\Omega$ helyébe $(\Lambda + \Sigma)$-t teszünk (az elektron- és rezgési energiát leszámítva):

$$W_a = W_a(\Sigma, \Sigma) = \\ = A\Lambda\Sigma + B\,[J(J+1) - (\Lambda+\Sigma)^2 + S(S+1) - \Sigma^2]. \tag{4}$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $J$, $\Omega$, $S$, $\Sigma$ ugyanolyan szerepet töltenek be a molekulánál az elektronkeringések $\vec{\Lambda}$ vektorral jel-

lemzett mágneses terében, mint $k$, $m_k$, $s$, $m_s$ az atomnál egy erős külső mágneses térben, akkor HEISENBERG-nek és JORDAN-nak a ZEEMANN-effektusra vonatkozó munkája [3] alapján feltehetjük, hogy a perturbációs matrix nemdiagonális elemei a

$$[J(J+1) - \Omega(\Omega-1)]^{1/2}\,[S(S+1) - \Sigma(\Sigma-1)]^{1/2}$$

kifejezéssel lesznek arányosak. Ezen feltevés jogosultságát, valamint (4) helyességét részletesen igazolta VAN VLECK a hullámegyenlet tekintetbevételével,[4] szerinte a perturbációs matrix elemei:

$$H_p(\Sigma, \Sigma \pm 1) = B\{[J(J+1) - (\Lambda+\Sigma)(\Lambda+\Sigma\pm 1)]\,[S(S+1) - \Sigma(\Sigma\pm 1)]\}^{1/2} \tag{5}$$

$$H_p(\Sigma, \Sigma) = 0. \tag{6}$$

Triplett állapotoknál $\Sigma = +1, 0, -1$, amelyeket rendre röviden 1, 2, 3 indexszel fogunk jelölni.

A $H$ matrix elemei most már részletesen kiírva, ha, mint máshol is közbeeső számításoknál a

$$J(J+1) = \bar{J} \tag{7}$$

jelölést használjuk és

$$Y = \frac{A}{B} \tag{8}$$

paramétert bevezetjük, a következők:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= B\,[-\Lambda^2 + \bar{J} + \Lambda(Y-2)] \\
H_{22} &= B\,[-\Lambda^2 + \bar{J} + 2] \\
H_{33} &= B\,[-\Lambda^2 + \bar{J} - \Lambda(Y-2)] \\
H_{12} &= H_{21} = B.2^{1/2}\,[\bar{J} - \Lambda(\Lambda+1)]^{1/2} \\
H_{23} &= H_{32} = B.2^{1/2}\,[\bar{J} - \Lambda(\Lambda-1)]^{1/2} \\
H_{31} &= H_{13} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

A (3) alatti egyenlet $SH = WS$ alakban is írható s ez az alábbi egyenletekhez vezet:

$$\begin{aligned}
(H_{11} - W_i)\,S_{i1} + H_{12}S_{i2} + H_{13}S_{i3} &= 0 \\
H_{12}\,S_{i1} + (H_{22} - W_i)\,S_{i2} + H_{23}S_{i3} &= 0 \qquad (i=1,2,3,) \\
H_{13}\,S_{i1} + H_{23}S_{i2} + (H_{33} - W_i)\,S_{i3} &= 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

ahol tekintetbevettük, hogy $H_{ik} = H_{ki}^* = H_{ki}$ és $W_{ii}$ helyett csak $W_i$-t írtunk. (10) determinánsát zérussá téve (9) matrixelemek felhasználásával kapjuk $W$ (ill. $W + B\Lambda^2$) számára a következő egyenletet:

$$\begin{aligned}(W + B\Lambda^2)^3 - B(3\bar{J} + 2)(W + B\Lambda^2)^2 + \\ + B^2[3\bar{J}^2 - \Lambda^2 Y(Y-4)](W + B\Lambda^2) - \\ - B^3([\bar{J}^3 - 2\bar{J}^2 - \Lambda^2 Y(Y-4) - 2\Lambda^2 Y(Y-2)] = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

(11) jelentékenyen egyszerűsödik, ha $W$ helyett a $w$ mennyiséget vezetjük be a következő összefüggéssel:

$$W + B\Lambda^2 = B[w + (\bar{J} + \tfrac{2}{3})]. \tag{12}$$

Ekkor (11)-ből kapjuk:

$$w^3 - (y_1 + 4\bar{J})w + \tfrac{4}{3}(y_2 - 2\bar{J}) = 0, \tag{13}$$

ahol

$$\begin{aligned}y_1 &= \Lambda^2 Y(Y-4) + \tfrac{4}{3} \\ y_2 &= \Lambda^2 Y(Y-1) - \tfrac{4}{9}.\end{aligned} \tag{14}$$

(11)-nek mint szekuláris egyenletnek s így (13)-nak is mind a három gyöke valós, ezek trigonometrikus alakban:

$$\begin{aligned}w_3 &= \frac{2}{3^{1/2}}(y_1 + 4\bar{J})^{1/2}\cos\frac{\varphi}{3} \\ w_{2,1} &= -\frac{2}{3^{1/2}}(y_1 + 4\bar{J})^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

ahol

$$\cos\varphi = -2.3^{1/2}\frac{y_2 - 2\bar{J}}{(y_1 + 4\bar{J})^{3/2}} = x. \tag{16}$$

A (15)-ben előforduló $\cos(\frac{1}{3}\arccos x)$, $\cos[\frac{1}{3}(\arccos x \pm \pi)]$ kifejezéseket az $x = 0$ hely környezetében sorbafejtjük, e sorok konvergensek, ha $|x| < 1$.* Ekkor a gyökök lesznek:

* $|x| > 1$ nem lehetséges, mert ekkor képzetes gyökök volnának; $|x| = 1$ esetben többszörös gyök van, ez az eset azonban a gyakorlatban jelentőséggel nem bír.

$$w_3 = (y_1 + 4\bar{J})^{1/2} - \frac{2}{3}\frac{y_2 - 2\bar{J}}{y_1 + 4\bar{J}} - \frac{2}{3}\frac{(y_2 - 2\bar{J})^2}{(y_1 + 4\bar{J})^{5/2}} - \frac{32}{27}\frac{(y_2 - 2\bar{J})^3}{(y_1 + 4\bar{J})^4} + \cdots$$

$$w_2 = \frac{4}{3}\frac{y_2 - 2\bar{J}}{y_1 + 4\bar{J}} + \frac{64}{27}\frac{(y_2 - 2\bar{J})^3}{(y_1 + 4\bar{J})^4} + \cdots \qquad (17)$$

$$w_1 = -(y_1 + 4\bar{J})^{1/2} - \frac{2}{3}\frac{y_2 - 2\bar{J}}{y_1 + 4\bar{J}} + \frac{2}{3}\frac{(y_2 - 2\bar{J})^2}{(y_1 + 4\bar{J})^{5/2}} - \frac{32}{27}\frac{(y_2 - 2\bar{J})^3}{(y_1 + 4\bar{J})^4} + \cdots.$$

Tekintettel (12)-re az energiaértékekre kapjuk:

$$W_3(J) = B\left[-\Lambda^2 + \frac{2}{3} + J(J+1) + [y_1 + 4J(J+1)]^{1/2} - \frac{2}{3}\frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)}\right] \qquad (18_a)$$

$$W_2(J) = B\left[-\Lambda^2 + \frac{2}{3} + J(J+1) + \frac{4}{3}\frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)}\right] \qquad (18_b)$$

$$W_1(J) = B\left[-\Lambda^2 + \frac{2}{3} + J(J+1) - [y_1 + 4J(J+1)]^{1/2} - \frac{2}{3}\frac{y_2 - 2J(J+1)}{y_1 + 4J(J+1)}\right], \qquad (18_c)$$

ahol (17)-ből csak az első két tagot vettük figyelembe, mert a többi értéke rendszerint (az összes eddig ismert esetben) a mérési hiba határánál kisebb.

Ezek az eredmények nem vonatkoznak a $J = \Lambda - 1$ állapotra (általában nem vonatkoznak azokra, amelyeknél $J < \Lambda$, de triplett termeknél csak $J = \Lambda - 1$ lehetséges), mert ekkor (9)-ben $H_{12}$, $H_{21}$ nem az ottani alakúak, hanem $H_{12} = 2iB\Lambda^{1/2}$, $H_{21} = -2iB\Lambda^{1/2}$ (mivel $H$ hermetikus). Ebben az esetben (11) helyett más egyenletet kapunk, amely a (12) transzformációval átmegy a

$$w^3 - [y_1 + 4\Lambda(\Lambda + 1)]\, w + \tfrac{4}{3}[y_2' - 2\Lambda(\Lambda + 1)] = 0 \qquad (13')$$

alakba, ahol most

$$y_2' = \Lambda^2(Y - 3)(Y - 4) - \tfrac{4}{9}. \qquad (14')$$

A $J = \Lambda - 1$ állapotnál tehát a gyököket szintén a (18) formulák adják, ha a négyzetgyökös és törtkifejezésekben $J$ helyébe $\Lambda$-t, $y_2$ helyébe $y_2'$-t teszünk. (A gyökök egyébként akkor $H_{23} = H_{32} = 0$ miatt egyszerű zárt alakban is megkaphatók).

Kérdés, hogy a (18) által kifejezett energiaértékek a tiszta $a$ és a tiszta $b$ esetben felírt energiák [l. (4) és (2)] melyikének felelnek meg. [Triplett esetben (4)-ben $S(S+1)=2$, $\Omega=\Lambda+\Sigma$, ahol $\Sigma=+1, 0, -1$; (2)-ben $K=J+1, J, J-1$.] Ha $Y$ igen nagy $J$-hez képest (közel $a$ eset), tekintetbe véve $y_1$, $y_2$ értékeit és az $A=BY$ összefüggést, ($18_a$), ($18_b$), ($18_c$) nagy megközelítéssel írható:

1) ha $A>0$, azaz ha a term normális: *

$$W_3(J) = B[-\Lambda^2+\tfrac{2}{3}+J(J+1)+(Y-2)\Lambda-\tfrac{2}{3}] = \\ = A\Lambda(+1)+B[J(J+1)-(\Lambda+1)^2+2-1^2]$$
$$W_2(J) = B[-\Lambda^2+\tfrac{2}{3}+J(J+1)+\tfrac{4}{3}] = \\ = A\Lambda.0+B[J(J+1)-(\Lambda+0)^2+2-0^2]$$
$$W_1(J) = B[-\Lambda^2+\tfrac{2}{3}+J(J+1)-(Y-2)]\Lambda-\tfrac{2}{3}] = \\ = A\Lambda(-1)+B[J(J+1)-(\Lambda-1)^2+2-(-1)^2],$$

2) ha $A<0$, azaz ha a term fordított: *

$$W_3(J) = A\Lambda(-1)+B[J(J+1)-(\Lambda-1)^2+2-(-1)^2]$$
$$W_2(J) = A\Lambda.0\ +B[J(J+1)-(\Lambda+0)^2+2-0^2]$$
$$W_1(J) = A\Lambda(+1)+B[J(J+1)-(\Lambda+1)^2+2-1^2].$$

Összehasonlítva ezeket (4)-el látható, hogy $A>0$-nál $W_3$-, $W_2$-, $W_1$-nek megfelel sorban $\Sigma=+1, 0, -1$, $A<0$-nál pedig $\Sigma=-1$, $0, +1$. — Másrészt, ha $Y$ igen kicsiny $J$-hez képest (közel $b$ eset), ($18_a$)-, ($18_b$)-, ($18_c$)-ben $J(J+1)$-hez rendre a $2(J+1)$, 0, $-2J$ tagok jönnek s így $(J+1)(J+2)$, $J(J+1)$, $(J-1)J$ tagokat kapunk. Az összehasonlítás (2)-vel mutatja, hogy $W_3$ megfelel a $J=K-1$, $W_2$ a $J=K$, $W_1$ pedig a $J=K+1$ állapotoknak $Y$ előjelétől függetlenül. Azokat az állapotokat, amelyeknél $J=K-1$, $K$, $K+1$, az irodalomban $F_3$, $F_2$, $F_1$-el szokás jelölni, ezért választottuk a fenti $W_3$, $W_2$, $W_1$ jelölést.

Hill és Van Vleck, akik a (11) egyenletet a $b$ esetből mint nem perturbált rendszerből kiindulva kapták meg [4] (valamive

* Normális a term akkor, ha ugyanazon $J$-nél a legnagyobb $\Omega$-hoz ($\Sigma=+1$) tartozik a legnagyobb energia, fordított, ha a legkisebb $\Omega$-hoz ($\Sigma=-1$). (4)-re való tekintettel ezek a meghatározások egyértelműek azzal, hogy $A>0$, ill. $A<0$.

különböző alakban), az energiaértékeket $Y^{-1}$ hatványsorának tételezve fel a sor együtthatóit az egyenletbe való helyettesítéssel $Y^{-2}$ együtthatójáig bezárólag meghatározták. Az általános közbülső esetben, amikor $Y^{-1}$ nem nagyon kicsiny, ez az eljárás nem használható, mert egyrészt sok tagot kellene tekintetbe venni, másrészt meg ezen kifejtés együtthatói $J$ függvényei és $Y^{-1}$ növekvő hatványaival $J$ hatványai is nőnek (mint a kifejtés folytatása mutatta), úgyhogy nem tudni, ez a sor konvergens-e minden $J$-nél. Ismerve most már a (18) alakú megoldást, mondhatjuk, hogy ez a kifejtés a két szélső termkomponensnél csak akkor megengedett, ha $4J(J+1) < y_1$, vagyis mintegy $J < \left|\frac{Y}{2}\right|$-nél. Az összes eddig ismert triplett-termnél azonban ennél a $J$-nél sokkal nagyobb rotációsállapotok is léteznek, amelyeknek energiájára tehát a Hill és Van Vleck-féle közelítő megoldásból nem következtethetünk.

A (18) formulák alapján lehetővé válik a triplett-termek rotációsállandóinak pontos meghatározása, amely eddig, mint az alábbiakban látni fogjuk, nem volt kielégítő.

A spektroszkópiában a $B$ rotációsállandót a kombinációdifferenciákból szokás kiszámítani, amelyeken az

$$F(J+1) - F(J-1) = \Delta_2 F(J)$$

kifejezések értendők. (18)-ból kapjuk (a $W$-k helyett, mint a következőkben mindig, $F$-eket írva):

$$\Delta_2 F_3(J) = 4B\left(J+\frac{1}{2}\right)\left[1+\frac{2}{[y_1+4J(J+1)]^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\frac{y_1+2y_2}{[y_1+4(J+1)(J+2)]\,[y_1+4(J-1)J]}\right] \tag{19a}$$

$$\Delta_2 F_2(J) = 4B\left(J+\frac{1}{2}\right)\left[1-\frac{8}{3}\frac{y_1+2y_2}{[y_1+4(J+1)(J+2)]\,[y_1+4(J-1\,J]}\right] \tag{19b}$$

$$\Delta_2 F_1(J) = 4B\left(J+\frac{1}{2}\right)\left[1-\frac{2}{[y_1+4J(J+1)]^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\frac{y_1+2y_2}{[y_1+4(J+1)(J+2)]\,[y_1+4(J-1)J]}\right]. \tag{19c}$$

Itten $[y_1 + 4(J+1)(J+2)]^{1/2} - [y_1 + 4(J-1)J]^{1/2}$ helyett $\frac{8(J+\frac{1}{2})}{[y_1+4J(J+1)]^{1/2}}$-t írtunk, ez a közelítés (differenciahányados helyettesítése differenciálhányadossal) a legtöbb esetben teljesen kielégítő. A szingulett-termeknél érvényes $\Delta_2 F(J) = 4B(J+\frac{1}{2})$ összefüggés analógiájára $4(J+\frac{1}{2})$ szorzóját szokás «effektív» rotációsállandónak ($B^*$) nevezni. A HILL és VAN VLECK-féle közelítő formulából következik, hogy

$$B_3^* = B\left(1 + \frac{2B}{BA}\right), \quad B_2^* = B, \quad B_1^* = B\left(1 - \frac{2B}{AA}\right),$$

vagyis az effektív $B$-k is állandók. Ha ez valóban így volna, jogosult lenne az, a konstansok meghatározásánál mindeddig általánosan alkalmazott eljárás, hogy az egyes termkomponenseket szingulett-termeknek lehet felfogni, amelyek csak abban különböznek egymástól, hogy rotációsállandójuk különböző. (19 *a*, *b*, *c*) megtekintése mutatja azonban, hogy az effektív $B$ nem állandó, sőt különösen az $F_3$ és $F_1$ állapotnál $J$-vel elég gyorsan változik * s így a különböző $J$-k mellett adódó értékek $B^*$ középértéke sem megbízható.**

A «valódi» $B$ rotációsállandó azonban igen egyszerűen meghatározható. (11)-ből ugyanis azonnal látható, hogy

$$W_1 + W_2 + W_3 = B[-3A^2 + 2 + 3J(J+1)],$$

vagyis az additív konstanstól eltekintve a már említett jelölésekkel

$$\tfrac{1}{3}[F_1(J) + F_2(J) + F_3(J)] = BJ(J+1),$$

más szóval az ugyanazon $J$-hez tartozó termek számtani közepe éppen olyan, mint egy szingulett-term.*** (Megjegyzendő, hogy az

---

* Kiszámított ilyen állandók találhatók PEARSE-nél [5] (346. l. IX. táblázat) a $PH$ molekula $^3\Pi$ termjére vonatkozólag.

** S. M. NAUDÉ [6] (141. lap).

*** Ez tetszőleges $n$ multiplicitású termekre vonatkozólag is igaz. Ugyanis az energiákat adó szekuláris egyenlet ekkor

$$W^n - (H_{11} + H_{22} + \cdots + H_{nn})\, W^{n-1} + \cdots = 0$$

s így

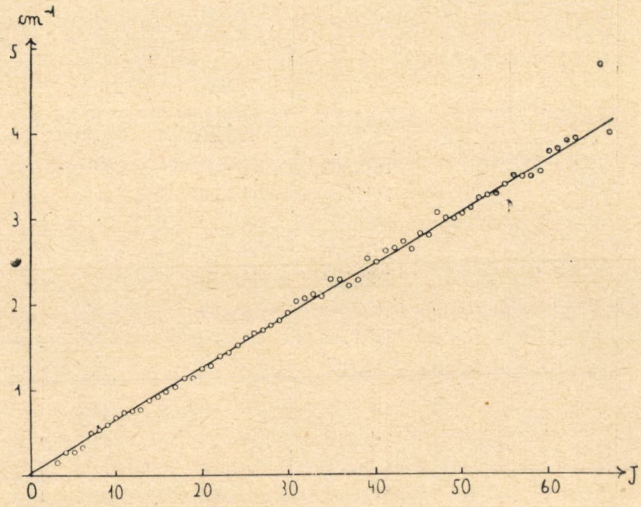
$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = H_{11} + H_{22} + \cdots + H_{nn}.$$

(4) és (6) alapján azonban

$$H_{11} + H_{22} + \cdots + H_{nn} = nBJ(J+1),$$

ha additív állandótól eltekintünk. — Ez a tulajdonság nem látható ilyen egyszerűen, ha a *b* esetből, mint nem perturbált rendszerből indulunk ki.

ugyanazon $K$-hoz tartozó termekre nézve nem áll fenn ilyen egyszerű összefüggés.) Mint ismeretes, a szingulett-termekhez járul még egy $DJ^2(J+1)^2$ alakú korrekció, mivel nagy $J$-nél a molekula már nem tekinthető merevnek. Ezt a korrekciót alkal-




1. ábra.

mazhatjuk az ugyanazon $J$-hez tartozó termek középértékénél is; ekkor a kombinációdifferenciák középértéke:

$$\tfrac{1}{3}[\Delta_2 F(J_1) + \Delta_2 F_2(J) + \Delta_2 F_3(J)] = \Delta_2 F_m(J) = \\ = 4B(J+\tfrac{1}{2}) + 8D(J+\tfrac{1}{2})^3. \qquad (20)$$

Ezen összefüggés felhasználásával grafikus eljárással egyszerre adódik $B$ és $D$.[7] Felvéve egy közelítő $\tilde{B}$ értéket, a

$$\Delta_2 F_m(J) - 4\tilde{B}(J+\tfrac{1}{2}) - 8D(J+\tfrac{1}{2})^3$$

kifejezésnek $D$ alkalmas választásával egyenesnek kell lennie. Ha az egyenes hajlása $4\Delta B$, akkor $B=\tilde{B}+\Delta B$. Ezt az eljárást az 1. ábra mutatja, mely az $N_2$ molekula $C^3\Pi$ termje $v=0$ rezgésállapotára vonatkozik, itt $\tilde{B}=1{\cdot}60\ \mathrm{cm}^{-1}$, $D=-6{\cdot}0.10^{-6}\ \mathrm{cm}^{-1}$. Az ilyen módon meghatározott «valódi» $B$, $D$ értékek az 1. táblázatban vannak feltüntetve a $TiO$, $N_2$, $CO$, $C_2$, $PH$, $AlH$, $NH$

**1. táblázat.** A $^3\Pi$ termek állandói.

| Molekula | Term | $v$ | $B$ (cm$^{-1}$) | $-D$ (cm$^{-1}$) | $Y$ | $A$ (cm$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *TiO* | $X^3\Pi$ norm | 0 | 0·5340 | $6{\cdot}1.10^{-7}$ | 188 | 100 |
| | | 1 | 0·5309 | $6{\cdot}3.10^{-7}$ | 189 | 100 |
| | $C^3\Pi$ norm | 0 | 0·4884 | $6{\cdot}7.10^{-7}$ | 180 | 88 |
| | | 1 | 0·4855 | $6{\cdot}9.10^{-7}$ | 181 | 88 |
| $N_2$ | $B^3\Pi$ norm | 0 | 1·6285 | $5{\cdot}8.10^{-6}$ | 25·9 | 42·3 |
| | | 1 | 1·6108 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 26·2 | 42·2 |
| | | 2 | 1·5925 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 26·4 | 42·0 |
| | | 3 | 1·5735 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 26·8 | 42·2 |
| | | 4 | 1·5554 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 27·0 | 41·9 |
| | | 5 | 1·5364 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 27·3 | 42·0 |
| | | 6 | 1·5172 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 27·6 | 41·8 |
| | | 12 | 1·4012 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 29·4 | 41·3 |
| | $C^3\Pi$ norm | 0 | 1·8154 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 21·5 | 39·0 |
| | | 1 | 1·7932 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 21·5 | 38·5 |
| | | 2 | 1·7682 | $6{\cdot}0.10^{-6}$ | 21·4 | 37·9 |
| | | 3 | 1·7407 | $7{\cdot}5.10^{-6}$ | 21·1 | 36·8 |
| | | 4 | 1·7012 | $11{\cdot}0.10^{-6}$ | 20·3 | 34·5 |
| *CO* | $a^3\Pi$ norm | 0 | 1·6803 | $6{\cdot}1.10^{-6}$ | 24·7 | 41·5 |
| | | 1 | 1·6627 | $6{\cdot}4.10^{-6}$ | 25·0 | 41·5 |
| | | 2 | 1·6433 | $6{\cdot}4.10^{-6}$ | 25·1 | 41·2 |
| | | 3 | 1·6231 | $6{\cdot}2.10^{-6}$ | 25·3 | 41·0 |
| *PH* | $^3\Pi$ inv | 0 | 8·026 | $5{\cdot}7.10^{-4}$ | −14·4 | −115·6 |
| $C_2$ | $A^3\Pi$ inv | 0 | 1·6239 | $6{\cdot}4.10^{-6}$ | −10·4 | −16·9 |
| | | 1 | 1·6068 | $6{\cdot}6.10^{-6}$ | | |
| | $B^3\Pi$ inv | 0 | 1·7452 | $6{\cdot}8.10^{-6}$ | −9·4 | −16·4 |
| | | 1 | 1·7242 | $7{\cdot}0.10^{-6}$ | | |
| *AlH* | $^3\Pi$ norm | 0 | 6·708 | $3{\cdot}99.10^{-4}$ | 6·0 | 40·2 |
| *NH* | $^3\Pi$ inv | 0 | 16·324 | $1{\cdot}72.10^{-3}$ | −2·14 | −35·0 |

molekulák $^3\Pi$ termjeinél.* (A $^3\Sigma$ termek, melyeknél $\Lambda=0$, mindig tiszta $b$ esetűek; $^3\Delta$, $^3\Phi$,... termek, melyeknél $\Lambda=2, 3,\ldots$ idáig nem ismeretesek.)

Az irodalomban megadott $B$ és $D$ állandókat rendszerint a középső termkomponensből ($F_2$) kapták. Hogy ezek az értékek az itt meghatározottaktól eltérnek, az nyilvánvaló, mert a középső termkomponens kombinációdifferenciái nem (20) alakúak, hanem még a jobboldalhoz ($19_b$) alapján a

$$-4B\left(J+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{8}{3}\,\frac{y_1+2y_2}{[y_1+4(J+1)(J+2)]\,[y_1+4(J-1)J]} \qquad (21)$$

kifejezés járul. Hogy a (20) formula valóban nem adja jól vissza a középső termkomponens kombinációdifferenciáit, azt az $N_2$ molekula $^3\Pi$ termjeinél, ahol a legtöbb mérés állt rendelkezésre, Büttenbender és Herzberg[7] kétséget kizárólag megállapították, az általuk alkalmazott $2\varepsilon$ korrekció azonban nem megfelelő, mert (21) nem állandó, hanem $J$ függvénye. Valóban Guntsch,[8] aki ezen korrekció alakjára vonatkozólag semmi feltevést nem tett, pusztán a mérési adatokból a

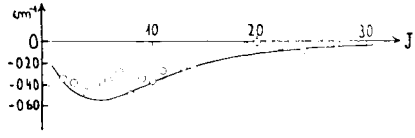
$$\Delta_2F_2(J)-4B(J+\tfrac{1}{2})-8D(J+\tfrac{1}{2})^3$$

különbséget grafikusan tüntette fel az $N_2$, $C^3\Pi$, $v=0$ termnél (2. ábra, pontok). ($19\,b$)-ből látható, hogy ez a különbség, figyelembe véve a $D$-korrekciót is, éppen (21)-nek felel meg; az ugyanezen

* Leszámítva a $H_2$, $He_2$ és a halogén molekulákat, amelyek egészen más szerkezetűek, mint a periodikus rendszer középső oszlopaiban levő elemekből álló molekulák, ez az összes eddig ismert $^3\Pi$ term, melynél $B$ és $D$ pontosan meghatározhatók voltak. A háromféle kombinációdifferencia-sorozat képzéséhez ugyanis szükség van a $P_1$, $P_2$, $P_3$, $R_1$, $R_2$, $R_3$ ágakra, ezek pedig nem minden esetben mérhetők ki. Így pl. a $C_2$ $C^3\Pi\rightarrow A^3\Pi$ «High Pressure» sávrendszerénél (Johnson és Asundi, Proc. Roy. Soc. **124**, 668, 1929) csak az $R$ ágak ismeretesek. Némely esetben, mint $NH$, $v=1$, $C_2$, $v>1$ termeknél az analízis meglehetősen hiányos és helyessége kérdéses. — A kombinációdifferenciák kiszámításánál nehézséget okozott, hogy a méréseket részben régebbi munkák tartalmazzák, az ott használt számozás más, mint a ma használatos. Az adatok pontos figyelembevételével azonban a számozások megfeleltetése minden esetben lehető volt. Ahol több mérés állott rendelkezésre, ott a középérték jött tekintetbe.

termre vonatkozó, $B=1{\cdot}8154$, $Y=21{\cdot}5$, értékekkel számított (21) kifejezést, mint $J$ függvényét a 2. ábra (görbe) mutatja. Látszik, hogy a mért és számított értékek változása ugyanolyan jellegű.

Mielőtt $Y$ meghatározására rátérnénk, a $D$-korrekcióra vonatkozólag kell néhány megjegyzést tennünk. (18 *a*, *b*, *c*)-ből látható, hogy az $F_3(J-1)=F_3(K)$, $F_2(J)=F_2(K)$, $F_1(J+1)=F_1(K)$ termek változó része $Y$-hoz képest nagy rotációskvantumszámoknál közel $BK(K+1)$ alakú. Ebből következtethető, hogy $D$ együtthatója, amely szingulett-termnél $B$ együtthatójának a négyzete,




2. ábra.

nagy kvantumszámoknál nem $J^2(J+1)^2$, hanem $K^2(K+1)^2$. A kettő között valószínűleg folytonos átmenet van, mivel azonban ez a korrekció alacsony kvantumszámoknál kicsiny, mindenütt a $DK^2(K+1)^2$ alak választható [vagy $D(K+\frac{1}{2})^4$]. Ennek megfelelően a termek (18 *a*), (18 *b*), (18 *c*) kifejezéseit rendre a $D(J+\frac{3}{2})^4$, $D(J+\frac{1}{2})^4$, $D(J-\frac{1}{2})^4$, a kombinációdifferenciák (19 *a*), (19 *b*), (19 *c*) kifejezéseit pedig a $8D(J+\frac{3}{2})^3$, $8D(J+\frac{1}{2})^3$, $8D(J-\frac{1}{2})^3$ tagokkal kell kiegészítenünk.

Ezeket tekintetbe véve (18)-ból kapjuk:

$$F_3(J)-F_1(J) = 2B[y_1+4J(J+1)]^{1/2}+8D(J+\tfrac{1}{2})^3,$$

ahonnan $y_1$ kiszámítható minden $J$-nél, miután már a $B$ és $D$ állandókat $Y$-tól függetlenül meghatároztuk. Az így nyert $y_1$-ből (14) alapján $Y$ számára két érték, egy pozitív és egy negatív adódik; mindegyiknek megfelel egy $y_2$ érték, úgyhogy $y_1$-hez két különböző $y_2$ tartozik. Mármost ugyancsak (18)-ból

$$F_3(J)+F_1(J)-2F_2(J) = -4B\frac{y_2-2J(J+1)^*}{y_1+4J(J+1)},$$

innen $y_2$ a már ismert $y_1$ felhasználásával a mérési adatokból meghatározható. A mérések pontossága a legtöbb esetben van

* A $D$-korrekció itt elhanyagolható.

olyan nagy, hogy eldönthető, ez az $y_2$ melyik $Y$-nak felel meg; ezzel a módszerrel tehát általában meg lehet állapítani, hogy a term normális-e, vagy fordított.* Ennek eldöntése eddig a legelső vonalak ismeretével volt lehetséges (nevezetesen azzal, hogy melyik termkomponens számozása kezdődik $J=\Lambda+1$, $\Lambda$, $\Lambda-1$-el), ezek azonban csak ritka esetben voltak felismerhetők ($N_2$, $PH$). A másik, kevésbbé megbízható lehetőség: a $\Lambda$-típusú dublett nagyságából való következtetés szintén nem mindig jöhet tekintetbe az analízis hiányossága miatt ($AlH$, $NH$).

Az említett $F_3(J)-F_1(J)$ és az $F_3(J)+F_1(J)-2F_2(J)=$ $=[F_3(J)-F_2(J)]-[F_2(J)-F_1(J)]$ kombinációk csak a ${}^3\Pi\rightarrow{}^3\Sigma$ és a ${}^3\Sigma\rightarrow{}^3\Pi$ átmeneteknél állíthatók elő a mért vonalakból, általában többféleképen.** Ezek egy kevéssé különböznek egymástól a szerint, hogy a $\Lambda$-típusú dublett melyik komponensét vettük tekintetbe; a középértéket használtuk.

Az ilyen módon meghatározott $Y$ értékek szintén az 1. táblázatban találhatók. Annak igazolására, hogy a fenti módszer a term milyenségének eldöntésére valóban alkalmas, álljanak az alábbi számok, amelyek közül az első a mérésekből, a második a táblázatban megadott $Y$-ból, a harmadik a másik lehetséges $Y$-ból számított $y_2$-t jelenti (a $v=0$ állapotra vonatkozólag):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $CO$ | 584 | 558 | 448 |
| $PH$ | 195 | 221 | 320 |
| $AlH$ | 31 | 29·6 | 5·6 |
| $NH$ | 6·8 | 6·3 | 31·2. |

Az $A=BY$ összefüggéssel definiált és számított állandó szükségképen egyértékű és jóval nagyobb pontosságú, mint az eddig a mérésekből extrapolált $A$. Ez az utóbbi meglehetősen nagy ingadozásokat mutat, például az $N_2$-nél[6] ($v=6$) $A=37$, illetőleg 42 $cm^{-1}$, a $PH$-nál[5] $-111$, illetőleg $-121$ $cm^{-1}$

* Dublett-termeknél, amelyek energiája HILL és VAN VLECK szerint

$$W=B\left\{(J+\tfrac{1}{2})^2-A^2\pm[4(J+\tfrac{1}{2})^2+A^2Y(Y-4)]^{1/2}\right\},$$

ez nem lehetséges, mert a mérési adatokból mindig csak $Y(Y-4)$ határozható meg.

** L. pl. JEVONS,[9] 186. lap.

**2. táblázat.** *TiO*, $X^3\Pi$, $v=0$. ($B=0{\cdot}5340$, $D=-6{\cdot}1.10^{-7}$, $Y=188$).

| $J$ | $\Delta_2F_1$ $(J+1)$ | | $\Delta_2F_2$ $(J)$ | | $\Delta_2F_3$ $(J-1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mért | számított | mért | számított | mért | számított |
| 15 | 34·74 | 34·85 | 32·74 | 33·08 | — | 31·30 |
| 16 | 37·04 | 36·97 | 35·36 | 35·21 | — | 33·44 |
| 17 | 39·34 | 39·07 | 37·12 | 37·34 | 35·41 | 35·58 |
| 18 | 41·16 | 41·18 | 39·46 | 39·48 | 37·99 | 37·74 |
| 19 | 43·12 | 43·29 | 41·66 | 41·60 | 39·98 | 39·90 |
| 20 | 45·38 | 45·40 | 43·63 | 43·74 | 41·87 | 42·05 |
| 21 | 47·51 | 47·51 | 45·76 | 45·86 | 43·81 | 44·20 |
| 22 | 49·49 | 49·62 | 48·12 | 48·00 | 46·51 | 46·34 |
| 23 | 51·69 | 51·74 | 50·14 | 50·13 | 48·45 | 48·50 |
| 24 | 53·99 | 53·85 | 52·26 | 52·25 | 50·72 | 50·66 |
| 25 | 55·94 | 55·94 | 54·47 | 54·38 | 52·78 | 52·80 |
| 61 | 131·06 | 131·18 | 130·39 | 130·21 | 129·21 | 129·26 |
| 62 | 33·13 | 33·26 | 32·24 | 32·30 | 31·27 | 31·36 |
| 63 | 35·23 | 35·31 | 34·40 | 34·38 | 33·41 | 33·45 |
| 64 | 37·43 | 37·38 | 36·43 | 36·45 | 35·49 | 35·54 |
| 65 | 39·34 | 39·44 | 38·52 | 38·53 | 37·54 | 37·63 |
| 66 | 41·38 | 41·50 | 40·59 | 40·60 | 39·57 | 39·72 |
| 67 | 43·41 | 43·56 | 42·68 | 42·67 | 41·71 | 41·80 |
| 68 | 45·55 | 45·61 | 44·68 | 44·74 | 43·81 | 43·88 |
| 69 | 47·58 | 47·67 | 46·77 | 46·80 | 45·87 | 45·96 |
| 70 | 49·61 | 49·72 | 48·91 | 48·87 | 47·98 | 48·03 |
| 98 | 206·31 | 206·32 | 205·85 | 205·72 | 205·12 | 205·15 |
| 99 | 08·33 | 08·30 | 07·68 | 07·71 | 07·09 | 07·15 |
| 100 | 10·12 | 10·28 | 09·69 | 09·71 | 09·25 | 09·15 |
| 101 | 12·22 | 12·26 | 11·77 | 11·69 | 11·13 | 11·15 |
| 102 | 14·35 | 14·24 | 13·73 | 13·68 | 13·11 | 13·14 |
| 103 | 16·16 | 16·20 | 15·75 | 15·66 | 15·09 | 15·11 |
| 104 | 18·14 | 18·18 | 17·80 | 17·63 | 17·10 | 17·10 |
| 105 | 20·10 | 20·14 | 19·60 | 19·60 | 19·11 | 19·08 |
| 106 | 22·08 | 22·10 | 21·63 | 21·57 | 21·04 | 21·05 |
| 107 | 24·05 | 24·08 | 23·50 | 23·54 | 23·05 | 23·03 |
| 108 | 25·95 | 26·03 | 25·61 | 25·51 | 25·01 | 25·01 |
| 109 | — | 27·99 | 27·51 | 27·48 | 26·95 | 26·97 |
| 110 | — | 29·95 | 29·54 | 29·44 | 29·00 | 28·93 |
| 111 | — | 31·90 | 31·46 | 31·40 | 30·90 | 30·89 |

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

**3. táblázat.** $N_2$, $C^3\Pi$, $v=0$. ($B=1{\cdot}8154$, $D=-6{\cdot}0.10^{-6}$, $Y=21{\cdot}5$).

| $J$ | $\Delta_2F_1$ $(J+1)$ | | $\Delta_2F_2$ $(J)$ | | $\Delta_2F_3$ $(J-1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mért | számított | mért | számított | mért | számított |
| 0 | 9·92 | 9·91 | — | — | — | — |
| 1 | 16·49 | 16·53 | — | — | — | — |
| 2 | 23·11 | 23·20 | 17·78 | 17·78 | — | — |
| 3 | 29·80 | 29·89 | 24·97 | 24·95 | — | — |
| 4 | 36·43 | 36·63 | 32·24 | 32·16 | 28·01 | 28·10 |
| 5 | 43·21 | 43·42 | 39·51 | 39·40 | 35·97 | 35·98 |
| 6 | 50·17 | 50·27 | 46·74 | 46·66 | 43·65 | 43·77 |
| 7 | 57·19 | 57·16 | 54·15 | 53·94 | 51·37 | 51·47 |
| 8 | 64·15 | 64·09 | 61·22 | 61·22 | 59·09 | 59·12 |
| 9 | 71·23 | 71·07 | 68·53 | 68·52 | 66·67 | 66·70 |
| 10 | 78·17 | 78·08 | 75·79 | 75·82 | 74·21 | 74·21 |
| 11 | 85·15 | 85·12 | 83·13 | 83·10 | 81·64 | 81·69 |
| 12 | 92·00 | 92·18 | 90·40 | 90·38 | 89·10 | 89·03 |
| 13 | 99·22 | 99·26 | 97·70 | 97·64 | 96·42 | 96·53 |
| 14 | 106·27 | 106·35 | 104·96 | 104·90 | 103·82 | 103·91 |
| 15 | 113·45 | 113·47 | 112·16 | 112·16 | 111·22 | 111·27 |
| 16 | 120·52 | 120·60 | 119·38 | 119·41 | 118·56 | 118·60 |
| 17 | 127·79 | 127·72 | 126·63 | 126·65 | 125·81 | 125·91 |
| 18 | 134·74 | 134·86 | 133·85 | 133·89 | 133·14 | 133·20 |
| 19 | 142·04 | 142·00 | 141·11 | 141·11 | 140·44 | 140·48 |
| 20 | 149·06 | 149·15 | 148·31 | 148·33 | 147·66 | 147·76 |
| 21 | 156·35 | 156·29 | 155·51 | 155·53 | 154·93 | 155·00 |
| 22 | 163·36 | 163·43 | 162·71 | 162·75 | 162·21 | 162·24 |
| 23 | 170·56 | 170·58 | 169·96 | 169·94 | 169·47 | 169·47 |
| 24 | 177·77 | 177·71 | 177·13 | 177·12 | 176·69 | 176·69 |
| 25 | 184·93 | 184·84 | 184·30 | 184·30 | 183·90 | 183·90 |
| 26 | 191·94 | 191·99 | 191·51 | 191·48 | 191·12 | 191·11 |
| 27 | 199·04 | 199·11 | 198·65 | 198·64 | 198·27 | 198·28 |
| 28 | 206·22 | 206·23 | 205·81 | 205·80 | 205·48 | 205·46 |
| 29 | 213·39 | 213·36 | 212·92 | 212·95 | 212·66 | 212·62 |
| 30 | 220·48 | 220·47 | 220·13 | 220·08 | 219·77 | 219·78 |
| 31 | 227·65 | 227·57 | 227·37 | 227·20 | 226·94 | 226·92 |
| 32 | 234·80 | 234·66 | 234·39 | 234·31 | 234·16 | 234·04 |
| 33 | 241·71 | 241·74 | 241·52 | 241·42 | 241·23 | 241·17 |
| 34 | 249·00 | 248·83 | 248·54 | 248·53 | 248·25 | 248·29 |
| 35 | 256·09 | 255·90 | 255·79 | 255·61 | 255·35 | 255·38 |
| 36 | 263·01 | 262·95 | 262·78 | 262·69 | 262·45 | 262·47 |
| 37 | 269·90 | 270·01 | 269·42 | 269·76 | 269·45 | 269·55 |
| 38 | 277·20 | 277·05 | 276·70 | 276·81 | 276·64 | 276·61 |
| 39 | 284·10 | 284·08 | 283·97 | 283·85 | 283·70 | 283·66 |
| 40 | 291·13 | 291·10 | 290·92 | 290·89 | 290·81 | 290·71 |

**4. táblázat.** *AlH*, $^3\Pi$, $v = 0$. ($B = 6{\cdot}708$, $D = -3{\cdot}99 . 10^{-4}$, $Y = 6{\cdot}0$).

| $J$ | $\Delta_2F_1$ $(J+1)$ | | $\Delta_2F_2$ $(J)$ | | $\Delta_2F_3$ $(J-1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mért | számított | mért | számított | mért | számított |
| 5 | 148·58 | 148·51 | — | 145·28 | — | 146·57 |
| 6 | 74·63 | 74·58 | 172·34 | 72·45 | 172·91 | 73·06 |
| 7 | 200·81 | 200·68 | 99·22 | 99·17 | 99·49 | 99·47 |
| 8 | 26·86 | 26·73 | 225·65 | 225·60 | 225·77 | 225·74 |
| 9 | 52·78 | 52·65 | 51·84 | 51·78 | 51·97 | 51·83 |
| 10 | 78·51 | 78·43 | 77·78 | 77·75 | 77·78 | 77·86 |
| 11 | 304·08 | 304·03 | 303·52 | 303·48 | 303·43 | 303·45 |
| 12 | 29·49 | 29·40 | 28·93 | 28·97 | 28·87 | 28·94 |
| 13 | 54·66 | 54·58 | 54·29 | 54·22 | 54·29 | 54·17 |
| 14 | 79·50 | 79·51 | 79·14 | 79·19 | 79·11 | 79·15 |
| 15 | 404·07 | 404·14 | 403·79 | 403·89 | 403·79 | 403·85 |
| 16 | 28·49 | 28·49 | 28·20 | 28·28 | 28·15 | 28·23 |
| 17 | 52·47 | 52·55 | 52·30 | 52·36 | 52·35 | 52·31 |
| 18 | 76·25 | 76·25 | 76·05 | 76·10 | 76·04 | 76·05 |
| 19 | — | 99·61 | — | 99·47 | — | 99·43 |
| 20 | 523·30 | 522·60 | 522·52 | 522·48 | 522·40 | 522·44 |
| 21 | 45·31 | 45·20 | 45·13 | 45·09 | 45·10 | 45·05 |
| 22 | 67·53 | 67·38 | 67·35 | 67·29 | 67·36 | 67·25 |
| 23 | 89·30 | 89·14 | 89·20 | 89·06 | 89·16 | 89·02 |
| 24 | 610·76 | 610·45 | 610·64 | 610·38 | 610·55 | 610·34 |
| 25 | 31·58 | 31·30 | 31·57 | 31·24 | 31·54 | 31·20 |

a szerint, amint az $F_3 - F_2$ vagy az $F_2 - F_1$ különbségekből extrapoláltak.

A mérésekből adódó és a $D$-korrekcióval kiegészített (19) formulákból számított kombinációdifferencia-értékek összehasonlítását a 2., 3., 4. táblázat tünteti fel. Helykímélés okából csak a *TiO*, $N_2$, *AlH* molekulák egy-egy $^3\Pi$ termjére vonatkozó adatok egy részét közöljük. [A *TiO*-nál $Y$ a legnagyobb, az *AlH*-nél a legkisebb az eddig ismert értékek között (az *NH*-nál csak kevés adat van), míg az $N_2$-nél igen sok mérés középértéke jött tekintetbe, s így a mért adatok itt a legmegbízhatóbbak.] A táblázatokban egy sorban állnak az ugyanazon $K$-hoz tartozó kombinációdifferenciák, hogy a rotációskvantumszám növekedésével az «átmenet az $a$ esetből a $b$ esetbe» jobban legyen látható.

Két term közötti átmenetek valószínűségeit a $|q_{ik}|^2$ kifejezések határozzák meg, ismernünk kell tehát a perturbált rendszer $q$ koordinátamatrixát. Ez a kiindulásul szolgáló rendszer (HUND-féle $a$ eset) $q_a$ koordinátamatrixából a

$$q = Sq_aS^{-1} \tag{22}$$

transzformációval nyerhető, ahol $S$ a (3)-nál említett unitármatrix. $S$ elemei, miután a $W_i$ energiákat már meghatároztuk, (10)-ből számíthatók ki:

$$S_{ik} = C_i s_{ik}, \tag{23}$$

ahol $s_{ik}$ (10) determinánsának megfelelő aldeterminánsai. $C_i$ tényezőt úgy határozzuk meg, hogy

$$S\tilde{S}^* = 1 \tag{24}$$

legyen, ekkor $\tilde{S}^* = S^{-1}$. Mivel (22) baloldalán $q$ fázisára nincs szükségünk, csak abszolút értékére, $S$ elemei reálisaknak vehetők, s így

$$q = Sq_a\tilde{S}. \tag{25}$$

Itt a $q_a$ előtti $S$ matrixban a kezdő-, a $q_a$ utániban a végállapot kvantumszámai és paraméterei szerepelnek. Mivel eddig csak $^3\Pi$ és $^3\Sigma$ termek ismeretesek, $S$ elemeit csak ezekre adjuk meg. 1, 2, 3 indexszel jelöljük rendre a $^3\Pi$ termnél az $\Omega = 2, 1, 0$, illetőleg a $^3\Sigma$ termnél az ennek megfelelő $K = J+1, J, J-1$ értékeket. A $^3\Pi$ termnél (10)-, (9)-, (18 $a, b, c$)-ből kapjuk:

$$S_{ik} = C_i s_{ik}$$

$$\begin{array}{lll} s_{11} = (2\bar{J}-4)^{1/2}u_+ & s_{12} = 4\bar{J} - \frac{8}{3} & s_{13} = (2\bar{J})^{1/2}u_- \\ s_{21} = -(2\bar{J}-4)^{1/2}Y & s_{22} = Y(Y-4) & s_{23} = (2\bar{J})^{1/2}(Y-4) \\ s_{31} = (2\bar{J}-4)^{1/2}u_- & s_{32} = -(4\bar{J}-\frac{8}{3}) & s_{33} = (2\bar{J})^{1/2}u_+ \end{array} \tag{26}$$

$$C_i = [s_{i1}^2 + s_{i2}^2 + s_{i3}^2]^{-1/2},$$

ahol

$$u_\pm = (y_1 + 4\bar{J})^{1/2} \pm (Y-2).$$

[$\bar{J}$ és $y_1$ jelentését l. (7) és (14)]. A (18 $a, b, c$)-ben szereplő $\frac{y_2 - 2\bar{J}}{y_1 + 4\bar{J}}$ kifejezés értékét itt, ahol nincs olyan nagy pontosságra szükség, 1-nek vehettük.

$^3\Sigma$ termnél, ahol $\Lambda = 0$ és az energiák $B(J+1)(J+2)$, $BJ(J+1)$, $B(J-1)J$, $S$ elemei a következők:

$$\begin{aligned} S_{11} = \quad S_{13} &= \left[\frac{J}{2(2J+1)}\right]^{1/2} & S_{12} &= \left[\frac{J+1}{2J+1}\right]^{1/2} \\ S_{21} = -S_{23} &= 2^{-1/2} & S_{22} &= 0 \\ S_{31} = \quad S_{33} &= \left[\frac{J+1}{2(2J+1)}\right]^{1/2} & S_{32} &= -\left[\frac{J}{2J+1}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{27}$$

A $q_a$ koordinátamatrix $q_a(\Lambda, \Omega, J; \Lambda', \Omega', J')$ elemei $^3\Pi \rightarrow {}^3\Sigma$ átmenetnél Hill és Van Vleck szerint[4] a következő kifejezésekkel arányosak:

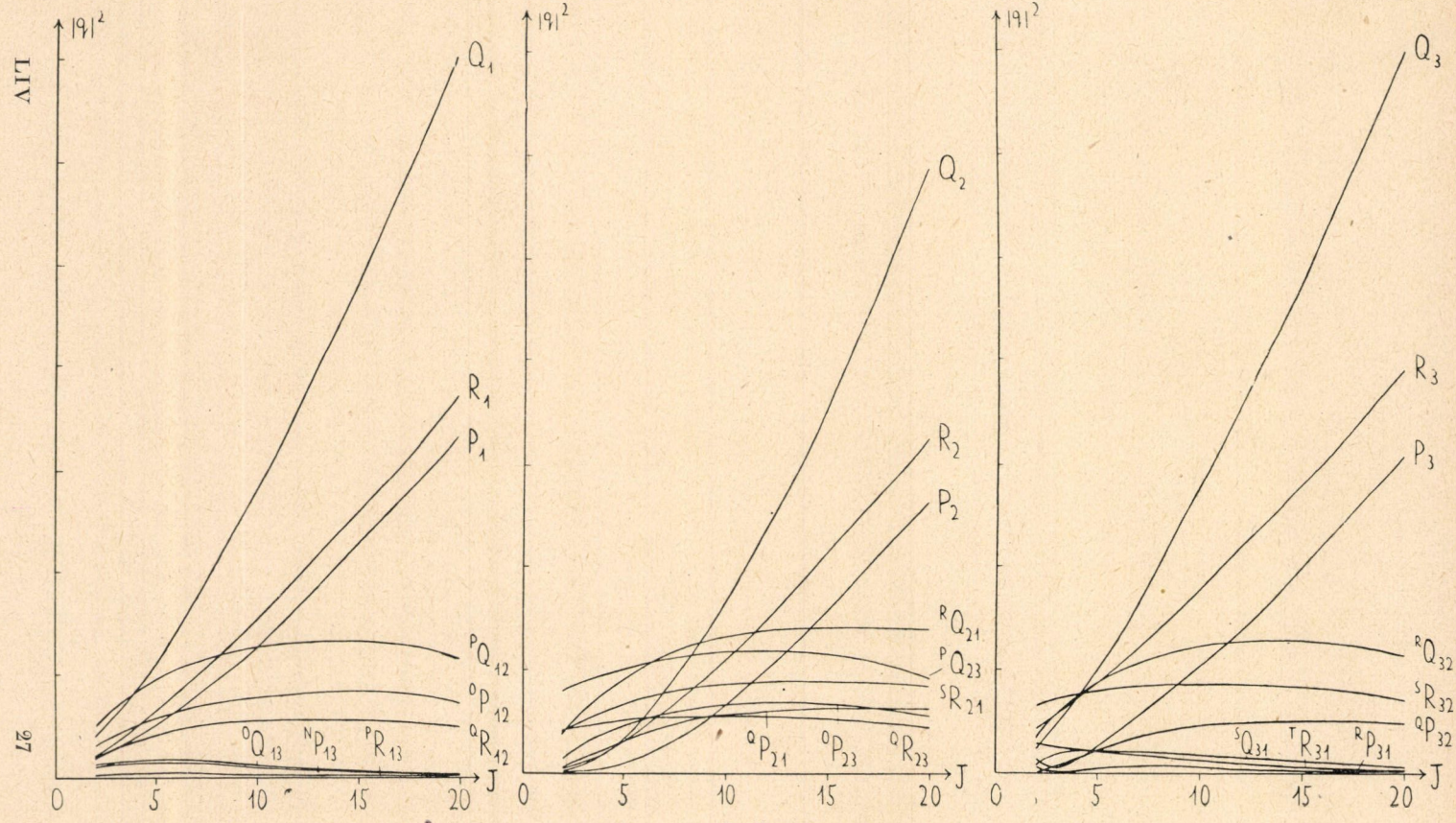
$$\begin{aligned} q_a(1,2,J-1;0,\ 1,J) &= q_{a11}(J-1;J) \sim \left[\frac{(J-2)(J-1)}{J}\right]^{1/2} \\ q_a(1,2,J;\ 0,\ 1,J) &= q_{a11}(J;J) \sim \left[\frac{(J-1)(J+2)(2J+1)}{J(J+1)}\right]^{1/2} \\ q_a(1,2,J+1;0,\ 1,J) &= q_{a11}(J+1;J) \sim \left[\frac{(J+2)J+3)}{J+1}\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_a(1,1,J-1;0,\ 0,J) &= q_{a22}(J-1;J) \sim [J-1]^{1/2} \\ q_a(1,1,J;\ 0,\ 0,J) &= q_{a22}(J;J) \sim [2J+1]^{1/2} \\ q_a(1,1,J+1;0,\ 0,J) &= q_{a22}(J+1;J) \sim [J+2]^{1/2} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} q_a(1,0,J-1;0,-1,J) &= q_{a33}(J-1;J) \sim [J+1]^{1/2} \\ q_a(1,0,J;\ 0,-1,J) &= q_{a33}(J;J) \sim [2J+1]^{1/2} \\ q_a(1,0,J+1;0,-1,J) &= q_{a33}(J+1;J) \sim [J]^{1/2}. \end{aligned}$$

Azok az elemek, amelyeknél $\Delta\Omega \neq \Delta\Lambda$, eltűnnek; az el nem tűnő elemek tehát számozásunk szerint $q_{ajj}$ alakúak. $A\,^3\Sigma \rightarrow {}^3\Pi$ átmenethez tartozó elemek a már felírtakból megkaphatók, mivel $q_a$ hermitikus; a $^3\Pi \rightarrow {}^3\Pi$ és a $^3\Sigma \rightarrow {}^3\Sigma$ átmenetekhez tartozó elemek általánosan:

$$\begin{aligned} q_a(\Lambda,\Omega,J;\Lambda,\Omega,J+1) &= q_a(\Lambda,\Omega,J+1;\Lambda,\Omega,J) \sim \left[\frac{(J+1)^2-\Omega^2}{J+1}\right]^{1/2} \\ q_a(\Lambda,\Omega,J;\Lambda,\Omega,J) &\sim \Omega\left[\frac{2J+1}{J(J+1)}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{29}$$


191²
Q1
R1
P1
PQ12
OP12
QR12
OQ13
NP13
PR13
J
0
5
10
15
20
191²
Q2
R2
P2
RQ21
PQ23
SR21
QP21
OP23
QR23
J
0
5
10
15
20
191²
Q3
R3
P3
RQ32
SR32
QP32
SQ31
TR31
RP31
J
0
5
10
15
20

3. ábra.

Mivel itt is csak a $q_{ajj}$ elemek zérustól különbözők, (25) minden triplett átmenetnél a következő egyenletekkel egyenértékű;

$$\begin{aligned} q_{ik}(J;J') = {} & S_{i1}(J;J)\,q_{a11}(J;J')\,S_{k1}(J';J') + \\ & + S_{i2}(J;J)\,q_{a22}(J;J')\,S_{k2}(J';J') + \\ & + S_{i3}(J;J)\,q_{a33}(J;J')\,S_{k3}(J';J') \end{aligned} \qquad (30)$$

$(i,\ k=1.\ 2.\ 3)$

Minthogy $J'=J-1,\ J,\ J+1$ lehet, összesen 27 $q$-elem fordul elő, ezek határozzák meg valamely molekulasáv 27 ágánál a vonalak intenzitásait. A fentebb felírt $q_a$-elemeknek abszolút értékükön kívül fázistényezőjüket is ismernünk kellene. Erre azonban nincs szükségünk, ha tekintetbe vesszük, hogy Hill és Van Vleck szerint[4] (265. lap) a $q_a$-elemek fázistényezője csak a kezdeti és végső kvantumszámok különbségétől függ, ez pedig a (30) egyenletek bármelyikében előforduló három-három $q_a$-elemnél ugyanakkora. A (30) formula alapján tehát $S$ és $q_a$-elemeinek megadott kifejezéseivel az átmeneti valószínűségekkel arányos $|q_{ik}(J;J')|^2$ mennyiségek kiszámíthatók.

Az átmeneti valószínűségekre kapott kifejezések azonban meglehetősen hosszadalmasak és áttekinthetetlenek. Ezért az eredményeket egy speciális esetben: ${}^3\Pi \rightarrow {}^3\Sigma$ átmenetnél — ahol a $q_a$-elemeket is részletesen felírtuk — grafikusan tüntetjük fel. A 3. ábrán látható görbék arra az esetre vonatkoznak, amikor a ${}^3\Pi$-termnél $Y=27{\cdot}6$, s így az $N_2$ molekula ${}^3\Pi \rightarrow {}^3\Sigma$ sávrendszere $6-3$ sávjának felelnek meg.

Az ábrán látható, hogy a $P_3$, $Q_3$, $R_3$, $P_2$, $Q_2$, $R_2$, $P_1$, $Q_1$, $R_1$ ágak a legerősebbek, ami megegyezésben van Naudé észleléseivel[6] (III., IV. és V. táblázat), továbbá az is érthető, hogy ezen ágak vonalai nagyobb $J$ rotációskvantumszámokig figyelhetők meg, mint a többi ág vonalai. Az említett ágak és a többi ág között lényeges különbség van, az utóbbiaknak megfelelő átmeneti valószínűségek ugyanis egy bizonyos $J$-től kezdve állandóan csökkennek. Ez megfelel annak, hogy amint a tiszta $b$ esethez közeledünk (amint $J$ növekszik), a $\Delta J \mp \Delta K$ átmenetek valószínűségei igen kicsinyek lesznek a $\Delta J = \Delta K$ átmenetek valószínűségeihez képest.

Hogy a valóban megfigyelt intenzitásokat megkapjuk, az átmeneti valószínűségeket még a megfelelő BOLTZMANN-féle exponenciális tényezővel meg kellene szoroznunk. Mivel azonban kvantitatív összehasonlítás alapjául szolgáló mérések triplett sávoknál idáig még nem állnak rendelkezésre (a meglévő intenzitás-adatok csak becsült értékek és meglehetősen bizonytalanok a vonalak gyakori egybeesése miatt), a BOLTZMANN-tényezők kiszámításától eltekinthetünk.

$^3\Pi \rightarrow {}^3\Pi$ sávrendszernél csak $^3\Pi_2 \rightarrow {}^3\Pi_2$, $^3\Pi_1 \rightarrow {}^3\Pi_1$, $^3\Pi_0 \rightarrow {}^3\Pi_0$ átmenetekhez tartozó vonalakat figyeltek meg. Hogy a többi, tehát például a $^3\Pi_2 \rightarrow {}^3\Pi_1$ átmenetnek megfelelő vonalak igen csekély intenzitásúak, az egyszerűen megmagyarázható. A (30)-ban előforduló $q_a$-elemek ugyanis $^3\Pi \rightarrow {}^3\Pi$, $J \rightarrow J \pm 1$ esetben közel egyenlők egymással, az

$$S_{i1}S_{k1} + S_{i2}S_{k2} + S_{i3}S_{k3} \tag{31}$$

kifejezés értéke pedig (24) alapján $i \neq k$-nál 0, $i = k$-nál 1 volna, ha a két $^3\Pi$ term $Y$ paramétere egyenlő és $J' = J$ lenne. Mivel az eddig ismert $^3\Pi \rightarrow {}^3\Pi$ átmeneteknél a két $Y$ csak keveset különbözik egymástól (l. 1. táblázat) és $J' = J-1, J, J+1$ lehet, (30) értéke $i \neq k$-nál kicsiny marad az $i = k$-nál felvett értékhez képest. — Hogy $^3\Pi \rightarrow {}^3\Pi$ átmenetnél a $Q$-ágak a $P$- és $R$-ágaknál sokkal gyengébbek, az a megfelelő $q_a$-elemek nagyságának összehasonlításából [l. (29)] közvetlenül látható.

Jelen dolgozat a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült. Az Intézet felszerelését részben az Országos Természettudományi Tanács, részben a Széchenyi Tudományos Társaság által rendelkezésre bocsátott anyagi támogatásnak köszöni. Az utóbbi ajándéka a Monroe automatikus elektromos hajtású 8×8 számjegyes számológép is, amelynek a numerikus számításoknál igen nagy hasznát vettem.

Kedves kötelességemnek tartom, hogy leghálásabb köszönetemet fejezzem ki az Intézet igazgatójának, dr. POGÁNY BÉLA műegyetemi ny. r. tanár úrnak, a M. Tud. Akadémia tagjának, aki ezen vizsgálat iránt állandó szíves érdeklődést tanúsított, valamint dr. SCHMID REZSŐ egyetemi magántanár úrnak, aki a dolgozat készítése folyamán értékes tanácsaival állandóan támogatott.

## Összefoglalás.

A kétatomos molekulák triplett-termeinek HUND-féle $a$ esetéből kiindulva a perturbációelmélet módszereivel az energiaértékek számára explicit kifejezések vezethetők le az általános közbülső esetben. Az ugyanazon $J$ rotációskvantumszámhoz tartozó három termkomponens számtani közepe úgy viselkedik, mint egy szingulett-term, más szóval a $BJ(J+1)+DJ^2(J+1)^2$ összefüggésnek tesz eleget; ennek felhasználásával lehetővé válik az «effektív» rotációsállandók helyett a «valódi« rotációsállandók meghatározása. A nyert kifejezések alapján a mérési adatok felhasználásával egyrészt a termet jellemző $Y$ paraméter értéke is pontosan megállapítható, másrészt új módszer adódik annak eldöntésére, hogy a term normális-e, vagy fordított.

Alkalmazásul az összes számbajövő triplett-term (nevezetesen a $TiO$, $N_2$, $CO$, $C_2$, $PH$, $AlH$, $NH$ molekulák $^3\Pi$ termei) kiszámított valódi $B$, $D$, $Y$, $A$ állandóit az 1. táblázat tünteti fel. A mérési eredmények és a számított értékek között, mint a 2—4. táblázatok igazolják, az egész megfigyelt mérési tartományban igen jó megegyezés van. — A fentebb említett új módszerrel megállapítást nyert, hogy az $AlH$ $^3\Pi$ termje normális, az $NH$ $^3\Pi$ termje pedig fordított.

Két triplett-term közötti átmeneti valószínűségek kiszámíthatók, s így a triplett-sávok rotációsintenzitáseloszlása is meghatározható. A 3. ábra feltünteti az $N_2$ molekula ú. n. első pozitív sávrendszerére számított átmeneti valószínűségeket, amelyek a megfigyelt intenzitáseloszlással megegyezésben vannak.

## Felhasznált irodalom.

[1] J. H. VAN VLECK, Phys. Rev. **33**, 467, 1929.
[2] R. L. KRONIG, Band Spektra and Molecular Structure, 1930 (1. fejezet).
[3] W. HEISENBERG és P. JORDAN, Zsch. f. Phys. **37**, 263, 1926.
[4] E. L. HILL és J. H. VAN VLECK, Phys. Rev. **32**, 250, 1928.
[5] R. W. B. PEARSE, Proc. Roy. Soc. London (*A*) **129**, 328, 1930.
[6] S. M. NAUDÉ, Proc. Roy. Soc. London (*A*) **136**, 114, 1932.
[7] G. BÜTTENBENDER és G. HERZBERG, Ann. d. Phys. **21**, 577, 1935.
[8] A. GUNTSCH, Ann. d. Phys. **22**, 657, 1935.

[9] W. JEVONS, Report on Band Spektra of Diatomic Molekules, 1932.

Ezeken kívül a mérési adatoknál még a következő munkák jöttek tekintetbe:

[10] A. van der ZIEL, Physica **1**, 353, 1934.

[11] E. HULTHÉN és G. JOHANSSON, Zschr. f. Phys. **26**, 308, 1924.

[12] P. LINDAU, Zschr. f. Phys. **26**, 343, 1924.

[13] D. COSTER, F. BRONS és A. van der ZIEL, Zschr. f. Phys. **84**, 304, 1933.

[14] A. GUNTSCH, Zschr. f. Phys. **86**, 262, 1933.

[15] D. COSTER, E. W. van DIJK és A. J. LAMERIS, Physica **1**, 267, 1935.

[16] A. CHRISTY, Phys. Rev. **33**, 701, 1929.

[17] R. C. Johnson, Phil. Trans. **226**, 157, 1927.

[18] G. H. DIEKE és J. W. MAUCHLY, Phys. Rev. **43**, 12, 1933.

[19] W. HOLST, Zschr. f. Phys. **86**, 338, 1933.

[20] H. BATSCH, Ann. d. Phys. **18**, 81, 1933.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. december 16-án tartott üléséből.)

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.
Institutsleiter Prof. B. POGÁNY.

# ÜBER DIE TRIPLETT-MOLEKÜLTERME UND ÜBER DIE INTENSITÄTEN DER TRIPLETT-BANDEN.

Von A. BUDÓ.

Die Energiewerte eines Triplett-Termes des zweiatomigen Moleküls werden für den allgemeinen intermediären HUNDschen Koppelungsfall $a-b$ mittels der Methoden der Störungsrechnung in einer expliciten Form angegeben. Dabei ergibt sich, dass das arithmetische Mittel der drei Termkomponenten $F_1(J)$, $F_2(J)$, $F_3(J)$ von derselben Art, wie die Singulett-Termen sind, d. h. der Formel

$$\tfrac{1}{3}[F_1(J)+F_2(J)+F_3(J)] = BJ(J+1)+DJ^2(J+1)^2$$

genügt. Auf Grund dieser Formel können die «wahren» Rotationskonstanten $B$ und $D$ erhalten werden, während die bisherigen Methoden nur «effektive» Werte lieferten. An der Hand der gewonnenen Formeln kann man auch das Parameter $Y=\frac{A}{B}$, somit auch die Konstante $A$ der magnetischen Koppelung zwischen Elektronendrehimpuls und Spin genau bestimmen. Eine neue Methode lässt es sicher entscheiden, ob der Term normal oder verkehrt sei.

Als Anwendung wurden die «wahren» Konstanten $B$, $D$, $Y$, $A$ für alle in Betracht kommende Triplett-Terme (namentlich für $^3\Pi$-Terme von $TiO$, $N_2$, $CO$, $C_2$, $PH$, $AlH$, $NH$) bestimmt und in Tabelle 1 zusammengestellt. Wie Tabellen 2—4 zeigen, ist die Übereinstimmung zwischen die, nach den Formeln berechneten Kombinationsdifferenzen und die experimentell gefundenen im ganzen beobachteten Messbereich sehr befriedi-

gend. — Mit der oben erwähnten Methode ergab sich, dass der $^3\Pi$-Term von *AlH* normal, der von *NH* verkehrt sei.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Triplett Zuständen und somit die Intensitätsverteilung der Bandenlinien können ebenfalls berechnet werden. Figur 3 stellt die Übergangswahrscheinlichkeiten, berechnet für die erste positive Stickstoffbanden dar; die beobachtete Intensitätsverteilung steht damit in Einklang.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Dezember 1935.)

# A BIOLÓGIAI OXYDÁCIÓK MECHANIZMUSA.

SZENT-GYÖRGYI ALBERT l. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Minden életjelenség, a sejtnek minden működése energiába kerül, s ha energia nem áll rendelkezésre, úgy az élet megszűnik. A magasabbrendű szervezetben az energiának legfőbb forrása az oxydáció. Így az oxydációk az élet középpontján állván, sok kutatónak kötötték le figyelmét. A biológiai oxydációk mechanizmusát az élettelen világból vett analógiák segélyével próbálták először megérteni, azonban a modern biochemiai kutatás világossá tette azt, hogy a szervezetünkben lefolyó égések sokkal bonyolultabbak és egészen más jellegűek, mint a szervezetünkön kivüli oxydációs folyamatok. Az utolsó időkig két nagy theoria képezte a biológiai oxydációkra vonatkozó tudásunk alapját. Az egyik theoria szerzője H. WIELAND, aki kimutatta, hogy szervezetünkben a tápanyagok nem oxydálódnak közvetlenül az oxygén közbejöttével. Ami a szervezetünkben elégetendő tápanyagokkal történik, az nem más, mint hogy különleges fermentumok a tápanyagok molekulájába foglalt hydrogénatomokat kötésükben fellazítják. Ez a fellazult hydrogén azután könnyen hagyja el a tápanyag molekuláját és ez a hydrogénatom az, amely tulajdonképpen elég és amelynek oxydációja az életfolyamatokhoz az energiát szolgáltatja. Így a WIELAND-theoria arra a nagyon meglepő eredményre vezetett, hogy a magasabb szervezetnek csak egy tüzelőanyaga van, a hydrogén, és a tápanyag tulajdonképpen nem más, mint a hydrogén vivője.

A másik theoria, amelyre az imént utaltam, O. WARBURG vizsgálatain nyugszik. WARBURG tudniillik kimutatta azt, hogy az oxygén, mikor a szervezetünkben reakcióba lép, nem közvetlenül

támadja meg az elégetendő anyagot, hanem először egy ferment-szerű anyaggal reagál és így maga is aktiválódik. A WIELAND- és a WARBURG-theoriát tehát úgy foglalhatjuk össze, hogy szervezetünkben az aktivált oxygén hydrogénja oxydálja az aktivált hydrogént.

Intézetemnek évek óta a legfőbb feladata az, hogy erre a látszólag igen egyszerű reakcióra, a hydrogénnak az oxygénnal való egyesülésére fényt derítsen. Mi sem látszik egyszerűbbnek, mint ezt a reaktiót a következő egyszerű egyenlettel tüntetni fel:

$$4H + O_2 = 2H_2O$$

Hogy ez a dolog azonban nem ilyen egyszerű, azt már D. KEILIN vizsgálatai is nyilvánvalóvá tették. KEILIN kimutatta ugyanis azt, hogy az oxygén, amely a WARBURG-fermenten aktiválódik, nem oxydálja közvetlenül a hydrogént, hanem előbb egy egész során megy át a reaktióknak, sorban oxydálván egymás után három, a vérfestékkel rokon anyagot. Ezt a három anyagot KEILIN CYTOCHROM *A*, *B* és *C*-nek nevezte el. Hogy ezek egymást milyen sorrendben oxydálják, azt még nem tudjuk és én csak egyszerűség kedvéért fogom őket *ABC* sorrendben egymás után illeszteni.

Évekig úgy látszott, hogy KEILIN vizsgálataival a magasabb szervezetek oxydációs rendszere minden részében ismertté vált. Ezen a ponton kapcsolódnak be azonban azok a vizsgálatok, amelyeket intézetem végzett és amelyekről egész röviden beszámolni szeretnék. Áttekinthetőség okáért legyen szabad mindjárt vizsgálataim végeredményét előre bocsátani. Vizsgálataim végeredménye az, hogy a KEILIN-féle cytochrom-rendszer és a hydrogén aktiválás közé a reaktióknak még egy egész sora van beiktatva és e reaktióknál centrális szerepet játszik a fumársav. Vizsgálataim kimutatták azt, hogy az oxygént, amelyet a Warburgferment aktivált és amely azután sorra oxydálja a három cytochromot, szervezetünk arra használja fel, hogy egy eddig még közelebbről nem deffiniált anyag közbejöttével és egy különleges ferment segélyével a fumársavat oxydálja, mely sejtjeinkben bár igen kicsiny, de jól mérhető koncentrátióban van jelen. A fumársav elsőfokon valószínűleg oxyfumársavvá oxydálódik, amely oxyfumársav azután spontán oxalecetsavvá tevődik át. Ez az oxalecetsav azután az az anyag, amely

a tápanyagokból a WIELAND-theoria szerint felszabadított hydrogént felveszi. A hydrogén leadása által a tápanyag oxydálódik, míg az oxálecetsav redukálódik. A redukció terméke minden valószínűség szerint almasav, mely almasav egy különleges ferment a fumarase hatására fumársavvá alakul és a cyklus bezárul.

Ezen tények megállapításánál nagy segítségemre volt a malon sav, amelynek hatására a fumársav a sejtekből eltűnik. A fumársav ezen eltűnésének mechanizmusa igen bonyolult. Itt reá bővebben kitérni nem kívánok. A tény az, hogy malonsav hatására eltűnik az az igen kis mennyiségű fumársav, amely a sejtekben jelen van. Ilyen módon a sejt elveszti a légzésében szereplő központi anyagot, aminek következtében a légzés megáll, bizonyítván azt, hogy az egész légzést a fumársav közvetítette. Ha visszaadjuk a sejtnek az elvesztett fumaratját, úgy a légzés ismét megindul és dacára a malonsav jelenlétének, akadály nélkül folytatódik.

Ezen vizsgálatoknál, amelyek óriási kísérleti anyagot ölelnek fel, munkatársaim dr. ANNAU ERNŐ, dr. BANGA ILONA, dr. GÖZSY BÉLA, dr. HUSZÁK ISTVÁN, LAKI KÁLMÁN és STRAUB BRUNÓ megbecsülhetetlen segítséget nyujtottak és az ő lelkes és fáradhatatlan munkásságuk nélkül ez az alapvető kérdés ma is tisztázatlan lenne. Most azonban át tudjuk már tekinteni az egész sejtoxydátiót. Kövessük még egyszer végig a tápanyag oldaláról tekintve az egész reaktió-láncot. A tápanyag a WIELAND-féle dehydrogenásen aktiválódik és leadja hydrogénját. Ezt a hydrogént egy cofermentszerű anyag veszi fel, melynek chémiai mibenlétét szintén intézetem tisztázta. Ez a kodehyrase azután a hydrogént az oxálecetsavnak adja át, redukálva azt almasavvá. Az almasav a fumarase hatása alatt fumársavvá hydrálódik. A fumársav, mely közbe újra oxálecetsavvá oxydálódik, redukál egy eddig ismeretlen anyagot, melynek felderítésével most vagyunk elfoglalva. Ez az ismeretlen anyag azután redukálja az egyik cytochromot. Az egyik cytochrom redukálja a másikat, a második a harmadikat, míg végül a harmadik cytochrom redukálja a WARBURG-féle fermentet, amely ferment végül a belégzett oxygénnel reagál.

Ilyen módon tisztázódott az oxydációs lánc chémiai szerkezete. Az eredmények igen meglepőek, azonban itt is, mint ahogy az a tudományos kutatásoknál szokott lenni, minden új eredmény

nem végső nyugvópont, hanem csupán kiindulási helye újabb és újabb kérdéseknek és minden csúcs, amelyet leküzdünk, csak új ismeretlen tájaknak nyitja meg képét. Így az oxydációk mechanizmusa tisztázódván, megnyílik a lehetősége újabb kérdések felvetésének és most már ismervén az oxydációs lánc chémiai strukturáját, kérdezhetjük azt, hogy miért kell a szervezetnek ezt az egyszerű reakciót, a hydrogén és a oxygén egymáshoz való kapcsolását, egy ilyen bonyolult hosszú, közel tíz tagból álló reakciós lánccal végezni? Miért kell ilyen bonyolult hosszú utat választani a természetnek? Kétségtelen, hogy a lánc létezésének igen mély okai vannak és újabb vizsgálataink főcélja megérteni ennek a láncnak a jelentőségét és azokat az utakat, amelyeken szervezetünk az oxydátiókon felszabaduló energiát céljainak szolgálatába állítani képes.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott üléséből.)

# MECHANISMUS DER BIOLOGISCHEN OXYDATION.

Von ALBERT SZENT-GYÖRGYI.

Im Muskelgewebe reagiert das aktivierte $H$ nicht unmittelbar mit der Cytochrom resp. dem aktivierten $O_2$. Das Cytochrom oxydiert Fumarsäure zu Oxalessigsäure. Diese ist der physiologische Wasserstoffacceptor.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# KOLLOIDÁLIS SZERKEZETŰ GRAFITRÉTEGEK ELŐÁLLITÁSA ÉS VIZSGÁLATA.

FRANK GÁBOR, PATAI IMRE és TOMASCHEK ZOLTÁN-tól.

1. Vákuumkészülékek, elektroncsövek, erősítő és egyirányítócsövek, valamint más kisülési csövek fémelektródjai üzemközben rendszerint felmelegszenek. Az elektródok felmelegedését célszerű lehetőség szerint csökkenteni, miután a felmelegedés hatása alatt a fémek, még ha előzőleg igen hosszú ideig is izzíttattak vákuumban, gázokat adnak le, amelyek a vákuum jóságát vagy az esetleges ritkított gázok tisztaságát rontják. Az elektródokon képződő melegmennyiség vákuumban majdnem tökéletesen, de ritkított gázokban is jórészt *sugárzás* útján távozik. A fémelektródok hősugárzó képességét úgy növelhetjük, ha felületüket *feketítjük;* feketítés nélkül a vakuumtechnikában használatos fémek, nikkel, vas, wolfram, molybdaen stb. aránylag rossz hősugárzók. A felületek feketítésére ma leghasználatosabb eljárás a szénnel, vagy szénvegyületekkel való bevonás; a szénnel való bevonásnak a jó hősugárzó képességén kívül más előnyei is vannak, pl. az igen csekély szekundérelektronemisszió, oxydációval szemben való védelem stb.

A szénbevonattal szemben különböző követelményeket támasztunk: jól tapadjon, egyenletes legyen, káros szennyezéseket, különösen könnyen bomló vegyületeket ne tartalmazzon.

A szénnel való bevonásnak a vakuumtechnikában ma legelterjedtebb módja abban áll, hogy a bevonandó fémelektródokat szénhydrogénekben izzítják. Használatos erre pl. az acetylén. Ezzel a módszerrel igen jól sugárzó fekete felületek nyerhetők; nagy hátránya az eljárásnak, hogy könnyen képződnek magasabb rendű szénhydrogének, amelyeket a felületi réteg okkludál.

2. Mi egy olyan eljárást tanulmányoztunk, amellyel bármely fém, vagy félvezető felületére egyenletes, igen tiszta, jól sugárzó, jól tapadó grafitréteg képezhető. Az eljárás [1] abban áll, hogy a bevonandó felületre kolloidális oldatból elektroforetikus úton választjuk le a grafitot. Így olyan rétegek nyerhetők, amelyek a vákuumtechnika minden követelményének megfelelnek.

Laboratóriumunk évek óta foglalkozik kataforetikus úton előállított földalkáli-karbonátrétegek alkalmazásával izzókatódok készítésére.[2] A kataforetikus úton előállított földalkáli-karbonátokra vonatkozólag tüzetes vizsgálatokat is végeztünk; most azt tűztük ki célul, hogy a kataforetikus grafitrétegek előállításának fontosabb részleteit tisztázzuk és az előállított rétegek sugárzási tulajdonságait mérésekkel is meghatározzuk.

3. Kolloidális oldatok készítésére a kereskedelemben kapható aquadag készítményeket használtuk. Kétféle eredeti anyaggal végeztük a kísérleteket. Az egyik (I.) E. G. Acheson Ltd. Plymouth gyártmánya, a másik (II.) I. D. Riedl—E.—De Haen-től származnak és a Hydrokollag nevet viseli. A kétféle anyag összetétele:

| | I. | II. |
|---|---|---|
| Grafit | 14·42% | 17·51% |
| Víz | 84·75% | 77·88% |
| Organikus anyag (védőkolloid) | 0·39% | 4·21% |
| Vas | 0·09% | 0·09% |
| Egyéb anorg. anyag ($Sn$, $Pb$, $SiO_2$) | 0·10% | — |
| Ammónia | 0·25% | 0·31% |
| | 100·00% | 100·00% |

A kolloid grafitrészecskék elektroforézisnél az anódon válnak le, a részecskék töltése tehát negatív. Az idegen anyagok közül, a vas, amennyiben kolloidális állapotban van, ugyancsak az anódon

[1] Eljárás kisülési csövek elektródjainak és egyéb alkatrészeinek, valamint sugárzó testeknek bevonására, idegen anyagokkal. Magyar szab. bej. P—8232. 1934. június 20.

[2] Dr. PATAI IMRE: A thermikus elektronemisszió és az ízzókathodok technikája. Mat. Fiz. Lapok, 35. kötet, 145. old. 1929.

válik le (az esetleges vasoxyd pozitív töltésű és így a katód felé vándorol). A szennyeződések közül a $SiO_2$ és $SnO_2$ ugyancsak az anódon válnak ki. Az ólomoxyd vándorlására nincs adat.

A technikai elektródok anyaga, amelyeket grafittal vonunk be, rendszerint nikkel, molybdaen, wolfram, vagy ezeknek ötvözete. A tiszta nikkelből készült anódokat előzetesen érdesítjük és pedig egymásután következő oxydálás és redukálás által. Az így előkészített anyagot $H_2$-ben 1000° C körül izzítjuk, majd híg $HNO_3$-ban letisztítjuk, majd desztillált vízben lemossuk. Az előzetes technikai kísérleteknél a kolloid grafitot desztillált vízzel higítottuk, úgy, hogy 100 $cm^3$ kb. 0·013 g grafitot tartalmazott. Az oldat hőfoka 70—80° C volt. Az elektroforézisnél 1·4 $mA/cm^2$ áramsűrűség látszott legmegfelelőbbnek. Nagyobb áramsűrűségnél a levált réteg könnyen csomósodott. Ennek meggátlására jó, ha az oldat gyengén ammóniás. Későbbi kísérleteinknél mindezeknek a körülményeknek a szerepét pontosabb vizsgálat alá vettük. Az elektroforézis időtartama, kb. 8—15 perc alatt 0·5—1·5 $\mu$ vastagságú rétegeket nyertünk. A szép, szürkés feketeszínű rétegek jól tapadnak, a vákuumban való izzítást jól bírják. Túlvastag rétegek az izzításnál lepattogzanak; 0·5—1 $\mu$ vastagságú réteg technikai célokra tökéletesen megfelel.

4. Pontosabb vizsgálatainkhoz platinalemezeket használtunk, amelyeknek felülete 50—50 $cm^2$ volt. A platinaanódtól 20—20 mm távolságban mindkét oldalon egy ugyanilyen nagyságú platinakatód volt az oldatban elhelyezve. A vizsgálatoknál változtattuk egyrészt az oldatok koncentrációját, másrészt hőfokát, valamint az ammoniáktartalmat is. Minden egyes kísérletnél mindenekelőtt lemértük a cella elektromos ellenállását és beállítottuk a kívánt áramsűrűséget. Az elektroforézis időtartama az összes kísérleteknél egységesen 10 perc volt. Az elektroforézis befejezte után a bevont elektródokat szárítószekrényben megszárítottuk és mértük. A rétegvastagságot súlymérés alapján határoztuk meg, 2·3-nak véve a grafit fajsúlyát. Mérési eredményeink az I., II. és III. táblázatokban vannak feltüntetve.

*A hőfok változtatására* (25° és 70°-nál) a kétféle grafit ellenkezőképen viselkedik: az Acheson-grafitból 70°-on valamivel több válik le mint 25°-on, a Riedl grafitnál fordítva áll a dolog.

## I. táblázat.

A hőmérséklet hatása az elektroforézisre.

*a)* Acheson-grafit.

| Áram-erősség *mA* | Áram-sűrűség *mA*/cm² | 100 cm³ oldat = 30 mg grafit + 30 mg $H_3N$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 70° C | | | 25° C | | |
| | | Ellen-állás Ω | Leválás mg Cb | Réteg-vast. μ | Ellen-állás Ω | Leválás mg/Cb | Réteg-vast. μ |
| 20 | 0·4 | 167·5 | 0·36 | 0·37 | 207·5 | 0·28 | 0·29 |
| 40 | 0·8 | 136·2 | 0·44 | 0·92 | 181·8 | 0·37 | 0·77 |
| 60 | 1·2 | 110·8 | 0·67 | 2·1 | 165·0 | 0·40 | 1·25 |
| 80 | 1·6 | 117·4 | 0·53 | 2·2 | 158·1 | 0·41 | 1·69 |
| 100 | 2·0 | 108·0 | 0·52 | 2·7 | 173·5 | 0·45 | 2·36 |
| 150 | 3·0 | — | — | — | 146·3 | 0·45 | 3·49 |

*b)* Riedl-grafit.

| Áram-erősség *mA* | Áram-sűrűség *mA*/cm² | 100 cm³ oldat = 40 mg grafit + 30 mg $H_3N$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 70° C | | | 25° C | | |
| | | Ellen-állás Ω | Leválás mg Cb | Réteg-vast. μ | Ellen-állás Ω | Leválás mg/Cb | Réteg-vast. μ |
| 20 | 0·4 | 167·5 | 0·16 | 0·17 | 337·5 | 0·20 | 0·21 |
| 40 | 0·8 | 136·2 | 0·22 | 0·47 | 327·5 | 0·40 | 0·83 |
| 60 | 1·2 | 104·1 | 0·21 | 0·67 | 181·6 | 0·47 | 1·46 |
| 80 | 1·6 | 103·7 | 0·20 | 0·82 | 160·0 | 0·59 | 2·48 |
| 100 | 2·0 | 93·5 | 0·23 | 1·19 | 177·5 | 0·59 | 3·08 |
| 140 | 2·8 | 107·1 | 0·27 | 1·99 | 131·7 | 0·86 | 6·30 |

## II. táblázat.

Az ammoniák koncentrációjának hatása az elektroforézisre.
25° C-nál.

*a)* Acheson-grafit.

| Áramerősség *mA* | Áramsűrűség *mA*/cm² | 100 cm³ oldat = 30—36 mg grafit | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 cm³=16 mg $H_3N$ | | | 100 cm³=30 mg $H_3N$ | | | 100 cm³=60 mg $H_3N$ | | |
| | | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ |
| 20 | 0·4 | 282·5 | 0·56 | 0·59 | 207·5 | 0·28 | 0·29 | 195·0 | 0·22 | 0·23 |
| 40 | 0·8 | 272·5 | 0·50 | 1·04 | 181·8 | 0·37 | 0·77 | 152·5 | 0·21 | 0·45 |
| 60 | 1·2 | 264·1 | 0·60 | 1·87 | 165·0 | 0·40 | 1·25 | 150·8 | 0·20 | 0·64 |
| 80 | 1·6 | 275·0 | 0·54 | 2·27 | 158·1 | 0·40 | 1·69 | 162·4 | 0·24 | 0·99 |
| 100 | 2·0 | 235·0 | 0·54 | 2·82 | 173·5 | 0·45 | 2·36 | 131·0 | 0·29 | 1·51 |
| 150 | 3·0 | 244·6 | 0·42 | 3·26 | 146·3 | 0·45 | 3·49 | 124·6 | 0·26 | 2·07 |

*b)* Riedl-grafit.

| Áramerősség *mA* | Áramsűrűség *mA*/cm² | 100 cm³ oldat = 30—40 mg grafit | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 cm³=16 mg $H_3N$ | | | 100 cm³=30 mg $H_3N$ | | | 100 cm³=60 mg $H_3N$ | | |
| | | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ |
| 20 | 0·4 | 302·5 | 0·52 | 0·54 | 337·5 | 0·20 | 0·21 | 195·0 | 0·25 | 0·26 |
| 40 | 0·8 | 268·3 | 0·51 | 1·07 | 327·5 | 0·40 | 0·83 | 157·5 | 0·46 | 0·69 |
| 60 | 1·2 | 270·8 | 0·46 | 1·44 | 181·6 | 0·47 | 1·46 | 158·3 | 0·36 | 1·12 |
| 80 | 1·6 | 254·5 | 0·39 | 1·62 | 160·0 | 0·59 | 2·48 | 135·0 | 0·33 | 1·40 |
| 100 | 2·0 | 235·5 | 0·44 | 2·31 | 177·5 | 0·59 | 3·08 | 130·5 | 0·37 | 1·93 |
| 150 | 3·0 | 258·0 | 0·31 | 2·43 | 131·7 | 0·80 | 6·30 | 126·0 | 0·33 | 2·60 |

## III. táblázat.

A grafit koncentrációjának hatása az elektroforézisre 25° C-nál.

*a)* Acheson-grafit.

| Áramerősség *mA* | Áramsűrűség *mA*/cm² | 100 cm³ = 30 mg $H_3N$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 cm³ = 12·2 mg grafit | | | 100 cm³ = 30 mg grafit | | | 100 cm³ = 122 mg grafit | | |
| | | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ |
| 20 | 0·4 | 232·5 | 0·14 | 0·15 | 207·5 | 0·28 | 0·29 | 228·5 | 1·13 | 1·18 |
| 40 | 0·8 | 177·5 | 0·12 | 0·26 | 181·8 | 0·37 | 0·77 | 186·2 | 1·04 | 2·17 |
| 60 | 1·2 | 173·7 | 0·12 | 0·40 | 165·0 | 0·40 | 1·25 | 160·0 | 1·21 | 3·79 |
| 80 | 1·6 | 167·5 | 0·12 | 0·56 | 158·1 | 0·40 | 1·69 | 163·1 | 1·07 | 4·46 |
| 100 | 2·0 | 155·5 | 0·11 | 0·58 | 173·5 | 0·45 | 2·36 | 180·0 | 0·92 | 4·78 |
| 150 | 3·0 | 166·6 | 0·09 | 0·72 | 146·3 | 0·45 | 3·49 | 153·6 | 0·94 | 7·36 |

*b)* Riedl-grafit.

| Áramerősség *mA* | Áramsűrűség *mA*/cm² | 100 cm³ = 30 mg $H_3N$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 cm³ = 14 mg grafit | | | 100 cm³ = 40 mg grafit | | | 100 cm³ = 140 mg grafit | | |
| | | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ | Ellenállás Ω | Leválás mg/Cb | Rétegvast. μ |
| 20 | 0·4 | 232·5 | 0·25 | 0·26 | 337·5 | 0·20 | 0·21 | 232·5 | 1·34 | 1·40 |
| 40 | 0·8 | 188·7 | 0·16 | 0·33 | 327·5 | 0·40 | 0·83 | 152·5 | 1·05 | 2·20 |
| 60 | 1·2 | 160·8 | 0·17 | 0·52 | 181·6 | 0·47 | 1·46 | 133·4 | 0·96 | 3·01 |
| 80 | 1·6 | 133·3 | 0·17 | 0·72 | 160·0 | 0·59 | 2·48 | 128·1 | 1·00 | 4·16 |
| 100 | 2·0 | 163·5 | 0·16 | 0·83 | 177·5 | 0·59 | 3·08 | 147·5 | 1·04 | 5·43 |
| 150 | 3·0 | 150·0 | 0·15 | 1·18 | 131·7 | 0·80 | 6·30 | 117·3 | 0·78 | 6·13 |

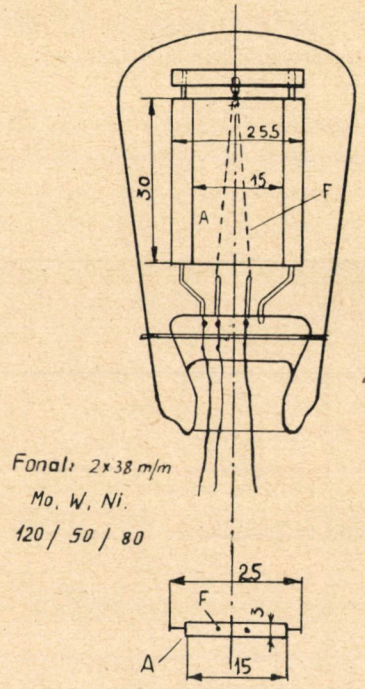
A táblázatoknál a leválás miligramm/Coulomb-ban van megadva.

*A koncentráció változtatásánál* kis áramsűrűségnél azt találtuk, hogy a leváló mennyiség közelítőleg arányos a koncentrációval.

*Az ammoniák koncentrációjának növelésével* a leválasztott mennyiség csökken, ami érthető, mert hiszen ekkor az elektroforézis mindinkább háttérbe szorul az elektrolizis mellett. Kismennyiségű ammoniák mégis szükséges, a leválasztott réteg egyenletességének biztosítására.

5. Következő feladatunknak tűztük ki grafitrétegeink sugárzási tulajdonságainak viszgálatát.

A grafit sugárzására vonatkozólag igen kevés irodalmi adatot találunk (Handbuch der Physik Bd. XIX. 35. old.) PRESCOTT és HINCHE (Physic. Rev. **31.** 130, 1928.) szerint az ACHESON-grafit emisszióképessége $6{\cdot}6 \cdot 10^{-5}$ cm hullámhossznál, 1250—2700° abs. intervallumban a $=0{\cdot}984-5{\cdot}8 \cdot 10^{-5}T$.




1. ábra.

Előzetes kísérletképpen az 1. ábrán látható kísérleti csövet készítettük. *A* az anód, melynek belsejében V-alakú *F* fűtőszál van kifeszítve. Az izzókatód és az anód közé feszültséget kapcsolunk és az anódot így elektronbombázással hevítettük. Minthogy a rendszer vákuumban van, az anódon kisugárzott energia a cső által elfogyasztott elektromos energiával vehető egyenlőnek. Az összes kisugárzott energia tehát:

$$W=W_f+W_a=I_f \cdot E_f+I_a \cdot E_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

ahol $I_f$ a fűtőáramot, $E_f$ a fűtőfeszültséget, $I_a$ az anódáramot, $E_a$ pedig az anódfeszültséget jelenti,. Azonos hőfoknál a mért wattok száma a sugárzás mértéke.

Ezt a kísérleti csövet háromféle kivitelben készítettük el:

1. tiszta *Ni*-anóddal,
2. kolloidális grafitréteggel bevont *Ni*-anóddal,
3. szénhydrogénben való izzítás által feketített *Ni*-anóddal.

A feketített anódok közepén 2 mm átmérőjű körfelület csupaszon maradt. Ezen csupasz *Ni*-felület sugárzásából határoztuk meg optikai pyrometria segítségével az anód valódi hőfokát. A pyrometrálást egy Götz-féle mikropyrometer-okulárral felszerelt leolvasó-mikroszkoppal eszközöltük, melyet előzőleg egy Philips pyrometerlámpával (Bandlampe) fekete hőfokra behitelesítettünk. A fekete hőfok-értékekből a *Ni*-re vonatkozó $a=0{\cdot}34$ értékű abszorpciós tényező (Landolt—Börstein: Physikalische-Chemische Tabellen, Band II. Berlin 1923.) felhasználásával nyertük a valódi hőfok-értékeket. A pyrometrálásnál a Schott-féle *F* 4512 szűrőüveget használtuk, melynek hatásos hullámhossza $\lambda=0{\cdot}651\,\mu$.

Méréseink eredménye a következő volt:

| | W/cm² | $K_v^o$ |
|---|---|---|
| szénhydrogénben feketített anód .. | 1·805—2·060 | 974° |
| kolloidálisan grafitozott anód ..... | 1·860—1·876 | |
| csupasz *Ni*-anód ..... | 1·162—1·200 | |

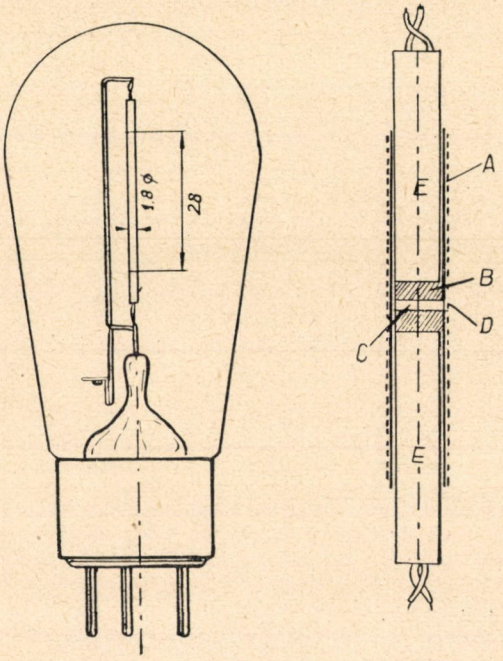
ahol $K_v$ az anód valódi abszolut hőfoka.

Fenti mérésekből látható, hogy kolloidális grafitrétegünk sugárzóképessége a más módszerrel feketített *Ni*-felületek sugárzásával nagyjában megegyezik.

Következő kísérletsorozatunk a kolloidális grafitrétegek abszorpciós, ill. emissziós tényezőinek meghatározását célozta, $\lambda=0{\cdot}651\ \mu$ hullámhossznál.

A mérés kivitelére a 2/*a* és 2/*b* ábrán látható kísérleti csövet használtuk. Az *A* nikkelcső kolloidális grafitréteggel van bevonva. A csőbe egy tömör *Ni*-hengert (*B*) helyeztünk, melyben egy 0·2 mm átmérőjű fúrat (*C*) volt. A fúratnak megfelelően a *Ni*-cső egyik oldalán ki volt fúrva (*D*). A *Ni*-csövet közvetett fütésű katódként felizzíthatjuk *E*—*E* fütőtestekkel. A *C* fúrat belseje *abszolut fekete testnek* fogható fel, amelynél a valódi hőfok egyenlő a fekete hőfokkal. Ha tehát az optikai pyrometerrel az üveg fenekét viziroz-zuk, akkor a nyert fekete hőfok megadja egyszersmind a *Ni*-cső és így a grafitréteg valódi hőfokát is. A fúrat közvetlen közelében a

*Ni*-cső hőfoka a fúrat belsejének hőfokával egyenlőnek tekinthető, tehát a felület pyrometrálásával megkapjuk a $T_{v\,\text{grafit}} = T_{f\,\text{üreg}}$ hőfokú *Ni*-cső, ill. grafitréteg fekete hőfokát, $T_{v\,\text{grafit}}$-ot. Az összetartozó fekete- és valódi hőfokértékek ismeretével az abszorpciós tényező a pyrometer hatásos hullámhosszára kiszámítható volt ($\lambda = 0{\cdot}651\ \mu$).




*a* *b*

2. ábra.

A katódokat először vakuumban körülbelül 1300° K-on 10 percig izzítottuk, azonban azt tapasztaltuk, hogy a grafit a felületről eltünt. Az eltünés valószínű oka, hogy a grafit a nikkelben *oldódik*.

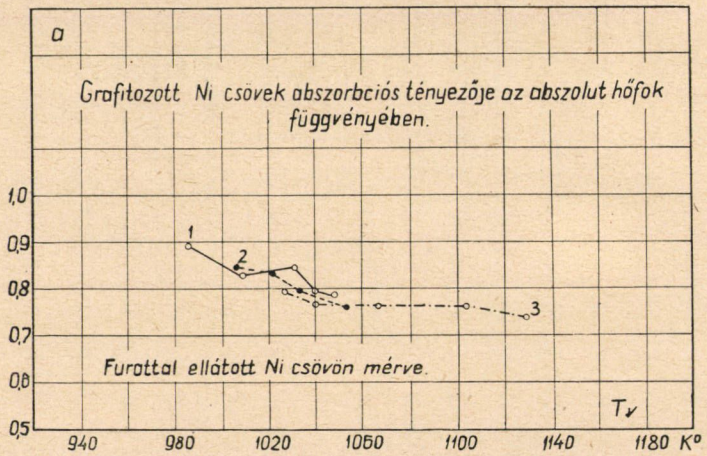
A csöveket ismét kibontva, a grafitozást megismételtük. A harmadik bevonás, ill. izzítás után a réteg nagyjában megmaradt, ami annak a jele volt, hogy a *Ni* telitődni kezdett. Első eredményeink az alábbiak voltak:

| | $a$ | $a_k$ |
|---|---|---|
| Első bevonás után ..... | felületről eltünt | |
| Második bevonás után .. | 0·345—0·370 | 0·350 |
| Harmadik bevonás után | 0·375—0·440 | 0·412 |

$a$ itt az abszorpciós tényező 0·651 $\mu$ hullámhossznál, $a_k$ a mérések átlagértéke.

A bevonás minden alkalommal 1—2 $\mu$ vastagságú réteggel történt.

Minthogy az eredmények fenti okok miatt irreálisak, más módszert kellett a grafitréteg eltűnése ellen alkalmazni. Ezért a *Ni*-csöveket a grafittal való bevonás előtt, világítógáz áramban kb. 1000° C-on szénnel telítettük. A kísérleti csövek szivattyúzásánál




3. ábra.

is kb. 1000° C-ig mentünk fel, azonban a grafitréteg a felületen megmaradt. A grafitréteg vastagsága utólagos mikroszkópi leméréssel 3·5 $\mu$nak adódott ki. Súlymeghatározással (csupasz és bevont *Ni*-cső súlyleméréséből) a rétegvastagságra 1·002 $\mu$-t kaptunk, ami a réteg szivacsos voltára mutat.

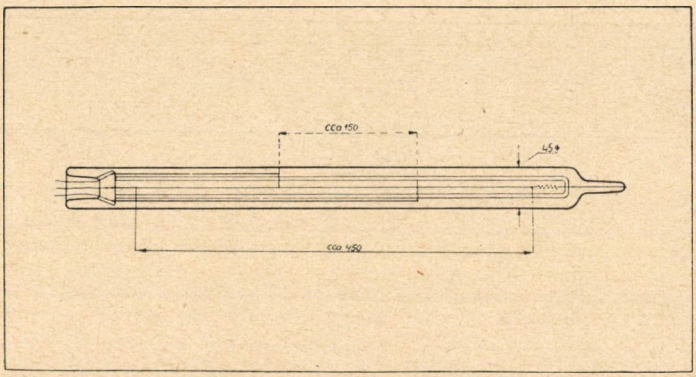
A mérést optikai pyrometerrel elvégezve, az abszorpciós tényezőre

$$a = 0{\cdot}746—0{\cdot}880$$

közötti értékeket találtunk. A mért értékeket a valódi hőfok függvényében felvive, azt tapasztaljuk, hogy az abszorpciós tényező a hőfokkal kevéssé *csökken*. Ezt a csökkenést mind a három kísérleti cső elég egyértelműen mutatta (3. ábra).

6. A grafitrétegek összsugárzásának meghatározására a fenti módszerek nem voltak elégségesek, mert a kisugárzott energia nem volt pontosan mérhető, másrészt a sugárzó testek hőfoka nem volt egyenletes. Ezen hibák kiküszöbölésére külön kísérleti csövet szerkesztettünk, melynek elrendezési rajza a 4. ábrán látható. Egy 45 mm átmérőjű üvegcsőbe kb. 450 mm hosszú, grafitréteggel bevont $W$-fonalat szerelünk. A grafitozásnál a kolloidális oldatban 0·044% grafit és 0·113% $H_3N$ volt. Az elektroforezis $T=50°$ C-on $i=1·2$ mA/cm² áramsűrűséggel történt.

A fonal középső, kb. 150 mm-es darabjának két végén igen vékony levezető szálakat hurkoltunk át, melyek a csőből ki voltak



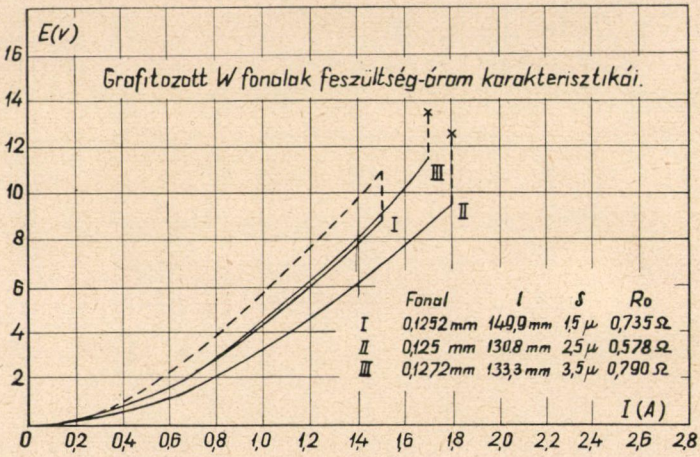
4. ábra.

vezetve. A csövet szivattyúzás közben 400° C-on, kályha alatt 1óra hosszatt hevítettük, hogy a falban levő vízgőzök is eltávozzanak. A fonal elektromos árammal való izzításakor a középső fonalrész egyenletes hőfokúnak vehető, így a hő csak sugárzás útján távozhat el, tehát a két keresztszál közötti fonalrész által felvett wattok száma egyenlő a kisugárzott energiával. A wattfogyasztás igen pontosan számítható a mért áram és feszültségesés értékeiből.

A fonal hőfokának meghatározására a tiszta $W$ hideg és meleg ellenállásának viszonyát használtuk fel, Langmuir és Jones által megadott értékek alapján (General Electric Rev. XXX. 312. 1927) feltételezve, hogy a vékony grafitréteg vezetőképessége elhanyagolható a kis ellenállású szálhoz (0·5—1 Ohm) képest. Hibát okozhat még, hogy a $W$ szennyeződik az izzítás folyamán, azonban a

drót hideg ellenállásának, $R_0$-nak, a mérés előtt és után való lemérésével nyert értékei a tiszta $W$-nak megfelelő értékekkel annyira megegyeznek, hogy a fenti módon a mérés egyéb hibahatárain belül számolhatunk.

Az I. sz. csővel felmentünk kb. 1800° K-ig, a nélkül, hogy sugárzása, fajellenállása, stb. lényegesen megváltozott volna. 1800°-on felül az $E=f$ (I) görbe (ahol $E$ a feszültség és I az áramerősség)




5 ábra.

menete megváltozott (5. ábra), amennyiben a grafitréteg a felületről eltünt és így a fonal rosszabb sugárzóvá vált. Az egyes hőfokokhoz tartozó $W/ld$-ket ($l$=fonalhossz, $d$=átmérő) ábrázoltuk a hőfok függvényében (6. ábra).

A felületek sugárzására érvényes, hogy

$$W/\mathrm{cm}^2 = 5{\cdot}7 \,.\, 10^{-12} \,.\, a \,.\, T^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

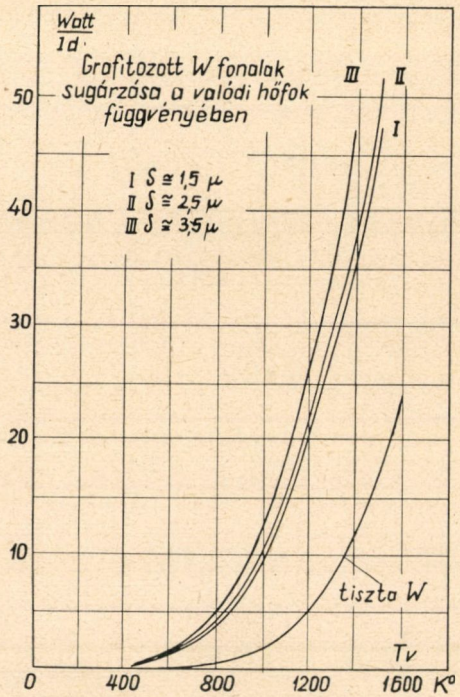
ahol $W$ a felület által kisugárzott energia wattokban, $T$ az abszolút temperatúra, $\alpha$ egy hatványkitevő, $a$ pedig a sugárzási tényező, melyet abszolút fekete testnél 1-nek veszünk.

Ha a visszasugárzást elhanyagoljuk, $\alpha$ könnyebb meghatározására a görbéket logaritmikus léptékben is megrajzolhatjuk (7. ábra). Ekkor ugyanis

$$\log W/\mathrm{cm}^2 = \log 5{\cdot}7 \,.\, 10^{-12} + \log a + \alpha \log T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

Ez egy egyenes egyenlete, melyből $\alpha$ és az iránytangens $\alpha$ könnyen meghatározható.

A második kísérleti csőnél a vizsgálat az első csőhöz hasonlóan folyt le. Az $E=f$ (I) karakterisztikák kb. 1800° K-ig teljes stabilitást mutatnak, ezen a hőfokon azonban a grafitréteg 10 percnyi izzítás




6. ábra.

után eltűnt. A görbe menete ismét a tiszta $W$-éhoz lett hasonló. Az eredeti rétegvastagság $2{\cdot}5\,\mu$ volt.

Minthogy a grafit szürke testnek fogható fel, feltehető, hogy abszorpciós tényezője a hullámhosszal nem változik. Így a

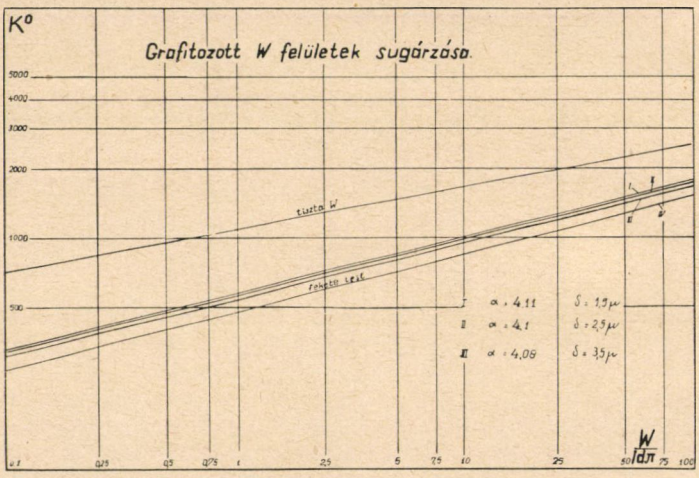
$$W_{gr}/F = 5{\cdot}7 \,.\, 10^{-12} \,.\, \alpha \,.\, T^{\alpha} \text{ (grafit)}$$

összefüggésből és a

$$W_f/F = 5{\cdot}7 \,.\, 10^{-12} \,.\, 1 \,.\, T^4 \text{ (fekete test)-ből}$$

$T$=konst. mellett $W_{gr}/W_f = a$=konst.-nak kell lennie. Ezt az állandóságot a hibahatáron belül sikerült is kimutatni a II. sz. grafitos cső alapján, de itt $a$=0·572-t kaptunk. A kis $a$ érték valószínű oka, hogy a grafitréteg vékonysága miatt (1·5—2·5 $\mu$) a $W$ maga is átsugárzott.

A III. sz. hőfokmérő csőnél vastagabb grafitréteget alkalmaztunk. A rétegvastagságra középértékképpen 3·5 $\mu$ adódott ki. A $W$-fonal átmérője 127·2 $\mu$. Az $E=f(I)$ karakterisztika kb. 1700°




7. ábra.

K-ig változatlan marad, ekkor a $W$-fonal fajellenállása hirtelen megváltozott, úgyhogy további mérések már nem voltak eszközölhetők. Ennél a csőnél mértük a fonal *fekete* hőfokát is, optikai pyrometerrel.

Már méréseink elején felmerült annak lehetősége, hogy az abszorpciós tényező a rétegvastagságtól nem független és ez a feltevés be is bizonyosodott vizsgálatainknál. A III. sz. cső $W/ld=f(T)$ karakterisztikája az I. és II. cső görbéje felett jár (6. ábra) jelezve, hogy az előbbieknél jobban sugároz.

A pyrometrált fekete hőfokból és a hideg és meleg ellenállás viszonyából számított valódi hőfokból $a$=0·7 körüli érték adódott ki. A $W_{gr}/W_f$-ből számítva $a$=0·70—0· 74-et kaptunk. A 7. ábrán

mérési eredményeink a már fentebb említett logarithmikus léptékben vannak feltűntetve; ennek alapján állapítottuk meg a sugárzási egyenlet $\alpha$ és $a$ állandóit is.

Az abszorpciós tényező meghatározásánál még egy kontrollmérést is csináltunk, olyan kísérleti csővel, melynek grafitozott *Ni*-anódja volt. Az anódot elektronbombázással felhevítve, mértük a középen hagyott kis csupasz *Ni*-felület és a közelében levő grafitozott felület fekete hőfokát. A *Ni* abszorpciós tényezőjét 0·34-nek véve, (lásd LANDOLT—BÖRNSTEIN idézett részt) a grafit abszorpciós tényezőjére 0·703 jön ki. A mérés kissé bizonytalan, mert a kísérleti cső anódjának hősugárzása következtében a katódja is jobban felmelegszik, jobban emittál és így a megnőtt elektronáram még jobban hevíti az anódot, tehát nehéz thermikus egyensúlyi állapotot elérni. A hőfokban nincs meg a mérés alatt szükségelt állandóság, azonban annyi látható, hogy az értékek nem állanak ellentmondásban eddigi méréseinkkel.

A vizsgálat végeredményeit az alábbi táblázat tartalmazza:

| | $\alpha$ | $\partial$ | $a = Wgr/Wf$ | $a_{pyr.}$ |
|---|---|---|---|---|
| I. sz. cső | 4·11 | 1·5 $\mu$ | — | — |
| II. sz. cső | 4·10 | 2·5 $\mu$ | 0,572 | — |
| III. sz. cső | 4·08 | 3·5 $\mu$ | 0,700—0,745 | 0,700 |
| *Ni*-cső grafittal bevonva | — | 3·5 $\mu$ | — | 0,745—0,880 |
| *Ni*-anód « « | — | — | — | 0,703 |

A táblázatban $\alpha$ a grafit sugárzási formulájának exponensét, $\partial$ a grafitréteg vastagságát és $a$ a különböző módon nyert abszorpciós tényezőt jelenti.

Budapest, Vatea-laboratórium.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. május 13-án tartott üléséből.)

# DIE HERSTELLUNG UND UNTERSUCHUNG VON GRAPHITSCHICHTEN KOLLOIDALER STRUKTUR.

Von GÁBOR FRANK, EMERICH PATAI
und ZOLTÁN TOMASCHEK.

1. Ein Verfahren zur Schwärzung der Metallelektroden von Entladungsröhren mit kolloidalem Graphit wird angegeben. Die Schwärzung hat den Zweck, bessere Wärmestrahlung zu erhalten und dadurch kleinere Dimensionen, weniger Materialaufwand zu erzielen.

Die bisherigen Methoden beruhten fast ausschliesslich auf dem Glühen der Elketroden in Kohlenwasserstoff, meist in Acetylän. Dieses Verfahren hat den Nachteil, dass das Metall die entstehenden höheren Derivaten des Kohlenwasserstoffes okkludiert.

2. Ausgehend von anderen Methoden zur kataphoretischen Herstellung von Oxydkathoden aus kolloidaler Lösung, welche in unserem Laboratorium vor mehreren Jahren ausgearbeitet wurde,[1] wird bei dieser Methode die elektroforetische Abscheidung des Graphits aus kolloidaler Graphitlösung verwendet. Mit dieser elektrophoretischer Methode erhält man ausserordentlich reine, gut haftende und gut strahlende gleichmässige Graphitoberflächen auf beliebigem Metall.

3. Zur Herstellung des Kolloid-Graphit haben wir zwei handelsübliche Sorten Aquadag verwendet. Diese erhalten ausser den Hauptbestandteilen Graphit und Wasser, Verunreinigungen orga-

[1] Dr. E. PATAI: Die thermische Elektronenemission und die Technik der Glühkathoden. Mat. és Fiz. Lapok, Bd. 35. Seite 145. 1929.

nischer (Schutzkolloid) und anorganischer ($Sn$, $Pb$, $SiO_2$) Art. Bei der Elektrophorese scheidet das Graphit an der Anode aus, da es selbst negativ geladen ist.

Die zu überziehenden Metallanoden ($Ni$, $Mo$, $W$ etc.) müssen gereinigt und gerauht werden. Zu diesem Zweck werden sie mehrmals oxydiert und reduziert (das Letztere in $H_2$ bei 1000° C) der Reihe nach in verdünnter Salpetersäure und destilliertem Wasser gewaschen. Das benützte Kolloid war eine wässrige Lösung von 0·013 g Graphit in 100 cm³ Wasser, welches bei der Elektrophorese auf 70—80° C gehalten wurde. Mit 1·4 mA/cm² Stromdichte erhalten wir eine Schichtdicke 0·5—1·5 $\mu$ schon nach 8—15 Minuten.

4. Es wurden genauere Untersuchungen gemacht, bezüglich der günstigsten Einstellung der Temperatur, Konzentration und Ammoniakgehalt des Kolloids. Die Resultate sind aus den Tabellen I—III. ersichtlich. Auf die Temperatur reagieren die aus verschiedenem Aquadag hergestellten Kolloide, verschieden. Die abgeschiedene Menge wächst mit steigender Temperatur bei dem ersten und fällt bei dem anderen. Bezüglich der Konzentration haben wir gefunden, dass sie mit der abgeschiedenen Menge in linearem Verhältnis steht. Dagegen fällt die abgeschiedene Menge bei steigendem Ammoniakgehalt des Kolloids.

5. Mehrere Untersuchungen bezüglich der Strahlungseigenschaften der erhaltenen Graphitschichten wurden ausgeführt. Nach den orientierenden Untersuchungen sind zwei Messmethoden näher verfolgt worden.

Zunächst haben wir die Strahlungskonstante bestimmt mit Hilfe einer Röhre, deren Konstruktion aus Fig. 1. ersichtlich ist. Die Röhre wurde mit drei verschiedenen Anoden hergestellt: aus blankem Nickel, aus geschwärztem $Ni$ und aus mit Graphit überzogenem $Ni$-Blech.

Die abgestrahlte Wärmemenge ist gleich der aufgenommenen Wärmemenge, welche sich zusammensetzt aus der Heizleistung und Anodenleistung, also:

$$W = W_h + W_a = I_h E_h + I_a E_a$$

Die Temperatur der Anode wurde mit Hilfe eines Mikropyrometerokulars von Götz gemessen, welches vorher mit einer Philips Band-

lampe auf schwarze Temperatur geeicht wurde. Der Absorptionskoeffizient für *Ni* konnte aus den Physikalisch-Chemischen Tabellen von LANDOLT—BÖRNSTEIN entnommen werden. Die wahre Temperatur der Anode bei nicht blankem *Ni* haben wir dadurch feststellen können, dass ein Teil der Anode blank gelassen wurde. Die gemessenen Werte ergaben, dass bezüglich des Strahlungsvermögens, unser Kolloid-Graphitüberzug ebenso gut ist, wie das Überziehen in Kohlenwasserstoff und mit 50% besser, wie das blanke *Ni*.

Weiter ist eine Methode angegeben, zur Bestimmung des Absorptions-, bzw. Emissionskoeffizient des Graphits. Die verwendete Versuchsröhre ist aus Fig. 2. ersichtlich. Durch eine Bohrung (*C*) kann die innere schwarze Temperatur der Kathode mit Hilfe eines Pyrometers bestimmt werden. Da das Innere der Kathode als ein absolut schwarzer Körper aufgefasst, werden kann, ist damit die wahre Temperatur des *Ni* und in der Nähe der Bohrung die schwarze Temperatur des Graphits gegeben. Der Absorptionskoeffizient bei gegebener Wellenlänge ($\lambda = 0{\cdot}651\ \mu$) ist nach unseren Messungen: $a = 0{\cdot}745—0{\cdot}880$.

6. Für die Bestimmung der Gesamtstrahlung ist die oben beschriebene Methode nicht geeignet, da einerseits die abgestrahlte Energie nicht genau gemessen werden kann, andererseits ist die Strahlungstemperatur nicht gleichmässig. Ein besseres Verfahren bietet die Röhre, deren Kostruktion aus Fig. 4. ersichtlich ist. Der mittlere Teil des Heizfadens, welcher mit Graphit überzogen ist, wurde an zwei Stellen in einem Abstand von 150 mm hinausgeführt. Die Temperatur zwischen diesen zwei Stellen ist gleichmässig und kann durch das Verhältnis $R_t/R_o$ bestimmt werden.[1] Für die Strahlung der Oberfläche gilt die Formel :

$$W/\mathrm{cm}^2 = 5{\cdot}7 \,.\, 10^{-12} \,.\, a \,.\, T^{\alpha}$$

oder

$$\log W/\mathrm{cm}^2 = \log 5{\cdot}7 \,.\, 10^{-12} + \log a + \alpha \log T.$$

Zeichnen wir die Gerade auf, so ist $a$ als die Richtungstangente leicht zu bestimmen. (Fig. 7.)

---

[1] LANGMUIR und JONES : Gen. Electric Rev. 312. 1927.

Es wird bewiesen, dass bei Graphit der Gesamtabsorptions-Koeffizient sich mit der Temperatur nicht ändert.

Die Temperatur kann bis 1800° K gesteigert werden. Bei höheren Temperaturen verschwindet das Graphit, was aus der $E=f(I)$ Kurve leicht zu ersehen ist. (Fig. 5.) Drei verschiedene Röhren wurden untersucht, mit Graphitüberzügen verschiedener Schichtdicke.

Während den Versuchen hat es sich herausgestellt, dass der Absorptionskoeffizient von der Schichtdicke nicht unabhängig ist, denn die Durchstrahlung des Wolframs kann nicht vernachlässigt werden. Die Unterschiede der einzelnen Versuchsröhren sind darauf zurückzuführen. (Fig. 6).

Zum Schluss haben wir noch einen Kontrollversuch mit einer *Ni*-Anode durchgeführt, welcher durch Elektronenbombardement erhitzt wurde. Diese Messung ergab für $a=0{\cdot}703$.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Mai 1935.)

# A CHINAKÉMIÁBAN BEVÁLT PARCIÁLIS VAGY DIFFERENCIÁLÓ ALKYLEZÉS KITERJESZTÉSE MÁS BIAZÓTOS ALKALOIDOKRA, MINT HYDROCHININRE, SPARTEINRE, PEGANINRA, STB.

KONEK FRIGYES l. tagtól.

## THEORETIKUS RÉSZ.

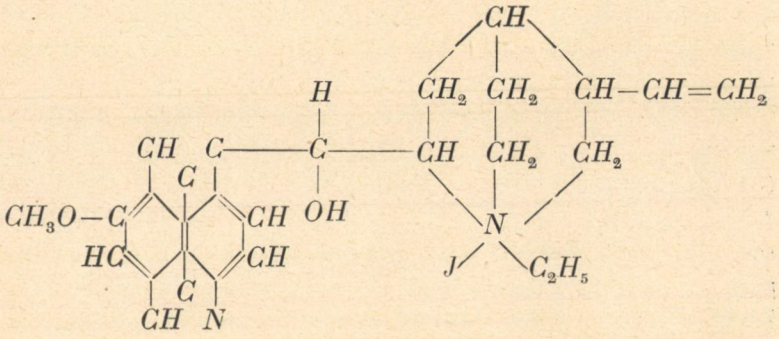
### I. A hydrochinin ($\omega$-dihydrochinin) különböző alkylhalogén származékai.

Biazótos alkaloidok gyüjtő elnevezése alatt össze lehet foglalni mindazokat a növényi bázisokat, amelyek molekulájukban két nitrogénatomot, illetve centrumot tartalmaznak. Rendesen ez a két nitrogénatom egymástól eltérő chemiai funkciókkal bír, vagy, ami ugyanazt jelenti, más-más kötési viszonyokkal szerepel a molekulában. Klasszikus például szolgálhatnak ebben a tekintetben a chinakéregben nagy számmal előforduló növényi bázisok és ezek között a legbehatóbban tanulmányozott és legjobban ismert két stereoizomer pár, a cinchonin—cinchonidin és a chinin—chinidin. Erről a négy alkaloidról régóta tudjuk már, hogy azok a közönséges, úgynevezett bázikus, helyesebben primér sókon kivül, — például chininmonochlorhydrát, amelyben egy mol bázisra egy mol. sav esik — még egy másik sorozatot is képeznek, midőn egy mol. bázisra két mol. egybázisú sav esik; mint például a jól jellemzett chinin bimuriatikumban, a mely sóban egy mol. chininre két mol. sósav esik. Ebből a magatartásból szükségkép arra kellett következtetni, hogy a chininben és a többi vele hasonló szerkezetű chinaalkaloidban is, nemcsak az egyik, hanem a másik nitrogenatom is tertiér, ami másszóval azt jelenti, hogy mindkét nitrogénatom ammoniákszerű állapotban, illetve kötésben van a molekulá-

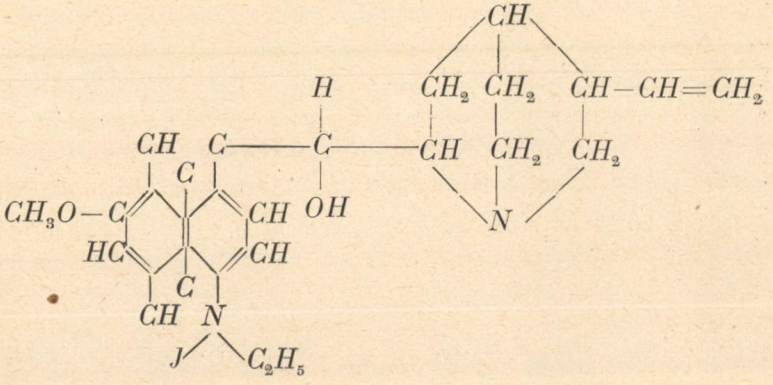
ban jelen. Közismert dolog, hogy az ammoniákok — három vegyértékű nitrogénnel — könnyen egyesülnek halogénalkylekkel, miközben átmennek az ammoniumtypusba — öt vegyértékű nitrogénnel. E szerint várható volt hogy a chinabázisok a két sósorozatnak megfelelő két különböző halogénalkyl addiciós terméket fognak majd szolgáltatni. Tényleg, régóta ismerjük már a bázikus sóknak megfelelő színtelen jódalkylátokat, amelyek közvetlenül képződnek egy mol. chinabázis és egy mol. jódalkylból már közönséges szobahőmérsékleten és amelyekben ugyanaz a nitrogénatom hordozza a halogénalkyl ionjait, amely az úgynevezett neutrális sókban a savat köti. Ezen viselkedése alapján ezt a nitrogénatomot a chinaalkaloidok «bázikusabb» nitrogénjének kell minősítenünk, ellentétben a másikkal, amely közönséges hőnél nem képes halogénalkylekkel ammoniumsókat alkotni. Hogy azonban ez a «kevésbbé bázikus» nitrogén — ezen első pillanatra passzivnak látszó viselkedése dacára — mégis képes a halogénalkyl elemeit megkötni, vagyis «tertiér» jellegű: ezt a fontos tényt e sorok írójának sikerült először, néhai Skraup Zd. H. grazi egyetemi tanár kezdeményezésére kísérletileg bebizonyítani. Az út, amelyen ezt a célt elérhetni, röviden a következő: ha a chinabázisoknak egy molek. jódhydrogénnel képezett, úgynevezett neutrális sóit jódaethyllel indifferens oldószerben beforrasztott üvegcsőben egy-több órán át kb. 100°-ra hevítjük, kristályos sárgás-vöröses, sószerű vegyületeket kapunk, amelyek egy mol. bázisra egy mol. jódhydrogénsavat és egy mol. aethyljodidot tartalmaznak. Számtalan kísérlettel meggyőződtem arról, hogy más sóból, mint a jódhydrogénsókból nem lehet ezeket a vegyületeket előállítani; mert ha például a neutrális chlorhydrátokat hevítjük jódaethyllel, a reakció egészen más irányba terelődik; komplikált cserebomlások folytán jódhydrogénsók és chloraethyl keletkeznek. Ha a sárgaszínű alkaloidsókat szénsavas alkáliákkal vagy ammoniákkal óvatosan elbontjuk, egy molek. jódhydrogént hasítanak le és átalakulnak sárga-narancsvörös színű kristályos testekké, amelyek a régebben ismert fehérszínű jodaethylátokkal izomérek; amelyektől — eltekintve a színtől — még abban is különböznek, hogy alkalikus kémhatásúak és bomlékonyabb természetűek. Ezüstoxyddal kezelve a sárgák — éppúgy, mint a fehérek — jódmentes ammoniumhydroxydokat adnak, amelyek bomlékony voltuk miatt

közelebbről nem lettek vizsgálva; jódhydrogénsavval kezelve azonban visszaalakíthatók az eredeti jodidokká. Miután ezek szerint a chinaalkaloidok képeseknek bizonyultak arra, hogy két különböző, jodalkylszármazékot szolgáltassanak, amelyek mindketten quaternér jódidok viselkedését tanúsítják, biztosnak vehető, hogy mindkét nitrogénatomjuk tertiér, egy tényállás, amelyet előzőleg is gyakran feltételeztek már, azonban kísérletileg még nem lett bebizonyítva. A közölt tényekből továbbá meg volt állapítható az is, hogy a chinabázisok két nitrogéntartalmú magja milyen sorrendben veszi fel a halogénalkylt és hogy az első fázisban a sav vagy alkylhalogén felvétele mindig ugyanazon a helyen történik. A már régóta ismert fehér jódaethylszármazékok ugyanis jódhydrogénsavval sárga-narancs színű sókat adnak, amelyek nem azonosak azokkal a sókkal, amelyek az alkaloidok primér jódhydrogénsóiból és aethyljodidból keletkeznek magasabb hőnél, nyomás alatt; mert alkálival elbontva nem a színes, hanem az eredeti színtelen monojódaethylátokat választják le. Ezzel be volt bizonyítva, hogy az első jódhydrogénsavmolekula (vagy más egybázisú sav molekulája) ugyanarra a helyre, illetve ugyanahhoz a nitrogén atomhoz lép, amelyhez az első molekula jódaethyl is kapcsolódik. Ez az első ‚erősebben bázisos hely — amely magához ragadja mintegy az első savmolekulát — az alkaloidnak «második», ma «chinuclidinnek» nevezett, fele, amely az oxydációs lebontásnál az úgynevezett cincholoipont adja, míg a másik, gyengébben bázisos, az úgynevezett «első alkaloidfél» az, amely az oxydációnál chinolinkarbonsavakat — cinchonin- és chininsavat — szolgáltat, mivel a chinaalkaloidok jódaethylszármazékai közül csak azok egyeznek színben és aránylag könnyű lebonthatóságban a chinolinnel és annak egyszerűbb származékaival, amelyekben a jódaetyl a molekulának kevésbbé bázikus nitrogénatomján helyezkedett el. A teljesség kedvéért említendő még, hogy az új, sárga aethyljodidok meglehetősen könnyen vesznek fel még egy molek. jódaethylt és átmennek ugyanazokba a dijódaethylátokba, amelyek a fehér monojódaethylátokból, illetve a szabad alkaloidbázisokból is keletkeznek, ha azokat feles jódaethyllel nyomás alatt hevítjük. Az izomérek könnyebb megkülönböztetése végett célszerű a következő nomenklatura használata : azon jódaethylátok elnevezésé-

nél, amelyek a szabad alkaloidból és a halogenalkylból közvetlen keletkeznek, a jódaethyl (vagy más jódalkyl), szót az alkaloid nevének elébe tesszük és azt mondjuk: (fehér) jódaethylchinin; ellenben azoknál, amelyek az alkaloid jódhydrogénsójából keletkeznek jódaethyllel való hevítés által, a jódaethyl (vagy más jódalkyl) szót az alkaloid nevének utána tesszük és azt mondjuk: (sárga) chininaethyljodid. Ezen érdekes helyzeti izoméria szemléltetésére álljon itt a két izomér chininmonojódaethylát szerkezeti képlete:

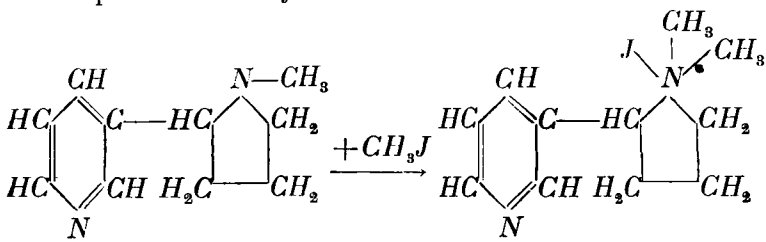


*fehér* «jódaethylchinin»; a halogénalkyl elemei az erősebben bázisos, vagy chinuclidin-nitrogén atomon helyezkedtek el.

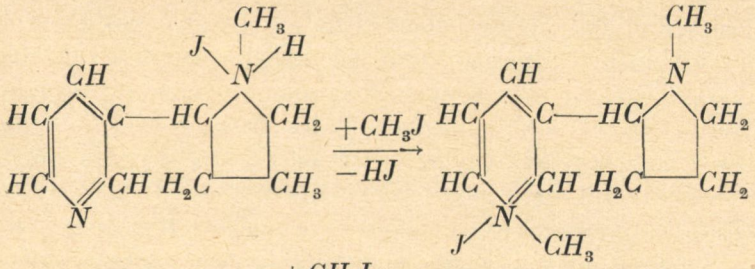


*sárga* «chininaethyljodid»; a halogénalkyl elemei a gyengébben bázisos, vagy chinolin-nitrogén atomon helyezkedtek el. Ugyanezt

a magatartást mutatja a többi három chinaalkaloid—cinchonin, cinchonidin és részben chinidin is — jódaethyllel szemben, amennyiben ezek a chinakéregbázisok is, éppúgy mint a chinin, jódaethyllel két izomér monojodaethylátot adnak, egy fehéret és egy sárgát. Ezzel kísérletileg végleg el volt döntve, hogy a chinakéreg négy főalkaloidja «bitertier bázis». A chinacsoportban elért ezen eredmények után, közelfekvő volt a gondolat, ezt a reakciót más «biazótos» alkaloidokra is alkalmazni, megállapítani ennek segélyével a két nitrogénatom funkcióit, illetve kötési viszonyait és ilyenformán eldönteni azt, hogy a kérdéses alkaloidok bitertiér, sekundér-tertiér, vagy másrendű kétértékű bázisok-e? Hogy tényleg sikerrel alkalmazható a reakció strukturális vitás kérdések eldöntésére : erre talán legszebb például szolgálhat a nikotin chémiája. Vitás volt ugyanis, vajjon ez a legfontosabb dohányalkaloid sekundér-tertiér (Étard) vagy pedig bitertiér (Pinner) bázis-e? Ezt a kérdést PICTET A. Genfben úgy döntötte el, hogy felhasználva a chinachémiában szerzett tapasztalatokat és szórólszóra követve a fennt vázolt eljárást, sikerült neki a nikotinból két különböző monojódmethylátot készíteni: egy nem kristályosat, amely közvetlen keletkezik nikotinból egy molek. jódmethyllel és egy másik kristályos terméket, amely a monojódhydráton keresztül képződik; mindegyikük felvesz még egy molekula jódmethylt és adja ugyanazt a már régóta ismert nikotindijódmethylátot, amely a szabad alkaloidból is keletkezik, ha azt feles jódmethyllel hozzuk össze. A nikotin ilyen magatartásából következik, hogy az nem lehet sekundér-tertiér, hanem csakis bitertiér bázis; más szóval a PINNER-féle felfogás és szerkezet bizonyult helyesnek, amint azt a későbbi — főleg PICTET és legújabban SPÄTH — szintézisei is megerősítették. A nikotin jellegzetes magatartását a halogénalkyllal szemben a következő szerkezeti képletek illusztrálják:

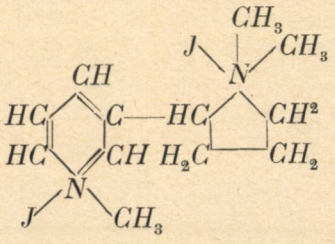



nikotin + $CH_3J \rightarrow$ I. (szörp) jodmethylnikotin, és



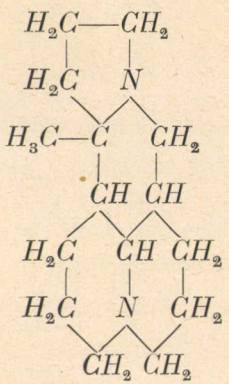
nikotinjódhydrát $\xrightarrow[-HJ]{+CH_3J}$ II. (krist.) nikotinmethyljodid.

I-ben a jódmethyl a nikotin bázikusabb — a methylpyrrolidin — nitrogénjén helyezkedett el, tehát ugyanott, ahol a primér sókban a savionok; II-ben ellenben a jódmethyl a nikotin kevésbbé bázikus-pyridinnitrogén atomjához kapcsolódott; ha végül mindkét nitrogénhez lép egy-egy molekula jódmethyl, keletkezik — mint fentebb már említve volt — az úgynevezett savanyú sókkal, például a jólismert nikotindipikráttal korrespondeáló nikotindijódmethylát



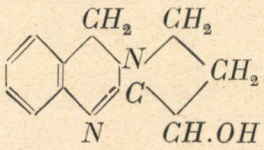
egy szóval teljes az analógia a chinaalkaloidokkal. Ez az eredmény feljogosít arra, hogy kiterjesszük ezt az eljárást más biazótos alkalidokra is, sőt arra is, hogy — további pozitív eredmények esetében — felvegyük az úgynevezett «szerkezetkutató» alkaloid-reakciók közé. Ha szemlét tartunk a többnitrogénatomos alkaloidoknak napról napra növekvő táborán, legelőször is a chinakéreg mellékalkaloidjai, nevezetesen a hydrochinin és chinidin, a hydrocinchonin és cinchonidin, a cinchonamin, a cuprein stb. ötlenek szemünkbe, mint olyanok, amelyek a főalkaloidokhoz szerkezetileg rendkívül közel állanak és amelyek közül nem egy, mint például a hydrochinin, értékes physiologiai hatása miatt műúton

is elő lesz állítva. Per analogiam következtetve, előrelátható volt, hogy a chinakéreg mellékbázisai jódalkyllel szemben is úgy fognak viselkedni, mint a főalkaloidok; mindazonáltal szükségesnek tartottam ennek kísérleti igazolását is, mert ha ezek a hydrobázisok jódmethyllel tényleg két izomér jódmethylátot adnak, ez a viselkedésük egy újabb bizonyíték lesz a mellett, hogy ezek a bázisok is bitertiérek — nem pedig sekundér-tertiérek — azaz, hogy a hydrogénfelvétel nem a chinolin gyűrűben, hanem a chinuclidinfél vinyl-oldalláncában történt, egy szóval hogy «ω-dihydrochinin» cinchonin, stb.-nek tekintendők. Távolabb állanak azok a biazótos alkaloidok, amelyek szerkezetileg lényegesen különböznek a chinaalkaloidoktól; ebben az irányban való megvizsgálásuk azonban hozzájárulhatna nitrogénatomjaik kötési viszonyainak felderítéséhez, illetve helyesbítéséhez, abban az esetben, ha szerkezetüket illetőleg még nem hangzott el az utolsó szó. Ebből a szempontból például érdekes volna a sparteinnek, a peganinnek és a legújabban egy ausztráliai solanaceában felfedezett *d*-nornicotinnek jódalkyllal szemben való magatartását tanulmány tárgyává tenni és abból ezen növényi bázisok nitrogénatomjainak kötési viszonyaira következtetni. A fentebb közölt chininképlettel való összehasonlítás végett ideiktatom a spartein és peganin legújabb szerkezeti képleteit:



spartein WINTERFELD nyomán (a legújabb amerikai találgatásokra nem vagyok tekintettel); ebből a kérdőjellel ellátandó struktúr-

képletből kitűnik, hogy a sparteinben mindkét nitrogénatom tertiér, azzal a megszorítással, hogy mindkettő két-két gyűrűben közös. Ennél jóval egyszerűbb és biztosabb a harmalaalkaloidok anyalúgjaiban MERCK által felfedezett peganinnek a szerkezete, amely azonosnak bizonyult az indiai kutatók vasicinjéével;




ebben a képletben, egy pyrrolidin-chinazolin kombinációt látunk amelynek helyességét legújabban SPÄTH szintézissel is igazolta. E szerint a peganin mindkét nitrogénatomja tertiér és kötési viszonyaiban hasonlít a chinaalkaloidokéihez, azzal a különbséggel, hogy a peganin két nitrogénje egy és ugyanazon gyűrűben áll meta-helyzetben; tehát térbelileg nagyon közel esik egymáshoz úgy hogy nagyon is kétséges, vajjon ilyen elrendezés mellett lehetséges-e egy dijodmethylát keletkezése: mert térbeli akadály látszik fennforogni. Mai előadásomban a hydrochinin új jódmethylszármazékaival foglalkozom.

## KÍSÉRLETI RÉSZ.

### A hydrochinin különböző jódmethyl-származékai.

*Hydrochinin* $C_{20}H_{26}N_2O_2$,[1] két mol. vízzel kristályosodik és vízment állapotban 172°-on olvad; optikailag aktiv, még pedig balraforgató; permanganáttal szemben állandó. Hydrochinint és stereoizomérjét a hydrochinidint 1882-ben találta meg HESSE O. a JOBST-féle stuttgarti alkaloidgyárban a chininsulfat anyalúgjaiban (Ann. 241, 2357; Ber. 15, 856); miután FORST és BOEHRINGER ugyancsak a chininlúgokból már egy évvel előbb (Ber. 14, 1270) a

[1] A kísérleteimhez szükséges hydrochinint a «Vereinigte Chininfabriken Zimmer u. Co.» Frankfurt a. Main bocsátotta rendelkezésemre, miért Nevezettnek e helyen is kifejezem hálás köszönetemet.

hydrocinchonidint, CAVENTOU és WILLM pedig megelőzőleg a hydrocinchonint is felfedezték, amelyet cinchotin néven ismertettek. (Ann. chem. pharm. Suppl. VII. 378.). Ehhez a négy hydrochinaalkaloidhoz azonban csak igen körülményesen, még pedig úgy lehetett csak hozzáférni, hogy előbb oxydációval elroncsolták a vinylcsoportú négy főchinaalkaloidot, mivel továbbá a hydrobázisok a chinakéregben csak igen alárendelt mennyiségben fordulnak elő, kitermelésük rendkívül költséges volt.

A «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co.» Frankfurt am Main laboratóriumában 1910-ben sikerült először a 234,137. sz. német birodalmi szabadalom tanúsága szerint a chinabázisokból hidrogénnel a platinacsoportba tartozó valamely fém, mint katalysator jelenlétében hydrochinint, valamint a többi hydrobázist előállítani, Mivel a hydrogénfelvétel quantitativ lefolyású, a termékek is rendkívül tiszták. Egy későbbi szabadalom — D. R. P. 267,306. — szerint a hydrobázisok úgy is készíthetők, hogy chinint, stb.-t hangyasavval kezelünk palladium jelenlétében. SKITA A. Hannover 1911-ben (Ber. 44. 2866.) ugyanazon az úton jutott el a hydrochininhez. A «Boehringer & Sohn» alkaloid gyárnak 1913. és 1917-ben kiadott német birodalmi szabadalmak (306,939.) és (307,894.) leírása szerint a platinafémek nikkellel is helyettesíthetők. A hydrochinin therápiával foglalkozó igen terjedelmes irodalomból e helyen csak annyit kívánok megjegyezni, hogy az eddig végzett állat- és emberkísérletekből kitűnik, hogy a hydrochinin nemcsak hogy pótolhatja a chinint, hanem annak hatását sok tekintetben felül is mulja; szóval olyan antimaláriás gyógyszer, amely ezen és hasonló tropikus betegségek ellen — amilyenek a malaria recidiva, tertiana, quartana, stb. — sikerrel alkalmazható. Szerkezetileg a chininhatás eme fokozását annak kell tulajdonítani, hogy a telítetlen vinylgyök két atom hydrogén felvételével átmegy a telített aethylgyökbe; mert nem valószínű, hogy az enyhe katalytikus hydrogénezés folyamán intramolekuláris változások, eltolódások következnének be.

## Jódmethylhydrochinin, $CH_3J.C_{20}H_{26}N_2O_2$.[1]

A hydrochinin úgy látszik még könnyebben egyesül a jodalkyllal, mint a chinin; az addició alkalmas oldószerben már közönséges hőnél quantitativ lefolyású. Oldószerül kezdetben szénmajd acetyléntetrachloridot használtam, végül azonban a benzolt találtam legcélszerűbbnek, amely a hydrobázist játszva oldja. Ha 1 gram hydrobázisnak 10—20 ccm benzolban való tiszta oldatához, a theoretikusnál valamivel több — 0·5 g — jodmethylt adunk, az oldat pillanatok alatt megzavarodik, hófehér kristályos csapadék válik ki, amely néhány órai sötétben való állás után az oldatot egész tömegében megalvasztja. Lenutsoljuk, kevés benzollal kimossuk; az esetleg változatlan bázis eltávolítása végett 15—20 ccm friss benzollal jól kiforraljuk; újból szűrünk; a nyers terméket vízfürdőn addig szárítjuk, míg a hozzátapadó benzol teljesen el nem illant és a hófehér anyagot lehetőleg kevés forró vízből kristályosítjuk. Többnyire tejszerű emulzió alakjában válik ki, amely azonban csakhamar fénylő tűalakú rozettákba csoportosult kristályokba merevedik; ezek néha több cm hosszú lándzsaalakokká is megnőnek. Levegőn vagy exsikkatorban kénsav alatt kiszárítva, a kristályok a nyilt kapillárisban már 100° körül megolvadnak; majd lehülve félig megszilárdulnak és újra hevítve 220—230° közt elbomlanak. Az exsikkator-száraz anyag elemzéséből kitűnt, hogy az kristályvízmentes és a várt összetétellel bír.

Elemzés:

1. 0·2052 g anyag adott 0·1012 g $AgJ$-t;
2. 0·1684 g anyag adott 0·0834 g $AgJ$-t; ebből:
   Jod (talált) = 26·65, illetve 26·76%;
   a $CH_3J.C_{20}H_{26}N_2O_2$ képletből
   Jod (számított) = 27·13%.

---

[1] Hogy az *izomér jódmethylátokat* már nevükben is megkülönböztessük, azoknál, amelyek a bázisból és jódalkylból közvetlen képződnek, a jódmethyl szót elébe tesszük az alkaloid nevének és azt mondjuk: (fehér). jódmethyl hydrochinin; míg azoknál, amelyek nem közvetlenül, hanem a jódhydrogénsavas sókból képződnek a jódalkyl hatására, a jódmethyl szót utána tesszük az alkaloid nevének és azt mondjuk: (sárga) hydrochininmethyljodid.

Megjegyzem, hogy a jodion titrálással nem volt meghatározható, mivel az oldatok színesek és így a $K_2CrO_4$-indikátor nem mutat éles átmenetet; valemennyi elemzés gravimetriás úton történt.

## Jódhydrogénsavas hydrochininmethyljodid.

$HJ \,.\, C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, CH_3J.$

A hydrochinin jódhydrátja éppoly szívósan szegül ellene minden kristályosítási kísérletnek, mint a chininé; a fentjelzett származék előállításánál tehát ezzel a ténnyel számolni kellett. Végül a következő eljárás bizonyult célravezetőnek: 1 gram sósavas hydrochinint oldunk pár ccm vízben és folytonos rázás vagy kavarás közben 0·5 g jódkaliumnak tömény vizes oldatát cseppentjük hozzá; a jódhydrogénsó rögtön mint fehér nyúlós gyantaszerű anyag kiválik. Rövid idei állás után a vizet leöntjük róla, 5 ccm absol. methanolban feloldjuk és a theoretikusnál valamivel több jódmethyllel beforrasztott kémcsőben forróvízfürdőben kb. egy óra hosszat hevítjük. Hevítés után az oldat tiszta marad ugyan, azonban vörösesbarna színt vesz fel. Vízfürdőn elűzzük a methanolt, mire egy vörös, kissé pyridinszagú gyantás anyag marad vissza, amelyben tűalakú kristályok is mutatkoznak. Forró vízben csaknem maradék nélkül oldódik; a szűrőn kevés olajos bomlási termék marad vissza. A szűrletből az anyag rögtön sárgás tejszerű emulzió alakjában válik ki, amely azonban csakhamar — még gyorsabban, ha az edény falát üvegbottal karcoljuk — finom intenzív sárga tűkből álló kristálytömeggé merevedik. Hosszabb állás után szűrünk; levegőn, majd exsikkatorban szárítunk. Ilyen állapotban az új vegyület kristályai a nyilt kapillárisban már 50—60° közt olvadnak, amiből arra kell következtetni, hogy kristályvizet tartalmaznak, ez azonban direkt nem volt meghatározható. Az exsikkator-száraz anyag elemzéséből kitűnt, hogy az új só két molek. kristályvizet tartalmaz (annak idején a megfelelő chininsóban egy mol. kristályvizet állapítottam meg) és e szerint: $HJ \,.\, C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, CH_3J + 2H_2O$ összetételnek felel meg.

Elemzés:

0·1986 g anyag adott 0·1490 g $AgJ$-t, amiből
Jód (talált) = 40·55%;
A $HJ \,.\, C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, CH_3J + 2H_2O$ képletből
Jód (számított) = 40·19%.
(Egy mol. kristályvíz esetében: Jod = 41·37%.)

## Hydrochininmethyljodid, $C_{20}H_{26}N_2O_2.CH_3J$.

Ha az előbb leírt jódhydrátot ammoniákkal vagy alkalikarbonátokkal elbontjuk, a hydrochinin II. jódmethylátját nyerjük. Vagy a szilárd sót dörzsöljük el vizes ammoniákkal, mire az új vegyület intenzív sárgaszínű kristályok alakjában keletkezik; vagy pedig a só koncentrált vizes oldatát elegyítjük ammoniákkal, mikor az új jódmethylátot sárgásfehér tejszerű emulzió formájában kapjuk, amely azonban csakhamar — még gyorsabban karcolásra — finom, eleven sárga tűkből álló kristálytömeggé szilárdul. Lenutsoljuk és forró 30% methanol+70% víz elegyéből kristályosítjuk; kezdetben így is csak emulzió alakjában válik ki és eltart rendesen hosszabb ideig, míg megindul a kristályosodás, amelynek eredménye: finom, élénksárga tűkből álló vavellitszerű képződmények. Levegőn és exsikkatorban kiszárítva, a kristályok a kapillárisban már 80—90° közt megolvadnak és elbomlanak, amiből kristályvízre kell következtetni. Az elemzés szerint a kénsav alatt exsikkatorban kiszárított anyagban három molek. kristályvíz van, amely azonban direkt nem volt meghatározható, mivel az anyag már 80° körül megolvad és elbomlik. Érdekes, hogy a korrespondeáló chininaethyljodidban is három molek. kristályvizet állapítottam meg annak idején, amelyek közül azonban kettő exsikkatorban eltávozik. Az exsikkator-száraz anyag elemzése a következő eredményt adta:

0·1242 g anyag adott 0·0562 g $AgJ$-t, amiből:
Jód (talált) = 24·45%;
a $C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, CH_3J + 3H_2O$ képletből a
Jód (számított) = 24·33%.

**Jódmethylhydrochininmethyljodid.** $CH_3J \,.\, C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, CH_3J.$

A hydrochinin dijodmethylátja könnyen keletkezik, ha a szabad bázist valamivel több, mint két molek. jodmethyllel methanolos oldatban, zárt üvegcsőben forró vízfürdőben körülbelül egy óra hosszat hevítjük. A sárgavörös tiszta oldatot vízfürdőn szárazra pároljuk; vörös gyantás anyag marad vissza, amelyben finom tűalakú kristályok mutatkoznak. 70—80°-os vízben kevés olajos rész hátrahagyásával oldódik, a szűrletből olajos emulzió alakjában válik ki az új vegyület; üveghottal karcolva azonban csakhamar finom aranyszínű tűkből álló leveles kristálytömeggé merevedik. Hosszabb állás után lenutsoljuk, levegőn és exsikkatorban kiszárítjuk. Ilyen állapotban az új anyag elemzése a chinindijodmethylát összetételét mutatja:

0·1704 g anyag adott 0·1306 g $AgJ$-t, ebből:
Jód (talált) = 41·42%;
a $CH_3J \,.\, C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, CH_3J$ képlet szerint a
Jód (számított) = 41·64%.

Ugyanez a vegyület keletkezik, ha akár a sárga, akár a fehér monojodmethylátot feles jodmethyllel methanolos oldatban hosszabb ideig állni hagyjuk, illetve hevítjük; a sárga könnyebben, a fehér nehezebben köti a halogénalkyl elemeit; ami megint csak a mellett szól, hogy a két nitrogénatom nem egyenlő, hanem különböző bázikus erejű.

**Jódmethylhydrochinin jódhydrát.** $CH_3J.C_{20}H_{26}N_2O_2.HJ.$

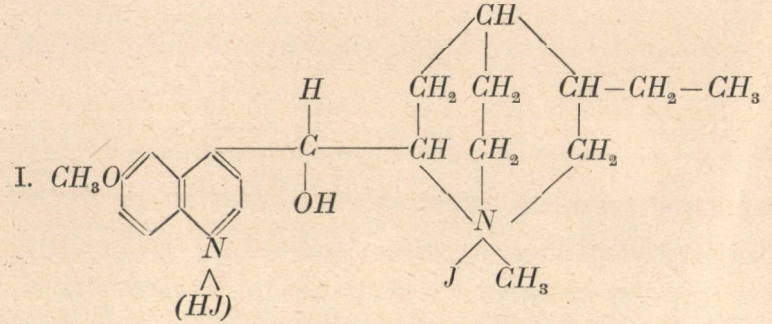
Ez a só abban különbözik az előbb leírt izomér jódhydrogénsavas hydrochininmethyljodidtól, hogy a $HJ$ és a $CH_3J$ helye a két nitrogénatomon fel van cserélve. Már előállításából is ez következik; mert a fehér jódmethylhydrochininből indulunk ki és ennek 1 gramját oldjuk 4 ccm $n/2$ sósavban (valamivel több 1 molekulánál) ugyanannyi vízzel hígítjuk, majd 0·5 g (több valamivel 1 mol.-nál) $KJ$-t adunk 1—2 ccm vízben a tiszta oldathoz. Olajos csapadék alakjában rögtön kiválik a jodhydrát; amely azonban karcolásra

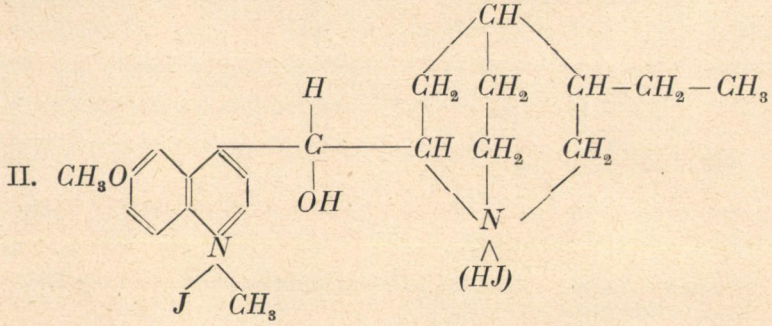
pillanatok alatt narancssárga, fínom tűk alkotta kristálymagmává merevedik. Forró vízből kaliumbichromátszínű finom tűalakú kristályokban jegecedik az új vegyület; ezek légszáraz állapotban is megtartják ezt a színűket, ha azonban exsikkatorba, kénsav alá helyezzük őket, színük már nehány óra mulva világos kénsárga lesz, levegőre hozva körülbelül ugyanannyi idő alatt színük ismét visszamélyül az eredeti sötétebb árnyalatba. Ebben a sajátságában ez a só éppen ellenkező viselkedést tanusít, mint izomérje és az abból előállítható sárgaszínű jódmethylát; mivel ezek éppen fordítva: a levegőn világosabb, az exsikkatorban pedig sötétebb sárga színűek lesznek. Nyilt kapillárisban az új só csak 210°-on túl kezd bomlani és 218—222° közt olvad meg teljes bomlás közben. Ebben is élesen különbözik izomérjétől, amely kristályvízében már 50—60° között olvad.

Elemzés:

0·1615 g exsik. száraz anyag adott: 0·1246 g *AgJ*-t, ebből:
Jód (talált) = 41·69%;
a $CH_3J \,.\, C_{20}H_{26}N_2O_2 \,.\, HJ + H_2O$ képlet szerint a
Jód (számított) = 41·37%.

Ha a sót ammoniákkal elbontjuk, természetesen a fehér jódmethylhydrochinint nyerjük vissza, melyből kiindultunk; míg az izomér só a sárga hydrochininmethyljodidot adja ammoniákkal. Végeredményben ezek a kísérleti eredmények igazolják a bevezetésben kimondott azt az analógia következtetést, hogy a hydrochinin is csakúgy fog viselkedni jodalkyllel szemben, mint a chinin maga; s e szerint két különböző színű jodalkylátot ad; amiből viszont következik, hogy mindkét nitrogénatomja tertiér és hogy a hydrogénfelvétel nem a chinolingyűrűben (mint például a *Na* + amylalkoholos redukciónál) hanem a vinylgyökben történt, stb. Hogy a hydrogénfelvétel helyét már az alkaloid nevében és precizebbűl feltüntessük: helyesebbnek tartanám az általános «hydrochinin» helyett a többet mondó $\omega$-dihydrochinin elnevezést használni. A hydroalkaloid új származékait a mellékelt szerkezeti képletek tüntetik fel:




I. fehér hydrochininjodmethylát (illetve annak jódhydrogénsója); a halogénalkyl a bázikusabb nitrogénen helyezkedett el;
II. sárga hydrochininjódmethylát (illetve annak jódhydrogén sója); a halogénalkyl a kevésbbé bázikus chinolin-nitrogénen helyezkedett el.

Ezirányú kísérleteimet folytatom és legközelebb ki fogom terjeszteni a hydrochinin stereoizomérjére: a hydrochinidinre, valamint a többi hydrochinaalkaloidra is.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott üléséből.)

# ANWENDUNG DER PARTIELLEN ODER DIFFERENZIERENDEN ALKYLIERUNG AUF ANDERE BIAZOTISCHE ALKALOIDE, WIE HYDROCHININ, SPARTEIN, PEGANIN, ETC.

Von k. M. FRITZ v. KONEK.

Der Vortragende gibt einen kurzen Rückblick über das Verhalten der freien, sowie der jodwasserstoffsauren Salze der vier Chinaalkaloide; welches die bitertiäre Natur dieser Pflanzenbasen zum erstenmal ausser allen Zweifel stellte; indem es gelang zwei verschiedene Jodaethylate darzustellen. Vortragender will nun diese Reaktion auch auf andere Alkaloide mit zwei und mehr Stickstoffzentren übertragen und stellt in Aussicht das Studium des Verhaltens von Spartein, Peganin u. Anderen. Gegenwärtig berichtet er über *Hydrochinin*, welches — wie ja vorauszusehen aber noch nicht bewiesen war — genau wie Chinin zwei verschiedene, ein weisses und ein gelbes — Jodmethylat liefert, womit erwiesen ist, dass sowohl die natürliche wie auch die künstliche Hydrobase bitertiär ist; und die Wasserstoffaufnahme nicht im Chinolinkern, sondern in der Vinylgruppe erfolgt ist. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, müsste man eigentlich «$\omega$-Dihydrochinin» sagen. Vortragender wird seine Versuche zunächst auf das optisch isomere Hydrochinidin und weiter auf Hydrocinchonin und cinchonidin ausdehnen.

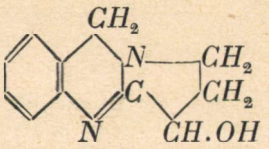
---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# CHINAZOLIN TÍPUSÚ ALKALOIDOK VISELKEDÉSE A DIFFERENCIÁLÓ METHYLEZÉSNÉL.

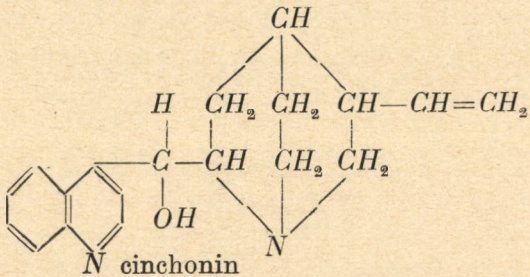
KONEK FRIGYES l. tagtól.

Két-három évvel ezelőtt a chinazolin gyűrűrendszer, amelyet úgy magában, mint egyszerű származékaiban szintétikus úton régen elő tudunk már állítani, az alkaloid chemiában még teljesen ismeretlen volt. Csak néhány éve, hogy Merck darmstadti gyárában a Harmala-alkaloidok anyaglúgjaiban egy új mellékalkaloidra bukkantak, melynek a főalkaloidoktól eltérő szerkezetét Späth Ernő, a kíváló bécsi alkaloidkutató, lebontással és szintézissel megállapítván, eldöntötte az új bázisnak, amelyet ő a Peganum Harmala nevű anyanövény után peganinnek nevezett el, a chinazolin typushoz való tartozását. Ezzel egyidőben egy indiai cserjében, az Adhatoda Vasica Nees — az Acanthacéák családjából — leveleiben előforduló, már 1888 óta vasicin néven ismertetett alkaloidról, amelyet az indiai bennszülöttek ősidők óta mint antiasthmatikumot használnak, keletindiai kutatók kiderítették, hogy alapváza a chinazolingyűrű. Azt azonban, hogy az indiai vasicin szerkezetében és ebből kifolyólag minden tulajdonságában azonos a Harmala-bázisok mellékalkaloidjával a peganinnel: azt alapos tudományos összehasonlítás nyomán Späth Ernő döntötte el. Az ő precíz kutatásai alapján, — az angol és indiai kissé eltérő felfogással szemben a peganin és vasicin számára a mellékelt szerkezetet fogadhatjuk el:




peganin

Ez a többi eddig ismert alkaloidoktól merőben eltérő triciklikus gyűrűrendszer, bizonyos tekintetben mégis összehasonlítható a chinaalkaloidok szerkezetével;



cinchonin

amennyiben peganin és chinin bitertiérbázisok és a két nitrogénatom kötési viszonyából is, bizonyos analógia olvasható ki; bár térbelileg lényegesen eltérnek egymástól. Közelfekvőnek látszott tehát megkísérleni, vajjon lehetséges-e egy chinazolintypusú alkaloidban is a két nitrogéncentrum megkülönböztetése, az úgynevezett differenciáló metilező eljárással, amely a china chémiában tudvalevőleg a két különböző színű jodmethylát keletkezésével olyan szépen jellemezte a két különböző kötési viszonyok közt levő nitrogénatomot.

E célból érintkezésbe léptem Späth Ernő bécsi egyetemi professzorral, akinek szíves beleegyezésével tanulmánytárgyává tettem a peganin magatartását a differenciáló methylezéssel szemben.

Mindössze egy gram tiszta alkaloid állott rendelkezésemre a Merck, darmstadti gyár vezetőségének kitüntető szívességéből, amelyért e helyen is kifejezem hálás köszönetemet. Ezzel az anyaggal a következő kísérleteket végeztem: az olvadáspontot nyilt kapillárisban 200—201°-on állapítottam meg, míg Späth az evakuált kapillárisban 211°-ot, az indiai kutatók pedig az ő vasicinjükről 190, illetve 196°-ot közölnek.

## Jódmethylpeganin.

Ezen vegyület előállítása végett 0·1 gram peganint oldunk kb. 10 ccm széntetrachloridban, — mivel hideg methanolban úgyszólván oldhatatlan, míg forróból gyönyörűen kristályosodik —

és felesmennyiségű. $CH_3J$-al hidegben sötét helyen állni hagyjuk. Eltérőleg a chinabázisoktól, az első kristályok csak 1—2 nap múlva jelentkeznek és további állásnál $^1/_2$—1 cm hosszúságú tollszerű habitust vesznek fel. Leszűrve, $CCl_4$-el mosva kénsav alatt, majd 120°-on szárítva, súlyuk 0·1 gram. Nyilt kapillárisban 189—190°-on olvadnak, de már előbb barnulnak, feketednek. Az elemzésnél a peganinmonojódmethylátnak megfelelő jódtartalmat mutatták; 0·0617 gram anyag adott 0·0444 gram $AgJ$-t; amiből Jód (talált) = 38·88%; míg a $C_{11}H_{12}ON_2.CH_3J$-képlet szerint a Jód (számított értéke) = 38·48%.

## Kísérlet egy peganindijódmethylat előállítására.

0·2 gram peganint oldunk pár ccm forró methanolban és feles $CH_3J$-el beforrasztott üvegcsőben a forró vízfürdőben kb. egy óráig hevítjük. A sárgásvöröses oldat a methanol elűzése után, barnaszínű olajos terméket hagy vissza, amely idővel megszilárdul. Kevés forró vízzel oldjuk és szűrűnk; a szűrőn kevés vörös anyag marad vissza. A szűrlet hűlve sárgás emulsiót választ le, amely napok mulva sárgásfehér, finom tűalakú kristályokká merevedik. Ezek nyilt kapillárisban 188—189°-on olvadnak és kénsav alatt, majd 110°-on szárítva, az elemzésnél a következő eredményt adták: 0·0728 gram anyag adott 0·0514 gram $AgJ$-t; amiből Jód (talált érték) = 38·16%; a peganinmonojodmethylátban: $-C_{11}H_{12}ON_2.CH_3J$-ben a Jód (számított érték) = 38·48%; míg a peganindijódmethylát, $-C_{11}H_{12}ON_2 . (CH_3J)_2$— 53·81% jódot követel. Ezen elemzési eredményből világos, hogy peganin, eltérőleg a china- és más bitertiér bázisoktól, feles jódmethyllel magasabb hőre, nyomás alatt hevítve is csak egy molekula halogenalkylt képes felvenni és átmegy ugyanabba a monojódmethylátba, amely belőle $CH_3J$-al már közönséges hőmérsékleten is keletkezik, hosszabb állásnál.

## A differenciáló methylezés alkalmazása peganinre. Peganinmonojódhydrát.

Ezt a szépen kristályosodó sót a rendes úton, mégpedig úgy állíthatjuk elő, hogy például pontosan 0·1 gram peganin-

bázist oldunk fel egy molekula, azaz egy ccm félnormál sósavban, minimális oldhatatlan részeket szűréssel eltávolítunk, a szűrlethez egy mol. —0·09 gram —*KJ*-t adunk, mire a jódhydrát úgyszólván pillanatok alatt hófehér kristályok alakjában quantitativ kiválik. Ezek 1—2 nap mulva a világosságnak kitéve, rózsaszínűek, majd sárgák lesznek, szóval fényérzékenyek; exsikkator-száraz állapotban 190—191° közt olvadnak a nyilt kapillárisban. A 120°-nál teljesen kiszárított jódhidrogénsót feloldjuk 5 ccm absolut methanolban és az egy molekulára számítottnál valamivel több jódmethyllel beforrasztott üvegcsőben, forró vízfürdőben 1—2 óráig hevítjük. A tiszta vörösbarna színű oldatból a methanol elűzése után, sárgabarnás gyantás anyag marad vissza, amelyben csak itt-ott látszik kristályképződés. Forró vízzel digerálva, a nedves szűrőn olajos bomlási termékek maradnak vissza, míg a szűrlet — hűlve — csakhamar megzavarodik és rózsaszínű emulziót választ ki. Másnapra ez eltűnt és kevés fehér kristályok úszkáltak az oldatban. Ezek leszűrve és szárítva olvadáspontjuk alapján változatlan peganinjódhydrátnak bizonyultak; alig 1—2 miligrammnyi menynyiségük miatt a további vizsgálattól és elemzéstől el kellett tekinteni. Annyi azonban biztosan meg volt állapítható, hogy az így kapott kristályok vízben oldva és ammoniákkal megbontva, kristályos csapadékot adtak, amely a qualitativ halogénpróbánál jódmentesnek bizonyult (peganin). A peganinjódhydrátnak ez a magatartása, — hogy t. i. nem képes még egy molek. jódmethylt megkötni — kombinálva a szabad peganinbázisnak feles jódmethyllel való hevítésénél tanúsított viselkedésével, — hogy t. i. ilyen körülmények között is csak monojódmethylát keletkezik — a szőnyegen forgó kérdést olyan értelemben dönti el, hogy a chinazolin typusú alkaloidokban, — peganin, vasicin — a két nitrogénatom közül csak az egyik, — a bázikusabb — képes halogénalkylt kötni; míg a másik, amely hozzá meta helyzetű, erre képtelen.

Ennek okát minden valószínűség szerint abban kell keresnünk, hogy a térbeli akadályoztatás egy speciális esete forog fenn. Annak eldöntése, hogy a két nitrogénatom közül melyik a bázikusabb, amely a halogénalykylt is köti: csak a megfelelő ammoniumhydroxyd oxydációs lebontásával vagy más komplikáltabb leépítési eljárással volna kísérletileg keresztülvihető és így túlmegy ezen

tanulmány keretén. Per analogiam következtetve valószínű, hogy ez nem az a nitrogénatom, amely közvetlenül van a benzolgyűrűhez kapcsolva és kettős kötéssel függ össze a másik szomszédos szénatommal, hanem a másik, amely mindhárom affinitásával három különböző szénatomhoz van kötve. Ezen felfogás mellett bizonyít a «színtelen» jódmethylát képződése.[1]

[1] Ezen felfogásomat Späth Ernő bécsi egyetemi professzor is osztja, mint ezt velem a hozzáintézett kérdésemre levélben közölte.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# VERHALTEN DER ALKALOIDE VOM CHINAZOLINTYPUS BEI DER DIFFERENZIERENDEN METHYLIERUNG.

vom k. M. FRITZ v. KONEK.

Der Vortragende hat die sogenannte differenzirende Methylirung der Chinabasen (Verfahren von KONEK-SKRAUP) auch auf andere Zweistickstoffalkaloide ausgedehnt, und berichtet kurz über seine mit dem Nebenalkaloid von Peganum Harmala, dem Peganin erzielten Erfahrungen. Dieses erst in den letzten zwei Jahren durch E. SPÄTH — Wien wissenschaftlich ergründete und mit dem indischen Vasicin — aus Adhatoda Vasica Nees — identisch befundene Alkaloid, enthält gleich den Chinabasen zwei tertiäre Stickstoffatome, die ijedoch räumlich viel näher, nämlich in einem Chinazolinring angeordnet sind.

Peganin-Merck gibt mit $CH_3J$ in $CCl_4$-Lösung nach längerem Stehen bei gewöhnlicher Temperatur ein schönkrystallisiertes Monojodmethylat. Erhitzt man Peganin in Methanol mit überschüssigem $CH_3J$ im Einschmelzrohr im siedenden Wasserbade durch eine Stunde, so erhält man neben geringen öligen Zersetzungsprodukten dasselbe krystallisierte Monojodmethylat. Endlich bereitete sich Vortragender über das Chlorhydrat, das einmal jodwasserstoffsaure Peganin und erhitzte dieses schönkrystallisierte Salz in Methanol mit überschüssigem $CH_3J$ im Druckrohr im kochenden Wasserbade durch eine Stunde; konnte aber aus der rotgefärbten Lösung neben öligen Zersetzungsprodukten nur geringe Mengen eines krystallisierten Salzes isolieren, welches nach Schmelzpunkt unverändertes $HJ$-Peganin zu sein schien und mit Ammoniak eine halogenfrei Base abschied.

Hiemit ist erwiesen, dass von den zwei Stickstoffatomen des Peganins nur eines $CH_3J$ zu binden vermag; wahrscheinlich jenes, das stärker basisch ist und in den primären Salzen die Säureionen bindet; wie das ja bei den Chinabasen der Fall ist. Das zweite Stickstoffatom ist nach Auffassung des Vortragenden, «sterisch behindert», nachdem es im selben Chinazolinring, in Metaposition zum ersten Stickstoffatom steht.

---

[1] Dieser Meinung schloss sich brieflich auch H. Prof. E. SPÄTH — Wien an.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Nov. 1935.)

# CHROMSAV- ES BICHROMAT-OLDATOKBAN URALKODÓ EGYENSÚLYOKRÓL.

ENDRÉDY ENDRE vendégtől.

A chromsav ($CrO_3$) és a bichromatok vizes oldataiban igen bonyolódott egyensúlyok állanak fenn. Mivel a chromtrioxydnak hidrátját nem ismerjük, nehéz az egyensúlyok számításához kiindulási alapot választani. Eddig főleg a nevezett oldatok fizikochemiai sajátságait vizsgálták (fagyáspontcsökkenés, elektrolytos vezetőképesség, neutralizációs görbék, stb.), amelyeket többféleképpen lehet magyarázni. Az irodalomban található fényabszorpció-vizsgálatok sem adnak módot teljesen egyértelmű magyarázatra.

Az eddigi vizsgálatok alapján két vélemény alakult ki. Az első szerint a $CrO_3$ vizes oldatában csak a $H_2CrO_4 \rightleftarrows H^{\cdot} + HCrO_4'$ [1] szerint erősen (tökéletesen) disszociált monochromsav van jelen. A második disszociációs állandó igen kicsiny ($4-7 \cdot 10^{-7}$ nagyságrendű), ennélfogva a sav gyakorlatilag egybázisú savként viselkedik. A bichromatok is csak szilárd állapotban léteznek, vízben feloldva pl. $K_2Cr_2O_7 + H_2O = 2KHCrO_4$ szerint azonnal hidratálódnak és $KHCrO_4 \rightleftarrows K. + HCrO_4'$ szerint tökéletesen disszociálnak. Mivel a bichromatok oldatai határozottan savanyú kémhatásúak, ezt csak a $HCrO_4' \leftrightarrows H^{\cdot} + CrO_4''$ disszociációból származó $H^{\cdot}$-ion okozhatja, ilyenformán bichromat-oldatok hidrogenion-koncentrációját meghatározva, a $K_2 = \frac{c_{H^{\cdot}} \cdot c_{CrO_4''}}{c_{HCrO_4'}}$ értékét kiszámíthatjuk. Ez a felfogás azon alapszik, hogy 32—1024 *l*/mol higítás között a chromsav molekuláris vezetőképessége 1—1 értékű elektrolytnak megfelelőleg változik. BRITTON [1] ehhez még

hozzáteszi, hogy a normális chromat- és a bichromat-oldatok színkülönbségét az okozza, hogy a $CrO_4''$ és $HCrO_4'$ különféleképpen abszorbeálnak.

Közbevetőleg meg kell jegyeznem, hogy az eredeti OSTWALD-féle felfogást, amely szerint chromsav- és bichromatoldatokban csak a kétbázisú, tökéletesen disszociált dichromsav $H_2Cr_2O_7$ van jelen, teljesen megdöntötték SHERRIL és BEDFORD[2] pontos fagyáspontcsökkenés-mérései és a fényabszorpció-vizsgálatok.

A másik felfogás szerint a chromsav- és bichromatoldatokban a $HCrO_4'$ és $Cr_2O_7''$-ionok a koncentrációtól függő egyensúly szerint vannak jelen. Hígabb oldatok felé a $HCrO_4'$ (igen nagy higításoknál $H^{\cdot}+CrO_4''$) javára, töményebbek felé a $Cr_2O_7''$ javára tolódik el az egyensúly. Ezek szerint igen tömény oldatok kivételével, ahol a $Cr_3O_{10}''$, illetve $Cr_4O_{13}''$ ionok is szerepelhetnek, gyakorlatilag a következő egyensúlyok vehetők figyelembe:[3] $H_2Cr_2O_7 \rightleftarrows H^{\cdot} + HCr_2O_7'$, $HCr_2O_7' \rightleftarrows H^{\cdot} + Cr_2O_7''$, $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ és $HCrO_4' \rightleftarrows H^{\cdot} + CrO_4''$. Az első disszociáció feltétlenül teljes, a másodiknak egyensúlyi állandóját BECK és STEGMÜLLER[4] a kénsavval való analogia alapján $1.10^{-3}$-ra becsülik, a harmadiknak állandójára különböző szerzők igen különböző értékeket találnak (0.016—2·5-ig), míg a negyediknek állandóját valamennyi szerző a hőmérséklettől függően $1—8.4.10^{-7}$-nek találja. Minthogy neutrális sók általában erős elektrolytok s a bichromatok a töményebb oldatban uralkodó dichromsav $H_2Cr_2O_7$ neutrális sóiként foghatók fel, egy tetszőleges, pl. alkalibichromatoldatban öt ionnal kell számolnunk; $Me^{\cdot}$ $H^{\cdot}$, $HCrO_4'$, $Cr_2O_7''$, és $CrO_4''$. Hígabb chromsavoldatokban ($< 0{\cdot}002$ gmol $CrO_3/l$.) csak négy ion van, $H^{\cdot}$, $Cr_2O_7''$, $HCrO_4'$ és $CrO_4''$. Kb. 0·002 gmól $CrO_3/l$-ig pedig a $HCrO_4' \rightleftarrows H^{\cdot}+CrO_4''$ disszociációt is figyelmen kívül lehet hagyni.

Hiányzanak azonban pontos vezetőképességi adatok a chromsav töményebb oldataira vonatkozólag, valamint a töményebb oldatokra vonatkozó neutralizációs görbék. Ezekből az adatokból lehet t. i. jóformán egyedül a $HCr_2O_7' \rightleftarrows H^{\cdot} + Cr_2O_7''$ disszociációra következtetéseket levonni. Ezenkívül BEDFORD-nak igen híg $K_2Cr_2O_7$ oldatokra vonatkozó pontos fagyáspontcsökkenés-

meghatározásait sem értékelték ki a modern (elektrosztatikus) elektrolyt-elmélet alapján. Végül hiányzanak az előbb említett egyensúlyoknál szereplő ionok mozgékonyságára vonatkozó adatok.

A fenti kérdések tisztázása céljából meghatároztam a $CrO_3$ vizes oldatainak elektrolytos vezetőképességét 0·001823—5·0 g mol/*l.*, a $K_2Cr_2O_7$-ét 0·05—0·38 gmol/*l.* között, felvettem a $CrO_3$ konduktometriás neutralizációs görbéjét 1·0 és 0·5112 g mol $CrO_3/l.$ koncentrációnál ($c_{CrO_3}$ az egész görbénél állandó) és meghatároztam a $CrO_3$-oldatok sűrűségét 0·5—60%-os oldatokban. A sűrűségi adatokból kiszámítottam $H_2Cr_2O_7$-re számítva az oldott alkatrész látszólagos molekulavolumenét ($\Phi_l$), t. i. a moltérfogat-koncentráció-görbe rendkívül jellegzetes és módot ad annak megkülönböztetésére, hogy az oldott anyag gyenge vagy erős elektrolyt-e, azonkívül ha erős elektrolyt, lehetővé teszi annak eldöntését, hogy milyen típusú (1—1. vagy 1—2) elektrolytről van szó.

Feldolgoztam ezenkívül BEDFORD[2] fagyáspontcsökkenési adatait a modern elektrolyt-elmélet szempontjából, valamint SPITALSKY[5] hidrogén-ionkoncentráció-meghatározásait és a fényabszorpcióméréseket is.

## Vizsgálati módszerek.

A vezetőképességeket KOHLRAUSCH eljárásával határoztam meg. Áramforrásul induktor szolgált. A kapacitív hibákat egy forgókondenzátor segítségével küszöböltem ki. Az ellenállássorozatot és a hidat hiteles ellenállás-sorozattal összehasonlítva kalibráltam. Elektródedényül egy BUCHBÖCK[6]-féle, higítássorozatok készítésére is alkalmas edényt és két KOHLRAUSCH-féle U-edényt használtam. Az edények vezetőképességi kapacitásait KOHLRAUSCH szerint készített $n/1$, $n/10$ és $n/100$ $KCl$, illetve maximális vezetőképességű $MgSO_4$-oldatok segítségével határoztam meg. A PARKER-féle bázisra való átszámítás céljából valamennyi vezetőképességi adatomat 0·145%-al kisebbíteni kellene. Mivel azonban a mérések átlagos pontossága kereken 1‰, az átszámítást mellőztem. Az adatok tehát KOHLRAUSCH, HOLBORN és DIESSELHORST[8] abszolut méréseire vonatkoznak.

A neutralizációs görbét úgy vettem fel, hogy 50 $cm^3$ 2 × molar chromsav-, illetve molar $Na_2Cr_2O_7$-oldathoz növekvő mennyiségű ismert titerű kb. 2 × normal karbonátmentes $NaOH$-oldatot adtam és az oldatot mindig 100 $cm^3$-re higítottam. Az oldatot a BUCHBÖCK-féle edényben kb. kétszeresére higítva is megmértem, úgy hogy állandó 1, illetve 0·5112 molar $CrO_3$-koncentrációnál vettem fel a neutralizációs görbét.

A sűrűségeket piknométerrel határoztam meg.

Valamennyi mérést 20·00+0·01° (sűrűségeket 20·0+0·05°) C állandó hőmérsékleten, termosztátban, illetőleg fürdőben végeztem. A vizsgálatokhoz tiszta, átkristályosított chromtrioxydot, $K_2Cr_2O_7$-ot, illetve $Na_2Cr_2O_7$-ot, valamint SÖRENSEN szerint legtisztább $NaOH$-ból készített carbonatmentes nátronlúgot használtam.

Az összes mérésekhez először savanyú $KMnO_4$-ról, majd $Ba(OH)_2 - KMnO_4$-ról desztillált vizet használtam. A második desztillációnál ónhűtőt alkalmaztam. A víz vezetőképessége maximálisan $1 \cdot 10^{-6}$ rec. ohm volt, amit el lehetett hanyagolni.

## Eredmények.

1. *Vezetőképesség.* A vizes chromsav-oldatok vezetőképessége 0·001823—0·2 g.mól.$CrO_3/l$ intervallumban $\sqrt[3]{c}$ szerint jól interpolálható. Az interpoláló egyenletet a legkisebb hibanégyzetek módszerével számítottam ki. Ugyancsak jól interpolálható lineárisan nevezett oldatok vezetőképessége 0·2—2·0 mol/$l$ között. A két interpoláló egyenlet a következő:

$CrO_3$ molekuláris vezetőképessége 0·001823 — 0·2 molar között:

$$1.\ \mu = 378 \cdot 57\ (1 - 0 \cdot 17665\ \sqrt[3]{c}),$$

ugyanaz 0·2—2·0 molar között:

$$2.\ \mu = 349 \cdot 93\ (1 - 0 \cdot 15646\ c),$$ ahol $c = g.\text{mol}\ CrO_3/l$.

Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltam össze.

## 1. táblázat.

$CrO_3$-oldatok molekuláris vezetőképessége 20° C-on.
(Megfelel a $H_2Cr_2O_7$ aequivalens-vezetőképességének.)

| Sorszám | Mól. $CrO_3/l.$ $\times 10^3$ | $\mu$ talált | $\mu$ számított | Különbség $\mu$ tal.—$\mu$ szám. | Interpolációs formula | Sorszám | Mól. $CrO_3/l.$ $\times 10^3$ | $\mu$ talált | $\mu$ számított | Különbség $\mu$ tal.—$\mu$ szám. | Interpolációs formula |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1·823 | 370·5 | 370·4 | + 0·1 | $^1/\sqrt[3]{c}$ | 22 | 200·0 | 339·2 | 339·5 | — 0·3 | $^1/\sqrt[3]{c}$ |
| 2 | 3·567 | 368·2 | 368·4 | — 0·2 | « | « | « | 339·2 | 339·0 | + 0·2 | $^2/_c$ |
| 3 | 4·562 | 367·8 | 367·5 | + 0·3 | « | 23 | 255·6 | 335·7 | 335·9 | — 0·2 | « |
| 4 | 6·978 | 365·5 | 365·8 | — 0·3 | « | 24 | 261·3 | 335·5 | 335·6 | — 0·1 | « |
| 5 | 8·925 | 365·1 | 364·7 | + 0·4 | « | 25 | 296·6 | 334·0 | 333·7 | + 0·3 | « |
| 6 | 9·125 | 365·5 | 364·6 | + 0·9 | « | 26 | 400·0 | 327·6 | 328·0 | — 0·4 | « |
| 7 | 13·65 | 363·0 | 362·6 | + 0·4 | « | 27 | 500·0 | 322·2 | 322·6 | — 0·4 | « |
| 8 | 17·46 | 362·0 | 361·2 | + 0·8 | « | 28 | 511·2 | 321·5 | 321·9 | — 0·4 | « |
| 9 | 17·85 | 362·4 | 361·1 | + 1·3 | « | 29 | 600·0 | 316·7 | 317·1 | — 0·4 | « |
| 10 | 26·70 | 359·0 | 358·6 | + 0·4 | « | 30 | 700·0 | 311·5 | 311·6 | — 0·1 | « |
| 11 | 34·15 | 357·6 | 356·9 | + 0·7 | « | 31 | 800·0 | 306·6 | 306·1 | + 0·5 | « |
| 12 | 34·91 | 357·4 | 356·7 | + 0·7 | « | 32 | 900·0 | 301·1 | 300·7 | + 0·4 | « |
| 13 | 50·00 | 353·2 | 353·9 | — 0·7 | « | 33 | 1000·0 | 295·1 | 295·2 | — 0·1 | « |
| 14 | 52·24 | 353·3 | 353·6 | — 0·3 | « | 34 | 1200·0 | 284·0 | 284·2 | — 0·2 | « |
| 15 | 66·81 | 351·6 | 351·4 | + 0·2 | « | 35 | 1307·0 | 278·9 | 278·4 | + 0·5 | « |
| 16 | 68·29 | 351·65 | 351·2 | + 0·45 | « | 36 | 1400·0 | 273·1 | 273·3 | — 0·2 | « |
| 17 | 100·00 | 348·0 | 347·5 | + 0·5 | « | 37 | 1600·0 | 262·2 | 262·3 | — 0·1 | « |
| 18 | 102·2 | 348·3 | 347·3 | + 1·0 | « | 38 | 1800·0 | 251·3 | 251·4 | — 0·1 | « |
| 19 | 130·7 | 344·6 | 344·6 | ± 0·0 | « | 39 | 2000·0 | 240·9 | 240·4 | + 0·5 | « |
| 20 | 133·6 | 344·6 | 344·4 | + 0·2 | « | 40 | 2556·0 | 213·3 | — | — | — |
| 21 | 197·6 | 339·3 | 339·5 | — 0·2 | « | 41 | 5000·0 | 123·5 | — | — | — |

Az interpolált számok a mért adatokkal 1—2‰-en belül megegyeznek. Minthogy említettem, hogy a mérések átlagos pontossága kb. ekkora, az eltérések analizálásába nem bocsátkozhattam. Le kell azenban szögeznem, hogy az interpolált értékek nagyobbrészt határozottan a valóságos görbe alá esnek, úgy hogy pontosabb (legalább 0·1 egységre = 0·3 ‰ pontos) mérések feltétlenül kimutatnák azt, hogy a $CrO_3$ molekuláris vezetőképessége nem exakte $\sqrt[3]{c}$ lineáris függvénye. Elméletileg nem is várható ilyen összefüggés, kerek koncentrációkra való átszámítás céljaira azonban kielégítő pontosságú. Hogy egy esetleges extrapoláció mennyiben jogosult, arról majd az eredmények értelmezésénél lesz bővebben szó. Viszont a körülmények összejátszása folytán létrejött lineáris összefüggés 0·2—2·0 mol $CrO_3/l$ intervallumban sokkal szigorúbban érvényes, úgyhogy az eltérések itt átlag 1 ‰ alatt maradnak.

Az irodalomban található adatokkal az én vizsgálati adataimat összehasonlítva, első tekintetre a megegyezés kielégítő. Sajnos 20° C-ra vonatkozólag adat nem áll rendelkezésünkre, csak 0°, 18° és 25° C-on[8]. 0°C-on Jones és Basset 0.05—7 molar, 18°-on, Sherril 0·02—0·0005 molar, és 25° C-on Walden $^1/_{32}$ - $^1/_{1024}$ molar oldatokban határozták meg a $CrO_3$ molekuláris vezetőképességét. A számok nagyságrendi megegyezéséről alább lesz szó, előbb a nagyobb higításokban tapasztalható menetről kell néhány szót mondanom. Az én vizsgálataim alapján 0·2—0.001823 molar intervallumban a $CrO_3$ vezetőképessége $\sqrt[3]{c}$ szerint lineárisan emelkedik. Walden és Sherril vizsgálatai szerint azonban a vezetőképességi görbe 0·004, illetve 0·0025 molar koncentrációnál maximumot mutat. Igaz, hogy ez a maximum rendkívül lapos, különösen Sherril-nél, én azonban maximumot nem találtam. Ennek a maximumnak az okát Koppel[1] abban látja, hogy a gyorsan vándorló $Cr_2O_7''$ helyét a lassan vándorló $HCrO_4'$ foglalja el. Jelen vizsgálatok adatai alapján azonban a maximum kérdéset exakt módon nem lehet eldönteni, mivel a kritikus koncentráción (0·004 mol/$l$) túl csak egy mérésem van. Ezt a kérdést tehát egyelőre nyitva kell tartani.

Különböző hőmérsékletnél végzett vezetőképesség-méréseket legcélszerűbb úgy összehasonlítani, hogy az egyenlő koncentrá-

ciókhoz tartozó vezetőképességi adatokból kiszámítjuk a közepes temperatura-koefficienseket. A közepes temperatura-koefficienst KOHLRAUSCH a következőképen definiálja:

$$\alpha = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{1}{A_0},$$

ahol $\alpha$ a temperatura koefficiens, $dt = t - t_0$, $dA = A - A_0$, végül $A_0$ (vagy molekuláris vezetőképességnél $\mu_0$) az összehasonlítás alapját képező hőmérséklethez tartozó vezetőképesség. $t_0$-nak rendesen 18° C-t szokták választani, mivel azonban megfelelő számú adat nem állt rendelkezésemre, részben 18°, részben azonban 20° C-t választottam vonatkoztatási hőmérsékletnek. WALDEN és SHERRIL mérései adataiból természetesen nem vettem figyelembe $c = 0$ felé haladva, a maximumon túli adatokat. A számítás eredményeit a következő táblázatban foglaltam össze.

**2. táblázat.**

A $CrO_3$ molekuláris vezetőképességének közepes temperaturakoefficiensei ($\alpha$).

| $t_0 = 20°$ C | | | | $t_0 = 18°$ C | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ mól $CrO_3/l$ | $\mu_{20°}$ (ENDRÉDY) | $\mu_0$ (JONES és BASSETT) | $\alpha$ | $c$ mól $CrO_3/l$ | $\mu_{20°}$ (ENDRÉDY) | $\mu_{18°}$ (SHERRIL) | $\alpha$ |
| 0·05 | 353·9 | 241 | 0·0160 | 0·0025 | 369·5 | 350 | 0·0279 |
| 0·10 | 347·5 | 235 | 0·0162 | 0·01 | 364·2 | 348 | 0·0233 |
| 0·20 | 339·25 | 232 | 0·0158 | 0·02 | 360·4 | 345 | 0·0223 |
| 0·30 | 333·6 | 228 | 0·0158 | $t_0 = 20°$ C | | | |
| 0·40 | 328·0 | 224 | 0·0159 | $c$ mól $CrO_3/l$ | $\mu_{20°}$ (ENDRÉDY) | $\mu_{25°}$ (WALDEN) | $\alpha$ |
| 0·60 | 317·1 | 219 | 0·0155 | | | | |
| 0·80 | 306·1 | 207 | 0·0162 | 0·007812 | 365·3 | 387 | 0·0119 |
| 1·00 | 295·2 | 199 | 0·0163 | 0·01562 | 361·9 | 384 | 0·0122 |
| 2·00 | 240·4 | 167 | 0·0153 | 0·03125 | 357·5 | 379 | 0·0120 |
| 5·00 | 123·5 | 84 | 0·0160 | 0·0625 | 352·0 | 371 | 0·0102 |

A táblázatból látható, hogy JONES és BASSET magasabb koncentrációknál végzett méréseiből átlag 0·016 körüli temperaturakoefficienst kapunk. Ez megfelelne az erősen disszociált savak átlagos temperatura-koefficiensének. SHERRIL adataiból a normálisnál lényegesen magasabb, míg WALDENÉ-ből alacsonyabb temperaturakoefficienseket kapunk. A kevésszámú mérés miatt pontosan el nem dönthető, hogy tulajdonképen melyik a helyes. Annyit mindenesetre látni, hogy nagyjából, különösen magasabb koncentrációknál jelen vizsgálat eredményei az irodalmi adatokkal összeegyeztethetők, annál is inkább, mert kis koncentrációknál végzett vezetőképességméréseknél a $CrO_3$ esetleges redukciója erősen befolyásolhatja az eredményeket. Vizes $CrO_3$-oldatok t. i. SPRING[9] vizsgálatai szerint fényérzékenyek és ellenállásuk állás közben növekszik. A vezetőképesség csökkenése itt kettős: minden mól $Cr_2O_3$-á redukálódott $CrO_3$ a

$$2CrO_3 = Cr_2O_3 + 3O,$$
$$Cr_2O_3 + 3H_2Cr_2O_7 = Cr_2(Cr_2O_7)_3 + 3H_2O$$

egyenletek értelmében nem egy $H^{\cdot}$-t, hanem $4H^{\cdot}$-t von el az oldatból, ami a $H^{\cdot}$ magas mozgékonyságánál fogva a vezetőképességet erősen csökkentheti.

Vizsgálataim folyamán arra is figyelemmel voltam, hogy platinázott platinaelektródokat használva, nem történik-e a mérési idő alatt redukció? A vizsgálatok azt mutatták, hogy a kísérleti hőmérsékletre előmelegített oldatot használva, a vezetőképesség gyakorlatilag 30 percen belül nem változik, tehát redukció nem lép fel.

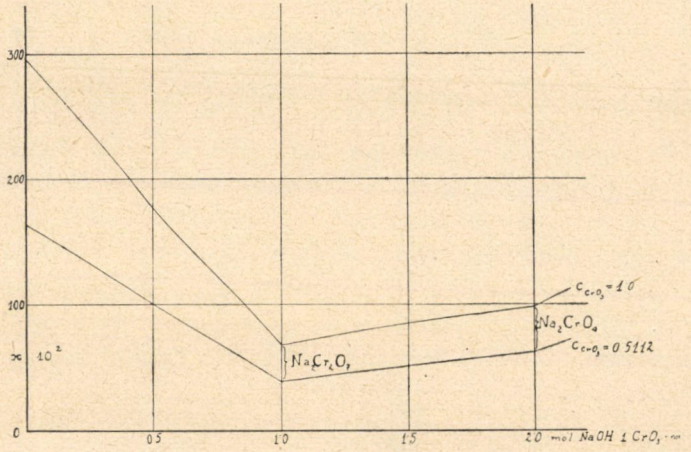
Néhány mérést végeztem töményebb $K_2Cr_2O_7$-oldatokkal is. Az eredményeket a következő táblázatban foglaltam össze.

**3. táblázat.**

| $g$ aequiv. $K_2Cr_2O_7/l$ ($c$) | $\Lambda_{20°}$ |
|---|---|
| 0·10186 | 104·9 |
| 0·19926 | 99·3 |
| 0·3898 | 93·4 |
| 0·7626 | 86·2 |

Hogy az eredményeket a $CrO_3$-oldatokon végzett mérésekkel közvetlenül össze lehessen hasonlítani, a $K_2Cr_2O_7$-ra vonatkozó méréseket mint aequivalens-vezetőképességeket, $^1/_2\,K_2Cr_2O_7$-ra vonatkoztatva adtam meg.

A három magasabb koncentrációra vonatkozó érték $\sqrt[3]{c}$ szerint egy egyenesbe esik, míg a 0·1 normál oldatra vonatkozó kissé magasabb. Ha ezt az értéket a SPITALSKY méréseiből kiszámítható ($H^{\cdot}$)-koncentráció alapján javítjuk, ez is elég jól az egyenesbe esik.




1. ábra.
A $CrO_3$ ($H_2Cr_2$) neutralizációs görbéje.

A nagyságrend és a koncentráció szerinti menet után ítélve, a $K_2Cr_2O_7$ egészen biztosan erős elektrolyt, mégpedig amennyire ilyen magas koncentrációknál végzett mérések alapján ítélni lehet, 2—1 értékű, tehát ternär.

A neutralizációs görbék adatait nem adom meg táblázatban, hanem az 1. ábrán tüntetem fel. A görbék két éles fordulópontot mutatnak és általában lineárisak. Állandó savkoncentráció mellett lineáris konduktometriás neutralizációs görbéket vagy erős, vagy nagyon gyenge savak adnak. Az első esetben a $H^{\cdot}$ és $Me^{\cdot}$ helycseréje a vezetőképesség változásának oka, amely a tökéletes disszociáció miatt lineáris változást okoz, a másik eset-

ben a $H^{\cdot}$ mennyisége olyan csekély, hogy gyakorlatilag a keletkező $Me^{\cdot}$ és $Ac'^{\cdot}$-ionok vezetőképessége mellett elhanyagolható. A görbék második szakaszának igen gyengén konkáv volta (az abscissához képest) bonyolódott hatások eredménye.

Végül a sűrűségmeghatározások eredményeit a 4. táblázatban foglaltam össze. A meghatározások pontossága változó, $3-10.10^{-5}$ között ingadozik.

A sűrűségek légüres térre és 4° C-u vízre vonatkoznak. A sűrűségekből a látszólagos molekula-volument a következő egyenlet szerint számítottam ki.[10]

$\Phi_t = \frac{A}{D_0} - \frac{1000}{m_v} \cdot \frac{\Delta D}{D_0}$, a sűrűségmérések hibájából a $\partial\Phi$ értékét $\partial\Phi_t = -\frac{1000}{m.D_0}\,\partial.\Delta D$ képletből nyertem. Itt $\Phi_t$ a látszólagos molekulatérfogat a hipotetikus $H_2Cr_2O_7$-ra vonatkoztatva, $A$ a $H_2Cr_2O_7$ molekulasúlya, $m_v$ a koncentráció mól $H_2Cr_2O_7/l$-ben, $D_0$ a víz sűrűsége és $\Delta D = D_t - D_0$, ahol $D_t$ az oldat sűrűsége. A táblázat adataiból látható, hogy kis $m_v$ esetében $\partial\Phi$ milyen nagy mértékben függ $\partial\Delta D$-től, továbbá, hogy $\Phi_t$ abszolút értéke magas. Ez összhangban van a szilárd bichromatok magas molvolumenével. $\Phi_t$-nek a koncentrációtól való függéséről majd később lesz szó.

## Az eredmények értelmezése.

Minthogy egyik vizsgálati mód sem adott lehetőséget az oldatokban lévő ionok *számának* direkt meghatározására, hanem csak többé-kevésbbé indirekt következtetésekre, valamilyen ozmotikus eljárás szerint nyert számadatokból kíséreltem meg az ionok számát meghatározni. Erre a célra igen alkalmasnak látszanak Bedford-nak[2] híg $K_2Cr_2O_7$-oldatban végzett fagyáspontcsökkenésmeghatározásai, amelyeket egy igen pontos differenciáleljárás segítségével nyert.

Meggondolásaim a következők voltak: Mivel Bedford[13] számadataiból a Van't Hoff-féle faktor $i > 3$, tisztán ternär elektrolytról nem lehet szó. Fennmarad még az a lehetőség, hogy $K_2Cr_2O_7 = 2KHCrO_4$ s ez esetben az elméleti faktor $c = 0$-nál 4 volna. Azonban igen híg oldatoknál, ahol még a

## 4. táblázat.

Vizes $CrO_3$-oldatok sűrűsége és a $H_2Cr_2O_7$ látszólagos molekulatérfogata.

Az aequivalensvolumen $c = 2m_v$-nél egyenlő $\frac{\Phi_{20°}}{2}$-vel

| Súly % $CrO_3$ (p) | Mól $H_2Cr_2O_7/l$ $m_v$ | $D_{20°/4°}$ | $\Phi_{20°}$ cm³ | $\partial\,\Phi$ cm³ | Súly % $CrO_3$ (p) | Mól $H_2Cr_2O_7/l$ $m_v$ | $D_{20°/4°}$ | $\Phi_{20°}$ cm³ | $\partial\,\Phi$ cm³ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·5025 | 0·02518 | 1·00154 | 70·9 | ± 0·6 | 7·015 | 0·36868 | 1·05125 | 74·38 | ± 0·4 |
| 1·006 | 0·05058 | 1·00565 | 71·6 | ± 0·6 | 8·895 | 0·47407 | 1·06602 | 75·18 | ± 0·14 |
| 1·6185 | 0·08173 | 1·01005 [1] | 73·6 [2] | ± 0·6 | 9·659 | 0·51782 | 1·07229 | 75·15 | ± 0·14 |
| 2·336 | 0·11859 | 1·01541 | 73·3 | ± 0·4 | 14·333 | 0·7966 | 1·11164 | 75·81 | ± 0·12 |
| 2·568 | 0·13057 | 1·01712 | 73·53 | ± 0·2 | 18·968 | 1·0925 | 1·15198 | 77·44 | ± 0·10 |
| 2·617 | 0·13311 | 1·01746 | 73·7 | ± 0·4 | 20·088 | 1·1668 | 1·16186 | 77·95 | ± 0·02 |
| 3·571 | 0·18293 | 1·02468 | 73·5 | ± 0·3 | 37·96 | 2·5550 | 1·34627 | 81·97 | ± 0·04 |
| 4·1278 | 0·21214 | 1·02886 | 73·8 | ± 0·2 | 60·86 | 5·1109 | 1·67981 | 84·83 | ± 0·02 |
| 4·820 | 0·24921 | 1·03416 | 74·0 | ± 0·6 | | | | | |

[1] Alacsony. [2] Valószínűleg kissé magas.

$HCrO_4' \rightleftarrows H^{\cdot} + CrO_4''$ disszociáció is számba jön, a DEBYE-féle elmélet alapján számított $j$-nek (a feltételezett teljes és tényleges disszociáció esetében mutatkozó fagyáspontcsökkenés-különbségek arányossági tényezőjének) a találtnál kisebbnek kell lennie, annál is inkább, mert a $HCrO_4'$ rádiusza valószínűleg nagy. Tökéletlen disszociációról ($KHCrO_4 \rightleftarrows K^{\cdot} + HCrO_4'$) a magasabb koncentrációknál végzett vezetőképesség-mérések alapján szó sem lehet. Mivel azonban a $j$-értékek a DEBYE-féle elméletből számítottnál nagyobbak, csak arról lehet szó, hogy a $HCrO_4'$-ionok egy része $2HCrO_4' = Cr_2O_7'' + H_2O$ alapján bichromattá egyesül. Ha ismerjük a $HCrO_4' \rightleftarrows H^{\cdot} + CrO_4''$ egyensúly állandóját, vagy az oldat hidrogénionkoncentrációját, a $2HCrO_4'' \rightleftarrows Cr_2O_7'' + H_2O$ egyensúly állandóját egy tetszőleges híg oldat fagyáspontcsökkenéséből kiszámíthatjuk.

A számítás menete a következő:

Tételezzük fel, hogy a $K_2Cr_2O_7$, illetve a belőle keletkező $KHCrO_4$, $2K^{\cdot} + Cr_2O_7''$, illetve $K^{\cdot} + HCrO_4'$ szerint tökéletesen disszociál és elektrosztatikus effektusok nincsenek. Ekkor egy $K_2Cr_2O_7$-oldat fagyáspontcsökkenése, figyelembevéve a $HCrO_4' \rightleftarrows H^{\cdot} + CrO_4''$ disszociációt is,

$$\vartheta = E_0(c_K + c_{Cr_2O_7''} + c_{HCrO_4'} + c_{CrO_4''} + c_{H^{\cdot}}), \quad (E_0 = 1{\cdot}858^\circ \text{ C}).$$

Az elektroneutralitás miatt azonban $c_{H^{\cdot}} = c_{CrO_4''}$ és

$$c_K = 2c_{Cr_2O_7''} + c_{HCrO_4'} + c_{H^{\cdot}} \text{ tehát } \vartheta = E_0(3c_{Cr_2O_7''} + 2c_{HCrO_4'} + 3c_{H^{\cdot}}).$$

Az elektrosztatikus effektusokat azonban nem célszerű iononként számítani, mert az összefüggés bonyolódott. Ezért feltesszük, hogy az oldatban két ternär elektrolyt $K_2Cr_2O_7$ és a tökéletesen disszociált $KHCrO_4$ valamint egy binär, a $K^{\cdot} + HCrO_4'$ szerint disszociált $KHCrO_4$ van jelen. Ozmotikus koncentrációik sorra: $3c_{Cr_2O_7''}$, $3c_{H^{\cdot}}$ és $2c_{HCrO_4'}$. A tökéletes disszociációtól való eltérést BJERRUM az $f_0$ faktorral jelöli, $f_0 = 1 - j$, $j$ értéke a DEBYE-féle elmélet szerint:[11]

$$j = 0{\cdot}373 \frac{\Sigma \nu_s z_s^2}{\nu} \sqrt{\mu'}.$$

Ez a képlet azért célszerű, mert megadja $j$ értékét egy tetszőleges számú elektrolytet tartalmazó ($i$ iont tartalmazó) elektrolyt-

oldatban egy szinguláris elektrolytre vonatkozólag, ahol $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_s$ ennek a szinguláris elektrolytnak az ionjai, $z_1, z_2 \ldots z_s$ a töltésük, míg $\mu'$, az ú. n. ionális koncentráció, mely az oldat összes ionjaira vonatkozik, $\mu' = \frac{\Sigma c_i z_i^2}{2}$. Az elektrosztatikus effektusok figyelembevételével az oldat fagyáspontcsökkenése:

$$\vartheta = E_0(3c'_{Cr_2O_7} f_{2_0} + 3c_{H\cdot} f_{2_0} + 2c'_{HCrO_4'}, f_{1_0}),$$

ahol $f_{1_0}$ 1—1, $f_{2_0}$ pedig 2—1 értékű elektrolytra vonatkozik.

Figyelembe kell azonban vennünk, hogy $m$ az oldatnak $K_2Cr_2O_7$-ra vonatkozó molaritása $m = c_{Cr_2O_7''} + {}^1/_2\, c_{H\cdot} + {}^1/_2\, c_{HCrO_4'}$, mert hiszen minden egyes $Cr_2O_7''$-ból két $CrO_4''$, illetve $HCrO_4'$ keletkezik. Ennélfogva $c_{Cr_2O_7''} = m - {}^1/_2\,(c_{H\cdot} + c_{HCrO_4'})$ és ha ismerjük a

$$K_2 = \frac{[H\cdot][CrO_4'']}{[HCrO_4']} \cdot \frac{\gamma_{H\cdot}\gamma_{CrO_4''}}{\gamma_{HCrO_4'}}$$

állandót, ahol $\gamma_{H\cdot}$ stb. a megfelelő aktivitáskoefficiensek, mivel gyakorlatilag igen híg oldatokban $\gamma_{H\cdot} = \gamma_{HCrO_4'}$,

$$c_{H\cdot} = \sqrt{\frac{K_2}{\gamma_{CrO_4''}}}\, c_{HCrO_4'}.$$

Ezt is behelyettesítve,

$$\vartheta = E_0\left[3f_{2_0}\left(m - \frac{1}{2}\, c_{HCrO_4'} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_2}{\gamma_{CrO_4''}}}\, c_{HCrO_4'}\right) + \right.$$
$$\left. + 2f_{1_0}\, c_{HCrO_4'} + 3f_{2_0}\sqrt{\frac{K_2}{\gamma_{CrO_4''}}}\, c_{HCrO_4'}\right].$$

Beszorozva és rendezve:

$$\frac{2\vartheta - 6E_0 f_{2_0} m}{E_0} = (4f_{1_0} - 3f_{2_0})\, c_{HCrO_4'} + 3f_{2_0}\sqrt{\frac{K_2}{\gamma_{CrO_4''}}}\, c_{HCrO_4'}.$$

Legyen:

$$\frac{2\vartheta - 6E_0 f_{2_0} m}{E_0} = Q \text{ és } 4f_{1_0} - 3f_{2_0} = 1 + j_2 = Df,$$

akkor helyettesítve:

$$c^2_{HCrO_4'} - c_{HCrO_4'}\left(\frac{2Q}{Df} + \frac{9f^2_{2_0}}{Df^2}\,\frac{K_2}{\gamma_{CrO_4''}}\right) + \frac{Q^2}{Df^2} = 0,$$

illetve:

$$c_{HCrO_4'} = \frac{Q}{Df} + \frac{9f_{2_0}^2}{2Df^2} \cdot \frac{K^2}{\gamma_{CrO_4''}} -$$

$$- \frac{3f_{2_0}}{Df} \sqrt{\frac{1}{\gamma_{CrO_4''}}} \sqrt{\frac{K_2 Q}{Df} + \frac{9}{4} \frac{f_{2_0}^2 K_2^2}{Df^2 \cdot \gamma_{CrO_4''}}}.$$

Ennek az egyenletnek megoldásához ismernünk kell $m$, $\vartheta$, $K_2$ és $\mu'$-et. $\mu^1$-ből t. i. $f_{1_0}$, $f_{2_0}$ és $\gamma_{CrO_4''}$ kiszámítható. $f_0$, amint már említettük, $1-j$ és $j$ $1-1$ értékű elektrolytnál: $j = 0{\cdot}373\ \sqrt{\mu'}$ és $1-2$ értékűnél $j = 2.0{\cdot}373\ \sqrt{\mu'}$, $\log \gamma = -\ 0{\cdot}486\ z_s^2\ \sqrt{\mu'}$.[12] $K_2$ értékét már nehezebb megválasztani. Az irodalomban számos adat található $K_2$-re vonatkozólag. Legtöbb esetben oly híg oldatban határozták meg, hogy ott gyakorlatilag $c_{Cr} = c_{HCrO_4'}$-nak vehető. Sherril[2] 18°-on $5{\cdot}6.10^{-7}$, 25°-on $7{\cdot}4.10^{-7}$-et talált. Ezek alapján a Van't Hoff-féle isochor egyenlete szerint:

$$U = \log \frac{K_c''}{K_c'} \cdot \frac{T_1 . T_2 . RM}{T_2 - T_1},$$

ahol $U$ a disszociációs hő 1 g mol $HCrO_4'$-ra, $Kc'$, $Kc''$ a $T_1$, $T_2$ hőmérsékleten mért egyensúlyi állandók, $R$ a gázállandó és $M = 2{\cdot}303 . T_1$ és $T_2$ 291 és 298° abs, $Kc' = 5{\cdot}6.10^{-2}$, $Kc'' = 7{\cdot}4.10^{-7}$, ilyenformán $U = 6828$ cal/mol és $0° = 273$ abs-nál $K_2 = 2{\cdot}6.10^{-7}$.

A $\mu'$ értékét közelítéssel lehet kiszámítani: Először feltesszük, hogy tisztán $Cr_2O_7''$ van jelen s így

$$\mu' = 3\ m\ (m = \text{mol}\ K_2Cr_2O_7/l).$$

Az így kapott ionális koncentrációk segítségével elvégezzük a számítást és kapunk egy, a valóságnak jobban megfelelő ionális koncentrációt, amelyet ismét a következő számításhoz használunk fel. A számítást hasonló módon addig ismételjük, amíg $\mu'$ (helyesebben $\sqrt{\mu'}$) gyakorlatilag állandó nem lesz.

Az alábbi táblázatban összefoglaltam Bedford fagyáspontcsökkenési adatai alapján végzett számításaim eredményét. Látjuk, hogy $\mu'$ gyakorlatilag a harmadik ismétlésnél állandó lesz és $K_1$ értéke a kísérleti hibák határain belül állandó.

## 5. táblázat.

A $Cr_2O_7'' + H_2O \leftrightarrows 2HCrO_4'$ egyensúly 0° C-on

BEDFORD adataiból számítva.

