

50639

50639

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

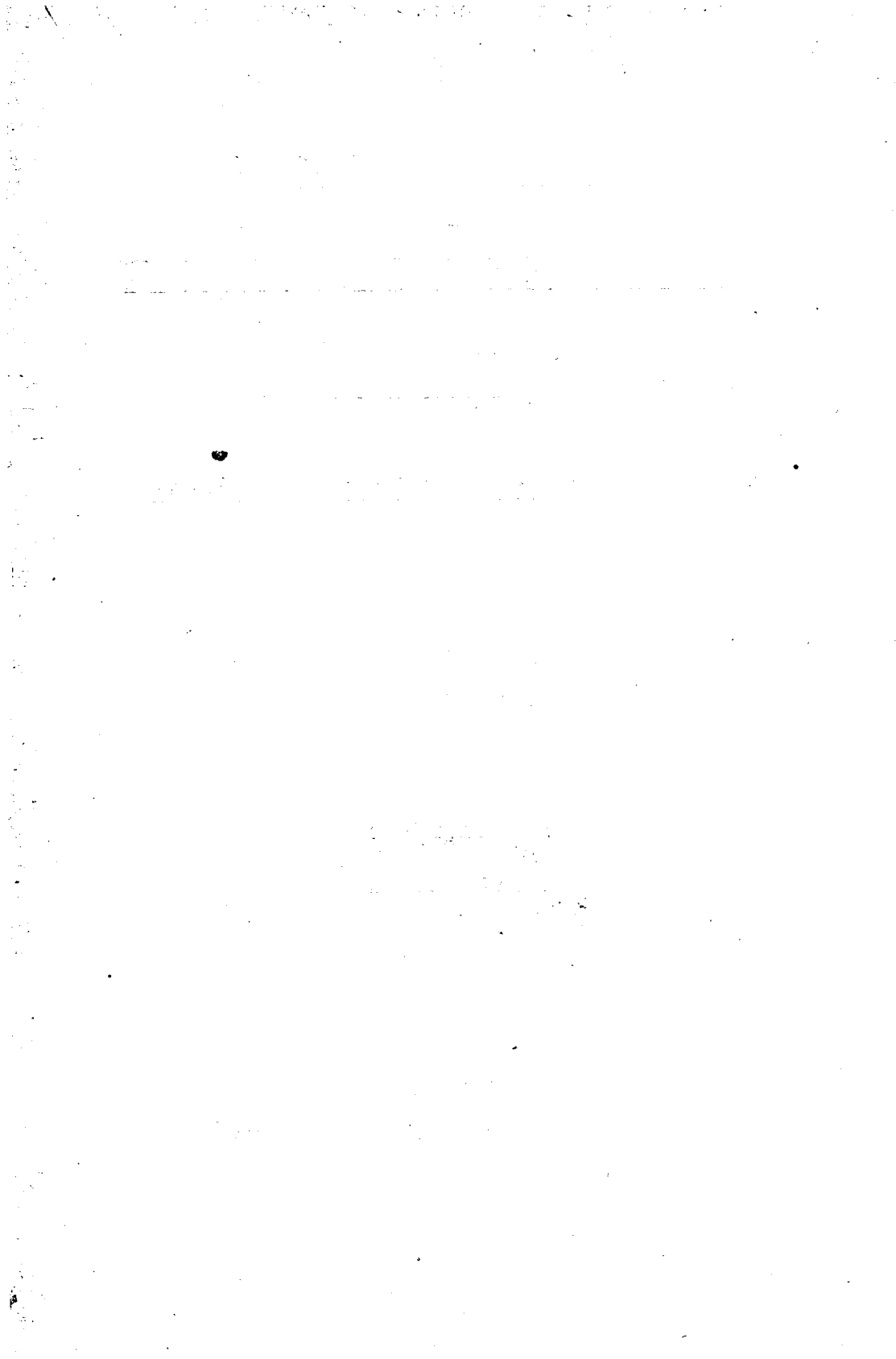
XXXVIII. KÖTET.



BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1921.



TARTALOM.

	<i>Lap</i>
BAUER MIHÁLY: Relativ Galois-féle számtestek összetétele	173—177
BAUER MIHÁLY: Az algebrai számtest differenséről	178—181
BAUER MIHÁLY: Az algebrai számtest differenséről és discrimi- nansáról	421—428
BODÓCS ISTVÁN: A geometriai fénytán hyperbola-tétele	255—265
DEGEN ÁRPÁD: A heréseinket károsító arankákról	147—151
FÉNYI GYULA S. J.: A protuberantiák periodusa	278—292
FILARSZKY NÁNDOR: A separatiós sejtmegosztódás elmélete és szerepe a növények fejlődésében és rendszerezésében	238—248
FRÖHLICH IZIDOR: Poláros, párhuzamos fénysugár-nyalábnak op- tikai lencsével való átalakítása köralapú sugárkúppá	379—378
GYÖRFFY ISTVÁN: Iker szikleveles jegenyefenyő-csemeték. (Plantu- lac abietis albae geminatis cotylenodibus)	329—344
GYÖRFFY ISTVÁN: A Molendoák fajai tagolódása és rokonsága összehasonlító anatómiai és fejlődéstani vizsgálatok alapján	345—351
HANKÓ VILMOS: Kovács Mihály dr., az első rendszeres magyar Chemia írója	1— 15
HOOR-TEMPIS MÓRICZ: A művelt nemzetek mechanikai munka- szükséglete. Első közlemény	293—305
HOOR-TEMPIS MÓRICZ: A művelt nemzetek mechanikai munka- szükséglete. Második közlemény	306—314
HOOR-TEMPIS MÓRICZ: Az elektromos művek terhelési diagramjai és az energia-gazdálkodás javítása	315—328
ILOSVAY LAJOS: A szag és a kémiai összetétel közötti kapcsolat	182—193
KERÉKJÁRTÓ BÉLA: Jordan görbe-tételének bebizonyítása	194—198
KERÉKJÁRTÓ BÉLA: A HELLY-féle tételről	415—416
KERTÉSZ KÁLMÁN: A magyar birodalom legyeinek synopsisa. I. Lauxaniidae	352—359
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Irreducibilis formák	266—277
KÖNIG DÉNES: Egy tétel a konvex testekről	417—420
MANNINGER REZSŐ: A baromficholera bacillusának variációjáról	77— 87
MANNINGER REZSŐ: Az egyptások vérsavójának complementum- ellenes hatásáról	88— 98
MAREK JÓZSEF: A rachitis (angol betegség) összehasonlító kórtana	128 146
MAUTHNER NÁNDOR: A metadimethoxybenzaldehyd synthesise	152—158

	<i>Lap</i>
MAUTHNER NÁNDOR és PFEIFER IGNÁC: A methan chlorozása	159—162
SZ. NAGY GYULA: Geometriai relációk valamely rationalis egész függvénynek és logaritmusa deriváltjainak zérus-helyei között	429—441
SZ. NAGY GYULA: A poláris egyenletek gyökeinek helyzetéről	442—455
NEMÉNYI PÁL: A hajlítás de Saint-Venant-féle problémájának megoldása az erő irányához képest szimmetrikus, egyébként azonban tetszésszerű keresztmetszetre	404—409
NEMÉNYI PÁL: A torzió-probléma PRANDTL-RUNGE-féle megoldásának általánosítása többszörösen összefüggő keresztmetszetre	410—414
POGÁNY BÉLA: Néhány fém fajlagos ellenállásának a nyomástól való függéséről	37—49
POGÁNY BÉLA: Újabb vizsgálatok a nem ferromágneses fémek Faraday-effektusáról	388—403
PREISZ HUGÓ: A bakteriumsporák csirázásáról. Egy táblán 48 rajzzal	58—68
RADOS GUSZTÁV: Függvények egymástól való lineáris függőségének új kriteriuma és ennek kapcsolata a régiakkal	50—57
RADOS GUSZTÁV: Több változós függvények egymástól való lineáris függésének feltétele	69—76
RADOS GUSZTÁV: Összetett modulus quadratikuss maradékai	230—237
RICHTER HUGÓ: A tabes histogenesisise	165—172
RIESZ FRIGYES és SZEGŐ GÁBOR: Analytikus függvény kerületi értékeiről	113—127
RYBÁR ISTVÁN: A folyadékok felszínéről a polározás szöge alatt visszaverődött fény vizsgálata	99—112
SCHAFFER KÁROLY: Az átöröklődő idegbajok általános kórszövet-tani jellemzése	16—36
SCHILBERSZKY KÁROLY: A szilvafák rozsdabetegségét okozó gombák biológiájáról	163—164
SCHWARZ ELEMÉR: Egyszerű, új geometriai tétel az optikai lencséről	249—254
STRINER LAJOS: A földmágnességi háborgások egy különös alakjáról	360—378
VENDL ALADÁR: Adatok az amfibolitok osztályozásához	199—206
VENDL ALADÁR és VENDL MIKLÓS: Amfibolitok a Déli Kárpátokból	207—219
VENDL ALADÁR és VENDL MIKLÓS: Adatok a plagioklászok meghatározásához	220—229

KOVÁTS MIHÁLY Dr., AZ ELSŐ RENDSZERES MAGYAR CHEMIA ÍRÓJA.

HANKÓ VILMOS 1. tagtól.

A jövő évben (1921-ben) lesz 70 esztendeje annak, hogy Mezőcsát község református temetőjében elhantoltak egy sírt. A sír felett emelkedő szürke márvány-émlék felirata hűségesen beszámol a sír lakójáról; elmondja, hogy az, a ki abban a sírban aluszszá örök álmát: «Tekintetes dr. Kováts Mihály kétszer orvosnagya, Pest, Borsod, Abauj, Zemplén, Szathmár, Máramaros vármegyének táblalabirája, több bel- és külföldi tudóstársaságok tagja. Született Abauj-Korlátton, 1762 június 4-én, meghalt 1851 június 31-én.»

Kováts Mihály időben is nagy életet élt: a bibliai patriarkák hosszú életét. Ifjúkora éveitől a roskadt öregség alkonyáig dolgozott nagy buzgósággal a nemzet ügyének szolgálatában. Hagyatéka csaknem 70 esztendős írói munka szellemi termése.

Rászolgált, hogy élete eseményeit érdeklődésébe fogadja a művelt magyar közönség nyilvánossága.

*

Kováts Mihály az abaujmegyei Korlátton született, a hol atyja református lelkész volt. Abból az erős fajú kálvinista nemzedékből való, mely a XVIII. században termett elő az abauji magyar földből.

Az atyai házban gondos nevelésben részesült. Elemi és középiskolai tanulmányait Sárospatakon, az ősi kollégiumban végezte. Ez az iskola minden időben a magyar műveltségnek, a hazafias érzésnek ápolója, a tudománynak, hazafiságnak tűz-

helye volt. Kováts ebben az iskolában kezdett megszendülni, itt építette fel lelkét, itt formálódtak ki lelki és szellemi tehetségei.

A kitünő iskolában sokat hallott nemzetünknek a kulturában való elmaradottságáról, apáczai CSERE JÁNOSRÓL, ki már a XVII. században erőt és hivatást érzett arra, hogy a magyar nemzetnek a különböző tudományokban tanítója legyen. Apáczai példája mély nyomot hagyott az ifjú Kováts lelkében. Ifjúkora délibábos álomképei között talán már látta is magát a nemzeti kultúra előkelő munkásainak a társaságában, a mint a kulturában elmaradt magyar testvéreit a természettudományoknak népszerűsítésével a kultúra útjára segíti.

A lelket formáló tényezők: a család, az iskola, a környezet, a tanulmányok hatására már a középiskolában tekintélyes tartalmat gyűjtött életébe.

Korán jelentkező hajlama és tehetsége az orvosi pályára terelte.

Egyetemi tanulmányait a pesti egyetemen végezte. Tanulmányainak bevégzése után az élettan tanára szorgalmát és tehetségét azzal honorálta, hogy segédjévé választotta.¹

Hogy orvosi gyakorlatra tegyen szert, egy esztendő a bécsi közkórházban dolgozott: 1794-ben hazajött. Itthon a doktori oklevelet megszerelvén, jó sorsa megengedte, hogy külföldön szélesítse ki látókörét. Svájcban, Németországban, Hollandiában nyitott szemmel és tanulásra fogékony elmével járt. Mindenütt tudást, új eszméket szívott magába. Tapasztalásban gazdagodva, műveltségkörét tágitva hazatért, hogy a mit tanult, mint orvos és tudós felhasználja a szenvedők javára, a nemzet értelmiségének emelésére.

Pesten telepedett le. Nem egy orvossal gyarapodott benne a pesti orvosi kar, hanem egy meleg érzésű, éles szemű, tudós orvossal. Ritka személyes tulajdonságai során a fiatal Kováts-ot szárnyára vette a népszerűség; csakhamar keresett orvos lett belőle Pesten. Volt valami nemes anyag az egyéniségében, a mi vonzotta hozzá a bizalmat. Sokan keresték fel — szegények,

¹ PAULER TIVADAR: A budapesti egyetem története.

gazdagok — abban a hitben, hogy éles szeme, tudása meghozza nekik a betegségből a gyógyulást.

Kováts Mihály orvosi hivatásán túl is talált érdeklődése számára teret. Ha elfáradt orvosi hivatásának gyakorlásában, a tudományos irodalom mezején dolgozott nagy buzgósággal. Ez a munka volt az ő pihenője.

Ez a mező Kováts Mihály számára nem volt töretlen. Már Kováts előtt akadtak tudós férfiak, kik látva a magyar nemzetnek a kultúrában való elmaradottságát, ennek a mezőnek szegődtek a munkásává.

Ezek a férfiak belátták, hogy a kultúra nem lehet kiváltságosak privilégiuma. A kultúrához, mint az életet fakasztó nap-sugarhoz, mint az éltető levegőhöz jussa van mindenkinek.

A kultúrát, hogy éreztesse a nemzet egyetemére jótékony hatását, a legszélesebb néprétegek számára is megközelíthetővé kell tenni. Ehhez pedig elengedhetetlen feltétel a nép nyelvének odafejlesztése, hogy a pallérozott magyar nyelv minden tudomány feldolgozását lehetővé tegye.

A XVIII. század végén és a XIX. század legelején **BENKŐ FERENCZ**,¹ **ZAY SÁMUEL** a mineralogiát, **DIÓSZEGI SÁMUEL** és **FAZEKAS MIHÁLY** a botanikát, **FÖLDI JÁNOS** az állattant, **MOLNÁR JÁNOS** a fizikát, **NYULAS FERENCZ**² az alkalmazott chemia egy fejezetét magyarul szólaltatta meg, a nyelv szempontjából is, tárgyi tekintetben is kitűnő munkákban, minden művelt magyar embertől érthető magyar előadásban. Ők a természettudományok magyar nyelven tanításának úttörői. A tudományok körében használatos szókat: a műszókat, a természettudományok nyelvét, a műnyelvet is ők alkották meg. Tiszta nyelvérzékük megmutatta erre a helyes utat; a műnyelv megalkotásánál a régiek munkájából s a nép nyelvéből felhasználták a felhasználhatót. Szükség esetén befogadták az idegen szót s azt a magyar nyelv hangtörvényeihez formálva, magyar képzőkkel fejlesztették. **ARANY JÁNOS** — nyelv-

¹ SZILY KÁLMÁN: Magyar természettudósok száz évvel ezelőtt. Term. tud. Közlöny. 1888. XX. kötet.

² ILOSVAY LAJOS: Egy régi magyar természettudós. Term. tud. Közlöny. 1888. XX. kötet.

vünknek nagymestere — a műnyelvalkotás kérdésében azt a nyilatkozatot tette, hogy a ki még valaha nyelvünkben újít, azt a népnyelv, népi észjárás oly helyes ismeretével tegye, mint FÖLDI, DIÓSZEGI és FAZEKAS.

KOVÁTS MIHÁLY jövendő útját azok a benyomások jelölték ki, a melyeket a sárospataki kollégiumban és a pesti egyetemen kapott.

Ezeknek az iskoláknak a hatására érlelődött meg benne az az elhatározás, hogy tőle telhető buzgalommal, dologtevéssel fogja szolgálni a magyar kultúra ügyét; a magyar nép értelmiségének az emelésére a hivatásához közelálló természettudományokat és az egészség tudományát beviszi a nép közé, hogy hódító erejük hullámaival eláraszsa minden magyarnak a lelkét.

A pesti egyetem tanárai közül WINTERL JAKAB-nak, a chemia és botanika nagy professzorának volt a legnagyobb hatása Kováts-ra. Szavának bölcsessége, egyéniségének varázsa olyan nyomot hagyott Kováts lelkében és a chemia iránt olyan vonzalmat keltett benne, hogy az első nagyobb munka, mely tollából kikerült: chemia volt.

Kováts Chemiája nem eredeti munka. A pesti orvos-egyetemen WINTERL, SCHUSTER, sőt talán SANGALETTI professzor idejében is GREN-nek «Grundriss der Chemie» című könyve kötelel tankönyv volt. Ennek a munkának a nyomán írta meg Kováts az ő chemiáját.

A könyv teljes címe: Chémia vagy természettitka. GREN FRIDRIK ALBERT KORLÁT doktor szerint magyarul legelőször írta Kováts MIHÁLY orvos. I—II. darab. Budán. Nyomtatt. ANNA LANDERER betűivel. 1807. Az első darabot méltóságos vajai VAY MIKLÓS szabad báró úrnak, Tsászári Királyi Apostoli Felső Valóságos Arany Kultosának és Generális Fő-Örmeisterének; mint a Magyar Chemiát kitalálta, sürgette, segítette igaz Hazafinak, és Kegyes Urának nyilvánosságos tiszteletének jeléül ajánlja a szerző.

A Chemia második darabját PRÓNAY LÁSZLÓ szabad báró Úrnak, Nemes Tsanád Vármegye Fő-Ispánjának ajánlja fel Kováts MIHÁLY.

Az Előszó, az idők szokásához hiven, a korszak rajza; megvilágítja a szellemiek terén uralkodó viszonyokat. Leírja a nehéz-

ségeket, a melyekkel a könyv megírásánál találkozott; a nem éppen szives fogadtatást.

«Én jeget törtem», mondja Kováts, «mert a legelső magyar Chemiát írtam. Mindent tsupán magamnak kellett legelőször kikezennem a nyelv kebeléből.» Okom van hinni, hogy Kováts-nak NYULAS könyvéről nem volt tudomása, mert különben éppen úgy megemlékezett volna róla, mint a hogy egyéb munkáiban felemlítette mindazokat a szerzőket, a kiknek munkájából merített, vagy mint a kiknek munkájához könyve megírásánál valamelyes köze volt. Úgy gondolja, hasznos dolgot művelt már azért is, mert munkája kezzel fogható cáfolat arra a vádra, hogy a magyar nyelv tudományok írására nem való. Ez a könyv nemcsak arra alkalmas, hogy belőle chemiát tanuljon az ember, de arra is jó, hogy magyarul megtanuljon belőle.

Az Előszót követő Vezérszóban a chemia feladatáról, majd a történetéről beszél; végezetül arra is kitér, hogyan lehet a tudomány elsajátítását minél eredményesebbé tenni.

A chemia történetének tárgyalása alkalmat ad szerzőnek arra, hogy WINTERL professzorról szólván, megszólaltassa a hálás tanítvány kegyeletes megemlékezését. Kováts sokat köszönhet tanárának, mert sokat tanult tőle. Neki köszönheti, hogy Bécsben egy chemiai kérdés felett megindított nyilvános vitában egy német chemikussal szemben a bécsi egyetem chemia professzora Kováts-nak juttatta a pálmát.

Kováts az anyag elrendezését, beosztását illetőleg GREN munkájához alkalmazkodik. A felölelt anyagról, az anyag elrendezéséről számot ad a tartalomjegyzék.

Az első darab tartalma: Vezérszó. I. szakasz. Azon előisméreték, melyek a testeknek megvizsgáltatásokra szükségesek. A testeknek alkotótárgyaik. Szerszámos (Mechanicus) elosztás és széljelbontás. Alkotó erők és a tárgyaknak azoktól függő képeik. Chemiai atyafiság (Affinitás). Chemiai munkák (Operationes chemicæ), és az azokhoz tartozó szerszámok. Olvasztás (Solutio). Öntés vagy Ömlés (Fusio). Elrepítés (Volatilisatio). Letsepegtetés (Destillatio). Szeszes készülék (Apparatus pneumaticus). Felrepítés (Sublimatio). Némely más készülétek, mérő serpenyő vagy kompona, nehezék (libramentum). Pedző-szerek (Reagentia).

II. szakasz. Közönségesen elterjedett egyes, és összetett v. többes tárgyak. Hévtárgy (Caloricum). Világ (Lux). Égő tárgy. Égés tünetjei (phænomena) a levegőégi levegőben. Levegőégi levegőalkatmánya. Életlevegő (Aër vitalis) vagy savanyítószesz (Gas oxygenium). Savanyító (Oxygenium). Tűzről és megégésről való okoskodás (theoria). Fojtószesz (Gas azoticum). Fojtótárgy (Azotum). Levegő-mérték (Eudiometrum). Szénsavanyúszesz (Gas carbonicum). Széntárgy (Carbonicum). Víz. Víztaŕgy (Hydrogenium). Víztaŕgyszesz (Gas hydrogenium).

III. szakasz. Általában a sókról. Savanyok (Acida); alkalik (Alcalia). Általában a sóknak ismértető jegyeik (charakteres). Savanyak, Alkalik. Közsók.

IV. szakasz. Földek. Egyes földek. Félsó (Salia media). Kovaföld (Silicea). Mészföld (Calx). Tajtékföld (Magnesia). Agyagföld (Argilla). Az agyagból tserépedényt tsinálnak. Nehézföld (Baryta). Strontionföld (Strontiona). Tzirkonföld (Zirconia). Australföld (Cambria).

A második darab tartalma. V. szakasz. Ásványsavanyak s azoknak a földekkel és alkalikkal való egyesülések. Szénsavany (Acidum carbonicum). Kénkő vagy Búdöskő (Sulphur). Kénsavany (Acidum sulphuricum). Kénkő, s némely más testek. Kénsavany széljelbomlása. Salétromsavany (Acidum nitricum). Salétromosavany (Acidum nitrosum). Salétromszesz (Gas nitrosum). Savanyító fajtószesz (Gas azotosum). Salétromsavanynak tökéletes széljelbomlása. Elpattanás (Detonatio). Sóssavany (Acidum muriaticum). Sósavany (Acidum muriaticum). Salétromossavanyú sósavany (Acidum nitroso-muriaticum). Folyóssavany (Acidum fluorosum). Folyósavany (Acidum fluoricum). Pórisavany (Acidum boracicum).

VI. szakasz. Növényországi testeknek alkotórészeik. Általában a növényországi testeket vizsgálják meg. Tűzzel való széljelbontás. Növényországi testeknek közelebbi alkotórészeiket vizsgálják meg. Növényeknek valóságos só (Salia essentialia plantarum). Borkő (Tartarus). Borkősavany (Acidum tartaricum). Sóska (Sal acetosellæ). Sóska savany (Acidum oxalicum). Tzitromsavany (Acidum citricum). Almasavany (Acidum malicum). Más savanyú növény-levek. Benzesavany, Gubits-savany (Acidum galicum). Nádméz (Saccharum). Növények taknyok (Muci-

lago plantarum). Gyanta (Resina). Mézgagyanta (Gummi-resina). Siker (Gluten). Keményítő. Növényeknek tojásfejtárgyak (Materia albuminosa plantarum). 'Siros olaj (Oleum unguinosum). Szagos-olaj v. illatosolaj (Oleum ætherum). Kámfor. Növényeknek tsipős-tárgyak (Materia acria plantarum). Növényeknek bódító-tárgyak (Materia narcotica). Növényeknek kanafarészek (Materia fibrosa plantarum). Növényeknek kihúzádjai (Extracta). Növényeknek festékjei (Pigmenta). Festésnek közönséges talpai (Fundamenta). Indiai festék, v. Indik (Pigmentum Indicum). Orlean, v. Mohkék. Lé-festékek. Mázfestékek. Fejérités.

Kováts Chemiája — mint említettük — nagyjában azt a menetet követi, a melyet az anyag egymásutánjában Gren könyve követ. Az anyag feldolgozásában azonban sok az eredetiség. Kováts-nak megvan az a képessége, hogy a tárgyalandót világos magyarázatban közel tudja hozni az olvasó felfogásához.

Adataiban pontos, előadásában elég élénk, a hazai viszonyokat is kellő módon méltatja.

Az eleven életbe azonban alig kapcsolódik belé; az életre szükséges positiv ismereteket sem igen közöl; száraz adatot, a chemiailag nem iskolázottnak megemészthetetlen elméletet, elvont természetű dolgokat azonban annál többet. A gyári ipar-technológiájából ad egy kevés izlelítőt. Ez hoz egy kis változatoságot a tárgyalás egyhangúságába. Arra se gondolt, hogy ott, a hol erre alkalom kínálkozik, a tárgyalt anyagot közgazdasági, egészségi vonatkozásaiban is megvilágítsa. Ez mindenesetre emelte volna annak a közönségnek a szemében, a melynek szánva volt a munka, érdekességét.

A munka anyaga — mint a régi munkáké általában — nincs szervetlen és szerves részre osztva. A munka első darabjában, s a második egy részében a mai szervetlen chemia anyagát találjuk. A második darab nagyobbik felében a növényországi testek: a szerves vegyületek vannak tárgyalva. A feldolgozott anyag tartalomra és alakra kerek egészet alkot.

Csak sajnálni lehet, hogy a tudomány nyelvének, a műszóknak megalkotásában nem hialadt a helyes utat követő Benkő-ék nyomában. Ezeknek a nyelvét, eredményeit nem tudta kellően értékelni. Magára nézve nem tartotta előnyösnek, hogy nyo-

mukban járjon. Kováts elszakadt a multtól, a minek következtében rés támadt a természettudományok fejlődésének történeti menetében, a nemzeti kultura folytonosságában.

KOVÁTS MIHÁLY a chemia nyelvében idegen szót alig türt. Az idegen szók nagy részét átfordította, hogy magyar műszóval élhessen a tudomány fogalmainak és tárgyainak a kifejezésében.

A nyelv szellemének, törvényeinek figyelembevétele nélkül készített műszók használata mellett Chemiá-ját a nem chemikusok, még ha művelt emberek voltak is, nem értették meg. Eleinte olvasták a chemiát, de nem értették meg. Később nem is olvasták.

Hiába, a víz csak oda folyik, a hova erőlködés nélkül juthat. A közönség szomjuzza a tudományt, mely új megismerések gyönyörűségét hozza; de nem kér belőle, ha a megértés útjában ott a megemészthetetlen nyelv.

Kováts Chemiá-jának hatása a nemzetre nem volt. Elképzelhetetlenül nagy fáradsága, buzgósága, a melylyel a munkát elkészítette, mind kárba veszett; pedig ha BÉNKŐ-ÉK nyomán halad, s nem akart volna tüzen-vizen keresztül újat, eredetit produkálni, képessége, tudása megengedte volna, hogy értékeset, maradandót adjon nemzetének.

Műszavait senki sem használta. Hogy miért nem használták, erre megadja a felvilágosítást az itt következő néhány műszó; Kováts-é mindenik: Pedzőszer (reagencia), savanyító-gáz (oxigéngáz), víztárgy-szesz (hidrogéngáz), fojtószesz (nitrogéngáz), levegőégi levegő (légköri levegő), szeráts (gyógyszerész), szered (patika), titkáts (chemikus), kihúzádek (extractum), görbetők (retorta), remek (experimentum), borlelke (borszesz), jég (kristály), élőeszközös (organikus), sat.

A magyar ember nyelvérzéke nem fogadta be ezeket a műszókat, mint a hogy az elevenen mozgó patak vize nem fogadja be, kidobja magából a mi nem oda való.

Kováts maga is elítéli a nyelvrontók működését, a mikor ezt mondja: «sokan mosdatlan kézzel fognak ezen munkához, s olyan vad szókat koholnak, hogy a nyelvünket nevetségessé teszik». Szegény jó Kováts MIHÁLY! Midőn ezekkel a kemény

szavakkal bélyegeztet meg a nyelvrontókat, nem is gondoltad, hogy magadról is ítéletet mondottál.

Voltak azonban Kováts-nak olyan szóalkotásai is, a melyek ma is közkeletűek.¹ Ilyenek: csontváz, szövet (textura), ásványos víz, tűzálló, kórház, keverék, őrmester, kópírás, műszó, megömlés, őrnagy, ragály (contagium).

Kováts nem volt megelégedve munkájának se fogadtatásával, se kelendőségével. Meghitt barátja KAZINCZY útján akarta elérni azt, hogy a közönség érdeklődése munkája felé irányuljon. «Szeretném — írja KAZINCZY-nak — ha megoldvasnád a Chemiámat, s kérnélek a'ra, hogy minden kedvezés nélkül recenseálnád. Tsak téged bírállak erre, és senki mást. Szükség volna azért, hogy tudná a Nemzet, vajjon van-e igazságom, vagy nincs? a Magyar nyelvre nézve tétetett változásokban és a magyar nevezetekben. Ismét kérlek, tedd meg ezt a kis áldozatot, mert tudom, hogy foglalatoshodván, valóban bajjal esik ez meg reád nézve.»²

Chemia vagyon már Kassán KALLÓS-nál, Kováts Predikátor-nál, Szendén az öreg KANDÓ GÁBOR úrnál. Ezek tudom általadják olvasni. De Patakon sok vagyon, a Deákoknál.»

A mire KOVÁTS KAZINCZY-t kérte, hogy művét ismertesse, nem valósult meg.

Kováts munkájának csekély kelendőseért a könyvvarúsokat hibáztatja. «Dr. Kováts úr panaszolkodott a könyvvarúsok ellen» írja SZEMERE PÁL KAZINCZY-nak, «kik csak az olyan könyveket árulják gonddal, mellyeket önmagok adnak ki; ellenben a rájuk bizottakat feküdni hagyják.»

Nemcsak a chemiai, hanem a természetrajzi és a népszerű egészségtani irodalom terén is nagy tevékenységet fejtett ki. Tevékenységének ezen mezején sok becsest adott, a mi az irodalmat igazi értékekkel gyarapította.

A munkák, a melyekről itt szó van, a következők:

1. *Szükségben való és segedelem tábla*, a vízbe fult, megfagyott és holtan születni látszott kisdedekre nézve. Pest, 1798.

¹ SZILY KÁLMÁN: A magyar nyelvújítás szótára. 1902.

² KAZINCZY F.: Levelezése. V.

2. *Szükségben való és segedelem tábla*, a veszett kutya harapásáról, a mérgekről, a falatnak gégében való megakadásáról, gőz miatt való megfulásról. 1798. 3. *Az emberi élet meghosszabbításának mestersége*. Német nyelvből HUFELAND KRISTOF VILMOS után magyarra fordítottatott, a nehezebb helyeken megvilágosítottatott, alkalmatosság szerént a magyar hazára szabotott. 1799. 4. *A gyenge élet meghosszabbításának és a gyógyíthatatlan nyuvalyák húzásának a mestersége*. Ford. a tehénkilisekről való tanítással s sok tudósok értelmeivel megbővitve. Pest, 1802. Három rész. 5. *Az állati mágnesség mérő serpenyűje*. 1818. Két rész. ESCHENMAYER K. A. után. A második részben fordító megvizsgálja és megcáfolja ESCHENMAYER az állati mágnességről való munkáját. 6. *A hirtelen halál veszedelmeiben való segedelem*. Rozsnyó, 1820—21. Két tábla. 7. *Értekezés a himlő kiirtásról*. Szerző a lelkitanítók számokra. Pest, 1822. 8. *Rövid oktatás, mit kell és mit nem kell cselekedni falusi bábának a természeti szüléskor*. 1822. 9. *Lexikon Mineralogicum enneaglottum*. 1822. Négy rész. (I. Lexicon mineralogicum triglottum etymologicum latino-magyarico-germanicum primum. Elöl: «Az asványtár szerzőjéhez», költemények KAZAY ISTVÁNTól és SZEMERE PÁLTól. II. Első szófejtő magyar-latin ásványnévtár. III. Deutsch-lateinisches mineralogisches Wörterbuch. IV. Mantissa Lexicon mineralogicum gallico-latinum, anglicolatin., danico-latin. continens.) 10. *Medicina forensis*. Vagy orvosi törvény tudomány, a táblabíró, bíró, ügyvédő, törvénytudó, törvénytanuló, orvos, tanuló orvos uraknak számokra. 1828. 11. *Antiorganon*, azaz organarosta. 1830. 12. *Magyar patika*, azaz Magyar- és Erdélyországban termő patikai állatok, növények és ásványok, orvosi hasznaikkal egyetemben. A falusi külörvosoknak, földesuraknak és lelkitanítóknak számokra. 1835. Három rész. 13. *Három nyelvű fejtő természetthon titoktan*¹ *orvostudományi műszótára*, azaz onomatologia, physiographia, chemica, jatrix, triglotta, philologica. Buda, 1845—1848. Nyolcz rész. I. darab. 1. rész. Növényészés szavai vagy termini-phytologici. Vulgo terminologia botanica. 2. rész. Növénybölcsesség avagy

¹ Titoktan = chemia.

háromnyelvű fejtő növénynév műszótár, azaz phytosophia aut philosophia botanica, seu botanica pura. 1845. Ebben a szókönyvben 4226 magyar növényész szó van. II. darab. 3. r. Háromnyelvű fejtő ásványnév műszótár. Vagyis onomatologia mineralogica triglotta, hermeneutica. 4. r. Háromnyelvű fejtő titoktan műszótár. Azaz onomatologia chemica triglotta etymologica. Magyar nyelven eddig — írja Kováts — csupán azon egy Titoktan jelent meg a világ előtt, melyet én ezelőtt 38 esztendővel bocsátottam ki. Azonban megkettőztetett sebes lépésekkel előhaladván a Titkácosság, szerzettem a jelen titoktan Műszótárt, melylybe az újabb feltalált tárgyaknak neveik is befoglaltatnak. Ebben a munkában van 501 névszó, melyly közzül 92 darab szófejtéssel van magyarázva. 5. r. Háromnyelvű fejtő szernév műszótár. Avagy onomatologia, pharmaceutica philologica. Ebben 1529 db. szó van; 205 szófejtéssel magyarázva. 6. r. Háromnyelvű fejtő állatnév műszótár. 1846. 7. r. Háromnyelvű fejtő természethon titoktan orvostudományi műszótára. Háromnyelvű fejtő ember bonczolás műszótár. 1846. Ebben 2400 nevezet. 8. r. Háromnyelvű fejtő orvostudományi műszótár. 1848.

Ez az összeállítás számot ad Kováts Mihály tudományos munkásságának terjedelméről, de nem a végzett munka nagyságáról.

Kováts erőt és hivatást érzett magában a magyar ásványtani műnyelv megalkotására is. Valóságos rabjává szegődött ennek a feladatnak, mely évekig minden energiáját lefoglalta.

Ennek a nagy munkának az elvégzésére Kováts kényszerítve érezte magát, mert a meglévő ásványtani munkákban nem talált segítséget.

«BENKŐ FERENCZ Mineralogiája» mondja Kováts, «a maga idejében igen becses és derék Munka vala. Mert e volt a legelső Magyar Mineralogia. De mivel már ez 37 esztendővel ezelőtt jött ki, minden azóta felfedezettett ásványok leiratások s következőleg azoknak Magyar neveik nélkül szükölködik. Ezenfelül a régi nehezebb Latán ásványnevek is mind megvagnak benne Latán nyelven hagyatva; azok pedig, melyek könnyebbértelműek valának és Magyarra általfordítattak, minthogy csak szabad akarat szerint, mint, minden mélyebb vizsgálat nélkül készültek, nekem eleget nem tettek.»

«Szép kis Mineralogia ZAY SÁMUEL munkája is, az ásványászságnak előisméretit keresőknek, csakhogy már ez is 31 esztendő, és az ásványnevekre nézve épen azon fogyatkozásokkal teljes, melyekkel a BENKŐ-é.»

KOVÁTS a latin ásványneveket magyarra fordította, és e lefordított szökből alkotott magyar ásványneveket, miáltal 1586 új nevezettel szaporodott a magyar nyelv. Ez a nagy munka megihlette SZEMERE PÁL-t s versben dicsőíti alkotóját.

Ennek a műnyelvnek a birtokában «nem fogja többé a Magyar más Nemzetekkel az érthetetlen Zsidó, Chaldeai, Persa, Arab, Indi, Görög, Latán, Olasz, Francz, Svéd ásványneveket mind szajkó csacsogni, hanem azok helyett fog a maga anyanyelvén érthető olyan ásványneveket mondani, melylyel egyszersmind az ásványoknak külső mineműséget v. bazájokat, v. találójokat kifejezik», mondja KOVÁTS.

A «Lexikon Mineralogicum» című könyv elkészítésével járó óriási munkának az elismerésül a külföld részéről számos kitüntetés éri KOVÁTS MIHÁLY-t. Ezekről a kitüntetésekről a «Hazai s Külföldi Tudósítások» 1823-diki évfolyama a következőkben értesíti olvasóit: «Illik, hogy a Nemzet maga Iróit megbetsülje, mivel ezek által terjesztetnek a hasznos ismeretek, benn az Országban; ezek által terjed a Nemzetnek híre a külföldön. Nemzetünkben is találhatnak sok Hazafiak, kik nem tsak becsülik Tudósainknak munkálkodásait, hanem jutalmakkal és segedelmekkel is serkentik a tudós munkálkodásra. Midőn ezt hazafiui örömmel látjuk, nem lehet azon még inkább nem örvendenünk, midőn tapasztaljuk, hogy Tudósainknak igaz érdemeit a külföldön is nem tsak megismerik, hanem tisztelik is. Illy példánk vagy on most Tekéntetes és Tudós KOVÁTS MIHÁLY Doktor Úrnak ezen munkájában: «Lexikon Etimologico-Mineralogicum Enneaglottum», amelyben a Tudós Férfiú a Mineralogiában előforduló deák nevezeteknek igaz eredetét felkereste és kimagyarázta, amit még eddig Európában tudunkra, sem különös munkában, sem Mineralogiai systemában senki nem vitt végbe. Ugyan azért az ő könyvét méltó úgy tekinteni, mint az egész Mineralogiai Tudományt felvilágosító fáklyát. Ezen érdemét a mi Tudós Hazánkfiának megismerte a Bonóniai Académia, melynek nevé-

ben a Titoknokságot viselő Magistrini Úr Febr. 10-én írott Levelé által azt jelentette ki, hogy «Ezáltal a Tudomány ügy tökéletesített, hogy nála nélkül ezután senki a Mineralogiai Tudományról írni nem bátorzkodhatik».

«A Jénai Mineralogiai Társaságnak ismeretes Directora LENZ Úr pedig, össze hasonlítván, több Tudósoknak hasznos fáradozásával, azt vallja, hogy: «Ezen munka a Classicus könyvek közé fog tartozni, úgymint, amelynek érdeme tartandó lészen». Ugyanazért Tudós Hazánkiát a Jénai Mineralogica Társaságnak tiszteletbeli Tagjává nevezte, és ez eránt néki a Diplomát megküldötte. Hasonló figyelmetességet gerjesztett a munka Sz.-Pétervárában is, a honnan az Académiának Titoknokja FUSZ MIKLÓS Úr köszönő Levelében tudós fáradozásnak ismeri. Valamint a Frantzia Institutum, a Tudományok királyi Académiája Titoknokjának FOURIER Úrnak, aláírásával megerősített Feleletében jelenti, hogy nagy kedvvel fogadta. Úgy a Berlieni és Koppenhágai Tudós Társaságok is.»

Sajnos, ennek a munkának az eredménye, értéke sem állott arányban a végzett munka nagyságával. Kováts Ásványtani szótára — TOLDI FERENCZ szavai szerint, — a hibás nyelvi alapelveknél fogva holtan született munka volt.¹

Mindezeknél nagyobb volt a hatása KOVÁTS orvosi, illetőleg egészségügyi könyveinek. KOVÁTS MIHÁLY is vallotta, hogy az ember boldogulásának legfőbb biztosítéka az élet harcaira való teljes felkészültség a lélek és test erejének kifejlesztésében. Ez a meggyőződés új feladatok elé állította Kováts-ot. A feladat, mit megoldásra kitűzött: gondoskodás a nép számára való orvosi, jobban mondva egészségügyi munkákról. Hatalmas dűlő, a melynek első kalászeit az ő dolgos keze munkájának köszönjük.

«Az emberi élet meghosszabbításának mestersége» című munkája fordított munka. Ebben nagyon értékesek a fordítónak helyenként a tárgyhoz fűzött megjegyzései. Ezek közül egyik-másik igazán talpraesett, becses, tanulságos megjegyzés: kiállja a modern egészségügy kritikáját. (A csók veszedelmes volta.

¹ TOLDI FERENCZ: A magyar nemzeti irodalom története. Pest, 1864—1865.

Gyermekeket csókolni, mások pipájából pipázni, maga szájában volt kanállal a tálba nyúlni nem szabad. Mindenkinek külön ivópohara legyen. Venusi sebek lehetnek a szájban és más nyavalyák is.)

A sárospataki főiskola Kováts-nak több kiadatlan szótár-kéziratát őrzi. Tájzsótára az első enemű kísérlet Magyarországon. A kéziratok Kováts könyvtárával együtt jutottak a főiskola birtokába.¹ Kováts MIHÁLY ajándéka ez, ki úgy érezte, hogy halá-
val adósa az iskolának, mely őt nevelte és szárnyára bocsátotta.

Kováts MIHÁLY nem volt nagy ember, kinek nevét rendkívüli képességek szárnya emelte; de végtelen munkás ember volt, lelkében értékes tartalommal. Munkálkodott dolgos élete utolsó perczéig, szorgalommal dolgozott a nemzeti dicsőség lángoló nemes vágyával.

Egyéniségének értékét nemcsak a tudás és a munka, az akarás komolysága és törekvéseinek becsületessége adta meg. Kováts MIHÁLY a nemzet művelődésének valóságos rajongója volt. Minden törekvése, ambíciója, álma értékest, maradandót alkotni a nemzet szolgálatában, a nemzet javára. A chemiai, az orvostudományi irodalomnak a mezeje Magyarországon járatlan volt akkor, a mikor Kováts rálépett. Kováts úttörő volt.

Ez a megállapítás abban az időben, a melyben Kováts munkaterét elfoglalta, sokat jelentett: lángoló hazaszeretetet, minden akadálylal szembenező akaraterőt, ernyedetlen buzgóságot, abban az időben szokatlan nagy tudást.

Kováts úttörő volt. Ez a megállapítás megnöveszti Kováts alakját azok szemében, a kik tudják, hogy mennyire kedvezőtlen volt akkor az idő a magyar tudósra nézve. Pestre meg teljes erejével ránehezedett a német szellem. A tudomány, az iskolák nyelve a deák volt. A magyar irodalom szegény, jórészben rossz magyar szavakkal írt idegen irodalom. Az írónak elképzelhetetlen küzdelmet kellett folytatni a szókészlete, a műnyelv hiányosságával.

Máskülönben is zsibbadt, álmos kor. Pusztán egynéhány

¹ SZINNYEI JÓZSEF: Magyar írók élete és munkái. VI. kötet.

Isten kegyelméből való magyar író és tudós dologtevése mutatta a nemzet érverését.

Kiváló személyes tulajdonságai barátaiává tették az irodalom legjelesebbjeit, kik a fontosabb vitás kérdésekben sohasem mulasztották el kikérni Kováts dr. véleményét; úgy ismerve őt, mint aki minden dologba, amelyben résztvesz, beleviszi a maga szolid tudását, komolyságát, munkás szorgalmát, odaadó lelkiismeretes gondosságát.

SZEMERE írja KAZINCZY-nak: Most jövök dr. Kováts Úrtól s hozom jegyzését a virtus *Erény*, vagy Disz nevezetéről. Jó szónak találja az *erényt*, de lehetne így is próbálni: Disz.

Ugyancsak SZEMERE írja KAZINCZY-nak: BALLÁ-nak nem elég az *Egyetem* szó, KULTSÁR-nak sem; dr. Kováts igen nagyon belé van szerelmesedve a szóba, s már élt is vele. Kováts KAZINCZY-nak nemcsak bizalmas barátja, de orvosa is volt.

Munkásságának a megkoszorúzása az a kitüntetés, a melyben az Akadémia részesítette, a midőn 1832 márczius 2-án levelező tagjává választotta. Üléseit még mint az évek és az élet munkájának súlya alatt megroppant aggastyán is szorgalmasan látogatta.

1844 április 29.-én, midőn orvos-doktorrá avatásának 50. évfordulója köszöntött rá, az ünnepet készséggel fogadta a magáénak az Akadémia s TOLDI FERENCZ főtitkártól vezetett küldöttség útján üdvözölte őt lakásán.

1849-ben, midőn az öregség rátette súlyos kezét nem pihenő alakjára, Pestet végképp elhagyta, s pihenni tért a csendes Mezőcsát szelid virágai és zöldelő, fái közé, testvéröccse özvegyének vendégszerető házába. Itt végezte be megkezdett munkáit s 1851 június 22.-én életét is. 89 évet adott neki a Teremtő a földi életből. Szenvedés nélkül ment az örökkévalóságba. Dolgos, harmoniás szép élet emlékezetét hagyta hátra.

AZ ÁTÖRÖKLŐDŐ IDEGBAJOK ÁLTALÁNOS KÓRSZÖVETTANI JELLEMZÉSE.

SCHAFFER KÁROLY I. tagtól.

A középponti bántalmak egy nagy csoportjára nézve már eleitől fogva jellegzetesnek tűnt fel, hogy a kórszarmazásukban az *exogen természetű* kórnemző befolyások nem szerepelnek, hanem hogy magában a középponti szervben, vagyis az agygerinczvelőben rejlő folyamatok idézik elő ezeket a bajokat, melyek mindig hibás alaphól, vagyis tökéletlen középponti idegrendszerből indulnak ki. Látnivaló ebből, hogy ez utóbbiak *endogen természetű* kóros jelenségek, melyeket klinikai tekintetben egy sora a különleges ismertetőjegyeknek sajátosan színez; ilyenek elsősorban az *átöröklés* (hereditas), azután a *családiás jelentkezés* (familiaritas), jelesen leginkább azonos korban (homochronia), azonos kórformában (homotypia) és azonos székhelyyel (homotopia); továbbá többé-kevésbé az *előrehaladó rosszabbodás* (progressio); végül felette figyelemreméltó vonás, hogy az ily kórképek rokoni házasságból származó egyéneken mutatkoznak (consanguinitas). Az ilyképen létrejött és idegkórtanilag fontos kórformák igen változók; ezeknek legáttekinthetőbb beosztását BING RÓBERT adta, a mennyiben az endogén természetű átöröklődő idegbajoknak négy fő alakját különböztette meg; ezek:

1. a *túlnyomóan mozzgató kiesési tünetek alakja*, a hova a merevgörcsös és dystrophiás képek tartoznak;

2. a *túlnyomóan érző kiesési jelenségeket mutató alakok*, melyekhez a gerincz- és kisagyi ataxiák tartoznak;

3. a *túlnyomóan psychés kiesési tünetek által jellemzett alakok*, melyek a legtágabb értelemben vett családi elmeegyenség (idiotia) képeit adják; végül

4. a *dyskinesis alakjai*, a hová BING a myotoniát, a myocloniát, a choreát, a tremorszerű és egyéb mozgási rendelleneségeket sorolja.

Pontos klinikai észlelésekből kitűnt azután az az érdekes jelenség, hogy a fentiekben összefoglalt családi átöröklődő idegbajok úgynevezett *keverék- és átmeneti alakok* útján tetemesen bővülnek; így például keverékalak az, a midőn kisagyi ataxia az agyi diplegiával szövődik, és átmeneti alak az, a mikor a családi idiotaság két szélső formája, az infantilis és juvenilis között, mint áthidaló, oly forma jő létre, mely mindkét főalak főbb ismertetőjegyeit magán hordja. A formák keveredése és átmenetei alapján a formavariációnak szinte kimeríthetetlen lehetőségei adódhatnak. melyeknél fogva természetesen az átöröklődő idegbajoknak úgynevezett tiszta alakjai élességükből sokat veszítenek. Ezek a «folyó átmenetek» juttattak bennünket annak felismerésére, hogy nem a különleges tünetcsoport teszi ki az átöröklődő idegbajok lényegét, hanem bizonyos kórélettani tényezők szereplése, minők a hereditas, familiaritas, consanguinitas és progressio, melyek egy adott esetnek oly fajlagos színezetet adnak, mely a *heredodegeneratio* fogalmának (JENDRÁSSIK) felel meg. Így tehát az általános heredodegenerációs tényezők a lényegbevágók, míg a tünetcsoportosítás (merevgörcsös, ataxiás, psychosisos jelenségek) csupán csak egyéni színezetet adók. Ez alapon a tünetileg még oly különböző képek lényegi ismertetőjegyeik tekintetében tulajdonképen egyezők; az összes *heredodegenerációs kórformák kórlényeigükre nézve azonosak*.

A heredodegenerációs betegségek kórszármazása még sok pontban vitás. Helyesen mondja HIGIER, e bántalmaknak egyik legavatottabb ismerője, hogy ezeknek endogen okokra való visszavezetésével az aetiologia homálya semmiképen sincsen eloszlatva, csupán csak elodáztuk a feltett kérdésre adandó végső feleletet és úgy véli, hogy reájuk nézve a legeredetibb káros behatás mégis csak exogen természetű, a mennyiben e betegségek a távolabb fekvő felmenő ágak veleszületett luesében, idősült alkoholmérgezésében, avagy egyéb fajlagos külső noxában lelki magyarázatukat. E felfogáshoz magam is csatlakozom ama megfontolás alapján, mely szerint egészséges egyének folyton

csak ugyanilyeneket nemzenek még consanguinitas esetén is, és így valamely átöröklődő idegbajban mégis csak a felmenő ág egyik tagján kellett valamely kóros elváltozásnak bekövetkeznie, melyet másképen, mint exogen módon keletkezettnek, elgondolni sem tudnánk. Külömben utóbbi tekintetben eléggé jellegző, hogy a heredoataxia cerebellaris kórelőzményében a felmenő ág idősült szeszmérgezése közismeretes; ismeretes továbbá, hogy a heredolues főleg a kisagyvelő kifejlődésére hat gátlóan, végül FÉRÉ kísérleteiből tudjuk, hogy az athylalkoholnak a petére való behatására torzképződések állanak elő. Emellett HIGIER ama megkülönböztetését tartjuk fontosnak, mely szerint örökléses lues mint átöröklődő betegség nem létezik, hanem csakis veleszületett lues, mely vagy az apai, illetőleg anyai csira felől való (germinativ,) avagy méhen belől szereztetett (placentalis). Ilyképen a csirasejt megmételtyezése már a fogamzás előtti időben történhetik — ez a FOREL-féle blastophthoria esete —, avagy az ébrény az anya részéről exo- vagy endogenmérgek behatásának van kitéve, minők az alkohol, bakteriumtoxinok, illetőleg diabetes, nephritis, osteomalacia. Vajjon a hereditas JENDRASSIK értelmében fajlagos kór-ok gyanánt szerepelhet-e, véglegesen eldöntve nincsen, noha ez a felfogás a mérgeknek fentemlített teratogen hatása alapján meggyőző erejéből sokat veszít; de tény, hogy MONAKOW iskolájából BRUN RUDOLF tisztára örökletes mozzanatokot az úgynevezett átöröklődő kóros *gen* értelmében hatásosnak tart. Igen találóan jegyzi meg STRÄUSSLER, hogy a mennyiben a kisagy hibás kiképződése okát az anyáról a magzatra átvitt lues mérgeében találná, akkor az öröklött hibás kisagyi alapnak okát meg is leltük, melylyel szemben sok más átöröklődő bajnak kórszármarzása felől a legnagyobb homályban vagyunk.

A fentiekből kitűnik, hogy az átöröklődő idegbajok különböző kérdéseiben egyedül azok klinikája tekinthető befejezettnek. A heredodegeneratio legbensőbb mivolta egyelőre még távol áll a pontos felismeréstől és így csupán a finomabb kórszövettan marad fenn mint a viszonyok megismerésére alkalmas eszköz. Utóbbi főleg a heredodegeneratiós betegségek ama formáira nézve bir jelentőséggel, melyek az *előrehaladó elfajulások* nevé-

vel jelöltetnek meg és a középponti idegrendszer meghatározott szelvényeinek feltartóztathatatlan pusztulásában nyilvánulnak meg, miáltal a mozgató-, az érző- és a psychés kiesési jelenségek által jellemzett kórformák jönnek létre. Az alábbi fejtegetések egyedül ezekre vonatkoznak s így azt a kérdést óhajtjuk megfejteni: mi a rendszeres átöröklődő idegbajok anatómiai mibenléte?

Egyrészt a heredodegenerációs idegbántalmak klinikai sajátossága, másrészt a TAY-SACHS-féle családi vakságos idiotaságnak mint egy minden tekintetben kiválóan átöröklődő bajnak felette jellegzetes kórszövettani elváltozásai alapján nagy volt a hajlandóság arra, hogy a heredodegeneratio számára különleges anatómiai képet állítsunk fel. Élesen utal ebben az irányban JENDRASSIK, midőn a TAY-SACHS-féle idiotaságban található nagyfokú idegsejtelváltozásokra támaszkodva, kijelenti, hogy ugyanilyen természetű, de kisebb területre szorító és lassúbb lefolyású pusztulása az idegsejteknek egyéb átöröklődő kórformákban is megtalálható lenne. Való dolog, hogy a heredodegeneratio anatómiája tekintetében éppen a TAY-SACHS-féle kóralak kifürkészése után kezdtünk általános szempontok után kutatni és szabadjon e pontnál utalnom arra, hogy a heredodegeneratio anatómiáját általánosságban, vagyis a kazuisztikától mentesen, magam tárgyaltam legelőször (1913). De tény, hogy ekkor a TAY-SACHS-formának megkapó idegsejtelváltozásai engem is hathatósan befolyásoltak oly értelemben, hogy ezekben a heredodegenerációs elváltozások lényegét véltem látni, elannyira, hogy a heredodegeneratio anatómiai mibenlétét e sejtelváltozások által meghatározottnak gondoltam. Az alábbiakból ki fog tűnni, hogy ez a feltevés annyiban téves volt, hogy a heredodegeneratiót anatómiailag nem az idegsejtelváltozásnak ilyen vagy olyan formája határozza meg, hanem az anatómiai folyamat sajátossága a maga egészében.

A heredodegenerációs kórformáknak klinikai tekintetben megnyilvánult lényegbeli azonossága alapján anatómiai tekintetben is azonos lényegi alapra kell gondolnunk. E feltevés helyességének kipróbálására a heredodegeneratióknak nem minden alakja alkalmas és főképen a hosszas lefolyású időszült formák elhanyagolásával választásunknak elsősorban a heve-

nyésen lefutó családi vakságos idiotaságra azért kellett esnie, mert ebben a betegségben a kórokozó elváltozások valósággal in statu nascendi kínálkoznak a vizsgáló számára. Ezen az anyagon a következő ismertetőjegyeket tudtam megállapítani:

1. A folyamat *kizárólag* a középponti idegrendszernek ektodermális származékait támadja meg, tehát csakis neuronális és neurogliás elemeit s így a folyamat kifejezett válogatást — electivitást — tanúsít.

2. A folyamat a középponti szürke állomány valamennyi idegsejtjére kiterjed, tehát a csigolyaközti dúczsejtekre is.

3. Az idegsejtes kórfolyamat túlzott duzzadásban nyilvánul, jelesen úgy a sejttest és dendriták, valamint a tengelyfonál részéről.

Mint hogy a családi vakságos idiotaság valósággal klinikai paradigmája a heredodegenerációnak, közelfekvő e kórformának kóros anatómiájában is egy szinte mintaszerű kórfolyamatot általánosságban látni, s ha ez igaz, akkor a többi heredodegenerációs kórformára nézve csupán ugyanennek a kórszövetteni elvnek a variációjáról lehet szó. Ebből a szempontból a TAY-SACHS-féle forma mint *egy hevenyésen* lefolyó heredodegeneratio finomabb kórszövettanának nagy jelentősége van; e helyen az ez irányú adatoknak csakis legfontosabbjait fogjuk felsorolni és a pontosabb viszonyok tekintetében az idevágó irodalomra utalunk.

A fentebb említett sarkalatos tétellel, hogy ugyanis kizárólag az ektodermális elemek betegszenek meg, hosszasan foglalkoznunk nem kell és csupán annyit óhajtunk kiemelni, hogy az általunk megvizsgált tizenkét eset valamennyijében a mesodermális képződések, mint a hártlyák és erek, tökéletesen épek voltak, egyetlen egy eset kivételével, melyben az első középponti tekervény egy körülírt pontján gyulladós elváltozásokat láttam; kétségtelen azonban, hogy ez csak oly járulékos jelenség, mely az idegelemek kóros elváltozásaival semminemű lényegi kapcsolatban nincsen, tehát teljesen elhanyagolható. Így tehát tételként mondhatjuk ki, hogy a TAY-SACHS-féle *heredodegenerációs kórformában a kórszövetteni folyamat csiralevélszerű bánalom s így fejlődéstanilag meghatározottnak — determinálnak — mutatkozik.*

Az ilymódon megbetegedett középponti idegrendszer két irányban mutat igen nevezetes szerkezeti elváltozásokat, jelesen ép- és kórszövettani tekintetben.

Épszövettenilag úgynevezett szerkezeti rendellenességek két főirányban tűnnek fel. 1. A nagyagy kérge oly rétegződést — tektonikát — mutat, mely a majomkéreg megfelelő viszonyaira emlékeztet; ezekről a T. Akademiának két év előtt vizsgálataim nyomán beszámoltam; ide számítandó az a leletem is, hogy legutolsó TAY-SACHS-esetem nyakszirti lebenye majomszabásúnak mutatkozott, a mennyiben a harmadik nyakszirti tekervénynek fődélképződése — operkulizálása — miatt egy *sulcus lunatus seu simialis* jött létre. 2. Több eset gerinczeveljének nyaki részében a HIS-féle *sulcus cylindricusnak* mint foetalis maradványnak fennforgását tapasztaltam. Ez adatok alapján kétségtelen, hogy a *csuládi vakságos idiotaság* eseteinek középponti idegrendszere oly szerkezeti rendellenességeket tartalmaz, melyeknél fogva az alacsonyabbrendű módon felépítettnek mutatkozik és így csökkent értékűnek tekinthető.

Kórszövettanilag egy, a középponti rendszer teljes szürke állományára kiterjedő duzzadási folyamat található, melyről újabb vizsgálataim alapján állithatom, hogy nem csupán a sejttestre és a vele azonos dendritákra, hanem a tengelyfonalra, valamint a protoplasmás neurogliára is kiterjed. E duzzadási folyamatnak pontosabb morfológiai viszonyait több helyen behatóan tárgyaltam; röviden annyit emelnék ki e helyen, hogy az idegsejt teste a maga egészében, a dendriták túlnyomóan helyileg gömbszerűleg, a tengelyfonal vagy egy, vagy több ponton s akkor rózsafüzérszerűleg duzzad, még pedig oly fokban, minőre az idegrendszer kórszövettanában eddig példát nem tudunk. Legújabb tapasztalásaim alapján kijelenthetem, hogy főleg a kisagyban és a gerinczagyban a tengelyfonal a duzzadásnak oly nagy fokát mutathatja, mely a dendritaké megett semmiképen sem marad és nyomatékka utalnék azokra a képekre, midőn egy ily duzzanat, mint látszólagos *végbunkó*, a tökéletlen regenerációs hajlam hibás benyomását adja, pedig valójában degenerációs jelenség. Nem nehéz ugyanis meggyőződni arról, hogy ily úgynevezett végbunkó alapján kétsarkú tengelyfonál-duzzadás, mely a mikro-

tomkés által véletlenül az egyik sarkán átvágatván, visszamaradt a rendes tengelyfonallal összefüggő duzzanat mint végbunkó. E duzzadásnak lényegét az interfibrillás szerkezetnélküli protoplasma, az úgynevezett hyaloplasma kóros felgyülemelésében látom, miért is a hyaloplasma kóros túltengéséről — hypertrophiájáról — szólok. Ebben a kórosan elváltozott hyaloplasmában a sejtnak degenerációs termékei válnak ki, melyek részben fehérjeszerűek, részben zsírszerűek. Jelesem a TAY-SACHS-féle alakban lecithinszerű elfajulási termékek képződnek, melyek ilyenek gyanánt felismerhetők a WEIGERT-féle hæmatoxylinos velőfestés alapján való kékre festődésük által; e termékek apró, hol gömbölyded, hol sokszegletű szemecskék gyanánt tűnnek fel, melyekről nem nehéz megállapítani, hogy az endocellulás fibrillumrecének közeiben helyezkednek el. Ugyanekkor az idegrostok velős burka friss puffadás nyomait mutatja. A helyhez kötött plasmás neuroglia megvastagszik főleg nyújtványjaiban, melyek a sejttel együtt szemcsésen szétesnek; egyes esetekben a neuroglia erős elrostosodást is mutathat (WESTPHAL); a nyújtványnélküli, kerek, úgynevezett apoláris gliasejtek vagy lipoidszemecskékkel rakodnak meg bőven, vagy mint a prælipoidos szakaszban, zavarosan vörhenyesre színeződnek a skarlátveres által, és mint ilyenek, tömegesen foglalnak helyet az agykéregben az idegelemek között és az erek körül. Kiemelendő, hogy az eres-kötőszövetes készülék semmi nemű elváltozásban nincsen. *Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy mert kizárólag az idegsejtek, az idegrostok és a neuroglia betegszenek meg, ektodermális típusú kóros folyamat zajlik le, mely mint ilyen, fejlődéstanilag determinálnak mutatkozik és lényegében az ektodermális hyaloplasmának kóros elváltozásán alapszik, mely minden neuronális és neurogliás elemnek előrehaladó elfajulását okozza.* Ezt a meghatározást ki kell egészítenem azzal a törvényszerű lelettel, mely szerint a törzsfajlásileg legfiatalabb telencephalis rendszereknek velősödési gátlását találtam; ily értelmű a látótelep nyeleinek és a loborpályának velőtlenlége.

Mint fontos körülmény emelendő ki, hogy a családi idiotaság juvenilis (VOGT-SPIELMEYER- és WALTER-féle) alakja lényegében ugyanezeket az elváltozásokat, csupán fokozatilag és terjedelmi-

leg kisebb méretekben mutatja, melynél fogva az idegsejt teste sokkal szerényebb fokú duzzadást és ezt is csak a nagyagy elülső felében mutatja; ennek megfelelően a kórkép nagyon elhúzódó és halálosan csakis valamely szövődmény (tuberculosis, pneumonia) folytán végződik.

Miután a fentiekben egy *hevenyésen* lefolyó heredodegeneratió-
nak anatómiai vonásait rögzítettük, állítsunk most ezzel szembe
egy kifejezetten *idősüll* alakot abból a célból, hogy ennek ana-
tómiai substratumát megkapjuk. E célból a legalkalmasabbnak
látszik a kisagyi ataxia, mert ez részben BIELSCHOWSKY, részben
a magam vizsgálatai alapján mint a modern histotechnika esz-
közeivel feldolgozott heredodegeneráció a beható elemzést lehe-
tővé teszi. A legfőbb vonások a következőkben foglalhatók össze.
Mindenekelőtt kiemelendő a kisagynak és többnyire a hidnak
terjedelmében való megkisebbedése, a mi részben veleszületett
alapra, részben elfajulásra vezethető vissza. Igen jellegzetes képet
nyújt a velőfestés, a mennyiben ez betekintést ad a kórfolyamat
kiterjedésére nézve, s így oly velőelfajulást látni, mely 1. egye-
dül a kisagyra szorítkozhatik, illetőleg 2. egyúttal a hid- és nyúlt-
velőnek úgynevezett kisagyi tartozékaira («Kleinhirnanteile»), mi-
nők a hidkar és hiddúcok, az alsó olajka és mellékes részei stb.,
terjedhet ki. Első esetben a velőhiány a phylogeniának meg-
felelően oszlik meg, a mennyiben a kisagy ősi része — palæo-
cerebellum, mely alatt a pehely és a féreg értendő — ép, míg
fiatal része — neocerebellum —, vagyis a kisagyi félteke, velőt-
len. A második esetben a hidkar és a kötőkar, továbbá az alsó
olajkák az olivo-cerebellaris rostozattal egyetemben elfajultak, mi-
által a szerzők (DEJERINE, THOMAS, LEJONNE-LHERMITTE stb.)
különböző «atrophiái» jönnek létre, mint az atrophia ponto-
cerebellaris, olivo-cerebellaris, ponto-olivo-cerebellaris, rubro-
olivo-cerebellaris, mely elváltozások helyesebben degeneratiók-
nak volnának nevezendők. Magában a kisagyban úgynevezett int-
racentrális neuronkiesések mutathatók ki legtisztábban a BIEL-
SCHOWSKY-féle ezüstöző imprægnálással; ily alapon például egyedül
a kosársejtneuronok tűnhetnek el, miáltal lecsupaszított PUR-
KINJE-sejtek állanak elő; ezt nevezi BIELSCHOWSKY a kisagy cen-
tripetális degeneratiós típusának; avagy ellenkezőleg a PURKINJE-

sejtek esvén ki, de megmaradván a kosársejt-neuronok, előállanak az úgynevezett üres kosarak, a mit BIELSCHOWSKY a kisagy centrifugalis degeneratiós típusának nevez, végül tömegesen sorvadhatnak a szemcsés sejtek (strat. granulosum). Ezek a kisagyi rendszeres neuron-kiesések szövődhetnek agyi, illetve gerinczagi rendszerbántalmakkal; így az előbbi esetben a kisagyi heredodegenerációhoz társulhat idiotaság avagy agyi merevgörcsös bénulás — diplegia spastica, az utóbbi esetben a FRIEDREICH-féle betegség. Az idiotaság mindenkoron egy szerkezetében többé-kevésbé súlyosan csökkent telencephalont vagyis nagyagyi féltekét, a diplegia spastica pedig vagy egy különálló rendszerdegenerációt képviselhet vagy pedig az idiotaság anatómiájából folyik. Ha gerinczvelői szövődés forog fenn, akkor a kétlépű test megkisebbedése mutatkozik a tractus spino-cerebellaris elfajulása alapján.

A mi már most az idegelemeknek finomabb kórokozó elváltozásait az idősült heredodegenerációval illeti, kiemelendő, hogy igen mérsékelt sejtduzzadáson kívül főképen az idegsejteknek előrehaladó idősült sorvadása és a sejttestnek protoplasmás felbomlása szerepel, miközben az idegsejt fibrillás szerkezetének szétदारabolódása megindul. E szerkezetnek szétesését a nagyagy kérgében idiotasággal szövődött kisagyi ataxia és családi kisagyi bántalom egy-egy esetében tanulmányozhattam. E folyamat lényegét abban foglalhatom össze, hogy a fibrillás szerkezet úgy a sejttestben, valamint a dendritákban eleivel tömör módon, incrustációszerűen imprægnálódik, úgy, hogy ez által durva gerendaszerű tömegek mutatkoznak; később ezek szétदारabolódnak, előbb nagyobb darabokra, később kisebb rögökre, végül gömbölyded testecskékre, valósággal kavicszerű apróságokra, miáltal azután végezetül egy egyre jobban finomodó, ezüsttel intensive feketére színezett porszerű tömeg jó létre, mely a szétfoszló protoplasmában van szerteszórva. Minthogy ez a széthulló tömeg, mely semmiképen sem tévesztendő össze lipoidos szemecskékkal, egyedül ezüst által válik kimutathatóvá, mert sem hæmatoxylinnal, sem bázisos anilinfestékkel, sem skarláttal, illetőleg szudánveressel nem tüntethető fel, indokoltnak vélem az ilyképen kifejezésre jutó folyamatnak az *ezüstszemcsés elfajulás*

nevet adni. Az e módon elfajult idegsejteket apoláris gliasejtek veszik körül és ezek takarítják el őket (neuronophagia). E közben az idegsejt magva tökéletesen egyneművé válik, később ránczos lesz és a külömben is sötétre színezett magvacskával egységes sötét sorvadt tömeggé olvad egybe — ez a mag homogén sorvadása. Ebben az ezüstszemcsés elfajulásban bennfoglaltatik a NISSL-féle *idősült idegsejtelváltozás*, melynek NISSL szerint a lépsövényes elváltozás — «wabige Veränderung» — lenne a bevezetője. E szerző szerint a lépszerű szerkezet — «wabige Struktur» — már kóros jelenség; ha ez a szerkezet elmosódott, akkor a toluidinkék-készítményeken a sejttestnek márványzott a külsője, míg ha kifejezett, akkor igen élesen megrajzolt reczés váz áll elő. Ugyancsak NISSL szerint a dendriták halványan, fátyolszerűen színeződnek és ezáltal jobban válnak láthatóvá, mint ép viszonyok között. A sejtelváltozás a továbbiakban következőképen folyik le. Az eleddig kerek sejt-mag hosszúkás és szegletes lesz, később sötétesen színeződik, a sejttest élesebb körvonalokat kap, szintúgy a dendriták, melyek egyuttal kanyargósak lesznek, mely elváltozások összegükben a NISSL-féle idősült sejtelváltozás képét adják, azzal az eltéréssel, hogy a sejttestnek sötétre színezett részeiben lépszerű, illetőleg reczés sövényrendszer mutatkozik. NISSL szerint a toluidinkék-készítményen látható «reczés átalakulás» a zsirosan elfajult idegsejtnak felel meg, mert a reczés szerkezet közei és a lipoid-szemcsék egybevágnak.

A magam tapasztalása az idősült sejtelváltozás tekintetében, mely úgy a fibrillás szerkezetű, valamint a toluidinkék- és a lipoid-készítmények egybevetésén alapszik, a következő fel fogásra vezetett. A reczés szerkezet, mint reczés «*átalakulás*», nem létezik, mert ez megfelel a már rendes viszonyok között meglévő protoplasmás váznak, mely reczés alkotású és a melynek egyes sövényeire és csomópontjaira a toluidinkékkel erősen festődő NISSL-féle szemcsék rácsapódnak, miáltal utóbbiak valósággal kérgesítik, inkrusztálják a protoplasmás vázat. Ez a váz, mely toluidinkékkel halványan színeződik, ezüsttel ugyancsak kimutatható, jelesen az idegsejt magva körül a legfinomabb fonalak és legsűrűbb reczeközök által alkotott mag-

körül szita képében, míg az idegsejt felszínéhez közelebb egy hosszanti csikolatot mutató, erősebb gerendácskákból álló fibrillás váz alakjában, mely a CAJAL-féle erőteljesebb elsődleges fibrillákból és az ezeket harántúl-ferdén összekötő finom másodlagos fibrillákból tevődik össze. Az idősült idegsejtelváltozás azzal indul meg, hogy az inkrusztáló basophil tömegek, a NISSL-féle szemecskék fokozatosan tűnedeznek vagyis megkisebbednek bármilyen szétporzás nélkül (erre NISSL is súlyt helyez) és ezáltal a protoplasmás váz egyre jobban lecsupaszkodik, miáltal a toluidinkék-készítményen a maga egész mivoltában jobban válik láthatóvá. Egyidejű jelenség az idegsejtnak mérsékelt fokú duzzadása, mely vagy a sejttestet érheti, vagy inkább a csúcsi dendritát (agykéregsejtekről levén szó), és így előáll a reczés szerkezetnek fokozott mértékben való kialakulása, mert hiszen a duzzadás a reczeközöket nagyítván, az eredetileg összeesett s így láthatatlan reczeközök és reczefonalak valósággal szembeugróvá válnak. Ugyanekkor a puffadás folytán egyes reczefonalak összetapadva, vastagabb fonalnyalábbá tömörülnek össze, s így előállanak az idegsejt testében egyes durvább, az ezüst által sötéten színezett gerendák, melyek a továbbiakban eleinte nagyobb darabokra, később fokozódó mértékben mind kisebb részecskékre darabolódva, a fentebb jelzett ezüstszemcsés elfajulásnak képét adják. Párvonalosan e duzzadással megindul a sejttest sorvadása, melynél fogva körülírt részben a reczefonalak összetapadva, az ezüst által szintén masszív módon, incrustatioszerűen imprægnáltak, mely anyagnak előrehaladó szétesése ugyancsak az ezüstszemcsés elfajulás képének kialakulásához vezet. A végki-fejlődés vagy az idegsejtnak *egyszerű sorvadása*, melynél fogva előáll egy töpörödött és toluidinkékkel sötéten és egyneműen színezett sejttest megvékonyodott és kanyargós dendritákkal, vagy pedig a protoplasmás feloszlás miatt létrejő az úgynevezett *sejt-árnyék*, egy szinte leheletszerűen festődő, halovány és tökéletlen recze, melyet hovatovább apoláris gliasejtek vesznek körül és feloldva, végül eltüntetnek. Utóbbi esetben tehát az idegsejt még roncsaiban sem marad meg, hanem véglegesen elpusztul és így az idősült heredodegeneratiónál előáll a nagyagy kérgének idegsejtes elemekben való elszegényedése. Egyébként az egyszerűen

sorvadt idegsejtek is idővel, bár látszólag lassabban, a nyújtványoknélküli gliasejtek útján eltávolíttatnak. Végül megjegyzném, hogy szemben NISSL fent kiemelt felfogásával, az idegsejt reczés «elváltozását» nem mindenkor láttam a zsíros elfajulással egybeesni, vagyis reczésen «elváltozott» idegsejtek nem voltak mindig megrakodva lipoidszemcsékkel.

Figyelemreméltó az idegrostoknak magatartása az idősült heredodegeneratióánál. Elsősorban is a velősburok akár helyileg gömbszerűen, akár hurkaszerűen felfuvódik, miáltal a velősburok sokszorosan megszakad, szitaszerűen átlíkgatott lesz és így előállanak a velősburok úgynevezett reczés szerkezetei — «Netzstrukturen». — Ha a duzzadás nagyfokú, akkor lefűződés útján a velő helyenként megszakad, létrejönnek a velőgolyók, melyek a lecsupaszodott tengelyfonál hosszában fekszenek. Az ily módon elváltozott velőshüvely eleinte még kékre festődik a WEIGERT-féle hæmatoxylinnal, de később ez a szineződés egyre jobban fakul a velőnek előrehaladó elváltozásával, mely egyre jobban megkisebbedő és egyre rosszabbul szineződő velőgöngyöcskék kialakulásában áll. Végül ez utóbbiak is eltűnnek és ugyanakkor a lipoidszemcséknek feltűnését is lehet látni, jóllehet a közvetlen átmenet az egyikből a másikba nem mutatható ki. Már a velőpuffadás kezdetén is lehet tapasztalni a tengelyfonál részéről, elváltozást, melynek különböző formái vannak. A vastagabb tengelyfonalak elváltozást a hurkaszerű megduzzadásra hajlamosak, miáltal természetesen a velősburok is fel lesz dudorítva, míg a finomabb tengelyfonalak gyöngyfűzészerűen sorozatos duzzanatokat vagy szabálytalan, szétszórt tüskés dudorodásokat mutatnak. Mindezek az elváltozások végezetül szemcsés szétesésre hajlanak, de kiemelendő, hogy a tengelyfonálnak ez a szétdarabolódása legtöbbszörre később köszönt be mint a velő szétesése, és így érthető, hogy a velő előbb pusztulván el, előállanak csupasz tengelyfonalak, melyek csak későbbben esnek át a SHIMAZONO-féle *axolytikus duzzadáson*. Ezek szerint a tengelyfonál sokkal ellentállóbb része az idegrostnak, mint a velősburok; oly tétel ez, mely egyébként már a régibb histopathologia előtt is ismert volt.

Ha már most a heveny és idősült heredodegeneratióknak

anatomiai substratumát összehasonlítjuk, akkor alapján véve csupa azonos vonások tűnnek fel. Mert hiszen az idősült herede-
degenerációnál is egy kizárólagosan ektodermális, tehát elektív bántalom szerepel, mely legkörülirtabb formájában például a rhombencephalonra, tehát a középponti idegrendszernek egy fejlődés-
tanilag meghatározott szelvényére szorítkozik. Már most részben e szelvényen belül válnak ki elfajult rendszerek, részben ugyan-
ilyenek mint a magasabb és alacsonyabb szelvények, vagyis a nagyagy és gerincszelvény felé vezető összekapcsoló tagok, melyek az egyébként épnek látszó idegszövetben az elfajulás alapján mint biológiai egységek szinte kidomborodnak. Ilyképen elfajulhat a nagyagyból kiinduló tractus fronto- és temporopontinus, mely az átöröklötten bántalmazott kisagyvelővel az elfajult híd-
kar útján összekapcsolódván, előáll egy elfajult cerebro-ponto-cerebellaris rendszer, mint egy megszakítás nélküli neuronlán-
czolat. De lehetséges, hogy oly rostrendszerek betegszenek meg, melyek egymással neuron-izesülésben nincsenek; így például előfordulhat, hogy egy ponto-cerebellaris rendszerelfajulás mellett még egy elektív loborelfajulás is van mely esetben úgynevezett kombinált elsődleges rendszerbántalomról szólnak. Ezek alapján megkülönböztethetjük az *egyszerű*, az *összetett* és a *kombinált* (szövődött) rendszerelfajulást. Példák: Ha a pyramispálya önmagában elsődlegesen és kétoldalilag elfajult, akkor ez az egyszerű rendszerelfajulás esete; ha a pyramisnak mint középponti mozgató neuronnak bántalmához a környéki mozgató neuron elsődleges elfajulása csatlakozik, mely eset klinikailag az amyotrophiás lateralsklerosisnak felel meg, akkor az összetett rendszerbántalom képe áll előttünk; ha végül a pyramisdegenerato mellett valamely érző gerinc- vagy kisagyi rendszerelfajulás (például a tractus spino-cerebellaris vagy olivo-cerebellaris mint egészen különböző természetű neuronok elfajulása) forog fenn, akkor a kombinált rendszerelfajulás példájával van dolgunk. Ezek után nyomatékkal emeljük ki, hogy úgy a hevenyész, valamint az idősült herede-
degenerációnál rendszer bántalmak mutatkoznak, jelesen az előbbinél *phylogenetikai rendszergátlások* formájában, például a látótelep nyeleinek és a loborpályának mint phylo-ontogenetikailag legfiatalabb pályáknak velőtlensége; utóbbinál *rendszerelfajulások*

alakjában. Úgy a myelogenesis zavara, mint a myelonecrosis ebben az esetben analog jelenség; nevezetesen a TAY-SACHS-féle betegség fiatal, *éretlen* idegrendszert érven, a veleszületett átöröklődő gyengeség a velőképződés kimaradásában, és pedig a phylogenetikailag legfiatalabb pályákon fog megnyilvánulni, míg az időszült heredodegeneráció legtöbbször kész, vagyis *érett* idegrendszeren folyván le, a veleszületett, átöröklött gyengeség már csupán az elkészült pályáknak pusztulásában, előrehaladó elfajulásában lehet kifejezést.

Az időszült heredodegeneráció rendszerbántalmi valóságosak, elsődlegesek, melyeknek ismertetőjegyeire alább utalni fogunk. Itt ki kell emelnünk, hogy az elsődleges elfajulásnak SCHMAUS-féle fogalmazásától lényegesen eltérünk, mely annyit mond, hogy valamely rostelfajulás akkor elsődleges és elektív, hogyha az idegrost önállóan, az eredő idegsejt részéről származó befolyás nélkül, betegszik meg. SCHMAUS az ő elsődleges rendszerbántalmait mérgek behatásából származtatta, melyeknek ugyanis bizonyos affinitást tulajdonított meghatározott idegpályákkal szemben; ma már NONNE és FRÜND, továbbá SHIMAZONO munkái alapján tudjuk, hogy ily esetekben az erekből kiinduló helyi roncsolások szerepelnek, melyek megközelítően kétoldali részarányosságot tanúsítanak s így előállanak a gerinczvelő pseudosystemás kombinált kötélbántalmi. Már NONNE és FRÜND az elsődleges, vagyis valóságos kombinált rendszerelfajulás fogalmát az átöröklődő családi idegbajokra korlátozta. És így egy rendszerbántalom elsődleges, ha az anatómiájának pontosan megfelelően mint tisztán idegparenchymás és bilateralis-symmetriás elfajulás minden vascularis reacto nélkül oly idegrendszerben jelentkezik, mely bizonyos anatómiai jelek alapján endogén módon bántalmazottnak mutatkozik; ez az eset forog fenn, ha például egy diplegia spasticával vagyis, elsődleges loborelfajulással társulva vannak phylogenetikai kiesések a nagy- és kisagy részéről, ami akkor mutatkozik, ha bizonyos nagy- és kisagyi neuronok elszigetelten kiesnek, például a nagyagyban degenerálnak az összes associációs rendszerek, míg épek maradnak az összes projectiós rendszerek, vagy a kisagyban tömeges pusztulása van a PURKINJE-sejteknek ép

kosársejtek mellett, szóval a legtisztább s legélesebb elektív bántalom jelenségei forognak fenn.

Az átöröklődő családi bajok szigorúan kétoldali részarányossággal fejlődnek ki és származásukra nézve *minulenkoron gangliocellulások*, mely bántalom úgy hevenyész, mint idősült elfajulásoknál kimutatható. Ugyanis utóbbiaknál is az idegsejtduzzadásból kialakult NISSL-fele idősült idegsejtbántalom, illetőleg az idegsejtárnyék nyomait láthatjuk, minélfogva az idegrostok autonom, az idegsejttől független bántalmának felvétele tárgytalanná válik. E szerint tehát az idősült heredodegeneraciónnál is az idegsejtből kiinduló bántalom forog fenn s így teljesen felesleges az elsődleges idegrostbántalom feltevése akár SCHMAUS értelmében, akár MERZBACHER szerint, a ki *aplusia axialis* címén az idegrostoknak az idegsejtektől független fejlődési gátlását — nézetem szerint megokolatlanul — veszi fel. Az újabb histopathologia tagadhatatlan haladását éppen abban találom, hogy ma már nem kényszerülünk az idősült elsődleges rendszerbántalom anatómiai magyarázata céljából szövettanilag ki nem mutatható, mondjuk dinamikai idegsejtelváltozások felvételére.

A hevenyész és idősült heredodegeneraciónnak kórszövettani egyezését még az idegsejtbántalom féleségében is ki lehet mutatni, mert mindkét esetben az idegsejteknek eredetileg duzzadási folyamata szerepel, mely csupán fokilag különböző. A hevenyész formákban mutatkozó túlzott duzzadással szemben állanak az idősült formáknak sokkal kisebbfokú puffadásai, de mindenképen igen figyelemreméltó, hogy mindkét formában az elváltozások sorát a duzzadás nyitja meg s így alapvető elváltozásnak tekintendő. Mindkét esetben a következő jelenségekről körülbelül a következő sorrendben van szó: 1. a *duzzadás*, miáltal a reczés-fibrillás szerkezet hézagaiban tátongóvá válik; 2. a NISSL-*szemcsék tünedezése*, miáltal az endocellulás recze lecsupaszodik; 3. bizonyos *hyaloplasmás degeneratiós termékek kialakulása*, melyek főleg a hevenyész formákban a reczeközöket elfoglalják és úgy a sejtestet, valamint a nyújtványok felpuffasztásához hozzájárulnak; 4. széthullása a magkörüli reczének, ez az *ezüstszemcsés elfajulás*; 5. az ily módon bántalmazott *idegsejtnek egyszerű*

sorvadása, illetőleg *sejtárnycékképződés*; 6. *neuronophagia*. A felsorolt elváltozások valamennyien csakis az idősült degenerációnál jelentkeznek azzal a megszorítással, hogy a duzzadás és az elfajulási termékek fokilag és mennyiségileg sokkal mérsékeltebben mutatkoznak; hevenyés formákban a sorvadás és neuronophagia csak kivételesen található meg. Nézetem szerint az idősült heredodegenerációnál található apró idegsejtek kórosan zsugorodottak és nem veleszületett törpe példányok («*Miniatürzellen*»).

A fentiek alapján a heredodegeneráció morfológiai lényege az anatómiai folyamat lényegi sajátosságában nyilvánul meg, mely röviden így fejezhető ki: *a heredodegeneráció anatómiailag a középponti idegrendszernek fejlődéstanilag meghatározott elváltozása*. Ezt bizonyítja mielőtt az a legáltalánosabb vonás, a mely szerint egyedül az ektodermális képletek betegszenek meg a mesodermális származékok bántatlansága mellett; a heredodegenerációs folyamat ilyképen meghatározottan változó s így fajlagos jelleget tanúsít. Ez a csiralevel-localisatio folytán különálló folyamat még élesebb fejlődéstani jelleget nyer azáltal, hogy az ily módon megbetegedett középponti idegrendszer a phylo- és ontogeniának megfelelő kieséseket tanúsít, a mennyiben mindenkor a fejlődéstani sorrendben legbatalabb és így valószínűleg labilisabb területei és rendszerei szenvednek akár a velőképződés gátlása, akár a velőelfajulás értelmében. Ez a phylo-, illetőleg ontogenetikai rendszerbántalom a fejlődéstani elektivitásnak *fokozását* jelenti.

Ez anatómiai mibenlétében a fentiek által jellemzett folyamat esetről-esetre változó, de sajátos és *törvényszerű kiterjedést* mutat, melyre nézve az a körülmény jellemző, hogy a fejlődéstani szelvényeződésnek hódol; így észlelhető egy telencephaliás, rhombencephaliás, spinalis kiterjedés, mely alakok egymás között szövődhetnek, illetőleg valamennyien egyesülve lehetnek, s így a heredodegenerációs folyamat lehet: *a)* tisztán szelvényes; *b)* szövődötten szelvényes; *c)* az egész középponti idegrendszerre kiterjedő. Példák: tisztán szelvényes a dystrophia vagy az olivo-ponto-cerebellaris atrophia; szövődötten szelvényes eset szerepel, ha FRIEDREICH-betegség kisgyermeki heredoataxiával

társul, tehát spinális és rhombencephaliás combinatio forog fenn; minden szelvényre kiterjedő a folyamat a TAY-SACHS-betegség esetében vagyis midőn a nagyagykéregtől a gerinczvelőbe terjed le a kóros elváltozás.

Végül a fentvázolt folyamat *lefutásának időmértéke* (tempója) szempontjából is különböző, mert lehet hevenyész és időszült; ezzel a körülménnyel egyezik az idegsejtek elváltozásának foka a duzzadás tekintetében, mert a $\frac{1}{2}$ —1 év alatt halálosan végződő TAY-SACHS-féle családi idiotaságban a sejttestnek és az összes nyujtványoknak túlzott gömbszerű felpuffadása mutatkozik. Oly duzzadási folyamat ez, melynek hatalmas arányairól a jelzett kórforma anatómiájának megismeréséig fogalmunk sem volt. A könnyebb juvenilis formákban a duzzadás foka jelentékenyen kisebb és átvezet bennünket a heredodegeneratióknak egészen időszült formáihoz, minő például a kisgyi heredoataxia, a hol a NISSL-féle időszült sejt bántalom és a sejtárnyékképek vannak túlsúlyban.

A mi már most az idegsejtelváltozások kórszöveti lényegét illeti, az idegsejtduzzadás mindkét féleségében a szerkezet nélküli protoplasmának, az úgynevezett hyaloplasmának elsődleges bántalmát tekintem alapvetőnek. A *hevenyész* sejt elváltozás nagyfokú duzzadása esetén a hyaloplasma bántalmának kimutatása nem nehéz; a duzzadás felismerhető a protoplasmás váz reczeközében tömegesen felhalmozódott elfajulási termékek okozta fesztő hatás eredményeképen, melyeknek a reczeközöket kitöltő hyaloplasmából való származása annyival közelebb álló, mert a reczeváz a nagyfokú duzzadás idejében bárha kifeszült és vongálódott, de alapjában nem ronszolódott; utóbbinak szétesése későbbi jelenség, mely csakis az idegsejtd degeneratióknak következménye. Ehhez képest az az anyag, a melyből az elfajulási termékek keletkezhetnek, csakis a hyaloplasma, mi mellett a NISSL-szemecskéknek részvétele kizárva nincsen, és tekintve azt, hogy e szemecskéknek rendes viszonyok között történő felhasználása esetén pótlásuk csakis a hyaloplasmából történhetik, a belőlük származó elfajulási termékek azonosnak tekinthetők a hyaloplasmából származottakkal. Időszült sejt elváltozás esetén a mérsékelt, de kétségtelen duzzadás, valamint a

protoplaszmának feloszlása a hyaloplaszmának kezdeti és lényegi bántalmára enged gondolnunk. És így a heredodegeneráció idegsejtes elváltozásait egységes szempontból tekinthetjük; úgy a hevenyész, valamint az idősült formában *azonos* elváltozás szerepel, a *duzzadás*, a melyből folyó sejtelváltozás azonban csakis az elhúzódó idősült alakban futja végig a sejtpathologia egész skáláját és vezet végül sorvadásra, illetőleg sejtárnyéokra, míg a hevenyész formában a gyors lefutás folytán csakis egyes és kivételes sejt példányok sorvadnak és itt sokkal inkább a túlgyors halál miatt a duzzadásos folyamat még teljes virágzásában tud jelentkezni.

*A fentiekben behatóan jellemzett folyamat hibás — subnormalis — talajon fejlődik ki, mely mint ilyen, a megzavart, illetőleg gátolt kifejlődés jelei által ismerhető fel; ezek az anatómiai elfajulási jelek, melyek makro- és mikroszkoposak. A degeneráció makroszkopos jelei lehetnek könnyebbek és súlyosabbak; az előbbiekhöz számítandók az anthropoid barázda- és tekervényvariabilitások, az utóbbiakhoz a szelvényes hypoplasiák a nagy-, kisagy és gerinczvelő részéről. A mikroszkopos elfajulási jelek egyszerűek és összetettek. Az előbbiekhöz számítandók az idegsejtek részéről a rendellenes alak, fekvés, szerkezet (kétmagvúság), kicsinység, csekély szám és foetalis alak; az idegrostok részéről a rendellenes vékonyság, végül a neuroglia részéről a többmagvúság, az alaki rendellenességek és a heterotopia. Az összetett elfajulási jelek az úgynevezett *dysarchitekturás szerkezetek*, melyek közül mint fontosabbak említendők: 1. a kocsonyás sziget valamely agyideg magvában; 2. a gerinczvelői hátulsó szarv kocsonyás állományának állatszerű ránczolódása; 3. a csigolyaközi dűcsejteknek kolonizációja; 4. a nagyagyú kéreg elfajulásos rétegződése ami alatt a BRODMANN-féle agykéregmezőknek pithekoid határeltolódásai, az area striata majomszabású túlrétegződése, a foetalis rétegződésnek fennmaradó nyomai (főleg túlerős lamina granularis interna), végül a rétegekiesések makro-mikrogyriával kapcsolatban értendők. A kisagyban hasonló elváltozások lehetnek.*

A heredodegenerációnak a fentiekben tárgyalt ismertetőjegyei három osztályba sorozhatók, melyek a heredodegeneráció meg-

határozó mozzanatait, vagyis a *heredodegeneratio determinán-sait* fejezik ki.

I. A heredodegenerációs folyamat válogatós mivoltánál, vagyis az ektodermális elemek kizárólagos bántalmánál fogva fajlagos szinezetet kap, mert hiszen a középponti idegrendszer valamennyi egyéb, úgynevezett exogen folyamata az ideges, gliás és kötőszövetes elemeket válogatás nélkül támadja meg; ez a magatartás a heredodegenerációs folyamat milyenségét határozván meg, benne a heredodegenerációs folyamat *qualitá-sos deter-minán-sa* jut kifejezésre. Ha ehhez még is hozzávesszük azt, hogy ez az idegrendszer sajátos elemeire vonatkozó elektivitas phylo- és ontogenetikai rendszer-elektivitas útján fokozódik, mert a folyamat a fejlődési sorrendben legfiatalabb rendszereket és középpontokat támadja meg legelőször, akkor nyilvánvaló, hogy *a heredodegeneratio minőségi tekintetben egy kizárólag fejlődéstani alapon nyugvó megbetegedési formája a középponti idegrendszernek.*

II. A heredodegenerációs folyamatnak a fejlődéstani szelvényeződésnek megfelelő kiterjedése folytán úgynevezett *extensitá-sos determinán-sa* adva van.

III. Minden heredodegenerációs forma sajátos elfajulási intenzitást mutat, melynél fogva vagy többé-kevésbé túlzott duzzadás, vagy ellenkezőleg kifejezett idegsejtes sorvadás és ettől függő idegrostpusztulás áll elő, és miután a mértéktelen duzzadás a hevenyés, a mérsékelt duzzadás és az ebből kifejlődött idegsejtsorvadás ezüstszemcsés elfajulással az idősült heredodegenerációnál fejlődik ki, azért is a kórszövet-tani alapelváltozás, vagyis a duzzadás *fokában* a heredodegeneratio *intensitá-sos deter-minán-sa* jut kifejezésre.

Végeredményben valamely középponti folyamat heredodegenerációs-nak egyedül a kvalitá-sos determinán-s alapján, vagyis az ektodermális, továbbá a phylo- és ontogenetikai elektivitas alapján bizonyul; az adott klinikai formát — cerebralis, cerebellaris, spinalis? — az extensitá-sos determinans dönti el, míg a lefutási tempót, ugyanis vajjon hevenyés vagy idősült-e a folyamat, az intenzitá-sos determinán-s határozza meg. És így *a heredodegeneratio pathologiai-anatomiai alapelve az ektodermális elek-*

tívitás, mely kórformák szerint való kifejezésre ennek ex- és intenzitása szerint jut; a heredodegenerációban a variációt az ex- és intenzitásos determináns szabja meg.

A heredodegeneratio általános anatómiai jellemzését már most ismervén, kiemelendő, hogy ez a klinikai általános jellemzéssel párhuzamba helyezhető, mert a fentiek szerint a heredodegeneratióknak úgy anatómiáját, mint klinikáját bizonyos lényegi vonások egységesen határozzák meg. *A heredodegeneráció tehát nem csupán klinikailag, hanem anatómiailag is egységes; az átöröklődő családi idegbajok lényegükben úgy klinikailag, mint anatómiailag egyezők.*

E tömör ismertetés végén nem mulaszthatom el annak fel- említését, hogy az átöröklődő családi idegbajok általános kórszö- vettanával tizenkét év előtt FULGENCE RAYMOND foglalkozott. Már ez a szerző hangsúlyozta, hogy a szóbanforgó folyamat egy vagy több rendszerre kiterjedő elfajulásban nyilvánul meg, mi mellett a gyulladásnak semminemű nyoma sem található. Sőt a lobos reactio teljes hiányát igen fontos ténykörülmenynek minősítette; felfogása szerint az idegrendszernek nem kell ez esetben valamely kívülről származó támadást visszautasítania, sehol sem mutatja valamely küzdelemnek nyomát, sem véde- kezését. A bántalom idegsejteknek és rostoknak sorvadásában és végül szétesésében nyilvánul.

Végezetül felmerül az a kérdés, vajjon a fentiekben nyúj- tott anatómiai jellemzés a kórszármazás tekintetében nem ad-e szempontokat?

Az átöröklődő bántalmak egy veleszületetten csökkent értékű középponti idegrendszerben gyökereznek, melyben feltartóztat- hatlanul fejlődnek ki; a lényeg az átlagértéken jóval alul álló szerv, mely épen veleszületett rokkantságánál fogva esetenként különböző kiterjedésben és időtartamban elpusztul. Ezt a tényt képletesen «*hiányos életképességnek*» nevezték (JENDRASSIK), más oldalról a hibásan és hiányosan kifejlett központok és rend- szerek *túlkorai elaggasására* — senescentia præmatura — gon- doltak (HIGIER, BINQ); végül EDINGER azt igyekezett magyarázni, hogy az átöröklés útján gyengébb pályák a viszonylagos túl- működés, illetőleg az ezzel járó elégtelen pótlás folytán *felhasz-*

ndltatnak. Mindezek a nézetek annak idején követőkre találtak; **manapság**, a midőn a heredodegeneratio klinikai és anatómiai meghatározását ismerjük, tisztán áll előttünk, hogy ezekkel a többé-kevésbé tetszetős kitételekkel a heredodegeneratio pathogenesisise semmiként sem tisztult. Mert hiszen egy csökkent értékű szervnek anatómiai kimutatásában a leszállított életképesség már bennfoglaltatik, a mivel azonban egy lépéssel sem jutottunk közelebb ahhoz a kórokhoz, mely ilyen szervet maga után vont. Az időelőtti elaggulás pedig nem egyéb, mint képesletes kifejezés, mint hasonlat, s így tulajdonképen értéktelen, eltekintve attól, hogy csecsemőkorbéli heredodegeneratiónál, amilyen a TAY-SACHS-féle alak, időelőtti elaggulásról beszélni képesség. Az EDINGER-féle «Aufbrauchstheorie», melynek magam is hódoltam egy időben, megdőlt egyedül annál az oknál fogva, hogy a heredodegeneratiót még a legteljesebb kimélet sem tudja feltartóztatni (JENDRASSIK), mert nem a működés, hanem a már legkezdetén meglevő rokkantság határozza meg az enyészetet. Ezek után a kérdés abban csúcsosodik ki, hogy mely befolyás idézi elő a subnormális anyagot, vajjon mérgek-e vagy átöröklődő mozzanatok? De itt a kórszövettan már természetesen nem tud felvilágosítást adni és valószínűbb, hogy valamikor inkább állatkísérletes úton fogunk célhoz jutni. A mire a kórszövettan egyedül utal, az abban áll, hogy az ektodermális hyaloplasma előrehaladó, hol hevenyes, hol idősült elfajulásra hajlamos; az a körülmény, hogy ez a folyamat az egyik esetben gyorsan zajlik le, a másikban vontatva folyik le, azt mutatja, hogy a hyaloplasma kémiai összetételének rendellenessége — a melyből az előrehaladó degeneráció folyik — fokozatilag különböző lehet. De nem csupán ezt a kémiai anomáliát kellene mibenlétében felderítenünk, hanem egyúttal azokat a feltételeket is, melyek ennek keletkezésére vezetnek. Ettől azonban még igen távol állunk; egyelőre a heredodegeneratio tanának csupán klinikáját és kórszövettanát sikerült alapvonalaiiban megállapítani, nyomatekkel jegyezvén meg, hogy hátra van még a heredodegeneratio nem egy alakja finomabb kórszövettanának megállapítása.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 október 11.-én tartott üléséből.)

NÉHÁNY FÉM FAJLAGOS ELLENÁLLÁSÁNAK A NYOMÁSTÓL VALÓ FÜGGÉSÉRŐL.

POGÁNY BÉLA 1. tagtól.

1. §. A fémek fajlagos ellenállásának a nyomástól való függését előbb CHWOLSON, TOMLINSON és LUSSANA, majd újabban LISELL,¹ E. WILLIAMS,² LAFAY³ és BECKMANN⁴ tanulmányozta. Az első három kutatónak részben ellentmondó vizsgálatai után, az utóbbiak több fémre vonatkozólag quantitative is jól egyező eredményhez jutottak. A fémek fajlagos ellenállása ezek szerint a nyomással *csökken* és a relativ csökkenés arányos a nyomással. Az ötvények fajlagos ellenállásának a nyomással való relativ változása kisebb mint a tiszta komponenseké, sőt a relativ változás zéruson keresztül menve positiv is lehet, mint például a manganiné.

A tiszta fémek között a bizmut különleges helyet foglal el, mert WILLIAMS észlelései szerint fajlagos ellenállása a nyomással *nő*.

A tiszta fémek ellenállásának a nyomással való csökkenését az elektromos vezetés régebbi (RUECKE, DRUDE, LORENTZ) elektronelmélete alapján alig lehetett értelmezni; ennek alapján inkább az ellenkező effectus volt várható, ama feltevés szerint, hogy a compressio közelítvén egymáshoz az atomokat, akadályozza az elektronok mozgékonyását.

¹ ERIK LISELL: Inaug. Diss. Upsala 1902.

² E. WILLIAMS: Phil. Mag. (6) 13, 635 l., 1907.

³ LAFAY: Ann. de Chim. et de Phys. (8) 19, 289 l., 1910.

⁴ BENGT BECKMANN: Inaug. Diss. Upsala 1911.

A fémek fajlagos ellenállásának a hőmérséklettől való függésére vonatkozólag különösen igen alacsony hőmérsékleteknél végzett mérések kétségtelen összefüggést mutattak a fajlagos ellenállás és a fém ama jellemző ν frequentiája között, mely az atomhő DEBYE-féle¹ elméletében az atomhő értékét megszabja. Nevezetesen a mérési adatok szerint I. az egyatomú tiszta fémeknek fajlagos ellenállása w alacsony hőmérsékleteknél arányos $\frac{T}{\beta\nu}$ egy universalis függvényével, a hol T az abszolút hőmérsékletet jelenti, $\beta = \frac{h}{k}$ pedig a PLANCK-féle sugárzási elméletből ismeretes állandó. Közelebbről pedig E. GRÜNEISEN² kimondta azt az empirikus úton megállapított tételt, hogy II. a fajlagos ellenállás és az abszolút hőmérséklet viszonya alacsony hőmérsékleteken arányosan változik az atomhővel, a mely tétel a kísérleti adatokból meglepő pontossággal kiolvasható.

A fajlagos ellenállás és a jellemző frequentia közötti kétségtelen összefüggést többek között W. WIEN³ is törekedett a quantumelmélet alapján értelmezni. Szerinte a

$$w = \frac{2mu}{e^2 N l}$$

egyenletben, a hol e az elektron töltése, m a tömege, u a sebessége, l a szabad úthosszúsága, N pedig a cm^3 -ben lévő elektronok száma, u és N függetlenek a hőmérséklettől; w tehát annyiban függ a hőmérséklettől, a mennyiben l függ tőle. WIEN úgy fogja fel, hogy az elektronok az atomok közötti úton, mintegy kanálisokon annál könnyebben közlekedhetnek, mennél egyenesebb az a kanális és mennél simább a fala, vagyis mennél kisebb amplitudóval rezegnek a falat alkotó atomok, és ezen az alapon valószínűvé teszi, hogy l fordítva arányos az atomrezgés amplitudójának négyzetével, minthogy pedig ez az amplitudo a hőmérséklettel növekedik, w is növekedik a hőmérséklettel. WIEN számításai szerint

¹ P. DEBYE: Ann. d. Phys. (4) 39, 789 l. 1912.

² E. GRÜNEISEN: Ber. d. Deutsch. Phys. Ges. 186 l., 1913.

³ W. WIEN: Sitzungsberichte d. Berl. Akad. 184 l. 1913.

$$\frac{1}{l} = C \frac{h}{M\nu} f\left(\frac{T}{\beta\nu}\right),$$

a hol C egy állandó, M az atomsúly, ν pedig az atomtérfogat.

Ebből következik, hogy az ellenállás is $f\left(\frac{T}{\beta\nu}\right)$ -vel arányos lesz.

A WIEN-féle elmélet tehát ily módon egyezik a tapasztalattal, a mennyiben az az I. tételben van összefoglalva; azonban az f függvény WIEN által meghatározott speciális alakja w -nek a hőmérséklettől való függését csak első, durva megközelítésben állítja elénk, a speciálisabb GRÜNEISEN-féle tétel quantumelméleti értelmezése eddig tudtommal nem sikerült. Figyelemre méltó azonban, hogy a WIEN-féle elmélet nem csak w -nek a hőmérséklettől való függését adja első megközelítésben, hanem w -nek a nyomással való változásáról is beszámol, a mint arra GRÜNEISEN¹ reámutatott. A GRÜNEISEN által a WIEN-féle elmélet alapján a fajlagos ellenállás isothermikus nyomáscoefficiensére vonatkozólag levezetett formula a következő:

$$\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_S - \frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_S + x_S - \frac{1}{C_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left[1 + a_T T\right],$$

a hol p a nyomást, x_S az adiabatikus kompresszibilitást, C_p az atombőt jelenti és $a_T = \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial T}$. A jobboldali kifejezés első két tagja GRÜNEISEN becslése szerint kicsiny tört része az egész

jobboldal értékének és ezért, minthogy $x_S < \frac{1}{C_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$, az egyenletből az következik, hogy a fajlagos ellenállás értéke növekedő nyomásnál csökken. Ez az eredmény qualitative összhangban van a kísérleti vizsgálatokkal, kivéve E. WILLIAMS-nek a bismutra vonatkozó méréseit. De a formula quantitative is helyesen adja a fajlagos ellenállás nyomáscoefficiensének értékét több fémre vonatkozólag, mint a GRÜNEISEN² I. táblázatának itt közölt két utolsó oszlopából kiderül.

¹ GRÜNEISEN: l. c.

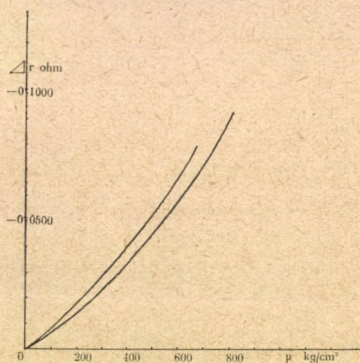
² GRÜNEISEN: l. c. 198 l.

$\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$	észlelt értéke	Al.	Ni.	Cu.	Ag.	Cd.	Pt.	Au.	Pb.
	számított "	4.3	1.6	2.2	3.9	10.0	2.0	3.0	15.0
		4.2	2.0	2.3	3.9	8.5	1.7	3.0	10.5

A jobboldali kifejezés első tagját, mely a nyomásnak az elektronok sebességére való befolyását tartalmazza, nem ismerjük, de mint olyan tagot, mely WIEN becslése szerint is elhanyagolhatóan kicsiny, GRÜNEISEN sem veszi tekintetbe és $\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T$ értékeit a jobboldali kifejezés többi három tagjával számítja ki. Az észlelt értékek a drót méretváltozása miatt $\frac{1}{2} \alpha$ -val korrigálva vannak. Az egyezés *Al, Cu, Ag, Au-nál* annyira jó, hogy az említett elhanyagolás jogosultnak látszik. A táblázatban az összes kísérletileg megvizsgált fémek szerepelnek. [*Pb, Al, WILLIAMS; Pt LAFAY; Cu, Ni, Pb, Ag, Pt, LISELL; Au, Cd BECKMANN.*] A *Pb* és *Cd-nál* tapasztalható nagyobb eltérés GRÜNEISEN szerint azzal függhet össze, hogy ezeknek az olvadáspontjához képest a jég olvadáspontja, melyre vonatkozólag $\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T$ a táblázatban szerepel, nem elég mélyen fekszik. *Ni-nél* az észlelt érték kisebb, mint a számított, ez a LISELL-féle drót csekély tisztátalanságából magyarázható, mert ez a körülmény $\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T$ értékét csökkenti. *Pt-nál* azonban az észlelt érték nagyobb, tehát tisztátalansággal nem magyarázható az eltérés, viszont a *Pt* olvadáspontja a fémek között a legnagyobb, tehát az eltérés az ólomnál fennforgó viszonyokkal sem magyarázható. A *Pt* viselkedése tehát GRÜNEISEN szerint arra mutat, hogy az elmélet még nem teljesen kielégítő. Tekintve a platina $\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T$ értékének az elmélet szempontjából való ezt a fontosságát, kívánatosnak tartottam ennek az értéknek lehető gondos új meghatározását, valamint a bizmut különleges viselkedésére vonatkozó WILLIAMS-féle vizsgálatok megismétlését is. A következőkben ezekről a vizsgálataimról, melyeknek során még néhány más drót fajlagos ellenállásának nyomási coefficiensét is meghatároztam, fogok beszámolni.

2. §. A mérésekhez használt drót vastag falú aczélszögcsiga-

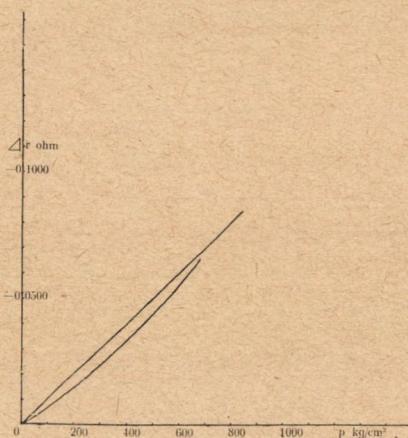
ben, lenolajban volt elhelyezve. Az egyik vége össze volt kötve az aczélszélhenger fedelén keresztül vezetett szigetelt kábellel, a másik vége a henger fenekén lévő kénesóval közlekedett. A nyomás előállítására egy a Sociéte Genevoise által készített nyomó-szivattyú, mérésére pedig a SCHÄFFER és BUDENBERG czég által készített manometer szolgált. A drót ellenállását HARTMANN és BRAUN-féle preciziós, hengeres WHEATSTONE-hiddal mértem, melynek mérődrótját ugyancsak HARTMANN & BRAUN-gyártmányú preciziós ellenállás-szekrényből eléje és utána kapcsolt ellenállásokkal megszázsoroztam. A mérést egyenárammal végeztem



1. ábra.

és nullaeszköz gyanánt egy HARTMANN & BRAUN-féle DEPREEZ-D'ARSONVAL galvanometert használtam, melynek érzékenysége: 1 mm kitérés 1 m skálatávolság és 10^{-9} Amp. mellett. Tekintve, hogy az ellenállás temperatúra-coëfficiense sokszorososan (például platinánál kereken 2000-szer) nagyobb, mint az ellenállás nyomás-coëfficiense, a hőmérsékletváltozások zavaró befolyásának kiküszöböléséről messzemenő módon gondoskodni kell, annál is inkább, mert egy mérési sorozat végrehajtása hosszabb ideig (8 usque 10 óra) tart. E végből az aczélszélhengert, melyben a drótot összenyomtam, vízfürdőbe helyeztem, és ezt körülvettem 10 cm vastag vattafallal; a vattafalat egy erre a célra épített, kettősfalú, kb. 300 l ürtartalmú edény borította, mely ismét 10 cm vastag vízfalat vont az aczélszélhenger köré. Az egész be-

rendezés egy teljesen elsötétített szobában volt elhelyezve; a drót behelyezése után az egész berendezést a mérések megkezdése előtt néhány napig magára hagytam, hogy a hőmérsékleti különbségek kiegyenlítődjenek. A méréseket a fűtéssel járó hőmérsékleti ingadozásokat elkerülendő, nyáron, lehetőleg borús éjszakákön végeztem; ily óvintézkedések mellett elértem, hogy a hőmérséklet a belső vízfürdőben egy egész mérési sorozat alatt (8 usque 10 óra) átlag csak $\frac{1}{100}^{\circ}$ C.-kal változott. A belső vízfürdő hőmérsékletét egy a falakon keresztül dugott BECKMANN-féle hőmérővel mértem közvetlen az aczélszöveg mellett, min.



2. ábra.

denkor gondosan kopogtatva a hőmérőt. Az itt leolvasott hőmérséklet már egy órával az aczélszövegben eszközölt compressio vagy expansio után identifikálható a henger belsejében lévő drót hőmérsékletével, a mit bizonyít az, hogy a drót ellenállása 1 atmoszféra nyomáson ennek a hőmérsékletnek lineáris függvénye volt. Mindazonáltal minden compressio után 2 óráig vártam, hogy az olajnak a compressio folytán előálló melegeése kiegyenlítődjék és csak azután mértem meg a komprimált drót ellenállását a manometer egyidejű leolvasása mellett. Itt akarom megemlíteni, hogy a manometer adatait egy manganindrót segítségével ellenőriztem. A manganindrót ellenállása a nyomással növekedik, még pedig LISELL szerint

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T = +23 \times 10^{-6},$$

WILLIAMS szerint

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T = +22.2 \times 10^{-6}.$$

Mint hogy a manganin ellenállásának a hőmérsékleti együtthatója legalább is százszor kisebb, mint a tiszta fémből készült drótoké, ellenállásának nyomásokoza megváltozása nagyon jól felhasználható a nyomás mérésére. LISELL ajánlotta is nagy nyomások mérésére a manganindrót-manometert. Az általam használt manganindrót nyomási együtthatója

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T = +22.2 \times 10^{-6}\text{-nak}$$

adódott és az ezzel kiszámított nyomás és a manometer adatai közötti különbség $\pm 2\%$ között rendszertelenül ingadozván, a manometernél rugalmas utóhatástól származó, ennél nagyobb rendszeres hiba nem jelentkezett.

3. §. A mérésekhez használt platinadrót 0.2 mm átmérőjű, KAHLBAUMTÓL származó praeparatum volt. Az ellenállása 16.026°C -nál $r=7.9177$ Ohm. A mérések eredményei az I. táblázatban foglaltatnak.

I. táblázat.

Δr Ohm	p kg/cm ²	t_B°	$-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$
0.0043	306	16.026	1.78
0.0086	606	16.026	1.79
0.0125	837	16.026	1.88
			1.82
-0.0045	306	16.265	1.85
-0.0086	601	16.265	1.80
0.0127	843	16.265	1.89
			1.84

Δr értékei a temperaturacoefficiens és a BECKMANN-féle hőmérő adatai alapján korrigálva vannak a harmadik oszlopban jelzett kiindulási ($p=1$ kg/cm²) hőmérsékletre. A második mé-

rési sorozat adatait nem kellett korrigálni, mert az egész mérés ideje alatt a hőmérséklet változatlanul 16.265°C . maradt. Tehát méréseim megerősítik az eddigi eredményeket, mint ebből a kis összeállításból kitűnik:

$$-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$$

LISELL 1902. — — — 1.83

LAFAY 1909. — — — 1.86

POGÁNY 1919. — — — 1.83.

Mint hogy $r = w \frac{l_0}{q_0} e^{\frac{x}{3} p}$, ha w a fajlagos ellenállás, l_0 és q_0 a drót hossza és keresztmetszete $p=0$ nyomáson és x a kompresszibilitás,

$$\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T - \frac{1}{3} x.$$

Tehát a platinára vonatkozólag

$$\frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_T = -1.84 \times 10^{-6} - 0.13 \times 10^{-6} = -1.97 \times 10^{-6},$$

ami körülbelül 15%-kal nagyobb, mint a GRÜNEISEN-féle formula alapján adódó érték.

4. §. Meghatároztam azután egy HARTMANN és BRAUN-féle 0.0206 mm vastag platina-hajszáldrót és egy palladium-hajszáldrót nyomási együtthatóját is, melyeknek anyaga 99%-ban tiszta platina, illetőleg palladium. A tisztátalanság befolyása erősen jelentkezett a hőmérsékleti együttható értékében, mert a platina-hajszáldrót hőmérsékleti együtthatója 0.0021, a palladium-hajszáldróté pedig 0.0028 volt, holott a tiszta Pl , illetve Pl fajlagos ellenállásának hőmérsékleti együtthatója ¹ 0.0037, illetőleg 0.0035 körül van szobahőmérsékleten. A platina-hajszáldróton nyert értékek a 2. táblázatban vannak csoportosítva. A drót ellenállása 23.515°C -on 71.9226 Ohm .

¹ LANDOLT—BÖRNSTEIN—ROTH. Tab., 1912., 1083. l.

II. táblázat.

Δr Ohm	p kg/cm ²	t_B°	$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$	
I. — 0·0125 0·0424 0·0798	150 420 675	23·515 23·515 23·515	} 1·64	
II. — 0·0145 — 0·0398 — 0·0743 — 0·0942	210 455 716 810	23·427 23·427 23·427 23·427		} 1·61
III. — 0·0345 — 0·0840	362 870	24·230 24·230		
IV. — 0·0278 — 0·0659	360 700	24·367 24·367	} 1·30	

Az I. és II., valamint a III. és IV. sorozatok között egy-napi időköz, a II. és III. sorozatok között 8 napi időköz van. Mint az 1. és 2. ábrából látható, az ellenállás nem változik lineárisan a nyomással. Ezért a II. táblázat negyedik oszlopában a fajlagos ellenállás nyomási együtthatójának a középértéke van bejegyezve, a hogy az a sorozatok utolsó észleléseiből adódik. Az ismételt compressiók következtében körülbelül 20%-kal csökkent a nyomási együttható értéke. Ilyen, bár sokkal kisebb mértékű csökkenést tapasztalt Pt -nál az ismételt compressiók hatása alatt LAFAY¹ is.

A palladium-hajszáldróton végzett észlelések eredményei a III. táblázatban vannak egybeállítva; a drót ellenállása 24·840° C-on 86·2314 Ohm.

¹ LAFAY: l. c.

III. táblázat.

Δr Ohm	p kg/cm ²	t_B°	$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$
— 0·0440	290	24·840	1·75
— 0·0902	600	24·840	1·73
— 0·1073	700	24·840	1·98
			1·82
0·0360	250	24·010	1·68
0·0748	516	24·010	1·70
— 0·1050	687	24·010	2·06
— 0·1347	887	24·010	1·73
			1·79
— 0·0300	226	23·498	1·54
— 0·0670	487	23·498	1·65
— 0·1025	687	23·498	2·06
— 0·1310	903	23·498	1·53
— 0·1410	960	23·498	2·04
			1·76

Ezeknek a drótoknak a kompresszibilitása alig különbözik a tiszta *Pt*, illetve *Pd* kompresszibilitásától, mert a kompresszibilitás a keverési arányból kiszámítható és a drótok anyaga 99%-ban *Pt*, illetve *Pd*. A tiszta *Pt*, illetve *Pd* kompresszibilitása alapján korrigálva a fajlagos ellenállás nyomási együtthatójának észlelt értékeit, a 99%-os *Pt*-hajszáldrót fajlagos ellenállásának nyomási együtthatója lesz -1.43×10^{-6} és a *Pd*-hajszáldróté -1.95×10^{-6} , míg a tiszta *Pt* nyomási együtthatója -1.97×10^{-6} , és a tiszta *Pd*-é¹ -2.46×10^{-6} . Az 1% tisztátalanság tehát az ellenállás nyomási együtthatójának értékét éppen oly lényegesen leszállította, mint a hőmérsékleti együtthatóét.

Épp úgy mint a kompresszibilitás, a hőkitérjedési együttható is kiszámítható ötvözeteknél a keverési arányból, úgy hogy a hajszáldrótok hőkitérjedési együtthatója is alig különbözik a tiszta *Pt*, illetve *Pd*-étől. Alapul véve ez utóbbiakat² és a hajszáldrótok ellenállásának megmért hőmérsékleti együtthatóit, a

¹ B. BECKMANN: Ann. d. Phys. 1915. Bd. 46. 498 l.

² V. ö. E. GRÜNEISEN: l. c. 199 l.

GRÜNEISEN-féle formula alapján kiszámíthatjuk a hajszáldrótok fajlagos ellenállásának nyomási együtthatóit. A számított értékek a következő kis összeállításban szerepelnek a tiszta fémekre vonatkozó értékekkel együtt.

	$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$	
	számított	észlelt
<i>Pt</i> -----	1.70	1.97
<i>Pd</i> -----	2.09 ¹	2.46
99 % <i>Pt</i> -----	1.21	1.43
99 % <i>Pd</i> -----	1.83	1.95

Valamint a tiszta fémeknél, úgy a hajszáldrótoknál is a számított értékek alacsonyabbak, mint az észleltek. A fajlagos ellenállás nyomási együtthatójának a tisztátalanság okozta csökkenését a GRÜNEISEN-formula *Pd*-nál csak qualitative, *Pt*-nál pedig quantitative is megadja.

5. §. A következő drót, melyet ellenállásának nyomási együtthatója szempontjából megvizsgáltam, nikkeltől készült. Ebből nagyobb mennyiségem volt, úgy hogy chemiai analysisre is jutott belőle. Az analysis, melyet dr. KÖSZEGI DÉNES, a kolozsvári magyar kir. Ferencz-József Tudományegyetem vegytani intézetének assistense volt szives elvégezni, a következő eredménnyel járt:

<i>Ni</i> -----	99.01 %
<i>Co</i> -----	0.54 "
<i>Cu</i> -----	0.23 "
<i>Fe</i> -----	0.09 "
<i>Si</i> -----	0.05 "
	99.92 %

A méréshez használt drót ellenállása 16.970° C-on 15.2562 Ohmnak és az ellenállás hőmérsékleti együtthatója 0.00493-nak adódott. A nyomási együttható meghatározása a következő mérések alapján történt:

¹ B. BECKMANN, l. c.

IV. táblázat.

Δr Ohm	p kg/cm ²	t_B°	$-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^8$
0·0070	296	16·905	1·55
— 0·0168	686	16·905	1·64
— 0·0196	796	16·905	1·66
			1·62
— 0·0060	250	16·706	1·58
— 0·0123	486	16·706	1·75
— 0·0167	673	16·706	1·54
			1·62

A nikkellal összenyomhatósága, $\alpha = 0.56 \times 10^{-6}$; ennek harmadrészevel megjavítva a nyomási együttható észlelt értékét, a nikkeldrót fajlagos ellenállásának nyomási együtthatója lesz:

$$-1.81 \times 10^{-6}.$$

LISELL is meghatározta a nikkellal fajlagos ellenállásának nyomási együtthatóját, mely szerinte -1.60×10^{-6} . A GRÜNEISEN-féle formula alapján adódó érték -2.00×10^{-6} . GRÜNEISEN valószínűnek tartja,¹ hogy a LISELL-féle drót anyaga nem volt tiszta és ezért adódott az észlelt érték annyival kisebbnek, mint a számított. Ezt a feltevést a jelen vizsgálatok megerősítik, a mennyiben az általam észlelt körülbelül 1%-os fertőzésű drót nyomási együtthatója, -1.81×10^{-6} már nagyobb, mint a LISELL-féle dróté és eltérése a számított értéktől akkora, a mekkorát az 1%-os fertőzés teljesen megmagyaráz.²

6. §. Végül még egy bismut-drót nyomási együtthatóját is megmértem. A 0.1 mm átmérőjű drótot a HARTMANN & BRAUN cég préselte elektrolytikus bismutból. Ellenállása 19°C-on 168.8610 Ohm, a fajlagos ellenállásának hőmérsékleti együtthatója 0.0039. Az észlelések eredményei a következők:

¹ GRÜNEISEN: l. c. 197 l.

² V. ö. a platina-hajszáldrótokon nyert eredményekkel.

V. táblázat.

Δr Ohm	p kg cm ²	l_B^0	$-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_T \cdot 10^6$
0·7159	294	19·010	14·3
1·5337	583	19·010	16·7
1·8983	727	19·010	14·9
			15·3
0·7676	310	20·020	14·5
1·5836	643	20·020	14·4
2·0723	832	20·020	15·2
			14·7

A bismutdrót fajlagos ellenállásának nyomási együtthatója tehát $15\cdot0 \times 10^{-6}$. Méréseim tehát megerősítik E. WILLIAMS-nak azt az eredményét, hogy a bismut ellenállása a nyomással növekedik, még pedig kivételes nagy mértékben. WILLIAMS-nak egy HARTMANN & BRAUN-féle bismutspirálison, a milyen mágneses terek erősségének mérésére szolgál, a fajlagos ellenállás nyomási együtthatójának értékéül $19\cdot6 \times 10^{-6}$ -t nyert.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1919. évi dec. hó 9.-én tartott üléséből.)

FÜGGVÉNYEK EGYMÁSTÓL VALÓ LINEARIS FÜGGŐSÉGÉNEK ÚJ KRITERIUMA ÉS ENNEK KAPCSOLATA A RÉGIEKKEL.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

Bevezetés.

Az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ valós függvények az (a, b) számközön belül egymástól *linearisan függetlenek*, ha található n számú, egyszerre el nem tűnő c_1, c_2, \dots, c_n számérték úgy, hogy a

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad (1)$$

egyenlőség az (a, b) számköz minden x értékére fennáll.

Ha az (1) egyenlőség az (a, b) számköz minden helyére csak akkor áll fenn, midőn

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \dots, \quad c_n = 0,$$

akkor az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények az (a, b) számközön belül *linearisan függetlenek*.

Melyek az adott függvények egymástól való linearis függetlenségének szükséges és elégséges feltételei?

E fontos kérdésre eddig csak bizonyos megszorítások mellett sikerült kielégítő választ találni.

Ha feltesszük, hogy a megadott függvényeknek kettenkénti szorzatai az (a, b) számközre nézve mindannyian integrálhatók, akkor ismeretes GRAM kriteriuma, mely szerint az adott függvények akkor és csak akkor linearisan függetlenek, ha a

$$G = \begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x) f_1(x) dx & & \\ & \ddots & \\ \int_a^b f_i(x) f_k(x) dx & & \\ & & \ddots & \\ & & & \int_a^b f_n(x) f_n(x) dx \end{vmatrix} \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

GRAM-féle determináns zérussal egyenlő; linearisan függet-

lenek pedig akkor és csak akkor, midőn a GRAM-féle determinans positiv előjelű értéket vesz fel.

Még ismeretesebb, de sokkal szűkebb körben alkalmazható, az a kritérium, a mely a WRONSKI-féle determinanssal kapcsolatos. Ha az $f_i(x)$ függvényekről feltesszük, hogy első $n-1$ differentialhányadosaik az (a, b) számköz minden helyén előállíthatók, akkor a

$$W = \begin{vmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} (i=1, 2, \dots, n) \\ (k=0, 1, \dots, n-1) \end{matrix}, \quad (f_i^{(0)}(x) = f_i(x))$$

determinans, az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvényrendszer WRONSKI-determinansa képezhető.

Sokáig azt hitték, hogy e WRONSKI-determinansnak az (a, b) számköz minden helyén való eltűnése szükséges és egyszersmind elegendő is arra, hogy az $f_i(x)$ függvények az (a, b) számközre nézve egymástól linearisan függők legyenek. Csak a PEANO-tól szerkesztett példa, a melyről később még szó lesz, semmisítette meg e hitet és mint bizonyosságot csak annyit hagyott meg belőle, hogy a WRONSKI-determinans eltűnése, bár a linearis függésnek szükséges feltétele, nem analytikus függvények esetére magában véve még nem elegendő arra.

A fősoroltakhoz csatolom, mint új, szinte magától értetődő kritériumot és mint olyant, a mely a legkevesebb megszorítással alkalmazható, a következőt:

Arra, hogy az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények az (a, b) számközre nézve egymástól linearisan függők legyenek, szükséges és elegendő feltétel, hogy a

$$R = R \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_i(x_k) \\ \vdots \\ f_n(x_k) \end{vmatrix} \begin{matrix} (i=1, 2, \dots, n) \\ (k=1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

determinans zérussal legyen egyenlő, valahányszor

$$a \leq x_k \leq b; \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

1. §. Az új kritérium bebizonyítása.

Ha az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények egymástól linearisan függők, akkor van olyan n számú egyszerre el nem tűnő c_1, c_2, \dots, c_n számérték, hogy a

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

egyenlőség az (a, b) számköz minden x helyére fennáll; de akkor a

$$c_1 f_1(x_k) + c_2 f_2(x_k) + \dots + c_n f_n(x_k) = 0$$

$(a \leq x_k < b; k=1, 2, \dots, n)$

n egyenletből álló és a c_1, c_2, \dots, c_n ismeretlenekre nézve homogen lineár egyenletrendszer determinansa, az R determinans, zérussal egyenlő és így R eltűnése a lineáris függés szükséges feltétele.

Ha az R determinans minden az

$$a \leq x_k \leq b \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

egyenlőtlenségeknek megfelelő (x_1, x_2, \dots, x_n) értékrendszerre nézve zérussal egyenlő, akkor két eset lehetséges: R vagy zérusodrangú, vagy zérusodnál magasabb rangú.

Ha R zérusodrangú, akkor az összes $f_i(x)$ függvények az (a, b) számköz minden helyén zérussal egyenlők és így egymástól lineárisan függők, mert a

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

egyenlőség bármely c_1, c_2, \dots, c_n együtthatórendszerre nézve fennáll.

Ha R p -edrangú és $p > 0$, legyen $R \begin{pmatrix} f_{i_1} & f_{i_2} & \dots & f_{i_p} \\ x_{k_1} & x_{k_2} & \dots & x_{k_p} \end{pmatrix}$ R -nek egyik p -edfokú el nem tűnő al-determinansa, a mely tehát nem minden olyan $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p})$ értékrendszerre nézve zérus, a melynek coordinatái az (a, b) számközhez tartoznak. Van tehát olyan $\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_p}$ értékrendszer, a melyre nézve $R \begin{pmatrix} f_{i_1} & f_{i_2} & \dots & f_{i_p} \\ \xi_{k_1} & \xi_{k_2} & \dots & \xi_{k_p} \end{pmatrix}$ a zérustól különböző. Most már abból a körülményből, hogy az $R \begin{pmatrix} f_{i_1} & f_{i_2} & \dots & f_{i_p} \\ x_{k_1} & x_{k_2} & \dots & x_{k_p} \end{pmatrix}$ p -edfokú determinansnak minden $(p+1)$ -edfokú superdeterminansa zérussal egyenlő, tüstént következik az $f_i(x)$ függvényeknek egymástól való lineáris függése.

Tehát R eltűnése minden esetben a függvények egymástól való lineáris függésének elegendő feltétele.

Szóról szóra ugyanígy mutatható ki e tétel helyessége complex függvények esetére, a midőn az (a, b) számköz helyébe a complex számoknak folytonos és összefüggő tartománya lép.

2. §. A Gram-féle determinans mint n -szeres integrál.

Közvetlenül belátható, hogy a GRAM-féle determinans a következő egyenlőségekkel kifejezett átalakítást engedi:

$$\begin{aligned}
 G &= \sum_{(i)} \left\{ (-1)^J \left(\int_a^b f_1(x) f_{i_1}(x) dx \right) \left(\int_a^b f_2(x) f_{i_2}(x) dx \right) \cdots \right. \\
 &\quad \left. \cdots \left(\int_a^b f_n(x) f_{i_p}(x) dx \right) \right\} = \\
 &= \sum_{(i)} \left\{ (-1)^J \left(\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f_1(x_1) f_{i_1}(x_1) f_2(x_2) f_{i_2}(x_2) \cdots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdots f_n(x_n) f_{i_n}(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \right) \right\} = \\
 &= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \left\{ f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \sum_{(i)} (-1)^J f_{i_1}(x_1) f_{i_2}(x_2) \cdots \right. \\
 &\quad \left. \cdots f_{i_p}(x_p) \right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\
 &= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) R dx_1 dx_2 \cdots dx_n,
 \end{aligned}$$

a hol a $\sum_{(i)}$ -vel jelölt összegek tagjai úgy adódnak, hogy az (i_1, i_2, \dots, i_n) index-csoport helyébe az $1, 2, \dots, n$ elemek összes permutatióit tesszük, J pedig az i_1, i_2, \dots, i_n permutatióban foglalt inverziók számát jelenti.

