

50639

50639

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

KÖNIG GYULA

OSZTÁLYTITKÁR.



HUSZONNYOLCZADIK KÖTET.

1910.

TIZENEGY TÁBLÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1910.



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM.

	<i>lap</i>
ABONYI SÁNDOR: Adatok a tengeri csontos halak bélcsatornájának szövettanához (VII.--XI. tábla)	315
DÁVID LAJOS: Az algebrai iteratio határfüggvényéről	285
DÉCHY MÓR: Kaukazusi utazásaim tudományos eredményei	524
DIENES PÁL és DIENES VALÉRIA: Általános tételek az algebrai és logaritmikus singularitásokról... ..	26
FARKAS GYULA: Alapvetés az elektromosság és mágnesség folytonossági elméletéhez	1
FEJÉR LIPÓT: Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier-sorok ...	143
FEJÉR LIPÓT: A folytonos függvények Fourier-féle sorának singularitásairól	550
GOLDBERGER JAKAB: Az izom hydrogen-ion tartalmának változása munka közben	32
GRÓH GYULA: Adat az oxydatiós potential és az oxydatió sebessége közötti összefüggés ismeretéhez... ..	43
ILOSVAY LAJOS és SCHETZ PÁL: A kékszínű molybdaenoxyd két új módosulatáról... ..	472
KLUPATHY JENŐ: A víz szilárdságáról	393
KÖVESLIGETHY RADÓ: A seismikus hysteresisről	477
MAUTHNER NÁNDOR: A phenylzsírsavak egy általános synthesise ...	68
PRINZ GYULA: Előzetes jelentés második középázsiai utazásomról ...	76
RÉVÉSZ GÉZA: A heterochrom photometria új módszere. (Kontraszt módszer)... ..	452
ROHONYI HUGÓ: Enzymahatás és elektrolytes dissociatio	298
SCHETZ PÁL: A mesterséges lakmuszról	89
SZARVASSY IMRE és RÓKA KÁLMÁN: Az oxalsav egy újabb synthesise ...	292
IŰ. SZILY KÁLMÁN: A folytonos erőtér statikája	369
TANGL FERENCZ: Élettani és energetikai vizsgálatok a metamorphosisról	211

	<i>Lap</i>
TANGL FERENCZ és ERDÉLYI SÁNDOR: A zsírok olvadáspontjának jelentősége a gyomor mechanikai működésében	434
TANGL KÁROLY: A szilárd és cseppfolyós test közös határán fellépő felületi feszültségről....	101
TERKÁN LAJOS: A β Persei photographikus fényváltozása és a levegő photographikus extinciója	593
VERESS ELEMÉR: A Brachyurák és Paguridák stereotropismusról (III.—VI. tábla)....	188
ZIMÁNYI KÁROLY: Pyrit Sajóházáról. (I. és II. tábla)	180

ALAPVETÉS AZ ELEKTROMOSSÁG ÉS MÁGNESSÉG FOLYTONOSSÁGI ELMÉLETÉHEZ.

FARKAS GYULA I. tagtól.

LORENTZ elméletétől COHN elmélete és MINKOWSKI elmélete nemcsak abban különböznek, hogy a folytonos térbetöltés elvéhez fűződnek, hanem abban is, hogy tiszta phænomenologikus elméletek szoros HERTZ-féle értelemben.

Oly elméletet szándékozom most megjelölni, a mely a maga kifejlésében a MINKOWSKI-féle elmélethez hasonlú, nevezetesen a relativitás elvével és elejétől kezdve a folytonos térbetöltés képzeletéhez szövődik, de alapvetésében mégis LORENTZ elektronelméletéhez simul, a melynek az alapvetésétől annyiban hajlik el, hogy közvetlenül az elektronelmélet átlagértékeire (Mittelwerte) vonatkozik. A mellett összefüggése a «physikailag végtelen kicsinyek» fogalmával (Enc. V₂. 14. 201. l.) abban van, hogy a mit $D\tau$ térelemben lévő $\rho_i D\tau$ elektromos quantum-elemnek mond, az úgy tekintendő, mint physikailag végtelen kicsiny $D\tau$ térben a materiához (atomokhoz, molekulákhoz) egyképen viszonyuló és végtelen nagy physikai pontossággal egyképen is mozgó elektronok töltéseinek az összege. Az e módon gondolt $\rho_1 D\tau$, $\rho_2 D\tau$ stb. elektromos töltések mathematikai tárgyalásában pedig úgy fogható fel a végtelen tér természeti tartalma, mintha bármi kis térben létezhetnének különbözően mozgó és a materiához különbözően viszonyuló elektromosságok, valamint különböző milyenségű és állapotú és különbözően mozgó materiák, szóval különböző elektromos és különböző materiális componensek.

E felfogással kezdettől fogva a folytonos térbetöltés elvére

helyezkedve, az elektromos fluidumok gondolatához jutunk vissza (mint LEVI-CIVITA a kathodsugarak tárgyalásában az Accademia dei Lincei 1909. évi Rendicontijában), a melyre azonban a mai álláspontokon is egyszerű módon lehet építeni. Ez ugyan szintén csak phænomenologia, de nem a rideg HERTZ-féle értelemben, mert minden alkotó eleme természeti állományoknak és azok mechanikai állapotainak a képzeletéhez fűződik.

Addig megyek a kifejtésében, a honnan részint az elektronelméletek nyomán, részint tiszta phænomenologikus elméletek nyomán egyenes úton juthatni tovább; részint pedig bizonytalanok még a továbbjutás útjai. Például az utóbbi okból ponderomótoros erőknél s energia- és entropia-vonatkozásoknak a megállapítására itt még nem terjeszkedtem ki.

Az I. cikk a folytonos térbetöltés képzeletében bontja az elektromos áramlást azon összetevőkre, a melyek LORENTZ elektronelméletében a «Polarisations-, Magnetisierung-, Leitungselektronen»-tól származó átlagértékekben kerülnek elő (Enc. V₂. 14. 206—208. 1.). Beléje jut az elektromosságok különböző eredetű sűrűségeinek s az elektromos és mágneses momentumnak a definitiója is.

A II. cikk az elektromos és a mágneses polarisatio alaptypusát jelöli meg, az utóbbiét egy pentapulus képében.

A III. cikkben az elektromágneses tér átlagos LORENTZ-féle differenciálegyenleteinek rendszere (Enc. V₂. 14. 209. 1. I"—V") és egyben mint vele lényeg szerint azonos, a MIN-KOWSKI-féle differenciálegyenletek rendszere (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1908. 22. 1. I—IV) az elektromosságok continuitási egyenletének általános megoldása gyanánt jelentkezik.

A IV. cikk csupán arra szolgál, hogy a LORENTZ-féle transformatio fölhasználható eredményeit összefoglalja. Azonban e cikkben, a szokástól eltérően, minden vonatkozás vectorjelvényekkel van föltüntetve, mert bizonyos alakokban igen egyszerű módon írható így is minden vonatkozás és azután egyszerű módon is kezelhető az alkalmazásokban.

Az V. cikk azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy az elektromos és a mágneses momentumnak az ő kinematikai definitiójuk alapján való transformatiója egyezik-e a differenciál-

egyenletek alapján való transformatiójukkal. Egy elektromos quantumelemnek a maga eredeti materiális székhelyéből való eltolódását minden téridőrendszerben oly vectornak számítván, a melynek az eleje az illető téridőrendszer időszámítása szerint van ugyanakkor az eredeti materiális székhelyen, a mikor a vége a quantumelem pillanatnyi helyén van: kitűnik, hogy e meghatározás rendén az elektromos és a mágneses momentum mindkétfele alapon egyféleképen transformálódik s következőleg e momentumok kinematikai definitiója is megfelel a relativitás elvének.

A VI. cikk az elektromosságok mozgási egyenleteiről szól és már teljesen járt útra tér, de befejezésül, különös példagyánánt, egyszerű módon vezet le mágnesezési egyenletet.

I. Az elektromos áramlások osztályozása.

Az eltolódott elektromosságok áramlásának szétválasztása polarisatiós áramlásra, Röntgen-áramlásra és mágneseződdést helyettesítő áramlásra (x, t) téridőrendszerben.

A t pillanatban r helyen $D\tau$ térelemben lévő $\rho_i D\tau$ elektromos quantum a $D\tau$ térelemben oly materiális elemi részből tolódot légyen el, a mely materiális elemi rész t pillanatban r_i^0 helyen van. A mellett egy térelem helyén a térelem quasi tömegcentrumának a helye értendő. Az $r-r_1^0$, $r-r_2^0$, ... eltolódásokat mint t pillanati és r helyű eltolódásokat fogva fel, röviden \bar{r}_1 , \bar{r}_2 , ... alakban fogom írni:

$$r - r_i^0 \equiv \bar{r}_i. \quad (1)$$

Nyilvánképen a t idő és r hely függvényei gyanánt jelentkeznek ezek.

Ezeket végtelen kicsinyeknek, a ρ_i sűrűségeket azonban végtelen nagyoknak gondolom oly vonatkozásokban, hogy a

$$\Sigma \rho_i \equiv \rho^{(t)} \quad (2)$$

összeg csak véges nagy lehessen és a $\rho_i \bar{r}_i$ momentumok is csak véges nagyok lehessenek, a $\rho_i D\tau$ quantum pedig elemi

quantum, azaz végtelen kicsiny legyen. A $\rho^{(l)}$ skalárist látszatos elektromos sűrűségnek, a

$$\Sigma \rho_i \bar{r}_i \equiv \mathfrak{P} \quad (3)$$

vectort elektromos momentumnak vagy elektromos polarisatió-nak nevezem. Minthogy a $\rho^{(l)}$ látszatos sűrűség az \bar{r}_i végtelen kis eltolódások révén keletkezett a $D\tau$ térelemben, ennél fogva

$$\rho^{(l)} + \text{div } \mathfrak{P} = 0. \quad (4)$$

A $D\tau$ -ba tolódott $\rho_1 D\tau$, $\rho_2 D\tau$ stb. töltések sebességét \dot{r}_1 , \dot{r}_2 stb., ellenben azok $\dot{r}_1 - \dot{r}_1^0$, $\dot{r}_2 - \dot{r}_2^0$ stb. relativ sebességét $\dot{\bar{r}}_1$, $\dot{\bar{r}}_2$ stb. jelölje. Ezek véges nagyok is lehessenek. Nyilvánképen irható, hogy

$$\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x} \dot{x}_i + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y} \dot{y}_i + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial z} \dot{z}_i. \quad (5)$$

Az eltolódott elektromosságok totális áramlását Ω jelölje, azaz

$$\Omega \equiv \Sigma \rho_i \dot{r}_i \equiv \Sigma \rho_i \dot{\bar{r}}_i + \Sigma \rho_i \dot{r}_i^0 \quad (6)$$

legyen, a hol \dot{r}_i^0 azon materiális elemi rész sebességét jelenti, a melyből $D\tau$ -nak a $\rho_i D\tau$ töltése eltolódott.

Egyelőre tegyük fel, hogy anyagi rendszerünk mozgását egyetlen sebesség jellemzi mint a hely és idő függvénye, vagyis tegyük föl egyelőre, hogy anyagi rendszerünk különböző anyagi componensei nem mozognak különböző módon. Jelölje pedig a $D\tau$ -ban foglalt materiális elemi részek közös sebességét v_0 . Akkor \bar{x}_i , \bar{y}_i , \bar{z}_i -vel mint az \bar{r}_i eltolódás componenseivel

$$\dot{r}_i^0 = v_0 - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \bar{x}_i + \frac{\partial v_0}{\partial y} \bar{y}_i + \frac{\partial v_0}{\partial z} \bar{z}_i \right). \quad (7)$$

Helyettesítsük be \dot{r}_i^0 e kifejezését és helyettesítsük be (5) alól $\dot{\bar{r}}_i$ kifejezését (6)-ba. Azután pedig figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div } \rho_i \dot{r}_i = 0, \quad (8)$$

adjuk hozzá (6) jobboldalához a

$$\Sigma \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div } \rho_i \dot{r}_i \right)$$

kifejezést. A (2), (3) és (4) számbavételével s végtelen kicsinyek elhagyásával azt találjuk, hogy

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{P}v_0] + \frac{\partial \Sigma \rho_i \bar{r}_i \dot{\bar{x}}_i}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma \rho_i \bar{r}_i \dot{\bar{y}}_i}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma \rho_i \bar{r}_i \dot{\bar{z}}_i}{\partial z}. \quad (9)$$

Azonban

$$\rho_i \bar{r}_i \dot{\bar{x}}_i = \frac{1}{2} \rho_i (\bar{r}_i \dot{\bar{x}}_i - \dot{\bar{r}}_i \bar{x}_i) + \frac{1}{2} \rho_i \frac{d\bar{r}_i \bar{x}_i}{dt} \text{ stb.}$$

Ezek jobboldalairól az első tagok a (9)-ben rotatiót szolgáltatnak, ugyanis

$$\frac{1}{2} \Sigma \rho_i [\bar{r}_i \dot{\bar{r}}_i] \equiv \mathfrak{M} \quad (10)$$

rotatióját. Ugyanazon jobboldalak utolsó tagjából származó

$$\frac{1}{2} \Sigma \rho_i \frac{d\bar{r}_i \bar{x}_i}{dt}, \quad \frac{1}{2} \Sigma \rho_i \frac{d\bar{r}_i \bar{y}_i}{dt}, \quad \frac{1}{2} \Sigma \rho_i \frac{d\bar{r}_i \bar{z}_i}{dt} \quad (11)$$

összegekről pedig felteszem, hogy olyankor is mindig végtelen kicsinyek, midőn az $\dot{\bar{r}}_i$ relativ sebességek között véges nagyok is vannak. Lényegbe vágó föltevés ez, a melynek LORENTZ elektronelméletében az Enc. V₂, 14. 181. lapján a 15. pontban tett «Beschränkung» felel meg. E föltevés tipikus jellemzését adja a II. §.

Ezek értelmében így írható (9):

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{P}v_0] + \text{rot} \mathfrak{M}. \quad (12)$$

Az időegység oly választásában, a melyben a fénysebesség vacuumban az egységgel egyenlő, az \mathfrak{M} vectort mágneses momentumnak vagy mágneses polarisátiónak vagy magnetisátiónak nevezvén, a \mathfrak{D} áramlás három tagja, rendre mint polarisatiós áramlás, Röntgen-áramlás, mágnesezést helyettesítő áramlás, teljesen a LORENTZ-féle tagolásnak felel meg.

Levezetésünkben fel volt téve, hogy a matéria mozgását egyetlen sebesség, v_0 jellemzi mint az idő és hely függvénye. Ha különböző materiális componensek különböző v_{01} , v_{02} stb. sebességek szerint mozognak, akkor az egyes materiális componensekbe tartozó elektromos és mágneses momentumokat

$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ stb. és $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ stb. jelöljék és most az ilyenek összegét jelentse \mathfrak{P} , illetőleg \mathfrak{M} :

$$\mathfrak{P} \equiv \Sigma \mathfrak{P}_j, \quad \mathfrak{M} \equiv \Sigma \mathfrak{M}_j. \quad (13)$$

Ezúttal az eltolódott elektromosságok áramlása mint polarisációs áramlásnak, Röntgen-áramlásnak és mágnesesödést helyettesítő áramlásnak az összetétele:

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot } \Sigma [\mathfrak{P}_j v_{0j}] + \text{rot } \mathfrak{M}. \quad (14)$$

Hozzája csatlakozik az ő divergentiájából és (4) időderiváltjából folyólag:

$$\frac{\partial \rho^{(u)}}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{D} = 0. \quad (15)$$

Conductiós és convectiós áramlás (x, t) téridőrendszerben.

A conductiós mozgásban lévő elektromosságok sűrűségét jelentse most ρ_1, ρ_2 stb. és ezek sebességét jelentse most \dot{r}_1, \dot{r}_2 stb. az r helyen t pillanatban. Magát a conductiós áramlást \mathfrak{S} jelölje az

$$\mathfrak{S} \equiv \Sigma \rho_i \dot{r}_i \quad (16)$$

definitio szerint, a melyhez

$$\Sigma \rho_i = 0 \quad (17)$$

csatlakozik.

Azokat az elektromos töltéseket, a melyek conductiós áramlás következtében keletkeznek és változnak a materiális elemi részekben, valóságos töltéseknek mondván, ha r helyen t pillanatban az anyagi componensek valóságos elektromos töltéseinek összes sűrűsége $\rho^{(v)}$, akkor abban az esetben, ha téridőrendszerünkben nincs mozgása a materiának,

$$\frac{\partial \rho^{(v)}}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{S} = 0.$$

Ha van mozgása a materiának téridőrendszerünkben és a különböző materiális componensek sebessége v_{01}, v_{02} stb., a hozzájuk tartozó valóságos sűrűségek pedig $\rho_1^{(v)}, \rho_2^{(v)}$ stb. az r helyen t pillanatban, akkor a

$$\mathfrak{R} \equiv \Sigma \rho_j^{(v)} v_{0j} \quad (18)$$

vectort convectiós áramlásnak nevezzük. Általánosan nyilvánképen

$$\frac{\partial \rho^{(v)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathfrak{S} + \mathfrak{R}) = 0 \quad (19)$$

continuitási egyenletünk van a valóságos sűrűségek számára. Hozzája csatlakozik, hogy

$$\Sigma \rho_j^{(v)} = \rho^{(v)}. \quad (20)$$

A totális elektromos áramlás (x, t) téridőrendszerben.

A mennyiben eltolódott elektromosságok áramlása és conductiós áramlás és convectiós áramlás együttesen jelentkezik, a teljes elektromos áramlás r helyen t pillanatban ezek összege:

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S} + \mathfrak{R} + \mathfrak{D} \quad (21)$$

a (16), (17), (18), (14) és az utóbbihoz tartozó külön meghatározások értelmében.

A teljes elektromos sűrűség pedig a $\rho^{(v)}$ teljes valóságos sűrűségnek és $\rho^{(l)}$ teljes látszatos sűrűségnek az összege:

$$\rho \equiv \rho^{(v)} + \rho^{(l)}, \quad (22)$$

a melyet szabad sűrűségnek is mondunk. Ezt és a teljes elektromos áramlást (19) és (15) alapján

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0 \quad (23)$$

köti össze.

II. Az elektromos és mágneses polarisatio alaptypusa.

Bipolusok, a melyekben a két polus egymástól való távolsága és relativ sebessége folyvást végtelen kicsiny, mindig és mindenütt csak elektromos momentumot szolgáltatnak, mágneses momentumot, véges nagyot, nem és csak polarisatiós áramlást és Röntgen-áramlást szolgáltathatnak azok véges nagyot, mert esetükben nem csak a (11) alatti kifejezések végtelen kicsinyek, hanem (10) is végtelen kicsiny és következőleg (9) egész második sora is végtelen kicsiny.

Most pedig egy *pentapolust* gondolok, a melynek a szerkezete a következő: végtelen kicsiny egyenlőszárú derékszögű keresztalak közepében van az elemi materiális székhely pozitív egyéni töltéssel s a szárak mindegyikének a végében azon székhely negyedrésnyi eltolódott negatív töltése van. Fölteszem, hogy e negatív töltések az ő eredeti székhelyük körül a saját síkjukban véges sebességű (végtelen nagy szögsebességű) keringő mozgásban vannak, mi mellett minden egyéb relativ sebességek végtelen kicsinyek a pentapolusban, ú. m. a kereszt-szárak hosszának a változási sebessége és a keresztvégeknek a kereszt tengelyét irányító sebessége. Az ily pentapolusok csak mágneses momentumot szolgáltatnak minden térelemben, és pedig merőlegest a síkjukra; elektromos momentumot nem szolgáltatnak, valamint látszatos elektromos töltést sem, véges nagyot, és a (11) alatti kifejezések velük is végtelen kicsinyek, dacára annak, hogy belőlük az \dot{t}_i relativ sebességek véges nagyok.

A folytonos térbetöltés elvén ily bipolusoknak és pentapolusoknak a tért folytonosságban betöltő rendszerei tekinthetők mindig egy téridőrendszerben nyugvó testben az elektromos és mágneses polarizáltság alanyának. Egy téridőrendszerben mozgó materiát illetően az alább bevezetendő LORENTZ-féle transformatio szolgáltatja ezekből az alaptypusokat.

III. A continuitási egyenletek általános analitikai megoldása és az elektromágneses tér egyenletei.

Bármiféle sűrűséget és áramlást jelentsenek ezúttal ρ és \mathfrak{S} az (r, t) téridőrendszerben, de elégítsék ki a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{S} = 0 \quad (24)$$

continuitási egyenletet.

Mivel van oly gradiens, \mathfrak{B}_0 , hogy ρ annak a divergen-tiájával egyenlő, (24) helyett

$$\text{div} \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_0}{\partial t} + \mathfrak{S} \right) = 0$$

irható. Ezen egyenlet általános analitikai megoldása gyanánt pedig van olyan rotatio \mathfrak{U}_0 , hogy a zárójel tartalma e rotatio rotatiójával egyenlő. Ilyképen a

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{B}_0, \quad \mathfrak{S} = \operatorname{rot} \mathfrak{U}_0 - \frac{\partial \mathfrak{B}_0}{\partial t} \quad (24)_1$$

kifejezések (24) általános analitikai megoldásaként jelentkeznek az \mathfrak{U}_0 és \mathfrak{B}_0 vectorok mint parametrumok szerint, jöllehet ezen vectorok alávetvők a

$$\operatorname{div} \mathfrak{U}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0 = 0 \quad (24)_2$$

egyenleteknek. \mathfrak{U}_0 és \mathfrak{B}_0 alakjára nézve csak akkor általános analitikai megoldás ugyan (24)₁, ha az \mathfrak{U}_0 és \mathfrak{B}_0 vectort nem vetjük alá semmi más megszorításnak mint annak, a melyet a rajtuk végezett analitikai műveletek követelnek; de tartalom szerint akkor is általános analitikai megoldása (24)₁ a (24)-nek, ha ama vectorokat alávetjük a (24)₂-nek, azaz kirójuk, hogy \mathfrak{U}_0 rotatio, \mathfrak{B}_0 gradiens legyen.

Azonban a (24)₂ helyett más egyenleteket is szabhatunk ki a két vectorra, olyanokat, a melyek a (24)-nek (24)₁ alatt foglalt megoldását tartalom szerint nem specializálják. Jelentesen pedig ρ_0 , \mathfrak{S}_0 tetszésre adott sűrűséget, illetőleg áramlást azzal a kikötéssel, hogy kielégítsék a continuitás

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}_0 = 0 \quad (25)$$

egyenletét. Minthogy kielégítik, ennél fogva \mathfrak{U}_0 és \mathfrak{B}_0 eddigi jelentményének fenntartásával

$$\rho_0 \text{ és } \mathfrak{S}_0 + \frac{\partial \mathfrak{U}_0}{\partial t}$$

szintén kielégítik (24)₂ első egyenlete miatt. Van tehát olyan \mathfrak{U} rotatio és olyan \mathfrak{B} gradiens, hogy

$$\rho_0 = \operatorname{div} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{S}_0 + \frac{\partial \mathfrak{U}_0}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{U} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \quad (25)_1$$

Írjuk így az \mathfrak{U} rotatiót:

$$\mathfrak{U} = \mathcal{A}\mathfrak{B} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} \quad (25)_2$$

azzal a hozzáadással, hogy \mathfrak{N} rotatio legyen. Minthogy \mathfrak{B} gradiens, \mathfrak{N} pedig rotatio:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{N} = 0. \quad (25)_3$$

Ha most

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{B} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &\equiv \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{U} - \frac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial t^2} &\equiv \mathfrak{C} \end{aligned} \quad (25)_4$$

teszszük, akkor $(24)_1$, $(24)_2$, $(25)_1$, $(25)_2$, $(25)_3$, $(25)_4$ között \mathfrak{U}_0 , \mathfrak{B}_0 , \mathfrak{U} , \mathfrak{B} , \mathfrak{N} eliminálható és az eliminálás eredménye a következő négy egyenlet:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} &= \mathfrak{S}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{C} = \rho, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{C} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= -\mathfrak{S}_0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \rho_0, \end{aligned} \quad (26)$$

A két első itteni egyenlet tehát a (24) alatt írt continuitási egyenletnek tartalom szerint általános analitikai megoldása a \mathfrak{B} és \mathfrak{C} vektorokkal mint parametrumokkal, bármely sűrűséget és áramlást jelentsen is a másik két egyenletben a ρ_0 és \mathfrak{S}_0 a (25) alatt írt continuitási egyenlet keretében.

Úgy is kimondható ez az eredmény, hogy két continuitási egyenlet mindig megoldható (26) módjára két vector mint közös parametrum révén. Egyébiránt egy continuitási egyenlet mindig explicite megoldható általánosan egyetlen vector mint parametrum révén, mert ha $(24)_1$ -ben

$$\mathfrak{U}_0 = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{I} + \operatorname{rot} \mathfrak{D}$$

írjuk, azt kapjuk, hogy

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{S} = -\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t}. \quad (27)$$

Könnyen eljuthatunk a \mathfrak{C} és \mathfrak{B} vectornak ρ , \mathfrak{S} , ρ_0 , \mathfrak{S}_0 által való integrálkifejezéséhez is. Ha ugyanis

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$$

írjuk és a \mathfrak{B}_1 és \mathfrak{C}_1 vectoron a $\rho_0=0$, $\mathfrak{S}_0=0$ esetnek megfelelő \mathfrak{B} és \mathfrak{C} vectort értjük, akkor \mathfrak{B}_2 és \mathfrak{C}_2 a $\rho=0$, $\mathfrak{S}=0$ esetnek megfelelő \mathfrak{B} és \mathfrak{C} vector. A \mathfrak{B}_1 és \mathfrak{C}_1 meg a \mathfrak{B}_2 és \mathfrak{C}_2 integrálkifejezésének ösmeretes meghatározásával eljutunk ezek összegében \mathfrak{B} és \mathfrak{C} integrálkifejezéséhez.

Ha ρ az elektromosság teljes sűrűségét, \mathfrak{S} az elektromosság teljes áramlását jelenti és ha a matéria mozgását egyetlen sebesség jellemzi mint a hely és idő függvénye, akkor $\rho_0=0$, $\mathfrak{S}_0=0$ tételével a (26) alatti egyenletek az elektromágneses tér LORENTZ-féle differenciálegyenletei, föltéve, hogy oly időegységet használunk, hogy a fénysebesség nagysága a vacuumban az egységgel legyen egyenlő. (Enc. V₂, 14. 209. l. I''—V''). Kitűnik ez, ha (26) két első egyenletében a

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{D} - \mathfrak{P} \quad (28)$$

jelölésekkel élünk és tekintetbe vesszük, hogy az itten valószínűsnek nevezett $\rho^{(v)}$ sűrűséget jelöli LORENTZ egyszerű ρ betűvel, tehát az itteni ρ helyett $\rho - \rho^{(v)}$, azaz $\rho + \text{div } \mathfrak{P}$ irandó (és tekintetbe vesszük LORENTZ XXV., XXVI. és XXXI., meg XXVIII. alatti kifejezését a 208., 209. lapról. Ezek nyomán a (26) alatti két első egyenletünk a 209. lap III'' és I'' egyenletébe megy át; (26) alatti másik két egyenletünk közvetlenül összeillik a 209. lap IV'' és V'' egyenletével, miután t. i. $\rho_0=0$, $\mathfrak{S}_0=0$ tettük; a 209. lap II'' egyenlete pedig, a mely III'' és I'' folyománya, nem más, mint (23) alatti continuitási egyenletünk).