$K_2 = 2{\cdot}6.10^{-7}$

| Mól $K_2Cr_2O_7/l$ $m$ | Ionális koncentrációk 1 | 2 | 3 ismétlésnél | $f_{1_0}$ | $f_{2_0}$ | $\gamma_{H^\cdot}$ $(\gamma_{HCrO_4'})$ | $\gamma_{CrO_4''}$ $(\gamma_{Cr_2O_7''})$ | $c_{HCrO_4'} \times 10^3$ | $c_{Cr_2O_7''} \times 10^3$ | $c_{H^\cdot} = c_{CrO_4''} \times 10^3$ | $K_{1c}$ | $K_{1a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mu_1'$ | $\mu_2'$ | $\mu_3'$ | | | | | | | | | |
| 0·0005 | 0·0015 | 0·00107 | 0·00107 | 0·988 | 0·976 | 0·964 | 0·864 | 0·905 | 0·039 | 0·017 | 0·0208 | 0·0224 |
| 0·001 | 0·0030 | 0·00218 | 0·00219 | 0·983 | 0·965 | 0·949 | 0·811 | 1·683 | 0·147 | 0·023 | 0·0193 | 0·0214 |
| 0·002 | 0·0060 | 0·00457 | 0·00460 | 0·975 | 0·949 | 0·927 | 0·738 | 2·901 | 0·534 | 0·032 | 0·0158 | 0·0184 |
| 0·004 | 0·0120 | 0·00962 | 0·00968 | 0·963 | 0·927 | 0·896 | 0·644 | 4·762 | 1·597 | 0·044 | 0·0142 | 0·0177 |
| | | | | | | | | | | | Középérték: | **0·0200** |

Mivel a konstans ingadozik, sőt határozott menetet mutat, célszerűnek látszott a hibaszámítást elvégezni. A hibaszámítás céljaira a $c_{HCrO_4'}$ kiszámításra használt egyenletet a következő egyszerű alakban lehet alkalmazni

$$c_{HCrO_4'} = \frac{2\vartheta - 6E_0 m}{E_0}.$$

Nevezzük $c_{HCrO_4'}$-ot $x$-nek, akkor

$$\partial K_1 = \frac{8mx - 2x^2}{(3m - x)^2 E_0} \cdot \partial\vartheta \quad (m = g \text{ mól } K_2Cr_2O_7/l).$$

Bedford méréseinek pontossága $0{\cdot}5 - 1{\cdot}0.10^{-4}$° C-ra tehető. Ha a legmagasabb és a legalacsonyabb koncentrációknál végzett méréseinél elvégezzük a hibaszámítást, úgy a következő eredményeket kapjuk:

| | | |
|---|---|---|
| Mol $K_2Cr_2O_7/l$ | $0{\cdot}5.10^{-3}$ | $4{\cdot}0.10^{-3}$ |
| $\partial\vartheta \mp 0{\cdot}5.10^{-4}$° | $\partial K_1 \mp 0{\cdot}0055$ | $\mp 0{\cdot}0005$ |
| « $\pm 1{\cdot}0.10^{-4}$° | « $\mp 0{\cdot}011$ | $\mp 0{\cdot}001$. |

A konstans értéke tehát elég megbízható. Ebből azonban rögtön látjuk, hogy Sherril[2] fagyáspontcsökkenés-méréseit reális számítások céljaira nem igen lehet felhasználni. Sherril Beckmann-hőmérővel mért, méréseinek pontossága legfeljebb $\mp 0{\cdot}003$°, azaz $3{\cdot}10^{-3}$, tehát hibája harmincszor akkora, mint Bedford-é.

Ennek dacára megkíséreltem Sherril-nek chromsavra vonatkozó fagyáspontcsökkenés-méréseiből az állandót kiszámítani. Természetesen itt, mivel koncentráltabb oldatokról van szó, az egyszerű Debye-egyenletek csak durva közelítéssel érvényesek. Számításaimból azután az derült ki, ami a nagy molvolumen alapján reálisan várható is volt, hogy magasabb koncentrációknál a $Cr_2O_7''$-ion nagy rádiuszát, ami minimálisan 4Å-re tehető, feltétlenül figyelembe kell venni. 0°-on kb. $0{\cdot}7 - 0{\cdot}8$ mol $K_2Cr_2O_7$, vagy $H_2Cr_2O_7/l$ koncentrációnál kezd a $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ disszociáció észrevehetővé lenni. Az ionátmérő bizonytalansága miatt azután további számításokba nem is bocsátkoztam.

A fagyáspontcsökkenésre vonatkozó számításaim végered-

ménye tehát, hogy a $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ egyensúly termodinamikai állandójának értéke $K = 0{\cdot}020 \mp 0{\cdot}003$ 0° C-on. Ennek az állandónak abszolút értékét más hőmérsékleten legfeljebb igen beható abszorpció-spektrum vizsgálatok alapján lehetne meghatározni. Később a vezetőképességi adatok tárgyalásánál reá fogok majd mutatni a $K_1$ meghatározásának nehézségeire. Úgy, hogy a $K_1$-nak a hőmérséklettől való függésére csak közelítőleg következtethetünk. SAAL[15] szobahőmérsékleten reakciókinetikus mérések alapján $K_1$ értékét $0{\cdot}019 + 0{\cdot}001$-nek találta. Ez az eredmény az enyémmel igen jól egyezik, de nem egyeztethető össze LA MER és READ[13] vizsgálataival. LA MER és READ kalorimetrikus úton, a HARTRIDGE és ROUGHTON[14] által ismertetett «continous flow principle» alapján kidolgozott eljárás szerint vizsgálták a $Na_2Cr_2O_7$ neutralizációját $NaOH$-al és azt találták, hogy a $Cr_2O_7'' \rightleftarrows 2HCrO_4'$ reakció mérhető sebességgel folyik le. Számításaik alapján a hidratációnál egy mól $Cr_2O_7''$-ra számítva, 13·64 kcal hő tűnik el. A VAN'T HOFF-féle isochor szerint ilyenformán a reakciónak erősen pozitív temperaturakoeficiense volna. Ezt az ellentmondást egyelőre nehéz megmagyarázni. Érdekes, hogy éppen a víz disszociációs hőjének felel meg ez a hőmennyiség.

Mint említettem, SPITALSKY a diazoecetészter bomlásának katalytikus gyorsítása révén meghatározta igen híg $CrO_3$ és töményebb $K_2Cr_2O_7$-oldatokban a $H^{\cdot}$ koncentrációt. $CrO_3$-ra vonatkozó mérései igazolják a $H_2Cr_2O_7$ tökéletes disszociációjára vonatkozó feltevéseket. $K_2Cr_2O_7$-oldatokon végzett méréseiből pedig durva közelítéssel $K_1$-et ki lehet számítani, ha $K_2$-t ismerjük.

Tudniillik

$$K_2 = \frac{c_{H^{\cdot}} \cdot \gamma_{H^{\cdot}} \cdot c_{CrO_4''} \cdot \gamma_{CrO_4''}}{c_{HCrO_4'} \cdot \gamma_{HCrO_4'}} \quad \text{és} \quad c_{HCrO_4'} = \frac{c_{H^{\cdot}} \cdot c_{CrO_4''} \cdot \gamma_{H^{\cdot}} \cdot \gamma_{CrO_4''}}{K_2 \cdot \gamma_{HCrO_4'}}.$$

Minthogy $c_{H^{\cdot}} = c_{CrO_4''}$, $K_2$-t ismerjük, $\gamma_{H^{\cdot}}$ stb. pedig már ismert módon kiszámítható, megkapjuk $c_{HCrO_4'}$ értékét. Minthogy azonban itt már az ionális koncentráció $\mu' > 0{\cdot}01$, a javított DEBYE-formulákkal kell számítanunk: figyelembe kell venni az ionrádiuszokat. Számításaimat a következő alapon végeztem.

SCATCHARD és mások méréseiből[16] ismerjük a $H^{\cdot}$ aktivitáskoefficiensét egészen $\mu' = 0{\cdot}2$-ig. Ezekből a mérésekből a legcélszerűbb következőképen interpolációs képletet szerkeszteni:

Ha $a$ egy ion rádiusza Å-ben, úgy 25° C-on:

$$\log \gamma = - 0{\cdot}505 z_s^2 \frac{\sqrt{\mu'}}{1 + 0{\cdot}327\, a \sqrt{\mu'}},$$

innen

$$a = - \frac{0{\cdot}505 z_s^2 \sqrt{\mu'} + \log \gamma}{\log \gamma . 0{\cdot}327 \sqrt{\mu'}}.$$

Ha a $\gamma_H$-ra ezt a számítást elvégezzük, elég jó középértékként $a = 10$ Å-ot kapunk.[1] Ugyanezt a számítást végezzük el $\gamma_{SO_4''}$-al is, amikor $a = 4$ Å lesz. $\gamma_{SO_4''} = \gamma_{CrO_4''} = \gamma_{Cr_2O_7''}$ természetesen ismét csak közelítőleg, végül $\gamma_{HCrO_4'}$-ot egyéb támpont hiányában a DEBYE-féle egyszerű formula szerint számítjuk ki. Az ionális koncentrációt megint konvergáltató számítás útján kapjuk meg.

Ilyen módon kiszámítottam SPITALSKY méréseiből $K_1$-et. Ebből a célból SPITALSKY kinetikus állandóját $[H^{\cdot}]$ helyett $\gamma_H \cdot [H^{\cdot}]$ tehát aktivitásra számítottam át. A diazoecetészter aktivitását 1-nek véve, feltételeztem, hogy a mérések $\gamma_H \cdot [H^{\cdot}]$ értékét adják. A talált aktivitásokat $\gamma_H$-val osztva, megkaptam $cH$-t és $\gamma_{SO_4''}$ $(CrO_4'')$-al szorozva $\gamma_{CrO_4''} . c_{CrO_4''}$-ot. $K_2$ értékét SHERRIL után $7{\cdot}4.10^{-7}$-nek vettem.

A számítások eredményét a 6. táblázatban foglaltam össze.

A $K_1$ értéke 25° C-on erős menetet mutat, nagyságrendileg azonban a várt intervallumban marad. Nem is várható jobb megegyezés a rendkívül sok kisegítő feltevés miatt. Sokkal jobbak volnának a számok, ha $\gamma_{HCrO_4'}$ számításánál a rádiuszt figyelembe vehetnénk, mivel $\gamma_{HCrO_4'}$ két helyen is szerepel, először $c_{HCrO_4'}$ számításánál, ahol növekedése a $HCrO_4'$ mennyiségét csökkenti, majd a $K_1$ számításánál, ahol $K_1$ értékét növeli. Azonfelül kis hibák $\gamma_H \cdot c_H$, illetve $c_H$ értékénél $K_1$-ben nagy eltéréseket okoznak, végül feltétlenül figyelembe kellene venni magas

[1] Nem szabad elfelejtenünk, hogy $a_H$, $a_{SO_4''}$ itt csak interpoláló mennyiségek.

## 6. táblázat.

A $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ egyensúly 25° C-on

SPITALSKY adataiból közelítőleg számítva.

$K_2 = 7{\cdot}4.10^{-7}$, a $H\cdot$ és $CrO_4'$ rádiuszai $a_{H\cdot}$, $a_{CrO_4''}$ mint interpolációs számok 10 és 4 Å. $\gamma_{Cr_2O_7''} \sim \gamma_{CrO_4''}$.

| Mól $K_2Cr_2O_7$ 1 $l$-ben $m$ | Ionális koncentráció $\mu'$ | $\gamma_{H\cdot}c_{H\cdot}$ SPITALSKY méréseiből $\times 10^3$ | $\gamma_{H\cdot}$ | $\gamma_{CrO_4''}$ | $\gamma_{HCrO_4'}$ | $c_H$ $\times 10^3$ | $K_{1(c)}$ | $K_{1(a)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·01694 | 0·04785 | 0·092 | 0·862 | 0·453 | 0·776 | 0·1067 | 0·0046 | 0·0061 |
| 0·0302 | 0·0841 | 0·124 | 0·841 | 0·376 | 0·714 | 0·1474 | 0·0071 | 0·0097 |
| 0·0482 | 0·1334 | 0·166 | 0·824 | 0·317 | 0·654 | 0·2014 | 0·0129 | 0·0174 |
| 0·0604 | 0·1683 | 0·182 | 0·816 | 0·289 | 0·621 | 0·2230 | 0·0137 | 0·0183 |
| 0·1012 | 0·2806 | 0·252 | 0·798 | 0·233 | 0·540 | 0·3158 | 0·0277 | 0·0346 |
| 0·1206 | 0·3317 | 0·289 | 0·793 | 0·217 | 0·512 | 0·3644 | 0·0403 | 0·0487 |

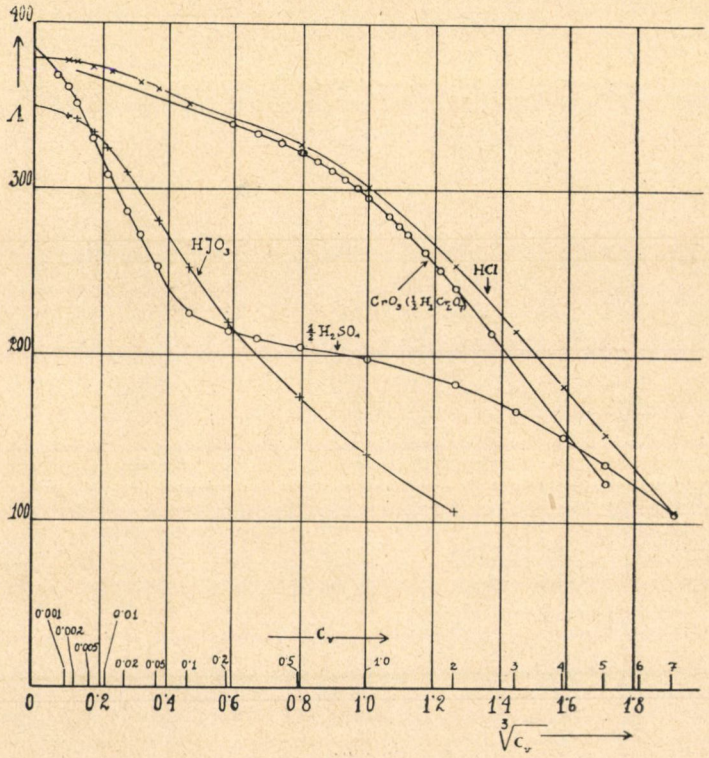
elektrolytkoncentrációknál, hogy a diazoecetészter aktivitása megváltozik. A nyert értékek azonban nagyságrendileg igen jól összhangban van a fagyáspontcsökkenésből számított 0·0200 és a SAAL által talált 0·019+0·001 értékkel. A táblázatból azt is kiolvashatjuk, hogy $\alpha$, tehát a $Cr_2O_7''$ disszociációjának foka 0·1206 molar $K_2Cr_2O_7$ oldatban már kb. 25 %. Tehát már 0·2 $n$ $K_2Cr_2O_7$-oldatokban is jelentős mennyiségű $HCrO_4'$ van. Ez, mint majd később látni fogjuk, a vezetőképességi adatokkal és a mólvolumengörbével jól egyezik.

## A vezetőképességi adatok és a neutralizációs görbék.

Ha a $CrO_3$-oldatok molekuláris vezetőképességét $\sqrt[3]{c}$ szerint grafikusan ábrázoljuk, úgy azt tapasztaljuk, hogy kb. 0·3 mol $CrO_3/l$-ig $\mu$ értékei $\sqrt[3]{c}$-től lineárisan függnek, itt azonban a határegyenes alá kezd hajlani az észlelt görbe és analog módon fut a $HCl$ hasonló görbéjével. Ha más, nem tökéletesen disszociáló egy és kétbázisú savak görbéjét is felrakjuk a $CrO_3$ görbéje mellé, úgy látjuk, hogy jellegük egészen más, mint a $CrO_3$ görbéjéé. (2. ábra.) A grafikus kép alapján a $CrO_3$ vizes oldataiban tényleg csak a $H\cdot + HCrO_4'$ szerint tökéletesen disszociáló monochromsav $H_2CrO_4$ volna jelen. Ha azonban a $K_2Cr_2O_7$ aequivalens-vezetőképességének görbéit hasonló módon $\sqrt[3]{c}$ szerint ábrázoljuk, úgy azt találjuk, hogy nevezett görbék menete abnormális és nem felel meg sem 1—1, sem 2—1 értékű elektrolyténak. (3. ábra.) Az eleinte kb. 1—2 értékű elektrolytnak megfelelőleg emelkedő görbe hirtelen ellapul, majd ismét erősen emelkedik. Ha feltesszük, hogy a $K_2Cr_2O_7$ oldataiban $KHCrO_4$ van jelen és a nagyobb higításoknál fellépő emelkedést a $HCrO_4' \rightleftarrows H\cdot + CrO_4''$ disszociáció okozza, úgy a görbe ellapuló részét nem tudnánk megmagyarázni, mert fenti folyamat csak a vezetőképesség növekedését okozhatja.

Kifogástalanul megmagyarázható azonban a vezetőképességnek ilyetén viselkedése a $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ egyensúly figyelembevételével, amikor is a már meglehetősen tömény (0·2—0·3 normál) oldalakban jelentős részt kepviselő $HCrO_4'$-ion kisebb mozgékonysága miatt a görbe ellapul, hogy azután

nagy higításban a második disszociáció a nagy mozgékonyságú $H^{\cdot}$ révén hirtelen emelkedést okozzon. Chromsavoldatoknál ez a fordulópont nem jut kifejezésre a tökéletes disszociáció miatt nagy mennyiségben jelenlévő nagy mozgékonyságú $H^{\cdot}$ miatt.



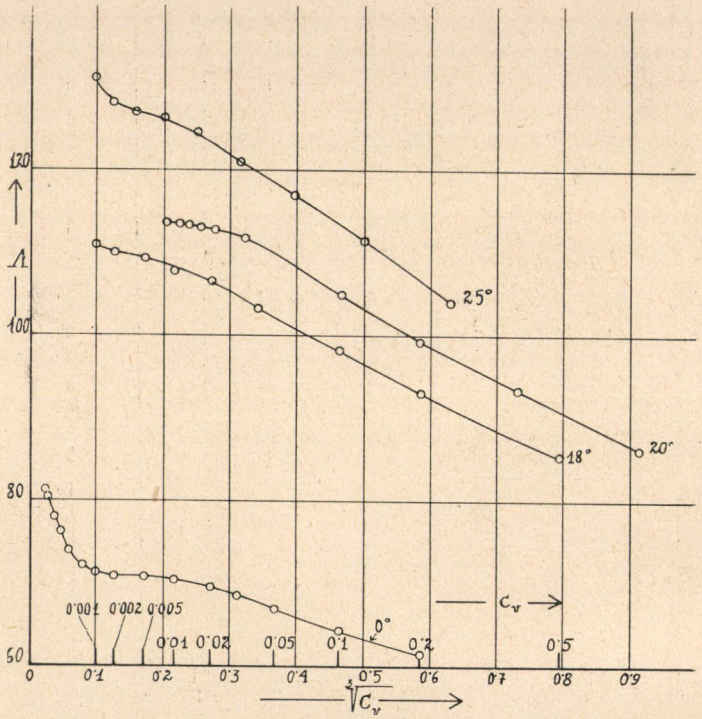

2. ábra.

*HCl*: 18° *C*-on Landolt—Börnstein (II. kötet) adatai szerint.
$CrO_3$: jelen vizsgálat 20° *C*.
$H_2SO_4$: Kohlrausch adatai 18° *C*-on.
$HJO_3$: International Critical Tables VI. köt. után 18° *C*-on.

Itt egy kompenzációs folyamat révén hígabb oldatokban az összefüggés $\sqrt[3]{c}$ szerint lineáris.

Sajnos, számításokat csak igen híg oldatokban végezhetünk, mivel töményebb oldatokban úgy az ionmozgékonyságok, mint az egyensúlyok kiszámításához szükséges aktivitás-koefficiensek

számítása bizonytalan. Hogy a $Cr_2O_7''$-ion mozgékonyságára vonatkozólag mégis valamilyen számszerű adat birtokába juthassunk, ahhoz több más adatra van szükségünk. A $Cr_2O_7''$ mozgékonyságát t. i. a következő meggondolások alapján számíthat-




3. ábra.

$K_2Cr_2O_7$-oldatok aequivalens-vezetőképessége.
0°: Whetham: Proc. Roy. Soc. **66**, 192 és **71**. 332.
18°: Sherril: J. Am. Chem. Soc. **29**, 1961 és
Heydweiller: Landolt—Börnstein II. Erg. Bd., II. Tl.
20°: Endrédy és Carriére et Sendras: J. Chem. Phys. **30**. 628—633.
25°: Walden, Lundberg, Jones és West adataiból: Abegg's Handbuch IV. 1. 2. 352—530.

juk ki. Híg, 0·002—0·008 mol $CrO_3/l$ koncentrációjú oldatok esetében, mivel a nagy $H^{\cdot}$ koncentráció a $HCrO_4'$ disszociációját erősen visszanyomja, csak $H^{\cdot}$, $Cr_2O_7''$ és $HCrO_4'$-ionokkal kell gyakorlatilag számolnunk. Ilyen híg oldatban két tökéletesen

disszociált, erős elektrolyt vezetőképessége BENNEWITZ, KÜCHLER és WAGNER[17] szerint tűrhető közelítéssel additive tevődik össze. Ha $l_{1_{c_1}}$, $l_{2_{c_2}} \ldots l_{n_{c_n}}$ az egyes ionok mozgékonysága az illető ionok $c_1$, $c_2 \ldots c_n$ koncentrációinál, úgy egy $c$ koncentrációju $H_2Cr_2O_7$ oldatban (g aequiv. $H_2Cr_2O_7/l$) a vezetőképesség.

$$\Lambda = l^{\infty}_{(c_H)} + l_{Cr_2O_7''(c_{Cr_2O_7''})} + l_{HCrO_4'(c_{HCrO_4'})}.$$

Mivel azonban $l_x$ összefüggése a koncentrációval, hasonlóan $f_0$-hoz bonyolódott, célszerűbb a $H_2Cr_2O_7$ oldat vezetőképességét két részre bontani. E szerint a vezetőképesség a $H^{\cdot} + HCrO_4'$ szerint tökéletesen disszociált $H_2CrO_4$ és a $2H^{\cdot} + Cr_2O_7''$ szerint tökéletesen disszociált $H_2Cr_2O_7$ vezetőképességéből tevődik additive össze. Ha $\alpha$ a $Cr_2O_7''$-ion disszociáció-foka, úgy egy $m$ mól $H_2Cr_2O_7$-t tartalmazó oldat molekuláris vezetőképessége, amely a $CrO_3$-ra számított (észlelt) molekuláris vezetőképesség ($\mu$) kétszerese.

$$2\mu = 2(1-\alpha)\,\Lambda_{H_2Cr_2O_7\,(c_{H_2Cr_2O_7})} + 2.\alpha\Lambda_{H_2CrO_4\,(c_{H_2CrO_4})},$$

illetve a $H_2Cr_2O_7$ aequivalens-vezetőképessége, $\Lambda$, amely $\mu$-vel azonos

$$\Lambda = (1-\alpha)\,\Lambda_{H_2Cr_2O_7\,(c_{H_2Cr_2O_7})} + \alpha\Lambda_{H_2CrO_4\,(c_{H_2CrO_4})},$$

ahol $\Lambda_{H_2Cr_2O_7}$, illetve $\Lambda_{H_2CrO_4}$ a dichromsav, illetve monochromsav aequivalens-vezetőképességei a $2\ m = c$ *nominális* aequivalens-koncentrációjú $H_2Cr_2O_7$-oldatban fennálló $H_2Cr_2O_7$, illetve $H_2CrO_4$-koncentrációk esetében. Minthogy

$$c_{Cr_2O_7''} = c_{H_2Cr_2O_7} \text{ és } c_{HCrO_4'} = c_{H_2CrO_4}, \text{ a } K_1 = \frac{c^2_{HCrO_4'}}{c_{CrO_7''}}$$

állandót ismerve, az egyes elektrolytek koncentrációit és $\alpha$ értékét ki tudjuk számítani.

Azonban ismernünk kell $\Lambda$ és $\alpha$-án kívül még a $H_2CrO_4$ molekuláris (1—1 értékű elektrolytról lévén szó, mindegy, hogy molekuláris vagy aequivalens-vezetőképességről beszélünk-e) vezetőképességének értékét a $H_2CrO_4$-nek tetszőleges koncentrációjánál. Ebből a célból először is ismernünk kell az egybázisúnak vett monochromsav molekuláris vezetőképességét $c = 0$-nál. Az általam meghatározott egyenletből könnyen érthetőleg nem

lehet 0-ra extrapolálni. Így $\Lambda_{0_{H_2CrO_4}}$ értékét csak indirekt úton határozhatjuk meg. A KOHLRAUCH-féle additivitási feltevést fogjuk alkalmazni: $\Lambda_{0_{H_2CrO_4}} = l_H + l_{HCrO_4'}$. $l_H$ értékét az irodalmi adatokból könnyen megkapjuk. 20° C-on $l_H = 315$ $(1 + 0{\cdot}0154.2) = 324{\cdot}7$. Már nehezebb $l_{HCrO_4'}$ kiszámítása. Itt a $CrO_4''$ és $SO_4''$ analógiáját kell segítségül vennünk. NOYES és SHERRIL[18] kiszámították 25° C-on különböző ionális koncentrációk mellett a $HSO_4'$ és $SO_4''$ mozgékonyságát. Adataikból az tűnik ki, hogy hígabb oldatokban a $SO_4''$ és $HSO_4'$ mozgékonyságainak viszonya 1·52. Számadataikat $\sqrt[3]{\mu'}$ szerint lineárisan 0-ra lehet extrapolálni. Az extrapolált értékek viszonya is 1·52. Minthogy a $SO_4''$ és $CrO_4''$ szilárd állapotban teljesen analog (korlátlanul képeznek a megfelelő sók elegykristályokat) feltehetjük, hogy híg vizes oldatban is analóg módon fognak viselkedni.

A $CrO_4''$ mozgékonyságát KOHLRAUSCH 18° C-on a $CaCrO_4$ vezetőképességéből extrapolálva 72-nek találta,[19] 25°-on pedig BREDIG a $K_2CrO_4 (Na_2CrO_4)$ vezetőképességéből 84·0-et kapott.[20] A két számadatból a temperaturakoefficiens: $\alpha = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}(t_0 = 18°) = 0{\cdot}0238$ és 20° C-on $l_{CrO_4''}$ 75·3. A teljes analógia feltevése alapján a $l_{SO_4''} : l_{HSO_4'}$ viszonyhoz képest

$$l_{HCrO_4'} : 75{\cdot}3 : 1{\cdot}52 = 49{\cdot}5. \quad \Lambda_{0_{H_2CrO_4}} = l_{H'} + l_{HCrO_4'} = 374{\cdot}2.$$

Nekünk azonban nem 0, hanem $c$ koncentrációnál van $\Lambda_{H_2CrO_4}$-ra szükségünk. Minthogy igen híg oldatokról van szó, az ONSAGER-féle egyenlet az additivitás figyelembevételével nyugodtan alkalmazhatjuk. A víz dielektromos állandója, $\varepsilon$, 20° C-on DRUDE szerint 80·55, a víz viszkozitása $\eta = 0{\cdot}0101297$ dyn/cm, tehát:

$$\Lambda_{H_2CrO_4} = \Lambda_0 - \left(\frac{82{\cdot}0}{(\varepsilon T)^{1/2}.\eta} + \frac{0{\cdot}818.10^{-6}}{(\varepsilon T)^{3/2}}\Lambda_0\right)\sqrt{c} =$$
$$= 374{\cdot}2 - (52{\cdot}67 + 0{\cdot}2254.374{\cdot}2)\sqrt{c_{HCrO_4'}}.$$

A számítást három igen híg oldatra végeztem el. A számítás eredményeit a 7. táblázatban foglaltam össze.

Ha a $H_2Cr_2O_7$ aequivalens-vezetőképességének ilyen módon nyert értékeit $\sqrt{c_{Cr_2O_7''}}$ szerint felrakjuk, nem esnek egy egye-

7. táblázat.

$K_1 = 0{\cdot}0200$

| $c$ | $\alpha$ | $c_{HCrO_4'} \times 10^3$ | $c_{Cr_2O_7''} \times 10^3$ | $\Lambda$ mért | $\Lambda_{H_2CrO_4}$ | $\Lambda_{H_2Cr_2O_7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·002 | 0·8425 | 1·685 | 0·157 | 370·14 | 368·58 | 378·48 |
| 0·004 | 0·7600 | 3·040 | 0·960 | 367·95 | 366·65 | 372·08 |
| 0·008 | 0·6184 | 4·947 | 3·053 | 365·20 | 364·56 | 366·25 |

nesbe. Azonban a higítás növelésével szemmelláthatólag egy határegyenes felé konvergálnak. A sok közelítő feltevés miatt nem is várható $\sqrt{c}$-től való lineáris függés, annál is inkább, mert 2—1 értékű elektrolytek már 0·003—0·004 g aequiv./$l$ koncentrációnál jelentős eltérést mutatnak az ONSAGER-féle határtörvényszerűségétől. Az eddigi közelítő feltevések figyelembevételével azonban nem követünk el túlságosan nagy hibát, ha a két kisebb koncentrációra vonatkozó adatból $\sqrt{c}$ szerint 0-ra extrapolálunk. $\Lambda_{0_{H_2Cr_2O_7}}$ így 387·1-nek adódik, ebből $l_{H'} = 324{\cdot}7$-et levonva, $l_{Cr_2O_7''} = 62{\cdot}4$. Természetesen $l_{Cr_2O_7''}$ lehet 60, vagy 68 is, azonban nagyságrendileg feltétlenül ebbe az intervallumba esik. A $l_{Cr_2O_7''}$-re vonatkozó 62—63-as érték igen jól összhangban van a töményebb $K_2Cr_2O_7$ oldatok vezetőképességével. Bár már 0·7 $n$ (0·35 molar) $K_2Cr_2O_7$-oldatban észrevehető a $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ disszociáció, mégis meg lehet kísérelni 0·1—0·7 $n$ oldatok vezetőképességéből $\sqrt[3]{c}$ szerint 0-ra extrapolálni. Az extrapolálás eredményeként kapott szám feltétlenül minimális értéket jelent, amelynél $l_{Cr_2O_7''}$ csak magasabb lehet, mégpedig két okból: 1. bármely 2—1 értékű elektrolyt aequivalens-vezetőképességei $\sqrt[3]{c}$ szerint felrakva, magasabb koncentrációtól 0 felé haladva nem egyenes vonalon, hanem emelkedő görbén helyezkednek el, amely csak mintegy 0·1—0·2 $n$ koncentrációnál megy át a határegyenesbe. Tehát magasabb koncentrációkból 0-ra extrapolálva, $\Lambda_0$ és ezzel $l_{A''}$ értékére a valódinál kisebb értéket kapunk. 2. Mivel a vezetőképesség már a $K_2Cr_2O_7$-nál még mérhető (kb. 0·7 $n$) legmagasabb koncentrációnál észrevehetőleg a $Cr_2O_7''$, $HCrO_4'$ és $K'$ vezetőképességéből

tevődik össze, $l_{HCrO_4'}$ pedig még ilyen tömény oldatokban is valószínűleg, de a hígabbakban (0·1—0·2$n$) egészen biztosan alacsonyabb $l_{Cr_2O_7''}$-nál, a kompenzáció révén létrejött lineáris összefüggés $\sqrt[3]{c}$ szerint feltétlenül alacsony $l_{Cr_2O_7''}$ felé mutat. Ha a 0·1 $n$ $K_2Cr_2O_7$-oldat $\Lambda$-értékét SPITALSKY adatai alapján a keletkező nagy mozgékonyságú ($H^{\cdot}$) miatt javítjuk, úgy a 0·1—0·7$n$ $K_2Cr_2O_7$ oldatok aquivalens-vezetőképességét $\sqrt[3]{c}$ szerint elég jól extrapolálhatjuk $c = 0$-ra és $\Lambda_{K_2Cr_2O_7}$-ra 123·4-et kapunk. Ebből levonva $l_K$-ot (20°-on 67·4) $l_{Cr_2O_7''} \approx 56$. Ez az eredmény igazolja a $H_2Cr_2O_7$ híg oldataira vonatkozólag megejtett számítás realitását. A közelítő becslések alapján tehát a $Cr_2O_7''$ mozgékonysága 20° C-on $70 > l_{Cr_2O_7''} > 60$ határok közé esik.

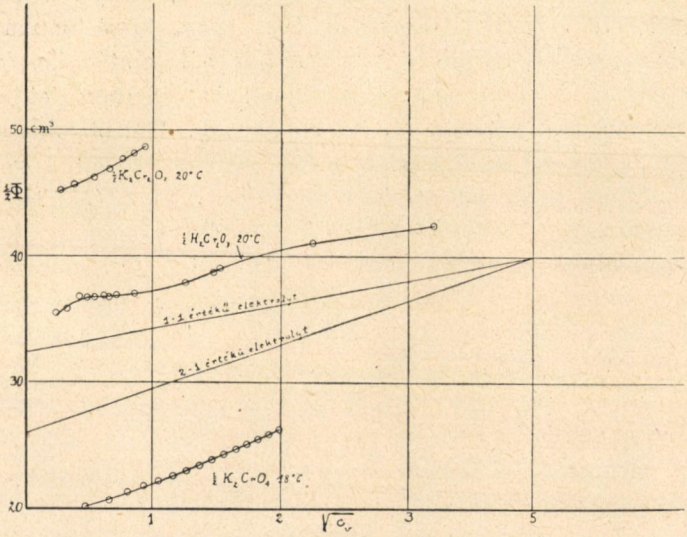
Mivel az előbb láttuk, hogy a $HCrO_4'$-ion a chromsav és bichromat-oldatokban még magasabb koncentrációnál is jelentős szerepet játszik, nem nehéz megmagyarázni a $K_2Cr_2O_7$ es $H_2Cr_2O_7$ aequivalens-vezetőképességi görbéinek sajátságos menetét. A $H_2Cr_2O_7$ oldataiban még 0·002—0·003 $n$ koncentrációnál sem jelentős a $HCrO_4'$ disszociációja. Így jön létre 0·2—0·3 $n$-ig a kompenzációs egyenes $\sqrt[3]{c}$ szerint, majd a $Cr_2O_7''$ mozgékonyságának mindinkább erősödő csökkenése és a viszkozitási korrektura mind nagyobb szerepe miatt a lefelé hajló görbe. A $H_2Cr_2O_7$ görbéje a $H^{\cdot}$ nagy mozgékonysága miatt kiegyenlítettebb, símább. A $K_2Cr_2O_7$-nál a kompenzációs egyenes eltolódik magasabb koncentrációk irányában és 0·1—0·2 $n$ oldatokban érezhető a nagy mozgékonyságú $H^{\cdot}$ szerepe, ahol még $l_{HCrO_4'}$ csökkentő hatása a $HCrO_4'$ és $Cr_2O_7''$ mozgékonyságainak konvergenciája miatt kisebb.

Ha a $K_1$ állandó értéke a hőmérséklettől nagy mértékben függne, úgy ez abban nyilvánulna meg, hogy a $K_2Cr_2O_7$ görbéjének ellapuló része a hőmérséklet emelkedésével erősen jobbra vagy balra ($K_1$ temperaturakoefficiense szerint) tolódna el. Bár tökéletes vezetőképességi görbét a $K_2Cr_2O_7$-nál csak WHETHAM [21] határozott meg, mégis megállapítható a rendelkezésre álló többékevésbbé hiányos adatokból is, hogy a $\Lambda$-görbe ellapuló része a hőmérséklet emelkedésével ugyan kissé meredekebb lesz, de az abscissához kepest helyzetét nem változtatja. (3. ábra.)

Az elmondottakból látható, hogy $K_1$ és $K_2$ értékét (például

WEGSCHEIDER nyomán) tisztán a vezetőképességből megállapítani nem lehet, mert főleg a $Cr_2O_7''$ mozgékonyságára vonatkozólag a szükséges pontosságú adat hiányzik. Qualitative a vezetőképességi görbék igen jól megegyeznek az ozmotikus úton nyert egyensúlyi állandókból számítható viszonyokkal.

A neutralizációs görbéknek főleg abból a szempontból van jelentősége, hogy a feltételezett $H_2Cr_2O_7$ disszociációja teljes-e.




4. ábra. A látszólagos mol-térfogatok.
$K_2Cr_2O_7$ és $K_2CrO_4$ Landolt—Börnstein I. Erg. Bd. után.
$H_2Cr_2O_7$: Endrédy.

Elméleti megfontolások alapján várható, hogy ha egy kétbázisú savnak disszociációs állandói erősen különböznek, a neutralizációs görbe, különösen töményebb oldatban nem lesz egyenes, hanem az abscissához képest konvex. Mivel az általam meghatározott neutralizációs görbék első szakasza, mely a $H_2Cr_2O_7+2NaOH=Na_2Cr_2O_7+H_2O$ folyamatnak felel meg, lineáris, azonkívül a $H_2Cr_2O_7$ és a neutralizációnál keletkező $Na_2Cr_2O_7$ aequivalens-vezetőképessége között a különbség $1n$ (1 mol $CrO_3/l$) oldatnál: 295·2—67·8=227·4, illetve 0·5112 n $H_2Cr_2O_7$-nél 321·9—75·1=246·8 nyugodtan kimondhatjuk, hogy a $H_2Cr_2O_7$ már magas

koncentrációnál is majdnem tökéletesen disszociált, tehát erős elektrolyt. A $HCl-NaCl$ elektrolytpárnál t. i. $1n$ koncentráció mellett a különbség 18° C-on $301 - 74{\cdot}4 = 225{\cdot}6$, úgy, hogy ez tökéletesen alátámasztja előbbi feltevésünket. Már pl. a $H_2SO_4-Na_2SO_4$ párnál ez a különbség csak: $198{\cdot}0 - 50{\cdot}8 = 147{\cdot}2$, ami igen jól megfelel a $H_2SO_4$ második disszociációs állandójából számítható disszociációs foknak.

A neutralizációs görbék második szakasza, amely a $HCrO_4' + OH' = CrO_4'' + H_2O$ folyamatnak felel meg, kissé konkáv az abszcisszához képest, de a $Na_2CrO_4$ pontnál szintén éles fordulatot mutatva, erősen emelkedő jellegű és világosan feltünteti, hogy a második állandó, $K_2$ értéke kicsiny. Hígabb oldatoknál még $K_2$ értékére is lehetne a görbe meredekségéből következtetni. A lineáristól való eltérést itt a $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ folyamat révén keletkező $HCrO_4'$ jelenléte okozza. Itt is módunkban áll ellenőrizni, hogy a $Cr_2O_7''$ és $CrO_4''$ mozgékonyságai tényleg olyan közel esnek-e egymáshoz, mint azt a híg oldatokból számítottuk: 1 $n$ oldatban $\Lambda_{Na_2Cr_2O_7}$ : 67·8, míg $\Lambda_{Na_2CrO_4}$ : 48·8, 0·5112 $n$-ban a megfelelő értékek 75·1 és 60·2. Az értékek egymás felé konvergálnak, amit különben HEYDWEILLER-nek $K_2Cr_2O_7$ és $K_2CrO_4$-on végzett méréséből is látni lehet. Ebből megint az is látható, hogy a $Cr_2O_7''$ rádiusza nagy, mint ionnak nagy a STOKES-féle törvényből számítható ellenállása, tehát aránylag kicsi, a $CrO_4''$-nál kisebb a $c=0$-náli mozgékonysága, ellenben a nagy rádiusz miatt kicsi az ion felületén a potenciál és ilyenformán sokkal kevésbbé kisebbedik mozgékonysága az elektromos térerősség (ionfelhők sűrűsége), tehát a koncentráció növekedésével.

Az elmondottak alapján az is világos, hogy chromsavoldatoknál a $HCrO_4'$ disszociációs állandójának pozitív temperaturakoefficiense miatt a hőmérséklet emelkedésével lassan növekvő vezetőképességi temperaturakoefficienseket kell kapnunk. Véleményem szerint ezért WALDEN és SHERRIL adatai a valóságosnál kissé alacsonyabbak, mert jelen vizsgálat és az ő vizsgálataik egybevetéséből túl alacsony, illetve túl magas temperaturakoefficiensek adódnak.

## A látszólagos molekulatérfogatok.

GEFFCKEN vizsgálataiból kitűnt, hogy a látszólagos molvolumen és koncentráció összefüggése igen sok esetben az oldott anyag természetére vonatkozólag jellemző. Erős elektrolytek molvolumene nagy általánosságban a MASON-féle szabályt követi: nagyjából $\sqrt{c}$-vel lineárisan arányos.[22] Az arányossági tényező a $\Phi = \Phi_0 + k\sqrt{c}$ egyenletben erős elektrolytek esetében 1—1 értékű elektrolytnál GEFFCKEN kísérletei alapján 1·9 cm³, más elektrolytnál a molvolumenre vonatkozólag elméletileg

$$k = 1{\cdot}9 \left(\frac{\Sigma \nu_s z_s^2}{2}\right)^{3/2} \text{cm}^3.$$

Minthogy azonban vezetőképességi adatainkat is aequivalens-koncentrációra vonatkoztattuk, ennélfogva az aequivalensvolumeneket fogjuk a molvolumenek helyett feltüntetni. Az aequivalens-volumenre vonatkozólag pedig

$$k = 1{\cdot}9 \left(\frac{\Sigma \nu_s z_s^2}{2z}\right)^{1/2},$$

ahol $z$ a nevezőben c/m, tehát az aequivalens és moláris koncentráció hányadosa. 2—1 értékű elektrolytra nézve $k = 1{\cdot}9.1{\cdot}84 = 3{\cdot}5$ cm³/g aequiv. Ha a vizes $CrO_3$-oldatok aequivalens-volumenét $^1/_2$ $H_2Cr_2O_7$-ra számítva, $\sqrt{c}$ szerint felrakjuk, akkor a legtöményebb oldatok körülbelül 2 $n$-ig meglehetősen gyengén eső görbén helyezkednek el. 2 $n$ alatt a görbe lejtése erős, egészen körülbelül 1 $n$ koncentrációig, innen a lejtés csökken, 0·2—0·4 $n$ intervallumban majdnem horizontális, majd ismét erősen esik. Az egész mért koncentrációs intervallum alatt az átlagos esés a $\Phi$ értékében $<3$ cm³, $\sqrt{c} = 1$ intervallumra vonatkoztatva. Ezzel szemben a $K_2Cr_2O_7$ és $K_2CrO_4$ megfelelő görbéi meredekebbek, mint a GEFFCKEN által megadott differenciálhányadosnak megfelelne, ezt azonban GEFFCKEN már szulfátoknál is megtalálta, és a $SO_4''$-ion asszimetriájával magyarázza. Nem állt módomban a $K_2Cr_2O_7$ és $K_2CrO_4$-ra vonatkozó idegen mérések pontosságát ellenőrizni, nem lehetetlen, hogy a $K_2Cr_2O_7$-nál a kiegyenlítő interpoláló számítással éppen a görbe jellegzetességeit, amelyek

éppen sóknál kevésbbé kifejezettek, mint a savaknál, semmisítették meg.

Precíz következtetésekre a molvolumengörbe több okból nem alkalmas (l. GEFFCKEN), azonban a hibahatárok figyelembevételével a $H_2Cr_2O_7$ görbéjéből mégis lehet bizonyos következtetéseket levonni. A $2\ n-5\ n$ koncentrációnál észlelhető erős emelkedés igen jól összhangban van a vezetőképességnek ugyanezen intervallumban észlelhető erős változásával és más vizsgálataim alapján is jól jelzi a trichromat fellépését. A $2n-0{\cdot}2\ n$ szakasz a $Cr_2O_7'' + H_2O \rightleftarrows 2HCrO_4'$ hidratációt tükrözi vissza. Tudniillik $\Phi$-nek az elektrosztatikus hatások eredményeképen létrejövő csökkenését a fenti reakció szerint keletkező iontöbblet ellensúlyozza. Azonkívül ellensúlyozólag hat még az is, hogy a $Cr_2O_7''$ hidrolizise révén két egyértékű $HCrO_4'$-ion keletkezik. Ugyanis, mint azt előbb láttuk, az aequivalensvolumen csökkenése $1{\cdot}9\left(\frac{\Sigma\nu_s z_s^2}{2z}\right)^{3/2}$-vel arányos. Az arányossági tényező $1-1$ értékű elektrolytnál $1{\cdot}9$, $2-1$ értékűnél $1{\cdot}84 \times 1{\cdot}9$ cm$^3$. Ha most a $2-1$ értékű elektrolyt helyét két aequivalens $1-1$ értékű foglalja el, úgy $\left(\frac{\Sigma\nu_s z_s^2}{2z}\right)^{3/2}$ értéke $=1$ lesz, tehát az $1-2$ értékű elektrolyt aequivalens-koncentrációjának négyzetgyöke szerint felrakott $\Phi$-értékek $1-1$ értékű elektrolyt menetét fogják mutatni. Ezért jön letre ez a kompromisszumszerű menet, amelynek esése $1{\cdot}8-3{\cdot}5$ cm$^3$ között fekszik.

A $0{\cdot}2\ n$ koncentráción aluli erős fordulópont magyarázata függőben maradt, mivel a hidratációs folyamatok és a disszociációs állapot figyelembevételével nem várható.

Jellemző azonban, hogy ha a tömény oldatok molvolumenéből lineárisan $m$ szerint a feltételezett $H_2Cr_2O_7$-ra extrapolálunk, a feltételezett $H_2Cr_2O_7$-nek megfelelő összetételre extrapolált molvolumen $86{\cdot}08$, míg additive $CrO_3 = 35{\cdot}56$ és $H_2O = 18{\cdot}04$-ből $89{\cdot}05$ cm$^3$ adódik. A kontrakció tehát elég nagy, de az $SO_3 + H_2O = H_2SO_4$ reakciónál történő $6{\cdot}10$ cm$^3$ kontrakciót meg sem közelíti. Így azután könnyen érthető, hogy a hidrát nem stabilis, és nem állítható elő.

## Az abszorpcióspektrumok.

A chromsav és bichromat, valamint monochromatoldatoknak nincs különösen jellemző abszorpcióspektruma.[23] Az erre vonatkozó vizsgálatok alapján tömény oldatokba a bichromatok körülbelül 5600 Å-től, a monochromatok körülbelül 5150 Å-től lefelé az egész spektrumot abszorbeálják. Ezen belül azután nagyon változó abszorpciót tapasztalunk. Általában vizes $Me_2CrO_4$, $Me^{II}Cr_2O_7$ és $H_2Cr_2O_7(CrO_3)$ oldatokban a BEER-törvény nem érvényes. Alkalikus monochromat, valamint VITERBI és KRAUSS[24] vizsgálatai szerint 0·001—0·0001 *n* bichromat-oldatokban (szerintem itt csak hozzávetőlegesen) a BEER-törvény érvényes. Alkalikus monochromat-oldatoknál ez könnyen érthető, mert ilyenkor kizárólag $CrO_4''$ van jelen. Nevezett koncentrációjú bichromat-oldatokban pedig a $HCrO_4'$ uralkodik (98—99 %), ami mellett a kevés $CrO_4''$ nem vehető észre. Ha azonban részletesen vesszük az egyes vonalak abszorpcióját, akkor már bonyolódottabb viszonyokat találunk.

HANTZSCH és POGÁNY méréseiből a 4359 (4360 HANTZSCH) Å és 5113 Å hullámhosszúságú vonalakat lehet úgy a $K_2CrO_4$, mint a $K_2Cr_2O_7$, illetve $CrO_3$-nál összehasonlítani.

Alkalikus $K_2CrO_4$ oldatokban ($OH'$ felesleg) a 4359 (4360) vonal moláris extinkciókoefficiense állandó, HANTZSCH szerint 314.

Vizes $K_2CrO_4$ oldatokban csökken, mégpedig jelentősen, 0·02—0·0001 mol/*l* között értékének (314) 97—82 %-át teszi ki. Ugyanezen intervallum alatt egészen durván számítva, a $CrO_4''$ relatív koncentrációja kereken 1 %-kal csökken. A $K_2Cr_2O_7$-oldatnál nincs konstans állapot, $A_c$ (a moláris extinkciókoefficiens) 0·02—0·0001 (½ $K_2Cr_2O_7$-ra) számított intervallumban 257-ről 222-re esik vissza, ugyanakkor a $Cr_2O_7''$-ion relatív koncentrációja körülbelül 40 %-ról majdnem 0 %-ra megy vissza.

Az 5003 Å vonalra POGÁNY mérései szerint $K_2CrO_4$-nál 0·10—0·01-mol/*l* között $A_c = 1·89$-ről 2·85-re emelkedik, míg 0·2—0·0004 g aequivalens/*l* $K_2Cr_2O_7$-nál 50·4—36·25 között változik. Ez sem egyezik meg más fizikochemiai adatokkal. A rendelkezésre álló adatok közül 4360—5300 Å intervallumban $K_2CrO_4$-ra vonatkozólag $A_c$ a 4360 Å vonalat kivéve, emelkedik,

míg a $K_2Cr_2O_7$-ra vonatkozó mérések szerint 4360—5770—5791 Å intervallumban $A_c$ általában esik. Qualitatív konvergencia bizonyos közös határértékek felé kétségtelen, de számszerűleg csak nehezen fejezhető ki.

Általában változó mértékben felismerhető, hogy mind a három ion, $Cr_2O_7''$, $HCrO_4'$ és $CrO_4''$ a legtöbb mért vonalat, ha különböző erősen is, abszorbeálja. A közös abszorpció oka szerintem $O{=}\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{Cr}}$ konfiguráció, amely mindhárom ionban megvan s ezért nehéz az extinkciókoefficiensek alapján számításokat végezni. A $HCrO_4'$ bizonyos középhelyzetet foglal el, amelynek abszorpciója felé konvergálnak esően vagy emelkedően az $A_c$ értékek közepes higításokban. A viszonyok olyan bonyolódottak, hogy tárgyalásuk túlhaladná jelen munka kereteit, úgy hogy az abszorpció-spektrumra vonatkozó számításaimat majd más alkalommal részletesen fogom ismertetni.

Mindenesetre nagyjából, különösen, ha az imént említett feltevést is figyelembe vesszük, az abszorpcióspektrumok, bár némi nehézséggel, de összhangba hozhatók az egyéb fizikokémiai tulajdonságokból számított egyensúlyokkal.

## A chromsav és bichromatok szerkezete.

Befejezésül néhány szót óhajtanék mondani a chromatok szerkezetéről. A klasszikus vegyértékelmélet szerint mindezekben hat értékű chrom van és szerkezetük:

$$CrO_3 : \overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{Cr}} = O, \qquad H_2CrO_4 : \overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{Cr}}\begin{matrix} \diagup OH \\ \diagdown OH \end{matrix},$$

$$H_2Cr_2O_7 : HO - \overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{Cr}} - O - \overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{Cr}} - OH.$$

Az elmondottak alapján fel kell tételeznünk, hogy a vizsgált oldatokban a $CrO_4''$, $HCrO_4'$ és $Cr_2O_7''$ ionok vannak jelen. Néhány szóval jellemezni fogom ezeknek az ionoknak az elektroneloszlási viszonyait, állandóságát, stb.

A *Cr* a 24. rendszámú elem, elektronburkának felépítési viszonyai [30] (mellette a kéné, összehasonlítás céljából):

| | $1_s$ | $2_s$ | $2_p$ | $3_s$ | $3_p$ | $3_d$ | $4_s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chrom: | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 5 | 1 |
| Kén: | 2 | 2 | 6 | 2 | 4 | — | |

Kétértékű negatív iont a chrom úgy képezhet, hogy felvesz két idegen elektront a 3 *d* pályára, ugyanakkor a 4 *s* pályán futó, erősen excentrikus elektront a 3 *d* pályára befogva, szabályos oktettet hoz létre. Erős elektromos térben; ionrácsban, igen nagy higítású vizes oldatban ez a stabilis állapot. Azonban éppen a szoliter 4 *s* elektron miatt az is könnyen lehetséges, hogy a 4 *s* pálya érintetlen marad és a 3 *d* pályán egy elektron felvételével sextett jön létre.

Tökéletes oktett jön létre $CrO_4''$-ban, amikor a *Cr* két elektront felvéve, szabályos kétértékű iont képez. Mivel azonban ilyenkor a 4 *s* elektron a 3 *d* pályára szorul vissza, a keletkező konfiguráció nem eléggé stabilis és ha az ellenion vegyértékelektronjának pályája az illető elem normálállapotában nem eléggé nagy és excentrikus, a 4 *s* elektron nem képes a 3 *d* pályán megmaradni. Mennél több külső vegyértékelektronnal és mennél kisebb rádiusszal rendelkezik az ellenion, annál nehezebben jön létre a $CrO_4''$-konfiguráció. Az alkálifémeket, földfémeket és a *Tl*, *Ag*, *Pb* és *Hg*-ot kivéve, a többi fém normális chromatját csak különleges körülmények mellett lehet előállítani, míg a bichromatok aránylag könnyen előállíthatók. Ellenben a második eshetőség, egy elektron felvétele a 3 *d* pályára a 4 *s* pálya érintetlensége mellett már sokkal könnyebben végbemegy, sőt az ennek megfelelő $Cr-O-Cr$ csoportosítás már a szilárd $CrO_3$ síkrácsában (Schichtengitter) is megvan, t. i. ennek térbeli koordinációja a síkrácsban $CrO_3$, a köztes részben $OCr_2$. A $Cr_2O_7''$-ion képzésénél azonban a 4 *s* pálya háborítatlan marad, tehát a keletkező vegyületek volumene igen nagy lesz.

Valóban a $K_2Cr_2O_7$ molvolumene a $K_2CrO_4+CrO_3$ additív volumenétől pozitív inkrementummal különbözik: 70·0+34·2=104·2, míg a $K_2Cr_2O_7$-é 108 $cm^3$ [26] $T_0$ abs-on. Az addiciónál tehát észrevehető dilatáció, azonkívül erős szimmetriacsökkenés észlelhető. ($K_2CrO_4$: rhombos, $K_2Cr_2O_7$: triklin.)

A $HCrO_4'$ egy efemer asszimmetrikus képződmény, amely sem relative erős dipoltérben, sem szilárd állapotban nem stabilis. A $HCrO_4'$ nem más, mint a $CrO_4''$ egy protonnal megterhelve. Csak egy bizonyos egyensúlyi helyzetnek felel meg, amelyet közepes higitású vizes oldatokban találunk. Mihelyt alkalom nyílna rá, hogy az oldatból egy $MeHCrO_4$ összetételű só váljon ki, a 4 *s* elektron normális pályájára ugorva vissza, sextett képződését és ezáltal egy vízmolekulának kiválását idézi elő, és a $MeHCrO_4$ helyett $Me_2Cr_2O_7$ válik ki.

Éppen a 3 *d* pálya asszimmetriája miatt jön létre páros elektronú atomokkal (pl. *O*) szemben az illető atom körüli szimmetrikus konfiguráció ($Cr-O-Cr$). Mivel pedig a *Cr*-sextett önmagában nem eléggé stabilis, az oktett létrehozása céljából a $2Cr$ által felvett *O* atomnak és a két *H* két elektronjának a két *Cr* 3 *d* pályáin való megkötése momentán es tökéletes reakció, tehát a két protonnak tökéletesen le kell disszociálni.

A $H_2Cr_2O_7$ tökéletes disszociációja tehát atomfizikailag is indokolt. A 3 *d* sextett említett képződési feltételei miatt nem lehet chromtrioxidhidrátot sem előállítani, mert mihelyt a disszociációhoz szükséges elektromos tér megszűnik, a hidratáció is megszűnt. Természetesen az alkáli- vagy földalkáli-bichromatok, amelyek valószínűleg szilárd állapotban is ionrácsokat képeznek, az előbb mondottak alapján előállíthatók lesznek.

Az is könnyen érthető, hogy magas $OH'$-koncentráció mellett $R_4CrO_5$ összetételű, úgynevezett bázisos chromatokat is elő lehet állítani. Ilyenkor a chromatom 3 *p* és *d* pályákra 4 idegen és a 3 *d* pályájára a 4 *s* elektront felvéve, képezi a négy értékű negatív iont. Így egy laza kryptonkonfiguráció jön létre.

Nagyjából tehát a chromsav, chromat- és bichromatoldatokban uralkodó egyensúlyokat a *Cr*-atom sajátságos konfigurációja is indokolja. Természetesen fenti hézagos áttekintés részletes

magyarázatához még igen sokat lehetne hozzátenni, ami azonban már nem tartozik szorosan véve ide.

## Összefoglalás.

Megvizsgáltam a vizes $CrO_3$ és $K_2Cr_2O_7$ oldatok elektrolytos vezetőképességét és a vizes $CrO_3$ oldatok sűrűségét különböző koncentrációknál, valamint a $CrO_3$ konduktometriás neutralizációs görbéjét. Segítségül véve BEDFORD-nak vizes $K_2Cr_2O_7$-ra vonatkozó fagyáspontcsökkenési adatait és SPITALSKY-nak $H^{\cdot}$-ionkoncentráció meghatározásait, a következőket lehetett megállapítani:

1. Vizes $CrO_3-H_2Cr_2O_7$-oldatokban a koncentrációtól függő egyensúly áll fenn a $Cr_2O_7''$ és $HCrO_4'$-ionok között. Az egyensúly termodinamikai állandója 0° C-on $K_1=0{\cdot}02\mp0{\cdot}003$, úgy látszik a hőmérséklettől kevéssé függ. Ez az egyensúly, figyelembevéve még a $HCrO_4' \rightleftarrows H^{\cdot}+CrO_4''$ disszociációt is, igen jól megmagyarázza nevezett oldatok vezetőképességének, látszólagos molvolumenének, végül bizonyos mertékig abszorpciós spektrumának is a koncentrációtól való függését.

2. Bizonyos analógiák alapján a $HCrO_4'$-ion mozgékonyságára 20° C-on 49·5 értéket nyerve, a $Cr_2O_7''$ mozgékonyságát 20° C-on $l_{Cr_2O_7''}=62-63$ $(70>l_{Cr_2O_7''}>60)$ lehetett becsülni. Egyúttal azt is ki lehetett mutatni, hogy a $H_2Cr_2O_7 \rightleftarrows 2H^{\cdot}+Cr_2O_7''$ szerint és a hipotetikus $H_2CrO_4 \rightleftarrows H^{\cdot}+HCrO_4'$ szerint tökéletesen disszociál.

3. Atomszerkezeti meggondolások alapján fenti egyensúlyok létezése szintén indokoltnak látszik.

A chromatok oldatainak abszorpciós spektrumával, valamint az említett vegyületek termochemiai sajátságaival, végül a chromat (bichromat)-ionok redoxydációs reakcióinak kinetikájával egy következő munkámban óhajtok foglalkozni.

Budapest, 1935. április hó.

## Irodalom.

1. N. R. DHAR: Z. anorg. allg. Chemie. **121.** p. 99, H. T. S. — BRITTON: J. Chem. Soc. **127.** 1925. p. 1896. — Régebbi irodalom: J. KOPPEL: ABEGG—AUERBACH: Handb. d. anorg. Chemie. Bd. IV. 1. Abt. 2. Tl. 306. ff.

2. SHERRIL: J. Am. Chem. Soc. **29.** 1641 ff. — T. G. T. BEDFORD: Proc. Roy. Soc. London, A. **83.** 254 p. (1910).

3. KOPPEL: l. c. — BHAGWAT és DHAR: C. B. **1929.** I. 1795. — **1930.** I. 1261.

4. BECK und STEGMÜLLER: Arb. a. d. Kaiserl. Gesundheitsamt, **59.** Heft. A.

5. SPITALSKY: Z. anorg. allg. Chemie **54.** 265 ff.

6. BUCHBÖCK: Physikai-chemiai mérőmódszerek, Budapest, 1922. Természettudományi Társulat kiadása.

7. KOHLRAUSCH—HOLBORN: Das Leitvermögen der Elektrolyte. 1916. Leipzig, B. G. Teubner.

8. P. WALDEN: Z. phys. Chemie **2.** 11 (1888). — SHERRIL: J. Am. Chem. Soc. **29.** 1641. (1907). — JONES AND BASSET: Am. Chem. Journ. **34.** p. 560.

9. SPRING: Bull. soc. Chem. Belg. **24.** 109 ff.; Rec. Trav. Chim Pays—Bas **29.** 163. ff.

10. GEFFCKEN, BECKMANN u. KRUIS: Z. phys. Chemie B. **20.** (1933) 398. ff.

11. JELLINEK: Lehrbuch d. phys. Chemie. Bd. III. 633 ff.

12. JELLINEK: l. c. p. 620.

13. LA MER and READ: J. Am. Chem. Soc. **52.** (1930) 3098 ff.

14. HARTRIDGE and ROUGHTON: Proc. Roy. Soc. London A. **104.** (1923) 376 ff.

15. SAAL: Rec. trav. chem. Pays—Bas: **47.** 1928. p. 73, 264, 385.

16. JELLINEK: l. c. z. 657.

17. FALKENHAGEN: Elektrolyte p. 235 ff.

18. NOYES and SHERRIL: J. Am. Chem. Soc. **48.** (1926) 1861. o.

19. KOHLRAUSCH: Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wiss. **1904.** p. 1218.

20. WALDEN: Das Leitvermögen der Lösungen. (Ostwald—Drucker: Handb. d. allg. Chemie. Bd. **4.**)

21. WHETHAM: Proc. Roy. Soc. **66.** 192 és **71.** 332 o.

22. GEFFCKEN: Z. phys. Chemie B. **26.** (1933) p. 81.

23. Összefoglaló irodalom: ABEGG—AUERBACH: Handbuch d. anorg. Chemie Bd. IV. 1. Abt. 2 Tl. p. 301—305. — BHAGWAT and DHAR: C. B. **1931.** II. 638.

24. VITERBI et KRAUSS: Gazz. chem. italiana **57.** (1927) 690—730 p.

25. RABINOWITSCH u. THILO: Das periodische System S. 244.

26. BILTZ: Raumchemie der festen Stoffe, Leipzig, 1934.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. máj. 13-án tartott üléséből.)

# ÜBER DIE GLEICHGEWICHTE IN CHROMSÄURE- UND BICHROMATLÖSUNGEN.

A. v. ENDRÉDY.

Erscheint in der Zeitschrift für anorg. und allg. Chemie.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Mai 1935.)

# A CSAVARÁS PROBLÉMÁJÁNAK ÚJABB ANALÓGIÁJA.

BARTA JÓZSEF-től.

A homogén izotróp prizmatikus test keresztmetszetén megoszló csavarási feszültségek legismertebb kísérleti ábrázolásai a THOMSON-féle folyadékáramlási analógián,[1] illetve a PRANDTL-féle hártyaanalógián[2] alapulnak. A következőkben egy újabb analógiát mutatunk be, amely szerint a saját síkjában feszített vékony lemez pontjainak elmozdulásvektorai — bizonyos kerületi feltételek mellett — a csavarási feszültségvektorokat ábrázolják.

I. A homogén izotróp anyagú vékony lemez síkja legyen azonos a derékszögű tengelykereszt $xy$ síkjával. Ha a lemez síkjával párhuzamos külső erők az $R$ kerület mentén működnek a vékony lemezre, akkor $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. A lemez pontjainak $x$, illetőleg $y$ irányú elmozdulásalkotóit $u$-val, illetőleg $v$-vel (1. ábra), a derékfeszültséget $\sigma$-val, a nyíró feszültséget $\tau$-val jelölvén, az alakváltozás és feszültség közötti összefüggést a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

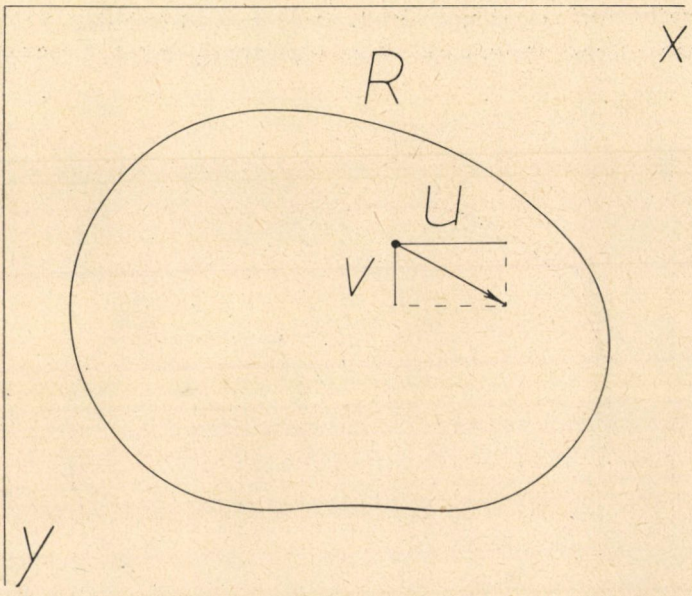
---

[1] W. THOMSON (LORD KELVIN) és P. G. TAIT. Treatise on Natural Philosophy, Part II.

[2] L. PRANDTL. Physikalische Zeitschrift, 1903.

egyenletek fejezik ki, ahonnan $E=2(1+\nu)G$ helyettesítéssel

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$
$$\sigma_y = \frac{2G}{1-\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (1)$$
$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$




1. ábra.

ahol $G$ a lemez anyagának nyírási modulusza és $\nu = \frac{1}{m}$ a harántkontrakció koefficiense. Ha ezeket a kifejezéseket behelyettesítjük az egyensúlyi feltételt kifejező

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

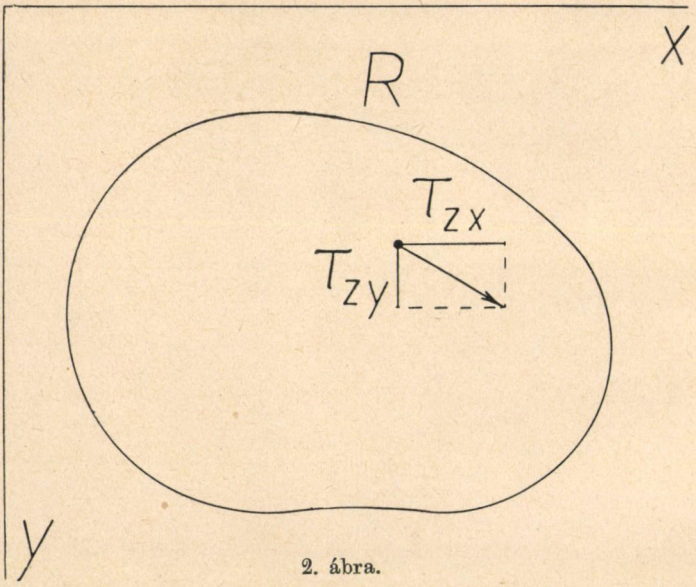
egyenletekbe, akkor a saját síkjában feszített, kerületén terhelt vékony lemez rugalmasságtani alapegyenleteit nyerjük:

$$\Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

II. A homogén izotróp prizmatikus test csavarásának problémája az $F$ feszültségfüggvénnyel tárgyalható. Az $F$ függvény kielégíti a

$$\Delta F = -2G'\vartheta \tag{2}$$

parciális differenciálegyenletet, ahol $G'$ a prizmatikus test anyagának nyírási modulusza, $\vartheta$ az egységhosszra eső elcsavarodási




2. ábra.

szög mértéke (1/cm). A prizmatikus test keresztmetszetének határvonalát az $F(x, y) =$ konstans egyenlet jellemzi. A csavarási feszültségalkotók (2. ábra) a feszültségfüggvényből a

$$\tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{3}$$

képletekkel számíthatók ki.

Az ugyancsak $F(x, y) =$ konstans kerülettel határolt vékony lemez esetében az az elmozdulásállapot, amelynél az elmozdulásalkotók mérőszáma megegyezik az imént említett keresztmetszeten megoszló nyírási feszültségalkotók mérőszámával, a lehetséges elmozdulásállapotok közé tartozik. Ugyanis

$$u = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{4}$$

azonosan elégítik ki a vékony lemez fenti alapegyenleteit.

**III.** Az elmondottak után az a kérdés merül fel, hogy a lemeznél milyen kerületi feltételeknek kell eleget tennünk, ha azt akarjuk, hogy a lemez sokféle lehetséges elmozdulásállapota közül az következzék be, amelyik a csavarási feszültségeket ábrázolja. Mivel a keresztmetszet szélén a csavarási feszültségvektorok az $R$ határvonalat érintik, azért a lemeznél először is annak a kerületi feltételnek kell eleget tennünk, hogy a lemez kerületi pontjai csakis a fix $R$ határvonal mentén mozdulhassanak el. Ennek a kerületi feltételnek, legalább is elvben, azáltal tehetünk eleget, hogy a lemez szélén oly síma kényszert alkalmazunk, amely a lemez kerületi pontjait elcsúsztathatóan köti a fix $R$ vonalhoz.

Egyidejűleg eleget kell tennünk még egy második kerületi feltételnek is; ez a feltétel a lemez kerülete mentén érintőlegesen kifejtendő külső erők nagyságára és nyílértelmére vonatkozik. A (4) képlet szerinti elmozdulásalkotókat az (1)-be helyettesítve és a $\frac{\partial F}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{11}$ stb. jelöléseket használva

$$\sigma_x = 2GF_{12}, \quad \sigma_y = -2GF_{12}, \quad \tau_{xy} = G(F_{22} - F_{11}). \tag{5}$$

Az $R$ határvonal valamely pontjában az $n$ normális (3. ábra) irányszögét $\alpha$-val jelölvén, a lemez szélére érintőlegesen kifejtendő külső erő fajlagos értékének (kg/cm$^2$) az $x$, illetőleg $y$ irányú alkotója

$$p_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \sin\alpha, \quad p_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha,$$

az érintőleges alkotója pedig

$$\begin{aligned} \tau_{nt} &= p_{nx} \cos(x, t) + p_{ny} \cos(y, t) = \\ &= -p_{nx} \sin\alpha + p_{ny} \cos\alpha = \\ &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos\alpha \sin\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{aligned}$$

Ha ide behelyettesítjük a feszültségek (5) alatti kifejezéseit, és ha figyelembe vesszük, hogy az $F(x, y) = \text{konstans}$ egyenletből

$$\cos \alpha = \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2+F_2^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{F_2}{\sqrt{F_1^2+F_2^2}},$$

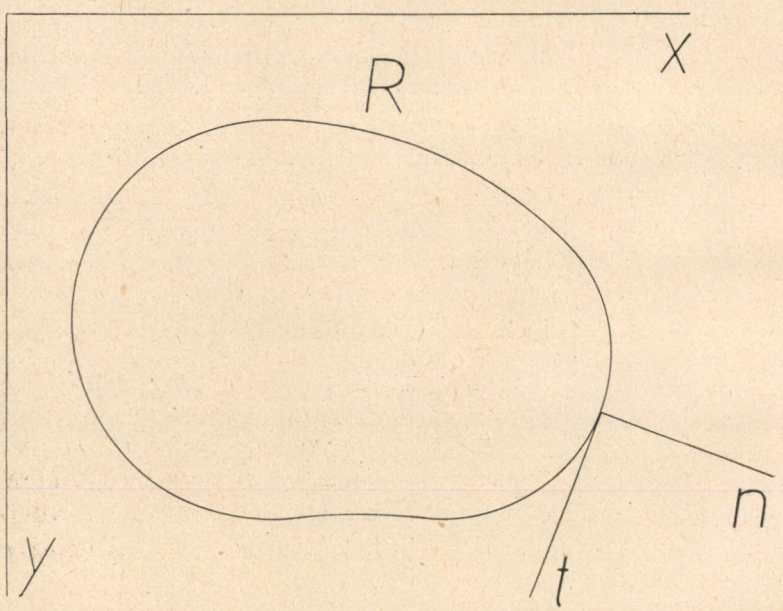
akkor

$$\tau_{nt} = -4GF_{12}\frac{F_1F_2}{F_1^2+F_2^2} + G(F_{22}-F_{11})\frac{F_1^2-F_2^2}{F_1^2+F_2^2}$$

és megfelelő rendezes után

$$\tau_{nt} = -G(F_{11}+F_{22}) - 2G\frac{2F_{12}F_1F_2-F_{11}F_2^2-F_{22}F_1^2}{(F_1^2+F_2^2)^{3/2}}(F_1^2+F_2^2)^{1/2},$$

ahol a tört alakban írt kifejezés a síkgörbék elmélete szerint az $F(x, y) = \text{konstans}$ határvonalnak a görbületi mértéke a




3. ábra.

szemügyre vett pontban. A (2) szerint $F_{11} + F_{22} = -2G'\vartheta$. Az $(F_1^2+F_2^2)^{1/2}$ kifejezés a (4) képletből kifolyólag $(u^2+v^2)^{1/2}$ alakban is írható, vagyis ez a kifejezés most az elmozdulás nagyságát

adja meg a szemügyrevett kerületi pontban. A görbületi mérték abszolút értékét $1/\varrho$-val, a kerületi elmozdulás nagyságát pedig $e$-vel jelölvén, a második kerületi feltétel a

$$\tau_{nt} = 2GG'\vartheta \mp 2G\frac{1}{\varrho}e \qquad (6a)$$

képlettel fejezhető ki, ahol a $\mp$ jelek közül a $-$ jel a határvonal kívülről nézve konvex részére, a $+$ jel a kívülről nézve konkáv részére vonatkozik. A $\tau_{nt}$ érintőleges fajlagos erőnek, valamint az $e$ kerületi elmozdulásnak a nyílértelme a kerületen való pozitív, illetőleg negatív körüljárásnak felel meg, a szerint, amint a számértékük pozitív, illetőleg negatív, megjegyezvén, hogy azt a körüljárási értelmet nevezzük pozitívnak, amely a keresztmetszeten megoszló csavaró erőpár forgató értelmének felel meg.

Ha tehát a síma kényszer a lemez szélét elcsúsztathatóan köti a fix $R$ vonalhoz, és ha a lemez szélére az $R$ vonalhoz képest érintőlegesen a (6$a$) képlet szerinti megoszló külső erőket működtetjük, akkor a (3) és (4) képletek egybevetéséből az következik, hogy $u = \tau_{zx}$ és $v = \tau_{zy}$, vagyis a lemez pontjának az elmozdulásvektora a keresztmetszet megfelelő pontjához tartozó csavarási feszültségvektorral (a léptékfaktortól eltekintve) azonos.

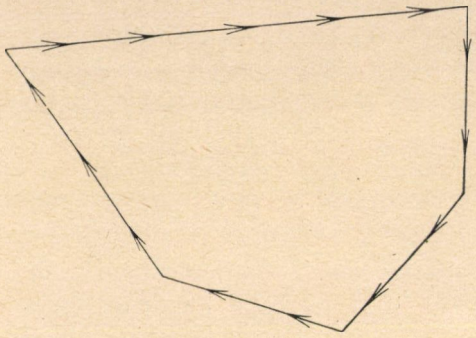
A képletek felírásánál a léptékfaktort egyszerűség kedvéért elhagytuk; ha $G$ és $G'$ egysége kg/cm$^2$, $\vartheta$ egysége 1/cm, $\varrho$ és $e$ egysége cm, akkor a (6$a$) képlet $p_{nt}$ értékét kg/cm$^2$ egységben adja meg.

A határfeltétel egyszerűvé válik abban a speciális esetben, amikor a keresztmetszetnek poligonális határvonala van kiugró sarokkal (4. ábra). Ekkor a poligon oldalai mentén ($1/\varrho = 0$) oly síma kényszert kell alkalmaznunk, amely a lemez kerületi pontjait csakis az oldalak egyenesében engedi elmozdulni. Ugyanekkor a lemez sarokpontjai elmozdíthatatlanul vannak megfogva, tudván azt, hogy a kiugró sarokpontokban a nyírási feszültség értéke zérus. A lemez szélére pedig az oldalak irányában, a pozitív körüljárásnak megfelelő nyílértelemmel, egyenletesen megoszló erőket kell működtetnünk, amelyek fajlagos értéke

$$\tau_{nt} = 2GG'\vartheta. \qquad (6b)$$

Ha a keresztmetszetnek beugró sarka is van, akkor e sarokpontban a csavarási feszültség számított értéke végtelen. E miatt a csavarási feszültségek kísérleti ábrázolása ilyen keresztmetszet esetében nem hajtható végre.

A nyírási feszültségek kísérleti ábrázolását általános alakú keresztmetszet esetében elvileg megnehezíti az, hogy a (6*a*) képletben *e* egyelőre ismeretlen. Ez a nehézség azonban leküzdhető-



4. ábra.

nek látszik azáltal, hogy a kísérleti ábrázolást próbálgatással hajtjuk végre, vagyis próbálgatással keressük meg a kerületi erőnek ama megoszlását, amelynél a (6*a*) képletnek megfelelő kerületi elmozdulás jön létre.

**IV.** A határfeltétel a (6*a*), illetőleg (6*b*) alakban felírva, noha az könnyen volt formulázható, praktikus alkalmazásra mégsem alkalmas, mert a benne szereplő erőmennyiség mérése kétségtelenül nehézkes lenne. E miatt a határfeltételt alkalmasabb alakra fogjuk hozni. Vezessük be a $\gamma_{nt}$ szögváltozást. $\tau_{nt} = G\gamma_{nt}$ helyettesítéssel a (6*a*) és (6*b*) képletek

$$\gamma_{nt} = 2G'\vartheta \mp \frac{2e}{\varrho}, \tag{7a}$$

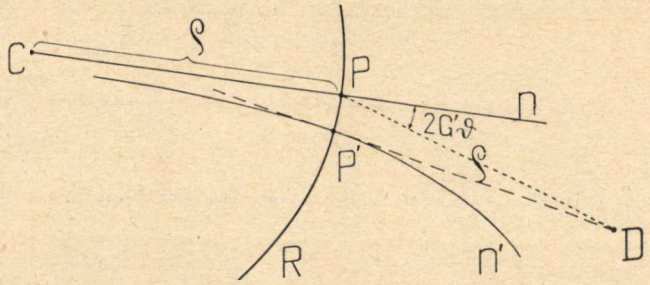
illetve

$$\gamma_{nt} = 2G'\vartheta \tag{7b}$$

alakba mennek át. Ezek a képletek azért alkalmasabbak praktikus alkalmazásra, mert bennük csak alakváltozási, vagyis geometriai mennyiségek szerepelnek erőmennyiség nélkül. A $2G'\vartheta$ konstans

tag számértéke, miután a léptékfaktor használatát mellőzzük, szögértéknek tekintendő.

A mondottak alapján a kísérleti ábrázolás a következőképen hajtható végre. A kísérlethez a csavart a keresztmetszetnél nagyobb területű rugalmas lemezt használunk oly módon, hogy a lemeznek legyenek köröskörül oly részei, amelyek túlterjednek a keresztmetszet $R$ határvonalán. Egyébként a lemez alakja, függetlenül a keresztmetszet megadott alakjától, tetszőleges lehet. A lemezre felrajzoljuk a keresztmetszet $R$ határvonalát, valamint elég sűrűn annak $n$ normálisait is. Ugyanakkor az $R$ vonalat felrajzoljuk celluloid vagy egyéb átlátszó rajzsíkra is, s ezt a lemezre helyezvén, a két rajzot fedésbe hozzuk. Az átlátszó




5. ábra.

rajzsíkba még berajzoljuk a $D$ pontot is (5. ábra), amely a normálisnak a $C$ görbületi középponttal ellenkező fekvésű $2G'\vartheta$ szöggel elforgatott ágán fekszik, az $R$ vonaltól $\varrho$ távolságban. Poligonális keresztmetszet esetében $D$ pont a végtelenbe esik; ez esetben csak $D$ iránya jön szóba.

Eme előkészítés után a lemezre elmozdulási kényszert alkalmazunk. Az elmozdulási kényszert csakis a lemeznek az $R$ vonalon kívül eső részeire alkalmazzuk, mert a lemezre az $R$ vonalon belül nem működnek külső erők. A kényszer alkalmazását próbálgatással hajtjuk végre, vagyis próbálgatással keresünk olyan kényszert, amelynek hatására az $R$ vonalon belül a (7$a$), illetőleg (7$b$) képletnek megfelelő deformáció jön létre. A deformáció folytán a lemez $R$ vonalának valamely $P$ pontja a $P'$ helyzetbe jut, az $n$ normális pedig az $n'$ vonalba megy át. Az

átlátszó lemez, amely közben nem deformálódik, lehetővé teszi a lemez deformációjának megfigyelését az $R$ vonal mentén. A határfeltételek kielégítése végett a $P'$ pontnak a fix $R$ vonalon kell maradnia, az $n'$ vonal $P'$ pontbeli érintőjének pedig a $D$ ponton kell átmennie (5. ábra). Az utóbbi követelmény a (7$a$) képletben van kifejezve, ugyanis $\gamma_{nt} = 2G'\vartheta \mp \frac{2e}{\varrho} =$ $= 2G'\vartheta \mp \frac{e}{\varrho} \mp \frac{e}{\varrho} = 2G'\vartheta - P'CP' \sphericalangle - P'DP' \sphericalangle$. A határfeltételek kielégítése végett poligonális keresztmetszet esetében az $R$ vonal $l'$ pontbeli érintőjének $+2G'\vartheta$ szöggel kell elfordulnia az $n$ irányához képest.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott üléséből.)

# EINE NEUERE ANALOGIE DES TORSIONSPROBLEMS.

J. BARTA in Budapest (Ungarn).

Die hier beschriebene Analogie kann «Scheibenanalogie des Torsionsproblems» benannt werden. Sie besagt folgendes: Die elastischen Verschiebungen der Punkte einer in ihrer Ebene gespannten dünnen Scheibe (ebener Spannungszustand), welche nur am Rande $R$ belastet ist, stellen — unter gewissen Randbedingungen — die Verteilung der Schubspannungen in der Querschnittsfigur des tordierten Stabes dar.

Die Randbedingungen gestallten sich besonders einfach im Falle eines polygonalen Querschnittes mit ausspringenden Ecken. In diesem Falle muss man für die Randpunkte der Scheibe die Verschiebung entlang den Seiten eines festen Polygons $R$ durch irgendeine glatte Stützung ermöglichen. Greift nun am Rande der so gestützten Scheibe eine gleichmässig verteilte äussere Kraft in der Richtung der Polygonseiten mit stetigem Pfeilsinn an (Abb. 4), so ist der Verschiebungsvektor irgendeines Scheibenpunktes bis auf einen Masstabsfaktor identisch mit dem Spannungsvektor des entsprechenden Querschnittspunktes. Die auf die Randfläche bezogene Grösse (kg/cm²) dieser äusseren Kraft ist durch die Formel

$$\tau_{nt} = 2GG'\vartheta \tag{6b}$$

angegeben, wobei $G$ bezw. $G'$ den Schubmodul (kg/cm²) des Scheibenmaterials bzw. des Stabmaterials bedeutet und $\vartheta$ den auf die Stablänge treffenden Verdrehungswinkel (1/cm).

Die experimentelle Darstellung der Torsionsspannungen

lässt sich im Falle eines Querschnittes mit einspringender Ecke nicht durchführen, da in solcher Ecke ergeben sich rechnungsmässig unendlich hohe Spannungen.

Die Verschiebbarkeit der Scheibenrandpunkte entlang einer festen Randlinie $R$ wird im Falle einer allgemeinen Querschnittsform ebenfalls durch irgendeine glatte Stützung ermöglicht und die bezogene Grösse der äusseren Kraft (kg/cm²) von tangentieller Richtung wird durch die Formel

$$\tau_{nt} = 2GG'\vartheta \mp 2G\frac{1}{\varrho}e \qquad (6a)$$

ausgedrückt, wobei $1/\varrho$ das Krümmungsmass bedeutet (1/cm) und $e$ die tangentielle Verschiebung (cm) des Randpunktes. Die Anwendung der Formel (6*a*) ist dadurch erschwert, dass $e$ vorläufig unbekannt ist. Diese Schwierigkeit scheint behebbar zu sein dadurch, dass man die experimentelle Darstellung durch Probieren durchführt, d. h. man sucht durch Probieren diejenige Verteilung der tangentiellen Kraft, welche die der Formel (6*a*) entsprechende tangentielle Verschiebung der Randpunkte hervorruft. Obwohl die Randbedingung in der Form (6*a*) bzw. (6*b*) leicht formulierbar war, sie ist doch in dieser Form für die praktische Durchführung des Experimentes weniger geeignet, weil das Abmessen der darin vorkommenden Kraftgrösse ist allerdings schwerfällig. Deshalb führt man in die Formeln die Winkeländerung $\gamma_{nt} = \tau_{nt}/G$ ein. So erhält man die Formel 7*a*) bzw. (7*b*), welche den Vorteil hat, dass darin nur Deformationsgrössen d. h. geometrische Grössen ohne Kraftgrössen vorkommen.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# FUNCTIONALIS ANATOMIAI SZERKEZETEKRŐL.

ZIMMERMANN ÁGOSTON r. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Az anatomia újabb iránya a régi, mondhatni megrögzött, megmerevedett «*hullaanatomiá*»-tól némileg eltávolodni igyekezik és többet foglalkozik az *élő szervezet* anatomiai viszonyaival. Vizsgálati anyaga természetszerűleg nolens-volens a hulla, azonban az élő szervezetek egyik jellemző sajátságának, a változékonyságnak, a *variabilitás*-nak figyelembe vételével, a működésbeli, a constitutionalis és egyéb (raçe, életkor stb.) sajátságok kerülnek vizsgálatra és megállapításra. A normalis anatomiai szerkezetek sem változhatlanok, nem teljesen egységesek, nem egyfomák ugyanazon állatfajon belül sem, a régebbi, látszólag megállapodott anatomiai képzetek, nézetek sokszorosan átalakulnak és revisióra szorulnak.

Az anatomiai tan- és kézikönyvekben lefektetett, stereotyp fogalmaktól részben a ryhtmusosan bekövetkező *működési állapotok*, részben az *igénybevétel foka* szerint beálló átalakulások következtében jönnek létre módosulások, a fejlődés, *növekedés*, *öregedés* során továbbá vannak *fajtabeli*, constitutiós stb. variatiók, mert az anatomiai szerkezetek korántsem stabilok, nem állandóak, hanem változóak. A *működés* következtében beálló átalakulások, a functionalis összefüggések tanulmányozása, a functionalis szemlélet, a *biologiai gondolat synthesis*eket, összefüggéseket keres, contactust talál az élettannal és más disciplinákkal és termékenyítőleg hat a további kutatásokra.

Az anatomia történetében is már a *patres anatomiae* között találkozunk olyanokkal, akik az alak és szerkezet, másfelől a működés között fennálló összefüggésekre és törvényszerűségekre hívták

fel a figyelmet. Ezek között első helyen kell említeni SÖMMERING SÁMUEL TAMÁS (1755—1830) nevét, aki az anatomia nagy reformátorának, VESALIUS ANDRÁSnak munkáját folytatva, az élettannal, a működéssel való összefüggésekre is kiterjeszkedett. Ezután egyideig az anatomiát és élettant együtt művelték egészen JOHANNES MÜLLERig (1801—1858), amikor a *tiszta morphologiai irány* lépett előtérbe és az anatomusok az élettantól elválva, többnyire csupán egyes apróbb, többé-kevésbbé jelentékeny morphologiai részletek kutatására adták magukat és a *functionalis szerkezetek*re kevesebb figyelmet áldoztak, pedig a működés és a szerkezet szorosan összefüggnek egymással, ilyen irányú vizsgálatok *synthesise* általánosabb, nagyobb értékű áttekintést nyujt, mint a rengeteg részletismeret önmagában.

ROUX VILMOS (1850—1929) a *fejlődési mechanika* nagynevű megalapítójáé az érdem, hogy a *működésbeli és okozati nézőpontok* az anatomiában újabban nagyobb méltatásra találnak (23) és a pusztán leíró jellegű részletkérdések mellett és helyett a működéssel összefüggésben álló, a physiologiai szemlélettel, élő összefüggésekre terelődik a kutatók figyelme.

Az élet periodusok rythmikus láncolatából áll, miközben minden egyes állapot alapja, kiindulási pontja a következő stádiumnak. A szervek kibontakozása az embryóban szabályos időközökben *egymásután* történik, amitől még kivételesen sincs eltérés. Az egyes szervek egységekből épülnek fel, milyenek az izmoknál a myomer, a csontoknál az osteon, a tüdőnél a pneumomer, a vesénél a nephromer stb., ez egységek egymásután szabályosan fejlődnek, egymás mellé rendeződnek és harmonikus egészbe tömörülve építik fel a szervezetet. A szervezet szelvényezettségének, a metameria vagy segmentatio törvénye legkifejezettebben az alacsonyabbrendű állatokon nyilatkozik meg, a magasabbrendűekben utóbb elmosódik, bár nyomai mindvégig fellelhetők. A metameria átalakulására a fejlődés közben különböző *mechanikai factorok* hatnak.

A fejlődésmechanikai vizsgálatok többnyire az *ontogenia* korai stádiumainak összehasonlító alapon való kísérletes tanulmányozására szorítkoznak; kétségtelenül értékes adataikkal nagyban hozzájárulnak a fejlődés szabályainak és törvényeinek megismeré-

séhez. Roux azonban az okozati morphologiai kutatásoknak egy másik irányát is megjelölte klasszikusnak mondható munkáiban és ez a *működésbeli alkalmazkodás* vizsgálata nemcsak az *embryonalis*, hanem a *postembryonalis fejlődés* során is (23). E kutatási irány szintén kísérletes alapon folytathatja vizsgálatait, de e mellett különösen a normalis működés közben megnyilvánuló ingerek hatását, reactióját a szervezet szerkezetére, egyes szerveire, készülékeire és rendszereire vizsgálja és a typusos működési, fejlődési, átmeneti és állandósuló alakok létrejövetelének okait igyekszik kideríteni. E kialakulásnál a környezet, milieu, életmód, igénybevétel bir causalis jelentőséggel. A működésbeli alkalmazkodás és kész kialakulás, a Driesch-féle «Angepasstheit», embryókon, újszülötteken és kifejlett emlősállatokon való vizsgálata, a primitiv állatfajok, alacsonyabbrendű kísérleti állatok (Halak, Kétéltűek stb.), korai embryonális stadiumain végzett kísérletes vizsgálatok mellett, egy időben kissé háttérbe szorulni látszott, talán azért is, mert az ilyen vizsgálatok hosszadalmasak és nagyobb anyagot igényelnek. E kutatási iránynak azonban nemcsak általános biologiai, morphologiai és fejlődéstani jelentősége van, hanem gyakorlati alkalmazása is lehet, különösen az orvosi tudományokban; a működés következtében beálló változások, az «indirekt» kísérletek kóros folyamatok tanulmányozásánál, kóroktani vizsgálatoknál játszhatnak szerepet.

Mechanikai ingerekre bekövetkező szerkezetbeli átalakulások különösen az egyoldalu, *egyirányú használat*, fokozott igénybevétel eseteiben jelentkeznek jól szembetűnő módon. Ilyenkor akár passive, akár pedig aktive erősebben igénybevett részek fokozottabb fejlettséget érnek el, mint a kevésbbé igénybevett vagy kisebb munkát kifejtő részek. Ily módon *progressiv és regressiv mechanomorphosis*, haladó és hanyatló átalakulás áll elő, ami különösen a *mozgás rendszerein* tűnik jól észrevehetően fel.

Roux az ontogeniában, az egyéni fejlődés során jelentkező correlativ haladó és hanyatló átalakulásokat *örökölt* sajátságnak minősíti. Benninghoff a növekedés és a működés által kiváltott átalakulás és alkalmazkodás egymástól függő, *correlativ* viszonyát helyezi előtérbe.

Az Emlősökön a környezet hatása, a táplálkozás módja mel-

lett, szoros összefüggésben a létérti küzdelemmel, lényeges átalakító befolyást gyakorol az egész szervezet alakjára és szerkezetére; de különösen kifejezett e hatás a helyváltoztatás testrészeire, a *végtagok*ra. A functionalis átalakulás ezek szervein nyilvánul meg és követhető nagyon jól.

Amíg az emberen a physiologiai munkafelosztás elvének megfelelően a felső végtagok a fogásra, az alsók a test alátámasztására és helyzetváltoztatására alkalmasakká alakultak helyzetükben, alakjukban és mechanismusukban, addig a négylábú állatokon mindkét végtagpár alátámasztásra és helyzetváltoztatásra szolgál; ezért helyzetükben, alakjukban és működésbeli szerkezetükben ennek megfelelő eltérések állapíthatók meg. Kialakulásuk a phylogeniai fejlődés során nagyon jellegzetes változásokat vont maga után.

Az eredetileg talponjáró, *primaer plantigrad* Emlősök lassú járásúak voltak, a lábnak a talajról való felirányulásával később gyorsabb és tartósabb mozgás, futás vált lehetővé, miközben a láb tengelyi, axiális részei vétettek erősebben igénybe. A láb e felfelé irányulása a plantigradból digitigrad, ujjon járó, majd a mozgás gyorsulásával végül ujjhegyen való, *unguligrad* járásra vezetett. E folyamat az Emlősök közül legjobban követhető a Patásokon, különösen pedig az Egypatásokon, ahol a fokozatos kialakulás zárt sorozatban állapítható meg (a lovat ezért «Paradetier der Descendenztheorie»-nak nevezte el FLEISCHMANN [31]). A gyorsabb mozgáshoz való alkalmazkodás következtében a hátulsó, medencei végtagok a helyváltoztatást megindító, bevezető, lendítő emelőkké, az elülső, mellkasi végtagok pedig inkább alátámasztó berendezésekké alakultak át. E kölcsönös regressiv és progressiv átalakulások érdekes módon *distoproximalis irány*ban állnak be a végtagok csontos vázán és izmain is, úgy a phylogeniai, mint az ontogeniai fejlődés folyamán, míg egyébként a kialakulás proximodistalis irányban szokott bekövetkezni.

Az ötujjú, *pentadaktyliás* lábnak a talajról való felemelkedésekor, felirányulása alkalmával a Patások kétféleképpen, két irányban tüntetnek fel csontos vázukban alkalmazkodást, ezek a *mesaxonia* és a *paraxonia*, miközben az izomrendszer correlativ alkalmazkodása útján a végtagok tartós és kiadós futásra lesznek alkalmasakká.

A mesaxon fejlődési iránynál az *autopodium*, a láb, tengelye az eredetileg ötujjú végtag harmadik sugarára esik, míg a paraxonnál hasítottan a harmadik *és* negyedik sugárra. A tengely ilyen állása és az oldalsó sugaraknak ennek következtében csökkent igénybevétele folytán utóbbiak mint melléksugarak hanyatló átalakuláson mennek keresztül, kisebbek és gyengébbek lesznek, nem érintik a talajt, nem terheltetnek meg, végül teljesen eltűnnek. Ezekkel szemben a láb tengelyébe eső fősugarak a fokozottabb igénybevétel és az oldalsó, melléksugarak gyengülése, illetőleg elmaradása következtében progressiv fejlődést nyernek, a correlativ működésbeli alkalmazkodás ebben nyilvánul meg. A fősugarak compensatiós haladó átalakulása különösen a vastagsági és hosszúsági átmérő megnövekedésében, a csontok kéregállományának megerősödésében jelentkezik, ami a legkifejezettebben a főmetapodiumban, illetőleg a fősugarakban tűnik jól elő.

Az Egypatásokban a *metapodium* reductiója és a mesaxonfejlődés térben és időben különböző fejlődési vonalakban, de ugyanazon irányban haladt előre. A Páratlanujjúak, Perissodaktylák mesaxon kialakulása, specialisatiója az Equidákkal nem rokon korábbi, idősebb délamerikai Proterotheridákon is megállapítható, melyek közül a Thoatheriumon az elülső végtagokon egészen apró, csökevényes metapodium II. és IV. a hátulsó végtagokon teljesen elmaradt (Abel [1]).

Az *autopodium* három tagja közül az *akropodium* és a metapodium messzemenő reductiójával szemben a *basipodium* sokkal kisebbfokú reductiót szenved el, ellenben a nyomási viszonyoknak megfelelő átalakuláson megy keresztül.

A *zeugopodium*okon úgy a kihalt, mint a recens Patásokon a hátulsó végtagok toló és az elülső végtagok alátámasztó működésének megfelelő alkalmazkodásként a fibula és az ulna fokozatos reductiója, az izületeiknek csupán a hajlításra és nyujtásra való szorítkozása (29), a pro- és supinatio teljes elmaradása állapítható meg; a zeugopodium csontjai itt pronatióban rögzítettek. Úgy a mesaxon, mint a paraxon Patások tibiája és radiusa correlative erősödik, a fibula és az ulna — az előbbi nagyobb fokban — kiesik az alátámasztás alól, az olecranon nagyobb változatosságot tüntet fel.

A szabad végtag kiegyenesedésével, kinyúlásával kapcsolatban, úgyszintén a láb megnyúlásával a Patások *stylopodiuma*, a femur és a humerus megrövidül (9), aránylag rövidebb, mint az emberé, ugyanígy a zeugopodium is (az ember alkarja jóval hosszabb, mint a keze az ujakkal, a Patásokon ez az arány fordított: az autopodium hosszabb, mint a zeugopodium. A ló hátulsó végtagja 60%-kal rövidebb, mint az ember alsó végtagja, a ló lába pedig átlag 20 cm-rel hosszabb, mint a lábszára).

A *Patások* végtagkapcsoló öveinek csontjain, a *zonoskeleten* az izommunka megtakarítását célzó hanyatló és haladó átalakulások következtek be. A vállövükön a *kulcscsont*, elvesztvén nagyobb actioradiusát, a fejnyakkarizom, *musculus brachiocephalicus*, ínas beiratává, *inscriptio tendinea*, zsugorodott, a lapocka *synsarkosis*, izmok és rugalmas kötőszöveti lemezek útján függ össze a mellkassal, és helyzetének megfelelően, különleges működéséhez alkalmazkodva, csaknem kizárólag nyilirányban tér ki; miután egyedüli hordozója a mellső végtagnak a nagy követelményeknek megfelelően alakult (nagy felületek, erős tövis, érdes vonalak).

A Patások *végtagizületei* túlnyomólag csak egy haránttengely körül mozgathatók, az állás könnyítése, részben a mozgás elősegítése érdekében a könyök- és a csánkizület csapóizületekké alakultak át.

A szilárdság fokozására és a rázkódtatás enyhítésére is találunk megfelelő berendezéseket, ilyen a lapocka porca, a basipodiumon pedig a pro- és mesocarpus *csontjainak alternáló elhelyezkedése*, mint azt egy régebbi közleményemben már tüzetesebben ismertettem (34). Az os carpi centraleról legközelebb egy nagyobb dolgozatot szándékozom bemutatni (45).

A munkafelosztás elvének figyelembevétele alkalmával azonban a végtagok csontjainak nemcsak helyzetében, méreteiben és külső alakulásában találni jellemző eltéréseket, hanem *belső szerkezetében* is. Az öröklött sajátságoktól eltekintve, a test súlyának hatása, nyomásának eloszlása, másfelől az izmok, ínak és szalagok hatása állapítható meg különösen a csöves csontok szivacsos állományának szerkezetében, de kifejezésre jut ez a csontok kéregállományán is. A csontokban a felépítés és az átépítés mechanikai és dynamikai törvényeknek alávetett.

Ha a végtagok csöves csontjain haránt- és hosszmetszeteket készítve, a HAVERS-féle lemezrendszereket, az *osteonokat*, a HAVERS-csatornákat, belső és külső általános, generalis lemezeket és az összekötő közbeiktatott, interstitialis lemezeket vizsgáljuk, ezek számában állatfajok szerint különbségek állapíthatók meg, de ugyanazon állatfajon belül, sőt ugyanazon csont különböző részletein is eltérő viszonyokat találunk, mint azt intézetemben erre irányuló vizsgálatokkal sokszorosan megállapítottuk. Egy-egy látótérben a *Havers-csatornák* lemezrendszerének száma 3—32 között variál, de a Havers-csatornáknak nemcsak a száma, hanem méreteik (nagy és kis osteonok), elosztódásuk, lefutásának iránya is eltérő (radialis, hosszanti és ferde) lehet. *Korbeli különbségek* alig állapíthatók meg, a fiatal állatok csöves csontjain a Havers-csatornák irányulása megegyezik az idősebbeken láthatókkal. A *Carnivorakon* a nagy osteonok öve belül, a kis osteonoké peripheriásan helyeződik, az osteonok *különállóak*. A *Suidákon* a kis osteonos öv osteonjai szakaszonkint körkörösen, ú. n. *circularis synosteon*okban rendeződnek. Az *Equidák* és *Ruminantiák* csontjainak szerkezetében a *külső synosteonos* öv jut túlsúlyba, míg a nagy osteonos öv háttérbe szorul, sőt MÁTYÁS szerint tönkre is megy (20).

Nagyon jellegzetes a radiusban és a metacarpalis csontokban a *Havers-lemezek rendszereinek függőleges irányulása*, mely az összenyomással szemben nagyon ellentállókká teszi e csontokat, míg evvel szemben a törések ellen kevésbbé védi meg. A tibia és a metatarsalis csontok viszont ugyanúgy, mint a karcsont és a combcsont izületeik szögeinek megfelelően *ferde* lefutású rendszereikkel, a törésekkel szemben ellentállóbbak, az összenyomatással szemben pedig kevésbbé. A Havers-lemezrendszerek irányulása egyébként megfelel a csontok hossztengelye irányulásának. Ennek alapján ugyanis az általam vizsgált háziállatok csöves végtagcsontjai működésbeli szerkezetük alapján két csoportba oszthatók, az egyikbe tartoznak a *ferde* helyeződésűek, ilyenek a humerus, a femur, a tibia és a metatarsalis csontok, a másik csoportba a *függőleges* irányulásúak, milyenek a radius és a metacarpalis csontok. Előbbiek inkább oldalt összenyomottak, hosszanti tarajjal, ellentállóképességük a töréssel szemben nagyobb; az utóbbnevezettek keresztmetszete haránt-ovális, szerkezetükben *Havers*-lemezek kevésbbé sűrűn állnak, sok

a közbeiktatott lemezük. Az ezekre vonatkozó részletes adatokat és táblázatokat egy további közleményben szándékozom ismertetni, ez alkalommal csupán az eredményeket óhajtom átnézetesen, synthetikusan összefoglalni.

A mellső végtagcsontok közül a stylopodium csontja, a *humerus* diaphysise sagittalisan összenyomott, harántmetszete közel háromszögletes, a tuberculum majus folytatásában taraj huzódik, mely emlékeztet a femur trochanter majorjából folytatódó tarajra (trochanter tertius). A dudorok általában oldalt, a testsúly behatásával szemben foglalnak helyet. A humerus a pronatiós helyzetnek megfelelően torquált (MARTIN torsiós elmélete), viszonyait, functionalis anatomiai szerkezetét annak idején BROSKÓ tanulmányozta irányításom szerint különféle méretekkel és projectiókkal (9).

A zeugopodium csontjai közül a *radius* a medencei végtagon pallilog tibiával szemben nagyobb különbségeket tüntet fel, úgy helyeződése, mint alakja és szerkezete tekintetében. A radius ugyanis függőleges irányulású, harántmetszete ellenben háromszögletes, Havers-rendszerei sűrűbbek, mint az orsócsonté.

Az autopodiumból a basipodiumban, a pro- és mesocarpus csontjaiban, feltűnő alternáló elrendeződésre már előbb történt utalás.

A metapodiumban a *metacarpalis csontok*ban lehet legjobban a működés, az igénybevétel következtében beálló morphologiai változásokat tanulmányozni. Az Equidák harmadik metacarpalis csontjának (mely a legszebb és legerősebb csontok közé tartozik) nagysága, hosszúsági, szélességi és vastagsági átmérői, de alakja és szerkezete is az erre vonatkozó, nagy anyagon végzett vizsgálatok szerint a ló fajtája, használata, lábállása szerint eltérő. Külső felületén is előtűnnek a különbségek, így különösen *volarisan*, hol a keleti fajtájú, ú. n. melegvérű lovakon e felület csaknem domború, míg a nehezebb, hidegvérű lovakén egyenes vagy bemélyedő. Az oldalsó szélek a szilárdabb szervezetű melegvérű lovakon íveltebbek. A metacarpale tertium *compactajának* vastagsága dorsalisan nagyobb, átlag 11 mm, mert frontalisan az igénybevétel nagyobb; volarisan átlag 7 mm. Medialisan szintén mindig erősebb, átlag 11 mm, mert a testsúly nagyobb része erre esik, míg lateralisan középértékben 9 mm a kéregállomány vastagsága. Hasonló-

képpen az izületi porcokon is sikerült pontos exact mérésekkel a kiemelkedések magaslatán, a mélyedések fenekén, általában az exponált helyeken a functionalis reactiót megvastagodás alakjában kimutatni (14).

A *szivacsos állomány*ban a *sagittalis* metszéslapon a csontgerendák a proximalis izületi felülettől 5—7 cm távolságban a dorsalis és a volaris falról ferdén felfelé indulnak, a középen egymást keresztezik és kb. $^2/_3$ részük a dorsalis falra tér. Az izületi felület közelében a fiatal állatok csontjain jobban, idősebbekén kevésbbé szembetűnő harántirányú támasztó gerendák vannak. A metacarpus distalis epiphysiséhez közel hasonlóképpen a dorsalis compactából kiinduló csontgerendák találhatók nagyobb mennyiségben ($^2/_3$), melyek ferdén le és kissé hátra domborodó ívben haladnak, míg a volarisan csekélyebb számban a compactából kiinduló gerendák ferdén le- és előredomborodó ívei az előbb említett gerendákat keresztezik. A diaphysis alsó végén az epiphysis felé a gerendák sugárzatosan, legyezőszerűen széjjeltérnek. A trajectoriumok functionalis anatomiai szerkezete a mellett tanúskodik, hogy a metacarpus megterhelése a *sagittalis* irányban történik és hogy a *dorsalis* fala nagyobb súlyt visel, mint a volaris, mert nagyobb számban vannak a dorsalis compactára támaszkodó gerendák úgy a proximalis, mint a distalis részén, melyek a megterhelés és az eltolás fázisában az előreirányuló hajlítási nyomást az izületi felületről átviszik a dorsalis falra. A distalis epiphysisben az izületi felületre támaszkodó, *legyezőszerűen* széjjeltérő csontgerendák a rázkodtatást csökkenteni alkalmasak, az alulról ható ellennyomást felfogják és megakadályozzák az epiphysis összenyomatását.

A *transversalis* metszéslapokon lényegében ugyanazok a jelenségek állapíthatók meg, mint a sagittalis és a frontalis metszéslapon. A compacta a *medialis* oldalon már a magzatban erősebb, vastagabb, a spongiosa gerendái pedig kifelé domborodó sorokban differentiálódnak. Nagyon szembetűnően legvastagabb a fal ott, ahol sagittalis és frontalis irányban leginkább van igénybevéve, ugyanennek megfelelően a csontgerendák is ezeket a részeket támogatják, a jobban igénybe vett helyen vastagabb és több gerenda található.

A csontok azonban, mint már régen ismeretes és fentebb is

jeleztem, az élet folyamán is különböző változásokon mennek át és a kifejlődött állat csontjai távolról sem tekinthetők merev, változatlan szerveknek, rendszereknek, hanem különböző külső és belső behatásokra bennök pro- és regressiv folyamatok mennek végbe és ezek következtében alakjuk és tömegük lényegesen megváltozhat, így különböző lábállások, egyirányú használat esetében a leginkább igénybevett részeken mechanikai és dynamikai behatásokra megfelelő elváltozások következnek be (a functionalis inger trophikus hatása, Roux (23).

Guoth és Csukás (13) versenylovak metacarpusain, melyek korán, fiatalon munkába állíttatnak, *functionalis hypertrophiát* állapított meg; az elülső végtagoknak nagyobb mérvű megterheltetése a csontszövet szaporodására vezetett, részben csonthártya- és csontgyulladásra is. Itt a compacta megvastagodása compensatiós jellegű, az illető rész fokozott megterhelésének következménye. Megállapítható továbbá, hogy a csontgerendák is ennek megfelelően helyezkednek el.

Nagyobb anyagon végzett összehasonlító vizsgálatokból kiderült, hogy gyorsmozgású lovak metacarpaléi hosszabbak, keskenyebbek, mint a lassú mozgású hidegvérű lovaké.

A *metacarpus* és *metatarsus* csontjainak egybevetése alkalmával nemcsak az tűnik fel, hogy a metatarsus hosszabb, fala vastagabb, harántmetszete kerek, kissé oldalról összenyomott a metacarpuséhoz képest, hanem histologiai és Bogdaschew szerint (7) chemiai szerkezete is más, több vizet és szerves anyagot, kevesebb meszet és hamu-alkotórészt foglal magában.

| | $H_2O$ | Szerves anyag | Hamu | $CaO$ |
|---|---|---|---|---|
| A száraz $Mc_3$-ban | 9·18% | 28·58% | 62·24% | 34·37% |
| A száraz $Mt_3$-ban | 9·95% | 28·73% | 61·72% | 31·19% |

A szerkezet a mechanikai igénybevételének megfelelően alakult ki, mint azt a zürichi Meyer és Cullmann a graphikai statika megalapítójának (1867) alapvető vizsgálatai, mérések és számítások alapján, megállapították, majd nagyszámú későbbi vizsgálat a szivacsos állomány architekturáján a csontrendszer minden területére nézve megerősítette. A csontstrukturák a statikai viszonyok megváltozásával, pl. csonttöréseknél, szintén megváltoznak, alkal-

mazkodnak a működéshez, erre különösen Roux (23) hívta fel a figyelmet és érdeklődést. A kóros viszonyokhoz való kényszerűen alkalmazkodás folytán bekövetkező strukturális berendezések a jelzett törvényszerűséghez szolgáltattak bőséges, bizonyító erejű anyagot. E szerint a szervezetnek, az anatomiai szerkezetnek az igénybevételhez, tehát functiójához való célszerű és gazdaságos alkalmazkodása úgy ép, mint kóros viszonyok között nemcsak külsejében, hanem belső szerkezetében is bekövetkezik.

Roux szerint a functionalis szerkezet legfinomabb részletében is működésének megfelelően alakult, így a legkevesebb anyag felhasználásával a lehető legnagyobb ellenállást vagy működést képes kifejteni. A legutóbbi években Benninghoff (3, 4) munkatársaival és tanítványaival foglalkozott többet a functionalis szerkezetekkel, a csonton kívül különösen a *méh* és a *bél izomzatának* mechanikájára vonatkozó vizsgálatai keltettek méltán feltűnést. Nálunk Orsós (21) a *tüdő vázrendszerének* functionalis szerkezetét vizsgálta és részben hasonló irányú vizsgálatokkal foglalkozott a vezetésem alatt álló intézetben Bierbauer (5). Krompecher (17) a fülkagyló porcán a *rugalmas porc functionalis szerkezetét* vizsgálva, megállapította hogy a rugalmas porc a maga egészében mindenféle hajlításnak ellentáll és így belső szerkezete valóban functionalis strukturának minősíthető. A gége porcos vázán, különösen a *pajzsporc elmeszesedésével* kapcsolatban, foglalkozunk működésbeli szerkezetének kérdésével (43).

A szervezet egyes részei közül, mint az előadottakból is kitűnik, főleg a *vázalkotó részek* functionalis szerkezete került vizsgálatra és még számos más rész vár megfelelő feltárásra.

Többet foglalkoztunk évek óta a *mozgás aktiv szerveinek*, az izmoknak összehasonlító anatomiája kapcsán, a *homologiák* megállapítása mellett *functionalis szerkezetük* meghatározásával, mely vizsgálatokat az izmok transmissióira, az inakra is kiterjesztettük.

A *Patások végtagizmai és ínai* a csontos váz átalakulásához és a gyorsabb mozgáshoz alkalmazkodnak, ami különösen az Equidákon vehető jól észre. Ez élettani correlativ változások a végtagok csontos vázának hanyatló átalakulásával és a mozgás egyirányú korlátozásával állnak összefüggésben. Ezek kialakulása a kihalt, fossilis Patásokon nyilván már nem tanulmányozható, bár kétség-

telen, hogy azoknak más életmódja és eltérő mozgása miatt aktiv mozgási rendszerük is más berendezésü volt, mint a recens lóé, melynek mozgási rendszere a legelőrehaladottabb functionalis differentiálódást mutatja a gépies exact járási formáknak megfelelően. *Izommunkát megtakarító tisztán feszítő berendezései*, erős inai, fasciái, izmainak leegyszerűsödése, egyesek elmaradása különösen az alkar és a szár táján megszűnt forgató mozgással és a lábvég vázának regressiv átalakulásával kapcsolatban tűnik jól elő. Legyen szabad itt csupán a supinatorok és a pronator quadratus teljes hiányára, a *pronator teres* teljes átalakulására (40), az *ujjnyujtók* (30) összevonására, a Thiernesse- és Phillips-féle izmokra utalni, melyeket korábban megjelent dolgozataimban részletesebb tanulmány tárgyává tettem. Utóbbiaknál részben az izmok eredési viszonyai, részben az *inak* individualisan is eltérő viselkedése utalnak a ló ősi ötujjúságára. Ilyen átalakulás továbbá a gyengén fejlett *abductor pollicis longus* tapadó inának átvándorlása az elmaradt első metacarpalis csontról a másodikra működés-változásával kapcsolatban, a lábvég (a kéznek és a lábnak megfelelő testrész) izmainak előrehaladott reductiója és részben elmúlása, ami mind a vázelemek reductióját követi (31).

Valamennyi izom nagysága, alakja, helyzete, belső szerkezete működéséhez alkalmazkodik. Erre utal a Patások végtagjain az *izomhasak proximalis vándorlása*, orsó-alakjuk, harántirányban való ellapulásuk, továbbá a végtagok izületein az izmoknak a feszítésnek, illetőleg rögzítésnek leginkább megfelelő elhelyezkedése, amely alkalmazkodás izommunka megtakarításával, fáradság elmaradásával jár és a *tartós állást* teszi lehetővé kimerülés nélkül az izmok és inak passiv megfeszítése által, amire szintén más helyen többször rámutattam összehasonlító izomtani vizsgálataim során (35).

Nagyfontosságú az erőteljes munka, a hosszantartó gyors futás érdekében az erősebben igénybevett izmok *nagyobb vastagsági harántátmérője*, a nagyobbszámú izomrost így térmegtakarítással kisebb területen foglal helyet (Roux [23]). Az izomhasaknak a ló zeugopodiumán való torlódása aránylag csekély terjedelmű eredési csontfelületen, azután hirtelen megvékonyodásuk és hosszú karcsú inakba való átmenetelük következményeképen ez izmok *számos inas redővel* átszőttek (41). A rövidebb izomrostkötegek egy része

csakhamar inakba folytatódik, a gyorsmozgású lovak végtagizmaiban az inszövet jellemző módon megszaporodik, mint az több tanítványommal együtt végzett összehasonlító izomtani vizsgálataimból is kitűnik. Az ilyen *inazott izmok* (a németek Sehnenmuskelnek nevezik) (25), más izmokhoz képest, vagy más állatfajok ugyanezen izmaival való összehasonlításakor harántmetszetben sokkal több inas redőt, szélesebb *íntükröt* tüntetnek fel, izomrostjaik megrövidültek, az ínszövet erősebben megnövekedik, megszaporodik és jellemző módon rendeződik el. Az ilyen izmok az activ működés mellett *passiv hatást* fejthetnek ki, izommunkát megtakarító, feszítő, tartó készülékeket képviselnek, melyek az izületekre láncolatosan kiterjedő, synchronikus, egymástól függő kitéréseket hoznak létre. Az állás ezáltal megkönnyíttetik és az izületeknek evvel összefüggő berendezése következtében a ló hosszú ideig, hetekig állni képes a nélkül, hogy kimerülne (35).

A ló kicsiny átmérőjű, de nagy teljesítő képességű végtagizmai *alacsony tollazottsággal* a musculus extensor és flexor carpi ulnaris és a m. flexor digitalis profundus caput humeralejának lateralis része (ezek átmeneti alakok); *magasabban tollazottak* tehát még több inrostot foglalnak magukban a m. flexor digitalis superficialis, a flexor digitalis profundus caput humeralejának mediovolaris része és a biceps brachii lateralis része (SCHAUDER) (24). Ez izmok a helyzetváltoztatásnál kezdetben mint a könyök- és a carpalis izület erőteljes hajlítói működnek, bár csak kevéssé rövidülnek meg az izomrostkötegeik rövid volta miatt. Az általuk bevezetett, megindított hajlítást más, *hosszabb rostkötegű* izmok (m. brachialis, m. flexor carpi radialis, a flexor digitalis profundus caput humeralejának mediodorsalis része) folytatják; itt is érvényesül tehát a *munkamegoszlás* elve. Állás közben a rövid rostú carpalis- és ujjhajlító izmok mint *statikai izmok* részben tisztán *passiv feszítő hatást* fejtenek ki, különösen inas fejeik, a capita tendinea, és fasciáik útján, de activ összehúzódásuk is állapítható meg (KRÜGER actiós áramvizsgálatai szerint). A helyváltoztatáskor ugyanazon izmoknak részben passiv, részben activ működésük van, distoproximalis irányban az ujjhajlítók ugyanis rögzítik, illetőleg nyujtják a carpalis vagy pedig a könyökizületet (bár nevük szerint flexorok).

A ló inazott izmainak másik csoportja hanyatló átalakuláson

megy keresztül, csaknem *működésnélkülivé* lesz, kevés, nagyon rövid, halvány, szövettanilag kevéssé differentiált rostkötegei az inakkal nagy szöget képeznek és az inak majdnem végig haladnak az egész izmon. Ilyenek a musculus vagy tendo interosseus medius, a m. flexor digitalis pedis superficialis (41). Az előbbi már pusztán passiv feszítőszalagként vagy tartóhevederként hat a metacarpo-(metatarso-)phalangealis izület, a csüdizület hajlítófelületén (33), az utóbbi a comb és ujj között, tehát a térd- és a csánkizületre hat mint passiv feszítő szalag a szár plantaris felületén (a ló térde és tarsusa, a csánkja csak együtt térhet ki).

De olyan inkötegek is előfordulnak az activ mozgató rendszer izmos részében, melyekben izomszövet egyáltalában nincs, ilyen a ló biceps brachiijébe beágyazottan átfutó inköteg, mely a lacertus fibrosusba folytatódik, továbbá a *tendo femorotarseus*, mely néven az eddig tévesen m. peronaeus tertiusnak nevezett ínköteg értendő. Idetartoznak azután még a mellső végtag mindkét ujjhajlítójának *caput tendineumai* és a hátulsó végtag mély ujjhajlítójának az előbbieknél gyengébb inas feje, mindezekben nincs izomrost, hanem azok csupán ínszerűen alakult *functionalis fasciamegvastagodások*nak felelnek meg, melyek egyirányú tartós húzás következtében fejlődtek ki rögzítő berendezésül (18). Mindezekben még embryonalisan sem sikerült izomrostokat megállapítani, úgyhogy ezek nem tekinthetők átalakult izmoknak vagy izomfejeknek.

Az ínszövet progressiója az izomszövet egyidejű regressiójával, egészen teljes elmúlásáig, és az inazott izmok izomrostjainak működésen kívüli állapotá az Equidákon *correlativ formativ functionalis alkalmazkodások*at képviselnek, melyek a csontos váz egyszerűbbé alakulásával és a végtag egyirányú, sagittalis, ingaszerű, de gyorsabb mozgásával függnek össze (a lassúbb mozgású *tapir*on a reductió kisebb fokú és az ínszövet is kevésbbé fejlődött ki az izmokban).

Ahogyan a törzsfejlődés során az ősi pentadaktyliának a kevésujjúságba, oligodaktyliába való fokozatos átmenete, kialakulása állapítható meg, a végtagok *embryonalis fejlődés*ekor is az eredeti ötös tagozodás jelei előtünhetnek, különösen az autopodium basipodiumában (carpus, talán a*Cc* is az [45]; tarsus), a ló acropodiumában azonban már csak a III., metapodiumában a II., III. és IV.

sugár jelenik meg, de utóbbiaknak distalis végén a 25 mm-es lóembryón található szövettömörülés sorozatmetszeteinken és átlátszóvá tett készítményeinken a II. és IV. ujj nyomaiként tekinthető és értelmezhető, aminek a ló aránylag nem nagyon ritka *polydaktyliája* keletkezésénél is tulajdonítunk jelentőséget (32). Az Equidák distalis ujjpercén a patacsont hegyén található behúzódás, melyet sokáig többen a patkó kápájának nyomására vezettek vissza és usuranak tekintettek, a *ló ősein* is előfordul, a mesaxon végtagon a megterhelés következtében az *ujjhegy nyomására* keletkezik (31). A metapodium oldalsó sugarai a lóembryón sem érik el a fősugár nagyságát, bár hosszuk és vastagsági átmérőjük is *aránylag* nagyobb a fiatal embryókon mint a kinőtt fetusokon. Az *oldalsó sugarak histogenesise* is lassabban halad előre, a porcosodás, a diaphysis csontosodása is előbb következik be a harmadik, mint a második és negyedik sugárban.

A végtagok csontjainak fetalis kialakulását sorozatmetszeteken átlátszóvá tett embryonális anyagon és röntgenezéssel vizsgáltuk.

A zeugopodiumban az *alkar vázának két sugara* a korai porcos stadiumban csaknem egyenlőértékű, csakhamar azonban az ulnaris rész visszamarad, gyengébben fejlődik, bár distalisan még hosszabb; a középrész távolabb esik a orsócsonttól, míg proximalisan és distalisan a két csontvég érintkezik (29, 38). Később a könyökcsont középső része is közeledik az orsócsont közepéhez, majd az 5—6 hetes lófetus könyökcsontdiaphysise visszamarad a fejlődésben és az alsó végdarabbal együtt egy porcos léccé, fonállá csökken, mely a harmadik hónapban elcsontosodik, míg evvel egyidejűleg a még porcos olekranon lényegesen megnagyobbodik. Az Equidák redukált ulnája szembetűnő individualis különbségeket mutat sorozatos vizsgálataink alapján. Az orsócsont ellentétes fejlődésmenetet tüntet fel, az elcsontosodás közben az ulna hanyatló átalakulásával szemben mint compensatiós correlatio az átmérőjének megnövekedése jelentkezik. E mellett a két csont hosszirányban való növekedése az egész végtag hosszához képest kezdetben a legnagyobb, később azonban a születésig relativ hosszuk csökken.

A medencei végtag zeugopodiumán a *szár két csontja*, a sípcsont és a szárkapocs is porcos állapotban ősibb, eredetibb jelleget

mutat, de a fibula már kezdettől fogva jelentékenyen vékonyabb porcos pálcaként jelenik meg, mint a mellső végtagon az ulna és későbbi *regressiója*, megfigyeléseink szerint, *továbbra is megelőzi az ulnáét*. Középső részének csontosodása nagyon késedelmes a tibiáéhoz képest. A sípcsont vastagságbeli és hosszanti növekedése olyan, mint az orsócsont (38).

A *stylopodiumok*, a karcsont és a combcsont a korai porcos állapotban aránylag a leghosszabbak és azután a születésig relativ hossznövekedésük éppen úgy, mint a zeugopodiumoké, visszamarad (9), a Patásoké jobban, mint az emberé, míg az autopodiumokon a *metapodiumok* hosszanti megnyúlása a születésig halad előre és az újszülött csikó szabad végtagja ezért aránytalanul nagynak, «nyakigláb»-nak tűnik fel (31).

A *végtagizmok fejlődése* és a csontos váz fejlődéséhez és átalakulásához való correlativ viszonya az egyes izomegységek szerint különböző.

Az *egyszerűbb szerkezetű, gyengén tollazott izmok* helyzete, alakja és typusos szerkezete már a fiatal, 4—5 hetes csikóembryókban is olyan, mint a kifejlett lovon. Egészen másként viselkednek azonban az *inas tollazott izmok*, melyek nem mint ilyenek fejlődnek, hanem a morphogenesis korai stadiumaiban mint erőteljes *izmos* kezdemények jelennek meg. A ló mély ujjhajlító izma caput humeralejának lateralis része, az extensor és flexor carpi ulnaris és a biceps brachii medialis része az 5—9. embryonalis héten már csaknem végleges formáját mutatja, de ezután izomrostjaiknak növekedése visszamarad, míg inas lemezeiknek kiterjedése növekedik (25). E korai fejlődésük, megjelenésük miatt e csoport izmai *átmeneti alakok*nak minősíthetők.

Egészen másként megy végbe az eredetileg szintén gyengén tollazott, a kifejlett lovon azonban csaknem *teljesen inas* musculi interossei fejlődése. Ezek az 5—7 hetes csikóembryón mint *páros izmok* különböztethetők meg, az embryonalis 10—18. héten azonban az ínrostok tetemesen megvastagodnak és megsűrűsödnek bennök, *inas összekötőhidak* jelentkezésével a typusos inas tollazott izmok szerkezetét mutatják. A megrövidült izomrostok mindinkább keskenyebb szigetekre szorítkoznak, számuk és terjedelmük csökken, a sarkolysis képe jelenik meg, a harántcsikoltság

elmosódottá válik, újabb izomrostok nem fejlődnek ki (25). Kevés, elmosódott izomrost az újszülött csikó és később a kifejlett ló ez *ú. n. felső egyenítő szalagjai*ban is kimutatható, de ez izommaradványok contractióra nem képesek, mert *elfajulás*os elváltozásokat tüntetnek fel és ínszövetük elrendeződése miatt összehúzódásuk hatástalan maradna (27, 41).

A kifejlett ló mellső végtagjain *erősen tollazott* felületes ujjhajlító izom, a m.-flexor digitalis superficialis v. perforatus, a mély ujjhajlítóizom caput humeralejának mediovolaris része és a kétfejű karizom, m. biceps brachii lateralis része az 5—7 hetes csikóembryón erősen tollazott izmokká alakulnak át, új, váltakozóan elrendezett, megnyúló, *primaer, sekundaer* és *tertiaer* inas redők keletkezése következtében. Ezek tehát másképen alakulnak át, mint a mm. interossei, mert az inas elemek nem lesznek bennök túlnyomóak, bár az izomrostok száma kevesebb, az izomrostkötegek rövidebbek, de maguk az izomrostok nem szenvednek el regressiv elváltozást, később is működésre képesek maradnak, mert *az ínlemezek nem haladnak rajtuk át az eredetüktől kezdve tapadásukig.* A medencei végtag felületes ujjhajlító izma, a m. flexor digitalis *pedis* superficialis izomrostjai ellenben a fejlődésükkor és kifejlett állapotban is hasonló regressiv szöveti elváltozásokat szenvednek el, mint a mm. interossei, bár kisebb fokban.

Az inas tollazott izmok átalakulása legkésőbb a magzati élet közepe tájáig befejezést nyer. A postnatalis életben az aktiv működés vagy a passiv igénybevétel útján még további szabályozás, alkalmazkodás következik be, az izmok functionalis anatomiai szerkezete, az *izomrostok mikrostrukturája* is módosul ; az erősen tollazott izmok teljes kifejlődése és kialakulása tehát hosszabb időt vesz igénybe, mint az egyszerűbb szerkezetűeké (15).

Az Ungulatak végtagjain a mozgás passiv és activ szerveiben úgy, mint a törzsfejlődés során az embryonalis fejlődésben, az ontogeniában is megállapítható a functionalis anatomiai szerkezetek kialakulása.

Roux (23) szerint az egyéni fejlődés során az egyes szervek kialakulásánál *négy egymásba nyúló periodus* különböztethető meg. Ezeknek megfelelően az *első* szakasz az *öröklött*, tisztán a csíraplasmában meghatározott kialakulás. Ez a Patások végtagjain

az autopodiumok oldalsó sugarainak reductiójában, az ulna és a fibula gyengébb fejlődésében és az izmok tollazottságában nyilvánul meg. Ez az önálló, a működéstől független, *okilag afunctionalis, időben praefunctionalis kialakulás.* A fősugár túlfejlődése, progressiója, a könyökcsontnak és a szárkapocsnak, továbbá az oldalsó sugaraknak a fejlődésben való elmaradása a mesaxon végtag öröklött sajátságai, a nyomási viszonyoknak megfelelően régebben a phylogenia során fejlődtek ki. Evvel szemben az inas izmok, a mm. interossei és láb felületes ujjhajlítója, a m. flexor digitalis pedis superficialis (perforatus) nem egyedül a korai embryonalis állapotban maradnak vissza, hanem az izmok hanyatló átalakulása, regressiója az ínszövet erősebb fejlődésével jár együtt, tehát ugyanazon morphologiai egységben *hanyatló és haladó átalakulás egyidejűleg* következik be. Az öröklött afunctionalis tényező már a fejlődés ez első periodusában is érvényre jut.

A fejlődés *második* szakában az öröklött praefunctionalis tényezők keverednek a *functionalis ingerek*kel. Az *egyszerű izmok* rostjai már korán, a 4—8 hetes lóembryón kifejlődtek annyira, hogy szöveti szerkezetük szerint összehuzódásra képesek, ami észrevehető az inszövetüknek a húzó hatásra gyorsabban előrehaladó elkülönülésében. A *magzatkorbeli izomösszehúzódások* azonban csak az egyszerűbb szerkezetű izmok kialakulására hatnak az amnionon belül mozgatható izületeken. Ez azonban más az *inas izmokon*, mert ezek működése is egészen más a praenatalis életben, a születés előtt, mint az extrauterinalis életben, a születés után. A születés előtt nevezetesen nem érvényesülhet a megterhelés hatása, a talaj ellennyomása stb., ezért az inas izmok kialakulásának második időszakában csak correlativ változások, a hosszanti növekedéssel összefüggő, feszülés következtében beálló hatások érvényesülnek.

Az izomszövet regressiója és az ínszövet progressiója a mm. interossei és a felületes lábujjhajlító izmokban ez izmok *harmadik*, illetőleg *negyedik* fejlődési szakában a postnatalis működésváltozásuk következménye, a mozgás *activ* szerveinek *kataplastikus*, a mozgás *passiv* szerveinek *anaplastikus átalakulásai*ként nyilvánulnak meg (8). Az ínszövet, mely fejlődéstanilag — és bizonyára a phylogeniában is — eredetileg az *izomszövet mellékszövete*, most úgy morphologiai, mint functionalis nézőpontból *főszövetté* lesz.

A születéskor az inas izmok már annyira kifejlődtek, hogy az újszülött csikó első állási és járási kísérleteinek megfelelni képesek. Ekkor kezdődik a *harmadik, causalis periodus*, melynél a functionalis ingerek érvényesülnek.

A hanyatló átalakulás annyira terjedhet, hogy egyes állatfajokon *egész izmok hiányozhatnak*. Felmerül már most az a kérdés, hogy ezek az ontogeniai fejlődés közben átmenetileg megjelennek-e? SCHAUDER vizsgálatai nyomán ezt mi is megerősíthetjük, ugyanis 5—10 hetes csikóembryókon a *mm. flexores breves superficiales manus et pedis*-nek megfelelő, homolog izmokat lehet találni. Az Equidák felületes *láb*ujjhajlítója, m. flexor digitalis pedis superficialis (perforatus) összehasonlító anatomiai nézőpontból két izomnak felel meg, ezek a m. plantaris hominis (ez emberen gyenge, csökevényes, gyakran hiányzó izom) és a m. flexor digitalis pedis brevis hominis, melyek a lovon később egységes izomba olvadtak össze, de embryonalis korban átmenetileg az Equidák metapodiumának plantaris felületén a rövid ujjhajlító izom *önállóan* mutatkozik. Hasonlóképpen a mellső végtagokon is a felületes ujjhajlító, a perforatus csak az embryonalis élet 7. hetében veszi fel inába a m. flexor brevis superficialis manus inas maradványait. A kéz és láb egyéb elmaradt izmainak nyomait csikóembryókon eddig nem sikerült megállapítani a mi készítményeinken sem. Ezek helyett azonban az alkarnak megfelelően megszűnt pronatiós és supinatiós kitérésekre szolgáló izmok közül egyesek megjelennek. A kifejlett Equidákon teljesen hiányzó supinatorok embryonalisan sem fejlődnek ki. A négyszögű borintót *(m. pronator quadratus)* SCHAUDER a 30 cm hosszú lófetusig gyenge izmos maradványaiban mutatta ki, de az csak a radius hosszának $^1/_5$—$^1/_6$ részére terjed, a radius közepe táján, ahol az alkar két csontja között legnagyobb a távolság. Az alkar vázának pronatiós helyzetben való teljes rögzítésével a pronatorok működése kiesik, a könyökcsont diaphysisének regressiójával a négyszögű pronator elmúlik, működésen kívül állva nélkülözhetővé lesz, helyén feszes kötőszöveti, később elcsontosodó hártya található. A görgeteg borintót *(m. pronator teres)* többen a *kifejlett* Equidákon is kimutattuk gyenge nyomokban (40), mely így nem pronatióra, hanem esetleg pólyafeszítésre szolgál, több-

nyire már fiatal korban teljesen inassá lesz és jó példát szolgáltat az *allobiosis* jellenségére (39).

Végül megemlítendő, hogy a *regressiv* szervi átalakulást a phylogenia nézőpontjából a *descendentia* helyességének bizonyítására szokták felhasználni. A *progressiv* átalakulások rendszerint az előbbiekkel *compensáló* viszonyban állnak és velük együtt betekintést engednek a magzatkorbeli és a születés után bekövetkező törvényszerű kialakulások biologiai jelentőségébe, a működéstől függő, functionalis anatomiai átalakulások keletkezésébe.

## Irodalom.

1. Abel O.: Grundzüge der Palaeobiologie der Wirbeltiere. Jena, 1912.

2. U. az, Lehrbuch der Palaeozoologie. Jena, 1924.

3. Benninghoff A.: Ueber die Entstehung functioneller Strukturen. Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft 1930.

4. U. az: Funktionelle Anpassung im Bereich des Bindegewebes. U. ott.

5. Bierbauer L.: Összehasonlító vizsgálatok egyes háziállatok tüdejének rugalmas rostjairól. Közlemények az összehasonlító élet- és kórtan köréből. 25. k.

6. Bogdaschew N.: Funktionelle Unterscheidungsmerkmale im anatomisch-histologischen Bau der Röhrenknochen der Haustiere. Anatomischer Anzeiger. 79. k.

7. U. az: Der Zusammenhang der anatomischen Formen der Metacarpal- und Metatarsalknochen der Haustiere mit dem histologischen Bau und der chemisch-physikalischen Eigenschaften derselben. Anatomischer Anzeiger 70. k.

8. Bonnet R.: Über kataplastische und anaplastische Organe. Ergebnisse der Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 21. k.

9. Broskó J.: A ló és a marha karcsontjának és combcsontjának méretei. Közlemények az összehasonlító élet- és kórtan köréből. 27. k.

10. Drahn F.: Extremitätenentwicklung und Polydactylie bei Pferde. Zoologische Bausteine. 1. 1927.

11. Dohrn A.: Der Ursprung der Wirbeltiere und das Prinzip des Funktionswechsels. Leipzig. 1875.

12. Driesch H.: Der Begriff der organischen Form. Abhandlungen zur theoretischen Biologie. 95. k.

23. Guoth Gy. E. és Csukás Z.: Szövettani vizsgálatok a metacarpus compactája megvastagodásának gyulladásos vagy hypertrophiás eredetéről. Állatorvosi Lapok 1930.

14. Gruics D.: Az izületi porcok vastagsági méreteiről. Közlemények az összehasonlító élet- és kórtan köréből. 21. k.

15. Hasskó S.: Mikropolarizációs vizsgálatok; mikroszkópos vizsgálatok a háziállatok izmain. Közlemények az összehasonlító élet- és kórtan köréből. 21. k.

16. Kadletz N.: Muskulatur der Beckengliedmasse des Pferdes und Rindes, nebst metrischen Angaben. Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 95. k.

17. Krompecher I.: A rugalmas porcogó functionalis szerkezete. Matematikai és Természettudományi Értesítő 50. k.

18. Krüger W.: Über funktionelle Fascienverstärkungen bei den grossen Haustieren. Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft 1931.

19. Lubosch W.: Grundriss der wissenschaftlichen Anatomie. Leipzig, 1925.

20. Mátyás E. und Szabó M.: Das nähere Verwandschaftsverhältnis zwischen dem Menschen und den Anthropoiden auf Grund mikro-osteologischen Untersuchungen, auch mit Rücksicht auf die feinere Knochenstruktur der Carnivoren und Ungulaten. Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 97. k.

21. Orsós F.: A tüdő rugalmas vázrendszere ép és kóros állapotban. Orvosi Hetilap 77. évf. 51. sz. melléklete.

22. Richter H.: Beziehungen zwischen Form und Funktion und das Planmässige an den Naturphänomenen. Anatomischer Anzeiger 75. k.

23. Roux W.: Gesammelte Abhandlungen über Entwicklungsmechanik der Organismen 1895.

24. Schauder W.: Anatomische und metrische Untersuchungen über die Muskeln der Schultergliedmassen des Pferdes. Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 71. k.

25. U. az. Die fetale Entwicklung der Sehnenmuskeln des Pferdes. Archiv für mikroskopische Anatomie 102. k.

26. U. az. Über korrelative funktionelle Gestaltungen an den Gliedmassen von Ungulaten, besonders Equiden. Münchener Tierärztliche Wochenschrift 82. k.

27. Szakáll Gy.: A felső egyenlítő szalag bonctana és működése. Közlemények az összehasonlító élet- és kórtan köréből. 1895.

28. Törö J.: Periodicitás és rythmus az élet megnyilvánulásaiban. Orvosok és gyógyszerészek lapja 1935.

29. Zimmermann A.: Zur Anatomie der Ellbogengelenkflächen der Haussäugetiere. Anatomischer Anzeiger 37. k.

30. U. az.: Összehasonlító anatomiai vizsgálatok a ló elülső végtagjainak ujjnyujtóiról. Állattani Közlemények. 11. k.

31. U. az.: A ló ujjának anatomiája. Budapest, 1909.

32. U. az.: A ló polydaktyliájáról. I—V. közlemény. Állatorvosi Lapok 1902—1934.

33. U. az.: A csüdizület szalagai. Állatorvosi Lapok. 1909.

34. U. az.: Adatok a carpalis izület összehasonlító anatomiájához. Állattani Közlemények 25. k.

35. U. az.: Miért nem fárad el a ló állás közben? Természettudományi Közlöny, 1915.

36. U. az.: A belső elválasztás és az alkat. Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz. 64. k. 1. sz. 1932.

37. U. az.: Háziállatok anatomiája. II. kiadás. 1921.

38. U. az.: Fejlődéstan. II. kiadás. 1922.

39. U. az.: Az allobiosis fogalma. Állatorvosi Lapok. 52.

40. U. az.: A musculus pronator teres összehasonlító anatomiájához. Matematikai és Természettudományi Értesítő. 45. k.

41. U. az.: A ló ujjhajlító inainak functionalis szerkezete. Matematikai és Természettudományi Értesítő. 56. k.

42. U. az.: Functionalis szerkezetek és rendszerek az anatomiában. Állatorvosi Lapok. 56. k.

43. U. az.: Adatok a juh gégéjének összehasonlító anatomiájához. Állattani Közlemények. 33. k. (Sajtó alatt.)

44. ZIMMERMANN G.: A csont működésbeli szerkezete. Természettudományi Közlöny. 65. k.

45. U. az.: Adatok az os carpi centrale összehasonlító morphologiájához. Matematikai és Természettudományi Értesítő. 45. k. (Sajtó alatt.)

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott üléséből.)

# FUNKTIONELLE ANATOMISCHE STRUKTUREN.

Von A. ZIMMERMANN, o. Mitglied.

Die Anatomie darf sich nicht mit der rein deskriptiven Richtung, allein mit der eingehenden Untersuchung und genauen Beschreibung von noch so interessanten minutiosen Einzelheiten begnügen, denn der anatomische Bau der einzelnen Organen weist manningfache Unterschiede je nach dem Alter, der Inanspruchnahme, der Funktion, der Konstitution, der Rasse u. A. auf und die Anatomie stellt keine erstarrte, konstante Verhältnisse dar. Die Umgestaltungen treffen sowohl während der Phylogenie, als auch innerhalb der Ontogenie ein und während der postembryonalen Entwicklung, im postnatalen Leben bis zum Tode können ganz wohlmerkliche normale Veränderungen auftreten und sollen deshalb in biologischer Betrachtung beschrieben werden.

Die von Roux inaugurierten entwicklungsmechanischen Untersuchungen sollen sich daher nicht nur auf die frühzeitige Stadien der Ontogenie beschränken, denn die kausale Morphologie findet ein ausgebreitetes Untersuchungsgebiet in der *funktionellen* korrelativen Ausgestaltung der Organe, in der Entstehung der funktionellen Strukturen, in der funktionellen Anpassung der organischen Form.

Die *Gliedmassen der Ungulaten* weisen besonders demonstrative Zeichen der funktionellen Gestaltung in ihren verschiedenen anatomischen Teilen auf. In früheren Arbeiten über den funktionellen Bau der Zehenbeugesehnen, dann über die Ellbogengelenkflächen, den Olekranon, über die vergleichende Anatomie des Carpalgelenkes, die Bänder des Fesselgelenks, der Zehenstrecker, über den Pronator teres u. A. hat Verf. bereits mehrfach darauf hingewiesen, wie mit den einseitigen pendelartigen Bewegungen und

der unguligraden Belastung der Ungulatengliedmassen die charakteristischen Umgestaltungen in den Zehen und auch weiter proximal in den Extremitäten zustande kommen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Gestaltungen synthetisch dargestellt, zusammenfassend besprochen und ausserdem auf die Veränderungen in dem inneren Bau, der Mikrostruktur, insbesondere im feineren Knochenbau, dann aber auch im aktiven Bewegungssystem näher hingewiesen.

Im Hauptmittelfussknochen, den Metacarpale und Metatarsale tertium weist die Compacta und noch mehr die Spongiosa, das Trajektoriensystem der Belastung, der Fusstellung, dem Gebrauch (Rennpferde) u. A. entsprechenden Umbau auf, doch auch in der Zahl, Anordung, Verteilung und Richtung der Osteonen, der Havers'schen Lamellensysteme (Synosteone, etc.), der generellen und interstitiellen Systeme lassen sich wohlmerkbare, sogar wesentliche histologische Unterschiede feststellen, diese werden in einer späteren Arbeit näher, eingehender erörtert und tabellarisch dargestellt.

Wie in verschiedenen Organen BENNINGHOFF und seine Schule, dann ORSÓS u. A. nicht nur im Gerüst, im passiven, sondern im aktiven Bewegungssystem gleichfalls der Funktion angepasste anatomische Strukturen darstellten, ebenso oder womöglich noch ausgeprägter können solche in vielen Muskeln der Ungulatengliedmassen nachgewiesen werden. Besonders die sogen. Sehnenmuskeln zeigen in ihrer ganzen Entwicklung die prägnante Zeichen der korrelativen funktionellen Gestaltung. Das Prinzip der Arbeitsteilung, die mechanische, statische und dynamische Verhältnisse, die funktionelle, biologische Betrachtung gelangen hier ausdrücklich zur Geltung.

Während dem Leben lassen sich also progressive und regressive Veränderungen nicht nur in der Knochenstruktur nachweisen, sondern infolge ihrer Anspruchnahme auch in dem Muskelsystem.

Die Zehenbeuger, die Carpalbeuger, der Biceps brachii und andere gefiederte Extremitätenmuskeln der Ungulaten entstehen als kräftige Muskelanlagen, doch bald bleiben die Muskelfasern in ihrem Wachstum zurück und die sehnigen Lamellen breiten sich in ihnen aus. Andre wieder, die im embryonalen Leben noch mus-

kulär erscheinen, werden bei der vollen Entwicklung rein sehnig, so die Musculi interossei, die bei Equiden früher deshalb als «obere Gleichbeinbänder» bezeichnet wurden. In solchen Muskeln lassen sich während der Entwicklung im Muskelgewebe degenerative Veränderungen nachweisen und mit der Ausbreitung des Sehnengewebes wird ihre Kontraktion wirkungslos. Die regressiven Veränderungen des Muskelgewebes, die Umgestaltung ihrer Mikrostruktur, schreiten hier mit der korrelativen Platznahme des Sehnengewebes vorwärts und bei den stark-gefiederten oberflächlichen Zehenbeuger der Beckenextremität des Pferdes mit sekundären und tertiären Sehnenfalten lassen sich Sehnenfaserbündeln nach weisen, die vom Ursprung bis zur Insertion reichen.

In der Ausgestaltung der funktionellen anatomischen Strukturen erscheinen vorerst ererbte, in dem Keimplasma bedingte Anlagen; als solche müssen die Reduktion der seitlichen Zehenstrahlen bei den Solidungulas angesprochen werden, die mit dem mesaxonen Hervortreten des mittleren Hauptstrahles, starker Entwicklung der Speiche und des Schinbeins, Fiederung der Muskeln einhergeht. Diese Gestaltung erscheint selbständig, unabhängig von der Funktion, kausal afunktionell, zeitlich praefunktionell.

Manche Teile verbleiben jedoch nicht in ihrem frühembryonalen Stadium, sondern es treten in diesem weitere regressive Veränderungen auf, anderseits aber tritt gleichzeitig eine vorschreitende Entwicklung anderer Gewebe auf; so kommen in derselben morphologischen Einheit vorschreitende und rückschreitende Veränderungen gleichzeitig vor, zum B. in den Zwischenknochenmuskeln und im oberflächlichen Zehenbeuger ist das Verhalten des Muskelgewebes und des Sehnengewebes bereits während der fetalen Entwicklung eine dementsprechende.

Zu diesen praefunktionellen Faktoren treten später die funktionellen Reize, die aber im pränatalen, intrauterinalen Leben anders, u. zw. korrelative wirken, während dem extrauterinalen Leben hingegen dann die Belastung, der Gegendruck vom Boden aus zur Geltung gelangt.

Im postnatalen Leben kann auch Funktionswechsel auftreten, aktive Bewegungsorgane werden zu passive umgestaltet, das Sehnengewebe, welches ontogenetisch und auch phylogenetisch

ein ursprünglich Nebengewebe des Muskelgewebes darstellt, wird jetzt in einigen Muskeln sowohl morphologisch, wie auch funktionell zum Hauptgewebe.

Die regressive Veränderungen können sogar soweit vorschreiten, dass ganze Muskeln wegbleiben, so z. B. bei den Equiden die Supinationsmuskeln, während der Pronator teres als ein Beispiel der Erscheinung der Allobiose, im jugendlichen Alter sich ganz sehnig umgestaltet.

Die regressiven funktionellen Anpassungen sollen dabei auch Beweise zur Descendenztheorie liefern.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# AZ ÁTÖRÖKLŐDŐ SZERVI IDEGBÁNTALMAK KÓRSZÖVETTANI MEGHATÁROZÁSA.

SCHAFFER KÁROLY r. tagtól.

(8 ábrával.)

1914-ben tartott akadémiai székfoglalómtól fogva a mai napig az átöröklődő szervi idegbántalmak kórszövettana kérdésében a magam állásfoglalása bizonyos változásokon esett át és így legyen szabad a mai, véglegesnek mondható felfogásomat az alábbiakban előterjesztenem.

Fejtegetéseim legelején utalnom kell egy az Akadémiának tavaly bemutatott munkámra, mely az Értesítőben is megjelent és amelyben a központi idegrendszernek két, legnagyobb általánosságú reactiójáról, a belső eredésű vagy neurogen és a külső eredésű vagy neurotrop elváltozások rendjéről értekeztem. Az endogen betegségek a megtermékenyített csírasejtek tehát az átörökítés útján állanak elő és így rájuk nézve felette jellemző körülmény, hogy a kóros átörökítés magára az idegrendszerre vonatkozik oly értelemben, hogy ilyen alkalommal magában az idegrendszerben gyökeredzik a bántalom, belőle indul ki, azért is nevezem én ezt a bántalmat az idegrendszerből eredő, neurogen elváltozásnak. Miután pedig ezek az elváltozások az ideg- vagy dúcsejtekből indulnak ki, *gangliocellulogen* bántalmat jelentenek és így képviselői a neurogen megbetegedéseknek, szemben a neurotrop bántalmak ama csoportjával, melyek a poliomyelitis alatt valósulnak meg azáltal, hogy ennek mérge meghatározott dúcsejtcsoportokhoz, vagy kizárólag mozgató, vagy tisztára érző idegsejtekhez mutat affinitást és így jön létre a *gangliocellulotrop* bántalom. Itt is utalnék fentnevezett akadémiai értekezésemre.

Ma az átöröklődő családias és a ducsejtekből kiinduló neurogen bántalmakról szólnék azzal a célzattal, hogy ezeknek anatomiai, morphologiai jellemzését adjam. Mint említém, ezeknek kórtani lényege magában az idegsejtben, ennek valamely velenemzett kóros állapotában rejlik, az idegsejt tehát életképtelen, és ez az, amit *abiogenesisnek* nevezünk. A klinikai tapasztalás szerint ezen életképtelenség az emberi létnek különböző szakában jelentkezhetik és itt mint két szélsőséget a csecsemőkorbeli családi vakságos idiotaságot és a családi merevgörcsös bénulást említeném. Míg az előbbi alak a 6—8 hónapos csecsemőn mutatkozik első nyomaiban és néhány hónapnyi betegség alapján a második életév előtt halállal végződik, addig a családi merevgörcsös bénulás többnyire a 3—10. életévben indul meg és több évtizeden át csaknem változatlanul áll fenn, a nélkül, hogy önmagában az élettartamot megrövidítené, tehát csak valamely közbejött heveny megbetegedés következtében áll elő a halál. Ezen viszonyokhoz képest a csecsemőkorbeli családi vakságos idiotaság esetében az idegsejtek az életképtelenségnek hasonlíthatatlanul súlyosabb fokában leledzenek szemben a családi merevgörcsös bénulással, de mindkét esetben a kórtani lényeg az, hogy az eladdig jól működő idegsejt külső ok nélkül kezd szöveti épségében hanyatlani és végül elpusztul. Ebben a folyamatban az *endogen degeneratio* jut kifejezésre, amit az *abiotrophia* névvel illet az idegkórtan. Tehát az átöröklődő szervi idegbántalmak lefolyásában abiogenetikus idegsejtek szerepelnek, melyeknek feltartózhatatlan sorsa az előbb vagy utóbb beköszöntő abiotrophiában adva van. Már most éppoly érdekes, mint fontos mozzanat, hogy az átöröklődő szervi idegbántalmak ezen dúcsejtes megbetegedése egy szigorúan válogatós, elektiv bántalmat jelent, mert a központi idegrendszerben más elem nem betegszik meg *elsődlegesen*, vagyis az idegsejtek mint a külső csíralevél leszármazottjai betegszenek meg *kizárólagosan*, teljesen szabadon hagyva az idegszövet felépítésében résztvevő érrendszert és agy-gerincvelői hártyákat, melyek a középső csíralevél leszármazottjai. Tehát a külső csíralevélből való idegsejtes vagyis neuronalis elemek fajulnak el, másszóval elektiv neuroektodermás degeneratio szerepel a mesodermás elemeknek szigorúan szabadonhagyásával. Ezen tiszta neuroektodermás elektiv folyamat a maga elektivitását a tapasztalás szerint

két főformában mutathatja meg. 1. A válogatás abban nyilvánulhat meg, hogy az emberi idegsejtek valamennyien betegszenek meg, tehát az idegrendszer *összes* idegsejtjei, vagyis úgy a vegetativ, mint animalis idegrendszer részéről, amikoris az emberi nagyagyi kéregtől fogva nem csupán a gerincvelő legalsó farki végéig az összes agy-gerincvelői dúcok beleértésével, hanem a nagy sympathicusnak határkötege és az intramuralis része, mint pl. a belek submucosájában levő ganglionsejtek is majdnem egyszerre és egyformán pusztulnak el degeneratio formájában. És aminthogy ezen kizárólagosan gangliocellulás degeneratio a maga hatalmas arányaival figyelmünket nagyon megragadja, azzal a ténnyel, hogy a folyamat az idegrendszer több milliónyi idegsejtje közül egyetlenegy idegsejtet sem kímél meg, mint szokás mondani a folyamat *ubiquitarius* vagy *generalis*, úgy ezzel az absolut diffusióval szemben áll, 2. a gangliocellulás elektivitásnak szigorúan *körülhatárolt* megjelenési formája, amikor az idegsejtbántalom egyetlenegy neuronrendszer eredő gócának idegsejtjeire marad *korlátozva*, miáltal az ú. n. *elsődleges rendszermegbetegedés* képe áll elő, amint erről bevezetően említett akadémiai munkámban megemlékeztem. Itt a következő hármas elektivitás jut kifejezésre: 1. egy meghatározott szelvényes neuronközpontra vonatkozó válogatás, 2. miből folyik a neuronrendszer válogatása is, végül 3. meghatározott neuronelemeknek mint a külső csíralevél leszármazottjainak válogatása. Ezt a háromszoros válogatást neveztem 1924-ben a *pathogenetikai triasnak*. Lássuk már most a gangliocellulogen folyamat két képviselőjének, az ubiquitarius vagy generalis és a systemás vagy körülírt degeneratiónak fínomabb kórszövettanát és így állapítsuk meg e két formának anyagi mibenlétét, végezetül vonjuk le legáltalánosabb következtetéseinket.

## I. Generalis gangliocellulás megbetegedés.

E sejtmegbetegedési forma tárgyalása előtt ajánlatos lesz futó pillantást vetnünk a családi vakságos idiótaságra (cs. v. id.) klinikai szempontból. 35—40 év előtt ennek csecsemőkorbeli alakjával ismertettek meg angol és amerikai szerzők (Waren—Tay, B. Sachs, Hirsch, Spiller), majd 1905-ben H. Vogt és W. Spiel-

MEYER a juvenilis formával, végül 1925-ben H. KUFS az ú. n. felnőtt vagy adultus alakkal. Dacára e három alak nagy korbeli különbségeinek és bizonyos klinikai eltéréseknek, van egy mozzanat, amely e három formát közös nevezőre hozza és ez az idegsejteknek kifejezett duzzadása, mely lényegi vonásaiban egyformán mutatkozik mindhárom formánál. Ezt a kórszövettani tényt BIELSCHOWSKY a következő találó szavakkal fejezte ki: «Den ruhenden Pol in der Flucht der Erscheinungen bildet einzig der SCHAFFERsche Zellprozess und alle Fälle, welche dieses Merkzeichen besitzen, gehören zusammen, mögen sie sich symptomatologisch noch so weit von einander entfernen.» Ugyanezt mondta I. H. GLOBUS: «Der SCHAFFERsche Ganglienzellprozess ist und bleibt das gemeinsame Bindeglied aller Krankheitsfälle, die der grossen Gruppe der amaurotischen Idiotie zugehören.» Vessünk már most futó pillantást a cs. v. id. klinikájára, miközben a típusos átlagkórképen kívül figyelemmel leszünk az átmeneti, illetve eltérő formákra is.

Az *infantilis forma*, vagy mint még nevezik, a TAY—SACHS—SCHAFFER-*féle alak*. Ismertető jegyei: 1. a bántalom kezdete 6—8 hónapos csecsemőn, 2. a családias jelentkezés zsidó csecsemőkön, 3. a bántalom a második életév előtt halálosan befejeződik, 4. kezdettől fogva jellemző reá nézve a sárga folt tájékán mutatkozó szürkés-fehéres korong meggypiros folttal, ez a macula-tünet, 5. a bántalom kezdetéig rendes testi és szellemi fejlődést mutató csecsemő előrehaladóan elbutul, 6. a végtagok spastikus bénulása, 7. a látóképesség csökkenése a teljes megvakulásig, 8. a bántalom súlyos marasmussal végződik, közben epilepsiás görcsök.

A *juvenilis* vagy H. VOGT—W. SPIELMEYER-*féle alak*. Tünetei H. VOGT szerint: 1. a bántalom kezdete az iskolaköteles korra esik, tehát a 6—10. életévre; 2. családias jelentkezés több eddig egészségesnek látszó gyermeken keresztény családokban, 3. fokozatos csökkenése a látóképességének a teljes megvakulásig, 4. az addig megszerzett ismereteknek fokozatos tűnése, végül súlyos elmegyengeség, 5. a végtagok spastikus vagy petyhüdt bénulása, 6. a betegség tartama sok évre, illetve évtizedre terjed ki, a halált mindig valami szövődmény tételezi fel. T. SJÖGREN igen alapos és nagyarányú klinikai összeállításában az említett kórtünetekhez még hozzácsatolta az epilepsiát, a retinitis pigmentosát és az athetoid

izommerevedés állapotát; halál 30—40-es években; a svéd szerző szerint tehát a juvenilis formának extrapyramidalis színezete is lehet.

Az *adultus* vagy *felnőtt formát* H. Kufs írta le. E bántalom családilag jelentkezik, két testvéren, jelesen előbb a nővéren, később a fiútestvéren. A 26 éves asszony, aki akkor második egészséges gyermekét szülte meg, ezen időponttól fogva rohamosan hanyatlott szellemileg és így előállott az elbutulás; a betegen előbb lueses alapbántalomra gondoltak, de a beteg liquora negativ volt. Nagy tisztátlanságánál fogva intézeti elhelyezést igényelt és tompa nyomottsággal váltakozva elmegyenge hangulati emelkedettséget tanúsított. Járása ataxiás, nagy lefogyás, halál szívgyengeség következtében. A beteg fivére ugyanezt a kórképet mutatta. Fontos, hogy a két testvér atyja, aki szellemileg teljesen ép volt, szemfenékileg a retinitis pigmentosa képét mutatta.

Ettől a három alaktól a kor tekintetében mutatkozhatnak kisebb-nagyobb eltérések. Így pl. a csecsemőkorbeli idiótaság nem a második életév határán végződik, hanem a harmadik életévig elhúzódhatik, amikoris átmeneti alakot alkot a juvenilis forma felé és így előáll a késői csecsemő-, illetve a kora ifjúkorabeli idiótaságfélesége.

További klinikai sajátosságra bukkant F. K. Walter, aki az általa észlelt idiótaság juvenilis formájánál semmiféle szemfenéki kóros eltérést sem látott. Fentebb utaltunk arra, hogy az infantilis alakra nézve a maculatünet, a juvenilis alakra nézve a retinitis pigmentosa, illetve egyszerű látóidegsorvadás megállapítható, míg a felnőtt alak képviselői önmagukban nem mutatnak szemfenéki elváltozást, de az apa a retinitis pigmentosa képét mutatta. Ehhez képest a cs. v. id. mind a három formájára nézve az ú. n. optikai komponens szerepet játszik; az első két formában közvetlen, az utóbbinál, vagyis a felnőtt formánál közvetett jelentőséggel, mivel nem a betegek maguk, hanem az egészséges apa mutatta a retina fentemlített elváltozását festenyes szemecskék lerakódásának a formájában. Már most az F. K. Walter eseteiben a szemfenék teljesen ép volt és ez késztette őt arra, hogy a cs. v. id. eseteiben meghatározó jelentőséget csupán a családiasságnak és az idiótaságnak tulajdonítson, az optikai komponenst mellékesnek tekintse

és így beszél ő nem vakságos, hanem egyszerűen családi idiótaságról. WALTER eseteinek megítélése szempontjából azt nézte fontosnak, hogy ő az idegsejtek duzzadási folyamatát minden esetében kimutathatta, mint mondta, a «SCHAFFER-féle sejtfolyamatot», ezt tekintette döntőnek, miképpen BIELSCHOWSKY és GLOBUS.

Visszatekintőleg a cs. v. id. klinikájára, két mozzanatot emelnénk ki. Az egyik az átmeneti alakok létezése, a másik az optikai komponens hiánya; míg a kor tekintetében mutatkozó átmenetek az átöröklődő elme-idegbántalmakban közismert mozzanatot jelentenek vagyis a korhoz való kötöttség nem mondható absolutnak, addig az optikai komponens elég fontos jelenség abban az értelemben, vajjon nem kell-e nekünk az utóbbinak olyan jelentőséget tulajdonítanunk, hogy hiánya a kórkép felállítása szempontjából döntő lenne. Ebben a kérdésben azonban hivatkozhatunk SJÖGREN kitűnő munkájára, melyből kitűnik, hogy bárha ritkán, de előfordulhat az optikai tünet hiánya a cs. v. id. eseteiben és így végső elemzésben azt kell mondanunk, hogy a cs. idiótaság vakság nélkül a kórképnek egy klinikai változatát teszi ki.

Ezen rövid klinikai bevezetés után áttérhetünk a cs. v. id. kórszövettani képére, melynek tanulmányozását azért fogjuk a csecsemőkorbeli alakkal végezni, mert a csupán többhónapnyi, illetve legfeljebb 1 és félévnyi lefolyás igen rövid tartamánál fogva a kórfolyamat rohamos lepergését jelenti és így az itt mutatkozó kórszövettani elváltozások a legélesebben fognak kifejezésre jutni. Az elváltozások sikeres tanulmányozásában két szövetfestési módszer teend szolgálatokat; az egyik a BIELSCHOWSKY-féle fibrillumos ezüstimpraegnatiós eljárás, a másik a WEIGERT-féle velőfestési eljárásnak egy általam ajánlott modósítása.

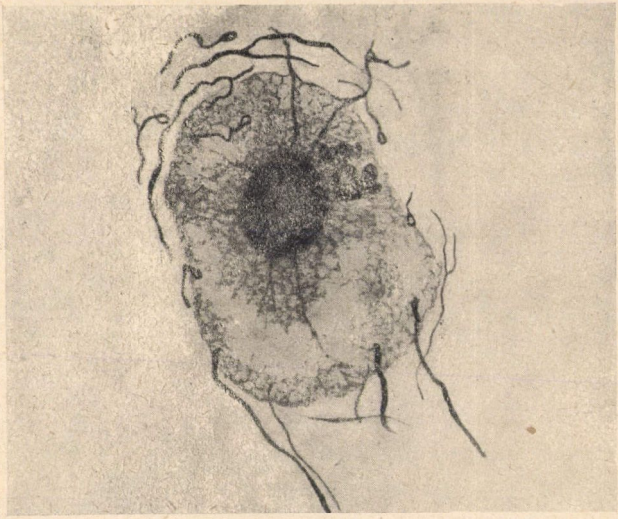
A fibrillumimpraegnatio módszerét 1905-ben én alkalmaztam legelőször a cs. v. id. kórszövettani tanulmányozásában és így mint első mutathattam ki a ganglionsejtek nagyfokú, szinte szertelen duzzadását; a duzzadás úgy a sejttest, mint a dendritek részéről mutatkozott. Jelesen a sejttest gömbszerűen felfúvódik, miáltal eredeti alakja eltűnik, mert a közismert konkáv körvonalak konvexszé válnak, mi mellett a sejtmag központi fekvéséből kimozdul, vagy a sejttest szélére, vagy a csúcsi dendritbe beszorítva. A dendritek duzzadása jellegzetesen korsószerű (ampullás) vagy hólyag-

szerű (cystás) helyi felfúvódásban nyilvánul meg, miközben ezen elváltozás szorosan helyileg jelentkezik, úgyhogy előtte meg mögötte a dendrit eredeti normális szélességben mutatkozik. Feltűnő továbbá, hogy ilyen helyileg nagyfokú felduzzadások, melyek az eredeti dendritátmérő 10—20-szoros megnagyobbodását jelentik, magukból még egészen rendes másod-, illetve harmadrendű dendritágakat küldenek ki (l. 1. ábra). Megtörténik, hogy úgy a sejttest, valamint az összes a látótérbe beleeső dendritek duzzadtak és csak egyetlenegy másodrendű ág marad a duzzadástól szabad. Végül még a tengelyfonálról kell megemlékeznünk; ez sokkal ritkábban, de szintén helyi felpuffadást mutathat.

Áttérve most a duzzadás fibrillumos képének fínomabb részleteire, tanulmányozzuk azokat az első ábrán, mely a nagyagyi kéregnek egy pyramissejtjét mutatja. Ezen feltűnik úgy a sejttestnek, valamint a dendriteknek egy felszínes és durván kötegezett (fasciculált) fibrillumos recéje, míg a sejttest és a dendritek belsejében egy sokkal fínomabb rece látható. E kétrendbeli rece közül a durva külső rece sokkal ellentállóbb, mert a duzzadási folyamat igen előrehaladott fokán ez épségét megtartja, míg az alatta levő belső rece aránylag hamarosan széthullik eleinte dur-

1. ábra. Az agykéreg kis pyramissejtjének típusos fibrillumképe Tay—Sachs esetén. Figyelemreméltó a sejttest (*K*) duzzadása, minek következtében még ép intracellularis rece hézagaiban megnagyobbodott, e mellett a mag is duzzadt. Különös jelentőséggel bír a basalis dendritnek (*Bd*) helyi cystaszerű felfúvódása (*Cy*), mely helyen a felszínes fibrillumrece érintőileg meg levén metszve, szabad betekintést nyerünk a duzzadt dendritrész belsejébe, mely a szemcsésen szétesett belső recét mutatja. Feltűnő, hogy az erősen felfúvódott basalis dendrit oldalágai rendes átmérőjűek.

vább, később finomabb szemecskékre, úgyhogy a durva külső, hólyagszerűen felduzzadt rece detritust foglal magában. A ezüstös impraegnatióval kezelt metszetek megkapó élességgel rajzolják ki a sejtduzzadás alaki viszonyait, mert fehéres alapon szinte tussal meghúzott vonalak formájában tűnnek fel a szinte groteszk torzításokat elszenvedő felfúvódott idegsejtek. Tekintve már most, hogy ezt a képet az én vizsgálataim tették láthatóvá, valamint azt is, hogy ehhez foghatót az idegkórszövettanban nem ismertünk: érthető,



2. ábra. Argentophil inclusio a nyúltvelő egyik duzzadt idegsejtjében; fibrillumimpraegnatio.

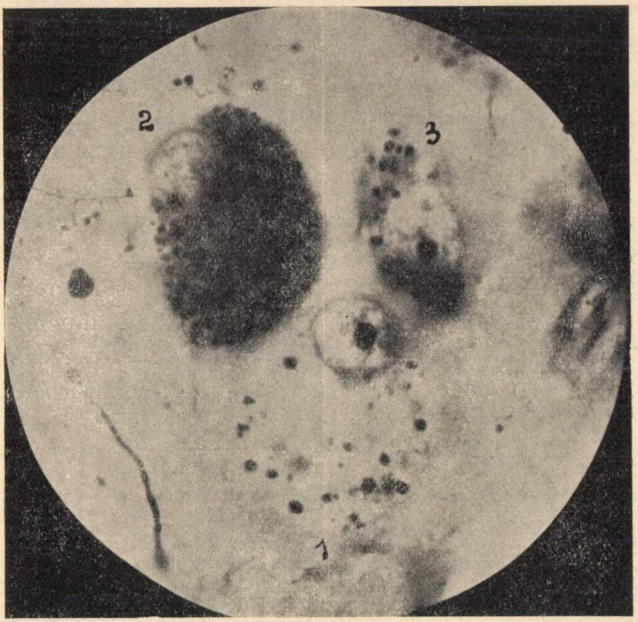
hogy a sejtduzzadás eme képét magára a családi idiótaságra nézve fajlagosnak, jellegzetesnek nézték (SPIELMEYER, BIELSCHOWSKY, WALTER és GLOBUS) és hogy rólam nevezték el.

A fibrillumos kép még egy másik kóros alaki vonást mutat, mely a duzzadt sejttestben, illetőleg dendritekben jelentkező és ezüsttel feketére, illetve sötétbarnára színezett és helyileg jelentkező kisebb-nagyobb gömbökből áll, melyeket SÁNTHA *argentophil inclusiók*nak nevezett el (l. 2. ábra). Ezeket legelőször SOMOZA látta a kisagyvelő PURKINJE-féle idegsejteiben, nevezetesen a sejt-

testben, és hajlandó volt ezeket rendellenes második magnak tekinteni; ezzel szemben azonban SÁNTHA azonnal felismerte a valót, midőn ezen felfogás ellen tiltakozva kimutatta, hogy szó sem lehet egy második magról, hanem úgy a sejttestben, valamint a dendritekben a felfúvódás közepette ezüsttel impregnálható kóros elfajulásos termékről lehet szó; ezt a felhőszerű homogen tömeget SÁNTHA az ezüsttel való impregnálhatóságánál fogva proteinszerű elfajulásos anyagnak nézi. A kisagyvelőn kívül még a nyúltvelő egyes magjaiban hasonló ezüstös zárványok mutathatók ki, de eddig máshelyütt, vagy a csüllőagyvelőn kívül nem láttuk e kóros képleteket. Mindjárt látni fogjuk, hogy a duzzadt idegsejtekben még másrendű elfajulási termékek is mutathatók ki és így szinte követelően tolul elénk az a kérdés, hogy mi tételezi fel ezt a szinte páratlan nagyfokú duzzadását az idegsejteknek?

E kérdésnek megoldásában bennünket az ezüstös impregnatio, mint az idegsejtek és összes nyúlványainak körvonalait feltüntető módszer, cserbenhagyott és így egy másik módszerre voltunk utalva, melyet mint első a Weigertes velőfestési módszerben, illetve ennek általam javasolt módosításában ismertem fel. Már vizsgálataim legkezdetén 1910 után feltűnt nekem, hogy a WEIGERT-féle haematoxylinos festéssel a normalis velőshüvelyen kívül még a duzzadt idegsejteknek szemcsés elfajulásos tartalma is láthatóvá válik, melynek úgy alaki, mint sajátos festődési viszonyai különös nyomatékkal terelték figyelmemet ezen elváltozások felé. Hamarosan rájöttem, hogy az eredeti WEIGERT-féle velőfestés csupán halvány nyomokban tehát tökéletlenül tünteti fel a duzzadt idegsejtekben és dendritekben foglalt haematoxylinnal festhető ú. n. haematoxylinaffin-szemcséket és keresnem kellett oly módosítását az eredeti WEIGERT-festésnek, mely ezen képet szabatosan és biztosan tünteti fel. Ezt megtaláltam apró agydarabkáknak túlchrómozásában, mert nem elégedtem meg az agy-gerincvelőnek a szokásos két-háromhavi 3%-nyi bichromat keményítésével, hanem ezután 5%-os kettedchrómsavas kaliumoldatban $^1/_2$—1 cm vastag darabkákat a melegítő szekrényben két-három hónapon át tartottam, sőt az ezen anyagból nyert metszeteket celloidin- és paraffinátitatás után tárgylemezre felhúzva újból két-három napra a thermostatba helyeztem; a jól kimosott készítmények már most a

szokásos WEIGERT-féle haematoxylinos festési módszeren estek át és óvatos PÁL-féle differenciálás után telített lithiumfürdőbe helyeztem a célból, hogy a haematoxylinfestődés még utánasötétedjen. Pikrofuchsinnal való felülfestés után rövid vízfürdő, azután alkohol, xylol és balzsamban való eltevés következett.




3. ábra. Egymás mellett fekvő három kis pyramissejtje a kéregnek; közülök az 1-es számú a duzzasztás, a 2-es számú a kicsapódás fázisában. WEIGERT velőfestése SCHAFFER módosításával.

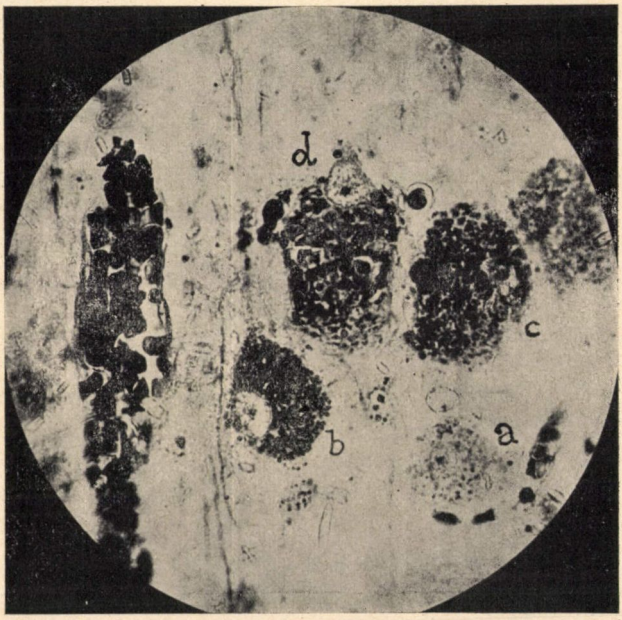
Az így nyert készítményeken látható képet a következő 3. ábrán, mely egy immersisós fotogrammot jelent, adnám. A látótérben három ganglionsejt közül bennünket az 1 és 2 számmal megjelölt két egyenlő nagyságú, ú. n. kis lobor sejtje a kéregnek érdekelhet, melyek nagy és egyenlő arányú duzzadásukkal figyelmünket megragadják. Az 1-gyel megjelölt idegsejt a sejttestnek nagyfokú duzzadását mutatja, amit nem csupán a sejttest normalis pyramisalakjának gömbbé való felfúvódása, hanem az ugyancsak duzzadt, hólyagszerű magnak a csúcsi dendritbe való beékelődése

is bizonyít. Magában a sejttestben feltűnik itt-ott néhány haematoxylinnal erősen festődő szemcse, de ezek oly gyéren láthatók, hogy a rendkívül nagyfokú sejtduzzadás magyarázatául semmiképpen sem szolgálhatnak, és így arra kényszerülünk, hogy a duzzadás okozójául folyadékfelvételre gondoljunk, mert csakis ilyen természetű *duzzasztó* tényező szereplése érteti meg velünk úgy a sejttestnek, valamint a magnak aránytalan meggömbölyödését, illetve a sejtmagnak központi helyéből való kimozdulását. Hogyha figyelmünket most a 2-vel megjelölt idegsejtre irányítjuk, úgy azonos dúcsejtnek egészen egyező kóros képét látjuk úgy a sejttest, valamint a magnak duzzadását és utóbbinak helyéből való kiemelése tekintetében, a különbség egyedül abban áll, hogy a sejttest szorosan meg van rakódva gömbölyű haematoxylinaffin-szemcsékkel. A két kóros idegsejtnek összehasonlításából kétségtelenül kitűnik, hogy a duzzadást nem a szemcsék mint ilyenek okozzák, mert ennek legélesebben ellentmond a szemcsékben felette szegény, de hatalmasan megduzzadt 1-es számú dúcsejt és így az előítélettől mentes egybevetése a két tőszomszédos kóros idegsejtnek arra a felismerésre vezet, hogy a duzzadás első fázisát a folyadékfelgyülemlés okozta *felduzzasztás* («Quellung») alkotja, melyből előrehaladó kicsapódás révén a haematoxylinnal előbb gyengén, később mint sötétebben színezedő, eleinte kisebb, később egyre jobban megnövekedő gömbölyded szemecskék alkotta ú. n. *kicsapódás* («Fällung») fázisa jő létre. Ezen felismerés alapján határozottan mondjuk, hogy a családi vakságos idiótaság eseteiben semmiképpen sem a kicsapodó szemecskék jelentik az ú. n. duzzasztó tényezőt, mert a sejttest hatalmasan meg van duzzadva, amikor a szemecskéknek még nyomai sem láthatók; a duzzasztó tényező a környezetből történő vízfelvétel révén szerepel. A szemecskék pedig a haematoxylinnal való intensiv színeződéssel ezeknek a velősállomány lecithin nevű alkatrészének látszanak megfelelni, mert az idegrostok zsírnemű velejének különböző alkatrészei közül egyedül a lecithin az, mely haematoxylinnal festődik; azért neveztem én el a duzzadt idegsejtek haematoxylinaffin szemecskéit «*lecithinoid*»-szemecskéknek. Ezek, mivel zsírnemű alapanyagból származnak, arra vallanak, hogy egy zsírlebontási folyamat következtében phosphatid, illetve praelipoid kórfolyamat szerepel, amit az a körül-

mény is igazol, hogy a szemecskék fuchsinnal, illetve legkésőbben osmiummal is színezhetők, egészen úgy, aminthogy a szétesö velősburok az osmioreductiv gömbök tömegéből tevődik össze. Ehhez képest a duzzadt idegsejtekben mutatkozó elfajulásos termékek az előrehaladó elzsírosodás jegyében állanak, melynek legkezdetét a fuchsinnal, további fejlődését a haematoxylinnal és legvégét pedig az osmiummal való festődés vezeti elénk. Ezt a menetét az idegsejtekben lefolyó elfajulásnak a családi idiótaságnak különböző korú formái bizonyítják: a rohamos lefolyású csecsemőkori formánál a fuchsinos és haematoxylinfestést látjuk, míg a renyhe és hosszú lefolyású folyamat esetén az osmiummal színezett szemcsék tűnnek fel. A jelzett viszonyok alapján a családi vakságos idiótaság duzzadási folyamatában egy korai, szemcsék nélküli, illetve szemcsékben igen szegény szakot különböztetünk meg a későbbi, szemcsékben gazdag szaktól. Az előbbi a szorosan vett vízfelvételen alapuló duzzadást, az ú. n. *felduzzasztást*, az utóbbi az ily módon elváltozott idegsejtben lefolyó *kicsapódást* jelenti. A duzzadás az idegsejtnek csakis szerkezetnélküli cyto- vagy hyaloplasmáját illetheti, mert csupán ez duzzadhat fel oly szertelenül folyadékfelvétel következtében, míg a fibrillumos készülék csupán velejáró jelenség gyanánt szenvedi el a helyi vagy általános nagy felfúvódásokat. Az idegsejtek duzzadásában tehát az *activ tényező* a duzzadó hyaloplasma, *passiv tünet* a fibrillaris rece szertelen kitágulása. Ezen kitágult receközökben csapódnak le a hyaloplasma elfajulási termékei eleinte fínom, később egyre jobban megnagyobbodó kerek szemcsék formájában, melyek a sokszegletű receközöket legvégül kitöltvén, átalakulnak polygonalis szemcsékké (l. 4. ábra). Végezetül azt mondjuk, hogy az idegsejtek lebontási termékei cyto- vagy hyaloplasmás eredésűek, melyek előrehaladó elzsírosodás folyamatán esnek át.

Hátra van, hogy a duzzadás folyamatát a Nisslfestésű, vagyis toluidinkékkel kezelt készítményeken megfigyeljük. Különösen a gerincvelői idegsejteken tisztán követhető, hogy a tigroidállomány főképpen az idegsejttestének a szélén kezd tünedezni, míg a mag körüli központi részben sokkal ellenállóbbnak mutatkozik. Az ilyen festésű készítmények részletekben sokkal szegényebbek és a duzzadás folyamatának megértésében semmi szerepet nem ját-

szanak; csupán az egyre jobban való tünedezését látjuk a tigroidnak, mely jelenség a duzzadással semmi kapcsolatba sem hozható. Mint fentebb láttuk, a duzzadás fokáról a fibrillumkép, még a duzzadásból eredő elfajulási termékekről a haematoxylinfestés (WEIGERT) adott felvilágosítást. E termékek a hyaloplasmának chemiai átalakulása alapján létrejött praelipoidos termékei és így

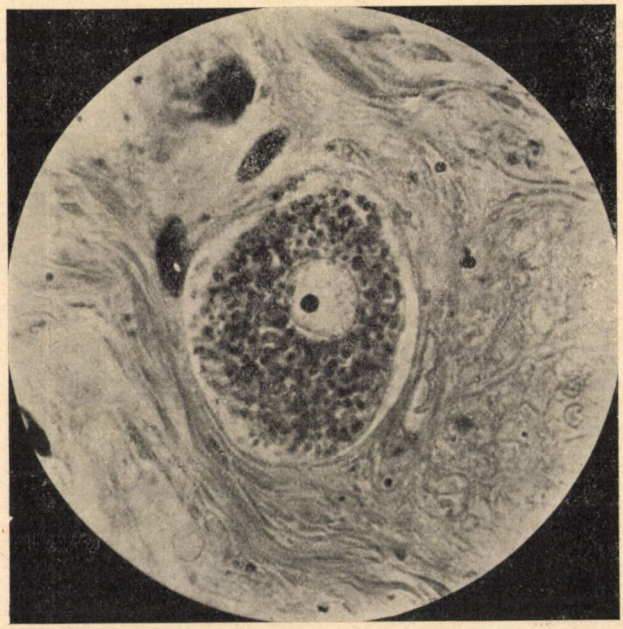



4. ábra. Négy szorosan egymás mellett fekvő kéregsejt, melyek a duzzasztás és kicsapódás különböző fokozatait mutatják; 1. szöveget; *a)* duzzasztás, *b)* kis kerek elfajulási szemcsék, *c)* nagyobb kerek, *d)* nagy és polygonalis haematoxilinaffin elfajulási szemcsék. WEIGERT—SCHAFFER

végelemzésben a központi idegrendszernek olyan lipoidosisos folyamata szerepel, mely magából az idegsejtekből indul ki, tehát a legszorosabban hozzájuk van kötve és így agyi eredésű (genuin cerebrogen) a lipoidosis. Amint ezt SÁNTHA három tiszta infantilis eset pontos szövettani vizsgálatával megállapította: «Der SCHAFFERsche Zellprozess betrifft nur die Nervenzellen, sämtliche übrigen Elemente des Zentralnervensystems sind frei von primären Ver-

änderungen.» Ezt a beható exakt szövetelemzésen nyugvó megállapításainkat 1928-ban BIELSCHOWSKY igyekezett megdönteni egy HAMBURGERrel közös esetükben, melyben a Tay-Sachs-féle alak kombinálva volt a splenohepatomegaliával, a NIEMANN—PICK-féle betegséggel; ezen összetalálkozás alapján már most oki kapcsolatba törekedett hozni és vele együtt SPIELMEYER és KUFS is, miképpen erről az Akadémiának 1931-ben beszámoltam. Ennek a felfogásnak azonban 1931-ben a felhozott *anatomiai* okokon kívül csattanóan ellentmondanak a legújabb *chemiai* vizsgálatok a bécsi EPSTEIN EMIL részéről (1934), melyek teljes összhangzásban vannak az én kórszövettani elemzéseim eredményével. E helyen csupán arra mutatnék rá, hogy a NIEMANN—PICK-féle betegség esetében a lipoidos anyagcserének zavara szerepel, amikoris belső szervek, mint a máj, a lép, a csontvelő, a nyirokmirigyek az elsődlegesen megtámadott szervek, amelyekből a lipoidos anyag a PICK-féle szemcsés sejtek segítségével becipeltetik a központi idegrendszerbe. Így tehát a NIEMANN—PICK-féle betegségnél a központi idegrendszerben a lipoid idegen eredésű és így többletnek kell szerepelnie az agyvelőben szemben a családi vakságos idiótasággal, ahol a lipoid helyileg keletkezvén meglévő ideganyagból, az agyvelőben tehát lipoidtöbbletről nem lehet beszélnünk. Ezeket a megfontolásokat EPSTEIN vizsgálatai teljességben beigazolták, mert míg a csecsemőkorbeli alaknál (TAY—SACHS—SCHAFFER) az idegrendszernek összes lecithin-kephalintartalma 15·6 g-ot és a normalis csecsemőagyvelő ugyanezen vegyi anyag tekintetében 17·2 g-ot tett ki, addig a NIEMANN—PICK esetében igen tekintélyes phosphatid meggazdagodást mutatott, mert az összmennyiség 30·6 g volt. Ezen pontos vizsgálatok alapján érthető EPSTEIN következő kijelentése: «Die besprochenen Befunde bestätigen somit die Ansicht KARL SCHAFFERS und seiner Schule, dass es sich bei reiner infantil-amaurotischer Idiotie um eine primär-degenerative, mit beträchtlicher Blähung einhergehende Krankheit handelt, die sekundär durch das Hervortreten kerniger Lipoideinlagerung gekennzeichnet ist». Így tehát a magam tudományos álláspontját szemben a német búvárokéval (BIELSCHOWSKY, SPIELMEYER, KUFS) a bécsi EPSTEIN nem csupán hogy osztja, hanem saját chemiai analytikai munkáival egészében beigazolta.

Fenti vizsgálati adatainkon áttekintve, összefoglalóan a következőket mondhatjuk. A TAY—SACHS—SCHAFFER-féle alaknál az idegsejtek lipoidos duzzanata szerepel, mely kiterjed úgy az állatéleti, mint a tengéleti idegrendszerre; az utóbbi állításunk igazolására a vastagbél submucosájában ülő intramuscularis sympathicussejt képét adjuk (l. 5. ábra), mely éppúgy van haematoxylinaffin



5. ábra. Sympathicus idegsejt a vastagbél submucosájából, mely a haematoxylinaffin kicsapódási fázis teliképét mutatja. WEIGERT—SCHAFFER.

vagyis lecithinoidszemcsékkel megrakodva, mint a központi idegrendszernek bármelyik idegsejtje. Ezen pangangliocellulás duzzadás és praelipoidos szemecskés elfajulás a családi vakságos idiótaság mind a három alakjára nézve érvényes; ennek az elváltozásnak klinikailag a súlyos elmegyengeség butaság formájában felel meg. De itt nyomatékkal jegyezzük meg, hogy ez az idiotismus semmiképpen sem ered valamely intrafetalis agyfejlődési zavarból, melynek eredményét az idiotismus elnevezéssel szoktuk illetni, mert

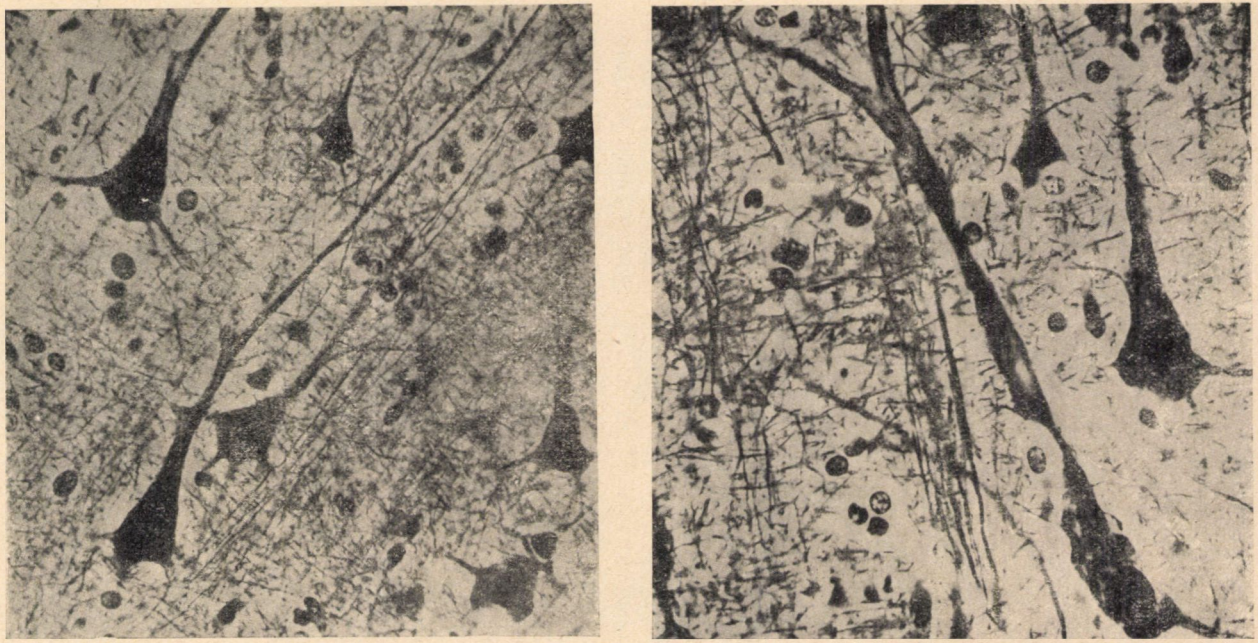
ha ez volna, úgy mindjárt a megszületés időpontjától fogva állana fenn az elmezavar. Ezzel szemben a családi vakságos idiótaság minden esetében a megszületés után hosszabb-rövidebb ideig tartó szellemileg ép időszak áll fenn, vagyis az idegsejtek ekkor még épek és csak ezután következik be a fokozatos elbutulás egy meginduló idegsejtes elfajulás kapcsán, mely utóbbi pedig továbbhaladó folyamatot jelent. Ehhez képest nézetem szerint nem helyes idiotismusról, hanem inkább dementiáról beszélnünk, aminthogy egy paralytikus, egy arteriosclerotikus dementiáról és nem idiotismusról beszélünk. Miután pedig ez a dementiás folyamat a ganglionsejtek előrehaladó pusztulásához van kötve átöröklés talaján, azért is a családi vakságos idiótaság számára a következő megjelölés volna a helyes: *gangliocellulás heredodegenerativ dementia!* Ebben az elnevezésben bennfoglaltatik a kórfolyamat lényege. Ennek dacára semmiképpen sem akarnám a polgárjogot nyert régi elnevezést érinteni.

## II. Systémás gangliocellulás megbetegedés.

Aminthogy a generalis gangliocellulás megbetegedés kórszövettana tanulmányozásában egy ilyen irányú kifejezett kórképre, a csecsemőkorbeli idiótaságra támaszkodtunk, ugyanígy vegyük a különböző systémás gangliocellulás megbetegedések tekintetében a családi merevgörcsös bénulás kórképét alapul. E helyen csupán kiegészítés okából vázoljuk az idetartozó kórformákat, ezek: I. családi merevgörcsös bénulás, II. nuclearis heredodegeneratio (amyotrophia nuclearis progressiva bulbaris et spinalis), III. az említett két kórformának egyesüléséből a sclerosis lateralis amyotrophica, IV. extrapyramidalis forma: képviselője a chorea hereditaria tarda Huntington, V. ataxiás forma: *a)* spinalis alak morbus Friedreichi, *b)* cerebellaris alak morbus Marie.

A heredodegeneratio spastica vagy Strümpell-féle kórkép, aminthogy a családi merevgörcsös bénulást még nevezni szoktuk, a kórszövettani elváltozásokat a kp. idegrendszernek egyetlen helyén mutatja és ez a mellső kp. tekervény (*Ca*), mint a tisztára mozgató területe a nagyagyi féltekének, illetve az ezzel mellfelé határos agranularis vidéke a homloki karéjnak, melyet Economo

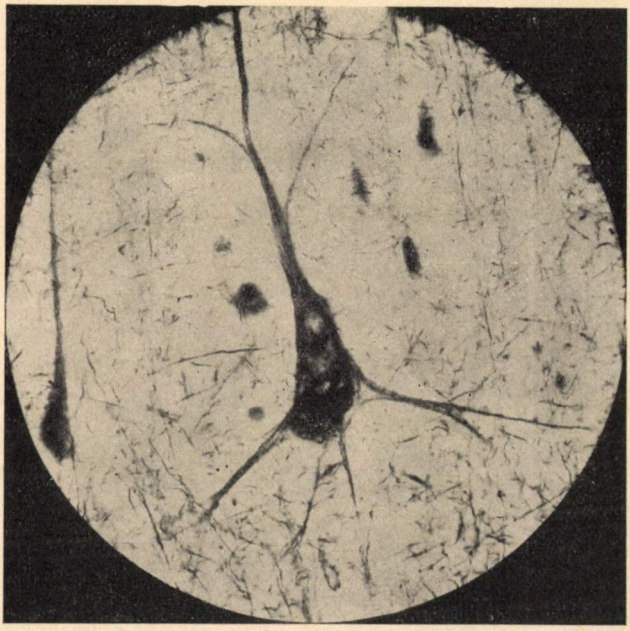
mozgató jellegű agykéregnek tekint. A *Ca* megett fekvő tőszomszédos hátsó kp. tekervény (*Cp*), mely tisztára érző működésű, teljesen ép, valaminthogy minden egyéb agykérgi terület. Ehhez képest a bántalom kizárólag mozgató jellegű területen fészkel és itten III., V—VI. kérgi lemezekben találhatók az elváltozások, melyeknek typikus kiindulása a V. rétegben fekvő Betz-féle óriási loborsejtekben van és amelyeknek előrehaladó pusztulása a kórkép merevgörcsös bénulását tételezi fel. Az említett kéregrétegekben a sejtduzzadás nem annyira a sejttestben, mint sokkal inkább az alapi és főleg a csúcsi dendritekben jelentkezik, mely nem annyira a Nissl-festésű, mint az ezüstfibrillumos impregnatiós készítményeken volt látható és így itt is, miképpen a Tay—Sachsnál, az ezüstözés volt a duzzadás legszabatosabb kimutatási módja. A dendritek eredeti átmérőjük 4—5-szörösére megduzzadnak, minek következtében az ilyen dendrit hosszmetszeten majdnem üres tömlő formájában mutatkozik, mert a duzzadás következtében a fibrillumfonalak a felszínre szorulnak, itten egy vastagabb nyalábot alkotnak és a tömlő belsejében a fínom és felfúvódás következtében fellazult fibrillumhálózat látható. A dendritduzzadás képét igen tanulságosan a következő ábra (l. 6. ábra) mutatja, mely mellé helyeztük a nem mozgató jellegű, vagyis granularis frontallebeny fibrillumképét, és az összehasonlításból azonnal szembeugrik, hogy a pathogenetikai focusban, a *Ca*-ban lévő pyramissejtek dendritjei feltűnően erősen megduzzadtak, szemben az egészséges frontalis lebeny azonos sejtjeivel és végül ilyen dendritek belső fibrillumrecéje végül szétesik és fínom detritust képez. Bárha ilyen pyramissejtek teste kifejezett duzzadást nem mutat, de magában sudannal, illetve osmiummal kimutatható praelipoidos degeneratiós termékeket tartalmaz; a duzzadt dendritek pedig kifejezett neuronophagiát szenvedtek el és ezzel a kóros jelenséggel a maguk kóros állapotát igazolják. Miután degeneratiós termékek a duzzadt dendritekben nem mutathatók ki, azt kell mondanunk, hogy a merevgörcsös bénulásnál *a kóros dendritek duzzadást mutatnak kicsapódás nélkül;* a kicsapódás egyedül az idegsejttestekben található fel. Ki kell egészítenünk ezt a szigorúan a *Ca*-ra szorítkozó duzzadási elváltozást az idegsejtek kóros elváltozásának még egy rendkívül fontos féleségével és ez az Alzheimer-*féle fibrillaris meg-*



*a* *b*

6. ábra. Kontrastképek a heredodegeneratio spasticából. *a)* normalis fibrillumkép a granularis homloklebenyből, mutatván fínom csúcsi dendriteket, *b)* fibrillumkép a mellső *kp* tekervényből (*Ca*), mely feltűnően duzzadt elsődleges és másodlagos csúcsi dendriteket mutat; a csúcsi dendriten két neuronophagiás hely látható mint dendritkimaródás.

*csomósodás* (l. 7. ábra), vagyis olyan elváltozás mutatkozik, melyet a senilis és praesenilis endogen bántalmak esetében szoktunk látni. Nagyon figyelemreméltó az a tény, hogy a családi merevgörcsös bénulás két esetében én az ALZHEIMER-féle fibrillumelváltozást kizárólag a mozgató kéregmezőben, ennek főleg III. és VI. rétegé-

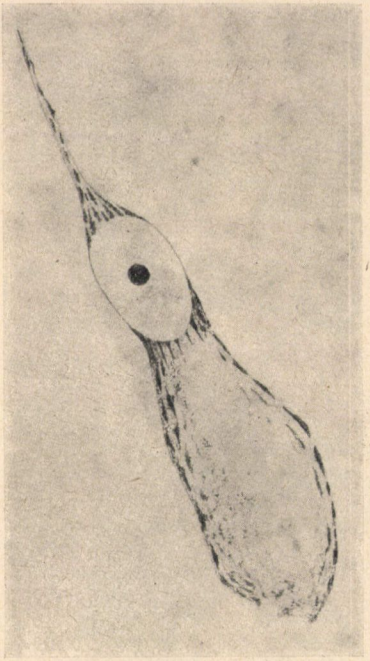


7. ábra. ALZHEIMER-féle fibrillumelváltozás a lamina pyramid. egyik sejtjén.

ben találtam meg és nyomatékkal jegyzem meg, hogy a BETZ-féle óriási loborsejtek egyikén sem láttam a sejtmegbetegedésnek ezt a formáját.

Hogyha most összehasonlítjuk a generalis és systémás gangliocellulás formáját a heredodegeneratiónak, úgy a következők lennének nyomatékkal kiemelendők. Mindkét megbetegedési formánál az idegsejtek duzzadása mint alapvető elváltozás szerepel; a csecsemőkorbeli idiótaság esetében rohamos lefolyású sejtfolyamat a duzzadás teljes kifejlődésére vezet, mert a bevezető szemcsementes duzzadást hamarosan követi a szemcsés lecsapódás szaka, mely a

duzzadás csúcspontját jelenti. Ezzel szemben a családi merevgörcsös bénulás esetében mintegy több évtizedre kiterjedő, tehát nagyon elnyujtott kórfolyamatnál túlnyomóan a kezdetleges duzzadást látjuk, jelesen az idegsejtek dendritjeiben és a lecsapódás szerény formában csakis a nem duzzadt sejttestekben mutatkozik. Ezenkívül még kiemelendő, hogy míg családi idiótaság esetében a duzzadás az egész idegrendszernek összes idegsejtjeire terjed ki, addig a családi merevgörcsös bénulásnál a duzzadás kizárólag a pathogenetikai focusra, a *Ca*-ra korlátozódik. E viszonyokból azt látjuk, hogy bár a duzzadás folyamat mindkét megbetegedési formánál azonos, de intensitásában és kiterjedésében mutat nagy különbséget. Bárha én a Nissl-festésű készítményeken, igaz, gyéren láttam a Tay—Sachsra emlékeztető duzzadást is (l. 8. ábra), de ez nem uralta a kórszövettani képet, mégis azt kell mondanunk, hogy *mindkét megbetegedési alaknál a duzzadási folyamatot egyformán tudtuk kimutatni, tehát az alapvető folyamat mind a kettőnél azonos és a különbség csupán fokozati és időbeli.* A pontos összehasonlításból még a következők tűnnek ki: 1. A merevgörcsös bénulás kifejezetten idősült lefolyásánál fogva a duzzadást sokkal szerényebb méretekben mutatja, mint a csecsemőkorbeli idiótaság, mely felette heveny lefolyásánál fogva a duzzadást egészen szokatlan mérvben, szinte túlméretezett formában vezeti elénk az egész idegrend-



8. ábra. Cystikus duzzadás egy kis pyramissejtnek basalis sejttestében a heredodegeneratio spastica egy esetéből; a duzzadás a sejtmagon is látszik és az apicalis dendritbe van feltolva. Ez a duzzadási kép erősen emlékeztet a Tay—Sachsnál előforduló duzzadásra.

szerben. 2. A két betegség a kóros elváltozások kiterjedési viszonyaiban is annyiban tér el feltűnően egymástól, hogy míg a merevgörcsös bénulásnál a szerényebb duzzadás párosulva az ALZHEIMER-féle fibrillumelváltozással a kp. idegrendszernek egy igen körülírt területére, az ú. n. mozgató agykéregre szorítkozik és ezzel mintegy bizonyítja azt, hogy e területen mutatkozó kórszövettani elváltozásoknak pathogenetikai jelentőséget tulajdonítsunk. Hogyha mármost úgy a heveny generalis idegsejtfolyamat, valamint a systémára korlátozodó idősült sejtelváltozás alaktanilag egyező, vagyis duzzadás szerepel itt, ott is, úgy ebben az azonos magatartásban mindkét bántalomban jelentkező kórszövettani elváltozások azonos pathogenetikai jelentőségére kell következtetnünk.

*

Mindaz, amit én 20—30 év előtt az átöröklődő szervi idegbántalmakra nézve találtam, azon felfogás felé terelt, hogy a látott és leírt kórszövettani elváltozásoknak fajlagos jelentőséget tulajdonítsak, másszóval bizonyos morphologiai kóros megnyilvánulásokat kórjelzőknek tekintsek és így bizonyos kórszövettani képekből egyúttal a betegséget véltem felismerhetni. Ez nem meglepő eljárás, ha meggondoljuk, hogy 15—20 év előtt az ALZHEIMER-féle fibrillumelváltozásból, azután a TAY—SACHSnál előforduló hatalmas duzzadási képekből egyenesen klinikai diagnosist csináltunk. De az utolsó 10 évben elvesztette az ALZHEIMER-féle fibrillumelváltozás fajlagos jelentőségét, mert nem csupán a senilis és praesenilis endogen bántalmaknál láttuk, mint eredetileg, hanem láttuk később a postencephalitises egyének, a családi merevgörcsös bénulásban szenvedő betegek agyvelejében, sőt MISKOLCZY a nagyagyi kéreg állatkísérletes vizsgálatai folyamán is, eltekintve a téli álmot alvó állatoktól, melyek ebben az időben CAJAL szerint ugyancsak fibrillummegvastagodást mint reversibilis elváltozást mutatnak, tehát ép viszonyok között. Ami pedig a lipoidos szemcsékkel megrakodott nagy idegsejtduzzadásokat a TAY—SACHS-féle betegségnél illeti, úgy LINDAU kimutathatta, hogy a GAUCHER- és a NIEMANN—PICK-féle betegség folyamán ugyanez a kép lelhető fel az idegrendszerben. Látnivaló e példákból, hogy az átöröklődő elme-idegbajok folyamán talált alaki elváltozások nem tekinthetők

fajlagosaknak, mássszóval az alaktani jellemzés nem dönt, hiszen ugyanazok az elváltozások nagyon különböző származású kóros idegrendszerben fellelhetők. Ellenben magasabb szemponthoz jutunk, ha azt keressük, hogy mi az említett szövettani elváltozásoknak az eredése? Itt útbaigazít bennünket a *szigorú anatomiai elektivitás*, mely az átöröklődő szervi idegbántalmak esetében az idegrendszerben kimutatható és amelyet bevezetőleg mint generalis, illetve systémás gangliocellulogeniát említettünk azzal a hozzátétellel, hogy az idegrendszer mesodermás elemei teljesen érintetlenek, vagyis elsődleges, activ elváltozás az utóbbiak részéről teljesen hiányzik. E kijelentésünket a következő konkrét példával világítanók meg. A TAY—SACHS-féle betegség a lecithinoid szemcsékkel megrakodó erős sejtduzzadásokat mutatja és ugyanilyen képek láthatók a NIEMANN—PICK-féle betegségnél is; csakhogy míg a TAY—SACHS híján van minden mesodermalis jelnek, addig a NIEMANN—PICKnél a mesodermás PICK-féle sejtek jelenléte, valamint az ereknek és hártyáknak lipoidszemcsés megrakodása valóságos mesodermás jelenség, mely a tisztára neuroektodermás jellegű TAY—SACHSnál absolut hiányzik. E példával igazoltuk azt a törekvésünket, hogy a kórszövettani elváltozásoknak általános kifejlődése módjára, vagyis a kórszövettani képnek pathogenetikai jellemzésére és nem formalis jellemzésére helyezzük a fősúlyt. A tisztára idegsejtes megbetegedés egy elvi megbetegedési módra vall, mert a kizárólagos gangliocellulás elektivitás egy pathogenetikai elvnek a fennforgását árulja el a neurogenia irányában, miképpen erre bevezetőleg utaltam. Ezen elsőrendű kérdés eldöntése után azonban magától adódó az a másodrendű kérdés, hogy a neurogen kórfolyamat, a gangliocellulogenia a neuronnak milyen szöveti részéhez köti magát. Igaz, hogy BRAUNMÜHL három év előtt kijelentette, hogy a heredodegeneratio nem kapcsolódik a hyaloplasmához, hanem az idegsejtnek minden alkatrészében bonyolódik le, mely állításának azonban az én fentiekben közölt vizsgálati adataim a leghatározottabban ellentmondanak, mert ezekből kiderül, hogy a duzzadás az alapvető elváltozás a heredodegeneratio folyamán, mely mint ilyen természetszerűleg független a fibrillumoktól és a tigroidállománytól, hiszen a TAY—SACHSnál jelentkező hatalmas arányú duzzadást fizikailag lehetetlen mással, mint a hyaloplasmá-

nak folyadékfelvétel következtében való felduzzadásával megmagyarázni. Mert ilyesmire úgy a bizonyos fokig merevebb fibrillumok, nemkülönben a tigroid nem képes; ez utóbbi maga pedig traumás izgalmak esetén (pl. gyökátmetszés vagy kitépés) a bekövetkező duzzadástól szenved, mert a duzzadt sejttestnek szélére szorul a nyomás következtében lelapított rögök formájában.

Midőn így joggal a hyaloplasmához kötöttnek tudtuk kimutatni az idegsejtduzzadást, nyomatékkal utalunk arra, hogy a hyaloplasmának ez a megváltozása önmagában semmiképpen sem jellegzetes a heredodegeneratióra nézve, hiszen látunk erős duzzadást trauma következtében is, mint ép most említettük. De ez a duzzadás jellegzetes színezetet kap azáltal, hogy az a legszigorúbb anatomiai elektivitás jegyében mutatkozik, mert átöröklődő idegbajok esetén a neuroektodermás származékok azok, melyek a mesodermának szabadon hagyásával kizárólagosan megbetegszenek duzzadás formájában. Ezen neuroektodermás elektivitás mint fentebb kifejtettük, egy generalis és egy körülírt systémás formában jelentkezhetik. *Ezek után mi az idegrendszeri heredodegeneratiók lényegét nem a kórszövettani elváltozások sajátos alaki megjelenésében látjuk, vagyis hogy szertelen duzzadás vagy fibrillummegvastagodás szerepel-e, hanem látjuk a kizárólagos neuronalis elektivitásban bántatlan mesoderma mellett és ez a meghatározás megfelel a neurogenia fogalmának. Ehhez hozzátesszük még, hogy az elsődleges szövettani elváltozások a hyaloplasmához kötöttek.*

A most kifejtettekből következik, hogy mi anatomiai szempontból különbséget teszünk az idegrendszeri heredodegeneratio *pathogenetikai definitiója* és *anatomiai substratuma* között; definitiója adva van a részben generalis, részben systémás kizárólagos gangliocellulás elektivitásban, anatomiai substratuma a hyaloplasmában. Ez utóbbi annyit mond, hogy az átöröklődő szervi idegbántalmak anyagilag a neuroektodermához vannak kötve és így ma is mondom, mint 1926-ban, hogy az idegrendszeri heredodegeneratio alapjában véve az idegsejtek hyaloplasmájának elektiv megbetegedésén nyugszik és így a heredodegeneratio általánosságban a neuroektodermalis hyaloplasma megbetegedését jelenti.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott ülésében.)

# DIE HISTOPATHOLOGISCHE BESTIMMUNG DER HEREDITÄR-ORGANISCHEN NERVENKRANKHEITEN.

Von KARL SCHAFFER, o. Mitgl.

Vortragender verweist darauf, dass seine Stellungnahme in der Frage der Histopathologie der hereditär-organischen Nervenkrankheiten von 1914 angefangen, als er mit diesem Thema seinen akademischen Sitz einnahm, bis heute gewisse Wandlungen durchmachte; seine endgültige Auffassung gibt er in folgenden. — Auch heute betont er den Schwellungsvorgang in den gangliocellulären Elementen, gleichwie die Tatsache, dass dieser Vorgang ausschliesslich an das Hyaloplasma gebunden ist und so bedeutet die *nervöse Heredodegeneration* in grösster Allgemeinheit die *Erkrankung des neuroektodermalen Hyaloplasma,* wie dies besonders 1926 entwickelt wurde. Nur hebt Vortr. *heute* hervor, dass die organische Heredodegeneration des Zentralnervensystems *nicht* in der *formalen* Charakteristik der histopathologischen Veränderungen gegeben ist (z. B. in den kolossalen Schwellungen bei infantil-amaurotischer Idiotie oder der Alzheimerschen Fibrillenveränderung und dgl.), sondern vielmehr in der *genetischen Charakteristik* und diese besagt, dass ausschliesslich Neuronales erkrankt (Ganglienzellen) mit strengstem Ausschluss des Mesoderms (dieses intakt). In dieser Bestimmung ist der Begriff der *Neurogenie* gegeben. — Aus dieser Stellungnahme ergibt sich, dass wir in der Frage der organisch-nervösen Heredodegeneration einen Unterschied zwischen *pathogenetischer Definition* und *anatomischem Substrat* machen müssen; das *anatomische Wesen* ist in der gangliocellulären Elektivität oder *Gangliocellulogenie* gegeben, während das *anatomische Substrat* mit seinem feinsten formalen Einzelheiten nur in zweiter Linie eine Rolle spielt.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

# ÚJABB VIZSGÁLATOK AZ IONIZÁLT OXIGÉN-MOLEKULA SÁVOS SZÍNKÉPÉN.

Pilismaróti BOZÓKY LÁSZLÓ-tól.

IV. tábla.

Az ionizált oxigén-molekula színképének irodalma — más közönséges kétatomú molekulák irodalmához képest — aránylag nem nagy. A spektrumnak két sávrendszere ismeretes: az első negatív, rendkívül komplikált szerkezetű sávrendszer a látható spektrálvidékben ($\lambda = 6800$ és $5200$ Å között), és a második negativ sávrendszer, mely néhány igen gyenge, láthatóban levő sávtól eltekintve, az ultraibolyában fekszik.

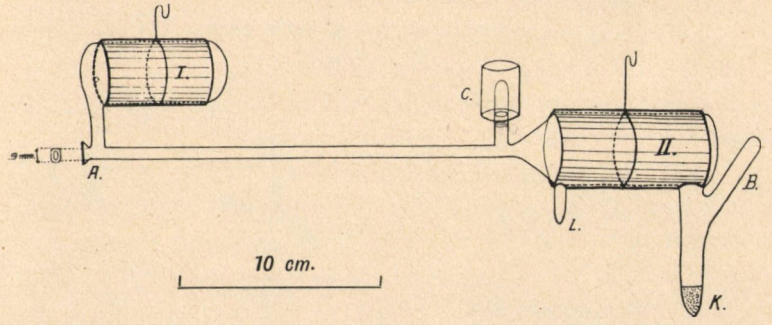
Az előbbinek erősebb sávfejeit először SCHUSTER [1] (1), WÜLLNER (2), majd STEUBING (3) mérték ki prizmás spektroszkópokon készült felvételekről, amelyeken a sávvonalak még sok helyen nem voltak feloldva. Később CARIO ráccsal fotografált képeiről HOLLAND (4) mintegy 900 vonalat mért ki anélkül, hogy ezekből analizálásra alkalmas támpontokat tudott volna kapni. Végül FRERICHSnek (5) sikerült jobb fényképeket készíteni a sávrendszer öt csoportjáról és mindegyikben az első 15—20 vonalat bizonyos $Q_1$ és $Q_2$ ágakba besorozni.

A második negativ sávrendszer duplafejű, vörös felé árnyékolt sávokból áll. A sávfejeket először STARK (6), majd JOHNSON (7) mérte ki és készített rájuk DESLANDRES-formulát. JOHNSON mérései alapján később BIRGE (8) vibrációs formulát számított ki, melynek első, még bizonytalan állandóját ELLSWORTH és HOPFIELD (9) újabb sávjai megerősítették. STUECKELBERG (10) összehasonlította a potenciális energia-görbékből elméletileg következő és kísérletileg tapasztalt intenzitás-eloszlást, majd STEVENS (11) a (0→6), (0→7), (1→6), (1→7) sávok rotációs szerkezetét anali-

[1] Az irodalmi utalásokat lásd az 585. oldalon.

zálta meg. Legutóbb MULLIKEN és STEVENSnek (12) néhány újabb sávot sikerült lefényképezniök mind a két sávrendszerben, e mellett összefoglalták az eddigi tapasztalatokat abból a célból, hogy következtetéseket vonhassanak le a vibrációs kvantumszámoknak az egyes sávokhoz való rendelése, valamint a disszociációs energia nagyságát illetően.