A GRAM-féle determinans nem változik, ha benne az f_i és f függvényeket egymással felcseréljük, mert ezáltal a G determinansnak i -dik és k -dik sorai és egyidőben i -dik és k -dik oszlopai is helyet cserélnek. De akkor a G determinans változatlanul marad az f_1, f_2, \dots, f_n függvények bármely permutálásakor, mert minden permutálás transpositiók egymásutánjára vezethető vissza.

Az R determinans az $S = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_{i_1} & f_{i_2} & \cdots & f_{i_n} \end{pmatrix}$ permutatio alkalmazásakor $(-1)^J R$ -be megy át, ha J ismét az i_1, i_2, \dots, i_n permutatióban foglalt inverziók számát jelenti.

Ha most már a

$$G = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) R dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

egyenlőségre az összes $n!$ számú S permutatiót alkalmazzuk és az ekként keletkező $n!$ számú egyenlőséget összeadjuk, az

$$n! G = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b R \left\{ \sum_{(i)} (-1)^J f_{i_1}(x_1) f_{i_2}(x_2) \dots f_{i_n}(x_n) \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

egyenlőség adódik, a melyből végre, minthogy

$$\sum_{(i)} (-1)^J f_{i_1}(x_1) f_{i_2}(x_2) \dots f_{i_n}(x_n) = R,$$

a

$$G = \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b R^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

eredmény adódik, mely szemmel láthatóan mutatja, hogy G nem negatív szám és zérussal akkor és csak akkor egyenlő, midőn R az (a, b) számközhez tartozó koordinátákkal bíró minden (x_1, x_2, \dots, x_n) értékrendszerre nézve zérussal egyenlő, azaz midőn az $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ függvények egymástól lineárisan függenek. Ha az $f_i(x)$ függvények pedig lineárisan függetlenek, akkor G mindig pozitív szám.

3. §. Peano példája.

Legyen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2, & f_2(x) &= 0, & \text{ha } x &\geq 0 \\ f_1(x) &= 0 & f_2(x) &= x^2, & \text{ha } x &\leq 0, \end{aligned}$$

akkor mindenekelőtt megállapítható, hogy $f_1(x)$ és $f_2(x)$ mindenütt differenciálható függvények és így Wronski-determinansuk minden x mellett képezhető. Nem negatív x mellett

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

nem pozitív x mellett

$$W = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát W mindenütt zérussal egyenlő. Mindazonáltal az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ lineárisan függetlenek minden (a, b) számközre nézve, a melynek határai ellenkező előjelűek, mert ha

$$a < 0 < b,$$

akkor a

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

egyenlőségről könnyen kimutatható, hogy fennállása a

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0$$

egyenlőségeket vonja maga után. Ugyanis

$$c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot a^2 = 0$$

egyenlőségéből

$$c_2 = 0$$

következik; míg a

$$c_1 f_1(b) + c_2 f_2(b) = c_1 b^2 + c_2 \cdot 0 = 0$$

egyenlőségéből

$$c_1 = 0$$

következik. E példa tehát világosan mutatja, hogy a Wronski-determinans eltűnése nem elegendő arra, hogy valamely függvényrendszer függvényei egymástól lineárisan függők legyenek.

A GRAM-determinans

$$G = \begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)^2 dx & \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \\ \int_a^b f_2(x) f_1(x) dx & \int_a^b f_2(x)^2 dx \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{b^5}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{a^5}{5} \end{vmatrix} = -\frac{a^5 b^5}{25} > 0$$

helyesen indikálja a függvények lineáris független voltát.

Ugyanezt teszi a R -determinans is. Ugyanis

$$R = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{vmatrix}.$$

Ha ebben x_1 -et a -val, x_2 -t b -vel egyenlőnek választjuk, akkor

$$R = \begin{vmatrix} 0 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^2b^2 \neq 0,$$

tehát ismét a függvény lineáris függetlenségére következtethetünk.

4. §. A Wronski-kriterium módosítása.

Az R -determinans könnyű átalakítása és az ezt követő határátmenet mutatja, hogy valahányszor R azonosan zérussal egyenlő, a WRONSKI-determinans is eltűnik; a WRONSKI-determinans eltűnése tehát az n függvény egymástól való lineáris függésének szükséges feltétele. Hogy erre magában véve még nem elegendő, azt már PEARNO példája mutatta.

Az

$$\left| f_i^{(k)}(x_k) \right|_{\substack{i=1, 2, \dots, n \\ k=0, 1, \dots, n-1}} = \overline{W}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

determinanst a függvényrendszer általánosított WRONSKI-determinansának nevezvén, az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények az (a, b) számközre nézve lineárisan függésének szükséges és elegendő feltétele, hogy az általánosított WRONSKI-determinansul zérussal legyen egyenlő minden (x_1, x_2, \dots, x_n) értékrendszerre nézve, a melynek koordinatái az (a, b) számközkhöz tartozó számok.

Ha

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

az (a, b) számköz minden helyén, a nélkül, hogy az összes c_i együtthatók zérussal egyenlők, akkor a

$$c_1 f_1^{(i)}(x^i) + c_2 f_2^{(i)}(x_k) + \dots + c_n f_n^{(i)}(x_n) = 0 \\ \left(\substack{i=1, 2, \dots, n \\ k=0, 1, \dots, n-1} \right)$$

homogen lineáris egyenletrendszer determinansa, tehát a \overline{W} -determinans zérussal egyenlő, a mi a kimondott feltétel szükséges voltát mutatja.

Ha megfordítva

$$\overline{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

bármilyen az

$$a \leq x_1 \leq b, a \leq x_2 \leq b, \dots, a \leq x_n \leq b$$

egyenlőtlenségeket kielégítő értékrendszerre nézve, akkor SCHWARZ-nak egy ismeretes tételéből (L. Gesammelte Werke II. kötet 300. l.) tüstént következik, hogy az R determinans ugyanezekre az értékrendszerekre nézve szintén zérussal egyenlő, tehát az 1. §. eredményénél fogva a függvényrendszer függvényei egymástól lineárisan függők és így *a fent kimondott feltétel elegendő volta is ki van mutatva.*

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 április 19.-én tartott üléséből.)

A BAKTERIUMSPÓRÁK CSÍRÁZÁSÁRÓL.

PREISZ HUGÓ 1. tagtól.

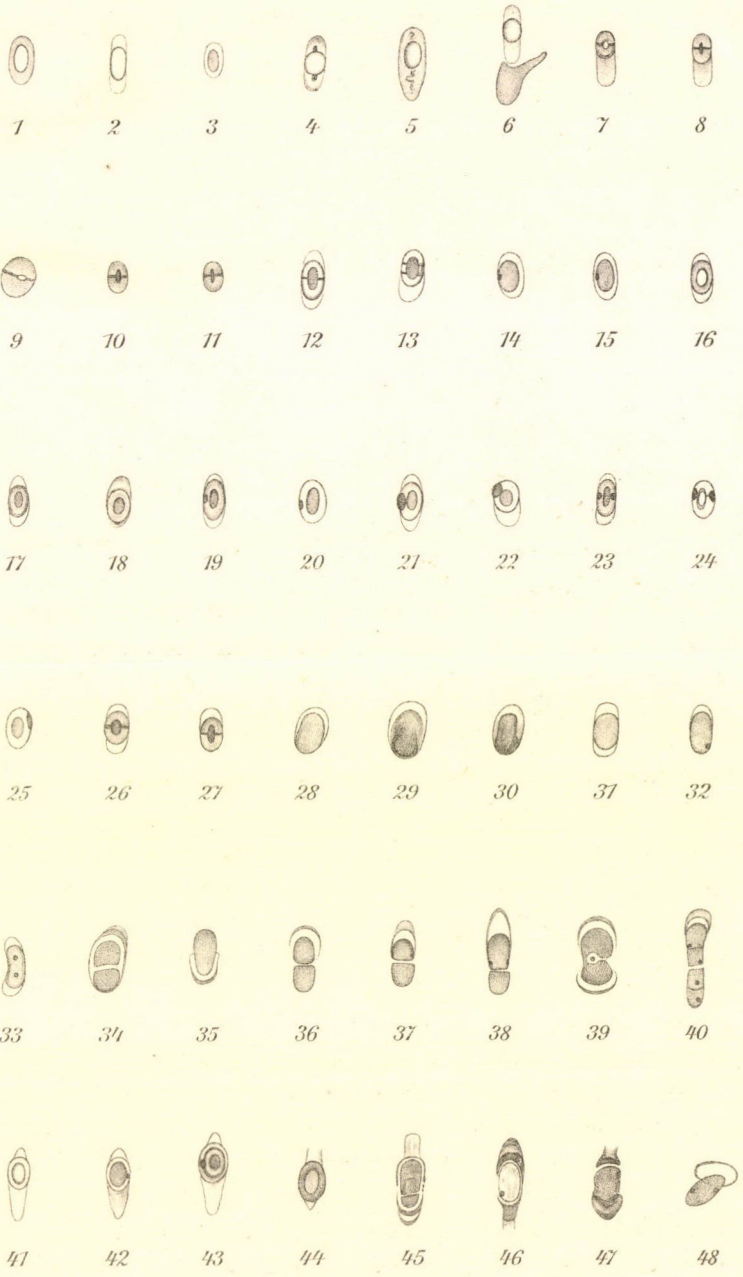
Egy táblán 48 rajzzal.

A mit eddig a bakteriumspórák kicsírázásáról tudunk, tulajdonképen igen kevésnek mondható. Ismeretes, hogy a spórák, ha keletkezésük helyéről kicsírázásukra alkalmas viszonyok közé kerülnek, rövid időn belül eltűnnek s helyükön fiatal sejtek jelennek meg, melyek a bakteriumok úgynevezett vegetatív (oidium) alakjaira már egészen hasonlítanak s gyakran testükön viselik még az anyaspórának hüvelyét éppúgy, mint a hogy a tojásból kibújt csibe a tojás héját még a hátán viselni szokta. Magam is láttam s rajzban közöltem hasonló képeket.

Pedig több mint valószínű, hogy a spórában ama pillanattól kezdve, a melyben az addig úgyszólván szunnyadó képlet ébredezni kezd, addig az időpontig, a mikor a fiatal pálczika a spóra hüvelyéből kibúvik, bonyolult folyamatok játszódnak le, a melyek figyelmünket csakis a tárgy kicsinysege és a mai mikroszkopok elemző képességének határos volta miatt kerülhetik el könnyen.

A spóracsírázás ilyen subtilisabb folyamataira figyelmemet különös képek irányították, a melyeket már évek óta a legkülönbözőbb bakteriumok spóráin észleltem s a melyek véleményem szerint a csírázással összefüggésben vannak.

Leírandó vizsgálataimat majdnem kizárólag vitális festéssel végeztem, erősen hígított fuchsin-oldatokat használva, melyekből tárgylemezre néhány platinakacsnyi mennyiséget vittem s ezzel összekevertem a vizsgálati anyagnak tühegynyi mennyiségét,



majd az egészet fedőlemezzel lefedtem s ezt itatós papírral lepréseltem.

Festékkoldatul vagy a ZIEHL-NEELSEN oldat (100 kem. 5%-os karbolsav + 10 kem. telített alkoholos fuchsinoldat), vagy vizes alkoholos fuchsinoldat (2 kem. tömény alkoholos fuchsinoldat + 10 kem. tömény alkohol + 10 kem. párolt víz) szolgált. A higított festékkoldatok ezekből az oldatokból készültek közvetlenül használat előtt olyképen, hogy egy-egy kem. destillált vízhez az említett festékkoldatokból szükség szerint 1—5 cseppet adtam hozzá; a különböző vizsgálati anyagok festődő képessége ugyanis igen eltérő lehet, a bakterium faja és a tenyészet kora szerint.

Ily hig festékkoldatokban még a vegetatív bacillusalakok (oidiumok) sem pusztulnak el föltétlenül rögtön és teljes számmal, a miről néha oly bacillusok győztek meg, a melyek ily vitális festés ellenére nemcsak hosszanti tengelyük irányában, hanem e tengely körül is forogva igen élénken mozogtak, mindenesetre csak bizonyos ideig.

Spórák idősebb tenyészetekből véve, a hol keletkeztek és rendszerint ki nem csíráznak, legtöbbször egyszerű képletekként mutatkoznak, a melyek az erősen fénytörő spóratestből (fénylő testből) és az ezt körülvevő, kifelé élesen elhatárolt tokból (héjből) állanak. Ez a spórahéj gömbös spóratesteknél¹ a gömböcske egyik kerületéhez, hosszúkas alakuknál pedig a hosszanti felületekhez simul többé-kevésbé szorosan, míg a póluson meniscusokat alkot, vagy pedig hosszában elnyúlik, mi-

¹ *Spórahéjnek* nevezem azt a többé-kevésbé vastag hártját, vagyis tokot, a mely a spóra csírázásában active nem vesz részt és a melyet a spórából lett új csíra magáról levet. *Fénylő testnek* nevezem a spórahéjon belül foglalt gömbös, tojásdad vagy olykor pálczika alakú testecskét, a mely erős fénytörése és legtöbbször zöldes csillogása révén a bakteriumspórákra annyira jellemző. Sokszor az érett és nyugvó spórán ezen a két alak-elemen kívül egyebet nem is lehet megkülönböztetni. A csírázó spóra szerkezete azonban megváltozik. *Spóratest* alatt értem mindazt, a mi a spórát alkotja, leszámítva a spórahéjat, tehát mindent, a mi a spórahéjon belül foglaltatik, vagy más szóval a fénylő testet és mindent, a mi a fénylő testen kívül akár láthatólag, akár föltevés szerint a spórahéj tartalmát teszi. Alaktani szempontból a nyugvó spórára vonatkozólag a *fénylőtest* és *spóratest* elnevezés fedi egymást.

által az egész spóra tekintélyes hosszúságú (1 : 4) pálczika alakját öltheti magára (l. az 1—4. ábrát). Bizonyára a héjnak a spóratesthez való szoros hozzáalpulása és elvékonyulása a magyarázata annak, hogy a spóratest hosszanti oldalán héj jelenléte olykor egyáltalán nem észlelhető, a miért az egész spóra ezen a helyen a legkeskenyebbnek látszik.

Ilyen hosszant elnyúlt spórákról, melyek külső alak és nagyság tekintetében az egész spórás anyasejtre (sporangiumra) erősen hasonlíthatnak, gyakran nehéznek látszott megállapítanom, vajjon az egész képlet már csak a szabad spórának, avagy talán inkább még az egész sporangiumnak tekintendő-e, amelyben a fénylő test, illetőleg spóratest ugyan már készen van, de saját héjjal még nem bír.

Ez az utóbbi lehetőség annál kevésbé látszott elutasíthatónak, mivel hosszú ideig nem sikerült kétségtelen anyasejtek hártáján belül a spóratest körül határozottan körvonalozott spórahéjat látnom. Később azonban oly képeket láttam, melyek arra utaltak, hogy a spórahéj mégis csak még az anyasejt belsejében és ügylátszik bonyolultabb módon fejlődik; továbbá sikerült egy bacillusfajon, a hol a szabad spórák gyakran a vegetatív sejtek (oidiumok) alakját és nagyságát mutatták, megfigyelnem, amint héjas spórák — úgy, a hogy a készítményben szerte már szabadon is látszottak — az anyasejt hártájából éppen kibuvófélben voltak egészen úgy, mint ahogy csirázó spórából lett fiatal sejt a spórahéjból kibújni szokott (l. a 6. ábrát). Körülöttük számos üres sejhártya volt látható, melyeket a kész spórák úgyszólván levetettek.

A kérdés ugyanis annyiban fontos, mivel csak ennek tisztázása után dönthető el, vajjon bizonyos strukturák vagy alak-elemek, a melyek alkalmilag a fénylő spóratest és a spóra legkülsőbb határvonala között található, valóban a spórához tartoznak-e, vagy pedig az anyasejt maradékának tekintendők-e.

Az érett spórák telát rendszerint már kiváltak az anyasejt-ből, és a mi rajtuk a spóratesten kívül látható, a spóra héjának felel meg annak ellenére, hogy ezzel együtt az egész képlet gyakran tekintélyes hosszúságú pálczikát alkot.

Szorosabb összefüggés az anyasejt és spóra között csak bizo-

nyos fajoknál látszik fennállani; ezeknél már csak a spórából kibuvó fiatal csira veti le a spórahéjjal együtt az anyasejt maradványait is (l. a 42—47. ábrát).

Az érett és nyugvó spórák typusa az erősen fénytörő homogen testből és a többnyire szintén homogen anyagú spórahéjből áll, a mely utóbbi vitális festéskor gyenge festékoldatokban szintén festetlen marad; legfőlebb olykor úgy a fénylő testnek, mind a spórahéjnek legkülsőbb körvonalai vannak gyöngén megfestve. Sötét látóterben való vizsgálatkor, paraboloid condensor fölött, szintén csak a hajszál finomságú spórahéj külső szegélye és a fénylő test látszik (l. a 3. ábrát).

Kivételesen azonban a vitalis festéskor a fénytörő test pólusa és a héj külső szegélye között mégis található festett alak-
elemek; ezek vagy kerekded szemcsék, egyenkint a fénytörő testnek vagy csak egyik, vagy mindkét pólusán kívül a spórahéj meniscusában elhelyezve (l. a 4. ábrát), vagy szabálytalan, rögös képletek (l. az 5. ábrát). Ez utóbbiak valószínűleg maradványai annak a festődő protoplasmás anyagnak, a mely a spórahéj kialakulásában az anyasejten belül részt vett. Az előbbieket alak és nagyság tekintetében a spóramagra hasonlítanak, bár a spóramagot, a mint a következőkben le fogom írni, majdnem mindig a fénytörő test hosszanti oldalához és nem a pólushoz hozzáfekve találtam.

Az inént leírt típusos spórák mellett azonban számos spóráképző bakterium minden tenyészetében, a melyet ebből a szempontból megvizsgáltam, még a következő különös alkotású spórákat is láttam. A rendszerint jól felismerhető spórahéj belsejében a fénylő spóratest helyén egy ovális, vagy rövid pálczika alakú, többé-kevésbé erősen festődött, nem erősen fénytörő, de sötét körvonallú képlet fekszik, mely haránt irányú vonal (fal) által kétfelé van osztva. E választófal közepén a spóra hossz-tengelyében foglal helyet egy különböző nagyságú, alakú és festődésű központi testecske. Ez utóbbi gyakran még erősen fénytörő és — legalább a mikroskop bizonyos beállításakor — festetlen s határozottan megfogyatkozott fénylő testnek benyomását teszi (l. a 7. és 9. ábrát); máskor pedig ovális, pont-, vagy pálczikaalakú és erősen festődött. A midőn ez a centrális

testecske hosszúkás alakú, az esetben a leírt harántvonallal a spóra közepén kis keresztet alkot (l. a 8., 10. és 11. ábrát).

A mint már említettem, ilyen spórákat az összes, ilyen szempontból megvizsgált spóráképző bakteriumoknál találtam; előfordulásuk azonban legtöbbször a tenyészfelületnek csak bizonyos helyeire szorítkozik és gyakran különböző helyeket kell átvizsgáljunk, hogy rájuk akadjunk. Ugyancsak gyakran előfordul az is, hogy ugyanegy mikroskopi készítmény egyes látótereiben majdnem csupa ilyen kereszttes spóra mutatkozik, míg másutt teljesen hiányoznak. Ritkán láttam egyes spórákban két harántvonalat is, mely aztán a központi testecskével egy kis kettős keresztet alkotott (l. a 13. ábrát).

Legtermészetesebbnek véltem, hogy ezek a különös képletek csirázó spórák és hogy a bennök látott választófal a fiatal csíra kettéoszlását jelenti.

Ezekből kiindulva, feladatommá tettem kikutatni, hogy ezek az alakok valójában miképpen magyarázandók és vajjon a spóra-csirázás normális folyamatához tartoznak-e vagy sem.

Ha idősebb kulturák szunnyadó spóráit oly anyagra vagy anyagba tesszük, a mely a spórák kicsirázását elősegíti (erre rendszeren peptonos agart, ritkábban vékony rétegben peptonos húslévest használtam) és óráról órára kivett próbákat vizsgálunk belőlök, akkor a feléledés (csirázás) első jeleként a sötétre festődött mag jelenik meg a fénylő spóratest *aequatorialis* (keskeny) oldalán (l. a 14. és 15. ábrát), tehát azon a helyen, a hol a nyugvó spóra fénylő teste és a héj körvonala között csak igen keskeny térköz létezik, vagyis a hol a héj a legvékonyabb és a fénylő testhez szorosan hozzásimulni szokott; kétségtelenül ez az utóbbi körülmény az oka annak, hogy az említett kerek vagy hosszúkás mag a spóra körvonalából olykor kidudorodik, mint ha az utóbbinak külső felületén tapadna (l. a 21. és 25. ábrát).

Együttal a fénylő test a nélkül, hogy egyelőre erős fénytűrő-képességét elveszítené, kezd gyengén festődni. Ezt követik további elváltozások, mialatt a spóratest folyton duzzad. A láthatólag nem változott spórahéjón belül a spóratesten a következő differenciálódások történtek: körvonalai többé-kevésbé megvastagodtak és erősen festődtek, a közepében pedig ott fekszik a rendes

nagyságú vagy megkisebbedett, mintegy összeolvadt fénylő test normális tulajdonságaival (l. a 16. ábrát). Ekkor tehát a fénylő test festődött udvartól (areola) van körülvéve, melynek szélessége $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{3}$ -át teszi ki a spóratest egész átmérőjének.

A csírázás egy későbbi stádiumának kell tekintenem azokat az alakokat, a melyeknél a fénylő test helyett erősen festődött ovális, vagy pálczikaalakú központi testecske van, mely nagyságra körülbelül a nyugvó spóra fénylőtestének felel meg, olykor azonban nála nagyobb vagy kisebb is lehet (l. a 17—22. ábrát). Egyben megduzzadt az előbb említett mag is esetleg akkorára, hogy az egész spóratest harántátmérőjének egyharmadrészét éri el és néha még most is a spóra legkülsőbb æquatorialis szélén látszik tapadni; gyakran látott képek azonban kétségtelenül mutatják, hogy szorosan összefügg a spóratest sötétre festődött körvonalaival s onnan belenyúlik a spóra belsejébe, még a központi testcskét is elérve, ha rendkívüli nagyságú (l. a 21. és 22. ábrát).

Néha a központi testecske mindkét oldalán található egyegy sötét magocska (l. a 23. és 24. ábrát); olykor pedig az areola haránt irányban, a központi testecske mindkét oldalán levő sötétre festődött vonalka által ketté van osztva, miáltal a már előbb leírt kis keresztcskékhöz egészen hasonló spóráképek keletkeznek (l. a 26. és 27. ábrát). Mindez alakulások közben a spórahéj változatlan, vagyis passiv viselkedik, a mennyiben itt is éppúgy, mint nyugvó spórákon, legtöbbször a polusokon ülő meniscusok alakjában mutatkozik, a spóra hosszanti oldalain azonban gyakran még kevésbé látszik, mint nyugvó spórákon, valószínűleg ama feszülés folytán, a melynek a spóratest duzzadása és megnyúlása folytán főleg e haránt irányban ki van téve. Továbbá a festéket úgy látszik mégis csak jobban veszi fel, mint a nyugvó spóra héja.

A fejlődés további folyamata alatt a spórának imént vázolt szerkezete kezd lassan eltűnedezni; a központi testecske, melynek körvonalai gyakran élesek, máskor ellenben elmosódottak, már nem látszik és az egész spóratest egyenletes és erősen chromophil protoplasmává változott át. Most a mag sem látszik többé. Ebben a stádiumban az egész spóra alakja vaskos ovoidra

vagy rövid legömbölyített végű pálczikára hasonlít (l. a 28.—30. ábrát).

A csíra most még körül van véve a gyengén, vagy alig festődött spórahéjjal; nem ritkán azonban oly képleteket is szemléltem, a hol a héj csak az egyik sarkon és a hosszanti oldalon volt látható, míg a másik póluson belőle semmi sem volt észlelhető; gyakran a csíra e sark felé erősebben is festődött (l. a 29. és 30. ábrát). Ez bizonyára az a pólus, a melyen a csíra, akár az erősebb feszülés folytán, akár valamilyen vegyi folyamat közbejöttével a spórahéjat át fogja törni.

Alig kétséges, hogy ebben a fázisban, vagyis a mag és a központi testecske eltünése után, a spóratestben fontos folyamatok játszódnak le, a melyeknek megfigyelése azonban mai eszközeinkkel nem lehetséges.

Ezen túl a csíra már a kész bakteriumsejt alakjában jelenik meg úgy, a hogy a spórahéjból ki szokott bújni és semmiben sem különbözik az olyan sejtektől, melyek egyszerű kettéoszlás által keletkeztek, vagyis gyengébben festődött s egy vagy néha két magot mutat (l. a 32. és 33. ábrát).

A csíra nem éppen ritkán még a spórahéjon belül oszlik (l. a 34. ábrát), és elég gyakran már ikreket látunk a spórahéjból kibújni (l. a 36.—38. ábrát), vagy pedig a csíra kibúvása közben éppen oszlófélben van (l. a 39. ábrát). A megnyílt héj rendszeren a fiatal pálczikának egyik pólusán ül (l. a 35.—38. és a 48. ábrát), vagy pedig ketté van szakadva s mindegyik fele a fiatal bacillus két pólusát takarja sapkaként (l. a 39. ábrát).

Föl kell tennem, hogy a spóracsírázásnak vázolt menete az összes sporogen bakteriumokra érvényes, mert számos fajon sokszor volt alkalmam azt megfigyelni. Bár némely fajon különleges sajátosságaik folytán bizonyos tekintetben némileg eltérő képek mutatkoznak, lényeges különbségeket nem tudtam észlelni. Így például egy a serczegő üszök bacillusának típusához tartozó bakteriumnál a kép a szokásostól annyiban tért el, hogy itt az érett és csírázó spórák még az anyasejten belül feküdtek (l. a 41.—44. ábrát), bizonyára az utóbbinak a spórával való szorosabb összefüggése miatt. Ennélfogva itt a fiatal sejt a spóra héjával egyidejűleg az anyasejt maradványait is lelöki, és pedig

rendszerint két részben; az egyik polusán ott ül a héj felével a régi sejtnek tompa, a másikon pedig annak nyúlánk vége (l. a 45.—47. ábrát.) Egyébként itt is valamennyi alakulat mutatkozott, a melyeket mint csírázási formákat leírtam, beleértve a keresztes spórákat is. Különös volt még ez utóbbi spórákon a fénylő testből keletkezett központi testecske kékes szürke színeződése (t. i. fuchsinnal való festéskor), míg más fajokon az mindig a fuchsin piros színében látszott. Ennek oka bizonyára a központi testecske eltérő vegyi összetételében rejlik.

Ha már most magunk elé tartjuk azokat a képeket, a melyekben a spóra csírázást ábrázoltam, könnyen az a föltevés kísérlhetne, hogy az egész folyamat tulajdonképen csak a fénylő test átalakulása; és mégis úgy vélem, hogy ez a föltevés nem találó. Vizsgálataim alapján inkább arra kell következtetnem, hogy a fénylőtest és a spórahéj között még egy vékony protoplasmaretegnek kell léteznie, a melyben a tulajdonképeni élet- és csírázó képesség lakozik, míg a fénylő test a fiatal csírának csak felépítésére szolgál, tehát csak tartalékanyag. Ezt a nézetemet a következőkkel vélem megokolhatni:

A csírázási folyamat kezdetén, első jelként nyugvó spórákkal szemben, egy erősebben festődő vonalszerű zóna jelenik meg a fénylő test körül, a melyben mag is láthatóvá lett. Ebből a vonalszerű zónából lesz azután feltevésem szerint a tömörebb, sötétre festődött körvonala a spóratestnek, majd később ezen belül a központi testecske körüli szélesebb udvar, az areola. Mivel nem éppen ritkán látható, hogy ebben a fejlődési stádiumban a központi testecske úgy nagysága, mint minősége tekintetében nyugvó spórák fénylő testével megegyező, ennél fogva nem valószínű, hogy az őt körülvevő areola belőle, az ő anyagából keletkezett volna és talán még kevésbé valószínű, hogy a mag, a mely még most is ama vonalszerű zónán, tehát az areola külső körvonalán tapad, valahogyan a fénylő testből vette volna eredetét. Később, amidőn ez utóbbi a nagy fénytörőképességét elveszítette, mindenesetre úgy látszik, mintha a fénylő test az areola anyagával egybeolvadna; addig azonban a fénylő test és származéka, ugyanis az erősen festődő központi testecske, minden jel szerint a csírázási folyamatban formailag nem vesz részt.

E szerint olyannak képzelem a spóra szerkezetét, hogy a spórahéj — úgy a mint az a kibúvó fiatal sejtről lelökődik — és a fénylő test között egy apró mag és igen vékony plasma-réteg (csíraréteg) létezik, a melyek finomságuk miatt érett és nyugvó spórában nem látszanak, de a melyek éppen a spóra élet- és csírázókéességének vivői.

Következőleg csakis ez a magas csíraréteg lehet mértékadó magának a spórának ellenállóképességére nézve is, amelyet pedig általában a spóra javarészt alkotó fénylő test igen sűrű, vizszegény anyagának szoktak tulajdonítani. Közelebről tekintve azonban a dolgot, a csíraplasmától sem lehet nagyobbfokú resistentiát elvitatni.

Hiszen általánosan ismeretes, hogy a spórátlan bakteriumok beszáradt állapotban, főleg ha védő anyagoktól (vér. geny, stb.) vannak körülvéve, oly ellenállóképességet tanúsíthatnak, mint akárhány spóra. Már pedig az anyagilag erősen koncentrált spórában bizonyára a csíraréteg is besűrűsödött és vizszegény; ezenkívül a spórahéj védelme alatt is áll s így nagy ellenállóképessége érthető.

Visszatérve már most azokhoz a spóráképletekhez, a melyekből vizsgálataim kiindultak, vagyis a keresztcs alakokhoz, a melyekkel az összes spóráképzőknél találkoztam, azt kell mondanom, hogy azokat nem tekinthetem a spóra normális csírázási folyamatába tartozónak; hanem úgy látszik, hogy ezek az alakok rendellenes és abortív csírázási folyamatra utalnak, a mely csak olyan viszonyok között nyilvánul meg, a melyek a kicsírázásra kedvezőtlenek, s ilyenek ama tenyészetekben, a melyekben a spórák keletkeztek, valóban meg is vannak. Már régebben kimutattam, hogy spórák ugyanabban a tenyészetben, ahol keletkeztek, ki is csírázhatnak; csak hogy ilyenkor a föltételek a normális kicsírázás és fejlődés számára bizonyára nem kedvezőek, a mi kitűnik már abból is, hogy például a lépfenebacillusnál az ilyen spórákból lett bacillusok — a secundär telepek bacillusai — alakilag eltérnek azoktól, a melyek friss táptalajokon spórákból kinőni szoktak. A keresztcs spórák e szerint nem egyebek, mint korcs csírázó alakok; a csíraplasma megszorodott, a fénylő test vagy még mint olyan van meg, vagy pedig erősen festődő axialis

pálczikává alakult át; a fénylő test körüli areola harántfal által már két félre, sőt olykor két harántfal által három rekeszre oszlott, de a mellett a spóra egyáltalán nem, vagy csak kevésbé nagyobbodott meg, a csíra nem fejlődik ki, nem alakul ki teljesen és nem lesz szabaddá. Ha ugyanis ezek az alakok a normális csírázás képkörébe tartoznának, akkor friss táptalajokon történő élénk spóracsírázás alkalmával gyakran keletlene velük találkozunk, a mi pedig a tapasztalatomnak nem felel meg. Mind a mellett nem tagadható, hogy ilyen alakok normálisnak jelzett csírakepletek mellett is keletkezhetnek, legalább elvéve nem éppen ritkán élénken csírázó spórák között is akadnak; csak hogy ilyenkor nehéz volna eldönteni, vajjon ott helyben fejlődtek-e, vagy pedig csak a friss talajra átoltott régi spóraanyag maradványait.

A spóratestnek, illetőleg a későbbi csírának a spórahéjhoz való viszonyát biztosabban megállapítani bajos. Nem láttam semmi olyat, a mi a két kepletnek egymástól elválasztott voltára utalt volna; ugyancsak nem láttam ilyet a csírázási folyamat alatt sem. Úgy látszott, mint ha a csíra leválása a spórahéjról csak a csírázás befejeztével menne végbe, a mikor a fiatal sejt már készen van, és hogy utóbbi csak most kapna saját hárttyát s csak most válna le a héj belfelületéről, a mellyel eddig összefüggött. Legalább is csak olyankor tudtam a fiatal sejt körül finom határvonalat (hárttyát), valamint közte és a spórahéj között keskeny hézagot látni, a mikor a fiatal bakterium a spórahéjat már elhagyni, azaz belőle kibújni készül.

Az ábrák magyarázata.

A vizsgálat Zeiss-féle 20 és 1·5 mm.-es apochr. immersióval és 8-as, 12-es és 18-as comp. ocularral történt.)

1. Spóra 17 napos agar-tenyészetből (2. sz. bacillus).
2. Spóra, beszáradt majd húsvesszel feláztatott régi agartenyészetből (2. sz. bac.).
3. Spóra a 2. sz. alatt jelzett anyagból sötét látótérben nézve paraboloid condensor fölött (ezt a rajzot fekete alapon fehérnek kell képzelni).
4. és 5. Spórák hét napos agartenyészetből (októberi szobahőmérséklet) (14. sz. bac.).

6. Az anyasejtéből kibúvó spóra a 4. és 5. alatt jelzett tenyészetből.
 7.—11. Spórák öt napos agartenyészetből (37°) keresztcecskével (11. sz. bac.).
 12. és 13. Négy hetes agartenyészetből (1. sz. bac.).
 14. és 15. Spórák nyolcz éves beszáradt, majd feláztatott agarról friss agarra oltva és ezen két óráig 37°-on, utána pedig másnapig hűvös szobában tartva (2. sz. bac.).
 16.—18. Régi spórák (úgy, mint 14.—15. alatt) friss agaron 5¹/₂ óráig szobahőmérsékleten (2. sz. bac.).
 19.—22. Spóráképek a nyolcz éves agartenyészetből két héttel a húsvesszel való feláztatás után (októberi szobahőmérséklet (2. sz. bac.).
 23. A régi feláztatott tenyészetből (l. 14. és 15. alatt) készült friss, szobahőben estétől reggelig nőtt agartenyészet.
 24. és 25. Régi, de be nem száradt spórák friss agarra téve 5¹/₂ óra mulva (szobahő) (1. sz. bac.).
 26. Régi agartenyészetből (l. 14. és 15. alatt) friss agarra átvitt anyag, hat óra mulva.
 27. A 19. és 22. alatt jelzett anyagból.
 28. A 26. alatt jelzett anyagból.
 29. és 30. A 24. és 25. alatt jelzett anyagból.
 31. és 32. A 23. alatt jelzett anyagból.
 33. A 16.—18. alatt jelzett anyagból.
 34.—38. A 26. és 28. alatt jelzett anyagból.
 39. Feláztatott régi spórás anyag friss agarra téve két óráig 37°-on való állás után (2. sz. bac.).
 40. A 14. és 15. alatt jelzett anyagból.
 41. Spóra -- három hetes agartenyészetből -- még az anyasejt (sporangiium) belsejében (8. sz. bac.).
 42.—47. 3—4 hetes agartenyészetből friss agarra átoltott spórák, a melyek két óráig 37°-on és néhány óráig szobahőmérsékleten csíráztak.
 48. Négy hetes agartenyészetből vett spórás anyag friss agaron két óra (37°) mulva vizsgálva (14. sz. bac.).

*

- Az 1. sz. bac. rothadt nyúlhulla lépéből származik.
 A 2. " " szászvárosi vízből származik.
 A 8. " " homokháti " "
 A 11. " " ismeretlen származású anaérob.
 A 14. " " kutya beteg bőréről származik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 május 21.-én tartott üléséből.)

TÖBB VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK EGYMÁSTÓL VALÓ LINEÁRIS FÜGGÉSÉNEK FELTÉTELE.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

A Mathematische Zeitschrift 1919.-i évfolyamában (4. köt. 223. l.) OSTROWSKI A. «Ueber ein Analogon der Wronskischen Determinante» című dolgozatában több változós függvények egymástól való lineáris függésének kriteriumát a WRONSKI-féle determinans érdekes általánosításának segítségével iparkodik fölláítani. Természetes, hogy az ily úton talált kriterium mind azokkal a hátrányokkal jár, a melyek már az egy változós függvényekre vonatkozó hasonló kérdésnek eldöntésekor mutatkoznak, ha e kérdést a WRONSKI-féle determinans segítségével akarjuk eldönteni.

Eltételezve attól, hogy e determinans csak akkor képezhető, ha függvényrendszer függvényei bizonyos rendszámig differenciálhatók, az általánosított WRONSKI-determinans eltűnése további feltételek teljesülése nélkül csakis analitikai függvények esetére jelzi a függvényrendszer függvényeinek lineáris függőségét, míg valós függvények esetére egymagában, a mint ezt a PEANO-tól szerkesztett példa mutatja, kielégítő kriteriumot nem ad.

E hátrányoktól mentes kriterium adódik, ha a lineáris függőség kérdésének eldöntésére a GRAM-féle determinans alkalmas általánosítását használjuk föl. Ilyen általánosítást közlök a jelen dolgozatban, a melynek czélja a következő tételeknek fölláítása és bebizonyítása:

I. Tétel. *Ha*

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1)$$

az x_1, x_2, \dots, x_m valós változóknak oly függvényrendszere, melynek bármely két függvényéből alakított szorzat az (x_1, x_2, \dots, x_m)

értékrendszereknek folytonos és összefüggő T tartományára integrálható; ha továbbá

$$(jk) = \int\limits_{(T)} \dots \int f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) f_k(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

akkor a

$$G = \begin{vmatrix} (11) & (12) & \dots & (1n) \\ (21) & (22) & \dots & (2n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1) & (n2) & \dots & (nn) \end{vmatrix}$$

determinánsnak, az (1) alatti függvényrendszer «általánosított GRAM-féle determinánsának», eltűnése már egymagában szükséges és elegendő arra, hogy az (1) alatti függvényrendszer függvényei egymástól lineárisan függetlenek legyenek, azaz hogy n számú egyszerre el nem tűnő c_1, c_2, \dots, c_n számérték létezzék oly formán, hogy a

$$\sum_{j=1}^n c_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

egyenlőség a T tartomány minden helyére nézve fennálljon.

II. tétel. Ha

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) + i\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

a hol i a képzetes egység és φ_k, ψ_k az x_1, x_2, \dots, x_m valós változók valós függvényei, ha továbbá az $f_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\bar{f}_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ szorzatok, a melyekben \bar{f}_k az f_k -nak konjugált értékét jelenti ($\bar{f}_k = \varphi_k - i\psi_k$), mindannyian a T tartományra nézve integrálhatóak és

$$\int\limits_T \dots \int f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \bar{f}_k(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = (jk),$$

akkor az

$$f_1, f_2, \dots, f_m$$

függvények egymástól való lineáris függésének szükséges és elegendő feltétele abban áll, hogy a

$$\Gamma = |(jk)|_{(j, k=1, 2, \dots, m)}$$

determináns zérussal legyen egyenlő.

1. Az I. tétel bebizonyítása.

Egyszerűség kedvéért a tételt két változós függvényekre nézve bizonyítjuk be, megjegyezvén, hogy a bebizonyítás akárhány változós függvényekre nézve ugyanígy végezhető. Legyenek tehát a függvényrendszer függvényei

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y). \quad (2)$$

Egy további egyszerűsítés abban álljon, hogy a T tartományt négyszögalakúnak, azaz olyannak választjuk, hogy a hozzá tartozó (x, y) értékrendszerek a

$$a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d \quad (3)$$

egyenlőtlenségeknek feleljenek meg. Ismét megjegyezzük, hogy tetszés szerinti folytonos és összefüggő T tartományra nézve a tárgyalás egészen hasonlóan folytatható.

A (2) alatti függvények egymástól való lineáris függőségének egyik közvetlenül adódó szükséges és elegendő feltétele abban áll, hogy

$$R = |f_j(x^{(k)}, y^{(k)})|_{(j, k=1, 2, \dots, n)}$$

determináns az

$$x^{(k)}, y^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

változóknak minden a (3) alatti feltételt kielégítő értékrendszerére nézve zérussal legyen egyenlő.

E tétel teljesen azon a módon bizonyítható be, hogy ezt «Függvények egymástól való függésének új kriteriuma és ennek kapcsolata a régiekkel» című dolgozatomban (L. ez Értesítő XXXVIII. kötete 50. l.) egy változós függvényekre nézve megmutattam. Különben az $R=0$ feltételnek igen egyszerű geometriai jelentése az, hogy az n -mértetű térben a

$$\xi_1 = f_1(x, y), \quad \xi_2 = f_2(x, y), \dots, \quad \xi_n = f_n(x, y)$$

parameteres egyenletrendszer meghatározta felületnek bármely n pontja és a koordinata-rendszer kezdőpontja egyugyanazon síkon fekvők legyenek, hogy tehát a felület sík felület legyen.

Áttérve most a (2) alatti függvényrendszer általánosított GRAM-féle determinánsára, ez a jelen feltételek mellett így írható :

$$G = \left| \int_a^b \int_c^d f_j(x, y) f_k(x, y) dx dy \right|_{(j, k=1, 2, \dots, n)}.$$

E determinánsról kimutatható, hogy olyan $2n$ -szeres integrál segítségével fejezhető ki, a melynek integrandusa az R -rel jelölt determináns négyzete.

Ha ugyanis a G determináns soraiban az x, y integrációs változók helyébe rendre az $x', y'; x'' y''; \dots; x^{(n)}, y^{(n)}$ új integrációs változatokat írjuk, a mi a G determináns elemeinek értékét nem érinti és további figyelembe vesszük, hogy a

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d f_1(x', y') f_{i_1}(x', y') dx' dy', \dots, \\ & \dots \int_a^b \int_c^d f_n(x^{(n)}, y^{(n)}) f_{i_n}(x^{(n)}, y^{(n)}) dx^{(n)} dy^{(n)} \end{aligned}$$

integrálok szorzata a következő $2n$ -szeres integrállal fejezhető ki:

$$\int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d f_1(x' y') f_{i_1}(x' y') \dots f_n(x^{(n)}, y^{(n)}) dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)},$$

akkor G a determinánsok alap-definiója szerint így írható

$$\begin{aligned} G = \sum_{(i)} (-1)^I & \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d f_1(x', y') f_{i_1}(x', y') \dots \\ & \dots f_n(x^{(n)}, y^{(n)}) f_{i_n}(x^{(n)}, y^{(n)}) dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)}, \end{aligned}$$

a hol az I az $1, 2, \dots, n$ elemeknek $i_1 i_2 \dots i_n$ permutációjában foglalt inverziók számát jelenti és az összeg tagjai az oda írt általános tagból akként adódnak, hogy $i_1 i_2 \dots i_n$ helyébe az $1, 2, \dots, n$ elemeknek összes $n!$ számú permutációt helyettesítjük. Az összeadás és integrálás sorrendjét föleserélvén, lesz :

$$\begin{aligned} G &= \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d \{ f_1(x', y') \dots f_n(x^{(n)}, y^{(n)}) \sum_{(i)} (-1)^I f_{i_1}(x', y') \dots \\ & \dots f_{i_n}(x^{(n)}, y^{(n)}) \} dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)} = \\ &= \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d f_1(x', y') \dots f_n(x^{(n)}, y^{(n)}) R dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)}. \end{aligned}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy a G determináns az f_1, f_2, \dots, f_n függvények bármely $S = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_{i_1} & f_{i_2} & \dots & f_{i_n} \end{pmatrix}$ permutációjának alkalmazásakor változatlanul marad, míg az R determináns ugyanekkor előjelét I -szer változtatja, ha I az i_1, i_2, \dots, i_n permutációban foglalt inverziók száma és az utójára fölírt egyenlőségre az összes $n!$ számban levő S permutációt alkalmazzuk, az így keletkező $n!$ számú egyenlőséget pedig összeadjuk, akkor az

$$\begin{aligned} & n! G = \\ & = \sum_{(i)} \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d f_{i_1}(x', y') \dots f_{i_n}(x^{(n)}, y^{(n)}) (-1)^I R dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)} = \\ & = \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d [R \sum_{(i)} (-1)^I f_{i_1}(x', y') \dots f_{i_n}(x^{(n)}, y^{(n)})] dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)} \end{aligned}$$

egyenlőség adódik, a mely végül a

$$G = \frac{1}{n!} \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d R^2 dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)}$$

egyenlőségre vezet, mert a determinánsok alapdefiniója szerint

$$\sum_{(i)} (-1)^I f_{i_1}(x', y') \dots f_{i_n}(x^{(n)}, y^{(n)}) = R.$$

Az utójára talált egyenlőség világosan mutatja, hogy G általánosságban pozitív szám és zérussal akkor és csak akkor egyenlő, ha $R = 0$ azaz, ha az f_1, f_2, \dots, f_n függvények egymástól lineárisan függők.

Lássuk az imént bebizonyított tétel alkalmazását lineáris függvényrendszerre. Legyen

$$f_1 = \alpha x + \beta y, \quad f_2 = \gamma x + \delta y,$$

továbbá

$$a = c = 0, \quad b = d = 1,$$

akkor

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_1^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 (\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2) dx dy = \\ &= \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\alpha\beta}{4} + \frac{\beta^2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f_1 f_2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 [a\gamma x^2 + (a\delta + \gamma\beta)xy + \beta\delta y^2] dx dy = \\ &= \frac{a\gamma}{3} + \frac{a\delta + \beta\gamma}{4} + \frac{\beta\delta}{3}, \\ \int_0^1 \int_0^1 f_2^2 dx dy &= \int_0^1 (\gamma^2 x^2 + 2\gamma\delta xy + \delta^2 y^2) dx dy = \\ &= \frac{\gamma^2}{3} + \frac{2\delta\gamma}{4} + \frac{\delta^2}{3}. \end{aligned}$$

A függvényrendszer GRAM-féle determinánása tehát

$$\begin{aligned} G &= \begin{vmatrix} \int_0^1 \int_0^1 f_1^2 dx dy & \int_0^1 \int_0^1 f_1 f_2 dx dy \\ \int_0^1 \int_0^1 f_1 f_2 dx dy & \int_0^1 \int_0^1 f_2^2 dx dy \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{144} \begin{vmatrix} 4a^2 + 6a\beta + 4\beta^2 & 4a\gamma + 3(a\delta + \beta\gamma) + 4\beta\delta \\ 4a\gamma + 3(a\delta + \beta\gamma) + 4\beta\delta & 4\gamma^2 + 6\gamma\delta + 4\delta^2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{144} \begin{vmatrix} (4a + 3\beta)a + (3a + 4\beta)\beta & (4a + 3\beta)\gamma + (3a + 4\beta)\delta \\ (4\gamma + 3\delta)a + (3\gamma + 4\delta)\beta & (4\gamma + 3\delta)\gamma + (3\gamma + 4\delta)\delta \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{144} \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4a + 3\beta & 3a + 4\beta \\ 4\gamma + 3\delta & 3\gamma + 4\delta \end{vmatrix} = \frac{1}{144} \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{7}{144} \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

G tehát akkor és csak akkor egyenlő zérussal, ha az f_1 és f_2 homogén lineár függvények rendszerének determinánása egyenlő zérussal.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a G determinánst a

$$G = \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 R^2 dx' dy' dx'' dy''$$

képlet alapján számítjuk ki. Itt ugyanis

$$R = \begin{vmatrix} ax' + \beta y' & \gamma x' + \delta y' \\ ax'' + \beta y'' & \gamma x'' + \delta y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

úgy hogy

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{2!} \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right|^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x'y'' - y'x'')^2 dx'dy'dx''dy'' = \\
 &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right|^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x'^2 y''^2 - 2x'y'x''y'' + y'^2 x''^2) dx'dy'dx''dy'' = \\
 &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right|^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right|^2 \frac{7}{72} =
 \end{aligned}$$

úgy hogy végre G számára ismét a

$$G = \frac{7}{144} \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right|^2$$

értéket találjuk.

2. A II. tétel bebizonyítása.

E tétel bebizonyítása egészen hasonló az első tételével; azért e bizonyítás vázlatára szorítkozhatom. Ha a

$$\left| \int_a^b \int_c^d f_i(x, y) f_k(x, y) dx dy \right|_{(i, k=1, 2, \dots, n)}$$

n -edfokú determinánst I -val, a R determináns konjugált értékét R -val jelöljük és I -t hasonló elvek alapján számítjuk ki, mint a minőkkel előbb az általánosított GRAM-féle determinánst kiszámítottuk, a következő eredményre jutunk

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{n!} \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d R \bar{R} dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)} = \\
 &= \frac{1}{n!} \int_a^b \int_c^d \dots \int_a^b \int_c^d |R|^2 dx' dy' \dots dx^{(n)} dy^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Mint hogy az integrandus R abszolút értékének négyzete, azért I nem negatív szám és zérussal akkor és csak akkor egyenlő, ha $R=0$, tehát az f_1, f_2, \dots, f_n függvények egymástól lineárisan függetlenek.

3. Kérdéstételek.

Közvetlenül világos, hogy az általánosított

$$G = \left| \int_a^b \int_c^d f_i(x, y) f_k(x, y) dx dy \right|_{(i, k=1, 2, \dots, n)}$$

általánosított GRAM-féle determináns eltűnése maga után vonja a

$$G_x(y) = \left| \int_a^b f_i(x, y) f_k(x, y) dx \right|_{(i, k=1, 2, \dots, n)}$$

$$G_y(x) = \left| \int_c^d f_i(x, y) f_k(x, y) dy \right|_{(i, k=1, 2, \dots, n)}$$

egyszerű GRAM-féle determinánsok eltűnését. Igaz-e ennek a megfordítása is? Két kétváltozós függvényből álló függvényrendszer esetére, mint arról könnyű meggyőződni, a válasz a fölvetett kérdésre *igenlő*. De hogy m változó n függvényének lineáris függősége következik-e már abból, hogy e függvények minden egyes változóra nézve külön-külön egymástól lineárisan függek, oly kérdés, a mely még behatóbb vizsgálatot igényel.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 június 7.-én tartott üléséből.)

A BAROMFICHOLERA BACILLUSÁNAK VARIÁCIÓJÁRÓL.

MANNINGER REZSŐ-től.

PASTEUR¹ 1880-ban közölte kísérleteit, melyekben a baromficholera bacillusának virulentiáját gyengítenie sikerült. A virulentiagyengítést úgy végezte, hogy a virulens baromficholerabacillusokat a légköri oxygen hatásának kitett levesben tenyésztette. PASTEUR szerint a levegő oxygenjének hatására a levestenyészt virulentiája 3, 4, 5, 6—10 hónapig tartó tenyésztés alatt fokról fokra gyengül s végül teljesen elvész. PASTEUR ilyen módon két különböző fokra szelidítette a baromficholerabacillus virulentiáját és a kétféle erősségű tenyészetet baromfiak védőojtására használta fel. Az ojtóanyaggal végzett kísérletek (CAGNY,² KITT³) nem vezettek ugyan megfelelő gyakorlati eredményekre, e kedvezőtlen tapasztalatok azonban mit sem vonnak le a virulentiagyengítés e módszerének elméleti jelentőségéből. P. TH. MÜLLER⁴ EHRLICH-nek «Das Sauerstoffbedürfnis des tierischen Organismus» című könyvében közölt adatokra hivatkozva a levegő oxygenjének szelidítő hatását következőképpen magyarázza. Minthogy EHRLICH szerint a szervezet szöveteinek erős redukáló képességük van és így a vérben és a szövetekben szabad oxygen nincsen, MÜLLER felállítja azt a tételt, hogy csak az olyan bakteriumok fejthetnek ki pathogen hatást, melyek oxygenmentes

¹ Compt. rend. de l'Académie. 1880.

² Recueil de la méd. vét. 1885. 130. l.

³ Wert und Unwert der Schutzimpfungen gegen Tierseuchen. Berlin, 1886. 51. l.

Infektion und Immunität. Jena. V. kiadás. 1917. 72. l.

környezetben is el tudnak szaporodni. Ennek folytán szerinte érthető, hogy azok a bakteriumok, melyek a tenyészetekben hozzászoknak a levegő oxygenjéhez, a szövetekben és a vérben, minthogy ott legfeljebb csak lazán megkötött oxygen van, már nem tudnak megélni és kórokozó hatást kifejteni. Bármilyen tetszetősnek látszik is ez a feltevés, mégsem állhatja meg a helyét, mert az oxygen hatásának kitett levestenyészetek közül csak egyesekben módosul a bakteriumok virulentiája. Ha ez eltérő viselkedés magyarázatára PASTEUR nyomán feltesszük is, hogy a levestenyészetek nagyobb részében a virulencia azért nem gyengül, mert a kémlőcsövek fenekén keletkező üledék felső rétegei elzárják a mélyebben fekvő bakteriumok elől az oxygent, már nem tudjuk az oxygen szerepével megmagyarázni azt, hogy ferde agartenyészetekben, melyekben pedig sokkal tökéletesebben érintkeznek a bakteriumok oxygennel, mint a levestenyészetekben, másfél évi tenyésztés után sem sikerült a bakteriumok virulentiájának gyengülését észlelnem. PASTEUR észleleteiből az következnek, hogy a baromficholerabacillusok virulentiája a levesben fokról-fokra szelidül, tehát a virulencia gyengülése *continuens variatio* (*modificatio*) következménye. Ezzel szemben az itt közölt kísérleteim, melyek egy különösen kedvező esetre vonatkoznak, azt látszanak bizonyítani, hogy a levestenyészet virulentiájának csökkenése *ugrásszerűen bekövetkező, discontinuens variatiónak* (*mutatiónak*) az eredménye.

Egy féléves levestenyészetnek agarra való átojtása után ugyanis kétféle telepek fejlődését észleltem, és pedig a baromficholerabacillus typososnak ismert telepein kívül *sötétbarna* kolóniák is nőttek, melyek a további vizsgálat eredménye szerint a typosos, világos telepektől eltérően *avirulens* bakteriumokból álltak. Ebből PASTEURnak az a tapasztalata, hogy a baromficholerabacillus virulentiája fokozatosan gyengül a levestenyészetekben egészen az avirulentiáig, legegyszerűbben talán úgy értelmezhető, hogy minél idősebb a tenyészet, annál nagyobb a szaporábban fejlődő avirulens bakteriumok relatív mennyisége és annál kisebb természetesen az egész tenyészet virulentiája.

Az agaron fejlődött kétféle telepek pontosabb vizsgálata a következő adatokat szolgáltatata.

I. Tenyészetek vizsgálata.

Ferde agaron a *világos varietas* vagy simaszélű, mérsékelt domború telepekben nő, melyek egy hét múlva 24 órai átmérőjük (körülbelül 0.5—1.0 mm.) ötszörösét is elérhetik, de egyébként alakjukra nézve a fiatal telepekhez hasonlóak maradnak, vagy pedig oly koloniákat alkot, melyekben utóbb alakváltozás is észlelhető. Előfordulnak nevezetesen olyan telepek, amelyek közepén már 24 órás korukban kis dudor fejlődik. Ezek a telepek utóbb laposan kiterjeszkednek a periphéria felé, vagy pedig szélükön apró dudorok összefolyásából keletkező sáncszerű gyűrűt viselnek. Észlelhetők továbbá kezdetben mérsékelt lapos, sima szélű telepek, melyek széle a második naptól kezdve sáncszerű gyűrűvé hanyódik fel. Vannak azután kezdetben lapos, később esetleg centralis púpot viselő telepek, melyeken kezdettől fogva sugaras irányú rajzolat tűnik fel. Az eddig említett telepek két hét alatt 3—4 mm. átmérőjüvé nőhetnek; fellelhetők azonban az agarnak különösen vékonyabb részén, ahol a táplálkozási viszonyok kedvezőtlenebbek, olyan mindvégig apró, legfeljebb $\frac{1}{2}$ mm. átmérőjű telepek, melyek középső részét csipkézett szél veszi körül. A világos varietas telepei 10—14 napos korukig többnyire teljesen egyneműek, eleinte szintelenek, később mindinkább megfehérednek, végül teljesen átlátszatlaná válnak és erősen az alaphoz tapadnak. A telepek egy részénél azonban, többnyire a második héttől kezdve, vagy sok apró, vagy kevesebb, de nagyobb, fehér vagy barna színű másodlagos kiemelkedések, «gombok» keletkeznek. Ezekből, ha leemelésük az anyatelep megsértése nélkül sikerül, gombtalan telepek fejlődnek, melyek virulentiája a kiindulási telep virulentiájától nem különbözik.

A *barna varietus* kezdetben mérsékelt domború, sima szélű telepei növekedésük közben is vagy mindvégig megtartják eredeti alakjukat, vagy pedig a következő átalakulásokon mennek át. Lehetséges, hogy a telep szélén körkörös kiemelkedés keletkezik, melyen belül a telep közepe lapos, vagy egyszerű, esetleg kettős dudort visel, sőt az is előfordul, hogy a telep közepén keletkező, néha egészen fekete színű kiemelkedést vilá-

gosabb, csipkézett szélű gallér szegélyezi. A barna színű telepek között is előfordulnak mindvégig törpe telepek, amelyek középső kissé domború részét felül éles szélű alkotó sáncszerű szegély veszi körül. A barnaszínű telepek nem válnak nyúlóssá, alapjukról mindvégig könnyen leemelhetők.

Levesben a világos és barna varietas tenyészetei abban különböznek egymástól, hogy a világos varietas bacillusai eleinte megzavarosítják a levest, később pedig a kémlelőcső fenekén *nyálkás* üledéket formálnak, míg a barna varietas bakteriumai leülepedésük után *szemecskés* sedimentumot alkotnak.

Lényeges különbség van a kétféle varietas bacillusai között morfológiai tulajdonságaik tekintetében. A barna varietas bacillusai nevezetesen nagyobbak a világoséinál. A barna varietas bacillusai ugyanis átlag 0.7μ hosszúak (határértékek 0.5 és 1.0μ) és 0.25μ szélesek, a világos varietas bakteriumai ellenben átlag 0.5μ hosszúak (határértékek 0.4 és 0.75μ) és 0.2μ szélesek. A világos varietas bakteriumainak van azonkívül *burkuk*, míg a barna varietason burok vagy egyáltalán nem, vagy csak igen vékony szegély "formájában mutatható ki. A burok kimutatására HARDOUN¹ eljárását választottam, melynek az a lényege, hogy a BURRI eljárása szerint készült tuspräparatumot fuchsinnal festjük meg. Ez eljárás szerint előállított készítményekben a vörösre megfestett bakteriumtestet fekete alapon szintelen udvar veszi körül. Hogy az általam a világos varietas bacillusain kimutatott burok nem műtermék, az abból is látszik, hogy az egyforma technikával készült präparatumokban mindig csak a világos varietas bacillusai körül sikerült számottevő vastagságú burkot kimutatnom; meggyőzően bizonyítja azonban az a kísérletem, melyben a világos varietas egy kéthetes levestenyészetének bakteriumairól lúggal leoldottam a burkot, úgy hogy a bakteriumok lecentrifugálása után az említett eljárással készült präparatumokban csak buroktalan bacillusok voltak láthatók.

¹ Compt. rend. de la soc. de biologie. 1912., LXXII., 298.

II. A kórokozó hatás vizsgálata.

A világos és a barna varietas bakteriumai között a virulencia tekintetében lényeges különbség mutatkozik. A világos varietas bakteriumai virulensek, míg a barna telepeken fejlődő bakteriumok jóformán teljesen avirulensek. Az utóbbiakból egerek 1—2 kacsnyi, tyúkok és galambok egészen egy fel agartenyészetnek megfelelő bakteriummennyiség bőr alá ojtását, múltó rosszulletet leszámítva, jól tűrik. A jelzett mennyiségnél több bakteriumnak bőr alá, még inkább pedig izomba vagy gyűjtőérbe ojtására azonban a kísérleti állatok egy része elpusztul. Ez elhullások egy része arra vezethető vissza, hogy a szervezetbe kerülő nagytömegű bakterium az állati test véderendezésének hatására jórészt hamarosan elpusztul és feloldódik, úgy hogy a keringésbe kerülő bakteriumfehérje intoxicatiót okoz. Erre utal, hogy a $\frac{1}{2}$ —1 agartenyészettel bőr alá ojtott egerek legnagyobb része 2—3 nap alatt elpusztult ugyan, de a vérükben kis számmal talált élő bakteriumok virulentiája nem különbözött a kiindulási törzsetől. Az elhullások egy másik részét azonban nyilván annak kell tulajdonítanunk, hogy a szervezetbe kerülő nagymennyiségű bakterium közül egyes ellenállóbb vagy talán már eleve az átlagnál valamivel nagyobb virulentiájú individuumok fokozott virulentiára tesznek szert. Azokból a galambokból és nyulakból ugyanis, melyek egész agartenyészetnek a mellizomba, illetőleg a gyűjtőérbe fecskendése után 1—3 nap alatt elhullottak, oly nagy fokban virulens bakteriumokat sikerült kitenyésztennem, melyek még $\frac{1}{100.000}$ kacsnyi mennyiségben is két nap alatt megölték a szürke egereket.

Az avirulens bakteriumokon a szervezetben végbemenő változásokat nyulak hasüri folyadékában tanulmányoztam. A nyulak hasüregéből $\frac{1}{2}$ —1 kacsnyi tenyészetnek intraperitonealis befecskendezése után időről-időre hajszálpipettával kevés savót emeltem ki és azt RADZIEWSKY eljárása szerint 1:30 arányban vízzel hígított ZIEHL-féle fuchsinnal festettem meg. Két ezirányú kísérletem lefolyása röviden a következő.

Az 1. sz. 780 gr. súlyú házinyúl hasüregébe 1 cm. levegőben 1 kacsnyi mennyiségben 18 órás tenyészetből való avirulens-

bacillusokat fecskendeztem. A befecskendezéskor a bacillusok kifogástalanul festődtek. Egy órával a befecskendezés után a baktériumok száma körülbelül ugyanannyi, mint a befecskendezéskor, de normalis alakú és rendszeren festődő individuumok között nagy számmal vannak rosszul festődő, nyilván elpusztult alakok. Ez utóbbiak nagyobbak a rendes alakoknál, halaványan festődnek vagy éppen csak mint «árnyékok» tűnnek fel. Ez időben kis számmal vannak lymphocyták is a hasüri savóban, de polynuclearis fehér vérsejteket nem lehet benne kimutatni. Négy órával a befecskendezés után a szabad hasüri folyadékban jól festődő, rendes alak jóformán nincs, puffadt és rosszul festődő is csak kevés akad, igen nagy számmal mutathatók ki azonban polynuclearis fehér vérsejtek, melyek legnagyobb részében különböző számmal felfalt baktériumok láthatók. A leukocytosis és a phagocytosis ezután még 24 óráig volt kimutatható.

A 3. sz. 900 gr. súlyú nyúl hasüregébe 1/2 kacsnyi 24 órás avirulens, normalisan festődő bacillusokat fecskendeztem. Egy órával az ojtás után a hasüri savóban elvértve lymphocyták és endothel-sejtek vannak, de phagocytosis nem állapítható meg. A baktériumok, melyek száma határozottan csökkent, a szabad savóban foglalnak helyet. Kevés a jól festődő, normalis alak, sok a rendes nagyságú, de elmosódott szélű, halaványan festődő baktérium, elvértve akadnak puffadt alakok is halavány bipolaris festődéssel és itt-ott alig megfestődött «árnyékok». Négy órával a befecskendezés után szabadon fekvő baktérium egy pár rosszul festődő, nyilván elhalt alakon kívül nem mutatható ki. Jóformán az összes baktériumok a hasüregbe vándorolt nagyszámú fehér vérsejtekben helyeződnek el. Nyolcz órával az ojtás után fel nem falt baktérium egyáltalán nincsen már, a phagocytosis még kifejezettebb. 24 óra múlva a phagocyták száma már apadófélemben van. 48 óra múlva baktériumtartalmú fehér vérsejt már csak elvértve mutatható ki.

Az élő avirulens baromficholerabacillusok e kísérletek szerint az állati testben nem szaporodnak el, hanem csakhamar megváltoznak. Egy részük rövid idő alatt a plasmolysis jelenségét mutatja és elpusztul. Ez elpusztuló baktériumokból kiszabaduló anyagok azután felszívódnak és chemotaxisos ingert fej-

tenek ki a sokmagvú fehér vérsejtekre, mire ezek a bakteriumbefecskendezést követő 2.—5. órában tömegesen a hasüregbe vándorolnak és az ottan talált bakteriumokat felfalják. A szervezet a beléje kerülő bakteriumokat tehát egyrészt a nedveiben foglalt bakteriumölő anyagokkal, másrészt, az elölt bakteriumok bizonyos anyagainak a keringésbe jutása után, a phagocytosissal teszi ártalmatlanná.

A virulens bakteriumokkal egészen másképen áll a dolog. A virulens bakteriumok viselkedését a szervezetben a következő kísérletből láthatjuk.

A 2. sz. 750 gr. súlyú nyúl hasüregébe 1 cm. levesben 18 órás (közvetlenül galambból kitenyésztett) culturából 1 kacsnyi mennyiséget fecskendeztem. Egy órával a fertőzés után a bakteriumok száma körülbelül ugyanannyi, mint amennyi a fertőzéskor volt. Legtöbbje típusosan festődik, de vannak elszórtan halványan festődő alakok is. 4 órával a fertőzés után a bakteriumok száma sokszorosán megsaporodott. Majdnem valamennyi normalisan festődik. Phagocytosissnak nyoma sincs. 4 $\frac{1}{2}$ órával a fertőzés után az állat septicæmia hæmorrhagiában elhullott.

A virulens bacillusokkal történő fertőzés esetén tehát elpusztul ugyan rövid idővel a fertőzés után bizonyos számú bakterium, de a szervezet bakteriumölő anyagainak ellenálló többi bakterium elszaporodása folytán csakhamar óriási tömegű bakterium árasztja el nemcsak a fertőzés helyét, a hasüreget, hanem a véráramot is, úgy hogy a fertőzött állat septicæmiának esik áldozatul.

Hogy a bakteriumok virulentiájában kimutatható ez eltérés miben lelheti magyarázatát, arra egyelőre legfeljebb feltevással válaszolhatunk. A lépfenebacillus analogiájára gondolva, a virulens és az avirulens bacillusok eltérő buroktermelő képességében sejtem az eltérés okát.

A virulens és az avirulens bakteriumok egyébiránt *in vitro* is eltérően viselkednek a fehér vérsejtekkel szemben. Nyúl fehér vérsejtjeivel végzett négy ezirányú kísérletemben ugyanis 30 perc múlva (80—80 falósejtet számlálva meg) egy-egy phagocytá átlag

0·86, 3·9, 3·8, 2·9 avirulens és csak
0·23, 1·8, 1·6, 1·9 virulens bakteriumot tartalmazott.

A világos (virulens) és a barna (avirulens) varietas viselkedésében mutatkozó feltűnő különbség szükségessé tette a két-féle bakteriumok faji azohosságának kísérleti kimutatását. Ez egyrészt agglutinációval, másrészt immunizáló kísérlettel sikerült.

Az *agglutinációs próba* végrehajtására két nyulból előlt virulens, illetőleg élő avirulens bakteriumoknak ismételt befecskendezésével megfelelően agglutináló vérsavókat állítottam elő. A virulens-bakteriumokkal kezelt nyul vérsavója (aggl. titere 1:320) 1:160 arányú hígításban az avirulens bacillusokat is agglutinálta, az avirulens bacillusokkal előállított vérsavó (aggl. titere 1:2560) pedig szintén majdnem a határtitert elérő hígításban (1:1280) agglutinálta a virulens bacillusokat. Ezek a kísérletek tehát a kétféle varietasú bakteriumok faji összetartozását igazolják.

Ugyancsak e mellett szólnak az egereken, galambokon és csirkéken végzett *immunizáló kísérletek* pozitív eredménye is. Kiderült, hogy

1. egereket $\frac{1}{2}$ —1 kacsnyi avirulens bacillusnak bőr alá ojtásával az esetek 60%-ában meg lehet védeni a 11 nappal később bekövetkező különben halálos fertőzéssel szemben (l. az I. tábl.); hogy

2. galambok, melyeket egyszer vagy kétszer 2 kacsnyi avirulens tenyésztettel immunizálunk, a fertőzést kiállják, míg az ennél kevesebb bakteriummal ojtottak körülbelül ugyanolyan gyorsan elpusztulnak baromficholerában, mint a kezeletlen állatok (l. a II. tábl.); s hogy

3. az 1—2 kacsnyi avirulens tenyésztettel egyszer kezelt csirkék, ha a fertőzés legkorábban 5—19 nappal az immunizálás után történik, túlnyomó részben ellenállnak a tízszeres halálos adag befecskendezésének, míg a $\frac{1}{2}$ kacsnyi avirulens-bacillusokkal kezelt csirkék, valamint a fertőzés előtt csak 1—3 nappal immunizált állatok éppúgy elpusztultak choleraiban, mint az ellenőrzésképen nem immunizált csirkék (l. a III. tábl.).

I. táblázat.

Egerek száma	Védőoltás avirulens bacillusokkal		Fertőzés virulens bacillusokkal	Eredmény
	I.	II.		
46—50.	XII. 31. 1 kacs bőr alá	I. 6. 1 kacs bőr alá	I. 17. 1,50,000 kacs bőr alá	+ I. 18-án 1 (= 20 %)
51—55.	XII. 31. 1/2 kacs bőr alá	I. 6. 1/2 kacs bőr alá		+ I. 20., 21. és 22-én 1—1 (= 60 %)
56—60.	I. 6. 1 kacs bőr alá	—		+ I. 19. és 21-én 1—1 (= 40 %)
61—65.	I. 6. 1/2 kacs bőr alá	—		+ I. 19-én 2 (= 40 %)
81—90.	—	—		+ I. 18—29-ig valamennyi (= 100 %)

II. táblázat.

Galam-bok száma	Védőoltás avirulens bacillusokkal		Fertőzés virulens bacillusokkal	Eredmény
	I.	II.		
2—4.	II. 8. 2 kacs izomba	II. 16. 2 kacs izomba	II. 27. 1,100,000 kacs izomba	Életben maradtak
5—7.	II. 16. 2 kacs izomba	—		Életben maradtak
8.	II. 16. 1 kacs izomba	—		+ 40 óra múlva
9.	II. 16. 1/3 kacs izomba	—		+ 31 óra múlva
10.	II. 16. 1/10 kacs izomba	—		+ 22 óra múlva
11—13.	—	—		+ 19—26 óra múlva

III. táblázat.

Csirkék száma	Védőoltás avirulens bacillusokkal	Fertőzés virulens bacillusokkal	Eredmény
4—6.	VI. 3. 2	VI. 22. 1,1,000,000 kacs bőr alá	Életben maradtak
7—9.	VI. 3. 1		+ VI. 23-án 1
1—3.	VI. 3. 1/2		+ VI. 23-án 1
10—12.	VI. 10. 2		+ VI. 23-án 1
13—15.	VI. 10. 1		Életben maradtak
16—18.	VI. 10. 1/2		+ VI. 23—29-ig mind a három
20.	VI. 15. 2		Életben maradt
25.	VI. 17. 2		Életben maradt
26.	VI. 19. 2		VI. 23—24-ig beteg, de később magához tért
27.	VI. 21. 2		+ VI. 24.
19—24. 34—37.	—		+ VI. 23—29-ig valamennyi

Az avirulens bacillusok befecskendezésére előálló *immunitas mechanismusára* vonatkozólag nyúlón végeztem kísérletet.

A 4. sz. 700 gr. súlyú nyúlak III. 22.-én egy kacsnyi, III. 29.-én egy egész agartenyészet avirulens bacillust fecskendeztem hasüregébe. IV. 14.-én aztán $\frac{1}{2}$ kacsnyi virulens-tenyészetet (a különben halálos adagnak mintegy 500,000-szeresét) ojtottam szintén hasüregébe. Egy órával a fertőzés után a hasüri folyadékból szinte teljesen eltűntek a bacillusok; alig látni itt-ott részint jól festődő ép alakokat, részint fuchsinnal csak halaványan megfestődő árnyékokat. A hasüri savóban rendkívül sok phagocytát látni, melyekben igen sok (egészen 30) bakterium foglal helyet. Egy órával a fertőzés után tehát már mozgósította a szervezet az immunizálás következtében fokozottan működő falósejteket, melyek a fertőzésre használt bakteriumok javarészt fel is falták. A beoított temérdek bakteriummal azonban nem tudott megküzdeni a szervezet, mert négy órával a fertőzés után kifejezett phagocytosis volt ugyan megállapítható, egyúttal azonban a falósejtektől megkímélt bakteriumok elszaporodásnak indultak és 13 órával a fertőzés után megölték az állatot. Az állat halála után a vérben és a hasüreg savójában óriási tömegű bakterium volt kimutatható. Hogy az immunizálás csakugyan lényeges befolyással volt a szervezet védőképességének fokozódására még a szóban forgó és technikai okokból választott tulzott fertőzés esetén is, az nyilvánvaló, de még jobban feltűnik, ha azt vizsgáljuk, milyen változás történik nem immunizált állat hasüregében ugyanilyen fertőzés esetén.

A 6. sz. 700 gr. súlyú nyúl hasüri savójában $\frac{1}{2}$ kacsnyi virulens tenyészetnek beoítása után egy órával annyi bakterium mutatható ki, amennyi az immunizált állatban a fertőzés után csak 4 óra múlva volt megállapítható. Sem ekkor, sem pedig 4 órával a fertőzés után phagocytosisnak nyoma sincs. Öt órával a fertőzés után az állat septicæmia hæmorrhagiában elpusztult.

Összefoglalás.

A vázolt kísérletekből a következő tanulság vonható le.
Oxygennel érintkező idősebb levestenyészetben a baromti-

cholera-bacillusok egy része nem az oxigén, hanem talán a levegőben foglalt sajátlagos bomlástermékek hatására ugrásszerű variáción megy át, melynek következtében a mutált bakteriumok nagyobbak lesznek, agartenyészetekben barnaszínű telepekben nőnek és jóformán teljesen elveszítik buroktermelőképességüket és virulentiájukat. Az avirulenssé vált bakteriumok az állati testben részben feloldódnak, részben falósejtekbe kerülnek, míg a virulens bacillusok az állati testben csak kis fokban vannak kitéve a szervezet bakteriumoldó hatásának és nem esnek a phagocytosis áldozatául. Az avirulenssé vált bakteriumokkal kísérleti állatokat immunizálni sikerül a virulens bakteriumokkal történő fertőzéssel szemben. A kifejlődő immunitás mechanizmusára vonatkozólag végzett kísérlekből kiderült, hogy az avirulens bacillusokkal ojtott állatban rövid idővel a virulens fertőzés után a bakteriumok egy része feloldódik és egyúttal kifejezett phagocytosis indul meg.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1919 márczius 17.-én tartott üléséből.)

AZ EGYPATÁSOK VÉRSAVÓJÁNAK COMPLEMENTUMELLENES HATÁSÁRÓL.

(Kivonat.)

MANNINGER REZSŐ-től.

Minthogy az egypatások vérsavója friss állapotban complementumellenes hatást fejt ki, egypatásokból származó vérsavókat a complementumkötési kísérlet előtt inaktiválni, vagyis melegítéssel complementumellenes hatásuktól megfosztani szokás. Minél magasabb hőfokon sikerül csak az inaktiválás, annál kifejezettebb az illető vérsavó complementumellenes hatása. Lovak vérsavója többnyire már 56° -on, ritkábban 60° -on, öszvérek vérsavója 60 — 64° -on, szamarak vérsavója 63 — 64° -on inaktiválható.

Érdekesnek látszott annak a kérdésnek a tisztázása, hogy mi az oka annak, hogy a különböző egypatások vérsavója különböző erősségben gátolja a complementum működését. Eleve valószínűtlennek látszott a feltevés, hogy az egypatások vérsavójában különös complementumellenes anyagok vannak, melyek másféle, nem complementumellenes vérsavókban (például ember-, nyúl- és tengerimalaczevérsavóban) nem fordulnak elő. FRIEDEMANN¹ ugyanis kimutatta, hogy az embervérsavó globulinjai, tehát rendes vérsavóalkotórészek, bizonyos körülmények között erélyes complementumellenes hatást fejthetnek ki, másrészt tudjuk, hogy a tengerimalaczevérsavót, mely rendes viszonyok között nem fejt ki complementumellenes hatást, különböző physikai beavatkozásokkal complementumgátló hatással lehet felruházni.

¹ Zeitschrift f. Hygiene, 1910. 67. k., 279. l.

Valószínűbbnek látszott az a gondolat, hogy az egypatások vérsavójának complementumellenes hatása a vérsavóban foglalt globulin funkciója. Dolgozatomban egyrészt ennek az összefüggésnek fennállását iparkodtam tisztázni, másrészt kimutatni igyekeztem azt, hogy minő változás eredménye a complementumellenes hatás eltünése a vérsavók melegítése után.

I. Összefüggés a vérsavók globulintartalma és complementumellenes hatása között.

A vérsavók vizsgálatát mindig 24 órával a vérvétel után kezdtem meg. Minden vérsavót physiologiás konyhasóoldattal kétszeresére higitva több részletre osztottam szét és egy-egy próbát kezeletlenül hagytam, a többit pedig 50, 55, 60, illetőleg 65°-ú vízfürdön félóra hosszat melegítettem. Azután az egyes próbákat complementumellenes hatásuk erősségére vizsgáltam meg. E célból a vérsavópróbákból fokozatosan csökkenő mennyiségeket (1'0—0'001 kcm.) egységnyi complementumot tartalmazó tengerimalaczsavómennyiséggel kevertem és az egyes csövek tartalmát physiologiás konyhasóoldattal 3—3 kcm.-re egészítettem ki. Ezután a csöveket 20 perczig 40°-os vízfürdőn tartottam. Ez idő elteltével valamennyi csöbe 1 kcm. 5%-os juhvérséjtemulsiót, valamint két egységnyi hæmolyisint mértem és a csöveket újból vízfürdőbe helyeztem. Husz percz mulva azután az egyes csövekben megállapítottam az esetleg bekövetkezett vérséjtoldódás fokát, illetőleg annak fordított értékét, a vérsavó complementumgátló hatásának fokát. Az említett csövekben kívül természetesen a vérséjtoldásban szereplő egyes anyagok hatékonyságának megállapítására ellenőrző próbákról is gondoskodtam.

Ezenkívül meghatároztam minden vérsavó fehérjetartalmát. továbbá a vérsavókban foglalt albumin- és globulinfractiók mennyiségét és a kapott értékekből kiszámítottam a vérsavók fehérjehányadosát (fehérjehányados $= \frac{\text{albumin mennyisége}}{\text{globulin mennyisége}}$).

A vérsavók albumin- és globulinfractiójának befolyását a vérsavó complementumellenes hatására úgy vizsgáltam, hogy a vérsavókból ammoniumsulfattal fractionáltan kicsaptam az albumi-

nokat és globulinokat és azokat külön-külön újból feloldottam. A dialyzálással sótartalmuktól megfosztott albumin- és globulinoldatokat, melyeket a további vizsgálat előtt konyhasóval isotonióssá tettem, ugyanolyan módon kezeltem tovább, mint az eredeti vérsavókat. Öt-öt részletre osztva azokat, egy-egy próbát kezeletlenül hagytam, a többit pedig 50, 55, 60, illetőleg 65°-ú vízfürdön inaktiváltam és azután a vérsavók vizsgálatánál már említett módon megállapítottam az egyes próbák complementumgátló hatását. Megjegyzem, hogy az albumin, illetőleg a globulin koncentrációja ez oldatokban ugyanakkora volt, mint a milyen töménységben a konyhasóoldattal kétszeresére hígított vérsavókban fordultak elő ezek a fehérjék.

A kísérletek eredményei.

E vizsgálatok folyamán kiderült, *hogy a vérsavók complementumellenes hatását a bennök foglalt globulinok eredményezik.* A vérsavókban foglalt globulinok ugyanis körülbelül ugyanolyan mértékben gátolták a vérsejtek feloldódását, mint az eredeti vérsavók és a globulinoldatok complementumellenes hatásának csökkenése a melegítés következtében párhuzamosan haladt a vérsavók complementumellenes hatásának a melegítés folytán beállott gyengülésével. Az albuminoldatok ezzel szemben egyáltalán nem fejtenek ki complementumellenes hatást, sőt némiképen elősegítik a vérsejtek oldódását.

Ha e szerint a vérsavók complementumgátló tulajdonsága csakugyan a globulinokra vezethető vissza, akkor a további kérdés az, hogy a complementumgátlás mechanizmusa chemiai vagy physikai folyamatban kereshető-e.

Vizsgálataim arról győztek meg, hogy a complementumgátlás physikai folyamat eredménye. Kiderült ugyanis, hogy ha az egységnyi complementumadagnál nagyobb mennyiségű tengerimalaczvérsavóval keverünk össze bizonyos, változatlan mennyiségű egypatásvérsavót vagy globulinoldatot, akkor, minél több complementumot használunk a kísérlethez, annál nagyobb a complementum hatástalanná váló részének absolut mennyisége, viszont annál inkább csökken az inaktiválódó részletnek a felhasz-

nált egész complementummennyiséghez való viszonya. Ugyanaz a globulinmennyiség tehát gyengébb complementumoldatban aránylag több complementumot tesz hatástalanná, mint töményebb oldatban. Ez a tapasztalat már önmagában adsorptióra utal.

A kísérleteimben talált számadatok matematikai feldolgozása még inkább bizonyítja e felfogás valószínűségét. Ha ugyanis c_1 -gyel jelöljük a kísérletben felhasznált complementummennyiség hatástalanná váló részletét, c_2 -vel pedig hatóképes állapotban maradó részét, akkor azt tapasztaljuk, hogy

$$c_1 = 2.37 \cdot c_2^{0.22}.$$

Minthogy adsorptiók jelenségekre általában hasonló képletek érvényesek, mint az említett, feltehető, hogy az egypatások vérsavójának complementumellenes hatása annak a folyamán, hogy a vérsavók globulinjai adsorbeálják a complementum valamelyik összetevőjét. Az adsorptio szempontjából elsősorban az a lényeges, hogy milyen a vérsavóban foglalt globulinok dispersitásának a foka. Valószínű ugyanis, hogy nem minden globulinrészecske adsorbeál egyformán, hanem csak azok fejtenek ki ilyen hatást, a melyeknek az adsorptio feltételeinek megfelelő optimalis felületük van.

Ebben a felfogásunkban megerősítenek SACHS és munkatársainak, valamint más vizsgálóknak észleletei, melyekből kiderül, hogy a tengerimalacsvérsavót különböző behatásokkal, melyek gyakran a vérsavó megzavarosodását vagyis a benne foglalt globulinok dispersitásának csökkenését okozzák, complementumellenes tulajdonsággal lehet felruházni. Így először SACHS és TERUCHI¹ kimutatta, hogy a tengerimalacsvérsavó destillált vízzel higitva complementumellenes hatásra tesz szert. Kimutatták továbbá, hogy a tengerimalaczsavó complementumhatása megszűnik, ha azt baktériumokkal (SACHS és RITZ²), kaolinnal, agarral vagy más suspensiókkal (HIRSCHFELD és KLINGER³) vagy

¹ Berliner klin. Wochenschr. 1917. 16., 17. és 19. sz.

² Zeitschr. f. Immunitätsforschung. 1918. 26. k., 483. l.

³ Ugyanott. 1914. 21. k., 40. l.

cobraméreggel (SACHS, OMOROKOW, RITZ¹ és mások) keverjük, vagy ha hosszabb ideig rázzuk (JAKOBY és SCHÜTZE,² SCHMIDT és LIEBERS,³ HIRSCHFELD és KLINGER).⁴

Feltételezni szokás (SACHS és munkatársai,⁵ SCHMIDT és LIEBERS, HIRSCHFELD és KLINGER), hogy ezek a behatások a vérsavó globulinjainak megváltozását idézik elő, nevezetesen dispersitásuk fokát csökkentik, úgyhogy az immár durvább globulinrészecskék physikai úton reagálnak a complementummal.

E szerint a tengerimalaczsavó globulinjai, melyek normális állapotukban egészen másképp viselkednek, mint az egypatások vérsavójában foglalt globulinok, az említett behatásokra ugyanolyan állapotba kerülnek, a minőben az egypatások vérsavójának globulinjai már rendes viszonyok között vannak. A tengerimalaczsavó globulinok dispersitásának fokát azonban bizonyos határon túl nem szabad csökkenteni, mert különben a vérsavó complementumhatása megmarad. Ez az eset következik be akkor, ha például destillált vízzel annyira hígítjuk a vérsavót, hogy szemmel látható durva csapadék keletkezik.

Ezek a tapasztalatok bizonyára jogosítanak arra a következtetésre, hogy *a vérsavó: complementumellenes hatása bizonyos meghatározott globulinfelületekhez kötött tulajdonság.*

A globulinoldatok annál állandóbbak, minél finomabban elosztott bennük a globulin. Általánosan ismeretes tapasztalat, hogy az egypatások vérsavója, szemben a tengerimalaczsavóval, gyakran már 24-48 óra alatt megzavarosodik és benne néhány nap múlva globulinokból álló üledék képződik. Ez a tapasztalat a mellett szól, hogy az egypatások vérsavójának globulinjai különösképen labilisak és «oldataikban», így a vérsavóban is, meglehetősen durva részecskék alakjában fordulnak elő és e tekintetben, ha nem is épen suspenzoidok, mindenesetre azonban átmenetet alkotnak a típusos emulzoidoktól a suspenzoid-

¹ Ugyanott. 1911. 10. k., 285. l.; 1911. 11. k., 710. l.; 1912. 13. k., 62. l.

² Ugyanott. 1910. 4. k., 730. l.

³ Ugyanott. 1913. 19. k., 373. l.

⁴ Ugyanott. 1914. 21. k., 40. l.

⁵ Kolloidzeitschrift. 1919. 24. k., 113. l.

szerű colloidok felé.¹ Minthogy az albuminok stabilis emulsiók, a globulinok stabilitását és így dispersitásuk fokát is befolyásolhatják (L. FRIEDEMANN, idézett dolgozata). Minthogy pedig az egypatások vérsavójában aránylag kevés az albumin, a globulinok dispersitásának foka éppen megfelelő arra, hogy a complementum egyik alkotórészének adsorptiója bekövetkezhessek.

A vérsavó eredete	Kórjelzés	100 cm ³ vérsavóban volt			Fehérje-hányados	Inaktíválási hőfok
		g fehérje	g albumin	g globulin		
B. jelz. ló	Egészséges	8.48	3.54	4.94	0.72	55°
758. sz. ló	"	9.30	3.82	5.48	0.70	"
709. sz. ló	Kruppos tüdőgyulladás	6.12	2.52	3.60	0.70	"
IV. sz. öszvér	Egészséges	7.84	3.12	4.72	0.66	60°
753b. sz. öszvér	Járványos nyirokér- gyulladás	7.40	2.84	4.56	0.62	"
514. sz. ló	Takonykór	9.14	3.40	5.74	0.59	"
757. sz. ló	Felfekvések	8.68	2.92	5.76	0.51	"
735. sz. ló	Kruppos tüdőgyulladás	8.86	2.96	5.90	0.50	"
753a. sz. öszvér	Járványos nyirokér- gyulladás	8.64	2.50	6.14	0.41	65°
A. jelz. számár	Egészséges	9.81	2.70	7.11	0.38	"
I. sz. öszvér	Járványos nyirokér- gyulladás	8.12	2.12	6.00	0.35	"
Á.K.jelz. számár	Egészséges	8.06	1.62	6.44	0.25	"

Ebben a tekintetben utalok azokra a fehérje-, albumin- és globulinértékekre, melyeket a különböző vérsavók vizsgálata folyamán megállapítottam. A táblázat adataiból nevezetesen kiderül, hogy a magasabb hőfokon inaktíválható, tehát erősebb complementumellenes hatással bíró vérsavók globulintartalma nagy általánosságban nagyobb ugyan a kevésbé gátló vérsavókénál, a vérsavók globulintartalma azonban korántsem halad oly párhuzamosan a complementumellenes hatás fokával, mint

¹ L. BELÁK: Biochemische Zeitschrift, 1918. 90. k., 96. l.

a vérsavók fehérjehányadosa. Ebből következik, hogy a vérsavók complementumellenes hatásának erőssége nem annyira a vérsavóban foglalt globulinok abszolút mennyiségétől függ, hanem attól, hogy mekkora az illető vérsavó fehérjehányadosa, vagyis, hogy milyen viszonyban van a vérsavó albumintartalma globulintartalmához.

Az inaktíválási hőfokot tekintve a vérsavókat három csoportba oszthatjuk.

Az első csoportba (fehérjehányados 0.70 vagy ennél nagyobb) csak lóvérsavók tartoznak, a második csoportban (fehérjehányados 0.66—0.50) öszvér- és lóvérsavók vannak képviselve, a harmadik csoport pedig (fehérjehányados 0.41 vagy ennél kisebb) csak öszvér- és szamárvérsavókat foglal magában.

A fehérjehányados viselkedése e szerint eléggé megmagyarázza a ló-, öszvér- és szamárvérsavók complementumellenes hatása között meggyilvánuló eltéréseket. Minthogy továbbá a fehérjehányados még ugyanabban az állatban sem képvisel állandó értéket, hanem a globulinok mennyiségének megszorodása következtében (JOACHIM,¹ MOLL² stb.) időnként változhatik, érthető az is, hogy a vérsavók fehérjeösszetételében jelentkező változások szükségkép kifejezésre jutnak a vérsavók serologiai viselkedésében is. Ebből magyarázható többek között az, hogy miért nem lehet egyes lóvérsavókat 56°-on inaktíválni és hogy miért kell néha ugyanazon ló vérsavóját ismételt vérvételek esetén hol 56°-on, hol pedig 60°-on inaktíválni.

II. A hevítés befolyása a vérsavó globulinjainak állapotára.

Az első fejezetben láttuk, hogy az egyptások vérsavójának complementumellenes hatása arra vezethető vissza, hogy az aránylag durván elosztott globulinok felülete adsorptio létrejöttére alkalmas. A hevítés hatása ennek folytán nem complementumellenes anyagok «megsemmisítése» lehet, hanem fel kell tennünk, hogy a hevítés a globulinok állapotának olyan változását

¹ Pflügers Archiv f. die gesamte Physiologie, 1903. 100. k., 611. l.

² Hofmeisters Beiträge, 1904. 4. k., 563. l.

idézi elő, melynek következtében az adsorptióra alkalmas felületek veszendőbe mennek. Arra lehet gondolni, hogy a globulinok állapota nagyjában az albuminokéhoz válik hasonlóvá, melyek tudvalevőleg nem gátolják a complementum hatását. E felfogásból következnek, hogy a melegítés a globulinok stabilitását fokozza és így a globulinok a hevítés után fehérjekicsapó anyagokkal szükségképen nehezebben csaphatók ki, mint hevítés előtt.

E felfogás bizonyítására kezeletlen és $50-65^{\circ}$ -ra hevített vérsavó- és globulinoldatokat savoldatok és 50% -os alkohol hatásának tettem ki.

a) Kicsapási kísérletek tejsavoldatokkal.

Savoldatokul tejsavból és tejsavas natriumból készült keverékeket használtam, melyek hydrogen-ionconcentratiója $[H^+]$ $1.7 \cdot 10^{-5}$ és $2.8 \cdot 10^{-4}$ között változott.

A savoldatokból a vérsavó- és globulinoldatok $1-1$ cm.-nyi mennyiségéhez $1-1$ cm.-t mértem és $5-10$ perczig tartó állás után megállapítottam azt, hogy mely csövekben következett be kicsapódás.

E kísérletek szerint a friss vérsavókból a $0.7-1.4 \cdot 10^{-4} [H^+]$ -jú oldatok csapták ki a globulinokat, és pedig az optimum a $0.7 \cdot 10^{-4} [H^+]$ -jú oldatnak felelt meg. Az 50° -ra hevítés után csak az $1.4 \cdot 10^{-4} [H^+]$ -jú oldatban volt igen csekély opalescentia megállapítható. A kicsapódás optimuma e szerint erősebb savoldat felé tolódott el. A kicsapódás fokának gyengülése a mellett szól, hogy már ez a hőfok is bizonyos mértékben stabilizálta a globulinokat. Még stabilisabbak a globulinok az 55° -ra hevített vérsavóban, a savoldatok egyikében sem mutatkozott ugyanis kicsapódás. Ha azután 60° hatásának tesszük ki a vérsavót, újból jelentkezik nyomokban kicsapódás, mely a 65° -ra hevített vérsavóban még kifejezettebbé válik. A 65° -ra hevített vérsavópróbákban azonban már a melegítés maga is závarodást idéz elő annak jeleül, hogy a hőmérsékleten a fehérjék már kezdenek megolvadni.

A vérsavókhöz hasonlóan viselkednek a globulinoldatok. A kicsapódás optimuma más $[H^+]$ -jú oldatban van ugyan, a

kicsapódás fokában, valamint az optimum viselkedésében a hevítés hatására bekövetkező változás azonban éppúgy kimutatható, mint a vérsavókban. Annak oka, hogy a globulinoldatokból más savoldatok hozzáadására csapódik ki a globulin, mint a vérsavókból, abban kereshető, hogy a vérsavókban fehérjéken és konyhasón kívül más elektrolytok, nevezetesen carbonatok és foszphatok is vannak, melyek a savoldatok $[H^-]$ -jét csökkentik.

b) Kicsapási kísérletek alkohollal.

Ezekben a kísérletekben a vérsavókat és a globulinoldatokat egyenlő mennyiségben 50%-os alkohollal kevertem és az összekeverés után azonnal megállapítottam azt, hogy az alkohol milyen fokban csapta ki az eredeti és a különböző hőfokokra melegített vérsavó- és globulinoldatokból a globulint. Ezek a kísérletek szintén teljesen egyöntetűen folytak le és arra az eredményre vezettek, hogy az 50°-ra hevítés már lényegesen növeli a globulinok stabilitását, az 55—60°-ra melegítés pedig annyira stabilizálja a globulinokat, hogy alkohol hozzáadására éppen csak nyomokban jelentkezik opaleszkálás. Ha a vérsavót 60° fölé hevítjük, akkor a hevítés következtében létrejövő zavarodással egyidejűleg a globulinok stabilitása csökken.

E kísérletek eredménye szerint az 50—60°-ra melegítés csakugyan stabilizálja többé-kevésbé a globulinokat, a 65°-ra hevítés azonban ismét csökkenti stabilitásukat úgy a hydrogen-ionok, mint pedig az alkohol kicsapó hatásával szemben. Kérdés már most, milyen változás áll be a globulinokon a hevítés következtében, nevezetesen minek tulajdonítható az, hogy melegítéskor a globulinok stabilitása eleinte fokozódik, később pedig csökken.

Erre nézve a savoldatokkal végzett kísérletek eredménye vezethet nyomra. A kicsapódás optima ugyanis, mint láttuk, a magasabb hőmérséklet behatására savanyúbb oldat felé tolódik el, a miből arra lehet következtetni, hogy hevítés közben a vérsavók és a globulinoldatok lúgosabbá válnak. LIEBERMANN¹ egyébiránt

¹ Biochemische Zeitschrift, 1907. 4. k., 25. l.

közvetlen elektrometriás méréssel is megállapította, hogy a vérsavók inaktíválása közben a hydroxyl-ionconcentratio mintegy kétszeresére növekedik.

Ugyanez a jelenség állapítható meg az olyan fehérjeoldatokban is, melyeket annyira felmelegítenek, hogy a fehérjék megalvadására kerül a sor (SÖRENSEN és JÜRGENSEN,¹ QUAGGLIARELLO²), úgyhogy arra lehet következtetni, hogy már az inaktíválási hőmérsékletek (50—65°) is ugyanolyan chemiai változást idéznek elő a fehérjékben, tehát a globulinokban is, a milyen a fehérjék hőmegalvadása folyamán következik be. Minthogy pedig CHICK és MARTIN³ szerint a fehérjék megalvadása vízfelvétellel járó reactio, feltehető, hogy a vérsavó inaktíválásakor a globulin a vízzel chemiai kölcsönhatásba kerül, ebből kifolyólag jobban oldódik és oldata stabilisabbá válik.

E feltevés szerint tehát azokban a vérsavókban és globulinoldatokban, melyeket magasabb hőmérsékletek hatásának teszünk ki, azért stabilisabbak a globulinok, mint az eredeti vérsavókban és globulinoldatokban, mert az inaktíválás folyamán vízzel egyesülnek és ennek folytán az emulsoid-colloidok jellemvonásait veszik fel.

E mellett a felfogás mellett szól az is, hogy a vérsavók és a globulinoldatok inaktíválása a cseppszám növekedésével vagyis a felületi feszültség csökkenésével jár. Már TRAUBE⁴ megállapította, hogy a lóvérsavó felületi feszültsége 56°-ra melegítés közben csökken. A magam kísérletei szerint úgy a vérsavóknak, mint pedig a globulinoldatoknak felületi feszültsége a hőmérséklet emelkedésével folytonosan csökken és a csökkenés még 65°-nál sem éri el határértékét.

Ezt a tapasztalatot aligha lehet másképen magyarázni, mint a hogy BERZELLER⁵ értelmezte a fehérjeoldatok felületi feszültségének a felforralás közben beálló csökkenését. BERZELLER felteszi, hogy ez a jelenség a fehérjék hydrolysisének lehet a következménye.

¹ Biochemische Zeitschrift, 1911. 31. k., 397. l.

² Biochemische Zeitschrift, 1912. 44. k., 157. l.

³ Journal of Physiology, 1910. 40. k., 404. l.

⁴ Biochemische Zeitschrift, 1908. 10. k., 380. l.

⁵ Biochemische Zeitschrift, 1913. 53. k., 215. l.

E szerint a vérsavó- és globulinoldatok felületi feszültségének csökkenése az inaktiválási hőmérsékletek behatására szintén arra utal, hogy a globulin a vízzel chemiai kapcsolatba kerül.

Ha áll az, hogy a vérsavóknak $50-60^{\circ}$ -ra hevítése közben a bennük foglalt globulinok colloid állapota megváltozik, nevezetesen a globulinok emulsoidokká válnak, akkor érthető az is, hogy kellő fokra való melegítés miatt szünteti meg a vérsavók complementumellenes hatását. Az emulsoid jellegű, chemiai tulajdonságaikban is megváltozott globulinoknak ugyanis nincsen már adsorptiós hatás kifejtésére alkalmas felületük. Valamivel nehezebben érthető a vérsavók és globulinoldatok complementumellenes hatásának megszűnése 65° -ra való felmelegítés után, mert ebben az esetben bonyolultabb viszonyokkal állunk szemben. A már ismertett kísérletekből ugyanis kiderül, hogy a vérsavók és globulinoldatok felületi feszültsége csökken ugyan 65° -ra melegítés közben is, ezzel szemben azonban a globulin savdatokkal és alkohollal ismét könnyebben csapható ki. A felületi feszültség csökkenése arra utal, hogy a globulinoknak még suspensoidszerű része a vízzel reakcióba lép és ennek következtében a vérsavó elveszti complementumellenes hatásának a 60° -ú hőmérséklettel esetleg még ki nem küszöbölhető részét. A kicsaphatóság növekedése ellenben arra vezethető vissza, hogy a 60° -nál magasabb hőmérséklet behatásának kitett globulinok egy része már a megalvadás határára kerül. A globulinoknak ez a része természetesen már durván dispergált suspensoid (erre utal a vérsavóknak megzavarodása 65° -ra hevítés közben), mely savdatokkal és alkohollal könnyen kicsapható. A globulinoknak ez a része szintén nem fejthet ki complementumellenes hatást, mert a részecskék specifikus felülete, éppen kistokú dispersitásuk miatt, túlságosan kicsiny adsorptio bekövetkezéséhez.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920. június 7-én tartott üléséből.)

A FOLYADÉKOK FELSZÍNÉRŐL A POLÁROZÁS SZÖGE ALATT VISSZAVERŐDÖTT FÉNY VIZSGÁLATA.

RYBÁR ISTVÁN 1. tagtól.

(Székfoglaló.)

TARTALOM:

1. §. Történeti áttekintés.
2. §. A vizsgálat célja.
3. §. A kísérleti módszer.
4. §. A folyadékok ellipticitási együtthatójának rendszeres megvizsgálása. *a)* Előzetes quantatív mérések. *b)* Rendszeres quantitatív mérések.
5. §. Eredmények.

1. §. Történeti áttekintés.

BREWSTER¹ számos kísérleti megfigyelés alapján mondotta ki azt a tapasztalati eredményt, hogy az n törésmutatójú közeg határfelületéről

$$i = \arctg n$$

szög alatt visszaverődött fény síkban, még pedig a beesés síkjában polározott. E szöget épp ez okból az illető közeg *polározási szögének* nevezte el.

De már maga BREWSTER észrevette, hogy törvénye nem általánosan érvényes. Kevéssel később AIRY² szintén rámutatott a

¹ D. BREWSTER, Phil. Trans. p. 125. 1815.

² G. B. AIRY, Cambr. Trans. 4 p. 219. 1832.

BREWSTER-féle törvény fogyatékoságára. Kimutatta, hogy a polározás szöge alatt visszaverődött fénynek általánosságban van oly, bár igen kicsiny amplitudójú összetevője is, a mely a beesés síkjára merőleges síkban polározott úgy, hogy a visszaverődött fény nem síkban, hanem igen lapult ellipszisben polározott.

AIRY qualitativ vizsgálatait JAMIN¹ beható quantitativ észlelések tárgyává tette.

Kevéssel JAMIN vizsgálatai után CAUCHY² e jelenség elméletét fejtette ki. CAUCHY után számosan, és pedig különböző fel-fogással magyarázták e jelenséget. Ez elméletek közül legelfogadottabbak azok, a melyek a visszaverő felületen (a két közeg határfelületén) igen vékony (fényhullámhossznyi rendű) folytonos átmeneti réteget úgynevezett felületi réteget tételeznek fel, s a BREWSTER-féle törvénytől való eltérést eme felületi réteg jelenlétére vezetik vissza.

Ez elméletek végérvényes kifejezéseiben egy állandó, a JAMIN által elnevezett *ellipticitási együttható* szerepel, mely a felületi rétegre jellemző, s a mely a BREWSTER-féle törvénytől való eltérés mértékét adja. Az ellipticitási együttható physikailag jelenti a polározás szöge alatt visszaverődő fényben a beesés síkjában történő rezgés amplitudójának az erre merőleges rezgés amplitudójához való viszonyát, hányadosát, azaz az ellipszis tengelyviszonyát akkor, ha a beeső fény a beesés síkjához képest 45° azimutban síkban polározott. Ez együttható előjele egyes anyagoknál positiv, másoknál negativ.

Az előjel az ellipszis körülfutásának irányát fejezi ki. Még pedig, ha a fénynel szembe tekintve, a 45° azimutban polározott fény rezgése a bal felső és a jobb alsó quadransban történik, akkor positiv ellipticitási együttható esetén a visszaverődött fényben az ellipszis körülfutásának iránya az óramutató járásával ellenkező irányú, negativ ellipticitási együttható esetén pedig a körülfutás az óramutató járásával megegyezik.

A múlt század végén DRUDE³ a JAMIN-féle méréseket meg-

¹ J. JAMIN. Ann. Chim. Phys. 29. p. 263., 31. p. 165. 1850.

² A. CAUCHY, Compt. Rend. 30. p. 465. 1850.

³ P. DRUDE, Wied. Ann. 36. p. 532. 1889.

ismételte, s arra az eredményre jutott, hogy a közeg ellipticitási együtthatója nem tekinthető az illető közeg jellemző állandójának, mert az értéke az időben változik. Kristályok friss hasadási lapjain végzett megfigyelései azt mutatták, hogy a frissen hasított lapról visszaverődött fényre nézve a BREWSTER-féle törvény csaknem teljesen szigorúan érvényes, azaz ellipticitási együtthatója közel zérus, de a hasítás után az eltérés mind nagyobb és nagyobb lesz, az ellipticitási együttható abszolút értéke eleinte rohamosan, később mind lassabban és lassabban növekszik. DRUDE e jelenséget azzal magyarázta, hogy a közegek szabad, a levegővel érintkező felületei lassan beszennyeződnek, s ez által felületi réteggel vonódnak be. E felfogás helyességét igazolja az a megfigyelése is, hogy az ellipticitási együttható értéke mesterségesen csiszolt felületeken, melyeken tudvalevőleg a csiszoló anyagok (olajok, zsírok stb.) a felületet vékony réteggel vonják be, különösen nagy értékű.

Legújabbán Lord RAYLEIGH¹ a víz ellipticitási együtthatóját, mely a legváltozékonyabb, különös gonddal vizsgálta meg. Kísérleteihez lehető legtisztább vizet használt, sőt a víz felszínét alkalmas módon az elérhető legtisztábbá tette. Eredménye az volt, hogy az ellipticitási együttható közvetlenül a felszín megtisztítása után rendkívül csekély, de abszolút értéke a felszín beszennyeződésével rohamosan megváltozik. A legtisztább víz ellipticitási együtthatója Lord RAYLEIGH mérései szerint $+0.00018$, mely JAMIN eredményétől, -0.00577 -től, mely nyilván szennyezett vízre érvényes, nagy mértékben eltér. Lord RAYLEIGH a tiszta víz ellipticitási együtthatójának eme rendkívül kicsiny értékéből és a szennyeződés nagymérvű befolyásából arra következtetett, hogy «it is even possible, that there would be no sensible ellipticity for the surface of a chemically pure body in contact only with its own vapour».² Tehát e szerint a BREWSTER-féle törvénytől való eltérés valószínűleg kizárólag a felszín beszennyeződésétől származik.

¹ Lord RAYLEIGH. Phil. Mag. 33. p. 1. 1892.

² Lord RAYLEIGH. Phil. Mag. 33. p. 18. 1892.

2. §. A vizsgálat célja.

Az előző §-ban a polározás szöge alatt visszaverődött fény polározási állapotára vonatkozó eddigi vizsgálatokat ismertettem. E vizsgálatok alapján az ellipticitás okára vonatkozólag ma az a felfogás érvényes, hogy a BREWSTER-féle törvénytől való eltérést legnagyobbbrészt, egyes szerzők szerint valószínűleg kizárólag, azok a felületi rétegek okozzák, a melyek a felület beszennyeződése folytán származnak.

Ezzel a felfogással szemben kétségtelennek tartom, hogy a teljesen tiszta (minden szennyeződéstől mentes) felületen lévő kapilláris felület is ellipticitást létesít, mert hiszen ez a felület is inhomogén réteg. Ezt a felületi réteget az illető anyag anyagi minősége és thermikus állapota határozza meg. Tehát az ellipticitási együttható teljesen tiszta felületen sem lehet zérus, hanem zérustól különböző oly értékének kell lennie, mely az illető anyagra és annak thermikus állapotára jellemző.

Az előzőkben ismertetett megfigyelések nem adnak erre vonatkozólag biztos választ, mert semmi kritérium sincs arra nézve, hogy a kristályok hasítása után, illetőleg a folyadékfelületnek megtisztítása után a felület nincs-e már beszennyezve? Kétes marad e szerint a mai napig, hogy van-e a visszaverő közege és annak thermikus állapotára jellemző ellipticitási együttható, s ha van, akkor a sok különböző érték közül melyik a helyes?

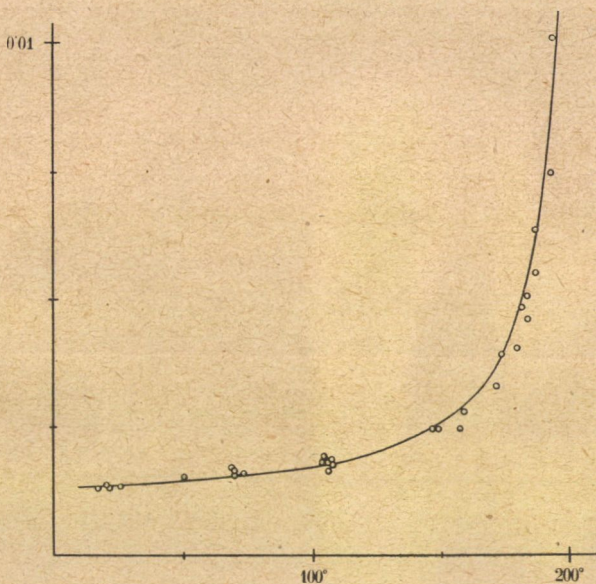
A következőkben igen egyszerű kísérleti módszert ismertetek, melylyel felfogásomat: a folyadékra jellemző ellipticitási együttható existenciáját bizonyítom; az ellipticitási együttható értékét, még pedig egészen a kritikus hőmérsékletig terjedő hőmérsékleti közben meghatározom és kimutatom, hogy az ellipticitási együttható oka ugyanarra a felületi rétegre vezethető vissza, a mely a folyadék felületi feszültségét okozza.

A kísérleti módszer birtokában tervbe vettem a folyadékok ellipticitási együtthatójának rendszeres megvizsgálását. Jelen dolgozatomban æthylætherre, benzolra, széndioxydra és æthylalkoholra vonatkozó észlelési eredményeimet közlöm; a többi egy későbbi dolgozatom tárgya lesz.

Vizsgálataimat a Magyar Tudományos Akadémia Mathematikai és Természettudományi Bizottságának megbízásából és anyagi támogatásával végeztem, a melyért a tekintetes Akadémiának e helyen is hálás köszönetet mondok.

3. §. A kísérleti módszer.

A kísérleti módszer kidolgozásának helyes irányát abban a nagyfotosságú kísérleti eljárásban kerestem és találtam meg,



1. ábra, æthylæther.

a melylyel báró EÖTVÖS LORÁND a folyadékok felületi feszültségét állandósította.¹

Ismeretes, hogy EÖTVÖS kapilláris vizsgálatáig a folyadékok felületi feszültségét is változékonnak ismerték. E változékony-ságot legszembevetőbben a víz mutatja. A változékony-ság okát «QUINCKE majd a rugalmas utóhatás egy nemének, majd a lassú szennyeződés eredményének tekintette a nélkül, hogy észleléseit attól teljesen függetlenné tudta volna tenni.»¹

¹ B. EÖTVÖS L. Math. és Term.-tud. Ért. 3. p. 54. 1884—85.

Eörvösnek sikerült legelőször a folyadéknak, még pedig anyagi minőségére és thermikus állapotára jellemző felületi feszültségét meghatározni. Kimutatta ugyanis, hogy a folyadék felületi feszültsége nem változik, sőt évek mulva is ugyanaz, illetőleg csakis a hőmérséklet változásának megfelelőleg változik, ha a tiszta folyadékot vékony csővel ellátott üvegedénybe öntjük, s azután azt, a folyadék forralása közben a cső végét leforrasztva, elzárjuk. Ez eljárással Eörvösnek sikerült a folyadék felületi sajátosságait állandósítani.

Mint hogy pedig az előzőekben felsoroltak szerint a folyadék ellipticitási együtthatója a legnagyobb valószínűség szerint a folyadék felületi sajátosságainak tulajdonítandó, közelfekvő volt az a gondolatom, hogy például a víznek ellipticitási együtthatóját, mely a levegőn óriási mértékben változó, az Eörvös által megadott módon beforrasztott edényben levő vízzel határozom meg. Várakozásom bevált. Az üveggömbbe beforrasztott és csak saját gőzével érintkező destillált víz ellipticitási együtthatója állandónak bizonyult s értéke megegyezett azzal az értékkel, melyet RAYLEIGH rendkívül nagy óvatosság mellett, a teljesen tiszta vízen, a felszín megtisztítása után közvetlenül észlelt. Ugyanezt az értéket nyertem azzal a vízzel is, a melyet még Eörvös saját kapilláris vizsgálatainál használt, s a mely több évtizeden át beforrasztva, a laboratóriumban nyugodtan állott.

Az ellipticitási együttható értéket RAYLEIGH módszerével határoztam meg. Bár lényegében RAYLEIGH módszerét alkalmaztam, mégis azt több tekintetben módosítanom kellett.

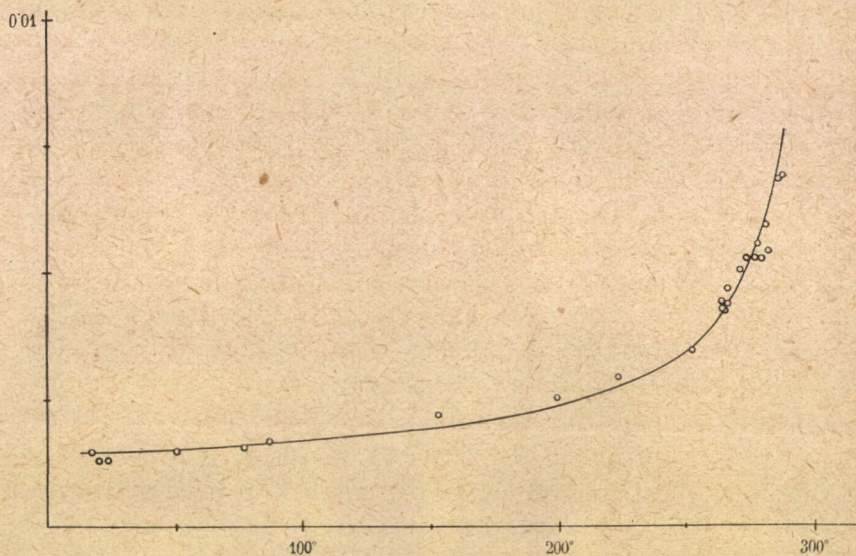
Legnagyobb nehézséget okozott a fényforrás alkalmas megválasztása. A kísérletekhez rendkívül intenzív fényforrás szükséges. JAMIN, DRUDE, RAYLEIGH napfényt használt. RAYLEIGH mesterséges fényforrással, elektromos ívfénnyel is kísérletezett, de eredményt nem ért el, mert e fényt e czélra gyengének találta.¹

Ez okból vizsgálataimat napfényvel kezdettem meg, de csakhamar kiderült, hogy ily rendszeres vizsgálatoknál, melyeknél egyetlen egy észlelési adat rendes meghatározása körülbelül egy órát vesz igénybe, nem bízhatom magamat az időjárás szeszélyére.

¹ Lord RAYLEIGH. Phil. Mag. 33. p. 10. 1892.

E kényszerítő szükség hatása alatt, bár RAYLEIGH sikertelen kísérletei nem kecsgették sok reménnyel, mégis megkísérletem a napfényt valamilyen alkalmas, mesterséges fényforrással helyettesíteni.

Hosszas előzetes kísérletek után a ZEISS-féle kis vetítő ívlámpa és alkalmas lencsék megválasztásával sikerült a czélt el-



2. ábra; benzol.

érnem, a nélkül, hogy a mérés pontossága nagy mértékben csökkent volna.

Egy másik módosítás a kritikus hőmérséklet közelében történt megfigyeléseknél vált szükségessé. Ugyanis itt az üvegedény (a vastagfalú üvegső), a mely a kérdéses folyadékot tartalmazta, a csőben uralkodó nagy nyomás következtében kettősentörővé válik, mely körülmény a fénynek a beesés síkjával parallel és az erre merőleges komponensei között jelentékeny phasiskülönbséget létesít. E phasiskülönbséget BABINET—SOLEIL-féle kompenzátorral kompenzáltam.

A rendelkezéseimre álló hely korlátolt volta nem engedi meg, hogy a kísérlet berendezését, a mérési módszert és elméletét ismertessem.

4. §. A folyadékok ellipticitási együtthatóinak rendszeres megvizsgálása.

a) *Előzetes kvantitatív mérések.*

Az előzőkben ismertetett kísérleti módszerrel kezdtem meg a folyadékok ellipticitási együtthatóinak rendszeres megvizsgálását.

Mindenekelőtt azt óhajtottam biztosan eldönteni, hogy az ellipticitási együttható és a felületi feszültség együttesen változik-e, s hogy az ellipticitást kizárólag az a felületi réteg okozza-e, a mely a felületi feszültséget létesíti?

1. E célból destillált vízben *nátriumthiosulfátot* oldottam fel, s az oldatot üveggömbbe, forralás közben beforrasztottam. Ha az oldatot összerázzuk, s azután nyugodtan állani hagyjuk, akkor a felületi feszültsége eleinte rohamosan, majd lassabban és lassabban, hetek, sőt hónapok múlva is csökken.

Az ellipticitási együtthatót és a felületi feszültséget közel egy időben határoztam meg. Az utóbbi az Eötvös-féle reflexiós módszerrel történt. Azt találtam, hogy az ellipticitási együttható negatív előjelű, s abszolút értéke állandóan, eleinte rohamosan, majd lassabban növekszik: a felületi feszültséggel teljesen együtt változik.

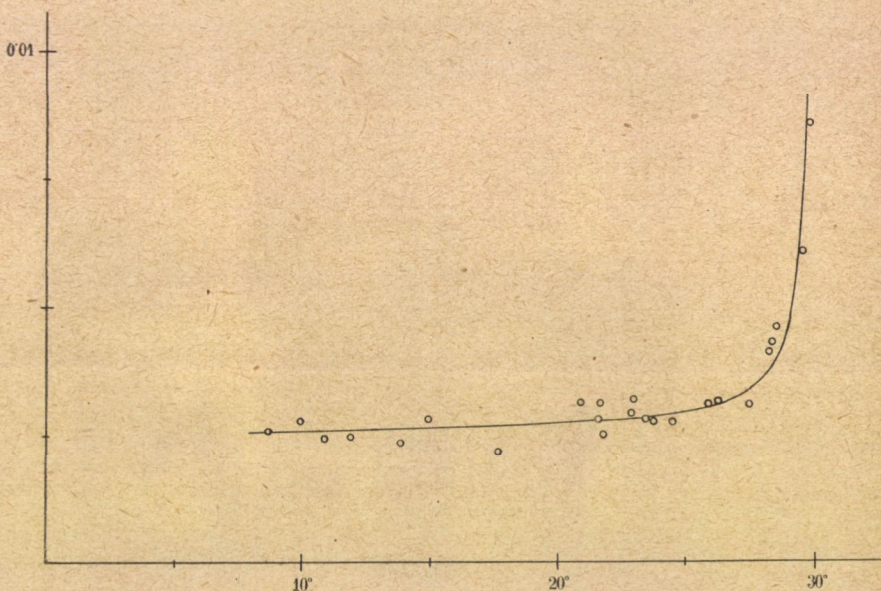
A *nátriumthiosulfát* 5%, 10%, 20% és 40%-os vizes oldatával végzett megfigyeléseim azt igazolták, hogy a nátriumthiosulfát-oldat ellipticitási együtthatója negatív és felületi feszültségével együtt változik, még pedig a felületi feszültség ki-sebbedésével abszolút értéke növekszik.

2. Kísérleti úton meggyőződtem arról, hogy a mely folyadékok felületi feszültségei a szabad levegőn nem igen változnak (mint a milyenek a kis felületi feszültségű folyadékok), azok ellipticitási együtthatói is a szabad levegőn csaknem teljesen állandók.

Mindezekből a tapasztalati tényekből következik, hogy a folyadék felületi feszültsége és ellipticitási együtthatója együtt változik, s ha az egyik állandó, a másik is állandó marad. Mindakettő tehát közös okra: a folyadék felületi rétegének jelenlétére vezethető vissza, miért is a kettő között kapcsolatnak kell fennállania.

b) Rendszeres quantitativ mérések.

Miután meggyőződtem arról, hogy a folyadék felületi feszültsége és ellipticitási együtthatója együtt változik, a tiszta folyadékok, még pedig elsősorban az organikus vegyületek ellipticitási együtthatójának a hőmérséklettel való függését vizsgáltam meg. Eddig négy vegyületnek: az *aethylaether*-, *benzol*-, *széndioxyd*- és *aethylalkohol*nak ellipticitási együtthatóját a szoba hőmér-



3. ábra; széndioxyd.

sékletétől egészen a kritikus hőmérsékletig terjedő közben rendszeres mérésekkel meghatároztam. A megvizsgált anyagok közül a három első úgynevezett egyszerű folyadék és olyan, a melynek kritikus hőmérsékletei elég távol vannak egymástól, a negyedik pedig olyan, a mely magas hőmérsékleten asszociál, a melyre tudvalevőleg az Eötvös-féle kapilláris törvény nem alkalmazható.

A chemiailag tiszta folyadékot üvegedénybe forralás közben beforrasztottam. Erre a célra különböző keresztmetszetű, falvastagságú és üveganyagból készült üvegcsoveket, sőt ott, a hol lehetett, üveggömböt is használtam. Ezt annál az oknál fogva

tartottam szükségesnek, hogy eldöntsem, vajjon az üvegedény alakja nincs-e a jelenségre észrevehető befolyással? Ily befolyást (gondos beállításnál) nem észleltem.

Megfigyeléseimet az alábbi táblázatokban állította m egybe :

Aethylæther.

Kritikus hőmérséklet: 194.0 C°

Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható	Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható
16.7	+0.00131	107.5	+0.00182
20.1	138	146.6	248
20.7	133	149.0	247
25.7	135	157.6	245
49.7	153	159.4	278
69.3	165	171.3	332
69.5	155	173.4	391
68.8	171	175.7	380
69.0	155	179.3	404
73.0	159	183.1	463
103.8	178	183.4	506
104.9	191	186.3	553
106.1	185	186.3	637
106.2	163	188.8	499
106.3	180	192.2	746
106.9	181	192.7	936
107.3	189	192.9	1012

Benzol.

Kritikus hőmérséklet: 292.0 C°

Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható	Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható
17.3	+ 0.00149	264.9	+ 0.00468
19.7	131	269.8	504
23.7	131	272.6	527
50.0	149	275.5	528
76.6	157	276.8	555
86.8	167	278.0	525
152.6	221	279.6	593
198.4	250	280.6	541
251.6	347	284.5	683
263.0	441	286.0	690
263.5	424	287.2	987
264.1	424	289.6	1955

Szendioxyd.

Kritikus hőmérséklet: 31·2.

Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható	Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható
8·8	+ 0·00257	23·6	+ 0·00278
10·0	275	23·9	275
11·0	239	24·6	274
12·0	245	26·0	305
13·9	232	26·4	315
15·0	279	27·5	332
17·8	215	27·6	310
21·0	312	28·4	413
21·7	276	28·5	433
21·8	310	28·7	461
21·9	348	29·7	607
23·0	290	30·2	907
23·1	320		

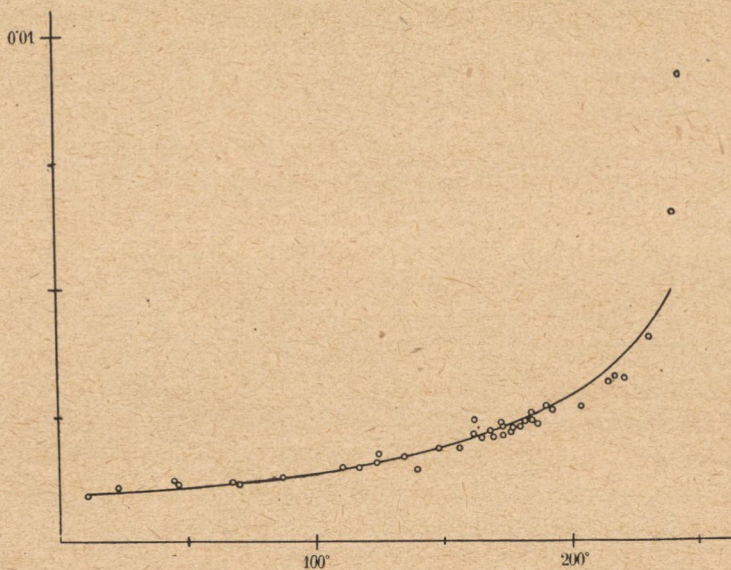
Aethylalkohol.

Kritikus hőmérséklet: 244·2 C°.

Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható	Hőmérséklet C°-ban	Ellipticitási együttható
10·3	+ 0·00093	173·1	+ 0·00227
22·8	109	173·2	232
44·9	123	173·8	206
46·5	113	176·9	216
67·3	117	177·3	221
69·9	115	180·6	224
86·2	128	182·2	295
110·5	147	182·3	235
117·2	148	182·5	301
124·1	157	184·7	254
125·0	173	185·0	237
135·8	167	187·1	230
138·8	147	190·1	265
148·2	185	192·7	257
156·1	184	203·9	265
161·9	211	214·7	312
162·1	238	217·2	322
165·1	201	220·9	319
168·1	215	230·7	400
169·7	205	240·5	591
172·9	232	243·9	1818

Ez észlelési eredmények azt mutatják, hogy a megvizsgált folyadékok ellipticitási együtthatói a hőmérséklettel változnak, még pedig a hőmérséklet emelkedésével előbb lassan, majd a kritikus hőmérséklet közelében rohamosan növekszenek.

Az ellipticitási együtthatónak a hőmérséklettől való függését a mellékelt rajzokban ábrázoltam (az 1. ábra *æthylætherre*, a 2. ábra a *bénzolra*, a 3. ábra a *széndioxydra* és a 4. ábra az *æthylalkoholra* vonatkozik), a melyekben a hőmérsékleteket az



4. ábra, *æthylalkohol*.

abscissákra, a megfelelő ellipticitási együtthatókat az ordinátákra mértem fel. A rajzokban feltüntetett görbék az észlelési adatokból a legkisebb négyzetek elméletével számított egyenszárú hyperbolák.

Az egyszerű folyadékokra, mint az *aethylætherre*, a *bénzolra* és a *széndioxydra* vonatkozó észlelési pontok közelítésben e hyperbolákon fekszenek. E hyperbolák asymptotái egy a kritikus hőmérséklet közelében lévő hőmérsékletre tartoznak.

Az *æthylalkohol*, mely tudvalevőleg magas hőmérsékleten associál, tehát az Eötvös-féle kapillaris törvénynek nem hódol,

magas hőmérsékleten jelentékeny eltérést mutat: az észlelési eredmények a kritikus hőmérséklet közelében nem simulnak a hyperbolához.

5. §. Eredmények.

1. Sikerült az ellipticitási együttható meghatározására vonatkozó Lord RAYLEIGH-féle kísérleti módszert a napfény kizárásával mesterséges fényforrásra alkalmazni a nélkül, hogy ezzel a módszer pontossága nagy mértékben csökkent volna.

2. Az eddig változékonynak tartott ellipticitási együtthatót állandósítottam az által, hogy a folyadékot saját gőzével üvegedénybe beforrasztottam.

3. Kimutattam, hogy a zárt üvegedénybe saját gőzével beforrasztott folyadék ellipticitási együtthatója a folyadék felületi feszültségével együttesen változik; ebből arra következtetek, hogy a folyadék ellipticitási együtthatójának oka, épp úgy, mint a felületi feszültségé, a felületi rétegre vezethető vissza, azaz, hogy az eddigi felfogással szemben van az ellipticitási együtthatónak oly értéke, a melyet a folyadék anyagi minősége és thermikus állapota jellemez.

4. Az *aethylaether*, *benzol*, *széndioxyd* és *aethylalkohol* ellipticitási együtthatóit meghatároztam, még pedig a szoba hőmérsékletétől egészen a kritikus hőmérsékletig terjedő hőmérsékleti közben.

5. Azt találtam, hogy a tiszta folyadékok ellipticitási együtthatója a hőmérséklettel változik, még pedig a hőmérséklet emelkedésével eleinte lassan, majd a kritikus hőmérsékleten rohamosan növekszik. Tehát a tiszta folyadék ellipticitási együtthatója a felületi feszültség kisebbedésével növekszik.

6. Az egyszerű folyadékok, mint az *aethylaether*, a *benzol* és a *széndioxyd* ellipticitási együtthatója és a hőmérséklet közötti összefüggést egyenszerű hyperbola ábrázolja.

7. Az associáló *aethylalkohol* ettől a szabálytól eltér.

További vizsgálataim célja az ellipticitási együttható, továbbá a folyadék anyagi minőségét és thermikus állapotát jellemző állandók közötti kapcsolat megállapítása.

E kérdésre vonatkozó eddigi vizsgálataim azt mutatják,

hogy például a VAN DER WAALS által bevezetett megfelelő hőmérsékleten a folyadékok ellipticitási együtthatói a folyadékok molekulasúlyaitól lényegesen függenek.

A közeljövőben mindenekelőtt lehetőleg nagyszámú, chemiailag tiszta folyadék ellipticitási együtthatóját óhajtom szoba-hőmérsékleten meghatározni, s azután elegendő számú észlelési adat birtokában a már sejtett összefüggést elméleti úton felkeresni.

*

Dolgozatom az egyetemi I. sz. physikai intézetben készült.

Mély hálával emlékezem meg báró EÖTVÖS LORÁND-ról, az egyetemi I. sz. physikai intézet néhai igazgatójáról, a ki az intézet helyiségeit és eszközeit rendelkezésemre bocsátotta, s vizsgálataim folyamán hathatósan támogatott.

Ugyancsak nagy köszönettel tartozom FRÖHLICH IZIDOR egyetemi tanár úrnak, a ki a vezetése alatt álló egyetemi elméleti physikai intézet több eszközét céljaimra készséggel átengedni szíves volt.