Ha pedig

$$\mathfrak{M} + [\mathfrak{P}v_0] = \mathfrak{M} \quad (29)$$

irva, nem a $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$ különbséget, hanem a $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$ különbséget jelöljük külön betűvel úgy, hogy

$$\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{G}} + \bar{\mathfrak{M}} \quad (30)$$

írjuk, akkor az elektromágneses tér LORENTZ-féle differenciálegyenletei MINKOWSKI differenciálegyenleteivé válnak (Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern 22. l., de a benne használt jelöléseknek és a LORENTZ-féléknek, benne a 24. lapon található összehasonlításán azzal

a különbséggel, hogy az m betű ne a \mathfrak{E} , hanem a \mathfrak{H} jelölésére szolgáljon). Lényegbe vágó különbség tehát nincs LORENTZnek és MINKOWSKINAK a differenciálegyenletei között, mint már többen észrevették, minélfogva MINKOWSKI tévesen állítja (24. l.), hogy LORENTZ differenciálegyenletei nem felelnek meg bármiként magnetizált testekben a relativitás elvének; az elektromos és a mágneses polarisatio s az áraminductio LORENTZ-féle egyenletei módosítandók csak a relativitás szempontjából (PH. FRANK, Ann. d. Physik XXVII. 1908). Minthogy azonban általános tárgyalásban \mathfrak{M} és \mathfrak{H} használata kényelmesebb, mint \mathfrak{M} és \mathfrak{E} használata, a következőkben ezeket fogom alkalmazni és az \mathfrak{M} vektort fogom ezentúl mágneses momentumnak s ahhoz képest a \mathfrak{H} vektort mágneses térerősségnek nevezni. \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , \mathfrak{B} neve itt is elektromos térerősség, elektromos gerjesztés, mágneses gerjesztés lesz, midőn $\rho_0=0$, $\mathfrak{E}_0=0$, vagyis midőn

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{B} &= \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} + \mathfrak{E}, & \text{div } \mathfrak{C} &= \rho, \\ \text{rot } \mathfrak{C} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathfrak{B} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

A (26) alatt irt egyenletrendszer a maga tartalma szerint akkor is általános analitikai megoldása (24)-nek, ha $\rho_0=0$, $\mathfrak{E}_0=0$ írjuk benne, tehát az elektromágneses tér LORENTZ-féle differenciálegyenleteinek rendszere mint a teljes elektromos sűrűség és áramlás continuitási egyenletének tartalom szerint általános analitikai megoldása jelentkezik.

IV. A Lorentz-féle transformatio fölvétele.

A LORENTZ-féle transformatio vectorjelvényekkel is egyszerű alakban állítható elő és egyszerű módokon alkalmazható. Még pedig a «specziális» LORENTZ-féle transformatio vectorjelvényekkel egyszerű alakban írva

$$\begin{aligned} r' + nt' &= r - nt \\ t' + (nr') &= t - (nr) \end{aligned} \quad (n = \text{const.}) \quad (32)$$

t. i. úgy lévén választva az idő egysége mindkét téridőrend-

szerben, hogy a fénysebesség nagysága vacuumban mindkét téridőrendszerben = 1 legyen.

Vesszós bötü fölé irt ponttal majd mindig a t' idő szerint képezett totalis differenciálhányadost jelöljük, úgy hogy például

$$\dot{r}' = \frac{dr'}{dt'}, \quad \ddot{r}' = \frac{d^2r'}{dt'^2}.$$

Ebben az értelemben, az n constans vector meghatározására magából (32)-ből

$$(\dot{r}')_{r'=0} = -(\dot{r}')_{r=0} = \frac{2n}{1+n^2}$$

szolgál, a mely szerint az r' tér az r térben haladó mozgást végez

$$w = \frac{2n}{1+n^2} \quad (33)_1$$

állandó sebességgel és az r tér az r' térben haladó mozgást végez $-w$ állandó sebességgel és:

$$n = \frac{w}{1 + \sqrt{1-w^2}}. \quad (33)_2$$

Azt pedig mindig fölteszszük, hogy

$$w^2 < 1. \quad (33)_3$$

Az EINSTEINTŐL construált LORENTZ-féle transformatio alakjának felel meg (32) (Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Über das Relativitätsprinzip etc.), de annak a kikötésével, hogy az időegységet különböző téridőrendszerekben különbözően választhassuk meg, АБРАХАМ ellenvetésétől (Theorie der Elektrizität II. második kiadásában 367—369. l.) megszabadul.

Az alkalmazások érdekében azzal az elemi követeléssel egészítsük ki ezen transformatiót (mint POINCARÉ a Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo XXI. kötetében), hogy az elektromos quantumokat változatlanul hagyja; sőt azt is ki-
rójjuk, hogy a materiális quantumokat (tömegeket) is változatlanul hagyja. Bármiféle sűrűséget jelentsen tehát ρ a $1/r$ terelemben az (r, t) rendszerben r helyen t pillanatban, ha az

(r', t') rendszerben $D\tau'$ a $\rho D\tau$ quantum térfogata a t' pillanatban, akkor a megfelelő ρ' sűrűséget a

$$\rho' D\tau' = \rho D\tau \quad (34)$$

egyenlet határozza meg a megfelelő r' helyre. Minthogy pedig a LORENTZ-féle transformatio determinánsa (és egyúttal JACOBI-féle determinánsa is) az egységgel egyenlő, ha a $\rho D\tau$ quantum (r, t) rendszerből $t+dt$ pillanati helyének az (r', t') rendszerben $t'+dt'$ pillanati hely felel meg, akkor $dt' D\tau' = dt D\tau$, tehát (34) helyett az is írható, hogy

$$\rho' dt = \rho dt'. \quad (35)$$

Összefoglalok néhány következményes transformatiót. Ez összefoglalásban hasonló módon transformálandó mennyiségcsoportokat röviden a \sim hasonlósági jellel fogok egymásután kapcsolni.

Bármely sűrűséget jelentsen ρ , ha a $\rho D\tau$ quantum sebességét jelenti \dot{t} , akkor (32) differenciálásából és (35)-ből folyólag a ρ scalaris és $\rho\dot{t}$ vector transformatiója olyan a megfelelő ρ' scalarisba és $\rho'\dot{t}'$ vectorba mint t és r transformatiója t' és r' -be:

$$(\rho, \rho\dot{t}) \sim (t, r). \quad (36)$$

Továbbá ebből folyólag (16), (17), (18), (20) és (2), (6) és (21), (22) értelmében

$$(\rho^{(v)}, \mathfrak{J} + \mathfrak{K}) \sim (\rho^{(l)}, \mathfrak{D}) \sim (\rho, \mathfrak{E}) \sim (t, r). \quad (37)$$

Ha továbbá

$$\sqrt{1 - \dot{t}^2} = \frac{1}{k}, \quad \rho \frac{dk\dot{t}}{dt} = \mathfrak{R}, \quad (38)$$

tehát nemkülönben

$$\sqrt{1 - \dot{t}'^2} = \frac{1}{k'}, \quad \rho' \frac{dk'\dot{t}'}{dt'} = \mathfrak{R}' \quad (38)'$$

írjuk, ugyancsak

$$(k, k\dot{t}) \sim ((i\mathfrak{R}), \mathfrak{R}) \sim (t, r) \quad (39)$$

odaértve, hogy az $\rho D\tau$ quantum sebessége az \dot{t} az r helyen és t pillanatban. Ha pedig

$$k\rho\dot{t} = \mathfrak{J}, \quad k'\rho'\dot{t}' = \mathfrak{J}' \quad (38)_1, (38)'_1$$

teszszük, akkor ugyanazon föltétel alatt

$$\mathfrak{B}' - (n\mathfrak{B}') \frac{\dot{r}'}{1 + (n\dot{r}')^2} = \mathfrak{B} + (n\mathfrak{B}) \frac{\dot{r}}{1 - (n\dot{r})^2}. \quad (39)_1$$

Továbbá ugyanazon föltétel alatt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}' \rho' \dot{r}' = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \dot{r}, \quad (40)$$

a hol div' az x', y', z' szerint képezett divergenciát jelöl. Mint-hogy a $\rho \dot{r}$ quantum sebességét jelenti \dot{r} , ennél fogva (40) jobb-
oldala eltűnik, tehát a baloldala is eltűnik, tehát continuitási
egyenletnek continuitási egyenlet felel meg.

Következőleg, a mily kifejezéseink vannak (24)₁–(24)₂ vagy
(26) vagy (27) vagy (31) alatt a ρ és \mathfrak{S} számára, épen olyan
kifejezések ρ' és \mathfrak{S}' számára is léteznek. Azonban (24)₁–(24)₂
nem teljesíti a LORENTZ-féle transformatióban a relativitás elvét
és (27) sem teljesíti. Csak (26) és a benne foglalt (31) teljesíti
a speciális alakú általános megoldások közül. Ezekből a \mathfrak{C} és
 \mathfrak{B} vectorok s a megfelelő \mathfrak{C}' és \mathfrak{B}' vectorok vonatkozását vector-
jelvényekkel legegyszerűbb alakban

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}' + [n\mathfrak{C}'] &= \mathfrak{B} - [n\mathfrak{C}], \\ \mathfrak{C}' - [n\mathfrak{B}'] &= \mathfrak{C} + [n\mathfrak{B}], \end{aligned} \quad (41)$$

egyenletek szolgáltatják.

Ezek mintáját követi (4) és (12) értelmében $\overline{\mathfrak{M}}$ és $-\mathfrak{B}$
transformatiója, mert (4) és (12) épen olyan alakú ezekre nézve,
mint (26) első sorának egyenletei \mathfrak{B} -re és \mathfrak{C} -re nézve. Tehát

$$(\overline{\mathfrak{M}}, -\mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}). \quad (42)$$

Mint-hogy pedig ebből folyólag

$$(\mathfrak{B} - \overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{C} + \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

(28) második kifejezése és (30) szerint

$$(\overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}) \sim (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

Mint-hogy azonban az I. §. az elektromos és mágneses

momentumot elektromos sűrűségekkel és elektromosságok eltolódásával és utóbbiak változási sebességével (ρ_i , \bar{v}_i , $\dot{\bar{v}}_i$) definiálta, külön megvizsgálandó, hogy e definitiók értelmében teljesül-e a (42) alatt $\bar{\mathfrak{M}}$ -re és \mathfrak{P} -re szóló transformatio, ú. m. részletesen írva:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{M}}' - [n\mathfrak{P}'] &= \bar{\mathfrak{M}} + [n\mathfrak{P}] \\ \mathfrak{P}' + [n]\bar{\mathfrak{M}}' &= \mathfrak{P} - [n\bar{\mathfrak{M}}]\end{aligned}\quad (42)_0$$

teljesül-e, miként a relativitás elve kívánja? Ki fog tűnni, hogy teljesül, ha csak az (r', t') téridőrendszerben úgy értelmezzük az \bar{v}_i' eltolódásokat, a mint az (r, t) téridőrendszerben értelmezzük az \bar{v}_i eltolódások.

V. Az elemi eltolódás Lorentz-féle transformatiója és az elektromos momentum s a mágneses momentum ebből következő transformatiója.

Az elemi eltolódás Lorentz-féle transformatiója.

Ha a t pillanatban r helyen lévő $\rho_i D\tau$ elektromos quantum eredeti materiális széke (a melyből eltolódott) ugyancsak a t pillanatban r_i^0 helyen van, akkor az I. §. értelmében $r - r_i^0 \equiv \bar{v}_i$ jelenti a $\rho_i D\tau$ elektromos quantum t pillanati r helyű végtelen kis eltolódását az (r, t) téridőrendszerben. E quantum t pillanati r helyének t' pillanati r' hely felel meg az (r', t') téridőrendszerben. Eredeti materiális széke t pillanati r_i^0 helyének azonban nem t' pillanati hely felel meg, hanem valamely $t_i^{0'}$ más pillanati $r_i^{0'}$ hely az (r', t') rendszerben. Ennélfogva az \bar{v}_i eltolódás definitiójával congruens definitio szerint nem $r' - r_i^{0'}$ felel meg az (r', t') rendszerben az \bar{v}_i eltolódásnak, hanem, ha az (r', t') rendszerben az $\rho_i D\tau (= \rho_i' D\tau')$ quantum eredeti materiális széke t' pillanatban r_{0i}' helyen van, $r' - r_{0i}'$ felel meg. Ezt tekintem tehát az (r', t') rendszerben azon quantum t' pillanati, r' helyű eltolódásának és ezt jelölje \bar{v}_i' . A t' pillanati r_{0i}' helynek pedig az (r, t) rendszerben nem t pillanati hely felel meg, hanem valamely t_{0i} más pillanati hely.

Rövidség kedvéért mellőzve az i indexet, a következő meghatározásaink és transformáló egyenleteink vannak tehát:

$$\bar{r} \equiv r - r^0, \quad \bar{r}' \equiv r' - r'^0, \quad (43)_1$$

$$r' + nt' = r - nt, \quad (43)_2$$

$$t' + (nr') = t - (nr),$$

$$r^{0'} + nt^{0'} = r^0 - nt, \quad (43)_3$$

$$t^{0'} + (nr^{0'}) = t - (nr^0),$$

$$r'_0 + nt' = r_0 - nt_0, \quad (43)_4$$

$$t' + (nr'_0) = t_0 - (nr_0).$$

A (43)₁ szerint

$$r - r_0 \equiv \bar{r} + (r^0 - r_0), \quad r' - r^{0'} \equiv \bar{r}' + (r'^0 - r^{0'}).$$

Mint hogy $r^0 - r_0$ és $t - t_0$ meg $r'^0 - r^{0'}$ és $t' - t^{0'}$ végtelen kicsinyek és $r^0 - r_0$, illetőleg $r'^0 - r^{0'}$ materiális székhelynek az elmozdulása a $t - t_0$, illetőleg $t' - t^{0'}$ idő alatt: v_0 , illetőleg v'_0 jelölvén a materiális székhely sebességét,

$$r - r_0 = \bar{r} + (t - t_0)v_0, \quad r' - r^{0'} = \bar{r}' + (t' - t^{0'})v'_0 \quad (43)_5$$

egyenletek is csatlakoznak az előbbiekhöz.

Most már az \bar{r} végtelen kis eltolódás LORENTZ-féle transformatióját könnyen elvégezhetjük. A (43)₂-ből és (43)₄-ből egyiknek a másikból való kivonása által a (43)₁ és (43)₅ figyelembe vételével:

$$\begin{aligned} \bar{r}' - \bar{r} &= (t - t_0)(v_0 - n), \\ (n\bar{r}') + (n\bar{r}) &= (t - t_0)(1 - (nv_0)) \end{aligned}$$

keletkezik. Hasonlóan (43)₂-ből és (43)₃-ból:

$$\begin{aligned} \bar{r}' - \bar{r} &= (t^{0'} - t')(v'_0 + n), \\ (n\bar{r}') + (n\bar{r}) &= (t^{0'} - t')(1 + (nv'_0)). \end{aligned}$$

Az előbbi kettőből $t - t_0$ eliminálásával s az utóbbi kettőből $t^{0'} - t'$ eliminálásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} &= \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)}, \\ \bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)} &= \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)}. \end{aligned} \quad (43)_6$$

Azonban, mint ezekből magukból, de már (43)₃ vagy (43)₄ differenciálásából is következik:

$$\frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)} = \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)}, \quad (44)$$

tehát (43)₆ helyett (44) mellé az

$$\bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)} = \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} \quad (45)$$

egyenletet írhatjuk mint az eltolódás LORENTZ-féle transformatióját.

Ha pedig az n vectorral scalaris szorzást művelünk rajta, azt kapjuk, hogy

$$\frac{(n\bar{r}')}{(1 + (nv'_0))} = \frac{(n\bar{r})}{1 - (nv_0)}, \quad (46)$$

minélfogva (45) helyett

$$\bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v'_0}{1 + (nv'_0)} = \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v_0}{1 - (nv_0)} \quad (45)_1$$

is írható.

Egyszerű alakban állítható elő (45)-ből (44) és (46) révén \bar{r}' és \bar{r} közvetlen egymástól függése is, ú. m.

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \bar{r} + (w\bar{r}) \frac{v_0 - n}{1 - (wv_0)}, \\ \bar{r} &= \bar{r}' - (w\bar{r}') \frac{v'_0 + n}{1 + (wv'_0)}, \end{aligned} \quad (45)_2$$

a hol w a (33)₁ alatt írt jelentményben van.

Az elektromos momentumnak és a mágneses momentumnak az ő kinematikai definitiójuk alapján való Lorentz-féle transformatiója.

Mindenekelőtt azt kell kimutatnom, hogy abból a föltevésekből, hogy a (11) alatt írt kifejezések végtelen kicsinyek, következik, hogy az (\bar{r}', t') rendszerben gondolt

$$\Sigma \rho'_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{x}'_i)}{dt'}, \quad \Sigma \rho'_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{y}'_i)}{dt'}, \quad \Sigma \rho'_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{z}'_i)}{dt'} \quad (47)$$

kifejezések is végtelen kicsinyek. A (45)₂ szerint az $\bar{r}'_i \bar{x}'_i$ stb.

vectorok az \bar{r}_i vectorok componenseinek homogén négyzetes függvényei, tehát

$$\Sigma \rho_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{x}'_i)}{dt} \text{ stb.} \quad (47)_1$$

végtelen kicsinyek, mert a componenseik a végtelen kicsiny (11) alatti vectorok componenseinek és a végtelen kicsiny $\rho_i \bar{r}_i \bar{x}_i$ stb. vectorok componenseinek a homogén lineáris függvényeik. Azonban

$$\rho_i \frac{d}{dt} = \rho'_i \frac{d}{dt'_i},$$

vagy mivel $\frac{d}{dt'}$ számlálójával nem a dt'_i időelemnek megfelelő (azaz nem a közös dt időelemnek megfelelő) elemi megváltozásokat jelöljük (ellentétben $\frac{d}{dt'_i}$ számlálójával), hanem $\frac{d}{dt'}$ számlálójával a közös dt' időelemnek megfelelő elemi megváltozásokat:

$$\rho_i \frac{d}{dt} = \rho'_i \frac{d}{dt'}$$

Következőleg (47) kifejezései azonosak $(47)_1$ kifejezéseivel, tehát valóban végtelen kicsinyek amazok is. Hogy pedig a (11) és a (47) alatti kifejezések végtelen kicsinyek, arra figyelemmel kell lennünk a \mathfrak{P} és \mathfrak{M} momentumoknak az ő kinematikai definiíciójuk alapján művelendő LORENTZ-féle transzformációjában, nevezetesen pedig arra, hogy a (11) és (47) alatti kifejezések végtelen kicsiny voltánál fogva

$$\begin{aligned} \Sigma \rho_i \frac{d(n\bar{r}_i) \bar{r}_i}{dt} = 0, & \quad \Sigma \rho_i \frac{d(n\bar{r}_i)^2}{dt} = 0, \\ \Sigma \rho'_i \frac{d(n\bar{r}'_i) \bar{r}'_i}{dt'} = 0, & \quad \Sigma \rho'_i \frac{d(n\bar{r}'_i)^2}{dt'} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

írhatjuk.

A mi már most a transzformációt illeti, egyszerűség kedvéért arra az esetre szoritkozom egyelőre, hogy a matéria mozgását egyetlen sebesség v_0 jellemzi mint hely és idő függvénye. Ehhez képest az I. §. kinematikai definiíciójának és (29)-nek értelmében

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} - [n\overline{\mathfrak{M}}] &\equiv \Sigma \rho_i \left\{ \bar{r}_i + (n\bar{r}_i) v_0 - (nv_0) \bar{r}_i + \frac{1}{2} (n\bar{r}_i) \dot{\bar{r}}_i - \frac{1}{2} (n\dot{\bar{r}}_i) \bar{r}_i \right\}, \\ \overline{\mathfrak{M}} + [n\mathfrak{P}] &\equiv \Sigma \rho_i [\bar{r}_i (v_0 + \frac{1}{2} \dot{\bar{r}}_i - n)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Tekintettel (48)-ra és arra, hogy (43)₁-ből folyólag $\dot{\bar{r}}_i = \dot{r}_i - v_0$, (a hol \dot{r}_i a ρ_i / τ quantum sebessége), a posteriori könnyen igazolható, hogy ezen (49) alatt irt identitások æquivalensek a következő kifejezésekkel:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} - [n\overline{\mathfrak{M}}] &= \Sigma \rho_i (1 - (n\dot{\bar{r}}_i)) \left(\bar{r}_i + (n\bar{r}_i) \frac{v_0}{1 - (nv_0)} \right), \\ \overline{\mathfrak{M}} + [n\mathfrak{P}] &= \\ &= \Sigma \rho_i \left[\left(\frac{\dot{\bar{r}}_i - n}{2} + \frac{1 - (n\dot{\bar{r}}_i)}{2} \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} \right) \left(\bar{r}_i + (n\bar{r}_i) \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Ha most (49)-ben n helyett $-n$ -et teszünk, a többi mennyiség fejéhez pedig vesszõt írunk, akkor megkapjuk

$$\mathfrak{P}' + [n\overline{\mathfrak{M}}'] \quad \text{és} \quad \overline{\mathfrak{M}}' - [n\mathfrak{P}']$$

definiíószerű kifejezését, a melyekből pedig (48)-nak és annak a számbavételével, hogy $\dot{\bar{r}}'_i = \dot{r}'_i - v'_0$, az (50)-hez hasonló kifejezések származnak. Kifejezések, a melyek (50)-ből a n -nek $-n$ -vel, a többi bõtűnek pedig vesszős bõtűkkel való helyettesítése által is kiírhatók.

Ámde (36) szerint

$$\rho'_i (\dot{\bar{r}}'_i + n) = \rho_i (\dot{\bar{r}}_i - n), \quad \rho'_i (1 + (n\dot{\bar{r}}'_i)) = \rho_i (1 - (n\dot{\bar{r}}_i)).$$

Ha most még a (44), (45)₁ és (45) alatt irt vonatkozásokat is számba vesszünk, látjuk, hogy \mathfrak{P} és $\overline{\mathfrak{M}}$ a maga kinematikai definiíója s \mathfrak{P}' és $\overline{\mathfrak{M}}'$ a maga megfelelő kinematikai definiíója alapján is teljesíti a (42)₀ alatt irt transzformációt.

A (42)₀-nak egy közvetlen folyománya gyanánt fölemlitem, hogy ha a (44) alatt egyenlőkül irtakat röviden u_0 jelöli, akkor (29) alkalmazásával

$$(1 - (nu_0)) \overline{\mathfrak{M}}' + (u_0 \overline{\mathfrak{M}}') n = (1 + (n_0 u)) \overline{\mathfrak{M}} - (u_0 \overline{\mathfrak{M}}) n. \quad (42)_1$$

Ha tehát az (r, t) rendszerben r helyen t pillanatban nincs mágneseles momentum LORENTZ-féle értelemben, akkor az (r', t')

rendszerben sincs az r' helyen t' pillanatban. Az elektromos momentumokról ez általában nem áll, ugyanis $(42)_0$ -ból

$$(\mathfrak{P}')_{\mathfrak{P}=0} = \frac{[\mathfrak{M}'w]}{1+(wv'_0)} = \frac{[\mathfrak{M}w]}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Ha különböző materiális componensek különböző sebességek szerint mozognak, akkor, föltehető lévén, hogy minden ily materiális componens eltolódott elektromosságait külön-külön megilleti a jelen §. értelmében a $(42)_0$ alatt írt transformatio, összegelés által a resultans \mathfrak{M} és \mathfrak{P} vector transformatiója ugyancsak $(42)_0$ alakjában áll elő.

VI. Az elektromosságok mozgási egyenletei.

Már PLANCKnak egy közleményéből kitűnik (Berichte der deutschen Phys. Ges. 1906. 139. l.), hogy elvileg fölösleges dolog eltérni az állandó tömeg fogalmától, úgy hogy a változó tömeg vagy tömegek (longitudinalis és transversalis tömeg) fogalmának a használata úgy tekinthető, mint csupán formai szükséglet. Ennélfogva közönséges mechanikai értelemben való tömeget tulajdonítok itt minden elektromos és minden materiális elemi résznek. E mellett fölteszem, hogy az elektromosságok sűrűségének és tömötségének (materiális sűrűségének) a hányadosa ugyan egyetemleges állandó, de elektromosságok materiával szorosan összeállva is jelentkezhetnek és ilyenkor az ő saját egyéni tömötségüknek és materiális terhük tömötségének az összegét nevezem röviden a tömötségüknek. Ha tehát valamely elektromosságnak a sűrűségét ρ és a tömötségét ρ_0 jelöli, a $\rho:\rho_0$ hányados hely és idő szerint változó is lehet, azonban értékének szabott felső határa van, ugyanis a föntebb gondolt egyetemleges állandónak az értéke.

Az (r, t) téridőrendszerben t pillanatban r helyen $D\tau$ térlemben egy ρ sűrűségű és ρ_0 tömötségű elektromosság sebessége legyen \dot{r} , tehát a gyorsulása \ddot{r} legyen; a reá ható teljes mozgató erőt pedig $\mathfrak{F}D\tau$ jelölje, a melynek a mérésében az idő egysége szintén a szerint választandó, hogy a fénysebesség

nagysága vacuumban az (r, t) téridőrendszerben $=1$. Közön-
séges mechanikai értelemben n gondolván az $\mathfrak{F}D\tau$ erőt,

$$\rho_0 \ddot{r} = \mathfrak{F}$$

azon elektromosság mozgási egyenlete.

Az \mathfrak{F} erővektort két olyan erővector összegére bontsuk, a
melyek egyike tisztán az elektromágneses tértől, másika a mate-
riától (és pedig ettől általában mechanikai kényszer folyamánya
gyanánt is) származik, úgy hogy az első független a materiától,
a második pedig vacuumban nem tesz számot (számot nem
tévő gravitációra redukálódik). Az első \mathfrak{F}_e , a másodikat \mathfrak{F}_m
jelölje:

$$\rho_0 \ddot{r} = \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_e + \mathfrak{F}_m. \quad (51)$$

Ha pedig az (r', t') téridőrendszerben

$$\rho'_0 \ddot{r}' = \mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_e + \mathfrak{F}'_m,$$

akkor (39)₁-ből

$$k\mathfrak{F} = k' \left(\mathfrak{F}' - (w\mathfrak{F}') \frac{\dot{r}' + n}{1 + (w\dot{r}')} \right),$$

mert a (39)₁ alatt írt transformatio olyan mint (45)₁, tehát
(45)₂ mintájára is írható.

Azzal a föltevessel, hogy ha valamely (r', t') rendszerben
az r' helyen t' pillanatban $\dot{r}' = 0$, akkor az \mathfrak{F}'_e erővector $\rho'_0 \mathfrak{C}'$ -vel
egyenlő, EINSTEIN módszerét alkalmazva (Ann. d. Phys. XVII.
1905. 918. l.)

$$\mathfrak{F}_e = \frac{\rho}{k} (\mathfrak{C} + [\dot{r}\mathfrak{B}] - (\dot{r}\mathfrak{C}) \dot{r}), \quad (52)_e$$

$$\mathfrak{F}_m = \frac{1}{k} \left(\mathfrak{F}'_m - (\dot{r}\mathfrak{F}'_m) \frac{k\dot{r}}{1+k} \right). \quad (52)_m$$

Közönseges mechanikai értelemben $\mathfrak{F}_e D\tau$ azon mozgató erő
(PLANCK l. c.), a mely tisztán az elektromágneses tértől háramlik
a quantumelemre. Az \mathfrak{F}_m és \mathfrak{F}'_m erővector összefüggése pedig
figyelman kívül maradhat, mert \mathfrak{F}_m meghatározásában EINSTEIN
módszerét a materia mozgására kell vonatkoztatni, mint implicite
MINKOWSKI tette, t. i. úgy, hogy oly téridőrendszerből transfor-
málunk, a melyben a materia számbavett elemi része pilla-

natnyi nyugalomban van. Csupán így írjuk fel tehát most az (51) alatti mozgás-egyenletet:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\rho}{k} (\mathbb{C} + [\dot{\mathbf{r}}\mathbb{B}] - (\dot{\mathbf{r}}\mathbb{C}) \dot{\mathbf{r}}) + \mathfrak{F}_m.$$

Hátra van még az \mathfrak{F}_m erővectornak a meghatározása. Egyszerű definitiója által juthatunk el az (\mathbf{r}, t) rendszerben nyugvó izotrop testek számára a vezető-áramlások inductiójának (egyben a HALL-féle jelenségnek) s az elektromos momentumok inductiójának (egyben sugárzások dispersiójának s absorptiójának, a «természetes» rotatorius fénysarkításnak, a magneto-rotatorius fénysarkításnak, a KERR-féle magneto-optikai jelenségnek s a ZEEMANN-féle jelenségnek) egyszerűbb alakjaihoz. Ezen célokra elégséges a materiától származó surlódási erőket, quasi elasticus erőket s a materiális minőség és állapot inhomogén voltából származókat föltételezni. Messzebb jutunk, ha elektromosságok materiális terhének egymáshoz surlódását és mechanikai kényszerét is föltételezzük.