Az aránylag kis tanulmányozottságnak egyik legfőbb oka az oxigén-színkép gerjesztésénél felmerülő kísérleti nehézségek. A közönségesen ismert gerjesztési eljárások mellett csak a legnagyobb körültekintés és gondosság mellett kerülhető el, hogy az $O_2^+$ színkép szennyezve ne legyen egyéb, különösen $CO$ és $CO^+$ spektrumokkal. A különféle alakú csövekben történő GEISSLER-kisülés,



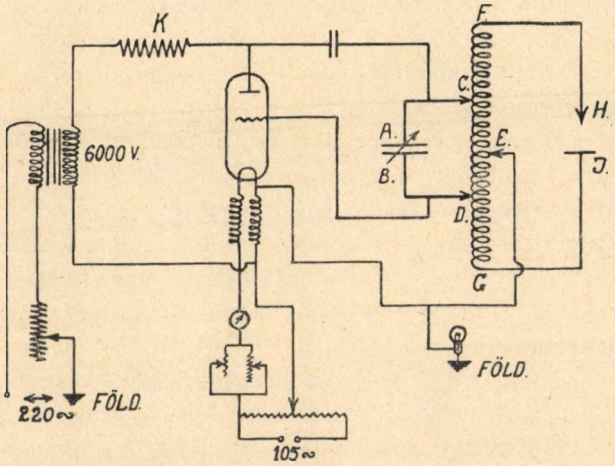

1. ábra.

az üreges katódban való gerjesztés, esetleg neon-, illetve héliumkisülésbe juttatott oxigénnyomok által egyébként intenzív gerjesztések mindegyikénél egyrészt a vákuum-apparátus csapzsírgőzei, másrészt a forró elektródokból állandóan felszabaduló gázok jutnak az oxigénbe. Az üreges katódos eljárásnál ezenkívül még a katód anyagának spektruma is megjelenik. (STEVENS 11)

A legkisebb szennyezésre is kényes oxigénnek tiszta spektrumát valóban csak úgy nyerhetjük, ha sem belső elektródokat, sem pedig az oxigén beeresztéséhez csapokat nem alkalmazunk. Hosszas kísérletezés után az alább ismertetendő eljárással preparált kisülési-csőből sikerült teljesen tiszta $O_2^+$ spektrumot kapni:

A kisülési-csőnek az alakját és méreteit az 1. ábra mutatja. Az egész cső tiszta, úgynevezett hegyikristály-kvarcból készült. 50%-os

kénsavval, desztillált vízzel, majd alkohollal való gondos kimosás és kiszárítás után a *K* csőbe a *B* töltőcsövön keresztül kb. $^1/_2$ cm$^3$ káliumklorátot ($KClO_3$) öntöttem, melyet előzőleg külön edényben mintegy félóráig kb. 300°-on megolvasztottam és ezáltal a víztartalmat belőle eltávolítottam. Ezután következett a kisülési-csőnek evakuálása és kimelegítése. Az egész csövet gázlángokba helyeztem és emellett oxigénnel fujtatott gázpisztollyal 2—3 órán át sárga-izzásig hevítettem. Közben egy GADE-féle diffúziós szi-




2. ábra.

vattyú szívta ki állandóan a hevítés hatására a kvarcból felszabaduló gázokat, főleg nagymennyiségű hidrogént. Ilyen módon a cső fokozatosan kitisztult, a vakuum $10^{-6}$ Hg mm nyomás alá süllyedt, úgyhogy elektromos kisülés (Tesla-kisülés) sem hatolt át rajta. A csőnek *L*-nél történő leforrasztása után a káliumklorátot óvatosan melegítve a lámpa tetszésszerinti nyomású, teljesen tiszta oxigénnel volt megtölthető. Elektródokul az I. és II. 4 cm átmérőjű 10 cm hosszú hengeres rész köré csavart vékony vörösrézlemezek szolgáltak, míg a lámpának állványba való befogása a *C*-nyaknál fogva történt. A fény a vízszintes csőből hosszanti irányban, «end-on projection»-ben, a *D*-ablakon át jut ki a lámpából.

Az oxigén intenzív gerjesztésére egy 400 W-os Philips-adócső-

vel előállított nagyfeszültségű rezgések bizonyultak legalkalmasabbaknak. A berendezés kapcsolásának alapgondolata ugyanaz, mely az intézetben már sikerrel szerepelt a nemesgázok külsőelektródos mágneses térben való gerjesztésénél.

Ez utóbbinál a rezgések közvetlenül az $ABCD$ rezgőkör forgókondenzátorának $A$ és $B$ fegyverzetéről voltak rávezetve az elektródokra, a fűtőszál részére szolgáló $E$ leágazás pontosan a $CD$ tekercs közepéhez csatlakozott.

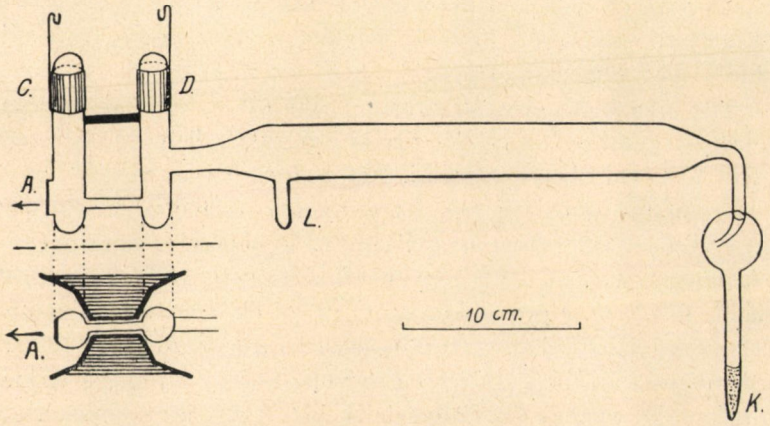
Az $A$ és $B$ között így nyert feszültség az oxigén gerjesztésére túlságosan kicsi volt, a cső nem világított az, $O_2^+$ csak az elektródok mellett gerjedt egy kissé. A feszültség sokszoros növelése céljából autotranszformátor alkalmazását kellett megpróbálni. A nehézségek a következők voltak :

Egy $FG$ autotranszformátor alkalmazásával sikerült ugyan 6—8-szoros feszültségre feltranszformálni a rezgéseket és ezeket rávezetve az elektródokra, az oxigén gerjedt is a cső egész hosszában, de a gerjedés hatására az adócső anódja rohamosan áttüzesedett, úgyhogy tartós üzemet egyáltalában nem bírt. Egyrészt ugyanis a nagyfelületű elektródok kapacitív hatása, másrészt a kisülési-csőnek a rezgőkör effektív ellenállását növelő hatása folytán az anódveszteség a megengedett nagyságot túlhaladta.

A kisülési-cső ellenállásának kisebbítése, azaz rövidebb és vastagabb cső alkalmazása, a fényerő teljes lecsökkenését eredményezte volna. Az elektródok felületének lényeges csökkentése sem volt lehetséges két okból: egyrészt, mivel ezáltal az energiaátadás a kvarc kisülési-cső két kis felületdarabján megy végbe, rövid idő alatt a kvarc erős ventillátorhűtés dacára megolvadásig felmelegszik, másrészt felmelegszik maga az oxigén is, már pedig látni fogjuk, hogy bizonyos spektroszkópiai okokból kívánatos lehet a minél hidegebb kisülés biztosítása. Meg kellett tehát kísérelni különböző tekercsek készítésével olyat találni, amelyben a fellépő indukciók, kapacitások és effektív ellenállás olyan autotranszformátoros rezgőkört eredményeznek, mely az adócsövön a megengedett anódveszteséget alakítja ki. A következő méretű tekercs mutatkozott legjobbnak: menetszáma 350, átmérője 16 cm, hossza 90 cm, a drót átmérője 1·2 mm. Ezzel sikerült a feszültséget annyira felemelni, hogy síklap és csúcs közötti eredeti 2—3

mm-es maximális szikraközből 15—16 mm lett és az anód sem melegedett túlságosan. A *H* és *J* közé a kisülési-csövet iktatva be, az oxigén zöldessárga fényben világított a cső egész hosszában, a hőmérséklete pedig ventillátorhűtés mellett 100° C alatt maradt.

A csőben uralkodó nyomás 0·02, 0·03 mm és 0·2, 0·3 mm higanynyomás között állandóan változott. A magasfeszültségű kisülés hatására ugyanis porladás és így a felület feldurvulása megy végbe a falakon, amit az egyidejű nagyfrekvencia csak még jobban elősegít. Így a felületi adszorpció erősen megnövekedett, az




3. ábra.

oxigén néhány óra alatt teljesen elnyelődött, úgyhogy sűrű időközökben a káliumklorát óvatos melegítésével kellett megfelelő nyomású friss oxigénről gondoskodni.

Az oxigén ZEEMAN-effektusának vizsgálatára használt cső alakját a 3. ábra mutatja. Preparálása az előzővel teljesen azonos módon történt. Az elektródok a két függőlegesen álló csővégekre voltak rácsavarva. Az összekötő kapilláris belső átmérője 1 mm, hossza 20 mm, a fény az *A* ablakon át jut ki belőle. A szűk kapilláris alkalmazása egyrészt lehetővé teszi a mágnespofáknak közeli összetolását és így a fénynek minél erősebb térbe való behelyezését, másrészt a benne fellépő nagy áramsűrűség miatt intenzív gerjesztést eredményez.

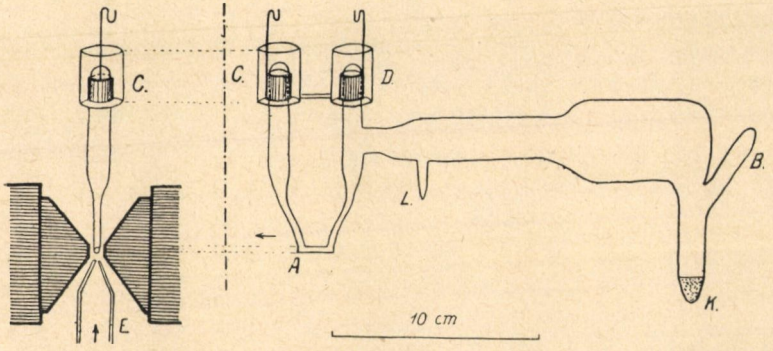
Az oxigén esetében azonban ez a szokásos eljárás nem vezetett célra. Már 1, 2-ezer GAUSS mágneses tér bekapcsolásakor a fény hirtelen eltünt a kapillárisból, mintha a tér kifujta volna. Egyre nagyobb és nagyobb nyomás mellett kapcsolva be a mágnest, a fény kifúvása előtt a kapillárisban egyre erősebb felvillanás volt észlelhető és ennek a felvillanó fénynek a kiömlése is egyre lassabban történt ($^1/_2$, 1 másodperc). Ez világosan mutatta, hogy még nagyobb nyomásra van szükség. Ez esetben viszont az oxigén már egyáltalában nem gerjedt. A rádió feszültségének további emelése volt tehát a legközelebbi cél.

A rövid kapilláris lehetővé tette kis, 2—3 cm$^2$ felületű elektródok alkalmazását, aminek folytán a kisülési-cső kapacitív hatása már alig számottevő. Az anód és rácskör közötti visszacsatolás megfelelő megválasztásával sikerült a feszültséget jelentékenyen megnövelni, a 16 mm-es szikraköz helyett 28 mm-es szikraközt volt képes táplálni. Ezt a feszültséget vezetve rá az elektródokra, az oxigén 1·5, 2 mm nyomás esetén is gerjedt, egészen gyenge, zöldes színben világított. Bekapcsolva a mágnest — 13, 15-ezer Gausst — a fény hirtelen megerősödött és kékeslila színbe ment át. Ugyanekkor azonban az elektródokról kiindulva összefüggő szikratakaró futott végig a kvarccsöveken, a kapilláris néhány másodperc alatt izzásig hevült, a fény eltünt, a szikrák a mágnesbe csaptak be. Szigetelni kellett tehát a nagyfeszültségű és nagyrezgésszámú áramot a mágnestől, másrészt a kapilláris intenzív hűtéséről kellett gondoskodni.

Többféle próbálkozás után végül a következő módon sikerült célt érni. Az elektródok köré ugyancsak kvarcból két kádat forrasztottunk (*C*, *D*) és az egész kisülési-csövet kissé átalakítottuk, amint azt a 4. ábra mutatja. A kádakba öntött transzformátorolaj lehetővé tette, hogy a kisülési-cső az energiát símán és tökéletesen átvegye az elektródoktól, úgyhogy elegendő nyomás mellett az összes energia az oxigénen és nem a kvarc felületén ment keresztül. Így a lámpa és mágnespofák közötti további szigetelésre már nem is volt szükség. A nagy áramsűrűség folytán az oxigén igen intenzív kékes fényben világított és legerősebben éppen a kapillárisnak a mágnespofák közé eső részében. Ez a fény kb. 10—15-ször intenzívebb a mágneses tér-nélküli oxigén fényénél.

A kapillárisnak rendkívül gyors áttüzesedését végül nagynyomású levegőárammal sikerült eliminálni: egy erősebb elektromotorral nagyteljesítményű kompresszort hajtottunk meg. Az erős levegőáram gyenge hajlású, a végén a kapilláris méreteire összeszűkített csövön ($E$) át, közvetlen a kapilláris alá volt vezetve. Az olajkádakat külön ventillátor hűtötte.

E kísérleteknél fellépett jelenségeket a következőképpen értelmezhetjük: az oxigén gáz gerjesztésekor az oxigén-molekulák ionizálódnak, az $O_2^+$ spektruma jelenik meg. Az ionizált és gerjesztett oxigén-molekulák száma aránylag nagyon kicsi; a hasonló




4. ábra.

körülmények között gerjesztett $CO$ vagy $N_2$ fényéhez képest: az $O_2^+$ fénye ritka, átlátszó, ködszerű. E mellett a mágneses tér a gerjesztett oxigén molekula-iónokat, mint töltött részecskéket, kis nyomás esetén könnyen kidobja az erőtér maximumából. Növelve a nyomást, az ütközések száma szaporodik, a mágneses tér hatására újabb nagyszámú ión keletkezik és így gerjed is, azaz a fény intenzitása erősen megnő.

A láthatóban levő sávrendszer rendkívül sok, de aránylag gyenge vonalból áll. Emellett a zöld-sárga-vörös spektrálvidékre minden lemez és film sokkal kevésbbé érzékeny, mint egyéb színekre, úgyhogy feltétlen nagy fényerejű spektrográfra volt szükség a sávrendszer lefényképezésénél. Az intézetben felállított Rowland-körön elhelyezett 6 m sugarú milliméterenként 1200

karcolatú konkáv ráccsal 48 órás expozíciós idő mellett sem jelentek meg a vonalak a lemezen. A nagy fényerejű prizmás spektrográfoknak viszont éppen ezen a vidéken túlságosan kicsi a diszperziójuk, 15—20 Ångström pro milliméter. Szükségesnek mutatkozott tehát egy sztigmatikus leképezésű rácsspektrográfnak az összeállítása, melynek megvan az a nagy előnye, hogy bár a rács diszperziója feleakkora, mint a Rowland-körön, fényereje sokszorosan nagyobb, mert a rés egy pontján átmenő fényt nem keni szét egy-egy 6—8 cm hosszú spektrálvonalba, hanem eredeti hosszúságában képezi le. Összeállítása a következő: a rés után a rács fókusztávolságával lehetőleg megegyező fókusztávolságú, megfelelő átmérőjű lencsét helyezünk úgy, hogy a rés a lencse fókuszában legyen és a lencse fősíkjai szigorúan merőlegesek legyenek a fény útjára. Az így párhuzamossá tett fénynyaláb esik rá a rácsra, melynek megfelelő elforgatásával elérhetjük, hogy a kívánt spektrálvidék a rács normálisának irányába essék. A normális 800—1000 Ångströmnyi környezetében a rács tiszta, éles vonalakat ad.

A legalkalmasabbnak bizonyult lencsének, melyet a Csillagvizsgáló Intézetből kaptunk kölcsön,[2] átmérője 16 cm, fókusztávolsága 180 cm volt, úgyhogy a 300 cm fókusztávolságú, mm-enként 600 karcolatú ráccsal kombinálva, kb. kétszeres nagyítás mellett mégis elegendő fényerejűnek mutatkozott a látható sávrendszer, sőt Zeeman-effektusának is a lefényképezésére. Az előbbinél 40—50 óra, az utóbbinál erős tér esetén 10—15 óra, gyenge tér esetén 60—70 óra expozíciós időre volt szükség.

A másik cél a teljesen tiszta $O_2^+$ távoli ultraibolya sávjainak lefényképezése volt. Ezen a vidéken rács-spektrográfok rendszerint csak gyenge és teljesen elmosódott vonalakat adnak, ezért célszerűnek látszott az intézet kvarcoptikájú prizmás Hilger *E*1 spektrográfját használni, melynek 2400 Å körüli vidékén már 2·5—3 Å/mm a diszperziója. A sűrű vonalakat azonban a spektrográf sok helyen nem tudta szétbontani és így a pontos rotációs analízis mégsem sikerült.

Időközben dr. SCHMID magántanár berlini tanulmányútja

[2] E helyen is leghálásabb köszönetünket fejezzük ki Dr. TASS ANTAL őméltóságának lekötelező szívességéért.

folyamán érintkezésbe lépett dr. E. HOCHHEIMmal, az I. G. Farbenindustrie Ludwigshafen-Oppau telepének fizikusával, az úgynevezett Hochheim-ötvözet feltalálójával. Ez az aluminiumból és szilíciumból álló ötvözet az ultraibolyában 90% körüli reflexióképességgel bír,[3] szemben a rácsok anyagául használt ú. n. Spiegelmetall-éval, amelyé 2500 Å körül legfeljebb 20% körül van. Kívánatosnak mutatkozott tehát az intézet egyik rácsának ez ötvözettel való bevonása. Prof. STEUBING (Breslau) tanácsára a rácsot előzőleg a következő eljárással tisztítottuk meg: vékony rétegben saponlakkot öntöttünk rá, mely félnap alatt rászárad és a porszemek beleragadnak. A szélein körülvágva, a réteg desztillált víz alatt óvatosan egy darabban lehúzható. Ennek két-háromszori megismétlésével megtisztított rácsot dr. HOCHHEIM volt szíves bevonni ötvözetével. Az eredmény várakozáson felül jó lett: a nagy reflexióképesség mellett a vonalak élessége is tekintélyes mértékben gyarapodott; 2300 Å alatt, ahol eddig ráccsal csak nagy intenzitású színképet lehetett fényképezni, a rácsunk amellett, hogy a lehető legélesebb vonalakat adja, fényereje a Hilger *E*1 spektrográfot 1950 Å-ig határozottan felülmúlja.

Ez a rács lehetővé tette egyrészt az $O_2^+$ ultraibolya sávrendszeréből az eddig analizálhatatlan távoli sávoknak, másrészt a látható sávrendszernek tökéletes lefényképezését. Ez utóbbinak egyik sávját az 1. kép mutatja, összehasonlítva a FRERICHS által Bonnban készített felvétellel.

A felvételekhez Persenso és Double-X-Press-lemezeket, valamint Ilford hypersensitiv panchromatikus filmet használtam. Normáliául a vas spektruma szolgált olyan módon, hogy minden felvételre egy keskeny csíkban az $O_2^+$ spektruma mellé 1 cm vastag vasrudak között húzott 4—5 mm hosszú és 4—5 Ampère áramerősségű vasív szolgáltatta vas-spektrumot is fényképeztem.

A felvételek kimérésére egy ZEISS-féle komparátor szolgált, mellyel az éles vonalak 0·002 mm maximális hibával voltak kimérhetők. Normáliáknak átlagban 4 mm-enként mértem ki egy-egy vasvonalat, a megfelelő hullámhosszak felismerése a KAYSER—

[3] Lásd idevonatkozólag F. Hlučka Zs. f. Phys. 96. 230. 1935.

KONEN: Handb. d. Spektroscopie 1934. VII. kötete alapján történt. A $d = d\lambda/dl$ diszperzió a Rowland-körön kb. 10 mm-enként változott 0·001 Å/mm-t, úgyhogy 10 mm-es darabokra lehetett állandónak venni és ennek segítségével a kimért $O_2^+$ vonalak hullámhosszait lineáris interpolációval meghatározni. A diszperzió 1·19 és 1·30 Å/mm között változott.

A sztigmatikus leképezésű felállításnál a diszperzió valamivel gyorsabban változott 4·75 Å/mm körül. A hullámhosszak átszámítása vákuumra redukált frekvenciákra KAYSER: Tabelle der Schwingungszahlen alapján történt. A több ezer vonal adatainak kiszámítását egy Monroe-automatikus számológép könnyítette meg.

A külső-elektródos kisülésből nyert spektrum összehasonlítva az $O_2^+$ eddig fotografált spektrumaival, ezektől jellegzetes eltérést mutat. Egyrészt a sávok rövidebbek, de aránylag intenzívebbek, másrészt az eddig észlelt sávok mellett több, kisebb intenzitású új sáv látható: külső-elektródos kisülés ugyanis egyrészt nem ad módot nagyobb kvantumszámú rotációs vonalak kifejlődésére, másrészt elősegíti az eddigieknél szélesebb skálájú vibrációs nívók megjelenését. A jelenség okát abban a körülményben kereshetjük, hogy a külső-elektródos kisülésben gerjesztett gáz hőmérséklete sokkal alacsonyabb, mint pl. az üreges katódban uralkodó effektív temperatura. Alacsony effektív emissziós temperaturánál az egy sávon belüli intenzitáseloszlás súlypontja az alacsony rotációs kvantumszámok felé, azaz a sávfej közelébe tolódik el. A sávok «megrövidülése» pedig elősegíti a sávfejek után felbukkanó újabb sávok felismerését.

I. Az $O_2^+$ ultraibolya, úgynevezett második negatív sávrendszere duplafejű, vörös felé árnyékolt sávokból áll. A két-két sávfej távolsága 200 $cm^{-1}$ körül mozog. Ebben a sávrendszerben a következő, eddig nem klasszifikált sávokat mértem ki:

**I. táblázat.**

| $\lambda$ | $\nu$ |
|---|---|
| 4636 | 21,566 |
| 4599 | 21,739 |
| 4368 | 22,887 |
| 4351 | 22,970 |
| 4348 | 22,992 |
| 4331 | 23,081 |
| 4314 | 23,172 |
| 4311 | 23,189 |
| 4059 | 24,627 |
| 4050 | 24,686 |
| 3814 | 26,211 |
| 3351 | 29,837 |
| 3330 | 30,023 |
| 3277 | 30,504 |
| 3257 | 30,699 |
| 3147 | 31,765 |
| 3128 | 31,957 |
| 3088 | 32,373 |
| 3070 | 32,567 |
| 3022 | 33,082 |
| 3004 | 33,277 |
| 2877 | 34,753 |
| 2860 | 34,959 |
| 2854 | 35,025 |

A BIRGE (8) által felállított vibrációs formula alapján ezekhez a következő vibrációs kvantumszámokat rendelhetjük, illetve a vibrációs szkéma következő csillaggal jelölt helyeire sorozhatjuk be :

## II. táblázat.

| $v'$ \ $v''$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | — | — | — | 31,137 | 29,427 | 27,757 | 26,104 | 24,490 | 22,912 | 21,368 | 19,855 | 18,367 | — | — |
| 1 | — | — | — | 33,750 | 32,012 | 30,293 | 28,611 | 26,976 | — | — | — | 20,714 | — | 17,806 □ | 16,381 |
| 2 | — | — | — | 34,590 | 32,853 | 31,137 | 29,466 | 27,821 | 26,211* | 24,627* | 23,081* | 21,566* | — | — | — |
| 3 | — | — | 37,188 | 35,407 | 33,670 | 31,957* | 30,293 | — | 27,024 | 25,449 | — | — | — | — | — |
| 4 | — | 39,785 | 37,978 | 36,202 | 34,453 | — | — | — | — | — | 24,686* | 23,172* | — | — | — |
| 5 | — | 40,551 | 38,739 | 36,953 | 35,225 *□ | — | — | — | — | — | 25,449 | — | — | — | — |
| 6 | 43,126 | 41,281 | 39,474 | 37,701 | — | — | 32,567* | — | — | — | — | — | 23,189* | 21,739* | — |
| 7 | 43,837 | 41,991 | 40,181 | — | — | 34,959* | 33,277* | — | 30,023* | — | — | — | — | — | — |
| 8 | 44,506 | 42,668 | 40,859 | — | — | — | — | — | 30,699* | — | — | — | — | — | — |
| 9 | 45,174 | 43,326 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 10 | 45,789 | 43,950 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 11 | 46,383 | 44,559 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 12 | 46,969 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 13 | 47,520 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 14 | 48,042 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | 48,536 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

A táblázatban mindenütt az első, azaz ibolya felé eső fej hullámszáma van feltüntetve, kivéve a □-el megjelölt két sávnál, ahol az első fej nem volt kimérhető. Itt a második fejnek 200 $cm^{-1}$-el megnövelt hullámszáma van beírva.

A sávrendszer sávjaiból STEVENS (11) a (0→6), (0→7), (1→6), (1→7) sávokat analizálta meg, tehát $v' = 0$ és 1 nívókból állapította meg $B'_v = B'_0 - \alpha v'$ és $v'' = 6$ és 7 nívókból a $B''_v = B''_0 - \alpha v''$ formulákat. Célszerűnek mutatkozott ezeknek a sávoknak ellentétes sávjait, azaz azokat meganalizálni, amelyekben $v'$ a nagy és $v''$ a kicsi vibrációs kvantumszám. Ezáltal STEVENS extrapolálásának helyessége ellenőrizhető, illetőleg korrigálható.

Ilyen sávok 2000—2600 Å között vannak. Jól kimérhetőknek az (5→2), (6→2), (7→1), (8→1) sávok látszottak, ezeket analizáltam meg. Csaknem valamennyi ág közvetlen a fénykép alapján felismerhető volt. Hullámszámaikat a III. táblázat tartalmazza. A számozásuk a IV. táblázatban levő kombináció-differenciákból a zérusra való extrapolálás alapján történt.

A sávok $^2\Pi \rightarrow {}^2\Pi$ elektronátmenethez tartoznak (STEVENS 11). A felső nívó a HUND-féle *b*-esethez, az alsó az *a*-esethez áll igen közel. A lehetséges átmeneteket STEVENS idézett dolgozatában az 1. ábra mutatja, azaz a sávoknak mind az első, mind a második fejéhez két-két közel egyforma erős $R$ és $P$ ág tartozik. $Q$ ágak a kis intenzitásuk miatt nem voltak felismerhetők. Az ábra alapján a következő kombináció-differenciákat kaphatjuk: a felső elektronállapot két spin-dublett nívójára

$$R_1(J) - P_1(J) = {}^{Q}_{1}R_{12}(J) - {}^{Q}_{1}P_{12}(J) \equiv \Delta_2 F'_1(J)$$
$$R_2(J) - P_2(J) = {}^{S}R_{211}(J) - {}^{Q}_{3}P_{21}(J) \equiv \Delta_2 F'_2(J).$$

Az alsó állapot két nívójára pedig:

$$R_1(J-1) - P_1(J+1) = {}^{S}R_{21}(J-1) - {}^{Q}_{3}P_{21}(J+1) \equiv \Delta_2 F''_1(J)$$
$$R_2(J-1) - P_2(J+1) = {}^{Q}R_{12}(J-1) - {}^{Q}_{2}P_{12}(J+1) \equiv \Delta_2 F''_2(J).$$

A felső állapot tiszta HUND-féle *b*-eset lévén, a kombinációdifferenciákat a következő formula állítja elő:

$$\Delta_2 F'(K) = 2B_v(2K + 1),$$

**III. táblázat.**

| (5, 2) $\lambda = 2580{\cdot}8$ | | | | | (5, 2) $\lambda = 2593{\cdot}8$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J$ | ${}^{S}R_{21}$ | ${}^{O}P_{21}$ | $R_1$ | $P_1$ | $J$ | $R_2$ | $P_2$ | ${}^{O}R_{12}$ | ${}^{O}P_{12}$ |
| 1/2 | 38.734·4 | — | 38.731·4 | — | 1/2 | — | — | — | 38.533·5 |
| 1 1/2 | 36·3 | 38.727·5 | 30·7 | — | 1 1/2 | 38.542·2 | — | 38.535·0 | 29·1 |
| 2 1/2 | 36·3 | 23·1 | 28·4 | 38.718·7 | 2 1/2 | 41·0 | 38.527·6 | 32·9 | 23·3 |
| 3 1/2 | 34·4 | 17·3 | 24·6 | 11·2 | 3 1/2 | 38·7 | 21·6 | 29·1 | 15·6 |
| 4 1/2 | 31·4 | 10·6 | 19·9 | 02·3 | 4 1/2 | 535·5 | 14·6 | 23·9 | 06·8 |
| 5 1/2 | 26·9 | 02·3 | 13·4 | 692·6 | 5 1/2 | 30·7 | 06·1 | 17·2 | 496·2 |
| 6 1/2 | 21·5 | 692·6 | 06·0 | 81·3 | 6 1/2 | 24·8 | 496·2 | 09·4 | 84·8 |
| 7 1/2 | 14·0 | 81·8 | 696·9 | 68·4 | 7 1/2 | 17·2 | 84·8 | 00·0 | 71·4 |
| 8 1/2 | 06·0 | 70·0 | 86·9 | 54·5 | 8 1/2 | 08·7 | 72·4 | 489·5 | 57·1 |
| 9 1/2 | 696·0 | 56·1 | 75·0 | 39·0 | 9 1/2 | 498·1 | 58·3 | 77·2 | 41·2 |
| 10 1/2 | 85·3 | 41·2 | 62·5 | 22·6 | 10 1/2 | 86·7 | 43·3 | 64·0 | 24·1 |
| 11 1/2 | 72·6 | 25·2 | 47·9 | 04·3 | 11 1/2 | 73·7 | 26·4 | 48·9 | 05·1 |
| 12 1/2 | 59·4 | 08·3 | 32·8 | 585·2 | 12 1/2 | 59·6 | 08·4 | 33·1 | 385·6 |
| 13 1/2 | 44·0 | 589·0 | 15·5 | 64·4 | 13 1/2 | 43·7 | 388·8 | 15·2 | 64·2 |
| 14 1/2 | 28·2 | 69·4 | 597·9 | 42·7 | 14 1/2 | 26·9 | 68·2 | 396·6 | 41·6 |
| 15 1/2 | 10·1 | 47·5 | 77·8 | 19·1 | 15 1/2 | 08·4 | 45·7 | 76·2 | 17·4 |
| 16 1/2 | 591·4 | 24·8 | 57·6 | 495·0 | 16 1/2 | 388·8 | 22·6 | 54·7 | 292·3 |
| 17 1/2 | 70·8 | 00·8 | 35·5 | 68·6 | 17 1/2 | 67·4 | 297·3 | 31·4 | 65·3 |
| 18 1/2 | 49·9 | 476·2 | 12·0 | 42·0 | 18 1/2 | 45·3 | 71·5 | 07·5 | 37·4 |
| 19 1/2 | 26·2 | 48·9 | 486·7 | 12·8 | 19 1/2 | 20·9 | 43·5 | 281·6 | 07·7 |
| 20 1/2 | 02·8 | 21·3 | 61·2 | 383·8 | 20 1/2 | 296·1 | 14·9 | 54·6 | 177·1 |
| 21 1/2 | — | 390·5 | 33·1 | 51·8 | 21 1/2 | 68·9 | 184·0 | 25·9 | 44·5 |
| 22 1/2 | — | — | 04·2 | 20·3 | 22 1/2 | 40·8 | 52·8 | 196·0 | 11·4 |
| 23 1/2 | — | — | 374·0 | 285·7 | 23 1/2 | 11·5 | 19·2 | 64·5 | 076·0 |
| 24 1/2 | — | — | — | 51·4 | 24 1/2 | 181·4 | 085·3 | 32·4 | 40·0 |
| 25 1/2 | — | — | — | 14·1 | 25 1/2 | — | 49·2 | — | — |
| 26 1/2 | — | — | — | 177·1 | | | | | |
| 27 1/2 | — | — | — | 37·3 | | | | | |
| 28 1/2 | — | — | — | 097·9 | | | | | |
| 29 1/2 | — | — | — | 55·2 | | | | | |

**III. táblázat.** (Folytatás 2.)

| (6, 2) $\lambda = 2532{\cdot}7$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | ${}^{S}R_{21}$ | ${}^{Q}P_{21}$ | $R_1$ | $P_1$ |
| 1/2 | 39.468·8 | — | 39.468·8 | — |
| 1 1/2 | 71·0 | — | 67·0 | — |
| 2 1/2 | 71·0 | — | 64·3 | 39.456·6 |
| 3 1/2 | 68·8 | 39.452·2 | 59·6 | 47·3 |
| 4 1/2 | 65·7 | 45·3 | 54·5 | 37·7 |
| 5 1/2 | 39.460·7 | 36·7 | 47·9 | 27·4 |
| 6 1/2 | 55·0 | 27·4 | 40·1 | 16·0 |
| 7 1/2 | 47·3 | 16·0 | 30·7 | 03·0 |
| 8 1/2 | 38·9 | 03·9 | 20·4 | 389·0 |
| 9 1/2 | 28·5 | 389·6 | 08·1 | 73·0 |
| 10 1/2 | 17·4 | 74·6 | 395·3 | 56·2 |
| 11 1/2 | 03·9 | 57·8 | 80·1 | 37·5 |
| 12 1/2 | 390·5 | 40·3 | 64·6 | 18·0 |
| 13 1/2 | 74·3 | 20·4 | 46·5 | 296·4 |
| 14 1/2 | 57·8 | 00·3 | 28·4 | 74·4 |
| 15 1/2 | 38·9 | 277·6 | 07·5 | 50·4 |
| 16 1/2 | 20·0 | 55·1 | 286·6 | 25·4 |
| 17 1/2 | 298·0 | 29·6 | 63·2 | 198·2 |
| 18 1/2 | 76·3 | 04·2 | 39·6 | 71·0 |
| 19 1/2 | 51·8 | 176·1 | 13·3 | 41·1 |
| 20 1/2 | 27·5 | 48·0 | 186·9 | 11·2 |
| 21 1/2 | 00·0 | 17·0 | 57·7 | 078·5 |
| 22 1/2 | 173·9 | 086·5 | 28·8 | 46·0 |
| 23 1/2 | — | — | 097·2 | 10·5 |
| 24 1/2 | — | — | 65·4 | 38.975·2 |
| 25 1/2 | — | — | 30·9 | 37·0 |
| 26 1/2 | — | — | 38.996·6 | 899·1 |
| 27 1/2 | — | — | — | 58·1 |
| 28 1/2 | — | — | — | 17·2 |
| 29 1/2 | — | — | — | 773·3 |

| (6, 2) $\lambda = 2545{\cdot}3$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | $R_2$ | $P_2$ | ${}^{Q}R_{12}$ | ${}^{O}P_{12}$ |
| 1/2 | — | — | — | — |
| 1 1/2 | 39.276·3 | 39.266·8 | 39.270·8 | 39.264·8 |
| 2 1/2 | 75·6 | 62·5 | 68·1 | 58·6 |
| 3 1/2 | 73·3 | 56·6 | 64·1 | 50·7 |
| 4 1/2 | 69·9 | 49·6 | 58·6 | 42·0 |
| 5 1/2 | 64·8 | 40·7 | 51·8 | 31·4 |
| 6 1/2 | 58·6 | 30·6 | 43·7 | 19·6 |
| 7 1/2 | 50·7 | 19·0 | 33·9 | 06·2 |
| 8 1/2 | 41·7 | 06·2 | 23·0 | 191·7 |
| 9 1/2 | 30·6 | 191·7 | 10·4 | 75·0 |
| 10 1/2 | 19·0 | 76·1 | 196·6 | 57·7 |
| 11 1/2 | 05·1 | 58·8 | 81·0 | 38·5 |
| 12 1/2 | 190·6 | 40·4 | 64·7 | 18·3 |
| 13 1/2 | 73·9 | 20·2 | 46·3 | 096·3 |
| 14 1/2 | 56·7 | 099·3 | 27·1 | 73·3 |
| 15 1/2 | 37·2 | 76·0 | 05·7 | 48·4 |
| 16 1/2 | 17·0 | 52·2 | 083·9 | 22·6 |
| 17 1/2 | 094·8 | 26·3 | 59·7 | 38.995·1 |
| 18 1/2 | 71·9 | 38.999·7 | 34·9 | 66·6 |
| 19 1/2 | 46·6 | 70·8 | 08·1 | 35·9 |
| 20 1/2 | 20·9 | 41·6 | 38.980·5 | 04·7 |
| 21 1/2 | 38.992·9 | 09·6 | 50·5 | 871·3 |
| 22 1/2 | 64·4 | 877·6 | 20·2 | 37·2 |
| 23 1/2 | 33·3 | 43·1 | 887·1 | 00·7 |
| 24 1/2 | 02·0 | 08·2 | 53·1 | 763·7 |
| 25 1/2 | 868·1 | 770·4 | 16·1 | — |
| 26 1/2 | 34·1 | — | 778·5 | — |
| 27 1/2 | 797·1 | — | — | — |

**III. táblázat.** (Folytatás 3.)

| (7, 1) $\lambda = 2381{\cdot}0$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | ${}^{S}R_{21}$ | ${}^{Q}P_{21}$ | $R_1$ | $P_1$ |
| 1/2 | — | — | 41.986·6 | — |
| 1 1/2 | — | 41.978·6 | 83·5 | 41.978·0 |
| 2 1/2 | 41.986·6 | 73·7 | 79·5 | 70·5 |
| 3 1/2 | 41.984·0 | 67·6 | 75·1 | 62·8 |
| 4 1/2 | 80·5 | 60·4 | 70·0 | 53·6 |
| 5 1/2 | 75·1 | 51·4 | 62·8 | 42·6 |
| 6 1/2 | 68·8 | 41·7 | 54·4 | 30·7 |
| 7 1/2 | 60·4 | 29·5 | 44·2 | 16·9 |
| 8 1/2 | 51·4 | 16·9 | 33·3 | 02·4 |
| 9 1/2 | 39·7 | 01·9 | 20·0 | 885·7 |
| 10 1/2 | 27·9 | 886·1 | 06·3 | 68·2 |
| 11 1/2 | 13·5 | 68·2 | 890·1 | 48·5 |
| 12 1/2 | 898·9 | 49·9 | 73·6 | 28·3 |
| 13 1/2 | 81·5 | 29·0 | 54·6 | 05·6 |
| 14 1/2 | 63·9 | 07·9 | 35·2 | 782·6 |
| 15 1/2 | 43·6 | 783·9 | 12·9 | 57·0 |
| 16 1/2 | 23·3 | 59·9 | 790·8 | 31·3 |
| 17 1/2 | 00·0 | 33·3 | 65·8 | 02·9 |
| 18 1/2 | 776·9 | 06·3 | 41·2 | 674·0 |
| 19 1/2 | 50·4 | 676·5 | 13·1 | 42·4 |
| 20 1/2 | 24·5 | 46·9 | 685·1 | 10·9 |
| 21 1/2 | 95·3 | 14·0 | 53·8 | 576·7 |
| 22 1/2 | 666·6 | 581·4 | 23·4 | 42·3 |
| 23 1/2 | — | 45·8 | 589·7 | 04·9 |
| 24 1/2 | — | 10·5 | — | 467·0 |
| 25 1/2 | — | 471·7 | — | — |

| (7, 1) $\lambda = 2392{\cdot}1$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | $R_2$ | $P_2$ | ${}^{Q}R_{12}$ | ${}^{Q}P_{12}$ |
| 1/2 | — | — | — | — |
| 1 1/2 | 41.790·8 | — | 41.786·0 | — |
| 2 1/2 | 90·8 | 41.776·9 | 83·9 | 41.774·5 |
| 3 1/2 | 87·9 | 71·5 | 79·2 | 65·8 |
| 4 1/2 | 83·9 | 63·9 | 73·2 | 57·0 |
| 5 1/2 | 78·4 | 54·8 | 65·8 | 45·9 |
| 6 1/2 | 71·5 | 44·3 | 57·0 | 33·3 |
| 7 1/2 | 62·8 | 32·1 | 46·7 | 19·5 |
| 8 1/2 | 53·2 | 18·7 | 35·1 | 04·4 |
| 9 1/2 | 41·2 | 03·4 | 21·7 | 687·0 |
| 10 1/2 | 28·9 | 687·0 | 07·3 | 68·8 |
| 11 1/2 | 14·0 | 68·8 | 690·7 | 49·2 |
| 12 1/2 | 698·4 | 49·2 | 73·4 | 27·9 |
| 13 1/2 | 80·5 | 27·9 | 53·8 | 04·8 |
| 14 1/2 | 62·0 | 05·8 | 33·2 | 580·8 |
| 15 1/2 | 41·0 | 580·8 | 10·9 | 54·6 |
| 16 1/2 | 19·6 | 56·2 | 587·3 | 27·6 |
| 17 1/2 | 595·6 | 28·7 | 61·6 | 498·4 |
| 18 1/2 | 71·4 | 00·8 | 35·5 | 68·6 |
| 19 1/2 | 44·2 | 470·4 | 06·7 | 36·4 |
| 20 1/2 | 16·9 | 39·4 | 477·5 | 03·5 |
| 21 1/2 | 486·7 | 05·7 | 46·0 | 368·4 |
| 22 1/2 | 56·7 | 372·2 | 13·9 | 32·5 |
| 23 1/2 | 23·4 | 36·1 | 378·3 | 294·0 |
| 24 1/2 | 390·4 | — | — | — |
| 25 1/2 | 54·0 | — | — | — |
| 26 1/2 | 17·5 | — | — | — |

**III. táblázat.** (Folytatás 4.)

| (8, 1) $\lambda = 2343{\cdot}0$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | ${}^{S}R_{21}$ | ${}^{Q}P_{21}$ | $R_1$ | $P_1$ |
| 1/2 | — | — | 42.667·0 | — |
| 1 1/2 | — | — | 64·1 | 42.658·0 |
| 2 1/2 | 42.667·0 | 42.654·6 | 60·3 | 51·2 |
| 3 1/2 | 64·1 | 48·1 | 55·5 | 43·3 |
| 4 1/2 | 60·3 | 40·9 | 50·2 | 34·2 |
| 5 1/2 | 54·6 | 31·6 | 42·6 | 23·1 |
| 6 1/2 | 48·1 | 21·4 | 34·2 | 11·1 |
| 7 1/2 | 39·1 | 09·0 | 23·5 | 596·9 |
| 8 1/2 | 29·7 | 596·1 | 12·4 | 82·2 |
| 9 1/2 | 17·6 | 80·4 | 598·6 | 64·9 |
| 10 1/2 | 05·3 | 64·9 | 84·6 | 47·4 |
| 11 1/2 | 590·2 | 46·1 | 67·7 | 27·2 |
| 12 1/2 | 75·3 | 27·2 | 50·9 | 06·7 |
| 13 1/2 | 56·9 | 05·8 | 31·1 | 483·2 |
| 14 1/2 | 39·0 | 484·2 | 11·2 | 59·7 |
| 15 1/2 | 17·4 | 59·7 | 488·2 | 33·4 |
| 16 1/2 | 496·8 | 35·0 | 65·7 | 07·2 |
| 17 1/2 | 72·1 | 07·2 | 39·5 | 377·7 |
| 18 1/2 | 48·7 | 379·5 | 14·0 | 48·4 |
| 19 1/2 | 20·4 | 48·4 | 384·8 | 15·9 |
| 20 1/2 | 394·2 | 18·7 | 56·0 | 284·0 |
| 21 1/2 | 63·2 | 284·0 | 24·0 | 48·4 |
| 22 1/2 | 34·2 | 51·4 | 293·0 | 13·6 |
| 23 1/2 | — | — | 57·9 | 174·5 |
| 24 1/2 | — | — | 23·3 | 37·1 |
| 25 1/2 | — | — | 185·2 | 095·1 |
| 26 1/2 | — | — | 47·4 | 54·4 |
| 27 1/2 | — | — | 06·7 | 09·4 |
| 28 1/2 | — | — | 065·9 | 41.965·9 |
| 29 1/2 | — | — | — | 16·9 |
| 30 1/2 | — | — | — | 869·3 |

| (8, 1) $\lambda = 2353{\cdot}8$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | $R_2$ | $P_2$ | ${}^{Q}R_{12}$ | ${}^{O}P_{12}$ |
| 1/2 | — | — | — | — |
| 1 1/2 | 42.472·1 | — | 42.466·8 | — |
| 2 1/2 | 71·1 | 42.459·7 | 64·0 | 42.455·3 |
| 3 1/2 | 68·1 | 52·4 | 59·7 | 47·1 |
| 4 1/2 | 64·0 | 44 6 | 53·7 | 37·7 |
| 5 1/2 | 58·2 | 35·0 | 45·8 | 26·2 |
| 6 1/2 | 51·0 | 24·3 | 37·1 | 14·0 |
| 7 1/2 | 41·7 | 11·7 | 26·2 | 399·7 |
| 8 1/2 | 31·7 | 398·0 | 14·0 | 84·8 |
| 9 1/2 | 19·3 | 82·3 | 00·3 | 66·7 |
| 10 1/2 | 306·4 | 65·7 | 385·7 | 48·4 |
| 11 1/2 | 90·6 | 46·5 | 68·2 | 27·7 |
| 12 1/2 | 74·7 | 27·1 | 50·4 | 06·1 |
| 13 1/2 | 56·0 | 04·6 | 29·8 | 282·2 |
| 14 1/2 | 37·0 | 282·2 | 09·2 | 57·9 |
| 15 1/2 | 14·8 | 56·8 | 285·6 | 31·1 |
| 16 1/2 | 293·0 | 31·1 | 61·8 | 03·5 |
| 17 1/2 | 67·7 | 02·7 | 35·1 | 173·4 |
| 18 1/2 | 42·9 | 174·5 | 08·4 | 43·0 |
| 19 1/2 | 14·3 | 43·0 | 178·5 | 09·7 |
| 20 1/2 | 186·5 | 11·1 | 48·7 | 076·8 |
| 21 1/2 | 54·7 | 075·6 | 15·7 | 39·8 |
| 22 1/2 | 24·0 | 41·5 | 083·2 | 03·8 |
| 23 1/2 | 089·4 | 02·8 | 47·2 | 41.963·9 |
| 24 1/2 | 55·8 | 41.965·9 | 11·8 | — |

**IV. táblázat.**

| $\Delta_2F_1''(J)$ | | | | | | $\Delta_2F_2''(J)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (5, 2) | | (6, 2) | | | | (5, 2) | | (6, 2) | | |
| $J$ | ${}^sR_{21}(J-1)$ $-{}^qP_{21}(J+1)$ | $R_1(J-1)$ $-P_1(J+1)$ | ${}^sR_{21}(J-1)$ $-{}^qP_{21}(J+1)$ | $R_1(J-1)$ $-P_1(J+1)$ | középérték | $J$ | $R_2(J-1)$ $-P_2(J+1)$ | ${}^qR_{12}(J-1)$ $-{}^oP_{12}(J+1)$ | $R_2(J-1)$ $-P_2(J+1)$ | ${}^qR_{12}(J-1)$ $-{}^oP_{12}(J+1)$ | középérték |
| 1/2 | — | — | — | — | — | 1/2 | — | — | — | — | — |
| 1 1/2 | 11·3 | 12·7 | — | 12·2 | 12·1 | 1 1/2 | — | — | — | — | — |
| 2 1/2 | 19·0 | 19·5 | — | 19·7 | 19·4 | 2 1/2 | 20·6 | 19·4 | 19·7 | 20·1 | 20·0 |
| 3 1/2 | 25·7 | 26·1 | 25·7 | 26·6 | 26·0 | 3 1/2 | 26·4 | 26·1 | 26·0 | 26·1 | 26·2 |
| 4 1/2 | 32·1 | 32·0 | 32·1 | 32·2 | 32·1 | 4 1/2 | 32·6 | 32·9 | 32·6 | 32·7 | 32·7 |
| 5 1/2 | 38·8 | 38·6 | 38·3 | 38·5 | 38·6 | 5 1/2 | 39·3 | 39·1 | 39·3 | 39·0 | 39·2 |
| 6 1/2 | 45·1 | 45·0 | 44·7 | 44·9 | 44·9 | 6 1/2 | 45·9 | 45·8 | 45·8 | 45·6 | 45·8 |
| 7 1/2 | 51·5 | 51·5 | 51·1 | 51·1 | 51·3 | 7 1/2 | 52·4 | 52·3 | 52·4 | 52·0 | 52·3 |
| 8 1/2 | 57·9 | 57·9 | 57·7 | 57·7 | 57·8 | 8 1/2 | 58·9 | 58·8 | 59·0 | 58·9 | 58·9 |
| 9 1/2 | 64·8 | 64·3 | 64·3 | 64·2 | 64·4 | 9 1/2 | 65·4 | 65·4 | 65·6 | 65·3 | 65·4 |
| 10 1/2 | 70·8 | 70·7 | 70·7 | 70·6 | 70·7 | 10 1/2 | 71·7 | 72·1 | 71·8 | 71·9 | 71·9 |
| 11 1/2 | 77·0 | 77·3 | 77·1 | 77·3 | 77·2 | 11 1/2 | 78·3 | 78·4 | 78·6 | 78·3 | 78·4 |
| 12 1/2 | 83·6 | 83·5 | 83·5 | 83·7 | 83·6 | 12 1/2 | 84·9 | 84·7 | 84·9 | 84·7 | 84·8 |
| 13 1/2 | 90·0 | 90·1 | 90·2 | 90·2 | 90·1 | 13 1/2 | 91·4 | 91·5 | 91·3 | 91·4 | 91·4 |
| 14 1/2 | 96·5 | 96·4 | 96·7 | 96·1 | 96·4 | 14 1/2 | 98·0 | 97·8 | 97·9 | 97·9 | 97·9 |
| 15 1/2 | 103·4 | 102·9 | 102·7 | 103·0 | 103·0 | 15 1/2 | 104·3 | 104·3 | 104·5 | 104·5 | 104·4 |
| 16 1/2 | 109·3 | 109·2 | 109·3 | 109·3 | 109·3 | 16 1/2 | 111·1 | 110·9 | 110·9 | 110·6 | 110·9 |
| 17 1/2 | 115·2 | 115·6 | 115·8 | 115·6 | 115·6 | 17 1/2 | 117·3 | 117·3 | 117·3 | 117·3 | 117·3 |
| 18 1/2 | 121·9 | 122·7 | 121·9 | 122·1 | 122·2 | 18 1/2 | 123·9 | 123·7 | 124·0 | 124·8 | 124·1 |
| 19 1/2 | 128·6 | 128·2 | 128·3 | 128·4 | 128·4 | 19 1/2 | 130·4 | 130·4 | 130·3 | 130·2 | 130·3 |
| 20 1/2 | 135·7 | 134·9 | 134·8 | 134·8 | 135·1 | 20 1/2 | 136·9 | 137·1 | 137·0 | 136·8 | 137·0 |
| 21 1/2 | — | 140·9 | 141·0 | 140·9 | 140·9 | 21 1/2 | 143·3 | 143·2 | 143·3 | 143·3 | 143·3 |
| 22 1/2 | — | 147·4 | — | 147·2 | 147·3 | 22 1/2 | 149·7 | 149·9 | 149·8 | 149·8 | 149·8 |
| 23 1/2 | — | 152·8 | — | 153·6 | 153·2 | 23 1/2 | 155·5 | 156·0 | 156·2 | 156·5 | 156·0 |
| 24 1/2 | — | 159·9 | — | 160·2 | 160·1 | 24 1/2 | 162·3 | — | 162·9 | — | 162·6 |
| 25 1/2 | — | — | — | 166·3 | 166·3 | | | | | | |
| 26 1/2 | — | — | — | 172·8 | 172·8 | | | | | | |
| 27 1/2 | — | — | — | 179·4 | 179·4 | | | | | | |

**IV. táblázat.** (Folytatás 2.)

| $\Delta_2F_1''(J)$ | | | | | | $\Delta_2F_2''(J)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (7, 1) | | | (8, 1) | | | (7, 1) | | | (8, 1) | | |
| $J$ | ${}^{S}R_{21}(J-1)$ $-{}^{Q}P_{21}(J+1)$ | $R_1(J-1)$ $-P_1(J+1)$ | ${}^{S}R_{21}(J-1)$ $-{}^{Q}P_{21}(J+1)$ | $R_1(J-1)$ $-P_1(J+1)$ | középérték | $J$ | $R_2(J-1)$ $-P_2(J+1)$ | ${}^{Q}R_{12}(J-1)$ $-{}^{O}P_{12}(J+1)$ | $R_2(J-1)$ $-P_2(J+1)$ | ${}^{Q}R_{12}(J-1)$ $-{}^{O}P_{12}(J-1)$ | középérték |
| 1/2 | — | — | — | — | — | 1/2 | — | — | — | — | — |
| 1 1/2 | — | 16·1 | — | 15·8 | 16·0 | 1 1/2 | — | — | — | — | — |
| 2 1/2 | — | 20·7 | — | 20·8 | 20·8 | 2 1/2 | 19·3 | 20·2 | 19·7 | 19·7 | 19·7 |
| 3 1/2 | 26·2 | 25·9 | 26·1 | 26·1 | 26·1 | 3 1/2 | 26·9 | 26·9 | 26·5 | 26·3 | 26·7 |
| 4 1/2 | 32·6 | 32·5 | 32·5 | 32·4 | 32·5 | 4 1/2 | 33·1 | 33·3 | 33·1 | 33·5 | 33·3 |
| 5 1/2 | 38·8 | 39·3 | 38·9 | 39·1 | 39·0 | 5 1/2 | 39·6 | 39·9 | 39·7 | 39·7 | 39·7 |
| 6 1/2 | 45·6 | 45·9 | 45·6 | 45·7 | 45·7 | 6 1/2 | 46·3 | 46·3 | 46·5 | 46·1 | 46·3 |
| 7 1/2 | 51·9 | 52·0 | 52·0 | 52·0 | 52·0 | 7 1/2 | 52·8 | 52·6 | 53·0 | 52·3 | 52·7 |
| 8 1/2 | 58·5 | 58·5 | 58·7 | 58·6 | 58·6 | 8 1/2 | 59·4 | 59·7 | 59·4 | 59·5 | 59·5 |
| 9 1/2 | 65·3 | 65·1 | 64·8 | 65·0 | 65·1 | 9 1/2 | 66·2 | 66·3 | 66·0 | 65·6 | 66·0 |
| 10 1/2 | 71·5 | 71·5 | 71·5 | 71·4 | 71·5 | 10 1/2 | 72·4 | 72·5 | 72·8 | 72·6 | 72·6 |
| 11 1/2 | 78·0 | 78·0 | 78·1 | 77·9 | 78·0 | 11 1/2 | 79·7 | 79·4 | 79·3 | 79·6 | 79·5 |
| 12 1/2 | 84·5 | 84·5 | 84·4 | 84·5 | 84·5 | 12 1/2 | 87·1 | 85·9 | 86·0 | 86·0 | 86·3 |
| 13 1/2 | 91·0 | 91·0 | 91·1 | 91·2 | 91·1 | 13 1/2 | 92·6 | 92·6 | 92·5 | 92·5 | 92·6 |
| 14 1/2 | 97·6 | 97·6 | 97·2 | 97·7 | 97·5 | 14 1/2 | 99·7 | 99·2 | 99·2 | 98·7 | 99·2 |
| 15 1/2 | 104·0 | 103·9 | 104·0 | 104·0 | 104·0 | 15 1/2 | 105·8 | 105·6 | 105·9 | 105·7 | 105·6 |
| 16 1/2 | 110·3 | 110·0 | 110·2 | 110·5 | 110·3 | 16 1/2 | 112·3 | 112·5 | 112·1 | 112·2 | 112·3 |
| 17 1/2 | 117·0 | 116·8 | 117·3 | 117·3 | 117·1 | 17 1/2 | 118·8 | 118·7 | 118·5 | 118·8 | 118·7 |
| 18 1/2 | 123·5 | 123·4 | 123·7 | 123·6 | 123·6 | 18 1/2 | 125·2 | 125·2 | 124·7 | 125·4 | 125·1 |
| 19 1/2 | 130·0 | 130·3 | 130·0 | 130·0 | 130·1 | 19 1/2 | 132·0 | 132·0 | 131·8 | 131·6 | 131·9 |
| 20 1/2 | 136·4 | 136·4 | 136·4 | 136·4 | 136·4 | 20 1/2 | 138·5 | 138·3 | 138·7 | 138·7 | 138·6 |
| 21 1/2 | 143·1 | 142·8 | 142·8 | 142·4 | 142·8 | 21 1/2 | 144·7 | 145·0 | 145·0 | 144·9 | 144·9 |
| 22 1/2 | 149·5 | 148·9 | — | 149·5 | 149·3 | 22 1/2 | 150·6 | 152·0 | 151·9 | 151·8 | 151·6 |
| 23 1/2 | 156·1 | 156 4 | — | 155·9 | 156·1 | 23 1/2 | — | — | 158·1 | — | 158·1 |
| 24 1/2 | — | — | — | 162·8 | 162·8 | | | | | | |
| 25 1/2 | — | — | — | 168·9 | 168·9 | | | | | | |
| 26 1/2 | — | — | — | 175·8 | 175·8 | | | | | | |
| 27 1/2 | — | — | — | 181·5 | 181·5 | | | | | | |

**IV. táblázat.** (Folytatás 3.)

| $\Delta_2F_1'(K=J-1/2)$ | | | | $\Delta_2F_2'(K=J+1/2)$ | | | $\Delta_2F_1'(K=J-1/2)$ | | | | $\Delta_2F_2'(K=J+1/2)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5, 2) | | | | (5, 2) | | | (6, 2) | | | | (6, 2) | | |
| $J$ | $R_1(J)-P_1(J)$ | ${}^QR_{12}(J)-{}^OP_{12}(J)$ | középérték | ${}^SR_{21}(J)-{}^QP_{21}(J)$ | $R_2(J)-P_2(J)$ | középérték | $J$ | $R_1(J)-P_1(J)$ | ${}^QR_{12}(J)-{}^OP_{12}(J)$ | középérték | ${}^SR_{21}(J)-{}^QP_{21}(J)$ | $R_2(J)-P_2(J)$ | középérték |
| 1/2 | — | — | — | — | — | — | 1/2 | — | — | — | — | — | — |
| 1 1/2 | — | 5·9 | 5·9 | 8·8 | — | 8·8 | 1 1/2 | — | 6·0 | 6·0 | — | 9·5 | 9·5 |
| 2 1/2 | 09·7 | 9·6 | 9·7 | 13·2 | 13·4 | 13·3 | 2 1/2 | 7·7 | 9·5 | 9·5 | — | 13·1 | 13·1 |
| 3 1/2 | 13·4 | 13·5 | 13·5 | 17·1 | 17·1 | 17·1 | 3 1/2 | 12·3 | 13·4 | 12·9 | 16·6 | 16·7 | 16·7 |
| 4 1/2 | 17·6 | 17·1 | 17·4 | 20·8 | 20·9 | 20·9 | 4 1/2 | 16·8 | 16·6 | 16·7 | 20·4 | 20·3 | 20·4 |
| 5 1/2 | 20·8 | 21·0 | 20·9 | 24·6 | 24·6 | 24·6 | 5 1/2 | 20·5 | 20·4 | 20·5 | 24·0 | 24·1 | 24·1 |
| 6 1/2 | 24·7 | 24·6 | 24·7 | 28·9 | 28·6 | 28·8 | 6 1/2 | 24·1 | 24·1 | 24·1 | 27·6 | 28·0 | 27·8 |
| 7 1/2 | 28·5 | 28·6 | 28·6 | 32·2 | 32·4 | 32·3 | 7 1/2 | 27·7 | 27·7 | 27·7 | 31·3 | 31·7 | 31·5 |
| 8 1/2 | 32·4 | 32·4 | 32·4 | 36·0 | 36·3 | 36·2 | 8 1/2 | 31·4 | 31·3 | 31·4 | 35·0 | 35·5 | 35·3 |
| 9 1/2 | 36·0 | 36·0 | 36·0 | 39·9 | 39·8 | 39·9 | 9 1/2 | 35·1 | 35·4 | 35·3 | 38·9 | 38·9 | 38·9 |
| 10 1/2 | 39·9 | 39·9 | 39·9 | 44·1 | 43·4 | 43·8 | 10 1/2 | 39·1 | 38·9 | 39·0 | 42·8 | 42·9 | 42·9 |
| 11 1/2 | 43·6 | 43·8 | 43·7 | 47·4 | 47·3 | 47·4 | 11 1/2 | 42·6 | 42·5 | 42·6 | 46·1 | 46·3 | 46·2 |
| 12 1/2 | 47·6 | 47·5 | 47·6 | 51·1 | 51·2 | 51·2 | 12 1/2 | 46·6 | 46·4 | 46·5 | 50·2 | 50·2 | 50·2 |
| 13 1/2 | 51·1 | 51·0 | 51·1 | 55·0 | 54·9 | 55·0 | 13 1/2 | 50·1 | 50·0 | 50·1 | 53·9 | 53·7 | 53·8 |
| 14 1/2 | 55·2 | 55·0 | 55·1 | 58·8 | 58·7 | 58·8 | 14 1/2 | 54·0 | 53·8 | 53·9 | 57·5 | 57·4 | 57·5 |
| 15 1/2 | 58·7 | 58·8 | 58·8 | 62·6 | 62·7 | 62·7 | 15 1/2 | 57·1 | 57·3 | 57·2 | 61·2 | 61·2 | 61·2 |
| 16 1/2 | 62·6 | 62·4 | 62·5 | 66·6 | 66·2 | 66·4 | 16 1/2 | 61·2 | 61·3 | 61·3 | 64·9 | 64·8 | 64·9 |
| 17 1/2 | 66·9 | 66·1 | 66·6 | 70·0 | 70·1 | 70·1 | 17 1/2 | 65·0 | 64·6 | 64·8 | 68·4 | 68·5 | 68·5 |
| 18 1/2 | 70·0 | 70·1 | 70·1 | 73·7 | 73·8 | 73·8 | 18 1/2 | 68·6 | 68·3 | 68·5 | 72·1 | 72·2 | 72·2 |
| 19 1/2 | 73·9 | 73·9 | 73·9 | 77·3 | 77·4 | 77·4 | 19 1/2 | 72·2 | 72·2 | 72·2 | 75·7 | 75·8 | 75·8 |
| 20 1/2 | 77·4 | 77·5 | 77·5 | 81·5 | 81·2 | 81·4 | 20 1/2 | 75·7 | 75·8 | 75·8 | 79·5 | 79·3 | 79·4 |
| 21 1/2 | 81·3 | 81·4 | 81·4 | — | 84·9 | 84·9 | 21 1/2 | 79·2 | 79·2 | 79·2 | 83·0 | 83·3 | 83·2 |
| 22 1/2 | 83·9 | 84·6 | 84·3 | — | 88·0 | 88·0 | 22 1/2 | 82·8 | 83·0 | 82·9 | 87·4 | 86·8 | 87·1 |
| 23 1/2 | 88·3 | 88·5 | 88·4 | — | 92·3 | 92·3 | 23 1/2 | 86·7 | 86·4 | 86·6 | — | 90·2 | 90·2 |
| 24 1/2 | — | 92·4 | 92·4 | — | 96·1 | 96·1 | 24 1/2 | 90·2 | 89·4 | 89·7 | — | 93·8 | 93·8 |
| 25 1/2 | — | — | — | — | — | — | 25 1/2 | 93·9 | — | 93·9 | — | 97·7 | 97·7 |
| 26 1/2 | — | — | — | — | — | — | 26 1/2 | 97·5 | — | 97·5 | — | — | — |

**IV. táblázat.** (Folytatás 4.)

| $\Delta_2F_1'(K=J-1/2)$ | | | | $\Delta_2F_2'(K=J+1/2)$ | | | $\Delta_2F_1'(K=J-1/2)$ | | | | $\Delta_2F_2'(K=J+1/2)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (7, 1) | | | | (7, 1) | | | (8, 1) | | | | (8, 1) | | |
| $J$ | $R_1(J)-P_1(J)$ | $^QR_{12}(J)-{}^OP_{12}(J)$ | közép-érték | $^SR_{21}(J)-{}^OP_{21}(J)$ | $R_2(J)-P_2(J)$ | közép-érték | $J$ | $R_1(J)-P_1(J)$ | $^QR_{12}(J)-{}^OP_{12}(J)$ | közép-érték | $^SR_{21}(J)-{}^OP_{21}(J)$ | $R_2(J)-P_2(J)$ | közép-érték |
| 1/2 | — | — | | — | — | — | 1/2 | — | — | — | — | — | — |
| 1 1/2 | 5·5 | — | 5·5 | — | — | — | 1 1/2 | 06·1 | — | 6·1 | — | — | — |
| 2 1/2 | 9·0 | 9·4 | 9·2 | 12·9 | 13·9 | 13·4 | 2 1/2 | 09·1 | 8·7 | 8·9 | 12·4 | 11·4 | 11·9 |
| 3 1/2 | 12·3 | 13·4 | 12·9 | 16·4 | 16·4 | 16·4 | 3 1/2 | 12·2 | 12·6 | 12·4 | 16·0 | 15·7 | 15·9 |
| 4 1/2 | 16·4 | 16·2 | 16·3 | 20·1 | 20·0 | 20·1 | 4 1/2 | 16·0 | 16·0 | 16·0 | 19·4 | 19·4 | 19·4 |
| 5 1/2 | 20·2 | 19·9 | 20·1 | 23·7 | 23·6 | 23·7 | 5 1/2 | 19·5 | 19·6 | 19·6 | 23·0 | 23·2 | 23·1 |
| 6 1/2 | 23·7 | 23·7 | 23·7 | 27·1 | 27·2 | 27·2 | 6 1/2 | 23·1 | 23·1 | 23·1 | 26·7 | 26·7 | 26·7 |
| 7 1/2 | 27·3 | 27·2 | 27·3 | 30·9 | 30·7 | 30·8 | 7 1/2 | 26·6 | 26·5 | 26·6 | 30·1 | 30·0 | 30·1 |
| 8 1/2 | 30·9 | 30·7 | 30·8 | 34·5 | 34·5 | 34·5 | 8 1/2 | 30·2 | 29·2 | 29·7 | 33·6 | 33·7 | 33·7 |
| 9 1/2 | 34·3 | 34·7 | 34·5 | 37·8 | 37·8 | 37·8 | 9 1/2 | 33·7 | 33·6 | 33·7 | 37·2 | 37·0 | 37·1 |
| 10 1/2 | 38·1 | 38·5 | 38·3 | 41·8 | 41·9 | 41·9 | 10 1/2 | 37·2 | 37·3 | 37·3 | 40·4 | 40·7 | 40·6 |
| 11 1/2 | 41·6 | 41·5 | 41·6 | 45·3 | 45·2 | 45·3 | 11 1/2 | 40·5 | 40·5 | 40·5 | 44·1 | 44·1 | 44·1 |
| 12 1/2 | 45·3 | 45·5 | 45·4 | 49·0 | 49·2 | 49·1 | 12 1/2 | 44·2 | 44·3 | 44·3 | 48·1 | 47·6 | 47·9 |
| 13 1/2 | 49·0 | 49·0 | 49·0 | 52·5 | 52·6 | 52·6 | 13 1/2 | 47·9 | 47·6 | 47·8 | 51·1 | 51·4 | 51·3 |
| 14 1/2 | 52·6 | 52·4 | 52·5 | 56·0 | 56·2 | 56·1 | 14 1/2 | 51·5 | 51·3 | 51·4 | 54·8 | 54·8 | 54·8 |
| 15 1/2 | 55·9 | 56·3 | 56·1 | 59·7 | 60·2 | 60·0 | 15 1/2 | 54·8 | 54·5 | 54·7 | 57·7 | 58·0 | 57·9 |
| 16 1/2 | 59·5 | 59·7 | 59·6 | 63·4 | 63·4 | 63·4 | 16 1/2 | 58·5 | 58·3 | 58·4 | 61·8 | 61·9 | 61·9 |
| 17 1/2 | 62·9 | 63·2 | 63·1 | 66·7 | 66·9 | 66·8 | 17 1/2 | 61·8 | 61·7 | 61·8 | 64·9 | 65·0 | 65·0 |
| 18 1/2 | 67·2 | 66·9 | 67·1 | 70·6 | 70·6 | 70·6 | 18 1/2 | 65·6 | 65·4 | 65·5 | 69·2 | 68·4 | 68·8 |
| 19 1/2 | 70·7 | 70·3 | 70·5 | 73·9 | 73·8 | 73·9 | 19 1/2 | 68·9 | 68·8 | 68·9 | 72·0 | 71·3 | 71·7 |
| 20 1/2 | 74·2 | 71·0 | 74·1 | 77·6 | 77·5 | 77·6 | 20 1/2 | 72·0 | 71·9 | 72·0 | 75·5 | 75·4 | 75·5 |
| 21 1/2 | 77·1 | 77·6 | 77·4 | 81·3 | 81·0 | 81·2 | 21 1/2 | 75·6 | 75·9 | 75·8 | 79·2 | 79·1 | 79·2 |
| 22 1/2 | 81·1 | 81·4 | 81·3 | 85·2 | 84·5 | 84·9 | 22 1/2 | 79·4 | 79·4 | 79·4 | 82·8 | 82·5 | 82·7 |
| 23 1/2 | 84·8 | 84·3 | 84·6 | — | — | — | 23 1/2 | 83·4 | 83·3 | 83·4 | — | 86·6 | 86·6 |
| | | | | | | | 24 1/2 | 86·2 | — | 86·2 | — | 89·9 | 89·9 |
| | | | | | | | 25 1/2 | 90·1 | — | 90·1 | — | — | — |
| | | | | | | | 26 1/2 | 93·0 | — | 93·0 | — | — | — |
| | | | | | | | 27 1/2 | 97·3 | — | 97·3 | — | — | — |
| | | | | | | | 28 1/2 | 100·0 | — | 100·0 | — | — | — |

ahol $F_1$ állapotnál $K = J - 1/2$ és $F_2$ állapotnál $K = J + 1/2$. Az $a$-esethez tartozó alsó állapotnál pedig:

$$\Delta_2 F''(J) = 2B_v^*(2J+1),$$

ahol az $F_1$ és $F_2$ nívósorozatokhoz tartozó két $B_v^*$ közötti összefüggés:

$$B^* = B_v(1 \pm B_v/AA).$$

A +, illetve − jel a $\Sigma = +1/2$, illetve $\Sigma = -1/2$ értékekhez tartozik. $B_v$-t tehát megkapjuk, ha vesszük a két $B^*$ középértékét. A $v'' = 1$ és $v'' = 2$ állapotoknál talált $B_v^*$ értékek a következők:

| | $v'' = 1$ | $v'' = 2$ |
|---|---|---|
| $B^*(F_1)$ | 1·625 | 1·607 |
| $B^*(F_2)$ | 1·653 | 1·633 |

Tehát

$$B_{v=1} = 1{\cdot}639$$
$$B_{v=2} = 1{\cdot}620.$$

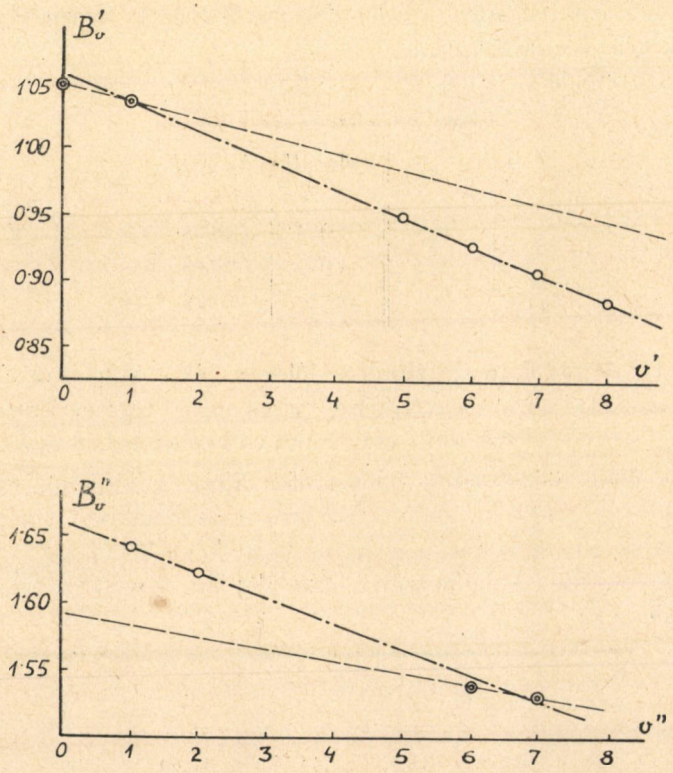
A felső állapotnak $F_1$ és $F_2$ nívósorozatához tartozó $B$ értékek teljesen egyformáknak adódtak. Értékeik:

| | $v' = 5$ | $v' = 6$ | $v' = 7$ | $v' = 8$ |
|---|---|---|---|---|
| $B'_v$ | 0·949 | 0·927 | 0·907 | 0·884 |

Összehasonlítva ezeket a $B$ értékeket a STEVENS által extrapolált értékekkel, jelentős eltérés mutatkozik. A STEVENS által felállított $B'_v = 1{\cdot}048 - 0{\cdot}014\ v'$ és $B''_v = 1{\cdot}610 - 0{\cdot}009\ v''$ formulák közül az utóbbiban korrigálnunk kell elsősorban is $B''_0 = 1{\cdot}610$ értékét. Ezt ugyanis azon feltevés alapján kapta, hogy a sávrendszer sávjainak $v''$ számozását két egységgel növelni kell. Később kimért újabb sávok alapján (12) ez a feltevés megdőlt, tehát STEVENS adataiból $B''_0 = 1{\cdot}592$ adódik. A $v'' = 6$ és 7-hez tartozó $B''$ értékekből történt eme extrapolálásnál lényegesen jobb értéket kap-

hatunk $B_0''$-re, ha a jelen dolgozatban meghatározott $B_{v=1}''$ és $B_{v=2}''$ értékekből extrapolálunk a zérusra. Így $B_0''$-re 1·658 értéket kapjuk.

Az 5. ábra grafikusan tünteti fel $B_v'$ és $B_v''$-t, mint $v'$ és $v''$ függvényét. A ⊙-el jelölt értékek STEVENS adatai. Az ezekből




5. ábra.

következő $\alpha$-k által meghatározott egyenestől az új adatok távol esnek, ami arra mutat, hogy az $\alpha' = 0{\cdot}014$ és $\alpha'' = 0{\cdot}009$ értékeket is korrigálnunk kell.

Az új adatokból következő $\alpha' = 0{\cdot}022$, illetve $\alpha'' = 0{\cdot}019$ értékek jósága mellett szól egyrészt az a körülmény, hogy az ezek által meghatározott egyenesek STEVENS adatai között haladnak

keresztül, másrészt és főleg az, hogy az újonnan meghatározott $\alpha$-értékek azonos nagyságúak más kétatomos molekulatermek hasonló adataival, míg STEVENS $\alpha$-értékei szokatlanul alacsonyak. A STEVENSTŐL származó erősen kiugró $B$ értékeket itt nem diszkutálhatjuk. Hogy vajjon perturbáció esete forog-e fenn, vagy pedig mérési hibáról van-e szó, annak eldöntésére további sávok kimérésére lesz szükség, amit a jelen dolgozat folyamán készített felvételek lehetővé is tesznek.

Összefoglalva tehát:

| | Felső $^2\Pi$ | Alsó $^2\Pi$ |
|---|---|---|
| $B_0$ | 1·059 | 1·658 |
| $B_e$ | 1·070 | 1·668 |
| $\alpha$ | 0·022 | 0·019 |

II. A sávok megrövidülése főleg a látható spektrálvidékbe eső, azaz első negatív sávrendszer vizsgálatánál vezetett eredményhez. A sávrendszerről eddig csak annyi volt ismeretes, hogy $\lambda$=5005, 5295, 5631, 6026, 6419, 6856, 7334, 7891 Å hullámhosszaknál kezdődő négy-ötfejű, ibolya felé árnyékolt rendkívül komplikált sávokból áll. A vibrációs kvantumszámoknak MULLIKEN és STEVENS (12) által történt hozzárendelése alapján a következő szkémába foglalhatók:

| $v''$ / $v'$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 16,589 | 15,575 | 14,581 | 13,606 | 12,669 |
| 1 | 17,751 | — | — | — | — |
| 2 | 18,878 | — | — | — | — |
| 3 | 19,972 | — | — | — | — |

Ezeken kívül SCHUSTER (1) $\lambda = 5840$ és 5900 Å között is vélt egy sávot felismerni, amelyet azonban a későbbi kutatók bizonytalan helye miatt nem vettek figyelembe és így a szkémába sem volt besorozható.

A teljesen tiszta és hidegfényű oxigénnek a sztigmatikus leképezésű rácson készült felvételeiről analógia alapján lehetővé vált több új sávot felismerni. Kiderült, hogy az eddig ismert sávok komplikált szerkezetüket nagyrészben annak köszönhetik, hogy tulajdonképpen nem is csak egy-egy többfejű sávból állanak, hanem a (2→1), (1→0), (0→0), (0→1) sávok mindegyikében még több sáv van egymásra rakódva. E sávok nem csupán a fenti szkémában is megadott legjobban szembeötlő vörös felé eső fejről voltak felismerhetők, hanem mindegyik sávnál több, teljesen hasonló karakterisztikus vonalcsoportosulás identifikálása vált lehetővé. Két-két sáv megfelelő helyeinek frekvenciában kifejezett távolsága közelítőleg ugyanaz. Ennek alapján lehetséges volt a szemlélet útján mutatkozó karakterisztikus helyek valóbani összetartozásának eldöntése. A következő táblázat első oszlopában vannak az egyes sávoknak leginkább vörös felé eső fejei a többi oszlopban pedig az identifikált karakterisztikus helyek:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15,741 | 15,775 | 15,805 | — | — |
| 16,736 | 16,769 | 16,795 | 16,827 | 16,880 |
| 16,871 | 16,901 | 16,931 | 16,958 | 17,012 |
| 16,992 | 17,021 | 17,051 | 17,079 | 17,133 |
| 17,097 | 17,135 | 17,163 | — | — |
| 17,860 | 17,890 | 17,918 | 17,946 | 18,003 |
| 17,959 | 17,990 | 18,017 | 18,046 | — |
| 18,043 | 18,071 | — | — | — |
| 18,953 | 18,981 | 19,010 | 19,039 | 19,094 |

A sávfejek szkémájában uralkodó törvényszerűségek alapján a nagyfrekvenciájú kisülésből kiemelt további sávokat a következő helyekre sorozhatjuk be:

| $v'$ \ $v''$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 16,589 | 15,575 | 14,581 | 13,606 | 12,669 |
| 1 | 17,751 | 16,736 | 15,741 | — | — |
| 2 | 18,878 | 17,860 | 16,871 | — | — |
| 3 | 19,972 | 18,953 | 17,959 | 16,992 | — |
| 4 | — | — | — | 18,043 | 17,097 |

Eszerint a SCHUSTER által talált sáv, melynek első, vörös felé eső fejei az előző sávok megrövidülése folytán most jól felismerhetően jelentek meg, a (2,2) vibrációs kvantumszámokat kapja. A többi sáv vibrációs kvantumszámai a szkémáról leolvashatók.

A rotációs analízisnél felmerülő első kérdés az, hogy milyen elektronátmenethez tartozik ez a sávrendszer. Minthogy az $O_2^+$-nak páratlan számú elektronja van, csak páros multiplicitású termek lehetségesek. Mivel egyrészt a szóbanforgó sávok vibrációs frekvenciái $\omega'$ és $\omega''$ a már ismert ultraibolyában fekvő második negatív dublett sávrendszer egyik állapotával sem hozhatók korrelációba, másrészt szerkezetük az összes eddig ismert dublett sávokénál komplikáltabb, jutott MULLIKEN (13) elméleti megfontolások alapján arra a következtetésre, hogy a szóbanforgó sávrendszert egy $^4\Sigma_g^- \rightarrow {}^4\Pi_u$ átmenetnek tulajdonítsa.

Atomszínképeknél vitás multiplicitás esetén a Zeeman-effektus legtöbb esetben egyértelműen dönthet. Bár molekulaszínképeknél a Zeeman-jelenség sokkalta bonyolultabb, mégis remélhető, hogy az egyes sávvonalak helyén keletkező Zeeman-komponensek általános képéből a term-multiplicitás kideríthető.

A $\lambda = 5631$ sávnak tér nélkül, 12,300 és 23,300 Gauss erősségű mágneses terekben gerjesztett színképeit mutatja a 2. kép. Mint látható, a mágneses térnek a sávvonalakra gyakorolt hatása igen nagy mértékű. Nemcsak a fejek környékén, hanem magas kvantumszámú rotációs vonalaknál is aránylag nagy kiszélesedéseket észlelhetünk, már gyenge térben is (aminek rovására írható, hogy a mágneses kép aránylag mindig gyengébb, mint a tér-nélküli), sőt erős térben a vonalak a tér-nélküli helyektől eltérőleg más helyeken látszanak karakterisztikusan csoportosulni: azaz tipikus PASCHEN-BACK jelenséget mutatnak.

Már maga ez a kvalitatív megfigyelés bizonyos következtetéseket enged meg: hogy már 23,000 Gaussos mágneses térben beállhat a PASCHEN—BACK jelenség, az arra mutat, hogy legalább is a kombináló termek egyike igen közel van a *b*-határesethez: nagy valószínűséggel $\Sigma$ termnek tekinthető. Ha az experimentálisan megvalósítható mágneses térben a PACHEN — BACK-effektus «komplett» volna, akkor $^2\Sigma \rightarrow {}^2\Pi_a$ átmenet esetében minden sávvonal helyén egymástól nagyjából $2\,\Delta\,\nu_{\text{norm}} = 2.4{\cdot}7.10^{-5}\,H$

Gauss távolságban levő komponenseket kellene kapni. $^4\Sigma \rightarrow {}^4\Pi$ esetben pedig négy ilyen komponenst. Ha a másik term maga is közel van a $b$-határesethez, a komponensek maguk is bonyolult vonalcsoportozatból állanának. Hogy ez az aránylag egyszerű kép (lásd pl. W. JEVONS: Report on Band-Spectra of Diatomic Molecules 255. old.) azonban intenzitás-viszonyok speciális alakulása következtében mennyire eltorzulhat, azt már dublett sávok esetére is bizonyítja BUDÓnak (14) az Intézetben készült értekezése. Bár a 2. kép nem mutatja teljes határozottsággal a kvartett-felbomlást, az észlelt ZEEMAN-jelenség az eddig ismert legbonyolultabb ZEEMAN-jelenségnél is komplikáltabb lévén, mégis a kvartett-átmenet nagyobb valószínűsége mellett dönthet.

Ugyancsak a kvartett-átmenet mellett szól még a következő megfigyelés:

Bár e sávok szerkezete nagyon bonyolult, mégis lehetséges volt a HOCHHEIM által bevont rács segítségével olyan felvételeket nyerni, melyeken a vonalak sűrű tömkelegében néhány legerősebb ág biztosan felismerhető volt. (Ez főleg annak köszönhető, hogy a tetemesen megnövekedett felbontóképesség következtében élesen különváltak nagy számban olyan vonalak is, melyek még a FRERICHS-féle képeken részlegesen vagy teljesen összeestek.[4] Az egy ágba sorolt vonalak kölcsönös távolságai szingulett-sávok esetében az egyszerű $BJ(J+1)$ termképlet alapján $J$-vel szigorúan lineárisan nőnek és ezt a magas rotációs-kvantumszámoknál már latba eső $DJ^2(J+1)^2$ korrekciós tag csak kissé csökkenti.

Multiplett sávok esetében a vonalak kölcsönös távolsága módosul és általában $J$-vel gyorsabban nő. Kvartett-sávokra az elmélet ezidőszerint még nem adott zárt formulát. Viszont a HILL- és VAN VLECKtől (15) (P. R. 32,250 1928.) származó dublett termformulát az észlelt vonaltávolságokra alkalmazva, nem sikerült $B$ és $A = A/B$ numerikus faktorok semmilyen értékmegválasztásánál sem az észlelt számsorozatot visszaadni: az észlelt kölcsönös vonaltávolság a $J$-vel ehhez túl sebesen növekedett.

---

[4] Hálás köszönetünket kell kifejeznünk Dr. R. FRERICHS úrnak, aki nemcsak saját, hanem a bevezetésben említett HOLLAN-féle kimérés alapjául szolgáló CARIO-féle felvételeket is rendelkezésre bocsátotta.

## Összefoglalás.

Az ionizált oxigén-molekula sávjainak gerjesztésére kidolgozott új eljárással sikerült nagy intenzitású és teljesen tiszta $O_2^+$ színképet előállítani. A gerjedés, megfelelően előkészített kvarc kisülési-csőben történt, külső elektródokra rávezetett nagyrezgésszámú és nagyfeszültségű áram hatására. A kisülés alacsony effektív hőmérséklete folytán, a vibrációs szerkezet a rotációs szerkezet rovására erősen kidomborodott, aminek következtében több új sáv felismerése és beosztása vált lehetővé.

A II. negatív sávrendszer távoli ultraibolyában fekvő (5→2), (6→2), (7→1) (8→1) sávjainak rotációs analízise a $B_0$ és $\alpha$ állandók lényeges megjavítását eredményezte :

| | | Régi értékek | Új értékek |
|---|---|---|---|
| $A^2\Pi$ | $B_0$ | 1·048 | 1·059 |
| | $\alpha$ | 0·014 | 0·022 |
| $X^2\Pi$ | $B_0$ | 1·592 | 1·658 |
| | $\alpha$ | 0·009 | 0·019 |

Miután sikerült az oxigén molekula-iónokat mágneses térben is gerjedésre bírni, lehetővé vált az I. negatív sávrendszer ZEEMAN-effektusának is a lefényképezése. A mágneses térnek rendkívül nagy hatása van a sáv-vonalakra. A már 23,000 GAUSS erősségű térben bekövetkező PASCHEN-BACK effektus, valamint egyes ágaknál mutatkozó törvényszerűségek alapján, az elméletileg következtetett kvartett-struktúra kísérletileg is igazoltnak látszik.

Jelen dolgozat a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült. Az Intézet felszerelését részben az Országos Természettudományi Tanács, részben a Széchenyi Tudományos Társaság által rendelkezésre bocsátott anyagi támogatásnak köszöni. A vizsgálatra használt konkáv rácsfelállítás nagyrészben a Rockefeller-alapítvány ajándéka. A színképek gerjesztéséhez használt nagyfeszültségű transzformátor a Ganz-féle Villamos Művek RT.-tól, a nagyfrekvenciájú adócső többszöri regenerálása a Vatea Rádiótechnikai Gyár RT. részéről élvezett nagylelkű támogatás folyománya.

Kedves kötelességemnek tartom, hogy leghálásabb köszönetemet fejezzem ki az Intézet igazgatójának, dr. Pogány Béla műegyetemi ny. r. tanár úrnak, a M. Tud. Akadémia tagjának, aki e költséges vizsgálat elvégzését intézetében megengedte, valamint dr. Schmid Rezső egyetemi magántanár úrnak, aki a vizsgálat elvégzésére ösztönzött és annak folyamán értékes tanácsaival állandóan támogatott. Ugyancsak hálás köszönetet mondok dr. Babits Viktor műegyetemi meghívott előadó úrnak, aki a nagyfrekvenciás gerjesztőberendezés építésében bőséges útbaigazításokkal tüntetett ki, valamint dr. Gerő Loránd műegyetemi tanársegéd úrnak, a rotációs analízis gyakorlati kivitele folyamán nyujtott számos útbaigazításáért.

## Felhasznált irodalom.

1. A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 27, 383.
2. A. Wüllner, Wied. Ann. 8, 253; Wied. Ann. 38, 616.
3. W. Steubing, Ann. d. Phys. 33, 555, 1910.
4. F. Holland, Zsch. f. wiss. Phot. 23, 342, 1925.
5. R. Frerichs, Zsch. f. Phys. 35, 686, 1926.
6. J. Stark, Ann. d. Phys. 43, 319, 1914.
7. R. C. Johnson, Proc. Roy. Soc. 105, 683, 1924.
8. E. Birge, P. R. 25, 240, 1925.
9. Ellsworth—Hopfield, P. R. 29, 79, 1927.
10. E. Stueckelberg, P. R. 34, 65, 1929.
11. D. S. Stevens, P. R. 38, 1292, 1931.
12. R. S. Mulliken—Stevens, P. R. 44, 720, 1933.
13. R. S. Mulliken, Rev. of Mod. Phys. 4, 51, 1932.
14. A. Budó, Zeeman Verhandelingen 166, 1935.
15. Hill van Vleck, P. R. 32, 250, 1928.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. okt. 14-én tartott üléséből.)

# NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS BANDENSPEKTRUM DES IONISIERTEN SAUERSTOFFMOLEKÜLS.

Von L. BOZÓKY von Pilismaród.

Tafel IV.

Die bisherigen Methoden der Anregung von $O_2^+$-Banden lieferten meistens nur unreine Spektren des ionisierten Sauerstoffmoleküls. Dagegen liefert ein Hochfrequenz- und Hochspannungs-Generator vollkommen reines, dabei äusserst lichtstarkes Spektrum, falls die Spannung mittels mit Transformatoröl und Luftgebläse gekühlten Aussenelektroden an die ausschlieslich aus reinem Bergkristall geblasene Quarzröhre übertragen wird. Sauerstoff wurde in den ganz ausgepumpten, ausgeheizten und abgeschmolzenen Röhren selbst aus schon vorher durchgeschmolzenen $KClO_3$ entwickelt.

Im II. negativen Bandenspektrum ($^2\Pi_b \rightarrow {}^2\Pi_a$ Übergang) konnten mehrere neue Banden klassifiziert werden. Es wurde die Rotationsstruktur der Banden (5→2), (6→2), (7→1), (8→1) untersucht. Diese liegen zwar in einem ungünstigen Spektralbereich, konnten aber mit dem 30,000 Lines/inch Gitter des Instituts, das neuerdings mit Hochheim'scher Legierung überzogen wurde, in genügender Intensität und grosser Schärfe photographiert werden, wodurch eine Verbesserung der Rotationskonstanten von $B_e$ und $\alpha$ erzielt werden konnte. Die entsprechende Zahlenwerte sind: $A^2\Pi B_e = 1{\cdot}070$, $\alpha = 0{\cdot}022$; $X^2\Pi B_e = 1{\cdot}668$, $\alpha = 0{\cdot}019$.

Die tiefere effektive Temperatur der Hochfrequenz-Entladung bewirkte in den I. neg. Banden (Sichtbares Spektralbereich), dass auf Kosten der überaus verwickelten Rotationsstruktur die

Schwingungsstruktur mehr zur Geltung kam, wodurch die folgenden Banden als solche erkannt und in das Schwingungsschema eingereiht werden konnten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1,1) | 16,736 | (3,1) | 18,953 |
| (1,2) | 15,741 | (3,2) | 17,959 |
| (2,1) | 17,860 | (3,3) | 16,992 |
| (2,2) | 16,871 | (4,3) | 18,043 |
| | | (4,4) | 17,097 |

Der Einfluss des Magnetfeldes auf die I. neg. Banden ist sehr prominent. Allem Anscheine nach bildet sich ein PASCHEN—BACK-Effekt schon bei 23,000 Gauss aus. Auf Grund des beobachteten ZEEMAN-Effekts und der Einzelheiten des Verlaufes der konsekutiven Abstände der Zweiglinien als Funktion der Rotationsquantenzahl wird die Annahme der theoretisch vorausgesagten Quartett-Struktur auch experimentell unterstützt. Eine ausführliche Mitteilung erscheint demnächst in der Zeitschrift für Physik.

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftwissenschaften. Institutsleiter Prof. B. POGÁNY.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Okt. 1935.)

# MAGYARORSZÁGI HÉVIZEK FELSŐBBRENDŰ NÖVÉNYZETE.

BOROS ÁDÁM-tól.

Magyarország természeti nevezetességei közé tartoznak a hévizek, amelyek régóta felkeltették a tudomány érdeklődését. A mai hévizek utódai a geologiai korok azon hévizeinek, melyek az édesvízi mészköveket rakták le. Az édesvízi mészkövekbe zárt kövületek helyes értékelésének elengedhetetlen előfeltétele a hévizek mai életvilágának ismerete. Ez, valamint a botanikai irodalomban szétszórt érdekes adatok indították a szerzőt arra, hogy megvizsgálja és összehasonlítólag tanulmányozza a trianoni határon belül eső hévizeket és néhány más elérhető természetes hévforrást. A tanulmány a *Chara*-félék, mohok és edényesek vizsgálatára terjedt ki.

A hazai hévizek legnagyobb részét fürdőnek használják, miért is növényzetük ma sokkal szegényebb, mint lehetett az emberi kultúra mai nagy térfoglalása előtt. Mindazonáltal az eredeti vegetációból sok maradt meg s ez sok érdekességet nyujt.

Azok a hévizek, melyekben felsőbbrendű növényzetről szó lehet, legnagyobbrészt a «langyosvíz» (hyalotherma) fogalmába tartoznak, csupán a nagyváradi, hévizi, egri, pöstyéni és állítólag a görömböly-tapolcai hévizek hőfoka éri, illetve haladja túl a 30° C-t, tehát csupán ezek nevezhetők szorosabb értelemben «melegvíz»-nek (euthermának).

A tanulmány eredményeinek rövid összefoglalása a következő.

A thermális vizekben élő növények hosszabb tenyészeti idejének tulajdonítható, hogy a hévizekben élő növények termete sokszor megnagyobbodik (pl. a *Ricca fluitans* Görömböly-Tapolcán,

a *Nasturtium officinale* legtöbb termőhelyén) s gyakran megtartja alsó leveleit, pedig ezek a kifejlett növényen rendszerint hiányzanak (pl. a *Nuphar luteum* alámerült leveleivel Tatán a *N. affinet* utánozza). Számos *Chara*-féle és lombosmoha megnagyobbodva, mint «f. *thermalis*» jelenik meg, mint pl. az *Eucladium verticillatum* az Árpádforrásnál (Óbuda) s a *Barbula tophacea* ugyanott és Kistapolcán stb. Gyakori a meddőség, ami főleg *Chara*-fajokon és a *Tolypellopsis stelligerán* tapasztalható. Nevezetes a hévizek-áztatta helyeken termő mohok mésztufaképzése, amiben főleg a következő fajok vesznek részt: *Eucladium verticillatum* (Tóváros, Bodajk, Árpádforrás, Tapolca, Eger, Sály, Szklenó), *Hymenostylium curvirostre* (Árpádforrás, Zsibra), *Barbula tophacea* (Árpádforrás, Rómaifürdő, Lukács-fürdő, Margitsziget, Iszkaszentgyörgy, Hévíz, Kistapolca, Eger, Kács, Sály, Gánóc), *Cratoneurum filicinum*, *Cr. commutatum*, *Eurhynchium rusciforme*.

A mésztufás talajt kedvelő növényszövetkezetek a környezet növényzetétől nagyon elütők a Szepességben és a Vág völgyében, pl. Zsibra, Gánóc, Kralován stb. mellett, ahol a *Chara crinita*, *Trichophorum pumilum*, *Tr. austriacum*, *Schoenoplectus Tabernaemontani*, *Glaux maritima*, *Centaurium uliginosum*, *Plantago maritima*, *Scorzonera parviflora* stb. előfordulása ezekhez a szénsavas, meszes forrásokhoz van kötve. Hasonló jelenség a Dunántúl egyes hévizeinél (Tata, Pét) a sziki asszociációk megjelenése.

Növényföldrajzi szempontból elemezve a hévizek és környékük növényzetét, felismerhetők oly jellemvonások, melyek a hévizek felsőbbrendű flóráját megkülönböztetik a közönséges források és azok vizével öntözött helyek növényzetétől. A thermák egymáshoz hasonló életmódtani (ökologiai) viszonyaikkal egymáshoz hasonló életteret s így rokon flóra-szigeteket alkotnak. Ez magyarázza meg, hogy a *Tolypellopsis stelligera* három hazai hévízben (Tata, Tapolca és Hévíz), a *Nasturtium officinale* számos s a *Chlorocyperus longus* több (Tata, Gyüd) therma partján terem. A therma melegebb mikroklimatikus állapotot hoz létre, ez magyarázza meg, hogy a thermáknál olyan növények jelennek meg, amelyek hazája délibb, melegebb, sőt szubtrópusi vidéken van. Ilyen elsősorban a reliktumot képviselő *Castalia thermalis* (Nagyvárad), a *Schoenoplectus litoralis* (Hévíz) s esetleg az *Utricularia biflora* is (Hévíz), amelyek

nálunk csak hévizekben teremnek, másodsorban ilyenek a hévizeket előszeretettel lakó *Chlorocyperus longus*, *Nasturtium officinale* (Tata, Bodajk, Pét, Tapolca), a mohok közül a *Mniobryum calcareum* (Római-fürdő, Eger). Jellemző kísérői még a hévizeknek a *Potamogeton coloratus*, *P. fluitans*, *Salomus Valerandi*, *Veronica Velenovskyi* és a mésztufaképzőként említett mohok, elsősorban a *Barbula tophacea*. Mai ismereteink szerint endemikus hévizi fajok a *Chara hungarica* (Lukács-fürdő), *Ch. mucronata* (Római-fürdő) és a *Ch. piestanensis* (Pöstyén). A *Tollypelopsis* nálunk csak hévizekből ismeretes. Feltünő a nálunk nagyon ritka *Philonotis marchica* megjelenése az egri hévizek mellett.

Míg a hévizekben és azokon a helyeken, amelyeket a hévíz melegít, meleg flóra- és fauna-szigeteket, Nagyváradon egyenest «szubtrópusi oázist» találunk, addig a hévforrásoktól távolodva, azokon a helyeken, amelyeket a hévforrás távolabbról öntöz, ködje ér, épp az ellenkező jelenséggel találkozunk. A középmagyarországi hévizeket rendszerint kísérő *Moliniás* sásréteken, illetve a Dunántúlon gyakori *Sesleriás* réteken s általában a hévizeket környező réteken, gyakran találunk olyan növényeket, amelyek az illető vidék flórájából kirínak s nem déli, hanem épp ellenkezőleg, a hazai viszonyok mellett sokkal inkább északi, sokszor kárpáti jellemük van. Ilyen meglepő előfordulás a *Carex lasiocarpa* Pét mellett, a *Senecio umbrosus* Tata-Tóváros mellett s egész hasonló a *Trichophorum pumilum* előfordulása a Kárpátok alján, Gánóc, Zsibra, Kralován stb. mellett. Ezeken kívül hasonló jelenség az Alföld szélénél és a dunántúli hegyvidékek peremén lévő hévizeknél a következő növények előfordulása: *Calliergon cordifolium* (Tata), *Drepanocladus revolvens* (Római-fürdő), *Ophioglossum vulgatum* (Római-fürdő, Pét), *Allium suaveolens* (Tata, Lesenceistvánd, Sárosfő, Káptalanfa, Pét), *Geranium pratense* (Tata), *G. palustre* (Sárosfő, Nagyvárad), *Gentiana austriaca* (Tata), *Asperula aparine* (Tata, Nagyvárad), *Galium uliginosum* (Tata, Hévíz, Bodajk, Nagyvárad) stb. Ezek a fajok ugyanis az Alföldön és a Dunántúl legnagyobb részén, a hévizektől mentes területen ritkák s előfordulásuk a hévizeknél a hévíz által létrehozott mikroklimatikus viszonyokkal függ össze. A thermák nagy ködképződése, párája a lápflórára nézve igen előnyös. Ilyenkép a hévizek környezete oly

helyeken, amelyeket a hévíz már nem melegít, csupán a nagy páraképződés hatása alatt áll. A szivárgó víznek elég ideje van lehűlni s így oly helyeken, ahová a therma vize csak hosszú szivárgás után lehűlve jut el, többé meleg éghajlatot, illetve meleg mikroklimatikus viszonyokat igénylő növényeket már nem találunk, hanem épp ellenkezőleg, olyanokat, amelyeknek főelterjedése hidegebb éghajlatú vidékeken van.

A hévizek ilyenképpen paradox klimatikus viszonyokat (mikroklíma) és méginkább paradox növényföldrajzi jelenségeket hoznak létre. Így kerül egymás közelébe a *Chlorocyperus longus* és a *Nasturtium officinale* a *Senecio umbrosus*szal és *Gentiana austriacá*val Tatán, a *Carex lasiocarpa, Ophioglossum, Menyanthes* a *Nasturtium officinale*val Pét mellett s ilyen a *Trichophorum pumilum* találkozása is a *Scorzonera parviflorá*val és másokkal Zsibrán, illetve más hasonló elemekkel a többi felvidéki termőhelyén.

Valószínű, hogy a lesenceistvándi sphagnetum kialakulása és fennmaradása is kapcsolatban áll az ott fakadó hévizekkel, azonban az a körülmény egymagában, hogy a hévizek mind állandó, szinte geologiai idők óta feltörő vizek, magában is hosszú, zavartalan fejlődéstörténetet biztosít, ami úgy a meleg, mint a hideg időszaki reliktumok megmaradását már e jellegénél fogva is részben biztosíthatta.

A melegforrások mellett a meleg és hideg éghajlatot kedvelő elemek találkozása nem új jelenség, egész hasonlót ír le Molisch is, aki a szubtrópusi elemeknek és a *Ledum palustre*-flórának találkozását ismerteti a japán Hokkaido-sziget szolfatárái mellékéről.

Végül növényföldrajzi szempontból is jelentős szerepük van a hévizeknek, mint a szubtrópusi és trópusi vízinövények (tündérrózsák stb.) betelepítésére alkalmas helyeknek, ahonnan egyes betelepített elemek, mint pl. a *Vallisneria spiralis* el is vadulnak. Ez esetben a hévíz az elvadulásnak mintegy közvetítője volt. A hévizek által melegített helyeken, szűkebb biotrop keretében elvadulnak más, nem vízi dísznövények is, mint az *Adiantum capillus Veneris* és a *Pteris cretica* Egerben.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# DIE HÖHERE PFLANZENWELT UNGARISCHER THERMEN.

(Auszug.)

Von A. BOROS.

Zu Ungarns Naturmerkwürdigkeiten gehören die Thermalquellen, die schon seit langer Zeit die Aufmerksamkeit der Wissenschaft erweckten. Die heutigen Thermen sind die Nachfolger jener, aus deren Sedimente sich die Süsswasserkalksteine geologischer Zeiten bildeten. Um die Fossilien, die in diesen Kalksteinen eingeschlossen sind, richtig zu bewerten, ist es unbedingt notwendig, die heutige Flora und Fauna der Thermen zu kennen. Dieses Bedürfnis, und auch die vielen interressanten Angaben, die in der botanischen Literatur zerstreut zu finden sind, bewogen den Verfasser, die Thermen, die innerhalb der Trianongrenze liegen, und einige andere, die noch erreichbar waren, vergleichend zu untersuchen. Die Studie erstreckt sich auf die Untersuchung der Characeen, Moose und Gefässpflanzen.

Die meisten Thermen werden heutzutage hauptsächlich als Bäder benützt, weshalb ihre Flora heute bedeutend ärmer ist, als sie vor der gegenwertigen grossen Ausbreitung der Kultur sein konnte. Trotzdem ist durch das Beharrungsvermögen der Flora aus der ursprünglichen Vegetation manches geblieben, was viel Interessantes bietet.

Die meisten Thermen, wo von höherer Vegetation die Rede sein kann, sind lauwarm («Hyalotherm») und nur in Nagyvárad, Hévíz, Eger, Pöstyén und angeblich in Görömböly-Tapolca erreicht oder übersteigt die Temperatur 30° C, und nur diese können im engeren Sinne als warm («Eutherm») bezeichnet werden.

Die Resultate der Studie seien im folgenden kurz zusammengefasst.

Die Vegetationszeit dauert in den Thermen länger an. Dem ist es zuzuschreiben, dass die Gestalt der in Thermen lebenden Pflanzen sich vergrössert (z. B. *Riccia fluitans* in Görömböly-Tapolca, *Nasturtium officinale* an den meisten Standorten) und die unteren Blätter oft erhalten bleiben, die auf der ganz entwickelten Pflanze gewöhnlich fehlen (z. B. *Nuphar luteum* bei Tata ahmt mit ihren untergetauchten Blättern *N. affine* nach). Viele Characeen und Laubmoose erscheinen vergrössert als «f. *thermalis*», z. B. *Eucladium verticillatum* bei der Árpád-Quelle (Óbuda) und *Barbula tophacea* ebenda und bei Kistapolca, usw. Sterilität kommt oft vor, was besonders bei *Chara*-Arten und bei *Tollypellopsis stelligera* zu finden ist. Bemerkenswert ist die Kalktuffbildung der Laubmoose, die an von Thermen bewässerten Stellen leben. An dieser Tätigkeit sind hauptsächlich die folgenden Arten beteiligt: *Eucladium verticillatum* (Tóváros, Bodajk, Árpád-Quelle, Tapolca, Eger, Sály, Szklenó), *Hymenostylium curvirostre* (Árpád-Quelle, Zsibra), *Barbula tophacea* (Árpád-Quelle, Római-fürdő, Lukács-fürdő, Margitsziget, Iszkaszentgyörgy, Hévíz, Kistapolca, Eger, Kács, Sály, Gánóc), *Cratoneurum filicinum*, *Cr. commutatum*, *Eurhynchium rusciforme*.

Pflanzengesellschaften, die von Kalktuff durchzogene Böden bevorzugen, sind in der Zips und im Waagtale von der Flora der Umgebung stark abweichend, z. B. bei Zsibra, Gánóc, Kralován usw., wo *Chara crinita*, *Trichophorum pumilum*, *Tr. austriacum*, *Schoenoplectus Tabernaemontani*, *Glaux maritima*, *Centaurium uliginosum*, *Plantago maritima*, *Scorzonera parviflora* usw. nur neben kohlensauren und kalkhaltigen Quellen vorkommen. Eine ähnliche Erscheinung ist das Vorkommen von Assoziationen der Natronböden an einigen Thermen in Transdanubien (Tata, Pét).

Betrachten wir die Flora der Thermen und deren Umgebung vom pflanzengeographischen Standpunkte, so erkennen wir gewisse Charakterzüge, die die höhere Flora der Thermen von der Flora der gewöhnlichen Quellen und der von diesen bewässerten Stellen unterscheiden. Die Thermen mit ihren ökologisch ähnlichen Verhältnissen erzeugen ähnlichen Biotop und bilden verwandte Flora-

inseln. Das erklärt den Umstand, dass *Tolypellopsis* in drei heimischen Thermen (Tata, Tapolca, Hévíz), *Nasturtium officinale* an Ufern vieler, und *Chlorocyperus longus* (z. B. Tata, Gyüd) an mehreren Thermen wächst. Die Thermen erzeugen ein wärmeres Mikroklima und deshalb erscheinen dort Pflanzen, deren Heimat viel südlicher oder auch subtropisch liegt. Hieher gehören in erster Linie *Castalia thermalis* (Nagyvárad), *Schoenoplectus litoralis* (Hévíz) und ewentuell auch *Utricularia biflora*, die einen Relicte vertreten und bei uns nur in Thermen wachsen, und in zweiter Linie die thermenbevorzugenden *Chlorocyperus longus*, *Nasturtium officinale* und von den Moosen *Mniobryum calcareum* (Römai-fürdő, Eger). Charakteristische Begleiter der Thermen sind noch: *Potamogeton coloratus*, *P. fluitans*, *Samolus Valerandi*, *Veronica Velenovskyi* und die schon erwähnten Moose, die Kalktuffbildner sind, hauptsächlich *Barbula tophacea*. Nach unseren heutigen Wissen sind endemische Arten der Thermen: *Chara hungarica* (Lukács-fürdő), *Ch. mucronata* (Römai-fürdő) und *Ch. piestanensis* (Pöstyén). *Tolypellopsis stelligera* ist bei uns nur aus Thermen bekannt. Auffallend ist das Vorkommen der *Philonotis marchica* bei Eger, die bei uns sehr selten ist.

Während wir in den Thermen, und an solchen Stellen, die von den Thermen erwärmt werden, warme Flora- und Fauna-Inseln vorfinden, bei Nagyvárad sogar eine «Subtropische Oase», nehmen wir an Stellen, welche von den Thermen nur von weitem bewässert, und von deren Dunst angehaucht werden, die entgegengesetzte Erscheinung wahr. Auf *Molinia*-Seggenwiesen, die die mittelungarische Thermen gewöhnlich begleiten, beziehungsweise auf den häufigen *Sesleria*-Wiesen Transdanubiens, wie überhaupt auf Wiesen in der Nähe von Thermen, finden wir oft Pflanzen, die von der Flora der Gegend abstechen, und keiner südlichen, sondern im Gegenteil bei heimischen Verhältnissen mehr nördlichen, sogar karpathischen Charakter haben. Solch ein überraschendes Vorkommen ist *Carex lasiocarpa* bei Pét und *Senecio umbrosus* bei Tata-Tóváros, und ein ganz ähnliches *Trichophorum pumilum* am Fusse der Karpathen bei Gánóc, Zsibra, Kralován usw. Eine ähnliche Erscheinung ist ausser diesen das Vorkommen folgender Pflanzen an den Thermen am Rande der Tiefebene

und der transdanubischen Gebirgsgegend: *Calliergon cordifolium* (Tata), *Drepanocladus revolvens* (Római-fürdő), *Ophioglossum vulgatum* (Rómaifürdő, Pét), *Allium suaveolens* (Tata, Lesenceistvánd, Sárosfő, Káptalanfa, Pét), *Geranium pratense* (Tata), *G. palustre* (Sárosfő, Nagyvárad), *Gentiana austriaca* (Tata), *Asperula aparine* (Tata, Nagyvárad), *Galium uliginosum* (Tata, Hévíz, Bodajk, Nagyvárad) usw. Diese Arten sind nähmlich in der Tiefebene und auf dem grössten Teil Transdanubiens, auf solchen Gebieten, die von Thermen fern liegen, selten, und ihr Vorkommen an Thermen hängt mit den mikroklimatischen Verhältnissen warmer Quellen zusammen. Die starke Nebelbildung und der Dunst der Thermen sind für die Moorvegetation vorteilhaft. So steht die Umgebung der Thermen, an solchen Stellen, die vom Wasser nicht mehr erwärmt werden, bloss unter der Einwirkung der Dunstbildung. Durch langes Sickern kühlt sich das Wasser ab. An solchen Stellen finden wir keine Pflanzen mehr, die wärmeres Klima, beziehungsweise warme mikroklimatische Verhältnisse beanspruchen. Im Gegenteil treffen wir da nur solche an, deren Hauptverbreitung kältere klimatische Verhältnisse voraussetzt.

Auf diese Weise bringen die Thermen paradoxe klimatische (mikroklimatische) und noch paradoxere pflanzengeographische Erscheinungen zustande. So kommen *Chlorocyperus longus* und *Nasturtium officinale* mit *Senecio umbrosus* und *Gentiana austriaca* bei Tata, *Carex lasiocarpa*, *Ophioglossum*, *Menyanthes* mit *Nasturtium officinale* bei Pét vor, und ähnlich ist auch das Zusammentreffen von *Trichophorum pumilum* mit *Scorzonera parviflora* und anderen Pflanzen bei Zsibra, beziehungsweise mit weiteren ähnlichen Elementen an anderen Standorten Oberungarns.

Es ist wahrscheinlich, dass das Entstehen und das Überdauern des Sphagnetum bei Lesenceistvánd ebenfalls mit den dort entspringenden Thermalquellen zusammenhängt. Schon der Umstand, dass das Aufbrechen der Thermen in ein geologisches Zeitalter zurückreicht, stellt eine lange ungestörte Entwickelungsgeschichte der Vegetation fest. Dieser Umstand dürfte zur Erhaltung der Relikten sowohl wärmerer als kälterer Perioden beigetragen haben. Die Erscheinung, dass Elemente, die warmes oder kälteres Klima bevorzugen, an den Thermen zusammentreffen, ist keine neue.

Ähnliches berichtet schon H. Molisch, der an den Solfataren der japanischen Insel Hokkaido das Zusammentreffen der subtropischen Elemente und der *Ledum palustre*-Flora beschreibt.

Die Rolle der Thermen ist von pflanzengeographischen Standpunkte aus insoferne noch von Bedeutung, als sie die Anpflanzung subtropischer und tropischer Wasserpflanzen (Seerosen usw.) ermöglichen, wodurch dann einige künstlich eingebürgerte Elemente z. B. *Vallisneria spiralis* sich verwildern können. In ähnlichem Falle vermitteln die Thermen sozusagen die Verwilderung. In durch den Thermen erwärmten Gebieten verwildern auch andere, nicht wasserbewohnende Zierpflanzen, wie *Adiantum capillus Veneris* und *Pteris cretica* in Eger.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Nov. 1935.)

# ADATOK AZ OS CARPI CENTRALE ÖSSZEHASONLÍTÓ MORPHOLOGIÁJÁHOZ.

(Hat képpel.)

ZIMMERMANN GUSZTÁV-tól.

A kéztőizület ősi szerkezetében, alapformájában előforduló vázalkotó elemek *három* sorban foglalnak helyet, melyek közül a magasabbrendű Gerincesekben önállóan csupán *két* sor, a proximalis és a distalis sor tagjai maradnak meg. A kettő között előforduló centralis sor egyes elemeinek maradványaira utaló nyomok azonban oly carpusokban is megjelennek, melyek látszólagosan csak két sorból állnak. A magasabbrendű Gerincesekben a centralis csontsor önállóan előforduló tagjainak megjelenése mint az alacsonyabbrendűektől örökölt tulajdonság fogható fel. A magasabbrendű Gerincesekben azonban mint phylogeniai jelentőségű maradványok az *ontogenia* során a primitív, de teljesen kifejlett stadiumokban is, a háromsoros carpus-alapformának nyomai előfordulnak.

A carpus vázának ontogeniai fejlődésében primitív kezdeményképpen a mesenchyma sűrűsödése jelenik meg *(skleroblastema)*, melyből a porcelőstádiumban levő prochondralis, protochondralis és metachondralis, majd porcos elemek fejlődnek. A porcos stádiumban bizonyos számszerű reductio következik be a porcelőstádiumhoz képest. A végleges, csontos elemeknek általánosan ismert alakjához többé-kevésbbé hasonlóak a porcos carpus elemei. E hasonlóság csak bizonyos korlátozással fogadható el, mert a carpus egyes csontjai, mint ez a későbbi tárgyalás folyamán kiderül, több carpuselemből összetettek. A később található carpalis csontok, elemek száma és így ennek következtében a csontok alakja tekintetében is a csontoshoz hasonló porcos carpus nem fordul elő.

Egy további, fejlődéstanilag fontos, következő momentum a csontosodás kezdete és teljes lefolyása. A teljesen kifejlett és elcsontosodott carpusban jelenlevő számfeletti elemek *fejlődési relictumok*, előző stádiumoknak önállóan maradt és elcsontosodott maradványai.

A csontfejlődésre, illetőleg a csontosodás bekövetkezésére a nemi és a belső elválasztású mirigyek funkciója messzemenő hatású. Erre utalnak az emberen végzett megfigyelések, eddig ugyanis e kérdést csupán emberen tanulmányozták és a fiúk és a lányok kéztőcsontjai elcsontosodásának időpontjában lényeges különbségeket állapítottak meg. Másfelől egyes belső elválasztású mirigyek működésének kiesése kezdetlegesebb stádiumok megmaradására vezet, amint azt eddig is már ugyancsak emberi carpusokon leírták (Hasselwander, Grumbach, Bayer). Gátló tényezők mellett serkentő, siettető tényezők is szerepelnek a carpus csontosodásában, mint postfetalis, rövid idő alatt lefolyó egyes betegségek, lymphatikus, illetve exsudativ constitutio (Siegert).

Érdeklődésre tarthat számot továbbá az egyes carpuselemek differentiálódása időbeli lefolyásának ugyanezek elcsontosodása sorrendjével való összehasonlítása, valamint a carpuselemek elcsontosodásának sorrendjében az ember és a különféle állatfajok között mutatkozó különbségek tanulmányozása. Ezeken kívül még *functionalis problemák* is felvetődnek: a működésbeli alkalmazkodás egyrészt mint öröklődő tulajdonság következménye alakul ki a végtag statikai működéséből, másrészt az alkar és a kéz sugarainak redukciójával kapcsolatos.

Vizsgálataim leírásánál az összehasonlító vonatkozásban általánosan elismert, célszerű Gegenbaur-féle nomenklaturát használtam. A felső csontsort kizárólag proximalisnak, az alsót kizárólag distalisnak, a középső csontsort, vizsgálataim tulajdonképpeni tárgyát, centralis sornak nevezem.

A carpus váza az elemek száma és helyeződése tekintetében szabályosan előforduló, *canonszerű*, *kanonikus-* és esetleg jelenlevő, *járulékos* vagy *számfeletti* elemekből áll. Előbbiek az egész carpust dorsovolarisan átható, utóbbiak vagy dorsalisan vagy volarisan helyeződő, apró csökevényes csontok, melyeknek jelenléte többnyire fejlődéstani alapon magyarázható és bizonyos fejlődési

rendellenességre utal. E járulékos csontoknak további sorsa az, hogy a kezdetleges fejlődési stadiumokban való jelenlét után, vagy az elcsökevényesedés végéig egyideig még önállóan megmaradnak, majd végül nyomtalanul eltűnnek (ROSENBERG), vagy pedig a szomszédos kanonikus elemekkel összenőnek *(coalescentia)* (LEBOUQ).

PFITZNER szerint a járulékos carpuselemek homologiája egyedül jelenlétük és kölcsönös helyeződésük alapján határozható meg, míg alakjuk és nagyságuk kevéssé specifikus sajátság.

ALBRECHT szerint *négy*, PFITZNER szerint *öt* carpalis csontsor állapítható meg, éspedig: 1. antebrachialis, 2. proximalis, 3. centralis, 4. distalis és 5. metacarpalis. E sorok közül a *párosak* a kanonikus, a *páratlanok* a járulékos elemeket foglalják magukba. E felfogással szemben áll a carpusnak a bevezetésben megemlített háromsoros tagozódása, melyet paläontologiai, összehasonlító anatomiai és fejlődéstani adatok támasztanak alá. Ez alapon az antebrachialis és metacarpalis sorokat a mechanikai igénybevétel hatására létrejött elemek alkotják. Tekintetbe kell még vennünk, hogy egyes vízbenélő recens és fossilis állatoknak (magasabbrendű Gerinceseknek, nem Halaknak) szinte megszámlálhatatlan mennyiségű elemből álló carpusa van, természetesen még több sorban elhelyezve.

A carpuselemek hosszanti-, axialis- és harántsorokban rendeződnek, előbbi csoportot a *series*, utóbbit az *ordó* nevével lehet megjelölni. Abban az esetben, ha a hosszanti sorok egyes elemei a másik sor tagjai közül csupán egy-egy csonttal érintkeznek, a carpust *serialis felépítésű*nek nevezzük. Ahol a hosszanti sorok egymásba átmennek, illetőleg az egyik sor valamelyik eleme a másik sor több elemével kerül érintkezésbe, *aserialis* vagy *diplarthralis* felépítésű carpusszal állunk szemben. Az ősibb formát a serialis carpus alkotja. Lehetséges azonban, hogy az aserialis typusú carpus másodlagos módon serialissá alakul át, főképpen mechanikai-statikai követelmények hatására. Ilyen módon mint működésbeli alkalmazkodás fogható fel az elefánt-carpus elemeinek *(proboscioid typusú)* serialis irányba haladó elrendeződése. A carpuselemek kölcsönös helyeződésére nem marad hatás nélkül a kéznek megfelelő testrész *mesaxon*, illetőleg *paraxon* felépítése sem.

Az *os carpi centralet* GRUBER VENCEL, szentpétervári anatomus írta le elsőként 1869-ben *emberen*. Előfordulásának gyakoriságát 0·4%-ban állapította meg. Emberi embryokon THILENIUS szerint majdnem mindig önálló *porc* alakjában megjelenik a centrale. Az esetek legnagyobb részében e centralekezdemény a későbbi fejlődés folyamán a radialeval nő össze. A járulékosan előforduló carpuselemek azok mellé a kanonikus elemek *mellé* helyezettek, amelyekkel a későbbi fejlődés folyamán összenőnek és azokkal a kanonikus elemekkel *szembe*helyezettek, amelyektől izületi felület, illetőleg izületi rés, üreg választja el a későbbi fejlődés folyamán. Az izületi porcnak csontösszenövést gátló hatására utal többek között ez a körülmény is. A járulékos carpuselemek között a melléhelyezettség, illetőleg szembehelyezettség rendszerint a járulékos elemek egész sorára hasonló értelemben vonatkoztatható. A melléhelyezettség megjelölése phylogeniai, összehasonlító anatomiai és fejlődéstani nézőpontból egyaránt lényeges lehet a két sor kapcsolata különböző fokozatainak megállapításakor.

Az összenövésnek mintegy előstadiuma a szalagok révén mozdulatlanul való összeköttetés, *hemisyndesmoticus forma* (VIRCHOW), amely esetben a két különálló csont mechanikai-statikai tekintetben egységes testként szerepel és mintegy jelzi a bekövetkezendő teljes összenövést.

Az ember centralejának összenövése a radialeval rendesen a medialis oldalon indul meg. A centrale tulajdonképpen két részből fejlődik, melyek a *centrale radiale* és *centrale ulnare*, előbbit volarisnak, utóbbit dorsalisnak is nevezik, a volaris csökevényesebb a dorsalisnál. PFITZNER szerint a kettős centrale szétesésnek és nem eredeti kettős képződésnek az eredménye. A kettőzöttség összehasonlító anatomiai nézőpontból is fontos.

A centrale többnyire azokban az állatokban hiányzik, amelyek manusában a Gerincesek eredeti ötsugarú tagozódása redukciót szenvedett (M. WEBER). A Patások közül csak a primitív *Procaviae* és a fiatalkorú elefánt rendelkeznek centraleval. Egyes olyan rendekben, ahol látszólagosan hiányzik a *Cc*, a radialeval összenőtten fordul elő. A Foghíjasok között kizárólag a kis hangyásznak *(Tamandua)* van centraleja (M. WEBER). Húsevőkön és Röpködőkön összenő a centrale a radialeval és az intermedium-

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

mal. Mint törzsfejlődéstanilag fontos jelenség felemlíthető, hogy a kéztőizület magasabb differentiáltsága az őt alkotó elemek számának csökkenésével arányos (VERSLUYS).

Egyéb irodalmi adatokra a tárgyalás folyamán alkalomadtán térek ki.

*

Vizsgálataim elsősorban a különféle háziállatfajokból származó tekintélyes számú embryonalis anyagra terjeszkedtek ki, éspedig mintegy 200 ló-, szarvasmarha- és sertés*embryó*ra. Ezenkívül *összehasonlító csontvázanyag* állt rendelkezésemre főképpen Majmok, Félmajmok, Patások, Rágcsálók, Húsevők, Rovarevők, Röpködők, Foghíjasok stb., melyeknek előzetes felsorolásától többek között azért is eltekintek, mert csupán a centraleval bírókat írom le.

A változatos vizsgálati anyagot különféle eljárásokkal dolgoztam fel. Felállított csontvázak, dobozokban eltett természetes csontvázak és fossilis maradványok már eredeti állapotukban alkalmasak voltak a vizsgálatra. Olyan kéztőizületeket, melyeknek boncolása lehetséges volt, praeparálással vizsgáltam; olyanokat pedig, melyeknél a boncolás, vagy az anyag másirányú felhasználása vagy egyéb okokból nem volt lehetséges, röntgenvizsgálatnak vetettem alá.

Az embryonalis anyagból a legkisebb példányok carpusait paraffinbeágyazással *sorozatos metszeteken* dolgoztam fel. 45 mm-től 100 mm-ig terjedő tarkófaroktőhosszúságú embryók carpusait, illetőleg elülső végtagjait a KOVÁCS által módosított DRAHN-*féle tetralin-eljárás*sal átlátszóvá tettem. A porcos magvak feltüntetésére *viktoriakék-festést* alkalmaztam. 10 cm-en felüli nagyságú embryók carpalis izületét, 4% formalinban való rögzítés után, praeparálással vizsgáltam meg.

*

Az összehasonlítóanatomiai irodalomban a kéztő, carpus, centralis csontsoráról, illetőleg az os carpi centraleról aránylag sok adat jelent meg, mégis ez elemeknek *alaki* tulajdonságai, *nagysága* és *összeköttetése* a szomszédsággal bizonyos vonatkozásokban kevésbbé ismertek. A régebbi vizsgálatok különleges és úgyszólván egyedüli jelentőséget tulajdonítottak az elemek *számá*nak. Az

izületek mechanismusa, az egyes elemeknek kialakulása a *functio* és a physiologiai jelentőség nézőpontjából képviseli az újabb vizsgálatok irányát. Az egyes elemek leírása sokszor hiányzik még, illetőleg helyesbítésre szorul. A járulékos carpuselemekkel foglalkozó humananatomiai munkák összehasonlító fejezeteikben szintén csak a centralis sorhoz tartozó járulékosan előforduló elemekről emlékeznek meg, míg a szabályosan jelenlevő centralekra ritkán és csak egyesek térnek ki. Éppen ezért a normalisan előforduló centralek helyeződésbeli viszonyainak megismerésére törekedtem elsősorban összehasonlító anyagom vizsgálata alapján.

A **Patások** (**Ungulata**) közül leírásra kerülnek a Hyrax (Procavia capensis Pall.), a tapir (indiai és amerikai egyaránt) és a proboscid elefánt (indiai és afrikai) carpusai, ezek közül csupán a Hyraxnak van különálló centraleja.

A **Hyrax** (**Procavia capensis Pall.**) carpusának *kilenc* csontja van, melyek közül négy a proximalis, négy a distalis és egy a centralis sorban található. A carpus volaris felületén a proximalis sor tagjai terjedelmesebbek, ezzel szemben a distalis sor tagjai a dorsalis felületen jelentékenyebbek. Ilyenformán a proximalis sor csontjai dorsalis irányban kihegyezettek. A carpus-elemek elrendeződése serialis typusú. Erre vonatkozó vizsgálati anyagot a bécsi állami természetrajzi múzeum állattári osztálya bocsátotta rendelkezésemre, ugyanígy sok egyéb összehasonlító anyagot is.

Az os carpi radialen volarisan terjedelmes szabad felület van. A dorsalis felület felé ezzel szemben e csont formája kúpszerűen elhegyesedik. Distalisan az os carpi centrale secundummal, az os carpi primum- és secundummal érintkezik. — Az os carpi intermedium ferdén, medialisan erősebben összenyomott. Proximalis izületi felülete erősen convex, a distalis volaris irányban keskenyedik. — Az os carpi ulnare a carpus legnagyobb csontja, proximalis irányban a legerősebben kiemelkedik. Distalis, volaris és lateralis irányú nyúlványa eléri az ötödik metacarpalis sugarat. A volarisan terjedelmes csont, melynek a volaris felületén hatalmas izületi felület van az os carpi accessorium számára, dorsalisan ékszerűen elhegyesedik. — Az os carpi accessorium medialis irányban hajló tompa gumóban végződő csont.

A centralis csontsort a Hyrax carpusában egyetlenegy csont,

az *os carpi centrale secundum* képviseli. Egyes szerzők nomenklaturája szerint ezt os carpi centrale primumnak kellene nevezni, miután azonban az os carpi secundumtól proximalisan helyeződik, megfelelőbb os carpi centrale secundumnak nevezni, vagy röviden, miután egyedüli csont ebben a sorban, egyszerűen csak az os carpi centrale névvel megjelölni.

A lateralisan és dorsalisan kiszélesedő, medialisan és volarisan képpengeszerűen elkeskenyedő csont a carpus volaris felületét nem éri el, hanem csupán a dorsalis kétharmadra terjed ki. Dorsalis szabad felülete háromszögletes, medialisan szöglet, lateralisan oldalfelület van e háromszögön. Szabad felületén kívül a középponti csontnak három izületi felülete van, a radiale, a secundum és a tertium számára. A centrale secundum a carpi secundummal együtt terjedelemben és magasságban megfelel a distalis csontsor egyes többi csontjainak. A centralenak dorsalis helyeződése a csökevényesedési folyamat megindulására utal. Hogy a centralis sor többi, theoretikusan feltételezhető tagjai vajjon a distalis sor megfelelő elemeivel összenőttek-e vagy elpusztultak-e, biztosan nem dönthető el. A tertium és quartum oldalain jelenlevő bemetszések utalhatnának az összenövési folyamatra. Ilyen értelemben a Hyrax carpusának centralis csontsora a proximalis sornak *szembe-*, a distalis sornak *mellé*helyezett. Emberen a viszonyok fordítottak, miután a centralis csontsor gyakrabban a proximalis *mellé*helyezett (Pfitzner). Egyáltalában a centralis csontsor elemei csaknem kivétel nélkül a proximalis sor *mellé*helyezettek; a Hyraxon előforduló viszonyok még fejlődéstani magyarázatra szorulnak, amely kideríthető esetleg, hogy itt sincs a distalis sor melléhelyezettségről szó. Amint még egyébként a későbbiekből kitűnik, a majmok centraleja is szoros kapcsolatban áll a radialeval, vele mozdulatlan összeköttetésben lévén egy izületi testet alkot (*hemisyndesmoticus*-forma, Virchow).

Az os carpi primum lencsealakú; egyik lapos felületével a secundummal áll összeköttetésben, distalisan keskeny izületi felület útján az első ujjal. — Az os carpi secundum magassága és oldalsó kiterjedése fordított arányban áll egymással: dorsalisan szélességében, volarisan magasságában terjedelmesebb. Proximalisan a radiale és a centrale a szomszédai. — Az os carpi tertium kocka-

alakú; oldalsó szélein a már említett bemetszések vannak rajta, medialisan kissé magasabban, mint lateralisan. Proximalis izületi felülete Patásokon szokatlan mértékben ívelt, ami különben a Hyrax egyéb izületi felületeire nézve is áll. — Az os carpi quartum ugyancsak kockaalakú; ez a carpus második legnagyobb csontja.

Azok a tulajdonságok, melyek a Hyrax carpusában a primitivebb, specialis irányban még nem differenciált állapotot jellemzik: 1. a csontoknak serialis elrendeződése; 2. az erősebben ívelt izületi felületek, melyekben a Patásokra jellemző differentiáltság az egyirányú ingaszerű végtaghasználatnak megfelelően még nem alakult ki.

A **tapirok** közül amerikaiakat és indiaiakat egyaránt vizsgáltam. A tapir mint «élő kövület» (lebendes Fossil, BREHM) carpusának felépítésében sok tekintetben az ősibb formát tünteti fel; így a centralis sornak a proximalissal való összenövésére utaló jelek találhatók a radialen és főképpen az intermediumon.

A *radialen* a tertium számára szolgáló izületi felület fölött dudor emelkedik ki, melyet félköralakú árok határol el a radiale testétől. Ez az elhatárolt részlet a centralis sor tagjaként fogható fel, amit bizonyos mértékig az is alátámaszt, hogy elhatárolódása fiatal példányokon kifejezettebb. Hasonló alakulások az *intermediumon* is találhatók. E körülményeknek végleges tisztázása csupán fejlődéstani vizsgálatokkal lenne lehetséges, amely alkalommal esetleg kimutatható lesz egy az ontogenia során különálló középső csontsor, amely a későbbi stádiumokban a proximalis sorral összenövő elemeket tartalmaz. Említésreméltó még az intermedium ferde helyeződése, amennyiben volarisan a tertium fölött, dorsalisan ellenben legnagyobb részben a quartum fölött található, ami az intermediumnak lateralis irányú eltolódására utal. Ez az eltolódás a lovon jelenlevőnél nagyobb arányú.

Az **elefántok** (**Ormányosok, Proboscidia**) közül indiaiakat és afrikaiakat vizsgáltam. A carpus elemei itt közel serialis elrendeződésűek, amit WEITHOFER és GAWRILENKO ajánlatára *proboscioid-typus*únak is neveznek. Ez az elrendeződés a nagy testsúly könnyebben való viselésére alkalmasabb, ugyancsak e célból alakul át függőlegessé, oszlopszerűvé az autopodium. Ez tehát secundär módon serialissá alakuló carpus, mely a mechanikai-

statikai viszonyok által meghatározott feltételeknek felel meg. Egyébként kiemelendő, hogy kifejlett elefántokban semmiféle nyoma sem található az előző stadiumban jelenlevő középső csontsorbeli carpuselemnek. Az apró, pyramisalakú radialen bemetszés látható ugyan, ez azonban megfelel a proximalis carpaliák majdnem valamennyi állatfajban jelenlevő befűzöttségének, illetőleg kettőzöttségének. Ez alapon minden olyan állatfajban kellene a középső csontsornak a fejlődés során megjelenni, amelyben a felső csontsor tagjai proximodistalis irányban osztottak. Azt, hogy nem ez az osztottság utal a centralis sor jelenlétére, még a későbbiekben is sikerül igazolni. Az elefánt ulnaja jóval fejlettebb a radiusnál, amely körülmény a procarpus elemeinek nagyságára is hatással van, amennyiben az ulnare jóval fejlettebb a radialenál.

A **Majmok**, nevezetesen a **Főemlősök**, **Primates**hez tartozók os carpi centralejának közös tulajdonsága, hogy a tőle distalisan a carpus alsó sorában levő csont megfelelően kisebb, ami azonban nem jelenti azt, mintha a centralis sornak jelenlevő tagja a distalis sor melléhelyezett volna. Ezzel éppen ellentétben a centrale erős szalagkészülék útján szoros összeköttetésben áll a radialeval, úgyhogy e két csont egymáshoz képest, mozdulatlanul összefűzve, mechanikai-statikai tekintetben egyetlen izületi testet képvisel és a centralenak mint a radiale kiegészítésének, illetőleg nagyobbítójának van jelentősége. Az a szinte magától értetődő feltevés, hogy több csont nagyobb mozgékonyságot eredményez, a centrale jelenléte esetén itt nem helytálló, amint azt Virchow is kiemeli. Jelenléte legfeljebb mint egy ilyen nagyobb mozgékonyságú carpus maradványa fogható fel, ahol a mozdulatlan szalagos összeköttetés a csontos összenövés felé való haladását jelentheti. A Majmokon a centrale aránylag rendszertelenül fordul elő, azonban ahol megjelenik, jelenléte mindig fajspecifikusnak tekinthető.

A vizsgált majmokon két különböző typusú centrale fordul elő, éspedig egy zömökebb és egy karcsúbb forma. Ezek egyike sem tünteti fel a dorsovolarisan kiterjedő orangtypust, hanem csupán dorsalisan helyeződve a carpus feléig, illetőleg kétharmadáig terjed be.

A majmok carpuscsontjainak részletes tárgyalását mellőzve, e helyen csupán a centrale viszonyait ismertetem.

A centralenak zömökebb formája az *Inuus ecaudatus*ban és a *Papio hamadryas*ban fordul elő. Mindkettő carpusának középső csontsorában egyedül jelenlevő csont az *os carpi centrale secundum*, amelyet az os carpi secundumtól proximalisan való helyeződése miatt ajánlatosabb így nevezni, egyébként a centrale primum vagy centrale ROSENBERGivel homolog. Az os carpi centrale secundum alakja háromoldalú gúlához hasonló, melynek alapja a szabad felület, oldalai az izületi felületek, utóbbiak egyenlőtlenek és hajlítottak. Dorsalis irányból volaris irányban fokozatosan keskenyedik, úgyhogy az izület közepén élszerűen végződik.

Medialisan a gúlának két felülete található, mely oldalak kialakulásában a radiale és a secundum medialis irányában convergáló szélei szerepelnek. Lateralisan az os carpi tertiummal ízesül, terjedelmes, enyhén ívelt izületi felülettel. Az intermediummal lekerekített éllel érintkezik, miáltal az intermedium distalis izületi felületével egységes boltozatot alkot a tertium számára.

Dorsalis szabad felülete tompaszögű egyenlőszárú háromszöghöz hasonló alakú, rajta az intermedium felől taréjszerű kiemelkedés húzódik keresztül, mediodistalis irányban, amely kiemelkedés többé-kevésbbé az intermediumra is folytatódik.

A centrale zömökebb formája nagyobb dorsalis kiterjedéssel és kisebb volaris terjedelemmel jellegzett. Megemlíthető még, mint egyébként a fenti leírásból is következtethető, hogy a carpus *aserialis typusú*, amennyiben a proximalis sor medialis irányban a distalis fölött eltolódott.

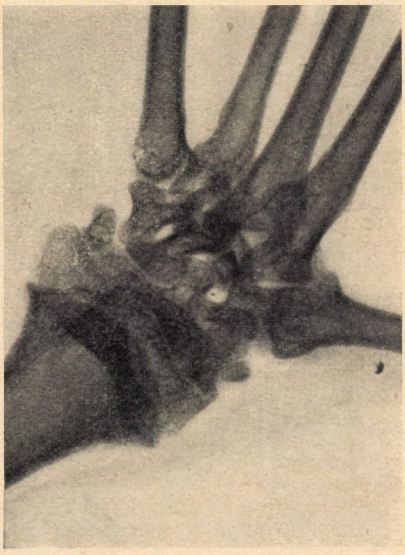
A *Cerkófmajmok* és *Félmajmok* centraleja, mint egyébként a többi carpalis csontjai is, karcsúbb, finomabb felépítésű.

A centrale dorsalis szabad felülete zárójelalakúan görbült, kiterjedése a zömök formánál jelzett taréjszerű kiemelkedés terjedelmének felel meg. Alakja itt is a háromoldalú gúlához hasonló, volaris irányban keskenyedik, azonban volaris terjedelme mélyebbre hatol, mint az előzőleg leírt typusnál. A fehérorrú cerkófmajmon *(Cercopithecus ascanius)* az intermediumnak a centrale felé irányuló nyúlványa van.

A **Félmajmok, Prosimii,** közelebbről a Lemuroideák közül néhányon LEBOUCQ szerint hiányzik az os carpi centrale, amit LEBOUCQ összenövéssel magyaráz. Az általam vizsgált Lemuroideák-

ban, úgymint a *Lemur macaco-* és *Lemur mongoz*ban jelen volt a centrale. A Lemuroideák centraleja erősebben a lateralis irányban hajlott, minek következtében a zárójelforma még kifejezettebb lesz ezeknek centralejában, mint a Cerkófmajmokéban.

A **Röpködők** (**Chiroptera**) carpusában a centrale rendesen összenő a procarpus elemeiből létrejövő közös alapcsonttal. E körül



1. ábra. *Repülő kutya v. kalong (Pteropus celaeno)* carpalis csontjai. (*Röntgen*felvétel.) A proximalis sor csontjai összenőttek egy egységes alapcsonttá, melynek a közepéből a centralenak megfelelő nyúlvány húzódik ki.

a csont körül helyeződnek el félköralakban a distalis csontsor tagjai. A *Vespertilio murinus*ban az összenövési folyamatot Leboucq írta le.

A *repülő kutya* vagy *Kalong (Pteropus celaeno)* carpusában a proximalis és centralis sor csontjaival összenőtt alapcsont az alkarváz distalis izületi felületének egész szélességére kiterjed. Az alapcsont distalis izületi felületét a közepén gumószerűen kiemelkedő, a centraleval homolog nyúlvány (lásd az 1. képen) két harangalakú részletre osztja. Tőle medialisan lévő izületi felületen az

os carpi primum (l. az 1. képen) helyeződik el, distalis domborulatán az os carpi secundum (l. az 1. képen) foglal helyet, míg a 3. és 4. carpalis csont a lateralis harangalakú vájulattal ízesül.

Az **Edentata, Foghíjas, Örvösállatok** közül egy os carpi centraleval rendelkező és egy centrale-nélküli formát vizsgáltam, az előbbi is csupán az összenövésre utaló jelenségeket tünteti fel.

A *Dasypus sexcinctus* os carpi radialejának dorsalisan helyeződő laterodistalisan az intermedium alá húzódó nyúlványa nyilván a középső csontsor eleme. Ellentétben a megszokott typussal ebben a carpusban (hasonlóan, ettől természetesen függetlenül az elefántban is) lateralisan található erősebb tagozódás, az ulnare ugyanis sokkal kifejezettebb centrale-nyomot tartalmaz, mint a radiale. Lateralisan az ulnareval összenőtt, medialisan ellenben különálló nyúlvány ez a centrale quartum néven homologizálható középső csontsor tartozéka. Ennek az erősebb lateralis tagozódásnak folyományaképpen az ulna itt az alkar főcsontja.

Az **Erszényesek, Marsupalia** közül a *kenguru (Macropus giganteus)* carpusában a radiale, intermedium és centrale összenőttek egymással. A proximalis sor medialis csontja jellegzetesen mutatja a hármas tagozódást.

*

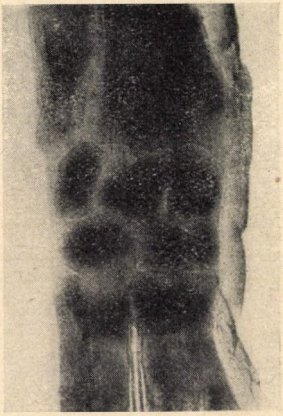
Vizsgálataim további tárgyát **sertésembryók** *átlátszóvá tett porcos* carpusának tagozódása, e carpus elemeinek száma, alakja, nagysága, szomszédsága és esetleges részei képezték. Az átlátszó készítményeket dorsovolaris, mediolateralis és ferde helyzetben, valamint forgatás közben vizsgáltam. Lényegesebb eltérések az egyes sertésembryók carpusainak elemeiben alakjuk, helyeződésük, felépítésük tekintetében nem fordultak elő, ezért összefoglalóan fogom az eredményeket ismertetni.

Minden *porcos mag* a praeparatumnak bizonyos meghatározott helyzetében látszik a legtisztábban, míg az ebből a helyzetből való elfordításkor felvilágosodást, illetőleg elhomályosulást mutat. Az elemek árnyékának alakja különböző helyeződésben, attól függően vajjon dorsovolarisan vagy volodorsalisan nézik, illetőleg melyik felület van szemközelben és szemtávolban, más és más.

E körülmények a variaciók keletkezését is helyesen meg-

magyarázni képesek, melyek különösen az intermediummal kapcsolatosan jelentkeznek. A felső csontsor tagjainak dorsalis széle proximalis irányban erősebben kiemelkedik a volaris szélnél.

Dorsovolaris átvilágításban a sertés carpusában csupán *hat* porcos mag látszik (l. a 2. képen), miután az accessorium és a primum más elemektől fedettek.



2. ábra. 85 *mm* tarkófarok tőhosszúságú *sertésembryó* carpalis izületének porcos magvai. (*Átlátszó anatomiai készítmény.* Viktóriakék festés.) A proximalis sorban az os carpi radiale, intermedium és ulnare, a distalis sorban az os carpale secundum, tertium és quartum látszanak.

Az *os carpi radiale* négyzetalakú egységes árnyékot ad. Kiemelendő, hogy a radiale a porcos stadiumban mindig egységesnek mutatkozik. Az emberben jelenlevő kettős képződés nem volt megfigyelhető, noha egy sérült készítmény hosszú ideig azt a látszatot keltette, mintha radiale trigeminum, illetőleg radiale tripartitum volna. Emberben radiale bipartitumot, valamint radiale tripartitumot találtak (Leboucq, Rambaud, Renault, Gruber, Bayer), amely utóbbiban a két radialerészleten kívül harmadiknak a centrale van jelen. Ilyen értelemben összetettnek gondoltam a fentemlített sérült készítményt, amelyben a radiale mediale és radiale laterale és centrale összenövésének elmaradása és így külön magban való fennmaradása volt feltételezhető.

Az ily módon mutatkozó részletek fejlődéstani magyarázata céljából ennél kisebb embryók carpusait *szövettani módszerek*kel dolgoztam fel, amidőn is a további leírások tanúsága szerint, a *középső csontsornak nyomai*ra akadtam.

A *radiale*nak a secundum és a tertium közé irányuló *nyúlványa* a porcos állapotban is éppen úgy, mint a csontosban, jelen van.

Az *intermedium* árnyéka a radiale irányában dűlt háromszögalakú lekerekített szögletekkel. Az intermediumnak ily alakja tulajdonképpen a volaris felületen van, ennek ellenére dorsovolaris

nézetben is ez a forma dominál. Az intermedium proximolateralis sarka, amely az intermedium árnyékát négyzetalakúvá teszi, sapkaszerű függelék formájában jelenik meg, elmosódottabb és teljesen dorsalis helyeződésű. Az intermedium a volaris oldalon a tertium és a quartum közé distalis irányú *nyúlványt* bocsát, amely az alsó sorbeliek árnyékát részben fedi és így egyrészt elmosódottá teszi a közös területet, másrészt sötétebb színeződést von maga után.

Az *ulnare* hosszában kihúzott romboidalakú árnyékot ad, amelynek hegyesszögei medioproximalisan, illetőleg laterodistalisan vannak (l. a 2. képen). Medioproximalisan az ulnare a radiusszal is érintkezésbe kerül. Az ulnare egyes esetekben inkább kihegyezett, máskor inkább piskótaalakú.

Az *accessorium* a dorsovolaris nézetben nem tűnik elő, forgatáskor azonban az ulnarenak V-alakú nyúlványaként megjelenik. Oldalnézetből az accessorium négyzetalakú árnyékot ad.

A proximalis csontok egymásfelé fordított oldalának közepén dorsovolaris átvilágításban félköralakú bemetszések látszanak, melyek köralakú világosabb színtelen vagy sárga területet (nyílást) alkotnak. Az intermedium oldalt befűzött formáját is ennek köszönheti. A radiale hasonló okból vesealakúnak látszik.

A bemetszések és az általuk a proximalis carpuselemek között létrejövő köralakú nyílások magyarázatául felvehető, hogy a carpust keresztülfúró erek (arteriae perforantes carpi) okozzák. Miután azonban a carpuson áthaladó nagy erek ezek számára nem tartalmaznak elágazódásokat, nem tekinthető ez kétségtelenül biztos magyarázatnak, mégis sokkal helytállóbb, mintha azt tételeznénk fel, hogy e bemetszések két csontsornak az összenövésére utalnak. Ez annál kevésbbé lehetséges, miután a proximalis sorral összenőtt centralis sor jóval kisebb méretű maradványokban jelenik meg. Jellegzetes mindezekre a bemetszésekre, hogy csupán a proximalis sor tagjain fordulnak elő, a distalisén nem.

A *distalis sor* csontjai közül a *primum* csupán forgatás közben válik láthatóvá, különben sem dorsovolaris, sem mediolateralis nézetben nem jelenik meg. A *secundum* téglalapalakú árnyékot ad. A *tertium* is ehhez hasonló, azonban nem álló, hanem fekvőhelyzetű. A tertium proximalisan a radiale és az intermedium közé hatol,

ami maga után vonja egyes esetekben a két magnak az összefolyását. A *quartum* a lateralis szélre terjed ki, ötszögű árnyékot ad, amelynek medialis és lateralis oldalai egymással párhuzamosak (l. a 2. képen). Proximalisan két oldala házfedéloromzatszerűen találkozik.

Mediolateralis nézetben a proximalis sor homokóraalakú. Dorsalisan jobban szétterül, mint volarisan. A distalis sor többékevésbbé félholdalakú, mégis dorsalisan és volarisan egymással párhuzamos oldalai is vannak. Ilyen helyzetben a secundum a tertiumhoz képest volaris helyeződésűnek tűnik fel. Néha a proximalis sor volaris kiszélesedése a dorsalishoz hasonló méretű. A distalis sor volarisan mutat egyes esetekben kiszélesedést. A tertium proximalis irányú nyúlványa a két sor között dorsalisan helyeződő csőralakú képződmény, amely helytelenül a középső csontsor tagjaként tűnik fel.

Az *Artiodaktylak* intermediuma volaris irányban nem keskenyedik el, hanem volodistalisan kiszélesedik, ez a normalisan jelenlevő alakulás egy 90 mm-es embryóban symmetriásan mindkét carpusban különleges mértékben fejlett volt. A symmetriás helyeződés rendszerint fejlődéstani eredetre utal. Az intermedium ebben az esetben is a radiale felé dűlt háromszögletes formát mutat. Distalis része első pillanatra önálló lapos magként tűnik fel, azonban volaris oldalról tekintve, a tertium és a quartum közé húzódó nyúlványnak látszik. A nyúlvány sötétebb magból és egy ezt körülvevő világosabb övből áll, amely fokozatosan csökkenve egészen a distalis sor alsó határáig terjed. Oldalsó nézetben a nyúlvány alakulása jól feltűnik. A tertiumnak a leírt alakulások folytán csak a medialis és distalis határa különül el élesen, egyéb elhatárolódását az intermedium nyúlványa fedi. Hasonlóan van a quartum medialis elhatárolódásával is.

E formának jelentősége abban áll, hogy e nyúlvány a középső sornak a felső sorral összenőtt tagjára utalhat. Ennek ellenére az emberi kézen leírt, az intermedium volaris részletével összenövő *hypolunatum*mal nem lehet homolognak venni, mert míg a hypolunatum *medialisan* és distalisan, valamint volarisan helyeződik, e nyúlvány a tertium és quartum között terülvén ki, az intermedium *lateralis* oldalán jelenik meg.

*

A végzett **szövettani vizsgálatok** célja volt a carpus *porcelőstadium*ban levő magvainak tagozódását, számát, alakját és elhatárolódását megállapítani, különös figyelemmel azokra a körülményekre, melyek egy középső csontsornak a fejlődés során való jelenlétére utalnak. Ezenkívül tekintetbe vettem még az elemek összenövési folyamatának, az intermedium antebrachii jelenlétének, a perichondrium kifejlődésének és ezzel kapcsolatban az elemek közötti szövetnek is a vizsgálatát.

A carpus az alkartól distalisan, a két kéztőcsontsor között leginkább kifejlődő *befűződést* tűntet fel, amelynek nyomai már a 13 mm-es sertésembryó végtagbimbóján is feltalálhatók. E befűződés jelzi egyben a tőle apicalisan helyeződő és sugárszerűen szétterülő metacarpalis telepeknek a distalis carpuselemek által a végtag többi részével való összefüggését. Az ősi formának megfelelően tehát a primitiv fejlődési stadiumban jelenlevő befűződésnek *phylogeniai jelentősége* is van.

A mesenchymából a carpus csontos vázának fejlődése során a porcelőstádiumban levő magvak állnak elő először mitotikus sejtszaporodással, majd felvilágosodás következik be, homogen, eosinophil, világos, nagymennyiségű plasmatömegek megjelenésével (ez a nucleoplasmatikus relatio vizsgálatával még kiegészítendő). Ez állapotban is azonban az egyes vázalkotó elemek peripheriás részén sűrűn egymás mellett helyeződő sejtek rétege foglal helyet. Ez az elkülönülés az elemek állománya és az elhatároló sejtréteg között a későbbi fejlődés során is mindig megmarad. Az elhatároló réteget mindinkább rostos szerkezet jellemzi, szemben az elemek alapját képező sejtes állománnyal. Porc fejlődésekor először symplasmás állapot következik be, sűrűn helyeződő, erősen festődő magvakkal *(skleroblastema, skeletoblastema)*. Ezután a sejteknek elhatárolódása észlelhető, eosinophil, homogen intercellularis állománnyal, ami a *prochondralis* stadiumot jellemzi. Amidőn az intercellularis állomány basophil festődési reactiót és rostos szerkezetet vesz fel, *protochondralis* stadiumba jut a carpuselem.

*

Lebouco egy 18 mm-es sertésembryó elülső végtagjának metszetét ismerteti. E képen a proximalis carpuselemek közül csupán

a radiale van jelen. A distalis sor elemei a megfelelő metacarpalis sugárral közös telepből lefűződés útján kialakulóban vannak. Mindkét később említett telep fejlődésében megelőzi a proximalis sor tagjait. GÖTTE és STRASSER Amphibiákon megállapított eredményeihez hasonlóan LEBOUCQ Emlősökön egy a primitiv carpust keresztben átmetsző korongot *(traînée squeletogène)* állapított meg, amelyből a radiale és a distalis elemek kivételével a többi carpuselemek fejlődnek. E skleroblastemarészlet az ulna distalis végétől ferdén mediodistalis irányban halad és a medialis szélt a radialetől distalisan a carpus befűződésében éri el. Ez utóbbi része a centrale első kezdeményével homolog. Medialis irányban való folytatása a második metacarpalis sugár.

Az általam vizsgált anyagban a **13 mm-es sertésembryó** végtagbimbóján a későbbi csontos váz kezdeményeképpen a stylopodium és a zeugopodium kétágú villa alakjában van jelen. E kezdemények állománya a sejtdús mesenchyma szövetéhez hasonló, sűrűn helyeződő sejtekkel és nagyon kevés köztiállománynyal, illetőleg keskeny plasmaszegéllyel.

A **15 mm-es sertésembryó** carpusában a radius és ulna distalis végeit összekötő fentebb leírt irányulású, ferdén helyeződő csontképző telep *(traînée squeletogène)* sűrűn helyeződő, erősen színeződő sejtmagvakkal jellegzett. A radius már porcos, elhatárolódását sejtdús zóna képezi, a radiustól distalisan levő sejtszaporulat a radialenak megfelel. A csontképző telep az ulna distalis végétől a radiale kezdeménye alá húzódik. Szélső tagjai lateralisan az ulnare, medialisan a *centrale*. Distalisan a 3., 4. és 5. sugár tagjai vannak jelen. A metacarpus telepei előbbrehaladott fejlődési stadiumban vannak a carpaliaknál.

Sagittalis irányú metszeteken a radialetól distalisan egységes telep található, a radiale és a telep között dorsovolarisan keresztülhúzódik egy hatalmas ér (arteria perforans carpi).

A **20 mm-es sertésembryó** carpuselemei éppenúgy, mint a közöttük levő szövet, sűrűn egymás mellett helyeződő magvakkal jellegzett; míg azonban az elemek szövetében intercellularis állomány is található, ez e porcelőstadiumban levő elemek között levő szövetben hiányzik. Az elemek elhatárolódása sűrűn helyeződő magvakban gazdag sejtréteg útján történik. A carpalis elemek

sejtmagvai homogen eosinophil alapállományba beágyazottak. Ezzel szemben a magvakban való bőség következtében a szélek állományának festődésében a basophilia domborodik ki.

Lehetséges, hogy a carpus csontos váza ekkor az előző stadiumhoz hasonlóan a symplasmás állapotban van, azonban valószínűbb, hogy már a prochondralis stadiumba jutott, csupán a sejtek határai nem mutathatók ki.

A 20 mm-es sertésembryó radialeja a radius medialis szélét nem éri el, distalis irányban ezenkívül még a carpus befűzött formájának megfelelően keskenyedik. A tertium felé való elhatárolódása ferdén helyeződik, közöttük nem specializálódott szövetréteg foglal helyet. A radiale és az intermedium között viszonylag sejtszegény világos udvar található, amelyben érnek (a. perforans carpi) maradványát *nem* sikerült megtalálni. Egészen a dorsalis felületen a radiale eltűnése után a *centrale* telepe proximalis irányban terjedelmesebben kiemelkedik és a radiale és intermedium közötti rést alulról bezárja. — Az intermedium proximalisan keskenyedő, distalisan szélesedő telep formájában jelenik meg. Proximalisan a radiuson kívül egy a fényképen előtűnő, de a metszeteken elkülönülten meg nem állapítható intermedium antebrachiivel érintkezésbe jut. — Az ulnare volarisan az intermediummal csupán egyik sarka révén érintkezik, proximalis irányban meredeken az ulna felé tart. — A distalis sor tagjai jól észrevehetően a metacarpustelepekből lefűzöttnek látszanak. A volarisan helyeződő egészen apró primumhoz a metacarpale primum is csatlakozik. A secundum álló helyzetű ovalis alakú és inkább volarisan fordul elő. A tertium volarisan magasságában, dorsalisan szélességében terjed ki inkább. A quartum volarisan kerek, dorsalisan ezzel szemben a jellegzetes ötszögalakú.

A **22 mm-es sertésembryó** carpuselemeit is sűrűbben helyeződő magokkal jellegzett basophil zóna határolja. Az elemek belsejében a magvak nagyobb távolságokra vannak egymástól, de hasonlóan basophilok. Az alapállomány az elemek belsejében erősebben eosinophil, mint az elemek közötti szövetben. Némely helyen basophil festődés is található az alapállományban, ami már a protochondralis stadium kifejlődésének kezdetét jelzi. A festődés általában a *prochondralis stadium*ra utal, noha elhatáro-

lódás a sejtek között nem látható és így a symplasmás állapotra lehetne következtetni.

A radiale volarisan inkább lapított, szélességében terjedelmes. Dorsalisan magasságában kiterjedt, volarisan harántovalis keresztmetszetű, lateralisan erősebben lapított, mint medialisan. A radiale és intermedium között egyrészt, a radiale, intermedium és secundum között másrészt a már fentebb leírt ürök, illetőleg rések találhatók. Tovább dorsalisan kialakul a radiale szabálytalanul négyszögletes alakja. A radiale distalis irányban való keskenyedése is jól kifejezésre jut. E felületen a radialet az intermediummal az elemek szövetéhez hasonló prochondralis szövetből álló híd köti össze.

3. ábra. 22 *mm* tarkófaroktőhosszúságú *sertésembryó* carpalis izületének *frontalis metszete*, a sorozatnak leginkább dorsalis részéről. (Szövettani készítmény.) A proximalis sorban a radiale proprium, intermedium és ulnare, a centralis sorban a radiale alatt a *centrale radiale* és *centrale ulnare*, a distalis sorban a tertium és quartum porcelőstadiumban levő magvai látszanak.

További dorsalis metszeteken a lateralis oldal felől a radialeba rés hatol be a fent leírt intermediummal összekötő híd alatt. Még tovább dorsalisan e rész teljesen leválaszt a radiale törzsétől (radiale proprium) egy kettős telepet (l. a 3. képen). E leválasztott részlet a carpus befűződésének a mélyében foglal helyet. A *centrale* két kerek telep alakjában különböztethető meg, melyek közül a medialis a radiale előtt található, míg a lateralis a radiale, intermedium és tertium alkotta szögletben, illetőleg distalisan a radiale és intermediumot összekötő hídtól található. Szöveti szerkezetük a többi elemekéhez hasonló prochondralis állományból áll. Alsó és oldalsó elhatárolódásuk sűrűbben helyeződő magvak révén tűnik fel. Proximalis irányban a medialis telep az oldalsó elhatárolódáshoz hasonlóan sűrűn elrendezett magvakkal elhatárolt, míg a lateralis, bár jól elkülönülő, de ilyen proximalis elhatárolódást nem tűntet fel (l. a 3. képen). Ez elkülönült részletek kétség-

telenül egy a proximalis és distalis sor közötti centralis sor jelenlétére utalnak, melynek leginkább medialisan eső tagja ez a kettős telepben megjelenő és a radialeval kapcsolatosan előforduló *os carpi centrale secundum*. A két rész elnevezését illetően a medialisat röviden *centrale radiale*nak, a lateralisat pedig *centrale ulnare*nak lehet megjelölni, e megjelölés egyébként is a hasonló helyeződésű centralékra vonatkoztatva már WEBERnél is előfordul.

Az intermedium volarisan szélességében terjedelmes, distalis elhatárolódása itt concav és két szélével a tertium- és quartummal szomszédos. Dorsalis irányban mindinkább magasabbá lesz és négyzetalakú keresztmetszetet nyer. Lateralis elhatárolódása ebben a síkban egyenes, függőleges. Egészen dorsalisan proximolateralis irányú szögletet találni rajta. E síkban mediodistalisan egy részlet különül el, amely a tertium és quartum közé hatol be. E háromszögletű részlet proximalisan széles résszel az intermediumhoz illeszkedik (l. a 3. képen), distalisan elhegyesedve a tertium és quartum közé húzódik.

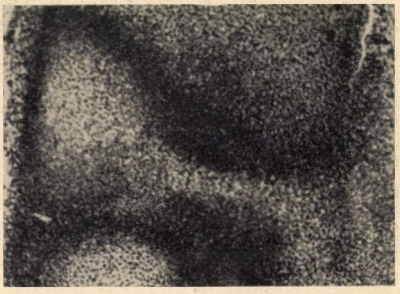
Az ulnare volodistalisan a quartum mellé húzódik, egyébként romboidalakú keresztmetszetet tűntet fel, amelynek szögletei az inkább dorsalisan helyeződő metszeteken a derékszöghöz közelednek. Teljesen dorsalisan kerek keresztmetszetben végződik az ulnare.

A primum csak egészen volarisan fordul elő. A secundum is csak az inkább volaris metszeteken található fel, ovalis, majd háromszögletes alakban, később helyébe a carpus befűződése jelenik meg. A tertium telepe mindig harántovalis alakú. Volarisan csaknem teljesen az intermedium alatt található, ezzel szemben dorsalisan a radiale, illetőleg centralek alatt foglal helyet (a felső csontsor lateralis irányú eltolódása). A quartum volarisan inkább lapított, dorsalisan kialakul a jellegzetes ötszögalakja. A quartum a metacarpale tertiummal is érintkezésbe jut.

A sagittalis irányú metszeteken hasonló alakulást találni, de más oldalról megvilágítva. Egyes alakulások ilyen metszési síkban jobban kifejeződtek, mint a frontalis irányban készített metszeteken.

Lateralisan legelőször az ulnare és a quartum jelenik meg. Az intermedium először volarisan tűnik elő. Amidőn az intermedium

teljes egészében megjelent, a quartum eltűnik. A quartum eltűnésekor dorsalisan a tertium fölé húzódik és az intermedium és tertium dorsalis részletei között lyukat (üreget) hagy vissza, ami, helyeződését tekintve, a centralis csontsornak egy eltűnt tagjára utalhatna, azonban itt nem ez az eset. Az intermedium a medialis részen dorsalisan erősebben kiszélesedik, volarisan kevésbbé terjedelmes (l. a 4. képen). Distalis részén úgy dorsalisan, mint volarisan az intermediumtól elkülönülő és a centralis sor tagjaiként megjelenő részletek ismerhetők fel. A dorsalis felületről az intermediumba alsó negyedrészén proximovolaris irányban bemetszés húzódik be, amely proximodistalisan lapított apró lemezszerű telepet különít el. Másfelől egy volarisan található proximodorsalis irányba haladó bemetszés az intermediumból hasonló részletet választ el. Előbbi mint *os carpi centrale tertium dorsale*, utóbbi mint *os carpi centrale tertium volare* jelölhető meg. Ezek homologiájukat illetően az emberi *epi-*, illetőleg *hypolunatum*nak felelnek meg (lásd a 4. képen).

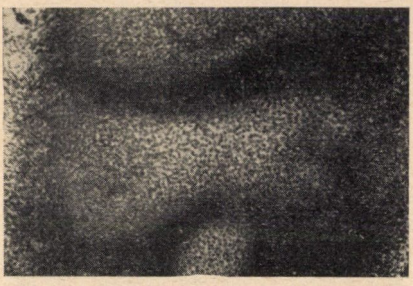


4. ábra. 22 *mm* tarkófaroktőhosszúságú *sertésembryó* carpalis izületének *sagittalis metszete*, az intermedium medialis részének síkjában. (Szövettani készítmény.) Az intermedium alsó részén, tőle bemetszésekkel elkülönítve, a *centrale tertium dorsale* és *volare* porcelőstadiumban levő telepei, a distalis sorban a tertium.

A sagittalis irányú metszeteken egészen mediálisan a proximalis sorban a radiale, a distalis sorban a primum-, secundum- és a tertiumnak halványan előtűnő nyoma látszik. A radiale többékevésbbé piskótaformájú (l. az 5. képen); volarisan inkább kiszélesedik, mint dorsalisan. Volaris elhatárolódása egységesen ívelt, ezzel szemben a dorsalis oldalon proximovolaris irányú bemetszés két villaszerűen elágazódó részt különít el rajta. Mindkét részlet egymással párhuzamosan helyeződik, végén tompán lekerekített, sagittalis metszetben U-alakú keresztmetszetet tüntet fel. A proximalisan helyeződő a *radiale proprium*, a distalis pedig a radialeval

volarisan összenőtt, dorsalisan elkülönülő *os carpi centrale telepe* (l. az 5. képen).

A **30 mm-es sertésembryó** carpalis elemeit erősen basophil-rostos interterritorialis állomány hálózza be, ami a *protochondralis stadium* jelenlétére enged következtetni. Ebben az alapállományban a sejtes elemek mint eosinophil szigetek tűnnek elő. Némely helyen, éspedig leginkább az elemek széleinek megfelelően az interterritorialis állomány kis szigetekben eosinophil festődést mutat, ez a körülmény a prochondralisból a protochondralis stadiumba való átmenetet jelzi. Az egyes carpalis elemek közötti részen kétféle szövetet találni, éspedig sejtdús, indifferens mesenchymás szövetet és az elemeket közvetetlenül körülvevő, rostos eosinophil szövetet, amely a perichondrium kezdeményének lenne tekinthető.



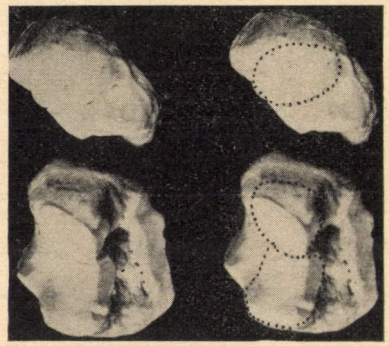
5. ábra. 22 *mm* tarkófaroktőhosszúságú *sertésembryó* carpalis izületének *sagittalis metszete* a radiale síkjában. (Szövettani készítmény.) A radiale magva a dorsalis részen U-alakúan elágazik, a distalis ág a *centrale secundum*mal homolog részlet; a distalis sorban jól jellegzetten a kissé volaris helyeződésű secundum, elmosódottan dorsalisan a tertium magva látszik.

A **30 mm-es sertésembryó** carpus elemeinek alaki viszonyai a porcos állapotben levő carpuselemekével teljesen hasonlók. A radialen semmiféle osztódási jelenség nem vehető észre. Volaris részén a radiale álló téglalap keresztmetszetű, dorsalis irányban az oldalsó kiterjedése mindinkább gyarapodik, főképpen lateralis és distalis sarkain. Az intermediumon volarisan az ulnare felé haladó nyúlvány jól előtűnik, dorsalisan ez megszűnik. Az ulnare romboidalakú. A secundum volarisan, a tertium dorsalisan terjedelmesebb, mind a kettő téglalapalakú keresztmetszetet tűntet fel. A quartum keresztmetszete volarisan trapézalakú, dorsalisan a jellegzetes ötszögformát veszi fel.

*

A középső csontsor nem csupán egészen kezdetleges fejlődési stádiumokban különül el, hanem jelenlétére, illetőleg összenövésére

utaló nyomok *elcsontosodott állapotban* is fellelhetők. Nem külön csontos magvak, vagy jól feltűnő nyúlványok képében jelennek ugyan meg a középső csontsor tagjai, mint pl. egyes magasabbrendű Gerincesekben, hanem a proximalis csontsor tagjainak distalis izületi felületén határolódnak el a centralis csontsor tagjaival homologizálható részletek. Az os carpi radiale distalis izületi felületének dorsalis részén ovalis, sekély barázda által *elkülönített részlet*et találni, amely az egész izületi felületnek mintegy a felére kiterjed, hátulsó, valamint dorsalis szegélymenti határa legélesebben kifejezett (l. a 6. képen). Ez ovalis elkülönített részt nem minden sertésradialen találtam meg, idősebb példányokon kicsiszolódás következtében az izületi felületen a barázda elmosódik. Fiatalabbakon jelen van; hogy vajjon külön csontosodási magvat képvisel-e, ez későbbi vizsgálatok tárgya lesz. A középső csontsor tagjainak nyoma azért marad meg az izületi felületen szembetűnőbben és legtovább, mert az izületi felület a csontösszenövésekre késleltető és gátló hatású. A centrale összenövése nyomainak eltűnésében a végtag mechanikai-statikai viszonyai, továbbá a csontcsiszolódás játszanak szerepet, ami természetszerűen öreg példányokon inkább kifejezett. Másfelől kóros folyamatok itt mint locus minoris resistentiaet támadhatják meg leginkább a csontot, mint ezt az intermediummal összetett epi- és hypolunatum esetében volt alkalmam ismételten tapasztalni, de erre mint kórbonctani vonatkozású részre bővebben nem térek ki.



6. ábra. *Kifejlett sertés carpalis csontjai.* Fenn a radiale, a distalis izületi felületén barázdával elkülönítve a vele összenőtt *centrale secundum* nyomai; jobboldalt ugyanez kipontozottan. Lenn az intermedium, a distalis izületi felületén barázdákkal elkülönítve a vele összenőtt *centrale tertium*ok nyomai; jobboldalt kipontozottan.

Az intermediumon a középső csontsor tagjainak sokkal kifejezettebb nyomait találni, mint a radialen. Az intermedium distalis izületi felületének medialis részén, úgy dorsalisan, mint

volarisan egyenes barázdákkal elhatárolt négyszögletes területek különülnek el (l. a 6. képen). Egymás mellett helyeződve az intermedium mediodistalis részét foglalják el, közös középső élük (l. a 6. képen) elkülönülésüknek a legtovább és a legkifejezettebben megmaradó nyoma. Az intermedium medialis oldalán, valamint dorsalis szabad felületén is esetenkint sekély barázdák mint az összenövés nyomai előtűnnek. A dorsalis telep comparativanatomiailag helyes névvel *os carpi centrale tertium dorsale* néven nevezhető és az emberen leírt *epilunatum*mal homolog; a volaris pedig *os carpi centrale tertium volare* névvel illethető és az emberi *hypolunatum*mal homolog.

Végül *összefoglalva* a vizsgálatok eredményeit kiemelem, amire már PFITZNER utalt, hogy a járulékos carpalis elemek egyik jellemző tulajdonsága előfordulásuknak, illetőleg megjelenésüknek *variabilitása*, ami jól rávilágít a carpus tökéletesedő kialakulásában mutatkozó regressiv- és az elemek számszerű redukciójában álló folyamatokra. Bár ez éppen jelzett tulajdonság messzemenő következtetésekre gátlóan hat, számos megvizsgált eset alapján a carpus fejlődésében *ugrást* tételezek fel a középső csontsor tagjait illetően, amennyiben porcelőstadiumban és elcsontosodott állapotban nyomaik fellelhetők, míg a porcos carpus ezeket nélkülözi.

A vizsgálati leletek alapján kétségtelenül megállapítást nyert, hogy a *22 mm-es sertésembryó prochondralis stadiumban levő carpuselemeinek telepei között a centralis csontsornak tagjai* is előfordulnak, melyeket a 30 mm-es embryó *protochondralis* stádiumú carpusában már nem sikerült kimutatni. Az *elcsontosodott* carpusban a *radiale és intermedium distalis izületi felületén találhatók még a centralis csontsor tagjainak nyomai.*

*

E vizsgálatokat a szerző az 1934/35. tanévben mint a bécsi Collegium Hungaricum tagja, a bécsi egyetemi és állatorvosi főiskolai anatomiai, szövettani és állattani intézetekben végezte.

## Irodalmi jegyzék.

1. ABEL, Grundzüge der Paläobiologie der Wirbeltiere. Jena. 1912.
2. ABEL, Lehrbuch der Paläozoologie. Jena. 1924.
3. BAUR, Neue Beiträge zur Morphologie des Carpus der Säugetiere. Anatomischer Anzeiger. IV. k. 49—51. o. 1889.

4. BAYER, Os naviculare bipartitum. Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte 103. k. 634—644. o. 1935.

5. BOAS, Zur Beurteilung der Polydaktylie des Pferdes. Zoologisch. Jahrb. 40. k. 49—104. o. 1918.

6. BONNET-PETER: Lehrbuch der Entwicklungsgeschichte. V. kiadás. 1929.

7. BREHM-MÉHELY, Az állatok világa. 1907.

8. CLAUS-GROBBEN-KÜHN, Lehrbuch der Zoologie. X. kiadás. 1932.

9. DOLLO, Carpus und Tarsus. Archiv. f. Entwickl. d. Org. 120. k. 272—298. o. 1929.

10. ELLENBERGER-BAUM, Handbuch der vergleichenden Anatomie der Haustiere. XVII. kiadás. 1934.

11. FISCHL, Entwicklungsgeschichte des Menschen. 1930.

12. GAWRILENKO, Die Evolution des Carpus bei den Proboscidiern. Anatomischer Anzeiger. 58. k. 218—244. o. 1924.

13. GRUBER, Über die secundären Handwurzelknochen des Menschen. Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medizin. 1866. évf. 565—586. o.

14. GRUBER, Über ein, dem Os intermedium s. centrale gewisser Säugetiere analoges neuntes Handwurzelknöchelchen beim Menschen. Archiv für Anatomie, Physiologie u. wissenschaftliche Medizin 1869. évf. 331—341. o.

15. GRUBER, Nachträge zur Osteologie der Hand und des Fusses. Bulletin de l'Academie. Imp. des sc. de St. Petersbourg. VII. k. 565—600 o. 1870.

16. GRUBER, Neue Fälle des Vorkommens eines neunten, den Processus styloideus des Metacarpale III. substituirendes Handwurzelknöchelchens beim Menschen. Bulletin de l'Academie Imp. des sc. de St. Petersbourgh, VII. k. 635—640. o. 1870.

17. GRUBER, Über einen neuen Fall des Vorkommens von neuen Knochenstückchen in der Handwurzel des Menschen durch ursprüngliches Zerfallen des Naviculare in zwei Navicularia secundaria. Bulletin de l'Academie Imp. des sc. de St. Petersbourg, VIII. k. 1871.

18. GRUBER, Über einen neuen secundären Tarsalknochen. Mémoirs de l'Académie. Imp. des sc. de St. Petersbourg. XVII. k. 21. o. 1871.

19. GRUBER, Nachträge zu den supernumerären Handwurzelknochen des Menschen. Bulletin de l'Academie Imp. des sc. de St. Peterbourg. VII. k. 473—495. 1872.

20. GRUBER, Weitere Nachträge zum Vorkommen des Ossiculum intermedium carpi beim Menschen. Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medizin. 1873. évf. 712—720. o.

21. GRUBER, Über eine neue Art von Ossiculum supernumerarium carpi des Menschen. Bulletin de l'Academie Imp. des sc. de St. Petersbourg. X. k., 211—238. o. 1878.

22. HENKE-REYHER, Studien über die Entwicklung der Extremitäten des Menschen, insbesondere der Gelenkflächen. Sitzungsberichte der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. 70. k., III. r. 217—273. o. 1875.

23. HERTWIG-WETTSTEIN, Abstammungslehre, Systematik, Biogeographie, Paläontologie. TEUBNER, 1914.

24. IHLE- VON KAMPEN-NIERSTRASZ-VERSLUYS, Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. Berlin, 1927.

25. KASSIANENKO, Calcaneus secundarius. Talus accessorius. Os trigonum tarsi beim Pferde. Anatomischer Anzeiger. 80 k.. 1—10. o. 1935.

26. KOVÁCS: Átlátszó anatomiai készítmények. Állatorvosi Lapok. 56. k., 2. és 3. sz. 14—19. és 27—29. o.

27. KÜCKENTHAL, Die Hand der Cetaceen. Anatomischer Anzeiger. V. k., 44—52. o. 1890.

28. KÜPFER-SCHINZ, Beiträge zur Kenntnis der Skelettbildung bei domestizierten Säugetieren auf Grund röntgenologischer Untersuchungen. Anlage und Entwicklung des Knochenskelettes der Vorder- und Hinterextremität des Hausrindes (Bos taurus L.). Denkschrift der Schweizer Naturforsch. Gesellschaft, Zürich, 1923.

29. KÜPFER, Beiträge zum Modus der Ossificationvorgänge in der Anlage des Extremitätenskelettes bei den Equiden. Denkschrift der Schweizer Naturforsch. Gesellschaft. Zürich, 1931.

30. LEBOUCQ, Sur la morphologie du carpe et du tarse. Anatomischer Anzeiger. I. k., 17—21. o. 1886.

31. LEBOUCQ, Recherches sur la morphologie du carpe chez les mammiferes. Separatum, 35—102. o. 1884.

32. LENHOSSÉK, Az ember anatomiája. I. köt. Budapest, 1922.

33. MARTIN, Lehrbuch der Anatomie der Haustiere. I. köt., II. kiad. Stuttgart, 1912.

34. MÖLLENDORF, Handbuch der mikroskopischen Anatomie des Menschen, 2. k., 2. r. Schaffer, Die Stützgewebe. Berlin, 1930.

35. PFITZNER, Bemerkungen zum Aufbau des menschlichen Carpus. Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft. 1893. 186—193. o.

36. PFITZNER, Beiträge zur Kenntnis des menschlichen Extremitätenskelettes. VIII. r. Die morphologischen Elemente des menschlichen Handskelettes I. r. Separatum 77—157. o., II. r. Separatum 365—678. o.

37. ROSENBERG, Über die Entwicklung der Wirbelsäule u. das Centrale carpi des Menschen. Separatum 83—197. old.

38. SCHIMKEVITSCH, Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. Stuttgart, 1910.

39. SCHMALHAUSEN, Die Entwicklung des Extremitätenskelettes von Salamandrella Kayserlingii. Anatomischer Anzeiger. 37. k., 431—466. o. 1910.

40. Sieber, Der Anpassungstypus von Hand und Fuss der Anthracotheriidae. Paläobiologica. 2. k., 87—127. o. 1929.

41. Siegert, Atlas der normalen Ossification der menschlichen Hand. Leipzig, 1935.

42. Steiner, Hand und Fuss der Amphibien, ein Beitrag zur Extremitätenfrage. Anatomischer Anzeiger, 53. k., 513—542. o. 1921.

43. Surber, Über das Auftreten und die weitere Ausgestaltung der Verknöcherungspunkte im embryonalen Gliedmassenskelett des Schweines. Állatorvosdoktori értekezés. 33 o. Zürich, 1922.

44. Sussdorf, Vergleichende Anatomie der Haustiere. I. köt. Stuttgart, 1895.

45. Thilenius, Die «überzähligen» Carpuselemente menschlicher Embryonen. Anatomischer Anzeiger IX. k., 665—671. o. 1894.

46. Thilenius, Untersuchungen über die morphologische Bedeutung accessorischer Elemente am menschlichen Carpus und Tarsus. Schwalbe's Morphologische Arbeiten. 5. k., 462—554. o. 1896.

47. Virchow, Das Os centrale carpi des Menschen. Gegenbaurs Morphologisches Jahrbuch, 63. k., II. r. 480—530. o. 1929.

48. Wiedersheim, Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. Jena, 1907.

49. Zietzschmann, Lehrbuch der Entwicklungsgeschichte der Haustiere. Berlin, 1925.

50. Zimmermann, Háziállatok anatomiája. 2. kiadás, 1923.

51. Zimmermann, Fejlődéstan. 2. kiadás, 1922.

52. Zimmermann, Anatomiai gyakorlatok. 1911.

53. Zimmermann, A házinyúl természetrajza. Kir. Magy. Természettudományi Társulat, 1927.

54. Zittel, Grundzüge der Paläontologie. Jena, 1915.

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# BEITRÄGE ZUR VERGLEICHENDEN ANATOMIE DES OS CARPI CENTRALE.

Von Dr. GUSTAV ZIMMERMANN.

Der Carpus der höheren Säugetiere besteht aus regelmässig vorkommenden, *kanonischen* und zufällig vorhandenen, *accessorischen* Elementen. Erstere sind den ganzen Carpus dorsovolar durchgehende, letztere entweder dorsal oder volar gelagerte kleine, verkümmerte Knochen. Unter den letztgenannten Knochen bedeutet eine vorhandene freie dorsale, bzw. volare Oberfläche die höher entwickelte Form. Das Vorkommen accessorischer Elemente ist als von phylogenetischen, bzw. ontogenetischen Ursprung her zu bewertender Rest zu betrachten.

Die Urform des Handwurzelgelenks bei den höheren Vertebraten umfasst drei Knochenreihen, nämlich eine *proximale*, eine *centrale* und eine *distale*, von welchen bei stammesgeschichtlich höher stehenden Tieren, z. B. bei den meisten Säugetieren nur die proximale und die distale verbleiben.

Eigentümlicherweise kommen Bestandteile einer *mittleren* Reihe bei gewissen *Affenarten* regelmässig vor. Es bestand lange Zeit die Ansicht, dass dieses Centrale aus mechanischen Bedürfnissen, als selbständiger Gelenkkörper, eigene Bewegungsarten zur Aufgabe hat. Es erwies sich jedoch, dass das Centrale *unbeweglich* mit dem Radiale verbunden, selbständige Funktionen nicht eigen haben kann. Bestandteile der mittleren Reihe wurden bei verschiedene *Marsupialia, Edentata, Insectivora, Chiroptera, Rodentia* eingehend untersucht und die positive Befunde besprochen. Einem einzigen und zwar primitiven *Huftier*, dem *Klippschliefer* kommt ein selbständig bleibendes und knöchernes *Os carpi centrale* zu. Dieses

Centrale besitzt eine dorsale freie Oberfläche und drei Gelenkflächen. Der lateral und dorsal verbreiterte, medial und volar messerklingenartig verschmälernde Knochen erreicht die Volarfläche des Carpus nicht, sondern nimmt 2 Drittel der Tiefe ein.

Reste einer entwicklungsgeschichtlich vorhandenen mittleren Carpalknochenreihe habe ich auch bei den Haussäugetieren gesucht. An den *aufgehellten Präparaten* von *knorpeligen* Zustand konnten Bestandteile der centralen Reihe nicht mehr vorgefunden werden. Beim *Schwein* kommt im *vorknorpeligen* und zwar *prochondralen* Entwicklungsstadium (22 mm Scheitelsteisslänge) ein doppelt angelegtes, volarwärts mit dem Radiale in Zusammenhang stehendes, dorsal erscheinendes *Os carpi centrale secundum* vor. Diese Centrale-Anlage verwächst bald, und zwar schon bei den *30 mm-igen, protochondralen Stadium* zeigenden Schweineembryo, mit der Radialeanlage und auch im knorpeligen Carpus ist es nicht mehr nachzuweisen. Im *knöchernen* Carpus erscheint zwar nicht selbständig, sondern mit dem *Radiale verwachsen* das Centrale wieder. An den mediodistalen Rande des *Intermedium* derselben Embryonen findet man sowohl dorsal, wie auch volar je eine Anlage, die als *Os carpi centrale tertium dorsale,* bzw. *volare* zu bezeichnet werden sollen, welche auch im knöchernen Zustand nachgewiesen wurden.

Zusammenfassend hebe ich hervor, dass *beim Schwein im vorknorpeligen und knöchernen Stadium* (im knorpeligen nicht) *Reste der centralen Carpus-Reihe vorkommen.* In der Entwicklung des Carpus beim Schwein ist in diesem Sinne gewissermassen ein Sprung festzustellen. Es ist ferner von Wichtigkeit hervorzuheben, dass eine *Verwachsung der accessorischen Elemente mit den kanonischen Anteilen erfolgt* und die überzähligen, entwicklungsgeschichtlich schon vorhandene Elemente gehen nicht zu Grunde um ihre Stelle dem kanonischen Anteilen zu überlassen. Das nochmalige Erscheinen der Elemente der mittleren Carpus-Reihe in dem knöchernen Zustand unterstützt auch die Verwachsungstheorie.

---

(Aus drr Sitzung der III. Klasse der Ungarische Akademien der Wissenschaften vom 18. November 1935.)

# ORYGOCERASOK A SOPRONVIDÉKI ALSÓPONTUSI ÜLEDÉKEKBEN S ELTERJEDÉSÜK HAZÁNKBAN ÉS A KÖRNYEZŐ ORSZÁGOKBAN.

VITÁLIS ISTVÁN l. tagtól.

KITTL E. 1886. évben a sopronvármegyei *Fraknóváralja* (Forchtenau) középmiocénkorú üledékeiből egy szárnyas csigát (pteropodát) írt le *Creseis Fuchsi* n. sp. néven. (1)

LÖRENTHEY IMRE 1903. évben felismerte (2), hogy Kittl csigafaja nem pteropoda, hanem *orygoceras* és hogy azonos az *Orygoceras corniculum* BRUS. fajjal, amelyet BRUSINA 1892. évben, vagyis Kittl közleményének a megjelenésénél később írt le (3) és rajzban még később: 1902. évben mutatott be (4), miért is e faj jelzésére — a nemzetközi megállapodások szerint — a «*corniculum*» helyett a «*Fuchsi*» species-nevet kell alkalmazni, vagyis a *Creseis Fuchsi* KITTL és az *Orygoceras corniculum* BRUS. elnevezés helyett az *Orygoceras Fuchsi* KITTL sp. jelzése használandó.

LÖRENTHEY feltevése szerint azonban a Kittl által ismertetett *Orygoceras Fuchsi* KITTL sp. nem is Fraknóváraljáról való, hanem *Sopron* vidékéről, mivel Fraknóváralján középmiocénkorú üledékek vannak, holott az *orygocerasok* az alsó pliocénben: a pontusi emeletben éltek. Lörentheynek sikerült is a TELEGDI ROTH LAJOS által Sopron határának az északkeleti részén még a mult század hetvenes éveiben gyüjtött és a m. kir. Földtani Intézet múzeumában őrzött alsópontusi lyrcaea-házakban az *Orygoceras Fuchsi* KITTL sp.-nek egy példányát meglelni (2. p. 471.).

LÖRENTHEYnek ezen 1903. évi megállapítása és lelete óta egy emberöltő telt el a nélkül, hogy Sopron vidékének alsó pontusi üledékében a későbbi kutatók *orygocerast* leltek volna. Sőt legújabban Sopron földtani viszonyainak monografikus leírása (5) már LÖRENTHEY *orygoceras*-leletéről sem emlékezik meg.

Mindez a körülmény arra serkentett, hogy megkíséreljem Sopron vidékének alsó pontusi üledékeiben a mikrofauna között

az *orygocerasok* házacskáit is felkutatni. Főleg abban reménykedtem, hogy a nagy *melanopsisok*: a *lyrcaeák* házába berakódott egykori fövenyben reábukkanok az ott védelemhez jutott apró és törékeny *orygoceras*-házacskákra.

*Lyrcaeák* Sopron vidékén sok helyen és nagy mennyiségben gyűjthetők, különösen abban a nagy medencében, amely Sopron-tól északra, a Pozsony felé vezető országút két oldalán terül el Nemeskút, Csalánkert, Kistómalom, Tómalomfürdőtelep, Jánosszőlőtelep, Kőhídtelep, Pius-major környékén.

Különösen sok lyrcaeát tártak fel ebben a medencében akkor, amikor néhány év előtt a pozsonyi országúttól új autóutat készítettek a Tómalom-fürdőhöz. Erre az új feltárásra VENDL MIKLÓS tanártársam hívta fel a figyelmemet. VENDL ugyanis igen részletesen és nagy szeretettel kutatja szülővárosa földtani viszonyait.

A Tómalom-fürdőtelephez vezető új autóút feltárásában gyűjtött többszáz lyrcaea-ház egykori fövenyében sikerült is nehány töredékes *orygoceras*-házacskát találnom, részint a *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana* FÈR. var. *maxima* HANDM. nagy házaiban, részint a *Melanopsis (Lyrcaea) Vindobonensis* FUCHS házakban az apró kavicsos, világosszürke, muscovitos homokban.

Ezeken a töredékes *orygoceras*-házacskákon hiányzott azonban a legjellemzőbb rész: az apró, gazellaszarvszerű házacskának a kampós vége: a ház embryonalis része: a *nucleus*.

Az első siker, habár nem is volt teljes, arra serkentett, hogy a sopron-kőhídtelepi alsó pontusi medence *lyrcaeás* üledékeit más helyeken is átkutassam.

A Tómalom-fürdőteleptől délre a Tómalom-patak völgyének a keleti oldalán a Kistómalom felett levő «pihenő»-nél a gyalogút hídjának az építésekor jól feltárták az alsó pontusi, világosszürke, muscovitos, meszes homokot és abban a *Congeria ornithopsis* BRUS (ugyancsak feledésbe ment) házai mellett elég sok *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* KRAUSS ház gyüjthető. A kiszedett egykori fövenyben sok *ostracoda* van ugyan és a mikrofauna néhány képviselője is megmaradt, ámde *orygoceras*-házacskát nem sikerült ott találnom.

A Kistómalomtól délre, ahol a Sopron és a Kistómalom közötti gyalogút észak felől nyugat felé kanyarodik át, kilátó-pihenő

helyet terveztek; planírozás közben a dombhát oldalát is bevágták és így elég jól feltárták az alsó pontusi üledéket is.

Itt úgy, mint az imént ismertetett kistómalmi pihenőnél, a *Congeria ornithopsis* Brus házak mellett elég gyakori a *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* Krauss, sőt nehány *Melanopsis (Lyrcaea) impressa* Krauss var. *Bonelli* Sism. házat is gyűjthettem. Az ezekből kiszedett homokban sikerült olyan *orygoceras*-házacskát is lelnem, amelyen az embryonalis rész: a nucleus is megmaradt.

Kutatásaimat kiterjesztettem azután a sopron—kőhídtelepi medence alsó pontusi üledékeinek az északi részére is, minthogy ott az ekevas nagyon sok *lyrcaea*-házat vet ki, úgyhogy azok százával, ezrével szedhetők össze.

Különösen *Pius-major* környékét kutattam át részletesen.

Pius-major már Fertőrákos határához tartozik és a pozsonyi országúttól nyugatra fekszik egy dombháton. A piusmajori dombhát kövületes szarmata korú üledékekből áll, amint azt már Roth L. is kimutatta (6).

Ezt a piusmajori szarmata-dombhátat a Rákos-patak két ágának a völgyében olyan laza, kavicsos homoklerakódások fogják közre, amelyekben nagyon sok *lyrcaea* és pedig a *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana* Fèr. és a *Melanopsis (Lyrcaea) Vindobonensis* Fuchs háza gyűjthető egyéb, meglepően sokféle kövület társaságában; különösen közvetlenül a kövületes szarmatakorú homok és kavics föltárásaitól keletre, a pozsonyi út keleti oldalán, amint azt már Boda Antal (7), volt tanársegédem és Vendl Miklós tanártársam is említi (5. p. 115).

Az itt nagy számban gyüjtött *lyrcaeák* házaiból kiszedett világosszürke, muscovitos kvarchomokban több és jobb megtartású *orygocerás*-házacskát sikerült találni.

Dinda János tanársegédemmel többszáz *lyrcaea*-házba zárt fövenyt kutattunk át és arra a megállapításra jutottunk, hogy Piusmajor alsópontusi üledékében a mikrofauna tagjai között nem is olyan ritkák az *orygocerasok* házacskái. Ép példányt azonban csak nagyon elvétve lehet találni.

*

Az *orygoceras*-nemet Brusina *Spiridio*, a Balkán-félsziget pontusi faunájának ez a fáradhatatlan és élesszemű kutatója 1882.

évben ismerte fel Dalmácia alsó pontusi korú *melanopsisos* fehér márgájában (8), ahol már 1875-ben feltűnt neki ez az érdekes fossilia.

Az *orygoceras* elnevezés arra vonatkozik, hogy ennek az érdekes molluscumnak a csőszerű házacskája a gazella vagy a vadkecske szarvára emlékeztet (ὄρυξ, υγος = vadkecske, κὲρας = szarv). A házacska hossza 5—9, a vastagsága 0·7—1·5 mm s hol síma, hol gyűrűs.

Az *orygoceras*ok házacskája annyira különleges és bizarr formájú, hogy az a mult század második felében a legkiválóbb palaeontológusokat is meglepte, amint azt a következő nyilatkozatok is bizonyítják. Zittel Károly, az őslénytan atyja, a következőket írta: «Ganz räthselhaft ist mir das merkwürdige *Orygoceras*. Ich kenne nichts Aehnliches.» Hoernes Mór, a neogén faunájának specialista kutatója, a következőképpen nyilatkozott: «Wunderbare Fossilien; ich habe Aehnliches in meinem Leben nie gesehen». Neumayer Melichor Szlavónia pontusi-levantei faunájának a legjobb ismerője, a következőket mondta: «Ich habe nie etwas Aehnliches gesehen und die einzige Meinung, die ich mir habe bilden können, ist die, dass nichts Anders, als ein Gasteropode sein kann. Aber wer sonst? Ich habe keine Idee» (8. p. 37.).

Az *orygoceras*okat azután Brusina 1882. évben publikált közleményében tényleg a csigákhoz vette és pedig nemcsak mint új nemet, hanem mint a *coecidák*hoz közelálló új családot (7. p. 41.). Crosse 1885-ben a *valvaták*kal kapcsolatban emlékezik meg az *orygocerás*okról s bizarr formájuknál fogva ő is hajlandó őket különleges, új családhoz tartozóaknak tekinteni. Boettger Oszkár 1884-ben (9), Lörenthey Imre 1901—2-ben (10) ellenben a mellett érvelt, hogy az *orygoceras*-nem a *coecidák* családjába tartozik.

Igyekeztek az *orygoceras*ok rokonságát megállapítani más csiganemekkel, illetve családokkal, sőt a puhatestűek más osztályaival is. Így a szárnyas csigákhoz (a *pteropodák*hoz) tartozó *creseis*-szel, az ásólábú puhatestűekhez (a *scaphopodák*hoz) tartozó *dentalium*mal; a *tentaculites*szel, sőt a lábasfejűekhez (a *cephalopodák*hoz) tartozó *orthoceras*okkal is. Említettük már, hogy Kittl az *orygocerast pteropodának*: *creseis*nek vélte, Bittner szerint a bécsi Földtani Intézetben egy *orygocerast Dentalium Jani* néven őriznek (11). Ruedemann még 1912. évben is az *orthoceras*okkal

való hasonlóságot emelte ki (12). Innen van, hogy pl. ZITTEL kitűnő tankönyvének (13) az 1924. évi VI. kiadásában az *orygoceras*t a 466. lapon az *előlkopoltyűs* csigák között a *valvaták* családjában, a 469. lapon a *coecidák* családjában és az 521. lapon a *lábasfejűek* osztályában, az *orthoceras*ok családjában említi meg.

BRUSINA 1882. évben három *orygoceras*-fajt írt le, ú. m. az aprócska agyar-, illetve *dentalium*-alakú *Orygoceras dentaliforme*, a parányi «szálfa»-alakú, gyűrűs *Orygoceras stenonemus* és a bőségszarújára emlékeztető *Orygoceras cornucopiae*-fajt, sőt hajlandó volt a síma «dentaliforme» sp.-től az 1—3 gyűrűjű formát *Orygoceras elasmophorum* néven negyedik, a «*stenonemus*»-fajtól a csavaralakú-féleséget *Orygoceras cochlea* néven ötödik fajként elkülöníteni (7. p. 41—46.).

Ez a különleges formájú csigaházacska a magyar geológusoknak is régen a szemébe ötlött. BÖCKH JÁNOS *Pécs* vidékén 1875-ben, HOFMANN KÁROLY *Gyimótfalván* és *Pinkafőn* 1876-ban, *Perjén* (Szilágy vármegyében) 1878-ban bukkant reá, de a lelt töredékes példányokban csak BRUSINA ismerte fel az *orygocerás*okat és az ő meghatározása folytán a magyarországi első *orygoceras* már ott szerepelt az 1885. évi budapesti általános kiállításon (14). BÖCKH JÁNOS 1886-ban a Fehér Kőrös völgyében *Govosdia* pontusi márgájában is lelt *orygoceras*t, amelyet PETHŐ GYULA 1887. évben *Orygoceras* cf. *cornucopiae* BRUS. jelzéssel sorolt fel fölvételi jelentésében (15).

1890-ben GORJANOVIĆ-KRAMBERGER KÁROLY, zágrábi egyetemi tanár írt le a horvátországi *Vrabče* «praepontusi» fehér márgájából két új *orygoceras*-fajt, ú. m. az *Orygoceras Brusinai* és az *Orygoceras levis* specieseket (16).

BRUSINA 1882. évi első közleménye után még három ízben közölt újabb adatokat az *orygoceras*ok ismeretéhez. 1892. évben négy új fajt írt le: *Orygoceras corniculum* BRUS. = *Orygoceras Fuchsi* KITTL. sp., *Orygoceras filocinctum*, *Orygoceras cultratum* és *Orygoceras cnemopsis* néven (3. p 57—60). 1897. évben az *Orygoceras cornucopiae*, *stenonemus* és *dentaliforme* teljes példányait mutatta be rajzban (17). 1902. évben 13 orygoceras ábráját közölte, éspedig az 1892. évben leírt négy fajét és 8 új faj rajzát. Ez a 8 új faj a következő: *Orygoceras tropidophorum*, *curvum*, *bifrons*, *euglyphum*,

*leptonema, scolecostomum, fistula* és *intortum* (4. tab. II. fig. 1—50.). Kár, hogy BRUSINA ezekről az új fajokról a leírást nem közölte.

Hazánkban LÖRENTHEY IMRE lelt ismételten *orygoceras*okat. Így 1893-ban az alsófehérvármegyei *Oláhlapád* (18), 1895-ben *Tinnye*, 1901—1902-ben *Budapest—Kőbánya* és *Tinnye* (10) 1903-ban a krassószörényvármegyei *Szócsán* (19), 1905-ben a veszprémvármegyei *Peremarton* (20) és 1906-ban a biharvármegyei *Kocsuba* (21) pontusi üledékeiben talált *orygoceras*okat.

T. ROTH L. (22) 1912-ben *Erzsébetváros* határában lelt *orygoceras* sp-t. VITÁLIS ISTVÁN (23) az erdélyi földgázkutatással kapcsolatban *Korond* és *Küsmöd* határában gyüjtött 1913-ban *Orygoceras levis* GORJ.—KRAMB. házakat. SCHRÉTER ZOLTÁN (24) 1913-ban *Egerszalók* határból említ *orygoceras* sp-t és 1925-ben *Ostoros* (25) határából sorolja fel az *Orygoceras filocinctum* BRUS. és az *O. corniculum* BRUS (= *O. Fuchsi* KITTL sp.) fajt.

Ausztriában *Leobersdorf* alsó pontusi üledékeiben RZEHAK (26) ismert fel *orygoceras*okat s azokat azután HANDMANN (27) és TROLL (28) is megemlítette.

BITTNER közleménye szerint a sopronvármegyei *Rétfalu* (Wiesen) üledékeiben lelt és Bécsben őrzött *Dentalium Jani* is *orygoceras* és közel áll az *Orygoceras dentaliforme* BRUS.-hoz. (11)

A hazai földgáz- és földiolajkutató mélyfúrásokból kikerült pontusi üledékekben 1927-ben SÜMEGHY JÓZSEF *Baján* lelt (458—614 méter mélységben) *orygoceras*-töredéket. (29)

*

*Sopron* és *Fertőrákos* határában a következő *orygoceras*-fajokat leltem:

1. *Orygoceras Fuchsi* KITTL sp.

1886. *Creseis Fuchsi* n. sp. — KITTL, E.: Ueber die miocenen Pteropoden von Österr.-Ungarn. Ann. d. k. k. Naturhist. Hofmuseums. Bd. I. p. 50. Taf. II. Fig. 1—3.

1892. *Orygoceras corniculum* n. sp. — BRUSINA, S.: Fauna foss. terz. di Markuševec. Glasnik hrv. narov. drust. God. VII. Zagreb. p. 169.

1902. *Orygoceras corniculum* Brus.—Rzehak, A.: Beitr. z. Kenntnis d. Fauna d. Congeriensch. von Leobersdorf. Verh. d. k. k. geol. R. A. Wien. p. 265.

1902. *Orygoceras corniculum* Brus.—Lörenthey, I.: Die pann. Fauna von Budapest. Palaentogr. Stuttgart. p. 194. Taf. XI. Fig. 20—22. és Taf. XII. Fig. 11.

1902. *Orygoceras corniculum* Brus.—Brusina, S.: Iconographia moll. foss. Zagrabiae. Taf. II. Fig. 34—37.

1903. *Orygoceras Fuchsi* Kittl sp. — Lörenthey, I.: A szarmata- és pannoniai képződményeket áthidaló rétegek Magyarországon. Földt. Közl. XXXIII. p. 31.

1903. *Orygoceras Fuchsi* Kittl sp. — Lörenthey, I.: Néhány megjegyzés az *Orygoceras Fuchsi* Kittl sp.-ről. Földt. Közl. XXXIII. k. 470.

1905. *Orygoceras Fuchsi* Kittl sp. — Lörenthey I.: Adatok a balatonvidéki pann.-korú faunához. A Balaton Tud. Tan. Eredm. I. k. 1. r. Pal. függ. Budapest. p. 110.

1905. *Orygoceras Fuchsi* Kittl sp. — Kadić O.: A Fekete-Körös völgyének geol. visz. A m. kir. Földt. Int. Évi Jel. 1905-ről Budapest. p. 101.

1925. *Orygoceras corniculum* Brus.—Schréter: Földtani felvétel a Bükkben. A m. kir. Földt. Int. Évi Jel. 1920—23-ról Budapest. p. 38.

Ezt a fajt 1886-ban Kittl *Creseis Fuchsi* n. sp. néven, mint szárnyas csigát írta le, Brusina pedig 1892-ben *Orygoceras corniculum* n. sp. néven említi *Markuševec*ről. Lörenthey 1901—1902-ben *Tinnyé*ről és *Kőbánya*ról ismertette és ábrát is közölt róla. 1902-ben Brusina is bemutatta a *markuševeci* és a *ripanji* ép példányokat rajzban. Ugyanabban az évben Rzehák *Leobersdorf*ban lelte meg. 1903-ban Lörenthey *Szócsán*ból említi. Ugyanabban az évben felismerte, hogy Kittl *Creseis Fuchsi* n. sp.-e, amelyet *ő pteropoda*ként írt le, azonos Brusina *Orygoceras corniculum* fajával, és ekkor említi, hogy ennek a fajnak egy példányát egy *Sopron* vidékéről való *lyrcaea*-házban is meglelte. 1905-ben *Peremarton*-ban gyüjtött egy példányt. 1906-ban a Kadić által *Kocsubán* gyűjtött alsó pontusi kövületek között ismerte fel ezt a fajt. 1925-ben Schréter említi Ostorosról.

*Sopron*ban a *Kistómalom* mellett csak egy példányát leltem, amelyen az embryonális kanyarulaton: a nucleuson kívül a háznak körülbelül kétharmadrésze maradt meg. A ház felülete síma, illetve csak fínom növekedési vonalak észlelhetők rajta. A ház keresztmetszete olyan egyenoldalú háromszög, amelynek a csúcsai le vannak kerekítve úgy, amint azt LÖRENTHEY tinnyei példányának a házán érzékítette.

A *fertőrákosi Pius-major* mellett lelt példányok is jól megegyeznek LÖRENTHEY tinnyei példányaival (Palaeontogr. XLVIII. Bd. Taf. XII. fig. 11.).

### 2. *Orygoceras filocinctum* BRUSINA.

1892. *Orygoceras filocinctum* n. sp. — BRUSINA: Fauna fossile terziaria di Markuševec in Croazia. Glasnik hrv. narov. drust. God. VII. Zagreb.

1901—2. *Orygoceras filocinctum* BRUS.—LÖRENTHEY: Die pannonische Fauna von Budapest. Palaeontographica. XLVIII. Bd. Stuttgart. p. 197. Taf. XI. Fig. 23. Taf. XII. fig. 12. és Taf. XIII. fig. 1.

1902. *Orygoceras filocinctum* BRUS.—BRUSINA: Iconographia moll. foss. Zagrabiae. Tab. II. fig. 23—28.

1902. *Orygoceras cf. filocinctum* BRUS.—RZEHAK: Beitrag zur Kenntnis d. Fauna d. Congerienschichten von Leobersdorf. Verh. d. k. k. geol. R. A. Wien. p. 265.

1903. *Orygoceras filocinctum* BRUS.—LÖRENTHEY: A szarmata és pannoniai képződményeket áthidaló rétegek Magyarországon. Földt. Közl. XXXIII. k. p. 60—62.

1905. *Orygoceras filocinctum* BRUS.—LÖRENTHEY: Adatok a balatonmelléki pannoniai korú rétegek faunájához. A Balaton Tud. Tan. Eredm. I. k. 1. r. Pal. függ. Budapest, p. 110.

1925. *Orygoceras filocinctum* BRUS.—SCHRÉTER: Földtani felvétel a Bükkben. A m. kir. Földt. Int. Évi Jel. 1920—23-ról. Budapest. p. 38.

Ezt a fajt BRUSINA 1892-ben írta le. 1901—1902-ben LÖRENTHEY *Tinnyéről* három teljes házat rajzban is bemutatott. 1902-ben BRUSINA is közölte a *markuševeci* példányok rajzait. E rajzok szerint erős az eltérés a markuševeci és a tinnyei példányok között.

1902-ben RZEHAK is említi *Leobersdorf*ból. 1903-ban LÖRENTHEY *Szócsán*ban ismerte fel. 1905-ben *Peremarton*ban talált egy töredékes példányt. 1925-ben SCHRÉTER említi Ostorosról.

*Sopron* határában a *Tómalom-fürdőtelep*hez vezető autóút árkában 6 töredékes példányt leltem, amelyeknél a ház keresztmetszete úgy, mint LÖRENTHEY *tinnyei* példányainál lekerekített csúcsú, egyenlő oldalú háromszög.

*Fertőrákos* határában *Pius-major* mellett teljes házacskát is találtam. A piusmajori példányok házacskái, úgymint a tinnyei példányoké, középhelyet foglalnak az *Orygoceras Fuchsi* és az *Orygoceras cultratum* házacskái között, amennyiben a házacska síma, mint a *Fuchsi* házacskája, a keresztmetszete ellenben nem háromszögalakú, mint a *Fuchsié*, hanem elliptikus, mint a *cultratumé*, azonban kissé lapított. A házacska gyűrűi gyengék, alig észrevehetők. A piusmajori teljes példány házacskája nagyon szép megtartású.

### 3. *Orygoceras cultratum* BRUSINA.

1892. *Orygoceras cultratum* n. sp. — BRUSINA, S.: Fauna foss. terziaria di Markuševec in Croazia. Glasn. hrv. nar. dr. God. VII. p. 171.

1895. *Orygoceras cultratum* BRUS.—LÖRENTHEY I.: Nehány észrevétel a Papyrothecáról. Földt. Közl. XXV. k. Budapest. p. 353.

1901—02. *Orygoceras cultratum* BRUS.—LÖRENTHEY: Die pannonische Fauna von Budapest. Palaeontographica. XLVIII. Bd. Stuttgart. p 196. Taf. XII. fig. 13. Taf. XIII. fig. 2-5.

1902. *Orygoceras cultratum* BRUS.—BRUSINA, S.: Iconogr. moll. foss. Tab. II. fig. 29—33.

1903. *Orygoceras cultratum* BRUS.—LÖRENTHEY, I.: A szarmata és pannoniai képződményeket áthidaló rétegek Magyarországon. Földt. Közl. XXXIII. k. Budapest. p. 60—62.

1905. *Orygoceras cultratum* BRUS.—LÖRENTHEY: Adatok a balatonvidéki pannoniai rétegek faunájához. A Balaton Tud. Tan. Eredm. I. k. 1. r. Pal. Függ. Budapest. p. 110.

Ezt a fajt BRUSINA *Markuševec*ről írta le 1892-ben. LÖRENTHEY 1895-ben *Tinnyén* lelte és 1901—1902-ben három teljes tinnyei

példány házacskáját rajzban is bemutatta. Ugyanakkor *Kőbányán* is meglelte. 1902-ben BRUSINA is közölte a markuševeci példányok rajzait, azok azonban mind töredékes példányok. 1903-ban LÖRENTHEY *Szócsán*ban is felismerte, 1905-ben pedig a *peremartoni* alsó pontusi agyagból preparált ki két töredékes példányt.

*Sopron* határában a *Tómalom-fürdőtelep* felé vezető autóút árkában három töredékes példányt, *Fertőrákos* határában *Pius-major* mellett egy ép és igen sok töredékes példányt leltem. A piusmajori példányok házacskáján az embryonális kanyarulat: a nucleus és a házacska gyűrűzöttsége megegyezik BRUSINA Iconographiája rajzaival (Tab. II. fig. 29—30.). A házacska keresztmetszete elliptikus úgy, amint azt LÖRENTHEY érzékítette tinnyei példánya rajzán (Palaeontographica XLVIII. Bd. Taf. XII. fig. 13.), de a piusmajori példány házacskája kissé lapítottabb.

A piusmajori ép példány házacskája igen szép megtartású.

### 4. *Orygoceras fistula* BRUSINA.

1902. *Orygoceras fistula* n. sp.—S. BRUSINA: Iconographia moll. foss. Zagrabiae. Tab. II. fig. 46—47.

Ezt a fajt BRUSINA 1902-ben csak rajzban mutatta be a szerbiai *Ripanj*ból. Másutt eddig tudtommal nem lelték.

A *Fertőrákos* határában *Pius-major* mellett lelt példányok házacskái jól megegyeznek azzal a ripanji példánnyal, amelyet BRUSINA csak rajzban közölt. A pius-majori példányok házacskái az embryonális kanyarulat: a nucleus után feltűnően ellaposodnak és szembetűnően elcsavarodnak. A házacska keresztmetszete elliptikus, nem sokszögű, mint az *Orygoceras cnemopsis* BRUS. fajnál, amelynek a házacskája szintén csavart. Hazánk területén ezek az első példányok.

### 5. *Orygoceras scolecostomum* BRUSINA.

1902. *Orygoceras scolecostomum* n. sp.—S. BRUSINA: Iconographia moll. foss. Zagrabiae. Tab. II. fig. 38—40.

1902. *Orygoceras* cf. *scolecostomum* BRUS.—A. RZEHAK: Beitrag zur Kenntnis d. Fauna d. Cong. Sch. von Leobersdorf. Verh. d. k. k. geol. R. A. Wien. p. 265.

Ezt a fajt BRUSINA 1902-ben csak rajzban ismertette *Markuševec*ről. RZEHAK ugyanabban az évben *Leobersdorf*ból említi.

*Sopron* határában a *Tómalom-fürdőtelep*hez vezető autóút árkában olyan töredékes példányt leltem, amely teljesen megegyezik a markuševeci példány rajzával (BRUS.: Iconographia Tab. II. fig. 38—40).

A tómalom-fürdőtelepi példány házacskájának is erősen megvastagodott: duzzadt a «száj»-pereme s a szájperem a házacska domború: háti táján előrenyúlik. A ház keresztmetszete háromszögalakú. Hazánk területén ez az első példány.

*

BITTNER 1888-ban a Bécsben *Dentalium Jani* néven őrzött rétfalui (wieseni) *orygocerasr*ól azt hitte, hogy felsőmiocén: szarmata korú, (11) ámde FUCHS T. már a következő évben: 1889-ben figyelmeztetett arra, hogy HÖRNES MÓR Rétfalun (Wiesen) a szarmata üledékek fölött a *pontusi* képződményeket is meglelte és hogy a kétféle korú üledék kövületeit nem elkülönítve gyűjtötte (30), és így a rétfalui *orygoceras* is pontusi lehet.

Az eddig lelt *orygocerasok*at mind a *pliocén*-korszak legidősebb, legalsóbb üledékeiben találták, részint a felső miocén és az alsó pliocén között «*átmeneti*» üledéknek tekintett «*maeotiai*», illetve «*praepontusi*», részint az *alsó pontusi Congeria banaticás* és «*lyrcaeá*»-s lerakódásokban.