A kísérleteimhez szükségelt æthylæther, benzol és æthylalkohol tisztítása és destillálása az egyetemi III. sz. chemiai intézetben történt; ezért az intézet igazgatójának, BUCHBÖCK GUSZTÁV egyetemi tanár úrnak e helyen is köszönetet mondok.

Az ábrák hyperboláit KERÉKJÁRTÓ BÉLA úr volt szíves észlelési adataimból a legkisebb négyzetek elméletével kiszámítani; a mit itt is köszönettel ismerek el.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1919 nov. hó 17.-én tartott üléséből.)

ANALYTIKUS FÜGGVÉNY KERÜLETI ÉRTÉKEIRŐL.

SZEGŐ GÁBOR-tól és RIESZ FRIGYES 1. tagtól.

I.

Sz. G. leveléből R. F.-hez.

A TOEPLITZ-féle formákra vonatkozó vizsgálataim folyamán¹ egy talán nem érdektelen theoremára bukkantam, mely FATOU egy jól ismert és sokat alkalmazott tételével² összekapcsolva, új adalékot nyújt az egységkörön belül reguláris analitikai függvényeknek az egységkör területén való viselkedésére nézve. Bevezetem mindenekelőtt a következő kifejezésmódot:

Azt mondom, hogy egy, a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban értelmezett $(L)^3$ integrálható $\varphi(\theta)$ függvény pozitív módon van előállítva, ha létezik oly

$$D(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

hatványsor, melyre nézve

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots$$

konvergens és

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = a_0 \bar{a}_\nu + a_1 \bar{a}_{\nu+1} + \dots + a_n \bar{a}_{\nu+n} + \dots \quad (\nu=0, 1, 2, \dots)^4. \quad (1)$$

¹ A Toeplitz-féle formákról (Mathematikai és Természettudományi Értesítő XXXV. kötet, 1917, 185—222. o.). — Továbbá: Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen (megjelenik a Mathematische Zeitschrift-ben).

² Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta Mathematica 30. kötet (1906), 335—400. o.) I. különösen 377—379. o.

³ Azaz LEBESGUE-féle értelemben.

⁴ \bar{a} jelenti a konjugált komplex értékét, \bar{a} pedig a valós részét.

Jelben:

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots|_{z=e^{i\theta}}^2.$$

(Ez az írásmód jogosult, mert ha $D(z)$ a $|z| \leq 1$ tartományban reguláris és $\varphi(\theta) = |D(e^{i\theta})|^2$, akkor valóban teljesülnek az (1) egyenletek.)

Ezek után a következőt kérdem:

Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy, a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban értelmezett (L) integrálható $\varphi(\theta)$ függvény az (1) értelemben pozitív módon előállítható legyen?

Ha például $\varphi(\theta)$ egy nem negatív trigonometrikus polynom, akkor ez az előállítás ama tétel alapján lehetséges, melyet FEJÉR állított és ÖN bizonyított be;¹ sőt ilyenkor a $D(z)$ függvény polynom és az \sim jel helyébe = lép. Mielőtt a fenti kérdésre általánosan felelnék, előrebocsátom a következő definitiót:

A $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban értelmezett (L) integrálható függvények (K) osztálya alatt azokat a $\varphi(\theta)$ függvényeket értem, melyek mindegyike

- a) majdnem mindenütt² pozitív,
- b) $\log \varphi(\theta)$ (L) integrálható.

Ez elnevezés fölhasználásával kimondhatom a következő tételt:

Arra nézve, hogy egy a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban értelmezett $\varphi(\theta)$ függvény, mely nem tűnik el majdnem mindenütt, pozitív módon előállítható legyen, szükséges és elegendő, hogy $\varphi(\theta)$ a (K) osztályba tartozzék.

Az (1) egyenletek ilyen módon a (K) osztály összes függvényei FOURIER-féle állandóinak számára hasonló parameteres előállítást nyújtanak, mint a milyent FEJÉR trigonometrikus polynomok esetében adott.³

Megjegyzem, hogy ha $\varphi(\theta)$ majdnem mindenütt 0, akkor

¹ Über trigonometrische Polynome (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 146. kötet (1916), 53–82. o.). L. különösen 54–62. o.

² Azaz esetleg egy oly halmaz kivételével, melynek LEBESGUE-féle mértéke 0.

³ I. h. 62–64. o.

csak $D(z) \equiv 0$ lehet (s viszont ekkor $D(z) \equiv 0$ tényleg egy pozitív előállítást nyújt), mivel ekkor

$$0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots$$

Ezt az esetet tehát eleve kizárhatjuk.

1. A feltétel szükséges. Legyen

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots|_{z=e^{i\theta}}^2;$$

feltehető, hogy $a_0 \neq 0$, mert ha a_v volna az első el nem tűnő együttható, akkor nyilván

$$\varphi(\theta) \sim |a_v + a_{v+1} z + \dots + a_{v+n} z^n + \dots|_{z=e^{i\theta}}^2.$$

Könnyen belátható, hogy az x_0, x_1, x_2, \dots változók minden értéke mellett

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n|^2 d\theta &= \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} |a_v x_0 + a_{v-1} x_1 + \dots + a_{v-n} x_n|^2 \quad (2) \\ (z=e^{i\theta}; a_{-n}=0; n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

A baloldalon a $\varphi(\theta)$ függvényhez tartozó TOEPLITZ-féle formák állanak; mivel láthatólag

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n|^2 d\theta \geq 0; \quad (z=e^{i\theta})$$

(sőt > 0 , ha x_0, x_1, \dots, x_n nem valamennyien 0-k), tehát egy jól ismert és e formák elméletében alapvető tétel szerint¹ $\varphi(\theta)$ majdnem mindenütt nem negatív.

Szükségem van továbbá egy másik tételre a TOEPLITZ-féle formákról, melyet egész általánosan először «Beiträge zur Theorie der TOEPLITZschen Formen» című dolgozatomban² bizonyítottam be:

¹ O. TOEPLITZ: Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen (Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1910, 489—506. o.). V. ö. 504. o.

² I. h.

Legyen $\varphi(\theta)$ a $0 \leq \theta \leq 2\pi$ intervallumban nem negatív és (L) integrálható; jelölje továbbá μ_n az n -edik TOEPLITZ-féle forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n|^2 d\theta \quad (z = e^{i\theta})$$

minimumát az $x_0 = 1$ mellékfeltétel mellett. Akkor létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \geq 0$, és pedig

$$\mu = \begin{cases} e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varphi(\theta) d\theta} & , \text{ ha } \varphi(\theta) \text{ a } (K) \text{ osztályba tartozik,} \\ 0 & , \text{ ha } \varphi(\theta) \text{ nem a } (K) \text{ osztályba tartozik.} \end{cases}$$

E tétel szerint tehát elegendő csak annyit igazolni, hogy a (2) egyenlet teljesülése μ pozitív voltát involválja. Azonban (2)-ből

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n|^2 d\theta \geq |a_0 x_0|^2; \quad (z = e^{i\theta}),$$

tehát

$$\mu_n \geq |a_0|^2;$$

és így

$$\mu \geq |a_0|^2 > 0.$$

Ebből következik, hogy $\varphi(\theta)$ a (K) osztályba tartozik, q. e. d.

2. A feltétel elegendő. Legyen $\varphi(\theta)$ a (K) osztály egyik függvénye, akkor

$$g(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varphi(\mu) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\mu-\theta)+r^2} d\mu$$

harmonikus és reguláris, ha $r < 1$ és FATOU egy tétele szerint majdnem mindenütt

$$\lim_{r \rightarrow 1} g(\theta, r) = \log \varphi(\theta).^1$$

Legyen $g(z)$ az az analitikai függvény, melyre nézve

$$\Re g(re^{i\theta}) = g(\theta, r)$$

¹ I. h. 348. és 357. o.

és legyen

$$D(z) = e^{\frac{g(z)}{z}} = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

Ez az utóbbi függvény reguláris, ha $|z| < 1$, továbbá

$$|D(re^{i\theta})|^2 = e^{g(r, \theta)}$$

és így majdnem mindenütt

$$\lim_{r \rightarrow 1} |D(re^{i\theta})|^2 = \varphi(\theta). \quad (3).$$

Állítom, hogy

$$\varphi(\theta) \sim |D(z)|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

E végből mindenekelőtt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergenciáját, vagy a mi ugyanaz, a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

kifejezés korlátos voltát kell $r < 1$ -re igazolni. JENSEN-nek egy ismert egyenlőtlensége szerint¹

$$\begin{aligned} |D(re^{i\theta})|^2 &= e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \varphi(\mu) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\mu-\theta)+r^2} d\mu} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mu) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\mu-\theta)+r^2} d\mu, \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mu) d\mu.$$

Másrészt tekintettel (3)-ra és hivatkozva egy jól ismert. FATOU-féle lemmára²

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta \geq \liminf_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,$$

tehát

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

¹ Sur les fonctions convexes et les inegalités entre les valeurs moyennes (Acta Mathematica 30. kötet (1906), 175—193. o.). V. ö. 187. o.

² I. h. 375—376. o.

Alkalmazva ezt az eredményt a

$$\varphi^*(\theta) = \varphi(\theta) |1 + \lambda z^\nu|_{z=e^{i\theta}}^2$$

függvényre, hol $|\lambda| < 1$ és λ egyébként tetszésszerű parameter, továbbá $\nu > 0$, nyerjük, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |1 + \lambda z^\nu|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n + \lambda a_{n-\nu}|^2;$$

$$(z = e^{i\theta}; a_{-1} = a_{-2} = \dots = a_{-\nu} = 0),$$

miből

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{a}_{\nu+n}$$

következik, q. e. d. Ezzel a fenti tétel igazolva van.

Alkalmazás. Legyen

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

egy hatványsor, melyre nézve

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots$$

konvergens. Akkor létezik FATOU szerint majdnem mindenütt

$$\lim f(re^{i\theta}) = F(\theta),$$

és $|F(\theta)|^2 (L)$ integrálható, továbbá

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 e^{i\nu\theta} d\theta = a_0 \bar{a}_\nu + a_1 \bar{a}_{\nu+1} + \dots + a_n \bar{a}_{\nu+n} + \dots;$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots).^1$$

Ez azonban a fent bevezetett terminologia segítségével így is kifejezhető:

$$|F(\theta)|^2 \sim |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots|_{z=e^{i\theta}}^2.$$

Tehát fenti eredményünk értelmében:

Az $f(z) \equiv 0$ esetet nem tekintve $|F(\theta)|^2$ majdnem mindenütt pozitív és $\log |F(\theta)| (L)$ integrálható, azaz $|F(\theta)|^2$ a (K) osztályba tartozik.

¹ I. h.

Továbbá:

Az $f(z) = \text{const}$ esetet nem tekintve $|F(\theta) - \lambda|^3$ majdnem mindenütt pozitív és $\log |F(\theta) - \lambda|$ (L) integrálható, ha λ tetszőszerinti komplex értéket jelent.

Ebből következik többek között, hogy $F(\theta)$ csak egy 0 mértékű halmazon vehet fel egy megadott λ értéket, például csak egy 0-mértékű halmazon tűnhet el.

Úgy tudom, hogy ezt az utolsó tételt FATOU speciálisabb tételének¹ kapcsán ÖN és MARCEL fivére állította és bizonyította be először egy az 1916.-i stockholmi matematikus kongresszuson tartott, de mindezt meg nem jelent előadásban. Különösen ezért óhajtottam figyelmét az imént ismertetett vizsgálataimra felhívni.

Budapesten, 1920 márczius 19-én.

Szegő Gábor.

II.

R. F. leveléből Sz. G.-hoz.

Engedje meg, hogy néhány megjegyzéssel járuljak hozzá azokhoz a vizsgálataihoz, melyeknek meglepő eredményét egy előző levelében röviden, utolsó, márczius 19.-i levelében pedig részletes indokolással volt szives velem közölni.

¹ E kérdés az irodalomban több helyen szerepel.

FATOU bebizonyította (i. h. 394—395. o.), hogy ha $f(z)$ korlátos $z < 1$ -re és nem identikusan 0, akkor nem lehet, hogy egy egész $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ íven majdnem mindenütt

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{2\theta}) = F(\theta)$$

eltűnjék, vagy általában véges számú megadott szám valamelyike legyen. Tehát $F(\theta)$ az egységkör minden íven felvesz végtelen sok különböző értéket (bárhogyan is módosítsuk $F(\theta)$ -t egy 0-mértékű halmazon).

Ezzel szemben CARATHÉODORY, kinek figyelmét úgylátszik FATOU dolgozatának e részlete elkerülte, csak annyit bizonyít, hogy $F(\theta)$ az egységkör bármely íven legalább három különböző értéket vesz fel. L. Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung (Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1913, 509—518. o.), különösen az 517. o.

V. ö. végül W. GROSS: Über die Singularitäten analytischer Funktionen (Monatshefte für Mathematik und Physik, 29. kötet [1918,] 3—47. o.), 41. o.

Eredményei közül különösen érdekelt és meglepett a levele végén közölt tétel, mely szerint az egységkörben holomorph

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

függvényeknek egy nagyon tág osztálya azzal a sajátsággal bír, hogy a már FATOU vizsgálatai szerint majdnem mindenütt létező

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = F(\theta)$$

kerületi értékre nézve, ha csak $f(z)$ nem azonosan 0, $\log |F'(\theta)|$ a LEBESGUE-féle értelemben integrálható. Ezt az osztályt, mely a korlátos függvényeket magában foglalja, Ön azzal a feltevés-sel jellemzi, hogy az együtthatók abszolút értékeinek négyzet-összege

$$A = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots$$

összetartó; ezzel teljesen egyértékű az a feltevés, hogy az

$$I^{(2)}(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi (|a_0|^2 r^0 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \dots)$$

integrál minden $r < 1$ -re egy (r -től független) korlát (tudniillik $2\pi A$) alatt marad.

Mindenekelőtt engedje meg, hogy tételének egy nagyon egyszerű és az Ön többi eredményétől független bizonyítását ismer-tessem.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $f(0) = a_0 = 1$, az általános eset ugyanis az $\frac{f(z)}{a_0}$, illetőleg, ha $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, $a_n \neq 0$, az $\frac{f(z)}{a_n z^n}$ függvény alkalmazásával erre a speciális esetre vezetjük vissza. Legyen tehát $f(0) = 1$ és $r < 1$ s tegyük fel, bár ez a feltevés nem lényeges, hogy a $|z| = r$ körvonal mentén $f(z) \neq 0$. Azt állítom, hogy

$$\int_0^{2\pi} \left| \log |f(re^{i\theta})| \right| d\theta < 2\pi A.$$

Jelentse ugyanis H_1 ama θ értékek halmazát ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), melyekre $|f(re^{i\theta})| \geq 1$, azaz, amelyekre nézve

$$\log |f(re^{i\theta})| \geq 0;$$

és jelentse H_2 a kiegészítő halmazt. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_m az $f(z)$ függvénynek az $|z| = r$ kör belsejében fekvő zéróhelyei, mindegyik a megfelelő multiplicitással felsorolva. A JACOBI-JENSEN-féle formula szerint

$$\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = 2\pi \log \prod_{k=1}^m \frac{r}{|a_k|} \geq 0^1,$$

és ennélfogva

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \int_{H_1} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \int_{H_2} \log |f(re^{i\theta})| d\theta &= \\ &= 2 \int_{H_1} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \\ &\leq 2 \int_{H_1} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_{H_1} \log |f(re^{i\theta})|^2 d\theta. \end{aligned}$$

De a H_1 halmazon $|f(re^{i\theta})|^2 \geq 1$ és így $\log |f(re^{i\theta})|^2 < |f(re^{i\theta})|^2$, tehát

$$\int_{H_1} \log |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi (|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + \dots) = 2\pi A,$$

és így végül

$$\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta < 2\pi A,$$

a mint azt állítottam. Alkalmazzuk most FATOU egy nagyon használható tételét, mely szerint ha valamely H halmazon integrálható $\varphi_n(\theta)$ függvények majdnem mindenütt egy $\varphi(\theta)$ függvény felé tartanak és ha

$$\int_H |\varphi_n(\theta)| d\theta \leq M,$$

¹ I. L. W. JENSEN: Sur un nouvel et important théoreme de la théorie des fonctions (Acta Mathematica, 22. kötet (1899), 359—364. o.) — L. még É. GOURSAT: Cours d'analyse mathématique, 2. kiadás, Paris, 1911 (Gauthier-Villars), 2. kötet, 121. o.

akkor $\varphi(\theta)$ is integrálható és

$$\int_H |\varphi(\theta)| d\theta \leq M.^1$$

Esetünkben

$H = (0, 2\pi)$, $\varphi_n(\theta) = \log |f(r_n e^{i\theta})|$, $\varphi(\theta) = \log |F(\theta)|$, $M = 2\pi A$, ahol az r_n -ek 1 felé tartó alkalmasan választott értékek; akkor tehát $\log |F(\theta)|$ integrálható és

$$\int_0^{2\pi} \log |F(\theta)| d\theta \leq 2\pi A.$$

Ezzel az Ön tételét bebizonyítottam. Most pedig egy lépéssel tovább megyek és kiterjesztem a tételt egy látszólag sokkal általánosabb függvényosztályra, a mivel különben csak régebbi vizsgálataimat folytatom. Ugyanis, mint ezt már előszóval is alkalmam volt Önnel közölni, a skandináv matematikusoknak 1916-ban Stockholmban rendezett kongresszusán egy MARCEL öcsémmel közösen tartott és még sajtó alatt lévő előadásban² először az egységkörben holomorph és korlátos függvényekről, majd az Ön által vizsgált függvényosztályról, végül pedig egy általánosabb, úgyszólván az itt tekintetbe vehető legáltalánosabb függvényosztályról megmutattuk, hogy az $f(z) \equiv 0$, illetőleg $f(z) \equiv c$ esetek kivételével kerületi értékeik csupán egy 0-mértékű halmazon tűnhetnek el, illetőleg csak ilyenén vehetnek fel megadott állandó értéket. Ez az eredmény, mint Ön is megjegyezte, a korlátos, illetőleg az Ön által vizsgált függvényekre nézve az Ön tételéből közvetlenül következik. Érdekelni fogja tehát az a kérdés, vajjon az Ön eredménye *érvényes-e az általunk vizsgált legáltalánosabb függvényosztályra is? A válasz igenlő*, mint azt a következőkben részletesen kifejtem.

A kérdéses függvényosztályt így jellemezhetem. Legyen $f(z)$ az egységkör belsejében holomorph függvény és tekintsük ennek a függvénynek HARDY által vizsgált úgynevezett *középvértékeit* a $|z| = r$ ($r < 1$) körökön:

¹ Az Ön levelében idézett dolgozatban a 375. oldalon.

² F. und M. RIESZ: Über die Randwerte einer analytischen Funktion. (Időközben megjelent: Comptes rendus du quatrième congrès des mathématiciens scandinaves, 27—44. o.).

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Az $M(r)$ középérték, mint az HARDY egyebek között megmutatta, r -nek monoton növekvő függvénye és így két eset lehetséges, tudniillik $r \rightarrow 1$ -re $M(r)$ vagy végtelenbe nő, vagy pedig *végyes korlát alatt marad és ebben az esetben egy határérték felé tart.*¹ Minket az utóbbi eset érdekel, melyben, mint könnyen láthatja, az Ön által vizsgált függvényosztály is bennfoglaltatik.

A következőkben nem fogok az említett előadásra hivatkozni; sőt megjegyzem, hogy annak a nagyon egyszerű segéd-tételnek alkalmazásával, melyre itt támaszkodom, az említett előadásnak összes itt nem említett eredményei is csaknem közvetlenül adódnak.

Nevezzük rövidség kedvéért azokat, az egységkör belsejében holomorph $f(z)$ függvényeket, melyekre, ha $r < 1$, akkor $M(r) \leq B$, a hol B egy r -től független korlát, *korlátos középértékű* függvényeknek. Segédtelemem így hangzik: *Minden korlátos középértékű függvény két tényezőre bontható, melyek közül az egyik ugyan-csak korlátos középértékű és az egységkörben seholsem 0, a másik pedig az egységkörben holomorph és korlátos.*

Tegyük fel, hogy segédtelemünket bebizonyítottuk; mit következtethetünk belőle a fent felvetett kérdésre nézve? A megvizsgálandó $f(z)$ korlátos középértékű függvényt a segédtelem szerint a $g(z)$ $h(z)$ alakra hozhatjuk, a hol a $h(z)$ függvény holomorph és korlátos, $g(z)$ pedig korlátos középértékű és az egységkörön belül nincsen 0-helye. Ennélfogva a $g(z)$ függvény négyzetgyökének bármely $\gamma(z)$ ága is holomorph az egységkör belsejében és az

$$\int_0^{2\pi} \gamma(re^{i\theta})^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta$$

integrál értéke $r < 1$ -re egy r -től független C korlát alatt marad.

¹ G. H. HARDY: The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function (Proceedings of the London Mathematical Society, 2. sorozat 14. kötet (1915), 269—277. o.).

Vagyis: úgy a $h(z)$, mint a $\gamma(z)$ függvények az Ön által vizsgált osztályba tartoznak; léteznek tehát majdnem mindenütt a megfelelő $H(\theta)$, $\Gamma(\theta)$ kerületi értékek és a $\log |H(\theta)|$ és $\log |\Gamma(\theta)|$ függvények a LEBESGUE-féle értelemben integrálhatók. Létezik tehát majdnem mindenütt az

$$F(\theta) = \Gamma^2(\theta) H(\theta)$$

kerületi érték is és

$$\log |F(\theta)| = 2 \log |\Gamma(\theta)| + \log |H(\theta)|$$

ugyancsak integrálható. Hozzáteszem, bár ez nem tartozik szorosán a tárgyhoz, hogy maga $F(\theta)$ is integrálható, a mi a középérték korlátos voltából a fentebb használt FATOU-féle tétel alapján következik.

Ezzel megmutattam, hogy az Ön eredménye minden korlátos középértékű függvényre is érvényes, feltéve természetesen, hogy az alkalmazott segédétel helyes. Hátra van még ennek az utóbbinak az igazolása.

Ha már $f(z)$ -nek sincsen az egységkörön belül 0-helye, a segédétel evidens: $g(z) = f(z)$, $h(z) = 1$. Ellenkező esetben legyenek a_1, a_2, \dots az $f(z)$ függvénynek az egységkörön belül fekvő 0-helyei, mindegyik a megfelelő multipliczitással felsorolva; és tegyük fel egyelőre, hogy $f(0) \neq 0$. Legyen továbbá

$$h_n(z) = \prod_{k=1}^n a_k \left| \frac{1-z}{1-\bar{a}_k z} \right|, \quad g_n(z) = \frac{f(z)}{h_n(z)}.$$

A $h_n(z)$ és $g_n(z)$ függvények holomorphok az egységkör belsejében, magán az egységkörön pedig $|h_n(z)| = 1$. Ez identitás folytán, bármely kis pozitív szám legyen is ε , az 1-hez elég közel eső r -ekre $|h_n(re^{i\theta})| \geq 1 - \varepsilon$. Ennélfogva az illető r -ekre

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{2\pi B}{1-\varepsilon};$$

HARDY tétele alapján tehát minden $r < 1$ -re

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{2\pi B}{1-\varepsilon};$$

minthogy az egyenlőtlenség baloldala ε -tól független, azért minden $r < 1$ -re és minden n -re

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi B.$$

Véges számú 0-hely: a_1, a_2, \dots, a_n esetében ezzel már meg is van a kívánt felbontás: $f(z) = g_n(z) h_n(z)$. Végtelen sok 0-hely esetében minden n -re

$$\frac{f(0)}{|a_1 a_2 \dots a_n|} = g_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(re^{i\theta}) d\theta,$$

tehát

$$\frac{|f(0)|}{|a_1 a_2 \dots a_n|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})| d\theta \leq B,$$

azaz, mivel még $|a_k| < 1$, azért

$$1 > \prod_{k=1}^n |a_k| \geq \frac{|f(0)|}{B}.$$

Vagyis a $\prod a_k$ végtelen szorzat feltétlenül összetartó; ennél fogva BLASCHKE szerint az egységkör belsejében, azaz minden $|z| \leq r < 1$ -re, feltétlenül és egyenletesen összetartó a

$$\prod_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \bar{a}_k z}$$

végtelen szorzat is, vagy más szóval a $h_n(z)$ függvények egyenletesen egy $h(z)$ függvény felé tartanak.¹ Minthogy a $h_n(z)$ függvények holomorphok az egységkör belsejében és $|h_n(z)| < 1$, azért $h(z)$ is holomorph és $|h(z)| \leq 1$. Továbbá $h(z)$ 0-helyei pontosan a_1, a_2, \dots , tehát a

¹ W. BLASCHKE: Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen (Berichte der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-phys. Klasse, LXVII. kötet (1915), 194—200. o.). — E. LANDAU: Über die Blaschkesche Erweiterung des Vitalischen Satzes (ugyanabban a folyóiratban, LXX. kötet (1918), 156—159. o.).

$$g(z) = \frac{f(z)}{h(z)}$$

függvény is holomorph az egységkör belsejében. Végül

$$g_n(z) \rightarrow g(z),$$

és pedig szintén egyenletesen minden $|z| \leq r < 1$ -re nézve; ennél fogva

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi B,$$

vagyis $g(z)$ korlátos közéértékű függvény.

Ezzel segédtevéletünket bebizonyítottuk; csupán azt a megszorítást kell még kiküszöbölnünk, hogy $f(0) \neq 0$. Ha tehát $f(0) = 0$, akkor legyen $f(z) = z^m f^*(z)$, a hol $f^*(0) \neq 0$. Mivel ekkor

$$r^m \int_0^{2\pi} |f^*(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi B,$$

azért az egységkör közelében $|f^*|$ integrálja $\leq 2\pi \frac{B}{r^m} < 2\pi B + \varepsilon$,

a hol ε tetszésszerint kicsiny pozitív szám. HARDY tétele alapján tehát az integrál minden $r < 1$ -re kisebb, mint $2\pi B + \varepsilon$, vagy mivel ε tetszésszerinti, azért $\leq 2\pi B$. Vagyis $f^*(z)$ korlátos közéértékű, $f^*(0) \neq 0$ és ezért a kívánt $f^*(z) = g^*(z)h^*(z)$ felbontás lehetséges. Ebből a $g(z) = g^*(z)$, $h(z) = z^m h^*(z)$ függvények bevezetésével nyerjük a kívánt $f(z) = g(z)h(z)$ felbontást.

Még egy utolsó megjegyzést! Felvetem a következő kérdést:

Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy $(0, 2\pi)$ számközben értelmezett, nem negatív $\varphi(\theta)$ függvényhez létezzék oly az egységkörben holomorph és korlátos közéértékű $f(z)$ függvény, melynek majdnem mindenütt létező

$$F(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$$

kerületi értékére nézve majdnem mindenütt $|F(\theta)| = \varphi(\theta)$?

Válasz: szükséges és elegendő, hogy úgy $\varphi(\theta)$, mint $\log \varphi(\theta)$ LEBESGUE szerint integrálhatók legyenek, vagy más szóval, hogy $\varphi(\theta)$ az $\bar{O}_n(K)$ osztályába tartozzék. A feltétel tehát ugyanaz,

mint a pozitív módon való előállíthatásnak Ön által származtatott feltétele.

Hogy a feltétel szükséges, azt az imént bizonyítottam be; hogy pedig elegendő, azt már Ön megmutatta levelének 2. pontjában. Ha ugyanis $D(z)$ az ott értelmezett függvény, akkor az $f(z) = D^2(z)$ függvény korlátos közéértékű és a $\varphi(\theta)$ függvény-nyel a kívánt kapcsolatban van.

Győrött, 1920 márczius 31.-én.

Riesz Frigyes.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 április 19.-én tartott üléséből.)

A RHACHITIS (ANGOLBETEGSÉG) ÖSSZEHASONLÍTÓ KÓRTANA.

MAREK JÓZSEF 1. tagtól.

(Székfoglaló értekezés kivonata.)

Az emberi rhachitist részletesen először GLISSON¹ angol orvos ismertette meg az orvosi világgal 1650-ben megjelent alapos munkájában, melyben egyúttal reámutatott a betegség gyakori előfordulására Angliában. Ennek következtében honosodott meg az angolkór vagy angolbetegség elnevezés. A következő években más országokban is mind többeket foglalkoztatott különösen a betegség oktanának kutatása és közben állatorvosi részről is tanulmányozták a rhachitist és a vele együtt gyakran előforduló csontlágyulást. Habár így a rhachitisnek szinte páratlanul gazdag irodalma fejlődött ki, oktana, pathogenesise és viszonya az osteomalaciához, nemkülönben az emberi és az állati, a természetes és a kísérletes rhachitisnek kölcsönös viszonya még most is vitás.

1905 óta sok százra menő klinikai megfigyelésem és természetes rhachitesben megbetegedett tiz állat egész csontrendszerét felölelő szövettani vizsgálataim kapcsán magam is tanulmányoztam e betegséget. Az összehasonlítás érdekében szövettani vizsgálataimat kiterjesztettem továbbá az emberi rhachitis hét esetére is, melyekhez az anyagot ENTZ BÉLA dr., egyetemi tanár, volt szives rendelkezésemre bocsátani, a miért neki e helyen is a leghálásabb köszönetemet fejezem ki. Vizsgáltam azonfelül tizenhat kutyában, valamint WELLMANN O. dr. tanártársammal hat ma-

¹ GLISSONIUS: De Rachitide etc. Ed. tertia. Lugduni Batav. 1671.

lacban mesterségesen előidézett rhachitist. Vizsgálataim keretébe vontam végül emberi és állati magzatok, valamint ujszülött állatok csontjait a fejlődés különböző szakában.

Vizsgálataim nagy anyagából ezúttal csupán azok eredményét foglalom össze, melyek az emberi és az állati, a természetes és a kísérletes rhachitis kölcsönös viszonyát, továbbá a rhachitist vonatkozásában az osteomalaciához, az osteoporosishoz és az ostitis deformanshoz világítják meg.

A csontos váz fejlődése.

A csontos-váz kialakulása már a korai magzatkorban kezdődik, a csöves csontokban nevezetesen azzal, hogy az eredetileg porczogós váz középső részében (diaphysis) a porczogóhártya mélyebb rétegeiben az eleinte orsóalakú kötőszöveti sejtek *csontképző sejtekké* (osteoblastumokká) alakulnak át. Az osteoblastumok körzeti részének protoplasmája fonalkákban lefűződik, melyek azután a szomszédos sejtek termelte hasonló fonalkákkal összeolvadnak és közti anyagot termelnek. Az osteoblastumok magva a környékén levő protoplasmával együtt csontsejtté alakul át, mely fonalkáival a szomszédos csontsejtek fonalkáival továbbra is összefüggésben és a közti anyagba beágyazva marad. Az akkor még puha, egyébként azonban már a csontéhoz hasonló szerkezetű, csontszerű (osteoid) szövet csakhamar kész csontszövevé szilárdul meg, mert a csontsejtek és fonalkáik közti anyagba mészsók rakódnak le. Mihelyt ez a *porczogóhártya felőli* (*perichondralis*), illetőleg *csonthártyafelőli* (*periostalis*) csontosodás eléggé szilárd, a porczogó középső részét gyűrű, kézelő vagy fűző módjára körülvevő csontos kérget létesített, a porczogó bel-sejének közepén a szivacsos csontállomány termelését biztosító *porczogónbelüli* (*enchondralis*) csontosodás indul meg, a midőn a porczogósejtek erősebb szaporodása, megnagyobbodása és a szintén megszorodott alapanyagukba mészsók lerakódása közben *elmeszesedési pont* támad, ebbe a csonthártya felől érdús szövet sarjadzik be és az elmeszesedett porczogó rétegét, helyesebben előbb csak a porczogósejteket föloldja. Az így keletkezett *elemi* vagy *elsőleges velőüregben* finom és hálózatos ros-

tokból alakult puha és érdús *elsőleges velő* jelenik meg, melyben a sejtek egy része a már ismert módon osteoblastumokká, a szövet többi része pedig kerekmagvú sejtek fölhalmozódása és vörös vérsejttermelés megindulása közben *másodlagos* vagy *vörös csontvelővé* alakul át.

A csontvelő mindkét végében megmaradó porczogónak a velőüreggel határos részében a porczogósejtek továbbra is főképen a csont hosszanti irányában szaporodnak, közben sejtoszlopokká sorakoznak s közöttük az alapállomány megszaporodik, majd ennek a velőüreghez legközelebb eső része elmeszesedik. A csontvelő felől behatoló érdús hímók azonban a porczogósejtoszlopok sejteit csakhamar föloldják, az oszlopokat eredetileg elválasztó elmeszesedett porczogógerendák (irányítógerendák) szélén pedig a vérereket kísérő velőszövetből osteoblastumok telepednek meg, csontlemezeket termelnek és lassan-lassan a közbe foglalt irányító gerendák is föloldódnak. Csak a fejlődésnek jóval előbbrehaladott szakában kezdődik az enchondralis csontosodás a csöves csontok két ízületi végében (epiphysis) egy vagy több elmeszesedési pont megjelenésével, a melyeket azután a porczogóhártya felől besarjadzott érdús szövet szintén felold, egyidejűleg helyükön csontlemezek s ezek közbefoglalta szivacsos velőüregek keletkeznek. Az így támadt epiphysis-csontmag a porczogónak minden irányban végbemenő további átalakulásával karöltve fokozatosan nagyobbodik, közte és a diaphysis között azonban az illető csont növekedésének egész tartamára egy porczogókorong, az *epiphysis-* vagy *közbülső porczogó* marad meg, melynek a diaphysis felé eső részében a porczogósejtek oszlopának előzetes képződésével kapcsolatos átmeneti elmeszesedés és ennek nyomában a szivacsos csontállomány termelése szakadatlanul tovább tart, az epiphysiscsontmag felé eső szélén pedig, éppen úgy, mint a csontmag egyéb helyein, a porczogósejtek túlnyomóan haránt irányban és lassabban oszlanak, oszlopokban való sorakozásuk ennél fogva alig vagy éppen nem ismerhető fel. A csontfejlődés befejeződésével az epiphysisporczogó eltűnik és az epiphysis, valamint a diaphysis szivacsos állománya egybeolvad.

A rövid és a lapos csontokban hol az enchondralis, hol a

periostalis csontosodás indul meg előbb, az epiphysisporczogó fentartotta csontképződéssel azonos folyamat azonban csak a bordák alsó végét alkotó porczogónak, valamint a csigolyák testének mindkét végén az ott megjelenő csontmagvakból kialakult epiphysislemezeknek határán észlelhető.

A fedő- vagy kölszöveti csontok képződése hártlyás anyaszövetük sejtjeinek helyenkint erősebb megszaporodásával, a sejtek közötti alapállomány elmeszesedésével és érdús szövet által való beolvasztásával kezdődik, a mivel egyidejűleg az ideiglenesen elmeszesedett léczekre osteoblastumok sorakoznak és csontszövetet termelnek.

A csontképződéssel karöltve jár a már kész csontszövet fölszivódása, legnagyobbrészt az úgynevezett Howship-féle öblökben helyeződő, sokmagvú csonttörő sejtek (osteoklastumok) közreműködésével és csak kis részben egyszerűen a mézssóknak előzetes kioldása (halisteresis) révén, mely utóbbinak előfordulását POMMER és mások csupán a két-két szomszédos velőüreget a csontlemezekben keresztül összekötő úgynevezett perforáló csatornákra hajlandók korlátozni. Ilyen módon a csontlemezei folytonos átalakulásban vannak, illetőleg más lemezek egészen eltűnnek. A csöves csontok diaphysisének belsejében eredetileg szivacsos csontszövet fölszivódása folytán mind nagyobb egységes csontvelő-üreg (cavum medullare) keletkezik.

A csontszövet kialakulását mindig nyomon követi az alapállomány elmeszesedése s ezzel az osteoid szövetnek átváltozása kész csontszövetté. Ennélfogva rendszerint nem látni osteoid réteget a csontlemezek szabad szélé és az ezt borító osteoblastumok között, hanem a csontképző sejtek látszólag közvetlenül ülnek a kész csontszövet szélén. Magzatok és újszülöttek csontjainak szövettani vizsgálata közben csak elvétve, egyik-másik látótérben tűnik szembe rendszerint a csontlemezek egy-egy kisebb darabjának egyik szélén egészen keskeny osteoid szegély, melynek szélessége 3–15 μ között változik, többnyire azonban 10 μ -nál, sőt nem ritkán 3 μ -nál is keskenyebb, illetőleg éppen csak sejtthető.

Magzatok és újszülöttek csontjainak összehasonlítása közben azt a sajátságot állapítottam meg, hogy a hurjánzó és az osz-

lopokba sorakozó porczogósejtek rétegének szélessége a korról fordított viszonyban van, akképen, hogy míg például 6 $\frac{1}{2}$ hónapos borjufoetus tibiájában az oszlopos porczogóréteg 1·7—2·1 mm. széles, 8 $\frac{1}{2}$ hónapos borjűmagzatban a szélesség már csak 1·0—1·4 mm. között változik. Ezzel szemben az elmeszesedési csik szélességében nem lehetett fölismerni nagyon jelentékeny különbséget.

Változások a csontok szövetében rhachitis folyamán.

Habár a rhachitis az egész csontrendszer fejlődési zavarát eredményezi, az előállott szöveti változások súlyossága az egyes csontokban mindenkor arányos az illető csontok növekedési és fejlődési képességével, a mely a korról arányosan, különben azonban kezdetben rohamosan, később mind lassabban fogy. Az *enchondralis* csontosodás zavara folytán a legsajátságosabb változás az epiphysisporczogóban és a vele határos diaphysisrészletben (metaphysisben) áll elő és abban nyilvánul, hogy a porczogó átmeneti elmeszesedése hiányos vagy egészen elmarad, az elmeszesedési csikban ennél fogva hézagok támadnak vagy a csik egészen eltűnik. Egyben a porczogó alatt fejlődő csontlemezek hiányosan vagy egyáltalán nem meszesednek el, ennek folytán a korábbi időben már elmeszesedett csontlemezek körül a bántalom súlyosságával arányosan széles *osteoid szegélyek* jelennek meg, helyenkint pedig kizáróan csak *osteoid lemezek* képződnek. Hasonlót észlelni a diaphysis távolabbi részeiben és az epiphysis csontmagvában, továbbá a periostalis csontosodás helyén, illetőleg a többi csontnak minden olyan részében, a hol a betegség tartama alatt egyáltalán csontszövet fejlődik. Az élénk szövetképződéssel megegyezően az osteoid szövet szabad szélét osteoblastumok borítják.

A porczogó elmeszesedésének elmaradása a porczogó hiányos és egyenlőtlen beolvadását eredményezi. A porczogó állapotába lerakódott mészsók ugyanis elválasztják az amúgy is már elfajult porczogósejteket a szövetnedvektől, a sejtekben ennél fogva olyan chemiai változás megy végbe, mely ellenállásukat a csontvelő felől elötörő érdús szövet oldó hatásával szem-

ben megszünteti. Másfelől SCHMORL¹ szerint elesik a porczogó sejtoszlopai között elmeszesedett léczeknek irányító hatása a csontvelő véreire, minek következtében a vérerek a keményebb porczogót megkerülve, a puhább velőszövet felé kitérnek. Ennek folytán az *epiphysisporczogó széle csipkézett vagy fogazott*, belőle a diaphysis felé fogalakú nyúlványok hatolnak, melyeket a velőszövet egyik-másik helyen áttör, a mikor azután a diaphysis velőszövetébe ágyazott *porczogószigetek* támadnak. Más helyeken viszont a velőszövet hatol be mélyen a porczogóba, ahol különben a rendes viszonyok között finomrostú, laza kötőszövetből és vérekből álló *porczogóvelősugarak szövete is burjánzásnak indul* és részint sejtű rostos kötőszövetet, részint gyéresejtű osteoid szövetet termel. Súlyos rachitis eseteiben már az eddig vázolt elváltozások folytán is az epiphysisporczogónak burjánzó rétegében az egyes szövetrészek összevisszasága áll elő, mely azután tovább fokozódik, annak folytán, hogy a késedelmesen és hiányosan beolvadó *sejtoszlopok erősen megnyúlnak és a burjánzó porczogó rétege egyáltalán megszélesbedik*, mert a beteg csontok csekély szilárdsága következtében az összehúzódó izmok és a mozgás kifejtette erősebb mechanikai ingerek a porczövetet élénkebb termelésre serkentik.

A jelzett szövetrészek megszaporodása, főképen azonban a rendesnél bővebb lágy szövetelemeknek (porczogósejtoszlopok, burjánzó csont- és porczvelőszövet, osteoid szövet) széjjeltolatása az epiphysisre állandóan ható nyomás folytán *a csontok epiphysisének megduzzadását* eredményezik. Eközben jön létre egyúttal a porczogósejt oszlopainak gyakori, a diaphysis felé mind jobban szembetűnő széjjelválása, hullámos vagy ferde, esetleg egészen keresztirányban lefutása, valamint néha a metaphysis osteoid lemezeinek az agyvelő tekervényeit utánzó alakulása. Hasonló folyamatra vezethető vissza végül a csöves csontoknak néha tapasztalható megrövidülése.

A rendesnél puhább csontokra jóval fokozottabb mértékben érvényesítik befolyásukat azok a mechanikai, statikai és dyna-

¹ SCHMORL: Verhandlungen d. Deutschen Pathol. Gesellschaft. 1905. S. 248. — Ergebnisse d. inneren Medizin und Kinderheilkunde. 1909. IV. S. 403.

mikai hatások, melyek a csontokat állandóan érik és melyek egészséges állatokban is a veleszületett növekedési energián kívül a csontszövettermelést serkentik. Ehhez képest a bántalom súlyosságával arányosan a csontszövettermelés élénkebb, ha csak a fokozott termeléshez megkívánt fehérjebevitel biztosítva van. Legfőltűnőbb a fokozott csontszövetképződés azokban a csontokban és azokban a csontrészekben, melyekre a jelzett befolyások a legerősebben érvényesülnek és a hol a csontnövekedés egészséges viszonyok között is a legélénkebb, mint a diaphysisnek az epiphysisszel határos részében (metaphysis), az izmok, inak és szalagok tapadási, a csontok hajlási helyein, továbbá részleges vagy teljes törések területén, nemkülönben a fogakat hordozó csontokban. A nagyobb mennyiségben termelt csontszövet rendeltetése volna növelni a csontos váz szilárdságát, ez azonban csak nagyon kis mérvben következik be, mert a túlnagy mennyiségben termelt szövet elmeszesedése szintén hiányos és mert különben többnyire a szilárdság szempontjából amúgy is kisebb értékű fonatos csontszövet jellegét viseli magán.

A csontos váz szilárdságának növelését célozza továbbá a nem egészen enyhe esetekben a myeloid csontvelőnek fokozatos átalakulása *rostos velővé* a csontlemezek szélével határos részében és a metaphysisben, sőt súlyos esetekben egyebütt is.

Összefüggés a rhachitises elváltozások és a kor, valamint a tartási viszonyok között.

Vizsgálataim eredménye szerint *a már rendes keretekben mozgó és a már rhachitisesnek jelezhető csontképződés között folytatólagos az átmenet.* Mint már jeleztem, mintegy 70-szeres nagyítással majd minden látótérben vehető észre osteoid szegély egyik-másik csontlemez körül vagy ennek csak egyik szélén és rendszerint csak egyik-másik kisebb részletén, mely szegély végei felé többnyire fokozatosan elvékonyodik és szabad szélén osteoblastumok fedik. A szegélyek szélessége 3—15 μ között változik, rendszerint azonban 10 μ -on alul marad. A rhachitisnek egészen kezdeti szakában az osteoid szegélyek szélessége egyező lehet az egészséges emberi és állati magzatokban

látott osteoid szegélyek szélességével, csupán azok nagyobb száma és terjedelme jelzi a folyamat kóros voltát, midőn az epiphysisporczogón legföljebb még csak az elmeszesedési csik egyenlőtlen szélessége és változó erősségű fejlődése ismerhető fel. Ilyen körülmények között nehézségbe ütközhetik annak eldöntése, hogy az osteoid szövet képződése még physiologiai keretekben mozog-e, vagy már a rhachitises mederbe csapott át. Ez a határozatlanság magyarázza meg POMMER állásfoglalását, aki egy-egy 3 napos, 4, illetőleg 5 hetes és 10 hónapos gyermekre vonatkozó vizsgálatai alapján állítja, hogy egészséges viszonyok között az osteoid szegélyek szélessége leggyakrabban 1—11 μ , de lehetnek egészen 19, sőt helyenkint 30 vagy épen 38 μ széles szegélyek is. Minthogy a magzatkorban és újszülöttekben 15 μ -nél szélesebb szegélyeket nem találtam, nem lehetetlen, hogy az osteoid szegélyeknek POMMER¹ eseteiben részben jelentékeny szélessége a már nem egészen rendes csontképződés folyamánya volt, habár egyéb rhachitises szöveti elváltozások még hiányoztak. Ezzel a lehetőséggel azért is kell számolni, mert SCHMORL² tapasztalatai szerint gyermekekben az élet második hónapjától kezdve már határozottan rhachitises elváltozások is lehetnek és mert ugyanennek a bűvárnak nagyon sok esetre támaszkodó észleletei szerint a rhachitis kezdetén a csontlemezeket övező osteoid szegélyek szélessége már eléggé jelentékeny szokott lenni, a mikor az epiphysisporczogó elmeszesedése, mint a rhachitis másik fontos ismertető jele, még csak helyenkint hézagosnak mutatkozik. Ebből arra szabad következtetni, hogy a rhachitises osteoid szövet képződése megelőzheti a porczogó elmeszesedésének fölismerhető vagy föltünőbb zavarát. Mint bizonyíték ebben az irányban fölhozható a rendes osteoid szegélynek legkeskenyebb volta éppen a magzatkorban, a mikor pedig a még physiologiainak minősíthető szegélyeknek a jóval gyorsabb csontfejlődésnek megfelelően a legszélesebbeknek kellene lenniök.

A kor és a csontok fejlettségi foka föllételezte különbségek a rhachitises csontelváltozásokban abban foglalhatók össze, hogy

¹ POMMER: Untersuchungen über Osteomalacie und Rhachitis, 1885.

² SCHMORL: Verhandl. d. Deutschen Pathol. Gesellschaft. 1909. S. 246; 1909. S. 58.

minél fiatalabb korban, illetőleg a csontoknak minél alacsonyabb fejlettségi fokán állt elő a rhachitis, annál nagyobb mérvű a porczogó burjánzása és sejtoszlopainak hosszúsága, minthogy növekedési képessége a korrallal és a csontok fejlettségével fordítva arányos. Hasonlót mondhatni a porczogó elmeszesedéséről, a mely a csontfejlődés korai szakában szintén sokkal élénkebb és valamivel szélesebb sávban jelentkezik, a rhachitist kiváltó okok ennél fogva annál enyhébb zavart idéznek elő a porczogó elmeszesedésében, minél csekélyebb a csontok növekedési képessége. Az epiphysisporczogó felől kiinduló csontosodás zavarának következményei, mint az ízületi végek megvastagodása, a burjánzó és az oszlopos porczogó rétegének megszelesbedése és szabálytalansága, valamint különböző szövetrészeinek össze-visszaságban keveredése, természetsszerűleg szintén annál feltünőbbek, a fejlettségnek minél alacsonyabb fokán levő csontok betegednek meg. Az osteoid szövet mennyisége szintén annál nagyobb, a fejlettségnek minél alacsonyabb fokán vannak még a beteg csontok. Ebből magyarázható továbbá az a tapasztalat, hogy a mindig lassan növekedő epiphysis csontmagvában, valamint egyáltalában a lassabban növekedő rövid csontokban az osteoid szövet jóval kevesebb, mint egyebütt. Sőt a kész csontszövet mérsz tartalma is kisebb, a fejlődésnek minél korábbi szakában jelentkezett a rhachitis. Vorr¹ szerint egészen ép fejlődő csontokban a hamu viszonylagos mennyisége a korrallal arányosan növekedik (6—7 hónapos emberi foetusban 59·5%, 2 hónapos gyermekben 65·3%, 5 éves gyermekben 67·8%).

A mechanikai befolyások hatását a rhachitises elváltozások fokára más helyen már említettem. Különösen a *testmozgás* van ilyen befolyással s nevezetesen nemcsak fokozottabb termelésre serkenti a csontszövetképző szöveteket, hanem egyúttal elősegíti a mérszók lerakódását a csontszövetbe. Kochmann és Petsch² nagyon élénk, sokat mozgó kísérleti kutyában

¹ M. B. SCHMIDT: Verhandl. d. Deutschen Pathol. Gesellschaft. 1909. S. 3.

² KOCHMANN és PETSCH: Biochemische Zeitschrift. 1911. XXXI. S. 361; XXXII. S. 10. 27.

csekélyebb mészfogyást állapított meg, mint nyugodtan viselkedő társaiban, HOHMEIER¹ szerint pedig tökéletes rögzítéssel sikerül újból puhává tenni a rhachitis gyógyulása után már egészen megszilárdult vétagok csontjait. Hasonló egyéb viszonyok között tehát a rhachitis ellenére sokat mozgó, főleg még nem régen, illetőleg még nem súlyosan beteg állatok csontjaiban a szivacsos csontállomány sűrűbben hálózatos és csontlemezei vastkosabbak, egyben pedig az osteoid szövet mennyisége viszonylagosan kevesebb.

Még feltűnőbb a *rágás befolyása az arczsontokban* végbe menő változásokra, nemcsak a rágóizmoknak minduntalan megismétlődő összehúzódása, hanem főleg az egymáshoz szorított fogak által elsősorban a fogmedreket körülvevő csontszövetre, tovavezetés folytán azonban az arczsontok egyéb részeire is kifejtett erős vongálás és nyomás révén. Ezeknek a mechanikai ingereknek hatása a csontszilárdság csökkenésével arányosan mindjobban fokozódik, az arczsontok veleje ennél fogva idővel egészben rostossá alakul át, az osteoid szövet termelése mind nagyobb méreteket ölt, a nélkül, hogy ezzel a csontok hiányos szilárdságát a rágás erejéhez viszonyítva lényegesen növelni sikerült volna. Ilyen módon ezek a viszonylagosan erős és minduntalan érvényesülő mechanikai ingerek könnyen a hyperplasiás gyuladáshoz hasonló és a csontszövet fokozott beolvasztásával kapcsolatos folyamatot indítanak meg, mely a szóban levő csontok kötőszöveti eredeténél fogva daganatszerűen sarjadzó szövet képződésére vezet. Így értelmezhető az a gyakorlatban és a kísérletek során is tett tapasztalat, hogy hasonló változások a koponyaboltozat és a koponyaalap csontjaiban az arczsontok súlyos megbetegedése ellenére nem fordulnak elő.

A *táplálék fehérjé tartalmának befolyása* abban nyilvánul, hogy tartósan elégtelen fehérjebevitel esetén a csontképződés helyein a porczogó sejtjeinek szaporodása és a csontszövet képződése csökken, első sorban és a legszembe tűnőbbben a mechanikai, dinamikai és statikai befolyásoktól jobban megkímélt csontokban és csontrészekben. Ezzel szemben a már termelt csont-

¹ HOHMEIER: Sitzung d. medicin. Gesellschaft Greifswald. 1911.

szövet beolvadása a rendes mederben halad előre, a csontok velő- és egyéb üregei ennél fogva tágulnak, a csontlemezek vékonyabbak, gyérebbek, kevésbé ágas-bogasak és az osteoid szövet mind jobban fogy, egy szóval a csontok porositása mind kifejezettebb.

Mészszegény táplálék és a testmozgás együttes befolyása abban az irányban érvényesül, hogy a régi csontszövet beolvadásával arányosan általában a közepesnél vékonyabb s kevésbé elágazódó csontlemezek képződnek, melyeket csak keskeny osteoid szegélyek öveznek. Ennek folytán a csontvelőüreg és a szivacsos állomány üregei, nemkülönben a csontkéreg HAVERS-féle csatornái megszélesbednek, egyben a csontkéregnek egymásba átmenő vastag lemezekből felépített állománya mind nagyobb terjedelemben alakul át a szivacsos csont szerkezetére emlékeztető szövetté. Csak midőn az állat akár a csontszilárdság csökkenése folytán, akár más okból már egyáltalán nem, vagy csak nagyon keveset mozog, indul meg a széles osteoid szegélyeknek és a kizárólag osteoid szövetből álló csontlemezeknek képződése. A csontoknak ez a viselkedése nyilván onnan ered, hogy a testmozgások nagy igényeket támasztván a csontok szilárdságával szemben, a csontképző szövetek vékonyabb és kevésbé elágazó és egyben kevesebb meszet tartalmazó csontlemezeket termelnek, melyek csekélyebb tömegüknél fogva a mészsók erős megfogyatkozása ellenére is legnagyobb részben elmeszesedhetnek, de viszonylagosan keskeny voltak és csekély elágazódásuk folytán a csontot főképen csak a hosszúságával egy irányban érvényesülő megterhelés fölvételére képesítik. A megfogyatkozott mészsókat a szervezet tehát úgy igyekszik a leggazdaságosabban kihasználni, hogy föláldozza a csontok szilárdságát bármely irányú megterheléssel szemben biztosító sűrűen hálózatos szerkezetét. Nem fogadható el helytállónak ebben a tekintetben STOELTZNER¹ és LEHNERDT² nézete, mely szerint mészhiány esetén a vékonyabb csontlemezek termelése annak volna a folyamánya, hogy ilyen körülmények között a calciumnak a csont-

¹ STOELTZNER: Pflügers Archiv. 1908. CXXII. S. 599.

² LEHNERDT: Zieglers Beiträge. 1909. XLVI. S. 468.

szövet termelését serkentő hatása csökkenne. Eltekintve ugyanis attól, hogy LIPSCHÜTZ kísérletei folyamán a calciumnak a csontképzést serkentő hatását nem észlelte, az általam megkísérelt magyarázat helyességét támogatják kísérleti eredményeim, melyek szerint elégtelen mész-, de különben megfelelő fehérjebevitel esetén az osteoporosisos elváltozásokat az osteoid szövet túltermelése váltja föl, ha az állatok egyáltalán nem, vagy csak keveset mozognak, habár a táplálék összetétele és a többi viszonyok továbbra is ugyanazok. Csak így értelmezhető továbbá az a kísérleti tapasztalatom, hogy a csontoknak az osteoporosisra emlékeztető állapota leggyakrabban a kutyákban észlelhető, melyek természetüknél fogva nagyon sokat és élénken mozognak, még akkor is, midőn állandóan elzárva tartják őket. Ez okból a kutyákban sokkal nehezebben sikerül typosos rhachitises csontszövetváltozásokat előidézni, mint az általában jóval nyugodtabb növényevő állatokban.

Az előbb vázolt kóros állapotot, melylyel kapcsolatosan az epiphysisporczogóban hasonló változások mennek végbe, mint a rhachitis folyamán, MIWA és STOELTZNER³ osteoporosis pseudorhachiticának és a rhachitistól lényegében és morphologiailag különböző bántalomnak minősítik. Ezzel a fölfogással szemben az előzőekben kifejtettekből és kísérleti eredményeimből következik, hogy ezeket a változásokat is a rhachitishoz kell soroznunk és hogy helyesebben a rhachitis osteoporotica elnevezés illenék rájuk.

Az emberi és az állati rhachitis viszonya egymáshoz.

Az emberi és állati rhachitis összehasonlíása közben a búvárok két lényeges körülményre nem voltak figyelemmel, nevezetesen a megbetegedés idejében az ember és az állatok csontrendszerének nagyon eltérő fejlettségére és a mozgásban mutatkozó különbségekre.

A fejlődés tartamának összehasonlításából következik, hogy az emberhez viszonyítva a ló csontfejlődése körülbelül 4-szer,

³ MIWA és STOELTZNER: Zieglers Beiträge. 1898. XXIV. S. 578.

a szarvasmarháé 4·5-szer, a juhé és kecskéé 6·5-szer, a sertésé 10-szer, a kutyáé 13·5-szer, a házinyúlé 21-szer, a tyúké 22-szer gyorsabb. Ehhez képest például a két éves gyermek csontjainak fejlettségét a ló már a magzatkor 9., a szarvasmarha a 8., a juh és a kecske az 5., a sertés 3·5. hónapjában, a kutya és a házinyúl életének 3. hetében éri el. A valóságban ezek a számadatok némileg módosulnak, annyiban, hogy a megszületésük után azonnal kifogástalanul mozgó növényevők és sertések csontjainak fejlődése az emberéhez viszonyítva még a jelzetnél is valamivel gyorsabb. Ezeknek az állatoknak csöves csontjaiban ugyanis az epiphysisek már a magzatkor utolsó szakában mind csontosak, az epiphysis csontmagvát már eléggé keskeny epiphysisporcogó választja el a diaphysistól, a rövid és lapos, nemkülönb a fedő-csontok pedig szintén elcsontosodtak. Az újszülött kutyában az epiphysisek, valamint a carpus-csontok még porcogósak ugyan és a tarsus csontjai közül is csupán a calcaneus tartalmaz csontmagot, de már az élet harmadik hónapjában ezek szintén elcsontosodnak. Ezzel szemben az embernek csak az 5. életévében van az epiphysisek mindegyikében csontmag, a carpus és a tarsus né mely csontjában pedig az csak a 8—12. életévben jelenik meg. Minthogy pedig a háziállatok úgyszólván kivétel nélkül csak elválasztásuk után szoktak rhachitisben megbetegedni, csikók nevezetesen legkorábban 5 hónapos, borjúk, bárányok és kecskégidák 3—4 hónapos, malaczkok és kutyák $2\frac{1}{2}$ —3 hónapos korukban, olyan időben tehát, midőn a csontok fejlettsége csikókban a $4\frac{1}{2}$ éves, borjúkban a 4 éves, juhokban és kecskeben a $3\frac{1}{2}$ éves, malaczkokban a $4\frac{1}{2}$ —5 éves, kutyákban és házinyulakban a $4\frac{1}{4}$ — $4\frac{3}{4}$ éves gyermek csontfejlettségéhez hasonló és a midőn csontképző szöveteik növekedési és átalakulási képessége szintén körülbelül a $3\frac{1}{2}$ —5 éves gyermekével megegyező. A gyermekek rhachitise ezzel szemben rendszerint az első életév második felében és a második életévben, ritkábban már az élet második hónapjától kezdve vagy csak a harmadik és negyedik életév folyamán szokott jelentkezni. A betegségnek a negyedik életév után nagyon ritka alakjait az emberorvosok késői angolkórnak (rhachitis tarda) nevezik. Ezek szerint az

állatokban csak az emberi rhachitis tarda-nak megfelelő csont-
elváltozások lehetnek, a csontok olyan állapota nevezetesen,
midőn az osteoid szövet mennyiségével szemben az összes por-
czogóbeli elváltozások viszonylagosan csekélyek, sőt a már na-
gyon csekély fejlődési képességgel bíró csontokban vagy csont-
részletekben egészen hiányozhatnak, de az osteoid szövet meny-
nyisége is mögötte marad a korai rhachitis folyamán észlel-
hető mennyiségnek.¹ Az állatok rhachitise eseteiben kevésbé
feltűnő tehát az epiphysis-porczogó burjánzó rétegének meg-
szélesbedése, a sejtoszlopok szabálytalansága és területükön a
különböző szövetrészeknek teljes összeviassága. Az állatokban
a porczogó átmeneti elmeszesedése sem szokott egészen hiá-
nyozni, hanem rendszerint csak különböző nagyságú hézagok lát-
hatók benne, illetőleg csak egyes szigeteken jelentkezik. A csont-
lemezek elmeszesedett részének viszonylagosan nagyobb mérsz-
tartalma az oka továbbá annak, hogy az állatok rhachitises
csontjai általában kevésbé könnyen vághatók.

A testmozgás kifejtette inger változó erőssége az ember-
ben és az állatokban szintén módosító befolyással van a rhachi-
tises csontváltozásokra. A gyermekek ugyanis, szemben az álla-
tokkal, olyan korban szoktak megbetegedni, a mikor még egy-
általán nem tudnak járni, illetve megbetegedésük után járási
képességük csakhamar megszűnik és felső végtagjaik használata
szintén korlátozott.

Még feltűnőbben szokott érvényesülni a már kifejtett mó-
don a rágás módosító hatása, annak folytán, hogy különösen
a növényevő állatok megbetegedésük idejében többnyire már
kemény s ennél fogva erősebb rágást kívánó eleségen élnek. Az
állatokban ezek szerint meglehetősen gyakori az arc-csontok
rhachitises eltorzulása, mi mellett a többi csontban csupán
csekély s puszta szemmel egyáltalán nem, vagy alig fölismer-
hető elváltozások lehetnek.

¹ SCHMORL: Über die Rhachitis tarda. Deutsches Archiv f. klin.
Medizin. 1906. LXXXV. S. 170. Die pathol. Anatomie d. rhachitischen
Knochenkrankung mit besond. Berücksichtigung ihrer Histologie und
Pathogenese. Ergebnisse d. inneren Medizin und Kinderheilkunde. 1909.
IV. S. 403.

A mészelvonással előidézett rhachitis viszonya a természetes emberi és állati rhachitishoz.

Összehasonlítva a különböző állatfajokban a természetes rhachitis szülte csontbeli elváltozásokat azokkal, melyeket a mézsók elvonásával malaczokon és kutyákon mesterségesen előidéztem, azt találtam, hogy mindkét esetben a csontelváltozások lényegükben azonosak és hogy ennél fogva az állatok természetes rhachitise azonos a mészelvonással előidézhető mesterséges rhachitisszel. Megfelelő kísérleti berendezéssel ugyanis, nevezetesen a táplálék mész- és phosphorsó-, valamint fehérjetartalmának, továbbá az eleség összeállításának változtatásával, a testmozgás szabályozásával és a kísérlet tartamának változtatásával a természetes rhachitisnek bármely nyilvánulási alakját sikerül mesterségesen előidézni. Minthogy viszont az állatok természetes rhachitise és az ember késői angolbetegsége morphologiai tekintetben azonos bántalom, az ember késői és korai rhachitisének azonossága pedig nem vitás, a mészelvonással kísérletesen előidézhető állati rhachitist szintén az emberi rhachitisszel azonos betegségnek kell minősíteni.

A rhachitis viszonya az osteomaláciához.

Vizsgálataim eredménye szerint az állatok rhachitise és osteomaláciája lényegében és anatómiai tekintetben azonos bántalom. A köztük mégis észlelhető eltérések csupán a csontoknak a korrallal kapcsolatos különbségeiből származnak. A rhachitis ugyanis a még fejlődésben levő, az osteomalacia viszont a már kifejlődött állatok betegsége. A rhachitisnek ennél fogva elmaradhatatlan kísérői a különösen az epiphysisporczogó tájékan mindvégig szembetűnő enchondralis, nemkülönben a csont vastagodását biztosító periostalis csontosodás zavarai, melyek az osteomalacia folyamán, minthogy a fejlődés befejezése után sem enchondralis, sem periostalis csontosodás nincs többé, hiányoznak és csak a kész csontszövetnek a rhachitis kíséretében is végbemenő folytonos beolvadása szülte hiány pótlására a csontrendszer minden részében termelt csontszövet hiányos elmesze-

sedése s hiányos átalakulása kész csontszövetté észlelhető, vagyis osteoid szövet termelése és a velőszövetnek rostos velővé átalakulása. A felnőtt korban a csontfejlődés megállása hozza magával egyben azt is, hogy az osteomalaciás csontokban az osteoid szegélyeken csak gyéren találhatók osteoblastumok. A mechanikailag különösen erősen igénybe vett csontrészekben, első sorban az arczsontokban, hasonló daganatszerű szövetburjánzás állhat elő, mint némely rhachitises betegben. Az osteomalaciás csontok nagyobbfokú törékenységét, szemben a rhachitises csontok hajlékonyságával, érthetővé teszi az a tapasztalat, hogy felnőtt korban a kész csontszövet mésztartalma viszonylagosan jóval nagyobb, mint a növekedő csontokban. Ha tehát osteomalaciás állatokban a csontszövetnek bizonyos mennyiségét puha osteoid szövet váltotta föl és ezzel a csontok szilárdságát lényegesen csökkentette, az ilyen csontok a nagy testsúly alatt könnyen eltörnek, a helyett, hogy elhajlanának, mint a rhachitis folyamán. Osteomalaciás állatokban a csontszövetnek általában gyakoribb és szembetűnőbb beolvasztása szintén csak a kor szülte különbség, mert felnőtt állatokban a csontbeolvasztás a csonttermeléssel lépést tart, fiatal állatokban ellenben a csontszövettermelés jóval élénkebb, mint a csontszövet beolvasztása.

A rhachitis viszonya az osteoporosishoz.

Az osteoporosis a csont összes üregeinek nagyobbodása a csontszövet sorvadása vagy elégtelen képződése folytán, a nélkül, hogy egyidejűleg osteoid szövet termelése fölismerhető volna. Az ilyen csontokban a velőüreg mindjobban tágul a szivacos állomány és a csontkéreg rovására, a csontkéreg végül szintén lyukacsossá és a csont egészben törékenyebbé válik, mikroszkóppal pedig a csontlemezek megvékonyodását és elágazódásaik megfogyatkozását, a velőürök megnagyobbodását és részben összefolyását, továbbá a velőnek sejt- és érszegény, tágregézű és finomrostú szöveté átalakulását láthatjuk. A növekedő csontokban azonkívül az epiphysisporcogónak burjánzó és oszlopos rétege nagyon keskeny s ugyanolyan a porcogó elmeszesedési csíkja is. A tiszta osteoporosis ezek szerint morfológiai tekin-

tetben a rhachitistól és az osteomaláciától különböző folyamat, noha közöttük sokféle átmenet lehetséges.

Midőn rhachitis vagy osteomalacia eseteiben elégtelen fehérjebevitel, közbejött sorvasztó betegségek vagy egyszerűen a rhachitis, illetőleg az osteomalacia okozta senyveség következtében a csontszövet termeléséhez szükséges fehérje nem áll rendelkezésre a megkívánt mennyiségben, a kész csontszövetnek a rendes mederben tovább haladó beolvasztása mellett az osteoid szövet termelése fokozatosan csökken s végül egészen megszűnhetik s egyidejűleg az enchondralis csontosodás helyén a porczogó sejtek szaporodása és oszlopokba sorakozása szintén alábbhagy, a porczogó ellenben elmeszesedik, minthogy a csontképzésnek a minimumra csökkenése folytán a szervezet most már minden körülmények között rendelkezik az ennek biztosítására szükséges mézsókkal. Ezek szerint az adott esetben a táplálék fehérjetartalma, sorvasztó betegségek vagy senyves állapot egyidejű jelenléte vagy hiánya lesz elhatározó befolyással abban az irányban, hogy a rhachitisszel kapcsolatosan egyáltalán és milyen fokú osteoporosis áll elő, illetőleg, hogy a különben rhachitist vagy osteomaláciát előidéző befolyások ellenére nem fejlődik-e ki tiszta osteoporosis. Elégtelen fehérjebevitel, sorvasztó betegségek és befolyások természetesen rhachitist vagy osteomaláciát kiváltó ártalmak nélkül is okozhatnak osteoporosist, a mikor azután még oktani kapcsolat sincsen a jelzett bántalmak között.

A rhachitis viszonya az ostitis deformanshoz.

WELLMANN tanártársammal együtt végzett kísérleteim során hat malacz közül háromban kifejezett rhachitis mellett az arccsontokban a REHN¹ által részletesen ismertetett és ostitis fibrosának vagy deformansnak minősített elváltozásokat állapítottam meg. Hasonló volt a lelet természetes viszonyok között megbetegedett olyan kecskében, melynek többi csontjában az elégtelen fehérjebevitel következtében enyhe rhachitisszel kapcsolatban

¹ REHN: Zieglers Beiträge. 1908. XLIV. S. 274.

súlyos osteoporosis fejlődött ki. Ezek az észleletek a mellett tanuskodnak, hogy az állatok arczsontjaiban gyakori ostitis deformans szoros viszonyban van a rhachitisszel, az osteomaciával, sőt az osteoporosiszal is, annyiban, hogy az e kóros folyamatok következtében puhább arczsontokban a rágás kifejtette mechanikai inger hatása alatt a közben rostossá vált csontvelőnek daganatszerű túlsarjadzása áll elő. Az emberi ostitis deformansra vonatkozóan RECKLINGHAUSEN¹ szintén arra a következtetésre jutott, hogy ez a felnőtt korban előforduló bántalom osteomalaciás alapon fejlődik mechanikai, dinamikai és thermalis ingerek hatására. Ezek szerint, ellentétben REHN² és SCHMORL³ fölfogásával, a sertések úgynevezett szuszogókórja (az arczsontok megvastagodása folytán előállott orrszűkület fenntartotta szuszogó lélekzés), valamint a többi állatfajban az arczsontoknak hasonló okokból előálló megvastagodása lényegében a rhachitishoz, az osteomalaciához, sőt néha az osteoporosishoz tartozó rendellenesség. Korántsem akarom tagadni, hogy elvéte helyi ingerek hatására egyidejű rhachitis, osteomalacia vagy osteoporosis nélkül is támadhat az arczsontokban ostitis deformans, ilyen alakban előfordulását azonban az eddig észleltekből nem látom bizonyítotttnak.

Összefoglalás.

Megfelelő kísérleti berendezéssel sikerül a háziállatokban valódi rhachitist előidézni.

Az állatok kísérletes és természetes rhachitise morfológiailag azonos az emberi rhachitisszel. A köztük észlelhető különbségek csupán onnan erednek, hogy az állatok abban a korukban, midőn rhachitisben megbetegednek vagy megbetegíthetők, már legalább a négy éves ember csontjainak fejlődési fokát ér-

¹ RECKLINGHAUSEN: Die fibröse oder deformierende Ostitis, die Osteomalacie und die osteoplastische Carcinose in ihren gegenseitigen Beziehungen. Festschrit. 1891.

² REHN: Zieglers Beiträge. 1908. XLIV. S. 274.

³ SCHMORL: Ergebnisse d. inn. Medizin und Kinderheilkunde. 1909. IV. S. 403.

ték el és hogy ellentétben az emberrel, megbetegedésük idejében már kifogástalanul és sokat mozognak. Ezek szerint az állatok természetes és mesterséges rhachitise egyaránt az emberi rhachitis tarda-nak felel meg, kezdeti szakában és enyhe alakjában azonkívül, különösen a húsevőkben, osteoporosiszal szokott társulni.

Az állatok rhachitise és csontlágylása lényegében azonos bántalom. A köztük felismerhető különbségek csupán onnan erednek, hogy a rhachitis a még fejlődő csontok bántalma lévén, minden esetben az enchondralis és a periostalis csontosodás zavarával kapcsolatos, ellentétben az osteomaláciával, mely a már teljesen kifejlődött csontok rendellenessége. Minthogy a csontos váz egyes részei nagyon különböző időben fejezik be fejlődésüket, nem ritkák azok az esetek, mikor a csontok egy részében még rhachitises, a többi csontban viszont osteomalaciás elváltozások vannak. A rhachitis ezek szerint éles határ nélkül mehet át az osteomaláciába.

A tiszta osteoporosis a rhachitistól és az osteomaláciától egyaránt morphologiailag különálló bántalom, mert sem az enchondralis csontosodás zavara, sem osteoid szövet termelése nem kíséri. Viszont azonban hasonló körülmények között keletkezhetik, mint a rhachitis és az osteomalacia, mikor bármely okból a test növekedése vagy a beolvasztott csontszövet pótlása korlátozott, illetőleg szünetel.

Az állatok arczsontjaiban gyakori ostitis fibrosa vagy deformans a rágás kifejtette erős mechanikai izgatás hatása alatt rhachitises és osteomalaciás, esetleg osteoporosisos alapon szokott kifejlődni.

Az ismertetett megállapítások nagyon hasznosnak ígérkeznek a rhachitis és az osteomalacia oktanának földerítésére irányuló, eddig szinte kilátástalannak hitt kutatások szempontjából.

A HERÉSEINKET KÁROSÍTÓ ARANKÁKROL.

DEGEN ÁRPÁD I. tagtól.

1899-ben jeleztem először egy a «Köztelek»-ben közzétett cikkemben a nagymagú amerikai arankának hazai eredetű lóhere- és luczernamagban való előfordulását s figyelmeztettem a hazai magkereskedőket s gazdákat arra a nagy veszedelemre, a mely ennek az élősdinek megtelepedésével s elterjedésével járna. Egyidejűleg természetesen felettes hatóságomnak is bejelentettem az eseteket s javasoltam a szükséges óvó-intézkedések megtételét.

Az amerikai aranka azonban gyorsabban terjedt, mint a közigazgatási apparátusunk intézkedései, úgy hogy rövid néhány év alatt a legtöbb s a legjobb heremagot termelő vidékeink meglettek fertőzve.

Nem óhajtok kiterjeszkedni azokra a károkra, a melyeket ennek a parasitának elterjedése okozott országunknak közgazdasági szempontból, a midőn elértéktelenítette az élénk keresletnek örvendő magyar lóhere- és luczernamagunkat azzal, hogy magja nagysága miatt ezekből a magvakból ki nem rostálható, hanem ez alkalommal csak azzal a kérdéssel óhajtok foglalkozni, mely arankafajhoz, vagy mely fajokhoz tartoznak azok az arankák, a melyek hazánk heremagtermelését ennyire károsítják.

S itt előre kell bocsátanom, hogy a magvizsgáló állomások a beküldött magvak vizsgálata közben sok oly érdekes adat birtokába szoktak jutni, amelyek nem, vagy csak nagyon ritkán kerülnek megfigyelésre azok részéről, a kik a szabadban botanizálnak. A mi egyébként természetes is, mert a botanikus a lehető-

ségig el szokta kerülni a mivelt földet, a mely vajmi kevés változatosságot nyújt, de a melynek átkutatását törvényes intézkedéseink is tiltják.

Így a magvizsgálók sok oly adatnak jutnak birtokába, a melyek a floristák elől rejtve vannak, viszont a magmeghatározások nagy nehézsége mellett nem egy esetben olyan jelenségekkel állanak szemben, a melyeket egészen biztosan megfejtteni nem tudnak.

Még a magmeghatározás módszereinek tökéletes kiépítése és a mikroskopi vizsgálat mellett is megesik, hogy egyik-másik mag meghatározásakor tévedünk, vagy egyik-másik magot biztosan meghatározni nem tudjuk; ilyenkor a mag kitenyésztését alkalmazzuk, a midőn a magból fejlődő növényt határozzuk meg. Ez azonban, itt bővebben nem magyarázható okokból, nem mindig sikerül. Különösen nehéz esetekkel állunk szemben, a midőn egyéb bélyegükben igen eltérő növények nagyon hasonló, sőt néha egymástól semmiféle módszerrel biztosan meg nem különböztethető magvakat hoznak létre, s ilyen eset fordul elő az arankának a «*Glistogrammica*» csoportjába tartozó egyes fajainál, a melyeknek magja annyira hasonló, hogy sem makro- sem mikroskopi uton egymástól meg nem különböztethető.¹

Ilyen rendkívül hasonló magja van a *Cuscuta suaveolens* SER. (*C. racemosa* auct.-europ.) és a *Cuscuta arvensis* BEYR.-nek. A mag vizsgálata alapján a heréseinkben előforduló növényt eredetileg a *C. suaveolens*-nek tartottuk, ugyanennek a fajnak tartotta a zürichi magvizsgáló állomás is, a mely velünk majdnem egyidejűleg állapította meg ennek az amerikai vendégnek a magyar lóheremagban való előfordulását (l. Jahresber. der schweizerischen Samen-Unters.-Anstalt, 1897 98:22, 1898 99:42, 1900/1:19, 1903/4:16), a mi biztos adatnak vehető, mert a zürichiek kitermelt növényről állapítják meg a nevet.

¹ A *Cuscuta suaveolens* és *C. arvensis* magjának mikroskopi különbségével foglalkozott GUTTENBERG, Naturw. Zeitschr. f. Forst- u. Landw. 1909: 32—43, azonban az általa talált különbségekről az intézetünkben végzett vizsgálatok azt derítették ki, hogy ezek alapján e két fajt biztosan megkülönböztetni nem lehet.

Midőn azonban újabban több esetben alkalmunk volt a lóherén és a luczernán élősködő növényt a szabad természetben is megfigyelhetni, a hol egyes helyeken hazai, benszülött gyomokra — előszeretettel *Atriplex*-fajokra — is átterjed s így a miveleti földeken kívül is megtalálható, azt láttuk, hogy országunkban nem annyira a délamerikai *C. suaveolens*, hanem az északamerikai *C. arvensis* az elterjedtebb kártevő.

A *C. arvensis*-t országunkban legelőször 1902-ben láttam Szamosujvár és Deés közt lóherén; 1906-ban¹ pedig egy paprikán élősködő növényben ismertem fel ezt a fajt, illetőleg ennek egy új válfaját,² melyet LINHART magyaróvári akad. tanár termelt paprikán. 1908-ban ugyancsak a magyaróvári akadémia kísérleti telepén mívelt répán fejlődött növényben ismertem fel újra a *C. arvensis*-t. Utóbb POLGÁR SÁNDOR győri tanárnak, a ki az utolsó években behatóan foglalkozott az országunkban megtelepedett idegen gyomok tanulmányozásával s a ki a Győr vidékén megjelent idegen arankában a *C. arvensis*-t ismerte fel, köszönhetem azt a figyelmeztetést, hogy országunk többi részében is alighanem ez az elterjedtebb faj. Az intézetünkben összegyűlt anyag reviziója csakugyan azt derítette ki, hogy az amerikai arankák közül főképen a *C. arvensis* terjedt el s hogy a «nagy

¹ Magyar származású lóheremagban voltaképen legelőször KINZEL említette a Naturw. Wochenschr. f. Forst- u. Landw. I. 1903: 178 oldalán, ugyanebben a cikkében azonban a *C. racemosá*-t (= *C. suaveolens*-t) is említi, mint a magyar lóheremagban előfordulót.

1906-ban az én adatom nyomán említi STÉBLER: Verh. der internat. Konferenz f. Samenprüfung Hamburg. Jahresber. der. Ver. f. angew. Bot. IV. 1906 (1907) 316. old.

Olaszországban is, úgy látszik, ez a faj terjedt el jobban (l. D'IPPOLITO. Sulla invasione della *Cuscuta arvensis*. Staz. sperim. ital. XLI. 1908: 757 és XLVI. 1913: 540—549); valószínűnek tartom, hogy az Oroszországból *C. obtusiflora* var. *breviflora* néven, mívelt növényekről (paprika, hagyma, burgonya) közölt adatok (l. LARIONOW, die Hauptarten der russ. Seide u. ihre Massregeln. Ann. d. Samenprüf. Anstalt am Kaiserl. bot. Garten St. Petersburg I. 1912) is a *C. arvensis*-re vonatkoztatandók. Erre enged következtetni az a körülmény, hogy LINHART is Oroszországból kapta azt a magot, melyből Magyaróvárt a *C. arvensis* fejlődött.

² *Cuscuta arvensis* BEYR. var. *Capsici* DEGEN et LINH., Zeitschr. f. Pflanzenkrankh. 1907: 267.

arankák» zöme mindenesetre ehhez a fajhoz s nem a *C. suaveolens*-hez tartozik.¹ Az eddig megvizsgált példák alapján a következő elterjedést közölhetem:

1900. Szentés mellett lóherén (THAISZ); 1902. Szamosujvár és Deés közt lóherén (D.); 1906. Magyaróváron, paprikán mivelve (mint var. *Capsici* (LINH.)); 1907. Frigyesfalván (Bereg m.) (THAISZ); 1907. Bazin (Pozsonym.) különböző gyomnövényen (KOZMA); 1908. Kolozsvár, a gazdas. akad. telepén különböző gazdanövényen, mivelve (PÁTER B.); 1908. Magyaróvár, répán (JUHÁSZ Á.); 1908. Gyulakuta (Maros-Tordam.) (THAISZ); 1908. Tuzsér (Szabolcs m.) (GERHART); 1909. Garam-Szentkereszt (KOZMA); 1910. Högyész (Nógrádm.) (GERHARDT); 1911. Ipolyság (Hont m.) luczernán és nyolczféle gyomnövényen (KOZMA); 1912. Hatvan (LYKA K.); 1915. Budapesten, a Közraktárak gyáli-úti telepén gyomokon (D.); 1916. Békásmegyer (Pest m.) különböző gyomnövényen (KOC SIS); 1916. Versecz, kb. 80 különböző gazdanövényen (WAGNER), 1918. Györm. (POLGAR).

A *C. arvensis* biztos meghatározása azonban nem volt könnyű feladat, mert BEYRICH első leírása² nem illik teljesen a nálunk meghonosodott növényre, nevezetesen virágja nem kocsányos, hanem ülő, csészéje nem ötszögletű, hanem teljesen gömbölyű, kúpalakú; a *C. arvensis* typusa voltaképen a *C. pentagona* ENGELM.-nak (Syst. Arrang. 494) felel meg, a mi növényünkre inkább reáillett a var. *calycina* ENGELM. (ap. GRAY l. c.) leírása, mely a virágzatot jobban összetereteltnek s a csészét fél-gömbalakúnak mondja. Teljes biztosságot csak akkor kaptam, a midőn GRAEBNER berlini tanár szaktársam szíves volt a mi növényünket BEYRICH-nek a berlini botanikus múzeumban őrzött eredeti példányával összehasonlítani. A BEYRICH-féle növény csakugyan a var. *pentagona*-nak bizonyult, a nálunk meg-

¹ A *C. arvensis*- var. *calycina*-hoz tartozik — legalább az ábra szerint — az a növény is, a melyről KÁROLY R. értekezett a Kisérlet. Közlem. VIII. 1905: 604. és köv. oldalán s valószínűleg ugyanerre vonatkozott néhány részemről a Kisérlet. Közlem. XIV. 498. old. közzétett, a *C. suaveolens* előfordulására vonatkozó adat is.

² ASA GRAY, Manual of the Botany of the North U. S. ed. II. 1856: 336—37.

honosodott aranka helyes neve pedig *C. arvensis* var. *calycina* ENGELM.

Országunkban előbb főképp lóheremag útján terjedt el, melyből magja teljes biztonsággal nem rostálható ki; később luczernásainkat is megfertőzte; megtaláltuk fehérhere-, bíborhere- és bükkönymagban is; a herések széléről azután átterjedt mesgyékre, árkokra, utak szélére; úgy ezeken a helyeken, valamint művelti talajunkon is ma már meghonosodottnak kell tartanunk.

Ezeket a mezőgazdasági vonatkozásuk miatt is fontos megállapításokat óhajtottam a Tek. Akadémiának bejelenteni, kérve az Akad. Értesítőben való közzétételüket.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1921 márcz. 14.-én tartott üléséből.)

A METADIMETHOXYBENZALDEHYD SYNTHESISISE.¹

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Az aromás dioxyaldehidek közül eddig még ismeretlen a metadioxybenzaldehyd. Az utolsó években oly növényi anyagok lettek ismeretessé, a melyekben a substituensek a benzolgyűrűnek ugyanazon a helyein vannak, mint a metadioxybenzaldehydnél és ezért érdekel birna ez ismeretlen aldehyd előállításá. Ez okok indítottak arra, hogy a metadimethoxybenzaldehyd előállítását megkíséreljem, és pedig három különböző úton. Legelőször is a több év előtt általam előállított metadimethoxybenzamidből² indultam ki és e vegyületet híg alkoholos oldatban natriumamalgammal redukáltam a megfelelő alkohollá. Az utóbbi vegyületből kaliumbichromattal és kénsavval való oxydatió útján a metadimethoxybenzaldehyd képződött. A savamidnek alkohollá való reductiója csak igen rossz termelési hányaddal volt eszközölhető, ezért az aldehydnek ez uton való előállítása még kis mennyiségben is igen fáradságos. További kísérleteimben megpróbáltam a metadioxybenzolsavat elektrolytes úton a megfelelő alkohollá redukálni, e reactionál azonban, mivel a reductiót aethylalkoholos oldatban eszközöltem, nem az alkohol, hanem annak aethylæthere képződött.

Végül sikerült az aldehydét a metadimethoxybenzoylchloridból,³ melyet több év előtt állítottam elő, igen kényelmes mó-

¹ A budapesti kir. m. tud. egyetem II. chemiai intézetében készült dolgozat.

² Matematikai és Természettud. Értesítő 32. köt. (1914); Journal f. prakt. Chemie 87, 403 (1913).

³ Loc. cit.

don, a ROSENMUND-féle¹ eljárás szerint hydrogennel redukálni metadimethoxybenzaldehyddé. Ez úton az aldehyd nagyobb mennyiségben is kényelmesen előállítható. Munkám kísérleti részében legfontosabb származékai útján jellemeztem.

Kísérleti rész.

m-dimethoxybenzylalkohol.

Az aromás savamidek GUARESCHI² és MARX³ megfigyelései szerint vizes alkoholos oldatban és savanyú közegben nátriumamalgammal redukálva, a megfelelő alkohollá alakulnak át.

A metadimethoxybenzamid előállítását⁴ az előzőleg ismer-tetett módon eszközöltem és reductióját a következőképen végeztem: 20 gr metadimethoxybenzamidet feloldunk 900 cm³ meleg æthylalkoholban és 1700 cm³ vizet adunk hozzá. Az oldatot szobahőmérsékletre hűtjük le és lassacskán 1 kg 2½%-os nátriumamalgamot adunk az oldathoz, miközben időnként hig kénsavat öntünk a reductiós folyadékhoz, hogy állandóan erősen savanyú kémhatású maradjon. A reductio alatt a lombikot erősen rázzuk és így két óra alatt a reactiot bevégezhetjük. A higanyról leöntött oldatból az alkohol fő tömegét ledestilláljuk és az oldat kihülésekor metadimethoxybenzoésav válik ki, a melyet leszűrünk. Az oldatot ætherrel többször kivonjuk, egy-néhányszor hig nátronlúggal átrázzuk, nátriumsulfattal szárítjuk és az oldószert lepárologatjuk. A lombikban sárgás olaj marad vissza, a melyből kristályok válnak ki. Az olajat a kristályoktól kevés ætherrel kioldjuk és az æther lepárlása után az alkohol visszamarad. Az egyes kísérletekben a képződő alkohol mennyisége változó de mindig kevés volt. Az alkohol lig-roinból 47—48°-on olvadó tükben kristályosodik.

Az előbbi reactió útján nyert alkohol oxydatióját legczél-

¹ Ber. 51, 585 (1918).

² Ber. 7, 1462.

³ Ann. der Chemie 263, 249 (1891).

⁴ Loc. cit.

szerűbben következőképpen eszközöljük: 2 gr alkoholt 4·5 gr kaliumbichromat, 8 gr tömény kénsav és 60 cm³ víz keverékével rövid ideig hevitünk. Ezután a reactioelegyet lehűtjük és ætherrel jól kirázzuk. Az ætheres oldatot az aldehyd kivonása czéljából többször hig natriumbisulfit-oldattal átrázzuk. A natriumbisulfit-oldatot nátronlúggal elbontjuk és az aldehydet ætherrel kivonjuk. Az oldószer lepárlása után visszamaradó terméket ligroinból kristályosítjuk át.

0·1702 gr anyag adott: 0·4050 gr. CO_2 -t, 0·0920 gr H_2O -t.

$C_9H_{10}O_3$ képlet alapján a számított értékek: $C = 65·06\%$,
 $H = 6·02\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 64·89\%$, $H = 6·00\%$.

Az aldehyd előállítása e módszer szerint igen fáradságos, mert a kiindulási anyag gyanánt szükséges alkohol csak igen kis termelési hányaddal áll elő a metadimethoxybenzamid reductiójaker. Munkám további menetében sikerült más úton egy kényelmes előállítási módját az aldehydnek kidolgozni.

Metadimethoxybenzyl-æthylæther.

Az aromás carbonsavak METTLER¹ vizsgálatai alapján electrolytes reductio útján savas közegben a megfelelő alkoholokká alakíthatók át. A metadimethoxybenzoësavat savas alkoholos közegben nagy áramsűrűség alkalmazása mellett ólomkathoda segítségével redukáltam, de reactió termék gyanánt nem az alkohol, hanem æthylæthere képződött.

A reductio eszközlése czéljából 10 gr metadimethoxybenzamidot 30 cm³ töménykénsavból, 50 cm³ vízből és 70 cm³ alkoholból készített elegyben feloldunk. Kathoda gyanánt vegytiszta ólomlemez használtam, mely az anodától (ólomlemez) porcellándiaphragma által volt elkülönítve és anolyt gyanánt hig kénsavat tartalmazott. Az áramerősséget az egész reductio alatt úgy szabályozzuk, hogy az 10—12 Amp. legyen 100 cm² kathodafelületre. A katolyt hőmérsékletét külső hűtéssel állandóan

¹ Ber. 38, 1745 (1905).

70—80 C°-on tartjuk. Az elpárolgó alkohol helyett a katolyt-hoz a reductio alatt még 60 cm³ alkoholt adunk. A folyamat öt órát vett igénybe és 7·6 gr termék képződött. A reakció bevégezte után a kathodafolyadékot ætherrel kioldjuk és a kevés változatlan sav eltávolítására hig nátronlúggal átrázzuk. Az æther lepárlása után visszamaradó terméket az esetleg képződött kevés ester eltávolítása céljából vízfürdön egynehány óra hosszat töményalkoholos kálioldattal hevítjük. Az oldatból ezután az alkoholt ledesztilláljuk, a visszamaradó terméket sok vízzel hígítjuk és ætherrel kivonjuk. Az ætheres oldatot natriumsulfattal szárítjuk és az oldószert lepárolgatjuk. A visszamaradó terméket vacuumban desztilláljuk, miközben a termék 11 mm nyomás alatt 156—158 C°-on desztillál át. Az analysis céljára szolgáló terméket még egyszer desztilláljuk.

0·1322 gr anyag adott: 0·3273 gr CO₂-t, 0·0969 H₂O-t.

C₁₁H₁₆O₃ kép'et alapján a számított értékek: C=67·35%, H=8·16%.

Kísérletileg talált értékek: C=67·52%, H=8·20%.

Az analysis adatai szerint így a reductiónál a metadimethoxybenzyl-æthylæther képződik.

Metadimethoxybenzaldehyd.

A fentebbi vegyület előállítására a metadimethoxybenzoylchloridot xylos oldatban hydrogenáramban egy katalysator jelenlétében redukáltam. Legelső kísérleteimhez platinataplót használtam katalysator gyanánt, ezután pedig fémes nickelt, por alakban, de egyikkel sem sikerült a reductiót eszközölnöm.

Igen jó eredménnyel eszközölhetjük a reductiót ROSEN-MUND eljárása szerint fémes palladium segítségével a következő módon:

5 gr frissen desztillált savchloridot 15 cm³ xyloban feloldunk. A xylolt előzőleg natrium segítségével egészen víztelenítjük. Az oldatot vastag kémcsőbe helyezük, hűtővel szereljük fel és miután 2 gr palladium-baryumsulfat katalysatort adtunk hozzá, hét óra hosszat hydrogenáramot bocsátunk át a folyadékra. A hydrogent előbb hig kaliumpermanganat-oldat-

tal töltött mosóüvegen, majd tömény kénsavat tartalmazó két szárítókészüléken vezetjük át. A hydrogent egy hosszú vastag üvegcső segélyével vezetjük a hűtőn át a kémcsőbe. A xylol hőmérsékletét olajfürdő segélyével az egész idő alatt 140 C° -on tartjuk. A reakció befejezte után az oldatból még melegen leszűrjük a katalysatort ránczos szűrő segélyével és benzollal jól kimossuk. Az oldószert ezután egy frakcionáló lombikból vacuumban a vízfürdőről ledestilláljuk. A visszamaradó terméket ezután CLAISEN-lombikból a vacuumban desztilláljuk, miközben 16 mm nyomáson 151 C° -on a termék átdestillál. A szedőben összegyülemelő termék mihamar megdermed, ekkor azt agyagtányérra kenjük és jól kiszáritjuk. A terméket ezután ligroinból átkristályosítjuk. Az analysishez szolgáló anyagot ligroinból még egyszer átkristályosítottam és vacuum-exsiccatorban kiszáritottam.

0.1442 gr anyag adott: 0.3440 gr CO_2 -t, 0.0769 gr H_2O -ot.

$\text{C}_8\text{H}_{10}\text{O}_8$ képlet alapján a számított értékek: $C = 65.06\%$.
 $H = 6.02\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 65.06\%$, $H = 5.97\%$.

A metadimethoxybenzaldehyd ligroinból szintelen lapocskákban kristályosodik, a melyek $45\text{--}46\text{ C}^\circ$ -on olvadnak. Az aldehyd alkoholban és benzolban könnyen oldódik. A vegyület meleg vízben könnyen oldódik, ellenben hidegben oldhatatlan. Petroleumætherben és ligroinban hidegen nehezen oldódik, ellenben könnyen melegben.

Metadimethoxybenzaldehyd-paranitrophenylhydrizon.

E vegyület előállítására 1 gr metadimethoxybenzaldehydet feloldunk 20 cm^3 50-os eczetsavban és ez oldathoz 1 gr paranitrophenylhydrizin eczetsavas oldatát (20 cm^3) öntjük. Ha a két oldatot melegen elegyítjük, rövid idő múlva a hydrizon kiválik, melyet leszűrünk, kevés 50%-os eczetsavval kimosunk és a további tisztítás céljából alkoholból kristályosítunk át. Az analysishez a vegyületet a szárítószekrényben 100 C° -on szárítottam ki.

0.1360 gr anyag adott: 16.5 cm^3 nitrogent (757 mm, 15 C°).

0·1212 gr anyag adott: 0·2665 gr CO_2 -t, 0·0542 gr H_2O -t.

$C_{15}H_{15}O_3N_3$ képlet alapján a számított értékek: $C=59\cdot80\%$,
 $H=4\cdot98\%$, $N=13\cdot95\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=59\cdot97\%$, $H=5\cdot00\%$,
 $N=14\cdot08\%$.

A paranitrophenylhydrazon vörös tűkben kristályosodik, a melyek 183—184 C° -on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik benzolban és jégezetben. Alkoholban a termék hidegen nehezen oldódik, ellenben könnyen melegben. A hydrazon ligroinban igen nehezen oldódik, és petroleumætherben majdnem oldhatatlan.

Metadimethoxybenzaldehyd oximja.

Az oxim előállítására céljából 1 gr aldehydet feloldunk 20 cm^3 alkoholban és ez oldathoz 1·8 gr hydroxylaminchlorhydratból, 1·8 gr natriumbicarbonatból és kevés vízből készült hydroxylaminoldatot öntünk. Az oldatot visszafolyó hűtőcsöves lombikban négy óra hosszat vízfürdőn hevítjük és a reactio bevégezte után az elegyet sok vízbe öntjük, miközben az oxim kiválik. A kristályokat leszűrjük, vízzel jól kimossuk és agyagtányéron kiszáritjuk. A további tisztítás céljából ligroinból kristályosítjuk át.

0·1156 gr anyag adott: 7·9 cm^3 nitrogent (760 mm, 16 C°).

0·1152 gr anyag adott: 0·2517 gr CO_2 -t, 0·0617 gr H_2O -t.

$C_9H_{11}O_3N$ képlet alapján a számított értékek: $C=59\cdot68\%$,
 $H=6\cdot08\%$, $N=7\cdot74\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=59\cdot59\%$, $H=5\cdot99\%$,
 $N=7\cdot89\%$.

Az oxim szintelen tűkben kristályosodik, a melyek 119—120 C° -on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben és benzolban. Ligroinban a termék hidegen nehezen oldódik, ellenben könnyen melegben.

Metadimethoxybenzaldehyd-semicarbazon.

1 gr aldehydet feloldunk 20 cm^3 alkoholban és hozzáelegyítünk 1 gr semicarbazidchlorhydratból és 1·2 gr natrium-

acetatból készült vizes semicarbazid oldatot. Egynehány perczig hevítjük az elegyet és ezután víz hozzáadása által a semicarbazont leválasztjuk. A kivált kristályokat leszűrjük, vízzel jól ki-mossuk és további tisztítás céljából meleg vízből kristályo-sítjuk át. Az analysishez az anyagot 100 C°-on szárítjuk.

0·1100 gr anyag adott: 17·9 cm³ nitrogent (762 mm, 13 C°).

0·1452 gr anyag adott: 0·2857 gr CO₂-t, 0·0773 gr H₂O-t.

C₁₀H₁₃O₃N₃ képlet alapján a számított értékek: C=53·81%, H=5·83%, N=18·84%.

Kísérletileg talált értékek: C=53·66%, H=5·96%, N=19·08%.

A semicarbazon szintelen tűkben kristályosodik, a melyek 177—178 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkohol-ban és meleg benzolban. Ligroinban a termék melegen nehe-zen oldódik, petroleumætherben oldhatatlan.

3', 4'—3, 5-tetramethoxychalkon.

A fentebbi vegyület előállítása céljából 1·2 gr metadioxy-benzaldehydret és 1·1 gr acetoveratrolt feloldunk 40 cm³ alkohol-ban. Közönséges hőmérsékleten 5 gr 50%-os nátronlúgot adunk az elegyhez és éjjelen át állni hagyjuk. E közben a chalkon sárgás pikkelyekben legnagyobb részt kivált. A kristályokat le-szűrjük és hig alkoholból kristályosítjuk át.

0·1215 gr anyag adott: 0·3102 gr CO₂-t, 0·0655 gr H₂O-t.

C₁₈H₂₀O₅ képlet alapján a számított értékek: C=69·51%, H=6·10%.

Kísérletileg talált értékek: C=69·61%, H=6·03%.

A vegyület sárgás pikkelyekben kristályosodik, a melyek 98—99 C°-on olvadnak. A chalkon könnyen oldódik alkohol-ban és benzolban. Ligroinban a termék melegen könnyen ol-dódik és petroleumætherben majdnem oldhatatlan. Tömény kén-sav vérvörös színnel oldja.

E vizsgálat kísérleti részét NEMÉNYI ANNA kisasszony vé-gezte.

A METHAN CHLOROZÁSA.

MAUTHNER NÁNDOR-tól és PFEIFER IGNÁCZ-tól.

A chlornak a methanra való hatását legelőször BERTHELOT¹ vizsgálta és a chlormethyl képződését észlelte. Későbbben más kutatók eltérő kísérleti körülmények között² a methan összes chlorozási termékeinek keletkezését állapították meg. Újabban e reakziót többen tanulmányozták, a természetben nagy mennyiségben előforduló földgáz hasznosítása végett. SZARVASY és PFEIFER³ a chlorozást az elektromos áram csendes kiejelése közben végezték, midőn nagy mennyiségű chlormethylt állítottak elő. Ezután WALTER⁴ a reakziót kvarcscsövekben, a napfény hatásakor vizsgálta és ő főképpen tetrachlormethant kapott. TOLLOCKO és KLING⁵ egy naphtagáz chlorozását katalizátorok jelenlétében vizsgálták és különösen a cuprochlorid előnyös hatását állapították meg. Ugyanők⁶ a reakziót uviolfényben is tanulmányozták. PHILLIPS⁷ katalizátor gyanánt állati szemet használt.

A kísérleteinkhez használt földgáz majnem tiszta, æthylen-szénhydrogenektől mentes methan volt; tisztátalanságok gyanánt csak kis mennyiségű oxigent és nitrogent tartalmazott. A methant és chlort aczélbombákból bocsátottuk ki és térfoga-

¹ Ann. chim. phys. (3) 52, 97.

² DAMOISEAU J. 1881, 376. DUMAS A. 33, 187. REGNAULT A. 33, 328.

³ D. R. P. 242570.

⁴ D. R. P. 222919; szintúgy BASKERVILLE u. RIEDERER J. Engin. chem. 5,5 (1913).

⁵ A krakkói tud. akadémia értesítője, 1912. A 52.

⁶ A krakkói tud. akadémia értesítője, 1912. A 52, 307.

⁷ Trans. Am. Phil. Soc. 17. III. 210.

tukat két, előzőleg kalibrált manométerrel mértük. A reakziót kvarc csőben végeztük, melyet elektromos kemenczében hevítettünk a legezészerűbbnek talált hőmérsékletre: 360–400 C°-ra; a hőmérsékletet elektromos pyrometerrel mértük. A kvarc csőből eltávozó gázokat hideg vízzel hűtött kigyócsőbe, innen egy második kigyócsőbe bocsátottuk, melyet DEWAR-edénybe helyeztünk és hőmérsékletét szilárd széndioxyd meg alkohol keverékével –35 és –45 C° között tartottuk. A sósav elnyelése czéljából a gázokat spirális alakú, vízzel telt mosókészüléken át áramoltattuk, ezután a fölös chlort ugyanolyan, hig nátronlúggal töltött mosókészülékben tartottuk vissza. Most a gázt DEWAR-edényben –79 C°-ra lehűtött kigyócsőbe bocsátottuk. Az első kigyócsőben a nehezebben illó alkotórészek, mint tetrachlormethan, chloroform és dichlormethan sűrűsödtek meg, a másodikban a chlormethylt sűrítettük meg; ezt a kísérlet bevégezte után beforrasztottuk és így mérlegettük. A reactió lefolyását előbb antimonpentachloridnak mint chlorátvivő szernek jelenlétében vizsgáltuk; ezt nem sok kísérlet után a czélszerűbben használható, víztől mentes vaschloriggal cseréltük fel. Az első kigyócsőben megsűrített elegyrészek meghatározása végett a cső tartalmát előbb nagyon hig nátronlúggal, majd vízzel jól összeráztuk, ezután chlorcalciummal szárítottuk és jól működő HEMPEL-féle csőtoldalék segélyével részlegesen lepároltuk. Az egyes párlatok chlortartalmát mennyiségileg meghatároztuk és ez adatból, meg a párlatok mennyiségéből az elegy összetételét kiszámítottuk. A tulajdonképpeni kísérletet mindig csak akkor kezdtük, mikor a gázelegyet a szükséges hőmérsékletre hevített kvarc csővön át már egy óra hosszat át bocsátottuk. Ha chlorátvivő szernek antimonpentachloridot használtunk, a chlort, mielőtt a kvarc csőbe jutott, antimonpentachloriddal töltött és 150 C°-ra hevített mosópalaczkon hajtottuk át. E mosópalaczk elé üres edényt helyeztünk, hogy az esetleges kisebb robbanások alkalmával felfreccsenő antimonpentachlorid abban gyűljön össze. A víztől mentes vaschlorigot a kvarc csőben úgy állítottuk elő, hogy vasport chloráramban kezdődő vörösszáson hevítettünk. A kvarc cső e kísérletekben chamottetégla-darabocskákkal volt megtöltve.

I.

Antimonpentachloriddal mint chlorátvivő szerrel végzett kísérletek.

Az antimonpentachloriddal végzett kísérletekben mindenekelőtt egy térfogat methan és két térfogat chlor egymásra való hatását vizsgáltuk. Több kísérlet anyagát összegyűjtöttük és a fent ismertetett módon dolgoztuk fel. A mennyiségi meghatározások alapján a chlort a következő arányban találtuk az egyes lepárolt részletekben :

CH_2Cl_2	$CHCl_3$	CCl_4	HCl
5·8%	20·3%	5·9%	32%.

Így a chlornak 64%-át hasznosítottuk.

II.

Vaschloriddal mint chlorátvivő anyaggal végzett kísérletek.

Egyenlő térfogatú chlor és methan elegyét alkalmazva, a chlornak 86·4%-a vett részt a reakcióban és az egyes termékekre a következőképen oszlott meg:

CH_3Cl	CH_2Cl_2	$CHCl_3$	CCl_4	HCl
5·8%	15·7%	21·7%	semmi	43·2%.

Ha egy térfogat methan és két térfogat chlor elegyét alkalmaztuk: akkor a chlornak 83·6%-át hasznosítottuk és az egyes anyagokra a következő mennyiség jutott:

CH_3Cl	CH_2Cl_2	$CHCl_3$	CCl_4	HCl
nyomokban	13·25%	22·2%	6·35%	41·8%.

Ezután oly kísérletekre tértünk át, a melyekben két térfogat methant alkalmaztunk egy térfogat chlorra. A chlormethyl a számított mennyiségnek körülbelül 30·1%-a volt. A chlor hasznosított mennyisége 85%. Chlormethylen kívül chloroform és dichlormethan képződött körülbelül egyenlő mennyiségben. További kísérletekben még nagyobb methanfölsleget alkalmaztunk

és így három térfogat metán, meg egy térfogat chlor elegyénél 40% chlormethyl keletkezett az alkalmazott chlormennyiségre számítva. Szintúgy végeztünk kísérleteket arra nézve, hogy mint főreakcióstermékét tetrachlormethant állítsunk elő. E kísérletekben a chlort nagy fölöslegben kellett alkalmazni. Ha nagyobb chlormennyiséget alkalmazunk, mint egy térfogat chlorra egy térfogat methant, akkor mindig heves robbanások következnek be (methanfölöslegnél exploziók nem játszódnak le), melyeknek elejét vehettük, ha a gázelegyet nitrogennel higitottuk. Egy térfogat metán, három térfogat chlor és két térfogat nitrogen alkalmazásakor chloroformból és tetrachlormethanból álló elegy keletkezett.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1919 márczius 17.-én tartott üléséből.)

• A SZILVAFÁK ROZSDABETEGSÉGÉT OKOZÓ GOMBÁK BIOLOGIÁJÁRÓL.

SCHILBERSZKY KÁROLY-TÓL.

Kivonat.

A Szerző rámutat a szilvafák rozsdabetegségének jelentőségére, mely szerint az a megfelelő helyi viszonyok, valamint az illető évi időjárás és az adott fertőzési körülmények hatása következtében némely vidéken súlyos, közgazdaságilag is mérlegelendő károkat idézhet elő. A betegség fő okozója a nagyon elterjedt *Puccinia Pruni-spinosae* nevű rozsdagomba, mely rendszerint a nyár második felében szokott megjelenni; káros hatását fokozza az a körülmény, hogy a szilvafákon kívül a vadon tenyésző kőkénybokrokban birja elsőrendű gazdanövényét, a melynek révén ez legfőbb terjesztője a betegségnek. Van e betegségnek még egy másik, bár kevésbé elterjedt gombafaja, ez a *Puccinia Cerasi*. Az előbbi SCHILBERSZKY barna, az utóbbit sárga szilvafarozsdának nevezi. Mindakét faj a levelek fertőzésével okoz károkat.

Dolgozatában közli a megnevezett kétfele elősködő gombának kimerítő mykologiai nomenclaturáját és a gombáknak legújabb érvényű diagnosztikai leírását. Ki kell emelni, hogy SCHILBERSZKY az előbbi megállapításokkal szemben a barna szilvafarozsda gombáját az *Eupuccinia* genus-csoportba helyezi, mivel az utóbbi időben bebizonyosodott, hogy az uredo- és teleutosorusokon kívül, e gomba fejlődési cyclusába tartozó aecidiumok is ismeretessé lettek, a melyek különféle *Ranunculaceae*-családbeli növényeken élnek. Ezt az aecidiumot megtalálta Magyarországra vonatkozólag az *Anemone nemorosa* és az *A. ranunculoides* levelein. A *Puccinia Cerasi* ellenben ma is még mint *Hemipuccinia* ismeretes. Külön fejezetben foglalkozik a megfelelő gazdanövényekkel, különös tekintettel az egyes metagenetikus gomba-ivadékokra; kiténik ebből, hogy a *Puccinia Pruni-spinosae* uredo- és teleuto-telepei egész sereg *Prunus*-fajon fordulnak elő; kevesebb gazdanövénye van ellenben a *Puccinia Cerasi*-nak.

Külön fejezetben foglalkozik a Nagyberényből (Somogy m.) származott szilvafa-levelek vizsgálati eredményével, eredeti raj-

zok kíséretében, a melyek szerint a *Puccinia Cerasi első hazai előfordulását* állapította meg. Behatóan ismerteti saját mikroszkopos vizsgálatai alapján a kétféle gombának morfológiai szerkezetét és biológiai viselkedését.

Ismerteti a *Puccinia Pruni-spinosae* teleuto-spóráinak kétféle alakját, a melyek nemcsak morfológiai, hanem biológiai tekintetben is árulnak el jellemző viselkedést: forma *typica* és *discolor*. Ezeket behatóan vizsgálta és mindakét spóraalak eredeti rajzait bemutatja. Megállapítja tenyésztési kísérletei alapján, hogy az érett teleuto-spórák leválásuk után *azonnal tudnak csírázni*. A két spóraalaknak a gazdanövényeik szerint eltérő viselkedését nagytényei és budaörsi számos szilvafajtán tett észleléseivel bizonyítja. Foglalkozik az uredo-spórákra vonatkozó dimorphismussal is, mely azonban további kutatásokra szorul.

Saját megfigyelései alapján közli a budaörsi és nagybányai állami telepekről a különböző *szilvafajták fogékonysági fokát*, némely esetben az immunitást a rozsdával szemben.

Külön fejezetben ismerteti a kétféle gombának földrajzi elterjedési viszonyait, melyek szerint a barna szilvafa-rozsda úgyszólván az egész földön el van terjedve; Európában inkább a déli országokban fordul elő. A sárgarozsda kizárólagosan Európából, főképpen a déli országokból ismeretes. Hazánkból eddig *Nagyberényből* (Somogy megye: SCHILBERSZKY) és *Debreczenből* (RAPAICS) ismeretes, még pedig szilvafa- és meggyfalevelekről egyaránt.

Végül a két rozsdagombának a hazai viszonyokra vonatkoztatott kártékony hatásai vannak részletesen ismertetve, valamint a *védekezési eljárások is*; a bordeaux-i lének fungicid hatásáról kísérletileg győződött meg. A védekezés során kiemeli az *æcidiumos Ranunculaceæ-növények*, valamint a társ-gazdanövények (például *Prunus spinosa*) irtását.

A dolgozat végén Függelék-ben megemlíti még SCHILBERSZKY az őszibarack-fának néhány évvel ezelőtt Japánban felfedezett új rozsdagombáját (*Puccinia Pruni-persicae*), a melynek kivált a teleuto-spórái feltűnően hasonlítanak a *Puccinia Cerasi*-hoz.

A TABES HISTOGENESISISE.

(Kórszövettani vizsgálatok alapján.)

RICHTER HUGÓ-tól.

A tabest és a paralyssist idáig a «metalues» elnevezése alatt elkülönítették a «valódi» lueses természetű idegbetegségektől. A két kórforma bizonyos közös klinikai sajátosságai — minők a betegség aránylag késői kitörése, továbbá az antilueses kezelés eredménytelensége — már egymagukban is jogosulttá tették e különválasztást; még inkább indokolta azonban kórtani önállóságukat a kórszövettani vizsgálat, mivel ez olyan szöveti elváltozásokat mutatott ki, melyek a közönséges lueses elváltozások okozta szövettani leletektől lényegesen eltértek. A paralyssisnél például az egész nagy agyvelőben és a burkokban elszórt lobos beszűrődéses folyamatokon kívül önálló, vagyis gyuladással kísért tünetektől mentes dűcsejt-elváltozásokat és autonóm, góczos velőkieséseket mutattak ki, melyeknek létrejöttét a szöveti leletből megmagyarázni nem sikerült. Épp oly kevéssé tisztázott a tabes kórszövettani lényege; e kérdés mai állását leghívebben SCHAFFERnek a LEWANDOVSKY-féle «Handbuch der Neurologie» részére írt tanulmánya tükrözi vissza, a mely a tabes pathogenesisét úgynevezett kombinált magyarázattal oldja meg. E theoria szerint a tabes kórszövettani lényege a gerincvelői hátulsó gyökerek elektív, rendszerszerű (systemás) megbetegedése, a mely azonban csak bizonyos fokig elsődleges természetű, a mennyiben a hátulsó gyökerek lefutásának bizonyos pontjain (az úgynevezett REDLICH-OBERSTEINER-féle befűződés helyén, továbbá a NAGEOTTE-féle nerf radicaire helyén) lejátszódó, irritatív természetű folyamatok szintén közrejátszanak az érző gyökerek tabeses bántalmazottságában. Mint látjuk tehát, úgy a tabesben, mint a paralyssisben szerepelnek bizonyos sajátlagos, elektív természetű szöveti elváltozások, a melyek az elsődleges, önálló kialakulás bélyegét viselik magukon. Nagy fordulatot hozott e

kérdés további kialakulásában NOGUCHI felfedezése, kinek 1912-ben sikerült paralysisben elhalt több egyén agyvelejében a lues kórokozóját, a *spirochaeta pallidát* kimutatni és így a betegségnek lueses természetét minden kétséget kizáró módon igazolni. NOGUCHI leleteit későbbi vizsgálatok mindenben megerősítették, sőt újabban JAHNEL kiváló kutatásai a kórokozónak a paralysises szövetelváltozásokhoz való szorosabb viszonyát is élénken szemünk elé vezették, a mennyiben JAHNEL nagy valószínűséggel megállapíthatta, hogy a paralysises kéregben előforduló úgynevezett önálló idegsejt- és rostelfajulásoknak az idegparenchymában következetesen kimutatható *spirochaetatelek* felelnek meg, vagyis ez elfajulások közvetlen *spirochaetapuzstítás* következményeképpen foghatók föl. Ha a további vizsgálatok e tétel érvényességét igazolják, akkor a paralysisnek nemcsak valódi lueses természete, hanem pathogenesise, vagyis, a szöveti elváltozások létrejöttének mikéntje is többé-kevésbé tisztázottnak lesz tekinthető.

Annál fogyatékosabbak a NOGUCHI felfedezése óta végzett tabes-kutatások eredményei. NOGUCHI 12 tabes-eset közül egyben talált *spirochaetát* a gerincvelői hátulsó kötelekben; azóta a saját, 1914-ben közölt pozitív leleteimen kívül csak VERSÉ számol be két esetről, a hol a csigolyaközi dúczokban talált *spirochaeta*-szerű képleteket. Az eredményes kutatás főnehézsége itt abban rejlik, hogy nem sikerült ezideig biztosan megállapítani, hogy hol van a tabeses gyökérbántalom kiindulási pontja. Míg a paralysisben a főelváltozások csaknem egyértelműen a szürke agykéregben voltak kimutathatók és így az itt talált *spirochaeták* joggal tekinthetők a kórfolyamat közvetlen előidézőinek, addig a tabesben a periferiás érző neuron hosszú szakaszán a bántalom az idegrendszer igen különböző helyein indulhat meg és a különböző lokalizációjú góczok egyformán előidézhetik azokat az elváltozásokat, a melyeket tabesben találni szoktunk. Az a gyökérszakasz, a mely a tabesben el szokott fajulni, a csigolyaközi dúczsejtekből indul ki és mint ezeknek központi nyujtványa a gerincvelői hátulsó gyökereket alkotja, majd pedig a gerincvelői agyburkokon keresztülhaladva, belép a gerincvelői hátulsó köteleibe és azokban követhető azokhoz a nyultvelői magvakhoz (a GOLL- és BURDACH-nyaláb szürke magvaihoz), a melyek-

nek sejtjei körül végződik. Minthogy a gyakorlati orvoslás tapasztalataiból tudjuk, hogy a tabeses megbetegedés kórelőzményében a lueses infectio állandóan szerepel és ezt a WASSERMANN-vizsgálat alkalmazása óta objektíve is megállapíthatjuk, a pozitív spirochætalet tabesben csak fenntartással lesz értékesíthető a közvetlen kórokozó tényező szerepében; nevezetesen azzal a fenntartással, hogy csak a tabeses læsio kiindulási helyén talált spirochæta hozható vele összefüggésbe. Hozzájárul ehhez még az a több oldalról megerősített új tapasztalás, hogy a tabeshez és paralysishoz elég gyakran olyan központi idegrendszerbeli elváltozások is csatlakoznak, a melyeket kórszövet-tani képük szerint közönséges lueses idegváltozásoknak kell tartanunk (gummák, lueses myelitis stb.); úgy hogy az idegrendszerben talált spirochæta, mint e lueses elváltozások kórokozója, a tabeses folyamattól teljesen független lehet. E megfontolások tették ismét nagyon időszerűvé azt a törekvést, melynek célja annak megállapítása, hogy a periferias érző neuron melyik szakaszán indul meg a tabest előidéző kóros folyamat: csak e törekvés sikerén épülhet föl a spirochæta-kutatás eredményes munkája, mert csak a kiindulás helyen talált spirochæta törvényesítheti a tabeses folyamatot mint tiszta lueses folyamatot.

Ezirányú vizsgálataim körülbelül hét esztendőre nyulnak vissza és első eredményeimről már 1914-ben beszámoltam a «Neurologisches Zentralblatt» hasábjain. Az anyagot 24 tabes eset idegrendszere szolgáltatta, a melyek a fővárosi Szegényházi Kórház idegosztályán állottak klinikai megfigyelés alatt. A kórszövet-tani földolgozás a budapesti egyetem agyszövet-tani intézetében folyt, a melynek tudományos felszerelése lehetővé tette, hogy a vizsgálati anyagot az összes használatos módszerek segítségével kiaknázhassam. Vizsgálati eredményeimet röviden a következőkben foglalhatom egybe:

1. A tabest jellemző idegváltozások oka az úgynevezett gyökérideg (nerf radicaire) rostjainak közvetlen bántalmazása, melyet a NAGEOTTE által leírt helyen egy syphiliticus természetű sarjadzások (granulatiós) szövet idéz elő; ez a pathogen, újonnan képződött szövet a gyökérideg külső burkának nyirokhezagaiban és szövethasadékjaiban az itt letelepedett spirochæták formatív ingerének hatása alatt keletkezik, innen a nyirokerekek útján

az idekötegekbe nyomul és bennük helyi, góczszerű pusztításokat okoz. A granulációs szövetképződés az idült lobos folyamatok (tuberkulózis, lues) gyakori megjelenési formája és a tabeses bántalom sajátlagossága főként a folyamat lokalizációjában áll, vagyis abban a körülményben, hogy a lueses sarjszövet a gerinczesatorna ürének amaz oldalsó zugaiban képződik, a melyeken keresztül a gerinczvelői gyökerek a csigolyaközi dúczokba, illetőleg a környéki idegekbe mennek át. A sarjszövet friss állapotában nagy, kerekded magvú sejtek sűrű halmozásból áll, a melyek egy folyékony látszó alapanyagba vannak beágyazva; ez utóbbi körülmény magyarázza meg a sarjszövet ama tulajdonságát, hogy képződése helyéről másodlagosan az idegyökerek belsejébe is be tud nyomulni. A granulációs sejtek hajlanak regressiv elváltozásokra és rövid fennállás után rostos kötőszövetté alakulnak át. Vizsgálataim tehát, míg egyfelül kétségtelenül megerősítik NAGEOTTE azt a megállapítását, hogy a tabeses lésio kiindulási helye a gyökéridegnek nevezett szakaszban van, másfelől igazolják a NAGEOTTE ellen más szerzők részéről felhozott azt az állítást, hogy itt nem a szó szorosabb értelmében vett lobos folyamatról van szó, a minőnek NAGEOTTE a névríté radicaire-t jellemezte, tehát nem hæmatogen eredetű lymphocyta- és plasmasejtes érkörüli beszűrődések által jellemzett gyuladásról, a mely NAGEOTTE szerint a gerinczvelői burkokról per continuitatem terjed át a gyökérideg burkaira, hanem önállóan fejlődő lueses természetű sarjadzások szövetéről, a mely a gerinczvelői burkok állapotától függetlenül a subarachnoidalis ür oldalsó zugaiban képződik és pedig elsődlegesen azoknak kötőszövetes (dura-arachnoidea alkotta) burkaiban, majd azokból a nyirokerek útján benyomul az itt keresztülhuzódó idegkötegekbe és bennük elsődleges elfajulási góczokat okoz. A NAGEOTTE által jellemzőnek leírt lobos elváltozások csak bizonyos tabes-esetekben fordulnak elő, nevezetesen, mint azt eseteim egy részében magam is észleltem, a paralysissel kombinált tabes-esetekben; és NAGEOTTE leleteinek nézetem szerint nem egészen helytálló értelmezése is arra a körülményre volna visszavezethető, hogy az ő vizsgálati anyagát csaknem kizárólag paralysissel kombinált tabes-esetek alkották.

A tabeses folyamatnál az elsődleges lésio oly módon jön létre, hogy az említett sarjadzások szövet, a mely a kötőszöveti burok nyirokhézagában képződik, innen az egyes idegkötegek körüli ürbe nyomul, az idegkötegeket körülveszi, majd az idegkötegek saját burkán keresztül azoknak belsejébe tódul és ott egy bizonyos körülírt rostterületet lep el, miáltal az idegrostok közvetlen sérülését idézi elő. A lésio székhelye az érző gyökér ama területén van, a hol ez a ganglionba való belépése előtt számos apró, önálló kötegre hasad; a mozgató gyökérben a bántalom a gyökérideg keresztmetszetének egy magasabb, a gerincvelőhöz közelebb eső nivójában indul meg; ennek a topografiai sajátosságának, melyet különben már NAGEOTTE is megállapított, okát abban vélem megtalálni, hogy a két gyökér anatómiai szerkezete, nevezetesen a subarachnoidális ürhöz való viszonya határozza meg a granulatiós szövetnek az idegállományba való benyomulási helyét. A granulatiós sejttömegek többnyire nem az ideg egész keresztmetszetét, hanem rendszerint csak az afficiált burokrészszel szomszédos, széli területet vagy az idegkötég olyan szakaszait lepik el, a melyek kötőszöveti sövények által vannak körülhatárolva. Az a vizsgálati tény, hogy tabesben a periferiás érző neuronnak bizonyos meghatározott helyén az idegszövet góczszerűen, és pedig tisztán az anatómiai tagolódástól függő kiterjedésben pusztul el és hogy ez a helyi jellegű bántalom a tabeses gyökéridegben állandóan kimutatható, lehetővé teszi az egész tabeses folyamat egységes pathogenetikai magyarázatát, a nélkül, hogy kényszerítve lennénk még más, valószínűségi hypothesiseket, melyeknek az eddigi tabes-theoriákban jelentős szerepük volt, segítségül hívni. A gyökéridegben a sarjadzások szövet által közvetlenül előidézett helyi gócz adja meg a tabeses folyamat kórszövetani lényegét: sehol másutt az érző neuron lefutásában nem találtak állandó jellegű hasonló elváltozást. A gyökéridegbeni elsődleges, góczszerű kiesés megmagyarázza a gerincvelői hátulsó kötelek elfajulását éppen olyan jól, mint a csigolyaközi dúczok tabeses elváltozásait és ezáltal az egész folyamatnak olyan egységes pathologiai alapot nyújt, a mely kizárólag pozitív bizonyítékokra támaszkodik és nélkülözhetővé tesz bizonyos, idáig szükségesnek

mutatkozott hypothesis fogalmakat, minők a tabes «metalueses» természete, a kórokozó általános mérgező hatása, az érző gyökök elektív megbetegedése stb. Ez utóbbi megállapítás korlátozott érvényességéről egyébként saját vizsgálataim is fontos bizonyítékokat szolgáltatottak, a mennyiben kiderült, hogy a mozgató gyökér affectiója rendszeres kísérő tünete a tabeses læsiónak, csak kisebb-fokú és aránylag később következik be, mint az érzőé; e sajátoságot azonban megmagyarázza különböző anatómiai szerkezetük és a granulatiós szövetvel való érintkezés különböző lehetősége.

2. A csigolyaközti dúczok tabeses elváltozásai másodlagos elváltozások, a melyeknek foka a belőlük kiinduló hátulsó gyökök bántalmazottságától függ: ha valamely tabes-esetben az ágyéki gyökök súlyosan bántalmazottak, a nyaki szelvények hátulsó gyökerei azonban még épek, akkor az ágyéki csigolyaközti dúczok sejtjei másodlagos természetű súlyos elváltozásokat fognak mutatni, ellenben a nyaki dúczok többé-kevésbé épek fognak feltűnni. Az elváltozások teljesen azonosak (morphologiailag) azokkal, a melyeket a hátulsó gyökök kísérleti átmetszése után (KÖSTER) szoktunk észlelni.

3. A gerincvelői agyburkok lobos elváltozásai a tabesnek lueses természetű kísérő jelensége, a mely a gyökérideg fenntávozott affectiójától függetlenül jó létre. A két folyamat szövettanilag lényegesen eltér egymástól, a mennyiben a gyökéridegben végbemenő folyamat, a mely a tabes lényegbeli elváltozásának tekinthető, granulatiós, azaz sarjszövetképződéssel járó folyamat, míg a meningitist a piának hæmatogen sejt-elemek érkörüli beszűrődésével és kötőszövetes túltengéssel együttjáró, igazi, gyulladása jellemzi.

4. Szövettani vizsgálataim nem indokolták a hátulsó gyökök piális befűződése helyén (a gerincvelőbe való belépés helyén) OBERSTEINER és REDLICH által talált szöveti elváltozásoknak azt a jelentőségét, a melyet e szerzők a tabes pathogenesisében az e helyen leírt elváltozásoknak juttatni akartak.

5. A gerincvelői hátulsó gyökök intramedulláris szakaszában tabesnél az esetek túlnyomó részében csak olyan elváltozásokat találunk, a melyek a másodlagos elfajulás kórszövettani képeinek felelnek meg; e lelet, a melyet vizsgálataim is meg-

erősítenek, nagyon jól összeegyeztethető előbbi megállapításaimmal, a mennyiben a gerincvelői hátulsó kötelekben talált velőkiesés egyenes következménye annak a góczos bántalomnak, a mely a gyökérideg területén a hátulsó gyökereket elsődlegesen éri. Előfordulnak azonban olyan tabes-esetek is, a hol a klasszikus gyökéridegbántalom mellett magában a gerincvelő állományában, nevezetesen a hátulsó kötelekben is önálló lobos és elfajulásos elváltozások fejlődnek ki, a melyek lueses természetűek: ezek azonban csak szövődményei a rendes tabeses kórfolyamatnak. Tiszta tabes eseteiben a gerincvelői hátulsó köteleknek kizárólag exogen természetű pályái betegszenek meg, vagyis csak azok, a melyek a hátulsó gyökerek közvetlen folytatását teszik: a hátulsó kötelek endogén rostpályái tabesben rendszerint épek szoktak maradni.

6. Az agyidegek tabeses elváltozásai lényegükben véve azonosak a gerincvelői gyökerek bántalmával; különbséget kell tennünk azonban az úgynevezett periferiás szerkezetű agyidegek és a centrális vagyis agyvelői szerkezetet mutató agyidegek közt. Míg ugyanis az előbbieket (ide tartozik az I. és II. agyideg kivételével a többi) teljesen olyan elváltozásokat mutatnak tabesnél, mint a minőket a gyökéridegben láttunk, vagyis fibroblastokból álló pathogen sarjszövet képződését, a mely az agyidegek rostjait az agyvelőből való kilépésük helyéhez közel góczszerűen pusztítja el, addig a nervus opticusnál (és olfactoriusnál), a melyeknek szerkezete az agyállományéhoz hasonló, nem ez a szöveti reactio képe, hanem lymphocyták és plasmasejtek érkörüli és szétszórt beszűrődése jelzi a kórfolyamatot, a melynek kiindulási helye itt is az ideg (nervus opticus, chiasma) körüli piális burok szokott lenni.

7. Spirochaeta-vizsgálataim, a melyeket LEVADITI, NOGUCHI és JAHNEL módszereivel végeztem, a következő fontosabb eredményekre vezettek. A megvizsgált tabes-esetek egyrésztében (15 közül 4-ben) sikerült a spirochaeta pallida Schaudinnii-t a gyökéridegben, még pedig mindig a granulációs szövetben kimutatnom és ezzel bebizonyítanom, hogy e kóros sarjszövet, a mely kórszövet-tani képeim szerint tabesben az idegelemek pusztulását közvetlenül előidézi, lueses természetű. A tabeses gyökéridegben

talált spirochæták száma aránylag csekély. Vannak tabeses módon afficiált gyökéridegek, a melyekben nincs (valószínűleg eltűnt) a spirochæta. A spirochætákat főleg a friss sarjszövetben lehet megtalálni, de kimutathatók néha a sklerotizált, rostos kötőszövetben is. A talált spirochæták többsége oly példányokat illet, a melyek NOGUCHI és újabban különösen JAHNEL vizsgálatai alapján degenerált spirochætáknak felelnek meg. E körülmény, valamint az, hogy a tabeses gyökéridegben aránylag kis számmal fordulnak elő, arra enged következtetni, hogy a spirochæták virulentiája tabesben általában gyengült.

A tabesnél aktív spirochætosis lényegben a subarachnoidális ür spirochæta-tartalmától függ. A spirochæták, a melyek itt hosszú időn át kóros hatás kifejtése nélkül maradhatnak, a liquor áramlásával a gyökéridegbe sodortatnak, a hol bizonyos prædilectiós helyeken, elsősorban a kötőszöveti burok nedvhezagaiban telepszének meg és itt a sarjszövetképződés megindításával vezetik be a tabeses folyamatot. Nagy részük itt tönkremegy és valószínűnek kell tartanunk, hogy a liquorból újabb spirochætátömegek csapódnak le, a melyek a granulatiós folyamatot, illetőleg a tabeses gyökéridegaffectiót éveken, sőt évtizedeken át fenntarthatják: a liquor spirochætataralma biztosítja a tabeses bántalom folytonosságát.

A tabes ezek szerint a spirochæta által közvetlenül előidézett önálló lueses megnyilvánulás, a melynek sajátos jellegét a bántalom székhelye adja meg. A tabes lényegét alkotó sarjadzások szövétéképződés tiszta syphilises természete érthetővé teszi, hogy a tabeses folyamat mellett az idegrendszernek más lokalizációjú, spirochæta-okozta megbetegedései is gyakran fordulnak elő. Ha pedig az itt felsorolt vizsgálati eredményeket a paralysis terén végzett újabb kutatásokkal hozzuk kapcsolatba, akkor nincs többé okunk arra, hogy a tabesnek a paralysissele való gyakori szövődését az eddig is hypothesises «metalues» egységesítő fogalmára vezessük vissza; mindkét betegség valódi lueses természete ma már döntő bizonyítékokra támaszkodik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 november 8.-án tartott üléséből.)

