MATHEMATIKAI

ÉS

TERMÉSZETTUDOMÁNYI

ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

XXXV. KÖTET.

1—2. FÜZET.

I—IV. TÁBLÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1917.

Kivonat a M. Tud. Akadémia III. osztályának ügyrendjéből.

62. §. A «Math. és Természettud. Értesítő» a M. Tud. Akadémia III. osztályának folyóirata, melyben az ülésein részletesen bemutatott vagy csak röviden bejelentett tudományos munkálatokat teszi közzé, föltéve, hogy a követelményeknek megfelelnek.

Az Értesítőben csak oly közlemények foglalhatnak helyet, melyek az illető szaktudomány művelésében az elért eredmények vagy a használt módszerek tekintetében haladást jeleznek és irodalmi szempontból is kellő gonddal készültek. Terjedelem tekintetében az Akadémia rövid és szabatos fogalmazást kíván, melyben a dolgozat tudományos tartalmának megértésére szükséges részletek kellően kidomborodnak.

Az egyes czikkek terjedelme három ívet meg nem haladhat; egyes rendkívüli esetekben csak az osztály adhatja meg az engedélyt nagyobb terjedelmű dolgozat közzétételére, mely azonban az öt ívet ekkor sem haladhatja túl.

A czikkekhez szükségelt ábrák rendszerint egyszerűek és a szöveg közé illesztendők; csak a hol a tárgy ezt okvetlenül megkívánja, adhatók külön mellékletet képező táblák.

Az Értesítőt az osztálytitkár szerkeszti, ki a megejtett birálat után a maga részéről is őrködni tartozik a felett, hogy a közzétett dolgozatok a jelzett követelmények szempontjából kifogásolhatók ne legyenek. Abban az esetben, midőn a benyujtó tag az osztálytitkárral megegyezésre jutni nem tud, joga van az ügyben az osztály határozatát kikérni.

Az Akadémia elvárja tagjaitól, hogy akkor is, midőn az Akadémián kívül álló szakférfiak dolgozatait mutatják be, már a bemutatás előtt meggyőződjenek arról, hogy a közzétételre ajánlott dolgozatok tartalmilag és alakilag a felsorolt követelményeket kielégítik-e? Arra, hogy valamely szerző tudományos dolgozata az Értesítőbe felvétessék, különben elég, ha a szerző azt az osztálytitkárnak beküldi, ki a dolgozat czímét az osztály ülésén bejelenti és kedvező birálat esetében az Értesítőbe fölveszi.

Minden közlemény legott a bemutatás után hibátlanul, tisztán és olvashatólag írva átadandó az osztálytitkárnak. Csak az osztály határozatából engedhető meg — fontos akadályok esetében — utólagos átvétel.

Az Értesítő évi öt füzetben jelenik meg; a füzetek megjelenési határideje február, április, június, október és deczember hónapoknak mindenkor utolsó napja.

A szerzők értekezéseik *25 különlenyomatát* díjtalanul kapják. Az e számon felül kívánt különlenyomatok költségét szerzők fedezik.

A KETTŐS INTEGRÁLOK VARIATIÓJÁRÓL.

HAAR ALFRÉD-tól.

A variatioszámítás alaptételén — a mennyiben olyan problémákról van szó, a melyekben az ismeretlen függvény csak egy változótól függ — a következő, DU BOIS REYMOND-tól eredő, lemmát szokás érteni:

Ha $u(x)$ folytonos függvénye az x-nek az $x_1 \leq x \leq x_2$ intervallumban és ha

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \frac{d\zeta}{dx} dx = 0,$$

mindazokra a $\zeta(x)$ függvényekre nézve, melyek intervallumunkban folytonosan differentiálhatók és az intervallum határain eltűnnek, akkor $u(x) = \text{const.}$

E tétel segélyével minden nehézség nélkül levezethető a variatioszámítás úgynevezett EULER-LAGRANGE-féle differentiálegyenlete, anélkül, hogy a variatioprobléma megoldásáról egyebet kellene feltételezni, mint azt, hogy első differentiálhányadosa folytonos függvény.

Ezzel ellentétben a variatioszámítás ama legegyszerűbb feladatainál, melyeknél az ismeretlen függvény két független változótól függ, eddigelé nem sikerült a keresett függvény számára differentiálegyenleteket felállítani a nélkül a — teljesen természetellenes — megszorítás nélkül, hogy a keresett függvény második differentiálhányadosai is létezzenek. HADAMARD[1] egy egyszerű példával kimutatta, hogy ebben az esetben az első variatio eltünéséből nem következik a keresett függvény má-

[1] Comptes Rendus (1907) T. 144. p. 1092—1093.

sodik differentiálhányadosainak létezése; az HADAMARD-féle pél dából nyomban kitűnik, hogy egy kettős integrál első variatiója eltűnhetik, anélkül, hogy a benne szereplő függvény második differentiálhányadosai léteznének.

Ezek után első pillanatra lehetetlennek tűnik fel egy kettős integrál első variatiójának eltünését további megszorítás nélkül, differentiálegyenletek segélyével kifejezni; más szóval a megfelelő variatioprobléma megoldására differentiálegyenleteket levezetni anélkül, hogy e megoldás második differentiálhányadosának létezését feltételeznők. Ennek daczára sikerül egy ilyen differentiálegyenlet levezetése egy olyan tétel segélyével, mely mindenben analog a fent említett DU BOIS REYMOND-féle tétellel s a mely a kétváltozós függvények elméletében ugyanazt a szerepet játszsza, mint amaz az egyváltozós függvények körében.

Ez a tétel, melynek bebizonyítása legfőbb czélja ennek a dolgozatnak, a következőképen hangzik:

Ha $u(x, y)$ és $v(x, y)$ olyan függvényei az x és y független változóknak, melyek egy megadott T tartomány belsejében folytonosak, és ha

$$\iint_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy=0$$

mindazokra a $\zeta(x, y)$ függvényekre nézve, melyek e tartomány határán eltűnnek, belsejében pedig x és y szerint folytonosan differentiálhatók, akkor — bármely a T tartomány belsejében fekvő zárt görbét jelöl G — a következő integrál:

$$\int_{(G)}(udy-vdx)$$

értéke zérussal egyenlő. Más szóval a mondott feltételek mellett *létezik egy oly $\omega(x, y)$ függvény, melynek első differentiálhányadosai tartományunkban folytonosak s a mely kielégíti a*

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-v(x, y),\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=u(x, y)$$

egyenleteket.

E dolgozat 1. §-a ennek a tételnek bizonyítását tartalmazza.

A 2. §-ban a

$$\iint\limits_{(T)} f(p, q, x, y)\,dxdy = \text{min.} \quad \text{és} \quad \iint\limits_{(T)} f(p, q, z, x, y)\,dxdy = \text{min.}$$

variatioproblémákkal foglalkozunk, a hol — mint szokásos — a $z(x, y)$ ismeretlen függvény első differentiálhányadosait p- és q-val jelöltük.

Az első §-ban levezetett tétel segélyével e variatioproblémák olyan megoldásai számára, melyek a T tartományban folytonos első differentiálhányadosokkal birnak, minden további megszorítás nélkül oly differentiálegyenletrendszert vezetünk le, mely az első esetben két-, a második esetben pedig három differentiálegyenletből áll. Ezekben az egyenletekben az ismeretlen megoldáshoz az első esetben *egy*, a második esetben pedig *két* segédfüggvény járul, úgy hogy mindkét esetben az egyenletek száma megegyezik a meghatározandó függvények számával.

Dolgozatunk végén kérdéstételünk nehány általánosítására utalunk, a melyek a variatioszámítás általánosabb problémáinál hasonló szerepet játszanak, mint az 1. §-ban levezetett tételünk a kettős integrálokra vonatkozó legegyszerűbb variatioproblémánál.

1. §.

A bevezetésben kimondott tételünket *négy* lépésben bizonyítjuk be.

1°) Kimutatjuk *először,* hogy a mondott feltételek mellett a következő integrál:

$$\iint\limits_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dxdy$$

akkor is eltűnik, ha a T tartomány határán eltünő $\zeta(x, y)$ függvény első differentiálhányadosainak e tartomány belsejé-

ben fekvő valamely reguláris görbe[1] *mentén véges szakadásuk van, a tartomány egyéb pontjában pedig a hely folytonos függvényei.*

Hogy ezt kimutathassuk, választunk egy positiv M számot úgy, hogy az

$$u(x, y), \quad v(x, y), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

függvények absolut értékeinek maximuma a T tartományban e M határ alatt maradjon; ezután pedig azt a görbe-darabot, a melynek mentén $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ és $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ szakadásossá válik, körülveszszük egy olyan zárt reguláris görbével — például zárt polygonvonallal — a mely ugyancsak a tartomány belsejében fekszik és egy δ nagyságú t területet határol el. Természetesen ez a zárt görbe megválasztható úgy, hogy ez a terület tetszésszerinti kicsiny legyen. A $\bar\zeta(x, y)$ segédfüggvényt ezek után úgy választjuk meg, hogy az a T tartomány ama részében, mely a t-n kívül fekszik, $\zeta(x, y)$-nal egyezzék meg; t *belsejében pedig* $\bar\zeta(x, y)$-ról csak azt kötjük ki, hogy x és y szerinti differentiálhányadosai folytonosak és absolut értékben M-nél kisebbek legyenek.[2] Mivel $\bar\zeta(x, y)$ — e constructio értelmében — a T tartomány határán eltünik és annak belsejében folytonos differentiálhányadosokkal bir, azért feltevésünk értelmében

$$\iint\limits_{(T)}\left(u\frac{\partial\bar\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\bar\zeta}{\partial y}\right)dxdy=0;$$

ennélfogva

$$\iint\limits_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(t)}\left(u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\bar\zeta}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\bar\zeta}{\partial y}\right)\right)dxdy.$$

---

[1] Az alkalmazásokban ez a vonaldarab egyenes vonalakból fog állani.

[2] E segédfüggvény létezése nyilvánvaló.

Ámde az

$$u,\ v,\ \frac{\partial\zeta}{\partial x},\ \frac{\partial\zeta}{\partial y},\ \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}$$

függvények absolut értékre nézve M-nél kisebbek s a t tartomány területe δ-val egyenlő; ezért az utóbbi integrál absolut értéke kisebb vagy egyenlő

$$4M^2\delta\text{-val},$$

s így egyszersmind

$$\left|\iint\limits_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy\right| \leqq 4M^2\delta.$$

Minthogy pedig δ tetszés szerint kicsinynyé tehető, azért ez utóbbi egyenletből nyomban következik, hogy

$$\iint\limits_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

2°) Kimutatjuk *másodszor*, hogy az

$$\int\limits_{(Q)}(udy - vdx)$$

integrál értéke zérussal egyenlő, ha Q olyan négyzetet jelent, mely T belsejében fekszik s melynek oldalai a coordinata-tengelyekkel párhuzamosak.

E végből — alkalmas módon — új változókat vezetek be, melyek bizonyos szempontból a poláris coordinatákhoz hasonlóknak mondhatók, a melyeknél azonban concentrikus és hasonló helyzetű négyzetek játszszák azt a szerepet, a melylyel a polár-coordinatáknál a kezdőpont körüli körök birnak. Jelöljük O-val derékszögű coordinatarendszerünk kezdőpontját s legyen P a sík egy tetszésszerinti pontja, melynek coordinatái x és y. Az új változók egyike legyen már most az a ϑ szög, a melyet az OP irány a positiv x-tengelylyel bezár. Második változóul (ϱ) pedig annak a négyzetnek féloldalhosszát vezetjük be, melynek középpontja O, oldalai az x-, illetőleg az y-tengelylyel párhuzamosak s a mely áthalad a P ponton; ez a ϱ coordinata mindig positiv.

A most bevezetett új coordinaták elseje a P pont CARTESIUS-féle coordinatáiból a

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} \tag{1}$$

képlet segélyével számítható ki. A másik coordinata számára különböző kifejezéseket nyerünk, a szerint, a mint ϑ a következő négy egyenlőtlenség:

$$\overset{\mathrm{I}}{-\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}}, \quad \overset{\mathrm{II}}{\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{3\pi}{4}}, \quad \overset{\mathrm{III}}{\frac{3\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{5\pi}{4}}, \quad \overset{\mathrm{IV}}{\frac{5\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{7\pi}{4}}$$

elsejét, másodikát, harmadikát, vagy negyedikét elégíti ki.

Ez a négy egyenlőtlenség a síkot négy quadransra bontja, a melyet rendre I-, II-, III-, IV-gyel akarunk jelölni. Az egyes quadransokban a következő kifejezések adódnak új változóink számára:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Az I. quadransban:} & x = \varrho; & \text{tehát} & y = \varrho \operatorname{tg} \vartheta; \\ \text{a II.} \quad « & y = \varrho; & « & x = \varrho \operatorname{ctg} \vartheta; \\ \text{a III.} \quad « & x = -\varrho; & « & y = -\varrho \operatorname{tg} \vartheta; \\ \text{a IV.} \quad « & y = -\varrho; & « & x = -\varrho \operatorname{ctg} \vartheta. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ennélfogva a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)} = \frac{\partial x}{\partial \varrho} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

függvénydetermináns számára is különböző kifejezések adódnak a különböző quadransokban. Könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)} = \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} \quad \text{az I. és III. quadransban;}$$

$$= \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} \quad \text{a II. és IV.} \quad « \quad .$$

Legyen már most $f(x, y)$ az x és y változóknak adott függvénye és vezessük be (1) és (2) formuláink segélyével ezek helyébe az ott értelmezett ϱ és ϑ változókat. Függvényünk ekkor a ϱ és ϑ valamely függvényébe $(f(\varrho, \vartheta))$ megy át. Ha függvényünk x és y szerinti differentiálhányadosait ez új változók szerinti differentiálhányadosaival fejezzük ki, természetesen különböző összefüggésekre jutunk, a szerint, a mint a kérdéses pont az I., II., III. vagy IV. quadransban fekszik.

Jelesen ha pontunk az I. vagy III. quadransban fekszik, akkor

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \pm \frac{\partial f}{\partial \varrho} \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \pm \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

a hol mindenütt a felső, illetőleg az alsó előjel veendő, a szerint, a mint a pont az I. vagy III. quadransban fekszik.

Ha pedig pontunk a II. vagy IV. quadrans pontja, akkor

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \pm \frac{\partial f}{\partial \varrho} \pm \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

a hol ismét a felső, illetőleg az alsó előjel veendő, a szerint, a mint pontunk a II. vagy IV. quadransban fekszik.

Szükségünk lesz még az

$$
\iint\limits_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx dy
$$

integrál transformálására új coordinatáinkra.

Jelöljük T_{I}-, T_{II}-, T_{III}-, T_{IV}-gyel T tartományunk ama részeit, a melyek az I., II., III. illetőleg a IV. quadransban fekszenek. Tekintettel a (3) és (4) alatti formulákra, az utóbbi integrál ekkor a következő négy integrál összegébe megy át:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(T_{\mathrm{I}})} \left\{ u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} - \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho} \right) + v \left(+ \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta} d\varrho d\vartheta + \\
+ &\iint\limits_{(T_{\mathrm{II}})} \left\{ u \left(- \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho} \right) + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\sin^2\vartheta} d\varrho d\vartheta + \\
+ &\iint\limits_{(T_{\mathrm{III}})} \left\{ u \left(- \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho} \right) + v \left(- \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta} d\varrho d\vartheta + \\
+ &\iint\limits_{(T_{\mathrm{IV}})} \left\{ u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho} \right) + v \left(- \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} - \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\sin^2\vartheta} d\varrho d\vartheta.
\end{aligned}
$$

Ezek után az előkészületek után visszatérünk eredeti állításunk bebizonyítására, hogy ugyanis:

$$\int_{(Q)} (u dy - v dx) = 0,$$

ha Q a T tartomány belsejében fekvő olyan négyzetet jelöl, melynek oldalai a coordinatatengelyekkel párhuzamosak.

Legyen e végből Q_1 és Q_2 két concentrikus négyzet, melynek oldalai az előírt irányokkal párhuzamosak. Coordinata-eltolással elérhetjük, hogy coordinatáink kezdőpontja e négyzetek közös középpontjába essék. Feltesszük, hogy a Q_1 és Q_2 négyzetek a T tartomány belsejében fekszenek és hogy oldalhosszuk felét a_1-gyel, illetőleg a_2-vel jelöljük ($a_1 < a_2$). Állításunkat ezekre a négyzetekre a következőképen bizonyítjuk be:

Az x, y változók helyébe az (1) és (2) képletek értelmében a ϱ és ϑ változókat vezetjük be s ezek segélyével definiáljuk a következő ζ függvényt:

ζ a Q_2 négyzet külsejében s a Q_1 négyzet belsejében mindenütt zérussal egyenlő; e két négyzet között elterülő tartományban pedig ζ a ϱ változó valamely tetszésszerinti folytonosan differentiálható függvénye, mely a $\varrho = a_1$ és $\varrho = a_2$ helyeken (azaz a Q_1 és Q_2 négyzetek kerületén) eltűnik s ezeken a helyeken e függvény ϱ szerinti differentiálhányadosa is zérussal egyenlő. Az így definiált ζ függvény nyilván az olyan négyzetek mentén, melyek Q_1-, illetőleg Q_2-vel concentrikusak s hasonló fekvésűek, állandó értéket vesz fel. Függvényünk továbbá a T tartomány belsejében mindenütt folytonos; ϑ szerinti differentiálhányadosa mindenütt zérussal egyenlő, ϱ szerinti differentiálhányadosa pedig ugyancsak folytonos függvénye a helynek. Ha ezt a függvényt mint az eredeti változók x és y függvényét tekintjük, az így keletkezett függvény $\zeta(x, y)$ természetesen szintén folytonos, míg az x és y szerinti differentiálhányadosai, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ és $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ — mint azt a (3) és (4) alatti formulák mutatják — ugyancsak folytonos függvényei a helynek ama pontok esetleges kivételével, melyek a sík fentemlített négy quadransa egyikének határán fekszenek. Ezek azok a helyek, a hol ϑ értéke $\pm \frac{\pi}{4}$ vagy $\pm 3 \frac{\pi}{4}$.

Más szóval a $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ és $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ differentiálhányadosoknak amaz egyenesek mentén, melyek a Q_1 és Q_2 négyzetek megfelelő szögpontjait összekötik, véges szakadásuk lehet, e négy vonaldarabon kívül azonban mindenütt folytonos függvényei x és y-nak.

Az 1°) alatti megjegyzés értelmében a következő integrál

$$\iint\limits_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx dy = 0,$$

mihelyt ζ az imént definiált függvények egyikét jelenti.

Ha ismét a ϱ és ϑ változókat vezetjük be és tekintettel vagyunk arra, hogy mindenütt $\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} = 0$, akkor nyomban látjuk, hogy utolsó egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\iint\limits_{(T_{\mathrm{I}})} u \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta + \iint\limits_{(T_{\mathrm{II}})} v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta -$$

$$- \iint\limits_{(T_{\mathrm{III}})} u \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta - \iint\limits_{(T_{\mathrm{IV}})} v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta = 0,$$

a hol ismét $T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{II}}, T_{\mathrm{III}}, T_{\mathrm{IV}}$ a T tartománynak a sík megfelelő quadransában fekvő részeit jelentik s e tartományoknak minden egyes integrálban csak ama része veendő tekintetbe, a mely a Q_1 és Q_2 négyzetek közé esik, mivel Q_2 külsejében és Q_1 belsejében ζ, s ezzel együtt $\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}$ is, zérussal egyenlő.

Ha még rövidség kedveért a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = u_1(\varrho), \quad - \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = u_2(\varrho),$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} v \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = v_1(\varrho), \quad - \int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} v \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = v_2(\varrho),$$

akkor utolsó egyenletünk a következőbe megy át:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \left(u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho)\right) d\varrho = 0.$$

Minthogy azonban $\zeta(\varrho)$ a ϱ változónak egy tetszésszerinti folytonosan differentiálható függvénye, mely csak annak a megszorításnak van alávetve, hogy az $[\alpha_1\ \alpha_2]$ intervallum végpontjaiban deriváltjával együtt eltűnjék, azért a közönséges Du Bois Reymond-féle tétel alkalmazásával fenti egyenletünkből nyomban következtetjük, hogy

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \text{const.}$$

Vizsgáljuk meg ez összefüggés baloldalán álló összeg egyes tagjainak jelentését. Jelöljük e végből rendre

$$l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)}\text{-},\ l_{\mathrm{II}}^{(\varrho)}\text{-},\ l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)}\text{-},\ l_{\mathrm{IV}}^{(\varrho)}\text{-}$$

val ama $Q^{(\varrho)}$ négyzetnek az I-, II-, III-, IV-, síknegyedbe eső oldalát, a melynek féloldalhossza ϱ-val egyenlő, a mely a Q_1 és Q_2 négyzetekkel concentrikus s melynek oldalai e négyzetek oldalaival párhuzamosak $(Q_1 = Q^{(\alpha_1)},\ Q_2 = Q^{(\alpha_2)})$. Ekkor nyilván

$$u_1(\varrho) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u\, d(\varrho \operatorname{tg}\vartheta) = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} u\, dy.$$

Mivel pedig az $l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)}$ oldal párhuzamos az y-tengelylyel, azért

$$\int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} v\, dx = 0,$$

s ennélfogva

$$u_1(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx).$$

Analog módon nyerjük, hogy

$$u_2(\varrho) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} u\, d(-\varrho \operatorname{tg}\vartheta) =$$

$$= \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} u\, dy = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx).$$

Hasonló számítással adódik:

$$v_1(\varrho) = \int_{(l_{II}^{(\varrho)})} (udy - vdx), \quad v_2(\varrho) = \int_{(l_{IV}^{(\varrho)})} (udy - vdx).$$

Ezt az utóbbi négy egyenletet összeadva, ered:

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \int_{(Q^{(\varrho)})} (udy - vdx) = \text{const.},$$

minthogy $l_I^{(\varrho)}$, $l_{II}^{(\varrho)}$, $l_{III}^{(\varrho)}$, $l_{IV}^{(\varrho)}$ a $Q^{(\varrho)}$ négyzet oldalait jelölik.

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy ha az

$$\int (udy - vdx)$$

integrált bármely olyan négyzet mentén számítjuk ki, melynek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak, mindig ugyanazt az értéket kapjuk. Mivel feltételeink értelmében $u(x, y)$ és $v(x, y)$ folytonos függvények, azért az imént nyert állandó érték szükségképen zérus, hiszen integrálunk értékét tetszés szerint kicsinynyé tehetjük azáltal, hogy a megfelelő négyzetet elég kicsinynek választjuk.

Ezzel fenti állításunkat, mely szerint

$$\int_{(Q)} (udy - vdx) = 0,$$

teljesen bebizonyítottuk.

3°) *Harmadszor* kimutatjuk, hogy az

$$\int_{(P)} (udy - vdx)$$

integrál értéke akkor is zérussal egyenlő, ha az integrálás olyan P parallelogramma kerületén történik, melynek oldalai a coordinatatengelyekkel párhuzamosak.

Állításunk közvetlen visszavezethető a 2°) alatt levezetett tételre abban az esetben, ha a P parallelogramma oldalhosszai commensurabilisek, azaz, ha viszonyuk két egészszám hányadosával egyenlő. Valóban, ez esetben parallelogrammánk véges számú olyan négyzetből tehető össze, melyeknek oldalai ismét a kivánt irányokkal párhuzamosak; a P parallelogramma mentén vett integrál ennek a felosztásnak megfelelően, véges összeg alakjában jelenik meg, melynek egyes tagjai, ama négyzetek mentén vett integrálok, a melyekből P-t felépítettük. Minthogy pedig ez utóbbi integrálok mindegyike — a 2°) alatti tétel alapján — zérussal egyenlő, azért a P parallelogramma kerületén vett integrál értéke is zérus.

Ha a P parallelogramma oldalhosszai incommensurabilisek, akkor P nem építhető fel a fentebb jelzett módon végesszámú négyzetből. Ez esetben azonban a következőképen járhatunk el: megközelítjük P parallelogrammánkat tetszésszerinti pontossággal egy olyan $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ parallelogrammákból álló sorozattal, mely parallelogrammák mindegyikének oldalhosszai commensurabilisek, a melyek mentén véve tehát integrálunkat: az zérust ad eredményül. Az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ folytonosságából nyomban következik, hogy

$$\int_{(P)} (udy - vdx) = \lim_{n=\infty} \int_{(P_n)} (udy - vdx),$$

s ennélfogva csakugyan

$$\int_{(P)} (udy - vdx) = 0.$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy a kérdéses integrál eltűnik minden olyan parallelogramma mentén, mely a T tartomány belsejében fekszik s melynek oldalai a coordinata-tengelyekkel párhuzamosak.

Ennek alapján könnyen átlátható az is, hogy integrálunk minden olyan *zárt görbe mentén is eltűnik, a mely a T tartomány belsejében fekszik és végesszámú olyan vonaldarabból épül fel, melyek felváltva az x- és az y-tengelyekkel párhuzamosak.* Valóban bármely tartomány, melynek határát végesszámú ilyen vonaldarab alkotja, felépíthető végesszámú olyan parallelogrammából, melynek oldalai szintén a tengelyekkel párhuzamosak. Minthogy integrálunk értéke zérus e parallelogrammák mindegyikének kerületére vonatkozólag, azért az integrálnak el kell tűnnie akkor is, ha ama görbe mentén vesszük, mely az e parallelogrammákból felépülő tartományt határolja.

4°) Ez utolsó megjegyzés alapján tételünk minden nehézség nélkül bizonyítható be.

Legyen ugyanis O a T tartomány valamely fix-, A pedig valamely változó pontja. E két pontot tört vonallal kapcsoljuk össze, a mely természetesen T belsejében fekszik és végesszámú olyan vonaldarabból áll, melyek felváltva az x-, illetőleg y-tengelylyel párhuzamosak. Ha már most bármely ilyen törtvonal mentén számítjuk ki az

$$\int_O^A (udy - vdx)$$

integrált, nyilván mindig ugyanarra az eredményre jutunk, hiszen ennek az integrálnak értéke bármely ilyen *zárt* törtvonal mentén zérussal egyenlő. Legyenek x és y az A pont coordinatái, integrálunk ilyen módon az x, y változók valamely $\omega(x, y)$ függvényét szolgáltatja:

$$\omega(x, y) = \int_O^A (udy - vdx),$$

mely a T tartomány belsejében van értelmezve (integrátiós útul *egyelőre* csak a fent leírt törtvonalak vehetők). Az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények folytonossága következtében az $\omega(x, y)$ függvény is folytonos; számítsuk ki e függvény első deriváltjait.

Kössük össze e végből az O és A pontokat olyan törtvonallal, mely — mint elébb — véges számú vonaldarabból áll, melyek felváltva az x, illetőleg y-tengelylyel párhuzamosak, úgy, hogy e törtvonal utolsó (az A pontot tartalmazó) darabja az x-tengelylyel legyen párhuzamos. Nyilvánvaló, hogy elegendő kis h értékre nézve:

$$\omega(x+h, y) - \omega(x, y) = \int_{x, y}^{x+h, y} (udy - vdx),$$

a hol az integratio útja az az egyenes vonal, mely az (x, y) és $(x+h, y)$ pontokat összekapcsolja. Ez egyenes mentén azonban $y = \text{const.}$ s így

$$\frac{\omega(x+h, y) - \omega(x, y)}{h} = -\frac{1}{h} \int_{x, y}^{x+h, y} vdx.$$

Ebből határátmenetből nyomban adódik, hogy

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = - v(x, y).$$

Ha pedig az O és A pontokat olyan törtvonallal kötjük össze, mely ismét a tengelyekkel párhuzamos egyenes darabokból áll, melyek közül azonban az utolsó az y-tengelylyel párhuzamos, akkor teljesen hasonló megfontolásokkal nyerjük, hogy

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y).$$

Más szóval, a fent definiált $\omega(x, y)$ függvénynek a T tartományban folytonos első deriváltjai vannak és pedig

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = - v(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y);$$

azaz feltevéseinkből kifolyólag *u és v — előjelüktől eltekintve — egyazon* $\omega(x, y)$ *függvény y-, illetőleg x-szerinti differentiálhányadosai.* Ebből nyomban következik, hogy az

$$\int (u dy - v dx) = \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \right)$$

integrálnak minden zárt görbe mentén vett értéke zérussal egyenlő.

Ezzel tételünk minden részében beigazolást nyert.

Feltevésünknek tehát, mely az

$$\iint\limits_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx dy$$

integrál eltünését követelte, ha $\zeta(x, y)$ a T határán eltünő, T belsejében pedig folytonos első differentiálhányadosokkal biró függvényt jelent, az a következménye, hogy az integrandus függvénydetermináns alakjában írható:

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial(\zeta, \omega)}{\partial(x, y)}.$$

2. §.

Az 1. §-ban levezetett tétel a kétváltozós függvények körében ugyanazzal a szereppel bir, mint a Du Bois Reymond-féle lemma az egyváltozós függvények elméletében.

E tétel segélyével a kettős integrál első variatiójának eltünési feltételét differentiálegyenletek alakjában fejezhetjük ki, a nélkül, hogy feltételeznők, hogy a megoldás második differentiálhányadosai léteznek.

Hogy ezt kimutathassuk, foglalkozzunk egyelőre a

$$\iint\limits_{(T)} f(p, q, x, y)\, dxdy = \text{min.}$$

variatioproblémával (adott kerületi értékek mellett), a melyben — mint szokásos — p-vel és q-val jelöltük az ismeretlen $z(x, y)$ függvény differentiálhányadosait:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

f-et argumentumainak minden tekintetbe jövő értékeinél a p, q, x, y analytikus függvényének tételezzük fel.

Legyen $z = z(x, y)$ ennek a variatioproblémának valamely megoldása, melyről csak azt tesszük fel, hogy a T tartomány belsejében folytonos első differentiálhányadosokkal bir; a variatioszámításban kimutatják, hogy ekkor a

$$\iint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dxdy$$

integrál eltűnik, ha $\zeta(x, y)$ a T tartományban értelmezett olyan függvényt jelöl, mely e tartomány határán eltűnik s melynek első differentiálhányadosai a T belsejében léteznek és folytonosak. Minthogy az ebben az integrálban fellépő

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{és} \quad v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q}$$

függvények folytonosak, azért az 1. §-ban kimutatott tételből kifolyólag következtethetjük, hogy létezik a T tartományban értelmezett olyan $\omega(x, y)$ függvény, melynek x és y szerinti első deriváltjai e tartományban folytonos függvények s a mely függvény azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Más szóval: *az ismeretlen $z = z(x, y)$ függvény kielégíti az $\omega(x, y)$ segédfüggvénynyel egyetemben ezt a két elsőrendű differentiálegyenletből álló egyenletrendszert.*

Általában ez $\omega(x, y)$ függvény második deriváltjai nem léteznek; ha ezek léteznek, akkor egyenletrendszerünkből az $\omega(x, y)$ függvény eliminálásával nyomban levezethetjük a $z(x, y)$ számára a variatioszámítás úgynevezett LAGRANGE-féle differentiálegyenletét. Általában azonban csak annyi következik, hogy a fentebbi variatioproblémának minden *olyan $z(x, y)$ megoldása, melynek első deriváltjai a T tartományban folytonos függvények, kielégíti a következő differentiálegyenletrendszert:*

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Ha a variatioprobléma integrandusában a keresett függvény $z(x, y)$ explicite is fellép, akkor a megfelelő differentiálegyenletrendszer már nem annyira egyszerű. Ez esetben — ismét anélkül, hogy az ismeretlen $z(x, y)$ függvény második deriváltjainak létezését feltételeznők — három differentiálegyenletből álló rendszerre jutunk, a mely a $z(x, y)$ függvényen kívül még két segédfüggvényt — $\omega(x, y)$-, és $\Omega(x, y)$-t — tartalmaz.

Ha ugyanis $z(x, y)$ olyan megoldását jelenti a

$$\iint_{(T)} f(p, q, z, x, y)\, dxdy = \min.$$

variatioproblémának, melynek első differentiálhányadosai (a p és q függvények) a T tartományban folytonosak, akkor — a variatioszámítás egy ismert tételének értelmében — a

$$\iint_{(T)} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta \right) dxdy \qquad (5)$$

integrál eltűnik, ha $\zeta\,(x,\ y)$ a T tartományban értelmezett olyan függvényt jelöl, mely e tartomány határán eltűnik, első differentiálhányadosai pedig a T belsejében folytonos függvények.

Legyen rövidség kedvéért

$$2\Omega\,(x,\ y) = \int_0^x\!\!\int_0^y \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdy\,;$$

az így értelmezett $\Omega\,(x,\ y)$ segédfüggvénynek x és y szerinti első differentiálhányadosai a T tartományban nyilván folytonos függvények s egyszersmind az $\Omega\,(x,\ y)$ vegyes második differentiálhányadosa is létezik és folytonos:

$$2\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Mivel a $\zeta\,(x,\ y)$ a T tartomány határán eltűnik, azért fennállanak a következő egyenlőségek:

$$\iint\limits_{(T)} \zeta\,\frac{\partial f}{\partial z}\,dxdy = 2\iint\limits_{(T)} \zeta\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}\,dxdy = -$$

$$-\,2\iint\limits_{(T)} \frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial\Omega}{\partial y}\,dxdy = -\,2\iint\limits_{(T)} \frac{\partial\zeta}{\partial y}\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dxdy,$$

melyeknek tekintetbevételével (5) alatti feltételünk a következő alakban írható:

$$\iint\limits_{(T)} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right\}dxdy = 0.$$

Minthogy a zárójelekben álló

$$u\,(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\Omega}{\partial y} \quad \text{és} \quad v\,(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

függvények a T tartományban értelmezett folytonos függvények, azért az 1. §-ban bebizonyított tétel alapján következtethetjük, hogy létezik a T-ben értelmezett olyan $\omega\,(x,\ y)$ függvény, melynek első deriváltjai e tartományban folytonos függvények s a mely azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \Omega}{\partial y}=\frac{\partial \omega}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial \Omega}{\partial x}=-\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Más szóval: *variatioproblémánknak minden olyan megoldása, melynek első differentiálhányadosai a T tartományban folytonos függvények, két segédfüggvénynyel* ($\omega(x, y)$- és $\Omega(x, y)$-nal) *egyetemben* — melyek mindketten a T-ben folytonos első deriváltakkal birnak s ezenfelül a második, a $\Omega(x, y)$ függvényre vonatkozóan T-ben a vegyes második differentiálhányados is létezik és folytonos — *kielégíti a következő három differentiálegyenletből álló simultán egyenletrendszert:*

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial \Omega}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial q}=-\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial \Omega}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}.$$

Ez egyenletrendszer felállításával feladatunk — amely a kettős integrál első variatiója eltűnésének differentiálegyenletekbe való átírását követelte anélkül, hogy a megoldás második differentiálhányadosainak létezését feltételeznők — teljes megoldást nyert.

Ez a differentiálegyenletrendszer a variatioszámitás további kiépítésére ugyanúgy alapul vehető, mint a Lagrange-féle differentiálegyenlet, a melynek levezetésénél a keresett függvény második deriváltjainak létezését is fel kell tételezni.

*

Az a probléma, a melyre az 1. §-ban levezetett tétel válaszolt, valamint a bizonyításnál követett gondolatmenet, több irányban általánosítható; ezek az általánosítások egyrészt önmagukban is érdekesek, másrészt pedig a 2. §-ban tárgyalt variatioprobléma természetes általánosításainak analog tárgyalása folytán szükségképen rájuk jutunk. Ez általánosítások közül kettőt említek:

I. Legyenek $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ a T tartományban definiált folytonos függvények; tegyük fel továbbá, hogy az

$$\iint\limits_{(T)} \left(u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + w \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) dx dy$$

integrál értéke zérussal egyenlő, ha $\zeta(x, y)$ olyan függvényt jelent, mely a T határán eltűnik és a melynek a T belsejében az x és y változók szerinti első és második differentiálhányadosai folytonos függvények; mi következik e feltevésekből az u, v, w függvényekre?

II. Legyen T egy háromdimensiós tartomány, $u(x, y, z)$ $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ pedig e tartományban definiált folytonos függvényei az x, y és z változóknak. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$\iiint\limits_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx dy dz$$

integrál értéke zérussal egyenlő, ha $\zeta(x, y, z)$ olyan függvényt jelent, mely T határán eltűnik, s a melynek x, y és z szerinti első differentiálhányadosai e tartomány belsejében folytonos függvények; mi következik e feltevésekből az u, v, w függvényekre?

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből.)

ALGEBRAI EGYENLETEK RATIONALIS MEGOLDHATÓSÁGÁNAK CONGRUENTIA-FELTÉTELEI.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

Ha az

$$F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

egész együtthatós algebrai egyenlet összes gyökei rationalis egész számok, akkor szinte magától értetődik, hogy az

$$F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_p \equiv 0 \pmod{p} \qquad (2)$$

congruentiának minden p törzsszám-modulus mellett pontosan n számú gyöke lesz.

Megfordítható-e ez a tétel? Azaz következik-e már abból a tényből, hogy a (2) alatti congruentiának minden p törzsszám-modulus mellett fokszámával megegyező számú gyöke van, hogy akkor az (1) alatti egyenlet összes gyökei rationalis egész számok? Vagy a mi ugyanaz: következik-e már abból a tényből, hogy az $F(x)$ függvény minden p törzsszám-modulusra nézve elsőfokú tényezőkre bontható, hogy akkor $F(x)$ a természetes rationalis tartományban is csupa elsőfokú tényezőre esik szét?

Erre a kérdésre óhajtunk a jelen dolgozatban válaszolni.

Kezdetben nagyon valószínűnek hittük, hogy a felvetett kérdésre a válasz igenlő lesz. E hitünket azonban erősen megrendítette az a körülmény, hogy Hilbert D. 1897-ben arra a felette érdekes és azelőtt még ismeretlen tényre mutatott rá, hogy oly $F(x)$ függvények is vannak, a melyek ámbár minden p törzsszám-modulus mellett reducibilisek a szó algebrai értelme szerint a természetes rationalis tartományban, mégis irreducibilisek. «Über Diophantische Gleichungen» czímű értekezésében[1] az

$$F(x) \equiv x^4 + 13x^2 + 81 \equiv$$

$$\equiv \left(x + \frac{5^{\frac{1}{2}}+31^{\frac{1}{2}}i}{2}\right)\left(x + \frac{5^{\frac{1}{2}}-31^{\frac{1}{2}}i}{2}\right)\left(x + \frac{-5^{\frac{1}{2}}+31^{\frac{1}{2}}i}{2}\right)\left(x + \frac{-5^{\frac{1}{2}}-31^{\frac{1}{2}}i}{2}\right)$$

negyedfokú függvényt mutatja be, mely a természetes rationalis tartományban nyilván irreducibilis (azaz nem bontható fel oly tényezőkre, melyeknek együtthatói rationalis számok) s a melyről mégis sikerült kimutatnia, hogy bármely p törzsszám-modulusra nézve két egész együtthatós másodfokú tényezőre bomlik. A tőle követett eljárás még számtalan sok hasonló természetű $F(x)$ függvény szerkesztését teszi lehetővé.

E szerint valamely $F(x)$ függvénynek minden törzsszám-modulus melletti bomlékonysága általánosságban még nem vonja maga után $F(x)$-nek a szó algebrai értelmében való bomlékonyságát vagy reducibilitását is.

Annyival érdekesebb most már, hogy egy speciális esetben ez mégis be fog következni, még pedig éppen abban a speciális esetben, a melyre az előbb felvett kérdéstétel vonatkozik. Kimutathatjuk ugyanis a következő tétel helyességét:

Ha az $F(x)$ egész együtthatós rationalis egész függvény az összes törzsszámmodulusokra nézve elsőfokú tényezőkre bontható, akkor $F(x)$ a szó algebrai értelmében is oly elsőfokú tényezőkre esik szét, melyeknek együtthatói rationalis egész számok.

A válasz tehát a fent felvett kérdésre mégis igenlő.

Elsőfokú függvények.

Elsőfokú rationalis egész függvényekre nézve a bevezetésben felállított tétel egészen elemi úton bizonyítható be. Erre elegendő a következőnek a kimutatása:

---

[1] Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1897. évi kötet, 53. l.

Ha az

$$ax + b \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentiának minden p törzsszám-modulusra pontosan 1 gyöke van, akkor

$$a = 1\,;$$

tehát az

$$ax + b = 0$$

egyenletnek e gyöke egész szám.

Ha a nem volna 1-gyel egyenlő, akkor az

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

törzstényezős előállításában a

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_i, \ldots,\ p_r$$

különböző törzsszámok és az

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_i, \ldots,\ \alpha_r$$

kitevők positiv egész számok lennének; de akkor az

$$ax + b \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p_i)$$

congruentiának vagy egyetlen egy gyöke sincsen, ha

$$b \not\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p_i)$$

vagy pedig p_i számú gyöke van, ha

$$b \equiv 0. \qquad (\text{mod. } p_i)$$

E két eshetőségnél több nincsen. Ezek mindegyikét kizárja azonban az a feltevésünk, hogy az

$$ax + b \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentiának minden p törzsszám-modulusra pontosan 1 gyöke van. Lehetetlen tehát, hogy a az 1-től különbözzék és így kell, hogy

$$a = 1$$

legyen.

Másodfokú függvények.

Még a másodfokú egész együtthatós rationalis egész függvényekre vonatkozóan is tételünk bebizonyítása elemi módszerek segítségével történhetik, bár a részletes tárgyalás már a quadratikus maradékok elméletének teljes apparátusát veszi igénybe.

Itt is mindenekelőtt kimutatható, *hogy ha az*

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentiának minden p törzsszám-modulus mellett pontosan két gyöke van és a, b, c legnagyobb közös osztója 1, akkor

$$a = 1.$$

Ha a nem volna 1-gyel egyenlő, akkor ismét kellene, ha a törzstényezős előállítása

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i} \dots p_r^{\alpha_r},$$

hogy az

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p_i)$$

congruentiának is két gyöke legyen; de ezt kizárja az a körülmény, hogy

$$a \equiv 0 \quad (\text{mod. } p_i) \quad \text{és} \quad (a, b, c) = 1;$$

a minek következtében ismét lehetetlen, hogy a az 1-től különbözzék és így kell, hogy

$$a = 1$$

legyen.

Másodfokú congruentiánk tehát így írható:

$$x^2 + bx + c \equiv 0. \qquad (\text{mod. } p)$$

Ha ennek minden p törzsszám-modulusra nézve két gyöke van, akkor, mivel

$$(2x + b)^2 \equiv b^2 - 4c \equiv D \quad (\text{mod. } p),$$

az

$$y^2 \equiv D \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentiának is minden páratlan törzsszám-modulusra nézve két gyöke lesz. Tehát a $\left(\frac{D}{p}\right)$ LEGENDRE-symbolum minden páratlan p törzsszámra vonatkozólag 1-gyel egyenlő, azaz

$$\left(\frac{D}{p}\right)=1 \tag{I}$$

minden páratlan p törzsszámra nézve. Mi következik ebből? A D törzstényezős előállítása legyen:

$$D=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}\ldots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_k^{\beta_k}\ldots q_s^{\beta_s},$$

a hol az

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_i,\ldots,\ \alpha_r$$

kitevők párosak, a

$$\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\ \beta_k,\ldots,\ \beta_s$$

kitevők páratlanok vagy zérussal egyenlők legyenek. Könnyen fogjuk most már kimutathatni, hogy a β_k kitevők páratlanok nem lehetnek, tehát mindannyian zérussal egyenlők. Mert ha β_k páratlan, akkor

$$\left(\frac{q_k^{\beta_k}}{p}\right)=\left(\frac{q_k}{p}\right)^{\beta_k}=\left(\frac{q_k}{p}\right);$$

és mivel

$$\left(\frac{p_i^{\alpha_i}}{p}\right)=\left(\frac{p_i}{p}\right)^{\alpha_i}=+1,$$

mert α_i páros, azért

$$\left(\frac{D}{p}\right)=\left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_k}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_s}{p}\right).$$

Az (I) alatti egyenlet tehát így írható:

$$\left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_k}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_s}{p}\right)=1 \tag{II}$$

és ez ismét fennállana minden páratlan p törzsszámra vonatkozóan. Most azonban kimutatható végtelen sok törzsszám létezése, a melyre a (II) alatti egyenlet nincsen kielégítve. A reciprocitási tétel szerint fennálló

$$\left(\frac{q_1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q_1-1}{2}}\left(\frac{p}{q_1}\right) = -1,$$
$$\left(\frac{q_k}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q_k-1}{2}}\left(\frac{p}{q_k}\right) = +1$$
$$(k=2, 3, \ldots, s)$$

egyenletek egyszerre ki lesznek elégítve, ha p oly törzsszám, a mely az

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \ x \equiv \varrho_{1i_1} \ (\lambda \text{ mod. } q_1), \ x \equiv \varrho_{2i_2} \ (\text{mod. } q_2), \ldots, \\ x \equiv \varrho_{ki_k} \ (\text{mod. } q_k), \ldots, \ x \equiv \varrho_{si_s} \ (\text{mod. } q_s) \end{array}\right. \quad \text{(III)}$$

congruentia-rendszer összes congruentiáit kielégíti, a melyekben

$$\varrho_{k1}, \varrho_{k2}, \ldots, \varrho_{ki_k}, \ldots, \varrho_{k\frac{q_k-1}{2}}$$
$$(k=2, 3, \ldots, s)$$

a q_k modulus quadratikus maradékait,

$$\varrho_{11}, \varrho_{12}, \ldots, \varrho_{1i}, \ldots \varrho_{1\frac{q_k-1}{2}}$$

a q_1 modulus quadratikus nem-maradékait jelentik.

A (III) alatti congruentia-rendszert kielégítő összes számok az

$$x = \sum_{k=1}^{s} q_1 q_2 \ldots q_{k-1} q_{k+1} \ldots q_s a_k \varrho_{ki_k} + q_1 q_2 \ldots q_s . n \qquad \text{(IV)}$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

számtani haladványban vannak elrendezve, a melyben az a_k számok a

$$q_1 q_2 \ldots q_{k-1} q_{k+1} \ldots q_s a_k \equiv 1 \qquad (\text{mod. } q_k)$$
$$(k=1, 2, \ldots, s)$$

congruentiáknak tetszés szerint választott gyökeit jelentik.

A (IV) alatt felírt általános taggal biró számtani haladvány kezdő tagja

$$\sum_{k=1}^{s} q_1 q_2 \ldots q_{k-1} q_{k+1} \ldots q_s a_k \varrho_{ki_k} = A;$$

és a különbsége

$$q_1 q_2 \ldots q_s = d$$

egymáshoz képest relativ törzsszámok, mert A a d bármely törzstényezőjéhez relativ prim, mivel

$$A \equiv \varrho_{ki_k} \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } q_k) \atop (k=1, 2, \ldots s).$$

De akkor DIRICHLET-nek a számtani haladványra vonatkozó tételénél fogva a (IV) alatti általános tagnak megfelelő számtani haladványban végtelen sok törzsszám foglaltatik. Ha ezek egyike a p' páratlan törzsszám, akkor ez kielégíti a (III) alatti összes congruentiákat; de akkor

$$\left(\frac{q_1}{p'}\right) = -1, \quad \left(\frac{q_2}{p'}\right) = \left(\frac{q_3}{p'}\right) = \cdots = \left(\frac{q_s}{p'}\right) = +1,$$

a minek következtében

$$\left(\frac{D}{p'}\right) = \left(\frac{q_1}{p'}\right)\left(\frac{q_2}{p'}\right)\cdots\left(\frac{q_s}{p'}\right) = -1.$$

Ha tehát D-ről felteszszük, hogy nem teljes négyzet, akkor oly p' páratlan törzsszám létezése volt kimutatható, a melyre a (I) alatti egyenlet nincsen kielégítve. Mivel azonban a történt feltevések mellett minden törzsszám kell hogy kielégítse ezt az egyenletet: D-nek szükségszerűen teljes négyzetnek kell lennie, azaz van oly positiv egész Δ szám, a melyre nézve

$$D = \Delta^2.$$

Az

$$x^2 + bx + c = 0$$

egyenletnek gyökei

$$\frac{-b+\Delta}{2}, \quad \frac{-b-\Delta}{2}$$

rationalis számok, a melyeknek egészeknek is kell lenniök, mivel a másodfokú egyenletben x^2 együtthatója 1-gyel egyenlő. A másodfokú függvényünk pedig a következő fölbontást engedi:

$$x^2 + bx + c \equiv \left(x - \frac{-b+\Delta}{2}\right)\left(x - \frac{-b-\Delta}{2}\right),$$

azaz ez szétesik egész együtthatós elsőfokú tényezőkre. De ezzel a bevezetésben felállított tétel másodfokú függvényekre be van bizonyítva.

Tetszésszerint magasfokú függvények.

A szóbanforgó tétel bebizonyítására elegendő a következő tételnek a kimutatása:

Ha az

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

congruentiának, melyben az egészszámú együtthatók legnagyobb közös osztója

$$(a_0, a_2, \ldots, a_n) = 1,$$

minden törzsszám-modulusra nézve n gyöke van (a melyek között egyenlők is lehetnek), akkor az

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

algebrai egyenlet összes gyökei rationalis egészszámok.

Mindenekelőtt ismét kimutatható, hogy a történt feltevések mellett

$$a_0 = 1.$$

Mert ha a_0 nem volna 1-gyel egyenlő, akkor törzstényezős előállításában, azaz az

$$a_0 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

előállításban nem minden kitevő zérus. Legyen például

$$\alpha_i > 0,$$

akkor az

$$F(x) \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p_i)$$

congruentia legfeljebb $(n-1)$-edfokú, mert

$$a_0 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p_i)$$

de akkor ismeretes tétel értelmében gyöktényezőinek száma n-nél kisebb; ez azonban lehetetlen, mert az (1) alatti congruentiának minden p törzsszám-modulus mellett $F(x)$ számára n gyöktényezője van. Az

$$a_i > 0$$

egyenlőtlenség feltevése ellenmondásra vezetett és így kell, hogy

$$\underset{(i=1,\,2,\ldots,\,r)}{a_i = 0}$$

és

$$a_0 = 1$$

legyen. $F(x)$ tehát ily alakban vehető fel:

$$F(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

A további tárgyalás KRONECKER ama nevezetes tételének alkalmazásán alapszik, mely «Über die Irreducibilität von Gleichungen» czímű értekezésében[1] foglaltatik s a mely az algebrai egyenletek elméletében egyik legmélyebb tartalmú tételnek tekintendő.

E tétel a következőképen szól:

«*Ha* $F(x)$ *x-nek n-edfokú egész együtthatós rationalis egész függvénye és* az összes p törzsszámokra kiterjesztett

$$\Sigma \nu_p p^{-1-\omega}$$

összegben ν_p *az*

$$F(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentia gyökeinek számát jelenti (ezek között fordulhatnak elő egyenlő gyökök is), akkor ennek az összegnek minden határon túl kisebbedő ω *értékekre vett határértéke proportionális* $\log \dfrac{1}{\omega}$*-val, és pedig egyenlő a* $\log \dfrac{1}{\omega}$ *és* $F(x)$ *irreducibilis tényezőinek számából alakított szorzattal.*

E tétel képlettel ekként fejezhető ki:

$$\lim_{\omega=0} \left(\frac{\Sigma \nu_p p^{-1-\omega}}{\log \dfrac{1}{\omega}} \right) = \nu, \tag{I}$$

[1] Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1878, 95. l.

a hol ν az $F(x)$ irreeducibilis tényezőinek számát jelenti (a természetes rationalis tartományban).

E tételből rögtön következik, hogy

$$\lim_{\omega=0}\left(\frac{\Sigma p^{-1-\omega}}{\log \frac{1}{\omega}}\right)=1. \tag{II}$$

Ha ugyanis a (I) egyenlőséget az

$$F(x)=x+k$$

elsőfokú függvényre alkalmazzuk, akkor mivel az

$$F(x)\equiv x+k \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentiának minden p törzsszám-modulus mellett pontosan 1 gyöke van:

$$\nu_p=1$$

minden p mellett. Mivel továbbá $F(x)$-nek e választása mellett irreducibilis tényezőinek száma is 1, azért

$$\nu=1.$$

Ha

$$\nu_p=1 \quad \nu=1$$

értékeket (I)-be helyettesítjük, a (II) határegyenlet adódik.

Ha most már az

$$F(x)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentiának minden p törzsszám-modulusra vonatkozóan n-számú különböző vagy egyenlő gyöke van, akkor minden p törzsszámra nézve

$$\nu_p=n.$$

Ebben az esetben az (I) határegyenlet tehát igy írható

$$n\left[\lim_{\omega=0}\frac{\Sigma p^{-1-\omega}}{\log \frac{1}{\omega}}\right]=\nu;$$

mivel pedig a szegletes zárójelen belül álló határérték a (II) alatti egyenletnél fogva 1-gyel egyenlő, következik, hogy

$$\nu = n,$$

azaz, hogy az

$$F(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

algebrai egyenlet irreducibilis tényezőinek száma a természetes rationalis tartományban pontosan n-nel egyenlő. Mivel pedig az egyenlet fokszáma is n, az irreducibilis tényezők mindegyike elsőfokú, azaz az

$$F(x) = 0$$

összes gyökei rationalis számok; még pedig rationalis *egész* számok, mert $F(x)$-ben x legmagasabb hatványának együtthatója 1-gyel egyenlő.

De ezzel ki van mutatva a bevezetésben kimondott tétel helyessége bárhányadfokú egész együtthatós rationalis egész függvényekre nézve, mert ha az

$$F(x) = 0$$

egyenlet összes gyökei rationalis egész számok, akkor $F(x)$ oly elsőfokú tényezőkre esik szét, melyekben az együtthatók szintén rationalis egész számok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 május 15.-én tartott üléséből.)

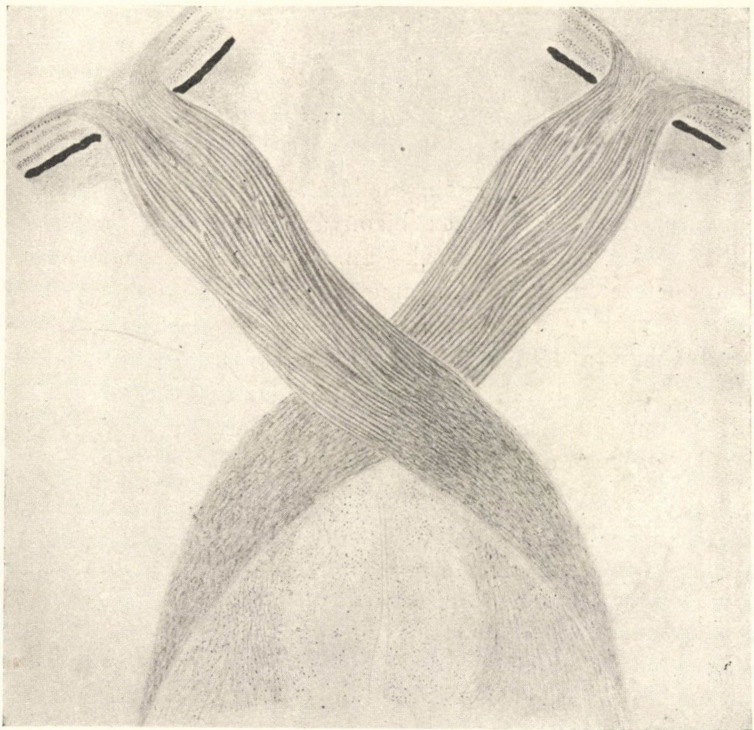
A KÍGYÓK LÁTÓIDEGÉRŐL.

LENHOSSÉK MIHÁLY r. tagtól.

A ki csak az emlősök, madarak vagy kétéltűek látóidegének szerkezetét ismeri, az bizonyára meglepődve fogja szemlélni a kígyó látóidegének mikroskopi készítményét, akár harántmetszeten, akár hosszmetszeten tünteti fel az ideget. Egészen más typust látunk itt. Míg az említett gerinczesosztályokban a látóideg bár nyalábocskákba csoportosuló, de egymástól függetlenül, szabadon futó idegrostokból áll, köztük csillagalakú gliasejtekkel és lemezszerű piasövényekkel, addig a kígyók látóidege a hosszmetszeten (1. ábra) széles, egymástól élesen elkülönült protoplasmás szalagokból tevődik egybe, tengelyükben majdnem összefüggő magsorral, a peripheriájukon pedig a protoplasmában futó finom, hullámos idegrostokkal. Nem kevésbbé meglepő a keresztmetszet képe (2. ábra). Polygonalis vagy kerekded protoplasmás mezőkből áll a metszet; ezekben látjuk, finom pontok alakjában, a sűrűn futó opticusrostokat; de csak a peripherián: a mező közepét csak protoplasma s az ebbe ágyazott mag foglalja el. A sarkalatos tehát az, hogy a látóideg rostjai itt nem haladnak, mint egyebütt, szabadon egymás mellett, hanem hosszú, szalagszerű, számos magvú plasmodiumok belsejében, *intraprotoplasmásan.*

Feltünő, hogy a látóidegnek ezt a szokatlan typusát a hüllők közül csak a kígyókon észleljük. Saját készítményeimen is meggyőződhettem arról, hogy a gyikok és teknősök látóidege a fentebb vázolt közönséges typus szerint alkotott; a krokodilusfajok látóidegéről nincsenek tapasztalataim, de STUDNIČKA adataiból következtetem, hogy a látóidegük olyan, mint a Sauriusoké.

A kígyók e tekintetben tehát egyedül állanak a reptiliák közt. A kétéltűek látóidege is az általános typust követi: a madarak és emlősök typusát. A halak osztályába kell leszállanunk, hogy hasonlót találjunk. Saját vizsgálatok híján DEYL és STUDNIČKA értekezéseire támaszkodom; csak egy halról mondható biztosan,



2. ábra.

hogy a látóidege szövettani tekintetben egészen olyan, mint a kígyóké: ez a Dipnousok rendjébe tartozó Ceratodus. A többi hal közt itt-ott akad a kígyók viszonyaira emlékeztető alakulás, de a hasonlatosság mindenütt csak távoli s e mellett nem tudjuk, hogy a dolog velejében azonosak-e a viszonyok, vagyis hogy ott is intraprotoplasmásan helyeződnek-e el a rostok. Az említett szerzők leírásaiból ez nem állapítható meg.

Deyl volt különben az első, a ki a kígyók látóidegének e különös szerkezetét láthatta. A halak látóidegét tárgyaló bő dolgozatában [1] Syngnathusról megemlíti, hogy ennek a látóidege kabel módjára nyalábokba van osztva s ezzel élénken emlékeztet a Tropidonotuséra. De 1895-ben közölt dolgozatának 2. része, mely többek közt a hüllőkkel is foglalkozott volna, mindezideig nem jelent meg. Megjegyzem, hogy Deyl Syngnathusról nem ad képet és így nem állapíthatjuk meg, hogy mennyiben állhat meg ez a hasonlatosság; Studnička, a kinek megvizsgált anyagában a Syngnathus is szerepel, nem mond róla semmit.

2. ábra.

Studnička 1898-ban megjelent rövid, de tartalmas dolgozatában,[2] mely a gerinczesek valamennyi osztályát felöleli, a hüllők látóidegét, Tropidonotuson és Coronellán végzett vizsgálatok nyomán, következőképen jellemzi. A pia materből kiinduló sövények a látóideget önálló, párhuzamosan futó kötegekre osztják, a Ceratoduson észlelhető viselkedéshez hasonlóan. A gliasejtek nem az egyes kötegek között helyezkednek el, hanem a kötegek belsejében, axialis sejtsorok alakjában. Ez az elrendeződés különben csak az egyéni fejlődés bizonyos foko-

---

[1] J. Deyl: Zur vergl. Anatomie d. Sehnerven. Bulletin internat. de l'Académie d. Sciences de l'Emp. François Joseph I. Prague 1895, pg. 41.

[2] F. K. Studnička: Unters. über d. Bau d. Sehnerven d. Wirbeltiere. Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss. Bd. 31, 1898, pg. 1.

zatán alakul ki, fiatalabb fejlődési szakokban a látóideg belső szerkezete szerint miben sem különbözik a gyíkok nervus opticusától.

E leírás nagyjából helyes; csak egyben tévedett STUDNIČKA: nem ismerte fel, hogy az idegrostok közös protoplasmahenger belsejében, tehát magukban a gliasejtekben futnak, nem pedig a gliasejtek körül, köpenyeg alakjában, mint ő hiszi. A Ceratodusról adott rajz, az I. tábla 8. ábrája, csakugyan meglepő, a mennyiben majdnem egészen megegyezik a kígyók látóidegének harántmetszeti képével.

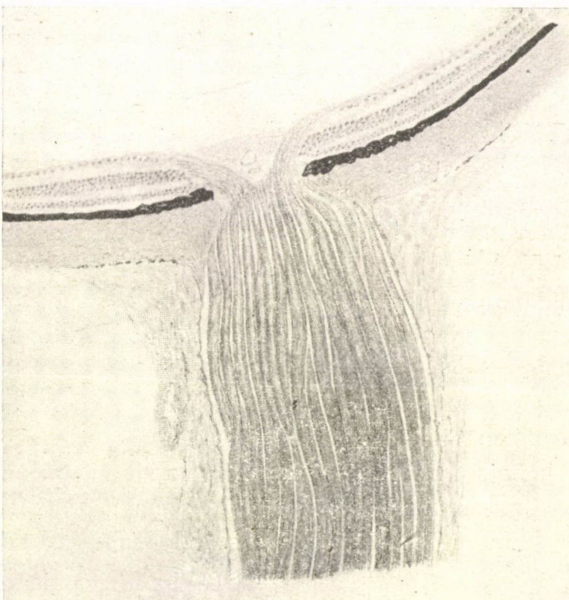
V. FRANZ 1913-ban megjelent művében,[1] mely a gerinczesek látószervét összefoglalóan tárgyalja, szintén megemlékezik pár szóval a kígyók látóidegéről, de szavaiból kiérezni, hogy nem alapulnak önálló tapasztalaton, hanem csak DEYL és STUDNIČKA adatain.

De térjünk át a részletekre. Vizsgálataimat a nálunk legkönnyebben megszerezhető kígyókon: Tropidonotuson és Coluberen végeztem. Közönséges festéseken (hæmatoxylineosin, Van Gieson) kívül hasznát vettem a Weigert-festésnek, melylyel meg tudtam állapítani, hogy a protoplasmán belül futó opticusrostok nagy része velőhüvelyű. Talán valamennyi az s csak a festés részleges balsikere miatt látszik egy részük velőtlennek; ezt eldönteni nem merem. Főmódszerem azonban nem ez, hanem a Ramón y Cajal-féle reductiós ezüst-módszer volt, mely a tengelyfonalakat a lehető legélesebben tünteti elő s melylyel egyáltalában a legtöbbet észlelhetni a látóideg szerkezetéből.

A vázolt szerkezet különben nincs meg a látóidegnek az agyvelőből való eredésétől kezdve. Csak a chiasma területén alakul ki. A tractusokon (1. ábra) még a középponti rostpályák rendes szerkezetét latjuk: csak a chiasma distalis részében bontakoznak ki a plasmodialis hengerek, melyekbe belehelyezkednek a rostok. Ez az elváltozás kétségtelenül összefügg azzal, hogy ugyane ponttól kezdve az addig csak glialis támasztó-

[1] V. FRANZ: Sehorgan, in A. Oppel, Lehrb. d. vergl. mikrosk. Anatomie d. Wirbeltiere. Jena, 1913, pg. 320.

szövetű látóideg belsejébe finom kötőszöveti sövényeket kezd küldeni a pia mater. E sövények választják el egymástól a hengereket. Hogy a két dolog között csakugyan közvetlen okozati összefüggés van, annak bizonyítékát láthatjuk abban a körülményben, hogy ott, a hol e sövényrendszer megint megszünik, végét éri a vázolt elrendeződés is. Ez a hely a látóidegfő (3. ábra). A lamina cribrosa rosthálózatának legelülső



3. ábra.

rostjaival eltünnek a hengerek is. Már előbb, a lamina cribrosa területén, kifejeződnek az ehhez való előkészületek: a hengerek protoplasmás tengelye a magvakkal együtt megszünik; a henger ezzel erősen megkeskenyedik s már most átmetszetének minden pontján opticusrostokat tartalmaz. Könnyen érthető, hogy ezzel kapcsolatban az egész látóidegnek is erősen meg kell keskenyednie; csakugyan hirtelen befűződés látható a sclerán átnyomuló látóidegen. A lamina cribrosa belső határán a plasmás hengerek a maguk egészében végüket érik kicsúcsosodva, az opticusrostok szabadon kilépnek belülök s nyalábocskáik egyenletesen, csak gyengén hálózatos elrendeződéssel összekeverednek a látóidegfőben, hogy azután tölcsérszerűen szétváljanak a középső sekély excavatio körül, melyet az arteria és vena centralison kívül gliaszövetből álló párna tölt ki. A rostok közt ismét megjelennek a szabad astrocyták.

Világos, hogy a piasövények jelenléte csak részben adja meg magyarázatát a plasmás hengerek képződésének. Máshol is megvannak e piasövények, a nélkül, hogy ily hengereket észlelnénk.

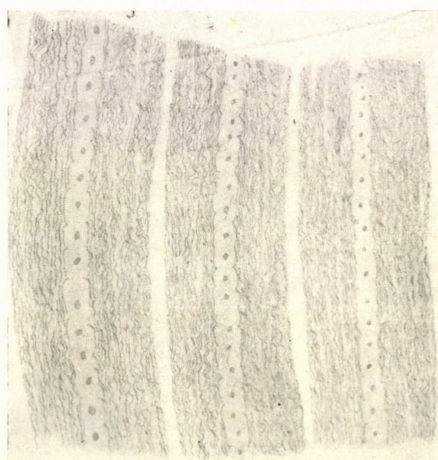
A piasövények különben is oly finomak, hogy már ebből az okból is csak fenntartással lehet őket a vázolt elrendeződés egyedüli okozóiul elfogadni. Az ezüstözött készítményeken alig láthatók s itt mintha üres hasadékok választanák el egymástól a hengereket. Csak a Van Gieson-készítményeken tünnek elő, a savanyú fuchsinnal halvány vörösre festett rendkívül finom vonalak alakjában, melyeken itt-ott egy-egy hosszúkás, keskeny, hæmatoxylinnal feltünő erősen festődő kötőszöveti mag látható.

A hengerek száma a chiasma felől a szem felé csökken, mert egyes hengerek hegyes szögletben egymásba olvadnak vastagabb hengerekké. A chiasma előtt az ideg keresztmetszetén 370 hengert számláltam, közvetlenül a szem mögött már csak 210-et; hosszmetszeten a hengerek száma amott 27, emitt 16. Lefutásuk egészen egyenes, széleik simák.

Az egyes hengerek keresztmetszete leginkább többszögletű a kölcsönös nyomástól, néha kerekded vagy elliptikus. Ott, a hol két henger éppen egyesül, egy befűződéses oszló sejtre emlékeztető vagy hosszúkás átmetszeti alakot kapunk.

A hengerek tengelyében elhelyezett magvak aprók, kerekdedek, halványan festődnek. Mint már említettem, majdnem összefüggő sorozatba rendezkednek el (4. ábra), de két-két mag még sem érintkezik soha közvetlenül egymással. Legtöbb helyen csak egyes sorban találjuk őket, itt-ott kettő vagy három van harántirányban egymás mellett. Studnička 20. ábráján hibáztatom az egy-egy henger keresztmetszetének közepébe belerajzolt 3—8 magot 1 vagy 2 mag helyett. Az ezüstözött készítményeken a magvak határai csak gyengén ismerhetők fel s csak az erősen festődő magvacska tünik szembe.

Az axialis rostnélküli plasmaterület, mely a magvakat tartalmazza, a keresztmetszeten szabálytalan idomú (5. ábra), gyakran csillagalakú ama protoplasmás sövények révén, a melyek belőle az opticusrostok nyalábocskái közé a peripheria felé nyomulnak s melyek folytán az idegrostok csoportjai néha sugárszerű elrendeződést öltenek. A gliaplasmodium keresztmetszete ez által igen hasonlóvá lesz az emlősállatok szívizom-



4. ábra.

rostjainak keresztmetszetéhez, melynél persze sokkal nagyobb méretű. Határvonal a középső protoplasmaterület s az oldalsó rostos réteg közt sincs; az egész henger biztosan közös plasmodium, a protoplasma belenyomul az idegrostok közé is; szó sem lehet arról, hogy a középen egy sejthenger van, melyre kívülről köpenyegszerűen fekszenek reá az idegrostok.

A leírt szerkezet két szempontból érdekes. Először állatrendszertani és phylogeniai tekintetben figyelemreméltó, hogy a kígyók nervus opticusának typusa eltérő a többi hüllőétől s közelebb áll bizonyos halak s különösen a Ceratodus látóidegének typusához. E szempontból nem lehet helyeselni azt, hogy

Studnička s utána Franz a kígyók látóidegét a hüllők között a legkomplikáltabbnak mondja; valójában a legprimitivebb az. Különös érdekességét azonban a vázolt szerkezet onnan nyeri, hogy belekapcsolható az idegelemek histogenesisének általános kérdéseibe. Messze vezetne, ha e kérdéseket s a leírt szövettani lelet viszonyát e kérdésekhez itt kimerítően tárgyalnám. Csak egy pár szóval óhajtok e kapcsolatra reámutatni.

Hogy az idegrostok a neuroblastból való kinövés útján fejlődnek s nem lánczolatszerű sejtkapcsolatokból, mint azt régebben hitték, az ma már eldöntöttnek tekinthető, különösen

5. ábra.

a mióta Harrison ezt a kinövést a békaálczákból vett szövetek túlélő kulturáin közvetlenül, mint folyamatot megfigyelhette, a mely észleletét megerősítette Braus is, a ki pedig addig a lánczolat-elmélet feltétlen híve volt. De ma is még vita tárgya az a további nagyfontosságú kérdés, hogy az előretörő rostok szabadon nyomulnak-e a sejtek között végczéljuk felé, mint His és Cajal nyomán a szerzők nagy része felveszi, vagy az embryonalis sejtek protoplasmás kapcsolatait használják-e fel növekedésük pályája gyanánt, mint azt Held (1909) igyekezett bebizonyítani. Saját magam egyik értekezésemben[1] meg-

[1] M. v. Lenhossék: Ueber die physiolog. Bedeutung d. Neurofibrillen. Anat. Anzeiger. Bd. 36, 1910.

figyeléseim alapján olyan felfogás mellett foglaltam állást, a mely bizonyos fokig áthidalja e két nézet ellenmondását, nagyjában azonban mégis az intercellularis növést erősiti meg.

A látóideg a legalkalmasabb helyek egyike az idegrostoknak kinövés útján való fejlődésének a vizsgálatára. Nem szólva W. MÜLLERnek 1874-ben megjelent dolgozatáról, melyben e kinövés, még pedig a szem felől az agyvelő felé haladó, inkább csak elméleti alapon van kifejtve, már 1889-ben látta KEIBEL hüllők embryóin azokat a döntő észleleteket, a melyek az opticusrostoknak centripetalis irányban való fejlődését tanusitják. Ma már biztosan tudjuk, KEIBEL, HIS (1890), FRORIEP (1891), ASHETON (1893), ROBINSON (1896), SZILY (1912) vizsgálatai nyomán, a melyeket e szerzők halak, reptiliák, madarak és emlősök embryóin végeztek, hogy a látóideg rostjai az elenyészően csekélyszámú úgynevezett centrifugalis vagy Cajal-féle rostokon kívül a szem ideghártyájának dúczsejtjeiből nőnek az agyvelő felé. E részben megegyezés van, de nincs meg az összhang arra vonatkozólag — s itt az idegrostok histogenesisének általános vitája ismétlődik meg —, hogy az előnyomuló rostok a szemnyél ektodermasejtjei között, tehát intercellularisan haladnak-e, vagy a sejtek protoplasmáján keresztül, vagyis intracellularisan törnek-e útat maguknak. A szerzők többsége, HIS nyomán, az előbbi felfogást tette magáévá; az intracellularis növekedés mellett HELDEN kívül KRÜCKMANN (1909) és SEEFELDER (1910) foglalt állást. Átmeneti nézetet vall PES (1906); szerinte az agyvelő felé burjánzó rostok a protoplasmán keresztül nyomulnak át a látóidegben, de ez már nem élő protoplasma, nem is cytoplasma, hanem a szemnyél szétesett sejtmagjainak detritusa. De különös módon ez a detritus PES szerint nem pusztul el végkép, nem szívódik fel, hanem megmarad s főalkotórészét teszi a látóidegrostokat később behüvelyező plasmának.

A legújabb idevágó munkálat hazánkfiának, SZILY AURÉLnak, a freiburgi egyetem rendkívüli tanárának érdekes dolgozata.[1] SZILY házinyúlembryókon az eddigi kutatások szín-

---

[1] A. v. SZILY: Ueb. d. einleitenden Vorgänge bei d. ersten Entstehung d. Nervenfasern im Nervus opticus. v. Graefe's Arch. f. Ophthalm. Bd. 81, 1912, pg. 67.

vonalán felülemelkedő pontossággal és szabatossággal vizsgálta meg a látóidegrostok fejlődését. Vizsgálatai megerősítik a centripetalis növekedés tényét s nagyjában az intercellularis fejlődésmód mellett szólanak. De a részletekben egészen új tényállásról értesülünk. Még jóval a látórostoknak a retinasejtekből való kinövése előtt a szemnyélben a hámsejtek szétesése folytán bizonyos meghatározott elrendeződésű hosszanti csatornák keletkeznek s a később kinövő opticusrostok ezekbe jutnak be s ezekben nőnek, mint valóságos præformált s járásukat megszabó pályákban, az agyvelő felé.

A kígyók látóidegén tett tapasztalatok első pillanatra az intracellularis növekedés mellett látszanak szólani, mert a rostokat a kifejlődött állatban határozottan a gliaplasmodiumok belsejében találjuk. Ámde ez még nem döntő bizonyíték. Gondolnunk kell arra a lehetőségre, hogy az intracellularis elhelyeződés csak másodlagos állapot, csak úgy keletkezik, hogy a gliasejtek protoplasmája másodlagosan körülnövi az eredetileg szabadon futó idegrostok csoportjait. E mellett látszik szólani, hogy a korai fejlődési stadiumokban nincs még meg a leírt elrendeződés. Még külön histogenetikai vizsgálatoktól kell várnunk annak a kérdésnek az eldöntését, hogy a két lehetőség közül melyik a helyt álló. Egyelőre magam a másodlagos körülnövést tartom valószínűbbnek, különösen a peripheriás idegrostok fejlődése körül tett tapasztalatok analogiája nyomán. Ott is másodlagosan növik körül a hüvelysejtek, a lemmoblastok, melyeket a gliasejtekkel tartok azonosnak, a tengelyfonalakat, s növeli az analogiát, hogy a finom sympathicus-fonatokban, különösen alsórangú gerinczeseken, a lemmoblast körülnőheti közösen a rostoknak egész kis csoportját.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 június 13.-án tartott üléséből.)

NEMVONALAS EGYENLŐTLENSÉGEK VONALASSÁ TÉTELE.

FARKAS GYULA r. tagtól.

I. A mechanikai állapotok kényszerét közönségesen vonalas vonatkozások fejezik ki, homogen vonalas egyenletek vagy egyenlőtlenségek vagy mindkétfélék a helyhatározóknak a virtualis megváltozásai között. De vannak körülmények, amelyek esetében nemvonalas homogen egyenletek, egyenlőtlenségek jelentkeznek mint kényszervonatkozások a helyzethatározók virtualis megváltozásain. Kivált gyakorlati jelentőségűek a nemvonalas egyenlőtlenségek. Ilyennel van dolgunk például, midőn egy tömegpont, vagy általánosabban, midőn egy merev test rugalmas akadállyal van állandó érintkezésben. Thermodynamikai állapotok szintén járhatnak nemvonalas kényszerrel, így mikor az adott viszonyok között az állapothatározók valamely analytikus függvénye csak növőleg vagy csak fogyólag változhatik és az állapothatározók incrementumai szerint haladó hatványsorából ama viszonyok következtében a vonalas tagok kimaradnak, a nemvonalasok pedig nem teljesítik az extremumok föltételeit, miből folyólag az egyoldalú változás kényszere nemvonalas egyenlőtlenséget hárít az incrementumok értéktartományára. Az alkalmazások azonban általában megakadnak a nemvonalas, noha homogen, egyenlőtlenségeken, tehát az alkalmazások érdekében lévőnek kell tartanom annak a kimutatását, hogy némely igen általános functionalis föltételek alatt a nemvonalas homogen egyenlőtlenségek vonalas homogen egyenlőtlenségekkel æquivalensek.

II. Jelöljék röviden az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ betük a helyzet- vagy állapot-határozók virtualis megváltozásait. Minthogy ho-

homogen függvényektől követeljük azt, hogy nemnegativok ($\geqq 0$), vagy azt, hogy nempositivok ($\leqq 0$) legyenek, ennek következtében az ($n+1$ dimensiobeli) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ componensű vektort akármily nagynak is tekinthetjük. Ha most a componenseit egyben egy pont derékszögű coordinátáinak is tekintjük az $n+1$ méretű ($n+1$ dimensiós) térben, akkor a componenseinek egy nemvonalas homogen függvénye $=0$ írva n méretű kúpfelületet határoz meg, mert ha az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ változók f függvénye m-ed fokú homogen függvény (t. i. EULER definitiója szerint), akkor

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \equiv x_0^m f\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Tegyük föl most, hogy a teljes n méretű kúpfölület olyan, hogy a csúcsán át lehet fektetni, máshol nem szelő és nem is érintő n méretű síkokat (síktereket), amelyek tehát két különvaló szakaszra osztják a kúpfölületet. Tegyük föl azt is az $f=0$ kúpfölületről, hogy a szakaszai egyszeresen összefüggő és többszörös alkotóktól egyáltalán mentes fölületrészek, minélfogva egy-egy egyszeresen összefüggő $n+1$ méretű tért választanak el a teljes $n+1$ méretű térből, egy-egy $n+1$ méretű «kúpot», és ennek a kúpnak csakis a határát teszik. Az oly nemvonalas egyenlőtlenségnek van különösb gyakorlati jelentősége, amely az ily kúpnak a pontjait követeli, kivált pedig azzal a további megszorítással, hogy a kúp mindenütt kifelé legyen domború. A kúpfölületet a csúcsán át két szakaszra elkülönítő síkok seregéhez tartozzék az $x_0=0$ sík, mihez képest mármost fölvételünket a következő elsődfokú homogen egyenlőtlenségre redukálva gondoljuk:

$$f \equiv x_0 - r\varphi(p_1, \ldots, p_n) \geqq 0;$$

$$r \equiv +(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}; \; p_1 \equiv \frac{x_1}{r}, \ldots, p_n \equiv \frac{x_n}{r}; \; \varphi \gtrless 0, \tag{1}$$

amelyben a kettős egyenlőtlenségi jel ($\gtrless$) azt jelenti, hogy a φ a maga definitiójánál fogva positiv függvény (például positiv constans a φ, vagy például positiv négyzetgyöke egy pozitive definit négyzetes alaknak). Az (1)-nek egy következménye $x_0 \geqq 0$, tehát a teljes kúpfölület egyik szakaszának a kirekesztése.

Állítom, hogy a φ függvény igen általános tulajdonságokkal lehet olyan, hogy egyenlőtlenségünk bizonyos vonalas egyenlőtlenségek continuumával æquivalens. Ilyen tulajdonságok:

1. A $\varphi(p_1,\ldots, p_n)$ függvény a p változók mint teljesen függetlenek szerint a $\Sigma p_i^2 = 1$ gömbfölület pontjainak a környezetében legalább háromszor deriválható s a változók valós értékeinél deriváltjaival együtt valós, egyértékű, folytonos, véges.

2. A $\varphi(p_1,\ldots, p_n)$ függvényből az alábbiak folyamán képezendő Δ determinans nem tünik el sehol a $\Sigma p_i^2 = 1$ gömbfölületen.

Álljon itt az az észrevétel, hogy a φ végességéből folyólag magán az $x_0 - r\varphi = 0$ kúpfölületen r csak a kúpfölület csúcsában tünik el, mert ha $r = 0$, akkor nemcsak $x_1,\ldots, x_n$, de x_0 is $=0$. Ennek következtében pedig a $p_1,\ldots, p_n$ iránycosinusok a kúpfölületen csak a kúpfölület csúcsában határozatlanok.

III. Az $n+1$ méretű térben valamely u_0, $u_1,\ldots, u_n$ független változóknak, mint derékszögű pontcoordinátáknak a sorában az $u_1,\ldots, u_n$ változókat úgy is tekintsük, mint az $u_0 = 0$ síktérbe tartozó vektor componenseit. E vektor nagyságát ϱ-val, iránycosinusait $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$-val jelölve:

$$\varrho \equiv +(u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}; \quad \alpha_1 \equiv \frac{u_1}{\varrho}, \ldots, \alpha_n \equiv \frac{u_n}{\varrho}. \tag{2}$$

Az α-któl való függés rövidebb jelölésére a függés jele után szögletes zárójelbe írt α szolgáljon:

$$\psi(\alpha_1,\ldots, \alpha_n) \equiv \psi[\alpha]. \tag{3}$$

De egyáltalán használjuk n számú változón ezt az írásmódot.

Mármost a II. szakasz vége felé állított æquivalentiát részletesen megfogalmazandók, vonatkoztassuk az (1)-ben foglalt φ, f függvényeket az u változókra:

$$f(u_0, u_1,\ldots, u_n) \equiv u_0 - \varrho\varphi[\alpha]; \tag{4}$$

és deriváljuk rendre az u_0, $u_1,\ldots, u_n$ szerint az f-et; röviden pedig f_0, $f_1,\ldots, f_n$ jelöljék majd a deriváltjait:

$$\frac{\partial f}{\partial u_0} = f_0 = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = f_i = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}\alpha_n - \varphi\right)\alpha_i - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}. \quad (i=1,\ldots,n) \tag{5}$$

Ezek a deriváltak nyilvánképen csak az a iránycosinusok függvényei:

$$f_i \equiv f_i[a]. \tag{6}$$

Azt is vegyük észre, hogy a $\Sigma a_i^2 = 1$ egyenlőség értelmében

$$\Sigma a_i f_i = - \varphi[a], \tag{5$'$}$$

a hol természetesen az a változók már csakis a $\Sigma a_i^2 = 1$ megszorítással vehetők számba, úgy hogy az a változók szerint független partialis deriválás alá (5)′ nem fogható.

A II. szakasz végén jelzett æquivalentiában az $f_0, f_1, \ldots, f_n$ deriváltak teszik a vonalas egyenlőtlenségek együtthatóit: az x-eken az a iránycosinusok minden értékével követelt

$$F \equiv x_0 + f_1[a].x_1 + \cdots + f_n[a].x_n \geqq 0 \tag{7}$$

egyenlőtlenség æquivalens az (1) alatt követelt

$$x_0 - r\varphi[p] \geqq 0 \tag{8}$$

egyenlőtlenséggel (a φ-re a II. végén kirótt tulajdonságok mint elégséges föltételek mellett), midőn is az a változók értéktartományát csak az

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1 \tag{9}$$

egyenlőség szoritja meg.

IV. A tétel levezetése arra a tényre alapítható, hogy amely x-ekkel $F[a]$-nak az alsó értékhatára is $\geqq 0$, azokkal az x-ekkel és csak azokkal, a (7) általánosan is, azaz az a iránycosinusok egész értéktartományában teljesül. A II. végéről **1.** alól pedig olyan tulajdonságai is vannak φ-nek, amelyeknél fogva (Weierstrass, Darboux, Genocchi s Peano-val) következtethető, hogy $F[a]$ alsó értékhatára «minimum» (a fölső «maximum») és úgy legkisebb minimuma (ha egynél több volna) az alsó értékhatára, minimuma, ha csak egy van, az alsó értékhatára. Keressük föl tehát $F[a]$ extremumait.

Az extremumokkal

$$\delta F[a] = \Sigma \frac{\partial F}{\partial a_i} \delta a_i + \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j} \delta a_i \delta a_j + \varepsilon \mp 0, \tag{10}$$

a hol az ε másodnál magasbrendű végtelen kicsiny. De (10)-hez (9)-ből

$$\Sigma a_i\,\delta a_i + \tfrac{1}{2}\Sigma\delta a_i^2 = 0 \tag{11}$$

egyenleti föltétel csatlakozik. Eszerint valamely λ multiplicatorral (miután (11)-nek a λ-szorosát kivontuk (10)-ből),

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \lambda a_1, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_n} = \lambda a_n \tag{12}$$

egyenletek szolgálnak (9)-en kívül az a változók extremális meghatározására s ezeknek (9)-ből és (12)-ből való értékeivel

$$\Sigma\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial a_j}\,\delta a_i\,\delta a_j - \lambda\Sigma\delta a_i^2 + 2\varepsilon \mp 0. \tag{13}$$

Ha a négyzetes rész (amelyet kiírtunk) nem esik ki ebből a (11), (12), (9) révén, sem nem semidefinit, akkor szükségképen definit és akkor (13)-ból a 2ε, (11)-ből a négyzetes rész elhagyható:

$$\begin{aligned}&\Sigma\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial a_j}\,\delta a_i\,\delta a_j - \lambda\Sigma a_i^2 \mp 0;\\ &\Sigma a_i\,\delta a_i = 0.\end{aligned} \tag{13'}$$

V. A (12) alattiakat (7) nyomán részletesebben írva:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial a_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial a_1}x_n = \lambda a_1,\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial f_1}{\partial a_n}x_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial a_n}x_n = \lambda a_n.\end{aligned} \tag{14}$$

Ámde, ha (5)-ben a_i szorzóját h jelöli, azaz, ha írjuk

$$\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}a_i - \varphi \equiv h, \tag{15}$$

akkor, ennek a deriválásából

$$\frac{\partial h}{\partial a_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_j\,\partial a_1}a_1 + \cdots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_j\,\partial a_n}a_n, \quad (j=1,\ldots,n) \tag{16}$$

minélfogva az (5)-ből $f_1, \ldots, f_n$ deriválásai és az $a_1, \ldots, a_n$ szorzókkal való összeadások után tekintettel (9)-re azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial a_1} a_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial a_1} a_n = h a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_n} a_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial a_n} a_n = h a_n.\end{array} \tag{17}$$

(Az $f_1, \ldots, f_n$ jüggvények tisztán a φ függvénnyel definiálvák (5) alatt).

Most tegyük föl, hogy olyan a φ függvény, hogy a (17) baloldalairól képezett functionalis determinans sehol sem tünik el az a iránycosinusok értéktartományában:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial a_1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_n}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

Ez a II. szakasz végén **2.** alatt gondolt determinans. A $\Delta \neq 0$ magában foglalja azt is, hogy $h \neq 0$:

$$h \equiv h[a] \equiv \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} a_i - \varphi \neq 0, \tag{19}$$

mert, ha Δ oszlopait rendre $a_1, \ldots, a_n$-val szorozva összeadjuk, akkor (17) baloldalait kapjuk, a melyek pedig a h közös szorzót tartalmazó jobboldalakkal identikusan egyenlők.

Tudva, hogy h sem tünik el az a iránycosinusok értéktartományában, szorozzuk meg h-val a (14) alatt foglalt egyenleteket s aztán a szorzottakat vonjuk ki a λ-val szorzott (17) alatti azonosságokból. Erednek a következő egyenletek:

$$\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial a_1} \cdot (\lambda a_1 - h x_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial a_1} (\lambda a_n - h x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \cdot (\lambda a_1 - h x_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial a_n} (\lambda a_n - h x_n) = 0.\end{array}$$

Innen a (18) rendén, $F[a]$ extremumai számára, az a iránycosinusoknak az

$$a_1 = \frac{h}{\lambda} x_1, \ldots, a_n = \frac{h}{\lambda} x_n$$

kifejezéseit kapjuk. A (9) szolgál a még határozatlan λ multiplicator kiszámítására; e végből kifejezéseinket mindkét oldalon négyzetre emelve összeadjuk, midőn is a λ négyzete gyanánt hr négyzete áll elő, ahol r az $(x_1,\ldots, x_n)$ vektor nagyságát jelenti mint már (1)-ben is. Végső eredményűl ezek a meghatározásaink vannak tehát a (18) föltevés rendén az $F[a]$ extremumai számára:

$$\lambda = \pm rh[a],\ a_1 = \pm \frac{x_1}{r} \equiv \pm p_1,\ldots, a_n = \pm \frac{x_n}{r} \equiv \pm p_n, \tag{20}$$

a hol a $p_1,\ldots, p_n$ elnevezések sem újak (1).

Mivel (18) következtében csak e két értékrendszernél extremum az $F[a]$, és mivel szélső értékhatárai extremumok, azért ez értékrendszerek egyikénél az alsó, másikánál a fölső értékhatárát éri el.

VI. Behelyettezve (7) alá az F kifejezésébe egyszer az egyik, egyszer a másik értékrendszert, az F két értékhatára gyanánt az

$$F[\ p\ ] = x_0 + f_1[\ p\ ].x_1 + \cdots + f_n[\ p\ ].x_n,$$
$$F[-p] = x_0 + f_1[-p].x_1 + \cdots + f_n[-p].x_n$$

kifejezéseink vannak. Ha pedig a (5)'-be írjuk be a két értékrendszert, aztán r-rel átszorozva, az előállott két egyenlet egyikének mindkét oldalához x_0-et, másikának mindkét oldalához $-x_0$-et adunk, akkor azt látjuk, hogy

$$x_0 + f_1[\ p\ ].x_1 + \cdots + f_n[\ p\ ].x_n = x_0 - r\varphi[\ p\ ],$$
$$x_0 + f_1[-p].x_1 + \cdots + f_n[-p].x_n = x_0 + r\varphi[-p].$$

Következőleg

$$F[p] = x_0 - r\varphi[p], \quad F[-p] = x_0 + r\varphi[-p],$$

tehát, mivel φ positiv függvény (1), az $F[a]$-nak $F[p]$ az alsó (és $F[-p]$ a fölső) értékhatára.

Ezzel ki van mutatva, hogy (1) és (7) egyetérő követelések.

VII. A két extremum egyikének van itt csak lényegbe vágó jelentősége, ugyanis a minimumnak, amely a

$$\lambda = rh,\ a_1 = p_1,\ldots, a_n = p_n \tag{21}$$

értékeknél valósul meg. Csak ezeket tartva, abban az esetben, hogy a (13) már a négyzetes részénél fogva definit, a (13)'-ból

$$\Sigma\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial a_j}\delta a_i\delta a_j - \lambda\Sigma\delta a_i^2 > 0;$$
$$\Sigma a_i\,\delta a_i = 0. \tag{22}$$

Állítom, hogy ez, a (7) mint F definitiója alapján (21) által a következőre redukálódik:

$$\tilde{\omega} \equiv -\Sigma\Sigma\frac{\partial f_i\,[a]}{\partial a_j}\delta a_i\delta a_j > 0,\quad \Sigma a_i\,\delta a_i = 0, \tag{23}$$

ahol már $a_1, \ldots, a_n$ helyett véglegesen $p_1, \ldots, p_n$ gondolandó.

Ha ugyanis (9) balját a_0^2 jelöli, akkor (5)-ből tekintet nélkül (9) követelésére, (15) értelmében:

$$a_1\frac{\partial f_1}{\partial a_i} + \cdots + a_n\frac{\partial f_n}{\partial a_i} = ha_i + \frac{\partial h}{\partial a_i}(a_0^2 - 1).$$

Az F definitiójából pedig

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = x_1\frac{\partial f_1}{\partial a_t} + \cdots + x_n\frac{\partial f_n}{\partial a_i}.$$

Hozzáadva ennek a jobboldalához az előbbi egyenlőség jobb- és baloldalának az r-szeres különbségét:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = (x_1 - ra_1)\frac{\partial f_1}{\partial a_i} + \cdots + (x_n - ra_n)\frac{\partial f_n}{\partial a_i} + rha_i + r\frac{\partial h}{\partial a_i}(a_0^2 - 1).$$

Innen, mivel a további deriválások után már (21) és (9) alkalmazandó ($p_j = x_j : r,\ a_0^2 = 1$):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_i^2} = r\left(-\frac{\partial f_i}{\partial a_i} + 3a_i\frac{\partial h}{\partial a_i} + h\right),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial a_j} = r\left(-\frac{\partial f_j}{\partial a_i} + 3a_i\frac{\partial h}{\partial a_j}\right),\quad (i \neq j) \tag{24}$$

(mert r csak az x-ek függvénye (1)). Ezeket írva (22)-be, az rh-val és a λ-val szorzott rész (21) miatt kiesik, a h deriváltjait tartalmazó rész pedig ilyen tagokból áll:

$$3r\frac{\partial h}{\partial a_i}(a_1\delta a_1 + \cdots + a_n\delta a_n)\,\delta a_i,$$

tehát a (22) egyenlete miatt ez is elmarad s úgy $F[a]$ második deriváltjainak (24) alatti kifejezéseiből csak az első tagok érvényesülnek, miből folyólag valóban a (23)-ra redukálódik a (22).

A négyzetes alak együtthatóinak a jellemzését illetőleg Stolz explicit meghatározásaira utalok (Sitz.-Ber. d. Wiener Ak. d. Wiss. 58. kötetében 1868-ból az 1077. lapon olvashatók azok). Mellesleg fölemlítem, hogy a (23) az (5) alól φ által kifejezve is elég egyszerű alakot ölt.

VIII. Az (1)-ből való $f=$ const. (>0) egyenletsereg congruens kúpfölületek seregét határozza meg, amelyek az $f=0$, kúpfölületnek az x_0 tengely positiv felén való csusztatásából erednek. A φ függvényre szabott megszorítások megszorítják az $f=0$ kúpfölület általánosságát is. Oly megszorítások pedig ezek, amelyek rendén a három méretű ($n+1=3$) térben puszta szemlélődéssel belátható az (1)-nek és a (7)-nek az æquivalentiája. Ezeknél a megszorításoknál fogva ugyanis kúpfölületünknek nincs singularis alkotója és nincs inflexiós alkotója sem; metsződés, él és hullám nélkül való fölület az, még pedig mindenütt kifelé domboruló fölület (a «kúpból» számítva a kifelévalóságot). Ehhez képest azt postulálni, hogy az (x_0, x_1, x_2) pont a kúpban (a kúp belsejében avagy a fölületén) legyen, vagy azt, hogy a kúp csúcsából kiszökő (x_0, x_1, x_2) vektor a kúpfölület befelé mutató normálisaival tompa szöget eggyel se alkosson, nyilvánvaloan ugyanazt jelenti, már pedig e postulátumok elseje valósítja meg (1)-nek a tartalmát, és másodika valósítja meg (7)-nek a tartalmát, amely utóbbi ugyanis $1+\Sigma f_i^2$ positiv négyzetgyökével átosztva, az x-ek együtthatói gyanánt a kúpfölület befelé mutató normálisainak az iránycosinusait tartalmazza. Hogy nincs singularis alkotója a kúpfölületnek, az a II. szakasz végén **1.** alatt kirótt megszorítások egy részéből és a II. legvégén tett észrevételből (5) alapján egyenesen következik. Hogy azonban nincs inflexiós alkotója sem a kúpfölületünknek, hanem mindenütt kifelé-domború fölület az, ezt a φ-re szabott kikötések közvetetlenül nem árulják el. A három méretű ($n=2$) térben ezt még, de csak (23) esetére, megállapítom.

Azt írva, hogy

$$\frac{\partial^2\varphi(a_1, a_2)}{\partial a_1^2}a_2 - \frac{\partial^2\varphi(a_1, a_2)}{\partial a_1 \partial a_2}a_1 \equiv k_1,$$

$$\frac{\partial^2\varphi(a_1, a_2)}{\partial a_2^2}a_1 - \frac{\partial^2\varphi(a_1, a_2)}{\partial a_1 \partial a_2}a_2 \equiv k_2.$$

és a (15) alatt definiált h függvényt gondolva: az (5)-ből, tekintettel (9)-re:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = h - k_1 a_2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a_1} = k_1 a_1,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial a_2} = k_2 a_2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a_2} = h - k_2 a_1.$$

Ezek szerint, ha már (9) értelmében

$$a_1 = \cos\theta, \quad a_2 = \sin\theta,$$

(tehát teszünk $\delta a_1 = -a_2\delta\theta$, $\delta a_2 = a_1\delta\theta$) akkor (23) négyzetes alakja

$$\tilde{\omega} = (-h + k_1 a_2 + k_2 a_1)\,\delta\theta^2 =$$
$$= \left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} a_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} a_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1^2} a_2^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1 \partial a_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_2^2} a_1^2\right)\delta\theta^2.$$

Most $\varphi[a]$ egyszersmind $= \varphi(\theta)$ és

$$\varphi' \equiv \frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} a_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} a_1.$$

Újabb totális deriválásával a φ-nek oda jutunk, hogy

$$\tilde{\omega} = (\varphi + \varphi'')\,\delta\theta^2.$$

Az $f=0$ kúpfölületet pedig, vagyis az $x_0 - r\varphi(\theta) = 0$ kúpfölületet az $x_0 = \text{const}\,(>0)$ sík oly görbében metszi, amelynek a görbülete $=$

$$\frac{\varphi^3}{x_0} \cdot \frac{\varphi + \varphi''}{(\varphi^2 + \varphi'^2)^{3/2}}.$$

Következőleg (mivel φ positiv függvény), (23)-ból az $\tilde{\omega} > 0$ kívánság teljesültén nincs inflexiós pontja a metszetnek, hanem minden pontján kifelé görbül, s így nincs inflexiós alkotója a kúpfölületnek, hanem minden alkotóján kifelé domborúl.

A $\Delta \neq 0$ föltétel ide nem mond újat, mert $\Delta = -h.(\varphi + \varphi'')$ h-nak (19) alá foglalt jelentményével.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 november 13.-án tartott üléséből.)

MULTIPLICATOROS MÓDSZER NÉGYZETES ALAKHOZ.

FARKAS GYULA r. tagtól.

Tegyük föl, hogy az n változós

$$\theta \equiv x_1 \Sigma a_{1p} x_p + x_2 \Sigma a_{2p} x_p + \cdots + x_n \Sigma a_{np} x_p, \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

négyzetes kifejezés definit alak, ha az x-ek értéktartományát a

$$\Sigma b_{1p} x_p = 0, \ \Sigma b_{2p} x_p = 0, \ldots, \ \Sigma b_{kp} x_p = 0, \qquad (k < n, \ p=1, 2, \ldots, n)$$

vonalas egyenletek szorítják meg. Ezeket egymástól függetleneknek gondoljuk. Ha valamely okból annak a kívánsága merül föl, hogy n változós négyzetes kifejezésünket $n-k$ változósra redukáljuk, erre tudtommal eddigelé egy módszerünk van, a parameteres módszer (a mely a helyettesítésit is magában foglalja). Most ki fogom mutatni, hogy multiplicatoros módszerrel is megvalósítható a redukálás.

Szorozzuk meg az egyenletek baloldalait rendre a

$$\Sigma \lambda_{1p} x_p, \ \Sigma \lambda_{2p} x_p, \ldots, \ \Sigma \lambda_{kp} x_p, \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

polynomokkal, aztán adjuk θ-hoz. Állítom, hogy a λ «multiplicatorok» meghatározhatók úgy, hogy az új négyzetes kifejezés $\theta^{\star}$ már csak $n-k$ számú x-et tartalmazzon.

E tétel kimutatására az új négyzetes kifejezést három, alkalmas módon kiválasztott rész összege gyanánt fogjuk föl:

$$\theta^{\star} \equiv \theta_1 + \theta_2 + \theta_3,$$

még pedig: úgy képzelve θ-ban az x-ek indexeinek az elhelyezését, hogy az egyenletek már a k számú első x-ek szerint függetlenek legyenek egymástól, tehát

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1k} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

legyen; így határozzuk meg θ^*-nak a θ_1, θ_2, θ_3 összetevőit:

$$\theta_1 \equiv \Sigma\Sigma (a_{qp} + b_{1p}\lambda_{1q} + b_{2p}\lambda_{2q} + \cdots + b_{kp}\lambda_{kq}) x_p x_q\,; \quad (p=1, 2, \ldots, k;\ q=1, 2, \ldots, k).$$

$$\theta_2 \equiv \Sigma\Sigma \begin{Bmatrix} a_{qp} + b_{1p}\lambda_{1q} + b_{2p}\lambda_{2q} + \cdots + b_{kp}\lambda_{kq} + \\ + a_{pq} + b_{1q}\lambda_{1p} + b_{2q}\lambda_{2p} + \cdots + b_{kq}\lambda_{kp} \end{Bmatrix} x_p x_q\,; \quad (p=1, 2, \ldots, k;\ q=k+1, k+2, \ldots, n).$$

$$\theta_3 \equiv \Sigma\Sigma (a_{qp} + b_{1p}\lambda_{1q} + b_{2p}\lambda_{2q} + \cdots + b_{kp}\lambda_{kq}) x_p x_q\,; \quad (p=k+1, k+2, \ldots, n;\ q=k+1, k+2, \ldots, n).$$

Ha lehetnek olyanok a λ multiplicatorok, hogy θ_1-ben és θ_2-ben az összes zárójeles sorok $(\,)$, $\{\,\}$ eltűnjenek, akkor az illető multiplicatorokkal $\theta^* = \theta_3$, tehát a reductio megvalósult.

A θ_1-ben foglaltak eltűnésének az egyenletei egyebek közt így csoportosíthatók:

$$\left.\begin{array}{l} a_{q1} + b_{11}\lambda_{1q} + b_{21}\lambda_{2q} + \cdots + b_{k1}\lambda_{kq} = 0, \\ a_{q2} + b_{12}\lambda_{1q} + b_{22}\lambda_{2q} + \cdots + b_{k2}\lambda_{kq} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{qk} + b_{1k}\lambda_{1q} + b_{2q}\lambda_{2q} + \cdots + b_{kk}\lambda_{kq} = 0. \end{array}\right\} q=1, 2, \ldots, k$$

Hogyha pedig θ_2-ben a felső sor első tagjának és az alsó sornak az összegét c_{qp} jelöli, azaz, ha

$$a_{qp} + a_{pq} + b_{1q}\lambda_{1p} + b_{2q}\lambda_{2p} + \cdots + b_{kq}\lambda_{kp} \equiv c_{qp}\,; \quad p=1, 2, \ldots, k;\ q=k+1, k+2, \ldots, n$$

akkor a θ_2-ben lévő zárójeles kifejezések eltűnésének az egyenletei egyebek közt a következő módon csoportosíthatók:

$$\left.\begin{array}{l} c_{q1} + b_{11}\lambda_{1q} + b_{21}\lambda_{2q} + \cdots + b_{k1}\lambda_{kq} = 0, \\ c_{q2} + b_{12}\lambda_{1q} + b_{22}\lambda_{2q} + \cdots + b_{k2}\lambda_{kq} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{qk} + b_{1k}\lambda_{1q} + b_{2k}\lambda_{2q} + \cdots + b_{kk}\lambda_{kq} = 0. \end{array}\right\} q=k+1, k+2, \ldots, n.$$

A $\lambda_{1q}, \lambda_{2q}, \ldots, \lambda_{nq}$, $(q<k+1)$ multiplicatoroknak a θ_1-ből kiirt egyenletei a $\Delta\neq 0$ következtében összeférő egyenletek és elvezetnek mindama λ multiplicatorok meghatározásához, a melyeknek a második indexe $<k+1$. Ezek meghatároztával meghatározvák már a c_{qp} mennyiségek is, minélfogva a θ_2-ből kiirt egyenletek már tisztán azoknak a λ multiplicatoroknak az egyenletei, a melyek második indexe $>k$. Összeférő egyenletek ezek is a $\Delta\neq 0$ miatt, de meg is határozzák a még hátralévő λ-kat.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 november 13.-án tartott üléséből.)

A PYTHAGORASI ALAKOK GYAKORISÁGA AZ EGÉSZ SZÁMOK SORÁN.

Id. SZILY KÁLMÁN r. tagtól.

Néhány sajátságos tételt óhajtok a számelmélet köréből bemutatni, hogy fölhívjam reájok a figyelmet.

Legyen x és y két positiv egész szám közös osztó nélkül. Négyzeteik összegét nevezzük *pythagorasi alaknak* és a számbeli értékét jelöljük z-vel, tehát

$$z = x^2 + y^2.$$

I.

Vegyük először azt az esetet, mikor x és y közül az egyik páros, a másik páratlan; amazt jelöljük u_1-gyel, ezt v_1-gyel s négyzeteik összegét,

$$z = u_1^2 + v_1^2\text{-t}$$

nevezzük *páros-páratlan* pythagorasi alaknak.

Vessük föl a kérdést, hogy hány ilyen alak van az egész számok során egy adott számhatárig, más szóval hány megoldása van eme határozatlan egyenletnek, z helyébe egymás után minden egész számot téve 1-től a számhatárig.

Közvetlenül belátható vagy pedig könnyen bebizonyítható, hogy

1. z szükségképen $4n+1$ alakú egész szám.

2. Ha z törzsszám, vagy pedig $4n+1$ alakú törzsszámnak egészszámú hatványa, az egyenletnek csak *egy* megoldása van.

3. Ha z csupa $4n+1$ alakú törzstényezők szorzata s köztük szám szerint k egymástól különböző törzstényező van, akkor az egyenletnek 2^{k-1} megoldása van.

4. Végre, ha z törzstényezői közt $4n-1$ alakúak is vannak, akkor az egyenletnek egy megoldása sincs.

A fölvetett kérdés megoldásában a közvetlen összeszámlálás útját követtem: a fölvett számhatárig hány törzsszám van $4n+1$ alakú és hány összetett szám van csupa $4n+1$ alakú törzstényezők szorzatából álló? E czélra a CSERNÁK LÁSZLÓ (LADISLAUS CHERNAC Pannonius) «Cribrum Arithmeticum»-ját használtam, mert ez közvetlenül megadja 1.020,000-ig a 3-mal és 5-tel nem osztható páratlan számok valamennyi törzstényezőjét.

Kérdezzük például hogy hány páros-páratlan pythagorasi alak van 1-től 2,000-ig?

E számhatárig $4n+1$ alakú törzsszámot: 147-et találunk, ilyennek hatványát: 8-at, két ilyennek szorzatát: 78-at, három ilyennek szorzatát: 2-t. Az első két szám ad 155 megoldást, a két utóbbi pedig 164 megoldást. E számhatárig tehát 319 páros-páratlan pythagorasi alak van.

Az összeszámlálást ugyanígy 10 ezer, 20 ezer ... 100 ezerig (sőt jóval azon túl is) folytattam s a számhatárt N-nel, az ezen belőli páros-páratlan pythagorasi alakok számát n_1-gyel, ennek a számhatárhoz való viszonyát α-val jelölve, a következő táblázatba foglalt eredményeket találtam:

N	n_1	$\alpha=\frac{n_1}{N}$	N	n_1	$\alpha=\frac{n_1}{N}$
10 ezer	1593	·1593	60 ezer	9541	·1590
20 «	3186	·1593	70 «	11,138	.1591
30 «	4775	·1592	80 «	12,736	.1592
40 «	6358	·15895	90 «	14,321	.1591
50 «	7960	·1592	100 «	15,919	.1592

E táblázatból kitűnik, hogy a 10 ezrével növekvő határok között α, csekély (0·35 promille) ingadozással, *állandó*. Valószínű, hogy ez az állandóság 100 ezeren túl is megmarad. Több helyen tettem a számok tengerében találom-próbákat: 1 millió-tól 1 millió 20 ezerig s a Dase-féle «Factoren-Tafeln» alapján 8 milliótól 8 millió 10 ezerig s azt találtam, hogy α értéke mindenütt a föntebbi határok között ingadozik.

Miután így α állandóságát megállapítottam, önként fölmerült a kérdés, vajjon α nem valami függvénye-e a mathematika ismert állandóinak? Mindjárt az első próba nyomra vezetett. Vettem α visszás értékét: ·1591 visszás értéke 6·285; ·1592-é pedig 6·281, tehát középértékük: 6·283, vagyis 2π.

Ebből következik, hogy

$$\frac{n_1}{N}=\frac{1}{2\pi}, \qquad \text{(I)}$$

azaz:

A páros-páratlan pythagorasi alakok számának középértéke: olyan körnek a sugara, a melynek kerülete egyenlő a számhatárral.

II.

Vegyük másodszor azt az esetet, mikor x is, y is páratlan; amazt jelöljük u_2-vel, ezt x_2-vel s négyzeteik összegét

$$z = u_2^2 + v_2^2\text{-t}$$

nevezzük *páratlan-páratlan* pythagorasi alaknak.

Megtartván u_1 és v_1-nek I. alatti értelmezését, mind (u_1+v_1), mind (u_1-v_1) páratlan számot ábrázol; tehetjük tehát

$$z = (u_1+v_1)^2+(u_1-v_1)^2,$$

vagyis

$$z = 2\,(u_1^2+v_1^2).$$

Látni ebből, hogy ugyanazon N számhatárig *félannyi páratlan-páratlan pythagorasi alak van, mint páros-páratlan;* tehát amazok száma

$$n_2 = \frac{n_1}{2} \tag{II}$$

és

$$\frac{n_2}{N} = \frac{1}{4\pi}, \tag{II*}$$

azaz:

A páratlan-páratlan pythagorasi alakok számának középértékéből vont négyzetgyök: olyan gömbnek a sugara, a melynek felülete egyenlő a számhatárral.

III.

Adjuk össze a kétféle pythagorasi alakok számát és összegüket viszonyítsuk a számhatárhoz, akkor lesz

$$\frac{n_1+n_2}{N} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} = \frac{3}{4\pi}; \tag{III}$$

azaz:

A közös osztó nélküli pythagorasi alakok összes számának középértékéből vont köbgyök: olyan gömbnek a sugara, a melynek térfogata egyenlő a számhatárral.

A III. alatti képlet voltaképen speczialis esete egy már Lipschitz-től (Berl. Monatsberichte, 1865:182) levezetett képletnek. Az n_1 és n_2 értéke (I) és (II*) azonban tudomásom szerint mindekkoráig nem volt külön-külön meghatározva.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 február 19.-én tartott üléséből.)

A GÖRDÜLŐ MOZGÁS ELMÉLETE.

SUTÁK JÓZSEF-től.

Előszó.

A felületelmélet alapfogalmainak bemutatásával kapcsolatban a normális változás commutativ tételének (1. §. XV.) a felfedezésével sikerült az érintő és normális-változás fundamentális tételének (1. §. XII., XIV.) tartalmát annyira megvilágítani, hogy lehetővé vált a gördülő mozgásnak oly meglepően egyszerű elméletét felépiteni, melyben az eddig elszigetelten álló eredmények nemcsak könnyen fellelhetők, hanem azok értéke is evidensé válik. Ezt az értékelési folyamatot a munkálat végén be is mutattam.

A gördülő mozgás alaptételét a 8. fejezet I. alatt levő formulája tartalmazza; ebből az összes tételek leszármaztathatók.

Mivel az eddigi kutatások skaláris mennyiségek között levő relatiók megállapitására vonatkoznak, azért ezeknek a kimondását sem mulaszthattam el. Megállapitottam a gördülésnek három skaláris tételét, melyekből az érintő- és normálisváltozás fönntebb emlitett alaptételeinek a segitségével a tételeknek oly halmazát írhattuk fel, mely eddig elszigetelten álló több tételnek logikai æquivalentiáját evidenssé tette.

Az irodalomnak csak az általánosabb jellegű kutatásait vettem figyelembe, hogy azok eredményeit logikai épületünkben felkeressem s igy értéküket evidenssé tegyem.

1. A felületi görbékre vontkozó alapfogalmak.

A

$$P = P_{(u,\, v)},$$

felület P pontján átmenő felületi C_s görbe fundamentális mennyiségeit szintén s jelzővel látjuk el; következőleg érintője, főnormálisa, binormálisa, görbülete és torsiója rendre : $\bar{e}_s$, $\bar{n}_s$, $\bar{b}_s$, $\frac{1}{\varrho_s}$, $\frac{1}{\tau_s}$; a Serret-Frenet-féle formulák pedig:

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds} = \frac{1}{\varrho_s}\bar{n}_s, \tag{I}$$

$$\frac{d\bar{n}_s}{ds} = -\frac{1}{\varrho_s}\bar{e}_s - \frac{1}{\tau_s}\bar{b}_s, \tag{II}$$

$$\frac{d\bar{b}_s}{ds} = \frac{1}{\tau_s}\bar{n}_s. \tag{III}$$

Ezek II.-ából:

$$\frac{1}{\tau_s} = -\bar{b}_s \cdot \frac{d\bar{n}_s}{ds} = (\bar{n}_s \times \bar{e}_s)\cdot\frac{d\bar{n}_s}{ds} = \left(\frac{d\bar{n}_s}{ds} \times n_s\right)\cdot \bar{e}_s. \tag{1}$$

A felület P pontjához tartozó normálisa alatt a következő egységvektort értjük:

$$\bar{\nu} = \frac{dP}{du} \times \frac{dP}{dv} : \left|\frac{dP}{du} \times \frac{dP}{dv}\right|. \tag{2}$$

Az $\bar{e}_s$, $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$, $\bar{\nu}$ jobbraforgó rendszert alkotó egységvektorok alkotta triédert a felület P pontján átmenő C_s görbére vonatkozó fundamentális triéderének nevezzük.

Az $\frac{1}{\varrho_s}\bar{n}_s$ vektornak a felület normálisára való vetületének megfelelő segmentumot C_s normális görbületének nevezzük és $\frac{1}{\varrho_{\nu_s}}$-sel jelöljük. Ennélfogva

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} = \frac{\bar{n}_s . \bar{\nu}}{\varrho_s} = \frac{\cos(\bar{n}_s, \bar{\nu})}{\varrho_s}. \tag{3}$$

Az (I) alapján tehát

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} = \frac{d\bar{e}_s}{ds}\cdot\bar{\nu} = -\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{e}_s. \tag{IV}$$

A felület oly görbéit, melyek mentén a normális görbület nulla, assymptotikus görbéknek nevezzük.

Az assymptotikus görbék egyenlete tehát

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} = 0, \tag{V}$$

jellemző sajátsága pedig

$$\bar{n}_s \perp \bar{\nu}, \quad \bar{b}_s \parallel \bar{n}. \tag{VI}$$

Az $\frac{1}{\varrho_s}\bar{n}_s$ *vektornak a felület érintősíkjára való vetületének megfelelő segmentumot* C_s *érintői vagy geodetikus görbületének nevezzük és* $\frac{1}{\varrho_{g_s}}$*-sel jelöljük.* Ennélfogva

$$\frac{1}{\varrho_{g_s}} = \frac{(\bar{\nu}\times\bar{e}_s).\bar{n}_s}{\varrho_s} = \frac{(\bar{e}_s\times\bar{n}_s).\bar{\nu}}{\varrho_s} = \frac{\bar{b}_s.\bar{\nu}}{\varrho_s} = \frac{\cos(\bar{b}_s, \bar{\nu})}{\varrho_s}. \tag{4}$$

Tekintettel az (I) alatt levő egyenletre:

$$\frac{1}{\varrho_{g_s}} = \frac{d\bar{e}_s}{ds}\cdot(\bar{\nu}\times\bar{e}_s) = -\frac{d(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)}{ds}\cdot\bar{e}_s. \tag{VII}$$

A felület oly görbéit, melyek mentén a geodetikus görbület nulla, geodetikus görbéknek nevezzük.

A geodetikus görbék egyenlete tehát

$$\frac{1}{\varrho_{g_s}} = 0; \tag{VIII}$$

jellemző tulajdonságuk pedig:

$$\bar{b}_s \perp \bar{\nu}, \quad \bar{n}_s \parallel \bar{\nu}. \tag{IX}$$

A (VIII) *alatt levő egyenletből következik, hogy mindig van egy, de csakis egy geodetikus görbe, mely a P ponton átmenő előre adott* $\bar{e}_s$ *irányt P pontban érinti.*[1]

A (IX) alatt levő formula alapján tehát a P ponton átmenő s $\bar{e}_s$-et érintő geodetikus görbe torsióját az (1) alatt levő formulából úgy nyerjük, ha abban $\bar{n}_s$ helyett $\pm\bar{\nu}$-t írunk. Ennélfogva a geodetikus görbe torsiója

$$\frac{1}{\tau_s} = (\bar{\nu}\times\bar{e}_s)\cdot\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \left(\frac{d\bar{\nu}}{ds}\times\bar{\nu}\right).\bar{e}_s.$$

A C_s *tetszésszerinti felületi görbét érintő geodetikus görbének*

---

[1] Suták: A differentialegyenletek elmélete. Budapest. 1906. 408. l.

az érintési pontbeli torsióját C_s e ponthoz tartozó geodetikus görbületének nevezzük és $\frac{1}{\tau_{g_s}}$*-sel jelöljük.*

Ennélfogva a legutóbbi formulánk alapján:

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = \frac{d\bar{\nu}}{ds} \cdot (\bar{\nu} \times \bar{e}_s) = -\frac{d(\bar{\nu} \times \bar{e}_s)}{ds} \cdot \bar{\nu}. \tag{X}$$

A felület oly görbéit, melyek mentén a geodetikus torsio nulla, görbületi görbéknek nevezzük.

A görbületi görbék egyenlete tehát

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = 0, \tag{XI}$$

jellemző tulajdonságuk pedig az, hogy $\bar{e}_s$, $\bar{\nu}$, $\frac{d\nu}{ds}$ egy síkban vannak.

A (XI) alatt levő egyenletből az is evidens. hogy a felület minden pontján két görbületi görbe megy át, C_{s_1} és C_{s_2}; a jelölést úgy választottuk, hogy $\bar{e}_{s_1}$, $\bar{e}_{s_2}$, $\bar{\nu}$ jobbraforgó rendszert alkossanak; ennek megfelelően az érintősíkban a positiv szöget is mindig $\bar{e}_{s_1}$-től $\bar{e}_{s_2}$ felé számítjuk.

Mivel a (IV), (VII) és (X) alatt levő egyenletek éppen a $\frac{d\bar{e}_s}{ds}$, $\frac{d(\bar{\nu} \times \bar{e}_s)}{ds}$, $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$ vektoroknak a fundamentális triéderre vonatkoztatott componenseit szolgáltatják, azért

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds} = \frac{1}{\varrho_{g_s}} (\bar{\nu} \times \bar{e}_s) + \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \bar{\nu}, \tag{XII}$$

$$\frac{d(\bar{\nu} \times \bar{e}_s)}{ds} = -\frac{1}{\varrho_{g_s}} \bar{e}_s - \frac{1}{\tau_{g_s}} \bar{\nu}, \tag{XIII}$$

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \bar{e}_s + \frac{1}{\tau_{g_s}} (\bar{\nu} \times \bar{e}_s), \tag{XIV}$$

Formuláink közül a $\frac{d\bar{e}_s}{ds}$-re vonatkozót az *érintő-változás-*, a $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$-re vonatkozót pedig a *normális-változás fundamentális tételének* nevezzük.

Ha C_s és C_σ a felület P pontján átmenő két felületi görbe, akkor

$$\bar{e}_s = \frac{dP}{ds}, \quad \bar{e}_\sigma = \frac{dP}{d\sigma},$$

következőleg

$$\frac{d\bar{e}_s}{d\sigma} = \frac{d\bar{e}_\sigma}{ds} = \frac{d^2P}{d\sigma ds} = \frac{d^2P}{dsd\sigma}.$$

Ennélfogva a

$$\bar{\nu}.\bar{e}_s = \bar{\nu}.\bar{e}_\sigma = 0$$

egyenlet alapján

$$\frac{d\bar{\nu}}{d\sigma}.\bar{e}_s = \frac{d\bar{\nu}}{ds}.\bar{e}_\sigma. \qquad \text{(XV)}$$

Ezt a tételt a *normális változás commutativ tételének* mondjuk. *A felület P pontján átmenő oly C_s* és *C_σ felületi görbéket, melyekre nézve*

$$\frac{d\bar{\nu}}{d\sigma}\cdot\bar{e}_s = \frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{e}_\sigma = 0,$$

conjugált görbéknek nevezzük.

1. Példa. Az assymptotikus görbékre nézve a (XIV) alapján

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{e}_s = 0,$$

azaz: *az assymptotikus görbe önmagának conjugáltja.*

2. Példa. (XIV) és (XV) alapján a felület P pontján átmenő görbületi görbékre nézve

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds_1}\cdot\bar{e}_{s_2} - \frac{d\bar{\nu}}{ds_2}\cdot\bar{e}_{s_1} = \left(\frac{1}{\varrho_{\nu s_2}} - \frac{1}{\varrho_{\nu s_1}}\right)\bar{e}_{s_1}\cdot\bar{e}_{s_2} = 0,$$

azaz: *az egy ponton átmenő görbületi görbék egymásra merőlegesek és egymás conjugáltjai.*

3. Példa. Ha $\bar{e}_{\sigma_1}$, $\bar{e}_{\sigma_2}$, $\bar{\nu}$ orthogonális jobbra forgó rendszert alkotnak, tehát

$$\bar{\nu}\times\bar{e}_{\sigma_1} = \bar{e}_{\sigma_2}, \quad \bar{e}_{\sigma_2}\times\bar{\nu} = \bar{e}_{\sigma_1},$$

akkor a (XIV) alapján

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\nu}}{d\sigma_1} &= -\frac{1}{\varrho_{\nu_{\sigma_1}}}\bar{e}_{\sigma_1} + \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_1}}}\bar{e}_{\sigma_2}, \\ \frac{d\bar{\nu}}{d\sigma_2} &= -\frac{1}{\varrho_{\nu_{\sigma_2}}}\bar{e}_{\sigma_2} - \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_2}}}\bar{e}_{\sigma_1}, \end{aligned} \tag{5}$$

melyekből a (XV) alkalmazásával a következőt nyerjük:

$$\frac{1}{\tau_{g_{\sigma_1}}} + \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_2}}} = 0, \tag{6}$$

azaz: *a felület P pontján átmenő s egymásra merőleges felületi görbék geodetikus torsiói a P pontban csak előjelben különböznek egymástól.*[1]

4. Példa. Ha C_s görbe conjugáltját C_{sk}-val jelöljük, akkor a

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{e}_{sk} = 0,$$

$$(\bar{e}_s,\ \bar{e}_{sk}) + (\bar{e}_{sk},\ \bar{\nu}\times\bar{e}_s) = \frac{\pi}{2}$$

egyenletek alapján a (XIV) alatt levő képletünk a következő egyenlethez vezet:

$$\frac{\cos(\bar{e}_s,\ \bar{e}_{sk})}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{\sin(\bar{e}_s,\ \bar{e}_{sk})}{\tau_{g_s}} = 0. \tag{7}$$

2. Az érintő-változás alaptételének skaláris alakja.

Ha $\bar{e}$ a $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$ és $\bar{\nu}$ síkjának tetszésszerinti vektora, akkor

$$(\bar{\nu}\times\bar{e}_s,\ \bar{e}) + (\bar{e}\times\bar{\nu}) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Következőleg az előbbi fejezet (XII) képlete alapján

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds}\cdot\bar{e} = \frac{\cos(\bar{e},\bar{\nu})}{\varrho_{\nu_s}} + \frac{\sin(\bar{e},\bar{\nu})}{\varrho_{g_s}}. \tag{XII'}$$

Ez a tétel æquivalens az érintőváltozás alaptételével, mert hiszen, ha ebben $\bar{e}$ helyett rendre $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$, $\bar{\nu}$-t írunk, akkor

$\frac{d\bar{e}_s}{ds}$-nek a fundamentális triéderre vonatkozó coordinatáit és evvel egyúttal a (XII) alatt levő formulánkat nyerjük.

Ha a (XII')-ben $\bar{e}$ helyett $\bar{b}_s$-t írunk, akkor a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{\cos(\bar{b}_s, \bar{\nu})}{\varrho_{\nu_s}} + \frac{\sin(\bar{b}_s, \bar{\nu})}{\varrho_{g_s}} = 0,$$

melynek felhasználásával a (XII')-t még a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds} \cdot \bar{e} = \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \frac{\sin(\bar{b}_s, \bar{e})}{\sin(\bar{b}_s \bar{\nu})} = -\frac{1}{\varrho_{g_s}} \frac{\sin(\bar{b}_s, \bar{e})}{\cos(\bar{b}_s, \bar{\nu})}. \qquad \text{(XII'')}$$

3. A normális-változás alaptételének skaláris alakja.

Ha az 1. fejezetnek a normális-változás alaptételét kifejező (XIV) alatt levő egyenletét skalárisan szorozzuk $\bar{e}_\sigma$-val, akkor az

$$(\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma) + (\bar{e}_\sigma, \bar{\nu} \times \bar{e}_s) = \frac{\pi}{2}$$

relatióra való tekintettel a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} \cdot \bar{e}_\sigma = -\frac{\cos(\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma)}{\varrho_{\nu_s}} + \frac{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma)}{\tau_{g_s}}. \qquad \text{(XIV')}$$

Ez a tétel a normális-változás alaptételével æquivalens, mert hiszen ha ebben $\bar{e}_\sigma$ helyett rendre $\bar{e}_s$, $\bar{\nu} \times \bar{e}_s$-t teszünk, akkor éppen $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$-nek a fundamentalis triéderre vonatkoztatott coordinátáit, tehát éppen a (XIV) alatt levő formulát nyerjük.

A (XIV') alatt levő egyenletnek az 1. fejezet (7) alatt levő egyenlete alapján még a következő alakot is adhatjuk:

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} \cdot \bar{e}_\sigma = -\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \frac{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{s_k})}{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{s_k})} = -\frac{1}{\tau_{g_s}} \frac{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{s_k})}{\cos(\bar{e}_s, \bar{e}_{s_k})}. \qquad \text{(XIV'')}$$

Ebből pedig a normális-változás commutativ tétele értelmében evidenssé válnak a következő egyenletek is:

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}}\frac{\sin(\bar e_\sigma, \bar e_{s_k})}{\sin(\bar e_s, \bar e_{s_k})} = \frac{1}{\varrho_{\nu_\sigma}}\cdot\frac{\sin(\bar e_s, \bar e_{\sigma_k})}{\sin(\bar e_\sigma, \bar e_{\sigma_k})}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\tau_{g_s}}\frac{\sin(\bar e_\sigma, \bar e_{s_k})}{\cos(\bar e_s, \bar e_{s_k})} = \frac{1}{\tau_{g_\sigma}}\frac{\sin(\bar e_s, \bar e_{\sigma_k})}{\cos(\bar e_\sigma, \bar e_{\sigma_k})}. \tag{9}$$

4. A normális-változás alaptételének transformatiója.

Mivel a $\frac{d\bar\nu}{ds}$ vektor párhuzamos az $\bar e_s$ és $\bar\nu\times\bar e_s$ vektorok síkjával, azért bármely két ebben a síkban fekvő vektorral előállítható; így ha $\bar e_{\sigma_1}, \bar e_{\sigma_2}, \bar\nu$ jobbraforgó derékszögű rendszert alkotnak, akkor a

$$\begin{aligned}\frac{d\bar\nu}{ds} &= \left(\frac{d\bar\nu}{ds}\cdot\bar e_{\sigma_1}\right)\bar e_{\sigma_1} + \left(\frac{d\bar\nu}{ds}\cdot\bar e_{\sigma_2}\right)\bar e_{\sigma_2}\\ &= \left(\frac{d\bar\nu}{d\sigma_1}\cdot\bar e_s\right)\bar e_{\sigma_1} + \left(\frac{d\bar\nu}{d\sigma_2}\cdot\bar e_s\right)\bar e_{\sigma_2}\end{aligned}$$

egyenlet, valamint az 1. fejezet (5) alatt levő egyenletei alapján:

$$-\frac{d\nu}{ds} = \left(\frac{\bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_s}{\varrho_{\nu_{\sigma_1}}} - \frac{\bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_s}{\tau_{g_{\sigma_1}}}\right)\bar e_{\sigma_1} + \left(\frac{\bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_s}{\varrho_{\nu_{\sigma_2}}} + \frac{\bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_s}{\tau_{g_{\sigma_2}}}\right)\bar e_{\sigma_2} \tag{XIV$^{(3)}$}$$

Ez a tétel a normális-változás alaptételével szintén æquivalens, mert hiszen, ha ebben $\bar e_{\sigma_1}$ helyett $\bar e_s$-t, $\bar e_{\sigma_2}$ helyett pedig $\bar\nu\times\bar e_s$-t írunk, akkor tekintettel az 1. fejezet (6) alatt levő egyenletére, éppen az 1. fejezet (XIV) alatt levő képletét nyerjük.

A (XIV$^{(3)}$) alatt levő tételünknek skaláris alakja a következő:

$$\begin{aligned}-\frac{d\bar\nu}{ds}\cdot\bar e_\sigma = &\frac{(\bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_s)(\bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_\sigma)}{\varrho_{\nu_{\sigma_1}}} - \frac{(\bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_s)(\bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_\sigma)}{\tau_{g_{\sigma_1}}} +\\ &+\frac{(\bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_s)(\bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_\sigma)}{\tau_{g_{\sigma_2}}} + \frac{(\bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_s)(\bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_\sigma)}{\varrho_{\nu_{\sigma_2}}}.\end{aligned} \tag{XIV$^{(4)}$}$$

Ha tehát $\bar e_s$ és $\bar e_\sigma$-nak az $\bar e_{\sigma_1}, \bar e_{\sigma_2}$-re vonatkoztatott coordinátáit x_1, x_2, illetőleg y_1, y_2-vel jelöljük, azaz:

$$x_1 = \bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_s,\quad x_2 = \bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_s;$$
$$y_1 = \bar e_{\sigma_1}\cdot\bar e_\sigma,\quad y_2 = \bar e_{\sigma_2}\cdot\bar e_\sigma,$$

akkor tekintettel az 1. fejezet (6) alatt levő egyenletére:

$$-\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{e}_\sigma=\frac{x_1y_1}{\varrho_{\sigma_1}}+(-1)^i\frac{x_1y_2+x_2y_1}{\tau_{g\sigma_i}}+\frac{x_2y_2}{\varrho_{\nu\sigma_2}}. \quad (\mathrm{XIV}^{(5)})$$

1. Példa. Ha C_s és C_σ conjugált görbék, akkor

$$\frac{x_1y_1}{\varrho_{\nu\sigma_1}}+(-1)^i\frac{x_1y_2+x_2y_1}{\tau_{g\sigma_i}}+\frac{x_2y_2}{\bar{\nu}_{\nu\sigma_2}}=0,$$

azaz: *a felület egy pontján átmenő conjugált görbék involutióban vannak.*

2. Példa. Ha

$$\bar{e}_\sigma=\bar{e}_s,$$

akkor

$$x_1=y_1,\quad x_2=y_2.$$

Az 1. fejezet (IV) alatt lévő képlete alapján tehát

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}}=\frac{x_1^2}{\varrho_{\nu\sigma_1}}+(-1)^i\frac{2x_1x_2}{\tau_{g\sigma_i}}+\frac{x_2^2}{\varrho_{\nu\sigma_2}}. \quad (10)$$

Ezt a tételt nevezzük az *általánosított* EULER-féle tételnek. Ha ebben $\bar{e}_{\sigma_1}$ és $\bar{e}_{\sigma_2}$ megegyeznek $\bar{e}_{s_1}$, illetőleg $\bar{e}_{s_2}$-vel, akkor $\frac{1}{\tau_{gs_i}}$ nulla lévén, nyerjük az EULER-féle tételt,[1] mely

$$\frac{1}{\varrho_{\nu s}}=\frac{\cos^2(\bar{e}_{s_1},\bar{e}_s)}{\varrho_{\nu s_1}}+\frac{\sin^2(\bar{e}_{s_1},\bar{e}_s)}{\varrho_{\nu s_2}}. \quad (11)$$

3. Példa. Ha pedig

$$\bar{e}_\sigma=\bar{\nu}\times\bar{e}_s,$$

akkor

$$y_1=(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)\cdot\bar{e}_{\sigma_1}=(\bar{e}_{\sigma_1}\times\bar{\nu})\cdot\bar{e}_s=-\,\bar{e}_{\sigma_2}\cdot\bar{e}_s=-x_2;$$
$$y_2=(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)\cdot\bar{e}_{\sigma_2}=(\bar{e}_{\sigma_2}\times\bar{\nu})\cdot\bar{e}_s=\bar{e}_{\sigma_1}\cdot\bar{e}_s=x_1.$$

Az 1. fejezet (X) képlete alapján tehát

$$\frac{1}{\tau_{gs}}=\frac{x_1x_2}{\varrho_{\nu\sigma_1}}-(-1)^i\frac{x_1^2-x_2^2}{\tau_{g\sigma_i}}-\frac{x_1x_2}{\varrho_{\nu\sigma_2}}. \quad (12)$$

[1] EULER: Mem. de l'Acad. de Berlin, t. XVI. 1760.

Ez az általánosított BERTRAND-ENNEPER-féle tétel. Ha ebben $\bar{e}_{\sigma_1}$ és $\bar{e}_{\sigma_2}$-t rendre $\bar{e}_{s_1}$, $\bar{e}_{s_2}$-vel helyettesítjük, akkor nyerjük a BERTRAND-ENNEPER-féle tételt,[1] mely

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = \sin(\bar{e}_{s_1}, \bar{e}_s) \cos(\bar{e}_{s_1}, \bar{e}_s) \left(\frac{1}{\varrho_{\nu_{s_1}}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_2}}} \right). \tag{13}$$

A (11) és (13) alatt lévő tételeknek meg következménye a BRIOSCHI-ENNEPER-féle

$$\frac{1}{\tau_{g_s}^2} + \left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_1}}} \right) \left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_1}}} \right) = 0 \tag{14}$$

tétel.[2]

4. Példa. A ($XIV^{(3)}$) alatt levő egyenlet négyzete a következő tételhez vezet:

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{ds} \right)^2 = \frac{x_1^2}{\varrho_{\nu_{\sigma_1}}^2} + \frac{x_2^2}{\varrho_{\nu_{\sigma_2}}^2} + \frac{x_1 x_2}{\tau_{g_{\sigma_2}}} \left(\frac{1}{\varrho_{\nu_{\sigma_1}}} + \frac{1}{\varrho_{\nu_{\sigma_2}}} \right) + \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_1}}^2}, \tag{15}$$

melynek specialis esete a

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{ds} \right)^2 = \frac{\cos^2(\bar{e}_{s_1}, \bar{e}_s)}{\varrho_{\nu_{s_1}}^2} + \frac{\sin^2(\bar{e}_{s_2}, \bar{e}_s)}{\varrho_{\nu_{s_2}}} \tag{16}$$

BONNET-féle tétel.[3]

5. Az $(\bar{n}_s, \bar{\nu})$ szög változási törvénye.

Az érintő-változás fundamentális tétele értelmében $\frac{\bar{n}_s}{\varrho}$ vektornak a fundamentális triéderre vonatkoztatott coordinatái:

$$0, \frac{1}{\varrho_{g_s}}, \frac{1}{\varrho_{\nu_s}}.$$

---

[1] BERTRAND: Journal de Mathematique, t. IX. 1844, p. 140. Traité de calcul differentiel, 1864, p. 681. ENNEPER: Zeitschr. f. Math. 9. 1864, p. 100.

[2] BRIOSCHI: Annali di Scienze Matematiche, Fisiche, t. V. 1854, p. 232. Opere Matematiche, t. I. p. 120. ENNEPER: Zeitschr. f. Math. 9. 1864, p. 100.

[3] BONNET: Journal de l'École Polytechnique, 32. cahier, t. XIX. 1848. p. 9.

Tehát a geodetikus görbület és a normalis görbület definitiója független a fundamentalis triédert jellemző $(\bar{n}, \bar{\nu})$ szög változási törvényeitől. S mivel $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$-nek a fundamentalis triéderre vonatkoztatott coordinatái:

$$-\frac{1}{\varrho_{\nu_s}}, \quad \frac{1}{\tau_{g_s}}, \quad 0$$

azért föltétlenül a geodetikus torsio van valamelyes kapcsolatban az

$$(\bar{n}_s, \bar{\nu}) = \varphi$$

szög megváltozási törvényével. Ezt a kapcsolatot a geodetikus torsio definitiójából meg is állapíthatjuk. Ugyanis

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = -\frac{d(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)}{ds}\cdot\nu.$$

Ha már most megfontoljuk, hogy

$$\bar{\nu}\cdot\bar{n}_s = \cos\varphi, \quad \bar{\nu}\cdot\bar{b}_s = \sin\varphi,$$

továbbá

$$\begin{aligned}\bar{\nu}\times\bar{e}_s &= [(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)\cdot\bar{n}_s]\,\bar{n}_s + [(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)\cdot\bar{b}_s]\,\bar{b}_s\\ &= (\bar{\nu}\cdot\bar{b}_s)\,\bar{n}_s - (\bar{\nu}\cdot\bar{n}_s)\,\bar{b}_s\\ &= \sin\varphi\,\bar{n}_s - \cos\varphi\,\bar{b}_s,\end{aligned}$$

akkor különös tekintettel a SERRET-FRENET-féle formulákra:

$$\frac{d(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)}{ds} = [(\bar{\nu}\cdot\bar{n}_s)\,\bar{n}_s + (\bar{\nu}\cdot\bar{b}_s)\,\bar{b}_s]\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\tau_s}\right) - \frac{\bar{\nu}\cdot\bar{b}_s}{\varrho_s}\bar{e}_s;$$

ha már most ezt az egyenletet skalárisan, megszorozzuk $-\bar{\nu}$-vel, akkor éppen a keresett összefüggést nyerjük, a mely

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = \frac{1}{\tau_s} - \frac{d\varphi}{ds}. \tag{XV}$$

Ha C_s görbületi görbe, akkor

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau_s}.$$

Ezt a tételt először LANCRET mondotta ki;[1] geometriailag először LIOUVILLE-,[2] majd később BONNET-,[3] analytikailag pedig először BRIOSCHI[4] bizonyította be.

6. A görbék és felületek elméletének logikai æquivalentiája.

Ha C_s görbénk P pontjához mellérendeljük az $\bar{e}_s$, $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$, $\bar{\nu}$ derékszögű jobbraforgó triédert, hol $\bar{\nu}$ a P pont függvénye s aztán — tekintet nélkül arra, hogy C_s valamely felületen helyet foglal-e vagy nem — szintén használjuk a

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds}\cdot(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)=\frac{1}{\varrho_{\nu_s}},$$
$$\frac{d\bar{e}_s}{ds}\cdot\bar{\nu}\qquad=\frac{1}{\varrho_{\nu_s}},$$
$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)=\frac{1}{\tau_{g_s}}$$

symbolumokat s a velük jelölt mennyiségeket rendre C_s görbe P pontjához tartozó *geodetikus görbületnek*, *normalis görbületnek* és *geodetikus torsiónak* nevezzük, akkor nem teszünk mást, mint áthelyezzük a görbe elméletét az $\bar{e}_s$, $\bar{n}_s$, $\bar{b}_s$ triéderről az $\bar{e}_s$, $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$, $\bar{\nu}$-triéderre. Ha aztán a görbén oly felületet képzelünk átmenni, melynek felületi normálisa épen $\bar{\nu}(P)$, akkor a görbe elmélete a felület elméletévé válik. Ezzel tehát a görbék és felületek elméletének logikai æquivalentiája evidenssé lett.

A következőkben tehát, hogy $\bar{\nu}$ mellé hozzáképzelünk-e oly felületet, melynek $\bar{\nu}$ éppen a normálisa, vagy nem, az teljesen közömbös.

Ennélfogva a gördülés általános elméletének felépítése alkalmával nem is használjuk a felület szót, mert ez az imént mondottak alapján fölösleges. Ha azután a tárgyalásban fellépő egyik-,

[1] LANCRET: Memoire sur les lignes a double courbure, 1802.

[2] LIOUVILLE: Journal de Math. t. 11. 1846, p. 345.

[3] BONNET: Journal de l'École Polytech. 32. cah. t. XIX. 1848, p. 17.

[4] BRIOSCHI: Annali di Scienze Mat. e Fis. t. V. 1854, p. 232. Opere Matematiche t. I. p. 120.

vagy mindkét görbéhez mellérendelt $\bar{\nu}$-höz felületet is képzelünk, akkor nyerjük a görbéknek a felületen, illetőleg a felületeknek felületeken történő gördülési problemáját. Ezzel az eljárással nemcsak a philosophia gazdasági elvét szolgáljuk, hanem a logikailag æquivalens értékeket is ugyanazokkal a jegyekkel jelöljük.

7. A görbe fundamentalis mennyiségeinek kinematikai jelentése.

Ha egy merev rendszer a térben úgy mozog, hogy Q pontja a fix C_s görbén absolut értékre nézve állandóan egységnyi sebességgel mozog, tehát

$$v = \frac{ds}{dt} = 1,$$

akkor a merev rendszer P pontjának mozgási egyenlete:

$$\frac{dP}{ds} = \bar{e}_s + \bar{\omega} \times (P-Q),$$

hol $\bar{\omega}$ a momentán forgási tengely.

Ha már most még azt is feltételezzük, hogy a merev rendszerrel kapcsolatos triéder a rendszer mozgása közben állandóan egybeesik C_s fundamentális triéderével, akkor $Q+\bar{e}_s$, $Q+\bar{\nu}\times\bar{e}_s$, $Q+\bar{\nu}$ a merev rendszernek szintén pontjai; mozgásegyenleteik tehát

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds} = \bar{\omega}\times\bar{e}_s, \qquad (\mathrm{XII}_1)$$

$$\frac{d(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)}{ds} = \bar{\omega}\times(\bar{\nu}\times\bar{e}_s), \qquad (\mathrm{XIII}_1),$$

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \bar{\omega}\times\bar{\nu}. \qquad (\mathrm{XIV}_1)$$

Ha a (XIII_1) egyenletet $\bar{\nu}$-vel, a (XIV_1)-t $\bar{e}_s$-sel, a (XII_1)-t $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$-sel szorozzuk skalarisan, akkor a következő formulákat nyerjük:

$$\bar{\omega}\cdot\bar{e}_s = -\frac{1}{\tau_{g_s}}, \qquad (17)$$

$$\bar{\omega}\cdot(\bar{\nu}\times\bar{e}_s) = -\frac{1}{\varrho_{\nu_s}}, \qquad (18)$$

$$\bar{\omega} \cdot \bar{\nu} = \frac{1}{\varrho_{g_s}}. \tag{19}$$

tehát

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{\tau_{g_s}} \bar{e}_s - \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} (\bar{\nu} \times \bar{e}_s) + \frac{1}{\varrho_{g_s}} \bar{\nu}. \tag{20}$$

Ha $\bar{\omega}$-nak ezt az értékét fönntebbi formuláinkba behelyettesítjük, akkor ismét eljutunk az 1. fejezet (XII), (XIII) és (XIV) alatt levő formuláihoz.

Ha még

$$\bar{\nu} \times \bar{e}_s = \bar{n}_s, \; \bar{\nu} = \bar{b}_s,$$

akkor

$$\frac{1}{\varrho_{g_s}} = \frac{1}{\varrho_s}, \quad \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} = 0, \quad + \frac{1}{\tau_{g_s}} = \frac{1}{\tau_s};$$

e formuláink a Serret-Frenet-féle formulák kinematikai jelentését mutatják be.

Az $\bar{e}_s$, $\bar{n}_s$, $\bar{b}_s$ és $\bar{e}_s$, $\bar{\nu} \times \bar{e}_s$, $\bar{\nu}$ triéderek között levő kapcsolatot az 1. fejezet (XII) alatt levő képlete értelmében a következő formulák szemléltetik:

$$\frac{\bar{n}_s}{\varrho_s} = \frac{1}{\varrho_{g_s}} (\bar{\nu} \times \bar{e}_s) + \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \bar{\nu}, \tag{21}$$

$$\frac{\bar{b}_s}{\varrho_s} = -\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} (\bar{\nu} \times \bar{e}) + \frac{1}{\varrho_{g_s}} \bar{\nu}, \tag{22}$$

melyek másodika alapján:

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{\tau_{g_s}} \bar{e}_s + \frac{1}{\varrho_s} \bar{b}_s. \tag{23}$$

A (21) és (22)-nek $\bar{\nu} \times \bar{e}_s$ és $\bar{\nu}$-re vonatkozó megoldásai:

$$\frac{\bar{\nu} \times \bar{e}_s}{\varrho_s} = \frac{1}{\varrho_{g_s}} \bar{n}_s - \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \bar{b}_s. \tag{24}$$

$$\frac{\bar{\nu}}{\varrho_s} = \frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \bar{n}_s + \frac{1}{\varrho_{g_s}} \bar{b}_s. \tag{25}$$

8. A gördülő mozgás fundamentalis egyenlete.

A T és T_0 tér C_s illetőleg C_{s_0} görbéinek legyen Q közös pontja s ebben a pontban a görbékhez rendelt fundamentalis triéderek is essenek egybe, tehát

$$\bar{e}_s = \bar{e}_{s_0}, \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}_0.$$

Q legyen egyúttal az egymással congruens és egybeeső M és és M_0 merev rendszereknek is pontja; M tartozzék a T-, M_0 pedig a T_0 térhez s a vélük kapcsolatos triéderek állandóan essenek egybe a C_s-, illetőleg a C_{s_0} görbékhez rendelt triéderekkel.

P pedig legyen az egymással egybeeső M és M_0 merev rendszereknek egyik pontja.

Ha már most M a T térben a C_s-, M_0 pedig a T_0 térben a C_{s_0} görbére nézve végez oly módon sikló mozgást, hogy a velük merevrendszert alkotó triéderek állandóan egybeessenek a C_s, illetőleg a C_{s_0}-hoz rendelt triéderekkel, akkor a P pontnak a két térre vonatkozó mozgásegyenletei:

$$\frac{dP}{ds} v = \bar{e}_s v + \bar{\omega} \times (P-Q), \tag{1}$$

$$\frac{dP}{ds_0} v_0 = \bar{e}_{s_0} v + \bar{\omega} \times (P-Q). \tag{2}$$

A P pont a T térben írja le a $P_{(s)}$-, a T_0 térben pedig a $P_{(s_0)}$ görbét s nevezzük a két görbe oly $P_{(s)}$ és $P_{(s_0)}$ pontjait, melyekre nézve:

$$s = \int_0^t v dt, \quad s_0 = \int_0^t v_0 dt,$$

homolog pontoknak.

Már most, ha a két tér T és T_0 úgy mozog, hogy a leírtuk mozgások következtében szétvált merev rendszerek helyzetről-helyzetre ismét födésbe kerülnek, akkor a $P_{(s)}$ és $P_{(s_0)}$ görbék homolog pontjai is rendre egybe fognak esni.

Így ha a t időnek megfelelő homolog $P_{(s)}$ és $P_{(s_0)}$ pontok már egybeestek, akkor a T térben levő szemlélő a T_0 tér $P + \frac{dP}{ds_0} v_0 dt$ pontját látja a reá nézve fix $P + \frac{dP}{ds} v dt$ pont felé közeledni s vele végül egybeesni. Következőleg

$$\frac{dP}{ds} vdt - \frac{dP}{ds_0} y_0 dt$$

eltolódást fog szemlélni. Ennek a jelenségnek mozgási egyenlete tehát az (1) és (2) alatt levő egyenletek alapján:

$$\frac{dP}{ds} v - \frac{dP}{ds_0} v_0 = \bar{e}_s v - \bar{e}_{s_0} v_0 + (\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) \times (P - Q), \tag{3}$$

hol

$$\bar{e}_s = \bar{e}_{s_0}, \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}_0.$$

Ha még

$$v = v_0,$$

akkor azt mondjuk, hogy a két tér a C_s és C_{s_0} görbék mentén egymáson gördül.

Logikailag közömbös, hogy mindkét tér mozgásban van-e, vagy csak az egyik.

A gördülő mozgás definitiója értelmében tehát bármely t időpontban

$$\bar{e}_s = \bar{e}_{s_0}, \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}_0;$$

$$s = s_0, \quad v = v_0;$$

$$\left(\frac{dP}{ds} - \frac{dP}{ds_0}\right) v = \bar{\Omega} \times (P - Q), \tag{I}$$

hol

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}_0.$$

Az (I) alatt *levő egyenletet nevezzük a gördülő mozgás fundamentalis egyenletének,* vagy *fundamentális tételének.*

Ha P pontul rendre a $Q + \bar{e}_s$, $Q + \bar{\nu} \times \bar{e}_s$, $Q + \bar{\nu}$ pontokat választjuk, akkor az (I) a fundamentalis triéder végpontjainak mozgás-egyenleteit szolgáltatja, ezek:

$$\left(\frac{d\bar{e}_s}{ds} - \frac{d\bar{e}_s}{ds_0}\right) v = \bar{\Omega} \times \bar{e}_s, \tag{II}$$

$$\left(\frac{d(\bar{\nu} \times \bar{e}_s)}{ds} - \frac{d(\bar{\nu} \times \bar{e}_s)}{ds_0}\right) v = \bar{\Omega} \times (\bar{\nu} \times \bar{e}_s), \tag{III}$$

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{ds} - \frac{d\bar{\nu}}{ds_0}\right) v = \bar{\Omega} \times \bar{\nu}. \tag{IV}$$

Ha (III) egyenletünket $\bar{\nu}$-vel-, a (IV)-et $\bar{e}_s$-sel s végül a (II)-at $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$-sel szorozzuk skalárisan, akkor a következő formulákhoz jutunk:

$$\bar{\Omega}.\bar{e}_s = -\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right) v, \tag{V}$$

$$\bar{\Omega}.(\bar{\nu}\times\bar{e}_s) = -\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v, \tag{VI}$$

$$\bar{\Omega}.\bar{\nu} = +\left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}}\right) v. \tag{VII}$$

Minthogy ezek az egyenletek épen $\bar{\Omega}$-nak a fundamentalis triéderre vonatkoztatott coordinatáit szolgáltatják, azért

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} = -\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right) v\bar{e}_s - \left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v\,(\bar{\nu}\times\bar{e}_s) + \\ + \left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}}\right) v\bar{\nu}.\end{aligned} \tag{VIII}$$

Ez az egyenlet pedig tekintettel a 7. fejezet (22) alatt levő képletére, még a következő alakban is írható:

$$\bar{\Omega} = -\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right) v\bar{e}_s + \left(\frac{\bar{b}_s}{\varrho_s} - \frac{\bar{b}_{s_0}}{\varrho_{s_0}}\right) v. \tag{IX}$$

Ebből pedig:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Omega}.\bar{n}_s &= -\frac{v}{\varrho_{s_0}}\bar{b}_{s_0}.\bar{n}_s = \frac{v}{\varrho_{s_0}}(\bar{n}_s\times\bar{n}_{s_0}).\bar{e}_s,\\ \bar{\Omega}.\bar{n}_{s_0} &= \frac{v}{\varrho_{s_0}}\bar{b}_s.\bar{n}_{s_0} = \frac{v}{\varrho_{s_0}}(\bar{n}_s\times\bar{n}_{s_0}).\bar{e}_s.\end{aligned}\right\} \tag{X}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Omega}.\bar{b}_s &= \frac{v}{\varrho_s} - \frac{v}{\varrho_{s_0}}\bar{b}_s.\bar{b}_{s_0},\\ \bar{\Omega}.\bar{b}_{s_0} &= \frac{v}{\varrho_s}\bar{b}_s.\bar{b}_{s_0} - \frac{v}{\varrho_{s_0}}.\end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

9. A gördülés intuitiv tárgyalása.

Gördüljön C_{s_0} görbe a C_s görbén; t időben az érintkezés történjék a Q_0Q ív mentén; $t+dt$ idő végére pedig a C_{s_0} görbe QQ_1 íve jőjjön fedésbe a C_s görbe QP ívével. Tehát

$$\frac{dQ}{dt}=0.$$

Ennélfogva Q_1 elmozdulása dt idő alatt

$$\frac{dQ_1}{ds}vdt=\bar{\Omega}\times(Q_1-Q)\,dt,$$

következőleg:

$$P-Q=Q_1-Q+\bar{\Omega}\times(Q_1-Q)\,dt. \tag{4}$$

De

$$Q=Q_0+\frac{dQ_0}{ds}ds=Q_0+\bar{e}_s ds,$$

$$P-Q=\frac{dQ}{ds}ds=\bar{e}_s ds+\frac{d\bar{e}_s}{ds_s}ds^2,$$

$$Q_1-Q=\frac{dQ}{ds_0}ds=\bar{e}_s ds+\frac{d\bar{e}_s}{ds_0}ds^2,$$

azért a (4) alapján a magasabbrendű kicsinyek elhanyagolásával

$$\left(\frac{d\bar{e}_s}{ds}-\frac{d\bar{e}_s}{ds_0}\right)v=\bar{\Omega}\times\bar{e}_s. \tag{II'}$$

A Q_1 pontbeli $\bar{\nu}+\dfrac{d\bar{\nu}}{ds_0}ds_0$ normálisnak dt idő alatt történő eltolódása a magasabbrendű kicsinyek elhanyagolásával éppen

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds_0}vdt=(\bar{\Omega}\times\bar{\nu})\,dt.$$

Ámde gördülés közben a görbék pontjaihoz rendelt fundamentális triéderek is helyzetről-helyzetre fedésbe kerülnek, miért is

$$\bar{\nu}+\frac{d\bar{\nu}}{ds}ds=\bar{\nu}+\frac{d\bar{\nu}}{ds_0}ds+(\bar{\Omega}\times\bar{\nu})\,dt,$$

honnan

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{ds} - \frac{d\bar{\nu}}{ds_0}\right) v = \bar{\Omega} \times \bar{\nu}. \tag{IV'}$$

A (II') és (IV') alatt levő egyenletek alapján szintén megállapítható $\bar{\Omega}$ alakja, még pedig teljesen azzal a módszerrel, melyet az előbbi fejezetben bemutattunk.

Ennek a fejezetnek fejtegetései logikailag fölöslegesek ugyan, mindazonáltal az ezen a területen történt kutatások értékelése alkalmával fontos szolgálatot fognak teljesíteni.

10. A momentán forgás-tengelynek a fundamentalis triéder síkjaira való vetületei.

$\bar{\Omega}$-nak az $(\bar{e}_s, \bar{\nu}\times\bar{e}_s)$ —, $(\bar{\nu}\times\bar{e}_s, \bar{\nu})$ —, $(\bar{\nu}, \bar{e}_s)$ síkokra való vetületei rendre

$$\begin{aligned} \bar{\nu} \times (\bar{\Omega} \times \bar{\nu}) &= |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu})\, \bar{e}_\sigma, \\ \bar{e}_s \times (\bar{\Omega} \times \bar{e}_s) &= |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s)\, \bar{e}, \\ (\bar{\nu}\times\bar{e}_s) \times [\bar{\Omega} \times (\bar{\nu} \times \bar{e}_s)] &= |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu} \times \bar{e}_s)\, \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

A 8. fejezet (VIII) alatt levő képlete értelmében tehát

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu})\, \bar{e}_\sigma = -\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right) v \bar{e}_s - \left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v (\bar{\nu}\times\bar{e}_s), \tag{XII}$$

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_\sigma)\, \bar{e} = -\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v (\bar{\nu}\times\bar{e}_s) + \left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v \bar{\nu}. \tag{XIII}$$

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu}\times\bar{e}_s)\, \bar{\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}}\right) v \bar{\nu} - \left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right) v \bar{e}_s. \tag{XIV}$$

Ez egyenletek (XIII)-a a 7. fejezet (22) alatt levő képlete értelmében még a következő alakban is írható:

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s)\, \bar{e} = \left(\frac{\bar{b}_s}{\varrho_s} - \frac{\bar{b}_{s_0}}{\varrho_{s_0}}\right) v, \tag{XIII}$$

honnan

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s) = \left(\frac{\cos (\bar{e}, \bar{b}_s)}{\varrho_s} - \frac{\cos (\bar{e}, \bar{b}_{s_0})}{\varrho_{s_0}}\right) v, \tag{5}$$

vagy az

$$(\bar{\Omega}\times\bar{e}_s, \bar{b}_s) + (\bar{b}_s, \bar{e}) = \frac{\pi}{2}$$

alapján:

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s) = \left(\frac{\sin (\bar{\Omega}\times\bar{e}_s, \bar{b}_s)}{\varrho_s} - \frac{\sin (\bar{\Omega}\times\bar{e}_s, \bar{b}_{s_0})}{\varrho_{s_0}}\right) v. \qquad (5')$$

11. A momentán forgás-tengely coordinatáinak különböző alakjai.

$\bar{e}$ és $\bar{e}_\sigma$-nak a 10. fejezetben történt definitiója értelmében:

$$(\bar{\Omega}\times\bar{e}_s, \bar{\nu}) + (\bar{\nu}, \bar{e}) = \frac{\pi}{2},$$

$$(\bar{\Omega}\times\bar{\nu}, \bar{e}_s) + (\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma) = \frac{\pi}{2}.$$

Következőleg:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}.\bar{e}_s = \bar{\Omega}.[(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)\times\bar{\nu}] &= [\bar{\nu}\times(\bar{\Omega}\times\bar{\nu})].\bar{e}_s = |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu}) \cos (\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma), \\
\bar{\Omega}.(\bar{\nu}\times\bar{e}_s) = (\bar{\Omega}\times\bar{\nu}).\bar{e}_s &= -(\bar{\Omega}\times\bar{e}_s).\bar{\nu} = |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu}) \sin (\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma) \\
&= |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s) \sin (\bar{e}, \bar{\nu}), \\
\bar{\Omega}.\bar{\nu} = \bar{\Omega}.[\bar{e}_s\times(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)] &= [\bar{e}_s\times(\bar{\Omega}\times\bar{e}_s)].\bar{\nu} = |\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s) \cos (\bar{e}, \bar{\nu}).
\end{aligned}$$

A 8. fejezet (V), (VI) és (VII) alatt levő képletei alapján tehát:

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu}) \cos (\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma) = -\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right) v, \qquad (V')$$

$$\left.\begin{aligned}
|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{\nu}) \sin (\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma) &= -\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v, \\
|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s) \sin (\bar{e}, \bar{\nu}) &= -\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right) v,
\end{aligned}\right\} \qquad (VI')$$

$$|\bar{\Omega}| \sin (\bar{\Omega}, \bar{e}_s) \cos (\bar{e}, \bar{\nu}) = \left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}}\right) v. \qquad (VII')$$

Ezeket a formulákat rendre úgy is megkaphatjuk, ha az előbbi fejezet (XII) egyenletét rendre $\bar{e}_s$- és $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$-sel, a (XIII) egyenletét pedig rendre $\bar{\nu}\times\bar{e}_s$-, $\bar{\nu}$-vel megszorozzuk skalárisan.

12. A gördülés skaláris tételei.

Ha

$$\bar{n} \perp \bar{\Omega} \times \bar{e}_s,$$

akkor a 8. fejezet II. egyenlete értelmében

$$\frac{d\bar{e}_s}{ds} \cdot \bar{n} = \frac{d\bar{e}_s}{ds_0} \cdot \bar{n}. \tag{XV}$$

Ezt a tételt a gördülés *első skaláris tételének* nevezzük.

1. Példa. Ha

$$\bar{n} = \bar{\Omega},$$

akkor a (XV) alapján

$$\frac{\cos(\bar{n}_s, \bar{\Omega})}{\varrho_s} = \frac{\cos(\bar{n}_{s_0}, \bar{\Omega})}{\varrho_{s_0}}, \tag{6}$$

melynek az

$$\bar{n}_s . \bar{\Omega} = -(\bar{\Omega} \times \bar{e}_s) . \bar{b}_s$$

egyenlet alapján a következő alakot is adhatjuk:

$$\frac{\cos(\bar{\Omega} \times \bar{e}_s, \bar{b}_s)}{\varrho_s} = \frac{\cos(\bar{\Omega} \times \bar{e}_s, \bar{b}_{s_0})}{\varrho_{s_0}}. \tag{6'}$$

2. Példa. Ha

$$\bar{n} = \bar{e},$$

akkor

$$\frac{\cos(\bar{e}, \bar{n}_s)}{\varrho_s} = \frac{\cos(\bar{e}, \bar{n}_{s_0})}{\varrho_{s_0}}, \tag{7}$$

mely az érintő-változás alaptételének a 2. fejezetben kifejtett skaláris alakja következtében æquivalens a következő egyenletekkel is.

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} \frac{\sin(\bar{b}_s, \bar{e})}{\sin(\bar{b}_s, \bar{\nu})} = \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}} \frac{\sin(\bar{b}_{s_0}, \bar{e})}{\sin(\bar{b}_{s_0}, \bar{\nu})}, \tag{7'}$$

$$\frac{1}{\varrho_{g_s}} \frac{\sin(\bar{b}_s, \bar{e})}{\cos(\bar{b}_s, \bar{\nu})} = \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}} \frac{\sin(\bar{b}_{s_0}, \bar{e})}{\cos(\bar{b}_{s_0}, \bar{\nu})}. \tag{7''}$$

Ha $\bar{m}$ vektor merőleges $\bar{\Omega} \times (\bar{\nu} \times e_s)$-re, akkor a 8. fejezet (III) alatt levő képlete értelmében

$$\frac{d(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)}{ds}\cdot\bar{m} = \frac{d(\bar{\nu}\times\bar{e}_s)}{ds_0}\cdot\bar{m}. \tag{XVI}$$

Ezt a tételt *nevezzük a gördülés második skaláris tetelének.*

Példa. Ha

$$\bar{m} = \bar{\Omega},$$

akkor az 1. fejezet (XIII) képlete értelmében

$$\left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}}\right)\cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_s) + \left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right)\cos(\bar{\Omega}, \bar{\nu}) = 0, \tag{8}$$

a mi különben a (8) fejezet (V) és (VII) alatt levő egyenletei alapján is evidens.

Ha

$$\bar{u} \perp \bar{\Omega} \times \bar{\nu},$$

akkor a 8. fejezet (IV) alatt levő képlete értelmében

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{u} = \frac{d\bar{\nu}}{ds_0}\cdot\bar{u}. \tag{XVII}$$

Ezt a tételt a gördülés harmadik skaláris tételének nevezzük.

1. Példa. Ha

$$\bar{u} = \bar{\Omega},$$

akkor az 1. fejezet (XIV) képlete értelmében,

$$\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right)\cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_s) = \left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right)\cos(\bar{\Omega}, \bar{\nu}\times\bar{e}_s), \tag{9}$$

mely tétel a 8. fejezet (V) és (VI) alatt levő képletei alapján is evidens.

2. Példa. Ha

$$\bar{u} = \bar{e}_\sigma,$$

hol $\bar{e}_\sigma$ alatt a 10. fejezetben definiált vektort értjük, akkor

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\bar{e}_\sigma = \frac{d\nu}{ds_0}\cdot\bar{e}_\sigma, \tag{10}$$

mely tételnek a normális-változás alaptételére vonatkozó fejtegetések alapján (3. és 4. fejezetek) a következő alakokat is adhatjuk:

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_s}}\frac{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{sk})}{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{sk})} = \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\frac{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{sk_0})}{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{sk_0})}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\tau_{g_s}}\frac{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{sk})}{\cos(\bar{e}_s, \bar{e}_{sk})} = \frac{1}{\tau_{\nu_{s_0}}}\frac{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{sk_0})}{\cos(\bar{e}_s, \bar{e}_{sk_0})}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\varrho_{\nu_\sigma}}\frac{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{\sigma k})}{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{\sigma k})} = \frac{1}{\varrho_{\nu_{\sigma_0}}}\frac{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{\sigma k_0})}{\sin(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{\sigma k_0})}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\tau_{g_\sigma}}\frac{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{\sigma k})}{\cos(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{\sigma k})} = \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_0}}}\frac{\sin(\bar{e}_s, \bar{e}_{\sigma k_0})}{\cos(\bar{e}_\sigma, \bar{e}_{\sigma k_0})}. \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\bar{e}_{\sigma_1}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_1}.\bar{e}_\sigma)}{\varrho_{\nu_{\sigma_1}}} - \frac{(\bar{e}_{\sigma_2}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_1}.\bar{e}_\sigma)}{\tau_{g_{\sigma_1}}} + \frac{(\bar{e}_{\sigma_1}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_2}.\bar{e}_\sigma)}{\tau_{g_{\sigma_2}}} +\\ + \frac{(\bar{e}_{\sigma_2}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_2}.\bar{e}_\sigma)}{\varrho_{\nu_{\sigma_2}}} = \frac{(\bar{e}_{\sigma_{01}}.\bar{e}_s).(\bar{e}_{\sigma_{01}}.\bar{e}_\sigma)}{\varrho_{\nu_{\sigma_{01}}}} - \frac{(\bar{e}_{\sigma_{01}}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_{01}}.\bar{e}_\sigma)}{\tau_{g_{\sigma_{01}}}} + \\ + \frac{(\bar{e}_{\sigma_{01}}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_{02}}.\bar{e}_\sigma)}{\tau_{g_{\sigma_{02}}}} + \frac{(\bar{e}_{\sigma_{02}}.\bar{e}_s)(\bar{e}_{\sigma_{02}}.\bar{e}_\sigma)}{\varrho_{\nu_{\sigma_{02}}}}.\end{aligned} \tag{15}$$

13. A gördülés egyenleteiből vont általános következtetések.

1. Ha

$$\bar{\Omega} \perp \bar{\nu},$$

akkor a 8. fejezet (VII) egyenlete alapján

$$\frac{1}{\varrho_{g_s}} = \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}},$$

azaz:

Ha a momentán forgás-tengely állandóan merőleges a felületi normálisra, akkor a gördülési görbék homolog pontjaiban ugyanaz a geodetikus görbület; ha tehát az egyik görbe geodetikus görbe, akkor a másik is az.

Ha a gördülési görbék egyike geodetikus vonal, akkor annak, hogy a másik is az lehessen, szükséges és elégséges feltétele, hogy a momentán forgás-tengely állandóan merőleges legyen a felületi normálisra.

Ha gördülés közben a két felület nem pontszerűen, hanem mindig egy görbe mentén érintkezik, akkor az érintkezési pontok mindegyike pontja egyúttal a MOZZI-féle tengelynek is, mert mindegyiknek sebessége az érintkezés tartama alatt nulla, következőleg az érintkezési görbe csakis egyenes lehet, tehát a jelzett módon egymáson gördülő felületek egyenesvonalú felületek. Mivel ily módon $\bar{v}$ állandóan merőleges $\bar{\Omega}$-ra, azért:

Ha két egyenesvonalú felület úgy gördül egymáson, hogy állandóan egy alkotó mentén érintkeznek, akkor az egyik felület bármely görbéjének nyoma a másik felületen homolog pontjaiban ugyanolyan geodetikus görbületű.

2. Ha

$$\bar{\Omega} \perp \bar{e}_s,$$

akkor a 8. fejezet (V) egyenlete értelmében

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}},$$

azaz:

Ha a momentán forgás-tengely állandóan merőleges a gördülési görbék közös érintőjére, akkor a gördülési görbék homolog pontjaiban ugyanaz a geodetikus torsio; ha tehát az egyik görbületi görbe, akkor a másik is az.

Ha a gördülési görbék egyike görbületi görbe, akkor, hogy a másik is az legyen, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a momentán forgás-tengely állandóan merőleges legyen a közös érintőre.

3. Ha

$$\bar{\Omega} \perp \bar{v} \times \bar{e}_s,$$

akkor a 8. fejezet (VI) egyenlete értelmében

$$\frac{1}{\varrho_{v_s}} = \frac{1}{\varrho_{v_{s_0}}},$$

azaz:

Ha a momentán forgás-tengely párhuzamos a felületi normális s a gördülési görbék közös érintőjének síkjával, akkor a gördülési görbék homolog pontjaiban ugyanaz a nor-

mális görbület; ha tehát az egyik assymptotikus görbe, akkor a másik is az.

Ha a gördülési görbék egyike assymptotikus görbe, akkor, hogy a másik is az lehessen, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a momentán forgás-tengely állandóan párhuzamos leggyen a felületi normális s a gördülési görbék közös érintőjének síkjával.

4. Ha

$$\bar{\Omega} \parallel \bar{\nu},$$

akkor a 8. fejezet (V) és (VI) egyenletei alapján

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}, \quad \frac{1}{\varrho_{\nu s}} = \frac{1}{\varrho_{\nu s_0}};$$

azaz:

Ha a momentán forgás-tengely párhuzamos a felületi normálissal, akkor a gördülési görbék homolog pontjaiban úgy a geodetikus torsio, mint a normális görbület ugyanaz.

5. Ha

$$\bar{\Omega} \parallel \bar{e}_s,$$

akkor a 8. fejezet (IX) egyenlete alapján

$$\bar{b}_s = \bar{b}_{s_0}, \quad \frac{1}{\varrho_s} = \frac{1}{\varrho_{s_0}},$$

azaz:

Ha a momentán forgás-tengely párhuzamos a gördülési görbék közös érintőjével, akkor a gördülés csak úgy lehetséges, ha a két görbe homolog pontjaiban ugyanaz a görbület.

A 8. fejezet (VI) és (VII) egyenletei alapján pedig

$$\frac{1}{\varrho_{\nu s}} = \frac{1}{\varrho_{\nu s_0}}, \quad \frac{1}{\varrho_{g s}} = \frac{1}{\varrho_{g s_0}},$$

azaz:

Ha a momentán forgási tengely párhuzamos a gördülési görbék közös érintőjével, akkor a felületek gördülése csak oly görbék mentén lehetséges, melyeknek homolog pontjaiban úgy a normális görbület, mint a geodetikus görbület ugyanaz.

6. Ha

$$\bar{\Omega} \parallel \bar{\nu} \times e_s,$$

akkor a 8. fejezet (V) és (VII) egyenletei alapján

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} = \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}, \quad \frac{1}{\varrho_{g_s}} = \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}},$$

azaz:

Ha a momentán forgás-tengely merőleges a felületi normális s a gördülési görbék közös érintőjének síkjára, akkor a felületek gördülése csak oly görbék mentén lehetséges, melyek homolog pontjaiban úgy a geodetikus görbület, mint a geodetikus torsio ugyanaz.

7. Ha a gördülési görbék síkgörbék, akkor

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{\tau_{s_0}} = 0,$$

következőleg az 5. fejezet (XV) képlete értelmében

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}} = -\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi_0}{ds}\right),$$

ennélfogva

$$\bar{\Omega} = \frac{d(\varphi - \varphi_0)}{ds} v\bar{e}_s + \frac{v}{\varrho_s} \bar{b}_s - \frac{v}{\varrho_{s_0}} \bar{b}_{s_0}.$$

Ha gördülés közben a két görbe síkjának hajlásszöge sem változik, akkor

$$\frac{d(\varphi - \varphi_0)}{ds} = 0,$$

tehát

$$\bar{\Omega} = \frac{v}{\varrho_s} \bar{b}_s - \frac{v}{\varrho_{s_0}} \bar{b}_{s_0}.$$

8. Ha

$$\bar{n}_s \parallel \bar{n}_{s_0},$$

akkor a 8. fejezet (X) alatt levő egyenletei alapján

$$\bar{\Omega} \perp \bar{n}_s, \ \bar{n}_{s_0};$$

és megfordítva, ha

$$\bar{\Omega} \perp \bar{n}_s,$$

akkor

$$\bar{n}_s \parallel \bar{n}_{s_0}, \quad \bar{\Omega} \perp \bar{n}_{s_0}.$$

Mivel az $\bar{n}_s \parallel \bar{n}_{s_0}$ esetben $\varphi - \varphi_0$ állandóan zérus, vagy 180°, azért

$$\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}} = \frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}},$$

következőleg:

$$\bar{\Omega} = -\left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}}\right) v\bar{e}_s + \left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right) v\bar{b}_s.$$

Ennélfogva a C_s görbe Q pontjain átmenő Mozzi-féle tengelyek alkotta egyenesvonalú felület egyenlete

$$P = Q + \lambda\left[\left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}}\right)\bar{e}_s - \left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right)\bar{b}_s\right].$$

Ezt a felületet a C_s görbéhez tartozó Mozzi-féle felületnek nevezzük. Mozzi-féle felületünk lefejthető felület, ha

$$\frac{dP}{ds} \times \frac{dP}{d\lambda} = 0.$$

De

$$\frac{dP}{ds} = \left[1 + \lambda\left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}}\right)'\right]\bar{e}_s - \lambda\left(\frac{1}{\varrho_s\tau_{s_0}} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}\tau_s}\right)\bar{n}_s - \lambda\left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right)'\bar{b}_{s_0};$$

$$\frac{dP}{d\lambda} = \left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}}\right)\bar{e}_s - \left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right)\bar{b}_s,$$

következőleg a lefejthetőségi föltétel

$$\lambda\left[\left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}}\right)\left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right)' - \left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_{s_0}}\right)'\left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right)\right] - \left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}}\right) = 0,$$

és

$$\frac{1}{\varrho_s\tau_{s_0}} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0}\tau_s} = 0.$$

Ugyanilyen föltételeket nyertünk volna a C_{s_0} görbével kapcsolatos Mozzi-féle felület lefejthetőségére nézve is. Ennélfogva: *Ha a gördülési görbék főnormálisaira nézve*

$$\bar{n} = \pm\, \bar{n}_{s_0},$$

akkor a gördülési görbékkel kapcsolatos Mozzi-*féle felületek lefejthető felületek, ha*

$$\frac{1}{\varrho_s \tau_{s_0}} \mp \frac{1}{\varrho_{s_0} \tau_s} = 0.$$

Ha görbéink síkgörbék, akkor a lefejthetőségi feltétel mindig teljesül, s mivel ekkor

$$\bar{\Omega} = \left(\frac{1}{\varrho_s} \mp \frac{1}{\varrho_s} \right) \bar{b}_s,$$

azért a Mozzi-féle felületek görbéink síkjaira merőleges hengerfelületek.

14. Resal kutatásai.

A gördülés problémájával először Resal foglalkozott eredményesen.[1] Eddig megközelíthetetlennek látszó kutatásai nagy geometriai és phyisikai intuitión épülnek fel. Négy tételt állapít meg, melyek logikai épületünkben mind megtalálhatók, a mivel aztán azok logikai értéke is nyilvánvalóvá válik.

Munkálatának 157. lapja tartalmazza az első tételt, mely nem más, mint a gördülés harmadik skaláris tételének a 12. fejezet (11) képletében bemutatott speczialis alakja.

A 158. és 159. lap tartalmazza a második tételt, mely nem más, mint $\bar{\Omega}$ $\bar{\nu} \times \bar{e}_s$-re vonatkozó coordinatájának a 11. fejezet (VI') alatt bemutatott alakjai bármelyikében rejlő tétel.

A 170. lap (6) képlete tartalmazza a harmadik tételt, mely a gördülés első skaláris tételének a 12. fejezet (6') alatt bemutatott speczialis alakjával azonos.

A negyedik tételt a 171. lap (10) képlete mutatja be, mely nem más, mint $\bar{\Omega}$-nak a $(\bar{\nu} \times \bar{e}_s,\ \bar{\nu})$ síkra való vetületének a (10) fejezet (5') alatt bemutatott skaláris alakja.

---

[1] Resal: Traité de Cinématique pure, 1862.

15. Gautero fejtegetései.

Analytikai módszerrel GAUTERO kísérelte meg a RESAL-féle kutatásokat szigorúbb logikai alapra helyezni.[1] A 9. fejezetben bemutatott módszerrel törekszik a gördülés problémáját megoldani, de téves szemlélete csak a (IV') alatt levő tételhez segítheti. Minek következtében RESAL kutatásait csak részben közelíti meg; megállapítja ugyanis RESAL első tételét és még egy másik tételt, mely azonos a gördülés harmadik skaláris tételének a 12. fejezet (13) alatt bemutatott speczialis esetével, tehát logikailag æquivalens a RESAL-féle első tétellel.

16. Thomson és Tait kutatásai.

THOMSON és TAIT 1867-ben megjelent munkálatukban[2] néhány speczialis esetre vonatkozó tétel felhasználásával tisztán geometriai úton először állapítják meg $\bar{\Omega}$-nak a 8. fejezet (V), (VI) és (VII) alatt bemutatott coordinatáit. Eredményeik, melyeket munkálatuk 84. lapján mutatnak be, az előjeltől eltekintve, helyesek. Az előjelben mutatkozó határozatlanság abból ered, hogy számításaikat nem a vektorokkal, hanem az azokkal kapcsolatos skaláris számokkal végzik, mely eljárásnak úgy a physikai, mint a geometriai kutatásokban egyik természetes következménye az előjelekben folyton beálló határozatlanság.

THOMSON és TAIT tehát először mutatnak rá, ha nem is szabatosan $\bar{\Omega}$ alakjára s így a gördülés problémájának logikai fundamentuma valódi megteremtésének első kezdeményezői.

17. Beltrami fejtegetései.

BELTRAMI[3] csakhamar észreveszi THOMSON és TAIT tételeiben az előjel határozatlanságát. Analytikai módszerrel újból vizsgálat alá veszi tehát a gördülés problémáját s $\bar{\Omega}$-nak az előbbi

---

[1] GAUTERO: Giornale di Matematiche XX. 482. p. 164.

[2] THOMSON and TAIT: Treatise on Natural Philosophy, 1867.

[3] BELTRAMI: Giornale di Mathematiche X. 1872, p. 103.

fejezetben említett coordinatáit meg is állapítja, azzal a csekély eltéréssel, hogy $\bar{\Omega}.(\bar{v}\times\bar{e}_s)$ coordinata helyett az $\bar{\Omega}.(\bar{e}\times\bar{v})$-t választja. Ezzel aztán a gördülés problémájának logikai fundamentuma materialiter elkészült. Ebbe még csak a vektor lelkét kellett volna lehelni, hogy az egymástól elszigetelten álló kutatások logikai egysége előttünk megjelenjék.

Beltrami ezt a lépést nem teszi ugyan meg, mindazonáltal a problémát tovább fejti, a mennyiben a binær quadratikus alakokra vonatkozó néhány tétel, valamint a 4. fejezetben a (14) alatt bemutatott Brioschi-Enneper- és a (11) alatt levő Euler-féle tétel felhasználásával megállapít egy tételt, mely megegyezik a gördülés harmadik skaláris tételének a 12. fejezet (15) alatt bemutatott alakjának arra a speczialis esetre vonatkozó tartalmával, ha C_{σ_1} és C_{σ_2} görbékül a görbületi görbéket választjuk; tehát ez a tétel is logikailag æquivalens a Resal-féle első tétellel.

18. Weyr kutatásai.

Az általánosabb jellegű kutatások közé sorozhatjuk még némileg Weyr kutatásait[1] is, a mennyiben az általános síkmozgásban fellépő gördülési problémát akarja általánosítani. Fejtegetései azonban csak a régi felfogás alapján tarthatnak igényt az általánosság szinezetére, a mennyiben vektorelméleti felfogás szerint a síkmozgás csak mint egyszerű feladat jelenik meg. Weyr fejtegetései a 13. fejezet 8. feladatában tárgyalt

$$\bar{n}_s \parallel \bar{n}_{s_0}$$

esetre vonatkoznak. A Mozzi-féle felületekre vonatkozólag megállapított tételünk nem más, mint a Weyr-félének teljesebb s szabatosabb alakja.

[1] Weyr: Sitzungsberichte d. kaiserlichen Ak. d. Wiss. Math. Naturwiss. Classe, CIV. Bd. 4. Heft 292. l. 1895.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 decz. 13.-án tartott üléséből.)

ADALÉKOK A HATVÁNYSOROK HADAMARD- ÉS HURWITZ-FÉLE COMPOSITIÓIHOZ.

BEKE MANÓ lev. tagtól.

Bevezetés. Ebben az értekezésben a székfoglaló értekezésemben[1] közölt eredményeket kibővítem, általánosítom és egyikétmásikát új módszerrel bizonyítom be. Az említett értekezésben bevezetett p-edrendű HADAMARD- és HURWITZ-féle függvényeket, melyek *egy* függvényre vonatkoztak, általánosítom p különböző függvényre és kimutatom, hogy az elsőnek nem lehet más singularitása, mint az eredeti függvények singularitásainak p tényezős szorzatai, és a másodiknak nem lehet más singularitása, mint az eredeti függvények singularitásainak, p-tagú összegei. Ez általánositott függvények segitségével sikerül az egy függvényre vonatkozó p-edrendü HADAMARD- és HURWITZ-függvények singularitásainak vizsgálatát olyan p függvény HADAMARD-, illetőleg HURWITZ függvényeire redukálni, melyeknek csak egyetlen singularitásuk van. Kimutatom új eljárással, hogy ha $f(x)$-nek a_1 k_1-szeres, a_2 k_2-szeres polusai, s i. t., akkor a p-edrendű HADAMARD-függvénynek $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots$ valóban polusa, úgyszintén új eljárással mutatom meg, hogy ez esetben a p-edrendű HURWITZ-féle függvénynek $l_1 a_1 + l_2 a_2 + \cdots$ nem lehet singularitása, ha valamelyik $l_i > k_i$. Megmutatom továbbá, hogy ha α és β az $f(x)$ és $\varphi(x)$ isolált lényeges singularis helyei, akkor az HADAMARD-féle compositiónak $\alpha\beta$ lényeges singularis helye és ugyanilyen esetben a HURWITZ-féle compositiónak $\alpha + \beta$ valóban singularis helye, és megmutatom, hogy ha α az $f(x)$ lényeges singularis helye, akkor az $f(x)$ p-edrendű

[1] Mathematikai és Természettud. Értesitő, XXXIV. köt. 1. 1—61. 1916.

HADAMARD függvényének a^p lényeges singularis helye és éppen igy, ha a az $f(x)$ lényeges singularis helye, akkor a p-edrendű HURWITZ-függvénynek pa singularitása legalább is azon megszorítás mellett, hogy a singularitások p tényezős szorzata gyanánt az a^p, illetőleg a singularitások p-tagú összege gyanánt a pa csak egyféleképpen keletkezhetik.