Az említett egyszerűbb viszonyoknak az (\mathbf{r}, t) rendszerben nyugvó izotrop testben megfelel

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{r}}_i + \varphi_i \operatorname{rot} \dot{\mathbf{r}}_i + \theta_i \dot{\mathbf{r}}_i + \lambda_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\rho^i}{k_i} (\mathbb{C} + \mathbb{C}_i + [\dot{\mathbf{r}}_i \mathbb{B}] - (\dot{\mathbf{r}}_i \mathbb{C}) \dot{\mathbf{r}}_i) \quad (54)$$

($i=1, 2, \dots$)

azzal, hogy φ_i , θ_i , λ_i arányos ρ_i négyzetével és különben csak a materiális minőségtől és állapottól függenek, \mathbb{C}_i pedig csak a materiális minőség és állapot inhomogén voltától (ezeket meghatározó mennyiségek coordinata deriváltjaitól) függ. Ideális vezetőkben $\varphi_i = 0$, $\lambda_i = 0$. Ideális, nem mágnesezhető dielectricumban $\ddot{\mathbf{r}}_i$ az I. §-ban gondolt eltolódás a II. §-ban említett bipolaris állapothoz.

Az (\mathbf{r}, t) téridőrendszerben mozgó testek számára EINSTEIN módszere szerint MINKOWSKIVAL (Erstes Axiom) a LORENTZ-féle transformatio juttat el a megfelelő vonatkozásokhoz.

Fölsöleges volna ezek kifejtésével foglalkoznom, mert kész utakon halad az. Csak a mágneseződésnek VOIGT-tól (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 és Ann. d. Phys. IX. 1902) és LANGEVINTŐL (Ann. de Chim. et de Phys. 1905) tárgyalt kér-

dését érintem kissé, ugyanis annak a megállapításával, hogy az (54) alatti egyenlet keretében olyankor, a mikor $\varphi_i=0$, $\theta_i=0$, $\lambda_i=\lambda$, $\mathfrak{C}_i=0$ és csak a mágneses tér tesz számot, az elektromos nem, tehát $\mathfrak{C}=0$ tehető: mi a mágneses momentumra háruló föltétele azon pentapoláris állapotnak, a melyet a II. §-ban definiáltam?

Ezen pentapolaris állapotban minden térelemben négy elektromos quantumelem van mozgásban mint négy szomszédos térelemből eltolódott négy poláris töltés. Ehhez képest

$$\rho_{0i}\ddot{r}_i + \lambda\bar{r}_i = \frac{\rho_i}{k_i} [\dot{r}_i\mathfrak{B}], \quad (55)$$

$(i=1, 2, 3, 4)$

négy vectoregyenletünk van, a melyekhez csatolhatók, mint a pentapolusok definitiója szerint vegtelen nagy pontossággal érvényesek, a következő vonatkozások:

$$(\bar{r}_i\dot{r}_i) = 0, \quad \ddot{r}_i = -\frac{\dot{r}_i^2}{\bar{r}_i^2} \bar{r}_i, \quad (56), (57)$$

$$(\bar{r}_1\bar{r}_2) = 0, \quad (\bar{r}_3\bar{r}_4) = 0, \quad (58)$$

$$\dot{r}_1^2 = \dot{r}_2^2 = \dot{r}_3^2 = \dot{r}_4^2 \equiv r^2, \quad (59)$$

$$\dot{r}_1^2 = \dot{r}_2^2 = \dot{r}_3^2 = \dot{r}_4^2 \equiv \dot{s}^2,$$

$$\bar{r}_1 + \bar{r}_3 = 0, \quad \bar{r}_2 + \bar{r}_4 = 0, \quad (60)$$

$$\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = \rho_{04} \equiv \rho_0, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 \equiv \rho. \quad (61)$$

Az (55) alatt lévő mozgás-egyenlet az (57) következtében (59) és (61) számbavételével ezt az alakot ölti:

$$\left(\lambda - \rho_0 \frac{\dot{s}^2}{r^2} \right) \bar{r}_i = \frac{\rho}{k} [\dot{r}_i\mathfrak{B}]. \quad (62)$$

Egyszer $i=1$ írva ebben, aztán \dot{r}_2 sebességgel vectorilag mindkét oldalán megszorozva, (60) és (56) figyelembe vételével azt kapjuk, hogy $(\dot{r}_2\mathfrak{B})=0$. Egy következménye tehát egyenleteinknek, hogy

$$(\dot{r}_i\mathfrak{B}) = 0. \quad (63)$$

Ha most (62) alatt irt egyenletünket a baloldalán $\rho_i\dot{r}_i$ vectorral s a jobboldalán a jelenleg egyenlő $\rho\dot{r}_i$ vectorral vectorilag megszorozzuk, akkor tekintettel (63)-ra és (59) második sorára, a

$$\rho_0 v_0^2 = \frac{\rho_0^2 r^2 \dot{s}^2}{k(\lambda r^2 - \rho_0 \dot{s}^2)} \mathfrak{B} \quad (64)$$

egyenlet áll elénk. Mind a négy ilyenén egyenletet összeadva, (10) értelmében az

$$\mathfrak{M} = \frac{2\rho_0^2 r^2 \dot{s}^2}{k(\lambda r^2 - \rho_0 \dot{s}^2)} \mathfrak{B}$$

egyenlethez jutunk. Ha pedig \mathfrak{B} itteni együtthatóját $\frac{\mu-1}{\mu}$ jelöli, akkor (28) szerint a

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{S} \quad (65)$$

egyenletet írhatjuk helyette. A mennyiben a λ együttható függhet az r -től és \dot{s} -től, lehetséges, hogy μ csak a materiális minőségtől és állapottól függjön számottevő mértékben.

A (65) a (64)-ben foglalt négy egyenlet mindegyikét külön-külön helyettesítheti, mert (64) baloldala, miként a jobboldala, i mind a négy értéke mellett ugyanaz. Ekként az (55) alatt lévő mozgás-egyenlet keretében az (r, t) rendszerre nézve nyugvó isotrop testben a pentapolaris állapotnak föltétele maga a (65) alatt kapott vonatkozás.

Természetesen hasonló eredményhez jutunk abban a föltevésben, hogy egy materiális elemi részből egy síkkal párhuzamosan minden irányban tolódott el negatív elektromosság, a mely aztán körös gyűrüként övedzi az elemi részt. Ugyanis az ilyenén módon létesült állapot úgy tekinthető, mint végtelen sok pentapolaris állapot superposituma.

EINSTEIN módszere szerint MINKOWSKIVAL (Erstes Axiom) LORENTZ-féle transformatio vezet az (r, t) rendszerben mozgó test megfelelő egyenletéhez, mire nézve megjegyzendő, hogy (65)-ben \mathfrak{S} helyett a (30) szerint való \mathfrak{H} is írható, mert a (65) az (r, t) rendszerben nyugvó testre vonatkozván, ezen (65)-höz (29)-ben $v_0=0$ tartozik.

ÁLTALÁNOS TÉTELEK AZ ALGEBRAI ÉS LOGARITMIKUS SINGULARITÁSOKRÓL.

DIENES PÁL és DIENES VALERIA-tól.

Abban a vizsgálatban, melynek itt vázlatát adjuk, célunk volt teljesen szabatos összefüggéseket adni az analitikai függvénynek oly pólusaira, algebrai és logaritmikus singularitásaira vonatkozólag, melyek a MITTAG-LEFFLER-féle csillagtartomány félegyeneseinek kezdőpontjaiba esnek. E célból a MITTAG-LEFFLER-féle egész függvényes ábrázolásnak azt a formáját választottuk, melynek szerkezete a BOREL-féle exponenciális összegével analog s melyben, összegező függvény gyanánt, e^a helyett a LINDELÖF részéről tanulmányozott

$$E(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}$$

függvény szerepel. A MITTAG-LEFFLER-féle egész függvényes ábrázolás szerint az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

függvény a csillagtartomány belsejébe eső minden x_0 pontban így fejezhető ki:

$$f(x_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, x_0),$$

a hol

$$F(a, x_0) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}.$$

Valamint tehát a BOREL-féle exponenciális összeg tanulmányozásakor elsősorban az ott szereplő e^a függvény növekedését kellett vizsgálnunk, most ugyanoly vizsgálat alá kellett vennünk a LINDELÖF-féle $E(a)$ függvényt, hogy a növekedésére vonatkozólag nyerendő eredményeket a singularitások vizsgálataira kihasználhassuk.

A jelen dolgozat tehát egész függvények növekedésére vonatkozó vizsgálatok alapján az analitikai függvény viselkedését határozza meg oly pontokban, hol

$$f(x) = B_r \cdot \frac{\log^q \frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^r} + f_1(x); \quad (1)$$

hol $f_1(x)$ rendje az x_0 pontban r -nél kisebb (pl. lehet algebrai pontja). Ha $q=0$ és r egész szám, pólusnak, ha $q=0$ és r tetszőleges racionális szám, algebrai pontnak, ha q tetszőleges $r=0$ logaritmikus pontnak, ha pedig r egész, illetve racionális, akkor logaritmikus pólusnak, illetve logaritmikus algebrai pontnak fogjuk az x_0 pontot nevezni.

Az $E_r(a)$ függvény növekedésének vizsgálata. Legyen

$$E_r(a) = \sum m^r \frac{a^m}{(\log m)^m}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket, ($k > 1$),

$$A(a) = \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} \frac{a^m}{(\log m)^m}, \quad C(a) = \sum_{m=\frac{n}{k}}^{\frac{k \cdot n}{k}} \frac{a^m}{(\log m)^m},$$

$$B(a) = \sum_{m=nk+1}^{\infty} \frac{a^m}{(\log m)^m},$$

$$A_r(a) = \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m}, \quad C_r(a) = \sum_{m=\frac{n}{k}}^{\frac{k \cdot n}{k}} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m},$$

$$B_r(a) = \sum_{m=nk+1}^{\infty} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m}.$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{E_r(a)}{e^{r \cdot a} E(a)} = \frac{1}{e^r}$$

és ebből a célból a lim. alatti hányadost egymáshoz tetszőlegesen közelíthető határok közé szorítjuk. Ebben az az érdekes tény lesz segítségünkre, hogy az $E(a)$ valamint $E_r(a)$ függvény sorának is ki tudjuk jelölni azt a részét, a mely a függvény növekedését eldönti.

A gondolatmenet a következő:

$$\begin{aligned} \frac{A(a)}{e^{ra} E(a)} + \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r C(a)}{e^{ra} E(a)} + \frac{(kn)^r B(a)}{e^{ra} E(a)} &< \frac{E_r(a)}{e^{ra} E(a)} < \\ &< \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r A(a)}{e^{ra} E(a)} + \frac{(kn)^r C(a)}{e^{ra} E(a)} + \frac{B_r(a)}{e^{ra} E(a)}, \end{aligned}$$

mert $E_r(a)$ sorában a tagok a maximális tagig folyton nőnek s azontúl fogynak s a maximális tag az $\frac{n}{k}$ -dik s az nk -dik közé esik. Indexe $n=f(a)$ s gondoljuk behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{[f(a)]^r}{e^{r \cdot a}} = \frac{1}{e^r} \quad (2)$$

határegyenlőség jobboldalát. Ezután bebizonyítjuk, hogy az $\frac{n}{k}$ -adikat megelőző s az nk -dikát követő tagok nem folynak be $E_r(a)$ növekedésére, azaz:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{A(a)}{E(a)} &= 0, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B_r(a)}{E(a)} &= 0, \end{aligned}$$

s ez a bizonyításnak leghosszadalmasabb és legkényesebb része.

Ezzel azonban az $E_r(a)$ függvény növekedésének vizsgálatát $C(a)$ vizsgálatára redukáltuk, melyről világos, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{E(a)} = \frac{E(a) - A(a) - B(a)}{E(a)} = 1.$$

Ebből s a (2) alattinak tekintetbe vételéből

$$\lim. \inf. \frac{E_r(a)}{e^{r \cdot a} E(a)} \geq \frac{1}{e^r k^r}$$

és

$$\lim. \sup. \frac{E_r(a)}{e^{r \cdot a} E(a)} \leq \frac{k^r}{e^r},$$

hol $k > 1$. Azonban minthogy k az 1-től tetszőlegesen kevéssé különbözik, az

$$\frac{k^r}{e^r} - \frac{1}{e^r k^r}$$

különbség tetszőleges kicsivé tehető, a mi pontosan azt jelenti, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{E_r(a)}{e^{r \cdot a} E(a)} = \frac{1}{e^r}.$$

Ez eredmény segítségével a függvények a már említett singularis helyeken való viselkedésére a következőket kapjuk.

1. Ha az

$$f(x) = \sum c_n x^n$$

analitikai függvénynek a csillagterület valamelyik főlegyenésének kezdőpontjában x_0 -ban pólusa van, akkor

$$\lim_{a=\infty} \frac{F(a, x_0)}{e^{r \cdot a}} = \frac{B_r e^r}{r!}.$$

Az «Essai sur les singularités»-ben ¹ ily összefüggést tetszőleges ábrázolás esetére találtunk, hol épen a kijelentés általánosságánál fogva a növekedést a jelen precizitással meg nem határozhattuk. Ezzel a csillagterület határaitra eső pólusokban teljesen jellemeztük a függvény viselkedését.

2. Ha az analitikai függvénynek a csillagterület

¹ Journal de Mathématique, 1909.

valamely félegyenesének kezdőpontjában r -edrendű algebrai pontja van, akkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F(a, x_0)}{e^{ra}} = \frac{B_r e^r}{\Gamma(r+1)}.$$

A logaritmikus pontokra vonatkozó eredmények érdekében hasonló módon kell megvizsgálunk az

$$E_q(a) = \Sigma \log^q m \frac{a^m}{[\log(m+\beta)]^m},$$

illetve az

$$E_{r,q}(a) = \Sigma m^r \log^q m \frac{a^m}{[\log(m+\beta)]^m}$$

egész függvényeket. E vizsgálatból erednek a következő tételek:

1. Ha x_0 a csillagtartomány valamely félegyenesének kezdőpontjában fekvő q -adrendű logaritmikus pont, akkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F(a, x_0)}{a^q} = B_r;$$

2. ha pedig logaritmikus pólus vagy logaritmikus algebrai pont, akkor a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F(a, x_0)}{a^q e^{ar}} = \frac{B_r e^r}{r!}$$

illetve

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F'(a, x_0)}{a^q e^{ar}} = \frac{B_r e^r}{\Gamma(r+1)}$$

összefüggések mutatják a függvény viselkedését a kérdéses x_0 pontban. Látjuk tehát, hogy a logaritmus minden hatványa a -nak, a pólus, illetve algebrai pont e^a -nak megfelelő hatványával növeli a reprezentáló egész függvény növekedését.

Megjegyezzük még, hogy a most adott tételek véges számsorra való alkalmazásával megvizsgálhatjuk a függvényt minden oly pontjában, hol az (1) alatti kifejezés jobboldalán

$$B_1 \frac{\log \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}}}{1 - \frac{x}{x_0}}$$

kifejezésből képezett tetszőleges polinóm szerepel, a mikor tételeink egymásután határozzák meg a $B_k \dots B_1$ számbeli együththatókat s így teljesen jellemzik a függvényt a kérdéses helyen.

Hangsúlyozzuk továbbá, hogy a jelen vizsgálatok nem szorítkoznak tiszta pólusokra, tiszta logaritmikus és algebrai pontokra, melyeket az elnevezésben kiemeltünk. A függvény $f_1(x)$ részének igen komplikált singularitásai lehetnek a vizsgált x_0 helyen, sőt x_0 egész singuláris vonal belsejében is lehet, s tételeink érvényesek maradnak. Egyetlen kikötésünk, hogy $f_1(x)$ a vizsgált x_0 helyen alacsonyabb «rendű» legyen (HADAMARD szerint) mint az elnevezés alapjául felvett singularitás, mely épen e legmagasabb rendjénél fogva dönti el a kérdéses pontban a függvény viselkedését.

Ezekben tehát a pólusokra, algebrai és logaritmikus pontokra, továbbá logaritmikus pólusokra és logaritmikus algebrai pontokra vonatkozólag teljesen megoldottuk az általános problémát, melyet a következő formában vetettünk föl:

Mily összefüggés áll fenn a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(t, x_0)$$

sorozat és az $f(x)$ függvénynek x_0 pontban levő singularitása között? (Comptes Rendus 1909 márcz. 15.)

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1909 nov. 15.-én tartott üléséből.)

AZ IZOM HYDROGEN-ION TARTALMÁNAK VÁLTOZÁSA MUNKA KÖZBEN.¹

GOLDBERGER JAKAB-tól.

Amilyen kétségtelen az a DUBOIS-REYMOND által felfedezett és azóta sok kutató által megerősített tény, hogy tartósabb munka megváltoztatja az izomállomány vegyi reakcióját, hogy lakmussal és még számos más indicatorral szemben savanyú lesz, ép oly bizonyos, hogy nem tudtuk még, mennyire változik az actualis reakciója, vagyis a szabad H^+ , illetőleg H^+ -ion tartalma. Az eddigi vizsgálatokkal ugyan megállapították, hogy az izomban működése közben titrálható «szabad» sav képződik, de hogy ezen savból esetleg mennyi volt gyenge bázishoz, például fehérjéhez kötve, mely vegyületet csak a titrálásra használt lúg bontotta meg, hogy mennyi volt valóban szabad, mennyi szabad H^+ -iont adott dissociatio útján, azt a titrálás eredményeiből nem tudjuk meg.

A titrálásból még az sem derül ki, hogy a nyugvó izom állományának mi a valódi reakciója, mert az a használt indicator szerint lúgosnak is és savanyúnak is bizonyult. Így például RÖHMANN a friss nyugvó izmot curcumával szemben savanyúnak, lakmoiddal szemben lúgosnak találta. Titrálással tehát az izomállomány valódi reakcióját sem állapíthatjuk meg, ez csakis, mint az most már általánosan ismert, oly vizsgáto eljárásokkal ismerhető fel, melyek a titrálástól eltérően nem változtatják meg az izomállományban az egyensúlyi állapotot. Ezen kö-

¹ A budapesti kir. m. tud. egyetem általános kórtani intézetében készült dolgozat.

vetelményeknek a physikai-chemiai vizsgáló eljárások felelnek meg.

Kísérleteimnek czélja volt elektrochemiai úton, még pedig concentrációs gázelemek segítségével megmérni, mennyire változik az izomállományban a H^+ -ionok concentrációja tartós munka által s hogy lehet-e összefüggést találni a végzett munka nagysága és a H^+ -ionok concentrációjának növekedése között.

Vizsgálataimat békaizmokon végeztem; kísérleteimnek be rendezése a következő volt:

A H^+ -ion concentratio változásának megállapítására minden kísérletben ugyanazon állat két m. gastrocnemiusát használtam, az egyiket idege utján indukált árammal, megfelelő szünetekkel tetanizáltam, míg a másikat teljesen azonos viszonyok között minden ingerlés nélkül hagytam.

Lehetőleg jól fejlett, erőteljes állatokat választottam, melyeknek mindkét gastrocnemiusát gondosan, sértések lehető kikerülésével kikészítettem. Azután az egyik kísérleti sorozatban a GRÜTZNER-BÜRKER-féle myographium nedves kamrájába tettem, még pedig az egyiket a kamra fenekére fektettem, a másikat a myographium izomtartójába, idegét pedig az elektrodokra helyeztem.

Tudvalevőleg e myographiummal az izom isotoniás összehúzódásokat végez; a megterhelés, mely itt gondosan kikalibrált rugókkal történt, 20—50 gr volt. Az ideg ingerlésére egy DUBOIS-féle szánka-gép másodlagos áramát használtam fel, melyet metronom segítségével szabályos rythmusokban szakítottam meg s melynek erősségét úgy választottam meg, hogy maximális tetanikus összehúzódásokat váltott ki.

Az ingerlést addig folytattam, míg az izom kimerült, azután pihenőt engedtem, mely után ismét addig izgattam, míg újból kimerült.

Egy-egy kísérlet addig tartott, míg igen erős áramokkal sem kaptam már tetanust. Minden kísérletben az izomösszehúzódásokat kymographium dobjára irattam fel, melyen az összehúzódás, tehát az emelés nagyságát lemérhettem, úgy hogy az emeltyükarok viszonyának tekintetbe vételével az izom által végzett munkát is kísérleteimnek megfelelő elegendő megköze-

litő pontossággal kiszámítottam. minthogy minden kísérletben az emelt súly nagyságát is ismertem.

A 3—5 kísérleti sorozatban az izmok a kísérlet tartama alatt nem az említett gázkamrában voltak, hanem egy dr. VERZÁR FRIGYES szerkesztette kis üveghengerben, mely pontosan lemért mennyiségű RINGER- vagy LOCKE-folyadékkal volt jórészt megtöltve s melyben az izmot úgy helyezhettem el, hogy össze lehetett kötni egy GRÜTZNER-féle isotoniás emeltyűvel, mely ép úgy jegyezte fel a kymographiumra az összehúzódásokat, mint a hogy már leírtam. Az edénykébe öntött folyadék pontosan négyszerese volt az izom térfogatának. Ugyanennyi folyadékban tartottam a nyugvó izmot is ugyanolyan hosszú ideig. Az izgatás ép úgy történt, mint a GRÜTZNER-féle myographium nedves kamrájában tartott izmoké.

Az izgatás befejezése után mindkét izmot egy kis húsörlö gépben péppé őröltem és háromszor, illetőleg a 3—5 kísérleti sorozatban négyszerannyi RINGER- vagy LOCKE-féle folyadékkal hígítottam, mint az izom térfogata; a 3—5 sorozatban a hígítást ugyanazzal a folyadékkal végeztem, melyben az izom feküdt, illetőleg működött. Az egész híg pépet azután addig centrifugáltam, míg a folyadék legnagyobb része feltisztult. Ennek a tiszta folyadéknak egy részét titráláshoz használtam fel, a másik részével pedig 2—4 elektródot töltöttem meg. Kizárólag azokat a kis elektródokat használtam, melyeket SZILI SÁNDOR dr. leírt. Megtöltésükre igen kevés, 1—2 cm³ folyadék elegendő. Miután pontosan az ő előírása szerint jártam el az elektródok megtöltésénél s magának az elektromos potenciálnak mérésénél is, feleslegesnek tartom annak leírását, csak annyit jegyzek meg, hogy az elektródok a *H*-nel való megtöltés után 4—6 óra múlva jöttek egyensúlyba, úgy, hogy ezután már állandó értékeket adtak.

Az elemeknek, melyeknek feszültségét mértem, a következő összetétele volt.¹



Kísérleteim eredményeit az I. és II-ik táblázat mutatja.

¹ R = RINGER-folyadék.
L = LOCKE-folyadék.

I. táblázat.

Izompép = 1 cm³ izom + 3 cm³ RINGER-féle folyadék

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A kísérlet száma	A kísérlet napja	A nyugvó izom tér- fogata	A működő izom tér- fogata	A végzett mecha- nikai munka	H ⁺ ion con- centratio mgrm. æquivalensekben az izompépben pro egy cm ³		H ⁺ ion con- centratio változása munkaközben		Savtartalom egy cm ³ izompépben mgr. æqui- valensekben		A savtartalom változása munkaközben		A H ⁺ ion concentratio növekedése egy cm ³ izomállományban egy gram. munkánál	A savtartalom növekedése egy cm ³ izomállományban egy gram. munkánál
		cm ³	cm ³	gr. cm.	nyugvó izom mgr. æqu. × 10 ⁷	működő izom mgr. æqu. × 10 ⁷	mgr. aqui- valensek- ben × 10 ⁷	%	nyugvó izom	működő izom	mgr. æqui- valensek- ben	%		
V.	X/31	2.5	2.2	2640	8	13	5	62.5	0.0061	0.0136	0.0075	123	0.0071	113
X.	XI 16	1.9	1.9	2420	8	14	6	75.0	0.0040	0.0094	0.0054	135	0.0091	89
XI.	XI 17	1.7	1.8	3040	10	21	11	110	0.0050	0.0096	0.0046	92	0.0144	61
VIII.	XI 6	1.9	2.1	3280	14	30	16	113.9	0.0046	0.0122	0.0076	165	0.0133	107
IX.	XI 8	2.0	1.8	4000	10	25	15	150	0.0060	0.0150	0.0090	150	0.0150	162
VII.	XI 4	2.0	2.0	2200	18	30	12	66.7	0.0058	0.0090	0.0032	55	0.0212	59
VI.	XI/2	2.1	2.0	2900	17	33	16	94	0.0060	0.0160	0.0100	166	0.0211	112
Átlag		2.0	2.0	3410	12.1	23.7	11.6	95.6	0.0054	0.0121	0.0067	124	0.0146	100

3*

II. táblázat.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A kísérlet száma	A kísérlet napja	A nyugvó izom térfogata	A működő izom térfogata	A végzett mechanikai munka	H'ion concentratio mgrm æquivalensekben az izompépben pro egy cm ³		H'ion concentratio változása munka közben		Savtartalom egy cm ³ izompépben mgr. æquivalensekben		A savtartalom változása munka közben		A H'ion concentratio növekedése egy cm ³ izomállományban egy gr. cm. munkánál	A savtartalom növekedése egy cm ³ izomállományban egy gr. cm. munkánál
		cm ³	cm ³	gr. cm.	nyugvó izom mgr. æqu. × 10 ⁷	működő izom mgr. æqu. × 10 ⁷	mgr. æquivalensek × 10 ⁷	%	nyugvó izom	működő izom	gr. æquivalensekben	%		
<i>Kísérletek: a) RINGER folyadékban. (Izompép = 1 cm³ izom + 4 cm³ RINGER-féle folyadék).</i>														
XII.	XII/21.	2·0	2·0	2420	5·5	9·2	3·7	67·3	0·0042	0·0066	0·0024	57	0·0077	50
XIII.	XII/17.	1·8	1·7	2450	5·5	10	4·5	81·8	0·0042	0·0096	0·0054	128	0·0078	110
XIV.	XII/19.	2·0	2·0	3800	4·7	11	6·3	134·0	0·0064	0·0110	0·0046	71	0·0092	61
Átlag	—	1·9	1·9	2890	5·2	10	4·8	94	0·0049	0·0091	0·0042	85	0·0082	74
<i>b) LOCKE folyadékban. (Izompép = 1 cm³ izom + 4 cm³ LOCKE-féle folyadék).</i>														
XV.	XII/27.	1·6	1·8	2320	5·7	9·7	4	70	0·0080	0·0120	0·0040	50	0·0077	66
XVI.	XII/30.	2·0	1·9	2600	6·8	12·4	5·6	82·4	0·0060	0·0092	0·0032	53	0·0107	79
XVII.	XII/23.	2·2	2·3	2430	4·9	9·5	4·6	93·7	0·0052	0·0078	0·0026	50	0·0095	54
XVIII.	1909I/4.	1·8	1·6	2970	4·6	10	5·4	117·5	0·0070	0·0144	0·0074	100	0·0091	124
Átlag	—	1·9	1·9	2580	5·5	10·4	4·9	90·8	0·0065	0·0107	0·0043	63	0·0092	280

A táblázat egyes rovatainak magyarázatára a következőket kell felemlítenem.

Az izompép az első táblázatban felsorolt kísérletekben minden esetben úgy készült, hogy az izomhoz térfogat szerint mérve pontosan háromszor annyi RINGER-féle folyadékot, a második táblázatban felsorolt kísérletekben pedig négyszer annyi RINGER-féle, illetőleg LOCKE-féle folyadékot kevertem a felaprítás előtt, az izom szétzúzását pedig oly gyorsan végeztem, hogy a folyadékból számbajöhető mennyiség nem párologott el.

A számítás egyszerűsítése végett az izomnak nem a súlyát, hanem a térfogatát mértem le a kísérletekben. A RINGER és LOCKE-féle folyadékot azért használtam, mert ezekben az izom jobban tartja meg életképességét, mint a tiszta physiologikus konyhasóoldatban.

A RINGER-féle folyadék 0.65% $NaCl$ -t, 0.02 $KaCl$ -t és 0.02 $CaCl$ -t, a LOCKE-folyadék ezenkívül még 0.002% $NaHCO_3$ -t is tartalmaz. Mindkét folyadék H -ion tartalmát is meghatároztam, a RINGER-félében 1.6×10^{-7} , a LOCKE-félében 0.9×10^{-7} gr æqu. H -iont találtam egy literben. Mindkét folyadék tehát megközelítőleg közömbös, a LOCKE-féle inkább, mint a RINGER-féle.