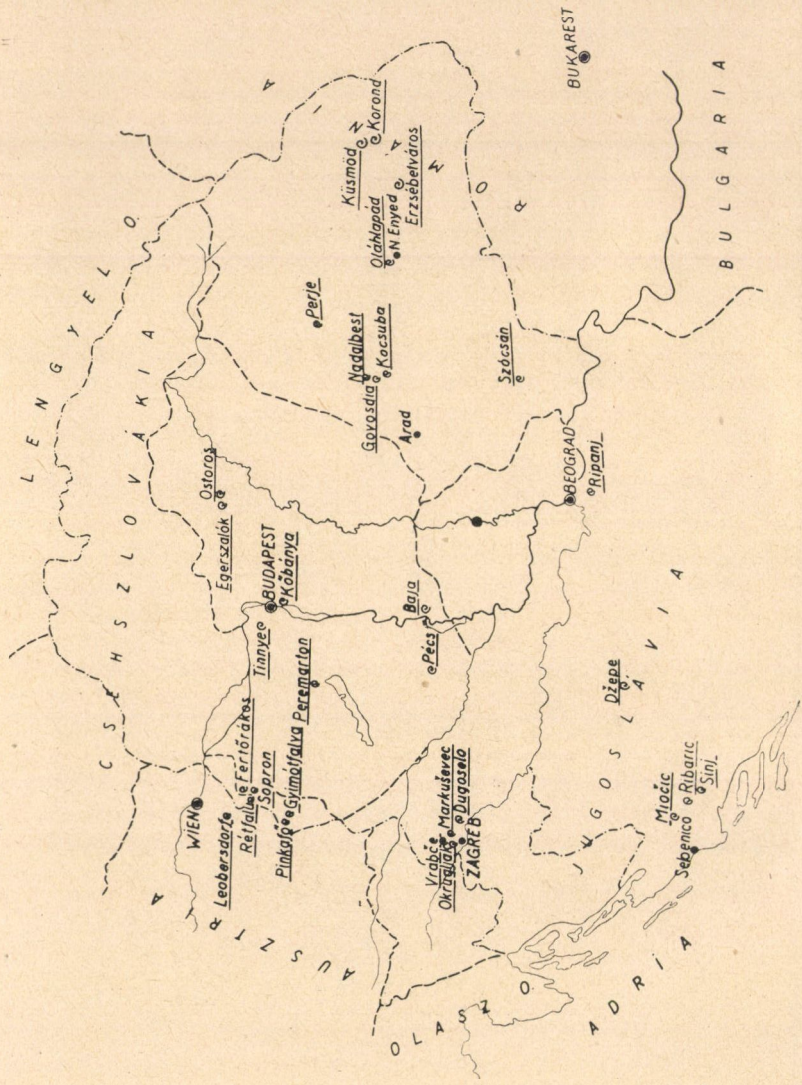
BRUSINA az *orygocerasok*at a velük együtt lelt *melanopsisok* alapján *édesvízi* csigáknak vette, GORJANOVIĆ-KRAMBERGER, LÖRENTHEY és mások viszont *elegyesvíz*inek tekintették, minthogy *congeriák* társaságában találták őket.

*Sopron* és *Fertőrákos* vidékén az *orygocerasok* olyan üledékekben fordulnak elő, amelyekben együtt találtam őket *melanoposisok*kal, *lyrcaeák*kal, *uniók*kal, *valvaták*kal, *planorbis*okkal, *limnaeák*kal, *neritinák*kal, *limnocardium*okkal, sokféle *congeriáv*al úgy a nagytermetű *Congeria subglobosa* PARTSCH, *C. ornithopsis* BRUS., *C. Partschii* CŽJŽEK, valamint a kicsiny *C. scrobiculata* BRUS., *C. Gitneri* BRUS., *C. Mártonfii* LÖR. fajok házaival, sőt egy-két *pupa*- és *papyrotheca*-maradvánnyal is.

Az *orygocerasok* elterjedését hazánkban és a környező országokban a következő táblázat és az 1. sz. térképvázlat tünteti fel.

Az *orygoceras*ok elterjedését hazánkban és a környező országokban a következő táblázat és az 1. sz. térképvázlat tünteti fel.

| | Jugoszlávia | | | | | | | | | Románia | | | | | | | | | Magyarország | | | | | | | | | Ausztria | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Dalmácia | | | Bosznia | Horvátország | | | | Szerbia | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Sinj | Ribarić | Miočić | Džepe | Vrabče | Okrugljak | Markuševec | Dugoselo | Ripanj | Szócsán (Krassó-Szörény vm.) | Erzsébetváros (Kiskükülló vm.) | Korond (Udvarhely vm.) | Küsmöd (Udvarhely vm.) | Oláhlapád (Alsó-Fehér vm.) | Kocsuba (Bihar vm.) | Govosdia (Arad vm.) | Nadalbest (Arad vm.) | Perje (Szilágy vm.) | Pécs | Baja | Kőbánya (Budapest mellett) | Egerszalók (Heves vm.) | Ostoros (Borsod vm.) | Tinnye (Pest-Pilis-Solt vm.) | Peremarton (Veszprémvm.) | Sopron | Fertőrákos (Sopron vm.) | Gyimótfalva (Vas vm.) | Pinkafő (Vas vm.) | Rétfalu (Wiesen) | Leobersdorf |
| *Orygoceras bifrons* Brus. | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *Brusinai* Gorj.-Kramb. | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *cnemopsis* Brus. | | | | | | | + | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *cornucopiae* Brus. | + | | + | | | | | | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *cultratum* Brus. | | | | | | | + | | | + | | | | | | | | | | | + | | | + | + | + | + | | | | |
| « *curvum* Brus. | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *dentaliforme* Brus. | + | + | | | | | | | | | | | | + | | | | + | | | | | | | | | | | | + | |
| « *euglyphum* Brus. | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *filocinctum* Brus. | | | | | | | + | | | + | | | | | | | | | | | + | | + | + | + | + | + | | | | + |
| « *fistula* Brus. | | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | + | | | | |
| « *Fuchsi* Kittl. sp. | | | | | | | + | | + | + | | | | | + | | | | | | + | | + | + | + | + | + | | | | + |
| « *intortum* Brus. | | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *leptonema* Brus. | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *levis* Gorj.-Kramb. | | | | | + | | | | | | | + | + | + | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *scolecostomum* Brus. | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | + | | | | | + |
| « *stenonemus* Brus. | + | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *tropidophorum* Brus. | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| « *sp.* | | | | | | + | | | | | + | | | | | | + | | + | + | | + | | | | | | + | + | | |


LENGYEL O.
CSEHSZLOVÁKIA
AUSZTRIA
ROMÁNIA
BULGARIA
JUGOSLÁVIA
OLASZ O.
ADRIA
BUKAREST
Küsmöd
Korond
Oláhlapád
N Enyed
Erzsébetváros
Perje
Nadalbest
Kocsuba
Govosdia
Arad
Szócsán
BEOGRAD
Ripanj
Ostoros
Egerszalók
BUDAPEST
Kőbánya
Baja
Pécs
Tinnye
Peremarton
Fertőrákos
Sopron
Gyimótfalva
Pinkafő
Rétfalu
WIEN
Leobersdorf
Vrabče
Okrugljak
Markuševec
Dugoselo
ZAGREB
Džepe
Miočic
Ribaric
Sinj
Sebenico

Végül kiemelem még, hogy az *orygocerasok*kal együtt reábukkantam a *Papyrotheca mirabilis* Brus. csigafaj parányi, staniclíszerű házacskáira is, amelyeket eddig locus classicusán: a szerbiai *Ripanjon* kívül csak a pestvármegyei *Tinnye*, a krassószörényi *Szócsán* és az ausztriai *Leobersdorf* alsó pontusi üledékeiben lelték. Erről a csodálatraméltó kis csigáról, valamint a sopron-kőhídtelepi medence alsó pontusi üledékeinek szép *bagliviái*ról és eddig ismeretlen kortársaikról más alkalommal fogom megfigyeléseimet közrebocsátani.

## Irodalom.

1. Kittl, Ernst: Über die miocenen Pteropoden von Österreich-Ungarn. Annalen des K. K. Naturhistorischen Hofmuseums. Wien, 1886. Bd. I. p. 50.

2. Lörenthey Imre: Néhány megjegyzés az Orygoceras Fuchsi Kittl sp.-ről. Földtani Közlöny, XXXIII. k., Budapest, 1903. p. 470.

3. Brusina, S.: Fauna fossile terziaria di Markuševec in Croazia. Con un elenco delle Dreissensidae della Dalmazia, Croazia e Slavonia. Glasnik hrvatskog narovoslovnog društva, God. VII. Zagreb. 1892.

4. Brusina, Spiridio: Iconographia molluscorum fossilium in tellure tertiaria Hungariae, Croatiae, Slavoniae, Bosniae, Herzegovinae, Serbiae et Bulgariae inventorum. Zagrabiae-Zagreb-Agram. 1902. Tab. II.

5. Vendl Miklós: Sopron környékének geológiája. II. rész: A neogén és a negyedkor üledékei. Erdészeti Kisérletek. XXXII. k., Sopron, 1930. p. 94.

6. Roth Lajos: A rákos-ruszti hegyvonulat és a Lajta-hegység déli részének geologiai vázlata. Földtani Közlöny, IX. évf. Budapest, 1879. p. 99—110.

7. Boda Antal: A sopronkörnyéki szarmata üledékek stratigrafiai helyzete. Bányászati és Kohászati Lapok, LX. évf. Budapest, 1927. p. 8—12.

8. Brusina, S.: Orygoceras, eine neue Gasteropodengattung der Melanopsiden-Mergel Dalmatiens. Mit 1. Tafel. Beiträge zur Paläontologie Österreich-Ungarns und des Orients. Wien, 1882. II. Bd. p. 33.

9. Boettger, O.: Über Orygoceras Brus. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie. Jahrgang 1884. Stuttgart, 1884. p. 44—45.

10. Lörenthey Imre: Die pannonische Fauna von Budapest, Palaeontographica. XLVIII. Bd. Stuttgart, 1901—1902. p. 137.

11. Bittner, A.: Orygoceras aus sarmatischen Schichten von Wiesen. Verhandlungen der k. k. geologisch. Reichsanstalt. Jahrgang 1888. Wien, 1888. p. 177.

12. Ruedemann, R.: The lower siluric shales of the Mohawk Valley. New-York State Educ. Dep. Bull. 525. 1912. Albany. p. 115.

13. Zittel, Karl A. von: Grundzüge der Paläontologie. I. Abt. Sechste Aufl. München und Berlin. 1924. p. 466, 469, 521.

14. Böckh János: A m. kir. Földtani Intézet és ennek kiállítási tárgyai. Az 1885. évi budapesti általános kiállítás alkalmával összeállította. A m. kir. Földtani Intézet kiadványa. Budapest, 1885. p. 16.

15. Pethő Gyula: Borosjenő, Apatelek, Buttyin és Bél környékének geologiai viszonyai a Fehér-Körös völgyében. A m. kir. Földtani Intézet Évi Jelentése, 1886. Budapest, 1887. p. 95.

16. Gorjanović-Kramberger, K.: Die praepontischen Bildungen des agramer Gebirges. Glasnik hrvatskoga narovslovnoga družtva. Zagreb. 1890. (Ismertetése Földtani Közlöny, XXII. k. p. 266.)

17. Brusina, Spiridion: Gragja za neogensku malakolosku faunu Dalmacije, Hrvatske, i Slavonije uz neke vrste iz Bosne, Hercegovine i Srbije. Sa 21 tablicom. Zagreb-Agram, 1897. Opera Academiae Scientiarum et Artium Slavorum Meridionalium.

18. Lörenthey Imre: Adatok Szilágy megye és az Erdélyi részek alsó pontusi lerakódásainak ismeretéhez. Kolozsvár, 1893. Értesítő II. term. tud. szak. 1893. évf. p. 218. és 226.

19. Lörenthey Imre: A szarmata és pannoniai képződményeket áthidaló rétegeknek egy classicus lelethelye Magyarországon. Földtani Közlöny, XXXIII. k. Budapest, 1903. p. 60—62.

20. Lörenthey Imre: Adatok a balatonvidéki pannoniai korú rétegek faunájához és stratigrafiai helyzetéhez. 3 táblával és 12 szövegközi ábrával. A Balaton Tudom. Tanulmányozásának Eredményei, I. k. 1. rész. Pal. Függ. Budapest, 1905.

21. Kadić Ottokár: A Fekete-Kőrös völgyének geologiai viszonyai Vaskoh és Belényes között. A m. kir. Földtani Intézet Évi Jelentése 1905-ről. Budapest, 1906. p. 101.

22. T. Roth L.: Az Erdélyi Medence geologiai alkotása Erzsébetváros, Berethalom és Mártonfalva környékén. A m. kir. Földt. Int. Évi Jelentése 1911-ről. Budapest, 1912. p. 123—124.

23. Vitális István: Adatok az Erdélyrészi Medence délkeleti részének földtani felépítéséhez. Jelentés az Erdélyi Medence földgázelőfordulásairól. II. rész. 1. füzet. Budapest, 1913. p. 263. és 267.

24. Schréter Zoltán: Eger környékének földtani viszonyai. A m. kir. Földt. Int. Évi Jelentése 1912-ről. Budapest, 1913. p. 143.

25. Schréter Zoltán: Földtani felvétel a Bükkhegység DK-i oldalán. A m. kir. Földt. Int. Évi Jelentése 1920—23-ról. Budapest, 1925. p. 38.

26. Rzehak, A.: Beitrag zur Kenntnis der Fauna der Congerienschichten von Leobersdorf. Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien, 1902, p. 265.

27. HANDMANN, R.: Zur Kenntnis der Congerienfauna von Leobersdorf und Umgebung. Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt, 1904. Nr. 2. Wien.

28. TROLL, O.: Die pontischen Ablagerungen von Leobersdorf und ihre Fauna. Verhandl. d. k. k. geol. R.-A. Wien, 1907.

29. SÜMEGHY JÓZSEF: Pannoniai-kori fauna az Alföldről. Földt. Közl. LVIII. k. Budapest, 1928., p. 45.

30. FUCHS, TH.: A. BITTNER: Orygoceras aus sarmatischen Schichten von Wiesen. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie. Jg. 1889, p. 319.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# ORYGOCERAS-ARTEN IN DEN UNTERPONTISCHEN ABLAGERUNGEN DER GEGEND VON SOPRON, IHRE VERBREITUNG IN UNGARN UND DEN BENACHBARTEN LÄNDERN.

Von I. v. VITÁLIS, korr. Mitglied.

In der Gemarkung von *Sopron*, im Graben der zur Badeanlage Tómalom führenden Autostrasse, ferner in den Aufschlüssen des neben dem Turistenweg zwischen Sopron und Kis-Tómalom geplanten Ruheplatzes, sowie in der Gemarkung von Fertőrákos neben dem Pius-Meierhof konnte ich im unterpontischen schotterigen Sand, resp. in dem aus den Gehäusen von *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana* Fèr. und *Melanopsis (Lyrcaea) Vindobonensis* Fuchs entnommenen gleichalten Sand innerhalb der Mikrofauna die nachstehenden *Orygoceras*-Arten sammeln und bestimmen:

*Orygoceras Fuchsi* Kittl sp.,
*Orygoceras filocinctum* Brus.,
*Orygoceras cultratum* Brus.,
*Orygoceras fistula* Brus.,
*Orygoceras scolecostomum* Brus.

In der Kartenskizze No. 1. zeige ich die *Orygoceras*-Fundorte Ungarns und der angrenzenden Länder, in der Tabelle zähle ich jene *Orygoceras*-Arten auf, die von diesen Stellen bekannt sind.

Ich erwähne noch, dass ich in der abwechslungsreichen Mikrofauna zusammen mit den *Orygoceras*-Arten auch winzigen, tütenförmigen Gehäuse der Schneckenart *Papyrotheca mirabilis* Brus.

auftraf, die bisher ausser dem locus classicus derselben: dem jugoslavischen *Ripanj* nur in den unterpontischen Ablagerungen von *Tinnye* im Komitat Pest, von *Szócsán* im Komitat Krassó-Szörény und vom österreichischen *Loebersdorf* vorgefunden wurden. Über diese bewunderungswürdige Schnecken, sowie auch über die schönen *Baglivia*-Arten der unterpontischen Ablagerungen des Beckens von Sopron-Kőhídtelep und über die bisher unbekannten Zeitgenossen derselben, werde ich meine Beobachtungen bei einer anderen Gelegenheit mitteilen.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Nov. 1935.)

# ÁLTALÁNOS SZÍNKULCS AZ ÁTNÉZETES TALAJTÉRKÉPHEZ.

'SIGMOND ELEK r. t.-tól.

Körülbelül $2^1/_2$ éve bemutattam itt általános talajrendszerem vázlatát és alapelvét.[1] Ezt azután teljesen kidolgoztam és Általános Talajtan című munkámban tettem közzé.[2] Már e könyvben rámutattam arra, hogy az átnézetes talajtérképekre miként lehet alkalmazni rendszeremet és minő előnyökkel járna, ha az egyes talajelőfordulásokat rendszerembe beosztva, a térképen is kifejezésre juttatnák.[3] A körülmények csakhamar úgy alakultak, hogy a *m. kir. Földtani Intézet*tel hasonló irányban beható tárgyalásokat kellett hivatalosan lefolytatnom a magyarországi talajtérképek alapelveinek kidolgozása érdekében. Így szükségessé vált most már a könyvemben lefektetett általános elvet a gyakorlatban megvalósítani. A Földtani Intézet el is fogadta a dinamikai térképek készítéséhez általános talajrendszeremnek alkalmazását, de ezzel egyidejűleg sürgős megoldásra várt annak eldöntése, hogy a most már rendszerbe foglalt talajelőfordulásokat milyen jezéssel tüntessük fel a térképen. Ezzel kapcsolatosan dolgoztam ki a jelen alkalommal bemutatásra kerülő általános színkulcsot.

Általánosnak nevezem ezt a színkulcsot azért, mert felöleli általános talajrendszeremnek minden talajnemét és ezeken belül az általánosabban elterjedt fő- és altípusokat. Másszóval, nem értem be azzal, hogy csak a magyarországi talajelőfordulásokra

---

[1] 'SIGMOND E.: A földünk felületén képződött talajok általános rendszere. Mat. Term. Értesítő, XLIX. (1932), 79. o.

[2] 'SIGMOND E.: Általános talajtan. Budapest, 1934, 444. o.

[3] U. o. 650. o.

legyek tekintettel, hanem olyan színkulcsot dolgoztam ki, mely az egész világon előforduló talajnemeket felkarolja s így nemcsak egyes országok vagy világrészek, de az egész világ talajtérképének kidolgozására is alkalmas.

Mindenekelőtt azt kellett mérlegelnem, hogy általános talajrendszerem 8 fokozata közül melyek azok, melyeknek feltüntetése az átnézetes talajtérképeken szükséges, vagy lehetséges. Ha vizsgáljuk az eddig közölt átnézetes talajtérképeket, azokon a rendszer altípusai alkotják azt a legalacsonyabb fokozatot, melyek még az ilyen térképeken feltüntethetők. Ámde legtöbbször csak a főtípusok, sőt még ennél magasabb fokozatok jutnak kifejezésre. Azt is mérlegelnem kellett, hogy általános rendszeremben eddig közel 50 főtípus és csak 25 talajnem foglaltatik, pedig vannak talajnemek, melyeknek főtípusait még nem is ismerjük. Arra törekedtem, hogy *a színkulcsban is már kifejezzem a talajrendszerem fokozatait és a rokontalajok összetartozandóságát.* Ezt akként sikerült megvalósítanom, hogy a *talajnemek*, mint 3. fokozat, *képviselik a színkulcs alapszíneit*, az egyes talajnemek *főtípusai* pedig *az alapszínek különböző színárnyalatait és tarkított változatát*, végre a főtípusokon velül *az altípusok a rendszeremben feltüntetett sorszámokat kapták a kiterjedés határán nem túlságosan sűrűn elhelyezve.* Ilyen módon eljárva pl. a világos karminvörös alapszín felöleli az összes hidrogéntalajokat, a világos berlini kék a kalciumtalajokat, az ibolyaszín a natriumtalajokat. Ennek a három talajnemnek főtípusait az említett alapszínek különböző árnyalatai és változatai tüntetik fel. Nagy előnye ennek a három alapszínnek, hogy mindjárt első áttekintésre láthatjuk az összes hidrogén-, kalcium- és nátriumtalajok elterjedését. Tekintve pedig azt, hogy ez a három talajnem a mérsékelt égövben a legterjedtebb, így Európa átnézetes talajtérképe igen egyszerű és áttekinthetővé válik.

Európa átnézetes talajtérképét a Nemzetközi Talajtani Társaság V. bizottságának külön albizottsága *Stremme* danzigi egyetemi tanár elnöklete alatt, mintegy 60 szakember közreműködésével, még 1927-ben kiadta 1 : 10.000,000 léptékben, mely azonban nem színes, csak fekete jelzésekkel vannak az egyes talajelőfordulások rajta feltüntetve. Ez magában is nagyon zavar, mert az ember szeme alig tudja a tarka előfordulásokat észrevenni. Még hozzá a

*talajok minden csoportosítás nélkül és a jelzés is minden rendszert nélkülözve találhatók a térképen.* Így éppen nem áttekinthetők, mert a nagyon bonyolult jelzésekből a rokontalajok összetartozandósága nem tűnik ki. Ezzel szemben az én talajrendszeremet és színkulcsomat alkalmazva, Európa átnézetes térképe valóban gyorsan áttekinthető és igen egyszerű, miként ezt az a 1 : 3.000,000 léptékű Európa-talajtérképem feltünteti, melyet az idei Nemzetközi Talajtani Kongresszuson augusztus havában kiállítottam és az V. bizottság ülésén be is mutattam. Ha e térképre tekintünk, egyszerre az a benyomásunk, hogy három nagy alapszínkörbe esik az európai talajok zöme, ú. m. a hidrogéntalajok, kalciumtalajok és az ektoadinamos talajok vörös, kék, illetőleg fehér alapszínébe. Persze, ezeket az alapszíneket részint a különböző színárnyalatok, részint idegen foltok tarkítják. A köralakú idegenszínű foltok azt jelentik, hogy a főelőforduláson belül más talajelőfordulások találhatók. Miután pedig a térkép mérete nem engedi meg ezeknek a foltoknak pontos feltüntetését, ezért a köralakú, szabálytalanul elszórt, idegenszínű foltok csak azt jelzik, hogy ezen az összetett talajterületen, ú. n. *Komplex-zónán* belül a fő előfordulás mellett minő egyéb talajok is fordulnak elő. Az is előnye ennek a színkulcsnak, hogy így a komplexzónákat is az általános színkulcs rendszerével kifejezhetjük és jellemezhetjük.

Ha a vörös és kék alapszín elterjedését vizsgáljuk Európa talajtérképén, igazolva látjuk mindazokat a törvényszerűségeket, melyeket különösen az orosz iskola a talaj, éghajlat és orografia között megállapított. Mert a nedvesebb vidéken találjuk a vörösszínű hidrogéntalajokat, a szárazabb vidékeken a kék kalciumtalajokat és az utóbbiakon belül a lila sziktalajfoltokat. A magyar medence kék *Ca*-talajaiból emelkednek ki a dombos és hegyvidék vörös H-talajai. A magas hegyvidék váztalajait pedig olyan talajtípusok tarkítják, melyek az ottani vidék éghajlati viszonainak felelnek meg. A térképen ezt a fehérmezőnyökön alkalmazott színek feltűnően jellemzik. De nemcsak a talajnemek, hanem a főtípusok, sőt az altípusok is hódolnak ezeknek a törvényszerűségeknek. Mert a nedves éghajlat fokozódásával a hidrogéntalajok egész sorozatát találjuk fel a degradált kalciumtalajoktól az erdőtalajokon és nedves réti talajokon át a tundratalajokig, száraz vidéken pedig a

szárazság növekedtével a fekete mezőségi talajoktól a barna és szürke mezőségi talajokig. A vörös mezőnyökben található kék foltok végre az azonálisan előforduló rendzinákat jelzi. Ebben az esetben ugyanis a rendzinák alapkőzete okozza azt, hogy a nedves éghajlat ellenére is kalciumtalaj alakult ki. Az intrazonálisan elő forduló láp- és tőzegtalajokat pedig az ezeket jelző köralakú foltok tüntetik fel, hacsak nem alkotnak nagyobb összefüggő területet, mely a térkép méreteiben pontosabban kifejezhető.

Az olyan nagy léptékű térképeken, mint Európa talajtérképe, érthető okokból az altípusoknál alacsonyabb fokozatoknak feltüntetése nem is lehetséges. A lépték csökkenésével azonban a helyi előfordulások változatai, sőt bizonyos fizikai és chemiai ismérvek is följegyezhetők. Az is bizonyos azonban, hogy minél szűkebb területre és minél kisebb léptékre szorul a talajtérkép, annál jobban előtérbe nyomulnak a helyi jelentőségű különleges szempontok és elhalványodnak az általános érvényűek.

Sokan azt kérdezhetnék, hogy minő gyakorlati értéke van az ilyen átnézetes talajtérképeknek, melyeken a talaj neme, fő- és altípusa, esetleg helyi változatai is megvannak, de a gazda nem kap felvilágosítást az őt érdeklő kérdésekben, ú. m. a termelési, trágyázási és talajjavítási ügyekben. Mindenekelőtt meg kell jegyeznem, hogy ha a gazda talajtani ismeretei a mai színvonalon állanak, akkor még az ilyen nagy léptékű átnézetes térképből is tud bizonyos gyadorlati következtetéseket levonni. Így a vörös színnel jelzett hidrogéntalajok mind savanyúak, s így többékevésbbé meszezést igényelnek. A kék színnel jelölt kalciumtalajok pedig meszezésre nem szorulnak. Ahol sok a tőzeg-, illetőleg láptalajokat jelző folt, ott a talajok lecsapolásával kell foglalkozni, míg a szikes foltok a szikjavítás különböző nemeire és eszközeire utalnak. A száraz éghajlatban képződött különböző mezőségi talajok az öntözés szükségességére utalnak, vagy olyan szárazságot tűrő növények termelésének kedveznek, melyek mint pl. a búza, kisebb termést adnak ugyan a szárazabb éghajlatban, de jobb minőséget biztosítanak. Az erdőtalajok zónája a savanyú kilúgzás dinamikáját jelzi. Ezek a talajok rendesen a könnyen oldható tápanyagok kilúgzása miatt állandó és bő trágyázásra szorulnak, de a nedvesebb éghajlat következtében, kellő mértékű trágyázással

bővebb terméseket adhatnak a szárazabb éghajlat talajainál. A sörárpa- és cukorrépatermelésnek leginkább a barna földek, a gyengén degradált kalciumtalajok, vagy az erdőtalajok 6. alcsoportjába tartozó gyengén kilúgzott barna erdőtalajok felelnek meg, míg a rozs, zab és burgonya az erdőtalajok erősebb kilúgzású altípusain is sikerrel termelhető. A vörös földek és allittalajok általában sok szerves trágyát igényelnek és ezt hamar fel is emésztik. A lateritek ezenfelül még ásványi eredetű tápanyagok hiánya miatt is nagyon szegények.

Ezekkel a fentemlített példákkal csak azt kívántam igazolni, hogy még az ilyen nagyon durva, nagyvonalú talajtérképnek is lehet nemcsak tudományos, de gyakorlati jelentősége. Az átnézetes térképek gyakorlati jelentősége azután nő a lépték csökkenésével. Így már az 1 : 75,000-es vagy 1 : 25,000 léptékben már messzemenő gyakorlati vonatkozások is felismerhetők, sőt ilyen mértékben már a helyi változatok szelvényei, fizikai viszonyai és kőzettani viszonyai is kifejezhetők. Ezekről azonban most nem szólok bővebben.

Ez alkalommal csak rögzíteni kívántam a bemutatott általános színkulcsomat, melyet még eddig nyomtatásban sehol sem közöltem és a Nemzetközi Talajtani Kongresszuson is csak bemutattam, de közlésre nem nyujtottam be.

Itt még köszönetemet fejezem ki Becker Jenő dr. okl. vegyészmérnök és Komlósy Imre szigorló-mérnök uraknak, akik az átnézetes Európa-térkép és az általános színkulcs elkészítésében segítségemre voltak.

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# A GENERAL COLOURSCALE USING IN GENERAL SOIL MAPPING

by ALEXIUS A. J. de 'SIGMOND.

The author has outlined a general colourscale, which enables him to bring out on the general soilmaps the different cathegories of his general soilsystem. The 25 soilspecies (cathegory III.) have different base colours, and the maintypes of the same species are differentiated by the multifolded shading of the same basecolour. Finally the subtypes are marked by their respective number within the maintype. By this way it is very easy and clear to find the correlations of the different cathegories, and the whole soilmap becomes simple and plain. As example for demonstration the author has worked out with his collaboratores the general soilmap of Europe on the base of the map of the International Society of Soil Science. The same coloured map was exhibited at the III. Intern. Congress of Soil Science 1935. at Oxford.

(From the meeting of the IIIrd class of the Hungarian Academy of Sciences on the 18th November 1935.)

# ADATOK A SZEPES-GÖMÖRI ÉRCHEGYSÉG ÁSVÁNYAINAK ISMERETÉHEZ.

TOKODY LASZLÓ-tól.

Zimányi Károly a Szepes-Gömöri Érchegység bányahelyeit több ízben felkereste, ott ásványokat gyüjtött és azok kristálytani sajátságait több közleményben ismertette.

A gyüjtött ásványok egy részéről azonban a részletes vizsgálatok még hiányoztak. E hiányt pótlandó, Zimányi Károly magyar nemzeti múzeumi igazgató úr gyüjtéseit nekem volt szíves átengedni, amiért hálás köszönetemet e helyen is nyilvánítom.

## Turmalin Ötösbányáról. (Szepes vm.)

Bartels[1] szerint Szepes-megye területéről az érctelepekből turmalin csak Rostoka- (Rosztok-völgy) és Bindtbányáról ismeretes. Az ötösbányai és zsakaróci turmalin-előfordulásokat Bartels nem tartja biztosnak; szerinte az ötösbányai telérek nem, — csak a mellékkőzet tartalmaz turmalint. Ötösbányán azonban a turmalin kétségtelenül megtalálható, Zimányi a «Grober»-telérről mutatta ki[2] és kristályain a prizmán kívül az $R\{10\bar{1}1\}$ alakot figyelte meg.

A turmalin kvarcba, ritkábban szideritbe vagy kalcitba, nagyritkán tetraedritbe nőve található. Kísérő ásványa chalkopirit.

---

[1] W. Bartels: Die Spateisenstein—Lagerstätten des Zipser Komitates in Oberungarn. Archiv f. Lagerstätten-Forschung. Heft 5. Berlin 1910. p. 64.

[2] Zimányi K.: Ásványtani közlemények a Szepes-Gömöri Érchegységből és a Délkeleti Felföldről. Ann. musei nationalis hung. 1922. 19. p. 90.

Néhány apró, 0·25 mm méretű turmalinkristályt vizsgáltam meg. A feketeszínű kristályok átlátszatlanok, élénk üvegfényűek. Terminális lapokkal kifejlett kristályok rendkívül ritkák, de két ilyen kristályt is sikerült megfigyelnem. A tanulmányozott kristályokon az alábbi alakokat állapítottam meg:

$$b\{11\bar{2}0\} \quad R\{10\bar{1}1\} \quad e\{02\bar{2}1\}$$

Az alakok meghatározására az alábbi szögértékek szolgáltak.

| | Mért | Számított | |
|---|---|---|---|
| | | Kupffer[1] | Worobieff[2] |
| $b : R = (\bar{1}2\bar{1}0) : (10\bar{1}1)$ | $= 89° 49'$ | $90°$ | $90°$ |
| $: e =$ | $: (02\bar{2}1) = 51° 19'$ | $51° 30'$ | $51° 18'$ |
| $R : e = (10\bar{1}1) : (02\bar{2}1)$ | $= 38° 31'$ | $38° 30'$ | $38° 42'$. |

A $b\{11\bar{2}0\}$ a főtengely irányában erősen rostozott. Az $R\{10\bar{1}1\}$ lapjai nagyok s vagy egyedül, vagy az $e\{02\bar{2}1\}$ alakkal együtt léptek fel. Az $e\{02\bar{2}1\}$ alárendelt. Az utóbbi két alak lapjai érdesek és homályosak, halványan tükrözők.

Az ötösbányai turmalinkristályok kifejlődesüket tekintve, megegyeznek a bindtbányai turmalinnal.[3] Előfordulási körülményeik is a bindtbányai turmalinéhoz hasonlók.

## Szfalerit Nagykuncfalváról. (Szepes vm.)

Szfaleritet Nagykuncfalváról (Helcmanóc) először Zimányi említett.[4] A «Dániel»-táróban fordult elő vörösesbarna kristályokban. Az igen apró, 1 mm nagy, vörösesbarna, át nem látszó, legfeljebb áttetsző kristályok többé-kevésbbé legömbölyödöttek. Kris-

---

[1] E. S. Dana: The system of mineralogy. New-York 1892. p. 551.

[2] V. v. Worobieff: Krystallographische Studien über Turmalin von Ceylon und einigen anderen Vorkommen. Zeitschr. f. Krist. 1900. **33.** p. 263—454.

[3] Tokody L.: A bindtbányai turmalin. Math. és Természettud. Ért. 1933. **50.** p. 650—659.

[4] Zimányi K.: Ásványtani közlemények a Szepes-Gömöri Érchegységből és a Délkeleti Felföldről. Ann. musei nationalis hung. 1922. **19.** p. 89.

tályalakokat megállapítani nem sikerült. Ritkaságként találtam egy-egy hasadási rombdodekaedert, ennek élénken tükröző lapjai az (110):(101) = 59° 59′ mért szögértéket adták (számítva 60°).

## Arzenopirit és turmalin Felsőszalánkról. (Szepes vm.)

Az arzenopirit előfordulását Felsőszalánkon ZEPHAROVICH,[1] MADERSPACH[2] és TÓTH[3] említette. ZIMÁNYI[4] megfigyelései szerint az Ádám-Éva- és Dorotea-aknában elég gyakori, de nagyobb tömegeket nem alkot.

Az arzenopirit erősen rostozott lapú kristályai vaskos tetraedritben, fehér telérkvarcban, chalkopiritben vagy szemcsés-pátos szideritben bennőve találhatók. Kísérő ásvány a pirit[5] pentagondodekaederes, ritkábban hexaederes típusú lapdús kristályokban. Az előfordulási körülmények a rozsnyói arzenopirit előfordulási viszonyaival egyeznek.[6] A felsőszalánki Bogdanecz-aknából szintén ismeretes az arzenopirit, de nem kristályokban, hanem rudas kifejlődésben.[4] A piriten kívül ZIMÁNYI Alsó- és Felsőszalánkról galenit-, tetraedrit-, kvarc-, kalcit-, dolomit és sziderit-kristályokat ismertetett.[4]

Az arzenopirit kristályai olykor 5—10 mm nagyok, de ezek lapjai igen erősen rostozottak, mérésre nem alkalmasok. Az 1—3 mm nagy kristályok lapjai simábbak; ezeket mértem. Részletesen megvizsgáltam úgy az Ádám-Éva-, mint a Dorotea-aknából származó kristályokat, közöttük sem kristályalak, sem pedig típus tekintetében nincs lényeges különbség.

A kristályok élénk fémfényűek, ezüstszürke színűek, néha

---

[1] V. v. ZEPHAROVICH: Min. Lex. Wien. 1873. II. p. 210.

[2] MADERSPACH L.: Magyarország vasércfekhelyei. Budapest. 1880. p. 34.

[3] TÓTH M.: Magyarország ásványai. Budapest. 1892. p. 89.

[4] ZIMÁNYI K.: Ásványtani közlemények a Szepes-Gömöri Érchegységből és a Délkeleti Felföldről. Ann. musei nationalis hung. 1922. 19. p. 93.

[5] ZIMÁNYI K.: A Szepes-Gömöri Érchegység nehány kristályosodott pyritjéről. Math. és Természettud. Ért. 1918. 36. p. 423.

[6] ZIMÁNYI K.: Adatok Rozsnyó ásványainak ismeretéhez. Ann. musei nationalis hung. 1915. 13. p. 561.

ZIMÁNYI K.: Arsenopyrit és bournonit Rozsnyóról. Math. és Természettud. Ért. 1914. 32. p. 705.

vörös, zöld és kékes színűre futtatottak. Tíz mért kristályon az alábbi 12 formát állapítottam meg, közöttük a csillaggal (⋆) jelzett két alak az arzenopiritre általában újnak bizonyult.

| | | |
|---|---|---|
| $c\{001\}$ | $r\{014\}$ | $s\{012\}$ |
| $\star\{019\}$ | $\omega\{027\}$ | $l\{011\}$ |
| $\beta\{016\}$ | $q\{013\}$ | $e\{101\}$ |
| $\varrho\{015\}$ | $\star\{038\}$ | $m\{110\}$. |

A felsorolt alakokon kívül még mások is szerepeltek, de azokat erősen ingadozó szögértékeik miatt mellőztem.

A felsőszalánki arzenopirit formagazdagságával az arzenopirit-lelőhelyek közül általában kiválik s a magyarországi előfordulások között első helyen áll. A megfigyelt alakok egy része a magyarországi arzenopiriteken nem szerepelt, amennyiben az összes magyar előfordulásokról eddig a $c\{001\}$, $r\{014\}$, $q\{013\}$, $s\{012\}$, $l\{011\}$, $e\{101\}$, és $m\{110\}$ alakokat ismertük.

A formák eloszlását az alábbi táblázat tünteti fel:

| | $c$ | $\{019\}$ | $\beta$ | $\varrho$ | $r$ | $\omega$ | $q$ | $\{038\}$ | $s$ | $l$ | $e$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | . | . | . | . | . | . | . | . | $s$ | $l$ | $e$ | $m$ |
| 2. | . | . | $\beta$ | . | . | $\omega$ | . | . | $s$ | $l$ | $e$ | $m$ |
| 3. | . | . | . | . | . | . | . | . | $s$ | . | . | $m$ |
| 4. | . | . | . | . | . | $\omega$ | . | . | $s$ | . | $e$ | $m$ |
| 5. | $c$ | . | . | $\varrho$ | . | $\omega$ | $q$ | . | $s$ | . | $e$ | $m$ |
| 6. | . | . | $\beta$ | . | . | $\omega$ | . | $\{038\}$ | $s$ | . | . | $m$ |
| 7. | . | $\{019\}$ | $\beta$ | $\varrho$ | . | . | . | . | $s$ | . | $e$ | $m$ |
| 8. | $c$ | . | . | . | . | . | . | . | $s$ | . | $e$ | $m$ |
| 9. | $c$ | . | $\beta$ | $\varrho$ | $r$ | . | . | $\{038\}$ | $s$ | . | $e$ | $m$ |
| 10. | . | . | . | . | . | . | . | . | $s$ | . | . | $m$ |

Amint a fenti összeállításból kitűnik, a felsőszalánki arzenopirit legegyszerűbb kombinációját két alak: $s\{012\}$ és $m\{110\}$ alkotta, míg a formákban leggazdagabb kombináció nyolc alakból állt.

A kristályalakok megállapítására szolgáló szögértékek — mint az arzenopiritnél általában — tág határok között ingadoztak. A párhuzamos lapok sem adtak 180°-os értékeket. Új tengely-

arány számítása tehát céltalannak látszott. A számított szögértékekre V. GOLDSCHMIDT adatait fogadtam el.[1]

A mért és számított szögértékeket az alábbi táblázatba foglaltam össze:

| | | Mért | Számított |
|---|---|---|---|
| $m : m$ | $= (110) : (1\bar{1}0) =$ | 68° 21′ | 68° 27′ |
| $: m$ | $= : (\bar{1}10) =$ | 111° 42′ | 111° 33′ |
| $e : c$ | $= (101) : (001) =$ | 59° 59′ | 60° 16′ |
| $: e$ | $= : (10\bar{1}) =$ | 59° 03′ | 59° 28′ |
| $: m$ | $= : (110) =$ | 44° 14′ | 44° 07′ |
| $: s$ | $= : (012) =$ | 64° 46′ | 64° 47′ |
| $\beta : c$ | $= (016) : (001) =$ | 11° 18′ | 11° 14′ |
| $: m$ | $= : (110) =$ | 83° 19′ | 83° 43′ |
| $: s$ | $= : (012) =$ | 19° 39′ | 19° 33′ |
| $\varrho : c$ | $= (015) : (001) =$ | 13° 32′ | 13° 24′ |
| $: s$ | $= : (012) =$ | 17° 03′ | 17° 23′ |
| $r : c$ | $= (014) : (001) =$ | 16° 39′ | 16° 35′ |
| $: s$ | $= : (0\bar{1}2) =$ | 47° 49′ | 47° 22′ |
| $\omega : \beta$ | $= (027) : (0\bar{1}6) =$ | 30° 22′ | 30° 02′ |
| $: s$ | $= : (012) =$ | 11° 51′ | 11° 59′ |
| $q : s$ | $= (013) : (0\bar{1}2) =$ | 51° 55′ | 52° 26′ |
| $: \omega$ | $= : (027) =$ | 3° 06′ | 2° 51′ |
| $s : c$ | $= (012) : (001) =$ | 30° 37′ | 30° 47′ |
| $: m$ | $= : (110) =$ | 73° 33′ | 73° 16′ |
| $: s$ | $= : (0\bar{1}2) =$ | 61° 41′ | 61° 34′ |
| $l : s$ | $= (011) : (012) =$ | 19° 17′ | 19° 12′ |

A $c\{001\}$ három kristályon szerepelt síma, keskeny lapokkal.

Legnagyobb számban az I. fajta prizmák jelentek meg. Az idetartozó formák mind az $a$-tengely irányában rostos lapokkal fejlődtek ki. Legnagyobb a minden kristályon szereplő $s\{012\}$. Az $l\{011)$ — az arzenopiritnek gyakori alakja — csak két kristályon alakult ki keskeny lapokkal. Gyakoriak a $\beta\{016\}$, $\varrho\{015\}$, $\omega\{027\}$. Ezek több lappal kifejlődve, 4—4 kristályon jelentek meg. Lapjaik keskenyek. Csak egy-egy kristályon sikerült ki-

[1] V. GOLDSCHMIDT: Krystallographische Winkeltabellen. Berlin. 1897.

mutatni az $r\{014\}$ és $q\{013\}$ alakokat keskeny, csíkalakú lapokkal.

$\star\{019\}$ az arzenopiritre általában új. Csak egy kristályon figyeltem meg. Keskeny lapja erősen rostozott; reflexe ismétlődő.

| | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|
| (019) : (001) = | — | 7° 32′ 29″ | — |
| : (012) = | 23° 49′ | 23° 14′ 35″ | 0° 34′ 25″ |

A mért és számított érték közötti különbség tetemes, de tekintve, hogy az arzenopiritnél ily nagy eltérések gyakoriak és figyelembe véve a forma egyszerű jelét, a $\{019\}$ az arzenopirit biztos alakjai közé sorolható.

A $\star\{038\}$ az arzenopiritre általában új. Két kristályon szerepelt. Lapjai keskenyek, rostozottak, reflexük ismétlődő.

| | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|
| (038) : (001) = | 24° 24′ | 24° 04′ 33″ | 0° 19′ 27″ |
| : (027) = | 5° 51′ | 5° 16′ 32″ | 0° 34′ 28″ |
| : (012) = | 6° 21′ | 6° 42′ 31″ | 0° 21′ 31″ |

A $\{038\}$ közeláll a $q\{013\}$-hoz, de vele nem azonosítható:

| | Számított |
|---|---|
| (038) : (001) = | 24° 04′ 33″ |
| (013) : = | 21° 39′ 41″ |

A $\{038\}$ egyszerű jele s szögértékeinek az arzenopiritnél nem feltűnő eltérése alapján biztos formának tekinthető.

Az $e\{101\}$ gyakori. Változó nagy lapjai símák vagy érdesek s az utóbbi esetben homályosak.

Az $m\{110\}$ a tanulmányozott kristályok legtökéletesebben fejlett alakja. Lapjai símák, csak néha érdes felületűek.

Ikerkristályok $m(110)$ és $e(101)$ szerint egyenlő mértékben gyakoriak, jóllehet V. Goldschmidt vizsgálatai szerint $e(101)$ szerinti ikerkristályok a gyakoriabbak.[1]

A felsőszalánki arzenopirit ikerkristályai kivétel nélkül juxtapoziciósak. Az $m(110)$ szerint alakult ikrek két egyénből állot-

[1] V. Goldschmidt: Über Rangordnung der Zwillingsgesetze. Beitr. zur Krystallographie u. Mineralogie. 1914—18. 1. p. 79—86.

tak. Az $e(101)$ szerint képződött ikerkristályokat két vagy három egyén alkotta. Hármas ikreknél az alapállású egyén vagy csak keskeny lemez alakjában ékelődött a két ikerállású kristály közé vagy erősebb fejlettségre jutva, (101) és $(\bar{1}01)$ lapjai szerint illeszkedtek hozzá az ikerhelyzetben levő kristályok.

Az ikertörvények megállapítására a következő szögadatok vonatkoznak

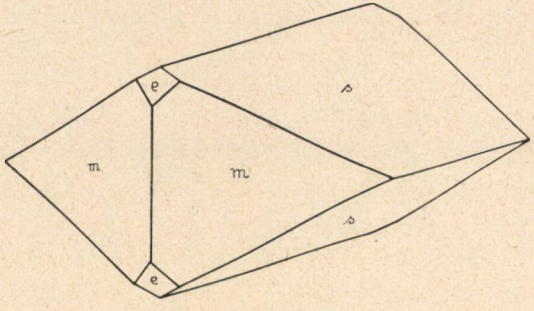
*$m(110)$ szerinti iker:*

| | Mért | Számított |
|---|---|---|
| $m : \underline{m}$ | $= 43° 22'$ | $43° 06'$ |
| $: \underline{m}$ | $= 68° 33'$ | $68° 27'$ |
| $: \underline{s}$ | $= 73° 07'$ | $73° 16'$ |
| $s : \underline{s}$ | $= 33° 31'$ | $33° 28'$ |
| $l : \underline{l}$ | $= 51° 37'$ | $51° 02'$ |

*$e(101)$ szerinti iker:*

| | | |
|---|---|---|
| $s : \underline{s}$ | $= 50° 22'$ | $50° 26'$ |
| $m : \underline{s}$ | $= 24° 29'$ | $24° 31'$ |

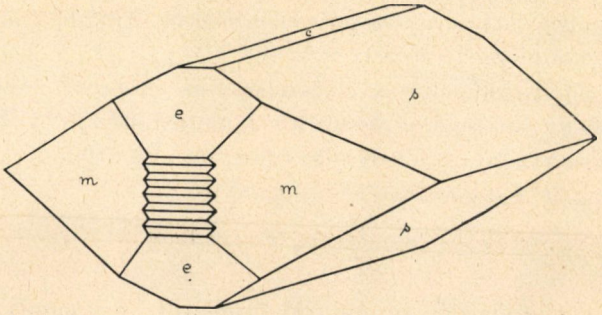
A tanulmányozott kristályok típus tekintetében nem változatosak. Az I. fajta prizmák erőteljes kifejlődése jellemzi őket; $m\{110\}$




1. ábra.

szerint megnyúlt kristályokat nem találtam. Az $e\{101\}$ hol kisebbre (1. ábra), hol nagyobbra (2. ábra) fejlődött. Ha kisebb, akkor a felsőszalánki kristályok nagyon hasonlók Schmidt bindt-

bányai kristályaihoz.[1] Ha ellenben az $e\{101\}$ nagy, akkor SCHERER Thala Bisztra- és Oravicáról leírt kristályaihoz lesznek hasonlók,[2] illetve ARZRUNI hohensteini kristályait közelítik meg[3] azzal a különbséggel, hogy a felsőszalánkiakon az $a$-tengely övében az $s\{012\}$ uralkodott s rajtuk az $o\{111\}$ nem szerepelt.




2. ábra.

A felsőszalánki Dorotea-akna arzenopiritjét VAVRINECZ GÁBOR okl. vegyészmérnök úr volt szíves megelemezni, amiért neki e helyen is őszinte köszönetemet fejezem ki. Az elemzés adatai:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Fe* | 34·18% | 612 | 620 | 1·000 |
| *Co* | 0·43 | 7 | | |
| *Ni* | 0·05 | 1 | | |
| *Cu* | 0·78 | 12 | | |
| *Pb* | 0·24 | 1 | | |
| *As* | 42·37 | | 565 | 0·911 |
| *Sb* | nyomokban | | — | |
| *S* | 21·93 | | 684 | 1·103 |
| Oldhatatlan | 0·55 | | — | |
| | 100·53 | | | |

[1] SCHMIDT S.: Asványtani közlemények. Természetrajzi füzetek. 1886. 10. p. 20—21.

[2] FR. SCHERER: Studien am Arsenkiese. Zeitschr. f. Krist. 1893. 21. p. 354.

[3] A. ARZRUNI: Krystallographisch-chemische Untersuchung einiger Arsenkiese. Zeitschr. f. Krist. 1878. 2. p. 430.

A felsőszalánki arzenopirit kémiai összetétele az *Fe*, *As*, *S* alkatrészeket tekintve, nagy hasonlóságot mutat több előfordulás arzenopiritjének összetételéhez, így Freiberg, Kühschacht; Přibram, Clements és Siegengottesgang; Binnental; Szerbia; Luta-Stana; Bräunsdorf, Neue Hoffnung Gottes lelőhelyekről származó arzenopiritek kémiai összetételével.[1] — A Szepes-Gömöri Érchegység két lelőhelyéről van arzenopirit elemzésünk. Bindtbányáról származó arzenopiritet Loczka vizsgálta kémiailag.[2] A tőle közölt elemzés lényegesen eltér a felsőszalánki arzenopirit elemzési adataitól. Zsivny Rozsnyóról elemzett arzenopiritet.[3] Ennek *Fe*-, *As*-, *S*-tartalma hasonló a felsőszalánkihoz, de *Ni*-tartalma magasabb (0·73%), míg *Co*-tartalma alacsonyabb (0·29%).

*

Az irodalom Felsőszalánkról turmalint nem említ.

Egy, a felsőszalánki Dorotea-aknából származó kisebb stufán sikerült a turmalint megállapítani. A tanulmányozott darabon borsósárga, szemcsés-pátos sziderit, kalcit, kvarc és néhány piritszem társaságában igen apró, mikroszkópikusan kicsi turmalintűk helyezkedtek sűrűn egymás mellé. A turmalin bekérgezte a szideritet, de benne is előfordult. A kalcit és kvarc igen kevés, bennük a turmalin sem sok.

A feketeszínű turmalintűk üvegfényűek; porszínük feketésszürke. Vékony csiszolatban ritkán találunk terminális lapokat, $R\{10\bar{1}1\}$ feltüntető kristályokat. Haránttrepedések gyakran szelik át a kristályokat. — Az optikai tulajdonságok kétségtelenül turmalinra utaltak. Pleochroizmus élénk, $\varepsilon$ = színtelen — halványsárga, $\omega$ = zöldeskék. Abszorpció: $\omega > \varepsilon$. Optikai jelleg negatív. Közepes fény- és kettős törés.

A felsőszalánki turmalin előfordulási és keletkezési körül-

---

[1] C. Doelter —H. Leitmeier: Handbuch d. Mineralchemie. Dresden—Leipzig. 1926. Bd. IV. I. Hälfte. p. 612—617.

[2] Loczka J.: Magyar arsenopyritek vegyi elemzése. Természetrajzi füzetek. 1885. 9. p. 289.

[3] Zsivny V.: Gömörmegyei ásványok kémiai elemzése. Ann. musei nationalis hung. 1915. 13. p. 579.

ményei teljesen megegyeznek a bindtbányai[1] és a jelen alkalommal ismertetett ötösbányai turmalin sajátságaival.

## Chalkopirit és barit Rozsnyóról. (Gömör vm.)

A rozsnyói Szadlovszky-bányában «A chalkopyrit sphenoidos kristályai ritkák, tetraedrit mellett sideritrhomboederekkel találhatók».[2] E chalkopirit-kristályokon Zimányi mérésekkel a $p\{111\}$, $z\{201\}$ és $m\{110\}$ formákat állapította meg.[3]

Az említett bánya chalkopiritjének három kristályát vizsgáltam meg. A kristályok igen aprók, 0·75—1 mm nagyok, élénk fényűek, némelyik lapjuk helyenként vöröses-ibolyás színűre futtatott. A három mért kristályon az alábbi 19 formát állapítottam meg. Ezek között a csillaggal (*) jelölt 7 alak a chalkopiritre általában újnak bizonyult.

| | | |
|---|---|---|
| $c\{001\}$ | $\tau\{605\}$ | $*\{15.0.8\}$ |
| $p\{111\}$ | $K\{11.0.9\}$ | $\{17.0.9\}$ |
| $p'\{1\bar{1}1\}$ | $Q\{504\}$ | $L\{23.0.12\}$ |
| $x\{102\}$ | $\{905\}$ | $z\{201\}$ |
| $*\{305\}$ | $*\{20.0.11\}$ | $*\{32.0.15\}$ |
| $g\{203\}$ | $*\{13.0.7\}$ | $*\{421\}$ |
| $*\{31.0.32\}$ | | |

A formák száma oly nagy, hogy avval alig egy-két lelőhely chalkopiritje vetekedhetik. Így — a magyarországi előfordulásokat tekintve — csak a kapnikbányai múlja felül 27 formával.[4] Míg a selmecbányai chalkopiritről[4] 17, a botesiről[4, 5] 14, a

[1] Tokody L.: A bindtbányai turmalin. Math. és Természettud. Ért. 1933. 50. p. 650—659.

[2] Zimányi K.: Arsenopyrit és bournonit Rozsnyóról. Math. és Természettud. Ért. 1914. 32. p. 711.

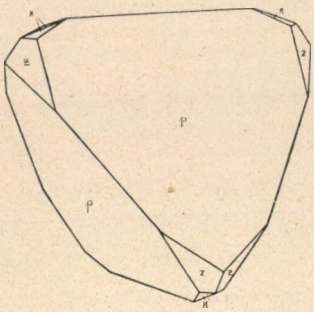
[3] Zimányi K.: Adatok Rozsnyó ásványainak ismeretéhez. Ann. musei nationalis hung. 1915. 13. p. 563.

[4] Mauritz B.: Adatok a magyar chalkopyritek kristálytani ismeretéhez. Természetrajzi füzetek. 1902. 25. p. 448—476.

[5] Mauritz B.: A botesi chalkopyrit. Math. és Természettud. Ért. 1918. 36. p. 539—547.

szomolnokiról[1] 12, a brádiról[1] 11, a kisalmási chalkopiritről[2] 10 forma ismeretes.

A kristályok két típusba oszthatók: 1. uralkodó a $p\{111\}$ biszfenoid, 2. $p\{111\}$ és $z\{201\}$ nagyra fejlődtek és mellettük nagyszámú II. rendű bipiramis állapítható meg. — Ikerkristályok a vizsgáltak között nem voltak.



3. ábra.

Az első típust csak egy kristály képviselte. Kombinációjában a $p\{111\}$, $z\{201\}$, $x\{102\}$ vettek részt (3. ábra). A $p\{111\}$ nagy lapjai a szokott irányban, a $[z : p = 201 : 111]$ éllel párhuzamosan igen fínoman rostozottak. A $z\{201\}$ kis, fényes lapokkal lépett fel. A $x\{102\}$ csak egyetlen homályos lapocskával alakult ki; bizonytalan.

A második típusba két kristály volt sorolható; sajnos, mindkettő csak töredék.

I. kristály: $c\{001\}$, $p\{111\}$, $p'\{1\bar{1}1\}$, $g\{203\}$, $\star\{31.0.32\}$, $\tau\{605\}$, $\{905\}$, $\{17.0.9\}$, $L\{23.0.12\}$, $z\{201\}$, $\star\{32.0.15\}$, $\star\{421\}$.

II. kristály: $c\{001\}$, $p\{111\}$, $\star\{305\}$, $K\{11.0.9\}$, $Q\{504\}$, $\{905\}$, $\star\{20.0.11\}$, $\star\{13.0.7\}$, $\star\{15.0.8\}$, $\{17.0.9\}$, $L\{23.0.12\}$, $z\{201\}$.

Az első kristályt természetes kifejlődésben a 4. ábra tünteti fel, II.-at — kiegészítve és ideális kialakulásban — az 5. rajz ábrázolja.

E típus kristályain a $c\{001\}$ különböző módon fejlődött ki. Az I. kristályon kis lappal alakult ki, ekkor jól tükrözött. A II.

---

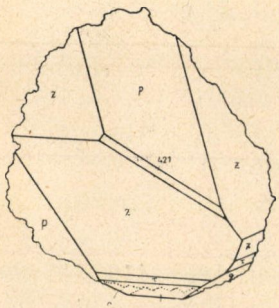
[1] Száva-Kovátsné Resch Katalin: Adatok a magyarországi kalkopiritek kristálytani ismeretéhez. Földtani Közlöny. 1934. **64.** p. 334—341.

[2] Franzenau Á.: A hunyadmegyei Kis-Almás nehány ásványa. Budapest, 1894. p. 8.

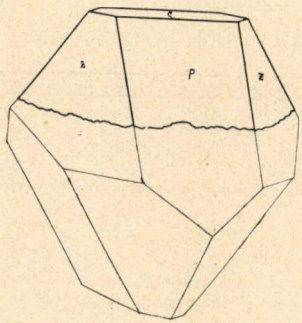
kristályon nagyítóval jól látható lappal jelent meg, de homályos volt s alig tükrözött.

A $p\{111\}$ nagy lapjai enyhén rostozottak. — A $p'\{1\bar{1}1\}$ közepnagy vagy kis lapokkal szerepelt. Mindkét forma kitűnően tükrözött.

A másodrendű bipiramisok között legnagyobb a $z\{201\}$. Kitünően tükröző lapjai többnyire vízszintesen fínoman rostozottak. — Nagy lapokkal lépett fel a $g\{203\}$, $\tau\{605\}$, $\star\{305\}$. A $g\{203\}$ a chalkopiritnek gyakori s már HAIDINGER-től ismert alakja jól fejlett lapokkal volt megállapítható. A $\tau\{605\}$ alakot




4. ábra.




5. ábra.

FRANZENAU a kisalmási chalkopiriten fedezte fel, majd MAURITZ a botesi és kapnikbányai kristályokon is megfigyelte, a szomolnoki chalkopiritről szintén ismeretes. A rozsnyói chalkopiriten jól tükröző kis, trapézalakú lappal szerepelt. A $\star\{305\}$ jól észlelhető forma.

A $K\{11.0.9\}$, $\{17.0.9\}$ és $L\{23.0.12\}$ alakokat először MAURITZ figyelte meg a kapnikbányai chalkopiriten. A $K\{11.0.9\}$ csak egy kristályon fejlődött ki keskeny, csíkalakú lappal. A forma biztos; a hozzá szögértékeivel közelálló $Q\{504\}$-gyel együtt fordul elő. — A $\{17.0.9\}$ alakot MAURITZ hajlandó volt az $L\{23.0.12\}$ formával azonosítani. A rozsnyói chalkopiriten a $\{17.0.9\}$ két kristályon szerepelt; az egyiken egy, a másikon két lappal. Mindkét esetben megjelent mellette az $L\{23.0.12\}$ is és hozzá mérhető volt. Ezek alapján — bár a két alak szögértékei csak nagyon kevéssé különböznek egymástól — a $\{17.0.9\}$ a chalko-

pirit biztos alakjának tekinthető. — Az $L\{23.0.12\}$ két kristályon egy, illetve négy lappal fejlődött ki. A lapok keskenyek, csíkalakúak, biztosan meghatározhatók.

A $Q\{504\}$, a chalkopirit gyakori alakja csak egy kristályon s csak egy keskeny lappal jelent meg.

A $\{905\}$ alakot Oebike írta le először Grube Stahlberg bei Müssen chalkopiritjéről [1] s eddig más lelőhelyről ismeretlen volt. A rozsnyói chalkopirit két kristályán egy-egy lappal állapítottam meg. Mindegyik jól tükröző, síma, keskeny. Mindkét kristályon biztos.

Az eddig tárgyalt s a chalkopiriten már ismert alakok meghatározására az alábbi szögértékek szolgáltak.

| | | | | Mért | Számított |
|---|---|---|---|---|---|
| $p:p=$ | (111) | : | $(1\bar{1}\bar{1})$ | $= 109° 50'$ | $109° 52\frac{1}{2}'$ |
| $:p=$ | | : | $(\bar{1}\bar{1}1)$ | $= 108° 40'$ | $108° 34'$ |
| $:p'=$ | | : | $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ | $= 180° 01'$ | $180° —$ |
| $p':g=$ | $(1\bar{1}1)$ | : | (203) | $= 36° 42'$ | $36° 36'$ |
| $x:z=$ | (012) | : | (201) | $= 66° 33'$ | $66° 03'$ |
| $:z=$ | | : | $(\bar{2}0\bar{1})$ | $= 113° 18'$ | $113° 57'$ |
| $g:c=$ | (203) | : | (001) | $= 33° 21'$ | $33° 18'$ |
| $:g=$ | | : | (023) | $= 45° 42'$ | $45° 42'$ |
| $:z=$ | | : | (201) | $= 29° 45'$ | $29° 47'$ |
| $:z=$ | | : | (021) | $= 67° 45'$ | $67° 46'$ |
| $:p=$ | | : | (111) | $= 36° 37'$ | $36° 36'$ |
| $\tau:c=$ | (605) | : | (001) | $= 49° 45'$ | $49° 47'$ |
| $:z=$ | | : | (201) | $= 13° 18'$ | $13° 18'$ |
| $K:g=$ | (11.0.9) | : | (203) | $= 16° 53'$ | $17° —$ |
| : | | : | (905) | $= 10° 13'$ | $10° 17'$ |
| $:z=$ | | : | (201) | $= 12° 49'$ | $12° 47\frac{1}{2}'$ |
| $Q:z=$ | (504) | : | (201) | $= 12° —$ | $12° 09\frac{1}{2}'$ |
| | (905) | : | (001) | $= 60° 46'$ | $60° 35'$ |
| | | : | (605) | $= 10° 49'$ | $10° 48\frac{1}{2}'$ |
| | | : | (201) | $= 2° 27'$ | $2° 30\frac{1}{2}'$ |

[1] J. F. Oebike: Krist. Untersuchungen an westfälischen Kupfererzen. Dissert. Münster i. W. 1915. Ref.: Zeitschr. f. Krist. 60. p. 503.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (17.0.9) | : (001) | = 61° 45′ | 61° 46′ |
| | | : (23.0.12) | = 0° 21′ | 0° 20′ |
| | | : (201) | = 1° 23′ | 1° 19½′ |
| $L : c =$ | (23.0.12) | : (001) | = 62° 16′ | 62° 06′ |
| $: z =$ | | : (201) | = 0° 56′ | 0° 59′ |
| $z : c =$ | (201) | : (001) | = 63° 07′ | 63° 05½′ |
| $: z =$ | | : (021) | = 78° 12′ | 78° 10′ |
| $: z =$ | | : (02$\bar{1}$) | = 101° 49′ | 101° 49′ |
| $: p =$ | | : (111) | = 39° 05′ | 39° 05½′ |
| $: p =$ | | : (1$\bar{1}\bar{1}$) | = 75° 34′ | 75° 37′ |

Az előzőekben ismertetett formákon kívül a rozsnyói chalkopiriten 7 olyan alakot állapítottam meg, melyek a chalkopiriten általában újak. Ezek, a $\{421\}$ szkalenoeder kivételével másodrendű bipiramisok. Az új alakok számított szögértékeit Haidinger tengelyarányából ($a : c = 1 : 0{\cdot}98525$) vezettem le.

A $*\{305\}$ egyszerű jelű alak egy trapézalakú lappal jelent meg. Fényes, jól tükrözött. Mért és számított értékei jól egyeznek. A forma biztos.

| | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|
| (305) : (001) = | — | 30° 35′ 20″ | — |
| : (035) = | — | 42° 10′ 49″ | — |
| : ($\bar{2}$03) = | 63° 58′ | 63° 53′ 13″ | 0° 04′ 47″ |
| : (201) = | 32° 20′ | 32° 30′ 12″ | 0° 10′ 12″ |

A $*\{31.0.32\}$ csak egy keskeny, de jól felismerhető, élénken tükröző lappal szerepelt.

| | | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| (31.0.32) : | (001) | = 43° 45′ | 43° 39′ 52″ | 0° 05′ 08″ |
| | : (0.31.32) | = — | 58° 26′ 43″ | — |
| | : (605) | = 5° 45′ | 6° 06′ 36″ | 0° 21′ 36″ |
| | : (201) | = 19° 03′ | 19° 25′ 40″ | 0° 22′ 40″ |

A forma, tekintettel magas indexére, továbbá mért és számított szögértékei közötti különbségekre, nem sorolható a biztos alakok közé.

A $*\{20.0.11\}$ fényes, kis lappal lépett fel. Nem azonosítható a $z\{201\}$-gyel, vele együtt jelent meg, hozzá mérhető volt. E forma biztosnak fogadható el.

| | | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| (20.0.11) : (001) | = | — | 60° 49′ 41″ | — |
| : (0.20.11) | = | — | 76° 15′ 22″ | — |
| : (13.0.7) | = | 0° 25′ | 0° 30′ 49″ | 0° 5′ 49″ |
| : (201) | = | 2° 13′ | 2° 15′ 51″ | 0° 2′ 51″ |

$\star\{13.0.7\}$ az előző kristályalak és a $\{17.0.9\}$ között jelent meg keskeny, csillogó lappal. Nem azonosítható sem $\star\{20.0.11\}$, sem $z\{201\}$-gyel, ugyanazon a kristályon szerepeltek s egymáshoz is jól mérhetők voltak. A $\star\{13.0.7\}$ biztos forma.

| | | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| (13.0.7) : (001) | = | — | 61° 20′ 30″ | — |
| : (0·13.7) | = | — | 76° 42′ 09″ | — |
| : (905) | = | 0° 45′ | 0° 45′ 34″ | 0° 0′ 34″ |
| : (20.0.11) | = | 0° 25′ | 0° 30′ 49″ | 0° 5′ 49″ |
| : (201) | = | 1° 46′ | 1° 45′ 02″ | 0° 0′ 58″ |

$\star\{15.0.8\}$ jól tükröző, keskeny lap $Q\{504\}$ és $\{17.0.9\}$ között. $z\{201\}$-gyel együtt jelent meg, vele nem azonosítható és nem azonos a kristályon nem szereplő $\{503\}$-mal sem. A forma biztos.

| | | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| (15.0.8) : (001) | = | — | 61° 34′ 20″ | — |
| : (0.15.8) | = | — | 76° 54′ 07″ | — |
| : (17.0.9) | = | 0° 12′ | 0° 11′ 40″ | 0° 0′ 20″ |
| : (201) | = | 1° 29′ | 1° 31′ 12″ | 0° 2′ 12″ |

$\star\{32.0.15\}$ fényes, jól tükröző, kissé rostos lap (201) és $(20\bar{1})$ között. $z\{201\}$-gyel nem azonosítható. Magas indexe ellenére biztos.

| | | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| (32.0.15) : (001) | = | — | 64° 33′ 21″ | — |
| : (0.32.15) | = | — | 79° 21′ 47″ | — |
| : (201) | = | 1° 28′ | 1° 27′ 49″ | 0° 0′ 11″ |
| : $(20\bar{1})$ | = | 52° 24′ | 52° 21′ 05″ | 0° 2′ 55″ |

$\star\{421\}$ új forma az egyetlen szkalenoeder, melyet a rozsnyói chalkopiriten megfigyeltem. A $[p : z = 111 : 20\bar{1}]$ övben lépett fel. Középnagy lapját szabad szemmel is felismerhettem.

Felülete a $(421):(20\bar{1})$ élre merőlegesen rostozott, ezért tükrözése gyenge. A $*\{421\}$ a $[001:210=\bar{1}20]$, $[111:20\bar{1}=\bar{1}3\bar{2}]$, $[201:110=\bar{1}12]$, $[021:100=012]$ övek metszéspontjában fekszik. Mért és számított szögértékei igen jól egyeznek. Övbeli helyzete és szögértékeinek kitűnő egyezése alapján e formát a chalkopirit biztosan megállapított alakjai közé sorolhatjuk.

| | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|
| $(421):(001)=$ | — | 77° 15′ 45″ | — |
| $:(241)=$ | — | 35° 55′ 31″ | — |
| $:(111)=$ | 28° 15′ | 28° 16′ 16″ | 0° 1′ 16″ |
| $:(20\bar{1})=$ | 47° 22′ | 47° 20′ 43″ | 0° 1′ 17″ |

*

A rozsnyói barit már több mint egy évszázad óta ismeretes. Először gipsznek vélték,[1] majd új ásványnak: wolnynnak minősítették.[2] BEUDANT[3] felismerte, hogy különleges kifejlődésű barit és ezt SCHRAUF[4] is megerősítette. Utóbbi a lelőhelyet tévesen Betlérnek jelölte és SZÉCSKAY[5] e téves adat alapján a kristályokat mint betléri wolnynt ismertette. A lelőhely megnevezését illető tévedést SCHMIDT[6] igazította helyre. A rozsnyói wolnyn lelőhelye: az ú. n. «Szőllőmál»-on, a fürdő és a Kálvária közt fekvő Mária-Aloizia vaskőbánya.[7] Igen részletesen vizsgálta e kristályokat FRANZENAU[8] és újabban VENDL MÁRIA.[9]

---

[1] HABERLE: Hesperus 1817. p. 147.

[2] J. JONÁS: Mineralreich Ungarns. Pest, 1820. p. 31.

[3] F. S. BEUDANT: Voyages min. et geol. en Hongrie. Paris. 1823. III. p. 457.

[4] A. SCHRAUF: Krystallographisch-optische Untersuchungen über die Identität des Wolnyn mit Schwerspath. — Sitz. Ber. math.-naturw. Kl. d. k. Ak. d. Wiss. Wien. 1860. **39**. p. 286—298.

[5] SZÉCSKAY I.: Krystálytani vizsgálatok a betléri wolnynon. Értekezések a term. tud. köréből. 1876. **7**. 9. szám. p. 1—27.

[6] SCHMIDT S.: Muzsaji wolnyn. Természetrajzi füzetek. 1879. **3**. p. 13—25.

[7] ZIMÁNYI K.: Adatok Rozsnyó ásványainak ismeretéhez. Annales mus. nationalis hung. 1915. **13**. p. 558.

[8] FRANZENAU Á.: A rozsnyói wolnynról. Annales mus. nationalis hung. 1913. **11**. p. 103—113.

[9] VENDL MÁRIA: Baryt Gömör-Rákosról, Rozsnyóról és Felsőbányáról. Annales mus. nationalis hung. 1922. **19**. p. 113—122.

A rozsnyói wolnyn-típusú barit kristályait az jellemzi, hogy a $c$-tengely szerint megnyúltak, oszloposak; a [001] főzónában a $\lambda\{210\}$ és $m\{110\}$ uralkodik, a $\{hkl\}$ és $\{0kl\}$ alakokon kívül záróalak a $c\{001\}$. Az általam vizsgált kristály érdekessége, hogy az említett típustól lényegesen eltér, nevezetesen zömök-prizmás, illetőleg $c\{001\}$ szerint táblás.

A tanulmányozott kristály nagyon szabályos kifejlődésű volt. Mivel csak egyik csúcsának kis részével nőtt limonitra, majdnem minden lapja kialakult. Teljesen víztiszta, átlátszó, igen élénk fényű. Méretei $a:b:c = 1:3:1$ mm. Kombinációjában a wolnynon gyakori alakok szerepeltek.

| | | |
|---|---|---|
| $a\{100\}$ | $\lambda\{210\}$ | $o\{011\}$ |
| $b\{010\}$ | $\star\{970\}$ | $z\{111\}$ |
| $c\{001\}$ | $m\{110\}$ | $f\{113\}$ |
| | $x\{130\}$ | |

A csillaggal ($\star$) jelzett alak úgy a baritra, mint a wolnynra általában új.

Az $a(\{100\}$ és $b\{010\}$ keskeny, rostozott, gyengén tükröző lapokkal jelent meg. A $c\{001\}$ nagy lapjai kitünően tükröztek.

A prizmaöv uralkodó alakjai a függőlegesen finoman rostozott és közel egyensúlyban kialakult $\lambda\{210\}$ és $m\{110\}$. A $x\{130\}$ egészen keskeny, csíkalakú. A $\star\{970\}$ egyetlen keskeny lappal szerepelt. Kissé rostos, de ennek ellenére élénken tükrözött. Szögadatai:

| | Mért | Számított | $\pm\Delta$ |
|---|---|---|---|
| $(970):(100) =$ | — | 32° 23′ 02″ | — |
| $:(210) =$ | 10° 26′ | 10° 12′ 09″ | 0° 13′ 51″ |
| $:(110) =$ | 6° 39′ | 6° 48′ 39″ | 0° 09′ 39″ |
| $:(\bar{1}30) =$ | 79° 46′ | 79° 51′ 0″ | 0° 05′ 0″ |

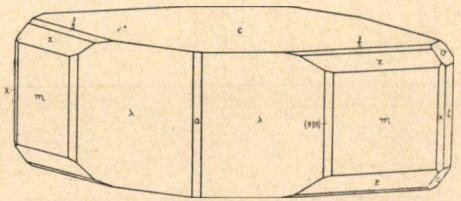
A $\star\{970\}$ közeláll a telekesi bariton SCHMIDT[1]-től megfigyelt és bizonytalannak tartott $h\{540\}$ alakhoz. A két forma megfelelő szögértékei között a különbségek mindenkor meghaladják a félfokot, így tehát egymással nem azonosíthatók.

[1] SCHMIDT S.: Baryt és cerussit Telekesről. Értekezések a természettud. köréből. 1882. **12.** 1. szám. p. 3—4.

Az $o\{011\}$ egyetlen keskeny, rostos, halványan tükröző lappal fejlődött ki.

A $z\{111\}$ és $f\{113\}$ a $[\bar{1}10]$ irányban rostozottak. A $z\{111\}$ lapjai nagyobbak, mint az $f\{113\}$-hoz tartozók.

A vizsgált barit — miként említettem — eltér a rozsnyói wolnyn típusától. Kristályalakjait tekintve megegyezik a wolnyn-típussal, de lényegesen eltér abban, hogy nem a $c$-tengely szerint megnyúlt, hanem zömökprizmás, illetve a $c\{001\}$ szerint táblás (6. ábra). E kifejlődése alapján nem sorolható az eddig



6. ábra.

felállított barit-típusok egyikébe sem.[1] A leírt kristály genézise, paragenézise és formakifejlődése alapján célszerű lenne a Braun-féle wolnyn-VII típust két részre választani. A wolnyn-VII*a* típusba lenne sorolható a régi wolnyn-típus, míg a wolnyn-VII*b* típust képviselné az ismertetett baritkristály.

| | | Mért | Számított |
|---|---|---|---|
| $\lambda : a$ | $= (210) : (100)$ | $= 22° 06'$ | $22° 10' 53''$ |
| $m : a$ | $= (110) : (100)$ | $= 39° 08'$ | $39° 11' 41''$ |
| $: m$ | $= : (1\bar{1}0)$ | $= 78° 23'$ | $78° 23' 11''$ |
| $: \lambda$ | $= : (210)$ | $= 17° 06'$ | $17° 0' 48''$ |
| $x : m$ | $= (130) : (110)$ | $= 28° 32'$ | $28° 34' 17''$ |
| $: m$ | $= : (\bar{1}10)$ | $= 73° 07'$ | $73° 02' 21''$ |
| $o : a$ | $= (011) : (100)$ | $= 90° 05'$ | $90°$ |
| $: z$ | $= : (111)$ | $= 44° 21'$ | $44° 17' 51''$ |

[1] G. Kalb—L. Koch: Die Kristalltracht des Baryt in minerogenetischer Betrachtung. Zeitschr. f. Krist. 1931. **78.** p. 169—170.

Fr. Braun: Morphologische, genetische u. paragenetische Trachtstudien an Baryt. Neues Jahrb. f. Min. 1932. Beil. Bd. **65.** Abt. A. p. 216.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z : a =$ | $(111) : (100) =$ | $45° 36'$ | $45° 42' 09''$ |
| $: b =$ | $: (010) =$ | $55° 18'$ | $55° 17' 28''$ |
| $: c =$ | $: (001) =$ | $64° 21'$ | $64° 18' 29''$ |
| $: m =$ | $: (110) =$ | $25° 40'$ | $25° 41' 31''$ |
| $: \lambda =$ | $: (210) =$ | $30° 20'$ | $30° 29' 27''$ |
| $: z =$ | $: (1\bar{1}1) =$ | $69° 15'$ | $69° 25' 04''$ |
| $: z =$ | $: (\bar{1}11) =$ | $88° 40'$ | $88° 35' 42''$ |
| $f : c =$ | $(113) : (001) =$ | $34° 33'$ | $34° 43' 01''$ |
| $: m =$ | $: (110) =$ | $55° 11'$ | $55° 16' 59''$ |

Végül megjegyzem, hogy a rozsnyói Szadlovszky-bánya VII. szintjén mint nagy ritkaság fehér vagy részben átlátszó, $\{001\}$, $\{0kl\}$, $\{h0l\}$ formáktól határolt táblákban fordult elő barit.[1]

## Hialit, gipsz és szericit Vashegyről. (Gömör vm.)

A vashegyi hialit-előfordulást Zepharovich,[2] majd az ő nyomán Tóth[3] említette.

Az 1913. évi gyüjtésből eredő hialit vagy a vaskos vagy a sugaras szerkezetű, cseppkőalakú limonitot vonja be. Színe fehér, gyöngyházfényű, gyöngyopál (fiorit)-hoz hasonló. Mikroszkóp alatt szilánkjai víztisztán átlátszók. Optikailag anomális, kettősen törő. Törésmutatója, $n = 1{\cdot}480$.

*

Melczer[4] szerint a vashegyi «Gipsz színtelen, hosszú oszlopos, tűvékonyságú kristályok, végükön a pozitív és negatív piramislapokkal, a nagyobbak körülbelül 1 cm hosszúak».

Az általam tanulmányozott vashegyi gipsz kristályai víztisztán átlátszóak, élénk fényűek. Szélességük és vastagságuk

---

[1] Zimányi K.: Ásványtani közlemények a Szepes-Gömöri Érchegységből és a Délkeleti Felföldről. Annales mus. nationalis hung. 1922. 19. p. 80.

[2] V. v. Zepharovich: Min. Lexicon. I. Wien. 1859. p. 301.

[3] Tóth M.: Magyarország ásványai. Budapest, 1882. p. 369—370.

[4] Eisele G.: Gömör és Kishont törvényesen egyesült vármegyének bányászati monografiája. Selmecbánya. 1907. p. 542.

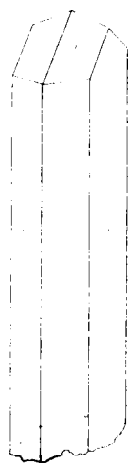
körülbelül egyenlő, 0·5—0·75 mm, hosszuk 5—12 mm; tűszerűek. Hat mért kristályon az alábbi 7 alakot állapítottam meg.

$$a\{100\} \qquad d\{101\}$$
$$b\{010\} \qquad m\{110\}$$
$$v\{011\} \qquad l\{111\}$$
$$n\{11\bar{1}\}.$$

A *c*-tengely övében erősen rostozott lapú alakokat figyelhetünk meg. A [001] övből a mérések alapján a felsorolt alakokon kívül más jelű formákat is lehet meghatározni, azonban azok magas indexű, vicinális és bizonytalan alakok, miért is őket a formafelsorolásból elhagytam.

Az $a\{100\}$ élénk fényű keskeny csík; csak egy kristályon szerepelt. A $b\{010\}$ és $m\{110\}$ körülbelül egyensúlyban fejlődtek ki.

A $v\{011\}$ és $d\{101\}$ nagy lapokkal jelentek meg. A $v\{011\}$ érdes felületű és görbült, ennek folytán igen rosszul tükrözött. Meghatározása inkább övbeli helyzete alapján volt lehetséges. A $d\{101\}$ halványan tükröző lapja a szimmetriasík irányában finoman rostozott.



7. ábra.

A negyedik fajta prizmákat az $l\{111\}$ és $n\{11\bar{1}\}$ képviselte. Az $l\{111\}$ síma, kissé görbült lapokkal lépett fel s többnyire nagyobbra fejlődött, mint az $n\{11\bar{1}\}$. Az utóbbi lapjai az $[n:n=11\bar{1}:1\bar{1}\bar{1}]$ éllel párhuzamosan finoman rostozottak.

A mérteken kívül még számos kristályt átvizsgálva, megállapítható volt, hogy a vashegyi gipsz leggyakoribb combinatióját a $b\{010\}$, $m\{110\}$, $l\{111\}$ és $n\{11\bar{1}\}$ alkották (7. ábra). Az $a\{100\}$, $v\{011\}$, $d\{101\}$ fellépése ritkaság. — A kristályok kivétel nélkül tűszerűek, olykor az $m\{110\}$ egy lapja vagy $b\{010\}$ szerint kissé táblásak. Ikerkristályok a vizsgált anyagban nem voltak.

| | | Mért | Számított[1] |
|---|---|---|---|
| $a : l$ | $= (100) : (111) =$ | 54° 16′ | 54° 43½′ |
| $: n$ | $= : (\bar{1}11) =$ | 112° 41′ | 112° 32′ |
| $m : b$ | $= (110) : (010) =$ | 55° 37′ | 55° 44½′ |
| $: m$ | $= : (1\bar{1}0) =$ | 68° 36′ | 68° 31′ |
| $d : m$ | $= (101) : (110) =$ | 59° 12′ | 59° 52′ |
| $v : l$ | $= (011) : (111) =$ | 26° 46′ | 26° 58½′ |
| $l : b$ | $= (111) : (010) =$ | 71° 41′ | 71° 49′ |
| $: m$ | $= : (1\bar{1}0) =$ | 72° 26′ | 72° 27½′ |
| $: l$ | $= : (1\bar{1}1) =$ | 36° 21′ | 36° 22′ |
| $n : b$ | $= (\bar{1}11) : (010) =$ | 69° 23′ | 69° 21′ |
| $: m$ | $= : (\bar{1}10) =$ | 59° 03′ | 58° 59′ |
| $: n$ | $= : (\bar{1}\bar{1}1) =$ | 41° 35′ | 41° 18′ |

*

Vashegyen a limonit üregeiben fínom pikkelyes ásvány fordul elő, mely talknak vagy szericitnek látszott. Az optikai és lángkísérleti vizsgálatok alapján ásványunk kétségtelenül szericit.

A szürkés színű, mikroszkóp alatt színtelen, átlátszó pikkelyek zsírfényűek. Fénytörés közepes, kettőstörés erős. Pleochroizmus nem vehető észre. Optikai tengelysík merőleges (010)-ra. Tengelyszög kicsi. A hegyes szögfelező (a) a hasadási lapon lép ki. Optikai jelleg negatív.

A kobaltnitráttal megcseppentett pikkelyek izzítás után kihűlve, kékszínűek lesznek az *Al* jelenléte következtében.

A limonit üregeibe a szericit a vashegyi ó-paleozóos metamorf kőzetek szericitjének bemosása révén került.

## Rhodochrosit Gömörrákosról. (Gömör vm.)

A gömörrákosi rhodochrositot először Zimányi ismertette.[2] Gömörrákos határában a Rákosbánya keleti részében a III. és IV. szint közt limonit üregeiben vascsillám társaságában gyéren rhodochrosit fordult elő. A málnavörös vagy ritkábban barnás-

[1] C. Hintze: Handb. d. Mineralogie. I. Bd. Berlin, 1929. p. 4276—4277.

[2] Zimányi K.: Ásványtani közlemények. Annales mus. nationalis hung. 1913. 11. p. 264—265.

sárga kristályok gömbalakú halmazokat vagy a sűrűn egymáshoz nőtt szkalenoederek kéveszerű csoportokat alkottak. A kristályok rossz kifejlődése miatt rajtuk ZIMÁNYI méréseket nem végzett. E rhodochosit különös érdekessége: kadmiumtartalma.[1]

A rhodochrosit kristálycsoportok között sikerült egy olyat találnom, melyen a hipoparallel állásban levő szkalenoederek mérésre alkalmasnak látszottak. E csoportban 3·5—5 mm nagy, málnavörös szkalenoederek helyezkedtek sűrűn egymás mellé s a kristályoknak csak a felső fele volt meg. A kristályokon egyedül a $k\{21\bar{3}1\}$ szkalenoeder fejlődött ki. A lapok enyhén görbültek, reflexük többszörös és kissé elmosódott, de a forma megállapítása kétségtelenül biztos.

| | Mért | Számított |
|---|---|---|
| $k:k=(21\bar{3}1):(3\bar{1}\bar{2}1)=$ | 35° 28′ | 35° 24′ 18″ |
| $:k$ $:(\bar{2}3\bar{1}1)=$ | 74° 24′ | 74° 50′ 58″ |

A gömörrákosi rhodochrosit kristályainak érdekessége, hogy rajtuk — mint egyedüli alak — a $k\{21\bar{3}1\}$ szkalenoeder lépett fel. — A magyarországi rhodochrosit-előfordulások között egyedül Kapnikbánya kristályai között találhatók szkalenoederes típusúak.[2] Azokon a szkalenoeder mellett azonban még más alakok is szerepeltek, úgyhogy mint tisztán skalenoederes kifejlődésű rhodochrosit csak a gömörrákosi ismeretes.

(A Budapesti Kir. Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem ásvány- és kőzettani intézetében készült dolgozat.)

---

[1] ZSIVNY V.: Ásványtani közlemények. Földtani Közlöny. 1927. **57.** p. 199—200.

[2] KOCH S.: A kapnikbányai rhodochrositról. Annales mus. nationalis hung. 1923. **20.** p. 130—134.

KOCH S.: Magyarország kristályosodott rhodochrositjai. U. o. 1924. **21.** p. 67—74.

KOCH S.: Adatok Magyarország ásványainak ismeretéhez. U. o. 1928. **25.** p. 443—444.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. október 14-én tartott üléséből.)

# BEITRÄGE ZUR KENNTNIS EINIGER MINERALIEN DES SZEPES-GÖMÖRER ERZGEBIRGES (UNGARN).

Von L. TOKODY.

Im folgenden sind die Ergebnisse der neueren Untersuchungen über einigen Mineralien des Szepes-Gömörer Erzgebirges zusammengefasst.

**Turmalin von Ötösbánya** (Komitat Szepes).

Der Turmalin von Ötösbánya kommt in den Eisenspatlagerstätten mit Quarz, Eisenspat, Kalcit, Tetraedrit und Chalkopyrit vor. An den 0·25 mm grossen, schwarzen, undurchsichtigen, glasglänzenden Kristallen treten die Formen $b\{11\bar{2}0\}$, $R\{10\bar{1}1\}$ und $e\{02\bar{2}1\}$ auf.

**Sphalerit von Nagykuncfalva** (Komitat Szepes).

Sehr kleine (1 mm grosse), rötlichbraune, undurechsichtige, höchstens durchscheinende, meistens abgerundete Kristalle. Als grösste Seltenheit kommt manchmal ein Spaltungsrhombendodekaeder vor.

**Arsenopyrit und Turmalin von Felsőszalánk** (Komitat Szepes).

Der Arsenopyrit von Felsőszalánk kommt in Tetraedrit, Quarz, Chalkopyrit oder Siderit eingewachsen vor. An den 1—10 mm grossen Kristallen wurden die folgenden Formen festgestellt:

| | | |
|---|---|---|
| $c\{001\}$ | $r\{014\}$ | $s\{012\}$ |
| $\star\{019\}$ | $\omega\{027\}$ | $l\{011\}$ |
| $\beta\{016\}$ | $q\{013\}$ | $e\{101\}$ |
| $\varrho\{015\}$ | $\star\{038\}$ | $m\{110\}$ |

Die mit einem Stern (*) bezeichneten Formen sind für den Arsenopyrit überhaupt neu.

Die Kristalle besitzen einen domatischen Habitus. Unter den Prismen I. Art herrscht. die Form $s\{012\}$ vor. Die Flächen dieser Form sind stark gestreift. Die übrigen Prismen I. Art von anderen Indices treten mit schmalen, meistens gerieften Flächen auf. Die Form $c\{001\}$ wurde mit glatten, glänzenden, kleinen Flächen ausgebildet. $m\{110\}$ zeigt glatte oder rauhe Flächen. (Fig. 1. u. 2.) Zwillinge bzw. Drillinge sind nach $m\{110\}$ und $e\{101\}$ häufig.

Die chemische Analyse dieses Arsenopyrit wurde von Herrn Dipl. Chem. Ing. G. VAVRINECZ durchgeführt und im ungarischen Text (Seite 657) mitgeteilt.

*

Der Turmalin von Felsőszalánk stammt aus der Dorothea-Schacht. Die Begleitmineralien sind Siderit, Kalcit, Quarz und einige Pyritkörnchen. Die fast mikroskopischen Turmalinnadeln sind schwarz, glasglänzend. U. d. M. $\varepsilon$ = farblos-blassgelb, $\omega$ = grünlichblau. $\omega > \varepsilon$. Opt. Charakter negativ. Mittlere Licht- und Doppelbrechung.

Die Turmalinkristalle von Ötösbánya und diejenige von Felsőszalánk zeigen in morphologischen und genetischen Hinsicht eine grosse Ähnlichkeit zu denjenigen von Bindtbánya.

## Chalkopyrit und Baryt von Rozsnyó (Komitat Gömör).

Der Chalkopyrit von Rozsnyó kommt in der Grube Szadlovszky mit Tetraedrit auf Siderit vor. Die 0·75—1 mm grossen, lebhaft glänzenden Kristalle sind sehr formenreich. An drei Kristallen konnte ich die folgenden Formen feststellen:

| | | |
|---|---|---|
| $c\{001\}$ | $\tau\{605\}$ | $*\{15.0.8\}$ |
| $p\{111\}$ | $k\{11.0.9\}$ | $\{17.0.9\}$ |
| $p'\{1\bar{1}1\}$ | $Q\{504\}$ | $L\{23.0.12\}$ |
| $x\{102\}$ | $\{905\}$ | $z\{201\}$ |
| $*\{305\}$ | $*\{20.0.11\}$ | $*\{32.0.15\}$ |
| $g\{203\}$ | $*\{13.0.7\}$ | $*\{421\}$ |
| $*\{31.0.32\}$ | | |

Die mit einem Stern (*) bezeichneten Formen sind für den Chalkopyrit überhaupt neu.

Die Kristalle gehören zu zwei Typen. Der erste Typus ist bisphenoidisch (Fig. 3), der zweite wird dagegen durch — neben dem Bisphenoid $p\{111\}$ — mit grossen Zahl auftretenden Bipyramide II. Art charakterisiert (Fig. 4. u. 5.). Keine Zwillinge.

*

Es wurde ein wasserheller Barytkristall von der Grösse $a : b : c = 1 : 3 : 1$ mm untersucht. Die beobachteten Formen:

| | | |
|---|---|---|
| $a\{100\}$ | $\lambda\{210\}$ | $o\{011\}$ |
| $b\{010\}$ | $*\{970\}$ | $z\{111\}$ |
| $c\{001\}$ | $m\{110\}$ | $f\{113\}$ |
| | $x\{130\}$ | |

Die Form $*\{970\}$ ist für den Baryt überhaupt neu. — Die Formen, der Genesis und der Paragenesis des beschriebenen Kristalls stimmen mit denjenigen des Wolnyn von Rozsnyó[1] vollkommen überein. Sehr interessant ist der Typus dieses Baryt, es weicht nähmlich von den bekannten Wolnyntypus der Baryt dieses Fundortes wesentlich ab. Der Typus des untersuchten Kristalls ist kurzprismatisch bzw. tafelig nach $c(001)$. (Fig. 6.) Es wäre wünschenswert den Typus VII. von Braun[1] auseinandersetzen und zwar des Typus VII.*a* soll den Wolnyntypus (=Wolnyn-typ VII nach Braun) bedeuten und Typus VII.*b* wäre die jetzt beschriebene Baryttypus von Rozsnyó.

**Hyalit, Gyps und Sericit von Vasbegy** (Komitat Gömör).

Der Hyalit hüllt den Limonit um oder sitzt auf demselben. Farbe ist weiss; perlmutterglänzend. Optisch anomal, doppelbrechend. $n = 1{\cdot}480$.

*

[1] Es soll auch hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass der Fundort des Wolnyn von Rozsnyó mit dem Fundort Betlér nicht identisch ist. Bei Betlér kommt Wolnyn (Baryt) nicht vor, sondern nur bei Rozsnyó. Es muss auf dieser Tatsache desto mehr hingewiesen werden, da in der neueren Literatur (Fr. Braun, Neues Jahrb. für Min. 1932. Beil. Bd. 65. Abt. A. p. 216) immer noch dieses Irrtum vorkommt.

Der Gyps von Vashegy kommt in wasserklaren, nadelförmigen Kristallen mit den Formen $a\{100\}$, $b\{010\}$, $v\{011\}$, $d\{101\}$, $m\{110\}$, $l\{111\}$, $n\{11\bar{1}\}$ vor. Die Breite und Dicke der Kristalle ist ungefähr gleich 0·5—0·75 mm, die Länge beträgt manchmal 12 mm.

Die verbreiteste Kombination besteht von den Formen $b\{010\}$, $m\{110\}$, $l\{111\}$, $n\{11\bar{1}\}$. Die Formen $b\{010\}$ und $m\{110\}$ treten im Gleichgewicht auf. $l\{111\}$ ist oft grösser, als $n\{11\bar{1}\}$. Die Formen $a\{100\}$, $v\{011\}$ und $d\{101\}$ sind sehr selten.

*

Der feinschuppige Sericit von Vashegy kommt in den Hohlräumen des Limonit vor.

**Rhodochrosit von Gömörrákos** (Komitat Gömör).

Die himbeerroten, 3·5—5 mm grossen, *Cd*-haltigen Rhodochrositkristalle charakterisiert das Auftreten der einzigen Form $k\{21\bar{3}1\}$.

(Mineralogisch-petrographisches Institut d. Kgl. Ung. Pázmány P. Universität zu Budapest.)

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 14. Oktober 1935.)

EGYETEMI KÖNYVTÁR
FOLYÓIRATOK
SZEGED

**Pilismaróti Bozóky L.:**
**Újabb vizsgálatok az ionizált oxigén-molekula sávos színképén.**



1. kép. $\lambda = 5631$ Å sávfejnek *a)* Freiberg által Bonnban készített üreges katódos kisülésből nyert képét, *b)* az Intézetben a Hochheim által bevont ráccsal készített külső elektródos kisülésből nyert képét mutatja.



2. kép. $\lambda = 5631$ Å-nél kezdődő sávoknak *a)* tér-nélküli, *b)* H = 15,300 Gauss, *c)* H = 23,300 Gauss-erősségű mágneses terekben gerjesztett színképei. A berajzolt két-két vonal távolsága $2 \triangle \nu_{\text{norm}}$

# INHALTSVERZEICHNIS.


Seite

BARTA, J.: Eine neuere Analogie des Torsionsproblems..... 505—506
BOROS, A.: Die höhere Pflanzenwelt ungarischer Thermen.. 592—596
BOZÓKY, L. v.: Neuere Untersuchungen über das Bandenspektrum des ionisierten Sauerstoffmoleküls ..... 586—587
BUDÓ, A.: Über die Triplett-Molekülterme und über die Intensitäten der Triplett-Banden ..... 410—411
ENDRÉDY, A. v.: Über die Gleichgewichte in Chromsäure- und Bichromatlösungen ..... 495
FRANK, G., PATAI, E. und TOMASCHEK, Z.: Die Herstellung und Untersuchung von Graphitschichten kolloidaler Struktur ..... 432—435
KONEK, FR.: Anwendung der partiellen oder differenzierenden Alkylierung auf andere biazotische Alkaloide, wie Hydrochinin, Spartein, Peganin etc. ..... 451
KONEK, FR.: Verhalten der Alkaloide vom Chinazolintypus bei der differenzierenden Methylierung ..... 457—458
LIPKA, ST.: Über die Irreduzibilität von Polynomen ..... 356—357
NAGY, J. v. Sz.: Über die ebenen Kurven ohne Tangenten singularität und vom Index Null. ..... 373—374
NEUGEBAUER, T.: Theorie der Ionenlockerung ..... 339—348
PATAI, E.: siehe FRANK, G.
RADOS, G.: Über den Rang von adjungierten Determinanten 323—324
RADOS, G.: Über den Rang der Kroneckerschen Determinanten 336
SCHAFFER, K.: Die histopathologische Bestimmung der hereditär-organischen Nervenkrankheiten ..... 556
'SIGMOND, A. J. de: A general colourscale using in general soil mapping ..... 649
SZENT-GYÖRGYI, A.: Mechanismus der biologischen Oxidation 416
TOKODY, L.: Beiträge zur Kenntnis einiger Mineralien des Szepes-Gömörer Erzgebirges (Ungarn). ..... 672—675
TOMASCHEK, Z.: siehe FRANK, G.
VITÁLIS, ST. v.: Orygoceras-Arten in den unterpontischen Ablagerungen der Gegend von Sopron, ihre Verbreitung in Ungarn und den nachbarten Ländern ..... 642—643
ZEMPLÉN, G.: Über Robinin, Robinobiose und Kämpferol-Rhamnosid ..... 386
ZIMMERMANN, A.: Funktionelle anatomische Strukturen .... 529—532
ZIMMERMANN, G.: Beiträge zur vergleichenden Anatomie des Os carpi centrale ..... 624—625

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.

50639

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

Apl 932

# MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LIV. KÖTET. — HARMADIK (UTOLSÓ) RÉSZ.

# MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LIV. — DRITTER (LETZTER) TEIL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1936.

# SYLVESTER DETERMINÁNSTÉTELÉNEK EGY ÚJ BEBIZONYÍTÁSA.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

A determinánselmélet egyik legérdekesebb és alkalmazásainál fogva pedig egyik legfontosabb tétele az, amelyet SYLVESTER, a kiváló angol mathematikus, a Phil. Magazin 1851. évfolyamában közzétett és amellyel KRONECKER a «Journal für die reine u. angewandte Mathematik» című folyóirat 72. kötetében, FROBENIUS pedig ugyanennek a folyóiratnak 86. kötetében foglalkoztak.

Ez a tétel a következőben áll:

*Ha az*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & a_{1h+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} & a_{hh+1} & \dots & a_{hn} \\ a_{h+11} & \dots & a_{h+1h} & a_{h+1h+1} & \dots & a_{h+1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nh} & a_{nh+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*n-edfokú determináns felső h-adfokú sarokfőminornak, a*

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

*minornak*

$$P_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & a_{1h+1h} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} & a_{hh+k} \\ a_{h+i1} & \dots & a_{h+ik} & a_{h+ih+k} \end{vmatrix}_{(i,\, k=1,\, 2,\, \dots,\, n-h)}$$

$(h+1)$-*edfokú superdeterminánsaiból az*

$$S = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots P_{1n-h} \\ P_{21} & P_{22} & \dots P_{2n-h} \\ . & . & \dots \quad . \\ P_{n-h1} & P_{n-h2} & \dots P_{h-ih-k} \end{vmatrix}$$

SYLVESTER-*féle determinánst képezzük, akkor fennáll a következő egyenlőség:*

$$S = A.A_h^{n-h-1}. \tag{I}$$

A következőkben ennek a tételnek új bebizonyítását mutatom be, amely az (I) alatti egyenlőségnek egyszerű verifikálásában áll.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy az

$$\frac{S}{A}$$

hányados az $A$ determináns elemeinek racionális egész függvénye, amire az $A$ determináns irreducibilitásánál fogva elegendő annak a kimutatása, hogy

$$S = 0$$

az $a_{ik}$ elemek mindamaz értékrendszerei mellett, amelyekre nézve

$$A = 0.$$

Ha $A$ eltűnik, akkor az

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ih}x_2 + a_{ih+1}x_{h+1} + \dots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

homogén lineár egyenletrendszernek vannak nem triviális megoldásai is. Legyen egy ilyen

$$x_1 = \lambda_1 \dots, \; x_h = \lambda_h, \; x_{h+1} = \lambda_{h+1}, \dots, \; x_a = \lambda_n;$$

akkor két eset lehetséges:

*1. eset*, midőn

$$\lambda_{h+1} = 0, \; \lambda_{h+2} = 0, \dots, \; \lambda_n = 0,$$

akkor kell, hogy a

$$\lambda_1, \; \lambda_2, \dots, \; \lambda_h$$

számok között legalább *egx* a zérustól különböző legyen, amikor is az

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1h}x_h + a_{1h+1}x_{h+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2h}x_h + a_{2h+1}x_{h+1} = 0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nh}x_h + a_{nh+1}x_{h+1} = 0 \end{array}$$

egyenletek közül bármilyen $h+1$ számúból alakított homogén lineár egyenletrendszernek lesz nem-triviális megoldása, és így az

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1h+1} \\ a_{21} & \ldots & a_{2h} & a_{2h+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nh} & a_{nh+1} \end{array} \right\|$$

matrixból alakítható összes $(h+1)$-edfokú determinánsok zérussal egyenlők, de ezek között az $S$ determináns első oszlopának összes elemei előfordulván, $S$ maga is zérussal lesz egyenlő.

2. *eset*, amidőn a

$$\lambda_{h+1}, \lambda_{h+2}, \ldots, \lambda_n$$

számok között a zérustól különböző is van. Legyen ez pl. $\lambda_{h+1}$ (ha más $\lambda_{h+g}$ lenne a zérustól különböző, a bebizonyítás ugyanígy folytatható), akkor

$$\lambda_{h+1}S =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1h+1} & \lambda_{h+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\ a_{h+11} & \ldots & a_{h+1h} & a_{h+1h+1} & \lambda_{h+1} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1h+2} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{h+11} & \ldots & a_{h+1h} & a_{h+1h+2} \end{array} \right| & \ldots \\ \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1h+1} & \lambda_{h+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\ a_{h+21} & \ldots & a_{h+2h} & a_{h+2h+1} & \lambda_{h+1} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1h+2} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{h+21} & \ldots & a_{h+2h} & a_{h+2h+2} \end{array} \right| & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right|,$$

ha e determináns 2, 3,..., $(n-h)$-dik oszlopaiban álló $(h+1)$-edfokú minorokat rendre $\lambda_{h+2}, \lambda_{h+3}, \ldots, \lambda_n$-nel szorozzuk, mégpedig

mindegyiket az utolsó oszlopán és az ekként szorzott oszlopokat az elsőhöz hozzáadjuk, akkor az első oszlop $g$-dik eleme lesz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1h} & a_{1h+1} & \lambda_{h+1} + \dots + a_{1n} & \lambda_n \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{h1} & \dots a_{hh} & a_{hh+1} & \lambda_{h+1} + \dots + a_{hn} & \lambda_n \\ a_{h+g1} & \dots a_{h+g2} & a_{h+gh+1} & \lambda_{h+1} + \dots + a_{h+gn} & \lambda_n \end{vmatrix}$$

és ha ebben az 1., 2.,..., $h$-dik oszlopokat rendre $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_h$-val szorozva az utolsó oszlophoz adjuk, akkor az

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{in}\lambda_n = 0 \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenlőségeknél fogva a $\lambda_{h+1}S$ determináns első oszlopának $g$-dik eleme oly $(h+1)$-edfokú determináns, amelynek utolsó oszlopában minden elem zérussal egyenlő. Mivel pedig $g=1, 2, \dots, n-h$ lehet

$$\lambda_{h+1}S = 0$$

és minthogy

$$\lambda_{h+1} \neq 0,$$
$$S = 0.$$

Ezzel ki van mutatva, hogy $\frac{S}{A}$ az $a_{ik}$ elemeknek racionális egész függvénye. Most már nem okoz nehézséget annak a kimutatása, hogy az $\frac{S}{A}$ hányados független amaz

$$a_{ik}$$

elemektől, amelyekben vagy $i$, vagy $k$, vagy $i$ és $k$ a $h$-nál nagyobbak, azaz azoktól az $a_{ik}$ mennyiségektől, amelyek az $A_h$ főminorban nem fordulnak elő. Ha ugyanis az $\frac{S}{A}$ hányadosban az

$$a_{ih+1}, a_{ih+2}, \dots, a_{in} \qquad (i=1, 2, \dots, n) \qquad \text{(II)}$$

mennyiségeket a

$$ta_{ih+1}, ta_{ih+2}, \dots, ta_{in} \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

mennyiségekkel pótoljuk, akkor ennek hatása abban nyilvánul, hogy az $\frac{S}{A}$ hányados számlálója és nevezője $t^{n-h}$ hatvánnyal szorzódik és így az $\frac{S}{A}$ hányados $t^0$ hatványával szorzódik, azaz ez a hányados a (II) alatti mennyiségeknek nulladfokú homogén racionális egész függvénye, és így ezektől független. Ha most az

$$\underset{(i=1,2,\ldots,n-h)}{a_{h+i1},\ a_{h+i2},\ldots,\ a_{h+in}} \qquad \text{(III)}$$

mennyiségeket a

$$\underset{(i=1,2,\ldots,n-h)}{ta_{h+i},\ ta_{h+i2},\ldots,\ ta_{h+in}}$$

mennyiségekkel pótoljuk, ismét kiderül, hogy az $\frac{S}{A}$ hányados a (III) alatti mennyiségeknek nulladfokú homogén racionális egész függvénye, és így a (III) alatti mennyiségektől is független. De ezzel ki van mutatva, hogy az $\frac{S}{A}$ hányados független az $A$ determináns mindazon elemeitől, amelyek az $A_h$ főminorban nem fordulnak elő. Ezekkel az elemekkel tehát szabadon rendelkezhetünk. Rendelkezzünk velük úgy, hogy

$$a_{h+1h+1} = 1,\ a_{h+2h+2} = 1,\ldots,\ a_{nn} = 1$$

legyen, a többiek pedig zérussal egyenlők legyenek, akkor $P_{ik}$ átmegy a következőkbe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hh} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_{ik} \end{vmatrix} = \delta_{ik} A_h,$$

ahol $\delta_{ik}=0$, ha $i \neq k$ és $\delta_{ik}=1$, ha $i=k$. $S$ tehát átmegy ebbe:

$$\begin{vmatrix} A_h & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_h & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_h \end{vmatrix} = A_h^{n-h}$$

a $A$ determináns pedig

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1h} & 0\ 0 \dots 0 \\ \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ a_{h1} \dots a_{hh} & 0\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0\ 1 \dots 0 \\ \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 \dots 0 & 0\ 0 \dots 1 \end{vmatrix} = A_h,$$

és így

$$\frac{S}{A} = \frac{A_h^{n-h}}{A_h} = A_h^{n-h-1},$$

amiből végre

$$S = A.A_h^{n-h-i},$$

amivel SYLVESTER tétele be van bizonyítva.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. január 13-án tartott üléséből.)

# EIN NEUER BEWEIS FÜR DEN SYLVESTER'SCHEN DETERMINANTENSATZ.

Von GUSTAV RADOS o. Mitglied.

Es sei gegeben die Determinante $n$-ten Grades

$$A = |a_{pq}|_{(p,\,q=1,\,2,\ldots,\,n)}$$

und $A_h$ sei ihr Eck-Hauptminor $h$-ten Grades

$$A_h = |a_{rs}|_{(r,\,s=1,\,2,\ldots,\,h)},$$

als dann sind die Superdeterminanten $(h+1)$-ten Grades von $A_h$ die folgenden:

$$P_{ik} = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1h+k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2h} & a_{2h+k} \\ . & \ldots & . & . \\ a_{h1} & \ldots & a_{hh} & a_{hh+k} \\ a_{h+i1} & \ldots & a_{h+ih} & a_{h+ih+k} \end{array}\right|_{(i,\,k=1,\,2,\ldots,\,n-h)}$$

für die aus diesen gebildete SYLVESTER'sche Determinante

$$S = \left|\begin{array}{cccc} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n-h\,k} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n-h\,k} \\ . & . & \ldots & . \\ P_{n-h1} & P_{n-h2} & \ldots & P_{n-hn-h\,k} \end{array}\right|$$

besteht die folgende Identität:

$$S = A.A_h^{n-h-1}$$

Zunächst wird der Nachweis geführt, dass $\frac{S}{A}$ unabhängig ist von denjenigen Elementen der Determinante $A$, die im Hauptminor $A_h$ nicht vorkommen. Indem man diese Elemente so spezialisirt, dass

$$a_{h+1\,h+1} = 1,\ a_{h+2\,h+2} = 1, \ldots,\ a_{h+n} = 1$$

die übrigen gleich Null wählt, ergibt sich der SYLVESTER'sche Satz unmittelbar.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 13. Januar 1936.)

# MAXIMÁLIS INDEXŰ TÉRGÖRBÉKRŐL.

SZŐKEFALVI NAGY GYULA l. tagtól.

## 1. Bevezetés.

Síkgörbén a következőkben véges számú konvex ívből összerakható olyan zártgörbét értünk, amelynek minden pontjában a ponttal folytonosan változó érintője van; térgörbén pedig véges számú harmadrendű ívből összerakható olyan zárt görbét értünk, amelynek minden egyes pontjában a ponttal folytonosan változó érintője és simulósíkja van. Egy síkgörbe, illetőleg térgörbe több menetből is állhat, amikor a menetek magukban is sík-, illetőleg térgörbék. A következőkben $C$, illetőleg $N$ síkgörbét, illetőleg annak egy menetét, $G$, illetőleg $M$ térgörbét, illetőleg annak menetét fogja jelölni.

Egy térgörbe rendszáma, illetőleg indexe azoknak a pontoknak maximális, illetőleg minimális száma, amelyekben a térnek egy tetszőleges síkja a görbét találhatja, ha a metszéspontokat sokszorosságukkal számítjuk. Az $n$-edrendű térgörbe akkor maximális indexű, ha indexe $n-2$.

A maximális indexű térgörbékre vonatkozólag az irodalomban három szerzőnek vannak általános vizsgálatai. Ezek C. Juel, H. Mohrmann és Sz. Nagy Gyula.[1]

---

[1] C. Juel: Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og. Math. Afd., 8. Raekke II. 5. (1917), 279—294.

H. Mohrmann: 1. Über algebraische und nicht-algebraische gewundene Kurven $n$-ter Ordnung vom Maximalindex. Math. Ann. 78 (1917), 171—176.

2. Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle

E három szerzőnek eredményeihez és a maximális indexű vagy osztályindexű görbékre és felületekre vonatkozó vizsgálatainkhoz [2] kapcsolódólag tárgyaljuk a maximális indexű térgörbék, nevezetesebb tulajdonságait. Vizsgálataink az ilyen görbék reducibilitására, irreducibilitására, fajszámára és egyéb jellemző számaira vonatkoznak.

Vizsgálatainknak érintkező pontjuk van a síkgörbék rend-

---

Singularität. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math. phys. Klasse 1916, 201—208.

Sz. Nagy Gyula: 1. Sík- és térbeli algebrai görbék reális meneteiről. MTÉ (Matematikai és Természettudományi Értesítő) 33 (1915), 544—560.

2. Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raumkurven. Math. Ann. 77 (1916), 416—429.

Ezeket a dolgozatokat a következőkben röviden J, 1 M, 2 M, 1 N, 2 N jellel fogjuk idézni.

[2] Sz. Nagy Gyula: 3. Maximális osztályindexű síkgörbék jellemző számairól. MTÉ 43 (1926), 290—306.

4. Maximális osztályindexű síkgörbék meneteiről. MTÉ 44 (1927), 434—445.

5. Maximális osztályindexű síkgörbék rendszámáról. MTÉ 44 (1927), 446—459.

6. Egy menetből álló maximális osztályindexű síkgörbék rendszámáról. MTÉ 44 (1927), 460—476.

7. Maximális osztályindexű síkgörbék rendszámára fennálló egyenlőtlenségekről. MTÉ 45 (1928), 260—287.

8. Maximális osztályindexű síkgörbék jellemző számai között fennálló relációkról. MTÉ 45 (1928), 245—259.

9. Maximális indexű felületekre vonatkozó vizsgálatok. MTÉ 53 (1935), 420—474.

10. Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex. Math. Ann. 89 (1923), 32—75; 90 (1924), 152—154.

11. Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximalklassenindex. Math. Ann. 100 (1928), 164—178.

12. Über die Züge der ebenen Kurven von Maximalklassenindex. Math. Ann. 100 (1928), 179—187.

13. Über die reduziblen Kurven gegebener Klasse vom Maximalklassenindex mit der Maximalanzahl ineinander liegender Ovale. Math. Ann. 103 (1930), 502—515.

14. Über die irreduziblen ebenen Kurven von Maximalindex. Acta Scient. Math. Szeged 3 (1927), 96—106.

15. Über die Ordnung der ebenen Kurven von Maximalklassenindex. Math. Zeitschr. 35 (1932), 80—92.

számának O. HAUPT német matematikustól származó egy általánosításával.[3] Egy $C$ síkgörbének a sík egy görberendszerére vonatkozó rendszáma, illetőleg indexe azoknak a metszéspontoknak maximális, illetőleg minimális száma, amelyekben a $C$ görbét a görberendszer egy tetszőleges görbéje a görberendszer fix pontjain kívül találhatja. Ha ez a görberendszer a $C$ görbére vonatkozólag háromdimenziós lineáris görbesereg és ha a $C$ görbének minden pontjában a ponttal folytonosan változó símuló köre van, akkor a $C$ görbéhez hozzárendelhető egy olyan $G$ térgörbe, amelyet a tér egy általános síkja annyi pontban metsz, mint ahányban a görbeseregből a neki megfelelő görbe a fixpontokon kívül a $C$ görbét metszi.

Ezt az elvet alkalmazni fogjuk maximális indexű reducibilis térgörbék létezésének kimutatására és ilyen térgörbék előállítására.

## 2. A maximális indexű térgörbékre vonatkozólag eddig ismert tételek összefoglalása.

A továbbiakra vonatkozólag szükségesnek tartjuk a maximális indexű térgörbékre eddig kimutatott tételeknek összefoglalását.

---

16. Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex. Math. Zeitschr. 37 (1933), 493—513.

17. Über die ebenen Kurven von Maximalindex und vom Maximalklassenindex. Jahresbericht d. DMV. 41 (1931), 82—87.

18. Einige Sätze über ebene Elementarkurven. Acta Scient. math. Szeged 5 (1931), 83—89.

19. Über Flächen vom Maximalindex. Math. Ann. 98 (1927) 657—683.

20. Maximális indexű felületekről. Szent István Akadémia Értesítője 9 (1924), 117—132.

Ezeket a dolgozatokat a következőkben 3 N—20 N jelek alatt fogjuk idézni.

[3] O. HAUPT: Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen. Monatshefte f. Math. u. Phys. 40 (1933), 1—53. Megjegyezzük, hogy az indexfogalmat O. HAUPT: Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne (Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1935, 37—70) c. dolgozatában általánosította. HAUPT értelmezése szerint egy síkgörbe rendszáma, ill. indexe azoknak a pontoknak maximális, ill. minimális száma, amelyekben a görbe *szelői* a görbét metszik. Ez az értelmezés térgöbékre is átvihető, mi azonban erre az általánosításra nem térünk rá.

1. Egy maximális indexű térgörbéhez a tér egy $P$ pontján átmenő kettősszelőknek és simulósíkoknak száma a $P$ pont mozgása közben akkor és csak akkor változik, ha a $P$ pont a térgörbe érintő felületét a görbén kívül eső egy pontban átlépi. A kettősszelők, illetőleg simulósíkok számának változása ilyenkor $+1$, vagy $-1$, illetőleg $-2$, vagy $+2$.[4]

2. A maximális indexű térgörbe bármely menete szintén maximális indexű.[5]

3. A maximális indexű térgörbéknek nincs kettős érintősíkjuk és nincs harmadrendűen érintő (hiperoszkuláló) simulósíkjuk.[6]

4. Egy maximális indexű térgörbe bármely centrális projekciója maximális indexű síkgörbe.

5. Egy $n$-edrendű maximális indexű térgörbe akármelyik érintőjén átmenő síksor síkjai az érintéspontba eső két ponton kívül még $n-2$ pontban metszik még a térgörbét.[7]

6. Egy maximális indexű térgörbének sincs zéróindexű menete vagy hurokja.[8]

7. Egy $n$-edrendű maximális indexű térgörbének legfeljebb $n-2$ menete lehet. Ha a menetek száma ezt a maximális számot eléri, akkor a menetek mind egységindexűek. Az $n-2$ menetből álló maximális indexű $n$-edrendű térgörbének semmiféle szingularitása sincs. Az ilyen térgörbe látszólagos kettőspontjainak száma a térnek bármely a görbén kívül fekvő pontjára vonatkozólag vagy $h = \binom{n-2}{2} + 1$, vagy $h-1$.[9]

---

[4] J, 280—281. Ezt a tételt, miként a 3. és 5. tételt is, csak egymenetű térgörbékre mondotta ki C. JUEL, bizonyítása azonban nyilvánkép többmenetű görbékre is érvényes.

[5] 1 N, 559—560; 2 N, 417; 1 M, 172.

[6] J, 282; 1 M, 172.

[7] J, 282.

[8] 1 M, 172.

[9] 1 M, 172—173. MOHRMANN bizonyítása csak olyan pontokra vonatkozólag adja meg a látszólagos kettőspontok $H$ számát, amelyeken keresztülmegy valamelyik menetnek egy kettősszelője. Az ilyen pontokra vonatkozólag $H=h$. Az 1. tétel alapján könnyen belátható, hogy az olyan pontokra vonatkozólag, amelyeken nem megy át egy menetnek sem kettős-

8. Ha $k$, $i_1$, $i_2$,..., $i_k$ és $n$ az

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n - 2$$

egyenletnek eleget tevő tetszőleges pozitív egész számok, akkor mindig van olyan maximális indexű $n$-edrendű térgörbe, amely $i_1$, $i_2$,..., $i_k$ indexű $k$ menetből áll.[10]

9. A másodrendű torzfelületeken fekvő és egy menetből álló maximális indexű $n$-edrendű térgörbék kétfélék: Az elsőfajta térgörbét a másodrendű felületnek az egyik, illetőleg a másik sugárseregbe tartozó bármely alkotója egy, illetőleg $n-1$ egymástól különböző pontban metszi. Az ilyen $(n-1\,;\ 1)$ térgörbének nincs kettőspontja. A másikfajta térgörbét az egyik sugárseregbe tartozó alkotók $n-2$ egymástól különböző pontban metszik, a másik sugárseregbe tartozó alkotók pedig 2, vagy 0 pontban találják. Az ilyen $(n-2\,;\ 2,\ 0)$ térgörbének $n-3$ kettőspontja van.[11]

10. Mindig maximális indexű egy másodrendű torzfelületen fekvő olyan $n$-edrendű térgörbe, amelyet a felületnek az egyik sugárseregbe tartozó alkotói $n-1$ pontban metszenek, vagy az olyan, amelyet az egyik sugárseregbe tartozó alkotók $n-2$, a másik sugárseregbe tartozó alkotók pedig 2 vagy 0 pontban metszenek.[12]

11. A másodrendű torzfelületen fekvő és egy menetből álló maximális indexű $n$-edrendű térgörbék valóságos és látszólagos kettőspontjainak együttes száma a térnek egy rajtuk kívül eső tetszőleges pontjára vonatkozólag vagy $\binom{n-1}{2}$, vagy pedig ennél eggyel kevesebb.[13]

12. A másodrendű torzfelületeken fekvő és egy menetből álló maximális indexű térgörbének vagy $n$, vagy $n-2$ simulósíkja megy át a tér egy tetszőleges pontján. A tér egy tetszőle-

---

szelője vagy érintője, $H=h-1$. Egy menet egy érintőjén fekvő pontokra vonatkozólag $H=h$, de ezek között a látszólagos kettőspontok között az egyik látszólagos csúcspont.

[10] 1 N, 559—560; 2 N 429; 1 M, 175.

[11] J, 284—286; 1 M, 176; 2 M, 206, 208.

[12] J, 292.

[13] J, 289; 1 M, 175.

ges egyenesét a térgörbének legfeljebb $2n-2$ érintője metszi. Mindig vannak olyan egyenesek, amelyek a térgörbének 0, 2,..., $2n-2$ érintőjét metszik.[14]

## 3. Irreducibilitás és reducibilitás.

Egy több menetből álló térgörbe akkor reducibilis, ha meneteit be lehet két vagy több csoportba úgy osztani, hogy az egyes csoportokba foglalt menetekből álló görbék rendszámainak összege a görbe rendszámával legyen egyenlő.[15] Ha a görbe egymenetű, vagy ha többmenetű, de nem reducibilis, akkor irreducibilis.

A maximális indexű síkgörbékhez és felületekhez hasonló módon[16] térgörbékre kimondható a következő tétel:

I. *Ha egy maximális indexű térgörbe reducibilis, akkor azok a térgörbék, amelyekre szétesik, szintén maximális indexűek.*

Az ellenkező esetben ugyanis volna egy olyan $n$-edrendű maximális indexű $G$ térgörbe, amely $G_1$, $G_2$,..., $G_k$ $n_1$-, $n_2$-,..., $n_k$-rendű térgörbékre esik szét, amelyek közül azonban $G_1$ nem maximális indexű. Ekkor volna olyan sík, amely a $G_1$ görbét legfeljebb $n_1-4$, a $G_2$, $G_3$,..., $G_k$ görbéket pedig legfeljebb $n_2$, $n_3$,..., $n_k$ pontban, a $G$ görbét tehát legfeljebb

$$(n_1-4)+n_2+n_3+\cdots+n_k=(n_1+n_2+\cdots+n_k)-4=n-4$$

pontban metszené. A $G$ görbe tehát nem lehetne maximális indexű.

II. *A maximális indexű $G$ térgörbe akkor és csak akkor irreducibilis, ha indexe menetei indexösszegével egyenlő. Ha a görbe rendszáma $2k$-val nagyobb menetei indexeinek összegénél, akkor a görbe $k$ számú irreducibilis görbére esik szét.*

Ha ugyanis a maximális indexű $n$-edrendű $G$ térgörbe az irreducibilis $G_1$, $G_2$,..., $G_k$ görbékre esik szét és ha $n_h$, illető-

[14] J, 290; J, 298.

[15] 1 M; 172. 10 N, 62—68, 74—75; 19 N, 680.

[16] 10 N, 63, 66—67; 19 N, 680.

leg $i_h$ jelöli a $G_h$ térgörbe rendszámát, illetőleg indexét, akkor a föltétel és az I. tétel alapján

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \quad n = i + 2,$$
$$n_1 = i_1 + 2, \quad n_2 = i_2 + 2, \ldots, \quad n_k = i_k + 2.$$

Ebből következik, hogy

$$n - 2 = i = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + 2(k - 1).$$

Mivel egy maximális indexű $G_h$ térgörbe indexe legalább is akkora, mint meneteinek indexösszege, azért

$$n - 2 = i = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + 2(k-1) \geqq$$
$$\geqq i'_1 + i'_2 + \cdots + i'_s + 2(k-1),$$

ahol $i'_1, i'_2, \ldots, i'_s$ jelöli a $G$ görbe meneteinek indexét.

Az utolsó egyenlőtlenségből következik, hogy maximális indexű reducibilis $G$ görbe indexe mindig nagyobb menetei indexösszegénél. Ezzel a II. tétel első része be van bizonyítva.

A tétel második részének bebizonyítása végett projiciáljuk a $G$ görbét egy kívüle fekvő $S$ pontból egy $\sigma$ síkra. A kapott $C$ síkgörbe rendszáma és indexe megegyezik a $G$ görbe rendszámával, illetőleg indexével. Hasonlókép ugyanaz a rendszáma, illetőleg indexe a $G$ görbe egy menetének, mint e menet síkbeli projekciójának.

Ha tehát $2k$-val nagyobb ($k>1$) a $G$ görbe rendszáma meneteinek indexösszegénél, akkor a maximális indexű $C$ síkgörbére is ugyanez áll. Ekkor azonban a $C$ görbe $k$ irreducibilis görbére esik szét.[17] Ezeket az irreducibilis síkgörbéket $C_1, C_2, \ldots, C_k$, rendszámukat pedig $n_1, n_2, \ldots, n_k$ betűkkel fogjuk jelölni.

Ha $G_h$ jelöli a $G$ görbének azt a részgörbéjét, amelynek a $C_h$ maximális indexű síkgörbe a projekciója, akkor az $S$ ponton áthaladó síkok a $G_h$ görbét vagy $n_h$, vagy $n_h-2$ pontban metszik. Mivel a $C_h$ görbe irreducibilis, azért indexe menetei indexösszegével egyenlő. Ugyanez áll a $G_h$ görbére is; ezért a $G_h$ görbét bármely sík legalább $n_h-2$ pontban metszi. De egy sík sem metszheti $n_h$-nál több pontban a $G_h$ görbét.

Ennek kimutatására az 5. tétel alapján elég annyit igazolni,

---

[17] 10 N, 66—67.

hogy a $G_h$ görbe egy érintőjén sem halad át olyan sík, amely a $G_h$ görbét az érintéspont beszámításával $n_h$-tól különböző számú pontban találja.

Ha ugyanis $n_h$-tól különböző számú pontban találná a $G_h$ görbét egy $P$ pontjának $p$ érintőjén átmenő $\alpha$ sík, akkor ugyanennyiben találná az $S$ ponton és a $p$ egyenesen átmenő $[S, p]$ sík is, mivel a $p$ tengely körül az $\alpha$ síkot elforgatva a sík és a $G$ görbe metszéspontjainak száma az 5. tétel értelmében nem változhatik meg. Ebből következik, hogy a forgatás alatt a sík és a $G_h$ görbe közös pontjainak száma is változatlan marad. De az $[S, p]$ sík $n_h$ pontban találja a $G_h$ görbét, mivel az $\sigma$ síkkal való metszésvonala az $n_h$-rendű $C_h$ maximális indexű görbét érinti.

Ezzel ki van mutatvé, hogy a $G_h$ térgörbe $n_h$-rendű és így maximális indexű. Ebből most már következik, hogy a $G$ görbe $G_1, G_2, \ldots, G_k$ irreducibilis görbékre esik szét, ebből pedig a II. tétel igazsága.

Az előző két tételből következik a következő:[18]

III. *Egy $k (\geqq 2)$ menetből álló irreducibilis maximális indexű térgörbe akkor is irreducibilis és maximális indexű térgörbe marad, ha menetei közül $m (< k)$ számút elhagyunk.*

## 4. Maximális indexű reducibilis görbék előállítása.

Maximális indexű reducibilis térgörbék létezését mondja ki a következő tétel:

IV. *Kettőnél nagyobb bármely $n_1$ és $n_2$ egész számokhoz van olyan egymenetű $n_1$-, illetőleg $n_2$-rendű maximális indexű térgörbe, amelyek egy másodrendű torzfelületen fekszenek és együttvéve egy $(n_1+n_2)$-rendű maximális indexű (reducibilis) térgörbét alkotnak.*

Ezt a tételt következő tételünk[19] alapján mutatjuk ki:

A síkban a $t_1$ és $t_2$ egyenespár által alkotott két szögtérben elhelyezhető egy-egy maximális osztályindexű $n_1$-, illetőleg $n_2$-osz-

[18] 10 N, 68; 19 N, 682.

[19] 9 N, 451—456.

tályú olyan $K_1$, illetőleg $K_2$ egymenetű görbe, amelyek a $t_1$ és $t_2$ közül az egyiket egyszeresen, a másikat $(n_1-1)$-szeresen, illetőleg $(n_2-1)$-szeresen érintik. Az ilyen $K_1$ és $K_2$ görbe együttvéve egy $n=(n_1+n_2)$-osztályú maximális osztályindexű olyan $K$ síkgörbét alkot, amelynek a $t_1$, $t_2$ egyenespárt érintő bármely $t_1$, $t_2$ egyenespárba eső $n$ közös érintőn kívül még vagy $n$, vagy $n-2$ közös érintője van. Bármely ilyen kúpszeletnek a $t_1$, $t_2$ egyenespárba eső $n_1$, illetőleg $n_2$ érintőn kívül a $K_1$, illetőleg $K_2$ görbével vagy $n_1$, vagy $n_1-2$, illetőleg vagy $n_2$, vagy $n_2-2$ közös érintője van.

Ennek a tételnek duálisa alapján a bevezetésben említett elnevezésekkel a következő tétel mondható ki:

*Bármely $n_1(\geq 3)$ és $n_2(\geq 3)$ egész számokhoz megadható a sík egy $P_1$, $P_2$ pontpárján átmenő $n_1$-, illetőleg $n_2$-rendű maximális indexű olyan $C_1$, illetőleg $C_2$ síkgörbe, hogy ezek együttvéve egy $n=(n_1+n_2)$-rendű maximális indexű $C$ síkgörbét alkossanak és hogy a $C_1$, $C_2$, illetőleg $C$ görbe a $P_1$, $P_2$ pontpáron átmenő bármely kúpszeletre vonatkozólag szintén $n_1$-, $n_2$-, illetőleg $n$-edrendű és maximális indexű legyen.*

Ha

$$\lambda_0 \cdot f_0(x, y) + \lambda_1 \cdot f_1(x, y) + \lambda_2 \cdot f_2(x, y) + \lambda_3 \cdot f_3(x, y) = 0 \quad (1)$$

a síkon a $P_1$, $P_2$ pontpáron áthaladó háromdimenziós kúpszelethálózat egyenlete Descartes-féle koordinátákban, akkor a

$$\xi = \frac{f_1(x, y)}{f_0(x, y)}, \quad \eta = \frac{f_2(x, y)}{f_0(x, y)}, \quad \zeta = \frac{f_3(x, y)}{f_0(x, y)} \quad (2)$$

transzformáció az $(x, y)$ síkot nyilvánkép egy $H$ másodrendű torzfelületbe, a $C$ síkgörbét pedig a $H$ felület egy olyan $n=(n_1+n_2)$-rendű maximális indexű $G$ térgörbéjébe viszi át, amely $n_1$-edrendű $G_1$ és $n_2$-rendű $G_2$ görbékre esik szét. A (2) transzformáció ebbe a két térgörbébe viszi át a $C_1$ és $C_2$ síkgörbéket.

A $\lambda_0+\lambda_1\xi+\lambda_2\eta+\lambda_3\zeta=0$ sík ugyanis annyi pontban metszi a $G$ térgörbét, mint amennyiben az (1) kúpszelet a kúpszelethálózat fixpontjain kívül a $C$ síkgörbét metszi, vagyis vagy $n$, vagy $n-2$ pontban.

Ezzel a IV. tételt teljesen bebizonyítottuk.

## 5. Maximális indexű térgörbék fajszáma.

Az $n$-edrendű maximális indexű $G$ térgörbe fajszámát a

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - h$$

egyenlet értelmezi, ahol $d$ a térgörbe valóságos kettőspontjainak száma, $h$ pedig a görbe látszólagos kettőspontjainak maximális száma.[20]

A fajszámnak ebből az értelmezéséből következik a következő tétel:

V. *A maximális indexű n-edrendű p-edfajú G térgörbének a görbén kívüli pontokból való centrális projekciói olyan n-edrendű maximális indexű síkgörbék, amelyeknek fajszáma vagy p, vagy p+1.*

Ha ugyanis a $G$ görbét egy $P$ pontja $t$ érintőjének egy $S$ pontjából egy $\sigma$ síkra projiciáljuk, akkor a $P$ pont projekciója a projiciálással kapott $C$ síkgörbének csúcspontja. A $t$ egyenes tetszőleges szomszédságában nyilvánkép van olyan $t'$, illetőleg $t''$ egyenes, amely a $P$ ponton keresztülmegy és a $G$ görbét a $P$ szomszédságában még egy pontban találja, illetőleg nem találja. Az ilyen $t'$, illetőleg $t''$ egyenesnek az $S$ ponthoz elég közelfekvő $S'$, illetőleg $S''$ pontjából projiciálva a $G$ görbét a $\sigma$ síkra a projiciálással kapott görbének a $P$ pont projekciója kettőspontja, illetőleg közönséges pontja.

Ebből következik, hogy az $S'$ pontból a látszólagos kettőspontok száma eggyel több, mint az $S''$ pontból, s így az $S'$-ből való projiciálással kapott síkgörbe fajszáma eggyel kisebb, mint az $S''$-ből való projiciálással kapott síkgörbéé.

Még csak azt kell belátnunk, hogy a $G$ görbének a tér akármilyen, de a görbén kívül eső $S'$, illetőleg $S''$ pontjából egy $\sigma$ síkra való $C'$, illetőleg $C''$ projekciójában fellépő kettőspontok száma is legfeljebb eggyel különbözhetik egymástól.

Az $S'$ és $S''$ pontokból való projiciálás a $C'$ és $C''$ maximá-

---

[20] 1 M, 175. 3 N, 290—291; 4 N, 434—444; 9 N, 425; 11 N, 164—165; 12 N, 179—187.

lis indexű síkgörbék pontjai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít. Ha a $G$ görbe $G_1$, $G_2$,..., $G_k$ irreducibilis görbékre esik szét, akkor a $C'$ és $C''$ görbe is $k$ irreducibilis görbére esik szét, amelyek a $G_1$, $G_2$,..., $G_k$ görbéknek $C_1'$, $C_2'$,..., $C_k'$, illetőleg $C_1''$, $C_2''$,..., $C_k''$ projekciói.

Ha a $C_1'$, illetőleg $C_2'$ görbének $n_1$, illetőleg $n_2$ a rendszáma, akkor a két görbe egymást $n_1 n_2$ számú pontban metszi,[21] mivel együttvéve maximális indexű reducibilis síkgörbét alkot. Ugyanennyi számú pontban metszi egymást a $C_1''$ és $C_2''$ görbe is. Ha pedig $N_1'$ és $N_2'$ a $C_1'$ irreducibilis síkgörbének két menete, akkor ezek egymást annyi pontban metszik, mint amennyi indexüknek a szorzata.[22] Ugyanennyi pontban metszi egymást a $C_1''$ görbe megfelelő $N_1''$ és $N_2''$ menete.

Ebből következik, hogy a $C'$ és $C''$ görbéken azoknak a kettőspontoknak száma, amelyekben különböző menetek metszik egymást, megegyezik. Ki fogjuk mutatni, hogy azoknak a kettőspontoknak együttes száma, amelyekben egy-egy menet önmagát metszi, a $C'$, illetőleg $C''$ görbén legfeljebb eggyel különbözik egymástól.

Mivel egy $k$ irreducibilis görbére széteső maximális indexű síkgörbének vagy $k$, vagy $k-1$ nulladfajú menete van, a többi menete pedig elsőfajú, azért a $C'$ és $C''$ görbék nulladfajú meneteinek száma vagy megegyezik, vagy pedig az egyiknek eggyel több nulladfajú menete van, mint a másiknak. Ha $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$,..., $\bar{n}_s$ jelöli a $C'$ görbe meneteinek rendszámait, akkor ugyanezek a $C''$ megfelelő meneteinek rendszámai is. Mivel az $\bar{n}_h$-rendű menet kettőspontjainak száma[23]

$$\frac{(\bar{n}_h - 1)(\bar{n}_h - 2)}{2} = \frac{n_h(\bar{n}_h - 3)}{2} + 1, \text{ illetőleg } \frac{\bar{n}_h(\bar{n}_h - 3)}{2}$$

a szerint, amint a menet nullad-, illetőleg elsőfajú, és mivel a $C'$ és $C''$ görbének vagy $k$, vagy $k-1$ nulladfajú menete van,

---

[21] 4 N. 441—444; 12 N. 186—187.

[22] 4 N. 440; 12 N. 183.

[23] 4 N. 435; 12 N. 179—180.

azért a $C'$ és hasonlókép a $C''$ görbének $s$ menetén együttvéve vagy

$$k+\sum'\frac{n_h(n_h-3)}{2},\quad \text{vagy}\quad k-1+\sum'\frac{n_h(n_h-3)}{2}$$

kettőspont van. Ebből következik, hogy a $C'$ és $C''$ görbék kettőspontjainak száma legfeljebb eggyel különbözhetik egymástól, amivel az V. tétel be van bizonyítva.

Az V. tétel megfordításából következik a következő tétel:

VI. *Az egy menetből álló maximális indexű térgörbék mind nulladfajúak.*

Az egymenetű maximális indexű térgörbék projekciója ugyanis egy menetből álló maximális indexű síkgörbe. Egy ilyen görbének fajszáma vagy zéró vagy egy. Az V. tétel alapján ebből következik, hogy a térgörbe fajszáma a két fajszám közül a kisebbik, vagyis zéró.

Ezt a tételt magában foglalja a következő tétel:

VII. *Az $s$ menetből álló maximális indexü irreducibilis térgörbék fajszáma $s-1$. Az $s$ menetből álló és $k$ irreducibilis görbére eső maximális indexű térgörbék fajszáma $p=s+1-2k$.*

A $s$ menetből álló és $k$ irreducibilis görbére szétesö maximális indexű $G$ térgörbének $C$ síkgörbe projekciójában a nulladfajú menetek száma vagy $k$, vagy $k-1$, az elsőfajú menetek száma tehát vagy $s-k$, vagy $s-k+1$. Ha $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jelöli annak $k$ irreducibilis síkgörbének a fajszámát, amelyre a $C$ síkgörbe szétesik, akkor $p_1, p_2, \ldots, p_k$ egyszersmind egyenlő a $C$ görbe azon elsőfajú meneteinek számával, amelyek a $C$ görbe első, második, illetőleg $k$-adik irreducibilis faktorgörbéjéhez tartoznak, mivel egy maximális indexű irreducibilis síkgörbe fajszáma menetei fajszámainak összegével egyenlő.[24]

A $k$ irreducibilis görbére szétesö maximális indexű $C$ síkgörbe $p$ fajszámát[25] a

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_k-k+1$$

[24] 4 N, 437; 12 N, 181.

[25] 4 N; 12 N.

egyenlet értelmezi. Az előbb mondottak értelmében a

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k$$

összeg a $C$ görbe elsőfajú meneteinek számával egyenlő és így vagy

$$p = (s-k) - k + 1 = s + 1 - 2k,$$

vagy

$$p = (s-k+1) - k + 1 = s + 2 - 2k.$$

E két fajszám közül az V. tétel értelmében a kisebbik a $G$ térgörbe fajszáma. Ezzel a VI. tétel be van bizonyítva.

## 6. Nehány összefüggés a maximális indexű térgörbe rendszáma, fajszáma, meneteinek és irreducibilis faktorgörbéinek száma között.

A VII. tétel a következőkép is kifejezhető:

VIII. *A $p$ fajszámú maximális indexű irreducibilis, illetőleg $k$ irreducibilis görbére szétesö térgörbék $p+1$, illetőleg $p+2k-1$ meneiből állanak.*

Ha a $k$ irreducibilis görbére szétesö $n$-edrendű $G$ maximális indexű térgörbe fajszáma $p$, meneteinek indexei pedig $i_1, i_2, \ldots, i_s$, akkor a II., illetőleg VII. tétel értelmében

$$n = i_1 + i_2 + \cdots + i_s + 2k \quad \text{és} \quad p = s - 2k + 1.$$

Minthogy egy maximális indexű térgörbének egy menete sem lehet zéróindexű (6. tétel), azért $i_1 \geqq 1$, $i_2 \geqq 1, \ldots, i_s \geqq 1$. Az előbbi két összefüggésből következik tehát a következő kettő:

$$n \geqq s + 2k \quad \text{és} \quad p = s - 2k + 1,$$

ezekből pedig a következő kettő

$$n + p \geqq 2s + 1 \quad \text{és} \quad n - p \geqq 4k - 1.$$

Ezekben az összefüggésekben akkor és csak akkor állhat fenn az egyenlőségi jel, ha a $G$ görbének valamennyi menete harmadrendű.

Ezekből az összefüggésekből következnek a következő tételek:

IX. *Bármely maximális indexű térgörbe rendszámának és fajszámának összege legalább eggyel nagyobb, mint menetei számának kétszerese. A rendszám és a fajszám összege ezzel a minimális számmal akkor és csak akkor egyenlő, ha a térgörbe csupa harmadrendű menetekből áll.*

X. *Az n-edrendű maximális indexű térgörbék fajszáma legfeljebb* $n-3$ *lehet. Az n-edrendű maximális indexű és k irreducibilis görbére szétesö térgörbék fajszáma azonban legfeljebb* $n+1-4k$ *lehet. A maximumot csak olyan n-edrendű térgörbék érik el, amelyeknek valamennyi menete harmadrendű.*

XI. *Az olyan maximális indexű n-edrendű térgörbe, amelynek fajszáma* $(n-7)$*-nél nagyobb, mindig irreducibilis. Ha a görbe p fajszáma eleget tesz a* $p>n+1-4k$ *egyenlőtlenségnek, akkor legfeljebb* $k-1$ *irreducibilis görbére esik szét.*

Mivel egy maximális indexű térgörbének harmadrendűnél alacsonyabbrendű menete nem lehet, azért az $n_1, n_2, \ldots, n_k$-rendű és $p_1, p_2, \ldots, p_k$-fajú irreducibilis görbékre széteső maximális indexű $G$ térgörbe rendszámára és fajszámára a következő összefüggések írhatók fel:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \geqq 3k$$

és

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k - k + 1 \geqq -k + 1.$$

Az első egyenlőtlenségből $k \leqq \left[\frac{n}{3}\right]$, ahol a szögletes zárójel a benne foglalt legnagyobb egész számot jelenti. A második egyenlőtlenségből tehát $p \geqq -\left[\frac{n}{3}\right] + 1$.

Ennélfogva igaz a következő tétel:

XII. *Az n-edrendű maximális indexű térgörbék fajszáma nem lehet a* $-\left[\frac{n}{3}\right]+1$ *számnál kisebb,*

Ebből a tételből következik, hogy a harmad-, negyed- és ötödrendű maximális indexű térgörbék közül egynek sem negatív a fajszáma. Ezzel szemben a síkban már a negyedrendűek között is van $-1$ fajszámú maximális indexű görbe.

## 7. A maximális indexű térgörbék valóságos és látszólagos kettőspontjairól.

Könnyen belátható a következő tétel:

XIII. *A maximális indexű térgörbéknek nincs csúcspontjuk.*

Ha ugyanis $Q$ a maximális indexű térgörbének csúcspontja volna, akkor a $G$ egy érintőjének $S$ pontjából a görbét egy $\sigma$ síkra projiciálva a vetületben kapott $C$ maximális indexű síkgörbének két csúcspontja volna, ami pedig lehetetlen.[26]

A fajszám értelmezéséből, továbbá az V—VIII. tételekből következnek a következő tételek:

XIV. *Bármely n-edrendű p-edfajú maximális indexű térgörbe valóságos és a tér egy általános pontjára vonatkozó látszólagos kettőspontjainak együttes száma*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p, \quad \text{vagy} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p - 1.$$

XV. *Bármely irreducibilis, illetőleg k irreducibilis görbére széteső, s menetből álló, maximális indexű n-edrendű térgörbe valóságos és a tér egy általános pontjára vonatkozó látszólagos kettőspontjainak együttes száma*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - s + 1, \quad \text{vagy} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - s,$$

*illetőleg*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - s + 2k - 1, \quad \text{vagy} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - s + 2k - 2.$$

A maximális indexű térgörbéknek mindig vannak látszólagos kettőspontjai, kivéve a harmadrendű görbéket (amelyeknek a tér bizonyos pontjaira vonatkozólag nincs látszólagos kettőspontjuk). A valóságos kettőspontok minimumát harmad-, negyed- és ötödrendű maximális indexű görbékre vonatkozólag, (amelyek a XI. és XII. tétel értelmében mindig irreducibilisek), közvetlenül megállapíthatjuk.

---

[26] 10 N, 73.

XVI. *Ha* $G_n^{(p)}$ *olyan maximális indexű térgörbét jelent, amelynek* $n$ *a rendszáma és* $p$ *a fajszáma, akkor a* $G_3^{(0)}$, $G_4^{(1)}$, $G_5^{(2)}$, *és általánosan a* $G_n^{(n-3)}$ *görbéknek nincs kettőspontjuk, a* $G_4^{(0)}$ *és* $G_5^{(1)}$ *görbéknek legfeljebb egy, a* $G_5^{(0)}$ *görbéknek pedig legfeljebb két kettőspontjuk lehet.*

A $G_3^{(0)}$, $G_4^{(1)}$, $G_5^{(2)}$ és általánosan a $G_n^{(n-3)}$ görbék csupa harmadrendű menetekből álló irreducibilis térgörbék. Egy harmadrendű menetnek sem lehet kettőspontja, mert ha volna, akkor a kettőspontón és a menet két más pontján átmenő sík a harmadrendű menetet háromnál több pontban találná. Két harmadrendű menetnek csak akkor lehet közös pontja, ha a két menet reducibilis térgörbét alkot. Ha ugyanis az $M_1$ és $M_2$ harmadrendű meneteknek $P$ egy közös pontja volna, akkor a $P$ ponton és a két menetnek még egy-egy pontján átmenő sík mindkét menetet 3—3 pontban metszené és így a két menetet együttvéve hat pontban találná. Egy olyan sík ugyanis, amely egy páratlan menetet páros számú pontban talál, a páratlan menetet legalább még egy pontban találja.

Mivel egy irreducibilis maximális indexű térgörbének bármely két menete irreducibilis görbét alkot, azért ezzel a tétel a $G_3^{(0)}$, $G_4^{(1)}$, $G_5^{(2)}$,..., $G_n^{(n-3)}$ görbékre be van bizonyítva.[27]

A $G_4^{(0)}$, illetőleg $G_5^{(0)}$ egymenetű térgörbéknek egynél, illetőleg kettőnél nem lehet több kettőspontjuk. Ha ugyanis a $G_4^{(0)}$ görbének legalább két kettőspontja volna, akkor ezeken és a görbének egy harmadik pontján átmenő sík a görbét négynél több pontban metszené. A három vagy több kettősponttal bíró $G_5^{(0)}$ görbét három kettőspontján átmenő sík legalább hat pontban találná.

A $G_5^{(1)}$ görbe két menetből áll, egy harmadrendű $M_1$ és egy negyedrendű $M_2$ menetből. E két menetnek nem lehet egynél több közös pontja, mert ha volna legalább két közös pontja, akkor ilyen két ponton és az $M_2$ negyedrendű menet egy harmadik pontján átmenő sík a két menetet együttvéve 7 pontban találná. Hasonlókép 7 pontot vágna ki az ötödrendű $G_5^{(1)}$ görbéből az a sík, amely az $M_2$ menet kettőspontján, az $M_1$ és $M_2$

[27] L. a 7. tételt.

menetek egy közös pontján és az $M_1$ menet egy másik pontján menne keresztül.

Ezzel a XVI. tétel teljesen be van bizonyítva.

Legalább negyedrendű térgörbékre kimondható a következő tétel:

XVII. *Az egy menetből álló maximális indexű n-edrendű térgörbéknek legfeljebb* $\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$ *valóságos kettőspontjuk lehet és így a tér bármely általános pontjára vonatkozólag legalább* $2n-7$ *látszólagos kettőspontjuk van.*

Legyen ugyanis $P$ az egy menetből álló maximális indexű $n$-edrendű $G$ térgörbének egy kettőspontja. Ha ebből a pontból a $G$ görbét a $P$-n át nem menő $\sigma$ síkra projiciáljuk, akkor a $\sigma$ síkon kapott $C$ síkgörbe nyilvánkép $(n-2)$-edrendű, maximális indexű és egy menetből álló. A $G$ görbe $P$ kettőspontjának a $C$ görbén az a két pont felel meg, amelyben a $P$ kettőspont két érintője metszi a $\sigma$ síkot. A $G$ görbe többi kettőspontjának a $C$ síkgörbén is kettőspont felel meg.

Mivel az $(n-2)$-edrendű maximális indexű $C$ görbének 0 vagy 1 a fajszáma, azért kettőspontjainak száma $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$, vagy $\frac{(n-3)(n-4)}{2}-1$. A $G$ görbe valóságos kettőspontjainak $d$ számára tehát fönnáll a

$$d \leqq \frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$$

egyenlőtlenség.

Mivel a tér egy általános pontjára vonatkozólag a $G$ görbe valóságos és látszólagos kettőspontjainak együttes száma

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}-1=\frac{n(n-3)}{2},$$

azért a látszólagos kettőspontok száma legalább

$$\frac{n(n-3)}{2}-d \geqq \frac{n(n-3)}{2}-\frac{(n-3)(n-4)}{2}-1=2n-7.$$

Ezzel a XVII. tétel be van bizonyítva.

Kimutatjuk még a következő tételt:

XVIII. *Ha $M_1$ és $M_2$ egy maximális indexű irreducibilis térgörbének $n_1$, illetőleg $n_2$-rendű menete, akkor a két menetnek legfeljebb $(n_1-3)(n_2-3)+1$ közös pontja lehet; ha mindkét menet harmadrendű, akkor nem lehet közös pontjuk. Ha a $G_1$ és $G_2$ $n_1$-, illetőleg $n_2$-rendű maximális indexű térgörbék együttvéve egy $(n_1+n_2)$-rendű maximális indexű térgörbét alkotnak, akkor a $G_1$ és $G_2$ térgörbéknek nem lehet több, mint $(n_1-1)(n_2-1)+1$ közös pontjuk.*

Ha ugyanis $S$ az $M_1$ és $M_2$ menet közös pontja, akkor a két menetet az $S$ pontból egy rajta át nem menő $\sigma$ síkra projiciálva $(n_1-1)$-edrendű $N_1$, illetőleg $(n_2-1)$-edrendű $N_2$ síkgörbét kapunk. Az $S$ pontnak a síkon két különböző pont felel meg és pedig az a két pont, amelyben a síkot az $S$ pont két érintője metszi; az egyik pont az $N_1$, a másik az $N_2$ görbén van. Az $M_1$ és $M_2$ menet többi metszéspontjának az $N_1$ és $N_2$ egy-egy metszéspontja felel meg.

Az $N_1$, illetőleg $N_2$ rendszáma és indexe is eggyel kisebb, mint az $M_1$, illetőleg $M_2$ menet megfelelő két száma. Mivel az $M_1$ és $M_2$ maximális indexű irreducibilis $G$ görbét alkot, azért a $G$ görbe rendszáma kettővel nagyobb az $M_1$ és $M_2$ menet indexeinek összegénél. Ugyanez áll az $N_1$ és $N_2$ görbékből álló $C$ síkgörbére is, mert ennek rendszáma is, meneteinek indexösszege is kettővel kisebb, mint a $G$ görbe rendszáma, illetőleg indexe. A $C$ görbe tehát irreducibilis maximális indexű síkgörbe, amiből következik, hogy az $N_1$ és $N_2$ menetek közös pontjainak száma[28] a két menet indexének szorzatával, vagyis az $(n_1-3)(n_2-3)$ számmal egyenlő. Az $M_1$ és $M_2$ menetnek tehát ennél a számnál legfeljebb eggyel lehet több közös pontjuk.

A tétel első részének két harmadrendű menetre vonatkozó része a XVI. tétel bizonyításából következik.

A tétel második részének bizonyítása céljából jelöljük $S$-sel a $G_1$ és $G_2$ görbék egy metszéspontját és projiciáljuk ebből a pontból a $G_1$ és $G_2$ görbékből álló $G$ görbét az $S$ ponton át nem menő egy $\sigma$ síkra. A projekcióban a $G_1$, illetőleg $G_2$ görbéknek olyan $(n_1-1)$-rendű $C_1$, illetőleg $(n_2-1)$-rendű $C_2$ görbe

[28] 4 N, 440; 12 N, 183.

felel meg, amelyek együttvéve egy $(n_1+n_2-2)$-rendű maximális indexű $C$ síkgörbét alkotnak. A $C_1$ és $C_2$ görbék metszéspontjainak száma tehát rendszámuk szorzatával,[29] vagyis az $(n_1-1)(n_2-1)$ számmal egyenlő. Mivel a $G_1$ és $G_2$ görbék bármely az $S$-től különböző metszéspontja a projiciálás által a $C_1$ és $C_2$ görbék egy-egy metszéspontjába megy át, azért ezzel a tétel második része is be van bizonyítva.

A XVII. és XVIII. tételből következik a következő tétel:

XIX. *Ha az n-edrendű maximális indexű irreducibilis $G$ térgörbe $s$ számú menetből áll, akkor kettőspontjainak száma legfeljebb*

$$\frac{s(s+1)}{2}+\frac{(n-2-s)(n-3-s)}{2}.$$

Ha ugyanis $M_1, M_2, \ldots, M_s$, illetőleg $n_1, n_2, \ldots, n_s$ jelöli a $G$ görbe meneteit, illetőleg azok rendszámait, akkor a $G$ görbe irreducibilitása miatt

$$n = i_1+i_2+\cdots+i_s+2 = n_1+n_2+\cdots+n_s+2-2s.$$

A $G$ görbe $d$ számú kettőspontja részint az egyes meneteknek kettőspontja, részint két-két menet metszéspontja. A XVII. és XVIII. tétel szerint tehát a $G$ görbe kettőspontjainak $d$ számára fennáll a

$$d \leqq \sum_{h=1}^{s}{}' \left[\frac{(n_h-3)(n_h-4)}{2}+1\right] + \sum_{h,\,k=1,\,2,\ldots,\,s\,(h\neq k)}{}' (n_h-3)(n_k-3)+1]$$

egyenlőtlenség, amelyből megfelelő átalakítással azt kapjuk, hogy

$$d \leqq \frac{s(s+1)}{2}+\frac{(n-2-s)(n-3-s)}{2}.$$

Ezzel a XIX. tétel teljesen be van bizonyítva.

Ha a maximális indexű irreducibilis térgörbének van harmadrendű menete is, akkor a görbe kettőspontjainak száma mindig kisebb, mint a XIX. tételben megadott szám. Ezt a számot ugyanis a XVII. és XVIII. tételek alapján kaptuk. Ezekben a

[29] 4 N, 441–444; 12 N, 186–187.

tételekben pedig föltételeztük, hogy a görbemenetnek van kettőspontja, illetőleg, hogy két görbemenetnek van közös pontja. Ennek a föltételezett kettőspontnak, illetőleg közös pontnak beszámításával adja meg az a két tétel a kettőspontok, illetőleg metszéspontok egy felső határát. Már pedig harmadrendű menetnek nincs kettőspontja és egy irreducibilis maximális indexű térgörbe két harmadrendű menetének nincs közös pontja.

Ha tehát $a$ jelöli a $G$ irreducibilis térgörbe harmadrendű meneteinek számát, akkor a XIX. tétel bebizonyításában használt első összeg $a$-val, a második összeg $\frac{a(a-1)}{2}$-vel kisebbíthető, mivel a két összegnek egy-egy, illetőleg két két harmadrendű menetére vonatkozó tagjaiban a $+1$ összeadandó elhagyható. Ebből következik a XIX. tétel alapján a következő tétel:

XX. *Ha az n-edrendű maximális indexű irreducibilis G térgörbe s menetből áll, amelyek közül a harmadrendűek számát «a» jelöli akkor a G görbe valóságos kettőspontjainak száma legfeljebb*

$$\frac{s(s+1)}{2} - \frac{a(a+1)}{2} + \frac{(n-2-s)(n-3-s)}{2}.$$

Ez a tétel a csupa harmadrendű menetekből álló irreducibilis térgörbére vonatkozólag pontosan megadja a kettőspontok számát, mivel ez a szám zéró.

Hasonló okoskodással, mint amilyennel a XVII. és a XVIII. tételt lehoztuk, arra az esetre is lehet megfelelő tételt megállapítani, amikor egy menetnek egy $q$-szoros pontja van, illetőleg amikor egy irreducibilis térgörbe két menetének olyan közös pontja van, amely az egyik menetre vonatkozólag $q_1$-szeres, a másikra pedig $q_2$-szörös pont.

## 8. A maximális indexű térgörbék osztályszáma.

Egy $G$ térgörbe *osztályszáma* a $G$ görbéhez a tér egy tetszőleges pontján átmenő simulósíkok számának maximuma. E simulósíkok számának minimuma pedig a görbe *osztályindexe*.

Ebből az értelmezésből következik, hogy a $G$ térgörbe $m$

osztályszáma, illetőleg osztályindexe a $G$ görbének a tér különböző pontjaiból való síkbeli projekcióiban fellépő inflexiós pontok maximális, illetőleg minimális számával egyenlő.

Ha a $G$ maximális indexű térgörbe $n$-edrendű és $p$-edfajú, akkor a tér egy általános pontjából a $G$ görbének egy síkbeli projekciója vagy $p$, vagy $p+1$ fajszámú. Egy $n$-edrendű $p$-edfajú maximális indexű síkgörbe inflexiós pontjainak száma[30] $n+2p-2$ lévén, a $G$ görbe egy általános projekciójában vagy $n+2p-2$, vagy $n+2(p+1)-2=n+2p$ inflexiós pont van.

Ebből következnek a következő tételek:

XXI. *A maximális indexű térgörbék egyszersmind maximális osztályindexűek.*

XXII. *Az $n$-edrendű $p$-edfajú maximális indexű térgörbének $n+2p-2$, illetőleg $n+2p$ simuló síkja megy át minden olyan térbeli ponton át, amelyre vonatkozólag a térgörbe látszólagos kettőspontjainak száma maximális, illetőleg minimális.*

XXIII. *A nulladfajú maximális indexű térgörbék ugyanolyan rendű és osztályú maximális osztályindexű térgörbék.*

## 9. A maximális indexű térgörbék rangszáma.

A $G$ térgörbe $r$ *rangszáma* a görbe olyan érintőinek maximális száma, amelyek a tér egy tetszőleges egyenesét metszik.

Ha $E$ jelöli egy $e$ egyenesnek egy $\sigma$ síkkal való metszéspontját és $C$ a $G$ görbének az $e$ egyenes egy $S$ pontjából való vetületét a $\sigma$ síkon, akkor a $G$ görbének az $e$ egyenest metsző érintői és a $C$ görbéhez az $E$ pontból húzható érintők a projekcióban egymásnak kölcsönösen megfelelnek.

A maximális indexű $n$-edrendű $p$-edfajú $G$ térgörbe rangszámának meghatározása végett nyilvánkép elég olyan $e$ egyenesekre szorítkoznunk, amelyek a $G$ görbének legalább egy érintőjét a görbén kívül metszik. Ha az $e$ egyenesen $Q$ egy ilyen metszéspont, akkor az $e$ egyenesen mozgó pontból a $G$ görbéhez húzható kettősszelők száma eggyel változik azalatt, amíg a $P$ pont a $Q$ pontban a $G$ görbe érintőjét átlépi. Van

[30] 3 N; 11 N.

tehát az $e$ egyenesen olyan $S$ pont, amelyből a $G$ görbe látszólagos és valóságos kettőspontjainak együttes száma maximális Ilyen $S$ pontból a $G$ görbének egy $\sigma$ síkra való projekciója $p$-edfajú $n$-edrendű maximális indexű síkgörbe. Ehhez a görbéhez az $e$ egyenesnek a $\sigma$ síkkal való $E$ metszéspontjából húzható érintők száma legfeljebb a görbe osztályszámával egyenlő.

Egy $n$-edrendű $p$-edfajú maximális indexű síkgörbe $r$ osztályszáma eleget tesz az $r \leq 2n-2+2p$ egyenlőtlenségnek.[31]

Ebből következik a következő tétel:

XXIV. *Az $n$-edrendű $p$-edfajú maximális indexű $G$ térgörbék rangszáma legfeljebb $2n+2p-2$.*

Ebből a tételből a fajszám értelmezése alapján a következő tétel következik:

XXV. *Az $n$-edrendű maximális indexű $G$ térgörbék rangszáma legfeljebb $n(n-1)-2(d+h)$, ahol $d$ a térgörbe valóságos kettőspontjainak számát, $h$ pedig a tér egy általános pontjára vonatkozó látszólagos kettőspontok számának maximumát jelenti.*

## 10. A maximális indexű térgörbék átalakítása kettőspontnélküli térgörbékké.

A maximális indexű $G$ térgörbének a $P$ kettőspontját alkotó két ívét $\gamma_1$-gyel és $\gamma_2$-vel, ezeknek a $P$ pontba tartozó érintőit $p_1$-gyel, illetőleg $p_2$-vel jelöljük. A $p_1$ érintő egy $S_1$ pontjából a $G$ görbét egy $\sigma$ síkra projiciáljuk, a síkon kapott maximális indexű síkgörbét $C$-vel, a $P$ pont, a $p_2$ érintő, a $\gamma_1$, illetőleg $\gamma_2$ ív projekcióját $Q$-val, $q_2$-vel, $\delta_1$-gyel, illetőleg $\delta_2$-vel jelöljük. A $P$-t belsejükben tartalmazó $\gamma_1$ és $\gamma_2$ ívek alkalmas megválasztásával mindig elérhetjük, hogy a $C$ görbe $\delta_1$ és $\delta_2$ íveinek a $Q$ ponton kívül más közös pontjuk ne legyen.

Föltételezhetjük, hogy a $G$ görbe a $P$ pontban nem érinti önmagát, vagyis: hogy $p_1$ és $p_2$ nem esnek egybe és így $q_2$ nem pont, hanem egyenes.

Ha ugyanis érinti a $G$ görbe a $P$ pontban önmagát, akkor a $Q$ pont a $\delta_1$ és $\delta_2$ íveknek közös csúcspontja. Ha $t_1$, illetőleg

[31] 5 N, 6 N, 7 N; 15 N, 16 N.

$t_2$ jelöli azt az egyenest, amelyben a $\gamma_1$, illetőleg $\gamma_2$ ív $P$ pontjához tartozó simulósík a $\sigma$ síkot metszi, akkor $t_1$, illetőleg $t_2$ a $\delta_1$, illetőleg $\delta_2$ íven fekvő csúcspontnak a csúcsérintője. Ha $t_1$ és $t_2$ nem esik egybe, akkor a $\sigma$ síkban lehet a $Q$ ponton át olyan $e$ egyenest húzni, amelynek a $Q$ pontba eső négy metszéspontion kívül a $Q$ szomszédságában nincs más közös pontja a $\delta_1$ és $\delta_2$ ívekkel. Ekkor azonban az $e$ egyenes tetszőleges szomszédságában nyilvánképpen van a $Q$ ponton át nem menő olyan $f$ egyenes, amelynek a $C$ görbével néggyel kevesebb metszéspontja van, mint az $e$ egyenesnek. Ha pedig $t_1$ és $t_2$ összeesik, akkor a $t_1$ egyenesnek a $Q$ pontban hat közös pontja van a $\delta_1$ és $\delta_2$ ívekkel együttvéve. Ennek a $t_1$ egyenesnek tetszőleges közelségében nyilvánkép van a $Q$ ponton át nem menő olyan $f$ egyenes, amelynek néggyel kevesebb metszéspontja van a $C$ görbével, mint a $t_1$ egyenesnek. Akár különbözik tehát a $t_1$ és $t_2$ egymástól, akár nem, mindig ahhoz a következményhez jutunk, hogy a $\sigma$ síkban van olyan két egyenes, amelyeken a $C$ görbével való közös pontok száma egymástól néggyel különbözik. Ez azonban lehetetlen, mivel a $C$ görbe maximális indexű.

Ezzel ki van mutatva, hogy a $\gamma_2$ ív $p_2$ érintőjének projekciója a síkon egy $q_2$ egyenes, amely a $\delta_2$ ívet a $Q$ pontban érinti. A $Q$ pont egyszersmind csúcspontja a $\delta_1$ ívnek. Ennek a pontnak csúcsérintője a $\sigma$ síknak a $\gamma_1$ ív $P$ pontjához tartozó simulósíkkal való $t_1$ metszésvonala.

A $\delta_2$ ívnek a $Q$ pont közönséges pontja. Ha ugyanis inflexiós pontja volna, akkor a $q_2$ egyenes tetszőleges közelségében volna olyan $f$ egyenes a $\sigma$ síkban, amelynek a $Q$ pont szomszédságában néggyel kevesebb közös pontja a $C$ görbével, mint a $q_2$ egyenesnek. Ekkor azonban volna a síkban két olyan egyenes, amelyeken a $C$ görbével való metszéspontok száma néggyel különbözik.

Ugyanemiatt az ok miatt a $\delta_1$ ív a $\delta_2$ ívnek konvex oldalán fekszik.

A $\delta_2$ ív $q_2$ érintője nem eshetik össze a $Q$ pont $t_1$ érintőjével. Ha ugyanis összeesnék, akkor a $t_1$ egyenes tetszőleges közelségében volna a $\sigma$ síkban olyan $f$ egyenes, amely a $Q$ pont szomszédságában a $\delta_1$ és $\delta_2$ íveket együttvéve is csak egy pont-

ban találná, míg a $t_1$ egyenesnek $Q$-ban e két ívvel együttvéve öt közös pontja van. Ha pedig a $\delta_2$ ív a $\delta_1$ konkáv oldalán volna, akkor a $\delta_1$ és $\delta_2$ íveket a $Q$ pontban együttvéve négy pontban találó $q_2$ egyenes tetszőleges közelségében a $\delta_2$ konvex oldalán volna olyan $f$ egyenes, amelynek a $\delta_1$ és $\delta_2$ ívekkel a $Q$ szomszédságában nincs közös pontja. A $C$ görbe egyik esetben sem volna maximális indexű.

Könnyen belátható, hogy abban az esetben, amikor a $P$ ponton a $G$ görbének egy harmadik $\gamma_3$ íve is keresztülmegy, akkor az elég kicsiny $\gamma_3$ ívnek az $S_1$ pontból való $\delta_3$ projekciójának is konvex oldalára esik a $\delta_1$ ív.

A $Q$ csúcspontból nem húzható a maximális indexű $C$ görbéhez olyan érintő. amely a görbét a $Q$ ponton kívül érintené. (Az ellenkező esetben volna ugyanis az ilyen érintő szomszédságában olyan egyenes, amelynek a $C$-vel néggyel kevesebb közös pontja volna, mint ennek az érintőnek.) Ebből következik, hogy a $\sigma$ síkban a $Q$ ponton átmenő bármely egyenes az $n$-edrendű $C$ görbét $n$ pontban találja.

Nyújtsuk meg most kissé végpontjainak és azokban az érintőinek megtartásával a $\delta_1$ ívet úgy, hogy a csúcspontját a $t_1$ érintőn a $\delta_2$ ív konkáv oldalán az eredeti $Q$ csúcsponthoz elég közeli $Q_0$ pontba juttatjuk. Ilyen deformációval nyilvánkép át lehet alakítani a $C$ görbét egy ugyanolyan rendű és indexű $C'$ görbébe. Mivel a $Q$ pont helyett a $\delta_2$ ív konkáv oldalán a $Q$-hoz elég közeli $Q_0$ pontba jut a csúcspont és mivel a $Q$-ból a $C$ görbéhez a $t_1$ és $q_2$ érintőkön kívül más érintő nem húzható, azért $Q_0$-ból a $t_1$ csúcsérintőn kívül nem húzható érintő sem a $C$, sem a $C'$ görbéhez. Ebből következik, hogy a $Q$ és $Q_0$ pontok szomszédságában fekvő pontokon átmenő egyeneseknek legfeljebb $n$ és legalább $n-2$ közös pontjuk van a $C$ görbével. Más egyenesek pedig ugyanazokban a pontokban metszik a $C$ és $C'$ görbéket, s így ezeknek a száma is vagy $n$, vagy $n-2$.

A $C$ görbének a $Q$ pont szomszédságában két kettőspontja van. Ezekben a pontokban metszi a $\delta_1$ megnyujtásával kapott $\delta_1^*$ ív a $\delta_2$ ívet.

Alkalmazzunk most a $G$ görbére egy megfelelő deformációt. Ebben a deformációban a $\gamma_1$ ívet a $S_1Q_0$ egyenest érintő és a

$\gamma_2$ ívet nem metsző olyan harmadrendű ívvel helyettesítjük, amelynek $S_1$-ből való centrális projekciója a $\delta_1^*$ ív.

A $G$ görbéből ily módon nyilvánképen kaphatunk vele egyenlőrendű és indexű $G'$ térgörbét. Ezen a $G'$ görbén eggyel kevesebb kettőspont van, mint a $G$ görbén volt. Az $S_1$ pontra vonatkozólag a $G'$ görbén a $G$ görbe megszűnt kettőspontja közelében két látszólagos kettőspont lép fel. Ezek közül az egyik a $G$ görbén is föllépő látszólagos kettőspontnak felel meg, mivel a $Q$ pont a $\delta_1$ és $\delta_2$ ívekre vonatkozólag együttesen háromszoros pontnak számít. Ebbe a háromszoros pontba összeeső három kettőspont közül egy a $G$ görbe valóságos kettőspontjának, a másik a görbe egy látszólagos kettőspontjának felel meg, a harmadik, a csúcspont a $C'$ görbén is csúcspont marad.

Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt:

XXVI. *Bármely maximális indexű térgörbe folytonos deformációval átvihető egy ugyanazon rendű, indexű és fajú olyan térgörbébe, amelynek nincs valóságos kettőspontja, vagy többszörös pontja.*

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. febr. 17-én tartott üléséből.)

# ÜBER DIE RAUMKURVEN VON MAXIMALINDEX.

Von JULIUS v. SZ. NAGY.

Unter einer Raumkurve verstehen wir hier eine aus endlichvielen Bogen dritter Ordnung bestehende, gewundene und geschlossene Kurve, die in jedem Punkte eine mit dem Berührungspunkt sich stetig ändernde Tangente und Schmiegebene besitzt. Eine Raumkurve kann aus mehreren Zügen bestehen.

Anschliessend an die Resultate[1] von C. JUEL, H. MOHRMANN und JULIUS v. SZ. NAGY wird erst die Reduzibilität bzw. Irreduzibilität der Raumkurven von Maximalindex definiert. Dann werden die hinreichenden und notwendigen Bedingungen der Reduzibilität bzw. Irreduzibilität der Raumkurven von Maximalindex bestimmt.

Es wurde auch gezeigt, dass es reduzible Raumkurven von Maximalindex gibt.

Das Geschlecht einer Raumkurve $n$-ter Ordnung vom Maximalindex ist durch die Gleichung

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - h$$

definiert, wo $d$ die Anzahl der Doppelpunkte und $h$ die Maximalanzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Raumkurve bedeutet.

Es werden unter anderen die folgenden Sätze hergeleitet:

Jede einzügige Raumkurve vom Maximalindex ist vom Geschlecht Null. Besteht eine irreduzible Raumkurve von Maximalindex aus $s$ Zügen, so hat sie das Geschlecht $s-1$. Besteht eine in $k$ irreduzible Kurven zerfallende Raumkurve von Maximalindex aus $s$ Zügen, so ist sie vom Geschlecht $s+1-2k$.

---

[1] S. die Fussnoten [1] und [2] im ungarischen Text.

Eine aus $s$ Zügen bestehende irreduzible Raumkurve $n$-ter Ordnung vom Maximalindex hat höchstens

$$\frac{s(s+1)}{2} - \frac{a(a+1)}{2} + \frac{(n-2-s)(n-3-s)}{2}$$

Doppelpunkte, wo $a$ die Anzahl der Züge dritter Ordnung bedeutet.

Die Raumkurven von Maximalindex und vom Geschlecht Null haben dieselbe Ordnung und Klasse und denselben Index und Klassenindex. Die Raumkurven $n$-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht $p$ haben die Klasse $n+2p$ und den Klassenindex $n+2p-2$.

Der Rang einer Raumkurve von Maximalindex ist höchstens $2n+2p-2$, wo $p$ das Geschlecht der Kurve ist.

Jede Raumkurve von Maximalindex lässt sich durch kleine Deformation in eine Raumkurve derselben Ordnung und von demselben Index überführen, die keine Doppelpunkte besitzt.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 17. Febr. 1936.)

# IZOMORF FÜGGVÉNYRENDSZEREKRŐL.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁ-tól.

## Bevezetés.

HAAR ALFRÉD két munkájában[1] a következő kérdést vizsgálta: Milyen szükséges és elegendő feltételek mellett van egy adott ($c_{pqr}$) végtelen köbös matrixhoz egy $\mathfrak{M}$ mérhető halmazon értelmezett $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$,..., $\psi_n(s)$,... «önmagában zárt» orthogonális függvényrendszer, amelyre

$$\int_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\,\psi_q(s)\,\psi_r(s)\,ds = c_{pqr}.$$

«Önmagában zártság»-on HAAR azt érti, hogy az 1, valamint a $\psi_p(s).\psi_q(s)$ függvények négyzetintegrálra tetszőleges pontossággal megközelíthetőek a $\psi$-k lineáris kapcsolataival. Nála tehát mindig fel van tételezve, hogy a konstans függvény $\mathfrak{M}$-en integrálható. Hogy a fenti integrálok létezését biztosítsa, HAAR korlátos $\psi$-kre szorítkozott s ezekre meg is oldotta a problémát.

Világos a

$$\psi_p(s)\,\psi_q(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\,\psi_q(s)\,\psi_r(s)\,ds\right).\psi_r(s)$$

sorfejtésből, hogy ha a $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$,..., $\psi_n(s)$,... függvényeket azon kommutatív hiperkomplex rendszer főegységeinek tekintjük,

---

[1] A. HAAR, Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Zeitschr., **31** (1930), 769—798. o.; Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme, Annali di Pisa, **2** (1933), 21—40. o. A második dolgozat az elsőnek valós értékű rendszerekre lehozott eredményeit komplex értékű rendszerek esetére általánosítja.

amelyet a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(s)$ (hol $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergens) függvények alkotnak, akkor a $c_{pqr}$ konstansok éppen e rendszer multiplikációs táblázatát alkotják.

Két orthogonális függvényrendszert, amelynek ugyanaz a multiplikációs táblázata, HAAR-ral együtt izomorfoknak fogunk nevezni. Ha egy mértéktartó leképezéssel az $\mathfrak{M}$ halmazt egy $\mathfrak{M}'$ halmazra képezzük le, a $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$,... rendszer egy izomorf $\psi_1'(s')$, $\psi_2'(s')$,... rendszerbe megy át. HAAR első dolgozatának végén kimondotta, hogy ez a tény teljes orthogonális rendszerek esetében megfordítható: bármely két izomorf teljes orthogonális függvényrendszer az alaphalmazok mérhető halmazainak mértéktartó megfeleltetésével egymásba vihető át.

E dolgozatban elsősorban is e mindeddig bizonyítatlanul maradt tétel bebizonyítása és különböző irányokban való kiterjesztése a célunk. Az utolsó két §-ban még tovább megyünk, teljes rendszerek helyett önmagukban zárt rendszereket vizsgálunk. Be fogjuk látni, hogy e rendszerek lényegükben nem különböznek a teljes rendszerektől. Ez egyszersmind megmagyarázza az önmagukban zárt és teljes rendszereknek a multiplikációs táblázatra vonatkozó HAAR-féle vizsgálatokban látható hasonló viselkedését. Azzal, hogy az önmagában zártság HAAR-féle definícióját az 1 függvényre való feltétel elejtésével enyhítjük, lehetővé tesszük ezeknek az eredményeknek a legáltalánosabb esetekre való alkalmazását.

## TELJES RENDSZEREK.

### 1. §. A négyzetesen integrálható függvények megfeleltetése.

Legyen $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ két *véges* vagy *végtelenbe nyúló intervallum*. A $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$,... függvények alkossanak $\mathfrak{M}$-en, a $\psi_1'(s')$, $\psi_2'(s')$, $\psi_3'(s')$,... függvények pedig $\mathfrak{M}'$-n egy-egy *teljes orthogonális* függvényrendszert. A $\psi$-k és $\psi'$-k tehát mérhető függvények, négyzeteik integrálhatóak, továbbá

$$\int_{\mathfrak{M}} \psi_i(s)\,\psi_k(s)\,ds = \int_{\mathfrak{M}'} \psi_i'(s')\,\psi_k'(s')\,ds' = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k, \\ 0, & \text{ha } i \neq k, \end{cases}$$

és végül bármely mérhető, négyzetesen integrálható $f(s)$, $g(s)$, illetőleg $f'(s')$, $g'(s')$ függvénypárra érvényes a PARSEVAL-féle összefüggés

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}} f(s)\, g(s)\, ds &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} f(s)\, \varphi_i(s)\, ds \,.\, \int_{\mathfrak{M}} g(s)\, \varphi_i(s)\, ds \\ \int_{\mathfrak{M}'} f'(s')\, g'(s')\, ds' &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}'} f'(s')\, \varphi_i'(s')\, ds' \,.\, \int_{\mathfrak{M}'} g'(s')\, \varphi_i'(s')\, ds'. \end{aligned} \tag{1}$$

Feltesszük még, hogy a $\varphi$-k és $\varphi'$-k mindegyike különkülön korlátos. Ekkor mindenesetre léteznek az

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, \varphi_r(s)\, ds \quad \text{és} \quad \int_{\mathfrak{M}'} \varphi_p'(s')\, \varphi_q'(s')\, \varphi_r'(s')\, ds'$$

integrálok. Feltesszük még, hogy ezek ugyanazon $c_{pqr}$ számmal egyenlőek, azaz, hogy a két orthogonális rendszer *izomorf*.

Legyen $h(s)$ és $h'(s')$ két tetszőleges mérhető, négyzetesen integrálható függvény $\mathfrak{M}$-en, illetőleg $\mathfrak{M}'$-n, ezeket egymásnak megfelelőnek mondjuk, jelben

$$h \longleftrightarrow h',^{2}$$

ha

$$\int_{\mathfrak{M}} h\varphi_i = \int_{\mathfrak{M}'} h'\varphi_i' \qquad (i=1, 2, 3, \ldots .$$

A RIESZ—FISCHER-tétel szerint minden $h$-nak (és ugyanígy minden $h'$-nek) van megfelelője és pedig a rendszerek teljessége miatt lényegében csak egy, azaz, ha $h \longleftrightarrow h_1'$ és $h \longleftrightarrow h_2'$, akkor $h_1'$ és $h_2'$ ekvivalensek ($h_1' \sim h_2'$), azaz csak zéróhalmazon különböznek egymástól és viszont, ha $h \longleftrightarrow h_1'$ és $h_1' \sim h_2'$, akkor egyúttal $h \longleftrightarrow h_2'$.

Közvetlenül láthatók a megfelelkezés következő tulajdonságai :

1.1, *ha* $h_1 \longleftrightarrow h_1'$, $h_2 \longleftrightarrow h_2'$, *akkor* $c_1 h_1 + c_2 h_2 \longleftrightarrow c_1 h' + c_2 h_2'$, *(ahol* $c_1$, $c_2$ *tetszőleges számok)*,

1.2, *ha* $h_1 \longleftrightarrow h_1'$, $h_2 \longleftrightarrow h_2'$, *akkor* $\int_{\mathfrak{M}} h_1 h_2 = \int_{\mathfrak{M}'} h_1' h_2'$, amint ez a szorzatintegráloknak (1) szerint való kifejtéséből látszik,

---

[2] Az $s$, $s'$ változókat, ahol ez zavart nem okoz, nem írjuk ki.

1.3, *ha* $h_n$, $h'_n$, $h$, $g'$ *négyzetesen integrálhatóak,* $h_n \longleftrightarrow h'_n$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *és ha*

$$\int_{\mathfrak{M}} (h-h_n)^2 \to 0, \quad \int_{\mathfrak{M}'} (g'-h'_n)^2 \to 0, \quad (n\to\infty).$$

*akkor* $h \longleftrightarrow g'$. Ugyanis a SCHWARZ-féle egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\int_{\mathfrak{M}} (h-h_n)\,\psi_k \to 0, \quad \int_{\mathfrak{M}'} (g'-h'_n)\,\psi'_k \to 0, \qquad (n\to\infty),$$

azaz

$$\int_{\mathfrak{M}} h\psi_k = \lim \int_{\mathfrak{M}} h_n\psi_k = \lim \int_{\mathfrak{M}'} h'_n\psi'_k = \int_{\mathfrak{M}'} g'\psi'_k.$$

További tulajdonságok:

1.4, *ha* $h_1 \longleftrightarrow h'_1$, $h_2 \longleftrightarrow h'_2$ *és a* $h_1h_2$, $h'_1h'_2$ *szorzatok is négyzetesen integrálhatóak, akkor* $h_1h_2 \longleftrightarrow h'_1h'_2$,

1.5, *ha* $h \longleftrightarrow h'$, *akkor* $h$ *és* $h'$ *alsó és felső korlátjai (amennyiben léteznek) ugyanazok,*[3] ennek következményei végül

1.6, *ha* $h \geqq 0$, *akkor megfelelője,* $h'$ *is* $\geqq 0$ *és fordítva,* valamint

1.7, *ha* $h \longleftrightarrow h'$, *akkor* $\overset{+}{h} \longleftrightarrow (\overset{+}{h'})$ *és* $\overset{-}{h} \longleftrightarrow (\overset{-}{h'})$,[4] *s ennélfogva* $|h| \longleftrightarrow |h'|$.

Bizonyítás. Az (1) alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\int_{\mathfrak{M}} h_1 . h_2\psi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} h_1\psi_k . \int_{\mathfrak{M}} h_2 . \psi_i\psi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} h_1\psi_k . \left( \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} h_2\psi_l . \int_{\mathfrak{M}} \psi_i\psi_k\psi_l \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}'} h'_1\psi'_k . \left( \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}'} h'_2\psi'_l . \int_{\mathfrak{M}'} \psi'_i\psi'_k\psi'_l \right) = \int_{\mathfrak{M}'} h'_1 . h'_2\psi'_i,$$

ahonnan már 1.4 adódik.

---

[3] Korlátok alatt LEBESGUE-féle értelemben vett korlátokat értünk. A következőkben, ahol az ettől való eltérést külön nem jelezzük, a függvények közti egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket úgy értjük, hogy azok egy zéróhalmaz kivételével érvényesek.

[4] $\overset{+}{f} = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $\overset{-}{f} = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

Ha $h$ és $g'$ korlátosak és $h \longleftrightarrow h'$, $g \longleftrightarrow g'$, akkor $h.g$ és $h'.g'$ négyzetesen integrálhatóak. Felhasználva 1.4-et és 1.2-t, kapjuk, hogy

$$\int_{\mathfrak{M}} hg^2 = \int_{\mathfrak{M}} hg.g = \int_{\mathfrak{M}'} h'g'.g' = \int_{\mathfrak{M}'} h'(g')^2, \tag{2}$$

$$\int_{\mathfrak{M}} g^2 = \int_{\mathfrak{M}'} (g')^2. \tag{3}$$

Legyen $A$ a $h$ egy felső korlátja. Ha nem állna a $h' \leqq A$ egyenlőtlenség is, akkor nyilván lenne olyan $g' \neq 0$ négyzetesen integrálható korlátos függvény, amely nullával egyenlő ott, ahol $h' \leqq A$. (3)-ból és (2)-ből nyerjük, hogy

$$\int_{\mathfrak{M}} hg^2 \leqq A \cdot \int_{\mathfrak{M}} g^2 = A \cdot \int_{\mathfrak{M}'} (g')^2 < \int_{\mathfrak{M}'} h'(g')^2 = \int_{\mathfrak{M}} hg^2,$$

ami nyilván ellentmondást tartalmaz. E meggondolást $-h$-ra is alkalmazva, kapjuk, hogy $h$ minden alsó, illetőleg felső korlátja alsó, illetőleg felső korlátja $h'$-nek is. A $h$ és $h'$ szerepét felcserélve kapjuk végül 1.5-öt s egyben 1.6-ot is.

Végül 1.7 így látható be. Írjuk fel a tetszőleges négyzetesen integrálható $h$ függvényt pozitív és negatív részei különbségeként: $h = \overset{+}{h} - \overset{-}{h}$. Legyen $(\overset{+}{h})'$ a $\overset{+}{h}$-nak, $(\overset{-}{h})'$ a $\overset{-}{h}$-nak egy megfelelője, 1.6 szerint ezek szintén pozitívok. Minthogy $\overset{+}{h}.\overset{-}{h} = 0$, azért 1.2 szerint $\int_{\mathfrak{M}'} (\overset{+}{h})' \cdot (\overset{-}{h})' = 0$, ami csak akkor állhat fenn, ha $(\overset{+}{h})' \cdot (\overset{-}{h})' = 0$. Az 1.1-ből adódó $h' = (\overset{+}{h})' - (\overset{-}{h})'$ egyenlőséget $(\overset{+}{h})' \cdot (\overset{-}{h})' = 0$ eredményünkkel összevetve, kapjuk, hogy $(\overset{+}{h}') = (\overset{+}{h})'$ és $(\overset{-}{h}') = (\overset{-}{h})'$, valamint $|h| = \overset{+}{h} + \overset{-}{h} \longleftrightarrow (\overset{+}{h})' + (\overset{-}{h})' = (\overset{+}{h}') + (\overset{-}{h}') = |h'|$.

## 2. §. A megfeleltetés kiterjesztése.

Egy az $\mathfrak{M}$-en értelmezett, mérhető, négyzetesen integrálható függvényekből álló monoton növekvő sorozat limeszfüggvényét jelöljük $l$-lel; $l$ esetleg pozitív mértékű halmazon is $\infty$ értékű. Az összes ilyen limeszfüggvények által alkotott függvényosztályt nevezzük $C$-nek. $C'$ legyen az $\mathfrak{M}'$-n hasonlóképpen értelmezett $l'$ függvények osztálya. A négyzetesen integrálható függvényeket megkülönböztetés végett jelöljük $h$-kkal.

Egy $l$ és egy $l'$ függvényt egymásnak megfelelőnek mondunk, jelben: $l \longleftrightarrow l'$, ha van olyan monoton növekvő $h_n$, illetőleg $h'_n$ sorozat, hogy $h_n \to l$, $h'_n \to l'$ és $h_n \longleftrightarrow h'_n$. $C$ minden $l$ függvényének van megfelelője, ami annak következménye, hogy ha $h_n$ monoton növekedve tart $l$-hez, akkor 1.1 és 1.6 szerint a megfelelő függvényekből álló $h'_n$ sorozat is monoton nő és így egy $l'$ függvényhez tart. Be kell látnunk, hogy ha $l$ maga is négyzetesen integrálható, akkor az $l'$ függvény a régi értelemben is megfelelője. Ez nyilván következménye már annak az alább bebizonyítandó ténynek, hogy egy $l$-nek az új értelemben is (ekvivalenciát leszámítva) csak egy megfelelője lehet.

Legyen $l_1$ és $l_2$ a $C$ tetszőleges két függvénye, $l_1 \leqq l_2$. Bizonyítsuk be, hogy ha $l'_1$ az $l_1$-nek, $l'_2$ az $l_2$-nek egy-egy megfelelője, akkor $l'_1 \leqq l'_2$.

Tartson $h_{1n}$ $l_1$-hez, $h_{2n}$ az $l_2$-höz. $N$ legyen egy fix index, ekkor nyilván $(h_{1N} \dot{-} h_{2n}) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ha $h_{1n} \longleftrightarrow h'_{1n}$, $h_{2n} \longleftrightarrow h'_{2n}$, akkor 1.7 szerint $(h_{1N} \dot{-} h_{2n}) \longleftrightarrow (h'_{1N} \dot{-} h'_{2n})$. Tehát a $(h'_{1N} \dot{-} h'_{2n})$ sorozat is monoton fogyó, limeszét jelöljük $p'$-vel, $p' \geqq 0$.

Minthogy $\int\limits_{\mathfrak{M}'} (p')^2 = \lim \int\limits_{\mathfrak{M}'} (h'_{1N} \dot{-} h'_{2n})^2 = \lim \int\limits_{\mathfrak{M}} (h_{1N} \dot{-} h_{2n})^2 = 0$, azért $p'$ szükségképpen 0-val egyenlő. Azaz $h'_{1N} \leqq \lim h'_{2n} = l'_2$ és így egyszersmind $l'_1 = \lim h'_{1n} \leqq l'_2$, amit bizonyítani akartunk.

Ha mármost egy $C$ egy $l$ függvényének a $C'$ osztály $l'_1$ és $l'_2$ függvénye is megfelel, akkor egyszerre $l'_1 \leqq l'_2$ és $l'_2 \leqq l'_1$, azaz $l'_1 = l'_2$. Az egyértelműséget így bebizonyítottuk, sőt láttuk, hogy

2.1, *ha* $l_1 \longleftrightarrow l'_1$, $l_2 \longleftrightarrow l'_2$ *és* $l_1 \leqq l_2$, *akkor egyúttal* $l'_1 \leqq l'_2$, *speciálisan: pozitív függvény megfelelője is pozitív.*

A $C$ és $C'$ függvényei közti megfeleltetés további tulajdonságai:

2.2, $l_1$*-gyel és* $l_2$*-vel együtt felső burkolójuk,* $sup\,(l_1, l_2)$ *is* $C$ *függvénye, és ha* $l_1 \longleftrightarrow l'_1$, $l_2 \longleftrightarrow l'_2$, *akkor* $sup\,(l_1, l_2) \longleftrightarrow sup\,(l'_1, l'_2)$,

2.3, *ha az* $l_1, l_2, l_3, \ldots$ *sorozat monoton nő, akkor a megfelelő* $l'_1, l'_2, l'_3, \ldots$ *sorozat* 2.1 *szerint szintén monoton nő; e sorozatok limeszfüggvénye,* $l$ *és* $l'$, *a* $C$, *illetőleg* $C'$ *osztályba tartozik és* $l \longleftrightarrow l'$,

2.4, *ha* $l_1 \longleftrightarrow l'_1$, $l_2 \longleftrightarrow l'_1$ *és* $l_1$ *felülről korlátos, akkor* $l_1$ *is felülről korlátos és* $l_1 - l_2 \longleftrightarrow l'_1 - l'_2$, *feltéve, hogy* $l_1 \geqq l_2$.

Bizonyítás. Minthogy általában $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ és $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$, 1.1 és 1.7 következtében két négyzetesen integrálható függvény felső burkolója a megfelelő függvények felső burkolójának felel meg, alsó burkolója pedig azok alsó burkolójának. Teljes indukcióval látható, hogy ez nemcsak két, hanem tetszőleges (véges) sok függvényre is igaz. Mármost, ha $h_{1n}$ nőve $l_1$-hez, $h_{2n}$ nőve $l_2$-höz tart, a megfelelő $h'_{1n}$, illetőleg $h'_{2n}$ sorozat pedig $l'_1$-höz, illetőleg $l'_2$-höz tart, akkor $\sup(h_{1n}, h_{2n})$ nőve $\sup(l_1, l_2)$-höz, a megfelelő $\sup(h'_{1n}, h'_{2n})$ sorozat nőve $\sup(l'_1, l'_2)$-höz tart, amiből 2.2 következik.

A 2.3-at így láthatjuk be. Tartson $h_{nk}$ nőve az $l_n$-hez, ha $k \to \infty$ és legyen $h'_{nk}$ a $h_{nk}$ megfelelője. A $h^{(k)} = \sup(h_{1k}, h_{2k}, \ldots, h_{kk})$ megfelelője ekkor $h^{(k)\prime} = \sup(h'_{1k}, h'_{2k}, \ldots, h'_{kk})$. A $h^{(k)}$ négyzetesen integrálható függvényekből álló növő sorozat nyilván szintén $l$-hez tart, hasonlóképpen a $h^{(k)\prime}$ sorozat $l'$-höz tart, amiből következik állításunk.

Hogy felülről korlátos $l$-nek a megfelelője is felülről korlátos, az e megfeleltetés definíciójából és 1.5-ből rögtön következik. A 2.4-ben szereplő $l_1$ legyen a $h_{1n}$, $l_2$ a $h_{2n}$ monoton növő sorozat limeszfüggvénye. Minthogy feltétel szerint $l_1 \geqq l_2$, a $h_n = (h_{1n} \dot{-} h_{2n})$ sorozat nyilván az $l_1 - l_2$ függvényhez tart. A

$$h^{(n)} = \inf(h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots)$$

monoton növő sorozat ennélfogva szintén $l_1 - l_2$-höz tart. Könnyű belátni, hogy $h^{(n)}$ négyzetintegrálra is limesze az $\inf(h_n, h_{n+1}, \ldots, h_m)$ sorozatnak, (ha $m \to \infty$). Hasonlóképpen $h^{(n)\prime}$ négyzetintegrálra is limesze az $\inf(h'_n, h'_{n+1}, \ldots, h'_m)$ sorozatnak. Ebből először is az következik, hogy $h^{(n)}$ és $h^{(n)\prime}$ maguk is négyzetesen integrálhatók, azután pedig (1.3 alapján), hogy $h^{(n)} \longleftrightarrow h^{(n)\prime}$. Ezzel 2.4-et is bebizonyítottuk.

Jegyezzük meg a megfeleltetés következő, 2.2 és 2.3 alapján könnyen bizonyítható tulajdonságát:

2.5. *C tetszőleges véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok függvényének felső burkolója, valamint C' megfelelő függvényeinek felső burkolója egymásnak megfelelő függvények.*

### 3. §. $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ mérhető halmazainak megfeleltetése.

$\mathfrak{M}$ egy mérhető[5] $\mathfrak{m}$ halmazának karakterisztikus függvénye, $e(\mathfrak{m})$, nyilván négyzetesen integrálható. Legyen $e'$ egy megfelelője $e(\mathfrak{m})$-nek. Minthogy $e^2(\mathfrak{m}) \sim e(\mathfrak{m})$, az 1.5 és 1.4 következtében $(e')^2 \sim e'$, tehát $e'$ legfeljebb egy zéróhalmaz kivételével mindenütt 0-val, vagy 1-el egyenlő. Van tehát $\mathfrak{M}'$-nek egy (ekvivalencia leszámításával egyértelműen meghatározott) $\mathfrak{m}'$ halmaza, amelynek karakterisztikus függvénye $e'(\mathfrak{m}') \sim e'$, tehát $e(\mathfrak{m}) \longleftrightarrow e'(\mathfrak{m}')$. Minthogy a mérték a karakterisztikus függvény integrálja, 1.2 következtében $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{m}'$ mértéke ugyanaz. Ha $\mathfrak{m}$-et és $\mathfrak{m}'$-t megfelelőeknek nevezzük, jelben

$$\mathfrak{m} \longleftrightarrow \mathfrak{m}',$$

akkor így $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ mérhető részhalmazai közt ekvivalenciát leszámítva kölcsönösen egyértelmű mértéktartó megfelelést létesítettünk.

E megfeleltetés rögtön kiterjeszthető minden olyan halmazra, amelyik mérhető halmazok növekvő sorozatának egyesített halmaza. Ugyanis ezeknek a halmazoknak karakterisztikus függvényei nyilván $C$-be, illetőleg $C'$-be tartoznak, s így, ha $\mathfrak{m}$ egy ilyen halmaz, karakterisztikus függvényéhez a $C \longleftrightarrow C'$ megfeleltetés egy $\mathfrak{m}'$ halmaz karakterisztikus függvényét rendeli hozzá. Az ilyenképpen értelmezett

$$\mathfrak{m} \longleftrightarrow \mathfrak{m}'$$

halmazmegfeleltetés tulajdonságait a $C \longleftrightarrow C'$ megfeleltetés tulajdonságaiból olvashatjuk ki.

$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ legyen véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmaz, $\mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \mathfrak{m}_i'$. Minthogy

$$e\left(\sum_i \mathfrak{m}_i\right) = \sup\left(e(\mathfrak{m}_1), e(\mathfrak{m}_2), e(\mathfrak{m}_3), \ldots\right)$$

és

$$e'\left(\sum_i \mathfrak{m}_i'\right) = \sup\left(e'(\mathfrak{m}_1'), e'(\mathfrak{m}_2'), e'(\mathfrak{m}_3'), \ldots\right),$$

azért 2.5 tekintetbevételével kapjuk, hogy

$$\sum_i \mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \sum_i \mathfrak{m}_i'.$$

---

[5] Mérhető halmazoknak mindig csak a véges mértékű halmazokat fogjuk tekinteni.

Ha $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_2$, azaz, ha $e(\mathfrak{m}_1) \leqq e(\mathfrak{m}_2)$, akkor 2.1 szerint egyúttal $e'(\mathfrak{m}'_1) \leqq e'(\mathfrak{m}'_2)$, azaz $\mathfrak{m}'_1 \subset \mathfrak{m}'_2$. Sőt, 2.4 alapján,

$$e(\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1) = e(\mathfrak{m}_2) - e(\mathfrak{m}_1) \longleftrightarrow e'(\mathfrak{m}'_2) - e'(\mathfrak{m}'_1) = e'(\mathfrak{m}'_2 - \mathfrak{m}'_1),$$

azaz

$$\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1 \longleftrightarrow \mathfrak{m}'_2 - \mathfrak{m}'_1.$$

Minthogy

$$\prod_i \mathfrak{m}_i = (\sum_i \mathfrak{m}_i) - \sum_i \left((\sum_k \mathfrak{m}_k) - \mathfrak{m}_i\right),$$

azért véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmaz és megfelelőik közös részeire is áll, hogy

$$\prod_i \mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \prod_i \mathfrak{m}'_i.$$

Legyen most $h$ tetszőleges mérhető, négyzetesen integrálható függvény és $A$ egy tetszőleges konstans. Az $\mathfrak{m}[h \geqq A]$ halmaz nyilván a fenti típusú. Állítás: ha $h \longleftrightarrow h'$, akkor

$$\mathfrak{m}[h \geqq A] \longleftrightarrow \mathfrak{m}'[h' \geqq A].$$

Legyen $\mathfrak{m}[h \geqq A]$ az $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ monoton növekvő mérhető halmazok egyesített halmaza, $\mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \mathfrak{m}'_i$. Ekkor

$$h \,.\, e(\mathfrak{m}_i) - A \,.\, e(\mathfrak{m}_i) \geqq 0,$$

ennélfogva

$$h' \,.\, e'(\mathfrak{m}'_i) - A \,.\, e'(\mathfrak{m}'_i) \geqq 0,$$

ami azt mondja, hogy $\mathfrak{m}'_i \subset \mathfrak{m}'[h' \geqq A]$, tehát $\mathfrak{m}[h \geqq A]$ megfelelője részhalmaza az $\mathfrak{m}'[h' \geqq A]$ halmaznak. A meggondolást $h$ és $h'$ felcserélésével is elvégezve, adódik a fenti állításunk.

Ha $h \geqq 0$ és $A < 0$, speciális eredményként kapjuk, hogy

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}',$$

amiből következik, hogy, ha $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ közül egyik véges mértékü, a másik is az és pedig mértéke ugyanaz.

**I. tétel.** *Az $\mathfrak{M}$-en és $\mathfrak{M}'$-n legyen egy-egy egymással izomorf, korlátos függvényekből álló, teljes orthogonális függvényrendszer, $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s), \ldots$, illetőleg $\psi'_1(s'), \psi'_2(s'), \psi'_3(s'), \ldots$ definiálva. Ekkor az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ azon halmazai közt, amelyek vagy mérhetők, vagy megszámlálhatóan végtelen sok mérhető halmaz egyesített halmazai, egy ekvivalenciát leszámítva kölcsönösen*

*egyértelmű, mértéktartó megfeleltetés létesíthető. E megfeleltetés továbbá olyan tulajdonságú, hogy nagyobb halmaznak nagyobb halmazt, két halmaz különbség-halmazának a megfelelőik különbség-halmazát, véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmaz egyesített halmazának, illetőleg közös részének a megfelelőik egyesített halmazát, illetőleg közös részét felelteti meg; speciálisan annak a halmaznak, ahol a tetszőleges* $h(s)=\sum_i c_i\psi_i(s)$ *négyzetesen integrálható függvény A-nál nagyobb, az a halmaz felel meg, ahol a* $h'(s')=\sum_i c_i\psi_i'(s')$ *függvény szintén nagyobb A-nál.*

E tétel magában foglalja HAAR-nak a bevezetésben idézett helyen kimondott állításait. A következő két §-ban e tétel különféle általánosítása és finomítása a feladatunk.

## 4. §. Pontleképezés.

Kérdés, nem lehetne-e az I. tételben megjelölt halmazleképezést egy pontleképezésből származtatni. E kérdés vizsgálatában célszerű először $\mathfrak{M}$-ről és $\mathfrak{M}'$-ről feltételezni, hogy *véges hosszúak*. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ zártak, minthogy ez legfeljebb két-két pont, azaz egy zéróhalmaz hozzávételével mindig elérhető.

Az $\mathfrak{M}$-en értelmezett $f(s)=s$ függvény nyilván négyzetesen integrálható. Vegyük egy olyan megfelelőjét, amelyik a második BAIRE-féle osztályba tartozik (ilyen van, hiszen bármely mérhető függvényhez van vele ekvivalens, a második BAIRE-féle osztályba tartozó függvény). Az 1.5 szerint e függvény értéke legfeljebb zéróhalmaz kivételével mindenütt az $\mathfrak{M}$ intervallumba esik. Ha az $\mathfrak{M}$ végpontjai $a$ és $b$, $(a<b)$, akkor e függvényt alulról $a$-val, felülről $b$-vel levágva, egy ugyancsak a második BAIRE-féle osztályba tartozó, az $s$ függvénynek megfelelő függvényt kapunk, amelynek értékkészlete azonban most már mindenütt az $\mathfrak{M}$-be esik. Ezt a függvényt fogjuk $w(s')$-nek nevezni.

Az 1.4 alapján kapjuk, hogy

$$s^n \longleftrightarrow w^n(s')$$

és pedig az előbbi § szerint nemcsak $n \geqq 1$-re, hanem $n = 0$-ra is. Így tetszőleges $P$ polinomra is áll, hogy

$$P(s) \longleftrightarrow P\big(w(s')\big).$$

Legyen $g_1(s)$ egy tetszőleges első BAIRE-féle osztályba tartozó korlátos függvény, ekkor van egy $\mathfrak{M}$-en mindenütt feléje tartó korlátos $P_n(s)$ polinomsorozat. Nyilván $g_1(s)$ a $P_n(s)$ sorozatnak, $g_1\big(w(s')\big)$ a $P_n\big(w(s')\big)$ sorozatnak négyzetintegrálra is limesze, az 1.3 szerint tehát

$$g_1(s) \longleftrightarrow g_1\big(w(s')\big).$$

Ezt az eljárást ismételve, kapjuk, hogy minden korlátos, második BAIRE-féle osztályba tartozó $g_2(s)$ függvényre is áll, hogy

$$g_2(s) \longleftrightarrow g_2\big(w(s')\big).$$

Legyen most

$$v(s) \longleftrightarrow s',$$

ahol $v(s)$ megválasztása ugyanúgy történjék, mint $w(s')$-é volt. Minthogy tehát $v(s)$ második BAIRE-féle osztálybeli és korlátos, az előbbiek szerint

$$v(s) \longleftrightarrow v\big(w(s')\big)$$

és hasonlóképpen

$$w\big(v(s)\big) \longleftrightarrow w(s').$$

Ebből következik, hogy

$$v\big(w(s')\big) \sim s',$$
$$w\big(v(s)\big) \sim s.$$

Tekintsük $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ azon $\overline{\mathfrak{M}}$ és $\overline{\mathfrak{M}'}$ részhalmazait, (melyek $\mathfrak{M}$-mel, illetőleg $\mathfrak{M}'$-vel ekvivalensek), amelyeken

$$s' = v\big(w(s')\big) \quad \text{és} \quad s = w\big(v(s)\big).$$

Ha $s \in \overline{\mathfrak{M}}$, akkor $v(s) \in \overline{\mathfrak{M}'}$. Ugyanis ekkor $s = w\big(v(s)\big)$-ből következik $v(s) = v\big(w(v(s))\big)$, ami éppen az állításunkat igazolja. Hasonlóképpen, ha $s' \in \overline{\mathfrak{M}'}$, akkor $w(s') \in \overline{\mathfrak{M}}$. Ez módot ad arra, hogy $\overline{\mathfrak{M}}$ és $\overline{\mathfrak{M}'}$ közt kölcsönösen egyértelmű pontmegfeleltetést létesítsünk. Rendeljük ugyanis $\overline{\mathfrak{M}}$ egy $s$ pontjához mindig $\mathfrak{M}'$-nek az $s' = v(s)$ pontját hozzá $\overline{\mathfrak{M}'}$ minden $s'$ pontjához $\overline{\mathfrak{M}}$-nek egy és csak egy oly pontja van, amelynek megfelel, még pedig

$s = w(s')$ (hiszen $v\big(w(s')\big) = s'$, másrészt az $s' = v(s)$ egyenlőségből $w(s') = w'\big(v(s)\big) = s$ következik). A $v(s)$ és $w(s')$ függvények $\overline{\mathfrak{M}}$-en, illetőleg $\overline{\mathfrak{M}'}$-n egymás inverzei.

*E pontleképzés mértéktartó.* Legyen $e(s)$ az $\mathfrak{M}$ egy olyan $\mathfrak{U}$ halmazának karakterisztikus függvénye, hogy $e(s)$ a második Baire-féle osztályba tartozzék. Az

$$e(s) \longleftrightarrow e\big(w(s')\big)$$

megfeleltetés azt mutatja, hogy $\mathfrak{U}$-nak és az $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{U}]$[6] halmaznak ugyanaz a mértéke.

Ha $\mathfrak{O}$ az $\mathfrak{M}$ egy zéróhalmaza, akkor van tetszőleges kis mértékű, a fenti tulajdonsággal bíró olyan $\mathfrak{U}$ halmaz, amely $\mathfrak{O}$-t befedi, ennélfogva az $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{O}]$ halmazt tetszőleges kis mértékű halmazzal $\big(\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{U}]\big)$ be lehet fedni. Ennélfogva $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{O}]$ maga is zéróhalmaz.

Minthogy végül minden $\mathfrak{m}$ mérhető halmaza az $\mathfrak{M}$ intervallumnak egy fenti tulajdonságú $\mathfrak{U}$ halmaztól legfeljebb egy $\mathfrak{O}$ halmazon különbözik, kapjuk, hogy $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{m}]$ is egyenlő mértékűek.

Mindez nyilván akkor is érvényes, ha $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ helyett a velük ekvivalens $\overline{\mathfrak{M}}$-re és $\overline{\mathfrak{M}'}$-re szorítkozunk. De minthogy ott $v$ és $w$ egymás inverzei, a pontleképezés mértéktartóságát bebizonyítottuk.

Legyen most már $h(s)$ tetszésszerinti mérhető, négyzetesen integrálható függvény, ez ekvivalens egy $g_2(s)$ második Baire-féle osztályba tartozó függvénnyel. De ekkor $h\big(w(s')\big)$ és $g_2\big(w(s')\big)$ is ekvivalensek a fentiek szerint. Tehát

$$h(s) \longleftrightarrow h\big(w(s')\big),$$

azaz

$$h'(s') \sim h\big(w(s')\big);$$

speciálisan

$$\phi_i'(s') \sim \phi_i\big(w(s')\big) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Eredményünk akkor is érvényes, ha $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ tetszőleges mérhető halmazok. Ugyanis ekkor $\mathfrak{M}$-et könnyen le tudjuk ké-

---

[6] $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{U}]$ jelenti az $\mathfrak{M}'$-nek azt a részhalmazát, ahol a $w(s')$ függvény értéke $\mathfrak{U}$-ba esik.

pezni legfeljebb egy-egy zéróhalmaz leszámításával kölcsönösen egyértelmű és mértéktartó módon egy zárt véges intervallumra [7]; ugyanígy járhatunk el $\mathfrak{M}'$-vel is. Az orthogonális rendszerek e leképezés közben megtartják tulajdonságaikat (orthogonalitás, izomorfia, korlátosság, teljesség). Az intervallumokra nyert pontleképzés azután $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ egymásra való pontleképzésébe vihető vissza.

*Végtelen* intervallumok esetében eljárásunk a következő. Legyen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ pozitív (véges) mértékű halmazok egy olyan páronként közös pont nélküli tagokból álló sorozata, hogy $\sum_i \mathfrak{m}_i = \mathfrak{M}$ legyen. Ekkor a megfelelő $\mathfrak{m}_i'$ halmazok (l. az előbbi §-t) szintén páronként közös pont nélkülieknek és úgy választhatók meg, hogy $\sum_i \mathfrak{m}_i' = \mathfrak{M}'$ (hiszen $\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}'$).

Jelöljük $e(\mathfrak{m}_i).\psi_p$ függvényt, (ahol $e(\mathfrak{m}_i)$ az $\mathfrak{m}_i$ karakterisztikus függvénye), $\psi_{ip}$-vel, $e'(\mathfrak{m}_i').\psi_p'$-t $\psi_{ip}'$-vel, ekkor nyilván

$$\psi_{ip} \longleftrightarrow \psi_{ip}' \quad \text{és} \quad \psi_{ip}.\psi_{iq} \longleftrightarrow \psi_{ip}'.\psi_{iq}',$$

ahonnan 1.2 alapján következik, hogy

$$\int_{\mathfrak{m}_i} \psi_{ip}\psi_{iq} = \int_{\mathfrak{M}} \psi_{ip}\psi_{iq} = \int_{\mathfrak{M}'} \psi_{ip}'\psi_{iq}' = \int_{\mathfrak{m}_i'} \psi_{ip}'\psi_{iq}'$$

és

$$\int_{\mathfrak{m}_i} \psi_{ip}\psi_{iq}\psi_{ir} = \int_{\mathfrak{m}_i'} \psi_{ip}'\psi_{iq}'\psi_{ir}'.$$

Orthogonalizáljuk ugyanazokban a lépésekben a $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}, \ldots$ és $\psi_{i1}', \psi_{i2}', \psi_{i3}', \ldots$ függvényrendszereket az $\mathfrak{m}_i$, illetőleg $\mathfrak{m}_i'$ halmazokon; ezáltal nyilván két olyan korlátos függvényekből álló, $\mathfrak{m}_i$-n, illetőleg $\mathfrak{m}_i'$-n teljes orthogonális függvényrendszert kapunk, amelyek egymással izomorfok. Mérhető halmazokra nyert eredményünk értelmében $\mathfrak{m}_i$ leképezhető lényegében (azaz esetleg zéróhalmazok leszámításával) egyértelmű és mértéktartó módon $\mathfrak{m}_i'$-re úgy, hogy ez a leképezés az új rendszerekre vonatkozóan megfelelő függvényeket egymásba viszi át. Nyilván $\psi_{ip}$ és $\psi_{ip}'$ megfelelőek az új rendszerekre vonatkozóan is. Az $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i'$ halmazpároknak egymásra való leképezéseit összetéve, magának $\mathfrak{M}$-nek

[7] Például úgy, hogy $\mathfrak{M}$ minden pontjához az $\mathfrak{M}$ tőle balra eső részének mértékét rendeljük hozzá.

és $\mathfrak{M}'$-nek egymásra való olyan pontleképzését nyerjük, amely $\psi_{ip}$-t $\psi'_{ip}$-be, tehát a $\sum_i \psi_{ip} = \psi_p$ összegfüggvényt a $\sum_i \psi'_{ip} = \psi'_p$ összegfüggvénybe viszi át. Ezzel általánosan bebizonyítottuk a következő tételt:

**II. tétel.** *Az $\mathfrak{M}$-en és $\mathfrak{M}'$-n legyen egy-egy egymással izomorf, korlátos függvényekből álló, teljes orthogonális függvényrendszer, $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$,..., illetőleg $\psi'_1(s')$, $\psi'_2(s')$, $\psi'_3(s')$,..., értelmezve. Az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ között létesíthető ekkor egy olyan lényegében egyértelmű, mértéktartó pontmegfeleltetés, amellyel a tetszőleges $h(s) = \sum_i c_i . \psi_i(s)$ négyzetesen integrálható függvény és megfelelője, $h'(s') = \sum_i c_i . \psi'_i(s')$, egymásba mennek át.*

## 5. §. További általánosítások.

*Az alaphalmazok általánosabb választása.* Az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ alaphalmazokat eddig nagyon speciálisaknak, intervallumoknak választottuk. Most lássuk, eredményeink mennyiben maradnak érvényesek általánosabb alaphalmazok esetében.