1. Az Hadamard-féle függvény általánosítása. Legyen adva p számú analytikai függvény

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_p(x),$$

melyek a 0 helyen regulárisak. E hely környezetében TAYLOR-soraik:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i} x^i;\quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{2,i} x^i; \ldots,\quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{p,i} x^i, \tag{1}$$

Készítsük el ezeket a HANKEL-féle determinansokhoz hasonló p-edrendű determinansokat:

$$D_p^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{1,n}, & a_{1,n+1}, & \ldots, & a_{1,n+p-1} \\ a_{2,n+1}, & a_{2,n+2}, & \ldots, & a_{2,n+p} \\ a_{3,n+2}, & a_{3,n+3}, & \ldots, & a_{3,n+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,n+p-1}, & a_{p,n+p}, & \ldots, & a_{p,n+2p-2} \end{vmatrix}; \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

és ezekkel a determinansokkal, mint együtthatókkal, a

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n \tag{3}$$

hatványsort. E hatványsorral értelmezett függvényt az

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_p(x)$$

-hez tartozó HADAMARD-függvénynek nevezzük és így jelöljük:

$$H[f_1, f_2, \ldots, f_p].$$

Az HADAMARD-féle compositio-tétel[1] segítségével azonnal belátható,

---

[1] HADAMARD. Théorème sur les séries entières. Acta Mathematica 22. kötet. 1898.

hogy $H[f_1, f_2, \dots f_p]$-nek nem lehet más singularitása, mint az (1) alatti függvények egy-egy singularitásának a szorzatai. Ugyanis, ha a $D_p^{(0)}$ determinans valamelyik tagja a kellő előjellel vett:

$$A^{(0)}_{i_1 i_2 \dots i_p} = a_{1, i_1} a_{2, i_2} \dots a_{p, i_p},$$

a hol $i_1, i_2, \dots i_p$ az $1, 2, \dots n$ közül kiválasztott p index, akkor a $D_p^{(n)}$ egyik, ennek megfelelő tagja (ugyanilyen előjellel):

$$A^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_p} = a_{1, n+i_1} a_{2, n+i_2} \dots a_{p, n+i_p}.$$

A (3) alatti sor tehát előállítható $p!$ ilyen sor összege gyanánt:

$$\pm \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_p} x^n.$$

De ez a sor nem más, mint az (1) alatti sorok eltolásával (azaz $i_1, i_2, \dots i_p$ számú első tag elhagyásával és megfelelően $x^{-i_1}, x^{-i_2}, \dots x^{-i_p}$-vel való szorzással) keletkezett

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1, i_1+n} x^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_{2, i_2+n} x^n, \dots \sum_{n=0}^{\infty} a_{p, i_p+n} x^n$$

p számú hatványsor megfelelő együtthatóinak szorzásával, vagyis Hadamard-féle compositióval létesített hatványsor; tehát Hadamard említett tétele szerint az ilyen sor értelmezte függvénynek és így a $p!$ számú ilyen sor összegével értelmezett függvénynek sem lehet más singularitása, mint az (1) alatti függvények singularitásainak szorzatai. Ezzel tehát kimutattuk, hogy a (3) alatti $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ analytikai függvénynek nem lehet más singularitása, mint az (1) alatt adott p számú $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ri} x^i$ hatványsorok által értelmezett függvény singularitásainak szorzatai. (Ezeken kívül a függvény (3) alattitól különböző ágaiban még 0 is singularis hely lehet az Hadamard-tétel értelmében.) Ezzel egyúttal azt a közvetlenül is belátható tényt is megmutattuk, hogy a (3) alatti hatványsor convergentia-körének sugara legalább akkora, mint az (1) alatti sorok convergentia-sugarainak szorzata.

2. Az Hadamard-függvény singularitásának vizsgálatára vonatkozó reductio. Tegyük fel, hogy az előbbi pontban szereplő (1) alatti p hatványsor megegyező, és valamennyi:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4}$$

a hol $f(x)$ a hatványsor által értelmezett analytikai függvény. Jelöljük $f(x)$-nek p számú singularitását (melyek közt megegyezők is lehetnek) $a_1, a_2, \ldots a_p$-vel, a többit pedig β-kkal. Feltesszük, hogy e singularitások izoláltak és végesek. Miként FABER vizsgálataiból ismeretes,[1] $f(x)$ előállítható ilyen alakban:

$$f(x)=f_i(x)+\varphi_i(x),$$

ahol $f_i(x)$-nek a_i az egyetlen singularitása (a végesben) és $\varphi_i(x)$-nek a_i nem singularitása. Legyen $f_i(x)$ és $\varphi_i(x)$ a 0 hely környezetében:

$$f_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} x^n, \quad \varphi_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n} x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{i,n})x^n. \tag{5}$$
$$(i=1,2,\ldots p)$$

Jelölje $D_p^{(n)}$ most ezt a HANKEL-féle determinanst:

$$D_p^{(n)}=\begin{vmatrix} a_n, & a_{n+1}, \ldots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1}, & a_{n+2}, \ldots & a_{n+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+p-1}, & a_{n+p}, \ldots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}; \tag{6}$$

és $H_p(x)$ ezt a székfoglaló értekezésemben bevezetett[2]

$$H_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n \tag{7}$$

által értelmezett függvényt. Miként ott kimutattam, ennek nem lehet más singularitása, mint az $f(x)$ p számú singularitásának szorzatai (ugyanaz a singularitás, mint tényező, többször is szerepelhet). Legyenek $a_1, a_2, \ldots a_p$ az $f(x)$ előbb említett singularitásai, melyek között egyenlők is lehetnek. Ha a $H_p(x)$ függvényt az $a_1 a_2 a_3 \ldots a_p$ singularitás tekintetében akarjuk vizsgálni, akkor legczélszerűbb lesz az (5) alatti felbontást használni.

---

[1] FABER: Ueber analyt. Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten. Math. Annalen, 60. kötet, 379. l.

[2] Vizsgálatok az analytikai függvények elmélete köréből. Math. és Természettud. Értesítő XXIV. köt. 1—61. l.

Tegyük evégből a (6) alatti $D_p^{(n)}$ determinans első sorában álló a_m elemek helyett:

$$a_m = a_{1,m} + b_{1,m},$$

a második sorban álló a_m tagok helyett:

$$a_m = a_{2,m} + b_{2,m},$$

s i. t.; az utolsó sorban álló tagok helyett:

$$a_m = a_{p,m} + b_{p,m}$$

összegeket. Ekkor a (6) alatti $D_p^{(n)}$ felbomlik 2^p számú determinansra, melyek közül az egyik:

$$\Delta_p^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{1,n}, & a_{1,n+1}, \ldots & a_{1,n+p-1} \\ a_{2,n+1}, & a_{2,n+2}, \ldots & a_{2,n+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,n+p-1}, & a_{p,n+p}, \ldots & a_{p,n+2p-2} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

a többi pedig legalább egyik sorában csupa b együtthatókat tartalmaz. A (7) alatti $H_p(x)$ hatványsor e szerint felbomlik 2^p számú hatványsor összegére, melyek közül az első a (8) alatti determinansokkal mint együtthatókkal készített:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_p^{(n)} x^n \tag{9}$$

hatványsor. Minthogy pedig az (5) alatti felbontás szerint az

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n,\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} x^n, \ldots f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,n} x^n$$

hatványsorok közül az elsőnek *egyetlen* singularitása α_1, a másodiké $\alpha_2, \ldots$, a p-iké pedig α_p, tehát a (9) alatti sorral értelmezett analytikai függvénynek nem lehet más singularitása, mint $\alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_p$.

A $2^p - 1$ számú többi determinans, amelyek a (6) alatti $D_p^{(n)}$ szétesésénél keletkeznek, miként említettük, mind olyanok, a melyeknél legalább az egyik sor csupa b-ből áll. Jelöljünk egy ilyen determinanst $\nabla_p^{(n)}$-nel; akkor a $H_p(x)$-nek a (9) alattitól különböző tagjai ilyen alakúak:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nabla_p^{(n)} x^n, \tag{10}$$

a hol a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \nabla_p^{(n)} x^n$ az 1. pontban említett módon keletkezik az (5) alatti

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_p(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_p(x)$$

közül kiválasztható p függvény hatványsoraiból; megjegyezve, hogy a p számú függvény között legalább egynek φ-nek kell lennie. Ha feltesszük, hogy az $a_1 a_2 \ldots a_p$ szorzat a singularitások szorzásával csak egyféleképen keletkezhetik, akkor a (10) alatti hatványsorral értelmezett függvénynek $a_1 a_2 \ldots a_p$ nem lehet singularitása, mert ennek a singularitása az $f(x)$ singularitásainak csak olyan p tényezős szorzata lehet, amelyben legalább is egyik factor β.

Így tehát a szóban forgó felbontásnál keletkezett 2^p számú hatványsor közül csakis az egyiket, a (9) alatti $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_p^{(n)} x^n$ hatványsort, illetőleg az általa előállított analytikai függvényt kell vizsgálnunk. Azt látjuk tehát, hogy az $a_1 a_2 \ldots a_p$ singularitas vizsgálata — legalább abban az esetben, midőn ez a p tényezős szorzat az $f(x)$ singularitásainak p tényezős szorzatai között csak egyszer fordul elő — mindig visszavezethető az 1. pont szerint olyan függvényekből alakított Hadamard-függvények vizsgálatára, melyeknek egyetlen singularitásuk van a végesben. Egyetlen singularis hely gyanánt, miként tudjuk, választható az 1 hely és így az $a_1 a_2 \ldots a_p$ singularitás vizsgálata sokszor czélszerűen visszavezethető valamely $H[f_1, f_2, \ldots f_p]$ függvénynek az 1 helyen való vizsgálatára, mely olyan

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_p(x)$$

függvényekből készül az 1. pontban ismertetett módon, melyeknek a végesben egyetlen singularis helyük az 1 hely.

3. A polusszorzat vizsgálata. Legyen a 0 helyen regularis

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

analytikai függvénynek a_1 k_1-szeres, a_2 k_2-szeres, $\dots a_r$ pedig k_r-szeres polusa, és legyen a rendszámok összege:

$$k_1+k_2+\cdots+k_r=p.$$

Az $f(x)$ előállítható ebben az alakban:

$$f(x)=R(x)+f_1(x), \tag{11}$$

a hol $R(x)$ az x rationalis függvénye, melynek számlálója alacsonyabb fokú, mint a nevezője és melynek a_1 k_1-szeres, a_2 k_2-szeres, $\dots a_r$ pedig k_r-szeres polusa és $f_1(x)$-nek már az $a_1, a_2, \dots a_r$ nem singularitásai. Legyen:

$$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{12}$$

Az $f(x)$-hez tartozó $H_p(x)$ HADAMARD-függvénynek, a

$$H_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n \tag{7}$$

analytikai függvénynek $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r}$ singularitása lehet, ha $l_1, l_2, \dots l_r$ olyan positiv egész számok, melyek összege p. Hogy valóban az-e, annak a vizsgálata céljából — legalább abban az esetben, midőn $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r}$ a singularitások p tényezős szorzata gyanánt csak egyféleképen keletkezik — elégséges az $R(x)$-ből készített $H_p(x)$ vizsgálata. Legyen ez

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_p^{(n)} x^n, \tag{13}$$

a hol $\Delta_p^{(n)}$ a b_n-nel kezdődő p-edrendű HANKEL-féle determinans.

Nyilván az $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r}$ a (13) alatti HADAMARD-függvénynek csak polusa lehet, ha egyáltalában singularitása, mert hiszen miként ismeretes, ha γ a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$-nek és δ a $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$-nek polusa, akkor $\gamma\delta$ a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n x^n$ HADAMARD-compositiónak is polusa.

Székfoglaló értekezésemben megmutattam,[1] hogy $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r}$ a (13) alatti HADAMARD-függvénynek nem lehet polusa, ha valamelyik $l_i > k_i$. Ugyanott arra az esetre, midőn $a_1, a_2, \dots a_n$ helyek a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentia-körén vannak, HADAMARD egy mély tételére hivatkozással, és általánosabban az HADAMARD-függvény integrálalakjának felhasználásával megmutattam, hogy $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$ a $H_p(x)$-nek valóban polusa, és pedig egyszerű polusa. Ez az állítás egyszerűen következik ebből a meggondolásból is: A symmetrikus determinánsokra vonatkozó közismert tételnek a $\Delta_{p+1}^{(n-1)}$-re alkalmazásával erre a determinans-relatióra jutunk:[2]

$$\Delta_p^{(n+1)} \Delta_p^{(n-1)} - (\Delta_p^{(n)})^2 = \Delta_{p+1}^{(n-1)} \Delta_{p-1}^{(n+1)}. \tag{14}$$

A recurrens sorok elméletéből ismeretes, hogy $\Delta_{p+1}^{(n)} = 0$ minden n-re (ami egyébként abból is következik, hogy $\Sigma \Delta_{p+1}^{(n)} x^n$-nek nincs singularis helye, mert hiszen csak $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r}$ alakú polus-helye lehetne, de legalább egyik l_i-nek k_i-nél nagyobbnak kellene lennie). Másrészt azonban egyetlen $\Delta_p^{(n-1)}$ sem lehet 0, mert akkor a (14) alatti egyenletből következik, hogy ettől az $n-1$-től kezdve minden p-edrendű HANKEL-féle determinans eltűnnék és akkor $R_p(x)$ nevezője p-nél alacsonyabb fokú lenne. Így tehát a (14)-ből következik minden n-re:

$$\frac{\Delta_p^{(n-1)}}{\Delta_p^{(n)}} = \frac{\Delta_p^{(n)}}{\Delta_p^{(n-1)}};$$

és ha e hányadost u-val jelöljük, arra jutunk, hogy:

$$\Delta_p^{(n)} = C u^n,$$

a hol C állandó: $\Delta_p^{(0)}$. Így tehát a $\Sigma \Delta_p^{(n)} x^n = C \Sigma (ux)^n$ egyetlen és pedig egyszerű polusa: $\frac{1}{u}$. De minthogy már tudjuk, hogy $\Sigma \Delta_p^{(n)} x^n$-nek nem lehet más singularitása, mint az $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r}$ alakú polusa, a hol $l_1 + l_2 + \dots + l_r = p$ és egyetlen l_i sem lehet nagyobb k_i-nál, tehát ebből következik, hogy

[1] L. o. p. 33.

[2] L. például BALTZER: Determinanten. 4. kiadás, 62. l.

$$\frac{1}{u} = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r};$$

vagyis, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_p^{(n)} x^n$ analytikai függvénynek $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r}$ az egyetlen és pedig egyszerű polusa. Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ analytikai függvénynek $a_1, a_2, \ldots a_r$ rendre $k_1, k_2, \ldots k_r$-szeres polusai és $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r}$ mint a singularitások szorzata csak egyféleképen keletkezik, továbbá $k_1+k_2+\cdots+k_r=p$, akkor a

$$H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$$

HADAMARD-függvénynek, melynél $D_p^{(n)}$ az a_n-nel kezdődő p-edrendű HANKEL-féle determinans, az $a_1^{k_1} a_2^{k_2}, \ldots a_r^{k_r}$ elsőrendű polusa.

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ϱ sugarú convergentia-körén nincs más singularitás, mint p számú polus (mindegyiket a többszörösségi rendjével számítva), akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ convergentia radiusa e szerint ϱ^p.

Minthogy pedig a

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_q^{(n)} x^n$$

hatványsor által értelmezett analytikai függvénynek, ha $q>p$, az eredeti singularitásoknak csak olyan q tényezős szorzata lehet a singularitása, mely szorzatban legalább $q-p$ tényező ϱ-nál nagyobb absolut értékű, tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} D_q^{(n)} x^n$ convergentia-körének radiusa nagyobb ϱ^q-nál, vagyis:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sqrt[n]{D_p^{(n)}} \right| = \frac{1}{\varrho^p} \quad \text{és} \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sqrt[n]{D_q^{(n)}} \right| < \frac{1}{\varrho^q} \quad \text{ha} \quad q>p.$$

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ analytikai függvénynek a 0-hoz legközelebbi singularis helyei az $a_1, a_2, \ldots a_r$ polusok, melyek rendszámainak összege p és mindenik $|a_i| = \varrho$, a következő singularitások pedig

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$, szintén polusok és rendszámaik összege $q-p$ és minden $|\beta_i| = \varrho'$, akkor tárgyalásunk szerint a $\Sigma D_q^{(n)} x^n$-nek okvetlenül polusa és pedig egyszerű polusa az

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r} \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \ldots \beta_s^{m_s},$$

a hol $k_1, k_2, \ldots m_s$ a rendszámok. Minden más singularitas a $\Sigma a_n x^n$ olyan q singularitásainak szorzata, melyek közül legalább egy ϱ'-nél nagyobb absolut értékű; tehát ez esetben:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|D_q^{(n)}|} = \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{q-p}};$$

és ha $t>q$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_t^{(n)} x^n;$$

singularitása az eredeti singularitásoknak olyan t tényezős szorzata lehet, mely szorzatban legalább $t-q$ tényezőnek ϱ'-nél nagyobb absolut értéke van és így:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|D_t^{(n)}|} < \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{t-p}}, \quad \text{ha} \quad t>q.$$

Ha az $f(x)$ meromorph függvény, vagyis singularitásai valamennyien *polusok*, akkor ezt az eljárást folytatva, eljutunk az HADAMARD-féle Thèse-ben[1] foglalt eredmények közül azokhoz, melyek ilyen függvény esetében a HANKEL-féle determinansok növekedési rendjére vonatkoznak.

4. Az Hadamard-féle compositio lényeges singularis helyek esetében. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ HADAMARD-féle compositiójáról, a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$-ről tudjuk, hogy ha α az első és β a második függvény polusa, akkor a singularitások szorzatára tett megszorítás mellett $\alpha\beta$ a compositiónak polusa. Székfoglaló értekezésemben a lineáris differentiálegyenletek egy ismeretes tulajdonsága alapján megmutattam,[2] hogy ha α az egyik függvény polusa és β

[1] HADAMARD: Essai sur l'étude des fonctions etc. Journal de Math. 4. sorozat, VIII. kötet, 1892. p. 31.

[2] l. c. p. 10.

a másiknak tetszésszerinti izolált singularis helye, akkor is $\alpha\beta$ a compositio singularis helye lesz.

Most meg akarjuk mutatni, hogy ha α az egyiknek és β a másiknak izolált lényeges singularis helye, akkor $\alpha\beta$ az HADAMARD-féle compositiónak lényeges singularis helye. Elég lesz arra az esetre szorítkoznunk, midőn mindkét függvénynek *1* az egyetlen, és pedig lényeges singularis helye a végesben. Tudjuk már, hogy a $\Sigma a_n x^n$-nek *1* akkor és csakis akkor lesz az egyetlen és pedig lényeges singularis helye a végesben, ha létezik olyan $G(z)$ transcendens egész függvény, melyre nézve

$$a_\nu = G(\nu), \qquad {\scriptstyle \nu=0,1,2,3,\ldots}$$

és

$$|G(z)| < e^{\varepsilon|z|}, \tag{15}$$

bárminő kis positiv szám is az ε, ha $|z|$ bizonyos (az ε-tól függő) R-nél nagyobb.

Legyen már most a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ együtthatóihoz tartozó ilyen transcendens egész függvény $G(z)$, a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ együtthatóihoz tartozó pedig $\Gamma(z)$, akkor a $\Sigma a_n b_n x^n$ compositió együtthatóihoz tartozó függvény $G(z)\Gamma(z)$ lesz. Ennek a növekedésére is érvényes, hogy

$$|G(z)\Gamma(z)| < e^{\varepsilon|z|}, \tag{16}$$

ha $|z|>R'$. Érvényes továbbá a $G(\nu)\Gamma(\nu)=a_\nu b_\nu$ egyenlőség is minden ν indexre.

De még gondolható volna, hogy a $G(z)\Gamma(z)$ szorzat nem transcendens egész függvény, hanem rationalis egész függvény és akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ compositiónak az *1* hely polusa volna. Azt akarjuk megmutatni és ezzel FABER vizsgálatait kiegészítjük,[1] hogy az adott növekedési rend mellett $G(z)\Gamma(z)$ nem lehet rationális egész függvény.

Tegyük fel tehát, hogy ha $|z|>R(\varepsilon)$, akkor:

$$|G(z)| < e^{\varepsilon|z|}, \quad |\Gamma(z)| < e^{\varepsilon|z|},$$

[1] G. FABER: Bemerkungen zu einem Satze des Herrn Hadamard. Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, XVI. kötet, 1907, p. 295.

bárminő kis positiv szám is az ε és mégis $G(z)\Gamma(z)$ rationalis egész függvény. Ha e rationalis egész függvény megfelelő gyöktényezőivel a $G(z)$, illetőleg $\Gamma(z)$ transcendens egész függvényeket elosztjuk és a hányadosokat $G_1(z)$, illetőleg $\Gamma_1(z)$-vel jelöljük, akkor arra jutunk, hogy

$$G_1(z)\,\Gamma_1(z) = \text{const.} \tag{17}$$

A $G_1(z)$ és $\Gamma_1(z)$ nyilván ugyanolyan növekedési rendűek, mint a $G(z)$ és $\Gamma(z)$, vagyis

$$|G_1(z)| < e^{\varepsilon|z|}, \quad |\Gamma_1(z)| < e^{\varepsilon|z|} \quad \text{ha} \quad |z| > R,$$

és ε bárminő kis positiv szám.

A (17) alattiból következik, hogy úgy a $G_1(z)$, mint a $\Gamma_1(z)$ olyan transcendens egész függvények, melyek a végesben sehol sem tünnek el; tehát, miként ismeretes, ilyen alakúak:

$$e^{g(z)},$$

a hol $g(z)$ egész függvény. Kell tehát, hogy ha $|z|$ elég nagy, akkor:

$$|e^{g(z)}| < e^{\varepsilon|z|} \tag{18}$$

legyen, bárminő kis positiv szám is az ε.

Az r sugarú körön $z = re^{i\varphi}$, és

$$g(z) = P(r, \varphi) + iQ(r, \varphi),$$

ahol P és Q reálisak. HADAMARD a transcendens egész függvényekre vonatkozó alapvető értekezésében[1] egy tételt bizonyít be, mely LINDELÖF fogalmazásában[2] így hangzik: Legyen $f(x)$ egész függvény és P a reális része; ha végtelen sok körön, melyek középpontja a kezdőpont és melyek radiusai korlátlanul nőnek, fennáll a

$$P < Ar^{\lambda}$$

egyenlőtlenség, a hol A positiv állandó és λ positiv egész vagy 0, akkor $f(x)$ λ-nál nem magasabb fokú polynom.

---

[1] HADAMARD, Études sur les propriétés des fonctions entières etc. Journal de Mathem., 4. sorozat, IX. kötet. 1893. p. 187. L. még BOREL: Leçons sur les fonctions entières, 1900, p. 4.

[2] LINDELÖF, Mémoire sur la théorie des fonctions entières. Acta Societatis scientiarum fennicae XXXI. k. 1903. p. 15.

Ha pedig ez az egyenlőtlenség (pos. λ-ra) teljesül, akárminő kis szám is az A, akkor $f(x)$ a λ-nál alacsonyabb fokú polynom.

Ezt a nevezetes tételt alkalmazzuk a mi esetünkre.

Legyen tehát

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n^* = \alpha_n + i\beta_n,$$

a hol α_n és β_n valósak. Az r sugarú körön $z = re^{i\varphi}$-t téve, a $g(z)$ valós része, a $P(r, \varphi)$ ilyen alakú:

$$P(r, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi) r^n.$$

Ha valamely R sugarú körön túl mindenütt 0, vagy negativ volna a $P(r, \vartheta)$, akkor $e^{g(z)}$ transcendens egész függvény absolut értéke egy véges korláton alul maradna és így LIOUVILLE tétele szerint $e^{g(z)}$ és ezzel $g(z)$ is constans volna.

Tegyük fel tehát, hogy ez az eset nem áll be, vagyis, hogy $P(r, \varphi)$ bármely nagy R-en túl positiv értékeket is felvesz. P fönti kifejezéséből a FOURIER-féle együtthatók:

$$r^n \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta;$$

$$r^n \beta_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta;$$

$$2\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \vartheta) \, d\vartheta.$$

Az első két egyenletből:

$$r^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \vartheta) e^{-ni\vartheta} \, d\vartheta,$$

miből:

$$r^n |a_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |P(r, \vartheta)| \, d\vartheta;$$

és ha a fönti, az a_0-ra vonatkozó egyenletet tekintetbe vesszük, az

$$r^n |a_n| + 2a_0 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\,|P(r, \vartheta)| + P(r, \vartheta)]\, d\vartheta \tag{19}$$

egyenlőtlenségre jutunk.

Minden olyan ϑ helyen, melyen a $P(r, \vartheta)$ positiv, az integrandus: $2P(r, \vartheta)$; azokon a helyeken pedig, ahol $P(r, \vartheta)$ 0, vagy negativ, az integrandus 0. A (19) alatti egyenlőtlenség még inkább fennáll, ha $P(r, \vartheta)$ positiv értékei helyett mindenütt a positiv értékek maximumát tesszük (az r sugarú körön). Jelöljük ezt a maximumot $M(r)$-rel, akkor tehát:

$$r^n |a_n| + 2a_0 \leq 4M(r). \tag{20}$$

A mi esetünkben, midőn a (15) alatti egyenlőtlenség érvényes,

$$|e^{g(z)}| = e^{P(r,\varphi)} < e^{\varepsilon r},$$

ha ε megadott, tetszésszerinti kis positiv szám és $r > R(\varepsilon)$-nél; tehát:

$$P(r, \varphi) < \varepsilon r;$$

és ebből egyúttal az is következik, hogy

$$M(r) < \varepsilon r,$$

tehát a (20) egyenlőtlenség szerint:

$$|a_n| + \frac{2a_0}{r^n} < \frac{4\varepsilon}{r^{n-1}};$$

és így, minthogy r tetszésszerinti nagy radiust jelent, következik, hogy

$$a_n = 0 \quad \text{ha} \quad n > 0,$$

vagyis $g(z)$ és így $G_1(z)$, valamint $\Gamma_1(z)$ is constansok volnának, ami feltevésünkkel ellenkezik.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha két transcendens egész függvény a (15)-ben foglalt növekedésű, akkor szorzatuk is ilyen növekedésű *transcendens* egész függvény. Ebből már most teljes szigorúsággal következik Faber amaz állítása, hogy ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ egyetlen singularis helyei a végesben az α, illetőleg β, és mindkettő lényeges singularis hely, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ HADAMARD-féle compositiónak $\alpha\beta$ lényeges singularis helye.

5. Az Hadamard-függvény viselkedése lényeges singularis helyek esetében. Tegyük fel, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

analytikai függvénynek *1* az egyetlen singularis helye a végesben és pedig lényeges singularis helye. Azt akarjuk megmutatni, hogy a

$$H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n \tag{21}$$

p-edrendű HADAMARD-függvénynek (a hol tehát $D_p^{(n)}$ az a_n-nel kezdődő p-edrendű HANKEL-féle determinans) az *1* hely *lényeges singularis* helye, akármekkora is a p rendszám.

Feltételünk szerint van olyan $G(z)$ transcendens egész függvény, mely a (15) alatti növekedésű és melyre nézve:

$$G(\nu) = a_\nu. \qquad {\scriptstyle (\nu=0,\,1,\,2,\ldots)}$$

Készítsük el ezzel a $G(z)$ transcendens egész függvénnyel a

$$\varDelta_p(z) = \begin{vmatrix} G(z), & G(z+1), \ldots, & G(z+p-1) \\ G(z+1), & G(z+2), \ldots, & G(z+p) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ G(z+p-1), & G(z+p), \ldots, & G(z+2p-2) \end{vmatrix} \tag{22}$$

determinanst. $\varDelta_p(z)$ nyilván szintén egész függvény.

Meg akarjuk mutatni, hogy $\varDelta_p(z)$ szintén a (15) alatti növekedésű, vagyis, hogy ha adatik a tetszésszerinti kis positiv ε, ehhez meghatározható olyan R, melynél nagyobb absolut értékű z-re nézve mindig fennáll ez az egyenlőtlenség:

$$|\varDelta_p(z)| < e^{\varepsilon|z|}.$$

E végből válasszuk a positiv ε'-t úgy, hogy

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3p}$$

legyen; továbbá R'-t úgy, hogy egyrészt

$$p! < e^{\varepsilon' p R'}$$

legyen, másrészt

$$2p - 2 < R'$$

legyen és végül, ha $|z| > R'$, akkor már fennálljon a

$$|G(z)| < e^{\varepsilon' |z|}$$

egyenlőtlenség. Legyen

$$R > R' + 2p - 2,$$

akkor nyilván érvényesek a

$$p! < e^{\varepsilon' p R}, \quad 2p - 2 < R, \quad |G(z)| < e^{\varepsilon' |z|} \tag{23}$$

egyenlőtlenségek; az utóbbi, ha $|z| > R$. Ez esetben, ha k $2p-2$-nél nem nagyobb positiv szám,

$$|z+k| > |z| - k > R - (2p-2) > R',$$

tehát $z+k$-ra is érvényes a

$$|G(z+k| < e^{\varepsilon' |z+k|}$$

egyenlőtlenség. Ebből:

$$|G(z+k| < e^{\varepsilon' |z| + \varepsilon' k} < e^{\varepsilon' |z| + \varepsilon'(2p-2)};$$

és így a $\Delta_p(z)$ determinansra nézve következik, hogy ha $|z| > R$, akkor:

$$|\Delta_p(z)| < p!\, e^{p\varepsilon' |z| + p\varepsilon' (2p-2)};$$

vagyis (23) szerint:

$$|\Delta_p(z)| < e^{\varepsilon' p |z| + \varepsilon' p |z| + \varepsilon' p |z|} < e^{\varepsilon |z|}, \tag{24}$$

ha $|z| > R$.

Így tehát a $\Delta_p(z)$ is olyan növekedésű egész függvény, mint a $G(z)$.

A $\Delta_p(z)$ egész függvénnyel a $D_p^{(n)}$ együtthatók kifejezhetők; ugyanis:

$$D_p^{(n)} = \Delta_p(n). \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

Ha tehát kimutatjuk, hogy $\Delta_p(z)$ nem lehet rationalis egész függvény, akkor ezzel ki lesz mutatva, hogy a (21) alatti $H_p(x)$-nek az *1* hely valóban lényeges singularis helye. A szóban forgó állítás kimutatására tegyük fel, hogy $\Delta_q(z)$ valóban transcendens egész függvény, ha $q \leq p-1$, ami $p=2$-re igaz; ellenben $\Delta_p(z)$ már rationalis egész függvény. A $\Delta_{p+1}(z)$ determinansra alkalmazzuk ismét a (14) alatt már egyszer használt determinanstételt; akkor a következő egyenletre jutunk:

$$\Delta_p(z+2)\,\Delta_p(z) - [\Delta_p(z+1)]^2 = \Delta_{p+1}(z)\,\Delta_{p-1}(z+2). \qquad (26)$$

Feltételünk szerint $\Delta_p(z)$ racionalis egész függvény, $\Delta_{p-1}(z)$ pedig transcendens egész függvény.

A baloldalon álló $\Delta_p(z+2)$, $\Delta_p(z)$, $\Delta_p(z+1)$ tehát rationalis egész függvények, és így a baloldalon álló kifejezés rationalis egész függvény, vagy constans. A jobboldalon álló $\Delta_{p-1}(z+2)$ pedig (15) alatti növekedésű transcendens egész függvény, $\Delta_{p+1}(z)$ ugyanilyen növekedésű transcendens (vagy esetleg rationalis) egész függvény; a jobboldalon álló szorzat tehát az előbbi pont szerint nem lehet rationalis függvény. Ezzel kimutattuk, hogy $\Delta_p(z)$ valóban transcendens egész függvény, és ezzel, hogy az *1* hely a $H_p(x)$-nek egyetlen és pedig lényeges singularis helye.

Az (1) pont fejtegetései szerint ezt az eredményt még úgy is kifejezhetjük, hogy ha az $f(x)=\Sigma a_n x^n$-nek α lényeges singularis helye, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ analytikai függvénynek α^p lényeges singularis helye, akármekkora is a p positiv egész szám. Általánosabban, ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ izolált lényeges singularis helyek, akkor a $\Sigma D_p^{(n)} x^n$-nek $\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}, \ldots$ szorzat lényeges singularis helye, ha $k_1+k_2+\cdots=p$ és ha e szorzat a singularis helyek p tényezős szorzata gyanánt csak egyféleképen állhatnak elő.

Abból, hogy α^p minden $\Sigma D_p^{(n)} x^n$-nek lényeges singularis helye, ha α az $f(x)$ lényeges singularis helye volt, következik, hogy ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ϱ sugarú convergentia-körén van izolált lényeges singularis hely, például: α, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ hatványsor convergentia körének radiusa ϱ^p, akármekkora is p, vagyis

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|D_p^{(n)}|} = \frac{1}{\varrho^p},$$

minden p-re nézve. Ha a convergentia-körön csak polusok vannak, és pedig p számú (a többszörösség számbavételével), akkor, miként láttuk, a $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$-nek a kezdőponthoz legközelebbi singularitása éppen a convergentia-körön levő polusok szorzata; ennek a szorzatnak absolut értéke: ϱ^p; ellenben már a következő $\sum_{n=0}^{\infty} D_{p+1}^{(n)} x^n$ legközelebbi singularitása ϱ^{p+1}-nél nagyobb absolut értékű; tehát a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sqrt[n]{D_p^{(n)}} \right| = \frac{1}{\varrho^p},$$

de már a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sqrt[n]{D_{p+1}^{(n)}} \right| < \frac{1}{\varrho^{p+1}}.$$

Ha azonban a convergentia-körön izolált lényeges singularitás is van, például: az a hely, akkor a limes superior ilyen lesülyedése sohasem áll be; mert, miként láttuk, akármekkora legyen is a p, a $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ Hadamard-függvénynek a^p mindig singularitása lesz és minden más singularitas absolut értéke legalább is ϱ^p; tehát

$$\overline{\lim} \left| \sqrt[n]{D_p^{(n)}} \right| = \frac{1}{\varrho^p},$$

minden p-re nézve. Ha tehát $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ egyértékű analytikai függvényre szorítkozunk, vagy legalább olyanra, melynek a 0 hely körüli convergentia-körén elágazási hely nincsen, akkor mondhatjuk, hogy a $\overline{\lim_{n=0}} \left| \sqrt[n]{D_p^{(n)}} \right|$ értékének előbb említett leszállása a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentia-körén csakis polusok legyenek; mert csak polus és lényeges singularis hely lehetne a convergentia-körön; de ha lényeges singularis hely is volna, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$-nek legalább egyik [legkisebb absolut értékű] singularitásának absolut értéke ϱ^p volna, akármekkora is a p. Erre az esetre tehát Hadamard mély tételeit az Hadamard-féle függvények singularitásainak vizsgálatával kimutattuk.

6. A Le-Roy-féle kriterium alkalmazása. A **4.** pontban megmutattuk, hogy ha $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ egyértékű analytikai függvénynek a az egyetlen singularis helye a végesben és $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$-nek β az egyetlen singularis helye, és úgy az a, mint a β lényeges singularis helyek, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ Hadamard-féle compositiónak $a\beta$ az egyetlen és pedig lényeges singularis helye; az 5. pontban pedig megmutattuk, hogy ha $f(x)=\Sigma a_n x^n$-nek a végesben a egyetlen és pedig lényeges singularis helye, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ p-edrendű Hadamard-függvénynek a^p lényeges singularis helye. Most arra az esetre, midőn a végtelen is regularis hely, ezeket az eredményeket más módszerrel akarom megállapitani; illetőleg egyelőre csak annyit, hogy az első esetben $a\beta$, a másodikban a^p singularis helyek. A második eredményt azonban általánosabb esetben is megállapitom.

Legyen tehát, hogy a feladatot a már ismert módon redukáljuk, az *1* hely az

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

egyértékű analytikai függvények mindegyikének egyetlen singularis helye (polus vagy lényeges singularis hely). Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy úgy az $f(x)$, mint a $\varphi(x)$ a végtelen helyen eltünnek. A Le-Roy-féle kriterium szerint, melyet székfoglaló értekezésemben tárgyaltam,[1] annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

Hadamard-féle compositio egyértékű függvény legyen és *1* legyen az egyetlen singularis helye, az, hogy:

---

[1] l. c. p. 11.

$$\lim_{n=\infty} [\Delta^n a_0 b_0]^{\frac{1}{n}} = \tag{27}$$
$$= \lim_{n=\infty} \left[a_n b_n - \binom{n}{1} a_{n-1} b_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} b_{n-2} + \cdots + (-1)^n a_0 b_0 \right]^{\frac{1}{n}} = 0$$

legyen. Az $a_k b_k$ együtthatót ebben a kettős integrálalakban állíthatjuk elő:

$$a_k b_k = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int\int \frac{f(z_1) f(z_2)}{(z_1 z_2)^{k+1}} dz_1 dz_2, \tag{28}$$

ahol az integratio olyan zárt görbék mentén végzendő a z_1, illetőleg z_2 síkokon, melyek a 0 helyet körülzárják és melyeken belül $f(z_1)$, illetőleg $\varphi(z_2)$ regularisak. Minthogy a jelen esetben az *1* hely az egyetlen singularis hely, tehát integratiós görbe gyanánt választhatjuk a z_1 síkon a következőképen jellemzett görbét: Vegyünk fel egy tetszésszerinti nagy (1-nél nagyobb) sugarú, 0 középponttal bíró C kört; ennek a kerületén valahol felveszünk egy P pontot és ebből az *1* ponthoz igen közel fekvő P_1 pontig egyenest húzunk, a P_1-en át az *1* középponttal biró köröcskét vonjuk a P_1-hez igen közel levő P_1' pontig és P_1'-tól megint az előbbi P_1P egyenessel párhuzamos egyenes mentén visszamegyünk a C kör kerületének P' pontjáig. Az integratiós görbe tehát a C kör PP' nagy íve, a $P'P_1'$ egyenes, a kis c kör (nagyobbik) íve P_1'-tól P_1-ig és a P_1P egyenes. Ugyanilyen az integratiós görbe a z_2 síkon. Ha már most a (27) alatti kifejezésben az $a_k b_k$ szorzatok helyett a (28) alatti integrálalakokat tesszük, arra jutunk, hogy:

$$a_n b_n - \binom{n}{1} a_{n-1} b_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} b_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0 b_0 =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int\int \frac{f(z_1)\varphi(z_2)}{z_1 z_2} \left[\frac{1}{z_1 z_2} - 1 \right]^n dz_1 dz_2. \tag{29}$$

A C körön végzendő integratio czéljából tegyük:

$$z_1 = Re^{i\varphi}; \; z_2 = Re^{i\psi},$$

akkor azt látjuk, hogy ha P és P' pontok egybeesnek, ez az integrál átmegy ebbe:

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \varphi(Re^{i\psi}) \left[\frac{1}{R^2} e^{-i(\varphi+\psi)} - 1 \right]^n e^{i(\varphi+\psi)} d\varphi d\psi.$$

A zárójelben álló kifejezés a -1-től kevéssel tér el. Ezt az $\frac{1}{R^2}e^{-i(\varphi+\psi)}-1$-et így írhatjuk:

$$-1+\sigma(R),$$

annak a feltüntetésére, hogy σ az R-től függ. $\lim\limits_{R=\infty}\sigma(R)=0$. Ha R végtelen nagygyá válik, akkor az $f(z_1)$ és $\varphi(z_2)$-re tett megállapodásunk szerint ez az integrál zérussá válik minden n-re nézve.

A PP_1 és $P_1'P'$ egyenesek mentén vett integrálok összege 0-sá válik, ha P és P' pontok egybeesnek, mert úgy az $f(z_1)$, mint a $\varphi(z_2)$ egyértékűek, az 1 pont megkerülése után eredeti értékeiket visszakapják.

Így tehát a (29) alatti integrál csakis az **1** középpontú c kör mentén veendő integrálra redukálódik. Ha ebben az integrálban tesszük:

$$z_1=1+re^{i\varphi},\quad z_2=1+re^{i\psi},$$

akkor ha P_1 és P_1' egybeesnek:

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(1+re^{i\varphi})\,\varphi(1+re^{i\psi})\left[\frac{1}{1+re^{i\varphi}}\cdot\frac{1}{1+re^{i\psi}}-1\right]^n e^{i(\varphi+\psi)}d\varphi\,d\psi$$

lesz belőle. A zárójelben álló

$$\frac{1}{1+re^{i\varphi}}\cdot\frac{1}{1+re^{i\psi}}-1=-\frac{r(e^{i\varphi}+e^{i\psi})+r^2e^{i(\varphi+\psi)}}{1+r(e^{i\varphi}+e^{i\psi})+r^2e^{i(\varphi+\psi)}}$$

absolut értékre nézve kisebb:

$$\frac{3r}{1-3r}$$

-nél, ha $r<1$; tehát ha még

$$r<\frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon)},$$

akkor ez a kifejezés absolut értékre nézve kisebb a tetszésszerint adott positiv ε-nál. Ezen az r sugarú körön $|f(z_1)\varphi(z_2)|$ kisebb egy, az n-től független, csupán r-től függő m-nél, tehát a szóban forgó integrál absolut értéke kisebb

$$m\varepsilon^n$$

-nál és így

$$\lim_{n=\infty}\left[a_n b_n - \binom{n}{1} a_{n-1} b_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} b_{n-2} + \cdots + (-1)^n a_0 b_0\right]^{\frac{1}{n}} = 0.$$

A Le-Roy-kriterium alkalmazásával tehát kimutattuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ Hadamard-féle compositio által értelmezett analytikai függvény egyértékű, az 1 hely egyetlen singularis helye, ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mindenikének 1 volt az egyetlen singularis helye. Ezzel az eljárással azonban nem mutattuk még meg, hogy az 1 hely lényeges singularis hely-e, vagy polus.

Most ugyancsak a Le-Roy-féle kriteriumot alkalmazzuk az általánosított Hadamard-függvény singularitásának vizsgálatára. Legyen tehát adva a p számú egyértékű:

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} x^n, \qquad (i=1, 2, \ldots p)$$

függvény, melyekről ismét feltesszük, hogy a végtelen helyen eltünnek; és jelentse $D_p^{(n)}$ a (2) alatti determinanst, akkor az $f_1, f_2, \ldots f_p$ függvények Hadamard-függvénye

$$H_p[f_1, f_2, \ldots f_p] = \sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n.$$

A $D_p^{(n)}$ együtthatót p-szeres integrál alakjában állítjuk elő, téve

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_k(z_k)}{z_k^{n+1}}\, dz^k,$$

a hol c tetszésszerinti, a 0 pontot körülzáró, de az 1 pontot nem tartalmazó görbe a z_k síkon. A görbéket ugyanúgy választjuk, mint előbb. $D_p^{(k)}$ alakja, mint a székfoglaló értekezésemben foglalthoz hasonló módon következik:

$$D_p^{(k)} = \frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{c_1}\cdots\int_{c_p} \Delta\, \frac{f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_p(z_p)}{(z_1 z_2 \ldots z_p)^{k+1}} \cdot \frac{dz_1 dz_2 \ldots dz_p}{z_2 z_3^2 \ldots z_p^{p-1}}; \quad (30)$$

a hol:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_1^{p-1}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \cdots & \frac{1}{z_2^{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{1}{z_p} & \frac{1}{z_p^2} & \cdots & \frac{1}{z_p^{p-1}} \end{vmatrix}$$

VANDERMONDE-féle determinans.[1] Számítsuk ki ismét a LE-ROY-kriterium alkalmazása czéljából a

$$D_p^{(n)} - \binom{n}{1} D_p^{(n-1)} + \binom{n}{2} D_p^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n D_p^0$$

kifejezést. Ha a $D_p^{(k)}$ (30) alatti kifejezését ide helyettesítjük, akkor a következő alakot kapjuk:

$$\frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{C_1} \cdots \int\limits_{C_p} \Delta \frac{f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_p(z_p)}{z_1 z_2^2 \ldots z_p^p} \left[\frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_p} - 1\right]^n dz_1 dz_2 \ldots dz_p.$$

Erről éppen úgy, mint előbb, megmutathatjuk, hogy a C körök mentén vett integrál n-től függetlenül zérussá válik, ha e körök radiusai végtelenné válnak, a párhuzamos egyenesek mentén vett integrálok összegének határértéke 0, ha e két egyenes egybeesik, úgy hogy csak az 1 pontot körülvevő kis c körökre vonatkozó integrál marad meg. A c körök radiusának kellő választásával elérhetjük, hogy e körökön

$$\left|\frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_p} - 1\right| < \varepsilon.$$

a

$$\frac{\Delta f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_p(z_p)}{z_1 z_2^2 z_3^3 \ldots z_p^p}$$

pedig, ha $z_1, z_2, \ldots z_p$ az r sugarú körökön vannak, az n-től független, csak az r-től függő valamely véges m positiv számnál kisebb absolut értékű. Ebből épen úgy, mint előbb, következik, hogy:

[1] l. c. p. 38.

$$\lim_{n=\infty}\left[D_p^{(n)}-\binom{n}{1}D_p^{n-1}+\binom{n}{2}D_p^{n-2}-\cdots+(-1)^n D_p^0\right]^{\frac{1}{n}}=0,$$

vagyis, hogy $H[f_1, f_2, \ldots f_p]$ egyértékű analytikai függvény, melynek egyetlen singularis helye 1, ha az $f_1, f_2, \ldots f_p$ függvények mindenike egyértékű analytikai függvény és mindeniknek 1 az egyetlen singularis helye. A szóbanforgó operatio distributiv voltát figyelembe véve, már most egész általánosságban is kimondhatjuk, hogy ha $f_1(x)$-nek a_1, $f_2(x)$-nek a_2, $\ldots f_p(x)$-nek a_p singularis helyei és az adott függvények egyértékűek, továbbá az $a_1 a_2 \ldots a_p$ szorzat p számú singularitás szorzásából csak egyféleképen keletkezhetik, akkor a $H[f_1, f_2, \ldots f_p]$ HADAMARD-függvénynek $a_1 a_2 \ldots a_p$ singularis helye.

7. A Hurwitz-compositio kettőnél több függvény esetében. Székfoglaló értekezésemben a HURWITZ-féle compositiós tételt[1] kiterjesztettem kettőnél több függvényre is. E kiterjesztés a HURWITZ-féle compositio integrálelőállításával történt.[2] Most ezt az integratiós alak elkerülésével végezzük a következő egyszerű meggondolással.

Legyen adva ez a ∞ helyen regularis és ott el is tünő $k+1$ függvény:

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{1n}}{x^{n+1}},\ f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{x^{n+1}},\ldots,\ f_{k+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{k+1,n}}{x^{n+1}} \quad (31)$$

és tegyük fel, hogy az első k függvény HURWITZ-féle compositiója:

$$F[f_1, f_2, \ldots, f_k]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{x^{n+1}}, \quad (32)$$

a hol:

$$A_n=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_k!}a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{k,i_k}. \quad (33)$$

---

[1] HURWITZ: Sur un théorème de M. HADAMARD. Comptes Rendus, 1899, p. 350.

[2] l. c. p. 54.

Tegyük fel, hogy már k számú függvény esetére, hol $k \geq 2$, kimutattuk, hogy a HURWITZ-féle compositiónak nem lehet más singularitása, mint a componált függvények singularitásainak összegei. Készítsük el most a (32) alatti függvénynek és a (31) alatti $f_{k+1}(x)$-nek HURWITZ-compositióját. Ez a következő:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{x^{m+1}},$$

a hol

$$B_m = A_m a_{k+1,0} + \binom{m}{1} A_{m-1} a_{k+1,1} + \\ + \binom{m}{2} A_{m-2} a_{k+1,2} + \cdots + \binom{m}{m} A_0 a_{k+1,m};$$

vagyis:

$$B_m = \sum_{\varrho=0}^{m} \binom{m}{\varrho} \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=m-\varrho} \frac{(m-\varrho)!}{i_1!\, i_2! \ldots i_k!} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ki_k} \right) a_{k+1,\varrho};$$

és ebből, téve $\varrho = i_{k+1}$, ezt kapjuk:

$$B_m = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{k+1}=m} \frac{m!}{i_1!\, i_2! \ldots i_{k+1}!} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{k+1,\, i_{k+1}};$$

Így tehát az $f_1, f_2, \ldots f_k$ HURWITZ-féle compositiójának az $f_{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k+1,n}}{x^{n+1}}$-gyel való compositiója nem más, mint a $k+1$ számú $f_1, f_2, \ldots f_{k+1}$ HURWITZ-compositiója. Minthogy pedig 2 függvény esetére érvényes, hogy a HURWITZ-compositiónak nem lehet más singularitása, mint a componáltak singularitásainak összegei, tehát a tétel általánosan érvényes.

8. A Hurwitz-féle compositio lényeges singularis hely esetében. Székfoglaló értekezésemben megmutattam a lineáris differentiálegyenlet alaptulajdonságának felhasználásával,[1] hogy, ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^{n+1}} \tag{34}$$

[1] l. c. p. 51.

függvények közül az első valamely singularis helye α, a másodiké pedig β és ezek közül legalább egyik polus, akkor — ha $\alpha+\beta$ egyféleképpen keletkezik mint $f(x)$ és $\varphi(x)$ egy-egy singularitásának összege, — az $F[f, \varphi]$ HURWITZ-féle compositiónak $\alpha+\beta$ valóban singularis helye. Ha α és β mindketten polusok, akkor a compositiónak $\alpha+\beta$ is polusa lesz. Most meg akarjuk mutatni, hogy ha α és β lényeges singularis helyek, akkor a compositiónak $\alpha+\beta$ is valóban singularis helye. E végből a HURWITZ-féle compositio distributiv voltának felhasználásával elég lesz arra az esetre szorítkoznunk, midőn a (34) alatti függvényeknek 1 az egyetlen és pedig lényeges singularis helyük. A (34) alatti függvények HURWITZ-compositiója:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1}}, \tag{35}$$

a hol

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy (35)-nek 2 az egyetlen singularis helye. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely $\Sigma \frac{\gamma_n}{x^{n+1}}$ függvénynek 1 legyen az egyetlen singularis helye, mint tudjuk, az, hogy:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\Delta^{(n)} \gamma_0} = 0$$

legyen, a hol:

$$\Delta^{(n)} \gamma_0 = \gamma_n - \binom{n}{1} \gamma_{n-1} + \binom{n}{2} \gamma_{n-2} - \binom{n}{\gamma} \gamma_{n-3} + \cdots + (-1)^n \gamma_0.$$

Ebből azonnal következik, hogy (35)-nek 2 akkor és csakis akkor lesz egyetlen singularis helye, ha

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{c_n}{2^n} - \binom{n}{1} \frac{c_{n-1}}{2^{n-1}} + \binom{n}{2} \frac{c_{n-2}}{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^n c_0 \right]^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{36}$$

Számítsuk ki a zárójelben álló, A_n-nel jelölendő kifejezést. E végből a (3)4 alatti LAURENT-sorok együtthatóit integrálalakjukban fejezzük ki. Tudjuk, hogy:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\, z^k dz, \quad b_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \varphi(u)\, u^k du,$$

ahol C görbe gyanánt tetszésszerinti, O középpontú, 1-nél nagyobb sugarú kör választandó (minthogy a ∞ hely regularis hely). De feltételünk szerint 1 az adott függvények egyetlen singularis helye, tehát ez a C kör összehúzható egy, az 1 pontot körülvevő, tetszésszerinti kis ε radiusu C' körbe. a_k és b_k fentírt kifejezéseit tekintetbe véve, a c_n-et ez a kettős integrál fejezi ki:

$$c_n = -\frac{1}{(2\pi)^2}\iint f(z)\, \varphi(u)\, (z+u)^n dz du,$$

a hol a kettős integrál úgy értendő, hogy úgy a z, mint az u a C' görbéket futják be. Ebből azt kapjuk, hogy a (36) alatti zárójelben álló kifejezés a következő alakú:

$$A_n = -\frac{1}{(2\pi)^2}\iint f(z)\, \varphi(u)\left[\frac{z+u}{2} - 1\right]^n dz du.$$

Ha z és u a C' görbéken futnak végig, akkor $f(z)\,\varphi(u)$ absolut értéke egy véges M-en alul marad, $\left|\frac{z+u}{2} - 1\right|$ pedig a $z+u$ pontnak a 2-től való távolságának a fele:

$$\left|\frac{z+u}{2} - 1\right| < \varepsilon,$$

tehát

$$|A_n| < \frac{M}{(2\pi)^2}\,\varepsilon^n \iint |dz|\,|du|.$$

A jobboldalon álló integrál $\varepsilon^2 (2\pi)^2$, tehát arra az eredményre jutottunk, hogy

$$\lim_{n=0}\left[\frac{c_n}{2^n} - \binom{n}{1}\frac{c_{n-1}}{2^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{c_{n-2}}{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^n c_0\right]^{\frac{1}{n}} = 0;$$

és ezzel kimutattuk, hogy az adott $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvények Hurwitz-féle compositiójának a 2 hely valóban singularis helye. Általában, ha α és β az $f(x)$, illetőleg $\varphi(x)$ lényeges singularis helyei és az $\alpha+\beta$ mint a két függvény singularitásainak összege csak egyféleképpen keletkezhetik, akkor az $f(x)$ és $\varphi(x)$ HURWITZ-féle compositiójának $\alpha+\beta$ valóban singularis helye.

9. A Hurwitz-féle függvény általánosítása. Legyen adva ez a p számú LAURENT-sor:

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{1n}}{x^{n+1}},\ f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{x^{n+1}},\ldots,\ f_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{p,n}}{x^{n+1}}\ ; \quad (37)$$

és készítsük el ezt a determinanst:

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_p}=\begin{vmatrix} a_{1,i_1}, & a_{1,i_1+1}, & a_{1,i_1+2} & ,\ldots, & a_{1,i_1+p-1} \\ a_{2,i_2+1}, & a_{2,i_2+2}, & a_{2,i_2+3} & ,\ldots, & a_{2,i_2+p} \\ a_{3,i_3+2}, & a_{3,i_3+3}, & a_{3,i_3+4} & ,\ldots, & a_{3,i_3+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,i_p+p-1}, & a_{p,i_p+p}, & a_{p,i_p+p+1}, & \ldots, & a_{p,i_p+2p-2} \end{vmatrix}; \quad (38)$$

és ezekkel a determinansokkal a következő LAURENT-sort:

$$\boldsymbol{H}[f_1, f_2,\ldots f_p]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum\frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_p!}A_{i_1i_2\ldots i_p}\right)\frac{1}{x^{n+1}}, \quad (39)$$

a hol a belső összegezés az $i_1, i_2, \ldots i_p$ indexek ama nem negatív értékeire terjed ki, melyek összege: n.

Az így értelmezett $\boldsymbol{H}[f_1, f_2, \ldots f_p]$ a székfoglaló értekezésemben bevezetett HURWITZ-féle függvény[1] általánosítása.

Erre vonatkozólag is azt állítjuk, hogy a $\boldsymbol{H}[f_1, f_2, \ldots f_p]$ általánosított HURWITZ-féle függvénynek nem lehet más singularitása, mint az $f_1, f_2, \ldots f_p$ singularitásaiból készített p-tagú összegek.

Ugyanis az $A_{i_1 i_2\ldots i_p}$ determinans valamely tagja a kellő előjellel vett szorzat:

$$a_{1,i_1+\varrho_1}a_{2,i_2+\varrho_2+1}a_{3,i_3+\varrho_3+2}\cdots a_{p,i_p+\varrho_p+p-1},$$

ahol $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ a $0, 1, 2, \ldots p-1$ számok valamely permutatióját jelenti.

[1] l. c. p. 55.

Az $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ determinans $p!$ számú ilyen tagból áll. A (39) alatti formulában szereplő bármely n-hez tartozó $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ együtthatónak van ugyanezekkel a $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_p$ indexekkel készített tagja. Ha ezeket a megegyező $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ indexekkel készített tagokat vesszük csak tekintetbe a $\boldsymbol{H}[f_1, f_2, \ldots f_p]$-ben, akkor ezek a tagok a következő LAURENT-sort alkotják:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum \frac{n!}{i_1! \, i_2! \ldots i_p!} B_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_p} \right) \frac{1}{x^{n+1}}; \tag{40}$$

a hol $i_1 + i_2 + \cdots + i_p = n$, és

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_p} = a_{1 i_1 + \varrho_1} a_{2 i_2 + \varrho_2 + 1} \ldots a_{p, i_p + \varrho_p + p - 1}.$$

A (40) alatti kifejezés, amelyben $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ fix számokat jelentenek, nem más, mint a

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{1, \varrho_1 + m}}{x^{m+1}}, \quad \varphi_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2, \varrho_2 + m}}{x^{m+1}}, \ldots \\ \ldots \varphi_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{p, \varrho_p + m}}{x^{m+1}} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

soroknak a (32) alatti képlettel megállapított módon készített HURWITZ-féle compositiója. E sorok pedig az eredeti, (37) alattiakból úgy keletkeznek, hogy azokból az első ϱ_1, illetőleg $\varrho_2, \ldots \varrho_p$ tagokat elhagyjuk és még megfelelően $x^{\varrho_1}, x^{\varrho_2}, \ldots x^{\varrho_p}$-vel szorzunk; tehát új singularitást nem vezettünk be. Így tehát a (40) alattinak nem lehet más singularitása, mint a (37) alatti függvények singularitásainak p-tagú összegei. Minthogy pedig a (39) alatti $\boldsymbol{H}(f_1, f_2, \ldots f_p)$ $p!$ számú olyan sor összege, mint a minő a (40) alatt foglaltatik, tehát ezzel kimutattuk, hogy a $\boldsymbol{H}(f_1, f_2, \ldots f_p)$-nek nem lehet más singularitása, mint az adott $f_1(x), f_2(x), \ldots f_p(x)$ singularitásainak p-tagú összegei, mindenik függvény egy-egy singularitását véve az összeg készítésekor. Az általánosított, p függvényre vonatkozó HURWITZ-függvényről megállapítottak segítségével könnyű belátni, hogy egy függvényhez tartozó HURWITZ-függvénynek valamely hely singularitása tekintetében való vizsgálatát visszavezethetjük annak a megvizsgálására, hogy e hely singularitása-e p számú olyan függvény HURWITZ-függvényének, melyek mindegyikének csak egy singularitása van.

10. A polusösszeg vizsgálata a Hurwitz-függvénynél. Székfoglaló értekezésemben az ott bevezetett HURWITZ-féle függvényről az integrálelőállítással megmutattam,[1] hogy ha az

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^{n+1}} \tag{42}$$

függvénynek a_1 k_1-szeres, a_2 k_2-szeres stb. polusa, akkor a $\boldsymbol{H}_p(x)$ HURWITZ-függvénynek $l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_ra_r$ (ahol $l_1, l_2, \ldots$ nem negativ egész számok, melyek összege p) nem lehet polusa, ha valamelyik $l_i>k_i$. Most ezt az általánosított HURWITZ-féle függvények imént bemutatott tulajdonságának felhasználásával akarjuk igen egyszerűen megmutatni. A $\boldsymbol{H}_p(x)$ alakja:

$$\boldsymbol{H}_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{x^{n+1}},$$

ahol:

$$A_n=\sum_{(i_1+i_2+\cdots+i_p=n)}\frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_p!}\begin{vmatrix} a_{i_1}, & a_{i_2+1}, & \ldots & a_{i_p+p-1} \\ a_{i_1+1}, & a_{i_2+2}, & \ldots & a_{i_p+p} \\ a_{i_1+2}, & a_{i_2+3}, & \ldots & a_{i_p+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_1+p-1}, & a_{i_2+p}, & \ldots & a_{i_p+2p-2} \end{vmatrix}; \tag{43}$$

Tegyük fel, hogy a az $f(x)$ k-szoros polusa és $p>k$. Alakítsuk át a felírt determinanst úgy, mint székfoglaló értekezésem 33. lapján tettük; vagyis szorozzuk meg az utolsóelőtti sort $-\binom{k}{1}a$-val, az előtte levőt $\binom{k}{2}a^2$-tel,... a (visszájáról számítva) $k+1$-iket $(-1)^k\binom{k}{k}a^k$-val és az így szorzott sorokat adjuk az utolsó sorhoz. Ekkor az utolsó sorba a

[1] l. c. p. 58.

$$\varphi(x) = f(x)\left(1 - \frac{a}{x}\right)^k$$

LAURENT-sorának megfelelő együtthatói kerülnek. Ugyanilyen módon alakítjuk át az utolsóelőtti sort, az előtte levőt s í. t. az (elejéről számított) $k+1$-ik sorig. Ha

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^{n+1}},$$

akkor a (43) alatti A_n-ből a mondott átalakítással ez lesz:

$$A_n = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_p!} \begin{vmatrix} a_{i_1}, & a_{i_2+1} & , \ldots, & a_{i_p+p-1} \\ a_{i_1+1}, & a_{i_2+2} & , \ldots, & a_{i_p+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_1+k-1}, & a_{i_2+k} & , \ldots, & a_{i_p+p+k} \\ b_{i_1+k}, & b_{i_2+k+1} & , \ldots, & b_{i_p+p+k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i_1+p-1}, & b_{i_2+p} & , \ldots, & b_{i_p+2p-2} \end{vmatrix}; \tag{44}$$

és így a $\boldsymbol{H}_p(x)$ átmegy a k számú $f(x)$ és $p-k$ számú $\varphi(x$ HURWITZ függvényébe. De $\varphi(x)$-nek a már nem polusa és minthogy $\boldsymbol{H}_p(x)$-nek singularitása csakis a k-szor vett $f(x)$ és a) $p-k$-szor vett $\varphi(x)$ singularitásainak p-tagú összege lehet (minden összeadandó más componenshez tartozó singularitások közül véve); tehát ezzel kimutattuk, hogy $\boldsymbol{H}_p(x)$-nek $l_1 a_1 + l_2 a_2 + \cdots + l_r a_r$ nem lehet singularitása, ha valamelyik $l_i > k_i$.

11. A Hurwitz-függvény lényeges singularis hely esetében. Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}} \tag{45}$$

függvénynek egyetlen singularis helye az 1 hely és pedig ez lényeges singularis hely. Meg akarjuk mutatni, hogy a p-edrendű HURWITZ-függvénynek a p hely singularis helye. Legyen a $\boldsymbol{H}_p(x)$ p-edrendű HURWITZ-függvény

$$\boldsymbol{H}_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{x^{k+1}} \tag{46}$$

Székfoglaló-értekezésemben (l. 57. lapon) megmutattam, hogy A_k ebben a p-szeres integrálalakban állítható elő:

$$(2\pi i)^p A_k = \int\limits_{c_1}\cdots\int\limits_{c_p} f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) z_2 z_3^2 z_4^3 \dots z_p^{p-1} \Pi(z_i - z_k)$$
$$(z_1 + z_2 + \cdots z_p)^k dz_1 dz_2 \dots dz_p \quad (47)$$

ahol a $c_1, c_2, \dots c_p$ görbék a jelen esetben, midőn $f(z)$-nek egyetlen singularis helye az 1, miként már a (8) pontban láttuk, összehúzhatók tetszésszerinti kis ϱ sugarú körökbe, melyek középpontjai a $z_1, z_2, \dots z_p$ síkokon az 1 helyek. A szükséges és elégséges feltétel arra nézve, hogy $H_p(x)$-nek p legyen az egyetlen singularis helye, az, hogy

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{A_n}{p^n} - \binom{n}{1}\frac{A^{n-1}}{p^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{A_{n-2}}{p^{n-2}} - \cdots + (-1)^n A_0\right]^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (48)$$

legyen.

Ha A_k-nak a (47) alatti kifejezését tekintetbe vesszük, arra jutunk, hogy a (48) alatti zárójelben álló kifejezés a következő p-szeres integrállal egyenlő:

$$\int\limits_{c_1}\cdots\int\limits_{c_p} f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) z_2 z_3^2 \dots z_p^{p-1} \Pi(z_i - z_k)$$
$$\left[\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_p}{p} - 1\right]^n dz_1 dz_2 \dots dz_p. \quad (49)$$

Válasszuk meg a ϱ-t elég kicsinyre; az 1 középpontú, ϱ sugarú körön $f(z)$ absolut értéke bizonyos n-től független M positiv számnál kisebb, $z_2 z_3^2 \dots z_p^{p-1}$ szorzat az 1-től kevéssel külömböző N positiv számnál kisebb absolut értékű; a $\Pi(z_i - z_k)$ különbségszorzat absolut értéke kisebb $(2\varrho)^{\frac{p(p-1)}{2}}$-nél, a

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_p}{p} - 1\right|$$

különbség kisebb ϱ-nál, tehát a (49) alatti kifejezés absolut értéke kisebb

$$M^p N (2\pi)^p \varrho^p (2\varrho)^{\frac{p(p-1)}{2}} \varrho^n$$

kifejezésnél és így a (48) alatti határérték: 0. És ezzel megmutattuk, hogy a $H_p(x)$ p-edrendű Hurwitz-függvénynek a p hely valóban singularis helye. Általában, ha a Hurwitz-függvény vizsgálatában a már ismertetett módon használjuk a distributiv elvet, akkor arra jutunk, hogy ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

függvénynek az α lényeges singularis helye, akkor a p-edrendű $H_p(x)$-nek $p\alpha$ singularis helye — ha csak a $p\alpha$ a singularitások összegezésénél egyféleképpen keletkezik. Ugyanezzel a módszerrel végezhetjük a tárgyalást az általános Hurwitz-függvény esetében is. Azonban e módszer nem nyujt felvilágositást arra nézve, hogy a (8), illetőleg a (11) pontban megállapitott singularitások valóban lényeges singularis helyek-e, vagy csak polusok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből.)

A TELJES FÉNYVISSZAVERŐDÉSNÉL MEGTÖRT SUGÁR POLÁROZÁSA ÁLLAPOTÁNAK VIZSGÁLATA.

FRÖHLICH IZIDOR rendes tagtól.

1. §. *Bevezetés. A dolgozat czélja.*

A következőkben közlöm a lefolyt hat esztendő alatt végzett elméleti és kisérleti vizsgálataimnak azt a töredékét, a mely teljes fényvisszaverődés esetében az optikailag *ritkább* kőzegbe behatolt, *megtört* sugárnak polározási állapota meghatározását czélozza.

Az elmúlt öt-hat évben végzett egész vizsgálat kisérleti része tulajdonképen vonatkozik különböző törésű, átlátszó két közeg válaszfelülete közelségében lévő fénylő pontok által létesitett sugárrendszerek polározási viszonyai felkutatására.

E vizsgálatok rendszere első részét, a mely ugyanis a *beesés síkjára merőlegesen* váltakozó vektort mutató, lineárisan poláros beejtett fénynél előálló sugárrendszerekre vonatkozik, már két alkalommal terjesztettem a Tekintetes Akadémia elé.[1]

---

[1] Fröhlich Izidor: Az elhajlított fény polárossági állapotának újabb nevezetes törvényszerűségei. M. T. Akadémia Math. és Természett. Értesítője, XXX. kötet, 1—97. lap. Budapest, 1912.

Kurdilla Ferencz: Ultramikroszkopos részecskék létesítette fényelhajlás polárosságáról. M. T. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője, XXXI. kötet, 121—183. lap. Budapest, 1913. Különösen a 153—155; 159—161; 165—167; 176—178 lapon lévő táblás adatok vonatkoznak azokra az esetekre, a melyekben a teljes visszaverődésnél a levegőbe hatolt, megtört fény hatása alatt válnak a koromrészecskék másodrendű gerjesztő fénylő pontokká; ez utóbbi gerjesztő középpontok lineáris vektora a beesés síkjára merőlegesen, a kormozott síkválasztó-felülethez párhuzamosan váltakozik.

Az ott közlött adatok kiterjednek arra az esetre is, mikor teljes fényvisszaverődés létesül; és az ekkor az üvegből a levegőbe lépő megtört fény vektora szintén csak *lineáris*, a beejtés síkjára merőleges vektor. E vektornak amplitudója, különben egyenlő körülmények között, az elválasztó felülettől való távolság szerint hatványkitevőlegesen fogy s már néhány mikron távolságban észrevehetetlen kis erősségű. Mindazonáltal az ily másodrendűleg gerjesztő vektorból, mint fénylő középpontból induló, a *levegőbe* haladó szétszórt sugarakra nézve az egyszerű circumaxiális polározásnak, azaz az egyszerű meridionális vektorrendszernek törvényét igen szép megközelítésben kisérletileg meglehetett állapítani és így a gerjesztő másodrendű vektor lineáris voltára és váltakozásának egyenesére is lehetett következtetni.

Hiányzott azonban mindeddig annak az esetnek a kutatása, mikor a beejtett fény a beesés síkjára merőlegesen van polározva, azaz, mikor *a beejtett fény vektora lineáris és a beesés síkjában váltakozik.* Ez az érdekesebb, talán a fontosabb eset is.

Ennek az esetnek kisérleti megvizsgálása szintén csak kis töredékét teszi azoknak a kutatásoknak, a melyeket, *ily természetű* beejtett fény mellett, a fent a lábjegyzetben említett koromrészecskékből, mint másodrendű fénylő középpontokból kiinduló sugárrendszerek polárossága kipuhatolására nézve a közelmúlt években, ugyanis 1913. évi június hó végétől 1914. évi június hó végéig Frenyó Lajos, okleveles tanár, egyetemi gyakornok által végeztettem s mely észleletek bizonyos befejezésig jutottak.

A sok-sok ezer megfigyelést, körülbelül 60,000 egyes beállítást és leolvasást tartalmazó észleleti sorozatok rendezése, redukálása, valamennyi eredményeinek kiértékesítése s az elmélet várakozásaival való összehasonlítása igen jelentékeny munkával jár.

Azonban egyrészt említett munkatársam a folyó háború kezdetén katonai szolgálatba vonult s azóta folytonosan teljesíti hazafias kötelességét s jelenleg mint hadnagy harczol az orosz hadszintéren, másrészt azóta nem találtam más, alkalmas segéderőt, úgy hogy ennek a becses megfigyelési anyagnak egész terjedelmében való tudományos feldolgozása, felhasználása a közel jövőben alig látszik lehetségesnek.

Mindazonáltal nem kívánom teljesen bizonytalan időre elhalasztani ez észleletek közül azoknak a közlését, a melyek a beesés síkjára merőlegesen poláros fény teljes visszaverődésénél a levegőbe, azaz a ritkább közegbe behatolt, megtört fény vektorának a természete kisérleti vizsgálatára vonatkoznak.

Kiragadtam az észleleti sorozatok közül olyanokat, melyek teljesen alkalmasak arra, hogy ez utóbbi, nevezetes, longitudinális összetevővel is biró vektort kisérletileg meg lehessen határozni és sajátságait az elméletileg várhatóval összehasonlítani. Erre nézve úgy a megfigyelések feldolgozását, mint az összehasonlítást magam végeztem; éppen úgy az idetartozó, itt közölt ábrák rajzait is magam terveztem és készitettem.

Az összehasonlítás a kisérleti tapasztalat és az elméleti eredmény között igen szépnek adódott és ezzel a teljes fényvisszaverődés sajátszerű jelenségével elválaszthatatlanul kapcsolatban lévő, eddig eléggé rejtélyes vonatkozások egyik vitás kérdése, a longitudinális vektor-összetevő kérdése is tapasztalatilag nyert elintézést.

2. §. *A fény törése és visszaverődése elméleti alapegyenletei egytörésű, de különböző két átlátszó közegre nézve.*[1]

A fény elektromágnességi elmélete szerint a következő jelöléseket használjuk:

ε_1, μ_1 az egyik közeg diëlektromos, illetőleg mágnességi együtthatója;

ε_2, μ_2 a másik közeg diëlektromos, illetőleg mágnességi együtthatója;

λ_1, λ_2 e közegekben haladó, *egyszínű* fény *sík*hullámainak hullámhosszúsága;

c_1, c_2 e hullámok továbbterjedési sebessége a két közegben;

c ugyane hullámok továbbterjedése az űrben (az æther-ben);

T e hullámok egyenlő, közös váltakozási tartama (szakasza);

---

[1] A következő 2—5. §. elméleti eredményeit az 1911. és 1912. évben függetlenül fejtettem ki, de nem közöltem; utóbb észrevettem, hogy ezek jó részükben már néhány év óta az irodalomban, bár nem ily összefüggésben, megtalálhatók. Lásd e dolgozat irodalmi függelékét.

Az itt közlött elméleti vázlatot és a belőle folyó eredményeket sokszor, újra meg újra átszámítottam és átszámíttattam és így ezek helyesnek veendők.

$X_1\, Y_1\, Z_1$; $X_2\, Y_2\, Z_2$ az elektromos erővektor derékszögű három-három összetevője e két közegben,

$L_1\, M_1\, N_1$; $L_2\, M_2\, N_2$ a mágnességi erővektor derékszögű három-három összetevője e két közegben.

n a két közeg relativ fénytörésmutatója $= \frac{n_1}{n_2}$; n_1 és n_2 a két közeg absolut törésmutatója lévén.

A MAXWELL-féle két hármas egyenletrendszer, derékszögű koordináták szerint e két nem vezető, nyugvó közegre nézve:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial X_1}{\partial t} &= \frac{\partial N_1}{\partial y_1} - \frac{\partial M_1}{\partial z_1}; \\ \frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial Y_1}{\partial t} &= \frac{\partial L_1}{\partial z_1} - \frac{\partial N_1}{\partial x_1}; \\ \frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial Z_1}{\partial t} &= \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (A_1)$$

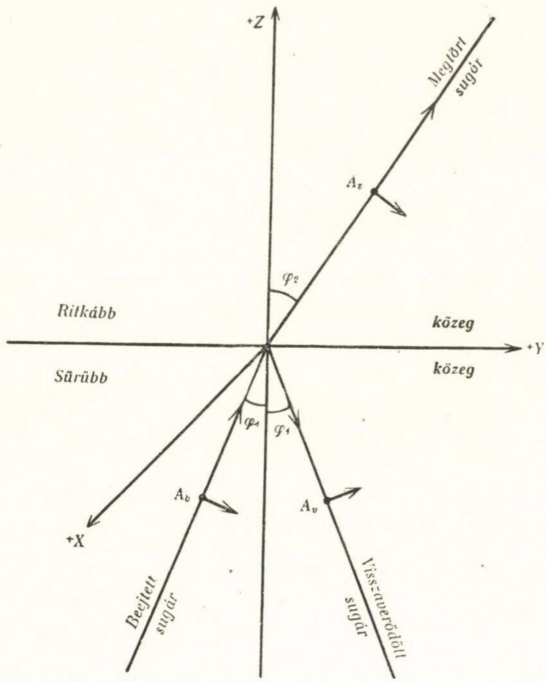
$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t} &= \frac{\partial N_2}{\partial y_2} - \frac{\partial M_2}{\partial z_2}; \\ \frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial Y_2}{\partial t} &= \frac{\partial L_2}{\partial z_2} - \frac{\partial N_2}{\partial x_2}; \\ \frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial Z_2}{\partial t} &= \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial y_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (A_2)$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu_1}{c}\frac{\partial L_1}{\partial t} &= \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}; \\ -\frac{\mu_1}{c}\frac{\partial M_1}{\partial t} &= \frac{\partial X_1}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}; \\ -\frac{\mu_1}{c}\frac{\partial N_1}{\partial t} &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (B_1)$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu_2}{c}\frac{\partial L_2}{\partial t} &= \frac{\partial Z_2}{\partial y_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial z_2}; \\ -\frac{\mu_2}{c}\frac{\partial M_2}{\partial t} &= \frac{\partial X_2}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial x_2}; \\ -\frac{\mu_2}{c}\frac{\partial N_2}{\partial t} &= \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial y_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (B_2)$$

Ezek szerint adódik:

$$
\left.
\begin{aligned}
c_1 = \frac{\lambda_1}{T} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}; \qquad c_2 = \frac{\lambda_2}{T} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}; \\
n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (1)
$$



1. ábra.

Ha az 1. ábra szerint a coordinaták (YX) síkja egyszersmind a két közeg közös elválasztó síkja, akkor e síkra nézve az ismert határfeltételek:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_1 = X_2; \quad Y_1 = Y_2; \quad \varepsilon_1 \frac{\partial Z_1}{\partial t} = \varepsilon_2 \frac{\partial Z_2}{\partial t}; \\
L_1 = L_2; \quad M_1 = M_2; \quad \mu_1 \frac{\partial N_1}{\partial t} = \mu_2 \frac{\partial N_2}{\partial t}.
\end{aligned}
\right| \qquad (C)
$$

E hat egyenlet közül csak *négy* független; a többi kettő a fentírt hármas egyenletrendszerek alapján következik; rendesen a z-k menti mennyiséget tartalmazó két jobboldali egyenletet szokás függőnek tekinteni.

3. §. *Rendes, részleges visszaverődés és rendes törés elméleti eredményei. A fény a sűrűbb közegben esik az elválasztó síkra. Általános eset.*

A beejtett fény általánosságban ellipsisben poláros legyen; a beesés síkja a coordinaták (YZ) síkja; a beesés a sűrűbb közegben történjék; jelöléseink a rajz szerint folytatólagosan:

φ_1 a beesés szöge;

φ_2 a törés szöge; továbbá:

B_m, ε_{bm} a beejtett fénynek a *beesés síkjára merőleges* vektor-összetevője amplitudója és kezdőphasisa;

B_p, ε_{bp} a beejtett fénynek a *beesés síkjához párhuzamos* vektor-összetevője amplitudója és kezdőphasisa.

V_m, ε_{vm}; V_p, ε_{vp} ugyanily nevű jellemzők a visszaverődött fényre nézve;

T_m, $\varepsilon_{\tau m}$; T_p, $\varepsilon_{\tau p}$ ugyanily nevű jellemzők a törött fényre nézve.

Ezenkívül legyen rövidség kedvéért:

$$\begin{aligned}
\psi_b &= 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_b \sin\varphi_1 + z_b \cos\varphi_1}{\lambda_1}\right);\\
\psi_v &= 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_v \sin\varphi_1 - z_v \cos\varphi_1}{\lambda_1}\right);\\
\psi_\tau &= 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau \sin\varphi_2 + z_\tau \cos\varphi_2}{\lambda_2}\right);
\end{aligned} \tag{3}$$

hol $x_b\, y_b\, z_b$; $x_v\, y_v\, z_v$; $x_\tau\, y_\tau\, z_\tau$ jelentik azoknak az A_b; A_v; A_τ pontoknak derékszögű coordinatáit, a mely pontokra a beejtett. a visszaverődött és a törött fény vektorait vonatkoztatni akarjuk.

Végre közegeinkre nézve a mágnességi együtthatók az egységtől észrevehetőleg ne különbözzenek; ezek szerint itt:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1 = 1 = \mu_2;\\
n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} > 1;
\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

és az erővektorok:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X_b + X_v\,; \\ Y_1 &= Y_b + Y_v\,; \\ Z_1 &= Z_b + Z_v\,. \end{aligned}\right\} \quad (4_1) \qquad \left.\begin{aligned} X_2 &= X_\tau\,; \\ Y_2 &= Y_\tau\,; \\ Z_2 &= Z_\tau\,. \end{aligned}\right\} \quad (4_2)$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L_b + L_v\,; \\ M_1 &= M_b + M_v\,; \\ N_1 &= N_b + N_v\,. \end{aligned}\right\} \quad (5_1) \qquad \left.\begin{aligned} L_2 &= L_\tau\,; \\ M_2 &= M_\tau\,; \\ N_2 &= N_\tau\,. \end{aligned}\right\} \quad (5_2)$$

Az *alsó jelzők* jelentése az egyenletek *bal* oldalán a mindenkori *közegre*, ezek *jobb* oldalán a *beejtett*, a *visszaverődött* és a *törött* fényre vonatkozik.

Ezek alapján, miként egyenes igazolás útján is közvetetlenül meggyőződhetünk: az (A_1), (A_2); (B_1), (B_2) két-két hármas egyenletrendszert és a (C) határfeltételi egyenletrendszert a következő síkhullám-rendszerek vektorai elégítik ki.

$$\left.\begin{aligned} X_b &= +\,B_m \cos(\psi_b+\varepsilon_{bm})\,; \\ Y_b &= +\,B_p \cos\varphi_1 \cos(\psi_b+\varepsilon_{bp})\,; \\ Z_b &= -\,B_p \sin\varphi_1 \cos(\psi_b+\varepsilon_{bp}). \end{aligned}\right\} \qquad (B_\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned} L_b &= -\,B_p \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\psi_b+\varepsilon_{bp})\,; \\ M_b &= +\,B_m \sqrt{\varepsilon_1} \cos\varphi_1 \cos(\psi_b+\varepsilon_{bm})\,; \\ N_b &= -\,B_m \sqrt{\varepsilon_1} \sin\varphi_1 \cos(\psi_b+\varepsilon_{bm}). \end{aligned}\right\} \qquad (B_\mu)$$

$$\left.\begin{aligned} X_v &= +\,V_m \cos(\psi_v+\varepsilon_{vm})\,; \\ Y_v &= +\,V_p \cos\varphi_1 \cos(\psi_v+\varepsilon_{vp})\,; \\ Z_v &= +\,V_p \sin\varphi_1 \cos(\psi_v+\varepsilon_{vp}). \end{aligned}\right\} \qquad (V_\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned} L_v &= +\,V_p \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\psi_v+\varepsilon_{vp})\,; \\ M_v &= -\,V_m \sqrt{\varepsilon_1} \cos\varphi_1 \cos(\psi_v+\varepsilon_{vm})\,; \\ N_v &= -\,V_m \sqrt{\varepsilon_1} \sin\varphi_1 \cos(\psi_v+\varepsilon_{vm}). \end{aligned}\right\} \qquad (V_\mu)$$

$$\left.\begin{aligned} X_\tau &= +\,T_m \cos(\psi_\tau+\varepsilon_{\tau m})\,; \\ Y_\tau &= +\,T_p \cos\varphi_2 \cos(\psi_\tau+\varepsilon_{\tau p})\,; \\ Z_\tau &= -\,T_p \sin\varphi_2 \cos(\psi_\tau+\varepsilon_{\tau p}). \end{aligned}\right\} \qquad (T_\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned} L_\tau &= -\,T_p \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\psi_\tau+\varepsilon_{\tau p})\,; \\ M_\tau &= +\,T_m \sqrt{\varepsilon_2} \cos\varphi_2 \cos(\psi_\tau+\varepsilon_{\tau m})\,; \\ N_\tau &= -\,T_m \sqrt{\varepsilon_2} \sin\varphi_2 \cos(\psi_\tau+\varepsilon_{\tau m}). \end{aligned}\right\} \qquad (T_\mu)$$

Ezekben a kifejezésekben még kell, hogy álljon, ha ezek szigorú megoldás-rendszerét alkotják a fentemlített egyenleteknek és feltételeknek:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{vm} &= \varepsilon_{bm}; & \varepsilon_{vp} &= \varepsilon_{bp}; \\ \varepsilon_{\tau m} &= \varepsilon_{bm}; & \varepsilon_{\tau p} &= \varepsilon_{bp}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} V_m &= +B_m \cdot \frac{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin(\varphi_2+\varphi_1)}; \\ V_p &= +B_p \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)}{\operatorname{tg}(\varphi_2+\varphi_1)}; \\ T_m &= +B_m \cdot \frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_2+\varphi_1)}; \\ T_p &= +B_p \cdot \frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_2+\varphi_1)\cos(\varphi_2-\varphi_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

E §. formula-rendszerei a visszaverődött és a törött síkhullám vektoraira nézve szigorúan érvényesek a φ_1 beesés-szögnek 0 és $\arcsin\frac{1}{n}$ határok közötti bármely értéke esetében; e köz határaihoz tartozik a φ_2 törési szögnek $\varphi_2=0$, illetőleg $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$ értéke.

4. §. *Teljes fényvisszaverődés és a vele járó törés elméleti eredményei. A beejtett fény ugyanaz, mint a rendes törés- és visszaverődésnél.*

Ha a beesés φ_1 szöge a teljes visszaverődés határszöge, ugyanis az $\arcsin\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{2}\pi$ között van, akkor, miként ismeretes,

$$\sin\varphi_2 = n\sin\varphi_1; \quad \text{de} \quad \cos\varphi_2 = -\sqrt{-1}\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1} \tag{8}$$

és a megelőző §. kifejezései, ugyane beejtett fény mellett, az imaginárius mennyiségeknek FRESNEL értelmezése szerint végzett, szokásos átalakítása után a következő, kifejtett *valós* alakban jelentkeznek:

$$\left.\begin{aligned} X_b &= +B_m\cos(\psi_b+\varepsilon_{bm}); \\ Y_b &= +B_p\cos\varphi_1\cos(\psi_b+\varepsilon_{bp}); \\ Z_b &= -B_p\sin\varphi_1\cos(\psi_b+\varepsilon_{bp}). \end{aligned}\right\} \tag{B_ε}$$

$$\left.\begin{aligned} L_b &= -B_p\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\psi_b+\varepsilon_{bp}); \\ M_b &= +B_m\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1\cos(\psi_b+\varepsilon_{bm}); \\ N_b &= -B_m\sqrt{\varepsilon_1}\sin\varphi_1\cos(\psi_b+\varepsilon_{bm}). \end{aligned}\right\} \tag{B_μ}$$

$$\left.\begin{aligned}
X_v &= + B_m \cos(\psi_v + \varepsilon_{vm} + \delta_{vm}); \\
Y_v &= + B_p \cos\varphi_1 \cos(\psi_v + \varepsilon_{vp} + \delta_{vp}); \\
Z_v &= - B_p \sin\varphi_1 \cos(\psi_v + \varepsilon_{vp} + \delta_{vp}).
\end{aligned}\right\} \qquad (V_\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned}
L_v &= - B_p \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\psi_v + \varepsilon_{vp} + \delta_{vp}); \\
M_v &= - B_m \sqrt{\varepsilon_1} \cos\varphi_1 \cos(\psi_v + \varepsilon_{vm} + \delta_{vm}); \\
N_v &= - B_m \sqrt{\varepsilon_1} \sin\varphi_1 \cos(\psi_v + \varepsilon_{vm} + \delta_{vm}).
\end{aligned}\right\} \qquad (V_\mu)$$

hol mint előbb:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_b &= 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_b \sin\varphi_1 + z_b \cos\varphi_1}{\lambda_1}\right); \\
\psi_v &= 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_v \sin\varphi_1 - z_v \cos\varphi_1}{\lambda_1}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
X_\tau &= + \boldsymbol{T}_m \,.\, e^{-\eta z_\tau} \,.\, \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau m} + \delta_{\tau m}); \\
Y_\tau &= + \boldsymbol{T}_p \,.\, e^{-\eta z_\tau} \,.\, \sqrt{n^2 \sin^2\varphi_1 - 1} \,.\, \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau p} + \delta_{\tau p} - \tfrac{1}{2}\pi); \\
Z_\tau &= - \boldsymbol{T}_p \,.\, e^{-\eta z_\tau} \,.\, n \sin\varphi_1 \,.\, \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau p} + \delta_{\tau p}).
\end{aligned}\right\} \qquad (\boldsymbol{T}_\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned}
L_\tau &= - \boldsymbol{T}_p \sqrt{\varepsilon_2} \,.\, e^{-\eta z_\tau} \,.\, \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau p} + \delta_{\tau p}); \\
M_\tau &= + \boldsymbol{T}_m \sqrt{\varepsilon_2} \,.\, e^{-\eta z_\tau} \,.\, \sqrt{n^2 \sin^2\varphi_1 - 1} \,.\, \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau m} + \delta_{\tau m} - \tfrac{1}{2}\pi); \\
N_\tau &= - \boldsymbol{T}_m \sqrt{\varepsilon_2} \,.\, e^{-\eta z_\tau} \,.\, n \sin\varphi_1 \,.\, \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau m} + \delta_{\tau m}).
\end{aligned}\right\} \qquad (\boldsymbol{T}_\mu)$$

Itt:

$$\chi_\tau = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau \sin\varphi_2}{\lambda_2}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau \sin\varphi_1}{\lambda_1}\right). \qquad (10)$$

Ezeken kívül, hogy e kifejezések az (A_1), (A_2); (B_1), (B_2) egyenletrendszereket és a (C) határfeltételeket kielégítsék, kell még, hogy álljon:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{vm} &= \varepsilon_{bm}; \\
\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\delta_{vm}) &= + \frac{\sqrt{n^2 \sin^2\varphi_1 - 1}}{n \cos\varphi_1}; \\
\varepsilon_{vp} &= \varepsilon_{bp}; \\
\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\delta_{vp}) &= + \frac{n\sqrt{n^2 \sin^2\varphi_1 - 1}}{\cos\varphi_1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\tau m} &= \varepsilon_{bm}\,; \\ \operatorname{tg}(\delta_{\tau m}) &= +\frac{\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}}{n\cos\varphi_1} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta_{vm})\,; \\ \varepsilon_{\tau p} &= \varepsilon_{bp}\,; \\ \operatorname{tg}(\delta_{\tau p}) &= +\frac{n\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}}{\cos\varphi_1} = \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\delta_{vp}). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{2\pi}{\lambda_2}\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}\,; \\ T_m &= +B_m\cdot\frac{2n}{\sqrt{n^2-1}}\cos\varphi_1\,; \\ T_p &= +B_p\cdot\frac{2n}{\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2\varphi_1-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Jegyzet. A megelőző és ennek a §-nak egyenletrendszerei a teljes visszaverődés határszögére nézve, azaz a $\varphi_1 = \arcsin\frac{1}{n}$ esetben, mindenképen egymásba mennek át; úgy, hogy e *határjelenségre nézve* a $z_\tau=0$ elválasztósíkban az *átmenetel folytonossága* a fényvektorok bármely meghatározó jellemzőjére nézve teljesen fennáll, miként egyébiránt a kétrendbeli formulákból azonnal meggyőződhetünk.

Ugyanis a φ_1 e határszögére nézve, melyhez $\varphi_2=\frac{1}{2}\pi$ tartozik, rendre következik:

$$\eta = 0\,;$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{vm} &= 0\,; & \delta_{vp} &= 0\,; \\ \delta_{\tau m} &= 0\,; & \delta_{\tau p} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} V_m &= +B_m\,; & V_p &= -B_p\,; \\ T_m &= +2B_m\,; & T_p &= +2nB_p. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Ezek szerint képezve a vektor-kifejezéseket, minthogy a határsíkra nézve:

$$z_b = z_v = z_\tau = 0\,; \quad y_b = y_v = y_\tau = y\,,$$

azonnal mindkét §. rendszereiből adódik:

$$
\left.\begin{aligned}
X_b+X_v &= +2B_m \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y}{n\lambda_1}\right)+\varepsilon_{bm}\right\}= \\
&= +2B_m \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y}{\lambda_2}\right)+\varepsilon_{bm}\right\}=X_\tau; \\
Y_b+Y_v &= 0 = Y_\tau; \\
Z_b+Z_v &= -2\frac{1}{n}B_p \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y}{n\lambda_1}\right)+\varepsilon_{bp}\right\}; \\
Z_\tau &= -2nB_p \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y}{\lambda_2}\right)+\varepsilon_{bp}\right\};
\end{aligned}\right| \quad (16)
$$

vagy (1_a) szerint:

$$\varepsilon_1(Z_b+Z_v)=\varepsilon_2 Z_\tau,$$

mely eredmények a (C) határfeltételekkel is mindenképen egyezők.

5. §. *A teljes visszaverődésnél megtört fény ellipsisszerű vektora.*

A teljes visszaverődést szenvedett fény polározási állapotára vonatkozólag, különösen pedig a teljes visszaverődésnél előállott $(\delta_{vp}-\delta_{vm})$ phasiskülönbség már régóta, elméletileg és kisérletileg teljesen ismert; a megegyezés a tapasztalat és az elmélet között igen szép és az irodalomban is nagyon könnyen hozzáférhető. Sőt az egyes vektorösszetevők δ_{vm} és δ_{vp} phasisváltozása absolut értékeinek külön-külön meghatározása az utóbbi években szép kisérleti vizsgálatok alapján sikerrel történt s ez értékek az elméleti várakozással igen jól egyezőnek találtattak.[1]

De a teljes visszaverődésnél a ritkább közegbe benyomult fény polározásának kisérleti megvizsgálása csak abban az esetben történt, mikor a beejtett, s így vele együtt a visszaverődött és a megtört fény vektora a beesés síkjára *merőlegesen* váltakozik, azaz, *mikor a fény a beesés síkjában van polározva;* szóval, mikor a ritkább közegbe benyomult *elektromos* (fény-) vektor a mi egyenleteink szerint a 4. §-ban fellépő X_τ vektorösszetevővel egyenlő.[2]

---

[1] RYBÁR ISTVÁN: A teljes fényvisszaverődés absolut phasisváltozásainak kisérleti meghatározása. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője, XXXII. kötet, 1–30. ll., három táblával. Budapest. 1914.

[2] KURDILLA FERENCZ értekezésének (v. ö. a jelen közlemény 1. §. lábjegyzetét) ama részei, mikor az üvegben haladó beejtett fény beesés-szöge egyenlő a teljes visszaverődés határszögével, vagy ennél nagyobb, erre az esetre nézve számos tapasztalati anyagot nyujtanak.

Ellenben *mikor a beejtett fény vektora a beesés síkjában váltakozik,* akkor az ugyane 4. §-ban az Y_b, Z_b; Y_v, Z_v vektor-összetevők közül a v jelzésű összetevők is szintén csak ugyane beesés síkjában váltakozó, *lineárisan poláros visszaverődött fényt* jelentenek ugyan, azonban a *megtört fényben* fellépő Y_τ, Z_τ összetevők a *beesés síkjában* váltakozó, általánosságban véve *ellipsisszerű vektort jelentenek*, melynek amplitudo-méretei az elválasztó siktól való z_τ távolsággal az $e^{-\eta z_\tau}$ hatványkitevőleges együttható szerint igen gyorsan fogynak a zérus felé. Ekként ez a megtört fény, melynek vektora Y_τ, Z_τ összetevőből áll, azt a sajátságot mutatja, hogy mindegyik összetevője a

$$\chi_\tau = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau \sin\varphi_2}{\lambda_2}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau \sin\varphi_1}{\lambda_1}\right)$$

argumentum szerint függ a t folyó időtől és az y_τ coordinatától; azaz, a

$$\chi_\tau = \frac{2\pi}{\lambda_2} n \sin\varphi_1 \left\{\frac{\lambda_2 . t}{T . n . \sin\varphi_1} - y_\tau\right\}$$

szerkezet szerint mindegyik összetevő az y mentén $\frac{\lambda_2}{T . n . \sin\varphi_1}$ továbbterjedési sebességgel haladó *sík hullámot* jelent, melynek homloksíkja a továbbhaladás közben az (XZ) coordinata-síkkal párhuzamos marad; de e hullámsík z_τ coordinatája mentén e hullám amplitudója az $e^{-\eta z_\tau}$ együtthatóval arányosan változik; szóval e hullámsík az úgynevezett változó amplitudójú hullám-homlok-felületet mutató hullámokhoz tartozik.

Maga ez a megtört síkhullám e szerint a $z=0$ elválasztó siktól számított igen kicsiny vastagságú rétegben halad s eredő ellipsis-vektorának síkja az (YZ) sík; ebben a síkban egyszersmind van e hullámnak az Y-menti továbbterjedési iránya is; szóval, e *hullám ellipsis-vektorának Y_τ összetevője e hullámra nézve longitudinális.* Ez ennek a megtört fénynek egyik legnevezetesebb sajátsága. Azokra az energia-áramlásokra, a melyek e megtört fény rétegében végbemennek, ez alkalommal nem kívánok rátérni.[1]

[1] Ezeknek az áramlásoknak tárgyalása s a velük kapcsolatos értelmezési kisérletek taglalása az utóbbi években több helyen történt; végleges tisztázásuk a POYNTING-féle sugárzási vektor értelmezése tárgyában még nincs; lásd egyébként jelen közlemény irodalmi függelékét.

Az Y_τ és Z_τ összetevők itt írhatók:

$$\left.\begin{aligned} Y_\tau &= B\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y_\tau n\sin\varphi_1}{\lambda_2}\right)+\varepsilon_{bp}+\delta_{\tau p}\right\};\\ Z_\tau &= \Gamma\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y_\tau n\sin\varphi_1}{\lambda_2}\right)+\varepsilon_{bp}+\delta_{\tau p}-\tfrac{1}{2}\pi\right\},\end{aligned}\right\} \quad (17a)$$

hol:

$$\left.\begin{aligned} B &= +T_p\,.\,e^{-\eta z_\tau}\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1};\\ \Gamma &= +T_p\,.\,e^{-\eta z_\tau}\,.\,n\sin\varphi_1.\end{aligned}\right\} \quad (17b)$$

Röviden, ennek a sajátszerű ellipsisszerű vektornak a *fent-írt kifejezések szerinti* összetevői

$$\left.\begin{aligned} &\text{amplitudo-hányadosa: } \frac{\Gamma}{B} = \frac{n\sin\varphi_1}{\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}}\\ &\text{phasisai külömbsége: } \quad = +\tfrac{1}{2}\pi.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Az 1. ábránk alapúlvételével ennek az ellipsisnek főtengelyei közül a Γ merőleges az elválasztó síkra, B párhuzamos vele, *mindkettő pedig a beesés síkjában van;* az ellipsisszerű vektor *keringése* pedig itt, e coordinata rendszerben akkor *positiv*, ha a positiv y-ok tengelyéből a positiv z-k tengelye felé való keringése irányával egyező; de ez az utóbbi keringés előáll, ha az (Y_τ phasisa — Z_τ phasisa) külömbség *sinusa* positiv;[1] e sinus pedig itt egyenlő +1-gyel. Röviden, fenti ellipsis-vektorunk keringése megegyezik az 1. ábrában használt coordinata-rendszer *positiv* sodrásával vagy forgatásával; e rajz szerint, ha az észlelő szeme az ábra síkja előtt, a positiv x-ek terében van és az (YZ) beesés síkja felé tekint, e vektor keringését az óramutató járásával ellentétben fogja látni.

[1] Ennek a vonatkozásnak egyszerű kimutatása az 1. §. lábjegyzetben idézett dolgozatom 42—44. lapján is található, az e dolgozathoz tartozó «Javítandók» tekintetbe vételével; de nem szabad szem elől téveszteni, hogy e tétel ebben a fogalmazásában csak akkor helyes, ha az egymásra merőleges két összetevője az ellipsis-vektornak a változó argumentumok *sinus*-ával van kifejezve, mint éppen fent, a (17_a)-ben az Y_τ és a Z_τ.

Jegyzet. Ha a beesés szöge a teljes visszaverődés határszöge, a megtört fény vektora a határsíkon redukálódik (16) szerint

$$Y_\tau = 0\,; \quad Z_\tau = -2nB_p \,.\cos\left|2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau}{\lambda_2}\right) + \varepsilon_{bp}\right| \qquad (16)$$

kifejezésre, azaz az elválasztó síkra merőleges egyszerű harmonikus lineáris vektora, a mely e törött határsugárra *tisztán transversális;* a sugár haladási iránya menti Y_τ összetevő, a longitudinális componens itt zérus lévén.

A φ_1 beesés-szöge további növekedésével Y_τ a zérustól különböző lesz, de a Z_τ-val való phasiskülömbsége azonnal $-\frac{1}{2}\pi$-vel egyenlő.

E szerint az Y_τ összetevő a teljes visszaverődés határszögén innen és túl a zérustól különböző amplitudóval bír; a határszögnél az amplitudója zérus; e zérusértéken való átmenetellel egyszersmind közvetlenül $-\frac{1}{2}\pi$ nagyságú *phasisugrása* van egybekapcsolva, a mely azonban éppen azért nem zavarhatja az Y_τ kifejezése folytonosságát, mert e helyen az amplitudo és így az egész összetevő is zérus.

E *határszögön túl* a fentiekben (17*a*) és (17*b*) alatt jellemzett ellipsis-vektora van e megtört fénynek; de amplitudójuk, a (13) szerint T_p-ben fellépő $\cos\varphi_1$ együtthatónál fogva, a φ_1 növekedésével fogy; végre a $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ érintőleges beesésnél

$$\sqrt{n^2 \sin^2\varphi_1 - 1} = \sqrt{n^2 - 1}\,;$$

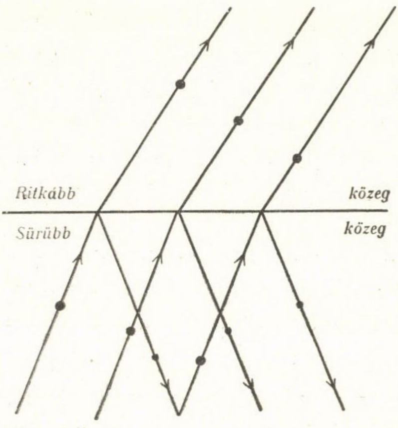
de $\cos\varphi_1 = 0$ lévén, a T_p értéke zérus, s így az Y_τ és Z_τ is elenyésző; ellenben az ellipsis tengelyeinek viszonya lesz:

$$\frac{\Gamma}{B} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}\,,$$

mely mindig >1; de az egész vektor fényerőssége zérus felé convergál és ez nem észlelhető.

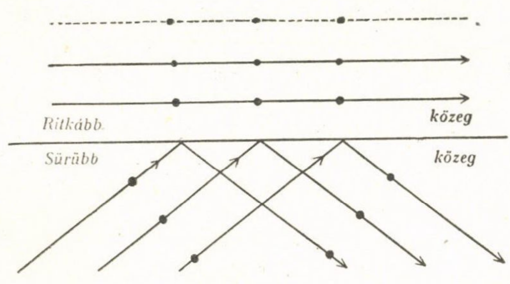
Az alábbiakban közölt kisérletek eredményei éppen arra vonatkoznak, vajjon az adott körülmények között valóban létesül a fentiekben ismertetett az az ellipsisszerű fényvektor, a mely a beesés síkjában lévén, a határsíkkal párhuzamos irányú lineáris összetevőjével a megtört fényhullámra vonatkozólag longitudinális.

E vonatkozásoknak könnyebben követhetését a következő 2—7. ábra segíti elő:



2. ábra.

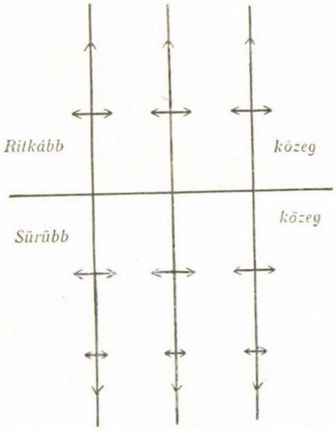
A 2. ábrában a beesés síkjára merölegesen, lineárisan váltakozó vektor van előtüntetve a beejtett, a részlegesen vissza-



3. ábra.

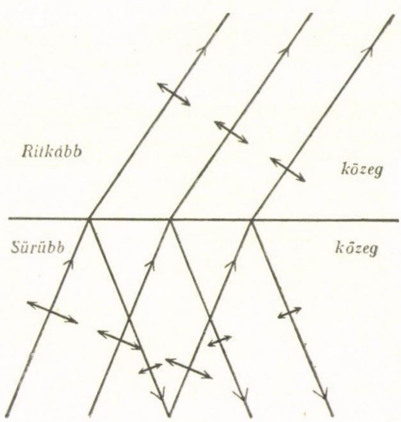
verődött és a törött sugárnyalábban; a vektorok az ábrán a rajz síkjára merőlegesek és így erősebb pontokkal vannak jelölve.

A 3. ábrá ugyanily vektorok vannak előtüntetve a beejtett, a teljesen visszaverődött és a törött fényhullámban; itt az utóbbi, a megtört sugár amplitudójának a fogyása is jelölve van, a ritkább közegbe való behatolás mélysége szerint.



4. ábra.

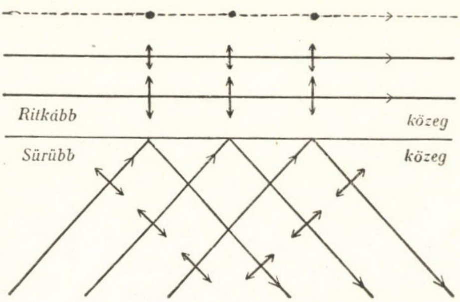
A 4. és az 5. ábrában a beejtett fény lineáris vektora a beesés síkján van; a beesés szöge zérus, illetőleg kisebb a



5. ábra.

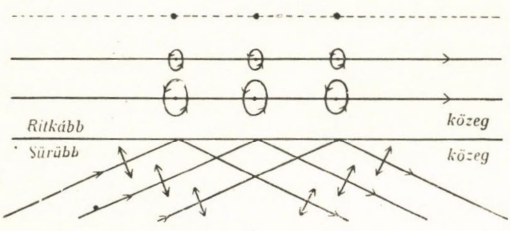
teljes fényvisszaverődés határszögénél; a partiálisan visszaverődött és a törött sugárnyalábban e vektor ugyanolyan transversális és lineáris vektor marad.

A 6. ábrán a beejtett fény lineáris vektora szintén a beesés síkjában van; a beesés szöge itt a teljes visszaverődés határszöge; a visszaverődött fény vektora ugyanakkora, mint a beejtett fényé; a törött fényé az elválasztó síkra merőleges és a ritkább közegbe való behatolás z_τ mélysége szerint gyorsan fogy.



6. ábra.

A 7. ábrán, ugyanolyan beejtett fény mellett, mint a 4—6. ábrán, de a teljes visszaverődés határszögénél nagyobb beesés szöge mellett, a visszaverődött fény vektora ugyanolyan,



7. ábra.

mint a 6. ábrán, csak a δ_{vp} phasiskülömbség lépett hozzá; ellenben a törött fényben jelentkezik a beesés (itt a rajz-) síkjában lévő *ellipsis-vektor*, és alakja méreteinek fogyása a ritkább közegbe való behatolás z_τ mélysége szerint.

6. §. *A megfigyelések kisérleti berendezése.*

A vizsgálat kisérleti berendezésének terve lényegében véve ugyanaz, mint azt az 1. §. lábjegyzetben idézett két dolgozatban végzett kutatásainknál alkalmaztuk, és ott az első dolgozat 5—8., 15—21. lapján, s a második dolgozat 123—125., 126—131. lapján leírtuk. A kisérletek szintén a nm. báró Eötvös Loránt r. tag vezetése alatt álló budapesti I. számú physikai intézet egyik első emeleti helyiségében, az úgynevezett optikai szobában folytak le, melynek rendelkezésre bocsátásáért s a szükséges villamos világítás használatáért e helyen is meleg köszönetet mondok.

Itt is egy üveg-félgömbre, és pedig az alább közlött észleleteinknél csak annak domború felületére esett a beejtett igen erős, elektromos ívlámpa fénye, mely előbb párhuzamos nyalábbá volt alakítva. E nyaláb, a félgömb üveganyagán áthaladva, e félgömb sík átmérő-lapján, mint az üveg és a levegő elválasztósíkján, törést és visszaverődést szenved. Ez a határlap gyertya lángjából származó, lehelletszerűen vékony koromréteggel volt bevonva, melynek ismeretlen szerkezetű és méretű részecskéi, a reájuk eső fény optikai hatása alatt, másodrendű fénygerjesztő középpontokká váltak; e középpontok gerjesztő vektorai ugyanoly jellegűek, mint annak a beejtett elsőrendű fényhullámnak vektorai, a mely hullám e részecskéket gerjesztésbe hozta.

Ez az utóbbi igen fontos tapasztalati igazság, melyet igen nagyszámú észlelettel igazoltam.[1]

Qualitativ kisérlet és tapasztalat a megtört fény különböző eseteire nézve.

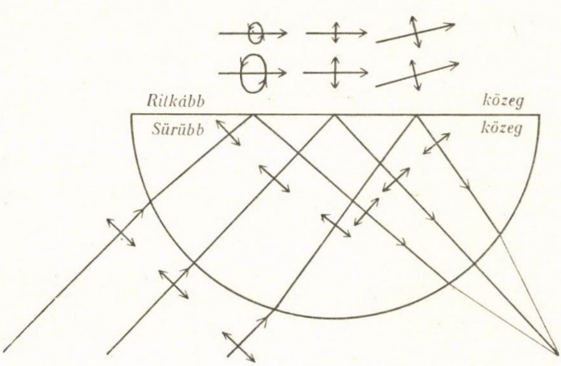
Bocsássunk az előbbiekben említett üvegfélgömbre a teljes visszaverődés határszöge alatt igen intensiv és elég széles, párhuzamos fénynyalábot, mely a beesés síkjára merőlegesen van polározva, melynek lineáris vektora e szerint a beesés síkjában, transversálisan a beejtett nyaláb továbbterjedése irányára váltakozik.

---

[1] Fröhlich Izidor: A cirkumaxiális polározás törvényének általános érvényessége egyenletes fénytörésű közegek belsejében. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője, XXVII. kötet, 299—370. l. Budapest 1909. Különösen a légnemű testekben lebegő koromrészecskék, mint másodrendű fénygerjesztő középpontok, melyek lángok látható és nem látható korma által létesülnek, hódolnak e törvénynek, 353—366. l.

Akkor a 8. ábra szerint e nyalábnak valamely középső sugara a kormozott határsíkot pontosan a teljes visszaverődés határszöge alatt éri; ez a sugár érintőlegesen lép ki a levegőbe és ott vektora, mint a 6. ábrán, e választósík normálisa menti lineáris vektor, mely a síktól való z_t benyomulási távolsággal igen gyorsan fogy a zérus felé.

De ugyanennek a széles, beejtett nyalábnak a 8. ábra szerinti *jobb*oldali részének valamely sugara a gömbfelületen való törés folytán már *kisebb* beesési szög alatt érkezik az elválasztó síkra s ezen áthaladva, a közönséges, részleges törés szabályai



8. ábra.

szerint, mint az 5. ábrán lép a levegőbe; e kilépett sugár vektora a beesés síkjában, a sugár irányára transversálisan és lineárisan váltakozik.

Végre, ugyanennek a széles, beejtett nyalábnak a 8. ábra szerinti *bal*oldali részének valamely sugara ugyancsak a gömbfelületen való törés folytán már nagyobb beesési szög alatt érkezik a kormozott választó-síkra s ott teljes visszaverődést szenvedve, megtört része a megelőzőkben, a 7. ábrán előtűntetett módon, igen vékony felületi levegőrétegben érintőlegesen halad a beesés síkjában e határsík mentén; ellipsis-vektora pedig a beesés síkjában váltakozik, egyik összetevője e megtört sugárra nézve longitudinális lévén.

Ez a kisérlet a legnagyobb könnyűséggel végezhető és mindig sikerül, úgy hogy ekként *a kormos lap közepe táján lévő korom-részecskék egymás mellett, egyszerre mutatják ezt a háromféle polározási állapotát a megtört sugárnyalábnak.*

Megvizsgálva e koromrészecskékből, mint másodrendű fénygerjesztő középpontokból a levegőbe szétszórt sugarakat alkalmas oly eszközzel, melynek jelentékenyebb látótere van, a milyen például a BABINET-féle compensator és a hozzátartozó analysator: a látótérben egyszerre, egymás mellett azonnal felismerhető e három polározásbeli állapot; ugyanis, a teljes visszaverődés határszögéhez tartozó sugár helyén a compensatorban jelentkező interferentia-csíkrendszer igen kis hosszközben, igen jelentékeny törésszerű elváltozást mutat; e törés egyik oldalán a csíkok lineáris polározást, másik oldalán ellipsises polározást jeleznek; maga az átmenetel egynemű fénynél nagyon hirtelen és szabatos; fehér fénynél nem oly hirtelen és kis közben némileg zavaros, de az átmenetel helyén innen és túl körülbelül két fokkal a polározás már egészen határozott természetű. Mindez teljesen egyező a fentjelzett elméleti várakozásokkal.

Quantitativ mérések terve.

Az épen ismertetett jelenséget már az 1910. év nyarán megfigyeltem és már akkor megállapítottam ennek az érdekes jelenségnek minőleges sajátságait főbb vonásaiban. Különösen igen jól és egyszerűen vizsgálhattam meg azt az esetet, mikor *a beesés szöge pontosan a teljes fényvisszaverődés határszögével egyenlő,* a mikor ugyanis a (16) formulák második csoportja és a 6. ábra szerint szerint úgy a sűrűbb, mint a ritkább közegben az eredő fényvektor nem más, mint a határlapra merőleges, egyszerűen harmonikus váltakozás, a Z_b+Z_v és a Z_τ kifejezése. Az ekkor a kormos lapon keletkező másodrendű fénygerjesztő középpontokból induló szétszórt sugarak vektorai e szerint oly meridionális vektorrendszerhez tartoznak, melynek symmetria-tengelye a kormos sík ama pontjában e síkra emelt normális, mely a mindenkori gerjesztett koromrészecskén átmegyen.

Már egyszerű NICOL-féle hasáb segélyével való megfigyelése az ebben az esetben fellépő szétszórt sugaraknak azonnal megmutatta e törvénynek szigorú fennállását, és pedig egyaránt a levegőbe, mint az üvegbe szétszórt sugárrendszerekre nézve, a mi igen szép igazolása elméletünknek.

De csak az 1913. év nyarán foghattunk nagyobb arányú quantitativ mérésekhez, a melyek azonban mindig a kormozott lap közepe táján megjelenő, mindenkori koromrészecskékre vonatkoztak, de teljes rendszerességgel felölelték a különböző beesés-szögek mellett keletkező összes szétszórt sugárcomplexumokat. Itt ez alkalommal csak az 5. §-ban említett megfigyelési sorozatokra szorítkozunk. Meg kell jegyeznem, ha a megfigyelés csak a beesés síkjában szétszórt sugarakra vonatkoznék, ez csak a beesés síkjában váltakozó, *lineáris* vektort mint ilyet engedi felismerni, mert még a fent részletesen taglalt ellipsis-vektor is, saját síkjának, a beejtés síkjának bármely pontjából tekintve, csak lineárisan váltakozó vektornak látszik, úgy, hogy a beesés síkjában haladó szétszórt sugarak észlelése csak azt mutathatja, hogy a másodrendű gerjesztő vektor a beesés síkjában váltakozik, de nem alkalmas a vektor igazi, ellipsisszerű jellegének felismerésére.

Ez oknál fogva az észleletek túlnyomóan legnagyobb része a beesés síkján kívül lévő megfigyelési helyekből, irányokból történt, miáltal a fényvektor alakjára és keringése előjelére biztosan lehetett következtetni.

Sőt az ez alkalommal felhasznált, *itt* alább közölt megfigyelések észleleti helyei mind a másodrendű fénygerjesztő középponton átmenő, a *beesés síkjára merőleges* síkban voltak, miáltal a vektor jellemző adatai kisérletileg igen egyszerűen, de mégis teljesen, a pontosságnak az ily észleleteknél elvárható fokával voltak meghatározhatók.

7. §. *Az észleletek végzése. A megfigyelési adatok redukálása.*

A vizsgálatokra használt eszköz ugyanaz a Jamin-Sénarmont-féle nagy polározási kör volt, a melyet a megelőző, az 1. §. lábjegyzetben idézett két nagyobb optikai kutatásunknál használtunk; alkalmazása módját ott részletesen ismertettük.

Fényforrásként egy Zeiss-féle elektromos-ívlámpa igen erős fénye szolgált.

Jelen vizsgálatainknál e párhuzamos nyalábbá alakított fény a polározón haladt át, mely úgy volt elhelyezve, hogy a belőle kilépő, lineárisan poláros fénynyaláb, miután az üvegfélgömb üveganyagán áthatolva, ennek kormos átfogó síkját érte, e síkra merőlegesen volt polározva, azaz a beejtett fény vektora beesése síkjában, lineárisan, a beeső nyalábra transversálisan váltakozott (4., 5., 6., 7. ábra).

Továbbá, mivel itt csak azt kerestük, milyen a teljes visszaverődésnél a fent taglalt *megtört* sugárban a vektor természete: teljesen elegendőnek látszott a kormos síkon lévő koromrészecskékből, mint másodrendű gerjesztő középpontokból, a *levegőbe* szétszórt sugarak polározása állapotának megvizsgálása.

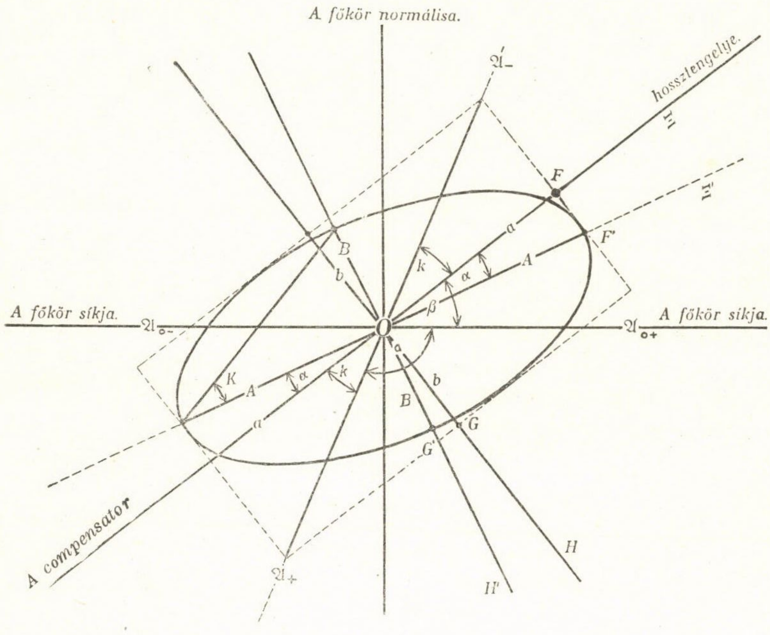
Ugyanis ily gerjesztő vektor, a circumaxiális polározás tapasztalati törvénye szerint, bármely térbeli irány mentén oly természetű szétszórt sugarat létesít, a melynek vektora méretei szerint arányos, alakjára és keringése előjelére nézve pedig egyező a gerjesztő vektornak vetületével a mindenkori szétszórt sugár normális, transversális síkjára.

E szerint, ha ily gerjesztő vektorból induló egy vagy több szétszórt sugár polározása állapotát kisérletileg meghatároztuk, azaz, ha a tapasztalat, a megfigyelés alapján ismerjük a mindenkori szétszórt sugárhoz tartozó mindenkori vektor-ellipsis főtengelyei irányítását e sugárra merőleges síkban, továbbá e tengelyek hosszának számbeli hányadosát és ez ellipsis-vektor keringése előjelét: következtetést vonhatunk a *gerjesztő* ellipsis-vektor ugyanily jellemző adataira.

Röviden, a jelen esetben a levegőben szétszórt sugarak megfigyelt polározása adatait összehasonlíthatjuk azokkal az adatokkal, a melyeket az elmélet szerint elvárhatunk, ha a gerjesztő vektor a teljes visszaverődésnél megtört sugárban csakugyan az a vektor, a mely a törés- és visszaverődésnek a 4. §-ban foglalt ($\boldsymbol{T}_s$) és az 5. §. (17*a*) és (17*b*) formula-rendszerében nyert kifejezést.

Hogy ezt az összehasonlítást legegyszerűbben lehessen elvégezni, a fent említett JAMIN-SÉNARMONT-féle kör észlelő csövére szerelt BABINET-féle compensatort mindig úgy irányítva használtuk, hogy hossztengelye rendszerint merőleges volt arra a síkra, a melyet a kormos átmérőlap középpontjából e lapra emelt normális és a mindenkori szétszórt sugár meghatározott; ez a sík egyszersmind a mindenkori szétszórt sugárnak a kormozott lap normálisától számított ω_N szétszórási szögének is a síkja. Ez az elrendezés már egy előbbi kisérleti vizsgálatnál igen jól bevált.[1]

Ennek a beállításnak igen nagy előnye az, hogy a mindenkori megfigyelt sugár vektor-ellipsise megmért adatai köz-



9. ábra.

vetetlenül vonatkoztatva vannak oly derékszögű coordinata-rendszerre, a melynek egyik tengelye (a compensator hossztengelye) az előbb említett ω_N szétszórási szögnek síkjára merőleges, másik tengelye (a compensator szélességi tengelye) e síkkal párhuzamos és maga ez a vonatkozási sík a mindenkori szétszórt, megfigyelt sugár szétszórási síkja.

---

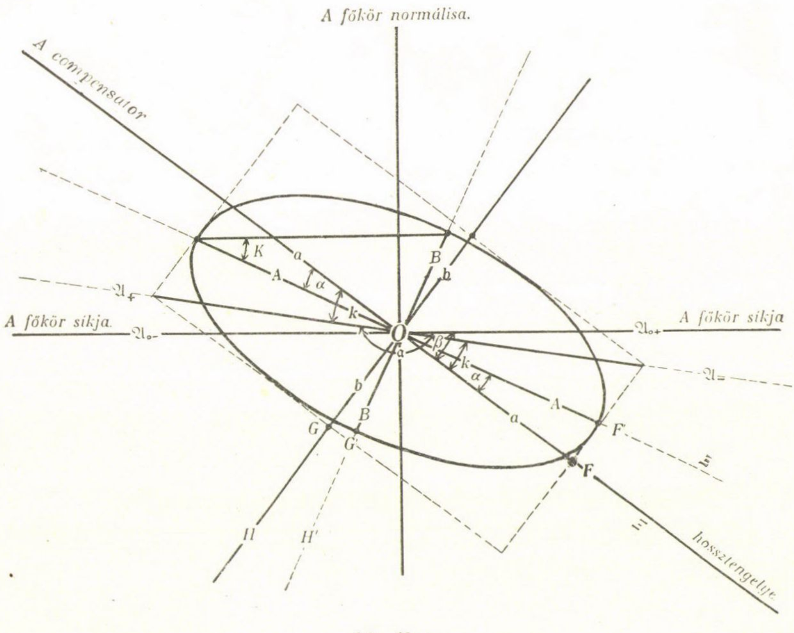
[1] A részletekre nézve KURDILLA FERENCZ-nek az 1. §. lábjegyzetében idézett értekezése 129. lapján lévő *Megjegyzés* nyujt felvilágosítást.

A 9. és 10. ábra felvilágosítást nyujt arra, milyen módon nyerjük a leolvasás adataiból az észlelt vektor-ellipsis tapasztalatbeli jellemzőit.

Legyen:

β a beállított BABINET-féle compensator hossztengelye és az eszköz (vízszintes) főköre síkja közötti szög;

$\mathfrak{A}_{0+}$ az analyzáló NICOL-léle hasáb helyzete, leolvasva positio-



10. ábra.

körén, mikor a főkörrel párhuzamosan váltakozó vektor eloltva van, és csak az e főkörre merőlegesen váltakozó vektor-összetevő juthat e hasábon át; szóval, *a mikor a* NICOL-*hasáb polározási síkja a főkörrel párhuzamos;* e leolvasásnál e hasáb nóniusa positio-köre *jobb* felén van.

$\mathfrak{A}_{0-}$ ugyanennek a hasábnak, positio-körén leolvasott az előbbivel *ellentett* helyzete, mikor ugyanis nóniusa e positio-köre *bal* felén van; de itt is e hasáb polározási síkja a főkörrel párhuzamos.

$\mathfrak{A}_+$ az analyzáló Nicol-hasáb helyzete, szintén leolvasva positio-körén, a mikor a compensator látóterében levő finom két fonál közé hozott sötét interferentia-csík a lehető legsötétebbnek látszik (a helyreállított egyenes vonalmenti polározás állapota); ekkor e csíknak egyenesmenti poláros vektora az analyzáló hasáb által eloltva van; azaz ekkor e vektor csak az $O\mathfrak{A}_+$ mentén váltakozhat.

$\mathfrak{A}_-$ ugyanennek a hasábnak ugyanily jelenségnél előálló az a helyzete, a mikor nóniusa a positio-kör ellentett negyedében van.

Ezek szerint a 9. ábra értelmezésével:

$$\alpha = \mathfrak{A}_+ - \mathfrak{A}_{0+} = (\mathfrak{A}_{0+}\, O\mathfrak{A}_+) \measuredangle\,;$$
$$\alpha = \mathfrak{A}_- - \mathfrak{A}_{0-} = (\mathfrak{A}_{0-}\, O\mathfrak{A}_-) \measuredangle\,;$$

ez az α ugyanis az a szög, melyet az ellipsis-vektor körülírt, a beállított compensator tengelyeire vonatkoztatott derékszögű egyenközény $O\mathfrak{A}_+$ és $O\mathfrak{A}_-$ félátlói és a főkör síkja alkotnak; ezt a compensatorhoz szerelt *külön* positio-körön olvassuk le. Továbbá:

a, ε_a az észlelt sugár fényvektorának a compensator hossztengelyementi összetevője amplitudója és phasisa;

b, ε_b ugyane fényvektornak a compensator szélességi tengelyementi összetevője amplitudója és phasisa;

$\varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_a$ e két phasis külömbsége, melyet közvetetlenül a compensatorral mérünk meg.

Ez a kisérleti berendezés szolgáltatja a β, α, ε adatokat.

Ezekből rendre a 9. ábra szerint nyerjük: $\alpha + \beta + k = \pi$, azaz:

$$k = \pi - \alpha - \beta\,;$$

hol: (18*a*)

$$\operatorname{tg} k = \frac{b}{a}.$$

A leolvasások a k-t szolgáltatják, és pedig az $\mathfrak{A}_+ \mathfrak{A}_-$ egyenesnek úgy az egyik, mint a másik oldalán fekvő ellipsis-félre nézve.

Jegyzet. Ha a beállított compensator helyzete a 10. ábrá-hoz képest ellentetten symmetrikus, mint a 9. ábra helyzete esetében, akkor β szög előjele ellentett lesz és áll mint előbb:

$$\alpha = \mathfrak{A}_{+} - \mathfrak{A}_{0+}\,; \quad \text{illetőleg} \quad \alpha = \mathfrak{A}_{-} - \mathfrak{A}_{0-}\,;$$

de

$$\alpha - \beta + k = \pi, \quad \text{azaz:} \quad k = \pi - \alpha + \beta\,; \tag{18b}$$

hol ismét

$$\operatorname{tg} k = \frac{b}{a}.$$

Az így nyert k és ε adatokból a fényvektorok elemi elmélete szerint [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2a) &= \operatorname{tg}(2k)\cos\varepsilon\,; \\ \sin(2K) &= \pm\sin(2k)\sin\varepsilon\,; \end{aligned} \tag{19}$$

hol rendre:

a a megfigyelt ellipsis-vektor A nevezetű főtengelye és a compensator hossztengelye közötti szög;

K szögre nézve pedig áll: $\operatorname{tg} K = \dfrac{B}{A}$, lévén $0 \overline{\gtrless} K \leqq \frac{1}{2}\pi$; (20)

B a vektor-ellipsis második főtengelye.

Itt $\sin(2K)$ csak *positiv* lehet, miért is a (19) második egyenlete jobb oldalán az az előjel veendő, mely e jobb oldalt positivvá teszi.

Végre az észlelt ellipsis-vektor *keringésének* (körülfutásának) *előjele, iránya* akkor *positiv,* ha $\sin(\varepsilon_a - \varepsilon_b)$ *positiv* és megfordítva; a *keringést positivnak* definiálva, ha az észlelő szeme, a compensator látóterébe tekintve, e keringést az óramutató járása irányával egyezőnek látja.

8. §. *Egy egyszerű észleleti sorozat; az adatok redukálása; az észlelt ellipsis-vektorok összehasonlítása az elmélettel. Szemléltető előtüntetés. Igen jó egyezés.*

---

[1] Így például az 1. §. lábjegyzetében idézett dolgozatom 54. és 55. lapján lévő (25) és (26) formulái szerint.

Az alább közlött adatok oly üvegfélgömb felhasználásával állottak elő, melynek üveganyaga *közepes* törésmutatója: $n=1{\cdot}472$ volt.

A beesés szöge e sorozatban 65°·0-ot tett ki; a polározóból jövő igen intensiv párhuzamos sugárnyaláb ugyanis hengeralakú-, keresztmetszetének átmérője egy cm-nél valamivel kisebb volt; e nyaláb az üvegfélgömb felületére érve, jóformán irányváltozás nélkül jutott a félgömb kormozott átfogó lapjára és ott teljes visszaverődést szenvedett. A levegőbe benyomult törött fény az átfogó lapon a lehelletszerűen finom módon eloszlott koromra osvén, ezt másodrendű fénygerjesztő középpontokká alakította, melyeknek most már gerjesztő ellipsis-vektora főtengelyei az 5. §. (17*a*) és (17*b*) formulája szerint a $\varphi_1=65°{\cdot}0$ és $n=1{\cdot}472$ értékekkel az:

$$\frac{n \sin \varphi_1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} = 1{\cdot}511$$

hányadost mutatják; a nagyobb féltengely a koromsík positiv normálisa-, azaz a positiv Z-tengely mentén, a kisebb féltengely lévén a koromsíkkal párhuzamosan, a positiv Y-tengely mentén irányítva.

Az ezekből a másodrendű gerjesztő vektorokból a levegőbe induló sugárösszeségből csak azokat a sugarakat fogjuk felsorolni, a melyek mind a beesés síkjára merőlegesen szóródtak szét, mely sugarak e szerint a jelenlegi másodrendű gerjesztő ellipsis síkjára merőleges síkban haladnak.

Az e sugarakhoz tartozó ellipsis-vektorok, a 7. §-ban említett törvényszerűségek szerint nem mások, mint a másodrendű gerjesztő ellipsis-vektornak vetületei a mindenkori szétszórt sugár normális síkjára.

Ezek az észlelt, a levegőbe szétszórt sugarak a kormozott lap normálisával egymásra következőleg $\omega_N=15°$, 30°, 45°, 60°, 75° szöget alkottak és így a hozzájuk tartozó vektorvetületek jellemző adatait könnyen lehetett kiértékesíteni.

I.) Az *észleleti* adatokat a következő összeállítás mutatja:

I. tábla.

ϑ_N	ω_N	$\mathfrak{A}_+$	$\mathfrak{A}_-$	$\varepsilon=\varepsilon_b-\varepsilon_a$ középértéke	β
$-90°\cdot0$	$15°\cdot0$	$161°\cdot1$	$-20°\cdot6$	$-79°\cdot2$	$-6°\cdot9$
$+90°\cdot0$	$15°\cdot0$	$173°\cdot7$	$-4°\cdot9$	$+85°\cdot3$	$+6°\cdot9$
$-90°\cdot0$	$30°\cdot0$	$142°\cdot1$	$-37°\cdot4$	$-78°\cdot7$	$-13°\cdot1$
$+90°\cdot0$	$30°.0$	$171°.1$	$-10°\cdot4$	$+85°\cdot9$	$+13°\cdot1$
$-90°\cdot0$	$45°\cdot0$	$127°\cdot6$	$-51°\cdot3$	$-78°\cdot7$	$-18°\cdot3$
$+90°\cdot0$	$45°\cdot0$	$163°\cdot1$	$-15°\cdot2$	$+87°\cdot1$	$+18°\cdot3$
$-90°\cdot0$	$60°\cdot0$	$114°\cdot5$	$-63°\cdot9$	$-80°\cdot4$	$-21°\cdot9$
$+90°\cdot0$	$60°\cdot0$	$159°\cdot1$	$-17°\cdot7$	$+89°\cdot8$	$+21°\cdot9$
$-90°\cdot0$	$75°\cdot0$	$107°\cdot2$	$-68°\cdot8$	$-78°\cdot8$	$-24°\cdot3$

A polározónak alaphelyzetei itt:

$$\mathfrak{A}_{0+}=+11°\cdot1\,;\quad \mathfrak{A}_{0-}=-168°\cdot9.$$

E táblázatban ω_N jelenti, mint az előzőkben is, a levegőbe szétszórt sugár és a kormozott lapnak a levegőbe haladó normálisa közötti szöget; ϑ_N pedig azt a szöget, a melyet az ω_N szög síkja alkot a beesés síkjával, azaz *itt* a másodrendű *gerjesztő* ellipsis-vektor síkjával.

Hogy e szétszórt sugarak irányát és helyét a térben egyértelműleg lehessen meghatározni, a következő megállapodásokat kell előre bocsátanunk:

Legyen a beesés síkja az eszköz főkörével párhuzamos, vízszintes sík; akkor a kormozott lap említett normálisa szintén e vízszintes síkban van; a beejtett sugárnyaláb az üvegfélgömb anyagán keresztül haladva, 65°·0 szög alatt éri e kormozott lapot, melynek koromrészecskéiből, mint másodrendű fénygerjesztő középpontokból a szétszórt sugarak a *levegőbe* haladnak. Ha az észlelő szeme a beesés síkjában, de a levegő terében van és pedig a kormos lap vízszintes normálisa valamely pontjában és ha e szemmel a kormos lap felé tekintve, a beejtett fény *jobbról balfelé* haladva esik a félgömb-készítményre, akkor e szem azokat a szétszórt sugarakat, a melyekre nézve a $\vartheta_N=+90°\cdot0$, a beesés síkja *fölé* haladóknak látja; azokat pedig, melyekre nézve $\vartheta_N=-90°\cdot0$, a beesés síkja *alá* haladóknak; e sugarak és a kormozott lap normálisa közötti szög a mindenkori ω_N, mely csak 0° és 90° között lehet.

Ha e szerint az észlelő szeme a $\vartheta_N = -90°\cdot0$ sugarak valamelyikét észleli, akkor ezekre nézve az $\varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_a$ phasiskülömbség az I. tábla adatai szerint **negativ**; e sugár vektorát az észlelő *jobbsodrásulag, az óramutató járásával egyezően keringőnek* látja, mert $\varepsilon_a - \varepsilon_b$ *positiv* lévén a vektornak keringése, a 7. §. végén idézett vektor-elmélet szerint, valamint itt a 9. és 10. ábra tekintetbevételével, a positiv Ξ tengelyből a legközelebbi úton a positiv H tengely felé megy végbe. Ha pedig a $\vartheta_N = +90°\cdot0$ sugarak valamelyikét észleli, akkor ennek vektorkeringését az óramutatóval *ellentétesen* haladónak látja.

Ezekkel a táblás adatokkal, a 7. §. (18*a*), (18*b*) és (19) formulái felhasználásával az így észlelt vektor-ellipsisek a és K jellemzőit és keringése előjelét lehetett kiértékesíteni; ezeket, mint az észleletből folyó adatokat, $a_{obs.}$ és $K_{obs.}$ betűkkel jelöljük.

II.) Másrészt, a *teljes fényvisszaverődés elméletéből* folyó ellipsisszerű vektorok, miként már a 7. §-ban említettük, nem mások, mint a másodrendű gerjesztő ellipsis-vektor vetületei a mindenkori szétszórt sugár normális síkjára; minthogy pedig itt az *észlelt* sugarak mind a beesés síkjára merőleges síkban vannak: a gerjesztő ellipsis-vektornak (mely szintén a beesés síkjában van) a kormozott síkmenti összetevője e vetületekben nem változik, ellenben e kormozott sík normálisa-menti összetevője e vetületekben $\sin\omega_N$ együtthatóval arányosan rövidül.

A főtengelyek a vetületben is akként jelentkeznek, hogy a kormos sík-menti főtengely a vetületben is párhuzamos marad eredeti egyenesével s e főtengely változatlan nagyságú marad bármely ω_N-szögű szétszórt irányra nézve; de a kormos sík normálisa-menti főtengelye a vetületben merőleges marad ugyan az első főtengelyre, azonban a sugár normális síkjára való vetületében $\sin\omega_N$ együtthatóval arányosan rövidült.

Ezek szerint e szétszórt sugarak vektor-ellipsisei tengelyeinek irányítására és féltengelyeinek hányadosára nézve az *elméletből*, különösen pedig a (17_a), (17_b) és (17)-ből folyólag, kell, hogy álljon:

$$\left.\begin{aligned} a_{\text{calc}} &= 0; \\ \frac{n\sin\varphi_1}{\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}\sin\omega_N &= \operatorname{tg} K_{\text{calc}}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Az alább következő II. táblás összeállítás mutatja az *észlelet adataiból kiszámított* és az *elméletből következtetett vektor-ellipsisek jellemző, meghatározó adatait.*

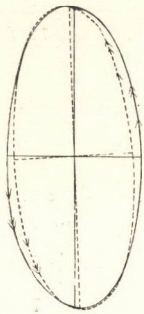
II. tábla.

ϑ_N	ω_N	ε	$\alpha_{obs.}$	α_{calc}	tg $K_{obs.}$	tg K_{calc}
$-90°{\cdot}0$	$15°{\cdot}0$	$-79°{\cdot}2$	$+\ 5°{\cdot}9$	$0°{\cdot}0$	0·4324	0·3910
$+90°{\cdot}0$	$15°{\cdot}0$	$+85°{\cdot}3$	$+\ 2°{\cdot}6$	$0°{\cdot}0$	0·4341	0·3910
$-90°{\cdot}0$	$30°{\cdot}0$	$-78°{\cdot}7$	$+14°{\cdot}9$	$0°{\cdot}0$	0·6766	0·7554
$+90°{\cdot}0$	$30°{\cdot}0$	$+85°{\cdot}9$	$+\ 7°{\cdot}8$	$0°{\cdot}0$	0·6657	0·7554
$-90°{\cdot}0$	$45°{\cdot}0$	$-78°.7$	$+43°{\cdot}4$	$0°{\cdot}0$	0·8200	1·068
$+90°{\cdot}0$	$45°{\cdot}0$	$+87°{\cdot}1$	$-37°{\cdot}9$	$0°{\cdot}0$	0·9496	1·068
$-90°{\cdot}0$	$60°{\cdot}0$	$-80°{\cdot}4$	$-14°{\cdot}1$	$0°{\cdot}0$	1·431	1·309
$+90°{\cdot}0$	$60°{\cdot}0$	$+89°{\cdot}8$	$-\ 0°{\cdot}5$	$0°{\cdot}0$	1·314	1·309
$-90°{\cdot}0$	$75°{\cdot}0$	$-78°{\cdot}8$	$-11°{\cdot}5$	$0°{\cdot}0$	1·650	1·460

Az elméletileg számított vektorok keringése mindenütt egyező az ε által meghatározott keringés előjelével; a többi számadat közül a tg $K_{obs.}$ és tg K_{calc} elég jól egyező; az $\alpha_{obs.}$ és az α_{calc} között az egyezés több helyen igen jó, más helyen azonban a külömbség igen jelentékeny; mindazonáltal ez az utóbbi körülmény már csak azért sem lehet mérvadó, mert az oly ellipsisekre vonatkozik, a melyek a kör alakját megközelítik, a mikor ugyanis az ellipsis főtengelyeinek irányítása a saját síkjában egészen mellékes, és magát az egész vektort csak lényegtelenül változtathatja meg.

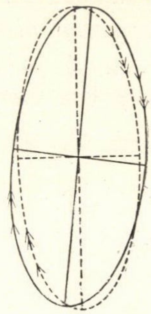
Éppen ezért czélszerűnek véltem a táblás adatokból a *megfigyelt* és az *elméletileg számított ellipsis-vektorok* rajzait megszerkeszteni és ezek ábráit a tábla szerint *páronként* előállítani, ugyanis az ugyanahhoz az észlelt sugárhoz tartozó *észleleti* és *elméleti ellipsist* közös középpont körül előtüntetni és ezeket a párokat symmetrikusan elrendezni; csak a $\vartheta_N = -90°{\cdot}0$, $\omega_N = 75°{\cdot}0$ sugárnak nincsen symmetrikus párú sugara, mert ilyet az eszköz szerkezeti sajátságainál fogva jelentkező mechanikai akadályok nem engedtek megfigyelni.

A rajzokon (11—20. ábra) a *teljesen kihúzott ellipsisek* az *észlelt*, a *vonalkázottak* az *elméleti ellipsiseket* jelentik; közelebbről pedig az ábrák közül a 11. a $\vartheta_N = \pm 90°{\cdot}0$, $\omega_N = 0$ sugárnak felel

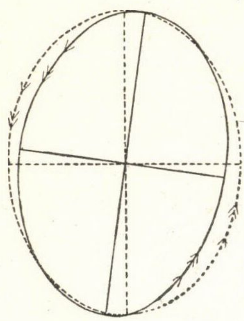


13. ábra.

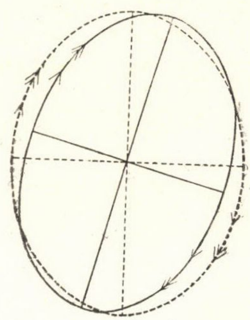
11. ábra



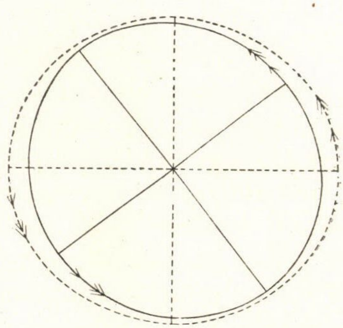
12. ábra.



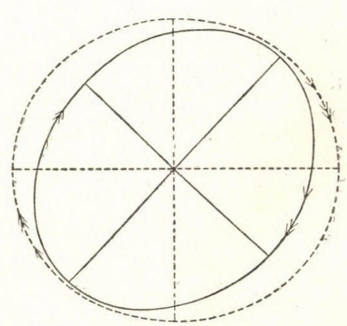
15. ábra.



14. ábra.

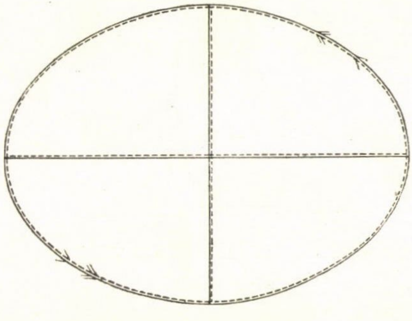


17. ábra.

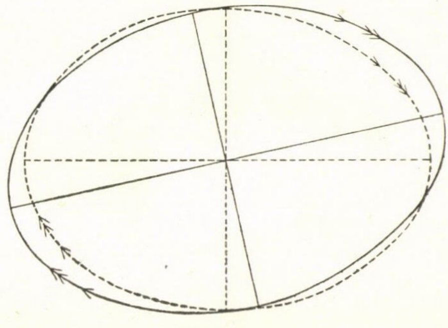


16. ábra.

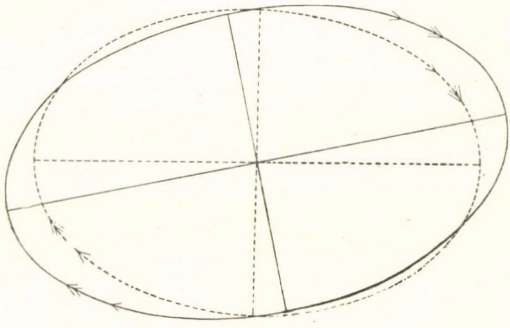
meg, a melynél a szétszórt sugár a gerjesztő ellipsis Z_τ összetevője mentén, azaz a kormozott sík normálisa mentén halad a levegőbe. E sugár adatai nincsenek táblában, mert vektora csak az y-ok mentén van és nagysága az Y_τ összetevővel arányos; itt az észleleti és az elméleti vektor egymással teljesen egybeeső két lineáris vektor.



19. ábra.



18. ábra.



20. ábra.

A 12—20. ábrák a II. táblában foglalt kilencz sugárhoz tartoznak, ugyanolyan sorrendben, mint ott. A 20. ábrának a fent említett technikai oknál fogva nincsen hozzátartozó symmetrikus párja.

Így ez a szemléltető összehasonlítás igen szépen igazolja az elméletet; a lényeges sajátságokban az egyezés elég jó; az eltérések még a szélső esetekben is elég mérsékeltek és nem zavarhatják meg és nem födhetik el a fővonásokban való összhangzást, a melynél pontosabbat az ily kényes és sokszor igen nehezen megfigyelhető jelenségeknél alig lehet várni.

Egyelőre beérem ennek az egy sorozatnak eredményei közlésével; a többi sorozat, a melyeknek végleges redukálása még folyamatban van, egészen hasonló megfigyelési és elméleti eredményt mutat.

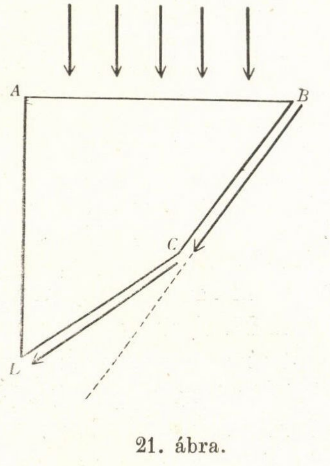
A mennyiben ezek szerint emberileg következtetni lehet, a kisérleti tapasztalat eredményeképen kimondhatjuk, hogy a teljes fényvisszaverődésnél a ritkább közegbe benyomult, megtört sugár vektora a valóságban olyan természetű, mint a milyen a 4. §. X_τ, Y_τ, Z_τ formuláiban, a Fresnel-féle elméletnek, az ő szellemében való kiterjesztése eredményében kifejezést nyer.

FÜGGELÉK.

Ujabb irodalom a teljes fényvisszaverődésnél megtört sugár elméleti és tapasztalati ismeretéhez.

A) *Értekezések.*

Woldemar Voigt: Über das, bei der sogenannten totalen Reflexion in das zweite Medium eindringende Licht. Annalen der Physik und Chemie. (III. sorozat.) Bd. *67*. p. 185—200. 1899.



21. ábra.

E dolgozatban a szerző leírja azt az eljárását, melylyel *ABCD* üveghasáb segélyével (21. ábra) a második közegbe nyomult törött sugarat észlelni és észrevenni lehet; szerző e sugárnak a szabad levegőbe lépését e derékszögű hasábnak *C* tompa szöggel megtört átfogó lapja a tompaszögű élén éri el; a sugár polározását közelebbről nem vizsgálja meg, de megállapítja, hogy e tompa él e kilépésnél fogva világítónak látszik. Előállítja a beesés síkjában váltakozó beeső fényvektor esetében a megtört fény vektor-összetevőit s kifejezéseikből felismeri, hogy e fényvektor a beesés síkjában lévő ellipsis, melynek főtengelyei a határsíkra merőleges és vele párhuzamos irányúak s hogy *a sugárnak változó, fogyó amplitudójú sík hulláma a beesés síkjában, a határsíkkal párhuzamosan terjed tovább.*

De kételyét fejezi ki az iránt, vajjon az így megfigyelhető sugárhoz tartozó fényvektorok, vagy, mint ő mondja, a levegőbe kilépett fénymozgás ezen az úton mennyilegesen mérhetők-e.

E dolgozatra igen érdekesen vonatkozik:

E. KETTELER, Studien zur Totalreflexion und Metallreflexion. Annalen der Physik und Chemie, (III. sorozat) Bd. 67., p. 879—893. 1899. Szerzője a teljes fényvisszaverődést a fémekről való visszaverődés speciális eseteként tárgyalja, és bebizonyítani törekszik, hogy egy érintőlegesen haladó sugár a ritkább közegben egyszerűen lehetetlen.

Ez értekezésre felelt:

W. VOIGT: Nochmals die gebrochene Welle bei der sogenannten Totalreflexion. Ann. d. Ph. u. Ch. (III.) Bd. 68. p. 135—136.

ELMER E. HALL: The penetration of totally reflected light into the rarer medium. American Physical Review, Vol. XV. p. 73—106. 1902. Igen érdekes és fontos dolgozat, az elején számos, régebbi irodalmi adattal; czélzata annak a kipuhatolása, mily mélységbe terjed ily esetekben a megtört fény az optikailag ritkább közegbe. Különböző beesés-szögekre és különbözően poláros fényre, valamint különböző hullámhosszúságokra és végre különböző két-két érintkező anyagra nézve szép kisérleteket végzett vékony, ritkább lemezek és rétegek alkalmazásával. Felhasznál továbbá vékony, fényérzékeny rétegeket, melyek az elválasztó üveglapokat fedték; a benyomult fény photographáló hatása legfeljebb 0·005 mm mélységig terjedt. Ha két egyenlő vagy különböző törésű közeg sík határlapjai között más törésű átlátszó lemezke van, a behatolás mélysége egyébként egyenlő körülmények között annál nagyobb, minél kisebb a harmadik közeg sürűsége az elsőhöz képest; de sohasem lépi túl a 0·0045 mm-értéket. Az elmélete teljesen egyező a DRUDE-féle tankönyv fejtegetéseivel és DRUDE amaz eredményeivel, a melyek e tankönyvön kívül találhatók A. WINKELMANN, Handbuch der Physik VI. kötete 1272—1274. és 1275—1278. lapján. Leipzig, 1906.

Szerző az idézett hely 106. lapján megjegyzi, hogy nem lát jelenleg oly módszert, mely alkalmas volna, érintkező két átlátszó közeg esetében, *fényhullámokra* nézve az elmélet igazolására, ugyanis a határsíkkal párhuzamosan haladó hullám kimutatására. De valószínűnek tartja ennek lehetőségét elektromos hullámokra nézve.

CLEMENS SCHAEFER und GUSTAV GROSS: Untersuchungen über die Totalreflexion. Annalen der Physik IV. sorozat, 32. kötet, 648—672. l. 1910.

Először az előbbi irodalomra vonatkozó néhány adat: W. VOIGT hasábkisérletének fölemlítése és kritikai méltatása, HALL fenti photographáló kisérletének ismertetése. Szerzők a továbbiakban ismertetik A. EICHENWALD-nak 1909-ben orosz nyelven megjelent dolgozatát, a melyben szerzője azzal a POYNTING-féle elektromágnességi áramlással foglalkozik, mikor a beejtett elektromos (fény-) vektor a beesés síkjára merőlegesen váltakozik e ezt az áramlást az elválasztó határsík közelében mindkét közegre nézve elméletileg megvizsgálja és rajzokban előtünteti, 648—657. l. A szerzők kiterjesztették ezeket a vizsgálatokat arra az esetre, mikor igen vékony átlátszó lemezen, mely más törésű két átlátszó közeg között van, úgynevezett teljes fényvisszaverődés áll be. A használt formulákat HALL fent idézett dolgozatából vették és ezek alapján meghatározták mind a három közegben az áramlást, s ily módon az idetartozó NEWTON-QUINCKE-féle kisérletet, a lemez vastagságának befolyását az úgynevezett teljes visszaverődésre, valamennyi részleteiben megmagyarázottnak vélik.

Végre idézik HALL ama formuláit, melyek ebben az esetben a harmadik közegbe átmenő, valamint az első közegbe visszaverődött fényerősséget fejezik ki, és pedig külön úgy a beesés síkjára merőleges, mint az e síkban magában váltakozó elektromos vektorral biró beejtett fényre nézve.

Minthogy a szerzők véleménye szerint fényvektorokkal e kifejezéseket igazolni nem lehet: elektromos hullámokkal kisérleteztek, paraffin-hasábokat és közöttük lévő levegőréteget használva. Befejezésül a második közegben haladó, az elválasztó sík menti elektromos energia-áramlást állapíthatták meg, és az itt jelentkező mennyiségek amplitudójának a második közegbe való hatolás mélysége szerinti hatványkitevőleges fogyását igazolhatták; mindezeket azonban csak elektromos és nem fényhullámokra és csakis ezek amplitudóira, erősségére, s nem az elektromos vektor természetére, alakjára, még kevésbé pedig *fény*-vektorok ebbeli tulajdonságára nézve.

WOLDEMAR VOIGT: Über die Schwingungen im zweiten Medium bei totaler Reflexion. Ann. d. Physik. (IV) Bd. *34*. p. 797—800. 1911. A szerző itt észrevételeket tesz a megelőző értekezésre s a benne kivonatosan ismertetett EICHENWALD-féle közleményre; jelzi azokat az elméleti nehézségeket, melyek véges (és nem végtelen nagy) kiterjedésű elválasztó síknál és hullámfelületnél fellépnek. Megjegyzi, hogy ő is, DRUDE-vel együtt, *elméletileg* a behatolt megtört fényben *longitudinalis összetevőt* talált, mert ez az érintőlegesen az elválasztó sík mentén haladó *hullámsík* (az egyenlő phasisok síkja) az elválasztó síkra szigorúan merőleges.

A. EICHENWALD: Über die Bewegung der Energie bei Totalreflexion. Ann. d. Ph. (IV) Bd. *35*. p. 1037—1040. 1911. A szerző észrevételeket tesz a megelőző két értekezésre; többek között ragaszkodik a POYNTING áramlási tételein alapuló ama definitióhoz, hogy a sugár a POYNTING-féle áramlási vektor, azaz a mindenkori energia-áramlás görbéje, mely mindenütt merőleges a mindenkori elektromos és mágnességi erőre. Ebből következik, hogy teljes visszaverődésnél az áramlás és így a »*fénysugár*« is a második közegbe behatol s csekély mélységű görbe vonal mentén haladva, az első közegbe visszatér s hogy ily módon érintőlegesen haladó sugár a második közegben nem keletkezik, bár megengedi, hogy ez az utóbbi sugár a második közegben a hullámsíkra merőleges; de hozzáteszi, hogy a sugárnak tudvalevőleg nem kell mindig egybeesni a hullámnormálissal.

WOLDEMAR VOIGT: *Zwei Antworten,* Ann. d. Physik. (IV.), Bd. *36.* p, 866—870. 1911. E rövid közleményben csak a második felelet vonatkozik a teljes fényvisszaverődésre, különösen EICHENWALD megelőző, kritikai czikkére; a szerző kifejti, hogy a jelenség létesítésében szereplő optikai hasábok véges (és nem végtelen nagy) méretei, éppen e fénytani eszközök *határainál* fogva, az elmélet jelentékeny nehézségeit okozzák, mert megfejtetlenül marad az a kérdés, honnan származik a második közegbe nyomult megtört sugárnak érintőleges *közepes energia-áramlása.*

W. v. IGNATOWSKY: Über totale Reflexion. Ann. d. Physik. (IV.), Bd. *37.* p. 901—910. 1912.

W. v. IGNATOWSKY und E. OETTINGER. Experimentelle Untersuchungen zur Totalreflexion. Ann. d. Physik. (IV.), Bd. *37.* p. 911—922. 1912.

E két dolgozat elsejében szerzője elméletileg megvizsgálja a W. VOIGT-féle, a prismás berendezésnél előálló érintőleges hullám behaladását, a levegőbe lépését és szétszórását az átfogó tompa *C* élénél, 21. ábra. Megkülönbözteti a két esetet: A beejtett fény elektromos lineáris vektora: I. merőleges a beesés síkjára, II. párhuzamos e síkkal; meghatározza a sugárzás energiáját a POYNTING-féle vektor alapján, továbbá az elektromos erő négyzetének időbeli középértéke alapján (a mit O. WIENER kisérletei gyanítani engednek) és végre a valamely térfogat-elemben lévő összes energia időbeli középértéke alapján. A két esetben ez alapokon előálló fényerősségek hányadosa számára kifejezéseket állít fel, hogy ily módon a VOIGT-féle berendezést a ritkább közegbe benyomuló fény megvizsgálására lehessen felhasználni.

Ez a vizsgálat történik a második értekezésben, hol a szerzők photometeres kisérleti vizsgálatokkal kisérlik meg annak az eldöntését, vajjon ily fényerősségi kisérleteknél, illetőleg az emberi szemben előálló fényhatásoknál a POYNTING-féle sugárzási vektor vagy pedig a térfogategységben foglalt energia határoz-e. Eredményeik az első felfogást látszanak némi valószínűséggel igazolni, de az érintőleges sugár polározásbeli sajátságai, vektorának a természete itt nem nyernek sem megvizsgálást, sem fejtegetést.

A. EICHENWALD: Über das Feld der Lichtwellen bei Reflexion und Brechung. Festschrift, HEINRICH WEBER zu seinem siebzigsten Geburtstage gewidmet; p. 37—56, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912. A szerző már fent idézett értekezése rendszeres bővítését nyujtja és főleg az erővonalak és az áramlási görbék részletes graphikonjai előállítására helyezi a fősúlyt. A teljes visszaverődést itt is értelmezi; de előbbi értekezéséhez nem ád lényegesen újat; e mellett mindenütt a beejtett fény elektromos erejét a beesés síkjára merőlegesen veszi fel.

AUGUST WIEGREFE: Neue Lichtströmungen bei Totalreflexion. Beiträge zur Diskussion des POYNTING'schen Satzes. Ann. d. Physik, (IV.) Bd. *45.* p. 465—480. 1914. A szerző, eltérőleg VOIGT, EICHENWALD, SCHAEFER és GROSS szerzőktől, oly beejtett fényt vesz fel, mely *tetszésszerinti azimutban lineárisan poláros,* melynek sem mágnességi, sem elektromos vektora nem merőleges a beesés síkjára és ez esetben az átlátszó két közeg határfelületén fellépő visszaverődés- és törésre nézve a teljes visszaverődés állapotához tartozó egyenletrendszert írja ki. Ezeket az egyenleteket azonnal felhasználja, hogy a ritkább közegbe benyomult fény energiaáramlását kifejezze. A fentnevezett szerzők által talált, a beesés síkjában az elválasztó sík mentén haladó áramláson kívül olyat is talált, mely a beesés síkjára *merőlegesen,* a határsík mentén megy végbe, és pedig stationárius beesésnél, az időtől független, stationárius módon. Hozzáteszi, hogy:

S. Boguslawsky: Das Feld des Poynting'schen Vektors bei der Interferenz von zwei ebenen Lichtwellen in einem absorbierenden Medium, Physikalische Zeitschrift, Bd. *12.* p. 393—397, 1912 ugyanily sajátszerű áramlást talált, a nélkül, hogy fellépésének erre a sajátszerűségére figyelmeztetett volna; ő ellipsisben poláros beejtett fényt vett fel. De sem ő, sem Wiegrefe nem kisérletezett e benyomult fény vektora tárgyában.

Jegyzet. A most említett, a beesés síkjára merőleges elektromágnességi áramlást, melynek semmiféle tényleges jelenség nem látszik megfelelni, e sorok írója az 1915. év második felében, függetlenül a megelőzőleg említett két szerzőtől, szintén talált, de másféle áramlást is, mely hasonlóképpen nem áll kapcsolatban valamelyes megfigyelhető jelenséggel; alkalomadtán ebbeli fejtegetéseit közölni fogja és a Poynting-féle áramlási vektornak a fénysugárhoz való vonatkozásait közelebbről is megvilágítja. Ezt megtette: Fröhlich Izidor: «Az elektromágnességi energiaáramlás jelentése a fényelméletben» czímen a M. T. Akadémia III. osztálya 1917. évi márczius hó 19.-én tartott ülésén.

B) *Könyv-irodalom.*

G. Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Optik (Vorlesungen über mathematische Physik, zweiter Band). Herausgegeben von Kurt Hensel. Leipzig, B. G. Teubner. 1891. A 147—154. lapon megvizsgálja a teljes fényvisszaverődés jelensége elméletét, és pedig a Neumann-féle rugalmassági fényelmélet alapján. A 149. oldalon, a második, a ritkább közegbe hatolt megtört sugár amplitudóját és phasisát D- és δ'-val jelölve, mikor a beesés szöge nagyobb a teljes visszaverődés határszögénél, azt mondja:

«Es ist unwichtig die Grössen D und δ' zu berechnen, da diese sich nicht experimentell bestimmen lassen».

A 163. lapon megjegyzi, hogy a mikor a két hasáb közötti réteg vastagsága a fényhullámhosszúsággal egyenlő rendű, akkor teljes fényvisszaverődés nem következik be oly szögnél, a melynél egyébként előáll.

Woldemar Voigt: Kompendium der theoretischen Physik. Zweiter Band. Leipzig. Veit & Comp. 1896. p. 641—643. E helyen mondja: «Die

Ausdrücke für die komplexen Amplituden der gebrochenen Welle haben minderes Interesse.» Mindazonáltal kiírja ezeket 96'''' jelzésű formulájában és észreveszi, hogy az eredő vektor a beesés síkjában lévő ellipsis, melynek főtengelyei a választósík normálisa és e sík mentén vannak. A továbbiakban a megtört sugárban végbemenő energia-áramlást is, bár röviden, tárgyalja.

P. Drude: Lehrbuch der Optik. Dritte erweiterte Auflage, herausgegeben von E. Gehrke. Leipzig, S. Hirzel. 1912. Különösen 281—285. lap és 285—288. lap. A kifejtés az elektromágnességi fényelméletből indul ki.

A. Winkelmann: Handbuch der Physik. Bd. VI., 1272—1274. lap és 1275—1278. lap. Leipzig. 1906. E fejezetek: Totalreflexion an isotropen Medien, és Totalreflexion an sehr dünnen Lamellen. Kidolgozó: Drude.

E. Mascart: Traité d'Optique. Tome II. Paris, 1891; p. 423—428; 481—488; különösen 488—490. lapja. De a teljes visszaverődésnél a ritkább közegbe nyomult fény elméletét nem nyujtja, csak az utolsó helyen Fresnel felfogását említi.

Arthur Schuster: Einführung in die theoretische Optik. Übersetzt von H. Konen. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner. 1907; p. 60—63; de a ritkább közegbe behatolt fénynyel részletesebben nem foglalkozik.

Robert W. Wood: Physical Optics. New and revised edition. New York, Macmillan Company, 1911; p. 371—374. Itt a ritkább közegbe hatolt fény elmélete csak egészen vázlatosan, Drude szerint van tárgyalva. A szerző megismételte W. Voigt kisérletét a derékszögű, de tompa szögben törött átfogóju üveghasábbal, de nem tudta határozott biztossággal érintőlegesen haladó sugárnak a levegőbe lépését megállapítani; ennek okát abban véli találni, hogy a tompa C él nem volt tökéletesen csiszolt henger. A szerző is éppen úgy, mint A. Cotton, ennek az érintőlegesen haladó, változó amplitudójú sugárnak a felismerésére azt az eljárást használta, a melyet magam is már évek hosszú sora óta alkalmazok: ugyanis igen kicsiny részecskéket a visszaverő felületre szórva, e részecsek ily fényváltakozás folytán maguk is fénylő, fényt szétszóró középpontokká válnak. Ha derékszögű üveghasáb átfogó lapjára láng segélyével igen gyenge, rendes körülmények között jóformán észrevehetetlen finomságú koromréteget rakatott és igen erős fényforrással létesített teljes visszaverődést e síkon: a kormozott folt megvilágítottnak látszott és igen erős nagyítóval vizsgálva e foltot «minden egyes szénrészecskéből minden irányban látszik fény szóródni». A szerző ezt az eljárást arra használta fel, hogy bizonyos igen vékony fémes rétegeknek szemcsés (granuláris) szerkezetét megállapítsa. Később ugyanezt az eljárást tőle függetlenül fedezte fel A. Cotton, hogy segélyével ultramikroskopos részecskéket láthatóvá tegyen; ezt szemlélteti Wood a 641. lap alsó rajzán.

A fénynek kicsiny részeken való szétszóródására nézve a 625. lapon említi Lord Rayleigh magyarázatát és ott a meridionális vektorrendszer létesüléséről szól, a mikor az intensiv gerjesztő fénynyalábvonal mentén poláros. De a jelenség physikai értelmezésénél lehetetlennek véli, hogy a részecskék, még ha oly kicsinyek is, mint a molekulák, a valóságban oly gyors rezgésekbe lennének, hozhatók mint a milyenek a fényrezgések. Egyébként a szerző a XXII. fejezet 624—647. lapján elég részletesen tesz jelentést a fénynek kicsiny koromrészecskéken, fémgömböcskéken, fémgőzökön történő szétszóródásáról, a szórt fény színeiről is; de polározásukról csak egészen általánosságban szól, minőleges eredményeket említ, különösen a SIEDENTOPF és ZSIGMONDY-féle idetartozó észleleteket kolloid-oldatokon; azonban mennyileges meghatározások teljesen hiányzanak. Úgy látszik a ritkább közegbe hatolt fény polározása kérdésével nem is foglalkozott.

Végre igen figyelemre méltó a fényelhajlás jelenségeire nézve és a szétszórt fénysugarak sajátságai ismerete szempontjából az e napokban megjelent: M. v. LAUE: Wellenoptik; PAUL S. EPSTEIN: Spezielle Beugungsprobleme. Encykloplædie der Mathematischen Wissenschaften Band V_3. Heft 3. p. 359—487; 488—525. Leipzig. B. G. Teubner. 1915.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 február 14.-én tartott üléséből.)

KÉT RITKA NORANTEA PHYLOGENIÁJÁRÓL.

I—IV. táblával.

RICHTER ALADÁR l. tagtól.

A M. Tud. Akadémia 1915. évi okt. 18.-i ülésén előadott munkálatom[1] bevezetőjében jeleztem volt, hogy tüzetesen foglalkozom a Marcgraviaceák összehasonlító alkattanával, főleg a fajok származástani kapcsolatainak a felderítése okából, minthogy mindaz, amit az eladdig végzett és, hozzátehetem mindjárt, egyoldalú felfogásra valló alaktani vizsgálatok révén e tekintetben tudunk, merőben tarthatatlan. Azt is megjegyeztem, hogy az alkattani vizsgálatokra alkalmas anyag általában ritkaság, sőt sokszor hozzáférhetetlen unicum és hogy a Marcgraviaceákra vonatkozó kevés anatomiai ismeretünk eredetileg s jobbadán H. O. Juel ama dolgozatában van összefoglalva, amely Wittrock akademikus előterjesztése nyomán a svéd tud. Akadémia 1886—87. évi közleményei során jelent meg.[2] Jelen értekezésemet azonban ez sem érinti.

Származástani búvárlatokról lévén szó, készülő nagy munkálatomban fel kell ölelnem az összes ismert fajokat s fajváltozatokat, lehetőleg az úgynevezett eredeti példányok (originale) alapján; és ez túlnyomó részben sikerült is nekem a bécsi Naturhistorisches Hofmuseum, a berlin—dahlemi birodalmi botanikus

[1] Richter Aladár, A Marcgraviaceae néhány új alakjáról, a származás- és az összehasonlító alkattan alapján. — Math. és Természettud. Értesítő XXXIV. (1916) köt.-ben, I—III. rész I—XIV. táblával.

[2] Bihang till k. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. Band 12. Afd. III. N:o 5. Stockholm, 1887.

muzeum, az utrechti tud.-egyetem és BOISSIER-BARBEY chambésyi gyüjteményeinek, a jelenleg dúló háborús viszonyok között eléggé meg sem hálálható segitségével — de az alaktanilag eddig leírt fajszámok tekintetében éppenséggel sem kivétel nélkül —, ami, szóbanforgó munkálatom czélzata szempontjából, nekem nagy fennakadást okozott.

A hiány csekély, ám a származástani vizsgálataim alapjául szolgáló összehasonlító alkattan szempontjából annyival fontosabb; sőt — unicumokról lévén szó — egyszerűen nélkülözhetetlenné lett azoknak minden áron való megszerzése.

A feltornyosuló nehézségek szinte leküzdhetetlennek látszottak, mert származástani búvárlataim hiányzó láncz-szemeinek egyik-másik ritkaságszámot tevő példánya ma «ellenséges hatalom» kezén van. Örömmel jelenthetem a tek. Akadémiának, hogy az általános tudományosság érdekében, a világháborútól okozott gyűlölködés torlaszán át is, sikerült a minap két oly *Norantea*-t megszereznem, amelynek a jelzett szempontok szerint való megismertetése miatt, amint a világszerte óhajtott béke helyreállott, nyilván az angolok sem fognak haragudni, mert a most tárgyalandó *Noranteá*kat tőlük kaptam meg, csak ez idő szerint, természetesen, nem általuk.

TRIANA és PLANCHON *Norantea mixta*-ja az egyik, voltakép a francia búvárlati génie egyik remek példája, amely a nevezett szerzőknek az «Annales des Sciences Naturelles» növénytani (Botanique) részének XVII. kötetében közzétett «Prodromus Florae Novo-Granatensis» czímű nagyobb dolgozatában tünt föl a botanikusok előtt 1862-ben (p. 374). A növény eredetileg Bogota Andesének Susumuco 1000 m. magaslatáról való, amelyről TRIANA és PLANCHON megjegyzi, hogy «Ne conaissant de cette curieuse plante qu'un seul exemplaire à fleurs partiellement monstrueuse, nous aurions évité probablement de lui donner un nom spécifique, si l'importance même de ses caractères au point de vue morphologique n'en faisait un objet d'étude qu'il serait incommode de désigner par les termes species inedita» (l. c. p. 375).

TRIANA és PLANCHON *N. mixta*-ja a Marcgraviaceák sajátos bracteái morphologiai magyarázatának nevezetes példája;[1] WITTMACK azért, hogy az eredeti példányt tanulmányozhatta, TRIANAnak adóz köszönettel.[2]

Még ha Parisban egykor (1892) botanikus mestereim: BAILLON, BUREAU, VAN TIEGHEM, JULIEN VESQUE, avagy DUFOUR barátságára is számíthatnék, most le kellene mondanom a Museum d'Histoire Naturelle növénytári osztályában őrzött ez unicum tanulmányozásának a lehetőségéről, amelynek általános botanikai érdekességét nagyban növeli WITTMACK-nak, a Flora Brasiliensis című monumentalis műben a Marcgraviaceák monographusának következő megjegyzése: «OBS. I. Fortasse planta a MACCLEAN (sic!) in Peruvia collecta, in herb. Kew. asservata, quæ propter bracteas erectas a *N. pedunculari* POEPP. differt, ad hanc speciem vel ad *N. Delpinianam* pertinet» (Fl. Brasil. XII. I. p. 236).

Már WITTMACK e megjegyzése eleve a MACLEAN-féle perui példány vizsgálatát tette fontosabbá reám nézve, melynek céduláján eredetileg «*Norantea peduncularis* POEPPIG? Peru. MACLEAN» olvasható (Ex Herb. Hort. Bot. Reg. Kew.). Róla való az a levél, amelynek lehetően hű képét a III. tábla 11. ábrája tünteti föl. Ez alaktanilag a *N. peduncularis* POEPPIG amaz originalejának is megfelelhetne, amelynek tüzetes tanulmányozását a bécsi Naturhist. Hofmuseumban hajtottam végre s amely ugyancsak Peru Andeséről való (Habitat in Peruvia subandina: POEPPIG u. 1478. In Herb. Mus. Palat. Vindob.!).

Ki fog világlani az alább adandó alkattani fejtegetésekből, hogy valóban szoros is közöttük a vérségszerinti kapcsolat, amint azt WITTMACK jól sejtette (id. h. 236. l.-on obs. 1).

WITTMACK idézett helyen való észrevételében azonban megkoczkáztatja azt a véleményt is, hogy MACLEAN perui *Norantea*-ja kapcsolatilag esetleg a *N. Delpinia*-hoz is tartozhatik. Ez a nézet

---

[1] TRIANA et PLANCHON, Mém. de la Soc. d' Hist. Nat. de Cherbourg, IX. p. 76.

[2] WITTMACK, L., Die Marcgraviaceen und ihre Honiggefässe. — Kosmos, III. Jahrg. 1879. V. Bd, p. 273.

annyiban súlyos, mert a *N. Delpiniana*-t maga WITTMACK állította föl (Fl. Brasil. l. c. p. 236). Következéskép e kérdés eldöntésében fölötte nagy érdek fűződött ahhoz, hogy WITTMACK *Norantea Delpiniana*ja GARDNER-féle 4454. sz. originalejáról legalább egy levelet szerezhessek meg a czélravezető vizsgálatok végrehajtása okából, ugyancsak ez idő szerint ellenséges terület gyüjteményéből; ez is sikerült. Hű rajzát, aminek a *N. Delpiana* Flora Brasiliensisbeli képével (l. c. Tab. 46. fig. I) való egybevetése okából is meg lehet a maga fontossága, az I. tábla 1. ábráján közlöm.

A szóbanforgó *Noranteát* WITTMACK, a legkiválóbb berlini botanikusok egyike, in illo tempore az olasz FRED. DELPINO-ról, tagadhatatlanul a minden idők egyik legkiválóbb biologusa nevéről keresztelte el, akinek a Marcgraviaceák biologiai felderítésében is különleges érdemei vannak.[1] Magam is szivesen emlékezem meg e helyt erről a nagy tudósról s boldognak vallom magam, hogy egykor (1900. IX. 1) eszmét cserélhettem vele Nápolyban, ahol botanices professorként fejezte be hosszú és eredményekben gazdag életét.

WITTMACK *Norantea Delpiniana*-ja leírásának alapjául GARDNER ama 4454. sz. példánya szolgál, amelyről azt olvassuk, hogy «Habitat in Brasiliae prov. Minas Geraës in paludosis ad ripas fl. Parahibuna» (Fl. Brasil. l c. p. 237). Ez a hiteles, mert Peruból való példányát maga WITTMACK Dombey (?)-jel alatt közli.

E *Norantea* Fl. Brasiliensis-beli képét BENTHAM herbariumának ama GARDNER-féle példányáról rajzolták, amely most már a Kew-herbarium tartozéka s amelynek balfelőli alsó levele tökéletes mása az I. tábla 1. rajzának, és amely önmaga is a hiteles példányról való; in natura papiros vékonyságú, amit hangoztatnom kell WITTMACK, nyilvánvalólag

[1] DELPINO, FR. Ulteriori osservazione sulla Dicogamia nel regno vegetale. — In Atti d. Soc. Ital. d. Scienz. Natur. d. Milano, XII. 182.

— Funzione mirmecofila nel Regno Vegetale. Prodromo d'una Monografia delle piante formicarie. — In Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. IV—a. Tom. VII. Bologna, 1886. p. 304. Famiglia delle Marcgraviacee.

tollhibából eredő tévedése helyreigazítása okából, aki a leírást kiegészítő jegyzetben, a fődiagnosisban helyesen írt «foliis... membranaceis» pótlásául utóbb «Folia... membranacea vel coriacea»-t ír, ami a Marcgraviaceák bármely más fajánál is egyszerűen kizárt dolog.

A továbbiakban sem ejti el WITTMACK a *N. Delpiniana* alaktani vonatkozását a *N. mixta*-hoz, aminek azonban, leglább is az úgynevezett fajok phylogeniai sorrendjében, semmi alapja sincs, elannyira, hogy a Flora Brasiliensis-ben adott egymásutánjuk is tarthatatlan; szinte azt mondhatnám, hogy, a nemzetség körzetén kivül, egyébként semmi közük sincs egymáshoz.

A *N. Delpianiana* ugyanis phylogeniailag primitiv *Norantea*, a *N. mixta* ellenben származástanilag a legfejlettebb *Noranteák* egyike.

A Noranteák egész csapatteste esik a kettő közé, ami annak a jele, hogy merőben más és másama *Norantea*-csoport physiologiai-anatomiai jellege, ahová a *N. Delpiniana*, illetőleg a *N. mixta* tartozik.

E példák egyszersmind ékes bizonyságul szolgálnak arra, hogy mennyire tarthatatlan a növényrendszertani iskola amaz irányzata, melyhez oly sokan mindmáig ragaszkodnak, állandó aggodalommal a mikroskop iránt, mely mindenesetre nem eszköze a könnyű termelés lehetőségének, ellenben szigorú (garantialis) biztosítéka a vizsgálati eredmények maradandóságának.

Mielőtt a fölvetett kérdésnek, jelen dolgozatom voltaképeni főtételének a kifejtésére áttérnék, szükséges, hogy e két ritka *Norantea* levél-anatomiáját előrebocsássam, mert csaknem bizonyos, hogy az angolok kizárólagos tulajdonát tevő s az alig néhány levélből álló s ritka példányok többé sohasem kerülhetnek anatomiai vizsgálat alá. Az egyoldalú morphologiai irányzatnak mindmáig maradian hódoló Kew-Garden sem volt barátja soha a mikroskopi vizsgálatnak, mert nem kedvez az elnagyolt tömegmunkának és mindig a vizsgálati anyag kisebb-nagyobb részben való feláldozásával jár. Az eredeti példák pedig megőrzendők. Ez muzeális dogma, általában mindenhol, különösen pedig Kew-ban, hol a szárított növényeket teljes ízléstelenséggel s szinte leválaszthatatlanul pacsmagolják a papiroslapokra. A megőrzésnek tagadhatatlanul ez a leggyökeresebb módja; ezt a conserválási módszert azonban sehol sem követik, nyilván a tudományos búvárkodás nagyobb szabadsága okából.[1] Végre a növény maga, bármely állapotában is, nem czél, hanem a búvárlatoknak eszköze, nyers anyaga csupán, melynek felhasználási módja tekintetében a tudós szakember sohasem járhat el lelkiismeretlenül, még a «czél szentesíti az eszközöket» ismeretes jeligéje alatt sem.

Magam láttam, hogy a hét lakat alatt őrzött, eredetileg a svédektől elragadott LINNÉ-gyüjtemény sem kerüli el az «in pulverem reverteris»-ben kifejezett sorsát a mulandóságnak.[2] Ellenben «... manent scripta» és én úgy vélem, hogy hasznos dolgot művelek ez értekezés közzétételével, amely az anyag múlandóságán túl, végre is a szóbanforgó *Norantea*-ritkaságok állandóságát biztosítja a tudománytörténet lapjain.

---

[1] Ujabban, 1916. évi németországi tanulmányutam alkalmával, Berlinben tapasztaltam, hogy a dahlemi kir. botanikus muzeum herbariumának újabb szerzeményű lapjait «Kew-módján» lepacsmagolják és pedig URBAN professzor javaslatára, aki ezt a conserválási módot — miként előttem jelzé — már azért is igen praktikusnak tartja, mert a herbariumi lapok forgatásakor (sok botanikus rossz szokása ez, amit különben a Kew-Herbariumban sem tűrnek el!) egyébként mindig ott a töredékporhalmaz a fasciculusok oldalán. URBAN szerint ez volna a nagy herbariumok fenntartásának egyedül biztos módja.

Bármily tisztelettel vagyok is URBAN prof., az EICHLER-iskola ez egyetlen élő és legjelesebb tagja iránt, már a korszerű búvárlati módszerek alkalmazásának a lehetősége okából is én (és nyilván velem együtt az új botanikus nemzedék legtöbb tagja) csak sajnálattal vehetnők tudomásul az «angol módszer» esetleges állandósítását Berlinben, amely a növénypéldányok kisebb vagy nagyobb mértékű elcsúfításával együtt jár.

[2] LINNÉ herbariuma, conchylia- és insecta-gyűjteménye és könyvtára Londonban. Előadatott a Természettud. Társulat 1894. okt. 10-i növénytani értekezletén. — Eredeti kézirat felhasználásával csupán kivonatosan jelent meg a Természettud. Közlöny XXVII. (1895.) köt. 48. l.-ján.

Das LINNÉ-Herbarium, die Conchilien- und Insectensammlung und die Linné-Bibliothek in London. — Refer. in Botan. Centralbl., Cassel, Bd. LXIV. (1895.) p. 72. — Mathem. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn. Bd. XII. (1895.) p. 410—11.

I.

Norantea Delpiniana WITTM.

A levél, a melylyel összehasonlító-alkattani vizsgálataim czéljaiból is szabadon rendelkezhettem, 9·9 cm h. és 4·4 cm sz. volt; ezek a méretek némileg meg is haladják a WITTMACK eredeti leírásában id. h. olvasható maximalis (8—9 cm h., 3·5—4 cm sz.) méreteket. Ilyenformán az alábbiakban közlendő alkattani jellemzés a *N. Delpiniana* egyik legfejlettebb levelén alapul (Tab. I, fig. 1), amely GARDNER 4454. sz. (tehát eredeti) példányáról való s amely WITTMACK e *Norantea*-járól rajzolt képével a Flora Brasiliensis-ban (id. h. Tab. 46, fig. I legalsó levele!) teljesen megegyezik.

WITTMACK a növény fődiagnosisában «membranaceus»-nak, az azt követő diagnosticus magyarázatban «membranacea vel coriacea»-nak mondja a levelek húsát, amit a bevezető sorokban már is hangoztatnom kellett. A levél «bőrneműségét» illető jelzés nyilvánvaló tévedés, mert a Marcgraviaceák levélbeli bőrneműsége, a mesophyllumban rendszerint fellépő skleroïdeken kívül, együtt jár a mesophyllum megfelelő vastagságával, amit e *Norantea* levelében alkattanilag éppenséggel sem lehet megállapitani.

Ellenkezőleg; a levél, miként a Tab. I, fig. 2-re való egyszerű rátekintés is igazolja, a papiros-vékonyságú levél (folium membranacea vel papyracea) lehető legegyszerűbb bifacialis szerkezetét tünteti föl, valamennyi *Norantea* között a minimumra redukált palissade- s szivacsparenchymabeli réteggel. Ez utóbbi lazaságát a lépten-nyomon gyakori, sokszor igen nagy sejtközi üregek jelentékenyen fokozzák és ha mindezekhez hozzávesszük mindkét epidermis feltünően öblös sejtjeit, amelyek legtöbbje azonfelül el is nyálkásodott (Tab. I, fig. 3—4 $e_1 = em - e_2$, $n - n$), valamint azt, hogy ezek következtében az amúgy is keskenyrétegű palissade s a szivacsparenchyma további reductiót szenved, könnyen megállapithatjuk, hogy ily alkattani szerkezettel szó sem lehet a levél bőrneműségéről.[1]

---

[1] Mindezek következtében a szöveti összeesés (collapsus) a szárított anyagon a lehető legnagyobb és sok utánjárásba kerül, hogy mikroskopi

A felső bőrszövet sejtjei, a levél csekély húsához viszonyítottan, a Noranteák között általában a legnagyobbak és a már fellágyított anyagban is összezsugorodó nyálka (esetleg egyéb sejttartalmú részek) kisebb-nagyobb tömege, főleg a külső sejtfalak belsejéhez tapadtan, még leginkább a felső bőrszövetben feltünő (Tab. I, fig. 3 e_1—*ny*; Tab. II, fig. 7—8, 10 *n*). A RADLKOFER-féle tuspróba nyomán ezek tömegesen, az első pillanatokban szinte tölcséresen nyomulnak ki a tusoldatba tett levéltöredékekből s ha az adott viszonyok mellett jól észlelhettem, a nyálkatömeget magába záró s fölötte vékony cellulosatömlőnek a kifordulásával amely nyilván a bőrsejtek belső falazatának felel meg (Tab. II, fig. 8 *cl*).

A Marcgraviaceák körébe tartozó nemzetségek (= genera) levélhúsában jellemzőleg lépnek föl a raphidok, a palissadeban a palissadesejt radialis irányában (Tab. I, fig. 2—3 r_1—r_1; Tab. II, fig. 10 r_1), a szivacsparenchymában fekvőleges helyzetben (Tab. I, fig. 2 r_{2-3}). Ez utóbbiak helyzeti «irányítására», úgy tapasztaltam, az oldalerezetnek van némi hatása, főleg a palissadealatti raphidtömlőkre, amelyek az oldalerezettel egyközű (Tab. I, fig. 1 *i*—*i*) k. m.-ekben rendszerint (tehát nem kivétel nélkül) a maguk tekintélyes hosszában észlelhetők (Tab. II, fig. 10 r_2), különben a jelzett oldalerezetet keresztező metszetekben a metszés egyszersmind e raphidtömlőket is többé-kevésbbé keresztben éri (Tab. I, fig. 2 r_2—r_2).

A raphidok gyakoriságát jellemzi, ami nevezetes (és a Marcgraviaceák körében eddig nem észlelt) jelenség, hogy az ismeretesen collateralis levélnyaláb leptomájában is előfordulhatnak (Tab. II, fig. 9 *lp*—*r*).

A sklereïdeket nélkülöző Marcgraviaceák levélhúsában mechanikailag jelentősebb szerep jut a stélék úgynevezett háncssarlóinak, sokszor az érhálózat amaz alkotóiban is, amelyeket a leíró növénytan «venae» címén jelöl meg (*Norantea Paraënsis* MART.). A *N. Delpiniana* leveleiben sincs ez másként és a levélerezet

vizsgálatra s Eau de Javelle-lel való felderítésre alkalmas metszeteket nyerhessünk. Duzzasztó hatása miatt ilyen esetekben jó szolgálatot tesz a kálilúggal való kezelés is.

nagyobb stéléinek némileg erősebb háncs-nyalábja természetszerűleg csökken a hajszálerezet felé, általában viszonylagosan tágüregű stereïdekkel (Tab. I, fig. 2 *bt—bt*; Tab. II, fig. 9 *bt*). E háncs-sarlók alkatelemeinek együttes mechanikai jelentőségéről például a bőrnemű levél szövetében kevésbbé lehetne szó; nem úgy a *N. Delpiniana* fent vázoltam összetételű s vékony mesophyllumában. A levél vékony húsához való érhálózati viszony azért jut alkattanilag is helyesen kifejezésre WITTMACK következő szavaiban, hogy «folia... subtus valde, sed graciliter nervosa».

A mindkét felől vékony cuticula, amelyen némi csíkoltság észlelhető, mondhatnám, hogy mechanikailag jelentéktelen. A bőrszöveti sejtek nagysága s mind a két epidermis részéről megnyilatkozó egyalakúsága az epidermisek felületi képein is szembeszökő (Tab. II, fig. 6—7). Szorosabb vizsgálatra azonban kitünik, hogy az átlagosan gyakoribb nagy bőrsejtek között itt-ott kisebbek is vannak, ami a bőrsejtek bizonyos mértékű nagyságbeli változatosságára (variabilitas) vall (Tab. I, fig. 2 *e—e*; Tab. II, fig. 6—7 *e—e*). A fonákoldali bőr részéről ez utóbbiak jobbadán a légzőnyílás készülékének (stoma) úgynevezett «melléksejtjeire» (s. a.) esnek, amelyek száma 4—6 között váltakozik (Tab. II, fig. 6 *s—s*).