Az I. táblázat 6—9. rovatának tanúsága szerint úgy a nyugvó, mint a működő izom H -ion tartalma meghaladja a közömbösség határát, úgy, hogy az általánosságban elterjedt nézettel szemben kísérleteim azt bizonyítják, hogy a *nyugvó izom állománya, bár kis mértékben, savanyú*. Ez annál biztosabb, ha tekintetbe vesszük azt, hogy a nyugvó izom állományában a H -ionok koncentrációja majdnem négyszer akkora, mint az az érték, melyet az első táblázat 6. rovata szerint az izompépben találtam, mely mint említettem, úgy készült, hogy egy cm^3 izomállományt négyszeresére higitottam a RINGER-féle folyadékkal. Ennélfogva az eredeti izomállományban a H -ionok koncentrációja négyszer nagyobb volt, vagyis a nyugvó izomállományban a H -ion koncentratio $32-72 \times 10^{-7}$, középértékben 48.4×10^{-7} mgr æquivalens köbczentiméterenként, a II. táblázat 6. rovata szerint pedig, a hol az izomállomány ötszörösére lett higitva, $23-34 \times 10^{-7}$, középértékben 26.8×10^{-7} mgr æquivalens.

Leleteim ellen nem emelhető azon kifogás, hogy az izomállomány szabad H -ion tartalma azon megsavanyodás következménye, mely, mint már régóta ismeretes, a halál után az izomban bizonyos idő múlva bekövetkezik, mert valamennyi izmot még teljesen életképes állapotban öröltem szét és a pépet azonnal megvizsgáltam. Kísérleteim ennél fogva, azt hiszem, kétségtelenné teszik, hogy a nyugvó izom állományában a szabad H -ionok koncentrációja jóval felülmulja a HO' ionokét, vagyis, hogy a nyugvó izom actualis reakciója savanyú. A különböző nyugvó izmok H -ion tartalma nem egyforma, különösen az első táblázatban foglalt kísérletekben láthatók meglehetősen nagy eltérések; a különbség okát nem ismerem, de feltűnő, hogy e nagy különbség csak azokban a kísérletekben van, hol az izmok a kísérlet tartama alatt a vizgőzzel telített levegőben, a GRÜTZNER-féle kamrában voltak, míg azoknak az izmoknak, a melyek folyadékokban tartattak, meglehetősen egyenlő a H -ion tartalmuk. A működő izom H -ion tartalma minden kísérletben jóval nagyobb, mint a nyugvó izomé (I. és II. táblázat 7., 8. és 9. rovata).

A működő izomállomány ezek szerint működés közben szabad H -ionokban tényleg gyarapodik, úgy, hogy teljes biztossággal kimondhatjuk, hogy *működés közben az izomállomány actualis reakciója savanyúbb lesz.*

A H -ionoknak úgy absolut, mint relativ szaporodása a működő izomban úgy látszik arányos a végzett munkával (I. és II. táblázat), úgy, hogy minél nagyobb a végzett munka, annál nagyobb a H -ion tartalom. A munka és a H -ionok szaporodása közti viszonyt szembetűnően mutatja az első és második táblázat 14. rovata, a melyben fel van tüntetve, hogy egy gr em munka mennyivel gyarapítja az izomállományban a H -ionok koncentrációját. (A 14. rovatban, feltüntetett értékek kiszámítása a következő módon történt: a nyugvó izom H -ion tartalmát a működő izom térfogatára számítottam át, ezt az értéket levontam a működő izom H -ion tartalmának értékéből, így megkaptam a munka alatt keletkezett H -ion szaporodást. Ez az érték a munkával elosztva adja az egy gr em munkára eső H -ion szaporodást.

A H^+ ionok számának növekedése a munkán kívül úgy látszik még a nyugvó-izomnak H^+ -ion tartalmától is függ, minél nagyobb ez, annál nagyobb a H^+ -ionoknak gyarapodása ugyanazon munkánál. (Lásd az I. táblázatot, melyben az izmok a nyugvó izom tartalma szerint három csoportba vannak összeállítva.)

Az I. táblázatban, mint már említettem, azok a kísérletek vannak felsorolva, a melyekben úgy a nyugvó, mint a működő izom a kísérlet egész tartama alatt vízgőzzel telített légkörben, a második táblázat kísérleteiben pedig közömbös és nagyjában isotoniás folyadéokban volt. Azáltal, hogy úgy a nyugvó, mint a működő izom folyadéokban volt, mindenesetre megí volt könnyítve bizonyos anyagoknak kijutása az izomrost belsejéből. Így kijuthattak az izomállományban oldott egyes elektrolytek, valamint a nyugvó izomban is folyton képződő CO_2 , miáltal az izomállományban az egyensúlyi viszonyok másképp alakulhattak, mint azon izomban, mely csak levegőben tartatott. Mindenesetre azon körülmény, hogy a levegőben tartott izomnak más és mindenekelőtt nagyobb H^+ -ion tartalma van, a mellett szól, hogy az izom belsejében lefolyó azon bomlási folyamatokra, a melyek a H^+ -ionok koncentrációjának változásához vezetnek, befolyással van az, hogy milyen közeggel érintkeznek az izmok.

Annak, hogy a működő izomból készített pépben több H^+ -iont találtam, mint a nyugvóból készültben, legegyszerűbb magyarázata az, hogy az izomműködés közben sav képződik.

Ilyen első sorban a (CO_2), mely oldatban mint H_2CO_3 szabad H^+ -ionokat adhat. Annak eldöntésére, hogy az izomban képződő CO_2 elegendő-e a H^+ -ionok szaporodásának előidézésére, vagy más sav is szerepel-e, külön kísérleteket végeztem. Meghatároztam ugyanis az izompépben, melyet nyugvó és működő izmokból készítettem, a H^+ -ion tartalmat a pépben levő CO_2 kiűzése előtt és után; a H^+ ion tartalomban mutatkozó különbség megfelel a H^+ -ionok azon mennyiségének, a mely a CO_2 -tól származik, a többi feltétlenül más savtól ered. A CO_2 -t úgy űztem ki, hogy hydrogen-áramot vezettem az izompépen át olyképp, hogy a kiűzött CO_2 -t ismert mennyi-

III. táblázat.

Izompép = 1 cm³ izom + 4 cm³ Locke-féle folyadék.

1	2	3	4	5	6		7		8		9		10		11		12		13		14	
					H-ion koncentráció mgrm. æquivalen- sekben az izompépben pro egy cm ³ nyugvó izom		müködő izom		müködő izom		szénsav- koncentrációjának változása a szén- sav		Az izompép H-ion koncentrációjának változása a szén- sav		Az egész izompép szénsav tartalma milligrammokban		A szén- sav- sége- nek mennyi- ségének változása		A szén- sav- sége- nek mennyi- ségének változása		A szén- sav- sége- nek mennyi- ségének változása	
A kísérlet száma	A kísérlet napja	A nyugvó izom tér- foga- ta cm ³	A müködő izom tér- foga- ta cm ³	A végezt mecha- nikai munka gr. cm.	A szén- sav előtt æqu. × 10 ⁷	A szén- sav után æqu. × 10 ⁷	A szén- sav előtt æqu. × 10 ⁷	A szén- sav után æqu. × 10 ⁷	A szén- sav előtt æqu. × 10 ⁷	A szén- sav után æqu. × 10 ⁷	A nyugvó izomban mgr. æqu. × 10 ⁷	A müködő izomban mgr. æqu. × 10 ⁷	A nyugvó izomból milligr.	A müködő izomból milligr.	A nyugvó izomból milligr.	A müködő izomból milligr.	A nyugvó izomból milligr.	A müködő izomból milligr.	A nyugvó izomból milligr.	A müködő izomból milligr.		
XX.	1909 I 21	1.5	1.5	2420	5.5	4.5	9.7	7.5	1	2.2	0.35	0.88	0.53									
XXI.	I 23	2.0	2.0	2350	6.5	5.2	11.1	8.2	1.3	2.9	0.26	0.79	0.53									
XXII.	I 29	1.8	1.8	2560	7.2	5.6	14.1	9.8	1.6	4.3	0.31	0.74	0.43									
XXIII.	II/2	2.0	2.0	2610	6.5	4.9	12	8.6	1.6	3.4	0.22	0.84	0.62									
Átlag		1.8	1.8	2435	6.4	5	11.7	8.5	1.4	3.2	0.29	0.81	0.54									

ségű $Ba(OH)_2$ oldaton át vezettem. Az átáramoltatás addig tartott, a míg egy új $Ba(OH)_2$ próba többé CO_2 -t nem jelzett. Hogy a párolgást elkerüljem, a hydrogen-gázt a bevezetés előtt vizgőzzel telítettem. Ezen kísérletek eredményeit a III. táblázat mutatja. Mint várható volt, úgy a nyugvó, mint a működő izom pépjéből CO_2 volt kiűzhető s természetesen a működő izomból jóval több (átlag 2·8-szer több) mint a nyugvóból. Ennek megfelelően a H -ion concentratio mindkét izomban a CO_2 kiűzése után csökkent. A csökkenés azonban a működő izomnál jóval nagyobb, több mint kétszerakkora, mint a nyugvónál, tehát a működő izomban a H -ionok szaporodása részben a fokozott CO_2 -termelés következménye. Azonban a CO_2 kiűzése után megmaradt H -ion concentratio a működő izomnál még mindig nagyobb, mint a nyugvónál, sőt kivétel nélkül nagyobb, mint a nyugvó izom H -ion tartalma a CO_2 kiűzése előtt. Ebből okvetlenül következik, hogy a H -ionok szaporodása az izom működése közben nem egyedül a fokozódott CO_2 képződéssel függ össze, hanem, hogy az izom-munka közben még egy más nem illó sav (tejsav) is képződik oly mennyiségben, a mely az izomállományban nem közömbösíthető s így dissociatio útján a szabad H -ionok számát gyarapítja. Ezen physikai-chemiai méréseimet kiegészítik és velük igen jól megegyeznek a *titrálással* nyert eredmények. Indicatoroknak valamennyi titrálásnál a phenolphtaleint használtam; minden kísérletben ugyanazon izompépet titráltam, a melynek H -ion tartalmát is meghatároztam.

Valamennyi nyugvó izom phenolphtaleinnel szemben savanyúnak bizonyult. Titrálással még sokkal nagyobbnak mutatkozik a savtartalom, illetőleg a lúggal közömbösíthető savtartalom, mint a H -ionok mérésével. Ugyancsak sokkal nagyobb a titrálható savtartalom növekedése működés közben. Átlag 7—9 ezerszer nagyobbak a titrálás értékei, mint a H -ion tartaloméi. Ennek megfelelően a savképződés munka közben sokkal nagyobbnak mutatkozik.

Annak a ténynek, hogy a titrálható savtartalom úgy a nyugvó, mint a működő izomnál sokkal nagyobb, mint a H -ion concentratio, az a legegyszerűbb magyarázata, hogy úgy a nyugvó,

mint a működő izomban a sav legnagyobb része valamely gyenge bázishoz (fehérje) van kötve. A titráláshoz használt lúg nemcsak a szabad savat köti meg, hanem a savnak azt a részét is, mely ezen gyenge basisokhoz volt kötve.

Vizsgálataimat TANGL FERENCZ tanár vezetése mellett végeztem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1909. nov. 15.-én tartott üléséből.)

ADAT AZ OXYDATIÓS POTENTIAL ÉS AZ OXYDATIO SEBESSÉGE KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉS ISMERETÉHEZ.¹

GRÓH GYULÁ-tól.

Távol állunk még attól, hogy chemiai reakciók sebességét absolut egységekben fejezhessük ki. Már pedig csakis így lehetne kilátásunk arra, hogy a különböző reakciók sebességét egymással összehasonlíthassuk; míg ennek hiányában csak *egy* egyes reakciókat jellemző sebességállandókhoz juthatunk, melyek között összefüggést legfeljebb csak nagy általánosságban találhatunk.

NERNST² fölteszi, hogy a reactiosebesség a chemiai hajtóerővel egyenesen, az ellenállással pedig fordítva arányos:

$$\text{Reactiosebesség} = \frac{\text{chemiai hajtóerő}}{\text{ellenállás}};$$

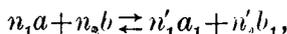
így az OHM törvényével analog egyenletre jutván, feladatunk csak az, hogy a chemiai hajtóerőt, nemkülönben az ellenállást absolut egységekben fejezzük ki. Ez által a reactiosebességet magát is absolut egységekben kifejezve kapnánk meg.

BODENSTEIN³ a chemiai hajtóerőnek absolut egységekben való kifejezésére abból indul ki, hogy a chemiai hajtóerőnek mértéke a rendszer szabad energiája, helyesebben mondván vele arányos intenzitási tényező. Ha tehát a reactioegyenlet:

¹ A m. kir. állatélettani kísérleti állomáson készült dolgozat.

² Theor. Chem. V. Aufl. S. 670.

³ Zeitschrift f. phys. Chem. Bd. 49. S. 61.



hol n_1 és n_2 az egymásra ható molekulák számát, n'_1 és n'_2 pedig a keletkező molekulák számát, továbbá a és b az egymásra ható, a_1 és b_1 pedig a keletkező molekulákat jelentik, akkor e rendszer szabad energiája:

$$RT \ln \frac{c_a^{n_1} \cdot c_b^{n_2}}{c_{a_1}^{n'_1} \cdot c_{b_1}^{n'_2}} - RT \ln K \dots \text{ } ^1$$

Ha a különbség értéke pozitív, akkor a folyamat a fenti reactioegyenlet szerint folyik le; ha negatív, akkor ellenkező irányban; végül, ha a különbség zérussal egyenlő, akkor a rendszerben változás nem történik.

A chemiai ellenállás abszolút egységekben való megállapítása nehezebb feladatnak mutatkozik. Az eddigi vizsgálatok quantitativ szempontból még semmi következtetést sem engednek meg s csak a kérdés bonyolult voltát erősítik meg.

Bár kétségtelen, hogy ez az ellenállás több factorból tevődik össze, még sincs kizárva annak a lehetősége, hogy ez közvetlenül lesz meghatározható.

BODENSTEIN a fent közölt feltevés alapján iparkodott a reactiosebesség és a szabad energia között összefüggést keresni. E célból a halogenhydrogeneknek elemeiből való képződési sebességét tette tanulmány tárgyává. Méréseit mind a négy esetre még nem végezte el; eddigi kísérleteiből az derül ki, hogy a reactiosebesség állandója és a szabad energia között van összefüggés, azonban az ő csekély számú kísérlete még korántsem elegendő arra, hogy quantitativ következtetések legyenek levonhatók.

A kísérletek célja és berendezése.

Saját kísérleteimnek végső célja volt, adatokat szolgáltatni arra nézve, hogy a reactiosebesség miféle összefüggésben áll a chemiai hajtóerővel. Célom tehát végeredményben ugyanaz

¹ V. ö. még BRUNNER. Zeitschrift f. phys. Chem. Bd. 51. S. 107 és Bd. 55. S. 635.

volt, mint BODEN-TEIN kísérletei. Amíg azonban BODENSTEIN a chemiai hajtóerőt a reactio szabad energiájával, illetőleg az ezzel arányos intenzitási tényezővel vélte definiálhatni, addig a leírandó kísérletekben — BUCHBÖCK GUSZTÁV egyetemi tanár kezdeményezésére — oxydatiós folyamatok sebességét vizsgálva különböző oxydáló anyagok esetében, az oxydatio sebessége és ama potentialkülönbség között iparkodtam összefüggést keresni, mely az oxydáló anyag oxydatiós potentialja és a redukáló anyag reductiós potentialja között fönnáll.

Valamennyi kísérletemben az oxydálendő — tehát redukáló — anyag közös volt. Ilyen redukáló anyagul az acetaldehyd szolgált, melyet több oxydáló anyag mérhető sebességgel eczetsavvá oxydál. Kétségtelenül leghelyesebb lett volna oly redukáló anyagot választani, melynek reductiós potentialja ismeretes, illetőleg meghatározható, de a melyet egyúttal lehetőleg sok, meghatározott, vagy meghatározható oxydatiós potentialú oxydáló anyag mérhető sebességgel, lehetőleg símán oxydál. Ily kedvező redukáló anyagra nem akadván, az acetaldehydet választottam, bár reductiós potentialja közvetlenül nem határozható meg.

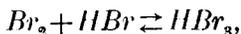
Az acetaldehydnek jelen dolgozatban chlорral és ceriammoniumnitrattal történő oxydatióját tettem chemiai-kinetikai tanulmány tárgyává a fönnebb körvonalozott czélok szolgálatában; az aldehyd brommal való oxydatiójának sebességét pedig már BUGARSZKY¹ vizsgálván, ilyenformán három, különböző oxydatiós potentialú oxydáló anyagnak egyugyanazon, bár ismeretlen reductiós potentialú redukáló anyagra való hatását tanulmányoztuk.

Mielőtt azonban e három tanulmányból levonható következtetések és megfontolások tárgyalására rátérnék, részletesen óhajtok beszámolni az általam vizsgált két eset kinetikai eredményeivel, előrebocsátva a BUGARSZKY által vizsgált eset főbb eredményeinek rövid közlését.

¹ Magy. chem. f. i. IX. évf. 1903. 145. old.

a) *Az aldehyd oxydatioja brommal.*

BUGARSZKY megállapította, hogy az aldehydet a brom mérhető sebességgel ecetsavvá oxydálja hig vizes oldatban. A folyamat bimolekulás. Hogyha a brom concentratioja nagy, akkor a kaliumjodiddal és natriumthiosulfattal meghatározható brommennyiséget számítva a brom ható tömegéül, a bimolekulás egyenlet segítségével számított sebességállandók értékei nem maradtak állandók, hanem csökkenést mutattak. Ennek oka az, hogy ekkor a reactio folyamán keletkező bromhydrogen a szabad brommal reagál:



miáltal a brom egy részét hatástalanná teszi. BUGARSZKY, ismervé a hydrogentribromid szétesésének egyensúlyi állandóját s föltételezve, hogy a hydrogentribromid szétesése, illetőleg képződése a mért reactióhoz viszonyítva végtelen nagy sebességgel történik, a másodrendű reactio egyenletét ennek megfelelően módosította. Ily módon a zavaró hatás számításba vétetvén, sikerült nagyobb bromconcentratio mellett és előzetesen, ismert mennyiségben a reactioelegyhez adott bromhydrogen jelenlétében is állandónak bizonyuló sebességállandókhoz jutnia.

A sebességállandóra nézve $25\cdot0^\circ$ C-nál végzett méréseinek középértéke: $k_{25} = 1\cdot205$.

A szóban levő szerző megvizsgálta a sebességállandónak a hőmérsékkel való összefüggését is és azt találta, hogy a hőmérséknek 10° -kal való emelésével a sebességállandó értéke középértékben 2·6-szer lesz nagyobb.

Ha tehát a hőmérsék és sebességállandó közti összefüggést e formulával

$$\log k = a + bt$$

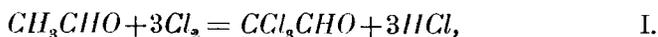
fejezi ki, az állandók értékeit a következőknek találja:

$$a = -0\cdot9527$$

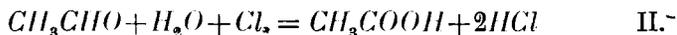
$$b = 0\cdot04068.$$

b) *Az aldehid oxydatiója chlorral.*

Mindenekelőtt arról iparkodtam meggyőződni, hogy a chlor hígított vizes oldatban mily reactioegyenlet szerint hat az aldehydre. Két eset volt u. i. lehetséges; t. i. a chlor vagy substituíál, pl.



vagy oxydál



E kérdés eldöntésére, mint azt BUGARSKY a brom esetében tette, tájékoztató kísérletet végeztem. A chlorvizből és híg acetaldehyd keverékéből álló reactioelegyből, melyből az alább leírandó készülék használata mellett chlor el nem vesztetett, időnként részleteket vettem ki, melyek chlortartalmát kaliumjodidoldatba vezetés után natriumthiosulfattal való titrálással határoztam meg. Az így megtitrált folyadékhoz néhány csepp phenolphtaleint téve, annak savtartalmát titráltam meg. Az eredményeket az I. táblázatban foglaltam össze.

I. táblázat.

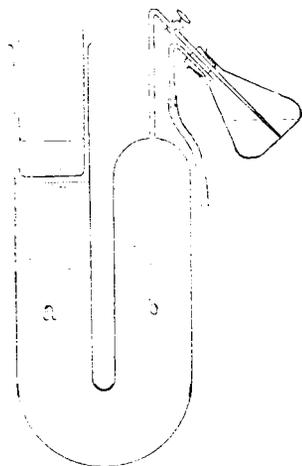
t	10 cm ³ -re elhasznált		Chlor-titer csökkenés másfélszerese	Sav- szaporulat
	$\frac{1}{50} n Na_2S_2O_3$	$\frac{1}{50} n KOH$		
0	18.4	1.50	—	—
55	17.9	2.34	0.75	0.84
100	17.2	3.12	1.80	1.62
160	16.6	4.25	2.70	2.75
220	16.3	4.66	3.15	3.16
1060	14.8	6.78	5.40	5.28
1440	14.7	6.80	5.55	5.30

Abban az esetben, ha a chlor az acetaldehydre az I. egyenlet értelmében hatott volna, 6 æquivalens chlorból 3 æquivalens sav keletkezhetett volna, azaz a savtiter változása a chlortiter változásának így csak felét tenné ki.

Mínt hogy azonban a fenti kísérlet tanúsága szerint a savtiter változása a kísérleti hibák határain belül a chlortiter változásának másfélszeresével egyenlő, nyilvánvaló, hogy a chlor az aldehydre a II. egyenlet értelmében hat.

Ezen kérdés eldöntése után rátértem ama kísérletekre, melyekkel a reactio sebességének állandóját iparkodtam meghatározni.

Előrebocsátom, hogy úgy az I. táblázatban közölt, mint pedig az ez után megismertetendő kísérleteket sötét szobában,



a napfény teljes kizárásával végeztem. A használt vízthermostatban a hőmérsék — 0.05° C maximalis ingadozással — állandó volt.

Tekintettel arra, hogy a chlor lassan hat az aldehydre s így többször 8—10 órás kísérletekre is volt szükség, oly edényt kellett használnom, melyben a reactioelegy ennyi ideig számbavehető mennyiségű chlort nem veszít, de a mellett a chlortiter megállapítása céljából tet-szésszerinti időközökben és számban legyenek részletek kivethők.

Ily célra az ábrából látható szerkezetű készüléket használtam. A reactioelegy *a* szárban levő felszínére paraffinolajat öntvén, arra egy oly, alul zárt, fölül nyitott üveghengert tettem úszóul, melynek külső átmérője csak 1—1.5 mm-el volt kisebb az *a* szár belső átmérőjénél. A felül nyitott úszóba megterhelésül annyi víz önthető, hogy az úszó lehetőleg mélyre süljedjen. Ilyformán a reactioelegy chlorját egy 6—8 cm. magas, de csak $1\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ mm. vastag paraffinolaj-oszlop védte.

A készülék *b* szára vékony lumenű csapos csőben folytatódik. A csap alatt kétfuratú kaucsukdugó van, melynek egyik furatában a készülék vékonyra kihúzott végű csöve, a másik furatában pedig egy, a dugó alatt végződő *s* kívül kaucsukcsőben folytatódó üvegcső van. A chlormeghatározásra szánt

részletek kivétele úgy történik, hogy a kaliumjodid-oldatot tartalmazó lombikot a dugóra erősítjük úgy, hogy a készülék hegyesre húzott csövének vége a kaliumjodid oldat alá merüljön. Majd pedig a kaucsukcsövet szájunkba véve, a lombikocskában csekély vacuumot létesítünk. Ekkor a csapot megnyitva, a reactioelegy a lombikba tódul. A mondottakból kiderül, hogy a próbák súlyszerint vétetnek.

A tiszta chlorvízzel végzett vakkisérlet szerint a fent említett idő alatt (közönséges hőmérséken) számításba vehető chlor nem vész el.

A kísérletekhez használt hig acetaldehyd koncentrációját kaliumhypermanganattal olyképen határoztam meg, hogy a vizsgálandó oldat ismert mennyiségét fölös mennyiségű, kénsavval megsavított kaliumhypermanganat-oldatba folyattam. A kameleon nem hat momentán, miért is az így elkészített folyadékot egy éjjelen át állni hagytam. Ekkor az oldathoz fölös kaliumjodidot adva, a kivált jodot — mely a visszamaradt kameleonnal æquivalens — natriumthiosulfattal titráltam meg. Egyidejüleg mindenkor aldehydmentes, kénsavval savanyított kameleonpróbákat is állítottam föl kontrollul.

A $t = 0$, nemkülönben a többi időpontban az aldehyd koncentrációját közvetve határoztam meg. Ezen czélból a $t = 0$ időpontban kaliumjodidba szívás és natriumthiosulfattal való titrálás útján egy részletben a *szabad* chlor koncentrációját meghatároztam. Ezután a kísérlet folyamán (annak elején, körülbelül a közepén és végén) ismert súlyú részletekben az összes chlorconcentrációt határoztam meg (tehát a Cl_2 és HCl alakban jelenlevő chlor koncentrációjának összegét), miáltal egyúttal arról is meggyőződtem, hogy elillanás útján nem vészett-e el chlor a készülékből. Az így meghatározott összes chlor és a $t = 0$ időpontban meghatározott szabad chlor koncentrációja közti különbség æquivalens aldehydre átszámítva adta azt az aldehyd koncentrációjában beálló csökkenést, mely a chlorviz és aldehydoldat összeöntésétől számítva a $t = 0$ időpontig föllépett. Természetes, ha ismeretes volt az aldehyd koncentrációja az összeöntés pillanatában, ily módon annak koncentrációja a $t = 0$ időpontra nézve is könnyen volt kiszámítható.

A Cl_2 és HCl alakban jelenlevő chlor concentrációjának összegét úgy határoztam meg, hogy a reactioelegyből egy részletet híg — de fölös mennyiségű — ammoniába szívtam. Az így nyert oldatot kissé pállítva, majd forrásig hevítve, az abban levő összes chlor ammoniumchloriddá változik. Ezen oldatot salétromsavval túltelítve, ahhoz ismert titerű ezüstnitrátot adtam s melegítés után 110 cm^3 -es jelzett lombikba mostam. Szűrés után 100 cm^3 -nyit vastímsó indikálása mellett ammonium-sulfocyanattal titráltam.

Minden kísérlethez sötét szobában készített friss chlorvizet használtam. Minthogy, bár igen csekély mennyiségben, de ez is tartalmazott sósavat, közvetlenül a reactioelegy összeöntése előtt annak mennyiségét meghatároztam. Ez a meghatározás úgy történt, hogy a fent leírt módon a chlorvíz szabad és összes chlortartalmát megállapítván, a két meghatározás különbsége adta a chlorvíz sósavtartalmát. Ezen sósavtartalmat az aldehyd-concentratio indirect meghatározásánál tekintetbe vettem.

*

A leírt berendezéssel $25\cdot 0^\circ\text{ C}$ -nál végeztem alábbi kísérleteimet, melyek adataiból a reactiosebesség állandóját mindenekelőtt a

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

differentiálegyenletnek megfelelő integrálalakkal:

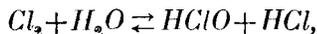
$$k = \frac{1}{(a-b)t} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} \quad (a)$$

— hol a a $t = 0$ időpontban az egyik hatóanyag (aldehyd), b pedig a másik hatóanyag (chlor) concentrációját molokban, literenként, x a t idő alatt átalakult mennyiségeket, szintén molokban, k pedig a reactiosebesség állandóját jelenti — számítottam ki.

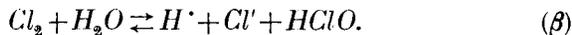
Kiderült ezekből a kísérletekből, hogy a bimolekulás reactióra jellemző kifejezés értéke nem marad állandó, hanem a reactio előrehaladtával növekedik.

További kísérleteimből, melyekben a salétromsavnak, mint közegnek koncentrációját variáltam,¹ azt láttam, hogy a salétromsav koncentrációját növelve, az (α) alatt közölt egyenlet szerint számított sebességállandó értéke is növekedik. Így, ha a közeghez salétromsavat nem adtam, a sebességállandó kezdeti értéke 0·161 volt, 0·05 n. salétromsavas közeg esetén már 0·185, 0·1 n. salétromsavoldatnál 0·320, 0·5 n. salétromsavoldatnál pedig 0·436 volt a sebességállandó kezdeti értéke, mely azonban minden esetben tetemes emelkedést mutatott a reactio előrehaladtával.