Mindjárt tekintsük a legáltalánosabb esetet. Ismeretes, hogy absztrakt halmazokon is lehet olyan mértékfogalom definiálva, amely a LEBESGUE-féle mértékfogalom lényeges tulajdonságaival rendelkezik s amelynek segítségével integrálfogalmat is bevezethetünk.

Legyen az alaphalmaz bizonyos $\sigma$ részhalmazrendszerén egy nem negatív véges értékű $\mu(\mathfrak{m})$ halmazfüggvény értelmezve, amely teljesen additív abban az értelemben, hogy ha $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$,... véges vagy végtelen sok, páronként közös pontnélküli, $\sigma$-ba tartozó halmaz és ha $\sum_i \mu(\mathfrak{m}_i)$ konvergens, akkor $\sum_i \mathfrak{m}_i$ is $\sigma$-ban van és $\mu(\sum_i \mathfrak{m}_i) = \sum_i \mu(\mathfrak{m}_i)$. Feltesszük még, hogy $\sigma$-ban $\mathfrak{m}_1$-gyel és ennek egy $\mathfrak{m}_2$ részhalmazával együtt $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2$ is benne van, s benne van két halmazzal együtt azok egyesített halmaza és közös része is, végül, hogy benne van minden olyan halmaz, amely egy zérómértékű halmaz részhalmaza (zérómértékűnek mondjuk az $\mathfrak{m}$ halmazt, ha $\mu(\mathfrak{m}) = 0$). A $\sigma$ halmazait mérhetőknek, $\mu(\mathfrak{m})$-et az $\mathfrak{m}$ mértékének nevezzük.

Példák ilyen absztrakt mértékre:

A. Az alaphalmaz álljon megszámlálható sok pontból, $\sigma$-ba a véges sok pontot tartalmazó részhalmazok tartozzanak s $\mu(\mathfrak{m})$ legyen az $\mathfrak{m}$ pontjainak számával egyenlő.

B. Az alaphalmaz legyen a (0, 1) intervallum, $\sigma$ és $\mu$ definíciója történjék ugyanúgy, mint az előbbi példában.

Egy $f$ függvény mérhető, ha az alaphalmaz minden mérhető részhalmazának az a része, ahol $f \geqq A$, mérhető halmaz, ($A$ tetszőleges konstans). Egy nemnegatív mérhető $f$ függvénynek egy mérhető halmazon való integrálját a szokásos módon, összegek limeszével értelmezzük, az egész alaphalmazon való integrálján pedig a mérhető halmazokon való integráljainak pontos felső korlátját értjük (amennyiben e pontos felső korlát létezik). Változó előjelű függvényre a szokásos módon: pozitív és negatív részre való felbontással terjeszthető ki ez a definíció.[8] Ez az integrálfogalom a közönséges LEBESGUE-féle integrálfogalom összes jellemző tulajdonságával rendelkezik, így például az összes konvergenciatételek érvényesek, már pedig az első három §-ban csak ezeket használtuk fel.

Természetesen nincs minden ilyen halmazon egy olyan teljes orthogonális függvényrendszer, amely megszámlálhatóan végtelen sok függvényből áll. Például az iménti B. példában nyilván nem létezhet ilyen rendszer. Amennyiben azonban olyan halmazokra szorítkozunk, amelyeken megszámlálhatóan végtelen teljes orthogonális rendszerek léteznek,[9] akkor az I. tétel ezen általános esetben is érvényes marad.

Ha az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ alaphalmazokon értelmezett teljes orthogonális és egymással izomorf rendszerek csak véges sok függvényből állnak (természetesen ugyanannyiból, különben nem lehetnének izomorfok), az első három § eredményei nyilván szintén érvényben maradnak.

---

[8] Az alaphalmazokról mindig fel fogjuk tenni, hogy nincs oly részhalmazuk, amely bár nem zérómértékű, mégis minden integrálható függvény rajta szükségképpen zéróval ekvivalens.

[9] Mint könnyen látható, az ilyen halmazok szükségképpen mérhetők, vagy megszámlálhatóan végtelen sok mérhető halmaz egyesített halmazai.

De átvihetők e §-ok eredményei arra az esetre is, mikor a függvényrendszerek megszámlálhatónál is nagyobb számosságúak. Legyen a $\{\psi\}$ rendszer az $\mathfrak{M}$-en, a $\{\psi'\}$ rendszer az $\mathfrak{M}'$-n egy-egy korlátos függvényekből álló teljes orthogonális rendszer. Izomorfnak nevezzük e két függvényrendszert, ha függvényeik páronként úgy feleltethetők meg egymásnak, hogy $\{\psi\}$ tetszőleges három függvényéből alkotott szorzatnak $\mathfrak{M}$-en vett integrálja egyenlő a $\{\psi'\}$ megfelelő függvényeiből alkotott szorzatnak $\mathfrak{M}'$-n vett integráljával. A BESSEL-féle egyenlőtlenségből következik, hogy egy mérhető, négyzetesen integrálható függvénynek $\int_{\mathfrak{M}} h\psi$ «FOURIER együtthatói» közül csak megszámlálhatóan végtelen sok lehet zérótól különböző s ennélfogva a PARSEVAL-féle (1) összefüggés most is érvényes, (hiszen a jobboldalt álló, minden $\psi$-re vett összegek csak megszámlálhatóan végtelen sok zérótól különböző tagot tartalmaznak). Ennélfogva ekkor is érvényesek további meggondolásaink és az I. tételben kimondott halmazmegfeleltetés. Csupán az okoz különbséget az előbbiekkel szemben, hogy most már nem állíthatjuk mindig, hogy az a halmaz, ahol egy integrálható függvény nagyobb egy $A$ konstansnál, szükségképpen mérhető vagy megszámlálhatóan végtelen sok mérhető halmaz egyesített halmaza. De nyilván igaz ez, ha a szóbanforgó halmazból kihagyjuk azokat a pontokat, ahol a függvény zéróval egyenlő. Ennélfogva az I. tétel utolsó állítása is csak az ilyen módon redukált halmazokra marad érvényes.

*Alkalmazásként* bizonyítsuk be, hogy a HILBERT-féle koordinátatérben és egy intervallumon értelmezett, a közönséges LEBESGUE-féle értelemben mérhető, négyzetesen integrálható függvények terében nincs két egymással izomorf korlátos teljes orthogonális rendszer. (A HILBERT-féle koordinátatérben egy $\psi_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3, \ldots)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, vektorokból álló orthogonális rendszer multiplikációs táblázatát természetszerűen a $c_{pqr} = \sum_i x_p^i x_q^i x_r^i$ összegek alkotják. Korlátos $\psi_i$-k esetében, azaz ha az $x_i^1, x_i^2, x_i^3, \ldots$ sorozatok mindegyike korlátos, ezek az összegek nyilván mindig konvergensek.) Ugyanis a koordinátatér úgy fogható fel, mint az imént A. alatt említett halmazon mérhető és négyzetesen integrálható függvények tere. Míg azonban

e halmazban csak egész számú mértékkel bíró részhalmazok vannak, addig az intervallumban vannak tetszőleges kis mértékű halmazok is: mértéktartó halmazmegfeleltetés tehát lehetetlen.

A *pontleképezésre* vonatkozó II. tétel ilyen nagy mértékben már nem általánosítható. A 4. §-ban kihasználtuk az intervallumon definiált közönséges LEBESGUE-féle mérték olyan — topologiai természetű — tulajdonságait, amelyekkel az imént vázolt absztrakt mérték nem rendelkezhet. Kihasználtuk nevezetesen azt, hogy minden véges intervallum mérhető és hogy tetszőleges mérhető halmazhoz van olyan vele egyenlő mértékű és őt tartalmazó halmaz, amely véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymásba zárt nyitott halmaz közös része ($\mathfrak{m}=\mathfrak{U}-\mathfrak{D}$). Egy monoton növekvő függvény által származtatott LEBESGUE—STIELTJES-féle mérték azonban szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Ennélfogva, ha az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ intervallumokon az integrálok ilyen LEBESGUE—STIELTJES-féle integrálok, a II. tétel éppúgy érvényes, mint közönséges LEBESGUE-féle integrálok esetében.

Természetesen érvényes a II. tétel tetszőleges olyan $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{M}'$ halmazokra is, amelyekhez van egy-egy (véges, vagy végtelen) intervallum, s azokon egy-egy LEBESGUE—STIELTJES-féle mérték, úgy hogy $\mathfrak{M}$ az egyik, $\mathfrak{M}'$ a másik intervallumra lényegében kölcsönösen egyértelmű és mértéktartó módon leképezhető. Ilyen tulajdonságú például minden metrikus, szeparábilis, teljes halmaz,[10] amelyen egy olyan CARATHÉODORY-féle mérték van definiálva, amelyre vonatkozólag minden gömb mérhető[11] s továbbá ilyen tulajdonságúak az említett halmazok azon részhalmazai, melyek vagy mérhetők vagy megszámlálhatóan végtelen sok mérhető részhalmaz egyesített halmazai. (A leképezést egy általánosított PEANO—HILBERT-féle görbe segítségével végezhetjük.) Speciálisan ilyen tulajdonságúak az $n$ dimenziós tér közönséges

---

[10] E topologiai fogalmak definícióját l. F. HAUSDORFF, Mengenlehre (Berlin und Leipzig, 1927) c. könyvében, 94., 125., 103. o.

[11] V. ö. C. CARATHÉODORY, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin, 1918), 238—281. o.; valamint J. v. NEUMANN, Einige Sätze über messbare Abbildungen, Annals of Math., 33 (1932), 574—586. o.

LEBESGUE-féle értelemben mérhető vagy megszámlálhatóan végtelen sok mérhető részhalmazából összetett részhalmazai.[12]

*

*Általánosabb függvényrendszerek izomorfiája.* Az $\mathfrak{M}$, illetőleg $\mathfrak{M}'$ alaphalmazon értelmezett korlátos, mérhető, négyzetesen integrálható függvényeknek egy-egy $\{\varphi\}$, illetőleg $\{\varphi'\}$ rendszere legyen adva. E két rendszert izomorfnak nevezzük, ha függvényeik páronként úgy feleltethetők meg egymásnak, hogy tetszőleges a $\varphi$-kből alkotott kettes vagy hármas szorzat $\mathfrak{M}$-en vett integrálja és a megfelelő függvények szorzatának $\mathfrak{M}'$-n vett integrálja egyenlő. Egy $\mathfrak{M}$-en, illetőleg $\mathfrak{M}'$-n definiált mérhető, négyzetesen integrálható $h$, illetőleg $h'$ függvényt akkor mondunk megfelelőnek, amikor a $\int\limits_{\mathfrak{M}} h\varphi = \int\limits_{\mathfrak{M}'} h'\varphi'$ egyenlőség fennáll minden megfelelő $\varphi$, $\varphi'$ párra. Ha a $\{\varphi\}$ rendszer az $\mathfrak{M}$-en, a $\{\varphi'\}$ rendszer pedig az $\mathfrak{M}'$-en teljes, akkor ennek a megfeleltetésnek ugyanazok a tulajdonságai, mint az 1. §-ban értelmezett megfeleltetésnek. A megfeleltetés egyértelműsége és az 1.1—1.3 tulajdonságok a rendszerek teljességéből és a kettes szorzatokra vonatkozó izomorfia feltételből következnek, az 1.4—1.7 tulajdonságok bizonyítására még fel kell használni a hármas szorzatokra vonatkozó izomorfia feltételt, valamint a $\varphi$-k és $\varphi'$-k korlátosságát is. Az I. és II. tétel s általánosításaik változatlanul érvényesek ennélfogva ez esetben is.

## ÖNMAGUKBAN ZÁRT RENDSZEREK.

### 6. §. Az önmagában zártság fogalma.

$\mathfrak{M}$ legyen egy véges vagy végtelenbe nyúló intervallum, vagy akármilyen olyan halmaz, amelyen az előbbi §-ban vázolt módon absztrakt mérték és integrál van definiálva. Tekintsük az $\mathfrak{M}$-en értelmezett mérhető, négyzetesen integrálható, korlátos $\psi$ függvényeknek egy $\{\psi\}$ rendszerét. $\mathfrak{L}$ jelentse a $\{\psi\}$ függ-

[12] V. ö. pl. F. RIESZ, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen, 69 (1910), 449—497. o., különösen a 496—497. o.

vényei által kifeszített zárt lineáris függvénysokaságot, azaz azoknak a valós értékű, mérhető, négyzetesen integrálható függvényeknek összességét, amelyek a $\{\psi\}$-ből vett véges sok függvénynek alkalmas lineáris kapcsolatával négyzetintegrálra tetszőleges kívánt pontossággal megközelíthetők. A MINKOWSKI-féle egyenlőtlenségből következik, hogy ha egy függvény véges sok $\mathfrak{L}$-be tartozó függvény lineáris kapcsolatával tetszőleges pontossággal négyzetintegrálra megközelíthető, akkor maga is $\mathfrak{L}$-be tartozik.

A $\{\psi\}$ rendszert *önmagában zártnak* mondjuk, ha a $\{\psi\}$-be tartozó tetszésszerinti (nem szükségképpen különböző) két függvénynek szorzata is $\mathfrak{L}$-be tartozik.

Bizonyítsuk be egy önmagában zárt rendszerre vonatkozóan a következő tényeket.

6.1. *Ha $h_1$ és $h_2$ $\mathfrak{L}$-be tartozik és $h_1$ korlátos, akkor $h_1h_2$ is $\mathfrak{L}$-be tartozik.*

Bizonyítás. Legyen $\psi$ a $\{\psi\}$ rendszerbe tartozó függvények közül egy tetszőleges ($|\psi| \leqq A$); legyen továbbá $\varepsilon$ egy tetszőleges pozitív szám. Van ekkor egy véges sok $\psi$-ből alkotott $\Sigma c_i\psi_i$ lineáris kapcsolat, amelyre

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_1 - \Sigma c_i\psi_i)^2 < \frac{\varepsilon}{A^2}.$$

De ekkor

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_1\psi - \Sigma c_i . \psi . \psi_i)^2 < \varepsilon,$$

azaz, minthogy a $\psi\psi_i$ szorzatok mind $\mathfrak{L}$-be tartoznak, $h_1\psi$ is $\mathfrak{L}$-be tartozik. Ugyancsak van egy véges sok $\psi_i$-ből alkotott $\Sigma c_i'\psi_i$ lineáris kapcsolat, amelyre

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_2 - \Sigma c_i'\psi_i)^2 < \frac{\varepsilon}{H^2}, \text{ (ahol } H \text{ a } |h_1| \text{ egy felső korlátja),}$$

ennélfogva

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_1h_2 - \Sigma c_i'h_1\psi_i)^2 < \varepsilon.$$

Tehát a $h_1\psi_i$-kkel együtt a $h_1h_2$ szorzat is tényleg $\mathfrak{L}$-ben van.

Teljes indukcióval bizonyítható ezek alapján, hogy egy korlátos $h$ függvénnyel együtt $h^n$ is ($n=1, 2, 3, \ldots$) $\mathfrak{L}$-be tartozik.

6.2. *h legyen egy korlátos,* $\mathfrak{L}$*-be tartozó függvény* ($|h| \leqq H$). *Az* $F(x)$ *függvény legyen a* $[-H, H]$ *intervallumon folytonos, vagy tartozzék az első* Baire*-féle osztályba és legyen ezen az intervallumon* $|F(x)| \leqq C|x|$. *Ekkor* $F(h)$ *is az* $\mathfrak{L}$*-be tartozik.*

Bizonyítás. A $G(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$ függvény szintén az első Baire-féle osztályba tartozik és $|G(x)| \leqq C$. Van tehát egy $[-H, H]$-n mindenütt $G(x)$-hez tartó olyan $P_n(x)$ polinomsorozat, amelyre ugyancsak áll, hogy $|P_n(x)| \leqq C$. Nyilván $x.P_n(x) \to F(x)$, ha $n \to \infty$.

$|F(h) - h.P_n(h)|$ tehát $2C|h|$-nál, $(F(h) - h.P_n(h))^2$ ennélfogva $4C^2h^2$-nél kisebb. Minthogy az utóbbi majoráns függvény integrálható, azért az $(F(h) - h.P_n(h))^2$ mérhető függvény szintén integrálható és ha $n \to \infty$, akkor

$$\int_{\mathfrak{M}} (F(h) - h.P_n(h))^2 \to 0.$$

A $h.P_n(h)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) függvények 6.1 szerint $\mathfrak{L}$-be tartoznak s így $\mathfrak{L}$-be tartozik $F(h)$ is.

$A$ legyen egy pozitív szám, ekkor az

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -H \leqq x < A, \\ 1, & \text{ha } A \leqq x \leqq H, \end{cases} \quad \text{és} \quad F_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -H \leqq x \leqq -A, \\ 0, & \text{ha } -A < x \leqq H, \end{cases}$$

függvények nyilván a fenti tulajdonságúak s így $F_1(h)$ és $F_2(h)$ az $\mathfrak{L}$-be tartoznak. Nevezzük azokat a halmazokat, ahol a $h$ függvény egy adott pozitív számnál nem kisebb, vagy ahol egy adott negatív számnál nem nagyobb, a $h$ *szinthalmazainak*. Utolsó eredményünk szerint tehát a $h$ szinthalmazainak karakterisztikus függvényei $\mathfrak{L}$-be tartoznak.

## 7. §. Absztrakt mértéken alapuló integrál bevezetése, amelyre vonatkozólag az önmagában zárt rendszer teljes.

Tekintsük az önmagában zárt, korlátos függvényekből álló $\{\varphi\}$ rendszer összes $\varphi$ függvényeinek összes szinthalmazait. Mint láttuk (6.2 alapján), e halmazok karakterisztikus függvényei mind

$\mathfrak{L}$-be tartoznak. A karakterisztikus függvények e rendszerét terjesszük ki a következő folytatólagosan végzett eljárásokkal. Két függvényhez vegyük hozzá felső és alsó burkolóikat, valamint különbségüket, ha ez sehol sem negatív; egy monoton növekvő sorozathoz vegyük hozzá limeszét is, ha az integrálható. Ezek az eljárások nyilván mindig karakterisztikus függvényeket adnak, be fogjuk látni, hogy $\mathfrak{L}$-ből sem vezetnek ki.

Ha $e_1$ és $e_2$ két $\mathfrak{L}$-be tartozó karakterisztikus függvény, akkor 6.1 szerint $e_1 e_2$ is $\mathfrak{L}$-be tartozik, tehát $\mathfrak{L}$-be tartozik $\sup(e_1, e_2) = e_1 + e_2 - e_1 e_2$, $\inf(e_1, e_2) = e_1 e_2$ és $e_1 - e_2$ is, (hiszen összeg és különbség képzés nem vezet ki $\mathfrak{L}$-ből). Végül legyen $e_n$ egy integrálható $e$ függvényhez tartó monoton növekvő sorozat. Minthogy $e$ ekkor az $e_n$ sorozatnak négyzetintegrálra is limesze, az $e_n$-ekkel együtt $e$ is $\mathfrak{L}$-be tartozik.

Tekintsük azokat a mérhető halmazokat, amelyekhez a fenti karakterisztikus függvények tartoznak. E halmazok nyilván mind részhalmazai $\mathfrak{M}$ azon $\overline{\mathfrak{M}}$ részének, amelynek bármely pontjához van egy ott zérótól különböző értékű $\psi$ függvény. Egészítsük ki végül a szóbanforgó halmazrendszert a következőképpen. A rendszer egy zérómértékű halmazához vegyük hozzá ennek részhalmazait is, s a rendszer egy tetszőleges halmazához vegyük hozzá a tőle csak egy-egy ilyen részhalmazban különböző halmazokat. Az így kiegészített $\sigma$ halmazrendszer halmazait nevezzük $\mu$-mérhetőknek, $\sigma$ egy halmazának $\mu$-mértéke legyen egyenlő az eredeti mértékével. Az $\overline{\mathfrak{M}}$ alaphalmazon így egy absztrakt LEBESGUE-féle mértékfogalmat vezettünk be (v. ö. az 5. §-ban mondottakkal). Az ezen a mértékfogalmon alapuló integrált nevezzük $\mu$-integrálnak. Nyilvánvaló, hogy egy $\mu$-integrálható függvény eredetileg is integrálható volt s a két integrálja egyenlő.

Minthogy a $\mu$-mérték értelmezésében éppen a $\psi$ függvények szinthalmazaiból indultunk ki, azért a $\psi$-k és lineáris kapcsolataik nyilván $\mu$-mérhetőek és négyzeteik $\mu$-integrálhatóak. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathfrak{L}$-be tartozó függvény ekvivalens egy $\mu$-mérhető és négyzetre $\mu$-integrálható függvénnyel és hogy fordítva, bármely $\mu$-mérhető, $\mu$-integrálható négyzettel bíró függvény az $\mathfrak{L}$-be tartozik. Ezzel bebizonyítjuk azt is, hogy a $\{\psi\}$ rendszer az $\overline{\mathfrak{M}}$ halmazon a $\mu$-mértékfogalom mellett *teljes*.

Legyen $f$ $\mu$-mérhető és $f^2$ $\mu$-integrálható, $\varepsilon$ pedig egy tetszőleges pozitív szám. Van ekkor bizonyos $\mu$-integrálható karakterisztikus függvényeknek egy olyan $\Sigma c_i e_i$ lineáris kapcsolata, hogy

$$^{(\mu)}\int_{\overline{\mathfrak{M}}}(f-\Sigma c_i e_i)^2 < \varepsilon, \quad \text{azaz egyben} \quad \int_{\dot{\mathfrak{M}}}(f-\Sigma c_i e_i)^2 < \varepsilon.$$

Az $e_i$ függvényekről tudjuk, hogy $\mathfrak{L}$-ben vannak, velük együtt $\mathfrak{L}$-ben van tehát $f$ is, amivel a fenti állítás második részét bebizonyítottuk.

Legyen $h$ most tetszőleges $\mathfrak{L}$-be tartozó függvény. A véges sok $\psi$-ből alkotott $l_n$ lineáris kapcsolat közelítse meg $h$-t négyzetintegrálra $\frac{1}{n}$ pontossággal. Az $\int_{\dot{\mathfrak{M}}}(l_m-l_n)^2$ s ennélfogva a nyilván szintén létező $^{(\mu)}\int_{\overline{\mathfrak{M}}}(l_m-l_n)^2$ integrálok 0-hoz tartanak, ha $m, n \to \infty$. A Riesz—Fischer-tétel egy szokásos bizonyítása alapján tudjuk, hogy van egy $l_{n_k}$ részsorozat, amely egy $\mu$-zéróhalmaz kivételével mindenütt egy $h_1$ függvény felé tart, $h_1$ tehát $\mu$-mérhető és $h_1^2$ $\mu$-integrálható. Erre a $h_1$-re igaz továbbá, hogy $^{(\mu)}\int_{\overline{\mathfrak{M}}}(h_1-l_n)^2 \to 0$, azaz, hogy $\int_{\dot{\mathfrak{M}}}(h_1-l_n)^2 \to 0$. A $h$ függvény ennélfogva $h_1$-gyel ekvivalens, amivel állításunk első részét is bebizonyítottuk. Összefoglalva mindent:

**III. tétel.** *Az $\mathfrak{M}$ halmazon értelmezett bizonyos korlátos $\psi$ függvények alkossanak egy önmagában zárt $\{\psi\}$ rendszert. $\overline{\mathfrak{M}}$ jelölje az $\mathfrak{M}$ azon részét, amelyet $\mathfrak{M}$-ből úgy kapunk, hogy belőle elhagyjuk azokat a pontokat, ahol minden $\psi$ egyszerre 0-val egyenlő. Ekkor a $\psi$-k szinthalmazaiból kiindulva, $\overline{\mathfrak{M}}$-on egy olyan absztrakt mérték- és integrálfogalmat vezethetünk be, hogy erre az új integrálfogalomra vonatkozólag integrálható függvények régibb értelemben is mind integrálhatóak, kétféle integráljuk egyenlő és a $\{\psi\}$ rendszer ez új mértékfogalommal az $\overline{\mathfrak{M}}$-on teljes.*

Ezek alapján az I. tételt izomorf önmagukban zárt, korlátos függvényekből álló rendszerekre is kiterjeszthetjük, mindjárt az 5. §-beli általánosságban.

IV. tétel. *$\mathfrak{M}$-en és $\mathfrak{M}'$-n legyen egy-egy egymással izomorf, korlátos függvényekből álló, önmagában zárt $\{\varphi\}$, illetőleg $\{\varphi'\}$ függvényrendszer értelmezve. Ekkor az izomorfia által megfeleltetett bármely $\varphi, \varphi'$ függvénypárnak ugyanazon állandóhoz tartozó szinthalmazai egyenlő mértékűek. Egyenlő mértékű halmazokat kapunk továbbá akkor is, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\varphi$-szinthalmaznak, illetőleg a megfelelő $\varphi'$-szinthalmazoknak egyesített halmazait, közös részeit vagy különbség-halmazait képezzük.*

*

Hálával kell megemlékeznem e helyen is Riesz Frigyes professzor úrnak e dolgozat készítése alatt tanúsított állandó szíves érdeklődéséről; a vele folytatott megbeszéléseink során e dolgozat egyes bizonyításai egyszerűségben és módszertisztaságban sokat nyertek.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. márc. 16-án tartott üléséből.)

# ÜBER ISOMORPHE FUNKTIONENSYSTEME.

Von BÉLA v. SZ. NAGY in Szeged.

Wir nennen (nach A. HAAR) zwei auf den Grundmengen $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ definierte, aus beschränkten Funktionen bestehende Orthogonalsysteme: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, bzw. $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \ldots$ isomorph, wenn die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p \varphi_q \varphi_r = \int_{\mathfrak{M}'} \varphi'_p \varphi'_q \varphi'_r$$

für beliebige $p, q, r$ statthat.

Im ersten Teile dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Beweis und mit den Weiterführungen des folgenden, schon von HAAR (ohne Begründung) behaupteten Satzes:

Sind die beiden isomorphen Orthogonalsysteme vollständig, so kann man die messbaren Teilmengen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ einander masstreu entsprechen lassen, so dass *a)* dieses Entsprechen gegenüber den (auf endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen ausgeübten) Mengenoperationen invariant ist, *b)* die Mengen, auf denen die Ungleichungen $\varphi_i \gtrless A$, bzw. $\varphi'_i \gtrless A$ gelten, einander entsprechen.

Im zweiten Teile setzen wir statt Vollständigkeit nur «Abgeschlossenheit in sich» voraus, d. h.: wir fordern nur, dass die durch das gegebene Funktionensystem aufgespannte abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit jedes aus den Funktionen des Systems gebildete Zweierprodukt enthalte. Dieser Fall lässt sich in gewissem Sinne auf den Fall der vollständigen Systeme zurückführen.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. März 1936.)

# NÉHÁNY ÚJABB KONGRUENCIAFELTÉTEL A MÁSODFOKÚ SZÁMTEST ABSZOLÚT OSZTÁLYCSOPORTJÁNAK NYOLCCAL OSZTHATÓ INVARIÁNSAIRA.

RÉDEI LÁSZLÓ-tól (Mezőtúr).

## 1. §.

Legyen $R(\sqrt{D})$ tetszésszerinti másodfokú számtest a racionális $R$ számtest fölött, D az ő discriminánsa, $t$ a D különböző törzstényezőinek számossága, $e_{2^n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ az $R(\sqrt{D})$ testben a szűkebb értelemben vett abszolút osztálycsoport $2^n$-nel osztható invariánsainak számossága.

Gauss tétele szerint $e_2 = t - 1$. Régebben meghatároztam $e_4$-et,[1] majd $e_8$-at,[2] az előbbit explicit kongruenciafeltételekkel, az utóbbit kevésbé egyszerű eredménnyel. H. Reichardt[3] az $e_4$-re vonatkozó eredményem nyomán megállapított bizonyos általános összefüggéseket $e_{2^n}$-re vonatkozólag. Ezeknek az $e_8$-ra vonatkozó különös eseténél egyszerűbb az én $e_8$-ról említett eredményem, amit egyébként azután közvetlenül az ő eredményeiből is levezettem.[4] Ugyanekkor bizonyos különös esetekben

---

[1] Rédei L.: A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, ez az Értesítő 49 (1932), 338—351.

[2] Rédei L.: A másodfokú] számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai, ez az Értesítő 50 (1933), 195—215.

[3] H. Reichardt: Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journ. f. d. Math. 170 (1933), 75—82.

[4] L. Rédei: Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journ. f. d. Math. 171 (1934), 131—148. Ezt a dolgozatot I-gyel fogom idézni. Hibajavítás ehhez a dolgozathoz: a 137. o. 10. sorában «Primteiler» helyett «ungeraden Primteiler» veendő.

az $e_8$ számára is nyertem egyszerű kongruenciafeltételeket, részben elégségeseket, részben szükségeseket.[5]

A jelenlevő dolgozatban további hasonló természetű feltételeket fogok $e_8$-ra vonatkozólag megállapítani. Ezekből néhányat a jelenlevő 1. § végén, az ezután kezdődő tulajdonképeni tárgyalást megelőzően, előre is megfogok említeni.

A tárgyalás alig kíván újabb eszközöket, mint amelyek már az I dolgozatban együtt voltak. A nyerendő új eredmények bizonyos, a 2. §-ban tárgyalandó, a 2-karakterisztikájú $R_2$ törzstest elemeiből alkotott matrixokról szóló megállapításoknak köszönhetők, amelyek közül különösen az első (1. segédtétel) önmagában is érdekesnek mondható. Ettől független a 3. §, ahol az I dolgozatnak az $e_8$-ra vonatkozó, már ott is háromféle alakban (I, I', I'' tételek) kifejezett tételét ismét egy újabb, az eddigieknél kényelmesebb alakra hozom. Mindezek alapján a 4. §-ban nyerem a fentebb bejelentett explicit kongruenciafeltételeket. Itten az I dolgozatban már megvolt hasonló feltételek részben önmaguktól újra elő fognak állni, és a többit is meg fogom ismételni az elérhető teljesség kedvéért.

A fentemlített dolgozatokból bizonyos tényekre hivatkozni fogok, másokat azonban szükséges lesz a nagyobb világosság kedvéért itt megismételnem. Ezekből egyeseket már itt előadok.

Törzsdiscriminánsnak[6] nevezem a $4l+1$ alakú pozitív és negatív törzsszámokat és a $-4$, 8, $-8$ számokat. A tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen lehetséges a $D=d_1 d_2 \ldots, d_t$ törzsdiscriminánstényezőkre való felbontás. A jövőben egy tetszésszerinti sorrendet is rögzítünk, úgy mégis, hogy $2 \mid D$ mellett $2 \mid d_t$ legyen.

D-osztó alatt értek egy $d_1^{c_1} d_2^{c_2} \ldots d_t^{c_t}$ szorzatot, ahol $c_j = 0$ vagy 1 ($j = 1, 2, \ldots, t$). Ezek egy $2^t$ rendű (2, 2,..., 2) típusú ABEL-féle csoportot alkotnak a következő összetevési szabály szerint: az $a$, $b$ D-osztókból összetett D-osztó az, amely az $ab$ szorzatból az összes $d_j^2$ tényező elhagyásával előáll.

---

[5] Lásd az I dolgozatban a II, II', III, IV, tételeket.

[6] Más dolgozataimban, nem egészen helyesen az «alapdiscriminánsa» elnevezést használtam.

D-felbontás alatt értek egy D',D'' párt, ahol D', D'', a D-felbontás tagjai, komplementér D-osztók (D'D''=D). A tagok felcserélésével előálló D-felbontást az eredetitől nem különbözőnek tekintem. A különböző D-felbontások száma $2^{t-1}$. Ezeket úgy fogjuk felírni, hogy mindenkor $d_t \mid D''$. A $\Delta$, $\Delta_1$ D-felbontásokból összetett $\Delta\Delta_1$ D-felbontás alatt értem azt a D-felbontást, amelynek első tagja a $\Delta$ és $\Delta_1$ első tagjaiból összetevéssel áll elő. Az összes különböző D-felbontások ugyancsak egy (2, 2,..., 2) típusú ABEL-féle csoportot alkotnak.

A D-felbontások közül bizonyosakat $n$-edfajúnak nevezünk ($n=2, 3, 4,\ldots$). Ezeknek általános definíciójára nézve REICHARDT dolgozatára utalok.[7] Az $n$-edfajú D-felbontások ugyancsak csoportot alkotnak.[8] Érvényes a következő tétel:[9]

*$e_{2n}$ egyenlő a független $n$-edfajú D-felbontások számával.*

Másszóval $2^{e_{2^n}}$ egyenlő az $n$-edfajú D-felbontások csoportjának rendjével. (A tétel az $n=1$ esetben GAUSS tételébe megy át, ha «1-sőfajú D-felbontás» úgy értelmeztetik, mint «D-felbontás»).

E szerint $e_{2^n}$ meghatározásához csupán az $n$-edfajú D-felbontások ismerete szükséges. Ez utóbbi kérdés azonban az $n \geqq 2$ értékek közül csupán $n=2$ mellett tekinthető véglegesen elintézettnek. Mégpedig érvényes a következő:

A D', D'' D-felbontás másodfajú akkor és csak akkor, ha D''-nek minden $p''$ törzstényezőjére és D'-nek minden $p'$ törzstényezőjére

$$\left(\frac{D'}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{D''}{p'}\right) = 1$$

teljesülnek, ahol (—) a KRONECKER-féle jel.

Ez az én[1] dolgozatom főeredménye, amiről fent már említést tettem. Ellenben az $n \geqq 3$ esetben az $n$-edfajú D-felbontásoknak[7] alatt említett REICHARD-féle definíciója megközelítőleg sem hasonlóan egyszerű. Csupán még az $n=3$ esetben jutottam

---

[7] Lásd a [3] dolgozatban 82. o. a II definíciót.

[8] Lásd a [3] dolgozat 76. oldalát.

[9] Lásd a [3] dolgozatban 77. o. a 2. tételt.

én még REICHARDT előtt az övénél egyszerűbb definícióra, ami azonban ugyancsak nem mondható kielégítőnek, amiről fent már szintén említést tettem.

A következőkben csupán az $n=3$ esettel foglalkozom. A fent mondottak értelmében tárgyunk lesz a 3-adfajú D-felbontások eddigi definícióját az I dolgozatból segítségül véve, az $e_8$-ra az általános esetben egy, az eddiginél kényelmesebb meghatározásmódot adva, ezután bizonyos, a már meglevőkön túlmenő esetekben explicit feltételekhez jutni.

Az $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ negyedfokú «racionális» hatványmaradékjelt a szokásos módon értelmezem, azaz úgy, hogy itt $x$, $y$ relatív prim racionális egész számok legyenek, $y \neq 0$ és az $y$ minden $p$ racionális törzstényezőjére $\left(\frac{x}{p}\right)=1$ legyen, amikor aztán $\left(\frac{x}{p}\right)_4=\pm 1$, ahol a felső előjel érvényes akkor és csak akkor, ha $p \neq 2$ mellett $z^4 \equiv x \pmod p$, illetőleg $p=2$ mellett $z^4 \equiv x \pmod{16}$ racionális egész $z$ értékkel megoldható, végül mindenkor $\left(\frac{x}{-y}\right)_4=\left(\frac{x}{y}\right)_4$ és $\left(\frac{x}{y}\right)_4\left(\frac{x}{y_1}\right)_4=\left(\frac{x}{yy_1}\right)_4$ legyen, hacsak itt a baloldal értelmezett.

*

Itt elő akarok bocsátani néhányat nyerendő eredményeink közül. Most csak olyan D-ket tekintek, amelyek csupa $4l+1$ alakú pozitív törzsszám szorzatából állnak. Mint már az I dolgozatban láttuk, mindenkor van legalább $2^{e_8}$ különböző olyan D', D'' (2-odfajú) D-felbontás, amelyre $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4=\left(\frac{D''}{D'}\right)_4=1$. Ez bizonyos monoton kapcsolatra mutat $e_8$ s a most említett D-felbontások számossága között. Fordítva azonban csupán a következő, valamennyire általános természetű tényt találjuk: Ha minden D', D'' 2-odfajú D-felbontásra az iménti egyenletek teljesülnek, akkor $e_8=e_4-2e$, ahol $e$ nem negatív egész szám, amiről közelebbit megállapítani nem sikerült. Különösen $2+e_4$ mellett $2+e_8$ s így ilyenkor $e_8 \geqq 1$. Ha pedig éppen $e_4=1$, akkor $e_8=1$, amely utóbbi tény már az I dolgozatban ismeretes volt. A mondott monotonitásnak azonban egyenesen ellene mond a következő:

Ha $e_4=2$ és a létező összes 2-odfajú D-felbontásra (ezeknek száma most 4, amikből azonban az 1, D nem jön tekintetbe) a fenti egyenletek teljesülnek, akkor a mondottak szerint $e_8=0$ vagy 2. Köztük az $e_8=0$ eset tényleg előfordul, amit egy példával fogok igazolni. Ha ellenben az említett egyenletek csupán egy D', D'' 2-odfajú D-felbontás kivételével teljesülnek, míg az utóbbira $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4=\left(\frac{D''}{D'}\right)_4=-1$, akkor $e_8=1$.

Még megemlítem, hogy mindeddig az $e_8$-ra csupán olyan (a D törzsténvezőben) explicit kongruenciafeltételeket sikerült nyerni, amelyek $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ jelekkel nyertek kifejezést.

## 2. §.

Ebben a §-ban matrix alatt mindenkor olyan derékszögű matrixot értek, amelynek elemei a 2-karakterisztikájú $R_2$ törzstestből vétettek. Ez utóbbinak elemeit 0 és 1 jelöljék. A szereplő matrixok változókat is tartalmazhatnak, amelyek ekkor ugyancsak $R_2$-ben értendők. Egy ilyen matrixból helyettesítéssel előálló konstans matrixot az eredeti matrix egyik értékének nevezem. Az $N$ összes értékei rangszámainak halmazát $(N)$-nel jelöljük, úgy azonban, hogy az esetleg többször előforduló rangszámok csak egyszeresen számítandók. Az $(N)$ e szerint mindenkor véges számú különböző nem negatív egész szám halmaza. Ha éppen $N$ konstans, akkor $(N)$ az $N$ rangja.

Jelentsen ezután $n\geqq 1$ mellett $N=(a_{jk})$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ olyan matrixot, amelynek elemei csupán azáltal vannak korlátozva, hogy az $a_{jj}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ átlóselemek, továbbá a szimmetrikus helyzetű elemek $a_{jk}+a_{kj}$ $(1\leqq j<k\leqq n)$ összegei tetszésszerint előre megadottak, azaz

$$N=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}+x_{12} & \ldots & b_{1n}+x_{1n} \\ x_{12} & b_{22} & & b_{2n}+x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{1n} & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

írható, ahol $b_{jk}$ $(1\leqq j\leqq k\leqq n)$ és $x_{jk}$ $(1\leqq j<k\leqq n)$ az $R_2$ testből vett konstansok, illetve független változók.

A következő három esetet különböztetem meg:

*a)* $N$ szimmetrikus,

*b)* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1+x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ vagy $\begin{pmatrix} 0 & 1+x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ vagy $\begin{pmatrix} 1 & 1+x \\ x & 0 \end{pmatrix}$,

*c)* $N$ nem tartozik sem *a)*, sem *b)* alá.

Ezek közül az *a)* úgy értendő, hogy ott $b_{jk}=0$ $(1 \leqq j \leqq k \leqq n)$. Az $x$ ebben a §-ban mindig $R_2$-beli változót jelent.

Érvényes a következő:

1. *Segédtétel* *Az a) esetben* $(N) = \left(0, 2, 4, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$, *a b) esetben* $(N) = 1$, *a c) esetben* $(N) = (m, m+1, \ldots, n)$, *ahol* $0 < m \leqq n$.[10]

Bizonyítás. Az $A$ matrix egyik sorának egy másik sorhoz való hozzáadásával előálló $B$ matrixot az eredetivel aequivalensnek nevezem. Hasonló értendő az oszlopokra is. Jelekben: $A \sim B$. Ha pedig az $A$ matrix $k$-dik sorát az $l$-dik sorhoz adjuk s azután a létrejött matrixban az ugyanolyan indexű oszlopokon végezünk összeadást, akkor az előállt $B$ matrixot az eredetivel hasonlónak nevezem. Jelekben: $A \approx B$. Továbbá mindkét értelmezés kibővítendő azáltal, hogy tranzitivitást is követelünk. Azaz: ha $A \sim B$, $B \sim C$, akkor $A \sim C$. Hasonlóan a «$\approx$» jeljel is. E szerint $A \approx B$-ből következik $A \sim B$. Nyilvánvalóan igaz a következő:

*Ha* $A \approx B$ *vagy ha* $A \sim B$, *akkor* $(A) = (B)$.

Visszatérve az $N$ matrixra, látjuk, hogy $N^* \approx N$ mellett $N^*$ is az $N$ matrixok közé tartozik. Ezt elég arra az esetre kimutatni, ha $N^*$ az $N$-ből a 2-dik sornak az 1-ső sorhoz, majd az ugyanilyen indexű oszlopoknak egymáshoz adásával előáll. Akkor $N = (a_{jk})$, $N^* = (a'_{ik})$ $(1 \leqq j, k \leqq n)$ mellett

$$a'_{11} = a_{11} + a_{22} + (a_{12} + a_{21}),$$

továbbá $a'_{1k} = a_{1k} + a_{2k}$ és $a'_{k1} = a_{k1} + a_{k2}$, azaz

$$a'_{1k} + a'_{k1} = (a_{1k} + a_{k1}) + (a_{2k} + a_{k2}) \quad (2 \leqq k \leqq n),$$

[10] Mellékesen megjegyzem a fenti segédtétel következő folyományát. $|N|$-nel jelölve az $N$ matrixból alkotott determinánst, az $|N|$ akkor és csak akkor nem azonosan 0, ha $N$ az *a)* alá tartozik és $2 \nmid n$ vagy $N$ a *b)* alá tartozik.

míg $a'_{jk} = a_{jk}$ $(2 \leqq j,\ k \leqq n)$. Ebből látjuk, hogy $N^*$ is olyan matrix, amelyben az átlóselemek és a szimmetrikus helyzetű elemek összegei állandók. Hogy az $N^*$ elemeit semmi más nem korlátozza, az is rögtön következik abból, hogy az $N$-ről $N^*$-ra való áttérés műveletének megismétlése visszavezet $N$-re. Ezzel kimutattuk állításunkat.

Ezek szerint a segédtétel bizonyításánál az $N$ bármely hasonló matrixszal helyettesíthető.

Ha mármost az $N$ szimmetrikus, vagyis ha az *a)* eset áll fenn, és $n = 1$ vagy 2, akkor $N = (0)$, illetve $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Megfelelőleg $(N) = 0$, illetve $(0, 2)$, úgy mint ezt az 1. segédtétel követeli. Ha $n \geqq 3$, akkor tekintem az $N$-nek azt az értékét, amelyben $a_{12} = a_{34} = \cdots = a_{2r-1,\,2r} = 1$, egyszersmind tehát $a_{21} = a_{43} = \cdots = a_{2r,\,2r-1} = 1$ $\left(0 \leqq r \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, de minden egyéb $a_{jk} = 0$. Itt a rangszám nyilvánvalóan $2r$. Elég tehát annyit kimutatni, hogy az $N$ bármely $N_0$ értékének a rangja páros. Ezt ama feltevés mellett végezzük, hogy hasonló az $n$ «kisebb» értékeire igaz. Ezzel a fent megvizsgált $n = 1$, 2 esetek alapján a segédtétel jelen *a)* esete helyesnek fog bizonyulni. Ha $N_0$ minden eleme 0, akkor $(N_0)$ is 0, azaz páros szám. Ha pedig $N_0$-nak van 1-es eleme, akkor feltehető, hogy éppen $a_{n,\,n-1} = a_{n-1,\,n} = 1$. Nyilvánvalóan van egy $N_0$-hoz hasonló $N_1$ matrix, amelyben az említett elemek változatlanok maradtak, míg az utolsó sor és oszlop minden más eleme 0. Akkor egyrészt $(N_0) = (N_1)$, másrészt $(N_1)$ 2-vel nagyobb, mint annak a matrixnak a rangja, amely $N_1$-ből a 2 utolsó sor és oszlop törlésével előáll. Utóbbi matrix ugyancsak szimmetrikus, míg sorainak száma $n-2$ lévén, rangja a feltevés szerint páros. Ezzel a segédtétel bizonyítása az *a)* esetben megtörtént.

A *b)* eset alá tartozó 3-féle matrix egymással hasonlók s így elég a bizonyítást az $N = \begin{pmatrix} 0 & 1+x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ esetben végezni. Az $N$ értékei most $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mindkét matrix rangja 1, s így a segédtétel a *b)* esetben is helyes.

A továbbiakhoz a következő előkészületet teszem. $N'$-vel

jelölöm azt a matrixot, ami $N$-ből az utolsó sor és oszlop törlésével előáll. Nyilvánvalóan

$$\min (N') \leqq \min (N),$$

ahol min $h$ jelenti a $h$ számhalmaz legkisebb elemét. Ha továbbá $a_{nn} = 1$, akkor

$$(N')_1 \subset (N),$$

ahol a baloldal azt a halmazt jelenti, ami $(N')$-ből előáll, ha ennek elemeihez 1-et adunk.

Ha ugyanis $N_0$ az a matrix, amely $N$-ből az

$$a_{n1} = a_{n2} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$$

helyettesítéssel előáll, akkor $a_{nn} = 1$ mellett $(N')_1 = (N_0) \subset (N)$.

Ezekután felteszem, hogy $N$ a még hátralévő *c)* eset alá tartozik. Ha $n = 1$, akkor igaz a segédtétel, mert akkor $N = (a_{11})$, s minthogy $N$ nem szimmetrikus, azért $a_{11} = 1$, tehát $(N) = 1$. A következőkben felteszem, hogy $n \geqq 2$ és hogy a segédtétel igaz az $n$ «kisebb» értékeire. Feltehető, hogy az $N$-nek van olyan átlóseleme, amely nem 0. Ha ugyanis minden átlóselem 0, akkor van két olyan szimmetrikus helyzetű elem, amelyeknek (állandó) összege 1, mert $N$ nem szimmetrikus. Ha éppen $a_{12} + a_{21} = 1$, akkor a második sornak az elsőhöz, majd a második oszlopnak az elsőhöz való hozzáadása után olyan, az $N$-hez hasonló matrix áll elő, amelyben az $a_{11}$ elem helyébe 1 kerül. Legyen tehát a következőkben $a_{11} = 1$. Ha $n = 2$, akkor csupán az

$$N = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

esetekkel kell foglalkoznunk, mert különben $N$ a *c)* alá tartozik. Ezek közül az első esetben $(N) = (1, 2)$, hasonló igaz a második esetben, míg a harmadik esetben $(N) = 2$. Most tehát a segédtétel helyes, s így a következőkben feltehető, hogy $n \geqq 3$.

Feltehető továbbá, hogy az $N$-nek legalább két átlóseleme nem 0. Az előbbiek szerint ugyanis már $a_{11} = 1$. Mindenekelőtt elérhető, hogy legalább egy $j$ $(\geqq 2)$ értékkel, pl. $j = 2$ mellett $a_{j1} = a_{1j}$ legyen. Ha ugyanis mindig $a_{j1} \neq a_{1j}$, akkor a harmadik sornak a másodikhoz, majd a harmadik oszlopnak a második-

hoz való hozzáadásával olyan, az eredetihez hasonló matrix áll elő, amelyben már $a_{21} = a_{12}$. E közben az $a_{11}$ elem nem változott, azaz még mindig $a_{11} = 1$. Ha most még $a_{22} = 0$, akkor első sort a másodikhoz, majd az oszlopokat hasonlóan összeadva, a nyert hasonló matrixban $a_{22}$ helyébe 1 lép, míg $a_{11} = 1$ megmarad.

A most kimutatottak alapján kényelmesebb lesz a következőkben feltenni, hogy éppen $a_{11} = a_{nn} = 1$. Az utóbbi miatt, az $N'$-ről fent megjegyzettek szerint, és minthogy $N'$-re a feltevés szerint igaz a segédtétel, következik, hogy ha $N'$ is *c)* alá tartozik, azaz $(N') = (m, m+1, \ldots, n-1)$, ahol $0 < m \leqq n-1$, akkor $(m+1, m+2, \ldots, n) \subset (N)$. Továbbá most $\min(N') = m$, tehát $m \leqq \min(N)$. Ezek szerint $(N) = (m+1, m+2, \ldots, n)$ vagy $(m, m+1, m+2, \ldots, n)$. Ekkor tehát helyes a segédtétel s így csupán azok az esetek maradtak hátra, amelyekben $N'$ a *b)* alá tartozik. ($N'$ ugyanis nem tartozhatik az *a)* alá, mert $a_{11} = 1$.)

Megvizsgálandók e szerint csupán azok az esetek, amelyekben $n = 3$, $a_{11} = a_{33} = 1$, $N'$ a *b)* alá tartozik. Utóbbi miatt $a_{22} = 0$, $a_{12} \neq a_{21}$. Szimmetria-okokból nyilvánvalóan az $a_{23} \neq a_{32}$ korlátozás is előírható, azaz megmarad a következő két eset:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & y \\ x & 0 & 1+z \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+x & 1+y \\ x & 0 & 1+z \\ y & z & 1 \end{pmatrix}$$

ahol $x, y, z$ független változók. Mindkét esetben $x = y = z = 0$ mellett a rangszám 2, míg $x = z = 0$, $y = 1$ mellett a rangszám 3, továbbá a 0 rangszám egyik esetben sem fordulhat elő, azért mindkét esetben $(N)$ csupán (1, 2, 3) vagy (2, 3) lehet. Ezzel az 1. segédtételt bebizonyítottuk.

A most bebizonyított segédtételből fogjuk nyerni még a következő kettőt:

2. *Segédtétel. Legyen $N_c$ olyan matrix, amely az $N$-ből egy $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \ldots, a_{n+1,n}$ $n+1$-dik sor hozzáfüggesztésével előáll, amelynek elemei az $R_2$ testből vett állandók. Ha $a_{n+1,k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és $N$ az a) vagy b) alá tartozik,*

*akkor* $(N_c) = \left(0, 2, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$, *illetve* $= 1$, *minden más esetben* $(N_c) = (m, m+1, \ldots, n)$ *ahol* $0 < m \leqq n$.

3. *Segédtétel. Legyen* $N_{v,c}$ *olyan matrix, amely az* $N$*-ből egy* $x_{n+1,1}, x_{n+1,2}, \ldots, x_{n+1,n}$ $n+1$*-dik sor majd egy* $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n+1,n+1}$ $n+1$*-dik oszlop hozzáfüggesztésével előáll, amelyeknek elemei az* $R_2$ *testből vett új független változók, illetve állandók. Ha* $a_{j,n+1} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$, *akkor* $(N_{v,c}) = (m, m+1, \ldots, n)$, *ahol* $m \geqq 0$. *Ha* $a_{j,n+1} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $a_{n+1,n+1} = 1$ *és* $N$ *az a) vagy b) alá tartozik, akkor* $(N_{v,c}) = \left(1, 3, 5, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$, *illetve* $= 2$. *Minden más esetben* $(N_{v,c}) = (m, m+1, \ldots, n+1)$, *ahol* $m \geqq 1$.

Előbb kimutatom a következőt:

*Ha az* $N$ *matrixhoz a 3. segédtételbeli* $x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,n}$ *elemeket függesztjük, akkor az előállt* $N_v$ *matrixra* $(N_v) = (m, m+1, \ldots, n)$, *ahol* $m \geqq 0$.

Ez folyik az 1. segédtételből s abból a megjegyzésből, hogy az $N$-nek bármely $N^\circ$ értékéhez választjuk az $N_v$ utolsó sorának elemeit úgy, hogy az előállt $N_v^\circ$ értékre $(N_v^\circ) = (N^\circ)$ s — hacsak $(N^\circ) < n$ — úgy is, hogy $(N_v^\circ) = (N^\circ) + 1$.

A 2. segédtételnek az $a_{n+1,k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ esetre vonatkozó része nem egyéb, mint az 1. segédtételnek ismétlése. Ha az összes $a_{n+1,k}$ elemek közül egyetlenegynek értéke 1, a többié 0, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy éppen $a_{n+1,n} = 1$. Nyilvánvalóan $(N_c) = (P)_1$, ahol

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

az $N_c$ utolsó sorának s oszlopának törlésével előállt matrix s $(P)_1$ most is azt a halmazt jelenti, amely előáll, ha a $(P)$ elemeihez 1-et hozzáadunk. A $P$ utolsó sorának elemei egymástól s a többi elemtől független változók, azaz $P$ olyan matrix, mint a fenti $N_v$, csupán $n$ helyébe $n-1$ lépett. Ezért $(P) = (m, m+1, \ldots, n-1)$, ahol $m \geqq 0$. Következőleg $(N_c) = (P)_1 = (m+1, m+2, \ldots, n)$, amint ezt a 2. segédtétel követelte. Ha

végül az $N_c$ utolsó sorában több 1-es elem áll, akkor feltehető, hogy éppen $a_{n+1,r} = a_{n+1,r+1} = \cdots = a_{n+1,n} = 1$, míg a többi $a_{n+1,k} = 0$. Az $n$-dik oszlopot hozzáadva az $r$-dik, $r+1$-dik,... ..., $n-1$-dik oszlopokhoz s hasonlót végezve a sorokkal, előáll egy hasonló $N_c^*$ matrix, amelynek utolsó sora $0, 0, \ldots, 0, 1$. Továbbá az $N_c^*$ megelőző sorai, vagyis az első $n$ sor, olyan matrixot alkotnak, amely ismét $N$-hez hasonló. Az $N_c^*$ tehát már olyan matrix, amilyennel az imént foglalkoztunk s ezzel a 2. segédtétel helyesnek bizonyult.

A 3. segédtételnek az $a_{j,n+1} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ esetre vonatkozó része nem egyéb, mint amit fent az $N_v$ matrixról kimutattunk. Ha pedig $a_{j,n+1} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $a_{n+1,n+1} = 1$, akkor nyilvánvalóan $(N_{v,c}) = (N)_1$, a már többször használt jelöléssel, s így az 1. segédtételből most is következik a 3. segédtétel megfelelő állítása. A hátralevő eset, amelyben ugyanis valamelyik $a_{j,n+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ egyenlő 1-gyel, ismét visszavezethető lesz arra az esetre, amelyben

$$a_{n,n+1} = 1 \quad \text{és} \quad a_{j,n+1} = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n-1, n+1).$$

Ebben az utóbbi esetben $(N_{v,c}) = (P)_1$, ahol most

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n-1,1} & & a_{n-1,n} \\ a_{n+1,1} & & a_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

Itt az utolsó sor és oszlop elemei egymástól s a többi elemtől független változók, míg a többi elem egy olyan $N_1$ matrixot alkot, amely megfelel az $N$-értelmezésének, csupán $n$ helyébe $n-1$ lépett. Ha tehát $P$-ből az utolsó oszlopot elhagyjuk, akkor a nyert $P_0$ olyan típusú matrix, mint a fenti $N_v$, és így $(P_0) = (m, m+1, \ldots, n-1)$, ahol $m \geqq 0$. Ebből nyilvánvalóan $(P) = (m, m+1, \ldots, n)$, majd az előbbi miatt $(N_{v,c}) = (m+1, m+2, \ldots, n+1)$ következik, ahogyan ezt a 3. segédtétel kívánja.

A még tekintendő eset az általánosság megszorítása nélkül úgy vehető fel, hogy

$$a_{r,n+1} = a_{r+1,n+1} = \cdots = a_{n,n+1} = 1, \quad a_{n+1,n+1} = 0 \text{ vagy } 1,$$

míg minden más $a_{j,\,n+1} \equiv 0$. Egészen hasonló redukciót követünk, mint az imént a 2. segédtétel bizonyításánál, azzal az egyetlen eltéréssel, hogy az $a_{n+1,\,n+1} \equiv 1$ esetben még az $n$-dik sor levonandó az $n+1$-dikből. Ezáltal $N_{v,\,c}$ átmegy egy aequivalens $N'_{v,\,c}$ matrixba, s így $(N_{v,\,c}) = (N'_{v,\,c})$, és könnyen látható, hogy ez az újabb matrix mindenben megfelel annak, amit utoljára tárgyaltunk. Ezzel a 3. segédtételt bebizonyítottuk.

## 3. §.

Megállapodok néhány kifejezésmódban, amelyek közül egyeseket már az I dolgozatban is használtam.

Szerepelni fognak véges számú $\pm 1$ elemből álló vektorok. Két ilyen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektor szorzata alatt értem az $(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$ vektort. Egységvektornak nevezek egy $(1, 1, \ldots, 1)$ vektort. Multiplikatív értelemben függetlennek nevezem a $v_1, v_2, \ldots, v_j$ vektorokat, ha a $v_1^{c_1} \ldots v_j^{c_j}$ szorzat $(c_1, c_2, \ldots$ racionális egészek) csupán $2 \mid c_1, c_2, \ldots$ mellett egységvektor.

Az ebben a §-ban előforduló matrixok mind olyanok lesznek, amelyek elemei csupán $+1$ vagy $-1$ lehetnek. Egy ilyen $N$ matrix multiplikatív rangja alatt értem az $N$-ben tartalmazott legtöbb multiplikatív értelemben független sorok (mint vektorok) számosságát és ezt jelölöm $\{N\}$-nel. Ez az $\{N\}$ egyszersmind a legtöbb (multiplikatív értelemben) független *oszlopok* számossága. Ez következik a lineáris függetlenségre vonatkozó megfelelő tételből, alkalmazva arra az $R_2$ testbeli matrixra, amely előáll, ha az $N$-nek 1 és $-1$ elemeit az $R_2$-nek 0 illetve 1 elemeivel helyettesítjük.

Az $N$ matrix sorainak egy halmaza alatt értek egy olyan halmazt, amelynek elemei az $N$ sorai, ahol azonban az elemek sokszorosságát csupán mod 2 vesszük tekintetbe, vagyis egy ilyen halmazból két egyenlő elem mindenkor törölhető, vagy hozzá két ilyen elem hozzávehető a nélkül, hogy a halmaz megváltoznék. Ezeknek a halmazoknak száma $2^n$, ahol $n$ az $N$ sorainak száma, s mindezek egy $(2, 2, \ldots, 2)$ típusú ABEL-féle csoportot alkotnak, amelyben összetevés alatt a halmazok egyesítése értendő. Legkényelmesebben a csoport elemei úgy írhatók fel, hogy minden halmazban

csak különböző elemeket engedünk meg, s az összetevési szabály ekkor úgy fogalmazható, hogy a $h$, $h_1$ halmazokból összetett halmaz az $N$ mindama soraiból áll, amelyek a $h$ és $h_1$ közül pontosan csak az egyikben szerepelnek.

Az $N$ matrix sorainak egységhalmaza alatt értem a soroknak egy olyan halmazát, amelynek elemei szorzatul az egységvektort adják; az üres halmaz is az egységhalmazok közé számítandó. A sorok egységhalmazai a sorok összes halmazai csoportjának egyik alcsoportját képezik.

Ezekután legyen $\Delta = \mathrm{D}', \mathrm{D}''$ egy tetszésszerinti 2-odfajú D-felbontás. Minthogy a következők a körül forognak, vajon $\Delta$ 3-adfajú-e, s minthogy 1, D, a nem-valódi D felbontás, ilyen, azért feltesszük, hogy $\Delta \neq 1$, D, ámbár a következők eme megszorítás nélkül is érvényesek.

Csekély módosítással megismétlem itt az I dolgozatnak egy részét,[11] mindjárt a kővetkezőkhöz alkalmasabb alakban.

Minthogy $\Delta = \mathrm{D}', \mathrm{D}''$ 2-odfajú D-felbontás, azért létezik az

$$a^2 = b^2\mathrm{D}' + c^2\mathrm{D}'' \tag{1}$$

egyenletnek egy megoldása $a$, $b$, $c$ racionális egész számokban a következő mellékfeltételekkel: $2 \mid c$; $a$, $b\mathrm{D}'$, $c\mathrm{D}''$ relatív prímek;

$$a + c\sqrt{\mathrm{D}''} \equiv 1 \pmod 4, \tag{2}$$

azaz a $2 \dagger \mathrm{D}$ és $2 \mid \mathrm{D}$ esetek szerint:

$$a + c \equiv 1 \pmod 4 \quad (2 \dagger \mathrm{D}), \tag{2'}$$

$$a \equiv 1 \pmod 4 \quad (2 \mid \mathrm{D}). \tag{2''}$$

Az utolsó kikötés csupán az $a$ helyesen választott előjelét kívánja. Minden $\Delta$-hoz hozzárendelünk egyetlen ilyen $a$, $b$, $c$ hármast, amit szükség szerint esetleg $a(\Delta)$, $b(\Delta)$, $c(\Delta)$-val jelölünk.

A D összes különböző törzstényezőit, alkalmas előjellel ellátva, $p_1, p_2, \ldots, p_t$-vel jelöljük, úgyhogy $2 \dagger p_j$ mellett $p_j \equiv 1 \pmod 4$, míg $2 \mid \mathrm{D}$ mellett $p_t = 2$ legyen.

---

[11] Lásd ott a 132—135 oldalakat s különösen az I″ tételt. Figyelembe veendő, hogy ottan a D′, D″ $D$-felbontást úgy vettük fel, hogy $2 \dagger \mathrm{D}''$, most pedig úgy, kogy $2 \dagger \mathrm{D}'$, azaz D′ és D″ szerepet cseréltek.

$M$-mel jelölöm a következő $t$-soros $t-1$ oszlopos matrixot:

$$M = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mathrm{D}}{p_1}\right) & \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \dots \left(\frac{p_{t-1}}{p_1}\right) \\ \vdots & \\ \left(\frac{p_1}{p_{t-1}}\right) & \left(\frac{\mathrm{D}}{p_{t-1}}\right) \\ \left(\frac{p_1}{p_t}\right) & \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

amelyben tehát a $j$-dik sor $k$-dik eleme $\left(\frac{p_k}{p_j}\right)$, csupán $j = k$ mellett írandó a $p_k$ számláló helyett $\frac{\mathrm{D}}{p_n}$.

Az $M$ $j$-dik sorát a $p_j$-hez tartozó sornak nevezem. Ha pedig $d = q_1 q_2 \dots q_r$ a D egyik racionális egész osztójának törzstényezős előállítása, akkor az $M$ $d$-hez tartozó sorai alatt értem a $q_1, q_2, \dots, q_r$ törzsszámokhoz tartozó sorok halmazát. Ha $d = 1$, akkor ez alatt az üres halmaz értendő.

Az $M$ soraiból alkotható egységhalmazok számossága $2^{e_t+1}$, amelyek, mint mondottuk, csoportot alkotnak, s így ebben a csoportban a független elemek számossága $e_t + 1$.[12] *Tartozzanak az* $\mathfrak{M}$ *soraiból alkotható egységhalmazok csoportja egyik tetszésszerinti független bázisának elemei az* $m_1, m_2, \dots, m_{e_t+1}$ *számokhoz.* Természetesen kiköthetjük, hogy ezek négyzetmentesek legyenek.

Még bevezetjük a következő jelölést: Ha $p$ a D-nek egy tetszésszerinti racionális törzstényezője, akkor legyen az alábbi részletezés szerint:

$$\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{2a}{p}\right) & (p \mid \mathrm{D}') \\ \left(\frac{a}{p}\right) & (p \mid \mathrm{D}'', \text{ de } \mathrm{D} \equiv -(\mathrm{mod}\ 16) \text{ mellett } p \neq 2) \\ \left(\frac{a+2c}{p}\right) & (\mathrm{D} \equiv -4\,(\mathrm{mod}\ 16),\ p = 2). \end{cases} \tag{4}$$

[12] Lásd az I dolgozatban a 135. oldalon a (6)-ot.

Legyen továbbá $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\left(\frac{\Delta}{q}\right)\cdots=\left(\frac{\Delta}{pq\ldots}\right)$, hogyha a baloldali tényezők értelmezettek.[13]

Akkor érvényes a következő:

*A $\Delta$ 2-odfajú* D-*felbontás akkor és csak akkor 3-adfajú, ha*

$$\left(\frac{\Delta}{m_j}\right)=1 \quad (j=1, 2, \ldots, e_4+1). \tag{5}$$

Ez az I dolgozat I″ tételének lényegtelenül módosított fogalmazása. További célunk lesz a most mondottak alapján a lehető legrövidebb utasítást adni az összes 3-adfajú D-felbontásoknak, vagyis az $e_8$ meghatározására.

Tekintsünk egy másik $\Delta_1$ 2-odfajú D-felbontást. Legyen $\Delta_1=\mathrm{D}_1', \mathrm{D}_1''$ és legyen $a_1, b_1, c_1$ az (1)-nek hozzátartozó megoldása. Akkor

$$\mathrm{D}'=PQ,\ \mathrm{D}''=RS,\ \mathrm{D}_1'=PR,\ \mathrm{D}_1''=QS$$

írható, ahol $P, Q, R, S$ egyértelműleg meghatározott diszkriminánsszámok, természetesen relatív prímek. Ha a $\Delta\Delta_1$ D-felbontást $E', E''$-vel jelöljük, akkor

$$E'=QR,\ E''=PS.$$

Az (1) a következő alakban írható:

$$a^2=b^2PQ+c^2RS.$$

Hasonlóképpen

$$a_1^2=b_1^2PR+c_1^2QS.$$

Ezekből következik:

$$(aa_1)^2=(bb_1P-cc_1S)^2QR+(bc_1Q+b_1cR)^2PS.$$

Legyen

$$A=aa_1,$$
$$B=bb_1P-cc_1S,$$
$$C=bc_1Q+b_1cR,$$

akkor

$$A^2=B^2E'+C^2E''.$$

---

[13] Fenti $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ jelnek semmi köze az I dolgozatban használt $\left(\frac{\ }{p}\right)$ jelhez.

Kimutatom, hogy van egy olyan D-hez relatív prím páratlan racionális egész szám $r$, amellyel

$$\left(\frac{A}{r^2}\right)^2 = \left(\frac{B}{r^2}\right)^2 E' + \left(\frac{C}{r^2}\right)^2 E'' \qquad (6)$$

$\Delta\Delta_1$-hez tartozóan az (1)-nek megfelelő megoldás, az előírt feltételekkel. Minthogy $A$ a D-hez relatív prím és páratlan, továbbá $2 \mid C$, azért elég annyit kimutatni, hogy $B$ és $C$ legnagyobb közös osztója teljes négyzet, amit aztán a fenti $r^2$-tel azonosítunk. Akkor ugyanis egyszersmind $r^2 \mid A$, míg a (6) tagjai már relatív prímek. Továbbá a (2)-nek megfelelő kongruencia helyett $r^2 \equiv 1 \pmod 4$ miatt elegendő a következőt kimutatni:

$$A + C\sqrt{E''} \equiv 1 \pmod 4.$$

Utóbbi baloldala $2 \mid D$ mellett $4 \mid E''$ miatt $A = aa_1$-be megy át, s most (2″)-ön kívül $a_1 \equiv 1 \pmod 4$ is fennáll, míg $2 \nmid D$ mellett a baloldal helyébe $aa_1 + c + c_1$ s e helyett ismét $(a + c)(a_1 + c_1)$ írható, s most (2′) és $a_1 + c_1 \equiv 1 \pmod 4$ fennállnak. A kérdéses kongruencia tehát mindig helyes.

A hátralévő kérdésre nézve látjuk, hogy

$$P(BE' + C\sqrt{-D}) = (bD' + c\sqrt{-D})(b_1D'_1 + c_1\sqrt{-D}).$$

Minthogy $B$, $C$ legnagyobb közös osztója nyilvánvalóan $2D$-hez relatív prím, azért ahhoz, hogy $B$ és $C$ legnagyobb közös osztója teljes négyzet, elegendő annyit kimutatni, hogy a jobboldali szorzat mindkét tényezője a $2D$ tényezőtől eltekintve ideálnégyzet az $R(\sqrt{-D})$ testben. Ez azonban például az első tényezőre azonnal világos, mert (1) szerint

$$P(a^2 = (bD' + c\sqrt{-D})(bD' - c\sqrt{-D})$$

s itt a jobboldal tényezői a D tényezőitől eltekintve relatív prímek.

A (6)-ról bebizonyítottak alapján az $\frac{A}{r^2}$, $\frac{B}{r^2}$, $\frac{C}{r^2}$ hármast az eredeti $a$, $b$, $c$ és $a_1$, $b_1$, $c_1$ hármasokból összetettnek nevezzük. Ilyenformán az (1)-nek a $\Delta$ és $\Delta_1$ különböző 2-odfajú D-felbontásokhoz tartozó megoldásainak összetételéből előáll az (1)-nek a $\Delta\Delta_1$-hez tartozó egyik megoldása.

Kimutatjuk még a következőt: Ha a szóbanlévő $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$; $\frac{A}{r^2}, \frac{B}{r^2}, \frac{C}{r^2}$ hármasok éppen a kiválasztott $a(\Delta), b(\Delta), c(\Delta)$; $a(\Delta_1), b(\Delta_1), c(\Delta_1)$; $a(\Delta\Delta_1), b(\Delta\Delta_1), c(\Delta\Delta_1)$ megoldásokkal egybeesnek, akkor a D-nek minden $p$ törzsténye zőjére

$$\left(\frac{\Delta\Delta_1}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right)\left(\frac{\Delta_1}{p}\right). \tag{7}$$

A (4) szerint a bebizonyítás úgy történik, hogy a jobboldalon $\Delta$ és $\Delta_1$ helyébe, valamint a baloldalon $\Delta\Delta_1$ helyébe rendre a $2a$, $a$, $a+2c$; $2a_1$, $a_1$, $a_1+2c_1$; $\frac{2A}{r^2}$, $\frac{A}{r^2}$, $\frac{A+2C}{r^2}$ számok közül egy megfelelőt helyettesítünk s megvizsgáljuk az előállt egyenlet helyességét. Itt az $r^2$ nevező mindjárt mellőzhető, mert $\left(\frac{r^2}{p}\right) = 1$.

Ha $p \mid P$, tehát $p \mid \mathrm{D}'$, $p \mid \mathrm{D}_1'$, $p \mid E''$, akkor $A = aa_1$ miatt (7) az

$$\left(\frac{aa_1}{p}\right) = \left(\frac{2a}{p}\right)\left(\frac{2a_1}{p}\right)$$

helyes egyenletbe megy át. Ha $p \mid Q$, azaz $p \mid \mathrm{D}'$, $p \mid \mathrm{D}_1''$, $p \mid E'$, akkor hasonlóan előáll a

$$\left(\frac{2aa_1}{p}\right) = \left(\frac{2a}{p}\right)\left(\frac{a_1}{p}\right)$$

egyenlet, továbbá $p \mid R$, azaz $p \mid \mathrm{D}''$, $p \mid \mathrm{D}_1'$, $p \mid E'$ mellett a

$$\left(\frac{2aa_1}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2a_1}{p}\right)$$

egyenlet, és $p \mid S$, azaz $p \mid \mathrm{D}''$, $p \mid \mathrm{D}_1''$, $p \mid E''$ mellett, hacsak nem éppen $\mathrm{D} \equiv -4 \pmod{16}$ és $p = 2$, az

$$\left(\frac{aa_1}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a_1}{p}\right)$$

egyenlet. Ellenben a kivételes $\mathrm{D} \equiv -4 \pmod{16}$, $\mathrm{p} = 2$ esetben (7) helyébe az

$$\left(\frac{A+2C}{2}\right) = \left(\frac{a+2c}{2}\right)\left(\frac{a_1+2c_1}{2}\right)$$

egyenlet lép. Ez is helyes, mert $b, b_1, Q, R$ páratlan és $c, c_1$ páros, továbbá most $a \equiv a_1 \equiv 1 \pmod 4$ lévén:

$$A + 2C \equiv aa_1 + 2c + 2c_1 \equiv (a + 2c)(a_1 + 2c_1) \pmod 8.$$

Ezzel a (7)-et bebizonyítottuk.

Ezekután megállapodunk a következőkben: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{e_4}$-gyel jelöljük a 2-odfajú D-felbontások csoportjának egyik szilárdan megválasztott (független) bázisát. Miután ezekhez már szilárdan megválasztottuk az (1)-nek egy-egy $a(\Delta_j)$, $b(\Delta_j)$, $c(\Delta_j)$ megoldását, ezután a többi $\Delta\,(+1, \mathrm{D})$ 2-odfajú D-felbontáshoz a következőképpen rögzítünk egy $a(\Delta)$, $b(\Delta)$, $c(\Delta)$ megoldást. A $\Delta$ egyértelműen állítható elő a

$$\Delta = \Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_r} \quad (1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq e_4) \tag{8}$$

alakban. Akkor az (1)-nek $\Delta_{k_1}$-hez tartozó megoldását összetesszük a $\Delta_{k_2}$-höz tartozó megoldással, ennek eredményét ismét a $\Delta_{k_3}$-hoz tartozó megoldással, és így tovább, mígnem a (8)-beli utolsó $\Delta_{k_r}$ tényezőhöz jutunk, s az (1)-nek így előállt megoldását választjuk $a(\Delta)$, $b(\Delta)$, $c(\Delta)$ gyanánt. Ezzel a (7)-ről bebizonyítottak szerint elértük, hogy (8)-cal együtt

$$\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \left(\frac{\Delta_{k_1}}{p}\right)\left(\frac{\Delta_{k_2}}{p}\right)\cdots\left(\frac{\Delta_{k_r}}{p}\right) \quad (p \mid \mathrm{D}) \tag{9}$$

is fennáll.

Értelmezem a következő matrixot:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\Delta_1}{m_1}\right) & \left(\frac{\Delta_2}{m_1}\right)\cdots & \left(\frac{\Delta_{e_4}}{m_1}\right) \\ \left(\frac{\Delta_1}{m_2}\right) & & \\ \vdots & & \\ \left(\frac{\Delta_1}{m_{e_4+1}}\right) & & \left(\frac{\Delta_{e_4}}{m_{e_4+1}}\right) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Minthogy (8)-cal együtt (9) miatt

$$\left(\frac{\Delta}{m}\right) = \left(\frac{\Delta_{k_1}}{m}\right)\left(\frac{\Delta_{k_2}}{m}\right)\cdots\left(\frac{\Delta_{k_r}}{m}\right) \quad (j=1, 2, \ldots, e_4+1)$$

is fennáll, azért az (5) alatti feltételből következik, hogy $\Delta$, amit ismét (8) szerint gondolunk előállítva, akkor és csak akkor 3-adfajú, ha az $\mathcal{M}$ matrixnak a $k_1, k_2, \ldots, k_r$ indexekhez tartozó oszlopai egységhalmazt alkotnak. E szerint a 3-adfajú D-felbontások összes száma, vagyis $2^{e_8}$ annyi, mint az $\mathcal{M}$ oszlopaiból alakítható egységhalmazok számossága. Ez ismét azt jelenti, hogy $e_8$ egyenlő a független elemek számosságával az $\mathcal{M}$ oszlopaiból alakítható egységhalmazok csoportjában.

Végül nyilvánvaló, hogy tetszésszerinti ($\pm 1$ elemekből álló) matrixban az oszlopokból alakítható egységhalmazok csoportjában a független elemek számossága annyi, mint az oszlopok számának s a matrix multiplikatív rangjának különbsége, s ezért a fentiekből, minthogy az $\mathcal{M}$ oszlopainak száma $e_4$, a következőt nyerjük:

*I. Tétel. Az* $R(\sqrt{D})$ *másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjában a 8-cal osztható invariánsok számossága:*

$$e_8 = e_4 - \{\mathcal{M}\}, \tag{11}$$

*ahol* $\{\mathcal{M}\}$ *a* (10) *alatti matrix multiplikatív rangja.*

Bemutatom a tétel alkalmazását néhány példán.

*1-sŏ példa.* Legyen $D = pqr$, ahol $p, q, r$ negatív $4l+1$ alakú törzsszámok, amelyekre $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = 1$ teljesül. Akkor $\Delta = p, qr$ az egyetlen 2-odfajú valódi D-felbontás, és így $e_4 = 1$. Most a $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = r$ jelölés mellett:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \left(\frac{qr}{p}\right) & \left(\frac{q}{p}\right) \\ \left(\frac{p}{q}\right) & \left(\frac{pr}{q}\right) \\ \left(\frac{p}{r}\right) & \left(\frac{q}{r}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E szerint $m_1 = r$, $m_2 = pqr$ vehető. (Az $m_2$ gyanánt választhattuk volna $pq$-t is, azonban a tett választás, mint ezt mindjárt látjuk, célszerűbb.) E szerint

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \\ \left(\frac{\Delta}{pqr}\right) \end{pmatrix}$$

Mint ezt a 4. §-ban még meg fogjuk jegyezni, negatív D mellett minden $\Delta$ 2-odfajú D-felbontással $\left(\frac{\Delta}{D}\right) = 1$, és így most $\{\mathcal{M}\} = 0$ vagy 1 a szerint, amint $\left(\frac{\Delta}{r}\right) = 1$ vagy $-1$. Ha $a$, $b$, $c$ jelenti az (1)-nek $\Delta$-hoz tartozó egyik megoldását, amellyel tehát

$$a^2 = b^2p + c^2qr,$$

akkor $\left(\frac{\Delta}{r}\right) = \left(\frac{a}{r}\right)$. Így az előbbi alapján az I tételből következik, hogy $e_8 = 1$ vagy 0 a szerint, amint $\left(\frac{a}{r}\right) = 1$ vagy $-1$.

A számítást még megkönnyíthetjük a következőképpen: Megoldjuk az

$$a_1^2 = b_1^2p - c_1^2q,$$
$$a_2^2 = b_2^2p - c_2^2r$$

egyenleteket racionális egész számokban, úgyhogy mindkét egyenletben a szereplő tagok páronként relatív prímek és $c_1$, $c_2$ párosak legyenek, úgy választva az előjeleket, hogy

$$a_1a_2 + b_1b_2p \equiv c_1c_2 + 2 \pmod 8$$

legyen. Akkor

$$(a_1a_2 + b_1b_2p)^2 = (a_1b_2 + a_2b_1)^2 p + (c_1c_2)^2 qr$$

miatt $a = \frac{a_1a_2+b_1b_2p}{2}$ $\left(b = \frac{a_1b_2+a_2b_1}{2},\ c = \frac{c_1c_2}{2}\right)$ vehető.

Így $D = -399 = -3.-19.-7$ mellett a

$$7^2 = 3^2.-3 + 2^2.19,$$
$$(-1)^2 = 3^2.-3 + 2^2.7$$

egyenletekből $a = -17$ $(b = 9,\ c = 2)$. Minthogy $\left(\frac{-17}{7}\right) = 1$, azért az $R(\sqrt{-399})$ testben $e_8 = 1$.

*2-ik példa.* Legyen $D = pqrs$, ahol $p$, $q$, $r$ jelentése mint elébb, továbbá $s$ is $4l+1$ alakú negatív törzsszám és

$$\left(\frac{p}{s}\right) = \left(\frac{q}{s}\right) = \left(\frac{r}{s}\right) = 1.$$

Most $\Delta = pq, rs$ az egyetlen 2-odfajú D-felbontás, s így ismét $e_4 = 1$. Az előbbi mintára

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s e szerint $m_1 = qr$, $m_2 = s$ választható. Akkor

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\Delta}{qr}\right) \\ \left(\frac{\Delta}{s}\right) \end{pmatrix}$$

s ha még megoldjuk az (1)-nek most megfelelő

$$a^2 = b^2pq + c^2rs$$

egyenletet, akkor a következőt nyerjük: $e_8 = 1$, ha $\left(\frac{2a}{q}\right)\left(\frac{a}{r}\right) = 1$, $\left(\frac{a}{s}\right) = 1$, különben $e_8 = 0$.

*3. példa.* Legyen $D = pqrsv$, ahol $p$, $q$, $r$, $s$ az előbbi jelentéssel bírnak, $v$ $4l+1$ alakú negatív törzsszám, $\left(\frac{p}{v}\right) = \left(\frac{q}{v}\right) = \left(\frac{r}{v}\right) = \left(\frac{s}{v}\right) = 1$. Most $\Delta_1 = p, qrsv$, $\Delta_2 = pqr, sv$ a 2-odfajú D-felbontások csoportjának egyik független bázisa, s így $e_4 = 2$. Az előbbi mintákra

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és $m_1 = pq$, $m_2 = rs$, $m_3 = pqrsv$ vehető. Mint az első példában, az $\mathcal{M}$ utolsó sora most is csupa 1-esből áll s így a (11)-ben az $\mathcal{M}$ utolsó sorának elhagyásával előálló

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\Delta_1}{pq}\right)\left(\frac{\Delta_2}{pq}\right) \\ \left(\frac{\Delta_1}{rs}\right)\left(\frac{\Delta_2}{rs}\right) \end{pmatrix}$$

matrix vehető. Megoldandók az (1)-nek megfelelő

$$a_1^2 = b_1^2 p + c_1^2 qrsv,$$
$$a_2^2 = b_2^2 pqr + c_2^2 sv$$

egyenletek, miután

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2a_1}{p}\right)\cdot\left(\frac{a_1}{q}\right) & \left(\frac{2a_2}{p}\right)\cdot\left(\frac{2a_2}{q}\right) \\ \left(\frac{a_1}{r}\right)\cdot\left(\frac{a_1}{s}\right) & \left(\frac{2a_2}{r}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{s}\right) \end{pmatrix}$$

írható, s azután (11)-ből $e_8 = 2 - \{\mathscr{M}\}$.

## 4. §.

Itt összeállítom az $e_8$-ra (vagyis a 3-adfajú D-felbontásokra) vonatkozó, a D törzstényezőivel kifejezett kongruenciafeltételeket, köztük azokat is, amelyek már az I dolgozatban megvoltak.

Előrebocsájtom a következőt. A $-\frac{1}{4}D$, $-4$ számpár akkor és csak akkor 2-odfajú D-felbontás, ha mindenekelőtt $-4$ szerepel a D törzsdiscriminánstényezői között, azaz $D \equiv -4 \pmod{16}$, tehát $D = -4n$, ahol $n$ páratlan egész szám, továbbá $n$ csupa $4l+1$ alakú pozitív törzsszám szorzata és $n \equiv 1 \pmod 8$. Amint ezt később ki fogjuk mutatni, létezik a 2-odfajú D-felbontásoknak egyetlen egy mellékcsoportja az összes D-felbontások csoportjában úgy, hogy $d'$, $-4d''$-vel jelölvén ennek a mellékcsoportunk egyik elemét, erre vagy

$$\left(\frac{d'}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{d''}{p'}\right) = 1, \quad d'(\equiv d'') \equiv 5 \pmod 8 \tag{12}$$

vagy

$$\left(\frac{2d'}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{2d''}{p'}\right) = 1 \tag{12'}$$

teljesül, amely egyenletekben $p'$ és $p''$ a $d'$-nek, illetve $d''$-nek összes törzstényezőit jelentik. Megjegyzendő ehhez, hogy egyugyanazon D mellett vagy csak (12) vagy csak (12′) oldható meg, de akkor az illető egyenlethez az említett mellékcsoport minden eleme az adott módon megoldást szolgáltat. A következőkben egy ilyen $d'$, $d''$ számpárt rögzítve gondolunk. Egy-

szerűbben ezután ez így definiálható: $d'$, $d''$ *egy olyan számpár pozitív egész számokból, amelyre* $d'd''=n$ *és* (12) *vagy* (12′) *teljesülnek.* (Megemlítendő, hogy fenti mellékcsoport lehet maga a 2-odfajú D-felbontások csoportja, mégpedig akkor és csak akkor, ha az $n$-nek minden pozitív törzstényezője $8l+1$ alakú. Ekkor (12′) jön tekintetbe, s $d'$, $d''$ számára az 1, $n$ számpár választható.)

Szerepelni fognak olyan $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4$ jelek, amelyekben a számláló és nevező relatív prím discriminánsszámok. Ennek a jelnek az 1. § szerint nincs értelme, ha a nevezőnek van negatív páratlan törzsdiscriminánstényezője. Ellenben a $-4$ tényezőt megengedjük, mégpedig akkor is, ha bár $2\dagger D_1$, s így $D_1\equiv 1 \pmod 4$, de $D_1\not\equiv 1 \pmod 8$, a következő értelmezéssel. Ha $2\dagger D_1, D_2=-4d$, $2\dagger d$, akkor legyen

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4=\left(\frac{D_1}{2}\right)\left(\frac{D_1}{d}\right)_4. \tag{13}$$

Ki fogjuk mutatni a következő tételeket:

*II. Tétel. Ha* D′, D″ *3-adfajú* D-*felbontás, akkor* $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4=1$, *hacsak itt a nevező törzsdiscriminánstényezői pozitívok s hasonló érvényes a* $\left(\frac{D''}{D'}\right)_4$ *jelről.*

Természetesen ez a tétel semmit sem mond ki arra az esetre, amikor D′-nek és D″-nek a törzsdiscriminánstényezői között előfordul negatív. Ugyancsak semmitmondó ez a tétel a $-\frac{1}{4}D$, $-4$ D-felbontásra nézve, mert mindig $\left(\frac{-4}{n}\right)_4=1$, hacsak a baloldal értelmezett. Ugyanis általában, ha $p$ $4l+1$ alakú pozitív törzsszám, akkor $-4\equiv(1+r)^4 \pmod p$, ahol $r$ az $r^2\equiv -1 \pmod p$ kongruenciának racionális egész megoldása. Erre a kivételes esetre érvényes azonban a következő:

*III. Tétel. Ha* $-\frac{1}{4}D$, $-4$ *2-odfajú* D-*felbontás, akkor ennek 3-adfajú voltához szükséges és elegendő az, hogy*

$$\left(\frac{D_j'}{D''}\right)_4\left(\frac{D_j''}{D_j'}\right)_4=1 \qquad (j=1,2,\ldots,e_4-1) \tag{14}$$

*és a szerint, hogy a $d'$, $d''$ számpár a* (12) *vagy* (12′) *egyenletnek tesz eleget,*

$$\left(\frac{d'}{-4d''}\right)_4\left(\frac{-4d''}{d'}\right)_4 = 1 \tag{15}$$

*illetve*

$$\left(\frac{2d'}{d''}\right)_4\left(\frac{2d''}{d'}\right)_4 = (-1)^{\frac{D+4}{32}} \tag{15'}$$

*legyen, ahol a* $D_j'$, $D_j''$ $(j=1, 2, \ldots, e_4-1)$ D-*felbontások a* $-\frac{1}{4}D$, $-4$ D-*felbontással együtt a 2-odfajú* D-*felbontások csoportjának egyik független bázisát jelentik.*[14]

Továbbá még fennállnak a következő tételek:

*IV. Tétel. Legyen* D *minden törzsdiscriminánsténye zője pozitív. Ha minden* D′, D″ *2-odfajú* D-*felbontásra* $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1$, *akkor* $e_4-e_8$ *páros szám. Ha* $e_4=2$ *s az ekkor létező három valódi 2-odfajú* D-*felbontás közül kettőre az előbbi egyenletpár, a harmadikra* $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = -1$ *teljesül, akkor* $e_8=1$.[15]

*V. Tétel. Legyen* D *negatív, úgy azonban, hogy minden 2-odfajú* D-*felbontás egyik tagjának törzsdiscriminánsténye zői pozitívok, a nélkül, hogy* $-\frac{1}{4}D$, $-4$ *2-odfajú* D-*felbontás lenne. Hasonló érvényes, mint a IV tétel, csupán elhagyandók az*

---

[14] Fenti (15′) külsőleg egyszerűbb alakra hozható, úgy, mint az I dolgozatban a 141. oldalon *b)* alatt.

[15] Érvényes a következő. Ha a $\Delta_j=D_j'$, $D_j''$ $(j=1, 2, \ldots, r)$ 2-odfajú D-felbontásokra s a belőlük összetett $\Delta_j\Delta_k=D_{jk}'$, $D_{jk}''$ elemekre fennáll

$$\left(\frac{D_j''}{D_j'}\right)_4 = 1, \left(\frac{D_j'}{D_j''}\right)_4 = 1, \left(\frac{D_{jk}''}{D_{jk}'}\right)_4 = 1,$$

akkor már a $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ elemeken felépülő csoport minden D′, D″ elemére: $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1$. (V. ö. Rédei L.: Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben, ez az Értesítő 54 (1935) 86. o. Ennek a megjegyzésnek alapján könnyebbé válik a fenti tétel alkalmazása. Ugyancsak igaz, hogy az $e_4=2$ esetben tekintetbe jövő összesen 6 $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ jel szorzata mindig 1, így eme 6 jel közül mindig elég csupán 5-nek az értékét megvizsgálni,

*olyan* $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ *jelekre vonatkozó feltételek, amelyekben a nevező negatív.*[16]

Ennek a két tételnek a III tétellel együtt kiegészítője a következő:

*VI. Tétel. Legyen* $-\frac{1}{4}$D, $-4$ *2-odfajú* D-*felbontás, de most — a szerint, amint* (12) *vagy* (12′) *áll fenn — a* (15), *illetve* (15′) *egyenlet ne teljesüljön. Ha a III tételbeli* $D_j$, $D_j'$ $(j=1, 2, \ldots, e_4-1)$ D-*felbontások által előállított csoport minden* D′, D″ *elemére* $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1$, *akkor* $e_4-e_8$ *páratlan szám. Ha* $e_4=3$ *s az említett csoportnak ekkor létező három valódi* D-*felbontás eleme közül kettőre az előbbi egyenletpár, a harmadikra* $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = -1$ *teljesül, akkor* $e_8=1$.[17]

*Megjegyzések.* Amint látjuk, eme tételek alapján tisztán kongruenciafeltételekkel sohasem sikerül közvetlenül a D-ről $e_8 \geqq 2$-re következtetni. A II tétel, valamint a III, IV, V tételeknek az $e_4=1$ esethez tartozó része megvolt már az I. dolgozatban (lásd az ottani III, illetve II, II′ tételeket). Megemlítem, hogy az I dolgozat IV tétele, amelyben feltételeket adtam meg $e_8=e_4$ teljesülésére, az itteni III tétellel némi kiegészítést nyer.

Tekintem a $D=5.101.521$ példát. Itt $(\frac{5}{101}) = (\frac{5}{521}) = (\frac{101}{521}) = 1$, tehát $e_4=2$. Ugyancsak az eme törzsszámokból alakítható mind a hat $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ jel értéke 1, s így a IV tétel miatt $e_8$ páros szám, azaz $e_8=0$ vagy 2. Minthogy

$$239^2 = 101.521 + 30^2.5,$$

[16] Hasonló érvényes, mint [15] alatt: Jelentse $D_j^+$ és $D_j^-$ a $\Delta_j$ 2-odfajú D-felbontás pozitív, illetve negatív tagját $(j=1, 2, \ldots, r)$ s hasonlót jelentsenek $D_{\bar{jk}}$, $D_{jk}$, $D^+$, $D^-$ $\Delta_j\Delta_k$-ra és a $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ elemeken felépülő csoport egyik tetszésszerinti elemére nézve. Akkor a

$$\left(\frac{D_j}{D^+}\right)_4 = 1, \quad \left(\frac{D_{\bar{jk}}}{D_{jk}^+}\right)_4 = 1$$

egyenletekből következik az összes $\left(\frac{D^-}{D^+}\right)_4 = 1$ egyenlet. A bizonyítás könnyen végezhető.

[17] Itt is alkalmazható a [16] jegyzet.

azért (legkönnyebben az I dolgozat I tétele alapján) könnyen kiderül, hogy a 101.521, 5 számpár nem 2-odfajú D-felbontás. Most tehát $e_8 < e_4 = 2$, azaz $e_8 = 0$.

*Bizonyítás.* Feltételezzük a következőkben, hogy vagy D törzsdiscriminánstényezői mind pozitívok, vagy D negatív s az összes 2-odfajú D-felbontás egyik tagjának törzsdiscriminánstényezői mind pozitívok. Ez a feltevés megengedett, mert a még bizonyításra szoruló III—VI tételek mind az itt elmondott esetekre vonatkoznak.

Közvetlenül igazolható a négyzetes reciprocitástétel alapján, hogy most az $M$ matrixnak minden olyan $m$ számhoz tartozó sorai egységhalmazt alkotnak, amely $m$ egyik tagja bármelyik 2-odfajú D-felbontásnak.[18] Legyen ezentúl mindig $\Delta_j = D_j', D_j''$ $(j = 1, 2, \ldots, e_4)$ a 2-odfajú D-felbontásoknak egyik független bázisa úgy, hogyha $-\frac{1}{4}D$, $-4$ is 2-odfajú D-felbontás, akkor ez legyen éppen $\Delta_{e_4}$.

Ha egy pillanatra $D_j$ jelenti a $D_j'$, $D_j''$ számok egyikét, akkor nyilvánvaló az előbbiek miatt, hogy az $M$ matrixból rendre a $D_1, D_2, \ldots, D_{e_4}$, D számokhoz tartozó soroknak halmazai független egységhalmazok, csupán ha $\Delta_{e_4} = -\frac{1}{4}D$, $-4$, akkor a mondottak csak a $D_1, D_2, \ldots, D_{e_4-1}$, D sorozatra érvényesek, mert a $-4$-hez tartozó sorok halmaza az üres halmaz (s ugyancsak a $-\frac{1}{4}$D-hez és D-hez tartozó sorok halmazai egyenlők). Míg tehát az előbbi esetben $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ számára a $D_1, D_2, \ldots, D_{e_4}$, D sorozat választható, addig az utóbbi esetben biztosan létezik a D-nek egy $f$ osztója, úgyhogy az $M$ matrix hozzátartozó sorainak halmaza egységhalmaz, olyan mégpedig, amely a $D_1, D_2, \ldots, D_{e_4-1}$, D számokhoz tartozó sorok halmazaiból felépített csoportnak nem eleme. Ez az $f$ a $d'$ vagy $2d'$ alakban vehető fel, ahol $d' \mid -\frac{1}{4}D$, s ha még $d''$-t $d'd'' = -\frac{1}{4}D$ $(= n)$ által értelmezzük, ezáltal a jelen § elején mondottakat bebizonyítottuk.[19]

Ezekután az $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ számokat a következőképen választjuk: Mindig legyen $m_{e_4+1} = D$. Ha $D > 0$, akkor legyen

---

[18] V. ö. az I dolgozat 136. oldalán (8)-cal.

[19] Fenti szűkszavú bizonyítás kiegészíthető az I dolgozatból, ahol a 138. oldalon *B.* a fenti ténynek az $e_4 = 1$ mellett érvényes különös esete.

$m_j = \mathrm{D}'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, e_4)$. Ha $\mathrm{D} < 0$, akkor legyen $m_j = \mathrm{D}^+_j$ $(j=1, 2, \ldots, e_4)$, ahol $\mathrm{D}^+_j$ a $\mathrm{D}'_j$, $\mathrm{D}''_j$ számok közül a pozitívot jelenti, csupán abban az esetben, ha $-\frac{1}{4}\mathrm{D}$, $-4$ 2-odfajú D-felbontás, $m_{e_4}$ számára nem $\mathrm{D}^+_{e_4} = -\frac{1}{4}\mathrm{D}$, hanem $d'$, illetve $2d'$ választandó, a szerint, amint (12) vagy (12′) áll fenn.

Könnyebbség kedvéért az $\mathscr{M}$ matrix $j$-dik sorának $k$-dik elemét $A_{jk}$-val fogjuk jelölni. Ezután három esetet különböztetünk meg:

1-ső eset: $\mathrm{D}>0$. Fennáll (10) szerint

$$A_{jj} = \left(\frac{\Delta_j}{\mathrm{D}'_j}\right),$$

vagyis (4) szerint az $a(\Delta_j)=a_j$ jelöléssel

$$A_{jj} = \left(\frac{2a_j}{\mathrm{D}'_j}\right),$$

s ebből ismét[20]

$$A_{jj} = \left(\frac{\mathrm{D}''_j}{\mathrm{D}'_j}\right)_4. \quad (j=1, 2, \ldots, e_4) \tag{16}$$

Továbbá ismét (10) szerint

$$A_{jj}A_{jk}A_{kj}A_{kk} = \left(\frac{\Delta_j}{\mathrm{D}'_j}\right)\left(\frac{\Delta_k}{\mathrm{D}'_j}\right)\left(\frac{\Delta_j}{\mathrm{D}'_k}\right)\left(\frac{\Delta_k}{\mathrm{D}'_k}\right).$$

Ha bevezetjük a $\Delta_j\Delta_k = \Delta_{jk} = \mathrm{D}'_{jk}, \mathrm{D}''_{jk}$ jelölést, akkor (7) szerint, és mert $\mathrm{D}'_{jk}$ a $\mathrm{D}'_j\mathrm{D}'_k$-tól csupán négyzetszámtényezőben tér el, az előbbi szorzat átmegy a következőbe:

$$\left(\frac{\Delta_{jk}}{\mathrm{D}'_j}\right)\left(\frac{\Delta_{jk}}{\mathrm{D}'_k}\right) = \left(\frac{\Delta_{jk}}{\mathrm{D}'_{jk}}\right),$$

azaz a (16)-hoz hasonlóan

$$A_{jj}A_{jk}A_{kj}A_{kk} = \left(\frac{\mathrm{D}''_{jk}}{\mathrm{D}'_{jk}}\right)_4. \quad (1 \leqq j < k \leqq e_4) \tag{17}$$

Végül ismét (10)-ből

$$A_{e_4+1,\,k} = \left(\frac{\Delta_k}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\Delta_k}{\mathrm{D}'_k}\right)\left(\frac{\Delta_k}{\mathrm{D}''_k}\right).$$

---

[20] Lásd az I dolgozatban 137. o. (10′)-t.

A (4) szerint következik

$$A_{e_4+1,\,k} = \left(\frac{2a_k}{D'_k}\right)\left(\frac{a_k}{D''_k}\right). \tag{18}$$

Ebből[21]

$$A_{e_4+1,\,k} = \left(\frac{D''_k}{D'_k}\right)_4 \left(\frac{D'_k}{D''_k}\right)_4. \quad (k=1,2,\ldots,e_4) \tag{19}$$

Az I tétel alapján abból, hogy az $\mathcal{M}$ elemeire most (16), (17), (19) fennállnak, a 2. segédtétel miatt így következik a IV tétel. Az I tétel szerint $e_8$-ra nézve mértékadó az $\mathcal{M}$ matrix $\{\mathcal{M}\}$ multiplikativ rangja. Hogyha az $\mathcal{M}$-nek 1 és $-1$ elemei helyébe az $R_2$ test 0, illetve 1 elemét helyettesítjük, akkor az előállt $P$ matrixra nézve: $(P) = \{\mathcal{M}\}$. Ha egy pillanatra adottaknak tekintjük a (16), (17), (19) egyenletek jobboldalain lévő $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ jeleket, akkor mondhatjuk, hogy (19) szerint a $P$ utolsó sora adott, valamint az ennek elhagyásával előálló $P_0$ matrix átlóselemei (16) alapján adottak, s mivel (16) és (17) szerint $A_{jk}A_{kj}$ is adott, ugyancsak adottak a $P_0$ matrix szimmetrikus helyzetű elemeinek összegei. Ebből a 2. segédtétel első felének alkalmazásával a [15] jegyzet figyelembevétele után következik a IV tétel.

*2-ik eset:* $D < 0$ és $-\frac{1}{4}D$, $-4$ nem 2-odfajú D-felbontás. Tekintettel arra, hogy most[22]

$$\left(\frac{2a_j}{D'_j}\right) = \left(\frac{a_j}{D''_j}\right) \quad (j=1,2,\ldots,e_4) \tag{20}$$

fennáll, hasonló úton, mint az 1-ső esetnél, következnek ezek:

$$A_{jj} = \left(\frac{D_j^-}{D_j^+}\right)_4, \quad (j=1,2,\ldots,e_4) \tag{21}$$

$$A_{jj}A_{jk}A_{kj}A_{kk} = \left(\frac{D_{jk}}{D_{kj}^+}\right)_4, \quad (1\leqq j<k\leqq e_4) \tag{22}$$

$$A_{e_4+1,\,k} = 1. \quad (k=1,2,\ldots,e_4) \tag{23}$$

---

[21] Lásd az I dolgozatban 137. o. (10)-et és (10′) t.

[22] Lásd az I dolgozatban 136. o. (7)-et.

A bizonyítás tovább mindenben egyezik az előbbivel, csupán a viszonyok még annyival egyszerűsödnek, hogy most a $P$ matrix utolsó sora (23) miatt csupa 0-ból áll, s most a [16] jegyzet figyelembevétele mellett következik az V tétel.

*3-ik eset:* $-\frac{1}{4}D$, $-4$ 2-odfajú D-felbontás. Annyiban áll be eltérés az előbbi 2-ik esettel szemben, hogy most $m_{e_i} = d'$ vagy $2d'$. Így tehát fennállnak a (21), (22) egyenletek mindaddig, amíg ezekben $j, k < e_i$, s a (23) egyenlet most is fennáll korlátlanul.

Minthogy most $\Delta_{e_i} = n$, $-4$, ahol ismét az $n = -\frac{1}{4}D$ jelölést használtuk, és $n$ csupa különböző $4l+1$ alakú pozitív törzsszám szorzata, azért bevezethetők az $A$, $B$ racionális egész számok, úgy, mint az I dolgozatban.[23] Akkor

$$n = A^2 + B^2 \quad (4 \mid B,\ A \equiv 1 \pmod 4).$$

Ebből

$$A^2 = n - 4\left(\frac{B}{2}\right)^2,$$

és így az (1)-gyel való összehasonlítás után

$$a_{e_i} = A,\ b_{e_i} = 1,\ c_{e_i} = \frac{B}{2} \tag{24}$$

vehető.

Továbbá $n = m'm''$ mellett, hogyha $m'$, $m''$ 2-odfajú D-felbontás az $n$ discriminánshoz, fennáll a következő:[24]

$$\left(\frac{A}{m'}\right) = \left(\frac{m''}{m'}\right)_4 \left(\frac{m'}{m''}\right)_4. \tag{25}$$

Érvényes még

$$\left(\frac{A+B}{2}\right) = (-1)^{\frac{A^2+2AB+B^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{n-1}{8}} (-1)^{\frac{B}{4}}.$$

Ebből, mint ismeretes

$$\left(\frac{A+B}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{8}} \left(\frac{2}{n}\right)_4 \tag{26}$$

következik.

---

[23] Lásd az I dolgozatban 139. o.

[24] Lásd az I dolgozatban 140. o. (23)-at.

Mármost (10) miatt

$$A_{je_i} = \left(\frac{A_{e_i}}{m_j}\right). \qquad (j=1, 2, \ldots, e_i) \qquad (27)$$

Ebből $j<e_i$ mellett (4) és (24) szerint:

$$A_{je_i} = \left(\frac{2A}{D_j^+}\right).$$

Bevezetjük egy pillanatra $d$-t az $n = D_j^+ d$ egyenletből. Most $2 \nmid D_j^+$ s így $d$ egész, továbbá $D_j^+$, $D_j^-$-vel együtt $D_j^+$, $d$ is 2-odfajú $D$-felbontás, utóbbi az $n$ discriminánshoz. A (25) figyelembevételével tehát:

$$A_{je_i} = \left(\frac{2}{D_j^+}\right)\left(\frac{d}{D_j^+}\right)_4\left(\frac{D_j^+}{d}\right)_4.$$

Az első tényező helyett $\left(\frac{D_j^+}{2}\right) = \left(\frac{D_j^+}{-4}\right)_4$ írható, a második tényezőben a számláló helyett $-4d=D_j$ vehető, s így az első és harmadik tényezőt összeszorozva:

$$A_{je_i} = \left(\frac{D_j^-}{D_j^+}\right)_4\left(\frac{D_j^+}{D_j^-}\right)_4. \qquad (j=1, 1, \ldots, e_i-1) \qquad (28)$$

Ha (12) érvényes, akkor $m_{e_i}=d'$ miatt ugyanígy előáll

$$A_{e_ie_i} = \left(\frac{-4d''}{d'}\right)_4\left(\frac{d'}{-4d''}\right)_4. \qquad (29)$$

Ha ellenben (12′) érvényes, akkor $m_{e_i}=2d'$ miatt (27), (4) és (24) szerint

$$A_{e_ie_i} = \left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{2A}{d'}\right),$$

s ebből[25]

$$A_{e_ie_i} = (-1)^{\frac{D+4}{32}}\left(\frac{2d''}{d'}\right)_4\left(\frac{2d'}{d''}\right). \qquad (29')$$

Az $\mathcal{M}$ matrix utolsó sora (23) szerint csupa 1-esből áll. A többi elem alkot egy $e_i$-soros $\mathcal{M}_0$ négyzetes matrixot. Ennek az utolsó oszlopbeli elemei (28) és (29), illetve (29′) által nyer-

[25] Következik az I dolgozat 140. o. (22), (23) egyenleteiből s az ottani [29] jegyzetből.

tek kifejezést. Ezekből az (5) feltétel szerint máris következik a III tétel. A VI tételt pedig az I tételből fogjuk következtetni. Minthogy $\{\mathcal{M}\} = \{\mathcal{M}_0\}$, azért a továbbiakban elég $\mathcal{M}_0$-sal foglalkoznunk. E helyett úgy, mint a fenti 1-ső esetben, bevezetünk egy $P_0$ matrixot, amelynek elemei az $R_2$ testben vannak. Akkor az említett (28) és (29) illetve (29') a $P_0$ utolsó oszlopáról szóló kijelentésekbe mennek át, míg a $P_0$ utolsó sorának és oszlopának elhagyásával előállt matrix átlóselemeiről (21) alapján (ami a $j<e_4$ értékekre most is igaz), s a szimmetrikus helyzetű elemek összegeiről (22) (ez is igaz $k<e_4$ mellett most is) és (21) alapján nyerünk kijelentéseket. Így a $P_0$-ban hasonló típusú matrixot ismerünk fel, mint amiről a III segédtétel szól, s ennek második részéből $(P_0) = \{\mathcal{M}_0\} = \{\mathcal{M}\}$ miatt az I tétel alapján folyik a VI tétel.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. jan. 13-án tartott üléséből.)

# EINIGE NEUE KONGRUENZBEDINGUNGEN FÜR DIE ANZAHL DER DURCH 8 TEILBAREN INVARIANTEN IN DER ABSOLUTEN KLASSENGRUPPE DES QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS.

Von LADISLAUS RÉDEI in Mezőtúr.

Es werden die Resultate einer Früheren Arbeit[4] von mir fortgesetzt. Zunächst wird der sich auf die im Titel genannte Anzahl $e_8$ beziehende, schon dort in dreierlei Form angegebene Satz (s. d. Sätze I, I', I'') auf eine neue, bequemere Form gebracht. Wegen des Zusammenhanges: «Anzahl der D-Zerfällungen 3. Art $= 2^{e_8}$» handelt es sich dabei darum, die D-Zerfällungen 3. Art möglichst einfach zu bestimmen. In gewissen Fällen gelang es schon in der Arbeit[4] in dieser Frage einige explizite, durch Symbole $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ ausgedrückte Bedingungen zu gewinnen. Hier werden neue Bedingungen ähnlicher Natur aufgestellt.

Zunächst sei die Diskriminante D des quadratischen Zahlkörpers ein Produkt aus lauter verschiedenen positiven Primzahlen von der Gestalt $4l+1$, oder das 8-fache eines solchen. Ein Satz in der Arbeit[4] lautete auf diesen Fall so:

Wenn D', D'' eine D-Zerfällung 3. Art ist, so muss

$$\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1$$

sein.

Umgekehrt besteht folgendes:

Wenn für jede D-Zerfällung 2. Art obige Bedingungen stattfinden, dann ist $e_4 - e_8$ gerade.

Davon war in der Arbeit[4] nur der Fall $e_4 = 1$ bekannt.

Es besteht noch das folgende kleine Stück:

Wenn $e_4 = 2$ und zwei von den jetzt vorhandenen drei D-Zerfällungen $(\pm 1, D)$ die obigen Bedingungen, für die dritte aber

$$\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = -1$$

bestehen, dann ist $e_8 = 1$.

Ähnliche Sätze mit weniger Modifikation beziehen sich auch auf den Fall, wo $D < 0$, aber in jeder D-Zerfällung 2. Art das eine Glied ($D'$ oder $D''$) so beschaffen ist, wie im vorigen Falle selbst D.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Jänner 1936.)

# VIZSGÁLATOK A SZÉNATOM KÖTŐENERGIÁJÁRÓL.

SCHMID REZSŐ-től.

Chemiai kötőenergián általában az $A$ és $B$ chemiai elemek $A-B$-szimbólummal jelölt vegyületének $A$ és $B$ atomra való bontásához szükséges energiát értjük. Szoros kapcsolatban áll ez természetesen az $AB$ vegyület képződési hőjével, amely a szokásos chemiai megfogalmazás szerint az $A+B \rightarrow AB$ vegyfolyamat hőszinezetével egyenlő. Hogy azonban kötőenergia és képződési hő általában mégsem azonosak, az azonnal kitűnik, ha olyan $A+B \rightarrow AB$ reakciót veszünk tekintetbe, ahol a kiindulási anyagok, azaz az $A$ és $B$ elemek, nem fordulnak elő szabad atomos állapotban, hanem — pl. mint az elemi gázok — kétatomos molekulákat képeznek. A képződési hő alatt ez esetben a chemiai gyakorlat az

$$\tfrac{1}{2} A_2 + \tfrac{1}{2} B_2 \rightarrow AB + Q \text{ caloria}$$

egyenlet $Q$-hőszinezetét érti, amely azonban szükségképen különbözik a szabad atomokból való képződés hőszinezetétől éspedig az

$$\tfrac{1}{2} A_2 \rightarrow A - Q_A$$

és

$$\tfrac{1}{2} B_2 \rightarrow B - Q_B$$

disszociációs folyamatok hőszükségletének megfelelő mértékben. Hőszinezetbeli eltérést okoz az is, ha a vegyítendő elemi testeket szilárd vagy folyadékállapotban hozzuk össze, de a reakciótermék maga gázállapotú, vagy megfordítva. Csak ha úgy a vegyítendő elemek, mint az előálló vegyület is gázalakú, azaz,

ha a szublimációs, illetőleg párolgási folyamatok hőszükségletét is tekintetbe vettük, vonhatunk következtetést az $A-B$ kötőenergiára, amely, mint említettük, csak akkor azonos az $A+B \rightarrow AB$ reakció hőszínezetével, ha úgy $A$ és $B$, mint $AB$ a gázfázisban szerepelnek és $A$ és $B$ egyatomos, viszont $AB$ kétatomos állapotban voltak, illetőleg van jelen itt. Már a legegyszerűbb reakciók esetében is igen tekintélyes ez a tekintetbeveendő korrekció. Pl. a szénnek oxigénnal való vegyülésénél a thermochemiai egyenlet a következő:

$$C_{szil} + O_2 = CO_2 + 94000 \text{ caloria.}$$

Tévedés lenne azonban azt hinni, hogy ez a hőszínezet közvetlen felvilágosítást nyujthat a széndioxid belső kötőenergiájáról. Ugyanis a korrekciók: a szilárd szénnek gázállapotú egyatomos módosulatba való juttatásához még szükséges mintegy 170,000 caloria, az oxigénmolekulának oxigénatomokra való disszociáltatásához pedig mintegy 117,000 caloria,[1] lényegesen nagyobbak, mint maga az alapul szolgáló 94,000 caloria hőszínezet.

Figyelemre méltó mármost, hogy a szorosabb értelemben vett chemia ezeket az egyáltalában nem lényegtelen korrekciós adatokat nem is szolgáltatja. A párolgási és szublimációs hők jellegzetesen fizikai mennyiségek, az elemi gázmolekulák disszociációs energiája meg éppenséggel fizikai úton, a spektroszkópiai vizsgálat, vagy elektronütköztetés módszerével, stb. határozható meg. Maga a thermochemiai egyenlet még csupán a bruttó-energiamérleget állítja fel és csak az említett fizikai mennyiségek betudásával számíthatjuk ki a szabad atomok vegyülésével kapcsolatos netto energiaváltozást. Az elmondottak alapján érthető tehát, hogy — valóban különös helyzet áll elő ezáltal — a chemia a saját legalapvetőbb problémáját, két *atom* vegyülését energetikailag is kvantitative nem oldhatja meg, hanem — éppen a chemiai szintézis-reakciók vázolt brutto-jellege miatt — átengedi azt az atom- és molekulár-fizika spektroszkópiai és elekronütköztetési eredményeket tárgyaló fejezeteinek. Pl. a GEIGER- és SCHEEL-féle Handbuch der Physik,[2] GRIMM- és WOLFF-tól szár-

[1] A számadatokat illetőleg l. alant a megfelelő irodalmi utalásokat.

[2] Bd. XXIV/2, SPRINGER, Berlin, 1933.

mazó «Atomchemie» c. fejezete közli az 1933-ig ismeretessé vált adatok alapján a különféle elempárokra vonatkozó kötőenergiákat.[1]

A szénatomnak más atomokhoz való kötőenergiájára vonatkozó irodalom különösen széleskörű vizsgálati anyagra terjed ki. Ennek egyik oka nyilván az, hogy a szénvegyületek között gyakori különféle izomériák révén már aránylag korán lehetségessé vált a molekulák belső szerkezetének legalábbis topologiai szempontból való felderítése, ami a kiszámítandó kötőenergiák definiálásának magától értetődően elengedhetetlen feltétele. Ezenkívül homolog sorozatokon végzett azonos kísérletek nagymértékben elősegítették az eredmények rendszerezését és esetleges téves adatok kiküszöbölését. Továbbá a szerves vegyületek tekintélyes része bomlás nélkül vihető gázállapotba, aminek folytán a különféle körülmények között meghatározott szintézis-energia a legegyszerűbb esetre: gázállapotú kiindulóanyagok és gázállapotú reakciótermék egyensúlyára könnyen átszámíthatóvá vált. De talán a legfontosabb ok a szerves vegyületeknek abban a tulajdonságában rejlik, hogy csaknem kivétel nélkül elégethetők és égéstermékeik a szerkezettől függetlenül rendszerint ugyanazok az egyszerű vegyületek ($CO_2$, $H_2O$, stb.), míg az égési hők még az azonos molekulasúlyú és tapasztalati képlettel bíró izoméreknél is rendszerint különbözőek. Tényleg, az egyszerűbb, pl. csak szénből és hidrogénből álló komplexumok belső kötőenergiáinak felderítését célzó legkorábbi vizsgálatok is összehasonlították a kérdéses vegyület égési hőjét a tapasztalati képletnek megfelelő arányban vett tiszta szén és hidrogén égésénél keletkező hővel és a mutatkozó eltérést a vegyület keletkezésekor létrejövő kötések képződési energiájának rovására írták. Izomérvegyületek égéshőjének összehasonlítása ilyenformán a kétféle kötési lehetőségnek megfelelő energiákról valóban nyujthat felvilágosítást. A nyert számértékek értelmezése rendszerint úgy történt, hogy a vegyületet gondolatban elemeire disszociáltatták, amely folyamathoz éppen az összes kötések felbontásához szükséges energia használtatnék fel, majd a

[1] L. c. 1003. oldalon a 32. sz. táblázat.

keletkezett elemi testeket gondolatban külön-külön elégették, amely lépésnél nyert energiákat a tiszta szén és hidrogén egetése révén már ismertek, illetőleg számíthattak. A tényleges vegyület égéshőjét ezen utóbb említett számított adatból levonva, az első lépésnek megfelelő fiktív disszociációs energiaszükséglethez jutottak, amelyet a vegyület egyes kötéseinek arányában szétosztottnak képzeltek el. Pl. grammolekulasúlynyi methán égéshőjét 12 g szén és 4 g hidrogén égéshőjéből levonva, képzeletben 4 $(C-H)$ kötés energiájához juthatni. Ennek $^3/_2$ arányban vett többszöröse az ethán 6 $(C-H)$ kötésével kapcsolatos energiát adja meg. Ha ehhez az ethán $(C-C)$ kötésével kapcsolatos, egyelőre még ismeretlen energiát már hozzáadva képzeljük, úgy a grammolekulasúlynyi ethán égéshőjének és 24 g szén, valamint 6 g hidrogén égéshőjének a különbségéhez kell eljutnunk, stb. — Az ilyen és más módon meghatározott kötőenergiákat tartalmazó fentemlített összefoglaló táblázat kompilációjával egyidőben PAULING és SHERMAN[1] megkísérelték, hogy a szerves vegyületek teljes képződési energiáit — amelyeket tehát a szintézis-reakció hőszínezetének, a szén párolgási hőjének, továbbá a hidrogén, oxigén, stb. disszociációs energiájának tekintetbevételével számítottak volt — most már csakis két-két elemtől függő és állandó számértékű kötőenergiákból felépítsék. [Pl. egy $R-C\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown O\end{matrix}$ képletű sav esetében az $R+C+O+O+H \rightarrow RCOOH$ reakcióval kapcsolatos energiaváltozásnak az $(R-C)$, $(C-O)$, $(C=O)$ és $(O-H)$ kötőenergiákból való összetevését.] Azonban meg kellett állapítaniok, hogy általában ez nem sikerül. Ugyanis, mégha az egyes kötőenergiákat meg is választjuk oly módon, hogy bizonyos, pl. homolog reakcióknál a fenti értelemben vett képződési hőket számszerűen helyesen adjanak vissza, ugyanazon atompárokat más szerkezetű vegyületekben alkalmazva, a képződési hő nem bizonyult az előbbi fajta reakció számára megállapított kötőenergiákból egyszerűen additive összetehető menynyiségnek.

A PAULING és SHERMAN által választott $(C-C)$, $(C-H)$,

[1] L. PAULING and J. SHERMAN: Journ. Chem. Phys. **1**, 606, 1933.

($C=O$), stb. kötőenergia-értékek alkalmazása mellett valamilyen vegyületben szereplő kötőenergiák összege általában mindig kisebb, vagy legfeljebb egyenlő volt az észlelési adatokból számított teljes képződési energiánál; PAULING és SHERMAN az eltérést mint «rezonancia-energiát» interpretálták, mondván, hogy az ilyen rezonancia-energia jelenléte azt bizonyítja, hogy a tényleges vegyületek, amelyekre a képződési energiaérték a kísérletek alapján meghatároztatott, tulajdonkép keverékstrukturájú vegyületek, azaz a feltételezett kötéseket tartalmazó molekulákon kívül kisebb számban még másféle kötésekből felépített (izomer?) molekulák is lehetnek jelen bennök, éppen az észlelt különbségnek megfelelő mértékben. A legnagyobb eltéréseket különösképp a $C=O$ kötést tartalmazó vegyületeknél tapasztalták, bár PAULING és SHERMAN éppen a $C=O$ kötésre vonatkozólag háromféle értéket: aszerint, hogy formaldehidszerű, aldehidszerű, vagy ketonszerű a kérdéses vegyület, 7·20, 7·56 és 7·71 elektronvoltot[1] is megadnak. Kétféle értékkel szerepelnek még a ($C-O$) és ($C\equiv N$) kötőenergiák is, aszerint, hogy alkoholokra, illetőleg éterekre és a hidrogéncianidra, illetőleg más cianidokra vonatkozó teljes képződési energiákról van-e szó a kiszemelt esetben.

SCHMID és GERŐ[2] legutóbb a szénoxid disszociációs energiájára a spektroszkópiai adatok alapján 6·9 voltot adnak meg. Ez értéket SCHMID[3] az elektronütköztetési kísérletek alapján is megindokolja és bizonyos következtetést von a ($C-C$) és ($C-H$) kötőenergiákra, majd két másik munkájában[4] a ($C\equiv N$), illetőleg a ($C=O$) és $O=C=O$ kötőenergiákra következtet, ellenőrizve ezeket ugyancsak spektroszkópiai és elektronütköztetési kísérletek eredményeivel.

Tekintettel egyrészt az égéshőnek fentvázolt fontos szerepére a képződési energiák meghatározásánál, másrészt arra, hogy a legegyszerűbb gázalakú szénvegyületek és egyszersmind a legfontosabb égéstermékek, mint a $CO$ és $CO_2$ belső energiáinak ismerete jelentős szereppel bír a kötőenergiák megítélésében és

[1] 1 e. Volt = 23 kcal = 23.000 caloria.

[2] R. SCHMID und L. GERŐ: ZS. f. Phys. **99**, 281, 1936.

[3] R. SCHMID: ZS. f. Phys. **99**, 274, 1936.

[4] R. SCHMID: ZS. f. Phys. **99**, 562, 1936 és **99**, 626, 1936.

végül, mivel ez újabb vizsgálatok eredményei a $CO$ és $CO_2$-molekulák disszociációs energiáira bizonyos jogosultsággal kísérleti értékeknek tekinthetők és az eddig forgalomban volt, inkább becslésen alapuló adatoktól meglehetősen eltérő számértékeket definiálnak meg, nem látszik érdektelennek megkísérelni, nem érhető-e el jobb egyezés a kötőenergiák terén általában, ez újabb értékek alapulvételével?

Ezenkívül egy más szempont is szól a kötőenergiák újraszámításának szükségessége mellett. Nevezetesen a teljes képződési energia kiszámításánál felhasznált képződési hőket — melyek legjobb esetben a szintézis hőmérsékletén mérhetők csak direkt kísérleti úton — a fajhők tekintetbevétele mellett át volt szokás számítani az abszolút nullafokra. Ezáltal a «0° K-ra érvényes képződési hők»-höz jutottak, melyeket azután az ugyancsak extrapolációval nyert szublimációs- és párolgási-hőkkel, valamint — a 0° K-nál érvényesnek feltételezett — elemi molekula-disszociációs energiákkal korrigáltak meg. Az ezekből levezetett kötőenergiák tehát tulajdonkép szintén a 0° K-ra érvényes kötőenergiákat jelentették. Az ily módon nyert kötőenergiák — melyek az általános chemiai terminológia szerint a kérdéses két atom közötti kötés «szilárdságának» jellemzését is adnák — az abszolút nullapont körüli kötési viszonyokra jellemzőek elsősorban és a belőlük levonható következtetések, illetőleg a segítségükkel kiszámítható, esetleg eddig elő sem állított új vegyületekre vonatkozó képződési energiák is a közönséges viszonyok szempontjából távoleső temperatura-tartományra lesznek érvényesek, ahonnan megint csak fáradtságos és gyakran pontatlan extrapoláció révén juthatunk el a legtöbb kísérleti chemiai vizsgálat hőmérsékleti tartományához. Kétségtelenül hasznosabb lenne tehát, ha a 0° K helyett például mindjárt a laboratoriumi hőfokra érvényes eredményeket nyerhetnénk. Erre valóban egyszerű mód kínálkozik: a «kötési szilárdság» mértékére már a legrégebbi chemiai vizsgálatok az «affinitást» alkalmazták, ez utóbbit pedig a szabadenergia függvény definiálja számszerűen, amely viszont a tetszőleges hőfokra vonatkozó effektív energiaváltozás szerepét játssza a chemiában. Bár azon reakciók száma, amelyekkel kapcsolatos szabadenergiaváltozás ismeretes, lényegesen kisebb, mint az ismert

hőszínezetű reakcióké, mégis, mivel a szabadenergiaváltozás egyensúlyi reakciók révén nyerhető, feltehetjük, hogy az ismert adatok aránylag pontosabbak, mint a képződési, vagy éppen égési hők általában, tekintve, hogy ez utóbbiaknál a reakció tényleges hőmérsékletének megállapítása távolról sem oly egyszerű, mint az egyensúly számára kiválasztott hőmérsékleté. Mivel igen sok vegyület képződési szabadenergiaváltozása éppen a laboratoriumi hőmérséklet (25° C = 298° K), vagy ennek környezetében volt meghatározható, nem látszik célszerűtlennek a kötőenergiák számítását ezek alapulvétele mellett végezni. Megszabadulunk így a párolgási és szublimációs hőkben rejlő esetleges extrapolációs hibáktól is, és kapcsolatot nyerünk a spektroszkópiai disszociációs-energiameghatározás egyik fontos ágával, nevezetesen a prädisszociáción alapuló megfigyelésekkel, amelyek az esetek túlnyomó részében szintén ilyen hőmérsékletek mellett történtek. Eredményeink szintén a 298° K-ra érvényes «effektív» kötőenergiák lesznek természetesen.

A számítások alapjául szolgáló szabadenergia-értékeket a PARKS és HUFFMAN-féle monografiából[1] vettük, és az egyes esetekben P. H.-val, és a megfelelő oldalszámra való hivatkozással idézzük. A különféle elemi gázok, mint $O_2$, $N_2$, $H_2$, $Cl_2$, stb. disszociációs energiaértékeit pedig a SPONER-féle monografiából[2] írtuk ki. Mivel ott elektronvolt-egységek szerepelnek, álljanak itt a megfelelő kcal-ban kifejezett adatok:

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}O_2 \rightarrow O$ | 58·5 | Kcal |
| $H_2 \rightarrow 2H$ | 103 | « |
| $\frac{1}{2}N_2 \rightarrow N$ | 85 | « |
| $Cl_2 \rightarrow 2Cl$ | 56·8 | « |
| $S_2 \rightarrow 2S$ | 102.6 | « |

A szénoxid disszociációs energiáját a SCHMID és GERŐ-féle említett dolgozatok eredményeinek megfelelően a következőkép vesszük számításba:

[1] G. S. PARKS and H. M. HUFFMAN: The free energies of some organic compounds, Chem. Cat. Comp. 1332, N. Y.

[2] H. SPONER: Molekülspektren und ihre Anwendung auf chemische Probleme, SPRINGER, Berlin, 1935.

A normális állapotu szénoxid disszociációja kétértékű ($^3P$ elektronállapotú) szén és oxigénatomokra:

$$CO \rightarrow C^{\cdot\cdot} + O \_ \_ \_ \_ \_ \; 159 \text{ Kcal } (=6{\cdot}9 \text{ volt}).$$

A kétértékű szénatomnak négyértékű ($^5S$ elektronállapotú szénatommá való gerjesztéséhez BACHER és GOUDSMIT [1] szerint 4·32 Volt, azaz 100 kcal szükséges:

$$C^{\cdot\cdot} \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \; 100 \text{ Kcal.}$$

Így tehát a normális állapotú szénmonoxid négyértékű szénatomra való disszociáltatásához kell

$$CO \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + O \_ \_ \_ \_ \_ \; 259 \text{ Kcal.}$$

SCHMID idézett dolgozata szerint ez a folyamat két lépésben megy végbe és pedig a normális állapotú (kifelé vegyértéket nem mutató, $X^1\Sigma$ elektronállapotú) $CO$ felgerjesztetik — a chemiai terminológia szerint «aktiváltatik» — a két szabad vegyértéket felmutató ($a\ ^3\Pi$ elektronállapotú) $(CO)^x$ módosulatba, amely folyamat energiaszükséglete

$$CO \rightarrow (CO)^x \_ \_ \_ \_ \_ \_ \; 6 \text{ Volt.}$$

Az aktivált $(CO)^x$ módosulat, melynek szerkezeti képlete $>C=O$ lenne tehát, mintegy 5·2 Volt energia felvételével disszociál négyértékű szénre, azaz összes energiaszükséglet 11·2 Voltnyi, egyezésben az előbbiekben említett és a szénatom «aktiválásán» alapuló 259 Kcal értékkel.

## I. A széndioxid-képződés szabadenergiaváltozása.

Kiindulásul szolgálnak az alábbi reakciók:

$$\begin{array}{ll} CO_2 \rightarrow CO + {}^1/_2 O_2, & \Delta F = 61{\cdot}4 \text{ Kcal (P. H. p. 49)} \\ CO \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + O, & 259 \quad \text{«} \\ {}^1/_2 O_2 \rightarrow O, & 58{\cdot}5 \quad \text{«} \\ \hline CO_2 \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + O + O, & \Delta F = 379 \text{ Kcal.} \end{array}$$

[1] R. F. BACHER and S. GOUDSMIT: Phys. Rev. **46**, 948, 1934.

A széndioxid részleges bomlásánál (szénmonoxidra és atomos oxigénre) szerepet játszó szabadenergiaváltozás viszont a következő:

$$CO_2 \rightarrow CO + {}^1/_2\, O_2, \quad \Delta F = 61{\cdot}4 \text{ Kcal (P. H. p. 49)}$$
$$\underline{{}^1/_2 O_2 \rightarrow O \qquad\qquad 58{\cdot}5 \quad «}$$
$$CO_2 \rightarrow CO + O, \quad \Delta F = 119{\cdot}9 \text{ Kcal.}$$

Érdekesnek látszik megjegyezni itt, hogy ez utóbbi érték pontosan ugyanannyinak adódik, mint a $> C = O$ csoportnak előbb említett 5·2 Voltnyi, azaz 120 Kcal-nyi disszociációs energiája. Másszóval, a széndioxidból, a négyértékű szénatom mellől, az első oxigénatom leválasztásához pontosan ugyanannyi energia szükségeltetik, mint a másodiknak ugyancsak a négyértékű szénatom mellől, de a $> C = O$ csoportnak megfelelő aktivált szénoxidból való leválasztásához. Teljes egyezésben áll ez a jelenség a $CO_2$ molekulának számos tulajdonsága alapján bebizonyított $O = C = O$ szimmetriájával. Hogy a $CO_2$ teljes képződési szabadenergiája (amely a fentiek szerint mintegy 379 Kcal) nem tehető egyszerűen össze a két oxigén-leválasztás energiaszükségletéből — amely $2 \times 120 = 240$ Kcal-nak felelne meg — hanem még szükség van a $CO$-aktivációs energiára — amely, mint említettük 6 Volt=138 Kcal — az természetes folyománya annak a ténynek, hogy a $CO_2 \rightarrow CO + O$ bomlási folyamatnál a $CO$-ban maradó szénatom kétértékű, míg a $CO_2$-ben még négyértékű volt. Másszóval a $CO_2$ képződési szabadenergiája nem csupán a $CO \rightarrow C^{\cdot\cdot} + O$, $C^{\cdot\cdot} \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ és $CO_2 \rightarrow CO + O$ részfolyamatok összegeként (159+100+120=379 Kcal) fogható fel, hanem — éppen az $O = C = O$ szimmetria következtében — előállítható, mint a $C = O \rightarrow > C = O$ és $2(O = C = O \rightarrow C = O + O)$ folyamatok ($138 + 2 \times 120 = 378$ Kcal) összege is.

Itt említjük meg, hogy Schmid és Gerő fentidézett dolgozataiban megadott $C = O$ és $> C = O$ disszociációs energiák aránya:

$$\frac{C = O}{> C = O} = \frac{6{\cdot}9 \text{ Volt}}{5{\cdot}2 \text{ Volt}} = 1{\cdot}35$$

érdekes módon közel ugyanannyinak mutatkozik, mint $CO$ és $CO_2$ színképe alapján, a $C = O$ és $O = C = O$-modell tekintetbe-

vételével a $C \longleftrightarrow O$ rezgésekre vonatkozó és KRONIG[1] által kiszámított kötőerők viszonya:

$$\frac{CO \ldots 18{\cdot}78 . 10^5 \text{ dyn/cm}}{CO_2 \ldots 14{\cdot}46 . 10^5 \text{ dym/cm}} = 1{\cdot}3$$

Tekintve, hogy ez utóbbi számértékek az infravörösben fekvő rezgési színképek alapján (a SCHMID és GERŐ-féle vizsgálatoktól teljesen függetlenül) adódtak, az egyezésben a követett eljárás helyességének bizonyítékát kell látnunk.

## II. A négyértékű szénatom szabadenergiája és a $(C-C)$ kötőenergia.

A négyértékű szénatom szabadenergiáját a szénoxid-képződés szabadenergia-változásaiból, a $CO$-disszociációból, az $O_2$-disszociációból és a kétértékű szénnek négyértékű állapotba való gerjesztéséhez szükséges energiából számítjuk ki:

| | |
|---|---|
| $C_{szil} + {}^1/_2\, O_2 \rightarrow CO,$ | $\Delta F = -32{\cdot}7$ Kcal (P. H. p. 49) |
| $CO \rightarrow C^{\cdot\cdot} + O,$ | 159 « |
| $O \leftarrow {}^1/_2 O_2,$ | $-58{\cdot}5$ « |
| $C^{\cdot\cdot} \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ | 100 « |
| $C_{szil} \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot},$ | $\Delta F = 168$ Kcal. |

De eljuthatunk a $C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ szabadenergiájához a $CO_2$ két oxigénatomjának négyértékű szénhez való egyforma kötését alapulvevő feltevéssel is:

A már felhasznált $CO_2 \rightarrow CO + {}^1/_2\, O_2$, $\Delta F = 61{\cdot}4$ Kcal egyenlet kétszereséhez a szénoxid aktivációs energiáját, 138 kalóriát hozzáadva a következő egyenlethez jutunk:

$$CO_2 \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + O_2, \quad \Delta F = 261 \text{ Kcal},$$

amelyet a

$$C_{szil} + O_2 \rightarrow CO_2, \quad \Delta F = -94{\cdot}1 \text{ Kcal (P. H. p. 49)}$$

egyenlettel kombinálva nyerjük

$$C_{szil} \rightarrow C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \quad \Delta F = 167 \text{ Kcal},$$

a fent kapott 168 Kcal-val jó egyezésben.

---

[1] R. de L. KRONIG: The optical basis of the theory of valency, Cambridge, Univ. Press, 1935. l. a 164. oldalt.

PARKS és HUFFMAN munkája a szilárd szenet, mint grafitot veszi számításba; viszont könyvük 47. oldalán közölt táblázatból az is kitűnik, hogy a gyémánt és grafit szabadenergiái között csupán 0·3 Kcal eltérés van. Mivel a jelen számításoknál ilyen nagyságrendű mennyiségeket amúgyis elhanyagoltunk, a fenti $C_{szil} \rightarrow C^{\cdots}$, $\Delta F = 167 \sim 168$ Kcal értéket a gyémántra, mint szilárd szénre is érvényesnek tekinthetjük. Ezáltal módunk nyílik a $(C-C)$ kötőenergia kiszámítására.

FAJANS[1] szerint ugyanis a gyémántkristályban — ahol a kristálytani vizsgálatok, Röntgeninterferenciák, LAUE-diagrammok, stb. tanúsága szerint minden egyes szénatom egy tetraedrikus rács hálópontjaiban ülve négy másik szénatomhoz van egy $(C-C)$ kötéssel kapcsolva — a kristályrácsnak például párologtatás révén való disszociációjához szükséges energia éppen kétszer akkora, mint a kristályrács $(C-C)$ kötőenergiáinak felbontásához szükséges energia. Nevezetesen egy grammatomnyi gyémántkristályban a szénatomok száma $N$-el, a LOSCHMIDT-féle számmal egyenlő és mivel mindig két-két $C$-atom képez egy $(C-C)$ párt, az egy grammatomnyi négyértékű szénatomnak a rácsszerkezetből való kiszabadításához szükséges energia úgy aránylik az egy grammatomnyi $(C-C)$ kötőenergiához, mint $4N : 2N = 2 : 1$.

Ha a szénatomoknak a szilárd szén kristályrácsából való kiszabadításához szükséges energiája alatt éppen a fentlevezetett 168 Kcal szabadenergiaváltozást értjük, úgy a gyémánt $(C-C)$ kötőenergiája $\frac{168}{2} = 84$ Kcal-nak adódik.

Ugyancsak FAJANS-tól származik az a következtetés is, hogy a szilárd szénben és a normális láncú alifás szénhidrogénekben érvényes $(C-C)$ kötőenergiák között a következő egyszerű összefüggésnek kell fennállania:

$$(C-C)_{\text{gyémánt}} - (C-C)_{\text{alifh}} \leqq 4 \text{ Kcal.}$$

FAJANS nem ismerte a $(C-C)$-kötőenergiát magát sem a szilárd szénben, sem a szénhidrogénekben; a kettő különbségére vonatkozó fenti összefüggésre a szilárd szén és a nagy szénatomszámú szénhidrogének égéshőjének összehasonlítása révén jutott el.

[1] K. FAJANS: Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **53**, 643, 1920.

L. például a HÜCKEL-féle monografia megfelelő fejezeteit.[1] Nem volt ismeretes természetesen az előbb levezetett 168 Kcal szabadenergiaváltozás sem. A szénatomoknak a gyémántkristályrácsából való kiszabadításához szükséges energiát a szilárd szén párolgási hőjével vették volt egyenlőnek, mely utóbbira azonban a legújabb időkig sem állt rendelkezésre elegendő pontos adat, ami érthető, ha meggondoljuk, hogy a szén párologtatási hőfoka legkedvezőbb esetben is pár ezer °C lévén, milyen hosszú extrapoláció vezetett el az abszolút zérusig, amelyre pedig a a párolgási hőt vonatkoztatni kell. A legújabb adat, 0° K-nál mintegy $177 \pm 2$ Kcal, MARSHALL és NORTON-tól[2] származik és jól összeegyeztethető az itt levezetett és 298° K-ra vonatkozó 168 Kcal szabadenergiával. — Végeredményben nyerjük tehát:

$$(C - C)_{\text{aliph}} = 84 - 4 = 80 \text{ Kcal.}$$

## III. A $(C-H)$ kötőenergia kiszámítása.

Kiindulunk a methán $(CH_4)$ szintézisével kapcsolatos szabadenergiaváltozásból és azt a hidrogénmolekula fent megadott disszociációs energiájával és a négyértékű szénatom előbb levezetett szabadenergiájával kombináljuk.

| | |
|---|---|
| $C_{\text{szil}} + 2H_2 \rightarrow CH_4$, | $\Delta F = -12$ Kcal (P. H. p. 59) |
| $C \cdots \leftarrow C_{\text{szil}}$ | $-168$ « |
| $4H \leftarrow 2H_2$ | $-206$ « |
| $C \cdots + 4H \rightarrow CH_4$ | $\Delta F = -386$ Kcal |

Ha ezt a 386 kalória teljes képződési szabadenergiát négy $(C-H)$ kötőenergia összegének tekintjük, egyre jut:

$$(C-H) = \tfrac{386}{4} = 96{\cdot}5 \text{ Kcal.}$$

Ellenőrzés céljából vizsgáljuk meg az ethán $C_2H_6$ teljes képződési szabadenergiáját. Az alkalmazandó egyenletek:

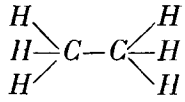
---

[1] W. HÜCKEL: Theoretische Grundlagen der organischen Chemie, Akad. Verlagsges. Leipzig, 1935, I—II. Bd.; a II. kötet 9. oldalán.

[2] A. L. MARSHALL and. F. J. NORTON: Journ. Chem. Soc. Amer. **55.** 431. 1933.

$$2C_{szil} + 3H_2 \rightarrow C_2H_6, \quad \Delta F = -\ 11 \text{ Kcal (P. H. p. 60)}$$
$$2C\cdots \leftarrow 2C \qquad -336 \text{ «}$$
$$6H \leftarrow 3H_2 \qquad -309 \text{ «}$$
$$2C\cdots + 6H \rightarrow C_2H_6, \quad \Delta F = -656 \text{ Kcal}$$

Feltevésünk szerint, az ethán szerkezeti képletének megfelelően



ez az energia összetehető kell legyen:

| | | |
|---|---|---|
| hat $(C-H)$ kötőenergiából | $6 \times 96{\cdot}5 =$ | 579 Kcal |
| egy $(C-C)$ « | $=$ | 80 « |
| azaz összesen | | 659 Kcal |

Az egyezés tényleg jónak mondható, amennyiben az ethán szintézis alapján nyert 656 Kcal-tól való eltérés kisebb, mint 0·5%.

## IV. A formaldehyd, acetaldehyd és aceton képződési szabadenergiái és a $(C=O)$ kötési energia.

Alapul szolgálnak a következő reakciók:
formaldehid:

$$C_{szil} + H_2 + {}^1/_2 O_2 \rightarrow HCHO, \quad \Delta F = -\ 26 \text{ Kcal (P. H. p. 157)}$$
$$H + H \leftarrow H_2 \qquad -103 \text{ «}$$
$$O \leftarrow {}^1/_2\, O_2 \qquad -\ 58{\cdot}5 \text{ «}$$
$$C\cdots \leftarrow C_{szil} \qquad -168 \text{ «}$$
$$C\cdots + 2H + O \rightarrow HCHO, \quad \Delta F = -\ 355 \text{ Kcal,}$$

acetaldehid:

$$2C_{szil} + 2H_2 + {}^1/_2 O_2 \rightarrow CH_3.CHO, \quad \Delta F = -\ 32 \text{ Kcal (P. H. p. 161)}$$
$$4H \leftarrow 2H_2 \qquad -206 \text{ «}$$
$$O \leftarrow {}^1/_2 O_2 \qquad -\ 58{\cdot}5 \text{ «}$$
$$2C\cdots \leftarrow 2C_{szil} \qquad -336 \text{ «}$$
$$2C\cdots 4H + O \rightarrow CH_3.CHO, \quad \Delta F = -632 \text{ Kcal,}$$

aceton:

$$3C_{szil}+3H_2+{}^1/_2O_2\rightarrow(CH_3)_2CO,\ \Delta F=-37\ \text{Kcal (P. H. p. 162)}$$
$$6H\leftarrow 3H_2 \qquad -309\ «$$
$$O\leftarrow {}^1/_2O_2 \qquad -58{\cdot}5\ «$$
$$3C\cdots\leftarrow 3C_{szil} \qquad -504\ «$$
$$3C\cdots+6H+O\rightarrow(CH_3)_2CO,\ \Delta F=908\ \text{Kcal.}$$

Viszont, ha a $(C-H)$, $(C=O)$ és $(C-C)$ kötőenergiákra a fentlevezetett 96·5, 159 és 80 Kcal értékeket fogadjuk el, a szerkezeti képletek alapján a következő képződési energiákhoz jutunk:

formaldehid, $\begin{matrix}H\\H\end{matrix}\!\!>\!C=O$,
$2(C-H)=193$ Kcal
$(C=O)=159$ «
összesen: 352 Kcal.

acetaldehid, $\begin{matrix}H\\CH_3\end{matrix}\!\!>\!C=O$,
$(1+3)(C-H)=386$ Kcal
$C-C=80$ «
$C=O=159$ «
összesen: 625 Kcal

aceton, $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!\!>\!C=O$,
$(3+3)(C-H)=579$ Kcal
$2(C-C)=160$ «
$(C=O)=159$ «
összesen: 898 Kcal.

Az eltérések az előbb levezetett 355, 632, ill. 908 Kcal-hoz képest most is 1% körül vannak és például a $(C-H)$ kötés alkalmasabb megválasztásával akár teljesen el is tűntethetők. Mindenesetre nem látszik indokoltnak a PAULING—SHERMAN szerinti módon az egész éltérést a $C=O$ csoport számára feltételezett háromféle kötőenergiával magyarázni, vagy éppen «rezonancia-energiá»-kat bevezetni.

E helyen kínálkozik alkalom a formaldehid-színképen észlelt prädisszociáció[1] és a formaldehid molekula képződési energiája közötti összefüggésnek[2] az előbbiekben levezetett képző-

[1] V. HENRI: Structure des Molecules, Paris, 1925.

[2] L. pl. R. MECKE: Nature, 125, 526, 1930, G. HERZBERG: Trans. Far. Soc. 27, 378, 1931.

dési-szabadenergia tekintetbevételével való rekapitulációjára. — Nevezetesen a 2670 Å környékén észlelt prädisszociációt már régebben a $H_2CO$-molekula valamilyen bomlási folyamatának — például MECKE[1] a

$$H_2CO \rightarrow H + HCO$$

reakciónak — tulajdonították, bár LÖCKER és PATAT[2] szerint a hidrogénnek chemiai értelemben való leválasztásáról nem lehet itt szó, mivel a formaldehid-gáznak 2600∼2700 Å hullámhosszúságú fénnyel való besugároztatása nem létesít szabad hidrogénatomokat.

A prädisszoción kívül, ugyancsak a spektrumból levezethetőleg, bizonyítottnak tekinthető a $\begin{matrix} H \\ H \end{matrix}\!\!>\!C=O$ molekula szimmetriája a $C=O$ irány körül. Amennyiben tehát a prädisszociáció az egyik hidrogénatomnak a szénatomhoz való kötésében fellépő valamilyen hatásra vezethető vissza, várható lenne, hogy az ehhez szükséges energia kétszerese és a szén-oxigén-kötés ismert energiaállapotai között valamilyen másféle módon is ellenőrizhető összefüggés mutatkozzék.

A 2670 Å körül elnyelt sugárzás mintegy 37500 $cm^{-1}$ hullámszámnak, ez viszont 4·64 Voltnak, azaz mintegy 107 Kcal energiafelvételnek felel meg. Feltételezve, hogy ez az energia az egyik $(C-H)$ kötés valamilyen átalakulásához tartozik, mindkét $(C-H)$ kötés azonos értelmű reakciójához mintegy 214 Kcal lenne szükséges. Levonva ezt a formaldehid 352 ∼ 355 Kcalóriányi teljes képződési szabadenergiájából, marad mintegy 138∼141 Kcal, amely érték feltűnő módon közel áll a $CO \rightarrow (CO)^{\times}$ aktivációs folyamat energiaszükségletéhez.

Azonban az acetataldehid is mutat prädisszociációt, éspedig a 3200 Å spektrálvidéken, ami mintegy 89 Kcal energiafelvételnek felelne meg.[3] Ezt a jelenséget HERZBERG[4] a

$$CH_3CHO \rightarrow CH_3 + HCO$$

---

[1] R. MECKE: ZS. f. Phys. Chem. B. **18**, 53, 1932, l. különösen az 58. old.

[2] TRUDE LÖCKER und F. PATAT: ZS. f. Phys. Chem. B. 27, 431, 1934.

[3] V. HENRI und S. SCHOU: ZS. f. Phys. **49**, 774, 1928. S. SCHOU: Journ. Chimie Physique, **27**, 27, 1929.

[4] G. HERZBERG: Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, X. 207, 1931, l. különösen p. 278.

folyamatnak tulajdonította. Feltételezve, hogy mint a formaldehidnél a 107 Kcal az egyik $(C-H)$ kötésre, úgy itt a 89 Kcal a $(C-C)$ kötésre jellemző, várhatnók, hogy a kettő összege: 196 Kcal és a

$$\begin{matrix} H \\ C \end{matrix}\!\!\rangle C = O$$

rendszer teljes képződési szabadenergiája — amely a $(H-C)=96{\cdot}5$ Kcal, továbbá a $(C-C)=80$ Kcal és a $(C=O)=159$ Kcal kötési energiákból mintegy 335·5 Kcalóriára tehető — között ugyanolyan összefüggés legyen, mint a formaldehidnél a $2\times 107$ Kcal és a $H_2CO$ képződési szabadenergiája között. Tényleg $335{\cdot}5-196=139{\cdot}5$ Kcal a különbség, a formaldehidnél nyert $138\sim 141$ Kcal, illetőleg a $CO$-színképből levezetett 138 Kcalóriával egyezésben.

Mint ahogyan a $CO_2$-nél a két oxigénleválasztás energiaszükségletén felül még ez a 138 Kcalórányi $CO$-aktivációs energia kellett a teljes képződési szabadenergia előállításához, úgy a formaldehidnél a két hidrogén kötés, illetőleg az acetaldehidnél a $(C-H)$ és $(C-C)$ kötések «lazításához» szükséges energián felül ugyancsak erre az energiára van szükség.

Még megjegyezni óhajtjuk itt, hogy a formaldehidnek távoli ultraibolyában fekvő színképén is észlelt prädisszociációt PRICE[1] éspedig a 1740 Å körüli vidéken, ami mintegy 164 Kcal energiafelvételnek felelne meg. PRICE dolgozatában nem közöl észlelési hibahatárt, azonban abból, hogy az abszorpciós színképek nyerése céljából mintegy $1^1/_2$ méteres gázréteget állított elő a spektrográf belsejében, arra következtethetünk, hogy az általa alkalmazott diszperzió aligha lehetett kedvezőbb, mint 10 Å pro lemezmilliméter. Ez esetben — tekintve, hogy prädisszociáció észleléséről van szó, amely jelenség sohasem olyan jól felismerhető, mint a színképvonalak maguk, azonkívül a prädisszociációs tartománynak a hosszabb hullámok felé eső határa jön elsősorban tekintetbe az illetékes bomlási energia kiszámításánál — nem zárhatjuk ki azt a lehetőséget, hogy a PRICE hullámhossz-adata a hosszabb hullámok irányában pár Å-egységgel korrigálandó,

[1] W. H. PRICE: Phys. Rev. 46, 529, 1934.

azaz a prädisszociáció energiaszükséglete esetleg pár kaloriával leszállítandó lenne. Mindezek tekintetbevételével nem látszik valószínűtlennek a PRICE által észlelt prädisszociáció energiaszükségletét a $C=O$ kötés bontóenergiájával, 159 Kcalóriával azonosnak venni. — Mivel általánosan elfogadott nézet szerint[1] a többatomos molekulák prädisszociációs energiaszükséglete a tulajdonképpeni chemiai értelemben vett disszociáció energiaszükséglete szempontjából csupán a felső határ szerepét játsza, azaz a valóságos értéknél akár pár volttal is magasabb lehet, a fentismertetett «egyezés»-ek mélyebb tárgyalása ezidőszerint nem látszik célszerűnek.

## V. A $(C-O)$ és $(O-H)$ kötőenergiák kiszámítása.

A $(C-O)$ kötés energiájához legegyszerűbben az éterek képződési szabadenergiáinak alapulvételével juthatunk el:

dimethyléter:

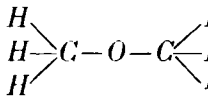
$$2C_{szil}+3H_2+{}^1/_2\,O_2\rightarrow(CH_3)_2\,O,\quad \Delta F=-\ 26{\cdot}4\ \text{Kcal (P. H. p. 167)}$$
$$6H\leftarrow 3H_2 \qquad 309\ \text{«}$$
$$O\leftarrow {}^1/_2O_2 \qquad 58{\cdot}5\ \text{«}$$
$$2C^{\cdots}\leftarrow 2C_{szil} \qquad 336\ \text{«}$$
$$2C^{\cdots}+6H+O\rightarrow(CH_3)_2\,O,\quad \Delta F=-729{\cdot}9\ \text{Kcal.}$$

diethyléter:

$$4C_{szil}+5H_2+{}^1/_2\,O_2\rightarrow(C_2H_5)_2\,O,\quad \Delta F=-\ 27{\cdot}6\ \text{Kcal (P. H. p. 168)}$$
$$10H\leftarrow 5H_2 \qquad 515\ \text{«}$$
$$O\leftarrow {}^1/_2\,O_2 \qquad 58{\cdot}5\ \text{«}$$
$$4C^{\cdots}\leftarrow 4C_{szil} \qquad 672\ \text{«}$$
$$4C^{\cdots}+10H+O\rightarrow(C_2H_5)_2\,O,\quad \Delta F=1273{\cdot}1\ \text{Kcal.}$$

A szerkezeti képletek alapján ezek a képződési energiák összetehetők volnának:

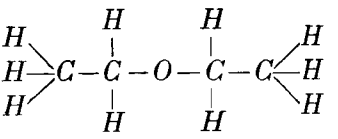
dimethyléter



$6(C-H)$ _____ 679 Kcal
$2(C-O)$ _____ $x$ «
összesen: $579+2(C-O)$ Kcal

[1] L. pl. a már idézett SPONER-féle munka 241. oldalát.

diethyléter



| | |
|---|---|
| $10(C-H)$ _ _ _ | 96·5 Kcal |
| $2(C-C)$ _ _ _ | 160 « |
| $2(C-O)$ _ _ _ _ | $x$ « |
| összesen: | $1125+2(C-O)$ Kcal |

Egy $(C-O)$ kötésre marad tehát:

a dimethyléternél $\frac{730-579}{2} = 75{\cdot}5$ Kcal

a diethyléternél $\frac{1273-1125}{2} = 74$ «

Miután a diethyléternél a $(C-H)$ kötőenergiából származó esetleges hiba nagyobb lehet, kereken 75 Kcalóriát számíthatunk a $(C-O)$ kötésre.

Az $(O-H)$ kötőenergiát az alkoholok képződési szabadenergiájából számíthatjuk ki az eddig levezetett értékek felhasználásával:

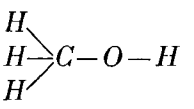
methylalkohol:

| | | |
|---|---|---|
| $C_{szil}+2H_2+{}^1/_2\,O_2 \rightarrow CH_3OH,$ | $\Delta F=-$ 38·9 Kcal | (P. H. p. 125) |
| $4H \leftarrow 2H_2$ | 206 « | |
| $O \leftarrow {}^1/_2\,O_2$ | 58·5 « | |
| $C^{\cdots\cdot} \leftarrow C_{szil}$ | 168 « | |
| $C^{\cdots\cdot}+4H+O \rightarrow CH_3OH,$ | $\Delta F=-471{\cdot}4$ Kcal | |

ethylalkohol:

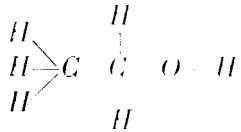
| | | |
|---|---|---|
| $2C_{szil}+3H_2+{}^1/_2\,O_2 \rightarrow C_2H_5OH,$ | $\Delta F=-$ 38·7 Kcal | (P. H. p. 126) |
| $6H \leftarrow 3H_2$ | 309 « | |
| $O \leftarrow {}^1/_2\,O_2$ | 58·5 « | |
| $2C^{\cdots\cdot} \leftarrow 2C_{szil}$ | 336 « | |
| $2C^{\cdots\cdot}+6H+O \rightarrow C_2H_5OH,$ | $\Delta F=-742{\cdot}2$ Kcal | |

A szerkezeti képletek alapján várható viszont, hogy a methylalkohol



| | |
|---|---|
| $3(C-H) =$ | 289·5 Kcal |
| $(C-O) =$ | 75 « |
| $(O-H) =$ | $x$ « |
| összesen: | $364{\cdot}5+(O-H)$ Kcal, |

az ethylalkohol



$$\begin{array}{rl} 5\,(C-H) = & 482{\cdot}5 \text{ Kcal} \\ (C-C) = & 80 \quad « \\ (C-O) = & 75 \quad « \\ (O-H) = & x \quad « \\ \hline \text{összesen: } & 637{\cdot}5+(O-H) \text{ Kcal} \end{array}$$

képződési szabadenergiával bír. Az $(O-H)$ kötőenergiára jut tehát

a methylalkoholnál $471{\cdot}4-364{\cdot}5 = 106{\cdot}9$ Kcal,
az ethylalkoholnál $742{\cdot}2-637{\cdot}5 = 104{\cdot}7$ «

középértékben tehát mintegy 106 Kcal.

Az $(O-H)$ kötőenergia számára a fentiektől teljesen független ellenőrzés kínálkozik a vízgőz-molekula $H-O-H$ disszociációjával kapcsolatos szabad energiaváltozás kapcsán. Az alkalmazandó reakciók:

$$\begin{array}{rl} H_2+{}^1/_2\,O_2 \rightarrow H_2O, & \Delta F = -\ 54{\cdot}5 \text{ Kcal (P. H. p. 47, tábla 5.)} \\ O \leftarrow {}^1/_2\,O_2 & 58{\cdot}5 \quad « \\ H+H \leftarrow H_2 & 103 \\ \hline H+O+H \rightarrow H_2O, & \Delta F = -216 \text{ Kcal.} \end{array}$$

A vízmolekula szerkezeti képlete alapján ezt az értéket két $(O-H)$ kötőenergia összegeként foghatjuk fel:

$$(O-H). = \frac{216}{2} = 108 \text{ Kcal.}$$

Az alkoholokból az előbbiekben levezetett 106 Kcaloriás értékkel való megegyezés még kielégítőnek nevezhető, ha meggondoljuk, hogy ez utóbbi értékhez a $(C-H)$ és $(C-O)$ kötések közvetítésével jutottunk csak el.

## VI. A $(C \equiv N)$ kötőenergia kiszámítása.

Kiindulhatunk itt a hidrogéncianidnak szilárd szénből, hidrogén és nitrogéngázból való szintéziséből:

$$
\begin{array}{rr}
C_{szil} + \tfrac{1}{2} H_2 + \tfrac{1}{2} N_2 \rightarrow HCN, & \Delta F = + \ 28{\cdot}7 \text{ Kcal (P. H. p. 192)} \\
H \leftarrow \tfrac{1}{2} H_2 & - \ 51{\cdot}5 \quad « \\
N \leftarrow \tfrac{1}{2} N_2 & - \ 85 \quad « \\
C^{\cdots} \leftarrow C_{szil} & -168 \quad « \\
\hline
H + C^{\cdots} + N \rightarrow HCN, & \Delta F = 275{\cdot}8 \text{ Kcal.}
\end{array}
$$

Ezt az értéket a $H-C\equiv N$ szerkezeti képlet alapján egy $(C-H)$ és egy $(C\equiv N)$ kötőenergiából képzelhetjük összetettnek. Az előbbire 96·5 Kcaloriát tételezve fel, a $(C\equiv N)$ kötőenergiára marad 179·3 Kcal.

A $(C \equiv N)$ kötés energiájára független ellenőrzést nyerhetnénk a dicián-szintézissel kapcsolatos szabadenergiaváltozás révén:

$$2C_{szil} + N_2 \rightarrow C_2N_2$$

Sajnos, mint a PARKS- és HEUFFMAN-féle munkából is kiderül, az evvel a reakcióval kapcsolatos szabadenergiaváltozás számára különféle oldalról javasolt értékek között tekintélyes eltérések vannak. A jódcián $JCN$ bomlási reakciója útján levezetett 91 Kcal érték (P. H. p. 193) például lényegesen magasabb, mint akár a direkt szintézis számára még régi észlelések alapján nyert 69·6 Kcal (P. H. p. 194), akár a dicián égéshője alapján becsült adat. Ez utóbbi eljárásnál PARKS és HUFFMAN a dicián égéshőjét még a BERTHELOT-tól származó 262·5 Kcaloriával vették számításba és entropia-adatok betudásával a diciánszintézis szabadenergiaváltozását mintegy 72·5 Kcaloriára tették. Ujabban Mc MORRIS és BADGER[1] a dicián égéshőjét 251·4 Kcal-nak állapították meg. Ennek alapján megkísérelhetjük a dicián szintézis szabad energiaváltozása számára is mintegy 11 Kcal-al alacsonyabb értéket, azaz körülbelül 61·5 Kcal-t venni számításba. Ezt és a direkt szintézis alapján nyert, fentemlített 69·6 Kcal értéket a $65{\cdot}5 \pm 4$ Kcal középértékbe foglalva, az alábbi thermociklust írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{rr}
2C_{szil} + N_2 \rightarrow C_2N_2, & \Delta F = + \ 65{\cdot}5 \pm 4 \text{ Kcal} \\
2C^{\cdots} \leftarrow 2C_{szil} & -336 \quad « \\
2N \leftarrow N_2 & -170 \quad « \\
\hline
2C^{\cdots} + 2N \rightarrow C_2N_2, & \Delta F = -440{\cdot}5 \pm 4 \text{ Kcal}
\end{array}
$$

[1] Mc. MORRIS and R. M. BADGER: Journ. Chem. Soc. Amer. **55**, 1952, 1933.

Ha ez értékből az $N \equiv C - C \equiv N$ szerkezeti képletnek megfelelően egy $(C-C)$ kötőenergiát (80 Kcal) levonunk és a maradékot 2-vel osztjuk, egy $(C \equiv N)$-kötés energiájára nyerjük:

$$C \equiv N = \frac{44{\cdot}5 \pm 4 - 80}{2} = 180 \pm 2 \text{ Kcal},$$

mely a hidrogéncianid-szintézis alapján az előbbiekben levezetett 179 Kcal értékkel a hibahatáron belül egyezik.

Megemlíthetjük itt, hogy a diciánnak ciángyökökre való bomlása a $C_2N_2 \rightarrow 2(CN)$ egyenlet szerint a dicián szerkezeti képlete értelmében a $(C-C)$-kötés energiájára vonatkozólag is nyujthat felvilágositást és így a $(C-C)$ kötőenergiára a jelen dolgozatban levezetett értéktől független ellenőrzéshez is juthatunk.

Mooney és Reid [1] a dicián fotochemiai bomlásához mintegy 154 Kcal energia felvételét találták szükségesnek. Ha feltételezzük,[2] hogy ezen bomlásnál az egyik $CN$-gyök aktiválódik és pedig a ciánszínképből ismert $B^2\Sigma$-elektronállapotnak megfelelően, úgy — tekintettel arra, hogy az «aktivációs», illetőleg gerjesztési energia a $B^2\Sigma \rightarrow X^2\Sigma$ ciánsávok alapján 3·2 Voltnak, azaz 74 Kcaloriának adódik.[3] — Két normálállapotú $CN$-gyökre való bomlás energiaszükségletére marad $154 - 74 = 80$ Kcal, pompás egyezésben a jelen dolgozatban levezetett $(C-C)$ kötőenergiával.

A $(C \equiv N)$ kötőenergiára tehát a fentiek szerint kereken 180 Kcal, azaz mintegy 7·8 Volt adódott. Ez az energiaérték szükségkép azonos kell legyen a $CN$-színkép alap $X^2\Sigma$ — állapotának disszociációs energiájával és maga után vonja azt a következtetést is, hogy a $CN$-színkép $X^2\Sigma$ alapállapota négyértékű, azaz $^5S$ elektronállapotú szénatomból épül fel. Szerző egyik előző dolgozatában [4] kimutatta, hogy a $CN$-színkép jól értelmezhető a $C(^5S) + N(^4S) = 8{\cdot}15$ Volt disszociációs ener-

[1] R. B. Mooney and H. G. Reid: Proc. Edinburgh, **250**, 152, 1932.

[2] L. pl. G. B. Kistiakowsky and H. Gershinowitz: Journ. Chem. Phys. **1**, 432, 1933.

[3] L. pl. W. Jevons. Band spectra of diatomic molecules, Cambridge, Univ. Press, 1932, a táblázatos függelékben.

[4] R. Schmid: ZS. f. Phys. **99**, 562, 1936.

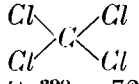
gia alapján és az ott elmondottak érvényesek maradnak a csak valamivel alacsonyabb 7·8 Volt disszociációs energia esetében is, sőt a kétértékű ($^3P$ elektronállapotú) szénatomból felépülő rendszerek «repulzivitása» még kifejezettebb lesz, ami mellett szól az a tapasztalat is, hogy a SCHMID szerint a $^3P$ elektron állapotból felépített izonitril-csoport egymagában instabil és csak más gyökökhöz kötve állítható elő.

## VII. A $(C-Cl)$-kötőenergia kiszámítása.

Legegyszerűbbnek látszik a széntetrachlorid (tetrachlormethán, $CCl_4$) szintézisével kapcsolatos energiaváltozásból kiindulni:

$$\begin{array}{rll} C_{\text{szil}}+2Cl_2 \rightarrow CCl_4, & \Delta F=- & 15{\cdot}6 \text{ Kcal (P. H. p. 197)} \\ C^{\cdots} \leftarrow C_{\text{szil}} & & 168 \quad \text{«} \\ 4Cl \leftarrow 2Cl_2 & & 113{\cdot}6 \quad \text{«} \\ \hline C^{\cdots}+4Cl \rightarrow CCl_4, & \Delta F=-297{\cdot}2 \text{ Kcal.} & \end{array}$$

PARKS és HUFFMAN idézett értéke azonban folyékony $CCl_4$-re vonatkozik. Mivel a 25° C hőmérsékletű tetrachlormethán moláris párolgási hője mintegy 7·7 Kcal. bizonyos közelítéssel feltehető, hogy a fentlevezetett szabadenergiaváltozást mintegy 290 Kcal-ra korrigálva, a gázállapotú $CCl_4$-re érvényes teljes képződési szabadenergiaértéktől nem fogunk nagyon messze járni.

A  szerkezeti képlet alapján egy $(C-Cl)$ kötésre jut tehát $\frac{290}{4}=72{\cdot}5$ Kcal.

## VIII. A $(C=S)$-kötőenergia kiszámítása.

Célszerűen a széndiszulfid $CS_2$ szintézisével kapcsolatos szabadenergiaváltozást választjuk alapul. PARKS és HUFFMAN szilárd szénből és szilárd kénből indulnak ki. A kéngőz (mely $S_2$ molekulákat kell tartalmazzon) szilárd kénre vonatkoztatott szabadenergiáját P. és H., mint könyvük 5. táblázatában közölt adatot említik, azonban a hivatkozott helyről ez az érték hiányzik. Ellenben a P. és H.-féle monografia alapjául szolgáló LEWIS—

RANDALL-féle thermodynamika[1] 504. oldalán a szükséges adat megtalálható:

$$2S_{s\ il} \rightarrow S_2, \quad \Delta F = 18{\cdot}3 \text{ Kcal.}$$

Ha ezt az egyenletet a kétatomos kéngőz (bevezetésben említett) disszociációs energiájával:

$$S_2 \rightarrow 2S, \quad 102{\cdot}6 \text{ Kcal}$$

kombináljuk, majd 2-vel osztunk, a kétértékű kénaton szabadenergiájához jutunk.

$$S_{szil} \rightarrow S, \quad \Delta F = \frac{120{\cdot}9}{2} = 60{\cdot}5 \text{ Kcal.}$$

A széndiszulfid-szintézis így a következő lesz:

| | | |
|---|---|---|
| $C_{szil} + 2S_{szil} \rightarrow CS_2,$ | $\Delta F = +\ 17{\cdot}6$ Kcal | (P. H. p. 206) |
| $C'''' \leftarrow C_{szil}$ | $-168$ « | |
| $2S'' \leftarrow 2S_{szil}$ | $-120{\cdot}9$ « | |
| $C'''' + 2S'' \rightarrow CS_2,$ | $\Delta F = -271{\cdot}3$ Kcal. | |

Az $S=C=S$ szerkezeti képlet értelmében egy $C=S$ kötésre jut tehát $\frac{271{\cdot}3}{2} = 135{\cdot}6$ Kcal.

## IX. A carbonilchlorid ($COCl_2$), Carbonilszulfid ($COS$) és széndioxid ($CO_2$) képződési szabadenergiáinak összefüggése.

Az alkalmazandó egyenletek a következők:

$COCl_2$;

| | | |
|---|---|---|
| $C_{szil} + {}^1/_2O_2 + Cl_2 \rightarrow COCl_2,$ | $\Delta F = -\ 49$ Kcal | (P. H. p. 196) |
| $2Cl \leftarrow Cl_2$ | $56{\cdot}8$ « | |
| $O \leftarrow {}^1/_2O_2$ | $58{\cdot}5$ « | |
| $C'''' \leftarrow C_{szil}$ | $168$ « | |
| $C'''' + 2Cl + O \rightarrow COCl_2,$ | $\Delta F = -332{\cdot}3$ Kcal | |

[1] G. N. LEWIS und M. RANDALL: Thermodynamik und die Freie Energie Chemischer Substanzen, Springer, Wien, 1927.

$COS$;

$$C_{szil} + {}^1/_2O_2 + S_{szil} \rightarrow COS, \quad \Delta F = -\ 39{\cdot}8 \text{ Kcal (P. H. p. 205)}$$
$$O \leftarrow {}^1/_2O_2 \qquad 58{\cdot}5 \text{ «}$$
$$S \leftarrow S_{szil} \qquad 60{\cdot}5 \text{ «}$$
$$C^{\cdots} \leftarrow C_{szil} \qquad 168 \text{ «}$$
$$C^{\cdots} + S + O \rightarrow COS, \quad \Delta F = 326{\cdot}8 \text{ Kcal}$$

a $\begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\!\begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}$ és $\begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}\!\!>\!C = O,$

illetőleg

$$S = C = S \quad \text{és} \quad S = C = O,$$

valamint az

$$O = C = O$$

szerkezeti képleteket összehasonlítva, várható, hogyha a $COCl_2$ képződési szabadenergiájából a $CCl_4$ képződési szabadenergiájának a felét, illetőleg a $COS$ képződési szabadenergiájából a $CS_2$ képződési szabadenergiájának a felét levonjuk, a $CO_2$ képződési szabadenergiájának a feléhez kell eljutnunk.

$$COCl_2 \text{ ..... } 332{\cdot}3 - \frac{290}{2} = 187{\cdot}3 \text{ Kcal}$$
$$COS \text{ ..... } 326{\cdot}8 - \frac{271{\cdot}3}{2} = 191{\cdot}1 \text{ «}$$
$$CO_2 \text{ ..... } \frac{378}{2} = 189 \text{ «}$$

mint látható, az egyezés jobb, mint 2%-os.

*

Végigtekintve a $CO$-disszociációs energia számára a spektroszkópiai adatok alapján nyert 159 Kcaloriának az I—IX. fejezetekben tárgyalt, meglehetősen széleskörű következményein, meg kell állapítanunk, hogy az egymástól független kiindulási alapok felhasználásával levezetett keletkezési szabadenergiák, illetőleg «effektív» kötőenergiák általában a 2%-nál jobb egyezésben állanak egymással; mindenesetre nem látszik indokoltnak a

«rezonancia-energiák» bevezetése sem és a képződési szabadenergiák a kötőenergiákból, legalábbis a 2% hibahatáron belül additive összetehető mennyiségeknek tekinthetők.

*

Jelen dolgozat a József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizikai intézetében készült. Az intézet felszerelését részben az Országos Természettudományi Tanács, részben a Széchenyi Tudományos Társaság támogatásának köszöni és dr. Pogány Béla műegyetemi ny. r. tanár vezetése alatt áll.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. ápr. 20.-án tartott üléséből.)

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.

# UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BINDUNGSENERGIE DES KOHLENSTOFFATOMS.

Von. R. SCHMID, in Budapest.

Nach einer Einleitung, die den bisherigen Stand der Ermittlung von Atombindungsenergien schildert, nimmt Verfasser für die Berechenbarkeit der Bindungsenergien auf Grund von Freie-Energie-Daten (ohne Einbeziehung von «Resonanz-Energien») Stellung.

Basiert auf die Dissoziationsenergie des $CO$=6·9 Volt, oder 159 Kcal,[1] und unter Anwendung der Freie-Energie-Daten des Buches von PARKS and HUFFMAN[2] werden die Freie-Energie-Änderungen berechnet, die mit den folgenden Elementarprozessen verbunden sind:

| | | $\Delta F$, Kcal |
|---|---|---|
| Vierwertiges Kohlenstoff | $C_{fest} \rightarrow C^{\cdots\cdot}$ | 168 |
| Kohlendioxyd | $CO_2 \rightarrow C+2O$ | 378 |
| « | $CO_2 \rightarrow CO+O$ | 120 |
| Methan | $CH_4 \rightarrow C+4H$ | 386 |
| Aethan | $C_2H_6 \rightarrow 2C+6H$ | 656 |
| Formaldehyd | $H_2CO \rightarrow C+2H+O$ | 355 |
| Acetaldehyd | $CH_3.CHO \rightarrow 2C+4H+O$ | 632 |
| Aceton | $(CH_3)_2CO \rightarrow 3C+6H+O$ | 908 |
| Methylalkohol | $CH_3OH \rightarrow C+4H+O$ | 471 |

[1] Vergl. die Arbeit von R. SCHMID und L. GERŐ: ZS. f. Phys. 99, 281, 1936.

[2] G. S. PARKS and H. M. HUFFMAN: The free energies of some organic Compounds, Chem. Cat. Comp. 1932, N. Y.

| | | |
|---|---|---|
| Aethylalkohol | $C_2H_5OH \rightarrow 2C+6H+O$ | 742 |
| Dimethylaether | $(CH_3)_2O \rightarrow 2C+6H+0$ | 730 |
| Diaethylaether | $(C_2H_5)_2O \rightarrow 4C+10H+O$ | 1273 |
| Wasser | $H_2O \rightarrow 2H+O$ | 216 |
| Cyanwasserstoff | $HCN \rightarrow H+C+N$ | 276 |
| Dicyan | $C_2N_2 \rightarrow 2C+2N$ | 440 |
| Tetrachlormethan | $CCl_4 \rightarrow C+4Cl$ | 290 |
| Zweiwertiges Schwefel | $S_{fest} \rightarrow S^{\cdot\cdot}$ | 60·5 |
| Carbondisulfid | $CS_2 \rightarrow C+2S$ | 271 |
| Phosgen | $Cl_2CO \rightarrow C+O+2Cl$ | 332 |
| Kohlenoxysulfid | $SCO \rightarrow C+S+O$ | 327 |

Es zeigt sich, dass diese Energiewerte bis auf 1—2% Ungenauigkeit mit Hilfe der Bindungsenergien:

| | $(C-C)$ | $(C-H)$ | $(C-Cl)$ | $(C=S)$ | $C\equiv N)$ | $(C-O)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kcal | 80 | 96·5 | 72·5 | 135·6 | 180 | 75 |

sich zusammensetzen lassen.

Die $(C=O)$ Bindungs-Energie in den Aldehyden und Ketonen beträgt 159 Kcal. Ein Vergleich der Freie-Energie-Änderungen von $CO_2$, $COS$ und $COCl_2$ ergibt, als effektives Mass der $(C=O)$ Bindung im $CO_2$ selbst, etwa 189 Kcal. Einige konsequenzen der Symmetriecharakter von $O=C=O$ und $\rangle C=O$ werden kurz besprochen und in Übereinstimmung mit verschiedenen Versuchsdaten gefunden.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 20. Apr. 1936.)

# ÜBER DIE HERLEITUNG DER EIGENFUNKTION IN ZWEITER NÄHERUNG IM FALLE EINER GLEICHZEITIGEN ZEITABHÄNGIGEN UND ZEITUNABHÄNGIGEN STÖRUNG.

Von TH. NEUGEBAUER in Budapest.

Die zweite Näherung der Schrödingerschen Eigenfunktion wird für den Fall angegeben, dass auf das fragliche Atom gleichzeitig eine einfallende Lichtwelle und ausserdem ein konstantes äusseres Störungsfeld einwirkt. (Formel (20)). Zur Berechnung der Änderung des Brechungsexponenten, die in vielen Fragen der Physik vorkommt, sind besonders die Glieder von Bedeutung, welche die Wechselwirkung der zwei Störungen enthalten. Aus der Rechnung würden auch in der zeitabhängigen Störung quadratische Glieder folgen, doch verschwinden dieselben infolge der Auswahlregeln, wie ja das auch zu erwarten ist. Annäherungen der erhaltenen Eigenfunktion werden besprochen.

Es ist ein häufiges Problem in der theoretischen Physik, dass nach der Änderung des Brechungexponenten gefragt wird; wenn auf die Atome oder Ionen auch noch eine zeitunabhängige Störung einwirkt. Beim Voigtanteil des Kerreffektes[1] ist die zeitunabhängige Störung das angewandte konstante elektrische Feld, im Falle der kristallinen Doppelbrechung das innere Kristallfeld, bei der Refraktionsverminderung[2] der Kristalle und

---

[1] R. de L. KRONIG, ZS. f. Phys. 47, 702, 1928, TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 73, 386, 1931; 82, 660, 1933 und 86, 392, 1933.

[2] TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 94, 655, 1935; Math. und Naturwiss. Anzeiger der ung. Akademie der Wissenschaften, 54, 337, 1936 und ZS. f. Phys. 99, 677, 1936.

Elektrolytlösungen das elektrische Feld der Nachbarionen u. s. w. Bei der theoretischen Behandlung dieser Erscheinungen kann man in der Formel der Polarisierbarkeit die Eigenfrequenzen und Übergangsmomente nach der zeitunabhängigen Störung in Reihe entwickeln, doch ist diese Methode nicht ganz streng, da man ja auch die Polarisierbarkeit aus einer Störungsrechnung erhält und erlaubt ausserdem oft nur die Abschätzung der Grössenordnung des Effektes, da ja die Änderungen der Eigenfrequenzen und Übergangsmomente infolge des Störungsfeldes meistens nicht genügend bekannt sind. Zur strengeren Berechnung dieser Änderungen der Polarisierbarkeit muss die Eigenfunktion in zweiter Näherung im Falle der gleichzeitigen Störung des Atoms von der einfallenden Lichtwelle und des zeitunabhängigen Feldes bekannt sein. Ziel dieser Arbeit ist darum diese Eigenfunktion herzuleiten.

Die Wellengleichung unseres Problems lautet folgendermassen

$$\Delta u - \frac{8\pi^2 m}{h^2}(V_0 + V + zA\cos 2\pi\nu t)u - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

wo $V_0$ die ungestörte Potentielle Energie, $zA\cos 2\pi\nu t$ das Störungspotential des elektrischen Vektors $\mathfrak{E} = A\cos 2\pi\nu t$ der einfallenden Lichtwelle und $V$ ebenfalls das Störungspotential des zeitunabhängigen äusseren Feldes bedeutet. $u$ ist die zeitabhängige Eigenfunktion

$$u_n = \psi_n e^{\frac{2\pi i}{h}E_n t}. \quad (2)$$

Als Ladungseinheit wählen wir die Ladung des Elektrons, um nicht den Faktor $e$ überall hinschreiben zu müssen. Zur Berechnung der ersten Näherung der Eigenfunktion machen wir jetzt den Ansatz

$$u = u_0 + w \quad (3)$$

wo $u_0$ die Lösung der ungestörten Gleichung ist. Aus (1) und (3) folgt, wenn wir nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigen:

$$\Delta w - \frac{8\pi^2 m}{h^2}V_0 w - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{8\pi^2 m}{h^2}\{zA\cos 2\pi\nu t + V\}u_0$$
$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}Vu_0 + \frac{4\pi^2 m}{h^2}zA\{e^{2\pi i\nu t} + e^{-2\pi i\nu t}\}u_0. \quad (4)$$

Nach der bekannten Methode[3] lösen wir diese Differentialgleichung mit dem folgenden Ansatz

$$w = w_0 + w_+ e^{2\pi i t \frac{E_0 + h\nu}{h}} + w_- e^{2\pi i t \frac{E_0 - h\nu}{h}}, \tag{5}$$

woraus folgt

$$\Delta w_0 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 w_0 - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial w_0}{\partial t} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V u_0 \tag{6a}$$

und

$$\Delta v_\pm - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 v_\pm + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \{E_0 \pm h\nu\} v_\pm = \frac{4\pi^2 m}{h^2} z A u_0, \tag{6b}$$

wo wir

$$w_\pm e^{2\pi i \frac{E_0}{h} t} = v_\pm$$

gesetzt haben. Nach der bekannten Störungstheorie folgt aus (6a) und (6b)

$$w_0 = \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} \cdot u_k, \tag{7a}$$

$$v_+ = \frac{1}{2} \sum_k{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau}{h\{\nu(ok) + \nu\}} \cdot u_k, \tag{7b}$$

$$v_- = \frac{1}{2} \sum_k{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau}{h\{\nu(ok) - \nu\}} \cdot u_k, \tag{7c}$$

und daraus die ganze gestörte Eigenfunktion des Grundzustandes:

$$\begin{aligned} u = u_0 &+ \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} \cdot u_k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k{}' \int u_0 z A u_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok) + \nu\}} + \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok) - \nu\}} \right\} u_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Da infolge der zeitunabhängigen Störung auch der Eigenwert unserer Difierentialgleichung sich ändert, so soll im Folgenden $u_0$ die Bedeutung

$$u_0 = \psi_0 e^{2\pi i \frac{E_0 + E_1}{h} t}$$

[3] E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 81, 109, 1926.

haben, wo

$$E_1 = \int \psi_0 V \psi_0^* d\tau$$

ist.

In erster Näherung muss man also die von den zwei Störungsgliedern verursachten Änderungen der Eigenfunktion einfach addieren, wie ja das auch zu erwarten ist. Zur Berechnung der zweiten Näherung setzen wir

$$u = u_0 + \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} u_k + \frac{1}{2} \sum_k{}' \int u_0 z A u_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok)+\nu\}} + \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok)-\nu\}} \right\} u_k + f, \tag{9}$$

wo $f$ die zweite Näherung bedeutet. Aus (1) und (9) folgt, wenn wir Glieder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \Delta f - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 f - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial f}{\partial t} \\ = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[ V + \frac{1}{2} zA \{ e^{2\pi i \nu t} + e^{-2\pi i \nu t} \} \right] \cdot \left[ \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} u_k \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_k{}' \int u_0 z A u_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok)+\nu\}} + \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok)-\nu\}} \right\} u_k \right] \\ - \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_1 \left[ \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} u_k \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_k{}' \int u_0 z A u_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok)+\nu\}} + \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{h\{\nu(ok)-\nu\}} \right\} u_k \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von (10) ist das Produkt der Störungsglieder und der ersten Näherung der Eigenfunktion. Das zweite dagegen rührt davon her, dass infolge der zeitunabhängigen Störung auch der Eigenwert von (1) eine Änderung erleidet, diese Änderung in erster Näherung, die wir in (10) mit $E_1$ bezeichnet haben, multipliziert mit der gestörten Eigenfunktion erster Näherung, gibt das erwähnte zweite Glied auf der

rechten Seite von (10), so dass in dieser Gleichung alle Glieder von der zweiten Ordnung sind.

Zur Lösung von (10) machen wir den Ansatz

$$f = \{f_{10} + f_{1+}e^{2\pi i\nu t} + f_{1-}e^{-2\pi i\nu t} + f_{2+}e^{2\pi i\nu t} + f_{2-}e^{-2\pi i\nu t}$$
$$f_{3+}e^{4\pi i\nu t} + f_{3-}e^{-4\pi i\nu t} + f_{30} + f_4 + f_{5+}e^{2\pi i\nu t} + f_{5-}e^{-2\pi i\nu t}\} e^{2\pi i\frac{E_0}{h}t} \quad (11)$$

da die linke Seite von (10) in $f$ linear ist und wir darum (10) in soviele Differentialgleichungen zerlegen können, wieviel Glieder auf der rechten Seite stehen. Alle diese Gleichungen sind vom Typ

$$\Delta f - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 f - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} B\psi_k e^{\frac{2\pi i t}{h}[E_0+h\nu]} \quad (12)$$

und können nach der bekannten RAYLEIGH—SCHRÖDINGER'schen Methode gelöst werden.

Mit Hilfe von

$$f = f_0 e^{\frac{2\pi i t}{h}[E_0+h\nu]}$$

folgt

$$\Delta f_0 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V f_0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E_0+h\nu] f_0 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} B\psi_k \quad (13)$$

und weiter, wenn wir die folgenden Reihenentwicklungen in (13) einsetzen:

$$B\psi_k = \sum_l{}' \psi_k B\psi_l^* d\tau . \psi_l, \quad (14)$$

$$f_0 = \sum_l \gamma_l \psi_l \quad (15)$$

und

$$\sum_l \gamma_l [E_0 - E_l + h\nu]\psi_l = \sum_l \int \psi_k B\psi_l^* d\tau . \psi_l, \quad (16)$$

woraus

$$f_0 = \sum_l \frac{\int \psi_k B\psi_l^* d\tau}{E_0 - E_l + h\nu}\psi_l \quad (17)$$

folgt.

Mit Hilfe von (17) erhalten wir also für die den einzelnen Gliedern auf der rechten Seite von (10) entsprechenden Lösungen:

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

$$f_{10}e^{2\pi i\frac{E_0}{h}t} = \sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau \cdot \int u_k V u_l^* d\tau}{h^2\nu(ol)\,\nu(ok)} \cdot u_l, \tag{18a}$$

$$f_{1+}e^{2\pi i\frac{E_0+h\nu}{h}t} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau \, \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ol)+\nu_j\}} u_l, \tag{18b}$$

$$f_{1-}e^{2\pi i\frac{E_0-h\nu}{h}t} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau \, \frac{e^{-2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ol)-\nu_j\}} u_l, \tag{18c}$$

$$f_{2+}e^{2\pi i\frac{E_0+h\nu}{h}t} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau}{h\{\nu(ok)+\nu_j\}} \cdot \int u_k V u_l^* d\tau \, \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ol)+\nu_j\}} u_l, \tag{18d}$$

$$f_{2-}e^{2\pi i\frac{E_0-h\nu}{h}t} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau}{h\{\nu(ok)-\nu_j\}} \cdot \int u_k V u_l^* d\tau \, \frac{e^{-2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ol)-\nu_j\}} u_l, \tag{18e}$$

$$f_4 e^{2\pi i\frac{E_0}{h}t} = -\sum_{k}{}' \frac{\int u_0 V u_0^* d\tau \cdot \int u_0 V u_k^* d\tau}{[h\nu(ok)]^2} \cdot u_k, \tag{18f}$$

$$f_{4+}e^{2\pi i\frac{E_0+h\nu}{h}t} = -\frac{1}{2}\sum_{k}{}' \frac{\int u_0 V u_0 d\tau \cdot \int u_0 z A u_k^* d\tau}{h^2\{\nu(ok)+\nu_j\}^2} e^{2\pi i\nu t} \cdot u_k, \tag{18g}$$

$$f_{4-}e^{2\pi i\frac{E_0-h\nu}{h}t} = -\frac{1}{2}\sum_{k}{}' \frac{\int u_0 V u_0 d\tau \cdot \int u_0 z A u_k^* d\tau}{h^2\{\nu(ok)-\nu_j\}^2} e^{-2\pi i\nu t} \cdot u_k. \tag{18h}$$

Auf der rechten Seite von (10) folgen aus dem Produkt der zeitabhängigen Störung und der ersten Näherung der zeitabhängigen Eigenfunktion Glieder, die quadratisch in dieser Störung sein würden. Doch wie wir zeigen werden, besitzen die keine physikalische Realität, da das von ihnen herrührende Dipolmoment infolge der Auswahlregeln verschwindet. Dieselben lauten:

$$f_{3-}e^{2\pi i\frac{E_0+2h\nu}{h}t} = \frac{1}{4}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau}{h\{\nu(ok)+\nu\}} \cdot \frac{\int u_k z A u_l d\tau}{h\{\nu(ol)+2\nu\}} e^{4\pi i\nu t} \cdot u_l, \tag{19a}$$

$$f_{3+}e^{2\pi i\frac{E_0-2h\nu}{h}t} = \frac{1}{4}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau}{h\{\nu(ok)-\nu\}} \cdot \frac{\int u_k z A u_l^* d\tau}{h\{\nu(ol)-2\nu\}} e^{-4\pi i\nu t} \cdot u_l \tag{19b}$$

und

$$f_{30}e^{2\pi i\frac{E_0}{h}t} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}{}' \frac{\nu(ok)\int u_0 z A u_k^* d\tau \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau}{h^2\nu(ol)\{\nu(ok)^2-\nu^2\}} \cdot u_l \tag{19c}$$

Aus (9), (11) und (18) erhalten wir also für die gestörte Eigenfunktion in zweiter Näherung:

$$
\begin{aligned}
u = u_0 + & \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} u_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_k{}' \int u_0 z A u_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ok)+\nu\}} + \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ok)-\nu\}} \right\} u_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau}{h\nu(ok)} \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ok)+\nu\}} + \frac{e^{-2\pi i\nu t}}{h\{\nu(ol)-\nu\}} \right\} u_l \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k,l}{}' \int u_0 z A u_k^* d\tau \cdot \int u_k V u_l^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h^2\{\nu(ok)+\nu\}\{\nu(ol)+\nu\}} + \frac{e^{-2\pi i\nu t}}{h^2\{\nu(ok)-\nu\}\{\nu(ol)-\nu\}} \right\} u_l \\
& - \frac{1}{2} \sum_k{}' \int u_0 V u_0^* d\tau \cdot \int u_0 z A u_k^* d\tau \left\{ \frac{e^{2\pi i\nu t}}{h^2\{\nu(ok)+\nu\}^2} + \frac{e^{-2\pi i\nu t}}{h^2\{\nu(ok)-\nu\}^2} \right\} u_k \\
& + \sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 V u_k^* d\tau \cdot \int u_k V u_l^* d\tau}{h^2\nu(ok)\,\nu(ol)} u_l \\
& - \sum_k{}' \frac{\int u_0 V u_0^* d\tau \cdot \int u_0 V u_k^* d\tau}{[h\nu(ok)]^2} u_k . \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Das zweite und das dritte Glied auf der rechten Seite von (20) sind die ersten Näherungen, die von der zeitunabhängigen und zeitabhängigen Störung verursacht werden, die folgenden drei Glieder enthalten die Wechselwirkung der zwei Störungen, die letzten zwei sind endlich die nur von der zeitunabhängigen Störung verursachten zweiten Näherungen der Eigenfunktion, die in der Literatur schon öfters hergeleitet wurden.[4] Wir wollen

[4] Z. B. GEIGER—SCHEEL, Handbuch der Physik. Bd. XXIV/1. Artikel von W. PAULI S. 154. Vgl. auch ebenda, Artikel von G. WENTZEL S. 764.

noch zeigen, dass die Glieder (19), die in der zeitunabhängigen Störung quadratisch sind, kein induziertes elektrisches Moment verursachen, wie ja das auch theoretisch zu erwarten ist. Dies Moment würde nämlich lauten:

$$\mu_z = \frac{1}{4}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau \cdot \int u_l z u_0^* d\tau}{h^2\{\nu(ok)+\nu\}\{\nu(ol)+2\nu\}} e^{4\pi i\nu t}$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{k,l}{}' \frac{\int u_0 z A u_k^* d\tau \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau \cdot \int u_l z u_0^* d\tau}{h^2\{\nu(ok)-\nu\}\{\nu(ol)-2\nu\}} e^{-4\pi i\nu t}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,l}{}' \frac{\nu(ok)\int u_0 z A u_k^* d\tau \cdot \int u_k z A u_l^* d\tau \cdot \int u_l z u_0^* d\tau}{h^2\nu(ol)\{\nu(ok)^2-\nu^2\}} + \text{kompl. konjug.} \quad (21)$$

Da $A$ eine Konstante is, die wir überall vor das Integralzeichen schreiben können, so wird in (21) in allen Integralen $z$ nach den Eigenfunktionen gemittelt. Nach den Auswahlsregeln verschwindet aber

$$\int u_k z u_l d\tau$$

nur dann nicht, wenn beim Übergange $k \rightarrow l$ die Nebenquantenzahl sich um eins ändert. Das ist aber in (21) in allen drei Integralen nicht möglich. Daraus folgt, dass (21) immer verschwindet, was auch so sein muss, da im entgegensetzten Falle die ersten zwei Glieder zu einer mit doppelter Frequenz schwingender gebrochener Welle Anlass geben würden.

In der Gleichung (20) ist es auffallend, dass das vierte und fünfte Glied nicht ganz analog ist, da im ersteren im ersten Faktor im Nenner $\nu(ok)$ allein steht, im zweiten dagegen ist zu $\nu(ol)$ die einfallende Frequenz addiert resp. subtrahiert, im letzteren dagegen steht in beiden Nennern auch die einfallende Frequenz. In diesem fünften Gliede verschwindet aber das erste Integral wieder nur dann nicht, wenn sich beim Übergange $(ok)$ die Nebenquantenzahl um eins ändert. Im weitaus häufigsten Falle wird aber der Grundzustand ein $s$ Zustand sein, $k$ muss also ein $p$ Zustand sein und zwar wird der stärkste Übergang der zum nächsthöheren $p$ Zustande führende sein. Daraus folgt, dass die Eigenfrequenz $\nu(ol)$ meistens grösser wie $\nu(ok)$ sein wird. Wir können

darum im genannten Gliede die einfallende Frequenz neben $\nu(ol)$ in einer gewissen Näherung vernachlässigen. Die in der Einleitung erwähnten Erscheinungen beobachtet man ja alle im sichtbaren Gebiete, das weit entfernt von den ultravioletten Eigenfrequenzen des fraglichen Stoffes sein wird. Weiter kann man auch noch im sechsten Gliede in einem Faktor im Nenner wieder neben den Eigenfrequenzen, die einfallende Frequenz vernachlässigen; dadurch werden die von der Wechselwirkung der zeitunabhängigen und zeitabhängigen Störung in (20) verursachten Glieder besonders symmetrisch gebaut, da in jedem Gliede neben einen Resonanznenner noch eine Eigenfrequenz im Nenner steht.[5] In dieser Form ist (20) zur Berechnung der induzierten Momente besonders geeignet.

Der Széchenyi-Gesellschaft bin ich für die Unterstützung meiner Arbeit zu grossem Danke verpflichtet.

Budapest, Institut f. theoret. Physik d. Universität, Februar 1936.

---

[5] In dieser Form wurde die gestörte Eigenfunktion zur Berechnung der Änderung der Refraktion von Elektrolytlösungen benutzt. TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 99, 677, 1936.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. März 1936.)

# KÉT PERTURBÁCIÓ SUPERPONÁLÓDÁSA A SCHRÖDINGER-FÉLE SAJÁTFÜGGVÉNY MÁSODIK KÖZELÍTÉSÉBEN.

KARAI NEUGEBAUER TIBOR-tól.

Az elméleti fizikának egy igen gyakori problémája, hogy a törésmutató változását keressük azon esetben, ha a beeső fény elektromos vektorán kívül még egy állandó külső tér is hat az atomokra, illetőleg ionokra. Így például a Kerreffektusnál a molekulák orientációjától független rész a külső elektromos tér ilyen hatására jön létre, a kristályos kettős-törésnél ez az állandó tér a kristály belső elektromos tere, az ionkristályok és elektrolitoldatok refrakciócsökkenésénél a szomszédos ionok elektromos tere stb.

Mivel a törésmutató a polarizációtól függ, közelítésben a polarizálhatóság képletében szereplő intenzitások és sajátfrekvenciák sorbafejthetők az állandó külső tér szerint, de ez a módszer többnyire csak a fellépő effektus nagyságrendjének a megbecsülését teszi lehetővé. Pontosabb számításoknál szükség van ezen dupla perturbációs probléma sajátfüggvényére második közelítésben. Ennek kiszámítására kiindulunk a hullámegyenletből (1), melyet kiegészítünk az említett két perturbáló taggal. A sajátfüggvénynek ebből számított első közelítésében (8) az időtől függő és az időtől független tagok egyszerűen összeadódnak, amint az elméletileg várható is. A második közelítés számítására (9) kifejezést helyettesítjük a hullámegyenletbe és csak a másodrendű tagokat tartjuk meg (10). Az így kapott differenciálegyenlet megoldása felbontható (10) jobboldalán álló tagoknak megfelelő megoldások összegére (11). Minden ilyen megoldás egy (12)

típusú differenciálegyenletnek tesz eleget, melyet a RAYLEIGH—SCHRÖDINGER-féle módszerrel oldhatunk meg. Ezen megoldások [(18$a$)-tól (18$h$)-ig és (19$a$), (19$b$) és (19$c$)] összege adja azután a perturbált sajátfüggvényt második közelítésben (20). A 4., 5. és 6. tag tartalmazza az időtől függő és az időtől független perturbációk keresett kölcsönhatását. (20)-ból elhagytuk (19$a$), (19$b$) és (19$c$)-t, mivel ezen tagok az időtől függő perturbációban quadratikusak és azért nem lehet fizikai értelmük, mert a kétszeres frekvenciával rezegnek. Ezen tagok a kiválasztási szabályok szerint tényleg el is tűnnek (21). A kölcsönhatást tartalmazó tagok (20) nevezőiben szereplő tagok nagyságrendje azt mutatja, hogy egyes esetekben a beeső fény frekvenciája az atom sajátfrekvenciái mellett elhanyagolható. Ebben az alakban a sajátfüggvény az említett problémák kiszámítására különösen alkalmas.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. márc. 16-án tartott üléséből.)

# VIZSGÁLATOK A FŰSZERHATÁSÚ VEGYÜLETEK KÖRÉBŐL.

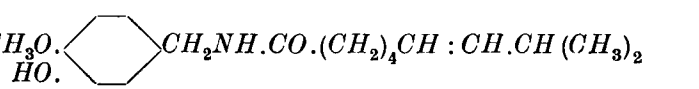
SZÉKI TIBOR l. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

A bors és a paprika csípős anyagaival, a piperinnel és capsaicinnal közelebbi rokonságban álló acylaminek, a kémiai konstitució és fűszerhatás közötti összefüggés tanulmányozása szempontjából, már régóta széleskörű vizsgálat tárgyát képezik.

Az utóbbi 15 év alatt lefolytatott ilyen irányú kutatások során főleg NELSON[1] végzett úttörő munkálatokat, ki nem csupán a capsaicin szerkezetét derítette fel, hanem számos capsaicinhez hasonló összetételű acylaminféleséget elő is állított.

A capsaicin, NELSON vizsgálatai szerint, melyeket később — aránylag nemrég — ERNST SPÄTH és STEPHEN F. DARLING[2] szintézissel is igazoltak, a 8-methyl-6-nonensavnak vanillylamidja:



míg a piperin, mint azt a nyolcvanas évek körül LADENBURG megállapította és 1882-ben L. RÜGHEIMER[3] mesterséges előállí-

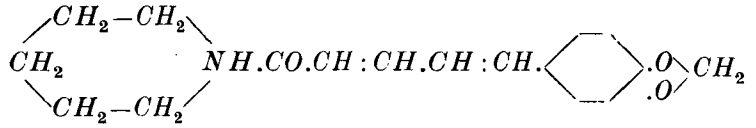
---

[1] Journ. Americ. Chem. Soc. 41. 1115., 1472., 2121. (1919). 42. 597. (1920). E. K. NELSON és L. E. DAWSON u. o. 45. 2179. (1923). Zentralbl. 1919. II. 783. 1920. I. 856.

[2] Berichte d. deutsch. chem. Ges. LXIII. 737. 1930.

[3] Berichte d. deutsch. chem. Ges. XV. 1390. 1882. Annal. d. Chem. Bd. 159. 142. 1883.

tással is bizonyította, a piperinsavnak piperidinnel képezett — az előbbihez hasonló típusú — vegyülete.



Nelson tanulmányához olyan vegyületeket állított elő, melyek mindenikében az amin komponenst a vanillylamin képezte. Ezt kapcsolta acetylchloriddal és homologjaival a duodecylsavchloridjáig, továbbá a croton- és undecylénsav chloridjával. Az így nyert savamidjai túlnyomó részben többé-kevésbbé fűszerhatást mutattak, különösképpen azok, melyek savmaradékjai 9., 10., 11. szénatomot vagy kettős kötéseket foglaltak magukba.

Később Erwin Ott és Kurt Zimmermann [1] egyes esetekben vanillylamin helyett ortho- vagy para-oxy-, valamint para-methoxybenzylamineket, savchloridokul pedig alifás sorozatba tartozókat alkalmaztak s azt találták, hogy míg a para-oxy-benzylaminnal nyert savamidok bizonyos fűszerhatást mutatnak, addig az ortho-oxy-benzylaminból előállított acylaminek csaknem hatástalanok. Az említett kutatók a vanillylamint is kapcsolták telítetlen savakkal és mivel a $\Delta\beta\gamma$-hexylensav, $\Delta\alpha\beta$-nonylensav és olajsav alkalmazása esetén erősen csípős ízű vegyületeket nyertek, azt a következtetést vonták le, hogy a kettős kötések, helyzetük tekintetében, nincsenek befolyással a fűszerhatásra s erre nézve csupán a phenolhydroxyl állása és a savmaradékben foglalt szénatomok száma a döntő tényező.

Ott és Zimmermann szerint vanillylaminból csakis telítetlen alifás savakkal lehet fűszerhatású vegyületeket létesíteni és Nelson telített savchloridokkal csak azért kapott volna csípős ízű savamideket, mert kiindulási anyagai nem voltak tiszták. Szerintük a telített savakból és vanillylaminból készült Nelson-féle vegyületek reviziós vizsgálatokra szorulnak. Feltevésüket arra a kísérleti úton nyert megállapításra alapítják, hogy a magasabb rendű telített savchloridok, mint például a stearinsavchlorid, vanil-

[1] Liebig's Annal. 425. 314. Zentralbl. 1922. 350.

lylaminnal nem ad csípős ízű vegyületeket és hogy a telítetlen acylaminek fűszerhatása megszűnik, ha a kettős kötéseket redukálással telítjük, vagy ha a phenolhydroxyl hydrogénjét substituáljuk. Kellő kísérleti adatokkal való alátámasztás nélkül még annak a nézetüknek is kifejezést adnak, hogy csakis alifás vagy aromás magot tartalmazó zsírsorozatbeli aminek és nem aromás bázisok szolgáltathatnak fűszerhatású acylamineket.

Az 1920-as évek közepéig az acylamineknek fűszerhatás szempontjából lefolytatott vizsgálatai még sokkal hiányosabbak voltak, semhogy akár NELSONnak, akár OTT és ZIMMERMANNnak a megállapításait általános érvényűnek lehetett volna elfogadni. A vitatott kérdések tisztázása tekintetében jelentőséggel bírtak EDWARD CHARKES, SNELL JONES és FRANK LEO PYMAN,[1] majd SHOZO KOBAYASHY[2] 1926, illetve 1927-ben megjelent dolgozatai. Előbbiek a vanillylamint olyan zsírsavakkal kombinálták, melyekben egy vagy több hydrogén atomot halogén- vagy aryl-gyökök helyettesítettek. Ezek egynémelyike csaknem 30%-ig közelítette meg a capsaicinhatást. Különösen sokat mondottak SHOZO KOBAYASHY vizsgálatai, melyek alapján kitűnt, hogy az acylaminek fűszerhatása tekintetében teljesen közömbös a savmaradéknak telített vagy telítetlen volta. Például az undecylensavchlorid vagy az undekansavchlorid vanillylaminnal egyformán csípős ízű vegyületeket szolgáltat:

$$(HO)(CH_3O).C_3H_3.CH_2.NH.CO.(CH_2)_8CH:CH_2$$
$$(HO)(CH_3O).C_6H_3.CH_2.NH.CO.(CH_2)_8CH_2.CH_3.$$

Ugyancsak az ő munkálatai mutatták meg, hogy a benzolmagon levő substituensek mineműsége és helyzete, valamint a különböző savmaradékok hogyan befolyásolják az acylaminek sajátságait.

Annak megállapítása céljából, hogy a phenyl-gyök és az acylamin rész között helyet foglaló methylencsoport milyen szerepet tölt be fűszerhatás tekintetében S. KOBAYASHY a vanillyl-

[1] Journal Chem. Soc. London. 127. 2588. Zentralbl. 1926. I. 1534.
[2] Scient Papers Inst. physical. chem. Res. 6. (1927). 149, 166, 185. Zentralbl. 1928. I. 1028.

amin homologjait, a homovanillylamint (vanillylmethylamint) és a vanillyl-aethylamint kapcsolta undecylensavval. Ekkor olyan vegyületeket nyert,

$$(HO)(CH_3O)C_6H_3.CH_2.CH_2.NH.CO.(CH_2)_8CH:CH_2$$
$$(HO)(CH_3O)C_6H_3.CH_2.CH_2.CH_2.NH.CO.(CH_2)_8CH:CH_2,$$

melyek egyáltalában nem mutatnak fűszerhatást, míg a p-oxybenzilaminek, ugyanezen savakkal, erősen csípős ízű amideket szolgáltatnak.

Ebből a megállapításból látnivaló, hogy a benzylmaradék és aminocsoport közé belépő methylencsoportok — melyek a savmaradékot a benzolgyűrűtől távolabb és távolabb tolják — a fűszerhatást teljesen megszüntetik.

Ezekután természetszerűleg vetődött fel a kérdés, hogy milyen változás fog bekövetkezni fűszerhatás tekintetében, ha a benzylrésznek egyetlen methylengyökét is kiküszöböljük és a savmaradékot közvetlenül a benzolgyűrűn levő aminocsoporthoz kapcsoljuk. Ennek a kérdésnek az eldöntése indított az alábbi táblázatban feltüntetett képletekkel bíró vegyületek előállítására.[1]

Bár E. Ott és K. Zimmermann egyik dolgozatukban[2] határozottan hangsúlyozták, hogy aromás bázisok nem adnak csípős ízű vegyületeket, munkámat mégsem találtam feleslegesnek még arra az esetre sem, ha azok Ott és Zimmermann állításait igazolták volna. Vegyületeim azonban azt mutatták, hogy aromás bázisok is adhatnak nyálkahártyát erősen égető vegyületeket. Sőt nemcsak a vanillylaminhoz hasonló guajakolamin, hanem az egyszerű para-amino-phenol is szolgáltathat fűszerhatású vegyületeket.

Kiindulási aminekül guajakol-amint,[3] para-amino-phenolt és a 2·5.-dimethoxy-4-aminophenolt használtam s ezeket egyesítettem különböző zsírsavakkal.

A fűszerhatás alatti rovatban a +++ azt fejezi ki, hogy az illető vegyületnek 1/3000 mg-nyi mennyisége — azaz olyan oldatból, melynek 50 kcm-ében 3 mg anyag van, egy csepp — a nyelven

---

[1] Archiv. d. Pharm. **268**. 151. 1930.

[2] L. c.

[3] Hans Rupe: Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXX. 2444. 1897.

| | Kiindulási anyagok | Mol. súly szerinti mennyiségek | A vegyületek képletei | O. p. | Fűszer hatás |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | Guajakolamin + Isobutylchlorid | 1 : 1 | $(HO).(CH_3O)C_6H_3.NH.CO.CH(CH_3)_2$ | 142° | + |
| II. | + Heptanoylchlorid | 1 : 1 | $(HO).(CH_3O)C_6H_3.NH.CO.(CH_2)_5CH_3$ | 110° | +++ |
| III. | + $\Delta\alpha\beta$-Nonénsavchlorid | 1 : 1 | $(HO).(CH_3O)C_6H_3.NH.CO.CH:CH(CH_2)_5.CH_3$ | 93° | +++ |
| IV. | + Kaprinsavchlorid | 1 : 1 | $(HO).(CH_3O)C_6H_3.NH.CO.(CH_2)_8.CH_3$ | 100° | +++ |
| V. | + Undecylensavchlorid | 1 : 1 | $(HO).(CH_3O)C_6H_3.NH.CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | 89° | +++ |
| VI. | + Fahéjsavchlorid | 1 : 1 | $(HO).(CH_3O)C_6H_3.NH.CO.CH:CH.C_6H_5$ | 250°-on felül | +— |
| VII. | Para-amino-phenol + Heptanoylchlorid | 1 : 2 | $CH_3.(CH_2)_5OCO.C_6H_4.NH.CO.(CH_2)_5CH_3$ | 119° | + |
| VIII. | + Nonánsavchlorid | 1 : 2 | $CH_3.(CH_2)_7OCO.C_6H_4.NH.CO.(CH_2)_7CH_3$ | 121° | ++ |
| IX. | + $\Delta\alpha\beta$-Nonénsavchlorid | 1 : 2 | $CH_3.(CH_2)_5CH:CH.CO.OC_6H_4.NH.CO.CH:CH.(CH_2)_5CH_3$ | 84° | ++ |
| X. | + Kaprinsavchlorid | 1 : 1 | $(HO).C_6H_4.NH.CO.(CH_2)_8CH_3$ | 125·5° | ++ |
| XI. | + Olajsavchlorid | 1 : 1 | $(HO).C_6H_4.NH.CO.CH_2{}_7CH:CH.(CH_2)_7CH_3$ | 94° | + |
| XII. | + $\Delta\alpha\beta$-Nonénsavchlorid | 1 : 1 | $(HO).C_6H_4.NH.CO.CH:CH.(CH_2)_5CH_3$ | 110·5° | ++ |
| XIII. | 2.5.Dimethoxy-4-amino-phenol + Kaprinsav-chlorid | 1 : 1 | $4.(HO).2.5.(CH_3O)_2C_6H_2.NH.CO.(CH_2)_8CH_3$ | 119° | 0 |
| XIV. | 2.5.Dimethoxy-4-amino-phenol + Undecylensav-chlorid | 1 : 1 | $4.(HO).2.5.(CH_3O)_2C_6H_2.NH.CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | bomlik | 0 |

még égető érzést idéz elő. A ++ jelenti, hogy 3 mg-nak egy kcm-nyi oldatából egy csepp még csípi érezhetően a nyelvet, míg egy + éppen csak fűszerhatást jelez. A guajakolaminnak nonénsavval, caprinsavval vagy undecylen-savval képezett vegyületeinek alkoholos-vizes oldata igen erősen égető érzést vált ki a nyálkahártyán, sőt az arcbőrt is erősen égeti, ha azzal érintkezésbe kerül. Ugyanazon savaknak para-amino-phenollal képezett vegyületei szintén hasonló tulajdonságúak, de gyengébb fokban. A $\Delta\alpha\beta$-nonénsavval képezett mono-acyl-származéka nemcsak égeti, hanem egy idő múlva zsibbasztja is a nyelvet.

A táblázatban feltüntetett savamidok közül az utolsó kettő, melyek szerkezetileg csak abban különböznek az erősen csípős hatású IV. és V. alatt jelölt vegyületektől, hogy az *NH.Ac* csoporthoz ortho helyzetben még egy oxymethylt is tartalmaznak, teljesen hatástalanok.

A további kérdések, melyek az acylaminek fűszerhatásának vizsgálata tekintetében — a többek közt — még fölmerülhetnek: 1. hogy a piperinsav — a piperidinen kívül — képezhet-e más heterocyklusos bázisokkal fűszerhatású vegyületeket, továbbá 2. hogy phenol természetű aminek helyett az amino-alkoholok acyl származékai is válthatnak-e ki capsaicin hatást és 3. hogy a telítetlen zsírsavak heterocyklusos bázisokkal milyen hatású vegyületeket eredményezhetnek?

Az első kérdésnek az eldöntése végett a piperinsavat a pyrrolidinnel kapcsoltam. A nyert vegyület analogja a piperinnek azzal a különbséggel, hogy a molekulában a piperidint a pyrrolidin rész helyettesíti. A vegyület csípős ízű.