RELATIV GALOIS-FÉLE SZÁMTESTEK ÖSSZETÉTELE.

BAUER MIHÁLY-tól.

1. Legyenek valamely Γ algebrai számtestben, mint alaptartományban, G_1 , illetőleg G_2 relativ GALOIS-féle számtestek, melyeknek relativ fokai n_1 , illetőleg n_2 . A belőlük összetett G számtest ismét relativ GALOIS féle test; relativ fokszámát jelöljük n -nel. Legyen p a Γ -nak törzsmennyisége és a G_1 , G_2 , G testekben legyen

$$p = (p'_1 \dots p'_{r_1})^{g_1}, \quad p = (p''_1 \dots p''_{r_2})^{g_2}, \quad p = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_e)^g;$$

a szereplő törzsideálok fokai legyenek f_1 , f_2 , illetőleg f . A p -vel osztható rationalis törzsszám legyen ρ . Bebizonyíthatók a következő tételek. ¹

I. Ha a g_1 és g_2 szám közül valamelyik, pl. $g_1=1$, akkor:

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

II. A \mathfrak{P}_i ideálok közül egy tetszésszerintit jelöljünk \mathfrak{P} -vel. Ha ennek tehetetlenségi csoportja ciklikus, a mi mindenesetre bekövetkezik a $(g_i, p) = 1$ ($i=1, 2$) esetben, és ezenkívül $(g_1, g_2) = 1$, akkor:

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.^2$$

¹ V. ö. BAUER MIHÁLY: Az algebrai számtestek elméletéhez. Math. és Természettud. Értesítő, 34. köt. 90—103. l. 1916. Az itt adott I. és II. tételt egészen más módon tárgyalom a következő cikkben: Az összetett algebrai számtestek elméletéhez. (Megjelenik a Math. és Fizikai Lapokban.)

² Az először idézett dolgozatban ki van mutatva, hogy az I. és II. esetben $g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}$.

III. Legyen a G_1 és G_2 legnagyobb közös tartományának relativ foka ν . Ismeretes módon $n = \frac{n_1 n_2}{\nu}$.

Ha

$$\left(\frac{n_1}{\nu}, \frac{n_2}{\nu}\right) = 1,$$

akkor:

$$g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, \quad e = \frac{n}{fg}.$$

2. Jelöljük a G test GALOIS-fele csoportját \mathcal{G} -vel, az alárendelt G_1, G_2 számtestek tartozzanak a \mathcal{G}_1 , illetőleg \mathcal{G}_2 invariáns alsocsoportokhoz, ezek egymáshoz képest relativ primek. A \mathfrak{F} törzsideálhoz tartozzanak a $\mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{H}}$ felbontási, illetőleg tehetetlenségi csoportok. Ismeretes, hogy \mathfrak{H} invariáns alsocsoportja $\bar{\mathfrak{H}}$ -nak, a $\frac{\bar{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{H}}$ osztálycsoport¹ ciklikus csoport, a $\mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{H}}$ csoportok rendjei fg , illetőleg g . Érvényesek még a

$$g = g_i a_i, \quad f_i = \frac{f a_i}{h_i} \quad (1)$$

($i=1, 2$)

összefüggések, hol a_i , illetőleg h_i számok tárgyi jelentése a

$$(\mathcal{G}_i, \bar{\mathfrak{H}}), \quad \text{illetőleg} \quad (\mathcal{G}_i, \mathfrak{H})$$

($i=1, 2$)

csoportok legnagyobb közös alsocsoportjainak rendje.

3. Ha most azt teszszük fel, hogy pl. $g_1=1$, akkor $g=a_1$, tehát a $\mathcal{G}_1, \bar{\mathfrak{H}}$ csoportok legnagyobb közös osztója $\bar{\mathfrak{H}}$, vagyis \mathcal{G}_1 tartalmazza $\bar{\mathfrak{H}}$ -t és így a

$$(\mathcal{G}_1, \bar{\mathfrak{H}}) = \mathfrak{H}$$

csoport $\bar{\mathfrak{H}}$ -nak oly alsocsoportja, mely $\bar{\mathfrak{H}}$ -t tartalmazza. Vegyük tekintetbe a

$$(\mathcal{G}_2, \bar{\mathfrak{H}}) = \mathfrak{B}$$

¹ Erre a fogalomra és a véges csoportok elméletének elemeire lásd pl.: A véges csoportok elméletének újabb irodalmából. Math. és Physikai Lapok 9. köt. 1900. Különösen 187. l.

csoportot. Minthogy ez \mathfrak{A} -hoz relativ prim és $\bar{\mathfrak{H}}$ a \mathfrak{H} -nak invariáns alcsoportja, a véges csoportok elméletének elemei szerint a $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$ és az $\mathfrak{A}\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$ csoportoknak legnagyobb közös alcsoportja $\bar{\mathfrak{H}}$. Ennek következtében az

$$\frac{\mathfrak{A}}{\bar{\mathfrak{H}}}, \quad \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}} \quad (2)$$

osztálycsoportok a $\frac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$ ciklikus csoportnak relativ prim alcsoportjai, vagyis (2) rendjei, tehát a

$$\frac{h_1}{g} = \frac{h_1}{a_1}, \quad \frac{h_2 g}{g} = h_2$$

számok relativ primek és így¹

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2} \right) = 1. \quad (3)$$

Minthogy (1)-ből

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad T \text{ racionális egész}$$

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad \frac{h_2}{a_2} = \frac{f_1}{(f_1, f_2)} T,$$

lesz (3) következtében

$$T = 1,$$

amivel I. be van bizonyítva.

4. Tegyük fel, hogy a \mathfrak{H} tehetetlenségi csoport ciklikus csoport. Elemei legyenek:

$$E, C, C^2, \dots, C^g = E.$$

Ha $(g_1, g_2) = 1$, akkor C^{g_1} -nek, illetőleg C^{g_2} -nek hatványai egy ciklikus $\bar{\mathfrak{H}}_1$, illetőleg $\bar{\mathfrak{H}}_2$ alcsoportot alkotnak, melyeknek rendjei $a_1 = g_2$, illetőleg $a_2 = g_1$.² E csoportok is invariáns alcsoportjai \mathfrak{H} -nak, egymáshoz relativ primek és

¹ A mi esetünkben különben $a_1 = 1$. V. ö. a már idézett ciklikket.

² L. a már idézett ciklikket.

$$\bar{G} = \bar{G}_1 \bar{G}_2 = \bar{G}_2 \bar{G}_1; \quad (\mathcal{G}_1, \bar{G}) = \bar{G}_1, \quad (\mathcal{G}_2, \bar{G}) = \bar{G}_2.$$

Fordítsuk figyelmünket a

$$(\mathcal{G}_1, \mathcal{H}) = \mathcal{A}, \quad (\mathcal{G}_2, \mathcal{H}) = \mathcal{B}$$

csoporthoz. Minthogy \mathcal{G}_1 és \mathcal{G}_2 relativ primek, azért az előbbieket szerint \mathcal{A} , \mathcal{B} tartalmazzák a \bar{G}_1 , illetőleg a \bar{G}_2 csoportokat, ellenben relativ primek a \bar{G}_2 , illetőleg \bar{G}_1 csoportokhoz. Bebizonyítható, hogy az

$$\mathcal{A}\bar{G}_2, \quad \mathcal{B}\bar{G}_1 \quad (4)$$

csoporthoz legnagyobb közös osztója \bar{G} . Ugyanis az

$$\mathcal{A}\bar{G}_2 \cdot \mathcal{B}\bar{G}_1 \quad (4^*)$$

complexus különböző elemeinek száma $\frac{h_1 g_1 h_2 g_2}{d}$, hol d a (4) alattiak legnagyobb közös alcsoportjának rendje. Az előzők szerint ez a legnagyobb közös osztó \bar{G} -t tartalmazza, tehát $d \geq g_1 g_2$. Más oldalról a (4*) complexus tartalmazza az $\mathcal{A}\mathcal{B}$ complexus elemeit, legalább $h_1 h_2$ számú különböző elemet, amiért is $d \leq g_1 g_2 = g$, vagyis $d = g_1 g_2$, a legnagyobb közös osztó csakugyan \bar{G} . Tehát az

$$\frac{\mathcal{A}\bar{G}_2}{\bar{G}}, \quad \frac{\mathcal{B}\bar{G}_1}{\bar{G}}$$

osztálycsoporthoz a ciklikus $\frac{\bar{G}}{\bar{G}}$ osztálycsoporthoz relativ prim alcsoporthoz. Rendjeikre a

$$\frac{h_1 g_1}{g} = \frac{h_1 g_1}{g_1 g_2} = \frac{h_1}{a_1}, \quad \frac{h_2 g_2}{g} = \frac{h_2 g_2}{g_1 g_2} = \frac{h_2}{a_2}$$

számokra nézve

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2} \right) = 1, \quad (3)$$

a miből ismét

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$$

következik, vagyis II. be van bizonyítva.

5. Tegyük fel végre, hogy $\left(\frac{n_1}{\nu}, \frac{n_2}{\nu}\right) = 1$. Minthogy a \mathfrak{G}_1 , illetőleg a \mathfrak{G}_2 csoportok rendjei

$$\frac{n}{n_1} = \frac{n_1 n_2}{\nu n_1} = \frac{n_2}{\nu}, \text{ illetőleg } \frac{n}{n_2} = \frac{n_1 n_2}{\nu n_2} = \frac{n_1}{\nu},$$

azért

$$(h_1, h_2) = 1. \quad (5)$$

Tehát

$$(a_1, a_2) = 1, \quad \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1;$$

és így

$$g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

A III. be van bizonyítva. Még (1) és (5)-ből következik, hogy

$$fg = \frac{f_1 g_1 f_2 g_2}{(f_1 g_1, f_2 g_2)},$$

tehát

$$(f_1 g_1, f_2 g_2) = (f_1, f_2) (g_1, g_2).$$

6. Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 legnagyobb közös tartományának \bar{G} -nek Γ -ra vonatkozó foka egynél nagyobb. A \bar{G} a Γ -ra szintén relativ GALOIS-féle test. Ha p Γ -beli törzsmennyiség a \bar{G} tartományban többszörös primideáltényezőkkel osztható, akkor az előbbi eredmények és ismeretes tételek felhasználásával kimutatható, hogy a tételeinkben szereplő $(g_1, g_2) = 1$ feltétel kevesebbet követelővel helyettesíthető. Erre azonban nem terjeszkedünk ki.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 január 19.-én tartott üléséből.)

AZ ALGEBRAI SZÁMTEST DIFFERENSÉRŐL.

BAUER MIHÁLY-tól.

1. Legyen valamely K algebrai számtestben a p törzsszámra vonatkozólag

$$p = p^u q, \quad (p, q) = 1,$$

hol p törzsideál és azonkívül még

$$g = p^s g', \quad (p, g') = 1.$$

Ha a K test differense pontosan p^{v-1} -gyel osztható, akkor

$$v \leq (s+1) g. \quad (1)$$

Ezt az először HENSEL által bebizonyított formulát egy előző cikkben¹ egyszerűbb úton vezettem le, melynek megvan az a tulajdonsága is, hogy nem tételezi fel a q ideál törzstényezőinek vizsgálatát. A következőkben az (1) formulát egészen más módszerekkel akarom levezetni. E módszerek egyfelől jobban simulnak az algebrai számtestek elméletének régibb eredményeihez, másfelől még azzal az előnnyel is bírnak, hogy az egész tárgyalás közben nem lépünk ki a test GALOIS-féle tartományának köréből.

A tétel bebizonyítását a következő 2—4. pont adja, az 5—6. pont újabb tényeket vezet le, míg a 7. pont reámutat arra, hogy az (1) formula GALOIS-féle testek esetére lényegesen egyszerűbb segédeszközökkel adható.

¹ Vizsgálatok az algebrai számtestek discriminansáról. Math. és Természettud. Értesítő, 36. köt. 56—67. l. 1918.

2. Legyen G a K -nak GALOIS féle tartománya és p a G -ben oly primideál, mely p -t osztja. Minthogy G relativ GALOIS-féle test a K alaptartományra vonatkozólag, azért érvényesek a

$$p = (p\dots)^a, \quad p = (p\dots)^g, \quad p = p^g q, \quad (p, q) = 1$$

összefüggések, a melyekből

$$g = ga. \tag{2}$$

DEDEKIND-nek amaz alapvető tétele szerint, mely a törzsmennyiségek felbontását adja meg valamely GALOIS-féle test alárendelt tartományaiban,¹ a (2) formulának a következő tárgyi értelme van. Legyen p tehetetlenségi csoportja \mathfrak{G} , jelöljük a tehetetlenségi testet H -vel és tartozzék K a test \mathfrak{G} csoportjának \mathfrak{K} alcsoportjához. Akkor a \bar{g} szám \mathfrak{K} -nek rendje, míg a a \mathfrak{K} és \mathfrak{G} alcsoportok legnagyobb közös osztójának a rendje. Még a következő algebrai tény érvényes. Ha π a K -nak valamely tetszésszerűen determináló egész száma, akkor \bar{H} adjunctiója után oly $g = \frac{g^2}{a}$ -ad fokú irreducibilis $f(\pi) = 0$ egyenletet elégit ki, melyben az

$$f(x) = x^g + ax^{g-1} + \dots + \lambda x + \mu \tag{3}$$

együtthatói \bar{H} egész számai.

3. Képezzük a K és H testekből összetett $C = C(K, H)$ számtestet. A C differense HILBERT-nek a relativ testekre vonatkozó vizsgálatai alapján egyenlő a C test \bar{H} -re vonatkozó relativ differensének és a \bar{H} differensének szorzatával. A második tényező relativ prim \bar{p} -hez,³ tehát C differense p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint C -nek \bar{H} -re vonatkozó relativ differense. (Ezt a tényt közvetlenül is le lehet vezetni.) A kérdésben forgó hatvány így tehát osztója a π szám relativ diffe-

¹ Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten, 1894. 272—277. 1.

² LANDSBERG: Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion. Journal für d. r. u. a. Math. 132. köt. 1—20. 1. Az alapelvek DEDEKIND-től származnak. (i. h.)

³ HILBERT: Grundzüge einer Theorie des GALOISSCHEN Zahlkörpers. Göttinger Nachrichten, 1894. 224—236. 1.

rensének. (A π szám nem okvetetlenül determináló száma C -nek.) Feltehetjük, hogy π pontosan p -vel, tehát pontosan \bar{p}^a -val osztható. Minthogy a tehetetlenségi testben $\bar{p}^g = \bar{p}^{ag}$ törzsideál, azért (3) együtthatói \bar{p} oly hatványait tartalmazzák, melyeknek kitevői $\bar{g} = ag$ többszei.

Ennek következtében az

$$f'(\pi) = g\pi^{g-1} + (g-1)a\pi^{g-2} + \dots + \lambda \quad (3^*)$$

összeg minden tagja \bar{p} -nek más-más hatványát tartalmazza, minek folytán $f'(\pi)$ és a C számtest differense legfeljebb $\bar{p}^{sag+a(g-1)}$ -gyel osztható.

4. A K test differense legyen pontosan p^{v-1} -gyel, tehát pontosan $\bar{p}^{(v-1)a}$ -val osztható. Minthogy a differens a relativ tesztről szóló tétel értelmében a C differensének osztója, nyerjük a

$$(v-1)a \leq sag + a(g-1)$$

összefüggést, vagyis

$$v-1 \leq (s+1)g-1,$$

ami bebizonyítandó volt.

5. Még bebizonyítható, hogy úgy a C test differense, mint a π szám relativ differense pontosan $\bar{p}^{(v-1)a}$ -val osztható. Először is a C test a \mathfrak{K} és \mathfrak{H} alcsoportok legnagyobb közös osztójához, a $\mathfrak{J} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ csoportozhoz tartozik. Legyen

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{J}R_1 + \mathfrak{J}R_2 + \dots,$$

hol az R_i elemek a \mathfrak{K} csoportnak \mathfrak{J} -ra nézve incongruens elemeinek képviselői. Ha ω a C tetszésszerű egész száma, akkor az R_i műveletek alkalmazása után kapjuk a K -ra vonatkozó relativ conjugáltakat. Minthogy a $\mathfrak{J}R_i$ komplexusok a $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}R_1$ -et kivéve a \mathfrak{H} -val közös elemet nem tartalmaznak és C a \bar{H} test felé rendelt tartománya, azért C -nek K -ra vonatkozó relativ differense \bar{p} -hez relativ prim és így C differense pontosan $\bar{p}^{(v-1)a}$ -val osztható.

6. Ugyancsak $\bar{p}^{(v-1)a}$ -val osztható az eddigiek szerint C -nek H -re vett relativ differense. Ámde C -nek tetszésszerű \mathcal{Q} egész száma az

$$\mathcal{Q} = \frac{e_0 + e_1\pi + \dots + e_{g-1}\pi^{g-1}}{\sigma} \quad (4)$$

alakban írható, hol q_0, \dots, q_{g-1} , σ a H test egész számai és σ relativ prim \bar{p} -hez. Ez abból következik, hogy a \bar{H} testben $\bar{p}^g = p^{ag}$ törzsideál és π pontosan \bar{p}^g -val osztható. A (4)-ből most már evidens, hogy G -nek H -re vett relativ differense \bar{p} -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint a π szám relativ differense. Q. e. d.

7. Ha a számtest GALOIS-féle, akkor K egybeesik G -vel, a G számtest közbeiktatása és a DEDEKIND-féle felbontási tétel alkalmazása teljesen elmarad. A GALOIS-féle számtestek elméletét (már i. h.) HILBERT dolgozta ki és ez elmélet keretében csoportelméletileg teljesen meghatározta e testekre a differens szerkezetét, még HENSEL vizsgálatai előtt. Ő egyszermind egy explicit felső korlátot adott ν számára,¹ ebből azonban nem következik az (1) formula. Teljesség kedvéért részletezzük az (1) formula lényegesen egyszerűbb levezetését GALOIS-féle testek esetére. Legyen számtestünkben G -ben, mint előbb az 1. pontban:

$$p = p^g q, (p, q) = 1, \quad g = p^g g', (p, g') = 1.$$

A p törzsideál tehetetlenségi csoportja legyen a g -ed rendű \bar{G} alcsoport, melyhez a H test tartozzék. Ha π a G -nek determináló egész száma, akkor a csoportelmélet első elemei szerint a \bar{H} testben egy $f(\pi) = 0$ irreducibilis egyenletet elégít ki, hol

$$f(x) = x^g + ax^{g-1} + \dots + \lambda x + \mu \quad (3^{**})$$

együtthatói H egész számai. Ha S a \bar{G} tehetetlenségi csoportnak nem eleme, akkor G -nek van oly ω egész száma, hogy $\omega - S\omega \not\equiv 0 \pmod{p}$; és így mindjárt a differens értelmezéséből következik, hogy az p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint a H -re vett relativ differens. Ha, a mint feltehető, π a p -nek pontosan első hatványát tartalmazza, akkor (3^{**})-ból a már ismert módon leolvasható az (1) formula. (Tekintetbe veendő, hogy H -ben p^g törzsideál.)

¹ Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. §. 47.

A SZAG ÉS A CHEMIAI ÖSSZETÉTEL KÖZÖTTI KAPCSOLAT.

ILOSVAY LAJOS r. tagtól.

(Kivonat.)

1. A szag se az elemeknek, se a vegyületeknek nem föltétlen sajátja. A tényekkel nem tudnák összeegyeztetni olyan föltevést, hogy minden egyszerű, vagy összetett testnek van szaga, csak szaglószerünk nem elég érzékeny hatásuk észre-
vevésére.

Ha az elemeknek, illetőleg a természet roppant nagy laboratoriumában keletkezett vegyületeknek szaguk van, ez *eredeti őssajátságuk*, s mint ilyen, beavatkozásunktól független. Az elemi testek közül csak a fluornak, a chlórnak, a brómnak és a jódnak van szaga.

Állítják, hogy az ezüstnek, sőt más fémeknek is fokhagyma szaga van. E megfigyelésnek alig van több jelentősége, mint annak, hogy a sokáig forgalomban volt ércz- vagy papirospénznek hússzaga van. Bizonyára azért, mert a pénz sok szakácsné, vagy mézszáros kezén fordult meg.

Szag tekintetében a halogén elemekkel összehasonlíthatók a szerves vegyületek alapanyagai közül a szagos terpének, a ciklusos és heterocyklusos szénhydrogének, nemkülönbben sok, számokban nehezen kifejezhető növényi és állati eredetű szagos anyag is. Ezeknek szaga is ősi. Minden más vegyület szaga chemiai átalakulás következtében létesült, mondhatnám *gerjesztett szag*. Az elemek közül csak az oxigénnek van gerjesztett szaga. Az *ős-szagokat genosmének, a gerjesztett szagokat chem-*

osménak nevezem. Az elemeknek, valamint vegyületeknek akár ős, akár gerjesztett szagát a természet határozza meg; mi szaguknak milyenségét se meg nem szabhatjuk, se meg nem másíthatjuk, legfeljebb a rokonösszetételű vegyületek szagának hasonlóságára következtethetünk. Tapasztaljuk például, hogy a telített alifás szénhydrogének monochlór-helyettesítési termékei meglehetősen hasonló szagúak. Ilyen értelemben *hasonlószagúságról, homosmiárról, vagy egyenlőszagúságról, isosmiárról* beszélhetünk.

A keverékek és az elegyek szaga valamely bennük levő elemi test, vagy vegyület, esetleg vegyületek szagától származik.

2. A szagérzést a szaglószerumben a gáz- vagy gőznemű szagos anyagok legkisebb, önállóan mozgó részecskéi — molekulái — idézik elő; ebből következik, hogy a szag inkább a gáznemű és a folyós, mint a szilárd halmazállapotú testek sajátja. A szagos szilárd testek könnyen átváltoznak folyóssá vagy gáz-, illetőleg gőzneművé és a szaglószervre akkor hatnak erősebben, a mikor belőlük nagyobb tömeg párolog el. A szilárd trichlóreczetsavnak csak gyöngé szaga van, míg gőzzé változtatva, erősen fojtó szagú. Hasonló összetételű vegyületek közül azoknak szagát érezzük jobban, a melyek könnyebben párolognak el. A magasabb forráspontúak közönséges hőmérsékleten szagtalanok.

3. Ha az aránylag alacsony hőmérsékleten, 300—400 C°-on izzásig hevülő, finomul széteszlott vasat, vagy kobáltot *pyrophornak* nevezük, a szagos testeket *osmophoroknak*¹ nevezhetnők; de ezt a szót tágabb értelemben kívánom használni. Nevezetesen: *szagot hordozó — osmophor — sajátjának nem annyira azt nevezem, hogy valamely elemnek, vagy vegyületnek szaga van, mint inkább azt, hogy valamely elemben, vagy valamely vegyületben föltehető atómcsoport szagos vegyületté változhatik.*

¹ *Klimont* az aromás vegyület és a kémiai szerkezet között kapcsolatot keresve, az aromaphor elnevezést használta. *Rupe* és *Majewski* a *Klimont* aromaphor-csoportját osmophornak nevezte. *Hans Rupe und Karl v. Majewski*: Notizen. Ber. d. d. Chem. Gesellschaft, 1900. 33. évf. 3401 l.

A halogén elemek és a szerves vegyületek szagos alapanyagai, mint: a benzol, a toluol stb. a szó közönséges értelmében szagot hordozó — osmophor — testek. Ha szagtalan elemek, vagy szagtalan szeretlen, illetőleg szerves vegyületek egyesülés, vagy helyettesítés következtében szagos vegyületeket létesítenek, e vegyületek molekulájában tartalmaznak olyan részt, a melyet szintén szagot hordozónak — osmophornak — nevezhetünk. Az ón nem szagos; az óntetrachloridban levő stannikathion osmophor; a methán nem szagos, a methylechlorid szagos; ebben a methánnal kapcsolatos methyl-atómcsoport (CH_3), már osmophor.

4. *Az elemi testeknek azt a sajátosságát, hogy más szagtalan, esetleg szagos elemekkel, továbbá szagtalan, vagy szagos vegyületekkel szagos vegyületeket keletkeztetnek, szagot létesítő — osmogén — sajátásúnak* nevezem. A szagos chlór a szagtalan hidrogénnel, a szagtalan szénoxidral, a szagos kéndioxidral szagos vegyületté egyesül. A hydrogenchloridban, a carbonylchloridban, a sulfurylchloridban a chlór osmogén szerepet tölt be.

A halogénelemek, miként a chlór, osmophorok és osmogének is lehetnek. Osmophorok, mert szaguk van; osmogének, mert szagos vegyületeket létesíthetnek.

Ugyanezt állíthatjuk a szénhydrogénekről, esetleg más szerves vegyületekről is. A methán szagtalan szénhydrogén, a monochlormethán szagos vegyület. Ebben a methylgyök osmophor; ha azonban a benzol molekulájában egy hidrogénatómot a methylgyökkel helyettesítünk, az előállott methylbenzol más szagú vegyület, mint volt a benzol, aminek oka a helyettesítő methylgyök; tehát ebben az esetben a benzolban föltételezett phenylgyököt osmophornak, a methylgyököt osmogénnek kell minősítenünk.

5. *Minden szagos vegyületnek van osmophor és osmogén alkotórésze.* Akár az egyik, akár a másik alkotórész lehet elemi test atómja, vagy elemi testek atómcsoportja, azaz: lehet elemi, vagy összetett gyök.

Ámbár valamely vegyület szagának előidézésében egyenlően tevőleges szerepe van mind a kétféle alkotórésznek, mert szagot gerjesztő hatásuk kölcsönös: mégis felfogásom könnyebb ki-

fejjezhetőse miatt éppen annyira szükséges a szagot hordozó és a szagot gerjesztő alkotórész megkülönböztetése, mint a mennyire nélkülözhetetlen az égés-jelenségek értelmezéséhez az elégethető test és az égést fenntartó közeg kifejezés.

Mint hogy azonban a szag létrehozásában változatosabbak a tényezők, mint az égésfolyamatban, meg kell állapítani azokat az elveket, a melyeket szemmel tartva, eldönthetjük, hogy melyik alkotórész lehet az osmophor és melyik az osmogén.

6. *A szagos vegyület molekulájának az az egyszerű, vagy összetett alkotórésze, a mely fölszabadítva, szabadon létezhető állapotában szagtalan, szagot hordozó — osmophor — alkotórész.* A hydrogenchloridból fölszabadított hydrogen, mint hydrogenmolekula, a monochlormethámból fölszabadított methylgyök, mint dymethyl vagy æthan, a carbonylchloridból fölszabadított szénoxid-molekula szagtalan, tehát: a hydrogen mint egyszerű, a methyl, a szénoxid mint összetett gyök osmophor alkotórész.

De osmophor alkotórész lehet valamely szagos elemi testtel kapcsolatban levő olyan egyszerű gyök is, a mely leválasztva szagos ugyan, de szagának erőssége gyöngébb, mint a vele egyesült szagos elemi test-é. Például a jódttrichlorid szagában a ehlór szaga inkább érezhető mint a jódé, következőleg osmophor alkotórész a jód.

7. *A szagos vegyület molekulájának az egyszerű, vagy összetett alkotórésze, a mely fölszabadítva, szabadon létezhető állapotában szagos; vagy az az összetett alkotórész, a mely szabadon ismeretlen, de szagos, vagy szagtalan egyszerű, illetőleg összetett gyökkel szagos vegyületet alkot, szagot gerjesztő — osmogén — alkotórész.*

Szabadon leválasztva, molekulás állapotukban egyszerű szagos alkotórészek a halogén elemek; az összetett gyökök közül szagos a dicyánként leválasztható cyan-gyök.

Szabadon ismeretlen osmogéngyökök: —OH, —SH, —SeH, —TeH, —NH₂, CHO,¹ —CO—, —COOH, az észterekben levő, tágabb értelemben vett savgyökök: NO·O—, NO₂·O—,

¹ A CHO- atómcsoportot hydrocarbonyl, — vagy aldehydyl, — vagy aldylnek nevezhetjük.

CH_3COO- , $CNO-$, $OCN-$, $CNS-$, $SCN-$, stb. — A szagtalan elemi testek közül osmogén-alkotórész lehet az osmium és a ruthenium; mind a kettőnek tetroxidja szagos.

8. Némely elemi test lehet osmophor-, vagy osmogén-alkotórész is. Így az oxigén a kéndioxidban, a nitrogén a nitrogén-trichloridban osmophor; míg az oxigén az alkyloxidokban, a nitrogén az ammoniában osmogén. Az oxigén önmagával szemben is osmogén, miként ezt az ózon bizonyítja.

Ezeket és a hozzájuk hasonló elemeket a szagos vegyületek létesítése tekintetében kettős vagy amphoter sajátságúaknak nevezhetjük. Ilyenek a halogén, az oxigenoid, a nitrogenoid, illetőleg savakat létesítő elemek, valamint némely átmenő sajátságú elem is.

9. Az osmogén elemi gyököket rendszerint a savakat létesítő, vagy átmenő sajátságú elemek sorában találjuk, de előfordulhatnak a bázist létesítő elemek között is. Ilyenek a kéneseő, a cink és a cadmium is, alkygyökkel létesített vegyületeikben. Nincs sok példa belőlük. A methylmercurid émelygős, a propylmercurid kiállhatatlan szagú. — Tekintve, hogy az alkymercuridokban levő alkygyök dialkyl alakjában szagtalan, föltehetjük, hogy szagukat az alkygyökkel egyesült kéneseő idézi elő. Nem áll módunkban bizonyítani, de lehetséges, hogy a kéneseőgőz, a kéneseő forráshőmérsékletén, vagy fölötte, szagos; és lehetnek fémgőzök, melyek éppen úgy szagosak, mint szagosak a halogénelemek már közönséges hőmérsékleten.

10. Az elemek osmogén sajátsága és vegyértéke között felismerhető némi kapcsolat. Van elem, mely kis vegyértékkel anosmogén, azaz: szagtalan vegyületet létesít ugyanazzal az alkotórészszel, a melylyel szagos vegyületté egyesül, ha vegyértéke nagyobb és megfordítva. Az egyvegyértékű nitrogén a nitrogénmonoxydban, a négyvegyértékű osmium az osmiumdioxgydban anosmogén; míg a négyvegyértékű nitrogén a nitrogéndioxgydban, a nyolczvegyértékű osmium az osmiumtetroxydban osmogén. Megfordított viselkedésű a chlór. Az egyvegyértékű chlór a chlórmonoxydban osmogén, a hét vegyértékű chlór a chlórheptoxydban anosmogén.

Ezt a tapasztalatot így is kifejezhetjük: van elem, mely

egyazon elemmel egyesülve, úgy viselkedik, hogy vegyértékének növekedésével a keletkező vegyület szaga erősödik; de van olyan is, a melynek egyazon elemmel létesített vegyületei közül az a gyöngébb szagú, a melyben nagyobb a vegyértéke.

11. Ha elfogadjuk azt a tételt, hogy az oxigénnel szagos vegyületté egyesülő elemi gyök osmogén, kimondhatjuk, hogy *ha két szagtalan elemi testből szagos vegyület keletkezik, a vegyület osmogén alkotórésze az lesz, a mely oxigénnel szagos vegyületet is keletkeztet.* Például, ha a szagtalan szénből, meg a szagtalan nitrogénből a szagos cyán, a szagtalan szénből, meg a szagtalan kénből a szagos széndisulfid keletkezik, a szén mind a cyánban, mind a széndisulfidban csak osmophor-alkotórész, mert nincs szagos oxidja; míg a cyánban a nitrogén, a széndisulfidban a kén osmogén-alkotórész, mert ezek olyan szagtalan elemi testek, a melyek oxigénnel szagos vegyületté egyesülnek.

Ez a feltevés éppen olyan önkényes, mint a következő. A cyklosos szénhydrogének egyik nevezetes tagja, a benzol, szagos vegyület. Alkotórészei: szén meg hydrogen. Mind a két elemi test szagtalan. A benzolban melyik lehet az osmophor és melyik az osmogén-alkotórész? Valószínűleg inkább a hydrogen az osmogén, mint a szén, mert ha a benzol molekulájában egy vagy több hydrogenatómot egyszerű, vagy összetett osmogén-alkotórészszel helyettesítünk, megint szagos vegyület származik.

Heterocyklosos vegyület a pyridin (C_5H_5N). Úgy fogható fel, mint benzol, melynek molekulájában $-C_6H_6-$, egy $=Cfl$ atómcsoportot egy nitrogénatóm $=N-$ helyettesít. A pyridin is szagos vegyület, de szagában már a nitrogén hatása is érvényesül. Ezert benne C_5H_5 atómcsoport osmophor, a $=N-$ atóm osmogén. Ellenben a methylpyridinben a C_5H_4N atómcsoport az osmophor és a methylgyök az osmogén-alkotórész.

12. *Ha két szagos elemi testből szagos vegyület keletkezik, osmogén-alkotórész a kisebb atómsúlyú, mert a vegyület szagának jellegét ez adja meg.* A jódttrichlorid szagában a chlór szaga fölébe kerül a jód szagának.

13. *Ha szagos vegyületből valamely szagos elemi test közvetlen egyesülés, vagy helyettesítés útján szagos vegyületet létesít, osmogén-alkotórész az a szagos elemi test, melynek*

szaga az alapvegyület jellegzetes szaga fölött túlsúlyra emelkedik. A monochlorbenzolban osmogén-alkotórész a chlór.

14. *Összetett osmogén-gyököt tartalmazó vegyületek szagának minősége függ a gyökben levő több vegyértékű elemi testtől.* Egyenlő chemiai összetételű gyököket tartalmazó vegyületek szaga általában annál kellemetlenebb, mennél nagyobb a gyökben levő többvegyértékű elem atómsúlya. Az alkylok (*OII*)-, (*SH*)-, (*Sell*)-, (*TeII*)-vegyületei közül legnehezebben eltűrhető szagúak a hydrotelluridok és a hydroselenedek, utánuk következnek a hydrosulfidok és az előbbiekhöz képest úgyszólván kellemes szagúak a hydroxidok. Ha (*OII*) (*SH*)-gyök több vegyértékű alkylgyökkel kapcsolódik, az osmogéngyök számának szaporodása a szag erősséget csökkenti. Az egy hydroxylgyök-tartalmú első- és másodrendű propylalkohol elég szagos; a két hydroxyl-tartalmú propylenalkoholok, valamint a három hydroxyl-tartalmú glicerín már szagtalanok.

Az æthylhydrosulfid kellemetlen, az æthylenhydrosulfid már tűrhető szagú vegyület. A szag csökkenésének oka lehet a forráspont emelkedése is. Például a *n*-propylalkohol 97.41 C°-on, az isopropylalkohol 82.85 C°-on, a propylenglycol 188°-on, a trimethylenglycol 216 C°-on, a glicerín 290 C°-on forr.

A hydroselenyl- és a hydrotellurylgyök számának szaporodásával járó szagmódosulás megítélésére nincs elégséges adatunk.

Ha valamely vegyületben egy hydroxyl- és egy hydrosulfylgyök van, a szag minőségét a hydrosulfylgyök szabja meg. A monothioglycol szaga emlékeztet az æthylhydrosulfid szagára, de nem bűzös annyira, mert a vegyületben levő hydroxylgyök a hydrosulfyl hatását mérsékli.

15. Az első-, másod- és harmadrendű aminok, phosphinok szagának bűzössége az osmogén-alkotórészben levő, több vegyértékű elem atómsúlyával növekedik. Tehát a phosphinok bűzősebbek mint az aminok. A mennyire a dimethylarsin vagy kakodyl fertelmes szagából következtethetünk, ha a különböző arsinok szabadon előállíthatók volnának, szaguk még undorítóbb volna, mint az aminoké és a phosphinoké.

Ugyanannak az alkylgyöknek aminja közül az alapnitrid vagy ammonia szagához leginkább hasonlít az elsőrendű aminé, leg-

kevésbé hasonlít a harmadrendű aminé, mely kellemetlenebb szagú, mint akár az első, akár a másodrendű amin. Ugyanezt mondhatjuk a különböző fosphinok szagáról is és mondhatók a hasonló összetételű arsinok szagáról is, ha azok előállíthatók volnának. *Ugyanazon másodrendű amin, vagy fosphin közül annak szaga kellemetlenebb, a melyben kevesebb szénatómos gyök van.* A trimethylamin szaga kellemetlenebb mint a triethylaminé.

Egyenlő szénatómot tartalmazó telített és telítetlen egyvegyértékű alkylgyök aminja közül annak szaga kiállhatatlanabb, a melyben a telítetlen alkylgyök van. A propyl- és isopropylamin szaga ammoniára, az allylaminé ammoniára is, de hagramára is emlékeztet.

16. *A vegyes osmogén alkotórészek szerepe függ azoknak a szénhidrogéneknek minőségétől is, a melyekben helyettesítésük történt.* Az egyvegyértékű, telített alkoholnak monochlorhelyettesítési termékei szagtalanok. Mintha a gyöngé alkohol- és a gyöngé chloridæther-szag egymást közömbösítené vagy megsemmisítené. Egészen mást tapasztalunk az aromás szénhidrogénekkel kapcsolatos phenolok, monochlor- vagy monobromhelyettesítési termékeinél. *A közönséges phenol maga is erős szagú, de ha molekulájában egy hydrogénatómot chlór, vagy bróm helyettesít, a vegyület szaga már a kellemetlenségig fokozódik.* A phenolokban levő (OH)-gyök hatását a halogén elem nem nyomja el, hanem hatásához hozzájárul és a phenolszag árnyalatának megtartásával valami erősebb és nehezen elűzhető szag kifejlődését idézi elő. Mindegy, hogy a monochlor- vagy monobromhelyettesítési termékek melyik isomeriája keletkezik. Mind a három erős és élvezhetetlen szagú. A monojódphenolok szaga már tetemesen enyhébb; valószínűleg azért, mert a nagyobb atómsúlyú jód, nehezebben illanó vegyületet létesít. Kellemetlen szagúak a dichlorphenolok is. Ha azonban a phenol molekulájában a helyettesítő chloratómok száma több kettőnél, a termék szaga csökken; nyilván megint azért, mert a chloratómok számának szaporítása a keletkezett vegyületek illékonyágát csökkenti.

Különbén nagyon távol vagyunk még attól, hogy valamely

vegyület szagára hasonlóságokból biztosan következtethessünk. Állításomat példával világosítom meg. Tudván azt, hogy ha a phenol molekulájában, ortho helyzetben, egy hidrogénatómot chlórral helyettesítünk, a phenol szaga még erősebbé válik, ha azonban nitrogénnel helyettesítjük, akkor aromás szagba csap át: jogosult volna az a következtetés, hogy ha a phenol-molekulában, ortho helyzetben, egy hidrogénatómot chlórral, egyet pedig nitrogénnel helyettesítünk, olyan terméknek kell keletkezni, a mely kevésbé bűzös, mint az orthochlorphenol és kevésbé aromás, mint az orthonitrophenol. A következtetés helyes, mert az orthonitro-orthochlorphenolon nem érzik se az orthochlor, se az orthonitrophenol szaga; de arra már a legélénkebb képzelőtehetségű kutató sem mert volna gondolni, hogy ez a termék határozottan és erősen sáfrányszagú lesz.

17. Noha a természet bámulatosan gazdag széntartalmú összetett gyökök létrehozásában és elég sűrűen jellemzi a vegyületeket különböző, hol kellemes, hol kellemetlen szaggal: mindazonáltal félreismerhetetlen takarékoságára vall, hogy nagyon gyakran fölhasználja az isomer gyököket a végett, hogy ugyanazzal az osmogén-alkotórészszel, legalább árnyalatban különböző szagú, vagy különböző összetett osmogéngyök segítségével, csalódásig megegyező szagú vegyületet hozzon létre. Legtalálóbban úgy fejezhetem ki magamat, hogy a mennyiben a széntartalmú vegyületeknél is fajról, fajtáról, változatról beszélhetünk, az osmogén-alkotórészek a szagos vegyületeknek fajtát, a különféle alkyl-, illetőleg alphylygyökök fajtáját, az isomer alkyl-, illetőleg alphylygyökök változatát határozzák meg.

Azokat az isomer-, alkyl- vagy alphylygyököket, a melyek egyazon osmogén-alkotórészszel különböző szagú vegyületeket létesítenek, heterosmophor alkotórészeknek nevezem. Például az isomer amylygyökök a hydroxylal különböző szagárnyalatú alkoholokká egyesülnek. Az isomer amylygyökök egyazon savgyökkel is különböző szagú észtereket létesítenek. Az alkoholra emlékeztető szagnak oka a hydroxyl, az észterre emlékeztető szagnak oka a savgyök: de az isomer amylyalkoholok, illetőleg amylyészterek szagbeli különbségének okát vagy az isomer amylyalkoholokat alkotó szénatómok különböző kapcsolatában, vagy

a hydroxyl-, illetőleg savgyöknek különböző elhelyeződésében találjuk meg.

Az olyan alkyl- vagy alphylygök, a mely különböző osmogén-alkotórészszel különböző szagú vegyületté egyesül, tágabb értelemben véve szintén heterosmophor. A methylgyök chlor-, hydroxyl-, hydrosulphyl- stb.-gyökkel különböző szagú vegyületeket létesít.

18. *Azokat az alkyl-, vagy alphylygököket, a melyek ugyanazzal az osmogén-alkotórészszel egyenlő szagú vegyületeket hoznak létre, egyenlő szagot hordozó, isosmophor-alkotórészeknek nevezem. A mustárolaj-féle vegyületek szagát az isosulfocványgök ($S=C=N-$) idézi elő. A methyl-, allyl-, phenyl- és a többi hasonló jellemző gyök csak mint osmophor szerepel.*

19. *Egyazon savgyöknek különböző alkyl- vagy alphylygyökkel létesített észtereinek szaga rendszerint nagyon különböző. Az æthylacetat üdítő és kissé eczetsavra, az erjedési vagy isoamylacetat a körtvére, a normalis octylacetat a narancsra, a benzylacetat a jázminolaj szagára emlékeztet. E vegyületek heterosmophor alkotórésze az æthyl-, isoamyl-, n. octyl- és benzylgyök. Mindegyik gyöknek kétségtelenül része van benne, hogy acetatjának sajátlagos szaga kifejlődjék. De a szagot előidéző alkotórész mégis csak az eczetsavgyök, mert ha szaguk csupán az alkyl- vagy alphylygöktől függne, más savgyökkel is hasonló szagú vegyületté egyesülnének. Azokat a savgyököket, a melyek különböző alkyl-, vagy alphylygyökkel egyesülve, egymástól különböző szagú vegyületeket létesítenek, heterosmogén alkotórészeknek nevezem. De egyazon osmogén-alkotórésznek különböző alkyl- vagy alphylygyökkel nem kell okvetlenül különböző szagú észtert keletkeztetni, miként ezt az isosulfocványgöknek különböző alkyl- vagy alphylygyökkel létesített egyenlőszagú vegyületéből következtethetjük.*

20. *Isomer osmogénygökök részvételével keletkező vegyületek szaga függ a bennük levő elemek atómjainak kapcsolódásától. Az æthylgyök nitro- és nitritvegyülete merőben különböző szagú. Ennek okát csak a nitro- — $N_{=0}^{\circ}$ és a nitrit N_{0}° -gyökben foglalt nitrogén- és oxigénatómok különböző kapcsolódásában kereshetjük. Tehát: azok az isomergyökök, a melyek egyazon os-*

mophor-alkotórészszel különböző szagú vegyületeket keletkeztetnek, szintén heterosmogének. Nem szorul bővebb magyarázatra, hogy az egyenlő számú szén- meg hidrogénatómot tartalmazó isomer heterosmophorgyökök a bennük levő szén- meg hidrogénatómok eltérő kapcsolódása, továbbá e gyököknek különböző szénatómon való elhelyeződése következtében megint különböző szagú vegyületeket létesíthetnek.

21. *Egyazon alkyl- vagy alphylygyök különböző osmogén-alkotórészszel általában különböző szagú vegyületet alkot.* Az alkylgyök oxidjának és acetatjának, továbbá a phenylgyök hydroxydjának és nitrovegyületének szagát összetéveszteni lehetetlen; ellenben a phenylgyök nitroszármazékának: a nitrobenzolnak ($C_6H_5NO_2$), és a phenylgyök aldylszármazékának: a benzaldehydnek vagy a keserű mandulaolajnak ($C_6H_5 \cdot CHO$) szaga a megtévesztésig egyenlő.

Azokat a különböző osmogén-alkotórészeket, a melyek egyazon osmophor-alkotórészszel egyenlő szagú vegyületeket hoznak létre, isosmophor-alkotórészeknek nevezem.

A nitrobenzolban és a benzaldehydben az osmophor-alkotórész egyenlő, az osmogén különböző. Van olyan vegyület, a melynek mind az osmophor-, mind az osmogén-alkotórésze más, mint a nitrobenzolé, vagy a benzaldehydé s mégis a szaga ezeknek szagára emlékeztet. Ilyen a hydrogencyanid, melyben osmophor a hydrogen, osmogén a cyangyök. *Ebből a példából következik, hogy különböző osmophor- és különböző osmogén, gyökök is egyesülhetnek egyenlő, vagy nagyon hasonlóságú vegyületekké; csak hogy annyira különböző chemiai sajátosságú vegyületek egyenlőségűsége, mint a milyenek a nitrobenzol, a benzaldehyd és a hydrogencyanid, nem gyakran fordul elő.*

A benzaldehyd és a hydrogencyanid egyenlőségűségének okát kereshetnők abban a körülményben, hogy az aldyl- ($\overset{|}{C}=\overset{|}{O}$) és a cyan-atómcsoport ($\overset{|}{C}\equiv N$) szénatomjában van valami közös vonás, még pedig az, hogy alkalmas eljárással mind a kettő carboxyllá ($\overset{|}{C}=\overset{|}{O}H$) változtatható: de ennek a magyarázatnak csak akkor volna döntő értéke, ha ismernénk még más aldehidot, vagy más cyanidot, a mely keserű mandulaszagú.

Röviden összefoglalva, ezek a szag és a kémiai összetétel közötti kapcsolatra vonatkozó elmélkedéseim főeredményei. Tudom, hogy távol vagyok még az igazságtól; de ha a *Haycraft-tól* 1888-ban közölt felfogáshoz képest csak valamivel közelebb jutottam ennek az érdekes kérdésnek tisztázásához, már eléggé megjutalmazva érzem magamat a tanulmányozására fordított fáradságért.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1920 június 7.-én tartott üléséből.)

JORDAN GÖRBE-TÉTELÉNEK BEBIZONYÍTTÁSA.

KEREKJÁRTÓ BÉLA-tól.

Az a classicus bebizonyítás, melyet BROUWER¹ a JORDAN görbe-tételéről adott, a JORDAN-görbe belső tulajdonságaiból indul ki és a *deductio ad absurdumok* egy során át jut eredményhez. A következőkben a BROUWER-féléhez teljesen analog, de inkább constructiv úton fogom a tételt bebizonyítani. Az elemi érthetőség czéljából az *1. §-ban a BROUWERTŐL (idézett helyen) összefoglalt fogalmakat és az 1. theorémát bocsátom előre (szószzerint). A 2. és 3. §. a tétel egy-egy részét bizonyítja be.

1. §.

Út. alatt egy véges számú egyenes vonalból alkotott, önmagát nem metsző vonalat értünk.

Tartomány alatt a következő két tulajdonsággal bíró (síkbeli) ponthalmazt értünk: 1. minden pontja köré megadható egy kör, melynek belseje szintén a tartományhoz tartozik, 2. bármely két pontja összeköthető egy egészen a tartományhoz tartozó úttal.

Egy tartomány ama határpontjai, melyek nem tartoznak a tartományhoz, zárt, sehol sem sűrű ponthalmazt alkotnak, melyet a tartomány *határának* nevezünk.

Egy síkbeli *T* zárt ponthalmaz maradékhalmaza széttesik tartományoknak véges, vagy megszámozható halmazára, melyeket a *T* halmaztól *meghatározottaknak* nevezünk.

Egy tartományt SCHÖENFLIES szerint *korlátosnak* mondunk, ha egészen a végesben fekszik.

Egy zárt halmazt *összefüggőnek* nevezünk, ha nem választ-

¹ BROUWER: Math. Ann. 69. (1910) S. 169—175.

ható szét két zárt halmazra. A rövidség kedvéért egy összefüggő zárt halmazt *continuum*nak mondunk.

1. *theoréma.* Ha egy tartomány és maradékhalmaza mindkettőn tartalmaznak egy Z continuumhoz tartozó pontokat, akkor a tartomány határa is tartalmazza Z -nek legalább egy pontját; s nevezetesen: ha egy polygón belsejének is, külsejének is van egy Z continuumhoz tartozó pontja, akkor a polygónnak is van legalább egy a Z -hez tartozó pontja.

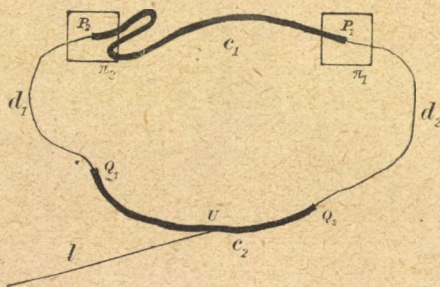
Ellenkező esetben ugyanis Z -nek a tartományban s a maradékhalmazban tartalmazzott pontjai a Z -nek két zárt halmazát adnák meg.

2. §.

Legyen J' egy kör, J ennek kölcsönösen egyértelmű folytonos képe, melyet Jordangörbének nevezünk. Legyen l a végtelentől a J -nek egy U pontjáig húzott, J -vel nem találkozó egyenes. U' legyen a J' -n U -nak megfelelő pont és legyenek $P'_1, P'_2, Q'_1, U', Q'_2$ a J' -n pontok a felirt cyklusban; a lezárt $\overline{P'_1 P'_2}, \overline{P'_2 Q'_1}, \overline{Q'_1 Q'_2}, \overline{Q'_2 P'_1}$ íveket jelöljük c'_1, d'_1, c'_2, d'_2 -vel, a képeket ugyanazzal a betűvel vessző nélkül; 1. ábra.

A d_1 ívnek d_2 -től s a c_1 -nek c_2+l -től való távolságai közül a kisebbik legyen $\delta (>0)$. A síkot négyzetes felosztásnak vet-

jük alá $\frac{\delta}{4}$ -nél kisebb oldalhosszúsággal és kiemeljük ennek a P_1 és P_2 -t tartalmazó négyzeteit. Az ezzel előálló polygonhatárok π_1, π_2 egymással nem találkoznak, továbbá π_1 az $l+c_2+d_1$ -től és π_2 az $l+c_2+d_2$ -től separált.



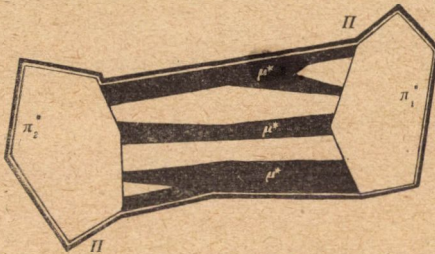
1. ábra.

A c_1 , illetőleg d_1 , illetőleg d_2 -nek sem π_1 , sem π_2 belsejéhez nem tartozó részei legyenek c_1^* , illetőleg d_1^* , illetőleg d_2^* . $\delta^* (>0)$ jelentse a kisebbiket a δ szám és a c_1^* -nak $d_1^*+d_2^*$ -től való távolsága közül és osszuk fel az előbbi hálózatnak négyzeteit $\frac{\delta^*}{4}$ -nél kisebb

oldalhosszúakra. μ jelentse azoknak a négyzeteknek a halmazát, melyek c_1 pontjait tartalmazzák.

Ha μ két négyzetének csak egy csúcspontja közös és a másik két ugyane csúcsához tartozó négyzete nem tartozik μ -hez, akkor e csúcsnak bizonyos (a J egy pontját sem tartalmazó) környezetét elhagyjuk, miáltal elérjük, hogy $\pi_1 + \pi_2 + \mu$ határát egymással nem találkozó polygonok alkotják.

Most először a μ ama négyzeteit veszem ki, melyek μ -ben csak π_1 -gyel, de π_2 -vel nem függenek össze; a π_1 -ből e négy-



2. ábra.

zetek hozzávevésével elő-
álló tartomány külső határát alkotó polygont nevezük π_1^* -nak; hasonlóan keletkezik π_2^* a π_2 -ből. π_1^* és π_2^* nem találkoznak, továbbá π_1^* az $(l + c_2 + d_1)$ -től és π_2^* az $l + c_2 + d_2$ -től separált. A μ -nek π_1^* és π_2^* -on kívül fekvő négy-

zetei a μ^* halmazt alkotják, melynek minden négyzete μ^* -ban úgy π_1^* -gal, mint π_2^* -gal összefügg; 2. ábra.

Tekintsük most a $\pi_1^* + \pi_2^* + \mu^*$ -tól meghatározott, a végtelent tartalmazó tartományt határoló Π polygont. Mivel az $l + c_2$ continuum π_1^* , π_2^* és μ^* -gal nem találkozik, így az 1. theorema szerint c_2 a Π külsejében fekszik, c_1 pedig a Π belsejében. Mivel Π -nek a π_1 illetőleg π_2 -vel nem közös részei J -vel nem találkoznak, azért sem π_1^* , sem π_2^* nem fekehetik egészen a Π belsejében, mert különben Π a d_1^* , vagy d_2^* -gal találkoznék, ami ki van zárva.

Legyen most w_1 , illetőleg w_2 a Π -nek egy a π_1^* -gal, illetőleg a π_2^* -gal közös útja; a w_1 két végpontjából kiindulnak a μ^* határának z_1 és z_2 útjai, melyek π_1^* -ot π_2^* -gal kötik össze; ellenkező esetben ugyanis vagy z_1 , tehát w_1 is a $\pi_1^* + \pi_2^* + \mu^*$ belső maradéktartományához tartoznék, vagy a μ^* -nak z_1 -gyel összefüggő résztartományát a z_1 a π_2^* -tól elválasztaná; mindkét eset lehetetlensége azt mutatja, hogy z_1 és z_2 a π_1^* -ot π_2^* -gal összekötik. Tehát Π a w_1 , z_1 , w_2 , z_2 útból tevődik össze.

Legyen M_1 a z_1 -nek és M_2 a z_2 -nek egy pontja, a J -nek M_1 és M_2 által meghatározott két útja legyen k_1 és k_2 . Azt állítom, hogy M_1 és M_2 nem tartoznak ugyanahhoz a J által meghatározott tartományhoz. Mert különben legyen σ egy az M_1 és M_2 -t összekötő, J -t nem találó út. c_1 és c_2 -t egymástól vagy $k_1 + \sigma$, vagy $k_2 + \sigma$ elválasztja; máskülönben két a c_1 és c_2 egy-egy pontját a $k_1 + \sigma$, illetőleg a $k_2 + \sigma$ átlépése nélkül összekötő út a σ -t nem találó s az M_1 -t M_2 -től elválasztó polygont alkotna, ami ellenmondás. — Legyen tehát c_1 a c_2 -től egy H polygon által elválasztva, mely σ és k_1 részeiből áll; mivel pedig σ a J -től és k_1 a $c_1 + c_2 + d_1$ -től separált, azért H a $c_1 + c_2 + d_1$ continuumhoz nem ér. Ez ellenmondás az 1. theorémának.

Ha még megjegyezzük, hogy c_1 , π_1 , π_2 , μ , tehát J is a J egy tetszésszerinti pontjának tetszésszerinti kis környezetében tarthatók, akkor a következő eredményre jutunk:

1. tétel. A J JORDAN-görbe legalább két tartományt határoz meg és bármely pontjának tetszésszerinti környezete legalább két általa meghatározott tartományhoz tartozó pontokat tartalmaz.

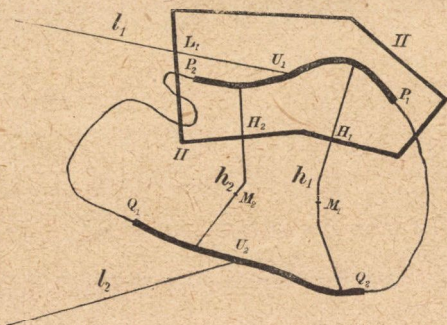
3. §.

Legyen l_1 és l_2 két a végtelentől J -nek U_1 illetőleg U_2 pontjához húzott egyenes. — Meg fogjuk mutatni, hogy két tetszésszerinti, a végtelentől J által elválasztott M_1 , M_2 pont egy a J -t nem találó út által összeköthető. E célból fektetünk M_1 és M_2 -n keresztül egymást és J -t nem érő h_1 , h_2 utakat, amelyek végpontjai a J -nek pontjai.

Felteszszük, hogy a h_1 és h_2 végpontjai nem fekszenek a J -nek ugyanazon $\overline{U_1 U_2}$ ívén; a bizonyítás a kizárt esetre, mint közvetlen látni, a tárgyalandó esetből következik.

J -t éppen úgy szétoztjuk, mint a 2. §-ban a c_1 , d_1 , c_2 , d_2 ivekre, úgyhogy c_1 és c_2 mindegyike tartalmazzon az U_1 , U_2 pontok s a h_1 és h_2 végpontjai közül egyet-egyet. Azután a J polygon szerkesztését úgy ismételjük, hogy J -nek a h_1 , illetőleg h_2 , illetőleg l_1 -gyel csak egy-egy H_1 , illetőleg H_2 , illetőleg L_1 közös pontja legyen (Ezt elegendően finom négyzetes hálózattal mindig elérhetjük.)

A H_1, H_2, L_1 pontok egyike sem fekehetik a Π -nek két a d_1 -gyel, vagy két a d_2 -vel közös pontja által meghatározott útján. Tegyük fel, hogy H_1 a Π -nek egy a d_1 ív D és D' pontjaitól meghatározott s egyébként J -hez nem érő útján fekszik; a d_1 -nek a D és D' -től meghatározott rész-íve ezzel az úttal együtt



3. ábra.

egy T JORDAN görbét alkot. Mivel a $c_1 + d_2 + c_2$ continuum T -hez nem ér s a h_1 -nek S'_1 és S''_1 végpontjai rajta fekszenek, tehát ezek az 1. theorema szerint ugyanahhoz a T -től meghatározott tartományhoz tartoznak. Legyenek a H_1 egy elég kis környezetében H'_1 a Π belsejében, H''_1 a Π külsejében,

két pontja. A 2. §. megfontolásai szerint H'_1 és H''_1 nem tartozhatnak ugyanabba a T által meghatározott tartományba; tehát az $S'_1 H'_1$ és $S''_1 H''_1$ utak közül legalább az egyik éri T -t s mivel ezek Π -hez nem érnek, azért h_1 -nek volna d_1 -gyel közös pontja, feltevésünk ellenére.

Legyen u_1 és u_2 a Π két útja, melyek mindegyikének egy a d_1 -gyel s egy a d_2 -vel közös végpontja van; mint éppen bebizonyítottuk, H_1, H_2, L_1 az u_1 , vagy u_2 -n fekszenek s mivel M_1 és M_2 -t a J végtelentől elválasztja, azért H_1 és H_2 egyazon u úton, például u_1 -en fekszenek, tehát $(M_1 h_1 H_1 u_1 H_2 h_2 M_2)$ egy M_1 és M_2 -t összekötő J -t nem találó útát alkot.

Innen következik a

2. tétel. A J JORDANGÖRBE legfeljebb egy egyetlen korlátos tartományt határoz meg.

Az 1. és 2. tételek összefoglalásából kiadódik a

JORDAN GÖRBE-TÉTEL. A JORDANGÖRBE A SÍKON KÉT TARTOMÁNYT HATÁROZ MEG ÉS E TARTOMÁNYOK MINDEGYIKÉNEK HATÁRÁVAL AZONOS.

ADATOK AZ AMFIBOLITOK OSZTÁLYOZÁSÁHOZ.

VENDL ALADÁR-tól.

Az amfibolitok a GRUBENMANN-féle rendszerben a IV. csoportban, — az *eklogitok és amfibolitok* csoportjában — foglalnak helyet. E csoportnak jellemző középértékei:¹ $S=52$, $A=3\cdot7$, $C=6\cdot8$, $F=28\cdot5$, $M=6\cdot0$, $T=0$, $K=0\cdot5$. A csoportra nézve legállandóbb T , mely mindig zérus. $C>A$, csak kivételesen $C\approx A$. $A = \text{cca } 3-5$, $C = \text{cca } 5-15$, $F = \text{cca } 20-40$, $M > 0$, K többnyire < 1 .

A Déli-Kárpátok amfibolitjai, melyeket eddig tanulmányoztam, teljesen beleilleszkednek e csoportba.² Ezek az amfibolitok elegyrészeik kialakulása s eloszlása szerint háromfélék: plagioklászamfibolitok, gránátos amfibolitok és zoizitamfibolitok; e három főtipust átmenetek kötik össze egymással. A plagioklászamfibolitok és a gránátos amfibolitok kémiai összetételében lényeges különbség nincs:

Plagioklászamfibolit a Salanele-ről: $S=53\cdot85$, $A=3\cdot42$, $C=8\cdot83$, $F=21\cdot65$, $M=3\cdot56$, $T=0$, $K=0\cdot90$;³

gránátos amfibolit a Pareul Rescoalei-ből: $S=51\cdot15$, $A=2\cdot69$, $C=9\cdot40$, $F=24\cdot66$, $M=2\cdot75$, $T=0$, $K=0\cdot85$.

A zoizitamfibolitok egymás között szintén megegyező összetételűek:

¹ GRUBENMANN U.: Die kristallinen Schiefer, II. Aufl, 1910, p. 194.

² VENDL A.: A Surián környékének amfibolitjai; Math. és Természettud. Értesítő, XXIII. kötet, 1915, p. 256—27C.

³ A molekulahányadosok kiszámítására e dolgozatban minden esetben az OSANN-féle táblázatokat használtam fel.

zoizitamfibolit a Valea Dobrei-ből: $S=48.75$, $A=2.38$,
 $C=7.34$, $F=31.81$, $M=6.53$, $T=0$, $K=0.80$;

zoizitamfibolit a Valea Ditei középső szakaszából: $S=51.21$,
 $A=1.43$, $C=6.94$, $F=32.05$, $M=6.93$, $T=0$, $K=0.94$.

A zoizitamfibolitokat jellemző számok közül feltűnő F -nek és M -nek magas értéke a nem zoizitos amfibolitok megfelelő számaival szemben. Bár e zoizitamfibolitok a többi amfibolit társaságában, néha azokkal váltakozva lépnek fel a Surián környékén a csillámpala-csoport közeteiben, mégis némi kémiai különbség mutatkozik a két csoport között.

Az eddigi felfogás szerint a zoizitamfibolitok kémiaileg általában nem különböznek a többi amfibolittól. Minthogy azonban ma már elég nagy mennyiségű elemzési adatot nyújt az irodalom, kívánatos ez adatoknak megvizsgálása abból a szempontból, hogy vajjon F -nek magas értéke nem jellemző-e általában a zoizitamfibolitokra. A mezozónában az amfibolitokban a plagioklásztt, nevezetesen az anortitot, helyettesíti a zoizit; az epizónában az anortit helyett a zoizit rokona, az epidot lép fel. Lehetséges ennél fogva, hogy esetleg az epidot-albitamfibolitokban is olyanféle kémiai viszonyok uralkodnak, mint a zoizitamfibolitokban.

Megvizsgáltam 35 oly amfibolit elemzési adatait, melyek zoizitot, illetőleg epidotot vagy egyáltalában nem, vagy csak minimálisan elenyésző csekély mennyiségben tartalmaznak. A zoizit- és epidotamfibolitokról sokkal kevesebb adatot közöl az irodalom; ezekből 17 elemzés volt rendelkezésemre. Végül néhány oly amfibolit elemzési adatait is figyelembe vettem, melyek az elegyrészek szempontjából a zoizit-epidotamfibolitok és a zoizitot, epidotot nem tartalmazó amfibolitok közt átmenetek, a mennyiben csak kevés zoizitot, illetőleg epidotot tartalmaznak.

Számításaimhoz természetesen csak a jól definiált amfibolitok elemzését használtam fel, melyek a GRUBENMANN-féle IV. csoport követelményeinek megfelelnek. Az irodalom elég gyakran említ olyan amfibolitokat, melyek a magnéziumszilikátos palák közé, vagy esetleg egyéb csoportba tartoznak. Figyelmen kívül hagytam azokat az amfibolitokat is, melyek érczekben rendkívül gazdagok, továbbá azokat is, melyek epidotos hornfelzrészele-

ket tartalmaznak. E két utóbbi esetben F értéke szokatlanul magasra emelkedik.

Miként az alábbiakból kitűnik, az elemzési adatokból kiszámított OSANN-GRUBENMANN-féle értékek a következő középértékekhez vezettek:

I.		II.	
Amfibolitok	zoizit } epidot } nélkül.	Zoizit	Epidot } amfibolitok.
$S = 54.48$	(44.08—64.44) ¹	$S = 50.94$	(48.08—55.42)
$A = 4.19$	(1.59— 9.75)	$A = 3.30$	(0.72— 5.42)
$C = 6.54$	(1.44—11.29)	$C = 5.63$	(3.02— 9.03)
$F = 24.01$	(8.47—28.73)	$F = 31.24$	(29.22—34.70)
$M = 3.94$	(0.52— 7.41)	$M = 6.41$	(3.02—10.53)
$T = 0.00$		$T = 0.00$	
$K = 0.89$	(0.79— 1.06).	$K = 0.82$	(0.65— 0.96).

A zoizit- és epidotamfibolitok tehát általában valamivel bázisosabbak, alkáliákban kissé szegényebbek, mint a zoizitot, illetőleg epidotot nem tartalmazó amfibolitok. Legjellemzőbb a zoizit- és epidotamfibolitokra a két vegyértékű fémek oxidjainak — gyakran a MgO -nak — nagy molekulaszázaléka, miért is F értéke sokkal magasabb, mint a többi amfibolité. Oka ennek részben az a körülmény is, hogy a zoizit-epidotamfibolitok Al_2O_3 -ban kissé szegényebbek s így M értéke szintén elég magas.

F magas értékének megfelelően a zoizit-epidotamfibolitok projekciópontja az OSANN-féle háromszögben erősen eltolódik az F csúcs felé. Ennek folytán ezek az amfibolitok — mint-hogy alkáli-tartalmuk is kisebb — közelednek a GRUBENMANN-féle magnéziumszilikát-palák csoportjához.

Ezek szerint az amfibolitok csoportjában nemcsak az elegyrészek fellépése, de a kémiai összetétel alapján is két alcsoportot különböztethetünk meg:

1. *Amfibolitok zoizit és epidot nélkül* a következő csoportközépértékekkel: $S = 54.48$, $A = 4.19$, $C = 6.54$, $F = 24.01$, $M = 3.94$, $T = 0$, $K = 0.89$.

¹ A zárójelben a két szélső értéket tüntettem fel.

2. *Zoizitamfibolitok és epidotamfibolitok* a következő csoport-közéértékekkel: $S=50.94$, $A=3.30$, $C=5.63$, $F=31.24$, $M=6.41$, $T=0.00$, $K=0.82$.

A két alcsoportot átmenetek kötik össze egymással.

*

A számításokat a következő kőzetek kémiai elemzési adataiból végeztem:

I. Amfibolitok $\left. \begin{array}{l} \text{zoizit} \\ \text{epidot} \end{array} \right\}$ nélkül.

1. Plagioklászamfibolit, Salanele, Surián, Déli Kárpátok; VENDL l. c. p. 258.

2. Plagioklászamfibolit. Sölden. Öztal; GRUBENMANN l. c. p. 209–210.

3. Gránátamfibolit, Umhausen, Öztal; GRUBENMANN l. c.

4. Gránátamfibolit (paragonit-tartalmu), erraticus, Brand Längenfeldnél, Öztal; GRUBENMANN l. c.

5. Amfibolit, Crystall Falls, Mich.; CLARKE F. W.: *Analyses of rocks from the laboratory of the United States geol. survey 1880–1903*, Bull. of the United States geol. surv. 228, p. 78.

6. Porfiros amfibolit, Heath, Mass.; CLARKE l. c. p. 34.

7. Amfibolit, New Salem, Mass.; CLARKE l. c. p. 34.

8. Amfibolit, vékonyan palás, Whittmanns Ferry, Mass.; CLARKE l. c. p. 34.

9. Amfibolit, South Leverett, Mass.; CLARKE l. c. p. 34.

10. Amfibolit, majdnem tisztán csak amfibolból áll, Worthington, Mass.; CLARKE l. c. p. 34.

11. Amfibolit, telér, Palmer Center, Mass.; CLARKE l. c. p. 36.

12. Amfibolit, telep, Palmer Center, Mass.; CLARKE l. c. p. 36.

13. Amfibolit, Guilford Vt, U. S. A.; CLARKE l. c. p. 30.

14. Amfibolit, Bernardston, Mass.; CLARKE l. c. p. 34.

15. Földpátamfibolit, San Pietro, Campo, Elba; OSANN A.: *Beitr. z. chem. Petrographie*, III. Teil, Leipzig 1916, p. 300.

16. Amfibolit, centrikus strukturával. Fehren Neustadt-nál; OSANN l. c. p. 296.

17. Amfibolit, földpátban gazdag, Fehren Neustadt-nál; OSANN l. c. p. 296.
18. Földpátamfibolit, Maisachtal; OSANN l. c. p. 295.
19. Amfibolit, Maisachtal; OSANN l. c. p. 295.
20. Amfibolit, piroxennal; Maisachtal; OSANN l. c. p. 295.
21. Amfibolit, sok gránáttal, Maisachtal; OSANN l. c. p. 295.
22. Amfibolit, gránátos, Maisachtal; OSANN l. c. p. 295.
23. Amfibolit, tömött, Fehren Neustadt-nál; OSANN l. c. p. 296.
24. Amfibolit, részben porfiroosan kifejlődött barna amfibollal, Grumbach, Mittweida-nál, Szászország; UHLIG J.: Die Gruppe des Flasergebros im sächsischen Mittelgebirge: Zeitschr. der deutsch. geol. Ges. 59 Bd, 1907 p. 42 - 43.
25. Amfibolit, telér mészkőben, Township of Methuen, Ontario; OSANN l. c. p. 303.
26. Amfibolit, diabázból képződött, Toldofilo, Ecuador; OSANN l. c. p. 303.
27. Amfibolit, Sara-urcu Ecuador; OSANN l. c. p. 304.
28. Gránátamfibolit, részben glaukofánszerű amfibollal, Syra sziget; KTENAS K. A.: Die Einlagerungen im krist. Gebirge der Kykladen auf Syra und Sifnos, Tschermák's Min. petr. Mitteil. 26 Bd, 1907. p. 304.
29. Amfibolit. Angara folyó É-i partja, Jenissei vidék; MEISTER A.: Sur les roches et les gisements d'or dans la partie sud de district d'Jénissei, Petrograd, 1910, p. 401.
30. Amfibolit, ugyanott; MEISTER l. c. p. 401.
31. Amfibolit, ugyanott; MEISTER l. c. p. 401.
32. Amfibolit, ugyanott; MEISTER l. c. p. 401.
33. Tömeges amfibolit, Gärtnerskopf, Stallenkandel mellett; KLEMM G.: Über ein Malchitvorkommen im Kirschhäuser Tal bei Heppenheim, Notizbl. Verein f. Erdkunde Darmstadt, 1907, p. 24.
34. Palás amfibolit, Alzenau, Spessart; OSANN l. c. p. 297.
35. Tömeges amfibolit, Wenighösbach, Spessart; OSANN l. c. p. 297.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
S	53.85	53.89	53.57	59.02	56.47	56.63	49.31	54.32	53.93	51.17	54.92	56.68	S
A	3.42	4.21	4.39	3.79	3.03	5.73	2.44	3.85	3.68	1.59	3.83	4.02	A
C	8.83	7.81	4.46	8.91	5.50	5.77	9.80	5.86	6.45	8.47	5.17	6.45	C
F	21.65	22.07	28.73	15.09	26.47	20.37	26.21	26.26	25.81	28.71	27.08	22.38	F
M	3.56	3.25	6.16	1.05	3.70	1.52	2.43	4.28	1.18	2.55	6.57	4.30	M
T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	T
K	0.90	0.86	0.84	1.06	1.01	0.85	0.82	0.89	0.89	0.93	0.91	0.95	K
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
S	52.71	56.13	54.40	52.09	58.27	55.05	52.47	55.19	52.12	53.70	55.79	51.67	S
A	4.06	3.05	3.84	3.63	5.34	5.85	3.57	4.70	3.66	4.77	3.32	2.61	A
C	6.15	7.28	5.23	8.48	11.29	3.47	6.72	5.16	6.56	5.59	7.78	8.16	C
F	26.87	23.21	27.46	23.69	8.47	26.31	26.95	25.09	27.44	25.58	22.01	26.79	F
M	4.27	2.86	3.08	4.83	1.48	7.01	5.18	6.39	6.38	4.70	2.99	0.61	M
T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	T
K	0.83	1.00	0.89	0.94	0.92	0.81	0.85	0.87	0.83	0.82	0.97	0.88	K
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		
S	52.80	58.12	64.44	52.72	52.16	56.56	58.80	55.73	56.57	51.80	44.08		S
A	3.95	5.04	9.75	4.87	3.33	5.59	4.18	2.27	4.66	3.22	7.47		A
C	6.51	4.43	1.44	5.89	9.58	3.75	4.24	6.23	6.23	6.94	8.36		C
F	26.28	22.94	13.18	25.76	22.02	24.76	24.36	26.47	21.65	27.88	24.26		F
M	5.29	5.50	4.92	4.27	5.25	2.53	0.66	6.52	4.41	7.41	6.92		M
T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		T
K	0.84	0.94	0.86	0.79	0.85	0.86	1.01	1.04	0.91	0.85	0.51		K

Középérték: $S=54.48$, $A=4.19$, $C=6.54$, $F=24.01$, $M=3.94$,
 $T=0.00$, $K=0.89$.

II. Zoizitamfibolitok és epidotamfibolitok.

36. Zoizitamfibolit, Tremolaschlucht, St. Gotthard; HEZNER L.: Petrogr. Untersuchung der krist. Schiefer der Südseite des St. Gotthard (Tremolaserie). Neues Jahrb. f. Min. etc. 1909, 27. Beilageband, p. 182.

37. Zoizitamfibolit, Valea Dobrei, Surián, Déli Kárpátok; VENDL l. c. p. 266.

38. Zoizitamfibolit, Valea Ditei, Surián, Déli Kárpátok; VENDL l. c. p. 268.

39. Zoizitamfibolit, Langenlois, Niederösterreichisches Waldviertel; GRUBENMANN l. c. p. 210—211.

40. Epidotamfibolit, Loderio, Bleniotal, Tessin; GRUBENMANN l. c. p. 210—211.

41. Epidotamfibolit, Angara É-i partja, Jenissei vidék; MEISTER l. c. p. 401.

42. Epidotamfibolit, Angara É-i partja, Jenissei vidék; MEISTER l. c. p. 401. MEISTER szerint ezek az epidotamfibolitok 9-14% epidotot tartalmaznak; l. c. p. 402.

43. Epidotamfibolit (amphibolite albito-épidotique), az Iwdiel jobboldali forrásánál, Északi Ural; DUPARC L.-PEARCE F.-TIKANOWITCH M.: L'Oural du Nord, Genève 1909, p. 83.

44. Amphibolit epidottal, Thältistock, Mittleres Aarmassiv; FISCHER O.: Über einige Intrusivgesteine der Schieferzone am Nordrand des zentralen Granites (Mittleres Aarmassiv.). Tschermak's Min. petr. Mitteil. 24, 1905, p. 87.

45. Albitamfibolit, tömött, kvarcban szegény, epidottal, Sasso rosso, Tessin, St. Gotthard; HEZNER l. c. p. 181.

46. Amphibolit durvaszemcséjű, epidotos, Südportal des St. Gotthard; HEZNER l. c. p. 180.

47. Amphibolit zoizittal, Plassnitz, Adlergebirge, Östr.-Schlesien, PETRASCHER W.: Die krist. Schiefer des nördlichen Adlergebirges, Jahrb. k. k. geol. Reichsanstalt 59, 1909, p. 496.

48. Amphibolit zoizittal és epidottal, Map. sziget; KAISER E.: Beitr. zur Petrographie und Geologie der deutschen Südsee-Inseln. Jahrb. der k. preuss. geol. Landesanstalt, 1903, p. 98.

49. Amphibolit zoizittal és epidottal, Map sziget; KAISER l. c.

50. Epidotamfibolit (amphibolite-albito-épidotique) a Kis Quwal keleti oldalán, a vízvásztó s az Iwdiel jobb forrása közt, Északi Ural; DUPARC-PEARCE TIKANOWITCH l. c.

51. Epidotamfibolit, Kouriksar gerinczének D-i vége, Északi Ural; DUPARC-PEARCE-TIKANOWITCH l. c.

52. Epidotamfibolit, a Wichéra keleti forrásának szomszéd-ságában a vízvásztón, Északi Ural; DUPARC-PEARCE-TIKANOWITCH l. c.

	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
S	48.79	48.75	51.21	48.08	42.92	51.06	50.41	52.92	50.14	S
A	0.82	2.38	1.43	4.43	2.16	1.90	4.02	3.90	4.15	A
C	7.85	7.34	6.94	5.58	9.03	7.28	4.33	4.13	4.14	C
F	33.97	31.81	32.05	31.90	34.70	30.58	32.89	31.02	33.78	F
M	9.58	6.53	6.93	8.77	7.73	3.02	3.83	6.82	10.53	M
T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	T
K	0.90	0.80	0.94	0.70	0.65	0.90	0.77	0.84	0.75	K

	45	46	47	48	49	50	51	52		
S	55·42	54·21	50·52	52·20	52·47	53·52	51·84	51·46		S
A	3·23	4·01	3·73	3·08	3·57	5·42	4·87	3·02		A
C	3·67	4·29	6·39	5·50	5·23	3·02	4·60	6·36		C
F	30·78	29·19	29·24	30·64	29·93	29·60	29·22	29·78		F
M	4·24	6·00	3·69	7·19	6·73	6·30	6·40	4·72		M
T	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00		T
K	0·96	0·88	0·78	0·87	0·85	0·79	0·77	0·85		K

Közéérték: $S=50·94$, $A=3·30$, $C=5·63$, $F=31·24$, $M=6·41$,
 $T=0·00$, $K=0·82$.

III. A két előbbi csoport között levő átmenetek.

53. Gránátos amfibolit igen kevés zoizittal Pareul Rescoalei, Surián, Déli Kárpátok; VENDL l. c. p. 264.

54. Amfibolit igen kevés zoizittal, Valea Ditei, közel a Valea Diteinak a Tájába való torkolatához, Surián, Déli Kárpátok; VENDL l. c. p. 269; elemzése SZINYEI-MERSE ZSIGMOND: A m. kir. földtani int. 1913. évi jelentése, p. 482.

55. Amfibolit epidottal, Ouwal környéke, Északi Ural; DUPARC-PEARCE-TIKANOWITCH l. c. Epidottartalom a leírásban nincs különösen hangsúlyozva: «*épidote en grains jaunâtres distribués partout*».

56. Amfibolit epidottal, Kis Ouwal nyugoti lejtője, az Iwdiel jobboldali forrása mellett, Északi Ural; DUPARC-PEARCE-TIKANOWITCH l. c.

57. Amfibolit, telér, epidottal, Prospect. Hill, Conn.; CLARK W.: Analyses of rocks from the laboratory of the United States geol. survey, Bull. of the United States geol. survey 419, p. 175.

	53	54	55	56	57	
S	51·15	55·78	58·04	55·99	52·13	S
A	2·69	5·21	3·96	4·91	3·41	A
C	9·40	4·10	4·45	5·23	6·27	C
F	24·66	25·60	25·14	23·73	28·51	F
M	2·75	4·94	2·00	3·95	5·16	M
T	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	T
K	0·86	0·86	1·00	0·88	0·82	K

Közéérték: $S=54·61$, $A=4·03$, $C=5·89$, $F=25·52$, $M=3·76$,
 $T=0·00$, $K=0·88$.

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1919 márcz. 17.-én tartott üléséből.)

AMFIBOLITOK A DÉLI-KÁRPÁTOKBÓL.¹

VENDI ALADÁR- és VENDI MIKLÓS-tól.

A tőlünk eddig tanulmányozott amfibolitok legnagyobb részben Hunyad és Szeben vármegyéből származnak, de néhány Krassószörénymegyéből való kőzetre is kiterjesztettük megfigyeléseinket. Az eddigi eredményeket rövid, vázlatos összefoglalásban a következőkben közöljük addig is, míg kellő számú kémiai analízis nem fog rendelkezésünkre állani.

Miként ismeretes, az említett területeken az amfibolitok általában a csillámpalacsoport kőzeteiben lépnek fel vékonyabb-vastagabb betelepülések alakjában. Geomorphologiai szempontból jelentéktelenek, mert általában kisebb tömegűek, vékonyak, ritkán érik el a száz méter vastagságot. A csillámpaláknál rendszerint jóval ellentállóbb kőzetek s ezért gyakran kimeredő kúpokot vagy gerinczecsákat formálnak, melyek gyakran szembe-szökők.

A Surián környékének amfibolitjairól egyikünk már közölt ismertetést, mely eddig csak magyarul jelent meg.² A következő rövid összefoglalás az ott közöltekre is kiterjeszkedik és újabb anyag révén azokhoz is nyújt újabb adatokat.

A megvizsgált amfibolitok a következő csoportokba tartoznak: 1. *Plagioklászamfibolitok*, 2. *gránátamfibolitok*, 3. *zoizit-amfibolitok*, 4. *epidotamfibolitok*. Az egyes csoportokat átmeneti típusok kötik össze egymással.

1. *Plagioklászamfibolitok*. Finom-durvaszemcséjű kőzetek. Texturájuk palás, gyakran azonban bizonyos fokig a tömeges

¹ A M. Kir. Földtani Intézetben és a Budapesti kir. magyar tud. egyetem ásvány- és kőzettani intézetében készült dolgozat.

² VENDI ALADÁR: A Surián környékének amfibolitjai. Math. és természettud. értesítő, XXXIII., 256—270, 1915.

közetek megjelenési formájához hasonló s ekkor makroszkoposan inkább tömeges közetekre — például dioritra — emlékeztetnek (Salanele 1710 m magasan, Valea Dobrei eredete közelében, a Surián és Párva közt Hunyadmegyében stb.). Strukturájuk homeoblasztos, még pedig igen gyakran granoblasztos, néha jól észrevehetően «gabbroid» (Cindrel és Steflistye közt 1818 m magasan a Juzba táján Szebenmegyében stb.); ritkán nematoblasztos vagy lepidoblasztos a biotit fellépése folytán, igen sokszor poikiloblasztos (Piatra alba teteje 2180 m magasan Szebenmegyében; Stina Gilei 1274 m magasan Hunyadmegyében). Zoizit, epidot és gránát vagy teljesen hiányzik, vagy csak alárendelten kis mennyiségben van. Néha kvarczerek járják át a kőzetet, melyek helyenként több cm vastagok (Piatra alba).

A *plagioklász* mérsékelten bázisos, többnyire $Ab_{73} An_{27}$ (Salanele) és $Ab_{64} An_{36}$ (Piatra alba) közt. Xenoblasztosan kifejlődött; gyakran albit-, ritkábban periklin-ikrekben is, néha ikerlemezeség nélkül. A zónás struktúra ritka és invers (Stina Steaja, Szebenm.). A plagioklász némely kőzetben muszkovit (szericit), vagy kevés epidot bomlási terméket tartalmaz. Zárványok: amfibol, néha biotit, magnetit, apatit, ritkán epidot, esetleg kvarcz.

Az *amfibolok*: makroszkoposan feketék, vagy zöldesfeketék, rendszerint xenoblasztosan kifejlődtek, ritkában azonban az $\{110\}$, $\{100\}$, $\{010\}$ formák kontúrjai felismerhetők. Csiszolatokban általában zöld színűek, ritkán barnásak (Valea Dobrei eredete, Surián és Párva közt 1860 m magasan Hunyadm., Dobrun Balandrul torok Szebenm.). A pleokroizmus többnyire erős, $c > b > a$. a = világossárga különböző árnyalatokban, b = sárgászöld, esetleg barnászöld (Piatra alba), c = zöld, néha kékes árnyalattal, $c : c = 15\frac{1}{2} - 22^\circ$. Az említett barna amfibol (Valea Dobrei eredete) pedig: a = sárga, b = sárgásbarna, c = barna; $c : c = cca 16^\circ$. $\gamma - a$ Babinet kompenzátorral Na fényben mérve: 0.020 (Salanele), 0.021 (Stina Gilei). Az amfibolok ritkán részben kloritosan átalakultak; e bomlási folyamattal karöltve helyenként epidot is képződött; innen ered, hogy az ily amfibolokban itt-ott az amfibolt többé kevésbé ily kloritos-epidotos bomlási termékek helyettesítik (Valea Dobrei eredete, Surián és

Párva közt). Zárványok az amfibolokban: plagioklász, titanit, magnetit, apatit, néha biotit, rutil, epidot és kvarcz (Juzba).

A *biotit* csak némely plagioklászamfibolitban fordul elő s csak alárendelten, ritkábban kissé nagyobb mennyiségben (Valea Marasdiei, Guraró mellett Szebenm.). Néha csak zárványként észlelhető a plagioklászokban. A pleokroizmus igen erős: $b \geq c > a$. Tengelyszög 0° körül.

Kvarcz néha szintén fellép xenoblasztokban; kioltása helyenként unduláló, a mi dinamikai hatások eredménye. Ritkán vékonyabb-vastagabb ereket alkot.

A *titanit* gyakran bőségesen (Salanele), máskor alárendelten lép fel. Egyénei halvány sárgás-szürke színűek, elliptikus, vagy szabálytalan alakúak; gyakran kisebb-nagyobb csomókban, vagy olvasószerűen csatlakoznak egymáshoz. Néha gyenge pleokroizmust mutatnak: $c \geq b > a$; c = szürkés-barnássárga, b = szürkéssárga, a = világos szürkéssárga. Itt-ott gömbölyded rutilszemeket zárnak magukba.

Az *apatit* szintelen, vékony prismás idioblasztokban fordul elő, ritkán még a terminális kontúrok is jól kivehetők. Néha nagyobb mennyiségben található zárványként az amfibolokban (Valea Dobrei eredete).

A *magnetit* apró, részben isometrikus, részben szabálytalan-karélyos szemekben mutatkozik. Gyakran nagyobb titántartalmú, mert néha erősebb leukoxénésedés észlelhető, helyenként titanomorfittal körülvett. *Pirit* apró szemekben itt-ott szintén fellép. Ritka elegyrész a *rutil* (Stina Gilei, Juzba, Pietra alba stb.) barnássárga, elliptikus, vagy szabálytalanul hajoltan megnyúlt szemekben.

A *zirkon* egyik-másik kőzetben szintén kimutatható párnai prismákban.

2. *Gránátamfibolitok*. A piros gránát mennyisége változó: néha igen alárendelt, máskor sok, ritkán a kőzet felénel is többet kitesz (Ferenczfalva, Krassószörénym.). E kőzetek vagy heteroblasztosak (Pareul Rescoalei, Ferenczfalva), vagy homeoblasztosak (Titianul teteje, Sebes völgye Teutól D-re). A heteroblasztosak gránátja porfiroblasztokat alkot a többi elegyrész között. A homeoblasztosak vagy granoblasztosak (Titianul),

vagy részben poikiloblasztosak. (D. Cioaca és Muncelul Birailor közt levő árokban 1190 m magasán.).

A *plagioklászok* xenoblasztok, iker-rovátkosak vagy anélküliek, általában oly összetételűek, mint a plagioklászamfibolitokban, anortittartalmuk $Ab_{46}An_{54}$ -ig emelkedik. Ritka a zónás felépítés és pedig invers módon. Az *amfibolok* zöldek, a fentebb említett zöld amfibolokhoz hasonlóak. A *gránátok* halványpirosak; néha egyenletesen szétoszolva lépnek fel, máskor pedig egy-egy helyen nagyobb mennyiségben koncentráálódtak, más helyen ugyanabban a kőzetben nagyon háttérbe szorulnak. Sok zárványt tartalmaznak (plagioklász, amfibol, titanit stb.), néha aránylag sok *rutilt* (Ferencfalva, Pareul Rescoalei). A gránát ritkán idioblasztos rombtizenkettősökben. Néha a gránátporfiroblasztokat körülvevő amfibolszálak *c* tengelyükkel közelítőleg merőleges elhelyezésűek a gránát felületére, a nélkül azonban, hogy teljesen típusos kelifit-struktúra volna kifejlődve (Pareul Rescoalei). Ritkán *kvarcz* (Pareul Rescoalei) és *albit* is fellép (Pareul Rescoalei). Az albit-tartalmúak alárendelten *zoizitot* is tartalmaznak.

A többi elegyrész olyan, mint a plagioklász-amfibolitokban.

3. *Zoizitamfibolitok*. Jellemző a *zoizit* nagyobb mennyiségben való fellépése; a plagioklász aránylag háttérbe szorul. A zoizit egyénei gyakran egyenlő orientációban kisebb, már makroszkoposan is szembetűnő, fehér foltokat alkotó csoportokban helyezkednek el. Máskor pedig egyenletesebben szétosztottak. E csoport a plagioklász- és gránátamfibolitokkal kevés zoizitot tartalmazó átmeneti kőzettípusokkal összekapcsolt (Valea Ditei, közel a Valea Diteinek a Tájába való torkolatához, Stina Gilei, D. Cioaca és Muncelul Birailor közt levő árokban, Pareul Rescoalei stb.). A zoizitok plagioklászokból keletkeztek s kiséretükben az *albit* is fellép.

Az ide tartozó kőzetek homeoblasztos, még pedig vagy granoblasztos (Valea Dobrei 1390 m), vagy poikiloblasztos strukturájúak.

Az *albit* víztiszta xenoblasztokban lép fel. Bázisosabb plagioklászokként iker-rovátkos, xenoblasztos kifejlődésű *bázisos oligoklászok* (Valea Dobrei), *oligoklászandezinek* (Valea Ditei középső

szakasza) jelentkeznek, az anortit-tartalom maximálisan 45% is lehet (Valea Ditei, közel a Tájába való torkolatához). A plagioklászok néha teljesen üdének látszanak, máskor azonban erősebben szericitesedtek.

E kőzetek karakterisztikuma a *zoizit*, mely néha a már makroszkoposan is feltűnő fehér foltokban fordul elő (Valea Dobrei 1390 m), máskor pedig egyenletesebben szétosztott. Egyénei néha meglehetősen idioblasztosak (Valea Dobrei 1390 m), máskor eléggé szabálytalanok s itt-ott foszlányos szélű szemecskékben mutatkozik (Valea Ditei közel a Tájába való torkolatához, Valea Ditei középső szakasz stb.). Néhol a zoizitprismácskák a rétegződéssel teljesen // elhelyezésűek (Valea Dobrei 1390 m). A zoizitok szintelenek, vastagabb metszetekben kissé sárgásak, optikailag pozitívok. Az (100) szerinti metszetekben általában indigókék interferencia színt mutatnak, $a=c$, $c>a$, $b>0$, ezek tehát a zoizitok (Valea Dobrei 1390 m, Valea Ditei középső szakasza stb.). A zoizitegyének nagysága általában 0.2 mm alatt marad, de néha ennek kétszeresére emelkedő hosszúságúak is akadnak (Valea Dobrei 1390 m).

A plagioklászok rovására képződött zoizit gyakran az albit s a bázisosabb plagioklász társaságában fordul elő nagyobb mennyiségben; közelében néha kevés *muszkovitlemezke* s ritkán *kuarcz* is észlelhető, melyek szintén szekundereknek tekintendők.

Az *amfibol* általában xenoblasztos, néhol azonban az {110} határozottan felismerhető. Hasonlók az előbbi csoportok amfiboljaihoz, csak pleokroizmusuk általában gyengébb és halványabb színű, pl. a —igen világos zöldessárga, b —világos zöldessárga, c —halványzöld, esetleg halvány szürkés-zöld (Valea Ditei középső. szakasza). $c:c=17^\circ-20^\circ$ körül. $\gamma-\alpha=0.019$ (Valea Dobrei 1390 m). Helyenként az amfibol szálasrostos (Valea Ditei, közel a Tájába való torkolatához).

Az említett muszkoviton kívül néha a *biotit* is fellép, de csak igen alárendelt mennyiségben (Valea Ditei).

A *rutil* aránylag elég gyakori kis elliptikus szemekben, néha térdalakú ikrekben is (Valea Ditei középső szakasza). Gyakran zárvány az amfibolokban. Pleokroizmus néha kivehető:

ϵ = barnássárga. ω = sárga (Valea Ditei, közel a Tájába való torkolatához).

Titanit, magnetit, apatit alárendelt mennyiségben lép fel.

4. *Epidotamfibolitok.* Az e csoportba tartozó, általában jól rétegzett amfibolitokra, miként az előző zoizitos csoportéira szintén jellemző a plagioklász észrevehető háttérbe szorulása, ott a zoizit, itt az epidot javára. Az epidotok igen apró szemcséjű réteges halmazai már makroszkoposan is igen élesen elválnak világos színükkel az amfibolban dúsabb rétegek sötét színétől. Az epidotokat is, hasonlóképen a zoizitokhoz, genetikailag általában szekundereknek kell tartanunk, mert az albit fellépése valószínűvé teszi itt is azt, hogy az albit mellett még jelenlevő bázisosabb plagioklász hasadt albittá és epidottá (a sebeshelyi hegységben levő Riu Mare völgyében, a magurai duzzasztónál). E kőzetek struktúrája homeoblasztos, még pedig a bőségesen jelentkező biotitok (001) lapjainak, valamint az amfibolok «c» tengelyének a rétegeességgel való || elrendeződése folytán lepidoblasztoszerű (Riu Mare völgye a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel), vagy pedig granoblasztos a diablasztos struktúrába való átmenettel (a sebeshelyi hegységben levő Riu Mare völgyében a magurai duzzasztónál).

Az igen apró, xenoblasztos *albitok* vizesítették, az albit-anortit molekulaarány $Ab_{94}An_6$ körül van (a sebeshelyi hegységben levő Riu Mare völgyében a magurai duzzasztónál).

Bázikusabb plagioklászoként xenoblasztos kifejlődésű, gyakran teljesen ikerrovátkolatlan *savanyú unlezin-féleségek* jelentkeznek $Ab_{88}An_{32}$ (a sebeshelyi hegységben levő Riu Mare völgyében, a magurai duzzasztónál) és $Ab_{85}An_{35}$ (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel) összetételekben.

Az *amfibolokról* az áll, a mit a plagioklászamfibolitok amfiboljairól már elmondottunk, azonban a c:c itt 26°-ra is felemelkedik (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel).

A szabálytalanul elrendeződő, szemcsés halmazokban jelentkező *epidotok* általában teljesen xenoblasztosak, néhol azonban kissé idioblasztosak. A {001} szerinti hasadás jól látszik és elég gyakori, ritkább és kevésbé jó az {100} szerinti. Szintelen-

halványsárgák, pleokroizmusuk általában gyenge: $c > b > a$, $a =$ igen halványsárga, $b =$ halványsárga, $c =$ sárga. $c : a = 3^\circ$, $a : c = 28^\circ$. Optikai karakter: egyszer negatív (magurai duzzasztó), máskor pozitív. Néha igen sok epidotót tartalmaz az amfibolit (Piatra Tomnatecului Tautól DDK-re az 1272 m kúpon).

Az epidotok e pizstacitfélesége mellett megjelenik a *klinozoizit* is (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel), néha aránylag nagyobb mennyiségben (Globucetul, a 2027 m ponttól D-re). A két epidotféleség közt gyakran igen nehéz éles határt vonni, mert izomorph átmenetekben jelentkeznek egymás mellett; sőt még a fellépő foltos interferencia-színnek alapján egy egyén különböző részein is a kémiai összetétel változása vehető fel.

A *biotit* is fellép az epidotos amfibolitokban, néha meg lehetős bőségesen (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel). Helyenként összenő az amfibollal. Általában xenoblasztos, ritkán idioblasztos. Néhol gyengén kloritosodik. Tengelyszöge kicsi, majdnem egy optikai tengelyű. $\rho > \nu$; optikai karaktere negatív. Pleokroizmusa jól kivehető: $a =$ világos szalmasárga, vagy igen halvány szürkésárga, $b = c =$ sötétbarna, szürkésbarna.

Az egyik epidotos amfibolitban igen alárendelten megjelenik a halvány rózsaszínű *gránát* is (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel). Ásványos összetétele alapján ezt az amfibolitot átmenetnek vehetjük a gránátamfibolitokhoz.

A helyenként bőségesebben jelentkező *titanit* gömbölyded, szürkésárga szemecskékben mutatkozik; gyakran tartalmaz rutil zárványt.

A *rutil* meglehetősen ritka, leginkább a titanit zárványaként fordul elő.

A néha meglehetősen idioblasztos *magnetit* itt-ott a szokottnál bőségesebben is jelentkezik, helyenként gyengén leukoxénesedik (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztótól D-re 300 m-rel), másutt pedig vashidroxidos barna szegélylyel körülvett (Riu Mare völgye, a magurai duzzasztónál).

Az *apatitok* s az apró *zirkonok* az ismert módon lépnek fel.

A Déli-Kárpátok amfibolitjairól eddig a következő kémiai adatok állanak rendelkezésünkre:

1. Plagioklászamfibolit, Salanele 1710 m magasságból:

	%	Mol %	Osann-Grubenmann-féle számok:
SiO_2	48·07	52·67	$S = 53·85$
TiO_2	1·43	1·18	$A = 3·42$
Al_2O_3	19·00	12·25	$C = 8·83$
Fe_2O_3	2·94	11·22	$F = 21·65$
FeO	9·64		$M = 3·56$
MnO	0·13	0·12	$T = 0·00$
CaO	10·55	12·39	$K = 0·90$
MgO	4·11	6·75	
K_2O	0·36	0·25	
Na_2O	2·99	3·17	
P_2O_5	0·89		
Izz. veszt.	0·51		
Összesen: 100·62			

Elemző: EMSZT KÁLMÁN.

2. Gránátamfibolit, D. Cioaca és Muncelul Birailor közt DNy. felé a Tájába vivő árokban 1190 m magasan; igen kevés zoizitot is tartalmaz:

	%	Mol %	Osann-Grubenmann-féle számok:
SiO_2	46·32	50·37	$S = 51·13$
TiO_2	0·93	0·76	$A = 3·93$
Al_2O_3	21·89	14·07	$C = 10·14$
Fe_2O_3	2·76	5·61	$F = 20·73$
FeO	3·78		$M = 2·20$
CaO	10·59	12·34	$T = 0·00$
MgO	7·92	12·92	$K = 0·79$
K_2O	1·19	0·82	
Na_2O	2·96	3·11	
H_2O (110°C)	0·11		
Izz. veszt.	2·30		
Összesen: 100·75			

Elemző: SZINYEI-MERSE ZSIGMOND.

3. Gránátamfibolit, Ferenczfalva, igen sok gránáttal:

	%	Mol %	Osann-Grubenmann-féle számok:
SiO_2	43·61	51·06	$S = 52·43$
TiO_2	1·56	1·37	$A = 1·58$
Al_2O_3	18·95	13·05	$C = 11·75$
Fe_2O_3	3·50	13·03	$F = 21·47$
FeO	10·21		$M = 2·97$
MnO	0·23	0·22	$T = 0·00$
CaO	11·73	14·72	$K = 0·99$
MgO	2·99	5·25	
K_2O	0·55	0·41	
Na_2O	1·18	1·17	
P_2O_5	0·26		
H_2O (110°C)	1·74		
Izz. veszt.	3·36		
Összesen:	99·87		

Elemző: VENDL ALADÁR.

4. Plagioklászamfibolit Valea Ditei, közel a Valea Diteinek a Tájába való torkolatához. Kevés zoizitot is tartalmaz:

	%	Mol %	Osann-Grubenmann-féle számok:
SiO_2	50·31	54·92	$S = 55·78$
TiO_2	1·05	0·86	$A = 5·21$
Al_2O_3	14·49	9·31	$C = 4·10$
Fe_2O_3	3·83	11·62	$F = 25·60$
FeO	9·33		$M = 4·94$
MnO	nyom		$T = 0·00$
CaO	7·73	9·04	$K = 0·86$
MgO	5·52	9·04	
K_2O	1·58	1·10	
Na_2O	3·89	4·11	
H_2O (110°C)	0·05		
Izz. veszt.	1·87		
Összesen:	99·65		

Elemző: SZINYEI-MERSE ZSIGMOND.

5. Gránátamfibolit, Pareul Rescoalei, igen kevés zoizittal.

	%	Mol %	Osann-Grubenmann- féle számok :
SiO_2	47.65	50.64	$S = 51.15$
TiO_2	0.63	0.51	$A = 2.69$
Al_2O_3	19.33	12.09	$C = 9.40$
Fe_2O_3	1.57	9.83	$F = 24.66$
FeO	9.63		$M = 2.76$
MnO	0.12	0.10	$T = 0.00$
CaO	10.67	12.16	$K = 0.85$
MgO	7.55	11.98	
K_2O	0.22	0.14	
Na_2O	2.47	2.55	
P_2O_5	0.42		
Izz. veszt.	0.68		
Összesen : 100.94			

Elemző: EMSZT KÁLMÁN.

6. Plagioklászamfibolit, Stina Gileitől D-re az 1274 m kúp-
nál. Már elég zoizitot is tartalmaz, úgy hogy közepes helyet
foglal el a plagioklászamfibolitok és zoizitamfibolitok között:

	%	Mol %	Osann-Grubenmann- féle számok :
SiO_2	51.01	52.68	$S = 53.75$
TiO_2	1.38	1.07	$A = 2.44$
Al_2O_3	15.39	9.35	$C = 6.91$
Fe_2O_3	0.98	9.34	$F = 27.55$
FeO	9.97		$M = 5.51$
CaO	11.23	12.42	$T = 0.00$
MgO	8.20	12.70	$K = 0.95$
K_2O	0.90	0.59	
Na_2O	1.85	1.85	
H_2O (110°C)	0.04		
Izz. veszt.	0.70		
Összesen : 101.65			

Elemző: SZINYEI-MERSE ZSIGMOND.

7. Zoizitamfibolit, Valea Dobrei:

	%	Mol %	Osann-Grubenmann-féle számok:
SiO_2	45.40	48.14	$S = 48.75$
TiO_2	0.75	0.61	$A = 2.38$
Al_2O_3	15.57	9.72	$C = 7.34$
Fe_2O_3	1.90	9.00	$F = 31.81$
FeO	8.41		
MnO	0.22	0.18	$M = 6.53$
CaO	12.21	13.87	$T = 0.00$
MgO	10.14	16.10	$K = 0.80$
K_2O	0.68	0.46	
Na_2O	1.87	1.92	
P_2O_5	1.01		
Izz. vesz.	1.38		
Összesen: 99.54			

Elemző: EMSZT KÁLMÁN.

8. Zoizitamfibolit, Valea Ditei középső szakaszából.

	%	Mol %	Osann-Grubenmann-féle számok:
SiO_2	50.30	51.04	$S = 51.21$
TiO_2	0.22	0.17	$A = 1.43$
Al_2O_3	14.02	8.37	$C = 6.94$
Fe_2O_3	1.18	8.83	$F = 32.05$
FeO	9.32		
MnO	0.21	0.19	$M = 6.93$
CaO	12.75	13.87	$T = 0.00$
MgO	10.62	16.10	$K = 0.80$
K_2O	0.41	0.26	
Na_2O	1.18	1.17	
P_2O_5	0.34		
Izz. vesz.	0.15		
Összesen: 100.70			

Elemző: EMSZT KÁLMÁN.

Miként az elemzésekből számított OSANN-GRUBENMANN-féle számok mutatják, ezek az amfibolitok típusos képviselői a GRUBENMANN-féle rendszer IV. csoportjának. Nyilvánvalóan ki-

tűnik ez, ha a közölt számokat összehasonlítjuk GRUBENMANN IV. csoportjának csoport-középértékeivel. GRUBENMANN szerint e csoport jellemző középértékei: $S=53$, $A=3.9$, $C=5.8$, $F=29.9$, $M=6.9$, $T=0$, $K=0.8$.

A zoizitamfibolitokat jellemző OSANN-GRUBENMANN-féle számok közül feltűnő F és M magas értéke. Egyikünk már régebben felhívta erre a figyelmet nemcsak a Déli-Kárpátok néhány amfibolitjának kémiai összetétele alapján, hanem még a föld különböző pontjairól származó jól definiált 53 amfibolit megbízható elemzési adataira támaszkodva is.¹ Nevezetesen: a zoizit- és epidotamfibolitok bázicitása általában nagyobbnak látszik, mint a zoizitot vagy epidotot nem tartalmazóké. Az utóbbiak azonban alkáliákban általában kissé gazdagabbak, mint az előzők. A zoizit- és epidotamfibolitoknak legjellemzőbb ismertető jele azonban a többi amfibollal szemben a kétvegyértékű fémek oxidjainak, igen gyakran a MgO -nak magasabb molekulapercentjében van; ennek folytán F értéke mindig nagyobb ezekben, mint a zoizitot vagy epidotot nem tartalmazókban. A zoizit- és epidotamfibolitok rendszeresen valamivel kevesebb Al_2O_3 -at tartalmaznak, mint a többiek; ennek következtében az M is meglehetősen nagy szám lesz a zoizit-epidot-amfibolitok esetében. A kevés zoizitot, illetőleg kevés epidotot tartalmazó amfibolitok közepes helyet foglalnak el egyrészt az epidotot és zoizitot nem tartalmazó, másrészt az epidot-zoizit-amfibolitok között.

Az említett tanulmány a különböző amfibolitokra a következő középértékeket találta:

I. Amfibolitok	zoizit } epidot }	nélkül	II. Zoizit- } Epidot- }	amfibolitok
$S=54.48$	(44.08—64.44)		$S=50.94$	(48.08—55.42)
$A=4.19$	(1.59—9.75)		$A=3.30$	(0.75—5.42)
$C=6.54$	(1.44—11.29)		$C=5.63$	(3.02—9.03)
$F=24.01$	(8.47—28.73)		$F=31.24$	(29.22—34.70)
$M=3.94$	(0.52—7.41)		$M=6.41$	(3.02—10.53)
$T=0.00$			$T=0.00$	
$K=0.89$	(0.79—1.06)		$K=0.82$	(0.65—0.96)

¹ VENDL ALADÁR: Adatok az amfibolitok osztályozásához. Math. és Termatt. Értesítő, XXXVIII. köfete 199. lap, 1921 V. ö. a megelőző értekezést.

A Déli-Kárpátok amfibolitjairól közölt elemzések, illetőleg az azokból számított értékek is ugyanezt a különbséget mutatják:

	S	A	C	F	M	T	K
Zoizit nélkül (igen kevés zoizittal is).							
1.	53·85	3·42	8·83	21·65	3·56	0·00	0·90
2.	51·13	3·93	10·14	20·73	2·20	0·00	0·79
3.	52·43	1·58	11·75	21·47	2·97	0·00	0·99
Kevés zoizittal.							
4.	55·78	5·21	4·10	25·60	4·94	0·00	0·86
5.	51·15	2·69	9·40	24·66	2·76	0·00	0·85
6.	53·75	2·44	6·91	27·55	5·51	0·00	0·95
Zoizit-amfibolitok.							
7.	48·75	2·38	7·34	31·81	6·53	0·00	0·80
8.	51·21	1·43	6·94	32·05	6·93	0·00	0·80

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 december hó 6.-án tartott üléséből.)

ADATOK A PLAGIOKLÁSZOK MEGHATÁROZÁSÁHOZ.

VENDL. ALADÁR- és VENDL. MIKLOS-tól.

A plagioklászok vékonycsiszolatokban való meghatározásának egyik közismert módja a γ -ra merőleges metszetek felhasználása. E metszetek megismerése, a mint ez ismeretes, aránylag könnyű. E kétségenkívül nagy előny mellett e metszeteknek több hátrányuk is van. Így először az, hogy e metszetek a plagioklászok albit-molekulában dús első harmadában közel esnek a (010) laphoz s ezért az albit-ikersík nyoma elmosódott lesz, az ezzel egybeeső {010} szerinti hasadás pedig igen tökéletlenül látszik. Éppen ezek miatt az ilyen plagioklász-metszeteken a szokásos $\alpha'M$ kioltás helyett az $\alpha'P$ -t szokták mérni. Néha megtörténik az is, különösen kisebb egyéneken, hogy a P szerinti hasadás nem ismerhető fel jól, így a kioltás értéke ismeretlen marad. Ha pedig az $\alpha'P$ jól mérhető is, ez az érték a plagioklászok ez első harmadában még mindig nem elegendő a földpát meghatározására, mert a kioltás előjelének ismerete elkerülhetetlen (albit: $\alpha'P = +20^\circ$, bázikus andezin: $\alpha'P = -20^\circ$ stb.), a minek megállapítása pedig gyakran igen nehéz, vagy egyáltalán lehetetlen.

Kiküszöbölhető azonban ez az előjel-kérdés, sőt nem kell mérni sem az $\alpha'M$ -et, sem pedig az $\alpha'P$ -t akkor, ha a kőzet plagioklászja karlsbadi-ikrekben jelenik meg. Ilyenkor a γ -ra merőleges metszetek igen jól felhasználhatók a plagioklászok meghatározására, miként ezt az alábbiakban ismertetni fogjuk. Ha a plagioklász karlsbadi-ikrek még albit-lemezések is, a meghatározás még érzékenyebb. Vegyük ez utóbbi általánosabb esetet s

legyen a négyféle optikai orientációjú lemez (lemezrendszer) közül az egyik merőleges γ -ra. Az egyes ikerhelyzetben levő lemezek jelölésére használjuk az általánosan elfogadott MICHEL LÉVY-féle jelölési módot. A γ -ra merőleges lemezt (lemezrendszert) tehát 1-gyel jelöljük, a vele albit-ikerhelyzetben levőt 1'-gyel, az 1-gyel karlsbadi-ikerhelyzetben levőt 2-vel, az 1'-gyel karlsbadi-ikerhelyzetben levőt pedig, a mely természetesen 2-vel szemben albit-ikerhelyzetű lesz, 2'-vel. Továbbá legyen:

a_1	az	a'	helyzete	1	-ben
a_3	"	a'	"	1'	-ben
a_2	"	a'	"	2	-ben
a_4	"	a'	"	2'	-ben.

Az a' -k helyzetei a gipszlemcczel gyorsan és könnyen megállapíthatók. Ennek megállapításával kapcsolatban pedig lemérjük már az a_1a_2 -et s az a_3a_4 -et is, tehát a két-két egymáshoz karlsbadi állásban levő lemez (lemezrendszer) a' -inek a szögét. E szögek nagysága az egyes plagioklász-típusoknál más és más s jellemző értékű. E két szög közül az a_1a_2 szögét μ_1 -gyel, az a_3a_4 szögét pedig μ_2 -vel jelöljük meg. E szögek nagyságát az egyes plagioklász-típusokra megállapítottuk. Szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy az összes számításokat grafikusán végeztük, mivel tudvalevő, hogy a közetcsiszolatokban történő összes plagioklász-meghatározások nem vihetők keresztül exakt pontossággal, így a grafikus számításnál számbaveendő 1° nagyságú maximális hibaforrás alig jöhet tekintetbe. A számítások alapjául H. ROSENBUSCH és E. A. WÜLFING közismert nagy közet-tani munkájában közölt földpáttípusok szolgáltak,¹ melyek optikai viszonyairól ugyanott stereografikus projectióban diagrammokat is közölnek.² Az ő andezinjük helyébe azonban — a melyik nem megfigyelt adatok alapján készült típus, hanem csak egy Szent-Pál-szigeti labradorit s egy twedestrandi oligoklász közé interpolációval számított — BECKENEK egy sokkal meg-

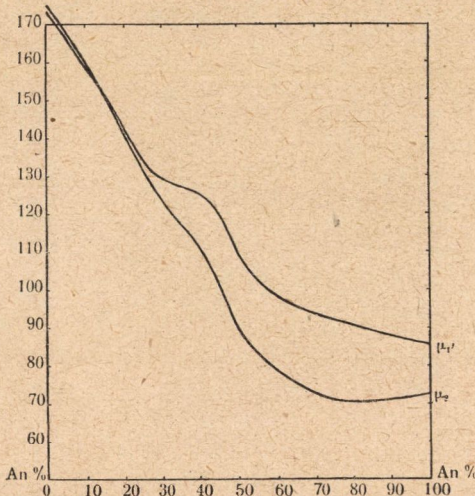
¹ H. ROSENBUSCH und E. A. WÜLFING: Mikroskopische Physiographie der petrographisch wichtigen Mineralien. I. kötet, 2. rész. p. 340—343.

² L. c. XIV—XX. tábla.

bízhatóbbnak látszó andezin-típusát tettük,¹ a mely andezinnek optikai viszonyait mérésekkel állapította meg. BECKE többi plagioklász-típusa és a ROSENBUSCH-WÜLFING-típusok között az andezinen kívül számbavehető nagyobb eltérés nincsen, sőt több közülök teljesen meg is egyezik. Ezek előrebocsátása után a típusok a következők lesznek :

	φ	A	λ	φ	B	λ
Albit, Amelia Co. Va. $Ab_{95}An_5$	$-49^{\circ}5'$		$+64^{\circ}75'$	$-47^{\circ}9'$		$-78^{\circ}8'$
Oligoklászalbit, Bamle. $Ab_{86}An_{14}$	$-44^{\circ}58'$		$+67^{\circ}58'$	$+47^{\circ}9'$		$+83^{\circ}53'$
Oligoklász, Twedstrand $Ab_{75}An_{25}$	$-39^{\circ}48'$		$+70^{\circ}50'$	$+40^{\circ}56'$		$+59^{\circ}23'$
Andezin, N.-Sebes (Vlegyásza) $Ab_{63}An_{37}$	-43°		$+80^{\circ}$	$+38^{\circ}5'$		$+36^{\circ}5'$
Labradorit, Pálsziget $Ab_{50}An_{50}$	-56°		$+76^{\circ}$	$+35^{\circ}$		$+15^{\circ}$
Bytownit, Nārōdal $Ab_{25}An_{75}$	-56°		$+64^{\circ}$	$+12^{\circ}7'$		$+1^{\circ}8'$
Anortit, Vesuv Ab_0An_{100}	$-63^{\circ}5'$		$+57^{\circ}8'$	-2°		$-6^{\circ}1'$

E típusokra kiszámított μ_1 és μ_2 értékekből szerkesztettük meg az I. táblán közölt grafikont, a melynek ordinátája e szögek nagyságára vonatkozik (fokokban), abszcisszája pedig az An-tartalmat jelzi molekulaszázalékban. A



I. tábla.

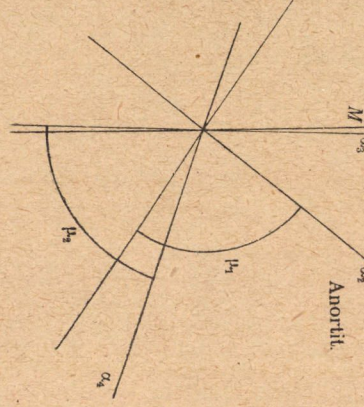
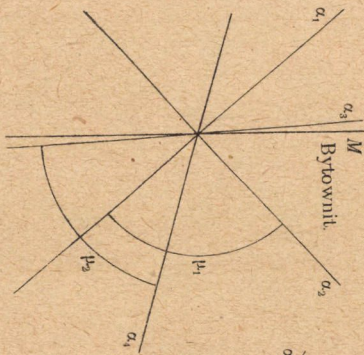
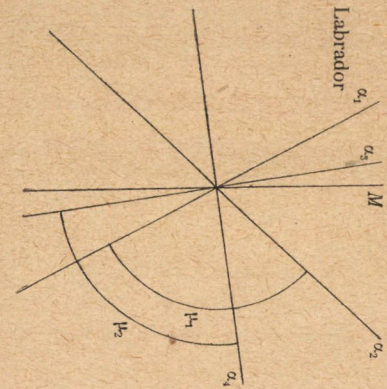
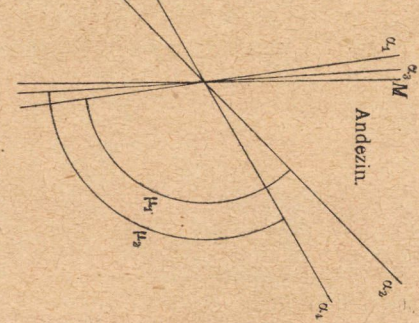
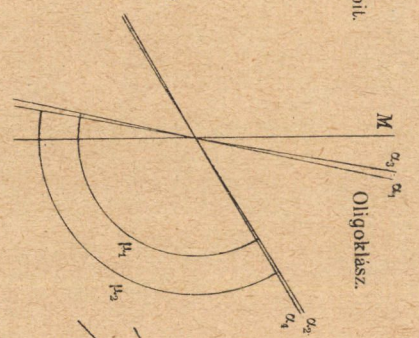
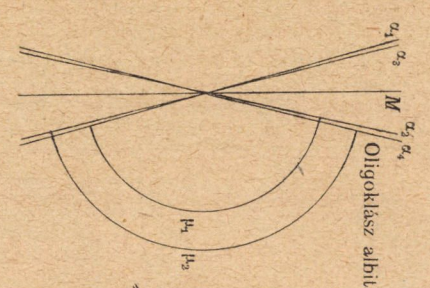
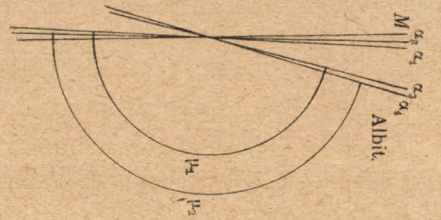
fent felsorolt típusokból alkotott karlsbadi- és albitikrekre vonatkozóan még több adatot is kiszámítottunk, melyek a meghatározásnál helyenként szintén hasznosak lehetnek (bár ismeretük az e módszer szerinti meghatározáshoz nem szükséges), így az $a'M$ -et, az $a'P$ -t s a PM szöveget az egyes lemezekben

¹ F. BECKE: Zur Physiographie der Gemengteile der krystallinen Schiefer. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. LXXV. kötet, I. félkötet, p. 144. 1906.

(lemezrendszerekben), a melyek értékét, valamint μ_1 és μ_2 értékeit a következőkben közöljük (megjegyzendő, hogy az előjelek MAX SCHUSTER értelmében használtak: + óramutató járásával megegyező, — óramutató járásával ellenkező).

Lemez-rendszer	Albit			Oligoklászalbit			Oligoklász			
	$\alpha' M$	$\alpha' P$	PM	$\alpha' M$	$\alpha' P$	MP	$\alpha' M$	$\alpha' P$	PM	
1	+3°	+20°	17°	-13 $\frac{3}{4}$ °	+12 $\frac{1}{2}$ °	26 $\frac{1}{4}$ °	+11 $\frac{1}{2}$ °	+3°	8 $\frac{3}{4}$ °	
1'	+2 $\frac{1}{4}$ °	+20 $\frac{1}{2}$ °	18 $\frac{1}{4}$ °	-13 $\frac{1}{4}$ °	+14 $\frac{1}{4}$ °	27 $\frac{1}{2}$ °	+10 $\frac{1}{4}$ °	+2 $\frac{1}{2}$ °	7 $\frac{3}{4}$ °	
2	+15°	-24°	39°	+13 $\frac{1}{4}$ °	-14 $\frac{1}{4}$ °	27 $\frac{1}{2}$ °	+58 $\frac{1}{2}$ °	-3 $\frac{3}{4}$ °	61 $\frac{3}{4}$ °	
2'	+15 $\frac{1}{2}$ °	-22 $\frac{1}{2}$ °	38°	+13 $\frac{3}{4}$ °	-12 $\frac{1}{2}$ °	26 $\frac{1}{4}$ °	+59°	-5°	64°	
Lemez-rendszer	Andezin			Labradorit			Bytownit			
	$\alpha' M$	$\alpha' P$	PM	$\alpha' M$	$\alpha' P$	PM	$\alpha' M$	$\alpha' P$	PM	
1	-7°	-6 $\frac{1}{2}$ °	$\frac{1}{2}$ °	-27°	-26°	1°	-40 $\frac{1}{2}$ °	-50 $\frac{3}{4}$ °	10 $\frac{1}{4}$ °	
1'	-3 $\frac{1}{2}$ °	-2°	1°	-8°	-10°	1 $\frac{3}{4}$ °	-3 $\frac{1}{2}$ °	-14°	10 $\frac{1}{2}$ °	
2	+46 $\frac{1}{2}$ °	-7 $\frac{1}{2}$ °	54°	+44°	-6 $\frac{1}{4}$ °	54°	+47 $\frac{1}{2}$ °	-16 $\frac{1}{2}$ °	64°	
2'	+60 $\frac{3}{4}$ °	+4°	50 $\frac{1}{2}$ °	+82 $\frac{1}{2}$ °	+26°	56 $\frac{1}{2}$ °	-74° (+106°)	+36 $\frac{1}{2}$ °	69 $\frac{1}{2}$ °	
Lemez-rendszer	Anortit									
	$\alpha' M$	$\alpha' P$	$P' M$							
1	-55°	-67 $\frac{1}{2}$ °	12 $\frac{1}{2}$ °							
1'	+2°	-9°	11°							
2	+39 $\frac{1}{2}$ °	-25 $\frac{1}{2}$ °	65°							
2'	-70 $\frac{3}{4}$ ° (+109 $\frac{1}{4}$ °)	+39 $\frac{1}{2}$ °	69 $\frac{1}{2}$ °							
	Albit	Oligoklász-albit	Oligoklász	Andezin	Labradorit	Bytownit	Anortit			
μ_1	168°	153°	133°	126 $\frac{1}{2}$ °	109°	92°	85 $\frac{1}{2}$ °			
μ_2	166 $\frac{3}{4}$ °	153°	131 $\frac{1}{4}$ °	115 $\frac{3}{4}$ °	89 $\frac{1}{2}$ °	70 $\frac{1}{2}$ °	72 $\frac{3}{4}$ °			

A fentebbi típusok karlsbadi-albit-ikreire a II. táblán közöljük az α' -k (tehát: α_1 , α_2 , α_3 , α_4) helyzetét az egyes lemezekben (lemezrendszerekben), összesen tehát 7 szkémát. E szkémákon fel-tüntetjük az M helyzetét is (bár ennek ismeretére okvetlen



II. tábla.

szükség nincsen). E vázlatok jó szolgálatot tehetnek μ_1 és μ_2 gyors és biztos megállapításánál. Meg kell azonban említenünk azt, hogy e szkémák γ -nak a (010) körüli kilépésére vonatkoznak, valamint az összes közölt adatok szintén. Ha a γ -nak (010) körüli kilépése esik a szemünkbe, azaz mintegy a lemez egyszerűen meg van fordítva, a szkémák *szimmetrikusan* megváltoznak, a közölt előjelek szintén, a μ_1 és μ_2 azonban természetesen változatlan marad. E szkémák segítségével tehát a lemez orientációjának ismerete a legteljesebb pontossággal megállapítható.

A μ_1 és μ_2 értékeket MICHEL LÉVY földpátipusai közül az $Ab_{80}An_{20}$ típuson kívül a többi hatra szintén kiszámítottuk,¹ valamint a PM , az $a'M$ és az $a'P$ szögértékeket is. Ez értékeket az alábbiakban közöljük:

Lemez-rendszer	Albit Ab			Oligoklász $Ab_3 An_1$			Andezin $Ab_5 An_3$		
	$\alpha'M$	$\alpha'P$	PM	$\alpha'M$	$\alpha'P$	PM	$\alpha'M$	$\alpha'P$	PM
1	$-2\frac{1}{2}^\circ$	$+19\frac{3}{4}^\circ$	$22\frac{1}{4}^\circ$	$+2^\circ$	$+1^\circ$	1°	-8°	$-7\frac{1}{2}^\circ$	$\frac{1}{2}^\circ$
1'	-1°	$+22\frac{1}{2}^\circ$	$23\frac{1}{2}^\circ$	$+2^\circ$	$+\frac{1}{2}^\circ$	$1\frac{1}{2}^\circ$	$-3\frac{1}{2}^\circ$	-4°	$\frac{1}{2}^\circ$
2	$+7^\circ$	$-24\frac{3}{4}^\circ$	$31\frac{1}{2}^\circ$	$+51\frac{1}{4}^\circ$	$-2\frac{3}{4}^\circ$	54°	$+52\frac{1}{2}^\circ$	0°	$52\frac{1}{2}^\circ$
2'	$+10^\circ$	$-21\frac{1}{4}^\circ$	$31\frac{3}{4}^\circ$	$+53\frac{1}{2}^\circ$	$-10\frac{1}{4}^\circ$	$63\frac{3}{4}^\circ$	$+59\frac{1}{2}^\circ$	$+7\frac{1}{4}^\circ$	$52\frac{1}{2}^\circ$
Lemez-rendszer	Labradorit $Ab_1 An_1$			Labradorit $Ab_3 An_4$			Anortit An		
	$\alpha'M$	$\alpha'P$	PM	$\alpha'M$	$\alpha'P$	PM	$\alpha'M$	$\alpha'P$	PM
1	$-19\frac{3}{4}^\circ$	$-19\frac{3}{4}^\circ$	0°	$-31\frac{1}{2}^\circ$	-31°	$\frac{1}{2}^\circ$	-48°	$-65\frac{1}{2}^\circ$	$17\frac{1}{2}^\circ$
1'	-6°	-6°	0°	$-3\frac{1}{2}^\circ$	$-2\frac{3}{4}^\circ$	$\frac{3}{4}^\circ$	$+1\frac{1}{4}^\circ$	$-13\frac{1}{4}^\circ$	$14\frac{1}{2}^\circ$
2	$+45^\circ$	-9°	54°	$+40^\circ$	-17°	57°	$+45^\circ$	-22°	67°
2'	$+77\frac{1}{2}^\circ$	$+22^\circ$	$55\frac{1}{2}^\circ$	$+87\frac{1}{2}^\circ$	$+27^\circ$	$60\frac{1}{2}^\circ$	$-69\frac{1}{4}^\circ$ ($+110\frac{3}{4}^\circ$)	$+37^\circ$	$73\frac{1}{2}^\circ$
	Albit	Oligoklász	Andezin	Labradorit $Ab_1 An_1$	Labradorit $Ab_3 An_4$	Anortit			
μ_1	$170\frac{1}{2}^\circ$	$130\frac{3}{4}^\circ$	$119\frac{1}{2}^\circ$	$115\frac{1}{4}^\circ$	$108\frac{1}{2}^\circ$	87°			
μ_2	169°	$128\frac{1}{2}^\circ$	114°	$96\frac{1}{2}^\circ$	89°	$70\frac{1}{2}^\circ$			

¹ A. MICHEL LÉVY: Étude sur la détermination des feldspaths dans les plaques minces au point de vue de la classification des roches. I-er fascicule, I, III—VII. diagramm.

Ez utóbbi értékekből μ_1 és μ_2 -re megszerkesztett grafikon az I. táblán közölt grafikonnal általában közel egyező lefutású.

E helyen megemlíthetjük azt is, hogy a számított PM szögek értékei nem egyeztek meg mindenütt azokkal az értékekkel, melyeket MICHEL LÉVYnek erre vonatkozó diagrammja¹ feltüntet, akár a ROSENBUSCH-WÜLFING és BECKE-földpáttípusok, akár pedig MICHEL LÉVY típusai alapján számítottunk. Így az említett diagramm $+\lambda$ és $+\varphi$ bezárta negyedének számításba került helyein. Az eltérés helyenként $10-15^\circ$ -ra is rúgott.

Az elmondottakat összefoglalva, az e módszer szerinti plagioklász-meghatározás a következő:

1. A karlsbadi-albit-ikrek közül kikeresünk γ -ra merőleges metszetet.

2. Megállapítjuk az α' -k (tehát a szkémákban: $a_1 a_2 a_3 a_4$) helyzetét az egyes lemezekben (lemezrendszerekben) s összehasonlítjuk a II. táblán közölt szkémákkal; így már orientálódtunk.

3. MÉRJÜK egyrészt μ_1 -et, másrészt μ_2 -t.

4. Végezetül megkeressük az I. táblán μ_1 és μ_2 helyét a görbékben s az ezeknek megfelelő An %-ot leolvassuk. Ha a görbéknek e két pontja nem esik pontosan egymás fölé — a minnek oka az lehet, hogy a metszet nem pontosan merőleges γ -ra —, akkor a két pontnak megfelelő An % középértékét vesszük.

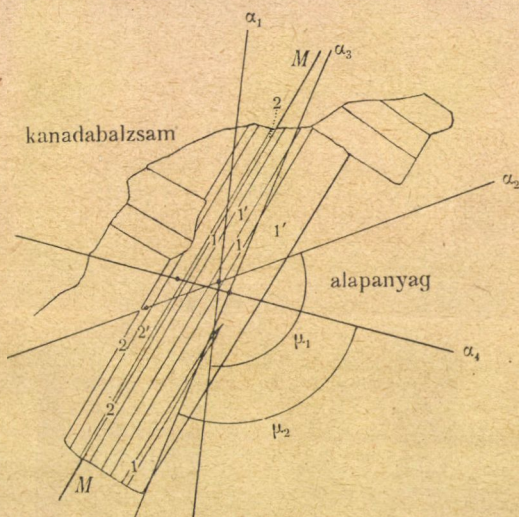
Az I. táblára való egyszerű rátekintéssel láthatjuk azt is, hogy az albit-ikertörvény elmaradása esetén is jól használható e módszer, mert ez esetben csak egy szöget mérünk, μ_1 -et s így csak a felső görbe jó tekintetbe.

Végezetül szükségesnek tartottuk, hogy konkrét mért esetekkel igazoljuk e görbék használhatóságát.