Ezen zavaró hatást megmagyarázandó, föltételeztem, hogy azt a chlor hydrolylsise okozza. Tudvalevő ugyanis, hogy a chlor a vízzel a következő egyenlet értelmében reagál:



helyesebben:



Föltehetjük, hogy az oxydatiónál ható tömegül csak a bomlatlan chlormolekulák koncentrációja számítható, a hydrolylsisben résztvevők koncentrációja pedig nem.² Ha már most a hydrolyzálódó chlor koncentrációja a jelenlevő összes chlor koncentrációjának tekintélyesebb részét teszi ki, nyilvánvaló, hogy e folyamat a fönnebb említett zavaró hatásnak okává válhatik.

Eme föltevés helyességének igazolására természetesen külön kísérleteket végezni szükséges nem volt, mert hiszen a bomlatlan chlormolekulák koncentrációja, tehát a chlor tényleges ható tömege, a (β) alatt megadott folyamat egyensúlyi állapotját ismerve, a meglevő kísérleti adatokból minden időpontra nézve kiszámítható s így a feltételezett zavaró hatás számításba vehető. Ezen czélból a bimolekulás reactioegyenletünket:

$$\frac{dy}{dt} = k (c_{\text{ald.}} - y)(c - y)$$

¹ Később kifejtendő okokból minden kísérletemben a reactioelegy közege több-kevesebb salétromsavat tartalmazott.

² Külön kísérletekben meggyőződtem, hogy a HClO az aldehydett nem, vagy legalább is a Cl₂-hoz képest elenyésző lassan oxydálja.

— melynél y a t idő alatt átalakult mennyiségeket, c a $t = 0$ időpontban a kaliumjodiddal meghatározható (hydrolyzált + nem hydrolyzált) chlor koncentrációját, c_{ald} pedig ugyancsak a $t = 0$ időpontban az aldehyd koncentrációját jelenti — következőképen kell helyesbíteniük:

$$\frac{dy}{dt} = k(c_{ald} - y)(c - y)(1 - x), \quad (\gamma)$$

hol x a hydrolysis fokát s így $(c - y)(1 - x)$ bármely t időpontban az activ (nem hydrolyzált) chlor koncentrációját jelenti.

Ilyenformán kétváltozójú differentialegyenlethez jutottunk. Tudniillik megváltozik a reactio előrehaladtával az aldehyd, illetőleg a titrálható chlor koncentrációja (ezeknek változása mindig egyenlő) és megváltozik a hydrolysis foka. Mivel azonban a hydrolysis foka a chlorconcentratio ismert függvénye, következésképp a kétváltozójú differentialegyenlet egyváltozójúvá redukálható.

A hydrolysis foka a chlorconcentratio ismeretével következőképp fejezhető ki:

A (β) alatt közölt egyenlet szerint a tömeghatás törvénye értelmében szükséges, hogy az egyenlet tagjai közt a következő összefüggés álljon fenn:

$$\frac{c_{Cl_2} \cdot c_{H_2O}}{c_H \cdot c_{Cl'} \cdot c_{HClO}} = K_1 = \text{const.}$$

illetőleg, mivel a víznek, mint oldószernek koncentrációja állandó

$$\frac{c_{Cl_2}}{c_H \cdot c_{Cl'} \cdot c_{HClO}} = K = \text{const.} \quad (\delta)$$

Ha t idő elmultával

y az ezen idő alatt átalakult chlor koncentrációját molokban, $(c - y)$ a kaliumjodiddal meghatározható (hydrolyzált + nem hydrolyzált) chlor koncentrációját ugyancsak molokban, továbbá c_1 a közegnek fenti egyensúlytól és a reactio előrehaladtától független sósavkoncentrációját, helyesebben az ettől származó H^+ és Cl' -ion koncentrációt jelenti, mely az összes (ezüst-nitrattal meghatározható) chlorconcentratio: c_3 és a $t = 0$ idő-

pontban jelenlevő szabad (kaliumjodiddal meghatározható) chlor-concentratio : c (mindkettő Cl_2 molokban kifejezve) különbségének kétszeresével egyenlő : $c_1 = (c_3 - c) 2$,

c_2 pedig a közeg salétromsavtartalmától eredő H^+ -ion concentratiót jelenti,

akkor a (δ) alatti egyenlet szerint ezen mennyiségek közti összefüggést t idő elmultával a következő egyenlet fejezi ki :

$$\frac{(c-y)(1-x)}{\underbrace{(c-y)x + 2y + c_1 + c_2}_{c_{H^+}}} \cdot \frac{[(c-y)x + 2y + c_1]}{c_{Cl^-}} \cdot \frac{(c-y)x}{c_{HClO}} = K. \quad (\epsilon)$$

Ha pedig a közeg magas H^+ -ion tartalma miatt annak a reactio előrehaladása folytán beálló változását elhanyagoljuk s így a H^+ -ion concentratiót állandónak tekintjük¹ és A -val jelöljük :

$$(c-y)x + 2y + c_1 + c_2 = A = \text{const},$$

akkor :

$$\frac{(c-y)(1-x)}{A[(c-y)x + 2y + c_1](c-y)x} = K.$$

Ezen egyenletből x értékét kifejezván

$$x = -\frac{AK(2y + c_1) + 1}{2AK(c-y)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[AK(2y + c_1) + 1]^2}{A^2K^2(c-y)^2} + \frac{4}{(c-y)}}$$

azt a (γ) alatti egyenletbe helyettesítjük s némi egyszerűsítést hozva be, folyamatukra nézve a differentialegyenlet alakja ez :

$$\frac{dy}{dt} = k(c_{\text{ald.}} - y) \frac{AK(2c + c_1) + 1 - \sqrt{[AK(2y + c_1) + 1]^2 + 4AK(c-y)}}{2AK}$$

¹ Kísérleteimet ezen célból elég magas H^+ -ion concentratiójú közegben végeztem. Ez a berendezés azért volt célszerű, mivel így x értéke harmadfokú egyenlet helyett másodfokúval fejezhető ki s a közlendő integrálformula amúgy is eléggé bonyolult alakja egyszerűsödik. Leghelyesebb lett volna ugyanígy eljárni a Cl^- -ionok concentratiójával is, csakhogy magas Cl^- -ion concentratio mellett az aldehydnek közölt indirect meghatározása nem lett volna kielégítő pontossággal kivihető.

Mellőzve a levezetést, ha annak folyamán a következő egyszerűsítéseket alkalmazzuk :

$$AK(2c+c_1)+1=B$$

$$2AK=D$$

$$\left(\frac{AKc_1+1}{2AK}\right)^2 + \frac{c}{AK} = E$$

$$\frac{2c_{\text{ald.}}+c_1 - \sqrt{(2c_{\text{ald.}}+c_1)^2+4\left(E-\frac{c_1^2}{4}\right)}}{2\sqrt{E-\frac{c_1^2}{4}}} = L$$

$$\frac{2c_{\text{ald.}}+c_1 + \sqrt{(2c_{\text{ald.}}+c_1)^2+4\left(E-\frac{c_1^2}{4}\right)}}{2\sqrt{E-\frac{c_1^2}{4}}} = M$$

$$\frac{B + \sqrt{B^2-D^2\left(E-\frac{c_1^2}{4}\right)}}{D\sqrt{E-\frac{c_1^2}{4}}} = N$$

$$\frac{B - \sqrt{B^2-D^2\left(E-\frac{c_1^2}{4}\right)}}{D\sqrt{E-\frac{c_1^2}{4}}} = O$$

$$\frac{1}{(-L+M)(-L-N)(-L-O)} = P$$

$$\frac{1}{(-M+L)(-M-N)(-M-O)} = Q$$

$$\frac{1}{(N+L)(N+M)(N-O)} = R$$

$$\frac{1}{(O+L)(O+M)(O-N)} = S$$

$$\frac{-\left(y + \frac{c_1}{2}\right) + \sqrt{\left(y + \frac{c_1}{2}\right)^2 + \left(E - \frac{c_1^2}{4}\right)}}{\sqrt{E - \frac{c_1^2}{4}}} = v_1$$

$$\frac{-\frac{c_1}{2} + \sqrt{E}}{\sqrt{E - \frac{c_1^2}{4}}} = v_2$$

akkor fenti differentialegyenletünk legcélszerűbb integralalakja:

$$k = \frac{2}{\sqrt{E - \frac{c_1^2}{4}}} \frac{1}{t} \left[p(1+L^2) \ln \frac{v_1+L}{v_2+L} + 2(1+M^2) \ln \frac{v_1+M}{v_2+M} + r(1+N^2) \ln \frac{v_1-N}{v_2-N} + s(1+O^2) \ln \frac{v_1-O}{v_2-O} + (v_1-v_2)(-pL-qM+rN+sO) \right]. \quad (7)$$

Ezen összefüggés ismeretével tehát, ha a kaliumjoddal meghatározható (hydrolyzált + nem hydrolyzált) chlor koncentrációját különböző t időpontban meghatároztuk, k értéke kiszámítható. A kezdeti ($t=0$) időpontban szükséges azonban ismerni a hydrolysis fokát, hogy A értéke kiszámítható legyen. Ez az (ϵ) alatti összefüggés alapján számítható ki. Ez esetben természetesen $y=0$.

Az (7) alatti végső egyenlet szerint számítottam át már végzett kísérleteimet. Az alant közölt táblázatok (II—IV. táblázat) szerint látnivaló, hogy mindegyik kísérletben a sebességállandók értékei a kísérleti hibák határain belül állandóknak tekinthetők. Azonkívül a különböző kísérletekben meghatározott sebességállandók is egymás között megegyeznek, bár azokat nagyon eltérő H^+ -ion koncentrációjú közegben, 0.05—0.1—0.5—1.0 normal salétromsav-oldatban végeztem, hol is a chlornak igen változó mennyisége (73, 63, 35, 15%-a) volt a reactio kezdetén inactiv, azaz hydrolyzált. Különösen ez utóbbi körülmény az, mely kétségtelenül

igazolja abbéli föltevésünk helyességét, hogy a chlor hydrolysisé az egyébként bimolekulás típusú folyamat zavarója s hogy az a fenti megfontolással számításba vehető.

A számításokhoz szükséges K értékét, tehát a chlor hydrolysisének egyensúlyi állandóját JAKOWKIN¹ határozta meg többféle módszerrel különböző hőmérsékleteken, nevezetesen 0·0, 13·4, 25·0, 28·6, 38·6, 51·2, 57·5° C-nál.²

Mivel k hőmérséki coefficiensét meghatározandó, 25·0° C-nál végzett kísérleteken kívül még 15·0°, 35·0° C-nál is végeztem méréseket, szükséges volt K értékét ezen hőfoknál is ismernem. JAKOWKIN-nak említett hőfokon végzett kísérletei nyomán tehát megszerkesztettem K értékének hőmérséki görbáját s így annak a hiányzó 15·0° és 35·0° C hőmérsékletekhez tartozó értékét grafikailag interpoláltam. Így a következő számokhoz jutottam:

	K
15·0° C _ _ _ _ _	3106
25·0° C _ _ _ _ _	2146
35·0° C _ _ _ _ _	1602

E szám adatok birtokában néhány kísérlet segélyével a folyamat sebességének hőmérséki coefficiensét is meghatároztam. A 15·0° és 35·0° C-nál végzett mérésorozatok eredményeit a 25·0° C-nál végzett kísérletek eredményeivel egyetemben a VII. táblázat foglalja magában.

¹ Zeitschrift f. phys. Chem. XXIX. 1899. S. 650.

² JAKOWKIN az egyensúlyi állandókat nem a fenti levezetésnél általam használt δ alatti egyenlet, hanem a

$$\frac{c_H \cdot c_{Cl'} \cdot c_{HClO}}{c_{Cl_2}} = K$$

egyenlet értelmében közli.

II. táblázat.

t	10 gr.-ra elhasznált cm^3 $\frac{1}{200} \text{ n. Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	y	k
0	15·35	0	—
25	15·05	0·00008	0·687
50	14·78	0·00014	0·601
75	14·45	0·00023	0·688
100	14·17	0·00030	0·655
125	13·93	0·00036	0·636
150	13·62	0·00044	0·620
k. é. 0·648			
$c_{\text{ald}} = 0·00457$ $c = 0·00384$ $c_1 = 0·00062$ $c_2 = 0·0471$ $c_3 = 0·00415$ $x = 0·730$ ($t = 0$ időpontban) Közeg 0·05 n. HNO_3 $T = 25·0^\circ \text{C}$			

III. táblázat.

t	10 gr.-ra elhasznált cm^3 $\frac{1}{200} \text{ n. Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	y	k
0	23·27	0	—
60	21·62	0·00042	0·626
120	20·19	0·00077	0·608
182	18·87	0·00110	0·612
240	17·75	0·00138	0·620
300	16·72	0·00164	0·629
420	15·10	0·00205	0·631
540	13·81	0·00237	0·632
k. é. 0·622			
$c_{\text{ald}} = 0·00411$ $c = 0·00582$ $c_1 = 0·00150$ $c_2 = 0·0924$ $c_3 = 0·00657$ $x = 0·516$ ($t = 0$ időpontban) Közeg 0·1 n. HNO_3 $T = 25·0^\circ \text{C}$			

IV. táblázat.

t	10 gr.-ra elhasznált cm^3 $\frac{1}{200} \text{ n. Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	y	k
0	13·42	0	—
60	12·60	0·00021	0·640
120	11·89	0·00039	0·610
180	11·15	0·00057	0·653
240	10·48	0·00074	0·621
300	9·87	0·00089	0·617
420	8·75	0·00117	0·614
540	7·68	0·00144	0·642
k. é. 0·628			
$c_{\text{ald}} = 0·00452$ $c = 0·00336$ $c_1 = 0·00078$ $c_2 = 0·0924$ $c_3 = 0·00375$ $x = 0·628$ ($t = 0$ időpontban) Közeg 0·1 n. HNO_3 $T = 25·0^\circ \text{C}$			

V. táblázat.

t	10 gr.-ra elhasznált cm^3 $\frac{1}{200} \text{ n. Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	y	k
0	11·52	0	—
15	11·18	0·00008	0·660
40	10·66	0·00022	0·691
75	9·87	0·00041	0·722
105	9·37	0·00054	0·701
135	8·82	0·00067	0·699
165	8·31	0·00080	0·706
k. é. 0·696			
$c_{\text{ald}} = 0·00440$ $c = 0·00288$ $c_1 = 0·0010$ $c_2 = 0·4277$ $c_3 = 0·00338$ $x = 0·350$ ($t = 0$ időpontban) Közeg 0·5 n. HNO_3 $T = 25·0^\circ \text{C}$			

VI. táblázat.

t	10 gr.-ra elhasznált cm^3 $1/200$ n. $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	y	k
0	19.71	0	—
55	17.82	0.00048	0.625
120	16.00	0.00093	0.632
180	14.51	0.00130	0.655
195	14.18	0.00139	0.656
285	12.71	0.00175	0.643
375	11.51	0.00205	0.648
465	10.53	0.00230	0.663
555	9.82	0.00248	0.662
647	9.20	0.00263	0.660

k. é. 0.649

$c_{\text{ald}} = 0.00364$
 $c = 0.00493$
 $c_1 = 0.0024$
 $c_2 = 0.8184$
 $c_3 = 0.00613$
 $x = 0.153$ ($t = 0$ időpontban)
 Közeg 1.0 n. HNO_3
 $T = 25.0^\circ \text{C}$

VII. táblázat.

T	Közeg	x $t = 0$ idő- pontban	k	
25.0°	0.05 n. HNO_3 — — — —	0.730	0.648	$\frac{k_{25}}{k_{15}} = 2.54$
	0.1 " " — — — —	0.628	0.628	
	0.1 " " — — — —	0.516	0.622	
	0.5 " " — — — —	0.350	0.696	
	1.0 " " — — — —	0.153	0.649	
Átlag — —				0.648
15.0°	0.1 n. HNO_3 — — — —	0.474	0.247	$\frac{k_{35}}{k_{25}} = 2.30$
	1.0 " " — — — —	0.180	0.263	
	Átlag — —			
35.0°	0.1 n. HNO_3 — — — —	0.547	1.406	
	0.5 n. HNO_3 és 0.01 n. HCl	0.1135	1.525	
	0.5 " " " 0.01 " "	0.1157	1.534	
Átlag — —				1.488

Látnivaló, hogy, ha a hőmérsékletet 15·0° C-ról 25·0° C-ra emeljük, a sebességállandó 2·54-szeres lesz, míg a hőmérsékletnek 25·0° C-ról 35·0° C-ra való emelése a sebességállandónak 2·30-szorosára való emelkedését vonja maga után. Azaz középértékben 10°-nyi hőemelkedés *k* értékét 2·5-szeresére emeli.

A hőmérési coefficiens kiszámítására a következő empirikus formulát használtam fel:

$$\log k = a + bt,$$

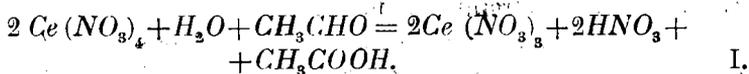
mely egyenletben *a* és *b* állandó számokat jelentenek. A közölt adatokból ezeknek értékei a következőknek adódtak:

$$a = -1·051$$

$$b = 0·0305.$$

e) *Az aldehyd oxydatioja ceriammoniumnitrral.*

A ceriammoniumnitrat [$Ce(NO_3)_4 \cdot 2(NH_4)NO_3 + H_2O$] az aldehydét mérhető sebességgel oxydálja:



Mielőtt a végzett kísérleteket ismertetném, röviden a ceri-meghatározás e dolgozatban használt módjának leírását becsátom előre.

A cerivegyületek meghatározásának legkényelmesebb s igen pontos módja az, hogy a meghatározandó ceri-oldathoz ismert titerű hydrogenhyperoxydot adunk fölös mennyiségben s annak fölöslegét kaliumhypermanganát-oldattal visszatitráljuk. Hydrogenhyperoxyd helyett MOHR-féle só is használhatunk.

Kísérleteim egy részében ezt az eljárást használtam, ott tudniillik, hol az acetaldehyd concentratiója kicsiny volt. Hogyha azonban az acetaldehyd concentratiója meghaladja a 0·025 molt literenkint, a hydrogen-hyperoxyd, illetőleg MOHR-só feleslegének kaliumhypermanganáttal való visszatitrálása bizonytalan, mert a kaliumhypermanganát az ily concentratióban jelenlevő aldehyre elég gyorsan hat.

Ily esetekben tehát e módszert annyiban módosítottam,

hogy a hydrogenhydroxyd feleslegét jodometrikus úton határoztam meg, mély módszerre az aldehyd zavaró hatást nem gyakorol. A hydrogenhydroxyd feleslegét tartalmazó oldathoz — mely, minthogy a ceriammoniumnitrátot mindig híg salétromsavban oldottam, elég savanyú volt — káliumjodidot adtam. A jodhydrogent a hydrogenhydroxyd csak lassan oxydálván, a reactiót siettetendő, az oldatot tartalmazó lombikot körülbelül 35° C-ú vízfürdőbe tettem; időnként azonban — még mielőtt a reactio teljesen végbement volna —, hogy jodveszteség ne legyen, a kivált jod zömét megtitráltam. Az elegyben oldott oxygent, hogy jodot ne válasszon ki, néhány kaliumhydrocarbonatkristályka bedobásakor fejlődő széndioxyddal pezsgtettem ki.

A ceri-vegyületekben nagy a hajlandóság közönbös oldatban bázisos sók képzésére, tehát a hydrolysisre. A ceriammoniumnitrát vizes oldata egy napi állás után pl. már tetemesen hydrolyzálva van: a hydrogenhydroxydot csak igen lassan bontja el. Épen ezért minden kísérletemben a reactioelegy közege erősen savanyú (salétromsavra nézve 0·5 normal) volt.

Első feladatomban volt a mondott oxydatio tanulmányozásánál a reactio rendszámának meghatározása. Az I. alatt felírt egyenlet szerint a folyamatot trimolekulásnak várjuk és pedig az aldehydre nézve monomolekulásnak, a cerinitrátra nézve pedig bimolekulásnak.

A kérdés eldöntése czéljából először is három tájékoztató kísérletet végeztem. Ezek egyikében az aldehyd és a ceriammoniumnitrát körülbelül æquivalens concentratióban hatottak egymásra, a másokban pedig a ceriammoniumnitrát concentratiója az aldehyd concentratiójának közelítőleg kétszerese volt. A harmadik kísérletben a ható anyagok concentratiója nagyjában az első kísérletben alkalmazott concentratiókkal egyezett meg, főkülönbség csak a közeg savtartalmában volt. Míg ugyanis az első két kísérletben a reactioelegy közege salétromsavra nézve 0·5 normal volt, addig az utóbbiban csak 0·25 normal savconcentratióban történt a reactio.

A sebességállandók értékének kiszámítására kétféle egyenletet használtam, még pedig a bimolekulás reactiókra jellemző s a

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

differentiálegyenletnek megfelelő

$$k = \frac{1}{(a-b)t} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a}$$

egyenletet, továbbá a trimolekulás reactiókra jellemző s eme differentiálegyenletnek

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)(c-x)$$

megfelelő azt az integrálalakot, hol $c = b$,

$$k = \frac{1}{(a-b)^2 t} \left[\frac{(a-b)x}{(b-x)b} + \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)} \right]$$

melynél a az aldehyd concentratióját, b pedig a ceriammonium-nitrátét jelenti a $t = 0$ időpontban, x pedig az ezen idő óta átalakult mennyiségeket fejezi ki.

A három tájékoztató kísérletből kitűnt, hogy sem a bimolekulás, sem pedig a trimolekulás reactiókra jellemző kifejezések nem maradnak állandók, hanem a reactio előrehaladtával értékük tetemesen növekedik. A harmadik kísérlet adataiból pedig az látszik, hogy a savconcentrációnak felényire való csökkentése a sebességállandó értékét különösebben nem befolyásolta.

Világos mindezekből, hogy a folyamatnál zavaró hatások vannak s így a közölt kísérletekből a reactio rendszáma meg nem állapítható.

A rendszám meghatározása céljából tehát a következő kísérleteket végeztem.

I. Két kísérletben azonos hőfokon (25°C) a ceriammonium-nitrátot és az acetaldehydet æquivalens concentrációkban engedtem egymásra hatni. És pedig az I. táblázaton közölt kísérletben mindegyik agens kezdeti concentrációja 0.0150 mol, a II. táblázaton közöltben pedig 0.0858 mol volt literenként. E két kísérlet adataiból a következő megfontolások alapján iparkodtam a reactio molekula-számához jutni:

a) OSIWALD módszerét követve, a közölt kísérleti adatokból grafikai interpolatio útján meghatároztam mind a két kísérletben azt az időt, a mely alatt a reagáló anyagok $\frac{1}{3}$ -a, illetőleg $\frac{1}{4}$ -e alakult át; ezeket a következőknek találtam:

I. táblázat.

t	20 cm ³ által fogyasztott cm ³ $\frac{1}{20}$ n. H ₂ O ₂	x próbáról próbára	c
0	12·0	0	0·0150
30	10·7	0·0016	0·0134
60	9·5	0·0015	0·0119
90	8·5	0·0012	0·0107
120	7·7	0·0011	0·0096
150	6·9	0·0010	0·0086
—	—	—	—

Közeg 0·5 n. HNO₃; $T \doteq 25\cdot0^{\circ}$ C

II. táblázat.

t	20 cm ³ által fogyasztott cm ³ $\frac{1}{20}$ n. H ₂ O ₂	x próbáról próbára	c
0	17·2	0	0·0858
30	14·4	0·0141	0·0719
60	12·5	0·0093	0·0624
90	10·7	0·0088	0·0536
120	9·4	0·0069	0·0467
150	8·2	0·0058	0·0409
180	7·2	0·0051	0·0358

Közeg 0·5 n. HNO₃; $T = 25\cdot0^{\circ}$ C

I. kísérletben:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{ átalakulás ideje } 75 \text{ percz} \\ \frac{1}{3} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 109 \quad \quad \quad \end{array} \right\} \text{kezdeti conc. } 0\cdot0150.$$

II. kísérletben:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{ átalakulás ideje } 52 \text{ percz} \\ \frac{1}{3} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 76 \quad \quad \quad \end{array} \right\} \text{kezdeti conc. } 0\cdot0858.$$

Tudva azt, hogy a ható anyagok ugyanazon tört részének átalakulási ideje a bimolekulás reactióknál a kezdeti koncentraciókkal fordítva arányosak, a trimolekulás reactióknál pedig a kezdeti koncentraciók négyzetével, illetőleg n -ed rendű reactióknál azok $(n-1)$ -ik hatványával fordítva arányosak, a következő aránylatokat állíthattam föl:

$$\begin{aligned} 75 : 52 &= 0\cdot0858^{n-1} : 0\cdot0150^{n-1} \\ 109 : 76 &= 0\cdot0858^{n-1} : 0\cdot0150^{n-1}, \end{aligned}$$

honnan a két összefüggés alapján megegyezően: $n = 1\cdot21$. A reactio rendszámául tehát egy valószínűtlen érték, 1·21 adódik.

b) Hogy megtudjam, vajjon a reactióra a ható anyagok (ceriammoniumnitrat, vagy aldehyd) vannak-e zavaró hatással, avagy a reactio termékei, VAN'T HOFF módszere szerint kísérletem meg a rendszámot kiszámítani. E számítás alapjául ugyanis a kezdeti sebesség szolgál, midőn a reactiótermékek még (aránylag) csekély concentratióban vannak jelen.

A módszer lényegét a következő megfontolás képezi: Aequivalens mennyiségeket engedve hatni, a kezdeti sebesség: v a ható concentratiónak annyiadik hatványával lesz arányos, a hányad rendű a reactio. Ha tehát az átalakulás n -ed rendű, akkor:

$$v = k c^n.$$

Ha már most két kísérletben, hol a ható anyagok különböző kezdeti, de æquivalens concentratiókban (c_1 és c_2) hatottak egymásra, a kezdeti sebességet (v_1 és v_2) meghatározzuk, a következő két egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} v_1 &= k c_1^n \\ v_2 &= k c_2^n. \end{aligned}$$

E két egyenletet egymással osztva:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{c_1^n}{c_2^n},$$

a nyert egyenletből n értéke kiszámítható:

$$n = \frac{\log v_1 - \log v_2}{\log c_1 - \log c_2}.$$

Az I. és II. táblázatban közölt két kísérletből a fenti módon n értékét kiszámítva, az 1·25-nek adódott.

c) Ezzel megegyező eredményre ($n = 1\cdot26$) jutottam akkor is, ha a kezdeti sebességet szerkesztéssel határoztam meg. Tudniillik az I. és II. táblázatban közölt két kísérletben a concentratio-csökkenést grafikusán ábrázoltam, az abscissákra az időt, az ordinátákra pedig a concentratiók értékeit rakva föl. A kapott két görbe $t = 0$ időpontjának megfelelő végpontjához szerkesztett érintőket az abscissáig meghosszabbítva, a $t = 0$ időpont-

nak megfelelő ordinatának s az érintő által leszelt abszcisszának viszonya adta a $t = 0$ időpontnak megfelelő kezdeti sebességet.

Az *a)* *b)* és *c)* alatt nyert n értékei megegyezvén, föltehetjük, hogy a reactiótermékek zavaró hatást nem gyakorolnak, az már a reactio kezdetén megvan s a ceriammoniumnitrátban, illetőleg az aldehydben keresendő.

II. A reactio összmolekulaszámának meghatározását célzó kísérleteim így eredményhez nem vezetvén, következő kísérleteimben azt iparkodtam megállapítani, hogy a reactio *a cerinitratra nézve* hány molekulás.

Ezen célból két kísérletben 0° C-nál az aldehyd concentrációját a ceriammoniumnitrátéhoz képest oly magasnak választottam, hogy annak a reactio folyamán fellépő csökkenése elhanyagolható volt. A sebességállandókat a mono- és bimolekulás reactiókra jellemző egyenletekkel számítottam ki. Azonban eme kísérleteim sem vezettek célhoz, a sebességállandók értékei nem bizonyultak állandóknak.

Föltűnt azonban eme kísérletekben az a jelenség, hogy hig cerisóoldatokat concentráltabb aldehyd-oldatokkal elegyítve, azok citromsárga színe narancsvörösre változik át. Ez a körülmény arra engedett következtetni, hogy az aldehyd a cerisóra nézve — az oxydatiótól eltekintve — nem viselkedik közömbösen. Föltételeztem, hogy az aldehyd a cerisóval valamilyen vegyületet képez megfordítható módon s e miatt lép föl a narancsvörös színeződés.