A Marcgraviaceák körében e téren nyert általános tapasztalataimra való tekintettel hangoztatnom kell, hogy a *N. Delpiniana* stómái szórt helyzetűek, a légrés hosszában való tengelyük éppenséggel sem követi az oldalerek (nervi primarii) irányát (Tab. II, fig. 6). A *N. Delpiniana* csekély e l l e n á l l ó k é p e s s é g é r e[1] vall a laza szerkezetű s csekély húsú mesophyllum kapcsolatában a légzőnyílások nagy száma, amelyek zárósejtjei, a Marcgraviaceák ismeretes typusában, a bőrszövet szintjét követik, oldalvást ama körcsatornával, amely a zárósejtek «moz-

[1] A Math. és Természettud. Közlemények XXXIII. köt. (1916.) 3. sz. a. «A v i z t a r t ó s z ö v e t stb. czimen megjelent munkálatomban az idézett közlemények t. szerkesztője, sok mesterszón kivül, ezt a kifejezésemet is ellenemre megváltoztatta, «e l l e n á l l ó k é p e s s é g» helyett «t e h e t s é g e t» szerkesztvén bele a szövegbe.

gás» szabadságát jelentékenyen fokozza (Tab. I, fig. 4 *sz—sz*). Gyakran megtörténik, hogy a légzőnyílások párosak; ily esetekben bizonyos «melléksejtjeik» közösek, ami azonban mit sem változtat a «melléksejtek» átlagos 5-ös alapszámán (Tab. I, fig. 5 m_{1-5}—m_{1-5}).[1]

Raphidokat sem a levélszín, sem a fonák felőli bőrrendszerben nem láttam. E helyett, főleg a színbeli bőrsejtekben, a Sudan III-mal élénken megfestődő nyálka (?)-tömegek a feltünők, a felületi képükön is teljesen szabálytalan körvonalaikkal, ami elsősorban a szárítás következtében beállott sejtállománybeli összehúzódás (contractio) eredménye (Tab. II, fig. 7 *ny*). A nyálkasejtek homályos «udvarainak» körvonalzata egyébként mind a két bőrfelületen szembetünően gyakori, ami természetszerűleg megfelel a k. m.-i képeknek (Tab. II, fig. 7 — Tab. I, fig. 2—3e_1—e_1=*em*; Tab. II, fig. 6 — Tab. I, fig. 4 e_2).

A mesophyllumbeli sklereïdek teljes hiánya adja magyarázatát annak, hogy a levél szöveti szerkezetéről egyetlen (Tab. I, fig. 1) irányban vett k. m. is teljesen tájékoztathatja a vizsgálót.

II.

Norantea mixta Triana et Planchon.

A vizsgálataim czéljaira szabad rendelkezésemre álló és, miként a bevezető sorokból kitünik, úgynevezett originale-nak vehető levél szó szerint megfelel Triana-Planchon id. h. 374. l.-on, valamint Wittmack id. h. 236. l.-on olvasható leírásainak; hossza (az alig 0·5 cm h. nyéllel együtt) 10 cm, szélessége 3·8 cm, tehát, Wittmack id. h. adott maximalis méreteihez (15—5·5 cm) viszonyítottan, a kisebbek közül való (Tab. III, fig. 11). Mindez azonban mitsem változtat az alábbiakban adandó szövettani jellemzés lényegén.

Akár a levél bőrnemű tapintatát, avagy a k. m. futólagos

[1] Félremagyarázások elkerülése okából megjegyzem, hogy a légzőnyilás melléksejtjeinek számjelzése esetleg nem fedi a fejlődésmenet sorrendjét. Ez, természetesen, csakis a fejlődő élő növényen volna pontosan megállapítható, nem pedig a kész állapotú levél vizsgálatával.

képét veszszük tekintetbe, nyomban meggyőződhetünk arról, hogy TRIANA-PLANCHON egyszerű «foliis ... coriaceis» jelzésével szemben még jobban megfelel a WITTMACK «foliis ... valde coriaceis» kifejezésében adott jellemzés. Eddigi Marcgraviacea-vizsgálataimból szerzett tapasztalásom nyomán pedig a levélnek egyszerű megtapintása is rögtön megadta az irányítást a tekintetben, hogy — a *Norantea Delpiniana*-val ellentétben — okvetetlenül a metszetek ismeretes két irányában vizsgálandó a szöveti szerkezet (Tab. III, fig. 11, *x—x—i—i*). Egyébként a mikroskopi készítményekre alkalmas levéldarabkának a lemezből való kimetszése is nyomban megadja a directivát e tekintetben, azon a tapasztalati alapon, amit egy korábbi akadémiai értekezésemben kifejtettem volt.[1]

És valóban, a levél jelzett irányú metszeteiből vont szövettani tanulságok szükségkép kiegészítik egymást; ezek nélkül a lemez mechanikai berendezkedése helyesen el sem képzelhető.

Az oldalér k. m.-éből vett szöveti képen egy sereg sklereïd, illetőleg stereïd ötlik a szemünkbe, amelyeknek «rendszeres dispositiója» a mesophyllumban csakis a két irányban megejtett metszetek vizsgálata útján állapítható meg pontosan. Többé-kevésbbé ép sklereïdek a palissade-ban mutatkoznak, és pedig abban a formában, amit én, a zömök központi testű palissade-álló sklereïdekkel szemben, e helyt s tüzetesebben rhizostereïdeknek nevezek el, — értve ez alatt a palissade-réteg ama saját kemény (mechanikai jelentőségű) sejtjeit, amelyeknek a palissade-sejtek közé eső oszlopos központi teste elannyira keskeny, hogy a belőle eredő, a szivacsparenchymába mélyedő és rendszerint hosszú «*gyökérágak*» vele csaknem egykeskenységűek, miáltal az egész képlet voltakép egy elágazó háncsrost-sejtnél nem egyéb.[2]

---

[1] Mathem. és Természettud. Értesítő, XXXIV. (1016.) köt., 562. és 570. l., illet. Tab. I, fig. 8.

[2] Lásd a 179. l.-on a [2] alatti megjegyzést.

Megesik, hogy egy ilyen typikusan helyi mechanikai jelentőségü libroskiereïd a felső bőrszövettől a fonáki bőrrendszerig az egész mesophyllumon áthatol (Tab. III, fig. 12 *rc—rh*). A jelzett irányú metszetekben e palissade-beli rhizostereïdek mind oly «ostoros» keménysejtek, amelyek «nyele» (fig. cit. *rc*) a palissade-dal rendszerint egymagasságú, belőle erednek azután az e metszetben rendszerint jól látható s a szivacsparenchymába többé-kevésbé mélyen behatoló «gyökérágak», de nem kivétel nélkül (Tab. III, fig. 13 *rh*, *x*). Az idézett rajzon fel kell tünnie annak, hogy a metszetek ez irányában csakis a radialis nyomás tekintetében érdekelt stereïdbeli részletek érvényesülnek; ellenben mindazokat, amelyek a lemez horizontalis feszessége (horizontale Spannung) tekintetében érvényesülnek, a jelzett irányú metszés keresztben éri (id. 13. ábra *x—x*, *fk—ak*; fig. 12 *fk—ak*). Csupán a szivacsparenchymabeli s nem éppen gyakori astrostereïdek (ophiura-sejtek) azok, amelyek a metszet mindkét irányában, karjaik elágazási irányát tekintve, afféle közömbös elemek (Tab. III, fig. 13 *ostr*; Tab. IV, fig. 20 *ostr*). Ellenben a szivacsparenchyma saját libro-sklereïdjeit (-stereïdjeit) az *x*-irányú metszés (Tab. III, fig. 11 *x—x*) mind keresztben éri (Tab. III, fig. 13 $fk_x—ak_x$), éppen úgy, miként a palissade-álló rhizostereïdek ama karjait, illetőleg nyulványait, amelyek szintén a lemez horizontalis feszessége érdekében az oldal-erek irányában jutnak mechanikailag érvényre (Tab. III, fig. 14—15 $x_1—x$).

Inkább alakilag érdekesek, semmint feltünőbb mechanikai jelentőségűek ama tűszerű keménysejtek, amelyek a felső bőrszövet felől nyulakodnak be a palissade-sejtek közé s amelyeket én éppen azért stalactostereïdnek is nevezek el (Tab. III, fig. 14 *sstr*). Ilyeneket más Marcgraviaceán is észleltem; taxonomiailag tehát értéktelen képletek.

A *N. mixta* levélszöveti képének általános jellegzetessége voltakép az oldalérrel egyközös metszetek mikroskopi vizsgálatából tünik ki (Tab. III, fig. 11 *i—i* = Tab. IV, fig. 19—20). Stereïdjei tekintetében ez nem csonkított (l. Tab. III, fig. 13!), hanem szövettanilag is hiánytalanul teljes kép, amely nyomban, hogy úgy mondjam, tollunk alá diktálja a levélszövet valamennyi rétege részéről a kemény sejtek mechanikai szerepét a levél életében.

A palissade-álló rhizostereïdek során mindenekelőtt megállapithatjuk azt, hogy — amint ez nem is lehet másként — a Tab. III, fig. 12—13 kapcsán tárgyalt rhizostereïd-formák itt is észlelhetők, ámde ez esetben immár a felső bőrrendszer alatt elterpeszkedő s mindenesetre támasztó-jellegű talpnyujtványaikkal együtt (Tab. IV, fig. 19—20 *skt—skt*).

Ezek, topographiai helyzetüknél fogva, különlegesen a radialis és másodsorban a lemez horizontalis feszességének fenntartására hivatott elemek.

E rhizostereïdek további módosulásait jelentik ama palissadeálló stereïdek, amelyeknek ugyancsak háncsrostszerű gyökérnyulványai a palissadetól kisebb-nagyobb távolságra, de általában mindig ívesen görbülnek meg olyformán, hogy e gyökérnyulványbeli karok a palissade-alatti librosklereïdekkel együtt teszik ki azt a stereïdbeli nyalábot, amit én egy korábbi akademiai értekezésemben felső kábelnek jelöltem meg (Tab. IV, fig. 19 *fk*).[1]

E nyulványok palissade-réteg alá hajlását egyébként már a mesophyllum x-irányú metszeteiben is észlelhetjük (Tab. III, fig. 15 x_3).

A *N. mixta* felső stereïdbeli s minden esetre a palissade alátámasztását czélzó kábelje jobbadán a rhizostereïdek «gyökérnyulványai»-ból telik ki, a mit az x-irányú metszet annyiban s eleve elárul, hogy a metszés túlnyomólag ezeket éri keresztben (Tab. III, fig. 13 fk_x—x). Mechanikai jelentőség és czélzat tekintetében a velük társuló palissade-alatti librosklereïdek száma csekély, többnyire csak egy, de ez az egy palissadealatti librosklereïd azután annyival vastagabb s a mikroskopi szemhatár átmérőjét messze meghaladó hosszúságban vonul végig a maga mereven horizontalis irányában s a palissaderéteg közelében (Tab. IV, fig. 19 *lsk*). E képlet mindenkép tetemes vastagsága k. m.-ben is feltünő lehet (Tab. III, fig. 14 x_2).

E librosklereïdek természetszerűleg kombinálódnak a pa-

[1] Math. és Természettud. Ért., XXXIV. (1916.) köt., 572. l.

lissade-álló rhizostereïdek rövidebb-hosszabb vonalon át horizontalisan hozzájuk simuló nyulványaikkal, amelyek együttes kábel-kötegét például egy kettős librosklereïd, ami szintén megeshetik, jelentékeny mechanikai massivummá növelheti, a palissade-alátámasztás félre nem ismerhető czélzatával, minthogy mindezek gyakran szorosan a palissade alatt húzódhatnak el (Tab. IV, fig. 19 fk_1). A palissade-beli alátámasztás czélzatát (tendentiáját) egyébaránt az oly lapított ✕-sklereïd is nyilvánvalóvá teszi, amely a maga egészében is észlelhető közvetlen a palissade rétege alatt s amely — alakilag — mintegy megismétlődése a palissade-álló ✕-stereïdeknek, csakhogy központi teste rövid és, miként az alsó kábelt alkotó librosklereïdeké (Tab. IV, fig. 20 *br*), rendszerint egy-egy brachysklereïdre vezethető vissza (Tab. IV, fig. 20 x_2, illet. skt_1).

Hasonló librosklereïdek, de már nagyobb számmal, teszik ki az alsó kábelt (Tab. IV, fig. 19 *ak*) úgy, hogy észre kell vennünk a szivacsparenchymának viszonylagosan is tekintélyes ama sávját, a mely a stereïdek eme felső s alsó kábelje közé esik (Tab. IV, fig. 19—20 *sp*). Mindez azonban nem akadályozhatja meg azt, hogy például a Tab. III, fig. 12-höz hasonló stereïd, azaz librosklereïd, át ne hatolhasson a «kábelek» szövevényein, aminek szembeötlő jelei az idézett 19—20. ábra rh_2-in is láthatók.

A mesophyllumbeli stereïdek különleges alakjai sorában első helyen említendők fel a palissade ama stereïdjei, amiket, rövidség okából, ✕ avagy ⌶ stereïdeknek is nevezhetünk. Ezek felső, vagyis a bőrrendszert támasztó nyulványai, viszonylagosan bármily hosszúak is, szorosan a palissade alatt elvonulókhoz képest átlag mindig rövidebbek (Tab. IV, fig. 20 skt_1).

Az e fajta stereïdek domináló volta tulajdonképpen a levél bőrszín-, illetőleg fonákfelületi «felületi metszetein» ötlik szembe (Tab. III, fig. 16—17). A két kép közül a bőrszint illető «mechanikailag» annyiban még érdekesebb jelenség, mert észre kell vennünk, hogy következetesen az oldalerek irányában nyúlt stereïdek viszont a (felületi képen lapított) bőrsejtek hosszanti tengelyét keresztezik, önként értetődőleg ezzel is emelve a szóban forgó stereïdek helyi mechanikai jelentőségét

(Tab. III, fig. 16, ahol is *a—b* jelzi az oldalér lefutási irányvonalát, amit *x*-irányvonal keresztez, a lapított bőrsejtek hosszanti tengelye menetében).

A librosklereïdek fonákfelőli felületi képe, a fekvőleges helyzetű ⌶ stereidek gyakoriságán kívül, mintegy kiegészítéskép igazolja azt, hogy ezek lefutási irányában — Tab. III, fig. 17 *a-b* — directivát szab az oldalerezet, a mi amellett szól, hogy az elsődleges ereket kitevő stélék s az általuk közrefogott mesophyllumbeli mezők között lefutó stereïdek között megvan a fejlődésmechanikai viszonosság (correlatio); amely, tekintve azt, hogy mily hegyes (17°) szög alatt erednek az oldalerek a főérből (costa media: Tab. III, fig. 11, 17°), végeredményben mechanikailag a levél főtengelye irányában, vagyis a levél hosszában érvényesül, ami gyakorlatilag akként fejezhető ki, hogy a levelet bajos volna széttépni.

A *N. mixta*-t illetőleg ugyancsak a különleges mechanikai elemek sorába tartoznak amaz ophiura-sklereïdek (= astrostereïdek), amelyek, általában gyér számmal, a két stereïdkábeltől közrefogott szivacsparenchymabeli sávban lépnek föl s amelyek minden irányban elhajlongó s viszonylagosan hosszú nyulványai mindenesetre hozzájárulnak ama szivacsparenchymabeli zóna minden irányú mechanikai szilárditásához, amelynek réteg szerinti vastagsága többszörösen felülmúlja a palissadeot (Tab. III, fig. 13 *p—sp, ostr*; Tab. IV, fig. 20 *p—sp, ostr*). A szivacsparenchyma ez astrostereïdjeinek bizonyára megvan a maguk taxonomiai jelentősége is.

Az egész mesophyllum, tekintélyes vastagságához mérten is, igen tömöttnek mondható; rétegzettsége, a szivacsparenchymában, határozottan a librosklereïdek irányát követi (Tab. IV, fig. 19—20 *sp*).

Raphidtömlőket a mesophyllum valamennyi rétegében észleltem (Tab. IV, fig. 20), még a fonák bőrrendszerében is (Tab. IV, fig. 22—23 *r—r*), csupán a levél színfelőli bőrrendszer-sejtjei között nem. Viszonylagosan, mint valamennyi Marcgraviaceában, még a palissade rétegében a leggyakoriabbak, ahol is azok hosszanti tengelye a palissade-sejtekének felel meg (Tab. III, fig. 12—13 $r_1—r_1$; Tab. IV, fig. 19—20 $r_1—r_1$). A szivacsparenchyma raphid-nyalábjai viszont, általában az oldalerek irányában, horizontalis fekvésűek (Tab. IV, fig. 19—20), de nem mindig. Megtörténik, hogy az oldalérrel parallel metszés a raphidnyalábot keresztben is érheti (Tab. III, fig. 18 r_3), ami annak a jele, hogy irány tekintetében való alkalmazkodásuk nem oly szigorú, mint teszem azt a légzőnyilásoké (Tab. IV, fig. 22).

A stomák orientálódását illetőleg a lemez keresztmetszetei (Tab. III, fig. 12—13 *s—s*; Tab. IV, fig. 21 *s—s*; Tab. III, fig. 18; Tab. IV, fig. 19—20 *s—s*), főleg azonban a fonák felőli bőrrendszer felületi képe nyujthatnak biztos tájékoztatást a tekintetben, hogy a légzőnyílás készülékeinek hosszanti tengelye a szivacsparenchyma librostereïdjeinek lefutási irányát követi (Tab. IV, fig. 22), következésképp bizonyos rendszerességgel alkalmazkodik az oldalerek irányvonalához. Ezt hangoztatnom kell, mint oly jelenséget, amit például a *N. Delpiniana*-nál éppenséggel sem tapasztalhatunk (Tab. II, fig. 6).

A légzőnyílások k. m.-i typusa (Tab. IV, fig. 21) lényegileg például a *N. Delpiniana*-éval azonos (Tab. I, fig. 4), legföljebb cuticularis léczeinek némi dudorodásaival eltérő (Tab. IV, fig. 21 *cl*), ami viszont a *N. mixta*-nak a *N. Delpiniana*-étól jóval erősebb (vastagabb) cuticulájával függ össze.

A mindkét oldali epidermis cuticulája, erőteljességénél fogva, csaknem anyagpazarlást jelent a szó mechanikai értelmében, minthogy — látni való volt a fenti fejtegetések során — a mesophyllum keménysejtjei minden elképzelhető módon gondoskodnak a lemez mechanikai érdekének a kielégítéséről. A cuticulának ez esetben kizárólagosan élettani szerepe van, nyilvánvalólag a transpiratiónak adott esetekben (hirtelen beálló szárazság, avagy hőemelkedés?) való csökkentése érdekében, minthogy viszont vízbőség esetében a nagyszámú légzőnyílás, amelyek cuticularis léczei mindenesetre közreműködhetnek a transpiratio szabályozásában, mindmegannyi szabad út a fölöslegesen felhalmozódó vízgőz eltávolodására.

Lényegileg nincs különbség a levélszín és -fonák bőrsejtjeinek felületi képei között; ezek mindannyian sokszögűek, egyenes- és vastagfalazatúak (Tab. III, fig. 16; Tab. IV, fig. 22—23). Legföljebb azt kell megemlítenem, hogy erősebb nagyitások alkalmazásával a zárósejtek oldalgörbülete mentén varrat (sutura)-szerű árokvonulat észlelhető, ami jellemző lehet a *N. mixta*-ra nézve (Tab. IV, fig. 23 *z—sr*). Az úgynevezett melléksejtek száma ez esetben is 4 és 5 között váltakozik (Tab IV, fig. 22—23). Elnyálkásodott bőrsejteket azonban a RADLKOFER-féle tuspróba alkalmazásával sem észleltem.

III.

Összefoglalás.

A *Norantea Delpiniana*-t és a *N. mixta*-t csakis az egyoldalú s ezúttal teljesen czéljavesztett alaktani megítélésen alapuló tudománytörténeti véletlenség hozta egymás mellé a *Flora Brasiliensis* enumeratiójában (l. c. p. 235) és éppenséggel nem a belső szerkezeti viszonyok egybevetéséből megállapítható vérségi kapcsolat.

A WITTMACK-tól megkülönböztetett Marcgraviastrum alnemzetség úgynevezett A. Pauciflorae csoportjában a szóban forgó két *Norantea* csakis az (általam) úgynevezett katalogizáló rendszertani felfogásnak felelhet meg, vagyis a meghatározások gyakorlati követelményeinek, de legkevésbbé sem a természetes fajfejlődési folyamatok logikájának, a mely teljesen kizárja azt, hogy a *N. mixta*-t nyomban követhesse a *N. Delpiniana.*

A sorrend elnagyoltan is rossz; mert — miként fentebb is hangoztattam — előbb említendő a *N. Delpiniana,* mint a *Noranteák* egyik primitiv, hogy úgy mondjam: szövettanilag teljesen redukált faja, és a vele phylogeniai kapcsolatba hozható fajok hosszú (és csaknem az összes eddig ismert fajok számát kimerítő) sorozata után következhetik el a *N. mixta,* mint a phylogeniailag legfejlettebb, úgynevezett *peduncularis*-csoport egyik törzsökös tagjának a helye az eddig ismert fajok lehetően egyfolytonosságú lánczolatában; a hol is szintén érvényesülnie kell a természetes rendszer amaz alaptételének, mely szerint a kezdetleges szervezetekből vezetjük le az összetettebbeket.

A *N. Delpiniana* pedig valamennyi Marcgraviacea között olyannyira kezdetleges, hogy levele szövetében csakis a mesophyllum raphidnyalábjainak dispositiójában, másfelől a légzőnyílás készülékeinek k. m.-i képében nyilatkozik meg a többi Marcgraviaceával való közös jelleg, de amely a növények nagy világában éppenséggel nem kizárólagos jelentőségű.

Eddigi vizsgálódásaim fonalán a Noranteák mintegy hét csoportját különböztetem meg.[1]

Ez a csoportosítás azonban szövettani alapon élettanilag is levonható következtetések kérlelhetetlen szigorával borítja föl mindama *Norantea*-beli «morphologiai csoportok» phylogeniai lehetőségét, amiket WITTMACK (Subg. I. Marcgraviastrum), illetőleg DELPINO (Subg. II, Pseudostachyum; III. Saccophyllum; IV. Cochliophyllum) állított föl (Flora Brasil. l. c. p. 235).

Az általam megkülönböztetett *Norantea*-csoportok elsejében foglalvák össze a merőben sklereïd-nélküli Noranteák, többé-kevésbbé redukált mesophyllummal, de általában annyival feltünőbben kifejlődött epidermis mucigera-val. Ilyen a *N. anomala* H. B. K., a *N. Goyazensis* CAMBESS., *N. Paraënsis* MART., és az újabban megkülönböztetett *N. microscypha* GILG (= N. anomala WITTMACK sec. specim. SPRUCE u. 6020 in Fl. Brasil. p. 240 — non H. B. K.); ezek közül a *N. anomala* H. B. K. például a «Fl. Brasil.» megkülönböztette alnemzetségi csoportok másodikába, a *N. Goyazensis* és *Paraënsis* meg éppen a harmadikba tartoznék, holott mindannyian primitiv *Noranteák* és ezek között is, teljesen redukált szivacsparenchymájával s annyival öblösebb nyálkás bőrsejtjeivel, a legkezdetlegesebb a *N. Delpiniana!*

Fejlődésmechanikai tekintetben is feltünő lehet mindezek levelében a mesophyllumbeli sklereïdek teljes hiánya, jóllehet viszont olyannyira jellemző képletek ezek a Marcgraviaceák körében. Hiányukat szinte kimagyarázhatatlanná teszi a leveleknek általában nagy mérete, amely például a *N. Goyazensis* esetében egyenesen tekintélyes, a *N. Delpiniá*hoz képest szinte óriás (15 cm h. 6·6 cm sz.).[2]

[1] Math. és Természettud. Ért. XXXIV. (1916.) köt. 813. l.

[2] GARDNER 3093. sz. példánya után (in Herb. Palat. Vindobon. !). A Fl. Brasil. (l. c p. 244) a levelek hosszát 9—13 cm, szélességét 4—7·5 cm-re teszi.

Mindebből az következik, hogy a levelek nagyobb dimensiojával nem okvetlen jár együtt a mesophyllumbeli sklereïdek fellépése és hogy a mesophyllum sklereïdjei viszont oly localis mechanikai elemek gyanánt tekintendők, amelyek hatalmas fegyverek a levél egyéni (individualis) életében és amelyek erőssége talán a viszonylagosan kisebb lemezekben érvényesül még a leghathatósabban, phylogenetice pedig a legmagasabb fokon.

Felvilágosító például Gilg ecuadori *Norantea gigantophylla*-ját említem meg, amely az összes eddig ismert *Noranteák* sorában a legnagyobb (valóban óriás) levelű (18—21 cm h. és 9—11·5 cm sz.)[1] Leírója nem is ok nélkül mondja róla, hogy «...semper facile foliis insignibus cognosci potest» (l. c. p. 14). És én, a részletekbe hatoló összehasonlító alkattani vizsgálataim révén, ezt a *Noranteát* a Noranteák csakis amaz V. (úgynevezett rhizo-astrosklereïdes) csoportjába helyezhetem el, amely magába zárja a hozzája képest sokkal kisebb levelű, de nagyjában hasonló histiologiai jellemű *N. magnifica* Gilg-t, a *N. macrostoma* Gilg-t s a *N. sandiensis* Gilg-t; ez utóbbi levelének hosszúsága 7—10 cm, szélessége 2·5—4 cm között váltakozik, tehát inkább az úgynevezett kislevelű *Noranteák* közül való.

Mind e dimensiobeli szélsőségek mit sem változtatnak az említettem *Norantea*-fajok csoportjának származástani jellegén, és bár a viszonylagosan óriáslevelű *N. gigantophylla* lemeze «rigide coriaceus», mesophyllumában hatalmasan fejlett sklereïdek, sőt palissadejában a raphidnyalábok mellett styloïdkötegek is igen jellemzőleg lépnek föl: a *N. gigantophylla* s a vele phylogenetice társuló fajok csoportja mégsem áll a fajfejlődéstani fejlettség csúcspontján!

A *N. gigantophylla* csoportját követőleg ugyanis megkülönböztetek egy oly csoportot, amelynek tagjaiban a palissade rhizosklereïdjei és a szivacsparenchyma astrosklereïdjei szivacsparenchymabeli librosklereïdekkel kombinálódnak, amire ékes példa Gilg *Norantea costaricensis*-e,

---

[1] Engler: Botan. Jahrb. Beibl. Bd. XXXIV (1904). Nr. 78. p. 14.

ám a melyről teljesen téves GILG amaz állítása, hogy az a *N. peduncularis* legközelebbi rokonfaja volna.[1]

Helyesebben WEBERBAUER és GILG remekbe illő perui *N. Pardoana*[2]-ja az, a mely, legalább is a levelek összehasonlító szövettani adatai nyomán, a legközelebb áll hozzá; szivacs-parenchymájának astrosklereïdjei astrostereïdekké (ophiura-sklereïdek) való átformálódásra hajlamosak. Ez mindenesetre, a palissade-álló rhizosklereïdek stereïdszerűen megnyúlt «gyökérnyujtványainál» fogva is, oly lánczszem, amely a *Noranteák* e VI. csoportját megfelelő átmenettel fűzi össze a *Noranteák* ama legfejlettebb csoportjával, a melyet én röviden VII. librosklereïdes *Norantea*- avagy *peduncularis*-csoportnak nevezek el, tagjaként ismerve a *N. Uleana* PILGER-t, *N. macroscypha* GILG-t, *N. Sodiroi* GILG-t, *N. albido-rosea* GILG-t s a *N. peduncularis* POEPP.-t.

E csoportban is nagyban változhatik a levelek mérete s egy korábbi akadémiai értekezésemben[3] részletesebben tárgyalt *N. macroscypha*-n kívül (12—16 cm h. és 5—9 cm sz.)[4] tekintélyes nagyságú a *N. Sodiroi* levele is (12—15 cm h. és 5—6·5 cm sz.),[5] viszont a legkisebbek közül való a *N. peduncularis*-é (7—8 cm h. és 3—3·5 cm sz.).[6]

És ha én mind a mellett «*peduncularis*-csoportról» beszélek, ezt csupán azért teszem, mert POEPPIG *N. peduncularis*-a régtől fogva ismert *Norantea*,[7] amelynek a *N. adamantium* CAMB.-mal való kapcsolatba hozása[8] teljesen czéljavesztett dolog. Ez utóbbi t. i. — általam a II. sklereïdfészkes *Noranteák* csoportjába helyezetten — phylogeniailag csaknem kezdetleges állapotú *Norantea*, bár a *N. Delpiniana*-nál némileg fejlettebb, de még mindig nagyon is messze áll a *peduncularis*-csoport

[1] ENGLER: Jahrb. Beibl. Bd. XXV (1898), p. 31.
[2] ENGLER: Jahrb. Bd. XLII (1909), p. 125.
[3] Math. és Természettud. Ért. XXXIV. (1916.) köt. 568. és köv. ll.
[4] ENGLER: Jahrb. 1898. p. 31.
[5] ENGLER: Jahrb. 1904. p. 14.
[6] Flor. Brasil. l. c. p. 238.
[7] Flor. Brasil. l. c. p. 238.
[8] WITTMACK in Fl. Brasil. l. c.

bármely tagjától, végső eredményben a *Norantea mixta*-tól is, amely — szivacsparenchymájában itt-ott észlelhető ophiura-sejtjeinél fogva — a *N. Pardoana* folytatólagos lánczszemeként immár libroskléreïdes *Norantea*, minthogy az inkább phylogeniai jelentőségű (s igen szórványos) astrostereïdjein kívül a mesophyllum mechanikai elemei mind háncsrostszerűen (liber!) nyúlt keménysejtek, azaz stereïdek.[1]

E rhizostereïdek és librosklereïdek[2] az uralkodó elemek a palissade, illetőleg a szivacsparenchyma bőségesen fejlett rétegében, számban és dimensióban oly fokozaton, a mely az összes eddig ismeretes *Noranteák* sorában a legszélsőségesebbek közül való.

---

[1] A sklereïd és stereïd fogalmának elhatárolásában Tschirch-nek, a legkitünőbb növényanatomusok egyikének a Pringsheim: Jahrb. für wissensch. Botanik XVI. (1885.) köt. 308. l.-ján közölt meghatározásához alkalmazkodom, a továbbiakban némileg nagyobb következetességgel, mert például Jönsson ophiura-sejtjeit, illetőleg Tschirch astrosklereïdjeit, amennyiben stereïd-(háncsrost)-szerűen nyúlt karjaik többé-kevésbbé hajlongóan hosszúak, esetleg egymásba is fonódók: astrostereïdeknek (ophiura-sejtek s. str.) nevezem (Tab. III, fig. 13 *ostr.*), szemben amaz astrosklereïdekkel (s. str.), amelyek nyúlványai rövidek, tömzsökösek, nem is igen hajlongók; ez utóbbiak központi testének brachysklereïdszerű alkata annyival inkább feltűnő (Richter A.: Adatok a Marcgraviaceae stb. Természetr. Füz. XXII. 1899. köt. V. tábla 21. ábra).

[2] A fentiekből következtetve kell különbséget tennem a rhizosklereïdek és rhizostereïdek között is, értve az előbbiek alatt oly palissade-álló sklereïdeket, amelyek «gyökérnyulványai» rövidek, ellenben stereïd- (háncsrost-)szerűen nyúltak a rhizostereïdekéi.

Egyébként a szivacsparenchyma sajátos kemény elemei jelzésére továbbra is élek a librosklereïd fogalmával, a fentiek szerint talán következetesebb «librostereïd» helyett, mert ez utóbbi jelzésben a fogalom két alkotója (liber + stereïd) voltaképen azonos értelmű. A librosklereïd kifejezés azonban alkalmas arra, hogy minden fogalomzavar elkerülése okából jól megkülönböztethessük a «szivacsparenchyma saját háncsrostszerű kemény (= sklereïd)-sejtjeit» a stélék háncsrost (liber s. str.)-sejtjeitől, mely utóbbiakkal amazok mechanikailag azonos rendeltetésű elemek.

Szolgáljon mindez, az előző [1] alatti megjegyzéssel együtt, ama magyarázatok kiegészítése gyanánt, amelyek az általam bevezetett mesterszók czimén a Math. és Természettud. Értesitő XXXIV. (1916.) köt. 569—71. lapján a [2], illetőleg az [1] alatti jegyzetben olvashatók.

Azt is mondhatnám képlegesen, hogy a *Noranteák* fajfejlődési menetében ellentétesen szélsőséges polusok képviselői a *N. Delpiniana* és a *N. mixta*, mivel a *N. Delpiniana* a kezdetleges Noranteák között is a legkezdetlegesebb, a *N. mixta* viszont a fajfejlődés létráján a kulmináló *Noranteák* egyike!

Kettőjük között a phylogeniai «szoros» kapcsolat még erőltetten sem lehetséges, elannyira, hogy leveleik legapróbb töredékében is a nagyítóban rögtön felismerhető a nagy különbség, a melynek taxonomiai jelentősége vitán felül áll.

A physiologus szeme pedig könnyen leolvashatja a két *Norantea*-ról azt, hogy létért való küzdelmében a jóval gyengébbben szervezett *Norantea Delpiniana* fennmaradását mily nagy mértékben kötheti meg a termőhely mineműsége, vagyis az, amit a Flor. Brasil. id. h. «in paludosis ad ripas flumini Parahibuna»-ként jelöl meg (l. c. p. 237).

Az oly feltünően öblös sejtekből összetett s epidermis mucigera-tól közrefogott mesophylluma, főleg szivacsparenchymájában, rendkívül szegény, s ez a vékonyrétegű szivacsparenchyma is lépten-nyomon olyannyira feltünő légüregektől meg-megszakgatott, hogy a szöveti szerkezet szinte diktálja a levél könnyen megeshető elszáradásának a veszedelmét. Ezzel szemben a termőhely «mocsaras» jellege folyók partjain, másfelől a nyálkasejtekben bőséges epidermis az egyedüli védelem; egyszersmind kölcsönös «conditio sine qua non» a *N. Delpiniana* életében (Tab. I, fig. 2—4; Tab. II, fig. 6—7).

A *N. mixta*-t ellenben a bogotai Andesek 1000 m-es magaslatairól ismerjük, hol «létért való küzdelmében» élete sorsát aligha könnyítheti meg «mocsár», kevésbbé folyóviz; szöveti szerkezete, vagyis sklereïdekben, illetőleg stereïdszerűen kialakult keménysejtekben gazdag s a *N. Delpiniana*-énál sokkalta vaskosabb mesophylluma (Tab. IV, fig. 19), nemkülönben az apróbb sejtű, az epid. mucigera-t kizáró bőrrendszereinek zártabb jellege (Tab. III, fig. 16), valamint a cuticulák vastagsága mind arra vall (Tab. III, fig. 14—15 *c—c*).

Sajátszerű véletlen, hogy e *Norantea* «*mixta*» jellege kifejezésre jut a «*peduncularis*-csoport» e jellegzetes tagjának levélszövetében is, amennyiben a szivacsparenchyma felső és alsó kábelt alkotó librosklereïdjei közepette, tehát «k e v e r e d ő e l e m e k k é n t», astrostereïdek is észlelhetők (Tab. III, fig. 13 $fk_x - ak_x - ostr$; Tab. IV. fig. 20. *fk—ak—ostr*).

Ezek azonban a *N. mixta*-ban immár elmosódó, bár phylogenetice igen nevezetes elemek, amelyek letagadhatatlan kapcsolatot nyujtanak a *N. Pardoana*-hoz, ahol is viszont ezek a domináló elemek a szivacsparenchymában s gyérebb számuknál fogva alárendeltebb jellegűek a librosklereïdek.

A mesophyllumbeli keménysejtek correlatiójának további kifejtése az összes isomorphus Marcgraviaceákat felölelő nagyobb munkálatom tárgya és e helyt csupán arra a sajátos jelenségre utalok, hogy amiként a *N. mixta* classikus példa az eredetileg lapos lemezű bracteáknak fokozatos átalakulására nectariumos bracteákká;[1] az egyébként szintoly jellemző mesophyllumbeli keménysejtek sajátszerű előfordulása a *N. mixta*-ban ugyancsak a phylogenetikus átalakulások egyik nevezetes példájává avatja a *N. mixta*-t.

A *N. Delpiniana* és a *N. mixta* mindezekben adott részletesebb méltatása egyszersmind előre jelzi, hogy a DELPINO-féle «A r b o r g e n e a l o g i c a M a r c g r a v i a c e a r u m»,[2] csupán külalaktani vonatkozások alapján, épp oly tarthatatlan, mint bármely más növénycsoport phylogeniai boncolgatása az összehasonlító alkattani vizsgálatokból helyesen levonható következtetések elhanyagolásával.

E tétel kifejtésével csak megerősíthettem azt a tant, amelynek kereteit előző Marcgraviacea-értekezéseimben vázoltam.[3]

A mindezekből levonható tanulságok mérlegelésével alig képzelhető el, hogy akadjon komolyan dolgozó s gondolkodó természetbuvár, aki a fentiekben részletezett «vizsgálati módszer» kizárásával továbbra is fenntarthatónak véli az egyoldalú alaktani buvárlatok eredményeinek állítólagosan «döntő értékét» s z á r m a z á s t a n i k a p c s o l a t o k megállapításánál.

Pozsony, 1916. márczius 13.

---

[1] TRIANA et PLANCHON, Ann. Sc. Nat. T. XVII. (1862) p. 375. TRIANA et PLANCHON, Mém. de la Soc. d' Hist. Natur. l. c. WITTMACK L., Kosmos l. c.

[2] DELPINO, F., Rivista Monografica della Famiglia delle Marcgraviaceae. Nuovo Giorn. Botan. Ital. Val. I. (1869) p. 268.

[3] Math. és Természettud. Értesitő, XXXIV. (1916.) köt., 558. l.

IV.

Ábramagyarázat.

c cuticula
e_1 felső bőr (epidermis) bőrrendszer
e_2 alsó «
em elnyálkásodott bőr (epidermis mucigera)
n nyálkasejt
s légzőnyilás készüléke (stoma)
  z zárósejt
    sr zárósejt varrata (sutura)
    cl cuticularis lécz átszellőztető-rendszer
    lr légrés
    l légudvar
  m stoma «melléksejtjei»
i sejtközi légüreg
rt raphid-tömlő
  r raphidok
vt váladéktartó
gl levél fonákbeli mirigye (glandula hypophylla)
p palissade, vagyis a levélhús oszlopos rétege mesophyllum
sp szivacsparenchyma (levél húsa)
ph parenchyma-hüvely
hr hadroma (hydroma) stele = *st*
lp leptoma (plastoma)
bt stelebeli háncs-sarló
rst rhizostereïd
  skt rhizostereïd bőrtámasztó talpi nyúlványai
    x_1—x_1 rhizostereïd bőrtámasztó talpi nyúlványainak k. m.-ei
  rc rhizostereïd pálcza-(központi) teste
  rh « gyökérnyúlványa
sstr stalactostereïd
lsk librosklereïd
  fk librosklereïdbeli felső kábel, fk_x^* = k. m.-ben
  ak « alsó « ak_x = «
   br = brachysklereïdbeli központi test
ostr astrostereïd = ophiurasklereïd = ophiuraszerű csillagos keménysejtek
  k. m. = kereszt metszet.
  h. = hosszú.
  sz. = széles.
  Z = Zeiss-Mikroskop, Stat. I.

I. tábla.

Norantea Delpiniana WITTM.

Fig. 1. Levél t. n. a fonáka felől, GARDNER 4454. sz. (origin.) példányáról (Herb. Kew.).
« 2. A levél k. m.-i képe, a metszet fig, 1. *x—x* irányában. — Z. Oc. 2. Obj. C.
« 3. A levél felső bőrszöveti rendszere (epidermis mucigera) s palissaderétege. — Z. Oc. 2. Obj. DD.
« 4. A levél alsó bőrszöveti rendszere, nagy nyálkasejtekkel és légzőnyílásokkal. — Z. Oc. 4. Obj. DD.
« 5. Fonák felőlï bőrrészlet, stoma-párral. — Z. Oc. 4. Obj. C.

II. tábla.

Fig. 6. A levél fonákfelőli bőrrendszere felülről tekintve, szórt helyzetű légzőnyílásokkal. — Z. Oc. 4. Obj. C.
« 7. Ugyanennek levélszín felőli bőrrendszere felülről nézve. — Z Oc. 4. Obj. C.
« 8. Levél-töredék RADLKOFER-féle úgynevezett tus-próbája, kibuggyanó nyálkagömbbel = *cl.* — Z. Oc. 4. Obj. AA.
« 9. A levél egyik oldalerének k. m.-e, leptomabeli raphid-nyalábbal = *r.* — Z. Orth. Oc. 6. Obj. C.
« 10. A levél Tab. I, fig. 1. *i—i* irányú k. m.-i részlete, palissadealatti nagy raphid-tömlővel. — Z. Oc. 2. Obj. DD.

III. tábla.

Norantea mixta TRIANA et PLANCHON.

Fig. 11. Levél t. n. a fonáka felől, MACLEAN eredeti (Kew-herbariumbeli) példányáról.
« 12. Részlet a levél fig. 11 *x—x*-irányú k. m.-ából, az egész mesophyllumot átfogó rhizostereïddel a stele közelében. — Z. Oc. 3. Obj. C.
« 13. A levél k. m.-e fig. 11 *x—x*-irányában. — Z. Oc. 2. Obj. C. az Obj.-eket magába foglaló «revolver»-rel megkurtított tub.-h.-szal.
« 14. A levél fig. 11 *x—x*-irányú k. m.-i részlete úgynevezett stalactostereïdekkel = *sstr.* — Z. Oc. 2. Obj. DD.
« 15. K. m.-i részlet a levél fig. 11 *x—x*-irányában, a palissade alá hajló «gyökérnyúlványok» (x_3) részleteivel s a bőrtámasztó karok k. m.-eivel. — Z. Oc. 4. Obj. C.

« 16. A levélszín bőre felülről tekintve. — Z. Oc. 4. Obj. C.

« 17. Librosklereïdek a levél fonákfelőli felületi metszetében. — a—b megfelel az elsődleges (oldal) erek fig. 11 i—i-irányának. — Z. Oc. 2 Obj. C.

« 18. Részlet a levél fig. 11 i—i-irányú k. m.-éből, oly raphidtömlővel, amely ugyancsak keresztben metsződött. — Z. Oc. 4. Obj. C.

IV. tábla.

Fig. 19. A levél k. m.-i képe a 11. ábra i—i-irányában, vagyis az elsődleges oldalérrel parallel, teljes rhizostereïdekkel és librosklereïdekkel. — Z. norm. tubus-h. Oc. 2. Obj. C.

« 20. Ugyanaz, palissade-álló és palissade-támasztó $\asymp$ stereïdekkel, szivacsparenchymájában «vegyesen» (mixta) astro- és librosklereïdekkel. — Z. Oc. 2. Obj. C., az Obj.-eket magába foglaló «revolver»-rel megkurtított tubus-h.-szal.

« 21. Légzőnyílás készülékének k. m.-e a levél fig. 11 x—x-irányában. — Z. Oc. 6. Obj. C.

« 22. A levél fonákfelőli bőre felülről tekintve, raphidokat tartalmazó bőrsejttel s a szivacsparenchymából előtűnő librosklereïdekkel. — Z. Oc. 4. Obj. C.

« 23. Ugyanennek kisebb részlete a légzőnyílás készülékének finomabb szerkezeti viszonyainak feltüntetése okából, erősebb nagyítással. — Z. Orth. Oc. 6. Obj. C.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből)

A TOEPLITZ-FÉLE FORMÁKRÓL.

SZEGŐ GÁBOR-tól.

E dolgozat tárgya bizonyos speciális HERMITE-féle formák vizsgálata, melyek azzal jellemezhetők, hogy matrixuk

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ . & . & . & \dots & . \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & \dots & c_0 \end{pmatrix} \qquad (T)$$

alakú, hol

$$c_{-n} = \bar{c}_n,$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Én arra a speciális esetre fogok szorítkozni, mikor e matrix elemei egy megadott (L)[1] integrabilis $f(\theta)$ függvény FOURIER-féle együtthatóiból egyszerű módon származtathatók le, a mikor is e formákat TOEPLITZ-féle formáknak akarom nevezni. Bizonyos alább idézendő vizsgálatok megmutatták, hogy e formák a legszorosabb összefüggésben állanak amaz $f(\theta)$ függvény értékkészletével, melyből leszármaztattak. Czélom a következőkben ez összefüggést tovább vizsgálni, illetőleg mélyíteni, mi czélból e formák sajátértékeit veszem szemügyre és ezeknek eloszlását vizsgálom. Fejtegetéseim egy tétel köré csoportosulnak, mely e sajátértékek eloszlására nézve elég kimerítő felvilágosítást nyújt. Tulajdonképen az összes, alább kimondott tételek ez alaptétel általánosításai vagy speciális esetei.

A (T) alakú matrixokhoz tartozó HERMITE-féle formák önmagukban is (tehát eltekintve egy kiindulópontul szolgáló $f(\theta)$ függvénynyel való összefüggésüktől) igen figyelemreméltók,

---

[1] LEBESGUE-féle értelemben.

ettől az általánosabb szemponttól azonban a következőkben eltekintek.

TARTALOM.

1. §. Bevezetés.

1. Legyen $f(\theta)$ egy, a $0 \leqq \theta < 2\pi$ tartományban értelmezett mérhető és korlátos, tehát (L) integrábilis függvény; alsó és felső határa m és M,[1] formálisan képezett FOURIER-féle sora

$$f(\theta) \sim a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{1}$$

Bevezetem a következő jelöléseket:

$$\begin{gathered} a_n \pm i b_n = c_{\pm n}; \\ (n=0, 1, 2, \dots; \ b_0 = 0), \\ e^{i\theta} = z, \end{gathered} \tag{2}$$

melyek segítségével (1) így is irható:

$$f(\theta) \sim c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(c_n z^{-n} + c_{-n} z^n) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \tag{1'}$$

Képezem O. TOEPLITZ-czel[2] a következő HERMITE-féle formákat:

[1] Ez úgy értendő, hogy M a legkisebb oly szám, hogy ama θ helyek halmaza, melyeken $f(\theta) > M$, 0 méretű; hasonló értendő m alatt. Egyszerűség kedveért megállapodhatunk abban, hogy e 0 méretű halmazon már eleve úgy módosítottuk a függvény definitióját, hogy mindenütt $m \leqq f(\theta) \leqq M$.

[2] O. TOEPLITZ: a) *Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. (1907), S. 110—116]; b) *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Ibid.

$$
\begin{aligned}
K_n(x_0, x_1, \dots x_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0+x_1z+\cdots+x_nz^n|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta = \\
&= \sum_{p,\,q=0,\,1,\dots n} k_{pq}x_p\overline{x}_q\,; \\
&(n=0,\ 1,\ 2,\dots),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

hol

$$k_{pq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,e^{i(p-q)\theta}\,d\theta = c_{p-q},$$

úgy hogy

$$
\begin{gathered}
K_n(x_0, x_1, \dots x_n) = \sum_{p,\,q=0,\,1,\dots n} c_{p-q}x_p\overline{x}_q, \\
(n=0,\ 1,\ 2,\dots).
\end{gathered}
\tag{3'}
$$

A (3) formákat az $f(\theta)$ függvényhez tartozó TOEPLITZ-féle formáknak akarom nevezni. (3)-ból, mivel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x_0+x_1z+\cdots+x_nz^n|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta = |x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2,$$

$$m \leqq K_n(x_0, x_1, \dots x_n) \leqq M, \tag{4}$$

hacsak a változók az

$$|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2 = 1$$

mellékfeltételnek vannak alávetve. És pedig az egyenlőség jele (4)-ben akkor és csak akkor érvényes, ha (egy 0-méretű halmaztól eltekintve) $f(\theta) = \text{const}$.

Mint jól ismeretes, a (3) forma egy orthogonális linearis transformatió segítségével ilyen alakra hozható:

$$K_n(x_0, x_1, \dots x_n) = \lambda_0^{(n)}|\xi_0^{(n)}|^2+\lambda_1^{(n)}|\xi_1^{(n)}|^2+\cdots+\lambda_n^{(n)}|\xi_n^{(n)}|^2, \tag{3''}$$

hol

$$
\begin{gathered}
|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2 = |\xi_0^{(n)}|^2+|\xi_1^{(n)}|^2+\cdots+|\xi_n^{(n)}|^2 \\
(n=0,\ 1,\ 2,\dots).
\end{gathered}
$$

(1910), S. 489—506]; c) *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.* I. Teil: *Theorie der L-Formen* [Math. Ann. 70. (1910), S. 351—376]; d. *Über die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32 (2. Semester 1911), S. 191—192.].

A

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots \lambda_n^{(n)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

értékeket az $f(\theta)$ függvényhez tartozó «sajátérték»-eknek, összeségüket pedig az $f(\theta)$ függvényhez tartozó «spektrum»-nak akarom nevezni. Ha (5) legkisebb és legnagyobb eleme $\lambda_\alpha^{(n)}$ illetőleg $\lambda_\omega^{(n)}$, akkor (3″)-ből világos, hogy

$$\lambda_\alpha^{(n)} = \text{Min. } K_n(x_0, x_1, \ldots x_n),$$
$$\lambda_\omega^{(n)} = \text{Max. } K_n(x_0, x_1, \ldots x_n),$$

mialatt

$$|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1.$$

Tehát (4)-re való tekintettel

$$m \leqq \lambda_j^{(n)} \leqq M, \qquad (j=0, 1, \ldots n;\ n=0, 1, 2, \ldots); \tag{6}$$

hol az egyenlőség jele szintén akkor és csak akkor érvényes, ha (egy 0 méretű halmaztól eltekintve) $f(\theta)=\text{const.}$

Bevezetem most a következő jelölést:

$$D_n(f) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1+ib_1 & a_2+ib_2 & \ldots & a_n+ib_n \\ a_1-ib_1 & a_0 & a_1+ib_1 & \ldots & a_{n-1}+ib_{n-1} \\ a_2-ib_2 & a_1-ib_1 & a_0 & \ldots & a_{n-2}+ib_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_n-ib_n & a_{n-1}-ib_{n-1} & a_{n-2}-ib_{n-2} & \ldots & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \ldots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & \ldots & c_0 \end{vmatrix}; \tag{7}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots),$$

melynek felhasználásával idézhetem a quadratos formák elméletének ama tételét, hogy a sajátértékek gyökei a

$$D_n(f-\lambda)=\begin{vmatrix} c_0-\lambda & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0-\lambda & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0-\lambda & \dots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & \dots & c_0-\lambda \end{vmatrix}=0; \qquad (8)$$
$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

charakteristikus egyenleteknek. A (7) determinansokat, melyek nyilván a (3) formákhoz tartoznak, az $f(\theta)$ függvényhez tartozó TOEPLITZ-féle determinansoknak fogom nevezni.[1]

A sajátértékekről egyelőre nem tudok többet, mint a menynyit (6) mond ki. Czélom a következőkben egy tétel leszármaztatása, mely ez értékek eloszlására, tehát a spektrum tulajdonságaira vonatkozólag meglehetősen kimeritő felvilágositást nyújt. E tételt egyelőre ebben a kevésbbé általános formában akarom kimondani.

A) Legyen $f(\theta)$ tetszésszerinti trigonometrikus polynom, minimuma és maximuma m illetőleg M, sajátértékei

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots \lambda_n^{(n)};$$
$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Legyen továbbá $F(\lambda)$ egy, az $m \leqq \lambda \leqq M$ intervallumban értelmezett folytonos függvény. Akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)})+F(\lambda_1^{(n)})+\dots+F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \qquad (9)$$

létezik és

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta.$$

[1] E determinánsok érdekes tulajdonságaira vonatkozólag l. C. CARATHÉODORY: *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32. (2. Semester 1911). S. 193—217]; C. CARATHÉODORY und L. FEJÉR: *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz* [Ibid. 32 (2. Semester 1911), S. 218—239]. Továbbá G. SZEGŐ, *Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion* [Math. Ann. 76 (1915), S. 490—503].

E tételre a 2. és 3. §-ban két bizonyítást fogok közölni. A 4. §. a TOEPLITZ-féle determinánsok egy-két tulajdonságával foglalkozik, melyek alapján az 5. §-ban bizonyos általánosítások következnek. A 6. §. néhány egyszerű és részben ismeretes megjegyzése után a 7. §-ban egy speciális esetet tárgyalok, melyben többek között a sajátértékek közvetetlenűl kiszámíthatók s az *A)* tétel ily módon igazolható.

2. §. I. bizonyítás.

2. Idézem O. TOEPLITZ következő tételét:[1]

Ha $f(\theta)$ tetszésszerinti trigonometrikus polynom és p_n jelenti a

$$\lambda_0^{(n)},\quad \lambda_1^{(n)},\ldots\ \lambda_n^{(n)}$$

sorozat nem-negativ tagjainak számát ($n=0,\ 1,\ 2,\ldots$), *akkor*

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n+1} \quad \text{létezik és} \quad = \frac{p}{2\pi},$$

hol p a $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ intervallum amaz alintervallumainak összes hossza, melyekben $f(\theta) \geqq 0$.

E tétel rögtön általánosítható következőképen:

Legyen a tetszésszerinti valós állandó és r_n jelentse a

$$\lambda_0^{(n)},\quad \lambda_1^{(n)},\ldots\ \lambda_n^{(n)}$$

sorozat ama tagjainak számát, melyekre nézve $\lambda_j^{(n)} \geqq a$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ldots$), akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{n+1} \quad \text{létezik és} = \frac{r}{2\pi},$$

hol r jelenti a $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ intervallum amaz alintervallumainak összes hosszát, melyekben $f(\theta) \geqq a$.

Irjuk ugyanis

$$^{*}f(\theta) = f(\theta) - a;$$

és jelöljük e függvény sajátértékeit így: $^{*}\lambda_j^{(n)}$ ($j=0,\ 1,\ldots\ n$; $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$); akkor világos, hogy

[1] O. TOEPLITZ: i. h. *c)*.

$$^{*}\lambda_j^{(n)} = \lambda_j^{(n)} - a,$$

miből az általánosítás tüstént következik.

Ezek után világos, hogy ha $k(\lambda)$ függvény így van definiálva:

$$k(\lambda) = \begin{matrix} 0, \\ 1, \end{matrix} \quad \text{mikor} \quad \begin{matrix} \lambda < 0, \\ \lambda \geqq 0, \end{matrix}$$

akkor e tételek nem mondanak ki mást, mint *A)* tétel érvényességét arra az esetre, mikor $F(\lambda) = k(\lambda)$, illetőleg $k(\lambda - a)$. Ebből következik, hogy *A)* tétel igaz akkor is, ha

$$F(\lambda) = \beta_1 k(\lambda - a_1) + \cdots + \beta_m k(\lambda - a_m), \tag{10}$$

hol $a_1, \ldots, \beta_1, \ldots$ tetszésszerinti állandók. De a (10) alakú függvények összesége megegyezik az úgynevezett «intervallumonként constans» függvények összeségével s így az *A)* tétel ezekre is igaz.

Legyen most $F(\lambda)$ tetszésszerinti, a $m \leqq \lambda \leqq M$ intervallumban értelmezett folytonos függvény. A folytonosság definitiójából következik, hogy ha ε tetszésszerinti positiv szám, létezik oly (10) alakú $F^{*}(\lambda)$, hogy egyenletesen

$$|F(\lambda) - F^{*}(\lambda)| \leqq \varepsilon;$$
$$(m \leqq \lambda \leqq M).$$

Tehát minden n-re nézve

$$\left| \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \cdots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} - \frac{F^{*}(\lambda_0^{(n)}) + F^{*}(\lambda_1^{(n)}) + \cdots + F^{*}(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \right| \leqq \varepsilon;$$

és így

$$\left| \limsup_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \cdots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^{*}(f(\theta))\, d\theta \right| \leqq \varepsilon,$$

melyből

$$\left| \limsup_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \cdots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\theta))\, d\theta \right| \leqq 2\varepsilon.$$

Azonban hasonló fejtegetés érvényes a lim inf-ra nézve és ε tetszésszerinti kicsiny, úgy hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)})+F(\lambda_1^{(n)})+\cdots+F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \text{ létezik és } = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(f(\theta)\big)\,d\theta.$$

Ezzel *A)* bizonyítva van.[1]

3. §. II. bizonyítás.

3. Dolgozatomban[2] egy teljesen elementáris alapokon nyugvó bizonyítást vázoltam a következő tétel számára:

Ha $f(\theta)$ positiv trigonometrikus polynom, akkor a (7) *jelölés felhasználásával*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{\lambda_0^{(n)}\lambda_1^{(n)}\ldots\lambda_n^{(n)}} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\log f(\theta)\,d\theta}. \tag{11}$$

E tétel ilyen formában is kimondható:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log\lambda_0^{(n)}+\log\lambda_1^{(n)}+\cdots+\log\lambda_n^{(n)}}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta;$$

és mint ilyen, *A)* tételnek ama speciális esete, midőn $f(\theta)$ positiv és $F(\lambda)=\log\lambda$. Ebből a speciális esetből azonban a fenti általános tétel egyszerűen leszármaztatható következőképen.

Legyen $m \leqq f(\theta) \leqq M$ és $\operatorname{Max}(|m|, |M|)=\sigma$, úgy hogy $|f(\theta)| \leqq \sigma$. Ha a positiv állandó, melyre nézve $a<\frac{1}{\sigma}$, akkor $1+af(\theta)$ positiv trigonometrikus polynom lesz és így

$$\begin{aligned}\lim_{n=\infty} &\frac{\log(1+a\lambda_0^{(n)})+\log(1+a\lambda_1^{(n)})+\cdots+\log(1+a\lambda_n^{(n)})}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\big(1+af(\theta)\big)\,d\theta.\end{aligned} \tag{12}$$

---

[1] Szóról-szóra ugyanígy lehet eljárni, ha $F(\lambda)$-nak elsőfajú szakadásai vannak. Egyelőre azonban ezeket az általánosításokat figyelmen kívül hagyom.

[2] G. Szegő, i. h. 7.

De

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} x^r;$$

s ez utóbbi sor convergens, ha $|x| < 1$. Ha tehát bevezetem a következő jelöléseket

$$s_n^{(r)} = \lambda_0^{(n)r} + \lambda_1^{(n)r} + \cdots + \lambda_n^{(n)r};$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \quad r = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor (12) így is írható:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \frac{s_n^{(r)}}{n+1} a^r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} (f(\theta))^r a^r \right) d\theta;$$

és mivel a

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} (f(\theta))^r a^r$$

sor θ-ban egyenletesen convergens, ha $0 < a < \frac{1}{\sigma}$, tehát

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \frac{s_n^{(r)}}{n+1} a^r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^r d\theta . a^r. \quad (13)$$

Beigazolom most a következő, igen egyszerű segédtételt. *Legyen*

$$h_n(a) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^{(n)} a^r;$$

és $|c_r^{(n)}| < gC^r$, *hol* g *és* C *fix positiv számok; legyen továbbá, ha* a *oly fix érték, melyre nézve* $|a| < \frac{1}{C}$,

$$\lim_{n=\infty} h_n(a) = 0,$$

akkor minden r*-re*

$$\lim_{n=\infty} c_r^{(n)} = 0.$$

Valóban

$$|c_1^{(n)}a| \leqq |h_n(a)| + |c_2^{(n)}a^2 + c_3^{(n)}a^3 + \cdots|$$
$$\leqq |h_n(a)| + g \cdot \frac{C^2 a^2}{1 - Ca};$$

és így $(a > 0)$

$$|c_1^{(n)}| \leqq \frac{|h_n(a)|}{a} + g \cdot \frac{C^2 a}{1 - Ca}. \tag{14}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszésszerint kicsiny, akkor, ha a elég kicsiny fix positiv szám,

$$|c_1^{(n)}| \leqq \frac{|h_n(a)|}{a} + \varepsilon;$$

és így

$$\limsup_{n=\infty} |c_1^{(n)}| \leqq \varepsilon,$$

azaz

$$\lim_{n=\infty} c_1^{(n)} = 0.$$

Hasonló eljárást folytatva következik állításunk minden r-re.

A mi esetünkben

$$c_r^{(n)} = \frac{(-1)^{r-1}}{r} \left(\frac{s_n^{(r)}}{n+1} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^r \, d\theta \right);$$

és így $g = 2$, $C = \sigma$. Úgyhogy minden r-re

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r)}}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^r \, d\theta. \tag{15}$$

a mi nem jelent mást, mint hogy *A)* tétel igaz, ha $F(\lambda) = \lambda^r$.

Megjegyzés. Az imént igazolt segédtétel közvetlen folyománya egy VITALI-féle tételnek, mely következőképpen hangzik.[1]

Legyenek $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z), \ldots$ *a* $|z| \leqq R$ *körben reguláris analytikai függvények és ugyanott*

$$|\varphi_n(z)| \leqq M;$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ha e függvénysorozat végtelen sok pontban convergál, melyeknek legalább egy sűrűsödő pontjuk van a $|z| \leqq R$ *kör belseje-*

[1] E tényre PÓLYA GY. volt szíves felhívni figyelmemet.

ben, akkor egyenletesen convergál minden $|z| \leqq \varrho$ *tartományban, hol* $\varrho < R$.

Valóban esetünkben $\varphi_n(z) = h_n(z)$ és vehető például $R = \dfrac{1}{2C}$. Mindazonáltal a fenti segédtétel bizonyítása oly egyszerű, hogy nélkülözhetőnek véltem egyrészt a VITALI-féle tételnek, másrészt egyáltalán a complex változós függvények elméletének a bevonását.

Visszatérek most (15)-re és befejezem *A)* tétel bizonyítását. A (15) közvetlen következménye, hogy *A)* tétel érvényes, ha $F(\lambda)$ tetszésszerinti polynom. Mivel továbbá az $m \leqq \lambda \leqq M$ intervallumban értelmezett bármely folytonos függvény ott polynomokkal tetszészzerinti pontossággal egyenletesen approximálható, a 2. §-ban követett eljárás reprodukálásával nyerhetjük, hogy *A)* tétel tetszésszerinti folytonos $F(\lambda)$ függvényre is érvényben marad. Ezzel állításunk teljesen igazolva van.

4. §. A Toeplitz-féle determinansokról.

4. Az utóbb közölt bizonyitás talán nem oly rövid, mint az első, azonban megenged egy-két olyan általánosítást, mely az első nyomán nem igen érhető el. E tekintetben főleg a

$$D_n(f) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & \dots & c_0 \end{vmatrix} = \lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \dots \lambda_n^{(n)} \tag{7}$$

determinansoknak van kiváló fontosságuk s ezért megragadom itt az alkalmat, hogy e determinansok egy-két nevezetesebb tulajdonságát kifejtsem.

Oly formulából indulok ki, mely PÓLYA GY.-től származik.[1] Ez

$$D_n(f) = \frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{\pi^{n+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\theta_0) f(\theta_1) \dots f(\theta_n) \prod_{\mu<\nu}^{0,\dots,n} \sin^2 \frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2}\, d\theta_0 d\theta_1 \dots d\theta_n \tag{P}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \dots),$$

[1] L'Intermédiaire des Mathématiciens 21 (1914), p. 27. Question 4340.

oly formula, mely (7)-ből aránylag egyszerűen nyerhető[1] és érvényes tetszésszerinti (L) integrabilis függvényre. A belőle vonható következtetések közül csak ezeket említem.

Legyen $0 < m \leqq f(\theta) \leqq M$ és $0 < \mu \leqq g(\theta) \leqq M$, akkor

$$m^{n+1} \leqq D_n(f) \leqq M^{n+1}; \tag{16}$$

és

$$m^{n+1} D_n(g) \leqq D_n(fg) \leqq M^{n+1} D_n(g). \tag{17}$$

Továbbá a jól ismert SCHWARTZ-féle egyenlőtlenség alkalmazásával:

$$D_n(fg) \leqq \sqrt{D_n(f^2)\, D_n(g^2)}. \tag{18}$$

5. Legyen most $f(\theta)$ tetszésszerinti (L) integrabilis és lényegesen positiv (azaz positiv WEIERSTRASS-féle alsó határral biró) függvény. Mint a quadratos formák elemi elméletéből ismeretes,

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \text{Min}\, K_n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}, 1) \tag{19}$$

$$= \text{Min}\, \frac{K_n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_n)}{|x_n|^2};$$

$$(x_n \neq 0;\ n=0, 1, 2, \dots);$$

tehát

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq K_n(0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, 1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) |x_1 z + \dots + x_{n-1} z^{n-1} + z^n|^2_{z=e^{i\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) |x_1 + x_2 z + \dots + x_{n-1} z^{n-2} + z^{n-1}|^2_{z=e^{i\theta}} d\theta$$

$$= K_{n-1}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, 1);$$

és ez igaz $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ minden értéke mellett. Azaz

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \text{Min}\, K_{n-1}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, 1) = \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}};\text{[2]} \tag{20}$$

$$(n = 2, 3, \dots),$$

---

[1] G. SZEGŐ, i. h. 2.

[2] E tételt FEKETE M. bizonyos determinans-tételek segítségével igazolta. L. G. SZEGŐ, i. h. 3.

tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \tag{20'}$$

létezik.

(19)-nek egy speciális következménye, hogy

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq K_n(0, 0, \dots 0, 1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = c_0; \tag{21}$$

és ebből

$$\sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq c_0; \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{21'}$$

6. Itt említem meg, a nélkül, hogy a következőkben felhasználnám, (20')-nek egy egyszerű általánosítását.

Legyen $0 < m \leqq f(\theta)$ és

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \operatorname{Min} K_n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}, 1) = K_n(x_0', x_1', \dots x_{n-1}', 1),$$

akkor

$$m(|x_0'|^2 + |x_1'|^2 + \dots + |x_{n-1}'| + 1) \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq c_0,$$

tehát

$$|x_0'|^2 + \dots + |x_{n-1}'|^2 + 1 \leqq \frac{c_0}{m}.$$

Legyen $\varphi(\theta)$ egy hasonló feltételeknek alávetett függvény, mint $f(\theta)$ és legyen

$$\varphi(\theta) \geqq \mu > 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \gamma_0,$$

továbbá legyen

$$|f(\theta) - \varphi(\theta)| \leqq \varepsilon.$$

Irjuk

$$L_n(x_0, x_1, \dots x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n|^2_{z=e^{i\theta}} d\theta,$$

akkor

$$|K_n(x_0, x_1, \dots x_n) - L_n(x_0, x_1, \dots x_n| \leqq \varepsilon(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2);$$

és igy

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq K_n(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, 1),$$
$$\leqq L_n(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, 1) + \varepsilon(|x_0|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 + 1),$$

úgy hogy

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)} + \varepsilon \frac{\gamma_0}{\mu}.$$

Hasonlóképpen

$$\frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)} \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} + \varepsilon \frac{c_0}{m},$$

tehát

$$\left| \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} - \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)} \right| \leqq G\varepsilon,$$

hol G az n és ε-tól független állandó.

Fölösleges bővebben részletezni, hogy ebből (20')-nek következő általánositását nyerhetjük.

Legyenek

$$f_0(\theta),\ f_1(\theta), \ldots f_n(\theta), \ldots$$

hasonló tulajdonságú függvények, mint $f(\theta)$, *melyek egyenletesen convergálnak* $f(\theta)$ *felé, midőn* $0 \leqq \theta < 2\pi$, *akkor*

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_n(f_n)}{D_{n-1}(f_n)} \quad \textit{létezik és} \quad = \lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}. \qquad (20'')$$

7. Ezek után bemutatni akarok oly egyszerű bizonyítást a fent idézett és felhasznált (11) tétel számára, melynek érdekessége már az előbbiekből is nyilvánvaló.

Tudottnak tételezem föl (bár ez nem föltétlenül szükséges) a (20') tételt, melyből ismert határértéktételek szerint következik

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = \lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}$$

létezése is. Bevezetve a következő jelöléseket

$$x(z) = x_0 + x_1 z + \cdots + x_n z^n = x_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

az arithmetikai és geometriai középről szóló tétel szerint

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|x(z)|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta}\leqq K_n(x_0, x_1,\dots x_n).$$

Azonban érvényes a következő egyszerű integrálformula

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|z-z_0|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta}=\text{Max}\,(1, |z_0|^2), \tag{22}$$

hol z_0 tetszésszerinti complex állandó.[1] Tehát

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|x(z)|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta}=|x_n|^2\prod_{r=1}^{n}\text{Max}\,(1, |z_r|^2)\geqq|x_n|^2. \tag{23}$$

Eszerint ($x_n \neq 0$)

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}\leqq\frac{K_n(x_0, x_1,\dots x_n)}{|x_n|^2};$$

$$(x_n\neq 0;\ n=0, 1, 2,\dots).$$

Azaz minden n-re nézve

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}\leqq\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)};^{2} \tag{24}$$

és ebből, minthogy

$$D_0(f)=c_0\geqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(\theta)\,d\theta},$$

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}\leqq\sqrt[n+1]{D_n(f)}. \tag{24'}$$

---

[1] E formula például következőképpen igazolható. Legyen $|z_0|\neq 1$, akkor

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|z-z_0|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta}=\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}|z_0-e^{i\frac{2\pi}{n}r}|^2}$$

$$=\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{|z_0^n-1|^2}=\text{Max}\,(1, |z_0|^2).$$

A $|z_0|=1$ eset például határátmenettel intézhető el.

[2] Mint alább látni fogjuk, az egyenlőség jele itt akkor és csak akkor érvényes, ha (egy 0 méretű halmaz kivételével) $f(\theta)$ egy n-ed foku positiv trigonometrikus polynom reciprokja.

Eddigi fejtegetéseink érvényesek voltak tetszésszerinti lényegesen positiv és (L) integrabilis $f(\theta)$ függvényre. Ez utóbbit most speczializálni fogom, és pedig következőképpen.

Legyen $\varphi(\theta)$ tetszésszerinti, valóban k-adfokú positiv trigonometrikus polynom és

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)}. \tag{25}$$

Beigazolom, hogy ekkor

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \log f(\theta)\, d\theta}; \tag{26}$$
$$(n \geqq k),$$

melyből (11) érvényessége az adott esetben közvetetlenül következik.

Kiindulok Fejér L.-nak egy egyszerű tételéből,[1] mely szerint a megadott $\varphi(\theta)$ positiv trigonometrikus polynom ily alakban írható fel:

$$\varphi(\theta) = |g(z)|^2_{z=e^{i\theta}},$$

hol $g(z)$ egy valóban k-adfokú polynom, mely az egységkörön nem tűnik el. Állítom, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltételezhető, hogy $g(z)$ összes gyökei az egységkör *belsejébe* esnek.

Ha ugyanis $g(z)$ összes gyökei az egységkörön kívül vannak, akkor tekintem a

$$g^*(z) = z^k \bar{g}\left(\frac{1}{z}\right)$$

polynomot, hol $\bar{g}(z)$ azt a polynomot jelenti, melynek együtthatói $g(z)$ megfelelő együtthatóinak conjugált complex értékei E polynom először is valóban k-adfokú (mert hiszen $g(z)$ absolut tagja nem tűnhet el), továbbá összes gyökei az egységkörön belül fekszenek (és pedig $g(z)$ megfelelő gyökeinek harmonikus conjugáltjai), végre pedig

$$|g^*(z)|^2_{z=e^{i\theta}} = |g(z)|^2_{z=e^{i\theta}} = \varphi(\theta).$$

[1] L. «Über trigonometrische Polynome» Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 146, Heft 1., S. 53—82, 1015.

Ha továbbá $g(z)$ gyökei részben az egységkör belsejében, részben azon kívül fekszenek és $g(z) = g_1(z) \cdot g_2(z)$, hol $g_1(z)$ és $g_2(z)$ k_1, illetőleg k_2-edfokú ($k_1 + k_2 = k$) polynomok, melyeknek gyökei az egységkörön belül, illetőleg kívül vannak, akkor írjuk

$$g^*(z) = g_1(z)\, z^{k_2} \bar{g}_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ez hasonlóképpen oly valóban k-adfokú polynom lesz, melynek összes gyökei az egységnyi sugarú kör belsejébe esnek és áll:

$$|g^*(z)|^2_{z=e^{i\theta}} = |g(z)|^2_{z=e^{i\theta}} = \varphi(\theta).$$

E szerint mindig írható

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)} = \frac{1}{|g(z)|^2}, \tag{25'}$$

hol $g(z)$ valóban oly k-adfokú polynom, melynek összes gyökei az egységkör belsejében vannak.

Legyen most $n \geqq k$; (20) és (23) figyelembevételével

$$\begin{aligned} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \frac{D_k(f)}{D_{k-1}(f)} &\leqq \frac{K_k(x_0, x_1, \ldots x_k)}{|x_k|^2} = \\ &= \frac{K_k(x_0, x_1, \ldots x_k)}{e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |x(z)|^2_{z=e^{i\theta}}}} \prod_{r=1}^{k} \operatorname{Max}(1, |z_r|^2), \end{aligned} \tag{27}$$

hol

$$x(z) = x_0 + x_1 z + \cdots + x_k z^k = x_k (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_k)$$

tetszésszerinti, valóban k-adfokú polynom. Legyen speciálisan

$$x(z) = g(z),$$

akkor

$$K_k(x_0, x_1, \ldots x_k) = 1,$$

továbbá

$$\operatorname{Max}(1, |z_r|^2) = 1 \quad (r = 1, 2, \ldots k);$$

és így

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \frac{1}{e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(\theta)\, d\theta}} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\theta)\, d\theta}; \tag{28}$$

ezt (24)-gyel egybevetve, következik állításunk helyessége.

Megjegyzem, hogy fordítva, ha $f(\theta)$ lényegesen positiv és (L) integrabilis függvény s

$$\frac{D_k(f)}{D_{k-1}(f)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta},$$

(ekkor (20) és (24) szerint hasonló érvényes $\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}$-re is, ha $n \geqq k$), akkor könnyen belátható, hogy (egy 0-méretű halmaztól eltekintve)

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

hol $\varphi(\theta)$ egy k-adfokú positiv trigonometrikus polynom. Ugyanis a feltétel értelmében

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0'+x_1'z+\cdots+x_{k-1}'z^{k-1}+z^k|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

hol $\varphi(\theta)$ egy k-adfokú nem negativ trigonometrikus polynom. Tehát (23)-ra való tekintettel

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta} \geqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}\cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\varphi(\theta)\,d\theta} \geqq$$
$$\geqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta},$$

és így

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta},$$

melyből az állítás következik.

Ezek után visszatérek a (11) bizonyítására. Legyen $f(\theta)$ positiv trigonometrikus polynom, vagy akár általában tetszésszerinti positiv folytonos függvény. Ekkor hasonló érvényes $\frac{1}{f(\theta)}$-ra is és így, ha ε tetszésszerinti positiv szám, a WEIERSTRASS-féle tétel szerint van oly $p(\theta)$ positiv trigonometrikus polynom, hogy

$$1-\varepsilon \leqq \frac{p(\theta)}{\frac{1}{f(\theta)}} \leqq 1+\varepsilon.$$

Azaz létezik oly (25) alakú $f_0(\theta)=\frac{1}{p(\theta)}$ függvény, hogy

$$1-\varepsilon \leqq \frac{f(\theta)}{f_0(\theta)} \leqq 1+\varepsilon\,;$$

és így (17) szerint

$$(1-\varepsilon)^{n+1} D_n(f_0) \leqq D_n(f) \leqq (1+\varepsilon)^{n+1} D_n(f_0),$$

úgy hogy

$$(1-\varepsilon)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f_0(\theta)\,d\theta} \leqq \lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq (1+\varepsilon)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f_0(\theta)\,d\theta},$$

tehát

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqq \frac{\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)}}{e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}} \leqq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

melyből, minthogy ε tetszésszerinti kicsiny, következik (11).

5. §. Általánosítások.

8. Ezek után rátérhetek az *A)* tétel néhány általánositására. A II. bizonyításból nyilvánvaló, hogy ha $f(\theta)$ tetszésszerinti mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvény és (11) érvényes az $1+af(\theta)$ függvényre, hacsak a elegendő kicsiny, akkor *A)* tétel érvényes emez $f(\theta)$ függvényre. E szerint csak a (11) tételt kell megfelelő módon általánositani s ebből már *A)* tétel általánositása önként következik. Be fogom bizonyítani, hogy

(11) *érvényes, ha $f(\theta)$ lényegesen positiv (nem szükségképpen korlátos) négyzetével együtt (L) integrabilis függvény.*

Ehhez néhány egyszerű előkészítő megjegyzésre van szükségem. Legyen $0<m\leqq f(\theta)$ és ε tetszésszerinti kicsiny positiv szám. Képezem $f(\theta)$ FOURIER-féle sorának

$$s_0(\theta),\ s_1(\theta), \dots\ s_k(\theta), \dots$$

részletösszegeit, majd ezeknek

$$\sigma_0(\theta),\ \sigma_1(\theta), \dots\ \sigma_k(\theta), \dots$$

arithmetikai közepeit. Ez utóbbiak, mint a FEJÉR-féle tétel szerint jól ismeretes, mind $\geqq m$ maradnak, tehát positiv trigonometrikus polynomok, melyekre a (11) érvényessége immár ki van mutatva. Másrészt a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség felhasználásával

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta)-\sigma_k(\theta)\right)^2 d\theta \leqq \frac{\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta)-s_r(\theta)\right)^2 d\theta}{k+1};$$

s ez utóbbi kifejezés k-val 0 felé tart, mert a FOURIER-féle sorok elméletének egy alaptétele szerint

$$\lim_{k=\infty}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta)-s_k(\theta)\right)^2 d\theta = 0.$$

Mindebből világos, hogy létezik oly $f^*(\theta)$ trigonometrikus polynom, melyre nézve

a) $0<m\leqq f^*(\theta)$;

b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta)-f^*(\theta)\right)^2 d\theta<\varepsilon.$

Ezek után rátérhetek állításom igazolására. A (18) alkalmazásával

$$D_n(f) = D_n\left(\frac{f}{f^*}f^*\right) \leqq \sqrt{D_n\left(\frac{f^2}{f^{*2}}\right)D_n(f^{*2})};$$

és így (21′) és (24′) következményeképpen

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta} \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f(\theta)}{f^*(\theta)}\right)^2 d\theta\ \sqrt[n+1]{D_n(f^{*2})}}. \quad (29)$$

Azonban

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f(\theta)}{f^\star(\theta)}\right)^2 d\theta-1\right| &\leqq \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)+f^\star(\theta)|\cdot|f(\theta)-f^\star(\theta)|\,d\theta\\ &\leqq \frac{\varepsilon}{m^2}+\frac{2}{m^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|f(\theta)-f^\star(\theta)|\,d\theta\\ &\leqq \frac{\varepsilon}{m^2}+\frac{2}{m^2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\theta))^2 d\theta}\cdot\sqrt{\varepsilon}\\ &\leqq c_1\sqrt{\varepsilon}\,^1;\end{aligned}$$

és így (29)-ből

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n+1]{D_n(f)}\leqq\sqrt{1+c_1\sqrt{\varepsilon}}\;e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f^\star(\theta)\,d\theta}.$$

Vegyük most figyelembe, hogy

$$\begin{aligned}|e^{x'}-e^{x''}| &\leqq M_1|x'-x''|;\\ |\log x'-\log x''| &\leqq M_2|x'-x''|,\end{aligned}$$

hol $M_1=e^p$, $M_2=\frac{1}{p}$, ha x' és x'' a positiv p szám alatt, illetőleg fölött maradnak. Tehát

$$\begin{aligned}\left|e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}-e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f^\star(\theta)\,d\theta}\right| &\leqq c_2\left|\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta-\int_0^{2\pi}\log f^\star(\theta)\,d\theta\right|\\ &\leqq c_2\int_0^{2\pi}|\log f(\theta)-\log f^\star(\theta)|\,d\theta\\ &\leqq c_3\int_0^{2\pi}|f(\theta)-f^\star(\theta)|\,d\theta\\ &\leqq c_4\sqrt{\varepsilon},\end{aligned}$$

úgy hogy

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n+1]{D_n(f)}\leqq\sqrt{1+c_1\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}+c_4\sqrt{\varepsilon}\right);$$

és mivel ε tetszésszerinti kicsiny, a (11) tételre fennt kimondott általánosítás igazolva van.

---

[1] A következőkben használt $c_1, c_2, \ldots$ állandók tisztán $f(\theta)$-tól (esetleg $F(\lambda)$-tól) függő fix positiv számok, melyek nagyobbakkal helyettesíthetők.

Ezek után a jelen pont elején tett megjegyzés szerint *A)* tételnek következő általánosítását mondhatjuk ki:

A') Legyen $f(\theta)$ tetszésszerinti mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvény, alsó és felső határa m és M, sajátértékei

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots \lambda_n^{(n)};$$
$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Legyen továbbá $F(\lambda)$ egy, a $m \leqq \lambda \leqq M$ intervallumban értelmezett folytonos függvény, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1}$$

létezik és

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\big(f(\theta)\big)\, d\theta.$$

9. Kimondom *A)* és *A')* tételeknek következő általánosítását:

A") Legyen $f(\theta)$ tetszésszerinti mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvény, alsó és felső határa m és M, legyen továbbá

$$f_0(\theta), f_1(\theta), \dots f_n(\theta), \dots$$

a hasonló tulajdonságú függvényeknek olyan sorozata, melyre nézve

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \big(f(\theta) - f_n(\theta)\big)^2 d\theta = 0.$$

Legyen végül minden n-re $\mu \leqq f_n(\theta) \leqq M$. Képezem a

$$K_n(x_0, x_1, \dots x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(\theta) \,|\, x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n |^2_{z=e^{i\theta}}\, d\theta \qquad (30)$$

Hermite-*féle formákat és jelölöm ezeknek sajátértékeit így:*

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \dots \varrho_n^{(n)};$$
$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Ha $F(\varrho)$ a $\mu \leqq \varrho \leqq M$ intervallumban értelmezett valamely folytonos függvény, akkor *létezik és*

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\varrho_0^{(n)})+F(\varrho_1^{(n)})+\cdots+F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta.$$

Legyen ugyanis egy pillanatra m és μ positiv. Az előbbiek szerint

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f_n(\theta)\,d\theta} \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f_n)} \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f_n(\theta)}{f(\theta)}\right)^2 d\theta}\cdot \sqrt[n+1]{D_n(f)};$$

és így teljesen az előző pontban követett eljárással nyerhetjük, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f_n)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}.$$

Azaz

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log\varrho_0^{(n)}+\log\varrho_1^{(n)}+\cdots+\log\varrho_n^{(n)}}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta.$$

Alkalmazzuk most, kiindulva ez utóbbi tételből, szóról-szóra a 3. §. eljárását, akkor nyerjük, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_0^{(n)r}+\varrho_1^{(n)r}+\cdots+\varrho_n^{(n)r}}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\theta))^r\,d\theta;$$
$$(r=1,\,2,\ldots),$$

és ebből, mint ott, hogy általánosságban *A″)* érvényes.

10. Rátérek *A″)*-nek következő általánosítására:

A‴) Az A″) tétel érvényes akkor is, ha $F(\varrho)$ a $\mu \leqq \varrho \leqq M$ intervallumban értelmezett véges számú elsőfajú szakadással biró valamely függvény, feltéve, hogy $f(\theta)$-nak a következő tulajdonsága van: Ha $\varrho=\varrho_0$ jelenti e szakadási helyek bármelyikét, akkor a $0 \leqq \theta < 2\pi$ tartomány ama θ helyei, melyeken $f(\theta)=\varrho_0$, 0-méretű halmazt alkotnak.

Valóban, szorítkozzunk egyszerűség kedveért arra az esetre mikor $F(\varrho)$-nak csak egyetlen $\varrho=\varrho_0$ helyen van ugrása, egyébként pedig mindenütt folytonos. Mint könnyen belátható, lehet találni két oly mindenütt folytonos $F_1(\varrho)$ és $F_2(\varrho)$ függvényt, hogy mindenütt

$$F_1(\varrho) \leqq F(\varrho) \leqq F_2(\varrho)$$

legyen, sőt, hogy

$$F(\varrho) = F_\nu(\varrho) \quad \text{ha} \quad \varrho \leqq \varrho_0 - \varepsilon \quad \text{és} \quad \varrho \geqq \varrho_0 + \varepsilon\,; \quad (\nu = 1,\ 2).$$

Tehát

$$\int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta - \int_0^{2\pi} F_\nu(f(\theta))\,d\theta = \int_{E_\varepsilon} F(f(\theta)) - F_\nu(f(\theta))\,d\theta,$$

hol E_ε jelenti a $0 \leqq \theta < 2\pi$ tartomány ama részhalmazát, melyen

$$|f(\theta) - \varrho_0| < \varepsilon.$$

Feltételünk azonban nyilván azzal æquivalens, hogy

$$\lim_{\varepsilon=0} \operatorname{mes} E_\varepsilon = 0,$$

tehát

$$\left| \int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta - \int_0^{2\pi} F_\nu(f(\theta))\,d\theta \right| \leqq c_5 \operatorname{mes} E_\varepsilon = \eta,$$

hol η a feltétel szerint ε-val tetszésszerint kicsinnyé tehető. Továbbá

$$\frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \cdots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} \leqq \frac{F_2(\varrho_0^{(n)}) + F_2(\varrho_1^{(n)}) + \cdots + F_2(\varrho_n^{(n)})}{n+1};$$

és így

$$\limsup_{n=\infty} \frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \cdots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(f(\theta))\,d\theta \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta + \eta.$$

Hasonlóképpen

$$\liminf_{n=\infty} \frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \cdots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta - \eta,$$

miből $A''')$ rögtön következik.

Megjegyzem, hogy az $A''')$-ben $f(\theta)$-ra tett kikötés elengedhetetlennek látszik még folytonos $f(\theta)$ függvények esetében is. Igy O. TOEPLITZ-nek a 2. §-ban idézett tétele is, mely ugyanis ama speczialis eset, mikor $F(\varrho) = k(\varrho)$ (l. az ottani jelöléseket), általában elveszti érvényességét, ha $f(\theta)$ nem rendelkezik a fenti tulajdonsággal. Legyen például

$$f(\theta) = \begin{matrix} 0 & & 0 \leqq \theta \leqq \pi, \\ -1 & \text{ha} & \theta = \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & & \theta = 0 \text{ és } 2\pi; \end{matrix}$$

$$\text{a } \pi \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2} \text{ és } \frac{3\pi}{2} \leqq \theta \leqq 2\pi$$

intervallumokban változzék lineárisan.

Legyen továbbá $f_n(\theta) = f(\theta)$, $F(\varrho) = k(\varrho)$ és igy $\varrho_0 = 0$. Ez esetben $f(\theta)$ csakugyan nem tesz eleget a fenti föltételnek és bár mindenütt folytonos, nem igaz reá a tétel. Ugyanis

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(f(\theta)\big)\,d\theta = \frac{1}{2},$$

mialatt minden n-re (6) és a hozzáfűzött megjegyzés szerint

$$-1 < \lambda_j^{(n)} < 0; \\ (j = 0, 1, \ldots),$$

mert hiszen $f(\theta)$ nem constans. Tehát

$$\frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \cdots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} = 0,$$

azaz a tétel hamis.[1]

11. Még egy részletet akarok általánositani. Bebizonyitom a következőt:

Legyen $f(\theta)$ mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvény, alsó és felső határa m, illetőleg M, sajátértékei

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots \lambda_n^{(n)}; \\ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[1] Ennek oka természetesen a (6) egyenlőtlenséghez fűzött megjegyzésben rejlik.

Legyen továbbá

$$s_n^{(r)} = \lambda_0^{(n)r} + \lambda_1^{(n)r} + \cdots + \lambda_n^{(n)r}; \quad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor nemcsak, mint A') kimondja,

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r)}}{n+1}$$

létezik, hanem

$$\lim_{n=\infty} (s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}) \textit{ is } \textit{és} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^r \, d\theta. \tag{32}$$

(E tétel úgy viszonylik az előbbihez, mint egy sorozat convergentiája annak summabilitásához.)

Valóban, tételezzük fel egy pillanatra, hogy $0 < m$. Idézem a fent bebizonyított (20′) tételt, mely szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}$$

létezik és

$$= \lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\theta)\, d\theta}.$$

Másszóval a

$$\log \lambda_0^{(n)} + \log \lambda_1^{(n)} + \cdots + \log \lambda_n^{(n)} - (\log \lambda_0^{(n-1)} + \\ + \log \lambda_1^{(n-1)} + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n-1)})$$

kifejezés, ha n minden határon túl nő,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\theta)\, d\theta$$

felé tart. Alkalmazva most erre az eredményre szószerint a 3. §. eljárását, az ottani jelölések megtartásával nyerem, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} (s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)})\, a^r = \\ = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^r \, d\theta . a^r; \tag{33}$$

és ez igaz, ha $0 < \alpha < \frac{1}{\sigma}$. Most ismét alkalmazni kivánom az ugyanott említett és beigazolt segédtételt; e végből bebizonyítom, hogy minden n-re nézve

$$|s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}| \leqq (r+1)\,\sigma^r.$$

Idézem FEKETE M. következő tételét: [1]

A $D_{n-1}(f-\lambda)=0$ egyenlet gyökei elválasztják a $D_n(f-\lambda)=0$ egyenlet gyökeit.

Azaz, ha

$$\lambda_0^{(n)} \leqq \lambda_1^{(n)} \leqq \cdots \leqq \lambda_n^{(n)};$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

akkor

$$\lambda_j^{(n)} \leqq \lambda_j^{(n-1)} \leqq \lambda_{j+1}^{(n)}$$
$$(j = 0,\ 1, \ldots\ n-1);$$

ebből

$$2\,(s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}) = \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j^{(n)r} - \lambda_j^{(n-1)r}) + \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1}^{(n)r} - \lambda_j^{(n-1)r}) + \lambda_0^{(n)r} + \lambda_n^{(n)r};$$

és így

$$2\,|s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}| \leqq r\sigma^{r-1} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j^{(n-1)} - \lambda_j^{(n)}) + r\sigma^{r-1} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1}^{(n)} - \lambda_j^{(n-1)}) + 2\sigma^r$$
$$\leqq r\sigma^{r-1} (\lambda_n^{(n)} - \lambda_0^{(n)}) + 2\sigma^r,$$

melyből

$$|s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}| \leqq (r+1)\,\sigma^r,$$

e szerint a 3. §. segédtétele alkalmazható és így

$$\lim_{n=\infty} (s_n^{(r)} - s_{n-1}^{(r)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(f(\theta)\big)^r\, d\theta.$$
$$(r = 1,\ 2, \ldots)$$

Legyen most

$$S_n = F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \cdots + F(\lambda_n^{(n)}),$$

akkor kérdezhető, hogy mily $F(\lambda)$ függvények esetében létezik nemcsak

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{n+1},$$

[1] G. SZEGŐ, i. h. 8.

hanem már

$$\lim_{n=\infty}(S_n-S_{n-1}) \tag{35}$$

is. Az előbbiekből világos, hogy ez igaz, ha $F(\lambda)$ polynom. Legyen általánosabban

$$F(\lambda)=\sum_{r=0}^{\infty}k_r\lambda^r, \tag{36}$$

hol e hatványsor convergentia-köre σ-nál nagyobb. Állítom, hogy ekkor hasonló érvényes. Ugyanis

$$S_n=\sum_{r=0}^{\infty}k_r s_n^{(r)};$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

és így

$$\left|S_n-S_{n-1}-\sum_{r=0}^{q}k_r(s_n^{(r)}-s_{n-1}^{(r)})\right|\leqq\sum_{r=q+1}^{\infty}(r+1)\ |k_r|\,\sigma^r.$$

Tehát

$$\left|\limsup_{n=\infty}(S_n-S_{n-1})-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=0}^{q}k_r(f(\theta))^r d\theta\right|\leqq\sum_{r=q+1}^{\infty}(r+1)\,|k_r|\,\sigma^r,$$

vagy

$$\left|\limsup_{n=\infty}(S_n-S_{n-1})-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=0}^{\infty}k_r(f(\theta))^r d\theta\right|\leqq\sum_{r=q+1}^{\infty}(r+2)\,|k_r|\,\sigma^r.$$

Azonban a jobboldal $\frac{1}{q}$-val tetszésszerint kicsinnyé tehető és hasonló érvényes a lim inf-ra nézve, úgyhogy (35) valóban létezik.

12. Végül megemlítem az *A')* tételnek következő igen egyszerű általánosítását.

Legyenek $f(\theta)$ és $\varphi(\theta)$ mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvények, alsó és felső határuk m és M, illetőleg μ és $\mathfrak{M}$. Sajátértékeik

$$\lambda_0^{(n)},\ \lambda_1^{(n)},\ldots\ \lambda_n^{(n)},$$

illetőleg

$$\varrho_0^{(n)},\ \varrho_1^{(n)},\ldots\ \varrho_n^{(n)};$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Legyen továbbá $F(\lambda,\varrho)$ egy, az $m\leqq\lambda\leqq M$, $\mu\leqq\varrho\leqq\mathfrak{M}$ négyszög-

ben értelmezett kétváltozós, kétdimensiós értelemben folytonos függvény, akkor

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{r=0}^{n}\sum\limits_{s=0}^{n}F\left(\lambda_r^{(n)},\varrho_s^{(n)}\right)}{(n+1)^2}\ \textit{létezik és} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(f(\theta_1),\varphi(\theta_2)\right)d\theta_1 d\theta_2. \tag{37}$$

A bizonyítás teljesen a fenti minta szerint történik. A jól ismert WEIERSTRASS-féle tétel tekintetbevételével elegendő a tételt csupán arra az esetre bizonyítani, mikor $F(\lambda,\varrho)=\lambda^\alpha\varrho^\beta$, hol α és β positiv egész számok. Ekkor azonban (37) nyilvánvaló, mert hiszen

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{r=0}^{n}\sum\limits_{s=0}^{n}\lambda_r^{(n)\alpha}\varrho_s^{(n)\beta}}{(n+1)^2}=\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{r=0}^{n}\lambda_r^{(n)\alpha}}{n+1}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{s=0}^{n}\varrho_s^{(n)\beta}}{n+1} \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta_1)\right)^\alpha d\theta_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\varphi(\theta_2)\right)^\beta d\theta_2 \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta_1)\right)^\alpha\left(\varphi(\theta_2)\right)^\beta d\theta_1 d\theta_2,$$

és így állításunk igazolva van.

6. §. Megjegyzések.

13. Kiinduló pontunk volt, hogy adva lévén egy, a $0\leqq\theta<2\pi$ tartományban értelmezett mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis $f(\theta)$ függvény, képeztük a

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\left|x_0+x_1z+\cdots+x_nz^n+\cdots\right|^2_{z=e^{i\theta}}d\theta \tag{38}$$

végtelen sok változós HERMITE-féle forma »szelet«-eit és constatáltuk, hogy ezek az

$$|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1$$

mellékfeltétel mellett az $f(\theta)$ függvény m és M határai között változnak. (Hangsúlyoztuk, hogy ezek általában nem pontos határok.)

Megfordítva igen könnyen beigazolható, hogy:
Ha

$$K(x) = \sum_{p,\, q=0,1,2,\dots} c_{p-q} x_p \overline{x}_q \tag{39}$$

tetszésszerinti végtelen sok változós HERMITE-*féle forma, melynek minden szelete az egységgömbön m és M korlátok között változik, akkor létezik oly (L) integrabilis és az (m, M) korlátok között változó $f(\theta)$ függvény, melyhez $K(x)$ a fenti módon tartozik.*[1]

Természetesen a jól ismert RIESZ-FISCHER-féle theorémára[2] kell hivatkoznunk. Ennek alkalmazhatóságát tudvalevőleg az biztosítja, hogy a

$$c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \tag{40}$$

sor convergens, ez pedig — mint ismeretes — egyenes következménye a (39) korlátos voltának. Ha a végtelen sok változós quadratos, illetőleg HERMITE-féle formák elméletének felhasználása elől ki akarunk térni, akkor a (40) convergentiája következőképpen igazolható.

Jelöljük a (39) forma szeleteinek sajátértékeit, éppen úgy, mint az előzőkben, $\lambda_j^{(n)}$-nel ($j=0, 1, \dots n$; $n=0, 1, 2, \dots$), akkor

$$\begin{aligned} s_n^{(2)} = \lambda_0^{(n)2} + \lambda_1^{(n)2} + \dots + \lambda_n^{(n)2} &= s_n^{(1)2} - 2\sum \lambda_\alpha^{(n)} \lambda_\beta^{(n)} \\ &= (n+1)^2 c_0^2 - \sum_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} c_0 & c_{\beta-\alpha} \\ c_{\alpha-\beta} & c_0 \end{vmatrix}; \\ &(\alpha, \beta = 0, 1, \dots n). \end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{\lambda_0^{(n)2} + \lambda_1^{(n)2} + \dots + \lambda_n^{(n)2}}{n+1} = c_0^2 + 2\,\frac{\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\,|c_k|^2}{n+1}.$$

Azonban $m \leqq \lambda_j^{(n)} \leqq M$ és így a baloldal korlátos marad; hasonló érvényes tehát a jobboldalra, mely nyilván nem egyéb, mint a

[1] F. RIESZ: *Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues,* Paris (1913), Chap. VI, 114, 115.

[2] F. RIESZ: *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* (Comptes rendus, 18 mars 1907); E. FISCHER: *Sur la convergence en moyenne* (Comptes rendus, 13 mai 1907).

(40) sor részletösszegeiből képezhető arithmetikai közép. Tehát azok nem nőhetnek minden határon túl.

Hogy (természetesen egy 0-méretű halmazon való alkalmas módosítás után) $m \leqq f(\theta) \leqq M$, az így igazolható. A feltétel értelmében:

$$m \leqq \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x(z)|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta}{\int_0^{2\pi} |x(z)|^2_{z=e^{i\theta}}\,d\theta} \leqq M,$$

hol $x(z)$ tetszésszerinti, el nem tűnő polynom, a mi egy, már említett és felhasznált FEJÉR-féle tétel értelmében azzal æquivalens, hogy

$$m \leqq \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta}{\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,d\theta} \leqq M, \tag{42}$$

hol $\varphi(\theta)$ tetszésszerinti, identikusan el nem tűnő nem negativ trigonometrikus polynom. Könnyen belátható továbbá, hogy (42) érvényes akkor is, ha $\varphi(\theta)$ tetszésszerinti nem negativ, mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvény, melyre nézve $\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,d\theta > 0$. Valóban, ha ε tetszésszerinti positiv szám, létezik (8. pont) oly nem negativ $\varphi^*(\theta)$ trigonometrikus polynom, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} (\varphi(\theta) - \varphi^*(\theta))^2\,d\theta < \varepsilon.$$

Tehát

$$\left|\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta - \int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi^*(\theta)\,d\theta\right| \leqq \int_0^{2\pi} |f(\theta)|\cdot|\varphi(\theta) - \varphi^*(\theta)|\,d\theta$$

$$\leqq \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} (f(\theta))^2\,d\theta\cdot\varepsilon},$$

továbbá

$$\left|\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,d\theta - \int_0^{2\pi} \varphi^*(\theta)\,d\theta\right| \leqq 2\pi\sqrt{\varepsilon},$$

melyből, mivel ε tetszésszerinti kicsiny, állításunk következik.

Legyen ezek után egy E halmazon $f(\theta) > M$ és mes $E > 0$. Van oly $M' > M$, hogy az az E' halmaz, melyen $f(\theta) > M' > M$, szintén 0-tól különböző mértékű, és pedig legyen mes $E' = \alpha > 0$. Legyen most

$$\varphi(\theta) = \begin{matrix} 1 & \text{ha} & \theta \text{ az } E' \text{ halmazon van,} \\ 0 & & \text{egyébként,} \end{matrix}$$

akkor (42) szerint

$$M \geqq \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta}{\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,d\theta} = \frac{\int_{E'} f(\theta)\,d\theta}{\alpha} \geqq M' > M,$$

a mi ellentmondás. Hasonlóképen igazolható, hogy $m \leqq f(\theta)$.

14. Az *A')* tétel lehetővé teszi, hogy kimondhassuk a spektrum következő tulajdonságát:

Legyen $f(\theta)$ mérhető és korlátos, tehát (L) integrabilis függvény, sajátértékei

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots \lambda_n^{(n)}; \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

és $\alpha < \beta$ két valós állandó. Ha ama θ helyek halmazának mértéke, melyen $\alpha < f(\theta) < \beta$, 0-tól különböző, akkor elég nagy n index mellett az (5) értékek valamelyike beleesik az $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$ intervallumba.

Ellenkező esetben definiáljuk ugyanis a folytonos $F(\lambda)$ függvényt következőképpen. Legyen α' és β' két oly állandó, hogy $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, továbbá, hogy ama θ helyek E halmazának mértéke, melyen $\alpha' < f(\theta) < \beta'$, még mindig 0-tól különböző legyen. (Ez mindig lehetséges.) Írjuk

$$F(\lambda) = \begin{matrix} 0 & & \lambda \leqq \alpha; \\ 1 & \text{ha} & \lambda = \alpha'; \\ 1 & & \lambda = \beta'; \\ 0 & & \lambda \geqq \beta; \end{matrix}$$

egyébként változzék $F(\lambda)$ lineárisan.

A feltétel szerint vannak tetszésszerinti nagy n indexek, hogy

$$\frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \cdots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} = 0\,;$$

és mégis

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(f(\theta))\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_E F(f(\theta))\,d\theta = \frac{\operatorname{mes} E}{2\pi} > 0,$$

a mi ellentmondás.

A most beigazolt tételnek következő fontos speciális eseteit emeljük ki.

Ha (5) *legkisebb és legnagyobb eleme* $\lambda_\alpha^{(n)}$ *és* $\lambda_\omega^{(n)}$, *akkor*

$$\lim_{n=\infty} \lambda_\alpha^{(n)} = m \quad \textit{és} \quad \lim_{n=\infty} \lambda_\omega^{(n)} = M,$$

feltéve, hogy m *és* M*-re az 1. §.*[1] *megjegyzése érvényes.*

Továbbá:

Ha $f(\theta)$ *mindenütt folytonos függvény, melynek minimuma és maximuma* m *illetőleg* M, *akkor sajátértékei mindenütt sűrűn töltik ki a* $m \leqq \lambda \leqq M$ *intervallumot.*

Sőt hasonlók érvényesek akkor is, ha egy tetszésszerinti n index-sorozathoz tartozó (5) értékek halmazát tekintjük.

15. Az *A')* tétel úgy is felfogható, mint egy theorema, mely az 1. §-ban definiált

$$D_0(f-\lambda),\ D_1(f-\lambda), \ldots\ D_n(f-\lambda), \ldots$$

polynomsorozat valós gyökeire vonatkozik. E felfogás alapján jutottam a következő egyszerű tételhez, melyet itt megjegyzésképpen említésre méltónak vélek.

Legyenek az n-edik LEGENDRE-*polynom gyökei*

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}, \ldots\ x_n^{(n)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,; \tag{43}$$

ezek tudvalevően mind valósak és a $-1 \leqq x \leqq 1$ *intervallumba esnek. Legyen* $F(x)$ *tetszésszerinti folytonos vagy elsőfajú szakadásokkal biró függvény, akkor*

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x_1^{(n)}) + F(x_2^{(n)}) + \cdots + F(x_n^{(n)})}{n} \ \textit{létezik és} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(\sin\pi(\theta+1))\,d\theta. \tag{44}$$

Kiindulok a LEGENDRE-polynomok definitiójául szolgáló

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n \tag{45}$$

generator-sorból. Legyen x valós és >1, akkor ebből, mint jól ismeretes, következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(x)}=x+\sqrt{x^2-1},$$

azaz, mivel

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}(x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)})\cdots(x-x_n^{(n)}),$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{(x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)})\cdots(x-x_n^{(n)})}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

Tehát

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log(x-x_1^{(n)})+\log(x-x_2^{(n)})+\cdots+\log(x-x_n^{(n)})}{n}=$$
$$=\log\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(x-\sin\theta)\,d\theta.^1 \tag{46}$$

E formulából szóról-szóra a 3. §. és az 5. §. 10. módszereinek alkalmazásával következik állításunk helyessége.

7. §. Példa.

16. O. TOEPLITZ-nek bizonyos megjegyzéseiből[2] és egy fentebb (3. §.) idézett tételéből sejthető volt, hogy a sajátértékek bizonyos tekintetben olyan szerepet játszanak, mint a megadott függvény æquidistans helyeken vett értékei. E sejtés adta a kiindulópontot az *A)* tételhez. A következő példán e viszonyok igen jól tanulmányozhatók.

Legyen

$$\begin{aligned} f(\theta)&=a_0+2(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)\\ &=a_0+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos(\theta-\theta_0), \end{aligned} \tag{47}$$

[1] L. a (22) formulát.

[2] O TOEPLITZ, i. h. *c)*.

hol θ_0 egy szög, melyre nézve

$$\cos\theta_0 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}},$$
$$\sin\theta_0 = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}.$$

(A négyzetgyöknek positiv értéke veendő, az $a_1=b_1=0$ esetet kizárjuk.)

(47)-ből világos, hogy

$$m = a_0 - 2\sqrt{a_1^2+b_1^2};$$
$$M = a_0 + 2\sqrt{a_1^2-b_1^2}.$$

Könnyen belátható továbbá, hogy ebben a speczialis esetben (7)-ből ez adódik:

$$D_n(f) = a_0 D_{n-1}(f) - (a_1^2+b_1^2)\,D_{n-2}(f); \qquad (48)$$
$$\left(\begin{array}{c} n = 2,\ 3,\dots \\ D_1(f) = a_0^2-(a_1^2+b_1^2);\ D_0(f)=a_0 \end{array}\right).$$

Állitom már most, hogy

$$D_n(f) = \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}, \qquad (49)$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\dots),$$

hol

$$\alpha = \frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4} - (a_1^2+b_1^2)} = \left(\frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{2}\right)^2;$$
$$\beta = \frac{a_0}{2} - \sqrt{\frac{a_0^2}{4} - (a_1^2+b_1^2)} = \left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{2}\right)^2.$$ [1]

Ez az állítás teljes inductióval egyszerűen igazolható. Ha ugyanis $n=0$ és $n=1$, akkor (49) közvetlenül világos. Legyen általában az $n-2$ és $n-1$ indexhez tartozó TOEPLITZ-féle determinansokra igaz. Akkor (48)-ból

$$D_n(f) = (\alpha+\beta)\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta},$$

a mi bizonyítandó volt.

---

[1] Ha $\alpha=\beta$, azaz $m=0$, kifejezés helyett $\sum_{r=0}^{n+1}\alpha^r\beta^{n+1-r}$ veendő.

Tehát a sajátértékeket ez egyenlet gyökei szolgáltatják:

$$\frac{\alpha(\lambda)^{n+2}-\beta(\lambda)^{n+2}}{\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)}=0, \tag{50}$$

hol

$$\alpha(\lambda)=\frac{a_0-\lambda}{2}+\sqrt{\frac{(a_0-\lambda)^2}{4}-(a_1^2+b_1^2)};$$

$$\beta(\lambda)=\frac{a_0-\lambda}{2}-\sqrt{\frac{(a_0-\lambda)^2}{4}-(a_1^2+b_1^2)}.$$

Állítom, hogy (50) bármelyik gyökére vonatkozólag $\alpha(\lambda)\neq\beta(\lambda)$; ellenkező esetben ugyanis

$$\lambda=a_0\pm 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\frac{M}{m}$$

lenne, a mi a (6) egyenlőtlenséghez fűzött megjegyzés szerint $f(\theta)$ állandó voltát vonná maga után és ezt az esetet eleve kizártuk. Tehát az (50) egyenlet ezzel æquivalens:

$$\alpha(\lambda)^{n+2}-\beta(\lambda)^{n+2}=0,$$

azaz

$$\alpha(\lambda)=\beta(\lambda)\,\varepsilon_h=\beta(\lambda)\,e^{ih\frac{2\pi}{2+n}},$$

hol $h=1, 2,\ldots n+1$. Ebből

$$\lambda=a_0\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_h}+\varepsilon_h+2}$$
$$=a_0\pm 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos\frac{h\pi}{n+2};$$
$$(h=1, 2,\ldots n+1).$$

Természetesen eme $2n+2$ érték $n+1$-re fog redukálódni, mert hiszen $\cos\frac{h\pi}{n+2}=-\cos\frac{(n+2-h)\pi}{n+2}$, úgy hogy

$$\lambda_j^{(n)}=a_0+2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos\frac{(j+1)\pi}{n+2}=f\left(\frac{(j+1)\pi}{n+2}+\theta_0\right); \tag{51}$$
$$(j=0, 1,\ldots n;\ n=0, 1, 2,\ldots),$$

és ez a formula elég világosan illustrálja az *A)* tételt.

17. Tegyük fel most, hogy $m>0$. (Az $a_1=b_1=0$ esetet ezúttal is kizárjuk.) Ekkor $\alpha>\beta>0$.

A (11) tétel könnyű szerrel igazolható. Ugyanis

$$\lim_{n=\infty}\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}=\lim_{n=\infty}\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}=\alpha\,;$$

és a (22) formula figyelembevételével

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta}\ \text{is}=\alpha. \tag{52}$$

A 4. §. (26) tétele szerint

$$\frac{D_n\left(\frac{1}{f}\right)}{D_{n-1}\left(\frac{1}{f}\right)}=\frac{1}{\alpha}\,;$$
$$(n=1,\ 2,\ldots);$$

és így

$$D_n\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{D_0\left(\frac{1}{f}\right)}{\alpha^n}=\frac{c_0}{\alpha^n},$$

ha általában írjuk

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\theta}}{a_0+2(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)}\,d\theta.$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

De

$$c_0=\frac{1}{\alpha-\beta}$$

(ez például az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta=\log\alpha \tag{52'}$$

formulából a_0 szerinti differentiálással következik) és így

$$D_n\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{\frac{1}{\alpha-\beta}}{\alpha^n}\,; \tag{53}$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Ez esetben tehát a TOEPLITZ-féle determinansok szintén egyenesen kiszámíthatók.

A (49) és (53) formulák egy egyszerű következményét említem még. Dolgozatomban beigazoltam,[1] hogy

$$D_n\left(\frac{1}{f}\right) D_{n-2}(f) = \begin{vmatrix} c_0 & c_n \\ c_{-n} & c_0 \end{vmatrix} = c_0^2 - |c_n|^2;$$
$$(n = 2, 3, \ldots);$$

ebből következik, hogy

$$|c_n|^2 = \frac{\left(\frac{\beta}{a}\right)^n}{(a-\beta)^2}; \tag{54}$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

E formula érvényes az $n = 0, 1$ esetekben is.

18. Legyen most $f(\theta)$ tetszésszerinti, k-adfokú positiv trigonometrikus polynom. Ez esetben a TOEPLITZ-féle determinansok pontos kiszámítása már nem sikerült ugyan, azonban megállapítható számukra egy elég sokatmondó asymptotikus formula.

Dolgozatom imént idézett tétele szerint

$$D_n\left(\frac{1}{f}\right) D_{n-2k}(f) = \left[D_{k-1}\left(\frac{1}{f}\right)\right]^2 + \varepsilon_n, \tag{55}$$
$$(n \geqq 2k),$$

hol $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. De a (26) formula következményeképpen

$$D_n\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{D_{k-1}\left(\frac{1}{f}\right)}{\gamma^{n-k+1}};$$
$$(n \geqq k),$$

ha rövidség kedvéért $f(\theta)$ «geometriai közepét» γ-val jelöljük. Tehát (55)-ből

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{\gamma^{n+k+1}} = D_{k-1}\left(\frac{1}{f}\right). \tag{56}$$

[1] G. SZEGŐ, i. h. 6. (16bis).

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 október 18.-án tartott üléséből.)

AZ ÉP ÉS KÓROS NEUROGLIÁRÓL.[1]

SCHAFFER KÁROLY l. tagtól.

(4 ábrával.)

I. Bevezető megjegyzések.

Míg a középponti idegrendszer idegelemeinek szerkezete a különböző festő és impraegnáló eljárások révén az utolsó évtizedek lankadatlan vizsgálódásai által főbb körvonalaiban ismeretes lett, addig támasztó állományának, az úgynevezett *neurogliának* szerkezetét napjainkig többé-kevésbé vitásnak kellett tekintenünk. Nem hiányzottak ugyan módszerek, melyek ez irányú ismereteinket jelentékenyen ne bővítették volna, és e tekintetben utalnom kell a GOLGI-féle ezüstös impraegnatióra, valamint a WEIGERT-féle electiv gliafestésre, mint oly eljárásokra, melyek nagyon sok új ténynyel ajándékozták meg a tudományt, de kétségtelen, hogy e két módszer eredményei nem egyeztek, a mennyiben egészen mást tanított GOLGI és mást WEIGERT mód-

[1] (Közlemény a budapesti egyetem agyszövettani és interakadémiai agykutató intézetéből.)

szere. Golgi eljárása a Deiters-féle protoplasmás gliasejteket a középponti idegrendszernek úgy fehér, mint szürke állományában mint ágazatos, a dúczsejtek dendrit-gallyazatához hasonlatos sejteket mutatta, a melyeknek nyujtványai az erek falához tapadván, valószínű lett a gliasejteknek táplálati jelentősége. Kölliker a nyujtványok hosszúsága szerint rövid és hosszú sugarú gliasejteket («Kurz- und Langstrahler») különböztetett meg. E gliasejtek gazdag elágazodásaiknál fogva csillagos képeket mutattak és innen ered a hosszú sugarú protoplasmás gliasejteknek «*astrocyta*» elnevezése. E nyujtványok sokszoros összefonódásai révén egy elég sűrűnek látszó fonat, az *astropilema* jő létre. Ezzel szemben Weigert festése csakis gliarostokról ad felvilágosítást, melyek a gliasejtekkel csak annyiban függenek össze, hogy a mag körül hurokszerűleg elhelyezkedve, a gliasejt testével szorosabb kapcsolatba lépni nem látszanak. A gliarostoknak eme viselkedésénél fogva Weigert a gliarostoknak úgynevezett *intercelluláris* jellegét hangsúlyozta, mondván, hogy a felnőtt idegrendszerben a gliasejtek teste elveszti jelentőségét, míg a gliarostok mint *támasztó elemek* veszik át a neuroglia szerepét, a mely ezek szerint csakis mechanikai lehet, vagyis az idegelemeknek helyhez való rögzítése. Weigert festése mitsem mutatott a Golgi impraegnálásával láthatóvá tett neurogliasejtekből, míg ezzel szemben Golgi impraegnatiója a Weigert festésével kimutatott gliarostozatot nem tudta feltüntetni. Tehát mást mutatott az egyik, mást a másik módszer és úgy látszott, hogy a két módszer csak együttesen, egymást kiegészítve tud helyes fogalmat adni a középponti idegrendszer neurogliájáról. Más szóval: míg a Weigert-féle képek a neurogliának kizárólagosan támasztó jellegét domborítják ki, addig a Golgi-féle képek ezenkívül még a neurogliának az idegszövet táplálkozásában való közreműködését is valószínűvé teszik a glianyujtványoknak az erek falához való tapadásánál fogva.

Ez ismereteink kiegészítéséhez lényegesen hozzájárultak Held[1] vizsgálatai, melyek szerint a neuroglia, mint ektodermás

---

[1] Held, H.: Ueber die Neuroglia marginalis der menschlichen Grosshirnrinde. Monatsschrift f. Psychiatrie u. Neurol. *26*.

képződmény, az idegrendszernek mesodermás képződményei (erek és lágyburkok) felé egy határréteggel elkülönül, mely az erek körül az úgynevezett *membrana limitans perivascularis*, a pia mater felé pedig a *membrana limitans superficialis*. Az előbbi egy finom hártya, mely az erek kötőszövetes burkára, az adventitiára a legbensőbben reásimul; ez különösen akkor válik jól láthatóvá, hogyha kóros körülmények között az adventitia és a gliahártya közé szövettörmelék ékelődik, avagy ha az ektodermás szövet visszahúzódása, az erről való leemelődése folytán egy circumadventitiás űr jő létre. E m. lim. perivascularishoz tapadnak a protoplasmás glianyujtványok végső apró megduzzadásai, az úgynevezett *gliatalpak* (Gliafüsse). A m. lim. gliæ superficialis glianyujtványok talpszerű végződéseinek lapszerűen egymás mellé való sorakozásából jő létre. HELD kutatásai által vált ismeretessé még egy gliás képződmény, a mely a protoplasmás glianyujtványok finom végeiből mint *gliareticulum* alakul ki, mely az idegsejteket az ismert GOLGI-reczék segélyével és a velős idegrostokat gyűrűszerűen körülöleli. A protoplasmás és rostos glia a gliasejtek testével és ennek nyujtványaival egyetemben egy megszakítás nélkül való szövetet, syncytiumot alkot.

Végül meg kell emlékeznünk a protoplasmás gliasejtekben és nyujtványokban található mikrometriásan meg sem határozható apró szemcsékről; ezek az úgynevezett *gliosomák*, a melyekről EISATH felveszi, hogy a gliarostoknak építési anyagul szolgálnak, mert legnagyobb mennyiségben olyan helyeken találhatók, a hol rostos glianyujtványok vannak. E felfogással szemben FIEANDT és NAGEOTTE azt hangoztatta, hogy a gliosomák tulajdonképen mitochondriumok, és főleg NAGEOTTE az, a ki a gliosomákat elválasztási szemcséknek tekinti, melyek szerinte a mitochondriumok átalakulásából jönnek létre. NAGEOTTE szerint a gliaszövet kivezető cső nélküli mirigyszövet, mely az idegszövet egyes elemei közé van beékelve és így az agytevékenységgel kapcsolatos hormonok készítésére szolgálna.

Igen érdekesek a nagy spanyol buvárnak, RAMON Y CAJAL-nak [1] vizsgálatai, a melyek egy általa megállapitott módszer

---

[1] CAJAL, R.: Contribucion al conocimiento de la neuroglia del cerebro humano Trabajos etc. 1914.

segélyével voltak megejthetők. Ez lényegében véve abban áll, hogy a brómos formalinban fixált szövetből fagyasztás útján nyert metszetek sublimatos aranychloriddal impraegnáltatnak. Ilyképen a gliasejtek nyujtványaikkal együtt biborveres színben tünnek fel, az idegsejtek halványveres színben, minden egyéb színeződés nélkül marad. CAJAL szerint ez a neurogliának electiv feltüntetési módja, mely legbiztosabban a nagyagy kérgében sikerül, már sokkal kevésbé a kisagyban, még kevésbé a gerinczvelőben; megjegyzendő, hogy az agykéregben is a mélyebb rétegek azok, melyek gliasejtjei biztosan impraegnálhatók, míg a felszínes réteg, jelesen a lam. granul. externa gliaelemei ép viszonyok között e módszerrel nem mutathatók ki. Látni való ebből, hogy CAJAL módszerének csak korlátolt hasznavehetősége van, de előnye, hogy a jelzett pontokon nem csupán teljesen, hanem igen könnyen sikerül.

CAJAL szerint az astrocyták a tulajdonképeni gliasejtek, melyek a szürke és fehér állományban mint protoplasmás és rostos nyujtványú képletek találhatók. Az astrocyták hosszú és rövid sugarúak, de lehetnek kevert typusúak is. Ezenkívül vannak még nyujtványnélküli úgynevezett *apoláris* vagy *adendrites gliasejtek*. Különösen kiemeli CAJAL még az idegsejtek körül levő gliaelemeket, a *perineuronális testecskéket*.

A gliasejteknek van magjuk, spongioplasmájuk, melyben az *gliosomák* foglaltatnak; továbbá egy centrosomájuk, egy GOLGI-féle endocellulás készülékük és végül vannak festenyes zárványaik.

A mag az aranyimpraegnatio által ibolyaszínben tünik fel és igen finom szemcsékkel bir. A nagy gliasejtek plasmája a halvány, világos, a sejt belső magkörüli részét kitevő *endoplasmából* és a felszínes, szemcsedús *ektoplasmából* áll, mely a dendritekbe megy át. Az ammonszarv óriási astrocytáiban CAJAL sövényes szerkezetet talált úgy a testben, mint a nyujtványokban. A gliosomák mint felszínes és mint mély szemcsék voltak találhatók, melyek közül az előbbiek teltebben, az utóbbiak, mikép a protoplasma, világosan színeződnek. A zárványok mint egynemű, gömbölyded, rózsaszínűre festett szemcsék mutatkoztak egyesével vagy többesével. A centrosoma a protoplasma legtömegesebb helyén fordul elő, olykor valamely nyujtványban is, biborveresre színeződik és a halvány endoplasma alapján könnyen tűnik fel; CAJAL szerint nem egynemű anyag, hanem aránylag durván szemcsés tömeg. A GOLGI-féle készüléket CAJAL állati agyvelő metszetein látta.

Igen fontos megállapítása CAJALnak, hogy az astrocyták legfinomabb végső ágacskái mint egészen szabad felbomlások szerepelnek, tehát a szomszédos hasonló nyujtványokkal nem olvadnak össze egy gliareczévé. CAJAL ezen az alapon a szürke állománynak diffusus gliafonatáról (plexo diffuso de la substantia gris) és nem reczéjéről beszél; szerinte valójában csakis ez gliás természetű, míg az esetlegesen fennálló szétterjedt interstitialis reczét más jellegűnek tekinti. Rendkívül tisztán tudta CAJAL módszerével a gliarostoknak az erekhez való viszonyát megállapítani, jelesen kimutathatta a gliadendriteknek az érfalhoz való tapadását kúpszerű kiszélesedéssel; ezt a nekiilleszkedést «pies perivasculares ó apparatos chupadores» névvel illeti. A HELD-féle membr. lim. perivascularis tekintetében CAJAL igen óvatosan nyilatkozik, mondván, hogy készitményei egyszerűen a gliakúpoknak vagy talpaknak az ér körüli plasmában való besülyedését mutatják, mi mellett nem állapítható meg, hogy ez a perivascularis plasma egy már fennálló szerkezeti részlet, avagy a VIRCHOW-ROBIN-féle nyirok-ürökben levő fehérjeszerű anyagnak alvadéka-e. A gliasejteknek az ereken kívül még az idegsejtekhez is benső viszonyuk van; így előfordulnak ezekhez szorosan simulva mint alap-sejtek, valamint az idegsejt bármely más pontjához, továbbá a dendritekhez is illeszkedve, utóbbiakhoz a glianyujtványok segélyével simulhatnak. Ilymódon az idegsejtek és dendritjeik valóságos gliás borítékba kerülnek.

CAJAL módszerének egyik előnye, hogy a gliasejtek alakját igen pontosan tudja feltüntetni s így hat formát különböztet meg: 1. a HELD által tanulmányozott felszínes vagy *marginális gliasejteket;* 2. a MARTINOTTI-féle egy irányban *sugaras elemeket*; 3. a RETZIUS-féle *üstökös sejteket;* 4. az ANDRIEZEN-féle *perivascularis elemeket;* 5. az *ikerastrocytákat* és 6. a *perineuronalis satellitákat.*

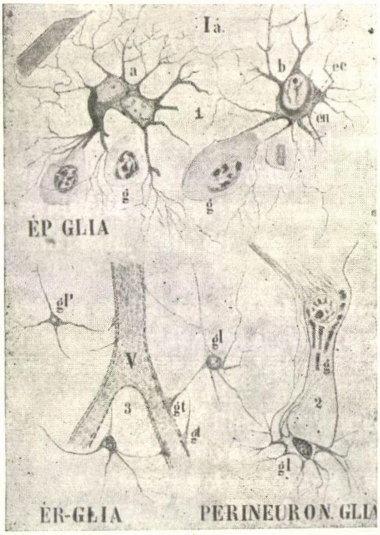
A protoplasmás gliasejtek a mirigyes sejtek szerkezetéhez hasonlók, a mennyiben a sövényes spongioplasmában kialakult szemcsék, *gliosomák* vannak belehintve, melyeknek nagysága, száma és festhetősége a működési állapottól függ. Az igen számos és alakilag igen változatos, ágazatos gliasejteken kívül még nyujtványok nélküli, úgynevezett *adendrites testecskéket* is lehet megkülönböztetnünk, melyek CAJAL szerint részben mesodermás, részben ektodermás, vagyis gliás természetűek, melyek mint perivascularis satelliták a szürke állományban és mint a polártestecskék a fehér állományban fordulnak elő.

Az ember nagyagyának kérge CAJAL szerint protoplasmás astrocytáinak rendkívüli nagy számában különbözik az állati kéregtől, miből folyik, hogy a diffusus gliaplexus is sokkal dúsabb az emberi kéregben; végül sajátsága az emberi kéregnek, hogy gliasejtjei rostos, úgynevezett RANVIER-WEIGERT-typusú *sejtekké* tudnak átalakulni. CAJAL vizsgálatai szerint a protoplasmás gliasejtek is a velőcső spongioblastáiból keletkeznek, tehát kihelyezett epithelsejtek, melyeknek megvan az a sajátságuk, hogy fejlődésük közben vándorolni tudnak.

II. Az ép neurogliáról saját vizsgálatok alapján.

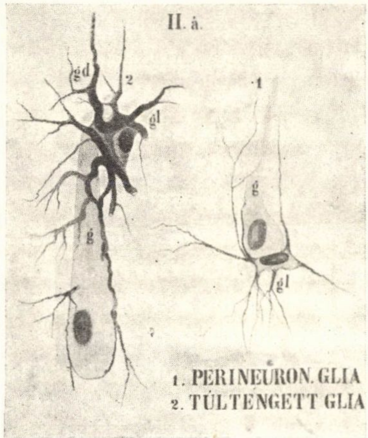
1. CAJAL sublimatos aranyozó impraegnatiója segélyével nyert készítményeken az emberi nagyagy-kéreg középső és mély rétegeinek gliasejtjeit igen könnyen lehet kimutatni. Ezek tisztára protoplasmás természetű astrocyták alakjában (l. I. ábra, 1.) találhatók, melyek a felszínesebb rétegekben rövidebb sugarúak, a mély rétegekben hosszú sugarú dendritekkel birnak; a nyujtványok a tér minden irányában dichotomiás elágazódást mutatnak, mi által hamarosan elvékonyodnak. E finom gliaágazat az idegsejtek felszínéhez is fut és oly szorosan simulhat a sejttesthez, valamint a nyujtványokhoz, hogy valósággal betokolja a dúczsejtet. A gliasejt ez alakja a *perineuronalis glia*. (L. I. ábra, 2. és II. ábra, 1.) A sejttest a CAJAL által leírt egynemű, magkörüli endoplasmán kívül a felszínes, erősen szemcsés *ektoplasmát* mutatja (l. I. ábra, *b*, *ec*, illetőleg *en*), melynek szemcséi átmennek a dendritekbe és azokat véges-végig elfoglalják. — Eme gliosomáknak nevezett plasmaszemcsék az aranytól barnás színűek lesznek és jelenlétük által gyakran

egymagukban jelzik a gliasejtnek és nyujtványainak jelenlétét, mivel a nem-szemecskés plasma nem színeződik mindig olyan bibor-veresre, mint azt CAJAL mondja, hanem sokszor igen hal-



I. ábra. 1 = *ép glia* az emberi ammonszarvból. *a*, kettős magú protoplasmás gliasejt, melynek teste, főleg dendritjei gliosomákkal dúsan el vannak lepve; a dendritek sokszoros dichotomia folytán finom ágas felbomlást mutatnak, mely egyrészt az ammonszarv nagy loborsejtjeit (g, g) szorosan körülfonja, másrészt az érfalhoz illeszkedik. *b*, egymagú protoplasmás gliasejt, melynek teste a mag körüli endoplasmából (en) és a környéki ektoplasmából (ec) áll. — 2 = *perineuronalis glia* az emberi ammonszarvban: gl gliasejt, melynek nyujtványai g idegsejtjét valósággal bekeretezik. — 3 = *érglia*, mutatja a gliasejteknek a vérerekhez való viszonyát. *v* = vivőér, *gl* = gliasejtek, *gt* = gliatalpak, melyek az ér felszínén levő szemcsés hártyához (membrana gliæ perivascularis) illeszkednek, illetve ezzel egybeolvadnak, miközben a gliatalpaknak legyezőszerűen széttérő gliosomasorai a gliás érhártya szemcséibe mennek át. — *gl'* = gliasejt, melynek felső nyujtványa talpasan, alsó nyujtványa hosszantilag, talpképződés nélkül tapad az érhez (g).

ványan. A sokszoros elágazódás folytán igen megvékonyult dendritek a szürke állományban igen sűrű fonatot alkotnak. CAJAL diffusus gliaplexusát, a melyről a magam vizsgálatai alapján a spanyol buvár megállapításaival egyezően azt kell mondanom, hogy anyagi összeolvadásokat, összenövéseket sehol sem mutat, vagyis nem ismerhető fel a HELD és SPIELMEYER által kimutatott gliareticulum. Úgy látszik ez chemiailag más természetű képződés, de lehetséges az is, hogy mivel gliosomákkal nem bir, a szerfelett halovány színeződésnél fogva fel sem tünik. A CAJAL-féle szétterjedő gliás fonat igen szépen látható a legmélyebb kéregrétegekben, főleg az ammonszarvak loborsejtes rétegében,



II. ábra. 1 = *perineuronalis glia ;* az elülső mozgató tekervény középnagy idegsejtjének alapjához (*gl*) gliasejt kehelyszerűen illeszkedik. — 2 = *túltengett gliasejt* (*gl*) az emberi ammonszarvban idiotaság egy esetében; *gd* gliadendritek, melyek rendkívül megvastagodtak és a sejttesttől való elkülönülés kezdetét mutatják; *g* idegsejt.

mivel az itt levő astrocyták a legtestesebbek, nyujtványaik is hatalmasak. Ezeken a nagy sejtpéldányokon az astrocyták finomabb morphologiája könnyen tanulmányozható és az ily módon nyert eredmények alapján végérvényesen kimondható, hogy a WEIGERT által electiv festőmódszerével nyert megállapítások a protoplasmás gliára nem állanak. WEIGERT vizsgálatai főleg a gliasejt nyujtványainak a sejttesthez való viszonyában csúcsosodtak ki és ezeket a következő három tételben foglalta össze: 1. A neuroglia-rostok, melyeket mindeddig a DEITERS-féle sejtek nyujtványai gyanánt fogtak fel, a protoplasmával nem azonos képletek, hanem ettől anyagilag egészen különbözők. 2. Ez a chemiai különbség a nyujtványok részéről ezek egész kiterjedésében, tehát a sejtmag körül is megnyilvánul. 3. A gliasejteknek legtöbb úgynevezett nyujtványa már csak azon oknál fogva sem nyujtvány, mert a sejttesten csak átfutnak önállóságuk, elkülönültségük megtartásával olyképen, hogy a mag szomszédságában egy ívet vagy hurkot alkotnak; ha e független gliafonalak nyujtványok volnának, akkor a magkörüli plasmával össze kellene olvadniok. — «Mit einem Worte: Es handelt sich hier gar nicht um Fortsätze, sondern um Fasern, die vom Protoplasma vollkommen differenziert sind.»[1] Ezek után WEIGERT nyomatékkal utal arra, hogy glianyujtványok az emberi idegrendszerben csakis a magzati életben léteznek, vagyis csakis ebben a korban áll a neuroglia gliasejtekből és glianyujtványokból. «Im ausgebildeten normalen Zustande besteht die Neuroglia aus Zellen und ausserdem aus Fasern, von denen die letzteren in räumlicher Ausbreitung so kolossal überwiegen, dass man sie als den wesentlichen Bestandteil der Neuroglia ansehen muss.» (L. c.)

WEIGERTnek ez állításai készítményein teljes beigazolást nyernek, mert ezeken az astrocyták csupán magból s e körül csoportosult gliafonalakból állanak, mely utóbbiak a mag felett egyenesen vagy hurokszerűen meggörbülve futnak; *protoplasma e készítményeken nem is látható.* Szintúgy a gliafonalaknak dichotomiás elágazódása sehol sem észlelhető. Ez alapon azután érthető, hogy WEIGERT a DEITERS-féle gliasejtekről mint obsolet elemekről «Astrocyten im alten Sinne» beszél és ezekkel szembeállítja az ő magkörüli astrocytaszerű csoportosulást mutató gliarostjait (astrocyten-*ähnliche* Gruppierung der Fasern um die Kerne herum).

Manapság nem nehéz kimutatni, hogy WEIGERTnek ezek az annak idején alapvető tényeknek tetszett megállapitásai az ő electiv festőmódszerének egyoldalú, részleges eredményei. Kitünik

---

[1] WEIGERT, CARL: Beiträge zur Kenntniss der normalen menschlichen Neuroglia. 1895.

ez azonnal, a mint összehasonlítjuk a WEIGERT festésével nyert kéregmetszeteket a CAJAL impraegnatiójával előállított kéregmetszettel. Ekkor szembetünő, hogy WEIGERT festése éppen az astrocyták feltüntetésében nem csupán fogyatékos, hanem egyszerűen hasznavehetetlen módszer, mert az emberi kéregnek középső és mély rétegeiben szinte hemzsegő astrocytáiból semmit sem mutat, tehát nem is tulajdoníthatunk e módszernek jelentőséget a neuroglia astrocytás képleteinek elemzésében. WEIGERT meghatározásai az astrocyták tekintetében idejüket multák, el nem fogadhatók és e kérdésben CAJAL módszere az, mely szabatos felvilágosításokat tud adni.

Ezzel szemben azonban tagadhatatlan, hogy CAJAL módszere is fogyatékos, mert a neurogliának rostos elemeit, legalább ép viszonyok között, nem tünteti fel. E tekintetben igen tanulságos a WEIGERT és CAJAL szerint előállított kéregkészítményeknek összehasonlítása. CAJAL szerint a kéregben a középső és mély rétegekben foglalt számtalan protoplasmás gliasejt, ezek gazdag dendritgallyazata, illetőleg ezek legfinomabb ágacskáiból előállott diffusus gliaplexus látható, míg a zonális rétegben legfeljebb itt-ott egy árnyszerűen feltüntetett gliasejt, egyébként pedig egy színezés nélküli szemecskés, szivacsos állomány észlelhető. Ezzel szemben WEIGERT szerint a kéregben a CAJAL módszerével meghatározást nem nyert felszínes kéreg szerkezete bontakozik ki mint typusos, a pia mater alatt közvetlenül fekvő, ferdén tangentiális irányú szorosan összeszövődő rostokból álló valóságos kéregréteg, melynek vastagsága a kor szerint 0.003—0.03 mm. között váltakozhatik, a melyből túlnyomóan ferdén sugaras irányban rosttömegek hatolnak a mélységbe, eleinte még pamatonként, melyek a kéreg mélysége felé mindjobban szétszóródnak egyes fonalakra, úgy hogy végül a nagyagy kérgének mélyebb rétegeiben csak itt-ott látható egy kis rostocska, legtöbbnyire nagy kiterjedésben még ilyen sem. Nyilvánvaló ebből, hogy a két módszer közül mindegyik mást tüntet fel. CAJAL módszere pompás *gliasejt-módszer*, WEIGERT festése igen finom és tetszetős *gliarost-módszer* lévén, az előbbi az astrocytákat, az utóbbi a gliarostokat teszi láthatóvá; e két módszer egymást kölcsönösen kiegészíti, mindegyik önmagában egyoldalú és hézagos. CAJAL *impraegnatiója a gliaplasmának,* WEIGERT *módszere a gliarostoknak specificuma.*

Mindezek után ez idő szerint mint végleges megállapitások a következők tekinthetők:

a) WEIGERT állításaival szemben az emberi neurogliának *egyik lényeges, nagymennyiségű alkotórésze* a DEITERS-féle protoplasmás gliasejtek, melyeknek valóságos sejttestük és ebből származó nyujtványaik vannak; ez utóbbiak dichotomia útján elvékonyodva, a szürke állomány szétterjedt gliafonatát teszik ki.

b) WEIGERT módszere csupán a gliarostok és a rostos gliasejtek kimutatására való, tehát kitünően alkalmas a kéreg felszines rétegei gliájának előállítására, a hol gliarostok nagy tömegben vannak, de képtelen a protoplasmás gliasejtek kimutatására.

c) A HELD-féle gliareticulum, mely sem WEIGERT, sem CAJAL módszerével nem mutatható ki, úgy látszik, az emberi neurogliának harmadik része; ez az az állomány, mely az idegsejtek, a dendritek és az erek között az idegelemek levonásával fennmaradó tért kitölti.

A DEITERS-féle astrocyták ezek szerint a kéreg mélyebb rétegeinek lakói, a felszínes rétegekben, illetőleg a zonális lemezben rostos gliasejtek foglaltatnak. Az előbbieknek az utóbbiakhoz való viszonyát a kóros glia világítja meg, tanítván azt a tényt, hogy a protoplasmás gliasejtek átalakulhatnak rostos gliasejtekké. Erről a kóros neuroglia tárgyalásakor lesz kimerítőbben szó. Már ebből látható, hogy a plasmás és rostos gliasejt között csupán fejlődési, tehát fokozati különbség van, de tagadhatatlan, hogy alakilag és működésileg a két fajta sejt nem teljesen azonos.

2. CAJAL módszerének nagy hasznát a gliának az erekhez való viszonyának tanulmányozásában vehetjük. (L. I. ábra, 3.) Bárha már WEIGERT módszerével is lehet látni az erek körül a gliarostoknak bizonyos fokú tömörülését, mégis GOLGI és HELD módszerén kívül éppen CAJAL módszere alkalmas arra, hogy segélyével a neuroglia és az érrendszer egymáshoz való morphologiai viszonya megállapíttassék. Tudvalevő, hogy HELD kutatásainak köszönhetjük azokat a pontosabb ismereteket, melyek

a glianyujtványoknak az erek falával való kapcsolatba jutására vonatkoznak. Már GOLGI utalt sublimattal való impraegnatiós módszere alapján arra, hogy a glianyujtványok vagy közvetlenül, vagy kúpszerű kis kiszélesedéssel («Gliafuss» a német szerzők szerint) az ér falához tapadnak. E leíráshoz HELD joggal jegyzi meg, hogy az nagyon is sommás, mert valójában éppen az ő vizsgálatai e tekintetben igen fontos és érdekes részleteket derítettek ki. — Ezek közül elsősorban azt említjük, hogy az agyvelőnek úgy külső, mint belső felszínén az érvivő kötőszövettel szemben a glia valóságos határt alkot egy hártya képében, mely mint *membr. limitans gliae perivascularis* az ektodermás ideg- és gliaszövetet élesen elválasztja a mesodermás érrendszertől. A neurogliának az a része, mely az erekkel határos, HELD szerint *glia marginalis*-nak nevezhető, és áll egyrészről az említett határhártyából, másrészről egymás mellé és fölé, illetőleg alá rendezett kamarácskáknak rendszeréből: ezek a *gliakamarák*. Ez utóbbiak az ér felszínéhez többé-kevésbé merőlegesen irányulnak, egymástól hártyás falak segélyével elkülönülnek, a melyek összetapadnak és a membr. lim. perivascularisba mennek át. Az érfalhoz sugarasan húzódó gliarostok már most e gliakamaráknak vagy tengelyében feküsznek, vagy pedig a kamara oldalfalához tapadnak. A kamarákban finom protoplasmás fonalak vannak kifeszítve, melyek részben hálózatosan, részben sugarasan helyezkednek el és a melyekhez szemecskék tapadnak, egyébként a kamara folyadékkal van kitöltve. A gliatalpak a membr. limitanson egyszerűen megszünnek, utóbbi alatt az intima piae (a HELD-féle m. limit. accessoria), egy szerfelett vékony hártyácska fekszik és csak ezután következik az ér adventitiája.

HELDnek e megállapításai, főleg a mennyiben azok a gliás határhártyára vonatkoznak, nem részesültek általános elismerésben, főleg NISSLnek voltak kórtani szempontból kifogásai, melyek szerinte e hártya jelenléte ellen szóltak. Ilyenek: 1. a gliarostoknak kóros viszonyok közt a pián való átnövése; 2. új gliarostoknak képződése a régieken; 3. kisérletes agyhártyagyulladásnál nem áll elő a lobos sejteknek az agyfelszín és a pia közti torlódása, mert ezek tudvalevően azonnal behatolnak az agyállományba.

Készítményeim alapján állíthatom, hogy a HELD-féle gliás érhártya létezése CAJAL módszerével meggyőzően mutatható ki. A plasmás gliasejteknek dendritjei lényegileg kétféleképen irányulnak az érfalhoz: vagy merőlegesen, illetőleg ferdén, vagy pedig a nyujtvány hosszirányban simul hozzá és ekkor észrevétlen tünik el a falban. (L. I. ábra, 3.) Az előbbi esetben a gliadendrit az érfal közvetlen közelében talp- vagy kúpszerűleg kiszélesedik, miért is a plasmás glianyujtványnak ezt a részét *gliatalpnak* («Gliafuss») szokás nevezni, mely gliosomákat épp úgy tartalmaz, miképen a nyujtványok. De a talpak glioszemecskéi meghatározott elrendeződést mutatnak, a mennyiben legyezőszerűen széttérő szemecske-sorokban helyezkednek el és látszólag ezek feküsznek az ér falán, illetőleg az adventitián. Valójában a gliatalpak gliosomái az adventitián fekvő membr. limitanshoz illeszkednek, illetőleg ezen rajta feküsznek, mit meggyőzően oly helyeken lehet látni, a hol a gliatalpak az adventitiáról valamely oknál fogva leemelődtek, mi által egy úgynevezett circumadventitiás hézag jött létre. Ily esetben igen jellemző körülmény, hogy a leemelődés folytán mindenkoron a gliatalpak egész sora távolodik az adventitiáról, annak bizonyítékául, hogy e talpakat egy közös tapasztó anyag, mely a membr. limitans perivascularisnak felel meg, tartja össze. E leveles leemelődése a gliatalpaknak nézetem szerint éppen az által történhetett, hogy ezek egy hártyához tapadnak. Ezt a hártyát ily esetben mint élesen meghúzott, világos barnára színezett vonalat lehet látni, a melyen a gliatalpak gliosomái szétterülnek. E viszonyokat meggyőzően a lapszerűen hosszanti érmetszeten lehet látni, a mikor az ér felszínén látható a gliatalpak szemecskéi által alkotott szemecshalmaz, mely látszólag az adventitián nyugszik. Helyesen úgy kell magunknak e viszonyokat elgondolnunk, hogy ez az epivascularis gliosomás halmaz a gliás érhártyán terül el, és minthogy a gliosomáknak elhelyezkedése csoportosan és csikszerűen történik, azért is az ér hosszfelszínéről nézve a membrana limitans gliæ perivascularis szemecskecsoportok által csíkolatossá tett igen vékony hártya, melyekből az egyes gliatalpak, illetőleg nyujtványok tüskésen kimeredeznek.

A jelzett viszonyok alapján megállapítottnak tekinthető, hogy a legkülső érhártya, az adventitia nem lép a gliatalpakkal közvetlenül érintkezésbe, hanem csakis a jelzett gliás érhártya közvetítésével; ez utóbbinak rendkívüli finomsága érthetővé teszi, hogy oly esetekben, midőn a gliás hártya szorosan nekisimul az adventitiának, előáll az a csalóka kép, mintha a gliatalpak közvetlenül az adventitián nyugodnának.

Igen fontosak HELDnek e gliás határhártya átengedő képességére vonatkozó észleletei, a mennyiben közvetlen megfigyelés alapján azt tapasztalta, hogy egyes erős szemcséződés által kiváló gliasejtek a syncytialis kapcsolatból kiválhatnak, amœboiddá lesznek és plasmájuknak egy pseudopodiumos kicsúcsosodásával a gliás határhártyát átdöfve, bejutnak a circumadventitiás ürbe. Ebből az észlelésből kitünik, hogy a gliás határhártya semmiképen sem tekintendő áthághatlan torlasznak és ez okból NISSLnek fentemlített érvei a határhártya létezése ellen megdőlnek.

Ezek alapján saját észleléseim szerint is azt kell mondanom, hogy az emberi nagyagy kérgében az erek felé a glia elhatárolódik a membr. lim. gl. perivascularis révén, és minthogy az erek mesodermás, a glia pedig ektodermás képződmény, azért is a jelzett hártyát úgy kell felfognunk, mint a mely a két csíralevél között éles határt szab meg.

Igen érdekes, hogyan nyilatkozott WEIGERT electiv festése alapján a gliának az erekhez való viszonyáról. — «Endlich zeigen unsere Fasern niemals etwas von jenen konischen oder flaschenförmigen Erweiterungen, wie sie von Golgipräparaten so vielfach geschildert werden. Der Ansatz oder «Zellausläufer» an Gefässumgrenzungen, an freien Oberflächen überhaupt soll nach dieser Verbreiterung enden. An unseren Präparaten sind diese Ansätze in keiner Weise verdickt, die Faser ist bis zu ihrem Ende so schlank und gleichmässig, wie in ihrem früheren Verlaufe. Da nun unsere Färbung eine elektive ist, so sind die mit ihr gewonnenen Resultate jedenfalls die massgebenden. Man muss demnach annehmen, dass sich bei der Golgischen

Methode irgend etwas mitfärbt, was nicht zur Faser gehört, resp. was eine andere chemische Beschaffenheit, wie diese besitzt.» (l. c.) WEIGERT e leírásából tehát kitűnik, hogy módszere épen a glia vascularis irányában alkalmatlan volt, mert nem tüntette fel a neurogliának ezt az igen fontos részét.

III. A kóros neurogliáról saját vizsgálatok alapján.

A neuroglia kóros viszonyok között lényegileg kétféle tevékenységet fejt ki; egyrészről rendellenesen megnövekszik és szaporodik, másrészt az idegelemek pusztulásával a szétesési termékeket szétbontja és eltakarítja. Ez utóbbi folyamatnak adta ALZHEIMER az «Abbau» elnevezést, mely alatt a magasabb összetételű szerves vegyületek egyszerűbbekké válnak.

Lássuk elsősorban a neurogliának kóros túltengését, mely úgy az egyes gliaelemek megnagyobbodásában (hypertrophia), mind pedig azok megszaporodásában (hyperplasia) nyilvánul.

WEIGERT utalt arra a fontos körülményre, hogy a glia mindazokon a helyeken, a hol idegszövet tönkremegy, pótló módon burjánzik («Ersatzwucherung»); ez a viselkedése teljesen emlékeztet a kötőszövet hasonló magatartására, mely fajlagos szövet pusztulása esetén hegszövetet alkot. E viselkedése a neurogliának indította WEIGERTet arra, hogy a neurogliát intercellularis állománynak tekintse, a milyen a kötőszövet, a hol a rostok a sejttesttől idővel teljesen elkülönülnek, önállók lesznek, miként ez a neuroglia sejtjeinek nyújtványaival is történik. SCHULTZE MIKSA meghatározása szerint az intercellularis állományok módosított sejtanyagok, melyek a sejttesttől függetlenek lettek, úgy hogy végül azokhoz tartozóknak sem tekinthetők, S minthogy a neuroglia-sejtekből nyujtványok kerülnek ki, melyek a sejttesttel azonos állományúaknak nem tekinthetők, mert hiszen egészen elkülönültek a sejttesttől, és végül, mert éppen úgy burjánoznak a gliarostok, mint a kötőszövet kóros viszonyok között: azért is WEIGERT *a neurogliát nem-ideges természetű intercellularis állománynak definiálta.*

A neurogliának burjánzása Bielschowsky[1] szerint akként történik, hogy az eredetileg igen gyenge gliasejt teste kezd megnagyobbodni, úgy hogy ezáltal létrejő a typusos astrocyta, melynek egyes nyújtványai megkeményedvén, létrejönnek a Weigert-féle gliarostok. Egyes esetekben (gyors lefolyású elfajulásoknál) a gliamagvak élénk szaporodása mutatkozik részben direct, részben indirect megoszlás következtében és így számos mag keletkezik, miközben a sejttest és a nyújtványok megduzzadnak, megvastagszanak. Ilyképen létrejönnek az úgynevezett *monstregliasejtek*, melyek a sarjadzási szövet óriássejtjeire emlékeztetnek, melyekből azután dús rostképződés indul ki. Összegezve tehát: úgy a gliamagvak, mint a gliarostok részéről igen erélyes burjánzás jelentkezik, miközben a gliarostok mindjobban elkülönülnek az anyasejttesttől és így jő létre végül az anyasejtektől egészen különálló intercellularis állomány, a gliarostok. De ki kell emelnünk, hogy a túltengő astrocyták sokszor nem érik el a Weigert-féle gliasejtek stadiumát, hanem megmaradnak a protoplasmás astrocyta stadiumában és ily pontokon nem is áll elő a gliarostképződés. A túltengett és főleg nem rostos gliaszövet elérvén túltengésének bizonyos fokát, már most visszafejlődésre mutat hajlandóságot, mely a túltengett gliaszövet elfajulásában és szétesésében nyilvánul.

A mi már most Alzheimer[2] alapvető vizsgálatait a gliareactio tekintetében illeti, ő ennek két féleségét különböztette meg, a szerint, a mint az ekto- és mesoderma együttesen pusztul el, avagy az ektoderma egymagában.

Az ekto- és mesoderma együttes pusztulására példa az agyvérzés okozta roncsolás, midőn nem csupán az idegszövet, hanem az ektodermás neuroglia is helyileg tönkremegy. Ily esetben a *kötőszövetből származó sejtek* azok, melyek a szétesett

---

[1] Bielschowsky M.: Allgem. Histologie u. Histopathologie des Nervensystems. Handb. d. Neurologie I. 1910.

[2] Alzheimer, A.: Beitr. zur Kenntniss der patholog. Neuroglia und ihrer Beziehungen zu den Abbauvorgängen im Nervengewebe. Histologische und histopathologische Arbeiten etc. III. B. 3. Heft, 1910. — Über Abbauvorgänge im Nervensystem. Zeitschr. f. d. ges. Neur. u. Psych. Ref. 8.

szöveti részeket szétbontják és eltakarítják. *Ez a szöveti szétbomlás mesodermás typusa* ALZHEIMER *szerint*, mely esetben a két csiralevél között levő határhártya is elpusztul.

Más módja a gliareactiónak köszönt be akkor, hogyha az ekto- és mesoderma közti határhártya megmarad; ilyen esetben a szöveti szétbomlás ektodermalis typusa áll elő ALZHEIMER szerint, melynek szerinte három formája van. Az egyik a *gliogen szemcsesejtek útján történő szétbomlás*, mire példa a másodlagos kötélelfajulás és a sokfoltú keményedés, mely esetekben tudvalevően a neuroglia nem lett elroncsolva. A másik forma az úgynevezett *amoeboid gliasejtek útján történő szétbontás;* ezek rövid életű képletek, melyeknek főfeladata abban áll, hogy a szétesett idegszövetet más anyagokká változtatják, melyek azután mesodermális sejtekbe bejutván, eltakaríttatnak. Ilyen amoeboid gliasejtek működését látjuk a dementia præcox, az epilepsiás és paralysises rohamok, a sepsises deliriumok kapcsán. Végül a harmadik forma abban áll, hogy nem állanak elő új gliasejtformák, hanem *a meglevő gliasejtek végzik a szöveti szétbontást*, szétesési termékek eltakarítását és vezetik a hulladékot az erek körüli ürökbe.

E kórszövettani adatok előrebocsátása után áttérek a neurogliának CAJAL módszerével kideríthető elváltozásaira, hangsúlyozván, hogy e módszer csak a protoplasmás és rostos gliasejtekre nézve ad felvilágosítást, tehát az amoeboid és gliogen sejtek működése itt tekintetbe nem jöhet, mert ezek vizsgálata csak az ALZHEIMER által javasolt különleges módszerekkel történhetik.

Saját vizsgálataim, melyek a kóros protoplasmás neurogliára vonatkoznak, oly anyagon történtek, mely a következő agybántalmakat foglalja magában: dementia paralytica (3 eset), epilepsia (4 eset), idiotismus (1 eset), dementia senilis (10 eset), dementia arteriosclerotica (2 eset). Mindezekben az esetekben a következő agytájak kerültek vizsgálat alá: *a)* középponti tekervények, *b)* domborulati homloktekervény, *c)* alapi homloktekervények, *d)* ammonszarv, *e)* első halántéki tekervény, *f)* alsó fali lebeny, *g)* ék (cuneus). Az e helyekről származó metszeteket első sorban

CAJALnak glia-impraegnatiós módszerével dolgoztam fel.[1] de összehasonlitás czéljából más eljárásokat is igénybe vettem, ilyen a rostos glia feltüntetésére szolgáló heidelbergi módszer, a NISSL-féle idegsejtfestés, a BIELSCHOWSKY-féle fibrillum-impraegnatio, a WEIGERT-WOLTERS-féle velőhüvelyfestés, a lipoid feltüntetésére szolgáló HERXHEIMER-féle skarlátveres-festés, végül az átnézetet adó VAN GIESON-féle festés. Vizsgálataimnak gerinczét a CAJAL-féle módszerrel nyert eredmények alkotják, megjegyezvén, hogy pontosan CAJAL eljárásaihoz tartottam magamat; e helyen lehetetlen elhallgatnom azt a jól eső érzést, a melyet az e módszerrel való dolgozás absolut megbízhatóságánál, valamint könnyű kezelhetőségénél fogva a vizsgálóban kelt. Csak szem előtt kell tartanunk, hogy WEIGERTnek electiv gliafestése nem egyszer kudarczczal jár, hogy egyéb gliafestések is mennyire változó eredményeket adnak és teljesen igazolva van ez a subjectiv megjegyzés. CAJAL módszere az első könnyen és biztosan sikerülő módszere a protoplasmás glia vizsgálatának; fogyatékossága mindenesetre, hogy nem tudja a rostos gliát ugyanolyan szabatossággal feltüntetni. Igaz ugyan, hogy a kóros körülmények között megjelenő rostos glia a CAJAL-készítményeken is eléggé szembeötlő, de tagadhatatlan, hogy e tekintetben CAJAL módszere a WEIGERT-féle vagy a heidelbergi festés elegantiájával és biztosságával semmiképen sem vetekedhetik.

A neuroglia kórszövettanát előbb általános, azután különleges szempontból fogom tárgyalni.

A) A neuroglia általános kórszövettanáról.

a) *Gliahypertrophia.*

A protoplasmás gliaelemek megnagyobbodásánál fogva a *sejttest* az eredeti térfogatának többszörösét is elérheti. Ily módon sejttestek válhatnak láthatóvá, melyek rendes viszonyok között parányi plasmájuknál fogva csak mint «gliamagvak» szerepelnek, a mi főleg a kéreg felszínes rétegeiben, a lamina zonalis-

[1] CAJAL, R.: Eine neue Methode zur Färbung der Neuroglia. Neurolog. Ctrbl. 1914.

és granularis externában jut érvényre. A protoplasmás glia szemcséi tömören és sötéten impraegnálódnak és túlnyomóan a megnagyobbodott sejttest szélein helyezkednek el, míg a mag körüli rész világosabb, alig szemcsés. A megnagyobbodás a sejttest eredeti alakját is jobban juttatja érvényre, úgy hogy a kéreg különböző rétegeinek és a fehér állománynak protoplasmás gliasejtjei a forma tekintetében kényelmesen tanulmányozhatók. Szépen tünnek fel a felszínes rétegek tüskés gliasejtjei, a mélyebb rétegek typusos astrocytái, a fehér állomány felfuvódott, szinte gömbszerű gliasejtjei. A sejtmag gliahypertrophia esetén nagyság tekintetében nem mutat elváltozást, de elveszti a rendes viszonyok közt mutatkozó áttetsző mivoltát és tömören, egyenletesen szineződik, miáltal eltünik a mag szerkezete, vagyis láthatatlanná válik a chromatin és a magvacska. De úgylátszik, hogy a magnak ez az egyneműsége nem mindig a kóros viszonyoktól való, hanem az aránylag erősebb imprægnatio következménye is lehet, mert túltengett, de szerkezetileg ép protoplasmás gliasejtek is mutathatnak structurált magvat. A mag szerkezeti viszonyainak megítéléséhez mindig gyengébb (6 órás) imprægnatio és vékony metszetek szükségeltetnek. Egészben véve azt mondhatjuk, hogy az individualis gliasejttúltengés alkalmával a protoplasma játszsza a főszerepet, a mag mindaddig, míg proliferatiós jelenségek nem mutatkoznak, passiv marad.

Figyelemreméltó a protoplasmás gliasejtek nyújtványainak viselkedése. Ezek is megduzzadnak, miáltal az eredeti átmérőt háromszorosan, sőt többszörösen felülmúlhatják, mi mellett érdekes, hogy elvesztik a rendes viszonyok között jelentkező félig merev, félig hajlott külsejüket, és ellenkezőleg feltünően kanyargós, hullámos lefutásúak lesznek. A megvastagodás folytán másod-harmadrendű ágak oly körfogatot nyernek, mintha elsőrendűek volnának. (L. II. á. 2.) Feltünő ezekben a *gliosomák csíkolatos elhelyezkedése*, a mennyiben párhuzamos, szemcsézett fonalsorokban rendeződnek el; ily módon fibrillás szerkezetűnek látszanak a főbb glianyújtványok. Ilyen külsőt látott Spielmeyer[1] is hypertrophiás gliasejteken Weigert elektiv fes-

[1] Spielmeyer, W.: Von der protoplasmatischen und faserigen Stützsubstanz des Zentralnervensystems. Arch. f. Psychiatrie, *42*.

téséve; szerinte e párhuzamos szemecskesorok később összeolvadnak valóságos fonalakká, *gliafibrillumokká*, a mint ő nevezi. Ezeket az egyik hypertrophiás gliasejtből a szomszédos gliasejtekbe tudta követni, miáltal több gliasejtnek egy folytonosságba (continuumba) való összefoglalása áll elő e gliafibrillumok útján. Utóbbiakból gliarostok lesznek, mire az a körülmény is utalt, hogy egyes ilyen gliafibrillumok a túltengett glianyújtványról lepattogzanak, leválnak és ekkor az önálló gliarost benyomását adják. Ezek a gliaszemcsékből kialakult gliafibrillumok a sejttest körzeti részén a legfejlettebbek, itt szoktak leválni, de azért a fejlődés későbbi szakában a középponti részben is kialakulhatnak. Miután SPIELMEYER szerint a nagy, túltengett gliasejtek egymással többszörösen anastomozálnak, azért is a bennük levő gliafibrillumok is *közösek*, és mivel semmiképen sem dönthető el, vajjon az egymással összeolvadt gliasejtek melyikéhez tartoznak a fibrillumok, azért is ezeket közöseknek kell tekinteni. Ez okból szól SPIELMEYER a *gliarostok pluricellulás származásáról.*

Ezekkel a vizsgálati eredményekkel a magam észleletei nem egyeznek, oly értelemben, hogy a CAJAL-féle imprægnatiós készítményeken mégoly tekintélyes hypertrophia esetén is ezt a SPIELMEYER által leírt összeolvadását a gliasejteknek egy tagba, egy komplexumba *sohasem* láttam, valamint, hogy a WEIGERT gliafestésével igen rokon heidelbergi gliafestéssel sem tudtam túltengett gliasejteken ilyesmit felfedezni. Ez pedig annál feltünőbb, mert hiszen a fentjelzett kóros anyagon a gliahypertrophiának klasszikus példáit számtalanszor láttam, tehát különösnek tetszhetik, hogy több hypertrophiás gliasejtnek SPIELMEYER-féle összeolvadását, a mennyiben ez valóban létezik, ne észleltem volna. *A glianyújtványoknak hypertrophiája engem már kezdettől fogva éppen abból a szempontból érdekelt legjobban, vajjon a* HELD *és követői által állított reticulum nem fog-e kóros megvastagodása folytán jobban szembeötleni?* És e tekintetben a leghatározottabban állíthatom, hogy CAJAL imprægnatiójával a kórosan túltengett gliadendritek durvább, nagyobb arányaik daczára sehol sem mutatnak a SPIELMEYER leirásaihoz fogható viszonyokat. Azt kell tehát mondanom, hogy a CAJAL módszerével kimutatható kórszövettani viszonyok CAJALnak épszövettani leirását a szétterjedt gliafonat tekintetében, mely tehát ellentmond a HELD-féle gliareticulumnak, teljesen beigazolták.

SPIELMEYER adatai közül a gliosomáknak párhuzamos hosszsorokban való elrendeződését készítményeimen kiterjedten megtaláltam, és ki kell emelnem, hogy e szemecske-sorakozás következtében egyes nyújtványoknak a sejttestben való elhatárolódása vált láthatóvá, a mennyiben a dendrit szemecske-fonalai a sejttest szélén tovább húzódva, a szomszédos gliadendritbe behatoltak. Így azután előállott a két átellenes dendritnek ívalakú összeolvadása, mely jelenségben az alább leirandó gliarostképződés első nyomát lehet felismerni.

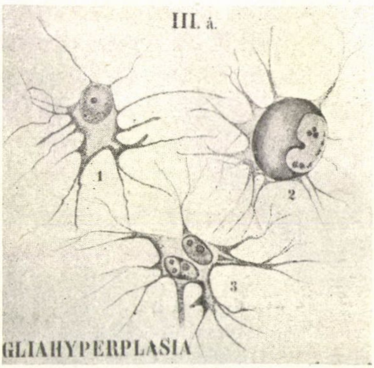
A gliasejt hypertrophiájában résztvesznek a *gliatalpak* is, a mi általánosságban mondva, ugyancsak ezeknek duzzadásában, megvastagodásában nyilvánul meg. Az eredetileg igen karcsú, finom kúpok e megvastagodás folyamán elvesztik legyezőszerűen széttérő gliosoma-soraikat és szétterjedten szemcséssé válnak; a szemcsék olykor nagyobbnak, tömören impraegnáltnak s igy telt kávébarna szinünek tűnnek fel. E viszonyokat hosszantilag és tengelyszerűen talált érmetszeteken lehet tanulmányozni, főleg akkor, ha egyúttal a m. lim. perivascularis leemelődött, miáltal az ér és adventitája egy circumadventitialis hézag révén elkülönül a gliás érhártyától, avagy a mi egyremegy, a circumadventitialis ürbe visszafejlődési termékek helyezkedvén el, ez a törmelékanyag az adventitiától a gliás érhártyát eltávolította. A gliatalpak az érnek tengelyszerü hosszmetszetén egy barnára szinezett, élesen, vonalszerűen meghúzott, szerkezetnélküli finom hártyával, a m. lim. perivascularissal olvadnak össze, annyira, hogy az egyes gliatalpak kocsányaikkal együtt a hártyából minden differentiálódás nélkül kinőni látszanak. Az érnek hosszanti lapmetszetén pedig arról szerezhetünk tudomást, hogy ezek a gliakúpok alapjában véve az ér felszinén, helyesebben a gliás érhártyán csíkszerűen elterülő képződések, a melyek többnyire csak bizonyos metszési irány esetén adnak kúpszerű alakot. A hosszant-lapszerű metszés az ér felszinén többé-kevésbbé párhuzamos tagolódásban mutatja a glianyújtványoknak érkörüli végződését, a mi gliahypertrophia esetén igen tanulságosan ötlik szembe, mert hiszen az egyes nyújtványok durvábbak. Ilyenkor az ér felszinét a zebra-bőr rajzolatát utánzó szemcsehalmazokból álló tagozódás fedi be; a szemcsék, mint a túltengett gliasejteknek gliosomái, durvábbak és tömörebb impraegnatiójuknál fogva sötétebb szinűek. Egy-egy érkörüli végződés lapátszerűen terjed el a gliás érhártyán, de vannak azután pamacs-szerűen vagy bojtszerűen jelentkező végződések is.

Összegezve azt kell mondanunk, hogy a gliahypertrophia a glianyújtványoknak érkörüli végződéseit is igen tanulságosan mutatja be CAJAL készítményei alapján. A kép abban áll, hogy látszólag az érhártyán, valójában *az adventitiára a legszorosabban símuló gliás határhártyán szétterülő, ennek anyagába a legbensőbben belehelyezkedő gliaszemcséknek hol kúpszerűen, hol lapátszerűen, hol bojtszerűen elrendezett halmazatai jelentkeznek, melyek többnyire a zebrabőrnek rajzolatához hasonlatos csíkoltsággal hüvelyszerűen vonják be az ér felszinét.*

A CAJAL-féle gliaimpraegnatión alapuló e képtől a SPIELMEYER által leirt kép egy pontban különbözik. Ez a szerző a túltengett gliáról írt munkájában a gliának az erekhez való viszonyáról azt mondja, hogy a fibrillákat vezető protoplasmás nyújtványok szélesen, talpszerűen («fussförmig») helyezkednek el az éren. Protoplasmájuk a többi nyújtványéval összeolvad, illetőleg a határrétegben fekvő gliasejtek plasmájával. Látszólag egységes fibrillumok érkörüli végükben gyakran oszlást mutatnak magányos, finomabb fibrillumokra, a melyek finom plasmás szegélylyel vannak bevonva; oly rostok, melyek az érkörüli határrétegbe való belépésük előtt csupaszok, itt finom szegélyező burkolatot kapnak. Lemezes határhártyát SPIELMEYER készítményein nagyon ritkán és akkor is tökéletlen formában látott. SPIELMEYER adataiból tehát kitűnik, hogy azok a magam leirásával a pluricellulás gliafibrillumok és a m. lim. gl. perivascularis kivételével megegyeznek, mely utóbbit én kiterjedten és élesen tudtam készítményeimen látni. Még megjegyezném, hogy SPIELMEYER a WEIGERT-féle gliafestéssel dolgozván, nem tudott gliosomákat feltüntetni, avagy csak tökéletlenül, és igy történhetett meg az, hogy leirásában hiányoznak a m. limitanson elterülő gliaszemecskék, a melyek a jellegzetes zebrabőrszerű csíkolatot alkotják.

b) Gliahyperplasia.

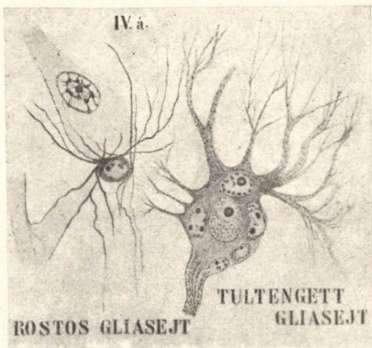
A túltengésben levő gliasejtek rendellenes elszaporodásra, proliferatióra is mutatnak hajlandóságot, mely folyamattal gyakran jár a plasmás nyújtványoknak rostokká való átalakulása.



III. ábra. A gliahyperplasia egyes stadiumai epilepsiában. — *1* = puffadni kezdő gliasejt a hilus fasciæ dentatæ-ban; figyelemreméltó az erősen hólyagos mag, mely környékileg helyezkedik el, a sejttest belseje egyneműen világos, a gliosomák környékileg rendeződnek. — *2* = gliasejt a hilus fasciæ dentatæ-ban a meginduló indirect magoszlás folyamatában, mutatván a hólyagosan felpuffadt, szemcsésmentes protoplasmát és a befűződni készülő magot. — *3* = gliasejt a hilus fasciæ dentatæ-ból befejezett magoszlással, melynek alapján két mag jött létre.

Nissl, Bielschowsky és egyéb szerzők a glia szövetének mennyiségi túltengését a gliamagvaknak közvetlen és közvetett oszlásából származtatják. Nekem Cajal impraegnatiójával főleg a direct magoszlást volt alkalmam észlelhetni, mely körülmény talán azzal függ össze, hogy Cajal módszere a mag chromatinjának rögzítésre kevésbbé alkalmas és talán ezen múlott, hogy indirect magoszlásnak sejthető kép csak elvétve került szemem elé.

Azok a gliasejtek, melyek direct megoszlásban vannak, eléggé jellegzetes képet adnak. (L. III. és IV. á.) Feltünő mindenekelőtt a sejttestnek, jelesen az endoplasmának megduzzadása, mi mellett a dendritek alig nagyobbodnak meg, legalább mindenesetre felötlő a sejttest megnagyobbodásának aránytalansága a nyújtványok hasonló elváltozásához képest. A sejttest gömbszerűen felfuvódik, gliosomái eltűnnek, a sejttest középpontja majdnem színtelen, széle pedig egyneműen rózsa- vagy bíborveres színűre festődik. A mag feltétlenül megnagyobbodottnak látszik, a sejttest széléhez szorult, gömb alakját tojásdad



IV. ábra. *Túltengett gliasejt,* melyben a magszaporodás folytán egyrészt a sejttestben egy magfalka vagy magkolonia (glia-óriássejt) jő létre, másrészt a sejttestből rendellenesen dús gliadendritágazat fejlődik ki. — *Rostos gliasejt* egy óriási loborsejt körül, mely csupán egy gliamagból és az ehhez simuló egynemű rostos gliafonalakból áll. — Mindkét ábra epilepsiás ammonszarvából való.

alakra változtatta és bizonyos alaki módosulásokat mutat. Így többször látni a tojásdad magnak közepén befűződést vagy behorpadást, mely ha a magnak egyik oldalán állott elő, akkor létrejő egy öblös bevájulást mutató mag, melynek chromatinanyaga a befűződést okozta kettéosztásnak megfelelően és a mag két csúcsán foglal helyet. A dendritek majdnem normalisan karcsúnak mondhatók és mint rendesen, gliosomákkal vannak ellepve. (L. III. ábra, 1, 2.) Egy másik képe az indirect magoszlásnak az, a midőn a körzetileg elhelyezett mag chromatikus állománya a mag közepén tömörül olyképen, hogy ezzel a tojásdad mag kettéosztottnak látszik és a két magszelvény mindegyikében egy-egy kerek magvacska foglaltatik.

E képeken kívül vannak azután olyan gliasejtek, melyekben már 2—3 mag jelenik meg (L. III. á. 3.), a hol tehát a feltételezhető direct magoszlás már befejeződött; itt a sejttest összeesottnek mutatkozik, vagyis visszanyerte homorú széleit, a sejttest megkisebbedett, de azért egészében még mindig absolute nagyobbnak látszik, mint egy kétmagvú normalis gliasejt, tehát a gliamag oszlása következtében nem csupán a mag állománya, hanem a sejttest állománya is megnövekedett. Ezen az alapon könnyen különböztethető meg az ép viszonyok közepette is megjelenő kétmagvú gliasejt a magoszlás következtében két-, illetőleg három-magvúvá vált gliasejttől, mert utóbbinak sejtteste oly tömeges, a minőnek a normális kétmagvú gliasejt nem látszik.

A direct gliamagoszlás jellemző vonásai tehát a következők: E folyamat *alkalmával a sejttest hólyagosan megduzzad, elveszti rendes szemcsézettségét s így egynemű́vé válik, a mag körzetileg helyezkedik el, gömbös alakját tojásdad alakkal cseréli fel, gyakran mutat befűződést, miközben a chromatin kettéválik, illetőleg két főcsoportban helyezkedik el. A magoszlás megtörténtével a sejttest összeesik, hólyagszerűen puffadt alakját elveszti, újból rendes homorú szélű, csillagos nyújtványú sejttestté alakul vissza, de ez az alaki restitutio nem jelenti az eredeti térfogatra való visszaesést, mert a sejttest tömegesebbnek mutatkozik most a magoszlás előtti rendes állapothoz képest. Ebben a visszafejlett állapotban a sejttest szemcsézettsége újból előáll, főképen a magnak körzeti részén, míg a mag körüli endoplasma továbbra is világos és szemecskementes marad.*

Igen érdekes körülmény, hogy a direct magoszlásból eredő magproliferatio folytán a gliasejt nem csupán 2—3, hanem 5—6 magra, esetleg többre is szert tehet. (L. IV. ábra, túltengett gliasejt). Ilyenkor többnyire központilag egy nagyobb világos mag körül koszorú alakban helyezkedik el a többi, egyenként is különbözö nagyságú mag. Ilyen *magfalkának* vagy *magkoloniának* természetesen nagyobb sejttestre is van szüksége és igy az a gliasejt, mely a proliferált magvaknak nagyobb számát tartalmazza, testesebb protoplasmával is bir, mint a két vagy három magvú gliasejt. Ez a testesebb protoplasma sajátos csíkolattal is bir a gliaszemcséknek párhuzamos hosszsorokban való elhelyezkedése folytán. Ez a kép megfelel a SPIELMEYER által leirt gliafibrillumoknak, azzal a különbséggel, hogy nekem CAJAL-készitményeimen sohasem sikerült e szemcsesorokat teljesen rostsorokká, vagyis fonalakká, valóságos gliafibrillumokká átalakulva látni. Egy további sajátsága az ilyen magkoloniával biró gliasejtnek, hogy belőle a dendriteknek rendkívül nagy száma rajzik ki, melyek nem durvák, hanem ellenkezőleg finomságukkal tűnnek ki. Kétségtelen, hogy e rendellenesen nagyszámú és vékony protoplasmás nyújtványok újonnan képződtek, a mi nem annyira a nagyobb sejttesttel, mint sokkal inkább az ebben kialakult nagyobb számú maggal látszik kapcsolatban lenni. Az egyéni túltengés alkalmával ugyanis egyedül a sejttest izmosodik meg a nyújtványokkal egyetemben, míg a mag változatlan marad, szintúgy a glianyújtványok száma is; ily esetben a túltengés egyedül a meglévő protoplasmára vonatkozik, vagyis duzzadás folytán térfogatilag nagyobbodik, de nem újonnan képződött nyújtványok révén. Ezek szerint *a gliahypertrophia a gliahyperplasiától egymagvúsága és nyújtványainak számbeli változatlansága által különbözik, míg a gliahyperplasiára jellemző a magvak és nyújtványok megszaporodása.* Egy körülményben azonban egyeznek a szóbanforgó folyamatok, abban ugyanis, *hogy mindkét esetben a folyamat továbbhaladásra mutat hajlandóságot, a mi gliarostok képződésében nyilvánul meg.*

A hypertrophiás gliasejt leírásakor már említettem, hogy a megizmosodott protoplasmás glianyújtványokban levő gliaszemcsék a nyújtványnak a sejttestből való eredése helyén nem vesznek el, hanem a sejttestbe folytatódnak szemcsés csík képében, mely a sejttest szélén végighúzódva, valamely szomszédos dendritbe megy át. Ily módon előáll a nyújtványnak bizonyos elkülönülése a sejttestben, mely folyamatban, miképen SPIELMEYER, magam is a glia protoplasmás elemei *elrostosodásának* első nyomát látom. (L. II. á.) Fentebb említettem SPIELMEYERnek azt a felfogását, melyhez egyébként EISATH is csatlakozott, hogy a gliaszemcséknek párhuzamos hossz-sorokba való elrendeződésével indul meg a rostképződés. Ha most e folyamat a gliasejt többi nyújtványára is ráterjed, akkor az a kép áll elő, hogy a mag körüli része a sejttestnek teljesen világos, szemcsementes, úgy hogy az összes gliosomák csupán a glianyújtványokban találhatók. (L. II. á. 2.) Nyilvánvaló ebből, hogy a gliosomák a rostkészítéshez szükségelt anyag, a mire meggyőzően EISATH utalt először. A folyamat előrehaladásával a glianyújtványok elkülönülése mind tökéletesebb lesz, a mi abban nyilvánul, hogy a nyújtványok kevésbé szemcsés, mint inkább áttetsző voltukkal tűnnek fel, ámbár hangsúlyoznom kell, hogy a CAJAL-féle készítményeken az elrostosodás tetőfokán is gliaszemecskék a nyújtványokban még mindig láthatók, bár nem oly telt szinben és oly nagy számban, mint a még kifejezetten protoplasmás természetű nyújtványban. *Ezek után felvehető, hogy a mint az elrostosodás folyamata a gliosomáknak a leendő gliarostokban való tömörülésével indul meg, azonképen tény másrészről, hogy e szemcsék fel is használtatnak a rostkészítésben.* Ez kifejezésre jut a WEIGERT-féle gliafestéssel kezelt készitményeken olyképen, hogy a rostos glianyújtvány egészen sima, fénylő, egynemű, de ugyanakkor a CAJAL-féle impraegnatio még gyéren és halványan szinezve gliosomákat tud kimutatni. Ez a különbség azonban nézetem szerint nem mondható lényegesnek, a CAJAL-féle impræguatio csak azt demonstrálja, hogy gliosomák kellenek és használtatnak fel a gliarostok készítéséhez. Az elrostosodás közben a gliasejt teste mindinkább tünedezni kezd, annyira, hogy a teljesen kialakult rostos gliasejt már csupán maggal bir, amelyhez a gliarostok csak nekitámaszkodnak. (L. IV. ábra, rostos gliasejt.) Látnivaló, hogy a CAJAL-féle imprægnatio is ki tudja mutatni a gliarostokat és e képesség éppen azon alapszik, hogy a rostokban még meglevő, illetőleg tünedező gliosomákat imprægnálja, a mit a WEIGERT-féle festés (vagy a heidelbergi is) nem tud megtenni. Viszont ez utóbbi a létrejött rostos anyagot egészben jobban fogja meg és mint ilyent tudja előállitani; így jönnek létre a WEIGERT-féle gyönyörű égkékszinű gliarostok, melyeknek szövedéke e módszerrel persze tökéletesebben mutatható ki, mint CAJAL módszerével, mely csak *alig* szinezett, fénylő rostokat tüntet fel.

A most leírt elrostosodási folyamat egyaránt előfordul a túltengett protoplasmás gliasejten és a sokmagvú gliasejten (gliamag-kolonia). Tehát ez utóbbival is az történik, hogy a gliaszemcsék a magvak körül gyérülnek és a megnagyobbodott gliatest szélén szalagszerűen tömörülnek s folytatódnak a nyújtványokba; majd ez utóbbiak mind rostosabbak lesznek, vagyis gliosomákban szegényebbek s így végül egészen rostos külsőt kapnak, miközben a magfalka körzetében levő gliosomák is eltűnnek és így végezetül visszamarad a gliamag-kolonia, melyhez mint középponthoz számos gliarost mint egészen elkülönült független fonál hozzáfekszik. Így áll elő a *gliagyep* («Gliarasen») képe, melyről úgy szokás beszélni, mint egy gliarostokat nemző középpontról. A CAJAL-féle impraegnatio alapján ez annyiban áll, hogy a gyepszerű képződés alapja a túltengett gliasejt magvának proliferatiójában rejlik, mert az ilymódon létrejött magfalkával karöltve jár a számtalan finom protoplasmás ág keletkezése, és csakis azután, hogy kialakult a *protoplasmás* gliagyep, áll elő *másodlagosan* ennek elrostosodása és ez adja a rostos gliagyep képét. Más szóval *a rostos gliagyep már praeformált protoplasmás képződményből jő létre ennek elrostosodása folytán, nem pedig olyképen, mintha a gliamagkolonia hajtana ki gliarostokat.*

c) *Glianekrosis.*

A túltengett glia sajátsága, hogy hajlik a visszafejlődésre, a korai halálra.

A gliavisszafejlődés a CAJAL-féle módszerrel kezelt készítményeken két főformában mutatkozhatik, úgymint az egyszerű sorvadás és az elfajulásos szétesés alakjában.

Az *egyszerű sorvadás* következtében a már túltengett sejttest zsugorodik, töpörödik, tehát megkisebbedik, de azért még így is az eredeti alakhoz képest még mindig tekintélyes nagyságú; a belőle kiinduló protoplasmás nyujtványok részben még a túltengés képét mutatják, de azért túlnyomóan szintén sorvadtak, minek folytán rendkívül elvékonyodott, szerfelett finom, egyszerűen barnára impraegnált rostok válnak láthatóvá, melyek azonban helyenként még dudoros, gyöngyfüzérszerű megvastagodásokat mutathatnak. Az egyszerű sorvadás alkalmával a sejttestben hézagok, vacuolák alakulhatnak ki és a nyujtványok sajátosan hullámzatos, kanyargó, csavarulatos lefutást vehetnek. A mag a homogen atrophia állapotába jut. Vajjon ez az egyszerű sejtatrophia idővel nem megy-e át a szemcsés szétesésnek képébe, határozottan nem mondhatom, de kizártnak nem tartom.

Az elfajulásos szétesés már összetettebb kép. A megnagyobbodott protoplasmás gliasejt úgy testében, mint nyujtványaiban az ép gliosomákhoz képest sokkal nagyobb, szinte durva szemecseket mutat, melyek lehetnek ugyan kórosan megnagyobbodott gliasomák, de épp oly valószínű, hogy a kóros protoplasmának elfajulási termékei is. Ez utóbbi felfogást a Herxheimer-féle készítmények igazolják, melyek a leírt gliasejteknek úgy testében, mint nyujtványaiban skarlátveressel erősen festett rögöcskéket mutatnak, ezek pedig lipoidra utalnak. E szemecskék idővel mind durvábbak lesznek, úgy hogy előrehaladt fokon a sejttest és a nyujtványok olyanok, mintha törmelékkel volnának megrakodva. Így azután létrejő oly sejtkülső, mely az eredetinek valójában a torzított mása. Ez elváltozások alatt a mag megkisebbedik, egyneműen festettnek mutatkozik, szóval a homogen sorvadás képét adja. E közben a nyujtványok nagyon egyenlőtlenek lesznek, helyenként rendkívüli duzzadások váltakoznak a nyujtvány feltünő megvékonyodásával, mely elváltozás végül arra vezet, hogy a gliadendrit folytonosságában több ponton (az elvékonyodás helyein) megszakadás jő létre és így előáll a szürke kéregállományt átjáró sajátságos *gliatörmelék* (gliadetritus), a melytől a metszet a mikroskop alatt olyannak látszik, mintha barnára színezett, különböző nagyságú, szabálytalan szemecskékkel volna befröcskölve, melyekben gondosabb szemlélet alapján a gliaplexus ismerhető fel. Igaz ugyan, hogy még előbbre haladt fokon a gliatörmelékben az eredeti hálózatos elrendezkedés megszünik és egészen szabálytalan gliatörmelék-halmaz áll elő. Ugyanekkor a *gliaalpak* hasonló elváltozást mutatnak, vagyis aránytalanul megnagyobbodnak, szétterjedt finom szemcséződésük durva darabossággá fajul és az eredeti karcsú, kecses gliakúpokhoz képest idomtalan érkörüli rögök jönnek létre, melyek az ereket oly tömötten szegélyezik, hogy valójában *érkörüli gliás incrustatióról* beszélhetünk.

A leírt elfajulásos szétesést CAJAL (l. c.) *clasmatodendrosis* névvel illeti, mely folyamat tehát röviden a sejttest és nyujtványok durva szemcsézödésében, a nyujtványok gumós megvastagodásában, majd ezeknek és a sejttestnek feldarabolódásában és végül a gliasejtnek szétporzásában áll.

Ez a leírás a túltengett nyujtványos protoplasmás gliasejteknek elfajulására vonatkozik. A rostos gliasejtek elfajulását két formában láttam. Az egyik alak lényegében egyezik a protoplasmás gliasejtek elfajulásával: az egyes elkülönült rostos glianyujtványok megduzzadnak, elvesztik merev hajlásaikat és kanyargósabbak lesznek, végül feldarabolódnak és így azután létrejő a rostos astrocytát utánzó durva szemcse-halmaz. A másik forma ettől egészen eltérő és abban áll, hogy a gliarostoknak magkörüli hurokjai között, tehát még a sejttest körzetében, kerek, világos, vacuolaszerű hézagok jelentkeznek, mely elváltozás a mag körül levő rosthurok-convolutumnak sajátosan duzzadt külsőt ad. E közben az egyes gliarostok eredeti rendes külsejüket nem vesztik el, tehát nem látszanak kórosan elváltozottnak, mely körülmény arra utalhat, hogy bizonyos sejttestmaradék az, mely a jelzett vacuolás elfajulást elszenvedte.