További kísérleteim azt mutatták, hogy a fűszerhatású acylaminekben az amino-phenol részt amino-alkohol is helyettesítheti. Különösen alkalmas hatásos savamidek előállítására a három szénatomot tartalmazó $\gamma$-amino-propanol. Míg a $\beta$-amino-aethanol piperinsavval nem ad fűszerhatású vegyületet, undecylensavval már olyan savamidot szolgáltat, mely nemcsak csípős, de fűszeres ízű is. A $\gamma$-amino-propanol piperinsavval a nyálkahártyát határozottan égető vegyületet ad, undecylensavval pedig a capsaicin csípős ízét nagyon megközelítő amidot, aromás íz mellett. Ha azonban az amino-propanol részben a szénlánc egyik hydrogenjét

| Kiindulási anyagok | A vegyületek képletei | O. p. | Füszer hatás |
|---|---|---|---|
| I. Pyrrolidin + piperinsavchlorid | $C_4H_8N.CO.CH:CH.CH:CH.C_6H_3:O_2CH_2$ | 114° | ++ |
| II. β-aminoaethanol + piperesavchlorid | $HO.CH_2CH_2NH.CO.CH:CH.CH:CH.C_6H_3:O_2CH_2$ | 162° | 0 |
| III. β-aminoaethanol + undecylensavchlorid | $HO\ CH_2CH_2NH\ CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | 70·5° | +++ |
| IV. γ-aminopropanol + piperinsavchlorid | $HO\ (CH_2)_3NH.CO.CH:CH.CH:CH.C_6H_3:O_2CH_2$ | 148·5° | ++ |
| V. γ-aminopropanol + undecylensavchlorid | $HO.CH_2CH_2CH_2NH.CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | 53° | +++ |
| VI. 3.4.methylendioxyphenyl-α-oxy-β-aminopropan + undecylensavchlorid | $3.4.CH_2O_2:C_6H_3.CH.OH.CH.(CH_3)NH.CO\ (CH_2)_8CH:CH_2$ | 95° | 0 |
| VII. 3.4.dimethoxyphenyl-α-oxy-β-aminoprophan | $3.4.(CH_3O)_2C_6H_3.CH.OH.CH.(CH_3)NH.CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | 91° | 0 |
| VIII. Piperidin + undecylensavchlorid | $C_5H_{10}N.CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | k.p. 3 mm 170° | + |
| IX. Pyrrolidin + undecylensavchlorid | $C_4H_8N.CO.(CH_2)_8.CH:CH_2$ | k. p. 168° | ++ |
| X. p-aminochinolin + undecylensavchlorid | $C_9H_6N.NH.CO\ (CH_2)_8CH:CH_2$ | 71·5° | 0 |
| XI. p-aminochinolin + piperesavchlorid | $C_9H_6N.NH.CO.CH:CH.CH:CH.C_6H_3:O_2CH_2$ | 233° | 0 |
| XII. Tetrahydrochinolin + undecylensavchlorid | $C_9H_{10}N.CO\ (CH_2)_8CH:CH_2$ | k. p. 4mm 234—235° | 0 |
| XIII. Tetrahydroinchinolin + piperinsavchlorid | $C_9H_{10}N\ CO.CH:CH.CH:CH.C_6H_3:O_2CH_2$ | 145° | 0 |
| XIV. Piperazin + 2 × undecylensavchlorid | $C_{11}H_{19}O.N:(CH_2)_4:N.O.H_{19}C_{11}$ | 163° | 0 |

methylendioxy-phenyl- vagy dimethoxy-phenyl-gyök helyettesíti, az acylamin hatástalan.

A heterocyklusos vegyületek közül a piperidin, pyrrolidin telítetlen savakkal fűszerhatású acylaminekké egyesül, míg a p-aminochinolin, a tertahydrochinolin, valamint a piperazin úgy piperinsavval, mint undecylensavval teljesen ízetlen vegyületeket eredményez.

## KÍSÉRLETI RÉSZ.

I. *Piperinoyl-pyrrolidin.* 2 g piperinsavból előállított nyers savchloridot [1] feloldunk 25 ccm abs. benzolban, a folyadékot szűrjük s hűtés közben 1·4 g pyrrolidinnak 10 ccm benzollal készült oldatával elegyítjük. A reakcióelegyet néhány óráig szobahőmérsékleten állani hagyjuk, majd két óra hosszat 50°—60°-on tartjuk. Ezután az oldószert ritkított térben ledesztilláljuk, a maradékot vízzel jól kimossuk s tisztítás végett 80%-os vizes methanolból vagy benzol-ligroin (2:1) elegyéből kristályosítjuk. A termék színtelen finom tűket képez, melyek 144° C-on olvadnak.

Analízis. I. 4·895 mg anyag adott: 12·685 mg $CO_2$-t és 2·710 mg $H_2O$-t. II. 4·835 mg anyag adott: 12·580 mg $CO_2$-t és 2·810 mg $H_2O$-t.

$C_{16}H_{17}O_3N$-re számított: $C$% 70·81 $H$% 6·32,
talált: $C$% I. 70·67. II. 70·96. $H$% I. 6·19. II. 6·50.

II. *Piperinoyl-β-amino-aethanol.* 1·2 g β-amino-aethanol 100 ccm-es abs-benzolos oldatához hozzáadunk 1·5 g finomra porított vízmentes kalium-carbonicumot és 2 g piperinsavból készített nyers piperinsavat, az utóbbit 25 ccm abs. benzolban oldva. Az elegyet kétnapi állás után egy óra hosszat 50—60°-on tartjuk, lehűlés után szűrőre hozzuk s a maradékot a benzol elűzése után vízzel jól kimossuk s végül kevés meleg alkoholban oldjuk, melyből sárgás-fehér, csillogó prizmák alakjában válik ki. A vegyületet aether, chloroform vagy benzol melegen is alig oldja. O. p. 162°.

Analízis: 4·605 mg adott: 10·880 $CO_2$-t és 2·48 mg $H_2O$-t.

$C_{14}H_{15}O_4N$-re számított: $C$% 64·34 $H$% 5·79,
talált: $C$% 64·44 $H$% 6·03.

[1] Bull. Soc. Ch. Fr. 1928 (4), 43. 62.

III. *Undecylenoyl-β-amino-aethanol.* 1·2 g β-amino-aethanolt 30 ccm vízben oldunk, hozzáadunk 1·5 g kálium-carbonicumot s apránként 2 g undecylen-savchloridot. Az elegyet egynapi állás után kiaetherezzük, az aetheres részt lúggal, majd vízzel jól kimossuk, kihevített natriumsulfáttal szárítjuk, szűrjük, s az oldószer elpárologtatása után visszamaradt anyagot benzolligroin elegyéből kristályosítjuk. O. p. 70·5°.

Analízis: 4·745 mg anyag adott: 11·940 mg $CO_2$-t és 4·635 mg $H_2O$-t.

$C_{13}H_{25}O_2N$-re számított: C% 68·66 H% 11·09,
talált: C% 68·63 H% 10·93.

IV. *Piperinoyl-γ-amino-propanol.* 1·5 g γ-amino-propanolból és 2 g piperinsavchloridból úgy állítható elő, mint a II. alatt leírt vegyület, azzal a különbséggel, hogy az elegy melegítése itt elmarad A terméket aether, benzol nem, alkohol jól oldja. Az utóbbi két-oldószer elegyéből kristályosítható, ha 1 g anyagra 0·5 ccm alkoholt és 20 ccm benzolt veszünk. O. p. 148·5°.

Analízis: 4·810 mg anyag adott: 11·590 mg $CO_2$-t és 2·64 mg $H_2O$-t.

$C_{15}H_{17}O_4N$-re számított: C% 65·42 H% 6·22,
talált: C% 65·71 H% 6·14.

V. *Undecylenoyl-γ-amino-propanol.* Készül, mint a III. alatt leírt savamid, 1·5 g γ-amino-propanolból és 2 g undecylensavchloridból. Kristályosítható aether és petróleum-aether elegyéből. O. p. 53°.

Analízis: 3·860 mg anyag adott: 9·860 mg $CO_2$-t és 3·945 mg $H_2O$-t.

$C_{14}H_{27}O_2N$-re számított: C% 69·65 H% 11·28,
talált: C% 69·67 H% 11·43.

VI. *α-oxy-β-undecylenoyl-amino-dihydro-isosafrol.* 4 g α-oxy β-acetylamino-dihydro-isosafrolt,[1] 50 ccm 10%-os kénsavval 4 óra hosszat vízfürdőn tartva, elszapanosítjuk. A lehűlt oldatot lúgosítjuk, 2 g undecylensavchloridot adunk hozzá s huzamosabb

[1] BRUCKNER, V.: Liebig's Annal. d. Chem. 1935. Bd. 518. 243.

ideig rázzuk. A kivált termékről a folyadékot leszűrjük, vízzel jól kimossuk s methanolból kristályosítjuk. O. p. 95°.

Analízis: 4·325 mg anyag adott: 11·050 mg $CO_2$-t és 3·385 mg $H_2O$-t.

$C_{21}H_{31}O_4N$-re számított: C% 69·76 H% 8·64,
talált: C% 69·68 H% 8·76.

VII. *α-oxy-β-undecylenoyl-amino-dihydro-isoeugenol-methylaether.* Teljesen az előbbi leírás szerint nyerhető α-oxy-β-acetylamino-dihydro-isoeugenol-methylaetherből.[1] Tisztítás végett benzolligroin (1 : 1) elegyében oldjuk, melyből fehér, laza, 91°-on olvadó kristályok alakjában válik ki.

Analízis: 3·070 mg anyag adott: 7·885 mg $CO_2$-t és 2·505 mg $H_2O$-t.

$C_{22}H_{35}O_4N$-re számított: C% 69·98 H% 9·35,
talált: C% 70·04 H% 9·13.

VIII. *Undecylenoyl-piperidin.* 1·5 g piperidint kevés abs. benzolban oldunk, hozzáadunk 2 g undecylensavchloridot s az elegyet két napig állani hagyjuk, majd lúggal s végül vízzel átrázzuk, a benzolos részt elkülönítés után kihevített natrium-sulfáttal szárítjuk, szűrjük, s az oldószer elpárologtatása után visszamaradt olajos részt vakuumban desztilláljuk. F. p. 3 m/m 170°.

Analízis: I. 3·640 mg anyag adott: 10·070 mg $CO_2$-t és 3·795 mg $H_2O$-t. II. 3·580 mg anyag adott: 9·885 mg $CO_2$-t és 3·710 mg $H_2O$-t.

$C_{16}H_{29}ON$-re számított: C% 76·42 H% 11·63
talált: C% 75·45 75·31 H% 11·67 11·60.

IX. *Undecylenoyl-pyrrolidin.* Előállítva pyrrolidinból és undecylensavchloridból, mint az előbbi vegyület. F. p. 3 m/m 168°.

Analízis: 4·320 mg anyag adott: 11·765 mg $CO_2$-t és 4·410 mg $H_2O$-t.

$C_{15}H_{27}ON$-re számított: C% 75·88 H% 11·47,
talált: C% 74·28 H% 11·42.

X. *Undecylenoyl-p-amino-chinolin.* 1·5 g aminochinolint 100 ccm abs. benzolban oldunk, hozzáadunk 2 g finomra porított, vízmentes

[1] BRUCKNER, V.: Liebig's Annal. d. Chem. 1935. Bd. 518. 236.

kalium-carbonicumot és 2 g undecylensavchloridot. Két órai melegítés után a benzolt lepároljuk, a maradékot vízzel felvesszük, kiaetherezzük s az aether elűzése után visszamaradt terméket aether és sósavas methanol elegyével kezeljük. A keletkezett chlorhydratot analízisre alkohol és aether elegyéből kristályosítjuk. O. p. 169°.

Analízis: 5·060 mg anyag adott: 12·760 mg $CO_2$-t és 3·585 mg $H_2O$-t.

$C_{20}H_{27}ON_2Cl$-re számított: C% 69·23 H% 7·85,
talált: C% 68·77 H% 7·93.

A chlorhydratból felszabadított bázis, aether és petróleumaether elegyéből átkristályosítva, 71·5°-on olvad.

Analízis: 4·135 mg anyag adott: 11·720 mg $CO_2$-t és 3·040 mg $H_2O$-t.

$C_{20}H_{26}ON_2$-re számított: C% 77·37 H% 8·45,
talált: C% 77·30 H% 8·23.

XI. *Piperinoyl-p-aminochinolin.* A kiindulási anyagok benzolos oldatainak összeöntésekor azonnal keletkezik és az oldatból kiválik. Az elkülönített termék híg lúggal és vízzel való kezelés után alkoholból kristályosítható. O. p. 233°.

Analízis: 5·102 mg anyag adott: 13·670 mg $CO_2$-t és 2·225 mg $H_2O$-t.

$C_{21}H_{16}O_3N_2$-re számított: C% 73·23 H% 4·68,
talált: C% 73·07 H% 4·88.

XII. *Undecylenoyl-tetrahydrochinolin.* 3 g tetrahydro-chinolin kevés abs. benzollal készült oldatát 2 g undecylensav-chloriddal és 1·5 g finomra porított vízmentes kalium-carbonicummal 4 óra hosszat 60—70°-on állani hagyjuk. Kihűlés után az elegyet választótölcsérben savval, lúggal és végül vízzel többször jól átrázzuk, a benzolos oldatot szárítás után bepároljuk s a visszamaradó olajat vákuumban frakcionáljuk. F. p. 4 m/m 234—235° (a légfürdő hőmérséklete: 280—300°).

Analízis: 4·925 mg anyag adott: 14·385 mg $CO_2$-t és 4·210 mg $H_2O$-t.

$C_{20}H_{29}ON$-re számított: C% 80·21 H% 9·77,
talált: C% 79·66 H% 9·57.

XIII. *Piperinoyl-tetrahydrochinolin.* 3 g tetrahydrochinolint és 3 g piperinsavból készített nyers piperinsavchloridot abs. benzolos oldatban 4 óra hosszat 60—70°-on tartunk. Melegítés után az oldószert elpárologtatjuk, a maradékot aetherben oldjuk, lúggal, savval s végül vízzel jól átrázzuk s az aether elűzése után visszamaradó részt alkoholból kristályosítjuk. A vegyület halványsárga tűket képez, melyek a napfényen szétpattogzanak. O. p. 145°.

Analízis: 3·875 mg anyag adott: 10·750 mg $CO_2$-t és 2·080 mg $H_2O$-t.

$C_{21}H_{19}O_3N$-re számított: $C\%$ 75·64 $H\%$ 5·75,
talált: $C\%$ 75·66 $H\%$ 6·00.

XIV. *Bis-undecylenoyl-piperazin.* Mivel a piperazin monoacyl származékának az előállítása volt célom, 1 g undecylensavchloridot fölös mennyiségű (2 g) piperazin és 1 g kalium-carbonicum vizes oldatával elegyítettem. Az összeöntés után csaknem azonnal kiváló fehér anyag ligroinból átkristályosítva 63°-on olvad. A keletkezett termék az analízis alapján di-acyl-származéknak bizonyult.

Analízis: 4·300 mg anyag adott: 11·725 mg $CO_2$-t és 4·315 mg $H_2O$-t.

$C_{26}H_{46}O_2N_2$-re számított: $C\%$ 74·58 $H\%$ 11·08,
talált: $C\%$ 74·37 $H\%$ 11·23.

A leírt készítmények előállításánál és analíziseinél dr. Haraszti József egyetemi tanársegéd, vegyészmérnök úr nagy segítségemre volt, miért neki e helyen is köszönetemet fejezem ki.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. május 13-án tartott üléséből.)

# UNTERSUCHUNGEN AUF DEM GEBIETE VON SCHARFSCHMECKENDEN ACYLAMINEN.

Von TIBOR SZÉKI, korresp. Mitglied.

Es werden die Resultate der bisherigen Forschungsarbeiten über Pfefferwirkung aufweisende Verbindungen zusammengefasst. Während nach Angaben von OTT und ZIMMERMANN [1] nur aliphatische und fettaromatische Basen zur Bildung von Pfefferstoffen geeignet sind, berichtet Verfasser über eigene Erfahrungen, welche diesen Behauptungen gänzlich widersprechen. Er stellte nämlich im Laufe seiner Untersuchungen fest, dass sich auch aus p-Oxyphenylaminen Verbindungen mit brennendem Geschmack gewinnen lassen. So wurde Guajacol-Amin mit verschiedenen Säurechloriden (Chloride der Isobutter-, Heptan-, Nonan-, Nonen-, Caprin-, Undecylen-, Zimmt-Säure) acyliert. Die erhaltenen Acylamine besitzen einen stark brennenden Geschmack, besonders diejenigen, welche einen 9, 10 oder 11 C-atomigen Säurerest tragen. Eine zwar etwas schwächere, aber noch durchaus ausgeprägte Pfefferwirkung besitzen auch Verbindungen des p-Aminophenols, welche durch Acylieren desselben mit den oben erwähnten Säurechloriden gewonnen wurden. Ferner stellt Verfasser fest, dass ein, zur acylierten Amino-Gruppe ortho-ständiges, Methoxyl die Pfefferwirkung gänzlich aufhebt.

Nach diesen Feststellungen beantwortet Verfasser, auf Grund eigener Erfahrungen, die folgenden, sich selbst ergebenden Fragen: I. Ob die Piperinsäure, ausser mit Piperidin, auch mit anderen heterocyklischen Basen Verbindungen von Gewürzcharakter zu

---

[1] Liebig's Annal. **425**. 314. Centrbl. 1922. 350. I.

bilden vermag. II. Ob an Stelle von Aminen von Phenolcharakter auch die Acylderivate der Aminoalkohole Capsaicinwirkung auszulösen vermögen, und III. Welche Wirkung die Verbindungen besitzen, die aus ungesättigten Fettsäuren mit heterocyklischen Basen gebildet werden.

Um die erste Frage zu entscheiden hat Verfasser Piperinsäure mit Pyrrolidin kondensiert. Die gewonnene Verbindung hat mit dem Piperin analoge Konstitution mit dem Unterschied, dass in ihr das Piperidin-Teil durch den Pyrrolidin-Rest ersetzt ist. Die Verbindung ist von scharfem Geschmack.

Die weiteren Versuche ergaben, dass in den Acylaminen von Gewürzcharakter der Amino-Phenol Teil auch durch Amino-Alkohol ersetzt werden kann. Zur Herstellung von wirksamen Säureamiden eignet sich besonders der drei Kohlenstoff-Atome enthaltende $\gamma$-Amino-Propanol. Während der $\beta$-Amino-Aethanol mit Piperinsäure keine Verbindung von Gewürzcharakter ergibt, bildet er mit Undecylensäure ein Säureamid, welches nicht nur scharf, sondern auch aromatisch schmeckt. Mit Piperinsäure bildet der $\gamma$-Amino-Propanol eine Verbindung, welche auf die Schleimhaut eine entschieden brennende Wirkung ausübt. Mit Undecylensäure entsteht ein Amid, mit einem, dem Capsaicin sehr ähnlichen scharfen und dabei aromatischem Geschmack. Wird aber im Amino-Propanol Teil ein Wasserstoff der Kohlenstoffkette durch ein Methylendioxy-Phenyl- oder Dimethoxy-Phenyl-Radikal ersetzt, so ist das Acylamin wirkungslos.

Unter den heterocyklischen Verbindungen entstehen aus Piperidin und Pyrrolidin mit ungesättigten Säuren scharfschmeckende Acylamine. Dagegen p-Aminochinolin, Tetrahydrochinolin oder Piperazin bilden sowohl mit Piperinsäure, als auch mit Undecylensäure vollkommen geschmacklose Verbindungen.

---

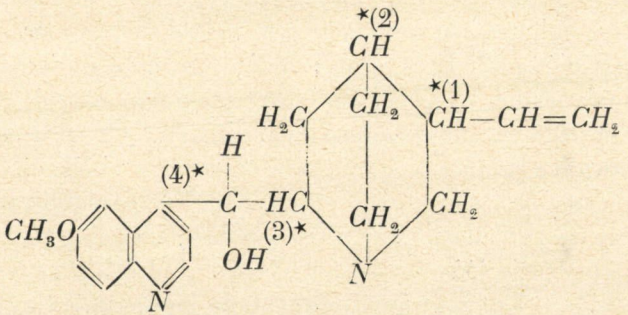
Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Mai 1935.)

# A CHINIDIN ÉS HYDROCHINIDIN JÓDMETHYLÁTJAI.[1]

KONEK FRIGYES l. tagtól.

A chinakéreg mellékalkaloidjai közül a chinidint HENRY és DELONDRE 1833-ban, a hydrochinidint pedig FORST és BOEHRINGER különítették el 1881-ben. Chinidin, amely stereoizomér a chininnel, néha több százaléknyi mennyiségben található egyes chinakérgekben; pl. cinchona calisayaban. Vízben éppoly nehezen oldható, mint a chinin; chloroformban is csak nehezen, könnyebben benzolban és könnyen alkoholban és éterben. Vízmentesen 171°-on olvad. Jobbra forgató; chloroformban $[\alpha]_D = +184°$.

Hydrochinidin, amely permanganattal szemben állandó, 168°-on olvad, jobbra forgat; chinidinből is keletkezik katalytikus redukcióval, mégpedig úgy, hogy ez utóbbinak telítetlen vinylgyöke két atom hydrogén felvételével átmegy a telített aethylgyökbe.



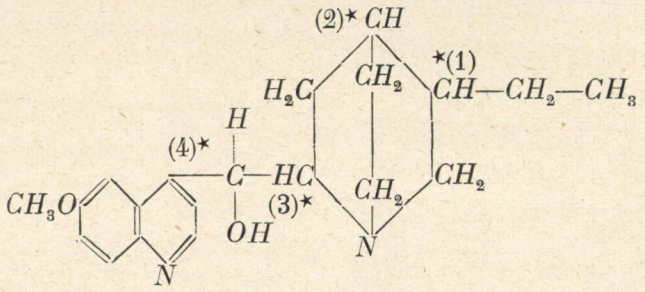

chinin és chinidin

[1] III. közlemény a differenciáló alkylezésnek más biazótos alkaloidokra való kiterjesztéséről.

II. közlemény: Chinazolin típusú alkaloidok stb.

Chinidin, amely szerkezetében teljesen egyezik a chininnel, RABE szerint a 3. asszimmetriás szénatom szerint való tükörképizomérje és e szerint közte és chinin között ugyanaz a stereokonfigurációs viszony áll fenn, mint cinchonin és cinchonidin között; szóval *p*-methoxycinchoninnek tekinthető.

A hydrobázisok: hydrochinin és chinidin ugyanolyan stereoizomér viszonyban vannak egymáshoz, mint a főalkaloidok, amelyektől szerkezetileg csak abban különböznek, hogy a telítetlen vinylgyök helyett a telített aethylgyököt tartalmazzák:




hydrochinin és chinidin

Ebből a strukturazonosságból jogosan arra lehetett következtetni, hogy a differenciáló alkylezésnél is a hydrochinidin egészen úgy viselkedik majd, mint stereoizomérje, a hydrochinin. Míg azonban ez utóbbi — mint az első idevonatkozó publikációmból kitűnik — minden nagyobb nehézség nélkül két izomér, színben eltérő monojódmethylátot adott: addig a hydrochinidinnél váratlan akadályok mutatkoztak, amelyeket máig sem sikerült még teljesen kiküszöbölni. Ebben a magatartásában a hydrobázis, úgy látszik, nem tagadja meg a származását, mert úgy viselkedik mint a chinidin, amelyről már első, e tárggyal foglalkozó publikációmban (Monatshefte für Chemie XV. (1894) S. 50.) megállapítottam azt, hogy jódhydrátja jódaethyllel hevítve nem adta a várt chinidinaethyljodidsót, akárhogy is változtattam a kísérleti körülményeket. Ezt a hézagot kipótlandó a hydrochinidinnel együtt újból elővettem a chinidint is és tanulmány tárgyává tettem jódmethyllel szemben való viselkedését, abban a reményben, hogy az, ami akkor nem sikerült jódaethyllel, talán menni fog a reakcióképesebb jódmethyl-

lel? Eddigi kísérleteimből kitűnt, hogy a chinidinjódhydrát csak nagyon nehezen veszi fel a jódalkyl elemeit és még nincs is befejezve a reakció, máris bomlásnak indul. Annyit mindenesetre sikerült megállapítanom, hogy a jódmethyladdició a chinolinnitrogénen megtörténik; hátra van azonban még annak kísérleti eldöntése, hogy milyen körülmények között, főleg milyen hőfoknál és mennyi idő alatt lesz az alkylezés teljes, még pedig úgy, hogy a molekula el ne bomoljék. A hydrochinidin szakasztott úgy viselkedik jódmethyllel szemben, mint a chinidin, itt sem sikerült még az alkylezést az anyag bomlásának elkerülésével teljessé tenni, úgyhogy ezirányú kísérleteimet még folytatni fogom. A chinidinnek és dihydroszármazékának ezen — a szerkezetileg azonos chinintől és dihydrochinintől való — eltérő magatartása csak a térbeli izoméria, illetve egy előnyösebb vagy kevésbbé előnyös helyzet fennállásával volna magyarázható, hogy például a chinidin esetében a chinolinnitrogén a 3. *C*-atom asszimetriája folytán térbelileg oly közelségbe jutott a másik chinuclidinnitrogénatomhoz, hogy a térbeli akadályoztatás esete látszik fennforogni; míg ezzel szemben a chinin esetében a két nitrogénatom távolabb esvén egymástól, inkább me van adva annak lehetősége, hogy a 2. nitrogénatom is felvehesse a jódalkyl eléggé súlyos ionjait.

## KÍSÉRLETI RÉSZ.

### Jódmethylchinidin.

1 g chinidint[1] feloldunk 10 ccm forró benzolban; lehűlés után — de még mielőtt a kristályképződés megindulna — hozzámérünk 0·5 g frissen desztillált jódmethylt. Azonnal kiválik zavarodás közben az addiciós termék; rövidesen az oldat egész tömegében kocsonyásan megalvad. Éjjelen át hidegben állni hagyjuk. Másnap lenutsoljuk; a csapadékról forró vízfürdőn elűzzük a benzolt és a

[1] Chinidin puriss. cryst. a Verein. Chininfabriken Zimmer et Co. Frankfurt a. Main bocsátotta rendelkezésemre; miért e helyen is nevezettnek köszönetet mondok.

Az alkaloid olvad. pont és egyéb tulajdonságaiban is tisztának bizonyult.

hófehér kristályos theoretikus súlyú nyers terméket cca 50 ccm forró vízből kevés állati szénnel kristályosítjuk. A szűrletben az új vegyület finom, hófehér selyemfényű tűk alakjában rögtön kiválik, ezek leszűrve vattaszerű tömeggé állnak össze. Szárítva 235—36°-on olvadnak, de már előbb barnulnak.

Elemzés: 0·1264 g anyag adott 0·0636 g $AgJ$-t; ebből a Jód (talált érték) = 27·19%. A $CH_3J$. $C_{20}H_{24}O_2N_2$ képletben a Jód (számított érték) = 27·25%.

## Chinidinmonojódhydrát.

Ezen só előállítása céljából 1 g sósavas chinidint oldunk 6—8 ccm forró vízben és lehűtve 0·5 g $KJ$-nak 1—2 ccm vízben való oldatát adjuk hozzá, mire a keresett só tejfehér, szilárd csapadék alakjában rögtön kiválik. Lenutsoljuk, vízzel kimossuk és kénsav alatt majd 100—110°-on kiszárítjuk. Ilyen állapotban a só további feldolgozásra eléggé tiszta már. Vízben — még forróban is — úgyszólván oldhatatlan; forró methanolból is cca 40—50 ccm szükséges 1 g sónak a feloldásához; hűlve azonnal gyémántfényű kristályok alakjában válik ki belőle.

## A chinidinmethyljodid jódhydrogénsója.

Ez a só képződik, ha a chinidin primér jódhydrogénsójának forró methanolban telített oldatát a theoretikusnál valamivel több jódmethyllel beforrasztott üvegcsövekben a forró vízfürdőben egy — másfél óráig hevítjük. A sárgásbarnás színű oldatok tiszták; lepárolva sárgaszínű félszilárd gyantás anyag marad utánuk, amelyben itt-ott kristályok mutatkoznak. Forró víz csaknem maradék nélkül feloldja; a szűrőn rendesen csak kevés olajos bomlási termék marad vissza. A szűrlet hűlve rendesen sárgás emulzió alakjában választja le az új vegyületet, amely azonban hidegben rövidesen finom kénsárga tűkből álló kristálytömeggé szilárdul. Lenutsoljuk és kénsav alatt kiszárítjuk. Forró vízben többnyire tisztán oldódik; hosszabb forralásra azonban csapadék képződik jeléül annak, hogy a vegyület ilyen körülmények között részleges bomlást szenved. Ha a sót akár vizes oldatban, akár szárazon vizes ammo-

niákkal elbontjuk, világosabb színű, sárgásfehér szilárd vegyületet kapunk, amelyet kristályosítani eddig nem sikerült. Exsikkator száraz állapotban elemezve a benne talált jódmennyiségből arra kell következtetni, hogy a keresett chinidinmethyljodidot tartalmazza ugyan, de 50—60% változatlan chinidin van még mellette jelen.

Elemzés: 0·0682 g anyag adott 0·0151 g $AgJ$-t, amiből Jód (talált) = 11·96%, míg a theretikus, $C_{20}H_{24}O_2N_2.CH_3J$ képletből számított Jód = 27·25%. Ebből ez elemzési eredményből arra lehet következtetni, hogy a chinidinjódhydrát jódmethyllel 1—2 óráig a forró víz hőfokára hevítve felveszi ugyan a chinolinfél nitrogénatomján a halogénalkyl elemeit; de ez az ammoniumsóképződés csak részleges. Remélhető azonban, hogy a reakcióidő tetemes fokozásával egyrészt, másrészt egy alkalmas tisztítási eljárással sikerülni fog a keletkezett színes chinidinmethyljodidnak tisztán való előállítása.

Hogy azonban a chinidin chinolinnitrogénje jóval nehezebben addicionálja a halogénalkylt, mint a stereoizomér chininé, mi sem bizonyítja jobban, mint a chinidindijódmethylát előállítását célzó kísérletek sikertelensége. Ha ugyanis a fehér jódmethylchinidin methanolos oldatát a theoretikusnál valamivel több jódmethyllel beforrasztott csövekben a forró vízfürdőben 1—2 óráig hevítjük, a barnás oldat a methanol elűzése után vörös olajos terméket hagy vissza, amely forró vízben oldódik ugyan nagyjában, de a szűrlet napok mulva hidegben is csak emulziót, majd vörösbarna olajos anyagot választ le, amely kellemetlen tulajdonságainál fogva tovább nem lett vizsgálva. Lehet, hogy itt is célt lehet érni a reakcióidő tetemes kitolásával; annyival is inkább, mivel annakidején (Monashefte für Chemie XV. (1894) Seite 50—51) sikerült chinidinből jódaethyllel 6—8 órai 100°-ra való hevítéssel egy dijódaethyl szépen kristályosodó származékot előállítani, amely az elemzésnél a theoria megkívánta jódtartalmat mutatta.

## Jódmethylhydrochinidin.

$CH_3J.C_{20}H_{26}O_2N_2$. A kísérleteimhez felhasznált hydrobázis a Boehringer—Waldhof, Mannheim alkaloidgyárban katalytikus hydrogénaddicióval nyert termék volt; tisztaságát az olvadáspont-

tal és a permanganát-próbával ellenőriztem; mindkettőnek megfelelt. A fehér jódmethylszármazék quantitativ eredménnyel képződik, ha úgy, mint a chinidinnél, 1 g hydrobázist oldunk 10 ccm forró benzolban, a lehűtött oldathoz, mielőtt még kristályok kezdenének kiválni, hozzámérünk egy molek. — 0·5 g — jódmethylt, mire az addiciós termék kocsonyás csapadék alakjában azonnal kiválik; rövidesen már az egész oldat megalvad. Sötét helyen éjjelen át állni hagyjuk, majd szűrőre viszszük, benzollal kimossuk; a benzolt forró vízfürdőn elűzzük, a visszamaradt hófehér terméket cca 50 ccm forró vízből kevés csontszénnel átkristályosítjuk. Azonnal színtelen, gyémántfényű, tűalakú kristályok alakjában válik ki az új vegyület; légszáraz állapotban 242—43°-on olvadnak, de már előbb barnulnak. Az elemzésnél atheória megkívánta jódtartalmat mutatták: 0·1025 g légszáraz anyag adott 0·0516 g $AgJ$-t, amiből Jód (talált) = 27·20%; a $CH_3J \,.\, C_{20}H_{26}O_2N_2$ képletben a Jód (számított) = 27·13%.

## Hydrochinidinjódhydrát.

$HJ \,.\, C_{20}H_{26}O_2N_2$. Ezt a sót a szabad bázisból úgy állítjuk elő, hogy 1 g bázist feloldunk egy molek. — 6·1 ccm — $\frac{n}{2}$ sósavban és a szűrt oldatban egy molek. — 0·5 g — jódkáliumnak 1—2 ccm vízben való oldatával kicsapjuk a jódhydrátot; lenutsoljuk, vízzel kimossuk és kénsav alatt exsikkatorban kiszárítjuk. Igen sok forró vízből — 1 g-ra 150 ccm — gyémántfényű, apró tűalakú kristályokban jegecedik, amelyek methanolban is nehezen oldhatók.

## A hydrochinidinmethyljodid jódhydrogénsója.

Számtalan eredménytelen kísérlet és sok drága anyag elpocsékolása után végül mégis csak sikerült ezt a hydrochinidin-származékot előállítani. Mivel a hydrobázis jódhydrátja az alkalmazható indifferens oldószerekben csak nagyon nehezen oldható, csak kis mennyiségekkel lehetett dolgozni.

500 miligram jódhydrogénsót oldunk 30—40 ccm forró methanolban és a telített oldatot kapillártölcsér segítségével gyorsan

bevisszük a kapillárissá kihúzott bombacsőbe, lehűtjük; hozzáöntjük a theoretikusnál jóval több jódmethylt, a csövet beforrasztjuk és forró vízfürdőben 1—2 óráig hevítjük. Kihűlés után a világos vagy sötétebb színű tiszta csőtartalmat vízfürdőn szárazra pároljuk. Rendesen sárgabarna színű félszilárd gyantás anyag marad vissza, amelyben néha itt-ott kristályok is keletkeznek. Forró vízben több-kevesebb barnavörös olaj hátrahagyásával oldódik; a szűrlet hűlve sárga emulziót, vagy sokszor rögtön kristályosodó eleven kanárisárga anyagot választ le, amely hidegben csakhamar megalvasztja az oldat egész tömegét. Hosszabb állásnál más habitusú, világosabb színű kristályok is képződtek. Ha a kristályok mennyisége már nem szaporodik, lenutsoljuk őket, levegőn és exsikkatorban kiszárítjuk. Határozott olvadáspontjuk nincs. Ha ezt a narancsszínű jódmethylsót ammoniákkal jól eldörzsölve megbontjuk, egy világosabb színű jódtartalmú terméket kapunk, amelyet lenutsolva kénsav alatt megszárítunk. Vízből vagy methanolból kristályosítani nem sikerült; végül a rendelkezésemre álló mindössze 200 miligram anyagot forróvizes methanolban (30 ccm 70 rész víz+30 rész alkohol) oldva, hidegben hosszabb idei állás után barnasárga tűalakú kristályokban vált ki, amelyek a qualitativ próbánál erősen jódtartalmúaknak bizonyultak. Olvadáspontjuk nem jellemző, mert a nyilt kapillárisban már 150° körül lágyulnak és folyton zsugorodva, végül 255° körül elbomlanak. Már ebből a magatartásából is arra lehetett következtetni, hogy az anyag még nem egyöntetű, nem vegytiszta. Ezt mutatta ugyancsak az elemzés.

Elemzés: 0·0598 g száraz anyag adott 0·0223 g $AgJ$-t; ebből Jód (talált) = 20·15%; a $C_{20}H_{26}O_2N_2 . CH_3J$ képlet szerint a Jód (számított) = 27·13%.

E szerint kétségtelen, hogy az elemzett anyag kb. 60—70%-nyi mennyiségben a keresett hydrochinidinmethyljodidot tartalmazza 40—30% idegen, valószínűleg változatlan kiindulási anyaggal, azaz hydrochinidinnel keverve. A rendelkezésemre álló csekély anyagmennyiség egyelőre lehetetlenné tette annak további tisztítását; természetes, hogy ez lesz majd legközelebbi feladatom, mihelyt ez a termék megfelelő nagyobb mennyiségben rendelkezésemre fog állni.

Végül megemlékszem még a hydrochinidindijódmethyl előállítását célzó kísérletekről, amelyek azonban eddig eredménytelenek maradtak, mert ha a fehér jódmethylhydrochinidin forró methanollal készített: telített oldatát feles jódmethyllel beforrasztjuk és a csöveket forró vízfürdőben 1—2 óráig hevítjük; az oldószer elűzése után visszamaradó vörösbarna olajos test eddig minden kristályosítási kísérletnek konokul ellenszegült. Lehetséges azonban, hogy a reakcióidőnek meghosszabbítása vagy más kísérleti változtatás itt is célhoz vezet majd.

## Utóirat.

Az időközben végzett újabb kísérletek a chinidin-esetében eredményesek voltak, amennyiben sikerült az oldószer mennyiségének, továbbá a hevítési idő tartamának csökkentésével egyrészt a bomlási termékek keletkezését csaknem teljesen elkerülni, másrészt egy olyan chinidinmethyljodid birtokába jutni, amely az elemzés adatai szerint a keresett tiszta vegyület. *HJ. chinidinmethyljodid.* 1 gr teljesen száraz *HJ.* chinidinsót adunk száraz kémcsőbe, kihúzzuk, kapillarissá és kapillártölcsérrel feles jódmethylt, majd 5—6 c/cm methanolt teszünk hozzá; a kémcsövet beforrasztjuk és a forró vízfürdőben 2—4 óráig hevítjük. A tiszta sárgaszínű oldatot a vízfürdőn bepároljuk és a maradékot — vörösbarna sűrű olaj — forró vízzel digeráljuk, amely az anyagot csaknem egészen oldja; a szűrőn alig marad kis olajos rész és az előbbi kísérletekben nagymennyiségben keletkezett cinóbervörös bomlási termék is csaknem teljesen elmaradt.

A szűrlet mint rendesen, úgy most is először sárga emulsiót választ le, amely azonban hidegben csakhamar elevensárga színű kristályos tömeggé merevedik. Súlya exsikkator száraz állapotban 0·8 gram. Ez az anyagkerült elemzésre. 0·1154 gr exsik. száraz anyag adott 0·0914 gr *AgJ*-t; ebből jód (talált) = 42·80%. A $HJ.C_{20}H_{24}O_2N_2CH_3.J$ képletben a jód (számított érték) = 42·76%. Ha ezt a sót úgy bontjuk el, hogy vizes ammoniákkal eldörzsöljük, a kapott kristályos fakósárga színű termékben 27·25% jód helyett csak 13·24%-ot találunk; bizonyságául annak, hogy az ammoniák a keletkezett jódmethylátnak kb. felét elbontotta.

Ha ellenben az elbontáshoz nem ammoniákot, hanem a sokkal gyengébb alkalit, nátriumhydrokarbonátot használunk, úgy a keletkezett fakósárga színű kristályos termék a chinidiumethyljodid helyes összetételét mutatja. Elemzés: 0·0936 gr exsik. száraz anyag adott 0·0464 gr *AgJ*-t; ebből jód (talált érték) = 26·79%. A $C_{20}H_{24}O_2N_2 . CH_3J$ képletben a jód (számított értéke) = 27·25%. Ezzel be van bizonyítva, hogy a chinidin is éppúgy képes egy «chinolinjodmethylátot» adni, mint stereoizomerje, a chinin.

A *HJ. hydrochinidin.* $CH_3J$ előállítását is úgy módosítottam, hogy egy gram anyagra csak 5—6 c/cm methanolt vettem és a hevítést is 2—4 órára korlátoztam. Az így nyert élénksárga színű kristályos anyag az elemzésnél a helyes értéket adta.

Elemzés: 0·1102 gr 110° száraz anyag adott 0·0880 gr *AgJ*-t; ebből a jód (talált érték) = 43·15%. A $HJ . C_{20}H_{26}O_2N_2 . CH_3J$ képletben a jód (számított érték) = 42·62%.

Ha ezt a tiszta sót elbontjuk, hogy a keresett hydrochinidinmethyljodidhoz jussunk, eddig azt kellett tapasztalnom, hogy olyan gyenge alkali, mint a $NaCHO_3$ alig, míg az erős alkali — $NH_3$ — túlerősen bontja; úgyhogy a tiszta vegyület előállítására újabb kísérletek szükségesek.

A most elért legjobb eredmény: 19·62% jód 27·13% helyett, semmivel sem jobb, mint a fentebb közölt 20·15%.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. jan. 13-án tartott üléséből.)

# ÜBER DIE JODMETHYLATE VON CHINIDIN UND HYDROCHINIDIN.

vom k. M. FRITZ v. KONEK.

Der Vortragende berichtet kurz über Versuche zur Darstellung der beiden isomeren — farblosen und farbigen — Jodmethylderivate von Chinidin und Hydrochinidin. Er konnte feststellen, dass, während die stereoisomeren Basen: Chinin und Hydrochinin ohne Schwierigkeit die erwarteten Jodmethylverbindungen lieferten: in der Chinidinreihe die Alkylierung des Chinolinstickstoffs experimentell nicht so leicht durchführbar ist und die erhaltenen Produkte noch weiter gereinigt werden müssen. Vortragender setzt seine diesbezüglichen Versuche fort. Vergleiche hiezu: Monatshefte für Chemie, Band XV. (1894) Seite 50 ff.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Jan. 1936.)

# KÍSÉRLETEK A TALAJ HASZNOS NITROGÉNTARTALMÁNAK PHYSIOLOGIAI-CHEMIAI MEGHATÁROZÁSÁRA.

DOBY GÉZA l. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Növények enzimeinek koncentrációja, korábbi kísérleteink szerint (1), a táplálkozás függvénye; pl. cukorrépa levelének invertáza és amiláza káliumhiányos táplálkozás mellett nagyobb, hasonlóan burgonya levelében is; hasonló összefüggés mutatkozott a Penicillium nevű penész invertázában, ha a penész kevés cukorral táplálkozhatott és ezenkívül akár káliumban, magnéziumban, vagy foszfátban, akár nitrogénben szenved hiányt. Hasonló jelenségeket tapasztalt kísérleteim nyomán HARTT (2) is a cukornád különböző szerveiben különböző enzimekre nézve, azonban itt néhány enzim nem fordított, hanem egyenes arányú függést is mutatott. Későbbi kísérletekben, amelyeket MAKFALVI JOLÁNnal végeztem, rozs hajtásainak invertáza szintén egyenes arányú, asymptosisos függést mutatott a nitrogénes táplálástól, mégpedig közel hasonló arányban hatféle nitrogénvegyülettel. Minde kísérletekben az enzimek néhány állandója is jellegzetesen változott. Az invertáznak ez a függése a nitrogénes táplálástól emlékeztet arra a kapcsolatra, amelyet RIPPEL és MEYER (3) is említ, amidőn a növény növekedésének törvényszerűségét kutatja a nitrogéntáplálástól függően; az anyagcsere e függvényét az «Anstiegstangente»-vel fejezi ki. Már a rozs invertázával végzett kísérletek azt a gondolatot keltették, hogy az invertáz koncentrációjából következtetést lehetne vonni a tápláló közeg nitrogéntartal-

mára és ezért már akkor néhány talajt is megvizsgáltunk ily irányban.

A talaj nitrogénvegyületei tudvalevően nagyon sokfélék és ezek közül közvetlenül csak néhány alkalmas a magasabbrendű növények táplálására, amiért is e nitrogénvegyületek nitrogéntartalmát együttesen «*hasznos nitrogén*»-nek lehetne elnevezni; ennek a mennyisége dönti el, hogy a talajnak mekkora a nitrogénszükséglete. A talaj e «hasznos nitrogén»-jének mennyisége folytonos, kisebb-nagyobb ingadozásnak van alávetve, amelyet főként mikroszervezetek idéznek elő részint azáltal, hogy felvehető nitrogénvegyületeket oldhatatlanná, vagy fordítva, változtatnak, részint pedig szabad nitrogént visznek át vegyületekbe, vagy ellenkezően, nitrátból nitrogént szabadítanak fel. Minde változások előidézte nehézségek okozták, hogy a talaj nitrogénszükségletének meghatározását laboratóriumi módszerekkel csak jóval később kísérelték meg, mint a többi növényi táplálóanyagét, sőt egyelőre még nincs is erre mindenképpen kipróbált módszerünk.

A legrégibb eljárás, az ú. n. összes nitrogén meghatározása nem lehet célravezető az előbb vázolt viszonyoknál fogva. König J. és Hasenbäumer (4) az oldható nitrogént régebben 1%-os citromsavoldattal oldta ki. E módszer eredményeit Dirks és Scheffer (5) nem találta egyezőnek az ellenőrzésül használt Mitscherlich-kísérlet eredményeivel. König (6) később az oldható nitrogént az ionkicserélés elvén 1%-os $K_2SO_4$-oldattal oldja ki, épp így az ammoniát is, míg a nitrátot $NaCl$-oldattal. Ehhez a módszerhez elvileg annyiben férhet szó, hogy a növények természetes ionfelvételében ily sók hatása nem valószínű, sőt Pirschle és Mengdehl (7) kísérletei szerint ebben a biochemiai folyamatban ionkicserélésről alig lehet szó. Alten és Vageler (8) pedig Trougra (Proceedings and Papers, I. Internat. Congress of Soil Science, Comm. IV. 628, Washington) is hivatkozva, kifejezi azt a véleményét, hogy a növény csak részben veszi fel táplálóanyagait a talaj oldatából, részben ellenben közvetlenül a kolloidális talajkomplexusból; ezt a gyökér hajszálgyökerei növik körül és kiválasztott szénsavuknak körülbelül 4 *pH*-os oldatával oldják ki. Ez az elbírálás a később említett Wrangell- és Várallyay-féle eljárást is érinti. Újabban a növények nitrogénes táplálásának sokat vitatott kér-

dése, vajjon az ammonium- vagy a nitrátvegyületek alkalmasabbak-e erre a célra.(9) Minthogy kétségtelen, hogy ez a két vegyületcsoport nagyon fontos a növények nitrogénnel ellátásában, lassanként az a nézet terjedt el, hogy velejében ezeknek mennyisége dönti el valamely talajnak nitrogénnel ellátottságát, annál is inkább, mert meghatározásuk aránylag könnyű feladat elé állítja az elemzőt. Azonban HERKE (16) már 1922-ben rámutat arra, hogy a talaj nitrogénállapotát nem annyira az ammonia és nitrát pillanatnyi mennyisége, mint inkább az ammoniát és nitrátot létesítő tehetsége és ennek sebessége jellemzi. Mégis a kutatók egész sora a talaj ammónia- és nitráttartalmának meghatározásával foglalkozott, így WRANGELL (10) a kisajtolt talajoldatban határozza meg az ammoniumot és nitrátot, NIKLAS és GRANDEL (11) a nitronnal kapott kristályokat centrifugálással olvassa le; legújabb adatok azonban erről a módszerről nem jelentek meg. NĚMEC és KOPPOWÁ (12) a talajban végbemenő nitrifikálást és a jelenlevő ammoniát határozza meg a vizes talajoldatban kolorimeterrel. Eljárásukat MITSCHERLICH-féle edénykísérletekkel ellenőrzik és kielégítő megegyezést találnak. 22 cseh talajjal végzett szabadföldi kísérlet alapján 75 mg nitrát- és ammonium-nitrogén összegét kg talajonként jelölik meg oly mennyiségként, amely a növények kellő fejlődését biztosítja. Különben KÖNIG káliumszulfátos módszerével is teljesen kielégítő eredményeket kaptak. Egyébként NĚMEC (13) már 1926-ban a nitrifikálást is igyekezett meghatározni, mégpedig akként, hogy a talajban frissen, majd pedig bizonyos idei állás után határozta meg a nitrát mennyiségét és szabadföldi kísérletek alapján ezt is kielégítőnek mondja, mégis kijelenti, hogy savanyúságra hajló talajokban nem vált be. VÁRALLYAY és FEJÉR(14) szintén a nitrifikálást tartja döntőnek; a nitrát és ammónia mennyiségét a ionkicserélés elvén káliumkloridos oldattal oldják ki és kolorimeterrel határozzák meg, mégpedig a nitrátot a friss és az egy hónapig nedvesen tartott talajban. VÁRALLYAY (15) újabb közleményében 50 mg együttes nitrogént tart elegendőnek, azonban e számadat bizonyítására nem közöl kísérleteket.

A talaj nitrogénszükségletének pusztán a nitrát és az ammonia mennyisége alapján való megítélését a magam részéről nem tart-

hatom elegendőnek.[1] Mindenekelőtt elméleti meggondolásból is következik, hogy a talajban nitráton és ammonián kívül — néha tetemes mennyiségben — egész sora a vegyületeknek fordul elő, amelyek a növények táplálására alkalmasak, pl. karbamid, aminosavak, amidok, kisebb mértékben a húgysav is; ezeket a növény részint változatlanul is felhasználhatja, részint baktériumos előkészítés után. Erre mutatnak azok a kísérletek is, amelyek a lápi és tőzeges talajok hasznos nitrogénben való gazdagságát bizonyítják. Épp ezért kétségtelen, hogy elvben mindenesetre olyan módszer kecsegtet megbízhatóbb eredménnyel, amely az összes hasznos nitrogén meghatározását tenné lehetővé, leginkább akkor, ha a növény közvetítését is igénybeveszi. Ezért ma is legmegbízhatóbbnak a MITSCHERLICH-féle tenyészedényes módszert (17) kell megjelölni, amely azonban aránytalanul drága és hosszadalmas. Annál inkább ígérkezett alkalmasnak olyan eljárás, amely a foszfát- és káliumszükséglet megállapítására bevált NEUBAUER-féle módszer (18) elvén alapul. Azonban ezt a módszert BLANCK és SCHEFFER (19) kísérletei szerint a hasznos nitrogén meghatározására azért nem lehetett használni, mert a rozs nitrogéntartaléka akkora, hogy a NEUBAUER-féle növénykék nem szorulnak a talaj nitrogénjére. Ezért 1930-ban ROEMER intézetében WAGNER (20) a Lolium perenne és westerwoldicum nevű fűfélék magvával kísérletezett és kísérleteit szabadföldi kísérletekkel is ellenőrizte. Az első közlemény óta azonban nincsenek újabb tapasztalatok arról, hogy a módszer bevált-e.

Minthogy ennélfogva még nincs olyan módszer, amely a hasznos nitrogén laboratóriumi meghatározását kielégítően megoldaná, e cél elérésére az az összefüggés ígérkezett hasznavehetőnek, amely a MAKFALVIval végzett kísérletek szerint NEUBAUER-féle rozsnövénykék invertázkoncentrációja és nitrogénes táplálása között fennáll. Az elv teljesen eltér minden eddigi módszertől, csupán a

[1] Erről pl. HERKE (16. irodalmi idézet, 325. o.) már 1922-ben így ír: «A talaj értékelésénél igen értékes adatot nyujtana könnyen bomló, könnyen nitrifikálható nitrogéntartalmának megállapítása. Ezt azonban ma még nem tudjuk meghatározni ... Ezért a talaj nitrogénjét a növénytáplálkozás szempontjából tisztán chemiai alapon értékelni nem lehet».

rozsnövénykék felhasználása származik a NEUBAUER-féle elgondolásból. E mellett az eljárás önkéntelenül azt az újabban egyre inkább elterjedő elvet is kielégítené, hogy nem elégedhetünk meg a talajban meglevő táplálóanyag mennyiségének megállapításával, hanem a gyakorlatra nézve ennél még szinte fontosabb megállapítani, hogy *a talajban a táplálóanyagból mennyi hiányzik még ahhoz, hogy a növény a lehető legnagyobb termést adja* (10, 21). De ehhez még két követelményt kellett kielégíteni; nevezetesen olyan számadatot megállapítani, amely a talaj hasznos nitrogénszükségletét egyetlen számmal jellemezze, továbbá pedig, hogy az enzimes módszert valamely bevált eljárással ellenőrizhessem. Az előbbi követelmény kielégítésére kísérleteink alapján bevezetem a

*nitrogénszám*

fogalmát, amelyet röviden $Nn$-nel (= «nitrogén-numerus») jelölök. A második követelmény megvalósítása végett módszeremet egy kísérletsorozatban a MITSCHERLICH-féle tenyészedénykísérlettel ellenőriztem.

## A nitrogénszám.

Kiszámítására felhasználom azt a viszonyt, amely valamely talajban nőtt, teljesen, illetve nitrogén pótlása nélkül (de egyébként teljesen) táplált, 17 napos rozshajtások invertázkoncentrációja között fennáll; ennélfogva a nitrogénszám kifejezi, hogy a talaj nitrogéntartalma a rozshajtásokban hány %-át idézte elő annak az invertázmennyiségnek, amely nitrogénnel bőségesen ellátott rozshajtásokban létesülhet. De, minthogy az invertáztartalom függvénye a tápláló közeg nitrogéntartalmának, *a nitrogénszám a talajnak hasznos nitorogénnel való ellátottságát olaj talaj hasznos nitrogén-%-ában fejezi ki, amelyben bőven van nitrogén.* Ennélfogva kifejezi azt is, hogy körülbelül mennyi nitrogént kell pótolni a talajban.

Ha $If_T$=a teljes táplálású rozshajtások invertázkoncentrációja

$If_{-N}$ = a nitrogén pótlása nélkül nőtt rozshajtások invertáz koncentrációja, akkor:

$$Nn = \frac{100\ If_{-N}}{If_T}$$

Eddigi kísérleteim szerint a *Nn* értékei körülbelül a következőképpen alakulnak:

**1. táblázat.**

| *Nn* | A talaj | |
|---|---|---|
| | *N*-igénye | *N*-állapota |
| < 50 | nagy, | szegény, |
| 50 — 70 | közepes (vagy csekély) | közepes (vagy közel kielégítő), |
| > 70 | nincs | többé-kevésbbé gazdag |

A *Nn* e gyakorlati értékelésének számértékeit eleinte magasabbra szabtam. A *Nn* ugyanis képlete értelmében %-ot jelent és mint ilyen 100-on felül a *N*-igény hiányát jelenthetné. Azonban a kísérleteink közben szerzett tapasztalatok, pl. éppen a MITSCHERLICH-féle kísérlet is arra indított, hogy MAKFALVI k. a. javaslata értelmében a fent közölt számértékekben állapodjam meg.

A *Nn* módot nyujt arra is, hogy belőle kiszámíthassuk a talajban levő hasznos nitrogén hozzávetőleges mennyiségét, amire később (18. oldal) fogok kitérni.

A módszerünkkel kiszámított *Nn* pontossága egyelőre még tökéletesítésre szorul. A *Nn* ugyanis függ az enzimmeghatározás pontosságától, amely az exakt kémiai módszerekét még nem éri el. Az enzim mennyisége ugyanis egész sor tényezőtől függ, amelyek mindnyáját talán még nem is ismerjük. Évek óta folyó kísérleteinkből ugyanis kitűnt, hogy az enzim mennyiségét individuális különbségek, továbbá a tenyésztési hőmérséklet, a fény, a növények kora stb. szabályozzák. A fény hatása pl. kifejezésre jut abban, hogy téli kultúrák *If*-je teljes táplálás mellett 10—20 egység között ingadozik, nyáriaké 25—30 között. Ezek a különbségek azonban nagyobbára kiküszöbölődnek azáltal, hogy a teljes és a *N*-től mentes kultúrákat okvetlenül egyszerre tenyésztjük. Minthogy pedig a *Nn viszonyszám*, az említett tényezők hatása meglehetősen kizárható. Így az *If* közepes hibája gyakran 10—20% között mozog, de akárhányszor csak néhány %-ig terjed. Erre nézve tájékoztatásul a következő táblázatot mutatom be:

**2. táblázat.**

| A párhuzamos meghatározások száma | If. $10^3$ átlag | Közepes hiba | |
|---|---|---|---|
| | | $\pm m$ | $m$ % |
| 5 | 34·4 | $\pm$ 1·43 | $\pm$ 4·2 |
| 5 | 42·7 | $\pm$ 1·15 | $\pm$ 2·7 |
| 10 | 21·4 | $\pm$ 0·47 | $\pm$ 2·2 |

## KISÉRLETI MÓDSZEREK (22).

### I. A talaj elemzése:

1. Az *iszapolást* ATTERBERG szerint végeztük.

2. A *hidrogénionkoncentrációt* elektrometeresen chinhydron-elektróddal mértük.(23)

3. *Víztartalom*: 5 g talajt szárítószekrényben 105°-on szárítottunk a súly állandóságáig (kb. 8 ó.).

4. A *karbonát* SCHEIBLER szerint.

5. A foszfátot és káliumot NEUBAUER (18) eljárása szerint határoztuk meg.

6. Az *összes nitrogén* mennyisége: 5 g talajt KJELDAHL-lombikban 15 cm³ 2%-os szalicilkénsavval félóráig állni hagyunk, majd 10 g nátriumtioszulfátot adunk bele és további félóráig állni hagyjuk. Azután roncsoljuk még 20 cm³ kénsavval, rézszulfátot és káliumszulfátot (kb. 5—10 g) beletéve. Majd lúgossá téve, 20 cm³ 0·1*n* kénsavba desztilláljuk (FOERSTER eljárása) (24).

7. A *nitrát* BLOOM és TRESCHOW (25) módszerével került meghatározásra. Ez a módszer a *m*-1—3—4-xylenol nitrálásán a jelenlevő nitrát által alapszik; a létesült nitro-*m*-xylenolt ledesztilláljuk és kolorimeterben sztandard-oldattal mérjük. Az eljárás szerint 100 g talajt leöntünk 200 cm³ 1%-os timsóoldattal és pontosan félóráig gyakori rázás közben állni hagyjuk. Szűrjük, a szűredékből 40 cm³-t 400 cm³-es gömbölyű lombikban 60 cm³ 66·7%-os kénsavval, hűtés közben, elegyítünk. Ezután 4—5 csepp 5%-os káliumpermanganátot adunk hozzá és a lombikot bedugaszolva, forró vízben roncsoljuk mintegy 15—20 percig, a maradék $KMnO_4$-ot 1—2 cm³ *n*/50 oxálsavval színtelenítjük el. Kihűlés

után 2 órára 0·1 cm³ xylenollal (jól elzárva) körülbelül 30°-os termosztátba helyezzük. Lehűlés után 150 cm³ vízzel keverjük, a nitroxylenolt 100 cm³-es mérőlombikban levő 25 cm³ *n*/5 *NaOH*-ba desztilláljuk és félórai állás után komparáljuk.

8. *Ammonia:* 100 g légszáraz talajt 1%-os sósavval 500-as STOHMANN-lombikban a jelig feltöltve és többször felrázva, 24 órai állás után a szűrletből 200 cm³-t nátronlúggal *n*/50 kénsavba desztillálunk; indikátor methylvörös és methylénkék.

9. *Nitrogénszám:* Meghatározására az enzimes módszerrel (l. DOBY és MAKFALVI (1)) 100—100, a szokásos módon csávázott petkusi rozsszemet (vagy valamely más alkalmas növény magvát [1]) a NEUBAUER-féle módszer szerint párhuzamosan egy-egy Neubauer-csészébe elültetünk, amelybe 100 g talajt és e fölé 250 g tiszta kvarchomokot rétegeztünk.

Az 1. csésze 80 cm³ nitrogénes táplálóoldatot kap,
a 2. « 80 cm³ nitrogéntől menteset. A tápláló oldatok:

| | 1 liter oldatban: | | |
|---|---|---|---|
| | 1) teljes | 2) *N*-től mentes | |
| $KNO_3$ | 2·6780 g | — | |
| $NaNO_3$ | 3·8200 « | — | |
| $Ca(H_2PO_4)_2$ | 1·4780 « | 1·4780 | « |
| $K_2SO_4$ | — | 2·3100 | « |
| $Na_2SO_4$ | — | 3·1920 | « |

Egyenlő ápolás mellett 17 nap mulva learatjuk a növénykéket, gyökerüket levágjuk és a hajtásokat 9-szeres nemnyiségű vízzel teljesen egyenletes szuszpenzióvá dörzsöljük. Ezt a szuszpenziót használjuk fel a nádcukor hidrolízisére a következő összeállítású folyadékban:

20 cm³ enzimes szuszpenzió,
25 « 10%-os nádcukoroldat,
5 « 0·2 n acetátos tompító oldat,
1·5 cm³ toluol.

[1] Intézetemben most folynak kísérletek oly növényi magvak használatára, amelyek hazai származásúak és céljainkra alkalmasabbak.

A szuszpenziót és a hidrolizáló oldat többi részét külön-külön 38°-ra hevítve, elegyítjük és termosztátban 38°-on tartjuk. Ebből az oldatból rendszerint 30, 60 és 240 perc mulva kivett mintában meghatározzuk az invertáz koncentrációját a következően végrehajtott derítéssel:

10 $cm^3$ hidrolizáló oldat,
2 « bázisos ólomacetát,
4 « 10 %-os nátriumkarbonátoldat.

Lecentrifugálva szűrt sárga fénysugárban polározzuk. A reakciósebességi állandó:

$$k = \frac{1}{t.0{\cdot}4343} \log. \frac{\alpha_0 - \alpha_\infty}{\alpha - \alpha_\infty},$$

($t$ = a hidrolizis időtartama percekben,
$\alpha_0$ = az oldat kezdeti polározása,
$\alpha_\infty$ = a végső polározás,
$\alpha$ = a $t$ időben elért polározás).

Ebből Euler (26) szerint az invertáz koncentrációjával arányos szám:

$$If \,.\, 10^3 = \frac{\text{k. nádcukor g}}{\text{szárazanyag g}}$$

A teljes és nitrogéntól mentes rozshajtások $If$-értékeiből a $Nn$:

$$Nn = \frac{100 \,.\, If_{-N}}{If_T}$$

## II. A növények elemzése.

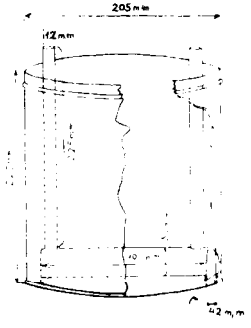
1. *Szárazanyag:* Néhány órai 60°-os előszárítás után 105°-on súlyállandóságig szárítva.

2. *Összes N:* Foerster fenn leírt eljárása szerint a Parnass—Wagner-féle mikromódszerrel.(27)

3. *Nitrát:* Bloom és Treschow eljárásával, mint előbb.

## III. MITSCHERLICH-féle kísérlet.

1932 nyarán végeztem munkatársaimmal együtt, mégpedig 40 olyan tenyészedényben, amilyeneket a német Káliszindikátus kísérleti intézetében használnak[1] (l. a mellékelt rajzot). Ezek az edények zománcos bádogból készültek; átmérőjük 20 cm, magasságuk 22 cm; az eredeti MITSCHERLICH-féle edényektől abban térnek el, hogy az edény nem áll lapos csészében, hanem az edény belsejébe, fenekére az átmérő irányában olyan betétet állítunk, amely a fenék felé nyitott félhenger. Ebből kétoldalt merőlegesen egy-egy cső vezet a talaj felső színvonala fölé. Az edénybe először annyi kavicsot teszünk, hogy a belehelyezett betétet befedjük vele; az így egyenlő súlyúra kitárált edények mindegyikébe 6 kg talajt teszünk, amelyet a szokásos módon előkészítettünk és táplálóanyaggal elláttunk. Ez az edény a vízzel való ellátást a réginél jobban oldja meg, mert a vizet az oldalcsövek egyikén pótoljuk, minélfogva a víz alulról emelkedik a talajba és így nem iszapolja a talajt. Öntözésre desztillált vizet használtunk. A két oldalcső a talaj szellőzését is megoldja.




A táplálási csoportok a következők voltak:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | csoport, | 10 | edény, | $\theta$ | külön | táplálással |
| II. | « | 10 | « | $PK$ | « | « |
| III. | « | 10 | « | $PKN$ | « | « |
| IV. | « | 5 | « | $N$ | « | « |
| V. | « | 5 | « | $PK2N$ | « | « |

Táplálóanyag gyanánt edényenként a következő mennyiségeket használtuk:

$P = 5{\cdot}6$ g szuperfoszfát ($= 1{\cdot}0$ g $P_2O_5$),
$K = 2{\cdot}8$ « $K_2S_4O$ ($= 1{\cdot}5$ g $K_2O$),
$N = 7{\cdot}0$ « $Ca(NO_3)_2$ ($= 1{\cdot}2$ g $N$).

[3] Az edények leírását dr. ALTEN FR. Úr, a Káliszindikátus igazgatója magánközlésének köszönöm.

A szuperfoszfátot por alakjában, a másik két tápláló sót oldottan adtuk.

Talaju a Római Fürdő területéről való, gyengén humuszos és enyhén lúgos homokos talajt használtam, amelynek jellemző adatai a következők:

**3. táblázat.**

| | | |
|---|---|---|
| Iszapolási adatok: | agyag | 1·3 % |
| | iszap | 3·2 « |
| | finom homok | 6·7 « |
| | durva homok | 88·6 « |
| | Összesen | 99·8 % |
| Víztartalom | | 11·70 % |
| Karbonát | | 4·51 « |
| Vízkapacitás | | 38·5 « |
| *pH* vízben | | 7·63 |
| *pH KCl*-ban | | 7·20 |
| Hasznos $P_2O_5$ mg (Neubauer) | | 2·31 |
| « $K_2O$ « (Neubauer) | | 19·20 |
| $N$ $H_3N$ gyanánt, mg/100 g talaj | | 5·2 |
| $N$ $NO_3$ « « « « | | 1·5 |
| $N$ Összes | | 0·044% |
| $Nn = 34$ | | |

Az adatokból kitűnik, hogy a talaj táplálóanyagokban, nevezetesen *N*-ben is szegény.

Kísérleti növényül tisztán kitenyésztett búzát használtam, amelyet Kerpely l. tag Úr szívességének köszönhetek.

Az edényeket az intézet kísérleti üvegházának guruló asztalán helyeztem el és lehetőleg a szabadban tartottam. Csak esős időben tolattam az üvegházba, hogy a növények vízellátását az eső ne zavarja.

## IV. Szabadföldi kísérletek.

E kísérletek adatai közül csak a *Nn* és az ammonia lett intézetemben meghatározva. Maguk a kísérletek a Földmívelésügyi

Minisztérium fennhatósága alatt 1933-ban végzett országos péti-só kísérletek közül valók, amelyeknek végrehajtása leírását és néhány megjelölt adatot az Orsz. Chemiai Intézet szívességéből kaptam meg. Ezek közül az adatok közül bennünket a következők érdekelnek:

A kísérleteket a sztandard-módszer szerint az ország legkülönbözőbb vidékein állították be a következő elrendezésben, háromszoros ismétléssel: *NPK*, *O*, *PK*, *NP*, *NK*, *O*, *P* (vagy *N*); ez után az egész sor még kétszer megismétlődött. A parcellák kalászosokkal 400—500 négyzetöl, burgonyával és cukorrépával 100—200 négyzetöl nagyságúak voltak. A nitrogént péti-sóként, a káliumot 40%-os káliként (mind a kettőből 60—75 kg-ot/kat. hold), a foszfort szuperfoszfátként (150 kg/kat. hold) adták. A kísérleteket elsőrangú szakemberek bizottsága ellenőrizte, úgyhogy ezeket a legnagyobb gonddal hajtották végre, illetve állapították meg és gyüjtötték az adatokat.

## KISÉRLETI EREDMÉNYEK.

### MITSCHERLICH-féle kísérlet.

A MITSCHERLICH-féle kísérletet különböző elháríthatatlan akadályok miatt — sajnos — csak nagyon későn, május végén kezdhettük, aminek következtében a termésredmények nem voltak oly kedvezők, amilyenek rendes körülmények között lehettek volna. Utóbb OPITZ és RATHSACK (28) külön e kérdés tanulmányozására végzett kísérletekben kimutatta, hogy MITSCHERLICH-kísérletek termései a rendesnél későbbi vetéstől kisebbekké válnak, kivált ha nitrogénben *nem* szenvednek hiányt. Ennélfogva a felvehető nitrogénnek a talajban ilyetén kiszámított mennyisége (b) nagyobbnak tűnik, sőt valószínűnek mondják, hogy az oldható nitrogén mennyisége valóban nő, ami a baktériumos tevékenység növekedésénél fogva a nyár folyamán természetes is. RHEINWALD (29) a nitrifikálás növekedésétől származó nitrátgyarapodást ki is mutatja. A növények a rendesnél valamivel korábban értek, amit OPITZ és RATHSACK késői vetés után szintén tapasztalt és amihez az 1932-i nyár többhetes, rekkenő hősége is hozzájárult.

A vetés ideje 1932. május 30., az aratásé augusztus 5. volt.

A terméseredmények mindazonáltal jól egyeztek, amint a 4. táblázatból kitűnik:

**4. táblázat.**

| Csoport | Növények száma edényenként[4] | Növények súlya edényenként[4] sz. a. g | Termés % |
|---|---|---|---|
| *O* | 34 ± 0·33 | 7·87 ± 0·16 | 100 |
| *PK* | 34 ± 0·28 | 8·36 ± 0·08 | 106 |
| *PKN* | 35 ± 0·01 | 11·19 ± 0·15 | 142 |
| *N* | 34 ± 1·08 | 10·44 ± 0·51 | 133 |
| *PK?N* | 34 ± 0·77 | 11·53 ± 0·10 | 147 |

Ezekből az adatokból a MITSCHERLICH-féle képletekkel kiszámított legnagyobb, elérhető termés (A) és a talajban eredetileg meglevő hasznos *N* mennyisége (b) a következő:

**5. táblázat.**

| Mely csoportokból számítva | 1 edényben | | Középérték | |
|---|---|---|---|---|
| | A | b | A | b |
| *O* és *N* | 16·8 g | 2·24 g | *17·5 g* | *2·22 g* |
| *PK* és *PKN* | 18·2 « | 2·19 « | | |

Az elérhető legnagyobb termések tűrhetően egyeznek, a talajban eredetileg meglevő hasznos *N* mennyisége (b) azonban kifogástalanul. E szerint a talajban eredetileg 0·037% hasznos *N* volt, ami a talaj összes *N*-jének (0·045%) 82%-át teszi ki.

A termések táblázatából láthatjuk, hogy a *P* és *K* pótlása nitrogén nélkül a termésben alig okozott gyarapodást, amiben különben a késői vetés folytán beállott túlkorai érésnek is lehet része. Ezzel szemben a *N* egyszeres adagja tetemesen, 33%-kal

[4] A gyakorlati közepes hibát az $m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}}$ egyenlet szerint számítottam ki, amelyben $v$ = eltérés az átlagtól.

növelte a termést, ellenben a $N$ kétszeres adagjának alig volt hatása. Ez részben ismét a korai érés következménye lehet, részben a túlnagy $N$-adag ismert (3,29) terméstcsökkentő hatása.

## A talaj táplálóanyagainak változása a kísérlet alatt.

Meghatároztuk azután azokat a mennyiségeit a táplálóanyagoknak, amelyek a termés learatása után, a talajban, mint könnyen felvehető táplálóanyagok megmaradtak (6. táblázat).

**6. táblázat.**

| Csoport | $P_2O_5$ mg (Neubauer) | | $K_2O$ mg (Neubauer) | | $pH$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | vetéskor | aratáskor | vetéskor | aratáskor | $H_2O$ | $KCl$ |
| *O* | 2·3 | 1·3 | 19·2 | 19·4 | 7·63 | 7·20 |
| *PK* | 12·7 | 10·9 | 59·3 | 66·0 | 7·05 | 6·88 |
| *PKN* | 11·0 | (11·4) | 54·8 | 56·0 | 6·94 | 6·79 |
| *N* | 2·1 | 1·2 | 21·5 | 20·3 | 7·31 | 7·08 |
| *PK2N* | 12·5 | 10·9 | 50·9 | 47·4 | 6·91 | 6·81 |

A *pH számértékei* szerint a műtrágyázás, nevezetesen a $P$ és $K$ a talajt már a kísérlet beállításakor kissé savanyította, kivált az összes táplálóanyagok pótlásakor. Aratáskor ezek a számértékek gyakorlatilag ugyanazok maradtak.

*A P és K meghatározott mennyisége* a különböző csoportokban vetéskor jól egyezően követi a táplálóanyagok adott mennyiségét. A $P$ a növények fejlődése során (a $PKN$-csoport egyetlen kivételével, ami nyilván kísérleti hiba) természetesen csökkent. A $K$ mennyisége — néhány kivétellel — szintén csökkent. A növekedés, amely a 0-, a $PK$- és a $PKN$-csoportban jelentkezik, oly csekély, hogy kísérleti hiba lehet, bárha az sem lehetetlen, hogy baktériumos feltárás következménye, azonban semmiesetre sem jelentős.

Bennünket azonban ezekben a kísérletekben főként *a hasznos N mennyisége* érdekel, mégpedig különösen az, hogy a mennyiség változását miként jelzi a $Nn$. Ezt, balamint a talaj összes $N$-mennyiségét a 7. táblázat mutatja:

**7. táblázat.**

| Csoport | *Nn* | | | Változás vetéstől aratásig | |
|---|---|---|---|---|---|
| | vetéskor | aratáskor | aratás után 2 hónappal | *Nn* | *Nn* % |
| *O* | 34 ± 3·6 | 31 | 47 | — 3 | — 9 |
| *PK* | 34 ± 4·8 | 33 | 48 | — 1 | — 3 |
| *PKN* | 59 ± 3·0 | 37 | 56 | —22 | —37 |
| *N* | 56 ± 5·3 | 42 | 52 | —14 | —25 |
| *PK2N* | 76 ± 1·4 | 54 | 58 | —22 | —29 |

Összes *N* % a talajban:

| | Talált | Számított | | Változás összes *N*% |
|---|---|---|---|---|
| *O* | 0·045 | 0·048 | 0·056 | + 24 |
| *PK* | 0·051 | 0·048 | 0·058 | + 14 |
| *PKN* | 0·075 | 0·068 | 0·089 | + 19 |
| *N* | (0·056) | 0·068 | 0·087 | — |
| *PK2N* | 0·087 | 0·088 | 0·092 | + 6 |

A táblázatból kitűnik, hogy a *Nn vetéskor* a különböző csoportolkban a *N*-táplálással közel arányosan növekszik. Hogy a párhuzamosság hasonlóságát az összes *N*-nel és a termés arányával összehasonlítsuk, a fenti mennyiségeket arányszámokban fejezem ki (8. táblázat):

**8. táblázat.**

| Meghatározások | | Arányszámok | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *O* | *PK* | *PKN* | *N* | *PK2N* |
| *Nn* | | 1 | 1 | 1·7 | 1·6 | 2·2 |
| Összes *N* (talajban) | talált | 1 | 1·1 | 1·7 | — | 1·9 |
| | számított | 1 | 1 | 1·4 | 1·4 | 1·8 |
| Termés | | 1 | 1 | 1·4 | 1·3 | 1·5 |

Látszik, hogy a *N*-számok arányszámai a nitrogénes táplálás által erősebben növekednek, mint a termések arányszámai, ami

nyilván a kedvezőtlen külső hatások következménye. Ellenben a talaj összes nitrogéntartalmának arányszámaival elég jól egyeznek.

Ha most (a 7. táblázatban) a *N-es adatok* változását *a növények fejlődése során* vizsgáljuk, látszik, hogy a *Nn*, tehát a talaj hasznos *N*-tartalma, a vetéstől az aratásig csökken; a nitrogéntől mentesekben 3—9%-kal, a *N*-tartalmuakban 25—37%-kal. Ez természetesen a növények felvette *N* mennyiségét jelzi. Látszik, hogy a *N*-t nem kapott növények aránylag kevesebb *N*-t vettek ki a talajból, mint a nitrogénesek, ami nyilván az aránylagosan is rosszabb fejlődés hatása. E jelenség folytán a *Nn*-ok értékei aratáskor alig mutatnak egymástól különbséget. Ezzel szemben *az összes N mennyisége a talajban* a növények fejlődése során emelkedett, mégpedig az eredeti *N*-tartalomnak 6—24%-ával. Valószínűnek kell tartani, hogy az összes *N*-nek ez az emelkedése *N*-gyüjtés következménye, amit alátámaszt, hogy aratás után (2 hónappal utána meghatározva) a *Nn*-ok is, tehát a hasznos *N* mennyisége is nagyobbodtak. A *N*-vegyületek közül a növények fejlődése során tehát a hasznosak mennyisége csökkent, míg az összes *N*-é növekedett.

## A *N*-szám és a termett növények *N*-tartalma.

Arra lehetett gondolni, hogy a növények különböző *N*-es táplálása szabályozni fogja a különböző csoportok talajain nőtt növények *N*-tartalmát, mégpedig a kísérleti búzanövényekben, valamint a *Nn*-hoz való tenyészetek rozshajtásaiban egyaránt. Erről a következő táblázat mutat adatokat (9. tábl.):

**9. táblázat.**

*A buzanövényekben.*

| Csoport | *N* % a búza száraz-anyagában | Arányszámok | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Nitrogéntartalom | | *Nn* |
| | | búza | talaj | |
| *O* | 1·67 | 1·0 | 1·0 | 1·0 |
| *PK* | 1·57 | 0·9 | 1·1 | 1·0 |
| *PKN* | 2·21 | 1·3 | 1·7 | 1·7 |
| *N* | 2·54 | 1·5 | — | 1·6 |
| *PK?N* | 2·84 | 1·7 | 1·9 | 2·2 |

**10. táblázat.**

*A 17 napos rozsnövénykékben.*

| Csoport | Vetéskor | | | | | Aratáskor | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Szárazanyag 1 tenyészetben | *N* mint nitrát | | *N* összes | | Szárazanyag 1 tenyészetben | *N* mint nitrát | | *N* összes | |
| | g | % | mg 1 tenyészetben | % | mg 1 tenyészetben | g | % | mg 1 tenyészetben | % | mg 1 tenyészetben |
| *O* | 1·50 | 0·084 | 1·3 | 3·01 | 45·0 | 1·09 | 0·073 | 0·8 | 2·79 | 30·4 |
| *PK* | 1·48 | 0·090 | 1·3 | 2·87 | 42·5 | 0·93 | 0·097 | 0·9 | 2·93 | 27·2 |
| *PKN* | 1·70 | 0·077 | 1·3 | 3·00 | 51·0 | 1·11 | 0·076 | 0·84 | 2·88 | 32·0 |
| *N* | 1·52 | 0·084 | 1·3 | 2·75 | 41·8 | 1·29 | 0·051 | 0·68 | 2·92 | 37·7 |
| *PK?N* | 1·68 | 0·092 | 1·5 | 3·59 | 60·3 | 1·26 | 0·112 | 1·41 | 3·32 | 41·9 |

*A búzanövények nitrogéntartalma* a talaj nitrogénműtrágyázásának határozott függvénye. Ha azonban a nitrogéntartalom arányszámait összehasonlítjuk a talaj összes nitrogéntartalmával, itt is, nevezetesen a nitrogénes edényekben eltérések vannak. A talaj nitrogéntartalmának és a *Nn*-nak arányszámai sokkal jobban egyeznek. Amíg azonban a búzában határozottan meglátszik, hogy a nitrogéntartalom függvénye a nitrogénes táplálásnak, addig a *rozshajtásokban*, amelyek egészen fiatalok, sem az összes, sem a nitrátnitrogénben jellegzetes különbségek nincsenek, legfeljebb a búza aratásakor tenyészett rozshajtásokban a kétszeresen adagolt nitrogén hatása látszik meg, azonban ez is csak némileg, távolról sem a táplálás arányában. Ebből nyilvánvaló, amit már Blanck és Scheffer (19) megállapított, hogy a talaj nitrogéntartalmának meghatározására a Neubauer-féle eljárás nem alkalmas. [1]

[1] E vizsgálatok során meghatározásra került a búza fejlődésének 7. hetében a *O*-, *PK*- és *PKN*-csoport növényeinek nitrogéntartalma, amelyet a 0-ban 2·47, a *PK*-ban 2·34, a *PKN*-ben 3·38%-nak találtunk. Ebből kitűnik, amit más szerzők, pl. Rippel és Meyer (3), (30) is megállapítottak, hogy ugyanis a növény aránylagos nitrogéntartalma a fejlődés során csökken.

## A talaj hasznos *N*-tartalmának kiszámítása a *N*-számból.

A *Nn* annak az alapvető feladatnak a megoldását is lehetővé teszi, hogy belőle a hasznos *N*-nek a talajban meglevő mennyiségét kiszámítsuk, amihez természetesen előbb ismernünk kell a *Nn* *N*-egyenértékét. A MITSCHERLICH-féle kísérlet erre a következő módot adta:

Minden *N*-es edénybe 1·2 g nitrát-*N*-t adtunk, ennélfogva a *N*-csoportban a 0-csoporthoz képest 1·2 g hasznos *N*-nel van több, éppígy a *PKN*-csoportban a *PK*-hoz képest, ami 6 kg talajt számítva, 0·02% (illetve a *PK2N*-ben 0·04%) hasznos *N*-többletet jelent. Ez okozza a *Nn*-ban azt a különbséget, amely a *N*-től mentes és a *N*-es csoportok *N*-számaiban mutatkozik. A *Nn*-nak ez a különbsége a *N*- és 0-csoportból számítva 22, a *PKN*- és *PK*-csoportból számítva 25. E különbségekkel elosztva a 0·02%-ot, megkapjuk a *Nn* *N*-egyenértékét a talaj %-ában kifejezve (11. táblázat).

**11. táblázat.**

| Csoport | *Nn* | Különbség a *N*-től mentes-hez képest | Adott nitrát-*N* % 6 kg talajban | 1 *Nn* = hasznos *N* % |
|---|---|---|---|---|
| *O* | 34 | — | — | — |
| *PK* | 34 | — | — | — |
| *PKN* | 59 | + 25 | 0·02 | 0·0008 |
| *N* | 56 | + 22 | 0·02 | 0·0009 |
| *PK2N* | 76 | + 42 | 0·04 | 0·00096 |

Látjuk, a *N*-szám *N*-egyenértékei jól egyeznek, holott a különböző csoportoknak egymástól független eredményeiből számítottam ki. Középértékben tehát:

$$1\ Nn = 0{\cdot}0009\%\ \text{hasznos}\ N.$$

Ezzel az alapértékkel most kiszámíthatjuk a *Nn*-okból, mennyi valamely talajban a hasznos *N*. Kísérletünk adatait különbözően felhasználva, a következő eredményekhez jutunk (12. táblázat):

**12. táblázat.**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Csoport | *Nn* | A *PKN-PK*-különbségből számítva | | | A *N-O*-különbségből számítva | |
| | | Hasznos *N* % a talajban | | | Hasznos *N* % a talajban | |
| | | MITSCHERLICH szerint és az adott *N* % szerint | a *Nn*-ból számítva | Csak a *Nn*-ból számítva | MITSCH. szerint és a *Nn*-ból számítva | Csak a *Nn*-ból számítva |
| *O* | 34 | *0·037* [1] | 0·037 [2] | 0·031 [4] | 0·037 [2] | 0·031 [4] |
| *PK* | 34 | *0·037* | 0·037 [2] | 0·031 | 0.037 [2] | 0·031 |
| *PKN* | 59 | *0·057* | 0·060 [3] | 0·053 | 0·057 [3] | 0·050 |
| *N* | 56 | *0·057* | 0·060 [3] | 0·050 | 0·057 [3] | 0·050 |
| *PK2N* | 76 | *0·077* | 0·075 [3] | 0·068 | 0·077 [3] | 0·068 |

A táblázat adataiból mindenekelőtt azt látjuk, hogy ha a *N*-számok adatait az alapvető MITSCHERLICH-adattal kombináljuk, a leghelyesebb adatokat kapjuk, mégpedig a *N*—0 különbségből számított értékeket felhasználva, a kapott adatok (6. oszlop) teljesen megegyeznek a helyesnek feltételezett MITSCHERLICH-adatokkal (3. oszlop), míg a *PKN*—*PK*. különbséggel számítottak (4. oszlop) valamivel eltérnek. Ha a MITSCHERLICH-féle adatokat egészen figyelmen kívül hagyjuk és *csak* a *Nn*-nal számítjuk ki a hasznos *N* mennyiségét, akkor ennek adatai (5. és 7. oszlop) egymás között csaknem megegyeznek, de a helyes adatoktól (3. oszlop) is csak kissé térnek el. Ez az eltérés még mindig oly csekély, hogy a gyakorlatban nincs jelentősége és a legmeggyőzőbb ok arra, hogy *a Nn-ot a kívánt célra, a talaj hasznos N-mennyiségének a meghatározására alkalmasnak kell mondanunk.*

---

[1] Ennek az oszlopnak adatai a helyesnek elfogadott értékek, a MITSCHERLICH-kisérletben megállapitott adat, hozzászámitva a *N*-tartalmu kulturákban hozzáadott nitrát-*N*-t.

[2] A MITSCHERLICH-kisérlettel megállapitott hasznos *N*%.

[3] A MITSCHERLICH-féle alapértékhez hozzáadva azt a *N*-mennyiséget, amelyet a kétféle csoport (*O* és *N*, illetve *PK* és *PKN*) *Nn*-ának különbségéből a *N*-egyenérték felhasználásával ki lehetett számitani.

[4] Az adatok szorzatai a *N*-számoknak 0·0009-cel.

Kétségtelen azonban, hogy a *Nn*-ból feljebb kiszámított «hasznos nitrogén»-értéket egyelőre csak hozzávetőlegesnek lehet tekinteni. Így kell tenni nemcsak azért, mert csak egyetlen talajjal kísérleteztünk,[1] hanem mert a késői vetés a MITSCHERLICH-féle kísérletekben OPITZ és RATHSACK (28) vizsgálatai szerint könnyen a *b*-adatnak a valóságnál magasabb értékéhez vezethet.

További tájékozódás végett megkíséreltem, hogy annak a 17 magyar talajnak *Nn*-át és hasznos nitrogén-értékeit is kiszámítsam, amelyeknek invertáz-koncentrációs értékeit a MAKFALVIval együtt közrebocsátott korábbi közleményben felsoroltuk. Akkor még nem volt megállapítva a *Nn* fogalma, ennélfogva a nitrogén egyenértékének mostani értéke sem. Ezt most a 13. táblázatban pótlom, feltüntetve egyúttal az akkor már levont következtetést és összehasonlításul a *Nn*-ból alkotott megítélést.

A táblázatból kitűnik, hogy e változatos sorozatban mily világosan jellemezhető a talaj hasznos nitrogéntartalma a *Nn*-mal. A belőle kiszámított hasznos nitrogéntartalom szükséges mennyisége (körülbelül 63 mg) ama két számadat közé esik, amelyet a nitrát- és ammonia-nitrogén szükséges mennyiségére NEMEC 75 mg) és VÁRALLYAY (50 mg) felállított.

## Összehasonlítás szabadföldi kísérletekkel.

Kívánatos volt, hogy a *Nn* eljárásának eredményeit a szabadföldön végzett műtrágyázási kísérletek eredményeivel is összehasonlíthassuk. A módot erre 'SIGMOND akadémiai r. tag úr közvetítésére a földmívelésügyi minisztérium kísérletügyi ügyosztálya adta, amidőn szíves volt a «péti só»-val végzett országos kísérletek néhány talajmintáját nekem terméseredményeikkel együtt beküldetni. A talajmintákban meghatároztuk a *Nn*-ot és az ammonia mennyiségét. A terméseredmények métermázsákban megadott mennyiségét a talajegyenetlenségek következményeinek kiküszöbölése végett kiegyenlítő számítással átszámítottam és az így kapott eredményeket a nullás parcellák termésének százalékában fejeztem ki. Két-

[1] Ilyen MITSCHERLICH-kisérletet másik talajjal az elmult nyáron végeztünk. Adatai most vannak feldolgozás alatt.

## 13. táblázat.

15 magyar talaj nitrogénszáma és nitrogénigénye.

| Szám | A talaj | | A talaj | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | származása, jellege | *N*-szükséglete (régi vélemény) | *Nn* | hasznos *N*-tartalma mg/100 g | nitrogénigénye |
| 1272 | *Mándok* (Szabolcs m.) barnássárga homok | van | 46 | 41 | van nagy |
| 1277 | *Mándok* barnássárga homok | van erős | 8 | 7 | igen nagy |
| 1287 | *Mándok* szürkéssárga homok | van | 30 | 27 | nagy |
| 1281 | *Mándok* sárga agyagos homok | van | 35 | 31 | nagy |
| 1303 | *Erdőcsokonya* szürke agyagos homok | nincs | 80 | 72 | nincs |
| 1197 | *Csillagtanya* (Bihar m.) sárgásszürke humuszos agyag | nincs | 77 | 70 | nincs |
| 1253 | *Békés* barnásszürke humuszos agyag | mérsékelt | 67 | 60 | nagyon csekély |
| 1369 | *Békés* mint az előző | van | 28 | 25 | nagy |
| 1372 | *Békés* sárgásszürke humuszos agyag | nincs | 78 | 70 | nincs |
| 1283 | *Mándok* sárgásbarna humuszos vályog | van | 46 | 41 | nagy |
| 1478 | *Karácsond* barnásszürke kevés humuszos vályog | nincs | 70 | 63 | nincs |
| 1471 | *Tyukod* tőzeg | *N*-bőség! | 144 | 130 | nincs (*N*-bőség) |
| 1251 | *Békés* szürkés humuszos agyag | van | 51 | 46 | van |
| 1453 | *Árpádhalom* (Csongrád m.) barnás humuszos vályog | nincs | 90 | 85 | nincs |
| 880 | *Ács* erősen humuszos vályog | mérsékelt | 60 | 54 | kevés |

## 14. táblázat.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A talaj | | | Műtrágyázás | Termés % | $N$ mg/100 g talaj | | | $Nn$ [1] | Hasznos $N$ a $Nn$-ből számítva mg/100 g talaj [1] | Összes $N$-ben hasznos $N$ % [1] | A talaj nitrogénigénye | |
| száma | származása, jellege | $pH$ (növény) | | | összes | $NO_3$ | $H_3N^1$ | | | | a termés alapján | a $Nn$ alapján |
| 47 | *Nagygeresd* (Sopron m.) mezőségi talaj, humuszos vályog | 7·8 (búza) | *O* | 100 ± 1·9 | 217 | 10·0 | 9·1 | 67 ±10 % | 60 | 28% | Nagyon csekély | Nagyon csekély |
| | | | *P* | 107 ± 1·8 | | | — | | | | | |
| | | | *PK* | 110 ± 3·5 | | | — | | | | | |
| | | | *NP* | 108 ± 4·0 | | | 9·5 | | | | Nagy nitrogéntartalék | |
| | | | *NK* | 108 ± 3·3 | | | 8·3 | | | | | |
| | | | *NPK* | 110 ± 0·4 | | | 9·3 | | | | | |
| 185 | *Tiborszállás* (Szatmár m.) tőzeg-talaj | 4·8 (rozs) | *O* | 100 ± 1·3 | 222 | 2·4 | 21·7 | 120 ± 0 | 108 | 49% | Nincs | Nincs |
| | | | *P* | 98 ± 3·2 | | | — | | | | | |
| | | | *PK* | 96 ± 3·7 | | | — | | | | | |
| | | | *NP* | 97 ± 0·6 | | | 28·0 | | | | Nitrogénbőség! Nagy nitrogéntartalék | |
| | | | *NK* | 101 ± 3·7 | | | 27·8 | | | | | |
| | | | *NPK* | 103 ± 2·7 | | | 29·4 | | | | | |
| 186 | *Mándok* (Szabolcs m.) erdei talaj, kialakuló mezőségi t., homok | 6·4 (rozs) | *O* | 100 ± 9·2 | 55 | 0·4 | 1·9 | 47 ± 4 % | 39 | 71% | Nagy | Nagy |
| | | | *P* | 101 ± 7·3 | | | — | | | | | |
| | | | *PK* | 96 ± 2·6 | | | — | | | | | |
| | | | *NP* | 118 ±10·1 | | | 2·2 | | | | Csekély nitrogéntartalék | |
| | | | *NK* | 121 ±13·2 | | | 2·0 | | | | | |
| | | | *NPK* | 133 ±13·9 | | | 2·1 | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| XIV | 20 | *Hatvan*<br>mezőségi talaj, humuszos vályog | 8·1<br>(cukorrépa) | *O*<br>*N*<br>*PK*<br>*NP*<br>*NK*<br>*NPK* | 100 ± 2·7<br>103 ± 2·9<br>97 ± 2·0<br>108 ± 6·0<br>102 ± 2·7<br>105 ± 3·4 | 174 | 0·6 | 1·6<br>1·6<br>—<br>1·8<br>1·6<br>2·3 | 59<br>± 4% | 53 | 30% | Csekély \| Csekély<br>Nagy nitrogéntartalék |
| | 4 | *Fót*<br>mezőségi talaj, humuszos vályog | 8·3<br>(burgonya) | *O*<br>*N*<br>*PK*<br>*NP*<br>*NK*<br>*NPK* | 100 ± 3·3<br>98 ± 1·4<br>114 ± 1·5<br>101 ± 2·4<br>107 ± 5·0<br>120 ± 0·6 | 136 | 0·6 | 2·4<br>2·6<br>—<br>2·3<br>2·2<br>2·7 | 41<br>± 0 | 37 | 27% | Csekély \| Nagy<br>Nagy nitrogéntartalék |
| | 107 | *Csév* (Esztergom m.)<br>mezőségi talaj, agyagos vályog | 6·7<br>(zab) | *O*<br>*P*<br>*PK*<br>*NP*<br>*NK*<br>*NPK* | 100 ± 5·1<br>98 ± 3·5<br>100 ± 2·0<br>151 ± 7·5<br>143 ± 8·7<br>128 ± 5·2 | 116 | 0·3 | 1·9<br>—<br>—<br>1·9<br>2·7<br>3·6 | 49<br>±10% | 44 | 38% | Nagy (Ingadozó természeredmények!) \| Nagy<br>Nagy nitrogéntartalék |
| | 52 | *Pereszteg* (Sopron m.)<br>barna erdei talaj, vályog | 7·8<br>(cukorrépa) | *O*<br>*N*<br>*PK*<br>*NP*<br>*NK*<br>*NPK* | 100 ± 1·9<br>107 ± 2·2<br>113 ± 0·6<br>107 ± 1·5<br>106 ± 0·9<br>117 ± 0·0 | 170 | 10·3 | 2·4<br>2·4<br>—<br>2·0<br>2·2<br>0·0 | 70<br>±14% | 63 | 37% | Nagyon csekély \| Nincs<br>Nagy nitrogéntartalék |

[1] Saját meghatározások.

ségtelen, hogy ha a használt nagy parcellák helyett a napjainkban egyre inkább alkalmazott kis parcellák kerültek volna alkalmazásba, a kiegyenlítő számítás a valóságot jobban közelítette volna meg és így a *Nn* ilyetén ellenőrzése megbízhatóbb lenne.

Az összehasonlításra felhasznált adatokat a 14. táblázatban állítottam össze. Két utolsó oszlopából kitűnik, hogy a kétféle, egymástól függetlenül megalkotott vélemény a 7 talaj közül 6-ra nézve teljesen, vagy csaknem teljesen megegyezik, nevezetesen a 47., 185., 186, 20., 107. és 52. talajra nézve.

Ezek közül a 20. és 52. talaj terméseihez néhány megjegyzést fűzök. A 20. sz. talajon a *PK*-parcella termése 3%-kal kisebb, mint a 0-é, ami oly csekély eltérés, hogy alig érdemel figyelmet. Ha a megítélésre nézve legfontosabb két parcella, a *PK* és *NPK* különbségét tekintjük, ez a nitrogénes javára 8%-ot tesz ugyan ki, ami azonban az előbb emlitett ‹koknál fogva csak nagyon kevés többletet jelent. Ezért indokolt a termés alapján való megitélés, hogy a talaj *N*-igénye csekély. — Az 52. talajon szintén a *PK*- és *NPK*-parcellák különbsége döntő, nem pedig a 0- és *N*-parcelláké, mert ez utóbbiakon a *P* és *K* hiányánál fogva hiányzik a tápláló anyagok egyensúlya. Ennélfogva az *NPK* és *PK* 4%-nyi különbsége alapján valóban «nagyon csekély» a nitrogénigény, ellenben a *NP*-nek és *NK*-nak az *NPK*-hoz képest mintegy 10%-nyi hiányánál fogva ezt a talajt *P*-ban és *K*-ban szűkölködőnek kell mondani.

Az eddigiek szerint tehát csak egyetlen talajnak, a 4. számúnak megítélése ellenkező a kétféle módszer szerint. Itt a nitrát- és ammoniatartalom világosan a *Nn*-mal van összhangban, ellenben a terméseredmények nem adnak egészen világos képet. A talaj *N*-igényét egyrészről a 0- és *N*-parcella, másrészről az *NPK*- és *PK*-parcella különbsége világíthatja meg. E két csoportnak a különbsége azonban ellenkező, mert a *N* a 0-hoz képest csökkenti a termést, ellenben az *NPK* a *PK*-hoz képest növeli (6%-kal). Az előző parcellapár kevésbbé alkalmas a döntő következtetésre, mert itt is hiányzik a táplálóanyagok egyensúlya a *P* és *K* hiányánál fogva. A talaj valószínűleg inkább *P*-ban és *K*-ban szenved hiányt, amire az *NP*- és *NK*-parcellák összehasonlítása az *NPK*-val mutat. Lehet, hogy ez a bizonytalanság az eredményekben

annak a következménye, hogy a lúgos talaj nem nagyon alkalmas burgonya termesztésére. Ezek a terméseredmények tehát nem nagyon eshetnek latba a *Nn* hasznavehetőségének elbírálásában.

Ha tehát mindent figyelembe veszünk, akkor a szabadföldi kísérletek 86%-ban teljesen, vagy csaknem teljesen igazolják a *Nn*-ot, 14%-ban ellentmondanak neki, amely utóbbi körülmény azonban a szabadföldi kísérlet bizonytalansága miatt nem döntő.

A táblázathoz még megjegyzem, hogy ha a *Nn*-ból kiszámítjuk a MITSCHERLICH-féle kísérlettel (feltételesen!) megállapított hasznos nitrogén mennyiséget (10. oszlop), ebből és a talaj összes nitrogéntartalmából kiszámíthatjuk, hogy az utóbbinak hány százaléka «hasznos nitrogén» (11. oszlop). Ebből tovább hozzávetőleges fogalmat alkothatunk arról, mekkora a talajnak az a nitrogéntartalma, amely különböző átalakulások révén hasznos nitrogénné válhatik, vagyis mekkora a nitrogéntartaléka (12—13. oszlop). — A táblázat adataiból az is kitűnik, hogy a nitrát- és ammoniatartalom nem ad mindig világos képet a talaj nitrogénigényéről. Az összes nitrogéntartalom semmi esetre sem alkalmas ennek eldöntésére, ellenben tájékozást nyujthat a rendelkezésre álló nitrogéntartalék felől, de akkor ismernünk kell a hasznos nitrogén mennyiségét.

A felsorolt szabadföldi kísérletek újabb bizonyítékot szolgáltatnak arra, hogy hosszadalmasságuk és drágaságuk mellett sem nyujtanak föltétlen biztonságot.

Az eddigiekből mindenesetre kitűnik, hogy a *Nn* fogalmának és meghatározásának bevezetésével remélhetőleg sikerül megközelíteni azt a célt, hogy valamely talaj nitrogénszükségletéről rövid idő alatt tájékozódhassunk. Mindazonáltal teljes tudatában vagyok annak, hogy az új módszer ellenőrzésére felhasznált, itt közölt MITSCHERLICH-féle, valamint a szabadföldi kísérletsorozatoknál jóval nagyobb számú ellenőrzés kell még ahhoz, hogy a módszert megbízhatónak mondhassuk. Épp így csak előzetes tájékozódásnak tartom a *Nn*-nak azt a nitrogénegyenértékét, amelyet ebből az első MITSCHERLICH-féle kísérletből kiszámítottam. Ezenkívül pedig valószínű, hogy ez a módszer is, mint a talaj táplálóanyag-szükségletét megállapító laboratóriumi módszerek általában, nem válik

be bármely talajon. Így pl. alkalmunk volt néhány egyiptomi talajt is megvizsgálni, amelyek egyéb adataik szerint valószínűleg a «tamm», vagy «sszafra» jellegű egyiptomi talajfajták közé tartoztak. (8) Az enzimes módszer e talajokon valószínűtlenül magas adatokat mutatott és így ily, teljesen idegen talajokon nyilván nem alkalmas a nitrogénszükséglet megállapítására.

Valamely talaj nitrogénigényét megállapítani nagyon nehéz és bonyolult feladat, minélfogva ajánlatosnak látszik, hogy *többféle adatból* igyekezzünk felvilágosítást kapni, nevezetesen a *N*-számon kívül figyelembe kell vennünk a nitrát- és az ammoniatartalmat is, de *csak* ezek meghatározása nem elegendő, mert egyoldalú következtetésre vezethet. Ezzel szemben a *Nn* a bármily vegyület alakjában jelenlevő hasznos *N* összes mennyiségéről tájékoztat. Ezenkívül nitrogénszükségletének megítélésére nagyon fontos lesz ugyanazt a talajt különböző évszakokban megvizsgálni, egyúttal pedig a nitrifikálás mértékét NÉMEC és VÁRALLYAY javaslata szerint megállapítani.

Módszerem kidolgozása közben több olyan megfigyelést tehettünk, amelyek a kérdés tisztázásához hozzájárulhatnak s ezért ezeket tovább tanulmányozzuk, így pl. feltűnő különbség látszik a *N*-tartalmú és *N*-től mentes rozskultúrák friss terméseredményeiben, továbbá szárazanyagában, illetve víztartalmában. Szándékom ezenkívül más enzimek, valamint más kísérleti növények viselkedését is mevizsgálni. Így máris vannak vizsgálataink kátálázzal, amely azonban nem bizonyult alkalmasnak. Továbbá kísérletek vannak folyamatban, amelyek az eddigi módszert más módszerekkel hasonlítják össze, ezenkívül pedig peptidázzal és amilázzal is kísérletezünk. Az invertázzal végzett kísérletek közben feltűnt, hogy tőzegtalajok *Nn*-ai általában nagyon magasak szoktak lenni (l. pl. a 21. oldalon az 1471., a 22. oldalon a 185. talajt), amivel az összes és az ammonia-nitrogén magas értékei is megegyeznek. Ezeket a viszonyokat is behatóbban fogom tanulmányozni.

A felvetett kérdések tisztázása kétségtelenül még sok kísérletezést követel,[1] de azért remélni lehet, hogy, ha az előbb említett

[1] Sajnos, a rendelkezésemre álló anyagi eszközök túlságosan csekélyek ahhoz, hogy kísérleteimet az ügy fontossága arányában végezhessem.

különböző eljárásokat a talaj nitrogénszükségletének laboratóriumi megállapítására teljesen kiépítjük és rendszeresen végezni fogjuk, olcsó, gyors és a gyakorlatra nézve mégis kielégítően közelíthetjük meg a végső célt: a talaj nitrogénszükségletét megállapítani.

Nem mulaszthatom el e helyen, hogy köszönetemet fejezzem ki mindazoknak, akik e kísérletek végrahajtását lehetővé tették. Mindenekelőtt az Orsz. Természettudományi Tanácsnak a több éven át kapott támogatásáért, a Földmívelésügyi Minisztérium kísérletügyi ügyosztályának, főként UJHELYI min. osztályfőnök úrnak, 'SIGMOND professzor Úrnak és munkatársainak a rendelkezésre bocsátott talajokért és a szabadföldi kísérletek adataiért. Végül e helyen is meleg köszönetemet fejezem ki közreműködésükért munkatársaimnak, EPERJESSY egyet. adjunktus Úrnak és MAKFALVI JOLÁN kisasszony asszisztensemnek, KNEPPO és WITKOVSZKY Uraknak. Különösen MAKFALVI kisasszony lelkiismeretes és szorgalmas munkája járult nagyban hozzá a módszer kialakításához.

## Irodalom.

1. DOBY, Mathem. és Természettud. Értesítő **49**, 308 (1932). — DOBY és MAKFALVI, u. o. **50**, 441 (1933). — Ugyanezekben a korábbi közlemények is fel vannak sorolva.

2. E. C. HARTT, Botan. Gazette **88**, 229 (1929). — The Hawaiian Planters' Record **37**, 13 (1933), — Plant Physiology **9**, 399, (1934).

3. RIPPEL és MEYER, Zeitschr. Pflanzenernähr. und Düngung etc. *A* **27**, 257 (1933).

4. KÖNIG J. és HASENBÄUMER Zeitschr. Pflanzenernähr. stb. **B 3**, 497 (1924).

5. DIRKS és SCHEFFER, Landw. Jahrb. **67**, 779 (1928).

6. KÖNIG J., «Die Ermittlung des Düngebedürfnisses des Bodens» 19 (1929), Berlin.

7. PIRSCHLE és MENGDEHL, Jahrb. f. wissensch. Botanik **74**, 297 (1931).

8. ALTEN és VAGELER, Zeitschr. Pflanzenern. und Düngung etc. *A* **22**, 21 (1931).

9. PRIANISNIKOV, Biochem. Zeitsch. **207**, 341 (1929) és Zeitschr. Pflanzenern. u. Düng. etc. *A* **30**, 38 (1933). Ugyanitt az irodalom jó áttekintése. — PIRSCHLE, Ber. Deutsch. Botan. Gesellsch. **47**, 1, 86 (1929).

10. WRANGELL, «Ergebn. der Agrikulturchem.» **11,** 9 (1930). A nitrogén meghatározásáról megjegyzi, hogy ez is remélhetőleg be fog válni.

11. NIKLAS és GRANDEL, «Über Beziehungen zwischen Pflanzen und Bodennitraten, usw.», Naturwiss. und Landwirtsch. Heft 12, Freising-München, 1927.

12. NĚMEC és KOPPOWÁ, Zeitschr. Pflanzenern. und Düng. etc. *A* **23,** 140 (1932).

13. NĚMEC, Deutsche Landw. Presse 50 (1926).

14. VÁRALLYAY és FEHÉR, Mezőg. Kutatások, **8,** 84 (1935).

15. VÁRALLYAY, u. o. **8,** 204 (1935).

16. HERKE, Kísérletügyi Közl. **25,** 323 (1922).

17. E. A. MITSCHERLICH, «Die Bestimmung des Düngerbedürfnisses des Bodens» 1925, Berlin.

18. NEUBAUER és SCHNEIDER, Zeitsch. Pflanzern. etc. *A* **2,** 1 (1923).

19. BLANCK és SCHEFFER, Zeitsch. Pflanzenern. etc. *B* **4,** 553 (1925).

20. R. WAGNER, Archiv. f. Pflanzenbau **5,** 166 (1930).

21. Pl. DWORAK, Mezőg. Kutatások **5,** 127 (1932), Fortschritte d. Landwirt. **6,** 449 (1931).

22. WIESMANN «Agrik.-chem. Praktikum», Berlin, 1926. — WIEGNER, «Anleitung z. quant. agr.-chem. Praktikum», Berlin, 1926.

23. Transactions of the Sec. Commis. Internat. Soc. Soil Science, *B* **1,** 240 (1927).

24. WIESMANN, l. feljebb 112.

25. BLOOM és TRESCHOW, Zeitschr. Pflanzernern. etc. *A* **13,** 159 (1929).

26. EULER és SVANBERG, Zeitschr. physiol. Chem. **106,** 201 (1919).

27. KÖNIG J., «Chemie der menschl. Nahr.- und Genussmittel», **1,** 451 (1910), Berlin.

28. OPITZ és RATHSACK, Zeitschr. Pflanzenern. etc. *A* **30,** 249 (1933).

29. RHEINWALD, Zeitschr. Pflanzenern. etc. *A* **30,** 82 (1933).

30. NILSSOHN-EHLE, Zeitschr. Pflanzenern. etc. *B* **10,** 169 (1933).

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. ápr. 15-én tartott üléséből.)

# VERSUCHE ZUR PHYSIOLOGISCH-CHEMISCHEN BESTIMMUNG DES PFLANZENLÖSLICHEN BODENSTICKSTOFFS («STICKSTOFFZAHL»).

Von G. v. Doby, Korr. Mitglied.

In früheren Versuchen (1) [1] konnte festgestellt werden, dass die Invertasekonzentration der Sprossen von Neubauer-Roggenpflänzchen (18) eine Funktion der Stickstoffernährung ist. Hierauf fussend wurde eine Methode der Laboratoriumsbestimmung des pflanzenlöslichen Bodenstickstoffs ausgebaut.

Die ausführliche Abhandlung wird in der Zeitschr. f. Pflanzenernährung, Düngung und Bodenkunde (Berlin) erscheinen.

[1] Doby und Frl. Makfalvi, «Fermentforschung» **14**, 256 (1934). Daselbst auch die vorangehenden Abhandlungen angeführt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 15. April 1935.)

# ELŐKÉSZITÉSI KISÉRLETEK ÚRKÚTI MANGÁNÉRCEKKEL.

FINKEY JÓZSEF l. tagtól.

Megcsonkított hazánk ásványi kincsekben, különösen ércekben nagyon szegény, ami különös kötelességünkké teszi, hogy minden ilyen előfordulást a leggondosabban vizsgáljunk meg. A bányaüzem megkezdését megelőző vizsgálatoknak két fő céljuk van, éspedig:

1. a telep anyagának,[1] mennyiségének és térbeli kiterjedésének meghatározása, ami a geológus feladata;

2. annak a megállapítása, hogy az érces telep nyersanyagából előkészítés által milyen kohósítható, dúsított érc állítható elő, ami viszont előkészítéstechnikai probléma.

A következőkben ezen utóbbi szempontból kívánom ismertetni az úrkúti mangánércekkel végzett kísérleteimet.[2]

*Az úrkúti ércbányát* és annak, akkor még üzemben levő előkészítőművét 1930. novemberében volt alkalmam először megtekinteni s utóbbit részletesen felülvizsgálni. Az előkészítőmű a csárdahegyi külfejtésből nyert ércet dolgozta fel, de már üzemben voltak az újaknai bányamező feltáró vágatai is.

*A csárdahegyi érc* földes kinézésű, laza, erősen agyagos.[3] A tiszta

---

[1] Ami alatt elsősorban az ásványtani, illetőleg kőzettani összetétel értendő.

[2] A geológiai és bányagazdasági viszonyok ismertetését legújabban VITÁLIS ISTVÁN foglalta össze «Az úrkúti mangánérc» című dolgozatában (Bányászati és Kohászati Lapok, 1935. 18. sz.), hol az idevonatkozó fontosabb irodalom is fel van sorolva.

[3] A márgás agyag mennyisége 50—70 % is volt.

érc főleg pszilomelán, rendszerint tömött, földes, néha szemcsés, rostos vagy vesés, fénytelen fekete tömeg. A pszilomelánban fényes fekete erek alakjában fordul elő a fémfényű, kristályos polianit, elvétve piroluzit is. Mellékásványok: kvarc, kalcedon, mészpát s valószínűleg wad és limonit is.

*Az újaknai telep* anyaga, a bányában megtekintve, bár lényegében hasonló a csárdahegyihez, annál jobb minőségűnek látszott. A 6—7 m vastag telep közvetlen fedője vörös, fekvője pedig 0·5—1·5 m vastag barna agyag, s ez alatt van a liász-mészkő. Az érc itten is márgás agyagba van beágyazva s a feküoldalon kissé mállott. Az innen válogatott érc 44% *Mn*-t tartalmazott, ami máz értékesíthető mangánérc.

Az előkészítőmű ottlétemkor kb. 24% *Mn*-tartalmú ércet dolgozott fel, melyből 32% súlykihozatal mellett kb. 34% *Mn*-tartalmú dúsított ércet állított elő, úgyhogy a fémkihozatal 45·3% volt.[1]

Az eredmény azonban nem egyszer ennél is jóval gyengébb volt, s a dúsított érc *Mn*-tartalma az utóbbi időkben alig érte el a 30%-ot, amiért is a bányaüzemet, mely 1917-ben indult meg, csakhamar beszüntették.

*

A m. kir. pénzügyminisztérium 1933. decemberében azzal bízott meg, hogy az *újaknai teleprész* anyagával előkészítési kísérleteket végezzek. Laboratóriumi kísérleteimet 1934. január havában meg is kezdettem.[2]

Mielőtt kísérleteim eredményét ismertetném, szükségesnek tartom a következők megjegyzését.

1. A nyersérc *Mn*-ásványainak túlnyomó része, elméletileg, $MnO_2$ összetétellel bír, aminek 63% *Mn*-tartalom, tehát minden %

[1] Ezek az adatok 105° C-nál szárított anyagra vonatkoznak. A nyersérc összes víztartalma mintegy 22 %, melyből kb. 15 % a bányanedvesség, míg a többi kötött víz.

[2] Megbízatásomért e helyen is köszönetet mondok Böhm Ferenc miniszteri tanácsos úrnak. Vizsgálataim eredményeit az ő, valamint Pethe Lajos miniszteri tanácsos úrnak, az iparügyi minisztérium X. szakosztálya vezetőjének szíves engedélyével ismertetem.

*Mn*-nak kb. 1·6% tiszta mangánérc felel meg. Ha tehát ilyen összetételű ércet és tökéletes előkészítést tételezünk fel, akkor a nyersércnek

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24% | *Mn*-tartalma | mellett | 38·5% | súlykihozatallal, |
| 30% | « | « | 48·0% | « |
| 34% | « | « | 54·4% | « |

és í. t. nyerünk 63% *Mn*-tartalmú dúsított ércet. Ez az eredmény azonban gyakorlatilag elérhetetlen, amint azt később részletesen látni fogjuk.

2. Előkészítési eljárás gyanánt elsősorban *a mechanikai nedves előkészítés* jöhet figyelembe, amit lehetővé tesz a nyersérc ásványkomponenseinek fajsúlybeli különbsége. Ugyanis

| | | |
|---|---|---|
| a pszilomelán | fajsúlya ..... | 4·1—4·3,[1] |
| a polianit | « ..... | 4·9—5·0, |
| a piroluzit | « ..... | 4·7—5·0, |

ezzel szemben:

| | | |
|---|---|---|
| a kvarc | fajsúlya ..... | 2·65,[2] |
| az agyag | « ..... | 1·8—2·6,[3] |
| a mészkő | « ..... | 2·5—2·8, |
| a márga | « ..... | 2·3—2·5. |

3. Hogy a valóságban 63% *Mn*-tartalmú dúsított ércet előállítani nem lehet, annak — az általános előkészítéstechnikai okokon kívül — oka a következő is. Az úrkúti előfordulás főérce, a pszilomelán, mint kolloidoldatból kivált gél-ásvány, erősen változó összetétellel bír. $MnO_2$ mellett rendszerint tartalmaz egyéb

---

[1] TSCHERMAK: Lehrbuch der Mineralogie. Wien, 1905. SCHNEIDERHÖHN—RAMDOHR szerint (Lehrbuch der Erzmikroskopie, II. Berlin, 1931. 516. l.) a pszilomelán fajsúlya 4·7 is lehet.

[2] TSCHERMAK: Lehrbuch der Mineralogie. Wien, 1905.

[3] Chemiker-Kalender, Bd. II. Berlin, 1928. HIRSCHWALD szerint (Bautechnische Gesteinsprüfung. Berlin, 1912. 105. l.) a mészkő fajsúlya 2·70—2·84.

komponenseket és 1—6% kötött vizet is,[1] úgyhogy tényleges *Mn*-tartalma az elméleti 63% helyett 49—62% között van. VITÁLIS ISTVÁN idézett dolgozatában a válogatott újaknai érc *Mn*-tartalmát 46—52%-nak adja meg, míg az általam 1930. novemberében válogatott tiszta érc *Mn*-tartalma 44% volt. Mindez kell, hogy kellő óvatosságra intsen s túlzott reményektől visszatartson mindenkit.

4. Mechanikai nedves előkészítéssel az ásványkomponensek csak akkor választhatók szét egymástól, ha előzetesen, a komponensek fajsúlyának megfelelően, szemnagyság szerint lettek osztályozva.[2]

Elméleti megfontolások alapján kimutattam,[3] hogy ez az eljárás, azaz az ülepítés, gyakorlatilag jó eredménnyel elvégezhető, ha az ülepítést megelőző osztályozás szitasorozati hányadosát úgy választjuk meg, hogy az legalább

$$q = \sqrt{\frac{(\delta' - 1)^3}{2(\delta - 1)^3}}$$

legyen, illetőleg ne legyen ennél lényegesen nagyobb, hol $\delta'$ a nagyobb fajsúlyú érc, $\delta$ pedig a kisebb fajsúlyú meddő fajsúlyát jelöli.

A 2. alatt közöltekből nyilvánvaló, hogy gyakorlatilag jó eredményt kapunk, ha

$$\delta' = 4{\cdot}2 \quad \text{és} \quad \delta = 2{\cdot}6$$

értékekkel számolunk, amikor is a megadott képletből nyerjük, hogy

$$q = 2{\cdot}00.$$

---

[1] RAMDOHR szerint (RAMDOHR—KLOCKMAN: Lehrbuch der Mineralogie. Stuttgart, 1936) tartalmazhat $Al_2O_3$, $SiO_2$, $K_2O$, $Li_2O$, $Fe_2O_3$ és $CuO$-t is. TSCHERMAK szerint lehet benne $BaO$ (17 %-ig) is, s a $K_2O$ mennyisége 5 % is lehet.

[2] Ülepítést, tehát az 1 mm-nél durvább szemek előkészítését feltételezve.

[3] JOSEF FINKEY: Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung. Berlin, 1924. 146. és 154. l.

Kísérleteimnél a kereskedésben készen kapható

20, 10, 5·3, 2 és 1 mm

lyukbőségű szitákat használtam, úgyhogy a tényleges, nem állandó szitasorozati hányados:

2, 1·88, 2·65 és 2

volt. Kísérleteimet tehát általában megfelelő feltételek mellett végeztem el, csupán az 5·3—2 mm-es osztály volt valamivel durvábban osztályozva az elméletileg megkívánt értéknél. Egyébként a 2. sz. táblázat adatai igazolják, hogy ennek az osztálynak az előkészítése is — összehasonlítva a többi osztályokéval — eredményes volt.

Figyelembe veendő azonban, hogy a nyersércben vannak porózus tiszta érces részek is, melyeknek — előkészítés közben — nem fajsúlyuk, de térfogatsúlyuk jut kifejezésre, ami az eredményt kedvezőtlenül befolyásolhatja. Mégis nem lett volna indokolt a kísérleti, amúgyis részletes osztályozás pontosságát továbbfokozni, mert az a gyakorlati eljárást olyan mértékben komplikálná és tenné költségesebbé, ami nem igen állana arányban a jobb eredmény csekély többletével.

5. Gyakorlati szempontból tekintettel kell lenni a nyersérc ásványkomponenseinek, elsősorban az érces ásványoknak keménységére is. Ez

a pszilomelánnál ..... 5·5—6·0[1],
a polianitnál ..... 6·0—6·5,

míg a piroluzit, ami a nyersércben nagyon csekély mennyiségben található, sokkal lágyabb s keménysége csak 2—2·5.[1]

A fő érces ásványok keménysége tehát jóval nagyobb, mint az agyagos meddő kőzeteké, melyek a vízben amúgy is nagyrészt szétmállanak és iszapot adnak. Ebből következik, hogy a finomabb osztályok *Mn*-tartalmának fokozatosan csökkenni kell. Ezt a következtetést teljesen igazolják a továbbiakban ismertetendő kísérleteim.

Ez a tény megcáfolja egyébként azt a nézetet, hogy a régi ércelőkészítőmű elsősorban azért nem dolgozott megfelelő ered-

[1] Tschermak id. m. Ramdohr szerint (id. m.) a piroluzit keménysége erősen változó s felmehet 6-ig is.

ménnyel, mert az érccel nem bántak elég kíméletesen s a legértékesebb érc szétmorzsolódva, az agyagos iszappal elúszott.

Ha ugyanis az újaknai telep kísérleti adatait vesszük alapul, akkor az 5. sz. táblázatból kiolvashatjuk, hogy 24% *Mn*-tartalmú nyersércből 40% *Mn*-tartalmú dúsított ércet csak 10·6% súly- és 17·7% fémkihozatal mellett lehet nyerni. Ha pedig a régi előkészítőműre megadott 24% *Mn*-tartalomból és a dúsított ércre megadott 34% *Mn*-tartalomból a megfelelő súly- és fémkihozatalt — később ismertetendő eljárásommal — kiszámítjuk, úgy 34·2%-ot és 48·5%-ot kapunk. Összehasonlítva ezeket az üzemben tényleg elért értékekkel (32% és 45·3%), látjuk, hogy — bár a régi előkészítőműben sok technikai javítást lehetett volna eszközölni, ami az eljárást egyszerűbbé és olcsóbbá tette volna — előkészítéseljárási szempontból az eredményt lényegesen megjavítani nem lehetett, s az a cél, hogy aránylag szegény, 24%-os nyersércből 40%-os vagy ennél még dúsabb érc nagy súly- és fémkihozatal mellett legyen kinyerhető, megvalósíthatatlan kívánság volt.

6. «Last not least» megvizsgálandó az is, hogy a nyersérc előkészítés előtt mineralógiailag kellően fel van-e tárva?

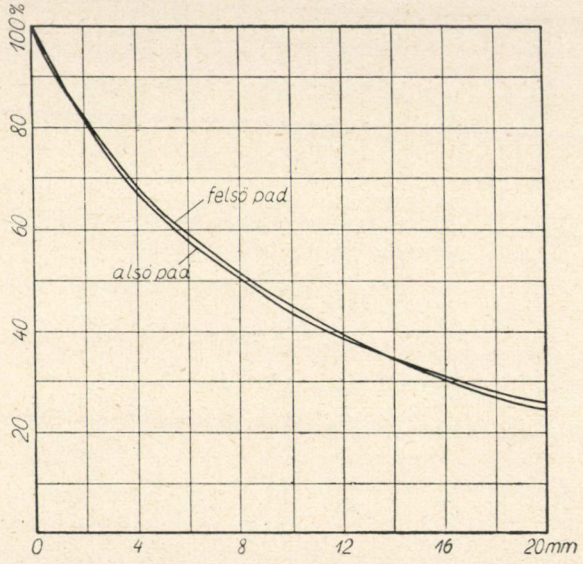
Az úrkúti előkészítőmű aprítás nélkül dolgozott. Részletesen megvizsgálva az ottani ércet, majd a rendelkezésemre álló próbaanyagot, arra a következtetésre jutottam, hogy az aprítás — gyakorlatilag — nem igen indokolt. A nyersérc tökéletesen feltárva — természetesen — nem is lehet, de a dúsított érc mikroszkópos vizsgálata azt mutatta, s ezt a következőkben ismertetendő kísérleti eredmények is igazolják, hogy az összenövés nem olyan mérvű, ami további feltárást tenne indokolttá, mert ezáltal az elérhető, csak kevéssel jobb eredménnyel szemben, a gyakorlati eljárást csak megdrágítanánk és komplikálnánk.

Laboratóriumi kísérleteimet ezért úgy végeztem el, hogy a próbaanyagot az előkészítés előtt nem aprítottam fel.

*

Az újaknai, mintegy 6—7 m vastag telep két, egymástól jól megkülönböztethető és szükség esetén külön is lefejthető padból áll, amiért is a kísérleteket a két pad anyagával külön végeztem el, hogy már ezáltal megállapítható legyen, hogy indokolt-e a két

pad anyagát külön lefejteni és előkészíteni, avagy sem? A felső padból vett minta anyaga láthatólag jobb volt, mint az alsó padé; meddőtartalma észrevehetően kevesebb és pora is sötétebb volt.[1] Mivel a kísérletek elvégzése osztályonként történt, fontos a granulometrikus összetétel ismerete, a végső eredmény kiszámíthatása végett.




1. ábra.

A két pad próbaanyagának granulometrikus összetételét grafikusan feltüntető *1. ábrán* látjuk, hogy e két görbe milyen közel esik egymáshoz, miből következik továbbá, hogy a két pad anyagának a szilárdsága is körülbelül ugyanaz.

A 20 mm-nél durvább osztályból az agyagos részeket először iszap alakjában elmostam, majd a visszamaradt anyagot kézzel válogatva, — minőség szerint — 6—6 terményre különítettem el. Mindegyik terménynek, valamint az iszapnak is, meg lett határozva százalékos súlymennyisége és *Mn*-tartalma.[2] Az eredménye-

[1] A próbaanyagot Vitális István bocsátotta rendelkezésemre.

[2] A kísérletekkel kapcsolatos *Mn*-elemzéseket Lengyel Zoltán okl. kohómérnök végezte.

ket a szokásos előkészítési diagrammákban ábrázolva.[1] lehetséges volt bármely közbenső értéknek interpolálás által való meghatározása.[2]

*Gyakorlatilag legfontosabb kérdés, hogy adott fémtartalmú dúsított érc milyen feltételek mellett nyerhető?*

A részletes kísérletek azt mutatták, hogy *50%-os ércet az alsó pad anyagából nem lehet gyakorlatilag számbajöhető mennyiségben előállítani,*[3] amiért is előbb csak a 40 és 45% *Mn*-tartalmú dúsított ércre vonatkozó adatokat közlöm, hogy a két pad anyagára vonatkozó értékek egymással összehasonlíthatók legyenek; majd külön ismertetem a felső pad előkészítése által nyert 50%-os dúsított ércre vonatkozó értékeket.

*A kézi válogatás eredményeit az 1. sz. táblázatban állítottam össze,* ahol is a felső sor jelöléseinél a közvetlenül kísérletileg meghatározott értékeket *aláhúzással* különböztettem meg a számítás vagy grafikus interpolálás által nyert értékektől.

A táblázat összes adatai %-okat jelentenek.

**1. sz. táblázat.**

| Telep-rész | $\underline{g}$ | $\underline{Mn}$ | $s_{40}$ | $s_{45}$ | $\sigma_{40}$ | $\sigma_{45}$ | $\underline{\gamma}$ | $\gamma_{ö}$ | $\underline{Mn_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alsó pad | 25·9 | 30·3 | 56·0 | 27·2 | 14·5 | 7·0 | 40·0 | 10·3 | 19·3 |
| Felső pad | 25·0 | 36·8 | 77·1 | 53·0 | 21·3 | 13·2 | 22·9 | 5·7 | 26·2 |

A táblázat jelöléseinek értelmezése a következő:

$g$ = a 20 mm-nél durvább osztály %-os súlymennyisége,

$Mn$ = ugyanezen osztály átlagos *Mn*-tartalma,

$s_{40}$ és $s_{45}$= a 40 és 45% *Mn*-tartalmú dúsított ércnek megfelelő súlykihozatal, az illető osztály súlymennyiségére vonatkoztatva,

---

[1] L. FINKEY JÓZSEF: Modern érc- és szénelőkészítési kísérletek. Bányászati és Kohászati Lapok. 1927. 6—7. sz.

[2] A részletes diagrammákat és számításokat, helykímélés céljából, nem közlöm, csupán a 40 és 45 %-os dúsított ércre vonatkoztatott végső eredményeket.

[3] Legfeljebb 5 % súlykihozatallal. L. a 4. ábrát.

$\sigma_{40}$ és $\sigma_{45}$ = ugyanaz a nyersérc összsúlyára vonatkoztatva,
$\gamma$ = az iszap %-os súlymennyisége,
$\gamma_{ö}$ = ugyanaz a nyersérc összsúlyára vonatkoztatva,
$Mn_i$ = az iszap átlagos $Mn$-tartalma.

A táblázat összes adatai 105° C-nál szárított anyagra vannak vonatkoztatva.

*

*A 20—1 mm-es anyagot, négy-négy osztályra elkülönítve, kézi ülepítéssel dúsítottam.*

Az előbbi összeállításnak megfelelően az eredmények a következő *2. sz. táblázatban* vannak összeállítva.

A jelölések ugyanazok, mint az 1. sz. táblázatnál, s az adatok itten is 105° C-nál szárított anyagra vannak vonatkoztatva.

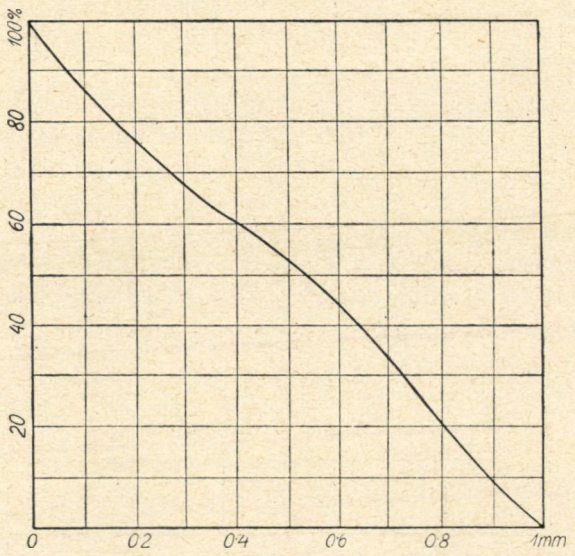
**2. sz. táblázat.**

| Telep-rész | Osztály mm | $g$ | $Mn$ | $s_{40}$ | $s_{45}$ | $\sigma_{40}$ | $\sigma_{45}$ | $\gamma$ | $\gamma_{ö}$ | $Mn_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alsó pad | 20—10 | 17·9 | 31·8 | 56·6 | 40·1 | 10·2 | 7·2 | 35·6 | 6·4 | 21·6 |
| | 10—5·3 | 18·5 | 30·2 | 41·3 | 16·6 | 7·6 | 3·1 | 24·5 | 4·5 | 25·2 |
| | 5·3—2 | 20·0 | 28·2 | 32·0 | 2·0 | 6·4 | 0·4 | 28·5 | 5·7 | 21·5 |
| | 2—1 | 8·3 | 27·1 | 21·3 | — | 1·8 | — | 43·1 | 3·6 | 23·0 |
| Felső pad | 20—10 | 20·3 | 36·3 | 70·1 | 60·1 | 14·2 | 12·2 | 29·6 | 6·0 | 22·9 |
| | 10—5·3 | 17·3 | 34·9 | 70·1 | 50·0 | 12·1 | 8·6 | 21·8 | 3·8 | 26·2 |
| | 5·3—2 | 19·8 | 34·3 | 71·3 | 50·0 | 14·1 | 9·9 | 19·5 | 3·9 | 24·1 |
| | 2—1 | 7·3 | 30·2 | 52·6 | 40·0 | 3·8 | 2·9 | 34·0 | 2·5 | 21·2 |

*

*Az 1 mm-nél finomabb osztály ülepítéssel már nem dúsítható,* azért ezt széreléssel készítettem elő. Szerelés előtt a nyersércet, mint az ismeretes, együttülepedés szerint célszerű és szokás osztályozni. Laboratóriumom áramkészülékének a teljesítménye azonban túlnagy a rendelkezésemre állott anyagmennyiséghez képest, amiért itten is szemnagyság szerinti előzetes osztályozást alkalmaztam. Már régebben kimutattam ugyanis, hogy a szerelés

szemnagyság szerinti osztályozással kapcsolatban is elvégezhető.[1] Lehet, hogy ez valamivel kedvezőtlenül befolyásolja az eredményt, de a végeredményre lényeges befolyással semmi esetre sem lehet. Hiszen a — 1 mm-es osztály mennyisége az alsó pad anyagánál 9·4 %, a felső padénál pedig 10·3 % s átlagos *Mn*-tartalmuk 21·6 %. Az összmennyiségre vonatkoztatott, tényleges %-os vesz-




2. ábra.

teség tehát, amennyiben egyáltalában létrejött, legfeljebb századszázalékokat tehet ki.

Tekintettel a próbaanyag mennyiségére s a kísérleti szér aránylag nagy teljesítményére, a — 1 mm-es anyagot a két pad anyagából — megfelelő mennyiségben — összekevertem s 1—0·5, 0·5—0·2, valamint 0·2—0 mm-es osztályokra elkülönítve széreltem.

A szérelés által előkészített anyag granulometrikus görbéjét a *2. ábrán* látjuk, míg a *szérelés eredményét*, az előbbi táblázatoknak megfelelően, a *3. sz. táblázatban* állítottam össze.

[1] Josef Finkey: Die wissenschaftlichen Grundlagen stb.

**3. sz. táblázat.**

| Osztály mm | $g$ | $Mn$ | $s_{40}$ | $s_{45}$ | $\sigma_{40}$ | $\sigma_{45}$ | $\gamma$ | $\gamma_{ö}$ | $Mn_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1—0·5 | 5·2 | 24·7 | 21·3 | 5·3 | 1·1 | 0·3 | 12·9 | 0·7 | 22·4 |
| 0·5—0·2 | 2·4 | 18·0 | 12·6 | 7·6 | 0·3 | 0·2 | 23·9 | 0·6 | 7·3 |
| 0·2—0 | 2·3 | 18·1 | 5·5 | — | 0·1 | — | 26·6 | 0·4 | 6·1 |

Iszap alatt itt a mosóvízzel elment anyagot értem, melynek mennyisége mint hiány lett megállapítva, s $Mn$-tartalma is az illető osztály átlagos és többi terményeinek $Mn$-tartalmából lett kiszámítva.

*

Amint már említettem, kísérleteim szerint *a felső pad anyagának 1 mm-nél durvább részéből 50 % Mn-tartalmú dúsított érc is nyerhető*, miért is az erre vonatkozó adatokat külön állítottam össze a *4. sz. táblázatban.*

**4. sz. táblázat.**

| Osztály mm | $g$ | $Mn$ | $s_{50}$ | $\sigma_{50}$ |
|---|---|---|---|---|
| + 20 | 25·0 | 36·8 | 22·6 | 5·6 |
| 20—10 | 20·3 | 36·3 | 25·3 | 5·1 |
| 10—5·3 | 17·3 | 34·9 | 24·6 | 4·2 |
| 5·3—2 | 19·8 | 34·3 | 32·0 | 6·3 |
| 2—1 | 7·3 | 30·2 | 26·6 | 1·9 |

*

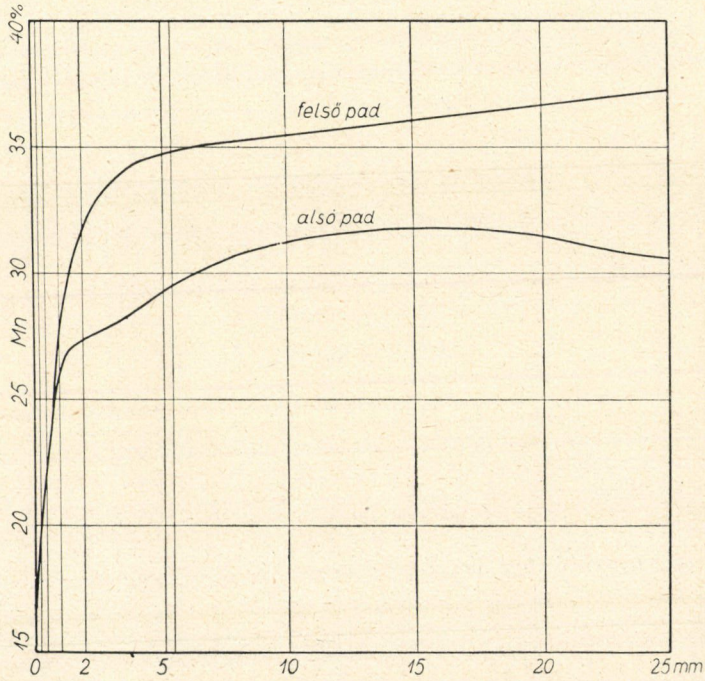
Nézzük mostan, hogy az eddig ismertetett eredményekből milyen következtetéseket lehet levonni.

*Az alsó pad általam megvizsgált próbaanyagának átlagos Mn-tartalma 29·0 %, a felső padé pedig 33·8 % volt.* Ezek az értékek is — mint általában az összes adatok — 105° C-nál szárított anyagra vannak vonatkoztatva.

Amint az 1—3. sz. táblázat $\gamma_{ö}$ adatainak összegezése által

nyerjük, mosás által eltávolítható 32·2 %, illetőleg 23·6 % agyagos iszap. Ezek átlagos *Mn*-tartalma a $\gamma_{\ddot{o}}$ és $Mn_i$-adatokból számítva: 21·5%, illetőleg 24·1%, úgyhogy a nyersérc *Mn*-tartalma mosás által, az alsó pad anyagánál 32·5%-ra, a felső padénál pedig 36·6%-ra dúsítható.

Mivel az alsó és felső pad vastagsága kb. egymással egyenlő, azért az egész telepre vonatkozó átlagos adatokat a fenti számok




3. ábra.

középértékeiből nyerjük. Lesz tehát a nyersérc átlagos *Mn*-tartalma: 31·4%; az iszap mennyisége: 27·9%, s átlagos *Mn*-tartalma: 22·8%. A nyersérc átlagos *Mn*-tartalma ekkor, mosás által, 34·5%-ra dúsítható.

*Kísérleteim alkalmával a legtisztább érc Mn-tartalmát 55·0%-nak találtam*, a $MnO_2$ összetételnek megfelelő 63% helyett.

Nyilvánvaló azonban, hogy ezt az értéket csak némileg is elfogadható súlykihozatal mellett gyakorlatilag elérni nem lehet.

A közölt táblázatok adataiból az is kitűnik, hogy a nyersérc szemnagyságával együtt csökken általában a *Mn*-tartalom is. Ezt az összefüggést még feltűnőbben szemlélteti a *3. ábrán* látható diagramma. Ez is igazolja, hogy az előkészítés előtti aprítás nem indokolt, illetőleg, hogy ezáltal az eredmények lényegesebb javulása nem remélhető.

*40%-os dúsított érc előállítása.* Az 1—3. sz. táblázat $\sigma_{40}$ adatainak összegezése által nyerjük, hogy ebben az esetben a teljes súlykihozatal az alsó padnál:

$$\Sigma_{a,40} = 42{\cdot}0\ \%,$$

a felső padnál pedig:

$$\Sigma_{f,40} = 67{\cdot}0\%.$$

A megfelelő fémkihozatal pedig, ha ezt $k$ által jelöljük:

$$k_{a,40} = 40{\cdot}42 : 29 = 57{\cdot}9\%$$

és

$$k_{f,40} = 40{\cdot}67 : 33{\cdot}8 = 79{\cdot}3\%.$$

A felső padnál elért eredmény, a nyersérc magasabb fémtartalmának megfelelően jobb. Az egész telepre vonatkoztatott átlagos értékek:

$$\Sigma_{40} = 54{\cdot}5\ \% \text{ és } k_{40} = 68{\cdot}6\%.$$

*45%-os dúsított érc előállítása.* Az előbbi számításnak megfelelően nyerjük a következő értékeket:

$$\Sigma_{a,45} = 18{\cdot}2\ \% \text{ és } \Sigma_{f,45} = 47{\cdot}3\%.$$

A megfelelő fémkihozatalok:

$$k_{a,45} = 45{\cdot}18{\cdot}2 : 29 = 27{\cdot}9\%$$

és

$$k_{f,45} = 45{\cdot}47{\cdot}3 : 33{\cdot}8 = 62{\cdot}9\%.$$

Az egész telepre vonatkoztatott átlagos értékek:

$$\Sigma_{45} = 32{\cdot}7\% \text{ és } k_{45} = 45{\cdot}4\%.$$

Fenti számokból kitűnik, hogy az alsó pad anyagával elért eredmény nem igen lehet rentábilis, sőt az átlagos érték rentábili-

tása is kérdéses. A felső pad értékei már valószínűleg biztosítják a rentábilitást, s amint már említettem, a két pad bármelyike lefejthető egymástól függetlenül. Természetes azonban, hogy ekkor a kitermelhető nyersérc mennyisége kb. a felére fog csökkenni.

*50%-os dúsított érc előállítása.* Amint már említettem, ebben az esetben csak a felső pad anyaga jöhet szóba, tehát a lefejthető ércmennyiségnek kb. a felére való csökkenésével eleve számolni kell.

A megfelelő értékek egyébként, a 4. sz. táblázat adatai alapján, a következők:

$$\varepsilon_{f,50} = 23{\cdot}1\%$$

és

$$k_{f,50} = 50.23{\cdot}1 : 33{\cdot}8 = 34{\cdot}1\%.$$

Ez az eredmény, tisztán előkészítéstechnikai szempontból is, kevésbbé megfelelő, s aligha lehet rentábilis, hacsak valami különleges gazdasági viszonyok nem teszik azzá.

*

Az előzőkben ismertetett kísérleteim alkalmával összesen 90·9 kg nyersércet dolgoztam fel. Ez a szám természetesen ismét 105° C-nál szárított anyagra vonatkozik. Ez az eljárás azért indokolt, mert a bányanedvesség változó — kísérleteim szerint 10·13 és 16·90 % között volt — s mert a mangánércek adás-vétele is ezen az alapon történik. A bányaüzemnek azonban a termelés mennyiségének megállapíthatása végett a bányanedves nyersanyag súlyával kell számolni. Ha pl. 40% átlagos *Mn*-tartalmú ércet akarunk nyerni, amikor a súlykihozatal száraz ércre számítva: 54·5%, akkor 1 tonna száraz, dúsított érc előállításához nem

$$1 : 0{\cdot}545 = 1{\cdot}83 \text{ t},$$

hanem pl. 15% bányanedvesség mellett:

$$1{\cdot}83 : 0{\cdot}85 = 2{\cdot}12 \text{ t}$$

bányanedves nyersércet kell termelni.

*

Az eddig közölt eredmények — természetesen — közvetlenül csak az általam megvizsgált próbaanyagra érvényesek, s a belőlük

levont következtetések általában csak annyiban helyesek, amennyiben a megvizsgált próbaanyag összetétele megegyezik az újaknai, kellő mértékben még fel nem tárt telep anyagának átlagos összetételével. Bányászati kutatás közben, különösen, ha erősen változó összetételű telepről van szó, mint a jelen esetben is, szinte lehetetlenség olyan próbaanyagot venni, mely megfeleljen a nyersérc átlagos összetételének. Az újaknai telep eddig még csekély kiterjedésben (kb. 100 m hosszban) lett feltárva s a kísérletekhez szükséges próbaanyagot csupán két feltörésből lehetett venni, mely a telepet egész vastagságban harántolta. Az ilyen anyaggal végzett előkészítési kísérlet tehát mindig kisebb-nagyobb, a próbavétel sikerült voltától függő bizonytalanságot rejt magában.

Amint a közölt táblázatokból kitűnik, az elért, illetőleg elérhető eredmény nagymértékben függ a nyersérc átlagos fémtartalmától. Fontos kérdés tehát, hogy milyen lesz az előkészítés eredménye, ha a nyersérc fémtartalma változik, illetőleg eltér az általam megvizsgált próbaanyag fémtartalmától? Azzal a régi megállapítással, hogyha a nyersérc átlagos fémtartalma jobb lesz, mint a próbaanyagé volt, úgy az eredmény is jobb, ellenkező esetben pedig rosszabb lesz, nem sokra megyünk.

1934-ben ismertettem egy eljárást,[1] mellyel a felvetett kérdés megközelítőleg megoldható. Idézett dolgozatomban kimutattam, hogy ezen esetben a fémkihozatal a

$$k = 100 - K\,(b - a)\,(A - a),$$

a súlykihozatal pedig az

$$s = \frac{a\,[100 - K(b - a)(A - a)]}{b} = \frac{a.k}{b}$$

képletből számítható ki, hol

$A$ = a nyersérc legnagyobb fémtartalma,
$a$ = a « átlagos «
$b$ = a dúsított érc « «

[1] FINKEY JÓZSEF: Adatok az előkészítési görbék kiértékeléséhez. Bányászati és Kohászati Lapok, 1934. 19. sz. — Beiträge zur Auswertung der Aufbereitungskurven. Műegyetem bány. és koh. oszt. Közleményei. 1934. VI. k.

$K$ pedig egy állandó együttható, mely megfelelő, összetartozó kísérleti adatokból számítható ki, akár $k$-nak, de még célszerűbben $s$-nek előbb megadott képletéből.[1]

Mint már említettem, kísérleteim szerint:

$$A = 55\ \%\ Mn.$$

Ha a felső pad anyagából nyert 40 és 45%-os, az alsó padból nyert ugyanilyen, végül a felső padból nyert 50%-os dúsított érc előállításánál nyert következő, összetartozó értékekből számítunk:

$$\begin{aligned}
a &= 33{\cdot}8\ \%, \quad b = 40\ \%, \quad s = 67{\cdot}0\ \%,\\
a &= 33{\cdot}8\ \%, \quad b = 45\ \%, \quad s = 47{\cdot}3\ \%,\\
a &= 29{\cdot}0\ \%, \quad b = 40\ \%, \quad s = 42{\cdot}0\ \%,\\
a &= 29{\cdot}0\ \%, \quad b = 45\ \%, \quad s = 18{\cdot}2\ \%,\\
a &= 33{\cdot}8\ \%, \quad b = 50\ \%, \quad s = 23{\cdot}1\ \%,
\end{aligned}$$

úgy a $K$ együttható számára a következő öt értéket nyerjük:

$$\begin{aligned}
K_{f,40} &= 0{\cdot}155,\\
K_{f,45} &= 0{\cdot}154,\\
K_{a,40} &= 0{\cdot}159,\\
K_{a,45} &= 0{\cdot}172,\\
K_{f,50} &= 0{\cdot}192.
\end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $s$ (előzőkben $\Sigma$ által jelölve) fenti öt értékének mindegyike számos kísérleti részeredmény összegezése által adódott, úgy $K$ kiszámított értékeit jól megegyezőnek tarthatjuk, ami egyúttal eljárásom helyességét is igazolja. A következőkben ezért a fenti értékek

$$K = 0{\cdot}166$$

középértékével fogok számolni.

A súlykihozatal ($s$) és fémkihozatal ($k$) különböző értékeit, ennek alapján számítva, a nyersércnek $a = 22$—$40\%$ átlagos $Mn$-tartalma között, a következő, *5. sz. táblázatban* közlöm. A táblázat összes adatai %-okat jelentenek.

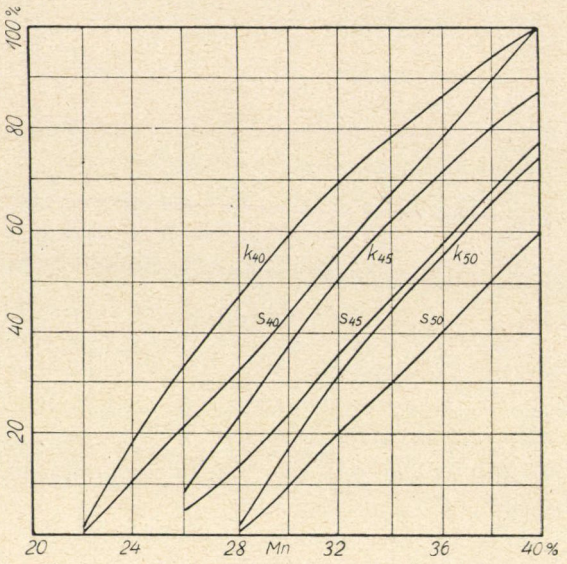
---

[1] Kísérletek alkalmával $s$ értékét közvetlenül mérjük meg.

**5. sz. táblázat.**

| *a* | *b* = 40 | | *b* = 45 | | *b* = 50 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *s* | *k* | *s* | *k* | *s* | *k* |
| 22 | 0·8 | 1·4 | — | — | — | — |
| 24 | 10·6 | 17·7 | — | — | — | — |
| 26 | 21·2 | 32·6 | 4·9 | 8·5 | — | — |
| 28 | 32·3 | 46·2 | 12·8 | 23·8 | 0·8 | 1·4 |
| 30 | 43·8 | 58·5 | 25·2 | 37·8 | 10·2 | 17·0 |
| 32 | 55·6 | 69·5 | 35·8 | 50·4 | 20·9 | 32·0 |
| 34 | 67·2 | 79·1 | 46·6 | 61·7 | 30·0 | 44·2 |
| 36 | 78·6 | 87·4 | 57·4 | 71·7 | 40·2 | 55·9 |
| 38 | 89·6 | 94·4 | 67·8 | 80·3 | 50·2 | 66·1 |
| 40 | 100·0 | 100·0 | 77·8 | 87·6 | 60·1 | 75·1 |

E táblázat eredményeit még szembetűnőbben tünteti fel a *4. ábra*, mely a táblázat adatait grafikusan ábrázolja, s szemléltetően mutatja, hogy a nyersérc átlagos *Mn*-tartalmának változásával miként változik az előkészítés által elérhető eredmény.




**4. ábra.**

Az így nyert értékek, ha nem is abszolút pontosak, de nagy valószínűséggel s a rentábilitás előzetes kalkulálásánál rendkívül nagy fontossággal bírnak.

*

Nézzük mostan, hogy előkészítéstechnikai szempontból miként ítélhetjük meg az eddigi eredményeket.

Amint már említettem, az úrkúti régi előkészítőmű a csárdahegyi érc feldolgozásánál átlagban mintegy 45% fémkihozatallal dolgozott. Bár ez az eredmény tényleg gyengének minősítendő, azt mégsem szabad alapos kritika nélkül más ércelőkészítőműveknél, más ércekkel és más eljárással elért eredményekkel tisztán számszerűleg összehasonlítani. Hiszen pl. ismeretes, hogy szulfidos rézérceknél az ú. n. flotációs eljárással gyakran 95%-on felüli fémkihozatalokat érnek el. Az eredmény azonban mindig a nyersérc minőségétől, tehát fizikai és kémiai tulajdonságaitól, valamint az alkalmazott előkészítési eljárás lehetőségeitől függ.

Amint a továbbiakban ki fogom mutatni, a kísérleteimnél alkalmazott eljárással, 31·4% átlagos *Mn*-tartalmú érceknél 78·8%-nál magasabb fémkihozatalt elméletileg sem lehet elérni. Az 5. sz. táblázat adatai szerint 32% *Mn*-tartalmú nyersércet 40, illetőleg 45%-ig dúsítva, az *abszolút fémkihozatal:*

$$k_{40} = 69{\cdot}5\% \quad \text{és} \quad k_{45} = 50{\cdot}4\%,$$

úgy, hogyha ezeket az értékeket az előbb megadott maximális fémkihozatalra vonatkoztatjuk:

$$k'_{40} = 88{\cdot}2\% \quad \text{és} \quad k'_{45} = 63{\cdot}9\%$$

*relatív fémkihozatalt* kapunk, ami a tényleges eredményt mindjárt kedvezőbbnek tünteti fel.

Mindezek alapján, tekintettel az úrkúti nyersérc kőzettani minőségére és az alkalmazott eljárás lehetőségeire, *az eredményt technikai szempontból jónak kell elfogadni, ha az abszolút fémkihozatal 60—70% között van.*

Ha mármost adva van a dúsított érc legkisebb fémtartalma, úgy a megadott fémkihozatali határokon belül egyúttal adott a nyersérc megkívánt legkisebb fémtartalma és az emellett elérhető súlykihozatal is, ami a rentábilitási számításnak alapját képezi.

Az 5. sz. táblázatból látjuk, hogy ez a feltétel, tehát a megkívánt abszolút fémkihozatal, adva van, ha — 40%-os dúsított ércet feltételezve — a nyersérc átlagos *Mn*-tartalma kb. 30—32%; 45%-os dúsított ércnél 33—35%; 50%-os dúsított ércnél pedig 37—39%.

Ez továbbá azt is jelenti, hogy a nyersérc *Mn*-tartalma, a megadott fémkihozatal mellett, abszolút értékben 8—12%-kal, viszonylagosan pedig 25—35%-kal növelhető.

*

Amint már láttuk, 31·4% átlagos *Mn*-tartalmú érc mosásánál 27·9 súly-% agyagos iszapot nyerünk, melynek átlagos *Mn*-tartalma 22·8%, úgyhogy a nyersérc összes *Mn*-tartalmának 21·2%-át tartalmazza. Tehát már ennyi fémveszteség adódik a nyersérc mosásából, úgyhogy az adott fémtartalom mellett és az alkalmazott eljárással 78·8 %-nál nagyobb fémkihozatalt elméletileg sem lehet elérni.

Indokolt tehát az a kérdés, hogy az iszap további előkészítésével nem lehet-e az eredményt javítani?

Az agyagos iszap szérelésével ez aligha valósítható meg.

Amint a 3. sz. táblázat adataiból következtethető, itt olyan nagy veszteséggel kellene számolni, mely mellett az eljárás aligha lehetne rentábilis.

Kérdés azonban, hogy *flotációs eljárással* nem lehet-e lényegesen jobb eredményt elérni?

A flotációs előkészítési eljárás napjainkban annyira fejlett, hogy nem egy esetben, bár legtöbbször még csak laboratóriumi kísérletekkel, oxidos mangánércek előkészítésénél is igen jó eredményeket értek el. $MnO_2$-tartalmú érceknél, megfelelő reagensek (vízüveg, szóda, olajsav és fenyőtűolaj) hozzáadásával, 25% *Mn*-tartalmú érc 56%-ra volt dúsítható, 91% fémkihozatal mellett.[1] *Mn*-tartalmú iszapok flotálása azonban rendszerint sok nehézséggel jár, s különösen zavarólag hat agyagnak a jelenléte,[2] márpedig az úrkúti iszapnál csaknem tisztán agyagból kell kiflotálni az ércet.

[1] PETERSEN: Schwimmaufbereitung. Dresden und Leipzig, 1936. 244—245. l.

[2] U. ott.

Két ilyen, inkább csak tájékoztató kísérletem nem adott megfelelő eredményt. Ez ugyan távolról sem jelenti a probléma megoldhatatlanságát, mindenesetre figyelmeztet azonban a várható nehézségekre s arra, hogy ez a kérdés csak hosszú, rendszeres, tudományos kísérletek által oldható meg.

*

Befejezésül röviden érinteni kívánom még az úrkúti mangánércelőfordulás értékesítésének a lehetőségét is.

Itt mindenesetre figyelembe kell venni, hogy hazai vasiparunk nagyobb mennyiségben és rendszeresen nem fogyaszt mangánércet, tehát nagyobbarányú mangánércbányászat — kellő mennyiségű ércvagyont feltételezve — csak külföldi kivitelre alapítható.

Ennek a kérdésnek helyes megítéléséhez tudnunk kell, hogy napjainkban a mangánérctermelésben inkább túlprodukció, mint hiány van, s hogy Földünk eddig ismert mangánércvagyona a szükségletet többszáz évre képes fedezni, még akkor is, ha annak megfelelő növekedésével számolunk.[1] A négy legfontosabb mangánérctermelő ország: Oroszország, Brit-India, Brazilia és az afrikai Aranypart az évi kb. 3·6 millió t világtermelésnek több mint 80%-át szolgáltatja.[2]

A világ *Mn*-szükségletének kb. 90%-át a vasipar veszi igénybe.[3] A kohászati *Mn*-ércszükséglet általában a világ acéltermelésének kb. 2·5%-át teszi ki, úgy, hogyha utóbbit átlagban évi 100 millió tonnára becsüljük, akkor a világ kohászati *Mn*-ércszükséglete évi 2·5 millió tonna.[4]

Az exportércek *Mn*-tartalma átlag 45—50% között van, bár — megfelelő áron — rendszerint 40%-os érc is értékesíthető. Az európai vasipart jelenleg főleg az orosz tschiaturii érc látja el, melynek *Mn*-tartalma előkészítés által 53—55%-ra dúsítható.

---

[1] MEISNER: Weltmontanstatistik. I. 2. Stuttgart, 1929. 102. és köv. l.

[2] MEISNER: Weltmotanstatistik. II. Stuttgart, 1932. 180. és köv. l. Újabban sok mangánércet termel Egyiptom is, mely sorrendben az ötödik mangánérctermelő ország.

[3] MEISNER I. 2. — A kémiai ipar által feldolgozott *Mn*-ércekkel szemben különleges igények vannak, melyeket az úrkúti előfordulás aligha tudna kielégíteni.

[4] MEISNER II.

*Mn*-ércek vételénél, mint az ércvételnél általában, azok fémmennyisége lesz megfizetve, a fémtartalomtól függő ár szerint. A súlyegységnyi fém árát annál kevesebbre értékelik, minél kisebb a dúsított érc átlagos fémtartalma. Így pl. az amerikai acéltröszt ártáblázata szerint,[1] ha a mangán súlyegységének árát 50%-os vagy ennél dúsabb ércnél 100-nak vesszük, úgy 45%-os ércnél ez 74·7, 40%-os ércnél pedig csak 66·1. Az eladott érc *Mn*-tartalmának csökkenésénél tehát nemcsak a fém mennyiségének, hanem a fém egységárának csökkenésével is kell számolni.

Ez tehát azt jelenti, hogyha pl. 1 vagón 50%-os *Mn*-érc ára 100, akkor ugyancsak 1 vagon 45%-os ércé:

$$45.74{\cdot}7 : 50 = 66{\cdot}0,$$

1 vagon 40%-os ércé pedig:

$$40.66{\cdot}1 : 50 = 52{\cdot}9$$

lesz. A rentábilitás szempontjából összehasonlításra alkalmas számokat akkor kapunk, ha az eladási árat 1 vagon nyersércre vonatkoztatjuk, amikor figyelembe van véve az előkészítés által elért súlykihozatal, tehát az előkészítési súlyveszteség is.

Ha ennek számításánál a felső pad anyagával elért eredményt vesszük figyelembe, amikor is

$$s_{f,50} = 23{\cdot}1\%,\ s_{f,45} = 47{\cdot}3\% \text{ és } s_{f,40} = 67{\cdot}0\%$$

volt, akkor a megfelelő viszonyszámok:

$$\begin{aligned} 50\%\text{-os ércre:}&\quad 100.0{\cdot}231 = 23{\cdot}1,\\ 45\%\text{-os ércre:}&\quad 66{\cdot}0.0{\cdot}473 = 31{\cdot}2,\\ 40\%\text{-os ércre:}&\quad 52{\cdot}9.0{\cdot}670 = 35{\cdot}4. \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy az adott feltételek mellett a bánya részéről legelőnyösebb 40%-os ércet előállítani, feltéve, hogy azt megfelelő mennyiségben tényleg el tudja adni.

[1] MEISNER I. 2.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. márc. 16-án tartott üléséből.)

# AUFBEREITUNGSVERSUCHE MIT MANGANERZEN VON ÚRKÚT.

Von JOSEF FINKEY, korr. Mitglied.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der Berg- und Hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin Josef-Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, Bd. VIII. 1936.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. März 1936.)

# A ZSIDÓVÁRI GRANODIORIT.

Írta TAKÁTS TIBOR.

A krassószörénymegyei Zsidóvár mellett előforduló világosszürke színű, durvaszemű kőzetet először SCHAFARZIK FERENC említi, aki a Pojána-Ruszka geológiai felvétele alkalmával mint granodioritot írta le.[1] Dr. PAPP FERENC «Adatok a magyarországi dioritok ismeretéhez» című munkájában szintén foglalkozik az előfordulással.[2] SCHAFARZIK adatai szerint a községtől cca 1 km-re DK-re a Valea sgyimir nevű völgyben 1893-ban bányát nyitottak, ahol a granodioritot jól fejthető darabokban éveken át jó eredménnyel bányászták s főleg útkavicsozásra, hídépítésre, továbbá műemlékek készítésére használták fel.

A fent említett bányából származik a jelen alkalommal megvizsgált kőzet és a leírt ásványcsoport, mely a kőzet hasadékaiban és üregeiben itt-ott megtalálható. A megvizsgált anyag valamennyi darabja SCHAFARZIK FERENC gyüjtéséből való. SCHAFARZIK szerint a granodiorit hatalmas lakkolitot képez a nadrág—zsidóvár—tinkova—istvánhegyi hegycsoportban. A zsidóvári bányán kívül jól hozzáférhető még: Obrézsán (a Kalova-patak torkolatában), a Valea micában a két Plesa-hegy között és a Vercserovica-árokban.

## Granodiorit.

Világosszürke színű, üde kőzet, elegyrészeinek átlagos szemnagysága 2 mm. A fehérszínű, gyakran ikres összenövést mutató

[1] SCHAFARZIK FERENC dr.: A magyar korona országai területén létező kőbányák részletes ismertetése. Budapest, 1904. p. 165. — A M. Kir. Földtani Int. Évi Jelentése 1903. — A M. Kir. Földtani Int. Évi Jelentése 1905.

[2] Földtani Közlöny LV. 1925. p. 179.

földpátok és a jóval kisebb mennyiségben jelenlevő kvarcszemek között nagyon szép kifejlődésű biotitokat és (néha 5—6 mm hosszúságot is elérő) amfibolprizmákat lehet látni. Mikroszkóp alatt ezeken kívül apró magnetit-, zirkon-, apatit- és titanit-szemecskék is felismerhetők. Szövete holokristályos, hipidiomorf szemcsés.

Legelterjedtebb elegyrész a *plagioklász*. Nagysága nem ritkán a 6—8 mm-t is eléri. Csaknem mindig ikreket alkot, ezek legtöbbször már szabad szemmel vagy kézi nagyítóval is jól felismerhetők. Nagyon gyakoriak az albit-törvény szerinti ikrek, de a periklin-törvény szerinti összenövés sem ritka. Az albitikrek néhol igen finom lemezek alakjában jelentkeznek, egy esetben száznál több lemezt lehetett megolvasni. A szimmetrikus zónában a maximális kioltás albitikren: + 22°, ennek megfelelően összetétele 40 % *An*. Némely szem — különösen a nagyobbak — erősen zónás szerkezetű. A zónák meglehetősen finomak, közülök a külső a legsavanyúbb. Kioltás (010) lapon a magban — 21° = 57 % *An*, a burokban 0° = 31 % *An*. Néha rekurrens zónák is fellépnek. A nagyobb kristályok olykor összetöredezettek, protoklázos szerkezetűek. Ez arra vall, hogy a kőzetet — keletkezése után — hegyképző nyomás érte. A plagioklász megtartása üde, ritkán lépnek fel kalcitos és kaolinos bomlási termékek. Zárványként érc, üveg, apatit és zirkon fordul elő.

Az *ortoklász* többnyire alaktalan és mállási termékektől zavaros. Ikerképződést nem mutat. Néha gyökérszerűen kiképződött kvarcszemek nőnek rajta keresztül, melyek nagyjában egymással párhuzamosak, de sokszor eltérnek eredeti irányuktól, ami szintén hegyképző nyomás hatására utal. Zárványként érceket, valamennyi színes elegyrészt és plagioklászt tartalmaz. Tulajdonképpen mint hézagkitöltő anyag szerepel.

A *kvarc* színtelen, nagy, határozatlan alakú szemekben jelenik meg, melyeknek átmérője olykor a 2 mm-t is eléri. Gyakran lehet látni rajtuk magmatikus korrózió nyomát. Nem ritka — különösen a nagyobb szemeken — a hullámos kioltás. Valamennyi elegyrész felismerhető benne zárványként, ezenfelül igen sok apró folyadékzárványt tartalmaz, legtöbbjét libellával.

A *biotit* átlagos szemnagysága 1—1·5 mm, tehát már szabad szemmel is jól kivehető, feketén fénylő, hatszöges pikkelyeket

alkot, melyek néha 1 mm vastagok. Vékonycsiszolatban észrevehető a kristályok hajlott volta, mely hegyképző nyomás eredménye. Magmatikus korrózió nyomait is elég gyakran megfigyelhetjük. Olykor párhuzamos módon amfibollal nő össze. Igen élénk pleochroizmust mutat: a = világos szalmasárga, b és c = sötétbarna. Kioltása látszólag egyenes. A *c*-re merőleges metszetekben jól látható a kis tengelykereszt, melynek helyzete a (010) lappal párhuzamos. A kristályok szélén kloritosodás nyomai is megfigyelhetők. Zárványai: ércek, apatit, zirkon, üveg.

A prizmatikusan kifejlődött *amfibol* (110) szerinti hasadása a *c*-re merőleges metszeteken nagyon jól mérhető. A szemek nagysága főleg 2·0—2·5 mm közt váltakozik. Gyakoriak az (100) szerinti ikerlemezek és ikres összenövések. Egy helyen penetrációs ikreket is sikerült megfigyelni. Az ásvány a zöld amfibolok csoportjába tartozik, pleochroizmusa: a = világos zöldessárga, c = sárgászöld. A hasadási lapokon a kioltás értéke $c : c = 24°—28°$. A kristályok üdék, átalakulás nyomait nem lehetett megfigyelni rajtuk. Mint zárvány érc, apatit, zirkon, üveg, ritkábban plagioklász fordulnak elő.

Fekete, opak zárványok alakjában jelenik meg a kőzetben az *érc*. Minden valószínűség szerint magnetit. Szemnagysága a legkisebbtől 0·4 mm-ig változik. Alakja többnyire egészen szabálytalan; nem ritkák az erősen korrodált szemek. Zárvány alakjában minden elegyrészben megtalálható. A nagyobb kifejlődésű szemek mindig színes elegyrészekben vagy azok közvetlen közelében találhatók.

Nagy ritkán már szabad szemmel is észre lehet venni a kőzetben apró, mézsárga színű *titanit*-kristálykákat. Hosszúságuk olykor a másfél mm-t is eléri. Vékonycsiszolatban igen erős fénytörésük okozta erős határvonalukról könnyen felismerhetők. Egészen gyenge pleochroizmusuk is megfigyelhető: a = világossárgától színtelenig, c = világos barnássárga.

Az *apatit* leginkább apró, gyakran ízekre tagolt, hosszirányukban megnyúlt prizmák alakjában jelenik meg, de előfordul hatszöges, *c*-re merőleges metszetekben is. A kristálykák legnagyobb hosszúsága 0·2 mm.

A *zirkon* kristálykái még ekkora nagyságot sem érnek el.

Kristálytanilag olykor nagyon jól határoltak, néha kissé legömbölyödött szélük van.

A kőzet kémiai összetétele:

| | |
|---|---|
| $SiO_2$ | 63·12 % |
| $TiO_2$ | 0·11 % |
| $Al_2O_3$ | 18·99 % |
| $Fe_2O_3$ | 1·73 % |
| $FeO$ | 1·73 % |
| $MnO$ | 0·13 % |
| $MgO$ | 2·19 % |
| $CaO$ | 4·83 % |
| $Na_2O$ | 3·25 % |
| $K_2O$ | 2·25 % |
| $H_2O+$ | 1·24 % |
| $P_2O_5$ | 0·19 % |
| Összesen ... | 99·76 % |

A kémiai analízis 105° C-on szárított anyagból kiindulva történt.

Az elemzési adatokból nyert OSANN-féle számok: $s = 70·02$, $A = 5·08$, $C = 5·73$, $F = 6·77$, $T = 1·59$, $n = 6·87$, sor = $\beta$, $k = 1·44$, $a = 8·67$, $c = 9·78$, $f = 11·55$.

OSANN rendszerében ezek az értékek legközelebb vannak a *Chowchilla*-típushoz:[3]

*Amfibol-granitit, Moruya, N. S. W.*: $s = 72·98$, $A = 4·92$, $C = 5·50$, $F = 6·18$, $n = 7·5$, sor = $a$, $a = 9$, $c = 10$, $f = 11$.

Lényegesebb eltérés csak a kovasavnál van, amennyiben a zsidóvári granodiorit ennél a kőzetnél valamivel bázikusabb, továbbá az alkáliák egymáshoz való viszonyában.

A NIGGLI-féle értékek: $si = 233·30$, $qz = +65·54$, $al = 41·35$, $fm = 22·60$, $c = 19·11$, $alk = 16·94$, $k = 0·31$, $mg = 0·53$, $h = 15·27$, $p = 0·29$, $ti = 0·32$, $c/fm = 0·85$, metszet = V.

Magmatípus: granodioritos.[4]

---

[3] A. OSANN: Der chem. Faktor in einer nat. Klassifik. der Eruptivgesteine. Heidelberg, 1919. p. 38.

[4] P. NIGGLI: Gesteins- u. Mineralprovinzen. Berlin, 1923. p. 115.

Összehasonlításul: *Nevada City, California*: *si* = 260, *al*=39·5, *fm* = 22·5, *c* = 18·5, *alk* = 19·5, *k* = 0·34, *mg* = 0·45, metszet=V.

Az amerikai rendszerben a következő normákat nyerjük:

| | |
|---|---|
| kvarc | 21·66 % |
| ortoklász | 13·36 % |
| albit | 27·26 % |
| anortit | 23·09 % |
| korund | 2·75 % |
| hipersztén | 7·27 % |
| magnetit | 2·55 % |
| ilmenit | 0·15 % |
| apatit | 0·34 % |

I (II).4.3.″4.

A kőzet térfogat szerinti ásványos összetétele:

| | | |
|---|---|---|
| plagioklász | 50 | térf. % |
| ortoklász | 21 | « |
| kvarc | 16 | « |
| biotit | 7 | « |
| amfibol | 4 | « |
| érc | 1 | « |
| egyéb | 1 | « |

## Üregkitöltő ásványok.

A kőzet hasadékait különböző ásványok töltik ki. Egy szép ásványhalmazban a következő ásványokat találtam: füstkvarc, ametiszt, ortoklász, adulár, albit, titanit, kalcit, laumontit, desmin, fluorit, epidot.

A *füstkvarc* egyik példánya 2·5 cm hosszú, ép lapokkal határolt, eléggé egyenletesen szürkére színezett kristály. Egyik végén a terminális lapok nem fejlődtek ki, teljesen szabálytalanul végződik, egyik oldalán pedig földpát- és kalcitkristályokkal nőtt össze. A következő formák állapíthatók meg rajta: $\{10\bar{1}0\}$ prizma, $\{10\bar{1}1\}$ romboéder és $\{01\bar{1}1\}$ romboéder. A prizmalapok nagysága körülbelül egyező, valamennyin erős, a *c* tengelyre merőleges rostozott-

ság látszik. Igen különböző nagyságúra fejlődtek a romboéderlapok. Legnagyobb az $(10\bar{1}1)$ lap, utána a másik romboéder $(\bar{1}011)$ lapja. Ennek következtében a kristály nem végződik határozott csúcsban, hanem a *c* tengely végén egy kis vízszintes él mutatkozik. A mért szögadatok (zárójelben a teoretikus érték):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(10\bar{1}0)$ | : $(01\bar{1}0)$ | = | 60°05′ (60°) |
| $(10\bar{1}0)$ | : $(10\bar{1}1)$ | = | 38°15′ (38°13′) |
| $(10\bar{1}0)$ | : $(10\bar{1}\bar{1})$ | = | 38°12′ (38°13′) |
| $(10\bar{1}1)$ | : $(\bar{1}011)$ | = | 103°37·5′ (103°34′). |

A prizmalapok reflexe a rostozottság következtében nagyon rossz és elmosódott. Elsőrangú reflexet adtak az $\{10\bar{1}1\}$ romboéder lapjai, jóval gyengébbeket a $\{01\bar{1}1\}$ romboéder lapjai.

Az *ametiszt* gyengén ibolyás színű, ugyanazoknak a formáknak a kombinációi szerepelnek rajta, mint a füstkvarcon. A prizmalapok itt is erősen rostozottak.

A kvarc még amorf formában is megjelenik a többi ásványok között.

A földpát többféle alakban figyelhető meg. Gyengén rózsaszínűre színezett kristályokban jelenik meg az *ortoklász*. A kristályok határoltsága nem jó, csak helyenkint lehet megkülönböztetni egy-egy határozott kristálylapot. Ezek gyöngyházfényűek. Az oldallap szerinti hasadás jól észrevehető. Az *adulár* egészen fehér, kristálykáin az oldallapok hiányzanak. Eléggé ép kristályokban található. Az *albit* kristályai nem jól határoltak, csak néha ismerhetünk fel jól kifejlett kristálylapot. Olykor ikerösszenövést is találunk. Mindhárom földpát összenőve fordul elő egymással, kvarccal, epidottal.

A *titanit* levélborítékalakú kristálykáin a (001), (102), (101) és (110) formák felismerése kézi nagyító segítségével nem okoz nehézséget. Szép ikerösszenövést is találtam (001) szerint. Sárgásbarna színű, üvegfényű, áttetsző kristálykák. Hosszuk a *c* tengely irányában 2—3 mm. Kémiai összetételének ellenőrzése végett porát káliumhidroszulfáttal feltártam s a kénsavas oldatban ammoniumoxaláttal a kalciumot, hidrogénhiperoxidos eljárással pedig a titánt mutattam ki.

Apró kristályok alakjában vagy nagy kristályok töredékei gyanánt találjuk a *kalcitot*. Az apró kristályhalmazok alakjában mutatkozó kristályokon, melyek minden rendszer nélkül egymás mellé halmozódva a többi ásványok közötti helyet töltik ki, csak a romboéder-lapokat sikerült megállapítani. Identifikálásuk kémiai alapon történt: hideg higított sósavban pezsgés közben maradék nélkül feloldódnak, az oldatban kalcium kimutatható. A nagyobb kristályok egyikén a romboéder-lapokon kívül szkalenoéder lapjai is megjelennek, sőt (0001) lap szerinti ikerösszenövést is meg lehet figyelni. A lapok zavart felületűek, vízszintes irányban rovátkosak. A kristálynak az az oldala, melyet lapok nem határolnak, a $+R$ törzsromboédernek megfelelő hasadási irányokban töredezett le. A hasadási lapokon gyöngyházfényű. Úgy az apró, mint a nagy kristályok színtelenek, helyenkint víztisztán átlátszóak.

Az ásványok között kétféle *zeolitot* találtam. Ezek közül a tüzetesebb vizsgálatok folyamán az egyik laumontitnak, a másik desminnek bizonyult. A *laumontit* kristálykái igen törékenyek, fehérek, illetőleg színtelenek. Prizmatikus habitusú, a hasadási lapon gyöngyházfényű kristálykák. Át nem látszók vagy áttetszők. Maximális hosszúságuk 12 mm. Nagy törékenységük folytán érintéskor a prizmalapoknak megfelelő hasadási irányokban szétválnak s a tűvékonyságú kristálykák hosszúságban is összetöredeznek. Éppen ezért terminális lapokat nem sikerült megállapítani rajtuk. A reflexiós goniométerrel mért adatok középértéke összehasonlítva a számított értékkel:

| | mért | számított |
|---|---|---|
| $(110) : (1\bar{1}0)$ | $= 93°41'21''$ | $93°44'$ |

A reflexek nagyon elmosódottak. Ez arra vezethető vissza hogy a hasadási irányoknak megfelelően rendkívül finom repedések járják át s így lapjaik nem símák, hanem a $c$ tengely irányában finoman rostozottak.

Pontos identifikálás céljából kémiai összetételét is meghatároztam. Összehasonlítás kedvéért közlöm a teoretikus értékeket is.[5]

[5] C. Hintze: Handbuch d. Mineralogie. Leipzig. 1897. II. p. 1679.

| | anal. | teor. |
|---|---|---|
| $SiO_2$ | 52·24 % | 51·07 % |
| $Al_2O_3$ | 22·14 % | 21·72 % |
| $CaO$ | 10·55 % | 11·90 % |
| $MgO$ | nyomok | — |
| $Na_2O$ | 0·31 % | — |
| $K_2O$ | 0·43 % | — |
| $H_2O$ | 15·14 % | 15·31 % |
| Összesen | 100·81 % | 100·00 % |

Összeredményül kissé magas értéket kaptam, ennek a pontatlanságnak az lehet a magyarázata, hogy az analízis céljaira mindössze fél gramm anyag állt rendelkezésemre. A nyert értékek a teoretikus értékektől nem sokban térnek el, csupán a kovasav mutat némi nyereséget az aluminium és a kalcium rovására. Ez a tény, valamint az alkáliák fellépte, bizonyos átalakulás kezdetét engedi feltételezni. Hasonló összetételű s átalakulásnak indult laumontitot írt le Reichert Róbert a nadapi gróf Cziráky-féle bányából.[6]

A desmin nyalábszerű kristályhalmazokban fordul elő. A barnássárga színű kristályok hosszúsága néha a 15 mm-t is eléri. Igen gyakran alkotnak félig penetrációs ikreket a véglap szerint s így látszólagos rombos szimmetriát mutatnak. {001}, {110} és {010} formákat lehet megkülönböztetni rajtuk. Nem átlátszók. Nagyobb egyéneknél az oldallap szerinti hasadás jól előtűnik. A kristályok majdnem minden esetben hipoparallel nőttek egymás mellé legyezőszerűen. Egy esetben két ilyen halmaz összenőve kéveszerű, illetőleg nyeregszerű kiképződést mutatott.

A kémiai elemzés adatai szerint összetétele:

| | anal. | teor.[7] |
|---|---|---|
| $SiO_2$ | 55·95 % | 57·51 % |
| $Al_2O_3$ | 16·72 % | 16·31 % |
| $Fe_2O_3$ | 0·32 % | — |
| $CaO$ | 7·74 % | 8·94 % |
| $SrO$ | 0·01 % | — |
| $Na_2O$ | 0·78 % | — |
| $H_2O+$ | 17·06 % | 17·24 % |
| $H_2O-$ | 1·67 % | — |
| Összesen ... | 100·25 % | 100·00 % |

[6] Reichert Róbert dr.: Laumontit a nadapi gróf Cziráky-féle bányából. Földtani Közlöny LIV. 1924. p. 77.

[7] C. Hintze: Handbuch d. Mineralogie. Leipzig, 1897. II. p. 1822.

Víztartalmára, illetőleg annak különböző hőmérsékleten való elvesztésére vonatkozólag külön kísérletet végeztem. Erre a célra érzékeny spirálrúgóval ellátott rúgós mérleg szolgált. A rúgó alsó végén platinaedényt helyeztem el s ebbe tettem a kb. 1 gr-nyi porrátört anyagot. Maga a rúgó a külső közvetlen behatások elkerülése céljából széles üvegcsőben nyert elhelyezést. Az üvegcső alul — megfelelő hűtőkészülék közbeiktatásával — elektromos kályhával érintkezett, melynek függőleges irányban volt a nyílása. Az anyagot tartalmazó platinaedényt és a rúgó alsó végét összekötő platinahuzal hosszúságát úgy választottam, hogy a platinaedény az elektromos kályhának kb. a közepébe kerüljön. Ugyanitt végződött a hőmérséklet leolvasására szolgáló vas-konstantán termoelem is. A hőmérséklet emelkedésével a desmin mind több és több vizet adott le, a rúgó ennek megfelelően összehúzódott. A hőmérséklet és vízveszteség közötti összefüggésre az alábbi adatokat kaptam (a hőmérsékletet Celsius fokokban, a vízveszteséget pedig az egész víztartalomra vonatkoztatott százalékban kifejezve):

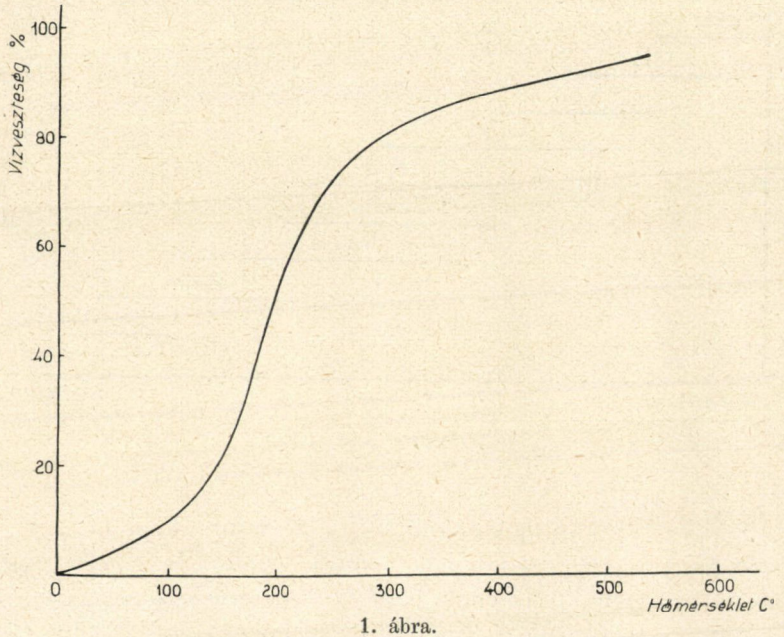
| hőmérs. | vizveszt. | hőmérs. | vizveszt. | hőmérs. | vizveszt. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 180 | 42 | 275 | 75 |
| 20 | 2 | 185 | 44 | 285 | 76 |
| 30 | 2 | 190 | 46 | 290 | 76 |
| 45 | 3 | 195 | 48 | 295 | 77 |
| 65 | 4 | 200 | 50 | 300 | 77 |
| 70 | 5 | 205 | 53 | 325 | 78 |
| 90 | 7 | 210 | 55 | 330 | 79 |
| 100 | 10 | 215 | 57 | 340 | 82 |
| 110 | 12 | 220 | 59 | 345 | 83 |
| 120 | 14 | 225 | 61 | 360 | 84 |
| 130 | 16 | 230 | 62 | 370 | 85 |
| 140 | 18 | 235 | 65 | 410 | 86 |
| 150 | 22 | 240 | 67 | 440 | 87 |
| 155 | 24 | 245 | 70 | 465 | 88 |
| 160 | 26 | 250 | 72 | 480 | 90 |
| 165 | 30 | 255 | 73 | 500 | 91 |
| 170 | 33 | 260 | 74 | 540 | 93 |
| 175 | 35 | 265 | 75 | | |

Ezeket az értékeket grafikusan az 1. ábra tünteti fel.

Amint látjuk, a desmin már 540° C-nál elveszti víztartalmának 93 %-át. 100° C-nál a veszteség 10 %, ami teljesen megegyezik

a kémiai analízis alkalmával nyert $-H_2O$ értékével a $+H_2O$-hoz viszonyítva.

Az ásványok között egyetlenegy kristályka alakjában találtam a *fluoritot*. A színtelen, apró, félmilliméternyi kristályon kézi nagyítóval jól fel lehetett ismerni a hexaéder síma és fénylő lapjait. Sajnos, közelebbi vizsgálatokat a kristály apró volta, valamint nehezen hozzáférhetősége miatt nem tudtam rajta végezni.



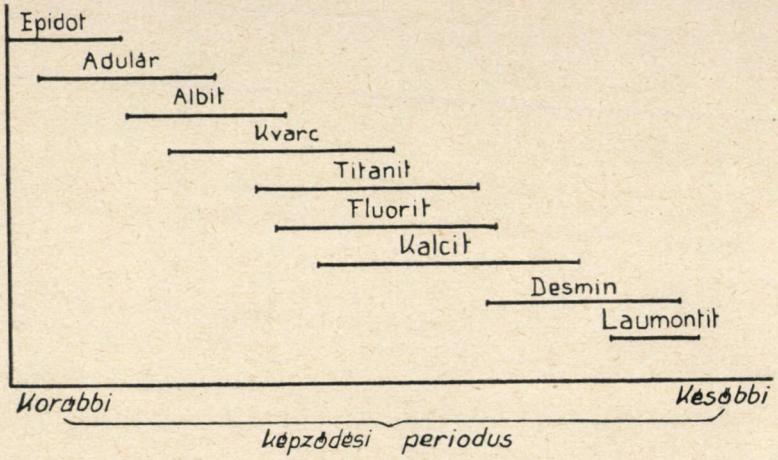

1. ábra.

Nagyon nagy számban találhatók az ásványok között zöld színű *epidot* kristálykák. Hosszúságuk átlag 5 mm, egyes kristályok a 8 mm-t is elérik. Erős üvegfényük van. Gyakran sugaras halmazokat alkotnak. A *b* tengely irányában erősen megnyúltak, a terminális lapok oldalt hiányzanak. Ugyancsak a *b* tengely irányában erősen rostozottak a lapok. Az (100) lap szerinti ikrek is megfigyelhetők. A kristályok goniometrikus mérésre nem alkalmasak. Mikroszkóp alatt pleochroizmust mutatnak zöldtől zöldessárgáig. A többi ásványokon minden rendszer nélkül keresztül nőnek.

A kristályalakok tökéletessége és az összenövések mineműsége

alapján igyekeztem megállapítani az ásványtársaság egyes tagjai között az időssági sorrendet is. A megfigyelések alapján állítottam össze a 2. ábrán látható szukcessziós táblázatot.

Legidősebb kiválású az epidot, mely minden más ásványon keresztülnőve, illetőleg belenőve megtalálható. Utána következnek a földpátok és a kvarc, ezek egymást átnövik; közöttük a titanit is megtalálható. A kalcit előbbieken nem nő keresztül,




2. ábra.

csak a köztük levő helyet tölti ki, tehát utánuk képződött. Vele egyidőben kellett kiválnia a desminnek, legalább is el kellett kezdődnie a desmin kiválásának, mert egymásba nőve is megjelennek. A laumontit kétségkívül legutolsó képződmény, mert teljesen szabadon lehetett megfigyelni. A fluorit képződési idejét nem tudtam megállapítani, mert nem állt megfelelő mennyiségű kristály rendelkezésemre. Kiválási hőmérsékletének alapján azonban körülbelül a titanittal egykorúnak kell vennünk.

A megvizsgált anyag szíves átengedéséért ezen a helyen is hálás köszönetet mondok dr. VENDL ALADÁR professzor úrnak.

Készült a műegyetemi Ásvány- és Földtani Intézetben, a Természettudományi Alapból az intézetben folyó kőzettani kutatások céljaira adományozott segély támogatásával, Budapest, 1936.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. márc. 16-án tartott üléséből.)

# GRANODIORIT VON ZSIDÓVÁR.

Von T. TAKÁTS.

Die Arbeit erscheint in deutscher Sprache in der Zeitschrift «Zentralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie».

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. März 1936.)

# ÁLTALÁNOS TALAJMEGHATÁROZÓ.

'SIGMOND ELEK rendes tagtól.

Ahhoz, hogy általános talajrendszeremet minél többen alkalmazzák, egyebek között az is szükséges, hogy adott esetben könnyen megállapíthassuk, hogy a meghatározandó talaj általános rendszerembe hová illeszthető be. Ezt ugyan Általános Talajtanomban részletesen leírtam, mégis, ha még nem értettük meg tökéletesen rendszerem szellemét és vezető gondolatait, a meghatározás lassabban megy. Különösen a talajfelvételek térképezésekor, midőn kevés időnk van a behatóbb tanulmányokra, jó szolgálatot tehet az ilyen általános talajmeghatározó, mely röviden összefoglalja minden talajféleség legjellemzőbb adatait és gyakorlatias alakban megkönnyíti a gyors meghatározást.

Elsősorban tehát a talajfelvételezőknek és térképezőknek kívántam segítségére jönni általános talajmeghatározásom megszerkesztésével. Törekvésemet megerősítette az, hogy a mult nyáron az oxfordi talajkongresszuson angol kivitelben bemutattam már ezt a meghatározást és nagy érdeklődést keltett, különösen azon országok szakemberei előtt, kik most foglalkoznak talajelőfordulásaik rendszeres felvételével és meghatározásával. Így pl. ASHUTOSH SEN indiai talajszakember a kiállított táblázataimat lemásolta és azután itt meglátogatott csak azért, mert ezt a rendszert akarja talajfelvételeinél alkalmazni. Nemrég pedig C. R. VAN DER MERWE Pretoriából (Délafrika), a délafrikai kísérleti intézet szakembere kérdezősködött levélben, hogy az Oxfordban kiállított «Questionary» — így neveztem el angolul talajmeghatározómat — mikor fog angolul megjelenni? Ezt a két példát csak azért említettem, hogy igazoljam, amit fentiekben előrebocsá-

tottam. Az angol «Questionary»-t mindjárt Prof. MORISON, az oxfordi egyetemen a talajtan előadója, elkérte gyüjteménye részére. Hazajövetelem után nekifeküdtem, hogy talajmeghatározásomat gyakorlatilag használható állapotban magyarul kidolgozzam, mely alkalmas arra is, hogy sokszorosítva közhasználatba átmehessen. Az egészet egy könnyen hordozható és kezelhető dobozba foglaltam össze.

Tulajdonkép az egész talajmeghatározó hasonló elvben készült, mint a rendszeres minőségi elemzési táblázat, csak mivel itt más szakképzettségűekre kellett számítanom, a kérdések és jellemzések sokkal egyszerűbbek. Az egész meghatározó tulajdonkép négy részből áll.

Az első rész az alapkérdésekből áll, melyek mindenikére igennel vagy nem-mel felelhetünk. E szerint tagozódik azután a táblázat. A két első kérdéssel eldönthetjük, hogy a meghatározandó talaj a rendszerem melyik főcsoportjába tartozik. I., II. vagy III. főcsoportba. A következő öt kérdéssel meghatározhatjuk a kilenc alcsoportot. Természetesen a gyakorlatban ez egyszerűbb, mert ha már ismerjük a főcsoportot, akkor az alcsoport már kevesebb kérdéssel is elintézhető.

A második táblázat a kilenc alcsoportba tartozó 25 talajnem jellemzőit foglalja össze. Mindenik lap egy-egy alcsoport nemeit jellemzi. Ha már az előbbi kérdésekből eldöntöttük, hogy a meghatározandó talaj melyik alcsoportba tartozik, felütjük az illető alcsoport lapját és ezen két, ill. három talajnemet találunk. Elolvassuk a jellemzést és ennek alapján megállapítjuk a talaj nemét.

A meghatározó 3. és 4. részét a dobozban kartotékszerűen csoportosítva találjuk meg. Mégpedig a 3. rész az előbbi táblázatok folytatása, de táblázatban nagyon bonyolult lenne. Ezért a talajnemeket a kartotékban a piros nyelvű táblákon közelebbről jellemeztem. Ha már megállapítottuk az előbbiekben a talaj nemét, most következik a fő- és altípus meghatározása. A szerint, hogy hány főtípus tartozik az illető talajnembe, annyi fehérnyelvű kartotéklapot találunk sorszámozva egy-egy talajnemen belül. Így hamarosan eldönthetjük, hogy az illető talajnemnek melyik főtípusa illik a vizsgált talajra. Ha pedig ez is megvan, a zöld táblácskákkal jelölt számok az illető főtípusba tartozó altípusokat

foglalják össze. Ezeken végigfutva, meghatározhatjuk a vizsgált talaj végleges helyét a rendszertanban. Mert az azután következő fokozat már a helyi variációkat öleli fel, vagyis minden egyes helyi előfordulás a maga helyi jellemzésével betűsorrendben ide becsúsztatható. Ha tehát pl. egy talajtani laboratóriumban megvizsgáltak több száz talajt és ezek szerint meghatározzák, minden talaj rövid jellemzése a kartotékba csúsztatható, vagyis benne van a talajrendszerben.

Ha most azt akarjuk tudni, hogy a már meghatározott talajaink hol találhatók fel a kartotékban, akkor a hátulsó kartotékot használjuk, ahol a talajokat betűsorrendben nevük vagy előfordulási helyük szerint a megfelelő indexszámmal találjuk. A nemzetiszínű indexszám segítségével azonnal megtalálhatjuk a beosztott talajt, mert a piros szám a talaj nemét, a fehér a főtípust, a zöld pedig az altípust tünteti fel. Ugyancsak a kartotéknak ez a hátsó része arra is jó, hogy ott a talajtanban használatos elnevezéseknek megfelelő indexszámokkal felkutassuk az illető talajféleségek vagy talajsajátságok helyét és előfordulását a rendszerben. Ha pl. valaki az iránt érdeklődik, hogy a podzolszintek minő talajokban fordulhatnak elő, kikeresi a hátsó kartoték P-betűjével a podzolos szinteket és ezen négy indextáblát talál:

10. — 1. — (4—6)
10. — 2. — (1—3)
10. — 3. — (1—5)
10. — 5. — 3.

Ez annyit jelent, hogy a podzolszintek mind a 10. talajnembe tartoznak, mégpedig annak 1., 2., 3. és 5. főtípusába. Az utolsó indexszámok az altípusokat jelölik, vagyis az első esetben a 10. talajnem 1. főtípusának 4., 5. és 6. altípusában találni podzolszinteket, és így tovább. Ha most kikeressük a megfelelő lapokat az elül elhelyezett kartotékban, akkor az illető nemek, fő- és altípusok jellemzését is megtaláljuk, ahol podzolszintek előfordulnak.

A kartotékrendszerrel lehetővé válik az is, hogy a szükség szerint akár a meghatározó, akár a kereső részt bővíthessük. Így az olyan intézet, mely sok talajmeghatározást végez, így igen kiterjedt kartotékot készíthet, amelyben az alapbeosztás mindig

ugyanaz, egészen az altípusokig, csak minden altípuson belül a különböző odatartozó helyi előfordulások rendeződnek névsor szerint. Arra is használhatjuk ezt a meghatározást, hogy a szakirodalomban talált talajmeghatározások alapján a különböző országok vagy világrészek ismert talajelőfordulásait a rendszerbe beosztva csoportosítsuk.

Mivel kilátás van arra, hogy talajmeghatározóm nyomtatásban magyarul és angolul is megjelenjen, előbb itt akartam ismertetni és bemutatni az első kézipéldányt.

E munkám elkészítésében HORVÁTH ENDRE műegyetemi tanársegédem segédkezett, miért neki e helyen is köszönetet mondok; a táblák megrajzolását és festési munkákat KOMLÓSI IMRE szigorló mérnök végezte.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. febr. 17-én tartott üléséből.)

# ALLGEMEINER BODENREGISTER.

Von ALEXIUS A. J. von 'SIGMOND.

Verfasser hat auf Grund seines Allgemeinen Bodensystems einen Bodenregister zusammengestellt, um die Bestimmung der Bodenvorkommnisse zu erleichtern. Es besteht aus vier Teilen. Der Erste ermöglicht durch Beantwortung einiger einfachen Fragen die Bestimmung, in welche Haupt- resp. Untergruppe der fragliche Boden gehört. Im zweiten Teil finden wir die bestimmende Charakterzüge der 25 Bodenarten des Allgemeinen Bodensystems in die neun Untergruppen eingeteilt. Der dritte Teil umfasst die Haupt- und Untertypen der 25 Bodenarten in kartotekartiger Ausführung. Die vierte Abteilung dient zur Auffindung der schon eingeteilten Böden, resp. einzelner in der Bodenliteratur bekannten Bodenvorkommnisse. Der Allgemeine Bodenregister soll besonders bei Bodenaufnahmen und Bodenkartierung empfohlen werden.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 17. Feber 1936.)

# AZ IZOMBÓL KILÉPETT MYOGLOBIN VISELKEDÉSE ÉS VÁLTOZÁSAI A SZERVEZETBEN.

MÓCSY JÁNOS-tól.

A magasabbrendű állatok harántcsíkolt izmainak vörös festőanyagát (myoglobin) régebben a haemoglobinnal azonosnak tartották, vagy mindössze a globinfrakcióban véltek különbségeket látni (MÖRNER, GÜNTHER). Csak a legújabb időben, pontos spektroskopos vizsgálatok (RAY és PFAFF, 1930) és különösen THEORELL (1932—34) munkálatai alapján lett kétségtelen, hogy a vörös vérsejtek és az izmok festékanyaga különböző, aminthogy THEORELLnek a myoglobint tisztán is sikerült előállítania. Az eltérés nemcsak a myoglobin elnyelési csíkjainak 3—5 $\mu\mu$-al a színkép vörös oldala felé való eltolódásában nyilvánul, hanem az oxymyoglobinnak valamivel kisebb színelnyelésében is a haemoglobinnal szemben. Másfelől a myoglobinnak az oxygénhez való affinitása körülbelül hatszor akkora, mint a haemoglobiné, azonkívül a környezet hydrogenionkoncentrációja az oxymyoglobin disszociációjára sokkal kisebb befolyással van, mint a haemoglobinnál. A myoglobin vastartalma 0·34%. Ismeretes az oxy-, a redukált és a metamyoglobin színképe.

*Saját vizsgálataim* során a teljesen vérmentessé átmosott ló- és kutyahullákból kivett izmok présnedvében az oxymyoglobin $\alpha$-csíkjának elnyelési maximumát a LÖWE-féle spektrométerrel 5812,8 $\mathring{A}$-nál (ló myoglobin), illetve 5813,5 $\mathring{A}$-nál (kutyamyoglobin) találtam, míg a kevésbbé pontosan meghatározható $\beta$-csík maximuma mindkét állatfajban 5430 $\mathring{A}$-nál volt. Ezek a megállapítások jól egyeznek más búvárok adataival. Az ultraibolya határán levő $\gamma$-csíkot a HILGER-féle $E_3$ typusú spektrophotometerrel fényképészeti úton 4150 $\mathring{A}$-nál határoztam meg, azt tehát nem találtam

annyira eltolódva a vörös szín felé, mint THEORELL (4180 Å). Az oxyhaemoglobin $\gamma_1$-csíkjának megfelelő elnyelési csíkot az ibolyán túl levő színképterületről készített számos fényképen egy esetben sem láttam, ezzel szemben tiszta oxymyoglobint tartalmazó vizelet színképében a szélső ibolyántúli területen meg lehetett találni a myoglobin $\varphi$-csíkját a 2850 Å-nál, azaz mintegy 100 Å-egységgel a vörös oldalhoz közelebb, mint ahogy azt ROCHE és DUBOULEZ az oxyhaemoglobin $\varphi$-csíkjára vonatkozólag megállapították. Ennek a csíknak a myoglobin festékcsoportjához éppen úgy nincsen semmi köze, mint a haemoglobin hasonló elnyelési csíkjának, minthogy ezen a színképterületen minden cyklikus fehérjevegyületnek, sőt cyklikus aminosavaknak is (GRÓH és tanítványai) erős elnyelése van.

A *redukált myoglobin* elnyelési színképe a redukált haemoglobinéhoz hasonlít : széles elnyelési sáv az 5400 Å és 5850 Å közötti területen, azonkívül egy igen erős, éles elnyelési csík az ultraibolya határán, 4270 Å-nál levő maximummal. A *metamyoglobin* színképe nagy mértékben függ az oldószer hydrogenionkoncentrációjától. Lugos közegben két, aránylag gyönge elnyelési csíkja van körülbelül az oxymyoglobin $\alpha$- és $\beta$-csíkjai helyén, a metamyoglobin második csíkja azonban erősebb, mint az első. Ezeken kívül az ultraibolya határán a $\gamma$-csíknak megfelelő erős elnyelési csík látható, amelynek maximuma 4150 Å-nál van. A *myochromogén*nek 5800 Å és 5670 Å között van erős elnyelési csíkja (maximum: 5739 Å), azonkívül egy gyöngébb csíkja 5450 Å és 5390 Å között, végül a $\gamma$-csíknak megfelelő erős csík az ultraibolya határán. Ezen adatok szerint nemcsak az oxymyoglobinnak, hanem a redukált és metamyoglobinnak, valamint a myochromogénnek elnyelési csíkja is a vérfestékszármazékok hasonló csíkjaihoz képest kissé a vörös felé eltolódtak.

A *lovak bénulásos myoglobinaemiája* esetén az izomrostokból izomfesték oldódik ki és azután megjelenik a vérplazmában. A betegség oka a működő izmokban történő savfölhalmozódás (MAREK), annak folytán, hogy a glykogén és a kreatinfoszforsav hasadásakor keletkező savanyú bomlástermékek az izomműködés kezdetén még hiányos vérellátás és viszonylagos oxygénhiány következtében sem

elégni, sem az alapanyaggá visszaalakulni nem tudnak. Minthogy pedig oxygénhiány esetén az izomrostok elsősorban a myoglobin oxygénjét veszik igénybe, a nagyon súlyos helyi oxygénhiány következtében támadt betegség folyamán a myoglobin az izomrostokban csak mint redukált myoglobin lehet jelen s a megbetegedett rostokat is csak ebben az alakban hagyja el.

A keringő vérbe jutott myoglobin mennyisége mindig sokkal csekélyebb, semhogy a vérsavót vörös színűre festhetné. A többnyire csekély mennyiség, valamint a vérsavó előállítása közben kioldódott némi haemoglobin zavaró hatása folytán, a vérsavóban a myoglobin csíkjait sokszor csak nagyon gondos és kiválóan teljesítőképes készülékkel sikerül kimutatni. Így 12 eset közül nyolcszor sikerült a myoglobin jelenlétét a vérsavóban kétségtelenül megállapítanom, míg CARLSTRÖM 8 esete közül mindössze egy pozitiv eredményt kapott. Ennek oka nemcsak az általam használt LÖWE-féle spektrométer tökéletes volta, hanem az a körülmény is, hogy eseteimben a vérvétel sokkal korábban a megbetegedés után történhetett, mint CARLSTRÖM megfigyeléseiben.

A vérsavóban a myoglobin kizárólag vagy túlnyomórészben mint oxymyoglobin van jelen, jóllehet az izomrostokból mint redukált myoglobin lép ki. Ennek az a magyarázata, hogy a redukált myoglobin a vérnek a tüdőn át való haladása közben oxygént vehet föl, amelyet azonban a szövetek éppen úgy nem tudnak fölhasználni, mint az oldott állapotban levő vérfesték oxygénjét. Az oxymyoglobin mellett — csekély mennyiségben — redukált myoglobin is fordul elő a vérsavóban.

A vérsavó vizsgálata során megállapítottam a normális lóvérsavó teljes elnyelési görbéjét, mégpedig a látható területen a KÖNIG- és MARTENS-féle spektrálphotométerrel, az ultraibolya területen pedig a HILGER-féle quarcprizmás spektrográffal. Az elnyelési görbe nagyjában az embervérsavó elnyelési görbéjéhez hasonló és a vöröstől az ibolyaszín felé előbb fokozatosan, majd igen meredeken emelkedik. A kék fényterületen mutatkozó erős elnyelést a lóvérsavóban rendszerint nagymennyiségű bilirubin okozza, a szélső ultraibolyában levő újabb elnyelési maximumot pedig a cyklikus fehérjevegyületek. Az emberi vérsavók görbéin rendszerint ábrázolt és a vérfesték jelenlétére utaló kiemelkedé-

seket a lóvérsavón egyáltalán nem vagy alig lehet észlelni (tehát a $\gamma$-csík helyén sem), minthogy a lóvérsavót sokkal inkább sikerül vérfestékmentesen előállítani, mint az emberi vérsavót. A végső absorpciót 1 : 70—80 higítású vérsavóban mindig 2400 $\mathring{A}$-nál találtam.

*Myoglobinuria.* A bénulásos myoglobinaemia esetén a vizeletben még akkor is meg lehet találni az izomfestéket, ha azt a vérsavóban esetleg nem sikerült kimutatni, minthogy a vese a myoglobint igen gyorsan és csaknem teljesen kiválasztja. Saját mennyiséges vizsgálataim szerint (meghatározás a vastartalom alapján) a vese az igen nagy- és az igen kismennyiségű (egy esetemben mindössze 35 mg) izomfestéket egyaránt néhány órán belül szinte quantitative kiválasztja; a myoglobin tehát ebben a tekintetben lényegesen különbözik a haemoglobintól, amelynek aránylag magas a veseküszöbe. A myoglobin könnyű kiürülése a veséken át a myoglobinnak a haemoglobinéval szemben jóval kisebb molekulasúlyára utal. Külön erre irányuló kísérletekkel azt is sikerült kimutatni, hogy az izomfesték kiürülésében az izmokból esetleg kikerülő egyéb és talán a vesét izgató anyagoknak nincsen semmi szerepük.

A vizeletben eredetileg főként oxymyoglobin és csak kevés redukált myoglobin van jelen. Ez a helyzet azonban már a húgyutakban megváltozik, minthogy a lóvizeletben mindig jelenlevő redukáló anyagok az oxymyoglobin egy részét csakhamar redukálják, a másik része pedig állásközben metamyoglobinná alakul át. A spektroskópos vizsgálattal is követhető ezeken a folyamatokon kívül állás közben a vizelet és vele együtt a benne levő izomfesték bomlani kezd, ennek folytán a vizelet sötétebb színt kap, a fényelnyelés az egész színkép területén emelkedik, viszont a jellegzetes elnyelési csíkok eltűnnek. Az izomfesték bomlásának legjobb indikátora az ultraibolya határán levő $\gamma$-csík magasságának csökkenése, minthogy ez a csík valamennyi myoglobinvegyületre egyaránt jellemző és nagyon erős. A vizeletben a myoglobin bomlása olyan gyors, hogy az egyes festékanyagok viszonylagos mennyisége a sektrophotometriás mérések közben is változik. Ez okból nem lehet a myoglobin mennyiségét az ilyen könnyen bomló vagy bomlasztó anyagban (vizelet, izomnedv) a különben igen pontos spektrophotometriás úton meghatározni.

A HEILMEYER által az ember vizeletében a szélső ultraibolya színkép területén (2800 Å-nál) látott erősebb elnyelési csíkot biztosan fehérjementes normális lóvizeletben egy alkalommal sem tudtam kimutatni.

E helyütt is hálás köszönetet mondok GRÓH GYULA egyetemi tanárnak azért, hogy intézetének készülékeit vizsgálataim elvégzésére átengedni szíves volt.

(A dolgozat egész terjedelmében a vizsgálatok részletes leírásával együtt az «Archiv für wissenschaftliche und praktische Tierheilkunde» c. német folyóiratban jelenik meg.)

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1935. dec. 16-án tartott üléséből.)

# VERÄNDERUNGEN UND VERHALTEN DES MYOGLOBINS NACH SEINEM AUSTRITT AUS DEM MUSKEL.

Von JOHANNES v. MÓCSY.

Wenn auch die chemischen und physikalischen Eigenschaften des Muskelfarbstoffes durch neuzeitige Untersuchungen von RAY und PFAFF, sowie ganz besonders von THEORELL zum Teil bekannt geworden sind, blieb die Frage nach dessen Veränderungen und Verhalten nach seinem Austritt aus den Muskelfasern in vielen Beziehungen offen. Dies veranlasste den Verfasser zur Ausführung von Untersuchungen unter Verwendung des sehr empfindlichen Spektrometers nach LÖWE, des HILGERschen Spektrophotometers Typ $E_3$, sowie des Spektralphotometers nach KÖNIG und MARTENS. Es gelangte zur Untersuchung einerseits Muskelpressaft von vollständig blutfrei ausgewaschenen Pferde- und Hundekadavern, anderseits Blutserum und Harn an Lähmungsmyoglobinämie und Myoglobinurie erkrankter Pferde, bei welcher Krankheit bekanntlich aus den ergriffenen Muskeln Myoglobin heraustritt und mit dem Harn ausgeschieden wird.

Das Absorptionsmaximum des $\alpha$- und des $\beta$-Bandes für das Oxymyoglobin wurde als im grossen ganzen übereinstimmend mit dem von THEORELL nachgewiesenen Streifen gefunden (für das $\alpha$- Band als 5812,8 $\mathring{A}$ (Pferd) bzw. 5813,5 $\mathring{A}$ (Hund), für das $\beta$-Band als 5430 $\mathring{A}$), das $\gamma$-Band an der Grenze des Ultraviolett aber als weniger weit nach dem Rot verschoben. Daneben fand sich in einem rein oxymyoglobinhaltigem Harn stets das $\varphi$-Band des Myoglobins jenseits des Ultraviolett bei 2885 $\mathring{A}$, somit etwa um 100 $\mathring{A}$-Ein-

heiten näher an das Rot veschoben, als ROCHE und DUBOULEZ beim Oxymyoglobin gefunden haben.

Das Absorptionsspektrum für das *reduzierte Myoglobin* ähnelt dem von Hämoglobin, es lässt sich namentlich ein breites Absorptionsband zwischen 5400 $\mathring{A}$ und 5850 $\mathring{A}$, ausserdem ein sehr deutliches Absorptionsband an der Grenze des Ultraviolett mit einem Maximum bei 4270 $\mathring{A}$ nachweisen. Hiergegen wird das Spektrum des *Metamyoglobins* stark beeinflusst durch die Hydrogenionkonzentration des Lösungsmittels. Das *Myochromogen* kennzeichnet sich durch einen starken Absorptionsstreifen zwischen 5800 $\mathring{A}$ und 5670 $\mathring{A}$ mit einem Maximum bei 5739 $\mathring{A}$, ferner durch einen schwächeren Streifen zwischen 5450 $\mathring{A}$ und 5390 $\mathring{A}$ und endlich durch einen starken Streifen an der Grenze des Ultraviolett. Es wurde somit festgestellt, dass ähnlich wie beim Oxymyoglobin im Vergleich mit den Absorptionsstreifen der Hämoglobinabkömmlinge sich die Absorptionsbänder der Myoglobinabkömmlinge leicht nach dem Rot verschoben zeigen.

Bei der *Lähmungsmyoglobinämie* besteht beim Beginn ein im Verhältnis zu der zu verrichtenden Muskelarbeit bedeutender Sauerstoffmangel, wodurch im erkrankten Muskel reduziertes Myoglobin entsteht und in dieser Form die Muskelfasern verlässt, um darauf mit dem Blutstrom den Nieren zugeführt und dort ausgeschieden zu werden. Entsprechend seiner im Verhältnis zur Gesamtblutmenge des Körpers nur geringen Menge färbt er das Blutplasma nicht merkbar rot, und kann auch sonst daselbst meist nur mit Hilfe sehr empfindlicher Vorrichtungen spektroskopisch, bzw. spektrophotographisch nachgewiesen werden. Während dementsprechend unter 12 eigenen Beobachtungsfällen der genannten Krankheit 8-mal der Myoglobinnachweis im Blutserum gelang, hat CARLSTRÖM bloss über einen positiven Ausschlag unter 8 Fällen berichtet.

Trotzdem das den Muskel verlassende reduzierte Myoglobin sich in dem sauerstoffführenden Blute mindestens zum grossen Teil oder vorwiegend wieder zu Oxymyoglobin verwandelt, kann sein Sauerstoff ebenso wenig von den Körpergeweben verwendet werden, wie der eines im Blutplasma gelöst kreisenden Oxyhämoglobins.

Mit Hilfe des KÖNIG und MARTENSschen Spektralphotometers und jenseits des Ultraviolettfeldes mit dem HILGERschen Spektrograph, wurde die vollständige Absorptionskurve des normalen Pferdeserums bestimmt und als der Absorptionskurve des menschlichen Blutserums weitgehend ähnlich gefunden. Sie zeigt in der Richtung vom Rot nach dem Violett zunächst eine allmähliche, dann eine steile Steigerung, ausserdem im Bereiche des blauen Feldes eine durch das Bilirubin erzeugte sehr starke und breite Absorption und in dem äussersten Ultraviolett ein weiteres, durch zyklische Eiweissverbindungen bedingtes Absorptionsmaximum. Die durch Spuren von gelöstem Hämoglobin im menschlichen Blutserum regelmässig auftretenden Erhebungen wurden in eigenen Bestimmungen im Pferdeblutserum in den meisten Fällen vermisst, wohl deshalb, weil sich beim Pferde eher ein vollkommen hämoglobinfreies Blutserum gewinnen lässt.

Trotzdem im Verlaufe der Lähmungsmyoglobinämie das Blutplasma stets nur kleinste Myoglobinmengen mitführt, erscheint der ausgeschiedene Harn dennoch regelmässig mehr oder weniger, meist sehr deutlich durch das mitausgeschiedene Myoglobin rot gefärbt. Hiergegen setzt die Mitausscheidung des Blutfarbstoffes mit dem Harne eine bedeutend grössere Mengen von gelöstem Hämoglobin im Blutplasma voraus. Dies rührt davon her, dass gegenüber dem Hämoglobin die Nierenschwelle für das Myoglobin viel niedriger liegt, das Myoglobin infolgedessen bereits innerhalb einiger Stunden gänzlich ausgeschieden und dem sich in den Harnwegen eine geraume Zeit hindurch ansammelden Harn in konzentrierter Menge beigemischt wird. Die gegenüber dem Hämoglobin viel stärkere Durchlässigkeit der Niere für das Myoglobin erklärt sich aus dem rund um die Hälfte niedrigeren Molekulargewicht des Myoglobins, ohne eine gleichzeitige ausscheidungsanregende Wirkung etwa zusammen mit dem Myoglobin aus dem Muskel heraustretender anderer Stoffe annehmen zu müssen.