Ezt a föltételezett vegyületet tisztán előállítanom nem sikerült. Megnehezíti ezt az a körülmény, hogy az átalakulás nem teljes, hanem megfordítható s hogy a ceriammoniumnitrát csakhamar cerovegyületté redukálódik, még akkor is, ha az elegyet olvadó jég közt tartjuk.

Hypothesisemet tehát valamikép támogatandó, azt vizsgáltam meg, van-e különbség két oly elegy ionconcentrációjára, illetőleg az ezzel arányos elektromos vezetőképessége közt, melyek közül az egyik egy térfogatrész (0.04 molos) ceriammoniumnitrátoldatból és egy térfogatrész (1.0 molos) acetaldehydoldatból, a másik pedig egy térfogatrész ugyanoly concentrációjú ceri-

ammoniumnitrátból és egy térfogat vízből áll. Az eredményeket a III. táblázatban foglalom össze :

III. táblázat.

Anyag	K ($\text{cm}^{-1} \text{ ohm}^{-1}$)
Destillált víz	0.000066
1.0 molos aldehyd	0.000212
1 térf. ceriold. + 1 térf. dest. víz	0.0296
1 " " + 1 " aldehyd	0.0278.

Láthatni, hogy akkor, a midőn a ceriammoniumnitrathoz víz helyett ugyanazon mennyiségben acetaldehydoldatot adunk, az ionconcentratio megcsökken. Egyidejűleg meggyőződtem arról is, hogy egy közömbös electrolyt (KCl) oldatához víz helyett ugyanannyi aldehydet adva, nem okoz-e ott az aldehyd a dissociatio fokában, illetőleg a vezetőképességben csökkenést. Az eredmény az volt, hogy az ily elegy vezetőképessége a vizes elegyéhez képest nem csökkent, hanem összegeződött, a megfelelő concentrációkban külön-külön előállított kaliumchloridnak és aldehydnek vezetőképességéből.

Hasonló kísérletekkel iparkodtam arról is meggyőződni, hogy miként módosul a ceriammoniumnitrát- és aldehydoldat elegyének fagyáspontcsökkenése az ugyanoly concentrációkban jelenlevő componensek külön-külön miért fagyáspontcsökkenésének összegéhez képest. Kiadódott, hogy az ily elegy fagyáspontcsökkenése a kísérleti hibák határain belül megegyezett a fenti elv szerint külön-külön mért fagyáspontcsökkenések összegével.

A ceriammoniumnitrát-oldatban aldehyd hatására beálló ionconcentratiócsökkenés nagynak ugyan nem mondható, de mindazonáltal némi bizonyíték a mondott föltevés mellett, ha megfontoljuk, hogy a ceriammoniumnitrát molekulaképlete $\text{Ce}(\text{NO}_3)_4 \cdot 2(\text{NH}_4)\text{NO}_3$ lévén, annak disszociatiójakor, ha azt teljesnek tételezzük föl, az ionoknak csak $\frac{1}{9}$ részét képezik ceri-ionok.

Ezekből az adatokból tehát, úgy látszik, magyarázatot nyerünk arra a zavaró hatásra nézve, a melyet a reactiósebesség állandójának és a reactio rendszámának meghatározását célzó

kísérletekben észleltünk; lehetséges azonban, hogy az oxydatiónál a most vázolt zavaró folyamaton kívül egyéb komplikáló hatások is szerepelnek. Így lehetséges, hogy a vizsgált oxydatiónál ható tömegül nem az összes (aldehiddel a fentiek szerint nem reagáló) bomlatlanul jelenlevő cerisó koncentrációja számítható, hanem csak a ceri-ionok koncentrációja.

Az aldehydnek minőségi szempontból már vázolt, nemkülönbén a cerivegyületeknek esetleges komplikáló hatását ennek a dolgozatnak a keretében nem tanulmányoztam.

Összefoglalás.

Dolgozatom célja volt a bevezetésben hangsúlyozott magasabb cél szolgálatában összefüggést keresni az oxydáló anyagok oxydatiós potenciálja és az oxydatio sebessége között. Ezen célból megállapítottam az acetaldehyd chlорral való oxydatiójának sebességállandóját, azonkívül megkíséréltem azt ceriammoniumnitrat esetében is meghatározni. Ez utóbbi kísérleteim azonban komplikáló hatások miatt célhoz nem vezetvén, következtetések alapjául nem szolgálhatnak.

Noha BUGARSZKY az aldehyd brommal való oxydatiójának sebességállandóját már meghatározta, még távolról sem vagyunk abban a helyzetben, hogy a föltett kérdésre feleletet adhassunk. Sőt az eddigi kísérletek új bizonyítékot szolgáltattak a kérdés bonyolult volta.

Ha ugyanis a chlорral és brommal való aldehydroxydatio sebességének ugyanazon hőmérsékletre vonatkozó állandóit s a chlор és brom oxydatiós potenciáljainak értékét egybevetjük, azonnal szembetűnik az a látszólagos ellentmondás, hogy a nagyobb oxydatiós potenciálú chlор az acetaldehydet lassabban oxydálja, mint a kisebb oxydatiós potenciálú brom:

	Oxyd. pot.	Sebességáll.
Chlor	1.639	0.648
Brom	1.334	1.205.

Eme látszólagos ellentmondás okát, mely minden való-

szinüség szerint a vizsgált reactiók mechanizmusában keresendő, a jövőben végzendő kísérletek lesznek hivatva eldönteni.

*

Kötelességemnek és hálaérzetemnek teszek eleget, midőn e helyen is köszönetemet fejezem ki dr. BUCHBÖCK Gusztáv egyetemi tanárnak, ki nagybecsű tanácsaival támogatott munkámban.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1909 nov. 15.-én tartott üléséből.)

A PHENYLZSÍRSAVAK EGY ÁLTALÁNOS SYNTHESISÉ.

MAUTHNER NÁNDOR-61.

A phenylzsírsavak előállítására a két legáltalánosabban alkalmazható módszer a következő: *a)* a phenylalkylchloridokból cyankáliummal cserebomlás útján nyert nitrilek elszappanosítása, *b)* az α ketosavaknak vagy cyanhydrideknek¹ reductiója jóddihidrogénsavval és alaktalan phosphorral. Az első eljárás gyakrabban alkalmazhatóvá vált a carbonsavaknak egynehány év előtt feltalált² közvetlen, a megfelelő alkoholokká való elektrolites reductiója által, mert e módszer útján számos kiindulási test gyanánt szolgáló alkoholt könnyebben állíthatunk elő. Eme reductió eljárás sokkal egyszerűbb és jobb termelési hányadot szolgáltat, mint az előbb használatos módszerek: a savamidek reductiója natriumamalgammal vagy az aldehideké alkoholikus kaliumhydroxyd-oldattal. Az elektrolites reductiót azonban szabad hydroxylgyököknél és más para-származékoknál nem eszközölhetjük. Némely oxyalkoholt ellenben formaldehydnek a phenolokra való behatása útján³ állíthatunk elő. A második eljárás hátránya, hogy az α ketosavak általában nehezebben állíthatók elő és a jóddihidrogénsavval való reductiót csak eme energikus reductio iránt ellentálló vegyületeken eszközölhetjük.

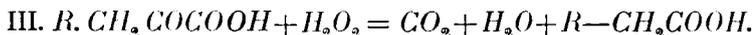
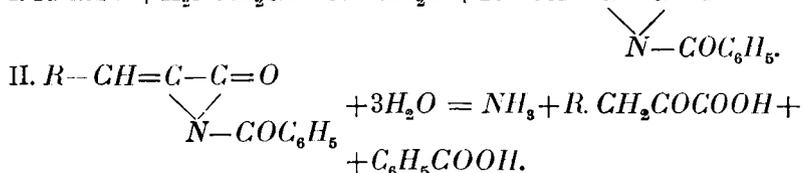
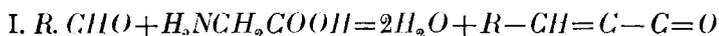
Érdekes egy módszert megismerni, a mely kiindulási testek

¹ CZAPLICKI, KOSTANECKI und LAMPE, B. 42, 828 (1909). A. PICTET und A. GANS, B. 42, 2943 (1909).

² C. METTLER, B. 38, 1745 (1905), B. 39, 2933 (1900), B. 41, 4148 (1908).

³ Berl. Ber. 27, 2411; I. p. Ch. [2] 50, 225.

gyanánt az aromás aldehideket alkalmazza. Ezek számos szintetikus módszer segítségével sok esetben könnyebben hozzáférhető kiindulási testek, mint a megfelelő alkoholok. Rövid ideje,¹ hogy az aromás aldehideknek egy igen czélszerű átváltoztatását találtam fel a megfelelő phenylzsírsavakká és eme eljárásnak beható vizsgálata kimutatta, hogy ez a reactio általános. Az aromás aldehideket ERLÉNMEYER jun.² eljárása szerint kondenzáljuk eczetsavanhydrid és natriumacetat jelenlétében — vízfürdőn azlactonokká (I.):



Ha az azlactonokat híg natriumhydroxyd-oldattal főzzük, ezek ammoniak kiválása közben benzoesavvá és a megfelelő phenylpyroszöllősavvá (II.) alakulnak át. Az ily módon nyert phenylpyroszöllősav származékokat elkülöníthetjük³ ezen vegyület-csoport állandó képviselőinél. Némely phenylpyroszöllősavnak elkülönítése azonban igen nagy kísérleti nehézségekkel jár,⁴ de a fentebbi synthesisnél egészen mellőzhetjük, mert az alkalikus oldatot közvetlenül tovább feldolgozhatjuk. A phenylpyroszöllősavoknak phenylzsírsavakká való átváltoztatását a legczélszerűbben HOLLEMANN⁵ eljárása szerint hydrogénsuperoxyddal végezzük. Ha a phenylpyroszöllősav lúgos oldatához a számított mennyiségű hydrogénsuperoxyd kis fölösleget adjuk és éjjelen át az oldatot állni hagyjuk, úgy a phenylpyroszöllősav phenyl-

¹ Magy. chem. F.; Berl. Ber. 41, 3662 (1908).

² Ann. d. Chem. 271, 164 (1892).

³ E. ERLÉNMEYER jun. und F. WITTENBERG, Ann. d. Chem. 337, 299. F. MAUTHNER, Berl. Ber. 41, 3663 (1908).

⁴ E. ERLÉNMEYER jun. und d. W. STADLIN, Ann. d. Chem. 337, 283.

⁵ Rec. trav. chim. Pays-Bas 23, 169.

zsírsavvá (III.) alakul át. A reactió oldatban így benzoésav és a keresett phenylzsírsav van. E kettőt igen könnyen elválaszthatjuk, ha az oldatot sósavval megsavanyítjuk és vízgőzárammal a benzoésavat eltávolítjuk. A visszamaradt oldatot ætherrel kioldjuk és az oldószer lepárlása után a phenylzsírsavat nyerjük. Még szabad hydroxylygököknél is, mint például a p. oxybenzaldehydből és a vanillinból kiindulva a homovanillinsava, illetve a p. oxy-phenyleczetsavat synthetikus úton nyerhetjük a fentebbi eljárás útján. Ez esetekben az azlaktonok hig nátronlúggal való hydrolysisét hydrogen-áramban kell eszközölnünk. Az oldatot ezután jégezzel megsavanyítjuk és így oxydáljuk hydrogénsuperoxyddal. A fentebbi esetek újabb példái a a PERKIN¹ által más vegyületeken tett érdekes megfigyeléseknek. E szerint hydrogensuperoxyddal még szabad hydroxylygököket tartalmazó vegyületeket is oxydálhatunk lúgos vagy eczetsavas közegben a nélkül, hogy a hydroxylygököket más gyökökkel helyettesítsenék. Ezen synthesis kivitele igen egyszerű és a termelési hányadok jók. Mint azt a homovanillinsavnál és a homotrimethylgallussavnál megmutattam, ezen eljárással oly phenylzsírsavakat is nyerhetünk, a melyeket az eddigi synthetikus módszerekkel igen nehezen, vagy egyáltalán nem állíthatunk elő. Ezen reactio igen czélszerű kiegészítése az eddigi, a phenylzsírsavak előállítására szolgáló synthetikus módszereknek. A phenylzsírsavakat számos növényi és állati anyagnak szétbontásakor nyerjük. E vegyületek azonosítására és synthetikus előállítására, mint azt a homovanillinsavnál és a trymethylhomogallussavnál megmutattam, igen czélszerűen alkalmazhatjuk. A fentebbi kísérletek eme két növényi savnak első synthesisi.

Kísérleti rész.

Phenyleczetsav.

A benzaldehydnek a hyppursavval való condensatiós termékét, mely e kísérlethez szükséges, ERLÉNMEYER jun. eljárása szerint² állítjuk elő.

¹ Proc. 23, 166 (1907).

² Loc. cit.

5. g. azlactont egy visszafolyó hűtőcsővel ellátott, jennai üvegből készült lombikban (300 cm^3) 50 cm^3 (10%-os) natriumhydroxydoldattal 5 óra hosszat hevítünk. A reakciós oldatot jeges vízzel hűtjük és lassacskán folytonos hűtés közben 25 cm^3 10%-os hydrogensuperoxydoldatot elegyítünk hozzá. Ezután a lombikot eltávolítjuk a jeges vízből és éjjelen át közönséges hőmérséklet mellett állni hagyjuk. A folyadékot sósavval meg-savanyítjuk, miközben fehér csapadék válik ki. Vizgőzárammal a benzoésav legnagyobb részét eltávolítjuk és az oldatot még melegen szűrjük, mire kevés oldhatatlan termék marad vissza. A kihűlt folyadékot ætherrel kioldjuk és az oldószert lepároljuk. A maradékot kevés benzoésav eltávolítására rövid ideig a vízfürdőn hevítjük. Máztalan porcellánlapon a terméket kiszárítjuk és petroleumætherből kristályosítjuk át. Hozadék 1.5 g. Összetétele és olvadási pontja (76 C°) által¹ azonosítottam a phenyleczetsavval. 0.1473 g. anyag adott: 0.3822 g. CO_2 -t, 0.0802 g. H_2O -t. $\text{C}_8\text{H}_8\text{O}_2$ képlet alapján a számított értékek: $C = 70.58\%$, $H = 5.88\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 70.74\%$, $H = 6.04\%$.

p. oxy-phenyleczetsav.

A p. oxy-benzoldehydnek hyppursavval való condensatiós termékét ERLÉNMEYER és HALSEY² adatai útján állítjuk elő. Olv. p. $172\text{--}173\text{ C}^\circ$.

A fentebbi condensatiós termék 5 g.-ját egy lombikban 50 cm^3 10%-os nátronlúggal öntjük le. A lombikra egy visszafolyó hűtőcsövet illesztünk, a melynek felső nyílásán át a lombik fenekéig érő üvegcsövet erősítünk meg. Miután a levegőt hydrogénárammal a lombikból kiszorítottuk, a folyadékot 5 óra hosszat hevítjük, miközben folytonosan hydrogént vezetünk rajta keresztül. Ezután a lombikot jeges vízzel hűtjük és hydrogen-áramban hagyjuk kihűlni. Az oldatot ezután 20 cm^3 jegecettel savanyítjuk meg. Hűtés közben 25 cm^3 10%-os

¹ CANNIZZARO, Ann. d. Chem. 96, 247.

² Ann. d. Chem. 307, 139.

hydrogensuperoxydot elegyítünk hozzá és éjjelen át közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk. Híg sósavat adunk az oldathoz és vízgőzárammal a benzoésavat eltávolítjuk. Még melegen szűrjük az oldatot és teljes lehülés után ætherrel kioldjuk. Az æther lepárlása után a p. oxy-phenylecetsavat (2 g.) meleg toluolból kristályosítjuk át és csontszénnel szintelenítjük. Olv. p. 148° .¹

0.1632 g. anyag adott: 0.3775 g. CO_2 -t, 0.797 g H_2O -t; $C_8H_8O_3$ képlet alapján a számított értékek: $C = 63.15\%$, $H = 5.26\%$.

Kísérletileg talált értékek; $C = 63.05\%$, $H = 5.33\%$.

A homovanillinsav synthesise.

E vegyület előállításához szükséges eddigelé ismeretlen 3-acetoxy-4 methoxy-(α)-benzoyl-imino-fahéjsav-anhydridet a következő módon állítjuk elő: 10 g. vanillint, 14 g. hyppursavat, 5 g. vízmentes megolvasztott natriumacetatot és 25 cm³ ecetsav-anhydridet egy óra hosszat vízfürdön hevitünk. A teljes lehülés után a reakciós termékhez hideg alkoholt öntünk és leszűrjük. Ezután alkohollal és vízzel jól kimossuk. Alkoholból átkristályosítva, $194-195^{\circ}C$ -on elvadó tükben válik ki.

0.1675 g. anyag adott: 0.4165 g. CO_2 -t, 0.0690 g. H_2O -t. 0.1579 g. anyag adott: 5.6 am nitrogent (22° , 755 mm). $NO_5C_{19}H_{15}$ képlet alapján a számított értékek: $C = 67.65\%$, $H = 4.45\%$, $N = 4.15\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 67.76\%$, $H = 4.57\%$, $N = 3.98\%$.

E vegyület könnyen oldódik alkoholban, benzolban és ligroinban. Petroleumætherben oldhatatlan. Tömény kénsav vöröses sárga színnel oldja.

A fentebbi condensatiós termék 5 g.-ját egy kis lombikban 50 cm³ 10%-os natronlúggal leöntjük, visszafolyó hűtőcsövet illesztünk hozzá és miután a levegőt hydrogenárammal kiszorítottuk, még 5 óra hosszat hevítjük, miközben folyton hydrogént vezetünk az oldaton keresztül. Ezután az oldatot jeges vízzel

¹ H. SALKOWSKI, Berl. Ber. 12, 1438.

hűtjük és lassacskán 10 cm³ 10%-os hydrogensuperoxid-oldatot elegyítünk hozzá. A keveréket éjjelen át közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk és sósavval megsavanyítjuk. A benzoosavat vizgőzárammal eltávolítjuk és az oldatot még forrón szűrjük, mire gyantaszerű anyagok maradnak vissza. A lehült oldatot ætherrel kioldjuk és az oldószert lepároljuk. A maradékot máztalan porcellánlapon szárítjuk ki (0·7 g.), benzolból átkristályosítjuk és csontszénnel színtelenítjük. Olv. p. 142—143 C°. Az összes tulajdonságait azonosnak ismertem fel a TIEMANN és NAGAI¹ által az acetyleugenol oxydatiójakor nyert α -homovanillinsavval. A fentebbi kísérlet eme növényi sav első synthesise.

0·1436 g. anyag adott: 0·3132 g. CO₂-t, 0·0726 g. H₂O-t. C₉H₁₀O₄ képlet alapján a számított értékek: C = 59·34%, H = 5·49%.

Kísérletileg talált értékek: C = 59·54%, H = 5·61%.

o. methoxy-phenyleczetsav.

Az *o* methoxy-(α)-benzoyl-imino-fahéjsav-anhydrid előállítására 10 g. *o*. methoxybenzaldehydet, 14 g. hyppursavat, 5 g. vízmentes megolvasztott natriumacetatot és 25 cm³ eczetsavanhydridet 1 órahosszat hevítünk a vízfürdön. A lehülés után a lombik tartalma sárga kristálytömeggé szilárdult. Alkoholt elegyítünk hozzá, leszűrjük és előbb hideg alkohollal, aztán vízzel jól kimossuk. Alkoholból átkristályosítva 165—166 C°-on megolvadó tükben válik ki.

0·1547 g. anyag adott: 0·4148 g. CO₂-t, 0·0670 g. H₂O-t; 0·1970 g. anyag adott: 8·5 cm³ nitrogént (15°, 750 mm). C₁₇H₁₃O₃N képlet alapján a számított értékek: C = 73·12%, H = 4·65%, N = 5·01%.

Kísérletileg talált értékek: C = 73·10%, H = 4·81%, N = 4·99%.

Az azlacton könnyen oldódik benzolban és ligroinben. Hideg alkoholban csak nehezen oldódik, könnyebben melegben. Tömény kénsav sárga színnel oldja.

¹ Berl. Ber. 10, 204.

5 g. azlactont 50 cm³ 10%-os nátronlúggal 5 óra hosszat visszafolyó hűtőcsöves lombikban hevítünk. Ezután az oldatot jeges vízzel lehűtjük és 25 cm³ 10%-os hidrogénsuperoxyd-oldatot elegyítünk hozzá és éjjelen át állni hagyjuk. A reactio termékét ezután az előbb megadott módon dolgozzuk fel. Az így nyert nyersterméket (2·4 g.-ot) benzolból kristályosítjuk át. 124 C°-on olvadó tükben válik ki, mint azt PSCHORR¹ legelőször ismertette.

0·1643 g. anyag adott: 0·3915 g. CO₂-t, 0·0907 g. H₂O-t; C₉H₁₀O₃ képlet alapján a számított értékek: C = 65·06%, H = 6·02%.

Kísérletileg talált értékek: C = 64·94%, H = 6·12%.

p. methoxy-phenileczetsav.

E vegyület előállításához szükséges condensatiós terméket ERLÉNMEYER jun. és WITTENBERG² adatai szerint p. methoxybenzaldehydből és hyppursavból állítjuk elő.

5. g. azlactont 50 cm³ 10%-os nátronlúggal 6 óra hosszat visszafolyó hűtőcsöves lombikban hevítünk és a lehűtött oldathoz ezután 25 cm³ 10%-os hidrogénsuperoxydot adunk. A már előbb megadott módon a reactiós termékből 2·3 g. p. methoxyphenyleczetsavat nyerünk. Benzol és ligroin keverékéből kristályosítjuk át. Olv. p. 85—86 C°.³

0·1554 g. anyag adott: 0·3721 g. CO₂-t, 0·0839 g. H₂O-t. C₉H₁₀O₃ képlet alapján a számított értékek: C = 65·06%, H = 6·2%.

Kísérletileg talált értékek: C = 65·24%, H = 5·99%.

Homopiperonylsav.

A piperonylhyppursavat⁴ piperonalnak hyppursavval való condensatiója útján állítjuk elő.

¹ Berl. Ber. 33, 167 (1900).

² Ann. d. Chem. 337, 296.

³ Ann. d. Chem. 117, 243.

⁴ KROPP und DEKER, Berl. Ber. 42, 1184 (1909).

E condensatiós termék 5 g.-ját tízszeres mennyiségű 10%-os nátronlúggal 5 óra hosszat hevítjük. A reactio termékét tovább a már előbb ismertetett módon dolgozzuk fel. Így 2·4 g. nyers-terményt kapunk, a melyet benzol és ligroin keverékéből kristályosítunk át. Olv. p. 127 C°.

0·1743 g. anyag adott: 0·3833 g. CO_2 -t, 0·0658 g. H_2O -t. $C_9H_8O_4$ képlet alapján a számított értékek: $C = 60\cdot00\%$, $H = 4\cdot44\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 59\cdot95\%$, $H = 4\cdot19\%$.

A homopiperonylsavat már MEDINGER synthetikus módon állította elő, de a fentebbi eljárás sokkal előnyösebb és kivitele egyszerűbb.

A homotrimethylgallussav synthesise.

A trimethylgallusaldehyd és hyppursav condensatiotermékének előállítását és annak trimethylhomogallussavvá való átváltoztatását más helyen¹ részletesen ismertettem. Ezen adatokhoz még hozzáfűzöm, hogy a synthesist ez esetben is igen egyszerűsíthetjük a fentebbi példák szerint. Az azlactonnak szétbontásakor a trimethoxy-phenyl-pyroszöllősav lúgos oldatát közvetlenül alakítjuk át trimethylhomogallussavvá.

¹ Loc. cit.

ELŐZETES JELENTÉS MÁSODIK KÖZÉPÁZSIAI UTAZÁSOMRÓL.

PRINZ GYULÁ-tól.

Karácsonytájt, 1906-ban, azzal a gondolattal hagytam ott Ázsia belsejét, hogy rövid idő múlva ismét látni fogom. A M. T. Akadémia kegyes támogatása lehetővé is tette tervem megvalósítását. Utazásom megkezdését az 1908. év végére tűztem ki. Tervem volt a télre a Tiensán déli heglánczainak kikutatása azokon a területeken, a hol nyáron az utazás lehetetlen. Az 1909. év nyarat pedig a már régóta szereplő, de még mindig megoldatlan «Kisiljart-probléma» felderítésére szántam. Az akkori politikai viszonyok következtében azonban csak 1909. év márcziusában nyertem az orosz kormánytól engedélyt az utazásra s így csak április elején indulhattam útnak.

Utitervemet ennek következtében meg kellett változtatnom, mert a tél elmúlt. A tavaszt most már a déli Tiensánnak Naryn. Kásgár és Fergana közötti részére szántam, a nyarat a «Kisiljart»-hegységben szándékoztam tölteni, az őszt pedig az északi Taklamakan szigethegyeiben, a honnan, ha marad még elegendő anyagi eszköz rendelkezésemre, a déli Tiensán szurdokvölgyeit a télen könnyen elérhetem. Ezt a programot az utolsó pont kivételével sikerült is végrehajtanom.

1909 április 3.-án indultam útnak Budapestről s Lemberg, Baku, Számárkandon át április 14-én érkeztem Tászentbe. A turkesztáni vasut utolsó allomására, *Andisánba*, az összes ajánló levelekkel, nyílt rendeletekkel zsebemben, melyek az utazáshoz okvetlenül szükségesek voltak, április 16.-án érkeztem. Andisánban az orosz-khinai bank lassúsága és feltűnő

közönyössége miatt öt napot kellett töltenem. Ezt az időt Andisán környékének öntözés-berendezései tanulmányozására fordítottam.

Végre április 20-án rendbe jöttek bankügyeim is s így másnap az indulás várva-várt órája elérkezett. Utitervemen azonban már az első nap változtatnom kellett. A Kara-darja a hirtelen beállott tavaszi hóolvadás következtében olyan víztömeget hömpölygetett a Fergana-alföldre, hogy észak és kelet felé elzárta minden utat. Azonkívül a Fergana-hegylánczon csak az egy Kogart-hágón lett volna lehetséges átkelni, ezt az utat azonban már 1906-ban bejártam. Így a Muncsak-hágón tervezett átkelés elmaradt s én egy kirgiz-kajzak szolgálta kíséretében április 21.-én két tárántászon (postakocsi) Oss felé vettem utamat. Április 23.-án már lovon ültünk Özgön felé, a hol a Kara-darjájának (fekete folyam) hidja van. Az első nap lószszel fedett óriási kavicsterraszokon jártunk. Késő este érkeztünk Kurasabfaluba. Kurasab-ból kezdtük meg tulajdonképeni expedíciónkat, mert innen kezdve már sok vargabetűvel ugyan, de majdnem mindig ismeretlen utakon jártunk. Özgön egy rövid nap alatt elérhető Kurasab-ból, mi azonban SE felé a hegyekbe igyekeztünk, hogy egyfelől a Musketov és Saint-Yves, másfelől a Fedcsenkó-féle útvonalak között középen szeljük át a Gyalpaktas-hegységet.

A Kara-darja és a Kurasab-folyó között összetöredezett táblahegységet találtunk, melyet kréta- és eocén-korú lerakódások építettek fel. A teteje széles, dombokra tagolt fensík.

Özgönben régi ismerősökre találtam, a kiknél az 1906. évi karácsonyt töltöttem volt. Az itt hallott hírek azonban szintén kellemetlenek voltak: A Fergana-hegylánczon az átkelés még lehetetlen, tovább kell mennünk délre az Alaiku vidékére. Ez legalább kétheti időveszteséget jelentett, azonkívül az időjárás is nagyon kellemetlen volt, az eső alig szünetelt néha, az utakon arasznyi sár, de még inkább elkedvetlenített szolgáltnak és az ossi kerületi főnöktől kapott dsigitnek (ordonáncz) lustasága és tehetetlensége. A mellett égttem a vágytól, hogy minél előbb a Karakirgizek földjére jussak, hol e pula ferganai népesség helyett edzett, kemény emberek állanak rendelkezésemre.

Április 27.-én a Kara-darja balpartján indultunk felfelé, aznap a Laj-folyó torkolatáig jutottunk. Itt érinthettem 1906. évi útvonalamat s hogy ne kelljen azt ismét bejárnom, másnap déli irányban a Laj-folyó forrásvidékére indultam. Ismét krétaeocén fensíkokon keresztül jutottam az Alaiku-völgybe, majd a «Kalmakasu»-hágón május 5.-én átléptem az orosz-kinai határt s ezzel a Tarin-medence vizeinek területére értem, Belső-Ázsiába.