EISATH,[1] a ki a gliaszövetnek úgy általános, mint részletes kórszövettanával behatóan foglalkozott, joggal figyelmeztet arra, hogy a neuroglián látható különböző elváltozások, a milyen az atrophia, a hypertrophia, a degeneratio, a vacuolaképződésben megnyilvánuló colliquatio, ritkán fordulnak elő önmagukban, hanem többnyire társultan, úgy hogy azután kétséges lehet, vajjon e jelzett folyamatok közül melyiket tekintsük mérvadónak és melyik után nevezzük el a sejtelváltozást. Különösen fontosnak tekinti ő a colliquatiót, melynek képe az egész sejttestre kiterjedő apró hólyagocskákból áll, mi által a sejttest barlangos külsőt nyer. Ugyancsak EISATH utal a gliasejtek

[1] EISATH, G.: Weitere Beobachtungen über das menschliche Nervenstützgewebe. Arch. f. Psych. *48*.

protoplasmájának egy sajátos elváltozására, minek folytán a sejttest egynemű, szemecskékben szegény, átlátszatlan lesz. Minthogy a szemcséződés kóros viszonyai, a vacuolaképződés, a homogen sejtelváltozás, a colliquatio egyszerre is előfordulhatnak egy és ugyanabban a gliasejtben, azért is véleményem odairányul, hogy ezeknek *egyenként* különleges értelmük nincsen, hanem általános jelentőségük van, vagyis jelzik akár egyenként, akár összeségükben a gliasejt elfajulását. Az a folyamat, melyet CAJAL clasmatodendrosisnak nevezett, nem egyéb, mint a most említett és morphologiailag különbözőképen jellemzett elváltozásoknak gyüjtőneve.

Úgy az egyszerű sorvadás, mint az elfajulásos szétesés a gliasejtnek halálát jelenti. Igen figyelemreméltó a gliapusztulásnak helyi megoszlása, vagyis a glianekrosis topographiája.

Mindenekelőtt szembeötlő körülmény, hogy igen gyakran teljesen egészségesnek tetsző túltengett gliasejtek között *egyetlen* szétesésben levő gliasejt látható, tehát a glianekrosis olykor egészen magányos (solitär) formában léphet fel.

Legtöbbnyire azonban a glia degeneratiója tömegesen folyik le, a midőn a gliasejtek nagyobb száma vagy szabálytalan foltokban, vagy pedig az erek körüli tájakon mutat regressiv elváltozásokat. Ilyképen azután a készítményeken vagy szigetszerűen, vagy kerek, illetőleg hosszúkás, csíkszerű kiterjedésben látjuk a gliát betegnek. A topographiának utóbbi alakja különösen arra utal, hogy a gliaelfajulás és az ér mint tápláló csatorna között bizonyos kapcsolat állhat fenn, akár olyképen, hogy az ér felől közvetlenül oly kóros behatás érte, minélfogva a túltengett gliának el kellett pusztulnia, akár oly értelemben, hogy a kórosan túltengett gliát nem tudta kielégítően táplálni. Ily körülmények között az érkörüli gliaszövet végül egészen eltünik és mint maradványos kép előáll a gliatörmelékkel fedett ér, melytől kifelé egy gliamentes öv következik, mely idegsejteket és rostokat tartalmaz. Ez övtől oldalt azután újból gliasejteket és gliaplexust tartalmazó szövet jelentkezik. Ily gliamentes helyek világosabb színeződésükkel — hiszen nem tartalmaznak barnára imprægnált gliát — a metszetnek már szabad szemmel megtekintésekor feltünhetnek.

B) A neuroglia különleges kórszövettanáról.

Feladatunk lesz most annak vizsgálása, vajjon a fentjelzett gliasejtelváltozások az egyes agybántalmakban milyen módon fordulnak elő, vagyis keresnünk kell, hogy az elváltozások minősége és mennyisége tekintetében az egyes kórformák hogyan viselkednek. Eleve jeleznem kell, hogy az ismertetett elváltozások helyileg megnyilvánuló súlyosbodásokat mutathatnak, körülírtan vagy szétterjedten jelentkezhetnek, más szóval a gliabántalom úgy foka, valamint topographiája tekintetében változatos lehet. A fentebb jelzett bántalmak közül különlegesen az epilepsiát, az idiotismust és a dementia paralyticát veszem tekintetbe, mint oly kóralakokat, melyeknek gliabántalma akár morphologiai, akár pathologiai irányban nekem figyelemreméltót vagy újszerűt látszott nyujtani.

a) *Epilepsia.* Általánosságban kiemelném, hogy e kóralakban a fentebb leírt glia-elváltozások minden félesége előfordul, így a hypertrophia, a proliferatio, a plasmás és rostos gliakolonia, a gliarostosodás, a glianekrosis. Vizsgálat alá négy eset került, melyeknek különleges gliaviszonyait röviden azzal a megjegyzéssel sorolom fel, hogy főleg a topographia tekintetében mutatkoztak eltérések.

I. eset (Bottka). Csupán az *ammonszarv* a glia-elváltozások színhelye, jelesen itt láthatók a gliaproliferatio kezdetibb sejtelváltozásai, mint a sejttest homogen puffadása, a magnak széli elhelyezkedése, befűződése, direct magoszlása, magkolonia és gliarostok keletkezése. A heidelbergi gliarostfestő-módszerrel hatalmas elrostosodás mutatható ki a hilus fasciæ dentatæban. A *subiculum* pyramis-sejtes rétegében hypertrophia, továbbá solitarius glianekrosis és a felszínes kéregrétegben széli glia-túltengés. A *homloklebeny*, a *középponti tekervények*, a *fali lebeny*, a *cuneus* gliája Cajal módszerével épnek mutatkozott, holott a heidelbergi rostfestő-eljárással a gyrus centralis posterior helyenként jelentékeny széli gliosist mutat. — Ezek szerint a gliatúltengés súlypontja az ammonszarvban van; a hátulsó középponti tekervény gliája csak igen körülírtan változott el.

II. eset (Schillerwein). Az előző esettel ellentétben a *hilus-*

ban erősen pigmentált idegsejteken kívül csupán kerek és erősen színezett gliamagvak nyujtványok nélkül (apolaris gliasejtek) láthatók túlnyomóan, a melyek között csak igen elvétve fekszik egy-egy szegényes elágazású gliasejt. A fascia dentata gazdag protoplasmás gliasejtjei hiányzanak. A subiculumban levő gliasejtek erősen degeneráltak gyérülő gallyazattal. — A *gyrus centralis anteriorban* gliadegeneratio hypertrophia nélkül; a fehér állományban csak elvétve vannak gliasejtek, illetve túlerősen festett gliamagvak gyér gliaramificatióval. — A *gyrus centralis posteriorban* a kéreg minden rétegében túlerősen festett gliamagvak, a nyujtványok szemecskésen szétestek, igen bágyadtan imprægnáltak, egyes gliamagvak körül lipoid-szemecskék halmazai, a kéreg legmélyebb rétegében a gliasejtek teste zacskószerűen felpuffadt, ezzel ellentétben a fehér állomány gliasejtjeinek teste sorvadt, úgy hogy a dendritek egyenesen az erősen festett magból látszanak kiindulni. A *lobus parietalis inferiorban* csakis a legmélyebb kéregrétegekben láthatók ágazatos protoplasmás gliasejtek, melyek épnek tünnek fel; a többi rétegben csakis nyujtványok nélküli gliamagvak, a fehér állományban sorvadt testű gliasejtek.

III. eset (Duffek). A *hilusban* protoplasmás gliasejtek kezdődő sejtmegnagyobbodással; a *subiculumban* kezdődő clasmatodendrosis, illetőleg sajátosan darabos-reczés szerkezete a sejttestnek és nyujtványoknak. *Gyrus centralis anterior:* sehol sincs hypertrophia, ellenben a sejttest és nyujtványok szemcsésen elváltoztak; a fehér állomány gliasejtjei rostosak és főleg a mélyebb rétegekben clasmatodendrosis. *Gyrus centralis posterior:* ugyanez. *Gyri orbitales:* még kevésbbé beteg. *Cuneus:* teljesen ép a kéreg- és fehér állomány gliája.

IV. eset (Pajor). *Hilus:* kizárólag gliarostok láthatók, melyek a mag körül hatalmas rostconvolutumokat alkotnak. *Subiculum:* hypertrophia és degeneratio. *Gyrus centralis anterior:* a kéreg mélyebb rétegeiben túltengett gliasejtek és érkörüli glianekrosis, a felszínes rétegekben gliadegeneratio, a fehér állományban kövér testű gliasejtek sugaras vékony nyujtványokkal. *Gyrus centralis posterior:* ugyanaz. A középponti tekervények Nissl-festésű metszetein sejtárnyékképek és szivacsos sejtszerkezet. *Gyri* *orbitales:* ugyanaz. *Cuneus:* súlyos degeneratio az összes szürke rétegekben, a fehér állományban hypertrophiás, részben plasmás, részben rostos gliasejtek, közülök egyesek épek, egyesek elfajultak.

Összefoglalva az epilepsiában mutatkozó glia-elváltozásokról azt mondhatjuk, hogy azok olykor igen körülírtan (ammonszarv I. eset), máskor szétterjedten mutatkoznak. Utóbbi esetben a glia hypertrophiája és degeneratiója, valamint az érkörüli glianekrosis uralkodik a képen (III. és IV.) Végül lehetséges, hogy a gliabántalom olyképen folyik le, hogy a nyujtványos gliasejtek tünedeznek, helyettük piknoticus magvak jelentkeznek, a gyér gliagallyazat degenerált (II.). A megbetegedésnek ez a formája is a szétterjedten lefolyó gliabántalom képe és valószínű, hogy a III. és IV. esetben tapasztalható gliabántalom a megbetegedés további fokozása, vagyis midőn a gliadegeneratio folytán a glianyujtványok eltüntek. Ezek után az epilepsiában a gliabántalom két alakja mutatkozik: az egyik körülírtan az ammonszarvra szorítkozva, a másik szétterjedten.

Az idevágó irodalom is azt tanusítja, hogy az epilepsia folyamán mutatkozó gliabántalom különböző képet adhat. MEYNERT volt az első, a ki az ammonszarvnak az epilepsiában előforduló gyakori bántalmára (sclerosisára) utalt; CHASLIN volt az, a ki a széli gliosist mint elsődleges gliabántalmat kiemelte; végül ALZHEIMER[1] volt az, aki a gliaszaporulatnak az epilepsiában pótló, másodlagos jelentőséget tulajdonított, mondván, hogy az elsődlegesen elpusztult idegszövetnek helyettesítője. EISATH (l. c.) leleteit a következőkben foglalta össze: 1. erős széli gliosis, a mely lefelé a harmadik rétegben végét leli; 2. főleg a fehér állományban található kicsiny, kerek, szemcsementes gliaelemek, melyeknek plasmája világos, tiszta; 3. a fehér állományban foltonként fellépő gyepszerű burjánzása a plasmás és rostos gliának. Ezek az elváltozások bizonyos gyakorisággal a fali lebenyben és a kisagyvelőben mutatkoztak. EISATH a különböző szerzők eltérő leleteit ez elmebántalomnak hosszú lefolyásában

[1] ALZHEIMER A.: Ein Beitrag z. patholog. Anatomie der Epilepsie. Monatschrift f. Psych. u. Neurol. IV. 1898.

előálló különböző állapotaival magyarázza, melyeknek változó kórszövettani kép felel meg. Elég lesz e tekintetben arra utalnunk, hogy Alzheimer a status epilepticusban elhaltaknak ammonszarvában az úgynevezett amœboid gliasejteket találta nagy számmal mint sajátos leletet és hogy az elbutulással végződött epilepsiának súlyosabb elváltozásokkal kell járniok, mint a csekélyebb értelmi hiányokat mutatott eseteknek. Eisath joggal emeli ki, hogy az acut epilepsiás kórállapotokban elhunytaknál a hevenyés elváltozások zavarólag és leplezőleg hatnak az acut állapot előtt fennállott kórszövettani állapotra. Hevenyés állapotokban a gliasejtek puffadása és colliquatiója állott az előtérben, míg az elbututulással járt epilepsiában inkább atrophiás szemcsék nélküli, homogen gliasejtek voltak találhatók.

Ha mindezeket az adatokat tekintetbe vesszük, akkor összegezve azt mondhatjuk, hogy az epilepsiában mindenképen feltünő a neuroglia kóros viselkedése, akár inkább körülírtan, és ekkor az ammonszarvban, akár szétterjedten, és ekkor túlnyomóan a rostosglia burjánzása vagy a gliaszövetnek nagyfokú degeneratiója képében. Igazat adok Eisath-nak, hogy az epilepsiában esetenként változók a neuroglia elváltozásai, melyek az eset fokához mérten jelentkeznek. Így az I. esetben status epilepticusban elhalt nő szerepelt, a kinek ammonszarvában acut jellegű proliferatiós jelenségek mutatkoznak a glia részéről. A II. esetben idős epilepsiás férfiről volt szó, a ki bár epilepsiás homály-állapotban, de idős korban halván el, az elbutulással kapcsolatos gliadegeneratio már nem volt leplezhető a közbejött acut kórállapot által. A III. eset fiatal nőre vonatkozik, a ki nem epilepsiából kifolyólag halt el, kinél elvétve sorozatos rohamok forogtak fenn s a kiben a gliaelváltozás a négy eset közül a legkönnyebb, mondhatom feltünően könnyű. Végül a IV. esetben 36 éves erőteljes férfi szerepelt epilepsiás elbutulással, időnkénti homály-állapotokkal, a kin a gliának úgy rostos elváltozásai, valamint súlyos degeneratiója szétterjedten voltak észlelhetők. Nem tagadható ezek után, hogy a glia-elváltozások jellege az epilepsiás kórállapot jellegével összehangolható oly értelemben, hogy a bántalom súlyossága és idősültsége nagyfokú és szétterjedt gliarostosodással és gliadegeneratióval jár, míg könnyebb bántalom esetén kisfokú és kevésbé szétterjedt elváltozások mutatkozhatnak.

Midőn tehát az epilepsiára nézve a glia megbetegedését mint tényt felismertük, az a kérdés merül fel, vajjon a gliaelváltozások másodlagosak vagy elsődlegesek-e? Nevezetesen mérlegelés tárgya lehet, vajjon a szétesett idegszövet pótlásaképen burjánzik-e a neuroglia, miképen azt ALZHEIMER állítja, avagy a glia önállóan is megbetegedhetik-e, miképen azt CHASLIN állította a kéreg felszínén jelentkező erős rosttúltengésekre nézve. ALZHEIMER felfogását azzal véli támogatni, hogy készítményei alapján mindig úgy találta, hogy az idegszövet szétesése látszott elsődlegesnek, amelyhez csatlakozott a glia túltengése; továbbá azzal, hogy a gliaszaporulat passiv jellegű, vagyis a gliarostozat elrendeződése a rendes typust betartja; és végűl azzal, hogy az astrocyták a kéregben rendkívül gyengén fejlettek. Mindezeket az érveket azonban ALZHEIMER sem tekinti teljesen meggyőzőknek és midőn a következőket mondja: «Wenn schon ich befürchten muss, dass ich meine Auffassung nicht mit zwingenden Beweisen werde stützen können, neige ich doch mehr zu der Meinung, dass der Untergang der nervösen Substanz die Veränderungen einleitet», akkor kétségtelen, hogy WEIGERT-nek erősen suggestiv behatása alatt állott. Mert ha a neuroglia az epilepsiában egyszerűen pótló feladatot teljesít, akkor nem érthetők a különböző kóros állapotok szerint változó gliaképek, melyek mint ilyenek mégis csak azt látszanak vallani, hogy a neuroglia az epilepsiás kórfolyamat által *közvetlenül* is szenvedhet. *Legvalószínűbb, hogy az epilepsiában elsődleges és másodlagos glia-elváltozások találkoznak.*

b) *Idiotismus.* Ennek a bántalomnak egy esetében az egész nagyagy kérgében a lehető legsúlyosabb elváltozásokat találtam. Ezek oly egyetemlegesek, hogy felesleges azokat helyenként külön leírnom, mert az ammonszarv, az alapi domborulati homloktekervények, a középponti tekervények, a fali lebeny, a nyakszirti lebeny egészen megegyező és legnagyobb fokú kóros elváltozásokat mutattak. A kéreg legfelszínesebb zonalis rétegét már a CAJAL-készítményeken jól felismerhetjük, mert tömött, vastag glia foglalja el, mely alatt a lamina granul. externában megnagyobbodott, tüskés gliasejtek következnek gömbölyű vagy tojásdad maggal, mely körül világos protoplasma van, míg a sejttest szélén és a nyujtványokban szemcsék fekszenek. Figyelemreméltók e nyujtványok abból a szempontból, hogy bár szemcsések, de egyúttal fénylők és rostos külsejűek és hogy átjárják a felszínes gliás rostréteget, kikerülnek ennek felszínére és ott szabadon kimeredeznek a subpiális ürbe; *oly elrendeződése ez a rostoknak, mely ellenkezik az ép viszonyokkal.* A lam. pyramidalisban részben igen túltengett protoplasmás, részben WEIGERT-typusu glianyujtványok láthatók; az érkörüli tapadás gömb- vagy lapátszerű szemcsés duzzadásokkal történik. A kéregnek még mélyebb rétegeiben pedig óriási protoplasmás gliasejtek, többnyire világos, chromatinnélküli homogen maggal; az érkörüli tapadás idomtalanul megduzzadt talpakkal történik, melyek lapról nézve valóságos torlaszokat, érkörüli gliás incrustatiókat alkotnak; a hypertrophia maximumát mutató e plasmás gliasejtek mellett vannak azután még szemcsés, illetőleg homogen külsejű és végül tisztán rostos gliasejtek, szóval egy és ugyanabban a látótérben a normalistól a kórosig minden átmenet megtalálható, főleg ha hozzávesszük, hogy a degeneratiónak minden félesége megtalálható. Különösen a legsúlyosabb clasmatodendrosis hol szigetszerű, hol rétegszerű kiterjedésben mutatkozik, nevezetesen a kéreg két felső rétegében a felülettel egyközűen, a mélyebb rétegekben inkább foltszerűen és itt azután az érkörüli glianekrosis képe tűnik fel. A degeneratiónak főleg arról a féleségéről kell megemlékeznem, mely a sejttestnek tömör, egynemű impraegnálásában áll, midőn tehát a gliaszemcsék teljesen beléolvadtak a súlyosan elváltozott sejttestbe, a nyujtványok ugyancsak sötéten impraegnálódtak és feltűnőek hullámzatos, illetve helyenkénti bunkószerű megduzzadások és ezek között levő atrophiás szelvények által. Az ily módon degenerált gliasejtek egészen szerkezetnélküli, homogen, sötéten színezett maggal bírnak. Ily sejtek főleg a legfelszínesebb kéregrétegekben mutatkoztak. A CAJAL-féle készítmények által kimutatott súlyos és kiterjedt gliadegeneratión kívül még a HERXHEIMER-féle módszerrel is lehet az idegszövet szétbomlását demonstrálni, mert az idegsejtek teste telve van finom lipoidszemecskékkel és az erek körüli hézagokban nagyobb lipoidrögök olykor tömegesen láthatók. A mélyebb kéregrétegekben főleg a gliamagfalkák és az azokból kiinduló gyepképződés tűnt fel úgy plasmás mint rostos alakban, melynek legszebb példányait a hilusban lehetett fellelni.

Ez összefoglaló leírásból kitetszik, hogy az idiotaságban a gliaszövetnek legsúlyosabb, de egyúttal legactivabb elváltozásai a lehető legnagyobb kiterjedésben mutatkoznak. E leletemmel teljesen egybevágnak EISATH (l. c.) vizsgálati eredményei, melyek így hangzanak: 1. Az idiotaságban nagyon durva természetű, alig néhány sejtet megkímélő elváltozások lelhetők melyek nyilván az emberi kéreg minden tájékára kiterjednek. 2. Az elváltozások részben a kéreg felszínén és érfalak körüli hypertrophiás burjánzásokban, részben atrophiás jelenségekben állanak, melyek a fehér állományban is megtalálhatók. Az atrophiával kapcsolatban homogen és amœboid átalakulások és degeneratios elváltozások fordulnak elő.

E leletek értelmezése alkalmával első sorban arra kell utalnom, hogy az idiotaság oly elmebántalom, mely a kórszármazás tekintetében egyáltalában nem egységes és így a különböző leleteknek különböző értelmezése is van. Nem szólok most a TAY-SACHS-féle alakról, melynek egészen különleges kórszövettana van, hanem figyelmeztetnem kell, hogy az idiotaság hydrocephalián, mikrocephalián, súlyos agyfejlődési hibákon és még egyéb elváltozásokon alapuló formái egységes kórszövettani alapot kizárnak. Mindenesetre igen érdekes, hogy EISATH két esete a magam esetével majdnem teljesen egyező leletet adott és így ki kell emelnem, hogy az idiotaságnak van olyan formája, melyben a gliaszövetnek elváltozásai azok súlyosságánál és rendkívüli szétterjedésénél fogva igen figyelemreméltó tényezője a kórszövettani képnek.

c) *Paralysis progressiva.* I. eset (KNOBLOCH). Ammonszarv. 1. A *fascia dentata* rendkívül nagyszámú rostos póksejttel van telehintve; ezeknek az erekhez való tapadása egészséges gliatalpak segélyével történik, a mint hogy az összes gliasejtek elfajulási jelenségek nélküliek, csupán túltengettek. 2. A *nagy loborsejtek rétege* szintén erőteljes rostos gliasejteket mutat, egyesek azonban kezdődő degeneratio jeleivel: kanyargós nyujtványok, a sejttest meginduló szétesése. Feltünő, hogy e rétegben nem találni az e helyen oly tömött gliaplexust; feltünő már CAJAL-készítményen is a loborsejtek ritkulása, amit a NISSL-készítmények igazolnak. Ezzel szemben a WEIGERT-velőfestés vajmi csekély kiesést mutat; a heidelbergi gliafestés csak mérsékelt gliarostszaporulatot demonstrál a fascia dentataban, ahol *a fibrillum-impraegnatio egészen ép viszonyokat tár fel;* végül a loborsejtes rétegben semminemű gliarostozatot sem lehet kimutatni, ez azonban a subiculumban annál erőteljesebb. 3. *Subiculum.* A strat. zonale alatt hatalmasan megnagyobbodott gliasejtek nagy számmal, valamivel kisebb, de szintén túltengett sejtek a zonaleban is előfordulnak. Hatalmas gliasejttúltengés a kéreg összes rétegeiben, legfőképen a középső és alsó rétegekben, ahol óriási sejttestek vastag, de nem idomtalan nyújtványokkal igen sűrűn járják át a kérget. Az elrostosodásra inkább a legfelszínesebb kéregrétegekben akadni, míg a középső és alsó rétegek *túlnyomóan* túltengett proloplasmás gliasejtekkel vannak ellepve. Az erekhez tapadó nyujtványok arányosak a sejttesttel, tehát túltengettek, de nem degeneráltak, miképen a sejttestek sem. 4. *Fehér állomány.* Nagyhasú gliasejtek gyökérszerűen kirojtozott és aránylag finom dendritekkel; ezeket a mély kéregréteg gliasejtjeivel összehasonlítva, feltünő, hogy a sejttestek egybevágó megnagyobbodásával szemben a nyujtványok a fehér állományban karcsúak, míg a kéregben igen vastagok.

A subiculum CAJAL-készítményei erőteljes, túltömött gliarostozatot mutatnak a l. granularis externában, melynek erőteljes fonalai túlnyomóan a l. zonalis felé irányulnak és ebbe belémerülnek. A heidelbergi készítmények igen tömött zonalisrostozatot mutatnak, mely alatt a l. granularis externának megfelelően sűrű hálózatú gliarostozat következik, mely esőszerűen húzódik a l. pyramidalis felé, ahol már jelentékenyen megritkul. Úgy a l. zonalis, mint a l. gr. ext. már szabad szemmel felfeltünik erősebb festődésével.

Az ammonszarv HERXHEIMER-készítményei a fascia dentataban levő loborsejteknek jelentékeny elzsírosodását mutatják; kevésbé ilyenek a subiculum loborsejtjei.

Centralis anterior. Ugyanazok a viszonyok a CAJAL-készítményeken. A heidelbergi gliafestés kifejezett zonalis rostozatot mutat, mely alatt túltengett protoplasmás és rostos gliasejtek, túlerősen festett maggal. Egy helyen a strat. zonale szalagszerű gliarétege egyszerre megszakad, illetőleg átmegy egy atypusos gliarostformatióba, mely a zonalison túl a kéreg felszínére terjed.

Centralis posterior. A CAJAL-kép ugyanaz. A rostfestések még kifejezettebb elrostosodást mutatnak a kéreg felszínén és a l. zonalis és granul. ext. gliája átcsap a kéreg szabad felszínére és az itt lévő plasmasejtes felrakódások között igen sűrű-reczéjű gliarostsziget jő létre.

Frontalis basalis. A CAJAL-kép ugyanaz. Gliarostfestés: mérsékelten túltengett zonalis, kissé kifejezettebb l. granul. ext.

Cuneus. Azonos kép.

Cerebellum. Rendes BERGMANN-féle rostok; a strat. granulosumban csillagos gliasejtek (CAJAL).

II. eset (HEGEDÜS). Az *ammonszarvban*, jelesen a *hilus*ban erőteljes rostos gliasejtek, melyek igen tömött plexust alkotnak; a gliasejtek és nyujtványaik erőteljesek. A *loborsejtes réteg*ben óriásilag megnagyobbodott sejttestek számtalan, minden irányban kirajzó nyujtványnyal, melyek rostosak; ugyanitt meginduló degeneratio. — A *subiculum*ban csekélyebb fokú hypertrophia mint a loborsejtes rétegben, de azért rostképződés itt is van. — *Centralis anterior:* csekély hypertrophia, de kifejezett gliarostképződéssel a mélyebb rétegekben, ugyanúgy a fehér állományban. — *Centralis posterior:* már a felszínes rétegekben rostképződés, amely a mélyebb rétegekben még kifejezettebb; a fehér állományban puffadt nagy gliasejttestek, melyekből gyéren indulnak ki nyujtványok. — *Temporalis I.:* erős hypertrophia és elrostosodás a mélyebb rétegekben; a fehér állományban duzzadt sejttestek számtalan finom nyujtványnyal. — *Cuneus:* a kéreg középső rétegétől lefelé kezdődő rostképződés, de nincs kifejezett hypertrophia, szintúgy a fehér állományban. — *Parietalis inferior:* megegyező a cent. post.-ral. — *Frontalis II.:* ugyanaz. — *Orbitalis:* az összes rétegekben erős hypertrophia és rostképződés.

III. eset (FURULYÁS). — Az *ammonszarv* hilusában csupán a gliasejtek teste nagyobbodott meg, a nyujtványok szemcsésen szétestek és rostképződés nem látható, általában inkább a degeneratio uralkodik a képen. Ugyanez mutatkozik a loborsejtes rétegben; a subiculumban mérsékelt hypertrophia a sejttestekben, erősen degenerált nyujtványokkal. — *Centralis anterior:* erősen megnagyobbodott protoplasmás gliasejtek a lam. gran. ext.-ban és pyramidalisban, a mélyebb rétegekben erős degeneratio, a fehér állományban puffadt sejttestek gyér nyujtványrendszerrel. — *Centralis posterior:* csak igen kis fokban hypertrophia, túlnyomó a degeneratio úgy a sejttestben, mint a nyujtványokban. *Temporalis I.:* hypertrophia rostképződés nélkül és erős degeneratióval. — *Cuneus:* mérsékelt hypertrophia minden rétegben rostképződés nélkül. — *Frontalis II.:* valamivel kifejezettebb viszonyok, mint a cuneusban.

Összefoglalva leleteimet, a következőket emelem ki. Az I. esetben az erősen túlzott protoplasmás hypertrophia áll az előtérben, mi mellett a rostképződés szinte elenyésző, szintúgy a glia degeneratiója is. Ez uralkodó protoplasmás hypertrophia mellett azonban a kéreg felszínén túltengett zonalis gliarostozat mutatható ki, mely helyenként rendes typusát veszti, a mi alatt azt értem, hogy a felszínes gliaszalag egy ponton hirtelen megszakad és a lam. gran. ext.-nak túltengett, rendellenes kévéket, gliarostcsomókat («Wirbeln» «tourbillons») alkotó rosttömege tör a felszínre, ahol a subpialis ürben levő plasmás és kereksejtes felrakódással elegyedik és ebben a sejttömegben a kérgen kivül fekvő atypusos gliafonatot alkot. Kétségtelen, hogy ezen pontokon a gliának aktiv viselkedése állapítható meg, itt a glia nem szerepel mint pótló anyag, hanem ettől egészen eltérő viselkedésű. Ugyanebben az esetben figyelemre méltó volt továbbá, hogy a jelzett protoplasmás gliatúltengés az agyvelő minden pontján, tehát a nyakszirti lebenyben is mutatkozik; oly topographia ez, mely az átlagos tapasztalásnak nem felel meg, tudván azt, hogy a paralyticus folyamat előszeretettel támadja meg a homloki és halántéki tekervényeket, míg a nyakszirtiek többnyire szabadon maradnak.

A II. és III. esetben, szemben az I.-vel, a túltengés mellett a degeneratio uralkodik a képen, tehát a kóros glia itt nincsen már az életképességnek azon a fokán, mint az I. esetben; nevezetesek ezek az esetek abból a szempontból is, hogy a cuneus vidékét megkimélték.

Ez adatok alapján megállapítható a paralysisben a gliának igen erős, részben plasmás, részben rostos túltengése, mely esetenként párosulva lehet súlyos degeneratióval; igen fontos, hogy a zonalis glia túltengése alkalmával a rendes gliaszerkezetet megbontja és atypusos kérgen kívüli burjánzásba csap át. E viselkedésből nyilvánvaló, hogy a glia a paralysisben nem egyedül az elpusztult idegszövetet pótolja, hanem egészen *egyéni* jellegű burjánzást is visz véghez, annak jeléül, hogy a glia nem annyira passiv, alkalmazkodó, mint inkább aktiv, önálló szerepet játszik.

Ezek az adataim ALZHEIMER-nek a paralysisben a glia részéről észlelt leleteivel jórészt egyeznek.[1] E szerző szerint a paralysisben szabály szerint igen jelentékeny gliaburjánzás található, mely első sorban számos kisebb és nagyobb gliasejt képződésére vezet, melyek nagy mennyiségű gliarostot állítanak elő és végül igen előrehaladott esetekben a kéregben és velőállományban egyformán igen tömött gliafonatot alkotnak. Valószínű, hogy egyes gliafonatokon már kezdettől fogva visszafejlődési jelenségek mutatkoznak, ALZHEIMER szerint talán azért, mert az idegsejtek körüli legfinomabb gliaszerkezetek és ez idegsejtek maguk is tönkremennek. Az újonnan képződött glia legnagyobbrészt arra szolgál, hogy a felszínes rétegek erősödjenek, a mi főleg az erek körül levő gliahüvelyek részéről feltünő. ALZHEIMER szerint a neuroglia már a legfrissebb esetekben is az úgynevezett vágtató paralysisben mutat elváltozásokat, a mennyiben a NISSL-készítményeken a gliasejtek teste megduzzad és a feltünően chromatindús magban indirect magoszlási jelenségek láthatók. Ugyanezekben az esetekben WEIGERT gliafestésével az ily módon duzzadt gliasejttestnek szélén a rostképződésnek első nyomait lehet látni és főleg azokban a vastagabb protoplasmás nyujtványokban, melyek az erekhez húzódnak. A gliaburjánzás az összes kéregrétegekre meglehetősen egyenletesen terjed ki. Idősült paralysis-esetekben,

---

[1] ALZHEIMER A. Histologische Studien zur Differentialdiagnose der progressiven Paralyse. Habilitationsschrift. Jena, 1904.

melyekben már jelentékeny kéregsorvadás következett be, a felszínes zonális réteg igen megvastagodott és belőle nagy mélységbe követhetők lefelé a gliarostok; végül az ereket vastag gliarostréteg veszi körül. Feltünőnek mondja ALZHEIMER, hogy a gliasejtből az erekhez mindig a legerőteljesebb nyujtványok huzódnak, míg más irányokban gyengébb nyujtványok terjednek szét. A glia burjánzásával karöltve regressiv elváltozások járnak, a mennyiben nagy, rostképző gliaelemek elfajulnak, scleroticusok lesznek vagy pedig vacuolásodnak; a mag is visszafejlődik, a mennyiben hólyagosan felfuvódik, a mag chromatinban szegényebb lesz, a magvacska szétesik és a maghártya feloldódik.

Ama kérdés megválaszolásában, vajjon melyik szövete az agykéregnek az, mely a paralysisben *elsődlegesen* szenved, ALZHEIMER csakis az erekre és az idegszövetre volt tekintettel, miközben a döntést a megbetegedés legfrissebb szakaszában vélte megejthetőnek; a gliának elhanyagolásával már jelezte e szerző, hogy ennek elsődleges szerepet nem tulajdonít. «In den frischesten Fällen der Paralyse, die ich untersuchen konnte, fanden sich schon Gefässveränderungen und Plasmazellinfiltrationen, Ganglienzellerkrankung und Gliawucherung nebeneinander» (l. c. 138. l.) és végül így nyilatkozik még «... bei der Paralyse nicht nur ein Schwund der Nervenfasern der Hirnrinde, sondern auch regelmässig Schädigungen, meistens ein Ausfall an Ganglienzellen, immer eine Wucherung der Glia und stets eigenartige Gefässveränderungen zu finden sind» (l. c. 276. l.). Ezekből a kijelentésekből mindenesetre annyi kitünik, hogy a paralysisben az ideg- és érszövettel ***egyidejüleg*** és ***mindenkor*** a gliaszövet is megbetegszik; a mennyiben pedig az ideg- és érszövet a paralysisben szereplő postlueses méregtől lett beteg, nincs okunk az *ugyanakkor* és *ugyanúgy* megbetegedett gliaszövetbántalmat más természetünek felfogni, tehát helyesen azt kell felvennünk, hogy a gliaszövet is a kórnemző tényezőtől beteg, s így elváltozása nem másodlagosan pótló. A neurogliának a paralysisben szereplő *állandó* bántalma már önmagában ennek magas kórszövettani értékére utal.

IV. A neuroglia élettani és kórélettani jelentőségéről.

A Weigert vizsgálatai által minden jelentőségüktől megfosztott protoplasmás gliasejtek az utolsó évek kutatásai folytán ismét a tudományos érdeklődés homlokterébe kerültek. Weigert, mint fentebb láttuk, tagadta a protoplasmás astrocyták előfordulását a *kifejlett* idegrendszerben; ezzel szemben Held, Eisath, Spielmeyer, legutóbb Cajal és iskolája munkálatai a középponti idegrendszernek éppen azon pontjain, ahol Weigert electiv gliafestésével hiányok maradnak, rendkívül nagy számmal mutattak ki nyujtványos protoplasmás gliasejteket. Eisath leírásából tudjuk, hogy a fiatal gliasejt a hólyagos mag körül gyűrűszerűen kiterjedő, gyéren szemcsés és nyujtvány nélküli protoplasmából áll; a szemcsék megfelelnek az Eisath által bővebben méltatott gliosomáknak. A protoplasma idővel nyujtványképződésre mutat hajlamot, a mennyiben apró kúpszerű kicsírázásokat hajt a későbbi protoplasmás nyujtványok első nyoma gyanánt. Ha most még számba vesszük azt, hogy a protoplasmás glianyujtványokból a fentebb vázolt módon gliosomák felhasználásával gliarostok lesznek, akkor kétségtelen, hogy a gliasejt egy mindenképen előrehaladó fejlődésre képesített sejtféleség, mely három kialakulási fokozatot mutathat: 1. a nyujtványnélküli protoplasmás gliasejtet, 2. a nyujtványos protoplasmás gliasejtet és 3. a nyujtványos rostos gliasejtet. Ezek közül a fejlődés első fokán levő nyujtványnélküli protoplasmás gliasejt az a féleség, mely kóros körülmények között amœboid viselkedésre van képesítve, továbbá arra, hogy a szétbontott és szétesett idegszövetet magába felvegye; ilyen «apolaris» gliasejt az egész kéregben mindenütt található. A mi a fejlődés második fokán levő nyujtványos protoplasmás gliasejteket illeti: Eisath szerint feltünő ezeknek az idegműködést végző idegsejtek körül való elhelyezkedése nagy számmal, tehát oly rétegekben, ahol az élénk idegsejtműködésnél fogva nagy anyagcsere folyik. Itt oly gliasejtekre van szükség, melyek ezen anyagcserének kedveznek, amilyenek az erek falához tapadó és nyujtványos plasmás gliasejtek. A mi végül a rostos gliasejteket illeti, ezek Eisath szerint azért találhatók ép viszonyok között csakis a kéregfelszín alatt, mert e helyen védő és szilárdító rétegre van szükség, amire csakis a rostos szerkezet alkalmas.

A protoplasmás nyujtványos gliasejteknek támasztó feladatán kívül még tápláló jelentőségére meggyőzően utal ezeknek az erek és gliasejtek között való kiterjedése, az a körülmény, hogy egy és ugyanaz a gliasejt az érfallal és az idegsejttel fonódik össze. Mintegy hídszerűen feszül ki a táplálást végző érrendszer és az idegműködést kifejtő dúcz-sejtek között a protoplasmás glia, mihez Held azt a gondolatot fűzte, hogy a glia intracellulásan vezeti azt a nedváramlást, mely az erektől az idegsejtekhez halad. Persze nem hiányzott a gliának az erekhez való viszonyának egyéb magyarázata sem; Andriezen a gliának érkörüli elrendeződését azzal okolta meg, hogy ezzel a nagyon változó értelődési illetőleg nyomási viszonyokkal szemben adatnék meg bizonyos védekezés az idegszövet részére. E felfogás valószínűsége elég nagy; ámde ha kizárólag ez volna az érkörüli glia feladata, akkor ennek meg tudna felelni a Weigert festésével kimutatható érkörüli gliarosttömörülés segélyével és nem volna szükség az érfalat bevonó gliatalpakra. Ez utóbbiak a m. lim. gliæ perivascularis-sal együtt nem annyira védő, mint sokkal inkább szűrő berendezést látszanak képviselni, mely alapon a vér plasmájának az idegsejtekhez való áramlása van lehetővé téve.

Végül a protoplasmás gliasejtek gliosomái oly elemi képződések, melyeknek a rostos glianyujtványok kiképzésében van szerepük, mire már fentebb utaltunk. A gliosomák a képző anyag, melynek segélyével megtörténik a rostos elkülönülés. De ha tekintetbe vesszük még ezenkívül azt is, hogy a nyirokhézagokkal érintkező gliasejtek tömve vannak telten festődő gliosomákkal, akkor kétségtelen, hogy az anyagcserének közvetítői gyanánt is tekintendők, miért is Eisath tápláló szemcséknek («Nährkörperchen») nevezi őket.

A most kifejtettek alapján a neurogliának ép viszonyok között kettős nagy működése van. Egyrészről valósággal támasztja, helyhez rögzíti az idegműködést kifejtő elemeket, másrészt az idegszövet táplálásában van szerepe. Midőn támasztó és egyúttal védő feladatának kell megfelelnie, akkor a protoplasmás glia átalakul rostos gliává, a mint ezt ép viszonyok között a kéreg felszínén és a fehér állományban (gerinczvelő) látjuk; midőn a támasztás mellett egyúttal táplálati jelentősége is van, akkor gazdag elágazású protoplasmás glia alakjában jelentkezik, mint például a nagy agy kérgének rétegeiben. Vajjon e kettős működésen kívül teljesít-e még egy harmadik feladatot is, a Cajal illetőleg Sala y Pons által feltételezett elszigetelést az idegingerület vezetésében? Oly működés ez, mely az első pillanatban bár nem látszik valószínűtlennek, de lényegesnek semmiesetre sem tekinthető. Cajal a neurogliának elszigetelő jelentőségét oly példák felsorolásával igyekszik megerősíteni, melyek mindazt igazolnák, hogy a megfelelő helyeken éppen a glia az egyetlen elem, mely a csupasz idegelemek zavaró érintkezéseit kizárni tudja. Ezen az alapon azután igazán érthetetlen, hogy miért léteznék a gerinczvelő fehér állományában oly gazdag gliahálózat, holott tudvalevő, hogy itt a tengelyfonalak amúgyis vastag elszigetelő velősburokkal vannak körülvéve. *A neurogliának elszigetelő szerepe mindenképen igen kérdéses.*

A neurogliának a támasztásban és a táplálkozás közvetítésében megnyilvánuló működésén kívül van még egy, kóros körülmények között érvényre jutó szerepe, és ez abban áll, hogy az idegelemek pusztulása helyén a glia a szétesett és szétbontott termékeket eltakarítja és az így hiányzó szövet helyébe lép. Igen találóan nevezte Weigert a gliát *kitöltő anyagnak* («Füllsubstanz»); kétségtelenül ilyen minőségben szerepel a másodlagos elfajulás folytán előállott holt pályák területén belül, ahol az elhalt idegszövet helyébe lép a túltengő glia; ugyanez a szerepe nagyobb helyi roncsolások esetén, midőn az anyaghiányokat szintén burjánzó gliaszövet helyettesíti. *Az újonnan keletkezett gliaszövetet az idegrendszer hegszövetének lehet tekinteni,* mire Weigert utalt először. E kitöltő tömeges, hegszerű gliaburjánzáson kívül azonban Weigert szerint van még oly gliás pótlás, mely a mikroskopi szövetkiesés helyébe lép. A glia reactiv burjánzása Weigert[1] szerint a legérzékenyebb jelzője a működő idegszövet kiesésének, mert jelenlétéből mindig kiesésre

[1] Weigert, C. Zur patholog. Histologie des Neuroglia Fasergerüstes. Zentralbl. f. allgemeine Pathologie. 1893.

kell következtetnünk, ha mindjárt a kiesés oly csekély, hogy azt positiv formában kimutatni nem tudjuk. Azért is *a beteg agykéregben a neuroglia burjánzása az idegszövet kiesésének negativuma.* E WEIGERT-féle tételhez ALZHEIMER hozzáteszi, hogy ez nem zárja ki azt, hogy a glia a pótlás mértékén túl is ne burjánozzék, vagy pedig fordítva, hogy a gliapótlás a kiesés fokán alul ne maradhasson, a mint ezt sorvadással járó kéregbántalmakban látjuk. WEIGERT nyomán nem csupán a nagyérdemű ALZHEIMER, hanem mondhatnám az összes német ideghistologusok haladnak, tehát *a német iskola a neurogliának az eltakarításon kívül kizárólag pótló szerepet tulajdonít kóros körülmények között* és így a gliának a kóros folyamat mint ilyen által feltételezett bántalmát nem veszi fel. E felfogás jellemző megvilágításban részesül ALZHEIMER-nek a paralysises folyamatra nézve tett következő kijelentésében: «In Wirklichkeit beruhe aber in der Neurogliawucherung nicht das Wesen des paralytischen Prozesses, sie bilde nur eine sekundäre Erscheinung (l. c. 52. l.).

Ezzel a glia pathologiájának oly pontjához értünk, melynél megállapodnunk annyival inkább kell, mert éppen a CAJAL-képek az eddig vallott felfogással ellentétes nézetre terelnek engem. Ezt röviden aképen fejezném ki, hogy a *neurogliának* kétségtelenül elsődleges elváltozásain kívül, milyen például a daganatos gliomás növekedés, továbbá a fentjelzett másodlagos túltengésein kívül *vannak sui generis megbetegedései is, melyeket ugyanaz a kóros behatás idéz elő, mint a mely ugyanekkor az idegszövet bántalmát okozza.* E nézet kifejtésében tanulságosnak igérkezik a paralysisben található glia-elváltozás annál az oknál fogva, mert e betegségben a kórnemző tényező ismeretes. A kérdés tehát így áll: A postlueses állapotra visszavezethető idegszövet- és érbántalmon kívül felvehetők-e ugyanily természetű elváltozások a gliaszövet részéről is, vagyis az idegszövet elfajulásán és az érszövetet érő elváltozásokon kívül szenvedhet-e a gliaszövet ugyanezen az alapon is? Amennyiben pedig e kérdésre igennel felelhetünk, úgy a paralysisben mutatkozó glia-elváltozásoknak nem kell kizárólagosan pótló jellegűnek lenniök, hanem ezek oly elváltozásoknak határozhatók meg, melyek mint a neurogliának a postlueses bántalommal szemben mutatkozó sajátos önálló reactiói tekintendők.

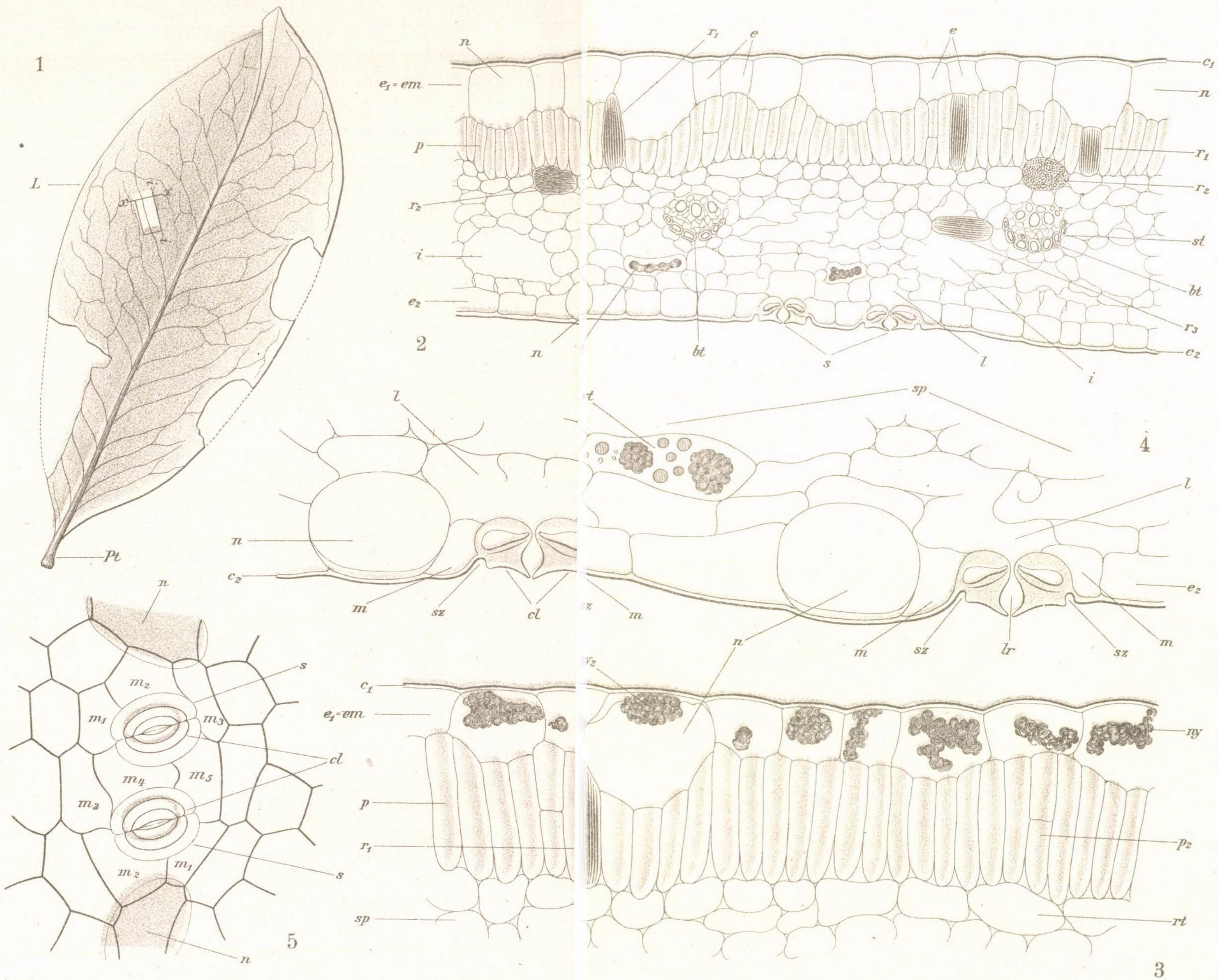
Már magában az a körülmény, hogy a paralysisben a glia elváltozásai topographiailag egybeesnek az idegszövet elváltozásainak helyi megoszlásával, valamint ALZHEIMER fentemlített ama lelete, hogy a glia az ideg- és érszövettel egyidejűleg lesz beteg a paralysis legfrissebb eseteiben, jogosulttá teszik azt a gondolatot, hogy azonos kóros behatás alatt áll mind a három szövet, tehát kóros reactióik coordináltak. Igaz ugyan, hogy a jelzett egybeesést a jelenleg divó felfogással is lehet értelmezni, vagyis felvehető, hogy a megbetegedett idegszövet nyomába a glia lép burjánzás alakjában, innen a topographiai egybevágás. Ámde ezzel a felfogással a szövettani kép nem egyezik. Jelesen nem egyezik a pótlás természetével mindenekelőtt a glia burjánzásának mértéke, mert a neuroglia az idegszövet elváltozásához képest oly hatalmas arányokban terjeszkedik, nő, hogy az a glia pótló reactiójaként nem fogható fel. Így rendes nagyságú, tehát semmiképen sem megcsonkított idegsejteket óriási gliasejtek karolnak körül akár protoplasmás, akár rostos formában, a mi, ha a pótlás jegyében történnék, annyit jelentene, hogy a még jelen nem lévő, a még ki nem képződött anyaghiányt igyekszik a gliatúltengés kiegyenlíteni. Ugyanekkor az erek körül a gliának jelentékeny megnövekedése és kiterjeszkedése mutatkozik; ismét oly jelenség ez, a melyre a pótlás fogalmát illeszteni nem lehet, sőt inkább arra enged következtetést, hogy az érrendszer részéről szerepelhet bizonyos izgalom. ALZHEIMER maga utal arra, hogy a gliasejteknek az érfalhoz futó nyujtványai sokkal erősebbek, mint az egyéb irányban kiterjedő ágai. Végül *a pótlás természetével nem egyeztethető össze a neurogliának szétesésre való hajlamossága, hiszen a kétségtelenül hézagpótló gliaszövet éppen tartósságával tünik ki.* Gondoljunk csak a másodlagos elfajulásnál, a sokfoltú keményedésnél, a lágyulások környékén túltengett gliaszövetre, mely tömött rostos voltával valósággal a hegnek és így az állandóságnak jellegét viseli magán, és tisztán áll előttünk az a körülmény, hogy a buján tenyésző és *rohamosan* elfajuló gliaszövet már elejétől fogva *beteg* gliaszövet, és pedig beteg ugyanabból az okból, mint az idegszövet. Nyomatékkal kell utalnom a **korai** glianekrosisra, mint oly körülményre, mely ellene szól annak, hogy az adott esetben a glia másodlagos túltengése szerepel. *A glia elfajulása, illetőleg halála már önmagában jelzi a glia beteg voltát.* Persze felmerülhet a kérdés, hogy miért kell a gliának megbetegedése alkalmával hypertrophiába esnie és miért nem vezet degeneratio a rendes méretű gliasejteken halálra? Úgy látszik, hogy a gliaszövetnek, mint részben pótló természetű szövetnek, sajátsága a megnagyobbodás és szaporodás útján való reagálása; a neuroglia egyéni tulajdonságképen fejti ki a hypertrophiát és proliferatiót kóros viszonyok között, mely lényegileg háromféle lehet. 1. A neuroglia túlteng veleszületett oknál fogva *elsődlegesen* (glioma, sclerosis tuberosa). 2. Túlteng helyettesítő oknál fogva *másodlagosan,* midőn létrejő egy *állandó* jellegű hegszövet (például másodlagos elfajulás). 3. Túlteng és egyúttal rohamosan degenerál önálló, *egyéni megbetegedés folyamán,* mely valami külső októl függ, a milyen például az idegrendszer lueses állapota. Figyelmeztetnem kell e helyen MERZBACHER felfogására, a ki szerint a neuroglia elsődleges megbetegedése örökléses alapon lehetséges és így a különböző, mai napig még nem teljesen ismeretes agyvelő-sclerosisok ezen az alapon lennének magyarázandók. Ha pedig a neuroglia elsődleges bántalmának felvétele jogosult, nem látható be, miért ne betegedhessék meg e szövet kívülről beható káros tényezők folytán sajátlagosan, pótlási tendentia nélkül. Persze ez nem zárja ki, hogy a glia sajátos megbetegedése ne találkozhassék *ugyanakkor* a glia pótló működésével.

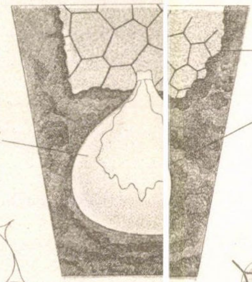
A mennyiben a fenti megjegyzések helytállók, fel kell állítanunk a neurogliabántalmaknak azt a rendjét, melyet a *sajátlagos,* a *sui generis gliabántalmak* képviselnek, melyekkel nem tévesztendők össze a pótló gliabántalmak. A paralysisben látható gliabántalom — mindenesetre egyrészt — ilyen sui generis megbetegedése a gliaszövetnek.

Összefoglalva a neuroglia jelentőségére vonatkozó felfogásokat, azok a következőkben körvonalazhatók:

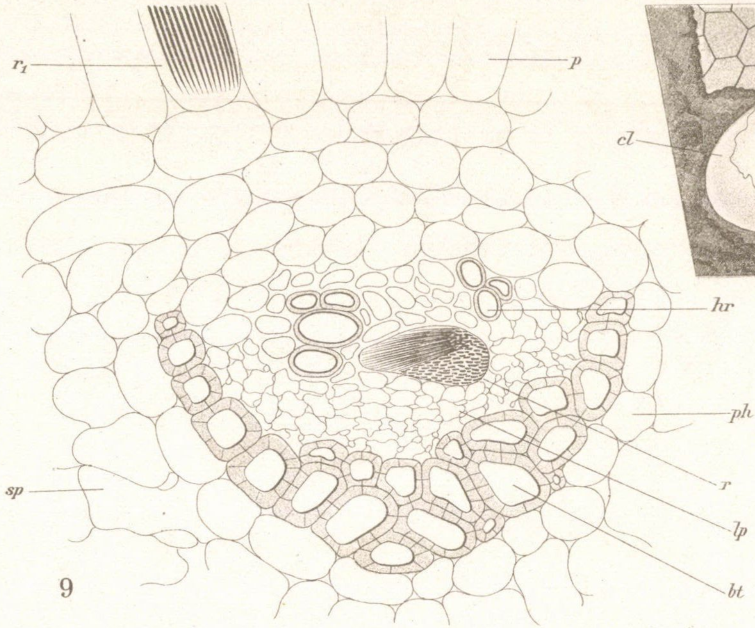
A neuroglia, melynek alapformáját a nyujtványok nélküli gliasejtek képviselik, *ép körülmények* között támasztó, illetőleg védő és tápláló működést fejt ki. Ezért protoplasmás nyujtványokat bocsájt ki magából, melyek az erek falához és az idegsejtek felszínéhez való tapadásuknál fogva úgy a rögzítésben, valamint a táplálásban megnyilvánuló működésnek eleget tudnak tenni. Védő feladatát a kéreg felszínén teljesíti, a mihez szilárdabb, ellentállóbb szövetre levén szükség, a protoplasmás gliasejtek rostosakká alakulnak át. — *Kóros körülmények* között a neuroglia működése megnyilvánul: 1. a széteső idegszövet szétbontásában és eltakarításában, midőn többek között a neuroglia apolaris elemei amœboid formában szerepelnek; 2. a szétesett, eltakarított és hiányzó idegszövetnek pótlásában, mely czélból a glia túlteng és állandó, ektodermalis rostos hegszövetet alkot; 3. a neuroglia kóros viszonyok között egy adott kórnemző tényező folytán sajátlagosan megbetegedhetik, mely alkalommal a glia nem csupán túlteng, hanem többé-kevésbbé rohamosan elfajul és elpusztul.

(A M. T. Akademia III. osztályának 1916 október 16.-án tartott üléséből.)

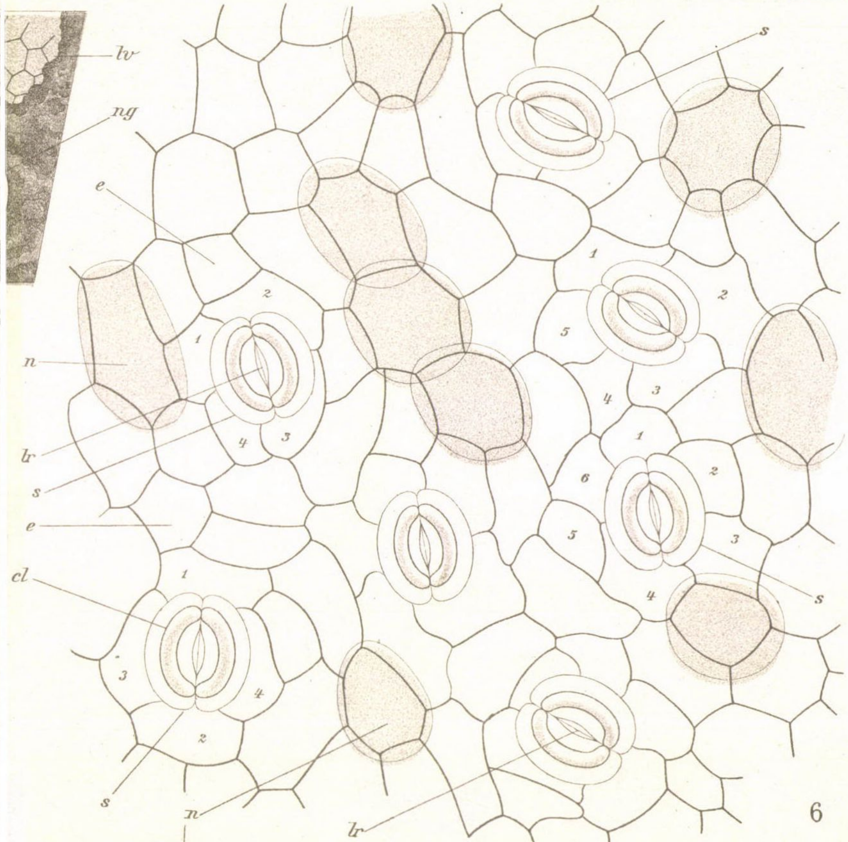

1
L
Pt
2
n
e₁=em
p
r₂
i
e₂
r₁
e
c₁
n
r₁
r₂
st
bt
r₃
e₂
bt
s
l
i
4
sp
l
n
c₂
m
sz
cl
m
e₂
n
m
sz
lr
sz
m
5
n
m₂
m₁
m₃
s
cl
m₄
m₅
m₂
m₁
s
n
3
c₁
e₁=em
p
r₁
sp
ny
p₂
rt



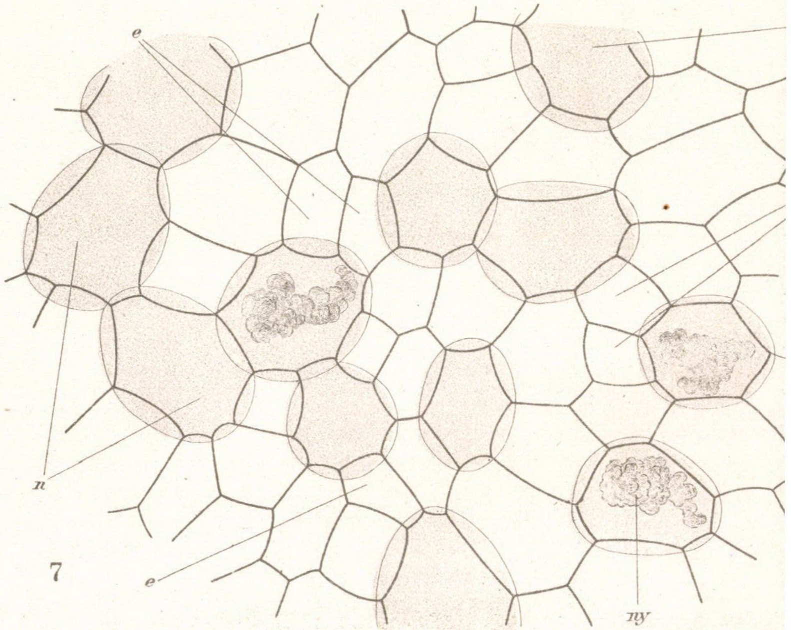
8



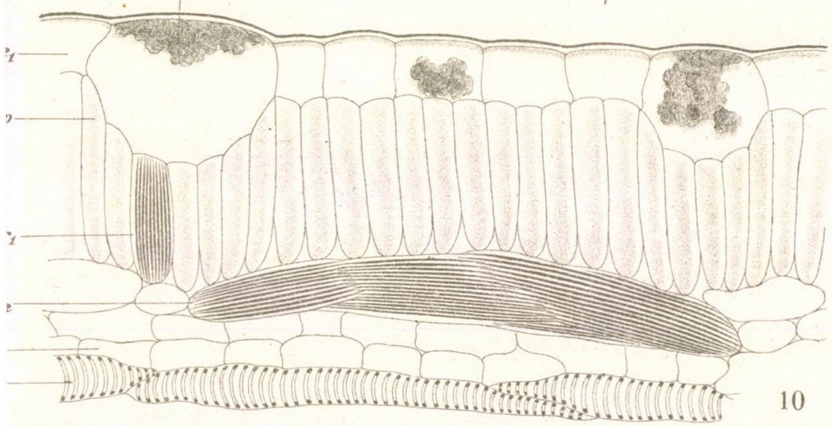
9



6



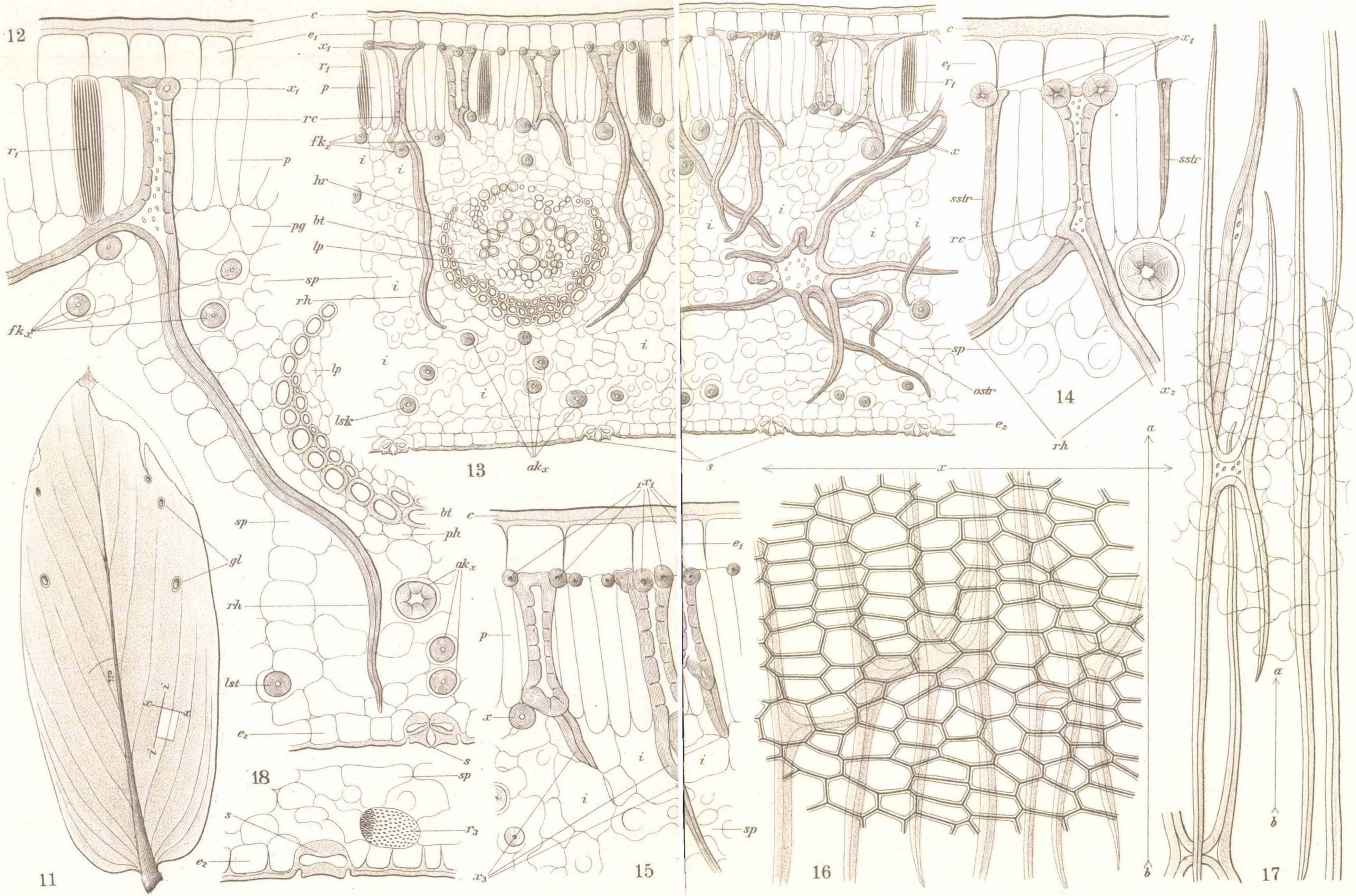
7



10

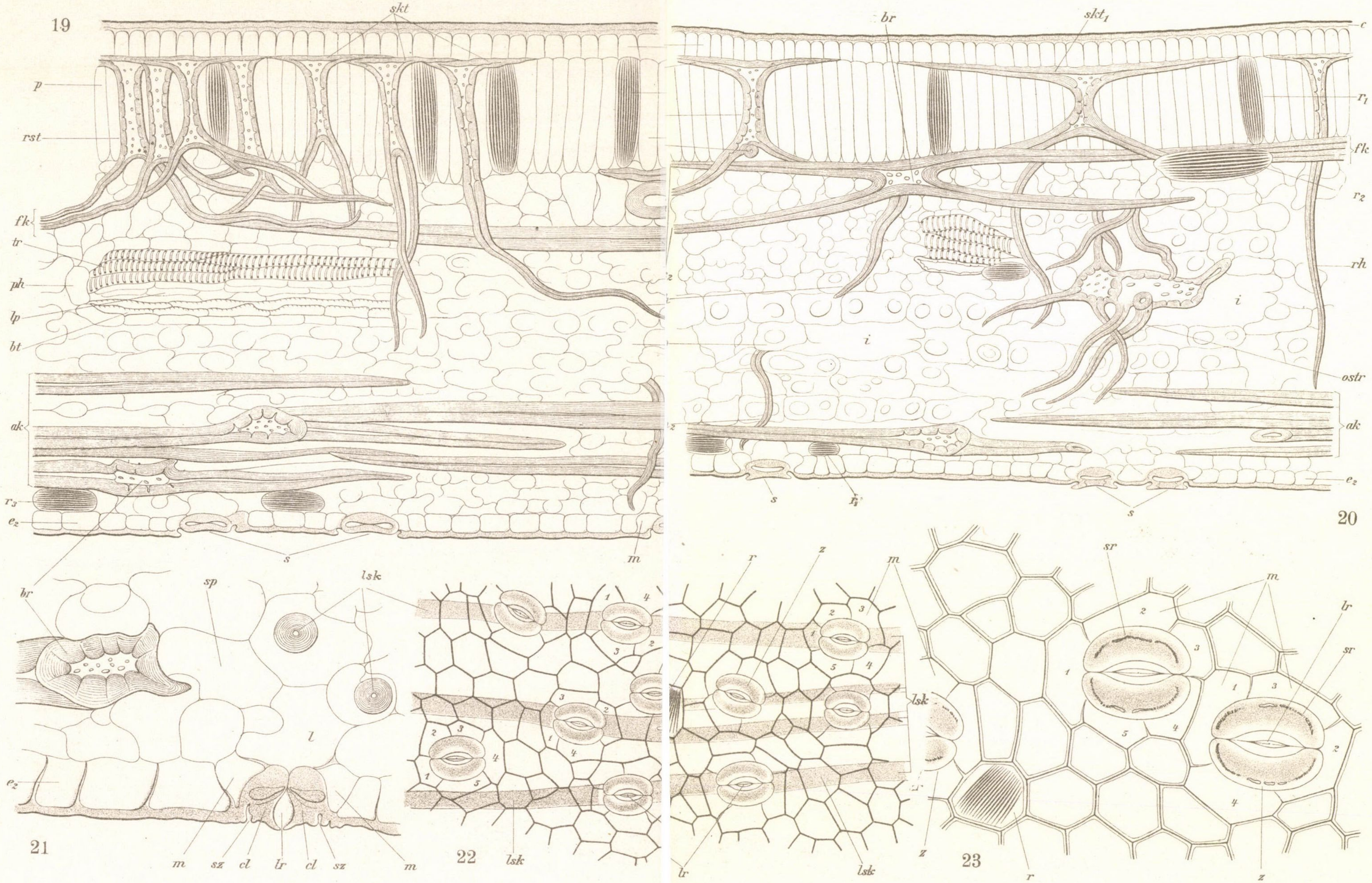
del. A. Richter, Posonii a. 1916.

Th. Bannwarth, Bécs, VIII., lith. nyomása



del. A. Richter, Posonii a. 1916.

Th. Bannwarth, Bécs, VIII., lith. nyomása



19

20

21

22

23

del. A. Richter, Posonii a. 1916.

Th. Bannwarth, Bécs, VIII., lith. nyomása

A LOMBLEVELEK ALKALMAZKODÁSA.

MÁGOCSY-DIETZ SÁNDOR rendes tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Tekintetes Akadémia!

A midőn e helyet most elfoglalom, első szavam a hála és a köszönet szava, a melylyel a Tek. Akadémia bizalmáért adózom azért, hogy rendes tagjai sorába választani méltóztatott. Mélyen sajnálom, hogy székfoglalói kötelezettségemnek megkésve teszek eleget, de mentse késedelmemet más helyen való tudományos és irodalmi munkálkodásom. Késve bár, de annál melegebben mondok őszinte köszönetet megtisztelő bizalmukért és őszintén igérem, hogy annak megfelelni mindenkor első kötelességemnek fogom tartani.

A növény tagjai közül kétségtelenül a lomblevelek mutatják a legnagyobb változatosságot. Ennek oka kétségen kívül az, hogy a lomblevelek a növény életében olyan munkát teljesítenek, a melynek sikeres végezéséhez okvetlenül alkalmazkodniok kell a környező viszonyokhoz. Kétségtelen azonban, hogy ez a változatosság, a külső körülményekhez való ez az alkalmazkodás bizonyos korlátok közé van szorítva.

Az irodalomban bőségesen találunk adatokat, közléseket, a melyek ezzel a változatossággal, illetőleg a változások és a külső környező viszonyok közti összefüggéssel foglalkoznak kisebb-nagyobb mértékű bizonyossággal, a nélkül azonban, hogy ezt egészen minden vonatkozásában tisztázták volna.

Éppen ebből az okból óhajtok én is kisérleteimmel és vizsgálataimmal a kérdés megoldásához hozzájárulni, ha bizonyos szűkebb körre szorítkozva is.

Nevezetesen már évek óta megfigyelve az apró szulák, Convolvulus arvensis L. hazánkban gyomként elterjedt növénynek számos egyénét, arra az eredményre jutottam, hogy a levél alakját tekintve, egyike a legváltozatosabb fajoknak.

Tanuja ennek különben az irodalom[1] is, a mely a különböző levélalakok alapján sokféle fajváltozatot, formát különböztet meg, kapcsolatban a szulákon mutatkozó egyéb alaki vagy más sajátságokkal.

Elég legyen e tekintetben csak Opiz munkájára[2] utalnom, a ki 46 fajváltozatot különböztet meg; pedig a levélalakokban mutatkozó kisebb mértékű eltérésekre nem is volt tekintettel, úgy hogy ezek számbavételével a fajváltozatok, formák sora még tekintélyes számmal volna gyarapítható.

Minthogy a fajváltozatok, formák határolásának kérdésével más alkalommal kivánok foglalkozni, most figyelmen kívül hagyom az apró szulák változatos sajátosságait, és feladatomnak megfelelőleg csak a lomblevelek sajátosságaival, legfőképen alakbeli viszonyaival kivánok foglalkozni.

Az apró szulák leveleinek alaki viszonyaira helyesen mutatott reá Lasch[3] is a következő jellemzésével: «Folia elliptica, ovata, oblonga, lanceolata vel linearia, glabra aut subpilosa, margine subrepanda vel denticulata, sæpe undulata et ciliata, apice obtusa, retusa vel acuta, mucronata, basi biloba, lobis divaricatis, divergentibus, deflexis vel rectis, brevibus vel elongatis, angustis aut latis, obtusis vel acutis, integerrimis vel margine inferiori univentatis.» De még ezt a jellemzést sem

---

[1] De Candolle Alphons: Prodromus syst. nat. regni vegetabilis. IX. k. Paris, 1845. 406. l.

Dr. Ledebour C. F.: Flora rossica. III. k., 1. r. Stuttgart, 1847—49. 91. l.

Ascherson P. u. Graebner P.: Flora d. nordostdeutsch. Flachlandes. Berlin, 1898—9. 567. l.

Rouy G.: Flore de France. X. k. Paris, 1908. 347. l. stb.

[2] Graf v. Berchtold u. Opiz P. M.: Oekonomisch-technische Flora-Böhmens. III. köt. Prag, 1841. 293—298. l.

[3] Beitrag zur Kenntniss der Varietäten u. Bastardformen einheimischer Gewächse. Linnaea. IV. k. 1829. 407. l.

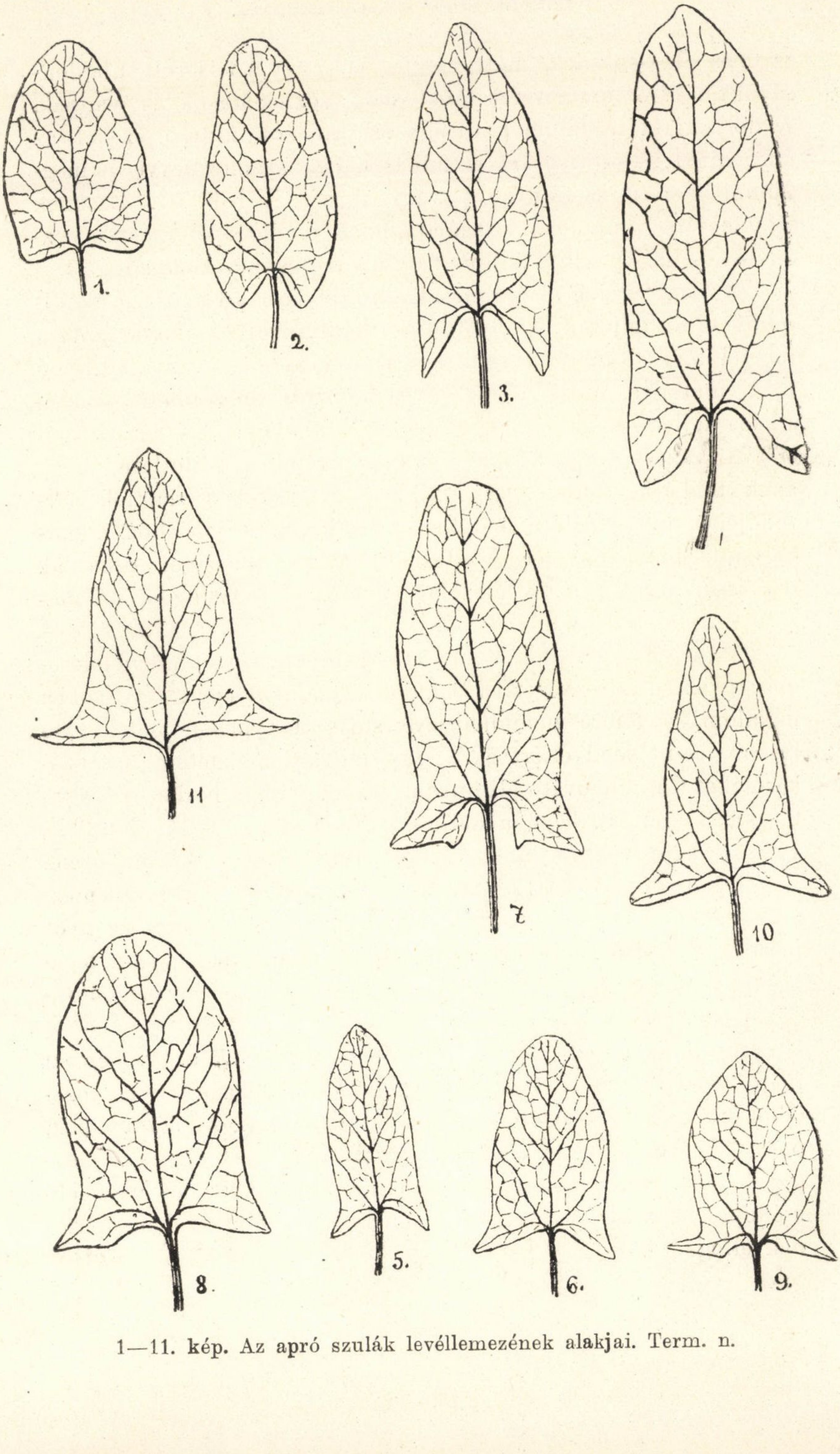
tartotta elégségesnek, mert megjegyzi, hogy a felsorolt tulajdonságokkal biró lomblevelek közt még köztes-alakok is vannak. A florisztikai irodalom tanusága szerint sok kutató ezeket az apró alaki különbségeket is felhasználva, számos névvel is megkülönböztetett fajváltozatot vagy formát sorolt fel. Ezeknek tisztázására vonatkozó vizsgálataimnak eredményét mostan közlendő eredményeimtől külön választva óhajtom közreadni.

A lomblevelek alakjának alkalmazkodására vonatkozó tanulmányomra teljesen kielégítőnek mutatkozott a határozottan megjelölhető lombleveleknek a tekintetbevétele. Ezen a korláton belül maradva, mégis a mellékelten közölt huszonhétféle levélalakot kellett megkülönböztetnem. (1—27. kép.)

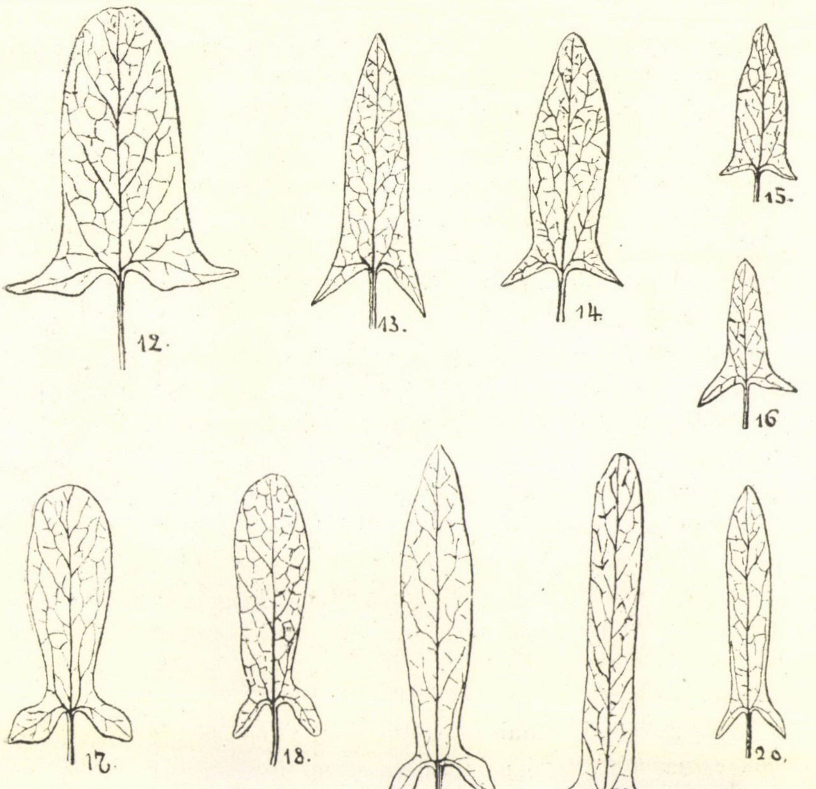
A vázolt levélalakokat olyan sorrendbe állítottam, hogy azok többé-kevésbé egyes kisebb eltérésekkel a számok sorrendjében bizonyos átmenetellel kapcsolódnak egymáshoz, mondhatnám bizonyos természetesnek látszó sorozatot alkotnak olyképen, mintha azok látszólag egymással összefüggő származási sorrendet tüntetnének fel.

A megfelelő alakok vizsgálataim folyamán való megjelölésének egyszerűsitése végett a sokféle levélalakot egyes typusokba foglalom, egyelőre nem helyezve súlyt a typuson belül való kisebb jelentőségű eltérésekre; így megkülönböztetem a tojáskerülékes (folium ovato-ellipticum, 1., 2. kép), a nyilas (f. sagittatum, 3—6., 13. kép), a dárdás (f. hastatum, 7—11. kép, 12., 14—16. kép), végül a lándzsaszerű, illetőleg füles (f. lanciforme, illetőleg auriculatum, 17—26. kép) levélalakokat. A levéllemezalakoknak ilyetén négy typusba foglalása azonban bizonyos mértékben kettős sorozat, a mennyiben minden typuson belül keskenyebb és szélesebb levéllemezt kell és lehet is megkülönböztetni mint szélsőséget.

A szulákfaj egyéneinek, illetőleg formáinak a levéllemezt illető ez a változatossága már rég gondolkodóba ejtett és közelebbi vizsgálatra késztetett. A feladat nem látszott könnyűnek, mert kétségtelennek mutatkozott, hogy a kérdést egyszerű megfigyeléssel nem lehet megoldani, hanem csakis a megfelelő módon keresztülvitt kisérlet eredményét lehet és szabad döntőnek elfogadni.



1—11. kép. Az apró szulák levéllemezének alakjai. Term. n.



12—27. kép. Az apró szulák levéllemezének alakjai. Term. n.

A kisérlet módjának megállapitása, illetőleg ennek kiindulása két feltétel alapján történhetett meg.

Az egyik közelfekvő inditéknak látszott az a feltevés, hogy a faj formáin a levéllemezek változásának az oka a szulák formáinak, illetőleg egyéneinek nagy hajlandósága a fluktuáló variatióra,[1] vagyis hogy a szulák egyénei a levéllemez alakbeli sajátságára nézve ingadozók az öröklés bizonyos határai közt és hogy ezek az öröklött sajátságok bizonyos formára nézve gyakrabban visszatérők, vagy talán mondhatjuk, állandóbbak vagy legalább az állandóságra való törekvést árulják el.

A levéllemez változatosságának okául másrészt a szulák egyéneinek nagymértékű alkalmazkodása szolgálhat, a mely mondhatnám, mintegy termőhelyi módosulás, az illető viszonyoknak a kifejezője[2] és ily módon a szulák levéllemeze bizonyos alakbeli sajátságainak határain belül a különböző levéllemez kifejlődésére ható külső tényezők hatására alakulna ki nagy változatosságban, a mi viszont azt bizonyitaná, hogy a szulák egyike azoknak a növényeknek, a melyek a lemez alakbeli sajátságainak kialakulásában a külső tényezőket illetőleg nagyon is érzékenyek.

Ez a két ok azonban egyszersmind megszabja a kisérletnek egymástól eltérő módozatát is, mert a míg az előbbi az örökléssel kapcsolatban a leszármazott ivadékok változatosságát kell hogy igazolja, addig az utóbbi ok egy egyénnek a különböző tenyészeti viszonyok közt való viselkedését kell hogy magyarázza.

Alkalmasnak látszott azonban a kisérleteket oly módon végezni, hogy tulajdonképpen mind a két ok alapján tett kérdésre megkapjam a helyes választ.

---

[1] DARWIN Ch.: Das Varieren d. Thiere u. Pflanzen. Stuttgart, 1868. DE VRIES H.: Die Mutationstheorie. Leipzig, 1903. II. k. 465., 666. l. KORSCHINSKY S.: Heterogenesis u. Evolution. Flora. 89. k. 1901. 240. l. Dr. LOTSY J. P.: Vorl. ü. Deszendenztheorien. Jena, 1906. 152., 395. l. JOHANNSEN W.: Elemente d. exakten Erblichkeitslehre. Jena, 1909. 10. stb. l.

Dr. WETTSTEIN v. R.: Handbuch d. syst. Botanik. Leipzig u. Wien, 1911. II. kiad. 34. l.

[2] Dr. LAUBERT R.: D. Bot. Monatsschrift. 1902. XX. k. 50. l.

Mielőtt azonban a kisérletezéshez fogtam volna, kivánatosnak mutatkozott az apró szuláknak a természetadta körülmények közt való viselkedését, illetőleg az egymástól eltérő lemezalakokkal biró egyéneknek természetes viszonyait közelebbről szemügyre venni.

Az irodalom tanusága[1] szerint az apró szulák ma már a földnek jóformán minden részében elterjedt, kivéve a hidegebb sarki tájakat és a magasabb hegyi tájakat, különösen pedig el van terjedve ott, a hol mezőgazdasági termelés folyik. Ugyanis az apró szulák minden valószinűség szerint a keleti földteke melegebb mérsékelt, esetleg még subtropikus övéből indult el nagy elterjedésű területére. Nagy mértékű elterjedésének éppen az adja meg magyarázatát, hogy ezen az eredeti elterjedési területén a mezőgazdasági növényekkel együtt tenyészve, ezeknek magjaival együtt jutott a mezőgazdasági termelés mind nagyobb mértékű elterjedésével földünknek jóformán minden részébe.

Ez az elterjedési mód magyarázza meg egyszersmind mai elterjedési határain belül termőhelyeinek sajátságait is. Nevezetesen hazánkban is terem parlagokon, árkok mentén, vetés közt, kertekben, a hol «kellemetlen gyom»,[2] vagyis mindenütt a mezőgazdasági, beleértve a kertészeti növények tenyésztette területeken, vagy azok közeli szomszédjában. Ilyképpen jut azután abba a helyzetbe, hogy a legkülönbözőbb viszonyokkal biró termőhelyeken kénytelen a rendelkezésére álló tényezőket kihasználni. Ezzel kapcsolatban nagyon természetesen ezek közt a különböző viszonyok közt és ezek hatása alatt a változásokra legkönnyebben hajló tagjai, a levéllemezek változtak meg, vagyis alkalmazkodtak az illető termőhely adta viszonyokhoz.

A különböző termőhelyeken pedig különösen égalji, talajbeli és nagyon sokszor mechanikai hatások érvényesültek és ezek érvényesülésének kifejezője az adott viszonyok közt tenyésző apró szulák lemezeinek alaki sajátossága.

---

[1] Dr. Früwirth C.: Die Ackerwinde. Berlin, 1914. 24—26. l.

[2] Hoffmann-Wagner: Magyarország virágos növényei. Budapest, 1903. 37. l.

Dr. Cserey Adolf: Növényhatározó. IV. Selmeczbánya, 1906. 563. l.

Dr. Früwirth C.: Die Ackerwinde. Berlin, 1914. 24. l.

Mindezeket számbavéve megállapíthattam, hogy a termőhely különböző viszonyait tekintve, különösen a nedvesség, illetőleg a szárazság, továbbá a fény és a talaj megmunkálásának a módja, valamint a levéllemez alakjának sajátossága mutatott bizonyos mértékű összefüggést.

Nevezetesen megfigyeléseim szerint a nyilas, dárdás leveleknek különösen a szélesebb alakjai (4., 7—8. kép) inkább a nedvesebb termőhelyen tenyésznek, ellenben a szárazabb termőhelyeken ugyanezeknek az alakoknak a keskenyebbjei jelennek meg. (5., 12—16. kép.) A nyilas és dárdás lemezű formák közül a fénynek jobban kitett helyeken a nyilas levelek a gyakoriabbak, a nagyon száraz termőhelyeken pedig a lándzsaszerű, illetőleg füles levelek jelennek meg. (21—27. kép.) Még két jelenség kötötte le figyelmemet a szabad természetben magától tenyésző növények sorában.

Ugyanis a míg az eddig említett levélalakokkal biró egyének levelei, akár tekerődző, akár heverő száron jelennek is meg, csekély alakbeli és inkább helyzetbeli eltérést és sajátosságot mutatnak, a mi bizonyára a fény hatásával áll szorosabb kapcsolatban, addig egyes alakok többé-kevésbé felálló és dúsabban elágazó szárakon jelennek meg, és pedig többé-kevésbé kerülékes vagy nagyon csekély mértékben nyilasodó vagy dárdásodó alappal, a mely alak igen emlékeztet az apró szulák sarjadzó hajtásain fejlődő elsődlevelek lemezének alakjára. (1—2. kép.)

A másik jelenség, a mely még az előbbinél is feltünőbb, az, hogy a tenyészeti időszak alatt gyakrabban megmunkált termőhelyeken a legkeskenyebb lándzsaszerű lemezalakok fejlődtek, és pedig különösen a tenyészeti időszak második és harmadik időszakában. (22—26. kép.) Mindkét eltérő jelenségnek okát már a szabad természetben is megkiséreltem megkeresni.

Vizsgálataimnak eredményeként megállapíthattam, hogy az első esetben valamely a gyökéren élősködő izelt lábú okozta sérülések lehetnek csak a sajátszerű lemezalaknak okai. A második esetben pedig a keskeny lemezalak fejlődésének csakis a földbeli részén fejlődött ágaknak a föld megmunkálása által való ismételt eltávolítása lehet az oka, a minek megfelelője a fásnövények nyesése vagy rovarrágása következtében való keskenyebb, véznább levél alakulása.

Mindezek a megfigyelések és megállapitások azonban nem birhatnak bizonyító erővel, mert hiszen a lemezek fejlődésére ható tényezők pontosabb ismerete nélkül alakultak ki és így sem a fluktuáló variatiónak, sem pedig az alkalmazkodó képességnek bizonyitékai, habár az utóbbira nézve bizonyos mértékben tájékoztatóknak tekinthetők.

Hogy azonban a kérdést eldönthessem, a megszabott körülmények közt keresztülvitt és már előbb említett kisérletekhez folyamodtam, a melyeknek keresztülvitelében a szabad természetben szerzett tapasztalatokat értékesíthettem.

Az apró szulákkal való tenyésztési kisérleteket a budapesti k. m. tudományegyetemi növénykertben végeztem nyolcz esztendőn át, közben a szabatosabb és pontosabb ellenőrzés végett az egyetemi növénytani intézetben is tenyésztettem időközönként az apró szulák egyedeit. A tenyésztést úgy a növénykert szabad talajában, mint nagyobb ládákba és virágcserepekbe helyezett talajokban végeztem. És pedig, hogy a különböző talajok hatását is megfigyelhessem, a legkülönbözőbb kötött és laza talajokat is kipróbáltam, a jól trágyázott vályogtalajtól kezdve az egészen sivár futó homoktalajig. A tenyésztés alatt álló növényegyedet a vízzel való ellátás szempontjából a legkülönbözőbb módon kezeltem. Egyesek talaját nagyon is nedvesen tartottam, másokét mérsékelten öntöztem és végül egyeseknek csak annyi vizet juttattam, a mennyi a megélhetésükre szükséges volt.

Az ily módon kezelt, különösen a cserépben nevelt növényeket azután a fény hatásának a tanulmányozása végett különböző árnyékos, félárnyékos és napos helyeken helyeztem el, és pedig egyeseket olyaténképpen, hogy egész napon a napfénynek voltak kitéve, másokat pedig olyaténképpen, hogy a napnak csak bizonyos szakában, és pedig vagy délelőtt, vagy délután érte őket a napfény.

A különböző hőmérsék hatásának megfigyelése végett nemcsak a kert szabad területén helyeztem el a növényeket, hanem különböző hőmérsékletű üvegházakban is.

Hogy pedig a dolgozatom elején feltett kérdésre választ találhassak, a kisérleteket nemcsak a különböző egymástól eltérő levélalakokkal biró egyedekről származó magvakból nevelt egyedekkel végeztem, hanem a szabad föld talajából gyökerestől kiásott egyedekkel is. És hogy a mechanikai hatások eredményét is megfigyelhessem, a mindkét módon nyert kisérleti növények földfeletti szárait vagy egészen eltávolítottam, vagy pedig a szárakat csak többé-kevésbé megcsonkítottam, és ezt az eljárást egy tenyészeti év folyamán többször is megismételtem.

Az évekre terjedő, hosszú tartamú tenyészeti kisérleteim eredményeinek naplószerű kimutatását mellőzve, csak a főbb eredményeket sorolom fel.

Elsősorban is megállapíthattam, hogy az apró szulák magvai, bárhonnan származtak legyen is, nagyon kis százalékban csiráztak és csirázóképességük nem tartós, mert már 3—4 év multán alig akadt köztük csirázó.[1]

A szabad természetben nőtt egyedek az átültetést nem nagyon türték: sok közülök elveszett és a melyet sikerült is életben tartani, bizonyos hosszabb időbe telt, a míg megerősödött és a rendesnek megfelelően tenyészett, a minek okát a később tárgyalandó gyökéralakulásban látom. A magról kelt egyedek különben jól tenyésztek és a 2—3. évben virágzottak is.

A fentebb vázolt különböző tenyészési viszonyok közt az egyedek viselkedése a következő volt.

A nagyon vizesen tartott egyedek sem a napon, sem az árnyékban nem éltek sokáig, hanem hosszabb-rövidebb idő multán elpusztultak; különösen hamar pusztultak el azok, a melyek előzőleg szárazabb termőhelyen éltek.

Éppen így nem birták el a szulák egyedei a teljes árnyékot, vagyis az olyan termőhelyen, a melyet a napfény közvetlenül nem ért, rövid időn belül elpusztultak, akár nedvesen, akár szárazon tartottam őket. A nagyon nedvesen és a teljes árnyékban tartott egyedek egyike sem tartott ki egy tenyészeti időszakot.

---

[1] Dr. FRÜWIRTH is hasonlót tapasztalt i. m. 10—11. l.

A mérsékelt öntözés és a napos hely, úgy látszik, a legkedvezőbb a szulák tenyészésére: az ilyen helyen végezett kisérlet növényei többé-kevésbé jól kialakult nyilas- vagy legfeljebb kevéssé dárdás leveleket fejlesztettek. Ellenben a mérsékelt öntözéssel és félárnyékban nevelt növények levelei dárdásak voltak, sőt ha a talaj félig kötött, jól trágyázott volt, igen széles dárdás lemezeket fejlesztett még a tekerődző szárakon is, a mint hogy általában a tekerődző száron a levelek mindenkor szélesebb lemezűek, mint ugyanannak az egyénnek vízszintesen heverő szárán.

A kevéssé öntözött és napos helyeken tenyésző növények levelei pedig fülesek vagy lándzsaszerűek lettek; ezek lemeze az öntözés, tehát a talaj nedvessége és a levegő páratartalmának csökkenésével mind keskenyebb lett (17—27. kép).

Említésreméltó, hogy az ilyen levelekkel biró egyedek szára is sok esetben tekerődzött, de mégis az esetek nagyobb részében a szárak inkább heverők maradtak, még akkor is, ha alkalmas támaszték volt a közelükben.

Azokon az egyéneken pedig, a melyek meglehetősen párás levegőben, mérsékelten öntözött talajon, többé-kevésbé szórt fényben, vagy legalább a napnak csak nagyon rövid időszakában napfényen, végül pedig meglehetősen alacsony hőmérsékleten (6—8° C) tenyésztek, mint azt például a növénykert teleltető házában megfigyelhettem, a levelek aprók maradtak, inkább kerülékesek voltak és mintegy megegyeztek a szulák elsődleveleivel (1., 2., kép), mondhatnám ilyen alakjukban megmaradtak fiatalkorú állapotukban.[1]

Különben is meg kell jegyeznem, hogy a szulák a tenyészeti időn kívüli időszakban nem egykönnyen fejleszt hajtásokat, a miért is télen vagy kora tavaszszal való hajtatása a melegágyakban vagy az üvegházakban nem egykönnyen sikerül. Ez

[1] Dr. GOEBEL K.: Über die Jugendzustände der Pflanzen. Flora. LXXII. k. 1889. 1. l.

DIELS S.: Jugendformen u. Blütenreife im Pflanzenreiche. Berlin, 1906.

Dr. FRÜWIRTH i. m. 21. l.

Dr. GOEBEL K.: Organographie der Pflanzen. I. k., II. kiad. Jena, 1913. 356—421. l.

pedig annak a bizonysága, hogy vagy tartós és határozott nyugalmi időszakot kiván meg, vagy pedig a fejlődésére nagyobb mennyiségű fényt, nagyobbat mint a minőt télen vagy kora tavaszszal az üvegházban nyerhet.

Az apró szulák viselkedése még érdekesebb volt a mechanikai hatás következtében, a melyet akként alkalmaztam, hogy a többé-kevésbé kifejlett hajtásokat eltávolítottam, vagyis a hajtásokat megcsonkítottam. A hatás leginkább akkor lett nyilvánvaló, ha a hajtásokat jóformán egészen eltávolítottam. Ez esetben ugyanis a földbeli szárnak vagy gyökérnek sarjadzás által új járulékos hajtásokat kellett fejleszteni, a mire különben az apró szulák nagymértékben hajlandó is.[1]

Sok esetben már az egyszeri eltávolításnak is megvolt a kellő eredménye, de minden esetben beállott a kedvező eredmény, különösen mérsékelt öntözés és teljes napverőn olyképen, hogy az ujonnan fejlődött járulékos hajtásokon mindig füles, illetőleg lándzsaszerű keskeny levelek fejlődtek.

Ha pedig a hajtásokat nem távolítottam el egészen, hanem meghagytam az alsó szártagokat, akkor az ezek leveleinek hónaljában fejlődött hajtások leveleinek lemeze nem egyezett meg a meghagyott hajtások csomóin álló levelekkel, hanem azoknál keskenyebbek és minden esetben a fülképződésre hajlandók lettek, sőt ha a csonkítással kapcsolatban még a tenyészeti viszonyokat is megváltoztattam például olyaténképpen, hogy a növényt a lemetszésig mérsékelten nedves talajban és félárnyékban tartottam, a lemetszéskor pedig mérsékelten öntözött talajban teljesen napverőre helyeztem, a hajtáscsonkok szélesebb dárdás leveleivel éles ellentétben az új hajtásokon keskeny lándzsaszerű levelek fejlődtek.

A levéllemezek alakjának eme változásai beállottak pedig,

---

[1] THILO IRMISCH: Über die Keimung u. Erneuerungsweise v. Convolvulus sepium u. C. arvensis sowie über hypokotylische Adventisknospen bei krautartigen phanerogamen Pflanzen. Bot. Zeitung. XV. évf. 1857. 438—442. l.

KERNER A. v. MARILAUN: Pflanzenleben. Leipzig u. Wien. II. kiad. 1898. 543—4. l.

Dr. FRÜWIRTH i. m. 14—15., 21—23. l.

akárminő lemezű anyanövényről származott legyen a mag, vagy a szabad természetben az átültetett növény akárminő levelekkel birt legyen. Tisztán keskeny levelű egyedekből éppúgy fejlődhetnek nyilas lemezű, mint dárdás lemezű alakok, ha az adott tenyészeti viszonyok erre alkalmasak. A talaj szerkezete, úgy látszik, erre az alakulásra nem bir befolyással, hanem a mint már az előzőkből is kitünik, inkább csak a talaj víztartalma. Meg kell azonban jegyeznem, hogy a lemezek eltérő alakban való fejlődése nem minden esetben történik meg egyik napról a másikra, hanem a kellő és megfelelő tenyészeti viszonyok huzamosabb hatására, sőt az átültetett növény nem is mindig tud egyhamar alkalmazkodni az új viszonyokhoz, hanem sokszor betegeskedni kezd és végre elpusztul. Különösen gyakran tapasztaltam ezt a száraz talajokról származó keskeny levelű egyedeken, a melyek az új viszonyok közt is még megpróbálkoztak néhány keskeny levél fejlesztésével, de azután betegeskedve, néhány kerülékes levél fejlesztése után elpusztultak. Mellesleg jegyzem meg, hogy tapasztalásom szerint nemcsak bizonyos tenyészeti viszonyok közt, hanem a szabad természetben és a tenyészés alatt állók betegeskedésükkor többé-kevésbé az elsődlevelekhez hasonló leveleket fejlesztenek, a mint azt már előbb is említettem. Mint különlegességet említem csak meg, hogy a mediterránból származó szulák magvaiból minálunk a szabadban mindig széles levelű egyedek fejlődtek.

Az ily módon elért kisérleti eredményeket mérlegelve, lehetetlen elzárkózni az elől a gondolat elől, hogy az apró szulák lomblevél-lemezeinek módosulása voltaképpen az adott viszonyokhoz való alkalmazkodás következménye, vagyis helyesebben fejezve ki, az adott viszonyok folytán a növény táplálkozásában és más egyéb életfolyamataiban, mint például a párolgásban is bekövetkezett változott viszonyoknak megfelelő kifejezője.

Ha pedig a lemeznek előbb említett nagymértékű változatosságát nem is tartom most szem előtt, hanem csak az utóbb említett négy typust, az ezeknek megfelelő tenyészeti, egymástól eltérő körülményeire is a legtöbb esetben rá lehet mutatni, a mivel nem akarom bizonyitani, hogy a négy lomblevél-typus rögtönösen megalakul minden esetben a megjelölt viszonyok közt.

De mint a tenyészeti kisérletek által adott eredményt, meg kell állapitanom a következőket:

1. Száraz, verőfényes tenyészeti viszonyok közt a füles vagy lándzsaszerű levélalak alakul ki, a mi különben megfelelő fejlődés, a mennyiben, a mint azt BRENNER[1] kimutatta, a száraz tenyészeti viszonyok közt a parenchyma kevesbedik. Már pedig a lándzsaszerű alak kétségen kívül kevesebb érközti parenchymával bir, mint a többi. Úgy hogy ezt a levélalakot már külső viselkedésénél fogva is xerophil alaknak kell tartanom, a mely bizonyos mértékig még a fény nagyobb mennyiségét is kedveli (heliophil). Igaz ugyan, hogy e két sajátosságában bizonyos határokat tart be, úgy hogy a lemez szélessége szerint talán még a kissé nagyobb mértékű nedvességhez is tud alkalmazkodni és így a xerophil-typuson belül a hygrophil-typushoz való hajlásról is beszélhetünk. (17—27. kép.)[2]

2. A többé-kevésbé árnyékos termőhelyeken, vagy az olyan termőhelyeken, a melyek időlegesen bár, de árnyékba jutnak, legelterjedtebb a dárdás alak, de egyszersmind a leggyakoribb a kisérletekben is, úgy hogy ezt az előbbivel, mint xerophil lomblevéllel szemben árnyékos levélnek, skiophilnek, illetőleg WARMING szerint heliophobnak mondhatnám.

Különben jellemző erre a szulák összes lomblevelei közt árnyat leginkább tűrő vagy elviselő levélalakra, hogy a talaj nedvességének mértékével párvonalosan szélesebb és keskenyebb alakja is megkülönböztethető, úgy hogy a skiophil levélalak lehet némikép xerophil és hygrohpil is. (6—11. és 12., 14—16. kép.)

3. Ezzel a lomblevél-lemezalakkal szemben állnak a kisérlet tanusága szerint azok a levélalakok, a melyek a fénynek kitett növényeken fejlődnek. Ezek pedig a nyilas alapú lemezek, a melyeket szereplésüknél fogva az előbbeniekkel ellentétben verőfényes, vagyis WARMINGgal heliophil lemeznek nevezhetünk. Ez a levél az, a mely a többé-kevésbé változó nedvességű talajokon,

[1] Klima u. Blatt bei der Gattung Quercus. Flora, 1902. 90. k. 114. l

[2] WARMING E.: Lehrbuch der ökologischen Pflanzengeographie. III. kiadás, Berlin, 1914.

illetőleg termőhelyeken a leggyakoribb, de éppen a talaj nedvességének változása miatt bizonyos változatosságot is mutat a lemez szélességében való kiterjedésében, ugyanis egy bizonyos keskenységű és egy bizonyos szélességű határt, a mit bizonyára a kisebb vagy nagyobb mértékű xerophil vagy hygrophil sajátosságnak tulajdoníthatunk. (3—5., 11. kép.)

4. Végül a kisérletek során igen gyakran találkoztam az elliptikus levélalakkal (1. kép), és pedig vagy a fejlődő hajtások alsó csomóin,[1] vagy pedig a szórt fényben meglehetősen párás levegőben és nedves talajon. Ez az a levélalak, a mely mint elsődlevél a fiatal szulákot jellemzi és a melyet a vázolt körülmények közt való megjelenése miatt skiophil és hygrophil levélalaknak kell tartanom.

Ez az alak mintegy a szulák fiatalkorú állapotára való visszatérést jelenti és ha — a mint a legtöbb kutató állítja — ez az alak örökölhető, akkor a most vázolt körülmények kedvezők ennek a fiatal korban öröklés folytán megjelenő alaknak az idősebb korban való fejlődésére.[2]

Megjegyzendő, hogy ez a levélalak megjelenésében meglehetősen állandó és alig mutat számbavehető eltérést; még nagyságában is jóformán megegyező.

A lomblevelek felsorolt különböző alakjai nagyon természetesen, minthogy a levelek heliotropikusak, legalább a direkt fény által értek elhelyezkedésöknek irányára nézve is eltérnek egymástól és ebben a tekintetben különösen a heverő szárú növények nyilas levelei mutatnak éles ellentétet, a mint azt a dr. Schmeil könyvében közölt kép is élesen feltünteti[3] és a mint azt a lúczfenyő levelein dr. Neger is bemutatja;[4]

---

1 Dr. Früwirth i. m. 21. l.

2 Schramm Richard: Über anatomische Jugendformen der Blätter einheimischer Holzpflanzen. Flora. IV. k. 1912. 292. l.

Vischer Wilh.: Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der Jugend- u. Folgeformen xerophiler Pflanzen. Flora. VIII. k. 1915. 66. l.

3 Dr. Schmeil Otto: Lehrbuch der Botanik. XXXIII. kiad. Leipzig, 1913. 192. l.

4 Dr. Neger Fr. W.: Biologie der Pflanzen. Stuttgart, 1913. 129. l. 33. kép.

Wiesner Dr. J.: Biologie d. Pflanzen. III. Aufl. Wien, 1913. 113—15. l.

ugyanis a szár tekerődzése által a legkedvezőbb helyzetbe jutnak.[1]

A négy typusnak az adott tenyészeti kisérleti viszonyokból való következtetés folytán közölt magyarázata azonban esetleges tévedés is lehet, vagy esetleg más fel nem ismert oknak vagy tényezőnek következménye. Hogy azonban a kisérlet meggyőző erejét még támogassam, szükségesnek látszott a levelek részletesebb histiologiai megvizsgálása is.

A helyett, hogy a szulák levelei szövetének részletes leírását ismertetném, mindjárt rámutatok arra a gazdag irodalomra, a mely már a verőfényes és árnyékos levelek anatomiáját bőségesen tárgyalja.[2] És ennek kapcsán mindjárt összehasonlítás tárgyává teszem a szulák különböző typusú lemezeinek szöveti viszonyait. Hogy azonban használható adatokat kapjak, azért a lemez szöveti sajátságainak átlagát kifejező középső részének viszonyait választom az összehasonlítás alapjául, mert tudvalevőleg a rendes körülmények között fejlődött leveleken is a levéllemez hegye a verőfényes, a lemez alapja pedig többékevésbé az árnyékos lemez jellemvonásainak az elérésére mutat hajlandóságot.[3] Éppen ezért a következendőkben tárgyalt példák a levéllemez alapja és hegye közti részének lehetőleg a közepéről vannak véve.

A xerophil typusnak megfelelő lemez (19—27. kép) közepén a köztes szövet (mesophyllum), mint az a 28. képen látható, erősen kialakult, a lemez aránytalanul vastag a szélességéhez képest. Az oszlopos sejtek (pallisszad) rétege kettős, sőt hármas; sejtközti járat van ugyan közöttük, de aránylag nem sok, a szivacs-parenchyma is bőségesen kialakult, de

---

[1] WIESNER J.: Der Lichtgenuss d. Pflanzen. Leipzig, 1907. 92. l.

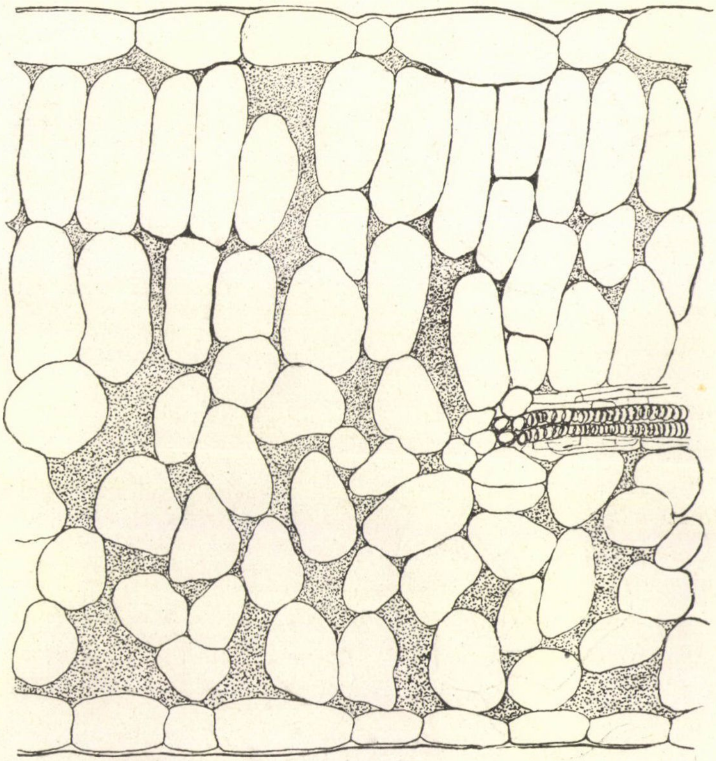
[2] STAHL E.: Über den Einfluss des sonnigen u. schattigen Standorts auf die Ausbildung der Laubblätter. Zeitschr. f. Naturwiss. Jena, 1883.

Dr. HABERLANDT G.: Physiologische Pflanzenanatomie. Leipzig, 1909. 268—269. l.; az ide vonatkozó irodalom felsorolása 275—76. l.

WARMING E.: Lehrbuch der ökologischen Pflanzengeographie. III. kiad. Berlin, 1914. 21—32. l.

[3] PAULMANN RICHARD: Über die Anatomie des Laubblattes. Jena, 1914. 27. l.

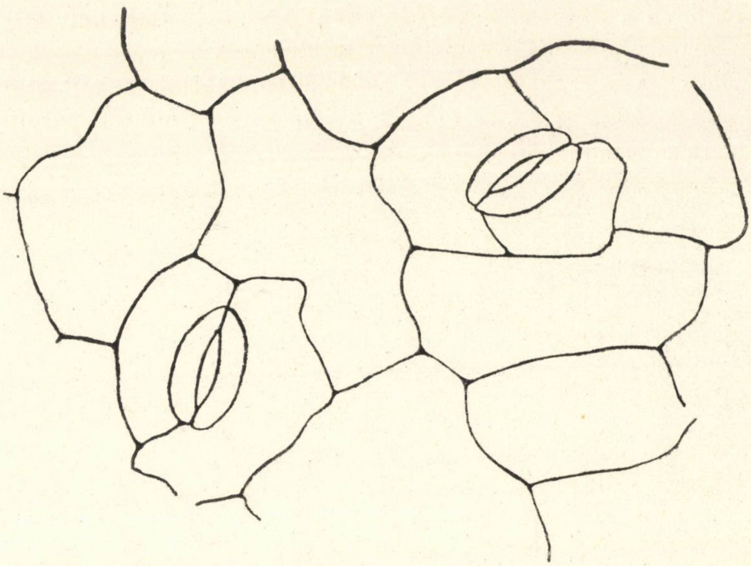
kevesebb nagy és tág sejtközti járatokkal bir. Az epidermis-sejtek cuticulája még a fonákán is meglehetősen vastag. A lemez színének és a fonákának epidermis-sejtjei bár egyformán hullámos szélűek, mégis a színén levők kevésbé kanyargósak mint a fonákán levők. (29. *a*, *b* kép.)



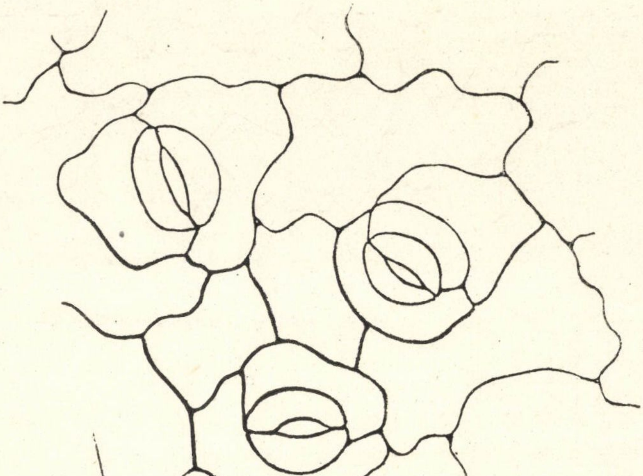
28. kép. A lándzsaszerű keskeny levéllemez keresztmetszet-részlete 300-szor nagyítva.

A levegőnyilások száma is a fonákán nagyobb, mint a színén, terjedelmük pedig a hosszúságban jellemző mértékű, mert a színen 1 mm^2-en 49, a fonákon 88 van, hosszúságuk 31—33, szélességük 22—23 μ.

Ehhez képest az inkább heliophil, tehát a fényt eltűrő



a

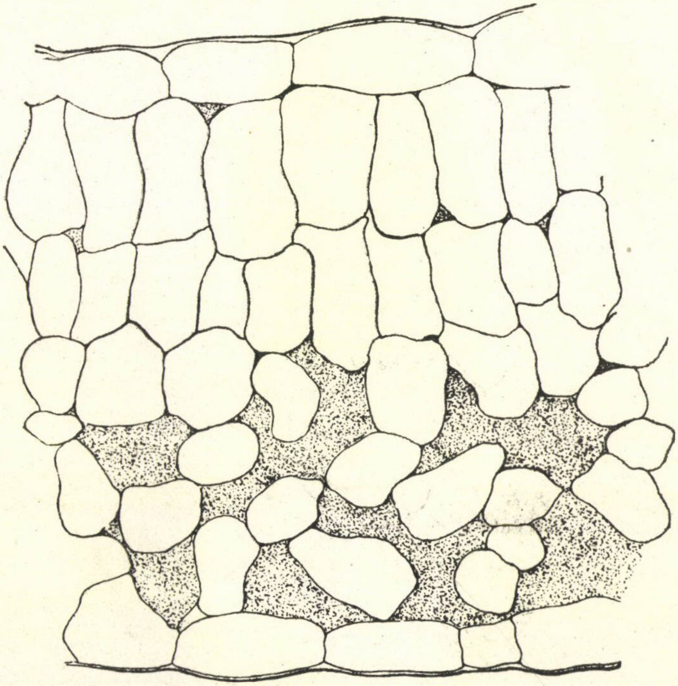


b

29. *a*, *b* kép. A lándzsaszerű keskeny levél színének *(a)* és fonákának *(b)* részlete. L. 23. kép. 300-szor nagyítva.

nyilas levél szélesebb lemezének (30. kép) a vastagsága csekélyebb, bár a cuticula még elég tekintélyes.

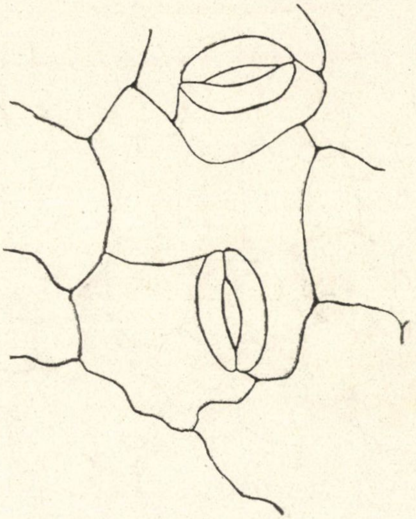
A pallisszad is kettős, az előbbiével meglehetősen megegyező számú sejtközötti járattal, ellenben a szivacsos parenchyma bőségesen tágas sejtközötti járattal bir.



30. kép. A nyilas középszélességű levéllemez keresztmetszetének részlete. L. 3. kép. 300-szor nagyítva.

Az epidermissejtek alakja hasonlít ugyan az előbbihez, de a falak hullámossága már kisebb mértékű és a levegőnyilások is kezdenek már keskenyedni. (31. kép.) Ugyane typus szélesebb, tehát inkább hygrophil hajlandóságú levele jóval vékonyabb, mint az ugyanolyan nagyítású képen méreteiből kitünik. (32. kép.) Ezen a pallisszad-sejtek már lazábbak és a szivacs-parenchyma is jóval több sejtközötti járattal bir. Az epidermissejtek fala még hullámos, a levegőnyilások szélességi átmérője azonban már gyarapodik. (33. *a*, *b* kép.)

Végül még a negyedik typus, a heliophob-typus levéllemezének szerkezetére mutatok rá (34. kép), a melynél a szélesebb és keskenyebb levéllemez vastagsága alig üt el egymástól, továbbá a pallisszad csak egy sejtrétegű, sok sejtközti járattal, a szivacs-parenchyma sem nagy terjedelmű és nagyon is laza és ennek megfelelő a lemez szövetének többi sajátossága.[1]



31. kép. A nyilas középszélességű levéllemez színének részlete 300-szor nagyítva.

A mi a levegőnyilásokat illeti, azok alakja ismeretes már, bár nem egészen helyesen, mert dr. Vogl[2] a rügypikkelyről közölte rajzán négy epidermissejt veszi körül, holott rendesen

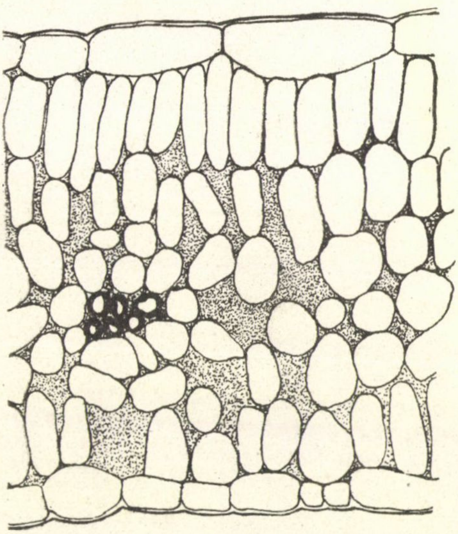
[1] Nordhausen M.: Über Sonnen- u. Schattenblätter. Ber. d. deutsch. bot. Gesellschaft. XXI. k. 1903. 30—45. l.

[2] Dr. Vogl August: Beitr. zur Anatomie u. Histologie der unterirdischen Theile von Convulvulus arvensis L. Verh. d. zoolog. bot. Verein. Wien, 1883. XIII. k. I. t. 10. kép.

csak kettő veszi körül, úgy látszik, mint segédsejt. (L. 29., 31., 33. kép.)

A számukat illetőleg érdekes, hogy úgy a felső, mint az alsó epidermisen kialakultak, és pedig elég szép számmal.[1]

Mindezekről kellőképpen tájékoztat a mellékelt táblázat, a melyből világosan kitünik, hogy a levelek fonákán mindig több a levegőnyilás; továbbá, hogy a keskeny levelek 1 mm²-én több levegőnyilás van, mint a széleseken, a mi látszólag a xerophil-

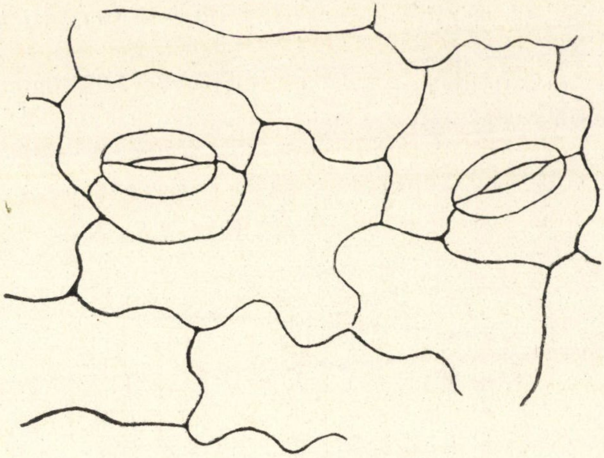


32. kép. A nyilas-dárdás, széles levéllemez keresztmetszetének részlete L. 5. kép. 300-szor nagyítva.

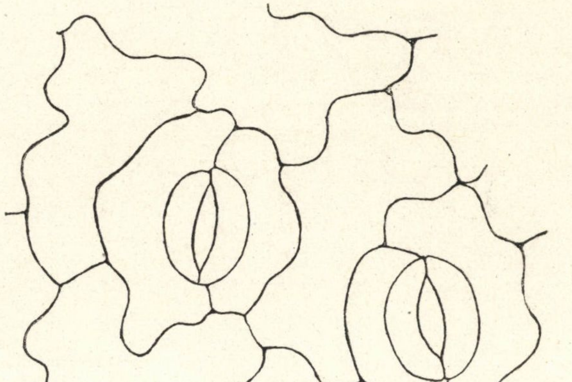
typusnak ellene mond,[2] de ha a levélfelület méreteit veszszük számba a levegőnyilások összegével, akkor a keskeny leveleken teljes összegükben mégis kevesebb számú levegőnyilást adnak ki. A levegőnyilások szélessége kapcsolatban áll a zárósejtek közti rész szélességével. A keskeny levelek zárósejtjei vastagabb falúak,

[1] Volkens G.: Beziehungen zwischen Standort u. anatomischen Bau der Vegetationsorgane. Jahrb. Berl. bot. Gart. III. k. 1884. 20. l. 20—30-ra teszi számukat.

[2] Warming i. m. 208. l.



a



b

33. *a*, *b* kép. A nyilas-dárdás, széles levéllemez színének (*a*) és fonákának (*b*) részlete 300-szor nagyítva.

mint a széles leveleken. A keskenyebb leveleken a levegőnyilások hosszanti átmérője többnyire párhuzamosan helyezkedik el a lemez hosszával.

Az apró szulák levegőnyilásaira vonatkozó adatok.

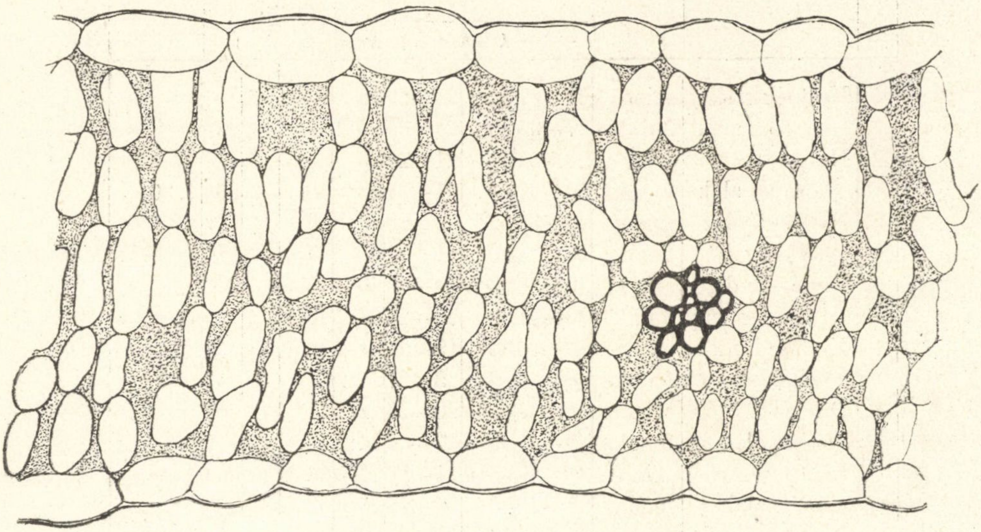
Sorszám	Alak	Felszín	Hossza μ		Szélessége μ		Eloszlás mm²	Palisszadsejtek száma	Keresztmetszet vastagság μ	Jegyzet
			Szélsőség	Átlag	Szélsőség	Átlag				
1.	Kerülékes, főleg	színe	29—37	32	24—29	26	32	7		
	közepes alak	fonáka	27—35	30	24—31	26·4	67		232	
2.	Nyilas	színe	28—34	31	21—28	25	34	6		
	közepes alak	fonáka	30—37	33	21—37	28·5	56		265	l. 30 k.
3.	Nyilas-dárdás	színe	29—36	32	20—28	22·8	46	4		
	keskeny	fonáka	26—34	30	21—27	24	84		117	
4.	Dárdás-lándzsa-	színe	30—38	33·7	24—30	26·4	42.8		246	
	szerű keskeny	fonáka	30—41	33	22—29	23·7	98			
5.	Nyilas dárdás	színe	30—36	33	19—24	21·6	29	10		l. 32 k.
	széles alak	fonáka	28—36	33	22—27	25·2	66		133	
6.	Dárdás	színe	28—35	31·4	20—26	22·7	55		202	
	széles alak	fonáka	29—41	35	23—30	26·7	59			
7.	Lándzsaszerű	színe	30—39	35·2	21—26	23·5	53	5		
	széles alak	fonáka	32—40	36	23—28	25·3	63		220	
8.	Lándzsaszerű	színe	23—38	33·2	21—25	22·5	49	8		l. 28 a b
	keskeny alak	fonáka	26—37	31	21—26	23·5	88		330	

A levél keresztmetszetei nagyjában megfelelnek a heliophil és a heliophob levelek általánosan ismert sajátságainak és ha egyik-másikon mutatkozik is eltérés, az javarészt esetleges hygrophil jellemvonás következménye.

A levélkeresztmetszeten a levegőnyilásoknak a levél felületén való elhelyezkedése is kitünik és általában itt is áll az, hogy a hygrophil leveleken az epidermis szintjében, vagy csak nagyon kevéssé feljebb helyezkednek el, míg a keskeny leveleken egyszintben vagy kissé bemélyedve, tehát a xerophil typusnak megfelelően. Ez utóbbi levélen a cuticula a felső színen még ránczokat, csíkokat is alkot, a mi ugyancsak a xerophil typus bélyege.

A pallisszadsejtek száma egy-egy epidermissejt alatt változik 4—10 között és miután a keskeny levelek epidermissejtjei aránylag kisebbek, egy-egy epidermissejtre is kevesebb esik.[1]

A levél színén és fonákán a levegőnyilások és általában az epidermis sajátságai összhangban állanak a levelek párolgási



34. kép. A nyilas-dárdás, keskeny, kisebb levéllemez keresztmetszetének részlete. L. 15. kép. 300-szor nagyítva.

mértékével, a melyet Boussingault közölt, ugyanis 1 : 4·3 aránynyal fejezett ki.[2]

Jellemző még a levélnyelek kialakulása is. A levélnyelek szöveti kialakulása az egész hosszában is mutat bizonyos eltérést, különösen jelentős ez az eltérés a levélnyél alapja és a levélnyél felső része, tehát a lemez közelébe eső része között.

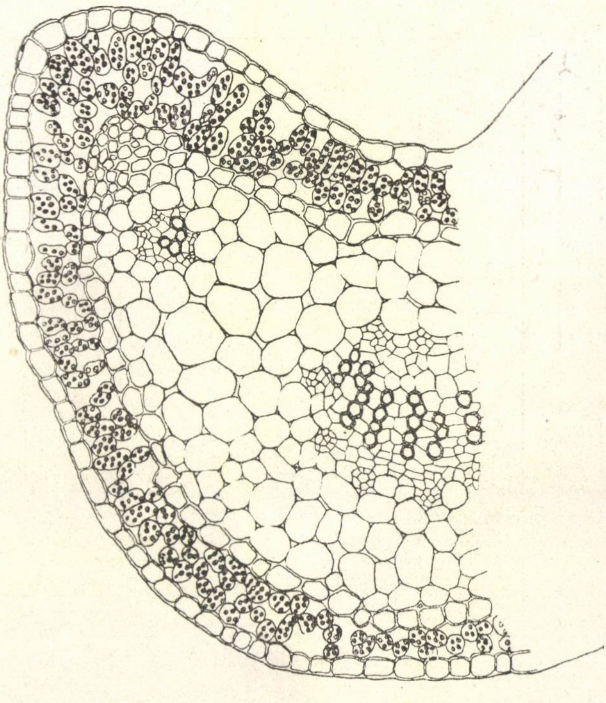
---

[1] Volkens i. m. I. tábla, 13. kép.

[2] Étude sur les fonctions physiques des feuilles. Annales de chimie et physique. V. ser. XIII. k. Paris, 1878. 289. l.

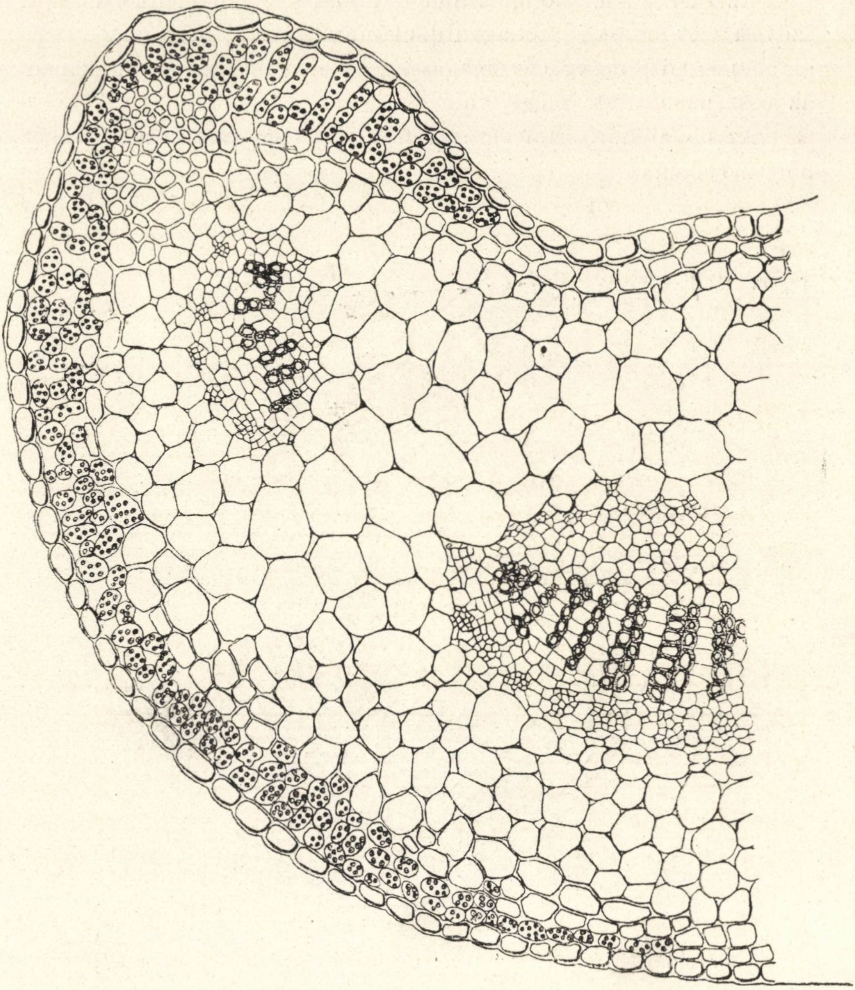
Ezért, hogy a különböző lemez-typusok levélnyeleinek sajátos szöveti viszonyait összehasonlítsuk, mindig ugyanegy vagy legalább megközelítőleg egy magasságból készült metszeten szabad az összehasonlítást megejteni.

Az én adataim a levélnyél felső részéből készült metszetekből származnak.



35. kép. A lándzsaszerű levél nyele keresztmetszetének fele 100-szor nagyítva.

Először is megállapítható, hogy a xerophil lemezek levélnyelein a chlorophyllt tartalmazó sejtsorok száma rendesen három-négy, de gyakran öt is, ehhez közel áll még a heliophil lemez levélnyelében található chlorophyllsejtek száma is, ellenben a heliophoblemezeken a zöld sejtek két, vagy legfeljebb három sort alkotnak. (35., 36. kép.)



36. kép. A széles, dárdás levél nyele keresztmetszetének fele 100-szor nagyítva.

A xerophil lemez nyelében a sejtek kissé a felületre merőlegesen nyultak, sőt a levélnyél széle felé és a felső oldalon pallisszadszerűen nyultak. Ezzel ellentétben a heliophob és az elsődleges levél nyeleiben jóformán pallisszadszerűek és sejtközti járatokban bővelkednek.

Bizonyos mértékben tehát a levélnyél szöveteinek kialakulásában a lemezzel mutat bizonyos analogiát.

A most vázolt szöveti viszonyok, továbbá a levélalakok és a növénynek ezek útján végzett életfolyamatai kétségen kívül kapcsolatosak, a mint ez különben a tudomány által már tisztázva van. Itt csak arra mutatok rá, hogy a fénynyel kapcsolatos asszimilálás és a hőmérsékkel kapcsolatos párolgás mértéke kapcsolatos a szöveti kialakulás módjának bárminő csekélynek látszó változásával. És bár tudjuk, hogy a fény hatásával kapcsolatban a párolgás mértéke is emelkedhetik, mégis lehetséges és van is olyan állapot, hogy a kisebb fény mellett a párolgás mértéke emelkedést mutat, sőt hogy a fény közel egyenlő hatásával, illetőleg mértékével ellentétben a párolgás mértéke eltérő lehet.

Könnyen magyarázza ezt az a körülmény is, hogy a párolgás mértékére a hőmérsék és a rendelkezésre álló víz mennyisége szintén befolyhat.

Ezeknek a növényekre ható tényezőknek és a növény életében kiváltott életfolyamatoknak különböző mértéke és különböző kapcsolata hozza magával azután a lomblevélnek finomabb és kisebb jelentőségű szöveti eltéréseit és végül a lomblevél lemezének sokféle alakulását, a mint azt kisérleteim világosan igazolták.

A növénynek ily módon való viselkedése, vagyis a rá ható külső tényezőknek megfelelő alakulása semmi egyéb, mint a mit a növény, illetőleg ez esetben a lomblevél lemeze alkalmazkodásának kell mondanunk.

Ennek az alkalmazkodásnak és sokféle alakulatának kell tulajdonítanom, hogy kisérleteimben az említett négy typus és azok bizonyos mértékű változatossága kialakult.

Kétségen kívül ez az oka a szabad természetben tenyésző egyedek nagymértékű változatosságának, a melyet könnyen észrevehetünk még futólagos megfigyelés útján is. Hiszen a szabad természetben épp úgy ki van téve a növény a fény, a hő, a nedvesség, sőt a mechanikai hatás különböző mértékének és különböző kapcsolatának. Ennek a mértéknek és különböző kapcsolatnak megfelelőleg alakulnak ki bizonyos határok és korlátok között a szulák lombleveleinek lemezei a már említett nagy változatosságban.

Ezekre a külső tényezőkre mutatott rá már KLEBS[1] is és legújabban VISCHER,[2] a midőn a levélalakoknak bizonyos alakokra való visszatérését a legkülönbözőbb külső tényezőknek tulajdonítják, mint a minők a nyesés, mély gyökerezés, levelek eltávolítása, gyenge megvilágítás stb.

Ezeknek a tényezőknek egyikére-másikára és ezek hatásának eredményére már rámutattam és a továbbiakban is még rá fogok mutatni.

Az előbb közölt magyarázat, illetőleg a jelenség létrejöttének okául szolgáló bizonyságok azonban nem látszanak elegendőknek azokban az esetekben, a midőn a különböző változatos alakok aránylag kis területen egymás közelében, úgyszólván egymás szomszédságában jelennek meg. Kétségen kívül a különféle levélalakú szulákoknak ilyetén tenyészése alkalmas kétségeket ébreszteni az emberben, mert fel kell tételezni, hogy az aránylag kis területen élő szomszédos növények egyenlő külső tényezők hatása alatt állanak. A külső tényezők hatása iránt kevésbé érzékeny növények bizonyára alig mutatnának változást, de a szuláknövény, mint jóformán a termesztett növényekkel együtt tenyésző növény, sokkal érzékenyebb a külső hatásokkal szemben, a mit éppen a közel egymáshoz tenyésző és mégis eltérő levélalakokkal biró egyedek igazolnak. Hiszen elegendő, hogy valamely egyed a fejlődése alatt naponta a szomszédjával szemben néhány órával több árnyékot kapjon és már is reagálni fog erre a hatásra. Sőt kisérleteim szerint elegendő a változás előidézésére a harmat is, a mely által ért egyedek levelei már másként alakultak ki, mint azok, a melyeket a harmat, eső sohasem ért és csak a talajuk kapott vizet.

Ezeken a mondhatnám kisebb téren is érvényesülő és változó helyi okokon kívül még befolyásolja ezt a változatosságot a gyökér kialakulása.

---

[1] KLEBS GEORG: Willkürliche Entwickelungsänderungen bei Pflanzen. Jena, 1903. 60—66. l.

[2] VISCHER WILH.: Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der Jugend- u. Folgeform xerophiler Pflanzen. Flora. VIII. k. 1915. 1—72. l.

A gyökérnek és sajátságainak leírását mellőzhetem, mert hiszen már régebben is tanulmány tárgya volt,[1] és csak annyit jegyzek meg, hogy nem tekintve a már említett beteges megjelenésű egyedeket, az apró szulák főgyökere jól kialakult, mélyen növekedő, legfeljebb 0·4—0·5 cm vastag, zsinegszerű gyökér, a mely csak a hegye felé vékonyodik, különben többé-kevésbé egyenlő vastag és nem ágazik el több főágra, hanem e helyett a gyökér, mint főtengely, nagyszámú járulékos gyökeret, illetőleg a hegye közelében még felismerhető oldalágat visel, a melyek azonban mind nem érnek el jelentékeny vastagságot, de sokszor bőségesen elágaznak.

Legnagyobb jelentősége a főgyökér mélyen a talajba való hatolásának van. Már THILO IRMISCH[2] említi, hogy a csirázó növény gyökere második évében 1·2 m hosszúra nő, dr. VOGL[3] szerint pedig mélyen, merőlegesen hatol a talajba. Az én vizsgálataim szerint a főgyökér igen mélyre hatol úgy az agyagos, mint a homokos talajban.

Számos egyed gyökerét ásva ki, 1·60—1·80 m mélységben még nem értem el a hegyét. Egyes esetekben mégis sikerült nagy elővigyázattal és fáradsággal kiásni. A szerednyei Veres-hegy erősen kötött agyagos talajában 2·20 – 2·50 m, a budapesti egyetemi növénykert homoktalajában pedig 2·80—3·20 m hosszú főgyökeret sikerült teljes egészében kiásnom. Ez a jelentékeny hosszúság magyarázza meg azt, hogy az apró szulák nem egykönnyen irtható ki és hogy a belőle fejlődött gyökérsarjak, gyökértőágak egyrészt függetlenek a talaj felsőbb részeinek hatásától bizonyos tekintetben; másrészt, hogy a

---

[1] THILO IRMISCH: Über die Keimung u. die Erneuerungsweise von Convolvulus sepium und Convolvulus arvensis, so wie über hypokotylische Adventivknospen bei krautartigen phanerogamen Pflanzen. Botanische Zeitung. XV. Jhrg. 1857. 438. l.

Dr. VOGL AUGUST: Beiträge zur Anatomie u. Histologie der unterirdischen Theile von Convolvulus arvensis. Verh. d. zool. bot. Vereins. Wien. XIII. k. 1863. 260—262. l.

Dr. FRÜWIRTH C.: Die Ackerwinde. Berlin, 1914. 21. l.

[2] I. h. 439. l.

[3] I. h. 260. l.

nevezett leveles sarjak a mélyebb talaj viszonyainak hatása alatt is állanak, a mit nem egykönnyen sikerül mindig megállapítani.

A gyökérnek ez a tulajdonsága is hozzájárul ahhoz, hogy a helyi okokkal együttesen olyan különböző hatások alakuljanak ki, a melyek kisebb területen is az egymás szomszédjába került növényeken megfelelő változatosságban érvényesülnek.

És hogy az ilyen szomszédos közelségbe jutott növényen is ilyetén változások jelenhetnek meg, esetleg gondolkodóba ejthet egyeseket, sőt többekben kételkedést is kelthet. Ha pedig már az előbbeniek nem oszlathatják el a szulák érzékenységét, illetőleg a kételkedést, akkor ezt teljesen megszüntetni alkalmas a szuláknak bizonyos sajátosságok közt való alakulása.

Nevezetesen sok esetben sikerült olyan egyedekre akadnom, a melyeknek nemcsak egyes tövein, hanem egyes hajtásain is a levelek lemezei nem egyformák.

Így vannak példányaim, a melyeken az elsődleveleket nem tekintve, az alsó levelek dárdásak, a későbbiek pedig nyilasok; az pedig nagyon is gyakori, hogy az alsó levelek dárdásak, a felsők pedig fülesek vagy lándzsaszerűek. Ezek a példák élénken emlékeztetnek a heterophyllia jelenségére, vagyis a felemás levelűségre.

Minthogy pedig az egymástól eltérő levelek a hosszúra nyult, akár egészen heverő, akár pedig eleinte heverő és azután tekerődző szárakon bizonyos szabályos elosztást mutatnak, vagyis határozott, élesen elkülönült hajtásrészeken fejlődtek ki, különbözőképpen való kialakulásuk csak úgy történhetett, hogy a hajtás fejlődése folyamán bizonyos időben már az előbbeniektől eltérő tényezők hatása alá került és ennek megfelelőleg eltérő alakban fejlődtek ki levelei is. Különösen jellemző ez a heterophyllia akkor, a midőn a hajtások felső részén a levelek lándzsaszerűek, az alsók pedig vagy nyilasok, vagy, a mi gyakoribb, dárdások.

Az ilyen hosszabb hajtásokon kialakult kétféle levél nem tévesztendő össze sem a csirázás után fejlődő száron megjelenő elsődlevelekkel és a rájuk következő, már a hajtás felsőbb részein kifejlődő kinőtt levelekkel, de még a regeneráló hajtásokon alakult két-háromféle levélalakkal sem. Ez a két eset rendes fejlődésű menet, a melyen a levélalakok maguk is többé-kevésbé változhatnak.[1]

A lándzsaszerű levelek különben csak akkor alakulnak ki, ha az időjárás egészen és tartósan szárazra fordult és a talaj sem bir kellő nedvességgel, a mi nálunk különösen az alföldön és az alföldet környező hegyek lejtőin a július—augusztusi forró nyáron következik be. Nagyon ritkán az esetleges száraz májusi időszakban is alakulnak — igaz, hogy szélesebb — lándzsaszerű levelek.

Még feltünőbb ezeknek a lándzsaszerű vagy füles leveleknek megjelenése különösen azokon a területeken, a melyeken valami mechanikai beavatkozással, például ásással vagy kapálással a nedvesebb időszakban fejlődött hajtások eltávolíttattak. Tudvalevőleg[2] ezek helyett vagy a megmaradt gyökérsarjak rügyeiből, vagy pedig ha a növény szárbeli részei egészen a gyökérig eltávolíttattak, a gyökér járulékos rügyeiből új sarjak fejlődnek, a melyek a száraz időszaknak megfelelően mind lándzsaszerűek. Az ilyen helyeken való megjelenésük annyira idegenszerű, hogy külön a termőhelytől független fajváltozatnak tartották, például Lidforss Bengt,[3] sőt hazai jeles szaktársaim közül is többen. Így Hollós László — a ki megfigyeléseit szives volt velem közölni — azt írja, hogy «mivel a keskeny levelüek külön és a szélesebbek is külön foltonkint voltak, rám azt a benyomást tették még akkor a helyszínén, hogy sajátságaikat örökölték és nem helyi körülményeknek köszönik».

Elismerem, hogy első futólagos megfigyelés után a lándzsaszerű lomblevelekkel biró egyedek ezt a benyomást keltik az emberben, sőt elismerem azt is, hogy külön forma névvel alkalmasak ezek a megkülönböztetésre (var. linearifolius Choisy, var. lancifolius Presl.), de meg vagyok győződve, hogy a hossza-

---

[1] Thilo Irmisch i. m. VIII. tábla.
Dr. Früwirth i. m. 14., 21. l.
[2] Thilo Irmisch i. h. 440. l.
Dr. Vogl i. h. 261. l.
[3] Några växtlokaler till nordvestre Skånes flora. Botan. Notiser. 1885. 177—191. l.

sabb megfigyelés bárkit is arról fog meggyőzni, hogy ezek az alakok is csak a termőhely külső tényezőinek hatása alatt alakultak ki.

Elsősorban is a lándzsaszerű levéllemezek — nagyon kevés kivétellel — majd mindig a mi éghajlatunk alatt csak a nyár második szárazabb, melegebb időszakában fejlődnek ki és valódi jelzői xerophil sajátságaikkal a mi éghajlati szélsőséges viszonyainknak. És hogy csakugyan ennek a jelzői, bizonyítja az a körülmény is — kisérleteim eredményét nem is tekintve —, hogy csak száraz nyáron, száraz őszön (így az 1911. évben) jelennek meg, úgy hogy bizonyos mértékben a saison-dimorphismusnak megfelelően különböznek a nyár nedvesebb időszakában fejlődöttektől. És ennek megfelelőleg az esetben, ha a nyár — a mint az éghajlatunk alatt kivételesen meg szokott esni — és az ősz-elő is nedves, esős, akkor ezek a lándzsaszerű lemezű alakok nem találhatók, mert mind másnemű levélalakokkal fejlődtek ki; így találta ezt Hollós és így találtam magam is az utóbbi évek nedves nyarán (1908., 1912—13-ban), a midőn ugyanazokon a termőhelyeken, a hol más száraz évben jóformán csak kizárólag lándzsaszerű levelűeket találtam, a nedves években nyilas, de leginkább dárdás levelűekre akadtam.

Különösen feltünő ezeknek a lándzsaszerű, keskeny levelű alakoknak a megjelenése az olyan területen, a melyet évente többször is kapálnak, például szőlőkben.[1] Itt ugyanis a kapáláskor minden alkalommal, tehát évente legalább kétszer-háromszor, a gyökérsarjak eltávolíttatnak és a növény kényszerítve van így évente kétszer-háromszor új hajtásokat hajtani. A száraz nyár későbbi időszakának hajtásain a levél a szárazabb területen, de sokszor a nedvesebb termőhelyeken is lándzsaszerűen alakul meg. Úgy látszik — a mint azt kisérleteim is bizonyítják — a kapálással végzett nyesés is hozzájárul, hogy a lándzsaszerű levelek az ilyen helyeken alakulnak meg határozottan xerophil bélyeggel. Ezt igazolják a társaságukban nőtt nagyon is keskeny levelű xerophil alakjai a kis sóskának (Rumex acetosella L.) és a porcsin vagy madár keserűfű (Polygonum aviculare L.) ki-

[1] Növénytani Közlemények. IV. k. 117. l.

fejlődött alakjai, a melyek a homokon élő xerophil homoki keserűfűre (Polygonum arenarium W. K.) emlékeztetnek.

Meg kell még jegyeznem, hogy ez a nyárutói lándzsaszerű levelű alak ritkán virít, a minek oka bizonyára az, hogy a hajtások csak későn, már a rendes virítási idő vége felé fejlődnek; de ha virít, akkor a xerophil typusnak megfelelően bőven fejleszt virágot. Éppen ebből az okból ritkábban is futnak fel a támasztékokra, hanem a legtöbb esetben a talaj felületén terülnek el.

A teljesség kedveért említem meg csak, hogy a lemezeknek a különböző viszonyok közt bekövetkező alakváltozásával kapcsolatban a levelek meze, illetőleg a szőrözete is nagymértékű változatosságot mutat.

Ebben a tekintetben csak annyit közlök, hogy mennél inkább tűnik ki valamely lomblevélen a xerophil sajátosság, annál nagyobb mértékben következik be — a mint az más növényekről is ismeretes — a levelek szőrösödése, és pedig elsősorban a lemezek fonákán és csak ritkábban a színén is, de bizonyos határon belül marad minden esetben a szőrszálak fejlődése, úgy hogy az apró szulákon inkább csak szőrösödésről beszélhetünk. A szőrösödés tehát mindig a xerophil hajlandóság jele és ha már másként nem védekezhetik a növény a nagyobb párolgás ellen, például a széles, nem xerophil alakú leveleken, akkor legalább szőrszálakat fejleszt, a mivel ellentétben a xerophil-typusnak megfelelően alakult levél többnyire jóformán szőrösödő.

Bizonyos nagyon száraz, homokos, de még inkább sós talajokon a lemezek húsossága ölthet nagyobb mérveket, kapcsolatban a merevséggel. Erre nézve azonban közelebbi kisérleteket nem végeztem és megfigyeléseimet is csak azért közlöm, hogy ezzel is a szulák lemezeinek nagymérvű alkalmazkodási képességére mutassak rá.

Ezzel kapcsolatban azonban úgy a magról szaporított egyedek, mint a szabadból átültetett egyedek viselkedéséből arra a következtetésre kellett jutnom, hogy a szulák lemezeinek alakja tulajdonképpen csak az alkalmazkodás módjának a bélyege. Vagyis megerősítik azt a tételt, hogy «az alkalmazkodás nem egyéb, mint az a jelenség, a melylyel a növény szervezkedésének megváltoztatásával a külső tényezőkre reagál és hogy ez a reactio végső eredményében többé-kevésbé a czélszerűség bélyegét viseli magán».[1]

Ezek a bélyegek azonban — a mint kisérleteimmel kimutathattam — egyenesen a termőhely befolyása alatt alakultak ki és ennek megváltozásával maguk is megváltoznak, úgy hogy tulajdonképpen az apró szulák lombleveleinek eredeti lemezalakját nem is tudom megjelölni egy bizonyos alakkal, hanem csak úgy, a mint azt Lasch[2] végezte, vagyis felöleli az általam a bevezetésben említett lemezek változatos alakjait, a melyeket nagyjában négy typusban egyesítettem. Vagyis ezek az alaki tulajdonságok folyton változnak és így labilisek, vagy még helyesebben reversibilisek. De mint ilyen tulajdonságok, voltaképpen a növénynek nem variationalis tulajdonságaihoz tartoznak, hanem azok közé, a melyeket mint az individualis variátio sajátosságainak megfelelőket, módosulásoknak, modificatiónak[3] neveznek.

A szulák lemezalakjainak változása ilyen modificatio, mert a levél lemezének alakja csak addig marad meg, a míg alakulásának feltételei megvannak és azok megszüntével maguk az alakbeli tulajdonságok is megszünnek, esetleg rövidebb-hosszabb idő multán. Ebből már most önként következik, hogy miután a modificatiók nem örökölhetők, ennélfogva a szulák említett levélalakjai sem örökölhetők. Sokan, különösen a régebbi irók közül, az ilyen individualis variatiót egyenlőnek tartották a fluctuáló variatióval, holott ez már, mint esetleg örökölhető tulajdonság, a variatio szűkebb fogalma alá tartozik és mint örökölhető variabilitás, combinatiónak[4] nevezhető.

Éppen ezért czélirányosnak mutatkozik a rendszeres növénytanban az előbbeni sajátságokkal biró egyedeket forma névvel foglalni egybe az utóbbiakkal szemben, a melyeket mint fajváltozatokat (varietas) kell megkülönböztetni.

A szulák lemezének modificatiója csak akkor járulhatna hozzá új változatok, új faj alakulásához, ha állandósulva örököl-

---

[1] Dr. Neger Fr. W.: Biologie der Pflanzen. Stuttgart, 1913. 16. l.

[2] I. m. 407. l.

[3] Dr. Jost L.: Vorlesungen über Pflanzenphysiologie. Jena, 1913. 520. l.

[4] Dr. Jost i. m. 528. l.

hetővé válnék, a mint azt például a füles vagy lándzsaszerű lemezalakra nézve többen fel is tételezték, a mint azt már fentebb is említém.

Ezzel azonban nem mondom azt, hogy az apró szulákon esetleg más tulajdonságok nem alakulhatnak ki, vagy nem alakultak ki (például a kétvirágú kocsány), a melyek mint örököl hetők, a fajváltozatok tulajdonságainak kifejezői lehetnek; ilyenekkel azonban kisérleteimben nem foglalkoztam és így megfigyeléseim és a belőlük levont következtetéseim csakis a lemez alakjára és az ezzel szorosabban kapcsolatos tulajdonságokra vonatkoznak.

Áttekintve az apró szulák összes lemezalakjait, mégis azt tapasztaljuk, hogy a lemezalak kifejlődésében bizonyos általános törekvés nyilvánul meg abban, hogy a lemez alapja a nyél irányában bizonyos változatosságú kialakulást öltsön magára. Ez alól kivételt alkotnak azok az esetek, a melyekben a lemez kerülékes alakot ölt és a mélytől való átmenetként az elmetszett alapú lemezt mutattam be. (1. kép.)

Ez a kivétel azonban, a mint említém, az elsődlevelek alakja és bizonyos körülmények között mint fiatalkorú állapotra való visszaütés vagy megmaradás jelentkezik, például az üvegházi párás levegőben és szórt fényben.[1]

A levéllemeznek ez a sajátságos törekvése kétségtelenül örökölt tulajdonság, a mely a külső tényezők hatására különféle modificatiók alakjában nyilvánul meg, de mindig csak az öröklés határain belül.

Az apró szulák levelei azonban ezen öröklött tulajdonságon kivül birnak még valamilyen állandó és így az örökléskor is állandó, megmaradó sajátsággal, a mely az említett és örökölt törekvéssel kétségen kívül összefügg. Ez pedig a lemez erezetének sajátságos kialakulása.

Nevezetesen az apró szulák levélnyelében egy középső nagyobb és a levélnyél két széle felé elhelyezett két kisebb átmérőjű edénynyaláb van. (35., 36. kép.) Ezek már most a lemezbe lépve, úgy helyezkednek el, hogy a lemezben van egy hosszant futó és szárnyasan elágazó főér, a melynek két

---

[1] VISCHER i. m. 66. l.

oldalán egy-egy rövidebb lefutású ér helyezkedik el olyképpen, hogy kevéssel a lemezbe való jutás után ketté ágazik; az egyik ág mindig a lemezalapnak nyilas, dárdás, füles vagy lándzsaszerű bélyeget adó kiterjedésébe, vagy mondjuk fogába vagy karélyába jut, a másik pedig a lemezben a főértől kissé ferdén fut a levél széle felé. (1—27. kép.)

Az ereknek ez az elhelyezkedése állandó és így kétségen kívül örökölt tulajdonság.

Úgy látszik, hogy a levélerezet ezen kialakulása mint öröklött és állandó sajátság szabja meg azokat a határokat, illetőleg korlátokat, a melyek között a külső tényezők hatása a lemezek alakját kiváltja, vagyis a modificatio megalakulható módozatait mintegy meghatározza.

Ez az oka már most annak, hogy a levél módosulásai mindig csak ez öröklött sajátsággal kapcsolatban alakulhatnak ki és egyben ez az oka annak, hogy a lemezek mindig a nyilas, dárdás, füles vagy lándzsaszerű alakon belül maradnak, nem tekintve az elsődleveleket.

Még leginkább eltér az öröklött és állandó alaptervezetű erezet befolyásától a nagyon keskeny füles és lándzsaszerű levél, a melyekben a középső értől oldalt eső erek elágazása, különösen a lemez hosszában helyezkedő ág, lassanként elmosódik.

Az ilyen levelekkel biró egyedek azután, különösen ha állandó vagy közel állandó külső viszonyok közt maradnak, bizonyos mértékű állandó, esetleg örökölhető tulajdonsággal biróvá válhatnak, a melyek már nehezebben változtathatók meg, alig reversibilisek. A mint azonban kisérleteimben kimutattam, ez a szulákon még nem következett be.

Ebből a jelenségből már most arra következtethetünk, hogy a leveleknek a külső hatások létesitette morphologiai sajátosságai, illetőleg modificatiói az ontogenesis folyamán alakulnak ki a phylogenesis szabta korlátokon belül.

Az alkalmazkodásnak határa az öröklött sajátosságok korlátján belül esik; viszont az öröklött tulajdonságok kifejezésre jutnak az alkalmazkodás határaitól függetlenül.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből.)

SUMMABILITÁSI FACTOR-SOROZATOK.

FEKETE MIHÁLY-tól.

Bevezetés.

1. A DIRICHLET-sorok és más, velük rokon függvénysorok convergentia-tartományának megállapítására törekvő vizsgálatokban alapvető fontosságú a következő, DEDEKIND-től[1] származó tétel:

Legyen $\sum\limits_0^\infty a_n$ *tetszésszerinti, valós vagy complex tagokból álló összetartó végtelen sor. Ha a valós vagy complex tagokból álló*

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ldots,\ f_n,\ldots$$

számsorozat teljesíti ezt a feltételt:

$$\sum_0^\infty |f_n-f_{n+1}| \text{ összetartó,} \qquad (D)$$

akkor a $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ *végtelen sor convergens.*

Könnyű a (D) feltételtől különböző olyan megszorításokat találni, a melyeknek alávetett $\{f_n\}$ sorozatok esetében a $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ végtelen sor convergens, valahányszor a $\sum\limits_0^\infty a_n$ sor convergens

[1] LEJEUNE DIRICHLET: «Vorlesungen über Zahlentheorie. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von DEDEKIND» (II. kiadás 1871): Supplement IX. Über die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlichen Reihen. p. 371. — Valós a-k és f-ek esetére a fenti tételt P. DU BOIS-REYMOND is bebizonyította. (L. «Antrittsprogramm, enthaltend neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen, etc.» 1871. —) Könnyű DU BOIS-REYMOND eredményéből a DEDEKIND-tételt levezetni.

volt. Ámde a (D) feltételnek megvan az a nevezetes tulajdonsága, hogy *szükséges* feltételét adja annak, hogy a $\sum_0^\infty a_n f_n$ «componált» sor *minden egyes* convergens $\sum_0^\infty a_n$ végtelen sor esetében összetartó legyen. Ugyanis HADAMARD[1] megmutatta, hogy *ha* $\{f_n\}$ *nem teljesíti a* (D) *feltételt, akkor van olyan convergens sor, melynek tagjaival «componálván»* $\{f_n\}$ *tagjait, divergens (még pedig a «szó szoros értelmében» divergens) sorra jutunk.*

Nevezzük *convergentia-factor-sorozatoknak* az olyan $\{f_n\}$ sorozatokat, melyek tagjainak bármely convergens $\sum_0^\infty a_n$ végtelen sor tagjaival való componálása convergens $\sum_0^\infty a_n f_n$ végtelen sorra vezet. Nevezzük továbbá *korlátos változású sorozatoknak* az olyan $\{f_n\}$ sorozatokat, melyek a (D) feltételt kielégítik. DEDEKIND és HADAMARD tételeinek összefűzése a következő eredményhez vezet:

Arra, hogy $\{f_n\}$ *convergentia-factor-sorozat legyen, szükséges és elégséges, hogy* $\{f_n\}$ *korlátos változású sorozat legyen.*

2. Az úgynevezett közönséges DIRICHLET-sorok arithmetikai közepek módszerével való summabilitási tartományainak megállapítása kivánatossá tette a föntebb idézett DEDEKIND-tétel olyan általánositását, mely elegendő feltételét adja annak, hogy bármely, mondjuk r-ed rendben summabilis $\sum_0^\infty a_n$ végtelen sorból az $\{f_n\}$ tagjaival való componálás révén nyert $\sum_0^\infty a_n f_n$ sor maga is r-ed rendben summabilis legyen (r positiv egész szám) és BOHR[2] tényleg talált ily általánositást, a mi a DIRICHLET-sorok summabilitási elméletének megalapozását lehetővé tette.

HADAMARD imént említett tételének ismerete természetessé teszi azt a kérdést, vajjon a BOHR által elégségesnek talált feltételek egyben szükségesek-e ahhoz, hogy — az előbbiek alap-

---

[1] «Deux théorèmes d'Abel, etc.» Acta Math. 27. (1903).

[2] Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theori (Afhandling for den filozofiske Doktorgrad) (Kobenhavn. 1910.) p. 68. V. ö. HARDY: «Generalisation of a Theorem in the Theory of Divergent Series» cz. dolgozatával. (Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. II. Vol. 6. 1908.)

ján könnyen érthető kifejezéssel élvén — valamely sorozat «r-ed rendű summabilitási factor-sorozat» legyen, vagy ha nem, mi ad szükséges *és* elégséges feltételt? (r positiv egész szám).

3. E kérdésekre válaszol dolgozatunk, de tárgyal és a megoldásig visz még más, az előbbiekkel rokon kérdéstételeket is, minők a következők:

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy sorozat «r-ed rendű absolut-summabilitási factor-sorozat» legyen? (r nem-negativ egész szám). Minő feltételnek kell és elegendő alávetnünk egy $\{f_n\}$ sorozatot, hogy tagjait akármelyik r-ed rendben summabilis $\sum\limits_0^\infty a_n$ végtelen sorral componálván, a nyert $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ végtelen sor:

a) már $(r-1)$-ed rendben summabilis, vagy

β) r-ed rendben absolut summabilis, vagy

γ) $(r+1)$-ed rendben absolut summabilis legyen? [*a)* esetben r positiv egész számot, *β)* és *γ)* esetekben pedig nem-negativ egész számot jelent].

4. A két előző pontban megfogalmazott kérdésekre a 2. §. I_3., II_3. és III_3. tételei adják meg a feleletet. Hogy e tételeket bebizonyíthassuk, több, önmagában is érdekes lemmára van szükségünk. Ezeket az 1. §-ban mondjuk ki és bizonyítjuk be; csak azokat a segédtételeket nem verifikáljuk — térkimélés czéljából —, melyek már «Vizsgálatok az absolut summabilis sorokról, alkalmazással a Dirichlet- és Fourier-sorokra» cz.[1] dolgozatunkban is szerepeltek és ott bizonyítást nyertek.

Ugyanerre a dolgozatra utalunk az r-ed rendű «absolut» és «nem absolut» («feltételes») summabilitás definitióját illetőleg; mivel e dolgozatban megmutattuk, hogy úgy az absolut, mint a nem-absolut summabilitás tekintetében Cesàro és Hölder értelmezései egymással æquivalensek[2] és hogy, mint először Schnee[3] igazolta, summabilis sorok Cesàro és Hölder-féle «sum-

---

[1] Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 1914. XXXII. köt. 389—425. l. E dolgozatot röviden: «Vizsgálatok» néven fogjuk idézni.

[2] Lásd «Vizsgálatok» *A)* és *B)* tételeit. I. h. 397. és 398. l.

[3] Schnee: «Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwerthes» Math. Ann. B. 67. (1909) p. 110.

mái» egymással egyenlők:[1] a jelen alkalommal, ha csak külön ki nem emeljük, nem teszünk különbséget e két értelmezés között.

5. Dolgozatunk utolsó, 3. §-ában a II_1. és III_1. tételek alkalmazásaképpen néhány, főrészt ismert igazságot dedukálunk a Dirichlet sorokra vonatkozólag; ezek közül, mint érdeklődésre talán leginkább méltót, kiemeljük a következőt:

Ha $\sum_0^\infty a_n$ *r-ed rendben summabilis, akkor*

$$\sum \frac{a_n}{n^s} \equiv \sum \frac{a_n}{n^{\sigma+it}}$$

Dirichlet-*sor (σ és t reális számok) a* $\sigma = 1$ *egyenes minden pontjában már* $(r-1)$*-ed rendben summabilis.*

1. §. Nehány identitás és segédtétel.

6. Legyenek a Δ, ∇, D operatiók a következőkép értelmezve:

$$\Delta u_n \equiv u_n - u_{n-1} \ (n \geqq 1), \ \Delta u_0 = u_0;$$
$$\nabla u_n \equiv u_n - u_{n+1} \equiv - \Delta u_{n+1} \ (n \geqq 0);$$
$$D u_n \equiv n \nabla u_n \ (n \geqq 0),$$

bármilyen számsorozat legyen is $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ Könnyű belátni a következő identitások helyességét:

1° $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = s_0 \nabla f_0 + s_1 \nabla f_1 + \cdots + s_n \nabla f_n + s_n f_{n+1}$,
$n = 0, 1, 2 \ldots$;

ha

$$s_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k.$$

2° Ha

$$a_n = b_n + \Delta (n b_n),$$

akkor

$$a_n f_n = b_n f_n + \Delta (n b_n f_n) + b_{n-1} D f_{n-1}.$$

7. Lemma: Ha $\sum_0^\infty a_n \ \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ *r-ed rendben, akkor* $\sum_0^\infty \Delta (n a_n) \ \frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ $(r+1)$-ed rendben, és ha az első sor leg-

[1] Lásd «Vizsgálatok» I., 4. §. I. h. 399. l.

korábban az r-ed rendű közepekkel $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, akkor a második sor legkorábban az $(r+1)$-ed rendű közepekkel $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$.[1]

8. Lemma: Ha $\sum_0^\infty a_n$ $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r-ed rendben és b_n az

$$a_n = b_n + \Delta(nb_n)$$

relatióval van definiálva, akkor $\sum_0^\infty b_n$ $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ $(r-1)$-ed rendben.[2]

9. Lemma: Ha $\sum_0^\infty a_n$ $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r-ed rendben, akkor $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n}$ már $(r-1)$-ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$.[3] (Tehát a fortiori $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ r-ed rendben).

10. Nevezzük, mint szokás, az $\{f_n\}$ valós, vagy complex tagú sorozatot *korlátos*nak, ha alkalmasan választott véges K értékre teljesül, hogy

$$|f_n| < K, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \text{ in inf.}$$

Lemma: *Ha $\{f_n\}$ nem korlátos, akkor lehet találni olyan absolut convergens $\sum_0^\infty a_n$ sort, hogy $\sum_0^\infty a_n f_n$ nem-negativ tagú divergens sor legyen.*

Bizonyítás: Mivel feltétel szerint $\{f_n\}$ nem korlátos, lehet találni olyan $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ végtelen sorozatot, hogy

$$|f_{n_\nu}| > \nu^2$$

legyen. Értelmezzük az $sg\, x$ függvényt 0-tól különböző valós és complex x értékekre ezzel az egyenlőséggel:

$$sg\, x = \frac{x}{|x|}.$$

$\sum_0^\infty a_n$ a keresett sort szolgáltatja, ha

$$a_n = 0, \quad \text{a midőn } n \neq n_\nu$$

és

$$a_n = \frac{1}{\nu^2}\, sg \frac{1}{f_n}, \quad \text{a midőn } n = n_\nu.$$

---

[1] «Vizsgálatok I_1 és I_2 tétel. I. h. 393. és 394. l.

[2] «Vizsgálatok» II_1 és II_2 tétel. I. h. 395. és 399. l.

[3] «Vizsgálatok» IX. tétel. I. h. 403. l.

11. Lemma: *Legyen* $\sum_{1}^{\infty} d_n$ *nem-negativ tagú divergens sor, melynek első tagja:* $d_1>0$. *Akkor a* $\sum_{1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ *végtelen sor, a hol* $D_n=d_1+d_2+\cdots+d_n$, *megint divergens.*

Bizonyítás: Ha $\sum_{1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ convergens volna, akkor a

$$\lim_{m=\infty} \sum_{m+1}^{m+k} \frac{d_n}{D_n} = 0 \quad (k \text{ positiv egész szám})$$

egyenlőség k-ban egyenletesen teljesülne, a mi azonban præmissáink mellett nem lehetséges, hiszen $\{D_n\}$ monoton végtelenhez tartó sorozat, tehát

$$\frac{d_{m+1}}{D_{m+1}} + \frac{d_{m+2}}{D_{m+2}} + \cdots + \frac{d_{m+k}}{D_{m+k}} \geqq \frac{d_{m+1}+\cdots+d_{m+k}}{D_{m+k}} = 1 - \frac{D_m}{D_{m+k}}.$$

12. Lemma: *Legyen* $\{\varepsilon_n\}$ *positiv számok monoton zérushoz tartó sorozata.*

Akkor a

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^r \left[\varepsilon_n + \binom{r}{1}\varepsilon_{n-1} + \binom{r}{2}\varepsilon_{n-2} + \cdots + \binom{r}{r}\varepsilon_{n-r}\right] =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^r E_n^{(r)} \quad (\varepsilon_s = 0, \text{ ha } s<0)$$

végtelen sor r-ed rendben summabilis (r nem-negativ egész szám; $E_n^{(r)} = \varepsilon_n$, *ha* $r=0$*).*

Bizonyítás: Állításunk $r=0$ esetben a sorelmélet klasszikus eredményei szerint igaz. Felteszszük, hogy igaz $r \leqq r_0$ esetben és feladatunkul tekintjük bebizonyítását az $r = r_0+1$ esetre nézve.

Feltevésünk értelmében $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^{r_0} E_n^{(r_0)}$ r_0-ad rendben summabilis az $\{\varepsilon_n\}$ sorozatra vonatkozó megszorítás teljesülése esetén. Ámde e summabilitás a 7. pontban kimondott lemma szerint involválja a $\sum_{1}^{\infty} \Delta\left((-1)^n n^{r_0+1} E_n^{(r_0)}\right)$ sor (r_0+1)-ed rendű summabilitását. Már most könnyen beláthatólag

$$\Delta\left((-1)^n n^{r_0+1} E_n^{(r_0)}\right) = n^{r_0+1} \Delta\left((-1)^n E_n^{(r_0)}\right) +$$

$$+ (-1)^n E_{n-1}^{(r_0)} \nabla (n-1)^{r_0+1}$$

és

$$\Delta((-1)^n E_n^{(r_0)}) = (-1)^n (E_n^{(r_0)} + E_{n-1}^{(r_0)}) = (-1)^n E_n^{(r_0+1)},$$

tehát állításunk igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy a

$$\sum_1^\infty (-1)^n E_{n-1}^{(r_0)} \Gamma (n-1)^{r_0+1}$$

sor már r_0-ad rendben summabilis. Ezt a 9. pontban kimondott lemma segítségével így láthatjuk be:

$$\Gamma (n-1)^{r_0+1} = -\Big((r_0+1)(n-1)^{r_0} + \frac{r_0(r_0+1)}{2}(n-1)^{r_0-1} +$$
$$+ \binom{r_0+1}{3}(n-1)^{r_0-2} + \dots + \binom{r_0+1}{r_0-1}\Big),$$

tehát a kérdéses sor summabilis r_0-ad rendben, mert a

$$\sum_0^\infty (-1)^n E_n^{(r_0)} n^{r_0},\quad \sum_0^\infty (-1)^n E_n^{(r_0)} n^{r_0-1}, \dots, \sum_0^\infty (-1)^n E_n^{(r_0)}$$

sorok rendre summabilisok r_0-ad, (r_0-1)-ed,..., másod-, első, és 0-ad rendben. Ezzel az r_0-ról (r_0+1)-re való következtetés részlet-állításai teljes igazolást nyertek.

2. §. Summabilitási factor-sorozatok.

13. A jelen §-ban tárgyalt és megoldott kérdések két, egymástól automatikusan elkülönülő csoportra oszlanak. Az egyik problémacsoport olyan factor-sorozatokra vonatkozik, a melyekkel való compositiója bizonyos typusú végtelen soroknak ugyanilyen typusú sorokra vezet, míg a másik csoportja a kérdéseknek olyan factorok sorozatait illeti, a melyekkel való compositio adott typusú sorokat előírt új typusú sorokba visz át.

Az első fajtájú transformatiónál szereplő factoroknak külön neveket is adunk, megállapodván abban, hogy az $\{f_n\}$ sorozatot «r-ed rendű $\frac{\text{summabilitási}}{\text{abs. summabilitási}}$ factor-sorozat»-nak mondjuk, ha e sorozat tagjaival való compositiója bármely r-ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ sornak r-ed rendben $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ sorra vezet.

14. Mielőtt rátérnénk annak megvizsgálására, hogy minő megszorításnak kell és elegendő alávetni egy sorozatot, hogy a

legutóbb említett factor-sorozatok közé tartozzék, kivánatosnak látunk bevezetni egy új fogalmat és elnevezést, általánosítván a «szó szoros értelmében» divergens sorok fogalmát és «r-ed rendben a szó szoros értelmében nem-summabilisnak» nevezvén azokat a végtelen sorokat, melyeknél az első n részletösszeg r-ed rendű «közepe» n-nel együtt $+\infty$-hez tart.[1] Az arithmetikai közepek CESÀRO és HÖLDER-féle értelmezéseinek megfelelőleg beszélhetünk «a szó szoros értelmében» CESÀRO módszerével, vagy HÖLDER módszerével «nem-summabilis» végtelen sorokról és itt felmerül a kérdés, vajjon az egyik módszer alkalmazásával «szoros értelemben nem-summabilis» sor ilyen lesz-e a másik módszer szerint is? E kérdést megoldotta J. SCHUR,[2] a ki megmutatta, hogy ha egy sor «CESÀRO szerint r-ed rendben a szó szoros értelmében nem-summabilis», akkor ilyen «HÖLDER szerint» is, és hogy a fordított dolog nem igaz. Ki akarjuk emelni azt a nyilvánvaló tényt, hogy egy «HÖLDER (CESÀRO) szerint r-ed rendben a szó szoros értelmében nem-summabilis» sor ilyen lesz $(r+1)$-ed rendben is. Ennek köszönhető, hogy az alább szóba kerülő, «a szó szoros értelmében nem-summabilis» sorok *mindkét* értelmezés szerint ilyenek.

15. Az absolut és nem-absolut r-ed rendű summabilitási factorok sorozataira vonatkozó eredményeinket összefoglalva, a következő tételeket mondhatjuk ki:

I_1. *Ha* $\{D^0 f_n\}, \{D^1 f_n\}, \{D^2 f_n\}, \ldots, \{D^r f_n\}$[3] $\dfrac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$ (F) *sorozatok, akkor* $\{f_n\}$ *r-ed rendű* $\dfrac{\text{abs. summabilitási}}{\text{summabilitási}}$ *factor-sorozat.*

I_2. *Ha* $\{D^r f_n\}$ *nem* $\dfrac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$, *akkor létezik olyan r-ed rendben* $\dfrac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ $\sum\limits_0^\infty a_n$ *végtelen sor, hogy* $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ *«r-ed rendben a szó szoros értelmében nem-summabilis» (mindkét értelmezés szerint).*

---

[1] $\lim\limits_{n=\infty} (a_n + i b_n) = +\infty$, ha $\lim\limits_{n=\infty} a_n = +\infty$ és $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$; a_n, b_n valós számok.

[2] «Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte» Math. Ann. B. 74. (1913.) p. 453.

[3] $D^0 f_n \equiv f_n$, $D^1 f_n \equiv D f_n = n \nabla f_n = n(f_n - f_{n+1})$, $D^2 f_n \equiv D(D f_n), \ldots,$ $D^r f_n \equiv D(D^{r-1} f_n)$.

I_3. *Az $\{f_n\}$ sorozat r-ed rendű $\frac{\text{abs. summabilitási}}{\text{summabilitási}}$ factor-sorozat voltának (F) a szükséges és elégséges feltétele.*[1]

16. I_1. bizonyítása: $r = 0$ esetben a tétel igazsága az absolut 0-ad rendű summabilitást: az absolut convergentiát illetőleg közvetlenül a feltétlen összetartás fogalmából következik, míg a feltételesen convergens sorokra vonatkozó részállítás: DEDEKIND tétele így látható be:

Legyen $\sum\limits_0^\infty a_n$ convergens; akkor $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ is összetartó, ha $\{f_n\}$ korlátos változású, hiszen a 6. pont 1° identitása szerint

$$a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n = s_0 \nabla f_0 + \cdots + s_n \nabla f_n + s_n f_{n+1},$$
$$(s_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k);$$

már pedig feltevéseinkből eredőleg $\sum\limits_0^\infty s_n \nabla f_n$ (absolut) convergens sor és $\{s_n\}$, $\{f_n\}$ convergens sorozatok.

Legyen a tétel igaz $r \leq r_0$ esetben, legyen $\sum\limits_0^\infty a_n \ \frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ (r_0+1)-ed rendben és $\{D^k f_n\}\ \frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$, ha $k = 0, 1, 2, \ldots, r_0+1$; végül definiáljuk b_n-et az

$$a_n = b_n + \Delta(n b_n)$$

relatióval. Akkor a 6. pont 2°. identitása szerint

$$a_n f_n = b_n f_n + \Delta(n f_n b_n) + b_{n-1} D f_{n-1}$$

és a 8. pont lemmája szerint $\sum\limits_0^\infty b_n \ \frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ r_0-ad rendben, tehát r_0-ra nézve igaznak vett állításunk szerint

$$\Sigma b_n f_n \quad \text{és} \quad \Sigma b_n D f_n$$

$\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ r_0-ad rendben, miből a 7. pont lemmaja alapján $\sum\limits_0^\infty \Delta(n f_n b_n)$ és így $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ (r_0+1)-ed rendű $\frac{\text{abs. summabilitása}}{\text{summabilitása}}$ következik. Ime az $r \leq r_0$-ra igaznak vett tétel $r = r_0+1$-re is igaznak bizonyult.

---

[1] A korlátos változású sorozatok definitiójának alapján egyszerű számolás útján be lehet látni, hogy az r-ed rendű summabilitási factorokra vonatkozó feltétel-sorozat æquivalens a BOHR-féle feltételek e seregével: $\Sigma n^k \mid \nabla^{k+1} f_n$ convergens, $k = 0, 1, \ldots, r-1$. $[\nabla^k f_n = \nabla(\nabla^{k-1} f_n)]$.

17. I_2 bizonyitása (teljes inductióval): $r=0$ esetben állításunknak az absolut summabilis sorokra vonatkozó része a 10. pont lemmája szerint igaz, míg a másik része: HADAMARD tétele így igazolható:

Legyen $\{f_n\}$ nem korlátos változású, de korlátos sorozat (a nem-korlátos $\{f_n\}$ sorozat esetét ép az imént intéztük el) azaz legyen $\sum\limits_0^\infty d_n = \sum\limits_0^\infty |\nabla f_n|$ divergens és $|f_n| < K$ (alkalmasan választott K-ra), ha $n=0, 1, 2, \ldots$. Definiáljunk egy $\sum\limits_0^\infty a_n$ végtelen sort úgy, hogy n-edik részletösszege:

$$s_n = \frac{1}{D_n}\frac{|\nabla f_n|}{\nabla f_n}, \quad \text{ha} \quad \nabla f_n \neq 0; \quad (D_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n)$$

és

$$s_n = 0, \qquad \text{ha} \quad \nabla f_n = 0.$$

Akkor a 6. pont 1° identitása mutatja, hogy a Σa_n olyan sor, hogy a $\Sigma a_n f_n$ sor a «szó szoros értelmében divergens», hiszen a 11. pont lemmája szerint $\sum\limits_0^\infty s_n \nabla f_n = \sum \frac{d_n}{D_n}$ nem-negativ tagú divergens sor, míg $\lim s_n f_{n+1} = \lim \frac{f_{n+1}}{D_n} = 0$.

Fogadjuk el a tételt igaznak, ha $r \leqq r_0$ és legyen $\{D^{r_0+1} f_n\}$ nem $\frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$.

E feltevések mellett I_2 az $r = r_0 + 1$ esetére nyilván csakis akkor bizonyitandó, ha a $\{D^k f_n\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ sorozatok közül az (r_0+1)-ik a legelső, mely nem $\frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$. Legyen tehát $\{D^k f_n\}$ $\frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$, ha $k = 0, 1, 2, \ldots, r_0$, míg $\{D^{r_0+1} f_n\}$ nem ilyen. Ekkor $\{g_n\} \equiv \{D f_n\}$ tétetvén, nyilván $\{D^i g_n\}$ $\frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$, ha $i = 0, 1, 2, \ldots, r_0 - 1$ és $\{D^{r_0} g_n\}$ nem ilyen, tehát $r \leqq r_0$-ra igaznak vett állításunk szerint létezik oly r_0-ad rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ $\sum\limits_0^\infty b_n$ végtelen sor, hogy

$$\Sigma b_n g_n \equiv \Sigma b_n D f_n$$

«r_0-ad rendben a szó szoros értelmében nem-summabilis» (mindkét értelmezés szerint). Definiáljuk a Σa_n sort az

$$a_n = b_n + \Delta(n b_n)$$

relatióval; e sor a 7. pont lemmája szerint (r_0+1)-ed rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$, míg $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ e rendben a szó szoros értelmében nem-summabilis (mindkét értelmezés szerint), hiszen I_1 szerint, illetőleg a 7. pont lemmája szerint $\sum\limits_0^\infty b_n f_n$, illetőleg $\sum\limits_0^\infty \Delta(nb_n f_n)\, r_0$-ad, illetőleg $(r_0 - 1)$-ed rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$, már pedig az $a_n f_n$, $b_n f_n$, $\Delta(nb_n f_n)$ és $b_{n-1} Df_{n-1}$ mennyiségeket a 2° identitásban kifejezett relatio köti össze.

18. A totális inductióval igazolt I_1 és I_2 tételek tartalmát az I_3 tételben foglaltuk össze; az összefoglalás révén eredményeink talán nyertek nyomatékosság szempontjából, de veszítettek élességükből.

Most rátérünk a § elején említett második kérdéscsoportra. Ezen belül is két alcsoportot különböztethetünk meg, a szerint, a mint a factorok, melyeknek jellemző tulajdonságait keressük, adott typusú sorokat az eredetivel erősebben vagy gyengébben megegyező typusú sorokba visznek át (summabilisat summabilisba, abs. summabilisat abs. summabilisba, vagy summabilisat absolut summabilisba). Vizsgálódásaink eredményét megint tételhármasokban mondjuk ki:

19. II_1 tétel: *Ha*

$$\{D^k f_n\},\ k=0, 1, 2, \ldots, r\ \frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}\ \text{és}\ \{nf_n\}\ \text{korlátos}, \qquad (G)$$

akkor $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ *$(r-1)$-ed rendben* $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$, *hacsak* $\sum\limits_0^\infty a_n$ *r-ed rendben* $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$. $(r \geqq 1)$

II_2 tétel: *Ha* $\{nf_n\}$ *nem korlátos, akkor van olyan* $\sum\limits_0^\infty a_n$ *r-ed rendben abs. summabilis sor, hogy* $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ *$(r-1)$-ed rendben nem summabilis.* $(r \geqq 1)$

II_3 tétel: *A (G) szükséges és elégséges feltétel arra, hogy* $\{f_n\}$ *tagjaival való compositióval minden r-ed rendben* $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ *sorból $(r-1)$-ed rendben* $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ *sort nyerjünk* $(r \geqq 1)$.

20. II_1 bizonyítása (teljes inductióval): $r=1$ esetben igaz a tétel. Mert legyen Σa_n $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$ első rendben, $\{f_n\}$ és $\{Df_n\}$ $\frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$ és $a_n = b_n + \Delta(nb_n)$. Akkor a 8. pontbeli lemma és I_1 szerint $\Sigma b_n f_n$ és $\Sigma b_n Df_n$ sorok mindegyike $\frac{\text{abs. convergens}}{\text{convergens}}$, de ilyen a $\sum\limits_0^\infty \Delta(nb_n f_n)$ sor is, ha $\{nf_n\}$ korlátos, hiszen a

$$\sum_1^\nu \Delta(nf_n b_n) = \nu f_\nu b_\nu$$

relatio mutatja e sor convergentiáját, ha Σb_n convergens, míg Σb_n absolut convergentiája esetén már a $\sum_0^\infty n b_n f_n$ sor is absolut convergens. 2° alapján a mondottakból következik $\sum_0^\infty a_n f_n$ kivánt viselkedése.