MAURITZ BÉLA professzor egyik gyűjtéséből származó alacsonyátrai labradorporfiritszerű kőzetek (melyek feldolgozásával jelenleg egyikünk foglalkozik) nagy porfiros plagioklászain a karlsbadi- s az albit-iker együttes megjelenése igen gyakori eset. Az Alsó-Sunyava közelében levő Cserna-hegy kőzetéből készült egyik csiszolatban a porfiros plagioklászok között találtunk olyan karlsbadi-albit-ikret is, melynek egyik lemeze (lemezrendszere) γ -ra

¹ L. c. VIII. diagramm.

merőlegesnek bizonyult, tehát a közölt módszer kipróbálására alkalmasnak látszott. A III. tábla adja e plagioklásznak vázlatos rajzát; az egyes lemezek MICHEL LÉVY módja szerint jelöltek, az a' -k (tehát: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$) szintén belerajzoltak. A könnyebb szemléltetés szempontjából ez irányokon ponttal jelöltük meg azt a lemezt, a melyre az illető a' vonatkozik. A mért μ_1 és μ_2 szögek szintén megjelöltek. Az ezekre vonatkozó mérés a következő: $\mu_1=119^\circ$, $\mu_2=100\frac{1}{2}^\circ$. Ha a közölt vázlatot összehasonlítjuk a II. táblán közölt skémákkal, akkor az Ab_1An_1 összetételű



III. tábla.

labradorittal való közeli megegyezés rögtön szembetűnik. Ha pedig az I. táblán megkeressük a μ_1 és μ_2 szögeknek megfelelő értékeket, akkor azt találjuk, hogy ezek egymás fölé esnek s a megfelelő összetétel $Ab_{5.4}An_{4.6}$ lesz. Mivel a μ_1 és μ_2 szögeknek megfelelő pontok egymás fölé esnek, következik, hogy az 1 jelzésű lemez (lemezrendszer) γ -ra pontosan merőleges, a mit egyébként a teljesen centrikus tengelykép is igazol. Hogy tényleg helyes a plagioklászra az e módszer szerint megállapított összetétel, azt a következő, részben ugyanezen a plagioklászon, részben pedig az ugyane csiszolatban levő összes többi porfirosan

kivált plagioklászon végzett más irányú mérésekkel igazoljuk. Legelső sorban is a például választott plagioklász, a mint azt az említett ábra világosan fel is tünteti, a kanadabalzssammal érintkezik, a melynél jóval fénytörőbb. Mérti lehetett még — bár az albitlemezek már kissé elmosódottak — az $a'M$ -et is az egyes lemezekben; így nyertük:

$$a_1M = -23^\circ, \quad a_3M = -8_2^\circ, \quad a_2M = +38^\circ, \quad a_4M = +71^\circ.$$

E konjugált kioltások $Ab_{50}An_{50}$ körüli plagioklászra mutatnak. A γ -ra merőleges lemezben (1-ben) mért -23° -os kioltás körülbelül $Ab_{53}An_{47}$ -nek felel meg (a különbség ez adat és a mi adatunk között tehát számba sem vehetően csekély!), így ez adat is megerősíti a mi megállapításunkat. Egy esetben sikerült továbbá konjugált szimmetrikus kioltást is mérnünk: $1=1'=31^\circ$, $2=12^\circ$ értékekben, mely kioltások szintén $Ab_{50}An_{50}$ körüli összetételt jeleznek. A szimmetrikus zónában mért maximális $\pm 31^\circ$ -os kioltás $Ab_{46}An_{54}$ összetételt jelez körülbelül, tehát szintén a labrador-sorra utal. Az egyik tengelyre közel merőleges metszeten a $+$ karaktert meg lehetett állapítani. Egy másik karlsbadi-albit-ikres plagioklászon, melynek egyik lemezrendszere már meglehetősen ferde γ kilépést mutatott, a következő konjugált kioltásokat mértük:

$$1 = -27^\circ, \quad 1' = -14^\circ, \quad 2 = +27^\circ, \quad 2' = +83^\circ.$$

E kioltások szintén $Ab_{50}An_{50}$ -re utalnak. Továbbá $\mu_1=126^\circ$, $\mu_2=83^\circ$. Ha az ezeknek megfelelő pontot megkeressük az I. tábla görbéin, akkor azt találjuk, hogy e két pont nem esik egymás fölé, lévén az 1 nem egészen merőleges γ -ra. Ha leolvassuk az abszcisszán e két pontnak megfelelő An %-ot, akkor 39 %-ot, illetőleg 55 %-ot kapunk. A középérték 47 % lesz, így a földpát összetételét $Ab_{53}An_{47}$ -nek vehetjük. Végezetül felhasználtuk még VIOLA C. valószínűségi módszerét is a plagioklászok meghatározására. A mért 26 kioltás alapján $Ab_{52}An_{48}$ és $Ab_{48}An_{52}$ összetételű plagioklászok kalkulálhatók ki. A mint ez utóbbiakból is kitűnik, a kőzet plagioklásza a labradorit-sorba tartozik s így a közölt metódus szerinti meghatározás helyessége bebizonyított.

Ugyancsak Alsó-Sunyava közeléből, de más helyről, a lopusnai völgy kőzetéből származó csiszolatok egyikében az egyik karlsbadi-albit-iker egyik lemeze (lemezrendszere) γ -ra közel merőlegesnek bizonyult. A mért szögek a következők:

$$\mu_1 = 124^\circ, \mu_2 = 102^\circ.$$

Az ezeknek megfelelő értékekből származó középérték körülbelül $Ab_{56}An_{44}$. A plagioklász tehát savanyú labrador. E plagioklászton ellenőrzésképpen mértük még az $a'M$ szögeket is az egyes lemezekben (lemezrendszerekben). Ezek a következők:

$$1 = +23^\circ, 1' = +7^\circ, 2 = -33^\circ, 2' = -71^\circ.$$

A γ -ra merőleges lemezen mért $+23^\circ$ kioltás $Ab_{53}An_{47}$ -nek felel meg körülbelül. A $\mu_1\mu_2$ értékekből s ez utóbbiból történő megállapítás közti csekély különbség (3An %) onnét származik, hogy 1 nem pontosan merőleges γ -ra, a mit a tengelykép világosan meg is mutat. A konjugált kioltások szintén a savanyú labradorokra utalnak. A földpát a balzsamnál fénytörőbb, a 2' közel tengelykilépést ad, a melyen a + optikai karakter eldönthető. Ha még hozzávesszük mindezekhez az 1-en megállapítható kis tengelyszöget is, akkor a savanyú labradornak való minősítést helyesnek kell tartanunk. E metszet még annyiban is érdekes, hogy a γ -nak a (010) körüli kilépése látható rajta, ennek következtében az $a_1a_2a_3a_4$ -ből alakítható szkéma a II. táblán közölt labradorit szkémának teljesen a szimmetrikus megfelelője lesz, továbbá az esetleges ellenőrzésképpen mérhető kioltások előjelei is rendre megváltoznak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 január 17.-én tartott üléséből.)

ÖSSZETETT MODULUS QUADRATIKUS MARADÉKAI.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

A p törzsszám-modulus quadratikus maradékai közvetlenül képezhetők. Ezek ugyanis

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod{p};$$

számuk, $\frac{p-1}{2}$, ugyanakkora, mint a quadratikus nem-maradékoké.

Legyen n összetett szám és törzstényezői fölbontása

$$n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \quad (\alpha \geq 0);$$

miként állíthatók elő az *összetett* n modulusnak quadratikus maradékai számítás útján? Mekkora ezeknek száma? Mely összetett modulusokra nézve egyezik meg ismét a quadratikus maradékok és nem-maradékok száma?

Ezekre a kérdésekre óhajtok e kis dolgozatban válaszolni, a midőn a következő tételleket fölállítom és bebizonyítom.

a) Az *összetett* n modulus quadratikus maradékai képletből számúthatók ki.

b) Az *összetett* n modulus quadratikus maradékainak száma

$$M = \frac{\varphi(n)}{\phi(n)},$$

a hol $\varphi(n)$ az ismeretes EULER-féle függvény, a mely az n mo-

dulus redukált maradéksorában foglalt számok számát, $\phi(n)$ pedig bármelyik

$$x^2 \equiv D \pmod{n}$$

megoldható másodfokú binom congruentia gyökeinek számát jelenti. (Mint ismeretes $\phi(n)$ a D maradék választásától teljesen független és egyedül a és r értékétől függ.)

c) Összetett n modulus quadratikuss maradékainak és nem-maradékainak száma akkor és csak akkor egyezik meg a nem-maradékok számával, a mikor n az

$$n = p^a, 2p^a, 4$$

typusokból folyó összetett szám, a hol p páratlan törzsszámot jelent. (Ezek a typusok a számelmélet több fejezetében kitűnő szerepet visznek. Így Wilson tételének általánosításakor és a primitív gyökök elméletében. Érdekes, hogy ezek a jelen vizsgálatban újból és új szerepben lépnek föl.)

Az a) és b) tételek bebizonyítását három, az összes eshetőséget felölelő esetre külön fogjuk elvégezni:

- I. eset, a midőn $a = 0, 1$, a mikor, mint ismeretes, $\phi(n) = 2^r$;
- II. eset, a midőn $a = 2$, a mikor $\phi(n) = 2^{r+1}$;
- III. eset, a midőn $a > 2$, a mikor $\phi(n) = 2^{r+2}$.

*

I. Ha $a=0, 1$, tehát n vagy páratlan, vagy pedig 4-gyel nem osztható páros szám, az

$$x^2 \equiv D \pmod{n},$$

másodfokú binom congruentia megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételei:

$$\left(\frac{D}{p_1}\right) = 1, \left(\frac{D}{p_2}\right) = 1, \dots, \left(\frac{D}{p_i}\right) = 1, \dots, \left(\frac{D}{p_r}\right) = 1 \quad (F_D);$$

azaz, hogy D az összes p_i páratlan törzstényezőknél quadratikuss maradéka legyen. A (F_D) egyenlőségek tehát szükséges és ele-

gendő feltételei annak, hogy D az n modulus quadratikuss maradéka legyen. A p_i quadratikuss maradékai

$$1^2, 2^2, \dots, k_i^2, \dots, \left(\frac{p_i-1}{2}\right)^2 \pmod{p_i},$$

úgy, hogy az (K_1) feltételeknek megfelelő D -k nem egyebek, mint a

$$k_1^2 + p_1 u, k_2^2 + p_2 u, \dots, k_i^2 + p_i u, \dots, k_r^2 + p_r u$$

lineáris formák értékészleteiben közösen előforduló értékek. A $k_i^2 + p_i u$ lineáris forma a $p_i^{\alpha_i}$ modulusra vonatkozóan a következő $p_i^{\alpha_i-1}$ számú értéket veszi föl:

$$k_i^2, k_i^2 + 1 \cdot p_i, \dots, k_i^2 + u p_i, \dots, k_i^2 + (p_i^{\alpha_i-1} - 1) p_i;$$

és mivel k_i a $\frac{p_i-1}{2}$ számú

$$k_i = 1, 2, \dots, \frac{p_i-1}{2}$$

értéket fölveszi, azért az n modulus D quadratikuss maradékai $(\text{mod } p_i^{\alpha_i})$ összesen

$$\frac{p_i-1}{2} p_i^{\alpha_i-1} = \frac{\varphi(p_i^{\alpha_i})}{2}$$

értéket vesznek fel. Jelöljük ezeket röviden:

$$\mu_i, 0, \mu_i, 1, \dots, \mu_i, s_i, \dots, \mu_i, \frac{1}{2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) - 1,$$

akkor ezek az összes értékek, a melyekkel a D quadratikuss maradékai $(\text{mod } p_i^{\alpha_i})$ congruensek. Ennek következtében D az n modulusnak akkor és csak akkor quadratikuss maradéka, ha a

$$D \equiv \mu_1, s_1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \quad D \equiv \mu_2, s_2 \pmod{p_2^{\alpha_2}}, \dots, \quad (C_1)$$

$$D \equiv \mu_r, s_r \pmod{p_r^{\alpha_r}}$$

$$(s_1 = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_1^{\alpha_1}); \quad s_2 = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_2^{\alpha_2}); \dots, \quad s_r = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_r^{\alpha_r}))$$

congruentia-rendszerek egyikét kielégíti. E congruentia-rendszerek mindegyikének $(\text{mod } n)$ egy-egy megoldása van és különböző (C_1) rendszerekből $(\text{mod } n)$ különböző megoldások folynak.

A (C_1) rendszerek megoldásait a

$$D \equiv \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) \varphi(p_1^{\alpha_1})^{\mu_1, s_1} + \left(\frac{n}{p_2^{\alpha_2}}\right) \varphi(p_2^{\alpha_2})^{\mu_2, s_2} + \dots + \left(\frac{n}{p_r^{\alpha_r}}\right) \varphi(p_r^{\alpha_r})^{\mu_r, s_r} \pmod{n} \quad (K_I)$$

$(s_i = 0, 1, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) - 1; \quad i = 1, 2, \dots, r)$

képletek szolgáltatják, a hol μ_i, s_i értelmét az előzőkben megállapítottuk. *E (K_I) képletek szolgáltatják tehát az n modulus redukált maradéksorában lévő összes quadratikus maradékokat. Ezzel az a) tétel a I. esetben be van bizonyítva,*

A (K_I) képlethől egyszersmind kitűnik, hogy az n modulus quadratikus maradékainak száma, M ,

$$M = \frac{1}{2} \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \frac{1}{2} \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \frac{1}{2} \varphi(p_r^{\alpha_r}) = \frac{\varphi(n)}{2^r};$$

és mivel az I. esetben $\phi(n) = 2^r$, azért

$$M = \frac{\varphi(n)}{\phi(n)},$$

a mivel I. esetre a b) tétel is be van bizonyítva.

II. Ebben az esetben $\alpha = 2$, tehát $n = 4 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ebben az esetben a (I'_1) feltételekhez még hozza csatolandó a $D \equiv 1 \pmod{4}$ további feltétel, tehát a (C'_I) congruentia-rendszerhez még a $D \equiv 1$ congruentia csatolandó, úgy hogy ebben az esetben D az n -nek akkor és csak akkor quadratikus maradéka, ha a

$$D \equiv 1 \pmod{4}, \quad D \equiv \mu_i, s_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \dots, \quad D \equiv \mu_r, s_r \pmod{p_r^{\alpha_r}} \quad (C_{II})$$

$s_i = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_i^{\alpha_i}); \quad (i = 1, 2, \dots, r)$

congruentia-rendszerek egyikét kielégíti. Az n quadratikus maradékait a jelen esetben a

$$D \equiv \left(\frac{n}{4}\right) \varphi(4) + \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) \varphi(p_1^{\alpha_1})^{\mu_1, s_1} + \left(\frac{n}{p_2^{\alpha_2}}\right) \varphi(p_2^{\alpha_2})^{\mu_2, s_2} + \dots + \left(\frac{n}{p_r^{\alpha_r}}\right) \varphi(p_r^{\alpha_r})^{\mu_r, s_r} \pmod{n} \quad (K_{II})$$

$(s_i = 0, 1, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_i^{\alpha_i}); \quad i = 1, 2, \dots, r)$

képlet szolgáltatja.

E képlet közvetlenül mutatja, hogy az n quadratikus maradékainak száma

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \varphi(p_1^{\alpha_1})^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \frac{1}{2} \varphi(p_r^{\alpha_r}) = \\ &= \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_r^{\alpha_r})}{2^r} = \\ &= \frac{\varphi(4) \cdot \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_r^{\alpha_r})}{2^{r+1}} = \\ &= \frac{\varphi(p)}{2^{r+1}}; \end{aligned}$$

és mivel a II. esetben

$$\phi(n) = 2^{r+1},$$

azért ismét

$$M = \frac{\varphi(n)}{\phi(n)}.$$

Ezzel az a) és b) tételek a II. esetre is be vannak bizonyítva.

*

III. Midőn $\alpha \geq 3$, a D maradék voltának szükséges és elegendő feltételei:

$$D \equiv 1 \pmod{8}, \quad \left(\frac{D}{p_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{D}{p_2}\right) = 1, \dots, \quad \left(\frac{D}{p_r}\right) = 1.$$

A $D \equiv 1 \pmod{8}$ feltétel szerint D az $1+8u$ lineáris forma értékészletéhez tartozó értékeket tartozik fölvenni. Ezek között $\pmod{2^\alpha}$ csak $2^{\alpha-3}$ számú incongruens érték van. Ezek:

$$\begin{aligned} \nu_0 = 1, \quad \nu_1 = 1 + 1 \cdot 2, \quad \nu_2 = 1 + 2 \cdot 2, \dots, \quad \nu_{s_0} = 1 + s_0 \cdot 2, \dots, \\ \nu_{2^{\alpha-3}-1} = 1 + (2^{\alpha-3} - 1) \cdot 2. \end{aligned}$$

Ennek következtében D az n összetett számnak quadratikus maradéka akkor és csak akkor lesz, ha a

$$\begin{aligned} D \equiv \nu_{s_0} \pmod{2^\alpha}, \quad D \equiv \mu_1, s_1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \dots, \quad D \equiv \mu_r, s_r \pmod{p_r^{\alpha_r}} \quad (C_{III}) \\ (s_0 = 0, 1, 2, \dots, 2^{\alpha-3} - 1, s_i = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) \quad i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

congruentia-rendszerek valamelyikét kielégíti. A (C_{III}) rendszerek

mindegyike megoldható és $(\text{mod } n)$ egy-egy megoldást szolgáltat. Ezt a megoldást a jelen esetben a

$$D \equiv \left(\frac{n}{2^\alpha}\right) \varphi(2^\alpha)^{\nu_{s_0}} + \left(\frac{n}{p_1}\right) \varphi(p_1^{\alpha_1})^{\mu_1, s_1} + \dots + \left(\frac{n}{p_r}\right) \varphi(p_r^{\alpha_r})^{\nu_r^{\alpha_r}} \pmod{n} \quad (K_{III})$$

$$(s_0=0, 1, \dots, 2^{\alpha-s}-1; s_i=0, 1, \dots, \frac{1}{2} \varphi(p_i^{\alpha_i}); i=1, 2, \dots, r)$$

képlet adja. E képlet ismét mutatja, hogy az n quadratikus maradékainak száma

$$M = 2^{\alpha-3} \cdot \frac{1}{2} \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \frac{1}{2} \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \frac{1}{2} \varphi(p_r^{\alpha_r}) =$$

$$= \frac{\varphi(2^\alpha)}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \frac{1}{2} \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \frac{1}{2} \varphi(p_r^{\alpha_r}) =$$

$$= \frac{\varphi(n)}{2^{r+2}};$$

és mivel a III. esetben

$$\phi(n) = 2^{r+2},$$

azért ismét

$$M = \frac{\varphi(n)}{\phi(n)};$$

a mivel az a) és b) tételek a III. esetre is és így minden esetre be vannak bizonyítva.

*

Az n összetett modulus quadratikus maradékainak száma

$$M = \frac{\varphi(n)}{\phi(n)};$$

tehát a redukált maradéksorban foglalt nem-maradékok számától, a

$$N = \varphi(n) - \frac{\varphi(n)}{\phi(n)} = \left(1 - \frac{1}{\phi(n)}\right) \varphi(n),$$

számtól általánosságban különböző. E kettő egymással egyenlő csak akkor lesz, ha

$$\phi(n) = 2.$$

A I. esetben, a melyben $\phi(n) = 2^r$, ez csak akkor következik be, ha $r=1$ és így mivel $a=0, 1$, az n összetett számnak a $p^a, 2p^a$ típusokhoz kell tartoznia.

A II. esetben $\phi(n) = 2^{r+1}$, tehát $\phi(n) = 2$ akkor és csak akkor lesz, midőn $r = 0$ és mivel $a = 2$, azért n más mint 4 nem lehet.

A III. esetben $\phi(n) = 2^{r+2}$, tehát mindig 2-nél nagyobb és így a III. esetben n maradékainak száma mindig kisebb a nem-maradékainak számánál.

Mivel a I., II., III. esetek az eshetőségek összegét kimerítik, kimondhatjuk, hogy $n=p^a, 2p^a, 4$ az egyedüli összetett számok, melyeknek redukált maradéksoraikban foglalt quadratikusan maradékok és nem-maradékok számra nézve megegyeznek.

*

Végül meg akarom jegyezni, hogy az n redukált maradék-sorban foglalt quadratikusan maradékok száma egyszerűbb meg-gondolásokból is adódik, ha lemondunk arról, hogy a maradékok kiszámítására explicit képletet szolgáltatassunk.

Ha ugyanis az n összes quadratikusan maradékai

$$D_1, D_2, \dots, D_M,$$

akkor az összes az n modulusra vonatkozó megoldható másod-fokú binom congruentiák:

$$x^2 \equiv D_i \pmod{n} \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (C)$$

E congruentiák mindegyikének ugyanannyi megoldása van. Hiszen e megoldások száma egyedül n -től függ és D_i -től füg-getlen. Ha egy-egy (C) congruentia gyökeinek számát ismét $\phi(n)$ -nel jelöljük és figyelembe vesszük, hogy két különböző (C) congruentiának közös gyöke nincsen, akkor a M számú (C) congruentia gyökei összesen $M \cdot \phi(n) \pmod{n}$ különböző szám-értéket szolgáltatnak, melyek mindannyian n -hez képest relativ törzsszámok, mivel a D_i -k is azok.

Ha ezek a számok

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M \cdot \phi(n)} \quad (S_1)$$

akkor ezek tehát az összes számok, a melyek az n modulusra vonatkozó másodfokú binom congruenciáknak gyökei (itt csak oly congruenciák szerepelnek, melyeknek abszolút tagja relatív törzsszámok a modulushoz képest) és ezek az előzők szerint mindannyian az n redukált maradéksorában

$$r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_{\varphi(n)} \quad (n, r_i) = 1 \quad (S_2)$$

foglaltatnak. De most közvetlenül belátható, hogy ez az állítás megfordítható, azaz, hogy S_2 minden száma egyszersmind (S_1) -ben is előfordul, mert r_i minden esetre az

$$x^2 \equiv r_i^2 \pmod{n}$$

congruenciának gyöke. Mivel pedig (S_1) $M \cdot \varphi(n)$ számú különböző számot tartalmaz, S_2 pedig $\varphi(n)$ különbözőt, azért

$$M\varphi(n) = \varphi(n),$$

azaz ismét

$$M = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n)}.$$

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 május 23.-án tartott üléséből.)

A SEPARATIÓS SEJTMAGOSZTÓDÁS ELMÉLETE ÉS SZEREPE A NÖVÉNYEK FEJLŐDÉSÉBEN ÉS RENDSZEREZÉSÉBEN.

FILARSZKY NÁNDOR-tól.

(Székfoglaló kivonata.)

A σ - és φ -ivari elem egyesülésénél, vagyis a termékenyítési folyamatnál (amphimixis), melynek eredményeként a csirasejt, a keletkezendő új növény összejtje vagy törzssejtje áll elő, a két különemű sejtmag játszsza a főszerepet; egyesülésük, helyesebben mondva fuzionálásuk folytán előáll a csirasejtben a csiramag vagy zygotamag, melynek különböző értékű chromosomái nem olvadnak össze, hanem mindvégig megtartják önállóságukat, megőrzik individualitásukat, egyik csoportja, az atyai származású chromosomák him-, a másik csoportja, az anyai származásúak női ivarjellegűek.

A csiramag, minthogy a chromosomákat általában az összes tulajdonságok és jellegek tartóiként tekintik, a szülők összes tulajdonságait rejti magában.

Az új növényi szervezet fejlődése a diploid csiramag osztódásával veszi kezdetét. Ez az osztódás vagy æquatiós, vagy reductiós osztódás lehet. Az æquatiós osztódás mindig vagy legalább rendszerint valamennyi chromosomának hosszanti hasadásával jár, minek következtében számuk még a mag kettéosztódásának befejezése előtt megkétszereződik, úgy hogy a chromosomák a fiókmagvakban is ugyanabban a számban találhatók, mint a milyen számban a még osztatlan anyamagot alkották, a két fiókmag is diploid. A reductiós osztódás másként folyik

le, a chromosomák nem hasadnak ketté, számuk változatlan marad felosztásukig, felosztásukkor pedig számuk fele az egyik fiókmagnak, fele a másik fiókmagnak jut, úgy, hogy a fiókmagvakban a chromosomák az eredeti számnak csak a felére redukált számban jelennek meg, a fiókmagvak haploidok.

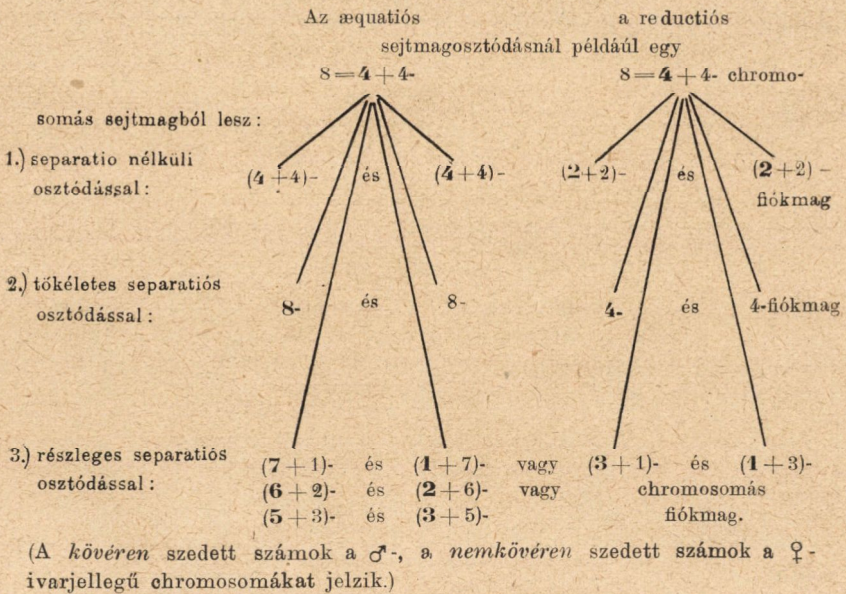
Mind a két esetben, akár æquatiós, akár reductiós módon osztódik a csiramag, az új növényi test felépítése céljából a fióksejtek továbbosztódása csak sejtmagvak typosos módon végbemenő osztódásával folyik le, de abban az esetben, midőn már magán a csiramagon is æquatiós és nem reductiós osztódás ment végbe, az új szervezet fejlődési cyklusában mindenkor egy időpont áll be, melyben egyszeri reductiós osztódás is sorra kerül és ez vagy közvetlenül, vagy csak későbbben vezet a haploid-magvú ivari elemek képződésére, melyeknek egyesüléséből ismét diploid csiramag áll elő.

A haploid-magvak csak typososan osztódnak.

Az irodalomban a magosztódási folyamat bizonyos fázisait, így különösen a chromosomáknak az æquatoriális síkban való elrendezkedését különbözőképen értelmezik és írják le; mindenestre azonban itt a véletlen szerint történő elrendezkedések a legelfogadhatóbb magyarázat, de nem az elrendezkedések módjába helyezendő az egész magosztódás súlypontja, hanem az erre bekövetkező elosztásukra, a különmemű chromosomák miként végbemenő elkülönülésére, mely folyamat mindenkor csak előre meghatározott, örökölt törvények szerint mehet végbe, bár néha, bizonyos rendkívüli okokból változás is állhat be a rendes elkülönülésben. E nevezetes folyamat tehát nem a metaphasisban megy végbe, a mikor a chromosomák az æquatoriális síkban sorakoznak, hanem az anaphasisban folyik le. A megfelelő egyenlőértékű, de eltérő esetekben különböző értékű chromosomákból is felépülő maggal ellátott ivari elemek képződése csakis ily módon gondolható el, vagyis az anaphasis lefolyásának a módja mérvadó itt és e folyamatban a húzó orsófonalak jutnak a legnevezetesebb szerephez.

Úgy a reductiós, valamint az æquatiós osztódásnál az atyai, σ - és anyai, ρ -chromosomáknak elosztása háromféle módon mehet végbe: vagy teljesen elkülönülnek egymástól, a kétféle

nemű chromosomák, a sejtmegosztódásnak e nemét tökéletes vagy egyenletes separatiós osztódásnak nevezem; vagy a kétféle nemű chromosomák elkülönülése, separatiója csak részleges, egyenlőtlen, az egyik fiókmag többet örököl az egyik fajta chromosomákból mint a másik fajtából, a másik fiókmag pedig fordítva; vagy végül a kétféle chromosomák elkülönülése elmarad, æquatiós vagy reductiós magosztódás separatió nélkül megy végbe, a σ - és a φ -chromosomáknak egyik felét öröklí az egyik fiókmag, a másik felét a másik fiókmag.



Az utódok között néhol tapasztalható nagy változatosságnak oka nem a reductiós osztódásban, hanem a separatiós, még pedig csakis a részleges separatiós sejtmegosztódásban keresendő.

A hol bivalens chromosomák jelennek meg, a chromosomák reductiója legalább látszólag már az anyamagban megy végbe, mert ez közvetlenül a típusos osztódás előtt két-két külön-nemű chromosomának, némelyektől conjugatióként is feltüntetett összetapadása folytán, valószínűleg azonban csak a kettéhasadt, de egymástól el nem vált fiókechromosomák továbbtartó össze-

függése folytán fél annyi bivalens-chromosomát tüntet fel mint kezdetben, a mikor még univalens-chromosomákból állott; ezért azután az osztódás eredménye ugyanaz, mint a reductiós osztódásnál, akár az ilyen bivalens-chromosomákból álló magnak az osztódása a kettős-chromosomák hasadásával jár, akár e kettős-chromosomákat alkotó univalens-chromosomákra való szétválásával megy végbe.

A chromosomák száma a sejtmagvakban legtöbbszörre állandó páros szám, de lehet páratlan is; így például páratlanná lesz, ha valamely páros számú chromosomákból álló sejtmag æquatiós osztódásakor az egyik chromosomának a hasadása elmarad, ennek következtében azután az egyik fiókmagnak egy chromosomával kevesebb jut, mint a másiknak, az egyik fiókmag tehát páros, a másik páratlan számú chromosomákat mutat. A hasítatlan chromosomának a neve «heterochromosoma» vagy «idiochromosoma» és ez mindig csak abban a fiókmagban található meg, melyben a chromosomák száma páratlan, míg a másik fiókmag e helyett egy számfeletti chromosomát tartalmaz. A szerint, a mint egy σ - vagy φ -chromosomának a hasadása elmarad, a heterochromosoma is vagy σ - vagy φ -chromosoma lehet.

Ritkábban a chromosomák száma páratlanná lesz az által, hogy valamelyik chromosoma az egyik vagy másik chromosoma-csoport kötelékéből kilöketik. Ebben az esetben az ily módon keletkezett páratlanszámú chromosomákból álló sejtmagban természetesen heterochromosomáról nem lehet szó, de a testvérmagva szintén egy számfeletti chromosomát fog tartalmazni, mely ismét vagy σ -, vagy φ -chromosoma lehet.

Míg a zoológiában a heterochromosomák nagy szerepet játszanak, a mennyiben itt őket általában az ivart determináló anyagok raktáraiként tekintik, a növényországban hasonlót, ugyanis helyette chromatinnucleolust csak némely hímnős virágú fajok pollenszemcséinek képződésénél észleltek. A separatiós magosztódás elméletével úgy a heterochromosoma, valamint a chromatinnucleolus felléptét és a hozzáfűzött magyarázatokat könnyen és világosan lehet értékelni, de egyuttal ki is lehet mutatni, hogy az eredeti fejtegetések nem mindenben felelnek meg a valóságnak.

A több-soksejtű növénytest vegetatív sejtekből épül fel; ezeknek a sejtmagva éppúgy, mint az egysejtűeknek a sejtmagva a legtöbb esetben σ φ -chromosomás sejtmag, de lehet σ - vagy φ -chromosomás sejtmag is és mindkét esetben haploid- vagy diploid-sejtmag. *Telepesek*-nél és *Mohák*-nál általában haploid, *Edényes kryptogamok*-nál és *Magvas növények*-nél diploid-sejtmag. A növényi test ivarérettségének beálltával rajta mindenhol ivarszervek fejlődnek, melyek a faj fennmaradását és szaporodását célzó σ - és φ -chromosomás, haploid-magvú ivari elemeket létesítik. Ha a diploid σ φ -chromosomás csiramag æquatiós vagy reductiós osztódása separatio nélkül folyik le, a diploid, illetőleg haploid σ φ -magvú sejtekből felépülő új növényen az ivarzási időszak beálltakor σ - és φ -ivarszervek fejlődnek és a faj, mely csak ilyen egyénekből áll, monœcikus (hermaphroditikus) faj; ha ellenben az æquatiós vagy reductiós osztódás a csiramagon tökéletes separatióval megy végbe, a diploid, illetőleg haploid, csak σ - vagy csak φ -magvú sejtekből felépülő új növényen az ivarzási időszak beálltával csak σ -, illetőleg csak φ -ivarszervek fejlődhetnek és a faj, melyhez tehát kétfélenemű egyének tartoznak, diœcikus faj; ha végül a csiramag osztódása részleges separatióval folyik le, a diploid vagy haploid σ φ -magvú sejtekből felépülő új növényen utóbb σ - és φ -ivarszervek, esetleg azonban csak σ - vagy csak φ -ivarszervek jelenhetnek meg és a fajhoz kétféle, esetleg háromféle egyének is tartozhatnak, a faj diœcikus, esetleg triœcikus lehet.

Az ivarszerveknek megjelenési módja és elosztása általában a magasabbrendű haploid-, de különösen a legmagasabbrendű diploid-növények testén rendkívül változatos és ez egyesegyedül a sejtmag különböző separatiós és reductiós osztódásának a következménye, mely utóbbi folyamat mindig az úgynevezett gonotokontokban megy végbe.

A legalsóbbrangú növényeknél a gonotokont maga a csirasejt, melyet itt szerte spórának, még pedig zygo-, gameto-, oospórának neveznek. Magasabbrangú növényeknél a gonotokontok, mint a spórák — itt carpospórák — nagyanyasejtjei, terméstartestekben jutnak kifejlődésre, melyek közvetlenül, de különböző módon a termékenyítési folyamat eredményezte csira-

sejtből állanak elő. Mindkét eset jellemzi a *Thallophyta*-t (*Fungi, Lichenes, Algae*), de az utóbbi eset teljes mértékben a *Bryophyta*-ra (*Hepaticae, Musci frondosi*) is áll és ezért e két növény-csoport egy főcsoportba foglalandó össze, melyre legjobban illik a «*Sporophyta*» elnevezés, de somatikus sejtmagvuk szerkezetét tekintve, a «*Haploideae*» név is helyén való. A még magasabbrendű és legmagasabb szervezetű növényeknél végül a gonotokontok ugyancsak mint spórák nagyanyasejtjei külön sajátosság szervekben, úgynevezett sporangiumokban fejlődnek, melyek mindenhol a teljesen kialakult növényi testnek többé-kevésbé módosult levélképletein, azaz termőlevelein (sporophylla) jutnak kifejlődésre. Ez az eset jellemző úgy a *Pteridophytá*-ra (*Filicineae, Equisetineae, Hydropteridineae, Lycopodineae*), valamint a *Spermatophytá*-ra (*Gymnospermae, Angiospermae*), mely két növénycsoport ismét «*Embryophyta*» néven foglalható össze egy természetes főcsoportba, minthogy mindkettőnél a csirasejtből egyenesen embryo fejlődik, nem úgy mint a *Sporophytá*-nál, a hol a csirasejt egy nyugósejtté, nyugvó spórává alakul, vagy közvetlenül spórákat termelő terméstejté fejlődik, azonban sehol sem, tehát a *Moháknál* sem lesz belőle embryo; megfelelő elnevezése e főcsoportnak a «*Diploideae*» elnevezés is, mint-hogy somatikus sejtjeik mind diploid-magvúak.

A zygospórák, gametospórák és oospórák *Telepeseknek* legalsóbbrendű képviselőinél a separatiós magosztódás legtöbbször a reductiós magosztódással esik egybe, ez a kettős folyamat tehát már a zygotamagon megy végbe, vagy csak a zygotamagot öröklő elsődegyénekben folyik le; már fejlettebb alkotású alakjainál a separatiós osztódás gyakrabban egy későbbi fejlődési stádiumba tolódik el, rendszerint az ivarszervek, sohasem az ivari elemek képződését előzi meg közvetlenül, de még előbb is bekövetkezhetik és mindkét esetben azután æquatiós magosztódással folyik le együttesen. A carpospórák *Telepeseknél* és *Moháknál* a zygotamag típusosan oszlik, a reductiós magosztódás csak a fejlődésnek egy későbbi stádiumában áll be és ismét vagy a separatiós osztódással esik egybe, vagy utóbbi folyamat még később, æquatiós osztódással egyetemben folyik le és az ivarszervek fejlődését indítja meg.

Az *Edeényes kryptogamok*nál és az összes *Magvas növények*-nél a zygotamagon mindig æquatiós osztódás megy végbe, az előbbi növényeknél többnyire separatio nélkül, az utóbbiaknál sok esetben separatióval. Ha a *Pteridophytánál* a zygotamag æquatiós osztódása separatio nélkül folyik le, a separatiós osztódás vagy a csak jóval későbbben bekövetkező reductiós osztódással esik egybe, vagy még későbbben æquatiós osztódással együtt lefolyva, az ivarszervek fejlődését vezeti be. A *Spermatophytánál* minden esetben, a mikor a zygotamagon az æquatiós osztódás separatio nélkül folyik le, egyenletes separatiós osztódás æquatiós osztódással együttesen vezeti be az ivarszervek fejlődését és a reductiós osztódás csak az ivari elemek képződését előzi meg csaknem közvetlenül; utóbbi folyamat azon *Spermatophytánál* is ugyanabban az időpontban áll be, melyben a zygotamag típusosan oszlik tökéletes vagy részleges separatióval.

Az ivaros úton szaporodó összes növények életcyklusában tehát, akár alacsony-, akár magasabb- vagy legmagasabbrendű növények legyenek, mindenhol úgy a reductiós, valamint a separatiós sejtmagosztódás csak egyszer áll be és mindkettő vagy együttesen folyik le, vagy a növényi test fejlődésének különböző fázisában, vagyis elkülönülten mehet végbe.

Mind a két természetes főcsoportban a növényi test élete, feladatának teljesítésével vagy megszakad, vagy pedig az összes életfolyamatok periodikusan visszatérő időszakokban megújulnak, megisméltődnek, de ez esetben is valamennyi életfolyamat, valamennyi szabályosan egymást követő fejlődési stádium egy és ugyanazon időszakon belül, a csirasejttől kezdve az új csirasejt képződéséig egy magába visszatérő zárt fejlődési cyklust alkot, melyen belül két főszakaszt, a haploid és diploid főszakaszt lehet megkülönböztetni, de nem $2x$ - és x -generatiót.

Ivadékcserét (metagenesist) csak némely *Thallophytánál* lehet találni, azoknál ugyanis, a hol a fejlődés menete olyan, hogy ezen belől két (vagy több) ivadék (generatio), egy ivartalan úton és egy ivaros úton szaporodó nemzedék szabályosan felváltja és követi egymást. Itt egyedül vannak metagenetikus és ametagenetikus szervezetek, de a Metageneticæ-nek sincsen $2x$ - és x -generációjuk, mert e különböző nemzedékük mind x -nemzedék. *Bryo-*

phyta- és *Pteridophytánál*, a hol általában az ivadékeserét e növényekre jellemző jellegként tüntetik fel, ivadékesere nincsen, a mit annak vesznek, itt is, mint mindenhol, csak egy $2x$ - és egy x -fejlődési szakasz a fejlődés ciklusában.

A *Thallophyta* biológiai alcsoportjai a Zygosporæ, Gametosporæ, Oosporæ és Carposporæ; az első három az amphimixis eredményezte nyugvósejt vagy zygota különleges neve után, az utolsó a zygotamagot tartalmazó procarpium- vagy archicarpiumból fejlődő terméstest termékei után elnevezve. Az amphimixis módját, de különösen a különmemű ivari elemek kialakulását, szerkezetét és az őket létesítő ivarszervek különféleségét tekintve, itt tíz sorozatot lehet megkülönböztetni, mely osztályozás az e nagy növénycsoportot oly annyira jellemző, rendkívüli nagy változatosságban nemcsak könnyebb tájékoztatást nyújt és kellő áttekintést szerez, de megfelelő példán az amphimixis folyamatát az egész fejlődési ciklussal kapcsolatosan tárgyalva, leginkább igazolja a separatiós magosztódás elméletének jogosult felállítását, mert nem egy esetben a legkülönbözőbb berendezésekre is világot vet, melyek e folyamatnál szembetűnően érvényesülnek. (Eredeti dolgozatom 100-nál több példának kimerítő leírását tartalmazza.)

A *Bryophytánál*, néhány fajt leszámítva, a hol különböző nagyságú spórákat figyeltek meg, általában csak egyféle spórákat írnak le, valóban azonban kétféle spórák vannak; a separatiós magosztódás elmélete alapján ugyanis isospórákat és homospórákat lehet itt megkülönböztetni, sőt ismeretes néhány mohafaj, mely úgy látszik anisospórákat termel. Az isospórák a monœcikus fajok termékei (például *Amblystegium Barbula* etc.), a homospórák, a diceikus fajokat jellemzik (például *Polytrichum*).

A *Pteridophytának* isospórák, anisospórák, homospórák és heterospórák nemeik vannak, tehát itt négyféle és nem csak kétféle spórákat lehet megkülönböztetni. Az isospórák az archesporiumsejt magvának separatio nélkül végbemenő reductiós osztódása folytán állanak elő és jellemzők a monœcikus alakokra (pl. *Hymenophyllaceae*, *Cyatheaceae* etc.); az anisospórák az archesporiumsejt magvának részleges separatióval lefolyó reductiós osztódásából kifolyólag képződnek, szintén monœcikus

alakok termékei, de e növények egyik fejlődési stadiumában legtöbbszörre diœciára vezetnek (például a *Polypodiaceae* közül több *Athyrium*-faj és az *Osmundaceae*); a homosporák az arche-sporiumsejt magvának tökéletes separatióval járó reductiós osztódása folytán keletkeznek, ugyancsak monœcikikus növények termékei és csak látszólag vezetnek diœciára, a mennyiben ez csak átmenetileg a fejlődés egyik stadiumában nyilvánul (például *Parke-riaceae* és a most élõ *Equisetineae*); a heterosporák, melynek a mikro- és makrospórák, végül a többi fajta spórától eltérõleg különbözõ sporangiumokban az archesporiumsejtek magvának reductiós osztódása folytán úgy monœcikikus, mint diœcikikus növényeken állhatnak elõ; a separatiós magosztódás lehet, hogy itt mindenütt jóval megelőzi a reductiós magosztódást, hogy már a sporangiumok vagy már a termõlevelek fejlődésekor következik be, lehet azonban, hogy még itt is a reductiós osztódással esik egybe (például *Hypopteridineae*).

Az iso-, aniso- és homosporákat létesítõ sporangiumok egyféle termõleveleken fejlődnek, a makro- és mikrosporangiumok ellenben legtöbbszörre különbözõ termõleveleken jutnak kifejlődésre (például *Isoëtaceae*, *Selaginellaceae*); ritkábban képzõdnek egy és ugyanazon a termõlevélen, de ez akkor sajátos burokká alakul, mely mind a két fajta sporangiumot magába zárja és ezekkel együtt úgynevezett sporocarpiumot alkot (például *Mursiliaceae*), bár vannak oly sporocarpiumok is, melyek csak makro- vagy csak mikrosporangiumokat tartalmaznak (például *Salviniaceae*).

A *Spermatophyta* mind heterosporás növények; mikro- és makrosporangiumok mindenhol különbözõ termõleveleken fejlődnek; a separatiós magosztódás, ha még nem a csiramagon ment végbe, valószínűleg a termõlevelek fejlődését indítja meg és nem valószínű, hogy a spórák (pollenszemcsék és embryozsákok) képzõdésekor a reductiós osztódással esik egybe. A különemû termõlevelek megjelenésében és elosztásában tapasztalható nagy változatosság, mely különösen az *Anthophyta*-ra jellemzõ, a separatiós magosztódással minden esetben tisztán megmagyarázható.

A parth-nogenesis mindenhol, az alsõbbbrangúaknál épp úgy, mint a legfelsõbbbrangúaknál, a reductiós sejtmagosztódás elma-

radásának a következménye; a separatiós osztódásnak az elmaradása apogamiát von maga után; mind a két folyamat, a reductiós meg a separatiós magosztódás főfeltétele a rendes termékenyítési folyamatnak.

A hybridisatióra a részleges separatiós magosztódás jellemző; ennek alapján elméletileg is pontosan levezethető a MENDEL-féle törvény, mely az « $A+2Aa+a$ » képletben nyer kifejezést, sőt némely részletben éppen ezen az elméleti úton még jobban és világosabban ki is domborodik. De könnyen kimutatható ez úton úgy a fajták (formák), valamint a fajok hybridisatiójának lehetősége is azokkal az esetekkel szemben, melyekben kereszteződési folyamat teljesen ki van zárva.

Monœcikus és hermaphroditás növényeknél, mely utóbbiak alatt csakis az *Antophyta* értetendők, az idegen megporzással (akár xenogamia, akár geitonogamia) való kereszteződésből kikerülő egész nemzedék a két különböző szülőnek összes tulajdonságait arányosan egyesíti magában; mindazáltal mégis kétféle, mert a gyermekek 50%-a olyan, melyet magvuk chromosomás összetételénél fogva tiszta, 50%-a pedig olyan, melyet nem tiszta keveréknek lehet tekinteni. Ez kétféle, ismét egymással kereszteződő keverékektől xenogamia, esetleg geitonogamia folytán is leszármazó II. nemzedéknek 50%-a a nagyszülőre, nevezetesen 25% a nagyatyára, 25% pedig a nagyanyára üt, de esetleg új, csak hasonló lesz hozzájuk; a többi 50% minden esetben ismét a kereszteződő szülők tulajdonságait öröklí. Az utóbbiakból származó III. generatio ismét csak ilyen arányban tovább hasádozott származék és így tovább.

Diœcikus növényeknél a kereszteződés eredményeként előálló II. generatióban a keverékek fele a szülőkkel egyezik meg, a másik fele pedig szintén a nagyszülőkre, de lehet nagyobb-kisebb mértékben hozzájuk csak hasonló, őket megközelítő új alak is, a szerint, hogy az egyik szülőben miképpen ment végbe a separatiós magosztódás, vagy a kereszteződés oly alakok között folyt le, melyeknek mindegyikében részleges separatiós magosztódás következett be és ez a két szülőben eltérő módon folyt le.

Míg a formák keresztezésekör a I. generatiót létesítõ,

mindkét szülőnél föltétlenül szükséges, hogy az ivarszervek képződését részleges separatiós magosztódás előzze meg, addig a fajok kereszteződésénél csak az egyik szülőben folyik le részlegesen a separatiós magosztódás, a másokban ellenben tökéletes separatiós magosztódás előzi meg az ivarszervek képződését.

Bizonyos, hogy csak olyan különböző fajok tudnak hybridizálni, melyeknek sejtmagvában a chromosomák száma ugyanaz.

Az eredeti, terjedelmesebb dolgozatom, melynek irányelve OLTMANNNS-nak az a mondása: «Man soll vor Hypothesen nicht zurückschrecken, wenn sie geeignet sind, eine Uebersicht über ein Chaos von Tatsachen zu verschaffen», a további kérdéseknek egész lánczolatát veti fel, melyekre határozott felelet csak akkor várható, ha majd olyan szer fog rendelkezésünkre állani, melylyel a hím- és nőivarjellegű chromosomák anyagát minden körülmények között külön-külön és biztosan ki lehet mutatni; mindaddig csak következtetésekkel lehet e téren dolgozni és ha számos esetben a fejlődési folyamatok eredménye e következtetések helyességét igazolják is, a mikrochemiára vár a végleges döntés feladata.

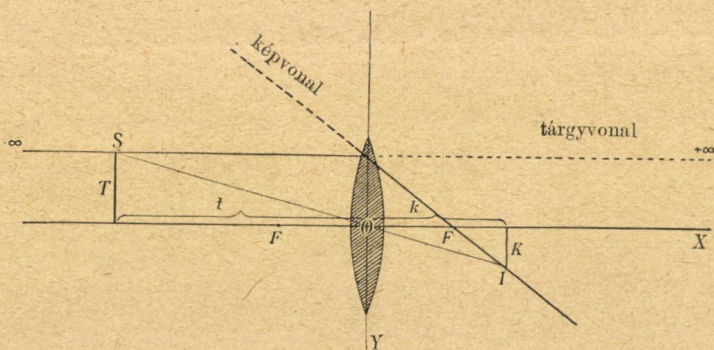
(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 május 17.-én tartott üléséből.)

EGYSZERŰ ÚJ GEOMETRIAI TÉTEL AZ OPTIKAI LENCSEKRŐL.

SCHWARCZ ELEMÉR-től.

A következőkben a lencsék chromátikus és sphærikus aberratiójától és még vastagságától is eltekintünk; azaz az alábbiakban csupán homogén fényről, a lencséhez igen kis beesési szöggel érkező, azaz a főtengelyvel nagyon kis szöget alkotó úgynevezett centrális sugarakról és ideálisan vékony lencséről lesz szó.

Legyen az 1. ábrán S valamely tárgy pont, mely a szilárd helyzetű lencse főtengelyétől állandó T távolságú, e tengelyvel



1. ábra.

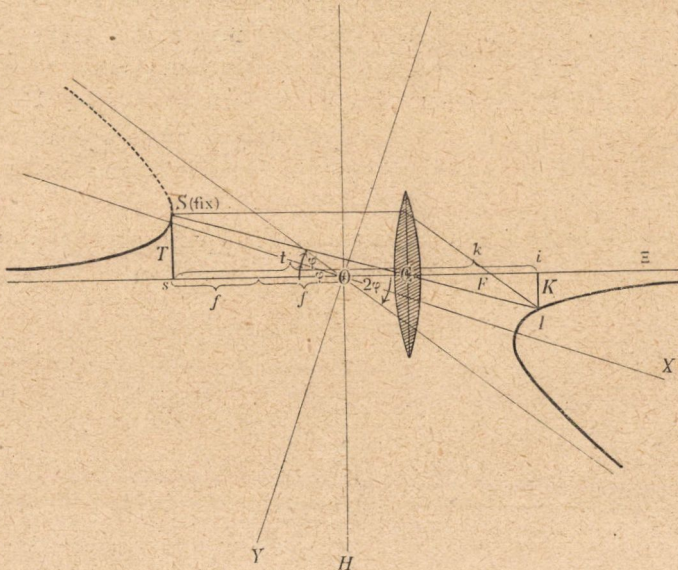
párhuzamos egyenes (a tárgyvonal) mentén mozoghat. Az S képpontja az I , az S említett mozgása közben mindig ugyanazon az \overline{FI} egyenesen (a képvonalon) marad, melynek egyenlete az ábra szerint könnyen adódik.

Az I képpont derékszögű koordinátái: $x=k$, $y=K$, s így az ábrából és a NEWTON-féle formulából $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$ következik:

$$y = K = T \cdot \frac{k}{t} = T \cdot \frac{k}{\frac{fk}{-f+k}} = T \cdot \frac{-f+k}{f} = T \cdot \frac{-f+x}{f} = y,$$

mely az \overline{FI} egyenesnek keresett egyenlete.

Vegyük szemügyre azonban azt az esetet, amikor nem mozgó tárgypontról és szilárd helyzetű lencséről van szó, hanem arról, amidőn a lencsét közelítjük a szilárdnak vett S tárgypont felé úgy, hogy a lencse saját magával mindig párhuzamos



-2. ábra.

maradjon és az optikai tengelye mentén haladjon; avagy a lencsét éppenig távolítjuk S -től. Ekkor az I képpont geometriai helyét abban a ΞOH derékszögű koordináarendszerben határozzuk meg, melynek abszcissa-tengelye (Ξ) ugyancsak a lencse főtengelye, ordináta-tengelye (H) azonban a vízszintes tengelyt a fix S pont s talppontjától az $s\overline{O} = 2f$ távolságra metszi (2. ábra).

Itt ξ , η az I képpont derékszögű koordinátái. Az ábra és NEWTON előbb használt egyenlete szerint lesz:

$$\xi = \overline{OC} + k; \quad \overline{OC} = t - 2f,$$

azaz

$$\xi = k + t - 2f; \quad \eta = K = T \cdot \frac{k}{t} = \frac{Tf}{-f+t};$$

minthogy

$$t = -k + \xi + 2f,$$

nyerjük:

$$\eta = \frac{Tf}{-k + \xi + f}. \quad (1)$$

Továbbá, minthogy $k : t = (k-f) : f$, az η még írható:

$$\eta = T \cdot \frac{-f+k}{f}. \quad (2)$$

Az (1)-ből nyert $f-k = \frac{T}{\eta} \cdot f - \xi$ kifejezés írható:

$$\frac{f-k}{f} = \frac{T}{\eta} - \frac{\xi}{f},$$

míg a (2)-ből:

$$\frac{f-k}{f} = -\frac{\eta}{T};$$

ezekből:

$$-\frac{\eta}{T} = \frac{T}{\eta} - \frac{\xi}{f},$$

azaz

$$\frac{\xi \eta}{fT} - \frac{\eta^2}{T^2} = 1. \quad (3)$$

Ez nyilván oly *hyperbola* egyenlete, melynek középpontja a (ξ, η) coordináták kezdete. Ezt az egyenletet normális alakjára hozandó, transformáljuk oly coordinata-rendszerre, melynek kezdőpontja szintén az O pont, de tengelyei X és Y alkossanak φ szöget a Ξ és Π tengelyekkel. Ha l pont coordinátái az XOY sík-rendszerben x és y , akkor lesz a 2. ábra szerint:

$$\xi = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

ezekből

$$\xi \eta = x^2 \sin \varphi \cos \varphi - y^2 \sin \varphi \cos \varphi + xy (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi);$$

$$\eta^2 = x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi + 2xy \sin \varphi \cos \varphi;$$

és így a (3) egyenletből némi rövidítés után:

$$\frac{x^2 \sin \varphi}{T} \left(\frac{\cos \varphi}{f} - \frac{\sin \varphi}{T} \right) - \frac{y^2 \cos \varphi}{T} \left(\frac{\sin \varphi}{f} + \frac{\cos \varphi}{T} \right) + \frac{xy}{T} \left(\frac{\cos 2\varphi}{f} - \frac{\sin 2\varphi}{T} \right) = 1.$$

Ha $\frac{xy}{T}$ együtthatója zérus: $\frac{\cos 2\varphi}{f} - \frac{\sin 2\varphi}{T} = 0$, azaz ha $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{T}{f}$, akkor a hyperbolának $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ alakú normális egyenletét nyerjük. A 2. ábra mutatja e görbét.

Goniometriai táblázat.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{T}{f}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + T^2}}$$

$$\sin 2\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi \cdot \cos 2\varphi = \frac{T}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T^2}{f^2}}} = \frac{T}{\sqrt{f^2 + T^2}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi = \sin \varphi \cos \varphi = \frac{T}{2\sqrt{f^2 + T^2}}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}; \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}.$$

Az a és b féltengelyek kiszámítása.

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{fT} - \frac{\sin^2 \varphi}{T^2} = \frac{1}{2f\sqrt{f^2 + T^2}} - \frac{1}{2T^2} \left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2 + T^2}} \right);$$

azaz, rövidítés után:

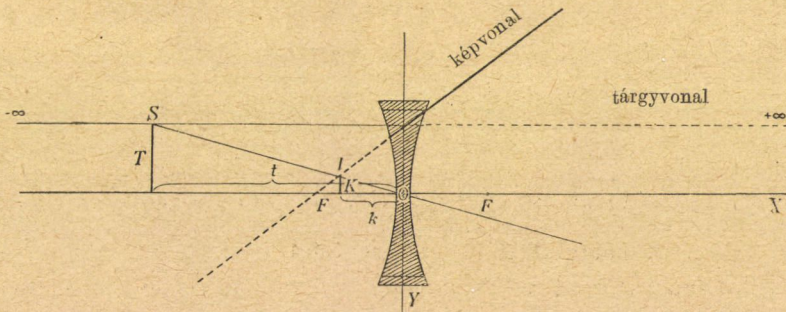
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2fT^2} \cdot (\sqrt{f^2 + T^2} - f). \\
 \frac{1}{b^2} &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{fT} + \frac{\cos^2 \varphi}{T^2} = \\
 &= \frac{1}{2f\sqrt{f^2 + T^2}} + \frac{1}{2T^2} \left(1 + \frac{f}{\sqrt{f^2 + T^2}} \right). \\
 &= \frac{1}{2fT^2} (\sqrt{f^2 + T^2} + f).
 \end{aligned}$$

E szerint e hyperbola egyenlete:

$$x^2 (\sqrt{f^2 + T^2} - f) - y^2 (\sqrt{f^2 + T^2} + f) = 2fT^2.$$

Szóró lencsére vonatkozó ábrák.

Mozgó tárgypon, szilárd helyzetű lencse:



3. ábra.

Az \overline{FI} egyenes (kép) egyenlete, ha az I pont koordinátái $x = -k$; $y = -K$:

$$-y = T \cdot \frac{f+x}{f},$$

A GEOMETRIAI FÉNYTAN HYPERBOLA-TÉTELE.

BODÓCS ISTVÁN-tól.

I. Vékony lencsék.

Az optikai képek térbeli helyzetéről igen jó áttekintést nyújt a NEWTON-féle formula, mely szerint a *gyújtóponttól* számított x és τ kép-, illetőleg tárgytávolságok szorzata egy és ugyanannál a szerkezetnél állandó s az f gyújtótávolság négyzetével egyenlő, vagyis

$$x\tau = f^2;$$

a lineáris nagyítást pedig a

$$N = \frac{x}{f} = -\frac{f}{\tau}$$

hányadosok határozzák meg.

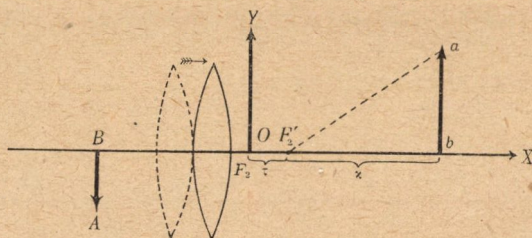
Ha ezt az összefüggést a képek térbeli helyzetének meghatározására akarjuk felhasználni, két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. *Fix helyzetű lencse* és az optikai tengely irányában translatoriusan mozgó tárgy esetén egyszerű módon ki lehet mutatni, hogy a *mozgó pont képe a térben egyenes vonalat ír le* s ez a tétel a valódi és virtuális képekre, gyújtó és szóró szerkezetekre egyaránt érvényes.

2. Sokkal érdekesebb ennél a megfordított eset, a mikor a *tárgy marad nyugalomban s a lencse végez translatorius mozgást* az optikai tengely irányában, 1. ábra.

Ábrázoljuk a képek térbeli helyzetét és nagyságát oly derékszögű XY koordináta-rendszerben, melynek abszisszatengelye a lencse optikai tengelye, kezdőpontja pedig a lencse második fókuszának térbeli helye abban a pillanatban, mikor a tárgy éppen az első fókuszba esik. Toljuk el a lencsét a nyíllal jelzett irány-

ban, önmagával párhuzamosan, folytonosan növekvő τ értékkel, akkor az első fókuszról számított tárgyávolság nyilvánvalóan τ lesz s ugyanekkora értékkel tolódik el a térben a második fókusz is. Minthogy a második fókusz mindenkor F'_2 helyétől



1. ábra.

számított x képtávolság $= \frac{f^2}{\tau}$ s a hozzá tartozó nagyítás $N = \frac{f}{\tau}$, ennél fogva az $AB = T$ nagyságú tárgynak $\frac{f}{\tau}$ szoros nagyítású y képe a térnek $x = x + \tau$ helyén fog létrejönni. A kép koordinátái tehát a fix XY koordináta-rendszerben a következők lesznek:

$$x = x + \tau = \frac{f^2}{\tau} + \tau$$

$$y = NT = \frac{f}{\tau} T.$$

Ha e két egyenletből a változó τ paramétert kiküszöböljük, meg fogjuk kapni a képek végpontjainak geometriai helyét. E végből a második egyenletből nyert $\tau = \frac{fT}{y}$ értéket az első egyenletbe helyettesítve,

$$x = f \left(\frac{y}{T} + \frac{T}{y} \right) = f \frac{y^2 + T^2}{yT}$$

alakban nyerjük a keresett görbe egyenletét. Zérusra redukálva

$$fy^2 - Txy + fT^2 = 0 \quad (1)$$

vagy a szokásos általános alakban írva:

$$0 \cdot x^2 + 2 \left(-\frac{T}{2} \right) xy + (f) y^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + (fT^2) = 0.$$

a_{11} a_{12} a_{22} a_{13} a_{23} a_{33}

E másodrendű görbe determinánsa az utolsó sor elemei szerint kifejtve, megadja a harmadrendű aldeterminánsok értékeit:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{T}{2} & 0 \\ \frac{T}{2} & f & 0 \\ 0 & 0 & fT^2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 + fT^2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{T}{2} \\ -\frac{T}{2} & f \end{vmatrix} = -f \frac{T^4}{4}.$$

Mint hogy $A \neq 0$, ennél fogva e kérdéses geometriai hely valódi kúpszelet, s mint hogy az $A_{33} = -\frac{T^2}{4}$ minor mindig negatív, ennél fogva hyperbolának kell lennie. E hyperbola középpontjának koordinátái

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = 0;$$

$$y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}} = 0;$$

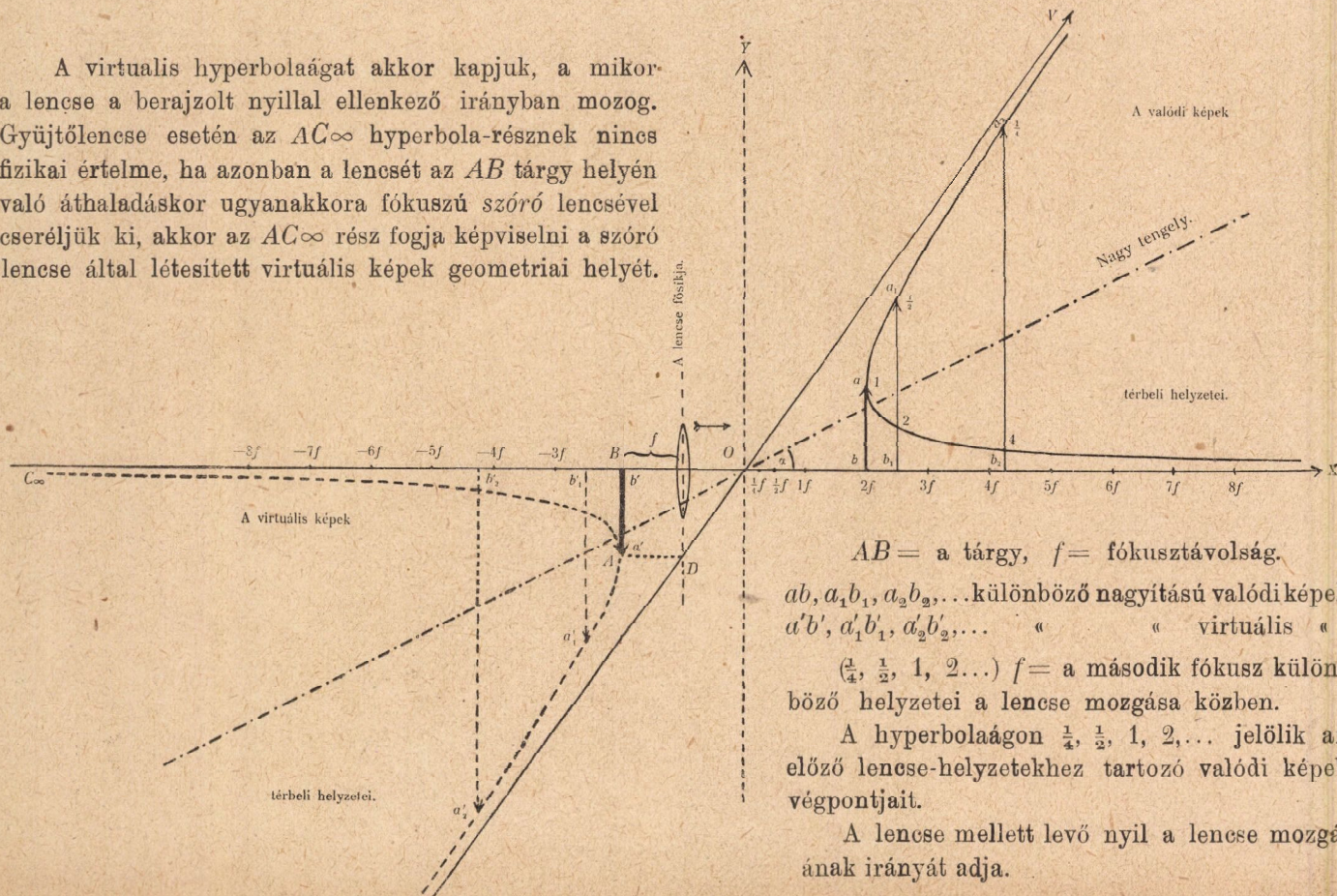
az asymptota irányhatározója pedig

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-T}{-f} = \frac{T}{f}.$$

Fix helyzetű tárgy s a tengely irányában mozgó lencse esetén tehát az egyes pontok térbeli képei oly hyperbolákat írnak le, melyeknek centruma az origóban van, a fix helyzetű tárgytól $2f$ távolságra.

A képek térbeli helyzetének feltüntetésére a grafikus ábrázolás kiválóan alkalmas, mert minden formulánál jobb betekintést nyújt a dolog *physikai* lényegébe. A 2. rajzban O az XY derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja s ugyanitt van a lencse második fókuszja a kiindulás pillanatában. Az AB tárgy A pontjából kiinduló, a lencse optikai tengelyével párhuzamos AD sugár D pontban metszi a lencse fő-síkját, törés után a 2. gyújtóponton megy át s így a valódi kép OV irányban a végtelenben keresendő. Ha most a lencsét a nyíl irányában $\tau = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ fókusz távolsággal elmozdítjuk, akkor a megfelelő valódi képek a második fókuszhoz $x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 1)f$ helyzetűektől számítva 4, 2, 1

A virtualis hyperbolaágot akkor kapjuk, a mikor a lense a berajzolt nyillal ellenkező irányban mozog. Gyűjtőlense esetén az $AC\infty$ hyperbola-résznek nincs fizikai értelme, ha azonban a lensét az AB tárgy helyén való áthaladáskor ugyanakkora fókuszú szóró lencsével cseréljük ki, akkor az $AC\infty$ rész fogja képviselni a szóró lense által létesített virtuális képek geometriai helyét.



$AB = a$ tárgy, $f =$ fókusz távolság.

$ab, a_1b_1, a_2b_2, \dots$ különböző nagyítású valódi képek
 $a'b', a'_1b'_1, a'_2b'_2, \dots$ " " virtuális "

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots) f =$ a második fókusz különböző helyzetei a lense mozgása közben.

A hyperbolaágon $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ jelölik az előző lense-helyzetekhez tartozó valódi képek végpontjait.

A lense mellett levő nyíl a lense mozgásának irányát adja.

2. ábra.

fókusz-távolságnyira fekszenek s nagyításuk is 4, 2, 1 lesz. Az így nyert képek végpontjai a hyperbolán $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 1$ számokkal és \dots, a_2, a_1, a betűkkel vannak megjelölve s folytonosan közelednek a fix helyzetű tárgyhöz.

A tárgy-távolságot ezután $\tau = (2, 3, 4, \dots, n) f$ értékre növelve, a megfelelő képtávolságok $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}) f$ lesznek s a nagyítás is ugyanilyen arányban kisebbedik.¹ Ha e kicsinyített képeket a második fókuszhoz $x = (2, 3, 4, \dots, n) f$ helyeitől számított x távolságokban felrakjuk, rögtön észre fogjuk venni, hogy a képek térbeli haladásának iránya megváltozott, a mennyiben a kicsinyített képek mindinkább távolodnak a tárgytól.

Az

$$r = \tau + x = \tau + \frac{f^2}{\tau}$$

összefüggésből könnyű megállapítani, hogy a tárgyhöz legközelebb eső valódi képet *egyszeres nagyítás* esetén nyerjük, vagyis a mikor $\tau = f$. Ugyanis a változó τ szerint differenciálva

$$\frac{dr}{d\tau} = 1 - \frac{f^2}{\tau^2},$$

már pedig ez a különbség csak akkor lesz zérussá, ha $\tau = f$, a mikor azután x is $= f$ s így a tárgyhöz legközelebb eső valódi kép $x = f + f = 2f$ távolságra van az origótól, illetőleg $4f$ távolságra a fix helyzetű tárgytól.

A térbeli képek fentebbi tulajdonságaiból könnyű megállapítani, hogy egy és ugyanahhoz az ernyőtávolsághoz két különböző nagyságú éles kép tartozik s a *nagyítások egymásnak reciprok értékei*. Különösen egyszerű e számítás akkor, ha az összes távolságokat a fókusz-távolság többszöröseiben fejezzük ki. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a $\tau_1 = \frac{1}{n} f$ beállításához $x_1 = n f$ képtávolság és $N_1 = n$ -szeres nagyítás; ellenben a $\tau_2 = n f$ beállításához $x_2 = \frac{1}{n} f$

¹ Ezen a helyen érdemes megfontolni, milyen nehézkes volna a különböző képtávolságok meghatározása a közönségesen használatos reciprok lencse-formulából, holott a NEWTON-féle képlet alapján minden adat *közvetlenül* felírható!

képtávolság és $N_2 = \frac{1}{n}$ nagyítás tartozik, a kép térbeli helye azonban mindkét esetben ugyanaz az

$$x = \tau_1 + x_1 = \tau_2 + x_2 = \left(n + \frac{1}{n}\right) f$$

érték lesz. Ez a körülmény rendkívül megkönnyíti a grafikus ábrázolást s teljesen feleslegessé teszi holmi számtáblázatok használatát, mert fejből is meg tudjuk mondani, hogy a 2, 3, 4, ... N -szeres nagyításhoz az

$$x = \left(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, \dots \left[N + \frac{1}{N}\right], \dots\right) f$$

ernyőtávolságok, illetőleg *térbeli helyzetek tartoznak* s ennek alapján a hyperbola igen kényelmesen szerkeszthető.

Egyébként a hyperbola

$$fy^2 - Txy = -fT^2 \quad (1)$$

egyenletéből egészen tetszőszerinti $x = nf$ ernyőtávolságokhoz is kiszámíthatjuk a nagyítás értékeit. A helyettesítés után egyenletünkben a fókusz-távolság teljesen kiesik s a képnagyság meghatározására az

$$y^2 - Tny = -T^2$$

egyenlethez jutunk, melyből

$$\left(\frac{y}{T}\right)^2 - n\left(\frac{y}{T}\right) = -1.$$

Ámde $\frac{y}{T} = N =$ a nagyítás, tehát ennek meghatározására az

$$N^2 - nN = -1. \quad (2)$$

másfokú egyenletet nyerjük, honnan

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1} \\ N_2 &= \frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1} \end{aligned} \right\}; N_1 N_2 = +1; \quad (3)$$

a miből szintén látható, hogy az $x = nf$ ernyőtávolsághoz tar-

tozó N_1 , illetőleg N_2 nagyítások egymásnak tényleg reciprokok értékei.

Ha a lencsét az előbbivel *ellenkező irányban* mozgatjuk (2. ábra), akkor a τ tárgy-távolságok negatívak lesznek, vagyis a tárgy a gyújtóponton belül kerül. Ilyen esetekben csak *virtuális* képekről beszélhetünk s ezeknek geometriai helyét a szakgatott vonallal jelzett negatív hyperbola-ág fogja képviselni. Minthogy azonban e virtuális képek gyűjtőlencse esetén csak *nagyítottak* lehetnek, ennél fogva a negatív hyperbola-ág AC_∞ részének itt *nincs fizikai értelme*. Ha azonban a gyűjtőlencsét a tárgy másik oldalára való áthelyezés közben ugyanakkora, de *negatív* fókuszú lencsével cseréljük ki, akkor e *szóró* lencsének további mozgása közben tényleg kicsinyített virtuális képek keletkeznek s az AC_∞ hyperbola-rész éppen *ezenek geometriai helyét* fogja képviselni.

Az eddigiekben sikerült egész általánosságban kimutatnunk, hogy *akár gyűjtő, akár szóró lencséről, akár valódi, akár virtuális képekről legyen is szó, a fix helyzetű térbeli pontnak képe a lencsének tengely-irányú translatorius mozgása közben hyperbola-pályán mozog*. Ha azonban a tárgyat szolgáló világító pont éppen az optikai tengelybe esik, akkor a hyperbola a dolog természete szerint e tengelybe eső egyenessé degenerálódik.

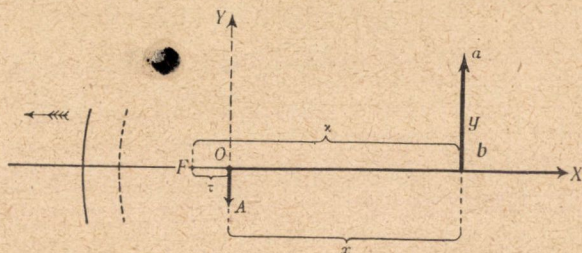
Meggondolásaink alapjául vékony lencsét választottunk ugyan s a lencsehibáktól teljesen eltekintettünk, eredményeink azonban a közönséges, úgynevezett «vastag» lencsékre, sőt egész lencse-rendszerekre is érvényesek, ha ezeknél is centralis sugarakra szorítkozunk. Ez a megszorítás «korrigált» lencse-rendszerek, például anasztigmátok esetén önmagától elesik s így ezeknél a modern optikai szerkezeteknél a hyperbola-tétel a korrigált képmező minden pontjára nézve korlátlanul érvényes.

II. Kis nyílású gömbtükrök.

Mindazok a következtetések, melyek a képek térbeli helyzetére vonatkoznak, változatlanul fentállanak gömbtükrök esetén is, mert a tárgy és képtávolság összefüggése ezeknél is ugyanaz. A különbség a lencsékhez képest mindössze annyi,

hogy a gyűjtőtükörnél a tárgy és annak valódi képe a tükörnek egy és ugyanarra az oldalára esik s e miatt fix helyzetű tárgy esetén a kép a tükör mozgása közben a tükörrel azonos irányban tolódik el. A képek térbeli helyzete itt is hyperbola, ennek tengelye azonban egészen más helyzetű, mint mozgó lencse esetében.

Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja (3. rajz) maga a fix helyzetű tárgy 0 pontja és legyen a mozgó tükör fókuszának távol-



3. ábra.

sága a tárgytól τ , akkor a hozzátartozó képtávolság $x = \frac{f^2}{\tau}$, a nagyítás $N = \frac{f}{\tau}$ s így az $y = ab$ kép a végpontjának adatai a fix koordináta-rendszerben a következők lesznek

$$x = x - \tau = \frac{f^2}{\tau} - \tau;$$

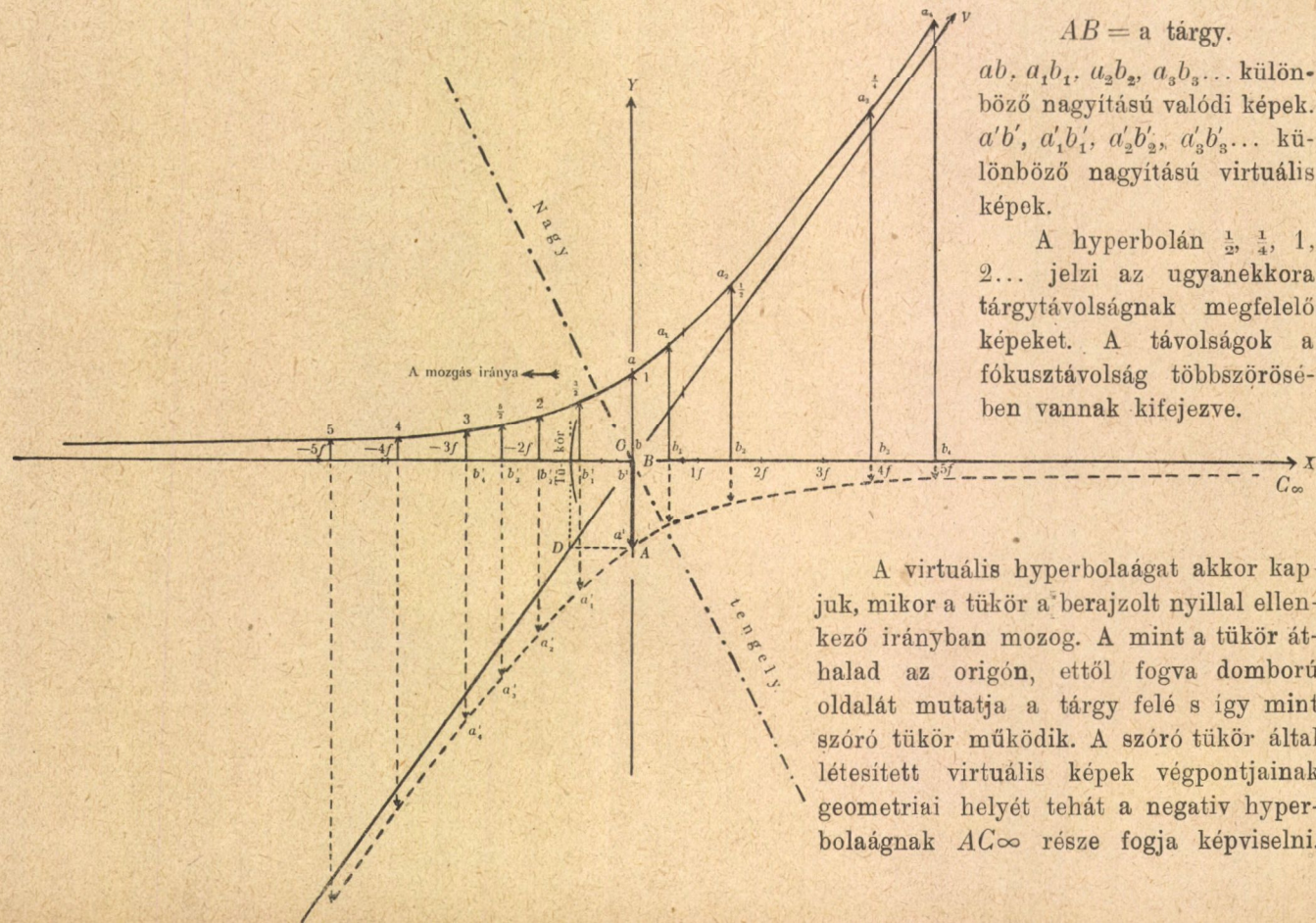
$$y = NT = \frac{f}{\tau} T.$$

A változó τ paramétert e két egyenletből kiküszöbölve:

$$fy^2 - Txy - fT^2 = 0$$

egyenlettel nyerjük az A pont térbeli képeinek geometriai helyét. Ez a mozgó lencsénél talált 1. egyenlettől csak az abszolút tag előjelében különbözik, a mi a hyperbola-jellegén mit sem változtat.

A képek térbeli helyzetének grafikus ábrázolása (4. rajz) igen tanulságos és minthogy itt csak egyetlenegy fókususról van szó, a szerkesztés jóval egyszerűbb, mint mozgó lencse eseté-



$AB = a$ tárgy.

$ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 \dots$ különböző nagyítású valódi képek.
 $a'b', a'_1b'_1, a'_2b'_2, a'_3b'_3 \dots$ különböző nagyítású virtuális képek.

A hyperbolán $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 2 \dots$ jelzi az ugyanekkora tárgytávolságnak megfelelő képeket. A távolságok a fókusz távolság többszöröseiben vannak kifejezve.

A virtuális hyperbola ágát akkor kapjuk, mikor a tükör a berajzolt nyíllal ellenkező irányban mozog. A mint a tükör áthalad az origón, ettől fogva domború oldalát mutatja a tárgy felé s így mint szóró tükör működik. A szóró tükör által létesített virtuális képek végpontjainak geometriai helyét tehát a negatív hyperbola ágának AC_∞ része fogja képviselni.

4. ábra.

ben. Az XY derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja a fix helyzetű tárgy B pontja s ugyanitt van a tükör fókusza is a kiindulás pillanatában. Az AB tárgy A pontjából az optikai tengellyel párhuzamosan jövő AD sugár D pontban metszi a fősíkot, a visszaverődés után a fókuszon megy keresztül s így a valódi kép OV irányban a végtelenben keresendő. Ha most a tükör a nyíl irányában $\tau = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)f$ távolsággal elmozdul, akkor a valódi képek a fókuszs mindenkori helyzetétől számítva $x = (4, 2, 1)f$ távolságra esnek s nagyításuk is $N = 4, 2, 1$ lesz. Az ily módon nyert képek végpontjai a rajzban $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ számokkal, illetve $\dots a_3, a_2, a_1, a$ betűkkel vannak megjelölve. A szerkesztést folytonosan növekvő $\tau = (2, 3, 4, \dots n)f$ tárgy-távolságokkal tovább folytatva $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n})f$ lesz, vagyis a valódi képek mindinkább közelednek a fókuszhhoz, közben nagyításuk $N = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}$ is egyre kisebbedik s a térben a tükörrel együtt állandóan bal felé haladnak. *Forduló pont tehát a tükrök esetében nincs s így egy és ugyanahhoz az ernyőtávolsághoz csak egyféle nagyítás tartozik.* A képek térbeli helyzete szempontjából éppen ez a legnagyobb különbség a tükrök és lencsék között. A hyperbola asymptotájának iránya egyébként most is a $\operatorname{tg} 2a = \frac{T}{f}$ értékkel van meghatározva, centruma szintén a kezdőpontban van, az a szög azonban nem a nagy, hanem a kis tengely irányát adja.

Ha a tükör mozgásának irányát megváltoztatjuk, akkor a tárgy a fókuszon belül kerülén: nagyított, virtuális képeket kapunk s ezek együttvéve a hyperbola negatív ágát adják egészen az A pontig. A mint a tükör áthalad a kezdőponton, ettől fogva domború oldalát fordítja a tárgy felé s így *mint szórótükör fog működni.* A szórótükör által létesített kicsinyített, virtuális képek geometriai helyét tehát a negatív hyperbola-ágnak AC_∞ része fogja képviselni.

A tetszésszerű $x = nf$ ernyőtávolsághoz tartozó nagyítást mozgó tükör esetén az

$$N^2 - nN = +1$$

másodfokú egyenlet megoldásából származó

$$N = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1}$$

kifejezés fogja megadni s minthogy ez az n pozitív és negatív értékei mellett egyaránt valós számokhoz vezet, ennél fogva ennek a hyperbolának nincsenek imaginarius pontjai. A két gyök szorzata ismert összefüggés értelmében

$$N_1 N_2 = -1; \quad N_2 = -\frac{1}{N_1};$$

a mi annyit jelent, hogy a két *ellenkező előjelű* megoldás közül az egyik a másiknak negatív reciprok értékével egyenlő. Valódi képeknél természetesen csak a pozitív, virtuális képeknél csak a negatív megoldásnak van fizikai értelme.

A vázolt gondolatmenet segítségével sikerült a «geometriai fénytán hyperbola-tételét» mozgótükrökre s ezzel együtt bármilyen összetett optikai szerkezetre nézve általánosítani. Részletes számításokkal ki lehet mutatni, hogy tételünk nemcsak fix helyzetű tárgy és mozgó optikai eszköz esetén, hanem akkor is érvényes marad, ha *magá a tárgy is egyenletes mozgást végez* az optikai tengellyel párhuzamos irányban. A hyperbola térbeli alakja ebben az esetben a tárgy és optikai eszköznek egymásra vonatkoztatott sebességétől függ s egyenessé degenerálódik abban az esetben, mikor a relatív sebesség zérussá válik.

Bemutatott tételünk több szempontból is figyelmet érdemel. Mindenekelőtt érdekes az a körülmény, hogy meglepően általános érvénye mellett könnyű szerrel, minden nagyobb matematikai apparátus nélkül, szinte elemi eszközökkel levezethető, ezenkívül didaktikai szempontból is igen tanulságos, mert a képzalkotás és térbeli elhelyezkedésnek finom elemzésére kényszerít s érdekes alkalmazását mutatja a NEWTON-féle lencse-formula sok oldalú használhatóságának; végül klasszikus példa arra nézve, hogy a fizikában a legegyszerűbb tételek (például fix helyzetű tárgy és mozgó lencse!) megfordíthatóságát sem szabad külön vizsgálat nélkül «magától értetődő»-nek tartanunk.

IRREDUCIBILIS FORMÁK.

KÜRSCHÁK JÓZSEF r.-tagtól.

1. §. *Formán* e dolgozatban mindig a z változó oly rationalis egész függvénye értendő, melynek együtthatói *rationalis számok*. *Egész* a forma, ha együtthatói *rationalis egész számok*.

A formát *reducibilisnek*, illetőleg *irreducibilisnek* mondjuk a szerint, hogy *alacsonyabb fokú formák* szorzatára bontható-e vagy sem. *Egész forma* csak úgy lehet *reducibilis*, ha *alacsonyabb fokú egész formák* szorzatára bontható. Ha valamely egész forma *reducibilis*, akkor az nyilván bármely m (*rationalis egész*) *modulusra nézve* is *reducibilis*, azaz modulo m két alacsonyabb fokú forma szorzatával *congruens*.

SCHÖNEMANN¹ a formák irreducibilitására a következő *ele-
gendő* feltételt találta: A

$$H(z) = f^q(z) + pM(z)$$

kifejezésben jelentsen q *természetes számot*, p *törzsszámot*, az

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$$

egész forma legyen modulo p *irreducibilis*, az $M(z)$ *egész forma legyen alacsonyabb fokú mint* $f^q(z)$ *és ne legyen modulo* p az

¹ SCHÖNEMANN TH.: Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. *Journ. für Math.*, 32. köt. (1846), 93–105. lap. L. különösen a 61. §-t a 100–101. lapon.

Későbbi keletű és csak az $f(z) = z$ esetre szorítkozik:

EISENSTEIN G.: Über die Irreduzibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Teilung der ganzen Lemniscate abhängt. (Első közlemény.) *Journ. für Math.*, 39. köt. (1850), 160–179. lap. L. különösen a 166–167. lapot.

$f(z)$ -vel osztható. Akkor $H(z)$ nem bontható alacsonyabb formák szorzatára, sőt már modulo p^2 irreducibilis.

E tételt az $f(z) = z$ esetben a *specialis*, tetszésszerűtí fokú $f(z)$ esetében az általános SCHÖNEMANN-tételnek fogom nevezni.

Ama tételek között, melyek SCHÖNEMANN *specialis* tételének kiterjesztésére törekednek, de általános tételét nem foglalják magukban, legmesszebb az megy, melyet a következőkben DUMAS¹ szorzat-tételének nevezek. SCHÖNEMANN általános tételét BAUER² és (még tovább menve) DUMAS³ általánosította, de ez az általánosítás nem foglalja magában DUMAS szorzat tételét.

Hosszabb eszmecsere, melyet 1919 nyarán BAUER MIHÁLY úrral e tárgyról folytattam, engem DUMAS szorzattételének olyan általánosítására vezetett, mely a BAUER-DUMAS-tételt is magában foglalja, tehát egyszersmind az általános SCHÖNEMANN-tételt is. Vizsgálataimat a következőkben úgy szándékozom előterjeszteni, hogy megértésükhöz DUMAS értekezésének ismerete nem szükséges.

A forma rendje.

2. §. Jelentsen p törzsszámot. Ha valamely szám mint két olyan egész szám hányadosa állítható elő, melyek egyike sem osztható p -vel, akkor azt modulo p (vagy a p -re nézve) *egységnek*

¹ DUMAS G.: Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels. *Journ. de Math.*, 6. sorozat, 2. köt., (1906), 191—258. lap. Különösen 3. §., 3. szám, 214—217. lap.

Az első szigorú bizonyítást BAUER M. adta következő értekezésében:

Elemi irreducibilitási vizsgálatok. *Math. és Természettud. Értesítő*, 25. köt., (1907). 312—318. lap.

Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen. *Journ. für Math.*, 134. köt. (1908), 15—22. lap.

² BAUER M.: Adalékok az irreducibilis egyenletek elméletéhez, második közlemény. *Math. és Phys. Lapok*, 13. köt. (1904), 319—322. lap. — Verallgemeinerung eines Satzes von SCHÖNEMANN. *Journ. für Math.*, 128. köt. (1905), 87—89. lap.

³ DUMAS G.: i. h., 12. §., (249—258. lap). Az ottani e megszorítás fölösleges.

mondjuk. Például $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{8}$, $6 = \frac{6}{1}$ a $p = 11$ törzsszámra nézve egységek. Bármely a zérustól különböző rationalis szám (egyetlen egy módon) az $a = p^u e$ alakban írható, hol a egész kitevőt jelent (mely lehet pozitív, zérus vagy negatív), e pedig p -re nézve egység. Az a kitevő a -nak a p -re vonatkozó rendje. (A 0-nak a $+\infty$ rendet tulajdonítjuk.)

Ha az $F(z) = a_0 + \dots + a_m z^m$ forma $a_i z^i$ tagjának együtt-hatója (p -re nézve) a_i rendű, akkor magát e tagot is a_i rendűnek mondjuk. $F(z)$ rendjén a tagok rendszámainak minimumát értjük. Ha $F(z)$ -nek a p -re vonatkozó rendje ≥ 0 , akkor $F(z)$ -t modulo p egész formának mondjuk.

3. §. Minden $F(z)$ formához egy diagrammát rendelünk, melynek pontjait a következő módon állítjuk elő. Felveszünk egy derékszögű coordinata-rendszert (a szokott helyzetben) és az $a_i z^i$ tagot azzal az \mathfrak{A}_i ponttal ábrázoljuk, melynek koordinatái $x = i$ és $y = a_i$ (hol a_i az a_i -nek p -re vonatkozó rendje). Oly taghoz, melynek együtt-hatója zérus, nem rendelünk pontot.

Ha a $\mu x + y = u$ egyenlet ábrázolta (ferde vagy vízszintes) egyenes, melyet Δ_μ^u -val jelölünk, az $F(z)$ diagrammának egyik (alsó) támasztó egyenesre, vagyis ha a diagrammának egy pontja sincs a Δ_μ^u egyenes alatt és legalább egy pontja rajta van a Δ_μ^u -n: akkor e tényt az $F(z) \not\leq \Delta_\mu^u$ képlettel fejezem ki. (Olvasd: $F(z)$ reátámaszkodik a Δ_μ^u egyenesre.) Minden μ -hez egy és csak egy támasztó egyenes tartozik.

Ha $\mu = 0$, akkor az $F(z) \not\leq \Delta_\mu^u$ képletben u éppen $F(z)$ -nek az előbbi cikkelyben értelmezett rendje (a p -re nézve). Azért bármely μ esetében az $F(z) \not\leq \Delta_\mu^u$ követelésnek megfelelő u számról azt mondjuk, hogy $F(z)$ -nek (modulo p) a μ irányban (vagy a μ lehajlás által jellemzett irányban) vett rendje. Ha $u \geq 0$, akkor $F(z)$ -t a μ irányban modulo p egész formának nevezzük.

Ama tagok összegét, melyeknek a Δ_μ^u támasztó egyenesen levő pontok felelnek meg, az $F(z)$ forma μ irányban vett fő-részenek nevezzük és $F_0(z)$ -vel jelöljük.

Ha szemügyre vesszük, hogy két forma szorzatának együtt-hatóit hogyan állítjuk elő a tényezők együtt-hatóiból, akkor a következő tétel helyessége könnyen belátható:

Két forma szorzatának a μ irányban vett rendje egyenlő a tényezők ugyanebben az irányban vett rendszámainak összegével.

Vagyis: ha

$$F(z) \vee \mathcal{A}_\mu^u \quad \text{és} \quad G(z) \vee \mathcal{A}_\mu^v,$$

akkor

$$F(z)G(z) \vee \mathcal{A}_\mu^{u+v}.$$

Diagrammák összedása.

4. §. Jelentsen A egy véges számú pontból álló diagrammát (nem okvetlenül valamely $F(z)$ formához tartozót). Hacsak nincsen valamennyi pontja egy függőleges egyenesen, akkor közülök (egyetlen egy módon) kiválaszthatunk olyan

$$\mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b, \mathcal{A}_c, \dots, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l \quad (a < b < c \dots < k < l) \quad (1)$$

sorozatot, hogy

$$\overline{\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b}, \overline{\mathcal{A}_b \mathcal{A}_c}, \dots, \overline{\mathcal{A}_k \mathcal{A}_l} \quad (2)$$

egy alulról convex törött vonalnak oldalai és a diagramma minden pontja vagy ezen a vonalon, vagy fölötte van. E törött vonalat, mely pusztán egy egyenesdarabból is állhat, a diagrammához tartozó (NEWTON-féle) polygonnak nevezzük. Az (1) alatti pontok a diagramma *szögpontjai*, a (2) alatti egyenesdarabok a *határoló húrjai*.

Ha a diagramma pontjai egy függőleges egyenesen vannak, vagy a diagrammának éppenséggel csak egy pontja van, akkor a polygon egy szögpontra szorítkozik, még pedig a diagrammának legmélyebb (esetleg egyetlen) pontjára.

Bármely vízszintes vagy ferde irányban a diagrammához egy és csak egy támasztó egyenes vonható. Ez általában a diagrammának csak egy pontját, még pedig egy szögpontját tartalmazza. De vannak olyan támasztó egyenesek is, melyek a diagrammának két vagy több pontját tartalmazzák, tudniillik a határoló húrokat tartalmazó egyenesek és csak ezek. Mindegyiken a diagrammának rajta levő pontjai közül a két szélső egybeesik a határoló húr végpontjaival.

A támasztó egyenesek összessége egyértelműen meghatározza a diagrammához tartozó polygont.

Ugyanis a sík tetszésszerinti P pontja akkor és csak akkor van e polygonon, ha legalább egy támasztó egyenes tartalmazza P -t és egy támasztó egyenes sem tartalmaz olyan pontot, mely függőlegesen P fölött van.

5. §. Jelentse $\mathcal{A}_i = (x_i, y_i)$ valamely A diagrammának, $\mathcal{B}_k = (\xi_k, \eta_k)$ valamely B diagrammának tetszésszerinti pontját. A

$$\mathcal{C}_{ik} = (x_i + \xi_k, y_i + \eta_k)$$

pontok diagrammáját (melyben egybeeső \mathcal{C}_{ik} pontokat csak egyszer veszünk tekintetbe), A és B összegének nevezzük. Jele: $A+B$.

a) Ha A -nak és B -nek μ irányú támasztó egyenesei \mathcal{A}_μ^A és \mathcal{A}_μ^B : akkor az $A+B$ diagramma μ irányú támasztó egyenes \mathcal{A}_μ^{A+B} .

β) Ha A -nak ama pontjai között, melyek μ irányú támasztó egyenesén vannak, \mathcal{A}_i és \mathcal{A}_j a legkisebb, illetőleg a legnagyobb abszcissájú; továbbá B -nek ama pontjai között, melyek ennek μ irányú támasztó egyenesén vannak, \mathcal{B}_k és \mathcal{B}_l a legkisebb, illetőleg a legnagyobb abszcissájú: akkor $A+B$ -nek ama pontjai között, melyek ennek μ irányú támasztó egyenesén vannak, \mathcal{C}_{ik} és \mathcal{C}_{jl} a szélsők. (\mathcal{A}_i és \mathcal{A}_j vagy pedig \mathcal{B}_k és \mathcal{B}_l esetleg egybe is eshetik.)

Dumas szorzat-tétele.

6. §. A 3. §. végén a szorzat rendjére nézve kimondott tételt egybevetvén a 4. §-lyel és az 5. §-nek a) tételével, azt találjuk, hogy az $F(z)G(z)$ szorzat diagrammájának polygonja azonos az $F(z)$ és $G(z)$ diagrammáinak összegéhez tartozó polygonnal.

Ezt tudván, az 5. §-nek β) tétele megadja az $F(z)$ és $G(z)$ formákhoz tartozó diagrammák határhúrjaiból az $F(z)G(z)$ szorzat diagrammájának határhúrjait. Ebben a szerkesztésben áll DUMAS szorzattétele.

A dolog lényege különösen élesen kiemelhető, ha az $F(z)$ formához tartozó diagramma határhúrjainak μ lehajlásait ama

forma jellemző (vagy *characteristikus*) lehajlásainak nevezzük és mindegyiket olyan többszörösséggel számítjuk, mely a megfelelő határhúr vízszintes vetületével egyenlő. Ekkor DUMAS tételének leglényegesebb részét így fogalmazhatjuk:

F(z) G(z) jellemző lehajlásainak összességét F(z) és G(z) jellemző lehajlásai alkotják, mindegyiket azzal a többszörösséggel számítva, mely az egyes tényezőkre vonatkozó többszörösségeinek összege.

7. §. E tétel magában foglalja a specialis SCHÖNEMANN-féle tételt. Ha ugyanis

$$H(z) = z^n + pA(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n$$

együtthatói rendre a p -vel osztható egész számok és c_0 nem osztható p^2 -tel: akkor $H(z)$ diagrammája a $(0, 1)$ és $(n, 0)$ pontok által határolt egyenesdarabra szorítkozik. Ennek lehajlása: $\frac{1}{n}$.

Ha $H(z)$ tényezőkre bomlanék, akkor bármelyik tényező polygonja megint csak egy $\frac{1}{n}$ lehajlású egyenesdarab volna. Ennek függőleges vetülete $\frac{k}{n}$ hosszúságú volna, hol $0 < k < n$. De ez lehetetlen, mert egy formához tartozó diagramma bármely határhúrjának vízszintes és függőleges vetületeinek hosszai csak egész számok lehetnek.

Ha $H(z)$ -hez hozzáadjuk valamely n -nél alacsonyabb fokú egész formának p^2 -tel való szorzatát, akkor az új forma nyilván megint irreducibilis. Tehát $H(z)$ nem csak a szó rendes értelmében, hanem modulo p^2 is irreducibilis.

A modulo p irreducibilis formák általánosítása.

8. §. Ha (a p -re vonatkoztatott vizsgálatoknál) az $F(z) - G(z)$ különbségnek μ irányban vett rendje $> u$, akkor e tényt az

$$F(z) \equiv G(z) \pmod{\mathcal{A}_\mu^n}$$

aequipollentiával fejezem ki. Például az

$$F(z) \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}_0^n}$$

æquipollentia azonos tartalmú az

$$F'(z) \equiv 0 \pmod{p}$$

congruentiával. Mindkettő azt fejezi ki, hogy $\frac{1}{p} F'(z)$ modulo p egész forma.

Az $F'(z)$ formát modulo J_μ^n n -ed fokúnak mondjuk, ha a μ irányban u -nál magasabb rendű tagok elhagyása után megmaradó forma a szó rendes értelmében n -ed fokú.

9. §. Ha $H(z)$ -hez találhatók olyan $F'(z)$, $G(z)$ formák, hogy

$$H(z) = F'(z) G(z) \pmod{J_\mu^n}; \quad (1)$$

és ezeknek (a szó rendes értelmében vett) n_1 és n_2 fokszámai olyan pozitív számok, melyeknek összege kisebb vagy ugyanakkora, mint $H(z)$ -nek (ugyancsak a rendes értelemben vett) foka: akkor DUMAS $H(z)$ -t (a p -re vonatkoztatott vizsgálatoknál) modulo J_μ^n reducibilisnek mondja. Ha ilyen $F'(z)$ és $G(z)$ formák nincsenek, akkor $H(z)$ modulo J_μ^n irreducibilis.

Ha $H(z) \not\equiv 0 \pmod{J_\mu^n}$, akkor az (1) alatti æquipollentia ugyanazt fejezi ki, mint a főrészekre (3. §.) szorítózó

$$H_0(z) = F'_0(z) G_0(z) \pmod{J_\mu^n} \quad (2)$$

æquipollentia.

Azok a vízszintes irányban zérus rendű formák, melyek az abszcissák tengelyére mint modulusra nézve irreducibilisek, azonosak azokkal a modulo p egész formákkal, melyeket modulo p irreducibilisnek szokás mondani. Legközelebbi általánosításuknak azok a formák tekintendők, melyek valamely μ irányban zérus rendűek és modulo J_μ^0 irreducibilisek.

10. §. Ha

$$H(z) \not\equiv 0 \pmod{J_\mu^0}$$

és μ irracionális szám, akkor $H_0(z)$ pusztán állandó, mert az i , α_i egész számok csak úgy elégíthetik ki az $\alpha_i + \mu i = 0$ egyenletet, ha $i = \alpha_i = 0$. Ebben az esetben a tényezőkre való felbontás kérdése fel sem merül.

Tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, melyben

$\mu = \frac{r}{s}$, hol r és s egész számok. Az s -et mindig pozitívnak választhatjuk, továbbá felteszszük, hogy r és s viszonylagos törzsszámok. (Ha $\mu=0$, akkor $r=0$, $s=1$.)

A $\mu = \frac{r}{s}$ irányban zérus rendű $H(z)$ forma csak akkor lehet modulo Δ_μ^0 irreducibilis, ha főrésze $\varphi(p^{-r}z^s)$ alakú, hol $\varphi(z)$ olyan modulo p egész formát jelent, mely modulo p irreducibilis.

A tétel nem fordítható meg. Például a $\mu = \frac{1}{2}$ esetben $p^{-1}x^2$ a mondott alakú és mégis reducibilis.

11. §. Jelentsen $f(z)$ a μ irányban zérus rendű és Δ_μ^0 modulusra nézve irreducibilis formát. Ha

$$A(z) \vee \Delta_\mu^u \text{ és } B(z) \vee \Delta_\mu^v,$$

akkor $A(z)B(z)$ csak úgy lehet modulo Δ_μ^{u+v} az $f(z)$ -vel osztható, ha vagy $A(z)$ a Δ_μ^u -ra nézve, vagy $B(z)$ a Δ_μ^v -re nézve osztható $f(z)$ -vel.

$A(z)B(z)$ -t akkor mondjuk modulo Δ_μ^{u+v} az $f(z)$ -vel oszthatónak, ha van olyan $G(z)$, mely kielégíti az

$$A(z)B(z) \equiv f(z)G(z) \pmod{\Delta_\mu^{u+v}}$$

æquipollentiát. Föltevéseink értelmében ez csak úgy lehetséges, hogy

$$A_0(z)B_0(z) \equiv f_0(z)G_0(z) \pmod{\Delta_\mu^{u+v}}.$$

Ha $f(z)$ egyenlő z -vel vagy tőle csak egy állandó tényezőben különbözik, akkor innen a kimondott tétel helyessége az æquipollentiának fogalmából világos. Tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, melyben $f_0(z)$ absolut tagja a p -re nézve egység.

Ha mindenütt a legalacsonyabb fokú tagot kiemeljük, akkor

$$A_0(z) = p^{\alpha} z^e \bar{A}_0(z), \quad B_0(z) = p^{\beta} z^{\sigma} B_0(z), \quad G_0(z) = p^{\gamma} z^{\tau} \bar{G}_0(z),$$

hol \bar{A}_0 , \bar{B}_0 , \bar{G}_0 olyan a μ irányban zérus rendű formák, melyeknek absolut tagja a p -re nézve egység. Az előbbi æquipollentia így is írható

$$p^{\alpha+\beta} z^{e+\sigma} A_0(z) B_0(z) - p^{\gamma} z^{\tau} f_0(z) G_0(z) \equiv 0 \pmod{\Delta_\mu^{u+v}}.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy $\alpha + \beta = \gamma$ és $\rho + \sigma = \tau$, továbbá $\gamma + \mu\tau = u + v$. Ennélfogva

$$A_0(z)B_0(z) - f_0(z)G_0(z) \equiv 0 \pmod{\Delta_\mu^0}.$$

Ha $\mu = \frac{r}{s}$, akkor az itt szereplő formák mint $p^{-r}z^s$ olyan formái foghatók fel, melyeknek együtthatói modulo p egészek. Ha $p^{-r}z^s$ helyébe z -t írunk, az æquipollentia

$$U(z)V(z) - \varphi(z)W(z) \equiv 0 \pmod{p}$$

alakú congruentiába megy át.

E congruentia értelmében $U(z)V(z)$ modulo p osztható $\varphi(z)$ -vel. Minthogy $\varphi(z)$ modulo p irreducibilis, azért ez csak úgy lehetséges, hogy vagy $U(z)$, vagy $V(z)$ modulo p osztható $\varphi(z)$ -vel. Ha

$$U(z) \equiv \varphi(z)\psi(z) \pmod{p},$$

akkor

$$A_0(z) = p^a z^e U(p^{-r}z^s) \equiv f_0(z)\psi(p^{-r}z^s) \pmod{\Delta_\mu^u},$$

azaz $A_0(z)$ valóban modulo Δ_μ^u osztható $f_0(z)$ -vel.

12. §. Ha az $f(z)$ forma n -ed fokú, akkor bármely $H(z)$ forma (még pedig csak egy módon) a

$$H(z) = Q(z)f(z) + R(z) \tag{1}$$

alakban fejezhető ki, hol $R(z)$ foka $< n$.

Ha $f(z)$ a p törzsszámra nézve a μ irányban egész forma és legmagasabb fokú tagjának rendje egyenlő zérussal, továbbá $H(z)$ a μ irányban u rendű: akkor $Q(z)$ és $R(z)$ egyike sem lehet a μ irányban u -nál alacsonyabb rendű.

Ha ugyanis a $Q(z)$ formának a μ irányban vett rendje $< u$ és $Q(z)$ -nek a μ irányban vett főrésznének tagjai közül a z^λ -t tartalmazó a legmagasabb fokú: akkor az (1) alatti képlet jobb oldalának kifejtett alakjában a $z^{\lambda+n}$ -et tartalmazó tag rendje $< u$. De ez lehetetlen, mert $H(z)$ -nek rendje egyenlő u -val.

De ha $H(z)$ és $Q(z)$ közül egyiknek rendje sem $< u$, akkor $R(z) = H(z) - Q(z)f(z)$ is legalább u rendű.

13. §. Legyen $f(z)$ a szó rendes értelmében és modulo Δ_μ^0

egyaránt n -ed fokú. Továbbá tegyük fel, hogy $f(z) \not\in \mathcal{A}_\mu^0$ és hogy $f(z)$ modulo \mathcal{A}_μ^0 irreducibilis.

Ha

$$A(z) \not\in \mathcal{A}_\mu^u \quad \text{és} \quad B(z) \not\in \mathcal{A}_\mu^v,$$

továbbá $A(z)$ modulo \mathcal{A}_μ^u és $B(z)$ modulo \mathcal{A}_μ^v nem osztható $f(z)$ -vel, végre

$$A(z)B(z) = Q(z)f(z) + R(z),$$

hol $R(z)$ foka $< n$: akkor $R(z) \in \mathcal{A}_\mu^{u+v}$.

Ugyanis az előbbi §. szerint $R(z)$ -nek a μ irányban vett rendje $\geq u+v$, a 11. §. szerint pedig $\leq u+v$.

Az általános szorzat-tétel.

14. §. Ezentúl $f(z)$ -n mindig olyan n -edfokú formát értünk, mint az előbbi §-ben.

Bármely $F(z)$ forma (még pedig csak egy módon) az

$$F(z) = A_0(z) + \dots + A_i(z)f^i(z) + \dots + A_1(z)f^1(z)$$

alakban írható, hol minden $A_i(z)$ foka $< n$.

$F(z)$ minden tagjához egy \mathfrak{A}_i pontot rendelünk, melynek derékszögű koordinatái $x=i, y=a_i$, hol a_i az $A_i(z)$ együtthatónak a μ irányában vett rendje (a szó eddigi, továbbra is megtartandó értelmében). Az így előállított diagrammát az $F(z)$ -hez tartozó A_f diagrammának nevezzük. Az eddig használt diagramma az $f(z) = z$ esetnek felel meg.

Ha az A_f diagrammának a ν irányban vont támasztó egyenese

$$\nu x + y = u,$$

akkor azt mondjuk, hogy $F(z)$ -nek a ν irányban u súlya van.

Ha $\nu \geq 0$, akkor az $F(z)G(z)$ szorzatnak a ν irányban vett súlya egyenlő a tényezőknek ugyanebben az irányban vett súlyainak összegével.

Ha a tényezők n -nél alacsonyabb fokúak, akkor

$$A(z)B(z) = R(z) + Q(z)f(z),$$

hol a 13. §. értelmében $R(z)$ -nek súlya (vagyis a μ irányban

vett rendje) pontosan egyenlő $A(z)$ és $B(z)$ rendjeinek összegével, $Q(z)$ -nek (tehát egyszersmind $Q(z)f(z)$ -nek) súlya pedig ennél semmi esetre sem kisebb. Ennélfogva $A(z)$ és $B(z)$ súlya valóban egyenlő $A(z)$ és $B(z)$ súlyainak összegével.

Innen közvetlenül világos, hogy a tétel két $A_i(z)f^i(z)$, $B_k(z)f^k(z)$ alakú forma szorzatára nézve is helyes.

Legyen most már

$$F(z) = A_0(z) + A_1(z)f(z) + \dots, \quad G(z) = B_0(z) + B_1(z)f(z) + \dots;$$

a ν irányban legyen $F(z)$ súlya u , $G(z)$ súlya v .

$F(z)G(z)$ olyan részletszorzatok összege, melyek mindegyikének súlya $\geq u+v$. Tehát $F(z)G(z)$ súlya is $\geq u+v$.

Továbbá $F(z)G(z)$ -nek legalább egy tagja pontosan $u+v$ súlyú. Legyenek ugyanis $F(z)$ -nek u súlyú és $G(z)$ -nek v súlyú tagjai közül

$$A_i(z)f^i(z), \quad B_k(z)f^k(z)$$

az $f(z)$ -ben a legalacsonyabb fokúak. $F(z)G(z)$ -nek arra a tagjára, mely $f(z)$ -nek $(i+k)$ -dik hatványát tartalmazza, csak azok az

$$(A_\rho(z)f^\rho(z)) (B_\sigma(z)f^\sigma(z)) = R_{\rho\sigma}(z)f^{\rho+\sigma}(z) + Q_{\rho\sigma}(z)f^{\rho+\sigma+1}(z)$$

részletszorzatok folynak be, melyekre nézve $\rho+\sigma$ egyenlő $(i+k)$ -vel vagy $(i+k-1)$ -gyel. E részletszorzatok tekintetbe jövő részei közül $R_{ik}(z)f^{i+k}(z)$ -nek súlya $= u+v$, minden másnak súlya $> u+v$. Ennélfogva $F(z)G(z)$ szóban forgó tagjának súlya csakugyan $u+v$.

15. §. Ha $F(z)$, $G(z)$ és $F(z)G(z)$ diagrammait A_f , B_f és C_f -fel jelöljük, akkor a mondottak értelmében C_f pozitív lehajlású támasztó egyenesei azonosak A_f+B_f pozitív lehajlású támasztó egyenesével. E pozitív lehajlású támasztó egyenesek (mint könnyen belátható) egyértelműen meghatározzák a diagrammához tartozó polygon pozitív lehajlású részét. Ennélfogva:

Az $F(z)G(z)$ szorzat C_f diagrammájához tartozó polygon pozitív lehajlású része azonos az $F(z)$ és $G(z)$ formák A_f és B_f diagrammáinak összegéhez tartozó polygon pozitív lehajlású részével.

Ha a jellemző lehajlások fogalmát kiterjesztjük a most

vizsgált diagrammák esetére, akkor az *általános szorzattétel* így fejezhető ki:

Az $F(z)G(z)$ szorzatnak az $f(z)$ -re vonatkozó pozitív jellemző lehajlásainak összességét az $F(z)$ és $G(z)$ tényezőknél ugyancsak az $f(z)$ -re vonatkozó pozitív jellemző lehajlásai alkotják, mindegyiket olyan többszörösséggel számítva, mely az egyes tényezőkre vonatkozó többszörösségeinek összege.

A *negatív* jellemző lehajlásokra e tétel nem érvényes.

A BAUER-DUMAS-tétel, melynek részletezésével itt nem foglalkozhatom, e tételhez körülbelül úgy viszonylik, mint a speciális SCHÖNEMANN-tétel DUMAS szorzat-tételéhez.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1919 október 20.-án tartott üléséből.)

A PROTUBERANTIÁK PERIODUSA.

FÉNYI GYULA S. J. I. tagtól.

31 évnök megfigyelései feküsznek előttem, teljesen kidolgozva 1917 év végéig, áttekinthető táblázatokkal, kutatásra készen; minden egyes protuberantia nagy táblában természetűen le van rajzolva, készen a sokszorosításra. Ezekből a táblázatokból állítottam össze a következő lapon lévő kimutatást, mely a protuberantia-jelenség időszakos változásáról a kívánt felvilágosítással szolgál.

Az I. oszlop a megfigyelés éveinek számát tartalmazza, melyek közt a Naptevékenység maximumainak évei vastagabb betűkkel vannak nyomva, a minimum évei pedig finomabbakkal vannak feltüntetve. A hozzá csatolt tizedesjegy azonossá teszi ezeket a maximumok és minimumok ama pontos epocháival, melyeket WOLF R. és WOLFER A. zürichi csillagászok a napfoltok mindenfelül összegyűjtött észleléseiből az évnök tizedrészéig meghatároztak. A napfoltok maximuma, mely észleléseimnek időszakát legközelebb megelőzte, 1883-9-re állapított meg. Megfigyeléseim 1886 évben, tehát éppen két évvel e maximum után kezdődtek meg.

A II. oszlop a Kalocsán végzett megfigyelési napok számát tartalmazza.

A III. oszlop a legalább 30'' magasságú protuberantiák számát foglalja magában, a melyeket az illető évben észleltem.

A IV. oszlop az egy napon észlelt protuberantiák közép-számát, azaz azoknak gyakoriságát tünteti fel.

Az V. és VI. oszlop azokat a középértékeket tartalmazzák, melyeket úgy nyertem, hogy az összes alapok és magasságok

A kalocsai 31 évi protuberantia-észlelések kimutatása a protuberantiák periodusának feltüntetésére.

Évek	Észlelési napok	A protuberantiák száma	Napi közép	Középértékek		Napi összegek közepei az		Az évben észlelt legnagyobb magasság	Heliographiai szélessége és a Nap széle
				Alapok	Magaságok	Alapoknak	Magaságoknak		
1886	115	280	2.4	3.6°	47.7"	8.69°	116.1"	212"	—26° E
1887	152	440	2.9	3.1°	42.6"	9.01°	123.5"	165"	—6° W
1888	188	521	2.8	2.7°	45.5"	7.52°	126.0"	152"	—15° E
1889-6	147	470	3.2	2.5°	42.7"	7.86°	136.4"	147"	+35° E
1890	175	703	4.0	2.9°	49.0"	11.46°	197.9"	418"	+41° W
1891	157	891	5.7	4.0°	47.0"	22.59°	265.1"	358"	+29° W
1892	159	1114	7.0	4.9°	51.0"	34.66°	357.1"	531"	—30° E
1893	141	1066	7.6	4.0°	51.3"	34.61°	387.5"	691"	+2° E
1894-1	162	1078	6.7	5.3°	53.6"	35.21°	456.7"	661"	—30° E
1895	164	856	5.2	5.1°	52.9"	27.17°	279.7"	688"	+29° E
1896	168	743	4.4	3.9°	48.5"	17.19°	214.4"	406"	—16° W
1897	161	827	5.1	3.1°	52.2"	16.02°	268.3"	270"	+32° E
1898	154	799	5.2	3.0°	48.9"	15.45°	253.7"	237"	+22° W
1899	162	686	4.2	2.4°	47.5"	10.36°	201.3"	149"	+47° W
1900	147	677	4.6	1.9°	48.1"	8.75°	221.7"	431"	+12° W
1901-7	163	539	3.3	2.2°	48.4"	7.18°	160.0"	146"	—44° W
1902	158	625	3.9	1.8°	48.6"	7.02°	192.2"	123"	+52° E
1903	152	748	4.9	2.7°	47.9"	13.10°	235.9"	249"	—60° W
1904	140	855	6.1	3.4°	47.8"	20.76°	292.1"	261"	—26° E
1905	(53)	387	7.3	3.5°	50.3"	25.39°	367.2"	175"	+15° W
1906-4	149	1060	7.1	3.5°	49.7"	25.07°	353.0"	419"	+13° W
1907	149	1065	7.2	3.3°	53.8"	23.46°	384.7"	388"	+18° E
1908	174	1049	6.0	3.5°	52.7"	21.14°	315.6"	248"	—30° W
1909	165	804	4.9	3.7°	49.4"	18.19°	240.5"	172"	+17° E
1910	159	741	4.7	3.4°	49.8"	15.83°	232.0"	248"	+32° W
1911	198	660	3.3	2.7°	49.4"	8.83°	163.6"	168"	+32° E
1912	145	486	3.4	1.8°	49.7"	6.10°	166.6"	188"	—28° E
1913-6	191	550	2.9	1.4°	49.2"	4.13°	141.6"	123"	+30° E
1914	154	550	3.6	2.5°	50.5"	9.04°	180.3"	168"	+49° E
1915	149	966	6.5	3.6°	49.2"	23.25°	319.3"	185"	—35° W
1916	143	1102	7.7	3.5°	51.4"	27.94°	396.5"	167"	+65° W
1917-6	135	1188	8.8	3.7°	53.4"	32.54°	469.3"	311"	—18° W

összegét a protuberantiák számával elosztottam. Ezeket csak azért számítottam ki és csak a végből közlöm, mert a protuberantiák tüneményének fokát ily módon szokták feltüntetni.

A VII. és VIII. oszlop azokat a középértékeket tartalmazák, melyeket az alapok és a magasságok összegének a megfigyelési napok számával való osztása útján nyertem.

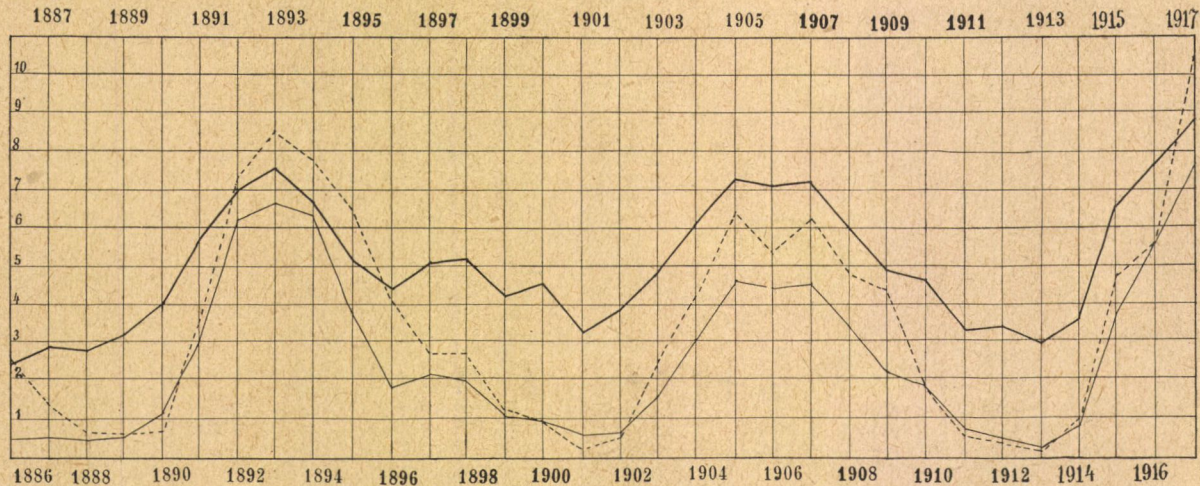
Ugyancsak ezek a középértékek tüntetik fel a protuberantia-jelenség lefolyását a legjobban és leghelyesebben, a mit nem csak a módszer helyessége, hanem gyakorlatilag a nyert számok szabályos menete is bizonyít.

A IX. oszlop a legnagyobb magasságot tartalmazza, melyet az egyes években megfigyeltem; a X-ikben a protuberantia heliographiai szélessége a Napnak keleti (*E*) vagy nyugati (*W*) szélével is meg van adva.

A IV., VII., VIII. oszlopok azok, a melyek a periodust a protuberantiák napi számában, az alapok és a magasságok közepes napi összegében leghívebben tüntetik fel, nemcsak a maximumok és minimumok szabályos váltakozása, hanem még inkább a számok rendes menetével. E számok ugyanis a maximumtól kezdve a minimumig, kevés és csekély kivétellel, folytonosan csökkennek és éppen úgy a maximumig ismét növekednek.

Tehát már ebből az összeállításból is kitűnik a Naptevékenység periodusának a protuberantiáékéval való, számunkra igen megnyugtató megegyezése. Ha most beható vizsgálat alá akarjuk venni, vajjon éa mennyire játszódnak le a foltok és a protuberantiák jelenségei párhuzamosan haladva, akkor összehasonlítás céljából az ismeretes «Relativszámokat» kell felhasználnunk, melyeket WOLFER zürichi csillagász igen gazdag észlelési anyagból határozott meg, melyek, mint általánosan elismerik, a Nap tevékenységét helyesen tüntetik fel.

A mellékelt ábrán a pontozott görbe a «Relativszámok» menetét mutatja be, a mint ezek évről-évre az észlelésekből kiegyenlítés nélkül adódtak: ez a foltok tüneményének leghívebb képe. A vastagon kihúzott görbe, mely a IV. oszlop számadatai szerint készült el, a protuberantiák gyakoriságát tünteti fel az egyes években. Már a két görbe összehasonlításából is azonnal



A protuberantiák száma;

a protuberantiák nagysága;

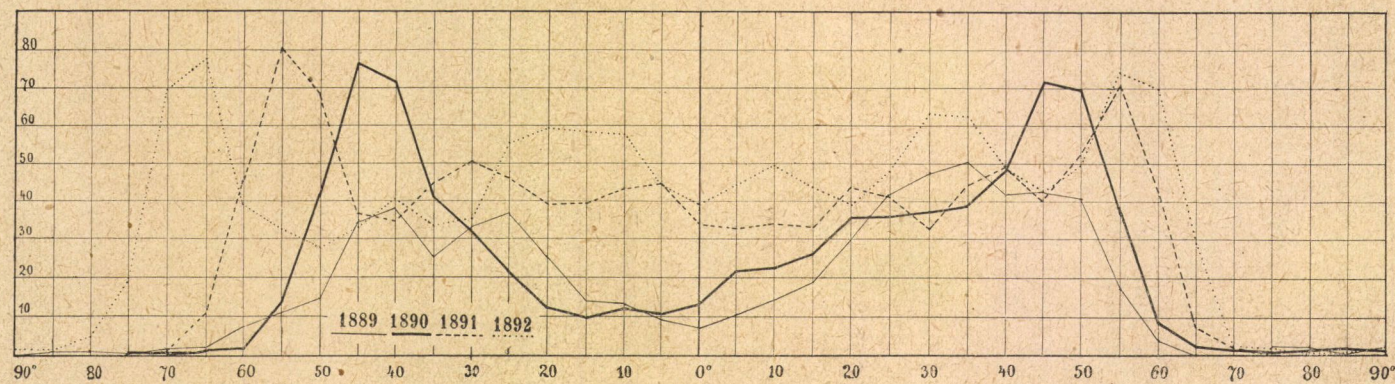
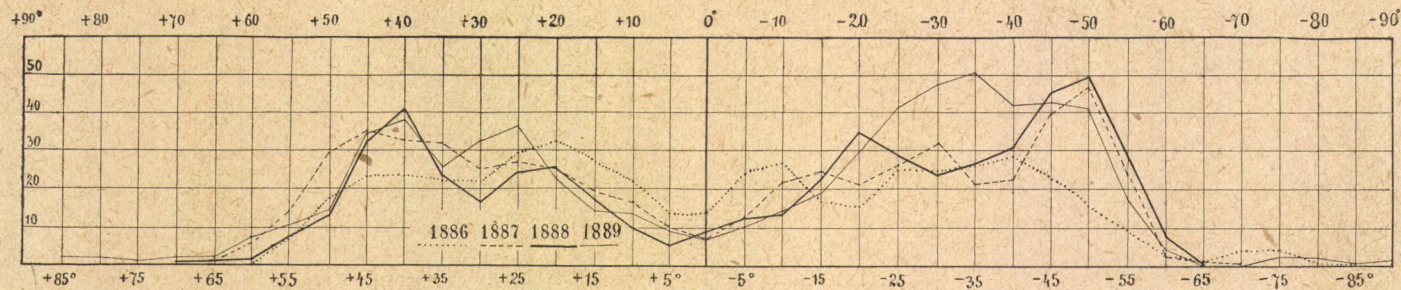
a napfoltok észlelt «Relatív száma».

feltűnik, hogy t. i. a két tünemény maximumai és minimumai, nemcsak megközelítőlegesen találkoznak, hanem egészen *pontosan* mindig ugyanarra az évre esnek.

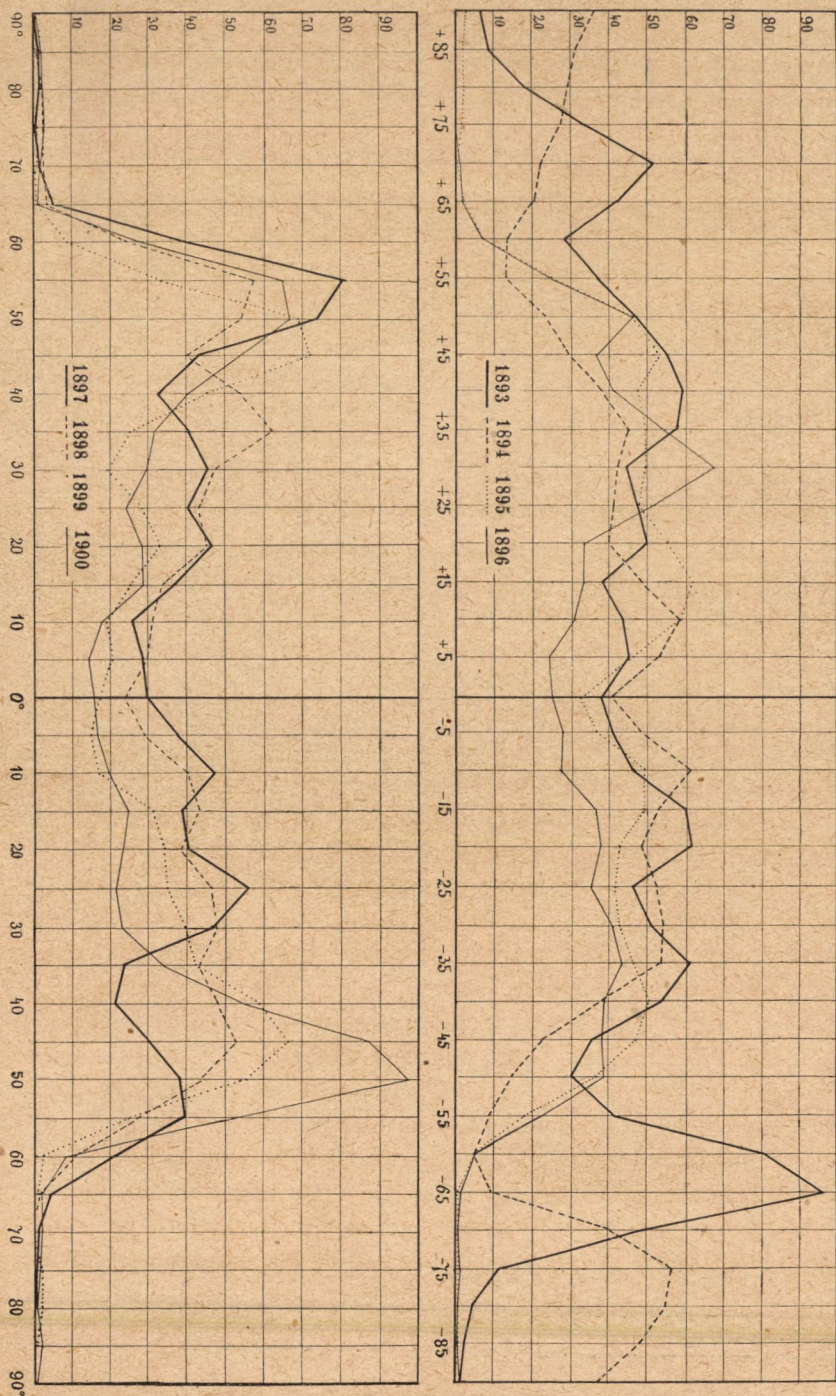
A két görbe kilengései amplitudói nagyon különbözök, a míg a foltok gyakorisága a maximumban 30-szor is nagyobb, mint a minimumban, addig a protuberantiák száma a maximumban, a minimumnak csak kétszeresét éri el. A görbéket részletesen vizsgálva, mindamellert meggyőződhetünk, hogy a különös ingadozások egyformán futnak le. A maximumra törekvés mind a két periodusban egy meredek, csaknem egyenes ívben történik, ellenben a görbék sülyedése pár év múlva határozott ingadozásokkal van összekötve, melyek igen figyelemre méltó módon mind a két görbében egyenlő értelemben mutatkoznak. A két tünemény lefolyásának ily megegyezéséből azt kell következtetnünk, hogy mind a két jelenségnek egy közös oka van, mely mindegyikben hasonlóan tevékeny.

A protuberantia tüneményének egy másik és jobb mértékét az alapok és a magasságok közepes napi összegei szolgáltatják, melyek a táblázat VI. és VIII. rovatában találhatók fel: e két szám szorzatából osztva kettővel a protuberantiák vetített nagyságának relativ kifejezését nyerjük. E szorzatokat sorra képeztük és a finoman kihúzott görbével juttatjuk kifejezésre. A megfelelő görbék ily tökéletes megegyezése alapján, mint az előtűnik fekvő észlelések meg nem ingatható eredményét kimondhatjuk, hogy a két periodus lefolyásában az epocháknak eltolása nem fordult elő.