A Kizilszu, Toyun-folyó és a Kalmakasu hegyláncza közötti közel 10,000 km²-nyi terület még terra incognita volt s így utam a Kalmak-asu és a Toyun-völgy közötti három napon jelentős topografiai eredménnyel is járt. A khinai területen az utazás igénybe vette minden erőmet. Itt teljesen magamra voltam utalva, szolgám, az Andisánban felfogadott Chabib nemcsak nem volt segítségemre, hanem még csak több gondot okozott. Itt-ott találtunk néhány koldusszegény kirgiz-családot, a kiknek maguknak is alig volt betevő falatjuk. A bérelt lovak fél órai út után összerogytak az alig 60 kiló teher alatt. Kirgizeim folyton szökést tervezgettek s így én kénytelen voltam az éjszakákat fegyverrel kezemben keresztül virrasztani, mert ha az örködést Chabibra bíztam, az 10 percz múlva őrhelyén már az igazak álmát aludta. És május hó 10.-én reggel kirgizeim mégis megszöktek, úgy, hogy csak sok fáradsággal tudtam a Csatirkulhoz jutni. Az Újürmen-hegységen (Tass-Rabat-hágó 4300 m.) egyedül szolgám kíséretében minden vezető nélkül, gyalog keltem át egy lóból, egy tevéből és egy ökörből álló karavánnal. Végre május 12.-én a tassrabati orosz határőrségre, két nappal később (május 14.) pedig Narynskoe-ba érkeztem.

Az expedíció tulajdonképeni felszerelése Narynskoeban történt és ez volt a kiindulási állomásunk. Itt fogadtam fel embereket, vásároltam lovakat, élelmiszereket stb. Mindebben vendégszerető házigazdám LAURENTY ezredorvos lekötelező szivességgel támogatott. Nagy örömöm volt, mikor 1906. évi kísérem közül KURMANBEK és HASSZÁN felajánlották szolgálataikat, kikhez még egy harmadik szolga csatlakozott. Így május 25.-én edzett és fáradságot nem ismerő fiatal legények kíséretében, kitűnő lovakal hagytam el Narynt. Először az Atbasi-szurdokot kutattam

át, a hol kétségtelenül bebizonyosodott az, hogy a Közép-Tiensán belsejében is vannak északnyugati csapású gyűrődések. Az Üjürmen-hegységen keresztül most a Bogusti-hágóra (4200 m) jutottam. Azután keresztül szeltem a lakatlan Akszai-plateaut, a hol öt napig nem láttunk egyetlen élő lelket.

Az orosz-kinai határt a *Kipcsak*-hágón léptem át. A déli Tiensánnak ezen hegylánczai «apatakan» rétegekből állanak, melyeknek mindig észak felé dülő padjai törmelékbe temetkeztek. A lapos kúpokká pusztult kietlen, élettelen hegységet csak ritkán szakítják meg hegytarajok. A gerinczek csapása, úgy mint az egész Akszaiplateau dombsorai, WSW csapásúak.

Junius 1.-én este a khinai Kipcsakvölgyben találtam először nomád kirgizeket, s most azok vezetésével folytattam utamat Kásgár felé. Hamarosan kiértünk a Tarim-medence peremére, a hol a karbonkorú mészhégek tarajait majdnem teljesen borítják a déli Tiensán óriási törmelékkúpjai. A konglomerátumokból ma már alig néhány száz méternyire kimagasló, hajdan magas hegygerinczek még világosan mutatják a Tárím-medence hatalmas periferikus törésvonalait.

Junius 2.-án elértem MERZBACHER 1903. évi útvonalát a tangitári szent forrásoknál s azt követve az artissi oázisok érintésével Kásgárba jutottam.

Kásgárban ismét öt napot kellett töltenem a khinai hatóságokkal. Az orosz-kinai bank a taskenti fiókosztály hanyagsága következtében semmit sem tudott jövelemről s így nem kaphattam meg pénzemet. SCHUTTLEWORTH angol konzul lekötelező szíveséggel támogatott ezen ügyekben. Nemcsak vendégszerető kedves házigazdám volt, hanem nagy befolyásával a legmesszebbmenő támogatást biztosította egész Kelet-Turkesztánban.

Junius 12.-én Kásgárból a «Kiziljart»-hegységbe indultam. Belső-Ázsiának egyik leggyakrabban emlegetett problémája várt itt megoldásra. A hegyesomósodásnak igen bonyolult területül mutatkozott ez a vidék, de még a legfontosabb és első kérdésre sem adtak határozott feleletet az eddigi expedíciók: HAYWARD-SHAW, STOLICZKA, IVANOV-PUTJATA, HEDIN. Az igaz, hogy az egyetlen STOLICZKA foglalkozott csak morfológiai vizsgálatok-

kal geológiai alapon. A Kiziljart-kérdés főpontja az, vajjon létezik-e egyáltalán a $74-76^\circ$ meridiánon N—S vagy NNW—SSE csapású hegylánc, s ha igen, hogyan helyezkedik az a belső-ázsiai nagy hegyrendszerek közé? PROLAEMBUS óta szerepel e kérdés, ugyanaz HUMBOLDT «Bolor»-ja s még ma is vannak ellenkező vélemények.

Egész június hónapban gyönyörű tiszta idő kedvezett kutatásaimnak s így e kérdéshez sok panoráma-rajz és fénykép áll most már rendelkezésre. Az egész úgynevezett «Kiziljart»-hegységet keresztül-kasul jártam június és július hónapokban, a mint az a következőkből kitűnik.

Kásgárból két napig a HEDIN-féle útvonalon voltam kénytelen maradni egész az éjszakai Ulugart-völgy bejárataig. Junius 14-én azonban a Bosztanarcsa-völgyön már szűz területen jártam. Az orosz 40 versztes térkép alapján a Bosztanarcsát nagy tágas völgynek hiszszük, holott az egészen jelentéktelen kisebb mellékvölgy. Már junius 15.-én reggel a forrásaihoz jutottunk, a hol átkeltünk egy nehezen járható igen magas (legalább 5200 m) hágón. S itt egy eddig teljesen ismeretlen hatalmas völgy tárult elénk, nagy jégárokkaival, szép fenyvesekkel. A kirgizek ezt *Atojnok*-völgynek nevezték s azt mondták, hogy a Gez (= Kásgár-darja) folyóval egyesül, de nem sokkal kisebb ez utóbbinál. Az *Atojnok*-völgy WSW—ENE csapású, ugyanigy csapnak a tőle éjszakra és délre húzódó hatalmas jeges hegylánczok is, s ennek a geológiai szerkezet is megfelel. Itt tehát *észak-déli csapású hegylánczról szó sem lehet.*

Június 16.-án és 17.-én az *Atojnok*-völgyben haladtunk kelet felé, 18.-án ismét egy igen magas hágón elbagytuk azt. Az *Atojnok*-völgy víztömegei tovább haladnak északkelet felé, mi pedig ezen a hágón át a Gez-völgybe jutottunk. Június 19.-én a Gez-völgyben lovagoltunk felfelé, majd 20. án annak egy déli nagyobb mellékvölgyébe, a Köldsailakba mentünk. A Köldsailak jégárja két ágból folyik össze, alsó szakasza 12 km hosszú, míg teljes hosszúsága körülbelül 25 km-nyire becsülhető.

Június 22.-én fenn voltunk a Pamiron, s most az Ulugart-hegység és Rangkul közötti területről világos kép tárult elém. Junius 26.-án ismét lenn voltam a «Kiziljart»-hegység északi

oldalán, a «Markanszú»-völgyben, június 28.-án átkeltem az Aigart-hágón, június 29.-én elhaladtam a Tüskentás-tó (omlottkő-tó) mellett, mely nemrégiben hegyomlás következtében keletkezett, 30.-án pedig a Targalak-völgyön ismét a Kaszári-Alpok főgerince felé igyekeztem. Július 1.-én a Targalak-völgy fejeinél átkeltem a Csimgen-völgybe s annak felvétele után július 2.-án este ismét a hegység északi lábánál voltam. Július 5.-én Kászárgába érkeztem.

Időközben megérkezett az orosz-kinai bank pénzküldeménye is s így néhány napi pihenő után július 10.-én a nyugati Kuenlünbe tervezett utamat megkezdhettem. Egy napig ismét a HEDIN-féle útvonalon kellett mennem Tassmalik faluig.

A Kaszári-hegységi utam érdekes eredményei után kettőzött figyelemmel voltam a Jarkand-ív morfológiájára. Hogy világos képet nyerhessek a Kaszári-hegység és a Jarkand-ív viszonyáról — a kettő függetlensége egymástól már kétségtelen volt előttem —, a Jángihisszár mögötti Karatas és Kenkol völgyek keresztezésénél óhajtottam a Raszkem-darjához jutni. Ezen terv kivitele nem ment minden nehézség nélkül, mert a Karatas-árja az évi legnagyobb magasságot érte el ebben az időben.

Július 12.-én Szajgan-faluból indultunk a hegység felé egy óriási törmelékűponon, a mely a Hanhai-hegyek lehordása következtében keletkezett. Este egy nagy folyóhoz értünk, ez az «Üszén-darja», a Hedin-féle «Karakas». A folyó függőleges konglomerátum-falak között hömpölyög. A falakon lépten-nyomon észlelhetünk nagyobb vetődéseket, melyek mentén a Hanhai-hegység lépcsőzetesen lezökkent a Tarim-medence pereme felé.

Az Üszén-darja balpartján csak alig 30 km-t haladhattunk, mert a Csutekbel alatt a folyó árja a meredek falakhoz csapódik. Itt az Ojicsi-völgyön délnyugat felé a Káindavanra mentünk. Az Ojicsi-völgyben hirtelen megváltozik a hegység képe. A hanhai-lerakódásokat hirtelen meredek sziklafalak váltják fel, melyek NE—SW csapásúak. A mészkő-hegység merőlegesen helyezkedik a Jarkand-ív északnyugati tagjára és kétségtelenné teszi, hogy a Pamirhoz tartozó *Kaszári-Alpoknak* nincsen köztük a *Jarkand-ívhez*. Ennek az élesen kiemelkedő,

fenyvesekkel borított NE—SW csapású hegyláncznak mészkövéből szép faunát gyűjtöttem, melyben a felső-devont vélem felismerhetni.

Julius 15.-én az Üszén-(más kirgizek szerint «Küsszen») darja Kajündü-nevű mellék-völgyén lefelé haladtunk a folyó hidjához, melyet másnap délben értünk el. A folyó itt a «Csingendarja» nevet viseli. Nem sokkal a hid alatt nyílik kelet felé az Otreake-völgy, mely felvezetett bennünket egy kb. 4000 m magas plateaura. Itt ismét minden réteg W—E csapású egészen szabályosan sok napi járásra. Kapcsolatosan a geológiai szerkezettel a hegység arculata is hasonló a Pamirhoz. *A Jarkend és Janghisszár-tól délnyugatra a Kengkol forrásvidékéig elterülő pamirok* («dseilő», «szürt» vagy fensik) *önállóan állanak szemben az igazi Pamirral és teljesen különböznek a nyugati Kuentün felépítésétől.*

Julius 18.-án a Kengkolban, a Kicsik-Karaul (Karaván-szálás) barack-kertjében vertünk sátrat, a hol BOGDANOVICS útvonalára jutottam. Julius 20.-án a BOGDANOVICS-féle úton a Gidssek (Ridssek) hágón át ismét a Karatas-szú (Csigen, alsó részén pedig Küsszendarja a neve) partjára jutottam. A Karatas a folytonos esőzések következtében nagyon megáradt s e miatt másnapig várunk kellett, míg az ár lefolyik, hogy átkelhesünk rajta.

Julius 21.-én végre tiszta, szép időre ébredtünk s most tervem volt a Karatas-völgy baloldali lejtőjén valamelyik hegyesúcsra vagy jó kilátást nyújtó hegyoldalra feljutni, hogy onnan áttekintést nyerjek azon a hegységen, a melyet az orosz 40 verses térkép «Kairak-hegységnek» nevez. Tervem sikerült is, július 22.-én reggel ragyogó tiszta időben kb. 4500 m. magasságból készítettem jól sikerült fölvételeket. 22.-én leereszkedtünk ismét a Karatas-völgybe s a Kismak-hágón át folytattuk utunkat délkelet felé. A hegység arculata rögtön figyelmeztetett újabb változásra. Gránit és homokköpalák jelentek meg; utóbbiak NW—SE csapással, mely előbb még ismeretlen volt, a magasan fekvő pamirok helyét délkeletnek messze huzódó élesebb hegylánczok foglalták el. Azt hiszem ez a vidék legnagyobb nyugatibb tagja a *Kuentün-hegyrendszernek.*

A délkeleti csapású hegylánczokat követtük a Keraagil és Szugurluk-hágókon át a Csarling-ig, a hol július 25.-én ismét BOGDANOVICS útjára jutottunk, 26.-án pedig Kosarab nevű tadzsik-falunál megpillantottuk a hatalmas Jarkend-darját.

Főcéloamat, a Kasgari-Alpoknak vagyis a Kiziljart-hegységnek tüzetesebb megismerését elértem s minthogy a nagy folyamom az átkelés amúgy is teljesen lehetetlen volt, visszafordultam Kásgár felé.

BOGDANOVICS a jarkendi nagy karavánúton ment, én azonban a Kajzirze-völgytől a Jasil-hágó felé tartottam és egyenesen északi irányban óhajtottam elérni Jangihisszárt. Az Arpalik (Armalik) forrásvidékén és részben a GROMBCEVSKI-féle úton augusztus 1.-én érkeztünk ki a síkságra, Kizil-faluba, s a nagy karavánúton Jangihisszár érintésével augusztus 4.-én Kásgárba.

Négy nappal később már úton voltunk Naryn felé. Az orosz 40 versztes térképen is rögtön szembe tűnik az az ismeretlen terület, a melyet a térképek «*Koktan-tau*»-nak neveznek s a melyet sem expedíció, sem az orosz katonai térképezők még sohasem érintettek. A ki a déli Tiensánt ismeri, azt hiszi, hogy ott sivatagnak kell lennie s lakatlan terület. Már két alkalommal jártam 1906-ban, és most utazásom elején is a Koktan-tau közelében, de mindig közbe jött valami, a mi eltérített tervemtől. Sokszor kellett erélyesen fellépnem a kirgizekkel szemben, ilyen kis karavánnal nehéz az első pillanatban a szükséges tekintélyt megszerezni — de ellenségesebb indulatú és zárkózottabb népet sehol sem találtam, mint épen itt a Koktan-hegységben.

Augusztus elején azonban várakozásom ellenére minden jól sikerült. Utunkat a Koktan-tau legnagyobb harántvölgyén, az Ürük-szájon vettük. Sivatag helyett szép zöld legelőket, sőt fenyveseket is találtunk s a völgy tele volt kirgizekkel.

Artiss falu volt most a kiindulási helyünk Kásgártól északra. Augusztus 9.-e volt s ritka kivételképen eloszlott most az a porköd, a mely a Tarim-medenczében minden kutatást annyira megnehezített. A Toyun-völgyet annak Akgyar nevű mellék-völgyén hagytuk el s onnan nyugat felé tartottunk. Közel vízszintesen fekvő terjedelmes hanhai-táblák között haladtunk az

Üruk-szai völgy felé, melyet egy erős napi meneteléssel késő este értünk el. Az egész úton egyetlen forrás kivételével nem találtunk sem egy csepp vizet, sem egy szál fűvet.

Augusztus 10.-én az Üruk-szaj medrében felfelé haladva, északnyugat felé csapó mészkőhegylánczba jutottunk. Minden térképen jelentéktelen kis folyócska az Üruk-szaj s mikor e völgyön a terra incognita felé indultam, magam is azt hittem, hogy még aznap este a forráshoz jutok. A folyó azonban felfelé nem hogy kisebb lett, hanem mindig nagyobbodott s négy teljes napra volt szükségem, hogy a völgy fejéhez juthassak.

Az Üruk-szaj és mellékvölgyei foglalják el a Koktan-tau hegység legnagyobb részét, innen nyugatra a Kizil-szüig csak kisebb mellékvölgyek lehetnek. Az Üruk-szaj a *Dsérüj-pluteau*-ról ered, tehát majdnem olyan hosszú, mint a Toyun-folyó. Eleinte SSE felé tart, majd beleütközik egy W—E csapású mészkőhegységbe s az keletre téríti.

Augusztus 15.-én a Szujok-hágón átléptük az orosz határt, azután a Csatirkul mellett és a Keltebuk-hágón Atbasi érintésével augusztus 21.-én Narynba érkeztünk.

A felesleges podgyászt és gyűjteményeket Narynban hagyva, augusztus 27.-én újabb expedícióra indultam a khinai birodalom területére. Ennek az útnak a főcélja a Tauskan-darja és Kásgár-darjától bezárt terület kikutatása volt. Minden térképen fehér folt van e folyam között, a hol HEDIN szerint a «Karateke»-hegység foglal helyet.

Narynból most északkeleti irányban a Kis-Naryn fensíkra mentünk a Nura-hegyláncz egy eddig ismeretlen hágóján keresztül, meglátogattuk a szultánszári-i «Kara-köl»-t s augusztus utolsó napján a rohanó Karagaman-folyóhoz jutottunk. Innen a «Terszkej-Alatu» hegyláncztól most egyenesen déli irányban a Koksál-folyóig egy nagy profilt vettem fel.

A Dsitim-tauon, nem messze a Lóczy-hegytől, a Dselangacs-hágón keltünk át, a szomszédos déli hegylánczon pedig egy ismeretlen Bajbicsenevű hágón. Itt egy napot pihennem kellett, míg Narynból az oda küldött szolgálaink megérkeznek. Kurmanbeket, a «Karavánbasi»-mat ugyanis betegen a Naryn-folyónál kellett hagynom, a kiséretemben volt kozák pedig ellőtte a

kezét s így Narynba kellett küldenem. Míg az új tolmács és a «dsigit» megérkeztek, egy kis kirándulást tettem az Atbasi-folyótól északra emelkedő mészkőhegységbe. Az Ulan-folyó és a Gyangigyir egyesülése alatt hallottam, hogy fenn a sziklatoryok között nagy tó foglal helyet. Ezt a tavat akartam felkeresni. Nagyon meg voltam lepelve, mikor a szép tavat csakugyan megpillantottam. A Tiansánban nagyon kevés alpesi tó van s nem reméltem, hogy épen itt Narynskoje-tól két napi járásra fedezek fel egy ilyent. A tó 2 km. hosszú. Egy hatalmas hegyomlás duzzasztotta fel vizét. A kirgizek csak «Köl»-nek (tó) nevezik s az alatta levő kis völgyet «Köl-tör»-nek.

Szeptember 7.-én a Gyangigyir-völgyön a Kogelesab felé tartottunk, a hol már 1906-ban megfordultam. A Mudurum-nál érintetem a Huntington-féle (1902) útvonalat, de csakhamar el is hagytam, mert a Kogart-hágón szeptember 10.-én már átléptem ismét az orosz-khinei határt. A Koksál-völgyben találtunk ismét először kirgizeket négy napi út után, szeptember 12.-én pedig már kijutottunk a hegységből is, s szántóföldeket láttunk arató kirgizekkel.

Részben a MERZBACHER-féle 1903-i útvonalon a Koksál-folyó balpartján mentünk most kelet felé, hogy megállapíthassam, melyik folyó az az «Üzüngegus», a melyik a Borkoldáj-hegységben eredve, áttöri a hatalmas Koksál-tau-t s így kétségen kívül a Tauskan-darjába kell folynia. Ez az áttöréses völgy volt 1906-i utam legérdekesebb topografiai eredménye s azt most ki akartam egészíteni azzal, hogy kikutatom a nagy folyónak torolatát is.

HEĐIN már 1895-ben, mikor a Tauskan-darja völgyében Kásgár felé igyekezett, látta, hogy a Sinne-daran alatt jobbról egy nagy folyó egyesül a Tauskan-darjával, az «Osängkekaosch». De MERZBACHER, a ki 1903-ban ugyanitt megfordult, egy szót sem említ erről. Így nagy érdeklődéssel igyekeztem kelet felé, meggyőződni arról, hogy a HEĐIN-féle «Osängkekaosch» azonos-e a Borkoldájból eredő «Üzüngegus»-sal, vagy pedig, hogy a MERZBACHER-féle «Csalmató», a melyet én 1906-ban az Üzüngegus alsó folyásának gondoltam, csakugyan az-e?

Szeptember 16.-án megérkeztem oda, a hol a Koksál-darja

egy másik nagy folyóval egyesül s a honnan kezdve lefelé már a Tauskan-darja nevet viseli. Ezt a nagy folyót itt «Üzüngegus»-nak nevezték, csak úgy, mint fenn a Borkoldaj-hegységben. A Csalmató távolabb keletre van.

A Karateke-hegységben HEDIN és MERZBACHER eljegesedést sejtettek, míg utóbbinak kísérője, KEIDEL, nem hiszi, hogy a Tauskan-darjától délre jégárak vannak. A következő napokban meggyőződtem arról, hogy KEIDEL-nek van igaza. Szeptember 17—18.-án keresztül mentem a Karateke-hegységen a «Muszduk»-hágón. «Tábla»-hegység itt nincs, a Muszduk-hágó alatt délen már a Taklamakan-sivatag kezdődik, melynek kavics-tömegeiből a Kelpin-oázisig párhuzamos hegygerinczek, attól is délre azonban már csak egyes ormok emelkednek ki.

A Karateke déli lábánál a Béskap kavics-sivatag húzódik alacsony mészkőgerinczek között. 40 km-nyi út után értük el az első forrást, melynek Szubasi (vízfő) a neve. Nehány kunyhóból álló oázis ez, honnan a nagy Kelpin-oázis öntözéséhez vizet szolgáltató folyó ered.

Szeptember 20.-án vissza kellett fordulnom, pedig nagyon szívesen töltöttem volna még egy hónapot a Karateke-hegység keleti részének kikutatásával, a mely még teljesen ismeretlen. Az út most már hazafelé ismét Szubasin vezetett keresztül, onnan azonban megtartva a nyugati irányt, 50 km távolságban ismét elértük a Karateke-hegység déli lábát. Az előbbi napokban tiszta levegőt ismét porköd telítette. Az 50 km-es út a sivárabb sivatagon vezetett, a hol még a tevék sem találhattak egyetlen harapásra valót. Lovaimat ezután már alig használhattam, annyira letörtek s így mindig bérelt állatokkal kellett utaznom, a mi sokkal költségesebb volt.

A Béskap-sivatag szigethegyeiből szép karbon-faunát gyűjtöttem s a meztelen heglánczok lehetővé tettek igen rövid idő alatt és gyors utazás mellett is sok fontos geológiai megfigyelést. Szeptember 23.-án az Arpa-csöcsök (Arpa-tjtjtek Hedin) völgyben kereszteztem ismét HEDIN útvonalát s merőlegesen utóbbin folytattam utamat az Akcsi felé.

Az akcsi-tól a «Sirt-tau»-on keresztül (Szaszik-bulak-Aszavaj) az Apatakan-völgybe mentünk, itt ismét érintettük szeptem-

ber 25.-én MERZBACHER útvonalát, majd átkeltünk hóviharban a Keltebukk-hágón, s így oda jutottunk, a hol szeptember 10.-én karatekei kirándulásunkat megkezdettük. Szeptember 27.-én a Koksál-szurdokon felfelé indultunk az Akszai-plateau-ra. Átkeltünk a Csicsar-hágón s másnap este sátrunk már a Műdürüm partján állott. A hőmérő 12° C-ra süllyedt s kemény fagyos szél süvöltött már végig, havat seperve a tágas Akszai-plateaun. A magas fensíkon már elmúlt a rövid nyár.

A SZEVERCOV felfedezte Kokkija-hegység, melynek létezését MERZBACHER kétségbevonta, úgy, a hogy a nagy orosz kutató megírta volt, hatalmas hegylánczaival és jéggel fedett hegyhátaival előttünk emelkedett. A «Nikoláj»-hegyet azonban talán még SZEVERCOV is kevesebbre becsülte, mint az megérdemelte volna.

Szeptember 30.-án megérkeztünk Narynba, a hol általános izgatottság fogadott bennünket. A legújabb orosz telepítések, miután azok a kirgizek földjeinek rövid úton való elkobzásával történtek, felrázták az apatikus kirgiz népet is s most egymás után gyilkolják le az oroszokat, a kik falujukból távolabb merészkednek. Különösen a Száribagis-törzs nyugtalankodott, melynek területén utam hazafelé keresztül vezetett.

Naryni barátainak aggodalmi azonban feleslegesnek bizonyultak, mert minden fennakadás nélkül jutottam le Ferganába. A Fergana-hegyláncon átkelésül a Csitti-hágót választottam, melyen át most már a negyedik profilt nyertem ezen különös csapású hegyláncz geológiájának megismeréséhez. Különösen a Gyamandavan és a Szujok gyűrődések csomósodása teszi a Csitti-hágó vidékét érdekessé. Október 14.-én megérkezett kis karavánom Andisánba, a hol a gyűjtemények csomagolása után a turkesztáni vasuton, Orenburgon és Kiev-en át haza utaztam.

Rövid visszapillantást vetve ezen második utazásomra, ha nem is teljesültek mindenben vágyaim, mégis szabad talán mondanom, hogy a jól sikerült munka utáni örömmel hagytam el ismét Belső-Ázsiát. A téli szurdok-expedicziók kivételével minden tervemet sikerült végrehajtanom. Először látogattam meg és térképeztem a jangi-hiszári vidéket, a Koktan-hegységet és a terjedelmes Karatekét, a melyek fehér foltok voltak eddig

minden térképen és bejártam sok kisebb-nagyobb ismeretlen völgyet, hágót. 320 panorámarajz és több mint 800 fénykép-felvétellel szemléltethetem majd a Tarim-medence nyugati szögletét környező hegységeket. Geológiai tanulmányaim, hozzáfűzve 1906. évi utazásom eredményeit, a déli Tiensán, a Pamir és a nyugati Kuenlün-hegymeredek részei sajátosságos csomósodásának egészen új képét fogják nyújtani.

A gyűjtött paleontológiai anyag a MERZBACHER-expediczió tagjainak, KEIDEL-nek és GRÖBER-nek gyűjtései mellett bizonyára a legszebbek közé fog tartozni, és sok érdekes adattal fogja gazdagítani Belső-Ázsia sztratigrafiáját. Ezekhez járul még a meteorológiai napló. Naponkint rendszeres leolvasást végeztem, légnomás, páratartalom, szélirány, felhőzet és felhőmozgásra stb. vonatkozólag. A Nemzeti Múzeum néprajzi osztályától és a Nemzetközi Közép- és Keletázsiai-Társaság magyar bizottságától rendelkezésemre bocsátott pénzüsszezből szép néprajzi anyagot gyűjtöttem egybe, mely sok érdekes darabot, talán eddig teljesen ismeretleneket is tartalmaz. Végre egy kis botanikai és ornithológiai gyűjtemény is került ezeken kívül birtokomba.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1909 decz. 13.-án tartott üléséből.)

A MESTERSÉGES LAKMUSZRÓL.¹

SCHEITZ PÁL-tól.

DE LUYNES² az orcin képződésének feltételeit tanulmányozva, orcinból natriumcarbonat és ammonia hatására egy festőanyagot állított elő, mely lúgokkal és savakkal a lakmuszhoz hasonló színváltozást mutat. DE LUYNES ezen anyagot lakmusznak minő-íti.

A lakmusz festőanyagaival foglalkozva³ érdekelt, hogy vajjon a DE LUYNES-féle mesterséges lakmusz tényleg azonos-e a lakmusz hatóanyagával: az *azolitmínnel*?

DE LUYNES az orcint huszonötszörös mennyiségű kristályos natriumcarbonattal, ötszörös mennyiségű vízzel és az orcin mennyiségének megfelelő ammoniával négy-öt napig 60 – 80°-on digerálja. A kékes ibolyaszínű oldatot vízzel hígítja és sósavval telíti. A sósav hatására az oldatból kiválik egy festőanyag, mely szűrve, mosva és szárítva adja a tiszta lakmuszt. Az anyag sötétszínű, zöldes, fémfényű, vízben nehezen, míg alkoholban igen jól oldható.

A DE LUYNES eljárását ismételve, sikerült az általa leírt festőanyagot előállítani, melynek tulajdonságai is mindenben megegyeztek az általa leírt tulajdonságokkal. A DE LUYNES adatai alapján azonban nagyon kevés anyagot kaptam és mint-hogy ezen az alapon a további vizsgálatot folytatni nem lehetett,

¹ A kir. József-műegyetem általános chemiai laboratoriumában készült dolgozat.