Legyen igaz tételünk $r \leq r_0$ esetére és bizonyitsuk be $r = r_0 + 1$ esetére. Legyen tehát $\sum_0^\infty a_n$ (r_0+1)-ed rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$, $\{D^i f_n\}$, $i = 0, 1, \ldots, r_0 + 1$ $\frac{\text{korlátos}}{\text{korlátos változású}}$, $\{n f_n\}$ korlátos, végül

$$a_n = b_n + \Delta(n b_n).$$

Akkor a 8. pontbeli lemma és I_1 szerint $\sum_0^\infty b_n D f_n$ r_0-ad rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$, míg ugyane lemma és $r \leq r_0$-ra igaznak vett II_1 tételünk szerint $\Sigma b_n f_n$ $(r_0 + 1)$-ed rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$, tehát a 7. pontbeli lemma szerint $\Sigma\Delta(n b_n f_n)$ r_0-ad rendben $\frac{\text{abs. summabilis}}{\text{summabilis}}$; a mondottakból 2° alapján következik a $\sum_0^\infty a_n f_n$ sorra vonatkozó állitás.

21. II_2 tétel bizonyitásánál I_2-re való tekintettel csak az az eset tárgyalandó, melyben $\{D^i f_n\}$ $i = 0, 1, \ldots, r$ korlátos. $r = 1$ esetben tételünk igazsága evidentiába lép, ha meggondoljuk, hogy ha $\{n f_n\}$ nem korlátos, van oly absolut convergens Σb_n sor, hogy $\{n f_n b_n\}$ sem korlátos.[1] Az

$$a_n = b_n + \Delta(n b_n)$$

relatióval definiált sor akkor nyilván absolut summabilis első rendben és az $\{f_n\}$, $\{D f_n\}$ korlátosságát illető megszorítások árán $\Sigma b_n f_n$, $\Sigma b_n D f_n$ (absolut) convergensek, de $\Sigma\Delta(n f_n b_n)$ nem convergens, hisz' $\sum_0^n \Delta(k f_k b_k) = n f_n b_n$, tehát 2° alapján $\sum_0^\infty a_n f_n$ sem az.

Legyen igaz tételünk, ha $r \leq r_0$ és bizonyitsuk be, hogy $r = r_0 + 1$ esetben is igaz.

Feltevéseink értelmében, ha $\{n f_n\}$ nem korlátos, található

---

[1] Ha $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$ végtelen számsorozat úgy van választva, hogy $|f_{n_k} n_k| > k^4$ és $b_n = 0$, ha $n \neq n_k$, míg $b_n = \frac{1}{k^2}$, ha $n = n_k$, akkor $\sum_0^\infty b_n$ megfelel a fenti kivánalmaknak.

olyan r_0-ad rendben abs. summabilis $\sum_0^\infty b_n$ végtelen sor, hogy $\sum_0^\infty b_n f_n$ legkorábban r_0-ad rendben summabilis. De ekkor az

$$a_n = b_n + \Delta(nb_n)$$

egyenlőséggel definiált Σa_n sor olyan (r_0+1)-ed rendben abs. summabilis sor, melyre $\sum_0^\infty a_n f_n$ legkorábban (r_0+1)-ed rendben summabiis.

Ugyanis a $\Sigma b_n f_n$ sorra vonatkozó feltételből következik a 7. pontban kimondott lemma szerint, hogy $\sum_0^\infty \Delta(nb_n f_n)$ legkorábban (r_0+1)-ed rendben summabilis, míg $\sum_0^\infty b_n D f_n$ már r_0-ad rendben (abs.) summabilis, tehát 2° alapján $\sum_0^\infty a_n f_n$ valóban a jelzett tulajdonságú sor.

22. Vizsgálataink utolsó csoportja megállapítja ama factor-sorozatok jellemző tulajdonságait, a melyekkel való compositio útján minden (feltételesen) summabilis végtelen sorból absolut summabiliset nyerhetünk. Eredményeinket tételek formájában, megint két esetet együvé foglalva, így fogalmazhatjuk meg:

III$_1$. *Ha* $\{D^i f_n\}$ $(i=0, 1, 2,\ldots, r)$ *korlátos változású és* $\sum_1^\infty \left|\frac{f_n}{n^k}\right|$ *convergens, akkor* $\sum_0^\infty a_n f_n$ *absolut summabilis* $(r+k)$*-ad rendben, valahányszor* $\sum_0^\infty a_n$ *feltételesen summabilis* r*-ed rendben és* $k=0$ *vagy* 1.

III$_2$. *Ha* $\sum\left|\frac{f_n}{n^k}\right|$ *divergens, van olyan* r*-ed rendben summabilis* $\sum_0^\infty a_n$ *sor, hogy* $\Sigma a_n f_n$ *nem absolut summabilis* $(r+k)$*-ad rendben* $(k=0$ vagy 1).

III$_3$. *Arra, hogy* $\sum_0^\infty a_n f_n$ *absolut summabilis legyen* $(r+k)$*-ad rendben, valahányszor* $\sum_0^\infty a_n$ *summabilis* r*-ed rendben, szükséges és elegendő, hogy* $\{f_n\},\ldots, \{D^r f_n\}$ *korlátos változású és* $\sum_1^\infty \frac{f_n}{n^k}$ *absolut convergens legyen* $(k=0$ vagy 1).

23. III$_1$ bizonyítása: Ha $r=0$, akkor a $k=0$ esetben tételünk evidens, míg a $k=1$ esetben így látható be:

Legyen $\sum_0^\infty a_n$ convergens, $\{f_n\}$ korlátos változású és $\sum_1^\infty\left|\frac{f_n}{n}\right|$ convergens.

Az 1° identitás alapján:

$$a_n f_n = s_n \nabla f_n + \Delta(s_n f_{n+1}),$$

A $\sum_0^\infty s_n \nabla f_n$ sor absolut convergens, mert $\{f_n\}$ korlátos változású és $\{s_n\}$ korlátos.

A $\sum_0^\infty \Delta(s_n f_{n+1})$ sor absolut summabilis 1. rendben; ugyanis e kijelentés æquivalens azzal az állítással, hogy a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{s_n f_{n+1}}{n} - \frac{s_0 f_1 + s_1 f_2 + \cdots + s_n f_{n+1}}{n(n+1)} \right)$$

sor absolut convergens, ámde de ez tényleg igaz, hiszen

$$\sum \frac{s_n f_{n+1}}{n}$$

absolut convergens és így absolut summabilis is, a mi pontosan annyit jelent, hogy

$$\sum_1^\infty \frac{s_1 f_2 + \cdots + s_n f_{n+1}}{n(n+1)}$$

absolut convergens. A mondottakból következik III$_1$ igaz volta $r=0$ és $k=1$ esetre.

Tegyük fel, hogy tételünk igaz, ha $r \leqq r_0$ és k akár 0, akár 1. Bizonyítsuk be igazságát $r=r_0+1$ esetében is, először, ha $k=0$, aztán, ha $k=1$.

Legyen tehát $\{D^i f_n\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, r_0+1)$ korlátos változású. $\Sigma |f_n|$ convergens, $\sum_0^\infty a_n$ (r_0+1)-ed rendben summabilis és $a_n = b_n + \Delta(n b_n)$. Akkor $r \leqq r_0$ esetre igaznak vett tételünk szerint $\sum_0^\infty b_n f_n$ absolut summabilis r_0-ad rendben, tehát a 7. pont lemmája szerint $\sum_0^\infty \Delta(n b_n f_n)$ absolut summabilis (r_0+1)-ed rendben; ugyanezt lehet állítani, megint csak $r \leqq r_0$ esetre igaznak vett tételünk alapján ($k=1$ eset) a $\sum_0^\infty b_n D f_n$ sorról, hiszen $\sum \frac{D f_n}{n} = \Sigma \nabla f_n$ absolut convergens.

A 2° identitás alapján tehát $\sum_0^\infty a_n f_n$ (r_0+1)-ed rendben absolut summabilis, mint ezt tételünk állítja.

Legyenek teljesítve a most befejezett deductio összes præmissái, a $k=1$ esetnek megfelelő ama módosítással, hogy most csak $\sum_1^\infty \frac{f_n}{n}$ absolut összetartását tételezzük fel. Ekkor $r \leqq r_0$-ra igaznak vett tételünk szerint $\sum\limits_0^\infty b_n Df_n$ és $\Sigma b_n f_n$ absolut summabilis (r_0+1)-ed rendben, tehát $\Sigma\Delta(nf_nb_n)$ absolut summabilis (r_0+2)-ed rendben, miből 2°-re való tekintettel $\sum\limits_0^\infty a_n f_n$ (r_0+2)-ed rendű absolut summabilitása következik. Qu. e. d.

24. III_2 bizonyítása: Az I_2 tételre való tekintettel elegendő arra az esetre szorítkozni, III_2 igazolásául, melyben

$$\{D^i f_n\} \quad (i=0,\,1,\,2,\ldots,\,r)$$

korlátos változású.

Teljesüljenek e feltételek, legyen

$$\sum_1^\infty \left|\frac{f_n}{n^k}\right| \equiv \sum_1^\infty d_n^{(k)}$$

sor divergens és jelölje a sor n-ik részletösszegét $D_n^{(k)}$.

Azt állítjuk, hogy a 12. pontban bebizonyított lemma érvényességi körébe tartozó

$$\sum_s^\infty a_n^{(k)} = \sum_s^\infty (-1)^n n^r \left(\frac{1}{D_n^{(k)}} + \binom{r}{1}\frac{1}{D_{n-1}^{(k)}} + \cdots + \binom{r}{r}\frac{1}{D_{n-r}^{(k)}}\right)$$

sor (hol az $s \geqq r$ úgy van választva, hogy $D_m^{(k)} > 0$, mihelyt $m \geqq s-r$) olyan r-ed rendben summabilis sor, hogy $\sum\limits_s^\infty a_n^{(k)} f_n$ nem absolut summabilis $(r+k)$-ad rendben. Ha ugyanis $\sum\limits_s^\infty a_n^{(k)} f_n$ állításunkkal ellentétben $(r+k)$-ad rendben absolut summabilis volna, akkor a 9. pont lemmája szerint $\sum\limits_s^\infty \frac{a_n^{(k)} f_n}{n^{r+k}}$ absolut convergens, tehát

$$\sum \left|\frac{f_n}{n^k}\right| \left(\frac{1}{D_n^{(k)}} + \binom{r}{1}\frac{1}{D_{n-1}^{(k)}} + \cdots + \binom{r}{r}\frac{1}{D_{n-r}^{(k)}}\right)$$

konvergens volna, a miből $\sum\limits_s^\infty \frac{d_n^{(k)}}{D_n^{(k)}}$ convergentiája is következnék, holott e sor a 11. pont lemmája szerint divergens.

3. §. Alkalmazás a Dirichlet-sorokra.

25. A jelen §-ban I_1, II_1 és III_1 tételeinknek nehány alkalmazását akarjuk adni az úgynevezett közönséges Dirichlet-sorok

summabilitási elméletében. Egyszerű számítások mutatják,[1] hogy ha σ, az s reális része $\frac{\text{positiv}}{\text{nem negativ}}$ és

$$f_n = \frac{1}{n^s} \quad n = 1, 2, \ldots;$$

akkor $\{D^0 f_n\}, \{D^1 f_n\}, \ldots, \{D^r f_n\}$ sorozatok $\frac{\text{korlátos változású}}{\text{korlátos}}$ sorozatok, tehát I_1 szerint:

IV. *Ha* $\sum_1^\infty a_n$ *r-ed rendben* $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, *akkor* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ *r-ed rendben* $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$ *minden* $s = \sigma + it$ *értékre, mely a* $\frac{\sigma > 0}{\sigma \geqq 0}$ *feltételt kielégíti.*

26. Ha s reális része 1, akkor az

$$\{n f_n\} \equiv \left\{\frac{1}{n^{it}}\right\}$$

korlátos sorozat, tehát II_1 szerint:

V. *Ha* $\sum_1^\infty a_n$ *r-ed rendben* $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, *akkor* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{1+it}}$ $(r-1)$*-ed rendben* $\frac{\text{summabilis}}{\text{abs. summabilis}}$, *bárminő valós értéket jelentsen is a* t.[2]

27. Ha s reális része 1-nél nagyobb, akkor $\sum f_n \equiv \sum \frac{1}{n^s}$ abs. convergens, tehát III_1 szerint:

VI. *Ha* $\sum_1^\infty a_n$ *r-ed rendben summabilis, akkor* $\sum \frac{a_n}{n^s}$ *r-ed rendben abs. summabilis minden* $s = \sigma + it$ *értékre, mely a* $\sigma > 1$ *feltételt kielégíti.*

Ha s reális része positiv, akkor $\sum_1^\infty \frac{f_n}{n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{s+1}}$ absolut convergens, tehát III_1 szerint:

VII. *Ha* $\sum_1^\infty a_n$ *r-ed rendben summabilis, akkor* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ $(r+1)$*-ed rendben absolut summabilis minden* $s = \sigma + it$ *értékre, mely a* $\sigma > 0$ *feltételt kielégíti.*[3]

---

[1] V. ö. «Vizsgálatok» VII. tételével. I. h. 402—403. l.

[2] V. ö. «Vizsgálatok» IX. tételével. I. h. 403. l.

[3] V. ö. «Vizsgálatok» XI. tételével. I. h. 407. l.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 okt. 16.-án tartott üléséből.)

A FELÜLET TERÜLETÉNEK PEANO-FÉLE DEFINITIÓJÁRÓL.[*]

GEŐCZE ZOÁRD-tól.

A felület területének legtermészetesebb definitója a polyederek segélyével való, a Lebesgue-féle definitio. Azonban specziális felületekre a területnek más definitiói is adattak. Ezek: a Peano-, a Hermite-, a Minkovski-féle definitiók. Továbbá szintén specziális felületekre egy bizonyos invariáns sajátság állapíttatott meg. Az ok, a mely e definitiókat s az említett sajátság megállapítását létrehozta, valószinűleg a polyederek segélyével való definitióban rejlő egynémely Lebesgue által eloszlatott ellenmondás volt.[2]

E definitiók s az invariáns sajátság Lebesgue definitiójának a megadása után mégsem értéknélküliek. Ama speczialis felületeknél, a melyekre e definitiók adattak, a terület ez értékei s az invariáns érték mind egyenlők a terület Lebesgue-féle értékével.[3]

Így tehát közelfekvő a gondolat e definitiók általánosítására s a terület szerintök vett értékeinek a Lebesgue-féle értékhez való viszonyának a megvizsgálására.

---

[1] Ez értekezést szerzője hadbavonulása után, katonai kötelessége teljesítése mellett írta. Azóta a hadi területen szerzett betegsége folytán hősi halált szenvedett a hazáért. A nyomdai javítást ez értekezés beterjesztője, Rados Gusztáv rendes tag végezte a szerző helyett.

[2] Ezt az okot hozza fel Hermite. Jansen pedig egy definitiót a Lebesgue-féle definitio által kívánt polyederek constructiójának a nehézségei miatt adott.

[3] Ez áll a Peano-féle definitiót s az invarianst illetőleg a $z=f(x, y)$ felületre is.

Jelen értekezés czélja a PEANO-féle definitiót oly módon általánosítani, hogy minden felületre alkalmazható legyen.

Továbbá képezünk a felülethez s egy tetszésszerinti derékszögű pontcoordinata-rendszerhez egy értéket, a mely valószinűleg a LEBESGUE-féle értékkel egyenlő s így invarians.

Ezt az általánosítást s az említett érték képezését az általános felületről szóló új tételek teszik lehetővé.

Kimutatjuk, hogy a *rectifiabilis* felületnél a terület ez új definitiója alapján nyert érték s az említett érték egyenlő a LEBESGUE-félével.[1]

Kimutatjuk, hogy a *rectifiabilis* felületnél a PEANO-féle definitio s az invarians sajátság az eredeti formában is alkalmazható, illetőleg fennáll, s az így nyert értékek is egyenlők a LEBESGUE-félével.[2]

Kiemelem, hogy ez utóbbiak főleg azokon a tételeken alapulnak, a melyeket a rectifiabilis felület érintősíkjaira nézve állítottam fel.[3]

Érdekessége miatt közlöm a következő, a tárgyalásban mellékesen szükséges tételt.

A rectifiabilis felület mindama pontjait, a melyekhez érintősík nincs, vagy ha van, akkor parallel egy állandó iránynyal, egy oly síkra, a mely merőleges erre az irányra, merőlegesen vetítve, a vetület LEBESGUE-féle (sík-)mértéke zérus.

Analog tétel áll egy rectifiabilis görbe érintőire nézve. Egy rectifiabilis görbe mindama pontjait, a melyekhez érintő nincs, vagy ha van, merőleges egy állandó irányra, ez irányú egyenesre merőlegesen vetítve a vetület LEBESGUE-féle (linearis) mértéke zérus.

---

[1] Hogy ez áll a HERMITE-féle definitio egy általánosítára, azt kimutattam. L. A felszínmérés elmélete. Math. és Term. Értesítő XXXI. kötet 307—318. l. 1913.

[2] Ugyanez áll a HERMITE-féle definitióra is. A MINKOVSKY-féle definitiót általánosítani talán könnyű volna, de alkalmazása idáig még más felületekre, mint a MINKOVSKY által tekintetbe vettekre, nem sikerült. Ugyanez áll a görbe vonalak hosszának MINKOVSKY által adott definitiójára is.

[3] L. «A rectifiabilis felületről» czímű munkámat. Math. és Term. Értesítő. XXXVI. kötet, 337—357. l. 1916.

1. §. Előzmények. Két tétel az általános felületről. Az $A(\zeta)$ értékről.

1. Felület. Legyenek a, b véges positiv állandók, u, v (és t) derékszögű pontcoordinátákat jelentvén, legyen P az uv-sík $0 \leqq u \leqq a$, $0 \leqq v \leqq b$ pontjaiból álló négyszöge. Jelölje $K(P)$ a P kerületét, $B(P)$ a P belső pontjaiból álló idomot. Az M pont a P-ben változván, legyenek $\varphi(M)$, $\psi(M)$, $\chi(M)$ egyértékű határolt és folytonos függvények. Legyen x, y, z valamely derékszögű pontcoordinata-rendszer.[1] Legyen M° az

$$x = \varphi(M), \; y = \psi(M), \; z = \chi(M)$$

pont jele. Az összes M° féle pontok idomát, mint a P-nek φ, ψ, χ segélyével definiált képét felületnek nevezzük. Jele S legyen.

2. A T érték. T az S Lebesgue-féle területe (l. a. 7. jegyzetet) legyen.

3. Transformatio. Legyen ξ, η, ζ egy új coordinata-rendszer. Legyenek

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \quad \eta = a_2x + b_2y + c_2z + d_2,$$
$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z + d_3$$

a transformatio egyenletei. *A transformatio által nyert*

$$\xi = a_1\varphi + b_1\psi + c_1\chi + d_1, \quad \eta = a_2\varphi + b_2\psi + c_2\chi + d_2,$$
$$\zeta = a_3\varphi + b_3\psi + c_3\chi + d_3$$

felület Lebesgue-*féle területe szintén T.*

4. Rectifiabilis felület. Az S neve rectifiabilis felület, ha van egy véges positiv G állandó úgy, hogy a P bármely két M, N pontjára

$$|\varphi(M) - \varphi(N)| + |\psi(M) - \psi(N)| + |\chi(N) - \chi(N)| < G.\overline{MN}.$$

Így tehát $\overline{M^\circ N^\circ} < G.\overline{MN}$. Nyilvánvaló továbbá, hogy a rectifiabilis felület minden transformáltja is rectifiabilis.

[1] Minden előfordulandó coordinata-rendszer derékszögű és minden vetítés merőleges lesz.

5. *A tartományról.* Egy sik idom neve tartomány, ha határolt, ha minden pontja egy elég kis környezetének minden helye hozzávaló és ha bármely két pontja egy beléeső lánczczal köthető össze, láncz alatt polygonalis vonalat értve.

A siknak szükségkép vannak nem a tartományhoz való pontjai is. A sík e pontjai közt vannak olyanok, a melyek minden közelébe is esnek a tartománynak pontjai. E pontok öszszessége egy zárt, sehol sem sűrű, határolt idom; neve a tartomány homlokzata.

Tartományrendszernek olyan tartományokból álló idomot nevezünk, a melyek közül bármely kettőnek sincs közös pontja.

Egyszerű tartomány. A tartomány neve egyszerű legyen, ha a következő sajátságokkal bir:

1. Ha egy sokszög kerülete beléesik, a sokszög belső pontjai is beléesnek.

2. A tartományt és homlokzatát egy kör belsejébe zárván, a homlokzat bármely pontjának bármely közelében is van oly pont, a melyből a körhöz oly láncz vonható, a melynek sem a tartománynyal, sem a tartomány homlokzatával közös pontja nincs. — Egyébként e tulajdonság az 1. alattit is megadja.

Az I idom. Legyen E egyszerű tartomány, legyen $h(E)$ a homlokzata. Vegyünk fel a $E+h(E)$ idomot bezáró valamely kört. Legyen O az E egy pontja. Haladjunk az O-ból egy k lánczon a kör kerületéig. Lesz a lánczon a $h(E)$-nek egy először talált C pontja. Legyen I az összes, a k változtatásával nyerhető C-féle pontok idoma. I független az O-tól és deriváltja $h(E)$.

Az I circularis rendezése. Legyenek C_1, C_2, C_3 az I pontjai és legyenek k_1, k_2, k_3 az O-ból az E-ben C_1, C_2, C_3-ig menő egyszerű (önmagukat nem metsző) lánczok, a melyeknek kettenként csak az O pontjuk közös. Legyen l egy O közepű E-be eső körkerület. A lánczokon O-ból C_1, C_2, C_3-ig menve, l először talált pontjai M_1, M_2, M_3 legyenek. Hacsak az l mindig ugyanabban az irányban lesz befutva, az M_1, M_2, M_3 circularis sorrendje mindig ugyanaz, bármi is külömben az O, k_1, k_2, k_3 és az l. Ha e sorrend például M_0, M_1, M_2, akkor a C_1, C_2, C_3 circularis rendje megállapodás szerint C_1, C_2, C_3. Igy az I circularisan rendezhető.

Egy tétel. Vegyünk fel egy az E-be eső közönséges sokszöget. Fussuk be egyirányban; legyenek $A_1, A_2, \ldots A_n$ a csúcsai a befutás sorrendjében. Az l a sokszöggel egyirányban futtatván be, legyen $C_1, C_2, \ldots C_n$ az I-nek n számú pontja úgy, hogy a circularis rendjük a felírt legyen.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $n, A_1, A_2, \ldots, A_n, C_1, C_2, \ldots C_n$ úgy vehetők fel, hogy

$$\overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3}, \ldots\ \overline{A_{n-1}A_n},\ \overline{A_nA_1},\ \overline{A_1C_1},\ \overline{A_2C_2}, \ldots\ \overline{A_nC_n}$$

mind kisebbek ε-nál. Továbbá e felvétel még olyan lehet, hogy az $\overline{A_iC_i}$ távolságok (az A_i kivételével) a sokszöget nem metszik, a (C_i kivételével) az E-be esnek és még az n számú $\overline{A_iC_i}$ távolságok közül bármely kettőnek sincs közös pontja.

—. Oszszuk az I pontjait négy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ csoportba úgy, hogy ha e csoportoknak rendre A, B, C, D tetszés szerinti pontjai, e pontok circularis sorrendje (az l egyik vagy másik, de mindig ugyanazon egyirányú befutásánál) A, B, C, D legyen.

6. *Négyoldalú tartomány.* Ha α és β-nak nincs közös határpontja és ha γ és δ is el vannak választva egymástól, az E neve négyoldalú tartomány legyen, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a négyoldalú tartomány oldalai, még pedig α és β, továbbá γ és δ átellenes oldalak.

Tételek.

1. Az E négyoldalú tartomány átellenes oldalai α és β, illetőleg γ és δ lévén, legyen ε az α és β-tól elválasztott zárt idom. Válaszsza el továbbá ε az α és a β idomokat az E-ben, azaz minden oly láncz, a mely az α egy pontját a β egy pontjával, különben az E-be esve, összeköti, messe az ε-t.

Ekkor van egy négyoldalú az E-be eső tartomány, úgy, hogy egyik oldala α; az α-val átellenes oldal pedig mindama I-féle pontokból áll, a melyek az E-be esnek. E másik oldal pontjai mind az ε pontjai. A másik két oldal egyike a γ, másika a δ bizonyos pontjaiból áll.

A bizonyítást röviden jelezzük.

Legyen ϱ az a tartomány, a mely az E mindama pontjaiból áll, a melyek az α-ból kiinduló, különben az E-be eső, a

ε-t nem metsző lánczokon vannak. β nyilván nincs sem e tartományban, sem e tartomány homlokzatán.

Legyen σ az a tartomány, a mely áll az E mindama pontjaiból, a melyek a β-ból kiinduló, egyébként az E-be eső, a ϱ homlokzatát nem metsző lánczokon vannak.

Legyen τ az a tartomány, a mely az E mindama pontjaiból áll, a melyek az α-ból kiinduló, egyébként az E-be eső, a ϱ homlokzatát nem metsző lánczokon vannak.

E τ a keresett tartomány. — Az E jeléül $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ vétetvén, a τ jele $\{[(\alpha, \varepsilon), \beta, \gamma, \delta]\}$ legyen.

2. Az 1. tétel ismételt alkalmazásából a következőt nyerjük. Legyen l egy véges positiv egész szám és legyenek $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{l-1}$, a fenti ε-hoz hasonló tulajdonságú idomok. Legyen továbbá még bármely két ε_i egymástól elválasztva. Essék továbbá $\{[(\alpha, \varepsilon_i), \beta, \gamma, \delta]\}$ a $\{[(\alpha, \varepsilon_{i+1}), \beta, \gamma, \delta]\}$-ba $i = 1, \ldots l-2$.

Legyen $\varepsilon_0 \equiv \alpha$, $\varepsilon_l \equiv \beta$. $\{[(\alpha, \varepsilon_0), \beta, \gamma, \delta]\}$ ne jelentsen idomot, $\{[(\alpha, \beta), \beta, \gamma, \delta]\}$ pedig E jele legyen.

Az $\{[\alpha, \varepsilon_{i+1}), \beta, \gamma, \delta]\}$ ama pontjaiból álló idom —($i=0, \ldots l-1$)—, a melyek nem pontjai az $\{[(\alpha, \varepsilon_i), \beta, \gamma, \delta]\}$ deriváltjának, egy négyoldalú tartományt képeznek. E tartomány két átellenes oldalának egyike a tartomány mindama I-féle pontjaiból áll, a melyek a γ pontjai. Másika ugyanígy van a δ-hoz. A másik két oldal egyike ε_i, másika ε_{i+1} pontjaiból áll; ezek mind az E-be esnek, hacsak nem $i=0$ vagy $i=l-1$. S e tartományok egy tartományrendszert alkotnak.

3. Legyen C egy egyszerűen zárt JORDAN-féle síkgörbe, azaz egy körnek megfordíthatóan egyértelmű és folytonos képe. Mint ismeretes, a C egyetlen egy tartomány homlokzata s e tartomány egyszerű.

Mint ismeretes, a görbe minden ívén vannak I-féle pontok. Ha A_1, A_2, A_3 három I-féle pont, a melyeknek mint I-féle pontoknak circularis rendje a felírt, a C egy bizonyos irányú befutásánál e pontoknak mint a C pontjainak circularis rendje ugyanaz.

Legyenek K, L, M, N, O, P, Q, R a görbének oly ívei, vagy I-féle pontjai (számszerint nyolcz idom), a melyek közül bármely kettőnek sincs közös pontja és ha egy-egy tetszésszerinti pontjuk sorban $K, L, \ldots, Q, R$, e pontok circularis rendje a C befutásánál $K, L, \ldots, Q, R$ legyen.

Legyen $[K, N]$ egy zárt idom, a melynek a C-vel van közös pontja, de e közös pontok csakis a K és N pontjai lehessenek és legyen is a $[K, N]$-nek legalább egy-egy pontja úgy a K, mint az N-en.

Hasonló tulajdonságú idom legyen $[R, O]$ az R és O idomokat illetőleg. Analog jelentésűek legyenek $[L, Q]$ és $[M, P]$.

Legyenek még $[K, N]$ és $[R, O]$ egymástól, $[L, Q]$ és $[M, P]$ is egymástól elválasztottak.

Továbbá, ha (C) a C által meghatározott tartomány $[K, N]$ (és ugyanigy az $[R, O]$), a (C)-ben az L és Q, továbbá az M és P idomokat válaszsza el egymástól. És az $[L, Q]$ (és ugyanígy az $[M, P]$) válaszsza el a (C)-ben a K és N, továbbá az R és O idomokat egymástól.

Ekkor van a (C)-ben egy négyoldalú tartomány, a melynek egyik oldala a $[K, N]$-en, az ezzel átellenes az $[R, O]$-n fekszik. A másik két oldal egyike az $[L, Q]$, másika az $[M, Q]$-n fekszik.

7. *Az xy-sík területnemző négyszögei. Az A érték.*

$(x_1, x_2; y_1, y_2)$ iratván, ez jelentse azt, hogy $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ és e jel az xy-sík ama négyszögének a jele legyen, a melyet az $x = x_1$, $x = x_2$ $y = y_1$, $y = y_2$ egyenesek határolnak.

Tegyük fel, hogy a P oly négyoldalú tartományt tartalmaz, a melynek egyik oldalára φ értéke x_1, másik ezzel szükségkép átellenes oldalára φ értéke x_2, míg a másik két oldal egyikére ψ értéke y_1, másikára ψ értéke y_2 legyen. *E feltétel megvalósulván, $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ négyszöget (az S-re vonatkozólag) területnemzőnek nevezzük.*

Ezt az elnevezést a következő körülmény teszi indokolttá. Legyenek az S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, felületek polyedralisak és convergáljanak egyenletesen az S felé. Legyen T_ν az S_ν területe.[1] λ egy tetszés szerinti az $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ belsejébe eső négyszög legyen.

---

[1] A polyedrális S_ν és a T_ν pontosabb definitióit több munkámban közöltem.

Ha ν elég nagy, az S_ν-nek az xy-síkra való vetülete a λ négyszöget kitölti.[1]

Így az S_ν területe legalább is λ területével egyenlő. Ámde T a Lebesgue-féle definitio szerint az összes T_ν-féle sorozatok összes határértékei közt a legkisebb.

Így tehát $T \geqq (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)$.[2] Azaz T nem kisebb, mint (x_1, x_2, y_1, y_2) területe.[3]

Jelöljük a fenti négyoldalú tartományt $[x_1, x_2; y_1, y_2]$-vel. Azt mondjuk, hogy $[x_1, x_2; y_1, y_2]$ az $(x_1, x_2; y_1, y_2)$-höz való. $(x_2-x_1) \cdot (y_2-y_1)$ pedig az $[x_1, x_2; y_1, y_2]$ területi értékének neveztessék.

Ha a következőkben egy a jelű négyszög területnemző (e négyszög az xy-síkban van, oldalai az x és y irányokkal parallelák), legyen $[a]$ a hozzávaló négyoldalú tartomány jele (a mennyiben ilyen van).

Az a területét is a jelölje.

Az 1. lábjegyzetben említett munkámban kimutattam a következőket.

Az S-nek az xy síkra való vetülete egy $(e, f; g, h)$ négyszögbe zárható. Legyenek l, m véges positiv egész számok és x_i, y_j oly értékek, hogy

$$e = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_l = f,$$
$$g = y_0 < y_2 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_m = h.$$

Az $(x_i, x_{i+1}, y_j, y_{j+1})$ jele $a_{i,j}$ legyen.

Képezzük minden területnemző $a_{i,j}$-hez (ha ilyenek vannak) az összes lehetséges $[a_{i,j}]$ idomokat.

Egy az e $[a_{i,j}]$ tartományokból álló tartományrendszer

---

[1] L. Zoárd de Geöcze: Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes. Première, deuxième et troisième Mémoire. Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, XXVII. kötet 1—21. és 131—163. l. 1913; és XXX. kötet 1—29. l. 1915.

[2] Mert λ területe oly közel van az $(x_1, y'_2\ y_1, y_2)$ területéhez mint akarjuk.

[3] Vannak oly felületek, a melyeknek az xy-síkra való merőleges vetületében négyszög vehető fel s a melyek területe mégis zérus. V. ö. Koczkát kitöltő zérus területű felület példája. Math. és Phys. Lapok. 23. évfolyam, 115—117. l. 1914.

tartományainak a száma mindig kisebb egy bizonyos véges számnál.[1]

Definiáljunk egy $k_{i,j}$ számot a következő módon. Ha az $a_{i,j}$ nem területnemző, legyen $k_{i,j}$ értéke zérus. Ha pedig területnemző, $k_{i,j}$ az említett tartományrendszer $[a_{i,j}]$ tartományainak a száma legyen — e szám zérus is lehetvén.

Igy tehát az összes fenti egyáltalán lehetséges tartományrendszerekhez képezett

$$\sum_0^{l-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j \, k_{i,j} \cdot a_{i,j}$$

értékek száma véges. Van tehát köztük egy, a mely a többinél nem kisebb, legyen ez $A\,(x_0, \ldots, x_l, y_0, \ldots y_m)$.

Ugyanama munkámban kimutattam, hogyha az α területnemző négyszöget az x, y irányokkal parallel vonalakkal β, $\gamma, \ldots$, négyszögekre bontjuk, ezek is területnemzők. $[\beta]$ és $[\gamma]$ az $[\alpha]$-ba eshetnek és ha β és γ-nak közös belső pontja nincs, akkor $[\beta]$ és $[\gamma]$-nak sincs közös pontja.

Ezen tényből (l. ugyanott) könnyű kimutatni, hogy az $A\,(x_0 \ldots x_l, y_0, \ldots y_m)$ értékeknek

$$(l=\infty,\ m=\infty,\ x_{i+1}-x_i=0,\ y_{j+1}-y_j=0)$$

határozott határértékük van, mely x_i y_j, pontoktól független.

Legyen A ez érték jele.

Nyilván $A \leqq T$.

A z tengelyt megtartva, változtassuk a coordinata-rendszert, legyenek x', y' az új tengelyek.

Az $x'y'$-sík tehát azonos az xy-síkkal, de az $x'y'$-sík egy négyszöge sem azonos az xy sík egy négyszögével sem.[2]

---

[1] Ez egyebeken kívül az idézett munkámban kimutatott ama tényből következik, hogy ha x, y az $a_{i,j}$ egy pontja, akkor van az $[a_{i,j}]$-nek egy oly pontja, a melyre φ értéke x, ψ értéke y.

[2] Ez csak akkor nem áll, ha a transformatio egyenletei közt az

$$x'=x,\ -x,\ y,\ -y$$

egyenletek valamelyike előfordul.

Legyen A' az az érték az $x'y'$-síkhoz, a mi A volt az xy-síkhoz. *Áll, hogy:*

$$A' = A.$$

A 8. pontban egy más tétel bizonyítását közölve, a 9. pontban az itt kijelentett tételt igazoljuk.

8. Az $[x_1, x_2; y_1, y_2]$ *egy sajátságáról.*

d egy a B (P)-be eső tartományt jelentvén, jelentse d° a d-ben változó M ponthoz való M° pontok idomát.

Legyen $A(d)$ ugyanaz az érték a d°-hoz, mint A az S-hez.

Legyen $(x_1, x_2; y_1, y_2) \equiv \alpha$ az xy sík egy területnemző négyszöge, legyen $[x_1, x_2; y_1, y_2]$ egy hozzávaló négyoldalú tartomány. Oldalainak a jelei $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ legyenek úgy, hogy az $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ oldalon φ értéke x_1, illetőleg x_2, az $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ oldalon ψ értéke y_1, illetve y_2.

Miként a 7-ben megjegyeztük, az $[x_1, x_2; y_1, y_2]$-nek vannak oly pontjai, a melyekre $x_1 < \varphi < x_2$, $y_1 < \psi < y_2$. Nyilvánvaló, hogy e pontok összessége egy tartományrendszert alkot.

Legyenek d_k, $k = 1, 2, \ldots$ a rendszer tartományai.[1]

Állítom, hogy:

$$\Sigma_k A(d_k) \geqq a$$

(a az α területét jelentvén).

Bebizonyítás.

a) Legyen x egy az (x_1, x_2) belsejébe eső érték; jelölje (x) a P ama pontjaiból álló idomot, a melyekre $\varphi = x$. Mint ismeretes, (x) zárt és $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ az $[\alpha]$-ban (x) által elválasztvák. Képezzük a 6-ban megállapítottak alapján az $\{[(\bar{x}_1, (x)), \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2]\}$ idomot. Legyen jele $[x]$. Az $[x]$ amaz oldalának, a mely $[\alpha]$-ban fekszik, a jele $\overline{x}$ legyen.

Mint ismeretes, egy legfeljebb megszámlálható W sokaság kivételével x a következő sajátságú.[2]

---

[1] Bármely tartományrendszer tartományainak a számossága legfeljebb megszámlálható.

[2] A közlendő állításokra nézve l. több ízben idézett munkámat. — Az W pontjai x_1, x_2 és egy bizonyos az $[\alpha]$ és az $[\alpha]$ I-féle pontjaira definiált függvény szélső értekei.

1. $\bar{x}$ deriváltja az $[\bar{x}]$ tartományt két tartományra bontja.[1] Ezek egyike $[x]$, a másik jele $\{x\}$ legyen.

2. Ha A az $\bar{x}$ egy pontja és ha az $\overline{AB}$ távolság különben az $[x]$-ben van, bármely belső pontja is C az $\overline{AB}$-nek, van oly $x'<x$, hogy az $\bar{x}'$ deriváltjának $\overline{AC}$-n pontja van. És ha $x'<x_{(1)}<x$, akkor ugyanez áll $\bar{x}_{(1)}$ deriváltjára is.

Ha A az x deriváltjának egy pontja és ha $\overline{AB}$ külömben az $\{x\}$-ben van, bármely belső pontja is C az $\overline{AB}$-nek, akkor van oly $x''>x'$, hogy ha $x''\geqq x_{(1)}>x$, az $\bar{x}_{(1)}$-nek $\overline{AC}$-n pontja van.

3. Legyen $x'<x''$. Az $[x'']$ mindama pontjai, a melyek nem pontjai az $[x']$ deriváltjának egy négyoldalú tartományt képeznek. Egyik oldala x'', az ezzel szemben fekvő a tartomány mindama I-féle pontjaiból áll, a melyek az $[\alpha]$-ba esnek, ez oldal $\bar{x}'$ deriváltján van. A másik két oldal egyike az $\bar{y}$, másika az $\bar{y}_2$ bizonyos pontjaiból áll.

E tartomány jele $[x', x''; y_1, y_2]$ legyen.

4. Az $\bar{x}$ deriváltján ψ minden az y_1 és y_2 közé eső értéket felvesz.

b) Legyen x az (x_1, x_2)-nek egy nem a W-hoz való pontja. Legyen $\lambda>0$. $x_2-x_1-8\lambda>0$, $y_2-y_1-4\lambda>0$. Az *a)* 4. szerint felvehetők az $\bar{x}$ deriváltján az $[\alpha]$-ba eső A, B pontok úgy, hogy

$$\psi(A)<y_1+\lambda, \quad \psi(B)>y_2-\lambda.$$

A és B mint középpontok körül szerkesszünk az $[\alpha]$-ba eső egy-egy kört; a két körlapnak közös ponja ne legyen. Ha a körök sugarai elég kicsinyek, φ, ψ ingadozásai bennük kisebbek λ-nál.

Vegyünk fel az A körében egy az $[x]$-hez való A' s egy az $\{x\}$-hez való A'' pontot (l. *a)* 1.). Ugyancsak vegyünk fel a B körében egy az $[x]$-hez való B' s egy az $\{x\}$-hez való B'' pontot.

Lesz így az *a)* 2. szerint egy $x'<x$ s egy $x''>x$, úgy, hogy $\overline{A'A''}$ és $\overline{B'B''}$ az $[x', x''; y_1, y_1]$-nek mindkét az $[\alpha]$-ba eső oldalát metszik.

---

[1] Azaz az $[\alpha]$ ama pontjai, a melyek az $\bar{x}$ deriváltjának nem pontjai egy két tartományból álló tartományrendszert alkotnak.

Az A'-től az $A'A''$-en A'' felé menve legyen A_1 $\widehat{x'}$ deriváltjának az utolsó, A_2 az $\widehat{x''}$-nek első pontja. A $\overline{B'B''}$ analog pontjai B_1, B_2 legyenek.

$\overline{A_1A_2}$ és $\overline{B_1B_2}$ által $[x', x''; y_1, y_2]$ nyilván három négyoldalú tartományra bomlik. Ezek közül $\{\widehat{x'}, \widehat{x''}; \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}\}$ legyen az, a melynek $\overline{A_1A_2}$ és $\overline{B_1B_2}$ a homlokzatán vannak. E négyoldalú tartománynak $\overline{A_1A_2}$ és $\overline{B_1B_2}$ az átellenes oldalai. $\widehat{x'}$ oldala az $\widehat{x'}$ deriváltján van, $\widehat{x''}$ oldala az $\widehat{x''}$-en van. Nyilvánvaló, hogy e tartomány homlokzatán φ értékei $x'-\lambda$ és $x''+\lambda$ közé esnek. Továbbá $\overline{A_1A_2}$-n ψ értéke $< y_1+2\lambda$, $\overline{B_1B_2}$-n $> y_2-2\lambda$.

Ha pedig $x_{(1)}$ az x egy más értéke és ha x', x'' analogonjai $x'_{(1)}$, $x''_{(1)}$, akkor, ha (x', x'') és $(x'_{(1)}, x''_{(1)})$-nek nincs közös belső pontja, az $\{\widehat{x'}, \widehat{x''}), \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}\}$-nek és az $(x'_{(1)}, x''_{(1)})$-hez analog módon képezett tartománynak sincs. Ugyanis e tartományok közül az első $[x', x''; y_1, y_2)$-be, a második pedig $[x'_{(1)}, x''_{(1)}; y_1, y_2]$-be esik és e két tartománynak közös pontja nincs.

c) Egy ismert Borel-Lebesgue-féle tétel szerint van az $(x_1+3\lambda, x_2-3\lambda)$-ban véges számú fenti (x', x'') intervallum, a melyek közül bármely kettőnek sincs közös pontja és a melyek hosszának az összege $\geqq x_2 - x_1 - 7\lambda$.

Minden ily (x', x'')-hez való egy $\{\widehat{x'}, \widehat{x''}, \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}\}$. E tartományok egy tartományrendszert alkotnak.

Legyen U e tartományrendszer; u jelölje valamely tartományát. Legyen n az u tartományok, azaz az (x', x'') intervallumok száma.

Az u-ban lehet oly pont, a melyre nézve $\varphi < x_1+\lambda$. E pontok összessége nyilván egy az u-ba eső tartományrendszer. E rendszer egy-egy tartományának a homlokzatán φ nyilván $\leqq x_1+\lambda$. Mivel pedig az u homlokzatán $\varphi > x'-\lambda$ és $x'-\lambda > x_1+\lambda$ a tartomány homlokzatának egy pontja sem eshet az u homlokzatára. *Így a tartomány homlokzatán P értéke $x_1+\lambda$ és a tartomány az u homlokzatától elválasztott.*

Ez utóbbiaknál fogva, ismert tételek szerint e tartományok között csak véges számban lehetnek olyanok, a melyekben φ-nek $\leqq x_1$ értéke is van. Legyen v' e tartományok jele, a v'-ek nyilván egy (véges számú tartományból álló) rendszert alkotnak.

Hasonlókép az u mindama pontjai, a melyekre φ értéke $\geqq x_2$, oly véges számú v'' tartományok pontjai, a mely tartományok homlokzatán φ értéke $x_2-\lambda$, e tartományok egy rendszert alkotnak és az u homlokzatától el vannak választva.

Mivel v' homlokzatán φ értéke $x_1+\lambda$, v'' homlokzatán φ értéke $x_2-\lambda$, v' és v'' vagy nem bírnak közös ponttal, vagy pedig egyik a másikba esik.

A két rendszer egyesítése tehát egy oly véges számú tartományból álló rendszer, a melynek tartományai (az u-ba esnek) el vannak választva az u homlokzatától és a mely az u mindama pontjait, a melyekre $\varphi\leqq x_1$ vagy $\varphi\geqq x_2$, tartalmazza.

Legyenek e tartományok v, legyen számuk m. M oly egész szám legyen, a mely (n számú u lévén) minden m-nél nagyobb. Nyilván felvehető egy egész szám l és az (x', x'')-ben oly $x_{(i)}$ nem a W-hoz való pontok, hogy

$$x'=x_{(0)}<x_{(1)}<\cdots<x_{(i)}<\cdots<x_{(l)}=x''$$

úgy még, hogy az $(x_{(i)}, x_{(i+1)})$ $i=0,\dots\, l-1$, intervallumok közül bármely M számú hosszának az összege $<\frac{\lambda}{n}$. Itt n az (x', x'') intervallumok száma, l nyilván az (x', x'')-től függ.

d) Az $\{\widehat{x'}, \widehat{x''};\ \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}\}$-ben $\widehat{x'}$ és $\widehat{x''}$ nyilván minden $\overline{x}_{(i)}$ deriváltja által el vannak egymástól választva. Legyen $|\overline{x}_{(i)}|$ az $x_{(i)}$ deriváltja.

Képeztessék $\{[(\widehat{x'}, |\overline{x}_{(1)}|), \widehat{x''}, \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}]\}$.

Nyilvánvaló, hogy $\widehat{x'}$ és $\widehat{x''}_{(2)}$ az $|\overline{x}_{(2)}|$ ama része által is el vannak egymástól választva, a mely az utóbbi tartományon kívül esik. Legyen e rész $|\overline{x}_{(2)}|_1$.

Képeztessék $\{[(\widehat{x'}, |\overline{x}_{(2)}|_1), \widehat{x''}, \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}]\}$.

Ugyanígy az $\widehat{x'}$ és $\widehat{x''}$ az $|\overline{x}|$, ama $|\overline{x}_{(3)}|_1$ része által is el vannak egymástól az $\{\widehat{x'}, \widehat{x''}, \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}\}$-ben választva, a mely az előbbi tartományon kívül esik.

Képeztessék $\{[(\widehat{x'}, |\overline{x}_{(3)}|_1), \widehat{x''}, \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}]\}$.

Ezt az eljárást folytatva a 6. szerint egy az u-ba eső l negyoldalú tartományból álló tartományrendszert nyerünk. Legyen egy ily tartomány w. A w homlokzatán φ értéke $x_{(i)}-\lambda$ és $x_{(i+1)}+\lambda$ közé esik.

A v homlokzatán φ értéke vagy $x_1+\lambda$ vagy $x_2-\lambda$, így mivel $x_1+\lambda<x_{(i)}-\lambda<x_{(i+1)}+\lambda<x_2-\lambda$, v és w-nak nincs közös pontja, vagy egyik a másikba esik. De csakis v eshet a w-be, mert ellenkező esetben — mivel w-nak $\overline{A_1A_2}$ és $\overline{B_1B_2}$ egy-egy darabja a w homlokzatán van (és v az u-ba esik) — ugyane darabok a v homlokzatán is lennének, ámde v az u homlokzatától így nem lenne elválasztva.

Igy tehát — legfeljebb M számú w tartalmazhatván legalább egy v tartományt — ama $x_{(i+1)}-x_{(i)}$ értékek összege, a melyekhez való w-ben egy v sincs, a $c)$ szerint

$$\geqq x''-x'-\frac{\lambda}{n}.$$

d) Egy ily w tartomány egyik oldalán φ értéke $x_{(i)}$, másik oldalán $x_{(i+1)}$. A másik két oldal egyikén ψ értéke $>y_1+2\lambda$, másikán $>y_2-2\lambda$.

Igy tehát e két utóbbi oldal a w-ben el van egymástól választva ama két egymástól is elválasztott idom által, a melyek egyikére ψ értéke $y_1+2\lambda$, másikára $y_2-2\lambda$.

Igy tehát a 6. szerint, w egy oly négyoldalú tartományt tartalmaz, a melynek egyik oldalára φ értéke $x_{(i)}$, az ezzel átellenesre φ értéke $x_{(i+1)}$. A másik két oldal egyikén ψ értéke $y_1+2\lambda$, másikán $y_1-2\lambda$.

E tartomány területi értéke

$$(x_{(i+1)}-x_{(i)})\cdot(y_2-y_1-4\lambda);$$

s az összes ilyen az u-ba eső (és egy v tartományt sem tartalmazó) tartományok területi értékeinek az összege

$$\geqq\left(x''-x'-\frac{\lambda}{n}\right)\cdot(y_2-y_1-4\lambda);$$

s így az n számú u-ba eső valamennyi ily tartomány területi értékeinek az összege

$$\geqq(x_2-x_1-8\lambda)\cdot(y_2-y_1-4\lambda).$$

Ha tehát $\delta > 0$ és tetszés szerinti, akkor a λ kellő választásával ez az érték $\geqq a - \frac{\delta}{2}$. Vagyis felvehető az $[x_1, x_2; y_1, y_2]$-ben egy véges számú tartományból álló tartományrendszer s e tartományok négyoldalúak ($[x_1, x_2; y_1, y_2]$-félék), területi értékeik öszszege $\geqq a - \frac{\delta}{2}$ és bennük φ értéke x_1 és x_2 közé esik.

e) Legyen q e tartományok száma. Ha egy ily tartomány $[\nu]$ és területi értéke ν, akkor a $[\nu]$-ben ugyanígy felvehető egy véges számú négyoldalú tartományból álló tartományrendszer, a melyek területi értékeinek az összege $\geqq \nu - \frac{\delta}{2q}$, és e tartományokban ψ értéke y_1 és y_2 közé esik.

E q számú rendszerből álló rendszer tartományainak bármelyike (mivel benne $x_1 < \varphi < x_2$, $y_1 < \psi < y_2$) a d_k tartományok valamelyikébe esik. Területi értékeik összege $\geqq a - \delta$. Azaz $\Sigma A(d_k) \geqq a - \delta$ és δ tetszésszerinti. Igy $\Sigma A(d_k) \geqq a$.

9. A 7. állításának az igazolása.

Legyen $(x'_1, x'_2; y'_1, y'_2) \equiv a'$ az $x'y'$-sík egy területnemző négyszöge. Legyen $[a'] \equiv \{\bar{x}'_1, \bar{x}'_2; \bar{y}'_1, \bar{y}'_2\}$ egy hozzávaló négyoldalú tartomány, úgy hogy e tartomány $\bar{x}'_1$, $\bar{x}'_2$ oldalán x' értéke x'_1, illetve x'_2, az y'_1, y'_2 oldalo konpedig y' értéke y'_1, illetőleg y'_2. Jelölje a' az a' területét is.

Áll, hogy:

$$A([a']) \geqq a'.$$

Fogadjuk el ezt az állítást.

Az A és A' definitióit (l. 7) tekintetbe véve, nyilván $A \geqq A'$ származik az állításból, de ugyanígy $A' \geqq A$ is, $A' = A$.

Igy tehát csak fenti állításunk igazolandó.

a) Az a' kerületén x az a' két átellenes csúcsára bir szélső értékkel.[1]

Legyen például x az x'_1, y'_1 csúcson $x_{(1)}$ értékkel minimum, ekkor x az $x'_2 y'_2$ csúcson egy $x_{(2)}$ értékkel maximum. Ha $\delta > 0$ és elég kicsiny, $x_{(1)} + \delta < x_{(2)} - \delta$. Tekintsük az a' ama részét, a mely az $x = x_{(1)} + \delta$, $x = x_{(2)} - \delta$ egyenesek közé esik.

[1] Kivéve ha a transformatio egyenletei közt az $x' = \pm x$, $\pm y$ valamelyike előfordul. Ez esetben azonban, a mint azt könnyű látni, bizonyítani való nincs.

Nyilván felvehetők oly véges számban levő x_i pontok, hogy

$$x_{(1)}+\delta<x_0<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_s<x_{(2)}-\delta,$$

úgy hogy felvehetők olyan $(x_i, x_{i+1}; y_i^{(1)}, y_i^{(2)})$ $i=0,\ldots s-1$, négyszögek, a melyek az a' belsejébe esnek és a melyek területeinek az összege az a' említett részének a területétől oly kevéssé tér el, amint akarjuk. Ha még a δ is kellőkép vétetik fel, e négyszögek területeinek az összege az a'-től oly kevéssé tér el, a mint akarjuk.

Legyen $\varepsilon>0$ és oly kicsiny, hogy ha a P két M, N pontjára $\overline{MN}<3\varepsilon$, akkor

$$\overline{M^\circ N^\circ}<\delta$$

legyen.

β) Szerkeszszünk egy az $[a']$-be eső lánczot, a mely az $[a']$ és az ε-hoz olyan viszonyban van, mint az 5 tételében levő lánczot az ottani E és ε-hoz; az ottani A_i és C_i itt való analogonjainak jelei A_i, C_i legyenek.

Ha a láncz kellőkép vétetik fel, a C_i pontok közt nyilván lesz az $[a']$ mindnégy oladalának pontja. Nyilván lesz köztük két egymásután való pont, például C_1, C_2 úgy, hogy C_1 az $\bar{x}'_1$, C_2 az $\bar{y}'_1$ pontja és két egymásután való, például C_8, C_9 pont úgy, hogy C_8 az $\bar{x}'_2$, C_9 az $\bar{y}'_2$ pontja.

Legyen k_1 a $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2C_2}$, k_2 pedig a $\overline{C_8A_8}$, $\overline{A_8A_9}$, $\overline{A_9C_9}$ távolságokból álló láncz. E lánczok nyilván egyszerűek, pontjaik C_1, C_2, C_8, C_9 kivételével az $[a']$ pontjai, hosszaik 3ε-nál kisebbek.

A k_1 és k_2 az $[a']$ tartományt három tartományra bontja. Ezek között egy és csak egy van, a melynek k_1 és k_2 a homlokzatán van. E tartomány négyoldalú átellenes oldalai k_1, k_2. A másik két átellenes oldal egyike $\bar{y}'_2$ és $\bar{x}'_2$, másika $\bar{y}'_2$ és $\bar{x}'_1$ bizonyos pontjaiból áll. Legyenek n_1, n_2 ezek az oldalak. E tartomány jele tehát $\{k_1, k_2, n_1, n_2\}$ lehet.

Legyen m a φ maximuma k_1-en és legyen M a φ minimuma a k_2-n. Nyilván

$$m<x_{(1)}+\delta<x_{(2)}-\delta<M.$$

Jelentse (x) a P ama idomát, a melyen $\varphi=x$. k_1 és k_2

tehát a $\{k_1, k_2, \eta_1, \eta_2\}$-ben minden az $(x_{(1)}+\delta, x_{(2)}-\delta)$-ba eső x-hez való (x) által el vannak választva. Képeztessék a 6 szerint $\{[(k_1, x), k_2, \eta_1, \eta_2]\}$.

Legyen $\overline{x}$ e négyoldalú tartomány amaz oldala, a mely az összes a $\{k_1, k_2, \eta_1, \eta_2\}$-be eső I-féle pontokból áll. $\overline{x}$ nyilván az (x)-en fekszik.

$\overline{x}$ a $\{k_1, k_2, \eta_1, \eta_2\}$-höz nyilván ugyanolyan viszonyban van, mint a 8-ban levő $\overline{x}$ az ottani $[x_1, x_2; y_1, y_2]$-höz.

A 8. *a) b)* pontjaihoz teljesen analog viszonyok vannak, csak a W' analogonjába $x_0, \ldots, x_s$ is beléveendők. Továbbá az *a)*-ban levő az az állítás, hogy az $\overline{x}$ deriváltjának $[\alpha]$-ba eső részén az ϕ minden az y_1 és y_2 közé eső értéket felvesz, itt azzal helyettesítendő, hogy ha x az (x_i, x_{i+1})-be esik, az $\overline{x}$ deriváltjának $\{k_1, k_2, \eta_1, \eta_2\}$-be eső részén ϕ minden oly értéket felvesz, mint az $x=x$ egyenes α'-be eső pontjaira az y értéke.

Igy a *c)*-ben levő $\{x', x'', \overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}\}$ itteni analogonjában van egy $[x', x''; y_i^{(1)}, y_i^{(2)}]$.

Azaz az $[\alpha']$-ben felvehető egy oly négyoldalú tartományokból álló tartományrendszer, a melynek tartományai mindegyike egy bizonyos $(x', x''; y_i^{(1)}, y_i^{(2)})$-höz való. Ámde így a területi értékek összege α'-től oly kevéssé tér el, a mint akarjuk, azaz:

$$A([\alpha']) \geqq \alpha_r.$$

10. Az $A(\zeta)$ értékről. Legyen $A(\zeta)$ a ξ, η, ζ pontcoordinatarendszerben ugyanaz az érték a $\xi\eta$-síkhoz és a transformált felülethez (l. 3), mint az A az xy-síkhoz és a felülethez.

A mi továbbá $A(\zeta)$ a $\xi\eta$-síkra nézve, ugyanaz legyen $B(\eta)$ a $\xi\zeta$ és $\Gamma(\xi)$ az $\eta\zeta$-síkra nézve.

Áll, hogy

$$(A(\zeta)^2+B(\eta)^2+\Gamma(\zeta)^2]^{\frac{1}{2}} \leqq T,$$

ez az állítás a 7. egy megjegyzéséből és abból a tényből következik, hogy egy polyedert a coordinata-síkokra vetítve, a vetületek területei négyzetösszegének a négyzetgyöke a polyeder területénél nem nagyobb.

11. A felület darabja, a darab területe és $A(\zeta)$-féle értéke. Legyen d egy a $B(P)$-be eső tartomány. Az M pont a d-ben változván, az M° pontok idomának, mint a d φ, ψ, χ segélyével definiált képének a neve a felület d-hez való darabja. Jele d° legyen.

A miként a P-hez, illetőleg az S-hez a T, $A(\zeta)$, $B(\eta)$, $\Gamma(\xi)$ definiáltattak, úgy definiálható a d-hez, illetve a d°-hoz egy-egy $T(d)$, $A(d, \zeta)$, $B(d, \eta)$, $\Gamma(d, \zeta)$.[1]

Áll, hogy

$$A(d, \zeta) \leqq T(d),$$
$$[A(d, \zeta)^2 + B(d, \eta)^2 + \Gamma(d, \xi)^2]^{\frac{1}{2}} \leqq T(d).$$

Ha $d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots$ egy a $B(P)$-be eső tartományrendszer tartományai, akkor

$$\Sigma_k A(d_k) \leqq A,$$
$$\Sigma_k T(d_k) \leqq T.$$

2. §. A terület Peano-féle definitiójának az általánosítása. Az $I(\xi, \eta, \zeta)$ érték.

1. Peano definitiója. Legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots,$ egy a $B(P)$-be eső tartományrendszer tartományai. Vegyünk fel a d_k-hoz egy ζ_k normalissal biró síkot. Képezzük a

$$\Sigma_k A(d_k, \zeta_k)$$

összeget. A tartományrendszer és a ζ_k minden lehető módon változván, legyen K a fenti érték felső határa. Nyilván (l. 7), $K \leqq T$. Ezt a K értéket nevezzük a felület Peano-féle területének.

Peano az általa adott definitióban a tartományrendszert véges számú tartományból állónak veszi fel. Legyenek

$$d_1, \ldots d_k, \ldots d_n$$

az u rendszer tartományai. Vetítsük a d_k° darabot egy tetszésszerinti síkra (a mely minden d_k-hoz általában más és más).

[1] Legyen p egy a d-be eső tartomány, a melynek homlokzata véges számú közönséges sokszögből áll. A p^0 területének, $T(p)$-nek, a definitiója teljesen a Lebesgue-féle, csak P helyébe p veendő. $T(d)$ pedig definitio szerint az összes $T(p)$-féle értékek felső határa.

Legyen t_k e vetület területe.

A tartományrendszer s a síkok minden lehetővé változtatásával elérhető

$$\sum_1^n k\, t_k$$

értékek felső határát definiálja PEANO a felület területe gyanánt.

E definitio hibája az, hogy mi sem igazolja, mikép t_k léteznék, azaz, hogy a darab vetületének JORDAN-féle belső és külső mértékei egymás közt egyenlők volnának.

A PEANO-féle definitio kétségtelenül kifogástalan lenne, ha t_k helyébe vagy a JORDAN-féle belső, vagy a JORDAN-féle külső mérték vétetnék, vagy pedig a LEBESGUE-féle belső vagy külső mérték.

Sőt még e definitiók általánosíthatók is, ugyanis a tartományrendszert végtelen sok tartományból állónak is megengedhetjük.

E négy érték meghatározása négy pontosan kijelölt, igen nehéznek látszó problema.

Igen valószinű, hogy a K hasonló problemájának a megoldása e problemák megoldását is elősegíti.

Egyszerű példákon lehet igazolni, hogy a fenti négy érték nem szükségkép egyenlő T-vel.

Ennek oka az, hogy a t_k definitiója a d_k^0 vetületét csakis mint ponthalmazt veszi tekintetbe és nem mint a d_k-nak a φ, ψ, χ és a vetítés által létesített képét.

2. Az $I(\xi, \eta, \zeta)$ értékről. A d_k az elébbi módon változván, legyen ξ, η, ζ egy pontcoordinata-rendszer.

Legyen a tartományrendszer változtatásával elérhető

$$\Sigma k\,[A\,(d_k, \zeta)^2 + B\,(d_k, \eta)^2 + \Gamma\,(d_k, \xi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

értékek felső határa $I(\xi, \eta, \zeta)$. Nyilván (l. 1. §. 10),

$$I(\xi, \eta, \zeta) \leqq T.$$

3. §. Egy speciális felületről. A rectifiabilis felület darabjairól és quadraturájáról.

1. *Egy speciális felületről.* Legyen a C síkgörbe egy zárt JORDAN-féle görbe, legyen (C) az a tartomány, a melynek homlokzata C.

A $C+(C)$-ben változó M pontnak φ_1, ψ_1, χ_1 oly egyértékű, határolt és folytonos függvényei legyenek, hogyha az M° a

$$x=\varphi(M),\ y=\psi(M),\ z=\chi(M)$$

pontot jelenti, ha M a C-t egyirányban és egyszer befutja, az M° egy síkban mozog és egy C° zárt JORDAN-féle görbét ír le egy irányban és egyszer. Legyen (C°) a C° által bezárt tartomány. Legyen ν oly sík, a mely nem merőleges a C° síkjára. Vetítsük a C° görbét e síkra. Legyen C' e vetület. Az M a C-t egy irányban és egyszer befutva, az M° vetülete a C'-et futja be egy irányban és egyszer, C' is JORDAN-féle zárt görbe, az általa bezárt (C') tartomány a (C°) vetülete. Az M a $C+(C)$-ben változván, az M° helye egy U felület lesz.

Áll, hogy:

1. *Az U-nak a ν-re való vetülete a (C')-et kitölti.*

2. Legyen ξ, η, ζ oly coordinata-rendszer, a melynek ζ-tengelye a ν-síkra merőleges. Legyen $(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ egy a (C')-be eső négyszög.

Hosszabbítsuk meg a négyszög $\xi=\xi_1$ oldalát a (fogyó) (növő) η értékek felé határtalanul.

Legyen K', (N') a C' oly íve, a mely e meghosszabbítás és u C' közös pontjait tartalmazza. A K' esetleg egyetlen egy pont is lehet, úgyszintén az N' is.

A $\xi=\xi_2$ oldalhoz R', O' legyenek K', N' analogonjai.

Hosszabbítsuk meg az $\eta=\eta_1$ oldalt a fogyó (növő) ξ értékek felé határtalanul.

Legyen L', (Q') a C' oly íve, a mely e meghosszabbítás és a C' közös pontjait tartalmazza.

Az $\eta=\eta_2$ oldalra L', Q' analogonjai M', P' legyenek.

Ha e nyolcz ív közül bármely kettőnek sincs közös pontja és ha még ez ívek circuláris sorrendje $K', L', M', N', O', P', Q', R'$, *akkor van a* (C)*-ben egy* $[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$, *azaz ekkor* $(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ *területnemző.*

Az 1. igazolása. A C a (C)-ben való folytonos deformatióval pontttá zsugorodhat össze. A C° tehát az U-n folytonos deformatióval ponttá zsugorodhat össze. Igy a C' az U-nak a ν-re való vetületén folytonos deformatióval ponttá zsugorodhat össze.

Ámde C' egy zárt JORDAN-féle síkgörbe s mint ismeretes, egy ily görbe a síkjában való folytonos deformatióval ponttá csak úgy zsugorodhat össze, ha C' mozgása alatt (C') minden pontja súrolva lesz. Igy a (C') minden pontja az U vetületébe esik.

A 2. igazolása. K' a C° bizonyos K° ívének a vetülete s e K° a C bizonyos K ívének a képe. A mi K a K'-hez, azok legyenek $L, M, \ldots, R$ az $L', M', \ldots, R'$-hez.

Nyilván K, L, M, N, O, P, Q, R circularis rendje a felírt.

A K és N a (C)-ben el vannak választva amaz idom által, a melyre η értéke η_1 (η_2).

Ugyanis a K és N egy-egy pontját a (C)-ben összekötő láncz képe az U-n egy continuum. E continuumnak nyilván van egy pontja a K° s egy pontja az N°-on. E continuum vetülete a ν síkra egy oly continuum, a melynek egy pontja a K'-en, egy pontja az N'-en van.

Ámde K' és N' nyilván az $\eta = \eta_1$ egyenes két különböző oldalán vannak, a continuum tehát ezt az egyenest metszi, így a láncz is kell, hogy messe az említett idomot.

Ugyanez áll R és O, és η_1 és η_2-re.

L és Q és épp így M és P_1 is el vannak választva a (C)-ben amaz idom által, a melyen ξ értéke ξ_1, illetve ξ_2.

Az 1. §. 6. pont 3. tétele alapján állításunk igaz.

Jegyzet. Ha a C° olyan, hogy van a (C°)-ban egy O pont, úgy, hogy minden az O-ból a C° síkjába esőleg kiinduló sugár a C° görbét csak egy pontban metszi, akkor a fenti feltételek megvalósulnak minden az O-nak a ν-re való vetületét mint belső pontot tartalmazó $(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ négyszögre.

Ha C° convex görbe, akkor a tétel minden $(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$-re áll.

2. *A rectifiabilis felület speczialis darabjairól.* A rectifiabilis felület jele R legyen.

a) Legyenek l, m véges positiv egész számok és x_i, y_j olyanok, hogy

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_l = a,$$
$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < \cdots < y_m = b.$$

Az $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ jele $a_{i,j}$ legyen. Az $a_{i,j}$-nek az x_i, y_j, $-x_i$, y_{j+1}, $-x_{i+1}$, y_{j+1}, $-x_{i+1}$, y_j csúcsai A, B, C, D legyenek. Legyen C_1° ama pont, a mely csúcsa annak a parallelogrammának, a melynek A°, B°, D° is csúcsai úgy, hogy B° és D° átellenes csúcsok.

E parallelogramma nyilván egyenes távolsággá vagy ponttá is fajulhat.

A $a_{i,j}$ O középpontjából, mint hasonlósági középpontból szerkeszszünk egy az $a_{i,j}$-hez hasonló, az $a_{i,j}$-t bezáró négyszöget. Legyenek E, F, G, H sorban az A, B, C, D homologonjai.

Az $EFGH$ négyszögben változó M ponthoz három $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ függvényt szerkesztünk a következő módon.

Az $a_{i,j}$-ben $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ rendre φ, ψ, χ legyenek.

Az $EFGH$ többi pontja az O-ból kiinduló és az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ távolságok valamelyikét metsző sugarakon van. Ha egy ily pont $H, L\ldots$, akkor $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ ama $H', L', \ldots$ pont x, y, z coordinatája lesz, a mely a következőkép lesz szerkesztve:

1. Először is

$$E' \equiv A^\circ,\ F' \equiv B^\circ,\ G' \equiv C_1^\circ,\ H' \equiv D^\circ.$$

2. Az O-ból kiinduló, az $\overline{AB}$ oldalt K-ban metsző sugár az $\overline{EF}$ oldalt egy L pontban metszi. Legyen N még a $\overline{KL}$ egy pontja.

L' az $\overline{E'F'}$ távolság ama pontja legyen, a melyre

$$\frac{\overline{E'L'}}{\overline{L'F'}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}.$$

N' a $\overline{K'L'}$ távolság ama pontja legyen, a melyre

$$\frac{\overline{K'N'}}{\overline{N'L'}} = \frac{\overline{KN}}{\overline{NL}}$$

3. A $\overline{BC}$ oldalt Q-ban metsző sugár messe a $\overline{BG}$ távolságot egy X, az $\overline{FG}$ távolságot egy Y pontban.

X' a $\overline{B'G'}$ ama pontja legyen, a melyre

$$\frac{\overline{B'X'}}{\overline{X'G'}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}.$$

Y' a $\overline{F'G'}$ távolság ama pontja legyen, a melyre

$$\frac{\overline{F'Y'}}{\overline{Y'G'}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}.$$

A $\overline{QX}$ egy pontja legyen V. V' a $\overline{Q'X'}$ ama pontja legyen, a melyre

$$\frac{\overline{Q'V'}}{\overline{V'X'}} = \frac{\overline{QV}}{\overline{VX}}.$$

Az $\overline{XY}$ egy pontja W legyen. W' az $\overline{X'Y'}$ ama pontja legyen, a melyre

$$\frac{\overline{X'W'}}{\overline{W'Y'}} = \frac{\overline{XW}}{\overline{WY}}.$$

4. Hasonló módon definiáljuk, a $\overline{GD}$ távolságot megvonva, a vesszős pontokat a CD-t metsző sugarakon. A $\overline{DA}$-t metsző sugarakon a vesszős pontok definitiója a 2. alattihoz hasonlókép történik.

Könnyű belátni, hogy φ_1, ψ_1, χ_1 egyértékű, határolt és folytonos függvények s az általuk definiált felület, ha $A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ$ nem fajul el, az 1 alatti tételeknek eleget tesz. Legyen e felület U.

b) Legyen λ_1 felületünk ama része, a mely az $EFBA$ trapeznek felel meg. A BFG háromszögnek nyilván a $B^\circ C^\circ C_1^\circ$, háromszög felel meg, a BGC háromszögnek megfelelő rész legyen λ_2. A DHG háromszögnek nyilván a $D^\circ C^\circ C_1^\circ$, háromszög felel meg, a DCG háromszögnek megfelelő rész legyen λ_3. Az $EHDA$ trapeznek megfelelő rész legyen λ_4.

Egy az $\overline{AB}$ oldalon A-ból kiinduló pont egyirányban a B-ig mozogva, a mozgó pont felületi képe az R-en és az U-n ugyanaz az idom lesz. Ez az idom egy rectifiabilis görbe. Jele és hoszszának is a jele $\widehat{A^\circ B^\circ}$ legyen.

Mint ismeretes, λ_1 nincs kívül ama (gömbbé, távolsággá, sőt ponttá is fajulható) forgás-ellipsoidon, a mely egy oly ellipsis $\overline{A^\circ B^\circ}$ körül való forgásából keletkezik, a mely ellipsis gyújtópontjai A°, B° és amelynek nagytengelye $\widehat{A^\circ B^\circ}$ hosszaságú.

Jelentse θ_1 ezt az ellipsist és jelentse θ_1 ez ellipsis területét is.

Legyenek θ_2, θ_3, θ_4 azok a $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$-hoz, a mi θ_1 az $\overline{AB}$-hez. Legyen $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+B^\circ C^\circ C_1^\circ+D^\circ C^\circ C_1^\circ=\mu$.

c) Legyen $\xi_{i,j}$, $\eta_{i,j}$, $\zeta_{i,j}$ egy tetszés szerinti derékszögű pontcoordinata-rendszer. Ha A°, B°, C_1°, D° vetületei a $\xi_{i,j}$, $\eta_{i,j}$ síkra A', B', C_1', D', akkor:

$$A(a_{i,j}, \zeta_{i,i}) \geqq A'B'C_1'D'-\mu.$$

Ugyanis az állítás nyilván helyes, ha a jobboldal nem positiv. Ha a jobboldal positiv, akkor az $A'B'C_1'D'$ parallelogramma nem elfajuló.

Az 1. tétel az U felületre nyilván alkalmazható, még pedig ekkor minden az $A'B'C_1'D'$-be eső négyszög területnemző, mert a parallelogramma kerülete convex görbe.

Vetítsük a λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 idomokat az $A'B'C_1'D'$ síkjára.

E vetületek nyilván nem esnek kívül az említett három forgás-ellipsoid s a hozzá hasonlókép képzelt másik három forgás-ellipsoid ugyane síkra való vetületein.

Ámde ez ellipsoidok vetületei területtel birnak (e vetületek ellipsisek); ezek a területek rendre θ_1, θ_2, θ_1, θ_4-nél nem nagyobbak.

Ugyanis például a 2. *b)* alatti ellipsoid vetülete oly ellipsis, a melynek kis tengelye a θ_1 ellipsis kis tengelye, nagy tengelye pedig nem nagyobb, mint θ_1 nagy tengelye.

Ha tehát $A'B'C_1'D'$-ből ezen ellipsoidok vetületeit és $B^\circ C^\circ C_1^\circ$, $D^\circ C^\circ C_1^\circ$ vetületeit elveszszük, akkor ha még van fennmaradó rész, ez csakis az $a_{i,j}^\circ$ pontjainak a vetületeiből állhat, $a_{i,j}^\circ$ az $a_{i,j}$ belső pontjaiból álló tartomány R-en való képét jelentvén.

Tekintetbe véve, hogy az említett négy ellipsoid és két háromszög vetületei területtel birnak és hogy e területek öszszege $\leqq u$, nyilvánvaló, *hogy ha*

$$A'B'C_1'D'-u>0,$$

az $A'B'C_1'D'$*-nek van egy oly része, a mely területtel bir s a melynek területe a fenti értéknél nem kisebb s e rész csakis* $a^\circ_{i,j}$ *pontjainak* (tehát csakis az R pontjainak) *a vetületeiből áll.*

Ámde mivel a 2 szerint minden az $A'B'C_1'D'$-be eső négyszög területnemző, így még az 1. §. 8 alatti tételét is tekintetbe véve *áll, hogy:*

$$A(a_{i,j}, \xi_{i,j}) \geqq A'B'C_1'D'-u,$$

s ez a viszony nyilván még akkor is helyes, ha a jobboldal nem positiv.

d) Mint ismeretes, ha $\delta > 0$, az l, m x_i, y_j úgy vehetők fel, hogy

$$\sum_0^{l-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j u < \delta,$$

$$| T - \sum_0^{l-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ | < \delta.$$

4. §. A rectifiabilis felületnél $K=T$, $I(\xi, \eta, \zeta) = T$.

1. A rectifiabilis felületnél $K=T$. Legyen ugyanis a 2. §. d_k tartományaiból álló rendszer a 3. §. 3. *d)*-nek eleget tevő $a_{i,j}$ négyszögek belső pontjaiból álló rendszer.

Ha $A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ$ igazi parallelogramma, legyen $\zeta_{i,j}$ egy a síkjára merőleges irány. Ha $A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ$ egyenes darab, akkor legyen $\zeta_{i,j}$ egy reá merőleges irány. Ha $A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ$ pont, legyen $\zeta_{i,j}$ egy tetszésszerinti irány.

A 3. §. 2. *d)*-nek elég lévén téve, a 3. §. 2. *c)* szerint

$$\sum_0^{l-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j A(a_{i,j}, \zeta_{i,j}) \geqq \sum_0^{l-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ - \delta,$$

azaz a 3. §. 2. *d)* szerint

$$\sum_0^{l-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j A(a_{i,j}, \zeta_{i,j}) \geqq T - 2\delta.$$

Amde δ tetszésszerinti positiv szám és a baloldal a 2. §. szerint $\leqq K$. Igy $K \geqq T$, de a 2. §. szerint $K \leqq T$. Azaz $K = T$.

2. A rectifiabilis felületnél $I(\xi, \eta, \delta) = T$.

Az $A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ$ $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ síkokra való vetületeinek a területei α, β, γ legyenek. A 3. §. 2. *c)* szerint, ha $a_{i,j}$ az $a_{i,j}$ belső pontjaiból álló tartományt jelenti,

$$A(a_{i,j}, \zeta) + u \geqq \alpha, \quad B(a_{i,j}, \zeta) + u \geqq \beta, \quad \Gamma(a_{i,j}, \zeta) + u \geqq \gamma.$$

Innen

$$[A(a_{i,j}, \zeta)^2 + B(a_{i,j}, \eta)^2 + \Gamma(a_{i,j}, \xi)^2]^{\frac{1}{2}} + 3u \geqq [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}$$

következik, ámde a jobboldal $A^\circ B^\circ C_1^\circ D^\circ$. Igy a 3. §. 2. *d)* szerint

$$\sum_0^{l-1} i \sum_0^{m-1} j \, [A(a_{i,j}, \zeta)^2 + B(a_{i,j}, \eta)^2 + \Gamma(a_{i,j}, \xi)^2]^{\frac{1}{2}} \geqq T - 4\delta.$$

Ámde a 2. §. szerint a baloldali érték $\leqq I(\xi, \eta, \zeta)$, δ tetszésszerinti és a 2. §. szerint $I(\xi, \eta, \zeta) \leqq T$. Azaz:

$$I(\xi, \eta, \zeta) = T.$$

5. §. A rectifiabilis felület és Peano eredeti definitiója.

1. Ha d a $B(P)$-nek oly tartománya, a melynek területe van, akkor az R-nél a d° bármely síkra való (merőleges) vetületének is van területe.

Bebizonyítás. Mivel a rectifiabilis felület minden transformáltja rectifiabilis, feltehető, hogy a sík az xy-sík.

a) *A rectifiabilis felület érintősíkjairól.* A Math. és Term. Értesitőben megjelent «A rectifiabilis felületről» czímű munkámban kimutattam a következőket.

Legyen M a P egy pontja, legyenek u_0, v_0 a P-nek u, v coordinátái. Az u, v, t térben levő

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad t = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(M)$$

felület rectifiabilis lévén, a P egy oly (φ) sokaságának a kivételével, a melynek LEBESGUE-féle mértéke zérus, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ az M pontban létezők, $-G$ és $+G$ közé esnek és mérhetők. Legyen jelük $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_M$. Ha az M pont nem pontja a (φ)-nek, akkor az u, v, t tér

$$t-\varphi(M)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M\cdot(u-u_0)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_M\cdot(v-v_0)$$

síkja az érintősík közönséges sajátságát mutatja. Nevezetesen: Legyen N a P egy pontja. Legyen N_φ, $N_{[\varphi]}$ a felület. illetőleg a sík ama pontja, a melynek az uv síkra való vetülete N. Legyen $\varepsilon>0$. Van egy az M és ε-tól függő positiv λ úgy, hogy a P minden oly N pontjára, a melyre

$$0<\overline{MN}\leqq\lambda,$$

$$\frac{\overline{N_\varphi N_{[\varphi]}}}{\overline{MN}}<\varepsilon\cdot$$

Ha tehát (ψ), (χ) ugyanazok a ψ, χ-hoz, mint (φ) a φ-hez, ha $Q=(\varphi)+(\psi)+(\chi)$ vétetik a rectifiabilis felületre, R-re áll a következő. Legyen M a P-nek egy nem a Q-hoz való pontja. Legyen $\delta>0$. Legyenek a P egy N pontjának u, v coordinátái u' v'. Jelölje N^s az x, y, z tér ama pontját, a melyet az

$$\begin{aligned}
x-\varphi(M)&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M(u-u_0)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_M\cdot(v-v_0),\\
y-\psi(M)&=\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_M\cdot(u-u_0)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_M\cdot(v-v_0),\qquad(1)\\
z-\chi(M)&=\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)_M\cdot(u-u_0)+\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)_M\cdot(v-v_0)
\end{aligned}$$

egyenletek adnak x, y, z értékéül, ha bennük u', v' helyébe u', v' iratik.

Van egy a δ és M-től függő positiv ϱ úgy, hogy ha

$$0<\overline{MN}\leqq\varrho,$$

$$\frac{\overline{N^0N^s}}{\overline{MN}}<\delta.$$

Így tehát, ha f az N° távolsága az (1) *egyenletek által képviselt idomtól*

$$f < \delta.\overline{MN}.$$

Az (1) egyenletek által képviselt idom vagy sík, vagy egyenes vonal, vagy pont.

Ha az idom sík, akkor az érintősík közönséges sajátságait mutatja.

Nevezetesen: Tegyük fel, hogy még nem is merőleges az xy-síkra. Legyenek M°, N°, N^s vetületei az xy-síkra M_1°, N_1°, N_1^s.

Nyilvánvaló, hogy ha N egy M közepű kört ír le, N_1^s *egy M_1° közepű ellipsist ír le* s a különböző ily körökhöz való ellipsisek hasonlók és hasonlóan fekszik a hasonlósági centrum M_1 s ez ellipsisek nem fajulhatnak el egyenes távolsággá, sem ponttá.

Ha a kör sugara elég kicsiny, egy $\overline{N_1^\circ N_1^s}$ távolság sem tartalmazza az M_1°-et.

b) *Ha M a B (P) egy nem a Q-hoz való pontja és ha ez M-re az* (1) *egyenletek síkot képviselnek, akkor ha még e sík az xy-síkra nem merőleges, van egy az M_1° pontot bezáró területnemző négyszög.*

Legyen ugyanis a positiv σ oly kicsiny, hogy az M közepű σ sugarú kör az *a)* végén elmondottaknak eleget tegyen és a B (P)-be essék.

Definiáljunk az M közepű 2σ sugarú körben három $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ függvényt emígy. Az M közepű σ sugarú körben és kerületen $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ rendre φ, ψ, χ legyenek.

Egy az M-ből kiinduló sugár a két kört sorban N, O-ban találja. Legyen V az $\overline{NO}$ egy belső pontja. $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ a körgyűrűben ama O', V' pontok x, y, z coordinatái lesznek, a melyek ekként szerkesztetnek: $O' \equiv N_1^s$, V' pedig az $\overline{N_1^\circ N_1^s}$ ama pontja, a melyre:

$$\frac{\overline{N^\circ V'}}{\overline{V'N_1^s}} = \frac{\overline{NV}}{\overline{VO}}.$$

Könnyű látni, hogy $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ egyértékű, határolt és folytonos függvények. Az általuk alkotott U felület a 4. §. 1. alatti mindkét tételnek eleget tesz. Azaz minden olyan négyszög, a mely a 2σ sugarú kör kerületének az xy-síkban megfelelő ellipsis belsejébe esik, területnemző.

Ámde az *a)* végén elmondottak alapján, ha a négyszög az M_1° pontot bezárja és ha méretei elég kicsinyek, a négyszög egy $\overline{N_1^\circ N_1^s}$ pontját sem tartalmazza. Azaz e négyszögbe csakis az U ama darabjának a pontjai vetülnek, a melyek a σ sugarú kör pontjainak felelnek meg. De e pontok nyilván az R pontjai.

c) Legyen d az elől említett tartomány. Legyen képe az R-en d°. d° vetülete xy-síkra d'. Legyen $h(d')$ a d' homlokzata.[1]

A $h(d')$ egy pontja sem lehet a d egy oly M pontjának megfelelő M°-nak az xy-síkra való vetülete, a mely M pontra az (1) *egyenletek oly síkot képviselnek, a mely az xy-síkra nem merőleges.*

Ugyanis ekkor a *b)* szerint egy az M° vetületét bezáró elég kis négyszög minden pontja a d' pontja volna és így az M° vetülete nem lehet a $h(d')$ pontja. A $h(d')$ pontjai tehát csakis oly M pontok M° képének a vetületei lehetnek, a melyek vagy

1. A Q pontjai.
2. A $h(d)$ pontjai.
3. Azok a pontok, a melyekre az (1) egyenletek nem képviselnek síkot.
4. Azok a pontok, a melyekre az (1) egyenletek egy az xy-síkra merőleges síkot képviselnek.

Kimutatjuk, hogy az e pontok összeségéből álló idom felületi képét az xy-síkra vetítve, a vetület LEBESGUE-*féle mértéke zérus.*

Fogadjuk el ezt az állítást.

$h(d')$ mint homlokzat zárt. JORDAN-féle külső mértéke tehát egyenlő a LEBESGUE-féle, ez esetben létező mértékével. Ámde az

---

[1] d' egy határolt idom. Homlokzata mindama pontok idoma, a melyek akármily kis közelében is van úgy a d'-nek, mint a sík nem d'-hez való pontjaiból álló (határtalan) idomának is legalább egy pontja, a mely maga a pont is lehet. A homlokzat zárt idom.

állítás szerint $h(d')$ oly idomba esvén, a melynek LEBESGUE-féle mértéke zérus, $h(d')$ LEBESGUE-féle mértéke zérus. Igy a $h(d')$ JORDAN-féle külső mértéke zérus. Mint ismeretes, ez a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a d' területtel birjon.

d) Ha a P egy W sokaságának a LEBESGUE-*féle mértéke zérus, akkor a W, W° felületi képét (az R rectifiabilis felületet illetőleg) az xy-síkra vetítve, a vetületnek W'-nek is zérus a* LEBESGUE-*féle mértéke.*

Ugyanis mivel W mértéke zérus, bezárható oly körökbe, a melyek sugarai λ jelűek lévén, területeik $\pi\lambda^2$ összege $\Sigma\pi\lambda^2$ tetszésszerint kicsiny.

Ha M egy ily kör közepe, az M° középű $G.\lambda$ sugarú gömb a kör felületi képét zárja be (l. 1. §. 4.). E gömbök xy-síkra való vetületei a W'-t zárják be. E vetületek $\sum\pi . G^2 . \lambda^2$ terület-összegű körök, s ez összeg $\Sigma\pi\lambda^2$-vel együtt tetszés szerint kicsiny lehet.

Igy tehát még csak a *c)* 3. és 4. alatti idomok vizsgálandók.

e) Az (1) egyenletek, mint ismeretes, akkor és csak akkor nem képviselnek síkot, ha

$$\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_M - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_M\right)^2 +$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)_M - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)_M\right)^2 +$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)_M - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)_M\right)^2 = 0.$$

Ismert tételek szerint a fenti egyenletnek eleget tevő M pontok idoma mérhető.

Az (1) sík akkor és csak akkor merőleges az xy síkra, ha az elébbi egyenlet nem áll fenn és

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_M - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_M \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_M = 0.$$

Ismeretes tételek szerint e pontok idoma is mérhető.

A két idom egyesítése tehát egy mérhető H idom.

A H egy M pontjára az (1) egyenletek vagy egy pontot, vagy egy egyenest, vagy egy az xy-síkra merőleges síkot képviselnek.

Minden esetben van tehát egy az (1) idomot tartalmazó, az xy-síkra merőleges s-sík.

Az $a)$-ban elmondottak alapján, ha $\delta > 0$ és van előre adott a H bármely M pontjához egy olyan az M és δ-tól függő positiv ϱ, hogy ha csak $\overline{MN} \leq \varrho' \leq \varrho$, az N° f távolsága az s-től olyan, hogy

$$f < \varrho' . \delta.$$

Igy tehát, ha az M mint középpont körül ϱ' sugárral kört írunk s a körlapot (ϱ')-vel a körlap felületi képét $(\varrho')^\circ$-val jelöljük, a $(\varrho')^\circ$ pontjai az s síktól $< \varrho' . \delta$ távolban vannak.

Tekintetbe véve, hogy mindig $\overline{M^\circ N^\circ} < G . MN$ és hogy az s-sík merőleges az xy-síkra, áll, hogy:

Hacsak a ϱ' kisebb egy bizonyos ϱ-nál, a $(\varrho')^\circ$-nak az xy-síkra való vetülete bezárható egy derékszögű négyszögbe, a melynek oldalai $2\varrho'\delta$ és $2G\varrho'$ hosszaságúak.

Könnyebb belátás végett megjegyezzük, hogy a négyszög középpontja az M° vetülete, a $2G\varrho'$ hosszúságú oldala pedig parallel az s és az xy metszésvonalával.

e) Idézzük Vitali egy tételét. Legyen E egy Lebesgue szerint mérhető sokaság, mértéke az ismeretes jelzéssel $m(E)$ legyen. Legyen a sokaság minden pontjához egy positiv r érték adjungálva és legyen $\varepsilon > 0$ külömben tetszésszerinti.

Ekkor van oly körökből álló tartományrendszer, a melyek középpontjai a sokaság pontjai, sugarai r' nem nagyobbak a középponthoz adjungált r-nél, a melyre

$$\Sigma \pi r'^2 \leq m(E) + \varepsilon;$$

és e tartományrendszer egy zérus mértékű E_1 sokaság kivételével az E pontjait tartalmazza.

Alkalmazzuk Vitali tételét a H sokaságra úgy, hogy a Vitali tételében szereplő $E, \varepsilon, r, r', E_1$-nek rendre $H, \varepsilon, \varrho, \varrho', H_1'$ feleljenek meg.

Képezzük a Vitali tétele által adott köröknek a *d)* szerint megfelelő négyszögeket.

Igy tehát a H-nak megfelelő $H^\circ xy$ síkra való vetülete a H_1-nek megfelelő H_1° vetülete kivételével oly négyszögekbe zárható, a melyek területeinek az összege

$$\Sigma 2\varrho' . \delta . 2G . \varrho' = 4 . G . (\Sigma\varrho'^2) . \delta .$$

Ámde VITALI tétele szerint

$$\pi\Sigma\varrho'^2 < m(H) + \varepsilon .$$

Így a négyszögek területeinek az összege kisebb, mint

$$4 \cdot G \cdot \frac{m(H)+\varepsilon}{\pi} \cdot \delta .$$

Ha tehát η egy előre adott positiv szám, akkor a δ kellő választásával ez az érték $< \frac{\eta}{2}$. A H_1° vetülete pedig, mivel H_1 zérus mértékű, a *d)* szerint $< \frac{\eta}{2}$ területösszegű négyszögekbe zárható. Így H° vetülete $< \eta$ területösszegű négyszögekbe zárható, azaz e vetület LEBESGUE-féle mértéke zérus.

2. *A d° vetületének d'-nek a területe* $\leq A(d)$.

Legyen t a d' területe. Állításunk nyilván helyes, ha t zérus. Legyen t positiv, ekkor a d' szükségkép tartalmaz oly pontokat, a melyek egy-egy elég kis környezetének minden pontja a d' pontja. Ismeretes, hogy az e pontok által alkotott D idom területe létező és értéke t.

E pontok az 1. *b)* és az 1. *e)*-ben végleg kimutatottak alapján egy zérus mértékű sokaság (esetleges) kivételével olyanok, hogy van egy-egy őket bezáró, a D-be eső területnemző négyszög.

Mivel még egy területnemző négyszögbe eső és vele parallel oldalakkal biró minden négyszög területnemző, egy ismert BOREL-LEBESGUE-féle tételt alkalmazva áll a következő:

Legyen $\delta > 0$.

A D-ben felvehető véges számú területnemző négyszögből álló tartományrendszer, úgy, hogy területeik összege $\geqq t - \delta$.

Ámde így az 1. §. 8. tekintetbe vételével

$$A(d) \geqq t - \delta,$$

azaz mivel δ tetszés szerinti, állításunk igaz.

3. Peano eredeti definitiója és a rectifiabilis felület. Invarians.

Legyenek a 2. §. d_k tartományai olyanok, mint a d, azaz birjanak területtel.

A PEANO eredeti definitiójában kivánt f_k így nyilván létező. *Így tehát a d_k-ra vonatkozó e megszorítással* PEANO *eredeti definitiója alkalmazható.*

Legyen K' a területnek ez a PEANO-féle értéke.

Nyilván $K' \leqq T$. Ugyanis ha ζ_k ama sík normálisa, amelyre d_k^0 vetítve lesz (a λ_k képezése végett) a *2.* szerint

$$t_k \leqq A(d_k, \zeta_k),$$

s így

$$\Sigma^k t_k \leqq \Sigma^k A(d_k, \zeta_k),$$

az az

$$K' \leqq K = T.$$

Ámde, ha a d_k-féle tartományok a 3. §. 3. *d)* $a_{i,j}$-féle négyszögek belső pontjaiból álló tartományok és ha $\zeta_k \equiv \zeta_{i,j}$ a 4. §. 1. módjára vétetik fel, akkor, mivel a 3. §. 3. szerint az $a_{i,j}^0$ t_k-féle értéke

$$\geqq A^0 B^0 C_1' D^0 - u,$$

a 4. §. 1. módjára $K' = T$-t nyerünk.

Végül még bizonyítás nélkül közlöm a következő tételt.

Legyen H_i $i = 1, 2, \ldots$ olyan a $B(P)$-be eső tartományrendszer, hogy a P bármely pontja vagy a H_i pontja, vagy a H_i homlokzatának a pontja.

A H_i tartományai $d_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots$, *lévén, birjon minden $d_k^{(i)}$ területtel.*

Továbbá a H_i minden $d_k^{(i)}$ tartománya egy, csakis a i-től függő (i) sugarú körbe legyen zárható.

Legyen H_i homlokzatának JORDAN*-féle külső mértéke* [*i*].

Legyen ξ, η, ζ egy derékszögű pontcoordinata-rendszer.

Ha (*i*) *és* [*i*] *az i nőttével zérus felé közelednek, akkor*

$$\lim_{i=\infty} \Sigma_k [A(d_k^{(i)}, \xi)^2 + B(d_k^{(i)}, \eta)^2 + \Gamma d_k^{(i)}, \zeta)^2]^{\frac{1}{2}} = T.$$

Ha pedig a $d_k^{(i)}$ *felületi képének* $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ *síkra való vetületeinek a területei* $t_k^{(i)}$, $u_k^{(i)}$, $v_k^{(i)}$, *akkor*

$$\lim_{i=\infty} \Sigma_k [t_k^{(i)})^2 + (u_k^{(i)})^2 + (v_k^{(i)})^2]^{\frac{1}{2}} = T.$$

Az előbbiekből még az is következtethető, hogy annak, hogy az R területe zérus legyen, szükséges és elégséges feltétele az, hogy az R az xy, xz, yz-síkokra való vetületeinek a területei zérusok legyenek.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 márcz. 13.-án tartott üléséből.)

AZ ÁLTALÁNOS FELÜLETRŐL.

GEŐCZE ZOÁRD-tól.

Jelen sorok czélja az általános felülethez az esetben, midőn $S=A+B+\Gamma<+\infty$, egy értéket képezni. Ez az érték véges, a felület területe ez értéknél kisebb nem lehet.

Itt A, B, Γ a Math. u. Nat. Ber. aus Ungarn-ban megjelent, «Rech. gén. sur la quadr. des surf. courbes» czímű munkámban jelzett értékek. Ezek az értékek, s így az S is, megszámlálható sok művelettel képezhetők és ha $S=+\infty$, a felület területe is végtelen (loc. cit.).

$u, v, a, b, P, x, y, z, \varphi, \psi, \chi$ jelentései ugyanazok legyenek, mint az említett munkában. A felület egyenletei tehát:

$$x=\varphi(u, v),\quad y=\psi(u, v),\quad z=\chi(u, v),\quad 0\leqq u\leqq a,\quad 0\leqq v\leqq b,$$

a felület jele R, LEBESGUE-féle terület T legyen.

Legyen $0\leqq u'<u''\leqq a$, $0\leqq v'<v\leqq b$. Jelentse $(u', u''; v' v'')$ az $u=u'$, $u=u''$, $v=v'$, $v=v''$ egyenesek által határolt négyszöget, a mely nyilván a $P\equiv(0, a; 0, b)$-be esik.

A $(u', u''; v', v'')$, $B(u', u''; v', v'')$, $\Gamma(u', u''; v', v'')$ azok legyenek az $(u', u''; v', v'')$ és a φ, ψ, χ-hez, a mik A, B, Γ a P-hez.

Legyen u a $(0, a)$ egy belső pontja, azaz legyen $0<u<a$. Legyenek $u_{(1)}, u_{(2)}$ olyanok, hogy $0\leqq u_{(1)}<u<u_{(2)}\leqq a$. *Könnyű igazolni, s ezt mellőzzük is, hogy akár végtelen, akár véges az S,*

$$\lim A(u_{(1)}, u_{(2)}; 0, b)\quad u_{(1)}=u,\ u_{(2)}=u$$

létező és (az R-en felül) csak az u függvénye.

Legyen $A(u)$ ez érték jele. Hasonlókat jelentsenek $B(u)$, $\Gamma(u)$, és a $(0, b)$ belső v pontjaira $A(v)$, $B(v)$, $\Gamma(v)$.

Ha $S < +\infty$, akkor mindamaz u értékek sokasága, a melyekre $A(u) > 0$, ha létező. legfeljebb megszámlálható.

Ugyanis, ha ezek az értékek $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$, akkor nyilván

$$\Sigma A(u^{(i)}) \leqq A.$$

Ugyanez áll $B(u)$, $\Gamma(u)$, $A(v)$, $B(v)$, $\Gamma(v)$-re.

$S < +\infty$ lévén, jelentse (U) a $(0, a)$ mindama pontjaiból álló sokaságot, a melyekre $A(u)$, $B(u)$, $\Gamma(u)$ zérusok, tartozzék még a 0 és a is az (U)-hoz. (U) tehát a $(0, a)$ minden pontját tartalmazza egy legfeljebb megszámlálható belső sokaság kivételével.

A mi (U) a $(0, a)$-hez, az legyen (V) a $(0, b)$-hez.

l és m véges positiv egész számok u_i, v_j az (U), illetőleg (V) oly pontjai lévén, hogy

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_i < u_{i+1} < \cdots < u_e = a,$$
$$0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_j < v_{j+1} < \cdots < v_m = b,$$

képezzük a

$$\sum_0^{i-1}{}_i \sum_0^{m-1}{}_j \Big[\overline{A(u_i, u_{i+1}; v_j, v_{j+1})}^2 + \overline{B(u_i, u_{i+1}; v_j, v_{j+1})}^2 +$$
$$+ \overline{\Gamma(u_i, u_{i+1}; v_j\, v_{j+1})}^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

összeget.

Könnyű igazolni, s ezt mellőzzük is, hogy ennek az összegnek

$$l = \infty,\ m = \infty,\ u_{i+1} - u_i = 0,\ v_{j+1} - v_j = 0\text{-ra}$$

határozott és véges ($\leqq S$), az u_i, v_j pontoktól független határértéke van.

Továbbá T ennél az értéknél kisebb nem lehet.

Látnivaló még, hogy ez az érték megszámlálható sok művelettel képezhető.

Igen valószinű, hogy T éppen ezzel az értékkel egyenlő. Így tehát S és T egyszerro volnának végesek, vagy végtelenek és T mindig megszámlálható sok művelettel volna képezhető.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 október 16.-án tartott üléséből.)

RANUNCULUS BINATUS Kit.

PHILOGENETIKUS-RENDSZERTANI KISÉRLET.

SCHILLER ZSIGMOND-tól.

Ennek a tanulmánynak tartalma és kerete a legszorosabban összefügg a keletkezése történetével. Eredeti kiindulópontja tulajdonképpen a *Ranunculus binatus* Kit. systematikai értékének tanulmányozása volt. Mivelhogy megokoltnak láttam azt a meggyőződésemet, hogy a faj nem csupán logikai segédeszköz s nem csupán rendszertani egység, hanem a természetben létező realis adottság, philogenetikai fejlődési fokozat, tehát minden más létezőtől philogenetikailag szükségképen különbözik: e *faji* érték megállapításához szükségessé vált oly megkülönböztető bélyeget keresni, a mely minden kétség kizárásával philogenetikainak ismerhető fel. Mert csak egy ilyen megkülönböztető bélyeg kiderítésével állapíthatjuk meg a *faji* értéket. Morphologiai és különösen organogenetikai megfigyelések véleményem szerint hitelt érdemlő bizonyító erővel szolgáltattak egy ily bélyeget s a növényföldrajzi módszer segítségével végzett bíráló és ellenőrző munka oly eredményre látszik vezetni, a mely arra a feltevésre jogosít fel, hogy a bizonyítás sikerült.

Miután ily módon meg lehetett állapítani a *faji* értéket, a rendszertani hely megállapítása került sorra. E kérdés megoldása czéljából szükségessé vált legalább is mind azokat az alakokat egybevetni, a melyeket a legszorosabb rokonsági kapcsolat fűz a *Ranunculus binatus*hoz, azonkívül pontos vizsgálat tárgyává kellett tenni magát a rokonsági viszonyt is. Ennek az lett a természetes következménye, hogy ki kellett térni a *rendszertan* és a *nomenclatura* területére is. Mind e kérdések meggondolásának gyümölcse a jelen kisérlet, a mely éppen nem akar több lenni kisérletnél s a melyhez nem fűzöm azt a bizakodást, hogy általános érvényű, csalhatatlan módszert állapított meg. Erre már azért sem lehet gondolni, mert túlontúl szűk a terület, a melyet e tanulmány felölel. Hisz itt mindössze a *Ranunculus*-nem «*Auricomus*» sectiója kerül vizsgálat alá és kérdéses, vajjon a morphologiai és növényföldrajzi megfigyelések eredményei hasonló mértékben érvényesíthetők-e más növénycsaládok körében is. E tanulmány arra sem tart számot, hogy monographiának tekintessék.

E kísérlet ilyformán inkább csak gondolatébresztő; csupán eszméje egy tervnek s nem magában lezárt, kész épület. Ez a körülmény minden belátásos és jóindulatú olvasó szemében menteni fogja e dolgozat hézagait és egyéb hiányait.

I. fejezet. A lomblevél mint megkülönböztető bélyeg.

Jelen vizsgálódás czélja azoknak a *Ranunculus*-fajoknak a levélalakja alapján való meghatározása, rendszertani helyük megállapítása, a melyek az «*Auricomus*» sectióba tartoznak.[1]

Bizonyára akadnak, a kik az ily vállalkozást koczkázatosnak s kilátás nélkülinek fogják minősíteni, hisz minden eddigi hasonló kísérlet megfeneklett azon a szinte beláthatatlan sokalakúságon, a mely ezt az alakcsoportot éppen a lomblevelek dolgában jellemzi és rendszertani osztályozása elé leküzdhetetlen akadályokat látszik gördíteni. A merész vállalkozást, hogy mégis ezt az utat választottam, igazolja az a körülmény, hogy a Ranunculaceák lombleveleire, főképpen a tőlevelekre (folia radicalia, basilaria) vonatkozó legújabb organogenetikai kutatások oly eredményeket érleltek, a melyek alkalmasak arra, hogy rendet teremtsenek a számtalan alak zűrzavarában vagy legalább is világot vessenek e sokfélekép összekúszálódott alakok útvesztőjébe. A mit eddig homály borított: az most láthatóvá kezd válni; a tarka és sokféle alakulások most egységes fonalra fűzhetők, a melyen

[1] Ez a tanulmány csupán az európai alakokra terjed ki. Az Európán kívül termő rokon alakok nem jöttek tekintetbe.

rendbe sorakozhatnak; most már czélszerű, megokolható módszernek látszik, a mit eddig a természeti formák esztelen zavarának tekintettek. Ennek a czélszerű törvénynek, ennek az egységes vezérfonálnak segítségével talán mégis csak sikerülni fog rendező kézzel belenyúlni egy területbe, a melyben eddig kizártnak, lehetetlennek látszott minden rend.

Már LINNÉ is jóformán kizárólag a levél alakjára alapította a *Ranunculus cassubicus* és *Ranunculus auricomus* leírásait (a Species plantarumban az Auricomus-sectio európai fajai közül csak ezt a kettőt írja le). A Spec. plant. ed. I. (1753) így határozza meg a *Ranunculus cassubicust:* «R. foliis radicalibus subrotundo-cordatis crenatis; caulinis digitatis, dentatis, caule multifloro»; — a *Ranunculus auricomust* pedig így: «R. foliis radicalibus reniformibus crenatis incisis; caulinis digitatis, linearibus.» LINNÉ itt is, mint sok más esetben, elsősorban a habitust vette figyelembe s nem vizsgálta meg pontosabban a megkülönböztető bélyegeket. LINNÉ tehát csupán a külső megjelenést vette tekintetbe, midőn a levél alakját választotta az említett két *Ranunculus*-faj elkülönítő bélyegéül; a levél alakjának philogenetikus jelentősége idegen volt neki.

KERNER A. sem örvendett kedvezőbb helyzetnek. Egyik rövid tanulmányában, a melynek czíme: «Ranunculus cassubicus L. in Niederösterreich aufgefunden»[1], kimutatja, hogy azok a bélyegek, a melyek hivatva volnának a *R. cassubicus* és a *R. auricomus* elkülönítésére, «nagyon alárendelt értéküek». A lemez nélküli hüvelyekre *(R. cassubicus)* és a hüvelyes tőlevelekre *(R. auricomus)* vonatkozóan — a mire WIMMER és GRABOWSKI[2] akkora súlyt helyez — KERNER kifejti, hogy a lemez nélküli hüvely és a hüvelyes tőlevél jelenléte mindkét fajnál azonos okra vezethető vissza, hogy tehát mindkét faj előfordulhat lemez nélküli hüvelylyel és hüvelyes tőlevéllel; és hogy ilyenek előfordulásáról maga is meggyőződött. Bármerre nézett is, mindenütt cserben hagyták a megkülönböztető bélyegek. Ez annyira le-

[1] Dr. A. KERNER a «Verhandlungen der zool. bot. Gesellschaft in Wien» XII. köt. 4. füzet (1862) 1237. és köv. lapjain.

[2] WIMMER u. GRABOWSKI, Flora silesiaca (1829). 131. l.

hangolta, hogy késznek nyilatkozott a *R. cassubicus* faji önállóságát egészen sutba vetni s azt «csupán a *R. auricomus* egyik alakjának» venni. Még alkalmunk lesz szólni arról, mily ingatag a többi bélyeg is, mint például a tőlevelek száma, a virágtakaró nagysága, a termés csövének görbülése, a levelek meze stb.; csak azt szeretnők itt kiemelni, hogy KERNER éles esze és biztos szeme már 1862-ben felismerte, hogy a *R. auricomus, R. cassubicus* és *R. flabellifolius* «minden valószínűség szerint egyazon törzsből való, a mely különböző befolyások következtében az alakok sorozatává tagolódott.» Az már nem volt módjában, hogy tudományos alapon számot adjon magának e jelenség okáról s így nem is juthatott e jelenség teljes megértésére, megismerésére.

Nem jutott sokkal előbbre 26 évvel később sem. KERNER a Schedæ ad flor. exsicc. austr. hung. (1888) V. 117. lapján az e gyűjteményben kiadott *R. auricomus L.* névjelzőjén kifejti, hogy a *R. auricomus* és *R. cassubicus L.* összes megkülönböztető bélyegei «széjjelmállanak az ujjai közt» s itt meg kell jegyeznünk, hogy ezek közt nem említi a termésre vonatkozó megkülönböztető bélyegeket: a basi fere uncinata *(R. auricomus)* és ex apice uncinata *(R. cassubicus)*. Nincs más hátra — úgymond — mint visszatérni LINNÉhez s a megkülönböztetés bélyegéül elfogadni a levél, főleg a lomblevél alakját. KERNER ezen az alapon aztán jó fajnak vagy legalább is alfajnak fogadja el a *R. auricomust*, a *R. fallax*-ot, a *R. cassubicust*, a *R. ambiguust* és *R. flabellifoliust*, a többi alakot mind átmeneti alaknak vagy változatnak tekinti. KERNER tehát ebben az esetben sincs tisztában az alakképzés okával, most is sötétben tapogatózik, bár éles esze s rendkívűl mélyre ható tekintete ismét egy lépéssel közelebb vitte őt a titok nyitjához. Mert, ha csupán a levél osztottságának módját, annak mikéntjét veszszük a megkülönböztetés alapjául, vajjon ki vonhatja meg a biztos határt a faj, az alfaj, a változat és az átmeneti alak közt? Mi okból kapja például a faj rangját a *R. ambiguus* SCHUR s miért ne legyen még csak említésre méltó sem a *R. alliariefolius* RCHB.? Miért faj vagy alfaj a *R. fallax* W. *et* GR. s miért nem az a *R. incisifolius* RCHB.? És mi történjék a *R. reniformis* KITTEL-lel, főkép pedig a *R. binatus* Kit.-lel, a mely Kerner szerint nem egyéb a *R. auricomus* töméntelen változatainak egyikénél, holott ez — mint alább remélhetőn bizonyítanunk sikerül — nemcsak hogy nem változat, nem átmeneti alak, nem alfaj, hanem maga az egész alaksorozat kiindulási alakja, tőalakja, felfogásom szerint tehát törzsfaja az *Auricomus*-csoport valamennyi alakjának, a melyek éppen belőle fejlődtek ki az idők folyamán. Igaz, hogy a *R. ambiguus* Schur és a *R. fallax* W. *et* Gr. átmeneti alakok, az előbbi a *R. cassubicus* és *R. flabellifolius*, az utóbbi a *R. binatus* vagy *auricomus* és *R. cassubicus* közt, de épp oly átmeneti alak a *R. alliariefolius, incisifolius* és *reniformis*, — a *R. binatus* állandóságáról nem is szólva. A *R. auricomus* névvel Kerner által a Fl. exsicc. austr. hung. 1726. számmal kiadott példák csakugyan különböző alakok keverékei. Az, hogy itt élesen kidomborodó alakok kerülhettek együvé, szembeszökőn bizonyítja Kerner tévedését. Találomra ragadta ki a sok alak közül a neki legfeltünőbbeket s egyetlen fajnak vette; a legfontosabb bélyeget azonban, a lomblevél osztottságát vagy osztatlanságát, a melynek jelentőségét nem ismerte fel, elhanyagolta és kizáróan a szárlevél szabását és fogazottságát vette tekintetbe. Ennek elkerülhetetlen következménye az lett, hogy beosztása nem számolt a természetben lejátszódó folyamatokkal, tehát nem is volt összhangba hozható a természettel.

Ennek daczára is nagy érdeme Kerner-nek, hogy mesteri kézzel rámutatott az irányra, a melyben a további kutatásnak haladnia kell, hogy megjelölte a helyet, a hol elásva pihen a kincs. De itt megállott és tovább nem ment: hogyan lehet ezt magát a napfényre hozni, e kérdéssel ő többé nem foglalkozott.

A faj fogalmának tisztázásához, legalább az itt tárgyalt boglárkákkal kapcsolatban, más kiváló s kritikailag ítélő botanikusok sem járultak hozzá döntő módon. Több jellemző csoportba osztályozhatjuk őket. Egyrészük egyáltalán nem tudta, hogyan nyúljon ehhez a problemához. Tehát nem is nyúlt hozzá. A mit nem tudok, attól nem fő a fejem, gondolták s egyszerűen hallgattak. Ebbe a csoportba tartozik a floristák nagy serege, a kik, hogy ne kelljen fejüket törniök, egyszerűen a Linné és Koch által kitaposott ösvényt járták tovább, nem sok ügyet vetettek a természetre, hanem minden *auricomus*-typusú boglárkát, ha kicsiny s vesealakú volt a tőlevele, *R. auricomus*-nak, ha tőlevele nagyobb volt s gyakran még lemez nélkül való hüvelye is volt, *R. cassubicus*nak vagy *fallax*nak neveztek, végül minden *Ranunculus*t, a melynek szárlevele osztatlan és legyezőalakún karélyos, vagy legalább hajló az ily alak felé, *R. flabellifolius*nak minősitettek. Szükségtelen bizonyitani, hogy ily módon csak zavar és homály lehetett az eredmény. Csakugyan, ha az ember ma az egyes alakok földrajzi elterjedését pontosan meg akarja állapitani, rendkívül nehéz feladattal áll szemben, mert az *auricomus*-typushoz tartozó különféle alakok szorosan egymás szomszédságában, sőt vegyesen is nőnek és csaknem lehetetlen megállapitani, hogy egy bizonyos vidékről jelzett *R. auricomus* csakugyan az-e, vagy nem inkább *R. binatus*, *R. reniformis*, *R. incisifolius*; avagy *R. cassubicus* alatt nem *R. fallax*ot, *R. flabellifolius* alatt *R. ambiguus*t értsünk-e?

A másik csoportba azok a systematikusok tartoznak, a kik biztos vezérfonál hijján s a megkülönböztető bélyeg jelentőségének ismerete nélkül és látva az alakok sokaságát és azok öröklődését, úgy segitettek magukon, hogy felvettek egy nem is létező eszményi typust és a feltünőbb változatokat annak alfajaiként α), β), γ), stb. alatt sorolták fel. Ennek az iskolának mesterei Koch, Neilreich, Kittel, Čelakovsky és többen mások. Mivelhogy a rendszerezés egyik kimagasló feladata mégis az, hogy lehetővé tegye egy adott növény helyes felismerését és elnevezését, alaposan elhibázottnak kell tartanunk a vagylagos diagnosisokat. Egy ilyennek példájául szolgálhat a *R. auricomus* leirása Neilreich «Flora von Niederösterreich» cz. műve, melynek 687. lapján, csaknem minden sorában ismétlődik a végzetes «vagy» és csattanó módon bizonyítja, hogy az illető bélyeg nem állandó, hanem felette változó és ezzel éppen oly csattanóan bizonyítja azt is, hogy nem lehet és nem szabad fajok megkülönböztetésére használni, mert ilyesmire csakis állandó bélyeg alkalmas.[1] A sys-

[1] Az egyetlen bélyeg, a melyet Neilreich nem told meg semmi «vagy»-gyal, a termés. Azonban pontos megfigyelés kideríti, hogy ma ez még nem állandó s hogy a *R. auricomus*nak a *R. cassubicus*tól a termés alapján való megkülönböztetése helytelen.

tematikusok azonban éppen az állandó bélyeget nem vették észre s azért a legkülönfélébb változékony jellemvonásokba kapaszkodtak és még jobban összebogozták a csomót, a helyett, hogy megoldották volna. A *fajnak,* mint olyannak, *minden irányban pontosan körülhatároltnak kell lennie,* máskülönben megszünik faji minősége s pusztán fejlődési alak, a melyet ilyennek kell felismerni és megállapitani. Bármilyen legyen is ez iskola híveinek a fajról táplált fogalma (itt nem terjeszkedhetünk ki a faj fogalmának kritikájára és megállapitására), mindig ki lesznek téve annak a szemrehányásnak, hogy felhők közt lebegnek, kisiklott alóluk a természet biztos talaja, idealisták s nem realisták, hírét költik az oly teremtményeknek, a melyek nem léteznek, viszont mellőznek oly természeti jelenségeket, a melyekkel naponkint találkoznak. Ezen az úton éppen oly kevéssé fogunk a természet igazi megismeréséhez eljutni, mint a floristák ama másik csoportjának útjain.

Ellenkező hibába esnek a harmadik csoport systematikusai: ők az előbbiek másik végletét, túlsó sarkát jelentik. Az ő hibájuk forrása szintén a helyes irányitó-elv hiánya, az, hogy az elkülönítő bélyeg értékét és igazi jelentőségét nem ismerik. Túlságosan egyénitenek ott, a hol amazok túlzottan általánosítanak. Szétforgácsolják, a mit azok összevonnak; az egyik eljárás épp oly helytelen, mint a másik, mindkét esetben kárát vallja a természet megösmerése. Szétforgácsolás és egyénités éppen ellentéte az egyesitésnek; a faj pedig mindenkor a hasonló alakok egyesitése. Néhány példa szolgáljon ennek az állításnak igazolásául. Dr. Hegi G.[1] egy idealis, sehol a világon elő nem forduló *R auricomus*t különböztet meg kilencz «változattal» egy éppen olyan a természetben nem létező *R. cassubicus*tól négy «változattal»; köztük van a *var. decipiens* Warnsdorf, csupán egy tőlevéllel, a többi hüvelylyé redukálódik; aztán a *var. pseudocassubicus* Spribille *nec* Christ, tövén két lemeznélküli hüvelylyel. Zapalovicz H.[2] leír egy *R. cassubicus*t öt alakkal és két válto-

[1] Dr. Gustav Hegi: Illustrierte Flora von Mitteleuropa III., 566. l.

[2] Hugo Zapalovicz: Conspectus floræ Galiciæ criticus (1908) II. 263. l.

zattal, továbbá a *R. auricomus*t négy alakkal, három változattal, a melyek egyike ismét két alakot mutat, köztük a *f. 2. tryphyllus*, ... pluricaule, folia basalia tria; a *var. a) variabilis*, folia basalia duo; in exemplo e Werbiaz folium ternatum ... Exemplum e Podgorze et alterum e Dolne ... foliis basalibus partim trifidis, partim integris ... *1) validus*, robustum, folia basalia 5—9 cm lata ... Az első pillantásra nyilvánvaló, hogy itt egyes egyedek, de nem egyesített egyedek, fajok leírásával van dolgunk. Csupán ízlés kérdése és tulajdonképpen nem is volna kifogásolható, ha némely botanikus jónak és helyénvalónak látná minden egyes természeti alak leírását vagy akár külön névvel való megjelölését. Ez az eljárás azonban csak akkor volna helyes, ha a megkülönböztetésre oly bélyeget használnának, a mely erre valóban alkalmas, azaz a melynek van fajmegállapító értéke. Mivelhogy a faj magasabb egység, tehát philogenetikus — az egyén viszont ontogenetikus fogalom, világos, hogy a faji megkülönböztetésre nem ontogenetikus, hanem csakis philogenetikus bélyeg használható. Philogenetikusak a szervezettség, ontogenetikusak az alkalmazkodottság bélyegei. (Organisations- und Anpassungsmerkmale). Ez viszont nem azonos minden fajnak ugyanarra a szervére nézve, mert ugyanannak a szervnek alakja, mely némely fajnál philogenetikus értékű, más fajoknál ontogenetikus jellegű és viszont. Helytelen tehát például a *R. auricomus* és a *R. cassubicus* közt való különbséget a lemez nélküli hüvelyre vagy a hüvelyes tőlevélre alapitani, mert nagyon gyakran mindkettőt együtt látjuk a *R. auricomus* vagy a *R. cassubicus* egyazon példáján. Vagy nem helyes az sem, ha megkülönböztető bélyegül 1—2 vagy több tőlevél jelenlétét használná valaki, mert ez a bélyeg csupán egy-egy példány egyéni, tehát nem az egész fajt jellemző tenyészési körülményétől függ és így nem fajképző értékű. Helyes eljárás lesz, ha az *auricomus*-sectióba tartozó oly boglárkát, a melynek tőlevele rendszeresen bevagdalt és szárlevele rendszeresen keskeny-szálaslándzsás, külön fajként *R. binatus* Kit.-nek neveznek; egy másikat, a melynek tőlevele közepes nagyságú, rendszeresen osztatlan, vesealakú, szárlevele pedig keskeny-szálaslándzsás és majdnem egészen épélű: ismét külön fajként *R. auricomus* L.-nek; egy harmadikat, a melynek tőlevele nagy, osztatlan, szivesen-vesealakú, szárlevele pedig széleslándzsás, fogas: ismét külön fajként *R. cassubicus* L.-nek; egy negyediket, a melynek tőlevele csaknem körkörös, szárlevele pedig teljesen összenőtt, legyezősen karélyos: negyedik fajnak *R. flabellifolius* Heuff-nek nevezek, mert az osztottság (segmentatio), a mint azt későbben még ki fogom fejteni, philogenetikus, fajt adó fejlődési stadiumot jelez, az osztatlan lap azonban későbbi fejlődésállapotra mutat. Ellenben helytelenül cselekedném, ha a fajt arra a körülményre állapítanám, hogy a *Ranunculus auricomus* egyik tőlevele nem — mondjuk — 10, hanem csak nyolcz vagy 12 fogacskát mutatna; mert ez nem philogenetikus, faji, hanem csak egyéni ontogenetikus változat! *Fajok felállításánál, illetőleg egyes alakok faji rangra való emelésénél határt kell szabnunk ott, a hol az egyik alakból a másikba való átmenet még homályos és bizonytalan, a hol az alak még nem érte el az állandó, egyensúlyozott állapotot. Ily esetben érjük be a feltünő, de fejlődésükben még ingadozó alakok összefoglalásával;* így is világosan áttekinthetjük a fejlődési sort. Ha nem így járunk el, a beláthatatlan egyénítés hibájába esünk, tehát éppen ellenkezőjére jutunk annak, a mit a rendszer felállításával, a fajokra, családokra, rendekre való osztással tulajdonképpen elérni akarunk.

Hogy mily tévutakra, mily tévedésekre vezetett a beosztás eddig használt módja, azt éles világításba helyezi a *Ranunculus binatus* Kit. sorsa.

II. fejezet. A Ranunculus binatus Kit. és története.

Ezt a boglárkát sok botanikus hol félreismerte, hol teljesen mellőzte. A pártok kegyétől és gyűlöletétől megzavarva, jellemrajzát csak torzított képben őrizte meg a rendszeresítő növénytan. Első leírója, Reichenbach,[1] a *R. auricomus* L. és *R. cassubicus* L. közé helyezte. Régibb, Kitaibel tollából eredő leírást mindmáig sikertelenül kerestem. Pedig feltehető, hogy egykor megvolt. Reichenbach azokat a példányokat, a melyek leírásá-

[1] Flora germanica excursoria (1831), 723. l.

hoz alapul szolgáltak, bizonyára a «*binatus* KIT.» névjelzéssel kaphatta Erdélyből, mert Erdélyt mondja a növény lelőhelyének: onnan küldte neki v. WELDEN. Ha nem így volna, akkor REICHENBACH bizonyára önmagát s nem KITAIBEL-t jelölte volna meg szerző gyanánt. Az erdélyi botanikusoknak tehát 1831 előtt nagyon jól kellett ösmerniök ezt a fajt, ők azonban csak KITAIBEL leírásából ösmerhették, mert különben nem őt jelölték volna meg szerző gyanánt. Valószínűnek látszott az a feltevés, hogy egy ily leírás talán KITAIBEL növénygyüjteményében található. Abban azonban hiába keresi az ember. A XVI. csomag 171. számú lapján két *Ranunculus* fekszik, a melyek névjelzőjére KITAIBEL sajátkezűleg ezt írta: «È Liptovia ab Genersich: In vallibus silv. Ranunculus binatus mihi.» Sem KITAIBELnek a Nemzeti Múzeumban őrzött kézirati hagyatékában, sem a Nemzeti Múzeum növénytani osztályában elhelyezett kézirataiban nem fordul elő a *R. binatus* leírása. Az előbbi rendelkezésére állott úgy NEILREICH-nek, mint KANITZ-nak. NEILREICH bizonyára tudomásul vette volna, ha ösmerte volna, midőn döntőn szólt bele abba a harczba, a mely e növény ügyében JANKA és SCHUR közt kitört; a mire még vissza kell térnünk. Miután nem tett erre vonatkozó semmiféle megjegyzést, biztosra vehető, hogy KITAIBEL-nek a keze ügyébe eső kézirataiban nem találta meg a *R. binatus* leírását. De KANITZ sem fedezett fel ilyesmit. Mert sem a «Reliquiæ Kitaibelianæ», sem az «Additamenta ad floram hungaricam» nem említi a *R. binatust*. A Nemzeti Múzeum növénytani osztályában őrzött kéziratokat magam is figyelmesen átnéztem, a nélkül, hogy a várva-várt leírásra ráakadtam volna. Némi halvány remény biztatott még, hogy kutatásaimat folytassam. A berlin-dahlemi kir. botanikus kerthez és növénytani múzeumhoz fordultam azzal a kéréssel, nézzenek utána WILLDENOW-nak gyüjteményében — a kivel KITAIBEL élénk levelezést folytatott s a kinek bizonyára elküldözgette ujdonságait —, hátha van ott Kitaibel-küldte példány, vagy e növénynek KITAIBEL tollából eredő leírása. Hálára kötelezett a nekem szívesen és készségesen megküldött válasz, a mely szerint «WILLDENOW-gyüjteményében nincs *R. binatus* KIT.-lel jelölt növény; nincs meg tehát e faj leírása sem.» További kérdezősködésemre, hogy vajjon nincs-e meg esetleg a *R. binatus* KIT. leírása WILLDENOW és KITAIBEL levelezésében, azt a választ kaptam, hogy ez a levélanyag nincs a múzeum birtokában. Az a kérdésem, a melyet a prágai cseh egyetem növénykertjéhez intéztem, hogy vajjon nincs-e meg a *R. binatus* KIT. leírása Kitaibel munkatársának és mäcenásának, WALDSTEIN grófnak növénygyüjteményében vagy levelezésében, nagy sajnálatomra eddig válasz nélkül maradt.

Azért mondom ezt el oly részletesen, hogy kifejtsem, hogy a *R. binatus* KIT. kiderítésénél elsősorban a KITAIBEL sajátkezű névjelzésével ellátott liptómegyei példányra, másodsorban pedig a REICHENBACH-féle leírásra vagyunk utalva. S itt a következőkre szeretném felhívni az olvasó figyelmét. Míg a *R. binatus* KIT. a Flora germ. excurs.-ban mint külön faj van leírva, később az Icones III. kötetében sem a képek közt, sem a szövegben nincs róla szó. Annál inkább kell azonban csodálkoznunk azon, hogy a XII. t. 4509. sz. képe *R. auricomus*-ként szerepel, holott ez a kép határozottan a REICHENBACH által leírt *R. binatus* KIT.-t ábrázolja. Tévedés történt-e, nyomdai hiba vagyis az aláírások felcserélése? Itt-ott ez megesett az Icones-ben és nincs kizárva, hogy a tévedést ez esetben nem vették észre és nem igazították ki.

A *R. binatus*-szal tehát baj esett már a bölcsőben is: későbbi balsorsának ez volt az első előjele. Nézzük, mi történt vele tovább.

Az erdélyi botanikusok ragaszkodtak a *R. binatus* KIT. elnevezéshez és ebben megerősitette őket GRISEBACH, a ki egy *R. auricomus* L. *var. binatus* KIT.-t állított fel.[1] Az idevonatkozó leírás szerint «recedit a planta germanica foliis imis partim reniformibus partim divisis; magis vero a R. cassubico L. vaginis imis foliiferis, floribus minoribus mutilatis et statura humiliori R. auricomi.» Ebből a leirásból kitünik, hogy GRISEBACH nem a felfogásunk szerint valódi *R. binatus*t tartotta szem

[1] A. GRISEBACH u. A. SCHENK: Iter hungaricum anno 1852 susceptum. Beiträge zur Systematik der ungarischen Flora (1852) in Wiegeman und Erichsons Archiv für Naturgeschichte, Berlin 1852. Zweiter Jahrgang, pag. 313.

előtt, inkább a *R. reniformis* KITT.-nek felelne ez meg; de már ebből is nyilvánvaló, hogy feltünt neki a *R. binatus* és *R. auricomus* rokonsági viszonya és különbsége, miért is indittatva érezte magát arra, hogy ezt a növényt változatnak fogja fel. Ezzel aztán ez a név el volt könyvelve az irodalomban.

Merészebb volt egy másik, s bárki mit mondjon, mélyreható szemű és az elkülönítő jellemvonások iránt rendkívül érzékeny szaktársa, SCHUR, a ki a *R. binatus* KIT.-t 1853-ban egyszerűen fajnak minősítette.[1] SCHUR az ő főművében is[2] megmarad a *R. binatus* KIT.-nek a *R. auricomus* L.-től való elkülönítése mellett. Ezt írja: «*R. binatus* KIT. (*R. auricomus* var. *binatus* GRISEB.) a) *apetalus*. Sepalis corollaceis luteis, petalis destitutis ... A *R. auricomus*tól az első tekintetre könnyen megkülönböztetik: a lelőhely (kissé nyirkos, kövér rétek, gyümölcsösök és gyepes kertek), a karcsú felálló termet, az alig észrevehető szőrözet, a felső szárlevelek keskeny, épélű karélyai, a mindig háromkarélyú, bevagdaltan fogas tőlevelek és az igen apró virágok, a melyek ritkán hiánytalanok, hanem viráglepel nélküliek, a virágzati jelleg (binatus) nagyon szembeszökő.»

Látnivaló, hogy SCHUR mélyebbreható érzékkel fogta fel a *R. binatus* KIT. rendszeresen szeldelt tőleveleinek megkülön-

---

[1] SCHUR: Sertum floræ Transsilvaniæ sive enumeratio systematica omnium plantarum, quæ in Transsilvania sponte crescunt et in usum hominum copiose coluntur (1853). p. 3. No. 69. A Beiträge zur Kenntnis der Flora von Siebenbürgen als Erläuterungen und Bemerkungen über die im Sert. flor. Transsilv. verzeichneten siebenbürgischen Pflanzen, Verhdl. u. Mitt. des siebenb. Ver. f. Naturkunde. 1853-ban SCHUR a *R. binatus* KIT.-hez idézi REICHENBACH Icones-ének a XII. t. 4599. sz., már említett, *R. auricomus* L.-vel jelölt képét. Ezt írja: «Von WELDEN ezt a boglárkát Erdélyből jelenti s Baumgarten is felvette az ő Herb. transs.-ba, Enum. stirpium-jába azonban nem. Az erdélyi botanikusok ezt rendesen *R. auricomus* gyanánt gyüjtötték, a melyhez azonban nem áll közelebb, mint a *R. auricomus* a *R. cassubicus*hoz ... A *R. binatus* éppen nem oly kicsiny, mint a milyennek Reichenbach rajzolja, eléri a 18 hüvelyket is, van vagy 12—20 virága, a melyek kettenkint — binata — helyezkednek el egy főszáron, közülük az egyik mindig virágzó, a másik már termő.»

[2] Enumeratio plantarum Transsilvaniæ, exhibens stirpes phanerogamas sponte crescentes atque frequentius cultas, cryptogamas vasculares, characeas, etiam muscos, hepaticasque (1868).

böztető bélyegét, de még ő sem jutott el e jegy tulajdonképpeni jelentőségének és philogenetikus értékének teljes megismeréséhez. A «Phytographische Mitteilungen über Pflanzenformen aus verschiedenen Florengebieten des österreichischen Kaiserstaates» (Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn, Vol. XV. II. 1876) 37. l.-ján újra rámutat a *R. binatus* és *R. auricomus* «fejlődéstörténeti összefüggésére, a melyre a levél alakjának sokféle változata utal».

GRISEBACH-nál és SCHUR-nál kevésbbé éleslátású volt JANKA V. tekintete, a ki éppen a *R. binatus* dolgában kellemetlen tévedésnek vált áldozatává. A VÁGNER-féle gyüjteményben (most a Nemzeti Múzeum növénygyüjteményében) van egy példány, a melyet JANKA 1854-ben Kolozsvár mellett erdei réten szedett s melyet ő *R. binatus* KIT.-nek határozott meg. Ennek a példánynak azonban a *R. binatus* KIT.-hez semmi köze, mert ez egy a *R. incisifolius* RCHB.-hoz közelálló *R. auricomus* L. JANKA tehát akkortájt nem ösmerte a *R. binatus* KIT.-t. Nyilván ezt a boglárkát értette JANKA május végén Kolozsvárról keltezett s az Öst. bot. Wochenbl. 1854. 188. l. megjelent levelezésében, szólván ott a «*R. auricomus, R. binatus* W. et KIT. (sic!) *R. cassubicus*ról és a köztük levő átmeneti formákról, továbbá «rétekről, a melyeken rengeteg a *R. binatus* W. K.» (!); 1855-ben is (kolozsvári levelezés, julius, Öst. bot. Wochenbl. 229. l.) Mezőségről említi a *R. binatus* KIT.-t (itt már helyesen s nem mint fönt: W. K.). Félreismerte ezt a növényt 1855-ben is, a mely évből JANKA gyüjtéséből eredő példányok (in Transsilv. pratis aquosis Bükkensibus prope Klausenburg; maj. 1855) «*R. auricomus* L. var. *vegetior* (forma vegetior), *R. binatus* autor. non KIT.»-nek meghatározva, kerültek úgy DEGEN, mint HAYNALD (utóbbi most a Nemzeti Múzeum gyüjteményében) herbáriumába s a melyek igazi *R. binatus* KIT.-ok. JANKA, mint látható, megkülönböztette a *R. binatus*t a *R. auricomus*tól, de hogy az első néven nem a valódi *R. binatus* KIT.-t, hanem egészen más növényt értett, az legjobban kiviláglik «Über einige Ranunculaceen» czímű czikkéből.[1] Ebben a következőket írja: «Kolozsvár mellett csupán

[1] Öst. bot. Wochenbl. 1856. 345. l.

a *binatus*nak vélt *Ranunculus* nő, mocsaras réteken, nagy menynyiségben. Nem voltam képes a közönséges *R. auricomus*tól megkülönböztetni, hacsak buja növése révén nem. A különböztető jegyeket, a melyeket Grisebach tanár a vélt *R. binatus*nak tulajdonít, nem találom, mert osztatlan és sokosztatú tőlevelek akadnak a német növényen is, egyazon példányon.[1] A valódi *R. binatus* Kit., mint azt a Kitaibel-féle példányok [2] mutatják, ettől teljesen különböző növény. A *nagyon kicsiny csészelevelekkel együtt lecsapott,* csak kissé hosszabb *sziromlevelek,* a *kicsiny, vagy egészen röviden és alig észrevehetően csőrös, csupasz, ránczos, szegélyes terméskék,* azután *az egyes virágok kicsinysége,* végre a *megnyúlt,* meglehetősen szőrös *vaczok*[3] a *R. binatus* helyét a *R. sceleratus* közelében jelöli ki. Az eredeti Kitaibel-féle leírást később szintén közlöm.[4] A *R. binatus*nak alakra nézve a *R. auricomus*hoz hasonló tő- és szárlevelei adhattak okot arra, hogy e növényt a *R. auricomus*ok közt keressék. Tetézte ezt néhány floristának felzaklatott képzelőtehetsége,[5] s most már *R. binatus*t láttak a *R. auricomus* bujább változataiban. *R. binatus* Kit. succulens («fette») mocsári növény».

A tévedés ezek után nyilvánvaló. Mivelhogy Janka oly növényt tartott *R. binatus*nak, a mely hasonlít a *R. sceleratus*hoz, természetszerűen nem ismerhette fel a valódi *binatus*t. Úgylátszik, hogy Janká-t az ő bécsi botanikus-barátai kevéssel utóbb felvilágosították tévedéséről, mert 1860-ban nagyon ala-

---

[1] Janka bizonyára másként beszélt volna, ha ismerte volna az osztott és osztatlan tőlevél philogenetikus jelentőségét. Ő azonban hijján volt ennek az ösmeretnek. Különben föntebb már említettük azt is, hogy Grisebach leírása nem is a *R. binatus*ra, hanem a *R. reniformis*ra vonatkozik.

[2] Erre a megjegyzésre ráférne a kérdőjel.

[3] A szöveg e részének nyomdai kiemelése nem Janká-tól, hanem tőlem ered, tettem ezt azért, hogy Janka tévedése mentül határozottabban domborodjék ki. Az *Auricomus*-sectióban ugyan kereshetnénk oly boglárkát, a melyre e leírás illik.

[4] Ezt az igéretét Janka sohasem váltotta be. Ha csakugyan birtokában volt az «eredeti» leírás, vajjon hova kerülhetett az?

[5] Ez elsősorban Schur-ra vonatkozik.

posan önmagára czáfolt,[1] ezt jegyezvén meg a *R. auricomus*-ról: «Huc pertinet R. binatus auctorum, qui lusus est foliis imis magis divisis . . .» Tehát mégis az *auricomus* s nem a *sceleratus* közelébe helyezendő a *R. binatus*. A felvilágositást NEILREICHtől kaphatta. A «Nachträge zu Malys: Enumeratio plantarum phanerogamicarum imperii austriaci universi» cz. művének 221. lapján ezt írja NEILREICH a *R. binatus* KIT.-ről: «JANKA szerint, Öst. bot. Wochenbl. 1856, 346. l., a valódi *R. binatus* KIT. egészen más, a *R. sceleratus* L.-vel rokon növény. Ez a vélemény a k. k. botanisches Kabinet egy példányán alapul, a melynek névjelzőjén (ismeretlen szerzőtől) *R. binatus* áll, *a mely azonban közönséges R. sceleratus, úgy hogy itt nyilván valamely elcserélésnek kellett történnie.*»

A *R. binatus* KIT. faji önállóságához ragaszkodott SCHLOSSER és VUKOTINOVICS,[2] bár NEILREICH már egy évvel korábban helyesebb nézetre akarta őket kioktatni. «A *R. binatus*t, REICHENBACH flor. germ. excurs., — úgymond[3] — Zágráb mellől a Maximir erdőből mint a *R. auricomus* változatát jelzi a Syllabus 169, én azonban a RAUSCHER-féle növénygyüjtemény eredeti példányain nem látok különbséget.» Nos, ezt a különbséget a flora croatica szabatosan és találón jelöli meg — ez különben egyáltalán az első csaknem megfelelő leírása a *R. binatus* KIT.-nek —, bár e flora szerzői épp oly kevéssé tudták értékelni az általuk kiemelt elkülönítő bélyegek philogenetikus jelentőségét, akárcsak NEILREICH.[4]

Ez a jelentőség úgylátszik sejtelemszerűen derengett SIM-

[1] V. JANKA: Adnotationes in plantas dacicas, nonnullasque alias europæas. Linnæa, XXX. köt. 5. füzet, 553. l. (1860.)

[2] Flora croatica. Zagrabiæ (1869).

[3] A. NEILREICH: Die Vegetationsverhältnisse von Croatien (1866), 170. l.

[4] Ez a leirás így szól: *R. binatus* KIT. foliis radicalibus cordato-reniformibus, *pedati — 3—5 — segmentis linearibus falcatis* apice incisis, caulinis 3—5—7 pedati partitis, *segmentis linearibus integerrimis*, carpellis lanuginosis, rostro a basi recurvo. Habitus R. auricomi L. sed multo gracilior floresque minores.» A szerzőknek azt a megjegyzését, hogy a *R. binatus* hybrid eredetű *(auricomus×montanus* vagy *auricomus×aureus)*, természetesen mint egészen téveset vissza kell utasítani.

KOVICS (SIMONKAI) Lajos előtt, midőn a *R. binatust* a *R. auricomus* törzsalakjául jelölte meg.[1] Kár, hogy nem maradt meg később is e felfogás mellett. NYMAN[2] szerint a *R. binatus* KIT. a *R. auricomus*nak a varietas speciosá-ja «sec. specc. Schlosser.» — A Sylloge flor. europ. (1854—1855) cz. műve 177. lapján NYMAN a *R. binatus* KIT.-t még a *R. auricomus* alfajaként fogja fel.

BECK V. MANAGETTA[3] szerint a *R. binatus* KIT., a melyet ő a *R. cervicornis* KITT. synonymonjának tart, a *R. auricomus* (var. β. typicus) változata s a var. α) *reniformis* KITT.-től a tőlevelek erős szabdaltságával különíti el.

Azok közé, a kik többé-kevésbbé tudatában voltak a *R. auricomus* L. és a *R. binatus* KIT. különböző voltának s az utóbbit vagy önálló fajnak tartották meg, vagy a *R. auricomus* változatának fogták fel, tartozik egyebek közt még HEUFFEL J.,[4] HALÁCSY Ö.[5] és E. POSPICHAL.[6] A legtöbb újabb botanikus azonban a *R. auricomus* synonymonjának tartja. Faji állandóságát a leghatározottabban NEILREICH tagadta, még pedig ismételten; sőt szerinte «még csak mint (a *R. auricomus)* változata sem különődik el». Ezt a példát követi a «Flora hungarica exsiccata»[7] is; az egyes csomagokhoz mellékelt Schedákban (Cent. II. 33. l.) a *R. binatus* KIT. mint a *R. auricomus* synonymonja szerepel.

A *R. binatus* KIT., mely egykor önálló fajként ragyogott a botanika egén, ily módon lassan-lassan elhomályosult a kétel-

---

[1] SIMKOVICS L. Adatok Magyarhon edényes növényeihez. Jelentés a Duna jobbparti vidékén tett utazásomról. M. T. Ak. Math. és Természettudományi Közlemények XI. 1873. A 179. lapon szószerint ez áll: *R auricomus* L. Herenden mint tőalak = *R. binatus* KIT. — Erdély edényes flórájának helyesbített foglalata (1886) cz. művében a *R. binatus* KIT. apud RCHB.-t ismét csak a *R. auricomus* L. synonymonjaként említi.

[2] Conspectus floræ europeæ (1878), 12. l

[3] Flora von Niederösterreich (1890), 418. l.

[4] Enumeratio plantarum in Banatu temesiensi sponte crescentium etc. (1858), 44. l.

[5] Conspectus floræ græcæ I. 22. rész, 87. l. (1899).

[6] Flora des österr. Küstenlandes II. 2. rész, 87. l. (1899).

[7] Kiadja a Nemzeti Múzeum növénytani osztálya. Cent. II.

kedés sűrű felhői közt, mig már-már el nem tünt a szemünk elől. Az új és a legújabb nemzedék legtöbb botanikusa már alig ösmerte nevét. Persze, nem magában a növényben rejlik a hiba, nem is természeti alkatában, a mely, mint látni fogjuk, a faji önállóság félreismerhetetlen bélyegét nyomta rá; de nem is Kitaibel-ben, a kinek genialis szeme rátalált ezekre a bélyegekre, bár ő azokat nem közérteImű jelekben, hanem afféle hieroglyphokban szólaltatta meg, a melyek csak ma váltak megfejthetővé. A hibát azoknak rövidlátásában kell keresnünk, a kik nem tudván kibetűzni a természet rejtélyes jegyeit, egyszerűen tagadták azok létét.

Nem pusztán a tudománynak követelménye tehát, ha azon vagyunk, hogy az oly alaposan félreismert *R. binatust* megérdemelt rangjába helyezzük vissza. Az alábbiakban meg fogjuk ezt kisérelni.

III. fejezet. A philogenetikus jegy; *a*) az alaktani, *b)* a növényföldrajzi vizsgálat.

a) *Az alaktani vizsgálat.*

Az alapot, a melyből kiindulunk, R. Schrödinger[1] adta nekünk. Mielőtt az ő beható, nagyon lelkiismeretes és azért felette jelentőségteljes tanulmányainak és vizsgálatainak eredményeit röviden ismertetnők, fel kell említenünk, hogy ő maga az előszavában határozottan hangsúlyozza, hogy tanulmányában a fősúlyt csak a lomblevelek ama bélyegeire helyezi, a melyeket vizsgálatai alapján *szerveződési bélyegeknek* (Organisationsmerkmale) kell tekintenie. Az alkalmazkodási bélyegek kutatását nem vette tervbe. Schrödinger a tanulmányában nem csekély fontosságú végső következtetésekre jut, ezek közül itt csak azokat emeljük ki, a melyek e dolgozat czéljával szorosan összefüggnek. «A boglárkafélék — írja megfigyeléseinek végeredményei során —

[1] Rudolf Schrödinger: Das Laubblatt der Ranunculaceen. Eine organgeschichtliche Studie. (1904.) Abhandl. der k. k. Zool. bot. Gesellschaft in Wien, VIII. köt., 2. füz.

ama kétszíküek közé tartoznak... a melyeknél (a levél lemezének) basipetalisan sugaras alakjai mutatják az *ősibb typust.* Fejlődésüket jellemzi, hogy rügy-kezdeményük polakronus... hogy a polakronus rügy-kezdemények bizonytalanul határolt typusokat mutatnak, a melyeknél *még nem alakult ki az egyensúlyozottság állapota* a levéllemez alapján adott tér és a basipetalis elsőleges osztottság menete közt... *A monakronus,* azaz teljesen osztatlan *lemezek is,* ott a hol e család körében jelentősebb számúak, azaz a *Caltha*nál és a *Ranunculus*nál, *polakronus typusok származékainak bizonyulnak.* Az összes tények egyértelmün arra vallanak, hogy valamely variatio szélső eseteiként keletkeztek, a mely hatásában a lemez sallangjainak összeforradására irányult... Ily vesealakú lemezzel biró levelekből a *Ranunculus* körében nem egyszer oly levelek támadtak, a melyeknek habitusa olyan, mint az egyszíküeké (*R. Lingua*-Typus). Ha tekintetünket a fejlődés alapmenetére irányítjuk, akkor a boglárkafélék egy oly kétszíkű család képét adják, a melyben *a viszonylag ősibb typus a polakronus, azaz basipetalis hajlamú és mindig sugarasan kialakuló lemez,* ez pedig másodlagosan átalakult egyrészt heterakronus... másrészt pedig *monakronus hajlamú és veseformán kifejlődő lemezzé,* a melyből aztán... *az egyszíküekéhez hasonló typusok keletkeztek.*» Ezeknek az eredményeknek részletesebb megokolása dolgában magára e kitünő könyvre kell utalnunk; mi ezen a helyen beérjük az idézett részekkel (l. c. 68—72. l.), a melyeket még csak egyetlenegy, a mi czélunkra nézve fontos idézettel toldunk meg. Schrödinger a tanulmányának 53. lapján ezt írja: «Sokan hajlanak arra a felfogásra, hogy a monakronus lemezek egyszerűségüknél fogva az osztottaknál kezdetlegesebbeknek tarthatók... Azt az elvi hajlandóságot, hogy az egyszerűbb levélalakok kezdetlegesebbeknek tartandók, lefokozhatná az a két tény, hogy a ma élő legősibb nyitvatermő-typusok, a *Cycadeae,* rendszeresen nagyon osztott levéllemezzel birnak és hogy a *Ginkgo*-fajok levelei annál mélyebb és gazdagabb osztatúak, mentül régibb geologiai rétegben találjuk.»

Ha most Schrödinger kutatásainak eredményeit az *Auri*-

comus-sectio alakjaira alkalmazzuk, a következőket állapíthatjuk meg.

1. A legősibb typust azok az alakok mutatják, a melyeknek tőlevelei rendszeresen osztottak, szárlevelei pedig keskenyszálas, épélű sallangokra való erős feloszlást mutatnak.

2. Későbbi alakok azok, a melyeknek tőlevelei összeforrásra való hajlamot mutatnak, vagy a melyeknél azok már is összeforrtak s osztatlanok, a szárlevelek pedig ugyanilyen hajlamból szélesebb és fogazott karélyokra oszlanak, vagy már is egészen összeforrtak.

Az 1. typus a *Ranunculus binatus* KIT.-nek felel meg.

Az összes többi alakot, beleértve az 1. és 2. közé eső számtalan átmenetet és a 2.-höz tartozó formák közt látható átmeneteket is, egyelőre a 2. alatt foglaljuk össze, fönntartván magunknak, hogy e nagyszámú alakot később részletesebben ismertetjük.

De már itt meg kell állapítanunk, hogy a typusnak a mondottak szerint négy főalakra kell tagolódnia:

1. *Ranunculus binatus* KIT.
2. « *auricomus* L.
3. « *cassubicus* L.
4. « *flabellifolius* HEUFF.

Úgy hogy a *R. binatus* KIT. és *R. flabellifolius* HEUFF. a ma élő alaksorozat két szélső pontját, elejét s végét jelenti; a többi pedig, valamint a számtalan átmeneti alak, e kettő közé esik. Nem túloztunk tehát, a midőn már föntebb állítottuk, hogy a *R. binatus* KIT. nemcsak jó faj, hanem törzsfaja az *Auricomus*-typusnak, a melyből az összes többi alak fejlődött. Mint fent említettük, KERNER is sejtette már egy ily törzsfaj létezését, hasonlóképen SIMONKAI is.

Ha elfogadjuk SCHRÖDINGERnek azt az állítását is, hogy a boglárkafélék tőleveleinél az osztottság szerveződési jegyet jelent — és nincs okunk ezt el nem fogadni, hiszen minden mellette szól és a faji önállóság éppen ebben a bélyegben rajzolódik le a legélesebben —, akkor a dolgok ez új megvilágításában most már szabatosabban körülírhatjuk a hibát, a melyet eddig az *Auricomus*-sectio alakjainak meghatározása és faji elhatárolása körül elkövettek. A botanikusok addig összetévesztették a tőlevelek osztottságát az osztottságnak mikéntjével; nem azt a tényt vették megkülönböztető bélyegnek, hogy a tőlevelek osztottak, hanem azt, hogy a lemez osztott részei (hasábjai) milyen alakúak. Már pedig az előbbi a szerveződési bélyeg, az utóbbi csak alkalmazkodási bélyeg. Beletévedtek az osztódás módja szerinti alakok rengetegébe és nem vették észre magának az osztottságnak jelentőségét. És mert a számtalan alak tévetegében nem tudtak tájékozódni, létrejött az az óriási zavar, a mely ezen a téren uralkodik. Nem eszméltek rá a szerveződési bélyeg philogenetikus tulajdonságára és csak az ontogenetikus alkalmazkodási bélyeget tartották szem előtt; mivel azonban csak az előbbi — nem pedig az utóbbi — szolgálhat a faji elhatárolás alapjául és mert kizárólag és egyesegyedül csak annak van fajképző ereje: oly fajokat állítottak fel, a melyek voltaképen nem fajok; a faj, a valódi faj pedig kisiklott szemlélődésük köréből. Ez áll különösen azokról, a kik a *Ranunculus binatus* Kit.-t teljesen félreismerték vagy mellőzték; azok persze, a kik e növényt fajnak, vagy legalább alfajnak vagy változatnak minősítették, észrevették ugyan a természet e jelenségét, látták, hogy itt valami különös dolog van. Azonban ők sem tudtak a lényegről alaposan számot adni, a tulajdonképeni okozati összefüggés előttük is még titok maradt.

Két más tény is arra vall, hogy az *Auricomus*-csoportnak legősibb alakja a *Ranunculus binatus* Kit. Mint a növények általában, úgy a *Ranunculus*-nem is eredetileg vízi növény volt, a mely aztán utóbb a szárazföldön való élethez alkalmazkodott és lehet, hogy mint némely újabb biologus hiszi, egyes fajai megint a vízben való élethez tértek vissza. Egy vízi boglárkának a szárazföldi életmódhoz való folyamatos alkalmazkodása az *Auricomus*-sectio összes alakjai közül legősibb alakjában és legjellemzetesebben a *R. binatus*on látható. Mai napig is ez az alak tartotta meg a tő- és szárlevelek legerősebb osztottságát s ezzel kifejeződik a vízi boglárkákkal való legszorosabb atyafisága, a melyek tudvalevőleg — már œkologiai okokból is — mind finom osztatú levelükkel tűnnek ki. A rokonságnak ez a jegye — és ez a másik tény, a melyre rá akarunk mutatni —

fokozatosan gyengül, mentül inkább közeledünk a fönt felállított alaksorozatban a *R. binatus*tól a *R. auricomus* és *R. cassubicus* felé, hogy csaknem teljesen eltűnjön a valódi *R. flabellifolius*nál. Nem szabad hallgatással mellőznünk, hogy a *R. cassubicus* és *R. flabellifolius* alakkörében is akad nagy ritkán egy-egy osztott tőlevél; de ez a jelenség csak újabb bizonyítéka annak, hogy ezek az alakkörök is a *R. binatus*ból erednek; az osztottság ily jelensége szinte kétséget kizárólag mutat ezen eredetre, a mely még a kései nemzedékekben is atavistikusan jelentkezik, gyengén és ritkán, határozott bélyeget azonban itt már nem alkot. Teljesség okából úgy az átmeneti, közbülső alakok felsorolásába, mint a jellemkulcsba is felvettem ezeket az alakokat is, bár elszigetelt és felette ritka előfordulásuk teljes mellőzésüket is igazolta volna, annál inkább, mert ezek a *binatus*-alakok és a *R. auricomus*nak a *R. cassubicus*szal és *R. flabellifolius*szal való combinatiói közt szinte elenyésző a termetbeli különbség.

b) *A növényföldrajzi vizsgálat.*

Az alaktani látlelet, mint az eddigiekből látható, nyilvánvalóvá tette, hogy a *R. binatus* KIT. az összes, az *Auricomus*-sectióba tartozó alakok törzsalakja. Vajjon mily eredményre jutunk, ha e négy főalak philogeniájának megállapítására a növényföldrajzi módszert alkalmazzuk? Nem követhetjük a mi esetünkben mindenben a WETTSTEIN[1] által ily czélra ajánlott

---

[1] Dr. R. v. WETTSTEIN: Grundzüge der geographisch-morphologischen Methode der Pflanzensystematik (1898), 41—61. l. Csak mellékesen jegyezzük meg, hogy nem érthetünk egyet feltétlenül s mindenben WETTSTEINnel. Az alaktani módszerrel szemben támasztott kifogásai nem találók. Ha felszólal az alaktani módszer egyéni felfogása ellen, úgy ezzel a kifogással — mint saját levezetéseiből látjuk — még fokozottabb mértékben illethető a földrajzi módszer is, a mely lépten-nyomon feltevésekre kényszerít és messze van attól, hogy valamely eredmény «tárgyilagos» megállapítását jelentse. Ha ilyesmit *kizárólag* az alaktani és földrajzi módszerek együttes alkalmazásától remél, akkor egyrészt többet, másrészt kevesebbet mond a kelleténél. Sok esetben csupán az alaktani, sok másban ismét egyedül a földrajzi módszer fog felvilágosításra vezetni. Ha az eredmények, a

tanácsokat, mert a négy főalak és közbülső alakjaik nem minden területen zárják ki egymást kölcsönösen. A *R. flabellifolius* és *R. cassubicus* ugyan a *R. auricomus* és a *R. binatus* által elfoglalt terület nagy részében nem fordul elő, de a két utóbbinak számtalan alakja található a két előbbinek területén is, emezek pedig területük egy részén zavartalanul nőnek egymás mellett és egymás közt.

A *R. flabellifolius* a három testvér főalakjától elterjedés szempontjából lényegesen különbözik az által, hogy mindnyájuk közt a legszűkebb területre szorult. Elterjedési központja a Bánság, eljut azonban ÉK. és ÉNy. irányban a Központi- és a Nyugati-Kárpátokig, DNy. irányban pedig Észak-Olaszországig; erősebb vagy gyengébb átmeneti alakjai a másik három főalak területére is benyomulnak. Az a körülmény, hogy elterjedési köre szűk, hogy a határterületeken nem hybrid-eredetű alakjai nagy számmal találhatók — mely utóbbi körülmény ellene szól annak, hogy esetleg relictummal van dolgunk —, arra enged következtetni, hogy a *R. flabellifolius* a legújabb, mindenesetre csak a jégkorszakot követő időből való alak, nem pedig maga a törzsfaj, a mèlyből a többi eredhetett.

Már maga ez az eredmény is egyenest meglepő. Hisz nem is oly régi keletű egyes morphologusoknak 'törekvése, hogy a hagyományos, begyökerezett hittel szemben bebizonyítsák, hogy a boglárkaféléknél az osztott lomblevél organogenetikus szempontból az ősibb, viszont az osztatlan levél az újabb alak.[1] Nos, a *R. flabellifolius* az ő osztatlan tőleveleivel és széles, szintén

---

melyekre mindkét módszer alkalmazása révén jutunk, kölcsönösen fedik egymást, ám annál jobb; de nem szabad az egyiket a másik híjján teljesen czéltalannak feltüntetni; mindig kölcsönösen ellenőrizhetik egymást. Másrészt azonban lesznek oly esetek is, a mikor a két módszer külön-külön vagy együttesen alkalmazva is cserben hagy minket és valóban tárgyilagos eredményre csak boncztani, szövettani, vegyi, élettani stb. vizsgálatok révén juthatunk.

[1] Még 1894-ben azt állítja K. Fritsch (Beiträge zur Flora der Balkanhalbinsel, Verhdl. der Zool. bot. Gesellsch. in Wien XLIV. (1894) 120. l.) a *R. psilostachys* Griseb. és a (128. l.) *R. platanifolius* L. említésekor, hogy a boglárkaféléknél az osztatlan levél a philogenetikusan ősibb alak.

osztatlan, legfeljebb karélyos szárleveleivel, mint a növényföldrajzi alapon kimutatható legújabb alak, eléggé bizonyítja, hogy mily helytelen volt a régibb felfogás. De az is kiviláglik, hogy a *R. flabellifoliust* csak másodlagos származéknak, semmiesetre sem elsődleges törzsfajnak tekinthetjük és olybá is kell vennünk, ha azt kivánjuk, hogy a rendszernek philogenetikus jellege legyen.

A másik főalak, a melynek meglehetősen szűk az elterjedési területe, a *R. cassubicus* L. Területe — Európa egész kelete, el a Földközi tenger vidékéig, azonkívül Közép-Európa keletének jó része — nagyobb ugyan a *R. flabellifolius*énál, mindazonáltal hiányzik Európa egész nyugatán és a Földközi tengerhez tartozó délvidéken. Az így körülhatárolt területen vegyesen nő a másik három főalakkal és ezekkel, különösen a határokon, számtalan nem hybrid-természetű alak is köti össze. A mi flóránkban szibiriai elemet jelent.[1] Délre és nyugatra kétségkívül keletről vándorolt be, a hol legnagyobb az elterjedési köre; ez a vándorlás mindenesetre a jégkorban történhetett. Új körében az ott már régebben megtelepedett alakokkal keveredett össze. Alaktani jegyei: a nagy, osztatlan, szív-vesealakú tőlevél, a széles, fogas szárlevelek, a hegyén horgas termésesőr mutatják, hogy sokféle alkalmazkodásból eredő, tehát újabb alakkal van dolgunk; az osztott szárlevelek azonban a *R. flabellifolius*énál régibb eredetre mutatnak.

Másként állnak a dolgok a hátralevő két, egész Európában elterjedt főalakkal,[2] a *R. auricomus* L. és *R. binatus* Kit. alakokkal. Ezeknek elterjedési köre bajosan írható körül, mert ezt a két alakot vajmi kevés szerző különítette el egymástól, a

---

[1] V. ö. Dr. F. Pax: Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpaten (1898), 221—226. és 232. l.

[2] Nyman adatát, a mely szerint a *R. auricomus* Portugáliában nem nő, eddig nem volt módomban ellenőrizni. Arra nézve, hogy Spanyolországban és Görögországban s az Adriai tenger szigetein csakugyan nő, hivatkozom Freynre (Willk. et Lange, Prodr. fl. hisp.), Halácsyra és Pospichalra (i. h.). V. ö. Nyman: Consp. fl. eur. (1878—1882), 12. l. A legtöbb szerző különben egész Európából jelzi. Nyman Conspectus. Suppl. II. (1889—1890) 8. oldalán különben előbbi hibáját maga jóvá teszi.

legtöbbjük *R. auricomus* alatt *R. binatust* is ért. Biztos alapú azonban az a következtetés, hogy miután a *R. flabellifolius* és *R. cassubicus* újabb származású alaknak bizonyult: a velük oly sok bélyeg révén rokon alakok: az *auricomus* és *binatus* szükségképen ősibb, elsődleges alakok. E mellett szól az a körülmény, hogy elterjedési körük rendkívül nagy, hogy a másik két alak hiányzik az e kettő által elfoglalt terület nagy részéből, hogy alkalmazkodni tudtak a különböző éghajlati viszonyokhoz és életfeltételekhez és hogy rendkívül nagy a száma a nem hybrid-eredetű átmeneti alakoknak a terület minden regiójában. Kérdés most már, melyik kettejük közt az ősibb, azaz a törzsalak. Nem hinném, hogy a földrajzi módszer ebben a kérdésben biztos tárgyilagos ujjmutatással szolgálhatna. Igaz, hogy nem volna nehéz az imént említett körülményekre való utalással arra a következtetésre jutni, hogy mindkét alak már a jégkorszakot megelőző harmadkorban ellepte Európát, hogy a jégkorszak egyre délebbre szorította őket, hogy e korszak elmulta után újra vissza-, illetőleg bevándoroltak az északi és *nyugati* területekre és hogy a *R. binatus*, e délen uralkodó, de északon is nagyon elterjedt alak, az említett vándorláskor túlnyomó, sőt talán kizárólagos magva volt a vándor-seregnek, tehát a ma elterjedt alakok legősibb, eredeti, törzsökös alakja. Ez azonban legfeljebb feltevés. De bármekkora is a valószínűsége, mégsem tartanók alkalmasnak arra, hogy alapul szolgáljon egy biztos, tárgyilagos, kétségbe nem vonható következtetésnek. E tekintetben inkább egészen lemondunk a földrajzi módszerről, annál inkább, mert hisz az alaktan és az organogenetikus vizsgálat csalhatatlan bélyeget kínál nekünk a tárgyilagos, valódi tényállás felderítésére. Ez a bélyeg a lomblevél osztottsága, a mely arra vall, hogy a *R. binatus* a legősibb, elsődleges törzsalak, a melyből másodlagosan tagolódott le a többi három főalak.

A mondottakból ezúttal is az következik, hogy a négy főalaknak philogenetikus-rendszertani egymásutánja szükségképen a következő: *R. binatus, R. auricomus, R. cassubicus* és *R. flabellifolius*.

IV. fejezet. Rendszertan, módszer és elnevezés.

Ha útunkat ezen a jól megvilágított alapon folytatni akarjuk, akkor mindenek előtt meg kell jelölnünk a módszert, a mely vezetőnk lesz az *Auricomus*-sectio egyes alakjainak rendszertani feldolgozásakor.

Midőn a tő- és szárlevél osztottságát vagy osztatlanságát a faji megkülönböztetés szilárd alapjául fogadjuk el, egyben szerveződési bélyeget használunk a fajokat elhatároló jegy gyanánt. Ám az alkalmazkodási bélyegek sem mindig csupán másodrendű jelentőségűek ebben az esetben. Ezeknek is tulajdoníthatunk bizonyos értéket, még pedig nem csupán az egyes alak-körök élesebb és részletesebb megkülönböztetésében, hanem a fajok megítélésében is. Mert határozottan hangsúlyoznunk kell, hogy az alkalmazkodási jellemvonásokat nem szándékunk teljesen kirekeszteni a fajteremtő képesség tényezői közül. Nagyon is tudjuk, hogy van fajképző erejük. Az őket létrehozó külső körülmények, ha hosszan, nemzedékeken át szakadatlanul hatnak, oly módon érvényesülhetnek, hogy állandó hatásuk a plasma állományát megfelelő átalakulásra kényszeríti. Ha ez folytonos átöröklődéssel párosul, akkor az eleinte alkalmazkodási bélyegként jelentkező elváltozás végre is szerveződési bélyeg jellegét ölti magára, a melyet tehát szintén fajképzőnek kell tekintenünk. A *R. cassubicus*t, a melynél a tőlevél eleinte az alkalmazkodás hatása lehetett, mert a növény nyirkosabb talajon, a fejlődésében már előrehaladt erdőaljának mélyebb árnyékában nőtt és a melynél ez a bélyeg nemzedékeken át fönnmaradva, idővel szerveződési bélyeg jellemvonását öltötte magára; nos, ezt a *R. cassubicus*t az imént kifejtett elvek alapján egészen határozottan megkülönböztetjük a *R. auricomus*tól, a melynek tőlevelei sohasem érik el a *R. cassubicus* tőleveleinek nagyságát. Vannak viszont alkalmazkodási bélyegek, a melyek mind máig még nem erősbültek szerveződési bélyegekké. Ilyen nézetünk szerint a lemez nélküli hüvely vagy a hüvelyes tőlevél, a levelek osztottságának módja, épélűsége vagy fogazottsága, a gyengébb vagy erősebb szőrözet. A terméscsőr nagysága, görbülésének módja pedig oly alkalmazkodási bélyegnek látszik nekünk, a mely a legjobb úton van, hogy szerveződési bélyeggé fejlődjék; közeledik is a czélhoz, de azt máig még nem érte el egészen. Ez a bélyeg tehát főképpen egyes alak-körök megkülönböztetésére volna használható.

Ezen az alapon a két-két faj közé eső számtalan átmeneti alakot a fajokhoz való rokonságuknak megfelelő csoportokba fogjuk összefoglalni és elnevezésükben is fel fogjuk tüntetni, hogy fejlődésük mai szintjén mely fajokkal tartanak közelebbi rokonságot. Két-két *főfaj* közt — nevezzük ezeket egyelőre *A*-nak és *B*-nek — *közbeeső alakokat* fogunk megállapítani, a melyek egyik csoportja *a*, az *A* főfajhoz, másika *b*, a *B* főfajhoz esik közelebb. Elméletben igen nagy az így adódó átmeneti alakok száma, ám a tudomány, a természeti jelenségek megismerése nem fogja kárát vallani, ha összefoglalva egy fajnak fogjuk fel az illető alakváltozatokat, a melyek a valóságban úgy sem tartós természetűek: eddig semmi állandóságot sem mutatnak.

Az *Auricomus*-sectiónak fejlődési menetét a főfajok és a *közbülső* alaksorozat határkövei teljesen kielégítőn jelzik és félremagyarázhatlan módon tüntetik föl. Nos, éppen ez, nem pedig casuistikus álkritika és fölösleg-gyártás a föladata és czélja a valódi tudománynak.

Ily szempontokból kiindulva a következők az európai *Auricomus*-sectiónak

I. a főfajai:

Ranunculus binatus Kit.
« *auricomus* L.
« *cassubicus* L. és
« *flabellifolius* Heuff.

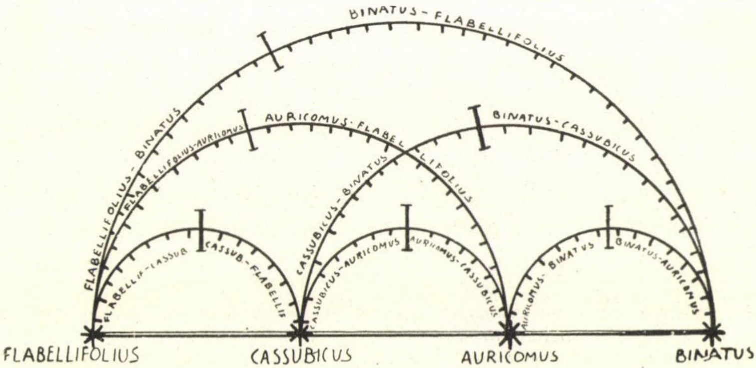
Ezekhez csatlakoznak a következő

II. közbülső fajok:

Ranunculus binatus—auricomus.
« *binatus—cassubicus.*
« *binatus—flabellifolius.*

Ranunculus auricomus—binatus.
« *cassubicus—binatus.*
« *flabellifolius—binatus.*
« *auricomus—cassabicus.*
« *auricomus—flabellifolius.*
« *cassubicus—auricomus.*
« *flabellifolius—auricomus.*
« *cassubicus—flabellifolius.*
« *flabellifollus—cassubicus.*

Az alábbi grafikon talán szemléltetővé teszi felfogásunkat.



Az *Auricomus*-sectióba tartozó boglárkák főfajai ✶ és *közbülső* alaksorozatai ┬┬┬┬┬┬ jellel vannak előtűntetve.

Ebből egyben látnivaló az út rövidsége vagy hossza, a melyet valamely főalak ilyen vagy olyan képességének meg kell tennie, hogy egy másik főalak képzésénél még éppen érvényesülhessen. Ha ezt az utat vesszük léptékül, megállapíthatjuk, hogy a *R. binatus* legerősebben a *R. auricomus*nál, gyengébben a *R. cassubicus*nál s a leggyengébb mértékben a *R. flabellifolius*nál érvényesül. A *R. auricomus* elemei egyenletesen mutatkoznak a *R. binatus*nál és *R. cassubicus*nál, de gyengébben a R. *flabellifolius*nál; a *R. cassubicus* bélyegei egyformán lépnek fel a *R. auricomus*nál és *R. flabellifolius*nál, kevésbbé a *R. binatus*nál; végre pedig a *R. flabellifolius* elemei a legerősebben a *R. cassubicus*nál, gyengébben a *R. auricomus*nál, s éppen csakhogy nyomokban érvényesülnek a *R. binatus*nál. Ez a viszony megfelel a természeti tényeknek.

Mindjárt meg kell jegyeznünk azt is, hogy itt éppen nem hybrid-alakokról van szó.[1] A kombinált kettős név és az egyik vagy másik faji névnek elsősorba való állítása csak a fejlődési viszonyt és ama két főfajhoz való szorosabb vagy távolabbi rokonságot van hivatva kifejezni, a melyek közt az illető *közbülső alak* helyet foglal. Így *R. cassubicus—auricomus* éppen nem jelenti e két boglárka közt kereszteződés által létrejött hybrid alakot, hanem jelent egy oly *Ranunculus*t, a mely fejlődési fokát tekintve e két főfaj közt foglal helyet s közelebb áll a *cassubicus*hoz, mint az *auricomus*hoz. Van csakugyan egy ily boglárka, hozzá még nagyon elterjedt is: a *R. fallax* W. et Gr.

Itt aztán meg is állunk. Az alakok még továbbmenő széjjeltagolását a természeti jelenségek és az adott egyedek felismerésére hiábavalónak tartjuk. Ez tudománytalan, casuista — tehát csak ártalmas eljárás volna.[2]

---

[1] Valamely hybrid alak mindig csak két-két, különböző fajokhoz tartozó egyed kereszteződéséből származhatik. Eredetét sohasem köszöni egyedül a plasma structurája magától képződő, benső elváltozásának vagy hosszantartó alkalmazkodásnak ; az itt szem előtt tartott fejlődési alakok azonban a maguktól való vagy hosszas alkalmazkodás révén előállott plasma-structurabeli változásoknak, és ha kereszteződés történt, akkor csak egy és ugyanazon törzshez tartozó két egyede közt előállott kereszteződésnek köszönhetik eredetüket. Nincs ugyan kizárva, hogy például a *R. binatus* és *R. auricomus* közt kereszteződés révén is létrejöhet valamely alak. Itt azonban elsősorban nem ezt kell érteni, a midőn *R. auricomus—binatus*ról szólunk ; inkább oly fejlődési alakra gondolok itt, a mely vagy úgy állott elő, hogy a plasma benső állapota megváltozott, vagy tartós alkalmazkodás, avagy valamely *auricomus* és *auricomus* vagy *binatus* és *binatus* kereszteződése révén keletkezett.

[2] Elméletileg igen sok alakot tekinthetünk lehetségesnek. Ha teszem a közbülső alakokból kiemelnénk egyes feltünő alakokat, a milyen például a *R. sibiricus* Glehn *(binatus—auricomus)*, a *R. reniformis* Kitt. *(auricomus—binatus)*, a *R. incisifolius* Rchb. *(auricomus* vagy *binatus—cassubicus)*, a *R. fallax* W. et Gr. *(cassubicus—auricomus* vagy *binatus)*, a *R*

Valaki esetleg azt vethetné ellen, hogy ez a módszer erőszakot követ el a természeten. Ha, mint ebben az esetben, egy sectióban négy főfajt állapitunk meg és a fejlődés menetét egyenes vonalban haladónak fogjuk fel, akkor — úgymond — a természetre azt kényszeritenők, hogy pontosan 12 közbülső alakcsoportot hozzon létre; ugyancsak előre megállapitott szám adódik, ha négy főfajnál többet vagy kevesebbet veszünk a beosztás alapjául. Ezzel — mondhatná valaki — mégis csak arra kényszeritjük a természetet, hogy számszerint megszabott bataillonokban, glédában vonuljon fel előttünk. Vagyis ez azt jelentené, hogy a szabadon sáfárkodó természetet korlátozzuk a szabadságában és a rendszertani fel- és beosztást egyszerű számtani példává, mennyiségtani tétellé alakitjuk át.

Bármennyire helyesnek látszik is az első tekintetre ez az ellenvetés, a közelebbi vizsgálat mégis teljesen alaptalannak fogja minősiteni.

Módszerünk, ha a vele szemben támasztott ellenvetes meg-

---

alliariifolius RCHB. *(binatus* vagy *auricomus—flabellifolius)*, a *R. ambiguus* SCHUR *(cassubicus—flabellifolius)*, akkor a következő alakokról is lehetne szó: *R. binatus—sibiricus, binatus—reniformis, binatus—incisifolius, binatus—fallax, binatus—alliariifolius, binatus—ambiguus, sibiricus—binatus, reniformis—binatus, incisifolius—binatus, fallax—binatus, alliariifolius—binatus* és *ambiguus—binatus*. Ha most még tekintetbe vennők a többi *lehetséges* alakot is, akkor ez a combinatio a végtelenségig volna tovább folytatható. De vajjon mit érnénk vele s mily haszonnal járna az? Nem tekintve azt, hogy az ily kombinált formák akárhánya még nem is került elénk a természetben, bár előfordulásuk *lehetősége* éppen nem tartható kizártnak, még a valóban meglevő alakok is csak oly ingatag elváltozást jelentenének, a melyek egy része a természetben csak tiszavirág-éltű, más része gyengének bizonyulna a létért való küzdelemben és kipusztulna. Sorjuk csak a természet vázlatos kisérletének volna tekinthető, a melyeket az mint nem hasznosakat, sőt károsakat elvet, hogy helyettük állandóbbakat, jobban alkalmazkodókat, a létért való küzdelemben győzteseket teremtsen. Ha nem látunk el névvel minden egyes ilyen alakot, éppenséggel semmi hiánya sem támad annak a képnek, a melyet az *Auricomus*-sectio természetes fejlődéséről kapunk. Ez tudományos szempontból megváltást jelent egy nyomasztó fölös tehertől. E megjegyzés csak arra való, hogy megvilágitsuk és igazoljuk a magunk elvét; ám maradjon ki-ki a maga izlése mellett. Az egyedeket is megkülönböztető elmésségnek ezzel nem szabtunk határt.

okolt volna is, mégsem jelentene a természeten elkövetett erőszakot. Hiszen csak logikai segédeszközül szolgál arra, hogy lehetővé tegyük a systematikai rendet. Magunk-teremtette eszköz, a mely segítségére siet fogyatékos gondolkodási képességünknek, a mely rendező kézzel nyúl bele a szervezetek és jelenségek tarka sokféleségébe. A ki megtagadná tőlünk ennek az eszköznek alkalmazását, az ezzel egyáltalában minden rendszer lehetőségét tagadná. Rendszer és természeti jelenségek sohasem fogják egymást tökéletesen fedni, már csak azért sem, mert a rendszer szilárd adottság, a szervezetek pedig mindig átalakulófélben vannak. Valamely rendszer jósága és helyessége attól függ, mily mértékben fedi a természetet és mily mértékben szolgáltat keretet az alakulóban levő szervezetek kifogástalan elhelyezésére.

Másodszor: módszerünk elméletileg azokat a változatokat veszi tekintetbe, a melyek, ha lassú fejlődést teszünk fel (legyen az akár egyenes vonalú, akár más irányú), a természetben *lehetségesek* és ezért nem tekintendők kizártnak. Hogy e *lehetséges* alakok közül melyek és mily számban fordulnak elő ez idő szerint *tényleg* a természetben, ennek a megállapitása a leiró természetrajz feladata. E tényleg meglevő alakok kutatása közben ki fog világlani, hogy az elmélet éppen nem követ el erőszakot a természeten, hanem egyszerűen csak keretet nyujt, a mely a természetben nincs is teljesen kitöltve minden részében. Sőt az elmélet és a természet viszonya okának kutatása nagyon tanulságossá is fog válni; fel fog világositani arról, vajjon kihaltak-e a nemzedékek folyamán egyes alakok és melyek ezek; fel fogja kutatni a philogenetikus fejlődési láncznak hiányzó szemeit; fel fogja deríteni az okokat, a melyek e hézagokat előidézték és szükségessé tették. Olyasmit állítani, hogy ez az elmélet a természetet kényszerzubbonyba szorítaná, a mondottak után nem látszik igazolhatónak.

Végre a természet szabadságát már azért sem zárjuk ezzel önkényesen fölállított korlátok közé, mert hisz eleve nem csak megengedtük, hanem az általunk föltételezett fejlődésnél kétséget kizáró módon megállapítottnak tartjuk azt is, hogy a természet az általunk elfogadott főfajokon kívül száz meg ezer közbülső, átmeneti alakot teremt. Különben az egyenes vonalú fejlődést a mi esetünkben sem magyarázhatjuk úgy, hogy az *Auricomus*-sectio négy főfaja egyenest és fokozatosan a *binatus*-ból az *auricomus* felé, ettől a *cassubicus*, emettől végre a *flabellifolius* felé fejlődött. A természet ugyanis lényegesen más képét adja ennek. A tőlevélnek osztottságra való veleszületett hajlama, a mely a *R. binatus* egész erejével érvényesül, nemcsak a *R. auricomus*ig van meg, hanem ezen túl is. Igaz, hogy egyre jobban gyengülő nyomokban érvényesül, de jelen van a *R. cassubicus*on és *R. flabellifolius*on is. Minthogy ugyanez áll a többi három boglárka veleszületett faji hajlamairól és megkülönböztető bélyegeiről, könnyen elképzelhető, hogy az alak-combinatiók mily óriási számát kell elméletileg a természetben lehetségesnek feltennünk. Ezért ajánlatosnak tartjuk azt a számtalan alakot — úgy azokat, a melyeket lehetségeseknek teszünk fel, mint azokat, a melyek csakugyan léteznek — egy-egy keretfajba összefoglalni.

Még egy megjegyzést tartunk itt helyénvalónak. Azt vethetik fel kifogásul, hogy az itt ajánlott módszer, a dolog lényegét tekintve, végeredményben semmi újat sem vet a felszínre, hogy tehát okosabb és jobb volna, a régi módszernél maradni. Hisz ennél is négy főfaj az eredmény, a melyeket számos átmeneti és közbülső alak köt össze, a mint azt tényleg már több florista így meg is állapította. Egyes szerzők — ki-ki a fajról alkotott felfogása szerint — egy vagy több fajt állapitottak meg, az átmeneteket pedig változatoknak vagy alakoknak nevezték. Itt közömbös lehet, hogy valaki a maga területén termő közbülső alakot tekinti jellemző átmeneti alaknak, a másik botanikus pedig egy más földrajzi területen valamely más közbülső alakot fog jellemzetes átmeneti alaknak felfogni. Épp oly lényegtelen, hogy az egyik az ő benyomásait és megfigyeléseit a saját faji felfogása szerint kettős névvel, a másik pedig a görög ábécé jegyeivel fejezi ki. A rendszerbe való besorozás szempontjából egyértelmű, ha a *Ranunculus fallax* W. Gr.-t akár külön fajnak, akár *R. auricomus* L. var α)-nak, vagy, mint mások teszik, a *R. cassubicus* L. var α)-nak, vagy végre az általunk ajánlott módon *R. binatus—cassubicus*-nak, illetve *R. cassubicus—bi-*

natus-nak, *R. auricomus—cassubicus*-nak, *R. cassubicus—auricomus*-nak nevezzük.

Eme kifogás látszólagos jogosultságának azonban élét veszi maga a felfogás, a melylyel mi a természeti jelenségeket szemügyre vesszük. A czél, a melynek elérése kapcsolatos a mi módszerünkkel, lényegesen eltér attól, a melyet a floristák szem előtt tartanak. Mióta a földön eszes lények élnek, bizonyára sokszor megfigyelték, hogy a kő, a melyet fölhajitunk, a földre esik vissza, de mily más lett ennek a megfigyelésnek értéke abban a pillanatban, midőn NEWTON geniusa megállapította, hogy ez a jelenség a nehézségi erőre, a tömeg vonzóerejére vezetendő vissza. És mégsem mondhatjuk, hogy a természeti tünemények meggyarapodtak. NEWTON isteni fölfedezése óta is épp úgy esik a földre minden fölhajitott kő, mint annak előtte. Si parva licet componere magnis: valóban, a *R. auricomus* mindig *R. auricomus* fog maradni; új természeti alak nem fog teremtődni; de a régi, az lényegesen megváltoztatott, tudományos világításba kerül, ha a *R. auricomus*t a *R. binatus* ifjabb, a fejlődés folyamán előállott teremtményének fogjuk fel. A zavaros kép, a melyből hiányzott az élet, úgyebár egyszerre megkapja ettől az életet? Megtágul a természettudomány látóhatára, megtisztul s a tekintet nagyobb mélységekbe hatol. Vajjon mi jelentősebb a természet valódi megismerésére nézve: ha azt mondom, hogy a *R. fallax*-ot a *R. auricomus*tól meg lehet különböztetni lemez nélküli hüvelyei révén (oly bélyeg, a mely, mint már mondtuk, nem állandó), vagy ha azt mondom, hogy a *R. fallax* átmeneti alak a *R. binatus* vagy *auricomus* és *R. cassubicus* közt s ezt a viszonyt a *R. binatus—cassubicus, R. cassubicus—binatus*, vagy *R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—auricomus* névjelzéssel fejezem ki, a mely rögtön világosan szemléltetővé teszi, hogy az előttem fekvő növény a határ-főfajok melyikéhez esik közelebb s melyikkel tart gyengébb rokonságot. A természet helyes megismerése legbiztosabb alapja a helyes rendszernek, tehát annak elengedhetetlen feltétele. Magára a rendszerre nézve persze közömbös, vajjon *R. fallax*ot, *R. cassubicus α) fallax*ot, vagy *R. cassubicus—auricomus*t mondok-e; nem közömbös azonban a természet megismerésére nézve, a melynek helyessége és megbővítése mégis csak magasabb rangú a rendszertani beosztásnál. Kezdetben vala a tett, a tettet pedig kövesse a neki megfelelő ige.

Még néhány szót szeretnénk ejteni módszerünk didacti-kai értékéről. Valamely tárgy, ez esetben egy faj vagy megjelenési alak, azért kap nevet, vagy legalább azért kellene kapnia, hogy annak említésekor a hallgatóban vagy olvasóban fölkeltsük ama tárgy megközelítő képét, hogy lehetővé tegyük alakjának szemléletessé tételét és legalább hozzávetőleges jellemzését adjuk vele a habitusának. Csak így fogja az erdeklődő szabatosan tudni, hogy adott esetben mely tárgygyal van dolga; minél jobban megközelíti a névadás az itt jelzett czélt, annál gyorsabban fog tájékozódni, annál könnyebben fogja megállapítani, hogy a rendszerben hol kell elhelyeznie az adott növényt; biztosabban tájékozódni fog az iránt, hol keresse valamely leíró műben, azonkívül könnyebben találja meg a termőhelyén. Valamely előbb ösmeretlen növény felismerésére ez az út kínál legtöbb sikert. A régibb botanikusok mindig azon fáradoztak, hogy ezeknek a kivánalmaknak eleget tegyenek; lehetőleg kerülték a nem jellemző névadást, a mely semmit sem árul el a növény természetéről. Mily élesen kidomborító jellemzetességet rejt magában például éppen a KITAIBEL-teremtette *R. binatus* név! Hallatára emlékezetünkbe rögtön visszatér a villás elágazású növény képe. Az újabbak e téren alaposan tetézték a hibák lajstromát. A nomenclatura helytelen hiuságból a halhatatlanság viszontbiztositó intézetévé lett.

Most pedig kérdjük, vajjon oly esetben, midőn egy csoport fajai oly élesen és szabatosan jellemzettek, mint az általunk tárgyaltak, a melyek önálló elkülönödéséhez szó sem fér, — nos, kérdjük, mily képet kaphat valaki, a ki a rendszerben egy oly növényre bukkan, a melyet a botanikusok eddig úgy hívtak: *Ranunculus fallax* WIMM. et GRAB.? E név említésekor tud-e magának képet alkotni e szervezet természetéről, alakjáról, a hozzá közel eső alakokkal való rokonságáról? Mily nehézségek tornyosulnak eléje, midőn meg akarja ismerni ezt a legkülönfélébb alakban megjelenő növényt! Mily másként alakul azonban feladata, ha e növény neve így szól: *R. cassubicus—aurico-*

mus! Rögtön oly képet kap, a melynek jellemvonásai szükségképpen az említett két faj tulajdonságaiból tevődnek össze. Sőt rögtön tisztába jön a rokoni viszony fokával is és tudni fogja, hogy e növény az elért fejlődési állomáson közelebb áll a *R. cassubicus*hoz, mint a *R. auricomus*hoz. Hogy pedig a *R. fallax* csakugyan e két faj közt foglal helyet, azt bizonyára senki sem vonhatja — és eddig nem is vonta — kétségbe.