Wenn auch in der Niere hauptsächlich Oxymyoglobin neben geringen Mengen von reduzierten Myoglobin zur Ausscheidung gelangt, kommt es bereits innerhalb der Harnwege wieder zur Bildung von reduziertem Myoglobin und zum Teil auch von Metamyoglobin unter dem Einfluss der im Pferdeharn stets vorhandenen

reduzierenden Stoffes, wie es bei der spektroskopischen Untersuchung von zu verschiedenen Zeiten untersuchten Proben eines entleerten Harnes verfolgt werden konnte. Beim Stehen an der Luft verfällt der entleerte Harn mitsamt dem darin enthaltenen Myoglobin rasch der Zersetzung, seine Farbe wird dunkler und seine Lichtabsorption im ganzen Bereiche des Spektrums stärker, womit gleichzeitig auch die kennzeichnenden Absorptionsstreifen verschwinden. Als der zuverlässigste Indikator für die stattgefundene Zersetzung des Myoglobins wurde ermittelt die Höhenabnahme des an der Grenze des Ultraviolett vorhandenen $\gamma$-Bandes. Zufolge der Zersetzung des Harnmyoglobins ändert sich das gegenseitige Mengenverhältnis der Myoglobinabkömmlinge schon während der spekrophotometrischen Bestimmungen, das sonst äusserst präzise spektrophotometrische Verfahren eignet sich daher nicht zur quantitativen Myoglobinbestimmung im Harne oder im Muskelsaft. Unter solchen Umständen lässt sich die Gesamtmyoglobinmenge nur auf Grund des genau bestimmbaren Eisengehaltes berechnen.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Dezember 1935.)

# A HOMLOKVARRAT JELENTŐSÉGÉRŐL.

APOR LÁSZLÓ-tól.

Ha valamely nagyobb koponyagyüjteményt megtekintünk, nem is kell soká keresgélnünk, míg néhány olyan koponyára akadunk, melynek homlokán keresztül egy varrat húzódik végig. Ez a varrat a sutura metopica vagy sutura mediofrontalis persistens. A varrat rendszerint a második életév végéig elcsontosodik, illetőleg a homlokcsont két részre összeolvad s csak csekély százalékban jelentkezik, ugyhogy a búvárok közül többen a mult század közepe óta faji bélyegnek is tekintik.

Magának a varratnak morphológiájával ezen a helyen nem foglalkozom, csak azt óhajtom megjegyezni, hogy a MAIR-féle (8) beosztásnak megfelelő varratrészletek a koponyák tekintélyes százalékában nem ismerhetők fel.

A homlokvarratra vonatkozó adatokat először BROCA PÁL híres párizsi anthropológus, majd ANUTSCHIN (1) foglalta össze. Újabban több kutató foglalkozott ezzel a kérdéssel, akik közül REMAN (13), BOLK (2), MIJSBERG (10) és ROCHLIN (14) válik ki. Részletesebben csak azokkal a dolgozatokkal foglalkozom, melyek saját vizsgálataimmal szoros kapcsolatban vannak.

Tudjuk, hogy a gerincesek legtöbb rendjében a sutura metopica állandóan megvan, csak a legmagasabb csoportban, a főemlősök rendjében (Primates) tüntet fel érdekes átmenetet az ember felé abban a tekintetben, hogy a homlokvarrat fokozatosan mindinkább a korai időben tűnik el. REMAN (13) 5000 Primates-koponyán végzett összehasonlító vizsgálatot s úgy találta, hogy a félmajmok homlokvarrata csak későn, az állandó fogazat kialakulása után, a többi varrattal egyidőbe tűnik el. A majmoké már a fog-

váltáskor, az anthropoid majmoké pedig éppen úgy, mint az emberé, már az első tejzápfog megjelenésekor tűnik el. Egyes emberi koponyákon mégsem enyészik el ez a varrat a szokásos korai időben, hanem persistens marad. ANUTSCHIN (1) szerint a legnagyobb százalékban a Balkán-félsziget népeinél, legkisebb százalékban pedig az ausztráliaiaknál észlelhető. Ötvennégy csoporton át a népek változatos felsorakoztatásával arról akar meggyőzni, hogy egyrészt a homlokvarrat jóval nagyobb százalékban szerepel az európai, mint más népek között; másrészt, hogy a homlokvarrat jelenléte és a fajiság között korreláció észlelhető.

Hogy a saját vizsgálódásaimat be tudjam illeszteni az eddigi kutatók munkáinak sorozatába és eredményeimet összevethessem azokéval, nekem is fel kellett vetni azokat a kérdéseket, melyekre már többen törekedtek válaszolni, de amely kérdésekre máig se kaptunk megnyugtató feleletet. A legfontosabb az, hogy mi a metopizmus oka? Ezzel a kérdéssel kapcsolatban először is azt kell tisztázni, vajjon mi az oka annak, hogy bizonyos koponyákon nem tűnik le a homlokvarrat a normális időben és szerepelhet-e a metopizmus gyakorisága faji jellegként, végezetül pedig van-e valami befolyása a persistens varratnak a koponya alakjára.

CANESTRINI volt az első, aki a metopizmust primitív bélyegnek, alacsonyabb formákra való visszaütésnek, tehát atavizmusnak tartotta. MARTIN (9) nemcsak, hogy nem hajlandó elismerni CANESTRINI véleményét, de azok mellé áll, akik szerint az agyvelőnek nagyobbmérvű fejlődése gátolja meg a homlokvarrat elcsontosodását. Igen érdekes és manapság nagyon különösen hangzó megállapításra jutott néhány olasz szerző, akik bűnözők koponyáin végeztek vizsgálatokat s minthogy több helyen 10—12 %-ban fordult elő a homlokvarrat, a bűnöző egyének egyik csonttani ismertetőjegyét látták benne. Ma már tudjuk, hogy ennek semminémű jelentősége sem lehet. Éppen ellenkezőleg, a német kutatók közül többen arra hivatkozva, hogy általában a művelt európai emberfajtákon belül a metopizmus sokkal gyakoribb, mint a primitívebb fajoknál, a magasabbrendű szellemi képességek fokmérőjének tartották. Ezek szerint a metopizmus nem atavizmus, hanem ellenkezőleg a korábbi állapothoz képest előrehaladást, progressiv irányú fejlődést jelent. Többek szerint a koponyára

ható belső nyomással volna magyarázható, hogy a hydrokephal koponyákon gyakran megmarad a homlokvarrat. Újabban kimerítő vizsgálatok alapján Bolk (2) és Lenhossék (7) tagadják a hydrokephalia és metopizmus közti korrelaciót. Bolk (2) nem belső, hanem a koponyára ható külső nyomásnak tulajdonította a homlokvarrat jelenlétét, illetőleg elcsontosodását. Szerinte a homlokcsont két része a koponyán tapadó musculus temporalis húzó hatására nő össze a majmoknál általában.

Ettől eltérőleg Reman (13) és Mijsberg (10) nem paravariatióban keresik a metopizmus okát. Részletesen cáfolják Bolk (2) véleményét, amennyiben a varrat még az előtt elcsontosodik, mielőtt még az izom munkája hatással lehetne a csontra. Reman (13) szerint a homlokvarrat eltűnését két tényező szabályozza: meghatározott időben jelentkező, örökítő tényezőktől függő hatás s ezzel párhuzamosan jelentkező mechanikai ingerhatás is. Hogy az örökítő tényezőktől függő ingerhatás érvényre jut-e vagy sem, az attól függ, vajjon a mechanikai inger megfelelő időben jelentkezik-e? Mijsberg (11) és Méhely a magzatkorból megmaradt bélyegnek tartja a metopizmust. Kultúrnépek között ugyanis, ahol a homlokvarrat nagyobb százalékban szerepel, más magzatkorbeli bélyegek is gyakrabban fordulnak elő. Újabban hasonlóan nyilatkozott Rochlin és Rubaschewa (14). Szerintük a sinus frontalis és a sella trucica helyzete, valamint a koponya többi varratainak és a protuberantia occipitalis externa kifejlődése is ezt igazolja. Mert például a protuberantia occipitalis externa a homlokvarratos koponyáknak csak 38·1%-án, addig a varratnélküli koponyák 90%-án fordul elő.

Az elmondott érvek igen meggyőzőek, azonban sokan azt vallják, hogy a metopizmusnak az oka idiovariatióban rejlik, mely esetben az egyes fajokon belül különböző százalékban jelentkező metopizmusról, mint faji bélyegről beszélhetünk. Ma mindinkább előtérbe nyomul az a vélemény, amelyet egyébként Rochlin (14) is vall, hogy a metopizmus endokrin hatásnak tudható be, annál is inkább, mivel olyan infantilis sajátságokkal párosult, melyeknek keletkezését hasonlóképpen magyarázzák. Papillault (14) a thymus belső szekréciós betegségének, Angier (14) pedig a hypophysis első lebeny funkcióváltozásának tulajdonítja. Tekintettel arra,

hogy Rochlin (14) a metopizmusos koponyák sella turcicáin észlelt elváltozásokról számol be, valószínűnek tűnik fel, hogy csakugyan a hypophysis hyperfunkciójának a következménye. Annál is inkább, mert magas növés és acromegaloid habitus velejárója a megnagyobbodott sella turcicának.

Nálunk Davida (3) végzett először erre vonatkozólag vizsgálatokat Kolozsváron, ahol az orvoskari anatómiai intézetben 500 koponya 8·2%-án találta meg a homlokvarratot. Minthogy azonban az anatómiai intézetek gyüjteményeibe különböző szempontok, legtöbbször rendellenességek szerint kiválogatott anyag kerül s mivel Bolknak (2) Amsterdamban 1400 ugyanazon temetőből exhumált koponyán végzett vizsgálatára, mint az anthropológiai vizsgálatok során követendő példaképre hivatkoznak a kutatók, a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem anthropológiai intézetének múzeumában magam is gyüjteni kezdtem az erre vonatkozó adatokat. E mellett átvizsgálhattam a Néprajzi Múzeum koponyagyüjteményét is, amiért e helyen mondok köszönetet dr. Bartucz Lajos igazgató úrnak.

Mielőtt rátérnék a saját vizsgálataim tárgyalására, szükségesnek tartom megemlíteni, hogy csak olyan koponyákat vizsgáltam, illetőleg tartottam metopizmusosnak, melyeket Reman (13) értelmezése szerint annak vehettem, tehát azokat, melyeken kívül és belül is, valamint azokat, amelyeken csak kívülről, de egész hosszában jól kivehető a sutura metopica. Vizsgálati anyagom nem egyetlen sírmezőből származik és nem is ugyanabból a korból való. Különböző temetkezésekből származó anyagban avar, népvándorláskori és a 200 és 300 éves sírmezőkből származó koponyák mellett bonctani intézetből való koponyák is szerepelnek.

A következőkben táblázatosan foglaltam össze a vizsgálati anyagot, részletezve egyes sírmezők szerint.

| | Koponyák száma | Sut. met. |
|---|---|---|
| Avar (Üllő—Kiskőrös) | 251 | 9·61 % |
| Népvándorláskori (Újfehértó) | 160 | 8·12 % |
| Árpádkori (Rákospalota) | 332 | 6·30 % |
| Különböző sírmezőkből | 727 | 5·10 % |
| Budapest, Józsefvárosi temető | 355 | 7·40 % |
| « Botanikuskert | 113 | 4·42 % |
| « Homokbánya | 1040 | 5·— % |
| « Bonctani intézetből | 387 | 5·40 % |

Összesen tehát 3365 koponyát vizsgáltam meg és ezek 6·41%-án találtam meg a homlokvarratot. Ha tekintetbe vesszük, hogy a megvizsgált 3365 koponyánál körülbelül csak egytized részében, mégpedig a népvándorlás kora előtti koponyák között van képviselve a sutura metopica nagyobb százalékban és jelentékenyebb részénél csak 5%-ot mutat, a középérték is megváltozik, vagyis jóval kisebb lesz. Tekintettel arra, hogy az ilyenformán nyert középérték ANUTSCHIN (1) táblázatában a mongolokét közelíti meg leginkább, ebből könnyen lehetne bizonyos mongol kapcsolatokra következtetni, aminthogy ANUTSCHIN (1) maga is említ olyan mongol törzseket, melyeknél a homlokvarrat 5·1%-án jóval nagyobb százalékban fordul elő. HABERER (6) felsorolja azokat a szerzőket, akik kínaiakon végeztek vizsgálatot s velük egyetértve azt állítja, hogy a homlokvarrat egyes törzseknél 18%-ban is előfordul. Ez a nagy szám valószínűleg annak a rovására írható, hogy csak kevés koponyán történt a megfigyelés. Példaként említem, hogy a párizsi katakombákból származó koponyák közül 65 koponya TOPINARD ajándékából egyetemünk anthropologiai intézetének gyüjteményébe került; 10 koponyán a sutura metopica jól felismerhető, ami az anyag 15·4%-ának felel meg, márpedig TOPINARD szerint 10,000 koponya közül csak 9·9%-án látható a homlokvarrat. Azonban mégsem állíthatjuk határozottan, hogy a sutura metopicának a mongolokéhoz nagyon hasonló százalékban való jelentkezése mongol beütésnek volna minősíthető, annál kevésbbé, mert a megvizsgált avar és mongol koponyákon jóval nagyobb százalékba szerepel.

A következőkben vizsgáljuk meg a kérdésnek azt a részét, hogy van-e valamilyen hatással a sutura metopica persistentiája a koponya alakjára? E helyen elsősorban is BOLKRA (2) kell hivatkoznom, mint aki szintén végzett hasonló vizsgálatokat.

Többen állították és sokan vallják ma is, hogy a metopizmus bizonyos koponyaalakhoz kapcsolódik. Mivel az első megfigyelők főleg brachyokran koponyákat vizsgáltak, azt állították, hogy a metopizmus csak rövidfejű koponyákon fordul elő. Ma már tudjuk, hogy egyes hosszúfejű népek között tíz és ennél magasabb százalékban is szerepel. Világos tehát, hogy a metopizmus úgy brachy-, mint dolichokran koponyákon előfordul, csak az arány

más. Ezt igazolják Bolk (2), Essen és Möller (5) vizsgálatai is.

A sutura metopicás koponyák Bolk (2) vizsgálatai szerint valamivel rövidebbek, szélesebbek és alacsonyabbak, mint az általa közölt táblázatból kitűnik.

| | Hosszúság | Szélesség | Magasság |
|---|---|---|---|
| Sut. met.-val..... | 182·— | 144·8 | 128·4 |
| Sut. met. nélkül..... | 183·3 | 143·3 | 128·6 |

Általánosan ismert az is, hogy a homlok szélességi méretei nemcsak abszolút, hanem relatíve is nagyobb értéket tüntetnek fel a homlokvarratos koponyákon. Így találtam az általam megvizsgált koponyákon is. A kutatók Bolk (2) vizsgálatait azért tartják értékesnek, mert a vizsgálati anyag egységes típusú, azonos sírmezőből való. Ugyanilyen, tehát dolichokephal koponyákból álló hazai, mégpedig a népvándorlás korából való rákospalotai sírmezőt vizsgáltam át s ugyanazokra az eredményekre jutottam, mint Bolk (2), vagyis a metopizmusos koponyák rövidebbek, szélesebbek és alacsonyabbak. Ezeket az azonos méretbeli adatokat annak kellett tulajdonítanom, hogy a rákospalotai sírmezők koponyái is, akárcsak Bolk (2) vizsgálati anyaga szintén dolichokephal koponyák voltak. A hosszúság-szélességi index középértéke 75.69, illetőleg a metopizmusos koponyáké 76·70. Ezen kívül megmértem a homlokívet és a húrt ugyancsak Martin (9) szerint. A metopizmusos koponyák homloka szélesebb, de az ív és húr valamivel kisebb értékű, úgy a dolicho-, mint a brachykran sírmezők koponyái között.

| Rákospalotai Árpádkori koponyák | Legn. hoss. | Legn. szél. | Legk. homl. | Fül mag. | Iv | Homlok hur |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sut. met.-val..... | 181·05 | 138·87 | 98·14 | 110·24 | 120·86 | 104·95 |
| Sut. met. nélkül . | 182·42 | 138·08 | 95·82 | 114·91 | 123·98 | 109·61 |

Teljesség kedvéért közlöm a kiszámított indexeket. Tekintettel arra a megfigyelésemre, hogy a sutura metopicás koponyák homloka valamivel laposabb s az ív és húr változásával karöltve a homlok hajlásszöge is változik, megmértem a br.-na, valamint a po.-infraorb. síkok által bezárt hajlásszöget, amiből kitűnik, hogy a homlokvarratnélküli koponyák homloka valóban meredekebb.

## Indexek.

| Rákospalotai Árpádkori koponyák | Hossz. szél | Hossz. mag. | Homlok fal | Homlok dombor. | br.-na. po.-infrorb |
|---|---|---|---|---|---|
| Sut. met.-val..... | 76·70 | 60·89 | 70·67 | 86·83 | 47·67° |
| Sut. met. nélkül..... | 75·69 | 62·99 | 69·39 | 88·41 | 44·72° |

Tekintettel arra, hogy a Budapest melletti homokbányából ugyancsak nagyszámú koponya került az anthropologiai intézet birtokába, kiválogattam a köztük levő sutura metopicás koponyákat, számszerint ötvenkettőt, annál is inkább, mert ebben a csoportban a koponyák több, mint 70%-a brachy-, illetőleg hyperbrachykran koponyák közül kerül ki. Mint előbb láttuk már, ebben a sírmezőben a koponyák 5%-án fordul elő a homlokvarrat. Hogy a homlokvarratos koponyák hogyan oszlanak meg a hosszúság-szélességi jelző alapján és a rövidfejű koponyák mennyire dominálnak az egész anyagban, az a következő táblázatból tűnik ki:

| Homokbányai koponyák | Sut. met.-val | Sut. met. nélkül |
|---|---|---|
| Dolichokran..... | 5·9 | 1·3 |
| Mesokran ..... | 21·5 | 20·3 |
| Brachykran ..... | 49·— | 56·7 |
| Hyperbrachykran ..... | 17·7 | 18·9 |
| Ultrahyperbrachykran..... | 5·9 | 2·7 |

Az előbbi sírmező koponyáival szemben azonnal észrevesszük azt a feltűnő különbséget, hogy a brachykran koponyák mindkét csoportban dominálnak, s mint a továbbiak során még látni fogjuk, a homlokvarratos koponyák rövidebbek és alacsonyabbak is, akárcsak a hosszúfejű koponyákat tartalmazó rákospalotai sírmező koponyái, csakhogy az előbbi csoporttal szemben az idetartozó homlokvarratos koponyák keskenyebbek.

| Homokbányai koponyák | Legn. hossz. | Legn. szél. | Legk. homlok | Fül mag. | Homl. ív | Kerület |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sut. met.-val . | 175·— | 143·81 | 100·76 | 113·19 | 121·38 | 509·65 |
| Sut. met. nélkül | 176·22 | 144·92 | 96·65 | 115·79 | 123·66 | 508·83 |

Ezeket a méreteket az előbbiekkel, a rákospalotai sírmező koponyáinak méreteivel, valamint a Bolk (2) által közölt méretekkel egybevetve megállapíthatjuk, hogy úgy a brachykran, mint a dolichokryn sutura metopicás koponyák rövidebbek és alacsonyabbak, azt azonban nem állíthatjuk, hogy szélesebbek is, mint a homlokvarratnélküli koponyák, mert Bolknak (2) ez a

megállapítása csupán a hosszúfejű koponyákra vonatkozik. Az előbbiekből láthattuk, hogy a rövidfejű sutura metopicás koponyák, mint amilyenek a Budapest melletti homokbányából előkerült koponyák is, valamivel keskenyebbek.

Végül rá kell mutatnom arra, miképpen oszlik meg a sutura metopica gyakorisága a két nem között. DAVIDA (3), LE DOUBLE (4) és REGALIA (12) adataihoz hasonlóan a saját vizsgálati anyagomban is azt tapasztaltam, hogy az a női koponyákon nagyobb százalékban szerepel. Ebből a szempontból csak olyan sírmezőt vizsgáltam át, melyeknél a sírokból előkerült csontvázak nemét a mellékletek alapján a régészek és anthropologusok biztosan meghatározhatták.

| | | |
|---|---|---|
| DAVIDA ..... | 11·60 % | 8·70 % |
| LE DOUBLE ..... | 11·85 % | 9·91 % |
| REGALIA..... | 9·40 % | 9·20 % |
| Saját adat ..... | 10·90 % | 8·33 % |

## Irodalom. — Literatur.

1. ANUTSCHIN: Über die Stirnnaht beim erwachsenen Menschen. Biol. Zbl. 2. 1892.
2. BOLK: Über Metopismus. Zeitschr. f. Morph. u. Anthr. 21. 1921.
3. DAVIDA: Beiträge zur Persistenz der transitorischen Nähte. Anat. Anz. 46. 1914.
4. LE DOUBLE: Traite des variations des os du crane de l'homme. Paris, 1903.
5. ESSEN—MÖLLER: Statistische Untersuchungen über die persistierende Stirnnaht. Anthr. Anz. 5. 1928.
6. HABERER: Schädel und Skeletteile aus Peking. Jena, 1902.
7. LENHOSSÉK: Über Nahtverknöcherungen im Kindesalter. Archiv f. Anthr. N. F. 15. 1917.
8. MAIR: Zur Kenntnis der Fontanella metopica und der Stirnnaht. Anat. Anz. 57. 1923—24.
9. MARTIN: Lehrbuch der Anthropologie. Jena, 1928.
10. MIJSBERG: Die Obliteration der Nähte des Gesichtschädels. Zeitschr. f. Morph. und Anthr. 27. 1929.
11. MIJSBERG: Die Funktion der Nähe am wachsenden Schädel mit besonderer Berücksichtigung des Stirnnahtsproblems und der Frage nach der Entstehungsweise abnorme Schädelformen. Zeitschr. f. Morph. und Anthr. 30. 1932.
12. REGALIA: Il metopismo. Arch. per l'antrop. e. l'etnol. 1890.
13. REMAN: Das Stirnnahtproblem. Zeitschr. f. Morph. und Anthr. 23. 1923.
14. ROCHLIN—RUBASCHEWA: Zum Problem des Metopismus. Zeitschrift f. menschl. Vererbungs- u. Konstitutionslehre. 18. 1934.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1936. márc. 16-án tartott üléséből.)

# ÜBER DAS PROBLEM DER FRONTALNAHT.

Von L. APOR.

Als erster Forscher führte in Ungarn DAVIDA (3) im anatomischen Institute zu Kolozsvár Untersuchungen über die Sutura metopica durch. Da mir die Ergebnisse dieser Untersuchungen infolge der verhältnismässig geringen Zahl der untersuchten Schädel kein getreues Bild des Auftretens der Sutura metopica an Magyarenschädeln zu geben schienen, überprüfte ich sie an einem bedeutend grösseren Material, an ungefähr 3500 Schädeln. Dabei fand ich, dass die Sutura metopica in einem Prozentsatze von 6·41% auftritt. Diese kommt nun der von ANUTSCHIN (1) für das Auftreten der Sutura metopica bei Mongolenschädeln angegebenen Zahl (5%) sehr nahe, doch kann sie trotzdem kein für die mongolische Rasse charakteristisches Merkmal gehalten werden. Die Sutura metopica tritt nämlich an Avarenschädeln und an Magyarenschädeln aus der Zeit der Landnahme Ungarns in einem viel grösseren Prozentsatze (9·6%) auf als bei den Mongolen, obwohl diese Schädel sonst sehr viele mongolische Züge aufweisen.

Ausserdem führte ich zur Überprüfung der Messungen von BOLK (2) in Amsterdam dieselben Messungen an Schädeln mit Sutura metopica durch, die aus einer Grabstätte einer kurzschädeligen Rasse (332 Schädel, 6·3% Sut. met.) und aus einer anderen, einer langschädeligen Rasse (1040 Schädel, 5% Sut. met.) stammten. Ausserdem konnten noch von jeder dieser Grabstätte je 150 Schädel ohne Sutura metopica zu Vergleichswecken herangezogen werden. Dabei konnte festgestellt werden, dass die von BOLK (2) veröffentlichten Ergebnisse nur mit einer gewissen Beschränkung

richtig angesehen werden. Die Langschädel mit Sutura metopica sind tatsächlich kürzer, breiter und niedriger als die ohne S. m. Bei Kurzschädeln aber, z. B. bei der von mir untersuchten, sind die mit einer Sutura metopica versehenen Schädel zwar kürzer und niedriger (genau so, wie bei den Schädeln aus der Grabstätte von Rákospalota), im Gegensatz mit den Langschädeln aber schmäler. An weiblichen Schädeln tritt die Sutura metopica häufiger (10·9% und 8·3%) auf.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. März 1936.)

# A BOREOALPESI BOGARAK REVIZIÓJA ÖSSZEHASONLÍTÓ ANATÓMIAI ALAPON.

II. rész.

SZÉKESSY VILMOS-tól.

A dolgozat I. része a «Matematikai ésTermészettudományi Értesítő» LII. kötetében (1935, 423—458) jelent meg, a II. rész sajtó alatt van az «Entomologisk Tidskrift» című folyóiratban. Ebben a cikkben e második rész rövid kivonatát közlöm.

Dolgozatomban felsorolom azokat a rendszertani változtatásokat, melyeket tanulmányom alapján az alábbi boreoalpesi fajokon kénytelen voltam végrehajtani.

*Pteroloma Forstroemi* GYLLH.: a szibériai és valószínűleg az alaskai példányok is önálló fajt *(Pt. sibiricum* SZÉK.) képviselnek. (Koleopt. Rundschau, B. 20. Wien, 1935, 175—177.)

A gyüjteményekben található *Helophorus glacialis* VILL.-nek nevezett faj kaukázusi példányai külön fajba tartoznak.

A *Syneta betulae* F. nevű fajt vizsgálataim alapján a boreoalpesi bogarak sorából törülnöm kellett.

Kimutattam, hogy a *Phythodecta affinis* GYLLH. boreoalpesi faj. (Koleopt. Rundschau, B. 21. Wien, 1934, 32—36.)

Bebizonyítottam, hogy az *Otiorrhynchus dubius* STRÖM. nevű fajnak úgy az északon, mint a délen előforduló egyedei ugyanegy fajhoz tartoznak, azonban az északi területeken élők parthenogenetikusan szaporodnak.

Kitűnt vizsgálataimból, hogy az *Otiorrhynchus salicis* STRÖM. és az *O. squamosus* név alatt leírt ormányosbogarak ugyanegy fajhoz *(O. salicis* STRÖM.) tartoznak. Ennek a bogárnak az Alpokban megvan mind a két ivara, az Alpokon kívüli lelőhelyeken pedig kizárólag parthenogenetikusan szaporodik.

*Otiorrhynchus politus* BOHEM.: egyes szerzők szerint ezzel a fajjal azonos volna az *O. borealis* STRL., valamint az *O. glabratus* STRL.-nek nevezett ormányosbogár, ennek következtében ez az állat a boreoalpesi fajok közé tartozna. Vizsgálataim azonban bizonyították, hogy mind a három jól megkülönböztethető külön faj.

*Barynotus Schönherri* ZETT.: csak a Pyrenaeusokban szaporodik kétivarúan, különben parthenogenetikusan.

Több fajra nézve sikerült új lelőhelyeket kimutatnom, hibás lelőhelyeket pedig törülnöm.

Továbbá meg kell említenem, hogy a 37 vizsgált faj között csupán öt faj akadt, amelyekről bebizonyosodott, hogy több fajból tevődnek össze, de egyetlen egy fajnál sem találtam földrajzi rasszokat. Fontos tehát, hogy az összes faj északi és déli képviselői a teljes területi elkülönödés ellenére azonosak maradtak.

Megfigyeléseim eredményei nemcsak rendszertani szempontból fontosak, hanem azért is, mert igen sok tekintetben alkalmasak arra, hogy a boreoalpesi alakok elterjedésének létrejöttére fényt vessenek.

A boreoalpesi fajok keletkezését két különböző elmélettel igyekeznek a kutatók magyarázni. A HOLDHAUS-féle elmélet a következő: A boreoalpesi állatok eredetileg részben északi, részben alpesi fajok voltak, amelyek a jégkorszakban Középeurópának, illetőleg Déleurópának gleccserekkel el nem borított területeire mintegy összeszorítva éltek. A postglacialis klimafelmelegedés következtében e fajok részben a gleccsereket követvén északra vonultak vissza, részben pedig a gleccserekkel együtt visszahúzódtak Közép- és Déleurópa magasabb hegységeire, ahol megfelelő viszonyok között megélhetési lehetőséget találtak. A közbeeső, mélyebben fekvő területekről pedig teljesen eltűntek.

A második teoriát SCHARFF állította fel és ehhez legalább bizonyos fokig ST. CLAIRE-DEVILLE is csatlakozott. SCHARFF abból a közismert tényből indul ki, hogy a középeurópai magashegység faunája közeli rokona a középázsiai és szibériai havasok faunájának és ez okból a boreoalpesi bogarak hazáját a szibériai vagy középázsiai havasokban keresi. Innen a bogarak két különböző úton, egy északin és egy délin vándoroltak volna be Európába. Az északi út a palearktikus kontinens legészakibb partján lehetett s Szibériá-

ból Finnországon és a Skandináv félszigeten át vezetett volna Skóciáig, Irországig és Grönlandig. A déli út Ázsia közepéről a Földközi-tenger vidékének északkeleti lánchegységein keresztül az Alpokba vezetett volna.

Ennek a két külön területre szétszakított faunának elterjedése tehát nem glaciális eredetű, keletkezése nem a jégkorszakhatására volna visszavezethető, hanem már jóval előbb, valószínűleg már a miocénben kialakult volna.

Vizsgálataim alapján a HOLDHAUS-féle teoriát a SCHARFF-félével szemben valószínűbbnek kell tartanom, mégpedig a következő okokból. A boreoalpesi bogarak bevándorlása Ázsiából a középeurópai hegységekbe — a már említett déli útvonalon — elméletileg két különböző úton történhetett. Az egyik út talán egy elméletileg feltételezett lánchegységen vezethetett a Kaukázusból a Jaila-Daghon keresztül tovább a Balkán-hegységbe, a Kárpátokba és az Alpokba. Nagyon kétséges azonban, hogy ilyen egységes hegyrendszer valamikor egyáltalában lehetett-e, mert eddig sem geologiai, sem állatföldrajzi tények e feltevést nem támogatják. Ha pedig — talán a krétakorban — valóban lett volna egy iyen hegyrendszer, úgy annak legkésőbb a miocénben, éspedig a tortonien végén el kellett volna pusztulnia, mivel Déloroszország területétől délfelé Romániân át, egészen a Dardanellákig szarmatakori tengeri üledékek mutathatók ki. A második lehetséges déli út egy szárazföldi híd lehetett, amely a Kaukázustól kezdődve a Taurus-hegységen át az Aegei-tengeren keresztül vezethetett a Dinaridákhoz és az Alpokhoz. Ez az összekötő híd egykor valóban megvolt és csak aránylag későn, a diluviumban tűnt el. Nincsen azonban távolról sem bebizonyítva, hogy ezen a területen még a pliocénben is olyan magas hegységek voltak-e, amelyek vándorlási lehetőséget nyujthattak volna ezeknek a kizárólag magas hegységeken élő bogaraknak. Azért SCHARFF azt teszi fel, hogy ez a vándorlás is már a miocénben végbement.

Ha mégis feltennénk, hogy ez utóbbi déli út valamikor alkalmas lett volna a vándorlásra, akkor a boreoalpesi bogarak mai elterjedéséből a SCHARFF-féle elméletnek újabb nehézsége keletkezik. Ugyanis, ha valóban azon az úton jöttek volna, akkor mindazokon a hegységeken, amelyek ezt az összekötő utat rész-

ben még ma is mutatják és amelyeknek klímája megfelelő e bogarak megélhetéséhez, ez út mentén mindenütt e bogaraknak tekintélyes számát kellene találnunk. Ez azonban nincs így, mivel a Kaukázusban csak hét fajt, Kisázsiában egyetlen egyet sem és a Balkán-félszigeten csak kilencet sikerült kimutatni, annak ellenére, hogy valamennyi területen igen magas és nagykiterjedésű hegységek vannak, mindenesetre sokkal hatalmasabbak, mint pl. a Szudéták, ahonnan pedig 19 boreoalpesi bogárfaj ismeretes.

Amennyiben ezek a tények nézetem szerint SCHARFF felfogása ellen szólnak, annyiban viszont támogatják a HOLDHAUS-féle teoriát. A HOLDHAUS-féle teoria felfogásának megfelelően valóban azokon a hegységeken él több boreoalpesi faj, amelyek közelebb esnek e fajok jégkorszakbeli tartózkodási helyükhöz, még akkor is, ha ezek a hegységek kisebb kiterjedésűek, mint a jóval távolabbi Ázsiához közelebb fekvő nagykiterjedésű hegységek.

HOLDHAUS elmélete mellett szól az is, hogy a megvizsgált 37 faj közt nem sikerült egyetlen egy esetben sem vikariáló vagy földrajzi rasszokat kimutatnom, hanem valamennyi faj, úgy az északi, mint a déli terület számos elkülönített vidékén a teljes területi elkülönítettség ellenére is azonos marad. Ez a tény azt bizonyítja, hogy ez a szétválasztás aránylag későn, tehát csak a diluviumban következett be és semmiesetre sem mehetett már a miocénben végbe, mert ebben az esetben legalább egynéhány fajon földrajzi rassok keletkezhettek volna.

Talán nem fölösleges, ha megemlítem, hogy a boreoalpesi bogarak elterjedése az Alpokban majdnem kivétel nélkül azok északi részére szorítkozik. Ez a tény szintén arra enged következtetni, hogy bevándorlásuk inkább északról, tehát a jégkorszak alatt jégmentes területekről történt és nem kelet-nyugat irányban, egy feltételezett lánchegységen ment volna végbe, mert ebben az esetben e bogarak elterjedésének úgy az északi, mint a déli Alpokban körülbelül meg kellene egyeznie.

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1936. jan. 13-án tartott üléséből.)

# REVISION DER BOREOALPINEN KOLEOPTEREN AUF VERGLEICHEND ANATOMISCHER GRUNDLAGE.

II. Teil.

Von WILHELM SZÉKESSY.

Verfasser gibt im Vorstehenden einen knappen Auszug des II. Teiles seiner Arbeit, der in kürzester Zeit in deutscher Sprache in der «Entomologisk Tidskrift» (Stockholm) erscheinen wird. Der I. Teil ist 1935 im LII. Bande des «Matematikai és Természettudományi Értesítő» in Budapest (p. 423—458 unter dem Titel «Revision der boreoalpinen Koleopteren auf vergleichend anatomischer Grundlage I. Teil» in deutscher Sprache erschienen. Nach einer kurzen Wiedergabe der wichtigsten, systematischen Veränderungen, die Verfasser feststellen konnten, wird etwas ausführlicher auf die zur Erklärung des Problems der Entstehung der boreoalpinen Verbreitung herangezogenen Theorien eingegangen und abschliessend festgestellt, dass die von HOLDHAUS aufgestellte Theorie die grösste Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nehmen kann.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Jänner 1936.)

# IV. ADATOK SZEGED KÖRNYÉKÉNEK ÁZALÉKÁLLATKA VILÁGÁHOZ.

Írta GELEI JÓZSEF.

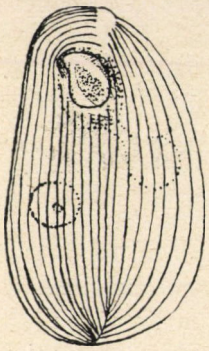
Három *Glaucoma* faj: *Gl. scintillans* EHRB., *myriophylli* PENARD és *bacillivorax* n. sp.

1—14 (23 egyes) szövegbeli ábrával.

A címben foglalt három faj közül a *scintillans*sal több dolgozatban (1931, 1935 *a*) foglalkoztam. Ha mégis ez alkalommal is ismételten rátérek, annak az a magyarázata, hogy ez az állat mesosaprobiontikus állapotban könnyen tenyészthető, mikrotechnikai eljárásokkal a Paramecium módjára könnyen kezelhető, s ezért az alkattani vizsgálatoknak éppoly bő forrását képezi, mint akár a Paramecium. A *Gl. myriophylli* szintén hasonló állapotban terem, mint a másik, mégis jóval nehezebben tenyészthető s a termőhelyben is jobban válogat. *Gl. scintillans*hoz ugyanis Szeged környékéről csaknem minden vízben hozzá lehet jutni, legkönnyebben a Tisza vizében levő tárgyakról hazahozott kaparékban, ezzel szemben azonban a *myriophylli* csak egyetlen lelőhelyen, a Tápé község határában, az ú. n. Tápai halas-érben néhány évvel ezelőtt beállított halastóban található. Ennek a tónak vize kisebb részben vad vizekből, nagyobbik részben egy távoli ártézi kútnak szíkes talajon végigfolyó vizéből táplálkozik. A harmadik és egyben új fajt a Halasi-ér Pusztamérges közelébe eső szakaszán, a szegedi tanyák legnyugatibb részén, a Ruki erdő közelében gyüjtöttem. Ez az állat semlyékekből hazahozott tőzegmohakaparékban lépett fel. Általán a Parameciumra kedvező környezetben él, mégis valamiben nagyon válogatós, mert átoltása más tenyészetekbe, mely tőzegmohát nem tartalmaz, nem sikerül.

A három faj tüzetes vizsgálatára az indított, hogy vonásaik sok tekintetben azonosak s így a Glaucoma nemzetség bélyegeinek tisztázására igen alkalmasak.

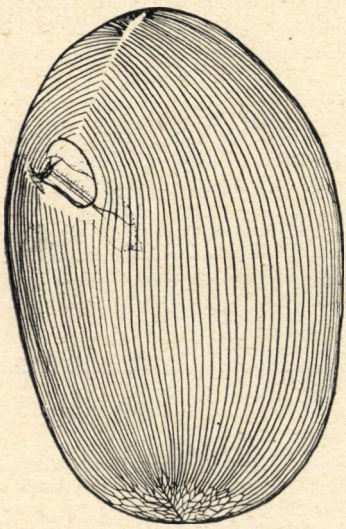
Mindhárom faj megegyezik fehéresen *áttetsző színében*. Hacsak a fajok bizonyos példányait vesszük figyelembe, akkor tojásra emlékeztető alakjukban is egyformák. Ezt az alakot csaknem minden példányában megőrzi a *Gl. myriophylli* (2. á.), noha a szegedi példák idomtalan, néha szögletes alakjukkal a tojáshoz csak úgy nagyjában igazodnak. A *Gl. scintillans* (1. á.) igen sok tenyészetben eltér a tojástól azzal, hogy mellső hegyes vége kissé jobbra helyezkedik, sőt elől balra egyes példányok horpadtaknak is mutatkoznak s hátul is a jobboldal kissé kihúzottabb, mint a baloldal. A *Gl. bacillivorax* ritkán mutat elől hegyesedő tojásformát. Ellenkezőleg az állatok túlnyomó száma elől inkább tompán lekerekített s hátrafelé kissé hegyesedő vagy éppen kihúzott (3. á.), úgyhogy nem ritkán fordított tojásalakúak, vagy pediglen ennek a két alaknak keveredéseként kövér orsóformát öltenek. Utóbbi állat testének kialakulása annyiban emlékeztet a *scintillans*éra, hogy itt a testvég legkiugróbb része rendszerint jobbra van elhelyezve (3. á. *b*), úgyhogy az állat elől is, hátul is balfelől lecsapottnak, illetve jobbfelől kihúzottnak látszik. Ennek következtében ezek az állatok átlagban balfelükön domborúbbak, mint jobbfelükön s a jóllakott példányok hasoldalukon, mint hátfelükön. Keresztmetszetében mindhárom állat többé-kevésbbé hengeres, csupán a hasoldalon tűnik fel némi (a *myriophyllin* legfokozottabb) lapítottság, de ezt is inkább a kiéhezett és párosodásra hajlamos állatokon látjuk. Pl. a *bacillivorax* jóllakott példányai hasukon rendszerint domborúbbak, mint a hátukon s csak a kísérletileg kiéhezett állatokon tűnik elő a has lapultsága. A száj mellső jobb sarkának szomszédságában kisebb-nagyobb homorulat: teknő több példányon észrevehető; de ennek mérete is a jóllakottságtól függ.



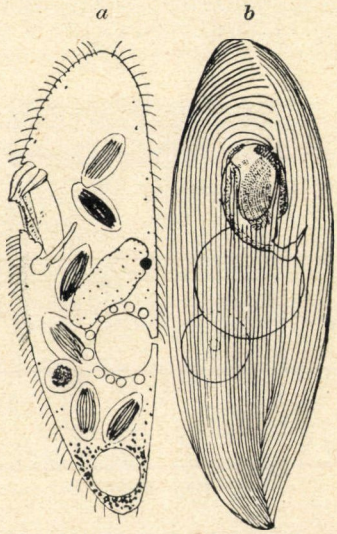
1. ábra. Glaucoma scintillans élő példány után.

Abb. 1. Gl. scintillans nach dem Leben gezeichnet, mit den meridionalen Cilienreihen

A három faj közül *mérete* szerint legkisebb a *scintillans*, a közepes példányok átlagos hossza 32 $\mu$ (Szegeden 38 $\mu$ volt a leghosszabb), szélessége a 18 $\mu$ körül ingadozik; vannak csaknem félekkora példányok is, különösen a párosodók között. KAHL 40—75 $\mu$



2. ábra.




3. ábra.

2. ábra. Glaucoma myriophylli. Részben élő, részben formol-osmiummal rögzített és festett készítmény után.

Abb. 2. Gl. myriophylli. Teils nach dem Leben, teils nach einem Formolosmiumpräparat gezeichnet. Mundapparat und meridionale Cilienreihen. Hinten ein Gitter, das zwischen den Cilien vermittels der Neuronemen gebildet wird.

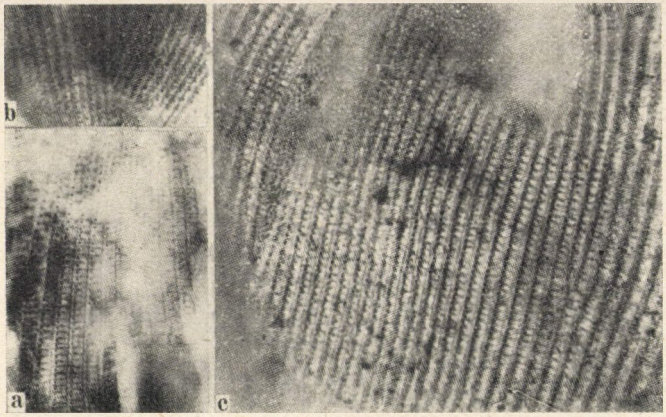
3. ábra. Gl. bacillivorax n. sp., balra hosszanti optikai metszet egy szublimátos készítmény után, jobbra felületi kép formol-osmium rögzítés után.

Abb. 3. Gl. bacillivorax n. sp., links nach einem Sublimatpräparat: der Mundapparat (in Seitenansicht, dorsal die Pulsationsblase, davor der Kern mit dem Mikronucleus, hinten eine beinahe ständige Wasserblase (umgeben mit Excretskörpern), im Körper die ovalen Nahrungsblasen mit den verschlungenen Bazillenpaketten. Rechts ein ungefärbtes Tier nach Formolosmium mit oberer Ansicht des Mundapparates.

hosszúakat jegyez fel. A *Gl. myriophylli* legnagyobb szegedi példányai 200 $\mu$ hosszúak és 120 $\mu$ szélesek; KAHL 100—140 $\mu$ hosszúakat említ fel. A *Gl. bacillivorax* egészen tetemes méretű állat, hossza 100—160 $\mu$ és szélessége 25—50 $\mu$ között váltakozik. A kes-

keny, majdnem parameciumszerű állatok mindig a kiéhezett példák közül kerülnek ki; oszlás után, mivel az oszló állat táplálékkal mindig tele van, igen gyakran egészen rövid, kövér, csaknem myriophylliszerű példányokkal találkozunk.

Mindhárom állatfajt az élő állatokon is jól feltűnő hosszanti csíkozat jellemzi. A csíkok barázdákban sorakozó csillósorokkal




4. ábra. Gl. myriophylli. Felületi kép az állat hasoldaláról, *a* és *b* Golgi-féle folyadék — gentiana-ibolya Gelei szerint, *c* formolsublimát-ezüstözés után. *a*-ban a pontsorok a csillók alapi testeit, a négyszöges rács pedig a támasztószálakat mutatja. *c*-ben egy, az oszlás kezdetén lévő állaton balra a szájképződés. A halványabb színű rács a vázrostokból képződik, a sűrűnpontozott hosszanti vonalak neuronemák a csilló alapi készülékével. 900 ×.

Abb. 4. Gl. myriophylli, in *a* und *b* nach Golgi-Mischung und Gentiana-violettfärbung, in *c* nach der nassen Silbermethode. *c* Oberflächenbild eines Tieres, das in Teilung begriffen ist. Links Neubildung des Mundes durch Regeneration der Basalkörperchen infolge Teilung des alten Basalapparates. Im schwachen Ton das Gitter des Skeletapparates, stark gekörnelt die Neuronemen, mit dem Basalapparat. In *a* und *b* zeigen die Körnerreihen die Basalkörperchen der Cilien. Das polygonale Gitter ist ein Stützsystem. 900 ×.

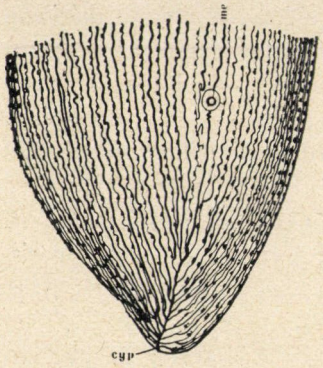
vannak egymástól elkülönítve. A *myriophyllin* ezenkívül a Parameciumra emlékeztető éles harántbordázat (4. á.) is kitűnik.

A *csillósorok* száma bizonyos tekintetben az állatok vastagságához igazodik s így jellemző az egyes fajokra. A *scintillans*nak csak 33—38 csillósora, a *bacillivorax*nak 55—61, a *myriophyllin*ak pedig 95—110 csillósorát számoltam meg. A csillósorok a hasolda-

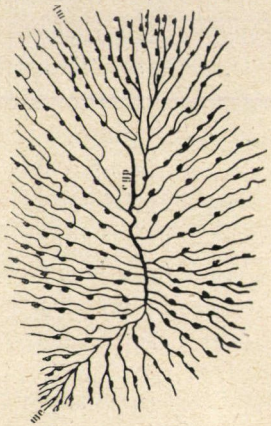
lon kb. $^1/_3$ szélességnyi sorközzel sűrűbbek, mint a háton. Ezzel párhuzamos az, hogy a hason a sorokon belül a csillók is sűrűbben helyezkednek el, mint a háton, s így általánosságban az állat hasfelét sűrűbb csillózat jellemzik, mint a hátoldalt. A mellső testvégen egy keskeny háthasi irányú csíkon kopasz mezőt (ez a homloktér) lehet megállapítani, éspedig csak a *scintillans* és *bacillivorax* esetében; a *myriophyllin* ez a kopaszság teljesen hiányzik. A hátsó testvégnek kissé ritkás a csillózata, de itt kopasz terület sohasem lép fel. A *Gl. scintillans*on a hátsó csillók merevek, a másik kettőn mozgékonyak. Mindhárom Glaucoma-fajt különösen jellemzi a csillósorok szájkörnyéki viselkedésében két dolog. Egyfelől az, hogy a szájrés nagyobbszámú, átlag 10, tisztán postorális csillósort vág le, másfelől az, hogy a jobboldali csillósorok a száj előtt félívben balfelé vágnak át, úgyhogy végül egész harántfekvésben végződnek (ez a jelenség a Colpidiumokon még jobban észlelhető), holott ezzel szemben a baloldali és a hátsó csillósorok délkörirányú lefutásukon a mellső testvégen is keveset változtatnak. A szájtól lemetszett csillósorok száma mindhárom fajban ingadozólag 8 és 11 között váltakozik. Ezen postorális csillósorok közül főként a jobbfelőliek a jobbra kihúzott száj mellett helyzetüknek megfelelően többé-kevésbbé előrekúsznak, sőt a legszélső föl is görbülhet kissé a száj elé, a varratvonalat azonban ez sem éri el. A balfelőli legszélső csillósorral (néha a két balfelőlivel) gyakorta az történik, hogy csak megszakad a száj bal sarkán, de föntebb elől újra felbukkan; ezt különösen a *myriophylli* esetében tapasztaltam gyakorta.

A *neuronema-rendszer* igen jellegzetes módon alakul. A *Gl. scintillans*ra vonatkozólag azt a kérdést csaknem teljes részletességgel feltártam Horváth Péterrel közösen írt dolgozatunkban, 1931-ben. A kérdésre különböző részletekkel kapcsolatban azóta négy esetben tértem vissza, úgyhogy itt a neuronema-rendszer alkata csaknem teljesen tisztázottnak tekintendő. Ennek a rendszernek alkati lényege röviden abban foglalható össze, hogy a *scintillans*on egy délkörirányú kettős vonalrendszer képződik ki, ahol a fonalpárok balfele a csillók talpi részeit köti össze, mint ú. n. interciliáris fonal, a jobb fél pedig mint ú. n. secretorikus fonal a másikhoz közel szabadon szalad, az állat mellső és hátsó végén

azonban mindig a tőle balra fekvő interciliáris szálba torkollik bele (a fonalak jobb-bal helyzete az ábrára való tekintettel van megadva). 1935(*a*)-ben pontosan tisztáztam a secretorikus meridiánusok viszonyát a főmeridiánushoz, amikor is kiderült, hogy a mellső testvégen, különösen a szájtól jobbra eső prästomális görbült szakaszokon a mellékmeridiánusok a száj középmagasságába eső




5. ábra.



6. ábra.

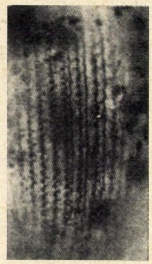
5. és 6. ábra. Gl. bacillivorax hátsó testvége hátoldalról, illetőleg teljesen a testvégről (6. á.) tekintve. Formol-szublimát ezüstöző eljárás, *cyp* az állat alrése, *mp* iránymeridiánus. *mp*-től jobbra 13 csillómeridianushoz nem csatlakozik elválasztó neuronema, az összes többi csillómeridianushoz jobbra egy szemcsétlen vonal csatlakozik, ez az elválasztó meridianus. 1000 ×.

Abb. 5 und 6. Das Neuronemensystem von Gl. bacillivorax am hinteren Körperende nach Formol-sublimat-Silberpräparaten, in Abb. 5 von der Dorsalseite und Abb. 6 vom Körperende her betrachtet. Die Körnerlinien bezeichnen die Interciliarfasern, die Wellenlinien dagegen die secretorischen Neuronemen. *cyp* Cytopygelinie, *mp* Richtungsmeridian, *me* excretorisches Meridian. Rechts vom *mp* gesellt sich zu 13 Interziliarfasern kein Secretonema, wogegen sich zu den anderen Interciliarfasern nach rechts je ein Secretonema anschliesst. 1000 ×.

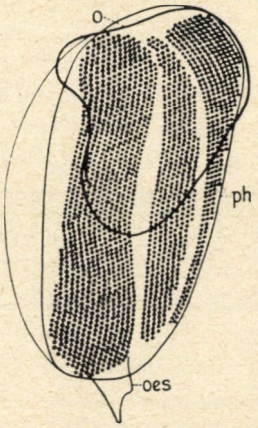
rácsképzés után nem a tőlük balra eső ú. n. saját interciliáris szálhoz, hanem a jobbra levő, illetőleg a görbületbe már előttük fekvő szomszéd csillóviselő szálhoz kapcsolódnak. Ezek szerint tehát itt egy-egy secretorikus meridiánus két szomszédos interciliáris szálat kapcsol össze olyképpen, hogy hátul a balra és elől a jobbra eső csillótalpi szálhoz csatlakozik. A *Gl. scintillans*ra vonatkozólag

egyúttal pontosan leírtuk a neuronema-rendszernek a mellső, illetőleg hátsó testvégen kialakuló varratvonal képződését, melynek értelmében hátul egy nagyjában dorsoventrális síkban elhelyezkedő egyszerű varrat, elől azonban egy bonyolódottabb hurokvarrat képződik ki. A hátsó varratot világosan feltünteti 1931-ből való dolgozatunk 5. és 6. ábrája, a mellső viszont az 1935 az 1., 2., 3. és 5., valamint 1935-ből 7. ábráján látszik világosan.

Az újonnan megismert *Gl. bacillivorax* neuronema-rendszere



7. ábra.




8. ábra.

7. ábra. Gl. bacillivorax, a has bal szélén osmium-szublimát ezüstöző eljárás után a neuronemák. A kép balfelén (a has középtáján) az interciliáris szálak között nincs secretorikus neuronema. 900 ×.

Abb. 7. Gl. bacillivorax. Sinistroventralfläche nach Osmium-Sublimat-Silberwirkung. Zwischen den ventralen Interciliarfasern (d. i. linke Bildseite) kein Secretonema. 900 ×.

8. ábra. Gl. myriophylli szájmembranelláinak alapja az alapi testek révén. *o* a szájrés, *ph* a szájgödör kerületének és *oes* az oesophagusnak vetülete. Balfelől a félholdalakú rés egy vízteret jelöl. 1600 ×.

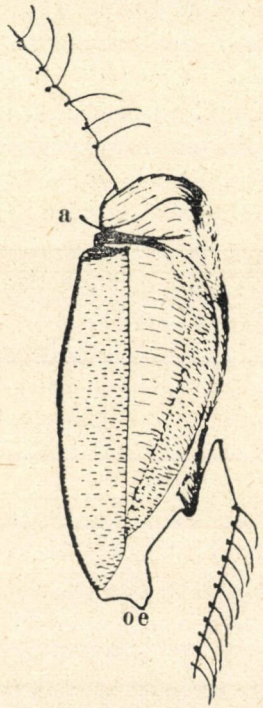
Abb. 8. Der Mundapparat von Gl. myriophylli in Projection. Punktiert die Basalkörperchenreihe der drei Membranellen, *o* der Rand der Mundöffnung, *oes* Projection des Oesophagus, *ph* Konturen des Pharynx. 1600 ×.

a *scintillans*énak csaknem tökéletes képmása. Itt is rostpárok szaladnak végig a testen (5. és 6. ábra), melyek közül a bal mindig csillót viselő és az alapi testecskéktől szemcsézett, a jobb pedig rendszerint síma, szemcsézetlen meztelen szál. Ez hol csaknem nyílegyenes lefutású, hol pedig kígyózva szalad végig, amint azt a *scintillans*on is látjuk. Hátul itt is egyszerű varratvonal képző-

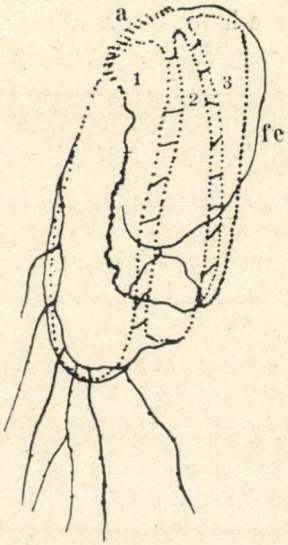
dik (3*b*., 5. és 6. á.), mely a kiválasztórést (porus excretorius) viselő ú. n. kiválasztószáltól a hátsó sarkon át a száj balfelőli zugának irányába vagy ettől is egy kissé balfelé irányulva halad (3*b*. ábra). Ez a varratvonal itt jóval terjedelmesebb, mint a *scintillans*on; hátul magasabban kezdődik és elől is messzi előre, néha csaknem a test középvonaláig tart. A varratba itt is csakis egyes szálak kapcsolódnak, minekutána a fő- és mellékmeridiánus az utolsó csilló magasságában már előzőleg egyesült.

Az *alrés-(cytopyge-)vonal*, vagyis az iránymeridiánus a *bacillivorax*ban a varratba jobbról csatlakozik s jó darab úton maga is résztvesz a varratképzésben (l. az 5. és 6. ábrát). A mellső testvégen és a száj körül szintén a *scintillans*éval egyező állapotot találunk. A varrat itt is a szájrés mellső felének baloldalán kezdődik s egy darab úton mint az ütköző csillósorok egyszerű varrata alakul ki, hogy aztán a tetőrészen, ahol a csillósorok végei egymástól távolabb esnek, mint hurkos varrat jelenjék meg. A hurok közepén itt is összekötő szál szalad végig, mint a *scintillans*ban. A hurokba a délkörirányú neuronema-párok egyesülten lépnek be; itt is vékonyak és szemcsézetlenek. A szájréstől jobbra, illetőleg előregörbülten haladó csillós meridiánusok a kiválasztószálakat itt is jobboldalukon viselik. Ez a balfelőli csillós száltól a jobbfelőlihez vezető átkapcsolódás az oszlás folyamata alatt igen világosan képződik ki, midőn az oszló lényen a síma secretorikus neuronemák csakis a balfelőli interciliáris szálhoz növesztenek sűrű nyújtványzatot. Mint sajátszerű, igen feltűnő jelenséget kell kiemelnünk azt, hogy 7. ábránk tanúsága szerint a hasoldalon mintegy 13 interciliáris szálhoz nem csatlakozik secretorikus neuronema. Ebbe a 13-ba beleesik a 10 postorális csilló-meridiánus s ezenkívül még a szájtól jobbra-balra egy-két interciliáris szál. Ez a jelenség sokszor ejtett gondolkozóba s késztetett újabb és újabb készítmények előállítására azzal a céllal, hogy vajjon nemcsak gyönge fogékonyság jellemzi-e az ezüst iránt a sűrűn álló csillósorok mellékmeridiánusait, amit majd sikerül legyőznöm valamely alkalmilag adódó igen kedvező napfényhatással. Hiábavaló volt minden erőlködésem, sohasem sikerült a 13 interciliaris szál mellett mellékmeridiánusoknak (secretorikus neuronemák) még csak nyomára is akadnom. Ez azonban nem jelenti azt, hogy

tectin-anyag itt ne választódnék ki. Kiderült ugyanis közben az, hogy ebben a hasi mezőben az interciliáris szálaktól balra finom oldalfogazat képében rövid harántszálak nyúlnak ki, melyek végén a tectin elválasztására a KLEINtól leírt ú. n. protrichocysták jelennek meg. Sajátságos, hogy ezzel szemben ezüstözéssel a hosszában futó secretorikus neuronemában szemcsézetet vagy elválasztó részecskéket nem tudtam kimutatni, holott ezzel szemben a *Gl.*




9. ábra.




10. ábra.

9. ábra. Gl. myriophylli szájgödrének hosszanti optikai metszete három membranellával, ezüstözött készítmény alapján. *a* szegőmembrana egyik csillója, *oe* oesophagus. 1600 ×.

Abb. 9. Gl. myroiphylli. Optischer Längsschnitt durch die Mundgrube nach einem Silberpräparat. *a* eine Cilie aus der Adoralmembran, *oe* Oesophag. 1600 ×.

10. ábra. Gl. myriophylli szájgödrének neuronema-rendszere, a három (1—3) szájmembranella körülpontozott optikai keresztmetszetével. Fönt balra a párhuzamos harántpontsorok (*a*) a szájrésen kívül álló szegőmembranella alapját mutatják. *fe*: fibra externa. 1600 ×.

Abb. 10. Gl. myriophylli; das Neuronensystem der Mundgrube, zugleich angeführt in punktierten Konturlinien der optische Querschnitt der Membranellen (1—3). *fe*: fibra externa, oben links die quergestellte Parallelpunktierung der Basalabschnitt der Paroralmembran (*a*). 1600 ×.

*scintillans* mellékmeridiánusai, amint azt korábbi ábráink mutatják, sűrűn szemcsézettek, illetőleg finom pórusokkal ellátottak. Azonban osmiumos rögzítések után gentianaibolya itt is szemcsézettnek, vagyis protrichtocystaszemcséktől megrakottaknak tünteti fel a mellékmeridiánust.

A *Gl. myriophylli* neuronema-rendszere megoldja számunkra azt a kérdést, melyet a *bacillivorax* hasán, mint különlegességet ismerünk meg. Ezen az állaton ugyanis a *Glaucomá*kra s a vele szomszéd rokon *Colpidium* nemzetségre annyira jellemző hosszanti páros vonalrendszernek semmi nyoma nincsen, hanem e helyett csak a csillókat összekötő főmeridiánusokkal találkozunk, melyek elől egyszerű (vagyis nem hurokformájú) varratot, hátul pedig hol többé-kevésbbé elmosódott varratot vagy pediglen annak teljes híján egy szétfoszló hálózatot alkotnak. A mellékmeridiánusok azonban a főmeridiánus oldalfogazatával pótlódnak (4. ábra), amely fogazat minden két csilló alapi teste között szabályosan fellépő balra (a képen jobbra) tartó szálacskákból képződik. Ezek a szálak váltakozó hosszúak, de a szomszédos bal intercilliáris szálat sohasem érik el, legfeljebb a vázrács hosszanti szálába ütköznek. Végükön néha hosszabb-rövidebb szakaszon hosszanti rost útján össze vannak kötve. A harántszálak elég gyakran a főmeridiánuson túl jobbra is folytatódnak. Ez a jobboldali nyújtvány mindig rövid, s legfeljebb a közel lévő vázszálig ér. Ezek az oldalnyúlványok alkatilag határozottan hozzátartoznak a főszálakhoz s mégis megkülönböztethetjük tőlük egyrészt szorosan subpelliculáris fekvésük alapján (ezzel szemben az interciliáris szálak mindig mélyebben, a csillók alapi testének szintjében szaladnak), másrészt vastagabb, szemcsézetesebb külemük, révén végül pedig mind az ezüstben, mind pedig a gentianaibolyában eltérő színeződésük alapján. Az elválasztó neuronemákról már régen kifejtettem azt, hogy azoknak festődése rendszerint gyengébb, mint az interciliáris szálaké. Ez itt a harántszakaszokra is illik, s ennek következtében a *Gl. myriophylli*ről kijelenthetjük, hogy annak elválasztó fonalrendszere rövid fonalszakaszokra van feldarabolva, amelyek minden interciliáris szálból szabályosan csillóközi szakaszonként balra nőnek ki. Hasonló jelenséget írt le Klein a *Colpidium colpodán* (1928, 1929) és Gelei (1935 *b*) a *Colpidium glaucomaeformén*.

Egyik megjelenés alatt lévő dolgozatomban (1936 *b*) a *Glaucoma scintillans* hosszanti neuronema-rendszerében, mind a csillós, mind pedig a kiválasztó neuronemákon finom kiválasztóréseket ismertettem. Ezeknek kimutatására főként a gentiana-ibolyás eljárásom (1934) alkalmas. Mindkét másik állatfajt többször festettem az eredeti módszer szerint, kiválasztóréseket azonban nem sikerült kimutatnom.

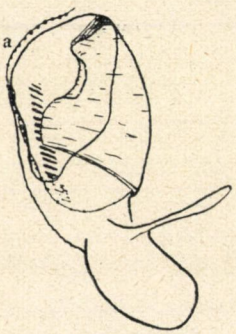
A vázelemekről is szót kellene tennünk a csillókkal kapcsolatban. Ennek mindeddig a *scintillans*on semmi nyomát nem találtam. A *bacillivorax*on egészen hasonlóan, miként a *Colpidium*ban leírtam (1936 *b*), minden interciliáris szálhoz hozzásímultan, attól balra egy hoszszanti vázszál fut. A *Gl. myriophyllin* pedig egy szabályos rácsgerendázatot sikerült találnom, mely kialakulásában sok tekintetben emlékeztet a Paramecium, Lembadion és a Frontoniák rácsrendszerére (l. a 4. ábrát). A *myriophylli* vázrácsa hosszanti gerendákból, s e gerendákat a csillók között szabályos távolságban összekötő harántfogakból képződik. A hosszanti szálak hasoldalt a csillósoroktól szorosan jobbra (a képen balra) helyezkednek el, a harántfogak pedig a neuronema-főmeridiánusokról az előbb ismertetett és oldalt kinövő fogazat elhelyezkedését és lefutását követik olyképpen, hogy harántváz és haránt neuronemaszál hol egymás felett, hol pedig kissé eltolódottan helyezkednek el. A vázrács lefutásában és elhelyezkedésében szorosan követi az interciliáris szálakat. Ez is elől is, hátul is varratot képez. A váz hátsó varratképződése rendszerint világosabb (csaknem éles meridionális vonalat alkot), mint a neuronema-rendszeré, mivel utóbbi, mint említők, gyakran folyik szét egy bizonytalan gerendázatba. A vázelemeket igen könnyű megkülönböztetni a neuronemaszálaktól. Erős fénytörésük következtében ugyanis már az élő állaton észlelhetők, sokkal jobban megkülönböztethetők azonban a szublimáttal vagy formal-osmiummal rögzített festetlen példányokon. Ezüstben nem színeződnek, illetőleg kivételes esetekben gyenge szürke színt öltenek. Amint fényképmásolataink (4. ábra) azonban igazolják, erős fénytörésük alapján még festetlen állapotukban is a fényképezésre alkalmas élességben látszanak. Gentianaibolyás készítményeken azonban, akár az én régi eljárásom szerint, akár pedig a Horváth János által kidolgozott újabb módszerrel, igen élesen kihozhatók, (l. a 4*a*. és 4*b*. ábrát).

1934-ben ugyanezen folyóirat hasábjain foglalkoztam a *csillómeridiánusok differenciálódásának* kérdésével. Ott az iránymeridiánusról korábbi megfigyeléseim összefoglalásaként megállapítottam, hogy abban képződik oszlás alkalmával az új száj (ezt már előttem KLEIN (1927) és CHATTON (1931) is kimutatta) és az új alrés, minek alapján ezt a meridiánust tápláló (nutritorikus) fővonalnak neveztem. (CHATTON abban a hitében, hogy csakis a száj képződik benne, strie stomatogennek nevezi.) Az idevonatkozó tapasztalataim főként a *Gl. scintillans*ra támaszkodtak (1934 *b*). Ugyanazok a jelenségek a másik két fajon is pontról-pontra megismétlődnek. A szájnyílás itt is pontosan úgy képződik ki az iránymeridiánusból, mint ahogy azt a mult évben (1935) egy külön dolgozatban részletesen ismertettem, miközben magának a főmeridiánusnak alapitestei egyelőre érintetlenek maradnak. A szájszervnek négy membrannelája tehát itt is csak egyetlen csillósorból származik, s így az a 10 csillósor, amely a kész állat szervezetén a szájréssel úgy vágódik át, hogy azoknak a száj előtt nincs folytatódásuk (s így azokat tisztán poststomális fekvésűeknek tekintjük), mellső szakaszán a szájképződés közben mindig utólagosan szívódik fel.

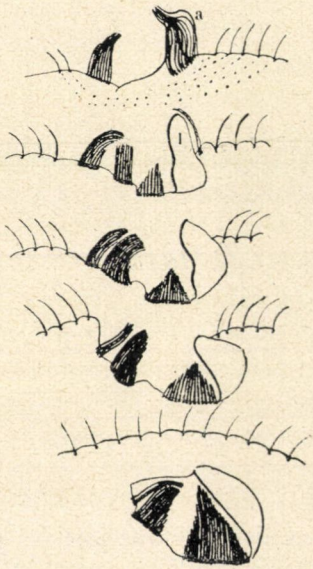
A csillósorok között ú. n. *kiválasztó : excretorius neuronemát* is különböztettem meg. Ezt két dolog jellemzi, először az, hogy benne képződik és benne fekszik a porus excretorius. Másodszor az, hogy mögötte a csillók alapi testei az oszlás alatt felszívódnak s ennek következtében az excretorikus neuronema a porus mögött csillótlan. Az elválasztó meridiánus is megszűnik a kiválasztórés mögött, úgyhogy attól hátrafelé a fonalpár helyett az egyesült neuronema szalad. Mindezeket a jelenségeket főként a *Gl. scintillans*on szerzett tapasztalataim alapján ismertettem. Újabb vizsgálataim a másik két fajra vonatkozólag is minden tapasztalati részletet megerősítenek (l. az 5. ábrát). Ezenkívül a Parameciumra vonatkozólag részletesen ismertettem (1936 *a*) azt, hogy az oszlóállaton az új porus excertorius mindig valamely csilló alapi testével szoros érintkezésben képződik ki. Pontosan ennek a jelenségnek megismétlődését tapasztaltam a *Gl. bacillivorax*on. Miközben itt is a porus excretorius az alapi testtől pontosan hátrafelé, azzal szoros érintkezésben (tehát biztosan annak részvételével) képző-

dik ki; a szomszédos neuronema-szakasz a porusképződés közben ketté ágazik, s így a rés körül az általam leírt neuronema-hurkot hozza létre.

A *szájkészülék* a *Glaucomák*ra általán jellemzően egy rézsútosan álló szájrésből, a hozzácsatlakozó szájgödörből vagy garattölcsérből (pharynx) és ennek végén a csőformájú nyelőcsőből (gyomorcső GELEI: oesophagus) áll. A szájgödör hátoldali fenekéről különösen KAHL vizsgálatai alapján ismertük meg a három membranelát, amelyek mellé én 1935-ben a *Gl. scintillans*on egy negyedik ú. n. szegély- (paroralis) membránát írtam le. A szájrés mindhárom




11. ábra.




12. ábra.

11. ábra. Gl. bacillivorax szájszervének körvonalai a szájgödör baloldali membranellájával és jobboldali oldalfalának bordázatával. Felül balra a szájvitorla alapi testeinek sora (*a*) és annak folytatásában a bal membrana hátsó sarkához futó összekötő neuronema. Kb. 1000 ×.

Abb. 11. Gl. bacillivorax. Die Konturen des Mundapparates mit der linken Membranelle und mit den kurzen Rippen (s. links die parallele Streifung) und ausserdem mit dem Basalabschnitt der Segelmembran (Körnerlinie oben links) und in seiner Fortsetzung ein Neuronema, das nach hinten zur linken Membranelle zieht.

12. ábra. Gl. myriophylli szájgödrének keresztmetszete optikai metszetsorozatban, alsó kép a szájgödör hátsó végéről. *a*: adoralis membranella, *l*: labium dextrum. Kb. 1000 ×.

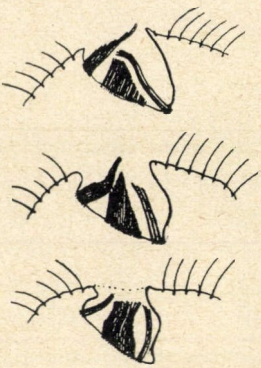
Abb. 12. Gl. myriophylli, optische Querschnittserie durch die Mundgrube mit den Membranellen, unteres Bild das Hinterende der Mundgrube. *a*: Adoralmembranelle, *l*: Labium dextrum. Cca 1000 ×.

állaton közel egyforma alkotású. Rézsútosan húzódik előlről hátrafelé, s egyben jobbról balra eldőlve, miközben, mint fentebb már említők, kb. 10 hasoldali csillósornak vágja útját. KAHL emeli ki, hogy a száj jobb szegélyét egy fül módjára erősen kiemelkedő pelliculáris ajak képezi. Ez az ajak, különösen hosszanti mérete szerint, aránylag legerősebben képzett a *Gl. scintillans*on, azonban bár rövid, de legmagasabban szinte fülszerűleg emelkedik ki a *myriophyllin*. Legkisebb és magasságában is legkevésbbé fejlett a *Gl. bacillivorax*é. Ez a kiemelkedő pelliculáris fülecske hátrafelé nem közvetlenül a szájperem szélébe megy át, hanem belső ormó képében lejt befelé a garattölcsérbe. S így ezzel a határral az ajak folytatása a tölcsérben, mint vastagabb és erősebb fénytörésű pelliculáris bélés a garattölcsér jobb felén mindig megtalálható. Ezt a vastagbélésű jobb pofát ezenkívül pelliculáris bordázat is jellemzi, mely fénytani keresztmetszeten, mint a garattölcsér jobboldali fogazata tűnik fel. Ezt a fogazatot először a *Gl. scintillans*on írtam le, de igen éles kiképződésben a *bacillivorax*on is megtalálható (lásd a 14. ábrát). A *myriophyllin* alig látszik valami nyoma ennek a bordázatnak. Mint igen sajátságos jelenséget említem fel, hogy ennek a jobboldali ajaknak, illetőleg garattölcséri pelliculáris megvastagodásnak megfelelően a szomszédos protoplasmában egy nagy világos víztér képződik ki, mely különösen a *myriophyllin* feltűnő. Ez a víztér valószínűleg az ajak feszességét biztosítja. A pelliculáris bordázat folytatásában, de tőle függetlenül, a szájgödör jobb oldalán ezüstözéssel sűrű csíkolat mutatható ki, melyet a bordázattal együtt 14 ábránk tüntet fel.

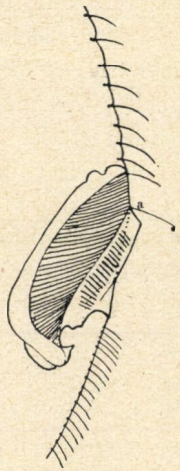
A membranellákkal felszerelt garattölcsér alakja és jobb-bal irányú rézsútos dűlése mindhárom állaton tökéletesen megegyezik. Különösen nagy hasonlóságot mutat a *scintillans* és *bacillivorax* szájgödre. A *myriophyllié* talán annyiban tér el a többiekétől, hogy kissé hosszúkásabb. A szájgödör hátoldali felső feneke balról jobbra lejt s így a gödör legmélyebb a jobboldali ajak tövében.

A nyelőcső: oesophagus, vagy a hogy azt régebben neveztem: gyomorcső, ezüstöző eljárásokkal igen élesen elkülöníthető a szájgödri szakasztól, éspedig azon az alapon, hogy a szájgödri szakasz pelliculáris hártyája nem színeződik, holott ezzel szemben a nyelőcső sötétbarna színt ölt. Ezeken a készítményeken kiderült, hogy a

nyelőcső a garattölcsér belső végső szakaszának dorsális tágulataként kezdődik és az állaton a hátra balra dűlő garattölcsér folytatásaként szintén balfelé húzódik el. A három állat a nyelőcső alkata és iránya szerint is igen jól megkülönböztethető. Legkisebb oesophagusa van a *myriophyllin*ak, mely itt egy alig észrevehető tölcsérként nyúlik hátrafelé (8. ábra). A *Gl. scintillans* oesophagusa



13. ábra.



14. ábra.

13. ábra. Gl. bacillivorax. Optikai keresztmetszetsorozat a szájgödrön át; alsó kép a szájgödör hátsó vége. Kb. 1000 ×.

Abb. 13. Gl. bacillivorax. Optische Querschnittserie der Mundgrube; unteres Bild vom Hinterende des Organs. Cca 1000 ×.

14. ábra. A Gl. bacillivorax szájgödrének jobb oldalfali képe a szájgödör körvonalaival. Fönt (jobbra) a támasztó bordázat, alul (balra) a hosszú párhuzamos csíkolat az ezüstvonalrendszert jelzi. A jobbfelőli pontozat, kezdetén egy csillóval a szegőmembrana alapját s az onnan folytatódó neuronemát jelzi. Kb. 1000 ×.

Abb. 14. Seitenansicht der Mundgrube von Gl. bacillivorax (rechte Wand). Oben rechts die kurze Streifung bedeutet die steifen Rippen der Mundlippe, unten (links) die breite Streifung zeigt die Silberlinien, rechts die Punktierung an der Lippe bezeichnet den Basalabschnitt der Segelmembran und die Neuroneme, die davon zu der linken Mundmembranelle hinläuft. Cca 1000 ×.

rövid hátrafelé kanyaródó szarv (lásd a 2., 5. és 7. ábrát 1931-ből), mely a tápodú kiképzésekor mind rövidebbé és rövidebbé válik, hogy végül egy kerekded, esetleg balról még csücskös gömbbé fúvódjék fel. A *bacillivorax* oesophagusa (l. a 3. és a 11. ábrát) egy kisebb tágulattal kezdődik, melyből igen jellegzetesen balra oldalt vagy

éppen előre görbült a nyelőcső. Az emésztőodu ezen a görbületen a garattölcsér folytatásában hátrafelé mintegy sérvzacskószerű tágulatként képződik ki (11. ábra). Az oesophaguscső a garattölcsérrel szemben nem kerekdeden metsződik le, hanem jobb felé csücskösen messzire ráterjed a garattölcsérre, bizonyos tekintetben a garat jobboldali ajkának alapját képezve.

A szájszerv leglényegesebb alkatrészeiként a membranellák szerepelnek. KAHL a Glaucoma-Colpidium csoportra három garatmembranellát tart jellemzőnek. Ezek a szájgödör hátoldali fenekén helyezkednek el. Én a negyedik membranellaként a mult évben ismertettem e folyóirat hasábjain a paroralis membranellát. Ez utóbbi a szájrésen kívül fekszik s a táplálkozásnak a jobboldali ajakhoz csatlakozó külső segédszerveként minősíthető. A *Gl. scintillans* és *bacillivorax* paroralis membranellája egyetlen csillósorból álló képlet. A membrana magasabb, mint az ajak s ennek következtében az alkotó csillók jóval hosszabbak, mint a közönséges testcsillók. A *bacillivorax*ban a paroralis membrana igen fejletlen, a készítményeken csak jó gentiana-ibolyás festéssel található meg. Igen nagyjelentőségű a *myriophylli* paroralis membranellája, abból a szempontból, hogy itt látunk először egy több — éspedig a közepén már három — csillósorból álló képletet. Itt ez a szegélyvitorla elől két csillósorral kezdődik, majd hármassá válik, hogy aztán hátul egysorosba menjen át. A vitorla hosszanti kiterjedése mindkét (ill. az alapi testek alapján mindhárom) állatban közel azonos, amennyiben az egymás végébe eső csillók száma tizenöt körül ingadozik. A *myriophylli* szegőmembranellája nemcsak a legvastagabb, hanem egyúttal a legmagasabb képlet is, mert a csillók az ajkak magasságát messzi túlszárnyalják. (Lásd a 2. és 11. ábrát.)

A három szájgödri membranella alakja és elhelyezkedése szerint messzemenő egyformaságot mutat. Mind a háromnak alapja többé-kevésbbé sarlóidomú (3. és 8. ábra). A két jobboldali görbületét balra fordítja, a baloldali pedig ezekkel szembe görbül. A *scintillans* és *bacillivorax* jobboldali membranellája háromsoros csillólemez. Ez a membranella, bár magas képlet, mégis mindig alacsonyabb marad a szomszédos ajakszervnél. A *myriophylli* jobboldali membranellája azonban valamennyi között a legszélesebb, mintegy

20 csillósorból alakul s a képlet közepén háztetőszerűleg hegyesedő ormóban végződik (12. ábra). A középső membranella mindhárom fajban számos csillósorból képződik, a *scintillans*ban mintegy 10—12, a *myriophylli*ben mintegy 10, a *bacillivorax*ban (13. ábra) pedig közel 20 hosszanti csillósor verődik össze benne. Ez a membranella a tetején harántul van levágva, ennek következtében kefeformájú képlet s legjobban hasonlít a Parameciumban általam 1925-ben leírt peniculushoz. A baloldali membranella 8—10 csillósorból képződik. A csillósorok a *scintillans*ban végig egyenletesen kitartanak, a *bacillivorax*ban azonban kívülről két-három csillósor hátrafelé megszűnik, a *myriophylli*ben (8. ábra) pedig csak a két legbelső csillósor halad a garattölcsér végéig, a többiek a membranella egynegyed hosszúságától hátrafelé lassanként megszűnnek. A három membranella közül magassági méretében az utóbbi a leghatalmasabb. A szájrésből messzire kiemelkedik s külső mellső vége karomszerűleg megnyúlva, nyugalmi helyzetében is befelé görbül. (L. a 9., 12. és 13. ábrát.)

A száj *membranelláinak* és *jobbfelőli ajaknyujtványának szerepét* az élő, valamint a rögzített állat megfigyeléséből a következőkben adhatjuk meg. Ha a szájgödörről azt látjuk, hogy az egy balról jobbra tartó lejtő, mely legnagyobb mélységét a bal ajak tövében éri el, akkor nyilvánvaló, hogy a baloldali különben is magas talapzaton álló membranella mellső végével szabadon kiemelkedik a víztérbe s így ez a táplálkozásnak a legcselekvőlegesebb szerve. Begörbülő végével állandóan kaparja a tárgyakat, a rajta elhelyezkedő baktérium, bacillus- és gombaflórával és söpri be a garattölcsérbe. Vele szembe a jobboldali merev ajak mintegy szemeteslapátként működik, melyet ráilleszt a tárgyakra s azon söpri be a táplálékot. Erre a lapátszerepre kiválóan alkalmassá teszi vastag pelliculája, melynek befelé lejtő hosszanti bordázata a söprődő táplálék irányát is megszabja. E mögött az ajak mögött s részben előtte emelkedik a magas szegővitorla, mely a mozdulatlan ajaknak mozgáshiányát pótolja azzal, hogy a lapátról előre vagy hátra félrecsúszó táprészeket újra a lapátra igazítja, illetőleg a baloldali membranellával szemben egyáltalán maga is cselekvő segédszerepet tölt be. A mondottak szerint az ilyen kaparó membranellákkal ellátott állatokat az örvénylő Ciliáták keretén belül,

mint külön csoportot, éspediglen a *Kapirgálók* csoportját kell megkülönböztetnünk.

Mint föntebb említettük, a garatmembranellák a zárt garattölcsérbe is benyúlnak, illetőleg a közép- és jobboldali membranella a szabad szájrés táján is annyira alacsony, hogy ezek a táplálék begyüjtésében aktív szerepet nem, vagy csak alig játszhatnak. A két másik membranella tehát a nyelvhez hasonlóan a nyelés szerepét tölti be. Eltörpül a baloldali membranellának belső szakasza is, aránylag azonban mégis hosszúak a csillói, úgyhogy ennek következtében ez a szerv a más kettőnek a fölületén mintegy a söprögetéssel foglalkozik.

A három állat közül legvastagabb nyelvei a *myriophyllin*ek vannak (9., 10. és 12. á.); jobboldali nagy membranellájában csaknem 1000 csilló állott össze egy nyelőszervvé. (8. á.) Ezzel van kapcsolatban az, hogy ez az állat egyúttal legnagyobb «falatokat» nyel, mert penészlegelő. A penészszálakat megrágatlan nyeli, cipeli ki a szövedékből s oesophogusában sem gyüjti föl, ú. n. emésztőodút nem formál, hanem egészben, nyujtott szál formájában nyeli le a táplálékot. E különös dolog egyúttal azt is megmagyarázza, hogy ennek az állatnak mért nincs garattölcsére.

A *garat neuronema-rendszerének* tisztázásában igen fontos szerepet játszik a nedves ezüstözés. Régebbi készítményeinken, melyeket Klein száraz módszere szerint állítottunk elő, a *Gl. scintillans* szájgödri neuronéma-rendszeréből tisztán láttuk a membranellák idegösszekapcsolódásait. 1931-ben Horváth Péterrel közösen közreadott dolgozatunk 8. ábrája e tekintetben mindent világosan tárt elénk. Később Klein módszerének tökéletesbítése közben kiderült, hogy régi, 1931-ből való ábráink a szegőmembrána alapját és annak a belső hártyákkal való összeköttetődését nem tüntetik fel tökéletesen. S így 1935-ből való dolgozatom 1. és 5. ábrája révén megállapítottam, hogy a szegőmembrána alapján futó ezüstvonal a szájnyílás hátsó vége felé az ajak vége mögött a szájgödörbe nyomul és annak hátsó öblén körben futva a baloldali membránához csatlakozik. Jelen vizsgálataim, mint említém, nedves ezüstözések alapján a *myriophylli* és *bacillivorax* szájgödrének neuronéma-rendszerét is tisztázták. Ezen eljárások alapján s annak eredményeként a 10. ábra szemlélete közben kiderült, hogy a

membranellák itt is szegővonallal vannak körülvéve, s ezekből szomszédosan harántrostok futnak át egyik membranella-alaptól a másikig. A szomszédos membranellák között átlagosan 10—10 harántrostot lehet megállapítani. A szájperem mentén ezenkívül egy szegőrost is fut körbe. A jobboldali külső szegőmembránától (paroralis membrana) e szerv folytatásaként mindkét fajon egy szemcsézetes rost nyomul be a jobboldali ajak hátsó végében a garattölcsérbe, s innen a garat alsó falán át kanyarodik, folytatólagosan is szemcsés állapotban, a baloldali belső membrana hátsó és egyben belső sarkába (l. a 10. és 14. ábrát). Ez az éles összekötő idegfonal érteti meg velünk azt a pontos összemüködést, mely ezen két szélső fekvésű képlet között megállapítható. A baloldali membranella alsó sarka ezenkívül a jobboldali külső szegélyével is egyenes kapcsolatot tart fenn, éspedig 10. ábránk tanúsága szerint két neuronéma-szál útján, melyek közül egyik a jobboldali membrana közép tája felé, a másik pedig mélyebben a membranella hátsó sarkához tart. Ezen idegszál két szára közt nyomul fel az oesophagus jobboldali csücske a garattölcsér jobb szegélyére. A szájgödör mellső végén a membranelláktól előre és oldalt itt is ép úgy haladnak neuronéma-szálak, mint ahogy azt a *Gl. scintillans* esetében említett 8. ábránkon (1935) már leírtuk. 14. ábránk tanúsága szerint ezenkívül a gödör jobb pofáján sűrű párhuzamos csíkolat alakul ki rézsútos ezüst szálakból.

*A cytopyge* mindhárom fajon a test hátsó vége felé helyezkedik el. A szájréstől elvágott postoralis csillóvonalak közül a jobboldali legszélső, mint iránymeridiánus egészen hátul a testvégen csillótlanná válik, s e szakaszba található az ú. n. cytopygevonal. A hozzátartozó elválasztó-meridiánus (Meridiánus II. O. Klein) előbb mindig egyesült a saját interciliáris szálával s csak azután képződik ki a cytopygés szakasz. A *Gl. scintillans* cytopygevonala hátsó végén a varratvonalba ütközik bele (lásd 1931. 5. ábra); a *bacillivoraxon* is pontosan ezt látjuk, azzal a különbséggel, hogy a cytopyge-vonal jódarab szakaszon maga is belekapcsolódik a varratvonal képzésbe, miként azt 6. ábránk is szépen igazolja.

A *myriophylli* cytopygevonala nagyon nehezen színezhető. Ez nem tökéletesen terminális fekvésű, hanem a hátsó testvégen kissé a hasoldalra van átcsúszva.

A *lüktetőhólyag* mindhárom állatban a hátsó testfélen egyöntetűleg hátoldalt jobbfelől helyezkedik el olyanképpen, hogy a *Gl. scintillans*on az iránymeridiánustól számított 8., a *myriophylli*ben a 46. és a *bacillivorax*on a 19. csillómeridiánusba iktatódik bele. Ezek szerint tehát a *Gl. myriophylli* lüktetőhólyagja közel esik a hátközépvonalhoz, a *scintillans*ban pontosan a jobb oldalvonalon, vagyis a szájzugtól számított egynegyed csillósorszámnyi távolságban, a *bacillivorax*ban pediglen a kettő közt közepes, vagyis a csillósorok számának egyharmadnyi távolságában helyezkedik el. A lüktetőhólyag a kiürítés alkalmával mindhárom állatban eltűnik s utána a kiürítéskor már kész apró mellékhólyagok összefolyásából keletkezik. Legnagyobb lüktető hólyagja van a *Gl. bacillivorax*nak. A lüktetés is itt a leglassúbb, mintegy 28—30 másodpercenként következik be; 15 másodperces gyakoriságú a *myriophylli*ben s a *scintillans*ban 10—20 másodpercenként ürül.

A *mag* mindhárom állatban a test középtájékán a lüktetőhólyag előtt, azzal különösen a *bacillivorax*ban közvetlen érintkezésben helyezkedik el. Az entoplasma áramaiban nem vesz részt, mivel a hátoldal ectoplasmájához van hozzárögzítve. A *myriophylli*ben és *scintillans*ban kerekded, a *bacillivorax*ban pediglen lapos, gyakran pogácsaalakú képlet. Utóbbiban rendszerint rézsútosan fekszik olyképpen, hogy a hátoldalról lefelé és egyúttal hátrafelé nyúlik el, miként a 3*a*. ábra feltünteti. A lüktetőhólyag az ilyenképpen alkotott szögben a mag hátsó végétől dorsálisan helyezkedik el. Az egyetlen mikronucleus mindig a mag megfelelő horpacában található, s a *bacillivorax* esetében a magnak mindig hátoldali vályulatába mélyül bele.

Az *entoplasma* habocskás szerkezetű. Nagy odvak vagy legalább egy nagy odu, különösen a *bacillivorax*ban található. Utóbbiban ez az egy állandónak látszó odu a hátulsó testvégen jelentkezik (l. 3*a*. ábrát). Az entoplasmában szürkés excretiós szemcsék, különösen a *bacillivorax*ban halmozódnak fel. Ezek itt ebben az állatban a kiéhezett példányokban a hátsó testvéget kis nagyítás esetén egészen szürkéssé teszik. E szemcsék elszórtan egyebütt is találhatók.

*Életmód.* Amily egyöntetű alkata van a három állatnak, éppoly egyöntetű az életmódja is. Mindhárman jellegzetes képviselői az aljzatlakó: thymogtaktikus életmódnak. A tenyészvíz

penészlepedékén szüntelen ide-oda mászkálva keresik táplálékukat. E közben egy-egy alga- vagy penészszálat folytonos körforgás közben végigkutatnak és bacillus bevonatától söprőkészülékkel megtisztítanak. Amennyiben hasoldalukon némi lapultság állapítható meg, úgy az ezzel az életmóddal kapcsolatos csúszómászó mozgással jár együtt. Érdekes, hogy különösen a *bacillivorax* Hypotrychusok módjára gyakorta hőköl mozgása közben. A vizsgáló edényben a fenéken rendszerint vagy gyakorta jobboldalukon fekszenek. A szabad víztérben ritkán úsznak. Napokba került, amíg pl. a *bacillivorax*ot sikerült úszásra késztetnem, hogy forgómozgását megállapíthassam. Az állatokat előbb jól ki kellett éheztetnem s csak azután fogtak hozzá az úszáshoz. Forgásuk általán balra tartó, s csak ritkán és akkor is rövid ideig forognak jobbra. Egyébként is rövid ideig úsznak, kitűnő érzékükkel mindjárt valami tárgyra akadnak és azon megtelepszenek.

Aljzatjáró természetükkel kapcsolatosan azt a különös jelenséget figyeltem meg, hogy mellső testükön a csillómozgás következtében akkor is erős örvény keletkezik, amikor ebből a kapirgálásuk közbe semmi hasznuk nincsen. Különösen a *bacillivorax*on volt alkalmam többször világosan megállapítani, hogy az aljzaton mászó állat előtt keletkező kétoldali örvény semmit az állat hasa alá be nem söpör. Mindebből nyilvánvaló, hogy a helyben álló állat körül kialakuló örvény nem a táplálék sodrását, hanem legnagyobb valószínűség szerint a lélekzést szolgálja.

## Összefoglalás.

Az eddig elmondottakból nyilvánvaló, hogy a megismertetett három Glaucoma-fajnak igen sok tekintetben megegyező vonásai vannak, s így a Glaucoma-nemzetség a fajok közös bélyegei alapján jól jellemezhető. Közös vonásuk aljzatlakó életmódjuk, tojásdad testalakjuk és bár ritkán gyakorolt balra fúró, szabad úszásmódjuk. Csillósoraik száma változó ugyan, de ez testméretükkel szoros kapcsolatban van. A csillósorokat illetőleg közös vonás az, hogy a szájtól jobbra eső sorok a száj előtt erős kanyarulattal bal felé vágnak át (közös bélyeg a Colpidiumokkal), s így a száj előtti varratvonal balfelé helyeződik el. Közös vonás az is,

hogy a szájrés a hasoldali csillósorokból nagyobb számút, átlagban 10-et metsz el. A hátsó testvég varratvonala olyan sagittális síkban képződik ki, mely az excretiós meridiánustól a száj bal szélének szomszédságába tart. A hasoldal csillósorai s a sorokban maguk a csillók sűrűbben képződnek, mint a hátoldaliak. A neuronema-rendszer a *scintillans*ban és *bacillivorax*ban teljesen azonos, amennyiben a test hosszában páros neuronemák futnak végig, melyek közül a bal, mint szemcsés vonal, a csillókat kapcsolja össze, a jobboldali pediglen az elválasztással foglalkozik. Az iránymeridiánus és az excretiós meridiánus mindhárom állatban közel azonos fekvésű. A *myriophylli* neuronéma-rendszerében a kétféle elem nem párhuzamban, hanem egymásra derékszögben képződik ki, amennyiben a secretorikus neuronéma-szálacskák az interciliáris szálak szabályos jobboldali (a kép szerint) fogazatát alkotják. A *bacillivorax* hasoldalán ugyanezt tapasztaljuk. Vázat a három állatfaj közül különösen a *myriophyllin* sikerült kimutatni. Ez itt hosszanti és harántléceknek négyszöges hálózatából alakul. Messzimenő megegyezést mutat a szájrésrendszer is. Az egész készülék elől jobbról, hátra balra rézsútosan húzódik el. Jobboldalt egy kiemelkedő pelliculáris ajak képződik, mely mellett, illetőleg részben előtte, kívül a szabad testfelületen egy szegő (paroralis) membrána vagy membranella fejlődik. A szájgödörben s folytatólag a garattölcsérben három hatalmas ívalakban hajlott membranellát találunk, melyek közül a balfelőli, legalább is mellső felével, a szabad testfelületre emelkedik ki s karom módjára hajlott végével a táplálékot kaparja fel az aljzatról. Vele szemben dolgozik a merev pelliculáris ajak, illetőleg a mögötte fekvő szabad szájvitorla (parorális membr.). A garattölcsérben a három membranella a nyelés szerepét játssza. Táplálékuk baktériumokból, bacillusokból telik ki. A *Gl. scintillans* kisebb baktériumokat eszik, belőlük kerek tápodukat formál, a *bacillivorax* egyenesen specialista, amennyiben pálcikabaktériumokkal táplálkozik s belőlük elliptikus tápodukat képez. A *myriophylli* penészevő, és tápodui nincsenek. Többnyire kerekded magjuk a test középtáján hátoldalt a lüktető hólyag előtt helyezkedik el. Egyetlen mikronucleusok mindig a nagy mag horpadásában található. Trichocystái csakis a *myriophyllin*ek vannak. Lüktető-

hólyagjuk a hátsó testfélben hátoldalt jobbra vagy éppen a jobb oldalvonalban fekszik.

Fajfejlődéstani szempontból a sorozat élén áll mint legfejlettebb és legjobban specializált lény a *Gl. myriophylli*, melynek szájvitorlája középütt három csillósoros, s melynek szájgödri membranellái a leghatalmasabbak s a baloldali legerősebb differenciálódást mutat. Itt az előrehaladott differenciálódás a test nagy méretével áll szoros kapcsolatban.

## Irodalom. — Literatur.

1. Bresslau, E.: Zur Systematik der Ciliatengattung Colpidium. Zool. Anz. Bd. 55. 1932.

2. Fauré-Fremiet, Emm.: Le Glaucoma pyriformis etc. Compt. Rendus de L'Association des Anatomistes. 1906.

3. Chatton, E. Lwoff, E. Lwolf, M. et Monod, J. L. (1931): La formation de l'ébauche buccale postérieure chez les Ciliés etc. Extrait des Comptes rendus séances de la Société de biologie.

4. Gelei J. (1925): Új Paramecium Szeged környékéről. Paramecium nephridiatum n. sp. Állatt. Közl. 22. köt.

5. Gelei, J. (1931): Eine nasse Silber- bzw. Goldmethode für die Herstellung der reizleitenden Elemente bei den Ciliaten. Zeitschr. f. wiss. Mikr. und mikr. Technik. Bd. 48. S. 9—29.

6. Gelei J. (1931 *b*): A Glaucoma és Colpidium mozgató és ingervezető elemei a szublimát-ezüst módszer eredményei szerint. A Magyar Biológiai Kutatóintézet I. osztályának munkáiból. IV. kötet.

7. Gelei, J. (1934): Eine mikrotechnische Studie über die Färbung der subpelliculären Elemente der Ciliaten. Zeitschr. f. wiss. Mikr. u. f. mikr. Technik. Bd. 51. 103—178.

8. Gelei J. (1934 *b*): A Ciliaták csilló-meridiánusainak differenciálódása és az iránymeridiánus kérdése. M. Tud. Akad. Matem. és Természettudományi Értesítője, 51. kötet, 613—146.

9. Gelei, J. (1935 *a*): Eine neue Veränderung der Klein'schen trockenen Silbermethode und das Silberliniensystem von Glaucoma scintillans. Arch. f. Protistenk. Bd. 84. 446—455.

10. Gelei, J. (1935 *b*): Colpidium glaucomaeforme n. sp. (Hymenostomata) und sein Neuronemensystem. Arch. f. Protistenk. 85. Bd.

11. Gelei J. (1935) Der Richtungsmeridian und die Neubildung des Mundes während und ausserhalb der Teilung bei den Ciliaten. Biol. Zentralbl. 55.

12. Gelei, J. (1936 *a*): Die Bildung des Porus excretorius und sein

Verhältnis zum Neuronemensystem bei Paramecium. Biol. Zentralbl. Bd. 56. H. 1—2.

13. GELEI J. (1936 *b*): Pori secretorii an den Ciliaten. Biol. Zentralbl.

14. HORVÁTH J. (1934): Kahlia simplex n. sp. etc. Acta Biol. 3. köt.

15. KAHL, A. (1931): Die Ciliaten. In DAHL's Tierwelt Deutschlands XXI.

16. KLEIN, BR. (1926): Ergebnisse mit einer Silbermethode bei Ciliaten. Arch. f. Protistenk. Bd. 56.

17. KLEIN, BR. (1927): Die Silberliniensysteme der Ciliaten. Ebenda. Bd. 58.

18. KLEIN, BR. (1928): Die Silberliniensysteme der Ciliaten. Weitere Resultate. Ebenda. Bd. 62.

19. KLEIN, BR. (1929): Weitere Beiträge zur Kenntnis des Silberliniensystems der Ciliaten. Arch. f. Protistenk. Bd. 65. H. 1—2.

20. SCHEWIAKOFF, W. (1889): Beiträge zur Kenntnis der holotrichen Ciliaten. Bibliotheca Zoologica, 5.

21. STOKES, A. C. (1885): Some new infusoria from American freshwaters. Nr. 1. Ann. and Mag. of Nat. Hist. ser. 5, 15.

22. STOKES, A. C. (1886): Nr. II. Ebenda. 17.

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1936. márc. 16-án tartott üléséből.)

# IV. BEITRÄGE ZUR CILIATENFAUNA DER UMGEBUNG VON SZEGED.

Von J. v. GELEI.

## Drei Glaucoma-Arten: *Gl. scintillans* Ehrgb. *Gl. myriophylli* und *Gl. bacillivorax* n. sp.

Mit 14 Abbildungen.

*Gl. scintillans* ist in der Umgebung der Stadt Szeged ein Ubiquist, *myriophylli* tritt regelmässig in einem Fischteich (im Tápai-ér) auf, der teils mit Grundwasser, teils mit Brunnenwasser aus einem artesischen Brunnen genährt wird. Die neue Art ist aber weit von Szeged, in einem temporären Tümpel (Halasi-ér, bei Pusztamérges), der schwach natronhaltig ist, aufgefunden worden.

*Gl. bacillivorax* (Abb. 3, 5, 6, 7, 11, 13, und 14) ist ein vorne breites, hinten etwas ausgezogenes, von der Dorsalseite her betrachtet, oft etwas sigmoides, grosses Tier. Die Länge beträgt 100—140 $\mu$, die Breite 25—50 $\mu$. Die angegebene Körperform ist nicht für jedes Exemplar bezeichnend, selten sieht man auch hinten breitere, also dem *scintillans* ähnliche ovoide Tiere und sehr oft spindelförmige Exemplare. Die hungrigen Tiere sehen in der Farbe und Körperform (ausgenommen, dass eine Delle fehlt) oft parameciumähnlich aus, Vorder- und Hinterende ist gewöhnlich nach rechts (s. Abb. 3*b*) verschoben, wodurch das Tier links (und zugleich ventral) mehr konvex ist, als rechts (und dorsal). Der Querschnitt ist gewöhnlich rundlich, nur die mageren Exemplare sind ventral etwas flach.

Der Körper ist deutlich längsgestreift und mit 55—61 Cilien-

reihen ausgezeichnet. Von diesen schneidet die Mundöffnung 8—11 rein postorale Cilienreihen ab (Abb. 3). Rechts vom Richtungsmeridian (d. i. rechte, postorale Cilienreihe), in die 19. Cilienreihe ist die Pulsationsblase bzw. der Porus excretorius eingeschaltet. Die Blase liegt dorsal rechts, in der hinteren Körperhälfte. An Abb. 3*b* ist schön ersichtlich, dass die mittleren, ventralen Cilienreihen dichter stehen als die lateralen und dorsalen und auch dichter bewimpert sind.

Das Neuronemsystem ist dem dem *Gl. scintillans* ganz ähnlich, es besteht aus dem doppelten, sog. Zweiliniensystem: der paarigen Interciliar- und rechts davon der secretorischen Faser (Meridiane II. O.). Ventral gesellen sich zu ungef. 13 Interciliarfasern keine Längsmeridiane II. O. (d. h. secretorische Neuroneme), sondern es wachsen hier von den Interciliarfasern rechts Zähnchen aus. *Gl. myriophylli* hat am ganzen Körper ein derartig gezähneltes Neuronemensystem. Als Stützelemente konnten feine, bandartige Fasern nachgewiesen werden, die links von der Interciliarfaser verlaufen. Der Bau des Mundapparates ist ganz typisch für Glaucoma. Einen Totalansicht desselben sehen wir in Abb. 3. In Abb. 11 ist die Form des Mundapparates und die linke Membran abgebildet in Abb. 13 sehen wir eine optische Querschnittsreihe der Membranellen. Der Mundapparat ist, wie ersichtlich, von vorne rechts, nach hinten links schief gestellt. Das Oesophagealrohr ist sogar quer nach links gerichtet und an der Spitze nach vorne (!) umgebogen (Abb. 3 und 11). Die rechte Membranelle ist dreireihig, und vorne unterbrochen (Abb. 3). Die mittlere ist die mächtigste, die linke ist ungefähr siebenreihig. Eine Adoralmembran konnte nicht immer unterschieden werden, doch traten die Basalkörperchen der Cilien an der Präparaten immer scharf hervor (s. Abb. 11 links oben und Abb. 3*b*). Abb. 13 zeigt die gegenseitige Lage der drei Membranellen in drei nacheinanderfolgenden optischen Querschnitten; es ist hier ersichtlich, dass die linke Membranelle die höchste ist. An Abb. 11 ist die Anfüllung der Verdauungsblase, die Bewegungsform der linken Membranelle und die Basalanlage der Paroralmembran zu sehen. Die rechte, innere Wand des Mundtrichters ist nach aussen steif gezähnelt bzw. gerippt (s. Abb. 11 u. 14), und einwärts von diesen Rippen tritt an den Silberpräparaten eine

feine Streifung auf, die an Abb. 14 dargestellt ist. Hier ist zugleich ein optischer Längsschnitt der Mundgrube sichtbar.

Das Tier ernährt sich von gewissen Bakterien (Bazillen), die in seinem Oesophagus zusammengebündelt verschluckt und in elliptischen Verdauungsblasen verarbeitet werden (Abb. 3*a*). Von diesen Bazillenpaketten stammt der Name: *bacillivorax.*

Die Cytopyge liegt hinten und bildet die terminale Nahtlinie (s. Abb. 5 und 6).

Der plattgedrückte Kern, der oft eine unebene oberfläche zeigt, liegt in der Körpermitte dorsal und in seiner oberen Eindellung findet der Mikronukleus seinen Platz. In der Sagittalebene betrachtet, zeigt der Kern eine schiefe Lage (Abb. 3*a*) und in dem derart gebildeten hinteren Winkel erscheint die sehr beträchtliche Pulsationsblase. Sie pulsiert jede 28.—30. Minute.

Im Tiere sind keine Trichocysten nachweisbar. Eine Anhäufung von grauen Körnchen aus Excretkristallen bezeichnet das Hinterende (Abb. 3*a*). Diese Körnchen sind vereinzelt auch im ganzen Körper zerstreut zu finden. Oft sieht man im Körper grosse Wasserblasen. Besonders am hinteren Körperende ist sehr regelmässig eine solche Blase zu finden (Abb. 3*a*).

*

Wenn wir die drei Arten *Gl. scintillans, myriophylli* und *bacillivorax* vergleichend betrachten, so ergeben sich folgende gemeinsame und folgende unterscheidende Charaktere:

Der Grösse nach folgen sie in der Reihe: *Gl. scintillans*. 40/20, *bacillivorax* 150/50, *myriophylli* 200/120 *μ*. *Gl. scintillans* besitzt höchstens 38, *bacillivorax* 61 und *myriophylli* 110 Cilienreihen. Diese stehen ventral dichter und sind zugleich dichter behaart als dorsal. Der Mund schneidet eine beträchtliche Zahl der postoralen Cilienreihen ab, bei jeder Art gegen 10, wogegen bei Colpidium weniger: 2—3 postorale Cilienreihen vorhanden sind. Der Mund und die Cytopyge bilden sich bei der Teilung in der seitlich rechts gelegenen, postoralen Cilienreihe (Richtungsmeridian) aus. Von dieser nach rechts gerechnet ist bei *scintillans* die 8., bei *bacillovorax* die 19. und bei *myriophylli* die 46. Cilienreihe als excreto-

risch zu bezeichnen, da der Porus excretorius dort eingeschaltet ist.

Die Nahtlinie, die sich zwischen den Cilienreihen ausbildet, ist hinten fast meridional, vorne dagegen weit nach links verschoben. In Verbindung damit sind die vorderen, rechten Cilienreihen vor dem Munde nach links weit umgeschlagen (bei Colpidium ist dieser rechte und praestomale Bogen der Cilienreihen noch ausgesprochener). Vorne breitet sich die Nahtlinie in einem spaltförmigen, kahlen Frontalfeld aus, die bei *myriophylli* beinahe verschwunden ist (vergl. Abb. 1—3).

Gemeinsam ist für Colpidien und Glaucomen in der Gestaltung des Mundes, dass das Organ im vorderen Körperdrittel liegt, am weitesten nach hinten bei *bacillivorax*. Der Mundapparat ist schief von vorne rechts, nach hinten links gestellt, bei beiden Gruppen ist weiterhin der Mund mit drei schief längsgestellten, inneren Membranellen und mit einer äusseren, rechtsständigen Segelmembran ausgezeichnet. Ausserdem sehen wir bei den Glaucomen an der rechten Wand des Mundtrichters nach aussen eine starke Rippenbildung, am optischen Querschnitt eine Zähnelung und nach innen eine feine, schiefe Streifung aus Silberlinien (s. Abb. 14). Für die Glaucomen bezeichnend ist nun der grosse, für Colpidien der kleine Mund. Daher werden dort eben gegen 10, hier bloss 2—3 poststomale Cilienreihen abgeschnitten. Auch die Membranellen des Mundtrichters unterscheiden sich in der Grösse, indem bei Glaucomen mächtige, lange und dicke Membranellen vorhanden sind, wogegen die Colpidien meist mit dreireihigen, kurzen Membranellen versehen sind. Bezeichnend für die Glaucomen ist weiterhin die scharfe, rechtsständige, pelliculare Lippe, die bei den Colpidien fehlt.

Doch treten auch innerhalb der Gruppe Glaucoma derartige artspecifische Unterschiede auf, nach welchen die einzelnen Arten auch auf Grund des Mundapparates, wie folgt, gut determinierbar sind (vergl. die Abb. dieser Arbeit und der 1931): Die Segelmembran ist bei *scintillans* einreihig, bei *myriophylli* dreireihig und bei *bacillivorax* schwach entwickelt. Die rechte Mundmembranelle ist bei *scintillans* und *bacillivorax* ein langes, sensenförmiges Gebilde, bestehend aus drei Cilienreihen, bei *myriophylli* dagegen ist sie ge-

rade und äusserst dick (sie ist aus ungefähr 20 Cilienreihen mit nahezu 1000 Cilien zusammengesetzt). Auch auf Grund des kahlen, oesophagialen Abschnittes kann man die drei Arten unterscheiden, da derselbe bei *scintillans* nach hinten links, bei *bacillivorax* dagegen quer und nach vorne links gerichtet steht und bei *myriophylli* kaum wahrnehmbar klein ist.

Der Umstand, dass der Kern bei allen drei Arten ungefähr in der Körpermitte dorsal liegt, ist ziemlich allgemein in der Ciliatenwelt verbreitet. Die Pulsationsblase liegt dorsal rechts in der hinteren Körperhälfte hinter dem Kern. Die Tiere sind meist Linksdreher.

Die Tiere sind ausgesprochen thigmotaktische Lebewesen. Sie kratzen die Gegenstände mit Hilfe ihrer linken Mundmembran ab und fegen dabei die aufgewühlten Nahrungspartikelchen an der grossen, rechten Lippe wie an einer *Schaufel* entlang in den Mundtrichter hinein. Die adorale Membrane ist ihr dabei behilflich und ergänzt die unbewegliche Schaufel. *Gl. scintillans* ernährt sich aus kurzen Bakterien-Bazillen, *bacillivorax* ist Spezialist und frisst gewöhnlich eine längliche Bazillenform. *Gl. myriophylli* ernährt sich hier allein aus Pilzfäden, die sie nicht aufgerollt, also nicht in einer sphärischen Verdauungsblase verschluckt, sondern ausgezogen in das Entoplasma einverleibt. Daher ist das Tier mit dicken, zungenartigen «Schluck»-Membranellen ausgerüstet und hat einen länglichen Mundtrichter, aber nur einen kleinen, kurzen, oesophagialen Abschnitt.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. März 1936.)

# ÉDESVIZI KAGYLÓINK ÉS A LITHOGLYPHUS NATICOIDES FER., MINT A SZABAD VIZEK ÖNTISZTULÁSI KÉPESSÉGÉNEK TÉNYEZŐI.[1]

HARANGHY LÁSZLÓ-tól.

A folyó- és állóvizek önderítőképességének egyik lényeges tényezője bizonyos vízi szervezetek bacteriumpusztító hatása. Ismeretes, hogy egyes infusoriumok, chlorophyllmentes flagellaták, mikroskopikus crustaceák jelentékeny bacterium tömegeket fogyasztanak, s egyes állatok, például a csigák, a szerves hulladékanyag eltakarítása által csökkentik a bacteriumok számát. A kagylók vízderítőképessége már régebb idő óta kutatás tárgyát képezi. WILHELMI már 1914-ben megjelent munkájában megállapítja, hogy a kagylók a vízből nagymennyiségű vízben suspendált anyagot, planktonszervezetet, valószínűleg bacteriumot, s esetleg oldott szerves anyagot távolítanak el. WILHELMI a víz szerves anyagainak tengeri kagylók által létrehozott csökkenését ki is mutatta, s a különböző kagylókkal végzett kísérletek RANSONT, KROGHOT és másokat arra a megállapításra késztették, hogy a kagylók a vízben oldott szerves anyagokat táplálékul felhasználni képesek. Azonban a PÜTTER-féle elmélettel összefüggésben végzett s következtetéseikben ma is erősen vitatott kísérletek a kagylók víztisztító képességének bacteriumokra gyakorolt hatását nem vizsgálták, s így a kagylók vízderítő tulajdonságának jelentőségét illetően, határozott megállapításaink máig sincsenek.

Tudvalevőleg a kagylók belső köpenyfelületét, a kopoltyúlemezeket és a szájtapogatót fedő csillószőrös hámsejtek a köpeny üregében állandó vízáramlást tartanak fenn, mely a köpeny bran-

[1] Közlemény a Magyar Biologiai Kutató Intézet I. osztályáról. Megjelent a M. kir. Földmivelésügyi Minisztérium támogatásával.

chiális nyílásától, a kopoltyúlemezek között az ellentétes oldalon levő szájnyíláshoz vezet s innen visszafordulva, a kopoltyúk fölötti üregen (*suprabranchialis* üreg) keresztül a köpeny kloakasiphója nyílásához halad. Tehát a vízben suspendált élő és élettelen anyagok bejutnak a kagyló köpenyüregébe s ha tápanyagként fel nem használtatnak, újra a külvilágba kerülnek. Ezek szerint a kagylók vízderítő képessége elméletileg vagy úgy képzelhető el, hogy a vízben levő szerves anyagok, mikro- és nanno-plankton tápanyagként szolgálnak, vagy pedig úgy, hogy a tápanyag gyanánt fel nem használt részecskék köpenyürön való áthaladása a leülepedést mozdítja elő. Az első esetben a bacteriumok számának csökkenése tényleges, az utóbbinál viszont csak látszólagos, mert a leülepedett bacteriumok az iszapban életképesek maradhatnak s kedvező körülmények mellett újra a vízbe juthatnak. Tehát a kagylók víztisztítóképességének jelentőségét csak úgy bírálhatjuk el, ha a víz bacteriumtartalmának meghatározása mellett az iszap bacteriologiai vizsgálatát sem mellőzzük. Erre figyelemmel a kagylók vízderítő képességét elsősorban az alábbi módon vizsgáltam:

Három egyforma üvegkád mindenikébe a következő kísérleti folyadékot helyeztem: 10 liter Balatonvízhez 1 liter biologiai szennyvízderítőből távozó vizet, $2^1/_2$ kg steril homokot adtam s a közvetlen napfényhatástól megóvott és pontosan lefedett üvegkádban elhelyezett kísérleti folyadék és iszap csíraszámát három napon át meghatároztam. A bacteriologiai vizsgálat menete a következő volt: Minden egyes vízpróba 1, illetve 0·1 $cm^3$.-ével 1—1 húsleves-gelatin, 1—1 HESSE- és NIEDNER-féle Heyden-albumoseagar, 1—1 1·5 %-os húslevesagar, 1—1 VIGNAL-féle anaërob lemez készült. A gelatin- és albumoseagar-lemezek telepeit 22 fokon hat napig tartó, az agar-agar-lemezek telepeit 37 fokon két napig tartó, a VIGNAL-lemezek telepeit 37 fokon négy napig tartó tenyésztés után 20-szoros nagyítás mellett olvastam le s a két különböző vízmennyiséggel beoltott lemezek telepszámainak 1 $cm^3$.-re átszámított középértékét vettem. A thermophilen, illetőleg coli és rothadási titer meghatározásához, a szilárd táptalajokon kívül, minden egyes vízpróbából 6 drb., erjedési csövekben elhelyezett, 37 fokon tenyésztett s különböző vízmennyiségekkel

(1—0·0001 $cm^3$.) beoltott, 1 %-os tejcukros bouillon, 6 drb. 46 fokon tenyésztett, különböző vízmennyiségekkel beoltott mannit-neutralvörös bouillon és 3 drb. ACHALME-féle táptalaj készült. A colibacteriumok számának pontos megállapítása céljából urotropinos agart használtam s a coli csírák számát 37 fokon, 48 óra mulva olvastam le. Az iszap bacteriologiai vizsgálatánál hasonló módon jártam el s a tenyészet a steril módon kiemelt és 10-szeresére felhígított iszapból készült. A fenti módon előállított s három napon át bacteriologiailag ellenőrzött kísérleti folyadékok közül este 6 órakor, egybe összesen 220 gr súlyú *Dreissensia polymorpha* PALL. kagylókat, egybe 11 drb., összesen 280 gr súlyú *Unio pictorum* L.-t helyeztem és egyet ellenőrző kísérlet gyanánt változatlanul hagytam.

A kísérlet a kagylók vízszűrőképességét szembeötlőleg mutatta, amennyiben a kagylókat tartalmazó edények vize már a következő nap reggel tökéletesen tiszta, teljesen átlátszó volt, míg az ellenőrző kísérlet vize még három nap mulva is határozottan zavarosnak látszott. A bacteriumok számának változására vonatkozó vizsgálatok s az egyéb kísérleti adatok az I. sz. táblázatban vannak feltüntetve.

A táblázatban felsoroltak szerint, a Dreissensiákat tartalmazó edény vizének csiraszáma az ellenőrző kísérlethez viszonyítva, sem a gelatinán, sem a Heyden-agaron nem mutatott nagyobbfokú visszaesést, azaz a tulajdonképpeni vízi bacteriumok száma lényegesen nem változott. Ezzel szemben a 37 fokon tenyésző aërob- és anaërob-bacteriumok száma a Dreissensiák vizében kifejezetten csökkent, amennyiben 3. nap mulva az előbbiek száma kisebb, mint az ellenőrző kísérlet csiraszámának $^1/_3$-a, az utóbbiak pedig a controll kísérlet csiraszámának $^1/_3$-át alig haladják túl s a coli csirák száma nem éri el az ellenőrző kísérlet coliszámának $^1/_4$-ét. Az Uniókat tartalmazó edényben ugyanezen jelenség volt megfigyelhető azzal a különbséggel, hogy a mesophil és coli csirák számának süllyedése öt nap mulva lett a legkifejezettebb s ugyanekkor a gelatinán, a tulajdonképpeni vízi bacteriumok számában is jelentős visszaesés volt megállapítható. Tehát úgy a Dreissensiákkal, mint az Uniókkal végzett kísérletnél a mesophil, coli, anaërob csirák száma az ellenőrző kísérlethez viszonyítva lényegesen csökkent. Az iszap vizsgálati adatait áttekintve, ellentétes jelenség

volt megfigyelhető. Ugyanis három nap mulva az iszap mesophil-bacteriumainak száma, mind a Dreissensiák, mind az Uniók edényében, az ellenőrző kísérlet csiraszámának körülbelül 10-szeresére, a coli csirák száma a Dreissensiáknál a controllkísérlet csiráinak körülbelül 5-szörösére, az Unióknál kb. 8-szorosára emelkedett. Miután, mind a Dreissensiáknál, mind az Uniónál az iszap mesophil és coli csiráinak emelkedése akkor érte el a legmagasabb értékeket (három, illetve öt nap mulva), amikor a víz hasonló csiráinak megkevesbbedése a legkifejezettebb volt, az iszap csiraszám-szaporulatát a vízi bacteriumok leülepedésének tulajdonítottam. Tehát az ismertetett kísérlet arra engedett következtetni, hogy a Dreissensia- és az Unio kagyló víztisztítóképességében nem a bacteriumok direkt pusztítása, hanem csupán leülepedése játsza a főszerepet.

A coli csirák kisebbfokú átmeneti sedimentatiója az ellenőrző kísérletben is jelentkezett, de a bacteriumok számának csökkenését újból emelkedés váltotta fel. Hogy a Dreissensiákkal és az Uniókkal végzett kísérletben leülepedett bacteriumok iszapban való felszaporodása nem eredményezi-e a víz csiraszámának újólagos emelkedését, nem volt megítélhető, mert a Dreissensiák már három nap után tömegben, s egyes Unio példányok pedig öt nap után elpusztultak, ami természetszerűleg a csiraszám kagyló rothadással összefüggésben álló gyors emelkedését eredményezte. Ismeretes, hogy a Dreissensiák kifejezetten oligosaprob organismusok s így gyors pusztulásuk a kísérletben szereplő aránylag magas csiraszámnak s a derítővízbacterium flórájának tulajdonítható. Tehát a leülepedett bacteriumok további sorsa kagylók jelenlétében csak akkor figyelhető meg, ha a bacteriumok számát a kagylókra veszélytelen, alacsony határon tartjuk, vagyis a kísérletnél pontosan meghatározott csiraszámmal bíró bacterium emulsiót használunk. Mivel az ismertetett kísérlet nem a kagylók bacterium-pusztító hatására, hanem csupán bacteriumokat leülepítő képességére nyujtott támpontot, a továbbiakban annál is inkább kizárólag meghatározott fajú bacteriumokat használtam, mert a különböző bacteriumok sedimentálódóképessége köztudomás szerint más és más. Ezek figyelembevételével a következő kísérleteknél kiindulási pont gyanánt steril közegeket választottam, melyeket Bacterium

coli vagy Bacterium fluorescens emulsióval kevertem. Kísérleti bacterium gyanánt a Bacterium coli és Bacterium fluorescens választása látszott előnyösnek. Ugyanis a Bacterium fluorescens egyik legközönségesebb vízi bacteriumunk, melyet kagylók belében többször kimutattam s így feltehető, hogy jelenléte bizonyos határig a kagylókra lényeges veszedelmet nem jelent. Viszont a Bacterium coli communissal végzett kísérletek éppen abból a szempontból bírtak jelentőséggel, hogy ez a melegvérűek bélsarában előforduló mikroorganismus a legközönségesebb vízszennyező bacterium. E mellett a Bacterium fluorescens oxygenszükséglete a Bacterium coliénál kb. 6-szor nagyobb, a kultúrában bacteriumhártyát képez s a colinál jóval nehezebben sedimentálódik. Tehát a két különböző bacteriummal végzett kísérletek lényeges adatokat szolgáltathatnak abból a szempontból, hogy a kagylók vízderítő tulajdonságát mennyiben befolyásolja a víz bacteriumainak minősége és sedimentálódó képessége.

Úgy ezeknél a kísérleteknél, valamint a később felsorolandóknál dr. Entz Géza egyetemi nyilvános rendes tanár, dr. Módlinger Gusztáv egyetemi magántanár és Sebestyén Olga tanárnő láttak el zoologiai útbaigazításokkal s voltak szívesek kísérleteimet zoologiai szempontból ellenőrizni. Fáradozásukért e helyről is hálás köszönetemet fejezem ki.

Az első kísérletekben kísérleti közeg gyanánt physiologiás konyhasóoldatot használtam, azonban hamarosan nyilvánvalóvá vált, hogy a konyhasóoldat alkalmazása a kagylók életképességét nagyban befolyásolja és a kísérleti állatok gyorsan elpusztulnak. Ezután destillált vizet alkalmaztam és úgy ennél a kísérletnél, mint a későbbieknél a következő eljárást használtam: három egyforma, kerekalakú, széles szájú, kb. 600—650 $cm^3$.-es üvegedény mindegyikébe 500 $cm^3$. destillált vizet, 200 gr. finom quarzhomokot tettem s a pontosan lefedett edények mindegyikét félóráig autoklavban sterilizáltam. A sterilizálás után meghatároztam a kísérleti folyadékok pH-ját s amennyiben a vegyhatás 7·3, illetve 7·4 pH-nál nagyobbnak vagy kisebbnek mutatkozott, steril szódaoldattal vagy steril 1/100 normál ecetsavval az előbbi vegyhatásra állítottam be. Ezután a kísérleti edényeket legalább 12 órára jégszekrénybe tettem s a kísérleti állatok behelyezése előtt a folyadékba

## I. számú kísérlet.

A Dreissensia polymorpha és az Unio pictorum víztisztító képességének vizsgálata derítő vízzel kevert Balatonvízben

| A kísérlet leírása | A vizsgálat napja és órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz bakteriologiai vizsgálatának adatai | | | | | | | | Az iszap bakteriologiai vizsgálatának adatai | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Csíraszám gelatinán | Csíraszám Heyden-agaron | Csíraszám agaron | Anaërob csíraszám | Csíraszám urotrop. agaron | Thermo-phil titer | Coli titer 37 fokon | Coli titer 46 fokon | Rothadási titer | Csíraszám gelatinán | Csíraszám Heyden-agaron | Csíraszám agaron | Anaërob csíraszám | Csíraszám urotropin agaron | Thermo-phil titer | Coli titer 37 fokon | Coli titer 46 fokon | Rothadási titer |
| **I. Controll vizsgálat.** Jul. 15-én 10 liter Balatonvízhez 1 liter derítővizet és 2·5 kg. steril homokot adunk. A 7·7 pH-jú folyadékot 24 óráig állni hagyjuk s a csíraszámot és egyéb bakteriologiai vizsgálati adatokat naponként meghatározzuk. | júl. 16., 9 óra | zavaros | 26,800 | 34,200 | 7,800 | 2,600 | 1,800 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 2,400 | 2,200 | 1,400 | 1,500 | 80 | 0·001 | 0·01 | 0·5 | — |
| | « 17., 9 « | « | 27,100 | 28,400 | 11,000 | 2,500 | 1,600 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 8,000 | 4,500 | 1,350 | 1,480 | 110 | 0·001 | 0·01 | 0·5 | — |
| | « 18., 18 « | « | 30,000 | 30,500 | 9,000 | 1,900 | 1,700 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 28,000 | 18,000 | 2,100 | 1,670 | 1,100 | 0·001 | 0·001 | 0·001 | — |
| | « 19., 9 « | « | **28,000** | **35,000** | **10,500** | **2,400** | **1,800** | **0·0001** | **0·0001** | **0·001** | — | **27,000** | **20,000** | **2,800** | **2,000** | **2,000** | **0·0001** | **0·01** | **0.01** | — |
| | « 20., 8 « | « | **36,400** | **28,000** | **8,900** | **2,300** | **2,600** | **0.0001** | **0·0001** | **0·001** | — | **31,000** | **18,000** | **2,600** | **2,800** | **2,600** | **0·0001** | **0·001** | **0.001** | — |
| | « 21., 9 « | « | **40,500** | **41,500** | **9,800** | **2,200** | **2,000** | **0·0001** | **0·0001** | **0·001** | — | **28,000** | **19,000** | **2,900** | **3,500** | **2,580** | **0·0001** | **0·001** | **0.001** | — |
| | « 22., 9 « | mérsékelten zavaros | **26,000** | **30,500** | **11,000** | **1.100** | **320** | **0·001** | **0·001** | **0·1** | — | **29,000** | **18,000** | **2,600** | **2,800** | **2,700** | **0·0001** | **0·001** | **0.001** | — |
| | « 23., 9 « | « « | **30,800** | **26,000** | **7,800** | **2,400** | **190** | **0·001** | **0·01** | **0·1** | — | **31,000** | **21,000** | **1,800** | **1,100** | **1,400** | **0·0001** | **0·001** | **0.001** | — |
| | « 24., 9 « | zavaros | 28,000 | 29,000 | 9,000 | 3,100 | 1,200 | 0·001 | 0·001 | 0·001 | — | **16,000** | **20,000** | **1,700** | **1,050** | **900** | **0·001** | **0·001** | **0.01** | — |
| | « 25., 12 « | erősen zavaros | 47,000 | 30,500 | 16,000 | 2,800 | 1,900 | 0·001 | 0·001 | 0·001 | — | 15,000 | 11,000 | 1,300 | 750 | 630 | 0·001 | 0·001 | 0·01 | — |
| **II. Dreissensia polymorpha kagylókkal végzett vizsgálat.** Az I. számú vizsgálatnál használt folyadékkal teljesen megegyező vízbe júl. 18-án 18 órakor összesen 220 gr .súlyú Dreissensia polymorpha-kagylókat helyezünk, melyek júl. 20. és 21-én életben vannak. Július 22-én reggel 9 órakor valamennyi kagyló kinyíltnak, elpusztultnak mutatkozik. | júl. 16., 9 óra | zavaros | 27,400 | 32,500 | 8,100 | 3,100 | 2,000 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 2,300 | 5,100 | 890 | 780 | 150 | 0·001 | 0·01 | 0·5 | — |
| | « 17., 9 « | « | 26,500 | 34,300 | 8,000 | 2,600 | 3,100 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 2,700 | 4,100 | 1,250 | 1,100 | 130 | 0·001 | 0·01 | 0·5 | — |
| | « 18., 18 « | « | 29,300 | 30,400 | 11,000 | 2,500 | 1,800 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 11,000 | 14,000 | 1,800 | 1,300 | 190 | 0·001 | 0·01 | 0·5 | — |
| | « 19., 9 « | teljesen tiszta | **27,400** | **21,000** | **6,000** | **1,800** | **730** | **0·0001** | **0·001** | **0·05** | — | **29,000** | **21,000** | **2,400** | **2,900** | **2,100** | **0·0001** | **0·0001** | **0.0001** | — |
| | « 20., 9 « | « « | **28,400** | **18,900** | **1,800** | **890** | **240** | **0·001** | **0·001** | **0·1** | — | **31,000** | **38,000** | **2,900** | **5,100** | **4,100** | **0·0001** | **0·0001** | **0.0001** | — |
| | « 21., 9 « | « « | **29,300** | **26,400** | **2,800** | **790** | **450** | **0·001** | **0·001** | **0·1** | — | **34,000** | **31,000** | **28,000** | **2,950** | **12,810** | **0·0001** | **0·0001** | **0.0001** | — |
| | « 22., 9 « | erősen zavaros, bűzös | 190,000 | 81.000 | 21,000 | 14,000 | 4,900 | 0·0001 | 0·0001 | 0·0001 | 0·01 | 110,000 | 48,000 | 98,000 | 14,000 | 21,800 | 0·0001 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 |
| **III. Unio pictorum kagylókkal végzett vizsgálat.** Az I. sz. vizsgálatnál használt folyadékkal teljesen megegyező vízbe júl. 18-án 18 órakor 11 drb., összesen 280 gr. súlyú Unio pictorum kagylókat helyezünk, melyek júl. 24-ig életben vannak. Július 24-én reggel 9 órakor 3 kagyló, júl. 25-én 4 kagyló elpusztultnak mutatkozik. | júl. 16., 9 óra | zavaros | 27,300 | 28,400 | 8,000 | 2,400 | 2,100 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 1,100 | 3,100 | 980 | 1,450 | 20 | 0·001 | 0·01 | 1·— | — |
| | « 17., 9 « | « | 30,100 | 26,300 | 7,800 | 2,600 | 2,000 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 5,800 | 7,600 | 1,100 | 1,200 | 90 | 0·001 | 0·01 | 0·5 | — |
| | « 18., 18 « | « | 29,100 | 29,400 | 9,400 | 3,100 | 1,900 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 | — | 18,000 | 18,500 | 1,800 | 1,650 | 950 | 0·001 | 0·001 | 0·001 | — |
| | « 19., 9 « | teljesen tiszta | **27,300** | **19,000** | **4,100** | **980** | **810** | **0·001** | **0·001** | **0.05** | — | **36,000** | **28,900** | **11,000** | **1,800** | **7,800** | **0·0001** | **0·0001** | **0·0001** | — |
| | « 20., 9 « | « « | **26,400** | **20,000** | **3,900** | **1,000** | **180** | **0·001** | **0·001** | **0·1** | — | **38,000** | **29,400** | **14,000** | **3,800** | **6,500** | **0·0001** | **0·0001** | **0·0001** | — |
| | « 21., 9 « | « « | **18,000** | **11,000** | **2,100** | **420** | **20** | **0·001** | **0·001** | **1·—** | — | **41,000** | **36,000** | **13,500** | **2,500** | **9,100** | **0·0001** | **0·0001** | **0·0001** | — |
| | « 22., 9 « | « « | **14,000** | **13,000** | **1,000** | **320** | **16** | **0·01** | **0·01** | **1·—** | — | **58,000** | **29,000** | **16,000** | **2,900** | **8,100** | **0·0001** | **0·0001** | **0·0001** | — |
| | « 23., 9 « | « « | **9,800** | **14,100** | **800** | **780** | **21** | **0·01** | **0·01** | **1·—** | — | **54,000** | **39,000** | **18,500** | **3.850** | **11,400** | **0·0001** | **0·0001** | **0·0001** | — |
| | « 24., 9 « | kissé zavaros | 9,600 | 11,000 | 9,800 | 1,900 | 110 | 0·001 | 0·001 | 0·1 | — | 64 000 | 41 400 | 21 300 | 6 530 | 14,300 | 0·0001 | 0·0001 | 0·0001 | 0·5 |
| | « 25., 9 « | erősen zavaros, bűzös | 160,000 | 100,500 | 11,400 | 3,100 | 1,900 | 0·0001 | 0·001 | 0·001 | 0·5 | 140,000 | 35,300 | 39,400 | 21,400 | 10,500 | 0·0001 | 0·0001 | 0·0001 | 0·001 |

## II. szakísérlet.

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha és Unio pictorum víztisztító képességének vizsgálata Bacterium coli emulsióval és húskivonat-tápbouillonnal kevert sterilizált vízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controll kísérlet | | Dreissensiákkal végzett kísérlet | | Unióval végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Júl. 26-án 500 cm³. destillált vízhez 200 gr. homokot és 10 gr. bolus albát adunk s sterilizáljuk. A 7·3 pH-ra beállított folyadékhoz júl. 27-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csiraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót adunk. 3 ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-hez 3 drb. (2·0, 2·0, 1·4 gr. súlyú) Dreissensiát, s 1-hez 1 drb. (25·1 gr. súlyú) Uniót adunk. Júl. 29-én 16 órakor, utólag mindenik kísérlethez 50 cm³. húskivonat-tápbouillont adunk. | júl. 27. | 18 | mérsékelten zavaros | 17.4 | óra mulva teljesen tiszta | 3.100 | 7 óra mulva teljesen tiszta | 11.100 | A kagylóknál a kísérleti edény fenekén ásványi szemcséket és bacteriumokat tartalmazó nyákcsomók találhatók |
| | júl. 28. | 9 | « | 18.4 | teljesen tiszta | 1.900 | teljesen tiszta | 2.100 | |
| | júl. 29. | 9 | « | 16.3 | « | 2.100 | « | 1.080 | |
| | júl. 29. | 16 | « | 21.2 | « | 1.050 | « | 1.150 | |
| | júl. 30. | 9 | « | 57.8 | erősen zavaros | 64.000 | erősen zavaros | 78.000 | Reggelre úgy a Dreissensiák, mint az Unio elpusztultak |
| A megelőző kísérlet azzal az eltéréssel, hogy 450 cm³. steril destillált vízhez, mindjárt kezdetben 50 cm³. húskivonat-tápbouillont keverünk. A Dreissensiák súlya: 1·9, 1·9, 1·7 gr., az Unio súlya: 24·3 gr. | júl. 27. | 18 | mérsékelten zavaros | 76 | zavaros | 91.400 | zavaros | 84.200 | 18 és 20 óra között mindhárom Dreissensia elpusztult |
| | júl. 28. | 9 | zavaros | 181 | erősen zavaros | 416.500 | — | — | Az Unio reggelre elpusztult |

steril üvegcsőben elhelyezett kénsavas vattán keresztül félóráig levegőt fujtattam, majd a víz hőmérsékletét thermostatban 20—22 fokig emeltem s a kísérleti folyadékhoz 10 $cm^3$., összesen 10 millió csiraszámmal bíró destilláltvizes Bacterium coli, illetőleg Bacterium fluorescens emulsiót adtam. A bacterium emulsio csiraszámának meghatározása a HELBER-féle számlálókamara segítségével történt s a szükséges csiraszámot higítás segítségével állítottam be. A későbbi vizsgálatoknál az emulsio készítéshez standardoldatot használtam. Vizsgálati törzs gyanánt emberi bélsárból kitenyésztett Bacterium coli communist és Unio bélből kitenyésztett Bacillus fluorescens liquefacienst alkalmaztam. A kísérleti állatokat pontosan megtisztítva, héjukat alkohollal ledörzsölve s súlyukat megmérve helyeztem a kísérleti folyadékba. A kísérleti edényekben a folyadékoszlop magassága kb. 10 cm. volt. A kísérleti edények közvetlen napfényhatástól megvédve, PETRI-csészével lefedve, ugyanazon helyen állottak minden további kísérletnél. A kísérlet folyamán a csiraszámot lemezöntéssel határoztam meg s ilyen célból a Bacterium colival végzett kísérleteknél a kísérleti folyadék 1 és 0·1 $cm^3$.-ével urotropinos agarlemezt, a Bacterium fluorescenssel végzett kísérleteknél ugyanilyen vízmennyiségből agar-agarlemezeket készítettem s a 48 óra mulva, 20-szoros nagyítással leolvasott lemezek csiraszámának középértékét vettem.

Az ismertetett methodika alkalmazásával elsősorban azt a kérdést óhajtottam tisztázni, hogy a kagylók vízderítőképessége a bacteriumok kisebb-, vagy nagyobbfokú elszaporodása mellett egyformán kifejezetten mutatkozik-e. Ebből a célból két kísérleti sorozatot készítettem. Az egyiknél kísérleti folyadékul 500 $cm^3$. destillált vizet alkalmaztam, melyhez a sedimentatio előmozdítására 10 gr. bolus albát adtam, a másiknál a bacterium szaporodását elősegítendő, 450 $cm^3$. destillált vízhez 50 $cm^3$. húskivonat-tápbouillonoldatot kevertem. A kísérleti sor adatait a II sz. táblázat mutatja:

A táblázat adataiból megállapítható, hogy 3 drb. Dreissensia rendkívül gyorsan, 3 óra alatt, a 25·1 gr. súlyú Unio lassabban, 7 óra alatt tudja a vízben lebegő ásványi szemcséket leülepíteni s egyidejűleg a víz csiratartalma is nagymértékben csökkent, amennyiben két és félnap mulva a Dreissensiák és az Uniók kísér-

leteinek csiraszáma kb. 20-szor kisebb volt, mint az ellenőrző kísérleté. A kagylók kísérleti edényének fenekén nyákos tömegbe ágyazott ásványi szemcsék és bacteriumok voltak találhatók. A nyákpelyhekkel naponként beoltott folyékony és szilárd táptalajok a bacteriumok gyors növekedését mutatták, jelezve a leülepedett bacteriumok életképességét. Miután a kísérleti edény fenekén található nyákos tömegbe ágyazott bacteriumok egyenletes elosztódásáról beszélni sem lehetett, az iszap csiraszámának meghatározása céltalannak látszott. Azonban az I. sz. táblázatban foglalt kísérletek adatait figyelembevéve, ennek dacára valószínűnek mondható, hogy a lecsapódott bacteriumok ugyanolyan mértékben emelték az iszap bacterium-tartalmát, mint amilyen fokban a vízé csökkent. Annak megállapítására, hogy ha a megkevesbbedett csiraszámmal bíró kísérleti folyadékhoz a bacteriumok szaporodását előmozdító anyagot adunk, a kagyló vízderítő hatása képes-e a bacteriumok számának emelkedését ellensúlyozni, a kísérleti folyadékhoz két és félnap után 50 $cm^3$. húskivonat-tápbouillont adtam. A művelet után már 17 óra mulva a bacteriumok számának nagyfokú emelkedése, a kísérleti folyadék megzavarodása s a kísérleti állatok elpusztulása volt megfigyelhető. A második kísérletsorozat, melynél a kísérleti folyadékot már kezdettől fogva bouillonnal kevertem, hasonló eredménnyel járt, amennyiben itt a folyadék feltisztulása, a bacteriumok számának csökkenése egyáltalában nem következett be s a kísérleti állatok rövidesen elpusztultak. A kísérletek tehát azt mutatták, hogy a kagylók vízderítő hatása tápanyagdús közegben nem tudja megakadályozni a bacteriumok gyors elszaporodását. Az ellenőrző kísérletek azonban az utóbbi megállapítással szemben aggályokat támasztottak. Ugyanis a steril destilláltvíz és bouillon keverékbe helyezett Uniók és Dreissensiák 4, illetve 7 napig életben maradtak ugyan, azonban rendkívül sok nyákot termeltek s az említett időpontban elpusztultak. Tehát határozottan annak gyanúja vetődött fel, hogy önmagában véve a bouillon kísérleti folyadékhoz való adása olyan súlyos beavatkozás az állatokra nézve, mely a kagylók vízszűrő hatását teljesen tönkreteheti és így a bacteriumok felszaporodása a kagylók vízderítőképességének kimaradásával is összefüggésben állhat. Ezen ok miatt a kísérleti módszeren újabb változtatást

## III. számú kísérlet.

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha és az Unio pictorum víztisztítóképességének vizsgálata Bacterium coli emulsióval kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A vizsgálat | | Controllkísérlet | | Dreissensia-kagylókkal végzett kísérlet | | Unióval végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Júl. 30-án 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 10 gr. bolus albát adunk s sterilizáljuk. A 7·3 pH-jú folyadékhoz júl. 31-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót adunk. Három ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-hez 3 drb. (1·8, 1·8, 1·7 gr. súlyú) Dreissensiát s 1-hez 1 drb. (22·8 gr. súlyú) Uniót adunk. Aug. 5-én 10 órakor utólag mindenik kísérlethez 50 cm³. peptonos-szőlőcukros oldatot adunk. | aug. 1. | 12 | mérsékelten zavaros | 5,280 | **5 óra mulva teljesen tiszta** | 1.780 | **8 óra mulva teljesen tiszta** | 2,890 | |
| | aug. 2. | 9 | « | 9,730 | teljesen tiszta | 1,320 | teljesen tiszta | 1,670 | |
| | aug. 3. | 9 | « | 11,580 | « | 1,100 | « | 1,080 | |
| | aug. 4. | 9 | « | 8,510 | « | 780 | « | 940 | |
| | aug. 5. | 9 | « | 7,840 | « | 840 | « | 730 | |
| | aug. 6. | 12 | zavaros | 84,230 | zavaros | 17,830 | zavaros | 19,410 | |
| | aug. 7. | 9 | « | 560,200 | « | 392,400 | « | 305,140 | A dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 8. | 12 | « | 890,400 | — | — | erősen zavaros | 1.083,400 | Az unio reggelre elpusztult |
| A megelőző kísérlet azzal az eltéréssel, hogy 450 cm³. Balatonvízhez mindjárt kezdetben 50 cm³. szőlőcukros-peptonos oldatot keverünk. Dreissensiák súlya 2·3, 1·9, 1·5 gr., az Unio súlya 24·1 gr. | aug. 1. | 12 | zavaros | 937,000 | erősen zavaros | 1.241,000 | zavaros | 1.341,000 | A dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 2. | 9 | « | 21.430,000 | — | — | erősen zavaros | 29.280,000 | Az unio reggelre elpusztult |

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha és az Unio pictorum víztisztítóképességének vizsgálata Bacterium fluorescens emulsióval kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A vizsgálat | | Controllkísérlet. | | Dreissensia-kagylókkal végzett kísérlet | | Unióval végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Júl. 30-án 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 10 gr. bolus albát adunk s sterilizáljuk. A 7·3 pH-jú folyadékhoz júl. 31-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium fluorescens emulsiót adunk. Három ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-hez 3 drb. (1·7, 1·5, 1·4 gr. súlyú) dreissensiát, s 1-hez 1 drb (24·1 gr. súlyú) Uniót adunk. Aug. 5-én 10 órakor utólag mindenik kísérlethez 50 ccm peptonos-szőlőcukros oldatot adunk. | aug. 1. | 12 | mérsékelten zavaros | 7.320 | **4 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 2,840 | **9 óra mulva teljesen tiszta** | 3,410 | |
| | aug. 2. | 9 | zavaros | 20,840 | teljesen tiszta | 2,310 | teljesen tiszta | 2,180 | |
| | aug. 3. | 9 | « | 41,830 | « | 1,930 | « | 1,880 | |
| | aug. 4. | 9 | « | 43,720 | « | 870 | « | 1,730 | |
| | aug. 5. | 9 | zavaros, bacterium-hártya | 19,410 | « | 530 | « | 1,210 | |
| | aug. 6. | 12 | « | 263,400 | mérsékelten zavaros | 27,400 | zavaros | 36,500 | |
| | aug. 7. | 9 | erősen zavaros | 1.873,500 | erősen zavaros | 7.670,300 | « | 420,700 | A Dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 8. | 12 | « | 2.183,400 | — | — | erősen zavaros | 2.870,300 | Az Unio reggelre elpusztult |
| A megelőző kísérlet, azzal az eltéréssel, hogy 450 cm³. Balatonvízhez mindjárt kezdetben 50 cm³. szőlőcukros-peptonos oldatot keverünk. Dreissensiák súlya 2·1, 1·8, 1·7 gr, az Unio súlya 23·8 gr. | aug. 1. | 12 | erősen zavaros, bacterium-hártya | 1.041,000 | erősen zavaros, bacterium-hártya | 2.121,000 | erősen zavaros, bacterium-hártya | 1.131,000 | A Dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 2. | 9 | « | 81.400,000 | — | — | « | 124.200,000 | Az Unio reggelre elpusztult |

tettem és a továbbiakban destillált víz helyett kizárólag sterilizált Balatonvizet s bouillonoldat helyett 1 %-os szőlőcukros és 0·5 %-os peptonoldatot használtam. Az ellenőrző kísérletek szerint az ilyen kísérleti folyadékban a kagylók életképességüket változatlanul megtartják s fokozott nyáktermelés rajtuk nem észlelhető. Az ilyen methodika segítségével s Bacterium colival és Bacterium fluorescensszel külön-külön végzett kísérletek eredményei a III. sz. táblázatban vannak feltüntetve.

A táblázat adataiból megállapítható, hogy a Dreissensiák és az Uniók víztisztítóképessége mindkét bacteriumféleséggel beoltott kísérletnél igen erősnek mutatkozott. Az iszap felszínén ezeknél a kísérleteknél is ásványi szemcséket, bacteriumokat tartalmazó nyákpelyhek voltak találhatók és öt nap mulva a coli csirák száma a Dreissensiák edényében kb. 9-szer, az Uniók edényében kb. 10-szer kisebb volt, mint az ellenőrző kísérletnél. A fluorescens csirák száma pedig a Dreissensiáknál az ellenőrző kísérlet csiraszámának kb. 37-ed, az Unióknál ezen szám kb. 16-od részére esett vissza. Tehát a Bacterium fluorescensszel beoltott kísérletekben a víz csiraszámának csökkenése még kifejezettebb volt, mint a könnyebben sedimentálódó Bacterium coli kísérleteinél. Hogy azonban ez a jelenség mennyiben állandó, azt további kísérletek voltak hivatottak eldönteni. Az utólagosan szőlőcukros oldattal kevert kísérleteknél, továbbá a kezdettől fogva peptonos szőlőcukros oldattal beállított kísérletekben az eredmény teljesen a II. számú táblázatban leírt kísérlet eredményével egyezett, amennyiben a víz tápanyagainak felszaporodása itt is a bacteriumok számának újólagos rohamos emelkedését s a kagylók gyors pusztulását eredményezte. Végeredményben tehát ezek a kísérletek is azt mutatták, hogy a kagylók a vízben lebegő ásványi szemcséket s ezzel együtt bizonyos határig a bacteriumokat lecsapni képesek, ha azonban a bacteriumok szaporodása a kísérleti folyadék tápanyaggazdagsága következtében igen gyors, a sedimentatio elmarad s a kagylók gyors pusztulása következik be. A kísérlet ezenfelül a sedimentatio mechanismusára is támpontot nyujtott. Az iszap felszínén található nyákpelyhek, melyek a II. sz. kísérletben az állatok bouillon-, illetve destillált víz által kiváltott fokozott nyáktermelésével is összefüggésbe hozhatók voltak, a jelen kísérletben csupán a leülepedés

eszközének voltak tekinthetők. Úgy látszik, hogy a köpenyürbe jutott ásványi szemcsék, bacteriumtömegek a nyákmirigyeket fokozott működésre serkentik s a nyák tapasztja össze az ásványi szemcséket és a bacteriumokat s teszi lehetővé gyors leülepedésüket. Természetszerűleg e mellett az is lehetséges, hogy a bacteriumok bizonyos hányada táplálék gyanánt felhasználtatva, a bélcsatornában elpusztult, annál is inkább, mert a nyákpelyhek egyenetlen elosztódása következtében az iszap csiraszámát meghatározni nem lehetett. Magában véve azon körülményt, hogy a kísérleti állatok beléből a Bacterium coli communis kimutatható nem volt, szintén nem zárja ki a nevezett bacterium tápanyagként való felhasználását, mert a coli kitenyészthetőségének elmaradása a kagylóbélen való áthaladás következménye is lehet. A kérdés elbírálására a kísérletsorozatot szénszemcsékkel kevert Balatonvízben megismételtem. A vizsgálat eredményei a IV. számú táblázatban vannak feltüntetve.

A kísérlet eredményei a kísérleti folyadék feltisztítását, a bacteriumok leülepítését illetően, teljesen a megelőző kísérletével azonosak és a víz utólagos szőlőcukros — peptonos oldattal való keveredése, vagy a kísérleti folyadék szőlőcukros — peptonos oldattal való előzetes összevegyítése ezeknél a kísérleteknél is a bacteriumok számának gyors emelkedését és a kagylók pusztulását eredményezte. A fluorescensel végzett kísérleteknél a csiraszám süllyedése a III. sz. kísérlettel egyezően erőteljesebbnek mutatkozott, amennyiben a coli kísérleteiben Dreissensiáknál észlelt kb. 17-szeres, Unióknál észlelt kb. 16-szoros csiraszám csökkenéssel szemben, a fluorescens kísérleteiben a Dreissensiáknál kb. 43-szoros, az Unióknál kb. 23-szoros csiraszámsüllyedés volt megfigyelhető. A kísérleti edények fenekén helyetfoglaló nyákba ágyazott szénszemcsék világosan mutatták, hogy a szénszemcsék leülepítése a már leírt módon, nyákkal való összetapasztás útján történt. A kísérleti állatok felboncolása alkalmával azonban kitűnt, hogy a kagylók bélcsatornájában és zsigerzacskójában szénszemcsék egyáltalában nem mutathatók ki, vagyis az a föltevés látszott valószínűnek, hogy a víz csiraszámának süllyedésénél kizárólag a sedimentatio játszik szerepet, ellenben mind az emberi bélsár eredetű, mind a vízben otthonos bacteriumok a tápcsatornába nem jutnak. A megállapí-

## V. számú kísérlet.

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha, Unio pictorum és Anodonta cygnea vízderítőképességének vizsgálata Bacterium coli emulsióval és carminoldattal kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | Dreissensiákkal végzett kísérlet | | Unióval (24·8 gr. súlyú), végzett kísérlet | | Unióval (16·4 gr. súlyú), végzett kísérlet | | Anodontával (35·4 gr. súlyú), végzett kísérlet | | Anodontával (31·2 gr. súlyú), végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Aug. 6-án 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 2 cm³. carminoldatot adunk és sterilizáljuk. A 7·4 pH-jú folyadékhoz aug. 7-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót adunk. Hat ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be 3 drb. (1·8, 1·8, 1·6 gr. súlyú) Dreissensiát, 2-be 1-1 (24·8, 16·4 gr. súlyú) Uniót, 2-be 1—1 (35·4, 31·2 gr. súlyú) Anodontát helyezünk. Aug. 12-én 12 órakor utólag, mindenik kísérlethez 50 cm³. peptonos-szőlőcukros oldatot adunk. | aug. 8. | 12 | zavaros | 1,980 | **5 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 1,140 | **7 óra mulva teljesen tiszta** | 1.760 | **6 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 1,320 | **5 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 1,180 | **6 óra mulva teljesen tiszta** | 1,380 | A kagylóknál a carminszemcsék nyákos anyagba ágyazva a fenékre rakódtak |
| | aug. 9. | 12 | mérsékelten zavaros | 3,100 | teljesen tiszta | 760 | teljesen tiszta | 1,480 | teljesen tiszta | 810 | teljesen tiszta | 860 | teljesen tiszta | 730 | |
| | aug. 10. | 9 | « | 8,740 | « | 540 | « | 1,520 | « | 430 | « | 400 | « | 340 | |
| | aug. 11. | 9 | « | 17,300 | « | 380 | « | 1,410 | « | 440 | « | 580 | « | 320 | |
| | aug. 12. | 12 | « | 8,410 | « | 360 | « | 1,380 | « | 510 | « | 510 | « | 320 | |
| | aug. 13. | 9 | zavaros | 48,420 | zavaros | 17,400 | zavaros | 10,800 | zavaros | 21,300 | zavaros | 47,300 | zavaros | 31,200 | |
| | aug. 14. | 12 | erősen zavaros | 520,400 | erősen zavaros | 490,000 | erősen zavaros | 130,300 | erősen zavaros | 610,300 | erősen zavaros | 210,100 | « | 89,400 | A Dreissensiák, Unio (16·4 gr.), Anodonta (35·4 gr.) elpusztultak |
| | aug. 15. | 9 | « | 980,700 | — | — | « | 1.280,000 | — | — | — | — | erősen zavaros | 1.730,000 | A még élő Unio és Anodonta elpusztult |

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha, Unio pictorum és Anodonta cygnea vízderítőképességének vizsgálata Bacterium fluorescens emulsióval és carminoldattal kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | Dreissensiákkal végzett kísérlet | | Unióval (28·1 gr. súlyú), végzett kísérlet | | Unióval (17·3 gr. súlyú), végzett kísérlet | | Anodontával (36·2 gr. súlyú), végzett kísérlet | | Anodontával (32·8 gr. súlyú), végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Aug. 6-án 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 2 cm³. carminoldatot adunk és sterilizáljuk. A 7·4 pH-jú folyadékhoz aug. 7-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium fluorescens emulsiót adunk. Hat ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be 3 drb. (2·1, 2·0 1·6 gr. súlyú) Dreissensiát, 2-be 1-1 (28·1, 17·3 gr. súlyú) Uniót, 2-be 1-1 (36·2, 32·8 gr. súlyú) Anodontát helyezünk. Aug. 12-én 12 órakor utólag, mindenik kísérlethez 50 cm³. peptonos-szőlőcukros oldatot adunk. | aug. 8. | 12 | zavaros | 8,200 | **5 óra mulva teljesen tiszta** | 2,730 | **7 óra mulva teljesen tiszta** | 1,980 | **7 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 2,430 | **6 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 3,410 | **6 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 2,310 | A kagylóknál a carminszemcsék nyákos anyagba ágyazva, a fenékre rakódtak |
| | aug. 9. | 12 | « | 9,400 | teljesen tiszta | 1,080 | teljesen tiszta | 870 | teljesen tiszta | 1,730 | teljesen tiszta | 2,100 | teljesen tiszta | 1,800 | |
| | aug. 10. | 9 | « | 11,300 | « | 760 | « | 1,050 | « | 1,430 | « | 1,800 | « | 780 | |
| | aug. 11. | 9 | zavaros, bacteriumhártya | 10,400 | « | 410 | « | 700 | « | 1,300 | « | 780 | « | 750 | |
| | aug. 12. | 12 | « | 11.200 | « | 280 | « | 730 | « | 1,000 | « | 790 | « | 230 | |
| | aug. 13. | 9 | erősen zavaros, bacteriumhártya | 72,300 | erősen zavaros | 34,000 | erősen zavaros | 38,000 | zavaros | 52,000 | zavaros | 28,400 | erősen zavaros | 88,400 | A 32·8 gr-os Anodonta elpusztult |
| | aug. 14. | 12 | « | 1.040,000 | erősen zavaros, bacteriumhártya | 780,000 | erősen zavaros, bacteriumhártya | 276,000 | erősen zavaros, bacteriumhártya | 536,000 | erősen zavaros, bacteriumhártya | 432,000 | — | — | A Dreissensiák és a 17·3 gr-os Unio elpusztult |
| | aug. 15. | 9 | « | 9.370,000 | — | — | « | 890,000 | — | — | « | 1.030,000 | — | — | A még élő Unio és Anodonta elpusztult |

## IV. számu kisérlet.

| A kísérlet leírása | A Dreisssensia polymorpha és az Unio pictorum víztisztítóképességének vizsgálata Bacterium coli emulsióval és carbo animalissal kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | Dreissensia-kagylókkal végzett kísérlet | | Unióval végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Aug. 1-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 5 gr. carbo animalist adunk s sterilizáljuk. A 7·4 pH-jú folyadékhoz aug. 2-án reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót adunk. Három ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-hez 3 drb. (2·1, 2·0, 2·0 gr. súlyú) Dreissensiát s 1-hez 1 drb. (23·2 gr. súlyú) Uniót adunk. Aug. 7-én 10 órakor utólag mindenik kísérlethez 50 cm³. peptonos-szőlőcukros oldatot adunk. | aug. 3. | 9 | zavaros | 4,030 | **5 óra mulva teljesen tiszta** | 1,430 | **8 óra mulva teljesen tiszta** | 1,640 | A kagylóknál a szénszemcsék nyákos anyagba ágyazva, a fenékre rakódtak |
| | aug. 4. | 9 | « | 11,720 | teljesen tiszta | 1,120 | teljesen tiszta | 1,030 | |
| | aug. 5. | 9 | « | 9,430 | « | 720 | « | 680 | |
| | aug. 6. | 12 | « | 7,510 | « | 540 | « | 690 | |
| | aug. 7. | 9 | « | 6,320 | « | 380 | « | 410 | |
| | aug. 8. | 12 | erősen zavaros | 28,300 | zavaros | 17,310 | zavaros | 11,830 | |
| | aug. 9. | 12 | « | 620,700 | erősen zavaros | 530,400 | erősen zavaros | 360,400 | A Dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 10. | 9 | « | 934,400 | — | — | « | 1.426,000 | Az Unio reggelre elpusztult |
| A megelőző kísérlet azzal az eltéréssel, hogy 450 cm³. Balatonvízhez mindjárt kezdetben 50 cm³. szőlőcukros-peptonos oldatot keverünk. Dreissensiák súlya 2·4, 2·2, 1·8 gr., Unio súlya 21·7 gr. | aug. 3. | 9 | erősen zavaros | 787,000 | erősen zavaros | 1.080,000 | erősen zavaros | 1.410,000 | A Dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 4. | 9 | « | 2.842,000 | — | — | « | 74.310,000 | Az Unio reggelre elpusztult |

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha és az Unio pictorum víztisztító képességének vizsgálata Bacterium fluorescens emulsióval és carbo animalissal kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | Dreissensia-kagylókkal végzett kísérlet | | Unióval végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíra-száma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Aug. 1-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 5 gr. carbo animalist adunk és sterilizáljuk. A 7·4 pH-jú folyadékhoz aug. 2-án reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium fluorescens emulsiót adunk. Három ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-hez 3 drb. (2·6, 2·4, 2·3 gr. súlyú) dreissensiát s 1-hez 1 drb (24·2 gr. súlyú) Uniót adunk. Aug. 7-én 10 órakor mindenik kísérlethez utólag 50 cm³. peptonos-szőlőcukros oldatot adunk. | aug. 3. | 9 | mérsékelten zavaros | 6,400 | **6 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 2,000 | **8 óra mulva teljesen tiszta** | 2,300 | A kagylóknál a szénszemcsék nyákos anyagba ágyazva, a fenékre rakódtak |
| | aug. 4. | 9 | « | 18,400 | teljesen tiszta | 1,800 | teljesen tiszta | 1,430 | |
| | aug. 5. | 9 | zavaros | 22,300 | « | 1,080 | « | 1,200 | |
| | aug. 6. | 12 | « | 21,200 | « | 580 | « | 1,100 | |
| | aug. 7. | 9 | zavaros, bacterium-hártya | 24,200 | « | 560 | « | 1,040 | |
| | aug. 8. | 12 | erősen zavaros, bactériumhártya | 475,000 | erősen zavaros | 81,410 | zavaros, bacterium-hártya | 56,300 | 1 Dreissensia reggelre elpusztult |
| | aug. 9. | 12 | « | 3.670,800 | « | 5.830,400 | « | 1.300,000 | 2 Dreissensia reggelre elpusztult |
| | aug. 10. | 9 | « | 39.450,000 | — | — | erősen zavaros | 74.560,000 | Az Unio reggelre elpusztult |
| A megelőző kísérlet azzal az eltéréssel, hogy 450 cm³. Balatonvízhez mindjárt kezdetben 50 cm³. szőlőcukros-peptonos oldatot keverünk. Dreissensiák súlya 2·3, 2·3, 1·8 gr., Unio súlya 26·3 gr. | aug. 3. | 9 | erősen zavaros, bacterium-hártya | 1.672,000 | erősen zavaros, bacterium-hártya | 1.930,000 | erősen zavaros, bacterium-hártya | 1.103,000 | A Dreissensiák reggelre elpusztultak |
| | aug. 3. | 18 | « | 37.510,000 | — | — | « | 8.734,000 | Az Unio reggelre elpusztult |

tást biztosítandó, a kísérletsorozatot hidegen telített vizes carmin-(Grübler)-oldat 2 $cm^3$.-ének hozzáadásával megismételtem azzal az eltéréssel, hogy kísérleti állat gyanánt két különböző súlyú Unio mellett, ugyancsak két különböző súlyú *Anodonta cygnea* L. kagylót is használtam és az egységes eredmények figyelembevételével a peptonos — szőlőcukros oldattal készült önálló kísérletsorozatot mellőztem. A kísérletsorozat eredményei az V. számú táblázatban vannak feltüntetve.

A kísérletsorozatból megállapítható, hogy az Anodonta vízderítőképessége a Dreissensiáéhoz és az Unióéhoz hasonló. Valamennyi, kagylókat tartalmazó kísérleti edényben a víz teljes feltisztulása következett be s a víz utólagos szőlőcukros-peptonos oldattal való keverése mindenhol a csiraszám emelkedését és ezzel kapcsolatban a kísérleti állatok gyors pusztulását eredményezte. A Bacterium colival és Bacterium fluorescenssel végzett kísérletek eredményeit összehasonlítva, a Dreissensiák ötnapos kísérleteiben ismét a fluorescens csiraszámsüllyedése mutatkozott a jelentékenyebbnek, mert itt a coli, ellenőrzőkísérlethez viszonyított kb. 23-szoros csiraszámcsökkenésével ellentétben, 40-szeres visszaesés jelentkezett. Az Uniókkal és az Anodontákkal végzett kísérletnél az eredmények ilyen szempontból nem voltak egységesek, mert egyik állatnál a Bacterium coli, másiknál a Bacterium fluorescens csiraszáma mutatkozott alacsonyabbnak. Összesítve ilyen szempontból a III., IV. és V. számú kísérleteket, megállapítható, hogy a könnyebben sedimentálódó Bacterium coli és a nehezebben sedimentálódó Bacterium fluorescens a kagylók által egyaránt leülepíthető. Ezen túlmenő határozott következtetés a kísérletekből le nem vonható. Igaz, hogy a Bacterium fluorescens sedimentatiója öt nap mulva a III., IV. számú kísérletekben s a Dreissensiákat illetően az V. számú kísérletekben is a Bacterium coliénál jóval erősebbnek látszott s így arra lehetne következtetni, hogy a vízi bacteriumok, amilyen a fluorescens, a kagylók által könnyebben lecsaphatók, mint a szennyező bacteriumok, például a coli. Azonban figyelembe veendő ilyen szempontból, hogy az ellenőrző kísérletekben támadt fluorescens bacteriumhártya képződése a kagylóknál rendszerint kimaradt s így a controll- és a kagylós kísérlet csiraszámainak egybevetése csak igen tág határok

között lehetséges. Azonfelül, ha más kísérleti napot veszünk alapul, eltérő eredményt kaphatunk. Például az V. számú kísérletben, négy nap mulva a Dreissensiáknál a coli csiraszáma 46-szor kisebb, mint a controllé, viszont a fluorescensé az ellenőrző kísérletnél csak 25-ször kevesebb, holott másnap ennek éppen az ellenkezője állapítható meg. Ezenkívül az V. számú kísérletben ilyen irányban ugyanazon kagylófaj egyes példányai is eltérőleg viselkedtek s így az ingadozó és nem minden tekintetben összehasonlítható kísérletekből csak az az egy megállapítás látszik biztosan igazoltnak, hogy a kagylók bizonyos vízi és szennyező bacteriumok számát egyaránt csökkenteni képesek.

A carminszemcséktől elszíneződött nyákos anyag az V. számú kísérlet edényeinek fenekén rendkívül feltűnő volt és a carminszemcsékkel kevert, sokszor hurkaszerűleg formált nyákos anyagban mikroskop alatt nagymennyiségű bacteriumot lehetett kimutatni. A nyákos anyaggal beoltott táptalajokon úgy a Bacterium coli, mint a Bacterium fluorescens dúsan tenyészett, azonban a kísérlet befejeztével elpusztult állatok bélcsatornájában és zsigerzacskójában a carminszemcsék sem szabad szemmel, sem mikroskoppal nem voltak fellelhetők. Ilyen módon a carbo animalissal végzett kísérlet eredményeinek megfelelőleg, továbbra is az a következtetés látszott valószínűnek, hogy a csiraszámcsökkenés csupán a nyákkal összetapasztott bacteriumok sedimentatiójának eredménye. Miután azonban a carminszemcsékre való vizsgálat kizárólag elpusztult állatokon történt, szükségesnek látszott a megfigyelés élő állatokra való kiterjesztése. Ilyen célból a 10 liter steril Balatonvízből és 50 $cm^3$. carminoldatból álló kísérleti folyadékhoz Bacterium coli és Bacterium fluorescens összevegyített emulsiójának 100 $cm^3$.-ét adtam s a bacteriumok szaporodását elősegítendő, a folyadékhoz kismennyiségű (50 $cm^3$.) steril szőlőcukros-peptonos oldatot kevertem. A kísérlet eredményei a VI. számú táblázatban vannak feltüntetve.

A táblázat adataiból kitűnik, hogy a Dreissensiák a kísérleti folyadékot igen gyorsan, már 4 óra mulva, az Anodonták később, 11 óra mulva teljesen feltisztították. A kísérleti folyadék csiraszámának csökkenése annak megfelelően, hogy a folyadék a bacteriumok szaporodására kedvező tápanyagot már kezdettől fogva

## VI. szá kísérlet.

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha és Anodonta a víztisztító képességének vizsgálata Bacterium coli és Bacterium fluorescens val, szőlőcukros-peptonos oldattal és carminoldattal keve l Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | ssensiákkal ett kísérlet | | Anodontákkal végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A zetes tságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| Aug. 10-én 10 liter steril Balatonvízhez 2 kg. steril homokot és 50 cm³. steril carminoldatot adunk. A 7·5 pH-jú folyadékhoz aug. 11-én reggel 9 órakor 100 cm³., összesen 10 millió csíraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót és 100 cm³., összesen 10 millió csíraszámmal bíró Bactérium fluorescens emulsiót és 50 cm³. steril 1%-os szőlőcukor, 0·5%-os peptonoldatot adunk. 3 ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-hez 110 gr. összsúlymennyiségű Dreissensia kagylókat, s 1-hez 3 drb. (45·6, 43·2, 51·4 gr.) súlyú Anodontát adunk. | aug. 12. | 12 | mérsékelten zavaros | 8.970 | 4 ulva n | 6.870 | 11 óra mulva teljesen tiszta | 9.400 | A kagylók kísérleténél a carminszemcsék nyákos anyagban, hurkaszerűen összetapasztva, a fenéken találhatók |
| | aug. 13. | 9 | « | 11.400 | n | 5.320 | teljesen tiszta | 7.300 | |
| | aug. 14. | 12 | « | 18.800 | | 2.310 | « | 5.300 | 1 drb. 45·6 gr-os Anodonta élő állapotban kivéve. Boncolásánál, sem a bélcsatornában, sem a zsigerzacskóban carminszemcsék nem mutathatók ki |
| | aug. 15. | 9 | mérsékelten zavaros, bacteriumhártya | 60.400 | | 1.730 | « | 6.300 | 1 drb. 2·8 gr. súlyú Dreissensia élő állapotban kivéve, carmin sem a bélcsatornában, sem a zsigerzacskóban nem található |
| | aug. 16. | 9 | « | 190.800 | | 850 | « | 4.900 | 1 drb. 2·2 gr. súlyú Dreissensia elpusztult, carmin benne nem található |
| | aug. 17. | 12 | zavaros bacteriumhártya | 210.700 | | 730 | « | 2.800 | 1 drb. 1·6 gr. súlyú Dreissensia élő állapotban kivéve, carmin benne nem található |
| | aug. 18. | 9 | « | 290.000 | | 1.030 | « | 1.800 | 1 drb. 2·3 gr. súlyú Dreissensia élő állapotban kivéve, carmin benne nem található |
| | aug. 19. | 12 | « | 690.000 | | 1.710 | « | 1.700 | 1 drb. 1·4 gr. súlyú Dreissensia élő állapotban kivéve, carmin benne nem található |
| | aug. 20. | 9 | « | 420.000 | | 750 | « | 580 | 1 drb. 1·2 gr. súlyú Dreissensia élő állapotban kivéve, carmin benne nem található |
| | aug. 21. | 9 | « | 508.000 | s, | 1,030.000 | « | 1.030 | Reggelre az összes Dreissensiák elpusztultak, carmin bennük nem található. A két Anodonta élő állapotban kivéve s bennük sem a bélcsatornában, sem az zsigerzacskóban carminszemcsék nem mutathatók ki |

tartalmazott, a megelőző kísérleteknél lassabban ment, azonban az ellenőrző kísérletet figyelembe véve, igen nagyfokú volt. Ugyanis a 9. vizsgálati napon a Dreissensiáknál a víz csiraszáma a controllénál 560-szor, az Anodontáknál pedig körülbelül 725-ször kisebbnek mutatkozott. A kísérlet folyamán, a táblázatban felsorolt napokon, mindkét kagylófajtából élő példányokat vettem ki és az állatok boncolásánál sem a bélcsatornában, sem a zsigerzacskóban carminszemcsék nem voltak fellelhetők, viszont festékszemcsék az edény fenekén nagy tömegben halmozódtak fel. Ezek alapján a bacteriumok számának nagyfokú csökkenését annál is inkább a kagylók okozta leülepedésnek tulajdonítottam, mert a carminszemcsék hiánya a különböző kísérleti napokon élő állapotban kiemelt állatokon volt megfigyelhető.

Természetszerűleg az ismertetett kísérletekből levont következtetések nem alkalmazhatók minden megszorítás nélkül a szabad természetre, hiszen a kagylók táplálékfelvétele évszakok, szaporodási időszak stb. szerint szünetelhet és így lehetséges, hogy a kísérletekben is csak a táplálkozás időleges megszűnésével állunk szemben. A kérdésre vonatkozólag érdekes adatokat szolgáltattak azok a kísérletek, melyek a kagylók vízderítőképességének gyorsaságát óhajtották tisztázni. Már az eddigi kísérletekből is világosan kitűnt, hogy a Dreissensia-kagylók aránylag sokkal gyorsabban tudják a vízben suspendált anyagokat leülepíteni, mint az Unio- és Anodontakagylók. A II. számú kísérletnél 3, összesen 5·4 gr. súlyú Dreissensia, már 3 óra mulva teljesen feltisztított 500 $cm^3$. vizet, s ugyanezt a hatást a 25·1 gr. súlyú Unio csak 7 óra alatt érte el. A többi kísérletekben felsorolt adatok szerint is a Dreissensiák mindig gyorsabban tisztították fel a vizet, mint a többi kagylók s csupán egy esetben mutatkozott az Anodonta víztisztító hatása a dreissensiáéval egyenlőnek. A vízderítőképesség gyorsaságát pontosabban megállapítandó, a következő kísérletet végeztem: kerekalakú, kb. 650 $cm^3$.-es egyenlő nagyságú üvegedényekbe 500 $cm^3$., az Intézet balatoni vízvezetékének régebb idő óta nem használt csapjából kiengedett zavaros Balatonvizet és 200 gr. homokot helyeztem s a homokot $^1/_4$ óráig leülepedni hagytam. A 10 $cm^3$. magas folyadékoszloppal bíró s Petri-csészékkel letakart kísérleti edényekbe a VII. sz. táblázatban felsorolt kagylókat

tettem és a kísérleti folyadékok feltisztulásának fokát félóránként megfigyeltem. Átlátszósági próba gyanánt 5 mm. magas, 60 mm. hosszú vörös, s ugyanolyan méretű fekete nyomtatott betűsor, s 2 mm. magas és 5 mm hosszú számjegy szolgált. Az átlátszósági fokokat VI.-tól I.-ig számoztam, VI.-tal jelölve az átlátszatlan, I.-gyel a teljesen átlátszó s erősen fénytörő folyadékot. Az átlátszósági fokok közelebbi megjelöléseit a VII. számú táblázat magyarázata mutatja. Természetszerűleg a carminos kísérleteknél az V. sz. zavarossági fokot, mely színelkülönítésen alapszik, nem vizsgálhattam s így ezeknél a VI. sz. zavarossági fok után, a IV.-et figyeltem meg. A kísérlet adatai a VII. számú táblázatban vannakfeltüntetve.

A táblázat adataiból a következő állapítható meg: 3 drb. 0·5 gr.-os Dreissensia az 500 $cm^3$. kísérleti folyadékot 6 illetve $6^1/_2$ óra alatt tökéletesen megtisztította, ellenben 3 drb. 1 gr.-os kagyló ugyanezt 7 óra alatt végezte el. A 2 drb. 0·5 gr.-os kagylónak ugyanehhez 8 órára volt szüksége s 8, illetve $8^1/_2$ óra alatt tisztította fel a vizet a 2 drb. 1 gr.-os kagyló. A magános 0·5 gr.-os Dreissensiák a víztisztítást $8^1/_2$, illetve 9 óra alatt hajtották végre, viszont egyik 1 gr.-os kagyló 8 óra alatt, a másik $8^1/_2$ óra alatt tisztította meg a vizet. Az Uniók a víz feltisztítását csak $10^1/_2$, illetve 11, az Anodonták pedig $9^1/_2$, illetve 10 óra alatt tudták befejezni. Tehát a kísérletek szerint a Dreissensia víztisztítóképessége az Anodontákénál és az Unióénál sokkal erősebb, hiszen még a 0·5 gr.-os Dreissensia is valamivel gyorsabban derítette fel a vizet, mint a 61-szer, illetve 87-szer nagyobb Anodonta. Az I—VI. sz. kísérletek hasonló eredménnyel jártak. mégis éppen a VII. sz. kísérletben észleltek alapján arra kell gondolnunk, hogy ez a különbség a szabad természetben kisebbfokú. Ugyanis az utóbb említett kísérletben világosan meg volt figyelhető, hogy a kisebb súlyú Dreissensiák gyorsabban tisztították meg a vizet, mint a nagyobb példányok, s ugyanez volt észlelhető az Uniónál és az Anodontáknál is. Vagyis a kisebb kagylóknak rendelkezésre álló nagyobb vízmennyiség, az előnyösebb oxydatiós viszonyok a vízderítőképességnek kedveztek és így a víztisztítóképesség gyorsaságában mutatkozó különbség bizonyos hányada annak a rovására irandó, hogy az előnyösebb oxydatiós viszonyok a kisebb kagylók számára kedvezőbb működési terepet biztosítottak. Ugyanezzel

## VII. sz. kísérlet.

A kagylók vízderítőképességének gyorsaságára vonatkozó vizsgálatok táblázatos összefoglalása.

| A kagyló neve | A kagylók súlya és száma | Vizsgálat időpontja | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 8 óra | 8 óra 30 perc | 9 óra | 9 óra 30 perc | 10 óra | 10 óra 30 perc | 11 óra | 11 óra 30 perc | 12 óra 30 perc | 13 óra | 13 óra 30 perc | 14 óra | 14 óra 30 perc | 15 óra | 15 óra 30 perc | 16 óra | 16 óra 30 perc | 17 óra | 17 óra 30 perc | 18 óra | 18 óra 30 perc | 19 óra |
| Dreissensia polymorpha Pall. | 1 drb. 0·5 gr-os | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | V. | III. | III. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | I. | | | | |
| | 2 drb. 0·5 gr-os | VI. | VI. | VI. | VI. | V. | V. | V. | IV. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. | | | | | | |
| | 3 drb. 0·5 gr-os | VI. | VI. | VI. | V. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | III. | II. | I. | | | | | | | | | | |
| | 1 drb. 1 gr-os | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | V. | IV. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | I. | | | | | | |
| | 2 drb. 1 gr-os | VI. | VI. | VI. | VI. | V. | V. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. | | | | | |
| | 3 drb. 1 gr-os | VI. | VI. | VI. | V. | V. | V. | IV. | IV. | III. | III. | III. | II. | II. | I. | | | | | | | | |
| | 1 drb. 0·5 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. | | | | | |
| | 2 drb. 0·5 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | II. | I. | | | | | | |
| | 3 drb. 0·5 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | II. | II. | I. | | | | | | | | | |
| | 1 drb. 1 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | II. | I. | | | | | |
| | 2 drb. 1 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. | | | | | | |
| | 3 drb. 1 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | I. | | | | | | | | |
| Unio pictorum L. | 1 drb. 23·2 gr-os | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | V. | V. | IV. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. |
| | 1 drb. 17·6 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | I. | |
| Anodonta cygnea L. | 1 drb. 43·4 gr-os | VI. | VI. | VI. | VI. | V. | V. | V. | V. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. | | |
| | 1 drb. 30·5 gr-os. **A vízben carmin-oldat** | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | VI. | IV. | IV. | III. | III. | III. | III. | III. | III. | II. | II. | II. | I. | | | |

**Jelmagyarázat: Átlátszósági próba:** 5 mm. magas, 60 mm. hosszú, vörös, s ugyanolyan méretü fekete nyomtatott betűsor, 2 mm. magas és 5 mm. hosszú számjegy.

**VI.** A betű nem látható.
**V.** A betűinek színe elkülöníthető.
**IV.** Az elkülöníthetők, a szám nem olvasható.
**III.** A betűk és a szám olvasható, a folyadék mérsékelten zavaros.
**II.** A betű és szám jól olvasható, a folyadékban finom homály.
**I.** A folyadék teljesen tiszta.

magyarázható az is, hogy a 2 drb. 0·5 gr.-os Dreissensia víztisztítási ideje az ugyanilyen súlyú magános példányéhoz hasonlított. Mindenesetre a 0·5 gr.-os Dreissensia nagyfokú víztisztítóképességére figyelemmel, annyit megállapíthatunk, hogy ez a tulajdonság a Dreissensiáknál rendkívül erős s valószínűleg nagyobb, mint az Anodonta- és Uniokagylóknál.

A kísérletsor azonban egyéb szempontból is érdekes megállapítást nyujtott. Ugyanis a kísérlet befejezése után felboncolt állatok belsejében a carminszemcsék jellegzetes módon voltak kimutathatók. A Dreissensiák mája, a carmin által pirosra festve, élesen elkülönült a zsigerzacskó többi részétől s a carminszemcsék a bélcsatornában is fellelhetők voltak. Az Uniónál a zsigerzacskó ereinek jórésze carminnal kitöltött kötegeket alkotott. A carminszemcsék felszívódásának kérdése a dolgozat célját és kereteit messze túlhaladná, azonban a fenti megfigyelés a kagylók vízderítőképességének szempontjából is rendkívül jelentős, mert világosan mutatja, hogy a kísérleti methodika változásával a vízben suspendált részecskék a bélcsatornába is bejutnak, vagyis a vízderítőképesség egy része a vízben lebegő anyagok tápcsatornán való áthaladásához is kötve lehet. Amíg tehát a steril s bacteriumemulsióval beoltott folyadékban a carminszemcsék nem kerültek be az állat bélcsatornájába, zsigereibe, addig a sterilizálatlan és nagyobb mennyiségű bacteriumot nem tartalmazó vízben a carminszemcsék bélcsatornába, zsigerekbe való bejutása határozottan meg volt állapítható. Az eltérés oka, vagy a kísérleti folyadék sterilizálásában és ezzel kapcsolatosan oxygénszegénységében, vagy a víz magasabb bacteriumtartalmában keresendő. Bár a kísérleti folyadék a sterilizálás után alacsony hőmérsékleten állott és az oxygénhiányon levegő átáramoltatásával próbáltam segíteni, tagadhatatlan, hogy a víz oxygénben szegényebb volt, mint az oxygénnel túltelített Balatonvíz s ez a körülmény a kagylók életmegnyilvánulásainak szempontjából közömbösnek egyáltalában nem mondható. Hiszen a vízderítés gyorsaságára vonatkozó kísérletek világosan mutatták, hogy a kisebb kagylók, kedvezőbb oxydatiós viszonyok között, gyorsabban képesek a vizet, feltisztítani, mint a nagyobbak. Másrészt viszont ilyen szempontból a víz bacteriumtartalma sem becsülendő le. A víz tápanyagok-

kal való utólagos beoltása, vagy peptonos-szőlőcukros oldattal való előzetes keverése határozottan mutatta, hogy a bacteriumok számának nagyfokú emelkedésével a víztisztításiképesség csődöt mond. A kísérletek azt is határozottan mutatták, hogy a Dreissensiák a bacteriumok nagyobbfokú elszaporodásával szemben rendkívül érzékenyek s mint oligosaprob szervezetek a bacteriumok számának emelkedésével tömegesen pusztulnak el. Lehetséges tehát, hogy a bacteriumokkal beoltott kísérleti folyadékoknál éppen a bacteriumok nagyobb száma képezte azt a kedvezőtlen momentumot, mely a víz feltisztítása, a bacteriumok lecsapása után a kagylókat a táplálkozás teljes beszüntetéséhez vezette s ilyen módon a carminszemcsék bejutását megakadályozta. Tehát valószínűleg egyrészt a hátrányos oxydatiós viszonyokban, másrészt a víz magas bacteriumtartalmában rejlik annak magyarázata, hogy a víz egyforma teljes feltisztítása dacára a táplálékfelvétel az egyik kísérletben teljesen szünetelt, a másikban pedig kifejezett volt.

Az ismertetett kísérletek szerint, a kagylók vízderítőképessége elsősorban a vízben lebegő anyagok s ezzel együtt a bacteriumok leülepítésén alapszik. A már említettek értelmében a lecsapott bacteriumok életképesek maradnak s így kedvező viszonyok közé jutva, a vizet újra szennyezhetik. A folyók és tavak iszapjában a kagylókon kívül számos olyan szervezet él, mely az iszaphoz kötött szennyező anyagokat feldolgozni képes és az iszap öntisztulásához hozzájárul. Annak megállapítására, hogy a kagylók által lecsapott bacterium tömegek ilyen módon mennyiben semmisülhetnek meg, vagyis a víztisztulás teljessé válhat-e? igyekeztem különböző iszapban élő szervezetekkel kísérletet végezni. *Tubifex rivolorum* férgek csupán kis számban álltak rendelkezésemre s kísérleteimben ezek is gyorsan elpusztultak. Próbálkoztam Balatonból szerzett, tetemes nagyságú Chironomus lárvákkal, majd az intézeti teknősbéka tó iszapjából gyüjtött kisebb Chironomus lárvafélékkel, azonban az előbb említett okból kísérletek ezekkel sem voltak végezhetők. Ezután *Lithoglyphus naticoides* Fer. csigákkal próbálkoztam, s néhány ilyen kísérletnél az állatok hosszabb ideig életben voltak tarthatók. Megjegyzendő, a Lithoglyphusokkal végzett kísérletek aránylagosan kis számát szintén az a körülmény magyarázza, hogy

## VIII. számú kísérlet.

| A kísérlet leírása | A Lithoglyphus naticoiides Fer. vízderítőképességének vizsgálata Bacterium coli emulsióval, carminoldattal és csigafőzettel kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | | Lithoglyphusokkal végzett kísérlet | | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | Az iszap csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | Az iszap csíraszáma | |
| Aug. 12-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot, 2 cm³. carminoldatot és 20 cm³. csigafőzetet adunk s sterilizáljuk. A 7·3 pH-jú folyadékhoz aug. 13-án reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csiraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót adunk. 2 drb. ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be pedig 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyezünk. | aug. 14. | 12 | mérsékelten zavaros | 3,130 | 50 | mérsékelten zavaros | 3,800 | 290 | |
| | aug. 15. | 9 | « | 6,540 | 180 | « | 7,310 | 410 | |
| | aug. 16. | 9 | « | 16,450 | 2,110 | « | 5,400 | 320 | |
| | aug. 17. | 12 | « | 10,300 | 980 | alig kifejezetten zavaros | 3,130 | 180 | |
| | aug. 18. | 9 | « | 12,500 | 1,700 | teljesen tiszta | 3,500 | 70 | 1 élő Lithoglyphus kiemelve. A májban carminszemcsék találhatók |
| | aug. 19. | 12 | « | 10,450 | 8,400 | teljesen tiszta, a víz lila színű | 4,980 | 110 | 1 élő Lithoglyphus kiemelve. A májban carminszemcsék találhatók |
| | aug. 20. | 9 | « | 21,300 | 4,300 | « | 2,880 | 50 | |
| | aug. 21. | 9 | « | 18,200 | 4,100 | « | 2,750 | 60 | |
| | aug. 22. | 9 | « | 14,400 | 8,800 | « | 2,400 | 150 | 2 Lithoglyphus elpusztult. A májban carminszemcsék találhatók |
| | aug. 23. | 9 | alig kifejezetten zavaros | 12,300 | 4,500 | « | 2,900 | 1,800 | 6 Lithoglyphus elpusztult. A májban carminszemcsék találhatók |
| | aug. 24. | 9 | « | 10,600 | 5,200 | mérsékelten zavaros | 8.100 | 5,800 | 2 Lithoglyphus reggelre elpusztult |

| A kísérlet leírása | A Lithoglyphus naticoides Fer. vízderítőképességének vizsgálata Bacterium fluorescens emulsióval, carminoldattal és csigafőzettel kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | Controllkísérlet | | | Lythoglyphusokkal végzett kísérlet | | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | Az iszap csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | Az iszap csíraszáma | |
| Aug. 12-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot, 2 cm³. carminoldatot és 20 cm³. csigafőzetet adunk s sterilizáljuk. A 7·3 pH-jú folyadékhoz aug. 13-án reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csiraszámmal bíró Bacterium fluorescens emulsiót adunk. 2 drb. ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be pedig 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyezünk. | aug. 14. | 12 | mérsékelten zavaros | 3,580 | 80 | mérsékelten zavaros | 4,130 | 480 | |
| | aug. 15. | 9 | « | 7,340 | 120 | « | 5,370 | 310 | |
| | aug. 16. | 9 | « | 11,580 | 180 | « | 14,520 | 200 | |
| | aug. 17. | 12 | « | 10,300 | 70 | « | 7,300 | 160 | |
| | aug. 18. | 9 | mérsékelten zavaros bacterium-hártya | 8,400 | 490 | alig kifejezetten zavaros | 8,200 | 100 | 1 élő Lithoglyphus kiemelve. Májában carminszemcsék találhatók |
| | aug. 19. | 12 | « | 16,800 | 1,080 | teljesen tiszta, a víz lila színű | 8,000 | 180 | 1 élő Lithoglyphus kiemelve. Májában carmin szemcsék találhatók |
| | aug. 20. | 9 | « | 9,800 | 2,100 | « | 4,800 | 130 | |
| | aug. 21. | 9 | « | 16,500 | 1,400 | « | 12,700 | 120 | 1 Lithoglyphus elpusztult |
| | aug. 22. | 9 | zavaros, bacterium-hártya | 40,300 | 2,800 | mérsékelten zavaros | 11,800 | 10,700 | Valamennyi Lithoglyphus elpusztult |

ezen állatok is igen érzékenyeknek mutatkoztak és több kísérleti sort, dacára a szigorúan betartott kísérleti methodikának, éppen az állatok gyors elpusztulása következtében kellett befejezetlenül hagyni. Kísérleteimben elsősorban azt a kérdést vettem vizsgálat alá, hogy a Lithoglyphusok képesek-e a vizet a kagylókkal egyezően feltisztítani. Az ilyen irányú kísérletek közül, több próbálkozás után 1-et sikerült befejezni. A kísérleti folyadék a Dreissensiák balatonvizes-carminos kísérleti folyadékához hasonlóan, de azzal a különbséggel készült, hogy a Lithoglyphus csigák érzékenysége miatt, bacteriumtápanyagként a vízhez nem szőlőcukros-peptonos oldatot adtam, hanem Lithoglyphus csigákból készített főzetet kevertem. A főzet olyan módon készült, hogy 10 gr. súlymennyiséget kitevő, héjától megfosztott csigát összeaprítva, 90 $cm^3$. destillált vízbe tettem s az anyagot félóráig forralva, a folyadékot megszűrtem s félóráig sterilizáltam. A kísérletsort a Dreissensiákhoz hasonlóan Bacterium colival és Bacterium fluorescenssel különkülön készítettem s a kísérletekhez 12 drb. zöldborsónagyságú, balatoni iszapból frissen kiszedett Lithoglyphus csigát használtam. A kísérlet adatait a VIII. sz. táblázat mutatja.

A táblázat eredményeiből kiemelendők a következők: A Lithoglyphusokat tartalmazó edények vize a Bacterium colival beoltott kísérletben öt nap mulva, a Bacterium fluorescenssel végzett kísérletben hat nap mulva teljesen feltisztult, szemben a mérsékelten zavaros ellenőrző kísérletekkel. Azonfelül a következő napon a Lithoglyphusoknál a víz színe is megváltozott s lila lett. A bacteriológiai vizsgálat adatait áttekintve, a kagylók kísérletétől eltérő jelenség volt észlelhető. Ugyanis öt nap mulva a colival végzett kísérlet vizének csiraszáma az ellenőrző kísérlet csiraszámának közel $^1/_4$-ére csökkent, viszont a fluorescenssel beoltott kísérletnél a csiraszám csökkenése csak jelentéktelen volt s a controll-kísérlet csiraszámával csaknem egyezett, azaz a két bacterium sedimentálódásának különbözősége a kísérletben is kifejezésre jutott. Az iszap csiraszáma a Lithoglyphusok edényeiben kezdetben mérsékelten emelkedett, ami bizonyára a csigákkal bevitt bacteriumok elszaporodásának tulajdonítható, két nap mulva azonban a csiraszám lassú süllyedése indult meg, holott különösen a coli ellenőrző kísérletében az iszap csiraszámának gyors emelkedése vette kezde-

tét. Ilyen módon a Lithoglyphusoknál hét nap mulva a colival végzett kísérletek iszapjának csiraszáma 86-szor, a fluorescensvizsgálatoké pedig 16-szor lett kevesebb. Amíg tehát a kagylók által feltisztított víz csiraszámának süllyedését az iszap csiraszámának növekedése kísérte, azaz a kísérletben szereplő bacteriumok száma lényegében változatlan maradt, addig a Lithoglyphusok a sedimentálódott bacteriumok iszapba való felszaporodását megtudták akadályozni s így a bacteriumok száma absolute véve is csökkent. A kísérlet alatt élve kiemelt, továbbá a kísérlet alatt elpusztult csigák boncolásánál a carminszemcsék mikroskopikusan, a csigák májában kimutathatók voltak s így határozottan arra lehetett gondolni, hogy az iszap alacsony bacteriumtartalma a csigák táplálékfelvételével állott összefüggésben.

A VIII. számú kísérlet alapján az a kérdés vetődhet fel, hogy az iszapban a Lithoglyphusok képesek-e ellensúlyozni a kagylók által leülepített bacteriumok elszaporodását. Ennek eldöntésére a következő kísérletet végeztem. A Dreissensiáknál használt steril balatonvizes, carminoldatos kísérleti folyadékból Bacterium colival és Bacterium fluorescenssel 3—3 tagból álló kísérletsorozatot készítettem. A kísérletek közül 1-et ellenőrző kísérletnek használtam, 1-be 3 drb. Dreissensiát s 1-be 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyeztem. Három nap mulva a Dreissensiákat eltávolítottam és ebbe a vízbe is Lithoglyphusokat tettem s a bacterium szaporodását előmozdítandó, 8 nap mulva minden kísérlethez 20 $cm^3$. csigafőzetet adtam. A kísérlet adatai a IX. sz. táblázatban vannak feltüntetve.

A táblázat adatai szerint, a colibacteriumokkal beoltott Lithoglyphusos kísérlet lilaszínűvé vált folyadéka, hat nap mulva teljesen feltisztult és ugyanekkor a víz csiraszáma a controll csiraszámának felénél kevesebbre esett vissza. Ugyanezen időpontban a csigák Bacterium fluorescenses kísérleti folyadékának csiraszáma hasonló fokban csökkent, de a víz zavaros maradt. Mindkét kísérlet kagylófőzettel való keverése után a csiraszám újólagosan emelkedett s a Lithoglyphusok hamarosan elpusztultak, vagyis az állatok vízderítőképessége nem tudta ellensúlyozni a tápanyagemelkedés folytán beállott bacteriumszaporulatot. A Dreissensiákkal és Lithoglyphusokkal együttesen végzett kísérletnél ennek ellenkezője volt

## IX. számú kísérlet.

A Lithoglyphus naticoides Fer. vízderítőképességének vizsgálata Bacterium coli emulsióval és carminoldattal kevert steril s Dreissensiákkal előtisztított Balatonvízben

| A kísérlet leírása | A kísérlet | | I. Controllkísérlet | | II. Dreissensiákkal és Lithoglyphusokkal végzett kísérlet | | III. Lithoglyphusokkal végzett kísérlet | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| | aug. 12. | 12 | mérsékelten zavaros | 2,840 | **4 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 1,170 | mérsékelten zavaros | 2,730 | A Dreissensiáknál a carminszemcsék nyákos anyagba ágyazva, az edény fenekén találhatók |
| | aug. 13. | 9 | « | 6,400 | teljesen tiszta | 980 | « | 5,110 | |
| Aug. 10-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 2 cm³. carminoldatot adunk s sterilizáljuk. A 7·4 pH-jú folyadékhoz aug. 11-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium coli emulsiót adunk. 3 ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be 3 drb. Dreissensiát (2·1, 2·0, 1·9 gr. súlyú) s 1-be pedig 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyezünk. **Aug. 14-én 12 órakor** a Dreissensiákat eltávolítjuk s ebbe a kísérleti edénybe is 12 drb. zöldborsónyi nagyságú Lithoglyphust helyezünk. Aug. 19-én mindhárom kísérlethez utólagosan, 20 cm³. csigafőzetet teszünk. | aug. 14. | 12 | « | 14,300 | « | 700 | « | 8,420 | A Dreissensiákat eltávolítjuk s helyébe Lithoglyphusokat helyezünk |
| | aug. 15. | 9 | « | 7,680 | « | 630 | « | 5,870 | |
| | aug. 16. | 9 | « | 8,900 | « | 540 | alig zavaros, a folyadék lila színű | 3,430 | |
| | aug. 17. | 12 | « | 7,000 | « | 270 | teljesen tiszta, a folyadék lila színű | 2,870 | |
| | aug. 18. | 9 | « | 8,400 | « | 180 | « | 2,550 | |
| | aug. 19. | 12 | igen kisfokban zavaros | 3,900 | « | 70 | « | 3,830 | |
| | aug. 20. | 9 | mérsékelten zavaros | 11,480 | « | 670 | mérsékelten zavaros | 7,340 | 3 Lithoglyphus elpusztult a III. számú kísérletben |
| | aug. 21. | 9 | zavaros | 30,420 | « | 540 | « | 18,310 | 6 Lithoglyphus elpusztult a III. számú kísérletben |
| | aug. 22. | 9 | « | 38,900 | teljesen tiszta, de a víz lilás színű | 400 | « | 41,500 | Valamennyi Lithoglyphus elpusztult a III. számú kísérletben |
| | aug. 23. | 9 | « | 74,800 | « | 160 | « | — | A délután folyamán 10 Lithoglyphus elpusztult a II. számú kísérletben |

A Lithoglyphus naticioides Fer. vízderítőképességének vizsgálata Bacterium fluorescens emulsióval és carminoldattal kevert steril s Dreissensiákkal előtisztított Balatonvízben

| A kísérlet leírása | A kísérlet | | I. Controllkísérlet | | II. Dreissensiákkal és Lithoglyphusokkal végzett kísérlet | | III. Lithoglyphusokkal végzett kísérlet | | Megjegyzés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| | aug. 12. | 12 | mérsékelten zavaros | 4,100 | **5 és fél óra mulva teljesen tiszta** | 2,810 | mérsékelten zavaros | 3,460 | A Dreissensiáknál az edény fenekén nyákos anyagba ágyazott carminszemcsék találhatók. |
| | aug. 13. | 9 | « | 3,100 | teljesen tiszta | 1,900 | « | 2,780 | |
| Aug. 10-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot és 2 cm³. carminoldatot adunk és sterilizáljuk. A 7·4 pH-jú folyadékhoz aug. 11-én reggel 9 órakor 10 cm³., összesen 1 millió csíraszámmal bíró Bacterium fluorescens emulsiót adunk. 3 ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be 3 drb. Dreissensiát (2·4, 2·1, 2·0 gr. súlyú) s 1-be pedig 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyezünk. **Aug. 14-én 12 órakor** a Dreissensiákat eltávolítjuk, s ebbe a kísérleti edénybe is 12 drb. zöldborsónyi nagyságú Lithoglyphust helyezünk. Aug. 19-én mindhárom kísérlethez utólagosan 20 cm³. csigafőzetet teszünk. | aug. 14. | 12 | « | 4,800 | « | 1,080 | « | 4,150 | A Dreissensiákat eltávolítjuk s helyébe Lithoglyphusokat helyezünk |
| | aug. 15. | 9 | « | 8,100 | « | 1,430 | « | 5,080 | |
| | aug. 16. | 9 | mérsékelten zavaros, bacteriumhártya | 9,400 | « | 1,350 | mérsékelten zavaros, bacteriumhártya | 3,460 | |
| | aug. 17. | 12 | « | 11,500 | « | 1,030 | mérsékelten zavaros bact.-hártya de a folyadék lila színű | 5,280 | |
| | aug. 18. | 9 | « | 19,800 | « | 890 | « | 5,850 | |
| | aug. 19. | 12 | « | 9,900 | « | 1,050 | « | 8,080 | |
| | aug. 20. | 9 | « | 24,320 | « | 870 | « | 14,300 | 1 Lithoglyphus elpusztult a II. számú kísérletben |
| | aug. 21. | 9 | zavaros, bacteriumhártya | 31,280 | teljesen tiszta, de a víz lila színű | 540 | zavaros, bacterium hártya | 28,900 | A nap folyamán valamennyi Lithoglyphus elpusztult a III. számú kísérletben |
| | aug. 22. | 9 | « | 60,730 | « | 680 | — | — | 1 Lithoglyphus kivételével, valamennyi elpusztult a II. számú kísérletben |

megállapítható. A Dreissensiák eltávolításának időpontja alkalmával a colival beoltott kísérlet vizének csiraszáma az ellenőrző kísérlet csiraszámának kb. $^1/_{20}$-ad részére, a fluorescenssel beoltott kísérletnél kb. $^1/_4$-ére esett vissza s az edények fenekén carminszemcsékkel kevert, nyákos anyagba ágyazott bacteriumok voltak találhatók. A kísérleti edényekbe Lithoglyphusokat helyezve a bacteriumszám tovább csökkent s a csigafőzet beöntése előtt a colival beoltott kísérletnél a csiraszám az ellenőrző kísérlet csiraszámának 55-öd részére, a fluorescenses kísérletnél pedig kb. 9-ed részére esett vissza. A kagylófőzet hozzáadása után a csiraszám a colival beoltott kísérlet első napján kisebb fokban emelkedett ugyan, de másnap újra süllyedni kezdett s egyik bacteriumféleségnél sem érte el az 1000-et, holott ugyanekkor az ellenőrző kísérlet csiraszáma jóval 20,000-en felül állott s 74,000-ig, illetve 60,000-ig emelkedett. A jelenség csak olyan módon magyarázható, hogy a Lithoglyphusok a fenékre lecsapott nyákos anyagba ágyazott bacteriumokat elfogyasztották s így a bacteriumok újólagos felszaporodása lehetetlenné vált. A VIII. sz. táblázatban említett adatok is világosan mutatták, hogy a Lithoglyphusok jelenlétében az iszap csiraszáma csökkent és így a fenti megállapítás annak dacára valószínűnek mondható, hogy a Lithoglyphusok elpusztulása miatt a kísérlet a 3., illetőleg a 4. napon túl nem volt folytatható. Tehát a Dreissensiák és a Lithoglyphusok összműködése nemcsak a víz feltisztulását, hanem a bacteriumok számának tényleges és nagyfokú csökkenését eredményezte.

A víz öntisztulási folyamatainál közegészségügyi szempontból különösen a rothadástkeltő és kórnemző bacteriumok csökkenésének van nagy jelentősége. Annak megállapítására, hogy a Dreissensiák, illetőleg a Lithoglyphusok külön-külön, vagy együttesen képesek-e a rothadástkeltő bacteriumok számát befolyásolni, Proteus vulgaris emulsióval beoltott kísérletekkel próbálkoztam. A kísérletek világosan mutatták, hogy a Proteus bacteriumokkal szemben, mind a Dreissensiák, mind a Lithoglyphusok nagyfokban érzékenyek s így a kagylók gyors pusztulása miatt a kísérletekből általános következtetések levonhatók nem voltak. Egy kísérlet azonban a Dreissensiák és Lithoglyphusok együttes vízderítőképességéhez újabb adatokat szolgálatott. A kísérlethez 10 $cm^3$. Proteus

vulgaris emulsióval kevert 500 $cm^3$ csigafőzetes, carminos, steril Balatonvizet használtam. Négy ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et controllnak hagytam, 2-be 3—3 drb. Dreissensiát s 1-be 12 drb. zöldborsónyi nagyságú Lithoglyphust helyeztem, s a Dreissensiával végzett kísérletek egyikéből a kagylókat a víz feltisztulása után azonnal eltávolítottam s helyükbe is 12 drb. Lithoglyphust tettem. A kísérlet adatait a X. sz. táblázat mutatja.

A táblázatból kitűnik, hogy a Dreissensiák a kísérleti folyadékot a Proteus jelenlétében is feltisztították ugyan, de már 24 óra mulva mind elpusztultak. A Lithoglyphusok a vizet egyáltalában nem voltak képesek deríteni s hamarosan eldöglöttek. Ellenben az eredetileg Dreissensiákat tartalmazó edényben elhelyezett Lithoglyphusok kettő kivételével, a behelyezés után még hat napig éltek és ezen idő alatt a víz csiraszámának kezdeti emelkedését a csiraszám újólagos csökkenése váltotta fel, és hét nap mulva a víz csiraszáma az ellenőrző kísérlet csiraszámánál több mint 10,000-szer volt kevesebb és rothadás nem állott be. Végeredményben tehát a Dreissensiák és a Lithoglyphusok összműködésének sikerült az ellenőrző kísérletben észlelhető erős rothadást egyidőre feltartóztatni.

Természetszerűleg az ismertetett kísérletekben uralkodó viszonyok minden fenntartás nélkül a szabad természetre nem vonatkoztathatók, hiszen a víz sterilizálása, az oxydatiós és ionconcentratiós viszonyok megváltozása a vízben suspendált anyagok táplálékként való felhasználását erősen befolyásolja. Ennek dacára az említettek alapján kétségtelenül megállapítható, hogy a Dreissensia-, Unio- és Anodontakagylók igen erőteljes vízderítőképességgel bírnak, hiszen a fél grammos Dreissensia $8^1/_2$—9 óra alatt képes félliter vizet feltisztítani. A vízderítés gyorsaságából önként következik, hogy a leülepített anyagok kizárólagos, vagy fő útja a tápcsatornán való áthaladás aligha lehet. Az a lehetőség, hogy a kagylók olyan anyagot választanak el, mely a vízbe jutva, a víz feltisztulását előmozdítaná, vagy esetleg a víz ionconcentratióját megváltoztatva ülepítené le a vízben suspendált anyagokat, kísérletileg ki volt zárható. Ugyanis a kagylók által frissen feltisztított víz folyadékával több ízben sorozatos kísérletet végeztem s megállapítottam, hogy a vízderítés folyamata alatt az ionconcentratio

## X. szásérlet.

| A kísérlet leírása | A Dreissensia polymorpha és a Lithoglyphus natic. vízderítőképességének vizsgálata Proteus vulgaris emulsióval, carminoldattal és 20 cőzettel kevert steril Balatonvízben | | | | | | | | Megjegyzés. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A kísérlet | | I. Controllkísérlet | | II. Dre al végze (2·5, 1.8, yú) | | III. Dreissensiákkal és Lithoglyphusokkal végzett kísérlet (2·3, 2·1, 1·8 gr. súlyú) | | IV. Lithoglyphusokkal végzett kísérlet | | |
| | napja | órája | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonsá | víz záma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | A víz jellegzetes külső tulajdonságai | A víz csíraszáma | |
| | aug. 14. | 12 | mérsékelten zavaros | 4,700 | **7 és fél alatt telje tiszta** | 600 | **8 és fél óra alatt teljesen tiszta** | 3,500 | mérsékelten zavaros | 7,800 | A II. sz. kísérletben 18 órakor a 2·5 gr.-os Dreissensia elpusztult. A III. sz. kísérletből 12 órakor a Dreissensiákat eltávolítjuk |
| Aug. 12-én 500 cm³. Balatonvízhez 200 gr. homokot, 20 cm³. csigafőzetet, 2 cm³. carminoldatot adunk s sterilizáljuk. A 7·4 pH-ra beállított folyadékhoz aug. 13-án reggel 9 órakor 10 cm³. összesen 100,000 csíraszámmal bíró Proteus vulgaris emulsiót adunk. Négy ilyen módon készült kísérleti folyadék közül 1-et változatlanul hagyunk, 1-be 3 drb. (2·5, 1·8, 1·4 gr. súlyú), 1-be (2·3, 2·1, 1·8 gr. súlyú) Dreissensiát, 1-be pedig 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyezünk. A III. számú kísérletből aug. 14-én 12 órakor a 3 drb. Dreissensiát eltávolítjuk s ebbe a kísérleti edénybe is 12 drb. zöldborsónagyságú Lithoglyphust helyezünk. | aug. 15. | 9 | zavaros | 37,500 | zavaro | 500 | teljesen tiszta | 7,600 | zavaros | 21,400 | A II. sz. kísérletben a többi Dreissensiák is elpusztultak. A IV. sz. kísérletben két Lithoglyphus elpusztult |
| | aug. 16. | 9 | erősen zavaros | 4,300 | — | — | « | 11,400 | erősen zavaros | 39,800 | A IV. sz. kísérletben egy Lithoglyphus elpusztult |
| | aug. 17. | 12 | « | 26.300,000 | — | — | « | 12,400 | erősen zavaros, erősen bűzös | 1.370,000 | Az összes Lithoglyphusok elpusztultak a IV. sz. kísérletben |
| | aug. 18. | 9 | erősen zavaros, erősen bűzös | 117.300,000 | — | — | « | 3,800 | — | — | |
| | aug. 19. | 12 | « | 15.410,000 | — | — | « | 1,700 | — | — | |
| | aug. 20. | 9 | « | 28.320,000 | — | — | « | 2,700 | — | — | A III. sz. kísérletben két Lithoglyphus elpusztult |
| | aug. 21. | 9 | « | 116,490,000 | — | — | mérsékelten zavaros | 17,800 | — | — | Valamennyi Lythoglyphus elpusztult a III. sz. kísérletben |

teljesen változatlan marad s a feltisztított víz még töményállapotban sem tartalmaz a víz zavarosságát legcsekélyebb mértékben befolyásoló anyagot. Tehát a kagylókkal végzett kísérletek határozottan arra mutattak, hogy a víz feltisztulásának fő oka a kagyló köpenyüregében fennálló élénk vízáramlás, amely a bacteriumokat s egyéb corpuscularis anyagokat nyákkal összetapasztva a víz fenekére ülepíti. Természetszerűleg a víz ásványi szemcséktől való megtisztulását magábanvéve az a körülmény is előmozdítja, hogy a magasabb rétegekből a kagyló felé haladó s onnan az iszap felé irányuló vízáramlás a könnyen sedimentálódó anyagokat a vízfenék felé sodorja. Valószínű e mellett, hogy kedvező viszonyok között a bacteriumok számát a kagylók bélcsatornáján való áthaladás is csökkenti, de kísérleteim tanusága szerint a kagylók vízderítőképességének legfőbb tényezője a köpenyür élénk vízáramlása s a vízben suspendált anyagok ezzel kapcsolatos leülepítése.

A Lithoglyphusok kísérleteinkben észlelt kisfokú vízderítőképessége a természetes viszonyok között aligha érvényesülhet, hiszen a vízréteg magassága s a víz mozgása a lassú folyamat kibontakozását teljesen megakadályozhatja. Annál fontosabb azonban a Lithoglyphusok iszapbacteriumokat pusztító hatása. A Dreissensiákkal együttesen végzett kísérlet világosan mutatja, hogy a kagylók által lecsapott bacteriumok a csigák iszaptisztító hatásának nagy tömegben esnek áldozatul s így a Lithoglyphusok a kagylók által megindított vízderítést mintegy befejezik. A Lithoglyphusok mellett az iszapban számos olyan szervezet él, mely hasonló élet- és táplálkozási módot folytat s így feltehető, hogy a kagylók működését éppúgy egészítik ki, mint a Lithoglyphus. A kagylók vízderítőképességét éppen ezen összműködés figyelembevételével tekinthetjük igen jelentősnek, mert a kagylók mozdítják elő a vízben lebegő szerves anyagok, bacteriumok leülepedését s teszik hozzáférhetővé az iszapban élő szervezeteknek. Ettől függetlenül emeli a kagylók vízderítő működésének fontosságát az a körülmény is, hogy a vízfenéken folyó öntisztulási folyamatok csak a leülepedett anyagokon képesek hatásukat kifejteni s így a lebegő anyagok lecsapása még az iszapszervezetek működése nélkül is nagymértékben segíti elő a víz önderítőképességét.

Három év óta végzett bacteriologiai vizsgálataim szerint, a kiterjedt partmenti szennyezések ellenére, a Balatonvíz bacteriumtartalma igen kicsiny, azaz a Balatonvíz erőteljes öntisztulási képességgel bír. FORREL szerint a nagy tavak bacteriumokban általában szegények, ami egyrészt a napfény bactericid hatásának, másrészt a lebegő részek leülepedésének tulajdonítható. KOSSOWICZ és mások a bacteriumok számának csökkenésénél a különböző bacteriumpusztító lényeknek és a bacteriumok kölcsönös concurrentiájának is nagy jelentőséget tualjdonítanak s legújabban JENEY és mások a bacteriophagok ilyen irányú fontosságára hívják fel a figyelmet. A napfény bactericid hatása a felszínes vízrétegekben a Balatonban is kimutatható, azonban a bactericid hatás mélyebb rétegekben való érvényesülését a Balatonvíz nagyfokú zavarossága erősen akadályozza. A Balatonvíz zavarossága GÄRTNER szerint igen nagyfokú s ennek oka több tényezőben keresendő. Szerinte a zavarosság egyik fő oka a tó sekélysége s így a fenékiszap hullámzás okozta gyakori felzavarása. Másik oka a calcium hydrocarbonasok calciumcarbonatok alakjában való kicsapódása s végül az a körülmény, hogy a Balatonvíznek alacsony concentratiója a felzavart részecskék tömörülését és leülepedését megnehezíti. SPITTA szerint a vízben lebegő organikus anyagok valóságos bacteriumfészkek, melyeknek leülepedése a bacteriumok számbeli csökkenésének egyik legfőbb tényezője. Az aránylag nagyon sekély, gyakran hullámos s lebegő részektől kisebb-nagyobb fokban állandóan zavaros Balatonvízben a természetes sedimentatio igen csekély s így a bacteriumok fejlődése szempontjából a viszonyok nagyon kedvezőek. Ha a kagylók ismertetett működését ebből a szempontból vizsgáljuk, határozottan arra a következtetésre juthatunk, hogy a kagylók vízderítőképessége éppen a Balatonban igen nagy jelentőségű. A kagylók kísérletileg igazolt erőteljes ülepítő hatása bizonyos fokig pótolhatja a természetes sedimentatio kimaradását és lehetővé teheti a fenék öntisztulási folyamatainak, az iszap bacteriumpusztító szervezeteinek működését. A Balaton sekélysége következtében a kagylók még a legbelső vízterületeken is megélnek, nem úgy, mint a nagymélységű középeurópai tavakban, ahol a kagylók elterjedése csupán a parti vízterületekre szorítkozik. Tehát a Balatonban a kagylók vízderítőképessége nem csupán a

keskeny, partmenti vízsávokra terjed ki, hanem bizonyos fokig a tó egész területén érvényesülhet és így ez a tulajdonság, különösen a legerőteljesebb ülepítő hatást mutató Dreissensiák rendkívüli elszaporodása óta, a víz önderítő képességében nagy szerepet játszhat. A Dreissensiák jelenléte ebből a szempontból egyenesen előnyös s a fokozódó tószennyezések leküzdésének hathatós eszköze.