Igen feltűnő és sajátságos kifejezésre jut a protuberantiák ismertetett periodusa, ha azokat a Nap heliographiai szélességében való eloszlásukban tekintjük. Hogy ez irányban vizsgálatot végezhessek, minden protuberantiának heliographiai szélességét a Nap szélén megmért helyzetükből ki kellett számítanom. Ezeket azután egy 5—5 fokonként tovahaladó jegyzékbe vettem fel és ebből, megint 5 fokonként haladván, a tíz foknyi közökben észlelt számot állapítottam meg. E számok az észlelési napok számával osztva az egy napon észlelt számot adták, mely számok szerint az ide mellékelt görbéket rajzoltam. E görbéknek ordinatáin, a baloldalon bejegyzett számok szerint, a minden



A protuberantiák számának görbéi a heliographiai szélességek szerint.



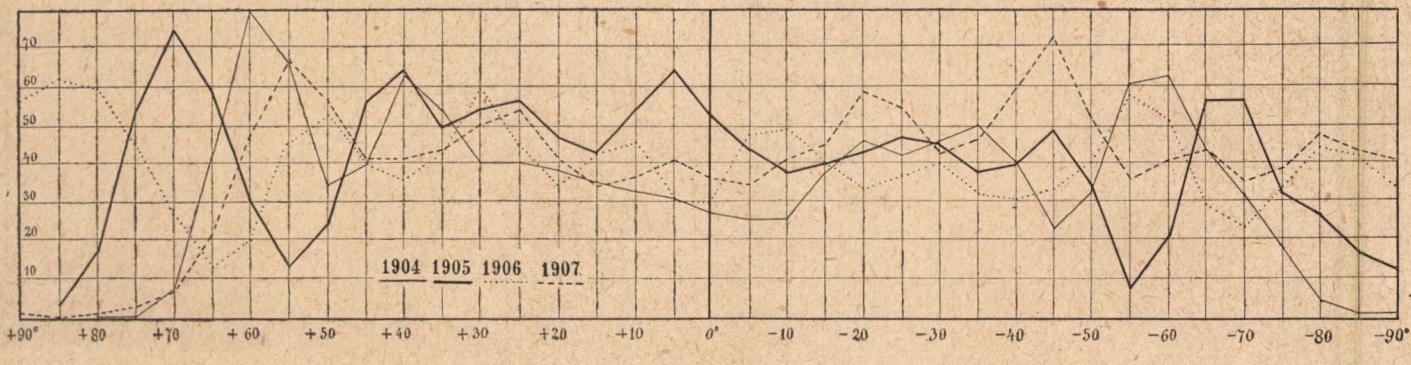
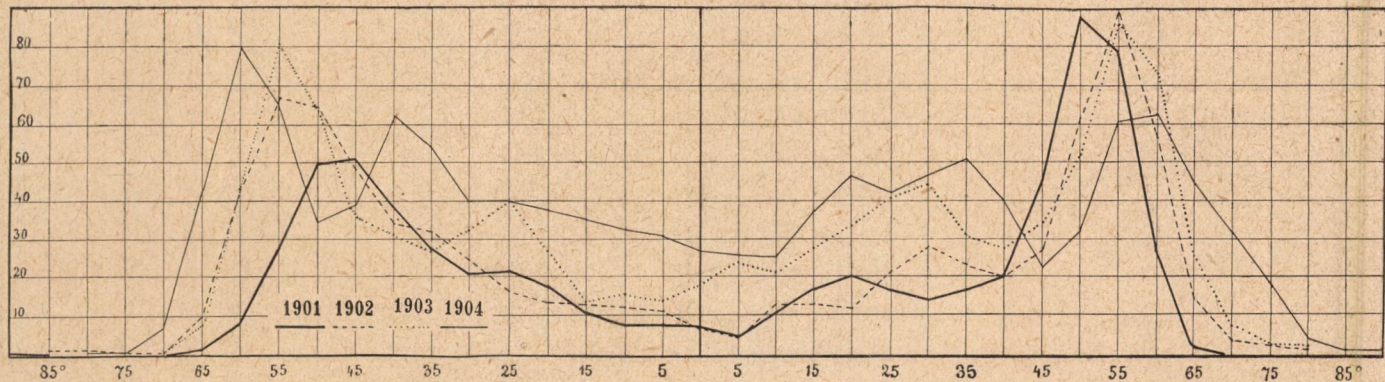
tíz foknyi intervallumban 100 napon észlelt protuberantiák számát jelentik és így a tűnemény járását, változását a szélességi körökben szembetűnően juttatják kifejezésre és az évek közt is szigorú összehasonlítást engednek meg. Ez eljárás által a nagy esetleges ingadozásokat meggyengítettem, a nélkül, hogy ez a tűnemény menetét elhomályosította volna.

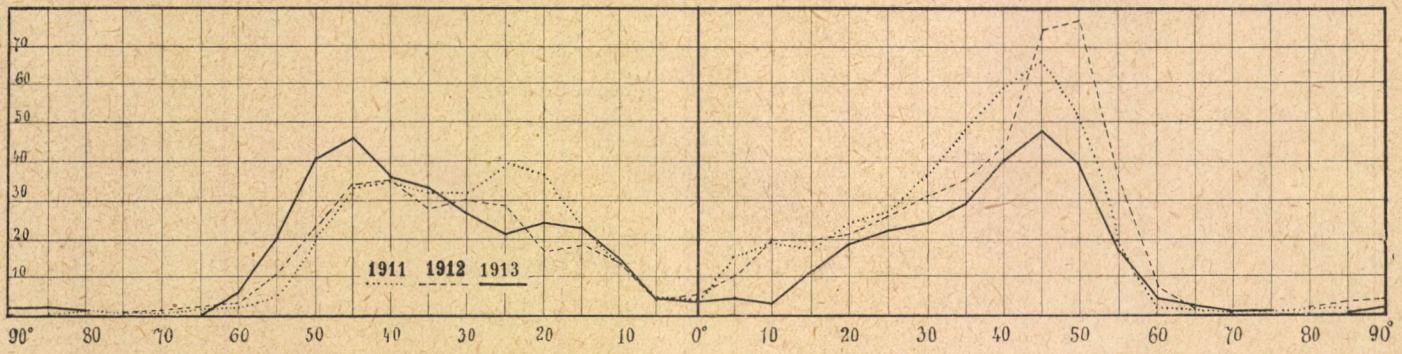
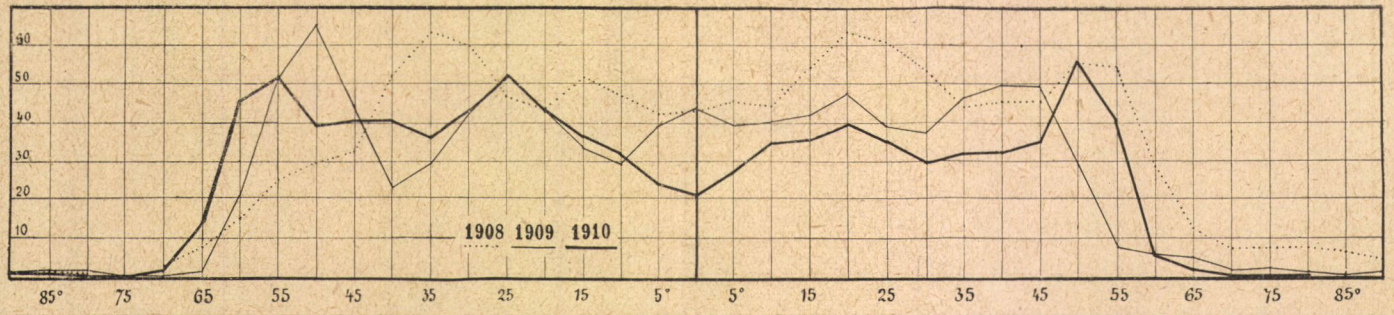
A mint ábráinkat áttekintjük, azonnal szembetűnik, hogy a két hemisphaera korántsem egyezik meg egymással, nem tükörképe a másiknak; de még a két hemisphaerán megfigyelt számok is, melyeket a görbék által határolt terek képviselnek, tetemesen különböznek olykor a kétszereződésig. A gyakoriság változékonyságát tekintve, annál inkább feltűnő s jelentős az a határozott magatartás, melylyel a periodikus változások mindkét részről fellépnek: ezek mind a két hemisphaerán megegyeznek, bár nem ugyanazzal az intenzitással és nem mindig egyidőben lépnek fel. Úgy látszik, hogy bizonyos tekintetben az egyik hemisphaera a másikat kiegészíti: a miben az egyik szegény, abban a másik bővelkedik.

A következő periodikus változások jutnak erőteljes kifejezésre az előttünk fekvő periodusokban:

I. A Nap tevékenysége minimumának idején a gyakoriság az egyenlítőn egy igen mély minimumot mutat, mely körülbelül 20° -ra terjed és körülbelül három évig tart; ezt az 1901 és az 1913 évek görbéi világosan szemléltetik. Ettől a minimumtól mindkét féltekén a gyakoriság körülbelül 50° szélességig növekedőben van és itt egyenlítői értékének 17-szeresét éri el. Innét a sark felé a gyakoriság rögtön alászáll, csaknem az eltűnésig és úgy marad egészen a sarkig, úgy hogy az ottani 10 fokos intervallumokban rendszeren csak egy-egy, néha egyetlenegy $30''$ magas protuberantia sem található, az egész évben.

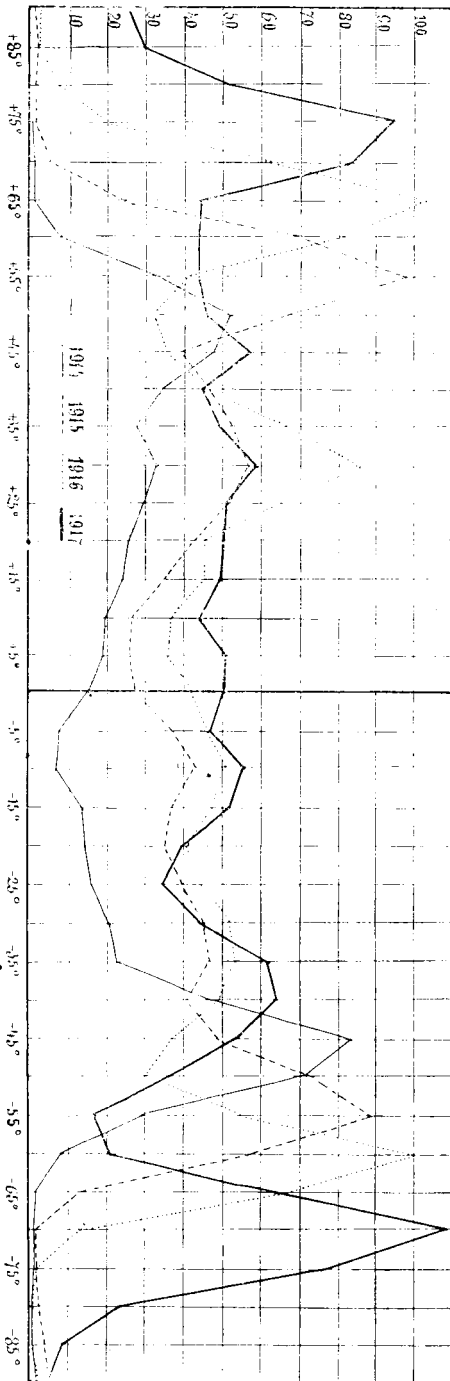
II. Ez a hiány a sarki vidékeken korántsem szorítkozik a Nap tevékenységének minimumára, hanem rövidesen, úgy egy vagy két évvel a beállott maximum után mind idő szerint, mind élesen határolt szélességgel fellép mindkét féltekén és változatlanul 10 évig áll fenn a következő maximumig, mialatt időnkint egészen a $55-60^\circ$ szélességig lefelé terjeszkedik. Igen feltűnő ellentétben állanak a protuberantiáknak az eltűnésével a





gyakoriság maximumai, melyek annak egész tartama alatt éppen az üres vidék határán tartózkodnak és a görbék meredek esésében nyilvánulnak meg. Így 1911-ben az 50° – 55° déli szélességek közt még 35 protuberantiát észleltünk; 55° – 60° között, tehát éppen a szomszéd zónában, már egyet sem. A sarkvidékek e protuberantiái különben is csekélyebb magasságúak, legfőlegb 50"-re emelkednek és gyorsan szoktak el is tűnni.

III. Már egy évvel a foltok minimuma után a gyakoriság általában növekszik, aránylag legerősebben az egyenlítő körül úgy, hogy az ottani völgy hamarosan ki van töltve; gyarapodnak egyidejűleg a gyakoriság maximumai is 40° – 50° szélességben és tüstént elindulnak a sarkok felé. Ez az előrehaladás a harmadik igen feltűnő periodikus tünetény, mely erőteljesen és szembetűnően az 1890, 1891, 1892, 1893 évek görbéiben jut kifejezésre; különösen szép az északi hemisphaerán, de egészen határozott a délin is. Ugyanezt a tünetényt találjuk a következő periodusokban, az 1902–1906. és még legszebben az 1914–1917. években. A mellett a gyakoriság vándorló maximumai rendkívüli magasságot érnek el és a foltok maximumának évében már a 70° szélességi fokot átlépik s egész sereg protuberantiát visznek fel a sarki sapkára, egészen a sarkig, a hol eddig csaknem teljesen hiányoztak. A folyamat olyan, mintha az 50° szélességi zónától egy folyadék hullám indulna ki, mely a sark felé haladva, szűkebb zónákban összeszorul és egy igen meredek tarajt képez, mire előre dőlve a sarkok felett összeomlik. Figyelemre méltó, hogy ez az előretörés nem látszólagosan, a projectio által, hanem valóságban eléri a sarkokat. Erre a meggyőződésre már a megrajzolt Napszélek szemlélése vezet; a mint látjuk, napról-napra közelednek mindkét oldalról a protuberantiák a sark felé és ott összefolynak. Különös bizonyítékot szolgáltat még egy, a körülményektől igen támogatott megfigyelés 1907 szeptemberében, a melyből kétség kívül kitűnik, hogy egy protuberantia 7 napig állott mozdulatlanul a déli sark pontján s végre $105''$ magasságot ért el. Említésre méltó az is, hogy ebben az időben a nagyszámban föllépő protuberantiák magasságai nem oly kis méretűek, mint előbb, hanem megegyeznek a többi zónák protuberantiáinak magasságával. A gyakoriság is,



a mint az a számításból közvetlenül kitűnik és görbékben kifejezésre jut, teljesen olyan, mint a Nap többi zónáin: sőt 1906-ban a protuberantiák *általános maxima* az északi sarkán, 85° szélességnél jelentkezett; az utolsó maximum alatt 1917 október 4-ikén 82° szélesség felett egy $248''$ magas protuberantiát figyeltem meg.

Ez a különös tünetemény a sarkokon meglehetősen gyorsan jelentkezik és feltűnő rövid ideig tart: a mint azt eredeti észleléseink mutatják: 1894-ben február 1-én lépett fel erőteljesen és november 5-én már el is tűnt. A két hemisphaera váltakozó viselete ezalatt meglehetősen érdekes.

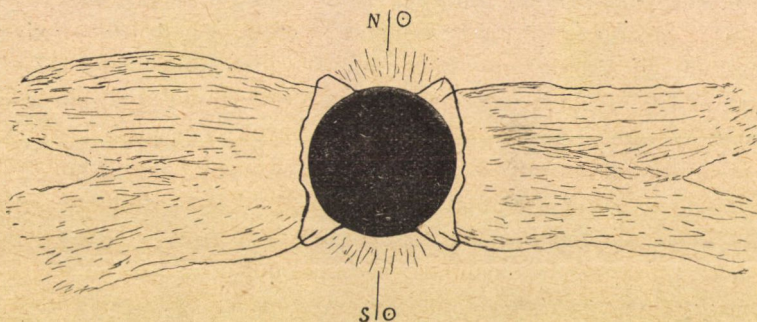
A sarkokon a maximum eltűnése után rögtön beáll a már említett protuberantiahiány állapota. Ezután a protuberantiák általában úgy számban, mint magasságban kisebbednek, miáltal az 50 fok körül új maximumok tűnnek fel, melyek a következő években, időközönként szűk helyen igen nagy gyakoriságot mutatnak, mint például 1897 és 1916-ban az északi, 1900 és 1917-ben a déli félgömbön látható. A tünetemény általános apadása esetleges ingadozások közt áll be, a nélkül, hogy valami menetet mutatna fel; másodlagos maximumokat lehetne felismerni, de ezekben is bizonyos vándorlást mindeztideig nem sikerült kimutatni.

Az itt ismertetett sajátosságos és erőteljesen kidomborodott periodikus változásokat a protuberantiák szélességében semmiféle összefüggésbe sem hozhatjuk a napfoltok csekély mértékben jellemző vándorlásával; jöllehet mind a két jelenség maximumai és minimumai pontosan egybeesnek. Ugyanazt kell mondanunk azokról a fémek kitörésekről, melyek a foltokkal oly szoros összefüggésben állanak.

Különös figyelemre méltó az az összefüggés, mely a szélességben vándorló protuberantiák és a Napkorona hosszú sugarai között feltűnik. A maximumok idejében e sugarak eredetét valamiképpen a protuberantiákra vezethetjük vissza, a mennyiben a sugarak egyenletes elosztódása a Nap körül jól egyezik a protuberantiák elhelyezkedésével, a mint a fenti görbékből látjuk. A minimum idejében is, mikor a sarkvidékeken nem igen mutatkozik egészen a 60 fokig lefelé protuberantia, köny-

nyen megérthető, hogy ugyanakkor ott a korona hosszú sugarai is hiányoznak. A két nagy szárny azonban, mely éppen a legfeltűnőbb és különösen biztosított jelenség, nem oly simán magyarázható a protuberantiák egyidejű elhelyezkedéséből. Az egyenlítőn ugyanis éppen egy mély minimum található, a legnagyobb gyakoriság az 50 foknál nyugszik és még hatszor nagyobb, mint az egyenlítőn.

A mellékelt ábra a külső koronának alakját szemlélteti, a mint az 1900 május 28-dikán beállott teljes napfogyatkozás alatt Algeriában három csillagász megrajzolta. Ez a korona *tipikus alakjának* tekinthető; más minimum éveiben is éppen



A Nap koronája május 28-án 1900-ban, amint azt három csillagász a teljes Napfogyatkozás alatt híven rajzolta, Menervilleben, Algierben.

olyan. Ebbe az ábrába a Nap jelzett tengelye szerint a protuberantiák gyakoriságának görbéjét rajzoltam be, a mint azt a kalocsai észlelések 1900-ban adták. Ezen ábrán szembe tűnik, hogy a protuberantiák gyakoriságának 4 koronasugár az 50°-nyi szélességek felett felelne meg (a mit az átmeneti állapotnak tulajdonítanak), nem pedig a két hosszú szárny, éppen az egyenlítői minimum felett. Bár a korona ábrája szemmérték szerint készült el, mégis eléggé szembetűnő, hogy az élesen határolt szárnyak éppen az 50°-nyi szélességben ugyan emelkednek, számai azonban nem a rádius irányát követik, hanem azonnal megdőlvélve az egyenlítő síkjába hajolnak el és ezt az irányukat megtartva, az egyenlítő felett összefolynak. A korona kitünő fényképei is határozottan erről tanúskodnak. Érdekes a két

szárny végén látható bevágás, mintha ez az egyenlítői minimumnak valami nyoma akarna lenni.

De rejtélyes marad az az erő, mely a korona a rádius irányában eredő sugarait az egyenlítő síkjába és csak a minimum idejében téríti el.

Egy 11 évnél rövidebb periodus protuberantiáink sorában fel nem lelhető; e periodusok sorában meglehetősen ingadozások tűnnek fel, melyek az előbbinél hosszabb periodust árulnak el. Nagyon feltűnt, hogy a protuberantiák maximuma 1894-ben sokkal feltűnőbb jelenségekkel folyt le, mint a következő 1905—1907 években. Már RESPIGHI, az első észlelője kiemelte, hogy a protuberantiák maximuma 1871-ben erőteljesebben lépett fel, mint a rákövetkező 1884-ben és RICO is az 1884. évi maximumot erőteljesebbnek mondja, mint az 1894. évit. Az 1917. évi maximum azonban, a mint a fenti görbék mutatják, már a periodusos maximum tetemes növekedéséről tanúskodik.

(A Magy. Tud. Akad. III. osztálya 1918. évi okt. 21.-én tartott üléséből.)

A MŰVELT NEMZETEK MECHANIKAI MUNKASZÜKSÉGLETE.

HOOR-TEMPIS MÓRICZ I. tagtól.

(Első közlemény.)

Közelfekvő gondolat, hogy a különféle földművelési ágazatok, ipari és vontatási üzemek, egyes munkafolyamatok munka-integráljait mérve, a termelésből, vontatási teljesítményből, és hasonló mennyiségekből egyes vidékek, országok állami és társadalmi gépezetének fenntartására, az *összes életszükségletek kielégítésére* az egyes nemzetek háztartásában *évente elfogyasztott mechanikai munkamennyiséget* megállapítsuk. Ily módon — a *gépi és állati erővel évente termelt és felhasznált* összes mechanikai munkát meghatározva és ennek æquivalensét kilowattórában kifejezve, kiszámíthatjuk és meghatározhatjuk a lakosság fejenkénti és évenkénti munkaszükségletét, a *munkaquotát*.

Csak ilyen egyetemleges, összefoglaló és *összehasonlító* vizsgálatok révén alkothatunk tiszta képet az *energiagazdálkodás problémájáról* és ennek közgazdasági jelentőségéről.

A természetben, a társadalomban, a nemzetek életében, gazdasági és művelődési állapotában megállás nincs; mindenütt haladó folyamatokkal állunk szemben. Ezért nem érhetünk célzt, ha a statisztikai adatok sorából egyes időpontokra vonatkozó adatsorozatokat emelünk ki, egyes évek mechanikai munkaquotáját határozzuk meg, sőt nagy időközök elválasztotta időpontok adatait hasonlítjuk össze.

A mechanikai munkaquota dolgában helyes képet csak úgy kaphatunk, ha az évek hosszú sorára visszamenőleg, évről-évre határozzuk meg a munkaquotát és az így nyert értékeket a *t idővel* koordináta rendszerbe felmérve, megszerkesztjük annak a

$z = f(t)$ függvénynek geometriai képét, mely szerint a munka-quota az idővel változik. Az egyes nemzetek energiaszükségletének fejlődését jellemző görbéket összemérve, megvethetjük az összehasonlító energiagazdaságtan alapjait.

A népek gazdasági fejlődésében számos analogiát találunk: hasonló előzmények hasonló eredményeket szülnek. Így — figyelembe véve az egyes nemzetek művelődési fokát, földművelő és ipari termelését, az ide vonatkozó adatokat a munkaquota görbéivel összevetve — *per analogiam a multból a jövő fejlődésre* következtethetünk és ennek alapján adhatjuk meg az energiagazdálkodás javítását célzó teendők programját.

Az adatgyűjtést idestova húsz év előtt kezdtem meg és azóta műegyetemi előadásaimban, számos tervdolgozatban ez elveket hirdetem. Ismételten rámutattam a statisztikai gyűjtemények fogyatékoságára, a csoportosítás hibáira és a közgazdasági irodalom mulasztásaira.

A legtöbb államban az energiagazdálkodásra vonatkozó adatoknak, az összes jellemző tényezőknek rendszeres gyűjtése, kritikai feldolgozása mai napig sem indult meg. Ott, a hol a rendszeres gyűjtés már megindult, az adatok csoportosítása nem következetes, más-más séma szerint történik, úgy hogy közvetlenül összehasonlítható adatsorozatok az ily statisztikai gyűjtések nem szolgáltatnak.¹

A legtöbb államban az adatgyűjtés nem öleli fel az energiagazdálkodás összes ágazatait és csak az elektromos műveket, a vízierők kihasználását követi figyelemmel. Legtökéletesebb a washingtoni kereskedelmi kormány kebelében működő Bureau of the Census vezette statisztika, de ez sem egyetemleges.²

Meglepő, hogy az általános és összehasonlító energiagazdál-

¹ L. pl. *Inspektorato generale dell' Industria e del Commercio: Statistica degli Impianti Elettrici in Italia nel decennio 1899—908*. Roma, 1911. Tipogr. Bertero.

R. F. Annuaire Statistique 1911. Paris, 1912, Impr. Nationale.

13th Census of the U. S., Abstract. Washington, 1913, Government Printing Office, stb.

² L. Department of Commerce, Bureau of the Census: *Central Electric Light and Power Stations* 1907, ugyanez 1912 és 1917.

ködés problémáit tárgyaló irodalom a közel multban még nem is volt; a világháború folyamán jelennek meg az első dolgozatok, de ezek is csak egyoldalúan, egy-egy vidék vagy állam energiagazdálkodásával általános nézőpontokból foglalkoznak. Az egyes művelt nemzetek mechanikai munkaszükségletét megállapító, összehasonlító dolgozat mai napig sem jelent meg. Az irodalomban számos, egyébiránt kitűnő gyűjteményes munkával találkozunk, mely a nemzetek gazdasági állapotának, vagy ipari fejlettségének, technikai alkotásainak összefoglaló képét adja, de az energiagazdálkodásra vonatkozó adatokat teljesen mellözi, legjobb esetben csak az alkalmazott, mechanikai munkát szolgáltató gépek összes teljesítőképességét az összes szénfogyasztásra vonatkozó adatokat dolgozza fel.¹

Schweiz volt az első állam, mely mechanikai munkaszükségletét, ennek várható növekedését pontosan megállapította és az idevonatkozó adatokat közzétette. A *Schweizerische Wasserwirtschaftsverband* elévülhetetlen érdeme, hogy az adatgyűjtés gyorsan folyt és az eredmények közkinccsé váltak.² Schweiz példáját követték és az egyetemleges adatgyűjtést megkezdték az utolsó években: az Amerikai-Egyesült-Államok, Canada, Bajorország, legutóbb pedig a többi német állam és Német-Ausztria követte.

A tárgyra vonatkozó tanulmányaimban kezdetben nagyobbára — hivatalos statisztika híján — azokra az adatokra kellett támaszkodnom, melyeket egyes fogyasztó körzetekben, elektromos művekben magam, a közvetlen tapasztalás útján szereztem be, vagy egyes kormányhatóságoktól és szaktársaimtól a beküldöttem kérdőívekre kapott feleletekből merítettem. E vizsgálatok alapján a nemzetek mechanikai munka-quotáját és az energia-

¹ L. pl. WILLIAM SMART: *Economic Annals of the 19th Century*. London 1910. Macmillan and Co Ltd, továbbá CALWER: *Jahrbuch der Weltwirtschaft*, 1913, Berlin. «*Volkswirtschaftliche Chronik für das Jahr 1813*.» Jena, 1914. G. FISCHER.

² *Jahrbuch des Schweizerischen Wasserwirtschaftsverbandes*. 1910--1918.-i évfolyamok, lásd továbbá:

C. BAUR: *Die Verwendung der Elektrizität zu elektrochemischen und metallurgischen Zwecken*. Zürich 1915, Rascher und Comp.

gazdálkodás jelentőségét tárgyaló dolgozatot első ízben 1912-ben tettem közzé.¹ Már e dolgozatban rámutattam az eddigi, majdnem kizárólag szénre alapított energiagazdálkodás tarthatatlanságára és a kérdés közgazdasági jelentőségére.

Az utolsó években több mint 300 nagy elektromos műnek, különféle földművelő, ipari és városi fogyasztó-körzetnek adatait dolgoztam fel. Az eredményeket a következőben röviden foglalom össze:

1. Valamely fogyasztó-körzetnek, több körzet összességének, egyes államoknak mechanikai munkaszükségletét, a munkaquota nagyságát és fejlődését a szénfogyasztásra, avagy az elektromos művek elektromos energia-termelésére vonatkozó adatokból megállapítani nem lehet; ez adatokból helytálló következtetéseket vonni nem lehet.

2. A szénfogyasztás lassabban növekszik, mint az effektív mechanikai munkafogyasztás, mert a munkát termelő és elosztó berendezések átlagos évi hatásfoka a technikai vívmányok, javítások és a munkaquota, állandó emelkedésének (tehát a hasznosítási tényező növekedésének) következtében az utolsó négy év-tizedben állandóan emelkedett.

A művelt nemzetek gazdasági fejlettségéből, a műveltségi fokból, az életstandardból nem lehet arra következtetni, hogy a mechanikai munka termelésének átlagos hatásfoka a fejlődés folyamán mely pontra érkezett. Angolországban, az Egyesült-Államokban, Franciaországban például a szénrel termelt gépmunka átlagos fajlagos caloriaszükséglete sokkal nagyobb, mint Schweizban vagy Németországban; Franciaországban és Angolországban közel akkora, mint Magyarországon, noha hazánk az ipari fejlődés sokkal alacsonyabb fokán áll, mint az előbb említett két állam.

3. Nagy ipari fejlettségű, sűrű lakosságú fogyasztókörzetek sokkal lassabban térnek át a mechanikai munkaszükségletnek az elektromos munkaátvitel útján való fedezési módjára.² Innen

¹ HOOR: De l'énergie mécanique consommée par les peuples civilisés et de la houille blanche. Revue de Hongrie, Tome IX. p. 350, Bpest, 1912.

² Minél fejlettebb valamely vidék ipara, minél több a nagy tüke-

magyarázható az a tény, hogy aránylag ritkán lakott mezőgazdasági körzetek jelenlegi elektromos munkafogyasztása sokkal nagyobb, mint például valamely világvárosé. Így például a németországi mezőgazdasági körzeteket tápláló interurbán elektromos művek szolgáltatta kilowattóra teljesítményből számított kilowattóra-quota 1913-ban sokkal nagyobb volt (250—300 kwó), mint például Berlinben. Zürichben háromszor akkora volt, mint Berlinben; Nagyszebenben valamivel nagyobb volt, mint Berlinben; Fiumében másfélszer akkora volt. A egyes államok energiagazdálkodás dolgában a fejlődés különböző fokain állanak, az energiatermelés összpontosítása, az elektromos munkaszétosztás más-más fokig haladt előre. Ezért az *elektromos művek szétosztotta elektromos munka quotájából az összes mechanikai munkaquota nagyságára következtetni nem lehet.*

Így például 1919-ben a Schweizi elektromos művek szolgáltatta kw-óra quotája közel 700 volt, az összes mechanikai munkaszükséglet fejquotája pedig kerek számban 1400 kw-órara rúgott. Az Amerikai Egyesült-Államok elektromos központi műveinek termelése 1919-ben (mint a hogy az az 1919. év első 11 hónapjának eredményéből következik) elérte a 39 milliárd kw-órát.¹ Az elektromos termelés fejquotája tehát kereken 390 kwó volt, ezzel szemben az összes mechanikai munkaszükséglet quotája 650—700 kw-órara tehető; Németország elektromos műveinek 1913-i termeléséből 65—70 kw-órányi quota adódik, holott számításaim szerint a mechanikai munka integrális fejquotája 800—900 kw-órara tehető. Az említett példák sorát még számos más példával toldhatnám meg.

Magyarország elektromos műveinek összes termelése 1913-ban kereken 380 millió kw-óra volt, azaz fejenként kereken 20 kwó. Ezzel szemben számításaim szerint Magyarország összes mechanikai munkaszükségletének æquivalense (az az elektromos munka, melyet minden munkának elektromos energiával való

befektetéssel épült, egyes gyárakat szolgáló, szigetelt gőzüzemű, mechanikai munkát termelő mű, minél olcsóbb a szén, annál kevésbé hajlandók a mechanikai munka fogyasztói arra, hogy saját műveiket megállítva, az energiát központi művektől vegyék.

¹ Ebből 19 milliárd kw-órát a vízierők teljesítettek.

fedezésére a generátorok kapesairól leadni kellene) 1913-ban 3950 millió kilowattóra volt, azaz fejenként 216 kw-óra.¹

Ezek a számok világosan bizonyítják, hogy az egyes nemzetek munkaquotájára az elektromos művek jelenlegi termeléséből következtetni nem lehet. Az ilyen hamis következtetésekből ered az a számos ellentmondás és tévedés, mely az utolsó években megindult irodalmi mozgalom termékeiben található.

4. Kutatásaim egyik tanulságos eredménye az, hogy az egyes nemzeteknek a termelésből és vontatási teljesítményből számított integrális mechanikai munkaszükséglete *meglepő törvényszerűséggel növekszik*. Ha a t időt valamely koordináta-rendszer abscissa tengelyére, a t pontnak megfelelő z mechanikai munkaquotát az ordináta tengelyre felmérjük, azt látjuk, hogy a $z=f(t)$ függvényt ábrázoló görbe az abscissa felé erősen domború (convex). A $\frac{df(t)}{dt}$ érték kivétel nélkül *állandóan emelkedik, állandó gyorsulást* észlelhetünk. A görbéket igen nagy megközelítéssel ellipsis- vagy hyperbola-szakaszokkal helyettesíthetjük. E görbékben ugyan találunk rövid, egy-két évre terjedő töréseket, inflexiókat, melyek gazdasági válságok, rossz termékek, politikai események következményei, de ilyen törések és inflexiók után mindmégannyiszor ismét az előbbi törvényt követi a munka-

¹ A Magyarország energiagazdálkodására vonatkozó részletes számításokat a békét előkészítő-bizottság elnökének, gróf TELEKI PÁL tagtársunknak megbízásából végeztem az 1919. év folyamán. Az eredményeket a kormány a «Magyarország gazdasági térképében» című térképgyűjteményben (kiadta HEINRICH FERENCZ, keresked. miniszter, Budapest, 1920) tette közzé, melynek 20. és 21. számú térképét a szerző szerkesztette és számította.

Lásd továbbá: HOOR: The mechanical Energy in the Household of Hungary and Clémenceau's Demarcational Line of June 13th, 1919. Budapest, 1919.

Hoor: Hungarian Water-Power Schemes and the economic Results to be expected in Consequence of their Realization». Budapest, 1919.

Hoor: Magyarország jövődi energiagazdálkodásának érdekében a békeszerződésbe vagy ezzel kapcsolatos gazdasági szerződésekbe felveendő határozmányok. Javaslat. Budapest, 1919.

Mind a három, gróf TELEKI PÁLhoz címzett dolgozat a magyar béke-delegáció aktagyűjteményében van.

quota fejlődése. E görbék alakja, a gyorsulás mérve, 10—15 év óta, sok esetben 20—30 év óta, nagyjában változatlan maradt, úgy hogy e görbéket a gazdasági fejlődés valóságos jellemzőinek tekinthetjük.

Azt is látjuk, hogy a kevésbé fejlett, de gazdaságilag önálló nemzetek munkagörbéi az utolsó — háború előtti — években nagyobb gyorsulással haladtak, mint a fejlettebb nemzeteké, ez utóbbiakat mintegy utólélni törekedtek; a $z = f(t)$ görbék közös asymptóta felé törekednek.

Ez annak az ismert ténynek a következménye, hogy a nemzetközi érintkezés fejlődésével, a kereskedelmi forgalom emelkedésével a gazdasági standardok közelednek egymáshoz.

Feltűnő tény, hogy a munka-görbe gyorsulása még oly esetekben sem csökken, ahol a munkaquota ezidőszerint már nagy értéket, például 1000 kw-órán felüli számot ér el (Schweiz, Angolország, Belgium). A mechanikai munkát igénylő újabb technológiai eljárások, a belterjes gazdálkodás fejlődése, a mesterséges nitrogén-trágyák gyártása, az elektrochemiai és elektrometallurgiai gyártási eljárások, az egyre növekvő vontatási teljesítmény, a növekvő világítási szükséglet, a jobb életstandard felé való törekvés: mind olyan tényező, mely a mechanikai munkaszükségletet rohamosan emeli.

5. Számításaim szerint az 1913/1914. évi gazdasági állapotnak megfelelően az integrális évi munkaquota kerekszámában volt: Schweizban¹ 1200, Angolországban 1000—1100, Belgiumban 900—950, Németországban 800—900, az Amerikai-Egyesült-Államokban 650—700,² Franciaországban 600—650, Olaszországban 350—400 kilowattóra. Azóta a munkaquota erősen növekedett, például Schweizban, 1919-ben, elérte az 1400 kilowattórát.

Nagymagyarország munkaquotája számításom szerint 1913-

¹ A schweizi kormány fennhatósága alatt működő „Abteilung für Industrielle Kriegswirtschaft” és a Schweizerische Wasserwirtschaftsverband felvételei szerint.

² Az Egyesült-Államok lakosságának közel 45 százaléka szétszórtan, farmokban lakik.

ban 216 kilowattóra volt, a mai Csonkamagyarország 1913.-i munkaquotája pedig 260 kilowattórára rúgott.¹

6. A fentiekben közölt számokból, melyek sorát még számos más példával kiegészíthetném, látható, hogy hazánk gazdasági fejlettség dolgában mily szerény helyet foglalt el a multban. Még tanulságosabb az összehasonlítás, ha az egyes munkát fogyasztó ágazatok mechanikai munkaszükségletét állapítjuk meg és kiszámítjuk, hogy az integrális munkaquotához a közlekedési eszközök, az ipar, a földművelés, az egészségügyi intézmények mily részlettel járulnak. Így például a nagyvasutak vonatási munkája (e munkának kilowattórában kifejtett æquivalense) 1913-ban Schweizban kereken 340, Magyarországon 72 kilowattóra volt.

E számokból azt is látjuk, hogy a jövő fejlődés során mekkora munkaquotára számíthatunk hazánkban, ha azt tételezzük fel, és ezt fel *kell* tételeznünk, hogy hazánk a legközelebbi évtizedek folyamán el fogja érni a gazdasági fejlődésnek azt a fokát, melyen például Franciaország vagy Németország e század első éveiben volt.

Hazánk mechanikai munkaquotájának eddigi fejlődését követve, a mult idők fejlődését ábrázoló görbéből a legközelebbi évek várható munkaquotáit extrapolatio útján meghatározva, arra az eredményre jutok, hogy az eddigi, szerény fejlődési menet betartva, Nagymagyarország munkaquotája 1930-ban a 320 kw-órát (Csonkamagyarországon a 365 kw-órát) és 1940-ben az 500 kilowattórát elérte volna. Ha gazdasági önállóságunkat megtartani akarjuk, ha meg akarjuk állani helyünket a nemzetek versenyében, az összes termelési ágazatokat legalább is az eddigi mértékben kell tovább fejleszteni. Ezek szerint Magyarország 1930.-i munkaquotáját 320, Csonkamagyarország 1930.-i quotáját pedig 360 kw-órára kell előíranyoznunk.

7. Hazánkban az 1913.-i, kereken 3950 millió kilowattórányi munkaintegrálból becslésem szerint 80 millió kw-órával

¹ Lásd a béke delegáció iratgyűjteményében lévő, fent idézett dolgozataimat.

æquivalens munkát olaj- és benzin-motorok, 550—600 millió kw-órát vízierők (víziturbínák és túlnyomó részben kisebb vízi kerekek), kereken 3300 millió kilowattórát pedig gőzmotorok szolgáltattak. E *gőzzel* termelt munkaintegrál átlagos, kilowattóránkénti szénszükséglete igen kedvezőtlen volt; számításaim szerint 4·2—4·6 kilogramm 5400 caloriás szénre tehető.¹

Az 1930-ban várható 320 és 1940-ben várható 500 kw-órányi munkaquotának — a lakosság számának eddigi átlagos növekedését feltételezve — Magyarországon kereken 6000 millió, illetőleg 10,000 millió kw-órányi munkaintegrál felel meg.

Ha azt tételezem fel, hogy vízierőinket az eddiginél nagyobb mértékben nem használjuk ki és a szénrel való munkatermelés eddigi gazdaságtalan, decentralizált módján gyökeresen nem változtatunk, 1930-ban 5200 millió, 1940-ben pedig 9200 millió kilowattórával æquivalens mechanikai munkát kellene *szénrel* termelnünk; az ennek megfelelő szénszükséglet a fentiek szerint 1930-ban 220—240 millió q, 1940-ben 390—420 millió q 5400 cal. szén volna. Ha azt tételezem fel, hogy a háztartási fűtés fejenkénti szénquotája 1940-ben a 300 kg-ot el fogja érni (Németországban, 1913-ban a fűtési quota, jobb minőségű szénben, a 400 kg-ot meghaladta), arra az eredményre jutok, hogy 1940-ben 450—480 millió q (átlag 5400 cal.) szénmennyiségre lenne szüksége az országnak.

1913-ban a hazai széntermelés kereken 100 millió q átlagosan 5400 cal. szén volt, míg kereken 60 millió q 5400 cal. szénrel æquivalens szénmennyiséget a külföldről szereztünk be. Mindebből az következik, hogy az 1940-ben várható szénszükségletnek fedezésére *hazai termelésünket az 1913-i széntermelés-*

¹ Hazánkban, valamint a legtöbb államban a szénfogyasztási statisztika igen hiányos; az adatokból nem állapítható meg, például, hogy mekkora része a fogyasztott szénnek fordított fűtési, melegítési célokra. Ezért csak valószínű alsó és felső határértéket állapíthattam meg. Megjegyzem, hogy a statisztika tanulságai szerint az elektromos energiát nagy, több ezer lóerős gőzturbo-generátorokkal termelő elektromos művek (például Bécs város elektromos művei) a kilowattórát évi átlagban 1·5—1·6 kg 5400 cal. szénrel tudják előállítani.

nek legalább négyszeresére kellene fokoznunk, ha a szénbehozatalt növelni nem akarjuk.

Hazai széntermelésünket húsz év alatt az 1913.-i termelés négyyszeresére fokoznunk nem lehet. Ily termelést csak nagyszámú külföldi munkás alkalmazásával érhetnénk el. Elegendő hazai munkáskezünk nincs; a jövőben várható bányamunkásszám még évi 150 millió q szén kitermelésére sem lesz elegendő. E nagy szénmennyiségnek az országban való szétosztására nagyszabásban emelni kellene vasutaink 1913.-i teljesítőképességét, a mi szintén kizártnak tekinthető.

A közltem számokból, hazánk szénkészleteinek korlátozottságából, a szén közepes vagy rossz minőségéből, a szeneinkben rejlő calóriaérték viszonylagos drágaságából következik, hogy az energiagazdálkodás gyökeres reformja, a mechanikai munka termelésének nagy központokba való összevonása, a fajlagos szén-szükséglet csökkentése és a vízierők értékesítése oly feladatok, melyeket sürgősen meg kell oldanunk, ha gazdaságilag fejlődni, gazdasági önállóságunkat fenntartani akarjuk.

Azt a sokszor, sok helyről hangoztatott állítást, hogy hazánk gazdasági életét, a kellő fejlődést, az energiagazdálkodásban továbbra is főleg a szénre támaszkodva, a hazai széntermeléssel biztosíthatni fogja, a leghatározottabban czáfolnom kell. Kötelességem, hogy a M. T. Akadémia színe előtt az ily megtevesztő állítások ellen harczra keljek.

8. Tanulmányaim alapján — és ellentétben a magyar közvéleménnyel — arra az eredményre jutottam, hogy a magyar mérnökök megtervezte — sajnos, eddig meg nem épült — nagyobb vízerőművek a külföldi jó vízierőművekkel kiállják a versenyt.¹

A már működő vagy csak a tervezés állapotában lévő magyar hydro-elektromos műveknek az ismert külföldi művekkel való összehasonlíthatására megállapítottam a bekövetkezett vagy vár-

¹ A fentidéztem dolgozatokban kimutattam, hogy a megtervezett nagyobb hydro-elektromos műveket nagyobb gőzüzemű művekkel párvonalosan járátva, évente kereken 5500 millió kw-órát lehetne legalább is a nagyobb hazai vízierők munkájával termelni.

ható összes üzemi és üzleti költségeket (beleértve a tőke hét-százalékos kamatát is) és az 1914.-i ár és költségtételek alapján számított, fillérben kifejezett összes évi költséget elosztot-tam négygyel, a középeurópai nagy művek legkisebb évi átlagos kilowattóránkénti bevételével. Az ily módon nyert hányados, melyet «határtermelésnek» nevezek, az az évi kilowattóra ter-melés, melyet 1914-ben — a legkedvezőtlenebb esetben várható bevétel mellett — a műből értékesíteni kell, hogy a befektetett tőkét kamatoztathassuk és törleszthessük.

Azt a termelést, melyet valamely hydroelektromos mű e *határtermelésen* felül évente szolgáltathat, tetszésszerinti olcsó áron «side business» gyanánt értékesíthetjük (például elektro-chemiai, elektrometallurgiai czélokra).

A feldolgoztam több mint 100 példából a 11—31. számú példák eredményeit táblázatban foglaltam össze. A 11—23. számú művek megépült, üzemben lévő művek, a 24—31. sz. művek gondosan megtervezett, még meg nem épült művek. A táblázat az 1913/14.-i állapotnak, árszintnek megfelelő eredményeket adja. A táblázatból látható, hogy a bemutatott magyar példák a kitermelhető kilowattóra önköltségének dolgában a legjobb külföldi művekkel kiállják a versenyt.

Néhány magyarországi és külföldi hydro-elektromos mű összehasonlító táblázata.

Folyó szám	11	12	13	14	15	16	17
Mű neve	München, Städt. EL. Werk	Basel, Kraftwerk Aargau	Zürich, Städt. EL. Werk	Società Lom-barda Milano, Vizzola, Tur-bigo, Brusio, etc.	Società Edi-son, Milano-Paderno Robbiate	Milano-Gros-sottoi mű. (Mi-lano város)	Trollhättani mű
Millió kwó.							
Összes üzemi, üzleti és tőkeköltséget fedező határtermelés (à 4 fillér per kwó.)	115	25	40	97	65	53	55
A vízerőmű évi teljesítőképessége	65	90	115	297	179	116	450
Marad tehát side business-re	—	65	75	200 ¹	114	63	395

Folyó szám		18	19	20	21	22	23	24
Mű neve		<i>Trondhjemi</i> elektr. mű	<i>Bergeni,</i> (Norvégia) elektr. mű	<i>Innsbrucki</i> városi mű	<i>Temesvári</i> városi mű	<i>Kolozsvári</i> városi mű	<i>Nagyszombeni</i> elektr. mű	<i>Dragán-Kőrösi</i> mű
Millió kwó.	Összes üzemi-, üzleti- és tőkeköltiséget fedező háttártermelés (à 4 fillér per kwó.)	8.0	15.0	15.50	8.0	6.30	9.50	50
	A vízerőmű évi teljesítőképessége	80.0	50.0	60.00	7.5	6.50 ²	9.90	146
	Marad tehát side business-re	72.0	35.0	44.50	—	—	—	96
Folyó szám		25	26	27	28	29	30	31
Mű neve		<i>Poprádi víz-</i> <i>erőmű</i> (Szulin)	<i>Bisztra-</i> <i>Marosi</i> mű	<i>Tisza-Taraczi</i> mű	<i>Fiumei</i> <i>Recina</i> mű	<i>Ó-Gradinai</i> mű (Aldama)	<i>Pozsonyi</i> mű (Somorja)	<i>Gémissát-</i> <i>Párisi</i> Rhône mű
Millió kwó.	Összes üzemi-, üzleti- és tőkeköltiséget fedező háttártermelés (à 4 fillér per kwó.)	26	50	74	21	340	245	250
	A vízerőmű évi teljesítőképessége	72	149	198	65	1300	977	1300 ³
	Marad tehát side business-re	46	99	124	44	960	732	1050

¹ A brusiói mű teljesítőképessége a lekötött 16,000 kw. maximumon belül 140 millió kwó., a turbíói és vízzolai mű teljesítőképessége 157 millió kwó. — ² A Hídeg-szamos átlagos vízhozamának — 3.5 m³ per másodperc — évi 10 millió kwó. kihasználható teljesítmény felelne meg. A felső vízesatorna azonban csak 2.4 m³ hozamra épült; a kihasználható évi teljesítmény ezért csak 6.5 millió kwó. — ³ A francia kormány kiküldötté műszaki bizottság jelentése szerint.

Az imént közölt eredmények igazolják annak a harcznak a jogosultságát, melyet a magyar energiagazdálkodás javításának, elsősorban a magyar vízierők értékesítésének érdekében immár húsz év óta folytatok.

Ez eredményeket tartva szem előtt, sürgettem a béketárgyalásokat előkészítő munkálatok alkalmával is az idevonatkozó feladatok megoldását. Az 1919 október havában gr. TELEKI PÁL

tagtársunkhoz címzett «javaslat»-ban ezért állítottam oda a béke-delegáció és külügyi kormányzatunk részéről megoldandó sürgős feladat gyanánt azt, hogy az elszakított országrészek valamint ideiglenes új határfolyók munkateljesítményeinek egy része számunkra biztosíttassék.

A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 január 19.-én tartott üléséből.)

A MŰVELT NEMZETEK MECHANIKAI MUNKASZÜKSÉGLETE.

HOOR-TEMPIS MÓRICZ I. tagtól.

(Második közlemény.)

A M. T. Akadémia III. osztálya elé 1920 jan. 19.-én terjesztett dolgozatomban¹ azokról a vizsgálatokról számoltam be, melyeket a művelt nemzetek gazdasági életének fenntartására szükséges mechanikai munka tárgyában végeztem. A III. osztály elé 1920 június 17.-én terjesztett dolgozatomban² pedig az egyes munkát fogyasztó körzetek munkaquotája, az e körzeteket ellátó elektromos művek kilowattóra-quotája és az átlagos és maximális terhelés közötti összefüggést vizsgáltam. Dolgozataimban a munkaquotának, kilowattóra-quotának és a terhelési hányadosnak fejlődését hosszú időre, visszamenőleg vizsgálva, a fejlődés időgörbéit, törvényszerűségét állapítottam meg.

Kimutattam, hogy a fejlődés menetéből egyes időpontokat, egyes gazdasági évek statisztikai adatait kiragadva, ezekből helyes következtetést vonni nem lehet. A nyertem eredmények alapján az irodalomban található számos ellentmondás magyarázatát adhattam és számos tévedést helyesbíthettem. A mechanikai munka quotájának számításakor az egyes nemzetek termelési és vontatási statisztikájából indultam ki és a termelés,

¹ Hoor: «A művelt nemzetek mechanikai munkaszükséglete». Első közlemény. Math. és Természettud. Ért. XXXVIII. kötete 293. lap. 1921.

² Hoor: «Az elektromos művek terhelési diagrammjai és az energiazárlódás javítása». Math. és Természettud. Ért. XXXVIII. kötete 315. lap. 1921.

valamint vontatás teljesítményéből az átlagos tényleges munkaszükségletet állapítottam meg és ebből számítottam a mindenkori munkaquotát. Ráműtattam arra is, hogy a szénfogyasztási statisztikából, a szénfogyasztás fejlődéséből, a szénquotából a munkaquota nagyságára, annak fejlődési törvényeire nem következtethetünk.

Mindaddig, a míg az ásványi fűtőanyagok *általános* termelési és fogyasztási statisztikájából indulunk ki, mindaddig, a míg a szénfogyasztási quotát nem elemezzük, energiagazdálkodás dolgában, a széntermelés és fogyasztás jövője dolgában még hozzátvetőleges képet sem szerkeszthetünk.

Az 1919-ben és 1920-ban kötött békeszerződések gazdasági következményeivel foglalkozó irodalom a széntermelés és fogyasztás kérdését egyetemlegesen tárgyalja. A békeszerződések szövegében a caloria és mechanikai munkaszükséglet problémája csak a szénellátásra vonatkozó egyetemleges intézkedések czime alatt szerepel. Seholy sem vétetett figyelembe az, hogy a békeszerződések sújtotta nemzetek mekkora szénmennyiséget mily aránylagos elosztásban igényelnek az életszükségletek, a gazdasági egyensúly fenntartására.¹ Innen van az, hogy a legyőzött nemzetek sorsát intéző szövetséges hatalmak vezető férfiai mai napig nem vették tudomásul azt az igazságot, hogy a közép-európai nemzetek a gazdasági egyensúlyt nem fogják helyreállíthatni és fenntarthatni, ha energiagazdálkodásukban — úgy mint például eddig hazánk tette — ezentúl is majdnem kizárólag a szénre fognak támaszkodni. Hazánkban még ma is az az általánosan elterjedt felfogás uralkodik, hogy energiagazdál-

¹ Az ilyen sommás kezelés káros következményeit csak *egy* példával akarom jellemezni: Az 1913. évben a vasuti üzemek Angolországban a brit szigetek évi széntermelésének 4·8—5% -át, Németországban a Németbirodalom széntermelésének 6·5—6·8% -át, Nagymagyarországon az ország széntermelésének kereken 34% -át vették igénybe (az országban termelt caloriaérték kerek 34% -át). A míg tehát Németország vagy Angolország rendes vasuti közlekedésének fenntartására a széntermelés tetemes csökkenése esetén nehézség nélkül talál fedezetet, addig hazánkban a széntermelésében vagy behozatalában való kis csökkenés vagy megszakítás igen nagy zavart idéz elő a vontatási üzemek szénellátásában.

kodásunkban továbbra is csak a szénre támaszkodva, gazdasági önállóságunkat meg fogjuk őrizhetni és a művelt nemzetek versenyében helyünket megállhatjuk.

A M. T. Akadémia III. osztálya elé terjesztett fentidézett dolgozatomban már kifejtettem, hogy e felfogás téves és a mechanikai munkaszükséglet fejlődését vizsgálva bizonyítottam, hogy hazai széntermelésünk sem a jelenben, sem a jövőben az ország szükségleteit távolról sem fogja fedezhetni.

A következőkben a fentiekben felállított tételem bizonyítására még azoknak a vizsgálatoknak eredményeit foglalom össze röviden, melyeket a széntermelés és szénfogyasztás fejlődése dolgában végeztem:

1. Ha a széntermelésnek az utolsó 150 év alatt való fejlődését vizsgálva, nem teszünk különbséget a bányákban *fejtett* összes szén és az *értékesített*, tehát a fogyasztási és termelési statisztikában szereplő szén mennyisége között, a bányatermelés fejlődése és jövőbeli fejlődési lehetőségei dolgában teljesen hamis képet kapunk.

A bányákban fejtett összes szénnek (S) és a felszínre hozott értékesített szénnek (s) $\frac{s}{S}$ hányadosa, a szénbányászat hatásfoka állandóan javul. A bányatechnika fejlődése, a szén felhasználó szerkezetek fejlődése, a hulladékszénnek, dara- és porszénnek felhasználására alkalmas berendezések terjedése lehetővé teszi oly minőségű és oly halmazállapotú szénnek a felhasználását is, melyet azelőtt a bányában hagytak vagy a felszínre hozva, mint értéktelen anyagot halomra raktak. A világháború folyamán és azóta is, a nagy kereslet hatása alatt a bányászat e gazdasági hatásfokának javulása még gyorsult. A fejtési hiányt pótlására a bányák hozzáláttak a halomba rakott, régi hulladék értékesítéséhez és forgalomba hoztak csekély caloriatartalmú, értéktelen anyagot is.¹

Ha tehát az évenként forgalomba hozott szén mennyiségét

¹ Ezt igen ékesszólóan bizonyítja a hazánkban kimutatott széntermelés caloriaértékének rohamos csökkenése. Míg az 1913-ban forgalomba hozott szén átlagos caloriaértéke kg.-ként körülbelül 5400 cal. volt, addig 1920-ban becslésem szerint a 3500 cal.-t nem haladta meg.

az idő függvényeként koordináta-rendszerben ábrázoljuk, olyan görbét kapunk, mely az idő tengelye felé sokkal erősebben domború, mint a bányákban évenként *fejtett* összes szénnek, valamint az összes caloriaértéknek időgörbéje. A bányafejtés és caloriaérték növekedésének sebessége, a sebesség gyorsulása sokkal kisebb, mint a termelési statisztikában kimutatott, forgalomba hozott szén időgörbéjéből megállapított sebesség és gyorsulás.

2. A fentidéztem első dolgozatban már rámutattam arra, hogy a mechanikai munkát előállító szerkezetek hatásfoka, a munkaquota emelkedése és a terhelési tényező javulása következtében a mechanikai munka termelésének átlagos évi hatásfoka az utolsó évtizedekben rohamosan javult. Ugyanez áll a szén fűtési és vegyi, valamint kohászati célokra felhasználó összes szerkezetekre és üzemekre. Az egyes művelt nemzetek évente szükségelte caloria- és mechanikai munkamennyiségének időgörbéjéből sokkal nagyobb gyorsulás adódik, mint a mekkora a szénfogyasztás időgörbéjéből következik.

Azért tehát a szén termelő és fogyasztó egyes nemzetek széntermelésének és szénfogyasztásának időgörbéi, valamint a világtermelés és világfogyasztás időgörbéi sok esetben párhuzamosan haladnak, közel fedik egymást, addig a bányákból fejtett szén mennyiségének $\psi(t)$ és a caloriaszükséglet, valamint mechanikai munkaszükséglet összesített $\chi(t)$ időgörbéi gyorsan közelednek egymáshoz; $\frac{d^2\chi(t)}{dt^2}$ állandóan $> \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$. Világos, hogy abban a t_1 időpontban, melyben a két görbe metszi egymást, a bányákból fejtett szénmennyiség a szükségletet éppen csak hogy fedezi és ez időponton túl a szénellátásban általános zavarnak kell bekövetkeznie. Vizsgálataim alapján arra az eredményre jutok, hogy ez időpont — ha a világháború nem jön közbe — körülbelül 1922–1923-ban következett volna be. A bányatermelés végnélküli fejlesztésének nemcsak a szénkészletek és gazdaságosan bányászható széntelepülések korlátozottsága, hanem a munkashiány, az óriási szénmennyiségek elosztására szükséges vontatási üzemek fejlesztési határai szabnak korlátot.¹

¹ Ismeretes, hogy az Amerikai Egyesült-Államok szénbányászataikat csak azért tudták oly nagy gyorsasággal fejleszteni, mert az erős beván-

A szénfogyasztás növekedésével rohamosan nőnek a szén elosztó szállító és vontató üzemek tökeszükségletei, ez üzemek fenntartásával járó nehézségek és terhek.

A szénre alapított energiagazdálkodás, mely a világháború gazdasági hatásai következtében máris csődbe jutott, tehát a békés fejlődés során is rövid idő múlva csődbe jutott volna.

3. Már a szénfogyasztás fejlődését mutató görbékből is látható, hogy energiagazdálkodásunkat a jövőben nem alapíthatjuk — úgy a mint ez eddig történt — túlnyomólag az ásványi fűtőanyagokra.

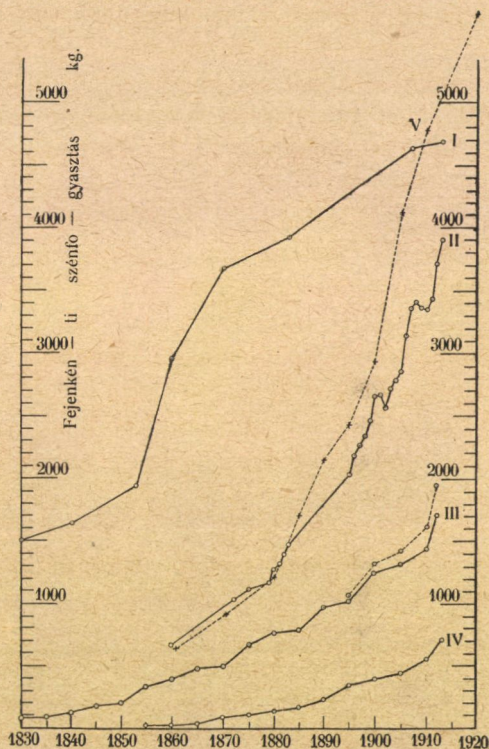
Az áttekinthetőség kedvéért az 1. ábrában bemutatom Angolország, Németország, Franciaország, Magyarország és az Egyesült-Államok szénfogyasztásának időgörbéit az 1830-tól 1920-ig terjedő időközben.

Az Amerikai Egyesült-Államok szénfogyasztását ábrázoló görbe megítélésakor figyelembe veendő, hogy 1920-ban ez államban a hydro-elektromos művek 22 milliárd kwó-t termeltek, az egyéb vízerőművek munkateljesítménye pedig 8 milliárd kwóra tehető. E vízzel terhelt, 30 md kwórányi munkateljesítménynek átlagban legalább 39 millió tonna szén, azaz lakosonként 390 kg. szénfogyasztási többlet felel meg. Ha e munkamennyiséget is szénrel termelték volna az Egyesült-Államok, a szénfogyasztási quota 1920-ban 6090 kgrammra emelkedett volna.

E görbékből megállapítható, hogy például az Egyesült-Államokban 1950-ben a szénfogyasztási quota előreláthatólag a 11,000—12,000 kg.-ot, Németországban például a 10,000—11,000 kg.-ot érné el, másszóval 30 év alatt az ezidőszerinti fogyasztásnak több mint kétszeresére emelkednék, ha az Egyesült-Államok a vízierők kihasználására irányuló hatalmas tevékenységet nem folytatnák és Németország nem értékesítené vízierőt az eddiginél sokkal nagyobb mértékben.

dorlás kellő számú bányamunkást szolgáltatott. Franciaország nagy szénkincesi daczára nem tudja széntermelését évi 40 millió tonnán túl fejlesztetni, mert nem rendelkezik kellő munkáskézszel. Gondolni sem lehet arra, hogy Nagymagyarország a legközelebbi 10—20 évben az 1913-i termelés megkétszerezésére szükséges munkásszámot beállítani tudja.

4. A berendezett — mechanikai munka termelésére szolgáló — gépek összes teljesítőképességéből, az úgynevezett berendezett lóerők vagy kilowattok számából, a teljesítőképesség növekedéséből a mechanikai munka quotájának és a caloria-



1. ábra. A szénfogyasztás fejlődése 1830-tól 1920-ig.

I. Angolország, II. Németország, III. Franciaország, IV. Magyarország (5400 cal. szénre átszámítva), V. Amer. Egyesült-Államok. A III. sz. görbe mellé rajzolt pontozott görbe a francia vízierők termelte munkamennyiség szénegyenértékével megnövelt szénükségletet adja.

quotának nagyságára, jövő fejlődésére következtetni nem lehet. Az idevágó statisztikában szereplő adatok, például a berendezett gépi teljesítőképesség (G) és a lakosság (L) $\frac{G}{L}$ hányadosa, a berendezett gépek számának (B) $\frac{G}{B}$ hányadosa, a G -ből és a μ

munkásszámból számított munkásonkénti $\frac{G}{\mu}$ lóerő vagy kilowatt átlag nem adhatnak biztos alapot valamely ország vagy fogyasztó körzet energiagazdálkodásának, a várható fejlődésnek, a munka-quota növekedési törvényének megítélésére.

Más-más országokban, egy- és ugyanabban az iparágban e hányadosok értéke más-más, egy- és ugyanabban az országban, ugyanabban az iparágban, aránylag rövid idő alatt erősen változik, a mint az egyes iparágakban a munkamenet, a munkarendszer, a géperő kihasználási módja változik.

Igy például Franciaországban 1840 és 1890 között a berendezett gépek átlagos lóerőteljesítménye $\frac{G}{B}$ feltűnően kicsiny, 13 és 15 között ingadozik, 1890 óta lassan emelkedik és 1911-ben még csak 38·5 lóerő volt. Igen nagy még ma is a kis üzemek, kis gépek száma, tehát az összes berendezési értéknek sokkal nagyobb százaléka szerepel tartalék gyanánt, mint oly országban, a hol a munkatermelés összpontosítása előrehaladottabb. A G , a $\frac{G}{L}$, a $\frac{G}{B}$ és $\frac{G}{\mu}$ hányadosok időgörbéit ezért más nemzetek időgörbéivel közvetlenül összehasonlítani nem szabad.

1909-ben az Amerikai Egyesült-Államok berendezett ipari gépi teljesítőképessége 10,000 lakosonként 2009 lóerő, a szén-fogyasztási quota 4700 kg. volt, Franciaországban ugyanez évben 837 lóerővel 1400 k.-gos szénquota áll szemben. Az amerikai gépszükségleti quota úgy aránylik a francia gépquotához, mint 2·4 az 1-hez, a megfelelő szénquoták arányszáma pedig 3·36 az 1-hez.

Az iparban dolgozó gépek teljesítőképességének és a munkásonkénti gépquotának alakulására a következő táblázatban mutatok be néhány példát:

O r s z á g	Év	Az iparban dolgozó		Lóerő munkásonként G/μ
		gépek teljesítő- képessége G lóerő	munkások száma μ	
Amer. Egyes. Államok	1899	10.097,893	4.712,763	2.12
	1904	13.487,707	5.468,383	2.47
	1909	18.675,376	6.615,046	2.82
Angolország	1907	10.033,000*	6.478,794*	1.55
Németország	1907	10.555,874	8.683,501	1.21

Igen tanulságos, ha az egyes iparágak munkásonkénti lóerőquotáit és ezek fejlődését vizsgáljuk.

Igy például a bányá-, közüző- és kohóiparban Németországban $\frac{G}{\mu}$ (1907) 2.17 lóerő, az Egyesült-Államokban (1899) 7.2, (1904) 9.97 és (1909) 6.14 lóerő volt. A gép- és fémiparban $\frac{G}{\mu}$ Angolországban (1907) 1.59, Németországban (1907) 1.07, az Egyesült-Államokban (1899) 6.02, (1904) 7.97 és (1909) 8.37 lóerő volt.¹ Behatóbb vizsgálat azt mutatja, hogy a $\frac{G}{\mu}$ hányados növekedésével gyorsan növekszik a berendezett gépi teljesítőképesség átlagos évi terhelési ideje, tehát az illető iparág fogyasztotta évi munka-integrál.

Még szembeötlőbb, ha az Egyesült-Államok magas-kemenczeüzemeinek $\frac{G}{\mu}$ hányadosát vizsgáljuk. $\frac{G}{\mu}$ 1899-ben 12.7, 1904-ben 22.0 és 1909-ben 30.5 lóerő volt. Nem szorul bővebb magyarázatra, hogy az, a ki az alkalmazott munkásszámból következtet a termelés mennyiségére, vagy a berendezett teljesítőképesség arányszáma szerint számítja a munkaintegrált, mily hibába esik.

* Kohógépek és kohómunkások nélkül.

¹ Azoknak az éveknél adatait emeltem ki, melyekben gondos összeírás történt, vagy a melyek öt éves census-cyklus eredményeit adják (Angolország, Egyesült-Államok).

Tanulságos példa erre STEINMETZ CHARLES, az Egyesült-Államok egyik vezető technikusának tévedése,¹ a ki a *forgalomba hozott* szén mennyiségének időgörbéjéből kiindulva, a szénfogyasztást és a munkafolyamatok termelési eredményeit nem elemezve, arra az eredményre jutott, hogy 1958-ban az Egyesült-Államok széntermelése a 10 milliárd tonnát, 1920-ban már az 1 milliárd tonnát el fogja érni (!), holott a fentiek szerint az 1920-ban forgalomba hozott szén tényleg csak 670 millió tonna volt és számításaim szerint (lásd a 3. pont alattiakat) 1950-ben fejenként 11,000—12,000 kg.-ot, kb. 120 millió lakost feltételezve, legfeljebb 1320—1440 millió tonnát fog elérni.

5. Csonkamagyarország szénbányáinak termelése 1913-ban kerekén $39 \cdot 10^{12}$ kg. caloria értékű volt; a jelenlegi évi termelés caloria-értéke számításaim szerint legfeljebb $18—20 \cdot 10^{12}$ kg. caloriára tehető. E számok is elég meggyőző erővel bizonyítják az első dolgozatomban felállított azt a tételt, hogy hazánk gazdasági egyensúlyát csak úgy biztosíthatjuk, ha energiagazdálkodásunkat gyökeresen megjavítjuk. Erre ez egyik módot a mechanikai munka termelésének összevonása, a gőzzel folytatott vontatási üzemeknek fokozatosan elektromos üzemre való átalakítása, tehát a mechanikai munkatermelés átlagos hatásfokának javítása adja. A másik sürgős teendő a vízierők kiépítése. Csonkamagyarország a tőlünk elszakított országrészek nagy vízierőit nem nélkülözheti. Energiagazdálkodás szempontjából tekintve országunk feldarabolását, megint csak arra az eredményre jutunk, hogy ez az állapot hosszabb ideig tarthatatlan lesz.

¹ Proceedings A. I. E. E., 37. köt. 59. o. 1918., továbbá: «Steinmetz über Amerikas Energievorräte». E. T. Z. 41. köt. 400. o. 1920.

AZ ELEKTROMOS MŰVEK TERHELÉSI DIAGRAMMAI ÉS AZ ENERGIAGAZDÁLKODÁS JAVÍTÁSA.

HOOR TEMPIS MÓRICZ 1. tagtól.

A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 január 19.-i ülésén előterjesztett «A művelt nemzetek mechanikai munkaszükséglete» című dolgozatomban¹ a nemzetek mechanikai munkaszükségletének fejlődésére vonatkozó vizsgálataimról számoltam be és az idevágó irodalomban található számos tévedés és ellentmondás magyarázatát és helyreigazítását adtam. Rámutattam az eddigi energiagazdálkodás tarthatatlanságára és a közöltem számadatokból azt az eredményt szűrtem le, hogy a művelt nemzetek az egyre, majdnem állandó gyorsulással növekvő mechanikai munkaszükségletet széntermelésükkel nem fogják kielégíthetni. Ezért mindenütt sürgősen hozzá kell látni a mechanikai munka termeléséhez szükséges fajlagos caloriaszükséglet csökkentéséhez, a mechanikai munka termelésének összpontosításához és a vizierők nagyban való kihasználásához.

Az e feladatok megoldására irányuló törekvéseknek sok helyütt a szenet termelő érdekeltségek ellenállása állta útját. De nagyban késleltette az alkotó munkát, számos nagy terv megvalósítását akadályozta meg, sok csalódást okozott az a számos téves adat és felfogás is, mely a nagyobb fogyasztó körzeteket ellátó elektromos művek hasznosítási tényezői és egyéb jellemző adatai dolgában teljesen hamis képet ad és az irodalomba beférkőzve, a gazdasági életben igen sok kárt okozott.

Mindenekelőtt azoknak a vizsgálatoknak az eredményéről

¹ Math. és Természettud. Ért. XXXVIII. kötete 293. lap 1921.

akarok beszámolni, a melyeket a kisebb-nagyobb körzeteket ellátó elektromos művek évi maximum-terhelésének, M -nek és az *átlagos évi terhelésnek*, A -nak az $\frac{M}{A}$ hányadosa (az úgynevezett *hasznosítási vagy terhelési tényező* reciprok értéke) dolgában végeztem.

Az elektromos művek üzemi gyakorlatára, statisztikájára vonatkozó közleményekben, tervmunkálatokban és üzemi jelentésekben az $\frac{M}{A}$ hányadosra vonatkozó számos adatot találunk; a közölt szám adatok tág határok között ingadoznak és első tekintetre úgy látszik, mintha egyes üzemi tényezők *véletlen*, minden törvényszerűség nélkül való összetalálkozása szabná meg azt, hogy valamely mechanikai munkát szétosztó mű legnagyobb évi terhelése hányszorosa az átlagos terhelésnek.

Könnyű belátni, hogy mindaddig, a míg azt kell feltételeznünk, hogy az $\frac{M}{A}$ hányados minden egyes esetben a véletlen szülte eredmény, lehetetlen előre megmondanunk, hogy valamely körzetnek ellátására tervezett műnek, előreláthatólag az év 8760 órájában $A \cdot 8760$ kilowattórát szolgáltató műnek M legnagyobb terhelése mekkora lesz. Már pedig a várható legnagyobb terheléshez kell szabnunk a gép- és szétosztó berendezések teljesítőképességét; a várható legnagyobb terhelés szabja meg a tökeszükségletet, tehát a tökeszolgáltatból eredő költségtételeket, míg a várható évi bevétel az $A \cdot 8760$ szorzatnak függvénye. Minél kisebb M -mel termelhetünk $A \cdot 8760$ kilowattórát, minél jobban közelíti meg az $\frac{M}{A}$ hányados a képzelhető legkisebb értéket, az egységet, ceteris paribus annál jobb lesz az eredmény. Ha valamely körzetnek ellátására valamely vizierő munkáját akarjuk felhasználni, ha a napi ingadozások kiegyenlítésére és az évszakos változások egyensúlyozására tároló medenczéket, völgyzárógátákat akarunk méretezni, a vizierő hajtotta generátorokat thermikus művekkel együttesen akarjuk járatni, a várható M terhelést *jó megközelítéssel* előre ismernünk kell.

A gyakorlatban nem ismerünk olyan munkát fogyasztó gépet, készüléket, mely teljesen állandó terheléssel dolgoznék.

Ezért a fogyasztók százainak vagy ezreinek egyidejű munkadiagrammjaikat egymás fölé helyezve, olyan eredő munkadiagrammot kapunk, melyben kifejezett maximumok és minimumok vannak. Ezért az $\frac{M}{A}$ hányados mindig nagyobb az egynél.

Legyen az évnek valamely t sorszámú órájában a terhelés $m = \varphi(t)$ kilowatt; akkor

$$A = \frac{1}{8760} \int_0^{8760} \varphi(t) dt,$$

és $\varphi(t)$ absolut évi maximuma az előbbieket szerint M . Könnyű belátni, hogy a mű méretezésének szempontjából bennünket első sorban az M terhelés napjának kilowattóra termelése, azaz:

$$k = \int_0^{24} \varphi(t) dt,$$

az átlagos terhelés $a = \frac{k}{24}$, továbbá a legnagyobb kilowattóra termelésű nap k_1 termelése, a_1 átlagos és M_1 maximum terhelése érdekel. A statisztika azt mutatja, hogy a legnagyobb terhelés napja sohasem esik egybe a legnagyobb termelés napjával; ezért $a < a_1$, $M > M_1$ és mindig $\frac{M}{a} > \frac{M_1}{a_1}$. Ezért a következőkben a rövidség kedvéért csak az $\frac{M}{A}$ és az $\frac{M}{a}$ hányadosra vonatkozó vizsgálatok eredményét foglalom össze.

Tanulmányaim során több mint 800 műnek adatait dolgoztam fel és több évre visszamenőleg kutattam azt az összefüggést, mely az $\frac{M}{A}$ hányados és a többi jellemző adat között van. Az eredményeket, melyek az irodalomban található ellentmondások magyarázatát és a tévedések okát adják, a következőkben foglalom össze:

1. A fogyasztó körzet sugarának, a műhöz kapcsolt fogyasztók számának növekedésével az $\frac{M}{A}$ hányados csökken, valamint csökken a fogyasztók összes, kilowattban kifejezett $-E$ -berendezési értékének $\frac{M}{E}$ hányadosa is.

2. Egy és ugyanabban a körzetben csökken az $\frac{M}{A}$ hányados, a mint a fogyasztók számának szaporodása révén a körzetet ellátó mű a körzet összes mechanikai munkaszükségletének nagyobb és nagyobb részét látja el. $\frac{M}{A}$ tehát csökken, ha a körzet fejenkénti kilowattóraquotája növekszik.

3. Hasonló jellegű fogyasztók sokaságát ellátó, közel egyenlő kilowattóraquotával dolgozó művek $\frac{M}{A}$ hányadosai közel egyenlők; meglepő, hogy a szélességi fok és az éghajlati viszonyok nem okoznak számottevő különbségeket.

4. Hasonló jellegű körzetekben a q kilowattóra-quota és az $\frac{M}{A}$ hányados közötti $\frac{M}{A} = \psi(q)$ összefüggést mutató görbék közel egybeesnek.

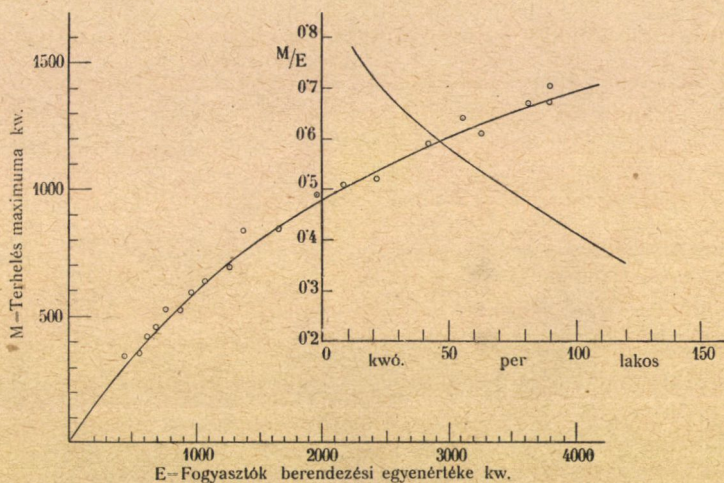
Az összes felvett fogyasztó körzetek $\psi(q)$ görbéi hasonló jellegűek. Ott a hol a $\psi(q)$ görbéken törések vagy inflexiók láthatók, kivétel nélkül árszabásbeli változtatásokban, hibás árszabásban, új fogyasztó területek bekapcsolásában találjuk meg a rövid időig tartó szabálytalanságok okát. $\frac{M}{a}$ mindig kisebb, mint $\frac{M}{A}$.

5. A valamely körzetben elérhető kilowattóra-quota függvénye az átlagos kilowattóránkénti bevételnek, másszóval az átlagos kilowattóránkénti eladási árnak. Minél olcsóbb a kilowattóra, annál több nagy üzem fedezi mechanikai munkaszükségletét elektromos energiával, annál nagyobb-átlagos használati órával dolgoznak a fogyasztók. Mindebből az következik, hogy az $\frac{M}{A}$ hányados annál kisebb, annál gyorsabban csökken valamely fogyasztó körzetben, minél olcsóbban adja a mű a kilowattórát a fogyasztóknak.

6. Ugyanaz, a mit az 1—5. pont szerint a helyhez kötött fogyasztókat ellátó művekre megállapítottam, a statisztika tanulságai szerint áll a mozgó fogyasztókra, illetőleg közúti vasutakat és nagyvasutakat ellátó művekre, valamint helyhez kötött fogyasztókat és vasutakat vegyesen ellátó művekre is.

Minél nagyobb tehát az egy és ugyanahhoz a műhöz kötött vasuti hálózat, minél több a mozgó vonatszám, minél nagyobb a vonal-hossz egységére számított tonnakilométer-teljesítmény, annál kedvezőbb a legnagyobb pillanatnyi terhelés, annál kisebb az $\frac{M}{A}$ hányados.

7. A mint a különféle körzetek kwóra-quótája a 400 felé



1. ábra.

A nagyszebeni hydro-elektromos mű berendezési értékének és az év legnagyobb terhelésének fejlődése 1897—1916-ig.

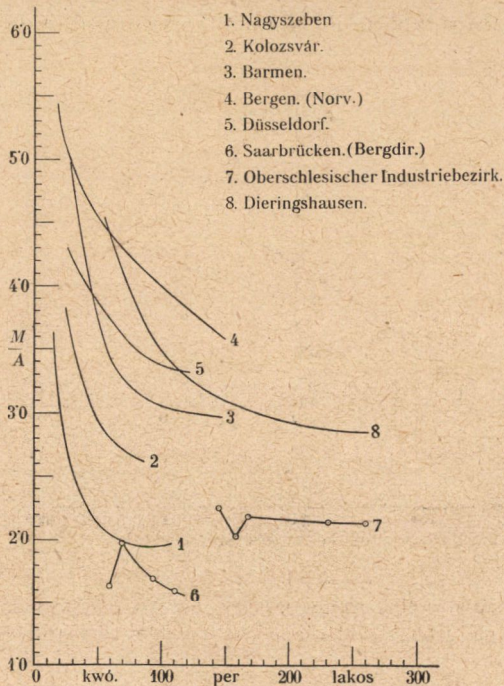
közeledik, az összes $\frac{M}{A}$ görbék ugyanegy határérték felé közelednek. E határérték 1.4—1.6 között van.

A megrajzoltam számos görbéből, a feldolgozott sok száz példából csak néhányat akarok bemutatni.

Az 1. számú ábra a nagyszebeni hydro-elektromos mű — M — legnagyobb terhelése és a fogyasztók — E — kwegyenértékének $\frac{M}{E}$ hányadosa, valamint az M és a kilowattóraquota közötti összefüggést mutatja. E példa azért különösen tanulságos, mert a mű 1896-ban indult meg és azóta csökkenő árszabással állandóan növelte fogyasztó-körzetét; városi és mezőgazdasági, kis-

és nagyipari, valamint közúti vasúti munkaszükségletet és világitást látott el.

Az ábrából látható, hogy a míg kezdetben 10 kilowattóra fejquota mellett az év legnagyobb terhelése a berendezett kw-értéknek, E -nek 80 százalékát elérte, 1916-ban, 120 kwórás



2. ábra.

Az év legnagyobb terhelésének — M — és az év átlagos terhelésének — A —
 $\frac{M}{A}$ hányadosa és a kilowattóra-quota közötti összefüggés.

quotának megfelelően az összes bekapcsolt fogyasztókészülékek bekapcsolt kw-értékének 35 százalékát nem haladta meg.

A 2. ábrában a nagyszebeni és kolozsvári, valamint néhány külföldi műnek $\frac{M}{A} = \psi(q)$ görbéit mutatom be. Nagyszeben városi, ipari és mezőgazdasági, Kolozsvár és Bergen városi és középipari, Barmen és Düsseldorf nagyipari, Saarbrücken és Ober-

schlesischer Industriebezirk bányaiüzemi és nagyipari, Dieringshausen mezőgazdasági jellegű fogyasztó-körzetek.

A következő táblázatban összeállítottam az Északamerikai Egyesült-Államokban az 1902–1920. években működő elektromos világítási és elektromos munkaátviteli művek¹ évi termelésére, átlagos terhelésére, a kilowattóra-quotára, valamint a felszerelt generátorok összes teljesítőképességére vonatkozó adatokat.

Év	1902	1907	1912	1917
Művek száma	3620	4714	5221	6542
<i>G.</i>				
A berendezett elektromos generátorok összes teljesítőképessége 1000 kilowatt	1210	2710	5160	9000
Évi kilowattóra termelés. Millió kwóra	2507	5862	11502	25400
<i>A</i>				
Évi átlagos terhelés, 1000 kw.	287	669	1310	2900
Kilowattóra quota per lakos	30	64	125	242
$\frac{G}{A}$	4.22	4.05	3.94	3.10

Az 1917 óta észlelt fejlődést követve, az 1919. évi termelést és az 1919-ben épülő műveket alapul véve, arra az eredményre jutok, hogy 1920-ban a G érték a 12.5 millió kilowattot, az évi kwóra termelés a 42,000 milliót, tehát az A érték a 4,800,000 kilowattot és a kwóra-quota a 400 kwórát elfogja érni, tehát $\frac{G}{A}$ körülbelül 2.6 lesz.

Mivel e művek okvetlenül nagyobb generátorteljesítményre rendezkedtek be, mint a mekkora legnagyobb terhelést ellátniok kellett, másrészt a táblázat tanúsága szerint a berendezett gépi teljesítő-képesség és az évi termelés sokkal gyorsabban növekedett, mint a művek száma, az következik, hogy az egyes művek $\frac{M}{A}$ értékei még sokkal gyorsabban csökkentek, mint a $\frac{G}{A}$ érték. (Lásd az 1. és 2. pontot.)

¹ Kizárólag csak közlekedési üzemeket szolgáló művek nélkül.

A nagy amerikai hydro-elektromos művek gyönyörű példát szolgáltatnak arra, hogy nagy vizierők teljesítményét — olcsó áron szolgáltatva a kwórát — mily kicsiny $\frac{M}{A}$ hányadossal lehet értékesíteni.

A következő táblázatban néhány példát állítottam össze; az amerikai példák sorát három európai művel egészítettem ki.

A mű neve	M 1000 kw.	Évi termelés millió kwó.	$\frac{M}{A}$
Niagara Falls Power Co.	143	1016	1·23
Hydraulic Power Co. Niagara Falls ...	89	717	1·09
Ontario Power Co.	124	942	1·15
Montana Power Co.	150	868	1·51
Toronto Power Co.	129	661	1·71
Basel, Kraftwerk Augst	8·17	46	1·55
Zürich, Städt. El. W.	17·9	75	2·09
Soc. Generale Edison Milano	33·0	136	2·13

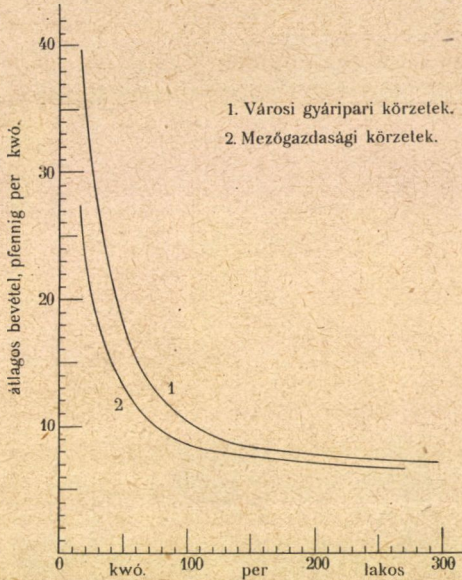
Az átlagos kwóránkénti bevétel és a kwóra-quota közötti összefüggésre a 3. ábrában mutatok be példát. Ez ábrának 1. és 2. számú görbéjét több mint 300 német fogyasztó-körzet adataiból szerkesztettem meg, oly módon, hogy a megszerkesztett pontok sokaságának megfelelő középérték-görbéket határoztam meg.¹

¹ Az átlagos kilowattóránkénti bevétel és az *átlagos évi használati idő* közötti összefüggést már DETTMAR tette vizsgálat tárgyává, lásd: DETTMAR GEORG: «Abhängigkeit zwischen Benutzungsdauer und Strompreis bei Elektrizitätswerken». Elektr. Kraftbetr. u. Bahnen, 6. köt. 1908, 141. o.; továbbá E. T. Z. 39. köt. 1908, 343. o.

Lásd továbbá SCHONTEN I. A.: «Beiträge zur Theorie der Tarifbildung», E. T. Z. 34. köt., 1913, 1113. o.

E vizsgálatok egyes fogyasztó kategóriákra és nem egész körzetekre vonatkoznak. Az eredmények ezért a felvettem kérdések eldöntésére nem alkalmasak és csak a tarifaképzés módjára szolgálhatnak útmutatásul. Nem adnak semmiféle útbaigazítást az $\frac{M}{A}$ hányados becslésére. A használati idő egyébiránt oly szoros kapcsolatban áll az egyes fogyasztók üzemeinek *egyéni feltételeivel*, hogy ebből általános érvényű következtetése-

A 4. és 5. ábrában példát mutatok be arra, hogy a legnagyobb terhelés napjának megfelelő $\frac{M}{a}$ hányadosnak *előzetes pontos becslése* milyen fontos akkor, ha vízierőket akarunk



3. ábra.

A termelt kilowattóránkénti átlagos bevétel és a kwóra-quota közötti összefüggés a németországi művekben.

gazdaságosan kihasználni és tervezés közben súlyos tévedésektől akarjuk magunkat megóvni.

Mind a két ábra 45 millió kwóra évi termelésű műnek terhelési diagramját, az $m = \varphi(t)$ függvény képét mutatja az év legnagyobb terhelésének napján. A mű nagyvárosi jellegű fogyasztó-körzetet lát el, melyben a nagyipar az elektromos energiát csak igen csekély mértékben veszi igénybe és melyben a világítási szükséglet az esteli órákban erősen kifejlődött terhelési maximumot okoz.

ket vonni alig lehet; a DETTMAR szerkesztette pontokból csak nagy erőltetéssel lehet folytonos görbéket szerkeszteni.

Az évi termelés

$$\int_0^{8760} \varphi(t) dt = 45.000,000 \text{ kwó, tehát } \frac{M}{A} = \frac{15000}{5140},$$

azaz kerek számban 2·92. A legerősebb terhelés napján az ábrák szerint a napi teljesítmény

$$\int_0^{24} \varphi(t) dt = 156000 \text{ kwóra volt,}$$

az átlagos terhelés pedig $a = 6500 \text{ kw}$; ezek szerint $\frac{M}{a} = 2·31$ volt.

Legyen az e napon rendelkezésre álló vízmennyiségnek (lefolyó vízmennyiségnek) megfelelő, a generátorok kapacsein rendelkezésre álló 24 órás teljesítmény

$$I = \int_0^{24} \varphi(t) dt \text{ és pedig } I = 216000 \text{ kwó.}$$

Akkor a vízierőből kitermelhető átlagos teljesítmény

$$v = \frac{I}{24} = 9000 \text{ kw.}$$

Kivételes eseteket nem tekintve, a másodpercenként lefolyó vízmennyisége 24 órán belül közel állandónak tekinthető, tehát v egyúttal nagy megközelítéssel azt az *állandó terhelést* adja, melyet a lefolyó víz munkájával 24 órán át egyéb segédeszköz nélkül elláthatunk.

A 4. ábrából látható, hogy az éjfél 12 órától t_1 időpontig, valamint a t_2 időponttól éjfélig terjedő időközben a vízierő momentán teljesítőképessége $v > \varphi(t)$, míg a $t_2 - t_1$ időközben

$$v < \varphi(t), \text{ de } v > \frac{1}{24} \int_0^{24} \varphi(t) dt.$$

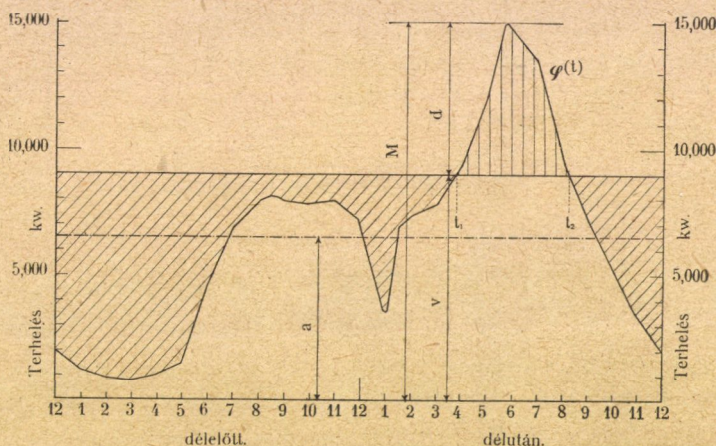
Ezek szerint e napon a $(t_1 - 0)$ és $(24 - t_2)$ időközökben a

$$v(t_1 + 24 - t_2) - \left[\int_0^{t_1} \varphi(t) dt + \int_{t_2}^{24} \varphi(t) dt \right]$$

munkaintegrál a vízi teljesítményből *elvéssz*, míg a $(t_2 - t_1)$ időközben az

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt - v(t_2 - t_1) = \Gamma$$

munkamennyiséget *thermikus tartalékkal* kellene pótolnunk. Ha ellenben a $\varphi(t) > v$ terhelésekkel ellátandó Γ munkamennyiségnek megfelelő vizet a $(t_1 - 0)$ és $(24 - t_2)$ időközökben raktározuk és a vízerőmű gépi teljesítőképességét M -re szabjuk, a fo-



4. ábra.

Évente 45 millió kwórát termelő hydro-elektromos mű munkadiagrammja a legnagyobb terhelés napján; a vízierő szolgáltatta napi teljesítmény *nagyobb*, mint a fogyasztó-körzet munkaszükséglete.

gyasztóköri felvette egész elektromos munkát e napon a vízierőből láthatjuk el.

Ha a vízierő átlagos teljesítménye a legerősebb terhelés napján

$$v < \frac{1}{24} \int_0^{24} \varphi(t) dt \quad \text{és} \quad a - v = h,$$

akkor a h. 24 kilovattórányi *hiányt* *okvetlenül thermikus tartalékkal* kell pótolnunk, egyúttal — ha víznek raktározásáról *nem gondoskodunk* — a

$$v(t_1 - 0) + v(t_3 - t_2) + v(24 - t_4) - \\ - \left[\int_0^{t_1} \varphi(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} \varphi(t) dt + \int_{t_4}^{24} \varphi(t) dt \right]$$

vizteljesítményt elveszítjük; a thermikus tartaléknak legnagyobb teljesítőképességét pedig legalább is $M - v = d_3$ -re kell szabnunk. Ha azonban

$$\int_{t_1'}^{t_2'} \varphi(t) dt + \int_{t_3'}^{t_4'} \varphi(t) dt$$

munka-integrál előállítására szükséges vízmennyiség raktározásáról gondoskodunk, akkor az e napon lefolyó vizet az utolsó cseppig értékesíthetjük és a h. 24 kilowattóra-hiányt *egyenletes és állandó h terhelésű thermikus* tartalékkal, 24 órás *folytonos* üzemben pótolhatjuk. Ez esetben a vízerőmű maximális gépi teljesítőképességét $(M - h) = (d_1 + v)$ -re kell szabnunk.

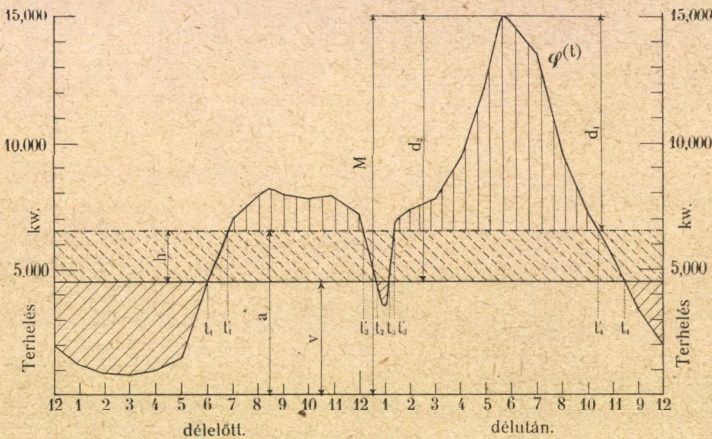
A míg tehát vízraktározásról gondoskodva, a körzet munkaszükséglete és a vízierő teljesítménye közötti hiányt kicsiny teljesítőképességű, tehát olcsó, egyenletes, gazdaságos 24 órás üzemben dolgozó thermikus tartalékkal pótolhatjuk, addig raktározó medence nélkül aránylag nagy teljesítőképességű, drága thermikus tartalékról kell gondoskodnunk, mely időszakosan, változó terheléssel, tehát rosszabb átlagos hatásfokkal dolgozik.

Minél jobban közeledik az $\frac{M}{A}$ érték, valamint a legerősebb terhelés napjának $\frac{M}{a}$ értéke az egységhez, annál jobban fogjuk ceteris paribus a rendelkezésünkre álló vízierőket kihasználni, annál kisebb napi kiegyenlítő medencéire lesz szükségünk. Ugyanez áll mutatis mutandis az egész év munkadiagrammjára és az időszakos víztárolókra is.

A fentiekben közöltem vizsgálatok eredményeinek tanúsága szerint a természetadta vízierőket annál jobban, annál kisebb gépi teljesítőképességgel, aránylag annál kisebb kiegyenlítő medencékkel fogjuk értékesíteni, valamely adott vízierőből annál gazdaságosabban fogunk munkát termelhetni, minél jobban köze-

liti meg az $\frac{M}{A}$ és $\frac{M}{a}$ hányados az egységet, tehát minél nagyobb a fogyasztókörzet, minél nagyobb a fogyasztók sokfélesége és minél nagyobb a kilowattóra-quota.

Ebből látható, hogy a vízierők értékesítésének, különösen az erősen változó hozamú vízierők kihasználtságának szempontjából *mily fontos a mechanikai munka termelésének nagy központokba való összevonása, a körzetek sokféleségének össze-*



5. ábra.

Évente 45 millió kilowattórát termelő hydro-elektromos mű munkadiagrammja a legnagyobb terhelés napján; a vízierő szolgáltatta napi teljesítmény kisebb, mint a fogyasztó-körzet munkaszükséglete.

kapcsolása. Végre könnyen belátható az is, hogy valamely adott vízierő gazdasági értéke, a kitermelhető munkaintegrál akkor éri el a maximumot, ha a fogyasztó körzet munkaszükséglete $m = \varphi(t)$ az év minden pillanatában nagyobb mint v .

Nem közömbös ezek szerint, hogy valamely körzet ellátására vízierőmű építését tervezve, mekkorára becsüljük az $\frac{M}{A}$ és $\frac{M}{a}$ hányadosokat. Helyes vízgazdálkodási tervről, helyes energiazdálkodásról a közöltem eredmények ismerete nélkül szó sem lehet.

Nagyobb, 300–400 kilowattórás quotát felvenni tudó körzetek $\frac{M}{A}$ hányadosát legfeljebb 1·8–2·2-re kell tennünk; teljesen meddő költsékezés és kár a közgazdaságra, ha ily művekben $\frac{M}{A} > 2·2$ és 500–600 kwó-quotás művekben $\frac{M}{A} > 1·6$ hányadossal számol valaki és e feltevéshez szabja tervét.¹

A fent mondottakból az is következik, hogy az energia-gazdálkodás valamely körzetben annál tökéletesebb lehet, minél jobban közelíti meg a kwóra-quota az integrális munkaquotát, minél teljesebben öleli fel valamely elektromos mű az *összes munkafogyasztókat*. Ezért oly fontos például az, hogy a közúti vasutak és nagyvasutak vontatási munkaszükségletének ellátása is a helyhez kötött fogyasztókat szolgáló művekből történjék. Téves az az általánosan elterjedt hit, hogy a nagy vontatási üzemek rontják az elektromos művek üzemi feltételeit. A fentiekben bizonyítottak szerint éppen ellenkezőleg áll a dolog.

¹ Egyes vízierők gazdasági jelentőségére és értékesíthetésére vonatkozó számos közleményben teljesen hamis végeredményeket találunk. A tévedés legtöbbször onnan ered, hogy az $\frac{M}{A}$ hányadost túlnagyra, 3-ra, 3·5-re becsülik, a kilowattóra quotára való tekintet nélkül.

IKER SZÍKLEVELES JEGENYEFENYŐ-CSEMETÉK.

(PLANTULAE ABIETIS ALBAE GEMINATIS COTYLEDONIBUS.)

(11 szövegközi ábrával.)

GYÖRFFY ISTVÁN-tól.

A Magas-Tátrában, Barlangligetnél, az «Ivánka-út» mellett 1916. VII. 22.-én tömegesen néztem át bryologiai célzattal *MNIUM*-gyepeket. E *MNIUM*-gyepekekben levő jegenyefenyő-csemeték között feleségem néhány elágazó levelüt vett észre, s mint ilyet nyújtotta át nekem. Az okozott öröm gyermekeimet is sarkalta a keresésben s a kisebbik fiam: BARNABÁS is talált egyet, s pedig épp' a legszebbet (a 2. ábra eredetijét).

Összesen négy példányt zsákmányoltunk.¹ A termőhely 800 m. t. sz. f. m.-ban van.

Áttekinthetőség kedvéért két részben ismertetem a rendellenes jegenyefenyő-csemetéket. Az I. részben a külső leírást adom, a II. részben a belső kialakulást teszem szóvá.

I. Külső leírás.

A gyűjtött növények csiranövénykéek, mert sziklelevelük van!, a melyek felső oldalukon szürkellők² (v. ö. ERD. NÖV. : 196). FEKETE-

¹ A cikkekhez eredetileg csatolt öt fénykép-táblát (microphotographiai felvételeket) a nagy költség miatt nem lehetett sokszorosítani. A szöveget is erősen kellett redukálni.

² Viaszbevonattól, a mely: reflector! L. J. REINKE in *Ber. d. Deutsch. Botan. Gesellsch.* I. 1883 : 411.

MÁGÓCSY Erdészeti Növénytana szerint (II. k. 196. old.) rendszeren 5 sziklevel fejlődik; példányainkon 4 levél látható ugyan (1—4. ábra), de mind a négy növénykénél 1—1 levél tulajdonképpen *iker*, tehát az 5-ös szám szerepel itt is. Az első közönséges (primordialis) levelek is jelentkeznek már.

Bennünket a *kettős* sziklevelek érdekelnek, a melyek: *ikrek*¹; KLEIN Gy. «kettős»-nek nevezi.²

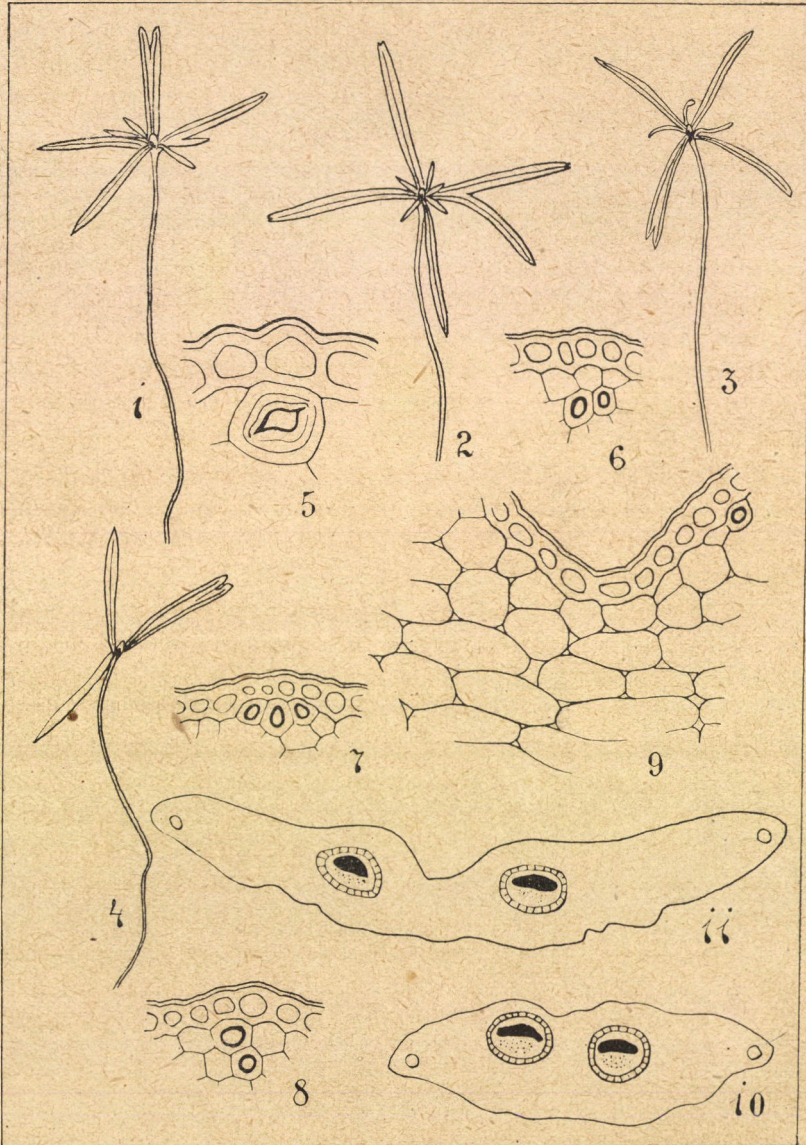
A 3. ábrán feltüntetett növény *ikerlevele*: 20 mm hosszúságú, tövén 1·5 mm, felső részén (legnagyobb átmérőjénél) 2 mm széles. Kétsúcú; egyik csúc valamilyen rövidebb olyanformán, hogy az elválasztó hézag aljától számítva a két *szabad* levélvég: 3, illetőleg 2·4 mm-nyire ér. A levéllemeznek két ere van, a melyek külön futnak le, csakis a levél tövében találkoznak össze; felső végükön egymástól 1·5 mm távolságnyira vannak. A szürkellő szint adó légzőnyílások (stomata) úgy a két ér között, mint a szélek felé, vagyis: három sávban, egyenletesen, sorokba elhintve fejlődtek ki. Az ikerlevél két szabad vége lekerített csúcsú.

A 4. ábra eredeti növénye ikerlevele már szélesebb, mint az előbbié. 12 mm hosszú, legszélesebb pontján átmérője 3 mm. E széles ikerlevél 2 szimmetrikus, 1·7 mm hosszúságú, lekerített végű csúcsban végződik, a mely — az ikerféllevelek csúcsainak megfelelő két végrészlet egymástól kb. 0·7 mm-nyi távolságban van. Ez a sekély behasítás is azonban látszik, hogy *utólag* keletkezett. A levélerék itt is különváltak, mindössze az ikerlevél tövén közeledik egymáshoz, s találkoznak egybe. A 2 ér egymástól legtávolabbra 2·5 mm-ben van. Lélegző nyílások itt is sűrűn találhatók. Az ikerfelek csúcsai lekerítettettek.

Igen szépen fejlett ikerlevelet mutat az 1. ábrán közölt növény eredetije. A normális levelek mellett azonnal kiri feltűnő szélességével. E csiranövénykének ikerlevele 21·5 mm hosszúságú; alján 2 mm, közepén 3, felső részén pedig szinte 4 mm széles. Az ikerlevél 2 különálló villaágban végződik; minden

¹ Ikerlevél = symphyllia, folia geminata l. BORRÁS V. 1893: 135.

² KLEIN 1891^a: 263, 1891^b: 321, 1892^a: 121, 1892^b: 6 (420), 8 (422), 1892^c: 429.



1—11. ábra.

villaág (ikerfél) kb. 1·3 mm széles; egymástól egy hirtelen összekeskenyedő kb. 3·5 mm mélységű behasítás választja el. Ez a behasítás azonban eredetileg nem volt ilyen mély. A légző nyílások sorokba rendezettsége igen jól látható. A 2 vezetőnyaláb igen élesen válik ki a levéllemez felekből. A levélerek közlelednek ugyan egymáshoz a levél aljában, de *nem* egyesülnek egymással. Az ikerlevélnek mindkét csúcsa, levél (iker)-fele lekeresített végű. A többi 3 sziklelevél hegye is ép, csak a primordiális leveleken, a közönséges (kurta) lombleveleken látható a jegenyefenyő egyik jellege: a csorbitottság.

Legszebb példa az összes ikerleveles egyedek közt a 2. ábrán feltüntetett. Szabályos¹ keresztbe rendezettek a sziklevelek, azonban a kereszt egyik szára elágazó, t. i. az ikerlevél. Ennek az ikerlevélnek 7 mm hosszú közös (de kettős értékű) lemeze van, a melyből folytatódik 18 mm-nyire a villa egyik ága, míg a másik ikerfél kb. 25° alatt ívesen elgörbül 17 mm hosszban a villa másik szabad ágát alkotva. E szétágazó ikerlevélnek alsó összefüggő része tövén 2, legszélesebb pontján 3 mm szélességű. A villaág végek 18 mm-nyi távolban vannak egymástól. A két szabad végre szétváló ikerlevél ikerfelei majdnem 2 mm szélesek. A két ér igen jól megkülönböztethető; alúl összefutnak. A hosszanti sorokba rendezett légző nyílások itt is jól megkülönböztethetők. Úgy a rendes sziklevelek csúcsa kicsorbitottsága,² mint az ikerlevélnek két szabad vége kicsipett volta igen éles és határozott.

A fentiekben ismertetett sziklevelek 75%-a tehát rövidebb, mint a *rendes sziklevelek átlagos hossza*, a mennyiben ez 23 mm szokott lenni³; csakis a 2. rajzon feltüntetett példány (25%) mondható *rendes* fejlettségűnek.

Példányaink még egyéb tekintetben is mutatnak rendelle-

¹ A normális csiranövénykéek levelei is mindig szabályosan minden oldal felé egyenlően állanak el (l. W. BUSSE: Beiträge zur Kenntnis der Morphologie u. Jahresperiode der Weisstanne (*Abies alba* Mill.) — Sep. ex *Flora* 77. 1893: 3.

² Tehát a levél: *kéthegegyű* (Borbás kifejezése in 1893: 135.)

³ KIRCHNER in Lebensgesch. d. Blütenpfl.: 81: TUBEUF szerint: 20—30 mm hosszú (l. TUBEUF 1891: 94.)

nességet. T. i. a normális sziklevelek vége lekerekített tompa,¹ semminemű kicsorbitottságot nem látni rajtuk.² Ellenben a 2. ábrán ismertetett növényünkön a rendes sziklevelek közül mind a háromnak vége kicsípott volt, s az ikerlevélnek is mindkét vége kicsorbitott.

Végül: a primordialis levelek közt is akad két olyan, a melyeknek a vége kicsípott³; ez is rendellenesség, a mennyiben a primordialis levelek hegye «am Ende spitz oder stumpf, aber nicht ausgerandet...»⁴

II. Szövetteni vizsgálat.

Metszetek készítésére a 4. rajzon ábrázolt csiranövény ikerlevelét használtam fel (fellágyítás, alc. abs.)⁵ vezetékviz két napig hidegen; 10%-os *lactophæol*-ban villanyos melegítőn zárt edényben felfőzés, majd tömény *lactophæol*-ba helyezés. A *lactophæol* JULES AMANN receptje⁶ szerint készült. A *lactophæol* ugyanis egyesíti magában a tejsavnak⁷ fellágyító, valamint felduzzasztó és a carbolsavnak felderítő tulajdonságát, s mindamellet *nem roncsol* (például a chloroplastisok szépen megmaradtak!) J. AMANN *lactophæol*-ja itt is kitűnően bevált.⁸

¹ Lebensgesch. d. Blütenpfl. Fig. 19, A, B; TUBEUF 1891: 94, Fig. 129.

² «Die Kolyledonon . . . sind . . . ganzrandig, am Ende stumpf . . .» KIRCHNER in Lebensgesch. d. Blütenpfl.: 81.

³ És pedig a 3. ábrán egy primordialis levél kicsípott végű, az 1. ábrán szintén egy, de ez utóbbinál nem nagyon markáns e jelleg.

⁴ KIRCHNER in Lebensgesch. d. Blütenpfl.: 81; TUBEUF (1891: 94) szerint is.

⁵ STRASBURGER-KOERNICKE, Prakt.: 566.

⁶ JULES AMANN: Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie u. für mikroskopische Technik XIII. 1896: 18.

⁷ HANS OSCAR JUEL elébb vízben, majd tejsavban forralta a herbariumi anyagot (*Riccia*), s egészen átlátszó lett — l. Ö. JUEL Über den anatomischen Bau von *Riccia Bischoffii* Hüb. — *Svensk Botanisk Tidskrift* Band 4. 1910. Häfte 3: 164.

⁸ HANS NEUMAYER beágyazásra is alkalmasnak tartja az ily módon fellágyított herbariumi anyagot, miként dr. RICHTER ALADÁR egyik művében olvasom (A *Marcgraviaceæ* néhány új alakjáról — in *Mathem. és Természettud. Értesítő*, XXXIV. 1916: 562; szerző kiadása, külön kötet

Az ikerlevélből kerekszámban: 100 db keresztmetszetet készítettem.

A rendellenes levél anatómiai kialakulása ismertetése előtt emlékeztetbe kell hoznom, hogy a normális kifejlődésű szik (cotyledon)-levele anatómiai alkatában sokkal inkább hűz a jegenyefenyő árnyékban fejlődött¹ lomb- vagy tüleveléhez, mint a napsütött levél² szerkezetéhez. Ugyanis a jegenyefenyő többféle levelet fejleszt, a melyek nemcsak hosszukat és elhelyezkedésüket³ illetőleg különböznek egymástól, hanem anatómiai szerkezetükben is.⁴

És pedig a megvilágított-, árnyék-⁵ s végül a sziklevelnek s a főhajtás tujének⁶ anatómiai szerkezetében különbségek nyilvánulnak meg.

Valójában azonban a *normalis sziklevel* anatómiai kialakulását *nem találjuk* megegyezőnek az irodalom megállapodásával.⁷

1916: 14, marg. megjegyzés sub 1). — Természetes azonban, hogy a herbariumi anyagból *soha sem lehet* olyan metszeteket készíteni, mint az élő, avagy a kellően fixált anyagból. Csakis *aránylagos* jószágról beszélhetünk.

¹ «Schattenblatt.»

² «Licht, Sonnenblatt» — «verőfényes levél» l. MÁGÓCSY—DIETZ 1917: 288.

³ Például GOEBEL: Organographie: 489—491, FIGDOR Die Erscheinung der Anisophyllie 1909, KIRCHNER in Lebensgesch. d. Blütenpfl.: 86 et sq., dr. KNY in *Botan. Zeitung* 31. 1873: 434—435, W. WÄCHTER in *Ber. d. Deutsch. Botan. Ges.* XXI. 1903: 393.

⁴ V. ö. KIRCHNER in Lebensg. d. Blütenpfl.: 81, 89 + BRAUN rajza: Fig. 27—28; FR. CZAPEK in *Jahrb. f. wiss. Botan.* XXXII. 1898: 268; GOEBEL in *Botan. Zeitung* 38. 1880: 839 et Vergleichende Entwicklungsgeschichte 1883: 140.

⁵ «Orthotropus», ill. «plagiotropus»-tűk (cf. K. GOEBEL Einleitung in die exp. Morph. der Pflanzen, Leipzig u. Berlin 1908: 71.

⁶ A jegenyefenyő anisophylliájának oka nem éppen a fény (l. K. GOEBEL Organographie der Pflanzen II. ed.: 490); KNY kísérletileg igazolta a rügy ebbeli irányítottságát (l. *Botan. Zeitung* 31. 1873: 433.)

⁷ Egyebekben a BRAUN eredeti rajzánál is (in Lebensgesch. d. Blütenpfl. Fig. 28) némi eltérést látok a tekintetben, hogy a hypoderma a napsütött leveleknél is *szagattott*, nem képez egy folytonos összefüggő réteget; az epidermis + hypodermis a levélszegélyen erősebb fejlettségű valamivel; a levél színén a palissade-réteg vastagsága a közép-

Két pontban nem találok megegyezést:

1. hypodermalis sejtek — habár elvétve és gyéren — úgy a levél fonákán, mint inkább a levél színén vannak a sziklevel epidermise alatt is;

2. palissade ¹ *nem* különül ki.

A hypodermist egyesével fellépő sejtek képviselik, különösen a levél visszáján, a levél színén 3—4-esével kis fészkeket is alkotnak; a levélfonákon e sejtek átlagban nagyobbak, mint a levélszínén; előbbiek inkább szélesebbek, mint magasak.

Palissade (oszlop) réteg nincsen, sőt e réteg helyén a sejtek *inkább szélesebbek*, mint magasak.

Az ikersziklevél anatómiai szerkezetét HABERLANDT rendszere szerint adom.

Ikerlevél anatómiai alkotása.

Epidermis. Amíg a napsütött levelek epidermise erősen megvastagodott falú, kis sejtüregű,² addig a normalis, valamint

vonaltól a szélek felé haladólag keskenyedik; a szivacsparenchyma nem oly tömött, hanem lazább; a gyantajárat viszonyítva a levél magasságához: nagyobb üreget képez; oly sok stoma nem esik bele a metszetbe; a két vezető nyaláb szélesebb vonalat alkot; és a két edénynyaláb-köteg igen jól láthatólag izolált egymástól (BRAUN rajzán csak 1 nyaláb van cf. Fig. 28).

¹ Többféle írásmódja elterjedt; fenti mellett a: «palissad» (l. pl. KANITZ 1889: 214 etc., Tuzson 1907: 227) és «palisad» (l. pl. C. K. Schneiders Illustr. Handwörterbuch der Botanik, II. Aufl. Leipzig 1917: 438, 487 etc.) «palisad-tissue» (p. o. S. H. VINES 1894: 162), avagy: «palliszad» (MÁGÓCSY—DIETZ 1917: 288, 291 és a t.) is elterjedt. — Eme írásmódokra vonatkozólag dr. RICHTER ALADÁR egyik tanulmányában in *Math. és Természettud. Közl.* XXXIII. kötet, 3. szám, Budapest, 1916 — különben részletesen kitér [cf. p. 21 (239) — 22 (240)]; dr. RICHTER A.: a *czölöp* v. *czölöpös parenchyma*, *czölöpréteg* elnevezéseket használja legújabban; régebben, de még újabban is a francia «palissade» (l. pl. G. BONNIER et Leclere du Sablon 1901: 276; vagy L. CRIÉ Nouveaux éléments de botanique. éd. IIe Paris 1902: 944) elnevezést használta (lásd például *Math. és Természettud. Értesítő* XXIX. 1911: 1106).

² Mivel átlag 6—7 évig él levele, szüksége is van rá. (l. dr. H. SCHENK in Sitzungsber. der Niederrhein. Gesellsch. f. Natur- u. Heilkunde zu Bonn Sitz. vom 5 Juni 1893: 27).

az ikersziklevél epidermise csak kifestőlag vastagodik meg; a mint az alábbi táblázatból kitetszik.

Epidermalis sejtek		A levél							
		petiolusában		lemez alsó részén		lemez középső részén		lemez felső részén	
		μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
Radialis	sejtfal vastagsága	4	5.4	5.4	4	5.4	4	5.4	4
Basalis		5.4	4	2.7	4	4	2.7	2.7	4
Felső, szabad		9.4	9.4	6.7	6.7	6.7	6.7	9.4	8.1
Lumen magassága		16.2	{13.5 16.2}	16.2	18.9	18.9	24.3	16.2	13.5
Lumen szélessége		16.2	18.0	18.9	21.6	21.6	27	21.6	24.3

Az epidermalis sejtek sejtfala nem nagyon vastagodott¹, így sejttüregük tekintélyes nagyságú (l. 6–9. ábrák).

Nagyjában gyengén kidomborodók, ivelték; a fonákon ellenben gyakorta mamillosusan² kiemelkedők; egy réteget alkotnak.

F. THOMAS³ szerint az *Abies alba* epidermalis sejteire is jellemzők a kifelé irányuló «*porus canalis*»-ok; ezek a napsütött leveleken valóban azonnal szembetűnnek.

Ilyenek kifejlődését az ikersziklevél epidermisén *nem láttam*.

Hypoderma. KIRCHNER szerint bár: «das Hypoderm fehlt ganz»⁴ a jegenyefenyő ikersziklevelen a *hypoderma igenis kifejlődik*; összefüggő⁵, réteget nem képez, hanem izoláltan fordul.

¹ Nem úgy a rendes leveleké, melyek éppen vastag, erősen cutinizált sejtfaluknak köszönik a climaticus befolyások ellenében nagy ellenállóképességüket (l. F. NOACK in *Jahrb. f. wiss. Botan.* XVIII. 1887: 529).

² Sajnálatosan a bryologia, roppant találó e műszavát, mely a «papilla» és «mamilla» fogalmát élesen körülírja, (l. A. J. GROUT in *The Bryologist* III. 1900: 46, 47; C. MÜLLER, Die natürl. Pflanzenfamilien I. T. 3. Abt. I. Hälfte, Leipzig 1909: 194), a Virágos növények nevezetana (l. C. K. Schneiders Illustr. Handwörterbuch d. Botanik. Herausg. von Prof. Dr. K. LINSBAUER — II. Aufl. Leipzig 1917) még nem vette át (v. ö. GYÖRFFY in *ÖBZ* LXVII. 1918: 232).

³ Dr. FR. THOMAS in *Jahrb. f. wiss. Botan.* IV. 1865: 25.

⁴ Lebensgesch. d. Blütenpfl.: 81.

⁵ Az *Abies alba* (*A. pectinata*) különben hypodermalis réteget illetően nem igen állandó viselkedésű, miként azt már régebben szóvá is

elő, azonban élesen fénytörő volta rögtön szembetünővé teszi. Úgy a levélszínén, mint a fonákán megtalálható, utóbbin kevesebb számmal. A levélszínén levők kisebbek, de vastagabb falúak; a fonákon levők nagyobbak, sejtfaluk vékonyabb és nagyobbára széltében elterjedők. Mivel átlag a fonákon levő hypoderma¹ sejtjei nagyobb dimenziójúak, de viszont sejtfaluk vékonyabb, lumenjük aránylagosan is jóval nagyobbak tünik fel, absolutus nagyobbok mellett is.

A hypodermalis-sejtek sejtüreg (lumen) határa hol párhuzamosan haladó a sejt körvonalával (6—8. ábra), hol pedig emberszem-héjak nyílásához hasonló, t. i. hasitékszerű, két végén *hirtelen* összekezeskenyedő (5. ábra).

Rendszerint csak egyesével találhatók (9. ábra) azonban néha kisebb csomókat is alkot (7. ábra). Csak szerfelett ritka esetben képez *kettős* réteget (8. ábra). Általánosan közvetlen az epidermis alatt található; egy ízben mélyebben találtam, t. i. a 6. ábrán feltüntetett esetben a két hypodermalis sejtet és epidermist egy rétegű sejt sor választja el.

A nagyobb sejtüregű hypodermalis sejtben sejt tartalom is van mindig.

Hypoderma található úgy a levélnyelben, mint a levéllemez alsó, középső, felső részében; a levél csúcsában már igen gyéren, legfeljebb 1—2 sejt képviseli már a hypodermát.

Átszajító szövet. Assimilációs szövet — az irodalom szerint — a sziklevelelnél is megkülönböztethető. Amíg például a nap-

tette MAHLERT egyik tanulmányában (v. ö. Dr. A. MAHLERT in *Botan. Centralblatt* VI. 1885. IV. Quartal, XXIV. Band, Cassel 1885: 183). Ezért van olyan nagy különbség például a *Lebensgesch. d. Blütenpfl.* p. 90. lévő 28. ábra és a *Die natürl. Pflanzenfam.* II. Teil. I. Abt. Leipzig 1889: 38. Fig. 18. B-közt.

¹ A magyar nevezetában «bőralatti stereoma» néven is említik (l. RICHTER A. in *Math. és Természettud. Értesítő* XXX. 1912: 807), a mely kifejezés a hypoderma *jellegét* adja meg (például «The hypoderma of stems and leaves commonly of stereom...» l. S. H. VINES 1894: 160).

HABERLANDT eme, az epidermist mellék-functiojában támogató (l. PORSCH in Schneiders *Illustr. Handw. d. Botan.* II. Aufl.: 330) szövetet «többrétegű epidermis» néven ismerteti (*Physiol. Pflanzenanatomie* 1918: 115 et sq.).

sütött¹ és árnyékleveleknél is² jól elkülönült palissade-réteg³ látható a levélszínén és levélfonákon a levél középvonalában, addig a normalis sziklevélnél *semmi nemű* palissade sincs. Ugyanígy hiányzik az ikerszikleveleken is (5., 6., 7., 8. ábrák). A palissade-réteg helyett egyszerű parenchyma található; a levél alsó részében, a hol a szivacsparenchyma sejtközötti üregei gyengébb kifejlődésűek — a levél mesophylluma⁴ *homogénnek* nyilvánítható. A levél alsó részletétől feljebb pedig sokszor a palissade sejtek helyett kissé *széltében* elterülő sejteket látunk. Ha már a széltében való elnyúlás elég gyakori közvetlenül a felső epidermis alatt levő rétegre, mennyivel inkább áll ez az alatta következő rétegekre! Minél lejjebb eső sejtsort veszünk szemügyre, annál inkább feltűnő a sejtek széltébe való megnyúlása (9. ábra).

Szivacsparenchymája⁵ laza, el nem ágazó, hossz tengelyükkel széltében elhelyezkedő, hosszúkas sejtekből álló.

Vezetőnyaláb. Ismeretesen feltűnő különbség van a szik-, valamint a primordialis levelek és a rendes levelek edénynyalábját illetően; előbbieneknél *csak* egy, utóbbiaknál két edénynyaláb fejlődik ki (v. ö. THOMAS: 45).

Mivel az ikersziklevelek edénynyalábjai *semmi újat* sem mutatnak, *teljesen feleslegesnek* tartom az alkotó elemek felsorolását. Mindössze néhány általános, rövid, inkább topographiai megjegyzésem van.

Az ikersziklevél egész hosszában, a petiolustól fel a csúcsig végtől-véig két, az Abietineære is jellemző védőhüvellyel körülvett⁶ edénynyaláb fejlődött ki.

Egészen közel a petiolus alja, tapadási pontjához a két

¹ MÁGÓCSY—DIETZ-nél: «verőfényes lemez» (l. MÁGÓCSY—DIETZ 1917: 288).

² Lebensgesch. d. Blütenpfl. Fig. 27. (p. 90).

³ = parenchyme palissadique — (p. o. VAN TIEGHEM 1891: 609).

⁴ = «köztes szövet» (MÁGÓCSY—DIETZ S. 1917: 288).

⁵ «parenchyme lacuneux» (p. o. VAN TIEGHEM 1891: 609). «tissue lacuneux» pl. G. BONNIER et LECLERC DU SABLON 1901: 277, «spongy tissue» vagy «spongy parenchyma» pl. S. H. VINES 1894: 162—163.

⁶ THOMAS l. c.: 45.

edénynyalábot, a levél színén alig jelzi, bár valami kis kidomborodás azonban egy sekély kis bemélyedés a felső epidermisen csak kivehető. A levélnyel közepén azonban (l. 10. ábra) már szembetűnő a felső epidermis kétszeres íveltsége. Az ikerlevél két edénynyalábja középvonalába eső ez a bemélyedés végtől-végig az egész levélen megvan (l. 11. ábra).

Vezetőnyaláb egészen a levél csúcsáig felhatoló.

Légzőnyílás. Néhány légzőnyílást¹ apróra megvizsgálva, mivel a normalis szíkleveleken lévőekkel teljesen megegyezőknék találtam, behatóbb ismertetésüket feleslegesnek tartom; az *Abies* nemzetségre² jellemző képet mutató.³

Gyantajárat. E gyüledéktartók teljesen rendes kialakulásúak, rendes helyen jelennek meg a rendellenes leveleknél is szimmetrikusan kétoldalt⁴ közel a 2 levélszélhez, a középvonal alatt, közelébb az alsó epidermishez (10—11. ábra).

A levélnyel legalsó részén még nem fejlődik ki gyantajárat,⁵ ellenben tapadási pontjától felfelé igen kis távolságban már megjelenik. Egészen közel a levél csúcsához, szintén nem fejleszt gyantajáratot, tehát az ikerlevélben is vakon végződik a gyantajárat.⁶

Az ikersziklevél anatómiai kialakulása tehát a levél egész hosszában ugyanaz; a R. PAULMAN⁷ megállapította általános

¹ Magyar műszava még: *szájnnyílás* pl. Tuzson 1907: 220 et squ.; *légrés* pl. Erdészeti Növénytan I. 1891: 41; *szájacs* Prof. Dr. ISTVÁNNYI GYULÁNÁL pl. A m. kir. szől. és kis. állomás és ampel. int. Közleményei. IV. k., Budapest 1913-ban megjelent tanulmány sok helyén.

² Dr. HILDEBRAND in *Botan. Ztg.* 18. 1860: 149.

³ K. WILHELM: in *Ber. der Deutsch. Botan. Gesellsch.* I. 1883: 325—330.

⁴ *Abietineae* jelleg! — cf. THOMAS: 55. Egyebekben az *Abies alba* — a lomblevél dudortól csak kissé eltérő levélkezdeményből kialakuló pikkelyleveleiben is megvan a két gyantajárat l. K. GOEBEL *Beiträge zur Morphologie und Physiologie des Blattes-Botanische Zeitung* 38. 1880: 778.

⁵ A magyar nevezettan: «gyantavezetékek»-nek is mondja l. pl. Tuzson 1907: 232; «gyantamenet» (pl. KANITZ 1889: 348); «gyantajárat»-ot használ az Erdészeti Növénytan I. k. 1891: 71.

⁶ *Physiol. Pflanzen anat.* 1918: 485.

⁷ «In bezug auf die einzelnen Regionen des Blattes konnte festgestellt werden, dass die Spitze die Tendenz zum Sonnenblatt, die Basis

jelleg,¹ a minek alapján minden lomblevélvizsgálatnál újabban már ügyelnek² itt nem érvényesül.

*

A tárgyaltakból kitetszik, hogy két³ *különdlló*, térbelileg egymástól messze eső vezetőnyaláb fut az ikerlevélen végtől-végig, szervisméklődés csupán az edénynyalábban van; gyantajarat csak a két *szabail* szélen látható, a közös érintkezési, összenövési síkban ilyenek kifejlődése nyomát sem látjuk. Az ikerfeleket összefogó szövet teljesen megegyezik a szivacsparenchymával.

*

Végül arra kellene feleletet adnunk: mi hozta létre a torzképződményt? Vajjon, a csirázáshoz eme, nagyon kevés hőt igénylő⁴ növénynek ikerlevele létrehozásában külső vagy belső tényező szerepelt?

Erre biztos feleletet adni nem tudok. Mindenesetre feltűnő, — mint az elébbeniek folyamán az I. részben említettem — hogy a rendellenes sziklevek 75%-a *rövidebb*, a rendes szikleveleknél! BURGERSTEIN kísérleteiből⁵ pedig kitűnt, hogy «die Dunkelkeimlinge kürzere Wurzeln, längere und zugleich dickere hypo-

dagegen mehr oder weniger Schattenblattcharakter zeigt» v. ö. R. PAULMANN: Über die Anatomie des Laubblattes. — Inaug. Diss. Jena 1914 et in *Flora N. F.* VII. (der ganzen Reihe 107) Heft 3: 251.

¹ T. i. a levéllemez felső része a napsütött, alja a többé-kevésbé árnyékolt levelek kialakulásához hajlik.

² L. MÁGÓCSY—DIETZ S. 1917: 288.

³ A rendes sziklevélnél csak egyetlenegy nyaláb van, mint tudjuk, (cf. SCHACHT Anat. u. Physiol. Bd. II.: 7, TH. GEYLER in *Jahrb. f. wiss. Bot.* VI. 1867/68: 112).

⁴ MAX KIENITZ: Vergleichende Keimversuche mit Waldbaum-Samen aus klimatisch verschieden gelegenen Orten Mitteleuropa's, — Sep. aus d. «Botanischen Untersuchungen von Dr. N. J. C. MÜLLER» Band II., Heft 1: 35.

⁵ A. BURGERSTEIN: in *Ber. d. Deutsch. Botan. Gesellsch.* XVIII. 1900: 168—184.

cotyle Stengelglieder, sowie kürzere Cotylen¹ bilden als Lichtkeimlinge...»²

Gondolhatunk esetleg tehát arra, hogy a barlangligeti leelőhelyen galyakkal eltakartan lévén, lettek kurtábbak a levelek, vagy viszont ennek oka abban a körülményben is kereshető, hogy az együtt növő két levél, az ikerfelek egymást kölcsönösen befolyásolták és pedig gátolták, egymás rovására voltak.