A *R. fallax*-ot szándékosan választottam példának abból az okból is, mert ez a példa világossá teszi azt is, hogy módszerünk szabatosabb és biztosabb az eddiginél. A botanikusok a *R. fallax* Wim. et Grab. névvel eddig egy boglárka összes oly alakjait jelölték, a melyek tőlevelük nagysága dolgában körülbelül egyformán közel állnak a *R. cassubicus*hoz és a *R. auricomus*hoz és továbbá a melyek szárlevelei és terméskéi osztottság, szélesség, alak, fogazottság, illetőleg a terméske csőrének hajtottsága dolgában szintén a *R. cassubicus* és a *R. auricomus* közé esnek.[1]

Ezzel azonban még korántsem merítettük ki a *R. fallax* alakkörét. Mert vannak olyan alakjai is, a melyek létrejöttében része van a *R. binatus*nak is, alakjai, a melyek hol közelednek, hol távolodnak a két főfajtól, a melyeknek philogenetikus velük született hajlamai bennük érvényesülnek. E formák megjelölésére nincs név, valamennyi egy véka alá került. Hogyan tájékozódjék most ez alakok vizsgálója? Még szakemberek is szinte leküzdhetetlen akadályokkal találják szemben magukat a meghatározáskor. Kezdő meg szakember egyaránt mily aránytalanul könnyebben találja meg a jelkulcsban a helyes elnevezést, ha ez így szól: *R. binatus—cassubicus*, *R. cassubicus—binatus*, vagy *R. cassubicus—auricomus*. Mind a három esetben a *R. fallax* alakjaira bukkan és rögtön megösmeri a rokonsági fokot is, azt, hogy a közbülső alak képzésében mily mértékben szerepel az egyik vagy a másik faj. Nyilvánvaló tehát, hogy úgy a természet megismerése (és ez a legfontosabb, a főczél), mint a rendszer szempontjából éppen nem mindegy, vajjon a nö-

[1] A hüvelyeket egészen tekinteten kívül hagyjuk, mert ez a jellemvonás, mint ismételten említettük, teljesen jelentéktelen.

vényt *R. fallax*nak hívjuk, vagy a mi módszerünk szerint, a mely nagyon könnyít a technikán is, nevezzük el combinált kettős névvel. Csak futólag jegyzem meg azt is, hogy ezzel a synonymicát is némileg hatályon kívül lehetne helyezni, sőt még tekintetbe vétele is fölöslegessé válnék. Valóban, nagy tehertől, nehéz, időtrabló és ezenfelül csaknem meddő casuista munkától szabadítanók meg nemcsak a botanikusokat, hanem magát a tudományt is. Talán akadnak, a kik ezt az ujjmutatást szivesen fogadják, mérlegelik, kiszélesbítik. Sem helyünk, sem alkalmunk nincs itt, hogy részletesebben kidolgozzuk; meg kell azzal elégednünk, hogy egyszerűen rámutattunk.

Az itt használt módszer nem tart igényt ujságra és eredetiségre. Igen sok jeles botanikus ajánlott már hasonló vagy rokon reformot. Igaz, hogy e reformjavaslatok egyike-másika teljesen hasznavehetetlen téveteggé fajult. Ezeket eleve kirekesztjük további elmélkedésünkből és bizonyára senki sem akad majd, a ki számon kérné tőlünk. De nem tehetjük biráló tanulmány tárgyává a komoly megfontolásra méltó, tudományosan megalapozott, logikusan átgondolt reformkisérleteket sem, mert számuk szinte beláthatatlan. Véleményünk szerint legczélszerűbben járunk el azonban, ha legalább futólagosan megbeszéljük azt a két tervezetet, a melyet általában a legfontosabbnak tartanak. Ezek szerzői Nägeli és Hackel. Módszerem, a mely philogenetikus kiindulási ponton logicai követelményeként magától adódott, sokban megegyezik a Nägeli[1] által javasolt módszerrel, a mi természetesnek látszik, hisz a kiindulási pont azonos. Mégis lényeges pontokban — és nézetem szerint nem a tudomány hátrányára — különbözik Nägeli-étől, a ki az elméletet nem hozta összhangba a gyakorlattal. Nägeli elméleti alaptételeit származástani és philogenetikus szempontból bizonyára aligha fogják kifogásolni; elveinek gyakorlati alkalmazásakor azonban nem vet teljesen számot a saját elméletével, mindenféle apró fogásra, kivételekre fanyalodik, a végső eredmény pedig az, hogy nem tudja levetni a hagyomány bilincseit és alapjában véve minden a régiben marad. Mindenki el fogja fogadni például

---

[1] C. v. Nägeli und A. Peters: Die Hieracien Mitteleuropas (1885).

azt, a mit műve 25. lapján ír: «Két csoport elkülönítő bélyegeit szabatosan akkor ösmertük fel, ha ezeket a különbségeket különböző állandó jegyekkel és különböző alakkörökkel tudjuk kifejezni. Az állandó különbség ismertető jele az, hogy két növény teljesen azonos külső körülmények közé kerülve különbözik egymástól. Hogy valamely változatnak egyedei ugyanazon a természetes termőhelyen mégis jókora különbséget mutatnak, az onnan ered, hogy a physikai és vegytani viszonyok, valamint más növények versenyző szövetkezetei még csekély területen is jelentékenyen változhatnak. A kert virágágyában ez az egyenlőtlenség meglehetősen ki van zárva». Nagyon helyes a főalakokra, a közbülső alakokra és a középalakokra (Mittelformen) való beosztása is, de már a 40. lapon kénytelen a következőket kijelenteni:

«Ha a Piloselloidæ összes állandó csoportjait, a melyek eddig ismeretesek, megannyi fajnak vennők, akkor egyedül a nemnek e sectiójában máris mintegy 8200 fajt kapnánk... Bizonyos esetben szükséges tehát némely csoportot fajként értékelni, más esetekben viszont egybe kell foglalnunk több csoportot; ezek csak együttvéve adnak oly egységet, a mely a többi fajjal egyenlő értékű. A fajok elhatárolását olykor megkönnyíti a csoportok és a csoportozatok közt az összekötő formák kihalása következtében előállt űr, gyakran viszont a monographus tapintata és gyakorlata kénytelen eldönteni, hol végződik az egyik, hol kezdődik a másik faj».

Ugyanez a fogyatékosság jelentkezik nomenclaturájában is, és e tekintetben sem egyezik nála a gyakorlat az elmélettel: különféle jeleket és betűket kell segítségül szólítania, itt is számos tévedés és helytelenség számára adódik alkalom, végül pedig — egészen eltekintve azoktól a nehézségektől és mesterkedésektől, a melyek a valódi hybridek és a legitim kereszteződés származékainak elnevezése körül fölmerülnek — végeredményben itt is minden a régiben marad vagy még rosszabbra is változik,[1] mint azt minden systematikus a NÄGELI-féle mű használata közben csakhamar kitapasztalja.

[1] V. ö. még G. SCHNEIDER és R. v. UECHTRITZ: Öst. bot. Zeitschr. 37. évf. (1887) 309—311. l.

Ennek oka véleményünk szerint abban rejlik, hogy Nägeli az egyes csoportokat (Sippen) — még az általa megállapított értelmükben is — túlságosan aprólékosan bontja szét és különbözteti meg; és e tekintetben messze túllépte azt a határt, a mely a természet megismerésének valódi tudományát a tudósdi casuisticától elválasztja. A Nägeli-Peter-féle Hieracium-monographiának beható kritikája nem tartozik a jelen értekezés feladatai közé, mégis legalább futólag reá kell mutatnunk arra, hogy Nägeli, a ki elméletben oly szigorúan ragaszkodik ahhoz, hogy a faji elkülönítés szempontjából csekély értékűnek tartassék minden változékony és philogenetikailag ma még lényegtelen bélyeg, a gyakorlatban a legcsekélyebb értékű és legváltozékonyabb bélyegekre is súlyt vet és azokat megkülönböztető jegy gyanánt értékeli. Magától értetődik, hogy a ki egy csoport minden változati árnyalatát önálló rendszertani értékkel ruházza fel, végeláthatatlan egyénítésbe esik, és a természetben már úgy is eléggé bonyolult állapotot csak még jobban összekúszálja. Vajjon a *Hieracium*nál, a mely az összes mai növénynemek közt alakban leggazdagabb és melynek állandó alakok képzésére való törekvése ez idő szerint folyamatban van, vajjon épp itt helyeselhető-e az ilyen eljárás, azt én, a kinek tanulmányai távol esnek e nemtől, nem dönthetem el, de még csak meg sem itélhetem. Azt azonban határozottan merem állítani, hogy a *Ranunculus* nem «*Auricomus*»-sectióját illetőleg lényegesen mások a körülmények, a minek következtében annak tárgyalása is más kell hogy legyen. Itt alapjában véve egyetlenegy fajról, a *R. binatus* törzsfajról van szó és a sectiónak helyesebb neve *Binati* volna. Legitim kereszteződés következtében — s *egyazon* faj egyénei közt csakis erről lehet szó, a valódi értelemben vett hybridek ki vannak zárva[1] —, valamint egyéb külső és belső befolyások és változások következtében számos fejlődési alak keletkezett. *Ezek között elsősorban négy főfajt különböztetünk meg, a melyet legalább egy már állandósult philogenetikus jegy választ el*

[1] Hybrid alak származhatik a *R. binatus* vagy valamely e sectióba tartozó alak és például a *R. montanus* vagy *R. acer*-, de nem az *Auricomus*-sectio alakjainak egymás közt való kereszteződéséből.

egymástól. A főfajok közt kialakuló többi alakot pedig — és ebben rejlik egyszerűsbítő módszerünk lényege — két-két, a főfajok közé eső alaksorozatba (közbülső keretfajba) foglaljuk össze, a melyek egyikébe az egyik főfajhoz, másikába a másik főfajhoz közelebb eső alakok tartoznak. Valamennyi alakot, a mely a természetben előfordul vagy előfordulhat, a tudományra és a rendszertanra nézve joggal véljük így összefoglalhatónak, mert köztük a különbségek sokkal csekélyebbek, semhogy azok alapján az egyeseknek külön nevet volna czélszerű adni, miáltal számadásunk végeredményét, és főleg a növény felismerését, megzavartuk volna. Ez az elv vezetett minket az egységes névadás műveletében is, a minek egyben megvan az az előnye, hogy a kombinált kettős név, a nélkül hogy római meg arab számjegyekhez, görög meg latin betűkhöz, symbolikus jelekhez és más mesterkélt segédeszközhöz kellene folyamodnunk, rögtön jelzi a rokonság fokát is, a mely a megnevezett növényt a kétséget kizárólag pontosan meghatározható főfajokhoz fűzi. Előbb-utóbb kénytelenek lesznek a systematikusok magukat arra elhatározni, hogy megtanulják a lemondást és beérjék az emberileg lehetségessel; és nem fognak elérhetetlen dolgokra törekedni. Le fognak mondani arról a kísérletről, hogy a természet bármily csekélyke alakváltozásának külön fajnevet adjanak a rendszerben. A leiró növénytan segédtudományainak, a növényboncztannak, physiologiának, élettannak, földrajznak mélyítésével és kibővítésével napról-napra óriási módon gyarapodni fog a megfigyelt alakváltozások ismerete; nem kisebb mértékben meg fog növekedni azoknak az alakváltozatoknak száma is, a melyeket az elmélet mint logikailag megokolt lehetőségeket állapít meg, a melyeket eddig egy vagy más okból nem figyeltek meg, előfordulásuk lehetősége azonban nem tekinthető kizártnak. E szinte végtelen sok alaknak hogyan adhat helyet a rendszer másként, mint tudományosan megokolt gyüjtő-fogalmak, keretek megállapításával? Van-e emberi elme, a mely e szertelen tömeggel megbirkózik, van-e emlékezőtehetség, a mely magába fogadja? Néhány sokoldalú genusnak, mint a *Salix, Rosa, Rubus, Hieracium, Potentilla* stb. részletes tárgyalásával foglalkozó kisérletek világosan mutatják, hová vezet ez az út. Pedig az e téren eddig végzett munka még mindig csak kísérletszámba megy és korántsem jelenti az idevágó tanulmányok lezárását, mert hiszen a megtárgyalandó anyag még egyre bővül. Itt nem a természet megismerésének korlátozásáról van szó, a mely soha sem szenvedhet csorbát, hanem merően technikai kérdésről, arról, hogy mily módon tárgyalandó az anyag a rendszerben. Kénytelen-kelletlen arra kell majd szorítkozni, hogy az észlelt változások megállapításakor rendszertani egységek gyanánt a csoportoknak és a változó alakoknak jelenleg legfeltünőbb és állandó képviselői írassanak le, a kevésbbé határozott alakok pedig összefoglaltassanak és az ilyen alaksorozatok rokonsági vonatkozásaik kiemelésével *rendszertani egységek* gyanánt adassanak elő. Ime az elvek, a melyeket alapul vettünk.

Teljesen egyetértünk Diels-szel,[1] midőn a systematikusoknak figyelmébe ajánlja a következőket: «Abban, hogy két változékony tényező (a helicomorphia és a virágérés) egyesül és ezzel létrehozza azt a virágzó egységet, a melyet rendszertani ténynek fogadunk el, hathatós momentum rejlik, a mely alkalmas arra, hogy a növényvilágnak alakokban való gazdagságát gyarapitsa. Azok a feltételek ugyanis, a melyek a levélfejlődés sorrendje és a virágérés szabályozásában közreműködnek, időben és térben változnak az éghajlat változásával. Az ő közreműködésük hozza létre a földrajzilag helyi jellegű fajokat és idők folyamán új fajokat teremtenek, a melyek jellemvonásai örökölhetőkké válnak, ezek pedig ismét gyökereivé lesznek új törzseknek és új lehetőségnek nyitnak teret... Ez az út is ahhoz a meggyőződéshez fog minket vezetni, a melyre Klebs (Bot. Centralblatt, XXIV. (1904), 290. l.) más úton jutott. «A typicus vagy közönséges fejlődés csak csekély része a lehető alakoknak.» Bármennyire megtisztult is már napjainkban a faj fogalma, mégis messze vagyunk még mindig attól, hogy az ily észjárás termékenyitő hatását látnók... Nem nehéz megjövendölni, hogy jövőben e tekintetben nagyobb lesz a haladás.»

---

[1] Dr. L. Diels: Jugendformen und Blütenreife im Pflanzenreiche. (1906), 119. l.

A tudomány érdekében szeretnők remélni, hogy csakugyan nagyobb lesz.

Hogy valaki a fajról elméletben tiszta és világos fogalommal bir, a gyakorlatban azonban ismét összezavar mindent és egészen a subjectiv önkényre hagyatkozik, annak tanulságos példáját mutatja HACKEL, a nagy agrostographus, rendkívül szorgalommal készült és magában véve felette érdemes művében: a «Monographia festucarum europæarum»-ban (1882). Utalunk az e mű 44—62. lapján «B. Grade der Speziesbildung» stb. czímű fejezetre, a melyet itt tulajdonképpen egész terjedelmében kellene közölnünk, hogy a szerző gondolatmenetének összes elágazásait pontosan ismertessük. Meg fogjuk kisérleni ennek tárgyilagos vázolását. Megfigyelései és tapasztalatai a következő vallomásra késztetik: «Nincs tehát absolut faj ... a faji fogalom mindenkor relativ marad.» E tényállás érvényesítésére két mód kinálkozott neki: «*a)* az összes megkülönböztethető és újra felismerhető alakokat fajnak veszem ... sorjában leírom ... a kisebb (így!) fajokból csoportokat alkotva, a melyeket aztán az egymástól erősebben különböző fajokkal egyenlő értéküeknek kell tartanom, avagy *b)* hasonlóképen fajnak fogom fel az összes alakokat, de értékük szerint különböző rangot tulajdonítok nekik a beosztásban. Az utóbbi esetben persze a «faj» szó megszünik logikai kategoria lenni ... Valamely genus feldolgozásakor meg kell állapítanom a különbségnek egy lehetőleg határozott mértékét, a mely jellemezni fogja a *faji* fogalmat és ehhez kell magamat aztán tartanom. Én ez utóbbi, az említettől különböző útat választottam; mindenek előtt fajnak fogtam fel azokat az alakcsoportokat, a melyek egymással meglehetősen homogenek, de legközelebbi rokonságuktól *több* állandó, közbeeső alakok híján egészen határozott jellemvonás révén különböznek; a kisebb különbséget felmutató számtalan alakból aztán csoportokat, species collectiva-kat alkotottam, a mely csoportok egymástól nagyobb mértékben különböznek, mint egy-egy csoport tagjai egymás közt.» HACKEL maga is belátja, hogy a faji fogalom ily módon nagyon hypothetikus és a gyakorlatban alig érvényesíthető; a *Festucae ovinae* csoportban az alakok többszörös ide-oda tologatása után szükségessé vált új alakok beillesztése, hogy megközelítő hű kép alakuljon a genetikus összefüggésről. A régibb agrostographusok *empirikus* fajokat írtak le, azaz oly alakokat, a melyek éppen a kezük ügyébe kerültek és nem törődtek azzal, hogy ezek miféle összefüggésben állnak a többivel. Ma már szabad *elméleti* fajokra is gondolnunk, a melyek hivatva vannak a rokonság bizonyos tényeit kifejezni. HACKEL legalább négy értékfokozatot kénytelen elfogadni: a speciest, subspeciest, varietast, subvarietast. *A széttagolásnak alsó határát azonban* — úgymond — *önkényesen kell megállapítanunk* ... A rangérték megitélésére aztán többféle gyakorlati kriteriumot említ, a melyeknek alkalmazása azonban az egyes kutatók egyéni kedve, iskolázottsága és felfogása szerint minden önkényt megenged. Ha nem is fogadjuk el motivumait, mégis jogosnak tartjuk, hogy HACKEL vonakodik követni a KUNTZE (Methodik der Speciesbeschreibung) által az alakban gazdag nemek jellemvonásainak combinatióira ajánlott módszert. KUNTZE ugyanis azt kivánja, hogy az összes tudomásunkra jutott jellemvonások előadassanak, még pedig egyforma módon, egy formula segítségével, a mely visszatükrözi a combinatio elemeit. Azzal, hogy *valamennyi* tudomásunkra jutott alaknak leírását követeli, KUNTZE az ő különben egészséges eszméjének megadta a halálos döfést. Egy ilyen formula alapján álló nomenclatura elfogadása annyi volna, mint ha a JORDAN-féle ördögöt Belzebubbal akarnók kiűzni. HACKEL végül a nomenclatura kérdésével foglalkozik és az elméletileg helyes, gyakorlatilag elhibázott fajfogalmat következetesen a legnagyobb zavarba juttatja, úgy hogy csak mesterkélt eszközökkel tud aztán némileg rendet teremteni.

Távol van tőlünk behatóbb birálat alá fogni a HACKEL-féle felfogást és módszert, hiszen ez külön tanulmányt igényelne. Mégis fel kell vetnünk a kérdést, miért nem ragaszkodik HACKEL a gyakorlatban az elméletileg helyesen megállapított fajhoz és gyüjtőfajhoz, a mely az egyes formák genetikus összefüggését mégis jobban szemlélteti, mint az ő fajai — a melyek tulajdonképpen csak typusok —, alfajai, varietasai és subvarietasai stb.? Ha ő oly nagyon — és nézetünk szerint joggal — irtózik a JORDAN- és GANDOGER-féle egyénítéstől, miért aprítja fel mégis a saját species collectiváit, miután maga is bevallja, hogy ily felaprítással sem lehet a természet alakgazdagságát kimeríteni és hogy még egyre új és újabb eltolásokra és beszúrásokra lesz szükség, mert a természet nem fog alkalmazkodni az önkényes beosztáshoz? A hiba abban rejlik, hogy ő sem ismerte a faji felosztás biztos mértékét. Ha valaki csalhatatlan philogenetikus jellemvonást fogad el annak mértékéül, mint a hogy mi teszszük, mintegy varázsszóra eltünik minden kétség és nehézség. Mi is elismerjük, hogy nincs absolut faj, mert hisz a természeti erők árapálya állandó és alakító erejük egy perczig sem tétlen. Azt azonban állitjuk, hogy a nagy földtani korszakok keretében igenis vannak fajok; és mivel hogy az emberi tudomány csak ezeknek a fajoknak megfigyelésével foglalkozhatik, azt az álláspontot kell elfogadnunk, hogy a rendszernek ismernie kell az egyes időpontok absolut fajait.

Oly fajoknál, a melyek nálunk a jégkorszak óta állandók és változatlanok maradtak, például a *Myosurus minimus*, az *Isopyrum thalictroides*, ez magától értetődőnek látszik, bár nem tarthatjuk kizártnak, hogy élesszemű megfigyelők még e fajok körében is találnak majd philogenetikus jellegű változásokat. Bonyolultabbá válik azonban a dolog a sokalakú fajoknál, a melyek számtalan elváltozást és átmenetet mutatnak. Ha a *R. binatus*t philogenetikus bélyegek alapján fajnak tekintjük, akkor a *R. auricomus*, *R. cassubicus* és *R. flabellifolius* tulajdonképpen nem is absolut fajok, de a rendszerben mégis ilyenekül tekinthetjük és kell is tekintenünk, mert már is philogenetikailag élesen elhatárolt, egymással össze nem cserélhető fejlődési fokokat jelentenek, a mi az élesen megkülönböztető diagnosisban jut kifejezésre. E fajok tehát nem ideális alkotások, hanem a természetben valóban létező adottságok.

A mi aztán a temérdek átmeneti alakot illeti, a melyek előadása és rendszertani besorozása immár évszázados viták tárgya, nos ezekre nézve HACKELlel egyetértőn az az álláspontunk, hogy azok alaksorozatokba, keretfajokba egyesítendők. Ennek az elvnek gyakorlati alkalmazásakor azonban kettéválnak útjaink. Minthogy HACKEL nem ismer philogenetikus értékmérőt, kénytelen e fajokat (alaksorozatokat) újra felaprítani és e részeket merev keretbe szorítani, ezzel pedig önmagát ama logikai kényszer elé állította, hogy a megfigyelt anyag és a megfigyelt elkülönítő bélyegek szaporodtával mindenkor változtatást és helycserét kell megengednie. Be kell vallania, hogy a talaj, a melyre helyezkedett és a melyen dolgozik, nagyon bizonytalan és ingatag, a minek pontosan kifejezést ad a nomenclatura is, a mi a synonymica szempontjából napról-napra fokozódó nehézségekkel jár.

Más, egyszerűbb és a természeti jelenségekkel egybehangzó képet ad az itt ajánlott és használt módszerünk. Midőn a philogenetikusan hajszálélesen elkülönített két-két faj közt létező átmeneti alakokat két-két egymástól különböző alaksorozattá (keretfajjá) egyesítjük: a természet való jelenségeit adæquatus módon mutatjuk be. Nem merev, hanem nagyon is tágítható keret foglalja magában a mi keretfajunkat, a mely megengedi, hogy benne egy bizonyos rokonsági körnek még ezután felfedezendő bármely alakja helyet foglalhasson. Itt nem fenyeget semmiféle rendszertani mesterkedés veszedelme, mert hiszen a rokonsági viszonyokat világosan feltünteti a nomenclatura. Így a *Ranunculus binatus—auricomus* alaksorozat felöleli mindazokat az alakokat, a melyek eddig ismeretesek vagy a melyeket a jövőben meg fognak figyelni, és a melyek közös rokonsági jellemvonásokat mutatnak, még pedig az adott példában inkább a *R. binatus*éit, mint az *R. auricomus*éit. A *binatus—auricomus* alaksorozat tehát jelentené a *R. binatus*nak Hackel értelmében vett összes alfajait, varietasait, subvarietasait. Meg kell ugyan engednünk, hogy a mi keretfajunk is typust jelent, ámde valódi, concret fajjá válik az által, hogy mi e typussal egy magában lezárt rokonsági kört fejezünk ki; hogy továbbá vele a genetikus fejlődés útjának egy élesen elhatárolt szakaszát jelöljük meg. Fajjá válik az által, hogy közös, valóban létező és biztos kötelék tartja össze a benne egyesített alakokat; fajjá válik az által, hogy genetikus rokonság fűzi ezeket úgy egymáshoz, mint az őket körülhatároló két főfajhoz. Ezt a rokonsági köteléket fejezi ki nomenclaturánk is.

Ezzel a tudományt és annak művelőit, mint már hangsúlyoztuk is, nem fosztjuk meg attól a lehetőségtől, hogy emez alaksorozatok keretén belül egyes változati és átmeneti alakokat megkülönböztessenek és együvé tartozandóságukat megállapitsák, szóval minden irányban tudományos vizsgálat tárgyává tegyék. Ellenben szilárd meggyőződésünk, hogy a természeti jelenségek megismerése és a valódi természeti folyamatokról való tudomány, valamint e folyamatok rendszertani áttekinthetősége éppen nem függ attól, hogy minden, még oly csekély alakváltozat is külön fajnevet kapjon. Kutatásaink eredményének egyszerű és világos előadása nemcsak hogy nincs a tudomány hátrányára, hanem azt mindenképen előbbre viszi. A ki mégis rendületlenül megmarad a nevekkel való játéknál, mert ez a nagy tudás látszatát keltheti: ám folytassa időtöltés gyanánt. De meg kell barátkoznia azzal a gondolattal, hogy nem a tudomány, nem a gyakorlati életet, hanem kizárólag a könyvtárak számára dolgozik.

V. fejezet. Leíró rész.

Sectio. Auricomus.

E. M. Spach az ő «Histoire naturelle des végétaux» czímű művének VII. kötetében, a 210. lapon (1839 ápr.) a *Ranuncella*-csoport «sous-genre»-jeként a következő diagnosissal állítja fel az «*Auricomus*» sectiót:

Sous-genre IV. Auricomus Spach.

Racine fibreuse, polycéphale. Tiges paniculées, multiflores, feuilles radicales tantôt palmatiparties, tantôt pedatiparties, tantôt lobées, tantôt indivisées. Feuilles caulinaires subsessiles, pédalées. Pédoncules terminaux ou subterminaux. Fleurs jaunes. Pétales comme vernissés (souvent en partie abortifs, ou par avortement moins de 5): fovéole nectarifère marginée. Etamins nombreuses, plus courts que les pétales, plus longues que le pistil; anthéres oblongues, comprimées, mucronées, latéralement déhiscentes. Étairion subglobuleux: nucules nombreuses, coriaces, lenticulaires, lisses, immarginées, tricarénées au bord antérieur, uni-carénées au bord postérieur, terminées en court becs ensiforme.

Ezt a diagnosist bátran elfogadhatjuk, mert eléggé híven írja le a csoport sajátságait. Igaz, hogy a termésre vonatkozólag bizonyos mértékben fogyatékos, mert a termést csupán lencsealakúnak és simának mondja, holott az valójában a természetben hasasan-lencsealakú és ha sima is, azaz nincs is rajta sem szemölcs, sem tüske, mégsem kopasz, hanem bársonyos.

Spach a sectio egyetlen fajául a *R. Auricomus* L.-t említi, ehhez synonymon gyanánt hozzávonja a *R. vernus* Spen. Fl. frib., *R. auricomus* L. Engl. bot. T. 624, flor. dan. T. 665, *R. polymorphus* Allion. fl. ped. t. 82 f. 2, *R. mitis* Gilib. és *R. cassubicus* L. (var. *grandiflora*)-t.

Látni való, hogy Spach *R. auricomus*-a felöleli az összes fajokat és alakokat, kezdve a *R. binatus* Kit.-től (azt mondván a tőlevelekről, hogy azok osztottak vagy osztatlanok) el egészen a *R. cassubicus*ig.

A *R. flabellifolius* Heuff. létezéséről Spachnak még nem lehetett tudomása.

Clavis analytica specierum principalium.

1. Folia radicalia segmentata: *R. binatus* Kit.
   « « inpartita 2.
2. Folia radicalia reniformia: *R. auricomus* L.
   « « cordato-reniformia vel orbiculariter fere clausa 3.
3. Folia radicalia cordato-reniformia: *R. cassubicus* L.
   « « orbiculariter fere clausa: *R. flabellifolius* Heuff.

1. Valamennyi tőlevél osztott: *R. binatus* Kit.
   « « osztatlan 2.
2. Valamennyi tőlevél vesealakú: *R. auricomus* L.
   « « szíves-vesealakú vagy csaknem köralakúan zárt 3.
3. Valamennyi tőlevél szíves-vesealakú: *R. cassubicus* L.
   « « csaknem köralakúan zárt: *R. flabellifolius* Heuff.

Clavis analytica totae sectionis.

1.	Folia radicalia omnia segmentata — —	*R. binatus* Kit.
	« « partim segmentata, partim impartita —	2
	« « omnia inpartita — — — — — — — — — —	6
2.	Folia radicalia reniformia — — — — — — — — — — — — —	3
	« « cordato-reniformia — — — — — — — — —	4
	« « orbiculariter fere clausa — — — — — —	5
3.	Folia caulina lineari-lanceolata, integra	*R. binat-.auric.* m.
	« « ± « « subdentata	*R. auric.-binat.* m.
4.	Folia caulina lineari-lanceolata, integra	*R. binat.-cassub.* m.
	« « ± late-lanceolata, dentata —	*R. cassub.-binat.* m.
5.	Folia caulina lineari-lanceolata, integra	*R. binat.-flabell.* m.
	« « ± flabelliforme partita — —	*R. flabell.-binat.* m.
6.	Folia radicalia reniformia — — — — — — — — — — — — — —	7
	« « cordato-reniformia — — — — — — — — —	8
	« « orbiculaliter fere clausa — — — — — —	9
7.	Folia caulina lineari-lanceolata, subdentata — — — — — —	*R. auricomus* L.
	« « late-lanceolata, dentata —	*R. auric.-cassub.* m.
	« « flabelliforme partita —	*R. auric.-flabell.* m.
8.	Folia caulina ± lineari-lanceolata, subdentata — — — — — —	*R. cassub.-auric.* m.
	« « late-lanceolata, dentata	*R. cassubicus* L.
	« « flabelliforme partita — —	*R. cassub.-flabell.* m.
9.	Folia caulina lineari-lanceolata, subdentata — — — — — —	*R. flabell.-auric.* m.
	« « late-lanceolata, dentata	*R. flabell.-cassub.* m.
	« « omnia flabelliforme lobata	*R. flabellifol.* Heuff.

Jegykulcs.

1.	Valamennyi tőlevél osztott — — — —	*R. binatus* Kit.
	A tőlevelek részint osztottak, részint osztatlanok — — —	2
	Valamennyi tőlevél osztatlan — — — — — — — — — — —	6

2. A tőlevelek vesealakúak ... 3
A « szívesen-vesealakúak ... 4
A « csaknem köralakúvá záródók ... 5

3. A szárlevelek szálas-lándzsások, épszélűek ... *R. binat.-auric.* m.
A « többé-kevésbbé szálas-lándzsások, kevéssé fogazottak ... *R. auric.-binat.* m.

4. A szárlevelek szálas-lándzsások, épszélűek ... *R. binat-cassub.* m.
A « többé-kevésbbé széles-lándzsások, fogazottak ... *R. cassub.-binat.* m.

5. A szárlevelek szálas-lándzsások, épszélűek ... *R. binat.-flabell.* m.
A « többé-kevésbbé legyezősen osztottak ... *R. flabell.-binat.* m.

6. A tőlevelek vesealakúak ... 7
A « szívesen-vesealakúak ... 8
A « csaknem köralakúvá záródók ... 9

7. A szárlevelek szálas-lándzsások, kevéssé fogazottak ... *R. auricomus* L.
A « többé-kevésbbé széles-lándzsások, fogazottak ... *R. auric.-cassub.* m.
A « többé-kevésbbé legyezősen osztottak ... *R. auric-flabell.* m.

8. A szárlevelek többé-kevésbbé szálas-lándzsások, fogazottak ... *R. cassub.-auric.* m.
A « széles-lándzsások, fogazottak ... *R. cassubicus* L.
A « többé-kevésbbé legyezősen osztottak ... *R. cassub.-flabell.* m.

9.	A szárlevelek többé-kevésbbé szálas-lándzsások, fogazottak	*R. flabell.-auric.* m.
	A « többé-kevésbbé széles-lándzsások, fogazottak	*R. flabell.-cassub.* m.
	Valamennyi szárlevél legyezősen karélyos	*R. flabellifol.* HEUFF.

Az *Auricomus*-sectio typikus bélyege *a termés bársonyos felülete.* Ez oly csalhatatlan, állandó, öröklődő szerveződési jegy, a mely számtalan nemzedéken át fejlődött ilyenné. Ehhez a typushoz legközelebb áll a *R. montanus*-typus és ennek számos változata, a melyet azonban amattól a vaczok szőrössége, a termés kopaszsága, a gyökértörzsnek vízszintes vagy a vízszintes felé hajló növési iránya jelentékeny módon elkülönít. A *R. Acer*-csoporthoz is közel áll az *Auricomus*-typus; leginkább elkülöníti tőle az utóbbi termésének domború alakja és bársonyos felülete. A *R. acer* és legközelebbi rokonságának termése ezzel szemben lencseszerűen összenyomott és teljesen kopasz. Mind a három typus szára hengeres, virágkocsányai nem rovátkoltak.

A megkülönböztető bélyegek tehát a következők:

auricomus-csoport:	*montanus-csoport:*	*acer-csoport:*
A gyökértörzs leharapott, rojtos.	*A gyökértörzs* vízszintes, húsos.	*A gyökértörzs* leharapott, rojtos.
A tő- és szárlevelek különböző alakúak.	*A tő- és szárlevelek* különböző alakúak.	*A tő- és szárlevelek* alakja egyforma.
A vaczok kopasz.	*A vaczok* szőrös.	*A vaczok* kopasz.
A termés alakja *hasas,* bársonyos felületű.	*A termés* alakja *domború,* kopasz.	*A termés lencsealakún összenyomott,* kopasz.

Mind a három csoportnak fontos negativ jegye a heteracronus levélalakulás hiánya, tehát sohasem találunk rajtuk szárnyasan hasogatott vagy ilyen alakhoz közeledő levelet.

A tőlevelek polacronus, triacronus és monacronus képződésűek, a szárlevelek pedig abban az esetben, ha eltérők a tőlevelektől, triacronusak. Szárnyalt, vagy szárnyasan osztott levél e csoportokban sohasem fordul elő.[1] SCHURnak adata (Enumeratio plant. transsylv. 1866), midőn a *R. auricomus*nál «laciniis pinnatifidis»-t említ, határozottan hibás, legfeljebb erősen fogazott, nem pedig szárnyasan hasított levélre vonatkozhatik.

Közös jellemvonások.

Mielőtt a fő- és közbülső fajok leírásához fognánk, fölösleges ismétlések elkerülése czéljából rámutatni akarunk azokra a bélyegekre, a melyek az *auricomus*-typus összes alakjaiban többé-kevésbbé közösek.

Az összes, e typushoz tartozó alakok *gyökere* rojtos; valamennyinek van rövid tőkéje; gumósan megvastagodott vagy húsos gyökere egyiknek sincs.

A hüvelyes tőlevél vagy a tőlevelet helyettesítő *hüvely* nem szerepelhet faji megkülönböztető bélyeg gyanánt, mert jelenlétének vagy hiányának oka az ontogenetikus, nem pedig a philogenetikus fejlődésben rejlik. A. v. KERNER az ő említett értekezésében[2] találóan bebizonyította, hogy a faji megkülönböztetés szempontjából mennyire jelentőség híjján van a hüvely. Lemez nélkül való hüvely és hüvelyes tőlevél akad nemcsak minden alak körében, hanem gyakran egy és ugyanazon a tövön is. Semmi sem okozott akkora zavart, kivált a nagylevelű alakok megkülönböztetésében és meghatározásában, mint az,

---

[1] H. ZAPALOVICZ a Conspectus floræ Galiciæ criticus II. köt. 263. lapján a *R. cassubicus* L.-hez a következő megjegyzést fűzi: «A specie subsequenti (auricomo) rostris longioribus, *receptaculis pubescentibus*, pedunculis, præcipue in statu maturo *sulcatis*, foliis basalibus paucioribus et inprimis vaginis aphyllis in basi caulis distinctus.» A magház szőrösségének és a virágkocsány rovátkoltságának jegye határozottan hamis s csak téves megfigyelésen vagy elcserélésen alapulhat.

[2] A. v. KERNER: Ranunculus cassubicus in Niederösterreich aufgefunden. Verh. d. Zool.-bot. Ges. in Wien. XII. köt. 4. füzet (1862) 1273. ll.

hogy kiváló botanikusok, mint például Wimmer és Grabowsky, Koch, Reichenbach és nagyszámú követőik ebben a közömbös, sőt csaknem jelentéktelen bélyegben faji elkülönítő jellemvonást láttak és Linné diagnosisát ezen az alapon egészítették ki.

A *szár* és ágainak alakja s elágazási módja, magassága, erőteljessége szintén nem szerepelhet faji elkülönítő bélyeg gyanánt. Szár dolgában az összes alakok nem igen különböznek egymástól, legfeljebb azt említhetjük fel, hogy a *R. binatus* Kit. faj dichotomos elágazása feltünőbben jelentkezik. Nem hagyjuk említetlenül azt sem, hogy a termőhely és a táplálkozási viszonyok különbözősége, előnyei és hátrányai szerint elváltozásokat hozhat létre, de ezek csupán a termetet érintik és nem szolgálhatnak faji megkülönböztető bélyegül.

A *tőleveleket* illetőleg ismételten kell reámutatnunk arra, hogy csakis a hasogatottság vagy az osztatlanság jelent philogenetikus, tehát faji megkülönböztető bélyeget. Nem áll ez azonban a levelek osztottságának módjáról, sem pedig a levél élének mineműségéről.

Ugyanezt mondhatjuk a szárlevelekről. Ezeken nyilvánul meg a közbülső alakok jellege a leghatározottabban. Ezek járulnak leginkább hozzá a habitus képének plastikájához. Ha ezeket ebből az okból a közbülső keretfajok megkülönböztető bélyegéül használjuk, szükséges lesz tekintetbe venni osztottságuk módját (keskeny-szálas-lándzsás, széles-lándzsás, legyezőszerű sallangok) és élük mineműségét (épélű, fogazott stb.).

A *virágkocsányok* mind hengeresek.

A *vaczok* valamennyinél meztelen. Meg kell jegyeznünk, hogy a *R. cassubicus* és a hozzá közel álló boglárkák vaczka hajlamot mutat arra, hogy kúpalakból hengeressé váljék.

A *kehelylevelek* mindig elállók.

A *szirmok* mind sárgák és nem mutatnak lényeges különbségeket. Nagyságukra s alakjukra nézve ugyanaz áll, mint a mit már a szárról elmondtunk. Az a körülmény, hogy az összes fajok körében találunk oly példányokat, a melyeken a sziromlevelek hiányzani látszanak, nem függ össze ezeknek a példányoknak tenyészési viszonyaival. Ennek oka az, hogy ezek a

Ranunculus-fajok malakophil növények és virágaikat gyakran lelegeli a csiga.[1]

A *porzókban* sincs különbség.

A *mézfejtő* az összes fajoknál egyforma. Ha egyes példányokon el is csenevészesedik, sőt hiányzik,[2] akkor ez egyéni, esetleg beteges vagy teratologikus jelenség; de korántsem faji megkülönböztető bélyeg.

A *termés*. Maga a termés (carpidium) az összes fajoknál egyforma. Csupán a termés csőre (rostrum) mutat különbséget. A *R. binatusé* és *R. auricomusé*, valamint az e fajokhoz közelálló közbülső alakoké rövidebb és már aljától kezdve horgosan görbült, a *R. cassubicusé* és a hozzá közelebb álló alakoké ellenben hosszabb szokott lenni, és csupán a csúcsán görbült. Azonban ez a különbség nem állandó: a különböző fajokhoz tartozó példányokon egy és ugyanazon a tövön találunk aljuktól fogva görbülő és csak a hegyükön görbült téméscsőrt. Ezenkívül a *R. cassubicuson* is akadunk csupán «basi fere uncinata rostra»-ra. A csőr e sajátsága tehát nem használható faji megkülönböztetésre. Talán nem tévedünk, ha felteszszük, hogy a terméscsőr görbülésének módja alkalmazkodási bélyeg és eredetét külső, nem a plasma belső structurájának és tulajdonságainak, hanem talán többnyire élettani és oekologiai okoknak köszöni. A csőr ez alakja esetleg közvetve abban lelheti okát, hogy így könnyebben tapadhat a közelébe jutó állatokra, hogy a földre hulláskor jobban kötődik a talajhoz, talán jobban védi a növényt kisebb állatok támadása ellen, vagy más, még ismeretlen körülményben. Ámde az a körülmény, hogy állandósága még mindig nem tökéletes, azt bizonyítja, hogy a külső inger vagy általában a külső befolyás még mindig nem elég erős arra, hogy a plasma belső structurájára végérvényesen hasson, azt átalakítsa és öröklődő ellenhatást váltson ki benne, hanem most csupán a hasonló viszonyok közt élő egyénekre

---

[1] F. Matousek: Ranunculus auricomus auch eine malakophile Pflanze. Magy. Bot. Lapok I. 57. l.

[2] *R. paluster* Hegetschw. és *R. paluster* Rikli. Hegi: Ill. Fl. v. Mitteleuropa 566. l.

egyformán ható, azonos ingereknek azonos következményét jelenti. Hogy valamikor valóban faji megkülönböztetésre használható bélyeggé fejlődhetik, abban idevágó számos megfigyelésünk alapján nincs okunk kételkednünk. A *R. polyanthemos*nál és a *R. nemorosus*nál — hogy példára utaljunk — ez a fejlődés már megtörtént.

A mi végre a szár és a levelek *mezét* illeti: megfigyeléseim során ebben az irányban nem tudtam különbséget megállapítani. Ez a sajátság egyetlen alaknál sem mutatja az állandóságnak oly fokát, a mely fajok vagy alakok megállapítása szempontjából csak némileg is tekintetbe vehető volna.

1. Ranunculus binatus Kit.

R. foliis radicalibus segmentatis, caulinis digitato-sectis, laciniis lineari-lanceolatis, integerrimis.

Ez a jellemzés hű képét adja annak a növénynek, a mely a Nemzeti Múzeum Kitaibel-féle növénygyüjteményében fasc. XVI. No. 170 sz. a van meg és a melynek czédulájára Kitaibel sajátkezűleg a következő szókat írta: «Ranunculus binatus mihi». A Reichenbach-féle leírás (Flora excurs. 723. l. [1831]) nem egy részében helytelen, mivelhogy a folia radicalia nem «cordato-reniformia», hanem csak reniformia és a partitiones laterales nem mindig «falcatæ», bár akadnak ily sarlós sallangok is. Könnyen megesik az ilyen tévedés, mihelyt valaki a philogenetikus bélyegtől, a levél osztottságától eltér és az osztottság módját keresve, az ontogenetikus jellemvonások leitőjére lép.

Az a körülmény, hogy a *R. binatus*t a legtöbb botanikus félreösmerte vagy mellőzte — mint már említettük —, csaknem lehetetlenné teszi e faj földrajzi elterjedésének teljes biztonsággal megállapitását. Az idevágó irodalom tüzetes áttekintése után mégis a valószínűség nagy fokával tehető fel, hogy e faj főként Európa középső, északi, keleti és déli részén van leginkább elterjedve. Nyugat felé fogy, míg a délkeleti területeken az *auricomus*-typus összes formái közt a leggyakoribbnak látszik.[1]

[1] V. ö. E. Pospichal: Flora des österr. Küstenlandes II. 2. 87. l. és E. de Halácsy: Conspectus floræ græcæ I. 22. l.

Ez alkalommal meg kell jegyeznem, hogy a midőn a *R. binatus* KIT.-ről beszélek, azzal nem mondtam még azt, hogy KITAIBEL az ő fajánál, jellemzésénél pontosan ugyanazt a növényt tartotta szem előtt, a melynek diagnosisát itt adtuk. A faj, a melyet *R. binatus* KIT. névvel említek, minden egyes porczikájában és az utolsó hajszálig való alakulásában bizonyára nem fedi teljesen a KITAIBEL által így megnevezett fajt. Nemcsak azért nem, mert a természetben sohasem akad két, egymáshoz még oly hasonló ugyanahhoz a fajhoz tartozó egyén, a mely minden részében tökéletesen azonos, hanem mélyebb, benső okból is. Képzeljük magunkat egy botanikusnak, ez esetben KITAIBEL-nek helyzetébe, a midőn egy új faj megállapítását látja szükségesnek. Maga előtt lát egy organismust, a mely különbözik a legközelebb álló, rokon organismusoktól. Ha lelkiismeretes és komoly búvára a természetnek — mint a hogy KITAIBEL az volt —, akkor e megfigyelés hatása alatt alaposan megvizsgálja ezt az organismust annak a megállapitására, hogy vajjon első benyomása alapos avagy csalóka volt-e; meg fogja tehát vizsgálni, vajjon az észrevett különbségek a valóságban helytállók-e, vajjon mi a lényegük és vajjon feljogosítanak-e arra, hogy új faj megkülönböztető bélyegei gyanánt szerepeljenek. Alkalmazzuk az imént mondottakat a *R. binatus* esetére. Hogy KITAIBEL ennek a boglárkának éppen ezt a nevet adta, arra mutat, hogy neki elsősorban a növény szárának és virágzatának elágazási módja, feltünően megnyilvánuló dichotomiája tünt fel. Ám ez a jelenség előkerül — ha nem is oly határozottan feltünő módon — az *Auricomus*-sectio más boglárkáinál is. Tovább kutatva látta, hogy növénye minden részében karcsúbb, finomabb, mint azok, a melyeket eddig *R. auricomus* néven ösmert. Ez azonban esetleg csupán a helyi életviszonyokban gyökerező jelenség is lehetett és talán nem is általános. Tovább kutatott tehát és rájött, hogy e boglárka tőlevele kizárólag osztott, holott a botanikusok *R. auricomus*a vagy csupán osztatlan, vagy osztatlanokkal vegyes osztott tőlevelekkel bir. Itt meglelte a kérdés sarkpontját, ebbe kapaszkodott és az új fajt felállította. De KITAIBEL épp oly kevéssé ismerte az osztottság philogenetikus jelentőségét, mint a hogy nem ismerte fel azt egyetlen botanikus sem, sem előtte, sem utána. Tehát ő sem fogadta el vezérfonálul a levél osztottságát, hanem irányadónak a levél osztottságának mikéntjét vette. Ennek következtében ő maga is nem egyszer összezavarta a tulajdon *R. binatus*át oly alakokkal, a melyek ehhez, vagy a *R. auricomus*hoz közel állanak; mint a hogy azt az ő növénygyüjteményében a *R. auricomus* vagy a *R. auricomus*, an *binatus?* jelzéssel ellátott növények világosan elárulják. Így eshetett meg, hogy tévesen *R. auricomus*-nak jelölte meg a saját *R. binatus*-át. Gyüjteményében azonban nincs rá eset, hogy igazi *R. auricomus*t *R. binatus*nak tartott volna. Ebből nyilvánvaló, hogy többszörös tévedése ellenére is meglehetősen közel járt a természetes igazsághoz: az ő *R. binatus*a meglehetősen szük keretben mozog, a *R. binatus* és a *R. auricomus* közt fönnálló alaksorozatban. S ha nem tűzzük ki éppen czélul az új nevek halmozását, a synonymonok nyügének gyarapítását és nem helyezzük a szerzői hiúságot a természeti jelenségek helyes megösmerése fölé, akkor szivesebben ragaszkodunk a rég megszokott névhez és nem kutatjuk azt, hogy Kitaibel kezében milyen alak volt, hanem azt az értéket kölcsönözzük leírásának és az általa adott névnek, a milyen azt megilleti és nem vetünk ügyet a parányi eltérésekre.

Hiszen a diagnosisok világosan és határozottan mutatják, hogy miről van szó. Lényegbevágó, öblös tévedés itt ki van zárva.

Hosszasabban időztem ennél a kérdésnél, mert az itt kifejtett szempontot mutatis mutandis alkalmazni fogom a többi főfajra, valamint azokra a közbülső alakokra is, a melyeknek már van megfelelő nevük az irodalomban. Ezzel elkerülöm az ily fejtegetések megismétlését.

2. Ranunculus auricomus L. Spec. ed. I. (1753).

R. foliis radicalibus reniformibus crenatis excisis; caulinis digitatis linearibus, subdentatis.

A boglárka, a melyet Linné e szókkal írt le, betűről betűre megegyezik azzal a *R. auricomus*-szal, a melyet mi ilyennek minősítettünk. Linné ezt a boglárkát különböző időközben különbözőképpen értelmezte. A Hort. cliff. (1737) a következőképpen írja le:[1] Folia radicalia: primum reniforme est, crenatum et integrum, reliqua radicalia triloba, tandem multifida, caulina digitata, fere sessilia, verticillatim caulem ambientia, laciniis lineari-lanceolatis, superne serratis. Petalum unum alterumve floris sæpe non excrescit. Ez az alak a mi binatus-cassubicusunknak felel meg. Mi természetesen a későbbi leírást tekintjük iránytadónak, a melyet a két legfontosabb és iránytadó bélyeg, azaz a vesealakú, osztatlan tőlevél és a szárlevelek keskeny-szálaslándzsás sallangjai dolgában LINNÉ a Fl. Succ. II. kiad. (1755), a Spec. II. kiad. (1763), a System., II. kiad. XII. (1767) sem változtat meg lényegesen. Teljesen megmagyarázhatatlan a Mant. II. kiad. 407. l. (1771) következő megjegyzése: «Dignoscitur folio radicali cordato». Mivelhogy azonban LINNÉ a Syst.-ban leírt *R. auricomus*hoz a Hort. cliff.-et is idézi, nyilvánvaló és a többi idézetből is kiviláglik, hogy a félreérthetetlen leírás ellenére is a *R. auricomus* neve alá foglalja a többi osztott tőlevelű alakot is. Egybevág ezzel az a körülmény is, hogy a *R. binatus*, *R. binatus-auricomus* (*R. sibiricus* GLEHN), *R. auricomus-binatus* Svédországban nagyon gyakori alakok. Mindezek ellenére, a leírás betűjéhez ragaszkodva a LINNÉ-féle nevet fogadom el annak a fajnak megjelölésére, a melyet *auricomus*nak fogok fel, mert ez a név már meggyökerezett; és helytelen volna ujjal pótolni. Ha szorosan LINNÉ leírásához ragaszkodunk, akkor az ő faja az itt leírt fajjal teljesen egybevágó.

A *R. auricomus* egész Európában vegyesen nő a *R. binatus*-szal; NYMAN[2] adata, mely szerint Spanyolországban és Olaszországban nem nő, téves. (Lásd a 383. lapot.)

3. Ranunculus cassubicus L. Sp. ed. I.

R. foliis radicalibus subrotundo-cordatis, crenatis, caulinis digitatis late-lanceolatis dentatis.

---

[1] Az idézetek a RICHTER-féle Codex botanicus Linnæanusból (1835 valók.

[2] Consp. fl. europ. (1878—1882), 12. l.

Ez esetben is megtartottam a LINNÉ-féle nevet, mert leírása az utolsó betűig födi azt a fajt, a mely a mi felfogásunk szerint a *R. binatus* fejlődésének második, igen jellegzetes állomása, bár LINNÉ a *R. cassubicus* névvel nem mindig azt a boglárkát jelölte meg, a melyet e néven később WIMMER és GRABOVSKI írt le és a melyet KOCH további fejtegetései alapján a mai napig a *R. cassubicus* névvel jelölnek. Tudjuk, hogy e fejtegetések a fősúlyt a lemez nélküli hüvelyekre vetik, a mit LINNÉ meg sem említ. Alaktani tanulmányok, a melyek minden systematikai értéktől megfosztották ezt a bélyeget, bebizonyították, mily helyesen járt el LINNÉ, midőn e bélyegre ügyet sem vetett és csupán a tőlevél nagyságát és alakját vette figyelembe.

LINNÉ az ő *R. cassubicus*ának elterjedési körét «Cassubia, Sibiria»-ra korlátozta. Ámde e növény Európa egész Keletén otthonos, legnyugatibb lelőhelye Alsó-Ausztriában lehet. A *R. binatus*t és *R. auricomus*t a *R. cassubicus*-szal összekötő közbülső alakok pontusi és földközi-tengermelléki területeken is nőnek, a mit bizonyít FIORI (Flora analitica d' Italia, vol. I. 1896—1898), a ki még hozzá a *R. cassubicus*t törzsfajnak, a *R. auricomus*t pedig változatának tekinti; továbbá BOISSIER (flor. orient. I. 47. l. [1867]) adata: «foliis radicalibus cordato-orbiculatis», VISIANI (fl. dalmat. [1882] III. 84. l.), bár ez a szerző nem sorolja fel az általa REICHENBACH Icon.-ből idézett képek között a *R. cassubicus*ét és végre GRISEBACH (Spicil. fl. rumel. et lith. [1843] I. 310.), a ki a *R. auricomus*t csaknem éppen úgy írja le, mint később BOISSIER tette.

Svájczban nem terem a *R. cassubicus*. H. BROCKMANN-JEROSCH (Die Pflanzengesellschaften der Schweizer Alpen [1907] I. Die Flora des Puschlav, 131. lap) felemlíti ugyan, de kételkedik benne, vajjon csakugyan LINNÉ valódi *R. cassubicus*a-e. Az erre vonatkozó megjegyzés így szól: «Wiesen beim Berninawirtshaus (Killias herb. !), Sumpfwiese und ged. Wiesen «Bernina alta» 2100 m., von diesem Standort von den früheren Autoren als *R. auricomus* bezeichnet; Puschlav (Anzi, Olgiati in Brügg. man). Ob es sich bei dieser letzten Angabe um *R. auricomus*

L. wie angegeben wird, oder um *R. cassubicus* handelt, kann ich in Ermangelung von Belegexemplaren nicht entscheiden».

NEILREICH abbeli nézetének megerősítésére, hogy a *R. cassubicus* L. fajilag nem különbözik a *R. auricomus* L.-től, diadalmasan idézi (Aufzählung der in Ungarn und Slavonien bisher beobachteten Gefässpflanzen, [1866]. 240. l.) MAUKSCH plébános egy kéziratából: «Ismételt kisérletek megmutatták, hogy a *R. cassubicus* mivelés útján *R. auricomus*-szá válik». Ez az idézet azonban mitsem bizonyít NEILREICH javára, mert MAUKSCH az akkori idők felfogásához híven a *R. auricomus*nak egy erőteljesebb példányát nézte *R. cassubicus*nak és a boglárka, a melylyel kisérletezett, minden valószínűség szerint csak éppen valamely *R. auricomus*-példány volt. De még az esetben is, ha valódi *R. cassubicus*-szal volt dolga, nem hagyható figyelmen kivül, hogy a tenyésztési kisérlet eredménye csak éppen a törzsökös rokonság mellett szól és nem bizonyit egyúttal a faji azonosság mellett is. Azonfelül bizonyára nem tulajdonítható egyforma érték minden tenyésztési kisérletnek, mert hiszen tudjuk, mi minden függ az alkalmazott módszertől és mily nehéz minden zavaró hatást kiküszöbölni, a melyek pedig könnyen bizonytalanná teszik az olyan tenyésztési kisérletek értékét, a melyek révén a szabad természetben végbemenő folyamatokra nézve akarunk következtetést vonni. Egyebekben mindenkinek jogában áll a maga izlése és fajfelfogása szerint a *R. auricomus*t és *R. cassubicus*t egyazon faj kétféle változatának, vagy pedig két önálló fajnak tekinteni. De a természet felismerésének és a felismert dolgok szabatos előadásának elengedhetetlen követelménye, hogy élesen és félreérthetetlenül elhatároljuk azt, a mi már kialakult és állandó, attól, a mi még csak kialakulófélben van; tehát elválasszuk a fajt jellemző typust a fejlődési vagy átmeneti alakoktól. Ennek a követelménynek az idézett irány hivei, legalább a *R. auricomus* esetében, éppen nem felelnek meg. Hogy is ösmerhetnők fel a változatot, alfajt, alakot vagy hasonló rendszertani egységet, ha nem ösmerjük a fajt; hogyan mérlegeljük rendszertani értékét, midőn ehhez hiányzik a szükséges alap, a mérték maga.

Valaki ránk olvashatná, hogy alapjában véve mi is csak egy fajt, a *R. binatus*t fogadjuk el és hogy a többi itt említett «főfaj» tulajdonképpen mégsem egyéb a törzsfaj megannyi fejlődési alakjánál. Ezt megengedjük. Nekünk nem is a név fontos, hanem a dolog veleje. Rögtön más világításban látjuk az általunk képviselt álláspontot, ha meggondoljuk a következőket: A «faj» mesterszót mi csak amaz alakok megjelölésére használjuk, a melyek a jelenben — vajjon azok voltak-e évezredek előtt és azok lesznek-e évezredek után, arra sem határozott igent, sem határozott nemet nem mondhatunk — valamely philogenetikus jellemvonásuk szempontjából állandóknak bizonyulnak. Ezeket csakugyan minden kétséget kizáró módon elhatároljuk azoktól az alakoktól, a melyek amazoktól jelenleg többé-kevésbbé fejlődőfélben levő ontogenetikus jellemvonásokban különböznek, a mely jellemvonások útban vannak a szerveződési bélyeggé (Organisationsmerkmal) való alakulás felé. Ez, azt hisszük, hívebb tükre a természetben lefolyó jelenségeknek, mint az, a melyet eddig elénk tartottak.

4. Ranunculus flabellifolius Heuff.

R. foliis radicalibus cordato-orbiculatis, indivisis, caulinis flabelliformibus, cuneato dilatatis integris, antice grosse crenatis.

Ez a diagnosis a valódi *R. flabellifolius*t írja körül a maga tiszta, a *R. binatus*-szal határozott ellentétben álló alakjában. Ez a leírás nem egyezik Heuffel-nek az Enumeratio plantarum in Banatu Temesiense sponte crescentium etc. (1858) 44. lapján, sem Neilreichnek az ő «Diagnosen der in Kroatien u. Slavonien bisher beobachteten Gefässpflanzen (1867)» czímű műve 4. lapján adott leírással, mert *R. flabellifolius* néven mind a ketten egyben azokat a különféle átmeneti alakot is értették, a melyek e faj és az *auricomus*-sectio egyéb boglárkái közé esnek. Erre mutat Neilreich-nek egy feltünő példány kiemelése közben tett megjegyzése is, hogy ugyanis a valódi *R. flabellifolius* bélyegein kívül előfordulnak rajta a *R. auricomus*t jellemző bélyegek is. Láttam ezt a feltünő példányt, ezt most a Nemzeti Múzeum őrzi az odakerült Haynald-féle növénygyüjteményben.

Ez, mint NEILREICH is megjegyzi, valóban a monstruositas benyomását kelti, elveszti azonban ezt a sajátságát, mihelyt az e tanulmányban kifejtett nézeteket elfogadjuk. Ekkor felösmerjük benne az *auricomus—flabellifolius* átmeneti alakot. Ugyanebben a növénygyüjteményben láttam egy hasonló alakot Északolaszországból. Bár itt a *R. flabellifolius*t csak a legszorosabb értelemben vettük, a már kifejtett okokból mégis megtartottuk régi nevét.

A *R. flabellifolus* HEUFF. (s. str.) elterjedési köre meglehetősen szűk: a Bánságra és Erdély közepére meg déli részeire terjed ki. HAZSLINSZKY-nak az az adata, hogy növényünk az ország egyéb részeiben is terem, határozottan téves. HAZSLINSZKY-nak az a megjegyzése, hogy a *R. flabellifolius* «szárlevele fésűsen fogas», arra vall, hogy ezt a boglárkát nem ösmerte és valószínűleg a *R. cassubicus*nak nagy termetes alakjával tévesztette össze.[1] Vannak azonban — különösen Erdélyben — közbülső alakjai, a melyek a *R. auricomus* és *R. cassubicus*nak a *R. flabellifolius* felé való átmenetét jelentik. Igen, még messzibb Nugat felé terjedő átmeneti alak a *R. flabilliferus* BORB.[2]

Nagyon ritkák az olyan átmeneti alakok, a melyeken a *R. binatus* faji sajátság-elemei még észrevehetők. Ezek ritkaságát megmagyarázza a nagy távolság, a mely a philogenetikus fejlődési sorban a *R. binatus*t a *R. flabellifolius*tól elválasztja.

A közbülső alaksorozatok.

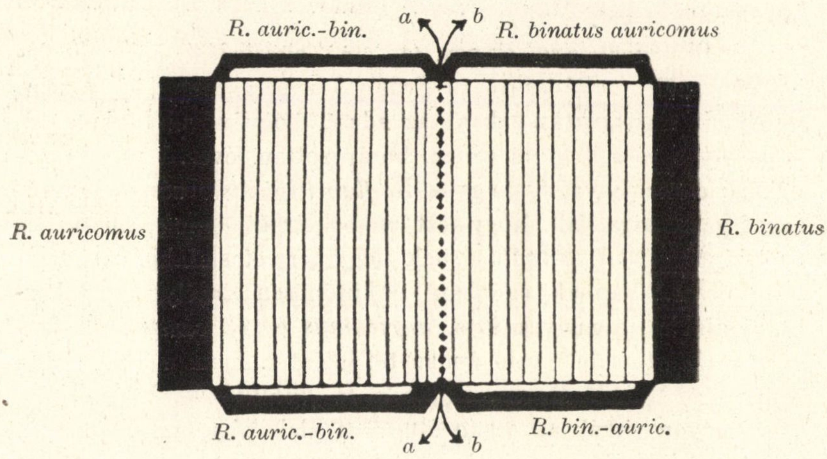
A négy főfajnak az eddigiekben adott szigorú körülhatárolása után a közbülső alaksorozatoknak megállapitása aligha okozhat különösebb nehézségeket. Világosan előadtuk e fajokra vonatkozó felfogásunkat, itt még csak arra kell utalnunk, hogy HACKEL és NÄGELI eljárása nyomán itt a fejlődési alakoknak egy-egy sorozatát, nem pedig egyetlenegy ily alakot tartunk szem előtt. A sorozatot összefoglalva, egyetlen névvel jelölve

[1] HAZSLINSZKY F. Magyarhon edényes növényeinek füvészeti kézikönyve (1872.) 161. l.

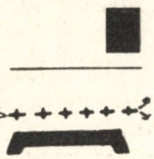
[2] BORBÁS V.: Budapest és környékének növényzete (1879), 131. l.

igtatjuk a rendszerbe. Az alábbi vázlat, a mely a *R. binatus* és *R. auricomus* közt fönnálló fejlődési alakokat tünteti fel, meg fogja világítani felfogásunkat:

Az alakok nagy sorát látjuk itt, a melyek a *R. binatus*tól a *R. auricomus*ig terjednek és viszont. Mentül jobban távozunk a *R. binatus*tól, annál kisebb mértékben találkozunk ennek



A R. binatus és R. auricomus közt fennálló fejlődési alakok :



= főfaj,

= közbülső alakok,

= határalakok,

= közbülső alaksorozat (keret faj).

elemeivel, de egyben annál erősebben érvényesülnek a *R. auricomus* jellemvonásai. Ugyanez áll fordított rendben a *R. auricomus*ról.

A fejlődés e táblázata közepetáján egy oly alak jelenik meg a melyben a két faj jellemvonásai körülbelül egyensúlyban vannak. Ezt *határalak*nak minősíthetjük. Nos, az összes alakokat, a melyek a határalakig terjednek, egyetlen közbülső alaksorozatnak (keretfajnak) fogjuk fel. A határalaktól a *R. binatus* felé eső közbülső alaksorozatot, erősebben érvényesülő rokonsági bélyegei alapján *R. binatus—auricomus* névvel jelöljük. A határalaktól a *R. auricomus* főfajig terjedő alakokat szintén közbülső alaksorozattá fogjuk össze és mert okvetlenül a *R. auricomus*szal mutatnak nagyobb rokonságot: *R. auricomus—binatus*nak nevezzük. Hogy a határalakot az egyik vagy másik közbülső alaksorozathoz kell-e sorolni, azt a tanulmányozónak subjectiv benyomására kell bíznunk. Ezen a ponton a szavakkal pontosen le nem írható összbenyomás, a habitus az iránytadó.[1] Minthogy a két határalak elválasztó különbsége valóban csak parányi lehet, kizártnak tekinthető valamely lényeges tévedés. Éppenséggel nem lesz kárára a philogenetikai megösmerésnek, ha az ily határalakot akár a jobb-, akár a baloldali közbülső alaksorozathoz sorozzuk.

Ebből az elvből kiindulva jutunk el immár az egyes közbülső alaksorok leírásához.

a) Közbülső alaksorozatok, a melyekben mind a négy főfaj érvényesül.

5. Ranunculus binatus—auricomus mihi.

R. foliis radicalibus reniformibus partim *segmentatis, partim inpartitis*; caulinis digitato partitis, laciniis lineari-lanceolatis, *integerrimis.*

---

[1] Helyénvalónak találjuk itt L. v. VUKOTINOVIC-nak a habitusról szóló néhány mondatát idézni. A horvátországi *Ficaria calthaefolia* RCHB. megbeszélésénél a következőket mondja: «Mindent egybevéve azt fogják majd mondani, hogy ez a leírás egy *Ranunculus ficaria* képét adja. Ez a megjegyzés esetleg helyénvaló lehetne. Ámde gondoljuk meg, hogy van némi különbség a szirmokban, egy másik, bár csekély különbség a levélben és hogy e kis különbségek oly együttest adnak, a melynek révén sajátságossá válik a növény habitusa; nem az egyes sajátságok különbségén alapul tehát a fajok különféleségé, hanem ennek vagy amannak az alaknak bennünk keltett együttes benyomása révén tudjuk az egyik növényt a másiktól különbözőnek felismerni; ennek révén válik nyilvánvalóvá az ugyanahhoz a fajhoz valótartozás kérdése, a mely összetartozás nem foglalható mindig szavakba. Felösmerjük, ha nem is tudunk róla magunknak számot adni.» (L. VUKOTINOVIC az Österr. bot. Wochenbl. 1853. 133. oldalán.)

Ennek az alakcsoportnak egyik kiválóan jellegzetes alakja például a *R. sibiricus* GL. mélyen behasított, tehát sem nem osztott, sem nem osztatlan tőleveleivel.

Nagyon tanulságos megjegyzést fűz GLEHN (Verzeichniss der im Wittein-Olekmalande von den Herren I. v. Poljakov und Baron G. Maydell gesammelten Pflanzen, az Acta horti Petropolitani IV. köt. I. füz. (1876) 16. lapján) e változat leírása kapcsán a *R. auricomus* és *R. cassubicus*nak az Északon való földrajzi elterjedéséhez. A 12. sz. a. említi a *R. auricomus* L.-t (Syn. LEDEB. fl. ross. I. p. 30., Rupr. fl. ing. I. 30. l. *R. cassubicus* LEDEB l. c.) s a következő változatokat különbözteti meg:

α) *typicus* RUPR. fl. ingr. I. 30. l. Ledeb. l. c. Rchb., Ic. XII. 4599.

β) *sibiricus* m. Humilis (c. pedem altus) foliis radicalibus parvis c. 1½", in diam. orbiculatis, integris vel incisis, rarius partitis, singulis vel binis, additis squamis aphyllis 1—2, foliorum caulinorum partitionibus plerumque integerrimis.

Azután megjegyzi:

«Termete a *R. auricomus* L. typikus-é, a többnyire osztatlan tőlevelek és a szár alján a lemez nélkül való hüvelyek dolgában a *R. cassubicus* L.-vel egyezik, szerzőink hol az előbbihez (TURCZ. fl. Baic. dah. No. 39, SCHMIDT fl. von Sachalin No. 13), hol az utóbbihoz (LEDEB. l. c., REGEL : Pl. RADD. No. 67 mint *R. auricomus* L. var. *cassubicus* RUPR.) vonják. Szibéria jellemző alakjának tartom, a hol aligha fordul elő a typikus *R. cassubicus* L. olyan alakjában, a milyenben azt Európából ösmerjük és a milyennek REICHENBACH az Ic. fl. germ. t. XV. lerajzolja, és a hol a *R. auricomus* is meglehetősen ritka az ő tiszta európai alakjában. A gyüjteményünkben levő számos szibériai példányból itélve, ott bizonyára nagyon elterjedt és azért külön változatát látom benne a *R. auricomus* L. RUPR.-nek. Ezért különböztetem meg». — A magam gyüjteményében levő példányok tanusága szerint ez a növény jóval délebben — igaz, hogy valamivel termetesebb kiadásban — Németországban is terem.

6. Ranunculus auricomus—binatus mihi.

R. foliis radicalibus reniformibus, partim segmentatis, partim insegmentatis; caulinis digitato-partitis, laciniis lineari-lanceolatis, *plus-minus* subdentatis.

A Kittel által reniformis-nak elnevezett változat — hogy csak egy példát említsek — az alakok e csoportjába való.

7. Ranunculus binatus—cassubicus mihi.

R. foliis radicalibus magnis *cordato-reniformibus, partim segmentatis, partim inpartitis*; caulinis digitato-partitis, laciniis lanceolatis integerrimis.

Benne már érvényesül a nagyobb távolság, a mely a *R. binatus*t a *R. cassubicus*tól elválasztja (ugyanis nagyobb mint a *R. binatus* és *R. auricomus* közt levő távolság). Az eddig *R. fallax* W. Gr. névvel jelölt boglárka egyes alakjai beleesnek az általunk itt felállított alaksorozatba.

8. Ranunculus cassubicus-binatus mihi.

R. foliis radicalibus magnis *cordato-reniformibus*, partim *partitis, partim insegmentatis*, caulinis digitato-partitis, *laciniis late-lanceolatis* dentatis.

Az eddig *R. fallax*-nak nevezett növény sok alakja ide tartozik.

9. Ranunculus binatus—flabellifolius mihi.

R. foliis radicalibus orbiculariter fere clausis, partim segmentatis, partim inpartitis, caulinis lineari-lançeolatis, integris.

10. Ranunculus flabellifolius—binatus mihi.

R. foliis radicalibus orbiculariter fere clausis, partim inpartitis, partim segmentatis, caulinis flabelliforme partitis.

E két utóbbi közbülső alaksorozat növényei a természetben módfelett ritkák. Különben felette homályossá vált bennük a *R. binatus*-bélyeg. Természetes következménye ez annak a nagy távolságnak, a mely a *R. binatus* és a *R. flabellifolius* közt fönnáll.

A *R. binatus* bélyegei e felmenő sorban már sokkal gyengébben érvényesülnek, semhogy szembeszökő módon tudnának jelentkezni.

b) Közbülső alaksorozatok (keretfajok), a melyekben a R. auricomus, R. cassubicus és R. flabellifolius érvényesül.

11. Ranunculus auricomus—cassubicus mihi.

R. foliis radicalibus inpartitis, partim reniformibus, partim cordato-reniformibus, caulinis digitato-partitis, laciniis partim lineari-lanceolatis subdentatis, partim late-lanceolatis dentatis.

A közbülső alakok e sorozatának eddig már névvel ellátott képviselője a *R. incisifolius* Rchb. Ide tartoznak azonban *R. fallax*-alakok is.

12. Ranunculus cassubicus—auricomus mihi.

R. foliis radicalibus inpartitis, partim cordato-reniformibus, partim reniformibus, caulinis digitato-partitis, laciniis partim late-lanceolatis dentatisque, partim lineari lanceolatis, subdentatis.

A *R. fallax* legtöbb alakja ebbe a csoportba tartozik.

13. Ranunculus auricomus—flabellifolius mihi.

R. foliis radicalibus inpartitis, partim reniformibus, partim orbiculariter fere clausis, caulinis partim divisis, laciniis lanceolatis, subdentatis, partim flabelliforme partitis.

A mint föntebb a *R. binatus* és *R. flabellifolius* viszonyáról megjegyeztünk, áll a *R. auricomus* bélyegeinek érvényesüléséről itt is; igaz, hogy lefokozottabb mértékben, mert a *R.*

auricomus az egész sectio fejlődési sorában a *R. flabellifolius*-hoz sokkalta közelebb áll, mint a *R. binatus*.

A *R. flabilliferus*. BORB. és a *R. alliariifolius* RCHB. ennek az alaksorozatnak feltünő képviselői.

14. Ranunculus flabellifolius—auricomus mihi.

R. foliis radicalibus inpartitis, partim orbiculariter fere clausis, partim reniformibus, caulinis partim flabelliforme partitis, partim laciniis lanceolatis, dentatis.

Ezt a csoportot is nagyon tanulságosan képviselik a *R. alliariifolius* egyes alakjai.

c) Közbülső alaksorozatok, a melyekben csak a R. cassubicus és R. flabellifolius érvényesül.

15. Ranunculus cassubicus-flabellifolius mihi.

R. foliis radicalibus inpartitis, partim cordato-reniformibus, partim orbiculariter fere clausis, caulinis partim laciniis late-lanceolatis, dentatisve, partim flabelliforme partitis.

16. Ranunculus flabellifolius—cassubicus mihi.

R. foliis radicalibus inparttiis, partim orbiculariter fere clausis, partim cordato-reniformibus, caulinis partim flabelliforme lobatis, partim laciniis late lanceolatis dentatis.

A mit az erdélyi botanikusok *R. ambiguus* SCHUR néven adtak ki, meglehetősen megfelel ennek és az előbbi alaksorozatnak. Mégsem a valódi *R. ambiguus* SCHUR ez a növény. A valódi *R. ambiguus* SCHUR körül baj van. Vagy maga SCHUR írta le rosszul, a mi nála nem ritkaság,[1] vagy a növénye egyáltalában nem is tartozik az *Auricomus*-sectioba. A. KERNER a *R. ambiguus* SCHUR-t jellemezvén,[2] a *R. auricomus* párhuzamos alakja gyanánt állítja a *R. flabellifolius* HEUFF. mellé és több, többé-kevésbbé vesealakú tőlevelet és keskenysallangú szárleve-

[1] V. ö. SIMONKAI: Erdély edényes flórája (1886.) XXX. l.

[2] KERNER: Schedæ ad floram exsiccatam Austr.-Hung. V. 47. l.

let tulajdonít neki. Ezzel szemben utalunk SCHUR-nak az ő Enumeratio plantarum Transsilvaniæ (1866) cz. művében megjelent leírására, a hol világosan megjegyzi ... Pedunculis teretibus *solitariis*, denique elongatis, pubescentibus, *bracteatis*. Flor. aureis, iis R. Villarsii similibus, 3/4 poll. diam. Carpellis *lenticulari-compressis*, carinatis, stigmate a basi redunco coronatis. Capitulis fructiferis subglobosis. Receptaculo lacunoso lobato. *Toro piloso*. Oly boglárka, melynek termése lencseszerűen összenyomott, torusa szőrös, virága magányos, virágszára murvás, semmiképpen sem tartozhatik az *Auricomus*-typushoz. Nyilván hybridről van itt szó, még pedig véleményem szerint a *R. flabellifolius—binatus* és a *R. montanus*, esetleg a *R. Hornschuchii* hybridjéről. SCHUR maga is megjegyzi: «A *R. flabellifolius*-szal együtt (ez azonban téves) ezt a boglárkát is hybridnek tartom, a mely a *R. Villarsi* és a *R. binatus* kereszteződéséből ered.» A *R. ambiguus* KERNER, Schedæ V., 47. l. voltaképpen *R. flabellifolius—auricomus*.

Végezetül az egyes közbülső keretfajok elterjedési körére nézve általánosságban megjegyezzük, hogy az kiterjed az *Auricomus*-sectiohoz tartozó fajok egész földrajzi elterjedési körére. Ezek a közbülső alaksorozatok a főfajok mellett, vagy velük vegyesen nőhetnek és nem szorulnak hybridek módjára a szülőfajok jelenlétére, hanem rokonfajaiktól távol teremhetnek fejlődési alakokként. Itt terem a budai hegyekben a *R. auricomus—flabellifolius* (= *R. flabilliferus* BORB.), bár errefelé el egész a Bánság belsejéig a *R. flabellifolius*nak nyomát sem leljük. Nyilván nem helyi, hanem inkább időbeli befolyások érvényesülnek itt. A hatóerő tehát, a mely ezeket létrehozta, szükségképpen nem ontogenetikus, hanem philogenetikus természetű.

Synonymák.

Ez a jegyzék éppen nem teljes; csak a legfontosabb európai flóraművek, közülük is főképpen az Ausztriára, Magyarországra és Középeurópára vonatkozók jöttek itt tekintetbe. Tekintettel az *Auricomus*-sectio által elfoglalt terület nagyságára, ez az eljárás bizonyára megokolt, főképp minthogy az egyes alakok szabatos megkülönböztetése gyakran már azért sem lehetséges, mert az illető szerzők azokat nem irták le külön, hanem valamenynyit *R. auricomus* vagy *R. cassubicus* néven foglalták össze. Mivelhogy a legtöbb florista többnyire az összefoglaló nagyobb flóraművek leirásait követte, elégséges az utóbbiak tekintetbevétele.

R. alliariifolius Rchb. Ic. t. XII. = *R. auricomus—flabellifolius.*

R. ambiguus Kerner: Schedæ ad fl. austr. hung. V. 47. l. = *R. flabellifolius—auricomus.*

— Schur Enum. magában foglalja a *R. flabellifolius—binatus*, *R. flabellifolius—auricomus* és *R. flabellifolius—cassubicus*t. Lásd különben a 426. old. mondottakat.

R. ambiguus a) *partitus* Shcur Enum. = *R. flabellifolius—binatus.*

R. auricomus Bluff és Fingerh. Comp. Tom I. pars 2. ed. 2. 296. l. felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól egészen bezárólag a *R. auricomus—cassubicus*-ig, hüvelyes tőlevelekkel.

— Boissier fl. or. I. 47. tartalmazza a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus*-ig bezárólag az összes alakokat.

— Borbás: Budapest, 130. l. felöleli a *R. binatust, R. binatus—auricomust, R. auricomus—binatust* és a *R. auricomust.*

— Čelakovsky Prodr. 415. tartalmazza a *R. binatus*-tól bezárólag a *R. cassubicus*ig terjedő alakokat.

— Coste H. fl. descr. et. ill. de la France I. 29. No. 37 = *R. binatus—auricomus, R. auricomus—binatus, R. auricomus, R. auricomus—cassubicus.* Az ott közölt kép azonban = *R. binatus—auricomus.*

— D. C. Syst. 266. felöleli a *R. binatus—auricomust* és a *R. auricomus—binatust.*

— Endlicher fl. pos. 412. l. = valamennyi alak a *R. cassubicus*ig bezárólag.

— Freyn in Willk. u. Lge. Prodr. fl. hisp. 938. = *R. binatus, R. binatus—auricomus, R. binatus—cassubicus* és *R. auricomus—cassubicus.*

— FREYN: Tirol u. Vorarlbg. Ferdinandeum, 35. füz. a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus*-ig bezárólag terjedő valamennyi alakot felöleli.

— FRITSCH: Excurs. fl. II. kiad. 245. l. felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus—auricomus*-ig bezárólag; hüvelyes tőlevelekkel.

— GRISEBACH: Spicil. fl. rum. I. 310. felöleli a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus*-ig bezárólag terjedő összes alakokat. Reliquiæ Grisebachianæ flor. europ. edidit KANITZ (1882) felöleli az összes alakokat a hüvelyes tőlevelű *R. cassubicus*-ig.

— HAYEK: Fl. v. Steierm. 390. l. tartalmazza a *R. binatus*-tól a *R. auricomus—cassubicus*-ig terjedő összes alakokat.

— HEGI: Ill. Fl. III. 566. felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus—auricomus*-ig.

— HAZSLINSZKY: Éjszaki Magy. vir. 138. l. felöleli a *R. binatus—auricomust*, *R. auricomus—binatust* és a *R. auricomust*.

— HAZSLINSZKY: Magyarh. ed. növ. 161. tartalmazza az öszszes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. flabellifolius*-ig kiz.

— HEUFFEL Banat = *R. binatus.*

— HOST fl. aust. II. 109., JANKA: Adnot. 553., KERNER: Schedæ V. 47., KOCH in RÖHL. fl. IV. 173., LEDEBOUR fl. ross. LUMNITZER: fl. pos. 229., NEILREICH: Aufz. Ungarn, ROUY et FOUCAUD fl. Fr. I. 101., SAGORSKI u. SCHNEIDER: Fl. Centr., SCHLOSSER u. VUKOTINOVIČ: Fl. Croat., *Simonkai:* Erdély, *Velenovsky:* Fl. bulg., WALLROTH: Schedæ 290. felölelik az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. auricomus—cassubicus*-ig.

— KANITZ: Magy. tart. növ. visz. 49., 52., 99., 107. felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. flabellifolius*-ig.

— KITTEL: Taschenb. ed. 2. 773., NEILREICH: fl. v. Niederösterr. 687., PORCIUS: Naseud 2. l., SADLER: fl. com. Pest. ed. 2. 226., SPACH: Histoire nat. VII. 210., VISIANI; fl. Dalm. III. 84., ZAPALOVIC: Consp. II. 263. felölelik az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus—auricomus*-ig.

— KOCH: Syn. ed. 2. 17. l., MALY: Enum. pl. aust. 254., REICHENBACH: fl. exc. 723., REUSS: Kvetna slov. 10. felölelik az összes alakokat a *R. binatus*-tól a hüvelyes tőlevelű *R. cassubicus*-ig.

— LEDEBOUR: Fl. ross. I. 38. tartalmazza az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus*-ig.

— LINNÉ: Hort. cliff. felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus—auricomus*-ig.

— LINNÉ: Spec. pl. ed. 1., 2., flor. Suec. ed. 2., Syst. ed. 12. felöleli a *R. binatust* a *R. auricomus—cassubicus*-ig.

— SCHLECHTENDAL: «Animadversiones», felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus—auricomus*-ig. A megkülönböztetés alapjául a levelek osztottságának és fogazottságának módja szolgál, innen a 12 alak. Természetes, hogy SCHLECHTENDAL így a következő eredményre jut: «. . . omnes (formas) si indicare vellem, fere quodque *individuum* describatur necesse foret.» 1.) alak: beteges jelenség. 2.) alak = *R. auricomus—binatus*, 3.), 4.) alak = *R. auricomus—binatus* és *R. binatus—auricomus*, 5.), 6.) alak = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus*, 7.) 8.), alak = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus*, 9.), 10.) alak = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus*. 11.) és 12.) alak = *R. binatus—auricomus*.

— SCHUR a Sertum-ban pusztán a nevét említi a következő változatoknak: *uniflora, montana, apetala, praecox, variifolia, pinguis lucorum, pedifolia, alliariaefolia*. A tüzetesebb meghatározás természetesen lehetetlen.

— SCHUR a Phytogr. Mitteilungen 36. lapján = *R. auricomus—cassubicus*.

— POSPICHAL: fl. Küstenl. III. 2. Hälfte 87., REICHENB.: Icon. t. XII. f. 4599. és SIMONKAI: Adatok Magyarh. ed. növ. (Math. és Term. Közl., XI. 179.) = *R. binatus*.

— *Herbarium* KITAIBEL fasc. XVI. No. 178. kérdőjellel = *R. auricomus*, No. 197. = *R. binatus*, No. 198/a. meghatározás nélkül = *R. auricomus—cassubicus*, No. 199/b. = *R. auricomus—cassubicus* és *R. cassubicus—auricomus*.

— *a)* PORCIUS Naszód felöleli a *R. auricomus—cassubicust* és *R. cassubicus—auricomust*,

— *b)* PORCIUS Naszód, ugyanez alakokat.

v. *a)* BIRIA = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus*.

— v. *b)* BIRIA = *R. auricomus—cassubicus* (e kettő D. C..: Syst. 226. l. idézete alapján).

— var. *a) affinis*, GRISEBACH in Reliqu. Griseb. 16. l. = *R. binatus*.

— var. β) SCHUR: Bot. Rundr. 30. l. = *R. auricomus*.

— var. *alpina* SENDTNER (H. M. N.) és var. *a) alpina* SCHUR, Bot. Rundr. 30. l. = *R. binatus*.

— *a) alpinus* SCHUR: Enumer. Rejtélyes növény, talán *R. Hornschuchii* HOPPE.

— f. 2. *angustisectus* BLOCKI in ZAPAL. Consp. II. 263, felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. cassubicus—auricomus*-ig;

— var. *binatus*. GRISEB. u. SCHENK: Iter hung. 313. l. felöleli a *R. binatus—auricomust* és a *R. auricomus—binatust*.

— β) *binatus* HEUFFEL, Banat és α. *binatus* PORCIUS Naszód = *R. binatus*.

— var. *Brahnaviensis* SPIRILLE in HEGI Ill. Fl. III. 566. = *R. binatus—auricomus*.

— *a) cassubicus* NEILR. Aufz. Ungarn 240. felöleli a következő alakokat: *R. binatus—cassubicus, R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—binatus, R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus*.

— β) *cassubicus* ROCHEL: Plantæ Ban. 27. l. felöleli a *R. cassubicus—auricomust* és a *R. cassubicust*.

— *c) cervicornis* KITTEL Taschenb. ed. II. 773. l. = *R. binatus*.

— var. *decipiens* WARMSDORF in Hegi: Ill. fl. III. 566. felölelheti az egész csoport minden lehető alakját.

— γ) *dissectus* WALLROTH: Schedæ, 290. l. = *R. auricomus—binatus.*

— var. *a) dubius* ZAPALOVIC: Consp. II. 263. = *R. binatus—cassubicus* és *R. cassubicus—binatus.*

— var. *a) dubius* form. 1. *angustipartitus* ZAPAL. Consp. II. 263. = *R. binatus—cassubicus.*

— var. *a) dubius* form. 2. *latipartitus* ZAPAL. l. c. = *R. cassubicus—binatus.*

— *fallax Koch* in RÖHL. Deutschl. fl. IV. 174. felöleli a következő alakokat: *R. binatus—cassubicus, R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—binatus* és *R. cassubicus—auricomus*t hüvelyes tőlevelekkel; tehát a *R. auricomus* egy változatát. A Synops.-ban KOCH a *R. fallax*-ot a *R. cassubicus* alá helyezi változat gyanánt.

— var. *fallax* SAGORSKY und SCHNEIDER: Flor. d. Centralkarp. és HEGI l. c. = *R. cassubicus—auricomus.*

— β) *fallax* BLUFF & FINGERH. l. c. 296. l. mint KOCH a RÖHLING flórájában, l. ott.

— β) *fallax* GARCKE Fl. v. Deutschl. 14. kiad. 10. l., LEDEBOUR fl. ross. I. 38. = *R. cassubicus—auricomus.*

— *e) fallax* KOCH Syn. ed. 2. 18. l. felöleli a *R. auricomus—cassubicus*t és a *R. cassubicus—auricomus*t lemeztelen hüvelyekkel.

— β) *flabellifolius* NEILREICH Aufz. Ung. lásd *R. flabellifolius* NEILR. Diagn.

— *flabellatus* (sic!) KITTEL Taschenb. l. c. = *R. flabellifolius* HEUFF.

— var *grandiflorus* LEC. et LAM. ROUY et FOUCAUD fl. Fr. I. 101-ben pontosan körül nem írt növény, a mely megfelel minden alaknak a *R. binatus*-tól a *R. auricomus*-ig; var. *grandiflorus* SPACH Hist. nat. VII. 210. felöleli a *R. binatus—cassubicus*t, *R. auricomus—cassubicus*t és fordítva: úgyszintén a *R. cassubicust*; *d) grandiflorus (pseudo—cassubicus)* SCHUR Enum. = *R. cassubicus—auricomus.*

— *c) helleborifolia* (sic!) SCHUR Enum. = *R. cassubicus—binatus, R. cassubicus—auricomus.*

— var. *Hevellus* HÜLSEN in HEGI l. c. = *R. binatus—cassubicus.*

— var. *incisifolius* BORBÁS: Budapest 130 = *R. binatus—cassubicus* és *R. auricomus—cassubicus*; var. *incisifolius* (*R. auricomus×R cassubicus?*) BORBÁS, Balaton fl. = *R. auricomus—cassubicus*;

— *f) incisifolius* Schedæ ad fl. hung. 107. = *R. binatus—cassubicus, R. auricomus—cassubicus*;

— *d) incisifolius* KITTEL Taschb. l. c. = *R. auricomus—cassubicus*;

— *form. 3) incisifolius* ZAPAL. l. c. = *R. auricomus—cassubicus.*

— *a) integrifolius* WALLROTH Schedæ 290. = *R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—auricomus.*

— γ) *intermedius* PORCIUS: Naszód = *R. auricomus—binatus, R. auricomus—cassubicus.*

— var *b) intermedius* ZAPAL., l. c. = *R. cassubicus—binatus.*

— *form. 4. macropetalus* ZAPAL. Consp. II. 263. egyetlen egy példánynak felette egyéni leírása.

— var. *monanthus* FRITSCH: (Syn. var. *alpinus* SCHUR) Beitr. zur Fl. Balkans in Zool.-bot. Ges. 1894, 129. l. = *R. binatus.*

— *var. palustre* HEGETSCHW. in HEGI l. c. minden elképzelhető alakot felölel;

— β) *palustris* HEGETSCHW., KITTEL Tsch.-ban = *R. binatus—auricomus.*

— *var. pinguior* RCHB. Ic. XII. = *R. cassubicus—binatus.*

— β) *procerior* MALY: Enum. 254. = *R. auricomus—cassubicus.*

— β) *procerior* WAHLBG. fl. carp. 170. felöleli a *R. binatus—cassubicus*t, *R. cassubicus—binatus*t, *R. auricomus—cassubicus*t, *R. cassubicus—auricomus*t és a *R. cassubicus*t.

— *b) procerior* D. C. Syst. 266. felöleli a *R. binatus—cassubicus*t és *R. cassubicus—binatus*t; a *R. auricomus—cassubicus*t, *R. cassubicus—auricomus*t. 1. = *R.*

binatus—cassubicus, 2. = *R. binatus—cassubicus, R. cassubicus—binatus, R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—auricomus;* 3., lelegelés révén csonkult vagy teratologiai elváltozás; 4. elhitványult apró alakok.

— *e) praecox* SCHUR Enum. elhitványult példánynak látszik.

— *var. pseudocassubicus* CHRIST nec SPRIBILLE in HEGI Ill. Fl. III. 566. = *R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus;* továbbá var. *pseudocassubicus* SPRIBILLE *nec* CHRIST ibidem = *R. binatus—cassubicus.*

— *form. pseudopsis* JORD., ROUY et FOUC. fl. Fr.-ban felöleli a *R. binatus—auricomust*, *R. auricomus—binatust* és a *R. auricomust.*

— *var. reniformis* in HEGI l. c. = *R. auricomus—binatus* (a *R. incisifolius* RCHB. synonymon téves); *a) R. reniformis* KITT. Tschb. = *R. auricomus* L. — BECK Fl. v. Niederöst.-ben felöleli a *R. auricomus—binatus*-t, a *R. auricomust* és a *R. auricomus—cassubicust.*

— var. *c) serotinus* ZAPAL. l. c. = *R. binatus—cassubicus, R. auricomus—cassubicus* és fordítva.

— *var. silvicola* (H. M. N.) *ex fl. it. exs.* No. 573 ≐ *R. auricomus.*

— β) *trilobus* WALLR. Schedæ 290 = *R. auricomus—binatus.*

— β) *typicus* BECK. Fl. v. Niederösterr. és HEGI l. c. = *R. binatus.*

— *a) typicus* RUPR. fl. ingr. I. 30. l. felöleli az összes alakokat a *R. binatus*-tól a *R. auricomus – cassubicus*-ig.

— *var* β. *vaginatus* ČELAK. Prodr. 415. felöleli az összes lemez nélkül való alakokat.

— *b) vaginatus* JESSEN: Deutsche Exc. fl. 429. magában foglalja az összes hüvelyes alakokat a *R. cassubicus*-ig.

— *form. validus* ZAPAL. Consp. II. 263. = *R. cassubicus—auricomus.*

— *b) variifolius* SCHUR Enum. = *R. binatus—cassubicus* és *R. cassubicus—binatus;*

— *v. variifolius* SCHUR (H. M. N.) Erdélyből = *R auricomus—cassubicus.*

R. binatus. Halácsy Consp. fl. gr. I. 22, Schlosser et Vukotinovič fl. croat. 168, Schur Beiträge és *a) apetalus* Schur Enum. = *R. binatus* Kit.—Janka Öst. bot. Wchnbl. 1856. 345. l = *R. sceleratus*; — Rchb. fl. exc. 723. = *R. binatus* Kit. p. p. — Schur Enum. = *R. binatus, R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus.* — Schur Phytogr. Mitt. 37. l. = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus.*

R. cassubicus. Borbás Balaton 387. l. = *R. cassubicus—auricomus, R. cassubicus* és *R. auricomus—flabellifolius*; Borbás Budapest 130. l. = *R. cassubicus—auricomus, R. cassubicus*; De Candolle Syst. 266. = *R. auricomus—cassubicus;* Fiori: fl. anal. d'It. I. 510. = oly typus, a mely az egész csoportot felöleli; Fritsch Excurs. fl. 2. kiad. 245. felöleli a *R. binatus—cassubicus, R. cassubicus—binatus, R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus* és lemeztelen hüvelyü *R. cassubicus* összes alakjait; Genersich: Elenchus No. 504, Dc. Syst. 260. idézésével l. ezt; Grisebach: Reliquiæ l. c. felöleli a *R. cassubicus—binatus*-tól a *R. flabellifolius*-ig terjedő alakokat; Hazslinszky: Északi Magy. és Magy. ed. növ. felöleli a *R. cassubicust* és annak összetételeit a *R. binatus*-szal és a *R. auricomus*-szal; Kitaibel Additamenta 180 = *R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—auricomus, R. cassubicus*; Kittel Tschb. = *R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus*; Koch in Röhling Dtschl. Flora IV. 175. l. és a Syn. ed. 2. 18. l. felöleli a *R. auricomus—cassubicus, R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus* lemeztelen hüvelyü alakjait; hasonlóképpen Ledebour fl. ross. I. 38. és Maly Enum. 254., Linné: Spec. pl. ed. 1. felöleli a *R. cassubicust* és az ettől a *R. binatus* és a *R. auricomus* felé vezető alakokat; Reichenbach fl. exc. 723; Reuss Kvetn. Slov. 10. l.; Schur Enum. felöleli a *R. cassubicust*, valamint ettől a *R. binatus* és *R. auricomus* felé vezető alakokat, lemeztelen hüvelylyel; Reichenbach: Icon. t. XV. = *R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus;* Sagorski und Schneider:

Fl. Centralkarp. = *R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus*; ZAPALOVIČ: Consp. II. 263. magában foglalja a *R. cassubicus—auricomust*, a *R. cassubicus—binatust*, a *R. binatus—cassubicust* és a *R. cassubicust*. — SCHUR Sert. 3. l. puszta nevekként említi a következő változatokat: *fallax* WIMM., *subflabellatus* és *macrophilla pallida*; a pontos meghatározás lehetetlen.

— Herb. KITAIBEL fasc. XVI. No. 199. = *R. binatus—cassubicus*, továbbá No. 199. és 199 a = *cassubicus—binatus*;

— β) *auricomus* (L.) FIORI: fl. anal. d'It. I. 510. felöleli a *R. binatus—auricomust*, a *R. auricomus—binatust*, a *R. auricomust* és a *R. auricomus—cussubicust*.

— *var* β. *commutatus* ZAPAL. l. c. = *R. binatus—cassubicus*.

— *form*. *1. cyclopetalus* ZAPAL l. c. = *R. cassubicus?* Felette egyéni diagnosis.

— *d) diversifolius* SCHUR Enum. = *R. cassubicus—binatus*. L. még: SCHUR Phyt. Mitt. 38. l.

— *var. elatior* FRIES (var. *typicus* ABR.) HEGI Ill. Fl. III. 566. = *R. cassubicus—auricomus*, *R. cassubicus*.

— *var. flabilliferus* BORB. Budapest, felöleli mindazokat az alakokat, a melyekben a *R. binatus*, *R. auricomus* és *R. cassubicus* összeköttetésbe lép a *R. flabellifolius*-szal, kivéve a *R flabellifolius—cassubicust*.

— *var. flabellifolius* GRISEBACH u. SCHENK: Iter hung. 313. l. felöleli a *R. flabellifolius—cassubicust* és a *R. flabellifoliust*; HEGI l. c. = *R. flabellifolius—cassubicus*.

— form. *3. flabelliformis* ZAPAL. l. c. = *R. cassubicus—flabellifolius*.

— form. *gracilis* SCHUR: Enum. 24. l. = *R. cussubicus—flabellifolius*. SCHUR az ő Phytogr. Mitt. cz. művében (Verhdl. d. Naturf. Ver. in Brünn (1876) 37. l. említ egy *R. auricomus var. gracilis* = *R. subapetalust* a *R. binatus* synonymonjaként és idéz hozzá egy enumeratio No. 122/a-t; ez az idézet azonban hibás, SCHUR sehol sem említi a *R. auricomus*-nak valamely *gracilis* alakját.

— *a) grandiflorus* SCHUR Enum. Egyéni alak, pontosan meg nem határozható.

— *form. 4. latilaciniatus* ZAPAL. l. c. = *R. cassubicus—auricomus.*

— *var. paluster* RIKLI in HEGI l. c., typus, a mely minden lehető alakot felölelhet.

— *var. plebejus* FRIES in Hegi l. c. rejtélyes, meg nem határozható növény.

— *c) serratus* SCHUR Enum. = *R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus.*

— *β) subalpinus* SCHUR Enum. felöleli a *R. cassubicus*-nak a *R. binatus*-szal és *R. auricomus*-szal való kapcsolatait.

— *e) subflabellatus* SCHUR Enum. = *R. flabellifolius—auricomus* (Lásd még SCHUR: Phyt. Mitt. 38. l.)

— *form. 5. sublobatus* ZAPAL. l. c. = *R. cassubicus—binatus.*

— *form. 2. triphyllus* ZAPAL. l. c. = *R. cassubicus?* Felette egyéni diagnosis.

— *a) typicus* FIORI: flor. anal. d'It. I. 510. felöleli a *R. auricomus—cassubicust*, a *R. cassubicus—auricomust*, és a lemez nélküli hüvelylyel biró *R. cassubicust.*

R. cassubicus var. *a) variabilis* ZAPAL. l. c. = *R. cassubicus—binatus.* — *An R. cassubicus* L. WALLROTH Schedæ 290. a *R. auricomus*-hoz fűzött megjegyzésben = *R. cassubicus—auricomus.*

R. fallax. KERNER: Schedæ ad fl. austr. hung. V. 47. = *R. cassubicus—auricomus.* — SCHUR Phytogr. Mitt. 37. l. és WIMM. fl. v. Schles. 6. l. ugyanaz.

R. flabellifolius HAZSLINSZKY Északi Magyarh. 138. és Magyar. ed. 161. felöleli a *R. cassubicust* és a *R. cassubicus—flabellifoliust*; HEUFFEL Banat. 44. l. = *R. flabellifolius* és annak a *R. auricomus* felé vezető alakjai. JANKA: Adnotationes 553. l. felöleli a *R. flabellifolius*-tól a *R. auricomus* és *R. cassubicus* felé vezető alakokat. MALY Enum. p. 254. felöleli a *R. flabellifoliust* és annak a *R. auricomus* és *R. cassubicus* felé vezető alakjait. NEILR.

Diagn. 4. l. ugyanazt; PORCIUS Naszód = *R. flabellifolius—cassubicus* és *R. flabellifolius*; REICHENBACH fl. exc. 723. felöleli a *flabellifolius*-tól a *R. binatus, R. auricomus* és *R. cassubicus* felé vezető alakokat; ugyanaz BLUFF &. FINGERH. Comp. ed. 2. 2. k. 1. rész 297. l.; SCHUR Enum. = *R. flabellifolius—auricomus, R. flabellifolius—cassubicus* és *R. flabellifolius.*

— *a) flabellatus* SCHUR, Bot. Rundr. 30. l. = *R. flabellifolius.*

— *a) grandiflorus* SCHUR, Enum. = *R. flabellifolius—cassubicus.*

— *b) grandiflorus* HEUFFEL, Ban. 44. = *R. flabellifolius—cassubicus.*

— *a) integer* HEUFFEL, Ban. 44. = *R, flabellifolius.*

— *b) partitus* = *R. Pseudo—Villarsii* SCHUR Bot. Rundr. 30. = *R. cassubicus—flabellifolius* és fordítva. Határozottan téves SCHUR-nak az a nézete, hogy ez a *R. auricomus*×*R. Villarsii* hybridje.

— *b) parviflorus* SCHUR Enum. = *R. flabellifolius—auricomus.*

R. incisifolius RCHB. Ic. t. XII. = *R. auricomus—cassubicus.* — Herb. Mus. Nat. Eperjes = *R. binatus,* Visegrád = *R. auricomus.*

R. marinus GUSSONE et TENORE a FIORI l. c. 510. idézete szerint felöleli a *R. binatus—auricomust*, a *R. auricomus—binatust*, a *R. auricomust* és a *R. auricomus—cassubicust.*

R. mitis GILIBERT (Dc. Syst. 266. idézete szerint) felöleli a *R. binatus—auricomust* és *R. auricomus—binatust.*

R. polymorphus ALLIONI (Dc. Syst. 266. idézete szerint) = *R. auricomus—binatus* és *R. binatus—auricomus.*

R. reniformis GILIBERT Ust. del. 2. 240. l. (Dc. Syst. 266. idézete szerint) = *R. auricomus—cassubicus.*

R. sibiricus GLEHN, Act. hort. Petr. 16. = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus.*

R. variifolius SAL. (Dc. l. c. idézete szerint) = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus.*

R. vernus SPENN. fl. Trib. felöleli a *R. binatus* minden alakját egész a *R. auricomus—cassubicus*-ig (vide Spach, Hist. nat. VII. 210. l.)

NÖVÉNYGYÜJTEMÉNYEK.

A) A m. nemz. muzeum növénytani osztályának gyüjteménye.

Tökéletlen, pontosan meg nem határozható példányokat figyelmen kívül hagytam. — *A!* jelenti, hogy a növény megnevezése az én megnevezésemmel egyezik.

Meg nem határozott példányok: HAYNALD (a gyüjtő neve), Torda (a lelhely) = *R. cassubicus—auricomus;* HAYNALD. Pappataka = *R. auricomus-binatus* és *R. auricomus* L. *Muzlay* = *R. binatus—auricomus.*

R. alliariaefolius REICHB, HAYNALD, Torda = *R. cassubicus* L. — RÖMER, kleiner Hangstein = *R. cassubicus—flabellifolius,* — RÖMER, Petersberger Berg = *R. cassubicus—flabellifolius,* SIMONKAI, Brassó, Keresztényhavas = *R. cassubicus* L. — SIMONKAI, Brassó, Szentpéter = *R. cassubicus—binatus.* — SIMONKAI, Kolozsvár, Bükk = *R. cassubicus—binatus* és *R. cassubicus—auricomus,* — SIMONKAI, Déva = *R. cassubicus—binatus.* — SIMONKAI, Herkulesfürdő = *R. cassubicus—binatus* és *R. cassubicus—auricomus.* — SIMONKAI, Klek = *R. auricomus—binatus.* — SIMONKAI, Plavisevitza = *R. cassubicus—binatus.* — SIMKOVICS Krassószörény = *R. cassubicus—auricomus.* — SIMONKAI, Nagyszeben = *R. cassubicus—binatus.* — SIMONKAI, Szvinicza = *R. cassubicus* L, — SIMONKAI, Versecz = *R. cassubicus—binatus.* — SIMONKAI, Zajzon = *R. cassubicus* L.

R. ambiguus SCHUR, BARTH, Kolozsvár = *R. cassubicus—flabellifolius.*

R. auricomus L. *Gyüjtő- és lelhely nélkül* = *R. binatus—auricomus.*

? In umbrosis Angliæ=*R. binatus* KIT. —? Berlin Thiergarten=!—? Budapest, Hárshegy = *R. cassubicus—binatus.* —? Glogau = *R. binatus—auricomus.* — ? Grüneiche (ex herb. TAUSCHER)

= *R. binatus—auricomus.* — Flora guestphalica (ex herb. Hazslinszky) = *R. binatus* Kit — ? Száldobágy (ex herb. Tauscher) = *R. auricomus—cassubicus.*

Számokkal ellátott példányok: 230 = *R. binatus—auricomus.* 408. (*Schultz* herb. norm.) Wittemberg = *R. binatus—auricomus,* 408. (*Schultz* herb. norm.) France = *R. binatus* Kit., 409. Budai Miskolcz = *R. binatus* Kit. és *R. binatus—auricomus.* — 522. Budai, Miskolcz = *R. binatus—auricomus.* — 541?? = *R. auricomus—binatus.* — 541/b ?? = *R. auricomus—cassubicus.* — 802. Kováts = ! és *R. auricomus—flabellifolius.* — 1289. (Fiori flor. ital. exs.) = *R. binatus—auricomus, R. binatus—cassubicus* és *R. auricomus—cassubicus.* — 1726. Keck, Aistersheim (flor. exs. Austr.-Hung.) = *R. binatus* Kit., *R. auricomus* L. és *R. binatus—auricomus,* Strasser, Seitenstetten (ugyanott) = !, *R. auricomus—cassubicus, R. binatus—auricomus* és *R. binatus—cassubicus.* — 2687. (Herb. Albach) = *R. cassubicus—binatus.* 2688., 2689., 2690. (Herb. Albach) = ! és *R. auricomus—cassubicus,* — 3662. Budai, Vasgyár = *R. binatus—auricomus.* — 19835? Mátra (Herb. Sadler) = *R. cassubicus—binatus.* — 19836? Buda (Herb. Sadler) = ! és *R. binatus* Kit. — 19837 ? Buda (Herb. Sadler) = !

R. auricomus L. Barth, Langenthal = ! — Bäumler, Pozsony = *R. auricomus—binatus;* — Mühlthal = *R. binatus—auricomus;* — Mühlau = *R. binatus* Kit. — Bernatsky, Versecz = *R. auricomus—cassubicus;* — Meszics = *R. binatus—cassubibus* — Blonski, Ukraina = *R. binatus—auricomus.* — Bohátsch, Karánsebes = *R. auricomus—flabellifolius,* — Buda = ! — Borbás, Plavisevitza = *R. binatus* Kit. — *Bouvet,* Maine et Loire = *R. binatus—auricomus.* — Brand, Scotland = *R. binatus—auricomus,* — Budai, Bábony = *R. auricomus—binatus;* — Bükkhegység = *R. binatus—cassubicus;* — Diósgyőr = *R. binatus* Kit.; — Garadnavölgy = *R. auricomus—cassubicus* és *R. binatus—cassubicus;* — Miskolcz = *R. binatus—auricomus;* — Répáshuta = ! — Cornau, Bormio = ! — Csató, Nagyenyed = *R. auricomus—binatus;* — Szerdahely = *R. auricomus—cassubicus* és *R. auricomus—binatus.* — Drymmer, Polonia = *R. binatus* Kit. és *R. binatus—auricomus.* — Fábry Rimaszombat = !

R. binatus—cassubicus és *R. auricomus—casšubicus.* — FAVRAT, Lausanne = *R. binatus—auricomus.* — FILARSZKY, Bakonyhegység = *R. binatus—cassubicus;* — Budapest = ! és *R. auricomus—cassubicus;* — Hernád áttörése = *R. binatus* KIT.; — Káposztásfalu = ! és *R. binatus* KIT.; — Pilis-Szentivány = *R. auricomus—cassubicus;* — Szent Endre =! és *R. binatus—auricomus;* — Vörösvár = *R. binatus—auricomus.* — FÜRSTENWÄRTHER, Rosenheim = *R. binatus—auricomus.* — GÁBELT, Modena = ! — GRUNDL, Helemba = ! és *R. binatus* KIT. — HAYNALD pater, Szécsény = *R. binatus—auricomus.* HAYNALD L. Agyagfalva = *R. auricomus—flabellifolius;* — Budakeszi =! — *Fleischhackerwiese* = *R. binatus* KIT. és *R. binatus—auricomus;* — Pappataka = *R. auricomus—cassubicus;* — Szécsény = *R. auricomus—binatus.* — HAZSLINSZKY, Rimaszombat = *R. binatus* KIT. és *R. auricomus—binatus;* — Terbegecz = *R. binatus—auricomus.* — HERMAN, Buda = ! — HEUFFEL gyüjteményéből? Saxonia = *R. binatus* KIT. — Buda = *R. auricomus—binatus.* Lugos = ! és *R. binatus—auricomus.* — HOLUBY, Lednice = *R. binatus.* — HULYÁK, Kökényben = *R. binatus* KIT. — HUTER, Tirol = *R. auricomus* L. és *R. auricomus—binatus.* — JÁVORKA, Orsova = *R. cassubicus—flabellifolius;* —Thermas Herculis = *R. binatus—auricomus;* — Visegrád = *R. auricomus—binatus.* — KÁKONYI Budapest = ! és *R. auricomus—binatus.* — KMET, Selmeczbánya = *R. auricomus—cassubicus.* — KOTSCHY, Hermanstadt = ! és *R. binatus* KIT. — LÁNYI, Rózsahegy = *R. auricomus—cassubicus és R. auricomus—flabellifolius.* — MÁRTON Dömötöri = *R. binatus* KIT. és *R. binatus—auricomus.* — MOESZ, Brassó = *R. cassubicus* L. és *R. auricomus—binatus,* — MÜLLER, Buda = ! — Dresden = *R. binatus* KIT. — Montes Pilisienses = ! — NENDTWICH, Budapest = *auricomus—binatus* és *R. auricomus—cassubicus,* — NYÁRÁDY, Késmárk = *R. binatus* KIT. — NYHUUS, Christiania = *R. auricomus—binatus.* — RAUSCHER, Hütteldorf = ! — REHSTEINER, Helvetia = *R. auricomus—binatus.* — RÉSELYI, Karldorfer Wald = ! és *R. auricomus—binatus;* — Pozsony = *R. binatus* KIT. — RIGO, Venetia = ! és *R. auricomus—flabellifolius* — RUNGE, (flor. guestphalica) = *R. binatus — auricomus.* — SCHLOSSER, Croatien = *R. binatus—auri-*

comus. —SCHNETZE, Haynau = *R. binatus* KIT. — SCHOTT, Dornbach = ! — SIEGFRIED, Deusingen = *R. binatus—auricomus.* — SIMONKAI, Arad = !, *R. auricomus—binatus* és *R. binatus* KIT.— Herend = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus.* — SINTENIS, Babadagh = *R. cassubicus—binatus* és *R. binatus* KIT. — STAUB, Bonn = ! — Budapest = *R. binatus—auricomus;* — Farkasvölgy = *R. auricomus—binatus;* — Visegrád = ! és *R. auricomus—cassubicus.* — TAUSCHER, Com .Alba = *R. cassubicus—binatus,* THAISZ, Com. Arad. = ! — VRABÉLYI Parád = ! — WIERZBICZKY, Temesvár = *R. binatus* KIT.

R. auricomus L. *var alliariaefolius* RCHB., WIESBAUR, Kalksburg = *R. auricomus—binatus és R. auricomus—cassubicus.*

R. auricomus L. *v. alpina* SENDTNER. SENDTNER, Bosnien = *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *v. ambiguus* SCHUR, NYÁRÁDY, Szepes v. m.= *R. cassubicus* L.

R. auricomus L. *v. apetalus.* CSATÓ, Erdély = *R. auricomus* L., *R. auricomus—binatus* és *R. auricomus—cassubicus.* — SALKI, Harz = *R. binatus—auricomus* — *Vrabélyi,* Agria = *R. binatus* KIT., *R. auricomus* L. és *R. auricomus—binatus.*

R. auricomus L. *v. binatus,* HEUFFEL, Maguri = *R. auricomus* és *R. auricomus—binatus.*

R. auricomus L. *an binatus? —??* = *R. auricomus* L.

R. auricomus L. *et f. binatus* KIT. SIMKOVICS, Budapest = *R. binatus* KIT. és *R. auricomus—cassubicus.*

R. auricomus × *cassubicus.* LAGERSBERG, Upland = *R. cassubicus—auricomus.*

R. auricomus L. *var elatior.* HAZSLINSZKY = a *R. cassubicus*hoz közelálló valamely torzalak.

R. auricomus L. *f. fallax.?* Hainburg = *R. cassubicus* L. — JÁVORKA. Oravicza = *R. cassubicus—binatus* és *auricomus—flabellifolius;* — *Krassó-Szörény* = *R. auricomus—cassubicus.*

R. auricomus L. *v. fallax W.* BÁNYAI, Abrudbánya = *R. auricomus—binatus.* — GELLHORN, Ratibor = *R. auricomus—binatus* és *R. auricomus—cassubicus.* — MÁRTON, Mákfa = *R. bina-*

tus—auricomus. — MÜLLER, Ratibor = *R. binatus—cassubicus.* — SIMKOVICS, Szeben = *R. binatus—cassubicus.* — ZIMMERMANN, Striegau = *R. binatus—cassubicus.* — ? Plantæ finl. exsicc. = *R. binatus—auricomus.* — ? Breslau = *R. auricomus* L. *és R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *β. fallax.* BARTH, Monora = *R. cassubicus* L. — BUEK, Vratislavia = *R. auricomus—cassubicus.* — HOLUBY, Lednice = *R. auricomus* L. és *R. binatus—auricomus.* — KÖHLER, Bromberg = *R. auricomus—cassubicus.* — PECK, Schweidnitz = *R. auricomus—cassubicus* és *R. binatus—cassubicus.* — VRABÉLYI, Eger = *R. binatus—auricomus.* — WIMMER Breslau = *R. auricomus—cassubicus.*

R. auricomus L. *grandiflorus.* SADLER? *R. auricomus—flabellifolius.*

R. auricomus L. *v. grandiflorus* LEC. et LAM, GONOD, france = *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *β. incisifolius.* HAZSLINSZKY, Eperjes = *R. binatus—cassubicus.* — SIMONKAI, Arad = *R. auricomus—cassubicus.*

R. auricomus L. *var. incisifolius* RCHB, CSATÓ, Erdély = *R. cassubicus—binatus.* — SIMONKAI, Budapest és Eperjes = *R. cassubicus—auricomus,* — Déva és Brassó = *R. cassubicus* L.

R. auricomus L. *β. mutabilis* WIERZB. Herb. Sadl. No. 19841. = *R. auricomus—flabellifolius.*

R. auricomus L. *β. abovus (?)* RUPR. KÜHLEWEIN? = *R. binatus* KIT.

R. auricomus L. *v. palmata* HU. LUHR, Svédország = *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *v. pinguior* RCHB. MÁRTON, Dömötöri = *R. binatus—cassubicus.*

R. auricomus L. *v. reniformis Kitt.* 4805. (DÖRFLER herb. norm.) = *R. auricomus* L. és *R. binatus—auricomus.* — BUDAI, Alsó-Hámor = *R. auricomus* L. — HARZ, Bamberg = *R. auricomus* L. és *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *ssp. sibiricus* (GLEHN) LINDBERG, 4806. (DÖRFLER herb. norm.) = *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *v. sibiricus* GLEHN, SINZEW, Perm = *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus L. *v. silvicola* W. GR. BÉGINOT, Colli Euganei = *R. binatus—auricomus.* — RIGO, M. Baldo = *R. binatus* KIT.

R. auricomus L, *v. typicus*, BUDAI, Alsó-Hámor = *R. auricomus* L. és *R. binatus* KIT. — SYREISCZIKOW, Mosqua = *R. binatus* KIT.

R. auricomus L. *v. variifolius* SCHUR, CZETCZ, Radna = *R. binatus* KIT. és *R. auricomus* L.

R. auricomus L. *f. vegetior* (R. bin. autor. non KIT.) JANKA, Claudiopolis = *R. binatus—auricomus.*

R. binatus KIT. BARTH, Kleinscheuern = ! — Csucsa = ! és *R. auricomus—binatus;* — Krakkó = ! és *R. binatus—auricomus.* — DIETZ, Szürthe = *R. binatus—cassubicus.* — HAYNALD, Alba-Carolina = *R. auricomus* és *R. binatus—auricomus* — JANKA, Kolozsvár = *R. auricomus—cassubicus.* — SCHLOSSER, Jurjevo = ! és *R. binatus—auricomus;* — Zágráb = ! és *R. binatus—auricomus.* — SIMONKAI, Nagyszeben = ! — VRABÉLYI, Agria = *R. binatus—auricomus* és *R. auricomus—binatus.* — WOLFF, Bükk és Heuwiese = ! — Torda = ! és *R. binatus—auricomus.*

R. cassubicus L. 6547.? Gyertyánvölgy = ! — 1727. (fl. exsicc. Austr.-Hung.) I. = ! és *R. auricomus—cassubicus.* II. ugyanaz és! — 19849. (Sadler) = *R. binatus—auricomus.* — 19850. (Sadler) cultivált példány = *R. auricomus* — ? Upsala (Herb. Tauscher) = *R. auricomus* L. — ANGSTRÖM, Upsala = *R. auricomus* L. — BAENITZ, Königsberg = *R. binatus—auricomus* és *R. cassubicus—auricomus*; *R. auricomus—cassubicus* és *R. auricomus* L. — BARTH, Mediasch = ! — Schässburg = ! — BORBÁS, Benke = *R. cassubicus—auricomus.* — BUDAI, Diósgyőr = ! és *R. cassubicus—auricomus.* — BUEK, Borussia = ! — CHAGERHELM, Upsala = *R. auricomus* L, — FUSS, Hammersdorf = ! — GEFM. Laibacher Stadtwald = *R. binatus—auricomus.* — HAYNALD, Alba-Carolina = *R. auricomus* L. és *R. auricomus—binatus.* — HAZSLINSZKY, Besterczebánya = *R. cassubicus—auricomus,* — Szt. Olaszi = ! — Herb. flor. ross. = ! — HERMANN, Buda = *R. cassubicus—auricomus* és *R. cassubicus—binatus.* —

Heidenreich, Tilsit = ! — Heuffel, Arad = *R. cassubicus—auricomus,* — Holuby, Innovecz = *R. auricomus—cassubicus;* — Melčič = ! — Ivanitzky, Wologda = *R. auricomus* L. és *R. auricomus—cassubicus.* — Knebel, Kapsdorf = *R. auricomus—cassubicus.* — Knerle, Nagy-Károly = *R. cassubicus—auricomus.* — Kotschy, Nagyszeben = ! — Kotula, Przemysl = ! — Kováts, Kolozsvár = ! — Landquist, Roslagen = ! — Lányi, Liptó = ! — Lövenhelm, Upsala = *R. auricomus* L. — Lutz, Franzdorf = *R. cassubicus—auricomus.* — Margittai, Stubnyafürdő = *R. cassubicus—binatus.* — Nyárády, Késmárk = ! — Hosszúerdő = ! — Pančič, Jagodina = *R. auricomus* L. és *R. auricomus—binatus.* — Piers, Com. Castriferei = *R. auricomus* L. — Réselyi, Wolfsthal = *R. cassubicus—auricomus.* — Rőmer, Schuler = *R. cassubicus—auricomus.* — Schlytter in herb. europ, = ! — Simonkai, Úrvölgy = *R, cassubicus—auricomus.* — Szurák, Drevenik = *R. cassubicus—auricomus.* — Vágner, Borkút = *R. cassubicus—auricomus;* — Huszt = *R. binatus.* Kit. — Vrany, Klein-Lomnitz = *R. cassubicus—auricomus.* — Wiederspach, Lemberg = *R. auricomus—cassubicus.* — Wolff, Bükk = *R. cassubicus—binatus* és *R. cassubicus—auricomus.*

R. fallax W. Gr. Peck, Silesia = *R. auricomus—cassubicus* és *R. cassubicus—flabellifolius.*

R. flabellifolius. Heuff. Borbás, Csukár (ex herb. Tauscher) = ! — Csukár = *R. cassubicus* L. — Plavisevitza = !, *R. binatus—flabellifolius* és *R. auricomus—flabellifolius.* — Hazslinszky, Lőcse = *R. cassubicus* L. — Heuffel, Krassó = ! — Herb. Heuffel. Simion = *R. binatus—flabellifolius* és *R. flabellifolius—cassubicus.* — Janka, Bükk = *R. flabellifolius—auricomus* és *R. auricomus—flabellifolius.* — Kazan = *R. auricomus-flabellifolius.* — Jávorka, Báziás = *R. flabellifolius—binatus, R. flabellifolius—auricomus* és *R. flabellifolius—cassubicus.* — Richter, Kolozsvár = *R. auricomus—flabellifolius.* — Römer, Brassó = *R. cassubicus—binatus* — Petersberger Berg = ugyanaz. — Simonkai, Herkulesfürdő = *R. auricomus—cassubicus;* — Plavisevitza = !, *R. cassubicus—flabellifolius* és *R. auricomus—flabellifolius.* — Wierzbiczky, Simion = !, *R. aurico-*

mus—flabellifolius és *R. flabellifolius—binatus.* — WOLFF, Bükk = *R. auricomus—flabellifolius.*

R. flabellifolius HEUFF, *v. grandiflorus* HEUFF, BORBÁS, Csukár = *R. flabellifolius—cassubicus.*

R. transsilvanicus SCHUR, SCHUR Transsilvania = *R. auricomus—flabellifolius.*

B) Dr. Degen Á. gyüjteménye.

Ranunculus. . . DEGEN, Buda = *R. binatus—cassubicus.*

Ranunculus. . . DEGEN, Kazan = *R. flabellifolius—cassubicus.*

Ranunculus. . . DEGEN, Kazan (folia radicalia partim partita, partim impartita) = *R. cassubicus—binatus.*

Ranunculus. . . DEGEN, Kazan. «Floribus magnis ad *R. flabellifolium β., grandiflorum* Heuff. spectat.» = *R. flabellifolius—auricomus.*

R. acris × auricomus L. ERIKSON, Vamo = *R. binatus—auricomus* und *R. auricomus.* L.

R. alliariaefolius RCHB. MOESZ. Brassó = *R. auricomus—flabellifolius.*

R. ambiguus SCHUR, JANKA, Geyer, Bükk bei Klausenburg = *R. flabellifolius—auricomus.*

R. ambiguus A. RICHTER. Bükk prope Kolozsvár = *R. flabellifolius—auricomus.*

R. auricomus L. BLONSKI, Ukraina = ! — DEGEN, Orsova, 11 Mai 1904 = *R. cassubicus—flabellifolius.* — DEGEN, Orsova = *R. auricomus—flabellifolius.* — DEGEN, Pozsony = *R. binatus* KIT. et ! — DEGEN, Zólyom = ! — DRYMMER, Zychlin = *R. binatus* KIT. — GOLLUPEMA (?) ad thermas Herculis = *R. auricomus—binatus.* — HOPPE. In silvis montium Ratisbonæ = *R. auricomus—binatus.* — HULJÁK, Kökényben. = *R. binatus—auricomus.* — JANKA, Szt. Gothard = *R. binatus—auricomus.* — KECK und STRASSER I. Aistersheim = *R. binatus—auricomus.* II. Seitenstetten = *R. auricomus—binatus.* (Flora exs. Austr.-Hung. No. 1726.) — KOCSIS, Hárshegy, Buda = *R. auricomus* L. és *R. auricomus—binatus.* — LANDMARK, Norvégia = *R. binatus* KIT. —

Lányi, Rózsahegy, = *R. binatus* Kit. — Litwinow, Kaluga. = *R. binatus—auricomus.* — Longa (?) Livigno (?) = *R. auricomus—cassubicus.* — Pichler, Dragalevce (folia radicalia desunt. = *R. auricomus* L. ?) — Pichler, Sofia. = ! — Seymann. Panikova barlang. = *R. auricomus—binatus* — Teplikoff. Iljensk = *R. binatus* Kit. — Urumoff. In monte Vitosa. (Folia radicalia desunt; verosimile = *R. auricomus* L.) — Urumoff in m. Vitosch = *R. auricomus—cassubicus.* — Wiesbaur, Mariaschein = *R. binatus* Kit.

R. (auricomus L. var.) *fallax* W. Gr. Sabransky bei Wolfsthal = *R. auricomus* L. und *R. auricomus—binatus.*

R. auricomus L. *f. incisifolius* Rchb. Filarszky et Kümmerle, Pilis-Szentiván. = *R. auricomus* L, und *R. auricomus—binatus.*

R. auricomus L. var. *turfosa,* Janka. Kis-Kágya = *R. binatus* Kit.

R. auricomus L. var. *typicus.* Syreisczikow, Mosqua. = *R. binatus* Kit.

R. auricomus L. var. *vegetior. R. binatus* autor. exclus Kit. — Janka Bükk bei Klausenburg = *R. binatus—auricomus.*

R. auricomus × cassubicus, Lagerberg, Uppland. = *R. auricomus* L.

R. cassubicus L. Barth, Monora. = !

R. cassubicus L. Bubela (flor. exs. Austr.-Hung. No. 1727.) Lemberg = *R. cassubicus—flabellifolius.* — Bubela Vsetin = *R. cassubicus—auricomus.* — Degen, Hárshegy, Buda = *R. cassubicus—auricomus.*

R. cassubicus L. Degen, Pozsonyihegy, Buda = *R. cassubicus—auricomus.* — Degen, Schuler, Brassó = *R. auricomus—cassubicus.* — Degen, Wolfsthal. = *R. auricomus* L. — Heidenreich, Tilsit = ! — Kotula, Przemysl = ! — Lagerwall, Drottmingholm = *R. auricomus—cassubicus.* — Litwinow, Kaloga = ! — Margittai, Stubnyafürdő = *R. cassubicus—auricomus.* — Syreisczikow, Mosqua = *R. binatus—cassubicus.* — Teplonkhoff, Plantæ uralens. = *R. auricomus—binatus.* — Wagner, Versecz = *R. auricomus—binatus.*

R. cassubicus L. f. *fallax.* W. Gr. = *R. auricomus* L.

R. cassubicus L. var. *flabilliferus* Borb., Degen. In monte Sti Johanni, Buda = *R. cassubicus—flabellifolius.*

R. fallax W. Gr. Moesz, Brassó. = *R. auricomus—binatus;* II. *R. auricomus—cassubicus.*

R. flabellifolius Heuff, Jávorka et Timkó, Báziás = *R. flabellifolius—auricomus.*

R. flabellifolius a.) integer Heuff. Degen. Plavisevitza = *R. flabellifolius* Heuff.

R. flabellifolius β.) grandiflorus Heuff. Degen. Plavisevitza = *R. flabellifolius* Heuff. — Degen: Inter Dubova et Plavisevitza = *R. flabellifolius—auricomus* és *R. flabellifolius — cassubicus.*

R. pseudopsis Jord. Bécourt. Pas de Calais. = *R. auricomus—binatus.*

R. sibiricus Glehn, Montel, Lapponia = *R. binatus—auricomus.* — Teplonkhoff. Perm. = *R. auricomus—binatus.*

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 okt. 16.-án tartott üléséből.)

A VASLERAKÓDÁSOK JELENTŐSÉGE A BANTI-KÓROS LÉPDAGANATOKBAN.

BUDAY KÁLMÁN levelező tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

A mikor a lép egy különös megbetegedésére vonatkozó szövettani vizsgálataimról beszámolni szerencsém van, legyen szabad bevezetésül röviden utalnom arra, hogy a kórbonczolástan, az az orvosi szakma, a melynek körében kifejtett munkásságomért a tek. Akadémia kitüntető elismerése ért, buvárkodási módszereit illetőleg szoros kapcsolatban van a többi elméleti orvosi tudománynyal.

Ezek az orvosi szakmák azonban nemcsak annyiból hasonlítanak egymáshoz, hogy valamennyien a természetbuvár inductiv módszereivel dolgoznak, hanem különösen a kórtani csoportba tartozó orvosi tudományoknak közös a helyzetük a tekintetben is, hogy a haladás felé vezető úton igen számos és egészen sajátszerű akadálylyal kell megküzdeniök.

Egyfelől ott van az ép emberi szervezet a maga rendkívül szövevényes alkotásával, a különböző szervek egymásra hatásának, az anyagcsere szabályozásának még kiderítetlen kapcsolataival. Másfelől szemben állunk az embert megbetegítő hatások sokféleségével, s e káros hatások által az emberi szervezetben kiváltott reactiók végtelen változatosságával.

Még fokozódnak a kutatás nehézségei, ha olyan szervek megbetegedéséről van szó, a melyek épélettani működése felől sem vagyunk teljesen tájékozottak, főleg pedig, ha ezeket a szerveket valami olyan betegség támadja meg, a mely észrevétlenül, lappangva kezdődik és hosszadalmas lefolyású, mert ilyenkor a betegség kezdete rejtve marad előttünk s annak csak későbbi időszakai kerülnek elénk.

Nem csoda, hogy ily akadályok között a haladás sem rohamos, hanem csak fokozatos, lassú, még olyan kérdésekben is, a melyek megoldására a legkiválóbb buvárok tehetségük legjavát pazarolták.

Azok a kutatási módszerek, a melyekkel feladataink elérésére ilyenkor törekedhetünk, különbözők, s éppen e különböző eljárások eredményeinek összevetése útján lehetett leginkább az óhajtott czélt megközelíteni. Felhasználjuk a betegágyi észleleteket, a bonczolások, a szövettani és a vegyi vizsgálatok leleteit, esetleg állatkisérleteket is végzünk. Miközben ily módon bizonyos betegség-alakok fellépése módját, lényegét jobban megismerjük, nem ritkán egyúttal alaposabb betekintést nyerünk a megbetegedés székhelyét tevő szervnek épélettani működésébe, s ennyiből a kórtani buvárkodások nagyban előmozdították az ép emberi szervek szerkezetére, működésére és kölcsönhatására vonatkozó ismereteinket is.

A következőkben én is olyan vizsgálatokról óhajtanék beszámolni, a melyek egy lappangva meginduló, hosszadalmas lefolyású betegség-alakra vonatkoznak, a mely betegségnek székhelye a lép, ez a működésére nézve még elég rejtélyes szerv. Olyan buvárkodási területről van tehát szó, a melyen a kutatásnak fent vázolt nehézségei úgyszólván sokszorozva, halmozva állnak elénk.

A mult század 90-es éveinek elején Banti olasz orvostanár hivta fel a figyelmet arra, hogy az ő tapasztalatai szerint némely betegnél jelentékeny fokú lépnagyobbodások fordulnak elő, a melyek egyúttal nagy halványsággal járnak és több év mulva lassankint lesoványodás, elgyengülés jelei közt halállal végződnek. A betegség későbbi időszakában a lép gyüjtőerén az érelmeszesedéshez hasonló elváltozások állnak elő, a máj pedig heges zsugorodásnak indul.

E baj gyógyítására Banti szerint csak egy eljárás bizonyult sikeresnek: a megnagyobbodott lépnek sebészi úton való eltávolítása. Ugyanis a lép kiirtása után a beteg halványsága eltünik, előbbi jó arczszínét és erejét is visszanyeri. Későbbi észlelések kiderítették még, hogy a betegségnek, a melyet fölfedezőjéről BANTI-kórnak neveztek el, jellemző vonása az, hogy a vörös- és fehérsejtek megfogynak, a vér hæmoglobintartalmának csökkenése pedig még erősebb fokú, mint a vörös vértestek számbeli fogyása. A betegség tulajdonképpeni okát és kifejlődésmódját maga BANTI sem tudta kideríteni, ámbár ő 50 esetet észlelt.

Annyit megtudtunk az ő vizsgálataiból, hogy a lép megduzzadása nem annyira a sejtes elemek szaporodásán, mint inkább a kötőszöveti rostok megvastagodásán alapul; BANTI föltevése az, hogy az ilyen lépben bizonyos kártékony bomlástermékek képződnek, a melyek a vérkeringés által a lépből a májba vitetnek el, s másodlagosan a májat is megbetegítik. Mi módon okozza a lépnagyobbodás az általános vérszegénységet, azt Banti szintén nem tudta tisztázni.

Ez a betegség, ritkább előfordulása daczára, BANTI első közlései óta általános érdeklődés tárgya volt, és pedig nemcsak közvetetlen gyakorlati fontossága miatt, a mennyiben egy másként halálos lefolyású betegséget sebészi beavatkozással, lépkiirtással meg lehetett gyógyítani, hanem még inkább a betegséghez fűződő magasabb tudományos szempontok miatt is. Ugyanis, ha sikerülne a BANTI-kór keletkezésmódját és lényegét megállapitani, akkor ez egyúttal sok fontos általános kórtani és épélettani problemának megoldását is jelentené. Az egyik nagyfontosságú kérdés, mely az érdeklődést ébren tartja, az, hogy mennyiben változik meg BANTI-kór esetén a lép normalis működése, hogy előfordulnak-e csakugyan a lépből kiinduló olyan anyagforgalmi zavarok, a melyek a vérképzésre s a májra is kártékonyan hatnak. A másik, nem kevésbbé vonzó thema az, hogy a BANTI-kóros betegen a lép kiirtása után hogyan alakul a vérképző szervek egymáshoz való viszonya, mely szervek veszik át azt a működést, a melynek teljesitése rendes viszonyok közt a lépnek feladata volna. A mint látjuk, az emberi szervek életműködéséről szóló tannak egyik legérdekesebb része ugyanis az, a mely a különböző szervek kölcsönhatásáról szól, várhatott gyarapodást a BANTI-kór körül megindult vizsgálatoktól.

A lép szerepéről a normalis vérképzésben annyit tudunk, hogy a lépben termelődnek bizonyos fajú fehérvérsejtek s ezenkívül a lépben történik a pusztulásra szánt vörösvérsejtek elkorhasztása is. A vörösvérsejtek festőanyagának, a hæmoglobinnak a globulinanyaga a lépből a májba kerül s ott az epefesték képzésére használtatik fel, a hæmoglobinban levő vasat pedig a lép visszatartja s bizonyos átalakítások után a csontvelőnek adja át, a mely azt megint új vörösvérsejtek képzésére használja fel. E szerint a lép a vérképzésnek egyik fontos szabályozója s a szervezet vasanyagforgalmának nevezetes faktora. Ezenkívül, mint láttuk, a lép közelebbi viszonyban van még a májjal is, a mely a vörösvérsejtek salakját epefestékké dolgozza fel; ez a közelebbi viszony kifejezést nyer abban is, hogy a lépből visszafolyó vér legelőször a májba jut s csak miután a májon keresztül haladt, kerül a szívbe.

Daczára a sokoldalú ellenőrző vizsgálatoknak, a Banti-kór a mai napig keveset vesztett eredeti rejtélyességéből. Sem a betegség tulajdonképeni okát, sem annak legelső megindulásmódját, sem a lépbeli elváltozásoknak a vérképzéshez és a májhoz való viszonyát nem sikerült megnyugtatólag kideríteni, ámbár a pontos klinikai megfigyelésekből, szöveti és anyagcserevizsgálatokból az irodalmi adatok egész tömege áll már rendelkezésünkre.

Nekem az utóbbi évek alatt Banti-kór több esetében volt alkalmam a lépet részint bonczolások, részint sebészi eltávolítások kapcsán szöveti vizsgálat tárgyává tenni; e közben annak bizonyos olyan tulajdonságait ismertem meg, a melyeket mások nem méltattak figyelemre. E vizsgálataim a Banti-kórra vonatkozó kutatási területnek, a mely ma már nagyon is tekintélyes, csupán egy kis részletére vonatkoznak ugyan, de mégis értéket adna nekik, ha bebizonyulna, hogy a talált jellegek a Banti-kór lényeges elváltozásaival közvetlen összefüggésben állanak.

Vizsgálataim a következő esetből indultak ki:

Egy 18 éves nőn a klinikai észlelés alkalmával a kolozsvári belorvosi klinikán igen tetemes lépduzzanat mellett nagyfokú vérszegénységet is találtak a vörös- és fehérvérsejteknek, különösen a hæmoglobintartalomnak megfogyásával, úgy hogy a kórtünetek a Banti-féle betegségre vallottak. E miatt a lép kiirtása indokoltnak látszott, s a műtét meg is történt; az eltávolított lépet intézetünknek szöveti vizsgálatra megküldötték. A lép súlya 1200 grm volt, tehát hatszorosa a rendesnek; állománya tömött, szívós, mint a hosszasan fennálló lépnagyobbodásoké szokott lenni. Szöveti vizsgálatkor nagyon szembetünő volt a lép kötőszöveti hálózatának az a megvastagodása, melyet Banti fibroadeniának nevezett el; úgyszintén a lép nyiroktüszőiben is megtaláltuk a verőerek körüli kötőszövet hyalinos duzzadását, a mely a Banti-féle lépnagyobbodásnak másik jellemző vonása. Ezeken kívül azonban még egy szokatlan elváltozást láttunk, ugyanis a halványvörös lépben élénksárga, szinte narancsszínű göböcskéket lehetett már puszta szemmel is felismerni, a melyek hosszúkás alakúak és sajátos tömött tapintatúak voltak, egy részüket sötétvörös vérzéses szegély vette körül.

A szöveti vizsgálat szerint ezek a narancssárga kis góczok igen tömör, hyalinos kötőszövetből álltak, melynek rostszálai kiterjedten elmeszesedtek, és pedig többnyire fénylő hosszúkás csikok alakjában s nem ritkán több darabra töredeztek el. A szokatlan sárga szín miatt a metszetekkel vasreactiót is végeztünk és nagy meglepetésünkre az említett fénylő, éles körvonalú rostokban, a melyek az elmeszesedés jeleit adták, sárga vérlúgsó és sósav behatására igen erős berlini kék szineződést kaptunk, jeléül annak, hogy az élénksárga színt csakugyan a kötőszöveti rostok vasimpregnatiója idézte elő.

Ezt a különös leletet akkor nem méltattam nagyobb figyelemre s csak akkor kezdtem iránta jobban érdeklődni, mikor a véletlen egy más hasonló esetet juttatott elém. Ebben a második esetben is fiatal egyénről, 28 éves férfiról volt szó, a kin a klinikai megfigyelés valószínűvé tette a Banti-kór jelenlétét. A beteg meghalt s bonczolásakor a májban kezdődő heges zsugorodást, a májkapuér és a lépgyüjtőér falában megvastagodásokat, a lépen pedig tetemes megnagyobbodást találtunk. A lép szívós volt, súlya 930 grm, majdnem ötszöröse a rendesnek, s egyébkint is meg lehetett találni benne a Banti-kóros lép jellemző tulajdonságait, így a kötőszöveti rostok megvastagodását és pedig főleg a burokhoz közel eső részekben.

A lépben közelebbi vizsgálatkor megint nagyszámú sárgásbarna göböcskét is láttunk, melyek tömött tapintatúak voltak s legnagyobb részük közel feküdt a lép burkához. Visszaemlékezve az előbbi esetre, ezeket a sárga góczokat most már sorozatmetszeteken is tanulmányoztuk.

A szöveti vizsgálat csakugyan ezekben is elmeszesedést derített ki, és pedig különösen a kisebb verőerek falában és az azokat körülvevő kötőszöveti és rugalmas rostokban. Az elmeszesedett rostok környékén hyalinos elfajulás volt kezdődő elhalással. Az előbbi esethez való hasonlatosságot még fokozta az, hogy az elmeszesedett rostokon a vaskémlés sárga vérlúgsóval és sósavval megint nagyon erős berlini kék színeződést adott, sőt a mikor sorozatmetszeteket párhuzamosan kezeltünk mészre és vasra, a vasimpregnatio a kötőszöveti és rugalmas rostokban sokkal nagyobb fokúnak s kiterjedtebbnek bizonyult, mint az elmeszesedés. Különösen feltünt az is, hogy a sárga góczok szélei gyakran még csak a vasreactiót adták, míg a központi részekben a mésztartalom volt erősebb. Úgy látszott tehát, hogy a vas lerakódása megelőzi a mész kiválását.

E két eset egybevetéséből már azt lehetett gyanítani, hogy a Banti-kóros lépdaganatnak s e vas-mészlerakódásoknak együttes előfordulása mégsem puszta véletlen, hanem a kettő közt valami összefüggésnek kell lenni. Érthető kíváncsisággal vizsgáltam ezek után három további, Banti-kórból eredő lépnagyobbodást, a mely az utolsó 2 év alatt intézetünkben vizsgálatra került.

Az egyik ezek közül 14 éves fiún fordult elő, a kin a klinikai megfigyelés Banti-kórra vallott s ezért az erősen megnagyobbodott lépet műtétileg eltávolították. Tüzetesebben megvizsgálva a szinte ötszörösére megduzzadt, 860 grmos lépet, abban már puszta szemmel is nagyszámú rozsdabarna góczocskát láttunk, melyek szöveti metszetekben az érfalakon és a környező kötőszöveti és rugalmas rostokon az elmeszesedés és vaslerakódás igen kifejezett képét adták, úgyszólván pontról-pontra ismételve az előbbi két eset lényeges tulajdonságait. A vaslerakódások ez esetben is főleg a kisebb verőerek külső rétegeiben kezdődtek, s innen terjedtek át a környező hyalinos kötőszövetre. Egyébként a lépben megint a BANTI-kórra jellemző szöveti változások látszottak, különösen szembetünő volt a kötőszövetes megvastagadás úgy a lép-pulpában, mint a verőerek körüli nyirokszövetben.

Két további esetünkben a klinikai kép és a bonczolási jelek összevetése szintén BANTI-kórra vallott s a lép megdagadása igen tetemes fokú volt. Ámbár ebben a két lépben puszta szemmel rozsdabarna foltokat nem tudtunk felismerni, mégis a behatóbb szöveti vizsgálatkor mind a két esetben megtaláltuk a verőerek körül a vas- és mészlerakódásokat olyan módon, mint az előbbi esetekben, de mégis annyi különbséggel, hogy ez utóbbi esetekben a vas-mészimpregnatiók kisebb fokúak és terjedelműek voltak. Meg kell jegyeznünk, hogy ebben a két esetben a szövettani vizsgálat szerint a lép nagyobbodása nem tisztán csak a kötőszöveti rostok megvastagodásából, hanem egyúttal a lép sejtjeinek erős fölszaporodásából is eredt s már a kötőszövetszaporodás csekélyebb mértékéből is azt lehetett gyanitani, hogy ezek az esetek fiatalabb keletűek.

Az utolsó három esetünkben a vassal impregnált rostokhoz közel még apró sárgásbarna szemcséket, hæmosiderin-rögöket is találtunk, csakhogy ezek a hæmosiderin-rögök sárga vérlúgsóval és sósavval inkább zöldeskék színt vettek fel, nem színeződtek olyan intensive kékre, mint az a vas, a mely a kötőszöveti rostokat impregnálta. A rozsdabarna góczok vérzéses udvarának megfelelően a metszetekben a széli hyalinos kötőszöveti rostok közt összenyomott vörös vértesteket lehetett látni s ez a vérbeszűrődés határolta el a vaslerakódásos területeket a környező léppulpától.

Ha e röviden ismertetett szöveti leletek értékének, jelentőségének megállapitására az irodalmi följegyzéseket akarjuk segitségül venni, kiderül, hogy ily együttes mész- és vaslerakódásokat, ha nem is éppen BANTI-kóros lépekben, mások is találtak és leírtak a mienkhez sok tekintetben hasonló szöveti változásokkal. Így különösen KOCKEL, GIERKE és EHRLICH számolnak be olyan mész-vasimpregnatiókról, a melyek lépelhalások (infarctusok) körüli hegedésekben, vagy heges megtömörült tüdővérzésekben fordultak elő. E szerzők leletei a mieinkkel annyiból is megegyeztek, hogy a vas- és mészlerakódások főleg az erek falát és azok közvetlen környezetét illetik, nevezetesen azok rugalmas rostjait és kötőszöveti szálait. A hasonlatosság a mi eseteinkkel még abban is megvan, hogy a vasra jellemző berlini kék színeződés erősebb volt, mint a mészreactio, s csakugyan az említett szerzők is eseteiket úgy fogják fel, hogy azokban a vaslerakódás a mészkiválást megelőzte. A vaslerakódás túlsúlyát a mész felett még az is mutatta, hogy ezekben az esetekben éppúgy, mint a mieinkben, a góczoknak inkább az intensive rozsdabarna vagy sárgásbarna szine, mintsem a különös keménysége volt a feltünő.

Az irodalmi feljegyzések alapján valószinűnek látszott, hogy az érkörüli vaslerakódások létrejövetele két feltételhez van kötve; ezek közül az egyik abban áll, hogy a vörösvérsejtek valami okból, például erős vérpangás vagy vérzés következtében azon a helyen fokozott mértékben pusztuljanak el; a másik feltétel pedig az, hogy e helyről a vörös vérsejtek bomlástermékei a szövetek heges megtömörülése folytán a szokottnál nehezebben távozhassanak. Ily különös viszonyok közt válik lehetségessé az, hogy a vörösvérsejtek pusztulásából kiszabadult vas nem vitetik el onnan, nem szívódik fel, hanem lerakódik az ereket körülvevő nyirokhüvelyben, a melyben a hegedés a nyirokkeringést elzárta. (Hogy a vas- és mészsókiválások milyen közelebbi módon történnek, mennyiben lehet azokat kolloidos lecsapódásoknak tekinteni, annak fejtegetését itt mellőzöm.)

Az irodalmat átkutatva, sem az említett szerzőknél, sem másutt nem találtam nyomát annak, hogy a Banti-kóros lépdaganatokban ezeket a vas-mészlerakódásokat valaki felismerte és leírta volna. A mi leleteinket az irodalomban közöltekkel összevetve még azt is kimondhatjuk, hogy a hasonlóság a Kockel, Gierke és Ehrlich eseteivel nemcsak a szöveti kép, hanem még a fellépés körülményei tekintetében is megvan. Láttuk ugyanis, hogy a Banti-kóros lépekben a verőerek körül hegedések támadnak, a melyeknek eredménye a Banti szerint oly jellegzetes folliculus-sclerosis; ezek a hegedések eleinte szűkítik, majd el-zárják a verőereket körülhálózó nyirokereket s ez által megnehezítik azt, hogy a vörösvérsejtek szétesési termékei, különösen a belőlük kiváló vasösszeköttetések felszívódjanak s a lépből eltávozzanak. Itt nemcsak azok a vörösvérsejtek jönnek számba, a melyek a lépben rendes viszonyok közt is elpusztulnának, hanem azok is, a melyek a BANTI-lépben oly gyakori vérpangások és folliculus-vérzések miatt vannak pusztulásra kárhoztatva.

Azt hiszem tehát, hogy ezek a vaslerakódások a BANTI-kóros lép verőereit körülvevő hegedéseknek a következményei s előmozdítják őket a gyakrabban ismétlődő folliculus-vérzések. Ilyen felfogás mellett lehet megérteni azt is, hogy ezek a sárgásbarna göbök a lép burkához közelebb nagyobb számmal fordulnak elő. Már GRÜTZNER is figyelmeztetett arra, hogy a BANTI-féle lépben a folliculusok hegedése a lép burkához közel eső, tehát felszínesebben fekvő erek körül a legerősebb. Az ér körüli hegedések és a vas-mészlerakódások oki összefüggése még abból is látszik, hogy minél régibb a lépdaganat, minél szívósabb tapintatú, minél előhaladottabbak az ér körüli hegedések, annál erősebb fokúak és kiterjedtebbek a vaslerakódások is az ér körüli hyalinos kötőszövetben. Éppen ilyen régi esetekben a vörösvérsejtek egyéb bomlástermékei, így a hæmosiderin-rögök már el is tünhetnek s bizonyára ezért nem találtuk meg mi sem a hæmosiderin-rögöket régibb eseteinkben.

Honnan van az, hogy más vizsgálók figyelmét ezek a vaslerakódások kikerülték, azt nem tudom megfejteni; maga BANTI nem írja le őket, csakhogy ő még hæmosiderin-rögöket sem látott eseteiben, pedig hæmosiderin-rögöket főleg a vérerek körüli hegekben elég sokan találtak ama szerzők közül, a kik a BANTI-kóros lépet újabban szöveti vizsgálat tárgyává tették.

Önként vetődik fel ezek után még az a kérdés, hogy miként lehetne az általunk talált vaslerakódásokat a BANTI-kór lényegével összefüggésbe hozni. Miután ilyen többszörös, puszta szemmel is felismerhető vasimpregnatiókat a lép erei körül a BANTI-kór esetein kívül még csak a májkapuérrendszer elmeszesedésének egy esetében láttam, míg más eredetű, hosszasan fennálló lépnagyobbodásokban egyszer sem, azt kell keresnünk, miféle különös tulajdonságai vannak a BANTI-kórnak, a melyek ezt a vaslerakódást előmozdítják. E kérdés eldöntésére nem elégedhetünk meg a szöveti vizsgálatok eredményeivel, hanem számba kell vennünk azokat a működés-zavarokat is, melyek e betegséggel járnak; persze itt nagy nehézséget okoz, hogy a normalis lép működésére nézve is ellentmondók a vélemények.

A sok közlemény közül, a mely a lép működését főleg a BANTI-kórral kapcsolatosan tárgyalja, különösen a BAYER-é érdemel figyelmet, a ki a lép vasanyagforgalmát különböző kóros esetekben már régóta vizsgálja. Egyik újabb dolgozatában BAYER arra az eredményre jut, hogy a lép sokféle működése közül már magában az is, a mely a vörösvérsejtekre vonatkozik, elég bonyolult, a mennyiben a lép nemcsak hogy a vörösvérsejtek szétesését eszközli és szabályozza, hanem egyúttal az elpusztult vörösvérsejtekből (s egyéb tönkrement sejtekből) kiszabadult vasat is visszatartja és azt a hæmoglobin felépítése céljából a csontvelőnek átadja. A lép e hármas működéséből a vörösvérsejtek elkorhasztása úgy látszik főképen a BANTI-kór első időszakában fokozott, a mikor az újabb vizsgálatok szerint a rendesnél erősebb a hæmolytikus tevékenység.

BAYER abból a körülményből, hogy a BANTI-kóros betegen végzett anyagcsere-vizsgálataiban a vas kiválasztását a bél útján rendkívül csekélynek találta, holott ugyanennek a betegnek a sebészileg eltávolitott lépében a vastartalom háromszorta nagyobbnak bizonyult a rendesnél, azt a következtetést vonja le, hogy a BANTI-kórban szenvedő lépének nem csökkent a vasat visszatartó képessége, ellenben nagyon alászállott az a működése, hogy a magában felhalmozott vasat a szervezet számára értékesítse. BAYER szerint az ilyen betegben a vas mint holt tőke a lépben raktározódik el s nem használtatik fel hæmoglobin képzésére.

Ezek a vaslerakódások, a melyeket ismertettem, valóban ilyen holt tőkét jelentenek, s ha a BANTI-kór kezdeti időszakában lehetne is a fokozott erythrolytikus tevékenységet a vérszegénység egyedüli okának tekinteni, a későbbi időszakban, a mikor a lép már alig növekszik, s benne a hegedések a túlnyomók, a mindinkább fokozódó vaslerakódást annak bizonyitékául vehetjük, hogy a vas a lépet a szokottnál nehezebben hagyja el.

Ily felfogás mellett a BANTI-kórban szenvedők vérlelete is magyarázatot nyer; mint említettem, ezekben a vörösvérsejtek számbeli fogyását még felülmulja a hæmoglobintartalom csökkenése, nyilván azért, mert a csontvelő a vasanyagforgalom megzavarása miatt nem tudja a vörösvérsejteket elég gazdagon ellátni hæmoglobinnal.

Hogy a vaslerakódásoknak csakugyan az a jelentőségük, a melyet kifejteni szerencsém volt, azt csak sokszoros utánvizsgálatok dönthetik el. Ha kiderülne, hogy a lépbeli vasimpregnatiók ilyen nagy számmal és ilyen szabályos ér körüli elhelyezkedéssel csak olyan esetekben fordulnak elő, a melyek klinikai megfigyeléskor a BANTI-kór jeleit adták, akkor ez további lépés volna a betegség kórképének szabatosabb megalkotása felé. Ma a helyzet az, hogy a BANTI-kórnak nevezett tünetcsoportot a lépműködés különleges megzavarásának tekinthetjük, a mely sajátos működés-zavart azonban úgy látszik különböző okok, különféle elhúzódó fertőzések idézhetik elő; kóroktanilag tehát a BANTI-kór nem egységes. Nagy nyereség volna ezért, ha a kórszövettani változásoknak pontosabb megállapításával sikerülne legalább a kórtünetek és a szöveti eltérések közt a szorosabb kapcsolatot megtalálni s ez által a BANTI-kórnak még mindig elég homályos körvonalait élesebb világításba helyezni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 november 13.-án tartott üléséből.)

A BÚZÁNAK EGY ÚJ, VADONTERMŐ FAJVEGYÜLÉKE.

DEGEN ÁRPÁD l. tagtól.

(Székfoglaló előadás.)

(V. és VI. tábla.)

A búzának, egyik legősibb és legelterjedtebb kulturnövényünknek minden életnyilvánulása fokozottabb érdeklődést érdemel. Ennek a növénynek a szerepe az emberi táplálkozásban oly nagy, hogy nem vetélkedhetik vele semmiféle más, az emberiség által mivelés alá vett növény. Nagy elterjedését elősegítette a földkerekség majdnem minden éghajlatához való szinte bámulatos alkalmazkodóképessége, mely majdnem hasonló magának az emberi testnek hajlékonyságához és a legkülönbözőbb külső behatásokkal szemben tanusított ellentállóképességéhez. Ennek következtében mint az emberiség hű kísérője a tropusi s az arktikus vidékek kivételével eljutott úgyszólván minden emberlakta vidékre s ha ma még nem is érte el az egyáltalában lehetséges elterjedésének legnagyobb fokát, ennek az oka nagyrészt az, hogy tropikus vidéken oly növényekkel kellett eddig versenyeznie, a melyeknek mívelése az ott uralkodó viszonyoknál fogva gazdaságosabb.

Manapság, a midőn a mezőgazdaságban is a nyers empiria helyébe a kísérlet, a tudományos kutatás lépett, a midőn a növénytermelés keresi a kapcsolatot a physiologiával, a biologiával s az anatomiával, természetesen nagyon érdekelnek bennünket a fontosabb gazdasági növényeknek finomabb szerkezete, élettani viselkedésüknek közelebbi okai, mert életfeltételeiknek pontos ismerete abba a helyzetbe juttatna bennünket, hogy azokat jól megválasztva avagy mesterséges módon létesitve, egyrészt bizonyos mívelési módokkal elterjedésüknek területét megnagyobbítani, másrészt pedig az optimumok nyujtásával hozamuknak mennyiségét növelni s minőségét javítani tudnók.

Mindkét irányban a tudomány mindeddig csak követte az empiriát. Az empiria már oly időben alkalmazta a fontosabb kulturnövények geographiai elterjedésének növelése czéljából az eltérő mívelési módokat, így például a búzánál az éghajlat tekintetében kedvezőtlenebb vidékeken már régen alkalmazta a tavaszi vetést, a gyakorlat a hozam növelése czéljából már oly időben alkalmazott különböző fogásokat (trágyázást, öntözést, selectiót), a midőn a klimatologia, a növényphysiologia, illetőleg az örökléstan mint tudomány még meg sem született.

S ha Hume Dávid-dal valljuk is azt, hogy még soha senkinek sem sikerült valamely természeti jelenségnek végső okát kifürkésznie s hogy az emberi elmének legfeljebb az lehet az iparkodása, hogy azokat a principiumokat, a melyek a természeti jelenségeket előidézik, tisztázza s az egyes hatásokat a gondolkodás, az analogia, a tapasztalat és a megfigyelés segítségével néhány általánosan működő körülményre visszavezesse, mely körülmények voltaképpen valo előidéző okát hiába kutatnók, mert ezek az emberi kutatási vágy elől teljességgel el vannak zárva, vagyis röviden, hogy semmiféle jelenségnek végső okát kikutatni nem lehet, mégis annál az iparkodásunknál, melylyel a jelenségek összefüggését keressük, már nem egy olyan megfigyelésnek, tapasztalatnak jutottunk birtokába, melynek gyakorlati alkalmazása haszonnal járt. S ha a következőkben előadandókból közvetetlen haszon nem is háramlik sem a növénytermelésre, sem az örökléstan tételeinek a gyakorlatban való alkalmazására, mégis adattal szolgálnak, mely a búza biologiai viselkedése körül szerzett ismereteinket kibővíti, különösen pedig a búzának a növényrendszerben elfoglalt helyének tisztázásában tehet szolgálatot.

Az általam a következőkben tárgyalandó felfedezés analogonja annak a felfedezésnek, mely a mult század közepe táján keltett nagy feltünést, s a melynek híre, különösen a tárgyhoz fűzött magyarázatok révén, bejárta az egész botanikai irodalmat.

1853-ban ESPRIT FABRE, agdei (délfrancziaországi) intelligens növénytermelő, azzal lepte meg a botanikusokat, hogy egy Dél-Francziaországban elterjedt vadontermő fű, a tojásdad kalászbojt *(Aegilops ovata)* egy s ugyanabból a kalászából származó terméséből két teljesen eltérő növényfajt, ugyanis az *Aegilops ovatá*-t s az *Ae. triticoides*-t, egy a kalászbojt s a búza közt álló fajt, sikerült nevelnie; az utóbbinak termését pedig 12 éven keresztül újból elvetve, sikerült ebből búzát kitermelnie.

FABRE-nak ez a megfigyelése annyira ellentétben állott az akkor uralkodó s a faj állandóságába vetett hittel, hogy felfedezésével nem mert a nyilvánosság elé lépni a nélkül, hogy egy elismert tudóssal állításainak helyességét meg ne erősíttesse. Ez a tudós, a ki FABRE czikkének bevezetését írta, DUNAL FÉLIX volt, a montpellieri egyetem tanára, a ki előljáró czikkében[1] elismerte, hogy saját szemével látta mindazt, a mit FABRE elmondott s így egyéni súlyával állott helyt mindazért, a mit FABRE czikkében[2] megírt. A kísérletekből a következtetést is így vonta le DUNAL: «ennek következtében kénytelenek vagyunk elfogadni azt, hogy némely termelt búzánk — ha nem is valamennyi fajtája — nem egyéb, mint néhány *Aegilops*-fajnak sajátságos alakjai, melyeket az *Aegilops*-ok «raçe»-jainak kell tekintenünk és FABRE-nak köszönhetjük azt, hogy a kultivált búzánknak valódi eredetét kimutatta».

Már a DUNAL-FABRE-féle czikk megjelenését követő évben azonban GODRON D. A., a kinek alkalma volt FABRE kulturáit látnia, egy czikkében[3] egészen más módon magyarázta a közölt tényeket. Nem tagadta, sőt megerősítette FABRE-nak azt a megfigyelését, hogy az *Aegilops ovata* terméséből néha *Aegilops triticoides* fejlődik, de ezt úgy magyarázta, hogy az *Aegilops*

---

[1] Courte introduction au travail de M. ESPRIT FABRE, d'Agde, sur la métamorphose de deux *Aegylops* en *Triticum*.

[2] Des *Aegylops* du midi de la France et de leur transformation. Mindkét czikk megjelent a «Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier pour l'année 1853»-ban.

[3] Quelques notes sur la Flore de Montpellier. Mém. de la soc. d'émulation du Doubs 1854. 7. és köv. old.

virágzatában levő virágok közül az egyik idegen, még pedig a búza hímporával termékenyülhetett meg, szóval, hogy az *Aegilops triticoides* nem egyéb, mint az *Aegilops ovatá*-nak és a búzának fajvegyüléke. A kulturában mutatkozó jelenség sajátságosságát emeli az, hogy éréskor éppen ennek a kalászbojtfajnak egész virágzata válik le a szalmáról s a virágzatban lévő összes s a polyvákba zárt termések — az *Ae. ovatá*-nál rendszerint négy — a virágzati tengelylyel együtt a földbe kerülnek, ott azután a csirázás úgy indul meg, hogy a csiranövények gyökerei és plumulái a pelyvákon áttörve ellenkező irányban nőnek, úgy hogy ha az egyes, gyepekben növő, kifejlődött *Aegilops*-okat kiássuk, azt látjuk, hogy rendszerint 2—3—4 növény gyökere és szára szorosan össze van fonva s a gyökerek közt néha még megtalálhatjuk magát az eredeti kalászt is, a melyből a növények kicsiráztak. Feltünő tehát, ha az egy kalászból származó növények közül az egyik a többitől teljesen eltérő tulajdonságokkal bír s valóban lehetetlen volt ennek más magyarázatát adni, mint azt, hogy az *Aegilops*-kalásznak egyik virágját idegen beporzás érte.

Ezt az ily módon keletkezett fajvegyüléket Fabre 12 generation át figyelte meg s azt látta, hogy a növények fokozatosan termetesebb alakot öltöttek, kalászuk megvastagodott és teltebbé lett, a kalász tengelye elvesztette az *Aegilops*-ok törékenységét, pelyváin lassankint el-eltűnt az a két hosszú szálka, mely az *Aegilops triticoides*-nek jellemző bélyege; a 12. generatióban végül növénye teljesen hasonlított a búzához.

Ha ma olvassuk mindezt, világosan áll előttünk az, hogy az *Aegilops triticoides* nem is lehetett más, mint az *Aeg. ovatá*-nak s a búzának fajvegyüléke s hogy az az átalakulás, melyet Fabre megfigyelt, nem volt egyéb, mint a fajvegyüléknek Mendel törvénye szerint való hasadása. S ha Fabre már eleve fajvegyüléknek tekintette volna növényét s ha termésének minden szemét külön-külön vetette volna el, nem lehetetlen, hogy a hasadás számbeli arányát — mely Mendel-t is ennek a fontos törvénynek felismerésére vezette — is megfigyelhette volna. Az *Aegilops* × búza fajvegyülékeknél ezt a megfigyelést azonban megnehezíti az a körülmény, hogy termésük ritkán fejlődik ki, s hogy még a mesterséges módon létesített fajvegyülékek is rendszerint hamarosan kivesznek.[1]

Megneheziti a MENDEL-féle hasadási törvény felismerését még az is, hogy az újabb örökléstani kutatások szerint az úgynevezett «valódi fajok»-nak, vagyis mindazoknak a növényeknek kereszteződésénél, melyek egynél több tulajdonságban térnek el egymástól, a hasadási törvény sokkal bonyolódottabb módon nyilatkozik meg, semhogy azt oly egyszerű módon lehessen megfigyelni, mint a hogy az az egy és ugyanannak a fajnak közeli rokonságába tartozó *fajták* vegyülésénél lehetséges.

MENDEL-nek hasadási törvénye tudvalevőleg közel vitte a kutatókat ahhoz, hogy az öröklékeny bélyegek somatikus egységeit, az átörökölhető tulajdonságok vivő testeit is meghatározzák.

Az egyes generatiók eltérő egyedeinek számarányát megfigyelve és ezt összehasonlítva az ivaréréskor a sejtmag chromosomáiban bekövetkező reductiós oszlásokkal, ezek a tulajdonságokat átvivő testek minden valószínűség szerint a sejtmag chromosomáiban, illetőleg ezeknek alkotó részeiben[2] keresendők. Az örökléstannak legfontosabb újabb tételeihez tartozik különben az, hogy *nem tulajdonságok öröklődnek*, hanem a külső körülmények behatására való *reactiónak specificus volta*.[3] S ennek a reactioképességnek hordozói a chromosomák.

De visszatérve a bélyegek hasadására, sokkal bonyolódottabbak a viszonyok akkor, a mikor a két szülő nemcsak egy bélyegben illetőleg bélyegpárban (például a virág piros illetőleg fehér színében), hanem több tulajdonságában tér el egymástól. Ilyenkor az egyes tulajdonságok hordozóinak, a «*gene*»-knek sokkal több combinatiója lehetséges; sok esetben pedig megneheziti a hasadási arány megállapitását az a körülmény, hogy valamely látszólag egyszerű bélyeg (növényeknél például a virág vagy a

---

[1] L. PH. DE VILMORIN, IV. Conférence internat. de Génétique. Paris. 1911. 318.

[2] HEIDER, Vererbung und Chromosomen. — SCHAXEL, Über den Mechanismus der Vererbung. 1916: 12., 13. old.

[3] E. BAUR, Einführung in die experimentelle Vererbungslehre. 1914: 9.

mag színe) több *gene*-nek egymásra való hatásából származik. Hogy CORRENS-szel könnyen érthető példát idézzek,[1] a négerek és fehérbőrű emberek vegyüléséből származó hybrid, a *mulatt* bőrszíne az utódokban látszólag nem követi MENDEL törvényét, ellenben a négereknél elvétve előforduló albinok utódai követik azt. Ennek a magyarázata az, hogy a bőr fekete színét valószínűleg nem egy, hanem számos, MENDEL törvényét önállóan követő «*gene*» idézi elő (a példát bonyolítja még a néger és a fehér ember közt fennálló számos más különbség) s így az a valószínűség, hogy a *gene*-k az utódokban úgy találkozzanak, mint az az egyszerű hasadási törvénynél bekövetkezik, igen csekély. Ha például két szülő csak 20 ilyen önálló «*gene*»-ban különbözik, az F_1 generatio egyedei már 2^{20}, az F_2 generatióéi pedig $(2^{20})^2$ eltérő gametát hoznak létre, vagyis a tulajdonságoknak milliószor millió combinatiója lehetséges. A második (F_2) generatiónak sok millió egyede közül tehát csak egy lesz hasonló az egyik nagyszülőhöz.[2]

Míg tehát a néger és a fehérbőrű ember közti különbséget számos öröklődő «*gene*» hozza létre, a néger-albino és a néger közötti különbséget egy bélyegpár (fekete-fehér) okozza, mely az utódokban törvényszerűen hasad.

Növényeknél számos példáját lehetne felhozni az előbbi esetnek, így például NILSON-EHLE vizsgálatai szerint a búza endospermjének piros színét is már három *gene* idézi elő, melyek mindegyike egymagában is piros búzát hozhat létre, ha pedig keresztezésnél összetalálkoznak, sötétebb piros színt idéznek elő. Természetes, hogy vegyüléskor ilyen fajták sem követik a hasadási törvénynek egyszerű 1 : 2 : 1 vagy 1 : 3-hoz számarányát, hanem már az F_2 generatio is az 1 : 63-hoz arányban hasad.

Mindezeket az újabb kutatás által felderített viszonyokat azonban gyakorlati fontosságánál fogva felülmúlja az a tény, hogy fajvegyülés útján egyik szülő úgynevezett «recessivus» tulajdonsága a fiókgeneratióban eltűnhetik, «latens»-sé lesz s csak valamely későbbi generatióban lép fel ismét. Ismét más tulajdon-

---

[1] CORRENS, Die neuen Vererbungsgesetze. 1912: 68.

[2] L. E. BAUR, in Handwörterb. der Naturw. I. 869.

ságok csak akkor lépnek fel valamely *Fx* generatióban, ha a *gene*-k a megtermékenyítés alkalmával egy más fajtának olyan gene-jével találkoznak, mely az illető tulajdonságokat kifejleszteni tudja. CORRENS[1] két folyadékhoz hasonlítja ezt a jelenséget, a melyek közül az egyik konyhasóoldat, a másik légenysavas ezüstoldat. Mindkettő megtekintésre nem különbözik a víztől, ha azonban összevegyül, a különbség azonnal feltűnik. Az eddigi tapasztalatok szerint vannak ilyen latens bélyegek, melyek csakis fajvegyülés esetén lépnek fel s fellépésük után MENDEL hasadási törvényét követik («kryptomeria»).[2] Ilyen kryptomeria lehetett az, a midőn H. DE VILMORIN búzafajok mesterséges keresztezése alkalmával néhány esetben a *Triticum Speltá*-hoz hasonló alakokat kapott daczára annak, hogy *Speltá*-val nem is kísérletezett.[3] Ez is egyik bizonyítéka annak, hogy termelt búzánk számos régmúlt időben történt legkülönbözőbb keresztezésnek ivadéka s ez az oka annak, hogy termelt búzáink közt oly sok alakot lehet megkülönböztetni.[4]

Viszont PH. DE VILMORIN a «*Fétanielle blanche*» és «*Riéti*» búzafajták keresztezésénél oly utódokat kapott, melyek *Aegilops*-hoz hasonlítottak. (L. IV. Confér. intern. de Génét. 1911 : 318.) Ilyen kryptomeriára vezethető vissza NAUDIN-nak «variation desordonnée»-ja, melyet a *Triticum sativum* × *Spelta* hybrideken észlelt, a midőn a II. generatióban egyszerre olyan bélyegek léptek fel, melyek egyik szülőn sem voltak meg («l'action de l'hérédité subit en apparence une perturbation complète; la plante parait comme affolée» Bull. soc. bot. de France 1880: 309).

A kertészek régóta tudják, hogy sok növénynél mesterséges keresztezés útján egész seregét lehet létesíteni az új alakoknak,

---

1 CORRENS, Ueber Vererbungsgesetze. 1905:26.

2 E. v. TSCHERMAK, Die Theorie der Kryptomerie und des Kryptohybridismus. Beih. z. Bot. Centralbl. Bd. XVI. J. 1913. CORRENS, i. h. 26.

3 HENRY L. DE VILMORIN, Bull. de la Soc. bot. de France, 1880:73 dec.; 1883. jan.; 1888. jan.; PH. DE VILMORIN, Hybrids and Variations of Wheat, Rep. of the III. Intern. Conf. of Genetics, London 1907.

4 Már VILMORIN H. állította, hogy búzáinknak sok fajtája fixált hybrid. Bull. Soc. bot. de France 1880 :74.

melyeknek egy része magról szaporítva állandó. Ezt a tapasztalatot használják fel az úgynevezett «újdonságok» létesítésénél.

Az alkalmazott botanikában ennek a ténynek akkor van nagy jelentősége, a midőn keresztezés következtében a növényben valamely az emberre hasznos tulajdonság szabadul fel, mely kellő selectio útján állandósítható. Ez az egyik oka annak, hogy miért keressük oly nagy kitartással a búza s még néhány más kulturnövényünk ősét. Feltehető ugyanis, hogy ezekben az ősökben még néhány oly tulajdonság például betegségek ellen való ellentállás rejlik, mely az évszázadok folyamán a kultivált növényben gyengült vagy elenyészett.

S ez az oka annak is, hogy mai napon sem szünt meg érdeklődésünk a búzának természetes módon keletkező fajvegyülékei iránt. A búza eredetének s az egyes búza-fajok és fajták közelebbi vagy távolabbi rokonságának meghatározásánál a mesterséges keresztezések már elég szép eredményeket szolgáltattak s a mi említésre méltó, a búzák serologiai[1] vizsgálata is beigazolta azt, hogy közelebbi rokonságban állanak egymással azok a búzafajok, melyek könnyebben és gyakrabban kereszteződnek. Tehát fejérjevegyületek rokonsága áll fenn, mely természetes módon megnyilvánul a keresztezésnél, mesterségesen pedig kimutatható a serologikus vizsgálat útján.

Godron-t abban a gondolatmenetben, melynél fogva az *Aegilops triticoidest*-t fajvegyüléknek tartotta, elsősorban ennek a növénynek előfordulási módja vezette.

Az *Aegilops triticoides*-t Requien-nek Palun nevű kisérője fedezte fel legelsőbben Avignon vidékén[2] 1821-ben, még pedig búzaföldek szélén. Megjegyzendő, hogy az *Aegilops*-ok a Földközi tenger vidékén elterjedt gyomok. A fajvegyüléket Montpellier körül is mindig búzaföldek szélén, elhagyatott helyeken, ritkán magában a búzavetésben találták. Későbben Algierban, Siciliában és Déleurópa más helyein is mindig termelt búza közelségében lépett fel. Godron figyelmeztetett végül arra a tényre

---

[1] Zade, Serologische Studien an Leguminosen und Gramineen. Zeitschr. f. Pflanzenzüchtung Bd. II, Heft 2. 1914.

[2] Godron i. h. 11.

is, hogy oly helyeken, a hol ez a fajvegyülék tar búza közelében lép fel, az *Aegilops triticoides* szálkái is csökevényesek, ellenben jól fejlettek ott, a hol szakállas búza közelében fordul elő. Ugyanez a jelenség figyelhető meg a búza és *Aegilops* egy másik, későbben ismertetett fajvegyülékén, az *Aegilops triaristata* × *Triticum sativum*-on is. Meg kell jegyeznem, hogy ezeken a megfigyeléseken kívül GODRON termelési kísérleteket is végzett, melyek mindenben megerősítették fent elmondott nézetét.

Hosszadalmas volna e helyen felsorolni mindazokat a vitákat, melyeket egyrészt FABRE, másrészt GODRON czikkei a botanikai irodalomban felidéztek s melyekből az akkori kor legjelesebbjei: JORDAN, NAUDIN, DURIEU, BROGNIART, LINDLEY, REGEL, VILMORIN, GROENLAND, PLANCHON, sőt még az amerikai ASA GRAY is kivették részüket; ez a kérdés különösen a franczia irodalomban volt napirenden közel 20 évig, mígnem GODRON (1853-ban) és GRÖNLAND[1] az *Aegilops triticoides*-nek mesterséges keresztezés útján való létesítésével minden ellenzőjüket elhallgattatták;[2] BROGNIART-nak a franczia akadémia elé ilyen értelemben terjesztett «rapport verbal»-ja fejezte be a vitát, melynél hosszadalmasabbat s szenvedelmesebbet alig ismer a botanikai irodalom.

GODRON kísérletei közben arra a tapasztalatra jutott, hogy a búza×*Aegilops* hybridek meddők; termést csak akkor kapott, ha akár természetes, akár mesterséges módon lehetővé tette azt, hogy hybridek az egyik szülő hímporával megtermékenyüljenek. A fajvegyülék portokjaiban ugyanis nem fejlődött termékenyítésre alkalmas hímpor. Ha az *Aegilops triticoides*-t búza hímporával termékenyítette, eleinte kevéssé fertilis növényt kapott, mely

---

[1] L. VILMORIN et GRÖNLAND, Note sur la hybr. du genre *Aegilops*. Bull. de la Soc. bot. de France 1856. Séance 26. XII. és GRÖNLAND, Ueber die Bastard-Bildungen in der Gattung *Aegilops*. Pringsh. Jahrb. f. wiss. Bot. I. 1858: 514—529.

[2] Histoire des *Aegilops* hybrides. Mém. de l' Acad. de Stanislas pour 1869. p. 167—222. L. még PH. DE VILMORIN, Sur des Hybrides anciens de *Triticum* et d' *Aegilops*. IV. Conférence internat. de Génétique. Paris. 1911. 317—18.

minden tekintetben hasonlított JORDAN *Aegilops speltaeformis*-ára, termékenysége azonban ivadékról-ivadékra fokozódott.

Hogy számos fajvegyülék ily módon viselkedik, vagyis, hogy a keresztezés következtében meggyengült termékenysége a későbbi generatiókban megjavul, azt többen észlelték már, a kik növényhybridekkel foglalkoztak; legújabban WETTSTEIN a mesterségesen létesített *Sempervivum*-fajvegyülékeken.[1]

Az újabb tapasztalatok útján megállapitott ezen tényen törik meg az úgynevezett valódi fajok felismerésének egyik kriteriuma, melyet a fajvegyülékekről szerzett ismereteink klassikusa, KÖLREUTER JOH. GOTTL.[2] gondolt a tudományba bevezethetni, a midőn a fajvegyülékeket három osztályba (tökéletes, nem tökéletes és korcs «varietások», helyesebben talán varietas-vegyülékek osztályába) sorolta, a mely kategóriák abban különböznek, hogy termékenységük fokozatosan csökkent s a midőn KÖLREUTER azt hitte, hogy azok a növények, amelyek terméketlen fajvegyüléket szolgáltatnak, valódi «fajok». A fajvegyülékek potentiájával akarta tehát kipróbálni a fajok «valódiságát». Szerinte a közelebb rokon növények ivari vegyülése ugyanis inkább szolgáltat termékeny hybrideket, a távolabbi rokonoké pedig terméketleneket. Előbbi tétele ma is érvényes, utóbbit megdöntötték a fentemlített tapasztalatok.

Rendszertanilag közelebb álló növényfajok nemcsak könynyebben vegyülnek, hanem nagyobb számmal is hoznak létre termékeny fajvegyülékeket. Ez természetesen csak általánosságban áll, mert egyes növényfajoknál a termékenyités speciális s néha igen bonyolódott mechanismusa akadályozza meg a fajvegyülékek keletkezését. Ehhez járul még, hogy közel rokon növényfajok virágzási s így ivarérettségi ideje nem mindig esik egybe. Igy például a fűzfajok, mint a légáramlatok útján termékenyülő növények, bizonyos vidékeken temérdek fajvegyülékeket hoznak létre, ilyen helyeken nemcsak nagy számmal

---

[1] R. v. WETTSTEIN: Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse betreffend die Neubildung von Formen im Pflanzenreiche. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. XVIII. 1900: 191.

[2] KÖLREUTER, Vorl. Nachr. von einigen das Geschlecht der Pflanzen betr. Vers. u. Beob. 1761.

lépnek fel ilyenek, hanem a fajvegyülékek ismét kereszteződhetnek nemcsak a szülőfajokkal, de más fajvegyülékekkel is, úgy hogy másod-, harmad-, sőt negyedleges fajvegyülékekkel is találkozunk. Ez olyan helyeken történik a hol a szülőfajok virítása egy időre esik; a füzeknél például az északibb fekvésű vidékeken. Nálunk a fűzvegyülékek már nem oly gyakoriak s tőlünk délre fokozatosan gyérülnek.

Meg van nehezítve a keresztezés az önbeporzó fajoknál is; ezeknél legtöbbnyire a virág kinyílásakor a beporzás már megtörtént s így az idegen hímpor termékenyítő hatását csak kivételes esetekben gyakorolhatja. S éppen a búzánál is így van ez.

A búza termékenyülési mechanismusának ismerete közelfekvő okokból igen nagy jelentőségű. A búza kalászát alkotó füzérkékben sokkal több virág illetőleg magkezdemény fejlődik, mint a mennyiből termés szokott kifejlődni. A kalász csúcsán és alján fejlődő füzérkékben levő magkezdemények nem szoktak megtermékenyülni, a kalász közepén levő füzérkék 2—5 virágjából is rendszerint csak 1—2 termékenyül meg. Közgazdasági szempontból természetesen beláthatatlan előnyökkel járna az, ha a búza valamennyi magkezdeménye megtermékenyülne s csakugyan a nemesitők iparkodása elsősorban az, hogy kiválasztás útján szaporítsák azokat a fajtákat, a melyeknek több virágja hoz létre magot. Ez elsősorban az oldalsó füzérkék virágjainál lehetséges, a kalász s a füzérke végén állóknál ez már nem igen valószínű, mert ezeken a női ivarszervek satnyák.

Ha tehát a búzának természetes úton való megtermékenyülését mezőgazdasági szempontból nem mondhatjuk tökéletesnek, mégis a termelőre nézve nagyjelentőségű a termékenyülésnek az a mechanismusa, mely az időjárástól függetlenül mégis biztosítja a magkezdemények legnagyobb részének megtermékenyítését; ez abban áll, hogy a portokok még mielőtt a virágból kibujnának, tehát még a virág kinyílása előtt, hímporuknak körülbelől $^1/_8$ részét már előzetesen saját virágjuk bibéjére ejtik s a virágból való kilépésük után a hímpornak csak egy részét bocsátják a levegőbe. Igy ha valamely véletlen következtében a virág önbeporzódása nem sikerülne, a levegőből alászálló hímpor még mindig létrehozhatja a beporzást, bár ez az eshetőség a virág nyilásának rövid ideje miatt csak szűk határok között lehetséges.

A búza tehát túlnyomóan önbeporzás útján termékenyül, de azért az idegen beporzás lehetősége nincsen kizárva, csak meg van nehezitve térben és időben. Térben azáltal, hogy a virágpolyvák virításkor csak körülbelől 4 millimeternyire nyílnak, a virág tehát a pelyvák szélessége miatt csak a csúcsán nyílik egy kis rés alakjában; időben pedig, mert az egyes virágok nyílása nem szokott $^1/_4$ óránál tovább tartani. A tollalakú bibék is csak a virág csúcsán nyomulhatnak ki a pelyvák közül, de ez az iparkodásuk is a pelyvák alakja miatt akadályokba ütközik s csak ritkán láthatni a virág zárta után is künnmaradt biberészleteket, a melyeknél azután természetesen nincsen kizárva az, hogy idegen hímporral meg is termékenyülhetnek.

A búzának ezt a sajátságos virágzási módját egészen pontosan legelsőbben Godron figyelte meg;[1] felemlítendőnek tartom, hogy ezt a klassikus tanulmányát éppen az *Aegilops*-hybridek tanulmányozása alkalmából végezte.

Nem térve ki tanulmányának részleteire, Godron állapította meg legelőször, hogy a búza reggel $4^1/_2$ órakor nyílik, még pedig legalább 16° hőmérsékleten; az egyes virágok bizonyos sorrendben nyílnak ki; reggel $6^1/_2$—7 órakor a kalász virágzása be van fejezve.

Ezzel szemben az *Aegilops (ovata)* kalásza egy hónapig virít, virágja magasabb hőfokon nyílik mint a búzáé, még pedig $9^1/_2$—10 órakor délelőtt. Rendesen idegen beporzással termékenyül, és ha a termékenyülés nem következik be azonnal, virágja 1 napig is nyitva marad; hasonlóképpen viselkedik az *Ae. caudata*, mely az ezután felemlítendő *Ae. nová*-nak közeli rokona.

---

[1] M. Godron, De la floraison des Graminées. Mém. de la Soc. Nat. des Sciences nat. de Cherbourg. VII. 1873. Ugyanitt idézi az erre vonatkozó régibb irodalmat.

A későbbi szerzők, mint Delpino[1], Hildebrand[2], Körnicke[3], P. Shireff[4], Rimpau[5] is megerősitik a búza idegen beporzásának lehetőségét, de az előadottakból kiviláglik, hogy ez meglehetősen meg van nehezítve. A növénynemesítők ezt jól tudják s ezért bátran vetik egymás közelségében a különböző búzafajtákat a nélkül, hogy veszélyeztetnék tenyészetük tisztaságát.

De át kell térnem előadásom voltaképpen való tárgyára, a búzának új fajvegyülékére.