A vizek öntisztulási képességét természetszerűleg nem lehet egyik vagy másik tényező kizárólagos hatásának tulajdonítani s kétségtelen, hogy a Balatonvíz öntisztulási képessége is számos factorhoz van kötve és nem csupán a kagylók ülepítő hatásának tulajdonítható. Figyelembe véve azonban, hogy a Balatonban éppen a víz zavarossága és a természetes sedimentatio csekély volta teremt a bacteriumokra nézve előnyös viszonyokat, azt a tényezőt, mely a víz zavarosságát megszüntetni igyekszik és a sedimentatiót előmozdítja, alárendelt jelentőségűnek nem tekinthetjük. Miután a már említettek szerint a tó sajátságos hydrologiai viszonyai a kagyló nagyfokú elterjedését lehetővé teszik s ezenfelül a kagylók vízderítő tulajdonságának kibontakozását a víz sekélysége is elősegíti, a kagylók víztisztító hatásának éppen a Balatonban kell nagy jelentőséget tulajdonítanunk.

## Összefoglalás.

Kísérletileg meg volt állapítható, hogy a *Dreissensia polymorpha* PALL., *Anodonta cygnea* L. és az *Unio pictorum* L. kagylók erőteljes víztisztító hatással bírnak és ez a képesség a kísérletekben különösen a Dreissensiáknál mutatkozott igen erősnek. A kagylók vízderítőképessége minden valószínűség szerint a köpeny belsejében lefolyó élénk vízáramlás eredménye, mely a vízben suspendált anyagok gyors leülepedését lehetővé teszi. Kísérletileg ki volt mutatható, hogy a *Lithoglyphus naticoides* FER. a lecsapott bacteriumoktól az iszapot megtisztítani képes s ilyen módon, valószínűleg más iszapszervezetekkel egyezően, a kagylók működését kiegészíti. A Balaton-tó sekélységénél fogva, mely a kagylók nagyfokú elterjedésének kedvez, a kagylók vízderítőképessége a tó öntisztulásában annál is inkább nagy szerepet játszhat, mert a kagylók ülepítő hatása a természetes sedimentatio csekély voltát bizonyos fokig pótolni képes.

## Irodalom.

1. Gärtner István: A Balaton vizének zavarossága. (A Magyar Biológiai Kutató Intézet Munkái. 1929. II. 2.)

2. Haranghy László: A Balaton vizének bacterilogiai vizsgálatai. I., II., III.

3. Kolkwitz, R.: Biologie des Trinkwassers, Abwassers und der Vorfluter. (Handbuch der Hygiene, 1911.)

4. Koller, G.: Versuche an marinen Wirbellosen über die Aufnahme gelöster Nährstoffe. (Zeitschr. f. vergl. Physiol. 11. Bd. 1930.)

5. Kossowicz: Einführung in die Mykologie der Gebrauchs- und Abwässer. (1913.)

6. Müller Sándor: A Balaton vizének vegyelemzése. (A Magyar Biologiai Kutató Intézet Munkái. 1929. II. 2.)

7. Ohlmüller—Spitta: Untersuchung und Beurteilung des Wassers und Abwassers. (5. Auflage, 1931.)

8. Varga, L.: Wandelweg und heutiger Stand des Pütter'schen Theorie. (Archiv für Hydrobiologie. 1933. Bd. XXVI. S.)

9. J. Wilhelmi: Die biologische Selbstreinigung der Flüsse. (In Weyl's Handbuch der Hygiene.)

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. évi nov. 18-án tartott üléséből.)

# UNSERE SÜSSWASSERMUSCHELN UND DER LITHOGLYPHUS NATICOIDES FER. ALS FAKTOREN DER SELBSTREINIGUNGSFÄHIGKEIT DER FREIEN GEWÄSSER.

Von LADISLAUS HARANGHY Privatdozent, Primarius.

Eine der wichtigen Faktoren der Selbstreinigung von Flüssen und stehenden Gewässern ist die bakterientötende Wirkung gewisser, im Wasser lebenden Organismen. Die wasserreinigende Fähigkeit der Muscheln bildet seit langer Zeit Gegenstand der Forschung, es blieb aber bis zum heutigen Tage unentschieden, ob die wasserreinigende Wirkung nur im Sedimentieren der im Wasser schwebenden Stoffe, oder aber in der Verminderung der Bakterienzahl besteht. In meinen Versuchen beabsichtigte ich eben die Frage zu untersuchen, welchen Einfluss die Muscheln auf den Bakteriengehalt des Wassers ausüben. Zu diesem Zwecke habe ich in mit Abwasser gemischtes Plattensee-Wasser die Muscheln *Dreissensia polymorpha* und *Unio pictorum* gesetzt und habe — neben Anwendung eines Kontrollversuches — den Keimgehalt des Wassers und des Schlammes bestimmt. Die Versuche ergaben, dass sowohl bei den Dreissensien, wie auch bei den Unionen die Zahl der Mesophil-Coli- und Anaerobkeime des Wassers erheblich abgenommen hat, während gleichzeitig die Zahl ähnlicher Bakterien im Schlamme gestiegen ist; der Versuch liess also darauf schliessen, dass sich die wasserreinigende Fähigkeit der Dreissensia und der Unio nicht in der direkten Vernichtung, sondern nur im Sedimentieren der Bakterien auswirkt. Da sich die verschiedenen Bakterien verschieden sedimentieren und ausserdem die Fäulnisbakterien des Abwassers die Lebensfunktionen der Muscheln

nachteilig beeinflussen, habe ich den Versuch in sterilem Plattensee-Wasser mit einer Emulsion wiederholt, in welcher die Keimzahl der *B. coli* und *B. fluorescens* im Voraus festgestellt war. Aus der Versuchsreihe ist zu ersehen, dass die Dreissensien schneller, die Unionen langsamer die im Wasser schwebenden Mineralkörnchen zum Setzen bringen, gleichzeitig verringert sich die Keimzahl des Wassers erheblich, da nach $2^1/_2$ Tagen die Keimzahl der Dreissensien- und Unionenversuche ungefähr zwanzigmal geringer war, als die des Kontrollversuches. Auf Grund des Versuches war ausserdem festzustellen, dass sowohl das als eigentliches Wasserbakterium zu betrachtende, sich schwerer sedimentierende *Bacterium fluorescens*, wie auch das sich leichter setzende, aus Faecalien stammende *Bacterium coli* durch die Muscheln sedimentierbar sind. Auf dem Grunde des Versuchsgefässes befanden sich die Bakterien in lebensfähigem Zustande in eine schleimige Substanz eingebettet. Um festzustellen, ob im Setzen der Bakterien nur die Wasserströmung der Mantelhöhle eine Rolle spielt, oder aber die Bakterien auch in den Darm gelangen, habe ich die Versuchsreihen zunächst mit Carbo Animalis, dann mit Carmin wiederholt. In den Versuchstieren konnte man weder die Kohlen- noch die Carminkörner aufweisen, so liessen also die Versuche darauf schliessen, dass die wasserreinigende Wirkung möglich ist, ohne dass die Bakterien den Darm passieren. Die Versuche in nicht sterilisiertem Plattenseewasser erwiesen zwar, dass in den Dreissensien und Unionen, die in mit Carmin gefärbtes Wasser gesetzt wurden, die Carminkörnchen im Eingeweidesack entschieden ausweisbar waren und so die Bakterien unter günstigen Umständen auch in den Darm gelangen; der Umstand jedoch, dass in der Wasserreinigung nicht die Passierung der Bakterien durch den Darm, sondern die Wasserströmung in der Mantelhöhle und dadurch das Sedimentieren der Bakterien die Hauptrolle spielt, wurde schon durch jene Versuche ersichtlich, welche bewiesen haben, dass die wasserreinigende Fähigkeit der Dreissensien sehr rasch ist, da eine Dreissensie, die ein halbes Gramm wiegt, in $8^1/_2$—9 Stunden einen $^1/_2$ Liter Wasser vollständig zu reinigen imstande ist. Eine so rasche Reinigung des Wassers wäre nicht denkbar, wenn die ganze Wassermenge den Darm zu passieren hätte.

Im Schlamme der Flüsse und Seen leben viele Organismen, welche die mit dem Schlamme verbundenen Schmutzstoffe aufzuarbeiten imstande sind und so zur Selbstreinigung des Schlammes beitragen. Um festzustellen, in welchem Masse die durch die Muscheln sedimentierten Bakterienmengen auf diese Weise vernichtet werden können, ob also die Reinigung des Wassers vollständig wird, führte ich Versuche mit *Lithoglyphus naticoides* durch. Auf Grund der Versuche war festzustellen, dass der *Lithoglyphus naticoides* fähig ist die Bakterienzahl des Schlammes wesentlich zu vermindern und auf diese Weise die wasserreinigende Fähigkeit der Muscheln — wahrscheinlich gemeinsam mit den anderen, im Schlamme lebenden Organismen — zu ergänzen. Zwischen den Muscheln und den Schlammorganismen besteht also aus diesem Gesichtspunkt insofern eine Zusammenarbeit, als die Muscheln das Sedimentieren der im Wasser schwebenden organischen Stoffe ermöglichen und sie für die Schlammorganismen zugänglich machen, andererseits vollenden die Letzteren den von den Muscheln begonnenen Wasserreinigungsprozess, indem sie die abgelagerten Stoffe aufarbeiten. Unabhängig hievon wird die Bedeutung der wasserreinigenden Funktion der Muscheln durch den Umstand gesteigert, dass die am Wassergrund vor sich gehenden Selbstreinigungsprozesse ihre Wirkung nur auf sedimentierte Stoffe ausüben können, das Niederschlagen der schwebenden Stoffe erhöht also auch ohne die Funktion der Schlammorganismen in grossem Masse die Selbstreinigungsfähigkeit des Wassers.

In dem verhältnismässig sehr seichten, oft wogenden, von schwebenden Stoffen mehr oder weniger ständig trüben Plattensee-Wasser ist die natürliche Sedimentation sehr gering, die Verhältnisse sind also für die Entwicklung der Bakterien sehr günstig. Die wasserreinigende Fähigkeit der Muscheln ist daher gerade im Plattenseewasser von sehr grosser Bedeutung. Die durch Versuche erwiesene kräftige wasserreinigende Wirkung der Muscheln kann bis zu einem gewissen Grade das Ausbleiben der natürlichen Sedimentation ersetzen und die Selbstreinigungsprozesse des Wassergrundes, die Funktion der bakterienvernichtenden Organismen des Schlammes ermöglichen. Im seichten Plattensee können die Muscheln in den innersten Wassergebieten gedeihen, im Gegensatz

zu den tiefen mitteleuropäischen Seen, in welchen sich die Verbreitung der Muscheln auf die Ufergebiete allein beschränkt. Im Plattensee erstreckt sich also die wasserreinigende Fähigkeit der Muscheln nicht nur auf die schmalen, am Ufer liegenden Wasserstreifen, sie kann sich vielmehr bis zu einem gewissen Grade auf dem ganzen Gebiete des Sees geltend machen und so kann diese Erscheinung in der Selbstreinigungsfähigkeit des Wassers eine grosse Rolle spielen, besonders seit der übermässigen Vermehrung der Dreissensien, welche die kräftigste bakteriensedimentierende Wirkung aufweisen. Die Anwesenheit der Dreissensien ist aus diesem Gesichtspunkt geradezu vorteilhaft und bildet ein wirksames Mittel zur Bekämpfung der zunehmenden Verunreinigung des Plattensees.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Nov. 1935.)

# KIHALT GERINCESEK SÉRÜLÉSEINEK TÖRZSFEJLŐDÉSTANI JELENTŐSÉGÉRŐL.

TASNÁDI-KUBACSKA ANDRÁS-tól.

Az V. táblával.

Ha felvetjük a kérdést, mi lehet a paleopatológia végső célja, a felelet határozott : nem lehet azonos a modern orvostudományéval, a gyógyítással. Az ősbetegségekkel foglalkozó tudomány útja az egyes esetek vizsgálatán át saját külön céljához vezet : a filogéniai vonatkozások megismeréséhez. Más kérdés azután, hogy mennyire jutottunk el eddig ezeknek a filogéniai kapcsolatoknak a tisztázásában. Sok próbálkozásnak és inkább elgondolásnak, mint vizsgálati tényekből fakadó bizonyosságoknak az alapján egész sereg olyan, látszólag fontos filogéniai vonatkozásokkal jellemzett eset került bele az irodalomba, melynek valójában alig, vagy egyáltalában semmi köze a törzsfejlődéshez. A következőkben két közismert példával szeretnék röviden foglalkozni. Ezek a sérüléseket követő kóros elváltozások öröklődését «bizonyítják» s az irodalomban, sajnos, széltében elterjedtek.

Abel 1922-ben rendszeres vizsgálatnak vetette alá azokat a *Parasuchia*-őshüllő koponyákat, melyeknek állcsontjain traumatikus behatásoknak, marakodások következtében támadt genyedő gyulladásoknak a nyomait látni. Néhány évvel később Nopcsa az egyes leleteken végzett észleléseket filogéniai elgondolással fűzte egybe. Szerinte a primitívebb jellegű fajok rostruma síma (sértetlen) és csak a specializáltabb fajoké torzított kisebb-nagyobb mértékben. Az exostosisok és csontszöveti túltengések eredetileg a gyakori sérülések következményei voltak s később, a törzsfejlődés folyamán

szabálytalanul továbbnőve, öröklődtek. Végül a torzító jelleg örökössé vált.

Ez az állítás több okból is kifogásolható (lásd német szöveget). Itt csak azt emelem ki, hogy eddig az idesorolható fajok önállósága és egymáshoz való viszonya sincs kellőképpen tisztázva, még kevésbé vannak megállapítva specializációjuknak fokozati különbségei. A faj-kérdés végleges tisztázását éppen a patológiás eredetű torzulások nehezítik nagy mértékben. Ehhez járul az a tény is, hogy az erősen torzult koponyájú fajok egyénei közt sok olyan is akad, melyen csupán kisméretű kóros elváltozás, vagy egyáltalán semmiféle sérülésnek nyoma nem észlelhető. Végül megemlítem, hogy az eddig ismert leletek száma sem elegendő az öröklődés tényének megállapítására. Egész sereg egészséges koponya között mindössze hat kórosan elváltozott példányról tudunk s ezek képviselői is két genusznak három-négy fajára oszlanak.

Mai tudásunk alapján csupán annyit mondhatunk, hogy a Parasuchiák sérüléseinek semmi köze sincs a törzsfejlődés folyamán bekövetkezhető öröklődéshez. Minden egyes állat — melynek koponyáján ma kóros elváltozásokat észlelünk — külön-külön szerezte sérüléseit párzási harcai közben vagy a zsákmányért folytatott küzdelemben. A sérült koponyák egészségesekkel vegyest fordulnak elő, az erősen sérültek kevésbé sérültekkel. A legnagyobb mértékű torzulások sem egyebek a többinél súlyosabb periostitisnek és osteomyelitisnek a nyomainál. A torzulások méreteit pusztán a nyilt sebeken át bekövetkezett fertőzés foka, illetőleg a gyulladásos folyamatok előrehaladott volta és tovaterjeszkedése szabta meg. Esetenként és egyedenként külön-külön.

Ennél az esetnél is érdekesebb és sajnos, még szélesebb körben elfogadott példa az, amelyik a *Pezophaps solitaria* nevű kihalt óriásgalambféle «öröklődő» exostosisait állítja elénk. Abel még 1912-ben jelentette ki: «Es gibt wenig Fälle, die in gleich klarer Weise die direkte Reaktion des Organismus auf Reize zeigen und die Erblichkeit erworbener Merkmale beweisen. (Palaeobiologie der Wirbeltiere.) Mindezt arra alapította, hogy futólagos vizsgálat alkalmával fészeklakó fiatalok metacarpusain is látni vélt exostosisokat. Azoknak a «Nestjunge-oknak» a csontjain, melyek a párzási harcokban még nem vehettek részt s így meg sem sérülhettek. Ezek exostosisai

tehát — szerinte — öröklődés következményei. Az irodalom később ezt a megállapítást minden kritika nélkül a magáévá tette, s nemcsak el nem vetette lelkiismeretesen kivizsgált bizonyítékok hiányában, hanem az alapfogalmakat is összecserélve, az öröklődés tényét kiterjesztette a párzási harcokban már megsérült, öreg állatok exostosisaira is (3, 7).

Kérdés, hogy a fészeklakó fiatalok metacarpusain «észlelt exostosisok» nem azonosak-e azokkal a szárnycsonti dudorokkal, melyek a galamb-féléknél mindkét nem (♂, ♀) egyénein (tehát a kisebb termetű tojókon is) megtalálhatók? Kérdés továbbá, hogy ABEL a csontok megszemlélése idején nem a tojók csontjait nézte-e fészeklakó fiatalok maradványainak? A *Pezophaps* ugyanis egyik legjobb példája a nemi dimorfizmusnak, mert hímjei nagyok (robusztus csontokkal), tojói jóval kisebbek (karcsú, vékony csontokkal).

NOPCSA ABEL-nél is tovább ment egy lépéssel, mert szerinte az exostosisok és osteophyta felrakódások oly testrészekre is kiterjedtek, amelyeknek az eredeti sérülésekhez semmi közük sem volt (alsókarcsontra, felkarcsontra, mellcsontra). Ezek az osteophyták szerinte szintén öröklődésnek lennének az eredményei. Meg vagyok győződve róla, hogy itt is téves a magyarázat, mert nem mondhatjuk, hogy az exostosisoknak semmi közük a sérülésekhez, ha a humeruson vagy sternumon vannak. Ezeknek az eseteknek elbírálásánál nemcsak a madár aktív támadásával kell számolnunk, mikor a madár szárnya csak bizonyos helyeken sérülhetett meg és minden más csontján fellépő csontvastagodás már az öröklődésnek tudható be. Számolni kell az állat passziv védekezésével is, mert az ellenfél csapásait éppen a sternum és humerus fogták fel. Ilyenkor pedig könnyen keletkeznek csonthártyagyulladások és osteophytafelrakódások, védekezés közben szerzett sérülések nyomán is. A *Pezophaps* csontvázának különböző részein található csontvastagodások, csontszöveti túltengések tehát egyáltalán nem bizonyítékai a traumatikus behatásokat követő elváltozások öröklődésének.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. nov. 18-án tartott üléséből.)

# PHYLOGENETISCH BEDEUTUNGSVOLLE KAMPFSPUREN BEI AUSGESTORBENEN WIRBELTIEREN.

Von A. TASNÁDI-KUBACSKA.

Die paläopathologische Literatur hat in den letzten zwanzig Jahren beträchtlich zugenommen und produzierte an Zahl mehr Studien, als im Laufe des ganzen vorherigen Jahrhunderts. Dank der neuen paläopathologischen Literatur, kennen wir nun nicht nur eine grosse Anzahl guter Diagnosen und Krankheitsfälle, sondern es tauchen in der modernen Literatur auch grosszügige Gedanken auf, die weiten Horizonten zustreben.

Aus der Literatur ersieht man, dass wir keine einzige Krankheit kennen, die ausschliesslich an den Resten ausgestorbener Tiere wahrgenommen worden wäre. Was aber für die Wissenschaft aus den Resultaten der Paläopathologie neu ist, stammt aus jenem Vorteil des Paläobiologen, wonach dieser den Verlauf, die Entstehung und das Schwinden, besonders aber die Auswirkung der Krankheiten in vielen Fällen nicht nur im Entwicklungsgange eines Individuums, sondern auch der Art, oft sogar aufeinander folgender Arten studieren kann. Es liegt an der Hand, dass das Endziel der paläopathologischen Forschung nicht identisch mit dem Endziel der Medizin: d. h. der Heilung sein kann. Der Weg der Paläopathologie führt zu ihrem Sonderziel, zur Erkennung phylogenetischer Zusammenhänge.

Es ist nun eine ganz andere Frage, wie weit wir im Studium dieser phylogenetischen Fragen gelangt sind. Wenn wir die bisher

aufgezählten Beispiele durchmustern und die gegen sie anführbare Gegenargumente erwägen, so ist es deutlich sichtbar, dass sich Versuche und zweifelhafte Deutungen neben einander reihen. Es kann aber auch nicht anders sein. Die paläopathologischen Studien müssen immer auf den heutigen medizinischen Untersuchungen fussen. Was die Medizin nicht erklären vermag, bleibt auch auf dem Gebiete der Paläopathologie ein Rätsel. Erschwert wird das Studium und erhöht werden die Mängel durch die ungenügende Erhaltung der fossilen Reste. Diese hemmenden Momente können am meisten gerade in jenen Fällen wahrgenommen werden, die am ehesten phylogenetische Zusammenhänge versprechen würden. Z. B. die Hyper- oder Hypofunktion endokriner Drüsen, Arrostie, Riesenwuchs usw. In all diesen Fällen fiel die wichtigste Rolle jener Weichteile des lebenden Organismus zu, die im Laufe der Fossilisation gänzlich zugrunde gehen oder kaum eine Spur hinterlassen.

Im Folgenden möchte ich zwei Beispiele besprechen, die in der Literatur für die Vererbung traumatischer Krankheiten angeführt werden.

Abel untersuchte im Jahre 1922 diejenigen Schädel der Parasuchier, an deren Schnauzenregion sich Spuren traumatischer Verletzungen, im Kampf erworbene «Knochenwucherungen» vorliegen (1). Später trachtete Nopcsa die von Abel beobachteten Merkmale phylogenetisch zu verwerten und zu beweisen, dass das Rostrum der im allgemeinen mit einem primitiveren Panzer ausgezeichneten Belodontiden glatt, das der spezialisierteren mit grossen «Wucherungen» bedeckt ist. Es liegt an der Hand diese als vererbte und später nicht regelmässig fortgewachsene, ursprünglich als Folge häufiger Verletzungen entstandene Merkmale aufzufassen (2, 3, 4). Nopcsa betont besonders, dass die Tiere beim Erwerb dieser Veränderungen eine passive Rolle spielten. Demgegenüber behauptet Abel 1929, dass die hohen Kämme, die von «Knochenwucherungen» infolge Verletzungen gebildet werden, bei jedem Individuum wohl von neuem entstanden (5. S. 390).

Nopcsa trachtet die Vererbung der im Laufe der Stammesentwicklung beständig wirkenden pathologischen Traumen an Hand

der Parasuchier zu beweisen. Es ist zwar die Möglichkeit vorhanden, dass eine individuell erworbene, auf die Hormone stark auswirkende Eigenschaft sich vererbt, doch bieten — meines Erachtens — die Parasuchier in dieser Hinsicht keine genügenden Beweise.

Von den pathologischen Parasuchier stammen *Mystriosuchus planirostris* MEYER, *Mystriosuchus plieningeri* MEYER und *Phytosaurus kapffii* MEYER aus dem schwäbischen Keuper, *Phytosaurus* (?) *buceros* COPE aus der amerikanischen Obertrias. Allerdings ist es auffallend, und dies würde zu Gunsten der von NOPCSA geäusserten Auffassung sprechen, dass die Phytosaurier-Schädel dieser weit voneinander getrennten Fundorte (Europa und Amerika), im Gegensatz zu den weniger deformierten Mystriosuchus-Arten, gleich ausserordentlich stark deformiert sind. NOPCSA glaubte das erste Auftreten vererbter Veränderungen, die Neigung zu Veränderungen eben bei den Phytosaurier zu beobachten, die er als spezialisierteren Typus betrachtete.

Die phylogenetische Auswertung dieser paläopathologischen Fälle ist aber in erster Linie deshalb von zweifelhaftem Wert, weil die Selbständigkeit der genannten Arten und ihr Verhältnis zu einander, sowie der graduelle Unterschied ihrer Spezialisation nicht genügend klargelegt ist. ABEL und NOPCSA, die sich mit dieser Frage näher befassten, sind gerade in diesen grundlegenden Fragen nicht einig (2, 5, 6). Die endgültige Klärung der Artenfrage wird nämlich eben durch den pathologischen Deformationen bedeutend erschwert.

Im Gegensatz zu NOPCSA deutet ABEL den grossen Unterschied, der sich bei den Veränderungen der *Mystriosuchus*- und *Phytosaurus*-Arten zeigt, in der Weise, dass die unter dem Namen *Phytosaurus kapffii* beschriebenen Schädel von Männchen, die unter *Mystriosuchus plieningeri* beschriebenen aber von Weibchen derselben, oder wenigstens einer nahe verwandten Art stammen. Durch diese Annahme wäre es erklärt, dass der Schädel der Männchen *(Phytosaurus kapffii)* infolge der heftigen Paarungskämpfe öfter und stärker verletzt, und folglich auch in höherem Grade deformiert wurde, als die der Weibchen *(Mystriosuchus plieningeri)*. Doch kann ich weder die eine, noch die andere Deutung als endgültig

bewiesene betrachten und man findet Gegenargumente sowohl zu der Annahme Nopcsas, wie zu der Abels. Nach meiner Erachtung gibt es eine einfachere Deutung selbst als die Abelsche.

Im Bezug auf die Auffassung Nopcsas dürfen wir nicht vergessen, dass das zeitliche Auftreten der Veränderungen aufweisenden Parasuchier nicht so bedeutend verschieden ist, dass dieser Unterschied für eine langwährende Wirkung traumatischer Einflüsse und dadurch für eine auf passivem Wege entstehende Deformation sprechen könnte. Alle Funde stammen nämlich aus der Obertrias. Selbst unter den rezenten Reptilien findet sich kein Fall, der für die Vererbung traumatischer Veränderungen sprechen würde, obzwar die heutigen Krokodile und ihre Vorläufer ihre Paarungskämpfe doch bedeutend längere Zeit lang ausgeübt haben, als die Parasuchier der Obertrias.

Es kann in der wichtigen Frage der Vererbung der Veränderungen auch deshalb nicht zu Gunsten der Vererbung entschieden werden, weil uns nur ein beschränktes Material zur Verfügung steht. Neben mehreren vollständig unverletzten kennen wir nur drei in geringerem Masse verletzte Schädel von *Mystriosuchus plieningeri* und *Mystriosuchus planirostris*, von *Phytosaurus kapffii* aber wurde nur ein einziger, von *Phytosaurus* (?) *buceros* ein stark und ein wenig verletzter Schädel gefunden.

Bei dem heutigen Stand unserer Kenntnisse können wir also nur behaupten, dass die Verletzungen der Parasuchier nichts mit phylogenetisch bedeutender Vererbung zu tun haben. Die Veränderungen an diesen Tieren sind nicht durch Vererbung entstanden, sondern ein jedes Individuum erhielt die Verletzungen separat, im Paarungskampf oder im Kampf um die Beute (vergl. mit Abel). Verletzte Schädel kommen neben unverletzten vor, stark verletzte neben gering verletzten. Selbst die grössten Deformationen sprechen nicht für die Vererbung, ebensowenig müssen die geringere oder bedeutendere Verletzungen auf eine geringere Verletzungsmöglichkeit der

Weibchen oder auf eine gesteigerte der Männchen zurückgeführt werden. Die mächtigen Verletzungen, durch welche die Schnauzenregion vollständig deformiert wurde (*P. buceros*), sind einfach mächtigere Spuren von Periostitis und Osteomyelitis. Der Grad der Deformation wird in jedem einzelnen Fall und individuell bloss durch den Grad der in offenen Wunden eingetretenen Infektionen, bezw. durch den Grad des Fortschrittes der Entzündung bestimmt. (Für die Richtigkeit dieser Deutung würden die amerikanischen «Phytosaurus»-Reste sprechen, — wenn ABELS Zusammenfassung der amerikanischen und europäischen Phytosauriern richtig wäre — unter welchen die ganze Schnauzenregion des Neumexicanischen Exemplars von «*Phytosaurus*» *buceros* von Periostitis aufgetrieben war, während an einem Schädel von Arizona (*Machaeprosopus validus* MEHL = *Phytosaurus buceros*) nur auf der nasalen Region eine kleine Verletzung vorkommt (1. Fig. 5). Wir haben demnach zwei vollständig verschiedenen Ausbildungen der Krankheit «derselben» Art vor uns, was nur durch die verschiedene Verletzungen der Individuen erklärkt werden kann.)

Auch über die angeblichen «Vererbung» von Exostosen bei *Pezophaps solitaria* STRICKLAND et MELVILLE ist man noch im Unklaren. In der Literatur finden wir Berichte von Augenzeugen über die Paarungskämpfe der Männchen und über die Exostosen, die infolge dieser Kämpfe entstanden sind. (Literatur s. bei ABEL und LAMBRECHT 8, 7.) Nirgends finden wir aber eine sichere Angabe, dass die krankhaften Reste dieser Riesentaube nicht ausschliesslich aus dem Alluvium, sondern auch aus dem Plistozän zum Vorschein gekommen wären. Wäre das plistozäne Alter krankhafter Solitär-Knochen nachgewiesen, so wäre dadurch die Zeitdauer, während der die Vererbung infolge konstant wirkender Reize aufgetreten ist, bedeutend ausgedehnt.

ABEL war der erste, der die hochwichtige Behauptung äusserte, dass Exostosen bereits bei den «Nestjungen» auftreten (8). Die zitierte Behauptung ABELS fusst aber — wie dies aus sei-

nen Zeilen hervorgeht — bloss auf einer flüchtigen Besichtigung des Materials. Es wäre demnach zur Klärung der Frage unbedingt ein detailliertes, genaues Studium des gesammten *Pezophaps*-Materials unerlässlich. Es müsste ferner erforscht werden, in welcher Grösse und wie oft die Exostosen bei Nestjungen auftreten. An Hand der Nestjungen möchte ich noch auf einige Einzelheiten verweisen, die einer Erklärung harren.

Natürlich nahmen in den Paarungskämpfen nur Männchen teil und sicher sind die aus der Literatur bekannten mächtigen Exostosen nur an den Resten der Männchen vorhanden. Diese mächtigen Exostosen sprechen aber nicht für eine Vererbung derselben, da sie nicht bei jedem Individuum auftreten, sondern nur an einem kleinen Bruchteil der vorhandenen Reste. Diese Exostosen enstanden in jedem Fall separat und individuell, als das Tier verletzt wurde. Wenn in der Literatur also über die Vererbung dieser grossen Exostosen gesprochen wird, so kann es sich nur um ein Versehen, oder um einen Irrtum handeln (7).

Für eine tatsächliche Vererbung würden nur die an den Knochen der Nestjungen gefundenen kleinen Exostosen sprechen und gerade hier sehe ich die Notwendigkeit der Klärung zweier wichtiger Fragen.

Es ist vor allem zu klären, ob die kleinere Knochen, die also als Reste von jungen Tieren bestimmt sind, nicht bloss Reste von Weibchen sind? LAMBRECHT hebt nämlich bei der Erörterung des sexuellen Dimorphismus der Vögel hervor, dass die sexuellen Unterschiede bei *Pezophaps* deutlich ausgedrückt sind, indem die robusteren (!) Knochen von Männchen, die zarten von Weibchen herstammen (7, Pag. 874).

Zweitens wäre es zu entscheiden, ob nicht die an kleinen Knochen (also an Knochen von Nestjungen) beobachteten «Exostosen» mit den Flügelspornen ident sind, die an beiden Geschlechten der Tauben (also auch bei den Weibchen, das heist auch an den kleineren Knochen) wahrzunehmen sind? (Vergl. die Untersuchungen von LUCAS (9) über die Flügelsporne der Tauben.)

Das Beispiel des Solitärs würde nicht Geringeres bedeuten, als dass sich Hypertrophien des Knochengewebes auch bei Indi-

viduen — die infolge ihres jungen Alters nicht verletzt werden konnten — als Reaktionen der lange Zeit hindurch regelmässig bei den Männchen einwirkenden Verletzungen auftreten. Das wäre aber eindeutig mit der Vererbung der Exostosen. Den Gedanken der Vererbung hatte ABEL in 1912 in den folgenden Sätzen ausgedrückt : «Lage, Form und Grösse dieser Exostosen variiert sehr bedeutend, aber man sieht deutlich, dass diese eigentümlichen Knochenveränderungen nicht durch Verletzungen herbeigeführt sind, sondern an unverletzten Knochen auftreten. Es gibt wenig Fälle, die in gleich klarer Weise die direkte Reaktion des Organismus auf Reize zeigen und die Erblichkeit erworbener Merkmale beweisen. Denn die Entstehung der Exostosen an den Fingerknochen und an den Knochen des Unterarms ist als eine Folge der Boxkämpfe der Männchen anzusehen; und diese Exostosen treten wieder schon bei den männlichen Nestjungen auf, welche noch nicht kämpfen» (8. Pag. 588).

NOPCSA stellte die Exostosen des Solitärs mit den Hörnern der Giraffen in Parallele (2, 3, 4). Doch war dieser Vergleich sehr unglücklich, wodurch der Leser irregeführt wird. Schon ABEL stellte es fest, dass das Horn der Boviden nicht mit dem durch Haut bedeckten Oriment der Giraffen identifiziert werden kann, da der Giraffe sein «Horn» nie zum Angriff benützte (8. Pag. 575, 581). Meines Erachtens können die Exostosen von *Pezophaps* mit den «Hörnern» der Giraffen nur auf Grund einer ganz bedeutungslosen, zufälligen morphologischen Ähnlichkeit verglichen werden. Beide sind nämlich mit Haut überdeckt. Hierin besteht die einzige Übereinstimmung. In ihrer Entstehung sind sie aber weltweit entfernt: im Gegensatz zu dem passiven Schmuck der Giraffen sind die Exostosen bei *Pezophaps* geradezu als Reaktion einer ständigen Aktivität entstanden.

Der Vergleich des Giraffen mit *Pezophaps* war aber auch nicht notwendig. Nach NOPCSA war der Fall von *Pezophaps* dort interessant, wo die Exostosen sich zuerst auf den Unterarm, dann auf den Oberarm, sogar auf das Brustbein ausdehnen. Nach seiner Ansicht breiteten sich die osteophytischen Auflagerungen auch auf Körperteile aus, die nichts mit der ursprünglichen Verletzung

zu tun hatten. Diese Osteophyten wären nach NOPCSA schon Resultaten der Vererbung.

Ich bin überzeugt, dass das eine falsche Auffassung ist. Man kann nämlich nicht behaupten, dass die Osteophyten nichts mit der Verletzung zu tun haben, wenn sie am Humerus oder am Sternum vorkommen. Bei der Erwägung dieser Fälle muss man nicht nur den aktiven Angriff des Vogels in Betracht ziehen, durch welchen blos ein gewisser Teil des Körpers in Anspruch genommen wird (im Falle des Solitärs die Basis des Metacarpus), und man darf nicht auf allen anderen Teilen des Skeletts auftretenden Exostosen als vererbt oder zumindest auf Vererbung verdächtig betrachten, wie NOPCSA meinte. Auch die passive Verteidigung des Tieres muss erwogen werden; in diesem Fall sind von Angriffe des Gegners das Sternum, Coracoid und die Flügelknochen in ihrer ganzen Länge betroffen worden. (Für diese passive Verteidigung spricht jenes frakturiertes Coracoid, das ABEL aus Cambridge anführt 8.) In solchen Fällen treten aber infolge der während der Verteidigung erfolgten Traumen leicht Entzündungen der Knochenhaut und Osteophytenauflagerungen auf. Die Beobachtungen der Schule LEXNERS beweisen, dass selbst intramuskuläre Blutergiessungen verknöchern können und so konnten infolge der Verletzung der Muskeln des Brustbeines und des Oberarms Verknöcherungen enstehen.[1] All dies müsste umsomehr in Betracht gezogen werden, da die Exostosen der pathologischen Solitärknochen nicht glatte Calluskugeln sind, wie es in der älteren Literatur behauptet wurde, sondern aus zackigen und höckerigen Auflagerungen von Knochengewebe aufgebaut sind, die oft in der Linie des Sehnenverlaufs stehen. (Siehe Tafel V., Fig. 2.)

[1] In der Sammlung der paläontologischen Abteilung des Magyar Nemzeti Múzeum befindet sich (Inv. Nr. 𝔅 781) ein Metapodium von einem Raubtier aus dem Oberpliozän von Gombaszög (Ungarn). Das Metapodium erlitt eine Kompressionsfraktur. Die verschobenen Knochenfragmente sind wieder verheilt, und auf dem Corpus entstanden Exostosen und Auflagerungen des Knochengewebes. Die starke Verletzung ging mit Folgen vor sich, die sehr an *Pezophaps* erinnern. (Siehe Tafel V., Fig. 1.)

Jene Rauhigkeiten, die von NOPCSA als Zeichen der Vererbung aufgefasst wurden, können einen ganz anderen Grund haben. MARTIN erklärt die Rauhigkeit der Dorsalflächen des *Pezophaps*-Coracoides mit dem Haften der eigentümlichen, aus wenigen sehnigen Fasern bestehenden Coracoid-Muskulatur des Tieres (10).

Die hypertrophischen Knochengewebeauflagerungen an verschiedenen Knochen des Solitärs beweisen bei weitem nicht die Vererbung der Exostosen und des verdickten Knochengewebes. Sicher verhält es sich ebenso mit den auf den «unverletzten Flügelknochen des Nestjungen auftretenden Knochenspornen», die ebenfalls nicht für die Vererbung von Knochengewebehypertrophien sprechen.

Dieser Ansicht nähert sich neuerlich auch ABEL, in seiner Meinung, dass der Zusammenhang zwischen der Flügelverletzungen der erwachsenen Solitäre und der Flügelknochen-Exostosen der Nestjungen noch ein vollkommen ungelöstes Problem ist (6 p. 577).

## Literatur.

1. ABEL, O.: Die Schnauzenverletzungen der Parasuchier und ihre biologische Bedeutung. Paläont. Zeitsch. V. I. Heft. pag. 43. 1922.

2. NOPCSA, F.: Die Familien der Reptilien. 1923.

3. NOPCSA, F.: Heredity and Evolution. Proc. Zool. Soc. p. 633. London, 1926.

4. NOPCSA F.: Fejlődéstörténeti és öröklödéstani következtetések a hüllők tanulmányozásából. (Siehe: Heredity and Evolution.) Állattani közlemények. XXIV. p. 125. Budapest, 1927.

5. ABEL, O.: Paläobiologie und Stammesgeschichte. Jena. 1929.

6. ABEL, O.: Vorzeitliche Lebenspuren. Jena, 1935.

7. LAMBRECHT, K.: Handbuch der Paläornithologie. Berlin. 1933.

8. ABEL, O.: Palaeobiologie der Wirbeltiere. Stuttgart, 1912.

9. LUCAS, F. A.: The weapons and wings of birds. Rep. U. S. Nat. Mus. for 1893. Washington, 1895.

10. MARTIN, R.: Die Vergleichende Osteologie der Columbiformes. Zool. Jahrb. 20. Abt. System. Geogr. etc. p. 167. 1904.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. Nov. 1935.)

# KRANIOMETRIAI VIZSGÁLATOK A HONFOGLALÓ MAGYAROK LOVAIN.

NAGY DEZSŐ-től.

12 képpel a VI—X. táblán.

A honfoglaló magyarok lovainak származásával BESSKÓN (5) kívül, akinek 1906-ban jelent meg erre vonatkozó nagyobb terjedelmű munkája, egészen a legutóbbi időkig magyar szerző nem foglalkozott. Az 1935. év elején jelent meg dr. HANKÓ BÉLA debreceni egyetemi professzor «*A magyar ló eredete*» című dolgozata (11), amely újabb nézőpontokból világítja meg a honfoglaló magyarok lovainak hovátartozását.

A fenti két munka egyöntetűen állapítja meg a honfoglaló magyarok lovainak keleti származását, azonban míg BESSKÓ az akkori felfogásnak megfelelően a honfoglaló magyarok lovát a keleti fajta *mongol* ágához tartozónak véli, addig HANKÓ az újabb megállapításoknak megfelelően a honfoglaló magyarok lovának őseit a *tarpan*-ban jelöli meg, amely az idők folyamán kismértékben a PRZEWALSKI-féle vadlóval keveredett.

Miután a fenti vizsgálatok aránylag kisszámú lóra vonatkoztak, (BESSKÓ kilenc, HANKÓ mindössze négy magyar és egy avar lókoponyát vizsgált), úgyhogy ezek alapján a magyar ló származása még korántsem tekinthető teljesen tisztázottnak, nem látszott fölösleges munkának az egyetemi állatorvosi-anatomiai intézetünk rendelkezésére álló *hat* honfoglaláskori lókoponya kraniometriai feldolgozása, amely, ha nem is oldja meg teljesen a honfoglaló magyarok lovának eredetét a vizsgálati anyag aránylag csekély volta miatt, kétségkívül közelebb visz a kérdés teljes megoldásához.

*Vizsgálati eljárás.* A koponyaméretek felvételénél más, régebbi

szerzőkön kívül, DUERST (7) és ADAMETZ (1) eljárását tartottam szem előtt. A méretek felvételéhez tolómércét és ívkörzőt használtam.

A felvett *63 méret* az egyes síkokban a következőképpen oszlik meg :

*A)* a koponya alapján (norma basilaris) 13 hosszúsági méret ;

*B)* a koponya felső felületén (norma verticalis s. norma frontalis) 19 hosszúsági méret ;

*C)* a koponya oldalán (norma lateralis s. norma temporalis) 19 szélességi méret ;

*D)* a koponya hátulsó felületén (norma caudalis s. norma occipitalis) 4 méret ;

*E)* a mandibulán 8 méret.

(A méretek részletes leírását és értékeit feltüntető táblázatok, melyeket hely- és költségkímélés miatt e helyen nem közlünk, az egyetemi állatorvosi-anatomiai intézetben megtekinthetők.)

A méretek száma, összehasonlítva az emberi koponyán felvett méretek százaival (15), első pillanatra talán kevésnek látszik. Tekintetbe kell venni azonban itt azt a körülményt, hogy az emberi kraniologiában, illetőleg az anthropologiában nem csupán a *fajták, race*-ok megkülönböztetésére szolgálnak a méretek és a belőlük képezett indexek, hanem az *egyének* megkülönböztetésére is, mely utóbbi itt a mi célunk eléréséhez nem szükséges.

Miután az abszolút méretek vizsgálata nem elég a jellemvonások megállapításához, a méreteket ugyanazon koponyán egymással össze kell hasonlítani, hogy ily módon a fennálló különbségeket jobban megfigyelhessük. Erre a célra szolgálnak az értékjelzők, *indexek*, melyek egyik méretet a másik méret százalékában fejezik ki.

NEHRING (13) úgy járt el az indexek képzésénél, hogy a nagyobb méretet fejezi ki a kisebb százalékában, azaz megállapítja, hogy a nagyobb méret hány százalékát teszi a kisebbnek, vagyis :

$$\frac{\text{nagyobb méret} \times 100}{\text{kisebb méret}} = \text{NEHRING-féle index.}$$

Az ily módon képzett indexeknek előnye, hogy aránylag nagy számok nyerhetők, ahol a különbségek nagyok lévén, az ellentétek is feltűnőbbek lesznek.

Másik és gyakrabban használt eljárás az indexek képzésére,

melynél a kisebb méretről állapítjuk meg, hogy hány százalékát teszi a nagyobbnak. Így az indexek közötti különbségek meglehetősen szűk határok között ingadoznak, ami, tekintetbe véve azt, hogy rendszerint ugyanabba, vagy egymáshoz közelálló fajtacsoportba tartozó koponyákról van szó, a célnak jobban felel meg. Ugyanis az egyes indexek közötti különbségek túlnagy volta kevésbbé alkalmas ugyanabba a csoportba való tartozás megállapítására, mert a különbségek fokozott hangsúlyozása éppen az ellentéteket, nem pedig a közös vonásokat domborítaná ki.

Vizsgálataim során főleg az utóbb említett indexeket használtam és az egyes méreteket leggyakrabban a koponya alaphosszúságával hasonlítottam össze.

**Vizsgálati anyag.** A budapesti állatorvosi-anatomiai intézet rendelkezésére álló anyagból csupán *hat* koponya volt alkalmas a kraniometriai vizsgálatra. Ezek közül *három*, a *Kunágota I.*, a *Kunágota II.* és a *No. 6.* jelzésű a *szegedi múzeum*ból való és Szegedkörnyéki ásatásokból származik, a másik három koponyát a *Kaján 64*, *Pestszentlőrinc* és *Kenézlő* jelzésűeket a *budapesti egyetemi anthropologiai intézet* bocsátotta rendelkezésünkre. Mind a hat koponya honfoglaláskori magyar sírokból került napvilágra.

**A koponyák leírása.** A *Kunágota I.* jelzésű koponya a fogak alapján hároméves kancáé volt. Meglehetősen ép, sárgásbarna színű, kissé érdes felületű, varratai élesen kirajzolódnak. A jobboldali homlokcsont aboralis részén, a linea semicircularis és a sutura squamosa tájékán 5 cm átmérőjű köralakú nyílás van (l. az 1. képen). A baloldali orrcsont aboralis végén a sutura foliosa szomszédságában 4 cm hosszú résszerű nyílás található, melyet valószínűleg a feltárás alkalmával valamely ásóeszköz hozott létre (l. a 2. képen).

Az állkapocs teste feltűnően széles, alsó széle pedig az első és második praemolarisnak ($P_1$, $P_2$; a praemolarisokat a molarisok felől számoztam) megfelelően két erős dúdort tüntet föl, melyek valószínűleg a lószerszám nyomására keletkeztek (l. az 1. képen).

A felső metszőfogak közül a baloldali $I_1$ (l. az 1. képen), az alsók pedig valamennyien kihullottak (l. az 1. képen).

A *Kunágota II.* jelzésű koponya hároméves ménlótól származik. Halványsárga színű, érdes felületű, varratai jól előtűnnek.

A jobboldali maxilla testének oralis része, ugyanez oldali incisivum fogmedri nyúlványa, mindkét incisivum szájpadlásnyúlványa, az orrcsontok processus nasalisa, az ekecsont és az orrkagylók hiányzanak (l. az 5. képen).

Az állkapocs a jobboldalon a processus condyloideus és pr. coronoideus alatt (l. a 4. képen), baloldalon a test és az ág határán, az angulus mandibularisnak megfelelően törött.

A felső metszőfogak közül a baloldali $I_3$, $I_2$, a jobboldali $I_2$, az alsó fogsorban a jobboldalon valamennyi (l. a 4. képen), baloldalon az $I_1$ és $I_2$ kihullott.

A *Kaján* 64. jelzésű negyedfél éves kanca koponyája (l. a 6. és 7. képen), okkersárga színű, a koponyacsontok felülete sima, a varratok jól láthatók. Mindkétoldali sziklacsont, a szájpadláscsontoknak és a maxillának aboralis része, baloldalon a maxilla fogmedri része a két utolsó zápfoggal ($M_2$, $M_3$) együtt, az ekecsont és az orrkagylók hiányzanak.

A mandibula a baloldali foghíjjas szélnek megfelelően ketté törött.

A *Pestszentlőrinc* jelzésű koponya harmadfél éves kanca koponyája. Világossárga színű, sima felületű. A sziklacsontok a halántékcsontok pikkelyrészletével együtt, az orrcsontok processus nasalisai és az orrkagylók hiányzanak (l a 8. és 9. képen).

A mandibula ép, csupán a metszőfogi részletnek megfelelően vált ketté.

A felső fogsorban mindkétoldali $I_2$ és $I_3$ (l. a 9. képen), az alsó fogsorban pedig minden metszőfog kihullott (l. a 9. képen).

A *Kenézlő* jelzésű koponya hatéves ménlóé volt (l. a 10. és 11. képen). Világossárga színű, nagyon törékeny. A jobboldali sziklacsont, ugyanezoldali ékcsont szemgödri szárnya és az állcsont fogmedri részének apicalis része az előzápfogakkal együtt, az ekecsont és az orrkagylók hiányoznak.

A mandibula jobboldalán a foghijjas szél kezdetén, baloldalán a test és az ág határán több darabra törött.

Az alsó metszőfogak a mandibula pars incisivajával együtt hiányoznak.

A *No 6.* jelzésű koponya negyedfél éves ménlótól származik. A jobboldali falcsont és a homlokcsont legnagyobb része, mindkét

sziklacsont, a jobboldali maxilla testének caudalis része, a könnycsont, az orrcsontok processus nasalisa és az orrkagylók hiányoznak. A crista occipitalis jobboldala letörött (l. a 12. képen).

A mandibulának csak egyes töredékei vannak meg.

**A fontosabb koponyaméretek és indexek összehasonlítása.** *A koponya alaphosszúsága* a vizsgált honfoglaláskorabeli magyar lókoponyákon középértékben 461 mm (462, 465, 448, 465, 467, 460). Ez az érték aránylag csekély, ami egyfelől a keleti származással, másfelől a fiatal életkorral áll összefüggésben (3, 3, $3^1/_2$, $2^1/_2$, 6, $3^1/_2$ év).

A *profilvonal* a szemboltok között csaknem teljesen egyenes, némely koponyán, különösen a *Kenézlő* jelzésűn kisfokú homorulatot tüntet föl, majd pedig az orrcsontok kezdetén kevéssé kidomborodik, ezután a processus nasalis elején ismét kisfokú horpadás mutatkozik, amit az orrcsontok végén enyhe domborulat követ.

A profilvonalnak ilyen alakulása keleti származású, főleg arab lovakon mutatkozik, amelyet állattenyésztési, külemtani megjelöléssel «csukafej»-nek neveznek.

A *koponyatető hossza* (14. méret) *és a koponya alaphosszúsága közötti különbség* a crista occipitalis kiemelkedésének mértékéről nyujt felvilágosítást. Itt azonban nem találunk az egyes fajták között lényeges különbséget.

A honfoglaláskorabeli magyar lovon e különbség középértékben 51·8 mm (61, 52, 55, 49, 42, 52).

Az *Equus Przewalskin* a szélső értékek 52—62 mm, a *kladrubi lovon* ADAMETZ vizsgálatai szerint 40—65 mm.

Hasonló célt szolgál a *tarkó index* (TSCHERSKI), amely a koponyatető hosszúságát a basilaris hosszúság százalékában fejezi ki. Ennek értékei: magyar lovon 111·2%, Equus Przewalskin 111·7%, tarpánon 109·7%, arab lovon 107·3—112·2% (KUFFNER, 2) nyugati fajtákon 106·8—112%. Ez értékek nem mutatnak lényeges különbséget a keleti és a nyugati fajtájú lovak koponyái között sem, feltűnő azonban a magyar ló és az Equus Przewalski értékeinek csaknem teljes egyezése.

**Az agykoponya alakulása.** A nyugati és a keleti ló koponyájának felépítésében lényeges különbség található. Nevezetesen a tarpán és a Przewalski-tipushoz tartozó tehát tágabb értelemben

vett keleti fajtacsoportba tartozó lovak agykoponyája széles és erősen boltozott, domború, ezzel szemben a nyugati fajtáké aránylag keskeny és harántirányban kevésbbé erősen boltozott. ADAMETZ (1) szerint, nagyon jellemzően, a nyugati fajtájú lovak agykoponyájának oldalfalai tetőszerűen futnak fölfelé, a keletieké pedig kupolaszerűen.

A két fajtacsoport e jellemző agykoponyaalakulásbeli különbségének kifejezésére szolgálnak a következő indexek:

A) *Az agykoponya szélessége.* 1. A koponyaboltozat legnagyobb szélessége (49. méret) a basilaris hosszúság százalékában kifejezve: magyar lovon 22·7% (23·1, 22·6, 21·4, 22·8, 22·9, 23·6), Equus Przewalskin 22·3 (középérték), tarpánon 21·6 és 22·3% (a két ismert tarpánra vonatkozó értékek), arab lovon 20·7—27·0% (KUFFNER, 8), kladrubi lovon 18·8%.

TSCHERSKI megállapítása szerint keleti lófajtákon ez az index 21·2—23·2% között ingadozik, ami jól megegyezik a honfoglaláskorabeli magyar lovakon talált értékekkel.

2. A legkisebb agykoponyaszélesség (50. méret) magyar lovon a koponyaalaphosszúság 18·0%-a (18·8, 17·2, 17·4, 16·7, 17·1, 18·9). Ez értékek jól megegyeznek az Equus Przewalskin megállapított 18·6% és a keleti lófajtákra jellemző 17·6%-nyi (14·7—20·7% KUFFNER) értékekkel.

A nyugati fajtájú kladrubi lovon ez index értéke csupán 15·0%-ot tesz ki.

A következő szélességi méretekből alkotott indexek megerősítik az előző megállapításokat.

3. A mandibula processus condyloideusának külső szélei között mért szélesség a honfoglaláskorabeli magyar lovakon a koponyaalaphosszúság 38·8%-a (39·5, 38·6, 38·1, 38·9). Arab lovon 38·5—43·2%-ot tesznek ki a szélső értékek, kladrubi lovon pedig 37·3% a középérték.

4. A sziklacsont pars mastoideai közötti szélesség a koponyaalaphosszúság 23·3%-át teszi a vizsgált honfoglaláskorabeli magyar lovakon (23·6, 22·7, 23·2), míg arab lovon 23·5—25·4% között változik. (Utóbbi két index a tarpanon és az Equus Przewalskin nincs megállapítva.)

5. A külső hallójáratoknak a koponyaalaphosszúságra vonat-

koztatott értéke: honfoglaláskorabeli magyar lovon 24·4% (24·2, 24·5, 24·6), Equus Przewalskin 24·0%, tarpánon 23·2 és 23·4%, arab lovon 22·2—25·2%, nyugati lófajtákon 22·2% (kladrubi), 21·9% (pinzgaui).

B) *Az agykoponya hosszúsága.* Az agykoponya hosszúságáról a következő méretek nyujtanak felvilágosítást: 1. A SALENSKY-féle agytájék hosszúsága, az opisthion-nasion távolságnak a basilaris hosszúságra vonatkoztatott értéke a honfoglaláskorabeli magyar ló koponyáján 51·8% (53·8, 50·8, 50·9, 52·3, 47·8, 53·3), kladrubién 49·8% (ADAMETZ, 1)), a Veglia-ponnyn pedig 50·9%.

2. Az EWART-féle koponyahosszúság az opisthion és az orbiták caudalis szélét összekötő egyenes és a sutura sagittalis metszéspontja közötti távolság a honfoglaláskorabeli magyar lovon a koponyaalaphosszúság 37·0%-a (38·3, 34·4, 34·8, 36·6, 34·5, 37·8), kladrubién 35·9% (ADAMETZ).

3. Az opisthiontól az orrcsont-homlokcsonti varratot érintő egyenesig mért távolság a honfoglaláskorabeli magyar ló koponyáján a koponyaalaphosszúságnak 45·2%-át (45·9, 43·6, 45·6, 46·9, 42·8, 46·3), a nyugati lófajtákén pedig 43·2%-át teszi ki.

4. A homlokkoponya hosszúsága (ADAMETZ, 1)): az opisthiontól az orbiták elülső szélét érintő egyenes közepéig terjedő távolság. E méret honfoglaláskorabeli magyar lovon a basilaris hosszúságnak 48·9%-a (50·9, 47·7, 48·2, 50·3, 47·1, 49·6); a különböző tarpánivadékokon 46·3—47·7, kladrubi ló koponyáján pedig 47·3%-ot találtak.

5. A SALENSKY-féle IV. B) index a viszonylagos agytájékhosszúságról ad felvilágosítást a következő képlet alapján:

$$\frac{\text{koponyatetőhosszúság (14. méret)} \times 100}{\text{agykoponyahosszúság (25. méret)}}$$

Értéke honfoglaláskorabeli magyar lovon 216·5% (210·0, 219·1, 220·6, 211·5, 228·3, 209·9), tarpánon 210·0%, E. Przewalskin 218·0% (211·0—227·0), arab lovon 208·5—230·9%, kladrubi lovon 219·8%.

*A homloktájék alakulása.* A homlok szélességi viszonyairól nyujtanak felvilágosítást a következő indexek:

1. A nagy homlokszélesség, az orbita hátulsó szélének legkülső

pontjai közötti távolság a honfoglaláskorabeli magyar lovon a koponyaalaphosszúságnak 41·9 (41·1, 42·4, 40·8, 42·6, 42·0, 43·0), tarpánon 43·5, az E. Przewalskin és az arab lovon 42·6, a kladrubin 40·5%-a.

Ezek szerint a honfoglaláskorabeli magyar ló aránylag széleshomlokú: hat koponya közül négynek a relatív értéke meghaladja a 42·0%-ot s ebben a tekintetben is nagyon közel áll az arab lóhoz és az Equus Przewalskihoz.

2. A NEHRING-féle I. homlokindex a relativ homlokszélességről nyujt felvilágosítást; nevezetesen annak a megállapítására szolgál, hogy a koponya alaphosszúsága milyen százalékát teszi a homlokszélességnek. Ennek az indexnek értékei szerint a koponyáknak három csoportja különböztethető meg:

1. nagyon széles koponyák a minimalis értéktől 227·0%-ig,
2. középszéles koponyák 227·0—240·0%-ig,
3. keskeny koponyák 240·0%-tól a maximális értékig.

A honfoglaláskorabeli magyar ló koponyáján ez indexnek az értékei a következők: 243·2, 236·0, 244, 234·8, 235·9, 232·3%, középértékben 237·8%.

Ezek szerint a vizsgált honfoglaláskorabeli magyar lókoponyák a középszéles homlokú csoportba tartoznak. Ugyanide tartozik a Przewalski-féle vadló, amelyen SALENSKY öt esetben állapította meg a NEHRING I. indexet és azt 232·0—244·9%-nak találta (2).

A tarpán 228·0 és 231·0%-nyi értékkel, az arab lóval, a bosnyák és a galiciai tájfajtájú lóval együtt a széleshomlokú, a nyugati fajtájú kladrubi ló pedig 240·0—262·6%-ig terjedő értékkel a keskenyhomlokú csoportba tartozik.

3. A NEHRING-féle II. homlokindex a koponyatető hosszúságát (14. méret) a homlok szélességéhez viszonyítja:

$$\frac{\text{koponyatetőhosszúság (14. méret)} \times 100}{\text{homlokszélesség (45. méret).}}$$

A NEHRING-féle II. index értékei: a honfoglaláskorabeli magyar lovon 264·6% (275·3, 262·4, 274·9, 259·6, 257·1, 258·6), E. Przewalskin 257·7—275·3%, tarpánon 248·5 és 256·1 (TSCHERSKI), arab lovon 264·4—268·4%, kladrubi lovon 264·0—280·0%.

4. A NEHRING-féle III. index vagy szemindex a szemüreg fekvéséről nyujt felvilágosítást:

$$\frac{\text{elülső szemvonal} \times 100}{\text{hátulsó szemvonal}} = \text{NEHRING III.}$$

A NEHRING-féle III. index értéke: honfoglaláskorabeli magyar lovon 191·4% (192·6, 189·5, 197·8, 187·2, 192·5, 189·0), keleti lovakon 176·0—190·0%, Equus Przewalskin 190·0—197·5%, tarpánkoponyán 181·0 és 183·2%, arab lovon 177·0—201·7%, nyugati lovakon 190·9—205·0%.

*Az orbita alakulása.* A szemgödör verticalis és horizontalis átmérője: a verticalis átmérő a honfoglaláskorabeli magyar lovon 55—67 mm (jobb: 67, 60, 59, 60, 56, 55; bal: 62, 50, 58, 60, 56, 55), a horizontalis átmérő pedig 62—68 mm között ingadozik (jobb: 65, 65, 65, 68, 66, 62; bal: 65, 65, 67, 65, 64, 62). A két méret közötti különbség szélső értéke 3 mm-től 10 mm-ig terjed, a középkülönbözet pedig 6·6 mm-t tesz ki. Arab ló koponyáján a verticalis átmérő 55—69 mm, a horizontalis 60—67 mm között ingadozik, kladrubin pedig ugyane különbségek 54—61, illetőleg 64—71 mm-t tesznek ki. A különbségek szélső értékei arab lovon 1—9 mm, a tarpánon 2—7 mm, a PRZEWALSKI-féle vadlovon 3—14 mm, a kladrubin 6—10 mm.

A verticalis átmérőnek a basilaris hosszúságra vonatkoztatott értéke: a honfoglaláskorabeli magyar lovon 12·9% (14·0, 13·4, 12·9, 12·9, 11·9, 11·9), tarpánkoponyán 10·2%, E. Przewalskién 11·5%.

A horizontalis átmérőnek a basilaris hosszúságra vonatkoztatott értéke: a honfoglaláskorabeli magyar lovon 14·1% (14·0, 13·9, 14·7, 14·7, 13·9, 13·4), tarpán-koponyán 12·0%, E. Przewalskin 13·0%.

A szemüregtengelyek fenti értékei arra utalnak, hogy a honfoglaláskorabeli magyar lónak aránylag nagy szemgödre van. A horizontalis átmérő egy kivételével, mindig nagyobb a verticalisnál, azonban a kettő közötti különbség nem nagy, úgyhogy a szemgödör alakja horizontalisan kissé megnyúlt, csaknem köralakú.

Az orbita formája jól kifejezhető még a szemgödörindex-szel:

$$\frac{\text{horizontalis átmérő} \times 100.}{\text{verticalis átmérő}}$$

A vizsgált magyar lovakon ez indexnek középértéke 111·5%, ami jól megegyezik a PRZEWALSKI-féle vadlovon megállapított 112·5%-kal.

*Az arc hosszúsága.* Az arc- vagy orcahosszúság meghatározására a következő indexeket használtuk fel: 1. A SALENSKI-féle archosszúság a homlokcsont elülső végétől az $I_1$ alveolaris széléig mért távolság. E méret a honfoglaláskorabeli magyar lovon a koponya-alaphosszúság 63·5%-a (középérték), a Veglia-ponnyn 62·4%, a kladrubi lovon 65·4%-ot mutat.

2. A TSCHERSKI-féle archosszúság a prosthiontól az orbita szélének legközelebbi pontjáig mért távolság a honfoglaláskorabeli magyar lovon 64·8%-ot, a Veglia-ponnyn 64·7—65·5%-ot tesz ki.

3. Az EWART-féle archosszúság az orbiták hátulsó szélét érintő vonal és a sutura sagittalis metszéspontjától a prosthionig mért távolság a honfoglaláskorabeli magyar lovon 78·3%-át, a kladrubi lovon 79·1%-át teszi a koponya alaphosszúságának.

4. Az archosszúság az orr-homlokcsonti varratot érintő vonal és a sutura sagittalis metszéspontjától a prosthionig mért távolság a honfoglaláskorabeli magyar lovon a koponya alaphosszúságának 69·6, a kladrubi lovon 71·6%-a.

5. Az archosszúság ADAMETZ (1) szerint az orbiták elülső szélét érintő vonal és a sutura sagittalis metszéspontjától a prosthionig terjedő távolság. a honfoglaláskorabeli magyar lovon ez a méret 65·6, a tarpanfajokon 64·6, a kladrubi lovon 67·5%-a a koponya-alaphosszúságnak.

6. A relativ archosszúság meghatározására szolgál még a SALENSKI-féle IV. A) index, amely a koponyatető hosszúságát a SALENSKI-féle archosszúsághoz viszonyítja.

Értéke: honfoglaláskorabeli magyar lovon 174·8% (172·9—175·5), Equus Przewalskin 174·0—179·9%, arab ló koponyáján 168·2—178·7%, tarpan koponyáján 180·0%, pinzgaui lóén 165·3%.

A fenti indexek szerint a honfoglaláskorabeli magyar lónak fejlett agykoponyája van, míg az arci rész aránylag rövidebb s az indexek értékei mindenütt a keleti fajtacsoportba tartozó lovakon talált értékekhez állnak közel.

*Az arci rész szélessége.* A lókoponya arci részének szélességéről három méretet szokás felvenni, melyek a következők:

1. ama pontok közötti távolság, amelyeket a kétoldali járomcsonti varrat és crista maxillaris képez;

2. a foramen infraorbitale-k közötti távolság;

3. az úgynevezett orrszélesség a metszőfogak mögött ($I_3$) mérve.

Az első méret a honfoglaláskorabeli magyar lovon a koponyaalaphosszúság 36·7%-a (36·1, 38·6, 35·0, 36·6, 36·6, 37·2), arab ló koponyáján 39·2%, a PRZEWALSKI-féle vadlovon 38·1%, míg a kladrubi lovon csupán 35·4%-ot tesz ki.

A foramen infraorbitale-k között mért szélesség a honfoglaláskorabeli magyar lovon 18·1%, arab lovon 17·2%, kladrubin 15·2%-át teszi a koponyaalaphosszúságnak. A tarpánra és a PRZEWALSKI-féle vadlóra vonatkozólag nem áll adat rendelkezésünkre, de a fentiekből is kitűnik a honfoglaláskorabeli magyar ló nagy relativ orrszélessége a nyugati fajtacsoportéval szemben. E megállapításunkat megerősíti még az orrszélesség, amely a honfoglaláskorabeli magyar lovakon 13·2% (13·0, 12·0, 14·5, 14·2, 12·6, 12·6), arab ló koponyáján 13·3%, tarpánén 14·9%-át teszi a koponyaalaphosszúságnak. A PRZEWALSKI-féle vadlovon feltűnően magas értéket, 15·4%-ot, mint különös jellegzetességet állapított meg SALENSKI (8).

ADAMETZ (2) a vadlovakon (tarpan, E. Przewalski) észlelt nagy relativ orrszélességet a szabad élethez való alkalmazkodás következményének tekinti. A háziasított lovon a keskenyebb orrforma valószerűleg az orrtájékon alkalmazott szerszámok (kantár, orrszíj, zablya) nyomására keletkezhetett.

A foghíjjas szél legszűkebb helyén mért, úgynevezett diastemaszélesség a vizsgált honfoglaláskorabeli magyar lovak koponyáján 8·8%-ot tesz ki, arab lovon és Veglia-ponnyn kereken 9·0%-a a koponyaalaphosszúságnak.

Az utolsó molaris ($M_3$) külső szélei között mért szélesség a koponya alaphosszúságához viszonyítva a honfoglaláskorabeli magyar lovon 24·9%; arab lovon 24·2%-ot, kladrubin pedig 20·2%-ot állapítottak meg.

## Összefoglalás.

A vizsgált honfoglaláskori lókoponyák meglehetősen *egységesek*, annak ellenére, hogy különböző, egymástól távoleső helyekről származnak. E körülmény arra utal, hogy a honfoglaló magya-

rok már *jól kitenyésztett*, konstans lóállománnyal rendelkeztek, ami értelmezhető abból is, hogy a magyarság már a Krisztus előtti második évezredben lovas nép volt. A honfoglalásig eltelt évezredek alatt Európa keleti szélén vándoroltak: a mai Észak-Oroszországból, az Ural nyugati lejtőiről a Kaukázus felé vonultak, ahol a Kr. sz. utáni VI—VIII. században éltek, innen a Don és a Dnyeper vidékére, Lebédiába, majd a mai Moldva és Besszarábia területére, Etelközbe húzódtak, míg végül 896 körül hazánk mai területére nyomultak. Kétségtelen, hogy a vándorlások ideje alatt lóállományuk többszörösen keveredhetett idegen elemekkel, keleti karakterét azonban mindvégig megtartotta.

A feldolgozott honfoglaláskori koponyákból a magyar ló *keleti származása* kétségtelen bizonyossággal megállapítható. Erre utal az aránylag rövid és kissé széles koponya, a profilvonal alakulása, mely a keleti származásra jellemző «csukafej»-formát tünteti föl. Fontosabb ismertetőjelei még a keleti származásnak: az agykoponya erősebb fejlettsége, a parietale-k kupolaszerű boltosodása, a szélességi méretek viszonylagos magas értékei, az orbiták köralakú formája.

A keleti származás mellett azonban a közölt számszerű adatok arra is engednek következtetni, hogy a honfoglaláskorabeli magyar ló ősei között egyéb keleti lófajtákon kívül, legfontosabb a PRZEWALSKI-féle vadló. E tényt bizonyítja többek között a NEHRING-féle I. index, amely csaknem teljesen megegyezik az Equus Przewalskin és a honfoglaláskorabeli magyar lovak koponyáin. (PRZEWALSKI: 232·3—244·8, magyar ló 232·3—244·8%.) Ezenkívül még számos méret viszonylagos egyezése, illetőleg közelálló értéke támogatja e megállapítást.

HANKÓ a bevezetésben említett értekezésben a honfoglaláskorabeli magyar ló eredeténél a *tarpan*nak tulajdonít elsőrendű jelentőséget, míg a PRZEWALSKI-féle vadló, melyet *taki*nak nevez, szerinte csak kismértékben szerepelt annak keletkezésénél, annál is inkább, mert szerinte a taki a nyugati, úgynevezett «hidegvérű» lovak ősének tekintendő. Ez utóbbi állítást azonban semmi sem bizonyítja, mert a PRZEWALSKI-féle vadlovat valamennyi szerző keleti származásúnak tekinti. ADAMETZ (2) ugyan megemlíti, hogy az Equus Przewalski egy olyan sorozat kezdetén áll, amelyből az

Equus Germanicus származott, azonban mégis a keleti fajtacsoportba sorozza.

Azt, hogy a honfoglaló magyarok *eredetileg* milyen lóállománynyal rendelkeztek, nem lehet megállapítani, de feltehető, hogy vagy már kezdetben PRZEWALSKI-féle vadlovak voltak birtokukban, vagy pedig később, vándorlásaik során keveredett az eredeti, mindenképpen *keleti* származású lóállomány a PRZEWALSKI-féle vadlóval úgy, hogy ennek hatása a honfoglaláskor domináló volt.

## Irodalom.

1. ADAMETZ: Untersuchungen über Abstammung und Rassengehörigkeit des altspanischen Pferdes Kladruber Zucht. Archiv der Lehrkanzel für Tierzucht an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Bd. I. 1922.

2. ADAMETZ: Die Abstammung der Pferderassen. STANG—WIRTH: Tierheilkunde und Tierzucht. Bd. I. 1932.

3. ANTONIUS: Was ist der Tarpan? Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. IX. 1922.

4. ANTONIUS: Über einige Quellen zur Frage der europäischen Wildpferde in historischer Zeit. Zeitschrift für Züchtung. Bd. 27. 1933.

5. BESSKÓ: A honfoglaló magyar nemzet lovairól. Budapest, 1906.

6. DOBSA: Az emberi agykoponya üregnagysága és térbeli három mérete. Budapest, 1903.

7. DUERST: Vergleichende Untersuchungen am Skelett der Säuger. Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. Abt. VII. H. 2. 1926.

8. DUERST—WILKENS: Naturgeschichte der Haustiere. Leipzig, 1905.

9. ECKHART: Magyarország története. Budapest, 1935.

10. FRANCK: Ein Beitrag zur Rassenkunde unserer Pferde. Landwirtschaftliches Jahrbuch. 1874.

11. HANKÓ: A magyar ló eredete. Debrecen, 1935.

12. HÓMAN—SZEKFŰ: Magyar történet. II. kiadás. I. kötet.

13. NEHRING: Fossile Pferde aus deutschen Diluvialablagerungen. Landwirtschaftliche Jahrbücher, 1884.

14. MAREK: Das helvetisch-gallische Pferd. Zürich, 1897.

15. TÖRÖK: Grundzüge einer systematischer Kraniometrie. Stuttgart, 1890.

16. WELLMANN: Általános állattenyésztéstan. Budapest, 1921.

17. ZIMMERMANN: Háziállatok anatomiája. II. kiadás, 1923.

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1936. jan. 13-án tartott üléséből.)

# KRANIOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE PFERDE DER UNGARN ZUR ZEIT DER LANDNAHME.

Von DESIDER NAGY.

Über die Abstammung der ungarischen Pferde besitzen wir zwei Arbeiten von BESSKÓ und HANKÓ, die beide diese Pferde als von orientalischer Herkunft abstammend betrachten, doch BESSKÓ lässt sie von dem *mongolischen* Zweig der orientalischen Rasse herkommen, während HANKÓ ihre Vorfahren in dem *Tarpan* angiebt, der später ein wenig mit dem *Wildpferde Przewalski* sich mischte. Da diese Untersuchungen sich nur auf wenige Exemplare beziehen, deshalb schien es angebracht weitere Untersuchungen diesbezüglich vorzunehmen.

Im Besitz des *Veterinär-anatomischen Universitätsinstitutes in Budapest* gelangten sechs mehr-minder guterhaltene Pferdeschädel (siehe die Abbildungen 1—12) aus den *Museum in Szeged* und dem *Anthropologischen Institut* der *Pázmány*-Universität Budapest, erstere stammen aus den Ausgrabungen bei *Szeged*, letztere von jenen in *Pestszentlőrinc*, sämtliche aus ungestörten ungarischen Grabfunde von der Zeit der Landnahme.

An diesen sechs Schädeln wurden nach den von TÖRÖK, ADAMETZ und DUERST beschriebenen Verfahren, an den vier Normen des Schädels und des Unterkiefers je 63 verschiedene Masse aufgenommen und nach NEHRING die entsprechenden Indizes bestimmt.

Trotzdem die Pferdeschädel von entfernten Orten herstammten, zeigen sie einen ziemlich einheitlichen Karakter, welcher Umstand darauf hinweist, dass die landerobernde Ungarn bereits über einen wohlausgezüchteten, konstanten Pferdebestand verfügten. Das Ungartum war nämlich schon vom Anfang ein Reitervolk und wenn ihre Pferde während ihrer heimatsuchenden Wanderungen über den Ural und Kaukasus, dann beim Don und Dnyeper, in Lebedia, in Etelköz, der jetzigen Moldau und Bessarabien endlich im 896 in das heutige Ungarn gelangend, sich mehrfach mit fremden

Blut kreuzten, bewahrten sie dennoch bis am Ende ihren *orientalischen* Karakter. Dieser konnte an den untersuchten Pferdeschädeln unzweifelhaft sicher bestimmt werden. Darauf weist hin der verhältnismässig kurze und etwas breite Schädel, weiters die Profillinie, die für die orientalische Abstammung charakterische Formation des sogen. Hechtkopfes aufweist. Weitere bedeutende Zeichen der orientalischen Abstammung sind die stärkere Entwicklung des Hirnschädels, die kuppelartige Wölbung der Scheitelgegend, die relativ hohe Werte der Breitenmasse, die rundliche Form der Augengruben u. A.

Die gefundenen kraniometrischen Massen weisen neben der orientalischen Abstammung noch näher darauf hin, dass zwischen den Vorfahren der ungarischen Pferde eine hervorragende Rolle unter Anderen dem *Wildpferd-Przewalski* zukommt, denn der *Index Nehring* I. stimmt beinahe vollkommen überein bei den untersuchten ungarischen Pferdeschädeln und den *Equus Przewalski* (bei letzteren 232·3—244·9%, bei den ungarischen Pferde 232·3—244·8%). Ausser diesen bekräftigen noch mehrere andere bedeutende gleiche oder nahestehende Befunde diese Feststellung.

Nach HANKÓ soll dem Tarpan eine grössere Bedeutung bei der Abstammung der ungarischen Pferde aus der Zeit der Landnahme zukommen, während das *Wildpferd-Przewalski*, welches er als *Taki* bezeichnet, nach ihm einen ganz geringen Einfluss darauf ausübte; umsoweniger konnte das zutreffen, da HANKÓ den Taki für den Vorfahren der westlichen «Kaltblutpferde» ansieht. Demgegenüber stimmen alle übrigen Autoren darin ein, dass das PRZEWALSKIsche Wildpferd orientalischer Abstammung sei.

Der ursprüngliche Pferdebestand des heimatsuchenden Ungarvolkes lässt sich zwar nicht ganz sicher bestimmen, doch kann man mit Recht annehmen, dass sie anfangs im Besitze von PRZEWALSKIschen Wildpferden waren, oder aber später während ihrer Wanderungen ihre ursprünglich, allerdings orientalische Pferdebestände im beträchtlichen Masse sich mit den *Wildpferden Przewalski's* kreuzten, sodass dessen Einwirkung zur Zeit der Landnahme dominant erscheint.

---

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Januar 1936.)

# FŐDOLOMIT ÉS DACHSTEINMÉSZKŐ FAUNÁK A BUDAI HEGYSÉGBŐL.

KUTASSY ENDRÉ-től.

A XI—XIII. táblával.

Az 1927-ik évben megjelent s a budavidéki triász sztratigráfiáját és paleontológiáját tárgyaló értekezésemen kívül[1] néhány évvel ezelőtt már egy újabb dolgozat megjelentetése vált szükségessé a jelentékeny újabb gyüjtések ismertetése céljából.[2] A legújabb gyüjtések ismételten annyi értékes sztratigráfiai és paleontológiai újdonságot szolgáltattak és annyira fontos bizonyítékokat szolgáltatnak első sztratigráfiai megállapításaim helyessége mellett, hogy ezek közzététele feltétlenül szükségesnek mutatkozik.

Az újdonságok sorában jelentékeny szerep jut egy fődolomit lelőhely feltalálásának. Ezt az új, a Sashegy K-i oldalán levő lelőhelyet LEVATICH GYULA dr. úr találta és faunájának jelentékeny részét is ő gyüjtötte be. Értékes anyagának átengedéséért ezúton is leghálásabb köszönetemet nyilvánítom. Hasonlóan köszönetet kell nyilvánítanom JASKÓ SÁNDOR dr. egyetemi tanársegéd úrnak jelen értekezésem táblarajzainak elkészítéséért, valamint BARTKÓ LAJOS és KEREKES JÓZSEF egyetemi gyakornok uraknak, akik a dachsteini mészkőfauna begyüjtésénél szorgalmas segítőtársaim voltak.

Az új anyag feldolgozása a következő sztratigráfiai és paleontológiai következtetéseket eredményezte.

---

[1] KUTASSY E.: Beiträge zur Stratigraphie und Paläontolgie der alpinen Triasschichten in der Umgebung von Budapest. (M. kir. Földtani Int. Évkönyve Bd. XXVII. 1927.)

[2] KUTASSY E.: Újabb adatok a budapestkörnyéki dachsteinmészkő faunájának ismeretéhez. (Magy. Tud. Akadémia Mat. és Természettud. Értesítője XLIX. kötet. 1932.)

## I. Fődolomit.

A fődolomit sztratigráfiai helyzetére vonatkozó felfogásomat 1927-ben megjelent értekezésemben fektettem le, ahol a kövületek és a települési viszonyok alapján a diploporás dolomitokat a ladini és karni emelet határára, a Gellért-hegy, Kis Gellért-hegy, Sashegy stb. dolomitrögeit a karni emelet felső részébe helyeztem (l.p.11—13) kijelentve azonban, hogy a Budai-hegységben minden egyes rög faunáját külön kell megvizsgálnunk, mert csak úgy vonhatunk végleges következtetést az egyes rögök sztratigráfiai helyzetére. Az elmult év folyamán ez a felfogásom be is igazolódott, amennyiben Vigh a Hármashatárhegycsoportban egy lelőhelyen a fődolomitban nori emeletre utaló kövületeket talált,[3] ami azt bizonyítja, hogy a dachsteinmészkőhöz hasonlóan a fődolomit is egyaránt előfordul úgy a karni, mint a nori emeletben. Teljesen téves azonban Vighnek az a kijelentése, hogy én az elkülönítésnél csak a ladini és karni emeletre gondoltam, mert az idézett helyen általános megállapításról van szó és szó sincsen szűkre szabott szintekre való utalásról. (l. cit. p. 6—7, ritkított szedés.)

A legújabb gyüjtések a Gellért-hegy—Sashegy csoportra vonatkozólag, az eddigieknél is fontosabb bizonyítékot szolgáltattak az említett rögöknek a karni emeletbe tartozása mellett. Az innen kikerült faunában a következő alakokat találjuk :

*Gastropodák.*

*Euomphalus* sp. ind.
*Neritopsis ornata* Münst. var. *plicata* Münst.
*Purpuroidea* cf. *cerithiformis* Kittl.
*Coelostylina ornata* Kittl.
*Omphaloptycha turris* Stopp.
*Zygopleura modesta* Kittl nov. var. *angulata*
*Stephanocosmia (Tyrsoecus) dolomiticus* Kittl.

*Lamellibranchiaták.*

*Pecten discites* Schloth.
*Cuspidaria gladius* Laube.
*Cornucardia hornigi* Bittn.
*Megalodus carinthiacus* Hauer
*Megalodus Böckhi* Hörn. nov. var. *latiumbonata.*

[3] Vigh Gy.: Neuere Triasfunde im ungarischen Mittelgebirge. (Neues Jahrb. für Mineralogie etc. Beil. Bd. LXXII. Abt. B. 1934.)

A csigák túlnyomórészt jó megtartású lenyomatokban maradtak meg, míg a kagylók a *Cornucardia hornigi* Bittn. egyik példánya kivételével mind kőbelek.

Ez a fauna kétségtelen bizonyítéka a fent nevezett helyen előforduló fődolomitrögök felsőkarni korának. A Gastropodák éppúgy, mint a dachsteinmészkőben, esino és st. cassiani fajok vagy azok közeli rokonalakjai. A kagylók sorában azonban olyan alakok fordulnak elő, amelyek határozott szintjelző fontosságúak. A Cornucardia-genusz kizárólag a karni emeletre szorítkozik s maga a *Cornucardia hornigi*, a Bakony-hegységben eredeti lelőhelyen a felső karni, tori emeletbe tartozó veszprémi márgákban található, másik eddig ismeretes lelőhelye, a heiligenkreuzi rétegekben szintén a tori emeletbe tartozik. A másik rendkívül jellemző alak a *Megalodus carinthiacus*, amely úgy a Bakonyban, mint az Alpokban az előbb említett fajjal együtt található. Nagy tömegekben való előfordulása (a Sashegyen és Kis Gellért-hegyen ez a faj valósággal kőzetalkotó) tehát csakis a karni emelet felső szintjére utalhat.

Szükségesnek tartom még, hogy ezen a helyen egy helyesbítést közöljek. 1927-ben Hoffman [4] munkája alapján a Budai-hegység fődolomitjából a *Megalodus triqueter* Wulf. fajt is közöltem a fauna felsorolásban. Megalodus-tanulmányaim során az osztrák, olasz és német gyüjtemények átvizsgálása révén rájöttem arra, hogy typusos *Megalodus triqueter* kizárólag csak a bleibergi lelőhelyen fordul elő, mindazok az alakok, amelyeket a gyüjteményekben más lelőhelyekről *M. triqueter* néven találtam, teljesen elütő fajok voltak. Sajnos, Hoffman eredeti gyüjtése nem található már fel s így újabb tapasztalataim alapján bizonyosnak tartom, hogy az általa *M. triqueter*nek határozott példány is egy más fajhoz tartozó alak lehetett. Ezt különben az a tény is bizonyítani látszik, hogy az újabban gyüjtött igen nagyszámú anyagban nyoma sincs a *M. triqueter*nek.

---

[4] Hoffman K.: A buda-kovácsi hegység földtani viszonyai. (M. kir. Földt. Int. Évkönyve I. kötet.)

## II. Dachsteinmészkő.

A régebben kövületnélkülinek tartott dachsteinmészkő fazekashegyi lelőhelyéről leírt karni és a remetehegyi lelőhelyről leírt nori fauna (1, 2.) gazdagsága, már első ízben olyan meglepő volt, hogy a fauna ilyen arányú gazdagodására, ami azóta bekövetkezett, nem is lehetett számítani. Sajnos, a legfontosab, a Remetehegy szurdokvölgyének K-i bejárata felett lévő kőbánya lelőhelye a jövőben már nem ígér további eredményeket, mert a kőbánya fejtését hatósági rendelkezésre véglegesen abbahagyták. Erről a lelőhelyről legújabb gyüjtések során a következő fauna került ki:

*Korallok: Thecosmilia* sp. ind.

*Gastropodák.*

*Worthenia infraornata* nov. sp.
*Worthenia inzini* Stopp. nov. var. *rotundocarinata*
*Worthenia gigas* nov. sp.
*Fossariopsis binodosa* Münst.
*Woehrmannia decorata* nov. sp.
*Hologyra cassiana* Wissm.
*Protonerita mandelslohi* Klipst.
*Naticella sublineata* Münst.
*Trachynerita quadrata* Stopp. nov. var. *acutiumbonata*
*Dicosmos sigaretoides* nov. sp.
*Telleria gigantea* nov. sp.
*Purpuroidea nassaeformis* Di Stef.
*Tretospira* cf. *fasciata* Kittl
*Palaeotriton globularis* nov. sp.
*Omphaloptycha bacchus* Kittl
*Omphaloptycha pupoides* Stopp.
*Omphaloptycha zitteli* Böhm.
*Omphaloptycha conica* Münst.
*Coelochrysalis rotundatus* nov. sp.
*Undularia (Toxoconcha)* cfr. *brocchii* Stopp.
*Stephanocosmia coronata* Kok.
*Stephanocosmia (Tyrsoecus) dolomiticus* Kittl
*Zygopleura arctecostata* Münst.
*Zygopleura* cf. *arpadis* Kittl

*Lamellibranchiata.*

*Pecten egidii-venantii* Tomm.
*Pecten (Chlamys) pygmaeus* nov. sp.
*Lima* sp.
*Myophoricardium lineatum* Woehrm.
*Myoconcha alata* nov. sp.
*Modiola gracilis* Klipst.
*Modiola norica* nov. sp.
*Lucina quadrata* Kutassy
*Macrodon juttensis* Bittn.
*Ctenodonta elliptica* Goldf.
*Nucula expansa* Wissm. nov. var. *abbreviata*
*Schafhäutlia* cf. *astartiformis* Münst.
*Pleuromya lata* Par. nov. var. *hungarica.*

*Cephalopoda.*

*Orthoceras lateseptatum* Hauer
*Orthoceras* cf. *celticum* Mojs.
*Megaphyllites jarbas* Mojs.
*Megaphyllites applanatus* Mojs.
*Megaphyllites noricus* nov. sp.
*Choristoceras (Peripleurites) rotundatus* nov. sp.
*Rhabdoceras Suessi* Mojs.

Az itt felsorolt fajokon kívül természetesen nagy számban találtam a régebben leírt fajok újabb példányait is.

Ha a fauna állatcsoportok szerinti számbeli eloszlását tekintjük, a régebben ismertetett alakokkal együtt a Remetehegy nori mészkövéből kikerült fajok száma a következő képet mutatja:

| | |
|---|---|
| Korallok | 1 |
| Hydrozoák | 1 |
| Cephalopodák | 14 |
| Lamellibranchiaták | 31 |
| Gastropoda | 58 |

A nori dachsteinmészkőből tehát ezideig összesen 105 állatfaj került ki, míg a mélyebb szintbe sorolt (1) fazekashegyi dachsteinmészkőből, a közös fajokat nem számítva, 12 faj.

Mindezek alapján kitűnik, hogy a budai dachsteinmészkő a mediterrán triász provincia eddig ismert leggazdagabb nori dachsteinmészkő kövületlelőhelye. Fajgazdagság szempontjából csak a keletalpi St. Annai nori dachsteinmészkő és a bakonyhegységi raetiai dachsteinmészkő hasonlítható vele össze.

A faunaelemek között a korallok ritkasága természetesen csak látszólagos, hiszen a dachsteinmészkövet főleg korallzátonymészkőnek kell tekintenünk, azonban a diagenetikus folyamatok során a finomszerkezetű korallvázak teljesen átkristályosodtak. Ezt bizonyítja az a körülmény is, hogy bár számos korallnyomot találunk, egyetlen esetben sem sikerült a csillagléceket csiszolatban tanulmányozni.

Mint a régebbi gyüjtések során, úgy most is a fauna túlnyomórészét a csigák teszik. A csigák fordulnak elő nemcsak a legnagyobb faj, hanem egyedszámban is. Egyes fajok több száz példányban találhatók. (Hungariella, Trachynerita, Coelostylina.) Egyébként a csigafauna rokoni kapcsolatai ugyanazt a képet mutatják, mint a régebbi

megállapítások. A csigafauna elemei az esino, marmolata, st. cassiani faunák alakjai vagy azok legközelebbi rokonai sorából kerülnek ki, bizonyítékául annak az általam több ízben hangoztatott ténynek, hogy a fentnevezett faunák igen hosszú életűek voltak (természetesen a triászban is vannak a csigák sorában határozott szintjelző alakok, mint pl. a *Naticella costata*, amely csak a campili emeletben vagy pl. a *Worthenia contabulata* (= *Turbo solitarius*), amely csak a norikumban fordul elő).

Lényegesen gyarapodott a kagylók fajszáma. Ebben a csoportban hasonló a helyzet, mint a csigáknál, a faunában szintén a marmolata, esino és st. cassiani elemek uralkodnak. Kizárólag a norikumra szorítkozó faj a *Pesten egidii-venantii* Tomm.

Sztratigráfiailag legfontosabb csoport a Cephalopodák osztálya. A *Rhabdoceras suessi* és a *Rhacophyllites neojurense* jelenléte és gyakorisága alapján már az eddigi vizsgálatok során is kétségtelen volt a budai dachsteinmészkő nori kora. Újabb bizonyíték erre az *Orthoceras lateseptatum*, amely a hallstatti nori mészkő egyik gyakori alakja, valamint a *Peripleurites*-genusz előfordulása, amely utóbbi genusz ezideig csak kizárólag a nori emeletből ismeretes. Ezeken kívül néhány olyan faj is előfordul, amely az alpi felsőkarni emeletben található meg és megvan a fazekashegyi, felsőkarni emeletbe sorolt dachsteinmészkőben is. A legelső gyüjtések alkalmával a Remetehegy faunájában alig szerepeltek a Cephalopodák s a Fazekashegy gazdag Cephalopoda faunájával más, eltérő faciesben lerakódott üledéknek tűnt fel. Azóta kitűnt, hogy a Cephalopodák a Remetehegyen is éppoly gyakoriak. Ezzel a körülménynyel kapcsolatban felötlik az a kérdés is, hogy nem volt-e téves az a feltevés, hogy a fazekashegyi fauna mélyebb szint üledéke? Erre a kérdésre határozottan nemmel felelhetünk. A Remetehegy igen gazdag Cephalopoda faunájában ugyanis nyoma sincs a karni emeletre határozottan jellemző Discotropites-, Styrites-, Thisbites-genuszoknak, melyek a Fazekashegy faunájában gyakoriak, ahol viszont a Rhabdoceras nem fordul elő.

A faunában előforduló Woehrmannia-, Tretospira-, Palaeotriton-genuszokat eddig a magyarországi triászból egyáltalán nem ismertük. A már említett alpi rokonfaunákon kívül legszorosabb a kapcsolat a lombardiai és sziciliai fődolomitfaunákkal, így pl. a

*Worthenia inzini, Purpuroidea nassaeformis, Pecten egidii-venantii, Pleuromia lata* fajokat kizárólag csak Lombardiából és Sziciliából ismertük. Legszorosabb a kapcsolat természetesen a nemrégen ismertetett karinthiai st. annai nori dachsteinmészkő-faunával,[5] amelyben több olyan genusz is előfordul, amelyet egyébként csak a budai noricumból ismerünk (Hungariella, Parangularia, Seisia).

## ŐSLÉNYTANI RÉSZ.

### A fődolomit kövületei.

#### Gastropodák.

**Euomphalus sp.** indet. XI. tábla, 1. ábra.

Egy teljesen lapos spirájú héj három példányban is előfordul, úgy kőbél, mint lenyomat alakjában. Spirája négy kanyarulatból áll, sajnos, azonban a díszítésnek semmi nyoma nem látszik és csak apicalis része emelkedik ki a kőzetből. Faji azonosításra semmi támpontot nem nyujt, pusztán azért tartom fontosnak megemlítését, mert úgy látszik, elég gyakori alak.

**Neritopsis armata** Münst var. **plicata** Münst. XI. tábla, 2. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica* p. 94.

Ez a jellemző díszítésű Neritopsis-faj kisebb-nagyobb példányokban, úgy kőbél, mint lenyomat alakjában egyik leggyakoribb faja a sashegyi lelőhelynek. Kittl ábráival (Kittl: Gastropoden v. St. Cassian II.) és leírásával annyira egyező, hogy morfológiai jellegei szempontjából semmi újabb megjegyzésre nincs szükség.

**Purpurina cf. cerithiformis** Kittl. XI. tábla, 3—4. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica* p. 117.

Lenyomatokban igen gyakori a Sashegy fődolomitjában. Bár a hosszirányú, finomabb díszítő elemek lekoptak, a ház alakja és a harántirányú díszítés alapján a faji azonosság igen valószínű. Az egyenes laterális rész és a kissé lejtős apikális oldal, főleg pedig a felső laterális peremen húzódó, úgy az apikális, mint a laterális

[5] Kutassy E.: A nori dachsteinmész faunája Szt. Annán Neumarktl közelében. (Felső-Krajna.) (Földtani Közlöny Bd. LXIV. 1934.)

rész felé egyaránt megnyúlt erős csomósor, kétségtelenül erre a fajra utalnak.

Egyetlen eltérés abban nyilvánul meg, hogy KITTL szerint az alsó laterális taraj gyengén fejlett, míg itt az egyik lenyomaton meglehetősen erősen jelentkezik. A jellemző hosszirányú díszítő elemek hiánya ellenére is a faji azonosságot csaknem bizonyosnak tekinthetjük.

Ez a faj a st. cassiani karni emeletben fordul elő. A genusz horizontális elterjedése igen nagy, mivel egy igen közelálló alak a *Purpurina subcerithiformis* KRUMBECK a buruszigeti (indonéziai) norikumban fordul elő.

**Coelostylina nodosa** KITTL. XI. tábla, 5. ábra. 1925. DIENER: *Glossophora triadica* p. 158.

A Sashegy fődolomitjának leggyakoribb alakja, de csak jómegtartású lenyomatokban van meg. Háza lépcsőzetes, mély varratokkal, apikális és bazális peremén csomósor helyezkedik el. Egy fél kanyarulaton 5—6 lapos csomót számolhatunk meg. Az alsó csomósor csak a legutolsó kanyarulaton van meg, mivel a fiatalabb kanyarulatok alsó részét a következő kanyarulat elfedi. A díszítés szempontjából közelálló *Omphaloptycha Rosthorni* HOERN. fajtól a budai példányok is jól elkülöníthetők, mert míg ott egy fél kanyarulaton 8—9 csomó van, addig itt, amint már említettem, 5—6. (KITTL példányainál egy teljes kanyarulaton 11.) Bár a budai példányok spirája KITTL ábráinál hegyesebbnek látszik s ezáltal az *O. Rosthorni* HOERN. fajhoz közeledik, mégis a kanyarulatok erősebben lépcsőzetes kialakulása és az alsó csomósor hiánya alapján a st. cassiani fajhoz kell csatolnunk.

Ugyancsak itt kell megemlékeznem egy sajátságos alakról (XI. tábla, 6. ábra), amely szintén több példányban előfordul és lépcsőzetes kanyarulataival, apikális peremét díszítő csomósorával szintén erre a fajra emlékeztet. Azonban apikális része teljesen lapos, bazális peremén nincsenek csomók s az apikális perem csomóinak száma legalább kétszer annyi, mint a *C. nodosa* KITTL-nél. Nagyon valószínű, hogy ezek a példányok új fajt képviselnek, rossz megtartási állapotuk alapján azonban nem vonhatunk végleges következtetést.

Hogy a *Coelostylina nodosa* faj tényleg a Coelostylina genuszba tartozik-e, ahová KITTL is csak feltételesen helyezte, azt a budai lenyomatok alapján eldönteni nem lehet. Mindenesetre szisztematikai helyzete igen kétséges, mert más csomókkal díszített Coelostylinát nem ismerünk.

**Omphaloptycha turris** STOPP. XI. tábla, 7—8. ábra. 1925. DIENER: *Glossophora triadica* p. 185.

Ez a faj az alpi ladini emeletben és a német kagylósmészben egyaránt előfordul és igen jól jellemezhető alak. A sashegyi fődolomitban egy kőbél és számos lenyomat képviseli, amelyek mindegyike nagyon jól mutatja a faji bélyegeket. Az azonosság különösen ASSMANN (ASSMANN, P.: Die Gastropoden der oberschlesischen Trias p. 36. III. tábla, 42—43. ábra) ábráival szembetűnő. Kanyarulatai laposak, lépcsőzetesek, úgyhogy az idősebb kanyarulatok az előttük levőhöz viszonyítva kiugrók.

ASSMANN idézett helyen ezt a fajt új névvel *O. Kittl*inek nevezte el, mivel szerinte ez a faj azonos lenne az *O. turris* GIEBEL fajjal. Így tehát, mivel GIEBEL a *Natica turris*t 1856-ban, STOPPANI pedig az *Eulima turris*t 1857-ben nevezte el, ezért a prioritás alapján GIEBEL szerzőségét kellene megtartanunk és STOPPANI faját új néven nevezni. A GIEBEL-féle faj azonban nem *Omphaloptycha*, hanem *Coelostylina*, így tehát mindkét fajnál megmaradhat a *turris* név, mivel két különböző genuszba tartoznak.

**Zygopleura modesta** KITTL nov. var. **angulata.** XI. tábla, 9. ábra.

Spirája kihegyesedő, kanyarulatai szélesek. A kanyarulatok haránredői erősen fejlettek és nagyszámúak. Egy fél kanyarulaton nyolc erős harántredő van. A harántredők erőssége és nagy száma alapján ezt a fajt kizárólag a *Loxonema modestum* KITTL fajjal hozhatjuk kapcsolatba. (KITTL: Gasteropoden a. d. Trias des Bakonyerwaldes. p. 27· II. tábla, 14. ábra.) Míg azonban az említett fajnak csak alsóbb kanyarulatai szögletesek s fiatalabb kanyarulatai teljesen laposak, addig a budai példánynál a fiatal kanyarulatok is éppoly szögletesek, mint az idősebbek, azonkívül jóval alacsonyabbak is, mint a *Loxonema modestum* fiatal kanyarulatai.

Az erős harántredők alapján természetesen az alapforma nem hagyható a *Loxonema*-genuszban, hanem a Zygopleurák közé kell sorolnunk.

Csak lenyomatban fordul elő, egy példányban.

**Stephanocosmia (Tyrsoecus) dolomiticus** KITTL juv. XI. tábla. 10. ábra.

A *Coelostylina nodosá*val együtt leggyakoribb alakja a Sashegy fődolomitjának. Szintén csak lenyomatban van meg. Rendkívül érdekes, hogy míg a budai nori dachsteinmészkőben csak senilis alakokban fordul elő, addig a fődolomitban kizárólag csak embryonális kanyarulatokban található meg. Úgy alakja, mint díszítése annyira tökéletesen egyezik KITTL ábráival, hogy bővebb leírás helyett ezeket a példányokat is ábrázolom.

## Lamellibranchiaták.

**Cuspidaria gladius** LAUBE. XI. tábla, 11. ábra. 1923. DIENER: *Lamellibranchiata triadica* p. 245. 1931. KUTASSY: *Lamellibranchiata triadica* II. p. 425.

Ez a faj ezideig csak a karni emeletből ismeretes, földrajzilag azonban a mediterrán triásztenger területén rendkívül elterjedt, amennyiben a Déli-Alpokon kívül Montenegróból és Perzsiából is előkerült. Nálunk a bakonyi karni emeletben ismertük eddig. A sashegyi fődolomitlelőhelynek egyik leggyakoribb alakja. Túlnyomórészt a hosszú teknő hátsó elvékonyodó darabjának töredékei fordulnak elő igen gyakran, kikerült azonban egy példány, amelyen a mellső rész is megmaradt. A búb alakja és helyzete alapján semmi kétségünk sem lehet, hogy a budai példány azonos ezzel a fajjal, bár csak kőbelek maradtak meg. Ezen a példányon, (amely, mint az összes többi töredék is, mindkét teknőt megőrizte) jól látható, hogy a teknők mellső részén szorosan összecsukódnak, míg a hátsó rész felé fokozatosan tátongóbbak lesznek. A héj elkeskenyedő részleteit megőrző számos töredéken jól látható a héj háti részén, a hátsó perem felé húzódó radiális depresszió nyoma. Érdekes, hogy a budai példányok úgy nagyságban, mint szélességben minden bizonnyal felülmúlták az alpi példányokat,

sajnos, azonban a töredékekből egy teljes példányt sem sikerült összeállítani. Némelyik töredéken úgy látszik, mintha a növedékvonalak erősebb redők formájában jelentkeztek volna, mint az alpi példányoknál, nem szabad azonban elfeledkeznünk arról, hogy mint BITTNER említi (BITTNER: Lamellibranchiaten v. St. Cassian p. 4) ott is egyes példányoknál gyengébbek, más példányoknál erősebbek a növedékvonalak. Ez a jellemvonás semmiesetre sem ok arra, hogy az egyébként annyira egyező budai példányokat az alpiaktól elválasszuk.

**Megalodus carinthiacus** HAUER. XI. tábla, 12 *a.*, *b.* ábra.
1934. KUTASSY: *Pachyodonta mezozoica* p. 29.

A lapos oldalú, gyengén egyenlőtlen teknőjű példányok, magasra emelkedő hátsó peremükkel és kicsi, be nem csavarodó búbcsapjukkal feltétlen ennek a fajnak az alakkörébe tartoznak. Ezt a fajt már a Kis Gellért-hegy dolomitjából is említettem (KUTASSY: Beiträge zur Stratigraphie etc. p. 26. I. tábla, 4*a*—*b*. ábra), ahol szintén igen gyakori. A sashegyi fődolomitban szintén igen nagy számban fordul elő, különösen apró példányokban, melyek között fokozatos átmenet kapcsolja egybe a lapos, megnyúltabb héjú és alacsonyabb, valamint a rövidebb, de magasabb és vaskosabb teknőjű példányokat. Mindezek az alakok tökéletesen egyeznek azokkal a példányokkal, melyeket kéziratban levő Megalodus-monografiám készítése során a Raibl melletti Mittelbreth, valamint a lombardiai Dogna raibli márgáiból százszámra megvizsgáltam.

**Megalodus böckhi** HÖRN. nov. var. **latiumbonata.** XI. tábla, 13 *a.*, *b.* ábra.

A typusos *M. Böckhi* példányon kívül egy apró Megalodus is előfordul a Sashegy fődolomitjában, amely azonban néhány jellegzetes vonásban eltér az alapformától.

A héj alakja magas és rövid. Lunulája magas, búbcsapjai rövidek, teknői és búbcsapjai kis mértékben aszimmetrikusak. Ezek az általános jellemvonások egyeznek az alapformával. Ezzel szemben eltérés nyilvánul meg a búbcsapok jóval tompább és szélesebb alakjában, a teknők erősebb domborodásában, úgyhogy az egész alak jóval vaskosabbnak látszik. A búbcsapok aszimmetriája ezen a varietáson kisebb mérvű, mint az alapformánál, ugyanígy a

balteknő is csak kevéssel domborúbb, mint a jobbteknő. Az arealis perem határozott. Az area széles, lapos és a teknők kifejlődésének megfelelően aszimmetrikus. Lunulája szívalakú, jól határolt.

A mellső izomlenyomata kerekded s a záros perem alatt fekszik, épp úgy, mint a *M. böckhi* és *seccói* fajoknál.

Mindezek alapján kétségtelen, hogy a sashegyi példány a *M. böckhi* Hörn. faj legközelebbi rokonalakja, fent vázolt eltérései alapján azonban az alapformától feltétlenül el kell különítenünk.

**Cornucardia hornigi** Bittn. XI. tábla, 14 *a*., *b*. ábra. 1934. Kutassy: *Pachyodonta mesozoica* p. 65.

A veszprémi Jeruzsálemhegy felső karni márgáinak ez a faj egyik legjellemzőbb alakja. A Sashegy fődolomitjában egy fiatal héjas példány és egy embrionális kőbél fordul elő. A héjas példány spirálisan becsavart búbjával tökéletesen egyezik ezzel a fajjal. Oldali része jóval erősebben domborodik, mint azt Bittner ábráin látjuk, ami azonban nem jelent faji eltérést, mert az eredeti lelőhelyről számos összehasonlító példány áll rendelkezésemre és a fiatal példányok teknői azoknál is kivétel nélkül erősen domborodók. Éppen ezért minden kétség nélkül ide sorolhatjuk azokat az erősen domborodó fiatal alakokat is, amelyeket Koken a heiligenkreuzi karni rétegekből írt le. (Koken, E.: Beiträge z. Kenntn. d. Schichten v. Heiligenkreuz p. 34. IV. tábla, 9—11. ábra.)

Hasonlóan tökéletes egyezést tüntet fel a másik embrionális példány is úgy a búb becsavarodásában, mint az areális rész kialakulásában.

Előfordul két példányban.

## A dachsteinmészkő kövületei.

### Korallok.

**Thecosmilia** sp. ind. XI. tábla, 15. ábra.

Korallok keresztmetszetei meglehetősen gyakoriak a budai dachsteinmészkőben, mindezideig azonben még egyetlen példányt sem sikerült találni, amelyiknél a csillaglécek szerkezete megvizsgálható lenne. A legújabb gyüjtések során egy 60 mm szélességű és mintegy 60 mm magasságú teleptöredék került ki, melynek

csaknem felerészét csíszolatokhoz használtam fel. A teljes átkristályosodás következtében azonban sem a hossz-, sem a keresztcsiszolatokban a csillagléceknek semmi nyoma sem látszik s így csak a külső morfológiai jellegek vizsgálhatók meg.

Az egyes kelyhek 5—6 mm átmérőjűek, csaknem mindig párhuzamosan haladnak és különböző magasságban dichotomikusan elágaznak, anasztomizáló csöveknek azonban semmi nyoma sincs. Az epitheka erősen és meglehetősen sűrűen ráncolt. A felső triász korallfauna alakjai között leginkább a *T. chlathrata* Emmr. fajhoz hasonlíthatnánk, melynél az északolaszországi példányok között (Stoppani: Couch. Avicula contorta 24. tábla, 1—4. ábra *Rabdophyllia Menenghinii*) találunk hasonlóan ráncos epithékájú alakokat, ahol azonban a barázdák sokkal mélyebbek, anasztomizáló csöveket azonban itt sem találunk, éppúgy, mint Arthabernek a *Lethaea geognostica* II. 1. kötetének 42. tábláján közölt ábráján sem, bár Frech ezt a jelleget, mint állandót említi meg. (Frech: Palaeontographica XXXVII. köt. p. 15.) A csillaglécek vizsgálata nélkül, sajnos, csak annyit állapíthatunk meg, hogy ez a példány minden valószínűség szerint a *Thecosmilia*-genuszba tartozik. A *T. chlathrata* bizonytalan megtartású példányai már eddig is ismeretesek a nori emeletből az indonéziai triászból.

## Gastropoda.

**Worthenia infraornata** nov. sp. XII. tábla, 3—4. ábra.

Spirája alacsony, lépcsőzetes kanyarulatokkal, meredek laterális és keskeny, gyengén lejtő apikális résszel. Utolsó kanyarulata igen nagy és erősen domborodó. Apikális peremén síma, vékony taraj fut le, míg a laterális rész alsó oldalát ritkán elhelyezett, elmosódó csomókkal díszített taraj választja el az erősen domborodó bázistól. Laterális barázdája keskeny, egyetlen síma hosszbordával.

Az egyetlen alak, melyhez a triász Worthenia-fajai közül hasonlíthatnánk, a *Worthenia venusta* Münst. faj lenne. A nevezett fajnál azonban az utolsó kanyarulat legnagyobb átmérője az apikális tarajnál van, míg itt a legnagyobb átmérő a laterális és bazális rész peremén húzódó csomókkal díszített tarajnál talál-

ható meg. A legnagyobb átmérőnek ez a sajátságos helyzete adja meg ennek a fajnak egyik legfontosabb bélyegét. A másik legfontosabb bélyeg az alsó laterális taraj kialakulásában nyilvánul meg. Ezideig még nem ismeretes a triász Wortheniák között egyetlen faj sem, melynek apikális taraja síma lenne az esetben, ha az alsó laterális tarajt csomók díszítik. Köldöke jól látható, apró és igen szűk.

Előfordul egy példányban.

**Worthenia inzini** Stopp. nov. var. **rotundocarinata.** XI. tábla, 16—18. ábra.

Háza hat kanyarulatból áll, melyek szögletesek, lépcsőzetesek. A kanyarulatok oldali része a varrat felett meredeken emelkedő, míg a varratalatti apikális rész lejtős és a felső laterális taraj felett depresszió határolja. A laterális részen két taraj van. Az alsó tarajt két borda határolja, melyek közül a bazális részre eső borda erősebb, a laterális részre eső borda gyengébb. A bázison jól fejlett hosszbordák húzódnak. Hasonlóan síma hosszbordák díszítik a fiatalabb kanyarulatok apikális oldalának lejtős részletét is. (Az utolsó kanyarulaton ezek a bordák lekoptak.) Kanyarulatonként három ilyen hosszborda figyelhető meg. Belső ajak kissé kallózus, köldöke igen szűk.

Ez a leírás teljesen egyező a lombardiai dolomitokból származó *Worthenia inzini* Stopp. leírásával. Eltérés nyilvánul azonban abban, hogy a budai példány laterális része erősebben bemélyed és a felső laterális taraj lekerekített, holott a *Worthenia inzini*nél ez a taraj keskeny és kihegyesedő. Tommasi szerint (Tommasi: Revisione della fauna d. dolomia principale di Lombardia p. 114) a spira négy kanyarulatból áll, ez azonban nem tekinthető biztos megállapításnak, mert amint Tommasi ábráin látjuk, az ő példányain az embrionális kanyarulatokat nem lehetett kiszabadítani a kőzetből. Általában véve a budai példány tökéletesebb megtartású, mint a lombardiai alakok.

Előfordul egy példányban.

**Worthenia gigas** nov. sp. XII. tábla, 1—2. ábra.

A magas spirájú Wortheniák csoportjába tartozó alak, melyek között azonban ezideig csak apróbb alakokat ismertünk. Kanya-

rulatai lépcsőzetesek, laterális oldala meredek, apikális oldala gyengén bemélyedő. Felső laterális taraja durva csomókkal díszített. Oldali barázdája igen sekély. Alsó laterális taraja jóval gyengébb, mint a felső és mindkét oldalán egy-egy borda határolja. A laterális oldalra eső borda közelebb fekszik, mint a bazális oldalon levő borda, mely utóbbi kétszer akkora távolságban fekszik az alsó laterális bordától, mint az első.

Bázisa teljesen síma. Növedékvonalai erősek, redőszerűek. Köldöke mély és szűk.

Bár csak három kanyarulata ismeretes és megtartása hiányos, jellemző alakja és díszítése alapján kétségtelenül eltér az összes eddig ismert triászkorú Wortheniáktól.

Előfordul két példányban.

**Fossariopsis binodosa** MÜNST. 1925. DIENER: *Glossophora triadica* p. 79.

Ezt a fajt a budai dachsteinmészkőben apró töredék képviseli, amely részben kőbél és amelyen az utolsó kanyarulatnak csak egy kis töredéke van meg. A hiányos megtartás ellenére is, a magas spirájú, kioldódott kanyarulatok és az utolsó kanyarulat díszítése, a két tüskesorból alkotott taraj alapján, teljesen kétségtelen, hogy a budai példány a nevezett fajnak embrionális töredéke.

Előfordul egy példányban.

**Woehrmannia decorata** nov. sp. XII. tábla, 5—8. ábra.

Háza gyengén domborodó, öt kanyarulatból áll. Az embrionális kanyarulatok teljesen laposak. Kanyarulatai alig érintkeznek, az utolsó kanyarulat kissé lefelé hajlik, úgy, hogy a szájnyílás felső pereme az utolsóelőtti kanyarulatnak csak második harmadáig nyúlik fel. A gyengén domborodó apikális oldalt erős, finom csomókkal díszített szubszuturális taraj határolja, amely alatt a varrat mély barázdában helyezkedik el. Az apikális oldalon, a középen egy gyenge, míg ezalatt ismét egy erősebb szintén csomókkal díszített taraj húzódik, így tehát minden kanyarulaton három, csomókkal díszített taraj van, melyeknek csomói a durva növedékvonalak keresztezési pontjain helyezkednek el. A középső és a laterális peremet határoló taraj között mély barázda húzódik.

Az utolsó kanyarulat laterális taraja alatt ismét egy mély barázda van, melyet a bazális résztől újabb csomókkal díszített taraj választ el. Innen a bázis síma, csak növedékvonalakkal díszített, egészen a köldök pereméig, ahol újabb csomók lépnek fel. A köldökperem csomói szintén két növedékvonal között ülnek, s számuk kb. egyező az apikális tarajok csomóinak számával. A csomók száma az utolsó kanyarulat sértetlen részén 26. Köldök kerekded, igen mély és igen tág.

A Woehrmannia-genuszból ezideig csak két fajt ismerünk. Egyik a *Woehrmannia Böhmi* KITTL, a *Marmolata ladini* mészkövéből, a másik pedig a *Woehrmannia arietina* SCHLOTH., az északnémet kagylósmészkőből. Az alig érintkező, mély barázdával elválasztott kanyarulatok és a rendkívül mély és tág köldök alapján az itt leírt budai példány semmiesetre sem sorolható a közeli *Euomphalus*-génuszba, bár az eddig ismert Woehrmannia fajok a spira kifejlődésében eltérnek, mivel apikális oldaluk konkáv, míg a budai példányé inkább konvex. A *Woehrmannia Böhmi* KITTL faj díszítése közel áll a budai példányhoz, a csomókkal díszített laterális taraj, valamint a ködökperem díszítésében is, azonban a *W. Böhmi* fajnál a budai példány két másik díszes apikális taraja hiányzik s laterális részén nem egy, hanem három taraja van, viszont a köldök peremén csak redők és nem kifejezett csomók találhatók. Mindezen felül a Marmolata-alak kanyarulatainak apikális oldala erősen homorú.

Mindezek után meg kell még említenem, hogy a budai példányhoz nagyon közel áll az az alak, amelyet TOMMASI a délalpi ladini emeletből *Euomphalus Canavarii* néven írt le. (TOMMASI: Fossili della lumachella triassica de Ghegna. Paleont. Italica Vol. XIX. 1913. III. tábla, 11*a*—*c*. ábra.) A mély barázdával elválasztott kanyarulatok, a széles és mély köldök alapján, véleményem szerint ez a faj is a *Woehrmannia*-genuszba helyezendő. Díszítése azonban jóval egyszerűbb a budai példány díszítésénél, egyetlen laterális taraja mélyebben fekszik és nincs barázdával elválasztva az apikális perem tarajától.

Előfordul egy példányban.

**Hologyra cassiana** Wissm. XII. tábla, 9. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica* p. 82.

A szájnyílás jellegei nélkül meglehetősen nehéz ezt a fajt a *Hologyra Mandelslohi* Klipst. alaktól elkülöníteni, a két faj együttes tömeges előfordulása azonban a budai példányoknál is lehetségessé teszi az elválasztást, bár a belső ajak jellegei egyik példányon sem vizsgálhatók meg.

A budai dachsteinmészkőben előforduló félköralakú, hegyesebb spirájú s meredekebb mellső peremet mutató alakokat minden bizonnyal ide sorolhatjuk. Jellemző, hogy a fiatalabb kanyarulatok is meredekebb oldalúak, s aránylagosan nem annyira szélesek, mint a *Protonerita Mandelslohi*nál.

Előfordul 70 példányban.

**Protonerita Mandelslohi** Klipst. XII. tábla, 10. ábra.

A budai dachsteinmészkőben csaknem olyan gyakori, mint az előző faj. A délalpi és német ladini és karni emeletnek gyakori fajához, az irodalomban közölt ábrák egybevetése alapján azokat az alakokat sorolom, amelyeknek utolsó kanyarulata hosszirányban megnyúltabb s kissé alacsonyabb, mint a *Hologyra cassiana*nál, spirája laposabb, fiatalabb kanyarulatai kiterültebbek s oldalai nem annyira meredeken esnek le.

Bár itt sem látható, illetve preparálható egyik esetben sem sértetlenül a belső ajak, mégis a héj körvonalának kialakulása szükségessé teszi az elválasztást.

Előfordul 40 példányban.

**Naticella sublineata** Münst. XI. tábla, 19—21. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica*.

A délalpi karni emeletnek ezt a fajját egy apró példány képviseli a remetehegyi faunában. A budai példány nagyságban szintén mögötte marad a st. cassiani példányoknak, éppúgy, mint azok az alakok, melyeket Broili a Pachycardiás tufákból írt le.

Háza gömbös, bemélyedő varratvonallal. Az utolsón kívül mindössze csak egy kanyarulata maradt, ennek a nagyságából következtetve azonban, spirája feltétlen jól kiemelkedő volt. A legbiztosabb faji jelleget azonban a sűrűn elhelyezett finom haránt-

redők előfordulása mutatja, melyek az utolsó kanyarulaton tökéletesen megmaradtak.

Előfordul egy példányban.

**Trachynerita quadrata** STOPP. nov. var. **praeacuta.** XII. tábla, 11. ábra.

A *Trachynerita quadrata* STOPP. faj a budavidéki dachsteinmészkő egyik leggyakoribb alakja s eddigi gyüjtéseim során többszáz példányban került elő. Ugyancsak ismerjük már a var. *canaliculata* AHLB. alakot, mely a budai előforduláson kívül csak a felsőszileziai triászból ismeretes.

Az újabb gyüjtések során olyan alakok kerültek elő, melyeket, bár az alaptypussal közeli rokonságban állanak, mégis néhány jellemző vonás alapján új változatként kell elkülönítenünk.

Szembetűnik elsősorban az utolsó kanyarulat megnyúltabb alakja, minek következtében az egész alak karcsúbb lesz. A varratmenti depresszió élesen határolt és csaknem teljesen sík. A legfeltűnőbb vonás az igen magas és kihegyezett spira, amely öt kanyarulatból áll és minden egyes kanyarulatán élesen határolt szubszuturális depressziót láthatunk.

A növedékvonalak lefutása jól látható, egyező az alapformával. A héj egyébként teljesen síma.

Előfordul két példányban.

**Telleria gigantea** nov. sp. XII. tábla, 12—13. ábra. 1927. *Telleria* nov. sp. ind. KUTASSY: Beiträge z. Stratigraphie u. Paläont. d. alp. Trias bei Budapest. p. 59 T. IV, Fig. 6*a*—*c*.

A KITTL által leírt *Telleria*-genuszból ezideig csak három fajt ismerünk; a *Telleria umbilicata* KITTL fajt a st. cassiani rétegekből, a *Telleria antecedens* KITTL fajt, a Marmolata-rétegekből és a *Telleria burzensis* PAR. fajt az ázsiai triászból (PARONA: Faunette triassiche del Caracorum etc. p. 11. I. tábla, 4. ábra). A genotípusként szereplő *T. umbilicata* legfontosabb jellemvonása a külső ajak szubmarginális megvastagodása és a héj hosszirányban vonalazott díszítése. A *T. antecedens*nél azonban a hosszirányú díszítésnek már nyomát sem találjuk, sőt az alapforma leírásánál is megjegyzi a szerző, hogy a héj teljesen síma is lehet.

Fent idézett helyen a remetehegyi dachsteinmészkőből már le-

írtam egy alakot, amely igen magas spirájával, nyitott köldökével és főleg a külső ajak jól látható szubmarginális megvastagodásával csakis a *Telleria*-genuszba lenne sorolható. Ez az alak azóta még több példányban került elő, s bár az újabb példányok legnagyobb része kőbél s így a szájnyílásra vonatkozólag semmi támpontot nem nyujt, mégis az összes példányok jellegeinek egyesítése feltétlen indokolttá teszi, hogy ezt a fajt a *Telleria*-genuszba soroljuk.

Háza kevés kanyarulatból áll (4—5), de spirája magas és hegyes. A kanyarulatok erősen domborodók, a fiatalabbak laposabbak, mint az idősebbek. Héja gyorsan növekedő, s az utolsó kanyarulat igen nagy és erősen kiterült. A varratok sekélyek, igen gyenge szubszuturális depresszióval. Hosszirányú vonalozás nem figyelhető meg, csak igen finom növedékvonalak, melyek helyenként redőkké egyesülnek. Nyílása széles tojásdad alakú, mély köldöküreggel. Az ajkak csak egyetlen példányon vizsgálhatók, ahol a külső ajak szubmarginális megvastagodása és mögötte elhelyezkedő depresszió jól látható.

Mindezek a vonások kétségtelenül a *Telleria*-genuszba sorolják ezt a fajt, amely azonban az eddig ismert alaktól első tekintetre elüt már jelentékeny méreteivel is.

Előfordul hat példányban.

**Dicosmos sigaretoides** nov. sp. XII. tábla, 14—15. ábra.

Háza négy kanyarulatból áll, melyek közül a legutolsó rendkívüli mértékben nagy a többiekhez viszonyítva és hosszirányban erősen megnyúlt. A három első kanyarulat besüllyedő, de igen hegyesen emelkedik ki. Varrat sekély, de élesen elkülönült. Erősen megnyúlt utolsó kanyarulatával némileg a *Dicosmos maculosus* Klipst. fajra emlékeztet, azonban még annál is jóval elnyúltabb s a középvonal táján nem hajlik meg, hanem fokozatos lejtéssel halad az alsó peremig. A növedékvonalak jól láthatók, s lefutásuk teljesen egyező a *Dicosmos*-fajok növedékvonalaival.

Ennek a fajnak a *Dicosmos*-genuszba sorolása kizárólag a külső alak, a besüllyedt spira s a hosszirányban erősen megnyúlt utolsó kanyarulat s a növedékvonalak jellemző lefutási alakja alapján történt, mivel az ajkak kipreparálása teljesen lehetetlen volt. Az egyik példányon annyi látható, hogy a belső ajak erősen

kallózus és felső pereme közelében némi dudor is észlelhető. Mindazonáltal azt hiszem, nem tévedek, ha a jellemző héjforma alapján a belső ajak ismerete nélkül is a *Dicosmos*-genuszba sorolom.

Előfordul két példányban.

**Purpuroidea nassaeformis** DI STEF. XII. tábla, 16—17. ábra. 1912. *Purpuroidea nassaeformis* DI STEFANO: La dolomia principale dei dintorni di Palermo etc. p. 99. Tav. XVII. Fig. 17.

A sziciliai fődolomitnak ez a jól jellemezhető faja az újabb gyüjtések során több igen jó megtartású példányban került elő a budai dachsteinmészkőből.

A héj jellemző Nassa-szerű alakja mindegyik példányon világosan kifejezésre jut. A spira a budai példányoknál is átlag 5—6 kanyarulatból áll, melyek gyorsan növekedők, míg az utolsó kanyarulat erősen kihasasodó és az egész héjmagasságnak mintegy kétharmadát teszi. A jellemző hosszirányú bordák minden példányon jól láthatók. A legerősebben fejlett bordákon harántirányban elnyúlt csomók vannak. Ezek a csomók a legutolsó kanyarulaton a héj legfelső harmadán helyezkednek el, míg a fiatalabb kanyarulatoknál (tekintve, hogy minden következő kanyarulat az előzőnek mintegy kétharmadát elfedi) a szabadon maradt résznek kb. a középvonalára esnek s így a fiatalabb kanyarulatok kissé szegletesebbeknek tűnnek fel. A csomókkal díszített bordák alatt síma hosszirányú bordák húzódnak.

A budai hegység alakjai között úgy fiatal, mint kifejlett példányok egyaránt előfordulnak s ezek mindegyike tökéletesen egyezik a sziciliai példányok ábráival.

Előfordul 11 példányban.

**Tretospira cf. fasciata** KITTL. XII. tábla, 18—20. ábra. 1925. DIENER: *Glossophora triadica* p. 120.

Ezt a fajt egy kisebb és egy nagyobb példány képviseli, melyek mindegyikénél csak egy utolsó kanyarulat maradt ugyan meg, a jellemző héjdíszítés alapján azonban mindkét fajt kétségtelenül a *Tretospira*-genuszba kell sorolnunk.

A II. tábla, 19. ábráján közölt nagyobb példányon kitűnően megmaradtak a domború spirális tarajok, melyek közé, mint a nagyított kép mutatja, finomabb másodlagos bordák ékelődnek be.

A spirális tarajok a külső ajak felé lehajolnak, éppúgy, mint az alpi eredeti példányoknál. Az eltérés főkép abban jut kifejezésre, hogy a budai példányoknál a spirális tarajok közelebb állanak egymáshoz (hasonló jelleget azonban Koken: Zeitschrift d. deutsch. Geolog. Ges. Bd. XLIV. XVI. táblája 10. ábráján közölt alaknál is látunk), s míg az alpi alakoknál a legnagyobb spirális bordaszám 12, addig itt 16 bordát számolhatunk meg. Ez az eltérés azonban még nem tekinthető lényeges megkülönböztető bélyegnek. Ezen a példányon helyenként a jellemző erős növekedési vonalak is jól láthatók.

A II. tábla 19. ábráján közölt kisebb példányon az oldali rész lekopott, viszont jól látható az apikális perem erős határbordája, valamint a kissé beöblösödő apikális oldal, amely gyenge lejtővel vezet az utolsóelőtti kanyarulathoz.

Tekintve, hogy a spira ismeretlen, nem tartottam helyesnek a teljes faji azonosítást, bár a díszítőelemek egyezése minden valószínűség szerint ehhez a fajhoz kapcsolja a budai példányokat.

Előfordul két példányban.

**Palaeotriton** (?) **globularis** nov. sp. XII. tábla, 21—23. ábra.

Háza kihegyesedő, hosszvonalakkal és erős harántbordákkal díszített kanyarulatokkal. Varratai igen mélyen fekvők. Kanyarulatai főleg az alsó részen erősen felfujtak, s minden egyes kanyarulat alsó része az alatta fekvő kanyarulat varrata felett erősen kiugrik. Az utolsó kanyarulaton, a bázison nyolc hosszvonalat figyelhetünk meg, az apikális oldalon a hosszvonalak lekoptak s csak a varrat alatt látszik ismét kettő, úgyhogy számuk kb. 14—15 lehetett. A harántbordák igen erősek, de a bázisra egyáltalán nem nyúlnak le, s számuk az utolsó kanyarulaton 12. A nyílás a külső ajaknál sérült. A belső ajak visszahajlított, lelapított s fent lekerekített.

Ez a faj csak egyetlen példányban fordul elő, melynek alapján a genetikus hovátartozás megállapítása igen nehéz. A ház alakja a hosszvonalakkal és erős harántbordákkal a *Palaeotriton* Kittl genuszra utal, melynek azonban harántbordái egyik ismert fajnál sem annyira erősek, mint a budai példánynál s a kanyarulatok nem annyira felfújtak. (Kittl: Gastropoden v. St. Cassian. III. p. 256.)

A belső ajak kialakulása leginkább a *P. macrostoma* KITTL (l. cit. p. 256. XI. tábla, VI. ábra) nyílásával mutat hasonlóságot, sajnos azonban, a budai példánynál a külső ajak sérült és a belső ajak alsó, csatornaszerűen meghosszabbodott része is letörött.

Az összes jellegek alapján mégis leghelyesebb, ha ezt a fajt egyelőre a *Palaeotriton*-genuszba soroljuk.

A *Palaeotriton*-genuszt ezideig csak a délalpi ladini és karni emeletből ismertük, a Bakonyból KITTL (Gastrop. d. Bakony p. 44) a P. venustus-t említi, de ábrát nem közöl.

Előfordul egy példányban.

**Omphaloptycha bacchus** KITTL. XIII. tábla, 4. ábra. 1925. DIENER: *Glossophora triadica* 150.

A Marmolata-mészkőnek ez a jellemző alakja a budai dachsteinmészkőben több példánnyal szerepel. Általában a budai példányok jóval kisebbek, mivel csak a fiatalabb kanyarulatokat őrizték meg.

A ház csúcsszöge 35—38° között van, tehát egyező a marmolatai alakok csúcsszögével. Kanyarulatai főleg az alsó részen erősebben domborodók. Növedékvonalai szabálytalanul rendeződött durva redőkbe egyesülnek, melyek gyengén hajladozók. Bár az utolsó kanyarulat alsó része letörött, így is világosan kifejezésre jut az utolsó kanyarulat erősen megnyúlt alakja. A legjellemzőbb vonás az utolsó kanyarulat jól kifejezett és széles szubszuturális depressziójában nyilvánul meg, amely jellemvonás alapján kétségtelen a budai és marmolatai példányok azonossága.

Előfordul három példányban.

**Omphaloptycha zitteli** BOEHM. XIII. tábla, 3. ábra. 1925. DIENER: *Glossophora triadica* 152.

Úgy a német kagylós mészben, mint az alpi faciesben előforduló alakokkal annyira egyezik a budai példány is, hogy bővebb leírást adni felesleges. A tökéletes megtartású marmolatai példánynál ugyan kissé rövidebbnek látszik, ennek oka azonban abban kereshető, hogy a nyílás alsó része letörött és példányunkon az eredeti 13 kanyarulata helyett csak 9 kanyarulat van, tehát hiányoz-

nak a kihegyesedő embrionális kanyarulatok és ezenkívül a legutolsó, leghosszabb kanyarulat is, amely szintén letörött.

Előfordul egy példányban.

**Omphaloptycha pupoides** Stopp. XIII. tábla, 1—2. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica* 152.

Ezt a fajt ezideig a budai dachsteinmészkőben egyetlen példány képviseli, amely annak ellenére, hogy a nyílás hiányzik, más jellemvonásai alapján kétség nélkül azonosítható.

A hat kanyarulatot megőrző pupoid-alakú ház kanyarulatai az utolsó kivételével igen alacsonyak, éles, de keskeny varratokkal, helyenként durva, redőszerű növedékvonalakkal. Kanyarulatai gyengén lépcsőzetesek, kevéssé domborodók.

Varratalatti bordáknak, mint Stoppani egyes példányainál, a budai példányainál nyoma sincs, ez a jelleg különben az eredeti példányoknál is csak kivételesen fordul elő. A budai példány alakját tekintve, leginkább Stoppani *Chemnitzia Amorettii* néven leírt alakjához hasonlít, melyet Kittl: Die Gastropoden der Esinokalke című munkájában a 113. oldal, 42. szöveg ábráján ábrázolt.

**Omphaloptycha conica** Münst. XIII. tábla, 5. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica* p. 150.

Ez a faj jóformán az egész mediterrán triászprovincia területén elterjedt a ladini és karni emeletben s ezenkívül a német kagylósmészkőben is előfordul.

Az egyik budai példányon csak négy kanyarulat maradt meg és az utolsó kanyarulat hiányzik, mégis a teljesen gömbölyű alacsony kanyarulatok és a mélyen ülő varratok alapján a morfológiai egyezés kétségtelen, különösen, ha Assmann igen jól sikerült ábráit használjuk fel összehasonlításul. (Assmann: Gastropoden d. oberschles. Trias, p. 33. T. III. Fig. 29—30.) A másik példányon az utolsó kanyarulat egy része is megvan, a faji azonosság itt is kétségtelen.

Előfordul két példányban.

**Coelochrysalis rotundatus** nov. sp. XII. tábla, 28. ábra.

Házának csúcsszöge 40°, a megmaradt héj részletén 22·5 mm

magasság mellett kilenc kanyarulatot számolhatunk meg, melyek közül a legnagyobb szélessége 13·4 mm. Fiatalabb kanyarulatai igen gyengén domborodók, míg a legutolsó csaknem teljesen lapos. Az egyes kanyarulatok szélessége két és félszer múlja felül a magasságot, s ez a jelleg, valamint a héj egész alakja kétségtelenné teszi, hogy a *Coleochrysalis*-genuszba tartozik. Növedékvonalai elég erősen fejlettek s gyengén visszahajlók.

Az összes ismert *Coelochrysalis*-fajok közül leginkább a *Coelochrysalis Böhmi* Reis fajhoz hasonlítható, amelytől azonban legelső sorban szembetűnő nagyságával, másodsorban pedig az egyes kanyarulatok magassági és szélességi adatainak arányával és a varratvonal símább kifejlődésével tér el.

Előfordul egy példányban.

**Undularia (Toxoconcha)** cf. **brocchii** Stopp. XIII. tábla, 9. ábra. 1925. Diener: *Glossophora triadica* p. 205.

Az alacsonyabb kanyarulatok a mély varratokkal és lépcsőzetes spirával teljes mértékben erre a német és alpi közép- és felsőtriászban egyaránt elterjedt alakra utalnak. A teljes azonosítását csupán azért nem tartom lehetségesnek, mert az utolsó kanyarulat és a szájnyílás hiányoznak.

Előfordul egy példányban.

**Stephanocosmia coronata** Kok. XII. tábla, 24—25. ábra. 1892. *Coronaria coronata* Koken in Woehrmann u. Koken: Die Fauna der raibler Schichten von Schlernplateau p. 205. XIII. tábla, 13—15. ábra. 1899. *Promathildia coronata* Kok., Kittl: Gastropoden d. Esinokalk p. 92—93. 1907. *Promathildia (Zygopleura) coronata* Kok. Broili: Fauna d. Pachycardientuffe d. Seiseralp. p. 128. XI. tábla, 48. ábra. 1909. *Stephanocosmia coronata* Kok. Cossmann: Palaeoconch. comparée. VIII. p. 34.

Amint a mellékelt ábrából kitűnik, a budai példány kétségtelenül a fent nevezett faj embrionális kanyarulatait képviseli. A spira kialakulása és a díszítő csomók fellépése annyira egyező, hogy a faji leíráshoz semmi hozzáfűznivalónk nem lehet.

Amint Cossmann fentidézett munkájából kitűnik, a faj a *Stephanocosmia*-genuszba sorolandó. Koken ugyanis az általa felállított *Coronaria*-genusz típusául választotta ezt a fajt, mivel

azonban a *Coronaria* nevet Lowe már 1854-ben lefoglalta, Cossmann a Koken-féle Coronariák számára állította fel a *Stephanocosmia*-genuszt, melynek genotípusa a *Coronaria coronata*. Ezért tehát helytelen volt ezt a fajt a *Promathildia*-genuszba sorolni, amellyel különben nem is hozható kapcsolatba.

**Stephanocosmia** (Tyrsoecus) **dolomiticus** Kittl. XIII. tábla, 7—8. ábra. 1900. *Stephanocosmia dolomitica* Kittl: Gastropoden a. d. Trias d. Bakonyer Waldes. p. 55. T. III. Fig. 20—23. 1909. *Stephanocosmia (Tyrsoecus) dolomiticus* Kittl. Cossmann: Essai Paléoconch. comparée. VIII. kötet, p. 35. 1912. *Stephanocosmia dolomitica* Di Stefano: La dolomia princip. di Palermo. p. 102. Tav. XVII. Fig. 12—13.

A bakonyi és sziciliai nori fődolomitnak ezt a jellemző alakját két töredék képviseli, melyek azonban a rossz megtartási állapot ellenére is biztosan azonosíthatók.

A nagyobbik példány utolsóelőtti kanyarulatán jól látható a két hosszanti borda, melyeket csomók díszítenek. Ezek a csomók harántirányban nem nyúltak meg, ennek azonban az oka egyrészt a kopásban, másrészt abban a körülményben keresendő, hogy ez a kanyarulat már a héj szenilis részéhez tartozik és az ilyen kanyarulatokon, mint pl. Kittl III. tábla, 20. ábráján is látjuk, a csomók nem nyúlnak meg hosszirányban. A legfontosabb faji bélyeg azonban nagyon szépen látható ezen a példányon, szintén az utolsóelőtti kanyarulaton, a finom csomókkal díszített erős varratborda alakjában. Ez utóbbi jelleg alapján a faji azonosság kétségtelen.

A másik példány kanyarulatok töredékét őrizte meg, s itt már a kettős bordán ülő főcsomók erősen fejlettek, harántirányban megnyúltak, a varrat közvetlen közeléig lenyúlnak, éppúgy, mint Kittl III. tábla, 22. ábráján közölt eredeti példányánál látható.

Ez a faj már ismeretes a budai hegység dachsteinmészkövéből, nevezetesen a dachsteini mészkő mélyebb szintjéből, a karni emeletből, a Fazekashegyről.

Ezt a fajt Kittl 1900-ban a *Stephanocosmia*-genuszba sorolta. Bár 1892-ben (Gastropoden v. St. Cassian-Annalen d. k. k. Naturhist. Hofmuseum in Wien. Bd. VII. p. 117) hasonló típusú formák

számára már ő maga proponálta a *Tyrsoecus*-genusz nevet, ez utóbbi név teljesen feledésbe merült, annak ellenére, hogy COSSMANN 1902-ben feleleventette ezt a csoportot, mint a *Stephanocosmia* szubgenuszát, teljes joggal ebbe a csoportba sorolván az itt tárgyalt alakon kívül a *Stephanocosmia compressa* MÜNST., *St. subcompressa* KITTL, *St. Zeuschneri* KLIPST és a *Coronaria subulata* DITTM. fajokat. Sajnos, COSSMANN értékes megfigyeléseit az eddigi triászirodalom jóformán teljesen figyelmen kívül hagyta, bár munkája jelentékeny mértékben és a legtöbb esetben teljes joggal megváltoztatta a triász-gasteropodák rendszertanát.

Előfordul két példányban.

**Zygopleura arctecostata** MÜNST. XII. tábla, 26. ábra. 1909. *Zygopleura arctecostata* MÜNST. COSSMANN: Paléoconch. comparée. Vol. VIII. p. 25. 1925. *Loxonema (Zygopleura) arctecostata* MÜNST. DIENER: *Glossophora triadica* p. 174.

A déli alpok ladini és karni emeletének ezt a jól jellemzett és igen gyakori alakját a remetehegyi faunában is megtaláljuk. A faji jellegek annyira egyezőek, hogy az eddigi szabatos leírásokhoz ennek a példánynak az alapján felesleges újabb megjegyzéseket fűzni.

Ezt a fajt a magyar triászból is ismerjük, a Bakony és a Kodru-Móma hegység karni emeletéből. A nori emeletből eddig még nem ismertük. A *Zygopleura* önálló generikus jellegét COSSMANN már 1909-ben megállapította, DIENER azonban még 1925-ben is mint a *Loxonema* szubgenuszát tárgyalta, mivel a Foss. Catalogus idevonatkozó kötetében teljesen figyelmen kívül hagyta, COSSMANN idevonatkozó vizsgálatait és megállapításait.

**Zygopleura** cf. **Arpadis** KITTL. XII. tábla, 27. ábra. 1900. *Loxonema* (?) *Arpadis* KITTL: Gasterop. Trias d. Bakony. p. 26. T. II. Fig. 13. 1909. *Zygopleura Arpadis* KITTL. COSSMANN: Paléoconch. comparée. Vol. VIII. p. 26.

KITTL a veszprémi Jeruzsálemhegy felső karni rétegeiből egy hatalmas termetű alakot írt le, gömbölyű kanyarulatokkal, mély varratokkal, melynek kanyarulatait egymástól távol álló erősen fejlett harántredők díszítik. COSSMANN az erős harántredők alapján ezt a fajt igen helyesen a *Zygopleura*-genuszba sorolta.

A remetehegyi faunában több alak van, amely kétségbevonhatatlan rokonvonásokat tüntet fel ezzel a fajjal, sajnos azonban, egyik sem olyan megtartású, hogy minden megfontolás nélkül azonosítható lenne. Elsősorban a budai példányok mind aprók, lehetséges azonban, hogy a fiatalabb kanyarulatok töredékei. A kanyarulatok itt is laposak, gömbölyűek, a varratok igen mélyek. A harántredők teljesen azonos kifejlődésűek, míg azonban KITTL szerint egy kanyarulatra csak 10 redő esik, itt az egyik kanyarulaton 16-ot sikerült megszámolnom. Amint az ábrákból kitűnik, kétségtelen, hogy vagy teljesen azonos, vagy a legszorosabb kapcsolatban álló fajjal van dolgunk, a hiányos példányok alapján azonban nem vonhatunk végleges következtetést.

Előfordul három példányban.

## Lamellibranchiata.

**Pecten egidii-venantii** TOMM. XIII. tábla, 9. ábra. 1903. TOMMASI: Revisione fauna dolom. princ. Lombardia p. 96. XVI. tábla, 3. ábra. 1912. DI STEFANO: La dolomia princip. di Palermo p. 66. VIII. tábla, 18—19. ábra.

A lombardiai és sziciliai fődolomitnak ez a jellemző alakja a legújabb gyüjtések során több igen jó megtartású példányban került ki a remetehegyi dachsteinmészkőből.

Az ábrázolt példány a faji jellegeket kitűnően mutatja. Az egyenlőtlen teknő hátsó részén jól kivehető a jellemző bemélyedés és a mellette húzódó peremi léc kiemelkedése. Az ábrázolt példányon kb. 40 bordát számolhatunk meg. (DI STEFANO példányainál a bordaszám 40—45 között váltakozik.) A bordák között találunk erősen fejlett főbordákat, melyek között szabálytalanul, 1—3. számban vékonyabb mellékbordák helyezkednek el. A kihegyesedő búb nem csavarodik be. Mindezen jellemvonások kétségtelenné teszik a faji azonosságot, eltérés csupán abban mutatkozik, hogy a budai példányok mellső füle látszólag nagyobb, mivel azonban egyetlen példányon sincs teljesen sértetlen fül, ezt a jelleget nem lehet felhasználni messzebbmenő következtetésekre.

DI STEFANO példánya 30 mm magas, a budai példányok között jóval nagyobbak is akadnak. Egyik töredékes példánynak, amely

azonban a jellemző bordakialakulás alapján feltétlenül idetartozik, magassága 38 mm.

Eddig előkerült hét példány.

**Pecten (Chlamys) pygmaeus** nov. sp. XIII. tábla, 10. ábra.

A mellső oldali perem sérülésétől eltekintve, csaknem teljesen ép példány. A magasság alig 1—2 mm-rel múlja felül a szélességet. A mellső és a hátsó perem teljesen szabályos lefutású, egyenes, az alsó perem erősen lekerekített. A héjat kizárólag koncentrikusan futó növedékvonalak díszítik, egyébként teljesen síma. Igen fontos a mellső fül csaknem sértetlen megtartási állapota. A fül díszítése radiálisan haladó bordákból és az ezeket keresztező koncentrikus vonalakból áll. A héj érintkezési vonalánál jól kivehető, hogy byssusbevágása is volt. A fül kialakulása és díszítése alapján tehát ezt az új alakot csakis a *Chlamys*-szubgenuszba sorolhatjuk.

A síma teknő körvonalaival erősen emlékeztet a *Pecten (Entolium) discites* SCHLOTH. fajra, ettől azonban élesen elválasztja a fül formája és díszítése, valamint az *Entolium discites* SCHLOTH.-ra annyira jellemző, a mellső és hátsó perem közvetlen közelében húzódó hosszanti barázdák teljes hiánya. A héj díszítésnélküli jellege ezzel szemben ellentmondana annak, hogy ez az új faj a *Chlamys*-szubgenuszba tartozik, mivel amint tudjuk, a *Chlamys*ok héját általában igen jól fejlett s leginkább tüskékkel díszített radiális bordák fedik. Amint azonban PHILIPPI munkájából tudjuk (Zur Stammesgeschichte der Pectiniden. Zeitschrift d. deutsch. Geolog. Ges. 1900. p. 93), a mezozoikumban előfordul néhány teljesen síma Pecten-faj, melyeket eddig a síma héj miatt az *Entolium*-szubgenuszba soroltak, viszont a mellső fül byssus-bevágása és a hátsó fül egyenlőtlen nagysága révén kétségtelenül a *Chlamys*-szubgenuszba kell sorolnunk. Ilyen például a *Pecten subulatus* MÜNST. (GOLDFUSS: Petref. Germaniae II. p. 73. XCVIII. tábla, 12. ábra.) Hasonló elgondolások alapján szükségesnek láttam ezt a remetehegyi új fajt is a *Chlamys*-szubgenuszba sorolni.

Előfordul egy példányban.

**Lima** sp. **ind.** XIII. tábla, 11. ábra.

Rendkívül apró példány, hosszúsága 6 mm, szélessége 5 mm.

Csak lenyomatban van meg. Alakja teljesen azonos Toulának a Baden melletti karni rétegekből leírt *Lima* sp.-ével. (Toula: Die Kalke von Jägerhause bei Baden p. 105, T. VI. Fig. 45.) A budai példányon a mellett, hogy a Toula-féle alaknál felényivel kisebb, a bordák száma 19-ig emelkedik, míg Toula példányánál csak 12. Növedékvonalak nem figyelhetők meg, másodlagos bordáknak semmi nyoma.

Diener: *Lamellibranchiata triadica* (p. 104) munkájában a Toula-féle fajt a *Lima cancellata* Bittn. fajhoz utalja, ez azonban felfogásom szerint nem helyeselhető, mert a *Lima cancellata* Bittn. bordái sokkal élesebbek és egymástól jóval távolabb állanak a búbtájékon is. A budai példány minden valószínűség szerint vagy a badenivel azonos új faj, vagy pedig a jóval magasabb bordaszám alapján annak egy varietása, végleges következtetés levonására azonban, sajnos, egyik példány sem alkalmas.

Előfordul egy példányban.

**Myophoricardium lineatum** Woehrm. XIII. tábla, 12—14 ábra. 1923. Diener: *Lamellibranchiata triadica* p. 223. 1931. kutassy: *Lamellibranchiata triadica* II. p. 413.

Ez a rendkívül változatos faj a remetehegyi dachsteinmészkőben meglehetősen gyakori és mindkét jellemző kifejlődése megtalálható. Egyes példányok Bittner: Lamellibranchiaten v. St. Cassiani III. tábla 19. ábráján közölt példányaival egyeznek meg teljesen (XIII. tábla, 12 és 14. ábra), igen élesen fejlett areális peremmel s csaknem szabályos háromszögletű alakjukkal. Más példányok viszont Bittner: ugyanott III. tábla 18. ábráján közölt típusokkal egyeznek (XIII. tábla 13. ábra), úgy a körvonal négyszögű kialakulását, valamint a magasabbra felhúzódott mellső areális peremet tekintve.

Az utóbbi példány egyébként mindkét teknőt megőrizte s így a búbok teljes érintkezése is jól látható, ami Woermann eredeti leírása szerint fontos faji jelleg. Az alsó perem erősen lekerekített formája ennél a példánynál kopás következménye. Bár a fogakat egyik példánynál sem láthatjuk, a jellemző körvonal alapján a faji azonosság minden kétségen felül áll.

Ez a faj, amint a Fossilium Catalogus idevonatkozó adatai bizonyítják, az Északi és Deli-Alpoktól kezdve Ázsiáig elterjedt.

eddig azonban kizárólag csak a karni emeletből került elő, a nori emeletből még nem ismertük.

Ismeretes három példányban.

**Myoconcha alata** nov. sp. XIII. tábla, 15. ábra.

Apró alak, erősen előretolt szeles búbbal. Teknője hátul szelesebb, mint elől. Areális pereme a búbtól a peremig jól kifejezett, s areája a többi *Myoconcha*-fajhoz viszonyítva erősebben bemélyed. A héj mellső oldalán levő búbalatti depresszió igen gyenge. Héját távolálló koncentrikus redők díszítik.

Méreteit tekintve legközelebb áll hozzá a *Myoconcha Woermanni* Waag. (Waagen: Lamellibranchiaten d. Pachycardien tufe. T. XXXII Fig. 17), melynél a héj hátsó része szintén szélesebb, mint a mellső rész, viszont azonban a búbalatti depressziója jól fejlett, areája viszont jóval sekélyebb. Összehasonlításul megemlítendő még a *Myoconcha acquatensis* Parona (Waagen id. mű. XXXII. tábla, 18—19. ábra) és a *Myoconcha Bornei* Frech (Frech: Werfeni rétegek vezérkövületei stb. VI. tábla, 10. ábra), melyek közül az előbbi főleg a búbalatti erős depressziójával, az utóbbi jóval hegyesebb búbjával, s mindkettő pedig a héj erősen megnyúlt alakjával és az areális él mögötti héjrészlet jóval sekélyebb kifejlődésével tér el a budai példánytól.

Előfordul egy példányban.

**Modiola norica** nov. sp. XIII. tábla, 16. ábra.

Erősen megnyúlt háromszögletű alak, meredeken leeső mellső oldallal, előretolt búbbal. A búbtájéktól elég erősen fejlett taraj húzódik hátrafelé, amely azonban már a héj közepe előtt elsekélyesedik s a teknő hátsó részének kiszélesedő, lapos domborulatába fokozatosan beolvad.

Az ismert *Modiola*-fajok közül kettő jöhet számításba összehasonlítás céljaira. Az egyik a *Modiola gracilis* Klipst., amely azonban jóval keskenyebb és megnyúltabb alak, ezenkívül mellső oldalának alsó peremén éles befűződése van, amely legtöbb esetben egy jól elkülönített szárnyszerű részt választ le. A másik a *Modiola paronai* Bittner, amely viszont kiterültebb és héjának hátsó részlete teljesen ellaposodó, míg az itt tárgyalt új alaknál ez a részlet is gyengén domborodó.

Érdekes megemlíteni, hogy a nori emeletből ezideig mindössze egyetlen faj Modiolát ismerünk, a *Modiola humilis* Tomm. fajt a lombardiai fődolomitból, holott a karni és raetiai emelet egyáltalán bővelkedik Modiolákban. Ennek a jelenségnek oka, véleményem szerint, ismételten abban rejlik, amint ezt már más helyen is kifejeztem, hogy a nori emelet faunája aránylag a legkevésbbé ismert a triászkori faunák között.

Előfordul egy példányban.

**Modiola gracilis** Klipst. XIII. tábla, 17—18. ábra. 1923. Diener: *Lamellibranchiata triadica* p. 141. 1931. Kutassy: *Lamellibranchiata triadica* II. p. 350.

Ez a faj úgy az Északi, mint a Déli-Alpokban, valamint az Apenninekben és Sziciliában is előfordul, a karni és raetiai emeletekben egyaránt. A budai igen apró példány keskeny, megnyúlt alakjával, valamint a mellső, illetve alsó peremén levő erős befűződésével kétségkívül erre a fajra utal.

Előfordul egy példányban.

**Lucina quadrata** Kutassy. XIII. tábla, 19—20. ábra. 1932, Kutassy: Újabb adatok a budapestkörnyéki dachsteinmészkő faunájához. p. 233. II. tábla, 32. ábra.

Fent idézett dolgozatomban ugyancsak a remetehegyi dachsteinmészkőből a héj külső morfologiai jellegei alapján egy új *Lucina*-fajt írtam le, amelyből újabban ismét előkerült néhány példány. Az újabb leletek között igen nagy jelentősége van az egyik itt ábrázolt példánynak, amelynek belső héjszerkezetét is sikerült részben kipreparálni s a záros peremen jól látható a hátsó, hosszú lécszerű fog és a búbalatti háromszögű ligamentumárok. Ezek után a belső szerkezet alapján semmi kétségünk nem lehet, hogy ez a faj tényleg a *Lucina*-genuszba sorolandó.

**Ctenodonta elliptica** Goldf. XIII. tábla, 21. ábra. 1923. Diener: *Lamellibranchiata triadica* p. 150. 1931. Kutassy: *Lamellibranchiata triadica* II. p. 357.

Ezt a jellemző alakú, bár igen variabilis fajt, ezideig a szittya emelettől kezdve a karni emeletig ismertük, úgy a mediterrán, mint a germán triász faciesterületekről. A remetehegyi példány,

annak ellenére, hogy a héj hátsó pereme töredezett, kétségtelenül ide sorolandó. Ezt bizonyítja a lunuláris résznél kissé bemélyedő kihúzott mellső perem és a csőrszerűen megnyúlt hátsó perem lefutása. A megmaradt részletek alapján kiegészített ábra kétségkívül bizonyítja BITTNER: *Lamellibranchiata* v. St. Cassian. XVI. tábla, 29—30. ábráin közölt példányokkal való azonosságot, annak ellenére, hogy a fogak egyáltalán nem figyelhetők meg.

Előfordul egy példányban.

**Macrodon juttensis** BITTN. XIII. tábla, 22—24. ábra. 1923. DIENER: *Lamellibranchiata triadica* p. 163.

A remetehegyi faunában egy jobb- és egy balteknő képviseli ezt a fajt. A balteknőn, amely egyébként töredék, de jól mutatja az erősen felemelkedő és előrenyúló mellső peremet, főleg a díszítés figyelhető meg. Jól láthatók az erős hosszbordák, melyek a mellső peremnél összehajlanak, és helyenként, főleg az alsó perem közelében, a finom radiális bordák is.

A jobbteknőn a díszítés kevésbbé látszik, ezzel szemben a héj körvonalai teljesen egyezőek és különösen jól látható az areális él mögött húzódó mély radiális irányú barázda, a *Macrodon juttensis* BITTN. faj legjellemzőbb vonása. Ez utóbbi jelleg alapján a faji azonosság kétségtelen.

Előfordul két példányban.

**Pleuromya lata** PAR. nov. var. **hungarica.** XIII. tábla, 25. ábra. 1932. *Pleuromya anbigua* BITTN. KUTASSY: Újabb adatok stb. II. tábla, 30. ábra.

Az erősen megnyúlt héj, kihúzott mellső peremével, hosszú hátsó részével, gyengén hajló záros peremmel és egyenesen lefutó areális éllel kizárólag ezzel a lombardiai és szicíliai fődolomitból származó alakkal hasonlítható össze. Ugyancsak erre a fajra utal az előretolt mellső irányban erősen becsavart búb és a szabálytalan, durva növedékvonalak lefutása is.

A budai példányoknál az eltérés főleg abban nyilvánul meg, hogy a búb kissé keskenyebb, az areális él kifejezettebb, és az areális él és záros perem között elhelyezkedő héjrészlet látszólag jobban bemélyed. Hogy a héj általában nem látszik annyira megnyúltnak,

annak kizárólag a hátsó rész letörése az oka, mert ez a rész egyik példányon sem maradt meg.

Előfordul hat példányban.

**Nucula expansa** WISSM. nov. var. **abrevita.** XIII. tábla, 26. ábra. 1923. DIENER: *Lamellibranchiata triadica* p. 146. 1931. KUTASSY: *Lamellibranchiata triadica* II. p. 354.

Ezt a világszerte elterjedt fajt ezideig az anizuszi, karni és raetiai emeletből egyaránt ismertük, a norikumból azonban csak most került ki első ízben. A budai dachsteinmészkőben egyetlen kettősteknőjű példány fordul elő, melyre a faji bélyegek pontosan ráillenek, kivéve a teknők jelentékeny megrövidülését. A rendkívül variabilis számtalan átmeneti alakot mutató faj különböző példányai közül a budai példány a hosszirányban megrövidült alakokhoz csaltakozik. A gömbölyű búb a teljesen lecsapott mellső perem alapján leginkább BITTNER: *Lamellibranchiata* v. St. Cassian XVII. táblájának 25. és 28. ábráival hasonlítható össze, azonban hátsó pereme jóval erősebben lekerekített, hosszirányban még jobban megrövidült és teknői felfujtabbak.

Előfordul egy példányban.

**Schafhäutlia** cf. **astartiformis** MÜNST. XIII. tábla, 27. ábra. 1923. DIENER: *Lamellibranchiata triadica* p. 217. 1931. KUTASSY: *Lamellibranchiata triadica* II. p. 406.

A faji azonosság megállapítása ennél az alaknál igen nehéz. A budai dachsteinmészkőben egy kettősteknőjű példány fordul elő, melynek azonban egyik teknője egészen eltolódott. A fogak, valamint a záros perem egyáltalán nem láthatók s így kizárólag csak a körvonalakra vagyunk utalva. BITTNER leírása szerint az összes *Schafhäutlia* fajok között ez a leginkább megnyúlt alak. Ez a jelleg a budai példányra is ráillik és főleg a BITTNER: *Lamellibranchiata* v. St. Cassian című munkájában a III. tábla, 1. ábráján közölt alakkal egyezik meg. Érdekes azonban, hogy ez a példány is menynyire elüt az összes többi ábrázolt alaktól. A budai példány harántirányban hasonlóan megnyúlt, búbja kissé előretolt, viszont némileg lekerekítettebbnek látszik.

Ez a faj nagy vertikális elterjedésű, a karni és raetiai emeletben egyaránt előfordul, horizontálisan pedig úgy az északi, mint

a déli Alpokban, valamint Sziciliában és Ázsiában is megtalálható. Igen valószínű, hogy a budai alak BITTNER fent idézett példányával egyező, kérdés azonban, hogy ez a faj azonos-e a többiekkel, mert BITTNER idézett helyen közölt 1. és 2. ábrái között (a rajz alapján) szembeszökő eltérés mutatkozik.

Előfordul egy példányban.

## Cephalopoda.

**Orthoceras lateseptatum** HAUER. XIII. tábla, 28. ábra. 1915. DIENER: *Cephalopoda triadica* p. 340.

Az alpi Sommeraukogel nori mészkövének ezt a jellemző alakját egy lakókamrarészlet képviseli a budai faunában. A helyenként megmaradt héjdíszítés alapján az azonosság kétségtelen. A héj felületén koncentrikus, teljesen épszélű bordák futnak le, melyeket keskeny barázdák választanak el. A bordákon szemcsézettségnek semmi nyoma sincs, különben is, amint MOJSISOVICS megjegyzi, a szemcsézettség ennél az alaknál csak a legritkább esetben és csak a legnagyobb példányoknál fordul elő. Az a körülmény, hogy a bordák helyenként hullámosaknak látszanak, kizárólag koptatás következménye, mert a sértetlen bordák teljesen egyenesek.

Előfordul két példányban.

**Orthoceras** cf. **celticum** MOJS. XIII. tábla, 29. ábra.

Ez a héjtöredék kihegyesedő longi-kon alakjával kizárólag csak ezzel a fajjal hasonlítható össze (MOJSISOVICS: Cephalopoden der Hallstätter Kalke. I. p. 6. I. tábla, 10. ábra) amelyet, sajnos, MOJSISOVICS leírása révén is csak igen hiányosan ismerünk. MOJSISOVICS szerint a héj teljesen síma, csupán egy transzverzális lécen láthatunk keskeny, horizontális redőket. A budai példány héja is síma, csupán néhány milliméteres részleten figyelhető meg három redő, melyek azonban kissé ferdén futnak le. Az alak és a héj nagysága teljesen azonos, a jellemző díszítés azonban nem figyelhető meg s így a faji azonosságot tisztán az alakbeli hasonlóság alapján nem tekinthetjük kétségtelennek.

Előfordul két példányban.

**Megaphyllites applanatus** Mojs. XIII. tábla, 30—31. ábra. 1915. Diener: *Cephalopoda triadica* p. 199. 1932. Kutassy: *Cephalopoda triadica* II. p. 587.

A hallstattvidéki Röthelstein karni emeletének gyakori alakja meglehetősen gyakran előfordul a budai dachsteinmészkőben is, kisebb-nagyobb példányokban.

Jellemző vonásai a lekerekített externális rész, a csaknem teljesen lapos oldalak és a mélyen fekvő, az oldali rész felé jól látható peremmel határolt köldök. Mindezen jellemvonások a budai példányokon jól láthatók.

A *Megaphyllites Jarbas*tól jól elkülöníthető a szájnyílás szélesebb és alacsonyabb alakja révén, valamint az oldalak lapítottságával, mivel a *M. Jarbas* oldali része hasonló nagyságú példányoknál még gömbölyű, csak a kifejlett példányoknál laposodik el.

Előfordul nyolc példányban.

**Megaphyllites noricus** nov. sp. XIII. tábla, 32—33. ábra.

Oldalai gyengén domborodók, köldöke szűk és igen mély, de az oldali rész felé nincs élesen elhatárolva. Externális része lekerekített, kissé elkeskenyedő. Nyílása alacsony. Lóbáit a kőzet megtartási állapota miatt nem lehet kiszabadítani, de annyi kivehető, hogy a segélylóbuszok száma nagy, tehát kétségtelenül ebbe a genuszba tartozik.

A nori emeletből eddig csak két *Megaphyllites*t ismertünk. Az egyik a *M. transiens*, jóval magasabb, de szélesebb szájnyílásával és szélesebb, de laposabb kanyarulataival élesen eltér. A másik faj a *M. insectus*, melynek köldöke viszont széles üregben fekszik, oldalai laposabbak, viszont externális része nem keskenyedik meg, s így nyílása is teljesen eltérő alakot mutat.

Általában véve az externális rész megkeskenyedése révén a budai példány inkább a triász idősebb emeleteiben előforduló alakokhoz csatlakozna, viszont azoknak az alakoknak magas szájnyílásuk van.

Előfordul két példányban.

**Choristoceras (Peripleurites) rotundatus** nov. sp. XIII. tábla, 34—35. ábra.

A hiányos megtartás ellenére, a morfológiai bélyegek alapján,

ezt a fajt kizárólag a *Peripleurites* szubgenusszal lehet rokonságba hozni.

Kanyarulatai teljesen kerekdedek, oldali és externális része egyenlő mértékben domborodó. Bordái legömbölyítettek, az externális részen is minden megszakítás vagy meghajlás nélkül futnak le. Az oldali részen közelebb állanak, az externális részen kissé eltávolodnak egymástól. Az intercostalis barázdák kb. két bordaszélességnek felelnek meg.

A *Peripleurites* szubgenuszból ezideig mindössze négy fajt ismerünk ,kettőt a hallstatti, kettőt pedig a dernői triászból. Mind a négy alak a nori emeletben fordul elő. A budai példány az összes Peripleuritesektől különbözik kanyarulatainak csaknem szabályos kerek körvonalával, úgyhogy ezen jellemvonása révén leginkább a *P. Stürzenbaumi* Mojs. fajhoz hasonlíthatnánk, melynek nyílása szintén kerekded, de viszont az externális részen szélesebb, mint a köldök felé eső oldalán, viszont bordái távolabb állanak és az externális részen sekély barázda választja el a bordákat. A megszakítás nélkül lefutó bordákkal díszített *P. böckhi* Mojs. és *P. römeri* Mojs. bordái szintén jóval távolabb esnek, lefutásuk élesen eltérő s becsavarodásuk is teljesen elütő. Végül a *P. saximontanus* Mojs. oldali része teljesen lapos, bordái közelebb feküsznek egymáshoz és a köztük levő intercostalis rész hol szélesebb, hol keskenyebb.

Mindezek alapján kétségtelen, hogy a budai példány új fajt képvisel, amelyeket azonban csak a P. szubgenuszba sorolhatunk be.

Előfordul egy példányban.

**Rhabdoceras suessi** Mojs. XIII. tábla, 36. ábra. 1915. Diener: *Cephalopoda triadica* p. 248. 1932. Kutassy: *Cephalopoda triadica* II. p. 646.

Ezt a rendkívül fontos, világszerte csak a nori emeletben előforduló fajt, már előző munkáimban is ismertettem, eddig azonban csak kisebb töredékeket sikerült találnom, míg most egy 46 mm hosszúságú héjrészlet is kikerült az újabb gyüjtések során. Ezen a hájas peldányon kitűen láthatók a felfelé concávan hajló bordák, melyeknek lefutása tökéletesen egyező Mojsisovics ábráival.

## Irodalom.

A paleontologiai részben idézett munkák mindegyike megtalálható a Fossilium Catalogus sorozat következő köteteiben és Cossmann itt idézett munkájában:

Diener C. (1915): *Cephalopoda triadica.* (Foss. Cat. Pars 8.)

Diener C. (1923): *Lamellibranchiata triadica.* (Foss. Cat. Pars 19.)

Diener C. (1925): *Glossophora triadica.* (Foss. Cat. Pars 34.)

Cossmann M. (1895—1925): Essais de Paléoconch. comp. (I—XIII. kötet.)

Kutassy A. (1931): *Lamellibranchiata triadica* II. (Foss. Cat. Pars 51.)

Kutassy A. (1933): *Cephalopoda triadica* II. (Foss. Cat. Pars 56.)

Kutassy A. (1934): *Pachyodonta mesozoica.* (Foss. Cat. Pars 68.)

Készült a Magyar Tudományos Akadémia ösztöndíjának támogatásával a budapesti Pázmány Péter Tud. Egyetem Őslénytani Intézetében.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1935. dec. 16-án tartott üléséből.)

# TÁBLAMAGYARÁZAT — TAFELERKLÄRUNG.

## XI. TÁBLA.

### A fődolomitból (A. d. Hauptdolomit).

1. *Euomphalus* sp. ind. (Lenyomat—Abdruck.)
2. *Neritopsis armata* MÜNST. var. *plicata* MÜNST. (2 ×.)
2*a*. *Neritopsis armata* MÜNST. var. *plicata* MÜNST. (Term. nagys. — Nat. Gr.)
3—4. *Purpurina* cf. *cerithiformis* KITTL. (Term. nagys. — Nat. Gr.)
5. *Coelostylina nodosa* KITTL. (Lenyom. term. nagys. — Abdruck. Nat. Gr.)
6. *Coelostylina* sp. ind. (Kőbél, term. nagys. — Steinkern. Nat. Gr.)
7. *Omphaloptycha turris* STOPP. (Kőbél, term. nagys. Steinkern, Nat. Gr.)
8. *Omphaloptycha turris* STOPP. (Lenyomat, Abdruck.)
9. *Zygopleura modesta* KITTL nov. var. *angulata*. (Lenyom. term. nagys. Abdruck. Nat. Gr.)
10. *Stephanocosmia (Tyrsoecus) dolomiticus* KITTL juv. (Lenyom. term. nagys. Abdr.)
11. *Cuspidaria gladius* LBE. (Kőbél, term. nagys. Steinkern, Nat. Gr.)
12*a*., *b*. *Megalodus carinthiacus* HAUER. (Kőbél, term. nagys. Steinkern, Nat. Gr.)
13*a*., *b*. *Megalodus Böckhi* HÖRN. nov. var. *latiumbonata*. (Kőbél, term. nagys. Steinkern, Nat. Gr.)
14*a*., *b*. *Cornucardia Hornigi* BITTN. (14*a*., *b*. kőbél, term. nagys. Steinkern, Nat. Gr.)
15. *Thecosmilia* sp. ind. (Term. nagys. Nat. Gr.)
16. *Worthenia inzini* STOPP. var. nov. *rotundocarinata*. (2 ×.)
17—18. *Worthenia inzini* STOPP. var. nov. *rotundocarinata*. (Term. nagys. Nat. Gr.)
19—20. *Natica sublineata* MÜNST. (2 ×.)
21. *Natica sublineata* MÜNST. (Ered. nagys. Nat. Gr.)

## XII. TÁBLA.

### A dachsteinmészkőből (A. d. Dachsteinkalk).

1—2. *Worthenia gigas* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
3—4. *Worthenia infraornata* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
5—6. *Woehrmannia decorata* nov. sp. (2 ×.)
7—8. *Woehrmannia decorata* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
9. *Hologyra cassiana* WISSM. (Term. nagys. Nat. Gr.)
10. *Protonerita Mandelslohi* KLIPST. (Term. nagys. Nat. Gr.)
11. *Trachynerita quadrata* STOPP. nov. var. *acutiumbonata*. (Term. nagys. Nat. Gr.)

12—13. *Telleria gigantea* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
14—15. *Dicosmos sigaretoides* nov. sp. (Term. nagy. Nat. Gr.)
16—17. *Purpuroidea nassaeformis* Di Stef. (Term. nagys. Nat. Gr.)
18—19. *Tretospira* cf. *fasciata* Kittl. (Term. nagys. Nat. Gr.)
20. *Tretospira* cf. *fasciata* Kittl. (Díszítés nagyítva. Verzier. vergr.)
21—22. *Palaeotriton* (?) *globularis* nov. sp. (2 ×.)
23. *Palaeotriton* (?) *globularis* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
24. *Stephanocosmia coronata* Kok. (5 ×.)
25. *Stephanocosmia coronata* Kok. (Term. nagys. Nat. Gr.)
26. *Zygopleura arctecostata* Kittl. (Term. nagys. Nat. Gr.)
27. *Zygopleura* cf. *Arpadis* Kittl. (Term. nagys. Nat. Gr.)
28. *Coelochrisalis rotundatus* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)

## XIII. TÁBLA.

### A dachsteinmészkőből (A. d. Dachsteinkalk).

1—2. *Omphaloptycha pupoides* Stopp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
3. *Omphaloptycha zitteli* Boehm. (Term. nagys. Nat. Gr.)
4. *Omphaloptycha bacchus* Kittl. (Term. nagys. Nat. Gr.)
5. *Omphaloptycha conica* Münst. (Term. nagys. Nat. Gr.)
6. *Undularia (Toxoconcha) brocchii* Stopp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
7—8. *Stephanocosmia (Tyrsoecus) dolomiticus* Kittl. (Term. nagys. Nat. Gr.)
9. *Pecten egidii-venantii* Tomm. (Term. nagys. Nat. Gr.)
10. *Pecten (Chlamys) pygmaeus* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
11. *Lima* sp. ind. (Term. nagys. Nat. Gr.)
12—13. *Myophoricardium lineatum* Woehrm. (2 ×.)
14. *Myophoricardium lineatum* Woehrm. (Term. nagys. Nat. Gr.)
15. *Myoconcha alata* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
16. *Modiola norica* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
17. *Modiola gracilis* Klipst. (2 ×.)
18. *Modiola gracilis* Klipst. (Term. nagys. Nat. Gr.)
19—20. *Lucina quadrata* Kutassy. (Term. nagys. Nat. Gr.)
21. *Ctenodonta elliptica* Goldf. (Term. nagys. Nat. Gr.)
22—24. *Macrodon juttensis* Bittn. (Term. nagys. Nat. Gr.)
25. *Pleuromya lata* Par. nov var. *hungarica.* (Term. nagys. Nat. Gr.)
26. *Nucula expansa* Wissm. nov. var. *abbreviata.* (Term. nagys. Nat. Gr.)
27. *Schafhäutlia* cf. *astartiformis* Münst. (Term. nagys. Nat. Gr.)
28. *Orthoceras lateseptatum* Hauer. (Term. nagys. Nat. Gr.)
29. *Orthoceras* cf. *celticum* Mojs. (Term. nagys. Nat. Gr.)
30—31. *Megaphillites applanatus* Mojs. (Term. nagys. Nat. Gr.)
32—33. *Megaphyllites noricus* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
34—35. *Choristoceras (Peripleurites) rotundatus* nov. sp. (Term. nagys. Nat. Gr.)
36. *Rhabdoceras Suessi* Mojs. (Term. nagys. Nat. Gr.)

# FAUNEN AUS DEM HAUPTDOLOMIT UND DACHSTEINKALK DES BUDAER GEBIRGES.

Von A. KUTASSY.

Ausser meiner im Jahre 1927 erschienenen Arbeit über die Stratigraphie und Paläontologie der Trias in der Umgebung von Budapest [1] schien es mir vor etlichen Jahren notwendig die neueren bedeutenden Aufsammlungen in einer zweiten Arbeit zu veröffentlichen.[2] Die neuesten Aufsammlungen lieferten wiederum so viele wertvolle stratigraphische und paläontologische Daten, ferner so wichtige Beweise für meine früheren Feststellungen, dass ich es für unbedingt notwendig halte über sie zu berichten.

Die meisten Neuigkeiten hat ein neuer Aufschluss im Hauptdolomit geliefert, welchen Herr Dr. GYULA LEVATICH gefunden hat. Der Aufschluss befindet sich an der südöstlichen Seite des Sasberges. Einen bedeutenden Teil der Fauna von hier hat ebenfalls Herr Dr. LEVATICH gesammelt und dieses Material mir liebenswürdiger Weise überlassen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danke. Ebenfalls muss ich mich auch beim Herrn Universitätsassistenten Dr. SÁNDOR JASKÓ für die Zeichnung meiner Abbildungen, ferner bei den Herren Assistenten L. BARTKÓ und J. KEREKES für die bei den Aufsammlungen geleistete Hilfe herzlichst bedanken.

Die Bearbeitung des neuen Materials ermöglichte mir die folgenden stratigraphischen und paläontologischen Folgerungen zu veröffentlichen.

---

[1] KUTASSY, A.: Beiträge zur Stratigraphie und Paläontologie der alpinen Triasschichten in der Umgebung von Budapest. (Jahrbuch d. kgl. ung. Geol. Anstalt. Bd. XXVII. 1927.)

[2] KUTASSY, A.: Weitere Beiträge zur Kenntnis der Fauna des norischen Dachsteinkalkes in der Umgebung von Budapest. (Mathem. u. Naturw. Anzeiger d. ung. Akad. d. Wiss. Bd. XLIX. Budapest, 1932.)

## I. Hauptdolomit.

Meine Auffassung über die stratigraphische Lage des Haupt dolomits habe ich in meiner im Jahre 1927 erschienenen Arbeit bekannt gemacht, wo ich auf Grund der Fossilien und der Lagerungsverhältnisse feststellen konnte, dass die diploporenführenden Dolomite an der Grenze der ladinischen und karnischen Stufe, die Dolomitschollen der Gellért-, Kis Gellért- und Sas-Berge in der oberen Abteilung der karnischen Stufe zur Ablagerung kamen. (S. p. 11—13.) Ich wies aber schon damals darauf hin, dass die Faunen der einzelnen Schollen für sich bearbeitet werden müssen, weil eine endgültige Folgerung über die stratigraphische Lage der Schollen nur auf diese Weise möglich ist. Im Laufe des vorigen Jahres hat sich herausgestellt, dass meine diesbezügliche Auffassung völlig richtig war, indem VIGH in der Hármashatárhegy-Gruppe an einer Fundstelle des Dolomites auf die norische Stufe hinweisende Fossilien gefunden hat,[3] welche Tatsache beweist, dass wie der Dachsteinkalkstein, auch der Hauptdolomit sowohl in der karnischen wie auch in der norischen Stufe vorkommt. Ganz falsch ist aber jene Annahme von VIGH, nach welcher ich bei der Absonderung nur an die karnische und ladinische Stufe gedacht hätte. An der zitierten Stelle ist nämlich die Rede von einer allgemeinen Feststellung und kein Wort von einzelnen Stufen. (S. 1. p. 6—7 gesperrt.)

Die neuesten Aufsammlungen von der Gellért- und Sasberg-Gruppe lieferten für das karnische Alter der erwähnten Schollen noch wichtigere Beweise, als die bisherigen waren. In der von hier vorkommenden Fauna habe ich Formen gefunden, welche im ungarischen Text auf Seite 2. anzutreffen sind. Diese Fauna beweist zweifelsohne, dass diese Hauptdolomitschollen die obere Abteilung der karnischen Stufe repräsentieren. Die Gastropoden dieser Fauna sind, wie die des Dachsteinkalkes, entweder identisch mit den Arten von Esino und St. Cassian oder denen sehr nahe verwandt. Unter den Lamellibranchiaten aber sind solche Formen

[3] VIGH, GY.: Neuere Triasfunde im Ungarischen Mittelgebirge. (Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. Beil. Bd. LXXII. Abt. B. 1934.)

bekannt, die als wichtige Leitfossilien betrachtet werden müssen. Die Gattung Cornucardia kommt ausschliesslich in der karnischen Stufe vor. *Cornucardia hornigi* selbst ist an seiner ursprünglichen Fundstelle im Bakonygebirge aus dem Veszprémer Mergel bekannt. Der Mergel von Veszprém repräsentiert die Torer Schichten der oberen karnischen Stufe. Die andere Fundstelle dieser Art ist in den Schichten von Heiligenkreuz, die ebenfalls in die Torer Schichten gehören. Eine andere ausserordentlich charakteristische Form ist *Megalodus carinthiacus*, welche Art sowohl im Bakonygebirge wie auch in den Alpen mit der obenerwähnten Form gemeinsam vorkommt. Das Vorkommen von *Megalodus carinthiacus* in so grosser Zahl (im Sasberg und Kisgellértberg ist diese Art sozusagen gesteinsbildend) kann daher nur auf den höheren Horizont der karnischen Stufe hinweisen. Eine Ausnahme ist *Megalodus böckhi*, welche Art bis jetzt nur aus der unteren Abteilung der norischen Stufe bekannt war. Diese Art ist aber im Budaer Hauptdolomit gar nicht häufig.

Ich möchte an dieser Stelle eine allgemein verbreitete Annahme richtigstellen. Im Jahre 1927 habe ich auf Grund der Arbeit von HOFMANN[4] aus dem Hauptdolomit des Budaer Gebirges auch *Megalodus triqueter* WULF aufgeführt. Im Laufe meiner Megalodus-Studien nach der Untersuchung der österreichischen, deutschen und italienischen Sammlungen bin ich daraufgekommen, dass der echte *Megalodus triqueter* ausschliesslich im Bleiberger Fundort vorkommt und sämtliche Formen, die unter diesem Namen von anderen Fundorten aufgeführt wurden, ganz andere Arten darstellen. Die Originalsammlung von HOFMANN ist leider nicht mehr aufzufinden. Ich glaube jedoch, dass auch die von ihm für *Megalodus triqueter* gehaltenen Formen in andere Arten gehören dürften. Diese Vermutung wird auch durch jene Tatsache gestärkt, dass in den neuesten Aufsammlungen, wo zahlreiche Megalodonten gefunden worden sind, keine Spuren von *Megalodus triqueter* bekannt sind.

---

[4] HOFMANN, K.: Die geologischen Verhältnisse des Ofen-Kovácsier Gebirges. (Mitteilungen aus dem Jahrbuch d. kgl. ung. Geol. Anstalt. Bd. I. Budapest. 187.)

Ich möchte noch erwähnen, dass fast alle Gastropoden als Abdrücke erhalten geblieben sind. Der Erhaltungszustand der Abdrücke ist tadellos. Die Lamellibranchiaten — mit Ausnahme eines Exemplares von *Cornucardia hornigi* — sind Steinkerne.

## II. Dachsteinkalk.

Der Dachsteinkalk in der Umgebung von Budapest wurde früher für fossilleer gehalten. Der Reichtum der karnischen Fauna aus einem Fundorte dieses Gesteins am Fazekasberg, ferner der norischen Fauna am Remeteberg war so überraschend, dass man mit einer derartigen Vermehrung der Artenzahlen überhaupt nicht rechnen konnte. Der wichtigste Fundort über dem östlichen Eingang des Engpasses des Remeteberges wird leider kein weiteres Material liefern, weil der Steinbruch hier auf behördliche Anordnung aufgelassen wurde. Die von hier gesammelte Fauna ist im ungarischen Text auf S. 4—5 aufgezählt. Ausser den hier erwähnten Arten wurden in diesem Aufschluss auch mehrere Exemplaren von bereits bekannten Arten gefunden.

Wenn wir die Verteilung der einzelnen Tierklassen betrachten, so zeigt uns die Zahl der einzelnen Arten aus dem norischen Dachsteinkalk des Remeteberges das folgende Bild:

| | | |
|---|---|---|
| Korallen | 1 | Art |
| Hydrozoen | 1 | « |
| Cephalopoden | 14 | Arten |
| Lamellibranchiaten | 31 | « |
| Gastropoden | 58 | « |

Aus dem norischen Dachsteinkalk sind daher bis jetzt 105 Tierarten bekannt, während aus dem in tieferen Horizont gereihten Dachsteinkalk (Fazekasberg l. cit. 1. p. 13), von den gemeinsamen Arten abgesehen, 12 Arten.

Auf Grund dieser Tatsachen können wir feststellen, dass der Dachsteinkalk im Budaer Gebirge der bis jetzt bekannte reichste Fossilfundort des norischen Dachsteinkalkes in der mediterranen Triasprovinz ist. Vom Gesichtspunkte des Artenreichtums kann mit ihm nur der norische Dachsteinkalk von St. Anna in den

Ostalpen und der rhätische Dachsteinkalk im Bakonygebirge verglichen werden.

Die Seltenheit der Korallen unter den Faunenelementen ist nur eine scheinbare. Der Dachsteinkalk muss nämlich als Korallenriff betrachtet werden, so müsste man eigentlich viele Korallenreste im Dachsteinkalk erwarten; im Laufe der diagenetischen Vorgänge sind aber alle Korallenreste umkristallisiert. Diese Vermutung wird auch dadurch bewiesen, dass man in keinem Dünnschliff die Sternleisten untersuchen kann, obwohl viele Korallenspuren vorkommen.

Wie in den älteren Aufsammlungen, besteht der grössere Teil des gesammelten Materials auch in der neuesten Aufsammlung aus Gastropoden. Dies bezieht sich nicht nur auf die Arten, sondern auch auf die Exemplarenzahl. Einige Arten kommen in mehreren Hunderten von Exemplaren vor (Hungariella, Trachynerita, Coelostylina). Die verwandtschaftlichen Beziehungen der Gastropodenfauna weisen übrigens dasselbe Bild auf, wie es schon auf Grund meiner älteren Untersuchungen festgestellt werden konnte. Die einzelnen Formen der Gastropodenfauna sind mit den Arten der Esino-, Marmolata und St. Cassianer Faunen entweder ganz identisch oder denen nahe verwandt, welche Tatsache wieder beweist, dass diese Faunen langdauernd waren. (Unter den triadischen Schnecken finden wir natürlich auch ausgesprochene «Leitfossilien». So kommt *Naticella costata* nur in den Campiler Schichten und *Worthenia contabulata (= Turbo solitarius)* in der norischen Stufe vor.)

Durch die neueren Aufsammlungen wurde die Artenzahl der Lamellibranchiaten auch bedeutend vermehrt. In dieser Gruppe sind dieselben Verhältnisse vorhanden, wie bei den Gastropoden. Unter den Lamellibranchiaten herrschen nämlich auch die Formen der Esino-, Marmolata- und St. Cassianer Faune vor. Eine Form, die ausschliesslich im Noricum auftritt, ist *Pecten egidii-venantii* Tomm.

Vom stratigraphischen Gesichtspunkte aus ist die Gruppe der Cephalopoden am wichtigsten. Das Vorkommen und die Häufigkeit von *Rhabdoceras suessi* und *Rhacophyllites neojurense* hat schon bisher zweifelsohne für das norische Alter des Budaer Dachsteinkalkes gesprochen. (2) Einen neueren Beweis liefert nun *Orthoceras lateseptatum*, welche Form häufig im norischen Hallstätter Kalk

vorkommt, ferner das Vorkommen der Gattung *Peripleurites*, welche bis jetzt nur aus der norischen Stufe bekannt war. Ausser diesen kommen noch einige Arten vor, die in der oberen Abteilung der alpinen karnischen Stufe und in die karnische Stufe gereihten Dachsteinkalke des Fazekasberges vertreten sind. Die ersten Aufsammlungen haben vom Remeteberge fast gar keine Cephalopoden geliefert, weshalb dieser Fundort als eine andere Fazies, als die Remeteberger Fazies betrachtet werden musste. Seitdem ist aber bekannt geworden, dass die Cephalopoden am Remeteberg ebenso häufig sind, wie am Fazekasberg. Damit taucht der Gedanke empor, ob die Annahme, dass die Fauna des Fazekasberges in einem tieferen Meer zur Ablagerung kam, nicht falsch sei. Die Frage muss unbedingt mit «Nein» beantwortet werden. In der reichen Cephalopodenfauna des Remeteberges ist nämlich keine Spur von den für die karnische Stufe charakteristischen Gattungen *Discotropites*, *Styrites*, *Thisbites*, die in der Fauna des Fazekasberges so häufig sind und wo *Rhabdoceras* nicht vorkommt.

Die in der Fauna vorkommenden Gattungen *Woehrmannia*, *Tretospira* und *Palaeotriton* waren aus der ungarischen Trias bisher nicht bekannt. Die Verbindung ist ausser den schon erwähnten alpinen Faunen, mit den Faunen des lombardischen und sizilianischen Hauptdolomits am engsten. Die Arten *Worthenia inzini*, *Purpuroidea nassaeformis*, *Pecten egidii-venatii*, *Pleuromya lata* sind nur von hier bekannt. Eine sehr nahe Verwandtschaft lässt sich natürlich mit der unlängst beschriebenen Fauna [5] von St. Anna in Krain feststellen, wo im Dachsteinkalk mehrere neue Gattungen vorkommen, die bisher nur im Noricum des Budaer Gebirges bekannt waren. *(Hungariella, Parangularia, Seisia.)*

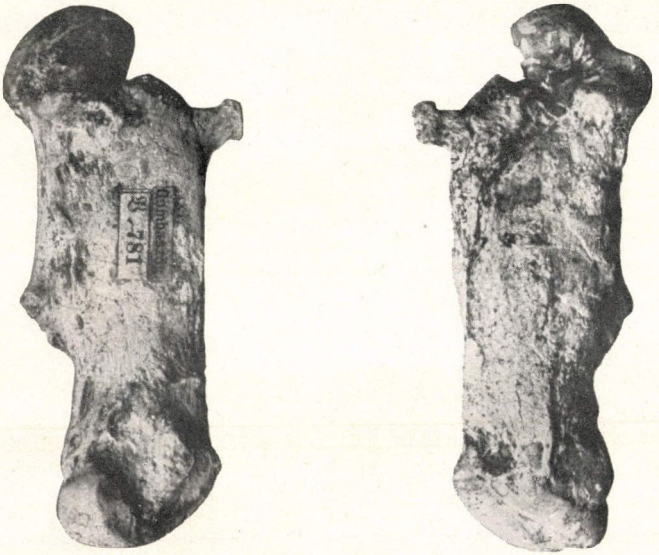
Aus dem paläontologischen Institut der Peter Pázmány Universität, Budapest, mit materieller Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

[5] KUTASSY A.: Die Fauna des norischen Dachsteinkalkes von St. Anna bei Neumarkt (Oberkrain). Földtani Közlöny Bd. LXIV. Budapest. 1934.

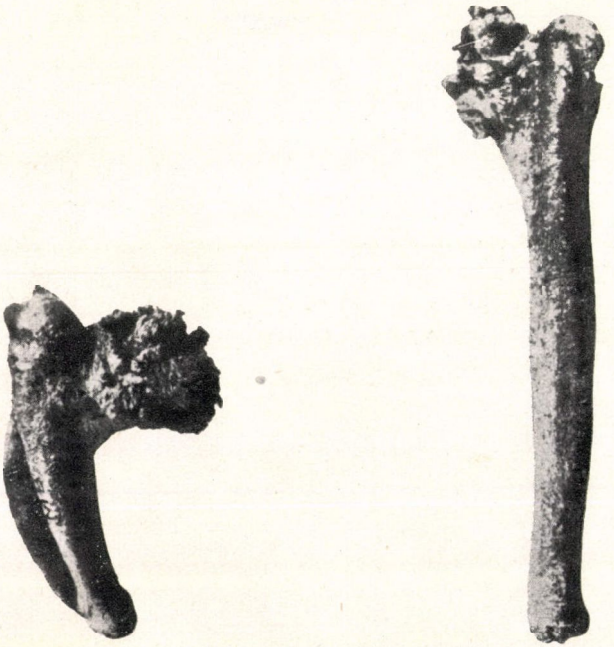
(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademia der Wissenschaften vom 16. Dez. 1935.)

38 39 49

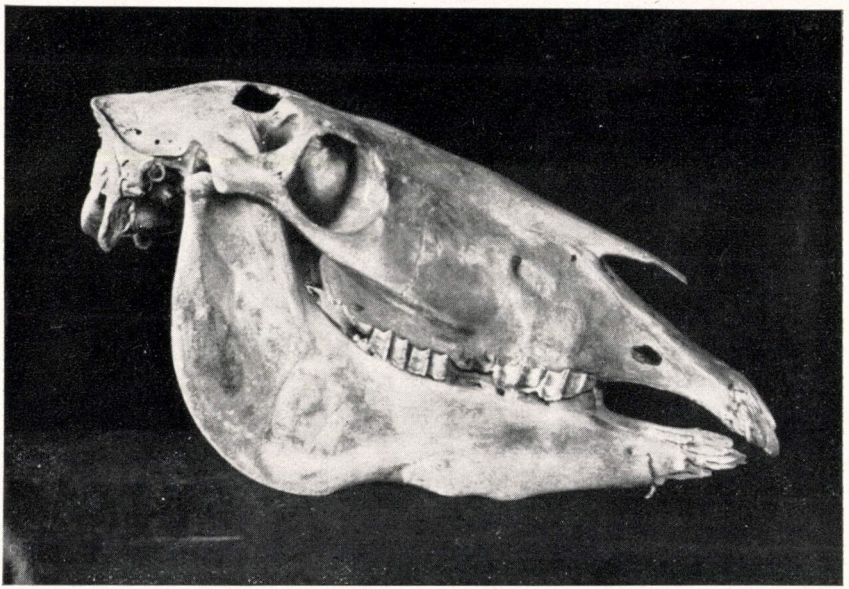
**Tasnádi-Kubacska:**
**Kihalt gerincesek sérüléseinek törzsfejlődéstani jelentőségéről.**



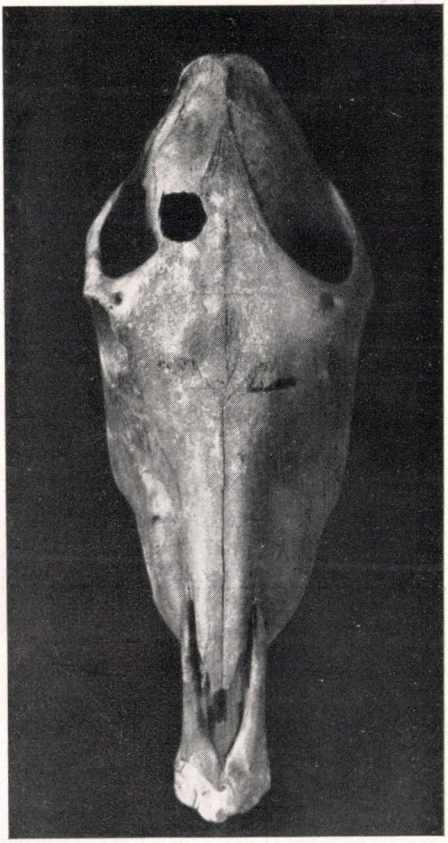
1. ábra.



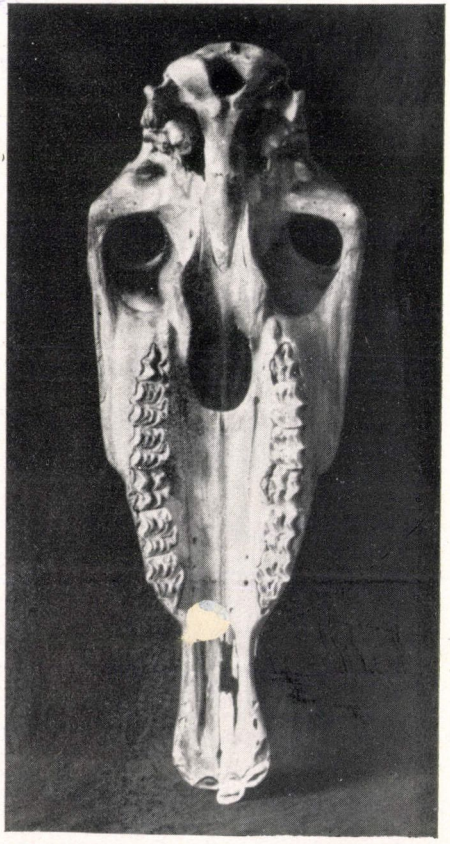
2. ábra.



1. kép. Kunágota I. jelzésű lókoponya jobboldali oldalnézetben, norma lateralis v. temporalis.

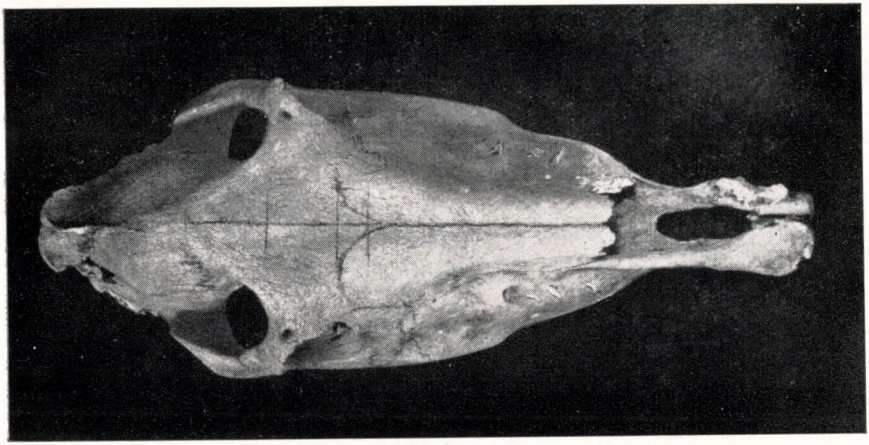


2. kép. Kunágota I. jelzésű lókoponya felülről, norma verticalis v. frontalis.

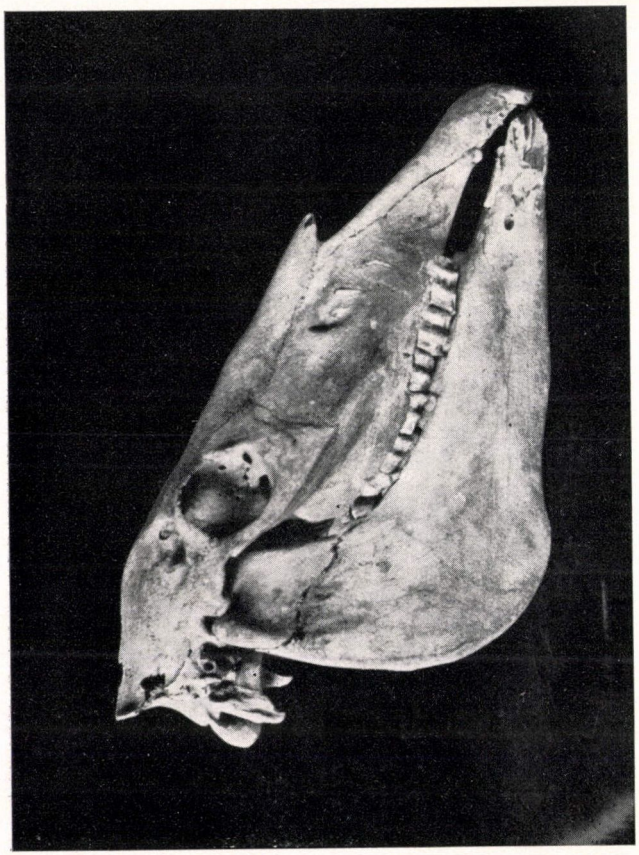


3. kép. Kunágota I. jelzésű lókoponya alapja, norma basilaris.

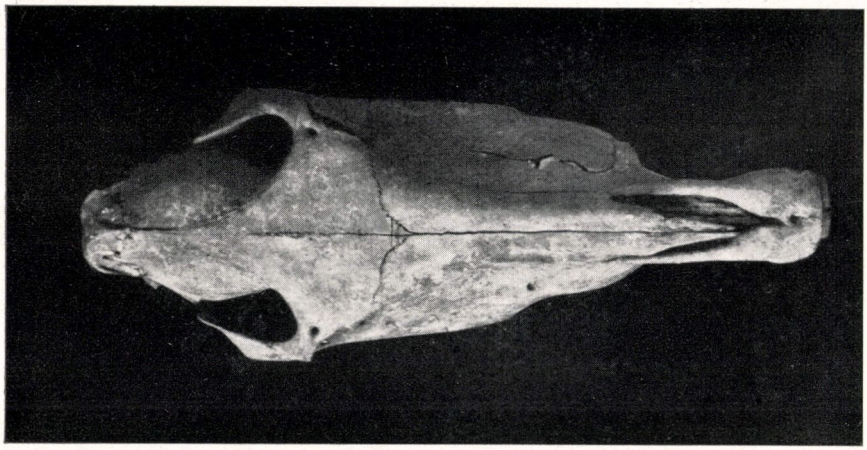
EGYETEMI KÖNYVTÁR
FOLYÓIRATOK
SZEGED



5. kép. Kunágota II. jelzésű lókoponya felülről, norma verticalis v. frontalis.

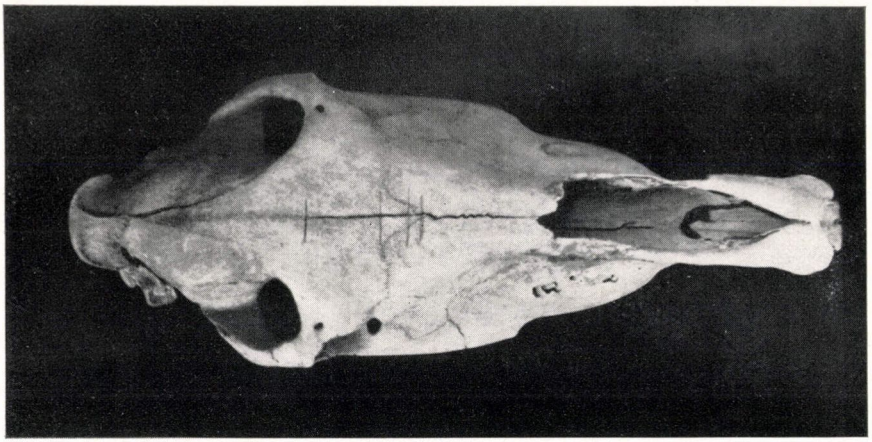


4. kép. Kunágota II. jelzésű lókoponya jobboldali oldalnézetben, norma lateralis v. temporalis.

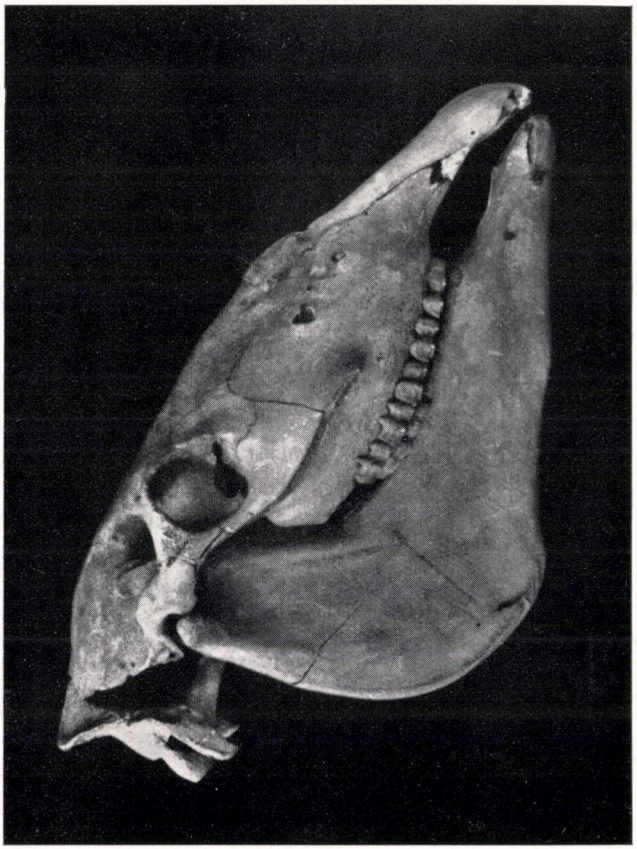


7. kép. Kaján 64. jelzésü lókoponya felülről, norma verticalis v. frontalis.

6. kép. Kaján 64. jelzésü lókoponya jobboldali oldalnézetben, norma lateralis v. temporalis.



9. kép. Pestszentlőrinc jelzésű lókoponya felülről, norma verticalis v. frontalis.



8. kép. Pestszentlőrinc jelzésü lókoponya jobboldali oldalnézetben, norma lateralis v. temporalis.

**Nagy Dezső: Kraniometriai vizsgálatok a honfoglaló magyarok lovain.**



12. kép. No 6. jelzésű lókoponya felülről, norma verticalis v. frontalis.

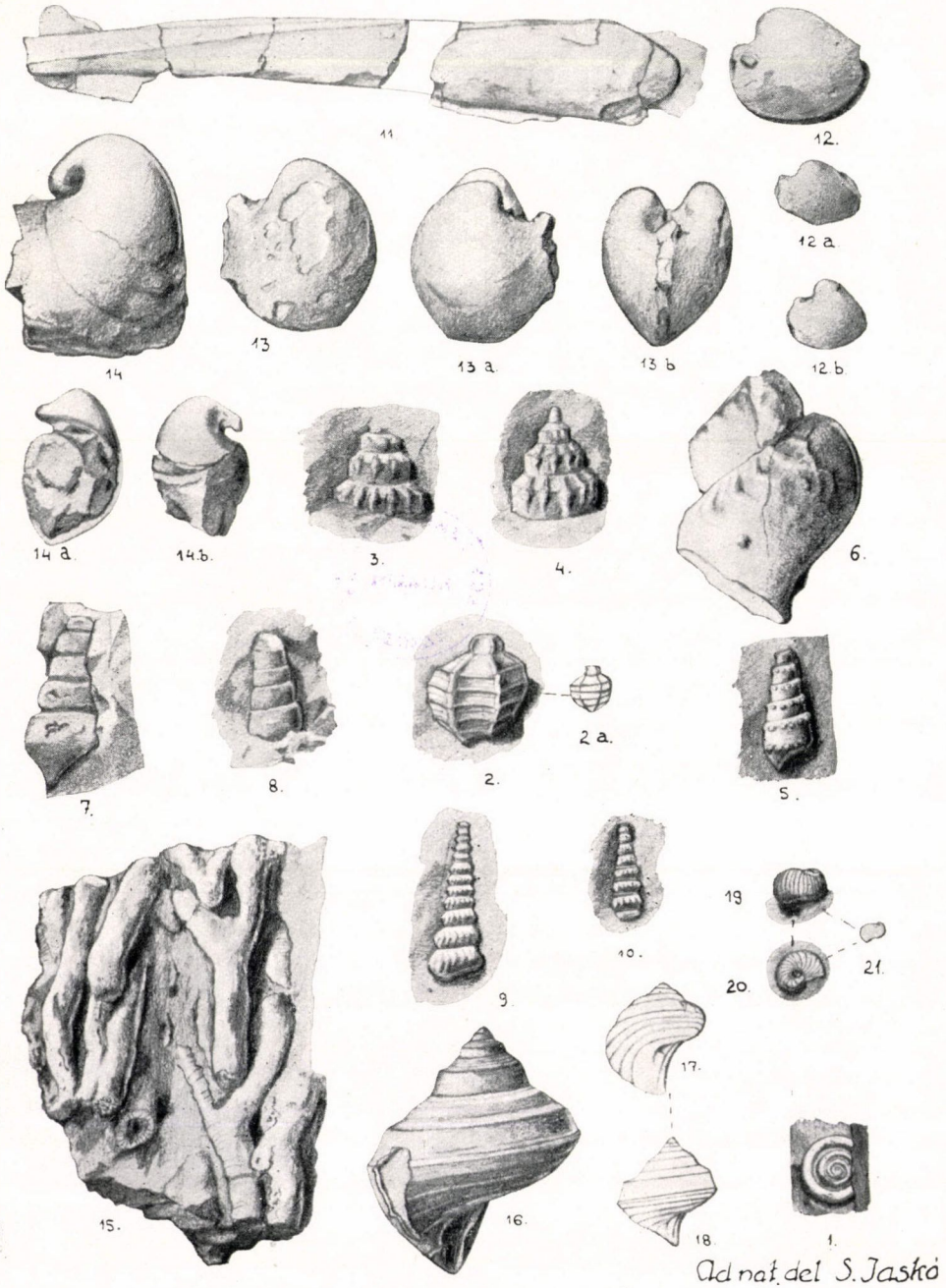


11. kép. Kenézlő jelzésű lókoponya alapja, norma basilaris.

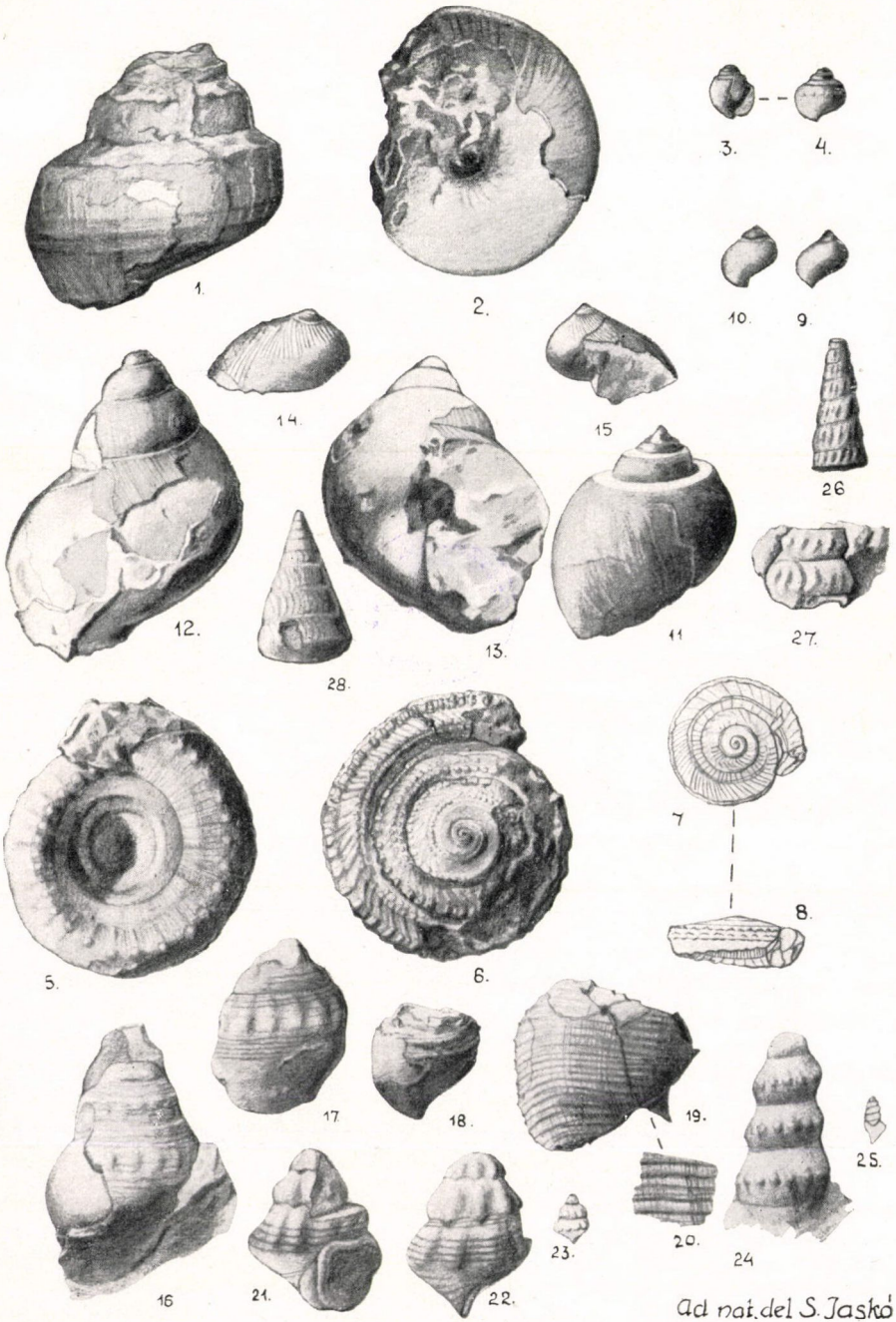
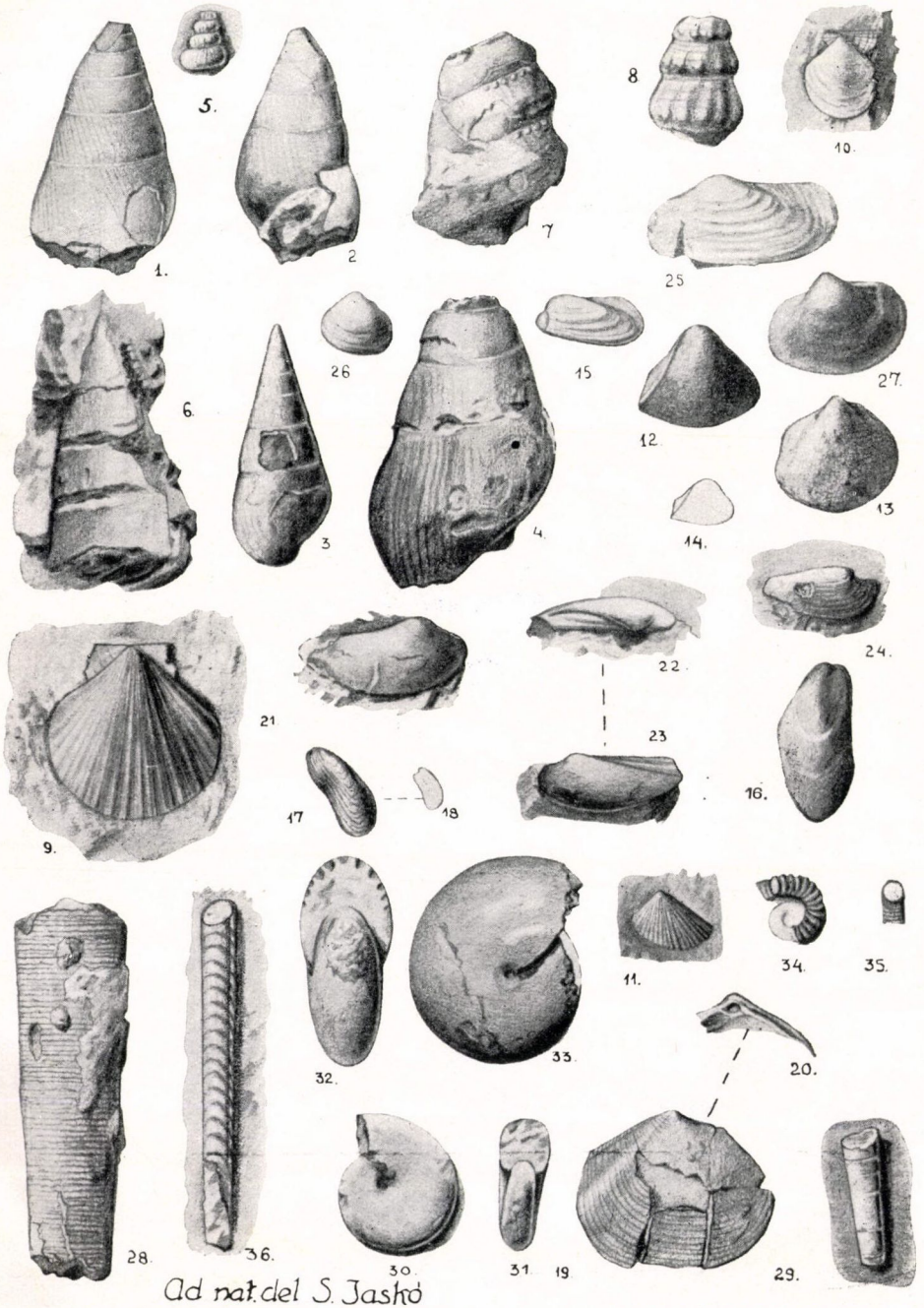


10. kép. Kenézlő jelzésű lókoponya felülről, norma verticalis v. frontalis.

**Kutassy: Fődolomit és dachsteinmészkő faunák a budai hegységből.**



**Kutassy: Fődolomit és dachsteinmészkő faunák a budai hegységből.**



**Kutassy: Fődolomit és dachsteinmészkő faunák a budai hegységből.**