W. JÄNNICKE esete analogiája alapján az előidéző okot gyaníthatjuk eme szokatlan beárnyékolásban. Ugyanis W. JÄNNICKE³ pl. a *Diervillea grandiflora*-n talált rendellenes kettős levelek kifejlődését két, esetleg három levélkezdet (primordium) összenövéséből (l. c. : 269) magyarázza, s létrehozó oknak az árnyékos termőhelyet és a hideget tartotta.⁴

A míg eme rendellenes kifejlődést kiváltó ok felől csak tapogatózni tudunk, addig e torzképződmények létrejövetelét tisztázni tudjuk. A csiranövényke vegetatiós pontja alatt egy örvben öt levéldudor⁵ szokott normalisan⁶ megjelenni, a melyek mindegyike 1—1 sziklevellé fejlődik a továbbiak folyamán. Eseteinkben e levéldudorok közül két levélkezdemény valamelyes ok miatt (erős beárnyékolás?) a szokottnál közelebb jutott egymáshoz, úgy, hogy: ugyan a levéldudorok középvonala irányában a levéldudorok rendesen növekedtek, de e mellett — épp' a levéldudorok növekedése miatt — szélükkel hamarosan érintkezésbe jutottak s a két levéldudor közti terület, mint egyaránt közös széle a levélkezdeménynek szintén kiemelkedett. Ezért van három

¹ Az *Abies alba* fényen növő és sötétben nevelt csiranövénye sziklevele közt is jelentős a különbség l. BURGERSTEIN l. c. : 174.

² A. BURGERSTEIN l. c. : 175.

³ W. JÄNNICKE: Bildungsabweichungen an Weigeliën. — *Ber. d. Deutschen Botan. Gesellsch.* IX. 1891: 266—270.

⁴ W. JÄNNICKE l. c. : 269.

⁵ «Levélprimordium»-nak is mondja a magyar nevezettan l. pl. KLEIN 1891. b : 324, 1892a : 131, 1892b : 64, 65 etc.; — «Primordialblatt» cf. AUG. W. EICHLER: Zur Entwicklungsgesch. des Blattes mit besonderer Berücksichtigung der Nebenblatt-Bildungen. Marburg 1861 : 7.

⁶ De lehet 4—8 is! l. Lebensgeschichte der Blütenpflanzen Mitteleuropas. Band I. Lief. 2. Stuttgart 1904 : 99; TH. GEYLER in. *Jahrb. f. wiss. Botan.* VI. 1867/68 : 112—113.

példánynál (l. 3—4. ábra), hogy az ikerlevelek tetején két csúcs van az, ikerfelek (1—1 levél)-nek hegye önálló, szabad; a 2. rajzon ábrázolt növénynél pedig a két levéldudor meglehetősen sokáig fejlődött függetlenül egymástól, csak a későbbiek folyamán jutott a két fejlődő dudor szélével közös érintkezésbe.

Így jöttek létre az ikerlevelek, a melyek két külön levélnek felelnek meg valójában is — miként a II. részből kiviláglik, — tehát két levélből összenőtt képletekkel van dolgunk.¹ Gyakoribb az az eset, a midőn a levélkezdemény kettéhasad² s az eredetileg egy levéldudorból két levél fejlődik.³ Az előidéző okot pedig inkább a külső befolyásban gyanítjuk, a mire vonatkozólag különben sok más hasonló példát lehetne felhozni.⁴

*

Tudomásom szerint hasonló rendellenességet még senki sem írt le a *jegenyefenyő*ről; sem MAXWELL T. MASTERS, sem dr. O. PENZIG ismert kézikönyvei, avagy JUST's Botanischer Jahresbericht XLI. (1913) Zweite Abt. I. Heft megjelenéseig ilyenek közléséről nem tudok.

*

E helyen is kötelességemnek tartom, hogy hálás köszönetet mondjak \dagger dr. FABINY RUDOLF udv. tanácsos, kolozsvári tud. egyetemi ny. r. professzor úrnak a lactophænoel előállításához szükségelt tejsavnak a vezetése alatt álló chemiai intézet részéről történt szives átengedéseért; (oláh megszállás alatt szenvedünk, így érthetően roppant kincs volt ránk nézve).

Legnagyobb hálám illesse pedig dr. MAGÓCSY-DIETZ SÁNDOR budapesti tud. egyetemi professzor urat, — a M. Tud. Akadémia

¹ Ez a ritkább eset! l. Dr. PAX: Allgemeine Morphologie der Pflanzen mit besonderer Berücksichtigung der Blütenmorphologie. Stuttgart 1890: 92.

² Dr. PAX Allg. Morph.: 92.

³ Ha a levélkezdemény hasadási síkja tangentialis, akkor a jóval ritkább «seriele dédoublement» jön létre (cf. BUCHENAU: Doppelspreitige Laubblätter. — Ber. d. Deutsch. Botan. Gesellsch. VI. 1888: 185) = «két-rétű» levél (BORBÁS szerint l. 1893: 135).

⁴ KLEIN 1892b: 69 (483).

r. tagját — lekötelező előzékenységeért, hogy dolgozatomat a tek. Akadémia elé terjeszteni kegyes volt.

Kolozsvárt, 1919 márczius hó 21.

Többször, de rövidítve idézett munkák jegyzéke.

1901. GASTON BONNIER et LECLERC DU SABLON: *Cours de Botanique*, Tome premier, Paris 1901.

1893. DR. BORBÁS VINCZE: *Növényikrek, különösen ikerlevelek*. Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz. XXIV. Pótfüz. 1893. jún. XXV. kötethez 3. pótf. : 121—135.

1896. *Erd. Növ.* = FEKETE LAJOS és MÁGÓCSY-DIETZ SÁNDOR: *Erdészeti Növénytan*. Budapest I. k. 1891., II. köt. 1896.

1913. DR. K. GOEBEL: *Organographie der Pflanzen* insbesondere der Archegoniaten und Samenpflanzen. II. Aufl. Jena I. Teil 1913, II. T. 1. H. 1915, II. T. 2. H. 1918.

Physiol. Pflanzenanat. 1918 = DR. G. HABERLANDT: *Physiologische Pflanzenanatomie* V. Aufl. Leipzig 1918.

1889. KANITZ ÁGOST: *Az általános növénytan alapvonulai*, Kolozsvárt, 1889.

Lebensgesch. d. Blütenpfl. = DR. O. KIRCHNER—DR. E. LOEW—DR. C. SCHRÖTER: *Lebensgeschichte der Blüten Mitteleuropas*. Stuttgart. Band I. Lief. 1., 1904.

1891^a JULIUS KLEIN: *Über Bildungsabweichungen an Blättern*. Botanisches Centralblatt Band. XLVII. N° 9; XII. Jahrg. 1891. N° 35: 262—266.

1891^b KLEIN Gy. *A növénylevelek némely rendellenességéről*. Math. és Természettud. Értesítő IX. k. 1891. 8/9. füz.: 320—326.

1892^a KLEIN GyULA: *A rendellenes fejlődésű levelekről*. Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz. XXIV. kötethez. 1892. XVIII. Pótfüzet: 120—132.

1892^b KLEIN Gy.: *Vizsgálatok a növény-levelek rendellenességeiről* (I—IV. táblával). — Értekezések a természettud. köréből. XXII. köt. 8. szám 1892: 1 (415)—74 (488).

1892^c J. KLEIN: *Untersuchungen über Bildungsabweichungen an Blättern* (Taf. XIII—XVIII.) Jahrb. f. wiss. Botan. XXIV. 1892: 425—489.

1917. MÁGÓCSY-DIETZ SÁNDOR: *A lomblevelek alkalmazkodása*. Mathem. és Természettudományi Értesítő XXXV. 1917: 273—308.

E. STRASBURGER: *Das botanische Praktikum*, V. Aufl. Bearbeitet von Dr. E. STRASBURGER und Dr. MAX KOERNICKE. Jena, 1913: XXVI + 860.

1891 TUBEUF, DR. KARL FREIHERR VON: *Samen, Früchte u. Keimlinge* der in Deutschland heimischen oder eingeführten forstlichen Culturpflanzen. Berlin 1891.

1907. DR. TUZSON JÁNOS: *A növények belső szerkezete. «Élők világa»*, Budapest, 1907: 205—238.

1891. TH. VAN TIEGHEM: *Traité de Botanique*, Paris 1891.

1894. S. H. VINES: *A student's text-book of Botany*, London 1894.

Abramagyarázat.

Abies alba csira növénykéek iker-szikleveles példányai.

Magas-Tátra: Barlangliget. «Ivánka-út» mellett 800 m t. sz. f. m.
1916. VII. 22.

1., 3., 4. ábra. Gyűjtötte GYÖRFFYNÉ szül. GREISIGER IRMA.

2. ábra. Gyűjtötte GYÖRFFY BARNABÁS.

A 4-gyel jelzett példányról photographálás közben egy normalis sziklevél, valamint a jelentkező közönséges (kisebb) levelek is letöredtek. (Mind a négy valamivel kisebb a term. nagy-nál).

5. ábra. Ikerlevél k. m. erősen megvastagodott falú hypodermalis sejtje (Zeiss: Apochromat. 4 mm, comp. oc. 4.)

6. ábra. Epidermissel közvetlenül nem érintkező hypodermalis két sejt az ikerlevél k. m.-én (Zeiss: Apochromat. 4 mm, comp. oc. 4.)

7. ábra. Ikerlevél k. m.-ében hármas tagú, csoportos kiképződésű hypoderma (Zeiss: Apochromat. 4 mm, comp. oc. 4.)

8. ábra. Kétrétegű hypoderma (ikerlevél k. m.). (Zeiss: Apochromat. 4 mm, comp. oc. 4.)

9. ábra. Ikerlevél felső színe k. m.-e; palissade elkülönülés *nem* látható (Zeiss: Apochromat. 4 mm, comp. oc. 4.)

10. ábra. K. m. az ikerlevél petiolusából (Zeiss. Apochromat. mm 16., oc. 1.)

11. ábra. K. m. az ikerlevél középső szakaszából (Zeiss obi. aa, oc. 2.)

(A M. T. Akad. III. osztályának 1919. évi decz. hó 9.-én tartott üléséből.)

A MOLENDOÁK FAJAI TAGOLÓDÁSA ÉS ROKONSÁGA ÖSSZEHASONLÍTÓ ANATOMIAI ÉS FEJLŐDÉSTANI VIZSGÁLATOK ALAPJÁN.¹

GYÖRFFY ISTVÁN-tól.

Mielőtt rövid időre a Tek. Akadémia szíves türelmét igénybe venném, mulaszthatatlan kötelességemnek tartom: őszinte hálaomat kifejezni a kegyesen megadott engedélyért, a mely által vendégként a Tek. Akadémia előtt szóvá tehetem másfél évtizednél régebb idő óta folytatott vizsgálataim eredménye egy kis részét.

Még 1904-ben a Magas-Tátra területének legértékesebb helyén: a Bélaei mészhavasokban a «Drechslerhäuschen» egyik hatalmas nagy sziklafalán egy mohát gyűjtöttem, a melyet összehasonlító anyag hiányában nem tudtam meghatározni. Kiküldve elismert tekintélyű bryologusoknak, azoknak a véleménye roppant eltérő volt; az egyik — egy fajnak, a másik — másik fajnak határozta. Ez ellentétes vélemények terelték figyelmemet a *Molendoa* moha-nemzetségnek hazánkából ismert egyetlen fajára (*M. Sendtneriana*), a mely akkoron mindössze két helyről²⁾ volt ismeretes. Sok kemény sziklamászás árán később megtaláltam e mohát a Magas-Tátra magyar és lengyel oldalán, valamint Árva-, Liptó mészhavasain sok száz helyen. Hosszú éveken át tartott a megfigyelés, mert pontosan kellett mérnem elterjedése határát, exponáltságát s a mi fő: tanulmányoznom az ökológiai viszonyok befolyását kialakulására és fejlődésére. Megtalál-

¹ Szerző kéziratban levő «Versuch einer Monographie der Gattung *Molendoa*» cz. művének egyik fejezetrészelete.

² JAWORINKA-fal leg. LIMPRICHT, N. Muran leg. CHALUBINSKI.

tam később — sokáig csupán a tiroli Bretterwandkopf ritkaságaként szereplő *M. tenuinervis*t is hazánkban, úgy hogy a három Európában is növény *Molendoa*nak két faja egy országban sem ismeretes annyi helyről, mint hazánkban. Különösen a *M. Sendtneriana* érzi jól magát a subalpinus regio mészfalain, a mely a Magas-Tátrán kívül Erdély egy pontjáról is ismeretes («Öcsém teteje» leg. Dr. DEGEN cf. MBL. XIV. 1915:73). Munkám mind bővült s alakult ki monographikus feldolgozássá. Külföldi szak társaim jóvoltából megkaptam feldolgozásra valamennyi exotikus fajt, különböző expedíciók anyagát — átengedve több új fajt leírásra.

Így nőtte ki magát monographiám, a mely teljes egészében most még csupán kéziratban van meg s még be kell fejezmem több részletét, bár tekintélyes terjedelmű eddigelé is.

A *Molendoa* nemzetség monographiája cz. munkám magvát itt előadni nem lehet czélom, mert a rendelkezésre bocsátott időből nem telnék ki. Pedig felette érdekes általános megállapodásokra jutottam, a melyek több eddigelé meggyökeresedett közvéleményt fognak megdönteni. Csakhogy példát említsek: a *Molendoa*-levelek papillái (bryologiai értelemben!) korántsem vizsgálható, fogó szervek, hanem a xerophytikus berendezkedés egyik fontos szervei: fény-visszaverő szervek. A levelek sejteinek mérete változik itt is, a szerint, hogy napsütötte- vagy árnyéklevelekről van-e szó. Igen jellemző a levelek ereinek fejlődése, kialakulása, a melyre s egyéb jellegekre vonatkozó összehasonlító vizsgálataim alapján bizony semmikép sem tudok egyet érteni, például azzal a hallható véleménynyel, hogy ha igen nagy távolságok vannak egy-egy elterjedési centrum közt, jogosult legalább is a «kis faj» felállítására. A *M. Sendtneriana* európai alakjait bizony én nem látom annyira különbözőnek a chinai növénytől, hogy más fajt lássak benne.

De az összes főbb eredményt még csak felsorolni sem lehet czélom, így csupán egy kiragadott részletet legyen szabad megvilágítanom.

Vizsgálataim során útvezetőm ez volt: lehetőleg minden változatnak, avagy kisebb systematikai egységnek is, keletkezése, létrejötté okait megtalálni. Engem nem az örven-

deztetett meg, hogy tekintélyes számú új alakot, illetőleg új fajt kaptam: VICT. FERD. BROTHERUS, H. N. DIXON, JUL. CARDOT, P. CULMANN, EMILIO LEVIER, TH. HERZOG — s általában valami 85—90 földkerekségi tudományos múzeumtól és bryologus-tól, hanem az, hogy általa módomban van e nemzetség tagjai felől teljes átnézetes összehasonlító vizsgálati eredményt kapnom, módomban lett a sarkvidéki *M. tenuinervis* (bold. N. BRYHN «Gymnostomum laeve»-je¹) tanulmányozni s láttam, a sarki klíma (é. sz. 79° alatt gyűjtve) mely tekintetben ütötte rá az anatómiai kialakulás döntő bélyegét (xerophytikus berendezések). Módomban volt látni H. W. ARNELL szívesége révén a szibériai *M. Sendtneriana*-t (ARNELL «Pleurozygodon sibiricum»-ja²); hosszas polemikát kellett folytatnom CARDOT-val, a ki egyik patagoniai mohában minden erővel a *Molendoa* új fajtát kívánta látni.

A rengeteg anyag áttanulmányozásába eleinte magam is azzal a tudattal fogtam 17 évvel ezelőtt, hogy — különben a mohák legközönségesebb tagja biztos meghatározásához is okvetlen szükséges — nagyító (mikroszkop) segítségével mellett az anatómiai kialakulás lesz döntő minden kérdés tisztázásánál. És nem is veheti tőlem senki zokon; hiszen a kolozsvári egyetemen a mikroszkop-irányzat igen erős volt mindig, még KANITZ professorsága alatt is (SCHAARSCHMIDT-ISTVÁNNFI vizsgálatai). És ebből a hiedelemből bizony ki kellett ábrándulnom, éppen a *Molendoa* vizsgálati alapján.

Hazánkban (Hernád-áttörés) gyűjtöttem és Csehországból kaptam olyan mohákat, a melyek anatómiai alakulásukban szinte teljesen azonosak a *Molendoa Sendtneriana* szövettani szerkezetével, természetük is szerfelett hasonló. De a levél alakja teljesen egyező a *Hymenostylium*-mal. Ha bryologus nem volnék — könnyen azt mondanám: mivel teljesen közbülső helyet foglal el a két nemzetség közt, okvetlenül kereszteződésből származó alaknak: bastardusnak kell tartani, annál inkább, mert a parentális nemzedék egyike a közelében él, másika sem messze. De ezt állítani tévedés volna, átmeneti alak az csupán a két

¹ L. *The Bryologist* XV. 1912: 75—81.

² L. *Arkiv för Botanik*. XIV. 1914, No 2: 1—3.

nemzetség közt. Mert a moha genusok közt vannak rendkívül csökönyösek, tulajdonságaikat mindvégig ridegen, változatlanul megtartók, s vannak nagyon plastikusak. A *Hymenostylium* nemzetség eléggé állandó, mégis — ime akad — a *Molendou* genus felé hajló alakja.

A *Molendou* nemzetség legközelebbi rokonságban — ebből kitetszőleg is — a *Hymenostylium* genusszal és nem az *Anoetanjum*mal van, a mely utóbbi alá csapja ma is több szerző (például Gg. ROSE) a *Molendo*akat.

Felette érdekes viszonyokat találunk az egyes *Molendou*-fajoknál. Mivel a nagy szám miatt hosszabb időt igényelne az az összes¹ fajok tagolódásának megismertetése, csupán a három, Európában is előforduló fajt veszem tárgyalás alá.

Vizsgálataim alapján én is szívesebben beszélek faj- vagy alak-csoportokról — «faj» helyett. Virágosakkal foglalkozó sok systematikus is követi ezt az irányt.

Úgy képzelek el minden egyes «faj»-t, mint egy körterületet, a melynek széle felé közeledőleg mind bizonytalanabb, elmosódottabb a határa, ellenben mentől inkább haladok a centrum felé, annál inkább kivernek a markáns tulajdonságok az ez alaksorozatba, «faj»-ba tartozó egyedeken. Amelyik alaksorozat alkalmazkodási képessége csekély, kisebb körterületet foglal el (*M. Hornschuchiana*), a mely «faj»-nak alakjai az életviszonyokhoz alkalmazkodtak, tulajdonságaikat öröklik az utódok, szóval plastikus fajok, azok nagy körterületet alkotnak (*M. Sendtneriana* pld.). A szerint, hogy ezek az alaksorozatok, «faj»-ok, rokonok-e egymással vagy sem, közelebb vagy távolabb esnek egymástól, sokszor széleikkel egymásba is hatolnak, ilyen helyekre kell tennünk t. i. az átmeneti alakokat.

¹ Eddigélé leírt fajok: 1. *andina* (MITT.) BROTH., 2. *boliviana* BROTH., 3. *excelsa* (C. MÜLL.) BROTH., 4. *Duthiei* BROTH., 5. *Herzogii* BROTH., 6. *Hornschuchiana* (FUNK) LINDB., 7. *japonica* BROTH., 8. *Roylei* (MITT.) BROTH., 9. *Sendtneriana* (B. E.) LIMPR., 10. *tenuinervis* LIMPR.

Monographiámban leírandó új fajok: 1. *corticicola* BROTH. n. sp., 2. *Golani* BROTH. n. sp., 3. *mexicana* BROTH. n. sp., 4. *obtusifolia* BROTH. n. sp., 5. *pseudolateralis* CARDOT n. sp., 6. *serawschanica* BROTH. et GYFFY n. sp., 7. *obtusifolia* BROTH. n. sp.

Éveken át kutattam az okát és figyeltem meg, miféle ökológiai factorok játszhattak közre a különböző alakok keletkezésénél; sokra rájöttem, de mindent megokadatolni nem tudok ma sem, csak a tényt megállapítani.

Legősibb alaksorozatnak a *M. Hornschuchiana*-t tartom (legfiatalabbnak a *M. Sendtneriana*-t), a melynek levélerében nagyszámú vezető parenchyma-sejt fejlődik ki. Ehhez átmeneti alakul szolgál (l. az ábrát) a *M. Sendtneriana* var. *Limprichtii* alakja, a melynek levele külső alakja a *Sendtneriana*-ével nagyjában egyforma, de szövettani kialakulásában egészen a *Hornschuchiana* viszonyait tünteti fel; nagyszámú vezető-parenchymája van.

A *M. Hornschuchiana*-hoz átmeneti hidat alkot a *M. tenuinervis*-nek az az alakja (var. *Kitaibeliana*), a melyre *tenuinervis*-anatomiai szerkezet, de *Hornschuchiana*-ra emlékeztető levélalak jellemző. Az átmeneti alak és *tenuinervis* közt az összekötő kapesok megvannak (fo. *platyphylla*; bundstocki példányok).

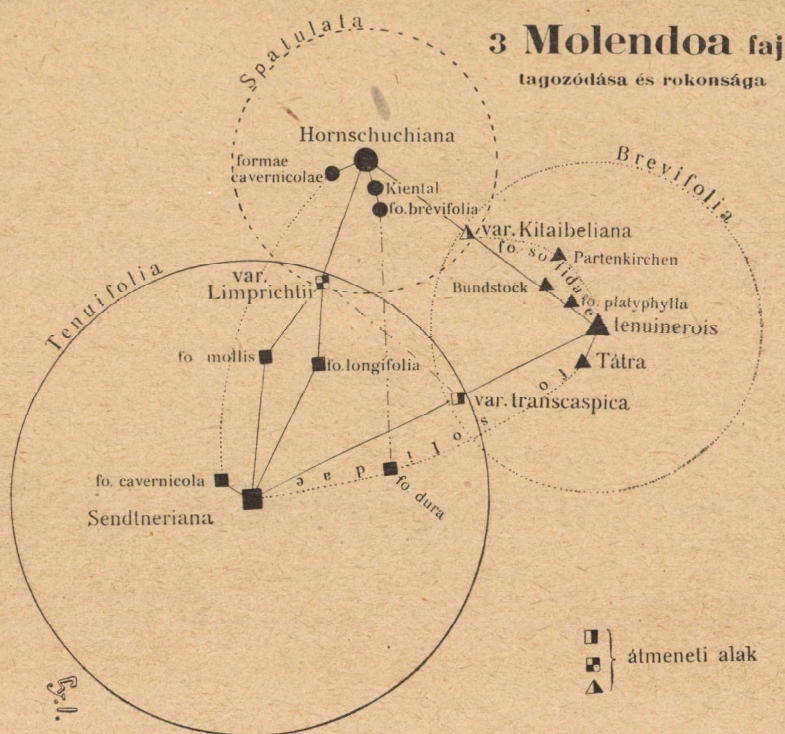
Viszont a *Sendtneriana*-nak kaukázusi példányai jellegzetes szövetelem-reductiót mutatnak; levélerük felette megegyező a *tenuinervis*-ével, ellenben a kurtább levelek a *Sendtneriana*-ra emlékeztetnek (var. *transcaspica*).

A fény mint ökológiai factor jellegzetes bélyegét persze rányomja minden alakra itt is; hiánya pedig azonnal élesen megnyilvánul az assimiláló szervek megnagyobbodásában, a kevesebb chlorophyllum-tartalom miatt kékes-zöld színben, a gyepek lazaságában és a levelek puha voltában. Ezek a *cavernicolus* alakok, a melyek teljesen hasonló eredésűek, éppúgy mint a két factor: a substratum és a víz hatására előállott alakok a *forma solidák* (*Sendtneriana* fo. *dura* — *tenuinervis* fo. *solida* — Partenkircheni *tenuinervis solidus* alakja), melyek a sziklarepedésekben levő fekete, eléggé nyirkos humuson élve, mind merev, rövid levelű, kisebb sejtű alakok.

A *Hornschuchiana*-nak is van ilyen szárazabb helyen létrejött alakja (Kiental, fo. *brevifolia*), a mely olyan paralell alak a *Sendtneriana* fo. *dura*-val, akár a var. *Limprichtii* az Askhabad-növénynyel (l. az ábrán).

A fentiekből nyilvánvaló, hogy az Európában előforduló há-

rom *Molendoa*-alaksorozat variabilitási tágassága különböző; legnagyobb a *Sendtneriana*-é, legkisebb a *Hornschuchiana*-é, a mely életmódjában is hiven tünteti fel még ma is ősi voltát (vízesés permetegében él [Heiligenblut], vagy nyirkos barlangban [például Algäui havasok]).



Mindezeket az alaksorozati tagokat megismerni és megfelelőleg értelmezni, helyes systematikai helyre behelyezni csupán akkor sikerül, ha egyesítjük¹ vizsgálatainkban a két irányt: fejlődéstani vonatkozásaiban is a szövettani kialakulást és a külső morfológiai viszonyokat állandóan értékeljük. Ha nem így járunk el, és például csupán a nagyító vizsgálatok alapján akarunk rendet teremteni, erősen megakadnánk egyik-másik alak

¹ L. *Bryol. Zeitschr.* I. 1916 : 12.

értelmezésekor (például *Hymenostylium curvirostre* var. *sendtnerianoides*, *M. Sendtneriana* var. *transcaspica* és var. *Limprichtii* etc.); viszont, ha mellőznénk a mikroskopi vizsgálatokat, például a partenkircheni *tenuinervis*-növényt *Hornschuchiana*-nak minősítenénk, mert levele ez utóbbi leveléhez nagyon hasonló.

A bryológiában nagy hazánkfia, JOANNES HEDWIG óta döntő szerepe van a nagyitónak; ezért nem is csuda, ha a bryologusok felfogása a «faj»-ról átlag sokkalta tisztultabb. A mi tudományunkban — ha ugyan még ma is sokan csupán az új fajok leírásában merítik ki szellemi energiájukat — megindult a nagy rostálás.¹ A modern bryologust elsősorban a létrejött alakok értelmezése, nem a névadás ténye érdekli. Sokszor meg kell ugyan neveznünk az alaksorozat egyik-másik tagját, hogy fogalommal dolgozhassunk, de ez csak igen alsórendű tény és nem főcél.

¹ Csak példaként említem, hogy H. N. Dixon vizsgálatai szerint a *Raphidostegium caespitosum*-nak 58 synonymája van! (cf. *Journal of Botany* Vol. 58. March 1920: 81—89.)

A MAGYAR BIRODALOM LEGYEINEK SYNOPSISIA.

I. Lauxaniidæ.

KERTÉSZ KÁLMÁN I. tagtól.

Manapság még kisebb terjedelmű monographiák megjelenése is oly nehézségekbe ütközik, hogy ilyenek kiadásáról egyelőre le kell mondanunk. Hazánk legyészeti szempontból különben is még oly kevésbé van átkutatva, hogy monographiák megírása csak kivételes esetekben indokolt. Munkásságunk és vizsgálataink eredményét azonban röviden összefoglalva mégis közzé kell tennünk. Ez a szempont lebegett szemem előtt, midőn arra határoztam el magamat, hogy a Magyar Nemzeti Múzeum gyűjteményében és magángyűjteményekben levő, legnagyobb részében immár feldolgozott magyarországi anyagnak ismertetését megkezdjem.

A fajnevek pusztá felsorolása, vagyis a gyűjtemény katalógusának közzététele nem vinné előbbre sem a tudományt, sem hazánk légyfaunájának ismeretét, mert a fajok meghatározásában tévedés mindig előfordulhat; azért a rendelkezésemre álló anyagot feltűnő, könnyen szembeötlő bélyegek felhasználásával meghatározó táblázatokba foglalom. Ennek az eljárásomnak az az előnye mindenesetre meglesz, hogy a magyarországi legyeket magyar nyelvű dolgozat alapján is meg lehet határozni, viszont a meghatározó táblázatoknak a monographiával szemben az a hátrányuk, hogy részletes leírás híjával vannak. Ennek folytán használójuk, midőn egy kérdéses fajt táblázatom segítségével meghatározott, kénytelen azt az eredeti, vagy más jó

leírással összehasonlítani s ily módon megállapítani, nem valamely rokon, a hazai faunára új fajra akadt-e?

A Fauna Regni Hungariæ-ban felsorolt fajokat, melyek egy részének hazai előfordulása kétes, nem illeszttem mind be táblázataimba, csak azokat, melyeket hazai példányok alapján írtak le, vagy pedig melyeket magamnak volt alkalmam tanulmányozhatni. Ezzel megszabadulok attól a nyügtől, melyet minden katalogus magával czipel. Viszont az egyes fajokról való felfogásom a M. N. Múzeumnak, vagy annak a magángyűjteménynek a példányai alapján, melyeket megvizsgálni alkalmam volt, minden esetben ellenőrizhető.

Az irodalom és a synonymák felsorolását is elhagyom, a mennyiben mindez a «Katalog der palæarktischen Dipteren» című munkában megtalálható.

Dolgozataimban szorosán ragaszkodom a magyar birodalom történelmi határaihoz, tehát azokhoz, a melyek a Fauna Regni Hungariæ összeállításánál is irányadók voltak. Tudományos megokolásul elégséges annyi, hogy a történelmi magyar határok egységbe foglalják a földrajzilag egységes Közép-Duna-medence legnagyobb részét, tehát zoogeographiai egységet is jelölnek. Egyéb megokolásra a *magyar* olvasó bizonyára nem szorul, de annyit mégis szükségesnek tartok megjegyezni, hogy ilyen módon az én szűkebb tudományos területemen is hozzá óhajtok járulni a történelmi összetartozás tudatának ébrentartásához, mint időrengetegekkel számoló zoologus tudva azt, hogy a fejlődésnek nincs nagyobb irányító ereje a multnál.

*

A nemzetségek meghatározására szolgáló táblázat.

- 1 (8) Arczpaizsa domború, arczélben többé-kevésbbé ívelt.
- 2 (5) Harmadik csápize a két elsőhöz arányitva megnyúlt, csúcsa felé megkeskenyedő, vagy keskeny léczalakú.
- 3 (4) Csak egy sternopleuralis sörtéje van; alsó orbitalis sörtéje befelé hajlott, arczpaizsa nagyon domború.

1. *Pachycerina* Macq.

- 4 (3) Két sternopleuralis sörtéje van; mindkét orbitalis sörtéje hátrafelé hajlik; arczpaizsa csak kevéssé domború.
2. *Lauxania* LATR.
- 5 (2) Harmadik csápize aránylag rövid, tojásdad alakú.
- 6 (7) Fejtetőlemezei fényesek és nagyon szélesek, szélességük hozzávetőleg akkora, mint a közöttük levő homloksáv. Arczpaizsa csak kevéssé domború. Feje alig magasabb a hosszánál 3. *Caliope* HAL.
- 7 (6) Fejtetőlemezei jóval keskenyebbek a közöttük levő homloksávnál. Arczpaizsa feltűnően domború. Feje hosszánál jóval magasabb 4. *Prósopomyia* LW.
- 8 (1) Arczpaizsa lapos, közepe sem domború, arczéleben egyenes vonalú.
- 9 (10) Szeme vízszintesen tojásdad 5. *Trigonometopus* MACQ.
- 10* (9) Szeme kerekded.
- 11 (12) Szárnyai nyugalmi állapotukban házfedél módjára fedik potrohát 6. *Peplomyza* HAL.
- 12 (11) Szárnyai nyugalmi állapotukban vízszintes síkban fekszenek egymáson.
- 13 (14) Csápsörtéjének törzse vastag 7. *Paroecus* BECK.
- 14 (13) Csápsörtéjének törzse sörtealakú 8. *Sapromyza* FALL.

A fajok meghatározására szolgáló táblázatok.

1. nemzetség. *Pachycerina*. MACQ.

Hazánkban csak egy faja él, a *seticornis* FALL.

2. nemzetség. *Lauxania* LATR.

Csak egy faja ismeretes, a *cylindricornis* Fabr.

3. nemzetség. *Caliope* HAL.

- 1 (2) Négy sor acrosticalis sörtéje van *Elisae* MEIG.
- 2 (1) Hat sor acrosticalis sörtéje van.
- 3 (6) Torának háta nem himporos.
- 4 (5) Csápja olyan hosszú, mint a feje; csápsörtéje szőrös; lába sárgásbarna; czombjai és elülső lába sötét színűek
nitens LW.

- 5 (4) Csápja feje hosszának csak $\frac{2}{3}$ -át éri el; csápsörtéje pelyhes; lába vörössárga; czombja, térdének kivételével, fekete; elülső lábszára és tarsusa feketés
atrocoerulea BECK.
- 6 (3) Toraⁿ himporos.
- 7 (8) Járomlemeze nagyon széles; csápsörtéje pelyhes
acnea L.
- 8 (7) Járomlemeze nagyon keskeny; csápsörtéje szőrös
brunnipes BECK.

4. nemzetség. *Prosopomyia* LW.Csak egy faja ismeretes, a *pallida* LW.5. nemzetség. *Trigonometopus* MACQ.Hazánkban csak egy faja él, a *frontalis* MEIG.6. nemzetség. *Peplomyza* HAL.

- 1 (2) Csápjai, valamint csápja és szemének széle között egy-egy (összesen 3) fekete folt van, azonkívül két kisebb a szájnnyílásának felső peremén. Harmadik hosszanti érnek tövén néhány apró sörte van
litura MEIG.
- 2 (1) Csápjai között nincs fekete folt, csak csápja és szemének széle között, azonkívül arczaipsának két oldalán is. Harmadik hosszanti érnek tövén nincs sörte
tridens Bosc.

7. nemzetség. *Paroecus* BECK.Csak egy faja ismeretes, a *signatipes* LW.8. nemzetség. *Sapromyza* FALL.

- 1 (2) Második hosszanti ere egész hosszában sörtés
praeusta FALL.
- 2 (1) Második hosszanti ere csupasz.
- 3 (30) Szárnyán valamiféle rajzolat vagy folt van.

- 4 (9) Szárnya csak a csúcán füstös.
- 5 (6) Harmadik csápíze egészen sárga ... *sexpunctata* MEIG.
- 6 (5) Harmadik csápízének apicalis fele fekete.
- 7 (8) Tapogatója és tarsusa feketés ... *illota* LW.
- 8 (7) Tapogatója és tarsusa barna ... *affinis* ZETT.
- 9 (4) Szárnyrajza más.
- 10 (13) Szárnyának csúcsa füstös, azonkívül egyik vagy mindkét harántere barnán szegélyezett.
- 11 (12) Csak hátulsó harántere barnán szegélyezett; tapogatójának csúcsa fekete ... *punctifrons* ROND.
- 12 (11) Mindkét harántere barnán szegélyezett; tapogatója egészen sárga ... *linnea* BECK.
- 13 (10) Szárnyrajza más.
- 14 (19) Csak a két harántere barnán szegélyezett.
- 15 (16) Két sor acrosticalis sörtéje van ... *modesta* LW.
- 16 (15) Négy sor acrosticalis sörtéje van.
- 17 (18) Csápsörtéje csaknem csupasz ... *interstincta* FALL.
- 18 (17) Csápsörtéje meglehetősen hosszán szőrös, *tesquae* BECK.
- 19 (14) Szárnyrajza más.
- 20 (21) Szárnyának csak az elülső széle barnán szegélyezett
muscaria FALL.
- 21 (20) Szárnyának elülső széle és mindkét harántere barnán szegélyezett, vagy a szárny felületén pontalakú barna foltok vannak.
- 22 (23) Szárnyának csak elülső széle és mindkét harántere barnán szegélyezett ... *obscuripennis* LW.
- 23 (22) Szárnyán pontalakú barna foltok vannak.
- 24 (29) Tapogatójának csúcsa fekete.
- 25 (26) A harmadik hosszanti ér utolsó szelvényének közepén nincs folt ... *decempunctata* FALL.
- 26 (25) A harmadik hosszanti ér utolsó szelvényének közepén három barna folt van.
- 27 (28) Szárnyának felületén csak tíz barna folt van, a többi halvány; paizsa sárga ... *multipunctata* FALL.
- 28 (27) Szárnyának felületén sok, sárga paizsának közepén pedig egy barna folt van ... *poeciloptera* LW.
- 29 (24) Tapogatója egészen sárga ... *notata* FALL.

- 30 (3) Szárnyán semmiféle rajzolat sincs.
- 31 (38) Potrohán szabályosan elhelyezett pontalakú foltok vannak.
- 32 (33) Csak egy potrohgyűrűn (az ötödiken) van folt
bipunctella HEND.
- 33 (32) Két vagy három potrohgyűrűn van folt.
- 34 (35) Két potrohgyűrűn van folt *quadripunctata* L.
- 35 (34) Három potrohgyűrűn van folt.
- 36 (37) Torának háta fénytelen ockersárga ; tarsusa egészen sárga
opaca BECK.
- 37 (36) Torának háta fényes vörössárga ; utolsó tarsuszei barnítottak *sexpunctata* L.
- 38 (31) Potroha nem foltos.
- 39 (54) Csápsörtéje hosszan tollas.
- 40 (41) Tora fekete *longipennis* FABR.
- 41 (40) Tora hamuszürke, barnásszürke, vagy sárga, hamvas.
- 42 (49) Tora hamuszürke vagy barnásszürke hamvas.
- 43 (44) Négy dorsocentralis sörtéje van *flaviventris* COSTA.
- 44 (43) Három dorsocentralis sörtéje van.
- 45 (46) Paizsa feketén szegélyezett *hupulina* FALL.
- 46 (45) Paizsán nincs fekete szegély.
- 47 (48) Torának hátán két vagy négy barnásvörös, hamvas hosszanti sáv van *subvittata* LW.
- 48 (47) Torának hátán nincs jól látható sáv *fasciata* FALL.
- 49 (42) Tora sárga hamvas.
- 50 (53) Tapogatója fekete, vagy csúcán feketésbarna.
- 51 (52) Négy sor acrosticalis sörtéje van *abbreviata* BECK.
- 52 (51) Hat sor acrosticalis sörtéje van *plumicornis* FALL.
- 53 (50) Tapogatója sárga *flavipalpis* LW.
- 54 (39) Csápsörtéje röviden tollas, pelyhes vagy csupasz.
- 55 (56) Csápsörtéje röviden tollas *luteofrontata* BECK.
- 56 (55) Csápsörtéje pelyhes vagy csupasz.
- 57 (82) Csápjának vagy tapogatójának a csúcsa, vagy mindkettő fekete.
- 58 (65) Csápjának és tapogatójának a csúcsa is fekete.
- 59 (60) Torának háta fénytelen, hamvas *illota* LW.
- 60 (59) Torának háta fényes.
- 61 (62) Homloka fénytelen, hamvas *subfasciata* ZETT.

- 62 (61) Homloka fényes.
- 63 (64) Hátsó lábszárán nincs *præapicalis* sörteje; himjének hátsó lábszárán fekete folt és görbe tüske van
obsoleta FALL.
- 64 (63) Hátsó lábszárán van *præapicalis* sörteje; mindkét ivar lába rendes
obsoletoides SCHNABL.
- 65 (58) Csak csápjának vagy tapogatójának a-csúcsa fekete.
- 66 (69) Harmadik csápizének a csúcsa fekete, tapogatója sárga.
- 67 (68) Harmadik csápíze csaknem a tövéig fekete
fuscicornis MACQ.
- 68 (67) Harmadik csápíze legföljebb a közepéig fekete
simplicior HEND.
- 69 (66) Harmadik csápíze sárga, legföljebb csúcsa kissé barnított; tapogatója fekete vagy barnított.
- 70 (77) Tora fénytelen.
- 71 (72) Csak egy *sternopleuralis* sörteje van — — *basalis* ZETT.
- 72 (71) Két *sternopleuralis* sörteje van.
- 73 (74) Torának hátán négy, homlokán két barna hosszávja van
quadrivittata Lw.
- 74 (73) Torának hátán és homlokán nincs hosszáv.
- 75 (76) Torának oldala és potroha feketésbarna; lába fekete, csak lábszárának töve és hátsó tarsusa sárga; négy sor *acrosticalis* sörteje van — — — — *Loewii* SCHIN.
- 76 (75) Torának oldala, potroha és lába sárga vagy barnássárga; két sor *acrosticalis* sörteje van — — — *conjugata* BECK.
- 77 (70) Tora fényes.
- 78 (79) Négy *dorsocentralis* és két sor *acrosticalis* sörteje van
decipiens Lw.
- 79 (78) Három *dorsocentralis* és több mint két sor *acrosticalis* sörteje van.
- 80 (81) Szájpereme elül kiálló; négy sor *acrosticalis* sörteje van
labiosa BECK.
- 81 (80) Szájpereme rendes; hat sor *acrosticalis* sörteje van
intonsa Lw.
- 82 (57) Csápja és tapogatója sárga.
- 83 (84) Tora szürke hamvas — — — — *pallidiventris* FALL.
- 84 (83) Tora sárga.

- 85 (86) Csak egy sternopleuralis sörtéje van ... *difformis* Lw.
 86 (85) Két sternopleuralis sörtéje van.
 87 (96) Három dorsocentralis sörtéje van.
 88 (91) Négy sor acrosticalis sörtéje van.
 89 (90) Potrohának négy utolsó hátlemezen a sörték erősek;
 testhossza 4.5 mm *quadricincta* BECK.
 90 (89) Potrohának sörtéi gyöngék; testhossza 2.7 mm
minor BECK.
 91 (88) Hat sor acrosticalis sörtéje van.
 92 (93) Torának háta fénytelen *consobrina* ZETT.
 93 (92) Torának háta fényes.
 94 (95) Negyedik hosszanti erének utolsó szelvénye kétszerte
 hosszabb az utolsóelőttinél; hátulsó harántere nem barnítot
 t *patelliformis* BECK.
 95 (94) Negyedik hosszanti erének utolsó szelvénye másfélszerte
 hosszabb az utolsóelőttinél; hátulsó harántere barnított
 (nem barnán szegélyezett!) *filia* BECK.
 96 (87) Négy dorsocentralis sörtéje van.
 97 (98) Két sor acrosticalis sörtéje van; torának háta fénytelen
laeta ZETT.
 98 (97) Acrosticalis sörtéi rendetlenül, két vagy négy sorban
 helyeződnek el; torának háta gyengén fényes
rorida FALL.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 április 18.-án tartott üléséből.)

A FÖLDMÁGNESSÉGI HÁBORGÁSOK EGY KÜLÖNÖS ALAKJÁRÓL.

STEINER LAJOS 1.-tagtól.

(Székfoglaló értekezés kivonata.)

1. A földmágnességi háborgások okára vonatkozó ismereteink a legutolsó 20—25 év alatt nem kis mértékben bővültek. Nem jutottunk ugyan még végleg megállapodott felfogáshoz és a háborgások természetére vonatkozó részletkérdések egész sora vár még megoldásra, az a nézet azonban, hogy a háborgások oka a Napból kiinduló valamilyen sugárzásban keresendő, mind jobban átmegy a tudományos köztudatba. Akár azt az álláspontot foglaljuk el, hogy a Napból kiinduló sugárzás által jobb elektromos vezetővé lett legmagasabb légköri rétegekben az amúgy is mindig meglévő és a forgó Föld mágnességi mezejétől indukált elektromos áramokban nagy változások jönnek létre (SCHUSTER), akár a Napból légkörünkbe lövelt, mozgó elektromos részecskék elektromágneses hatásának tekintjük a háborgásokat (BIRKELAND), végeredményben a Napra, mint ható okra vezetettünk. A első felfogásban, mint a jelenséget kiváltó ok, a napsugárzás szerepel és az energiát a Föld forgási energiája szolgáltatja, a második felfogásban az elektromos töltések mozgási energiája szerepel mint közvetlen ható ok. Mind a két felfogást egyelőre «dolgozó hypothezis»-nek kell tekintenünk, melyek egyikének vagy másikának igazolását a tapasztalati adatoktól várjuk.

A háborgatott napoknak, óráknak kiválogatása útján nyert statisztikai adatok a háborgások gyakoriságának időbeli elosztására és nagy általánosságban a háborgásoknak az egyes ele-

mekre gyakorolt hatásaira vonatkozólag sok fontos ismeretehz juttattak. Úgy látszik azonban, hogy e jelenségek természetéhez és physikai leírásához egyes háborgások tárgyalása — és természetesen mentől több egyes háborgásé — közelebb visz bennünket. Ily vizsgálatokat egy, nem a dolog lényegéhez tartozó körülmény nehezít meg, nevezetesen a háborgásokra vonatkozó eredeti diagrammoknak vagy azok hű másolatainak összegyűjtése számos helyről. E nehézség leküzdésére csak az utolsó 10—15 év alatt történt jelentős lépés, a mennyiben a földmágnességi obszervatóriumok az erősen háborgatott napok diagrammjainak másolatát évkönyvekben közlik.

A földmágnességi háborgások rendkívül szövevényes jelenségeire sikerül talán újabb fényt deríteni, ha egyszerűbb háborgások természetét vizsgáljuk, de nagyobb részletességgel, mint eddig általában történt.

2. A fotografikus variáció-műszerektől nyert rajzokon egész nyugodt vagy gyengén zavart görbét néha egyszerű szabályossággal lefolyó kis háborgás szakít meg, melynek időtartama átlag $2-2\frac{1}{2}$ óra és azután ismét a nyugodt görbe folytatódik. Főjellembonása az, hogy a horizontális intenzitás fokozatosan nő vagy fogy egy legnagyobb vagy legkisebb értékig és azután fokozatosan vagy kis ingadozással visszatér a normális értékhez. A háborgás a deklinációban és a függélyes erőösszetevőben is mutatkozik és itt is a nyugodt görbe a háborgás után folytatódik. Úgy látszik, hogy ezek a kisebb és egyszerű lefolyású háborgások külön osztályt alkotnak. Ily egyszerű háborgás diagramját az 1. ábra tünteti fel. — *II, D, Z* rendre a földmágnességi vízszintes erőösszetevőt, a deklinatiót és a függélyes erőösszetevőt jelentik.

A földmágnességi háborgások osztályozására több kísérlet történt. BIRKELAND három főtípust különböztet meg: az æquatorális, poláris és «cyclo-median» háborgást; az utolsó valószínűleg alacsonyabb sarkmagasságban jelentkező poláris háborgás. LEYST a Pawlovszkan észlelt háborgásokat 3 osztályba sorozza. Osztályozásának alapja a napi amplitudók aránya a deklinációban és a horizontális intenzitásban, illetőleg a napi amplitudó nagysága a függélyes erőösszetevőben. Vizsgálatunk arra mutat,

hogy a tőlünk kiválasztott háborgások BIRKELAND poláris háborgásaihoz hasonlóak és talán azonosak velük.

3. Vizsgálatunkhoz az anyagot az ógyallai mágnességi diagrammok szolgáltatták az 1906 – 1917 évekről. A kiválasztáskor két csoportba osztottuk a háborgásokat, a szerint, a mint a háborgás a horizontális intenzitást növelte (I. csoport) vagy csökkentette (II. csoport).

Minden háborgásnál kimértük hat percenként mind a három elemben a háborgató erőt, azaz a görbének eltérését a normális menettől. Ez utóbbit úgy kaptuk meg, hogy a görbének a háborgást megelőző és követő részét a normális napi menetnek megfelelőleg simán haladó görbével összekötöttük. Ez az utóbbi művelet egy kis bizonytalanságot hoz a vizsgálatba, a mely azonban a jelen esetben, a mikor nyugodt vagy kevéssé zavart görbén mutatkozó rövid tartamú háborgásról van szó, nem lehet jelentékeny.

A kimért adatokból a műszerek ismeretes érzékenységgel a háborgató erő megállapítható. A mérés eredménye a háborgató erő három derékszögű összetevője, nevezetesen a mágneses meridián irányába eső összetevő (ΔH), a mágneses meridiánra merőleges vízszintes összetevő ($H\Delta D$) és a függélyes összetevő (JZ). Ezeket pozitív jellel vesszük, ha rendre mágneses észak-, mágneses kelet felé és függélyesen lefelé irányulnak.

Czélünk volt annak kiderítése, hogy a kiválasztott egyszerű háborgások mutatnak-e bizonyos törvényszerűségeket. E czélből megvizsgáltuk e háborgások gyakoriságát *a)* az év folyamán, *b)* a nap folyamán, a háborgató erőösszetevőkben mutatkozó törvényszerűségeket, megkerestük e háborgások vektordiagrammjában mutatkozó szabályosságot és végre megkiséreltük beilleszteni eredményeinket abba a képbe, a melyet ez idő szerint a földmágnességi háborgásokról általában alkotunk magunknak.

4. Kimértünk összesen 552 háborgást; ezek közül 21-et, melyek szövevényesebb szerkezetűnek mutatkoztak, e vizsgálatból elhagytunk. A megmaradt 531 háborgásból az I. csoportba jut 428, a II. csoportba 103. E szerint az I. és II. csoportba tartozó háborgások gyakorisága körülbelül úgy viszonylik egymáshoz, mint 4 : 1. Megvizsgálva a háborgások tartamát, kezdet-

és végidőpontjait az egyes elemekben, azt találjuk, hogy e háborgások tartama átlagban körülbelül 2 óra, a függélyes összevetőben a háborgás 20—25 perczel később kezdődik, mint a horizontális intenzitásban. A kezdet- és vég-időpontokra más szabályosság nem mutatkozik határozottan.

a) A háborgások gyakoriságának évi eloszlása az 1906—09. és 1914—17. évekből egyesítve a következő (az adatokat az I. tábla mutatja, melyben a gyakoriság számadatai az összes háborgások ezredrészeiben vannak kifejezve).

I. tábla.

	Január	Február	Márczius	Április	Május	Junius
I. csoport	107	91	94	86	65	31
II. " "	118	43	54	65	32	75
	Julius	Augusztus	Szeptemb.	Október	November	Deczember
I. csoport	50	70	112	109	94	91
II. " "	64	86	97	97	129	140

Az I. csoport kettős hullámot mutat. A II. csoport egyszerű hullámot téli maximummal. Az utóbbi — úgy látszik — egy őszi és tavaszi maximum egyesüléséből ered. Az 1914—17. években a kettős hullám élesen kidomborodik tavaszi és őszi maximummal, különösen az I. csoportban. Az adatokat a II. tábla mutatja (a gyakoriság számadatai az összes háborgások ezredrészeiben vannak kifejezve).

II. tábla.

	Január	Február	Márczius	Április	Május	Junius
I. csoport	50	82	113	113	76	25
II. " "	54	54	54	135	27	54
	Julius	Augusztus	Szeptemb.	Október	November	Deczember
I. csoport	50	57	145	120	75	94
II. " "	81	135	54	82	162	108

A vastagabb számok a legnagyobb gyakoriságokat jelzik.

Tudvalevő dolog, hogy a háborgásokra általában az évi gyakoriságban ily kettős hullám a jellemző.

b) A napi szakaszosság megvizsgálására a napot két óras közökre osztottuk. A háborgásoknak ily kétórás közökbe való beosztása némi bizonytalansággal jár, mert a háborgások átlagos tartama két óra körül van ugyan, de azok kezdete az osztás-közök bármely részébe eshet és átnyúlhat a szomszédos kétórás közbe. A kétórás közökbe való soroláskor a deklinációban mutatkozó háborgást vettük irányadónak, mert — mint később látni fogjuk — a mágneses meridiánra merőleges irányú háborgató erő szabályos változást mutat a nap folyamán; a háborgást abba az órák közé osztottuk, a melyben a deklinációban mutatkozó háborgás legnagyobb része lejátszódott. A III. szám-tábla az egyes (kétórás) órák közökre eső háborgások számát mutatja, az összes háborgások ezredrészeiben kifejezve. Az órák mellett álló a betű a délelőtti, p betű a délutáni órákat jelenti.

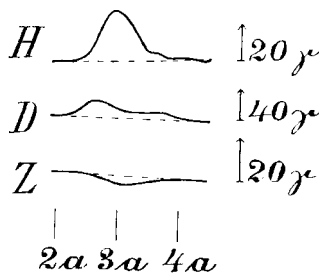
III. tábla.

	0—2 ^h _a	2—4 ^h _a	4—6 ^h _a	6—8 ^h _a	8—10 ^h _a	10—12 ^h _a
I. csoport	259	119	12	7	0	0
II. „	10	39	58	58	20	19
	0—2 ^h _p	2—4 ^h _p	4—6 ^h _p	6—8 ^h _p	8—10 ^h _p	10—12 ^h _p
I. csoport	0	0	14	68	192	329
II. „	126	233	282	126	29	0

Lényeges különbség mutatkozik az I. és II. csoport háborgásai között. Az I. csoport háborgásai délután 4—6 óra körül jelentkeznek; a következő órákban mind sűrűbben mutatkoznak és éjjel 10—12 óra körül a leggyakoribbak, azután gyakoriságuk fogy és délelőtt 8-tól délután 4-ig igen ritkák. A II. csoport háborgásai ellenben legritkábbak éjjel 10—12 óra között, a reggeli és délelőtti órákban is gyéren jelentkeznek, kora délután (0—2 óra körül) mutatkoznak nagyobb számmal és gyakoriságuk délután 4—6 óra körül a legnagyobb, azután ismét fogy.

Az I. háborgásoknál nem mutatkozik különbség az év-szakok szerint, II. háborgásoknál a nyári, meg a tavaszi és őszi hónapokban egy másodrendű maximum nyoma látszik a reggeli órákban.

Ismeretes, hogy a háborgások gyakorisága általában dél-előtt és dél körül a legkisebb, délután növekszik, az estéli és kora éjjeli órákban éri el maximumát, azután ismét fogy. Az I. és II. háborgások egyesített napi menetének a háborgások általános napi menetével való összehasonlításából azt látjuk, hogy körülbelül este 9 órától éjfélután 3-ig amazok aránylag nagyobb számmal jelentkeznek, mint a háborgások általában, a nap többi óráiban aránylag kisebb számmal. Ebből azt következtetjük, hogy azok a háborgások, melyek nem tartoznak az I. és II. csoportba, főképp a nappali és kora esti órákra esnek.



1917 febr. 5

1. ábra.

5. A háborgató erőkre két törvényszerűséget találtunk: az egyik a mágneses meridiánra merőleges erőösszetevőre vonatkozik, a másik a függélyes összetevőre, illetőleg a mágneses meridián irányába eső vízszintes és a függélyes erőösszetevő egymáshoz való viszonyára.

a) Ha az egyes háborgásoknál a mágneses meridiánra merőleges irányú háborgató erők ($H\Delta D$) átlagos nagyságát megállapítjuk (a megmért háborgató erők összege osztva az adatok számával) és ugyanabba a két órás időközbe eső háborgásokhoz tartozó átlag-értékek középértékét képezzük, nyerjük a IV. számtáblában közölt háborgató erőket. A számok $\frac{1}{10} \gamma^1$ egységekben értendők, a zárjel közé tett szám azon háborgások száma, amelyekből a közepeket nyertük.

¹ $1\gamma = 0.00001 \text{ cm}^{-1/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ a mágneses térintenzitás c. g. s. egységének $\frac{1}{100000}$ része.

IV. tábla.¹

	0—2 ^h _a	2—4 ^h _a	4—6 ^h _a	6—8 ^h _a	8—10 ^h _a	10—12 ^h _a
I. csoport	— 11 (109)	— 27 (49)	— 134 (5)	— 65 (3)	— —	— —
II. „	+ 17 (1)	— 34 (5)	— 58 (6)	29 (6)	+ 85 (1)	— 44 (2)
	0—2 ^h _p	2—4 ^h _p	4—6 ^h _p	6—8 ^h _p	8—10 ^h _p	10—12 ^h _p
I. csoport	— —	— —	+ 170 (6)	+ 104 (29)	+ 78. (80)	+ 46 (137)
II. „	— 9 (13)	+ 46 (23)	+ 68 (28)	+ 69 (13)	+ 49 (3)	— —

Feltűnő szabályosság mutatkozik az I. csoportra vonatkozó adatokban: délután 4—6 órától kezdve a mágneses meridiánra merőleges (háborgató) erőösszetevő kelet felé irányul, de folyton fogy és éjjel 0—2 órától kezdve nyugati irányú. Kevésbé élesen mutatkozik szabályos változás a II. csoportban; annyi azonban kitűnik a számadatokból, hogy délután 2—4 órától kezdve egész délután a háborgató erő kelet felé irányul épp úgy, mint az I. csoportban; az említett óráköz előtt felismerhető az a tendenzia, hogy nyugati irányúvá válják.

b) A függélyes háborgató erőben (ΔZ) feltűnik a következő szabályosság: az I. csoportban, tehát pozitív ΔH -val jellemzett háborgásoknál, ΔZ a háborgás tartama túlnyomó részében negatív és az előforduló pozitív ΔZ értékek kicsinyek, a II. csoportban vagyis negatív ΔH -val jellemzett háborgásoknál, ΔZ a háborgás tartama túlnyomó részében pozitív és az előforduló negatív ΔZ értékek kicsinyek; e szerint I. háborgásoknál a függélyes háborgató erő általában felfelé irányul, II. háborgásoknál lefelé. E szabály alól alig van kivétel. Oly háborgások előfordul-

¹ E táblában az I. és II. csoportban 418. illetőleg 101 háborgás szerepel a 3. lapon említett 428. illetve 103 háborgással szemben. Ennek az az oka, hogy e quantitativ vizsgálathoz mérésbizonytalanság miatt nem vehettük fel valamennyit.

nak, melyeknél ΔZ nagyon kicsiny és kicsinységénél fogva alig vagy egyáltalán nem mérhető (és az utóbbi esetben 0-nak veendő), de az említett általános szabálylyal ellenkező irányú ΔZ -t mutató háborgás kevés akad.

E szabályosságról képet nyújt az V. számtábla, melyből az a törvényszerűség is kiviláglik, hogy abszolút értékben nagyobb ΔH -nak, nagyobb abszolút értékű ΔZ felel meg. Az n rovatban lévő szám a háborgások számát jelenti, melyekből a közép ered.

V. tábla.

I. csoport			II. csoport		
ΔH	ΔZ	n	ΔH	ΔZ	n
+ 3·81	— 1·08	77	— 3·41	+ 1·29	18
+ 7·46	— 1·29	129	— 7·45	+ 1·08	34
+ 11·99	— 1·84	62	— 12·30	+ 1·76	18
+ 17·14	— 2·35	15	— 18·60	+ 4·08	2
+ 24·50	— 4·00	3	—	—	—

E törvényszerűséghez hasonló szabályosság mutatkozik a nagy, több órán vagy napon át tartó háborgásoknál is. Ezeknél az általános szabály: $\Delta H < 0$, $\Delta Z > 0$; oly nagy háborgás, melynél $\Delta H > 0$, $\Delta Z < 0$ ritka. Erre vall a VI. számtábla, melyet az 1905—13 évek nagy háborgásaira az ógyallai mágnességi feljegyzésekből nyertünk.¹ Ha az említett években mutatkozott nagy háborgásoknál az elemeknek a háborgási napra vonatkozó napi közepét a háborgást megelőző első, második, harmadik, továbbá a háborgást követő első, második és harmadik napra vonatkozó napi középéből levonjuk, nyerjük a VI. számtábla adatait. A között számok a leírt módon képezett különbségek átlaga $\frac{1}{10} \gamma$ egységekben; a zárójelbe foglalt számok a háborgások számát jelzik.

¹ M. kir. orsz. meteor. és földm. Intézet évkönyvei II. rész.

VI. tábla.

	Háborgást megelőző			Hábor- gási nap	Háborgást követő		
	3.	2.	1.		1.	2.	3.
	n a p				n a p		
ΔH (63)	+ 179	+ 198	+ 188	0	+ 24	+ 73	+ 109
ΔZ (47)	- 55	- 56	- 58	0	- 8	- 22	- 29
HAD (43)	- 26	- 27	- 19	0	+ 16	+ 5	- 13

Az adatokból nagyon szembe ötlük az «utóháborgás» tüné-
ménye is, ugyanis az a jelenség, hogy a háborgástól megváltozta-
tott értéke az elemeknek a háborgás megszűnése után lassan,
fokozatosan tér vissza a normális értékhez.

6. Érdekesnek látszott az I. és II. csoporthoz tartozó hábor-
gások vektordiagrammjainak megvizsgálása. Vektordiagrammok
szerkesztése a földmágnességi erő napi változásában nagyon hasz-
nos módszernek bizonyult. Szerkesztésük úgy történik, hogy a
nap ugyanahhoz az órájához tartozó és a napi változást okozó erő
derékszögű összetevőit vagy a mágneses, vagy a geográfiai me-
ridián szerint irányított derékszögű koordinátarendszerbe rajzol-
juk. A nap minden órájának megfelel egy pont; ezeket össze-
kötve egymással, polygont kapunk és ennek derékszögű területe
a vízszintes és a függélyes koordinátasíkra a vízszintes, illető-
leg a függélyes vektordiagramm. Függélyes síknak rendszerint
a mágneses meridiánon át fektetett függélyes síkot szokták vá-
lasztani. A mi feladatunkban a vektordiagramm megszerkesztésé-
hez szükséges adatok megállapítása a napi változás vizsgálatában
felmerülő viszonyokhoz képest komplikálódik. A napi változás-
nál az adatok egy bizonyos, állandó időtartamra, ugyanis 24 órára
vonatkoznak. A tőlünk vizsgált háborgások különböző időtarta-
múak és valami egységes időtartamra kell őket vonatkoztatni,
ha nagyszámú háborgásból a vektordiagramm általános alak-
ját akarjuk megállapítani. E célból a következő eljárást kö-
vettük.

Időegységül a háborgás tartamát a horizontális intenzitás-
ban választottuk; ezt felosztottuk 40 egyenlő részre. Mivel a
háborgások átlagos tartama körülbelül két óra, egy-egy köznek

három percz felel meg. A háborgató erő megállapítása hat perczenként történt oly módon, hogy minden elemben a háborgás kezdetét követő, teljes tizedórának megfelelő időpontban történt az első mérés és ezt követőleg minden tizedórában egy-egy újabb mérés. A három elemben kimért adatok teljesen egyidejűek. Ezeket az adatokat a 40 közre osztott időtartamnak ahhoz az időpontjához irtuk, melyhez legközelebb estek. Azokra az időpontokra, a melyekre kimért adat nem jutott, interpolált értékeket irtunk.

A vektordiagrammokat a nap 2—2 órás közeire külön állapítottuk meg, mert a napszaktól való függésre mutat a HAD háborgató erőre talált szabályosság.

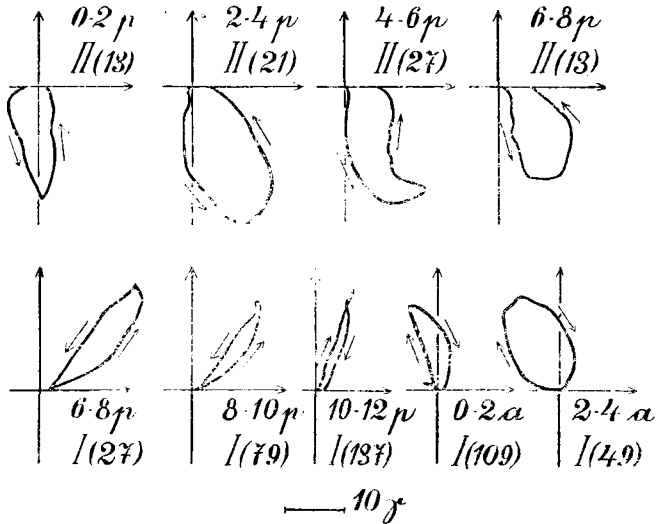
A így megállapított vektordiagrammokból következő sajátosságok olvashatók ki. (2. ábra.)

Az I. csoport háborgásainak vízszintes vektordiagrammja az esteli órákban az északkeleti negyedben van (az irányok mágneses irányok), a kora éjjeli órákban mindjobban északi irányú lesz, éjjél után az északnyugati negyedbe megy át. E tulajdonság jut kifejezésre a IV. számtábla adataiban: ott HAD pozitív értéke (kelet felé irányuló erőösszetevő) a negatív értékbe (nyugat felé irányuló erőösszetevőbe) ment át. E szerint az I. csoport vízszintes vektordiagrammja, mint egész, az estéli és éjjeli órákban az óramutató járásával ellenkező irányban forog. (A rajzban AH és HAD pozitív iránya függőlegesen felfelé, illetőleg vízszintesen jobbra irányul.) A vízszintes háborgató erő forgásiránya az estéli és kora éjjeli órákban az óramutató járásával ellenkező, 10^h — 12^h közben és éjjél után az óramutató járásával egyező irányú.

A II. csoportban a vektordiagrammnak mint egésznek forgása a nap folyamán nem oly feltűnő; annyi azonban itt is kiolvasható az adatokból, hogy a délutáni órákban a délkeleti negyedben van, a reggeli és délelőtti órákban a délnyugati negyedben. A vízszintes háborgató erőnek forgásiránya — a mennyiben a kevés számú adatból általános következtetést szabad vonni — itt is megváltozik: délután az óramutató járásával ellenkező, a reggeli és déli órákban vele egyező. E szerint a II. csoportbeli háborgásoknál is mutatkozik — bár nem oly élesen, mint

I.-nél — az a jelenség, hogy a vízszintes vektordiagramm mint egész a nap folyamán az óramutató járásával ellenkező irányban forog és ugyanakkor a vízszintes háborgató erőnek forgásiránya is megváltozni látszik, ugyanis az óramutató járásával egyező irányból (délelőtt) az ellenkezőbe megy át (délután).

A mágneses meridián-síkban fekvő függélyes vektordiagramm az I. csoportnál a felső északi, a II. csoportnál az alsó déli negyedben van. (3. ábra.)



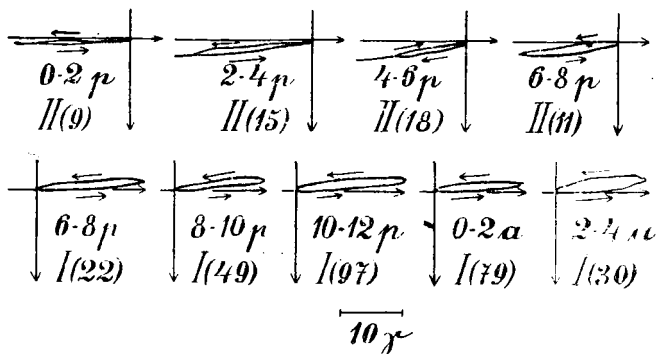
2. ábra.

7. Megkíséreljük eredményeinket beilleszteni a BIRKELAND-STÖRMER-féle elméletbe.

BIRKELAND a háborgások két nagy osztályát különbözteti meg: az æquatoriális és poláris háborgásokat. Eredményeihez a Föld különböző helyeire vonatkozó magnetogrammoknak és azoknak a kísérleti vizsgálatoknak egybevetéséből jutott, melyeket katód-sugárzásnak kitett gömbalakú elektromágnesen (terellán) végzett. Ha a katód helyén a Napot, a terella helyébe a Földet képzeljük, a kísérleti eredményeket bizonyos fenntartással, mely különösen a Napból valóban kilövelt és hozzánk érkező elektromos sugárzások minőségére vonatkozik, a Nap-Föld rendszerre átvihetjük.

Az æquatoriális háborgás alacsonyabb sarkmagasságban legerősebb, a pólusok felé gyengül és vagy növeli a horizontális intenzitást (pozitív æquatoriális háborgás), vagy csökkenti (negatív æquatoriális háborgás). Nagyjában oly hatóra enged következtetni, melynek mágneses tere a mágneses æquatorsíkban fekvő, az æqatorral kisebb-nagyobb darabon párhuzamosan haladó áramvonallal helyettesíthető.

A poláris háborgások legerősebbek nagy sarkmagasságú helyeken; az æquator felé haladva erősségük csökken. Ezeknek erőterét oly áramkörrel sikerült nagy vonásokban leírni, mely egy vízszintes és ehhez csatlakozó két függélyes ágból



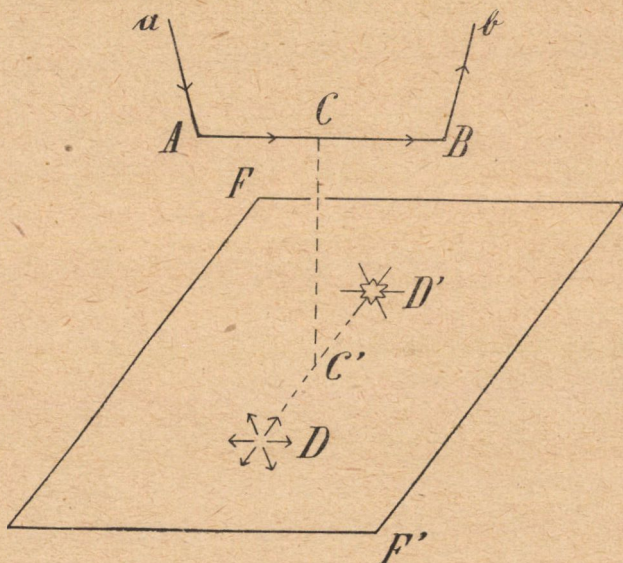
3. ábra.

áll; az utóbbiakat — praktikusán — a végtelenbe távozónak tekinthetjük. A vízszintes rész körülbelül az északi fény maximális övében képzelendő oly parallel kör mentén, melynek tengelye a Föld mágneses tengelye és e tengelynek meg a Föld felületének metsző pontjától 20° távolságra van. Ha az áramerősségre, az áramkör vízszintes részének hosszára és a Földfelülettől való távolságára bizonyos — a tapasztalati adatokhoz simuló — átlagértékeket tételezünk fel, megállapíthatjuk ennek az áramrendszernek elektromágneses hatását a Föld felületén. BIRKELAND számtáblákat közöl művében,¹ melyek alapján kü-

¹ The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902—903, Christiania 1908 és 1913, 2nd section 428—430. 1.

lőnböző hosszúságú vízszintes áramrészt feltételezve, e hatás kiszámítható.

A 4. és 5. ábra a BIRKELAND-STÖRMER elmélettel való összehasonlításhoz tartozó vázlatos rajzok. A 4. ábrában a ABC a BIRKELAND poláris háborgásait leíró áramkör a végtelenbe távozó aA és bB ágakkal. D -ben (a Föld felületén) egy divergentia pont, D' -ben egy konvergentia pont van. Mindkét pontban a vízszintes mágnességi erő elenyészik; D -től távolodva e



4. ábra.

vízszintes erő ettől a ponttól elirányul, D' körül pedig e pont felé irányul. — Az 5. ábrán P a csillagászati polus, M ama pontnak felel meg, a melyben a Föld mágnességi tengelye a Föld felületét metszi, AA' a csillagászati egyenlítő, BB' a mágneses egyenlítő, S a Nap helye, C a BIRKELAND-féle áramkör középpontja (megfelel a 4. ábra C pontjának), G az észlelő hely (Ógyalla).

STÖRMER azokat a pályákat vizsgálta,¹ melyeken a Naphól

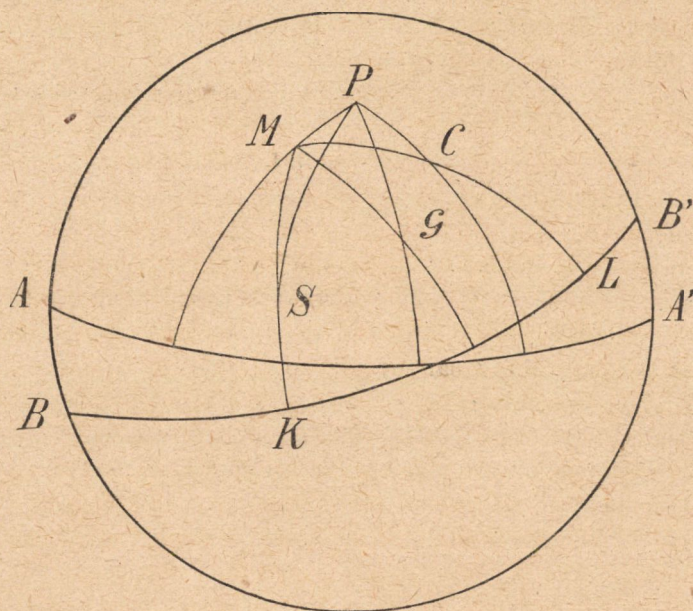
¹ Sur les trajectoires des corpuscules électrisés etc. Arch. Sciences Phys. Nat. Genève 1907. Juillet—Octobre.

kilövelt elektromos töltésű részecskék a Föld mágneses terében mozoghatnak. E pályák igen sokfélék. Itt főképp azok a pályák fontosak, melyek a Föld középpontja felé tartanak, mert csak oly pályákon mozgó részecskék juthatnak a Föld közelébe, melyek a Föld középpontján át haladó pályák közelében vannak és azok a pályák, melyek BIRKELAND-tól felhasznált áramkörök létezéséhez szükségesek, STÖRMER elmélete szerint valóban lehetséges pályák. A Föld középpontja felé tartó pályákon mozgó részecskék bizonyos, matematikailag megállapítható helyeken áramlanak be légkörünkbe. E helyek a sugárzás minőségétől és a Napnak a mágneses æquatortól mért deklinációjától függnék. Ha feltételezzük — és e feltevésre BIRKELAND kísérletei adnak támpontot —, hogy a poláris háborgásokat okozó hatókat helyettesítő áramrendszerek ezekben a beáramlási pontokban keletkeznek, továbbá — ugyancsak BIRKELAND eredményeire támaszkodva — egy pozitív és egy negatív poláris háborgást létesítő áramrendszert kombinálunk egymással, akkor észlelő helyünkre (Ógyallára) a háborgató erőket a nap különböző óráira kiszámíthatjuk. E háborgató erőket 60° horizontális ágú áramrendszerekre, $\delta=0$ Nap deklinációra, $\frac{1}{10}\gamma$ egységekben a VII. szám-tábla tünteti fel. (Az áramrendszer vízszintes részének magassága a Föld felett 400 km és az áramerősség 10^5 cgs.)

VII. tábla.

Ogyallai helyi középídő óra, d. e.	ΔH	$H\Delta D$	ΔZ	Ogyallai helyi középídő óra, d. u.	ΔH	$H\Delta D$	ΔZ
0	-24	-169	-102	12	-179	-153	+270
1	-44	-111	-43	1	-252	-36	+363
2	-35	-70	-16	2	-249	-139	+384
3	-24	-50	-6	3	161	+282	+314
4	-14	39	-2	4	-59	+336	+196
5	-7	-37	0	5	+22	+346	+74
6	-1	-39	+2	6	+76	+345	-30
7	+5	-49	+5	7	+154	+306	-139
8	+8	-67	+12	8	+242	+220	-302
9	+6	-95	+28	9	+280	+45	-384
10	-12	-138	+68	10	-205	-146	-354
11	-76	-178	-145	11	+74	-214	-232

A mint látjuk, a déli és kora délutáni órákban ΔH negatív (a mi megfelel II. csoportunknak), az esti és kora éjjeli órákban ΔH pozitív (a mi megfelel I. csoportunknak); ΔH legnagyobb értékének időpontja azonban az I. és II. csoportok legnagyobb gyakoriságának időpontjához képest ugyanabban az irányban 2—3 órával el van tolva. Éjfeltől délelőtt 10—11-ig ΔH értéke igen kicsiny, ami egyezik azzal, hogy



5. ábra.

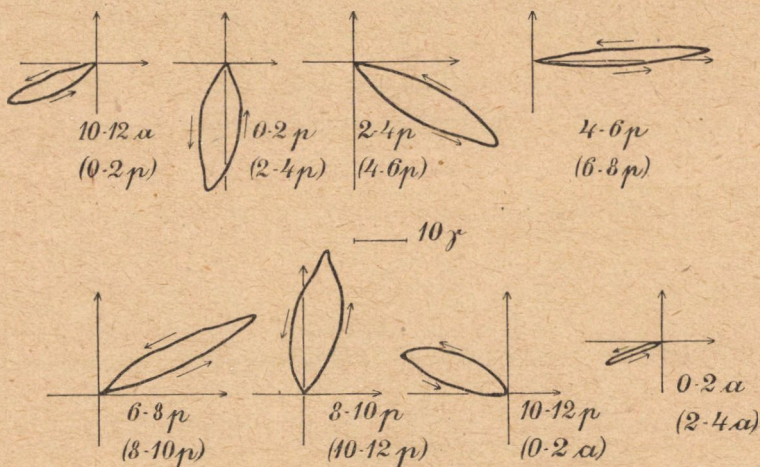
ebben az időközben I. és II. csoportbeli háborgások ritkák. A $H\Delta D$ összetevő a negatív ΔH -t feltüntető időköz első felében negatív, második felében pozitív, és a pozitív ΔH -t mutató időköz első felében pozitív, második felében negatív. A negatív $H\Delta D$ abszolút értékei általában jóval kisebbek a pozitív értékeknél. Mind e tulajdonságok I. és II. háborgásainknál a IV. számtábla adataiban és a vízszintes vektordiagramnak, mint egésznek az óramutató járásával ellenkező irányú forgásában ismerhetők fel. (ΔH és $H\Delta D$) koordinátatengelyek pozitív iránya függélyesen fel-

felé, illetőleg vízszintesen jobbra irányulónak vétetett a rajzban). A ΔZ összetevő pozitív akkor, a mikor ΔH negatív, és ΔZ negatív, a mikor ΔH pozitív. E tulajdonságot is megtaláljuk I. és II. háborgásainknál; amazoknál ΔZ általában negatív, emezeknél pozitív (V. számtábla). Feltűnő különbség mutatkozik azonban ΔZ abszolút értékeiben; a VII. tábla szerint ΔZ általában nagyobb vagy ugyanolyan rendű, mint ΔH , I. és II. háborgásainknál jóval kisebb (V. tábla). E feltűnő eltérés valószínűleg az áramrendszerek elmozdulásából és áramerőssége változásából indukált földi áramokkal magyarázható meg.

Az I. háborgások évi, hettős hullámú gyakoriságára a BIRKELAND-STÖRMER-féle elméletben a beáramlási pontok évi — ugyan-csak kettős hullámú — szakaszosságában találunk analógiát. A II. háborgások gyakoriságának amúgy sem éles évi menete kevésbé simul az elmélethez. A ΔH és ΔZ az a tulajdonsága, hogy abszolút értékeik párhuzamos menetet mutatnak (5 b), BIRKELAND áramrendszereiből önként következik; mert az áramkör áramerősségének különbözősége a háborgató erők mindegyikét a változás arányában növeli vagy csökkenti.

8. Az áramerősség egy órán át tartó fokozatos növekedésének és azután egy órán át tartó fokozatos csökkenésének feltételezésével megszerkeszthetjük a BIRKELAND-féle áramrendszerek kombinációjából származó vektordiagrammot. Az így szerkesztett (6. és 7. ábra) és a tapasztalati adatokból nyert (2. és 3. ábra) vektordiagrammok közt bizonyos hasonló vonásokat találunk. Az átlag két órás különbség miatt elmélet és tapasztalat között (l. 7. pont), a számított vektordiagramm a tapasztalati adatokból nyert, két órával későbbi közre vonatkozó vektordiagrammal hasonlítandó össze. A 6. és 7. ábrán a zárójelben levő időközök a tapasztalati adatokra vonatkoznak. A délután 2^h-4^h és 4^h-6^h közhöz tartozó vektordiagramm a II. csoportban — és ekkor csak ebben a csoportban van nagyobb számú háborgás — a számított ($0-2^h$ illetőleg 2^h-4^h közre vonatkozó) vektordiagramm-mal helyzetre vonatkozólag jól egyezik; a délután 6^h-8^h közben mindkét (I. és II.) csoportban vannak nagyobb számmal háborgások, az I. csoport vektordiagrammja északkelet, a II. csoporté dél-délkelet felé irányított, a számi-

tott vektordiagramm a kettő között fekszik és kelet felé irányított. A következő órák között csupán az I. csoportban vannak háborgások nagyobb számmal. Az esti 8^h—10^h órák között úgy a számított, mint a tapasztalati adatokból megállapított vektordiagramm az északkeleti negyedben van, a következő órák között mindkét esetben az óramutató járásával ellenkező irányban tovább forog. Lényegesebb és a tapasztalati adatok tekintélyes számánál fogva nagyobb súlyjal értékelendő eltérés csupán a reggeli 2^h—4^h között mutatkozik: a számított vektordiagramm

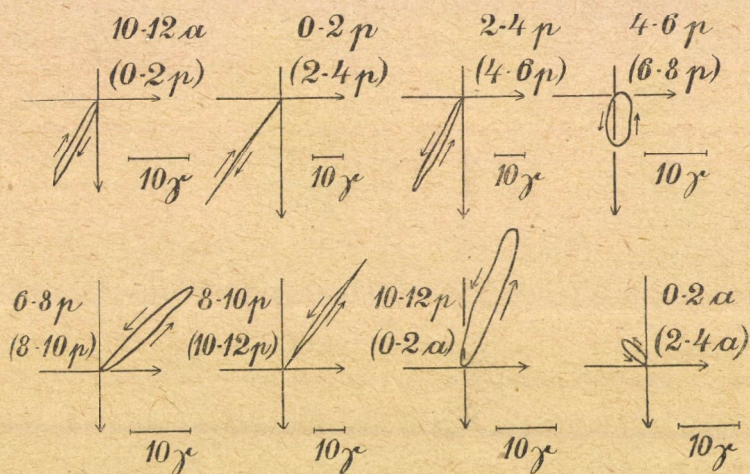


6. ábra.

nyugat-délnyugat felé irányított, a háborgató erő kicsiny, míg az észlelési adatokból levezetett vektordiagramm még az északnyugati negyedben van. Összefoglalóan mondhatjuk, hogy úgy az I. és II. csoportok által jellemzett háborgások vízszintes vektordiagrammja, mint a BIRKELAND-féle áramkörök összetételéből megállapított vektordiagramm a nap folyamán az óramutató járásával ellenkező irányban forog.

A mi a vízszintes háborgató erőnek forgását illeti, láttuk, hogy a délutáni és kora éjjeli órákban a forgásirány az óramutató járásával ellenkező. Ugyanilyen irányban forog a háborgató erő a számított vektordiagrammban is. Míg azonban az

utóbbinál e forgásirány mindig megvan, a tapasztalati adatokban e forgásirány a késő éjjeli és kora hajnali órákban ellenkezőre változik. E különös jelenség magyarázható volna azzal, hogy ezekben az órákban a vizsgált háborgásainkat okozó áramrendszereknek kelet felé irányuló mozgásuk volt. Ilyen, kelet felé irányuló elmozdulás a BIRKELAND-tól feldolgozott példákban nagy számmal található. E magyarázat azonban nem kielégítő. Nem képzelhető ugyanis, hogy az áramrendszerek kelet felé irányuló mozgása helyi időhöz kötött tulajdonság, másrészt pedig —



7. ábra.

ha tekintetbe vesszük azoknak a háborgásoknak nagy számát, melyekből az óramutató járásával egyező forgást találtunk (109 és 49 háborgás az I. csoportban éjfélután 0—2^h és 2^h—4^h órák között) — az sem valószínű, hogy éppen a vizsgálatra kiválasztott és kimért háborgásoknál véletlenül a kelet felé való mozgás az uralkodó.

A függélyes vektordiagrammok egybevetésekor első pillanatra igen nagy különbség mutatkozik a számított és észlelt vektordiagrammok között: a függélyes összetevő az előbbieken sokkal nagyobb. E különbséget valószínűleg az indukált földi áramok okozzák. Ha a Föld elektromos vezetőképessége elég

nagy, az indukált földi áramoktól származó függélyes összetevő egyenlő, de ellenkező jelű a külső erőktől származó függélyes összetevővel. Bizonyos közös vonások azonban felismerhetők. Így délután 0—2^h-tól 4^h—6^h-ig a vektordiagramm az alsó (mágneses) déli negyedben van mindkét esetben; d. u. 6^h—8^h-kor, a mikor úgy a II., mint az I. csoportban nagyobb számmal vannak háborgások, az észlelt vektordiagrammok részben az alsó déli (II. csoport), részben a felső északi (I. csoport) negyedben vannak, a számított vektordiagramm függélyesen lefelé irányul; este 8—10^h-tól kezdve a számított és észlelt vektordiagramm a felső északi negyedben van. A háborgató erő forgásiránya az I. háborgásoknál mindkét esetben az óramutató járásával ellenkező (ΔH és ΔZ koordinátatengelyek pozitív irányát a vízszinteshez jobbra-, illetőleg függélyesen lefelé irányulónak véve), a II. háborgásoknál annyiban van egyezés, hogy mindkét irányú forgás úgy az észlelt, mint a számított vektordiagrammon mutatkozik.

9. Az előzők szerint hasonlóság mutatkozik az I. és II. csoport háborgásai, meg BIRKELAND negatív és pozitív poláris háborgásai között. Megfontolásainkat BIRKELAND elmélete alapján a Naptól jövő negatív elektromosságú sugárzások feltételezésével végeztük. Újabb vizsgálatok arra mutatnak, hogy az északi fény keletkezésében főképp pozitív elektromos töltésű részecskék szerepelnek. A szoros kapcsolat folytán, mely az északi fény és a mágnességi háborgások közt fennáll, az utóbbiak keletkezésében is pozitív sugárzásokat kellene feltételeznünk. Úgy látszik, hogy ezen az alapon a BIRKELAND-féle áramrendszerekkel az I. és II. csoportbeli háborgások tulajdonságainak oly megközelítő leírása nem sikerül, mint negatív sugárzásokkal, legalább is nem oly egyszerű viszonyokat feltételezve, mint itt tettük. Mert ebben az esetben az I. II. háborgásoknak az éjfél utáni és reggeli meg délelőtti órákban kellene leggyakoribbnak lenniök, tehát épp abban a napszakban, a mikor a tapasztalat szerint legritkábbak.

POLÁROS, PÁRHUZAMOS FÉNYSUGÁR-NYALÁBNAK OPTIKAI LENCSEVEL VALÓ ÁTALAKÍTÁSA KÖRALAPÚ SUGÁRKÚPPÁ.

FRÖHLICH IZIDOR r. tagtól.

Optikai kísérletekben igen gyakran fordul elő annak a szükségessége, hogy valamely párhuzamos fénynyaláb, melynek sugarai meghatározott polározási állapotban vannak, optikai lencserendszer vagy gömbi tükör által összehajló vagy széthajló nyalábbá alakíttassék. Önként értendőnek szokás feltételezni azt, hogy ez az átalakítás nem változtatja meg a sugarak polározási állapotát; az idevágó irodalom sem nyújt e tekintetben felvilágosítást. Az alábbi szigorú vizsgálat mutatja, hogy a sugarak polározását a jelzett átalakítás felismerhető mértékben változtatja.

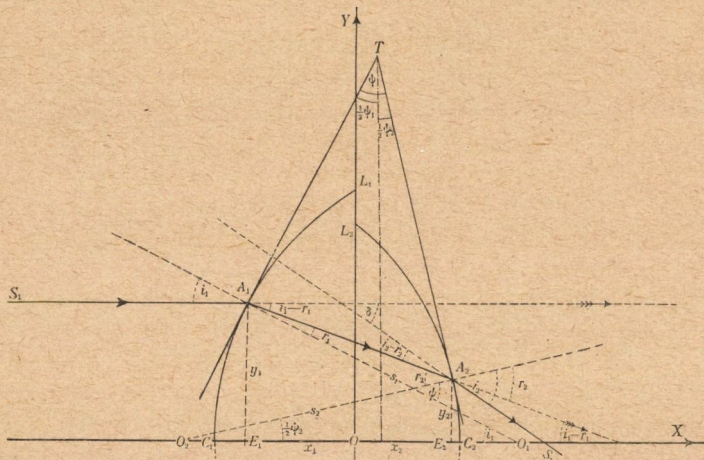
Az általános eset az, a mikor a párhuzamos fénynyaláb sugarai ellipszisben vannak polározva. Ez az eset azonban mindig szétbontható egyszerűbb két esetre, ugyanis az ellipszisszerű fényvektor mindig helyettesíthető egymásra merőleges két egyenesvonalú vektorral, a melyeknek polározási állapota megváltozásából mindig összetehető az ellipsis-vektor eredőváltozása. Ezért teljesen elegendő, ha csakis oly beejtett sugárnyalábbal foglalkozunk, a mely csupa egyenesben poláros, párhuzamos sugarakból áll.

Előre bocsátandó az, hogy ilyen sugár vektora a lencsén át való törés folytán amplitudóját és váltakozása egyenesének irányát megváltoztatja ugyan, de phasisát nem.

De már ezeknél a tulajdonságoknál fogva is mutathat az ellipsis-vektor a lencsén való áthaladás után bizonyos változást, melynek megállapítása eléggé érdekesnek látszik.

E végből elegendő, ha (1. ábra) a beejtett nyaláb valamely $\overline{S_1A_1}$ sugarát vizsgáljuk meg.

1. A lencse keresztmetszetének a fele legyen $C_1L_1L_2C_2OC_1$ alak; gömbfelületeinek közös tengelye a symmetria O_1OO_2 egyenese legyen; sugaraik $\overline{O_1A_1} = s_1$ és $\overline{O_2A_2} = s_2$; a lencse anyagának a levegőhöz viszonyított törésmutatója legyen n .



1. ábra.

A beejtett sugárnyaláb iránya az O_1OO_2 tengelylyel párhuzamos, maga a nyaláb sugarainak eloszlása e tengely körül symmetrikus legyen.

A kiválasztott, tetszésszerinti sugár legyen $\overline{S_1A_1}$; ennek útja a rajz szerint $S_1A_1A_2S_2$, a melynek egyszerű analitikai és algebrai előállítására az alábbiakban következik.

E sugár A_1 helyen hatol be a lencsébe, A_2 helyen lép ki belőle és $\overline{A_2S_2}$ irányban halad tovább.

Az $\overline{S_1A_1}$ sugár rezgési azimutja az A_1 helyen legyen α_i ; a törött $\overline{A_1A_2}$ sugár rezgési azimutja ugyancsak az A_1 helyen, de már a lencse közegében legyen α_{r1} ; minthogy a rajz síkja itt egyszermind e sugár beejtése-, illetőleg törése síkja, e sugárnak a beejtés síkjára merőleges és párhuzamos összetevőinek amplitúdói a törés előtt és az után, FRESNEL formulái szerint:

B_m és B_p ;

$$\tau_m = \frac{2 \sin r_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + r_1)} \cdot B_m; \quad \tau_p = \frac{2 \sin r_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + r_1) \cos(i_1 - r_1)} \cdot B_p.$$

E szerint áll:

$$\operatorname{tg} a_{i_1} = \frac{B_m}{B_p}; \quad \operatorname{tg} a_{r_1} = \frac{\tau_m}{\tau_p} = \frac{B_m}{B_p} \cos(i_1 - r_1) = \operatorname{tg}(a_{i_1}) \cos(i_1 - r_1).$$

E mellett az $\overline{S_1 A_1}$ sugár vektorának lineáris váltakozása merőleges (transverzális) e sugárra, míg az $\overline{A_1 A_2}$ sugár vektora saját sugárára merőlegesen, lineárisan váltakozik.

Az $\overline{A_1 A_2}$ sugár kilépése A_2 -ban történik; itt r_2 a beejtés, i_2 a törés szöge; eltekintve az üveganyag absorptiójától, az A_2 helyen, a felületen innen és túl a sugár merőleges és párhuzamos összetevőinek amplitudói a fent jelzett formulák szerint:

 τ_m és τ_p ;

$$K_m = \frac{2 \sin i_2 \cos r_2}{\sin(r_2 + i_2)} \cdot \tau_m; \quad K_p = \frac{2 \sin i_2 \cos r_2}{\sin(r_2 + i_2) \cos(r_2 - i_2)} \tau_p;$$

$$\operatorname{tg}(a_{r_2}) = \operatorname{tg}(a_{r_1}) = \frac{\tau_m}{\tau_p} = \operatorname{tg}(a_{i_1}) \cos(i_1 - r_1);$$

$$\operatorname{tg}(a_{i_2}) = \operatorname{tg}(a_{r_2}) = \frac{\tau_m}{\tau_p} \cos(r_2 - i_2);$$

végre:

$$\operatorname{tg}(a_{i_2}) = \operatorname{tg}(a_{i_1}) \cos(i_1 - r_1) \cos(r_2 - i_2), \quad (")$$

mely egyenlet kifejezi a sugár rezgési azimutjának a lencsén való áthaladás által létesített $(a_{i_1} - a_{i_2})$ elforgatását.

2. A sugár menete vastag lencsén (vastag hasábon) át. Határátmenet. Symmetrikus lencse esete.

A tárgyalat $S_1 A_1 A_2 S_2$ sugár menete a lencsén át teljesen ugyanaz, mint a menete az $A_1 T A_2$ hasábon át, melynek törő lapjai a gömbfelületek A_2 , illetőleg A_1 pontjaiban e felületekhez húzott érintő síkok.

Könnyű e menetet követni és meghatározni, 1. ábra.

Legyenek s_1, s_2 a lencse gömbfelületeinek sugarai;

x_1, y_1 a belépés A_1 helyének koordinátái } a rajz XY rendszerére
 x_2, y_2 a kilépés A_2 helyének koordinátái } vonatkoztatva;

$C_1 C_2$ e felületek csúcspontjai, O_1, O_2 görbületi középpontjai; ϕ e két felület alkotta törő szög, melynek a rajz szerinti két része: $\frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2 = \phi$;

$\left. \begin{aligned} \overline{OC_1} &= \frac{1}{2}D_1 \\ \overline{OC_2} &= \frac{1}{2}D_2 \end{aligned} \right\}$ a lencse két gömbsüvegének vastagsága; ezek összege:

$C_1 C_2 = \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2 = D$ a lencse teljes vastagsága.

Adva legyenek: $a_i, A_1(x_1, y_1)$ és ezzel i_1 , mert $\sin i_1 = \frac{y_1}{s_1}$; továbbá advák $\frac{1}{2}D_1, \frac{1}{2}D_2; s_1, s_2; \frac{1}{2}\phi_1, \frac{1}{2}\phi_2$; itt $\frac{1}{2}\phi_1 = i_1$ és $\frac{1}{2}\phi_2 = (A_2 O_2 E_2) \sphericalangle$; $\sin(\frac{1}{2}\phi_2) = \frac{y_2}{s_2}$.

Meghatározandók: $r_1; r_2; i_2; A_2(x_2, y_2); \delta$ sugáreltérés; $a_{i_2} = a$ kilépés azimutja.

a) Áll rendre a rajz szerint:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \overline{A_1 A_2} \cdot \cos(i_1 - r_1); \\ y_1 - y_2 &= \overline{A_1 A_2} \cdot \sin(i_1 - r_1); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ezekből

$$\left. \begin{aligned} x_2^2 &= x_1^2 - 2\overline{A_1 A_2} \cdot x_1 \cos(i_1 - r_1) + \overline{A_1 A_2}^2 \cos^2(i_1 - r_1); \\ y_2^2 &= x_1^2 - 2\overline{A_1 A_2} \cdot y_1 \sin(i_1 - r_1) + \overline{A_1 A_2}^2 \sin^2(i_1 - r_1); \end{aligned} \right\}$$

$$x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2\overline{A_1 A_2} \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + y_1 \sin(i_1 - r_1)\} + \overline{A_1 A_2}^2. \quad (2)$$

Ez tulajdonképpen az $A_1 A_2$ egyenes egyenleteinek rendszere.

Itt

$$i_1 = (A_1 O_1 O) \sphericalangle \text{ és } \sin i_1 = \frac{y_1}{s_1} = \sin(\frac{1}{2}\phi_1); \quad \sin r_1 = \frac{1}{n} \sin i_1;$$

azaz,

$$\sin r_1 = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{2}\phi_1; \quad \text{és } i_1 - r_1 = \frac{1}{2}\phi_1 - r_1; \quad (3)$$

$$\cos r_1 = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \frac{1}{2}\phi_1},$$

avagy:

$$i_1 - r_1 = \frac{1}{2}\phi_1 - \text{arc.} \left\{ \sin = \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{2}\phi_1) \right\}. \quad (3a)$$

b) Az elülső gömbfelület egyenletének felhasználása:

Áll az első ábra szerint:

$$\overline{O_1 A_1}^2 = \overline{O_1 E_1}^2 + y_1^2 = (s_1 - \overline{C_1 E_1})^2 + y_1^2 = (s_1 - [\frac{1}{2}D_1 - x_1])^2 + y_1^2 = s_1^2,$$

azaz:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= s_1^2 - 2s_1 [\frac{1}{2}D_1 - x_1] + (\frac{1}{2}D_1 - x_1)^2 + y_1^2; \\ 0 &= y_1^2 - s_1 D_1 + 2s_1 x_1 + \frac{1}{4}D_1^2 - D_1 x_1 + x_1^2; \end{aligned}$$

vagy még

$$x_1^2 + y_1^2 = +s_1 D_1 - (2s_1 - D_1) \cdot x_1 - \frac{1}{4}D_1^2. \quad (\text{II})$$

3. A hátulsó gömbfelület egyenletének felhasználása.

Áll az első ábra szerint:

$$\overline{O_2 A_2}^2 = \overline{O_2 E_2}^2 + y_2^2 = (s_2 - \overline{C_2 E_2})^2 + y_2^2 = (s_2 - [\frac{1}{2}D_2 - x_2])^2 + y_2^2 = s_2^2;$$

azaz

$$\begin{aligned} s_2^2 &= s_2^2 - 2s_2 [\frac{1}{2}D_2 - x_2] + (\frac{1}{2}D_2 - x_2)^2 + y_2^2; \\ 0 &= -s_2 D_2 + 2s_2 x_2 + \frac{1}{4}D_2^2 - D_2 x_2 + x_2^2 + y_2^2, \end{aligned}$$

avagy

$$x_2^2 + y_2^2 = +s_2 D_2 - (2s_2 - D_2) x_2 - \frac{1}{4}D_2^2. \quad (\text{III})$$

4. Felhasználva a (2) egyenletet:

$$x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2A_1 A_2 \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + y_1 \sin(i_1 - r_1)\} + \overline{A_1 A_2}^2; \quad (2)$$

a (II) és (III) tekintetbe vételével nyerjük

$$\begin{aligned} & s_2 D_2 - (2s_2 - D_2) x_2 - \frac{1}{4}D_2^2 = \\ & = s_1 D_1 - (2s_1 - D_1) x_1 - \frac{1}{4}D_1^2 - 2\overline{A_1 A_2} \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + \\ & \quad + y_1 \sin(i_1 - r_1)\} + \overline{A_1 A_2}^2. \end{aligned}$$

Itt az x_1 -et az O -ból O_2 -felé, az x_2 -t az O -ból O_1 felé számítjuk pozitívnak.

E szerint:

$$\overline{A_1 A_2}^2 - 2\overline{A_1 A_2} \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + y_1 \sin(i_1 - r_1)\} = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{4}(D_1^2 - D_2^2) - (s_1 D_1 - s_2 D_2) + \{(2s_1 - D_1)x_1 - (2s_2 - D_2)x_2\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

Hogy $\overline{A_1 A_2}$ -t lehessen meghatározni és vele az 1. egyenletrendszerből az x_2 -t és y_2 -t: a (IV)-ből ki kell küszöbölni az ismeretlen x_2 -t (például az (1.) rendszer első egyenletéből):

$$x_2 = -x_1 + \overline{A_1 A_2} \cdot \cos(i_1 - r_1);$$

úgy, hogy (IV)-ből:

$$\left. \begin{aligned} & \overline{A_1 A_2}^2 - 2\overline{A_1 A_2} \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + \\ & + y_1 \sin(i_1 - r_1) - (s_2 - \frac{1}{2}D_2) \cos(i_1 - r_1)\} = \\ & = \frac{1}{4}(D_1^2 - D_2^2) - (s_1 D_1 - s_2 D_2) + \{2(s_1 + s_2) - (D_1 + D_2)\} x_1. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Némi átalakítással:

$$\left. \begin{aligned} & \overline{A_1 A_2}^2 - 2\overline{A_1 A_2} \cdot \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + \\ & + y_1 \sin(i_1 - r_1) - (s_2 - \frac{1}{2}D_2) \cos(i_1 - r_1)\} = \\ & = \frac{1}{4}(D_1^2 - D_2^2) - (s_1 D_1 - s_2 D_2) + \{(s_1 + s_2) - D\} 2x_1. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Ez egyenlet alapján a megadott $s_1, s_2; D_1, D_2; i_1, n, x_1$ mennyiségekből meghatározható az $\overline{A_1 A_2}$ hosszúság; két gyökértéke közül a problémával egyezőt kell megtartani, ugyanis a pozitív értékűt.

Ha $\overline{A_1 A_2}$ ily módon meg van határozva, az 1. egyenletrendszerből kifejezhető az x_2 és y_2 ; ezekből adódik

$$\sin \frac{1}{2}\phi_2 = \frac{y_2}{s_2}; \quad r_2 = \frac{1}{2}\phi_2 + i_1 - r_1; \quad \text{és végre} \quad \sin i_2 = n \sin r_2.$$

$$\text{Az eltérést: } \delta = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - \phi = i_2 - \frac{1}{2}\phi_2.$$

5. *Symmetrikus lencse esetében:*

$$s_1 = s = s_2; \quad \frac{1}{2}D_1 = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C_1 C_2 = \frac{1}{2}D_2;$$

$$i_1 = \frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\phi_2;$$

marad az (V)-ből:

$$\left. \begin{aligned} & \overline{A_1 A_2}^2 - 2\overline{A_1 A_2} \{x_1 \cos(i_1 - r_1) + \\ & + y_1 \sin(i_1 - r_1) - (s - \frac{1}{2}D) \cos(i_1 - r_1)\} = 2x_1(2s - D). \end{aligned} \right\} \quad (Va)$$

Ebből

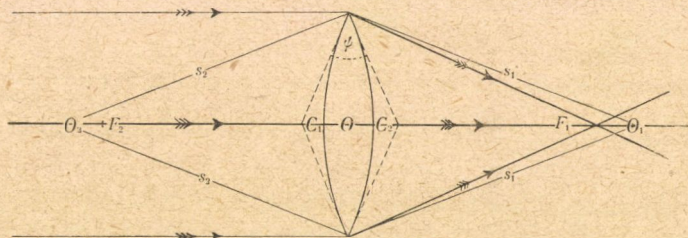
$$\left. \begin{aligned} & \overline{A_1 A_2} = \{x_1 - (s - \frac{1}{2}D)\} \cos(i_1 - r_1) + y_1 \sin(i_1 - r_1) \pm \\ & \pm \sqrt{2x_1(2s - D) + [\{x_1 - (s - \frac{1}{2}D)\} \cos(i_1 - r_1) + y_1 \sin(i_1 - r_1)]^2} \end{aligned} \right\} \quad (Vb)$$

Itt minden esetre a + előjel veendő; a számítás kissé bonyolult.

6. *A lencse széléhez (kerületéhez) közel menő sugarakra nézve az $\overline{A_1 A_2}$ igen kicsiny; egyszersmind az x_1 , valamint az x_2 is a zerus felé convergál; de azért a törés (eltérés) tel-*

jesen úgy történik, mintha a sugár a lencse szélén alkotott ψ élszögű hasábon haladt volna keresztül. Az *eltérítés* itt is lesz mint a 4. pontban: $\delta = i_2 - \frac{1}{2}\psi$; ezt nyerjük: $\sin r_1 = \frac{1}{n} \sin i_1$; továbbá: $r_2 = \psi - r_1$; végre $\sin i_2 = n \cdot \sin r_2 = n \cdot \sin(\psi - r_1)$ összefüggésekből.

I. példa: Legyen $n = 1.5$; $\psi = 43^\circ 10'$; $\frac{1}{2}\psi = 21^\circ 35'$; akkor: $r_1 = 14^\circ 12'$; $r_2 = 28^\circ 58'$; $i_2 = 46^\circ 35'$; és így végre $\delta = i_2 - \frac{1}{2}\psi = 25^\circ 00'$; e kerületi (szélmenti) sugarak alakítanak egy sugárkúpot, melynek nyílása az F_1 -nél 50° , e szerint e sugarak a tengelylyel $25^\circ 00'$ szöget alakítanak. E sugarak vektorának rez-



2 ábra.

gési azimutja a beejtett és a kilépő sugárra nézve, vonatkoztatva a *mindenkori beesés-törés-eltérítés síkjára*, az előbb megállapított tétel szerint

$$\operatorname{tg}(a_{i_2}) = \operatorname{tg}(a_{i_1}) \cos(i_1 - r_1) \cos(r_2 - i_2).$$

A számítás *számbeli* eredménye a következő:

Ha:

$$a_{i_1} = 0^\circ 00'; 15^\circ 00'; 30^\circ 00'; 45^\circ 00'; 60^\circ 00'; 75^\circ 00'; 90^\circ 00';$$

akkor:

$$a_{i_2} = 0^\circ 00'; 14^\circ 13'; 28^\circ 37'; 43^\circ 23'; 58^\circ 35'; 74^\circ 31'; 90^\circ 00'.$$

Ugyanezek az értékek érvényesek a többi három quadransra nézve. E szerint az optikai tengely menti, változatlan azimutot mutató sugár és a kerületen áthaladt palást menti sugár azimutja között a legnagyobb különbség az $a_{i_1} = 45^\circ$ esetén van, és ott kiteszen $1^\circ 37'$ -et, az egész azimutnak körülbelül harminczadrészét.

II. példa: Legyen $n=1.5$; $\phi=48^\circ 48'$; $i=\frac{1}{2}\phi=24^\circ 24'$; akkor rendre:

$$r_1=15^\circ 59'; r_2=32^\circ 49'; i_2=54^\circ 24'; \delta=i_2-\frac{1}{2}\phi=30^\circ 00'.$$

A szélső sugarak itt az F_1 -nél 60° nyílású kúpot alakítanak; a számítás végeztével az azimutokra nézve áll:

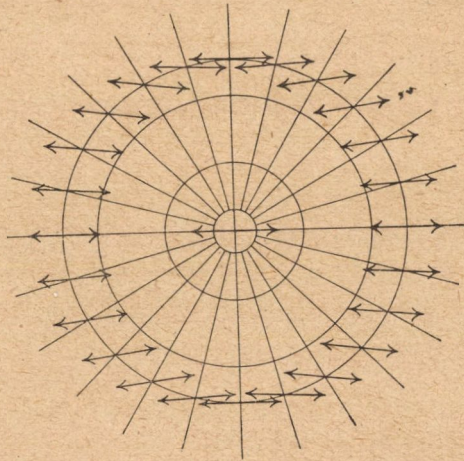
Ha

$$a_{i_1}=0^\circ 00'; 15^\circ 00'; 30^\circ 00'; 45^\circ 00'; 60^\circ 00'; 75^\circ 00'; 90^\circ 00';$$

akkor:

$$a_{i_2}=0^\circ 00'; 13^\circ 51'; 27^\circ 58'; 42^\circ 35'; 57^\circ 53'; 73^\circ 45'; 90^\circ 00'.$$

Ugyanígy a többi három quadransra nézve. Itt is az $(a_{i_1}-a_{i_2})$



ábra.

külöbség maximuma az $a_{i_1}=45^\circ$ körül van és $2^\circ 25'$ -et teszen ki; közel a huszadrészét az egész azimutnak.

III. példa: Legyen $n=1.5$; $\phi=28^\circ 20'$; $i_1=\frac{1}{2}\phi=14^\circ 10'$; ekkor rendre:

$$r_1=9^\circ 23'; r_2=18^\circ 57'; i_2=29^\circ 09'; \delta=i_2-\frac{1}{2}\phi=15^\circ 00'.$$

A szélső sugarak itt az F_1 -nél 30° nyílású kúpot alakítanak; a számítás végeztével az azimutokra nézve áll:

Ha:

$$a_{i_1} = 0^\circ 00'; 15^\circ 00'; 30^\circ 00'; 45^\circ 00'; 60^\circ 00'; 75^\circ 00'; 90^\circ 00';$$

akkor:

$$a_{i_2} = 0^\circ 00'; 14^\circ 44'; 29^\circ 31'; 44^\circ 27'; 59^\circ 34'; 74^\circ 43'; 90^\circ 00'.$$

Ugyanúgy a többi három quadransra nézve. A legnagyobb eltérés itt az $a_{i_1} = 45^\circ$ -nál van és kiteszen 33'-et, a mi az azimut szögértékének körülbelül egy *nyolczvanadrésze*.

*

E példából kiderül, hogy még 60 fokú körkép-nyaláb esetén is, a lencsén való kétszeri törés és eltérés folytán az azimutnak a megváltozása elég csekély; sőt az utóbbi, a 30 fokú körkép esetén e megváltozás legnagyobb értéke alig nagyobb fél foknál, úgy hogy a gyakorlatban, minőleges kísérletek esetén e megváltozástól el lehet tekinteni.

*

A mellékelt 3. ábrán elő van tüntetve párhuzamos nyalábból a 2. ábrán bemutatott lencse segélyével létesített körképos nyaláb szélső sugarainak *rezgési azimutja* viszonyítva a tengely menti sugar változatlan azimutjához; az azimutok az előbb írt:

$$\operatorname{tg}(a_{i_2}) = \operatorname{tg}(a_{i_1}) \cos(i_1 - r_1) \cos(i_2 - r_2)$$

formula szerint vannak számítva és vonatkoznak a II. példa 60 fokos kúpjára. Azonban a *rajzban* az így kiszámított

$$(a_{i_1} - a_{i_2})$$

különbségek *ötszörösen nagyított* értékei vannak felhasználva, hogy a kúpos sugárnyalábbá való átalakítás folytán beálló azimutváltozások e mesterséges nagyítás által jobban kidomborodjanak; *de így is csak gondos meglekintésnél vehető észre e megváltozás!*

ÚJABB VIZSGÁLATOK A NEM FERROMÁGNESES FÉMEK FARADAY-EFFEKTUSÁRÓL.

(Második közlemény.)

Akadémiai székfoglaló értekezés.

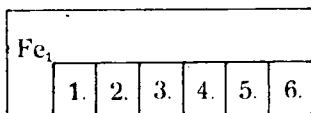
POGÁNY BÉLA I. tagtól.

Egy előbbi dolgozatomban jelentést tettem azokról a kísérleteimről, melyeket a nem ferromágneses fémek FARADAY-effektusának kimutatása céljából végeztem s a melyek pozitív eredménnyel jártak, a mennyiben a Fe_1 + nem ferromágneses fém, illetőleg a Fe_1 + nem ferromágneses fém + Fe_2 kombinációkon észlelt FARADAY-effektus mindenkor nagyobb volt, mint a Fe_1 , illetőleg a Fe_1 + Fe_2 vasrétegek FARADAY-effektusa, egyébként azonos viszonyok között. Ez az eredmény egyszerűen értelmezhető volt, mint a vasréteggel határos nem ferromágneses fémrétegnek az erős molekuláris mágneses tér hatása alatt létrejött FARADAY-effektusa. Ezeket a kísérleteimet azóta folytattam, majd 1919. évi május hóban kénytelen voltam azokat igen szomorú körülmények között váratlanul félbeszakítani. A következő sorokban az addig elért folytatólagos eredményeket adom közre. A vizsgálatok gyors és kényszerű befejezése okozta, hogy egy vagy más mérési sorozat nem oly teljes és kimerítő, mint kedvezőbb viszonyok között lett volna.

A kísérleti berendezés változatlanul ugyanaz maradt, melyet előbbi dolgozatomban leírtam, mindössze a praeparatumok készítése módosult némileg. Ugyanis a nem ferromágneses fémből való lépcsőket a 26×76 mm² nagyságú tárgylemeznek csak az egyik felére készítettem (1. ábra), hogy a lemez másik felén, annak egész hosszában mérhessem a Fe mágneses forgatását és ellenőrizhessem a Fe rétegek vastagságát.

1. §. A polározási sík forgatásának mérésére szolgáló ana-

lizátor pontos és érzékeny beállítása czéljából, mint azt előbbi dolgozatomban leírtam, egy úgynevezett félárnyéklemeszt használtam. Ez az észlelési eljárás egy bizonyos korrekció alkalmazását teszi szükségessé, a mennyiben a polározási sík mágneses forgatásának lemért szöge a tényleges elforgatás szögénél valamivel nagyobbak adódik



1. ábra.

azon sugaraknak a hatása folytán, melyek a mágnesesen aktív réteg határain visszaverődve, nemcsak egyszer, hanem háromszor, ötször stb. teszik meg az utat a mágnesesen aktív rétegen keresztül. A mágneses forgatás észlelt szögén a félárnyéklemesz használata folytán alkalmazandó korrekció nagyságát W. VOIGT¹ állapította meg. Legyen a mágnesesen aktív rétegben a polározási sík mágneses forgatásának észlelt szöge ϑ , akkor a korrekció

$$d\vartheta = -\frac{j}{2J} \sin 4\vartheta, \tag{1}$$

a hol J az aktív rétegen egyszer áthaladt hullám intenzitása, j pedig a belső visszaverődések folytán az aktív rétegen háromszor áthaladt hullám intenzitása. Minthogy általában ϑ az aktív réteg vastagságával arányos, ezért átlátszó aktív anyagoknál, hol $\frac{j}{J}$ a réteg vastagságától nem függ, $d\vartheta$ annál nagyobb, minél vastagabb az aktív réteg. Átlátszó aktív anyagoknál tehát a korrekció igen tekintélyes lehet. Abszorbeáló mágnesesen aktív rétegek, például vasrétegek esetében $\frac{j}{J}$ is függ a réteg vastagságától, a minék a mi szempontunkból az az örvendetes következménye van, hogy, a mint látni fogjuk, a korrekció egy kicsiny maximális értéknél nagyobb nem lehet.

Legyen J_0 a Fe -rétegre merőlegesen beeső fényhullám intenzitása (2. ábra), $R_{l, Fe}$ és $R_{ü, Fe}$ a két határfelület visszaverőképessége és $D_{l, Fe}$ és $D_{ü, Fe}$ a két határfelület áteresztőképessége, ugyancsak merőleges beesésnél, akkor :

¹ W. VOIGT: Magnetooptik und Elektrooptik, 13. lap, 1908.

$$\begin{aligned}
 j &= J_0 R_{l, Fe} R_{ü, Fe} D_{l, Fe} D_{ü, Fe} e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n x z}, \\
 J &= J_0 D_{l, Fe} D_{ü, Fe} e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n x z}, \\
 \frac{j}{J} &= R_{l, Fe} R_{ü, Fe} e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n x z},
 \end{aligned} \tag{2}$$

a hol λ a fény hullámhosszát levegőben mérve, n és x a Fe levegőre vonatkoztatott törésmutatóját és abszorpcióindexét, z pedig a réteg vastagságát jelenti.

Mint hogy ϑ arányos z -vel, írhatjuk hogy:

$$4\vartheta = cz,$$

ahol c tehát a négyszerese annak a szögnek, a mekkorával az egységnyi vastagságú Fe -réteg a polárizálás síkját forgatja. c numerikus értéke függ a fény hullámhosszától, a mágnesezéstől és a hosszegység megválasztásától. A korrekció tehát lesz:

$$d\vartheta = -\frac{R_{l, Fe} R_{ü, Fe}}{2} e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n x z} \sin cz. \tag{3}$$

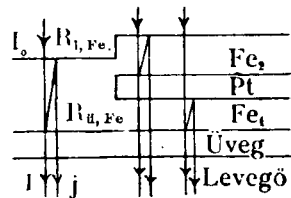
Ennek a kifejezésnek nyilván maximuma van annál a z értéknél, melyet a

$$\begin{aligned}
 \frac{d(d\vartheta)}{dz} &= - \\
 &= -\frac{R_{l, Fe} R_{ü, Fe}}{2} \left[-\frac{8\pi}{\lambda} n x e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n x z} \sin cz + c e^{-\frac{8\pi}{\lambda} n x z} \cos cz \right] = 0
 \end{aligned}$$

egyenlet megszab. Tehát:

$$z_{\max} = \frac{1}{c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c\lambda}{8\pi n x}. \tag{4}$$

Adott anyagi minőségű aktív rétegnél tehát függ z_{\max} a fény hullámhosszától és a mágnesezéstől, de nem függ a határfelületek visszaverőképességeitől, vagyis attól, hogy mily anyagok határolják az aktív réteget. Legyen például kékeszöld fény nyel dolgunk, vagyis $\lambda = 500 \mu\mu$; a méréseimnél használt $H = 23,400$ GAUSS erősségű külső mágneses térben a vasréteg bizonyosan telítve volt és ekkor méréseim szerint $\lambda = 500 \mu\mu$ mellett



2. ábra.

$\epsilon' = 3.75 \frac{\text{szperc}}{\mu\mu}$, a mi 0.94 percznyi forgatásnak felel meg pro $\mu\mu$ és $156,666^\circ$ -nak pro cm., tehát a LOBACH-féle mérések eredményeivel nagyon jól egyezik. Az Akadémia megbízásából végzett más mérésekkel kapcsolatban meghatároztam ilyen katódporlasztással készült vékony vasrétegek optikai állandóit is. Ezek körülbelül $10 \mu\mu$ -nél vastagabb rétegeknél már alig valamit változnak a réteg vastagságával. $\lambda=500 \mu\mu$ -nél a törésmutató $n=2.42$, az abszorpciós-index $\alpha=0.84$. Helyettesítve ezeket az értékeket (4)-be és tekintetbe véve, hogy $3.75' = 0.00109$ radián:

$$\alpha_{\max} = \frac{1 \mu\mu}{3.75'} \arctg \frac{0.00109 \times 500}{8\pi \times 2.03} = 9.86 \mu\mu.$$

Tekintsük át most a 2. ábrában vázolt konkrét esetet. A kérdés, melyet el kell dönteni, a következő: vajjon a levegő és Pt által határolt Fe_2 réteg korrekciója, $d\delta_{Fe_2}$, plus a Pt és üveg által határolt Fe_1 réteg korrekciója, $d\delta_{Fe_1}$, minus a levegő és üveg által határolt $Fe_1 + Fe_2$ réteg korrekciója, $d\delta_{Fe_1 + Fe_2}$, vagyis a

$$d\delta_{Fe_1} + d\delta_{Fe_2} - d\delta_{Fe_1 + Fe_2} \quad (5)$$

szög van-e akkora, mint a Pt rétegnek tulajdonított mágneses forgatás szöge $(Fe_1 + Pt + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2)$? Mint látni fogjuk, a korrekció meg sem közelíti a Pt-nak tulajdonított FARADAY-effektus nagyságát.

Legyen adva két 1., és 2., általában abszorbeáló közegnek n_1 és n_2 törésmutatója és α_1 és α_2 abszorpciósindexe. Akkor a két közeget elválasztó felület visszaverőképessége merőleges beesésnél:

$$R_{12} = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2}{(n_1 + n_2)^2 + (n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2)^2},$$

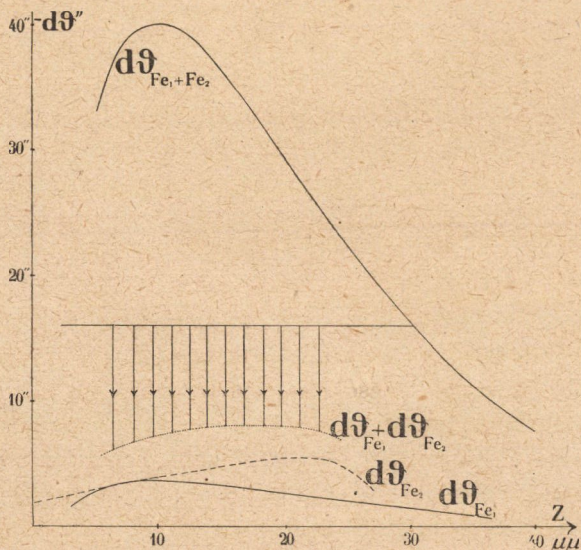
a mely kifejezés természetesen szimmetrikus az 1. és 2. közegekre vonatkozóan. A 2. ábrán vázolt példában szereplő közegek optikai állandói:

	n	$n\alpha$	}	$\lambda = 500 \mu\mu.$
üveg	1.5	0		
levegő	1.0	0		
Pt	2.28	3.38		
Fe	2.42	2.03		

A tekintetbe jövő visszaverőképességek tehát:

$$R_{l, Fe} = 0.388, \quad R_{ü, Fe} = 0.255, \quad R_{Pt, Fe} = 0.036.$$

Helyettesítve ezeket az értékeket $d\vartheta$ (3) alatti kifejezésébe, kiszámíthatjuk a korrekciót a különböző vastagságú, üveg és Pt által határolt Fe_1 , Pt és levegő által határolt Fe_2 és levegő és üveg által határolt $Fe_1 + Fe_2$ rétegekre. A 3. ábra kihúzott gör-

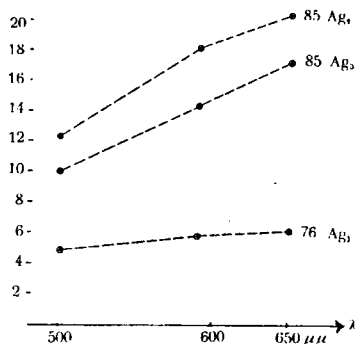


3. ábra.

béi ábrázolják $d\vartheta$ -t, mint a réteg z vastagságának függvényét a különböző Fe -rétegekben. Mint látható, $d\vartheta$ értéke egyik rétegben sem éri el egy ívpercz nagyságát. Az (5) alatti korrekció már mostan függ a két Fe -réteg összvastagságától, $D_{Fe_1+Fe_2}$ -től és attól, hogy ez hogyan oszlik meg a két Fe_1 és Fe_2 réteg között. Legyen például $D_{Fe_1+Fe_2} = 30 \mu\mu$. A 3. ábrában a $d\vartheta_{Fe_2}$ görbe tükrözve van a $z = \frac{D_{Fe_1+Fe_2}}{2}$ tengelyen (— — —). A pontozott görbe adja $d\vartheta_{Fe_1} + d\vartheta_{Fe_2}$ -t, a vízszintes kihúzott egyenes pedig $d\vartheta_{Fe_1+Fe_2}$ -t. A kettő közt elterülő területet függőlegesen vonalkázó nyilak adják az (5) alatti korrekciót előjel és nagyság szerint.

Hogy e korrekció a kísérletek értelmezésénél legalább qua-

litative szóba jöhessen, kell, hogy előjele negatív legyen, tehát a nyilak felfelé mutassanak a $-d\vartheta$ tengely irányában. Példánkban a nyilak lefelé mutatnak, a korrekció nagysága pedig oly csekély, egészen más nagyságrendű, mint az észlelt nemferro-



4. ábra.

mágneses rétegeken mért FARADAY-effektus, úgy, hogy *quantitative, mint a kísérletek értelmezése szóba sem jöhet.* A korrekció nagysága és előjele természetesen változik a fény hullámhosszával és a *Fe*-rétegek közé helyezett nemferromágneses réteg anyagi minőségével, például *Ag*-nál negatív, de nagyságrendje ugyanoly csekély marad.

2. §. Első dolgozatomban részletesen szólottam a *Pt* FARADAY-effektusáról és mutatóba egy-egy mérési sorozatot közöltem *Pl*, *Ag* és *Cu*-lépcsőkön végzett észlelésekből. Mostan ez utóbbi fémeken, továbbá *Bi*-on és *Cd*-on végzett több észlelésem eredményéről számolhatok be. Mindegyik megfigyelésemnél a fény hullámhossza $\lambda=590 \mu\mu$ és a mágneses tér erőssége $H=23,400$ GAUSS. Az 1. táblázatban az ezüstön észlelt eredmények vannak összeállítva:

1. Táblázat.

	Üveg.	Fe_1	Fe_2	Ag_1	Ezüst-rétegek forgatása									
					vastagsága				Ag_1	Ag_2	Ag_3	Ag_4	Ag_5	Ag_6
					mm	$\mu\mu$	$\mu\mu$	$\mu\mu$						
77.	0.84	13.15	—	7.4	1' 06"	5' 20"	9' 11"	11' 46"	11' 06"	12' 23"				
	—	—	42.5	—	—1' 17"	5' 15"	8' 25"	5' 31"	6' 20"	9' 08"				
79.	0.84	39.0	—	15.2	7' 57"	10' 07"	12' 22"	—	—	—				
85.	0.75	20.6	—	7.0	0' 10"	2' 55"	7' 52"	9' 28"	10' 06"	9' 02"				
	—	—	18.3	—	—0' 55"	6' 30"	15' 30"	17' 52"	18' 47"	18' 40"				
87.	0.49	56.0	—	27.8	5' 30"	6' 45"	—	—	—	—				

Mindegyik készítménynél az első sorban vannak feltüntetve a $(Fe_1 + Ag_k) - (Fe_1)$ kombináció mágneses forgatásának értékei, a második sorban, a $(Fe_1 + Ag_k + Fe_2) - (Fe_1 + Fe_2)$ kombináció mágneses forgatása. Mint látható, a polározási sík mágneses forgatása mindenütt pozitív, vagyis a külső mágneses teret létrehozó áramok irányában történik. A forgatás nagysága általában növekedik az ezüstreteg vastagságával. A 77. készítmény 4. és 5. lépcsőjének kiugró értékei bizonyára annak tulajdoníthatók, hogy a lépcsők felülete nem volt fémesen tükröző, hanem gyöngyházzsínű. Feltűnő, hogy míg a 85. készítményen a Fe_2 réteg a forgatás szögét általában megkétszerezte, addig a 77. készítményen a Fe_2 csökkentette a Fe_1 hatása alatt létrejött forgatást. A legkedvezőbb esetek egyikében, pl. 85. Ag_4 -en, Fe_1 és Fe_2 között a polározási sík forgatásának szöge $0^{\circ}65'$ pro $\mu\mu$, míg ugyane viszonyok között a vas $1^{\circ}2'$ -t forgat.

A Cu készítményeken észlelt forgatásai a polározás síkjának a 2-ik táblázatban vannak egybeállítva.

2. Táblázat.

	Üveg				Réz-rétegek forgatása					
	Fe_1	Fe_2	Cu_1		Cu_1	Cu_2	Cu_3	Cu_4	Cu_5	Cu_6
	vastagsága									
mm	$\mu\mu$	$\mu\mu$	$\mu\mu$							
104.	6.67	36	—	11.4	1' 32"	4' 42"	5' 52"	5' 15"	5' 50"	6' 02"
	—	—	—	—	7' 02"	5' 32"	2' 30"	3' 36"	—	—
106.	0.72	22	—	9.0	5' 45"	0' 25"	2' 00"	6' 15"	6' 14"	6' 57"
110.	0.72	20	—	16.5	4' 50"	4' 32"	7' 35"	7' 50"	6' 00"	—
111.	0.95	10	—	21.0	6' 48"	8' 42"	10' 12"	10' 21"	—	—

A forgatás itt is általában pozitív.

A Cu forgatása a Fe_1 által létesített molekuláris mágneses tér hatása alatt a rézréteg vastagságával általában növekedik, a mint azt az előbbi dolgozatomban közölt adatok is mutatták. A Fe_2 réteg hozzájárulásával a forgatás csökkenni látszik a Cu réteg vastagságának növekedésével, a mint az már előbbi dolgozatom 6. és 7. ábráján is feltűnt.

Új, nem ferromágneses fémekre is kiterjesztettem a vizs-

gálatokat. Így a Bi -on észlelt eredményeket tartalmazza a következő táblázat.

3. Táblázat.

	Üveg				Bi -rétegek forgatása					
	Fe_1	Fe_2	Bi		Bi_1	Bi_2	Bi_3	Bi_4	Bi_5	Bi_6
	vastagsága									
mm	$\mu\mu$	$\mu\mu$	$\mu\mu$							
88.	0.72	12.7	—	14.0	2' 10"	5' 30"	7' 40"	6' 30"	6' 50"	5' 00"
	—	—	38.8	—	-1' 10"	-2' 30"	-2' 47"	-9' 10"	-11' 25"	-18' 02"
89.	0.68	36.0	—	25.0	1' 25"	8' 52"	9' 36"	—	—	—
	—	—	35.0	—	-7' 42"	-5' 00"	—	—	—	—
94.	0.65	42.0	—	12.0	-1' 40"	3' 35"	—	—	—	—
	—	—	23.0	—	-1' 08"	-3' 00"	—	—	—	—
95.	0.72	33.0	—	26.0	3' 00"	3' 55"	3' 16"	—	—	—
	—	—	14.4	—	-3' 30"	-2' 15"	-3' 10"	—	—	—
96.	0.72	15.0	—	2.4	0' 35"	0' 45"	2' 05"	1' 45"	2' 00"	1' 55"
	—	—	39.0	—	—	0' 25"	4' 10"	2' 15"	4' 00"	3' 50"

A forgatás a Fe_1 -réteg molekuláris mágneses terében pozitív és a Bi -réteg vastagságával általában növekszik. Nagyon feltűnő az a körülmény, hogy a Fe_2 -réteg hozzájárulása megváltoztathatja a Bi forgatásának előjelét, kivéve a 96. készítményt, a mi talán azzal függ össze, hogy a Bi -rétegek vastagsága e készítményen oly szerfölött csekély. Lehetséges, hogy a Bi -nak ez, az összes eddig megvizsgált fémekétől eltérő viselkedése összefügg e fémnek nagyfokú diamagnetizmusával és egyéb különleges mágneses tulajdonságaival.

A következő 4. és 5. táblázat néhány, Cd és Pd -on végzett észlelés eredményeit tartalmazza.