Éveken át foglalkoztam kultivált, de különösen vadontermő gramineákkal s már régóta sejtettem, hogy hazánk középső részében előforduló egyetlen kalászbojtfaj, az *Aegilops nova* Wint.[6] vagy *Ae. cylindrica* Host, mely kezdve a Nagyalföldet környező dombvidéket, a hol különösen löszös lejtőkön gyakori, messze beterjed az Alföld síkjára s elég gyakran lép fel a búzatáblákat határoló mesgyéken, utak és árkok szélén, alkalmas körülmények közt valószínűleg szintén kereszteződik a búzával. Alkalmas helyeken való sokévi figyelmes kutatásaimat azonban nem koronázta siker, míg a véletlen mégis kezemre játszotta ezt a ritkaságot. 1913 június hó 23.-án Szentendréről a Kőhegy felé tartva, Szentendre és a szentendrei láp közt az útszéli árokban egy hatalmasan kifejlődött sajátságos *Aegilops*-bokor

---

1 Delpino, Sulla dicogamia vegetale e specialmente su quella dei cereali. Bollet. del Com. agrar. Parmese 1871.

2 Monatsberichte der k. preuss. Akad. der. Wiss. Berlin 1872: 737 és k.

3 Landw. Jahrb. 1877: 200.

4 Improvement of Cereals: 46 és 47.

5 Die Züchtung neuer Getreide-Varietäten. Landw. Jahrb. 1877: 209.

6 Winterl, Index horti botanici univers. Hungariae 1788 (sine paginatione). Ebben a műben jelent meg ennek a növénynek első leírása 14 évvel Host leírása előtt, s mivel diagnosisa teljesen kielégítő, semmi okát nem lehetne adni annak, hogy ez a név mellőztessék. Az, hogy műve nincsen lapszámozva s az, hogy ujdonságainak egyaránt a «nova» fajnevet adta, nem lehet ok arra, hogy elnevezései mellőztessenek. Mivel Winterl-nél i. h. az *Aegilops*-nál a név után még a «fig» szó is ki van nyomatva, valószínűleg ábrázolni is akarta új faját. Ez a kép azonban nem jelent meg s Szabó Zoltán úr szíves értesítése szerint az egyetemi növénykert példányában is, mely legtökéletesebb sorozatát bírja a kiadatlan Winterl-féle képeknek és rézlemezeknek, hiányzik.

ragadta meg figyelmemet, melynek gondosabb megvizsgálása beigazolta azt, hogy a búzának a hengeres kalászbojttal való fajvegyülékét találtam meg. Az úttól balra búzatáblák terültek el, melyek szakállas búzával voltak bevetve, az út szélén pedig ezrivel termett a kalászbojt.

A reákövetkező években több alkalommal kerestem fel ezt a helyet, de daczára annak, hogy nagy figyelemmel kisértem a búzatáblák környezetét, nem sikerült második bokrot találnom.

1916-ban végül Szentendre környékének több más helyén, nevezetesen Szentendre és Izbég közt a búzaföldek szélén több alkalommal gyüjtöttem magam is, botanikai kirándulásaimon kísérőim is, ezt a fajvegyüléket, melynek az *Aegilops* (*Triticum*) *Sancti-Andreae* nevet adtam.

Ez az *Aegilops*$\times$*Triticum* fajvegyülék, mint a mellékelt táblákból kitűnik, a hengeres kalászbojttól magasabb termetében, szélesebb s felső lapján röviden (s nem hosszan) szőrös levelében, vastagabb kalászában, melyen a füzérkék nagyobb számmal fejlődnek s különösen virításkor nem simulnak annyira a tengelyhez, a pelyvák nagyobb méreteiben, főképpen azonban abban tér el, hogy csészepolyvái gyengén ormósak, az alsó füzérkéknek alsó virágpolyvái röviden szálkásak s csúcsuk alatt összenyomottak, tehát felső részükön szintén kissé ormósak (ezek az *Aeg. nová*-nál rendszerint szálkátlanok s félholdalakúan kimetszettek, röviden kéthegyűek s csak a kalász legfelsőbb virágjain szálkások, a szálka ezeken azonban jóval rövidebb mint a fajvegyüléken). Az *Aeg. nová*-n a 2 vagy 3 legfelső csészepolyva nagyon hosszan szálkás, úgy hogy a kalászt felül 3—4, öt-hat cm. hosszú szálka tetőzi; a fajvegyüléken a csészepolyvák szálkái aránylag rövidek, a virágpolyvákéi azonban nagyon hosszúak, úgy hogy a kalászt a két erőteljesen kifejlődött s a két legfelsőbb virágpolyvából fejlődő szálka tetőzi.

A búzától a fajvegyülék alacsonyabb termetében, törékeny és éréskor czikkekre széthulló kalásztengelyében, a tengelyhez jobban odasimuló füzérkéiben, körvonalában karcsúbb kalászában, vastag, felül csonkított, tompa, hátán kevésbbé élesen ormós s egyik oldalán durva csúcsba keskenyedő csészepolyvájában, *rö-*

viden szálkás virágpolyvájában s a kalászt tetőző két hosszú s a legfelsőbb virágpolyvából eredő szálkában tér el.

Az *Aegilops*-nemzetség csak kevés és jelentéktelennek látszó bélyegben tér el a *Triticum*-nemzetségtől. Nevezetesen az *Aegilops* csészepolyvái hátukon boltozatosak, rónák s nem ormósak, míg a búza-pelyva hátán határozottan kiugró él vagy orom fejlődik. Ennek a különbségnek látszólagos jelentéktelensége indított sok szerzőt arra, hogy a kalászbojtokot a *Triticum*-nemzetségbe sectio vagy alnemzetség gyanánt beolvasszák.[1] S bár a búza × kalászbojt új vadontermő fajvegyülékének megtalálása is újabb bizonyítékát szolgáltatná e két nemzetség közel rokonságának, az idézett szerzők nézetét abból az okból, mert felfogásom szerint rendszertani s egyéb munkásságunkat a nagy s ismét alosztályokra osztott nemzetségek megnehezítik, nem osztbatom és sokkal czélszerűbbnek tartom a kisebb nemzetségek elkülönítését — feltéve, hogy kellő systematikai értékű és *állandó* bélyegek alapján elkülöníthetők. S mert a csészepolyváknak ez a lényegtelennek látszó eltérése mégis az egész termékenyítési folyamatot lényegesen befolyásoló mechanikus berendezésnek mutatkozik, *systematikai értékűnek* kell tartanom. Ezért az *Aegilops* × *Triticum* fajvegyülékeket is bigenerikus fajvegyülékeknek tartom; ilyeneket újabban a két nemzetségnév összeolvasztásával is szoktak megjelölni.[2]

Az előadottakból kitűnik, hogy a szentendrei kalászbojt középhelyen áll a szakállas búza s a hengeres kalászbojt közt, tehát úgynevezett «intermediær» fajvegyülékkel állunk szemben. A fajvegyülék olyannyira középhelyen áll a búza s a kalászbojt közt, hogy minden megvizsgált szervében a két faj összes tulajdon-

---

[1] GREN. et GODR. Fl. de France III. 1856—601., — HACKEL, Nat. Pfl. II. 2. 80. — ASCHERS. u. GRAEBN. Syn. II. 1900: 703.

[2] Például *Lychnis* × *Cucubalus* = *Lychnicucubalus* KOELR., *Agrostis alba* × *Calamagrostis tenella* = *Agrocalamagrostis Stebleri* A. G. Syn. II. 223., *Triticum sativum* × *Secale Cereale* = *Triticosecale Rimpaui* WITTMACK, Nat. Fr. Berlin 1899: 59. Ha ezt a szokást követni akarnók a *Triticum* × *Aegilops* fajvegyülékeket *Triticaegilops*-oknak kellene neveznünk; de ilyen növénynév-összeolvasztásra éppenséggel nincsen szükség.

ságai mintha összekeveredtek volna; minden szervének alakja a két szülő szervének alakja közt középhelyen áll.

Az V. táblán látható a kalász, továbbá a csésze- és virágpolyvák középhelyet mutató alakja; a VI. táblán a búza széles (4) és az *Aegilops* keskeny (6) levélharántmetszetéhez viszonyítva a fajvegyülék levele (5) amannál keskenyebb, ennél meg szélesebb; a csészepolyva harántmetszetén jól látható a búzának kiugró orma (7), a kalászbojt ormótlan pelyvája (9) s a fajvegyülék pelyvájának (8) e tekintetben is közepes alakja; az előpolyva harántmetszete (11) is középhelyen áll a búza (10) és a hengeres kalászbojt (12) előpolyvájának alakja közt; feltünő, hogy még a szalma keresztmetszetén is fel lehet ismerni a fajvegyüléket, mert a szalma vastagsága is középhelyen áll a két szülő szalmájának mérete közt. A szöveti elemek természetesen nem mutatnak eltérést. Az *Aegilops*-búza-fajvegyület úgy látszik a szülői tulajdonságok viselkedése szempontjából a Correns-féle III. typushoz (Bastarde zwischen Maisrassen, 1901 : 9) tartozik, *a melynél a bélyegpár homodynamikus és schizogon.* Ennél az első generatio a két szülő közt áll s vagy teljesen középhelyet foglal el a kettő közt, vagy az egyikhez vagy a másikhoz közeledik (*Zea, Matthiola*).

Hogy azonban a kalászbojt × búzavegyülék milyen typus szerint hasad, arra nézve ezekből az elvétve vadon talált példányokból természetesen semmiféle következtetést sem lehet vonni; mindenesetre az elkülönítő bélyegpárok sokasága miatt ilyen megfigyelés nagyon meg volna nehezítve.

Tschermak,[1] a ki az *Aegilops nova* (*cylindrica*) × *Triticum sativum* fajvegyüléket mesterséges beporzással már előállította, sem nyilatkozik még határozottan ezeknek viselkedéséről az F_1 F_2 stb. generatióban.

Szerinte ez és a kalászbojtnak még néhány más búzafajjal létrehozott fajvegyüléke erőteljes női ivarszervekkel rendelkezik; hímivarszervei azonban satnyák, portokjai hamar elszáradnak,

---

[1] E. v. Tschermak, Ueber seltene Getreidebastarde. Beitr. zur Pflanzenzucht. 3. Heft. Berlin, 1913: 54.

nem nyílnak s nem tartalmaznak termékenyítésre alkalmas hímport.

A vadon termett fajvegyülék ebben a tekintetben eltérően viselkedik. Több példánynak portokját vizsgálva, azt rendes fejlődésűnek találtam, tokjai telve voltak látszólag jól kifejlődött hímporral, melyet a szokott módon kezelve, körülbelől 18%-a hajtott tömlőt.

Mivel a szentendrei kalászbojt női ivarszervei rendes fejlődést mutatnak, a hímpor termékenyítő képessége is, bár nagy mértékben csökkent, de nem szünt meg, fennáll annak a lehetősége, hogy nemcsak maga is megtermékenyülhet, hanem maga is termékenyíthet búzát vagy más kalászbojtot.

A búza és a kalászbojt virágzási módját figyelembe véve, mindig nagyobb a valószínűség, hogy a kalászbojt illetőleg az *Aegilops* × *Triticum* fajvegyülék termékenyül meg a búza hímporával, mint viszont. S hogy ez a szóbanforgó fajvegyüléknél is bekövetkezhetik, annak bizonyítéka az, hogy a gyüjtött példányokon közt vannak olyanok, melyek morphologiai tekintetben közelebb állanak a búzához.

A következőkben adom a Szentendrén talált fajvegyüléknek diagnosisát.

Aegilops (*Triticum*) Sancti-Andreae hybr. nov.

(*Aeg. nova* Winterl [*cylindrica* Host] × *Triticum sativum* Lam.)

Planta annua, ad 90 cm. alta, multiculmis; *culmis* e basi arcuata erectis, firmis, striatis, ad nodos atris, folia 3—4 gerentibus; vaginis minutissime scabridis, punctatis ad oras et margines pilosis; *ligula* brevi, obtusa; *foliis* vagina longioribus, sat latis (10—11 mm.), subtus glabris, supra ad nervos parce pilosis, margine scabris; *spica* (sine aristis) 10—15 cm. longa, cylindrica, sat crassa, e spiculis 10—15 composita, apice aristis binis longissimis (glumarum fertilium summarum) comatis; *rhachide* ad articulationes demum fragili, alternatim excavata, margine minute sursum pilosa, intus glabra, extus convexa, nervis validis flavis percursa, inter nervos viridi, scabra; spiculis in excavationibus rhachidis tenacissime sessilibus, ambitu ovatis;

glumis sterilibus binis margine proximali sese arcte tegentibus, crassis, tenacibus, oblique ovatis, apice truncatis, nervo mediano valido percursis et hic *leviter carinatis*, nervo in glumis spicularum inferiorum in mucronem producto; glumis spicularum summarum apice exscicis, ex exscisura longissime aristatis; glumis sterilibus omnibus dorso viridibus, nervis permultis flavidis percursis, glabris, tantum supra nervum medianum scabris, margine anguste hyalinis; spiculis 4-floris cum rudimento quinti; gluma fertili inferiore ovata, ad 11 mm. longa, valde convexa, nervis 7 percursa, apice subito contracta et in aristam crassam, scabram ei aequilongam producta, in parte superiori sub insertione aristae paullo subcarinato — compressa, glumis fertilibus superioribus aequilongis (ad 11 mm. longis), membranaceis, oblongis, apice obtusis vel erosulis, margine inflexis, hyalinis, nervis binis viridibus percursis; *lodiculis* sat magnis, irregulariter ovatis, apice irregulariter fimbriato — pilosis; *filamentis* antheris longioribus; *ovariis* parvis, subglobosis a dorso compressis, pilosis, glumis fertilibus superioribus laxe amplexis. Aristis glumae fertilis inferioris in spiculis superioribus longioribus, in summis longissimis, (ad 6—7 cm. longis).

Habitat in Hungaria centrali. Secus viam ab oppido Szent-Endre (St. Andrae Comit. Pest) juxta segetes *Tritici* versus montem Kőhegy ducentem caespitem unam inter *Aegilopem novam* innumeram detexi die 22. Jun. 1913; dein a. 1916 in locis diversis inter Sanctum Andraeam et pagum Izbég semper ad margines segetum iterum inveni caespites nonnullas.

Ab *Ae. nova* (*cylindrica* HOST) differt statura majori, foliis latioribus, breviter (nec longe) pilosis, spicis crassioribus, spiculis numerosioribus, magis squarrosis, glumis sterilibus majoribus, *dorso leviter carinatis* gluma fertili inferiore sub apice compressa et in parte inferiore, leviter carinata, *plus-minus longe aristata* (haec in *Ae. nova* saepius mutica, semilunariter exscisa, breviter bicuspidata et tantum in floribus supremis aristata, arista tunc semper breviore, quam in planta hybrida).

Glumae sterilis supremae nec non gluma fertilis florum supremorum *Aegilopidis novae* arista longa terminantur, ita ut spica aristis 3—4 ad 5—6 cm. longis comata videtur; in planta hybrida aristae glumarum sterilium pro ratione breviores, eae glumarum fertilium florum supremorum autem valde elongatae, ita ut spica aristis binis validis, e glumis fertilibus supremis ortis terminatur.

A *Tritico sativo* differt statura humiliore, spica ambitu tenuiore, rhachide fragili, spiculis minus squarrosis, rhachide magis adpressis, lateralibus breviter aristatis, glumis sterilibus minus acute carinatis, apice exscisis, latere in dentem productis; glumis fertilibus florum inferiorum breviter (nec longe) aristatis, aristis vero glumarum fertilium supremarum in aristas longas, spicam comantem productis.

TÁBLAMAGYARÁZAT.

(Explicatio tabularum)

V. tábla.

1. A *Triticum sativum*, 2. az *Aegilops Sancti-Andreae*, 3. az *Aegilops nova (cylindrica)* kalásza, csésze- és virágpolyvái (Spica, gluma sterilis et gluma fertilis inferior). 1. *Tritici sativi*, 2. *Aegilopidis Sancti-Andreae*, 3. *Aegilopidis novae (cylindricae)*; *a)* virágpolyva (gluma fertilis inferior), *b)* csészepolyva (gluma sterilis).

VI. tábla.

4. A *Triticum sativum*, 5. az *Aegilops Sancti-Andreae*, 6. az *Aegilops nova* levélharántmetszete. A metszetek az alulról számított harmadik szárlevélből készültek. 7—9. A nevezett fajok csészepolyvájának harántmetszete: 7. *Triticum sativum*, 8. *Aegilops Sancti-Andreae*, 9. *Aegilops. nova*. 10—12. A nevezett fajok előpelyvájának harántmetszete: 10. *Triticum sativum*, 11. *Aegilops Sancti-Andreae*, 12. *Aegilops nova*. Nagyítás 17 : 1.

13. A *Triticum sativum*, 14. az *Aegilops Sancti-Andreae*, 15. az *Aegilops nova* szalmájának harántmetszete. Nagyítás 86 : 1.

4—6. Sectiones transversae foliorum: 4. *Tritici sativi*, 5. *Aegilopidis Sancti-Andreae*, 6. *Aegilopidis novae*. Sectiones omnes in folio tertio culmi factae sunt. Dimensio: 17 : 1.

7—9. Sectiones transversae glumae sterilis: 7. *Tritici sativi*, 8. *Aegilopidis Sancti-Andreae*, 9. *Aegilopidis novae*. Dimensio: 17 : 1.

10—12. Sectiones transversae glumae fertilis superioris: 10. *Tritici sativi*, 11. *Aegilopidis Sancti-Andreae*, 12. *Aegilopidis novae*. Dimensio 17 : 1.

13—15. Sectiones transversae culmi: 13. *Tritici sativi*, 14. *Aegilopidis Sancti-Andreae*, 15. *Aegilopidis novae*. Dimensio: 86 : 1.

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1916 decz. 11.-én tartott üléséből.)

AZ ELEKTROMOS CONDENSATOR CORPUSCULARIS ÉS IMPULSIV SUGÁRZÁSÁRÓL.

MIKOLA SÁNDOR-tól.

(VII.—IX. tábla.)

I. A dolgozat tárgya.

A RÖNTGEN-sugarak és a radioactiv sugárzások elméletén alapuló bizonyos megfontolások arra indítottak, hogy az elektromos condensator lapjai mellett elektromos sugárzások nyomait keressem. Felkutatásuk czéljából a condensator lapjai közé fényképező lemezt helyeztem és a condensatort szikrával töltöttem. E berendezés lényege egyezik azzal, melylyel a LICHTENBERG-féle szikrarajzokat szokás előállítani, azzal a különbséggel, hogy a szigetelő lapok helyét a fényképező, szintén szigetelő lemez foglalja el. Az eredmény is egyező volt: a fényképező lemezen élesen és határozottan tüntek elő a LICHTENBERG-féle alakok.

Felismerve azt, hogy a jelenség nemcsak új eljárást állapít meg a LICHTENBERG-féle alakok előállítására, hanem új módszert is ád egy jóval általánosabb jelenség, a condensator-sugárzások tanulmányozására: vizsgálataimat kiterjesztettem az egész jelenség-complexumra. Az új módszerrel lehetséges volt a kísérleti feltételeket olyan tág határok között változtatni, a milyenekre a LICHTENBERG-féle eljárással alig lehetett gondolni. Az a ható, mely az alakokat létrehozza, olyan esetekben is megnyilatkozott, melyekben eddig rejtve maradt, úgy hogy egészen új szerkezetű, sok tekintetben igen nevezetes alakokat lehetett nyerni. Ezeknek alapján lehetségessé vált a jelenségkör áttekintése, az alakok osztályozása, kísérleti feltételeiknek megállapítása és az elmélet körvonalainak kitűzése.

A történeti hűség kedveért meg kell jegyeznem, hogy már mások is észrevették, hogy a magas feszültségű vezetőkből kiáramló sugárzások a fényképező lemezen rajzokat hoznak létre. Így Brown[1] és Trouvelot[2] 1888-ban leírják erre vonatkozó észleléseiket, ugyanezt teszi Nürnberg[3] 1897-ben néhány sornyi közlésében és Hansen[4] 1916-ban. Mindezek a kutatók azonban a tény felismerésén túl nem mentek, módszerüket a Lichtenberg-féle alakok tanulmányozására sem terjesztették ki. Dolgozatom első részében a kisérleti eredményeket, második részében a rájuk vonatkozó elméleti megfontolásokat foglaltam össze.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

II. A kisérletek berendezése.

A kisérleti berendezés lényege két condensatorlap, melyek között fényképező lemez helyezhető el. A jelenségek egyik csoportjánál a két lap akárminő méretű lehet, a másik csoportnál azonban szükséges, hogy az egyik condensatorlap jelentékeny mértékben nagyobb legyen, mint a másik. Egyöntetűség okából valamennyi itt leírt esetben különböző méretű condensatorlapokat használtam. Az egyiket *kis elektrodnak*, a másikat *nagy elektrodnak* nevezem.

A berendezés vázlatát az 1. ábra adja. A nagy elektrod R_2 össze van kötve a C leydeni palaczk külső fegyverzetével és a földdel. A nagy elektrodon nyugszik közvetlenül vagy szigetelőlapok közbetevése mellett a P fényképező lemez és erre jön — ismét vagy közvetlenül vagy bizonyos távolságra tőle — az R_1 kis elektrod, mely az m fémrúdban folytatódik.

A kisérleteket sötét kamrában vörös lámpafénynél kell vé-

[1] Brown, Phil. Mag. 26, 502, 1888.

[2] E. S. Trouvelot, Lum. Élec. 30, 269, 1888.

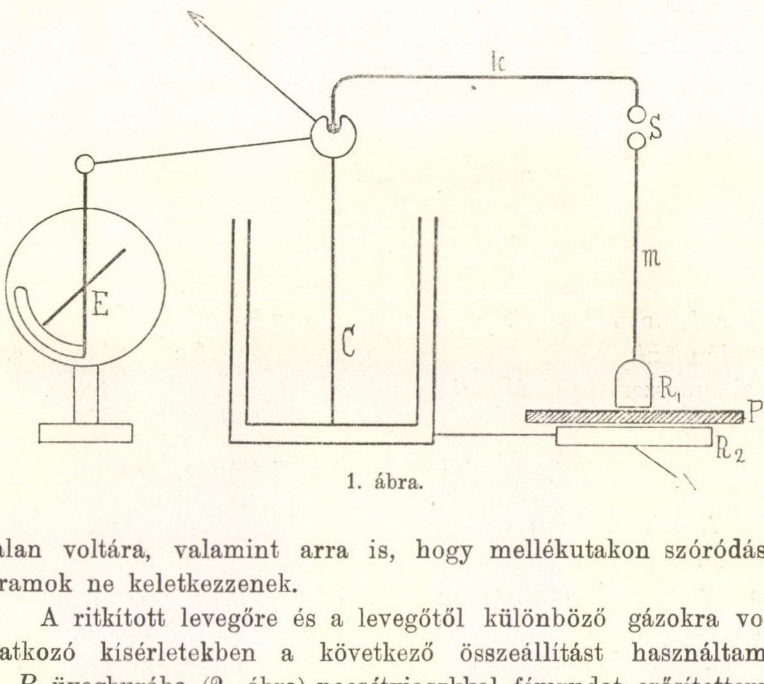
[3] Nürnberg, Phot. Mitteil. 33, 160, 1897.

[4] K. Hansen, Elektrot. Zeitschr. 610, 1916. — Szabó József, nagykárolyi tanár 1917 júl. 10.-én Hansenéhez hasonló felvételeket mutatott nekem, melyeket 1900-ban készített.

gezni. Valamely elektromozó géppel megtöltjük a leydeni palackot, azután, ha szükséges, az *E* elektrometeren leolvassuk a feszültséget és a *k* kisütő segítségével egy szikrát engedünk átugrani *S*-nél. A lemezt közönséges módon előhívjuk, állandósítjuk és kimossuk.

Elektrodok gyanánt különböző anyagú és alakú testeket lehet használni, azonban az úgynevezett secundær sugárzási képek pontos fejlesztése megköveteli, hogy az elektrodok felülete lehetőleg pontos síklap legyen.

Nagy gondot kell fordítani a vezető érintkezések kifogás-

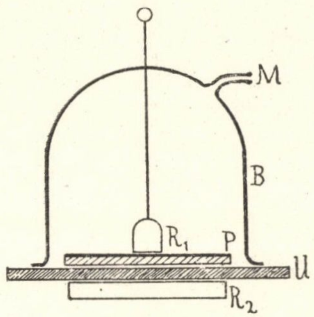


1. ábra.

talan voltára, valamint arra is, hogy mellékutakon szóródási áramok ne keletkezzenek.

A ritkított levegőre és a levegőtől különböző gázokra vonatkozó kísérletekben a következő összeállítást használtam. A *B* üvegburába (2. ábra) pecsétviaszkkal fémrudat erősítettem, melynek alsó részén az R_1 kis elektrod lógott. Az R_2 nagy elektrodra tettem a 4 mm vastag üveglapot *U*-t, erre pedig a fényképező lemezt *P*-t; ezután az egészet leborítottam az üvegburával, vigyázva arra, hogy a kis elektrod a fényképező lemez közepére feküdjék rá. Más kísérleti sorozatban az *U* üveglapot staniollal borítottam be és ezt vezetőleg összekötöttem a leydeni palaczk külső fegyverzetével. A staniolra tettem a nagy elektrodot és erre a fényképező lemezt. A levegőt az *M* csövön szivattyúztam ki.

A feszültségeket 10,000 voltig BRAUN-féle elektrometerrel mértem. A magasabb feszültségek mérésére két módszert használtam. Egyrészt a szikrahosszúságokat mértem s a feszültségeket a LANDOLT-féle könyvben található szikrapotentiál-táblázatok alapján számítottam, másrészt pedig a VOIGT[1] ajánlotta elágazási módszert használtam.



2. ábra.

III. A primær sugárzási képek.

A leírt módon előállított képeket *sugárzási képeknek* nevezem. Ide tartoznak az eddig is ismeretes LICHTENBERG-féle alakok, továbbá azok az új alakok, melyek e dolgozatban vannak először ismertetve. Két egymástól elütő főcsoportba sorolhatók. Az első csoportba tartozók radiális irányú sávokból, a második csoportbeliek pedig concentrikus körökből, illetőleg egyközű vonalakból rakódnak össze. Amazokat *primaer*, emezeket pedig *secundaer* sugárzási képeknek nevezem.

A primær sugárzási képek általában az elektrod szélétől kifelé eső térrészekben keletkeznek, cső alakú elektrod esetében

[1] VOIGT, Ann. d. Phys. 12, 1903.

azonban a cső belső üregének megfelelő helyen is kifejlődnek. Előállításuk végett az elektrodot a fényképező lemez érzékeny rétegére állítjuk vagy tőle bizonyos távolságra szigetelten megerősítjük. A nagy és a kis elektrod, valamint két egyenlő elektrod bármelyike egyformán alkalmas a primær sugárzási képek előállítására. Egyetlenegy töltő szikra segítségével egyszerre két képet is kaphatunk, ha két fényképező lemezt üvegoldalaikkal egymásra fektetve teszünk a két elektrod közé. Viszont, ha több ilyen condensatort egymásután csatolunk, vagyis ha condensatorlapokat és fényképező lemezeket váltakozva rakunk egymásra, akkor egyetlenegy töltő szikrával a sugárzási képek egész sorozatát állíthatjuk elő.

A rendes primaer sugárzási képek. Mindaddig, a míg a két elektrod közötti feszültségkülönbség bizonyos határértéknél nem nagyobb, a primær sugárzási képek radiális sávjai az elektrodok szélső vonalából merőleges irányban indulnak ki. E sávokon kívül a képeken nincs is más rajz. Ezeket *rendes primaer sugárzási képeknek* nevezem. Ilyenek láthatók a 3., 4. és 5. képen, melyeket positiv, és a 6. képen, melyet negativ töltésű elektrod hozott létre.[1] Az elektrod töltésének előjele szerint a keletkező sugárzási képek határozott és jellegzetes különbségeket mutatnak. A positiv sugársávok hosszabbak mint a negativok, itt-ott görbületeket mutatnak és többszörösen elágaznak. Ugyanilyenek a positiv Lichtenberg-féle alakok. A negativ radiális sávok — egyébként azonos viszonyok mellett — rövidebbek mint a positivok, egyirányban huzódnak ki és elágazásokkal nem birnak. A negativ sugárzási képek igazi jellegét csak az új előállítási mód alapján lehetett megállapítani. A régi módszerrel előállított negativ Lichtenberg-féle alakok kör- vagy gyűrűalakú foltjai ugyanis a fényképen sávokra oldódtak fel.

A rendes sugárzási képek legjellemzőbb sajátsága az, hogy

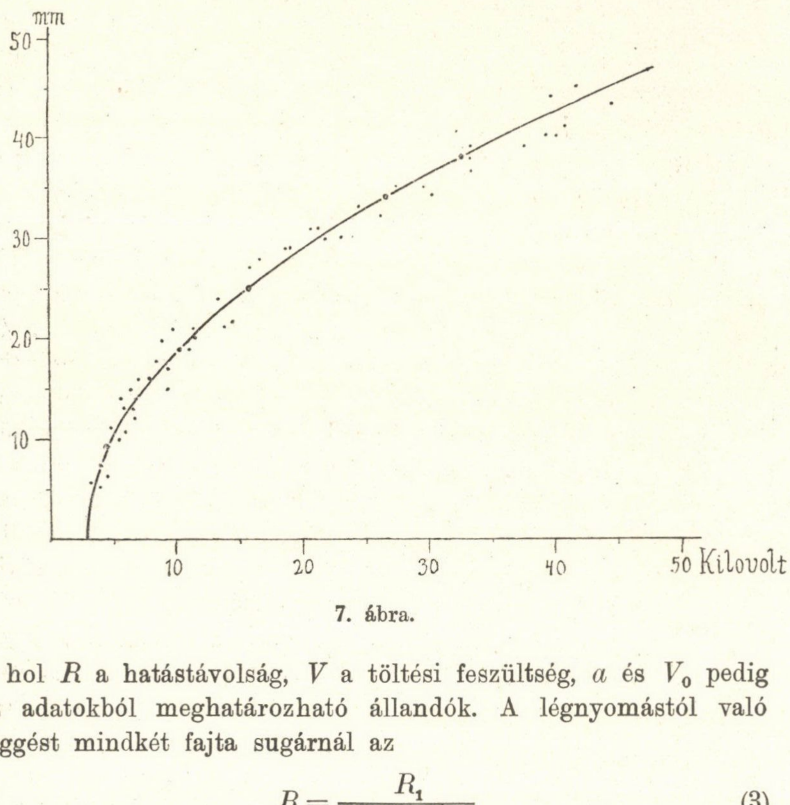
[1] Valamennyi kép az eredeti felvételek után contact másolással készült, tehát a fényképező lemez megfeketedésének a képen fehér, illetőleg világos foltok felelnek meg. A képek eredeti nagyságban vannak sokszorosítva, kivéve a 12., 19. és 25.-et, a melyek 1·50-szor vannak kisebbítve.

a radiális sávok hossza a töltési feszültségnek és a légnyomásnak függvénye. Ezt a hosszúságot *hatástávolságnak* nevezem.

Nagyszámú felvétel alapján sikerült a hatástávolság számára empirikus törvényeket felállítanom. A töltési feszültségtől való függést a következő egyenletek mutatják:

positiv primær sugaraknál $R = a\sqrt{V - V_0}$, (1)

negativ primær sugaraknál $R = a(V - V_0)$, (2)



7. ábra.

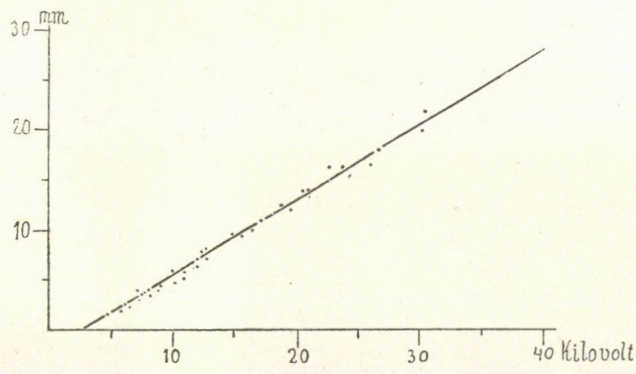
a hol R a hatástávolság, V a töltési feszültség, a és V_0 pedig az adatokból meghatározható állandók. A légnyomástól való függést mindkét fajta sugárnál az

$$R = \frac{R_1}{\left(\frac{p}{p_0} + k\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

egyenlet adja, a hol R ismét a hatástávolság, p a légnyomás, p_0, R_1 és k pedig az adatokból meghatározható állandók.

A 7., 8. és 9. ábra mutatja az 1., 2. és 3. egyenlet által meghatározott vonalakat, a mellettük lévő pontok a tényleges mérési adatokat jelzik; (a 9. ábra mindkét görbéje a positiv primær sugarak hatástávolságát jelzi).

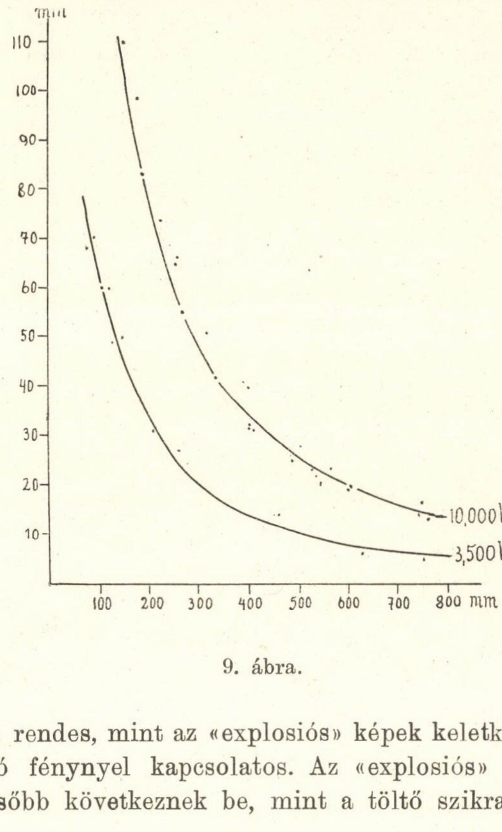
Az «explosiós» primaer sugárzási képek. Ha a töltési feszültséget folyton növeljük, végre is oly határértékhez érünk, melyen túl a rendes primær sugárzási képek szerkezete némileg módosul. A rendes radiális sávokhoz ugyanis új sugárzási centrumok csatlakoznak, melyekből legyezőszerűen sugársávok indulnak ki. A képeket «explosiós» sugárzási képeknek nevezem, mert alakjukkal a lövedék explosiójára emlékeztetnek.



8. ábra.

Nagyon változatos alakúak, a főbb typusok a 10., 11. és 12. képen láthatók. A 10. képen még csak két «explosiós» centrum lép fel, egyébként e kép tökéletesen azonos a 6. «rendes» képpel. A 11. képen már több «explosiós» centrum fedi el a rendes sugársávokat. A 12. kép «folytonos explosiók» és többszörös «explosiós» centrumok felléptét mutatja.

A *határfeszültség*, melyen túl az «explosiós» centrumok fellépnek, különböző körülményektől függ. Minél kisebb az elektrodok közötti távolság, annál kisebb a határfeszültség. De függ a levegő állapotától is, minél nagyobb a levegő nedvességtartalma, annál alacsonyabb a határfeszültség és annál több «explosiós» centrum lép fel. Függ továbbá a töltési vezeték öninductiójától is; ha a töltést elegendő nagy öninductióval biró vezetéken végezzük, az «explosiós» centrumok már aránylag alacsony feszültségnél fellépnek. Negativ töltésnél általában hamarább érjük el a határfeszültséget, mint a positivnál és utóbbi esetben kevésbbé az «explosiós» centrumok, hanem inkább a «folytonos explosio»-nak nevezett jelenségek a gyakoriak.



9. ábra.

Úgy a rendes, mint az «explosiós» képek keletkezése gyenge fluoreszkáló fénynyel kapcsolatos. Az «explosiós» felvillanások sokszor később következnek be, mint a töltő szikra átugrása.

IV. A secundær sugárzási képek.

Ezek a sugárzási képek csak különböző nagyságú elektrodok használata mellett fejleszthetők a következő módon. A nagy elektrod felületének szélére 0·05—0·30 mm vastag papirszeleteket rakunk és így tesszük rá a fényképező lemezt, az érzékeny réteget a nagy elektrod felé fordítva. A lemez üvegoldalára helyezzük a kis elektrodot, melyet leydeni palaczkból disruptiv módon töltünk.

A keletkező képeket a szerint, a mint a nagy elektrod a leydeni palaczk positiv vagy negativ töltésű fegyverzetével van összekapcsolva, *positiv* vagy *negativ* secundær sugárzási képeknek nevezem. Szerkezetük a 13—18. számú képen látható. A képek concentrikus körökből, illetőleg egyközű vonalak vagy sávok rendszereiből rakódnak össze, melyek rendes esetben a kis elektrod szélső vonalát alkotó idomhoz hasonlók. A negativ vonalak némileg elmosódott határokkal birnak és sokszor pontokból látszanak összetéve lenni; a positiv vonalak éles határuak és néha rövid radiális sávok indulnak ki belőlük (17. és 18. kép felső része). A negativ képek vonalainak egymástól való távolsága belülről kifelé haladva növekszik, ellenben a positivoké nem változik észrevehetőleg.

A secundær sugárzási képek keletkezésére vonatkozó vizsgálataim a következő eredményekre vezettek. Csak akkor keletkeznek, ha az érzékeny réteg és a nagy elektrod síkja között bizonyos vastagságú (0·05—1 mm) légréteg van. Azonban akkor is keletkeznek, ha a kis elektrod nem közvetlenül nyugszik a fényképező lemez üvegoldalán, hanem ettől bizonyos távolságra van.

A primær és secundær sugárzási képek között a legszorosabb kapcsolat áll fenn. Soha a secundær sugárzási képek nem keletkeznek másképen, hanem csak akkor, ha a fényképező lemez üvegoldalán a primær sugárzási képek kifejlődésének feltételei megvannak. Amazok tehát híven kísérik ezeket, ha az ő saját kifejlődésüknek feltételei is megvannak. Tömör kis elektrod esetében például a szélső vonaltól befelé nem fejlődnek primær sugárzási képek, tehát ennek megfelelően e helyeken a secundærek sem fejlődnek. Ellenben csőalakú elektrod esetében a cső belső üregének megfelelő helyeken a primær radiális sávok kifejlődnek (4. kép), tehát ennek megfelelően a tulsó oldalon a secundærek is keletkeznek (14. és 17. kép). Ha a primær sugárzási képek egy részének kifejlődését a lemezre ragasztott paraffinlappal megakadályozzuk, akkor a túlsó oldal megfelelő helyein a secundær kép illető részei is hiányoznak.

Ez a szoros kapcsolat a secundær vonalak irányaira nézve is megnyilatkozik, mert e vonalak ívelemei a lemez túlsó oldalán kifejlődő primær radiális sávok irányára mindig merőlegesek. Akárhogyan fejlődjenek is ki a primær sugárzási képek radiális sávjai, a secundær vonalak mindig azoknak orthogonális trajectoriái. Ha például az «explosiós» primær sugárzási képeknek megfelelő secundær sugárzási képeket állítjuk elő, akkor ezeknek vonalai oly körívek, melyeknek középpontjai a megfelelő «explosiós» centrumok (18. kép alsó része).

A secundær sugárzási képek igen nevezetes tulajdonsága, hogy a vonalak közti távolság nem függ a feszültségtől, a leydeni palaczk capacitásától, az elektrodok nagyságától, a töltő vezeték önind、uctiójától és a körülötte lévő levegő nyomásától. Légritkított térben tehát e távolság ugyanakkora marad, mint a közönséges légnyomásnál. Egyetlen módon lehet ezt a távolságot változtatni, és pedig úgy, ha az elektrodok közti távolságot megváltoztatjuk. Nagyobb elektrodtávolságnak nagyobb vonalköz felel meg. Bizonyos jelenségek arra mutatnak, hogy a vonalköz nagysága valószínűleg a fényképező lemez dielektromos állandójától is függ.

A secundær sugárzási képek a közönséges Lichtenberg-féle módon is fejleszthetők, de csak akkor, ha vékony és lehetőleg tökéletes síklapokkal biró kitünő szigetelőlapokat használunk. Üveglapokon sem a primær sem a secundær képeket nem lehet Lichtenberg módjára fejleszteni, valószínűleg azért, mert nagyobb vezetőképességük folytán a nyert elektromos töltést igen rövid idő alatt elvesztik.

V. A sugárzási képek keletkezésének általános kisérleti feltételei.

Az új, nagyon érzékeny módszer alapján lehetséges volt a kisérleti feltételeket felkutatni, melyek a jelenség létrejöttét szabályozzák.

A legkülönfélébb fémekből készült elektrodok azonos szerkezetű és hatástávolságú sugárzási képeket adnak. A kép akkor is csak némileg módosul, ha az elektrodokat lakkal vagy akár 1 mm vastag colophoniumréteggel bevonjuk.

Az elektrodok görbületének sincs szerepe, mert éles és tompaszélű, sőt gömbalakú elektrodok is ugyanolyan hatástávolságokat adnak.

A condensatorlapokat körülvevő gáz szerepére vonatkozólag már is láttuk, hogy a jelenség ritkított levegőjű térben is létrejön. A ritkítás előhaladásával a radiális sávok hosszúsága a föntebb közölt törvény szerint nő; ilyenkor e sávok szélessége is növekszik és ennek megfelelően a sávok száma kisebbedik. Ezt mutatja a 19., 20. és 21. kép. Sajátságos új jelenség lép fel ez utóbbi képen. Ha ugyanis a ritkítás az 50 mm-es higanyoszlop nyomásának megfelelő értékre száll le, akkor a csekély számú radiális sávokat széles gyűrű fogja át. Ha a ritkítás 20 mm-ig száll le, akkor a gyűrű is megszűnik és a lemez egyenletes megfeketedést mutat.

Légköri eredetű N-ben ugyanolyan szerkezetű sugárzási képeket lehet kapni, mint a levegőben, azonban H-ben, O-ben, CO_2-ben és világító-gázban a sugárzási képek nem fejlődnek ki határozottan és éles határvonalakkal.

Nagyobb önindutiójú tekercs bekapcsolása esetén a positiv primær radiális sávok görbületei nagyobbodnak, az alak nem mutatja többé azt a feltünő nagy szabályosságot, melyet a rendes primær sugárzási képek szoktak mutatni. Azonkívül aránylag alacsony feszültségnél elérjük az «explosiós» képek kifejlődésének lehetőségét.

Nagyobb vízellenállásnak a vezetékbe való kapcsolása esetében a sugárzási képek épp úgy fejlődnek, mint a kisellenállású fémvezeték bekapcsolásakor, hatástávolságuk is ugyanakkora. A nagy vízellenállás kétségtelenül megakadályozza az elektromos oscillatiók kifejlődését és így megállapítható, hogy a sugárzási képek akkor is keletkeznek, ha a töltés (vagy kisülés) nem oscillatoriusan, hanem folytonosan megy végbe. Ha azonban több millió ohmnyi favezetéket csatolunk be, akkor a sugárzási képek teljesen elmaradnak. Az elektrod szélei alatt kör képződik, de a primær sugarak jellemző sávjai vagy a secundærek jellemző egyközű vonalai hiányoznak.

A legfőbb kisérleti feltételt azok a vizsgálataim hozták meg, melyek a töltés módjának hatására vonatkoztak. Már az előzőkben is többször említve volt, hogy a sugárzási képek keletkeznek, ha a condensatort disruptive — vagyis szikrával — töltjük. Hogy e feltétel *szükséges*, azt a következőképen vizsgáltam meg. A fényképező lemezen nyugvó kis elektrodot összekötöttem a *töltésnélküli* leydeni palaczk belső fegyverzetével és azután az elektromozó gép lassú járatásával az egész rendszert (a leydeni palaczkot és a kis elektrodot) feltöltöttem magas feszültségre. A lemezen a kis elektrod széleinek megfelelő kör keletkezett, de a *radiális sávok teljesen hiányoztak.*

Sok hasonló kisérlet alapján egészen kétségtelenül meg volt állapitható, hogy az állandó feszültség a sugárzási képeket nem hozhatja létre, ennélfogva ezek csak abban a nagyon kis időközben keletkezhetnek, melyben az elektrodok közötti térintensitás 0 értékéről végső állandó értékére növekszik.

Ennek az eredménynek általánositása nagyon közel fekszik. Az elektromos térerősség igen kis idő alatt nemcsak növekedhetik, hanem el is tünhetik. Az a kérdés: keletkeznek-e sugárzási képek, ha a töltött condensatort disruptive kisütjük?

E kérdés megvizsgálása czéljából a fényképező lemez condensatorát úgy kellett megtölteni, hogy töltésnél ne keletkezzenek sugárzási képek, mert különben nem lehetne eldönteni, melyik kép keletkezett töltéskor és melyik kisütéskor. Szerencsére a megelőzőkben leirt módon, lassú folytonos feltöltéssel lehetséges a condensatort úgy megtölteni, hogy sugárzási képek ne keletkezzenek. Ilyen úton meg lehet győződni, hogy a töltött condensator disruptiv kisütésekor épp úgy keletkeznek a sugárzási képek, mint töltéskor. Egy igen jellemző különbség mégis fellép: *a positiv töltésű elektrod kisütéskor olyan jellegű sugárzási képet hoz létre, mint a minőt töltéskor a negativ töltésű elektrod szokott létrehozni és fordítva.* Ez a kisérleti tény, a mint később látni fogjuk, döntő szerepet visz a jelenség elméletében.

A sugárzási képek tehát az elektromos térerősség változásával kapcsolatos tünemények. Ennélfogva keletkezésük kisérleti feltétele így állapitható meg: *valamennyi sugárzási kép akkor* *és csak akkor keletkezik, ha az elektromos térerősség disruptiv módon megváltozik; ugyanolyan töltésű elektrod disruptiv kisüléskor ellenkező jellegű képet hoz létre, mint disruptiv töltéskor.*

Ha a Δt idő alatt bekövetkező térerősségváltozást ΔF-fel jelöljük, kimondhatjuk, hogy a sugárzási képek csak akkor keletkeznek, ha a $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ hányados bizonyos határértéknél nagyobb.

A sugárzási képeket létrehozó ható nincs valamely speciális kisérleti berendezéshez kötve. Létrejön mindenhol és mindenkor a mikor a megelőzőkben megállapított kisérleti feltétel, vagyis a térerősség disruptiv változása teljesedik. A speciális berendezés csak arra való, hogy a ható működéséről kényelmes módon szerezhessünk tudomást.

ELMÉLETI RÉSZ.

A Lichtenberg-féle alakok keletkezésére vonatkozó nagyon különböző elméletek szerepelnek az irodalomban. Érvényességük és értékelésük szempontjából a leirt kisérleti eredmények egészen új helyzetet teremtettek. Az új előállítási mód annak a hatónak, a mely az alakokat létrehozza, egyik alapvető tulajdonságát tette ismeretessé, a mely az elméleti megfontolásokban mindezideig természetszerűleg szerepet nem játszhatott. Egészen új és sok tekintetben igen nevezetes alakok váltak ismeretessé és a jelenség főbb typusokba volt sorolható, melyekhez az elméletnek alkalmazkodnia kell. Megismertük továbbá a kisérleti feltételeket, melyek mellett a jelenség létrejő. Mindezek alapján érthető, hogy az eddig felállitott s a Lichtenberg-féle alakok szűk körére alkalmazott elméletek nem alkalmasak az egész jelenségcomplexum előállítására. Új elméletet kellett tehát alkotni, mely az általános jelenséghez és kisérleti feltételeihez alkalmazkodik.

VI. A condensator corpuscularis sugárzása.

Az elméletnek mindenekelőtt a rendes primær sugárzási képek keletkezéséről kell számot adnia, mert ezekhez fűződnek az «explosiós» és a secundær sugárzási képek.

Eddigi tapasztalataink szerint a fényképező lemezre csak *elektromos ionsugarak* és *aetherhullámok* (fénysugarak, RÖNTGEN-sugarak) hatnak. A radiális sávok éles határai az első ok mellett szólanak. De e mellett szól a LICHTENBERG-féle előállítás szigetelő lapján maradó elektromos töltés is, mert ez — a mint arról kísérletileg meggyőződtem — ionozott gázokkal (BUNSEN-lánggal és RÖNTGENsugarakkal) könnyen eltávolítható és így csak a szigetelt laphoz adsorbeált ionoknak tulajdonítható. Ilyen ionokat csak nagysebességű ionsugarak hozhatnak létre.

Ennek alapján a rendes primær sugárzási képek keletkezését alig lehetséges másképen megmagyarázni, mint nagysebességű ionsugarak feltételezésével, tehát a következő hypothesist állítjuk fel:

a condensatorok töltésének disruptiv változásakor a szigetelő lapok felületén nagysebességű positiv vagy negativ ionok löketnek ki, melyek a töltés növekedésekor ugyanolyan, fogyásakor pedig ellenkező előjelűek, mint a lapok töltése.

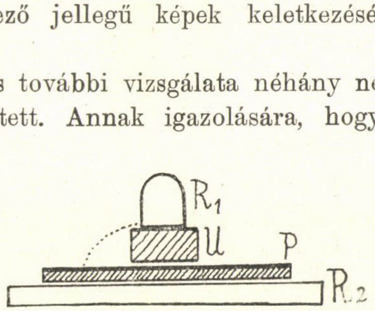
E hypothesis folytán a radiális sávok úgy tekintendők, mint az ionok ionozási pályáinak nyomai. Az ion nagy sebességénél fogva az útjába kerülő gázmolekulákat ionozza, úgy hogy mögötte a positiv és negativ ionok csóvája keletkezik, melyből a tér ereje a különneműeket eltávolítja, az egyneműeket pedig a lemezhez, illetőleg a szigetelő laphoz löki, úgy hogy ezek ott megfeketedést, illetőleg elektromos töltést idéznek elő.

A repülő részecskék bizonyos maximális kezdő sebességgel hagyják el az elektrod szélét és azon túl egész pályájukon energiát veszítenek, minek folytán sebességük bizonyos távolságnál olyan kis értékűvé válik, hogy ionozó képességük megszünik. Minél nagyobb a töltőfeszültség, annál nagyobb a kezdősebesség s így érthető, hogy a hatástávolság a töltőfeszültséggel együtt nő vagy fogy. Viszont a gáz sűrűségének kisebbedésével az útegységenkénti energiaveszteség is kisebbedik, a miből következik, hogy a hatástávolság a ritkítás fokával együtt nő vagy fogy.

Az a körülmény, hogy a negativ ionsugarak hatástávolsága más törvény szerint függ a feszültségtől, mint a positiv ionsugaraké, arra mutat, hogy a negativ ionok más szerkezetűek, mint a positivok. Föltehetjük tehát, hogy amazok *elektronok*, emezek pedig *atomionok*. Ezt a föltevést támogatja az a tény is, hogy a negativ ionsugarak hatástávolsága — egyébként azonos viszonyok mellett — jelentékeny mértékben kisebb, mint a positivoké; mert kisebb tömegük miatt az útegységenkénti sebességkisebbedés nagyobb mint a positivoké.

A felállított hypothesissel tehát a rendes primær sugarak tulajdonságairól könnyen és egyszerűen tudunk számot adni. A hypothesis utolsó részében lévő állítás folytán a kisüléskor keletkező ellenkező jellegű képek keletkezését is meg tudjuk magyarázni.

A hypothesis további vizsgálata néhány nevezetes kísérleti eredményre vezetett. Annak igazolására, hogy minden egyes

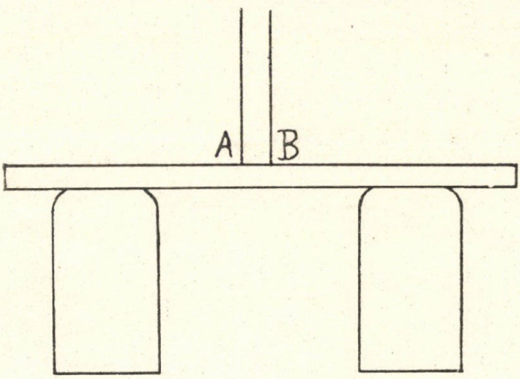


22. ábra.

radiális sávot individuálisan létező, discret részecske hoz létre, a következő kísérletet végeztem. A 22. ábrán látható R_2 elektrodra a fényképező lemezt (*P-t*) és ennek érzékeny rétegére 3·35 mm vastag üveglemezt (*U*-t) tettem, az utóbbira állítottam azután a kis elektrodot R_1-et. Ilyen módon a részecskéket arra kényszerítettem, hogy pályájuknak egy részét a levegőben tegyék meg. A 23. kép mutatja az eredményt. A képen látható kis fehér foltok, melyekből radiális sávok indulnak ki, a levegőben repülő részecskék találati helyei. Más kísérletekkel arról is meggyőződtem, hogy a találati helyek annál messzebb vannak az üveglap szélétől, minél nagyobb a feszültség és minél vastagabb az üveglap.

Ha a részecskék elektromos töltést hordanak, akkor elektromos és mágneses terekben egyenesvonalú mozgásukból ki kell térniök. Az elektromos térben való kitérést már a megelőző kísérlet is mutatja, de egyéb kísérleteket is végeztem ennek igazolására. Így például a 24. ábrán látható kettős elektroddal a 25. kép jött létre. Látjuk, hogy az ellenkező irányú tér hatása alatt egyes részecskék pályája meggörbült, másoké meg megrövidült.

Számos kísérlettel próbáltam a mágneses tér eltérítő hatását kipuhatolni, mindezideig eredménytelenül. Valószínűleg azért, mert a rendelkezésemre álló eszközökkel előállítható térerősség (mintegy 2500 gauss) nem volt elegendő. E tárgyú vizsgálataimat azonban egyéb okokból sem tekinthetem befejezetteknek. Minthogy így a mágneses tér eltérítő hatását nem sikerült le-



24. ábra.

mérnem, a részecskék töltését, tömegét és sebességét nem sikerült mérési adatok alapján meghatározni.

Azonban a fényképező lemez megfeketedésének tényéből kiindulva, az idevonatkozó irodalom adatainak felhasználásával némi valószínűséggel a részecskék sebességét megbecsülhetjük. Az újabb kutatások szerint ugyanis a mozgó elektronok és atomionok lényegben azonos feltételek mellett ionoznak. Ha a sebesség nagyobb $10.10^8 \frac{cm}{sec}$-nál, akkor úgy az elektron, mint az atom átrepülhet más nyugvó atomokon. Ennél kisebb, de $2.10^8 \frac{cm}{sec}$-nál nagyobb sebességű részecskék még közelhatás és surlólökések révén is tudnak ionozni. Az utóbbi határértéknél kisebb sebességű részecske már nem ionozhat. Ha ezeket az eredményeket a mi jelenségünk részére érvényesnek fogadjuk el, akkor azt kell állítanunk, hogy a negativ primær sugarak sebessége nagyobb $10.10^8 \frac{cm}{sec}$-nál, mert a negativ primær sugárzási képek radiális sávjai egyenes irányban haladnak és sehol el nem ágaznak. A positiv primærsugarak sebessége viszont a $10.10^8 \frac{cm}{sec}$ és a $2.10^8 \frac{cm}{sec}$ határok közé esik, mert az ő sugárzási képeik elágazó és kisebb görbületeket mutató sávokból állanak.

VII. A condensator impulsiv sugárzása.

Az elméletnek számot kell adnia arról is, miképen keletkeznek a primær sugárzási képeket létesítő ionok és miképen kapják nagy sebességüket.

A lökésszerű ionozás elmélete alapján e kérdésre nem tudunk feleletet adni. Ez elmélet szerint ugyanis azt kellene állítanunk, hogy az elektromos tér erőssége a véletlenül jelenlévő néhány ionnak olyan sebességet ad, a melylyel azok új ionokat teremthetnek. Ez a feltevés semmiképpen sem egyeztethető össze a rendes primær sugárzási képekben megnyilvánuló szabályossággal és homogenitással. De lehetetlen azért is, mert akkor az ionoknak oly sebességet kellene kapniok, a mely a működő erő irányára merőleges. Lehetetlen azért is, mert a kísérleti adatok szerint a sugárzási képek csakis a térerősség disruptiv *változásakor* keletkeznek és kisütéskor ellenkező jellegű képek lépnek fel, mint töltéskor. Már pedig, ha az ionokat a lökésszerű ionozás termelné és ezek sebességüket az *állandó* feszültségeséstől az $\frac{1}{2}mv^2 = \varepsilon . \Delta V$ egyenlet alapján kapnák (m az ion tömege, v a sebessége, ε a töltése és ΔV a feszültségesés): akkor a jelenségnek az *állandó* és nem a *változó* elektromos térben kellene keletkeznie. És ha ezt az ellenmondást el is tudnók valahogyan kerülni, akkor még mindig hátra maradna mint megoldatlan problema az a kérdés, miért keletkeznek kisütéskor ellenkező jellegű képek mint töltéskor.

A felvetett kérdésre a feleletet a legfőbb kísérleti feltételnek, ugyanis a térerősség disruptiv változásának analysisével kell megkeresnünk.

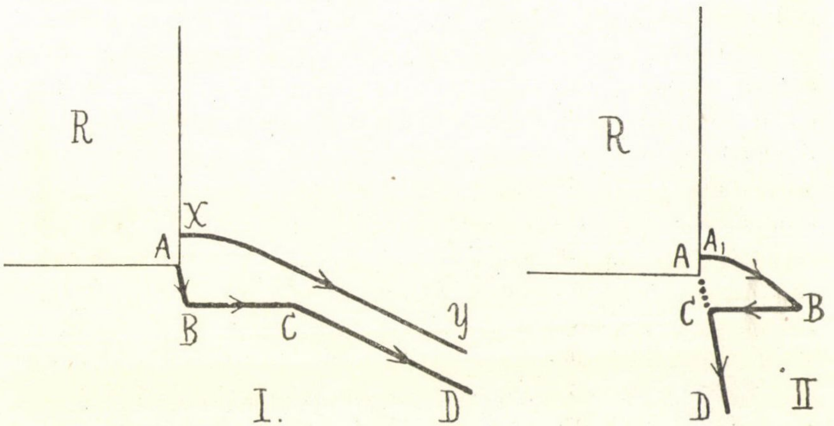
A condensator disruptiv töltésekor a vezetéken végig rohanó elektromos erővonalak az elektrodok széleihez érkezve irányváltozást, majd pedig lassúdást szenvednek; kisütéskor az erővonalak gyorsulnak, majd irányt változtatnak és csak azután rohannak állandó sebességgel tovább. Tehát úgy töltéskor, mint kisütéskor az elektrodok szélei mellett az erővonalak részeiben *sebességváltozások* állanak elő éppen olyan módon, a mint az a kathodsugaraknak az antikathodba való ütközésekor történik. Az eredménynek is hasonlónak kell lennie. A condensatorlapok széleinél a töltés disruptiv változásakor elektromágnességi impulsusnak kell keletkeznie. Ennek az impulsusnak lényegéről itt ép oly kevéssé tudunk részletes felvilágosítást nyujtani, mint a RÖNTGEN-sugarak esetében, de a legfontosabb dolgot, ugyanis *a benne megnyilvánuló energia eredetét, egészen kétségtelenül meg tudjuk állapítani.* Mindaddig ugyanis, a míg az elektromos töltés a vezetéken át a condensatorba áramlik, a környező térben nemcsak elektromos, hanem mágneses erővonalak is vannak, tehát ott mágnességi energia is van elhelyezve. Az áramlás megszüntével ez *a létező mágnességi energia nem tünhetik el nyomtalanul. Kell valami aequivalensének lennie.* Felfogásunk szerint az æquivalense megvan a keletkező elektromagnességi impulsusban és az általa létrehozott ionok potentiális és kinetikus energiájában.[1] A RÖNTGEN-sugarakra és a radioactiv anyagokra vonatkozó elméletek analogiája alapján ugyanis föltehetjük, hogy az impulsus elektromos vectora a neutrális atomokat negativ elektronokra és positiv töltésű atomionokra szakítja szét. Föltehetjük tehát, hogy az impulsus átsuhanásának ideje alatt az atomok mintegy radioactiv állapotba jutnak.

A geometriai elrendezés olyan, hogy az impulsus elektromos vectora nagyjából a condensatorlap síkjának irányába eshetik csak, a miből következik, hogy az ionok tőle nagy sebességet nyernek. Sőt azt kell állítanunk, hogy az így nyert sebesség sokszorta nagyobb, mint az, a mely a töltés befejeztével előálló állandó elektromos tér megfelelő componenséből ered, mert csak így tudjuk megérteni, miért löketnek a tér erősségé-

[1] Ez volt éppen az a gondolat, melyből kiindultam e kutatások megkezdésekor és a mely arra vezetett, hogy a condensator lapjai között fényképező lemezzel elektromos sugárzásokat keressek.

nek eltünésekor ellenkező előjelű ionok kifelé, mint a milyen jele az elektrodon lévő töltésnek van.

Az impulsusban lefolyó tüneményekről, miként már említettem, nagyon bajos concret képet rajzolni, mert a hozzá szükségelt előtanulmányok hiányoznak, mégis oly vázlatot készítettem, melynek alapján az említett kísérleti tényről igen kielégítő magyarázatot lehet adni. A 26. ábrán R az elektrod egy darabjának nagyobbított képét jelenti, lejebb bizonyos távolságra tőle kell a másik elektrodot képzelni. Az I. rajz a töltésnél, a



26. ábra.

II. pedig a kisülésnél lefolyó viszonyokat tünteti fel. Legyen XY egy, a töltésnél felülről lefelé rohanó erővonal. Az elektroddal kapcsolatos része A pontnál hirtelen irányváltozást és utána lassúdást szenved, úgy hogy AB alakban helyezkedik el. A B és a C pontok közötti térben keletkezik az impulsus, melynek elektromos vectora B-től C felé irányul és így az elektrod töltésével egynemű ionokat kifelé, a különneműeket pedig befelé löki. *Töltéskor tehát az elektrodtól kifelé egynemű, befelé, vagyis az elektrod felé pedig ellenkező előjelű ionok repülnek, mint a milyen töltés előjele.*

Másképp folyik le a jelenség kisüléskor. Legyen AD egy nyugvó erővonal (26. ábra II. rajz). Az erővonalnak kisüléskor felfelé kell rohannia, miközben irányváltozást szenved; bizonyos nagyon rövid időköz mulva kezdete A_1B helyzetbe kerül, miközben a CD rész még mindig nyugszik. B és C pontok között keletkezik az impulsus, melynek elektromos vectora B-től C felé irányul, tehát az elektrod töltésével egyező előjelű iont befelé, az ellenkező előjelűt pedig kifelé löki. *Kisüléskor tehát az elektrod szélétől kifelé ellenkező, befelé pedig egyező előjelű ionok repülnek, mint a milyen jele volt az elektrod töltésének.*

Mindezek alapján jogosítva vagyunk a következő hypothesis felállítására:

a condensator töltésének disruptiv változásakor a lapok szélei mellett elektromagnességi impulsusok keletkeznek, melyek az ott lévő atomokat nagysebességű elektronokra és atomionokra szakítják szét.

A kisérleti adatok egyelőre nem nyujtanak elegendő adatot annak eldöntésére, milyen anyagnak atomjai bontatnak szét. Az a körülmény, hogy a különböző gázok közül csak N-ben keletkeznek olyan sugárzási képek, mint a levegőben, nem bizonyítja, hogy a széteső atomok a N-nek vagy a légkörben lévő más gáznak atomjai. Ez a kisérleti tény csak azt bizonyítja, hogy a keletkezett nagysebességű ionok hatása alatt első sorban a N atomjai ionozódnak. Ez az észlelés egyébként teljesen egyezik a radioactiv anyagokra vonatkozó hasonló észleléssel. Ismeretes, hogy a radium sugarai semmiféle más gázban nem világítanak, csakis a levegőben és a N-ben. Még más kisérleti tények is azt mutatják, hogy a condensator corpuscularis sugarai analog hatásúak, mint a radioactiv anyagok corpuscularis sugarai.

Néhány nevezetes észlelés is igazolja a föntebb felállított hypothesis következményeit. Az egyiknek eredményét a 27. kép mutatja, mely következőképpen keletkezett. A fényképező lemez érzékeny rétegét gyengén megnedvesítettem (ez a képen látható széles fekete folt), rátettem a kis elektrodot, azután positiv elektromossággal disruptive töltöttem. A kép keletkezését így magyarázhatjuk: néhány erővonal számára a nedves folt jó vezetőként szerepelt, tehát az erővonal azon végig csúszott és csak a folt szélén keletkezett az ionozó impulsus, a mely a keletkezett positiv ionokat kifelé, a negativokat befelé lökte. *A képen mindkét fajta ion jellemző radiális sávjai láthatók.*

Ha igaz föntebb kimondott hypothesisünk, akkor az impulsus nem szorítkozhatik a condensatorok töltésének disruptiv változására, hanem mindenütt kell keletkeznie, a hol megvan az ok arra, hogy az elektromos erővonalak egyes részeiben sebességváltozások álljanak elő. Ez pedig megtörténhetik ott, a hol a vezeték keresztmetszete hirtelen változik. Ilyen például a 24. ábrán látható elektrod *AB* helye. A 25. kép bal alsó részében valóban találunk kis kerek foltokat, belőlük kiinduló radiális sávokkal, melyek csak oly ionok találati helyei lehetnek, melyek légi út után érték el a fényképező lemezt. Ezek az ionok csak az *AB* helyen keletkezhettek. Hasonló eredmények más körülmények mellett is létrejöhetnek.

Az «explosiós» sugárzási képek keletkezéséről is könnyen adhatunk számot a föntebb felállított hypothesissel. Csak azt kell feltennünk, hogy a keletkező ionok közül egyik-másik valamely neutrális atommal egyesül úgy, hogy elektromos töltésénél fogva az elektrodtól elrepülhet. Viszont az impulsus a benne lévő positiv töltések és negativ elektronok egyensúlyállapotát megzavarja, minek folytán azok instabilis helyzetbe kerülnek. Ez instabilis helyzet folytán később — esetleg valamely összeütközés folytán — az atom szétszakad részeire, elektronokra és atomionokra. Ezek hozzák létre az «explosio»-szerű képet.

Végül rá kell még mutatnunk néhány régóta ismeretes tapasztalati tényre, melyek felállított hypothesisünk egyszerű és közvetlen folyományai. Régóta ismeretes, hogy gyorsan változó feszültségek a szikrapotentiál értékét leszállítják. Ezekre vonatkozólag különösen Jaumann[1] végzett vizsgálatokat. Mindezek a tények megmagyarázhatók, ha feltesszük, hogy a feszültség disruptiv változásakor impulsusok keletkeznek, melyek a gázt ionozzák. Az E. Wiedemann-tól felfedezett kisülési sugarak (Entladungsstrahlen) bizonyára identikusak a feltételezett impulsu-

[1] Jaumann, Sitz. ber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien, 97. 765, 1888.

sokkal. Hogy gyors váltakozású elektromos terekben az elektrodnélküli csövek világítanak, szintén ilyen impulsusra mutat, mint ionozó agensre. A Tesla-fény erre vonatkozó felvételeim szerint ugyanolyan primær sugárzási képeket létesít, mint a minők föntebb le vannak írva. Ezek tehát szintén corpuscularis sugaraknak tulajdonítandók, melyeket a gyors váltakozású elektromos térben keletkező impulsus hoz létre. Ez az impulsus erre vonatkozó észleléseim szerint a készülékből 6 m távolságban is igen jelentékeny mennyiségű ionozást létesít. A szikratávírásnál oly kellemetlen condensator-sziporkázás (Sprühen) identikus a condensator corpuscularis sugárzásával.

VIII. A mozgó ionok sugárzása.

Számot kell adnunk végül a secundær sugárzási képek concentrikus körívekből és æquidistans vonalakból álló rendszerének keletkezéséről is.

Mindazok a kísérletek, a melyek arra irányultak, hogy e vonalak keletkezését ismert mechanismusok működésére vezethessem vissza, oly következményekkel jártak, melyek a kísérleti tényekkel ellenkeztek. E próbálgatásokból kitünt, hogy e vonalak keletkezéséről sem sűrűsödési és ritkulási léghullámok feltételezésével, sem ionsugarak többszörös visszaverődésével, sem interferentia-, illetőleg diffractio-tüneményekkel, sem ionozott gázrétegekkel, sem elektromos oscillatiókkal számot adni nem lehet. Minthogy így a jelenség ismert mechanismusokkal előállítható nem volt, a jelenség főbb ismertető jeleit az elektromos térben nagy sebességgel mozgó ionok alaptulajdonságainak kell tekinteni. Ezeket a következő hypothesisbe foglaltam össze:

vezető testek mellett változó elektromos térben nagy sebességgel mozgó ionok a vezető test felé meghatározott időközökben elektromagnességi impulsusokat bocsátanak ki, melyek a vezető testekből ionokat váltanak ki.

E hypothesis alapján a secundær sugárzási képek keletkezéséről következőképpen adhatunk számot. A fényképező lemez üvegoldalán vagy más szigetelő lap egyik oldalán végigcsúszó ionok bizonyos időközökben, a melyek a tér erősségétől függ-nek, a nagy elektrod felé elektromágnességi impulsusokat bocsátanak ki, a melyek áthatolva a lemezen vagy a szigetelő lapon a nagy elektrodot érik és azt éppen olyan módon, mint a fényelektromos tüneménynél, ionok kibocsátására bírják. Az elektromos tér a keletkezett ionok közül a keltő ionnal egyneműeket az érzékeny réteghez, illetőleg a szigetelő lap másik oldalához löki. A fényképező lemezen keletkező megfeketedés, illetőleg a szigetelő lap töltése egyrészt az így származó mechanikai hatástól és az ionok adsorptiójától, másrészt az impulsustól származik; valószínű, hogy az első ok a hatalmasabb.

A vezető test mellett mozgó elektromos részecskéből kiinduló erővonalak legnagyobbrészt az illető test felé irányulnak és abban is végződnek, úgy hogy mozgás közben az erővonalak mintegy végig súrolják a vezető testet. Viszont az elektromágnességi impulsusok az erővonalakon terjednek tovább, tehát érthető, hogy a kisugárzott energia legnagyobbrészt az illető test felé terjed tovább. Minden egyes impulsus az erővonalakat mintegy megrázza.

A hypothesis leglényegesebb része az az állítás, hogy a mozgó ion *időszakonként* bocsát ki impulsusokat. Ezzel tulajdonképen azt állítjuk, hogy a nagysebességgel mozgó ion *quantumszerűleg* sugároz, mert a quantumszerű sugárzás képzetének csak akkor van értelme, ha a sugárzás meghatározott időközökben történik.

Képek jegyzéke.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 január 12.-én tartott üléséből.)

COMPLEX ELEMEKBŐL ÁLLÓ VÉGTELEN LÁNCZTÖRTEK ÖSSZETARTÁSÁRÓL.[1]

SZÁSZ OTTÓ-tól.

Bevezetés.

E dolgozatban főképpen a következő kérdéssel foglalkozom: Adva lévén egy összetartó végtelen láncztört

$$\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\cdots+\frac{a_\nu|}{|b_\nu}+\cdots,^{2}$$

melynek elemei tetszésszerinti (valós vagy complex) számok, lehet-e az a_ν, b_ν, $(\nu=1, 2, 3,\ldots)$ elemekhez oly környezeteket megállapitani, hogy az elemeket a megfelelő környezetekben tetszésszerint változtatván, a láncztört összetartó marad? Pontosabban: lehet-e oly ε_1, δ_1, ε_2, δ_2, ε_3, $\delta_3,\ldots$ positiv számokból álló végtelen sorozatot találni, hogy az

---

[1] Ez az értekezés, bizonyos változtatásokat leszámítva, a szerző frankfurti egyetemi magántanári képesítő kézirati értekezésének egy része.

[2] A régebben használt jelölés:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cdots}}}$$

A fenti, valamint a még egyszerűbb $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ jelölés PRINGSHEIM-tól ered. Az a_1, a_2, $a_3,\ldots$ *elemeket részletszámlálóknak*, a b_1, b_2, $b_3\ldots$ *elemeket* pedig *részletnevezőknek* nevezik.

$$\frac{x_1|}{|y_1} + \frac{x_2|}{|y_2} + \frac{x_3|}{|y_3} + \cdots = L(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots)$$

végtelen láncztört összetartó, ha csak

$$|x_\nu - a_\nu| < \varepsilon_\nu,\ |y_\nu - b_\nu| < \delta_\nu;\quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)?$$

Tekintsük a $L(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ láncztörtet, mint az $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ végtelen sok complex változó függvényét, a mely minden oly $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ helyen értelmezve van, a hol összetartó, akkor kérdésünk így fogalmazható:

Ha a $L(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ végtelen sok változós függvény valamely $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$ helyen értelmezve van, akkor található-e e helynek oly környezete, melyben a függvény szintén értelmezve van?

Összehasonlítás czéljából fogalmazzuk az analog kérdést végtelen sorokra: ha $\sum_1^\infty{}_\nu c_\nu$ egy összetartó végtelen sor, találhatók-e oly positiv ε_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ számok, hogy a $\sum_1^\infty{}_\nu u_\nu$ sor összetartó, ha csak $|u_\nu - c_\nu| < \varepsilon_\nu$; $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$? A felelet igenlő és ε_ν-k gyanánt bármely positiv tagú összetartó végtelen sor tagjait választhatjuk. Mert hiszen írhatjuk, hogy

$$u_\nu = c_\nu + \vartheta_\nu \varepsilon_\nu;\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

a hol

$$|\vartheta_\nu| < 1;$$

ha tehát a $\sum_1^\infty{}_\nu \varepsilon_\nu$ sor összetartó, akkor nyilván $\sum_1^\infty{}_\nu u_\nu$ is összetartó. A jelen esetben a felelet azért oly egyszerű, mert a $\sum_1^\infty{}_\nu u_\nu$ sor lineáris függvénye az $u_1, u_2, \ldots$ végtelen sok változónak. Az L láncztört azonban elemeinek bonyolult függvénye s ennek megfelelően a kérdés tárgyalása körülményes fejtegetéseket involvál. Ezt megvilágítja az a körülmény is, hogy a végtelen sor esetében végesen sok ε_ν tetszésszerint választható, ellenben a végtelen láncztört már *egy* elem kellő megváltoztatásával széttartóvá tehető.

Az irodalom eddigi idevágó eredménye kizárólag Perron egy tétele, mely kérdésünk egy speciális esetére vonatkozik és a jelen dolgozat általános eredményeiben bennfoglaltatik. Perron tételét kis eltéréssel PIDOLL újból levezette PRINGSHEIM vizsgálataira támaszkodva s módszerem a PIDOLL-tól alkalmazott módszer lényeges általánosításában gyökerezik.

A PERRON-féle érdekes tétel a következő:[1]

Legyenek a, b bizonyos változók függvényei egy (T) tartományban és legyen ott mindvégig $a \neq 0$; létezzék továbbá egy $\vartheta < 1$ szám, egy C állandó[2] és két mennyiség: ϱ, σ, a melyek a

$$\varrho + \sigma = b, \quad \varrho\sigma = -a;$$
$$\left|\frac{\sigma}{\varrho}\right| \leqq \vartheta, \quad |\varrho| \leqq C$$

relatiókat elégítik ki. Legyen végül θ egy szám, mely az

$$1 > \theta^2 > \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}$$

egyenlőtlenségnek tesz eleget. Ha most az $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ láncztört elemei oly függvényei az adott változóknak, a melyek a (T) tartományban az

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{a_\nu}{a} - 1\right| \leqq (1-\theta)^3; \\ &\left|\frac{b_\nu - b}{\varrho}\right| \leqq (\theta - \vartheta)(1-\theta); \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

feltételeknek tesznek eleget, akkor a láncztört a (T) tartományban egyenletesen összetartó.

E tétel szerint tehát az $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ láncztört összetartó, ha csak a részletszámlálók az «a» szám bizonyos környezetében és a részletnevezők a «b» szám bizonyos környezetében feküsznek,

---

[1] OSKAR PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig, 1913, §. 56, Satz 40. E könyvet a következőkben röviden «Perron, Lehrbuch» alatt idézem. A tételt kissé eltérő fogalmazásban idézem, hogy az analogia egy később levezetendő tétellel élesebben szembetűnjön.

[2] A következőkben is C alatt egy alkalmasan választott állandót értek.

a hol «a» és «b» még bizonyos feltételnek vannak alávetve (a mely feltétel mindenesetre maga után vonja az

$$\frac{a|}{|b}+\frac{a|}{|b}+\cdots=\left[\frac{\dot a}{b}\right]$$

periodikus láncztört összetartását). Röviden ezt úgy fejezhetem ki, hogy az $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ láncztört az $\left[\frac{\dot a}{b}\right]$ láncztört környezetében fekszik. Az $a=0$ eset ugyan ki van véve, de erre az esetre egy Pringsheim-féle tétel[1] tesz hasonló szolgálatot, a mely tétel szerint a $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ láncztört összetartó, hacsak

$$|c_\nu|\leqq\tfrac{1}{4};\quad(\nu=2,3\ldots).$$

A Pringsheim-féle tétel tehát feleletet ad kérdésünkre, ha a kiindulópontul vett láncztört $\left[\frac{\dot 0}{1}\right]$; a Perron-féle tétel pedig bizonyos $\left[\frac{\dot a}{b}\right]$ láncztörtek esetére oldja meg a kérdést. E tétel nyilván általánosítása egy ismeretes tételnek,[2] mely az $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$

---

[1] Alfred Pringsheim: Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche [Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (München), Math.-phys. Klasse, Bd. 28, 1898, p. 295—324], 322. old. — Nem jelent lényeges megszorítást, hogy e tételben csak oly láncztörtekről van szó, a melyeknek részletnevezői mindvégig az 1 értékkel bírnak. Mert *bármely* láncztört, a melynek részletnevezői a nullától különbözők, ily alakra hozható; ugyanis, ha $b_\nu\neq0$ ($\nu=1,2,3,\ldots$), akkor — mint ismeretes — fennáll ez az *aequivalentia*:

$$\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\cdots\equiv\frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1}+\frac{\frac{a_2}{b_1b_2}\Big|}{|1}+\frac{\frac{a_3}{b_2b_3}\Big|}{|1}+\cdots,$$

azaz e két láncztört megfelelő *közelítő törtjei* rendre egymással egyenlők:

$$\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots+\frac{a_\nu|}{|b_\nu}=\frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1}+\frac{\frac{a_2}{b_1b_2}\Big|}{|1}+\cdots+\frac{\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu}\Big|}{|1}.$$

[2] E. B. van Vleck: On the convergence of algebraic continued fractions, whose coefficients have limiting values [Transactions of the American Math. Soc. 5, 1904, p. 253—262]. — A. Pringsheim: Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Ketenbrüche [Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. (München), Math.-phys. Kl., Jahrg. 1910, 6. Abh.].

alakú láncztörtekre vonatkozik, a hol az a_ν állandók egy véges és meghatározott «a» határértékkel birnak.

Pidoll[1] a Perron-féle tételt átvitte a többtagú periodussal biró láncztörtekre. A következőkben, általános fejtegetésekből kiindulva, hasonló eredményekre jutok. A Perron-féle tétel egy általánosítását nyerem, a mely — mellesleg megjegyezve — az $a = 0$ esetben is érvényes.

Pidoll — más constansokkal — a Perron-féle tételt is újból levezette s az ő bizonyítása kis kiegészítéssel az $a = 0$ esetre is érvényes marad.[2]

E vizsgálatok vezettek engem a bevezetés elején felvetett kérdésre, a melyre a feleletet bizonyos megszorításokkal egy általános tételben (I. tétel) adom meg, a mely tétel a fent idézett tételek általánosításának tekinthető. Tételemből bizonyos mennyiségek speczializálásával sok új összetartási kriterium vezethető le; különösen az $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ láncztörtre nézve vezetek le összetartási kriteriumokat. Hogy ezek minél hatásosabbak legyenek, arra törekedtem, hogy a tételemben fellépő parametereket és állandókat lehetőleg kedvezően határozzam meg. Főtételem levezetésére a fentidézett dolgozatok mindegyike befolyással volt.

---

[1] Max von Pidoll: Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Diss. München, 1912.

[2] I. h., 3. §. — Ugyanis Pidoll bevezeti az

$$(1-\vartheta)^2 \leqq \left|\frac{z'}{z}\right| \tag{α}$$

feltételt, hogy bebizonyítsa a

$$z'_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{β}$$

egyenlőtlenségeket. De következtetései érvényesek maradnak akkor is, ha a (β) egyenlőtlenségek nem mind állnak fenn. Ezért az (α) feltétel törölhető, és úgy az «a» szám, mint az a_ν számok a nulla értéket is felvehetik. — Különben a (β) egyenlőtlenségek biztosan fennállnak, ha $a_\nu \neq 0$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), miként a $z_{\nu-1} z'_\nu = - a_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) egyenletekből közvetlenül kitűnik. Az itt használt jelek értelme később (1. §.) kiderül.

1. §. Egy speciális láncztört vizsgálata.

A következőkben a

$$K = \frac{c|}{|u_1+u'_1} - \frac{u_1u'_2|}{|u_2+u'_2} - \frac{u_2u'_3|}{|u_3+u'_3} - \cdots = \tag{1}$$
$$= \left[\frac{c}{u_1+u'_1}, \frac{-u_{\nu-1}u'_\nu}{u_\nu+u'_\nu}\right]_2^\infty$$

alakú láncztörtekkel lesz dolgunk, ezért néhány megjegyzést, mely az (1) láncztörtre vonatkozik, előrebocsátok.

Ha

$$u_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

akkor egy æquivalens transformatióval[1] rögtön nyerjük, hogy

$$K \equiv \left[\frac{\frac{c}{u_1}}{1+\frac{u'_1}{u_1}}, \frac{\frac{-u'_\nu}{u_\nu}}{1+\frac{u'_\nu}{u_\nu}}\right]_2^\infty;$$

ha még felteszszük, hogy

$$u'_\nu \neq 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

akkor egy ismert EULER-féle képlet[2] alkalmazásával nyerjük, hogy

$$K \equiv \frac{c}{u_1} \cdot \left\{1 + \frac{u'_2}{u_2} + \frac{u'_2u'_3}{u_2u_3} + \frac{u'_2u'_3u'_4}{u_2u_3u_4} + \cdots\right\}, \text{ ha } u'_1 = 0;^3 \tag{4}$$

$$K \equiv \frac{c}{u'_1}\left\{1 - \frac{1}{1+\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_1u'_2}{u_1u_2}+\frac{u'_1u'_2u'_3}{u_1u_2u_3}+\cdots}\right\}, \text{ ha}^4 \quad u'_1 \neq 0. \tag{5}$$

---

[1] E fogalmat illetőleg v. ö. pl. PERRON: Lehrbuch, §. 42.

[2] V. ö. PERRON: Lehrbuch, p. 207 [(4) alatti képlet] és p. 210.

[3] *A jobboldali végtelen sor a K láncztörttel aequivalens,* azaz a sor ν-edik részletösszege és a láncztört ν-edrendű közelítő törtje egymással megegyeznek ($\nu \geq 1$); l. lejebb.

[4] (4) (5)-ből az $u'_1 \to 0$ határátmenettel is nyerhető.

Az utóbbi relatiót hasonló czélból, mint a melyet itt követek, először PIDOLL (i. h., 41. o.) alkalmazta. A (4) és (5) relatióknak most egy új bebizonyítását közlöm, *a nélkül, hogy a* (3) *feltételt bevezetném;* e mellett az (1) láncztört egyéb tulajdonságai is felszínre kerülnek.

Legyenek a láncztört *közelítő törtjei:*

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{0}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{c}{u_1+u_1'};\quad \frac{P_\nu}{Q_\nu}=\frac{c|}{|u_1+u_1'}-\frac{u_1u_2'|}{|u_2+u_2'}-\dots-\frac{u_{\nu-1}u_\nu'|}{|u_\nu+u_\nu'}\quad (\nu=2,3,\dots);$$ [1]

akkor nyilván

$$Q_0=1,\quad Q_1=u_1+u_1',$$

tehát

$$Q_1-u_1Q_0=u_1'. \tag{6}$$

Továbbá:

$$Q_\nu=(u_\nu+u_\nu')\,Q_{\nu-1}-u_{\nu-1}u_\nu'Q_{\nu-2}\quad (\nu=2,3,\dots),$$

tehát

$$Q_\nu-u_\nu Q_{\nu-1}=u_\nu'\,(Q_{\nu-1}-u_{\nu-1}Q_{\nu-2})\quad (\nu=2,3,\dots);$$

innen és (6)-ból teljes inductióval rögtön nyerjük, hogy

$$Q_\nu-u_\nu Q_{\nu-1}=u_1'u_2'\dots u_\nu'\quad (\nu=1,2,3,\dots), \tag{7}$$

avagy (2) figyelembevételével:

$$\frac{Q_1}{u_1}-Q_0=\frac{u_1'}{u_1},\quad \frac{Q_\nu}{u_1u_2\dots u_\nu}-\frac{Q_{\nu-1}}{u_1u_2\dots u_{\nu-1}}=\frac{u_1'u_2'\dots u_\nu'}{u_1u_2\dots u_\nu};\quad (\nu=2,3,\dots).$$

Innen következik, hogy

$$\frac{Q_\nu}{u_1u_2\dots u_\nu}=1+\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_1'u_2'}{u_1u_2}+\dots+\frac{u_1'u_2'\dots u_\nu'}{u_1u_2\dots u_\nu};\quad (\nu=1,2,3,\dots). \tag{8}$$

---

[1] $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$-t *a láncztört ν-edrendű közelítő törtjének* nevezik. P_ν és Q_ν pedig *a ν-ed rendű közelítő számláló*, illetőleg *nevező*.

Hasonlóan fejezhető ki P_ν. Nyilván áll:

$$P_0 = 0, \quad P_1 = c,$$

tehát

$$P_1 - u_1 P_0 = c;$$

továbbá

$$P_\nu - u_\nu P_{\nu-1} = u'_\nu (P_{\nu-1} - u_{\nu-1} P_{\nu-2}) \quad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

innen következik, hogy

$$P_\nu - u_\nu P_{\nu-1} = c . u'_2 \ldots u'_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

s innen nyerjük, hogy

$$\frac{P_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu} - \frac{P_{\nu-1}}{u_1 u_2 \ldots u_{\nu-1}} = \frac{c}{u_1} \cdot \frac{u'_2 \ldots u'_\nu}{u_2 \ldots u_\nu},$$

és végül

$$\frac{P_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu} = \frac{c}{u_1} + \frac{c}{u_1} \cdot \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{c}{u_1} \frac{u'_2 \ldots u'_\nu}{u_2 \ldots u_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Már most (8)- és (9)-ből következik, hogy

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{c}{u_1}\left(1 + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u'_2 \ldots u'_\nu}{u_2 \ldots u_\nu}\right),$$

ha

$$u'_1 = 0,$$

és

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{c}{u'_1} \cdot \frac{\dfrac{u'_1}{u_1} + \dfrac{u'_1 u'_2}{u_1 u_2} + \cdots + \dfrac{u'_1 u'_2 \ldots u'_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}}{1 + \dfrac{u'_1}{u_1} + \dfrac{u'_1 u'_2}{u_1 u_2} + \cdots + \dfrac{u'_1 u'_2 \ldots u'_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}} =$$

$$= \frac{c}{u'_1}\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{u'_1}{u_1} + \dfrac{u'_1 u'_2}{u_1 u_2} + \cdots + \dfrac{u'_1 u'_2 \ldots u'_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}}\right)$$

ha

$$u'_1 \neq 0.$$

Innen a (4) és (5) alatti relatiók közvetlenül erednek.

2. §. A főtétel levezetése.

Áttérek most jelen vizsgálatunk főtételére:

1. tétel. Legyenek $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ *valamely* T *tartomány-*

ból vett értékek; létezzék továbbá három értéksorozat u_ν, u'_ν és ϑ_ν $(\nu=1, 2, 3,\ldots)$, a mely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$\left.\begin{array}{ll} f_1) & u_\nu = b_\nu - u'_\nu \neq 0; \\ f_2) & u_\nu u'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}; \\ f_3) & \left|\dfrac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu; \end{array}\right\}(\nu = 1, 2, 3,\ldots)$$

$$f_4) \quad \sum_2^\infty{}_\nu \vartheta_2\vartheta_3\ldots\vartheta_\nu$$

sor a T tartományban egyenletesen összetartó.[1]

Legyen végül s_ν, t_ν $(\nu=1, 2, 3,\ldots)$ két értéksorozat, a mely kielégíti e feltételeket:

$$\left.\begin{array}{ll} f_5) & 0 \leqq t_\nu \leqq s_\nu < 1; \\ f_6) & (s_{\nu+1}-t_{\nu+1})(1-s_\nu) \geqq \vartheta_{\nu+1}s_\nu; \end{array}\right\}(\nu=1, 2, 3,\ldots)$$

$$f_7) \quad \sum_2^\infty{}_\nu \prod_2^\nu{}_\lambda \frac{s_\lambda - t_\lambda + \vartheta_\lambda}{1-s_\lambda}$$

sor T-ben egyenletesen összetartó.

Ha most az

$$\left[\frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_1^\infty = \frac{x_1|}{|y_1} + \frac{x_2|}{|y_2} + \frac{x_3|}{|y_3} + \cdots \tag{10}$$

lánczört elemei megfelelnek ez egyenlőtlenségeknek:[2]

---

[1] Az a_1, b_1, a_2, $b_2,\ldots$ sorozat a végtelen sok dimensiós tér egy pontja; a T tartomány ily pontok halmaza és minden egyes ponthoz más-más ϑ_ν $(\nu=1, 2, 3,\ldots)$ sorozat tartozhatik.

[2] Az $f_8)$ és $f_9)$ egyenlőtlenségek baloldalán álló kifejezések közvetlen általánosításai a Pidoll idézett dolgozatában (5)- és (6)-tal jelzett egyenlőtlenségek baloldali kifejezéseinek, valamint Perron megfelelő kifejezéseinek. Ugyanis (v. ö. 3. o.)

$$\frac{a_\nu}{a} - 1 = \frac{a_\nu - a}{a} = \frac{a_\nu - a}{-\varrho\sigma} = \frac{a_\nu - a}{-\varrho^2}\cdot\frac{\varrho}{\sigma},$$

és a jelen speciális esetben:

$$u_\nu = \varrho,\ u'_\nu = \sigma,\ x_\nu - a_\nu = a_\nu - a;\quad (\nu = 1, 2, 3,\ldots).$$

Megjegyzendő, hogy az $f_5)$ és $f_6)$ feltételek következtében az $f_8)$ és $f_9)$ egyenlőtlenségek jobb oldalai mindig positivek (legrosszabb esetben a nulla értéket vehetik fel).

$$\left.\begin{aligned} f_8)\quad & \left|\frac{x_{\nu+1}-a_{\nu+1}}{u_\nu u_{\nu+1}}\right| \leqq (s_{\nu+1}-t_{\nu+1})(1-s_\nu)-\vartheta_{\nu+1}s_\nu \\ f_9)\quad & \left|\frac{y_\nu-b_\nu}{u_\nu}\right| \leqq t_\nu \end{aligned}\right\}(\nu=1,2,3,\ldots),$$

akkor a (10) *alatti láncztört legalább is tágabb értelemben*[1] *összetartó. Ha* $u'_1=0$ *és az*

$$f_{10})\quad \left|\frac{x_1}{y_1}\right| \leqq constans$$

feltételt is bevezetjük, akkor az f_8), f_9) és f_{10}) *feltételek által meghatározott tartományban, melyet röviden E-vel akarok jelölni, valamint a T tartományban a láncztört egyenletesen összetartó.*[2]

A tétel bebizonyítása czéljából az x_ν, y_ν értékekhez bizonyos z_ν, z'_ν $(\nu=1,2,3,\ldots)$ értékeket definiálunk, még pedig a következő módon:

$$z'_1 = u'_1; \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} z_\nu &= y_\nu - z'_\nu; \quad (12)\\ z_\nu z'_{\nu+1} &= x_{\nu+1}; \quad (13)\end{aligned}\right\}(\nu=1,2,3,\ldots);$$

ezzel a z_ν, z'_ν mennyiségek egyértelműleg meg vannak határozva, ha csak valamely z_ν nem tűnik el. De most bebizonyítom ezeket a relatiókat:

---

[1] Azaz a közelítő törtek sorozata és azok reciprok értékeinek sorozata közül legalább az egyik véges és meghatározott érték felé tart. Ha a közelítő törtek sorozata összetartó, akkor a láncztörtet *szűkebb értelemben összetartónak*, vagy röviden összetartónak nevezzük; ha pedig a közelítő törtek sorozata széttartó, de reciprok értékük sorozata összetartó, akkor a láncztörtet *lényegtelenül széttartó*nak nevezzük; v. ö. PERRON: Lehrbuch, 232. o.

Ahhoz, hogy az $\left[\frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_1^\infty$ láncztört tágabb értelemben összetartó legyen, elegendő, ha n valamely egész számu értéke mellett az $\left[\frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_n^\infty$ láncztört tágabb értelemben összetartó. (V. ö. PERRON: Lehrbuch, 232. o., 2. tétel.)

[2] Azaz az összetartás egyenletes a T tartomány egyes pontjaihoz tartozó E tartományok összeségére nézve.

$$\left.\begin{aligned} \left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right| &\leqq s_\nu; \\ z_\nu &\neq 0; \end{aligned}\right\} (\nu=1,\,2,\,3\ldots). \qquad \begin{aligned}(14)\\(15)\end{aligned}$$

Legyen először is $\nu=1$; (11)-, (12)- és f_1)-ből következik, hogy

$$\left|1-\frac{z_1}{u_1}\right|=\left|1-\frac{y_1-u_1'}{u_1}\right|=\left|\frac{b_1-y_1}{u_1}\right|,$$

és tekintettel f_9) és f_5)-re világos, hogy (14) $\nu=1$-re érvényes. Innen közvetlenül folyik (mivel $s_1<1$), hogy (15) is igaz $\nu=1$-re. Tegyük fel most már, hogy (14) és (15) ν-re ($\nu\geqq 1$) igaz, bebizonyítjuk, hogy akkor $\nu+1$-re is fennáll. Mindenekelőtt (13)- és (12)-ből következik, hogy

$$x_{\nu+1}=-z_\nu z'_{\nu+1}=-z_\nu(y_{\nu+1}-z_{\nu+1}),$$

avagy

$$z_\nu z_{\nu+1}=x_{\nu+1}+z_\nu y_{\nu+1},$$

és ha ez egyenlet mindkét oldalából $z_\nu u_{\nu+1}$-et levonunk, ered

$$z_\nu(z_{\nu+1}-u_{\nu+1})=x_{\nu+1}+z_\nu(y_{\nu+1}-u_{\nu+1}).$$

Ha most ez egyenlet jobboldalán $u_{\nu+1}$-et $b_{\nu+1}-u'_{\nu+1}$-vel helyettesítjük és $0=a_{\nu+1}+u_\nu u'_{\nu+1}$-t levonunk, nyerjük, hogy

$$z_\nu(z_{\nu+1}-u_{\nu+1})=x_{\nu+1}-a_{\nu+1}+z_\nu(y_{\nu+1}-b_{\nu+1})+u'_{\nu+1}(z_\nu-u_\nu).$$

Osszuk ez egyenlet mindkét oldalát a $z_\nu u_{\nu+1}$ nullától különböző értékkel, akkor

$$\frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}-1=\frac{x_{\nu+1}-a_{\nu+1}}{z_\nu u_{\nu+1}}+\frac{y_{\nu+1}-b_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}+\frac{u'_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\left(1-\frac{u_\nu}{z_\nu}\right),$$

és innen

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \leqq \left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right|\cdot\left|\frac{x_{\nu+1}-a_{\nu+1}}{u_\nu u_{\nu+1}}\right|+\left|\frac{y_{\nu+1}-b_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right|+ \\ +\left|\frac{u'_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right|\cdot\left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right|\cdot\left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|.\end{aligned} \qquad (16)$$

De (14)-ből következik, hogy

$$\left|\frac{z_\nu}{u_\nu}\right| \geqq 1 - s_\nu, \tag{17}$$

tehát

$$\left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{1}{1-s_\nu}. \tag{18}$$

Végül (18), f_8), f_9), f_3) és (14) felhasználásával (16)-ból következik, hogy

$$\left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \leqq \left(s_{\nu+1} - t_{\nu+1} - \frac{\vartheta_{\nu+1}s_\nu}{1-s_\nu}\right) + t_{\nu+1} + \frac{\vartheta_{\nu+1}s_\nu}{1-s_\nu},$$

azaz

$$\left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \leqq s_{\nu+1}.$$

Innen pedig (mivel $s_{\nu+1} < 1$) folyik, hogy

$$z_{\nu+1} \neq 0,$$

tehát a (14) és (15) relatiók általában érvényesek.

Már most nyilván ((12) és (13) figyelembe vételével):

$$\left[\frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{x_1}{z_1+z_1'},\quad \frac{-z_{\nu-1}z_\nu'}{z_\nu+z_\nu'}\right]_2^\infty,$$

és innen (4), (5), (11) és (12) felhasználásával:

$$\left[\frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{x_1}{y_1}\left\{1 + \frac{z_2'}{z_2} + \frac{z_2'z_3'}{z_2z_3} + \frac{z_2'z_3'z_4'}{z_2z_3z_4} + \cdots\right\}, \text{ ha } u_1' = 0;$$

és

$$\left[\frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{x_1}{u_1'}\left\{1 - \frac{1}{1 + \frac{z_1'}{z_1} + \frac{z_1'z_2'}{z_1z_2} + \cdots}\right\}, \text{ ha } u_1' \neq 0.$$

Tételünk bebizonyításához most már elegendő kimutatnunk, hogy az

$$S_1 = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{z_1'z_2'\ldots z_\nu}{z_1z_2\ldots z_\nu};$$

$$S_2 = 1 + \sum_2^\infty{}_\nu \frac{z_2'\ldots z_\nu'}{z_2\ldots z_\nu};$$

sorok egyenletesen összetartók. De a (13) egyenlet figyelembe vételével

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{x_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| \cdot \left|\frac{u_{\nu-1}u_\nu}{z_{\nu-1}z_\nu}\right|; \quad (\nu = 2, 3,\cdots), \quad (19)$$

és f_8)-ból következik, hogy

$$\left|\frac{x_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| \leqq \left|\frac{a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| + (s_\nu - t_\nu)(1-s_{\nu-1}) - \vartheta_\nu s_{\nu-1} \quad (\nu = 2, 3,\ldots);$$

továbbá (v. ö. az f_2) és f_3) relatiókat):

$$\left|\frac{a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| = \left|\frac{u_{\nu-1}u'_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| = \left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu,$$

ennélfogva még

$$\left|\frac{x_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| \leqq (s_\nu - t_\nu + \vartheta_\nu)(1-s_{\nu-1}). \quad (20)$$

Végül a (20) és (18) egyenlőtlenségek felhasználásával nyerjük (19)-ből, hogy

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{s_\nu - t_\nu + \vartheta_\nu}{1-s_\nu} \quad (\nu=2, 3,\ldots),$$

és ez a relatio $\nu = 1$-re is érvényes, mert

$$\left|\frac{z'_1}{z_1}\right| = \left|\frac{u'_1}{z_1}\right| = \left|\frac{u'_1}{u_1}\right| \cdot \left|\frac{u_1}{z_1}\right| \leqq \frac{\vartheta_1}{1-s_1}.$$

De most az f_7) feltételből közvetlenül ered, hogy az S_1, S_2 sorok egyenletesen (és feltétlenül is) összetartók.

Ezzel az 1. tétel be van bizonyítva.

f_1)- és f_2)-ből következik, hogy

$$\left[\frac{a_1}{b_1 - u'_1}, \quad \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = \left[\frac{a_1}{u_1}, \quad \frac{-u_{\nu-1}u'_\nu}{u_\nu + u'_\nu}\right]_2^\infty; \quad (21)$$

jelöljük e láncztört ν-ed rendű közelítő törtjét $\frac{A_\nu}{B_\nu}$-vel, akkor (7)-ből (mivel most K-ban u'_1 helyébe 0 irandó, hogy (21) jobb oldalával összhangba jusson)

$$B_\nu = u_\nu B_{\nu-1} \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots); \tag{22}$$

tehát az f_1) és f_2) feltételek csak annyit jelentenek, hogy a (21) láncztört közelítö törtjeinek legyen értelmük. Az f_7) feltétel nyilván tartalmazza az f_4) feltételt. Ha $u_1'=0$, akkor az f_1)—f_4) feltételek nyilván az

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \tag{23}$$

láncztört összetartását, sőt a vele æquivalens sor *feltétlen* összetartását (v. ö. a (4) relatióval) követelik. Általában (azaz, ha u_1' tetszésszerinti) ugyanez érvényes a (21) láncztörtre nézve. Az eredmény pedig röviden úgy jellemezhető, hogy az

$$\left[\frac{x_1}{y_1-u_1'}, \quad \frac{x_\nu}{y_\nu}\right]_2^\infty = \frac{x_1|}{|y_1-u_1'} + \frac{x_2|}{|y_2} + \frac{x_3|}{|y_3} + \cdots$$

láncztört összetartó, sőt a vele æquivalens sor *feltétlenül* összetartó.

Ha az f_1)—f_4) feltételek teljesülnek, akkor az s_ν, t_ν mennyiségek mindig meghatározhatók úgy, hogy az f_5)—f_7) feltételek is ki legyenek elégítve, még pedig úgy, hogy általában[1] f_6) alatt mindvégig az egyenlőtlenség érvényes.

Legyen egyszerűség kedveért

$$t_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor az f_5)—f_7) feltételek a következő alakot öltik:

$$\left.\begin{array}{ll} f_5') & 0 \leqq s_\nu < 1\,; \\ f_6') & s_{\nu+1}(1-s_\nu) \geqq \vartheta_{\nu+1} s_\nu\,; \end{array}\right| (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$f_7') \quad \sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \left|\prod_{2}^{\nu}{}_{\lambda}\right| \frac{s_\lambda + \vartheta_\lambda}{1 - s_\lambda}$$

T-ben egyenletesen összetartó.

Már most (feltéve, hogy $\vartheta_\nu > 0$ ($\nu=1, 2, \ldots$)) nyilván meg-

[1] Azaz, ha csak mindvégig $\vartheta_\nu \neq 0$.

határozható egy $\vartheta'_1, \vartheta'_2, \vartheta'_3, \ldots$ értéksorozat, a mely kielégíti a következő feltételeket:

$$\sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, \vartheta'_1\vartheta'_2 \ldots \vartheta'_\nu \quad \text{összetartó és} \quad \vartheta'_\nu > \vartheta_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (A)$$

legyen továbbá s oly érték, mely a következő egyenlőtlenségnek tesz eleget

$$0 < s < \frac{\vartheta'_1}{\sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_\nu}, \qquad (B)$$

és írjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = s; \\ s_{\nu+1}(1 - s_\nu) = \vartheta'_{\nu+1} s_\nu; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \end{array}\right\} \qquad (C)$$

ezzel az s_ν-k egyértelműleg meg vannak határozva,[1] ha még kimutatom, hogy mindvégig $s_\nu \neq 1$. Pontosabban a következő relatiókat bizonyítom be:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < s_\nu < 1; \\ \dfrac{1}{s_\nu} = \dfrac{\vartheta'_1 - \vartheta'_1 s - \cdots - \vartheta'_1 \ldots \vartheta'_{\nu-1} s}{\vartheta'_1 \ldots \vartheta'_\nu s}; \end{array}\right\} (\nu = 2, 3, \ldots). \qquad (D)$$

$\nu = 2$-re ez azt jelenti, hogy

$$0 < s_2 < 1;$$

és

$$\frac{1}{s_2} = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta'_1 s}{\vartheta'_1 \vartheta'_2 s};$$

és ez (B) és (C) figyelembe vételével rögtön igazolható. Tegyük fel most már, hogy (D) igaz ν-re, bebizonyítom, hogy akkor $\nu + 1$-re is érvényes.

Ugyanis (C)-ből következik, hogy

$$s_{\nu+1} = \frac{\vartheta'_{\nu+1} s_\nu}{1 - s_\nu} > 0,$$

[1] És az s_ν-k ilyetén meghatározása mellett f'_s) alatt nyilván mindvégig az egyenlőtlenség érvényes (v. ö. az (A) feltétellel).

tehát

$$\frac{1}{s_{\nu+1}}=\frac{1-s_\nu}{\vartheta'_{\nu+1}s_\nu}=\frac{1}{\vartheta'_{\nu+1}}\cdot\frac{1}{s_\nu}-\frac{1}{\vartheta'_{\nu+1}}=$$
$$=\frac{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\nu-1}s}{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\nu\vartheta'_{\nu+1}s}-\frac{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\nu s}{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\nu+1}s},$$

azaz

$$\frac{1}{s_{\nu+1}}=\frac{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\nu s}{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\nu+1}s};$$

továbbá $s_{\nu+1}<1$, mert ez azt jelenti, hogy $\frac{1}{s_{\nu+1}}>1$, azaz hogy

$$\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\nu s>\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\nu+1}s$$

és ez (B) tekintetbe vételével nyilván fennáll.

Tehát a (D) relatiók általában be vannak bizonyitva.

Végül még könyen kimutatható, hogy az (Γ') feltétel is ki van elégítve, mert

$$s_\lambda+\vartheta_\lambda<s_\lambda+\vartheta'_\lambda;\quad(\lambda=2,3,\ldots)$$

és

$$s_\lambda+\vartheta'_\lambda=\frac{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\lambda s+(\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_{\lambda-1}s)\,\vartheta'_\lambda}{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda-1}s}=$$
$$=\frac{(\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_{\lambda-2}s)\,\vartheta'_\lambda}{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda-1}s};$$

tehát

$$s_\lambda+\vartheta_\lambda<\frac{(\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_{\lambda-2}s)\,\vartheta'_\lambda}{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda-1}s},$$ [1]

továbbá

$$\frac{1}{1-s_\lambda}=\frac{s_{\lambda+1}}{\vartheta'_{\lambda+1}s_\lambda}=\frac{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda+1}s}{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\lambda s}\cdot\frac{1}{\vartheta'_{\lambda+1}}\cdot$$
$$\cdot\frac{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda-1}s}{\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\lambda s},$$

azaz

$$\frac{1}{1-s_\lambda}=\frac{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda-1}s}{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_\lambda s},$$

[1] Ha $\lambda=2$, akkor ϑ'_λ szorzója: ϑ'_1.

tehát végül

$$\frac{s_\lambda+\vartheta_\lambda}{1-s_\lambda}<\frac{(\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_1\cdots\vartheta'_{\lambda-2}s)\,\vartheta'_\lambda}{\vartheta'_1-\vartheta'_1 s-\cdots-\vartheta'_\lambda\cdots\vartheta'_\lambda s}.$$

Legyen most rövidség kedveért

$$\sigma_0=0,\ \sigma_1=1,\ 1+\vartheta'_2+\cdots+\vartheta'_2\cdots\vartheta'_\lambda=\sigma_\lambda;\quad(\lambda=2,3,\ldots),$$

akkor nyilván

$$\frac{s_\lambda+\vartheta_\lambda}{1-s_\lambda}<\frac{1-s\sigma_{\lambda-2}}{1-s\sigma_\lambda}\vartheta'_\lambda;\quad(\lambda=2,3,\ldots);$$

innen

$$\prod_{\lambda=2}^{\nu}\frac{s_\lambda+\vartheta_\lambda}{1-s_\lambda}<\frac{1-s}{(1-s\sigma_{\nu-1})(1-s\sigma_\nu)}\vartheta'_2\cdots\vartheta'_\nu.$$

De mivel $\lim\sigma_\lambda=\sigma$ (A) szerint létezik, és (B) szerint $\sigma s<1$, azért létezik egy állandó c úgy, hogy

$$\frac{1-s}{(1-s\sigma_{\nu-1})(1-s\sigma_\nu)}<c;$$

és most világos, hogy az $f'_7)$ feltétel ki van elégítve, mert

$$\prod_{\lambda=2}^{\nu}\frac{s_\lambda+\vartheta_\lambda}{1-s_\lambda}<c\vartheta'_2\cdots\vartheta'_\nu.$$

E megoldás nem érvényes arra az esetre, ha ν valamely értékére $(\nu\geqq 2)$ $\vartheta_\nu=0$, azaz (f_3) és $f_4)$ szerint) $a_\nu=0$ és ha egyúttal $\sum_1^\infty{}_k\vartheta_{\nu+1}\ldots\vartheta_{\nu+k}$ széttartó; ebben az esetben legyen

$$\vartheta'_\nu=0,\quad s_\nu=0,\quad s_{\nu+1}=0,\ldots.$$

*

Későbbi alkalmazás czéljából néhány egyenlőtlenséget már itt vezetek le. Bebizonyítom, hogy

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{z'_\nu-u'_\nu}{z_\nu}\right|&\leqq\frac{s_\nu-t_\nu}{1-s_\nu};\\ \left|\frac{u'_\nu}{z_\nu}\right|&\leqq\frac{\vartheta_\nu}{1-s_\nu};\\ \left|\frac{u'_\nu}{z_\nu}-\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right|&\leqq\frac{\vartheta_\nu s_\nu}{1-s_\nu};\end{aligned}\right\}(\nu=1,2,3,\ldots).\qquad(24)$$

Ugyanis nyilván

$$\frac{z'_\nu-u'_\nu}{z_\nu}=\frac{u_{\nu-1}}{z_{\nu-1}}\left(\frac{z_{\nu-1}}{u_{\nu-1}}\cdot\frac{z'_\nu}{z_\nu}-\frac{z_{\nu-1}}{u_{\nu-1}}\cdot\frac{u'_\nu}{z_\nu}\right);\quad (\nu=2,3,\ldots),$$

és innen tekintettel (13)-ra és f_2)-re:

$$\frac{z'_\nu-u'_\nu}{z_\nu}=\frac{u_{\nu-1}}{z_{\nu-1}}\cdot\frac{u'_\nu}{z_\nu}\left[\frac{a_\nu-x_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}+\frac{u'_\nu}{u_\nu}\left(1-\frac{z_{\nu-1}}{u_{\nu-1}}\right)\right];\quad (\nu=2,3,\ldots).$$

Innen pedig (18), f_8), f_3) és (14) felhasználásával nyerjük, hogy

$$\left|\frac{z'_\nu-u'_\nu}{z_\nu}\right|\leqq\frac{1}{(1-s_{\nu-1})(1-s_\nu)}[(s_\nu-t_\nu)(1-s_{\nu-1})-\vartheta_\nu s_{\nu-1}+\vartheta_\nu s_{\nu-1}];$$
$$(\nu=2,3,\ldots);$$

továbbá (11) és f_5) szerint

$$z'_1-u'_1=0,\quad s_1-t_1\geqq 0,$$

tehát általában

$$\left|\frac{z'_\nu-u'_\nu}{z_\nu}\right|\leqq\frac{s_\nu-t_\nu}{1-s_\nu};\quad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Most még f_3) és (18) figyelembe vételével

$$\left|\frac{u'_\nu}{z_\nu}\right|=\left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right|\cdot\left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right|\leqq\frac{\vartheta_\nu}{1-s_\nu};\quad (\nu=1,2,3,\ldots);$$

és végül

$$\frac{u'_\nu}{z_\nu}-\frac{u'_\nu}{u_\nu}=\frac{u'_\nu}{u_\nu}\left(\frac{u_\nu}{z_\nu}-1\right)=\frac{u'_\nu}{u_\nu}\cdot\frac{u_\nu}{z_\nu}\left(1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right),$$

tehát f_3), (18) és (14) szerint

$$\left|\frac{u'_\nu}{z_\nu}-\frac{u_\nu}{u_\nu}\right|\leqq\frac{\vartheta_\nu s_\nu}{1-s_\nu};\quad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Ezzel a (24) relatiók mind be vannak bizonyítva.

*

Czélszerű az $u'_1\neq 0$ (és $x_1\neq 0$) esetben is feltételeket megadni, a melyek mellett a láncztört szűkebb értelemben összetartó, azaz a mely mellett $S_1\neq 0$.

Ha különösen

$$x_\nu=g_\nu x,\ y_\nu=1;\quad (\nu=1,2,3,\ldots),$$

a hol a g_ν-k állandók, és x egy összefüggő B tartományban változhatik, a mely az $x=0$ helyet belsejében tartalmazza, akkor az S_1 sor B-ben analytikai függvényt állít elő, a mely ott csak véges számú pontban tűnhetik el, mert ha végtelen sok pontban tűnne el, akkor az egész tartományban identikusan kellene eltűnnie és akkor az egész tartományban identikusan volna:

$$\left[\frac{g_\nu x}{1}\right]_1^\infty = 1,$$

ez azonban egy PRINGSHEIM-féle tétel szerint (506. old. [2] alatt i. h., III. tétel) lehetetlen.

Általában megtörténhetik, hogy az S_1 sor egy tartományban identikusan eltűnik. Ezért további feltételeket kell bevezetnünk, hogy a (10) alatti láncztört összetartására következtethessünk. Ily feltétel a következő:

Pótlék az 1. tételhez. Ha az 1. tételben adott feltételek teljesülnek és ha azonkívül

$$f_{11})\quad \left|\frac{x_1}{u_1'}\right| \leqq C,$$

$$3s_\nu + 2\vartheta_\nu - 2t_\nu \leqq 1, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \tag{25}$$

és itt ν legalább egy értéke mellett az egyenlőtlenség érvényes, akkor az f_8), f_9) és f_{11}) feltételek által meghatározott tartományban, valamint a T tartományban a lánctört egyenletesen összetartó.

Ugyanis a (25) relatio egyértelmű a következővel:

$$\frac{s_\nu - t_\nu + \vartheta_\nu}{1 - s_\nu} \leqq \frac{1}{2}; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

ennélfogva most

$$|S_1| > 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right),$$

tehát

$$|S_1| > 0. \quad \text{Qu. e. d.}$$

3. §. Periodikus láncztörtekhez tartozó környezetek.

Különös esetekben a pótlékban adott összetartási feltétel tágítható. Behatóbban azzal az esettel akarok foglalkozni, a midőn a (23) láncztört *tisztán szakaszos*.

Legyen tehát

$$a_{\nu+k} = a_\nu, \quad b_{\nu+k} = b_\nu; \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \quad (26)$$

ekkor a (23) láncztört *k tagú szakaszszal* bir.

A (26) egyenletek figyelembe vételével f_1)- és f_2)-ből következik, hogy

$$\left.\begin{aligned} u_{\nu+k} + u'_{\nu+k} &= u_\nu + u'_\nu \\ u_{\nu+k} u'_{\nu+k+1} &= u_\nu u'_{\nu+1} \end{aligned}\right\}; \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

írhatjuk továbbá, hogy

$$u_{\nu+k} = u_\nu, \quad u'_{\nu+k} = u'_\nu, \quad \vartheta_{\nu+k} = \vartheta_\nu; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \quad (27)$$

s ekkor az f_1)—f_3) feltételek a következőkre redukálódnak:

$$\left.\begin{aligned} & u_\nu = b_\nu - u'_\nu \neq 0; \\ & u_\nu u'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}; \\ & \left| \frac{u'_\nu}{u_\nu} \right| \leqq \vartheta_\nu; \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots k), \qquad (28)$$

a hol

$$u'_{k+1} = u'_1, \quad a_{k+1} = a_1.$$

Az f_4) feltétel — miként rögtön látni — egyértelmű a következővel:

$$\vartheta_1 \vartheta_2 \ldots \vartheta_k < 1.^1 \qquad (29)$$

Most egy elegendő feltételt vezetek le arra, hogy $S_1 \neq 0$ legyen. Legyen röviden

$$\sigma = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{u'_1 u'_2 \ldots u'_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu},$$

akkor nyilván

---

[1] Felteszszük, hogy $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ az a_ν- és b_ν-től független állandók.

$$S_1 = \sigma + \sum_1^\infty {}_\nu \left[\frac{z'_1\ldots z'_\nu}{z_1\ldots z_\nu} - \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{z_1\ldots z_\nu} + \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{z_1\ldots z_\nu} - \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{u_1\ldots u_\nu}\right]$$

$$= \sigma + \sum_1^\infty {}_\nu \left[\prod_1^\nu {}_\lambda \left(\frac{z'_\lambda - u'_\lambda}{z_\lambda} + \frac{u'_\lambda}{z_\lambda}\right) - \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{z_1\ldots z_\nu}\right] +$$

$$+ \sum_1^\infty {}_\nu \left[\prod_1^\nu {}_\lambda \left(\left(\frac{u'_\lambda}{z_\lambda} - \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) + \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) + \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{u_1\ldots u_\nu}\right];$$

és innen

$$|S_1| \geqq |\sigma| - \sum_1^\infty {}_\nu \left|\prod_1^\nu {}_\lambda \left(\frac{z'_\lambda - u'_\lambda}{z_\lambda} + \frac{u'_\lambda}{z_\lambda}\right) - \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{z_1\ldots z_\nu}\right| -$$

$$\sum_1^\infty {}_\nu \left|\prod_1^\nu {}_\lambda \left(\left(\frac{u'_\lambda}{z_\lambda} - \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) + \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) - \frac{u'_1\ldots u'_\nu}{u_1\ldots u_\nu}\right|.$$

Ha e két utóbbi summában az általános tagot kiszámítjuk, azután az előforduló kifejezéseket a (24) relatiók felhasználásával megbecsüljük és ismét szorzatokká foglaljuk össze, akkor nyerjük, hogy

$$|S_1| \geqq |\sigma| - \sum_1^\infty {}_\nu \left|\prod_1^\nu {}_\lambda \frac{s_\lambda - t_\lambda + \vartheta_\lambda}{1 - s_\lambda} - \prod_1^\nu {}_\lambda \frac{\vartheta_\nu}{1 - s_\lambda}\right|$$

$$- \sum_1^\infty {}_\nu \left[\prod_1^\nu {}_\lambda \frac{\vartheta_\lambda}{1 - s_\lambda} - \prod_1^\nu {}_\lambda \vartheta_\lambda\right],$$

azaz

$$|S_1| \geqq |\sigma| - \sum_1^\infty {}_\nu \left|\prod_1^\nu {}_\lambda \frac{s_\lambda - t_\lambda + \vartheta_\lambda}{1 - s_\lambda} - \vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_\nu\right|. \qquad (30)$$

Most még σ-t kell megbecsülnünk. Legyen rövidség kedvéért

$$\frac{u'_1 u'_2\ldots u'_k}{u_1 u_2\ldots u_k} = \Pi_k,$$

akkor a jelen esetben nyilván:

$$\sigma = \sum_0^\infty \nu\, \Pi_k^\nu + \frac{u'_1}{u_1} \sum_0^\infty \nu\, \Pi_k^\nu + \cdots + \frac{u'_1 u'_2 \ldots u'_{k-1}}{u_1 u_2 \ldots u_{k-1}} \sum_0^\infty \nu\, \Pi_k^\nu,$$

azaz

$$\sigma = \frac{1}{1-\Pi_k}\left(1 + \frac{u'_1}{u_1} + \cdots + \frac{u'_1 u'_2 \ldots u'_{k-1}}{u_1 u_2 \ldots u_{k-1}}\right), \quad \text{ha} \quad k \geqq 2;$$

és

$$\sigma = \frac{1}{1-\Pi_k}, \quad \text{ha} \quad k = 1.$$

Innen következik, hogy

$$\left.\begin{aligned} |\sigma| &\geqq \frac{1}{1+\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_k}[1-(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_1\vartheta_2\cdots\vartheta_{k-1})], && \text{ha } k \geqq 2; \\ |\sigma| &\geqq \frac{1}{1+\vartheta_1} && \text{ha } k=1. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Most elegendő ϑ_1-, ϑ_2-,..., ϑ_{k-1}-t oly megszorításnak alávetnünk, hogy (31) jobb oldala positiv legyen, akkor nyilván az s_ν-, t_ν-k oly kicsinyeknek választhatók, hogy a (30) alatti egyenlőtlenség jobb oldala szintén positiv lesz. Tehát ϑ_1-, ϑ_2-,... ϑ_{k-1}-t oly feltételnek kell alávetnünk, a mely mellett

$$\left.\begin{aligned} 1 &> \vartheta_1+\vartheta_1\vartheta_2+\cdots+\vartheta_1\vartheta_2\cdots\vartheta_{k-1}, && \text{ha } k \geqq 2; \\ 1 &> \vartheta_1 &&, \text{ha } k=1. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Legyen speczialisan

$$\vartheta_\nu = \vartheta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1),[1]$$
$$\vartheta_k = \theta,$$

akkor az f_4) feltétel egyértelmű a következővel:

$$\vartheta^{k-1}\theta < 1,$$

és a (32) feltétel ily alakot ölt:

$$1 > \frac{\vartheta(1-\vartheta^{k-1})}{1-\vartheta}, \quad \text{ha} \quad k \geqq 2;$$

$$1 > \vartheta \quad , \quad \text{ha} \quad k = 1;$$

[1] Ha $k = 1$, akkor e feltétel elesik; legyen ekkor $\theta = \vartheta$.

azaz általában

$$1-2\vartheta+\vartheta^k>0; \quad (k\geqq 1).$$

Innen világos, hogy *a $k=1, 2$ esetekben* egy $\vartheta<1$ értékhez az s_ν, t_ν értékek mindig meghatározhatók úgy, hogy a (10) láncztört összetartó legyen.

Ha $k\geqq 3$, akkor az

$$1-2\vartheta+\vartheta^k=0 \tag{33}$$

egyenletnek a (0, 1) intervallum belsejében pontosan egy gyöke van, miként az

$$1-2\vartheta+\vartheta^k=(1-\vartheta)[1-(\vartheta+\vartheta^2+\cdots+\vartheta^{k-1})]$$

előállításból rögtön kitűnik. Jelöljük e gyököt $\vartheta^{(k)}$-val, akkor nyilván

$$\vartheta^{(k)}>\tfrac{1}{2}.$$

Egy jobb alsó határ meghatározása czéljából a (33) egyenletet ily alakban írom:

$$\vartheta=\frac{1+\vartheta^k}{2};$$

innen közvetlenül ered, hogy

$$\vartheta^{(k)}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}},$$

és ez alsó határ felhasználásával ismét jobb alsó határ állapitható meg.

Mindenesetre elegendő tehát, ha a k-tagú periodussal biró láncztörtre nézve ($k\geqq 3$)

$$\vartheta\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Kimutattuk tehát, hogy a (27)—(29) feltételek mellett az s_ν, t_ν mennyiségek meghatározhatók úgy, hogy az 1. tétel összetartási feltételei teljesüljenek. Sőt ebben az esetben az s_ν-, t_ν-k úgy határozhatók meg, hogy egy ν-től független positiv alsó határuk legyen. Mert írhatjuk, hogy

$$s_\nu = s, \ t_\nu = t; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

és az s, t positiv számok $(0<t<s)$ oly kicsinyeknek választhatók, hogy a

$$\sum_1^\infty \nu \prod_1^\nu \frac{s-t+\vartheta_\lambda}{1-s}$$

sor convergáljon[1] és hogy a (30) egyenlőtlenség jobb oldala positiv legyen.[2]

Előfordul, hogy a (27)—(29) feltételek nem teljesíthetők s hogy mégis léteznek oly s_ν, t_ν értékek, a melyek az 1. tétel összetartási feltételeit kielégítik, ha u'_1-t nullával teszszük egyenlővé. Legyen például

$$a_\nu = -\tfrac{1}{4}, \ b_\nu = 1; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{34}$$

úgy hogy a (23) láncztört egytagú periodussal bir:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{-\frac{1}{4}}{1}\right] = -\frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \cdots; \tag{35}$$

a (28) és (29) feltételek most a következő alakot öltik (ha u_1 helyett u-t írunk):

$$\left.\begin{array}{l} u+u' = 1, \ u \neq 0; \\ uu' = \frac{1}{4}; \\ \left|\dfrac{u'}{u}\right| \leqq \vartheta < 1; \end{array}\right\} \tag{36}$$

u' és u tehát az

$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 0$$

egyenlet gyökei, azaz

$$u' = \frac{1}{2}, \ u = \frac{1}{2}, \ \frac{u'}{u} = 1,$$

---

[1] Ehhez nyilván elegendő s-t és t-t oly kicsinynek választani, hogy

$$\prod_1^k \frac{s-t+\vartheta_\lambda}{1-s} < 1.$$

[2] Más feltételek mellett mutatta ki PIDOLL (i. h., 4. §.) a többtagú periodussal biró láncztörthöz egy környezet létezését.

tehát a (36) feltétel nincs kielégitve. Módszerünk a jelen esetben nem szolgáltat oly $s_\nu = s$, $t_\nu = t$ értékeket, a melyek az 1. tétel összetartási feltételeit kielégítenék. De könnyű kimutatni, hogy ily értékek a jelen esetben nem is léteznek; ugyanis már az egytagú periodussal biró

$$\frac{-\frac{1}{4}+\varepsilon|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}+\varepsilon|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}+\varepsilon|}{|1} - \cdots$$

láncztört tudvalevőleg széttartó, ha csak $\varepsilon > 0$. De az 1. tétel összetartási feltételei a jelen esetben is kielégíthetők, ha u'_1 helyébe nullát teszünk. Tudvalevő (v. ö. pl. Pringsheim, az 506. old. [2] alatt i. h., 23. o.), hogy a (35) láncztört ν-edrendű közelítő nevezője:

$$B_\nu = \frac{\nu+1}{2^\nu}; \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots),$$

tehát a (22) képlet értelmében

$$u_\nu = \frac{\nu+1}{2^\nu} : \frac{\nu}{2^{\nu-1}} = \frac{\nu+1}{2.\nu}; \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots).$$

Továbbá f_2)-ből és (34)-ből következik, hogy

$$u'_{\nu+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\nu}{\nu+1} = \frac{\nu}{2(\nu+1)}; \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots),$$

tehát

$$\frac{u'_\nu}{u_\nu} = \frac{\nu-1}{2\nu} : \frac{\nu+1}{2\nu} = \frac{\nu-1}{\nu+1}; \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots).$$

Legyen most

$$\vartheta_\nu = \frac{\nu-1}{\nu+1}; \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots),$$

akkor az f_4) feltétel nyilván teljesül. Legyen továbbá egyszerűség kedveért

$$t_\nu = 0, \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots),$$

és végül

$$s_\nu = \frac{4}{3(\nu+1)(\nu+2)}; \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots);$$

könnyen kimutatható, hogy most az $f_5)$—$f_7)$ feltételek is ki vannak elégítve és egyszerű számítás most az $\left[\frac{x_\nu}{1}\right]_1^\infty$ láncztört számára a következő összetartási feltételeket szolgáltatja:

$$\left|x_{\nu+1}-\frac{1}{4}\right| \leqq \frac{2}{9\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}; \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots).$$

4. §. A főtétel egy kiterjesztése.

Az 1. tételt egy speciális esetben, a mely a tétel alkalmazására bir fontossággal, szigoríthatom.

Legyenek ugyanis $\frac{u'_\nu}{u_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ *valós és nem positiv* értékek — ez az eset például akkor következik be, ha az a_ν-, b_ν-k valós és nem-negativ számok —, legyen továbbá

$$\left.\begin{aligned} \frac{u'_\nu}{u_\nu} &= \tau_\nu; \\ y_\nu &= b_\nu; \\ t_\nu &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots); \qquad (37)$$

most $f_1)$- és (12)-ből következik, hogy

$$u_\nu + u'_\nu = z_\nu + z'_\nu; \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots),$$

avagy

$$u'_\nu - z'_\nu = z_\nu - u_\nu; \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots).$$

Most tehát

$$\frac{z'_\nu}{z_\nu} = \frac{\frac{z'_\nu}{u_\nu}}{\frac{z_\nu}{u_\nu}} = \frac{\frac{u'_\nu}{u_\nu} + \frac{z'_\nu - u'_\nu}{u_\nu}}{1 - 1 + \frac{z_\nu}{u_\nu}} = \frac{\frac{u'_\nu}{u_\nu} + 1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}}{1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)},$$

és innen

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{\tau_\nu - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}{1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}\right|; \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots). \qquad (38)$$

Bebizonyítom most a következő relatiókat:

$$\left|\frac{\tau_\nu-\left(1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}{1-\left(1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}\right| \leqq \begin{cases} \dfrac{\tau_\nu+\left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|}{1+\left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|} \leqq \dfrac{\tau_\nu+s_\nu}{1+s_\nu}, \text{ ha } 1 \geqq \tau_\nu \geqq \left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|^2; \\ \left|\dfrac{\tau_\nu-\left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|}{1-\left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|}\right| \leqq \dfrac{|\tau_\nu-s_\nu|}{1-s_\nu} \left\{ \begin{array}{l} \text{ha } \tau_\nu \geqq 1, \text{ avagy} \\ \text{ha } \tau_\nu \leqq \left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|^2. \end{array} \right. \end{cases} \tag{39}$$

Legyen röviden

$$-\left(1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right)=r_\nu e^{i\varphi_\nu},$$

akkor a

$$\left|\frac{\tau_\nu+r_\nu e^{i\varphi_\nu}}{1+r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right| \leqq \frac{\tau_\nu+r_\nu}{1+r_\nu}$$

egyenlőtlenség egyértelmű a következővel:

$$\frac{\tau_\nu^2+r_\nu^2+2\tau_\nu r_\nu \cos\varphi_\nu}{\tau_\nu^2+r_\nu^2+2\tau_\nu r_\nu} \leqq \frac{1+r_\nu^2+2r_\nu\cos\varphi_\nu}{1+r_\nu^2+2r_\nu},$$

avagy

$$1+\frac{2\tau_\nu r_\nu(\cos\varphi_\nu-1)}{\tau_\nu^2+r_\nu^2+2\tau_\nu r_\nu} \leqq 1+\frac{2r_\nu(\cos\varphi_\nu-1)}{1+r_\nu^2+2r_\nu},$$

azaz (mivel $\cos\varphi_\nu \leqq 1$), egyszerű rövidítések után

$$\tau_\nu+r_\nu^2\tau_\nu-2r_\nu\tau_\nu \geqq \tau_\nu^2+r_\nu^2+2r_\nu\tau_\nu;$$

ez az egyenlőtlenség pedig rögtön átalakul a következővé:

$$\tau_\nu-\tau_\nu^2 \geqq r_\nu^2(1-\tau_\nu),$$

és ez (mivel (14) és f_5) szerint $r_\nu<1$) valóban az

$$1 \geqq \tau_\nu \geqq r_\nu^2$$

feltételre vezet.

E feltétel mellett még áll:

$$\frac{\tau_\nu+r_\nu}{1+r_\nu} \leqq \frac{\tau_\nu+s_\nu}{1+s_\nu},$$

mert ez az egyenlőtlenség könnyen átvihető a következőbe:

$$r_\nu(1-\tau_\nu) \leqq s_\nu(1-\tau_\nu),$$

és ez az egyenlőtlenség tekintettel (14)-re nyilván fennáll, ha $\tau_\nu \leqq 1$.

Hasonlóan vihető át a

$$\left|\frac{\tau_\nu+r_\nu e^{i\varphi_\nu}}{1+r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right| \leqq \frac{|\tau_\nu-r_\nu|}{1-r_\nu}$$

egyenlőtlenség a következőbe:

$$\tau_\nu+r_\nu^2-2r_\nu\tau_\nu \leqq \tau_\nu^2+r_\nu^2+2r_\nu\tau_\nu,$$

avagy

$$\tau_\nu(1-\tau_\nu) \leqq r_\nu^2(1-\tau_\nu),$$

és ez akkor teljesül, ha $\tau_\nu \geqq 1$, vagy ha $\tau_\nu \leqq r_\nu^2$; e feltételek mellett egyúttal

$$\frac{|\tau_\nu-r_\nu|}{1-r_\nu} \leqq \frac{|\tau_\nu-s_\nu|}{1-s_\nu},$$

mert ez nyilvánvaló, ha $\tau_\nu \leqq r_\nu^2$ $(< r_\nu)$, ha pedig $\tau_\nu \geqq 1$, akkor egyértelmű a következővel

$$s_\nu(1-\tau_\nu) \leqq r_\nu(1-\tau_\nu),$$

és ez nyilván igaz.

Jelöljük most rövidség kedvéért a

$$\frac{\tau_\nu+s_\nu}{1+s_\nu}, \quad \frac{|\tau_\nu-s_\nu|}{1-s_\nu}$$

kifejezések közül a nagyobbikat (τ_ν, s_ν)*-vel és a*

$$\frac{\tau_\nu+s_\nu}{1+s_\nu}, \quad \frac{\tau_\nu}{1-s_\nu}, \quad \frac{s_\nu}{1-s_\nu}$$

számok legnagyobbikát $\{\tau_\nu, s_\nu\}$*-vel,* akkor nyilván

$$(\tau_\nu, s_\nu) \leqq \{\tau_\nu, s_\nu\},$$

és (38) valamint (39) figyelembevételével

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \{\tau_\nu, s_\nu\};$$

ha továbbá $\vartheta_\nu \geqq \tau_\nu$, akkor egyúttal $\{\vartheta_\nu, s_\nu\} \geqq \{\tau_\nu, s_\nu\}$.

Mindezek figyelembevételével az 1. tételből (az $u'_1=0$ esetre) a következőt nyerjük:

2. tétel. Legyenek a_ν, b_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ *valamely* T *tartományból vett valós nem-negativ értékek,*[1] *az* u_ν-, u'_ν-, ϑ_ν-*k pedig elégítsék ki e relatiókat:*

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & u'_1=0,\ u_\nu=b_\nu-u'_\nu\neq 0;\\ 2. & u_\nu u'_{\nu+1}=-a_{\nu+1};\\ 3. & \left|\dfrac{u'_\nu}{u_\nu}\right|\leqq\vartheta_\nu; \end{array}\right\}\ (\nu=1,2,3,\ldots)$$

$$4.\quad \sum_2^\infty{}^\nu\,\vartheta_2\ldots\vartheta_\nu$$

T-ben egyenletesen összetartó.

Legyen végül s_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ *egy értéksorozat, a mely a következő feltételeknek tesz eleget:*

$$\left.\begin{array}{ll} 5. & 0\leqq s_\nu<1;\\ 6. & s_{\nu+1}(1-s_\nu)\geqq\vartheta_{\nu+1}s_\nu; \end{array}\right\}(\nu=1,2,3,\ldots)$$

$$7.\quad \sum_2^\infty{}^\nu\,\prod_2^\nu{}^\lambda\{\vartheta_\lambda,s_\lambda\}$$

T-ben egyenletesen összetartó.

Ha most az x_ν $(\nu=1,2,3,\ldots)$ *mennyiségek megfelelnek a következő egyenlőtlenségeknek*

$$8.\quad \left|\frac{x_1}{b_1}\right|\leqq C,\quad \left|\frac{x_\nu-a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right|\leqq s_\nu(1-s_{\nu-1})-\vartheta_\nu s_{\nu-1};\quad (\nu=2,3,\ldots),$$

akkor az $\left[\dfrac{x_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *láncztört a 8. tartományban, valamint a* T *tartományban egyenletesen összetartó.*

5. §. Egyszerű összetartási feltételek levezetése az általános tételekben szereplő parameterek specializálásával.

Az imént levezetett általános tételek számos, részben ismert, részben új convergentia-kriteriumot tartalmaznak, a szerint,

[1] A T tartomány tehát ily alakú:
$\alpha_\nu\leqq a_\nu\leqq\alpha'_\nu$, $\beta_\nu\leqq b_\nu\leqq\beta'_\nu$; $(\alpha_\nu\geqq 0,\ \beta_\nu\geqq 0)$, $(\nu=1,2,3,\ldots)$.

hogy az a_ν, b_ν tetszésszerinti parametereknek minő értéket tulajdonítunk. Ezt néhány figyelemreméltó esetre részletesen kifejtem.

Legyen

$$u_1' = 0,\ a_{\nu+1} = 0,\ b_\nu = y_\nu = 1\,; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor f_1) és f_2) szerint

$$u_\nu' = 0,\ u_\nu = 1\,; \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

legyen továbbá

$$t_\nu = 0,\ \vartheta_\nu = 0\,; \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Most a 2. tétel a következőre redukálódik:

Ha az s_ν értékek úgy vannak választva, hogy

$$0 \leqq s_\nu < 1\,; \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

és

$$\sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{2}^{\nu}{}_{\lambda} \frac{s_\lambda}{1 - s_\lambda}$$

összetartó, akkor az $\left[\frac{x_\nu}{1}\right]_1^\infty$ láncztört az

$$|x_1| \leqq C,\ |x_\nu| \leqq s_\nu(1 - s_{\nu-1})\,; \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \qquad (40)$$

tartományban egyenletesen összetartó.

Az 1. tétel ugyanerre az eredményre vezet.

E tétel nem új, hanem bennfoglaltatik PRINGSHEIM[1] egy általánosabb tételében, miként rögtön kitűnik, ha s_ν helyébe $1 - \frac{1}{p_\nu}$-t írunk. A

$$\sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \prod_{2}^{\nu}{}_{\lambda} \frac{s_\lambda}{1 - s_\lambda}$$

sor ekkor a következőbe megy át:

[1] A PRINGSHEIM: Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern [Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. (München), Math.-phys. Kl., Bd. 35, 1905, p. 359—380].

$$\sum_{2}^{\infty}\nu\,(p_2-1)(p_3-1)\cdots(p_\nu-1),$$

és PRINGSHEIM tétele szerint e sor összetartását csak abban az esetben kell követelnünk, ha az x_ν-k $(\nu \geqq 2)$ mindvégig valós és negativ számok és ha (40)-ben mindvégig az egyenlőség érvényes.

E példával csak jelezni akartam, hogy általános tételem mennyire hozzásímul már más úton megvizsgált speczialis esetekhez.

Új convergentia-kriteriumok levezetése czéljából az a_ν-, b_ν-ket alkalmasan kell választanunk; ezt a következőkben fejtem ki:

Legyenek az a_ν-, b_ν-k $(\nu \geqq 1)$ *mind valós és nem-negativ számok.* Velök és u'_1-vel nyilván a többi u_ν, u'_ν teljesen meg van határozva. Erre az összefüggésre itt részletesebben kell kitérnem.

f_1)- és f_2)-ből rögtön nyerjük a következő egyenleteket:

$$u'_{\nu+1} = -\frac{a_{\nu+1}|}{|b_\nu} + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \cdots + \frac{a_3|}{|b_2} + \frac{a_2|}{|b_1 - u'_1};$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$u_1 = b_1 - u'_1, \quad u_\nu = b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \cdots + \frac{a_3|}{|b_2} + \frac{a_2|}{|b_1 - u'_1};$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots).$$

Ha tehát B_ν jelenti a (21) láncztört ν-edrendű részletnevezőjét, akkor — miként már más úton is levezettük (v. ö. a (22) képlettel)

$$u_\nu = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}}; \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots). \qquad (41)$$

Továbbá tekintettel f_2)-re:

$$u'_{\nu+1} = -\frac{a_{\nu+1}B_{\nu-1}}{B_\nu}; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \quad (42)$$

végül (41)- és (42)-ből nyerjük, hogy

$$\frac{u'_{\nu+1}}{u_{\nu+1}} = -\frac{a_{\nu+1}B_{\nu-1}}{B_{\nu+1}}; \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \quad (43)$$

Legyen most $u'_1 = 0$; nyilván

$$B_{\nu-1} \geqq b_{\nu-1} B_{\nu-2}; \qquad (\nu=2, 3,\ldots), \qquad (43')$$

tehát

$$B_\nu \geqq (b_{\nu-1}b_\nu + a_\nu) B_{\nu-2}; \qquad (\nu=2, 3,\ldots); \qquad (44)$$

innen, tekintettel (41)-re:

$$u_{\nu-1}u_\nu \geqq b_{\nu-1}b_\nu + a_\nu; \qquad (\nu=2, 3,\ldots). \qquad (45)$$

Továbbá ugyancsak (44)-ből:

$$0 \leqq \frac{B_{\nu-2}}{B_\nu} \leqq \frac{1}{b_{\nu-1}b_\nu + a_\nu}; \quad (\nu=2, 3,\ldots),$$

azaz

$$0 \leqq \frac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_\nu} \leqq \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu + a_\nu}; \quad (\nu=2, 3,\ldots); \qquad (46)$$

már most

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu + a_\nu} = \frac{1}{1 + \dfrac{b_{\nu-1}b_\nu}{a_\nu}},$$

s ha még feltesszük, hogy

$$b_\nu \neq 0, \ 0 \leqq \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} \leqq \frac{\vartheta_\nu}{1-\vartheta_\nu}; \quad (\nu=2, 3\ldots),$$

akkor tehát

$$\frac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_\nu} \leqq \frac{1}{1 + \dfrac{1-\vartheta_\nu}{\vartheta_\nu}}; \qquad (\nu=2, 3,\ldots),$$

azaz

$$\frac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_\nu} \leqq \vartheta_\nu; \qquad (\nu=2, 3,\ldots).$$

Ezt (43)-mal egybevetve, nyerjük, hogy

$$\left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu; \qquad (\nu=2, 3,\ldots). \qquad (47)$$

A 2. tételből most már rögtön nyerjük a következőt:

3. tétel. Legyenek az a_ν-, b_ν-k egy T tartományból vett valós nem-negativ értékek, a melyek bizonyos ϑ_ν, s_ν ($\nu=1, 2, 3,\ldots$) számokkal együtt a következő feltételeket elégítik ki:

1. $b_\nu>0,\ 0\leqq\vartheta_\nu\leqq 1,\ 0\leqq \dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} \leqq \dfrac{\vartheta_\nu}{1-\vartheta_\nu}$; ($\nu=2, 3,\ldots$),
2. $\sum_2^\infty{}^\nu\, \vartheta_2\ldots\vartheta_\nu$ *T-ben egyenletesen összetartó,*
3. $0\leqq s_{\nu-1}<1$; $\Big\}$ ($\nu=2, 3,\ldots$);
4. $s_\nu(1-s_{\nu-1})\geqq \vartheta_\nu s_{\nu-1}$;
5. $\sum_2^\infty{}^\nu \prod_2^\nu{}^\lambda \{\vartheta_\lambda, s_\lambda\}$ *T-ben egyenletesen összetartó.*

Ha most az x_ν-k ($\nu=1, 2,\ldots$) megfelelnek az

$$\left|\frac{x_1}{b_1}\right|\leqq C,\ \left|\frac{x_\nu-a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu+a_\nu}\right|\leqq s_\nu(1-s_{\nu-1})-\vartheta_\nu s_{\nu-1};\ (\nu=2, 3,\ldots) \quad (48)$$

egyenlőtlenségeknek, akkor az $\left[\dfrac{x_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ láncztört T-ben és a (48) tartományban egyenletesen összetartó.

6. §. Folytatás; új összetartási kriteriumok az $\left[\dfrac{x_\nu}{1}\right]_1^\infty$ alakú láncztörtekre vonatkozólag.

Legyen

$$b_\nu = 1 \quad (\nu=1, 2, 3,\ldots),$$

akkor a 3. tételből a következőt nyerjük:

3'. tétel. Legyenek az a_ν-k ($\nu\geqq 1$) egy T tartományból vett valós nem-negativ értékek, a melyek bizonyos ϑ_ν, s_ν ($\nu\geqq 1$) számokkal együtt a következő feltételeknek tesznek eleget:

$$0\leqq\vartheta_\nu\leqq 1,\ \ 0\leqq a_\nu\leqq\frac{\vartheta_\nu}{1-\vartheta_\nu};\quad (\nu=2, 3,\ldots), \qquad (49)$$

$\sum_2^\infty{}^\nu\, \vartheta_2\ldots\vartheta_\nu$ *T-ben egyenletesen összetartó;*

$0\leqq s_{\nu-1}<1$; $\Big\}$ ($\nu=2, 3,\ldots$),
$s_\nu(1-s_{\nu-1})\geqq \vartheta_\nu s_{\nu-1}$;

$\sum_2^\infty{}^\nu \prod_2^\nu{}^\lambda \{\vartheta_\lambda, s_\lambda\}$ *T-ben egyenletesen összetartó.*

Ha most az x_ν-k ($\nu \geqq 1$) megfelelnek az

$$|x_1| \leqq C, \quad \left|\frac{x_\nu - a_\nu}{1+a_\nu}\right| \leqq s_\nu(1-s_{\nu-1}) - \vartheta_\nu s_{\nu-1}; \quad (\nu=2, 3, \ldots) \tag{50}$$

feltételeknek, akkor $\left[\frac{x_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *láncztört T-ben és az (50) tartományban egyenletesen összetartó.*

Hogy e tételből hasznos speczialis convergentia-kriteriumokat nyerjek, az x_ν-ket egy pillanatra adottaknak tekintem és a szabadságot, a melylyel az a_ν-k felett rendelkezhetem, arra akarom felhasználni, hogy az (50) egyenlőtlenségek baloldalát lehetőleg kicsinynyé tegyem, de úgy, hogy e mellett a (49) feltétel ki legyen elégítve.

Mindenekelőtt világos, hogy valamely x_ν érték az (50) feltételnek csak akkor tehet eleget, ha

$$\Re x_\nu > -1 \quad (\nu \geqq 2), \tag{51}$$

a hol $x_\nu = \Re x_\nu + i\Im x_\nu$; mert ha (51) nem áll fenn, akkor nyilván

$$\left|\frac{x_\nu - a_\nu}{1+a_\nu}\right| \geqq 1,$$

tehát (50) sem állhatna fenn. Felteszszük tehát, hogy az (51) feltétel teljesül.

Most könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az

$$a_\nu = \frac{|x_\nu|^2 + \Re x_\nu}{1+\Re x_\nu}$$

érték az (50) egyenlőtlenség bal oldalát minimummá teszi (változó a_ν mellett) és pedig ekkor

$$\left|\frac{x_\nu - a_\nu}{1+a_\nu}\right| = \operatorname{abs} \frac{x_\nu(1+\Re x_\nu) - |x_\nu|^2 - \Re x_\nu}{1 + 2\Re x_\nu + |x_\nu|^2}$$

$$= \operatorname{abs} \frac{(1+x_\nu)(1+\Re x_\nu) - |1+x_\nu|^2}{|1+x_\nu|^2} = \left|\frac{\Im x}{1+x_\nu}\right|.$$

Ha

$$|x_\nu|^2 + \Re x_\nu < 0,$$

akkor legyen

$$a_\nu = 0.$$

Legyen végül egyszerűség kedveért

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_\nu &= \vartheta,\ 0<\vartheta<1; \\ s_\nu &= \frac{1-\vartheta}{2}; \end{aligned}\right\} (\nu=1, 2, 3,\ldots); \qquad (52)$$

most $\{\vartheta_\lambda, s_\lambda\}$ definitio szerint az $\frac{1+\vartheta}{3-\vartheta}$, $\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}$, $\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}$ számok legnagyobbika, tehát $\sum_2^\infty \prod_2^\nu \{\vartheta_\lambda, s_\lambda\}$ összetartó (az f_7) feltétel most *nincs* teljesítve, tehát az 1. tétel *nem* alkalmazható) és a 3'. tételből ered:

4. tétel: Ha ϑ egy positiv állandó és $\vartheta<1$, akkor az $\left[\frac{x_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *láncztört az*

$$\frac{|x_\nu|^2+\Re x_\nu}{1+\Re x_\nu} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta}; \qquad (53)$$

$$\left|\frac{\Im x_\nu}{1+x_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2, \quad \text{ha} \quad |x_\nu|^2+\Re x_\nu \geqq 0, \qquad (54)$$

$$|x_\nu| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2, \quad \textit{ha} \quad |x_\nu|^2+\Re x_\nu < 0 \qquad (55)$$

feltételek által meghatározott tartományban egyenletesen összetartó.

A láncztört nyilván *feltétlenül összetartó,* azaz az

$$\left[\frac{x_\nu}{1}\right]_k^\infty; \ (k=1, 2,\ldots),$$

láncztörtek mind összetartók.

Az x_ν-kre itt adott összetartási tartomány geometriailag az $x_\nu = u+iv$ complex síkban ábrázolható. Az (53) feltétel azt jelenti, hogy x_ν egy kör belsejében vagy kerületén fekszik, a melynek középpontja

$$u = -\frac{1-2\vartheta}{2(1-\vartheta)}, \ v = 0,$$

és sugara

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}.(1-\vartheta)} \sqrt{1-2\vartheta+2\vartheta^2}.$$

Ha továbbá x_ν az

$$u^2+v^2+u=0 \tag{56}$$

kör kerületén vagy azon kívül fekszik, akkor (54) szerint abba a szögbe kell esnie, a melynek sugarai az $u=-1$, $v=0$ pontból indulnak ki és a képzetes tengelyt az

$$u=0,\ v=\pm\frac{(1-\vartheta)^2}{\sqrt{2^4-(1-\vartheta)^4}}$$

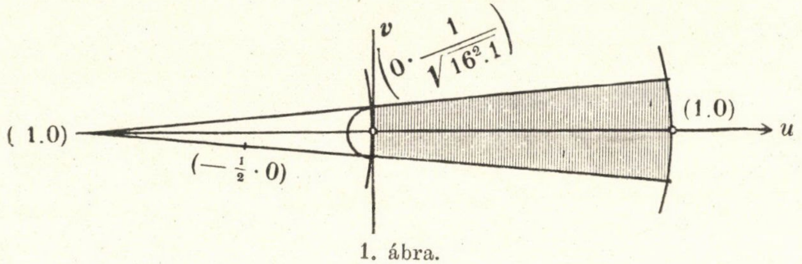
pontban metszik.[1]

Ha pedig x_ν az (56) körön belül esik, akkor (55) szerint az

$$u^2+v^2=\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4$$

kör belsejében vagy kerületén kell feküdnie. ϑ növekedtével az (53) által meghatározott kör tetszésszerinti nagygyá lesz, de ugyanekkor az (54)-nek megfelelő szög nyilása minden határon túl csökken.

Ha például $\vartheta=\frac{1}{2}$, akkor az összetartási tartományt az 1. ábra vonalkázott része szolgáltatja.



1. ábra.

[1] Ugyanis (54) szerint

$$\frac{v^2}{(1+u)^2+v^2} \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4,$$

avagy

$$v^2\left[1-\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4\right] \leqq (1+u)^2\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4.$$

Ha

$$\frac{\sqrt{2(1-2\vartheta+2\vartheta^2)}-(1-2\vartheta)}{2(1-2\vartheta)} \leqq \frac{1}{4},$$

akkor convergentiatartományunk bele esik az

$$u^2+v^2=\tfrac{1}{16}$$

körbe, de ez maga is egy convergentiatartomány, miként PRINGSHEIM bebizonyította (a 506. old. [1] alatt i. h.). A 4. tétel csak akkor szolgáltat újat, ha $\vartheta > \frac{7-\sqrt{40}}{9} = 0{,}075\ldots$

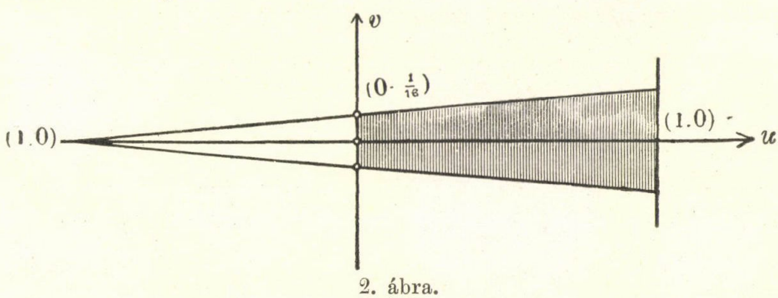
Az a_ν-k más választása mellett különböző összetartási tartományokat nyerünk; legyen például:

$$a_\nu = \Re x_\nu\,; \quad (\nu=2, 3,\ldots),$$

akkor az (52) feltételek megtartása mellett a következő convergentiatartományt nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq \Re x_\nu \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,; \\ \left|\frac{\Im x_\nu}{1+\Re x_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2; \end{aligned}\right\} (\nu=2, 3,\ldots).$$

Ha például $\vartheta = \frac{1}{2}$, akkor e tartományt a 2. ábra vonalkázott része ábrázolja.



2. ábra.

Egy régebbi dolgozatomban [1] az $\left[\frac{r_\nu e^{i\varphi_\nu}}{1}\right]_1^\infty$ láncztörtet absolut convergensnek neveztem, ha a φ_ν-k tetszésszerinti értékei

[1] SZÁSZ: Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen [Sitzungsb. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrg. 1912, p. 323—361], 348. old.

mellett összetartó és néhány convergentiakriteriumot adtam meg, a melyek nem-absolut convergens láncztörteket szolgáltatnak. Világos, hogy a 4. tétel is ide tartozik; mert ha $\varphi_\nu = \pi$, akkor a láncztört tudvalevőleg már divergálhat, ha csak az r_ν-k felső határa $\frac{1}{4}$-nél nagyobb. Ide tartozik még PIDOLL néhány tétele (i. h., 1. §., 5—7. tételek).

7. §. Az $\left[\frac{1}{y_\nu}\right]_1^\infty$ láncztörtre vonatkozó convergentiakriteriumok.

Az

$$\left[\frac{1}{y_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1|}{|y_1} + \frac{1|}{|y_2} + \frac{1|}{|y_3} + \cdots \tag{57}$$

láncztört számára két úton nyerhetünk összetartási feltételeket. Az 1. tételben az $x_\nu = a_\nu = 1$ $(\nu \geqq 1)$ helyettesítést végezhetjük és azután további speczializálást vezethetünk be, avagy a jól ismert

$$\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{\frac{1}{b_1}}{1}, \frac{\frac{1}{b_{\nu-1}b_\nu}}{1}\right]_2^\infty; \quad (b_\nu \neq 0)$$

æquivalentia (v. ö. pl. PERRON, Lehrbuch, 197. old.) segítségével a 3. és 4. tételt átvihetjük az (57) láncztörtre.

A következőkben mindkét utat követem, mivel más-más eredményekre vezetnek.

Hosszadalmas számítások elkerülése végett csak a következő speciális esetet vizsgálom:

$$\vartheta_\nu = \vartheta, \ s_\nu = a(1-\sqrt{\vartheta}), \ 0 \leqq \vartheta < 1, \ 0 < a < 1, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

legyen továbbá az 1. tételben

$$u_1' = 0, \ x_\nu = a_\nu = 1; \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$t_1 = a(1-\sqrt{\vartheta}), \ t_{\nu+1} = s_{\nu+1} - \frac{\vartheta_{\nu+1} s_\nu}{1 - s_\nu},$$

azaz

$$t_{\nu+1} = \frac{a(1-\sqrt{\vartheta})\,[1-a+a\sqrt{\vartheta}-\vartheta]}{1-a(1-\sqrt{\vartheta})}; \ (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Legyen végül

$$b_\nu > 0; \qquad (\nu=1, 2, 3,\ldots),$$

és

$$\frac{1}{b_\nu b_{\nu+1}} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta}; \qquad (\nu=1, 2, 3,\ldots),$$

akkor tekintettel a (41), (43′) továbbá a (43) és (46) relatiókra:

$$u_\nu \geqq b_\nu, \quad \left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta; \qquad (\nu=1, 2, 3,\ldots).$$

Végül szem előtt tartva, hogy a jelen esetben

$$\frac{s_\lambda - t_\lambda + \vartheta_\lambda}{1-s_\lambda} = \frac{\vartheta + \dfrac{\vartheta a(1-\sqrt{\vartheta})}{1-a(1-\sqrt{\vartheta})}}{1-a(1-\sqrt{\vartheta})} = \frac{\vartheta}{[1-a(1-\sqrt{\vartheta})]^2} < 1,$$

az 1. tételből a következőt nyerjük:

5. tétel. Legyenek a b_ν-k ($\nu \geqq 1$) valamely T tartományból vett valós nem-negativ értékek, továbbá ϑ és a oly állandók, a melyek a

$$0 \leqq \vartheta < 1, \quad 0 < a < 1;$$

$$b_\nu b_{\nu+1} \geqq \frac{1-\vartheta}{\vartheta}; \quad (\nu=1, 2, 3,\ldots)$$

feltételeket elégítik ki. Ha most az y_ν-k ($\nu \geqq 1$) az

$$\left|\frac{1}{y_1}\right| \leqq C, \quad \left|\frac{y_1-b_1}{b_1}\right| \leqq a(1-\sqrt{\vartheta}), \quad \left|\frac{y_\nu-b_\nu}{b_\nu}\right| \leqq \\ \leqq \frac{a(1-\sqrt{\vartheta})(1-a+a\sqrt{\vartheta}-\vartheta)}{1-a(1-\sqrt{\vartheta})}; \quad (\nu=2, 3,\ldots) \tag{58}$$

egyenlőtlenségeknek tesznek eleget, akkor az $\left[\dfrac{1}{y_\nu}\right]_1^\infty$ láncztört a T tartományban, valamint az (58) tartományban egyenletesen összetartó.

Ha pedig a 3'. tételben a következő helyettesítést végezzük:

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad x_\nu = \frac{1}{y_{\nu-1} y_\nu}; \quad (\nu=2, 3, \ldots),$$

$$\vartheta_\nu = \vartheta, \quad s_\nu = \frac{1-\vartheta}{2}; \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots),$$

akkor ered:

6. tétel. Legyenek az a_ν-k egy T tartományból vett valós nem-negativ értékek, a melyek a

$$0 \leqq a_\nu \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta}, \quad 0 < \vartheta < 1, \quad (\nu=2, 3, \ldots)$$

feltételeket elégítik ki; akkor az $\left[\frac{1}{y_\nu}\right]_1^\infty$ *láncztört a T tartományban és az*

$$\left|\frac{1}{y_1}\right| \leqq C, \quad \left|\frac{\frac{1}{y_{\nu-1} y_\nu} - a_\nu}{1+a_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2; \quad (\nu=2, 3, \ldots)$$

tartományban egyenletesen összetartó.

Könnyű a 4. tételből eredő összetartási feltételeket is levezetni; erre vonatkozólag utalok egy a «Journal für die reine und angewandte Mathematik» 147. kötetében (1917) megjelent dolgozatomra.

Az (57) láncztörtre vonatkozó egy igen szép convergentiakriterium VAN VLECKtől[1] származik: ha felteszszük, hogy

$$\Re y_\nu \geqq 0 \ (\nu \geqq 1);$$

és ha létezik egy $\varepsilon > 0$ szám, úgy hogy

$$\Re y_\nu \geqq \varepsilon \, |\Im y_\nu|; \quad (\nu \geqq 1),$$

akkor az (57) láncztört összetartásához szükséges és elegendő, hogy $\sum_0^\infty{}^\nu |y_\nu|$ divergáljon és hogy az $y_{2\nu-1}$-k közül legalább egy a nullától különböző legyen.

[1] E. B. VAN VLECK: On the convergence of continued fractions with complex elements [Transactions of the American Math. Soc. 2, 1901, p. 215—233].

E tételt JENSEN[1] egyszerűbben bizonyította be és pontosabban fogalmazta.

Végül itt említendő PRINGSHEIM következő convergentiatétele (v. ö. a 506. old. [1] alatt i. h.): az (57) láncztört összetartó, ha

$$\frac{1}{|y_{2\nu-1}|}+\frac{1}{|y_{2\nu}|}\leqq 1\,; \qquad (\nu=2,3,\ldots)\,;$$

avagy ha (v. ö. 532. old. [1] alatt i. h.)

$$\frac{1}{|y_{2\nu-2}y_{2\nu-1}|}+\frac{1}{|y_{2\nu-1}y_{2\nu}|}\leqq\frac{1}{2}\,; \quad (\nu=2,3,\ldots).$$

[1] I. L. W. V. JENSEN: Bidrag til Kaedebrokernes Teori. Festskrift til H. G. Zeuthen. 1909, p. 78—87.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből.)

LINEARIS FÜGGVÉNYEGYENLETEKRŐL.

RIESZ FRIGYES-től.

A jelen dolgozat tárgya bizonyos typusú, a folytonos függvényekre alkalmazott linearis függvénytransformatiók megfordításának kérdése, mely speciális esetként felöleli a FREDHOLM-féle integrálegyenlet vizsgálatát. A dolgozat czélja nem annyira új eredmények nyerése, mint inkább egy nagyon elemi módszernek kipróbálása. Ez a módszer néhány az 1. §-ban kifejtett, a linearis függvényrendszerekre vonatkozó tételen alapszik, melyek úgyszólván közvetetlen folyományai az egyenletes összetartás definitiójának. A legfontosabb bizonyítások úgynevezhető végességbizonyítások, tudniillik azt mutatják meg, hogy bizonyos eljárások nem folytathatók végnélkül, hanem valamelyik lépésnél okvetlenül végük szakad. A használt fogalomalkotások közül különösen fontos és hasznos a compact halmaz (illetőleg itt speciálisabban sorozat) fogalma, melyet FRÉCHET vezetett be az általános halmazelméletbe és a mely az analysis számos ágában nagyon bevált. Ennek a fogalomnak a segítségével különösen egyszerűen és szerencsésen fogalmazható meg a teljesen folytonos transformatio definitiója, mely lényegében a végtelen sok változós függvényekre HILBERT által értelmezett hasonló fogalomalkotásnak felel itt meg.

Az, hogy a jelen dolgozatban folytonos függvényekre szorítkozunk, nem lényeges. A különféle függvényterekre vonatkozó újabb vizsgálatokban jártas olvasó azonnal fölismerheti, hogy a módszer általánosabban alkalmazható, sőt azt is észre fogja venni, hogy bizonyos tereknek, különösen a négyzetükkel együtt integrálható függvények összességének és a HILBERT-féle végtelen dimensiójú térnek vizsgálatakor egyszerűsítések eszközölhetők, míg az itt tárgyalt látszólag egyszerűbb eset az általános alkalmazhatóságnak mintegy próbaköve.

1. §. Definitiók és segédtételek.

Az itt következő vizsgálatok tárgyát az $a \leqq x \leqq b$ számközön értelmezett folytonos $f(x)$ függvények összessége alkotja. Míg az x változót valósnak tételezzük föl, addig viszont függvényérték gyanánt minden valós vagy képzetes mennyiség szerepelhet. Hangsúlyozom azonban, hogy vizsgálataink a valós függvények szűkebb osztályára is érvényesek.

Az (a, b) közön értelmezett folytonos függvények összességét rövidség okáért *függvénytérnek* nevezzük. Továbbá, ugyancsak rövidség okáért, nevezzük $f(x)$ *normájának* és jelöljük $\|f\|$-fel az $|f(x)|$ függvény maximális értékét; $\|f\|$ positiv és csupán abban az egy esetben 0, ha $f(x)$ azonosan 0. Az f és cf illetőleg f_1, f_2 és f_1+f_2 függvények normái közt a

$$\|cf\| = |c|\,\|f\|; \quad \|f_1+f_2\| \leqq \|f_1\| + \|f_2\|$$

összefüggések állnak fönn.

Az f_1, f_2 függvények *távolságán* az f_1-f_2 különbség $\|f_1-f_2\|$ normáját értjük. E szerint az, hogy egy $\{f_n\}$ függvénysorozat egyenletesen tart az f függvény felé, ugyanazt jelenti, mint ha azt mondjuk, hogy az $\|f-f_n\|$ távolság 0 felé tart. Az $\{f_n\}$ sorozat egyenletes convergentiájának szükséges és elégséges föltételét kifejező úgynevezett CAUCHY-féle általános convergentia-kritérium a következő alakot ölti: ha $m \to \infty$ és $n \to \infty$, akkor $\|f_m-f_n\| \to 0$. Speczialisan az olyan $\{f_n\}$ sorozat, melyben az összes $\|f_m-f_n\|$ távolságok $(m \neq n)$ nagyobbak egy 0-tól különböző, azaz lényegesen positiv számnál, semmiesetre sem lehet egyenletesen összetartó.

A következő vizsgálatokban bizonyos *linearis transformatiók* megfordításának problémájával fogunk foglalkozni. Linearisnak nevezzük függvényterünknek minden olyan egyértelmű T transformatióját, azaz a függvénytér minden f eleméhez egy-egy egyértelműen megszabott $T[f]$ elemnek olyan hozzárendelését, mely *distributiv* és *korlátos.* Distributiv a transformatio, ha minden f-re nézve

$$T[cf] = cT[f], \quad T[f_1+f_2] = T[f_1]+T[f_2].$$

Korlátosnak akkor mondjuk a transformatiót, ha van olyan M positiv szám, hogy minden f-re

$$\|T[f]\| \leqq M\|f\|.$$

Definitiónkból közvetlenül következik, hogy T minden korlátos $\{f_n\}$ függvénysorozatot, azaz minden olyan $\{f_n\}$ sorozatot, melyre az összes $\|f_n\|$ normák egy véges korlát alatt feküsznek, ugyancsak korlátos sorozatba visz át. Továbbá a

$$\|T[f] - T[f_n]\| = \|T[f-f_n]\| \leqq M\|f-f_n\|$$

egyenlőtlenségből az is következik, hogy T minden egyenletesen convergens sorozatot ugyanilyenbe visz át és hogy az egymásnak megfelelő $\{f_n\}$ és $\{T[f_n]\}$ sorozatok határfüggvényei is megfelelnek egymásnak, röviden: a T transformatio *folytonos.*

A cT, T_1+T_2, T_1T_2, T^n jelölések annyira közelesők, hogy fölösleges azokat egyenkint értelmezni. Továbbá közvetlenül világos, hogy a T, T_1, T_2 lineáris transformatiókból ilyen módon származtatott új transformatiók, tehát linearis transformatiók összege, szorzata, hatványa, szintén linearis transformatiók.

Az *identikus* transformatiót, mely minden f-hez önmagát rendeli, E-vel jelöljük.

Vizsgálatainkban a linearis transformatiók egy bizonyos typusának megfordításával foglalkozunk, és pedig a $B = E-A$ typuséval, a hol E az identikus transformatio, A pedig egy *teljesen folytonos* linearis függvénytransformatio. Hogy a «teljesen» folytonos transformatio fogalmát értelmezhessük, előbb még egy új fogalmat, a *compact* sorozatét, kell megbeszélnünk.

Az $\{f_n\}$ sorozatot Fréchet szerint akkor mondjuk compactnak, ha annak minden részsorozata tartalmaz olyan további részsorozatot, mely egyenletesen összetartó. Speciálisan minden egyenletesen összetartó sorozat compact, de nem megfordítva, mert például különböző határfüggvények felé tartó két egyenletesen összetartó sorozat egymásba tolásával is compact sorozat keletkezik.

Sorozatok compact voltának szükséges és elégséges föltételét ARZELÀ[1] adta meg először. Erre a föltételre egyelőre nincsen szükségünk, hanem egy szükséges föltételre szorítkozhatunk, azaz compact sorozatoknak egy olyan ismertető jegyére, mely ha hiányzik, a sorozat biztosan *nem* compact. Ez a jegy, mely a fortiori következik az egyenletesen összetartó sorozatok hasonló sajátságából, abban áll, hogy *az* $\{f_n\}$ *compact sorozatra az* $\|f_m-f_n\|$ *távolságok* $(m\neq n)$ *alsó korlátja nem lehet lényegesen positiv.*

Compact sorozatoknak egy másik evidens sajátsága, melyre szükségünk van, az, hogy *minden compact sorozat korlátos.* Az ellenkező esetben ugyanis tartalmazna a sorozat olyan részsorozatot, melynek normái monoton módon a végtelenbe nőnek, melynek tehát minden részsorozatára ugyanez áll és melynek ennélfogva egyetlen részsorozata sem lehet egyenletesen összetartó. Tehát minden compact sorozat csakugyan korlátos is. Ezzel szemben egy korlátos sorozat még *nem okvetlenül compact,* mint azt a $0\leqq x\leqq 1$ közre értelmezett $\{f_n=x^n\}$ sorozat mutatja, mely korlátos, de nem compact, mert már maga a sorozat, tehát minden részsorozat is egy az $x=1$ helyen szakadással bíró függvény felé tart és így összetartása nem egyenletes.

Az imént megmutatott tényen, hogy tudniillik egy korlátos sorozat még nem okvetlenül compact, alapszik az értelmezendő *teljes folytonosság* speczialis volta. Ugyanis, mint már említettük, az általános linearis transformatio minden korlátos sorozatot korlátosba, minden egyenletesen összetartó sorozatot egyenletesen összetartóba és ennélfogva minden compact sorozatot compactba visz át. A teljesen folytonos linearis transformatiót most már azzal az újabb követeléssel értelmezzük, hogy minden *korlátos* sorozatot *compact* sorozatba vigyen át.

Teljesen folytonos transformatióra a legegyszerűbb pél-

[1] C. ARZELÀ: «*Sulle funzioni di linee*». Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Bologna, serie 5, t. V, 1895, p. 225—244.

dák: $T[f]=f(a)$, a mely tehát minden $f(x)$ függvényhez az $f(a)$ értékű constans függvényt rendeli; továbbá

$$T[f]=f(a)+f(b)\,x,$$

vagy általánosabban

$$T[f]=f(a_1)\,g_1(x)+\cdots+f(a_m)\,g_m(x),$$

a hol $a_1,\ldots,a_m$; $g_1,\ldots,g_m$ az (a,b) köz megadott helyei, illetőleg megadott folytonos függvények. További példák az

$$J[f]=\int_a^x f(x)\,dx$$

integrál és általánosabban a

$$K[f]=\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy$$

integrállal értelmezett transformatio, melylyel majd később, vizsgálatainknak a FREDHOLM-féle integrálegyenletre való alkalmazásakor, foglalkozunk. A *nem* teljesen folytonos linearis transformatióra legegyszerűbb példa az E identikus transformatio, mely ugyanis minden sorozatot önmagába visz át, tehát az olyat is, mely korlátos, de nem compact.

A definitióból közvetlenül folyik, hogy *a T_1T_2 szorzat* mindenesetre *teljesen folytonos, ha két tényezője közül legalább az egyik teljesen folytonos.* Minthogy továbbá egyenletesen összetartó sorozatokból, tehát compactakból is, egy constanssal való szorzás vagy két sorozat azonos indexű elemeinek összeadása által ismét egyenletesen összetartó, illetőleg compact sorozatok keletkeznek, azért T, T_1, T_2 teljesen folytonos voltából cT és T_1+T_2 teljes folytonossága is következik.

Még egy fogalomalkotásra lesz szükségünk, mely vizsgálatainkra nézve fundamentális: a *linearis függvényrendszer* fogalmára. Linearis függvényrendszeren értjük a függvénytér elemeinek minden olyan halmazát, mely 1. f, f_1 és f_2-vel egyidejűleg a cf, f_1+f_2 elemeket is tartalmazza, 2. ha az $\{f_n\}$ egyenletesen összetartó sorozat elemeit tartalmazza, akkor tartalmazza az f határfüggvényt is. Linearis rendszerre példa maga a függvénytér, vagy hogy mindjárt a másik szélsőséget ϖmlítsük, az egyetlen $f = 0$ függvényből álló rendszer. Továbbá, mint az a linearis rendszer értelmezéséből közvetlenül kiviláglik, tetszésszerinti folytonos függvényekből álló bármely függvényhalmaz két linearis rendszert értelmez, tudniillik 1. a függvényeinek összes linearis kapcsolataiból és ezeknek az egyenletes convergentia szerint való összes határfüggvényeiből álló rendszert; 2. azoknak a folytonos függvényeknek az összességét, melyeknek a halmaz valamennyi elemével alkotott szorzatintegrálja 0.

A linearis rendszerekre néhány csaknem közvetlenül a definitiókból folyó tételt fogunk most származtatni, melyeket a további vizsgálatokban segédtételekként alkalmazunk.

1. segédtétel. Ha L valamely tetszésszerinti linearis rendszer és g olyan függvény, mely nem tartozik az L rendszerbe, akkor található az L-be tartozó olyan f_1 függvény, hogy az L rendszer minden f elemére nézve

$$\|g-f\| \geqq \tfrac{1}{2}\|g-f_1\|.$$

Bizonyítás. Minthogy a g függvény nem tartozik L-be, azért a $\|g-f\|$ távolságok pontos alsó korlátja $d>0$; ellenkező esetben ugyanis L tartalmazna egy egyenletesen g felé tartó sorozatot, tehát tartalmazná magát g-t is. Válasszuk f_1-et úgy, hogy $\|g-f_1\| \leqq 2d$ legyen; minthogy másrészt minden f-re $\|g-f\| \geqq d$, azért valóban

$$\|g-f\| \geqq d \geqq \tfrac{1}{2}\|g-f_1\|.$$

2. segédtétel. Ha az L_2 linearis rendszer az L_1 linearis rendszernek valódi része, azaz L_1 tartalmazza L_2-t, de nem azonos vele, akkor található L_1-ben olyan g_1 függvény, hogy egyrészt

$$\|g_1\| = 1,$$

másrészt L_2 minden f elemére nézve

$$\|g_1-f\| \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Bizonyítás. Föltevésünk szerint L_1 mindenesetre tartalmaz olyan g elemet, mely nem tartozik egyszersmind L_2-be is. Az

1. segédtétel szerint található ehhez a g-hez az L_2 rendszernek egy olyan f_2 eleme, hogy az L_2 rendszer minden f elemére nézve

$$\frac{\|g-f\|}{\|g-f_2\|} \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Legyen

$$g_1 = \frac{g-f_2}{\|g-f_2\|};$$

akkor $\|g_1\| = 1$, továbbá g_1 mint az L_1-be tartozó g és f_2 elemek linearis kapcsolata szintén beletartozik az L_1-be. Másrészt

$$\|g_1-f\| = \left\| \frac{g-f_2}{\|g-f_2\|} - f \right\| = \frac{\|g-f_2-\|g-f_2\|f\|}{\|g-f_2\|} = \frac{\|g-f_3\|}{\|g-f_2\|},$$

a hol $f_3 = f_2 + \|g-f_2\| f$, mint az f_2 és f függvények linearis kapcsolata szintén L_2-be tartozik és ennélfogva csakugyan

$$\|g_1-f\| = \frac{\|g-f_3\|}{\|g-f_2\|} \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Mindkét segédtételben az $\frac{1}{2}$ szám helyébe evidens okokból bármely positiv valódi tört tehető. Ellenben általánosságban *nem* tehető $\frac{1}{2}$ helyébe maga az 1. Vegyük például L_1 gyanánt azoknak a g függvényeknek az összességét, melyekre $g(a) = 0$; L_2 gyanánt pedig azokét, melyekre ezenkívül még 0 az (a, b) közön vett integrál értéke is. Akkor teljesítve vannak a 2. segédtétel föltevései. Ha már most található volna L_1-ben olyan g_1, hogy $\|g_1\| = 1$ és másrészt minden L_2-be tartozó f-re $\|g_1 - f\| \geqq 1$ volna, akkor azt állítom, hogy e g_1 függvénynek még egy másik extremális sajátsága is volna, az tudniillik, hogy mindamaz L_1-be tartozó g-k közül, melyekre $\|g\| \leqq 1$, az (a, b) közön vett integrál absolut értéke g_1-re lesz a lehető legnagyobb. Ha ugyanis volna L_1-ben olyan g_2 függvény, melyre $\|g_2\| \leqq 1$ és g_2 integrálja absolut értékre nézve a g_1-énél nagyobb, akkor az

$$\int_a^b g_1(x)\,dx - \xi \int_a^b g_2(x)\,dx = 0$$

egyenlet olyan ξ számot értelmezne, melyre $|\xi| < 1$; és másrészt az $f = g_1 - \xi g_2$ függvény az L_2-be tartoznék. Ennélfogva

$$\|g_1-f\|=\|\xi g_2\|\leqq|\xi|\,\|g_2\|\leqq|\xi|<1$$

volna, a mi pedig föltevésünkkel ellenkezik. Tehát az integrál absolut értékének maximumát csakugyan g_1-nél éri el. Minthogy $\|g_1\|\leqq 1$, azért ez a maximum $\leqq b-a$, másrészt a $b-a$ értékhez a g integrálja tetszésszerint közel hozható olyan g függvények alkalmazásával, melyeknek értéke majdnem mindenütt 1 és csupán az a hely közelében megy át folytonos módon 0-ba. Tehát a kérdéses maximum, vagyis g_1 integráljának absolut értéke pontosan $b-a$. A g_1 függvény folytonos volta és a $\|g_1\|=1$ föltevés következtében ez csak úgy volna lehetséges, ha kivétel nélkül $|g_1(x)|=1$, a mi viszont ellentmond a $g_1(a)=0$ föltevésnek.

A most megbeszélt példával azt mutattuk meg, hogy a 2. segédtétel nem marad általánosan érvényes, ha az $\frac{1}{2}$ szám helyébe az 1-et tesszük. Ugyancsak megfelelő ellenpéldát nyerünk a módosított 1. segédtételre, ha L gyanánt az előbbi L_2 rendszert választjuk, g gyanánt pedig bármely olyan függvényt, mely L_1-be tartozik, de L_2-be nem, például az $x-a$ függvényt. Mindazonáltal bizonyos specziálisabb föltevés esetében mindkét segédtételben az $\frac{1}{2}$ helyébe igenis tehető az 1, tudniillik akkor, ha az L illetőleg L_2 rendszer *véges dimensiójú*. A linearis rendszerről akkor mondjuk, hogy véges dimensiójú, ha van *véges számú* olyan eleme, melynek linearis kapcsolataként a rendszer valamennyi eleme előállitható. Elég lesz az 1. segédtételt megfelelően átfogalmaznunk:

3. segédtétel. Ha L egy véges dimensiójú linearis rendszer és g egy olyan függvény, mely nem tartozik az L rendszerbe, akkor található egy L-be tartozó olyan f^* függvény, hogy az L rendszer minden f elemére nézve

$$\|g-f\|\geqq\|g-f^*\|.$$

E tétel bizonyítása a következő 4. segédtételre támaszkodik:

4. segédtétel. Egy véges dimensiójú rendszer elemeiből alkotott minden korlátos sorozat egyszersmind compact.

A 4. és 3. segédtétel bizonyítása. Föltevésünk szerint a rendszer minden eleme a

$$g = c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k$$

alakban írható. Föltehetjük továbbá, hogy az előállítás alapjául választott $g_1, \ldots, g_k$ elemek linearisan függetlenek, mert ellenkező esetben a fölöslegeseket elhagyhatjuk. A 4. segédtételt bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy egy felső korlátnak a

$$\|g\| = \|c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k\|$$

normák számára való megszabásából a $|c_i|$ mennyiségekre is megfelelő korlátok adódnak, hogy tehát a g-k egy korlátos sorozatára a megfelelő c_i együtthatók is korlátos sorozatokat alkotnak, vagy más szóval korlátos sorozatot alkotnak a k dimensiós térben megfelelő $(c_1, \ldots, c_k)$ pontok; ebből ugyanis a 7. segédtétel a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján közvetlenül következik.

Meg kell tehát mutatnunk, hogy egy korlát megszabásából a $\|g\|$ számára a $|c_i|$-k számára is megfelelő korlát adódik. Az ezzel ellenkező föltevésből a g-k egy olyan korlátos sorozatának létezése következnék, melyre az egyes elemeknek megfelelő $|c_1| + \cdots + |c_k|$ összegek minden határon túl nőnének. Osszuk az egyes g függvényeket a megfelelő $|c_1| + \cdots + |c_k|$ összeggel, akkor egy újabb olyan g sorozathoz jutunk, melynek minden elemére a megfelelő $|c_1| + \cdots + |c_k| = 1$ és a mely egyenletesen 0 felé tart. A Bolzano-Weierstrass-féle tétel alapján ebből a sorozatból kiválasztható egy olyan részsorozat, melyre az egyes c_i-sorozatok megfelelő $c_i^\star$ határértékek felé tartanak, mely határértékekre nézve ugyancsak $|c_1^\star| + \cdots + |c_k^\star| = 1$. Minthogy továbbá a $c_1 \to c_1^\star, \ldots, c_k \to c_k^\star$ relatiók folytán

$$c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k \to c_1^\star g_1 + \cdots + c_k^\star g_k,$$

és másrészt az egész sorozat, tehát a kiválasztott sorozat is 0 felé tart, azért $c_1^\star g_1 + \cdots + c_k^\star g_k = 0$, vagyis a $g_1, \ldots, g_k$ függvények linearis függetlensége folytán külön-külön $c_1^\star = 0, \ldots, c_k^\star = 0$; ez pedig ellentmond a $|c_1^\star| + \cdots + |c_k^\star| = 1$ egyenlőségnek.

Ezzel a 4. segédtételt bebizonyítottuk. Belőle a 3. segédtételt a következő meggondolással származtatjuk. Azt kell megmutatnunk, hogy $\|g-f\|$ pontos alsó korlátját nemcsak tetszésszerinti kis hibával közelíti meg, hanem valóban el is éri. Legyen d az alsó korlát és $\{f_n\}$ az L-ből kiválasztott olyan sorozat, hogy $\|g-f_n\| \to d$. Az $\{f_n\}$ sorozat korlátos, mert $\|f_n\| \leqq \|g\| + \|g-f_n\|$ és mert a $\{g-f_n\}$ sorozat korlátos.

A 4. segédtétel szerint $\{f_n\}$, minthogy korlátos, tehát compact is, azaz van olyan $\{f^{(n)}\}$ részsorozata, mely egyenletesen tart egy f^* határfüggvény felé. Az f_n^* függvény is L-be tartozik és a $\|g-f^*\| \leqq \|g-f^{(n)}\| + \|f^{(n)}-f^*\|$ egyenlőtlenség és a $\|g-f^{(n)}\| \to d$, $\|f^{(n)}-f^*\| \to 0$ relatiók folytán $\|g-f^*\| \leqq d$. Vagyis f^* valóban a minimumot szolgáltatja.

Az 5. segédtétel bizonyos tekintetben a 4. segédtétel megfordítása; azt mondja ki, hogy a korlátos részsorozatok compact volta a *véges dimensiójú* rendszereknek jellemző sajátsága.

5. *segédtétel. Ha egy linearis rendszer elemeiből alkotható minden korlátos sorozat compact, akkor a rendszer véges dimensiójú.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben a rendszer tartalmaz olyan végtelen $\{g_k\}$ sorozatot, melynek minden eleme linearisan független az előzőktől. Jelöljük L_k-val a $g_1, \ldots, g_k$ elemek összes linearis kapcsolataiból alkotott rendszert. Akkor g_{k+1} semmi esetre sem foglaltatik L_k-ban. Továbbá L_k linearis rendszer, mert egyrészt elemeinek minden linearis kapcsolatát tartalmazza, másrészt pedig, mint a 4. segédtétel bebizonyításában megmutattuk, a $\|c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k\| \to 0$ relatióból $c_1 \to 0, \ldots, c_k \to 0$ is következik és így egy $\{g^{(n)} = c_1^{(n)} g_1 + \cdots + c_k^{(n)} g_k\}$ sorozatnak ($n=1, 2, \ldots$) egy g^* határfüggvény felé egyenletesen való tartásából a $c_i^{(n)}$ együtthatóknak egy-egy c_i^* határérték felé való tartása következik, melyekre $c_1^{(n)} g_1 + \cdots c_k^{(n)} g_k \to c_1^* g_1 + \cdots + c_k^* g_k$, tehát $g^* = c_1^* g_1 + \cdots + c_k^* g_k$, azaz g^* is L_k-ba tartozik. Minthogy továbbá L_k az L_{k+1}-nek valódi része, azért a 2. segédtétel szerint L_{k+1}-nek van olyan f_k eleme, melyre $\|f_k\| = 1$, míg f_k távolsága az L_k bármely elemétől legalább $\frac{1}{2}$.[1] Az f_k függvények ($k=1, 2, \ldots$) kor-

[1] Minthogy L_k véges dimensiójú, azért $\frac{1}{2}$ helyébe az 1-et is tehetnők; azonban ez itt nem lényeges, csak későbben lesz a mélyebb 3. segédtételre lényegesen szükségünk.

látos sorozatot alkotnak; másrészt, ha $i \neq k$, akkor $\|f_i - f_k\| \geqq \frac{1}{2}$, mert vagy f_i tartozik az L_k-ba, vagy f_k az L_i-be. Vagyis az $\|f_i - f_k\|$ távolságok pontos alsó korlátja $\geqq \frac{1}{2}$, tehát lényegesen positiv és így a korlátos $\{f_k\}$ sorozat *nem* compact.

6. *segédtétel. Ha az L_1 és L_2 linearis rendszereknek az $f=0$ függvényen kívül nincsen közös elemük és ha a két rendszer közül legalább az egyik véges dimensiójú, akkor létezik olyan C szám, hogy az L_1 bármely f és az L_2 bármely g elemére nézve*

$$\|f\| + \|g\| \leqq C\,\|f+g\|.$$

Bizonyítás. Az ellenkező esetben léteznék egy-egy olyan $\{f_n\}$ és $\{g_n\}$ sorozat, hogy $\|f_n\| + \|g_n\| > n\|f_n + g_n\|$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $\|f_n\| + \|g_n\| = 1$, mert ez különben f_n-nek és g_n-nek az $\|f_n\| + \|g_n\|$ számmal való elosztása által elérhető. Legyen már most például az L_1 rendszer véges dimensiójú; akkor, minthogy $\|f_n\| \leqq 1$, az $\{f_n\}$ sorozat korlátos, tehát a 4. segédtétel szerint compact is; kiválasztható ennélfogva belőle egy egyenletesen convergens részsorozat: $f^{(n)} \to f^{\star}$. Minthogy továbbá $\|f^{(n)} + g^{(n)}\| < \frac{1}{n}$, azért egyenletesen $f^{(n)} + g^{(n)} \to 0$, tehát ugyancsak egyenletesen $g^{(n)} \to -f^{\star}$. Ennélfogva egyrészt $\|f^{(n)}\| \to \|f^{\star}\|$[1] és $\|g^{(n)}\| \to \|-f^{\star}\| = \|f^{\star}\|$ vagyis $1 = \|f^{(n)}\| + \|g^{(n)}\| \to 2\|f^{\star}\|$, tehát $\|f^{\star}\| = \frac{1}{2}$; másrészt $f^{\star}$ mint az $\{f^{(n)}\}$ és a $\{-g^{(n)}\}$ sorozatok határfüggvénye úgy L_1-be, mint L_2-be beletartozik és így föltevésünk szerint $f^{\star} = 0$, azaz $\|f^{\star}\| = 0$. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

2. §. A linearis függvénytransformatio megfordítása.

Vizsgáljuk a $B = E - A$ transformatiót, a hol E az *identikus*, A pedig egy *teljesen folytonos* linearis transformatio.

[1] Az $\|f^{(n)}\| \to \|f^{\star}\|$ relatio egyenletesen összetartó sorozatokra legegyszerűbben az

$$\|f^{\star}\| \leqq \|f^{\star} - f^{(n)}\| + \|f^{(n)}\| \quad \text{és} \quad \|f^{(n)}\| \leqq \|f^{(n)} - f^{\star}\| + \|f^{\star}\|$$

egyenlőtlenségekből és az

$$\|f^{\star} - f^{(n)}\| = \|f^{(n)} - f^{\star}\| \to 0$$

limesrelatióból következik.

A $B[\varphi] = 0$ homogen függvényegyenletnek egy megoldása bizonyosan van, tudniillik $\varphi = 0$. Ezen az úgynevezett identikusan eltünő megoldáson kívül esetleg még más megoldások is léphetnek föl. A megoldások összessége mindenesetre *linearis rendszert* alkot, minthogy a B transformatio distributiv és folytonos voltánál fogva a megoldások minden linearis kapcsolata és minden az egyenletes convergentia szerint való határfüggvénye ugyancsak megoldás. Az a speciális föltevés, hogy A *teljesen* folytonos, lehetővé teszi, hogy a megoldások összességét pontosabban is körülírjuk.

1. tétel. A

$$B[\varphi] = 0$$

homogen egyenlet megoldásai v é g e s dimensiójú linearis rendszert alkotnak.

Bizonyítás. Minthogy $E = A + B$, azért minden φ megoldásra $\varphi = A[\varphi]$, azaz a kérdéses linearis rendszer minden elemét az A transformatio önmagába viszi át. Mivel A teljesen folytonos, azért minden korlátos sorozat compactba megy át és így minden a kérdéses rendszer elemeiből álló korlátos sorozat, mint saját magának transformáltja, compact. Tehát az 5. segédtétel szerint a rendszer véges dimensiójú.

1'. tétel. A

$$B^n[\varphi] = 0$$

homogen egyenlet megoldásai v é g e s dimensiójú linearis rendszert alkotnak.

Bizonyítás. A

$$B^n = (E - A)^n = E - A\,(nE - \cdots) = E - C$$

transformatio ugyanolyan typusú, mint B maga; ugyanis a

$$C = A\,(nE - \cdots)$$

transformatio olyan két transformatio szorzata, melyek közül az egyik, A, teljesen folytonos, ennélfogva C is teljesen folytonos. Tehát 1' az 1. tétel corollariuma.

Mielőtt a 2. tételt megfogalmazzuk, jegyezzük meg, hogy a $B^{n+1} = BB^n$ identitás szerint a $B^n[\varphi] = 0$ egyenlet minden megoldása eleget tesz a $B^{n+1}[\varphi]=0$ egyenletnek is. Vagyis a $B^n[\varphi]=0$ egyenletek $(n=1, 2,\ldots)$ a linearis rendszereknek olyan sorozatát értelmezik, melyek közül mindegyik része az összes következőknek. Az a kérdés, vajjon *valódi* része-e? Elsősorban világos, hogy ha például az m-edik rendszer nem valódi része az $m+1$-ediknek, vagyis ha azonos vele, akkor az összes következőkkel is azonos. Ha ugyanis volna olyan első $n+1>m$ szám, hogy az $n+1$-edik rendszer nem azonos az m-edikkel, akkor tehát volna a $B^{n+1}[\varphi]=0$ egyenletnek olyan megoldása, melyre $B^n[\varphi]\neq 0$. Legyen $\psi=B^{n-m}[\varphi]$; akkor

$$B^{m+1}[\psi]=B^{n+1}[\varphi]=0 \quad \text{és} \quad B^m[\psi]=B^n[\varphi]\neq 0,$$

vagyis már az $m+1$-edik rendszer sem volna az m-edikkel azonos.

Ennélfogva csak két eset lehetséges még: vagy minden lépésnél új megoldás lép föl, vagy pedig egy bizonyos n exponenstől kezdve az összes rendszerek azonosak. A 2. tétel az első eshetőséget kizárja.

2. tétel. Létezik olyan ν küszöbszám, hogy minden $n>\nu$-re a

$$B^n[\varphi]=0$$

egyenlet minden megoldása már a

$$B^\nu[\varphi]=0$$

egyenletet is kielégíti, míg minden $n<\nu$-re a

$$B^{n+1}[\varphi]=0$$

egyenletnek van új, azaz olyan megoldása, mely a

$$B^n[\varphi]=0$$

egyenletnek még nem tesz eleget.

Bizonyítás. Az ellenkező esetben a 2. segédtétel alapján minden n-hez található olyan φ_n függvény, melyre $B^{n+1}[\varphi_n]=0$, $\|\varphi_n\|=1$, míg $\|\varphi_n-\varphi\|\geqq\frac{1}{2}$ minden olyan φ-re nézve, mely már a $B^n[\varphi]=0$ egyenletet is kielégíti. A φ_n függvények $(n=1, 2,\ldots)$ korlátos sorozatot alkotnak, tehát, minthogy A teljesen folytonos, a $\{g_n = A[\varphi_n]\}$ sorozat *compact*. Tekintsük meg a

$$g_n - g_m = A[\varphi_n - \varphi_m]$$

különbséget, a hol $m<n$. Minthogy $A = E - B$, azért

$$g_n - g_m = \varphi_n - (\varphi_m + B[\varphi_n] - B[\varphi_m]) = \varphi_n - \varphi,$$

a hol, minthogy $m<n$, tehát

$$B^n[\varphi] = B^n[\varphi_m] + B^{n+1}[\varphi_n] - B^{n+1}[\varphi_m] = 0.$$

Ennélfogva

$$\|g_n - g_m\| = \|\varphi_n - \varphi\| \geqq \tfrac{1}{2},^{1}$$

vagyis a $\{g_n\}$ sorozat *nem* lehet compact. A föltevés tehát ellentmondáshoz vezet. Értelmezzük még a *zérusadik hatványt:* $B^0 = E$; akkor tételünk alá foglalható a $\nu = 0$ eset is, vagyis midőn a homogen egyenletnek nincsen $\varphi = 0$-n kívül megoldása.

A 2. tételből azonnal következik a

3. tétel. Ha a

$$B[\varphi] = g$$

egyenlet minden folytonos g-re megoldható, akkor a megoldás egyértelmű.

Bizonyítás. A tétel más szavakkal azt állítja, hogy *ha az összes nemhomogen egyenletek megoldhatók, akkor a homogen egyenletnek a $\varphi = 0$-n kívül nincs megoldása.* Ezt a következő módon bizonyitjuk be. Ha a $B[\varphi] = 0$ homogen egyenletnek volna még egy másik, φ_1 megoldása, akkor, minthogy föltevésünk szerint az összes nemhomogen egyenletek megoldhatók, volna a $B[\varphi] = \varphi_1$ egyenletnek egy φ_2, a $B[\varphi] = \varphi_2$ egyenletnek egy φ_3 megoldása és így tovább; általánosan a $B[\varphi] = \varphi_n$ egyenletnek egy φ_{n+1} megoldása. De akkor minden 1-nél nagyobb n-re $B^n[\varphi_n] = 0$, $B^{n-1}[\varphi_n] \neq 0$ volna. Ez azonban ellentmond a 2. tételnek.

---

[1] Az $\frac{1}{2}$ korlát itt is helyettesíthető 1-gyel, mert az összes tekintetbe jövő rendszerek véges dimensiójuak.

Ejtsük el most a 3. tételben megszabott föltevést és vizsgáljuk meg általánosan, milyen halmazt alkot ama g függvények összessége, melyekre a $B[\varphi]=g$ egyenlet megoldható? A választ az 5. tételben adjuk meg; a 4. tétellel az 5. tétel bizonyitását készítjük elő.

4. tétel. A B transformatióhoz mindig létezik olyan G szám, hogy valahányszor a g függvényre a

$$B[\varphi]=g$$

egyenlet megoldható, legalább egy olyan megoldás is van, melyre

$$\|\varphi\| \leqq G\|g\|.$$

Bizonyitás. Ha φ megoldás, akkor az általános megoldás $\varphi-f$, a hol f a $B[f]=0$ homogen egyenletnek tetszésszerinti megoldása. Minthogy az 1. tétel szerint az f függvények *véges dimensiójú* linearis rendszert alkotnak, azért a 3. segédtétel szerint van köztük olyan $f^\star$ is, hogy minden f-re

$$\|\varphi-f^\star\| \leqq \|\varphi-f\|.$$

A $\varphi^\star=\varphi-f^\star$ függvény tehát a $B[\varphi]=g$ egyenletnek minimális vagyis olyan megoldása, melyre $\|\varphi\|$ a lehető legkisebb; vagy más szóval minden f-re nézve $\|\varphi^\star\| \leqq \|\varphi^\star-f\|$. A 4. tételt bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy a $\dfrac{\|\varphi^\star\|}{\|g\|}$ hányadosok minden olyan g-re, melyre az egyenlet megoldható, egy közös G korlát alatt feküsznek. Tegyük föl az ellenkezőt; akkor volna olyan $\{g_n\}$ sorozat, melyre és a megfelelő $\varphi_n^\star$ minimalis megoldásokra nézve

$$\frac{\|\varphi_n^\star\|}{\|g_n\|} \to \infty.$$

Minthogy pedig $c\varphi_n^\star$ a cg_n-hez tartozó minimalis megoldás, azért az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $\|\varphi_n^\star\|=1$ és hogy ennélfogva $\|g_n\| \to 0$. Mivel most a $\{\varphi_n^\star\}$ sorozat korlátos, tehát az $\{A[\varphi_n^\star]\}$ sorozat compact, azért van olyan $\{A[\varphi_{n_k}^\star]\}$ részsorozata, melyre egyenletesen

$$A[\varphi_{n_k}^\star] \to \varphi^{\star\star}.$$

Minthogy továbbá $E = A + B$ és így

$$\varphi^\star_{nk} = A[\varphi^\star_{nk}] + B[\varphi^\star_{nk}] = A[\varphi^\star_{nk}] + g_{nk},$$

és minthogy g_{nk} egyenletesen tart 0 felé, azért egyszersmind, és pedig ugyancsak egyenletesen

$$\varphi^\star_{nk} \to \varphi^{\star\star}.$$

Ebből következik, hogy $B[\varphi^\star_{nk}] \to B[\varphi^{\star\star}]$, és minthogy másrészt $B[\varphi^\star_{nk}] = g_{nk} \to 0$, azért végül

$$B[\varphi^{\star\star}] = 0.$$

Vagyis $\varphi^{\star\star}$ szintén a homogen egyenletnek egy f megoldása és így $\|\varphi^\star_{nk} - \varphi^{\star\star}\| \geqq \|\varphi^\star_{nk}\| = 1$ volna minden k-ra; ez azonban nem egyeztethető össze azzal, hogy a $\{\varphi^\star_{nk}\}$ sorozat egyenletesen $\varphi^{\star\star}$ felé tart.

5. *tétel. A B transformatio a függvényteret egy linearis rendszerbe viszi át.*

Bizonyítás. A B transformatio distributiv voltából következik, hogy a tér transformáltja g, g_1, g_2-vel együtt a cg és $g_1 + g_2$ elemeket is tartalmazza. Meg kell még mutatnunk, hogy *minden olyan egyenletesen összetartó $g_n \to g^\star$ sorozatra, melyre a g_n-ek a függvénytér transformáltjában foglaltatnak, ugyanez $g^\star$-ra is áll*, vagy más szavakkal, hogy *ha a $B[\varphi] = g_n$ egyenletek megoldhatók, akkor $B[\varphi] = g^\star$ is megoldható.* Válasszunk erre a czélra egy olyan $\{g^{(n)}\}$ részsorozatot, hogy

$$\|g^\star - g^{(n)}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

legyen; akkor egyszersmind

$$\|g^{(n+1)} - g^{(n)}\| \leqq \|g^\star - g^{(n+1)}\| + \|g^\star - g^{(n)}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Legyen továbbá φ_0 a $B[\varphi] = g^{(1)}$ egyenletnek egy megoldása, $n = 1, 2, \ldots$-ra pedig φ_n a

$$B[\varphi] = g^{(n+1)} - g^{(n)}$$

egyenleteknek egy-egy olyan megoldása, melyekre a 4. tétel szerint

$$\|\varphi_n\| \leqq G\,\|g^{(n+1)}-g^{(n)}\| < \frac{G}{2^n}.$$

Akkor a $\varphi_0+\varphi_1+\cdots$ végtelen sor absolut és egyenletesen összetartó; továbbá

$$B[\varphi_0+\varphi_1+\cdots+\varphi_n] = g^{(n+1)} \to g^\star;$$

és ennélfogva a sor $\varphi^\star$ összegére nézve $B[\varphi^\star] = g^\star$. Tehát a $B[\varphi] = g^\star$ egyenlet csakugyan megoldható.

A 6. tételt a következő megjegyzésekkel készítjük elő: Minthogy a B^n transformatiók, mint azt az 1'. tétel bizonyításakor láttuk, ugyanolyan typusúak, mint maga B, azért az 5. tétel megfelelően ezekre is érvényes, azaz minden B^n transformatio a függvényteret egy-egy L_n linearis rendszerbe viszi át. Jelöljük még L_0-val magát a függvényteret, minthogy azt a $B^0 = E$ transformatio önmagába viszi át. Akkor L_0, tudniillik a függvénytér, tartalmazza L_1-et, és minthogy L_n és L_{n+1} ugyanannak a transformatiónak, tudniillik B^n-nek alkalmazásával keletkeznek L_0-ból és L_1-ből, azért L_n is tartalmazza L_{n+1}-et. Azt kérdezzük, *valódi* része-e L_{n+1} az L_n-nek vagy azonos-e vele? Világos, hogy a 3. tételben postulált esetben, minthogy ott $L_0 = L_1$, vagyis L_1 maga a függvénytér, ugyanez áll valamennyi L_n-re is. Az általános esetben az $L_{m+1} = L_m$ föltevésből következik, hogy minden $n > m$-re is $L_n = L_m$. E szerint két lehetőség van: vagy minden lépésnél elmarad legalább egy elem, vagy ez csupán egy bizonyos indexig történik és innen kezdve az összes rendszerek azonosak. A 6. tétellel az első lehetőséget ki fogjuk zárni.

6. tétel. Létezik olyan ν küszöbszám, hogy valamennyi $n > \nu$-re $L_n = L_\nu$, míg minden $n < \nu$-re nézve az L_{n+1} rendszer az L_n rendszernek valódi része. Ez a ν küszöbszám azonos a 2. tételben értelmezett ν számmal.

Bizonyítás. Hogy a kivánt tulajdonsággal biró ν szám létezését bebizonyitsuk, ahhoz csak azt kell még megmutatnunk, hogy *nem lehet valamennyi L_{n+1} a megfelelő L_n-nek valódi része.*

Ha L_{n+1} az L_n-nek valódi része, akkor a 2. segédtétel szerint van L_n-nek olyan g_n eleme, hogy $\|g_n\| = 1$, míg másrészt minden L_{n+1}-be tartozó g-re nézve $\|g_n - g\| \geqq \frac{1}{2}$. Ha tehát valamennyi L_{n+1} valódi része volna a megfelelő L_n-nek, akkor léteznék egy megfelelő $\{g_n\}$ sorozat. Minthogy $A = E - B$, azért minden $m < n$-re

$$A\,[g_m] - A\,[g_n] = g_m - (g_n + B\,[g_m] - B\,[g_n]) = g_m - g,$$

a hol a g jelöléssel összefoglalt kifejezésnek mind a három tagja külön-külön és ennélfogva g is foglaltatik az L_{m+1} rendszerben. Tehát

$$\|A\,[g_m] - A\,[g_n]\| = \|g_m - g\| \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Ez az egyenlőtlenség azonban nem egyeztethető össze azzal, hogy az $\{A\,[g_n]\}$ sorozat, mely az A teljesen folytonos transformatio alkalmazásával keletkezik a korlátos $\{g_n\}$ sorozatból, compact. Ezzel ellenmondásra jutottunk; tehát a ν küszöbszám okvetlenül létezik.

Hogy már most a tételben foglalt második állítást is bebizonyíthassuk, jegyezzük meg először is azt, hogy ha g az L_ν rendszerbe tartozik, akkor a $B\,[\varphi] = g$ egyenletnek van egy ugyancsak az L_ν rendszerbe tartozó megoldása, mert hiszen L_ν-t a B transformatio pontosan önmagába viszi át. Azt állítom, hogy mindig csak egy ilyen megoldás van, vagy más szóval, hogy a $B\,[\varphi] = 0$ *homogen egyenletnek a* $\varphi = 0$-*n kívül nincsen az* L_ν-*be tartozó megoldása.* Ezt az állítást teljesen hasonlóan igazolhatjuk, mint a 3. tételben foglalt, a speciális $\nu = 0$ esetnek megfelelőt. Ha volna még egy másik L_ν-be tartozó megoldás φ_1, akkor legyenek rendre φ_2 a $B\,[\varphi] = \varphi_1$ egyenletnek, φ_3 a $B\,[\varphi] = \varphi_2$ egyenletnek és így tovább ugyancsak L_ν-be tartozó megoldásai. Akkor minden 1-nél nagyobb n-re

$$B^n\,[\varphi_n] = B\,[\varphi_1] = 0, \quad B^{n-1}\,[\varphi_n] = \varphi_1 \neq 0$$

volna, a mi azonban ellenkezik a 2. tétellel.

A most bebizonyított állításból következik, hogy a $B^{\nu+1}[\varphi] = 0$ egyenlet minden megoldása már a $B^\nu\,[\varphi] = 0$ egyenletet is kielégíti, mert különben $\psi = B^\nu\,[\varphi]$ a $B\,[\psi] = 0$ egyenletnek egy

L_ν-be tartozó és nem azonosan eltűnő megoldását szolgáltatná. Másrészt minden $n<\nu$-re található a $B^{n+1}[\varphi]=0$ egyenletnek olyan megoldása, melyre $B^n[\varphi]\neq 0$ és pedig a következő eljárással. Kiindulunk az $L_{\nu-n-1}-L_{\nu-n}$ halmaz egy f eleméből, vagyis egy olyan f-ből, mely $L_{\nu-n-1}$-ben foglaltatik, de $L_{\nu-n}$-ben már nem. Az f elemről még feltesszük, hogy $B^n[f]\neq 0$; ilyen elem mindenesetre van az $L_{\nu-n-1}-L_{\nu-n}$ halmazban, mert különben az $L_{\nu-1}-L_\nu$ halmaz üres volna, azaz L_ν egybeesnék $L_{\nu-1}$-gyel. A $g=B^{n+1}[f]$ függvény L_ν-be tartozik és ennélfogva van olyan ugyancsak L_ν-be tartozó f_1 függvény, melyre $B^{n+1}[f_1]=g$. Akkor tehát $B^{n+1}[f]-B^{n+1}[f_1]=0$ és így a $\varphi=f-f_1$ függvény eleget tesz a $B^{n+1}[\varphi]=0$ egyenletnek; másrészt $B^n[\varphi]=B^n[f]-B^n[f_1]\neq 0$, minthogy a $B^n[f_1]$ függvény L_ν-be tartozik, a $B^n[f]$ függvény pedig $L_{\nu-1}-L_\nu$-be, azaz $B^n[f]$ nem tartozik L_ν-be; a két függvény tehát nem lehet azonos.

E szerint a ν küszöbszámnak megvan a 2. tételben követelt sajátossága is.

A következő 7. tétel, mely csaknem közvetetlenül folyik a 2., 3., 4. és 6. tételből, speciális esetként magában foglalja a homogen és a nemhomogen integrálegyenlet megoldhatóságára vonatkozó FREDHOLM-*féle alternatívát.*

7. *tétel. Vagy megfordítható a B transformatio, azaz van olyan B^{-1} invers transformatio, hogy $BB^{-1}=B^{-1}B=E$; vagy ha nem, akkor a homogen $B[\varphi]=0$ egyenletnek van a $\varphi=0$-n kívül még más megoldása.*

Bizonyítás. Az első eset akkor áll, ha a $B[\varphi]=g$ egyenlet minden g-re megoldható, vagyis ha $L_1=L_0$, tehát $\nu=0$. Akkor ugyanis a 3. tétel szerint a megoldás egyértelmű és így minden g-hez egy meghatározott φ tartozik. Megmutatjuk, hogy ez a hozzárendelés distributív és korlátos, hogy tehát egy T lineáris transformatiót értelmez. A distributivitás az egyértelműség folytán abból következik, hogy ha a g, g_1, g_2-höz tartozó megoldások φ, φ_1, φ_2, akkor cg-hez és g_1+g_2-höz a $c\varphi$ és $\varphi_1+\varphi_2$ megoldások tartoznak. A transformatio korlátos volta speciális esetként benne foglaltatik a 4. tételben. Végül a $BT=TB=E$ relatiók a $B[\varphi]=g$ egyenletből leolvashatók.

A második eset akkor forog fönn, ha $B[\varphi]=g$ egyenlet nem oldható meg minden g-re. Akkor ugyanis L_1 valódi része L_0-nak, vagyis az egész függvénytérnek, azaz $\nu \geqq 1$. A 2. és 6. tétel szerint ekkor van olyan φ, melyre $B[\varphi]=0$, de $\varphi = E[\varphi] = B^0[\varphi] \neq 0$, vagyis van a $B[\varphi]=0$ egyenletnek a $\varphi=0$-tól különböző megoldása. Ez állítás fontossága miatt ismételjük a 6. tétel bizonyításából azt, a mi állításunkra nézve lényeges. Az $L_{\nu-1}-L_\nu$ halmaz bármely f eleméből kiindulva, minthogy $B[f]$ az L_ν-be tartozik, a $B[\varphi]=B[f]$ egyenletnek van az L_ν-be tartozó megoldása; ennek és f-nek különbsége a homogen egyenletnek egy nem azonosan eltünő megoldását szolgáltatja.

Ezzel a 7. tételt bebizonyítottuk. A $\nu=0$ esetet ezzel elintézettnek tekintjük és a $\nu \geqq 1$ esetet fogjuk alaposabban vizsgálni. Mindenekelőtt a következő elnevezéseket vezetjük be. Az L_ν rendszert *magrendszernek*, elemeit *magelemeknek* nevezzük. A $B^\nu[\varphi]=0$ egyenlet megoldásait *nullaelemeknek*, a belőlük álló, az 1'. tétel szerint *véges dimensiójú* linearis rendszert *nullarendszernek* mondjuk. A g magelemeket *a ν számtól függetlenül* is értelmezhetjük ama tulajdonság alapján, hogy a $B^n[\varphi]=g$ egyenlet minden n-nél megoldható, a nullaelemeket pedig ama sajátsággal értelmezhetjük, hogy elég nagy n-re kielégítik a $B^n[\varphi]=0$ egyenletet.

8. tétel. Minden függvény előállítható egy magelem és egy nullaelem összege gyanánt, még pedig egy és csak egy módon.

Bizonyítás. Az f függvény fölbontását következőképpen végezhetjük. Legyen $B^\nu[f]=g$, akkor g magelem és a $B^n[\varphi]=g$ egyenlet minden n-re, tehát $n=2\nu$-re is megoldható. Legyen φ_1 egy megoldás és legyen $B^\nu[\varphi_1]=f_1$. Akkor f_1 is magelem és $B^\nu[f_1]=B^{2\nu}[\varphi_1]=g=B^\nu[f]$, tehát $B^\nu[f-f_1]=0$; vagyis $f-f_1$ nullaelem. Ennélfogva $f=f_1+(f-f_1)$ a kivánt előállítás.

Mutassuk meg, hogy a fölbontás egyértelmű. Legyen $f=f_2+(f-f_2)$ ugyancsak egy olyan előállítás, hogy f_2 magelem, $f-f_2$ pedig nullaelem. Akkor az $f_3=f_1-f_2=(f-f_2)-(f-f_1)$ függvény egyidejűleg magelem is, nullaelem is. Minthogy f_3 magelem, azért a $B^\nu[\varphi]=f_3$ egyenletnek mindenesetre van egy φ megoldása. Minthogy f_3 nullaelem, azért $B^\nu[f_3]=0$. Tehát egyszersmind $B^{2\nu}[\varphi] = B^{\nu}[f_3] = 0$ és így a 2. tétel szerint már $f_3 = B^{\nu}[\varphi] = 0$, azaz $f_2 = f_1$.

9. tétel. Van egy és csak egy olyan $B^{(0)}$ linearis transformatio, mely minden magelemet önmagába, minden nullaelemet pedig 0-ba visz át.[1] *A $B^{(0)}$ transformatio minden függvényt magelembe, az $E - B^{(0)}$ transformatio pedig minden függvényt nullaelembe transformál. Állanak végül a következő relatiók: $B^{(0)2} = B^{(0)}$, $BB^{(0)} = B^{(0)}B$, $AB^{(0)} = B^{(0)}A$.*

Bizonyítás. A 8. tétel szerint minden f függvényhez tartozik egy bizonyos olyan f_1 magelem, hogy az $f - f_1$ különbség nullaelem. A $B^{(0)}$ transformatiót oly módon értelmezzük, hogy minden f-hez az illető f_1 magelemet rendeljük. Hogy e hozzárendelésben minden magelemnek saját maga, minden nullaelemnek pedig a 0 felel meg, az a 8. tételben foglalt fölbontási mód egyértelműsége folytán világos; mivel ha f magelem, akkor $f = f + 0$, ha pedig f nullaelem, akkor $f = 0 + f$ mindenesetre a kivánt fölbontást szolgáltatja. Továbbá a definitio szerint $B^{(0)}$, illetőleg $E - B^{(0)}$ minden függvényt a 8. tétel szerint megfelelő két részbe, tehát egy mag-, illetőleg nullaelembe visznek át. A $B^{(0)}$ transformatio distributivitása a fölbontás egyértelműségéből és abból következik, hogy ha f_1, g_1 magelemek, akkor cf_1 és $f_1 + g_1$ is azok, és ha $f - f_1$, $g - g_1$ nullaelemek, akkor $c(f - f_1)$ és $f + g - (f_1 + g_1)$ is azok. Mutassuk még meg, hogy a $B^{(0)}$ transformatio korlátos is és így linearis. Alkalmazzuk a 6. segédtételt a magrendszerre és a nullarendszerre, melyek közül az utóbbi véges dimensiójú és a melyeknek a 8. tétel szerint való fölbontás egyértelműsége folytán az $f = 0$-n kívül nincs közös elemük. A segédtétel szerint van olyan C constans, hogy

$$\|f_1\| + \|f - f_1\| \leqq C\|f\|;$$

és így annál inkább

$$\|f_1\| \leqq C\|f\|.$$

A $B^{(0)2} = B^{(0)}$ identitás abból következik, hogy $B^{(0)}$ minden függvényt magelembe, ezt pedig már önmagába transformálja.

---

[1] A $B^{(0)}$ jelöléssel arra akarunk figyelmeztetni, hogy a $\nu = 0$ esetben $B^{(0)}$ egybeesik az identikus $E = B^0$ transformatióval.

A $BB^{(0)}=B^{(0)}B$ és ezzel, minthogy $A=E-B$, az $AB^{(0)}=B^{(0)}A$ identitások, vagyis a B és $B^{(0)}$, illetőleg A ét $B^{(0)}$ transformatiók fölcserélhetőségének bebizonyítására a 8. tétel folytán elég azt csupán a magelemekre és a nullaelemekre megmutatnunk. Ha f nullaelem, akkor azt már $B^{(0)}$, tehát $BB^{(0)}$ is 0-ba viszi át, másrészt B egy újabb nullaelembe, ezt pedig $B^{(0)}$ ismét csak 0-ba viszi át. Magelemekre viszont, minthogy azokat B ismét magelembe, $B^{(0)}$ pedig önmagukba viszi át, azért úgy $BB^{(0)}$, mint $B^{(0)}B$ magelemekre egybeesnek a B-vel, tehát egymással is.

Végül még azt kell megmutatnunk, hogy $B^{(0)}$ az egyetlen olyan transformatio, mely minden magelemet önmagába és minden nullaelemet 0-ba visz át. Két ilyen transformatio különbsége úgy minden magelemet, mint minden nullaelemet 0-ba vinne át, a distributivitás és a 8. tétel folytán tehát 0-ba vinne át minden függvényt. Vagyis a két transformatio egymással azonos.

10. tétel. Az A transformatio szétbontható, és pedig egy és csak egyféleképpen két lineáris transformatio, A_1 és A_2 összegére úgy, hogy A_1 minden nullaelemet, A_2 pedig minden magelemet 0-ba vigyen át.

Az A_1 transformatio minden magelemre nézve, A_2 pedig minden nullaelemre nézve megegyezik A-val.

Az A_1 transformatio minden függvényt egy-egy magelembe, A_2 pedig minden függvényt egy-egy nullaelembe visz át.

Az A_1 és A_2 transformatiók orthogonalisak egymásra, azaz $A_1A_2=A_2A_1=0$.

Az A_1 és A_2 transformatiók teljesen folytonosak.

Bizonyítás. Legyen

$$A_1=B^{(0)}A=AB^{(0)},\ A_2=(E-B^{(0)})\,A=A(E-B^{(0)}).$$

Akkor $A_1+A_2=A$. Minthogy továbbá $B^{(0)}$ minden nullaelemet 0-ba visz át, azért 0-ba viszi át az $A_1=AB^{(0)}$ is. Másrészt minden magelemet úgy E, mint $B^{(0)}$ önmagába és ennélfogva $E-B^{(0)}$ 0-ba visz át, azért 0-ba viszi át az $A_2=A\,(E-B^{(0)})$ is. A_1 és A_2 tehát a kivánt szétbontást szolgáltatják.

Az az állítás, hogy A_1 minden magelemre, A_2 pedig minden nullaelemre nézve megegyezik A-val, az imént bebizonyított definiáló sajátság közvetlen átfogalmazása. A tétel következő állítása a 9. tételnek $B^{(0)}$-ra és $E-B^{(0)}$-ra vonatkozó megfelelő állításából és abból folyik, hogy B, tehát $A=E-B$ is, minden magelemet, illetőleg nullaelemet ugyanilyenbe visz át.

A szétbontás egyértelmű volta közvetlenül folyik az értelmező sajátságból és a 8. tételből, mert az értelmező sajátság A_1-et és A_2-t a magelemekre és nullaelemekre teljesen jellemzi, teljesen jellemzi tehát a distributivitásra és a 8. tétel folytán minden más függvényre is.

Azt, hogy $A_1A_2=0$, következőképpen igazoljuk. Alkalmazzuk A_1A_2-t valamely függvényre, akkor azt először is A_2 egy nullaelembe viszi át, ezt pedig A_1 0-ba transformálja. Ugyanígy következik, hogy $A_2A_1=0$. Fölhasználhatjuk egyébként a $B^{(0)2}=B^{(0)}$ vagy másképpen írva

$$B^{(0)}(E-B^{(0)})=(E-B^{(0)})B^{(0)}=0$$

relatiót is; ennek alapján ugyanis

$$A_1A_2=AB^{(0)}(E-B^{(0)})A=0;$$

és

$$A_2A_1=A(E-B^{(0)})B^{(0)}A=0.$$

Végül az A_1 és A_2 transformatiók teljesen folytonos volta szorzatelőállításukból következik, mert az egyik tényező, A, teljesen folytonos.

A következő tétel az A_1, A_2 transformatiók olyan sajátságait fejezi ki, melyek a ν számtól függetlenek.

11. tétel. A $B_1=E-A_1$ transformatio megfordítható, azaz van olyan B_1^{-1} linearis transformatio, hogy

$$B_1B_1^{-1}=B_1^{-1}B_1=E.$$

A $B_2=E-A_2$ transformatiónak az a sajátossága van, hogy a $B^n[\varphi]=0$ és $B_2^n[\varphi]=0$ homogen egyenletek ugyanannál az n-nél pontosan ugyanazokat a megoldásokat szolgáltatják, viszont a $B^n[\varphi]=g$ és $B_2^n[\varphi]=g$ nem-homogen egyenletek közül ugyanarra a g-re vagy mind a kettő, vagy egyik sem oldható meg.

Bizonyítás. A B_1 transformatio megfordítható volta a 7. tétel alapján következik, mihelyt megmutattuk, hogy a homogen $B_1[\varphi] = 0$ egyenletnek a $\varphi = 0$-n kívül nincs más megoldása. Legyen f az egyenlet egy megoldása és bontsuk azt szét a 8. tétel alapján az f_1 magelemre és az $f-f_1$ nullaelemre. Akkor $B_1[f_1] + B_1[f-f_1] = B_1[f] = 0$. De az $f-f_1$ nullaelemre a 10. tétel szerint $A_1[f-f_1] = 0$, tehát $B_1[f-f_1] = f-f_1$ és így $B_1[f_1] = f_1-f$. Másrészt magelemre nézve az A_1 transformatio megegyezik A-val és így B_1 a B-vel, ennélfogva

$$B[f_1] = B_1[f_1] = f_1-f,$$

tehát

$$B^{\nu+1}[f_1] = B^{\nu}[f_1-f] = 0,$$

minthogy f_1-f nullaelem. E szerint az f_1 magelem egyszersmind nullaelem is. De akkor az $f = f_1 + (f-f_1)$ megoldás, mint két nullaelem összege, ugyancsak nullaelem, miért is $A_1[f] = 0$ és ennélfogva $B_1[f] = f$; másrészt föltevésünk szerint $B_1[f] = 0$ és így végül $f = 0$.

A tételnek B_2-re vonatkozó állításai közvetlenül leolvashatók a

$$B^n = B_1^n B_2^n = B_2^n B_1^n$$

és

$$B_2^n = (B_1^{-1})^n B^n = B^n (B_1^{-1})^n$$

identitásokból, melyek közül az elsőt az

$$E-A = E-A_1-A_2 = E-A_1-A_2+A_1A_2 = (E-E_1)(E-A_2)$$

azaz $B = B_1B_2$ összefüggésből hatványozás által és a tényezőknek az $A_1A_2 = A_2A_1$-ből következő fölcserélhetősége alapján nyerjük, a második pedig az elsőből $(B_1^{-1})^n$-nel való szorzással adódik.

A $B[\varphi] = 0$ homogen egyenlet linearisan független megoldásainak felhasználásával az A_2 transformatio megfelelő számú egymásra orthogonalis részre bontható még föl. Ez a fölbontás egyébként megfelel az n változós linearis substitutio kanonikus átalakításának és vissza is vezethető arra a véges dimensiójú nullarendszer parameteres előállításának segítségével, minthogy A_2-t a nullarendszer szempontjából úgy is tekinthetjük, mint ennek egy önmagába való transformatóját.

Ezzel a kérdéssel nem foglalkozom itt részletesen. A 12. tétellel egy ebben a dolgozatban eddig figyelmen kívül hagyott szemponttal vetünk számot, a mely pedig a legtöbb hasonló vizsgálatban fundamentalis szerepet játszik. A λ complex *parameter* bevezetésével az $E-A$ egyes transformatio helyett vegyük tekintetbe az egész $E-\lambda A$ transformatio*sereget*. Minthogy A-val együtt λA is teljesen folytonos, eddigi eredményeink megfelelően az $E-\lambda A$ transformatiókra is alkalmazhatók. Minden egyes transformatióhoz tartozik egy $\nu=\nu(\lambda)$ egész szám, mely vagy 0, vagy positiv. Az első esetben λ-t az A-ra nézve *regularis*, a másodikban *singularis* parameterértéknek mondjuk. A singularis parameterértéket e szerint többek közt az jellemzi, hogy a $\varphi=\lambda A[\varphi]$ egyenletnek van a $\varphi=0$-tól különböző megoldása is. A 12. tétel igazolja elnevezéseinket; szerinte ugyanis $\nu=0$ *a szabály*, $\nu>0$ *pedig kivétel.*

12. tétel. A singularis parameterértékek csak a végtelenben torlódhatnak.

Bizonyítás. A tétel bebizonyítására azt kell megmutatnunk, hogy végtelen sok különböző singularis parameterértékből alkotott sorozat nem lehet korlátos. Legyen $\{\lambda_n\}$ csupa különböző singularis parameterértékből álló végtelen sorozat és $\{\varphi_n\}$ a $\varphi=\lambda_n A[\varphi]$ egyenleteknek a $\varphi=0$-tól különböző egy-egy megoldásából alkotott sorozat. Először is világos, hogy $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ minden n-re linearisan függetlenek; máskülönben ugyanis volna egy első olyan n index, melyre ez nem áll, melyre tehát fönnállana egy $c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n=0$ összefüggés, melyben $c_n \neq 0$, és így az alacsonyabb indexű együtthatók közül is legalább egy $\neq 0$. Alkalmazzuk a $c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n=0$ összegre az $E-\lambda_n A$ transformatiót; akkor minthogy

$$\varphi_k-\lambda_n A[\varphi_k]=\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\lambda_k}\varphi_k,$$

azért egyszersmind

$$\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1}c_1\varphi_1+\cdots+\frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{\lambda_{n-1}}c_{n-1}\varphi_{n-1}=0,$$

a hol az együtthatók közül legalább egy nem 0, azaz már

$\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ sem függetlenek. Meggondolásunk csak abban az esetben nem volna jogosult, ha az egyik $\lambda_k = 0$ volna. Azonban $\lambda = 0$ regularis parameterérték, mert a megfelelő $E - \lambda A = E$ transformatio megfordítható.

Legyen már most $L^{(n)}$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linearis kapcsolataiból álló véges dimensiójú linearis rendszer. Az $L^{(n)}$ rendszer minden $g = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ elemére

$$g - \lambda_n A[g] = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1} c_1\varphi_1 + \cdots + \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{\lambda_{n-1}} c_{n-1}\varphi_{n-1},$$

azaz $g - \lambda_n A[g]$ már az $L^{(n-1)}$ rendszerbe is beletartozik. Továbbá $L^{(n-1)}$ valódi része az $L^{(n)}$-nek, mert φ_n nem tartozik $L^{(n-1)}$-be; ennélfogva a 2. segédtétel szerint minden n-re van olyan az $L^{(n)}$-be tartozó g_n elem, hogy $\|g_n\| = 1$ és másrészt minden az $L^{(n-1)}$-be tartozó g-re $\|g_n - g\| \geq \frac{1}{2}$. Ha már most a $\{\lambda_n\}$ sorozat korlátos volna, akkor a $\{\lambda_n g_n\}$ függvénysorozat is az volna, és minthogy A teljesen folytonos, a $\{\lambda_n A[g_n]\}$ sorozat *compact* volna. Ez azonban nem lehetséges, mert minden $m < n$-re úgy $\lambda_m A[g_m]$, mint $g_n - \lambda_n A[g_n]$ bele tartoznak $L^{(n-1)}$-be és ennélfogva

$$\|\lambda_n A[g_n] - \lambda_m A[g_m]\| = \|g_n - (g_n - \lambda_n A[g_n] + \lambda_m A[g_m])\| \geq \tfrac{1}{2}.$$

A $\{\lambda_n A[g_n]\}$ sorozat tehát *nem lehet compact* és így a $\{\lambda_n\}$ sorozat sem lehet korlátos.

Mielőtt a 13. tételt megfogalmazzuk, állapodjunk meg abban, hogy a $\lambda = \infty$ helyet mikor tekintsük regularisnak. Hogy a véges λ értékekre érvényes definitiót megfelelő módon átvihessük, fogalmazzuk azt így: A λ parameterérték A-ra nézve regularis, ha az $f - \lambda A[f] = 0$ egyenletből az $f = 0$ is következik. Ennek megfelelően a $\lambda = \infty$-t akkor tekintjük regularisnak, ha minden $\lambda_n \to \infty$ sorozatra nézve az $\|f_n - \lambda_n A[f_n]\| \to 0$ relatióból az $\|f_n\| \to 0$ is következik.

13. tétel. A 10. tételben értelmezett A_2 transformatióra nézve minden 1-től különböző λ érték, a $\lambda = \infty$-t is beleértve, regularis.

Bizonyítás. Ha λ véges, meg kell mutatnunk, hogy az $f - \lambda A_2[f] = 0$ egyenletből az $f = 0$ is következik. A 10. tétel szerint $A_2[f]$ nullaelem a B transformatióra nézve, tehát a 11. tétel szerint nullaelem a B_2-re nézve is. Ennélfogva maga $f=\lambda A_2[f]$ is nullaelem B_2-re nézve. Másrészt az $f-\lambda A_2[f]=0$ egyenletből az

$$E-\lambda A_2=[1-\lambda]E+\lambda E-\lambda A_2=(1-\lambda)E-\lambda B_2$$

relatio alapján következik, hogy

$$f=\frac{\lambda}{\lambda-1}B_2[f].$$

Tehát egyszersmind

$$f=\frac{\lambda^n}{(\lambda-1)^n}B_2^n[f].$$

Minthogy pedig f, mint láttuk, nullaelem, azért elég nagy n-re, tudniillik ha $n\geqq\nu$, mindenesetre $B_2^n[f]=0$. Tehát $f=0$.

A mi a $\lambda=\infty$ helyet illeti, tegyük föl, hogy singularis A_2-re nézve; akkor van olyan $\lambda_n\to\infty$ sorozat és olyan $\{f_n\}$ sorozat, hogy $\|f_n-\lambda_nA_2[f_n]\|\to 0$, míg $\|f_n\|$ maga nem tart 0 felé. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\|f_n\|=1$; ugyanis $\{f_n\}$-nek mindenesetre van olyan végtelen részsorozata, melyre nézve az $\|f_n\|$ normák egy lényegesen positiv korlát fölött maradnak; az ennek a részsorozatnak megfelelő

$$\varphi_n=\frac{f_n}{\|f_n\|}$$

függvényekre nézve

$$\|\varphi_n-\lambda_nA_2[\varphi_n]\|\to 0 \quad \text{és} \quad \|\varphi_n\|=1.$$

Tegyük föl tehát mindjárt, hogy $\|f_n\|=1$. Minthogy az összes $A_2[f]$ függvények nullaelemek, azért a $\lambda_nA_2[f_n]$ függvények is azok, továbbá a

$$\|\lambda_nA_2[f_n]\|\leqq\|f_n\|+\|f_n-\lambda_nA_2[f_n]\|\to 1$$

relatio folytán korlátos sorozatot alkotnak. Minthogy ez a korlátos sorozat véges dimensiójú rendszerben, tudniillik a nullarendszerben foglaltatik, azért compact. Tartalmaz tehát egy egyenletesen összetartó

$$\lambda^{(n)} A_2 [f^{(n)}] \to f^*$$

részsorozatot és f^* is nullaelem. Továbbá, minthogy

$$\| f^{(n)} - \lambda^{(n)} A_2 [f^{(n)}] \| \to 0,$$

azért egyszersmind, ugyancsak egyenletesen, $f^{(n)} \to f^*$. Másrészt $\lambda^{(n)}$-nel osztva kapjuk, hogy $A_2 [f^{(n)}] \to 0$. Tehát $A_2 [f^*] = 0$, vagyis $f^* = B_2 [f^*]$ és így egyszersmind minden n-re $f^* = B_2^n [f^*]$. De ha n elég nagy, akkor, minthogy f^* nullaelem, azért $B_2^n [f^*] = 0$ és így végül $f^* = 0$. Ennek azonban ellentmond az $\| f^{(n)} \| = 1$, $\| f^{(n)} \| \to \| f^* \|$ relatiókból következő $\| f^* \| = 1$ egyenlőség. Vagyis az a föltevés, hogy $\lambda = \infty$ singularis az A_2-re nézve, ellentmondásra vezetett.

3. §. Alkalmazás az integrálegyenletekre.

Hogy a megelőző vizsgálatokat az integrálegyenletek elméletével kapcsolatba hozhassuk, tekintsük a

$$K[f] = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy$$

«integráltypusú» transformatiót. Hogy egyelőre csak a legfontosabb esetet tartsuk szem előtt, föltesszük, hogy a $K(x, y)$ függvény folytonos az $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ tartományban. Általános eredményeinket a $\varphi - K[\varphi] = g$ FREDHOLM-*féle* vagy — HILBERT szerint — *másodfajú integrálegyenletre* kivánván alkalmazni, mindenekelőtt meg kell mutatnunk, hogy az integráltypusú $K[f]$ transformatio *lineáris* és *teljesen folytonos.* Vagy részletesebben kifejezve, azt kell megmutatnunk, hogy K distributiv, korlátos és minden korlátos sorozatot nemcsak korlátos, de compact sorozatba visz át. Hogy K distributiv, az közvetlenül folyik az integrálás műveletének distributiv voltából; hogy korlátos, azt a

$$| K[f] | \leqq \| f \| \int_a^b | K(x, y) |\, dy$$

becslés mutatja. Be kell még bizonyitanunk, hogy minden korlátos $\{f_n\}$ sorozatnak $\{K[f_n]\}$ megfelelője compact. Ahhoz, hogy egy korlátos $\{g_n\}$ sorozat compact legyen, Arzelà szerint szükséges és elégséges, hogy a g_n függvények összességükben *egyenlő mértékben* legyenek folytonosak. Ezalatt azt értjük, hogy minden positiv ε-hoz létezik olyan δ szám, hogy hacsak $|x-x'|\leqq\delta$, akkor egyszersmind valamennyi g_n-re nézve $|g_n(x)-g_n(x')|\leqq\varepsilon$. Itt csak a feltétel *elégséges* volta a lényeges. Röviden ismétlem ennek a bebizonyítását. Tekintsük a $\{g_n\}$ sorozatnak egy tetszésszerinti részsorozatát; ez a részsorozat szintén korlátos, minthogy maga $\{g_n\}$ korlátos; kiválasztható tehát belőle az ismert diagonalis eljárással egy olyan további $\{g^{(n)}\}$ részsorozat, mely az (a, b) köz minden rationalis helyén összetartó. Megmutatjuk, hogy a $\{g^{(n)}\}$ sorozat az egész közön összetartó, és pedig egyenletesen. Válasszunk egy tetszésszerint kicsiny ε-t, akkor föltevésünk szerint van egy megfelelő δ. Az (a, b) közt az $r_1,\dots,r_k$ rationalis osztáspontokkal véges számú, δ-nál kisebb részre osztjuk. Akkor az (a, b) köz minden x helyéhez van emez osztáspontok között olyan, melyre $|x-r|<\delta$ és így minden n-re

$$|g^{(n)}(x)-g^{(n)}(r)|\leqq\varepsilon.$$

Másrészt, ha m és n elég nagyok, akkor mind a k számú osztáspontra nézve

$$|g^{(m)}(r)-g^{(n)}(r)|<\varepsilon.$$

Ennélfogva

$$|g^{(m)}(x)-g^{(n)}(x)|\leqq|g^{(m)}(x)-g^{(m)}(r)|+$$
$$+|g^{(m)}(r)-g^{(n)}(r)|+|g^{(n)}(r)-g^{(n)}(x)|<3\varepsilon;$$

ez a becslés az (a, b) köz minden x helyére érvényes, mert r gyanánt mindig a legközelebbi osztáspontot vehetjük. Vagyis elég nagy m-nél és n-nél minden x-re

$$|g^{(m)}(x)-g^{(n)}(x)|<3\varepsilon,$$

azaz kisebb egy előre megadott tetszésszerint kicsiny számnál; a $\{g^{(n)}\}$ sorozat tehát egyenletesen összetartó.

Nézzük most már a $\{g_n=K[f_n]\}$ sorozatot, a hol $\{f_n\}$ korlátos sorozat, melyre tehát az $\|f_n\|$ normák egy G korlát alatt maradnak. Akkor

$$|g_n(x) - g_n(x')| = \left|\int_a^b (K(x, y) - K(x', y)) f_n(y)\, dy\right| \leqq$$

$$\leqq G \int_a^b |K(x, y) - K(x' y)|\, dy.$$

Minthogy $K(x, y)$ folytonos, az utolsó integrálban az integrandus, tehát maga az integrál is és így végre $|g_n(x) - g_n(x')|$ is — és pedig valamennyi n-re egyenlő mértékben — tetszésszerint kicsinynyé tehető azáltal, hogy $|x-x'|$-t elég kicsinynek választjuk. Vagyis az ARZELÀ-féle feltétel teljesítve van és így a $\{g_n = K[f_n]\}$ sorozat valóban compact.

Az integráltypusú K transformatio tehát lineáris és teljesen folytonos. Tekintsük most a $B = E - K$ transformatiót és tegyük fel először, hogy $\nu = 0$. Akkor létezik a B^{-1} invers transformatio. Minthogy

$$B^{-1} - B^{-1}K = B^{-1}(E-K) = B^{-1}B = E,$$

azért

$$B^{-1} = E + B^{-1}K = E - H,$$

a hol $H = -B^{-1}K$ szintén teljesen folytonos transformatio. Mutassuk meg, hogy a H transformatio is *integráltypusú*, hogy tehát *az*

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x)$$

integrálegyenlet megfordítását egy teljesen hasonló alakú egyenlet,

$$f(x) = g(x) - \int_a^b H(x, y) g(y)\, dy$$

szolgáltatja. Ez az állítás speciális esetként $(T = -B^{-1})$ foglaltatik a következőben: *Ha T egy tetszésszerinti, K pedig egy integráltypusú linearis transformatio, akkor a $H = TK$ linearis transformatio is integráltypusú.* Hogy ezt az állítást bebizonyítsuk, értelmezzük először is a megfelelő $H(x, y)$ függvényt úgy, hogy $K(x, y)$-ban az y változót egy pillanatra állandónak tekintjük és $K(x, y)$-ra, mint az x változó függvényére, a T

transformatiót alkalmazzuk. Ilyen módon $H(x, y)$-t az y minden értékére mint x folytonos függvényét értelmeztük. Hogy $H(x, y)$ mint két változós függvény is folytonos, az következik az egyenletes convergentiának megmaradásából linearis transformatiónál. E szerint ugyanis az $y_n \to y^*$ és ennélfogva egyenletesen $K(x, y_n) \to K(x, y^*)$ relatiókból következik, hogy ugyancsak egyenletesen $H(x, y_n) \to H(x, y^*)$. Meg kell még mutatnunk, hogy az így értelmezett folytonos $H(x, y)$ függvénynek megfelelő H transformatio egyenlő TK-val. Ez a határozott integrál definitiója alapján határátmenet segítségével következik a

$$\sum_{k=1}^{n} H(x, y_k) f(y_k)(y_{k+1}-y_k) = \sum_{k=1}^{n} T[K(x, y_k)] f(y_k)(y_{k+1}-y_k) =$$
$$= T\left[\sum_{k=1}^{n} K(x, y_k) f(y_k)(y_{k+1}-y_k)\right]$$

identitásból, mely viszont a $H(x, y)$-t értelmező

$$H(x, y_k) = T[K(x, y_k)]$$

formulából és T distributivitásából következik.

A $K(x, y)$ függvény és a $H = B^{-1}K$ transformatiónak megfelelő $H(x, y)$ függvény közt a

$$K(x, y) + H(x, y) = \int_a^b K(x, u) H(u, y)\, du =$$
$$= \int_a^b H(x, u) K(u, y)\, du$$

összefüggések állanak fönn, mely összefüggések közvetetlenül folynak az

$$(E-K)(E-H) = (E-H)(E-K) = E,$$

azaz

$$K + H = KH = HK$$

identitásokból. Egyszersmind ezek az identitások, *sőt már egyedül a $K + H = KH$ identitás egyértelműen határozza meg a H transformatiót,* tehát a $H(x, y)$ függvényt is; az identitás ugyanis azt mondja ki, hogy az $f = g - H[g]$ függvény kielégiti az $f - K[f] = g$ egyenletet, hogy tehát ez az egyenlet minden g-nél megoldható; már pedig ebben az esetben a 3. tétel szerint a g függvény megadásával az f megoldás és így a $H[g] = g - f$ függvény is egyértelműen van meghatározva. Ha tehát H és K között a $K+H = KH$ összefüggés áll fönn, akkor $E-K$ megfordítható, megfordítása $E-H$, és így végre fönnáll a $K+H = HK$ összefüggés is.

Most már módunkban van, hogy az úgynevezett *transponált* integrálegyenletet is rövidesen elintézzük. Legyen

$$\mathfrak{K}(x, y) = K(y, x)$$

és legyen $\mathfrak{K}$ a megfelelő transformatio; akkor az $\mathfrak{f} - \mathfrak{K}[\mathfrak{f}] = \mathfrak{g}$ egyenletet az előbbihez transponált typusúnak mondjuk. Megfordítva, az $f - K[f] = g$ egyenlet az $\mathfrak{f} - \mathfrak{K}[\mathfrak{f}] = \mathfrak{g}$ egyenlethez transponált typusú. Ha már most az egyik typusra nézve az általános megfordíthatóság esete forog fönn, akkor *ugyanez áll a másikra is,* mert a $K(x, y)$ és $H(x, y)$ közti föntebbi összefüggésekből a változók fölcserélésével azonnal adódnak a megfelelő összefüggések $\mathfrak{K}(x, y)$ és $\mathfrak{H}(x, y) = H(y, x)$ között. *A transponált egyenlet megoldását e szerint az*

$$\mathfrak{f}(y) = \mathfrak{g}(y) - \int_a^b H(x, y)\, \mathfrak{g}(x)\, dx$$

formula szolgáltatja.

Vizsgáljuk most a $\nu > 0$ esetet. Nem fogjuk az összes nyert eredményeket az integrálegyenletek elméletének terminologiájával átfogalmazni, hanem csupán a leglényegesebbekre szorítkozunk. Világos első sorban, hogy a $\nu > 0$ eset egyidejűleg forog fönn a $B = E - K$ és $\mathfrak{B} = E - \mathfrak{K}$ transformatiókra nézve, mert hiszen előbb láttuk, hogy $\nu = 0$-ból az egyikre nézve ugyanez következik a másikra is. Ebből és a 7. tételből közvetlenül következik a FREDHOLM-*féle alternativa:*

Vagy van minden megadott g-re, illetőleg $\mathfrak{g}$-re az

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x), \quad \mathfrak{f}(y) - \int_a^b K(x, y)\, \mathfrak{f}(x)\, dx = \mathfrak{g}(y)$$

egyenleteknek egy-egy egyértelműen meghatározott megoldása, *vagy ha nincs, akkor a megfelelő homogen egyenleteknek vannak az identikusan eltűnőn kívül még más megoldásai.*

Fredholm további tételei, nevezetesen a két homogen egyenlet linearisan független megoldásai számának megegyezése, valamint az e megoldások által kifejezett föltétele a nem-homogen egyenletnek megadott g-nél, illetőleg $\mathfrak{g}$-nél való megoldhatóságának, a fönti tételből egy egyszerű fogással származtathatók le, melyet nemrég közölt Hurwitz W. A. amerikai mathematikus.[1] A 10., 11. és 13. tétel fölhasználásával egy másik eljárást is követhetünk, mely messzebb vezet és mélyebb betekintést enged az összes nullaelemek viselkedésébe. Röviden vázoljuk ezt az eljárást. Bontsuk szét a K transformatiót a 10. tételnek megfelelően orthogonális részekre:

$$K = K_1 + K_2,\quad K_1K_2 = K_2K_1 = 0,\quad K_1 = B^{(0)}K,\quad K_2 = (E - B^{(0)})\,K.$$

A K_1 és K_2 transformatiók szorzatelőállításában a K tényező integráltypusú; ennélfogva K_1 és K_2 *is integráltypusúak.* E szerint tehát a $K(x, y)$ függvény is megfelelően szétesik a $K_1(x, y)$ és $K_2(x, y)$ függvényekre. Azt állítom, hogy *a* $\mathfrak{K}(x, y)$ *transponált függvény hasonló fölbontását a* K_1*-hez és* K_2*-höz transponált* $\mathfrak{K}_1$ *és* $\mathfrak{K}_2$ *függvények szolgáltatják.* Ugyanis egyrészt K_2 a $B = E - K$ transformatiónak minden magelemét 0-ba viszi át; ezt a tényt pedig, minthogy a magelem általános alakja $B^\nu[f]$, a $K_2B^\nu = 0$ identitás fejezi ki. De K_2 és B felcserélhetők, ennélfogva egyszersmind $B^\nu K_2 = 0$ és ha ezt az identitást, mint a K és K_2 függvények közötti integrálösszefüggést írjuk fel és azt transponáljuk, azaz a változókat felcseréljük, akkor az így nyert integrálösszefüggés a $\mathfrak{K}_2\mathfrak{B}^\nu = 0$ identitást szolgáltatja. Minthogy pedig a $\mathfrak{B}$ transformatio összes magelemei minden n-re, tehát $n = \nu$-re is, a $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$ alakban írhatók, azért a nyert identitás szerint *a* $\mathfrak{K}_2$ *transformatio* $\mathfrak{B}$ *minden magelemét* 0*-ba viszi át.* Másrészt

---

[1] W. A Hurwitz: *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation,* Transactions of the American Math. Soc., Vol. 13 (1912), p. 405—418.

$$K_1 = K_1 - K_2K_1 = (E - K_2)\, K_1 = B_2K_1;$$

és így általánosságban $K_1 = B_2^n K_1$, a miből a B_1 transformatio megfordítható és B_1 és B_2 fölcserélhető voltánál fogva a

$$B = B_1B_2 = B_2B_1$$

identitás tekintetbevételével a

$$K_1 = B_2^n B_1^n (B_1^{-1})^n K_1 = B^n (B_1^{-1})^n K_1$$

összefüggés, ebből pedig a fent vázolthoz hasonló transponálással a $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1 (\mathfrak{B}_1^{-1})^n \mathfrak{B}^n$ identitás következik, úgy hogy tehát minden olyan $\mathfrak{f}$-re, melyre n valamely értékénél $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}] = 0$, egyszersmind $\mathfrak{K}_1[\mathfrak{f}] = 0$. Vagyis *a* $\mathfrak{K}_1$ *transformatio* $\mathfrak{B}$ *minden nullaelemét* 0*-ba viszi át.* Tehát $\mathfrak{K}_1$-nek és $\mathfrak{K}_2$-nek megvannak azok a sajátságai, melyek a 10. tétel szerint a fölbontást *egyértelműen* jellemzik.

A mi már most a tárgyalt fölbontásnak a B és $\mathfrak{B}$ transformatiók megvizsgálása szempontjából való különös jelentőségét illeti, először is a 11. tétel szerint a B és B_2, illetőleg a $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}_2$ transformatiók magrendszerei és nullarendszerei közösek, továbbá az az első n exponens, melyre $B^n[f]$, $B_2^n[f]$, illetőleg $\mathfrak{B}^n[\mathfrak{f}]$, $\mathfrak{B}_2^n[\mathfrak{f}]$ identikusan eltűnnek, ugyanannál az f, illetőleg $\mathfrak{f}$ függvénynél mindkét transformatióra nézve ugyanaz. Ez utóbbi jelenségnek okát már a 10. tétel megadja, mely szerint tudniillik B és B_2, illetőleg $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}_2$ a megfelelő nullarendszerekre nézve megegyeznek egymással. Ezek szerint a $K(x, y)$ függvény az idevágó kérdések, így például a nem-homogen egyenlet megoldható voltának, vagy a homogen egyenlet linearisan független megoldásai számának, vagy általánosabban a nullaelemek kanonikus csoportosításának vizsgálatánál *teljesen helyettesíthető a* $K_2(x, y)$ *függvénynyel.* Ez a függvény pedig egészen *speczialis* alakú, tudniillik

$$K_2(x, y) = f_1(x)\,\mathfrak{f}_1(y) + \cdots + f_m(x)\,\mathfrak{f}_m(y),$$

a hol $f_1, \ldots, f_m$ a B transformatiónak, $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ pedig a $\mathfrak{B}$ transformatiónak nullaelemei. Ugyanis a $K_2(x, y)$ függvényt a $K(x, y)$ függvényből úgy számaztattuk, hogy azt egy pillanatra tisztán x függvényének tekintve, alkalmaztuk rá az $E-B^{(0)}$ transformatiót, a mely pedig minden függvényhez a 8. tétel szerint való fölbontásnál nyert nullaelemet rendeli. E szerint $K_2(x, y)$, mint x függvénye, a B transformatióra nézve nullaelem és így előállítható mint bizonyos véges számú egymástól linearis független nullaelemnek, $f_1, \ldots, f_m$-nek lineáris kapcsolata. A coefficiensek természetesen nem állandók, hanem y függvényei: $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$. Mutassuk meg, hogy ezek a függvények viszont a $\mathfrak{B}$ transformatióra nézve nullaelemek. E végett először is arra emlékeztetünk, hogy a $\mathfrak{K}_2$ transformatio minden függvényt $\mathfrak{B}$ egy-egy nullaelemébe visz át; már pedig az $\mathfrak{f}_1$ függvényt, a mint ez a $\mathfrak{K}_2$ transformatio integrálelőállításán világosan szemlélhető, úgy származtathatjuk, hogy $\mathfrak{K}_2$-t egy olyan $\mathfrak{f}$-re alkalmazzuk, melynek f_1-gyel alkotott szorzatintegrálja 1, míg a többi f_i-vel 0. Ilyen $\mathfrak{f}$ függvény az $f_1, \ldots, f_m$ függvények linearisan független voltánál fogva, mint jól ismeretes, a conjugált $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ függvények linearis kapcsolatai közt csakugyan található. E szerint az $\mathfrak{f}_1$ a $\mathfrak{B}$-re nézve valóban nullaelem és ugyanígy nullaelemek $\mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$ is.

A $K_2(x, y)$ függvény imént megállapított speciális structurája folytán a már említett kérdések, a mint arra különben már a 11. tétel alkalmából is ráutaltunk, az

$$a_{ij} = \int_a^b f_i(x)\, \mathfrak{f}_j(x)\, dx \qquad (i, j=1, \ldots, m)$$

képlettel értelmezett m^2 elemből álló négyzetes matrixra vonatkozó hasonló kérdésekre vezethetők vissza; a matrix vizsgálatakor hasznos szolgálatot tesz a 13. tétel is, a melyből könnyen következik az $\{a_{ij}\}$ matrixnak az a speciális sajátsága, hogy jellemző determinánsának, $|\varepsilon_{ij} - \lambda a_{ij}|$-nek (a hol $\varepsilon_{ii} = 1$, míg $i \neq j$ esetén $\varepsilon_{ij} = 0$) *a $\lambda = 1$ érték az egyetlen, azaz m-szeres zéróhelye.* A $B_2 = E - K_2$ typusú transformatiók további, részletes vizsgálata és a megfelelő irodalmi adatok tekintetében elég, ha Lalesco T. «Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris, 1912)» czimű könyvére, különösen annak 49—59. oldalára utalunk.

Végül megjegyzem, hogy az ebben a §-ban végzett vizsgálatok nagyon könnyen kiterjeszthetők olyan esetekre, a melyekben a $K(x, y)$ függvény nem kivétel nélkül folytonos, így például arra a különösen fontos esetre, melyben a függvény az $y = x$ egyenesen végtelenné válik, és pedig 1-nél alacsonyabb rendűen, azaz úgy, hogy $|K(x, y)| \leqq G|x-y|^{-\alpha}$, a hol α egy positiv valódi törtet jelent. Valóban, azok az integrálbecslések, melyekre a folytonosságot felhasználtuk, ebben az esetben is érvényesek. Megemlítem még, hogy általánosabb értelemben minden linearis transformatio integráltypusú, tudniillik, mint ezt néhány év előtt végzett vizsgálataim[1] mutatják, minden linearis transformatio előállítható STIELTJES-*féle integrállal.* Az ennél az előállításnál szereplő kétváltozós függvénynek pontos jellemzése úgy az általános, mint a teljesen folytonos esetben könnyen végezhető.

[1] F. RIESZ: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires,* Comptes rendus de l'Acad. d. Sc., Paris, 29 novembre 1909.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 február 14.-én tartott üléséből.)

A MEREV RENDSZEREK MOZGÁSÁNAK GEOMETRIAI KÉPE.

SUTÁK JÓZSEF-től.

Előszó.

A mozgás geometriai szemléltetését előmozdító vonalfelületeket, mivel alkotóik Mozzi-féle tengelyek, Mozzi-féle *felületeknek neveztem.*

A Mozzi-féle felületek homolog görbéire nézve itt kifejtendő általános tételek mint speciális eseteket Resal-nak a strictiogörbékre vonatkozó tételeit is magukban foglalják, minthogy ezek is homolog görbék.

Az alkotókra centrális pontjukban merőleges normálmetszetek tételének vitás kérdése az úgynevezett Resal-Gautero-féle kérdés Resal javára elintézést nyert.

Az egymáson gördülő Mozzi-féle felületekre nézve itt csak néhány evidens tételt említettem meg.

A reciprok-feladat tárgyalása elvezetett Resal-nak egyik legnehezebben megközelíthető szép tételéhez, melyet Königs úgylátszik Resal-tól függetlenül szintén megállapított.

1. A Mozzi-féle felületek definitiója.

Ha merev rendszerünk egy tetszésszerinti pontja Q és ennek az idő szerint vett differentiálhányadosa Q', akkor t időben a Mozzi-féle tengely helye a térben [1]

---

[1] V. ö. Suták József: Math. és Termt. Ért. XXXIV. k. 699. l. 1916.

$$P = Q - \frac{1}{\bar{\omega}^2} Q' \times \bar{\omega} + \lambda \bar{\omega}, \tag{I}$$

hol $\bar{\omega}$ a momentán forgási tengely és λ az időtől függetlenül változó parameter.

A különböző időpontokhoz tartozó Mozzi-*féle tengelyek a térben egy vonalfelületet határoznak meg, melyet fix* Mozzi-*féle felületnek nevezünk és ezután F_m-mel jelölünk.*

F_m egyenlete tehát az I. alatt levő egyenlet.

Ha pedig az I. egyenletben úgy a Q pontot, mint a merev rendszerhez kötött derékszögű jobbra forgó i, j, k rendszert fixnek tekintjük, akkor az a merev rendszerhez kötött vonalfelület egyenletévé lesz, mely vonalfelületnek az alkotói a merev rendszer mozgása közben rendre egybeesnek F_m alkotóival; *ezt a vonalfelületet a merev rendszerhez kötött* Mozzi-*féle felületnek nevezzük és F_{m_0}-sal jelöljük.*

Ha annak, hogy az (I) egyenletben a (Q, i, j, k) rendszert fixnek tekintjük, külsőleg úgy adunk kifejezést, hogy a benne előforduló betűket 0 indexszel látjuk el, akkor F_{m_0} egyenlete

$$P_0 = Q_0 - \frac{1}{\bar{\omega}_0^2} Q_0 \times \bar{\omega}_0 + \lambda_0 \bar{\omega}_0. \tag{II}$$

A mozgás bármely t időpontjában a

$$(Q_0, i_0, j_0, k_0) = (Q, i, j, k)$$

következtében:

$$(P_0, Q_0, Q'_0, \bar{\omega}_0) = (P, Q. Q', \bar{\omega}). \tag{A}$$

Gömbi mozgás esetében a merev rendszer egyik pontja C állandóan nyugalomban marad. Ha már most Q pontul ezt a C pontot választjuk, akkor F_m és F_{m_0} egyenletei rendre:

$$P = C + \lambda \bar{\omega},$$
$$P_0 = C + \lambda_0 \bar{\omega}_0,$$

mely egyenletek C csúcsú kúpok egyenletei.

Henger-mozgás esetében $\bar{\omega}$ állandóan párhuzamos marad egy fix egyenessel, miért is ebben az esetben F_m és F_{m_0} hengerekké válnak.

A MOZZI-féle felületeket CAUCHY fedezi fel 1827-ban.[1] A síkmozgásra vonatkozó MOZZI-féle henger-felületeket CHASLES fedezi fel 1830-ban.[2] A MOZZI-féle kúpokat pedig POINSOT látja meg először 1834-ben.

2. Homolog pontok és görbék.

A két MOZZI-féle felületnek a t, λ parametereknek ugyanahhoz az értékrendszeréhez tartozó pontjait *homolog pontoknak* nevezzük.

A két felületnek oly görbéit, melyeknek ugyanaz az egyenlete, mondjuk

$$\varphi(t, \lambda) = 0,$$

homolog görbéknek mondjuk. Egyenletünk révén λ-t t függvényének tekintjük.

Mozgás közben F_{m_0} és F_m homolog görbéi a homolog pontokban rendre fedésbe kerülnek.

3. Differentiálási szabályok.

Az F_{m_0} felület $P_0(t, \lambda)$ pontjában P_0-nek a $\varphi(t, \lambda) = 0$ görbe mentén a t szerint vett differentiálhányadosa:

$$\frac{dP_0}{dt} = P_0' = -\left[\frac{1}{\overline{\omega}_0^2} Q_0' \times \overline{\omega}_0\right]' + \lambda \overline{\omega}_0' + \lambda' \overline{\omega}_0. \qquad \text{(III)}$$

Az F_m felület homolog pontjában a homolog görbe mentén P-nek t szerint vett differentiálhányadosa:

$$\frac{dP}{dt} = P' = P_0' + Q' + \overline{\omega} \times (P - Q). \qquad \text{(III')}$$

Ha már most megfontoljuk, hogy a mozgás t idejében teljesülnek az (A) alatt levő feltételek; továbbá, hogy az (I) alapján

[1] CAUCHY: Exercises de Mathématiques t. 2. p. 87. 1827.

[2] CHASLES: Bull. des sciences math. t. 14. p. 321. 1830.

[3] POINSOT: Théorie nouvelle de la rotation des corps 1834. Journ. de Math. t. 16. p. 26. 1851.

$$\bar{\omega}\times(P-Q)=\frac{\bar{\omega}.Q'}{\bar{\omega}^2}\bar{\omega}-Q'.$$

akkor látjuk, hogy

$$P'=P'_0+\frac{\bar{\omega}.Q'}{\bar{\omega}^2}\bar{\omega}.$$

Ha a Mozzi-féle tengely mentén t időben a sebesség M', akkor ismeretes tételnél fogva

$$Q'.\bar{\omega}=|M'|\,|\bar{\omega}|,\quad |M'|\,\bar{\omega}=|\bar{\omega}|\,M',$$

következőleg:

$$P'=P'_0+M'. \qquad \text{(IV)}$$

Megemlékezhetünk még az $\bar{\omega}$-ra vonatkozó, különben ismeretes differentiálási szabályról is, mely szerint:

$$\frac{d\bar{\omega}_0}{dt}=\bar{\omega}'_0,\quad \frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{\omega}'_0+\bar{\omega}\times\bar{\omega}=\bar{\omega}'_0. \qquad \text{(V)}$$

4. F_{m_0} mozgásának általános jellemzése.

Mivel M' definitiójánál fogva párhuzamos $\bar{\omega}$-val, azért a (IV) alapján

$$P'\times\bar{\omega}=P'_0\times\bar{\omega}_0,$$

azaz:

A Mozzi-*féle felületek az egybeeső homolog pontokban érintkeznek.*

Mivel az egybeeső alkotók fedésbe kerülő pontjai homolog pontok, azért:

Egy és ugyanabban az időben a két Mozzi-*féle felület az egybeeső alkotók mentén érintkezik.*

Hogy az érintkezés $P_0(t,\lambda)$ pontból a $P_0(t+dt,(\lambda+\lambda'dt)$ pontra menjen át: F_{m_0}-nak nem csupán P'_0 irányában $|P'_0|\,dt$ ívelemmel kell tovább gördülnie, hanem még $M'dt$ siklást is kell végeznie, mert a (IV) értelmében az F_{m_0} felület

$$P_0(t+dt,\ \lambda+\lambda'dt)$$

pontja csak így juthat az F_m felület homolog

$$P(t+dt,\ \lambda+\lambda' dt)$$

pontjával érintkező módon fedésbe; ha már most F_{m_0}-nak az F_m-en történő eme mozgását *siklással gördülő mozgásnak* nevezzük, akkor kimondhatjuk a következő tételt:

A merev rendszer mozgása úgy történik, hogy a vele kapcsolatos F_{m_0} a térbeli F_m-en az alkotók irányába eső siklással gördülő mozgást végez.

F_{m_0} az F_m-en akkor és csakis akkor végez tisztán gördülő mozgást, ha $M'=0$.

Mivel F_{m_0} minimális görbéire nézve $dP_0=0$, azért:

F_{m_0} a maga minimális görbéivel homolog görbék mentén F_m-en tiszta sikló mozgást végez.

5. A homolog görbék viszonya az alkotókhoz.

Mivel az alkotók maguk is homolog görbék, azért csak a szomszédos homolog pároknak hajlásszögét kell figyelembe venni. Ha ezt a szöget $d\varphi_0$-, illetőleg $d\varphi$-vel jelöljük, akkor

$$d\varphi_0=\frac{|\bar\omega_0\times(\bar\omega_0+d\bar\omega_0)|}{\bar\omega_0^2},$$
$$d\varphi=\frac{|\bar\omega\times(\bar\omega+d\bar\omega)|}{\bar\omega^2}.$$

Az (V) alatt levő egyenletek alapján tehát

$$d\varphi_0=d\varphi=\frac{|\bar\omega\times\bar\omega'|}{\bar\omega^2}dt. \tag{VI}$$

Ha a homolog görbéknek a homolog alkotókkal képezett szögeit rendre α_0, α-val jelöljük, azaz:

$$(P_0',\ \bar\omega_0)=\alpha_0,\ (P',\ \bar\omega)=\alpha,$$

akkor a (IV) egyenlet alapján felírható

$$P'\times\bar\omega=P_0'\times\bar\omega_0,$$
$$P'\cdot\bar\omega=P_0'\cdot\bar\omega_0+M'\cdot\bar\omega$$

relatiókból következik, hogy

$$|P'| \sin \alpha = |P_0'| \sin \alpha_0; \qquad \text{(VII)}$$
$$|P'| \cos \alpha = |P_0'| \cos \alpha_0 + |M'|. \qquad \text{(VIII)}$$

6. A Mozzi-féle felületek strictio-vonala.

F_{m_0} felület $P_0(t, \lambda_0)$ és $P_0(t+dt, \lambda_0+d\lambda_0)$ pontjainak egymástól való távolságának négyzete, ha P_0-nak t szerint vett partiális differentiálhányadosát P_{0t}-vel jelöljük,

$$dP_0^2 = (P_{0t}dt + \overline{\omega}_0 d\lambda_0)^2;$$

ez az $\overline{\omega}_0(t)$ és $\overline{\omega}_0(t+dt)$ alkotók minimális távolságával egyenlő, ha λ_0 és $d\lambda_0$ szerint vett differentiálhányadosai eltűnnek, azaz:

$$\begin{aligned} P_{0t}\cdot\overline{\omega}_0' dt + \overline{\omega}_0\cdot\overline{\omega}_0' d\lambda_0 &= 0, \\ P_{0t}\cdot\overline{\omega}_0 dt + \quad \overline{\omega}_0^2 d\lambda_0 &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

De ez a két egyenlet egyidejüleg csak úgy állhat fenn, ha

$$\overline{\omega}_0^2 P_{0t}\cdot\overline{\omega}_0' - (\overline{\omega}_0\cdot\overline{\omega}_0')(P_{0t}\cdot\overline{\omega}_0) = 0. \qquad \text{(IX)}$$

Mivel ez az egyenlet a (III) értelmében λ-ban első fokú, azért minden alkotón csak egy oly pont van, melynek a szomszédos alkotó pontjaitól van minimális távolsága, ezt a pontot az alkotó *centrális pontjának*, az ezen ponthoz tartozó érintő síkot az alkotó *centrális síkjának* nevezzük.

A centrális pontok halmaza a felületen a (IX) egyenlettel meghatározott görbét alkot, melyet a felület *strictio-vonalának* nevezünk.

Az (1) egyenletek másodika alapján

$$d\lambda_0 = -\frac{P_{0t}\cdot\overline{\omega}_0}{\overline{\omega}_0^2}\, dt, \qquad (2)$$

következőleg:

$$dP_{0\,\min} = \frac{\overline{\omega}_0^2 P_{0t} - (\overline{\omega}_0\cdot P_{0t})\,\overline{\omega}_0}{\overline{\omega}_0^2}\, dt. \qquad \text{(X)}$$

Az F_m felületre vonatkozó megfelelő kutatások eredményeit az F_{m_0}-ra vonatkozókból úgy nyerjük, hogy P_{0t} helyett minden képletben $P_t + M'$-t írunk. Az elemi számításoknak az $M' \| \overline{\omega}$ figyelembe vételével való végrehajtása a következő képletekhez vezet:

$$d\lambda = d\lambda_0 - \frac{\overline{\omega}_0 \cdot M'}{\overline{\omega}_0^2} dt, \tag{3}$$

$$dP_{\min} = dP_{0\,\min}. \tag{XI}$$

Mivel a jelzett substitutióval a (IX) alatt levő egyenlet sem változik, azért:

A két Mozzi-*féle felület strictio-vonalai homolog vonalak.*

Megemlítjük még a (X) és (XI)-ből evidens következő tételt is:

$$dP_{0\,\min} \cdot \overline{\omega}_0 = dP_{\min} \cdot \overline{\omega} = 0.$$

A (VI) és (XI) alatt levő képletek alapján pedig:

$$\frac{|dP_{0\,\min}|}{d\varphi_0} = \frac{|dP_{\min}|}{d\varphi} = k,$$

azaz: *a két* Mozzi-*féle felület eloszlási parameterei egyenlők.*

A (XI) alapján evidens még a következő tétel is.

A két Mozzi-*féle felület egyszerre lefejthető, vagy egyszerre le nem fejthető felület.*

Mivel a két Mozzi-féle felület strictio-vonalai homolog görbék, azért ezekre is érvényesek a (VII) és (VIII) alatt levő egyenletek. Ezeknek az egyenleteknek, ha a strictio-vonalak ívelemeit rendre ds_0, ds-sal jelöljük, a következő alakot is adhatjuk:

$$ds \sin \alpha = ds_0 \sin \alpha_0, \tag{VII'}$$

$$ds \cos \alpha = ds_0 \cos \alpha_0 + |M'|\, dt. \tag{VIII'}$$

Ezeket az egyenleteket a strictio-vonalra nézve először Resal állapította meg.[1]

A

$$|dP_{\min}| = |dP_{0\,\min}| = d\sigma$$

alkalmazásával

[1] Resal: Traité de Cinématique pure 1862. p. 145.

$$d\sigma = ds \sin \alpha = ds_0 \sin \alpha_0, \tag{4}$$

következőleg a (VIII') alapján

$$|M'| \frac{dt}{d\sigma} = \text{ctg}\, \alpha - \text{ctg}\, \alpha_0. \tag{XII}$$

Ha a Mozzi-féle felületek lefejthető felületek, akkor $d\sigma = 0$. Ennélfogva, ha

$$\frac{dP_0}{ds_0} = \bar{e}_0, \quad \frac{dP}{ds} = \bar{e},$$

akkor a (4) alapján

$$\bar{e}_0 \,||\, \bar{e} \,||\, \bar{\omega},$$

következőleg a (VI)-hoz vezető következtetés alkalmazásával

$$|d\bar{e}_0| = |d\bar{e}| = d\varphi,$$

ennélfogva a

$$\frac{d\bar{e}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\varrho}, \quad \frac{d\bar{e}_0}{ds_0} = \frac{\bar{n}_0}{\varrho_0}$$

egyenletek alapján, melyekben ϱ és ϱ_0 a strictio-vonalak görbületi sugarai, $\bar{n}$ és $\bar{n}_0$ pedig fönormálisai:

$$\frac{ds}{\varrho} = \frac{ds_0}{\varrho_0} = d\varphi. \tag{XIII}$$

Ha a lefejthető felületek egyike például F_{m_0} kúp, akkor ennek strictio-vonalára nézve $dP_0 = 0$; tehát ez minimális vonal és mivel ez a kúp csúcsa, azért ez F_m strictio-vonalán végig fog siklani; a (XIII) formula pedig a jelen esetben így módosul:

$$\frac{ds}{\varrho} = d\varphi. \tag{XIII'}$$

A (VIII), illetőleg a (VIII') alatt levő képletek a jelen esetben is érvényben maradnak.

A (XIII) és (XIII') alatt levő tételeket először Duport állapította meg 1899-ben.[1]

---

[1] Duport: Nouv. Ann. d. Math. (3) 1899. p. 21—22.

7. Az alkotókra centrális pontjukban merőleges normálmetszetek.

Ha P_0 s P az $\bar{\omega}(t)$ $\bar{\omega}_0(t)$ homológ alkotók centrális pontjai, akkor az ezekben a pontokban az alkotókra merőleges normálmetszetek ívelemének hosszát a következő egyenlet szolgáltatja:

$$|dP_0| = |dP| = d\sigma,$$

hol a (XI) alapján

$$dP = dP_0,\quad dP\cdot\bar{\omega} = dP_0\cdot\bar{\omega}_0 = 0,$$

tehát

$$d^2P = d^2P_0 + (\bar{\omega}\times dP_0)\,dt,$$

honnan

$$dP\times d^2P = dP_0\times d^2P_0 + (dP_0)^2\,\bar{\omega}dt\,;$$

ebből pedig tekintettel $d\sigma$ jelentményére:

$$\frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}\cdot\frac{dP\times d^2P}{|dP|^3} - \frac{\bar{\omega}_0}{|\bar{\omega}_0|}\,\frac{dP_0\times d^2P_0}{|dP_0|^3} = |\bar{\omega}|\frac{dt}{d\sigma},$$

a mi a (XII) alatt bemutatott tételünk értelmében a következő alakban írható:

$$\frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}\cdot\frac{dP\times d^2P}{|dP|^3} - \frac{\bar{\omega}_0}{|\bar{\omega}_0|}\,\frac{dP_0\times d^2P_0}{|dP_0|^3} = \frac{|\bar{\omega}|}{|M'|}\,(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha_0). \quad \text{(XIV)}$$

Ez a RESAL-féle tételnek [1] szabatosabb alakja, melyet GAUTERO [2] 1882-ben tévesnek jelzett s a mely állításának nagy analytikai apparatusával hivőket is biztosított,[3] jóllehet — miként ezt már más alkalommal [4] is jeleztem — GAUTERO hiányos intuitiója révén csak a RESAL-féle tételek egy részéhez juthatott el és ezek közül is hibás szemlélet révén, a mennyiben a t parameter $t+dt$ értékénél a vizsgálatot F_{m_0}-nak $t+dt$ időpontbeli helyzetére vonatkoztatja, holott ebben az időpontban már más a normálmetszet, a legutóbbi tételt téves alakban nyeri.

---

[1] RESAL: Traité de Cinématique pure. p. 146. 1862.

[2] GAUTERO: Giornali di Matematiche t. XX. 1882. p. 168.

[3] Encyklopädie d. Math. Wissenschaften IV. 1., Heft 2. p. 233.

[4] SUTÁK JÓZSEF: Math. és Termt. Ért. XXXV. k. 85. l. 1917.

8. Az egymáson gördülő Mozzi-féle felületek.

Ha $M' = 0$, akkor F_{m_0} az F_m-en tiszta gördülő mozgást végez. Ha tehát a két homolog görbe mentén az érintőt, a felületi normálist, a normális görbületet, a geodætikus görbületet s a geodætikus torsiót rendre így jelöljük

$$\bar{e},\ \bar{\nu},\ \frac{1}{\varrho_{\nu_s}},\ \frac{1}{\varrho_{g_s}},\ \frac{1}{\tau_{g_s}},^{5}$$

akkor

$$\bar{\omega} = -v\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right)\bar{e} - v\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right)\bar{\nu}\times\bar{e} + v\left(\frac{1}{\varrho_{g_s}} - \frac{1}{\varrho_{g_{s_0}}}\right)\bar{\nu},$$

hol

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_0}{dt}.$$

Mivel $\bar{\omega}$ a felület alkotója, tehát $\bar{\omega} \perp \bar{\nu}$ s így $\bar{\omega}\cdot\nu = 0$, következőleg:

$$\bar{\omega} = -v\left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right)\bar{e} - v\left(\frac{1}{\varrho_{\nu_s}} - \frac{1}{\varrho_{\nu_{s_0}}}\right)\bar{\nu}\times\bar{e}, \qquad \text{(XV)}$$
$$\varrho_{g_s} = \varrho_{g_{s_0}},$$

azaz: *Az egymáson gördülő* Mozzi-*féle felületek homolog görbéinek homolog pontjaiban a geodaetikus görbület ugyanaz.*

Ha $\bar{\omega}\perp\bar{e}$, akkor $\bar{\omega}\cdot\bar{e} = 0$, tehát $\tau_{g_s} = \tau_{g_{s_0}}$, azaz:

Az egymáson gördülő Mozzi-*féle felületek alkotóinak orthogonális trajectoriái mentén a homolog pontokban úgy a geodaetikus görbület, mint a geodaetikus torsio ugyanaz.*

Ha mindkét Mozzi-féle felület lefejthető, akkor a strictio-vonal mentén $\bar{\omega}\,||\,\bar{e}$, tehát $\bar{\omega}\cdot\bar{\nu}\times\bar{e} = 0$, következőleg $\varrho_{\nu_s} = \varrho_{\nu_{s_0}}$, azaz:

Az egymáson gördülő két lefejthető Mozzi-*féle felület strictio-vonalainak homolog pontjaiban úgy a geodaetikus, mint a normalis görbület ugyanaz.*

---

[5] Suták József: Math. és Termt. Ért. XXXV. k. 73. l. 1917.

A (XV) alapján megemlítjük még az $|\bar{\omega}|$ meghatározására szolgáló következő képletet:

$$\frac{\bar{\omega}^2}{v^2} = \left(\frac{1}{\tau_{g_s}} - \frac{1}{\tau_{g_{s_0}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_{v_s}} - \frac{1}{\varrho_{v_{s_0}}}\right)^2.$$

9. Reciprok tételek.

A $P_0(t, \lambda)$ vonalfelület mozogjon a $P(t, \lambda)$ vonalfelületen úgy, hogy homolog alkotóik mentén folyton érintkezzenek; leírandó a mozgás.

A kifejtendők érdekében a két vonalfelületet a következő egyenletekkel képviseljük:

$$\begin{aligned} P_0 &= Q_0 + \bar{q}_0 + \lambda\bar{\varepsilon}_0, \quad \bar{q}_0 \perp \bar{\varepsilon}_0; \\ P &= Q + \bar{q} + \lambda\bar{\varepsilon}, \quad q \perp \bar{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{1}$$

hol a λ felületi coordinata az egyenletekben csak a kiírt módon fordul elő. Egy tetszésszerint kiválasztott t időpontban téve

$$(Q_0, i_0, j_0, k_0) = (Q, i, j, k),$$

ez időpontban:

$$(P_0, Q_0, \bar{q}_0, \bar{\varepsilon}_0) = (P, Q, \bar{q}, \bar{\varepsilon}).$$

Továbbá

$$P_t = P_{0t} + Q' + \bar{\omega} \times (P - Q), \tag{2}$$

honnan

$$P_t \times \bar{\varepsilon} = P_{0t} \times \bar{\varepsilon}_0 + \{Q' + \bar{\omega} \times (P - Q)\} \times \bar{\varepsilon}.$$

Mivel az érintkezésnél fogva

$$P_t \times \bar{\varepsilon} \parallel P_{0t} \times \bar{\varepsilon}_0,$$

azért

$$[\{Q' + \bar{\omega} \times (P - Q)\} \times \bar{\varepsilon}] \times (P_{0t} \times \bar{\varepsilon}_0) = 0,$$

honnan

$$\{Q' + \bar{\omega} \times (P - Q)\} \cdot (P_{0t} \times \bar{\varepsilon}_0) = 0. \tag{3}$$

Ez az egyenlet λ minden értéke mellett csak úgy állhat meg, ha λ különböző hatványainak együtthatói eltűnnek, minek következtében aztán a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}(Q' + \bar\omega \times \bar q)\cdot(\bar q' \times \bar\varepsilon) &= 0,\\ (Q' + \bar\omega \times \bar q)\cdot(\bar\varepsilon' \times \bar\varepsilon) &= 0,\\ (\bar\omega \times \varepsilon)\cdot(\bar\varepsilon' \times \bar\varepsilon) &= 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Ez egyenletek harmadika alapján a következő két eset léphet fel:

1. $\bar\omega \parallel \bar\varepsilon$. Ekkor az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $\bar\omega = \bar\varepsilon$, tehát a (4) két első egyenlete alapján

$$(Q' + \bar\omega \times \bar q) \times \bar\omega \perp (\bar q', \bar\omega, \bar\omega'). \tag{5}$$

a) Ha vonalfelületeink nem lefejthető felületek, akkor $\bar q$, $\bar\omega$ és $\bar\omega'$ nem egysíkú vektorok, következőleg az (5) alatt levő merőlegességi feltételek csak úgy teljesülhetnek, ha

$$(Q' + \bar\omega \times \bar q) \times \bar\omega = Q' \times \bar\omega + \bar\omega^2 \bar q = 0,$$

honnan

$$\bar q = -\frac{1}{\bar\omega^2} Q' \times \bar\omega,$$

mely egyenlet a Mozzi-féle felületekhez vezet.

β) Ha pedig vonalfelületeink lefejthető felületek, akkor $\bar q'$, $\bar\omega$, $\bar\omega'$ egysíkú vektorok, következőleg a (4) alatt levő egyenletek két elseje azok egyikével, mondjuk a másodikával helyettesíthető, melynek alakja

$$(Q' \times \bar\omega + \bar\omega^2 \bar q)\cdot \bar\omega' = 0,$$

mely föltétel az előbbi esetet is magában foglalja.

Mivel a P pont elmozdulása $Q' + \omega \times (P - Q)$, a mi a (3) szerint merőleges a normálisra, azért a mozgó rendszer egyik Mozzi-féle pontja

$$M = P - (Q' \times \bar\omega + \bar\omega^2 \bar q), \tag{6}$$

mely pont a le nem fejthetőség esetében egybeesik P-vel, tehát maga az alkotó a Mozzi-féle tengely; lefejthetőség esetében pedig M rajta van a P pontbeli normálison s mivel helyzete λ-tól független, azért az M-en átmenő, az alkotóval párhuzamos egyenes lesz a Mozzi-féle tengely.

2. $\bar\omega \times \bar\varepsilon \perp \bar\varepsilon' \times \bar\varepsilon$.

Mivel az $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}' \times \bar{\varepsilon}$ vektorok síkja nem más, mint az $\bar{\varepsilon}$ alkotó centrális síkja, azért jelenlegi föltételünk révén $\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}$ merőleges $\bar{\varepsilon}$ centrális síkjára, tehát párhuzamos $\bar{\varepsilon}$ centrális pontjához tartozó felületi normálissal $\bar{\nu}$-vel, következőleg $\bar{\omega} \perp \bar{\nu}$, azaz:

$\bar{\omega}$ párhuzamos $\bar{\varepsilon}$ centrális síkjával.

Ha tehát P $\bar{\varepsilon}$ centrális pontja, akkor (3) értelmében P pont eltolódása merőleges $\bar{\nu}$-re, következőleg az imént kimondott tételünk értelmében az

$$M = P - \frac{1}{\bar{\omega}^2}\{Q' + \bar{\omega} \times (P - Q)\} \times \bar{\omega} \tag{7}$$

egyenlettel meghatározott Mozzi-féle pont rajta van $\bar{\nu}$-n, azaz:

A Mozzi-*féle tengely metszi a centrális pontokhoz tartozó felületi normalist.*

Ez 1. és 2. alatti két tételünket a következőbe foglalhatjuk össze:

A Mozzi-*féle tengely állandóan metszi a strictio-ponthoz tartozó felületi normalist és folyton párhuzamos az átmetszett normalishoz tartozó centrális síkkal.*

Világos, hogy ez a tételünk magában foglalja az 1. pontban tárgyalt speciális esetet is.

Mivel $\bar{\omega}$ párhuzamos $\bar{\varepsilon}$ és $\bar{\varepsilon}' \times \bar{\varepsilon}$ vektorok síkjával, azért $\bar{\omega}$ ily alakú:

$$\bar{\omega} = a\bar{\varepsilon} + b\bar{\varepsilon}' \times \bar{\varepsilon}.$$

Ha $\bar{\omega}$-nak ezt az értékét a (4) alatt levő egyenletek két elsejébe behelyettesítjük: a és b meghatározására két egyenletet nyerünk, ezek alapján tehát $\bar{\omega}$ ismertté s a (6) alapján M meghatározottá válik.

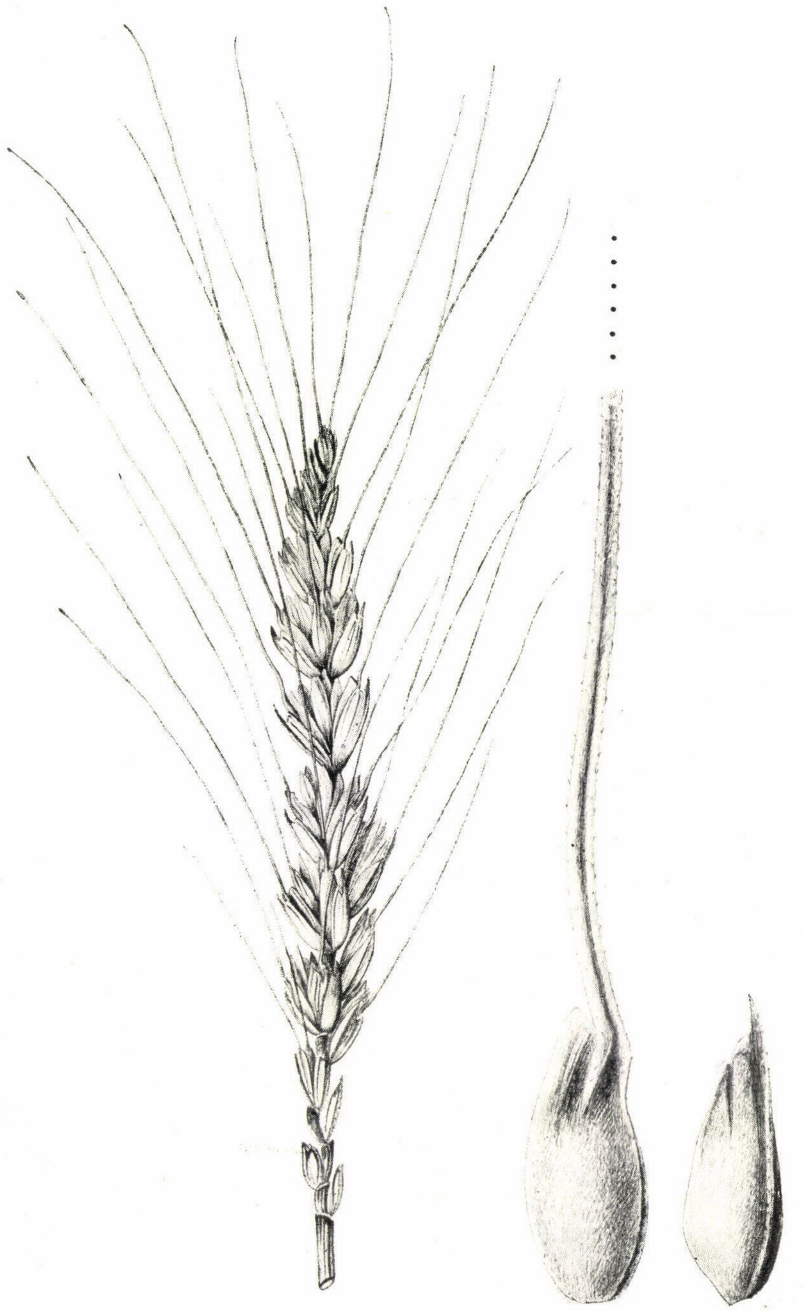
A 2. pontban megállapított tételeinkhez először Resal [1] jutott el 1862-ben, majd Königs [2] 1895-ben.

---

[1] Resal: Traité de Cinématique pure. p. 142—143. 1862.

[2] Königs: Leçons de Cinématique p. 211. 1895.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 november 13.-án tartott üléséből.)



a *b*

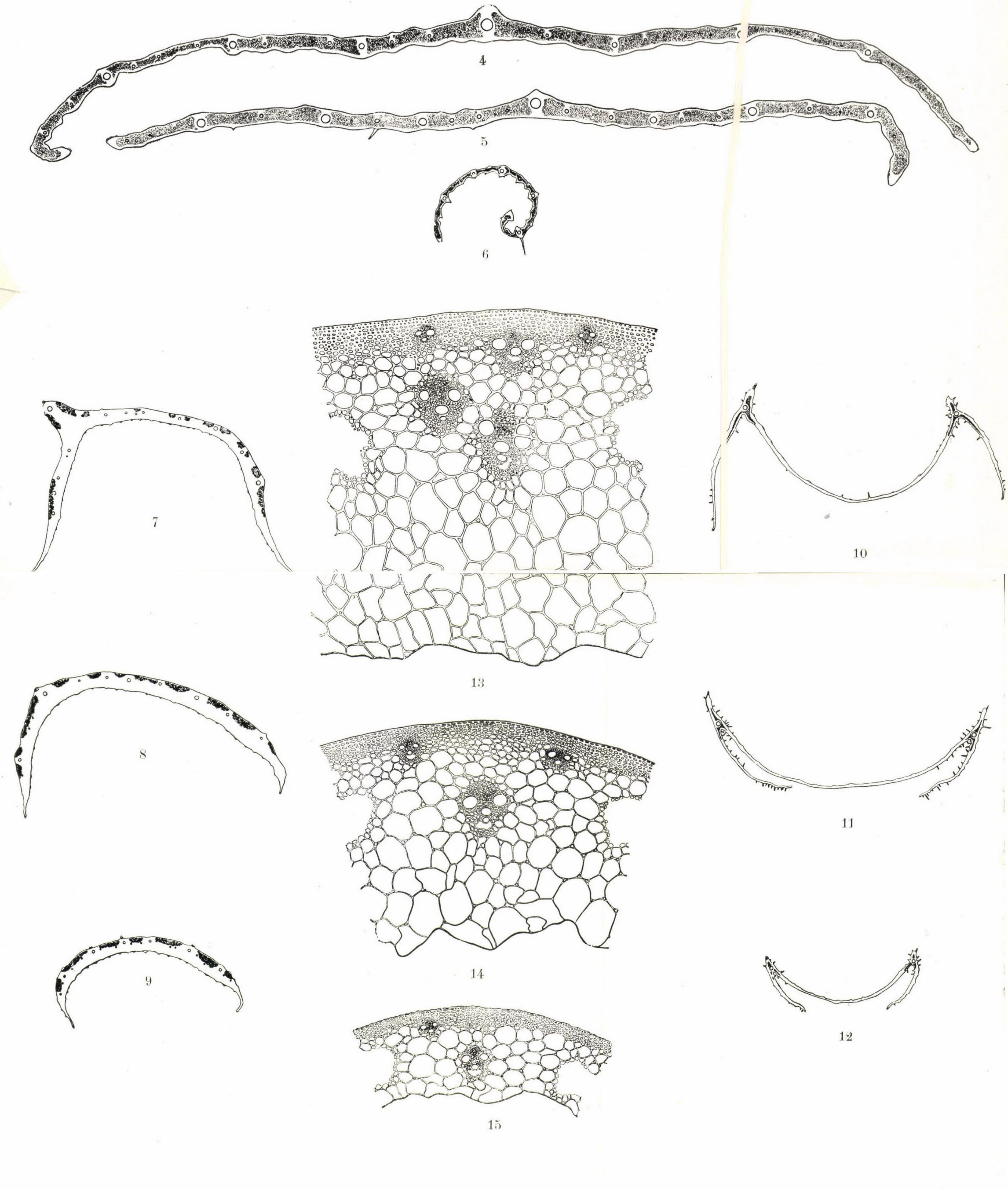
1

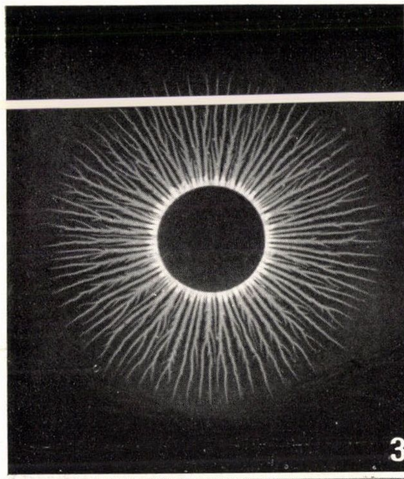
a *b*

2

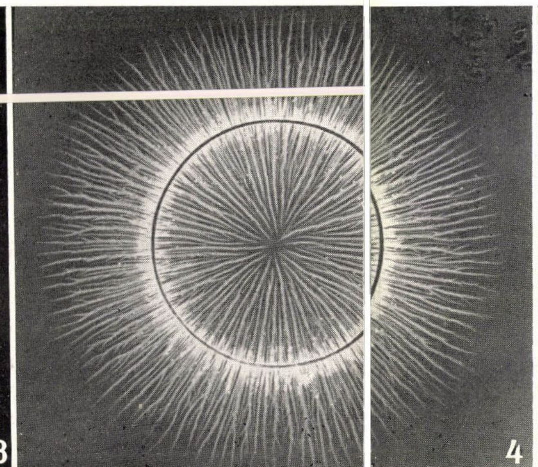
a *b*

3

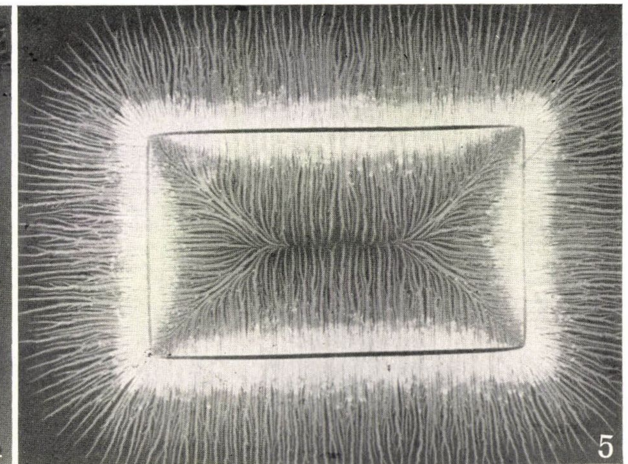

4
5
6
7
10
13
8
11
14
9
12
15



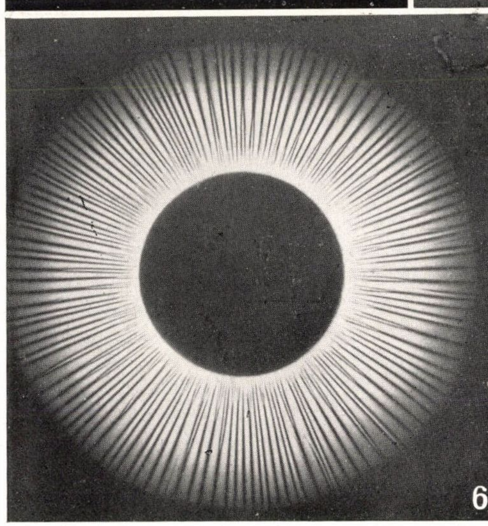
3



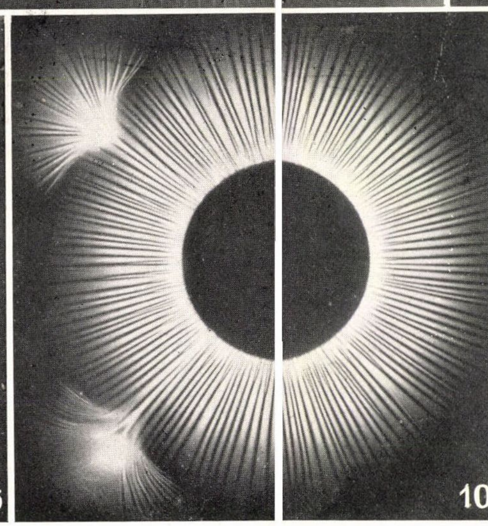
4



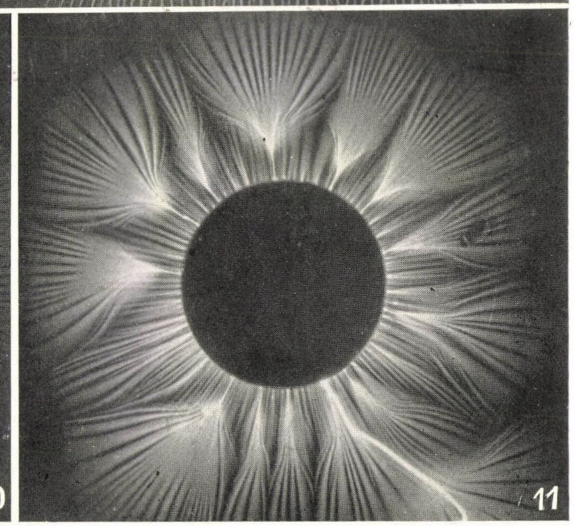
5



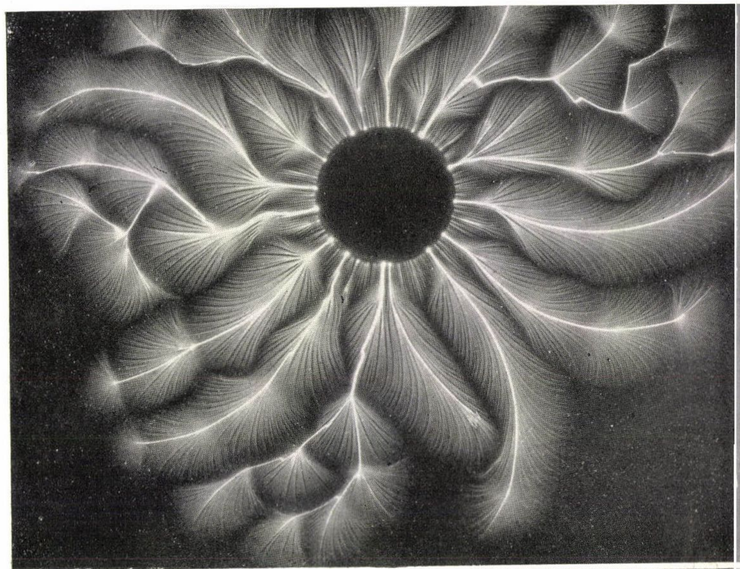
6

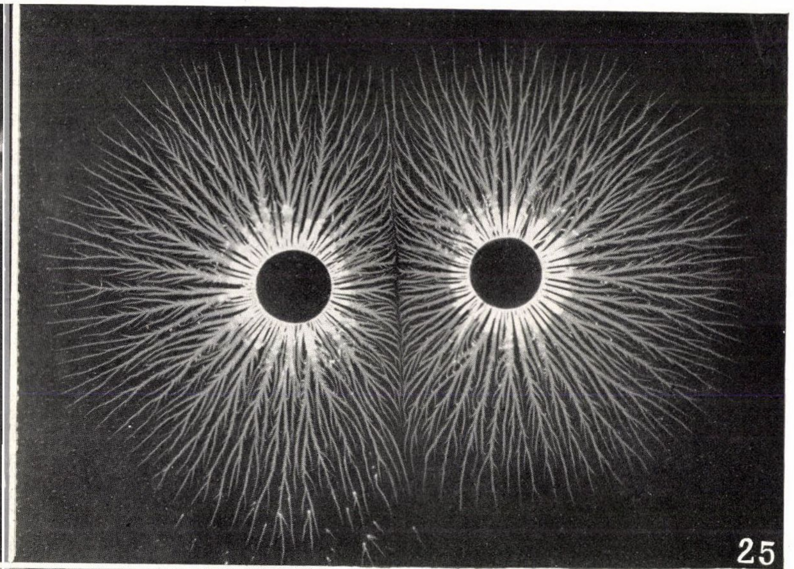


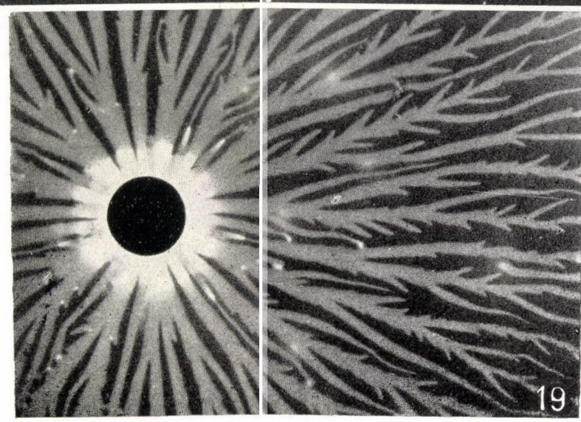
10



11

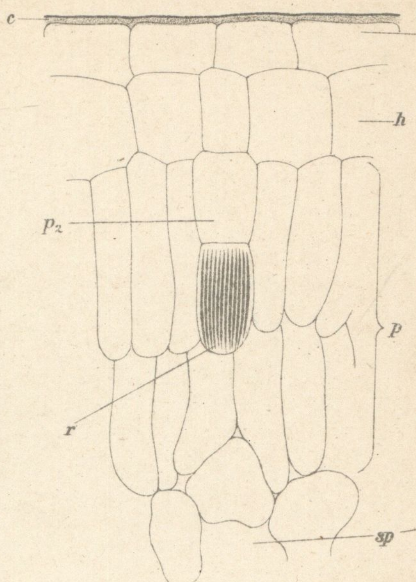



25

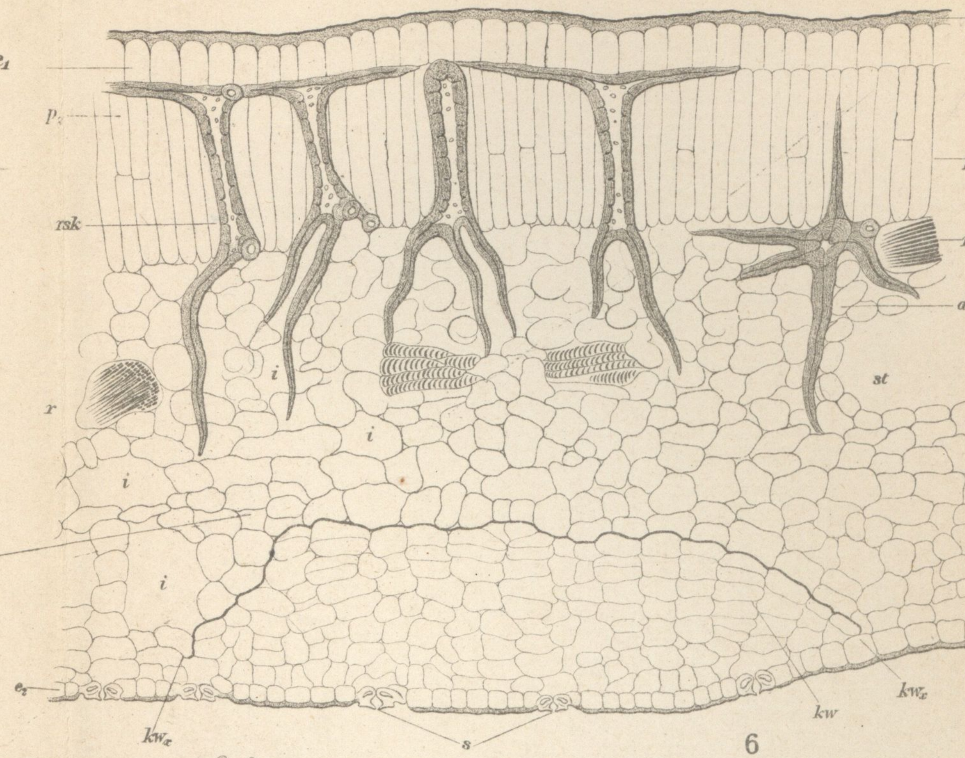

19


rp
rp
Pt

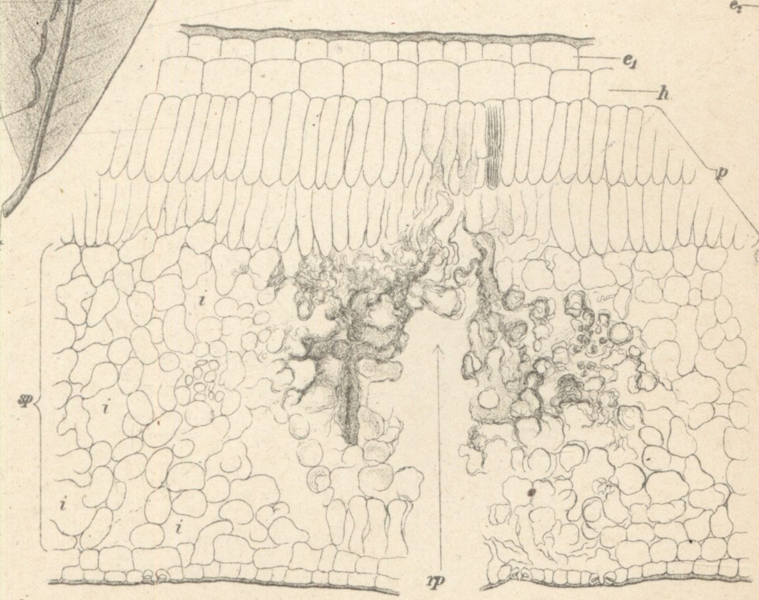
1


c
e_1
h
p_2
p
r
sp

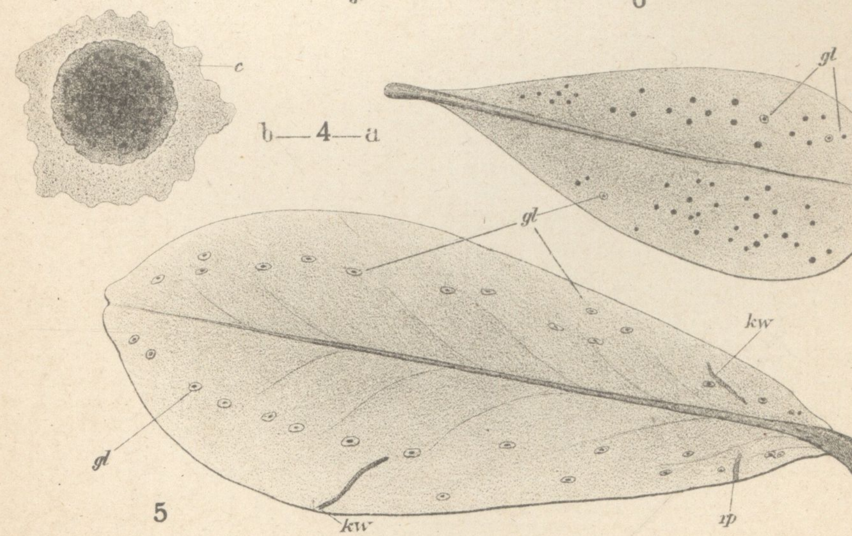
3


c
p_2
p
rsk
r
ask
i
st
sp
e_2
kw_2
kw
s

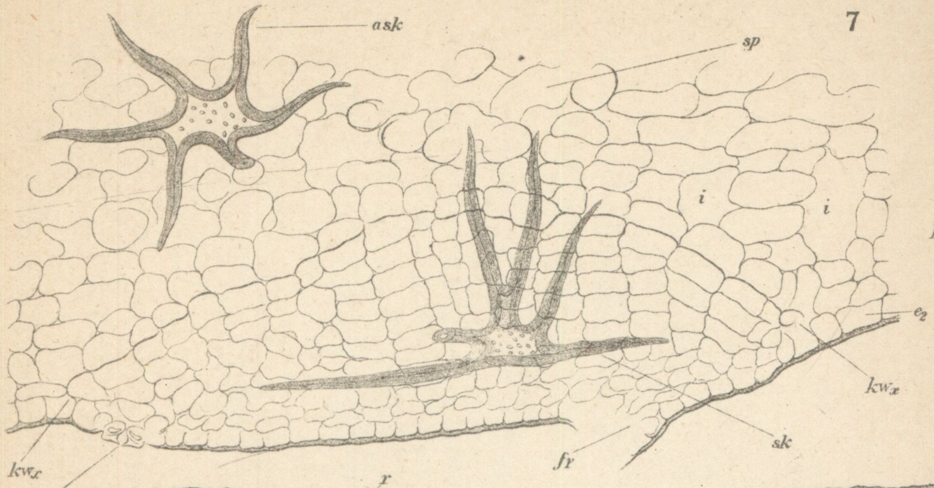
6


e_1
h
p
sp
i
rp

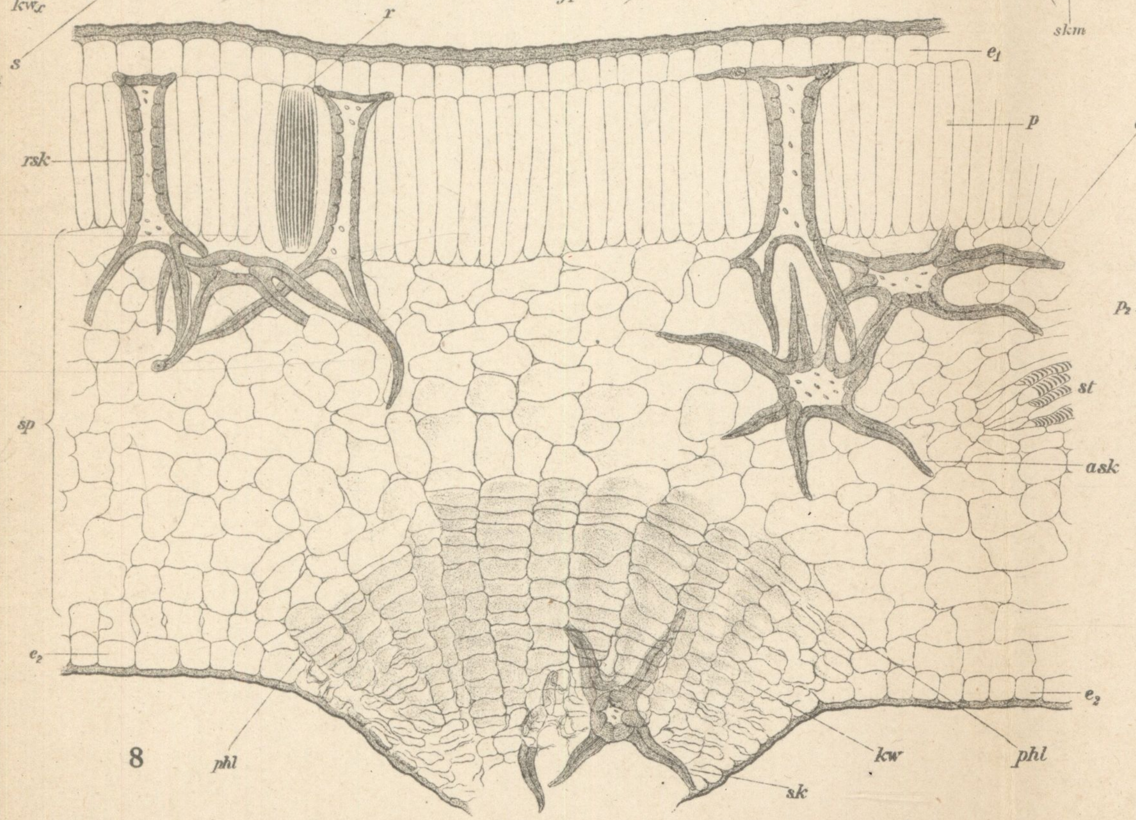
2


c
b—4—a
gl
kw
rp

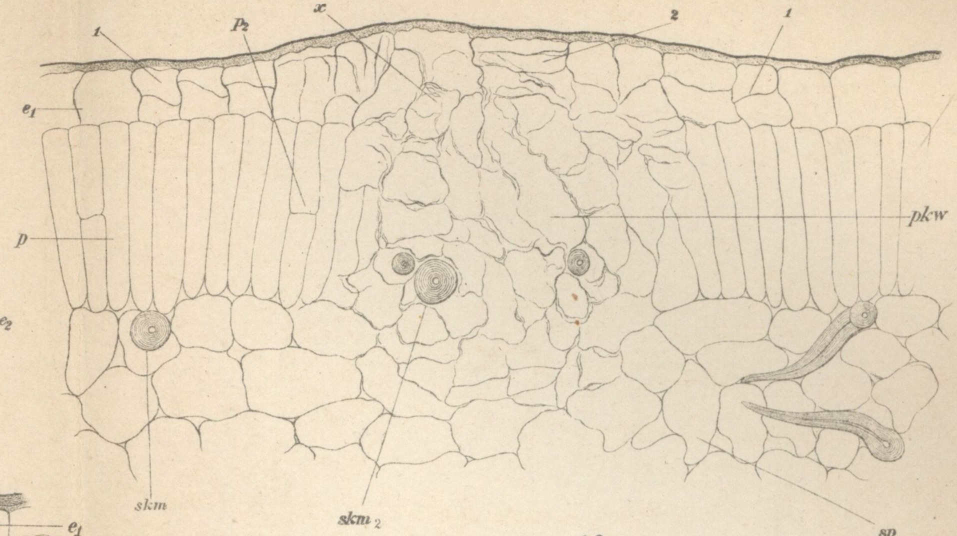
5


ask
sp
i
i
e2
kwx
sk
fr
kwx
s

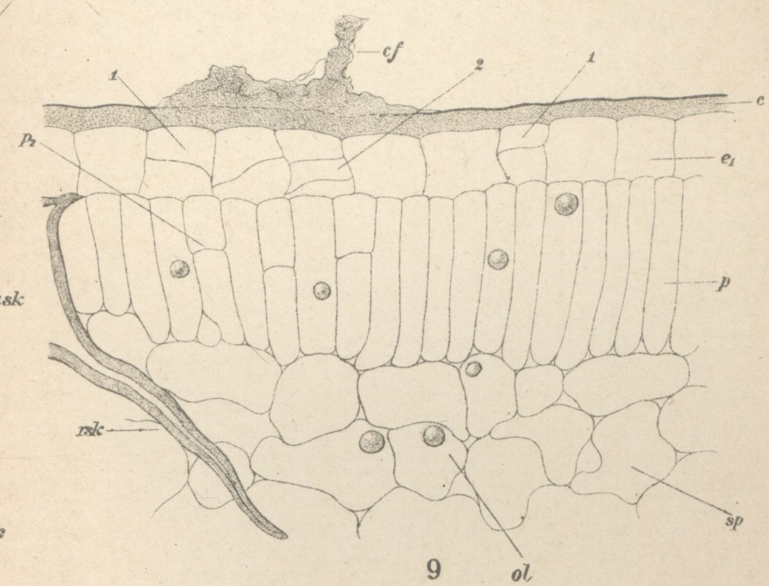
7


r
e1
p
rsk
ask
sp
st
ask
e2
e2
phl
kw
phl
sk

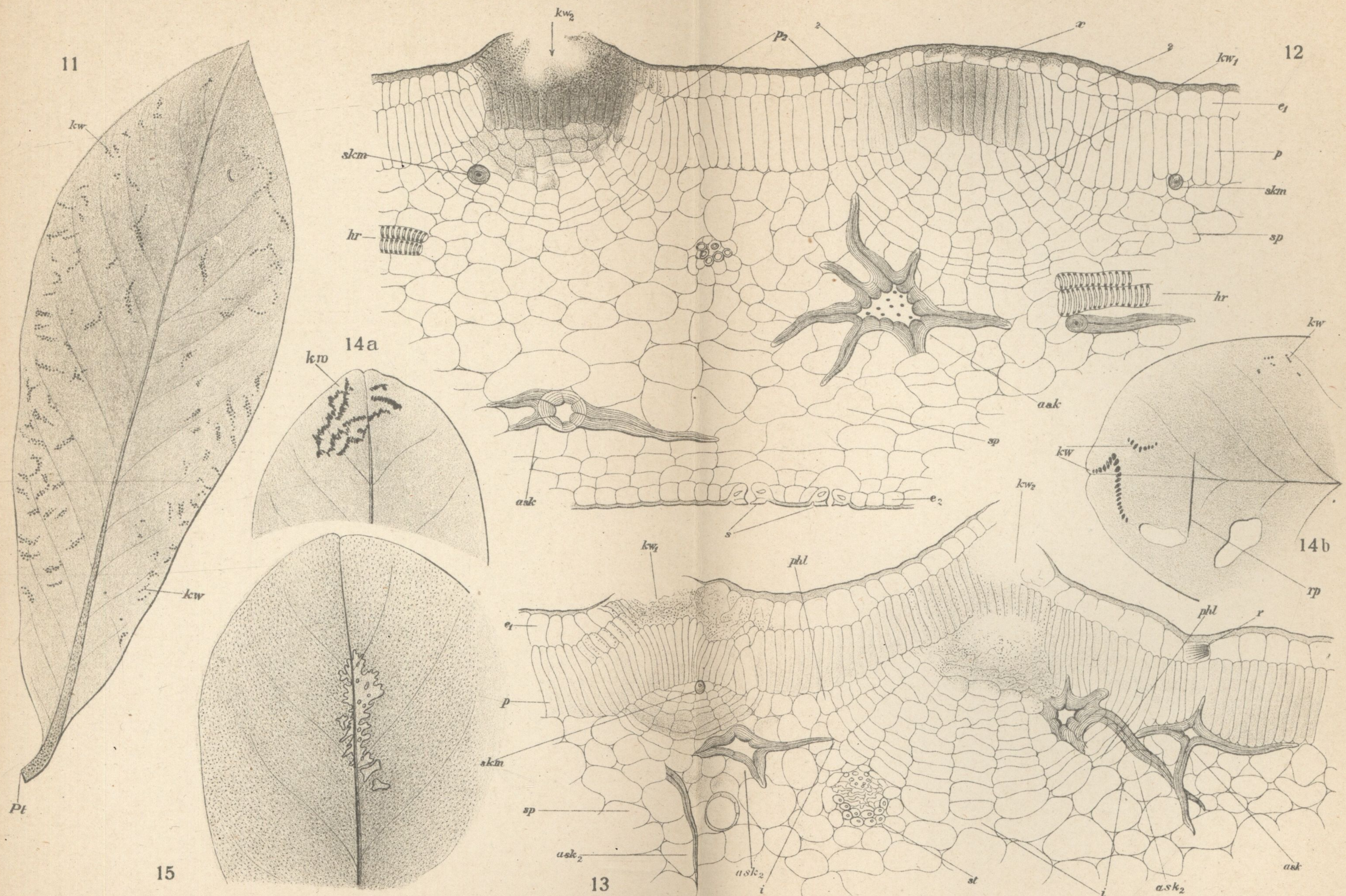
8

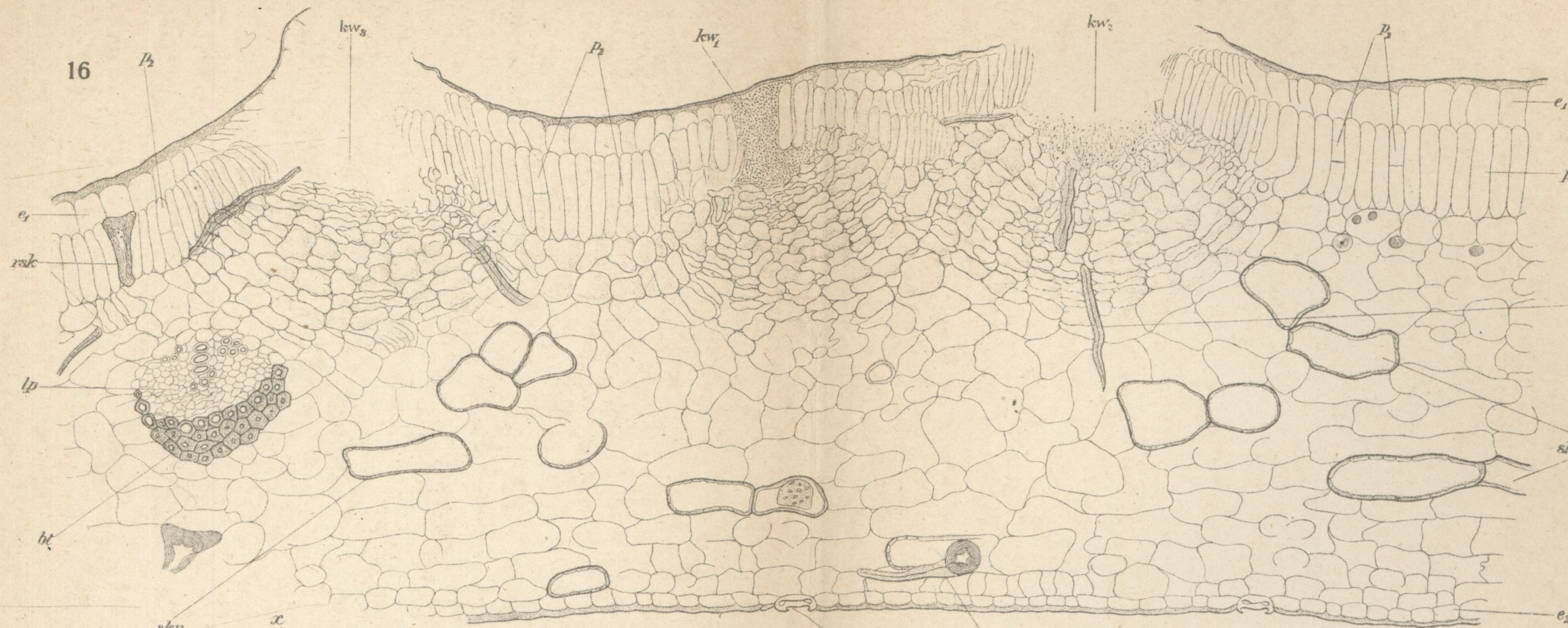

x
2
1
P2
1
e1
p
pkw
skm
skm2
sp

10


cf
c
2
1
1
P2
e1
p
rsk
sp
ol

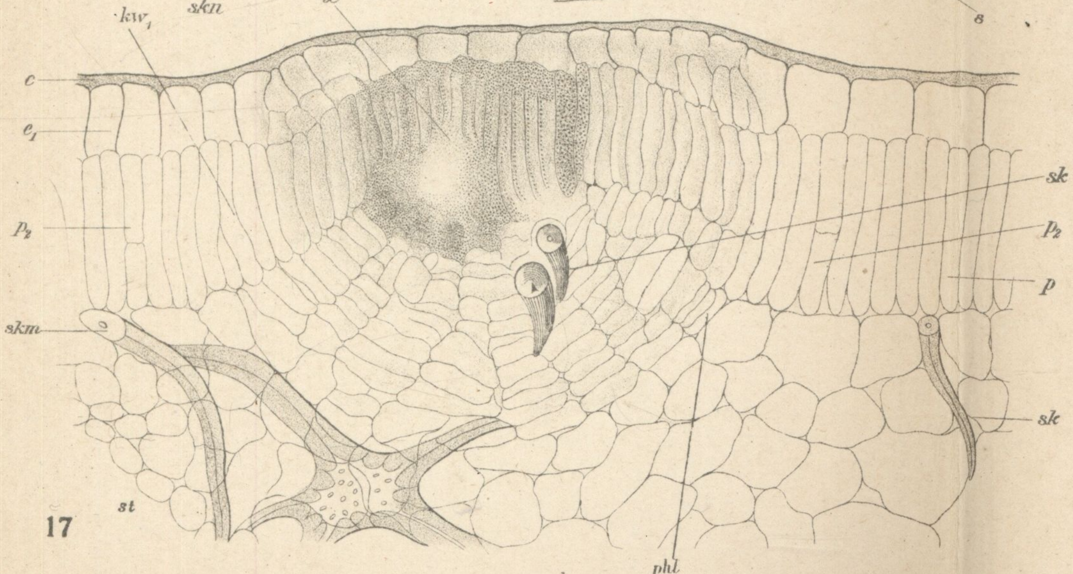
9


11
kw
kw
Pt
12
kw2
p2
x
kw1
e1
skm
p
skm
hr
sp
hr
ask
sp
ask
e2
s
14a
kw
kw
kw
14 b
rp
kw1
phl
kw2
phl
r
e1
p
skm
sp
ask2
ask2
i
st
i
ask2
ask
15
13



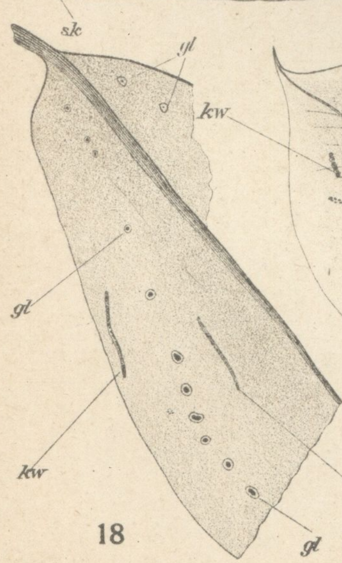
p_2
kw_3
p_2
kw_1
kw_2
p_2
e_1
p
e_1
rsk
sk
lp
skn
bt
skn
s
sk
e_2

16



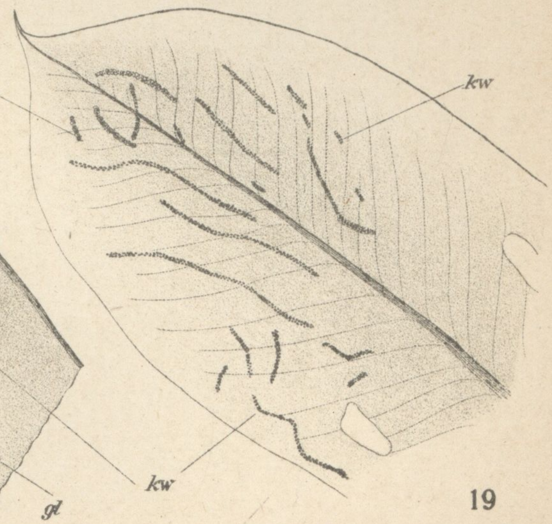
kw_1
x
c
e_1
p_2
sk
p_2
p
skm
sk
st
phl

17



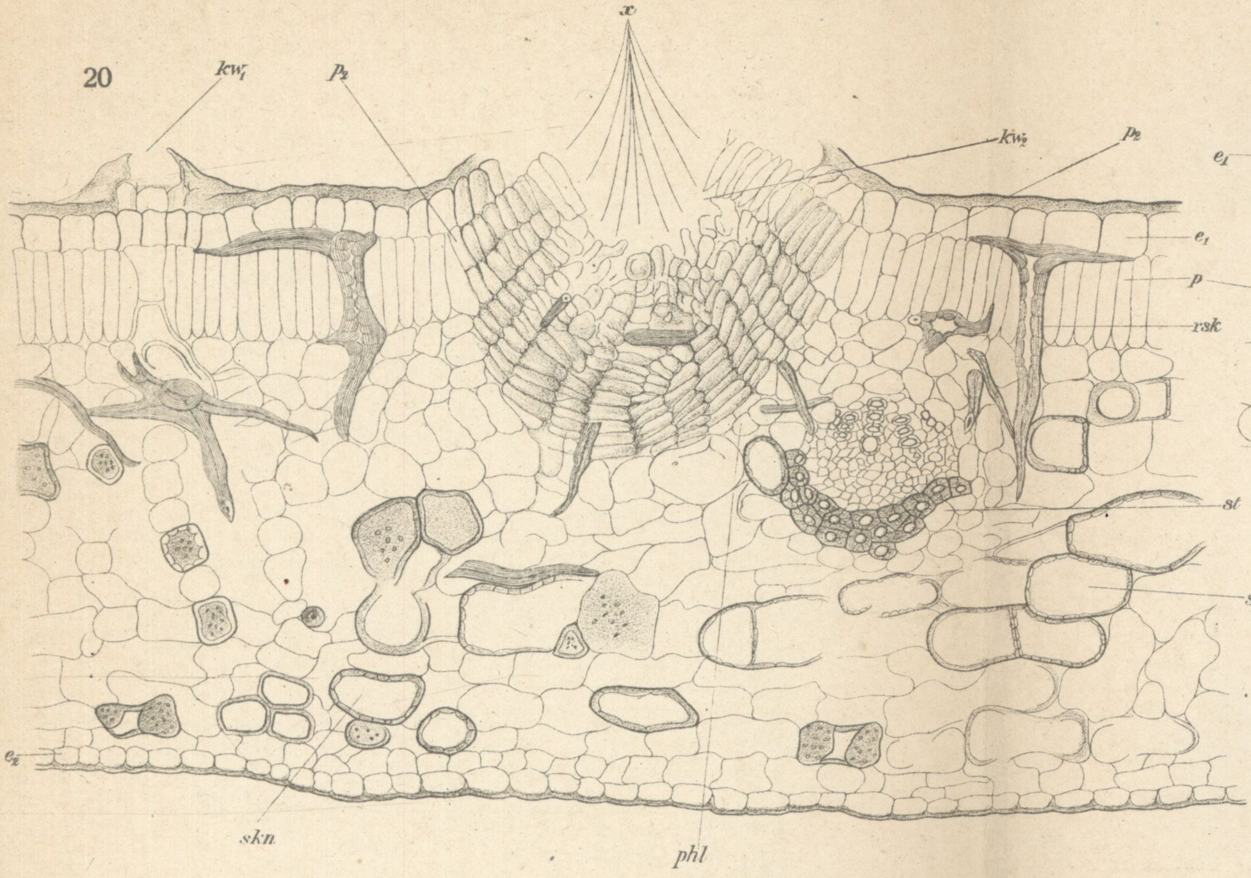
gl
kw
gl
kw
gl

18

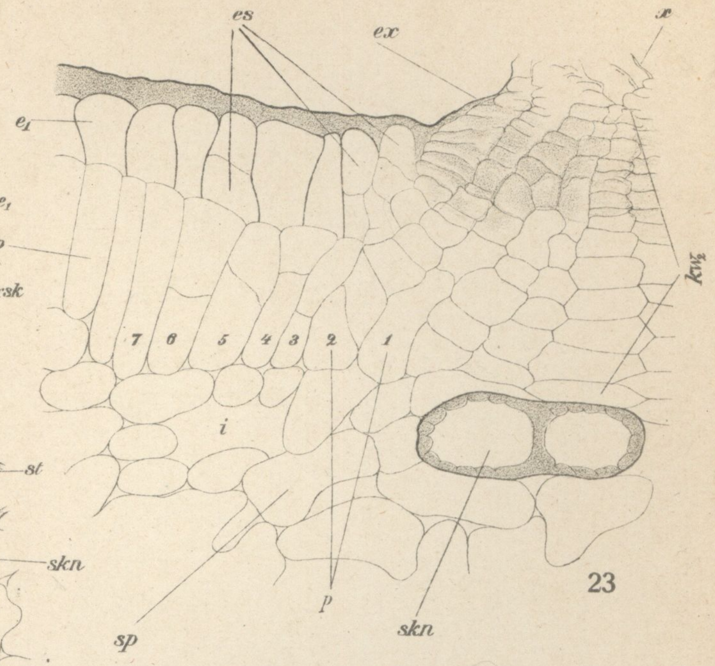


kw
kw

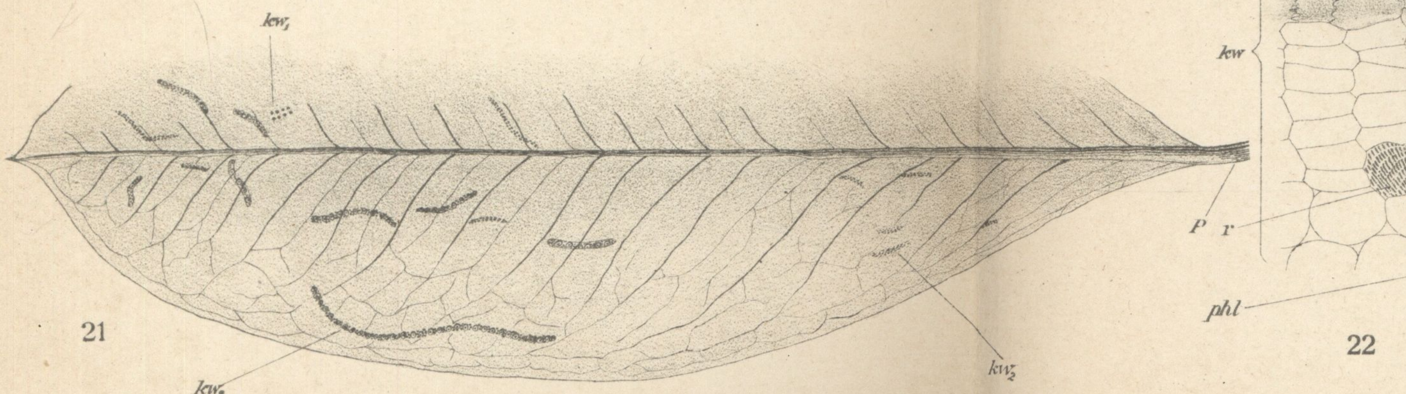
19


x
kw₁
p₂
kw₂
p₂
e₁
p
rsk
st
skn
e₂
skn
phl

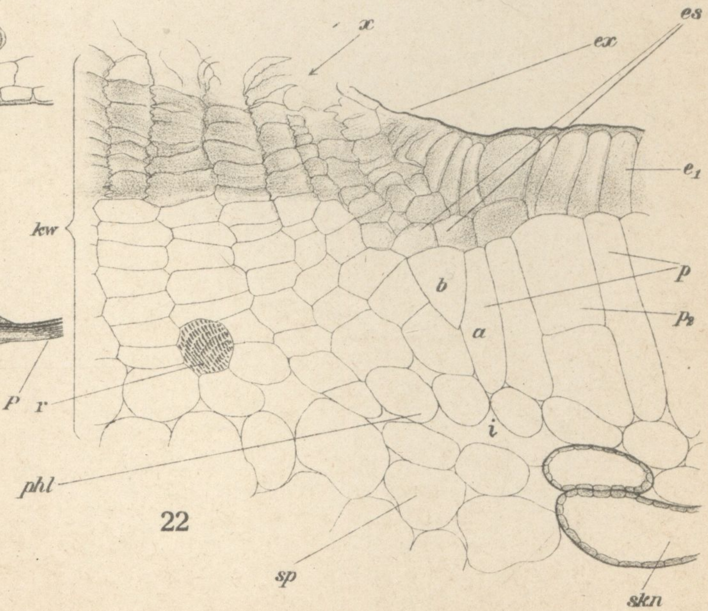
20


es
ex
x
e₁
kw₂
7 6 5 4 3 2 1
i
p
sp
skn

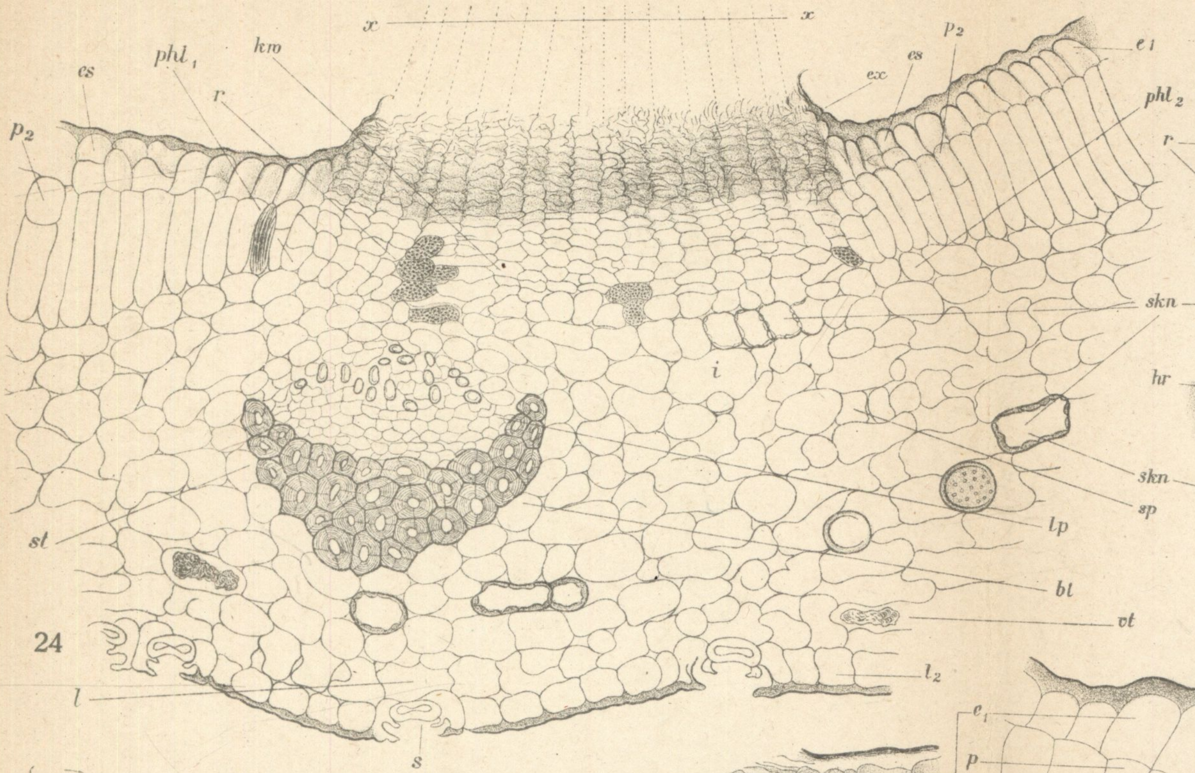
23


kw₁
P
kw₂
kw₂

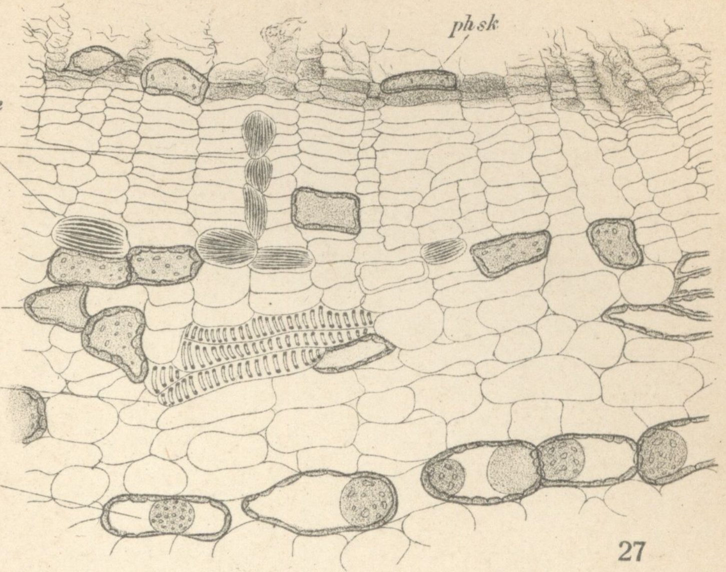
21


x
ex
es
e₁
kw
p
p₂
b
a
r
i
phl
sp
skn

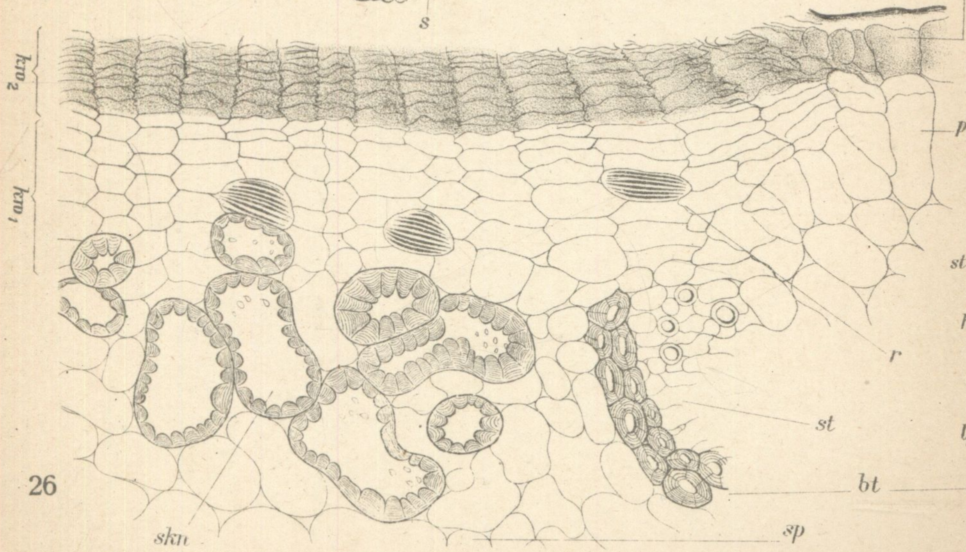
22


x
x
cs
phl₁
kw
r
p₂
es
ex
p₂
e₁
phl₂
r
skn
i
hr
skn
sp
lp
st
bt
vt
l₂
l
s

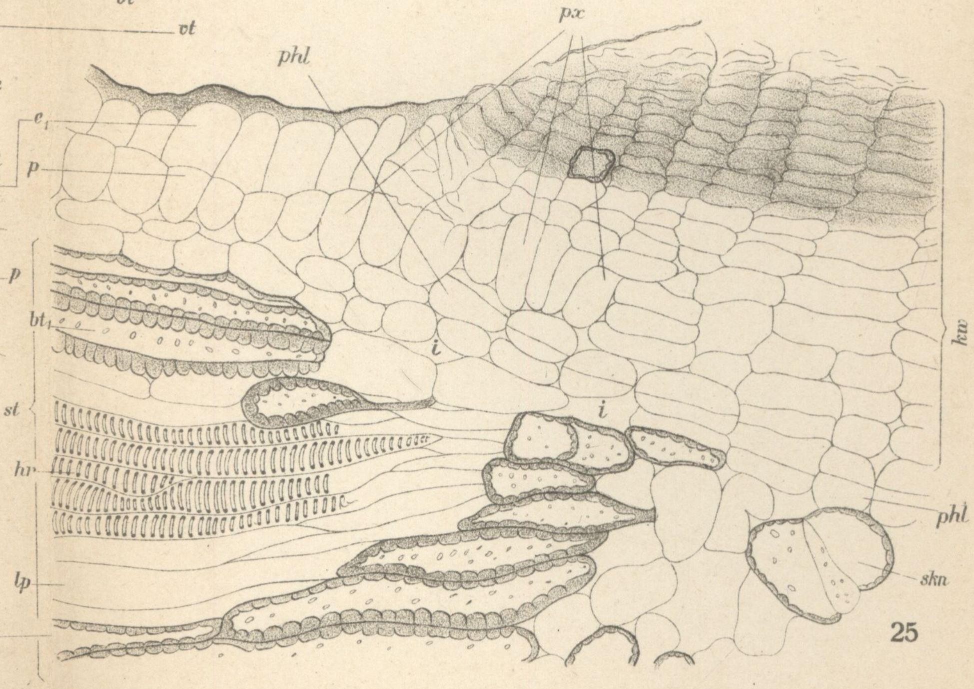
24


ph sk

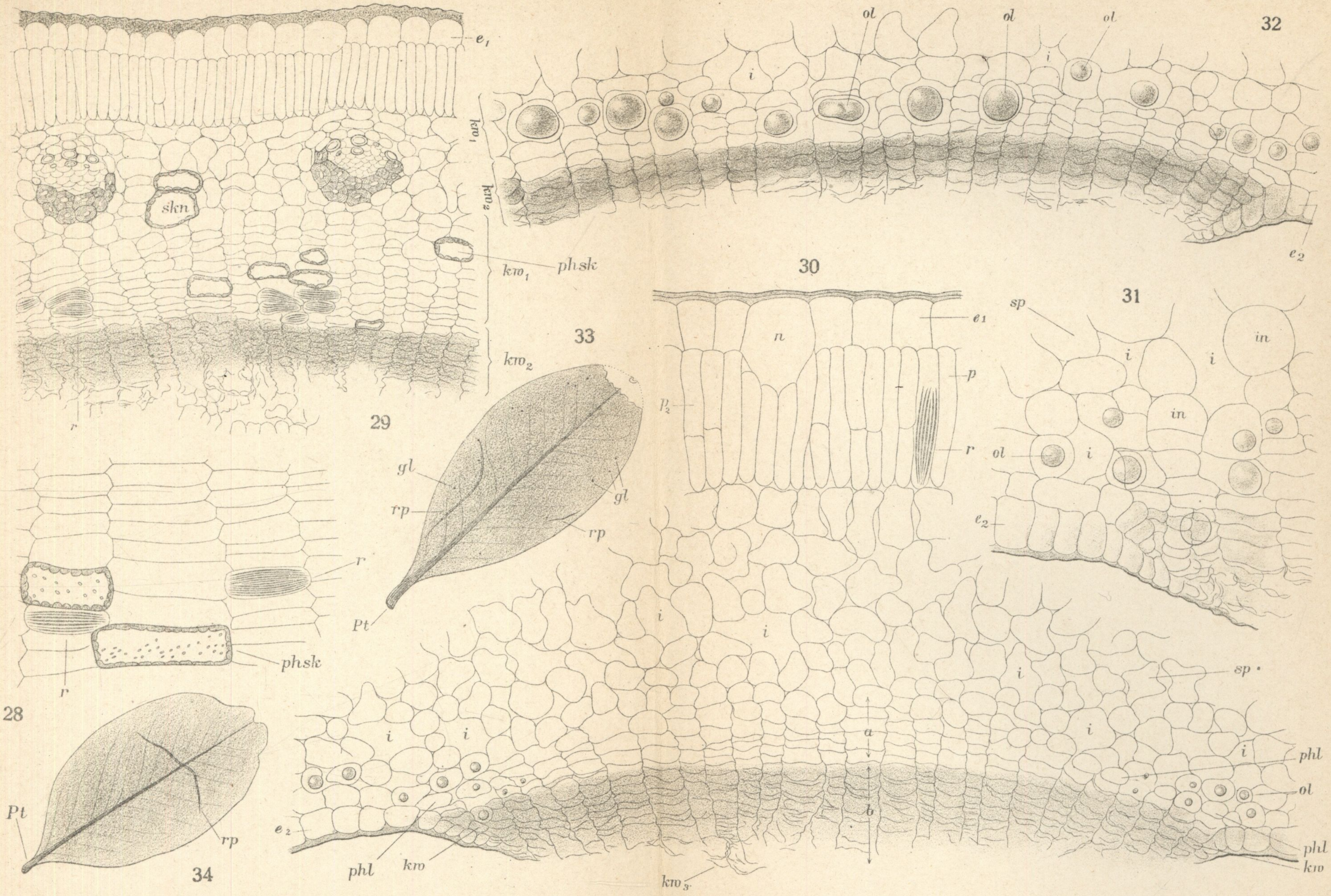
27


kw₂
kw₁
p
r
st
bt
sp
skn

26

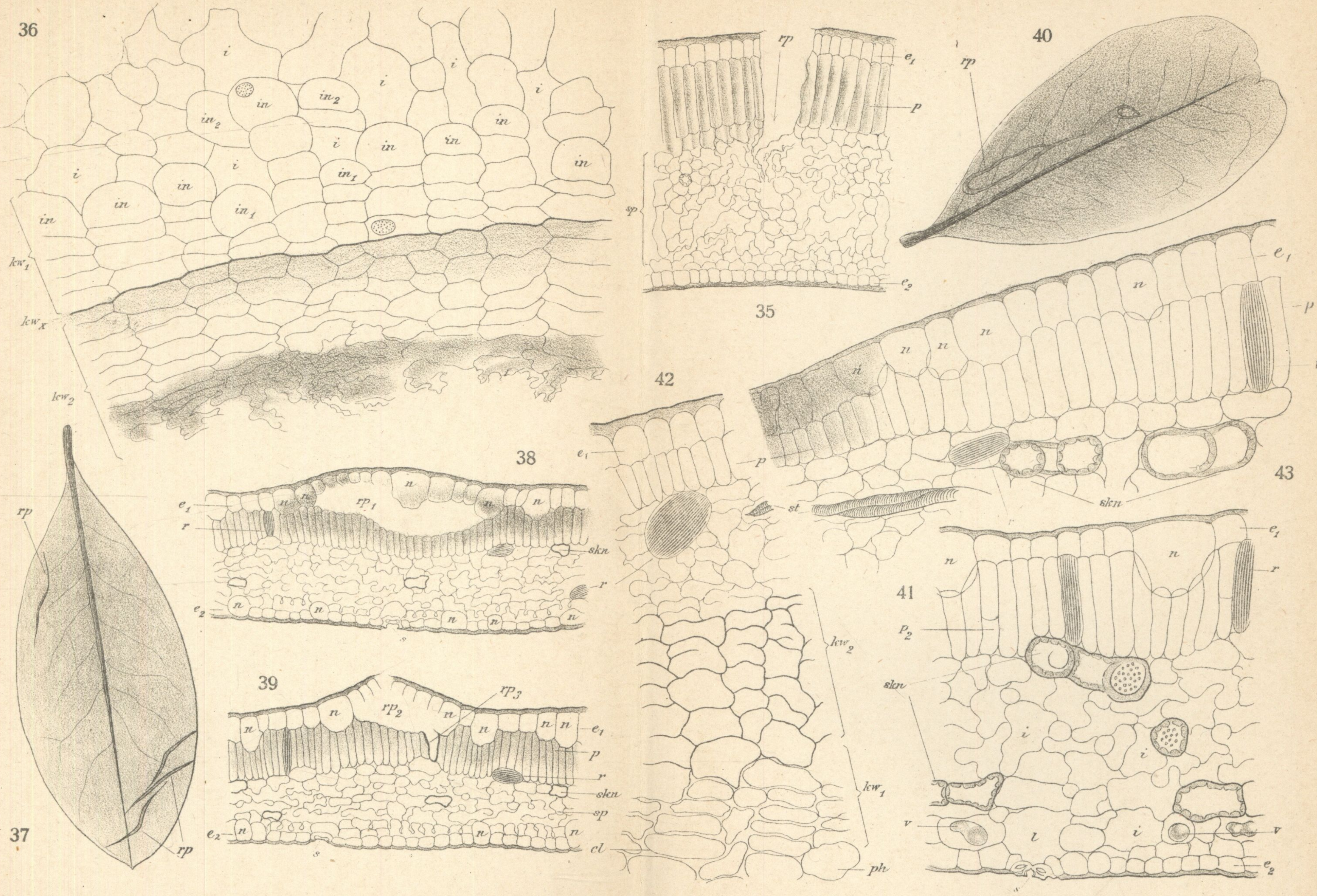

px
phl
e₁
p
bt₁
st
hr
lp
i
i
kw
phl
skn

25



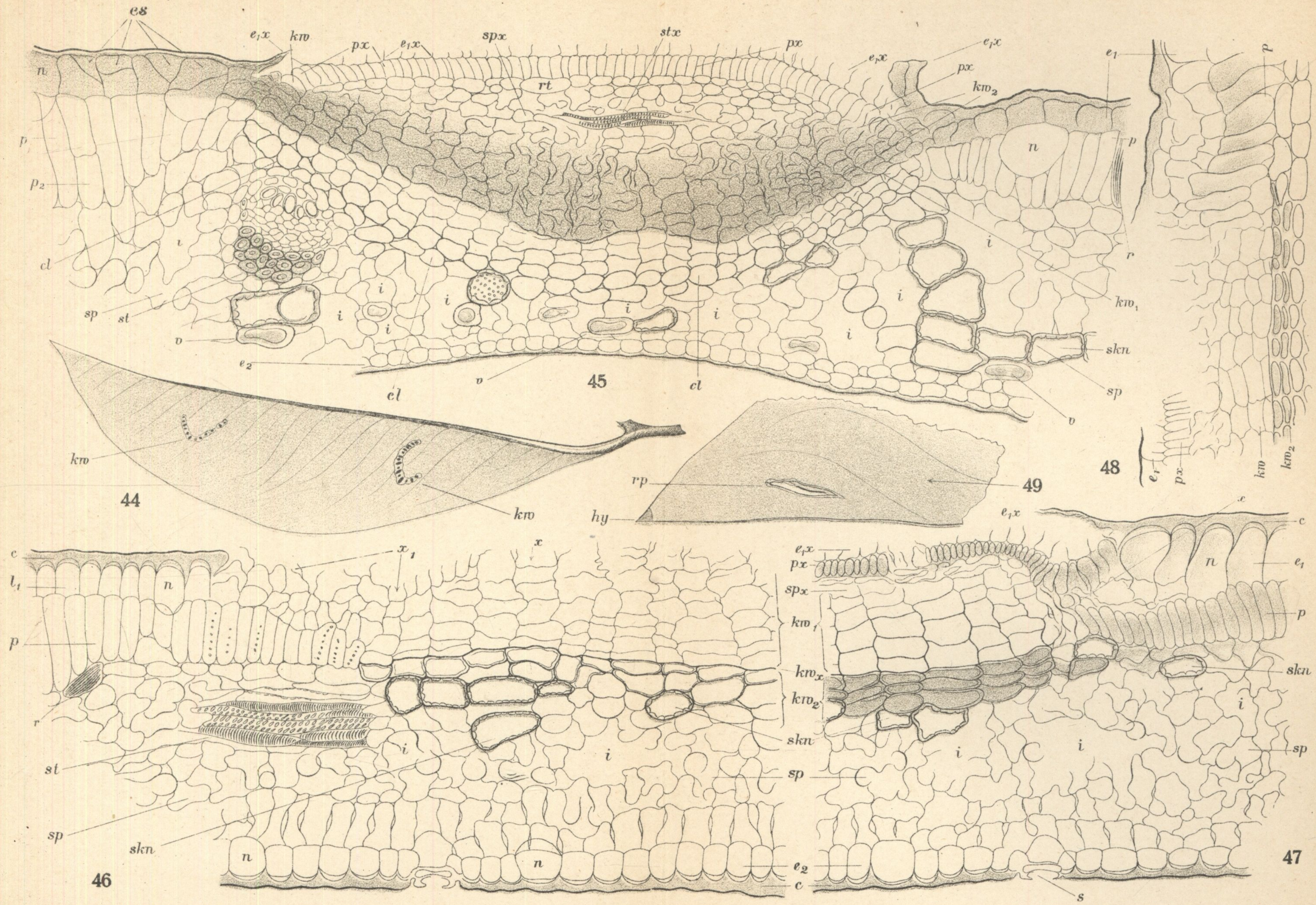
del. A. Richter, Posonii a. 1915.

Bannwarth, Bécs, VIII., lithogr. nyomása.



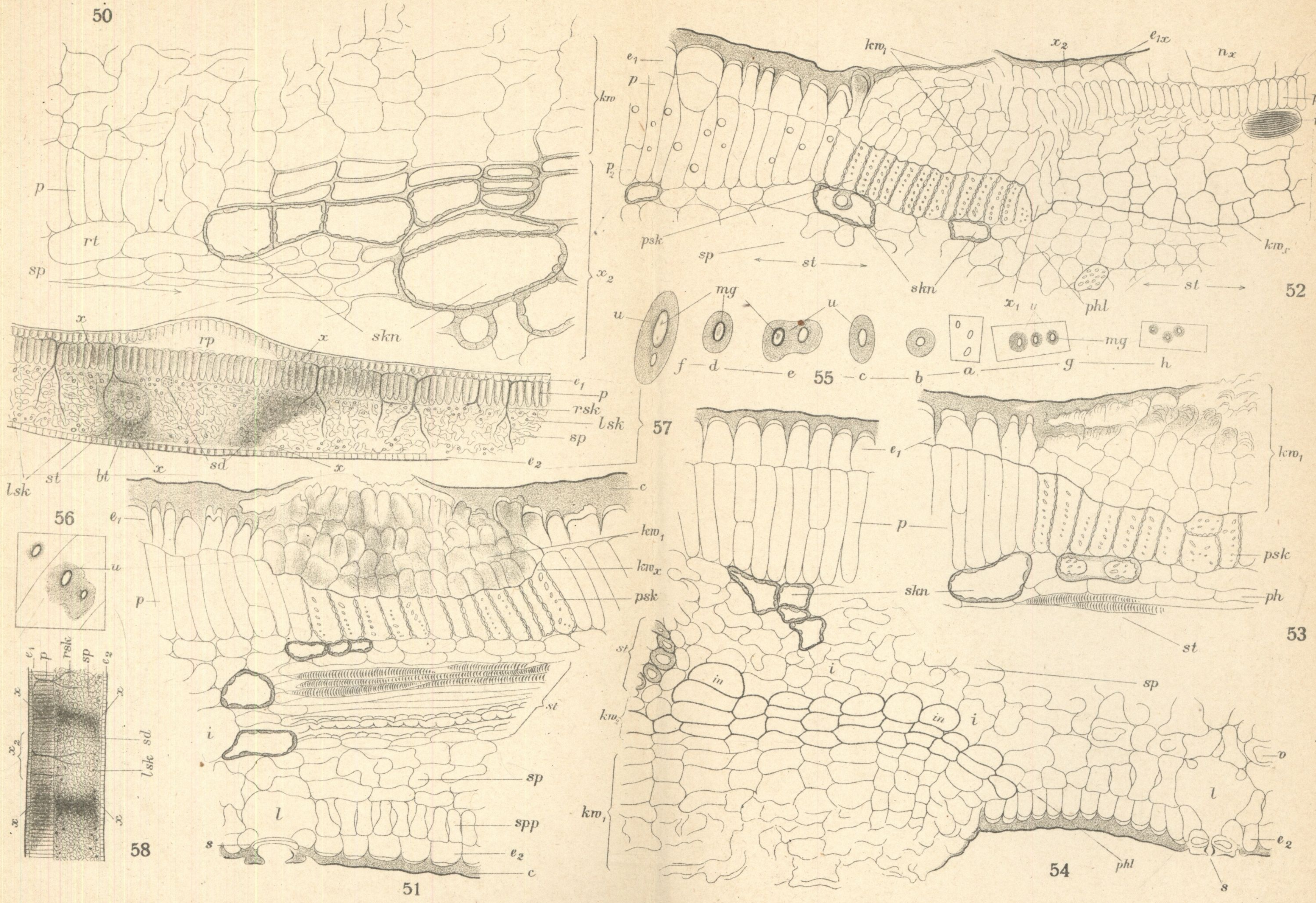
del. A. Richter, Posonii a. 1915.

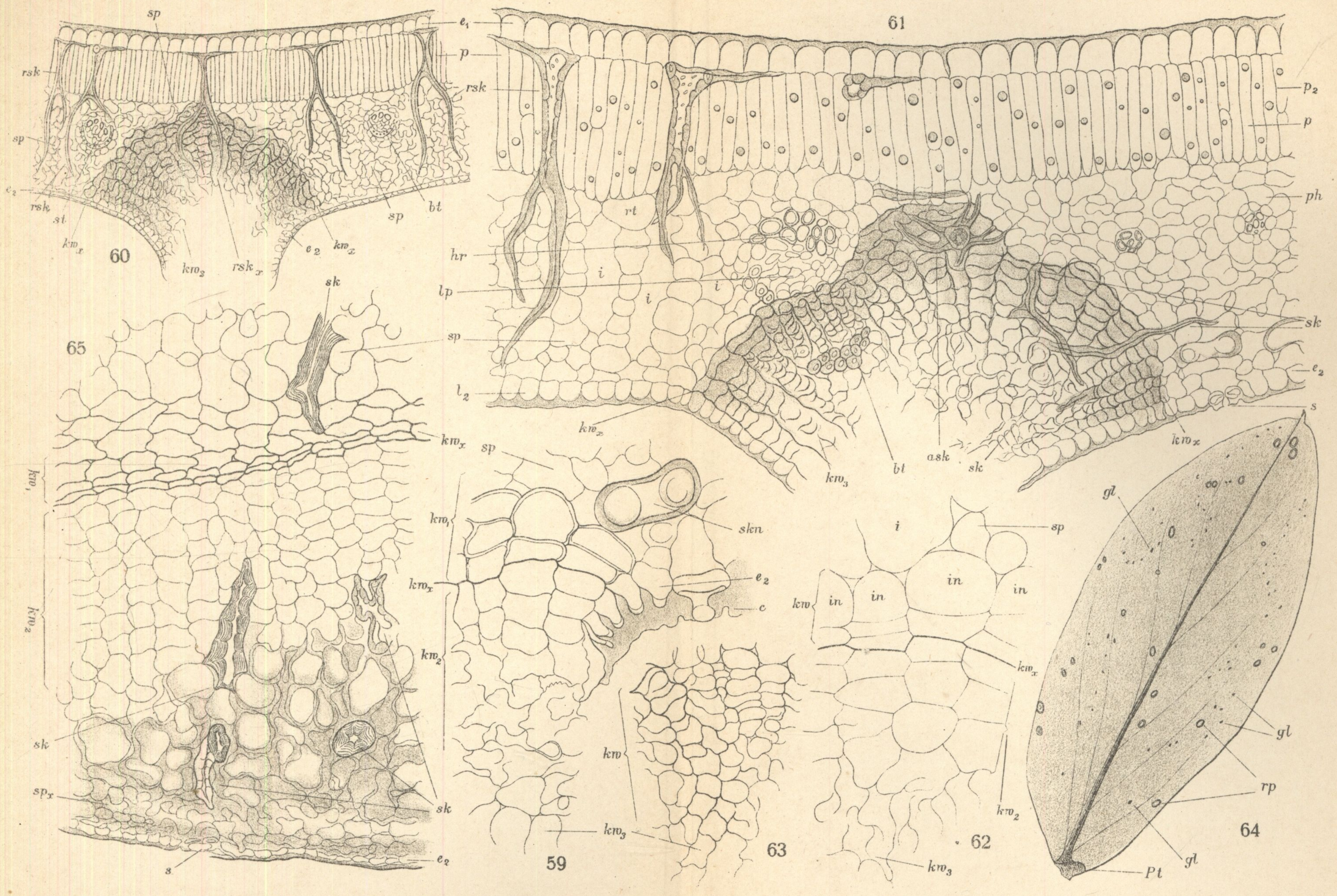
Bannwarth, Bécs, VIII., lithogr. nyomása.



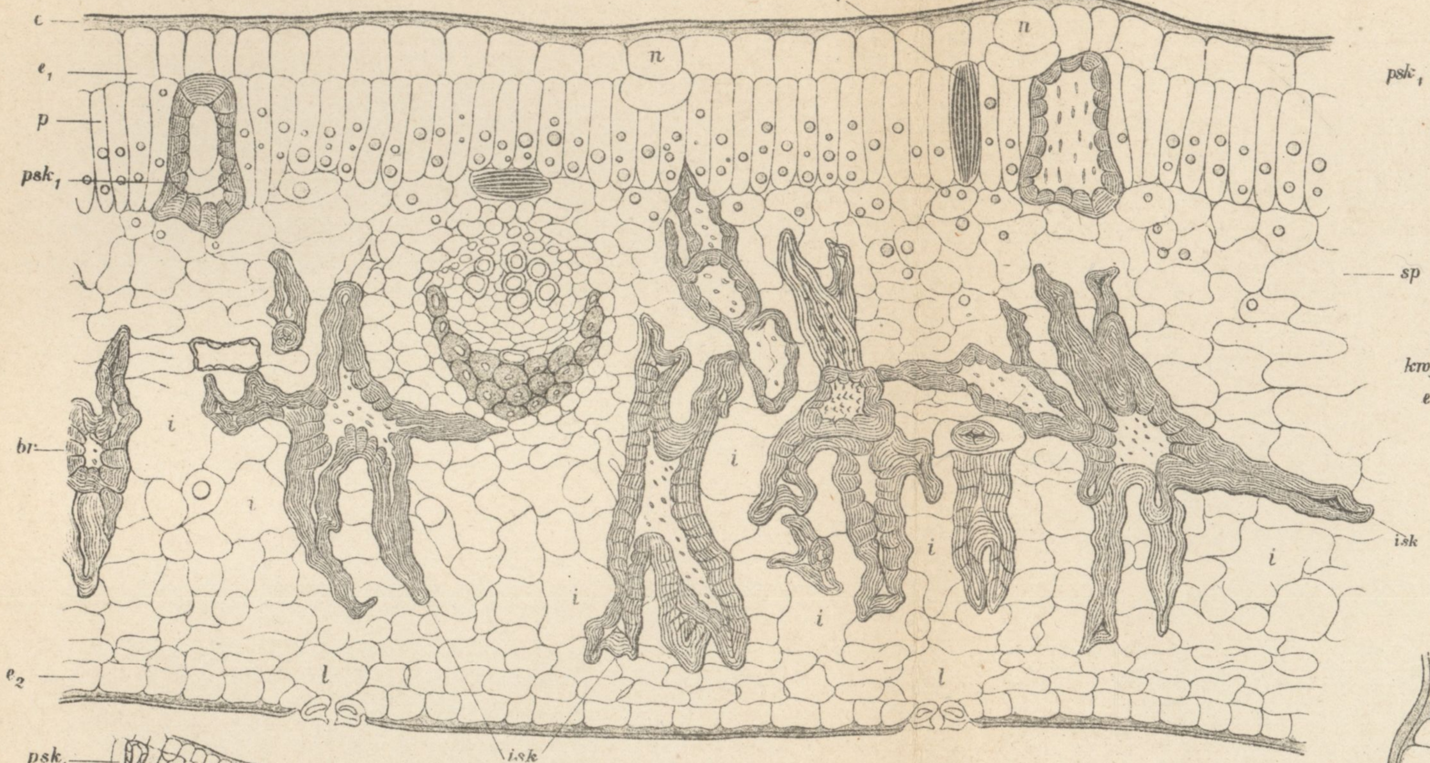
del. A. Richter, Posonii a. 1915.

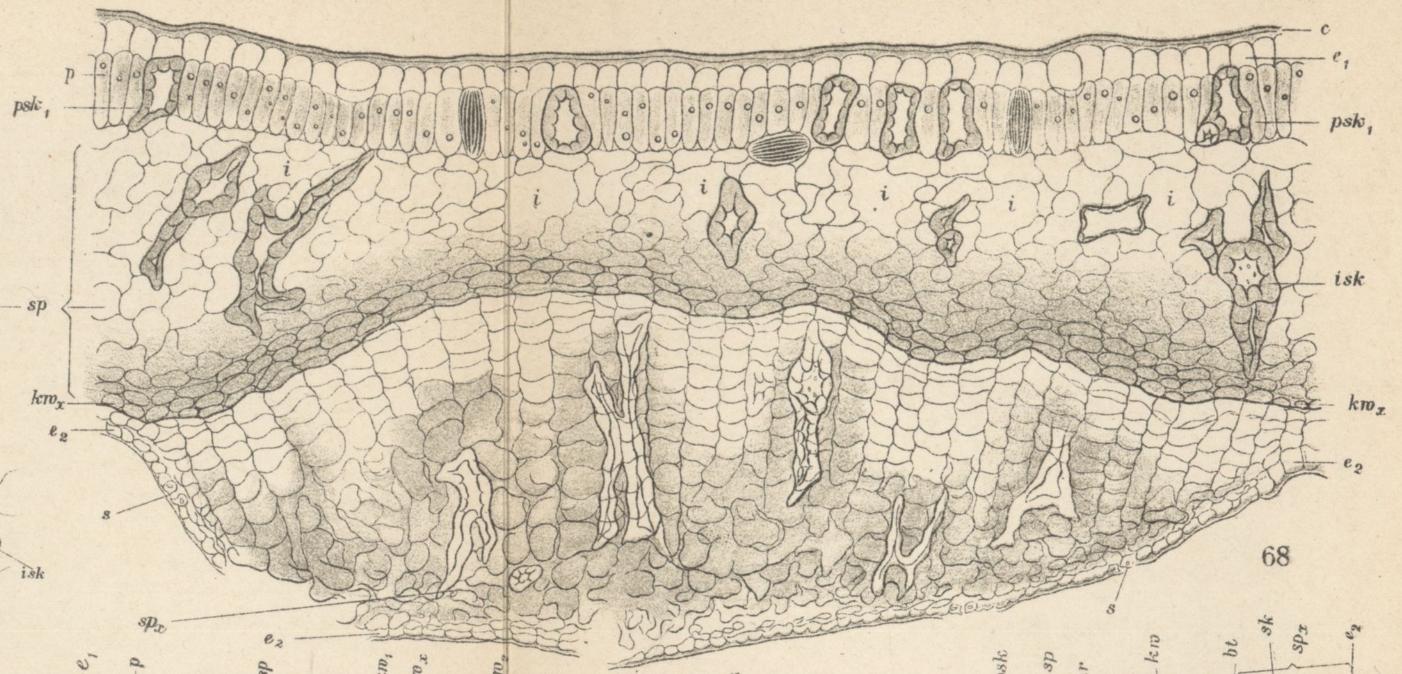
Bannwarth, Bécs, VIII., lithogr. nyomása.


50
51
52
53
54
55
56
57
58
p
rt
sp
skn
kw
x_2
e_1
e_2
rp
x
rsk
lsk
st
bt
sd
u
c
kw_1
kw_x
psk
i
spp
l
s
p_2
e_{1x}
n_x
px
mg
phl
ph
in
v
f
d
e
b
a
g
h
x_1

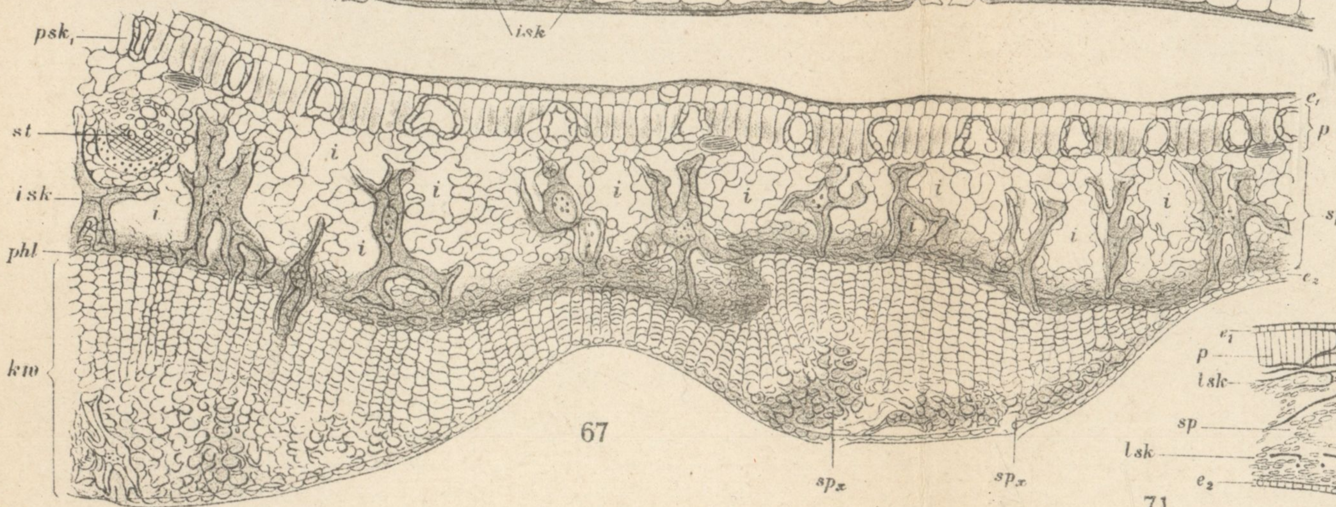

60
61
65
59
63
62
64

66

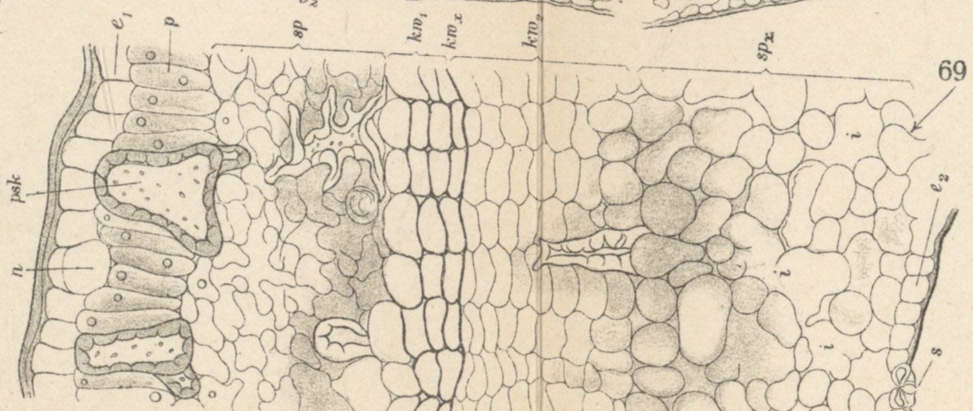




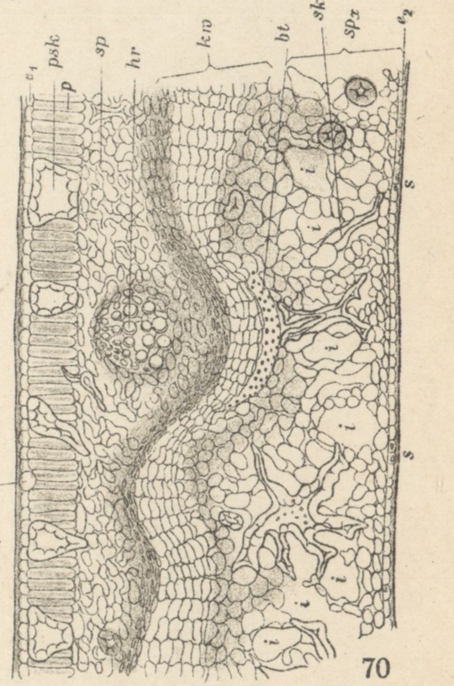
68



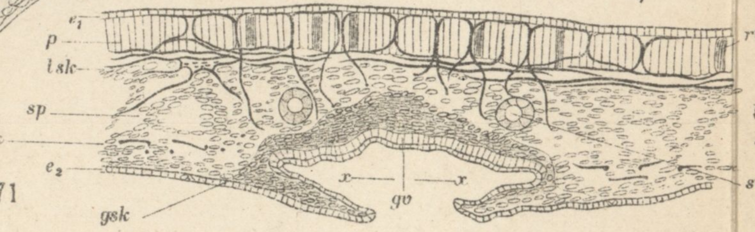
67



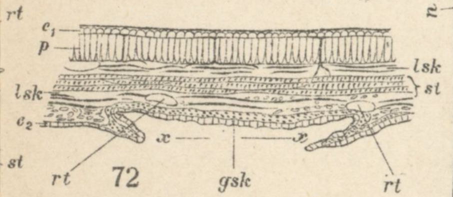
69



70



71



72