4. Táblázat.

	Üveg				Cd -rétegek forgatása					
	Fe_1	Fe_2	Cd		Cd_1	Cd_2	Cd_3	Cd_4	Cd_5	Cd_6
	vastagsága									
mm	$\mu\mu$	$\mu\mu$	$\mu\mu$							
97.	0.55	20.8	—	5.4	-1' 30"	5' 53"	6' 08"	6' 48"	6' 30"	—
	—	—	16.6	—	-2' 20"	0' 50"	2' 30"	2' 55"	2' 05"	—
98.	0.66	21.0	—	7.0	-1' 00"	0' 00"	4' 33"	5' 30"	7' 00"	5' 12"
	—	—	20.0	—	-3' 00"	-1' 10"	-4' 35"	-5' 25"	-6' 40"	—

5. Táblázat.

	Üveg	Fe_1		Fe_2		Pd	Pd -rétegek forgatása							
		vastagsága						Pd_1	Pd_2	Pd_3	Pd_4	Pd_5	Pd_6	
		mm	$\mu\mu$	$\mu\mu$	$\mu\mu$		$\mu\mu$							$\mu\mu$
84.	0.66	10.3	—	17.4	0' 47"	3' 45"	5' 21"	6' 12"	5' 45"	3' 43"	—			
	—	—	2.2.4	—	6' 25"	9' 15"	9' 50"	7' 30"	2' 55"	—	—			

Cd -nál ismét feltűnő, hogy az egyik lépcsőn a Fe_2 hozzájárulása megváltoztatja a forgatás előjelét. A Pd -on nyert eredmények egyeznek azokkal, melyeket előző méréseim alkalmával nyertem.

3. §. A jelenség diszperzióját a spektrumnak $\lambda=500 \mu\mu$ -tól $\lambda=650 \mu\mu$ -ig terjedő részében határoztam meg.

Először a Pt és Pd rotatio-diszperzióját vizsgáltam meg. Ezeknek a fémeknek mágneses rotatio-diszperziója minimális, a polározási sík forgatásának változása λ -val szinte a kísérleti hibák határain belül esik, mint azt a következő kis táblázat mutatja:

6. Táblázat.

$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$
55. Pd	20' 40"	18' 46"	19' 10"
75. Pt	6' 00"	7' 27"	7' 15"
84. Pt	9' 02"	9' 15"	8' 30"

Az Ag rotatio-diszperziója, mint a 7. táblázat tanúsítja, anomális.

7. Táblázat.

$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$	
76. Ag	4' 44"	5' 46"	6' 17"	25.4%
85. Ag	9' 57"	14' 25"	17' 24"	42.5%
85. Ag	12' 22"	18' 17"	20' 35"	40.0%

A mágneses forgatás szöge lineárisan nő a hullámhosszal (lásd 4. ábrát) épp úgy, mint Fe -nál. A táblázat utolsó oszlopá-

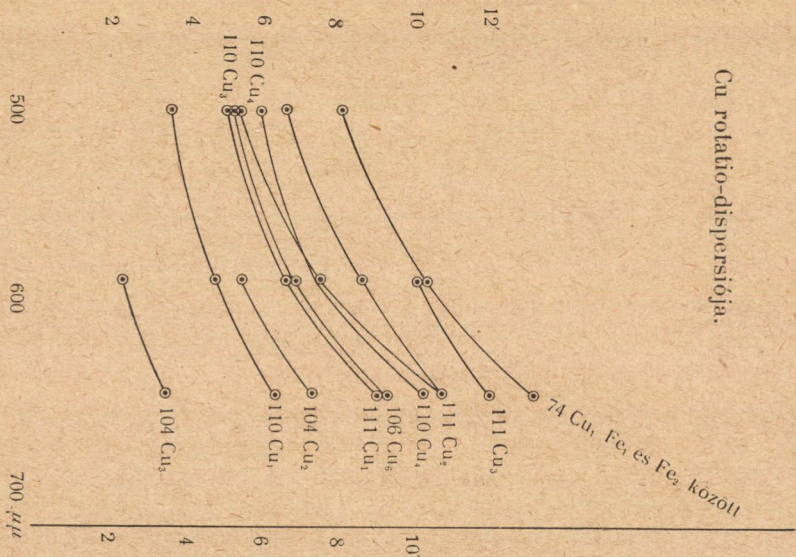
ban fel van tüntetve a $\lambda = 650 \mu\mu$ -nél észlelt forgatás értékének %-aiban a forgatás csökkenése $\lambda = 650 \mu\mu$ -tól $\lambda = 500 \mu\mu$ -ig. Hasonlóképpen anómális a *Cu* mágneses rotatio-dispersiója.

8. Táblázat.

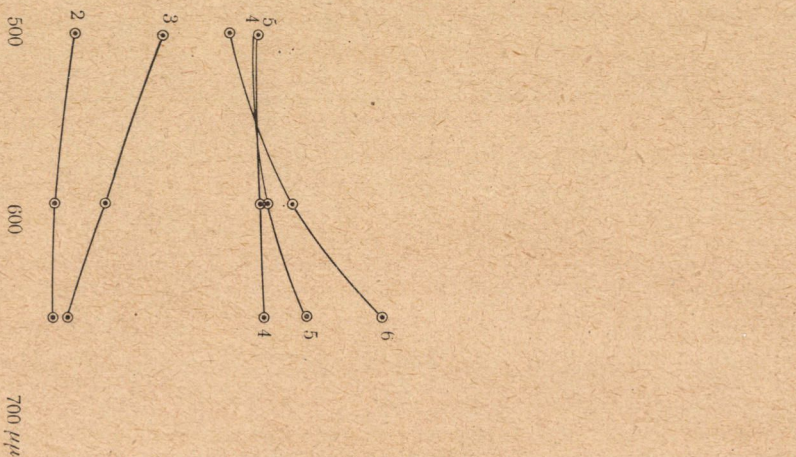
$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$	Jegyzet
74. <i>Cu</i> ₁ *	8' 10"	10' 20"	13' 12"	
104. <i>Cu</i> ₁	7' 40"	7' 02"	4' 25"	
<i>Cu</i> ₂ *	—	5' 32"	7' 22"	
<i>Cu</i> ₃ *	—	2' 29"	3' 30"	
<i>Cu</i> ₄ *	—	3' 36"	3' 52"	
106. <i>Cu</i> ₁	3' 30"	5' 45"	4' 40"	oxydálva, világosabb, mint <i>Fe</i> ₁ magában. fátyolos, vak.
<i>Cu</i> ₂	1' 10"	0' 40"	0' 35"	
<i>Cu</i> ₃	3' 25"	2' 00"	1' 01"	
<i>Cu</i> ₄	5' 52"	6' 16"	6' 14"	
<i>Cu</i> ₅	6' 00"	6' 11"	7' 15"	
<i>Cu</i> ₆ *	5' 18"	6' 57"	9' 17"	
110. <i>Cu</i> ₁ *	3' 43"	4' 50"	6' 25"	vak. halványan vak.
<i>Cu</i> ₂	4' 40"	4' 32"	5' 55"	
<i>Cu</i> ₃ *	5' 30"	7' 35"	10' 52"	
<i>Cu</i> ₄ *	6' 04"	7' 50"	10' 20"	
<i>Cu</i> ₅	3' 05"	6' 00"	7' 00"	
111. <i>Cu</i> ₁ *	5' 12"	6' 48"	9' 02"	
<i>Cu</i> ₂ *	6' 42"	8' 42"	10' 47"	
<i>Cu</i> ₃ *	—	10' 12"	12' 02"	
<i>Cu</i> ₄	—	10' 21"	11' 00"	
112. <i>Cu</i> ₃	7' 30"	—	9' 45"	

Ha szemügyre vesszük például a 110. készítményen észlelt értékeket, azt tapasztaljuk, hogy annak a két rétegnek a rotatio-dispersiója, melyek a jegyzet rovatban pusztá megtekintés alapján mint kifogásoltak szerepelnek, bizonyos rendellenességet, sőt szinte normális dispersiót (110. *Cu*₂ $\lambda = 500$ és $590 \mu\mu$ között) mutat, míg a többi három, szemre kifogástalan, *-al jelölt réteg dispersio-görbéi az 5. ábra szerint figyelemre méltóan szabályosak. Ugyanilyen szabályosságot látunk a többi, a táblázatban *-al jelölt lépeső dispersio-görbéin is. A szabályosság illusztrálására szolgáljon a következő kis összeállítás, mely a $\lambda = 650 \mu\mu$ -nél elért forgatás %-aiban tárja elénk a forgatás

Cu rotatio-dispersioja.



5. ábra.



6. ábra.

csökkenését $\lambda=650 \mu\mu$ -tól $\lambda=500 \mu\mu$ -ig a különböző készítmények különböző lépcsőin. Ebben az összeállításban az 5. ábra összes teljes görbéi szerepelnek a forgatás abszolút értékének csökkenő sorrendjében.

74. Cu_1 111. Cu_2 110. Cu_4 110. Cu_3 106. Cu_6 111. Cu_1 110. Cu_1
 37% 38% 42% 49% 43.1% 43.3% 42.9%

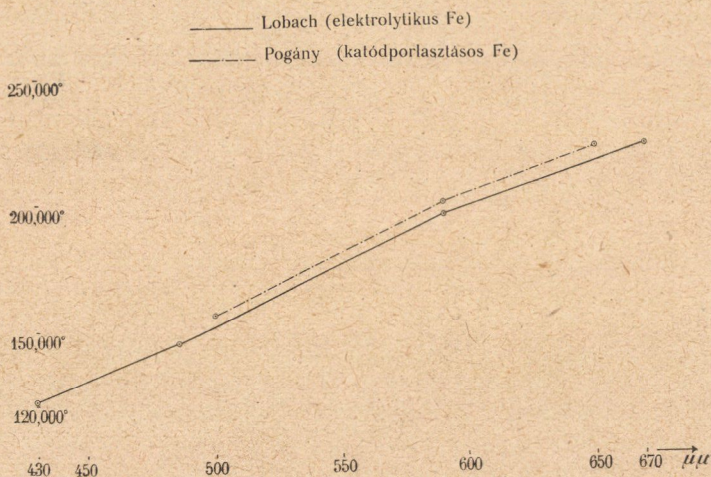
Nagyon tanulságosak a 106. készítmény lépcsői. A Cu_1 lépcső, sőt az alatta levő Fe_1 réteg is oxydálódtak. Átmenő fényben a lépcsők annál sötétebbnek látszottak, mennél vastagabbak voltak. Természetesen pusztá szemmel nem lehetett eldönteni, hogy a vastagabb lépcsők sötétebb voltánál nem játszott-e szerepet az is, hogy a rétegek oxydáltságának foka az 1. lépcsőtől a 6. lépcsőig fokozatosan csökkent, illetőleg megszűnt. Erre nézve felvilágosít minket a 106. Cu -rétegek dispersiója. A Cu_1 látszólagos negatív forgatásának oka, hogy még az alatta lévő Fe_1 réteg is oxydálva volt. De Cu_2 és Cu_3 bizonyos mértékű oxydáltságát és ennek következtében való átlátszó voltát is elárulja ezeknek a rétegeknek normális mágneses rotatio-dispersiója. Cu_4 rotatio-dispersiója a kísérleti hibák határain belül marad, Cu_5 -é már határozottan anomális, a Cu_6 dispersió-görbéje pedig teljességgel beilleszkedik már az 5. ábra szabályos anomális dispersio-görbéi közé (lásd 6. ábra). Úgy látszik tehát, hogy a mágneses rotatio-dispersio-görbe menete épp oly érzékeny kritériuma annak, hogy a fém a vékony rétegben tiszta fémes állapotában van-e jelen, mint a milyen érzékeny kritérium ily szempontból az n és x dispersio görbéje.

A Bi rotatio-dispersiójával még nem foglalkoztam részletesebben, de a 9. táblázatban közölt néhány észlelésből úgy látszik, hogy csekély.

9. Táblázat.

$\lambda =$	500 $\mu\mu$	590 $\mu\mu$	650 $\mu\mu$
88. Bi_1	5' 05"	5' 10"	4' 40"
88. Bi_3	6' 10"	7' 25"	5' 55"

Ezekkel a mérésekkel kapcsolatban adódott mellékesen a katódporlasztással készült *Fe*-rétegek rotatio-dispersiójának a meghatározása is. A *Fe* mágneses rotatio-dispersióját meghatározta LOBACH¹ elektrolytikus vasrétegeken, továbbá SKINNER és TOOL² katódporlasztással készült vasrétegeken. Utóbbiak azt tapasztalták, hogy a katódporlasztással készült vasrétegek specifikus mágneses forgatása kétszer-háromszor akkora, mint a LOBACH által készített elektrolytikus vasrétegé, valamint a mágneses



7. ábra.

rotatio-dispersio görbéje is sokkal meredekebb náluk, mint LOBACH-nál. INGERSOLL³ rámutatott a rétegek vastagságának meghatározásánál SKINNER és TOOL által elkövetett hibákra és maga hasonló értékeket kapott, mint LOBACH. Saját méréseim a katódporlasztással készült vasrétegeken egyeznek LOBACHnak elektrolytikus rétegeken végzett méréseivel. A 7. ábrában reprodukálom a LOBACH-féle, elektrolytikus *Fe*-on észlelt mágneses rotatio-dispersio görbéjét kihúzva és pontozva a katódporlasztásos *Fe*-on

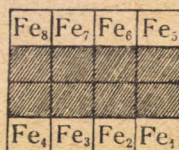
¹ LOBACH: Ann. d. Phys. 1890. Bd. 39. 347. l.

² SKINNER és TOOL: Phil. Mag. (6). 16. 833. lap, 1908.

³ L. R. INGERSOLL: Phil. Mag. (6). 18. 74. l. 1909.

általam észlelt görbét. Az ordináta-tengelyre a mágneses telítésnél 1 cm úthosszra eső forgatás nagysága van felmérve fokokban. A két görbe pontosan egymáshoz simul, az abszolút értékek nálam átlag 2.5%-al nagyobbak. A rétegek vastagságát NEMETZ-féle mikromérlegen való mérlegeléssel határoztam meg.

Az irodalomban¹ már ismételten kifejezésre jutott az a nézet, hogy a polározási sík mágneses forgatásánál fémek esetében, elsősorban *Fe*-nál az elektromos vezetést közvetítő úgynevezett szabad elektronok játszik a főszerepet, míg a kötött elektronok legfeljebb csak másodsorban jönnek tekintetbe. Másrészt viszont tudjuk, hogy n és x értékeire a kötött elektronoknak van nagy befolyásuk. Az előbb említett tapasztalat, mely szerint a mágneses forgatás és annak dispersiója különböző módon készült *Fe*-rétegekben egymással egyezik, míg a rétegek törésmutatója és abszorpcióindexe egymástól abszolút értékében és a dispersio görbe menetében is különbözik, megerősíteni látszik azt a nézetet, hogy a polározási sík mágneses forgatásánál a *Fe*-ban a kötött elektronok csak alárendelt szerepet játszhatnak.

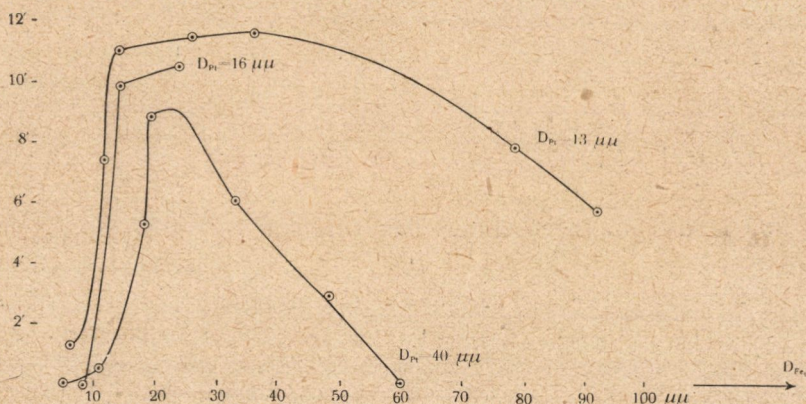


8. ábra.

4. §. Végül azokról a mérésekről akarok megemlékezni, melyeket a nem ferromágneses fém mágneses forgatásának a molekuláris mágneses teret létesítő *Fe*-réteg vastagságától való függésére vonatkozólag végeztem. Kicsiny, 8×26 mm. nagyságú üveglemezeket külön-külön különböző ideig exponálva *Fe*-katód alatt, különböző vastagságú *Fe*-réteget készítettem. Ezekből azután 8-at egyszerre a *Pt*-katód alá helyezve, szimmetrikusan a katódot hosszában és keresztben felező egyenesekhez képest, bevontam őket egy *Pt*-réteggel (lásd a 8. ábra vonalkázott részét). A *Pt*-rétegek vastagságát mérlegeléssel, a *Fe*-rétegek vastagságát a réteg megmért mágneses forgatásából határoztam meg. Ily méréseket a nemferromágneses fémek közül egyedül *Pt*-án végeztem és ily irányban még sok a tennivaló. E mérések ered-

¹ Például W. Voigt: Gött Nachr. 1915. 139. 1. 10. — Phys. Zeitschrift. 16. 1915, 298. 1.

ményeit a 9. ábra tünteti elő. Az ordináta-tengelyre a *Pt*-rétegben létrejött forgatás nagysága, az abszcissa tengelyre a *Fe*-réteg vastagsága van felrajzolva. A görbék tehát azt ábrázolják, hogyan függ a *Pt* forgatása a molekuláris mágneses teret létesítő vasréteg vastagságától. Hogy a forgatás igen csekély, a míg a vasréteg vastagsága a $10 \mu\mu$ -t el nem éri, annak magyarázatát tudom adni azoknak az észleléseknek alapján, melyeket a M. T. Akadémiától az 1917. évi RÓZSAY pályázaton nyert megbízatásom alapján végzek. Ezeknek során azt tapasztaltam, hogy *Fe*-



9. ábra.

rétegek speczifikus mágneses forgatása telítésnél független a réteg vastagságától, ha az a vastagság nagyobb, mint $10 \mu\mu$, de ennél vékonyabb rétegekben a speczifikus forgatás a réteg vastagságának csökkenésével rohamosan csökken. A $10 \mu\mu$ -nél vékonyabb *Fe*-réteg tehát maga sem rendelkezik mágneses aktivitásának teljességével, érthető tehát, hogy kifelé sem fejt ki akkora mágneses molekuláris teret, mint a vastagabb, mágneses aktivitásuk teljességével bíró rétegek. Igen meglepő, hogy a görbéknek $25-30 \mu\mu$ tájékán maximumuk van, tehát, úgy látszik, ily vastagságú vasrétegek maximális molekuláris mágneses teret létesítenek a velük közvetlenül szomszédos *Pt*-rétegekben. A hogy a görbék menetéből következtetni lehet, vastag *Fe*-rétegek, igen csekély molekuláris mágneses teret létesítenek. Ezzel

kapcsolatban érdemes megemlíteni azt a több ízben tapasztalt tényt, hogy kisebb, 10—20 $\mu\mu$ vastag Fe_1 -rétegek hatására valamely nemferromágneses fémbe létrejött forgatás nagysága csökkent, ha vastagabb (35—40 $\mu\mu$) Fe_2 réteg járult hozzá, viszont a forgatás növekedett a Fe_2 hatására, ha Fe_2 vastagsága ugyancsak kisebb (10—20 $\mu\mu$) volt.

Ezen a kétségkívül igen tanulságos ponton azonban, sajnós, kénytelen voltam vizsgálataimat félbeszakítani.

(A M. T. Akadémia III. Osztályának 1920 április 19.-én tartott üléséből.)

A HAJLÍTÁS DE SAINT-VENANT-FÉLE
PROBLÉMÁJÁNAK MEGOLDÁSA AZ ERŐ IRÁNYÁHOZ KÉPEST
SYMMETRIKUS, EGYÉBKÉNT AZONBAN TETSZÉSSZERINT
KERESZTMETSZETRE.

NEMÉNYI PÁL-tól.

Míg a torzió de SAINT-VENANT-féle elmélete bővelkedik olyan módszerekben, melyek alkalmasak arra, hogy tetszésszerinti, rajzban megadott szelvényhez a feszültségmegoszlást meghatározhassuk, vagy legalább arról magunknak helyes képet alkothassunk, addig a hajlítás elméletében egyetlen olyan, a rugalmasságtan alapegyenleteivel összhangban lévő módszer sem áll rendelkezésre, mely tetszésszerinti, rajzban megadott keresztzelvényekre volna alkalmazható.¹ Jelen dolgozat célja a matematikai rugalmasságtan ezen hézagát pótolni; de megjegyzem, hogy tárgyalásaim csak oly szelvényalakokra nézve bírnak érvényességgel, melyek a terhelő erő irányához képest szimmetrikusak.

Kiinduló pontul választom a de SAINT-VENANT-féle elmélet következő eredményét:² a τ_{yz} és τ_{xz} nyírófeszültségkomponensek a Ψ függvényvel következő kapcsolatban állanak:

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y^2}{2} - \frac{2m-1}{2} x^2 \right); \\ \tau_{xz} &= C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2m+1)xy \right); \end{aligned} \tag{\Psi}$$

¹ A technikai gyakorlatban gyakran használt, a szelvénykontur és a feszültségi trajectoryák affinitásának *önkényes* feltevésén alapuló módszer ellentétben áll a matematikai rugalmasságtan alapegyenleteivel s az általa nyert feszültség-megoszlásnak általánosságban semmiféle geometriailag lehetséges deformációállapot nem felel meg. L. erre nézve: LOVE-TIMPE: Lehrb. d. Elast. 399. old.

² L. H. LORENZ: Lehrb. d. techn. Physik. Bd. IV. 440. oldal.

hol $C = \frac{1}{2(m+1)} \cdot \frac{P}{J_x}$; a Ψ függvény a keresztmetszet minden pontjában a LAPLACE-féle differenciálegyenletnek, vagyis

$$\nabla_{x,y}^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\nabla)$$

egyenletnek tesz eleget, a keresztmetszet minden határpontjában pedig a következő határfeltételt elégíti ki:

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \equiv \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y^2}{2} - \frac{2m-1}{2} x^2}{\frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2m+1) x \cdot y} = \frac{dy}{dx}, \quad (d)$$

mely utóbbi némi átalakítással következő alakra hozható:

$$\left(\frac{y^2}{2} + \frac{2m-1}{2} x^2 \right) \cos \varphi - (2m+1) xy \sin \varphi = \\ = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right] \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial n},$$

hol φ a konturgörbe érintőjének irányszöge, a $\frac{\partial}{\partial n}$ szimbólum pedig a konturgörbe *normálisa* szerinti differenciálást jelent. Ebből a határfeltételből *közvetlenül* semmi következtetést nem vonhatunk le a Ψ függvénynek a konturon felvett értékeire nézve s e körülményen hiúsul meg minden kísérlet arra, hogy a Ψ függvényt a torzió elméletében kifejlődött módszerek valamelyikével analog módon határozzuk meg, vagy egyáltalán, hogy ezt az elméletet az approximációs megoldások irányában fejlesszük.

Hogy a Ψ függvény e hátrányos határtulajdonságától megszabaduljunk, Ψ helyett egy F függvényt vezetek be, mely bizonyos átvitt értelemben Ψ konjugáltjának nevezhető. Legyen ugyanis

$$\tau_{yz} = - \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi_1(x, y) \\ \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_2(x, y) \quad (F)$$

hol φ_1 és φ_2 a keresztmetszet alakjától *független* függvények. Köny-

nyen kimutatható, hogy ez esetben $\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}$ határfeltételünk a következő alakot ölti:

$$\varphi_1(x, y) \cos \varphi - \varphi_2(x, y) \sin \varphi = \frac{\partial F}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial x} \cos \varphi \equiv \frac{\partial F}{\partial s},$$

a miből következik, hogy F értéke a kontur bármely pontján, egy a problémánk szempontjából — egyszerűen összefüggő szelvényalak — irreleváns additív állandót nem tekintve

$$F(s) = \int_0^s (\varphi_1(x, y) \cos \varphi - \varphi_2(x, y) \sin \varphi) ds \quad (d')$$

alakban írható; ez az $F(s)$ zárt görbe, melyben a keresett $F(x, y)$ felület a rúd palástfelületét metszeni tartozik, előállítható analitice megadott szelvénykontur esetén számítással; rajzban megadott szelvénykontur esetén grafikus integráció segítségével. A ∇ alatti differenciálegyenlet helyére pedig mint igazolható

$$\nabla_{xy}^2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2Cx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (\nabla')$$

lép. Ha tehát felvesszük egy és mindenkorra a φ_1 és φ_2 függvényt, akkor bármely megadott szelvénykonturhoz a (∇') differenciálegyenletből és (d') határfeltételből meg lehet határozni a megfelelő F függvényt, melyből (F) egyenletrendszer szerint nyerhetők a nyírófeszültség komponensei.

A φ függvényeket azonban nem választhatjuk egészen önkényesen, ha azt akarjuk, hogy F első- és másodrendű parciális differenciálhányadosai létezzenek és folytonosak legyenek. Ennek egy jól ismert tétel szerint szükséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right);$$

minthogy pedig:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = C \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - C(2m+1)y - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -C \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + Cy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \end{aligned}$$

(∇) differenciálegyenlet felhasználásával következik, hogy φ_1 és φ_2 a

$$2C(m+1)y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (K)$$

kapcsolatnak eleget kell, hogy tegyenek, ha azt akarjuk, hogy F a fenti folytonossági tulajdonságokat mutassa fel.

Ha φ_1 és φ_2 függvények fölött természetesen e (K) kapcsolat figyelembe vételével dispoálunk, akkor feladatunk egy másodrendű parciális differenciálegyenlet megoldása a keresett felülethez tartozó $F(s)$ görbével, mint határfeltétellel. E problémának bármely megadott szelvénykontur esetében való megoldására minden további nélkül általánosítható a RUNGE¹ által a torzió-problema PRANDTL-féle² alakjában való megoldására megalkotott numerikus-grafikus eljárás. Sőt könnyű belátni, hogy ha egy és ugyanazt a keresztmetszetet egy és ugyanazzal a hálózattal látjuk el és fölírjuk reánézve a torzióprobléma PRANDTL-féle alakjához és a hajlítási probléma általunk levezetett alakjához tartozó lineáris egyenletrendszert, e két egyenletrendszer «struktúra»³ tekintetében egymással megegyezik.

Láttuk, hogy a φ_1 , és φ_2 függvénytár felett a (K) alatti kapcsolat figyelembe vételével tetszésszerint dispoálhatunk. E kapcsolatot kielégítő legegyszerűbb φ_1 , φ_2 függvénytár a következő: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -2C(m+1)xy$. Ez esetben F , melyet megkülönböztetésül F_1 nek fogunk nevezni, a következő másodrendű parciális differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\nabla_{x,y}^2 F_1 \equiv \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = 2Cmx, \quad (\nabla_1)$$

¹ L. Zeitschrift f. Math. u. Physik (Schlömilch), 1908, 56. kötet, 225. oldal.

² L. Jahresberichte d. deutschen Math. Vereinigung. 1904. 13. kötet, 31. oldal.

³ Az egyenletrendszer «struktúra»-jának fogalomalkotása grafosztatikai eredetű. Két lineáris egyenletrendszert akkor mondunk azonos struktúrájúnak, ha a két rendszerben az ismeretlenek száma megegyezik és ha a két rendszer egyenleteit lehet egymással kölcsönösen egyértelmű olyan vonatkozásba hozni, hogy bármely két korrespondáló egyenletben ugyanazok az ismeretlenek szerepeljenek 0-tól eltérő együtthatóval.

és következő határfeltételnek:

$$F_I(s) = \int_0^s 2C(m+1)xy \sin \varphi ds. \quad (d)$$

Egy másik megoldási módhoz jutunk a következő választás által: $\varphi_1 = C(x^2 - (m+1)y^2)$; $\varphi_2 = 0$. Ez esetben F , melyet megkülönböztetésül F_{II} -nek nevezek, a LAPLACE-féle differenciálegyenletnek hódol, tehát:

$$\nabla_{x,y}^2 F_{II} \equiv \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial y^2} = 0; \quad (\nabla_{II})$$

és a következő határfeltételnek tesz eleget:

$$F_{II}(s) = \int_0^s C \cos \varphi (x^2 - (m+1)y^2) ds. \quad (d_{II})$$

A probléma megoldását szolgáltatató $F_{II}(x, y)$ függvényről kimutatható, hogy az az $F_{II}(s)$ zárt vonalhoz tartozó $f(x, y) = f$ minimálfelület által approximative pótolható, ha a keresztmetszet minden belső pontjában $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ oly kicsinyek, hogy szorzatuk és négyzeteik az egységhez képest elhanyagolhatók. Ez esetben az $F_{II}(x, y)$ felület az $F_{II}(s)$ térgörbét ábrázoló, önmagába visszatérő dróra ráfeszülő kapilláris folyadék-hártya alakja által pótolható közelítőleg,¹ és e hártya alakjának kimérése és grafikus differenciálások alapján empirikusan jutunk a nyírófeszültségek megoszlásához.

Ha a $\frac{\partial f}{\partial x}$ -re és $\frac{\partial f}{\partial y}$ -ra vonatkozó fenti kikötés nincs ki-elégítve, akkor a kapott f felület nem tekinthető F_{II} jó megközelítésének és így az ismertett numerikus grafikus eljárást kell alkalmaznunk a megoldás céljára; de f -nek a hálózatpontokhoz tartozó ordinátáit a RUNGE-féle egyenletrendszerünk megoldása számára első közelítésnek tekinthetjük, melyből kiindulva az iteráló módszerrel tetszésszerűen előírt pontosságig haladhatunk.

¹ A vékony folyadék-hártya egyensúlyi alakjának minimális felület voltára vonatkozó bizonyítást l. pl. W. VOIGT: Kompendium d. theor. Physik. I. kötet, 248. oldal, 1895.

Többszörösen összefüggő szelvény esetén a határfeltétel additív integrálállandói a feszültségmegoszlás szempontjából többé nem irrelevánsak; az ebből származó probléma megoldása úgy a torzióelmélet PRANDTL-RUNGE-féle alakjára nézve, mind pedig a hajlítási elmélet fenti új alakjára nézve szerzőnek még le nem zárult vizsgálatai tárgyát alkotja.¹

¹ Több mint egy évvel e tanulmánynak a Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya ülésén történt bemutatása után értesültem MISES berlini egyetemi tanár úr szívesége folytán, hogy S. TIMOSCHENKO, jelenleg zagrebi egyetemi tanár, egy az előbb nevezett úr szerkesztésében megjelenő folyóirathoz intézett levele szerint, már *nyolcz évvel ezelőtt* orosz nyelvű folyóiratokban foglalkozott a jelen dolgozat tárgya kérdésével. Ő az enyémhez hasonló természetű, bár sokkal kevésbé általános módszerekkel igyekezett azt a numerikus megoldásra alkalmas formába hozni. Ez érdekes vizsgálatokat azonban jelen dolgozatom kinyomatásának előrehaladott volta miatt, sajnos, már nem volt módomban a dolgozatban tekintetbe venni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1920 márcz. 15.-én tartott üléséből.)

A TORZIÓ-PROBLÉMA PRANDTL-RÜNGE-FÉLE MEGOLDÁSÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA TÖBBSZÖRÖSEN ÖSSZEFÜGGŐ KERESZTMETSZETEKRE.

NEMÉNYI PÁL-tól.

A «Hajlítás de Saint-Venant-féle problémájához» című tanulmányom¹ német nyelvű bővített alakjában² már jeleztem, hogy «RUNGE numerikus-grafikus eljárása egészen változatlanul általánosítható volna többszörösen összefüggő szelvény minden belső konturgörbéjére nézve, ha az $u(x, y)$ függvénynek konstans értékét (tehát számszerint $n-1$ állandót) eleve, vagyis a számítás megkezdésekor ismernők; ez az eset azonban nem forog fenn. Az ebben rejlő nehézség leküzdése és ezáltal a RUNGE-féle megoldási módszer kiterjesztése tetszésszerű, sokszorosán összefüggő szelvényalakok esetére szerzőnek egy előkészületben levő tanulmánya tárgyát teszi.» Jelen sorok ennek a tervnek megvalósítását s ezzel (PRANDTL kísérleti módszerét nem tekintve) tudomásom szerint a legelső³ teljesen általános eljárást adják a torzió-problémának rajzban megadott szelvényekre vonatkozó megoldására.

¹ A M. T. Akadémia III. osztályának ülésén bemutatva 1920. évi márczius 15.-én; I. a megelőző értekezést.

² Azóta megjelent a Zeitschrift f. angew. Math. und Mechanik I. kötet 89—96. lapján, 1921.

³ A BREDT-LORENZ-féle módszer ugyanis csak *vékonyfalú* szelvényekre vonatkozik s ezekre nézve hasonlíthatatlan eleganciával ad hasznavehető, a rugalmasság matematikai elméletével összhangban levő, közelítő megoldásokat, de vastagabb falú szelvények, s különösen olyan szelvények esetén, melyeknél az üregek kicsinyek a szelvény főméreteihez képest, már teljesen felmondja a szolgálatot.

Módszerünk alapja a következő tétel:¹ Az

$$\int \tau ds = 2G\vartheta F$$

reláció — hol G a nyirási rugalmassági modulus, ϑ a hosszegységenkénti elfordulási szög és F ama feszültségi trajektória által bezárt terület, mely zárt görbe vonalra a $\int \tau ds$ kerületi integrál vonatkozik — változatlanul fennáll n -szeresen összefüggő keresztmetszetek feszültségi trajektóriáira s így ezek között a konturgörbék mindegyikére is. Ezek a kapcsolatok, mint látni fogjuk, azzal az adattal együtt, hogy a feszültségek együttesen egy adott M nyomatékmal æquivalensek, a szóban forgó ismeretlen állandók meghatározására elegendők. Elég volna ugyanis RUNGE módszere² segítségével az összes hálózati pontoknak megfelelő u ordinátákat az egyes konturgörbékhez tartozó u konstans értékek függvényében kifejezni (mely függvények, mint könnyű belátni, linearisak) és azután ez n határozatlan parametert tartalmazó feszültségi állapotra alkalmazva a rendelkezésünkre álló fenti kapcsolatokat, meghatározni az n ismeretlen parametert.

Ez a módszer azonban gyakorlatilag nehezen alkalmazható és rendkívül nehézkes.

Lényegileg ugyanezt nyújtja, de sokkal áttekinthetőbb módon, az alant kifejtendő módszer, mely talán matematikai szempontból is számíthat némi érdekességre.



1. ábra.

Kiinduló-pontul választom a torzió-problema

PRANDTL-féle formáját, mely tudvalevőleg következőképen fogalmazható:

A nyirófeszültségek mindenütt egy u felület rétegvonalainak irányába esnek s nagyságuk minden pontban a felületnek az illető ponthoz tartozó hajlásával egyenlő $\left(\tau = \frac{\partial u}{\partial n}\right)$.

Ez az u felület jellemezve van az által, hogy:

$$1. \quad \nabla_{xy}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2G\vartheta = A_0, \text{ hol } A_0 \text{ állandó; hogy}$$

¹ L. PRANDTL, Jahresberichte der deutschen Math. Vereinigung, Bd. 13, 1904, 31. oldal.

² RUNGE: Zeitschrift f. Math. u. Physik 1908.

2. valamennyi konturgörbe mentén állandó értékeket vesz fel; ezt az állandó értéket a külső konturra nézve szabadon választhatjuk, a nélkül, hogy ezzel a feszültségi állapotot befolyásolnánk; válasszuk 0-nak s a belső konturgörbékhez tartozó megfelelő állandó értékeket jelöljük rendre $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}$ -gyel; hogy

3. minden rétegvonalára nézve s így a belső konturgörbék mindegyikére is

$$\int \tau ds = \int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 2G\delta F = A_0 F,$$

hol F az illető rétegvonal által bezárt terület; és hogy

4. a belőle levezetett nyírófeszültségek együttesen egy megadott M nyomatékkal æquivalensek, vagyis

$$M = \int_F (\tau_{xz} \cdot y + \tau_{yz} \cdot x) dF = \int_F \left(-\frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial x} x \right) dF,$$

hol F a rúdszelvényterületet jelenti.

A problémának illetően megfogalmazása után azt állítom, hogy annak megoldása következő alakban írható fel:

$$u = A_0 v_p + A_1 v_{l,1} + A_2 v_{l,2} + \dots + A_i v_{l,i} + \dots + A_{n-1} v_{l,n-1}, \quad (u)$$

hol az A -k mind állandók, továbbá hol

$$\nabla_{x,y}^2 v_p \equiv \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial y^2} = 1$$

differenciálegyenletet elégíti ki, mindegyik konturgörbe kerületén 0 értéket vesz fel, és a hol $v_{l,i}$ függvények mindegyike a

$$\nabla_{x,y}^2 v_{l,i} \equiv \frac{\partial^2 v_{l,i}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{l,i}}{\partial y^2} = 0$$

LAPLACE-féle differenciálegyenletet elégíti ki és valamennyi konturgörbe kerületén 0 értéket vesz fel, az i -edik konturgörbét kivéve, melynek kerületén 1 értékét veszi fel.

Fenti állításom bizonyítása céljából alkalmazzuk mindenkéltől a $\nabla_{x,y}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ operációt a fenti u függvényre. Mint-

hogy az összeadás, valamint az állandóval való szorzás a $\nabla_{x,y}^2$ operációival felcserélhető, következik, hogy

$$\nabla_{x,y}^2 u = A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + \dots + A_i \cdot 0 + \dots + A_{n-1} \cdot 0 = A_0,$$

tehát az (u) alatt felvett függvény az (1) feltételt valóban kielégíti. Ugyancsak ki van elégítve az A állandók bármely választása mellett a (2) feltétel is és rögtön látjuk, hogy u az 1-edik konturgörbe mentén mindenütt A_i értéket vesz fel. A (3) és (4) feltételből pedig az egyelőre ismeretlen $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots, A_{n-1}$ állandók meghatározhatók. Ugyanis az $\int \tau ds = A_0 F$ feltétel a belső konturgörbékre alkalmazva, a következő $n-1$ lineár egyenletet szolgáltatja:

$$A_0 F_1 = A_0 \int_{(1)} \frac{\partial v_p}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(1)} \frac{\partial v_{l,i}}{\partial n} ds; \quad (1)$$

⋮

$$A_0 F_j = A_0 \int_{(j)} \frac{\partial v_p}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(j)} \frac{\partial v_{l,i}}{\partial n} ds; \quad (j)$$

⋮

$$A_0 F_{n-1} = A_0 \int_{(n-1)} \frac{\partial v_p}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \int_{(n-1)} \frac{\partial v_{l,i}}{\partial n} ds; \quad (n-1)$$

hol F_j a j -edik belső konturgörbe által bezárt területet és általánosságban $\int_{(j)} \frac{\partial v}{\partial n} ds$ a v függvénynek a j -edik konturgörbe normálisa szerint vett differenciálhányadosának ugyane kerületre vonatkozó kerületi integrálját jelenti. (Az n betű egyben a konturgörbék számát is, meg normális-irányt is jelent, a mi azonban nem adhat okot félreértésre.) Végül a (4) feltételből következik, hogy

$$M = A_0 \int_{(F)} \left(\frac{\partial v_p}{\partial y} y + \frac{\partial v_p}{\partial x} x \right) dF + \quad (n)$$

$$+ \sum_{i=1}^n A_i \int_{(F)} \left(\frac{\partial v_{li}}{\partial y} y + \frac{\partial v_{li}}{\partial x} x \right) dF.$$

Ha ezt az imént felírt $n-1$ egyenlethez hozzávesszük, van egy nem homogén lineáris egyenletrendszerünk n ismeretlennel, hon-

nan az ismeretlenek meghatározhatók. Az általam javasolt általános megoldási módszer tehát abban áll, hogy RUNGE módszerének n -szeri alkalmazása által meghatározzuk a fent definiált $v_p, v_{11}, v_{12} \dots v_{i, n-1}$ függvényeket, megrajzoljuk a megfelelő rétegterveket, ezek segítségével az 1), ..., n) egyenletrendszerben együtthatóként szereplő határozott integrálok számszerű értékét számítással vagy grafikusan meghatározzuk, ezeket az egyenletrendszerünkbe beírjuk s azt megoldjuk. Ily módon megkapjuk az A értékeket, melyeknek felhasználásával (u) egyenlet szerinti superpositio útján (u) felület rétegterve megállapítható, a mi által a keresett feszültségi állapot is szemléletesen jellemezve van.

AUGUST FÖPPL legújabb, fiával együtt írt munkájában¹ részletes vizsgálat tárgyává teszi a többszörösen összefüggő keresztmetszetekre alkalmazott PRANDTL-féle kísérleti eljárást és kimutatja, hogy a milyen nagy mértékben alkalmas ez a módszer a kvalitatív viszonyok szemléletes megvilágítására, épp oly kevésbé célszerű az kvantitatív eredményeknek a membránfelület kimérése útján való tényleges meghatározására, mert a PRANDTL-féle analogiában minden üregnek merev síklap felel meg, mely saját síkjára merőleges irányban van *vezetve* és melynek széléhez a membránfelület *csatlakozik*. E két feltétel összeegyeztetése tényleges kísérleti eljárásnál csak hiányosan (vagy egyáltalán nem) lehetséges s így az eljárás kvantitatív célra gyakorlatilag csakugyan alig használható.

Ellenben igen jól kombinálható PRANDTL analogiája az általam fent kifejtett módszerrel olyan módon, hogy a fent definiált $v_p, v_{11}, v_{12} \dots v_{i, n-1}$ felületeket RUNGE-féle numerikus-grafikus eljárás helyett PRANDTL-féle membrán-kísérletekből méréssel határozzuk meg, a mi esetleg nagy munka ugyan, de semmiféle nehézségbe nem ütközik s ezekből az A állandókat s ezáltal a keresett u függvényt változatlanul a fent kifejtett módszerrel határozzuk meg.

¹ FÖPPL, Zwang u. Drang, II. kötet, 1920. Oldenburg Verlag.

A HELLY-FÉLE TÉTELÉRŐL.¹

KERÉKJÁRTÓ BÉLA-tól.

Tétel. *Ha az A_1, A_2, \dots, A_{k+1} ($k \geq n+1$) az n -dimenziós lineáris térben fekvő n -dimenziós konvex tartományok közül bármely $n+1$ -nek van közös pontja, akkor van legalább egy közös pontja valamennyi $k+1$ tartománynak is.*

Bebizonyítás. A tétel teljes inductióval adódik, ha bebizonyítjuk, hogy bármely k tartománynak lévén közös pontja, valamennyi $k+1$ -nek is van. Legyenek tehát $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n+1)}$ sorban az $A_2 A_3 \dots A_{k+1}, A_1 A_3 \dots A_{k+1}, \dots, A_1 A_2 \dots A_n A_{n+2} \dots A_{k+1}$ szorzatok oly pontjai, melyek nem fekszenek egy $n-1$ dimenziós lineáris térben. A $(P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(n+1)})$ simplexet S -sel, ennek $(P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(v-1)} P^{(v+1)} \dots P^{(n-1)})$ határsimplexét $S^{(v)}$ -vel jelöljük; legyen továbbá $R^{(v)}$ az $S^{(v)}$ csúcsai által meghatározott $n-1$ dimenziós lineáris tér. Azt állítom, hogy ha $A_1 A_2 \dots A_{v-1} A_{v+1} \dots A_k$ -nak van $R^{(v)}$ -ben pontja, akkor van $S^{(v)}$ -ben is. Legyen valóban Q az $A_1 A_2 \dots A_{v-1} A_{v+1} \dots A_k$ -nak az $R^{(v)}$ -ben $S^{(v)}$ külsejében fekvő pontja; meg lehet határozni akkor $S^{(v)}$ -nek két átellenes s_α és s_β határsimplexét, melynek egy-egy A és B pontja s a Q pont egy egyenesen fekszenek. Legyenek $P^{(\alpha_1)}, P^{(\alpha_2)}, \dots, P^{(\alpha_r)}$, illetőleg $P^{(\beta_1)}, P^{(\beta_2)}, \dots, P^{(\beta_s)}$ az s_α , illetőleg s_β csúcsai ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, az $1, 2, \dots, v-1, v+1, \dots, n+1$ indexek egy permutációja). Tegyük fel, hogy ez egyenesen e pontok sorrendje: A, B, Q . Mivel s_α valamennyi csúcsa hozzátartozik az $A_1 A_2 \dots A_{\beta_s} A_{n+2} \dots A_{k+1}$ szorzathoz, tehát oda tartozik az egész s_α

¹ E tétellel J. RADONNAK a badnaubeimi Naturforscherversammlung-on 1920 szeptemberben tartott előadása révén ismerkedtem meg; l. RADON analitikus bizonyítását: Mathem. Annalen, 83. (1921) 113. o.

simplex s így A is. Minthogy továbbá A és Q mindketten hozzátartoznak $A_{\beta_1}A_{\beta_2}\dots A_{\beta_n}A_{n+2}\dots A_{k+1}$ -hez, tehát az egész AQ egyenes szakasz s így B is. Másfelől s_ν csücsai hozzátartoznak $A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\dots A_{\alpha_r}$ -hez, tehát B is, e szerint B pontja $A_1A_2\dots A_{\nu-1}A_{\nu+1}\dots A_k$ -nak.

Ha ν -t $1, 2, \dots, n+1$ -nek vesszük, adódik, hogy az $A_2A_3\dots A_k, A_1A_3\dots A_k, \dots, A_1A_2\dots A_nA_{n+2}\dots A_k$ szorzatának, vagyis $A_1A_2\dots A_k$ -nak van legalább egy P pontja az S simplex belsejében, vagy határán. Mivel pedig S valamennyi csücsa hozzátartozik A_{k+1} -hez, tehát S valamennyi pontja is, e szerint a P pont közös pontja valamennyi $k+1$ tartománynak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 május 23.-án tartott üléséből.)

EGY TÉTEL A KONVEX TESTEKRŐL.

KÖNIG DÉNES-től.

Feladatunk a következő HELLY-RADON-féle tétel tisztán geometriai bizonyítását adni:¹

Adva van a közöséges n -méretű térben, R_n -ben, a konvex testek egy halmaza; ha bárhogyán választva ki közülök $n+1$ -et, ezeknek mindig van közös pontjuk, akkor van oly pont is, mely valamennyinek közös pontja.

Konvex testnek neveztetik tudvalevőleg egy végesben fekvő és (halmazelméleti értelemben) zárt ponthalmaz, ha bármely két pontjával együtt az összekötő egyenesdarab minden pontját is tartalmazza. Nem zárjuk itt ki azokat a konvex testeket, melyek egy n -nél alacsonyabb méretű térnek is részei s amelyeknek ennél fogva az R_n -ben nincs belső pontjuk. Tehát bármely egyes pont is konvex testnek nevezendő.

Bizonyításunkat a következő ismeretes és könnyen igazolható segédtételekre fogjuk alapítani. Ha az R_n két konvex testjének, A -nak és B -nek nincs közös pontja, akkor van az R_n -ben egy R_{n-1} «sík», melynek nincs sem A -ban, sem B -ben pontja és amely A -t és B -t egymástól elválasztja.

A tételt először a konvex testek *véges* halmazára bizonyítjuk be. Legyenek az adott konvex testek:

$$A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}.$$

Ha $n=1$, akkor tételünk bármely k -ra közvetlenül evidens. (Az egyenes minden «konvex testje» vagy egy zárt intervallum, vagy

¹ HELLY nem közölte eddig bizonyítását; RADON analitikus bizonyítása a jelen dolgozat megírása óta megjelent: *Mathematische Annalen*, 83. k., 113. l., 1921.

egyetlen pont.) Tételünk továbbá triviális bármely n esetében, ha $k=n$. A midőn tehát a tételt az R_n -nek $k+1$ számú konvex testje esetére akarjuk bebizonyítani, akkor a teljes induktiót alkalmazva feltehetjük, hogy 1) az R_{n-1} -re akárhány konvex test esetében, valamint 2) az R_n -nek k számú konvex testje esetében a tételt már bebizonyítottuk.

Az utóbbi megjegyzés szerint van A_{k+1} -nek az ¹

$$A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}, A_1 \dots A_{k-2} A_k, \dots, A_2 A_3 \dots A_k \quad (1)$$

testek mindegyikével közös pontja és $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ is tartalmaz egy pontot. Tegyük fel, hogy tételünkkel ellentétben A_{k+1} -nek $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ -val nem volna közös pontja. Ez esetben az említett segédétel szerint van az R_n -nek egy oly R_{n-1} -je, melynek sem $A_1 A_2 \dots A_k$ -val, sem A_{k+1} -gyel nincs közös pontja és e kettőt egymástól elválasztja. Kimutatjuk, hogy ennek az R_{n-1} -nek van egy a_k pontja $A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}$ -ben. Ennek igazolására elég kimutatni, hogy R_{n-1} mindkét oldalán van $A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}$ -nek pontja; már pedig valóban: R_{n-1} egyik oldalán fekszik $A_1 \dots A_{k-2} A_{k-1}$ -nek A_{k+1} -gyel közös pontja, másik oldalán pedig $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ bármely pontja. Ugyanígy belátható, hogy R_{n-1} -nek bármely (1)-beli konvex testtel van közös pontja. Legyenek e közös pontok az (1)-beli sorrendnek megfelelőleg:

$$a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1.$$

Legyen most már

- Γ_k a legkisebb konvex test, mely az $a_1, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}$;
- Γ_{k-1} " " " " " " a_1, \dots, a_{k-2}, a_k ;
-
- Γ_1 " " " " " " a_2, \dots, a_{k-1}, a_k

pontokat tartalmazza. Az R_{n-1} e k számú konvex testje oly tulajdonságú, hogy közülök bármely $k-1$ -nek van közös pontja (például $\Gamma_k, \Gamma_{k-1}, \dots, \Gamma_2$ -nek közös pontja: a_1 , stb.). Mivel-

¹ Az A, B, C, \dots konvex testek közös részét az $ABC \dots$ szorzattal jelöljük. Ez maga is konvex test.

hogy feltehetjük, hogy $n \leq k - 1$ (hiszen $k = n$ -re a tétel még triviális), azért a Γ -knak n -esével is van közös pontjuk s így — minthogy az R_{n-1} -re tételünket bebizonyítottuk tekintjük — valamennyi Γ -nak is van közös pontja: α .

Az $a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}$ pontok valamennyien pontjai A_k -nak és így Γ_k is teljesen befoglaltatik A_k -ban. Hasonlóképen Γ_{k-1} része A_{k-1} -nek, ..., Γ_1 része A_1 -nek. A Γ -k közös α pontja tehát: pontja $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ -nak, a mi ellentmond annak, hogy R_{n-1} -nek nincs közös pontja $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k$ -val. Ezzel tételünk véges számú konvex test esetére be van bizonyítva.

Hogy a tétel *végtelen* sok konvex test esetében is helyes, az most már közvetlenül következik RIESZ FRIGYES következő tételéből: ¹

Adva van az R_n -ben a végesben fekvő zárt halmazok egy halmaza, ha bárhogy választván ki közülök véges számú zárt ponthalmazt, ezeknek van közös pontjuk, akkor van oly pont is, mely valamennyinek közös pontja.

RIESZ FRIGYES eddig nem közölt bizonyítása a szerző szíves szóbeli közlése szerint a következő:

Legyen egy tetszésszerűen az adott zárt A halmazok közül: A_0 . Ha a tétel nem volna helyes, akkor A_0 minden pontjához, α -hoz tartoznék az adott zárt halmazok közül egy oly A_α , melynek α nem pontja; ez esetben A_α zártága miatt van az α -nak egy teljes (például gömbalakú) g_α környezete, melynek egyetlen pontja sem tartozik A_α -hoz. Az A_0 összes α pontjaihoz tartozó g_α -k valamelyikében az A_0 minden pontja bentfekszik s így — A_0 zártága folytán — a HEINE-BOREL-féle tétel szerint e g_α -kból kiválasztható véges számú, g_1, g_2, \dots, g_ν oly módon, hogy már e ν -számú g valamelyikében bent legyen az A_0 minden pontja. Ha ezek a g_i -k az adott zárt halmazok közül rendre A_1, A_2, \dots , illetőleg A_ν -nek felelnek meg (azaz g_i -nek nincs közös pontja A_i -vel, hol $i = 1, 2, \dots, \nu$), akkor — ellentétben feltevésünkkel — az $A_0, A_1, A_2, \dots, A_\nu$ halmazoknak sem volna közös pontjuk, mert

¹ *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908), Vol. II., p. 21., a 2. jegyzet b) tétele.

az A_0 tetszésszerinti pontja: pontja egy g_i -nek s így kívül fekszik A_i -n ($i=1, 2, \dots, \nu$).

Ezzel RIESZ tétele s így a HELLY-RADON-féle tétel is teljes általánosságban be van bizonyítva.

Megemlítjük végül, hogy míg véges számú konvex test esetében a konvex testek zártságának feltételezése könnyen mellőzhető volna, addig a végesről végtelenre való áttérésnél — mint láttuk — a konvexitás mellőzhető és a zártság feltételezése lényeges.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 május 23.-án tartott üléséből.)

AZ ALGEBRAI SZÁMTEST DIFFERENSÉRŐL ÉS DISCRIMINANSÁRÓL.

BAUER MIHÁLY-tól.

1. §.

1. Legyen K egy n -edfokú algebrai számtest. Valamely $\omega = \omega^{(1)}$ tetszőszerinti számának a számtól különböző conjugáltjait jelöljék $\omega^{(k)}$, ($k=2, 3, \dots, n$). Ha ω átfutja az összes egész számokat, akkor az $\omega - \omega^{(k)}$ számok legnagyobb közös osztója egy a K GALOIS-féle testéhez tartozó l_k ideál. A számtest differensét, mely K -beli ideál, HILBERT következőképpen definiálja:

$$\delta = l_2 l_3 \dots l_n. \quad (1)$$

Ha a differensnek ebből a definitiójából indulunk ki és nem az eredeti DEDEKIND-féléből, akkor könnyű közvetlenül kimutatni azt a DEDEKIND-tól eredő tételt, hogy a számtest differense az egész számok differensének legnagyobb közös osztója.¹ A bebizonyításhoz nehezebb fogalmak, mint például a rendezés fogalma, nem lesznek szükségesek. Tanulságos megjegyezni, hogy a szóbanforgó tétel egy előbbi dolgozatom² fejtegetéseiből nem következik.

2. Ha a K számtestben

$$p = p^a q, \quad (p, q) = 1 \quad (2)$$

¹ Az Ω szám differense $\prod_{k=2}^n (\Omega - \Omega^{(k)})$.

² Az algebrai számtest differenséről. Math. és Természettud. Értesítő. 38. k. 178. l. 1921. Az ott szereplő π számnak egy bizonyos relativdifferense tartalmazza \bar{p} -nek azt a hatványát, mely a számtest differensében szerepel.

és p f -edfokú primideál, akkor a $(\text{mod } p)$ primitív gyökök elméletéből egyszerűen következik oly ω egész számnak és oly $P(\omega) \pmod{p}$ irreducibilis f -ed fokú polynomnak létezése,¹ hogy $P(\omega)$ pontosan p -vel osztható és q -hoz relativ prim. Ismeretes módon feltehető, hogy ω a számtest determináló száma, továbbá $(\text{mod } p)$ primitív gyök és q -val osztható. Ha ω az $F(\omega) = 0$ irreducibilis egyenletet elégíti ki, akkor DEDEKIND «Über die Discriminanten endlicher Körper» című alapvető értekezésének² 13. §-ában foglaltak egy része alapján összeállítható a nehezebb fogalmak és különösen a rendezés fogalmának elkerülésével a következő ténynek bebizonyítása:

$$F(x) \equiv P^g(x) Q(x) \pmod{p}, \quad (2^*)$$

a hol P és $Q \pmod{p}$ relativ prim polynomok.

Ki fogjuk mutatni, hogy az ω szám differense p -nek ugyanazzal a hatványával osztható, mint a számtest differense.

Ezzel az 1. alatt említett tény be lesz bizonyítva.

3. Legyen a K test GALOIS-féle testében

$$p = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots, \quad (3)$$

a hol \mathfrak{P}_i -k törzsideálok. Ezek közül egy tetszésszerintit jelöljünk \mathfrak{P} -vel. Valamely α , illetőleg p K -beli ideál conjugáltjait jelöljük $\alpha^{(k)}$ -val, illetőleg $p^{(k)}$ -val, hasonló módon K egy tetszésszerinti egész számát és conjugáltjait jelentsék $Q = Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(n)}$. Bebizonyításunkat annak a kimutatásával fogjuk végrehajtani, hogy $Q - Q^{(k)}$ a \mathfrak{P} -nek legalább oly magas hatványával osztható, mint $\omega - \omega^{(k)}$. Két eset képzelhető.

a) A $p^{(k)}$ ideál nem osztható \mathfrak{P} -vel. Ekkor

$$P(\omega) = p\alpha, \quad (\alpha, p) = 1, \quad P(\omega^{(k)}) = p^{(k)}\alpha^{(k)}, \quad (\alpha^{(k)}, p) = 1,$$

tehát

¹ L. például HILBERT: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. §. 9. Satz 30. Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung. 4. k. 1897.

² Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 29. k. 1882.

$$P(\omega^{(k)}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$$

és így

$$P(\omega^{(k)}) \equiv P(\omega^{(k)}) - P(\omega) \equiv (\omega^{(k)f} + a_1 \omega^{(k)f-1} + \dots + a_f) - \\ - (\omega^f + a_1 \omega^{f-1} + \dots + a_f) \equiv (\omega^{(k)} - \omega) \gamma_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Ámde γ_k egy ω és k -től függő egész szám, ennek következtében

$$\omega - \omega^{(k)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}, \quad (4)$$

azaz állításunk az ω esetre be van bizonyítva.

3) A $\mathfrak{p}^{(k)}$ ideál osztható \mathfrak{P} -vel. Ismeretes módon tetszés szerinti rationalis egész positiv kitevőre

$$\Omega \equiv R_t(\omega) \pmod{\mathfrak{p}^t},$$

hol R_t argumentumának rationalis egész együtthatójú polynomja. Így tehát

$$\Omega \equiv R_t(\omega) \pmod{\mathfrak{P}^t}, \quad \Omega^{(k)} \equiv R_t(\omega^{(k)}) \pmod{\mathfrak{P}^t},$$

a miből

$$\Omega - \Omega^{(k)} \equiv R_t(\omega) - R_t(\omega^{(k)}) \equiv (\omega - \omega^{(k)}) \gamma_{kt} \pmod{\mathfrak{P}^t}, \quad (5)$$

hol γ_{kt} egy k , t és Ω -tól függő algebrai egész szám. Minthogy $\omega - \omega^{(k)} \neq 0$, legyen e különbség pontosan \mathfrak{P}^u -val osztható, az (5)-ből látható

$$\Omega - \Omega^{(k)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^u}, \quad \text{q. e. d.}$$

(Eddig csak azt használtuk ki, hogy $P(x) \pmod{p}$ f -edfokú irreducibilis polynom és $P(\omega)$ a p tényezői közül csakis p -vel, még pedig annak pontosan első hatványával osztható.)

4. A (2*) alatti congruentiát így írhatjuk:

$$F(x) = P^g(x) Q(x) + pM(x). \quad (6)$$

Az előbbi tétel szerint $F'(\omega)$ a p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint a számtest differense. A $P(\omega)$ tulajdonságai

pedig következik, hogy $P(x)$ és $M(x) \pmod{p}$ relativ primek.¹ Ha ezt az előbbiekkal összevetjük, látjuk, hogy a számtest differense pontosan p^{s-1} -vel osztható, ha $(g, p) = 1$. Ha pedig

$$g = p^s g', \quad (p, g') = 1, \quad (7)$$

akkor ismeretes, hogy a számtest differense pontosan p^{v-1} -vel osztható, hol

$$v \leq (s+1)g. \quad (7^*)$$

Már DEDEKIND kiszámította (idézett dolgozata 14. §-ában) egyes specialis esetekben v -t és úgy ezekben az esetekben, mint FUETER² vizsgálataiban az egyenlőség ki volt zárva $s > 0$ esetére. Mindazonáltal ki lehet mutatni, hogy bármely s esetében az ideál fokától függetlenül, az egyenlőség jele tényleg bekövetkezhetik. Mindenekelőtt idézzük a következő tételt.³ Legyen

$$f(x) = x^r + \dots + c_r,$$

(mod p) irreducibilis polynom, $M(x)$, $f(x) \pmod{p}$ relativ primek és $M(x)$ foka kisebb, mint $f^g(x)$ foka, akkor

$$F(x) = f^g(x) + p^\alpha M(x)$$

(mod $p^{\alpha+1}$) irreducibilis polynom, ha $(g, \alpha) = 1$ és így $F(x) = 0$ irreducibilis egyenlet. Ha ω az egyenlet valamely gyöke, akkor az általa meghatározott számtestben $p = p^g$, hol p r -edfokú törzs-ideál, $\frac{f^g(\omega)}{p^\alpha}$ egész szám, mely p -hez relativ prim. Ha most $\alpha = 1$ választjuk, akkor $f(\omega)$ pontosan p -vel osztható és így a 3. alát-

¹ A szóbanforgó tényeknek ily egyszerű bebizonyítása egyrészt kiegészíti a «Vizsgálatok az algebrai számtestek discriminansáról» című dolgozat eredményeit (lásd Math. és Természettud. Értesítő 36. k. 58. l. az 1. §. 1. pontját 1918), másrészt egyszerűsíti a fejtegetéseket (lásd 60. l. 1. jegyzetét). Még kijavítom a következő könnyen észrevehető sajtóhibát. Az i. h. 63. l. 13. sorában $q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1g}$ helyett olvasandó $q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1g}$.

² Ein Satz über Iteration von Potenzreihen und seine zahlentheoretische Anwendung. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 62. k. 67—72. l. 1917.

³ Verallgemeinerung eines Satzes von SCHÖNEMANN. Journal für r. u. a. Mathematik 128. k. 87—89. l. 1905.

tiak szerint $F'(\omega)$ a p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint a számtest differense.¹ Ha tehát

$$M(x) \equiv m \pmod{p^s}$$

választjuk, hol m egy p -hez relativ prim rationalis egész szám, akkor $F'(\omega)$ és így a számtest differense pontosan p^{gs+g-1} -vel osztható, a mivel állításunk be van bizonyítva. Igen figyelemre-méltó azonban, hogy, a mint látni fogjuk, GALOIS-féle testek esetében

$$v < (s+1)g, \quad (7^{**})$$

hacsak sg nem osztható $p-1$ -vel. Ugyanis a p tehetetlenségi csoportjának rendje g . Ha a csoport egy helyettesítése T és Q a számtest tetszésszerűnti egész száma, akkor

$$TQ \equiv Q; \pmod{p}.$$

Az elágazási csoportnak \mathfrak{B} -nek rendje p^s . E csoport a tehetetlenségi csoport alsóportja, ide tartoznak mindazo a V helyettesítések, melyekre

$$VQ \equiv Q \pmod{p^2}.$$

Legyenek $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2, \dots, \mathfrak{B}^{h+1} = E$ a különböző elágazási csoportok. Helyettesítései, melyeket V^i -vel jelölünk, a következő módon vannak értelmezve. Minden $i \leq h$ indexhez van egy i -vel monoton növekedő legnagyobb positiv rationalis egész $\alpha_i + 1$ szám, hogy a számtest minden egész számára

$$V^i Q \equiv Q \pmod{p^{\alpha_i + 1}}.$$

¹ Abból, hogy $M(x) \equiv 0 \pmod{p, f}$ DEDEKIND az ideálmélet használata nélkül bebizonyítja (Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale etc. Abh. der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen 23. k. III. tétel 1878), hogy a számtestnek és ω -nak discriminansa p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza. Ha valamely testben p törzsideálhatvány, akkor mindig van oly $F(\omega) = 0$ determináló egyenlet, hogy

$$F(x) = f^n(x) + pM(x), \quad M(x) \equiv 0 \pmod{p, f},$$

hol $f(x) \pmod{p}$ irreducibilis. $M(x)$ foka kisebb, mint $f^n(x)$ foka, úgy hogy ebben a specialis esetben ezen az úton be van bizonyítva, hogy a számtest differensének normája és a számtest discriminansa p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza. (V. ö. 2. §.)

Az elágazási csoportok rendjei:

$$p^s = p^{\beta_1} > p^{\beta_2} > \dots > p^{\beta_{h+1}} = 1.$$

(Az a_i számokról érdekes tételeket ad SPEISER.¹)

Ha tehát a differens pontosan p^{v-1} -vel osztható, akkor

$$v-1 = g - p^s + (p^s - p^{\beta_1}) a_1 + (p^{\beta_1} - p^{\beta_2}) a_2 + \dots + (p^{\beta_h} - 1) a_h,$$

tehát

$$v-1 = g - p^s + (p-1)e,$$

hol e rationalis egész szám és így (7*) következtében

$$\begin{aligned} g - p^s + (p-1)e &\leq (s+1)g - 1, \\ (p-1)e &\leq sg + p^s - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Ha már most a (7*) és így a (8) relációban is az egyenlőség jele volna érvényes, akkor lenne

$$sg \equiv 0 \pmod{(p-1)},$$

úgy a mint állítottuk.²

2. §.

1. A számtest differense és discriminansa közötti kapcsolatot a következő alaptétel adja: a discriminans æquivalens a differens normájával. Ennek a tételnek bebizonyítása, még akkor is, ha a differens HILBERT-féle definitiójából indulunk ki, mé-

¹ Die Zerlegungsgruppe. Journal f. r. u. a. Mathematik 149. k. 174—188. lap. 1919.

² A Vizsgálatok az algebrai számtest discriminansáról című dolgozat 1. §-ából folyik, hogy a $v \leq (s+1)g$ formula æquivalens a következő tétellel, melyben ideálok nem szerepelnek. Ha $f(x) \pmod{p}$ irreducibilis polynom, $f(x)$, $M(x) \pmod{p}$ relativ primek, $M(x)$ foka kisebb, mint $f^v(x)$ foka, ha továbbá a

$$F(x) = f^v(x) + pM(x)$$

discriminansa pontosan $p^{(v-1)f}$ -vel osztható, akkor v pozitív egész szám és $v \leq (s+1)g$. Az idézett dolgozat a már tett módosításokon kívül még lényegesen egyszerűsíthető, ugyanis a differens tárgyalásakor nincs szükség a discriminans bevonására. Lásd a «Verschiedene Bemerkungen über die Differenten und Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers» című dolgozatomat. (Megjelenik a Math. Zeitschrift-ben.)

lyen fekszik. A discriminansra vonatkozó classikus DEDEKIND-féle tétel így szól. Ha

$$p = p_1^{g_1} p_2^{g_2} \dots p_k^{g_k}, \quad (1)$$

a hol a p_i -k különböző f_i -ed fokú törzsideálok és

$$(g_i, p) = 1, \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (1^*)$$

akkor a discriminans pontosan $p^{(g_1-1)f_1 + (g_2-1)f_2 + \dots + (g_k-1)f_k}$ -val osztható.

2. A következőkben megmutatom, hogy DEDEKIND értekezéseiből és HENSEL régebbi vizsgálataiból össze lehet állítani e tételnek olyan bebizonyítását, mely egyfelől nem követeli a differens és discriminans viszonyának teljes ismeretét, másfelől sem a DEDEKIND-féle nehezebb, sem a HENSEL¹ újabb vizsgálataiban használt fogalmakat nem alkalmazza. Mindenekelőtt (1)-ből

$$p = p_i^{g_i} q_i, \quad (p_i, q_i) = 1, \quad (g_i, p) = 1; \quad (2)$$

és az 1. §. (2*) alapján van a számtestnek oly ω_i determináló egész száma, mely az $F_i(\omega_i) = 0$ irreducibilis egyenletet elégiti ki és

$$F_i(x) \equiv P_i^{g_i}(x) Q_i(x) \pmod{p}, \quad (2^*)$$

hol $P_i(x)$, $Q_i(x) \pmod{p}$ relativ primek, $P_i(\omega_i)$ a p tényezői közül csakis p_i -vel, még pedig annak első hatványával osztható. Így tehát a

$$F_i(x) = P_i^{g_i}(x) Q_i(x) + p M_i(x)$$

egyenletben $M_i(x)$, $P_i(x) \pmod{p}$ relativ primek, az ω_i szám differense és így a számtest differense is legfeljebb $p_i^{g_i-1}$ -vel osztható. (Itt nem alkalmaztuk az 1. §. 3. pontjában bebizonyított tételt.)

A determinans-elméletből és abból, hogy két polynom szorzatában, melynek együtthatói a test egész számai, az együtthatók legnagyobb közös osztója æquivalens az egyes tényezőkre vonatkozó legnagyobb közös osztók szorzatával, következik,

¹ Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen Mathematische Annalen 55. k. 301—336. 1. 1902.

hogy a számtest differensének normája osztható a discriminanssal.¹ Ha tehát $(g_i, p) = 1$, akkor a számtest discriminansa legfeljebb $p^{(g_1-1)f_1 + \dots + (g_k-1)f_k}$ -val osztható.

3. Ha ρ_i valamely (mod p_i) primitív gyök, mely q_i -vel osztható és π_i egy pontosan p_i -vel osztható egész szám,² akkor a

$$\pi_i^{a_i} \rho_i^{b_i}, \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

$$(a_i = 0, 1, 2, \dots, g_i - 1, b_i = 1, 2, \dots, f_i) \quad (3)$$

számok (mod p) alaprendszert alkotnak. Ez a rendszer módosítása annak, melyet HENSEL³ az úgynevezett normális alaprendszerek létezésének kimutatására használ fel. (Az eredeti HENSEL-féle rendszert is alkalmazhattuk volna.) A $\pi_i^{a_i} \rho_i^{b_i}$ számok és conjugáltjaik oszthatók $p^{\frac{a_i}{g_i}}$ -vel, ugyanis $\pi_i^{g_i} \rho_i^{b_i g_i}$ osztható p^{a_i} -vel. Ha a (3) alatti számokból és conjugáltjaikból álló n -ed fokú determinans négyzetét képezzük, látjuk, hogy ez és így a számtest discriminansa legalább a

$$\sum_{i=1}^k \sum_{a_i=0}^{g_i-1} \sum_{b_i=1}^{f_i} \pi_i^{a_i} \rho_i^{b_i} f_i = p^{\sum_{i=1}^k (g_i-1) f_i} \quad (3^*)$$

mennyiséggel osztható és így a számtest discriminansa a $(g_i, p) = 1$ esetben pontosan a (3*) alatti mennyiséggel osztható, a mi bebizonyítandó volt.

¹ HILBERT: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Lásd a 32. §. szövegének végső részeit és a 13. tételt, valamint a 35. tétel bebizonyításának elejét. A fordítottaknak, vagyis annak a ténynek a bebizonyításában rejlik a nehézség, hogy a discriminans osztható a differens normájával. A tétel egy része a szövegben foglaltakkal implicite bebizonyíttatik.

² Választható például $\rho_i = \omega_i$, $\pi_i = P_i(\omega_i)$.

³ Über Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen. Journal für r. u. a. Mathematik 105. k. 329—344. l. 1889.

GEOMETRIAI RELATIÓK VALAMELY RATIONALIS EGÉSZ FÜGGVÉNYNEK ÉS LOGARITHMUSA DERIVÁLTJAINAK ZÉRUS-HELYEI KÖZÖTT.

SZ. NAGY GYULÁ-tól.

(Kivonat.)

Három előző dolgozatban foglalkoztam az

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = 0 \quad (1)$$

algebrai egyenletnek és

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv f(x) \cdot \frac{d \log f(x)}{dx} \equiv \\ &\equiv f(x) \left[\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

deriváltjának gyökei között fennálló geometriai relációkkal.

Az első dolgozatban ¹ azt az esetet tárgyaltam, a mikor az (1) egyenlet összes gyökei valósak, a másodikban ² a valós α -kra talált eredmények egy részét képzetes α -kra kiterjesztettem, míg a harmadikban ³ a két első dolgozat tételeit arra az esetre általánosítottam, amikor az (1) és (2) egyenlet szerepét az

$$F(x) = (x-a_1)^{A_1}(x-a_2)^{A_2}\dots(x-a_n)^{A_n} = 0 \quad (3)$$

¹ «Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln», Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver., Bd. 27. (1918), 37—43. old.

² «Geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten», Jahresbericht Bd. 27. (1918), 44—48. old.

³ «Geometriai relációk algebrai egyenletek gyökei között», Math. és Phys. Lapok, sajtó alatt.

és deriváltja veszi fel s az A_1, A_2, \dots, A_n tetszésszerű realis számok.

Ebben a dolgozatban az (1) és a

$$g_p(x) \equiv f^p(x) \cdot \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{d^p \log f(x)}{dx^p} \equiv$$

$$\equiv f^p(x) \left[\frac{1}{(x-\alpha_1)^p} + \frac{1}{(x-\alpha_2)^p} + \dots + \frac{1}{(x-\alpha_n)^p} \right] = 0 \quad (4)$$

egyenlet gyökei között fogunk geometriai relatiókat megállapítani. Minthogy azonban lehozott tételeink jó része a (3) alakra is igaz, a hol most azonban az A_1, A_2, \dots, A_n tetszésszerű pozitív számok, azért az $f(x)=0$ és $g_p^2(x)=0$ egyenletek helyett az $f(x)=0$ és a

$$G_p(x) \equiv f^p(x) \cdot \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{d^p \log F(x)}{dx^p} \equiv$$

$$\equiv f^p(x) \left[\frac{A_1}{(x-\alpha_1)^p} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)^p} + \dots + \frac{A_n}{(x-\alpha_n)^p} \right] = 0 \quad (5)$$

egyenletekből indulunk ki. A (4) egyenlet az (5)-nek speciálisja ($A_1=A_2=\dots=A_n=1$).

Az $f(x)=0$ és $g_p(x)=0$ egyenletek gyökei között összefüggéseket eddig — tudomásunk szerint — csak E. CESÁRO állapított meg.¹ Ő különösen a $p=2$ esetet vizsgálta, de nem geometriai, hanem fizikai értelmezéssel. Dolgozatunk körébe E. CESÁRO-nak az a kevés tétele vág, a mely csupa realis gyökökkel bíró $f(x)=0$ egyenlet esetén a páratlan indexű $g_p(x)=0$ egyenletek realis gyökeinek helyzetére vonatkozik.

1. §.

1. A $G_p(x)=0$ $p(n-1)$ -edfokú egyenlet értelmezéséből következik, hogy annak csak akkor lehet az α_k gyöke, ha ez az $f(x)=0$ egyenletnek többszörös gyöke, még pedig az α_k a $G_p(x)=0$ egyenletnek $p(h-1)$ -szeres gyöke, ha az $f(x)=0$ egyenletnek h -szoros gyöke.

¹ «Sur une distribution de zéros,» Nouv. Ann. d. Math., Serie III., t. 6. (1887), 36–43. old.

Legyen β a $G_p(x)=0$ egyenletnek egy tetszőszerinti (α -któl különböző) gyökpontja (gyökének ábrázoló pontja a complex számsíkban) és húzzunk a β gyökponton át egy tetszőszerinti irányú t tengelyt. Ha ϕ jelöli azt a szöveget, amelyet a t tengely pozitív iránya a valós tengely pozitív irányával alkot, r_k jelöli az a_k pontnak a β ponttól való távolságát és φ_k e távolságnak a t tengely pozitív irányával alkotott szögét, akkor az

$$a_k - \alpha = a_k - \beta = r_k e^{i(\varphi_k + \psi)} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

értékeknek a $G_p(x)=0$ egyenletbe való behelyettesítése és az egyenletnek $f^p(x) \cdot e^{-i p \psi}$ -vel való átosztása után az egyenlet valós, illetőleg képzetes részére a következő két egyenletet kapjuk:

$$\frac{A_1 \cos p\varphi_1}{r_1^p} + \frac{A_2 \cos p\varphi_2}{r_2^p} + \dots + \frac{A_n \cos p\varphi_n}{r_n^p} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{A_1 \sin p\varphi_1}{r_1^p} + \frac{A_2 \sin p\varphi_2}{r_2^p} + \dots + \frac{A_n \sin p\varphi_n}{r_n^p} = 0. \quad (7)$$

Ezekben az egyenletekben az A koefficiensek és az r távolságok mind pozitívak; kell tehát, hogy a cosinusok, illetőleg sinusok között, ha nem mind zérus értékűek, pozitívak és negatívak legyenek. Ebből következik, hogy a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ szögek közül nem tehet mindenik eleget egy-egy

$$2k \frac{\pi}{p} \leq \varphi \leq (2k+1) \frac{\pi}{p} \quad (k=0, 1, \dots, p-1) \quad (8)$$

alakú egyenlőtlenségnek, kivéve, ha valamennyi egyenlőségi jelöl teljessül. Ennek alapján kimondhatjuk a következő tételt:

I. Ha a $G_p(x)=0$ egyenlet egy tetszőszerinti (α -któl különböző) gyökpontján át tetszőszerint p egymással rendre $\frac{\pi}{p}$ szöveget alkotó egyenest húzzunk, akkor a kapott $2p$ szögtér közül p nem szomszédos nem tartalmazhatja magában az összes α gyökpontokat, föltéve, hogy azok nem esnek mind a p egyenesre.

Ebből a tételtől következik a következő:

II. A $G_p(x)=0$ egyenlet összes gyökpontja benne van annak a körívektől határolt tartománynak belsejében vagy hatá-

rán, melynek határpontjaiból az a_1, a_2, \dots, a_n gyökpontok köré feszített legkisebb konvex poligon $\frac{\pi}{p}$ szög alatt látszik. A határra csak akkor eshetik egy gyökpont, ha az vagy egybeesik legalább két a gyökponttal, vagy olyan $\frac{\pi}{p}$ nyílású szögtérnek a csúcsa, melynek az a gyökpontok mind a határan fekszenek.

2. A (6) egyenletből az előbbi pont tételeinél többet mondó tételeket is lehet lehozni. Könnyebbség kedvéért a tárgyalást csak a $p=2$ eseten fogjuk részletesebben elvégezni.¹

Föltételezzük, hogy a (6) egyenletben, a melyben most $p=2$, az első m_1 tag pozitív, a következő m_2 tag negatív, s az utolsó $n-m_1-m_2$ tag zérus. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $i_2(x)=0$ egyenlet β gyökpontján átmenő merőleges egyenespártól alkotott két csúcsszögtér közül az egyiknek az a_1, a_2, \dots, a_{m_1} , a másiknak az $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \dots, a_{m_1+m_2}$ gyökpont fekszik a belsőjében, míg a többi a gyökpont a merőleges egyenespárra esik.

Vezessük be a

$$\cos 2\bar{\varphi}_k = -\cos 2\varphi_{m_1+k}, \quad \bar{r}_k = r_{m_1+k}, \quad \bar{A}_k = A_{m_1+k} \quad (k=1, 2, \dots, m_2)$$

jelöléseket, akkor a (6) egyenletet ($p=2$) a

$$\begin{aligned} & \frac{A_1 \cos 2\varphi_1}{r_1^2} + \frac{A_2 \cos 2\varphi_2}{r_2^2} + \dots + \frac{A_{m_1} \cos 2\varphi_{m_1}}{r_{m_1}^2} = \\ & = \frac{A_1 \cos 2\bar{\varphi}_1}{\bar{r}_1^2} + \frac{A_2 \cos 2\bar{\varphi}_2}{\bar{r}_2^2} + \dots + \frac{\bar{A}_{m_2} \cos 2\bar{\varphi}_{m_2}}{\bar{r}_{m_2}^2} \end{aligned} \quad (9)$$

alakban írhatjuk föl, melyben minden tag pozitív. Ha még föl-tételezzük, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 2\varphi_1}{r_1^2} \geq \frac{\cos 2\varphi_2}{r_2^2} \geq \dots \geq \frac{\cos 2\varphi_{m_1}}{r_{m_1}^2} > 0; \\ \text{és} & \frac{\cos 2\bar{\varphi}_1}{\bar{r}_1^2} \geq \frac{\cos 2\bar{\varphi}_2}{\bar{r}_2^2} \geq \dots \geq \frac{\cos 2\bar{\varphi}_{m_2}}{\bar{r}_{m_2}^2} > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

akkor a (8)-ből a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk föl:

¹ A $p=1$ esetet idézett három dolgozatomban vizsgáltam.

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_{m_1}) \frac{\cos 2\varphi_1}{r_1^2} \geq \bar{A}_1 \frac{\cos 2\bar{\varphi}_1}{r_1^2}, \quad (11)$$

$$(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_{m_2}) \frac{\cos 2\bar{\varphi}_1}{\bar{r}_1^2} \geq A_1 \frac{\cos 2\varphi_1}{r_1^2},$$

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_{m_1}) \frac{\cos 2\varphi_1}{r_1^2} \geq (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_{m_2}) \frac{\cos 2\bar{\varphi}_{m_2}}{\bar{r}_{m_2}^2}, \quad (12)$$

$$(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_{m_2}) \frac{\cos 2\bar{\varphi}_1}{\bar{r}_1^2} \geq (A_1 + A_2 + \dots + A_{m_1}) \frac{\cos 2\varphi_{m_1}}{r_{m_1}^2}.$$

Ezekben az egyenlőtlenségekben az egyenlőségi jel csak akkor teljesül, ha a (10) egyenlőtlenségekben is mindenütt az egyenlőségi jel érvényes és a (11) egyenlőtlenségekben $m_2=1$, illetőleg $m_1=1$.

A (11) és (12) egyenlőtlenségekben foglalt tételeket könnyebb kifejezhetőség kedvéért a $G_2(x) = 0$ helyett a $g_2(x) = 0$ egyenletre fogjuk kifejezni, a mikor

$$A_1 = A_2 = \dots = A_{m_1} = \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \dots = \bar{A}_{m_2} = 1.$$

Ekkor a (11) és (12) egyenlőtlenségek alapján a következőket írhatjuk fel:

$$\text{és} \quad \frac{r_1^2}{\cos 2\bar{\varphi}_1} \leq \frac{(\sqrt{m_2} r_1)^2}{\cos 2\varphi_1}, \quad \frac{r_1^2}{\cos 2\varphi_1} \leq \frac{(\sqrt{m_1} \bar{r}_1)^2}{\cos 2\bar{\varphi}_1}; \quad (13)$$

$$\frac{r_1^2}{\cos 2\bar{\varphi}_1} \geq \frac{\left(\frac{r_1}{\sqrt{m_1}}\right)^2}{\cos 2\varphi_1}, \quad \frac{r_1^2}{\cos 2\varphi_1} \geq \frac{\left(\frac{\bar{r}_1}{\sqrt{m_2}}\right)^2}{\cos 2\bar{\varphi}_1};$$

$$\text{és} \quad \frac{\bar{r}_1^2}{\cos 2\varphi_1} \leq \frac{\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} r_{m_1}\right)^2}{\cos 2\varphi_{m_1}}, \quad \frac{r_1^2}{\cos 2\varphi_1} \leq \frac{\left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \bar{r}_{m_2}\right)^2}{\cos 2\bar{\varphi}_{m_2}}; \quad (14)$$

$$\frac{\bar{r}_{m_2}^2}{\cos 2\bar{\varphi}_{m_2}} \geq \frac{\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} r_1\right)^2}{\cos 2\varphi_1}, \quad \frac{r_{m_1}^2}{\cos 2\varphi_{m_1}} \geq \frac{\left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \bar{r}_1\right)^2}{\cos 2\bar{\varphi}_1}.$$

Az

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

oly BERNOULLI-féle lemniscátának egyenlete polaris (r, φ) koordinátákban, melynek kettőspontja a $g_2(x) = 0$ egyenlet β gyök-pontja, a pedig a lemniscata β pontjától legtávolabb fekvő pont-

jának távolsága β -tól. A következőkben a $2a$ távolságot a lemniscata átmérőjének nevezzük.

Nevezzük az a gyökpontokat egyszerűen gyökpontoknak, jelöljük β -val a $g_2(x) = 0$ egyenlet egy tetszőszerinti gyökpontját, E_1 és E_2 -vel azt a két csúcsszögteret, a melyre a β gyökponton átmenő tetszőszerinti irányú e_1, e_2 egymásra merőleges egyenespár a komplex számsíkot felbontja, m_1 -, illetőleg m_2 -vel az E_1 , illetőleg E_2 csúcsszögter belsejében fekvő gyökpontok számát, végül L_1 -, illetőleg L_2 -vel az E_1 , illetőleg E_2 csúcsszögterben fekvő egy-egy oly BERNOULLI-féle lemniscatát, melynek kettőspontja a β pont és érintői az e_1 és e_2 egyenesek; akkor a (13) és (14) egyenlőtlenségeket következőképpen fejezhetjük ki:

III. Ha van legalább egy gyökpont egy L_1 lemniscata belsejében vagy kerületén, akkor van legalább egy gyökpont a $\sqrt{m_2}$ -ször nagyobb L_2 lemniscata belsejében vagy kerületén.

IV. Ha egy L_1 lemniscata belsejében nincs gyökpont, akkor nincs az annál $\sqrt{m_1}$ -szer kisebb átmérőjű L_2 belsejében sem.

V. Ha az E_1 csúcsszögter belsejében L_1 -en kívül nincs gyökpont, akkor van legalább egy gyökpont annak az L_2 lemniscatának belsejében vagy kerületén, a melynek átmérője az L_1 átmérőjének $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ -szerese.

VI. Ha van legalább egy gyökpont az L_1 lemniscata belsejében vagy kerületén, akkor az E_2 csúcsszögterben van legalább egy gyökpont a $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ -szörös átmérőjű L_2 lemniscatán kívül vagy annak kerületén.

Könnyű ezeket a tételeket kiegészíteni azoknak az eseteknek felsorolásával, a melyekben a (11) és (12), illetőleg a (13) és (14) egyenlőtlenségek egyenlőségi jellel teljesülnek. Az

$$1 \leq m_1 \leq n-1, \quad 1 \leq m_2 \leq n-1$$

egyenlőtlenségek alapján az előbbi négy tételből új tételeket lehet lehozni, a melyekben m_1 és m_2 nem szerepel.

Hasonlóképpen lehet megállapítani egyenlőtlenségeket és azok alapján tételeket akkor is, ha $p > 2$. Ekkor a lemniscata szerepét az $r^p = a^p \cos p\varphi$ sinusspirális veszi át.

2. §.

3. Ebben a §-ban föltételezzük, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei mind reálisak és közöttük a következő nagysági viszony áll fenn:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n. \quad (15)$$

VII. Ha az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei mind reálisak, akkor a $G_p(x) = 0$ egyenletnek páratlan p esetén két-két szomszédos a között van egy és csak egy (a -któl különböző) gyöke, páros p esetén pedig egyáltalában nincs a -któl különböző reális gyöke.

Páratlan p mellett a $G_p(x) = 0$ egyenletnek az (a_k, a_{k+1}) intervallum belsejében ($k=1, 2, \dots, n-1$) van legalább egy gyöke, mert a $H_p(x) = G_p(x) : f_p(x)$ az intervallum belsejében x -nek folytonos függvénye, mely az intervallum elején és végén ellenkező előjelű értékeket vesz föl. Egynél több gyökpontja azonban nem lehet; mert ha az (a_k, a_{k+1}) intervallumban β_1 és β_2 a $G_p(x) = 0$ egyenletnek két (egymástól különböző vagy egybeeső) gyöke volna, akkor ott eltűnnék a $H_p(x)$ függvény. A ROLLE-tétel szerint el kellene tűnnie a $H_p(x)$ függvény

$$H'_p(x) = -pH_{p+1}(x)$$

deriváltjának. Már pedig a $H_{p+1}(x)$ függvény $p+1$ páratlan volta miatt állandóan pozitív. Ezzel, minthogy a $G_p(x)$ függvény páros p mellett az a -kon kívül nem tűnhetik el más reális pontban, a kimondott tétel igazolva van.

4. A $G_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökei helyzetének megállapítása végett ebben a pontban p -t páratlannak tételezzük föl. Egyszerűség kedvéért csak a $g_p(x) = 0$ egyenletre állapítunk meg tételeket.

A (15) nagysági viszony mellett a $g_p(x) = 0$ egyenletnek az (a_k, a_{k+1}) intervallum belsejében fekvő x gyökére az

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x - a_1)^p} + \frac{1}{(x - a_2)^p} + \dots + \frac{1}{(x - a_k)^p} = \\ & = \frac{1}{(a_{k+1} - x)^p} + \frac{1}{(a_{k+2} - x)^p} + \dots + \frac{1}{(a_n - x)^p} \end{aligned} \quad (16)$$

egyenlet áll fönn, melynek tagjai mind pozitívak. Ebből az egyenletből következnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{k}{(x - a_k)^p} \geq \frac{1}{(a_{k+1} - x)^p}, \quad \frac{n-k}{(a_{k+1} - x)^p} \geq \frac{1}{(x - a_k)^p}; \quad (17)$$

$$\frac{k}{(x - a_k)^p} \geq \frac{n-k}{(a - x)^p}, \quad \frac{n-k}{(a_{k+1} - x)^p} \geq \frac{k}{(x - a)^p}.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből következnek az

$$x - a_k \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{(n-k)^{\frac{1}{p}} + 1} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{\frac{n-k+1}{p} + 2} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{n-k+1}, \quad (18)$$

$$a_{k+1} - x \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{k^{\frac{1}{p}} + 1} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{\frac{k-1}{p} + 2} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{k+1}.$$

és az

$$\left. \begin{array}{l} x - a_k \\ a_{k+1} - x \end{array} \right\} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{(n-1)^{\frac{1}{p}} + 1} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{\frac{n-2}{p} + 2} \geq \frac{a_{k+1} - a_k}{n} \quad (19)$$

egyenlőtlenségek, továbbá az

$$x - a_k \leq \frac{a_n - a_k}{\left(\frac{n-k}{k}\right)^{\frac{1}{p}} + 1}, \quad a_{k+1} - x \leq \frac{a_{k+1} - a_1}{\left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{1}{p}} + 1} \quad (20)$$

egyenlőtlenségek.

Ezekből az egyenlőtlenségekből több tételt kimondunk páratlan indexű $g_p(x) = 0$ egyenlet reális gyökeire vonatkozólag:

VIII. Ha d jelöli a csupa reális gyökökkel bíró $f(x) = 0$ n -ed fokú egyenlet nagysága szerint k -adik és $(k+1)$ -dik gyök-pontjának távolságát és ha az (a_k, a_{k+1}) intervallumból az a_k -től mérve

$$\frac{d}{(n-k)^{\frac{1}{p}} + 1} \left(\frac{d}{\frac{n-k-1}{p} + 2} \text{ vagy } \frac{d}{n-k-1} \right),$$

a_{k+1} -től pedig

$$\frac{d}{k^{\frac{1}{p}} + 1} \left(\frac{d}{\frac{k-1}{p} + 2} \text{ vagy } \frac{d}{k+1} \right)$$

vonaldarabot levágunk, akkor e két vonaldarab egyikének belsőjében sem lehet gyökpontja a páratlan indexű $g_p(x) = 0$ egyenletnek.

IX. Ha a csupa reális gyökökkel bíró $f(x) = 0$ n -edfokú egyenlet két szomszédos gyökének d távolságából a két gyökponttól kiindulólág

$$\frac{d}{(n-1)^{\frac{1}{p}} + 1}, \quad \frac{d}{\frac{n-2}{p} + 2} \quad \text{vagy} \quad \frac{d}{n}$$

vonaldarabot levágunk, akkor e két vonaldarab egyikének belsőjében sem fekszik egyik esetben sem a páratlan indexű $g_p(x) = 0$ egyenletnek gyökpontja.¹

X. Ha a csupa reális gyökökkel bíró $f(x) = 0$ n -edfokú egyenlet két-két szomszédos gyökének távolságát $2m+1$ egyenlő részre osztjuk, akkor a $g_p(x) = 0$ egyenletnek az egyenes intervallumok középső osztásrészében fekszik egy-egy gyöke, míhelyt p olyan páratlan szám, melyre az

$$n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^p + 1, \quad \text{vagy az} \quad n \leq \frac{p}{m} + 2 \left(< \left(1 + \frac{1}{m}\right)^p + 1 \right)$$

egyenlőtlenség fennáll.

Ez a tétel abból következik, hogy a (19) egyenlőtlenségekben

$$(n-1)^{\frac{1}{p}} + 1 \leq \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}, \quad \text{míhelyt} \quad n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^p + 1.$$

Ebből a tételből következik a következő:

XI. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n számok mind valóságok, akkor a $g_p(x) = 0$ egyenletnek páratlan p mellett föllépő reális (a -któl különböző) gyökei p növekedésével a szomszédos a gyökpontpárok felezőpontjaihoz konvergálnak.

A (20) egyenlőtlenségek kifejezése ezek után nem okozhat nehézséget.

5. Rátérünk a $g_p(x) = 0$ egyenlet komplex gyökeinek vizsgálatára, abban az esetben, a mikor az a -k mind reálisak.

¹ Ezt a tételt E. CESÀRO is lehozta, l. i. h.

Könnyebbség kedvéért előbb a $p = 1$ esetet tárgyaljuk s csak azután az akármilyen p -re vonatkozót.

Az 1. pontban foglalt egyenlőtlenségekből és tételekből $p = 2$ -re a következő tétel következik:

XII. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n mind reálisak és köztük az

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$$

egyenlőtlenség áll fenn, akkor a $G_2(x) = 0$ egyenlet gyökpontjai mind abban a félköröktől határolt két szimmetrikus tartományban fekszenek, melyeket az $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n$ és $a_n a_1$ átmérőjű körök határolnak.

Ha az a -k közül k egybeesik, akkor az a gyökpont a $G_2(x) = 0$ egyenletnek $2(k-1)$ -szeres gyökpontja. A $G_2(x) = 0$ egyenletnek egy a -któl különböző gyökpontja akkor és csak akkor esik az előbb jellemzett körtartomány határára, ha az a -k között csak két egymástól különböző van. Ilyenkor a $G_2(x) = 0$ egyenletnek a -któl különböző gyöke kettő van és ezek konjugált komplexek.

Az

$$\frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2} = 0$$

egyenleten könnyű igazolni, hogy a két konjugált komplex gyök összekötő egyenese az (a_1, a_2) távolságot oly két részre osztja, a melyeknek aránya $A_1 : A_2$.

Az előbbi tételből következik, hogy abban az esetben, ha az a gyökpontok között legalább 3 egymástól különböző van, kisebb tartomány is van, a mely a $G_2(x) = 0$ egyenlet gyökeit magában foglalja. Így áll a következő tétel:

XIII. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n mind reálisak és közöttük az

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$$

egyenlőség áll fenn, s ha β_1 jelöli az (a_1, a_2) , β_{n-1} pedig az (a_{n-1}, a_n) intervallum felezőpontját, akkor a $\beta_1 \beta_{n-1}$ átmérőjű körön kívül és a β_1 és β_2 pontokhoz tartozó körérintők közé eső területen nincs gyöke a $g_2(x) = 0$ egyenletnek.

Jelöljön P olyan pontot az $a_1 a_n$ átmérőjű körön belül, a mely e tétel által jellemzett tartományban van, jelöljön r_1 és r_{n-1}

az (α, β_1) , illetőleg a (β_{n-1}, a_n) intervallumban fekvő olyan két pontot, a mely P -ből derékszög alatt látszik, tekintsük ennek a derékszögnek belső szöglefelezőjét t tengelynek és nevezzük φ_k -nak azt a szöveget, a melyet a $Pa_k = r_k$ egyenes darab a t tengely pozitív felével alkot; akkor a

$$\frac{\cos 2\varphi_1}{r_1^2} + \frac{\cos 2\varphi_2}{r_2^2} + \frac{\cos 2\varphi_3}{r_3^2} + \dots + \frac{\cos 2\varphi_{n-2}}{r_{n-2}^2} + \frac{\cos 2\varphi_{n-1}}{r_{n-1}^2} + \frac{\cos 2\varphi_n}{r_n^2} = 0$$

egyenlet nem állhat fönn. Ennek az egyenletnek — t irányának alkalmas megválasztása mellett — ugyanis csak az első két tagja lehet negatív, de már az első és utolsó két-két tag összege pozitív.

6. A $g_2(x) = 0$ egyenlet gyökpontjainak helyzetére a 2. pontban kimutatott tételeken kívül is nyerhetünk újabb tételeket a

$$\frac{\sin 2\varphi_1}{r_1^2} + \frac{\sin 2\varphi_2}{r_2^2} + \dots + \frac{\sin 2\varphi_n}{r_n^2} = 0 \quad (21)$$

egyenletből, ha a β gyökponton átmenő t tengelyt a valós tengelylyel párhuzamosnak választjuk. Ekkor ugyanis a (21) egyenletből az $r_k \sin \varphi_k = b$ egyenletek felhasználásával (a hol b a t tengelynek a valós tengelytől való távolsága) a

$$\frac{\cos \varphi_1}{r_1^3} + \frac{\cos \varphi_2}{r_2^3} + \dots + \frac{\cos \varphi_n}{r_n^3} = 0 \quad (22)$$

egyenletet kapjuk. Ebből az egyenletből épp úgy nyerhetünk egyenlőtlenségeket, mint a 2. pontban, a melyeknek értelmezése végett az

$$r^3 = a^3 \cos \varphi$$

oválisokat kell bevezetni.

7. Akármilyen p -re nézve az 1. pont egyenlőtlenségei és tételei alapján a következő-tételek hozhatók le:

XIV. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n mind realisok és közöttük az

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

nagysági viszony áll fenn, akkor a $G_p(x) = 0$ egyenlet képzetes gyökei azoktól a körívektől határolt tartományban fekszenek, a melyeknek pontjaiból az $a_1 a_n$ távolság $\frac{\pi}{p}$, az $a_1 a_2$, $a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n$ távolságok valamelyike $\frac{p-1}{p} \pi$ szög alatt látszik.

XV. Jelöljük azokat a köríveket, a melyekből az $(a_1 a_n)$, $(a_k a_{k+1})$, $(a_1 a_{k+1})$, illetőleg az $(a_{k+1} a_n)$ vonaldarabok $h \frac{\pi}{p}$ szög alatt látszanak, K_h, k_h, C_h , illetőleg C_h'' -val: akkor a $G_p(x) = 0$ egyenletnek nincsenek gyökpontjai a k_{2i-1} vonalon belül és a K_{2i+1}, C_1' és C_2' vonalakon kívül, feltéve, hogy ilyen pontok léteznek ($i = 1, 2, \dots, 2i + 1 \leq p - 1$).

3. §.

Ebben a §-ban kimutatjuk, hogy a $g_p(x) = 0$ egyenlet gyökpontjai mint egy $p(n-1)$ -ed osztályú görbe reális fókuszai foghatók fel.

Legyen ugyanis az a_k komplex szám közönséges alakja $a_k = a_k + ib_k$, akkor

$$H(u, v, w) = \frac{1}{(a_1 u + b_1 v + w)^p} + \frac{1}{(a_2 u + b_2 v + w)^p} + \dots + \frac{1}{(a_n u + b_n v + w)^p} = 0 \quad (23)$$

egy olyan, általánosságban $p(n-1)$ -ed osztályú görbét állít elő homogén (u, v, w) vonalkoordinátákban, melynek reális fókuszait a

$$H(-1, -i, x) = \frac{1}{(x - a_1)^p} + \frac{1}{(x - a_2)^p} + \dots + \frac{1}{(x - a_n)^p} = 0$$

egyenlet gyökpontjai adják.

A (23) egyenleten könnyű észrevenni, hogy az a_h és a_k gyökpontokat összekötő egyenes a $H(u, v, w) = 0$ görbének p -szeres érintője, melynek érintéspontjait az

$$(a_h u + b_h v + w)^p + (a_k u + b_k v + w)^p = 0$$

egyenlet állítja elő. Ennek alapján a következő tételt mondhatjuk ki:

XVI. A $g_p(x) = 0$ egyenlet páratlan p esetén oly $(n-1)$ -ed osztályú reális görbének reális fókuszait állítja elő, a melyet két-két a gyökpontot összekötő egyenes a két pont felezőpontjában és azonkívül $p-1$ oly képzetes pontban érint, melyeknek a két gyökpontra vonatkozó egyszerű arányszámait az $x^p + 1 = 0$ egyenlet képzetes gyökei adják.¹

Páros p mellett a görbe képzetes. Megfelelő tétel kimondása a $G_p(x) = 0$ egyenletre vonatkozólag sem okoz nehézséget.

¹ E tétel magában foglalja a deriváltra vonatkozó tételt. ($p=1$.) Lásd 3. dolgozatunkat.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 május 23.-án tartott üléséből.)

A POLÁRIS EGYENLETEK GYÖKEINEK HELYZETÉRŐL.

SZ. NAGY GYULÁ-tól.

(Kivonat.)

Több előző dolgozatban foglalkoztam egy algebrai egyenlet és deriváltja gyökeinek kölcsönös helyzetével,¹ s a talált összefüggéseket általánosítottam oly esetekre, a mikor a derivált helyett általánosabb típusú egyenlet szerepelt.² Jelen dolgozat más irányú általánosítása azoknak az összefüggéseknek.

Főtárgya e dolgozatnak az

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = 0 \quad (1)$$

egyenlet gyökeihez viszonyítva a

$$f(x) \left[a_1 \frac{\xi - a_1}{x - a_1} + a_2 \frac{\xi - a_2}{x - a_2} + \cdots + a_n \frac{\xi - a_n}{x - a_n} \right] = 0 \quad (2)$$

egyenlet gyökeinek vizsgálata, a mely egyenletben ξ tetszés szerinti (valós vagy komplex) számot jelent, az a coefficientsek pedig reális számok.

¹ Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 27 (1918), 37—43. old.

Geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten, u. o. 45—48. old.

² Geometriai relációk algebrai egyenletek között, Math. és Fizikai Lapok, sajtó alatt.

Geometriai relációk valamely algebrai egyenlet és logaritmusa deriváltjainak zérus helyei között, Math. és Természettudományi Értesítő XXXVIII. kötete (1921), 429. lap.

E négy dolgozatra a következőkben (I), (II), (III), illetőleg (IV) alatt fogunk hivatkozni.

A (2) egyenleten kívül foglalkozni fogunk még az (1) és a

$$f(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{(\xi - a_{i_1})(\xi - a_{i_2}) \dots (\xi - a_{i_k})}{(x - a_{i_1})(x - a_{i_2}) \dots (x - a_{i_k})} = 0 \quad (3)$$

egyenlet gyökeinek kölcsönös helyzetével, (a mely egyenletben az összegezés kiterjesztendő az 1, 2, ..., n indexek minden k -ad osztályú ismétlés nélküli combinatiójára), továbbá foglalkozunk az (1) és a

$$f^k(x) \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\xi - a_i}{x - a_i} \right)^k = 0 \quad (4)$$

egyenlet gyökei közötti összefüggésekkel, ha a (3) és (4) egyenletben az a coefficientensek nem negatívak.

Végül egy általánosabb tételt mutatunk ki az

$$f_h(x) = (x - a_{h_1})(x - a_{h_2}) \dots (x - a_{h_n}) = 0; \quad (h=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

egyenletek gyökeinek ismerete alapján az

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_m f_m(x) = 0$$

és

$$\frac{a_1}{f_1(x)} + \frac{a_2}{f_2(x)} + \dots + \frac{a_m}{f_m(x)} = 0 \quad (6)$$

egyenletek gyökeinek fekvésére, ha az a coefficientensek pozitívak.

Az (1) egyenletet a következőkben *alapegyenletnek*, a_1, a_2, \dots, a_n gyökpontjait *a gyökpontoknak*, együttesen alappontcsoportnak fogjuk nevezni, a (2) egyenletben a ξ -t pólusnak, az egyenletet magát a ξ pólus *első poláris egyenletének* nevezzük az alappontcsoportra vonatkozólag. Az a_1, a_2, \dots, a_n coefficientensekét az a_1, a_2, \dots illetőleg a_n gyökpont *súlyának* hívjuk és akkor, a mikor e súlyok egyenlők, a (2) egyenletről azt mondjuk, hogy a ξ pólus *közönséges vagy isobar* poláris egyenlete, míg az ellenkező esetben a (2) egyenlet *általánosított vagy anisobar poláris egyenlet*.

Az isobar poláris egyenlet megegyezik a közönségesen ismert poláris egyenlettel, amennyiben könnyen igazolható módon

$$f(x) \sum_{i=1}^n \frac{\xi - a_i}{x - a_i} = \xi \frac{df(x)}{dx} + x^{n-1} \frac{df\left(\frac{1}{x}\right)}{d\left(\frac{1}{x}\right)} = \Delta_{\xi} f(x). \quad (7)$$

A (2) egyenlet, a mely az (1)-re vonatkozólag anisobar poláris egyenlet, a

$$F(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n} = 0$$

nem szükségképpen algebrai egyenletre vonatkozólag isobar poláris egyenlet.

Anisobar poláris egyenletekre is érvényes tételeink egy részét E. LAGUERRE¹ állapította meg isobar poláris egyenletekre; s tételeit egy algebrai egyenlet komplex gyökeinek megközelítésére használta fel nagy sikerrel. Kivüle tudomásunk szerint másnak nincs idevágó vizsgálata.

1. §.

Jelöljük x -szel a (2) egyenletnek egy (α -któl különböző) gyökpontját, és legyen

$$x - a_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad \xi - a_k = \rho_k e^{i\psi_k}, \quad \varphi_k - \psi_k = \omega_k. \quad (8)$$

A (2) egyenletet $e^{i\delta} : f(x)$ -szel átszorozva, a (8) alatti értékek behelyettesítése után az egyenlet valós részére azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\rho_k}{r_k} \cos(\omega_k - \delta) = 0. \quad (9)$$

A (9) egyenlet csak akkor állhat fön, ha vagy valamennyi cosinus eltűnik, a mi akkor következik be, ha a ξ és x pontokon átmenő (s a δ által meghatározott) kör valamennyi a gyökponton keresztülmegy; vagy pedig a cosinusok között vannak pozitív és negatív értékűek. Ez utóbbi eset akkor fordul elő, ha az előbbi körön kívül is, belül is van a gyökpont. Ahhoz

¹ E. LAGUERRE: Oeuvres de LAGUERRE, tom. I., 133—139. old.

ugyanis, hogy valamennyi cosinus eltűnjék, szükséges, hogy az $x\xi$ vonaldarab valamennyi a gyökpontról az $\omega_1 = \delta + \frac{\pi}{2}$ és az $\omega_2 = \delta - \frac{\pi}{2} = \omega_1 - \pi$ szögek valamelyike alatt legyen látható. Áll tehát a következő tétel:

I. A ξ póluson és az a_1, a_2, \dots, a_n gyökpontokból álló alappontesoporra vonatkozó (isobar vagy anisobar) polárisának egy gyökpontján átmenő tetszőszerinti K körnek vagy kerületén fekszik valamennyi a gyökpont, vagy van legalább egy-egy a gyökpont a K körön belül és kívül is.

Ennek a tételnek egy más bizonyítását is adjuk a következő tétel alapján:

Ha az a_i oefficienssek pozitívak, akkor az

$$f(x) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - a_i} = 0 \quad (10)$$

egyenlet bármely gyökpontján keresztülmenő egyenesnek mindkét oldalán fekszik a gyökpont, ha valamennyi nem esik magára az egyenesre.

E tétel épp úgy bizonyítható be,¹ mint a (2) egyenletre vonatkozólag az I. tétel.

A (2) egyenlet az x és ξ simultan convarians függvénye. Az

$$y = \frac{Ax+B}{Cx+D}, \quad \eta = \frac{A\xi+B}{C\xi+D}, \quad \beta_i = \frac{Aa_i+B}{Ca_i+D} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

transformatio ugyanis a (2) egyenletet a következőbe viszi át:

$$(y - \beta_1)(y - \beta_2) \cdots (y - \beta_n) \sum_{i=1}^n a_i \frac{\eta - \beta_i}{x - a_i} = 0. \quad (12)$$

Ha $\xi = -\frac{D}{C}$, akkor $\eta = \infty$ lesz és a (12) egyenlet a (10) alakját veszi fel. Az invers lineáris transformatio a (10) egyenletre kimondott tételből az I. tételt adja.

Nevezük a ξ póluson átmenő köröket *poláris köröknek*,

¹ I. (II) és (III).

az oly körivpolygont, a melynek oldalai poláris körívek, *poláris polygonnak* és végül egy poláris polygont *konvexnek*, ha bármely poláris körrel való közös pontjai a poláris körön egyetlen körívet alkotnak; akkor az I. tétel alapján a következő tételek mondhatók ki:

II. *A poláris egyenlet gyökpontjai mind benne vannak az alappontcsoport pontjai köré feszíthető konvex poláris polygon által határolt annak a legkisebb tartománynak belsejében vagy határán, a mely a pólust belsejében nem tartalmazza. A tartomány határán csak akkor fekehtik a poláris egyenlet valamelyik gyökpontja, ha ott két a gyökpont egymással, vagy a ξ pólus egy a gyökponttal egybeesik, vagy végül a poláris polygon egy kör.*

III. *Ha az alappontcsoport egy pontja sem fekszik a K körön kívül, akkor a K körön vagy azon kívül fekvő bármely pólus poláris egyenletének egy gyökpontja sem fekehtik a K körön kívül.*

IV. *Ha az alappontcsoportnak egy pontja sem fekszik a K körön belül, akkor a K körön vagy azon felül fekvő bármely pólus poláris egyenletének egy gyökpontja sem fekehtik a K körön belül.¹*

V. *Ha az alappontcsoport összes gyökpontjai a K körön fekszenek, akkor a K körön fekvő bármely pólus poláris egyenletének összes gyökpontjai szintén a K körön fekszenek és a pólussal együtt elválasztják egymástól az alappontcsoport pontjait.*

A tétel második része könnyen igazolható a (10) alatti egyenleten, a mikor az α -k reálisok és $\xi = \infty$. Ebből az esetből lineáris transzformációval lehozható az V. tétel, amely közvetlenül is könnyen igazolható.

Az V. tételből következnek még a következő könnyen igazolható tételek.

VI. *Bármely ξ pólus x poláris pontja (poláris egyenletének egyetlen gyökpontja) az a_1 súlyú a_1 és a_2 súlyú a_2 pontpárra vonatkozólag az a_1, a_2, ξ pontokon átmenő körön van és x, ξ, a_1, a_2 négy pont kettősviszonya:*

¹ E két utóbbi tételt isobar poláris egyenletekre E. LAGUERRE is ki-mondotta, l. i. h.

$$(x, \xi, a_1, a_2) = \frac{x-a_1}{x-a_2} : \frac{\xi-a_1}{\xi-a_2} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

A ξ pólus isobar poláris pontja az a_1, a_2 pontpárra vonatkozólag harmonikusan választja el a ξ, a_1, a_2 pontokon átmenő körön a ξ pontot az a_1, a_2 pontoktól.¹

Ez a tétel a (2) egyenleten közvetlenül is igazolható.

VII. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n és a ξ pólus mind reálisak, akkor a poláris egyenlet gyökei mind reálisak és a ξ pólussal együtt a zártnak tekintett valós tengelyen elválasztják egymástól az α gyökpontokat.

Az V. és VII. tétel kiegészítésekképpen még a következő tételt mondhatjuk ki:

VIII. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n gyökpontok egy körön (vagy egy egyenesen) vannak és a ξ ezen a körön (egyenesen) bizonyos irányban mozog, akkor a poláris egyenlet (ξ -vel változó) gyökpontjai azon a körön (egyenesen) ξ -vel ellenkező irányban mozognak.

A tételt elégséges reális és egymástól különböző α -kra és reális ξ -re igazolni. Ilyen föltevés mellett a (2) egyenletből

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \frac{a_i}{x-a_i}}{\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{x-a_i}}, \quad (13)$$

a miből differenciálás és egyszerű átalakítások után

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\sum_{i,k} a_i a_k \left[\frac{a_i - a_k}{(x-a_i)(x-a_k)} \right]^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{x-a_i} \right)^2}, \quad (14)$$

a hol a számlálóban az összegezés az 1, 2, ..., n indexek minden 2-od osztályú ismétlés nélküli kombinációjára kiterjesztendő.

¹ Az isobar poláris pontnak, mint negyedik harmonikus pontnak szerkesztésére nézve l. például CESÁRO-KOWALEWSKI: Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis etc., Leipzig, (1904), 356. old.

A (14)-ből következik, hogy a ξ és az x gyökpontok ellenkező irányban változnak.¹

Ezek után a VIII. tétel lineáris transzformációval igazoltnak tekinthető.

2. §.

Az 1. §-ban kapott tételeknél többet mondókat is kaphatunk, ha az

$$e^{i\delta} \sum_{k=1}^n a_k \frac{\xi - a_k}{x - a_k} = 0 \quad (15)$$

egyenlet tagjai valós részének számértékét is tekintetbe vesszük. Egyszerűség kedvéért válaszszuk úgy a koordinatarendszerünket, hogy egy $x = 0$ és a $\xi = s$ pozitív szám legyen. Ha $a_k = r_k e^{i\varphi_k}$, akkor a (15) egyenlet egy tagjának valós része:

$$\begin{aligned} a_k \left[\cos \delta - \frac{s \cos(\varphi_k - \delta)}{r_k} \right] &= a_k \cos \delta \left[1 - \frac{s}{\cos \delta} \cdot \frac{r_k}{\cos(\varphi_k - \delta)} \right] = \\ &= a_k \cos \delta \left(1 - \frac{d}{d_k} \right) = a_k \cos \delta \frac{d_k - d}{d_k}, \end{aligned} \quad (16)$$

a hol d , illetőleg d_k oly körnek az átmérőjét jelenti, a mely az x és ξ , illetőleg az x és a_k pontokon keresztül megy és középpontja az $x\xi$ tengellyel δ szöget alkotó egyenesen van.

A (15) és (16) alapján a következő tétel mondható ki:

IX. Vezessünk keresztül a ξ póluson és a_i súlyú a_i ($i=1, 2, \dots, n$) alappontcsoportra vonatkozó polárisának egy x gyökpontján egy tetszőszerinti K kört, az a_1, a_2, \dots, a_n pontokon pedig a K kört az x gyökpontban érintő K_1, K_2, \dots, K_n köröket: akkor e körök d, d_1, d_2, \dots, d_n átmérői között a

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d_i - d}{d_i} = 0 \quad (17)$$

egyenlet áll fenn, a melyben d pozitív és a d_1, d_2, \dots, d_n közül azok pozitívok, a melyeknek középpontjai az x gyökponttól abban az

¹ A VIII. tételt reális a -kra és isobar poláris egyenletre E. LA-GUERRE bizonyította be, idézett helyen, 137—138. old. Bizonyításmódszere anisobar poláris egyenletre nem alkalmazható.

irányban vannak, mint a K kör középpontja, a többiek pedig negatívak. Ha a K kör egyenesbe megy át, akkor az előbbi egyenlet helyett a következő áll fenn:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{d_k} = 0. \tag{18}$$

Ezekből az egyenletekből a pozitív és negatív tagok elkülönítése után épp úgy lehet egyenlőtlenségeket lehozni és tételeket megállapítani, mint a (II)–(IV) dolgozatokban tettük. A (18) egyenlethől lehozható tételek a (II)–(III) dolgozat megfelelő tételeivel megegyeznek. A hely szűke miatt e tételek kifejezését el kell hagynunk.

3. §.

Abban az esetben, a mikor ξ és az a gyökpontok mind reálisak és közöttük a

$$a_r \leq a_{r-1} \leq \dots \leq a_2 \leq a_1 \leq \xi \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_{r+2} \leq a_{r+1} \tag{19}$$

nagysági viszony áll fenn, a ξ pólus a -kra vonatkozó isobar poláris egyenletének az (a_k, a_{k+1}) intervallumban fekvő x gyökére a

$$\begin{aligned} & \frac{\xi}{x - a_n} \cdot \frac{a_n}{a_n} + \frac{\xi}{x - a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \dots + \frac{\xi}{x - a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_{k+1}} \\ &= \frac{\xi}{a_k} \cdot \frac{a_n}{x} + \frac{\xi}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_n}{x} + \dots + \frac{\xi}{a_1} \cdot \frac{a_1}{x} \end{aligned} \tag{20}$$

egyenletet írhatjuk föl, a melyben minden tag előjele ugyanaz. Ebből az egyenlethől az

$$\begin{aligned} n - 1 - n - k &\geq \frac{x - a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_{k+1}}{x} : \frac{\xi}{\xi} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n-1}, \\ \frac{x - a_n}{a_k} \cdot \frac{a_n}{x} : \frac{\xi}{\xi} \cdot \frac{a_n}{a_k} &\geq \frac{n-k}{k} \geq \frac{1}{n-1}, \\ \frac{a_1 - x}{x - a_{k+1}} : \frac{\xi}{\xi} \cdot \frac{a_1}{a_{k+1}} &\geq \frac{k}{n-k} \geq \frac{1}{n-1} \end{aligned} \tag{21}$$

egyenlőtlenségek hozhatók le, melyekből számos tétel származtatható. Ezek közül csak néhányat fejezünk ki a hely szűke miatt.

X. Ha a_1, a_2, \dots, a_n mind reálisak és ha két szomszédos gyökponthoz (a_k, a_{k+1}) intervallumát n egyenlő részre osztjuk: akkor az (a_k, a_{k+1}) intervallumon kívül fekvő bármely reális pólus isobar polarisának a két szélső osztásrész közül abba az osztályrészbe nem eshetik gyökponthoz, a mely a pólustól távolabb van.

Ha pedig az (a_k, a_{k+1}) intervallumot két oldalról az intervallum $(n-2)$ -ed részével megnöveljük: akkor e két osztásrész közül abban, a mely a ξ -hez közelebb esik, nem felehetik az (a_k, a_{k+1}) intervallumba eső tetszőszerinti ξ pólus isobar polaris egyenletének minden gyökponthoz.

XI. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n mind reális és közöttük a_1 a legkisebb és a_n a legnagyobb, s ha továbbá az (a_1, a_n) intervallumot n egyenlő részre osztjuk: akkor az (a_1, a_n) intervallumon kívül eső bármely reális ξ pólus mellett az isobar polaris egyenletnek van gyöke a két szélső osztásrész közül legalább abban, a mely a pólushoz közelebb van.

Ha pedig az (a_1, a_n) intervallumot annak $(n-2)$ -ed részével két oldalról megtoldjuk: akkor az (a_1, a_n) intervallum belsőjében fekvő pólus isobar polaris egyenletének e két osztásrész közül nem lehet gyöke abban, a mely a pólustól távolabb van.

4. §.

Az

$$f(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} (a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}) \frac{(\xi - a_{i_1})(\xi - a_{i_2}) \dots (\xi - a_{i_k})}{(r - a_{i_1})(r - a_{i_2}) \dots (r - a_{i_k})} = 0 \quad (22)$$

egyenletet, a melyben az összegezés az $1, 2, \dots, n$ számok minden k -ad osztályú combinatiójára kiterjesztendő s a melyben az a coefficiensok pozitívok, a ξ pólus a_i súlyú: az a_i ($1, 2, \dots, n$) alappontcsoportra vonatkozó k -adik ($n - k$ -ad fokú) polaris egyenletének fogjuk nevezni. Abban az esetben, a mikor $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, a (22) egyenletet isobar k -adik polaris egyenletnek fogjuk nevezni.

Könnyen igazolható a következő tétel:

XII. Az alappontcsoport pontjainak tetszőszerinti pozitív súlyja mellett a második polaris egyenlet az elsőnek, a harmadik

a másodíknak, a k -adik a $(k-1)$ -ediknek isobar első poláris egyenlete.

Ebből következik, hogy az I. IV. tételek változatlanul, az V. és VI. tételek azzal a változtatással, hogy a k -adik poláris egyenlet gyökpontjai a megfelelő helyzetben a $(k-1)$ -dik poláris egyenlet gyökpontjait választják el egymástól, k -adik poláris egyenletre is érvényesek. A többi tételnek megfelelő tétel megállapítása sem okoz nehézséget.

Ha a (7) egyenlet szerint a ξ pólusnak az $f(x) = 0$ egyenletre vonatkozó első poláris egyenletének baloldalát $\Delta_{\xi} f(r)$ -szel jelöljük, akkor a k -adiknak baloldalát $\Delta_{\xi}^k f(x)$ jelölheti. A poláris függvények ismert tulajdonsága alapján a

$$\Delta_{\xi}^{k+h} f(x) = \Delta_{\xi}^k (\Delta_{\xi}^h f(r)) = \Delta_{\xi}^k (\Delta_{\xi}^h f(r))$$

és

$$\frac{1}{k!} \Delta_{\xi}^k f(r) = \frac{1}{(n-k)!} \Delta_x^{n-k} f(\xi) \quad (23)$$

symbolikus egyenleteket írhatjuk fel, a melyeknek jelentése könnyen felismerhető. Például a második symbolikus egyenlet szerint:

XIII. Ha az $f(r) = 0$ egyenletre vonatkozólag x a ξ pólus isobar k -adik poláris egyenletének egy gyökpontja, akkor ξ az x pólus isobar $(n-k)$ -adik poláris egyenletének egy gyökpontja.

5. §.

Ebben a §-ban a (22)-nél általánosabb

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{(\xi - a_{i_1})(\xi - a_{i_2}) \dots (\xi - a_{i_k})}{(r - a_{i_1})(r - a_{i_2}) \dots (r - a_{i_k})} = 0 \quad (23)$$

egyenlet gyökeinek az a gyökpontokkal való összefüggését vizsgáljuk. Ebben az egyenletben az a együtthatók nem negatívak és az összegezés az $1, 2, \dots, n$ elemek minden k -ad osztályú ismétléses kombinációjára kiterjesztendő.

A (8) alatti jelölések mellett a (23) egyenletnek $e^{ik\delta}$ -val átszorozása után az

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{e^{i_1 \theta_{i_1} \dots i_k \theta_{i_k}}}{r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}} [\cos(\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k} - k\delta) + i \sin(\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k} - k\delta)] = 0 \quad (24)$$

egyenletet kapjuk. Ez egyenlet minden tagjának képzetes része nem lehet ugyanazon előjelű, ennél fogva az $1, 2, \dots, n$ index minden k -ad osztályú ismétléses combinatorijára, a melyre nézve a megfelelő a pozitív, csak akkor állhat fenn egy

$$2p\pi \leq \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k} - k\delta \leq (2p + 1)\pi \quad (25)$$

egyenlőtlenség, a hol p egy tetszésszerű számot jelent, ha valamennyi egyenlőtlenség egyenlőségi jellel teljesül.

Ebből következik, hogy csak akkor állhat fenn minden ω_i -re a

$$\delta \leq \omega_i \leq \delta + \frac{\pi}{k}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

egyenlőtlenség, ha valamennyi egyenlőségi jellel teljesül.

Ennek alapján a (23) egyenletre a következő tételt mondhatjuk ki:

XIV. Legyen x (ξ -nek egy megadott értéke mellett) a

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{(\xi - a_{i_1})(\xi - a_{i_2}) \dots (\xi - a_{i_k})}{(x - a_{i_1})(x - a_{i_2}) \dots (x - a_{i_k})} = 0$$

egyenletnek, a melyben az a oefficienssek nem negatívak és az összegezés az $1, 2, \dots, n$ index k -ad osztályú ismétléses combinatorióra kiterjesztendő, egy gyöke, akkor a ξ és x pontokon átmenő $\frac{\pi}{k}$ szögű körkétszögek közül egy sem tartalmazhatja belsejében az összes a gyökpontokat.

Ennek alapján könnyű volna az 1. §. több tételének megfelelőjét a (23) egyenletre megállapítani. A XIV. tételből következik:

XV. A

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{(r - a_{i_1})(r - a_{i_2}) \dots (r - a_{i_k})} = 0 \quad (27)$$

$(i_h = 1, 2, \dots, n, \quad h=1, 2, \dots, k)$

egyenletnek, a melyben az a oefficienssek nem negatívak, minden gyökpontja benne van annak a körívektől határolt tartománynak belsejében vagy határán, melynek határpontjaiból az

a gyökpontok köré feszíthető leghisebb konvex poligon $\frac{\pi}{k}$ szög alatt látszik.

A (23) egyenlet magában foglalja a (3) és (4) speciálisabb egyenleteket. A (4) egyenletre a (25) egyenlőtlenségből a

$$\delta \leq \frac{2\rho_i}{k} \pi \leq \omega_i \leq \delta + \frac{2\rho_i + 1}{k} \pi \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

egyenlőtlenségek fennállásának lehetetlensége következik, ha valamennyi nem egyenlőségi jellel teljesül. Ebből következik a következő tétel:

XVI. Ha a ξ ponton és a

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\xi}{x} - \frac{a_i}{a_i} \right)^k = 0$$

egyenletnek, melyben az a_i együtthatók pozitívak, egy x gyökpontján k egymással rendre $\frac{\pi}{k}$ szöget alkotó kört vezetünk, akkor az így kapott $2k$ számú $\frac{\pi}{k}$ szögű körkírszög közül k nem szomszédos nem tartalmazhatja magában az összes a gyökpontokat, kivéve azt az esetet, a mikor az a gyökpontok a k körre esnek.

A (3) egyenletre is le lehet hozni a (26)-tól különböző egyenlőtlenségi feltételt. Ha ugyanis a (24) egyenletet, melyben most i_1, i_2, \dots, i_k egymástól különbözők, $e^{(\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k})}$ -vel végigszorozzuk, akkor a (25) helyett a

$$2\rho\pi \leq \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k} \leq (n-k)\delta \leq (2\rho+1)\pi \quad (29)$$

egyenlőtlenségekhez jutunk. Ebből következik, hogy valamennyi ω_i -re csak akkor állhat fenn a

$$\delta \leq \omega_i \leq \delta + \frac{\pi}{n-k}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

egyenlőtlenség, ha valamennyi egyenlőségi jellel teljesül.

Ennek alapján kimondható a következő tétel:

XVII. Ha x jelöli az

$$f(x) \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} \left(\frac{\xi}{x} - \frac{a_{i_1}}{a_{i_1}} \right) \left(\frac{\xi}{x} - \frac{a_{i_2}}{a_{i_2}} \right) \dots \left(\frac{\xi}{x} - \frac{a_{i_k}}{a_{i_k}} \right) = 0$$

egyenletnek, melyben az a *coëfficiensek* nem negatívak és az összegezés az 1, 2, ..., *n* index minden ismétlés nélküli *k*-ad osztályú combinatiójára kiterjesztendő, egy gyökél, akkor a ξ és x ponton nem lehet olyan $\frac{\pi}{k}$ vagy $\frac{\pi}{n-k}$ szögű körkétszöget rajzolni, a mely az összes a gyökpontokat magában foglalná, kivéve azt az esetet, a mikor az a gyökpontok a két körre esnek.

A tételben szereplő körkétszögek abban az esetben, a mikor

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}, \quad (i_k - 1, 2, \dots, n, \quad h = 1, 2, \dots, k) \quad (31)$$

egyenletek nem negatív a_i *coëfficiensekkel* teljesíthetők, egész körrel pótolhatók (4. §.). Nem pótolhatók azonban általánosan akkor, ha a (31) egyenletek nem állanak fenn, amiről egyszerű példákon könnyű meggyőződni.

A XVI. tételből lehozható tételeket illetőleg utalunk (IV.) dolgozatunkra. A hely szűke miatt az e §-ba tartozó tételek sorozatát kénytelenek vagyunk befejezni.

6. §.

Dolgozatunkat a következő tétel kimutatásával zárjuk be:
XVIII. Ha T az a legkisebb konver tartomány, a mely az

$$f_h(x) = (x - a_{h_1})(x - a_{h_2}) \dots (x - a_{h_m}), \quad (h = 1, 2, \dots, m) \quad (32)$$

egyenleteknek összes gyökeit tartalmazza, akkor az

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_m f_m(x) = 0, \\ \frac{a_1}{f_1(x)} + \frac{a_2}{f_2(x)} + \dots + \frac{a_m}{f_m(x)} = 0 \quad (33)$$

egyenleteknek, melyekben az a *coëfficiensek* nem negatívak (de nem mind zérók), összes gyökei annak a T_n tartománynak belsőjében vagy határán vannak, melynek határpontjaiból a $T \frac{\pi}{n}$ szög alatt látszik.

Legyenek

$$r^m - a_{hk} = r_{hk} e^{-i\varphi_{hk}}, \quad \varphi_h = \frac{\varphi_{h_1} + \varphi_{h_2} + \dots + \varphi_{h_n}}{n}, \quad (34)$$

(k = 1, 2, ..., n; h = 1, 2, ..., m)

akkor a (33) alatti két egyenlethől $e^{i\pi\delta}$, illetőleg $e^{i\pi\delta}$ -val való átszorzás után a

$$\sum_{h=1}^m a_{hk} r_{h_1} r_{h_2} \dots r_{h_n} [\cos n(\varphi_h - \delta) - i \sin n(\varphi_h - \delta)] = 0,$$

$$\sum_{h=1}^m a_{hk} \frac{\cos n(\varphi_h - \delta) - i \sin n(\varphi_h - \delta)}{r_{h_1} r_{h_2} \dots r_{h_n}} = 0$$

egyenleteket kapjuk. Ebből következik, hogy minden φ_h -ra csak akkor állhat fenn egy-egy

$$2\gamma_h \pi \leq n(\varphi_h - \delta) \leq (2\gamma_h + 1)\pi, \quad (h=1, 2, \dots, m)$$

egyenlőtlenség, melyben γ_h egész számot jelent, ha valamennyi egyenlőségi jellel teljesül. Valamennyi φ_h -ra tehát csak akkor állhat fenn a

$$\delta \leq \varphi_h \leq \delta + \frac{\pi}{n}, \quad (h=1, 2, \dots, m)$$

egyenlőtlenség, ha φ_h értékei δ vagy $\delta + \frac{\pi}{n}$ valamennyi h -ra.

Ezzel a XVIII. tétel igazolva van.

Hogy a XVIII. tétel által adott T_n tartomány általánoságban nem kisebbíthető, kiténik az

$$a_1(x+1)^2 + a_2(x-1)^2 = 0, \text{ azaz } \frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{a_2}{(x+1)^2} = 0$$

egyenlethől, melynek gyökei a_1 és a_2 tetszésszerűen nem negatív értékei mellett teljesen betöltik a T_2 egység sugarú kör kerületét.

Hasonlóképpen T_3 határára esik az

$$(x+1)^3 + (x-1)^3 = (x^2+3)x = 0$$

egyenletnek két complex gyöke.