² Chemical News XI. 1865. Jahresbericht 1864. 551.

³ Mathematikai és Természettudományi Értesítő XXVII. k.

mindenekelőtt azon feltételeket kellett tanulmányozni, a melyek mellett a legtöbb festőanyag képződik. Kísérleteimből a következő eredményekhez jutottam:

1. Tömény oldatban nagyon kevés festőanyag képződik, tehát a víz mennyiségének szaporítása kedvez a festőanyag keletkezésének.

2. Az ammonia mennyiségének növelése lényegesen elősegíti a reakziót. Nagyon sok ammonia jelenlétében azonban a képződött festőanyag lúgokkal szemben nem érzékeny.

3. A natriumcarbonatot fölöslegben kell venni.

4. A levegő jelenléte igen lényeges feltétel a festőanyag képződésére nézve. Beforrasztott csőben végzett kísérlet alkalmával csak kevés festőanyag képződött és a csőben légritkitott tér volt.

5. A hőfokra nézve kitűnt, hogy a $90\text{--}100^\circ$ közti hőmérséklet a legkedvezőbb.

6. A reakció lefolyása igen lassú, sok időt igényel és ha már bizonyos mennyiségű termék képződött, akkor a reakció még nagyon sok ideig tartó hatás után is alig halad előre.

A fenti körülményeket figyelembe véve, a festőanyag előállítására nézve a következő eljárás a legcélszerűbb: 125 g kristályos natriumcarbonatot és 50 g orcint feloldunk egy liter vízben és 50 cm^3 0.910 fajsúlyú ammoniával elegyítjük. A vöröses színű oldatot széles nyakú lombikban vízfürdőn $90\text{--}100^\circ$ -on melegítjük. A hatás már néhány óra múlva mutatkozik, a mennyiben az oldat színe ibolyáskék lesz. Az oldatot gyakran összerázva, az oldat színe mind sötétebb lesz és körülbelül 50 óráig tartó melegítés után az oldat észrevehetően sűrűbb lesz és ha lehűlt, kocsonyás csapadék válik ki. Ekkor már 3—4 g festőanyag képződött. A melegítést még gyakori rázás közben 50 óráig folytatjuk és az elpárolgó vizet időnként pótoljuk. A kihűlt oldatból dús, kocsonyás csapadék válik ki. A 100 órás melegítés után a reakció még nincsen befejezve és az orcin főtömege még változatlanul maradt. A kísérletekből kiderült, hogy a további melegítés alkalmával csak kevés festőanyag képződik.

A kocsonyás csapadékot az oldattal együtt nagyobb hen-

gerüvegbe öntjük és óvatosan sósavval elegyítjük, ügyelve, hogy felesleges savat ne használjunk. A sósav hatására vörösbarna színű pelyhes csapadék válik le, mely gyorsan ülepedik. A csapadékot szűrjük, kevés vízzel mossuk és szárítjuk. (Az oldat vizsgálatáról későbbben szólok.) A csapadék némelykor egyáltalában nem akar száradni, ez esetben az anyagot forró vízzel jól szétdörzsöljük és azután szűrjük. A forró víz hatására az anyag mellett gyakran nagyobb mennyiségben jelenlevő gyantás, olajszerű anyag oldódik és ekkor már az anyag könnyen szárad.

A csapadék vizsgálata.

A száraz és porított anyag vörösbarna színű, zöldes árnyalattal; a zöldes árnyalat akkor szembetűnő, ha az anyag még darabos. Az anyag igen jól oldható hidegen is alkoholban, acetonban és hangyasavban vörös színnel; vízben és ætherben nehezen, benzolban egyáltalán nem oldható. Platina-lemezen hevítve elég és sok hamút hagy hátra. Az anyag nem egynemű és az anorganikus szennyezések mellett egy, vízben könnyen oldható festőanyagot és kevés orcint is tartalmaz. A két anyagot a következő eljárás szerint választhatjuk el: A finoman porított anyagot vízzel (10 g-ot 500 cm³ vízzel) 5—10 perczig forraljuk. Ha a csapadék leülepedett, a sötétvörös színű oldatot leöntjük és a maradékot ujólag forraljuk vízzel. Ha az eljárást négyszer ismétljük, akkor az oldat már csak gyengén vörös színű és a visszamaradt anyag hideg vízzel összerázva alig oldódik. A forró víz hatására nemcsak a vízben jól oldható, hanem az egyébként vízben nehezen oldható anyag kis része és a jelenlevő változatlan orcint is oldódik. A vizes oldatokból a vízben könnyen oldható anyag elválasztása nem sikerült. 50 g orcintből 7 g hamútartalmú anyagot kaptam.

A termelés-százalék javítása céljából igen sok kísérletet végeztem és főképpen a natriumcarbonatot próbáltam más anyagokkal helyettesíteni. Nagy számmal végzett kísérleteimből kitűnt, hogy kaliumcarbonat jelenlétében a legtöbb festőanyag képződik. Ha 10 g orcint és 50 g kaliumcarbonatot 25 cm³ 0.910 fajsúlyú ammoniával és 200 cm³ vízzel 90—100°-on

melegítünk, akkor már 50 órai főzés után 35%, kevés hamút tartalmazó festőanyag keletkezik.

A vízzel extrahált anyag még hamútartalmú. Ennek el-távolítása céljából az anyagot először forró acetonnal, az aceton elüzése után visszamaradt anyagot pedig még egyszer hideg acetonnal oldjuk ki. Az aceton elpárologtatása után 5 g zöldszínű és fémfényű terméket kapunk, mely poritva sötét-színű, zöldes árnyalattal. Az anyag jól oldódik methyl-, æthyl-, amylalkoholban, acetonban, hangyasavban, eczetsavban, pyridin-ben; vízben és ætherben nehezen, benzolban egyáltalában nem oldódik. Tömény kénsavban szintén jól oldható és sok víz hatására megint kiválik. Ammonióban, kaliumhydroxydban ibolyáskék színnel oldódik és megsavanyitva sárgászörös színű oldat keletkezik, melyből az oldat töménysége szerint hosszabb vagy rövidebb idő múlva vörös színű csapadék alakjában válik le az anyag. A vegyület alaktalan és kristályosítani nem sikerült. Ha az anyag tömény alkoholos oldatát egyenlő térfogatú vízzel elegyítjük, akkor rövid idő múlva finom porszerű alak-talan csapadék keletkezik.

A vegyület nitrogéntartalmú és kaliumhydroxyddal mele-gítve, ammoniát fejleszt. Az anyag platina-lemezen óvatosan melegítve a széleken megolvad, de azonnal bomlik is, fehér-színű gőzök távoznak el, az anyag elszenesedik és egyben erősen fel is fuvódik. A képződött szén nehezen ég el. Az anyag olvadásfokát, minthogy hő hatására könnyen bomlik, megállapítani nem lehetett; 210° körül elszenesedik.

A vegyület százalékos összetétele:

A nitrogén mennyiségének meghatározása.

A kísérlet száma	A lemért anyag súlya g	A nitrogén térfogata cm ³	Hőmér-séklet C°	Barométer állása mm.	A nitro-gén %-a
1.	0.4736	16.4	21	759	3.97
2.	0.6221	20.8	22	758	3.77
3.	0.5905	21.2	22	758	4.05
4.	0.5555	19.4	25	752	3.85

közéértékben $N = 3.91$

A szén és hidrogén mennyiségi meghatározása.

A kísérlet száma	A lemért anyag súlya g	A talált víz súlya g	A hidrogén ^{00-a}	A széndioxyd súlya g	A szén ^{00-a}
1.	0·2271	—	—	0·5635	67·63
2.	0·2559	—	—	0·6356	67·72
3.	0·2443	0·1082	4·91	0·6066	67·70
4.	0·2802	0·1225	4·85	0·6955	67·69
5.	0·2391	0·1098	5·10	—	—
6.	0·2821	0·1284	5·05	—	—
közéértékben $H = 4·97$			közéért. $C = 67·68$		

Ezek szerint a vegyület százalékos összetétele:

Hydrogén	— — — — —	4·97 ‰
Szén	— — — — —	67·68 ‰
Nitrogén	— — — — —	3·91 ‰
Oxygén	— — — — —	23·44 ‰
		100·00 ‰

A százalékos összetétel alapján, ha $O = 16$ -tal, a vegyület molekulaképlete $C_{20}H_{18}NO_5$.

Az anyag elemzése némi nehézséggel jár; ugyanis kezdetben rohamosan bomlik, azután nehezen eléghető szén válik ki. A nitrogén meghatározásakor, ha a rézoxydreteg nem elég hosszú, a cső hidegebb részein fehérszínű szublimátum rakódik le.

A vegyület lúgos közegben szőlőcukorral redukálható. Ha az anyagot kaliumhydroxyd jelenlétében szőlőcukorral forraljuk, már rövid idő múlva az oldat kék színe eltűnik és vörösbarna színű oldat keletkezik. Ha az oldat levegővel érintkezik, vagy ha vízbe öntjük, azonnal oxydálódik és megint előáll a kék szín. Kéndioxyd-oldat az anyagot nem redukálja, ellenben hidrokénessav (kénessav, zink jelenlétében) gyorsan redukálja. Kálium, nátrium, ezüst, réz, vas stb. fémsókkal téglavörös, vízben oldhatlan vegyületet képez. Ha az anyagot fokozatosan 250° -ra hevítjük, akkor részben bomlik; az edény falára a száraz párlás termékei rakodnak le és az anyag ammoniában

már nem oldható. Ha a kémcsőben visszamaradt anyagot szabad lángon hevítjük, erős cyanhydrogén-fejlődés észlelhető.

Az anyag ammoniát tetemes hőfejlődéssel köt meg. A száritott anyagot üvegcsőben elosztjuk és lassú áramban száraz ammonia-gázt hajtunk át az anyag fölött. Rövid idő múlva a cső erősen felmelegszik, jelölül annak, hogy az anyag az ammoniát tetemes hőfejlődéssel köti meg. A hatás néhány perc alatt lefolyik, de azért a gáz-áramot nem szakítjuk meg, hanem addig bocsátjuk át, míg a cső tökéletesen lehült. Az anyagot, mely erősen ammoniaszagú, nagy felületre osztjuk el és 2—3 óráig légritkított térben tartjuk. Az ammonium-vegyület sötét sárgásbarna színű, fémfényű, vízben, alkoholban és acetonban kékes színnel oldódik, 70°-nál bomlik és az eredeti zöldes árnyalatú vegyületté alakul át; vízzel forralva szintén bomlik. Zárt edényben változatlanul eláll. Platinalemezen melegítve úgy viselkedik, mint az eredeti anyag.

A vegyület ammoniatartalmát meghatároztam és a következő értékeket találtam:

I.	0·3488 g anyag	0·0133 g ammoniát tartalmaz,
II.	0·3552 " "	0·0135 " " "
III.	0·3727 " "	0·0142 " " "

I. = 3·83% NH_4 ; II. = 3·80% NH_4 ; III. = 3·82% NH_4 ;

középértékben $NH_4 = 3·81\%$.

Az eredeti anyag kaliumhydroxyddal melegítve szintén fejleszt ammoniát, még pedig:

I.	0·5591 g anyag	0·0039 g ammoniát tartalmaz,
II.	0·5898 " "	0·0041 " " "
III.	0·6244 " "	0·0044 " " "

I. = 0·69% NH_4 ; II. = 0·69% NH_4 ; III. = 0·71% NH_4 ;

középértékben $NH_4 = 0·70\%$.

Az ammoniumvegyület ammoniatartalma tehát 3·11%. Az eredeti anyag mint indikátor, különösen lúgok iránt, felette érzékeny. Az anyag alkoholos vagy acetonos oldata a színvál-

tozások előidézésére nem alkalmas, ellenben a vizes oldat teljesen megfelelő. Egy-két gramm anyagot 50—100 cm³ vízzel forralunk és a halványvörös színű oldatot leszűrjük. 100 cm³ forralt vizet egy-két csepp indikátorral elegyítünk, tehát a festék oldatából csak annyit alkalmazunk, hogy éppen gyengén sárgásszínű oldatot kapjunk. Sok festőanyag jelenlétében az indikátor érzékenysége lényegesen csökken. Jellemző az anyagra nézve a lúgok iránt való érzékenysége. Ha hideg vízbe öntjük a kémszert, akkor színe szembetűnőleg nem változik; ha ellenben a vizet 1—2 percig forraljuk, akkor a hozzáadott festékoldat az üveg anyagától nyert lúgosságot már megérzi és kék-színű lesz. Ezen kék színű oldat 0·3 cm³ $\frac{1}{100}$ n. *HCl* hatására vörös színű lesz. A vörös színű oldat 0·15 cm³ $\frac{1}{100}$ n. *KOH* hatására megkékül és ez 0·3 cm³ $\frac{1}{100}$ n. *HCl* hatására vörös színű lesz. A lakmuszból előállított azolitminhez ugyanezen hatások elérésére 0·8 cm³ $\frac{1}{100}$ n. *KOH* és 0·4 cm³ $\frac{1}{100}$ n. *HCl* szükséges. Az anyag tehát az azolitminnél érzékenyebb. Ha savat lúggal titrálunk, akkor már a telítés hatása közelében előtűnik a kék szín, azonban egy-két másodperc múlva eltűnik; ez a színváltozás addig tart, míg az oldat teljesen telítve van. Az indikátor széndioxyd hatására megvörösödik, ennek jelenlétében tehát csak forró oldatban lehet titrálni.

Chlor hatására a festőanyag mélyre menő változást szenved. Ha a vízben szuszpendált anyagra chlorgázt vezetünk, akkor már rövid idő múlva beáll a hatás. Az anyag bomlik és két termék keletkezik. Az egyik termék világos sárga színű, pelyhes és a vízben lebeg. A másik termék sötétbarna színű (kékes árnyalattal) és gyorsan az edény aljára süllyed, úgy hogy a két anyagot már mechanikailag is elválaszthatjuk. A sárga színű anyag oldható alkoholban, acetonban, ætherben és benzolban; vízben nem oldható. Lúgokban sárga árnyalattal oldódik és ha az oldatot megsavanyítjuk, sárgavörös színű oldatot kapunk, melyből az anyag rövid idő múlva kiválik. Az anyag chlortartalmú, ellenben nitrogént nem tartalmaz. A sötétbarna színű anyag lúgokban mályvavörös színnel oldódik és megsavanyítva vörös színű oldat keletkezik, melyből az anyag kiválik. A termék chlort és nitrogént is tartalmaz. Az anyag

oldásviszonyai hasonlóak az előbbi anyagéihoz, azon különbséggel, hogy ez hideg benzolban nem oldódik; tehát a két anyagot benzollal elválaszthatjuk. Platina-lemezen melegítve mindkét anyag úgy viselkedik, mint az eredeti anyag.

*

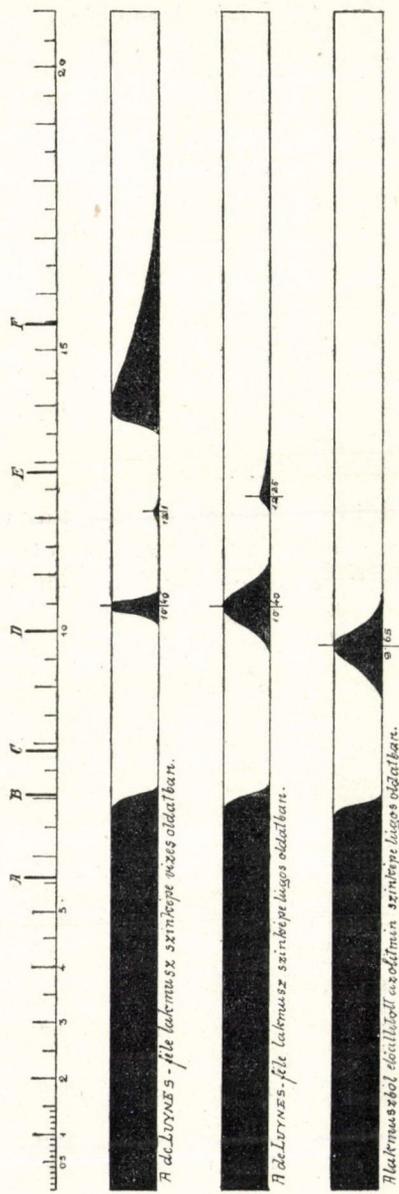
Az elnyelési színekép vizsgálata céljából kvarcz-kémcsőben forrón telített oldatot készítettem. Minthogy ez az oldat nem elég tömény, az anyag alkoholos oldatából annyit elegyítettem hozzá, míg éppen alkalmas töménységű oldatot kaptam. Az alant közölt adatok a FRAUNHOFER-féle vonalokra vonatkoznak. A *D* vonal egybeesett a spektroszkóp 10·00 osztályrészével és az ennek megfelelő hullámhossz 589·6.

A színekép bal oldala a 7·18 osztályrészig teljesen ki van oltva. 10·12-től 10·64-ig egy elég élesen határolt csík látszik, melynek legsötétebb része 10·28 osztályrésznél van; az ennek megfelelő hullámhossz 582·50; 12·1-nél (majdnem a *Th a* vonalánál) igen halvány vonal látszik. Végre 13·48-nál halvány szalag tűnik fel, mely fokozatosan halványodik.

Az ammoniával elegyített lúgos oldatnál a színekép bal oldala a 7·20 osztályrészig teljesen ki van oltva. 9·60-tól 11·20-ig élesen határolt szalag tűnik fel; a legsötétebb rész a 10·40 osztályrésznél van és az ennek megfelelő hullámhossz 579·50; 12·12-től 13·35-ig nagyon halvány csík észlelhető, a legsötétebb rész a 12·25 osztályrésznél van, az ennek megfelelő hullámhossz 538·25.

A lakmuszból előállított azolitmin színeképét nem hasonlíthattam össze a DE LUYNES-féle lakmuszszal, mert az azolitmin vízben vagy alkoholban nem oldódik; ellenben ammoniás oldatát összehasonlítottam.

A színekép bal oldala a 7·00 részig teljesen ki van oltva. 8·75-től 10·55-ig erős fekete szalag látható, mely balról élesen határolt, ellenben jobbra halványodó. A legsötétebb rész a 9·65 osztályrészen van; az ennek megfelelő hullámhossz 598·50.



Az oldat vizsgálata. —

A sötétvörös színű szüredékből, ha térfogatának kétharmadára bepárologtatjuk, pelyhes csapadék alakjában még válik ki festőanyag. Ez az anyag azonos a fent leírt vegyülettel. Ha az oldatot szárazra párologtatjuk, akkor az organikus alkotórészek és az át nem alakult orcín mellett egy vörösszínű, gyantás, vízben oldható festőanyag is kiválik. Ebből a maradékból egynemű vegyületet elkülöníteni nem sikerült.

A DE LUYNES-féle lakmuszkészítményt összehasonlítva a lakmuszból előállított azolitminnel,¹ kitűnik, hogy a két anyag *nem azonos*.

A különbségek a következők:

1. Az azolitmin 390° -on még nem olvad meg, a DE LUYNES-féle készítmény ellenben már 210° körül elszenesedik. Az azolitmin platina-lemezen óvatosan melegítve olvadás nélkül bomlik és elég; a DE LUYNES-féle platina-lemezen melegítve rézben megolvad és azután szénkiválás mellett gyorsan bomlik.

2. Az azolitmin vízben, alkoholban és acetonban alig oldható, a DE LUYNES-féle ellenben vízben nehezen, de alkoholban és acetonban igen jól oldható.

3. Molekula-összetételük különböző. Az azolitmin összetétele $C_{13}H_{12}NO_5$; a DE LUYNES-féle készítményé $C_{20}H_{18}NO_5$.

4. Az azolitmin kaliumhydroxyddal melegítve nem fejleszt ammoniát, a DE LUYNES-féle készítmény ellenben fejleszt ammoniát.

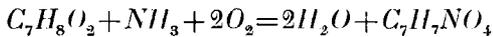
5. A két anyag elnyelési színe teljesen különböző.

A felsorolt adatokból tehát határozottan kitűnik, hogy a DE LUYNES-féle lakmusz és a lakmuszból előállított azolitmin nem azonos. Ha a két anyag nem is azonos, de mindenesetre közel áll egymáshoz. A lakmusz készítése céljából ugyanis a zuzmókat mész, hamúzsír és ammonia jelenlétében több hétig a levegőn erjesztik. Ekkor a zuzmókban levő lecanorsav, erythrinsav és rocellasav bomlása következtében orcín

¹ Matematikai és Természettudományi Értesítő, XXVII. k.

keletkezik és ebből az erjesztés további tartama alatt orcin és azután lakmusz képződik. (Lásd HENRICH és DORSCHKY, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 1904. 1416.)

A lakmuszból előállított azolitmin molekula-képlete, a melyet a negyvenes években állapítottak meg, hasonló volt az orcin képletéhez; ugyanis az azolitmin a nitrogénen kívül csak két atom oxigénnel tartalmazott többet, mint az orcin. Ezen körülményből GERHARD azt következtette, hogy az azolitmin orcinból képződik, ammonia és oxigén hatására. GERHARD a chemiai folyamatot a következő egyenlettel érzékíti:



(Az irodalomban a $C_7H_7NO_4$ összetételű vegyület gyakran szerepel az azolitmin képlete gyanánt. Ezen képlet azonban nem az azolitmin képlete, sőt az orcinból előállított készítmény összetételének sem felel meg, mert orcinból ammonia hatására, a mint láttuk, egy sokkal bonyolultabb összetételű vegyület keletkezik, mely bár némely sajátságában az azolitminhoz hasonló, de azolitminnak nem tekinthető.)

A DE LUYNES által orcinból előállított festőanyag, mint általában az orcinból előállított minden festőanyag, nagyon bonyolult összetételű. Az anyag szerkezetére nézve még nem rendelkezem a kellő adatokkal és ez irányban a vizsgálatot még folytatom.

Lakmuszhoz hasonló készítményeket még ZULKOWSKY és PETERS,¹ továbbá HENRICH és MEYER² is előállítottak, ezeknek összehasonlító vizsgálatát szintén folytatom.

¹ Wiener Monatshefte 11. 238.

² Zeitschrift für Farben- u. Textilchemie I. 599.

Helyreigazítás.

A Math. és Természett. Értesítő XXVII. kötetében Laczkó Dezső cikkéhez mellékelte egyik térképen («Veszprém város részletes geológiai térképe») az öt fekete folt tipografiai hibából került oda s az utólag rájuk vonatkoztatott jelzés («Kövületlelőhelyek») szintén a szerző tudta nélkül lett felvésve.

Ugyanígy került úgy erre, mint a másik térképre a szerző neve elé a Dr. is.

A SZILÁRD ÉS CSEPPFOLYÓS TEST KÖZÖS HATÁRÁN FELLÉPŐ FELÜLETI FESZÜLTSEGRŐL.

(Székfoglaló értekezés.)

TANGL KÁROLY 1. tagtól.

Bevezetés.

1. A kapilláris jelenségekre vonatkozó vizsgálatok nagy-része azzal a kérdéssel foglalkozik, mekkora a vizsgált folyadék felületi feszültsége, ha levegővel vagy saját gőzével érintkezik. Többen vizsgálták a két egymással nem keveredő folyadék határ-felületén fellépő feszültséget. Ha a kapilláris jelenségekben a molekuláris erők megnyilvánulását látjuk, akkor szükségképen fel kell tennünk, hogy a szilárd test felületén is fellépnek, akár légnemű, akár folyékony, akár más szilárd testtel érintkezik, hogy tehát ezen esetben is beszélhetünk felületi feszültségről. Persze nem várhatjuk, hogy a hatás itt is oly szembeötlő módon jelentkezék, mint a folyadékoknál, mert hisz nincs meg az elemi részek nagy gördülékenysége s hasonlíthatlanul nagyobb erők szükségesek az alakváltoztatáshoz, mint a folyadékoknál. Nem is rendelkezünk ez idő szerint olyan módszerrel, melylyel a szilárd test felületén működő feszültséget le tudnók mérni. Mindössze egy dolgozatról van tudomásom, mely a felvetett kérdéssel eredményesen foglalkozik: W. C. RÖNTGEN¹ 1878-ban megmérte a kaucsuk és víz közötti felületi feszültséget, még pedig oly módon, hogy meghatározta azt a nyomást, mely egy vékony, kőralakú sík kaucsukhártyának félgömbbé

¹ Wied. Ann. 3. p. 324—1878.

deformálására szükséges volt, a mikor a hártya levegővel, majd mikor vízzel érintkezett. A két nyomásból, meg a hártya méreteiből kiszámíthatta, mennyivel tér el a levegővel érintkező kaucsuk felületi feszültsége a vízzel érintkezőétől. Ez a módszer nyilván csak igen szűk keretekben alkalmazható, mert kevés olyan szilárd anyag van, mely ekkora rugalmas alakváltozást elbír.

2. A szilárd és cseppfolyós testek közös határán uralkodó feszültség nagyságáról ezenkívül csak annyit tudunk, a mennyit az illeszkedési szögből lehet következtetni. Ugyanis, ha f_{sl} a felületi feszültség a szilárd test és a levegő vagy a folyadék telített gőze közt, f_{sc} a szilárd és cseppfolyós közt, f_{cl} a folyadék és levegő vagy telített gőze közt, akkor GAUSS elméletéből egész általánosságban következik, hogy egyensúly esetén

$$\cos \vartheta = - \frac{f_{sc} - f_{sl}}{f_{cl}}, \quad (1)$$

hol ϑ az illeszkedési szög. Ha tehát ϑ és f_{cl} ismeretes, az

$$f_{sc} - f_{sl} = - f_{cl} \cos \vartheta \quad (2)$$

képlettel kiszámítható $f_{sc} - f_{sl}$. Azonban az (1) formula csak akkor ad reális ϑ értéket, ha

$$|f_{sc} - f_{sl}| \leq |f_{cl}|. \quad (3)$$

Ha a (3) feltétel nem teljesül, a szilárd test és folyadék nem lehet egyensúlyban, az (1) alapját képező föltételek mellett. Hogyha e mellett $f_{sc} - f_{sl}$ negatív, akkor azt mondjuk, a folyadék igen vékony rétegben bevonja a szilárd testet s a folyadék többé nem a szilárd testhez, hanem eme vékony réteghez illeszkedik, úgy hogy tulajdonképen (1)-ben f_{sc} helyébe zérust és f_{sl} helyébe f_{cl} -t kell tennünk; akkor $\vartheta = 0$ s a folyadék nedvesít. Ez esetben tehát a 0° -nyi illeszkedési szögből csak annyit tudhatunk meg, hogy $f_{sc} - f_{sl}$ negatív és abszolút értéke nagyobb mint f_{cl} .

De ezen korlátozástól eltekintve, az illeszkedési szög távolról sem mutatja azt az állandóságot, melyet az elmélet megkövetel. Értéke lényegesen függ attól, vajjon a szilárd testnek

a foyadékon kívül eső része volt-e már előzőleg érintkezésben a foyadékkal vagy nem. Így például a kísérleteimhez használt kaucsukcsövet függőlegesen vízbe mártva, a víz 90° -kal illeszkedett, a míg a csó víz feletti része száraz volt; a mint a csövet lassan kihuztam, az illeszkedési szög mind kisebb lett a nélkül, hogy a határvonal a csó mentén eltolódott volna: a víz a határvonal mentén szinte odatapadt a csóhoz s vele együtt emelkedett, míg az illeszkedési szög zérus lett. Ezentúl emelve a csövet állandóan zérus maradt s a csövet jól látható vízréteg vontá be. Ilyforma bizonytalanságok miatt az illeszkedési szögből vont következtetések is hasonló mérvű bizonytalanságban szenvednek s «kétséges, mennyiben tekinthetjük egyáltalában az illeszkedési szöget a két anyagot jellemző állandónak» (Pockels).¹

Újabban H. G. MÖLLER² azt tapasztalta, hogy a gondosan tisztított fémfelületen elektrolízis közben kivált gázbuborékok igen állandó szöggel illeszkednek s ezt fel is használta a bigany, nikkal elektrokapilláris görbéjének megszerkesztésére.

Értekezésemben olyan módszert ismertetek, melylyel a szilárd és folyékony test közös határán fellépő feszültség közvetlenül lemérhető s igen sok szilárd anyagra alkalmazható.

A módszernek bizonyos aktuális jelentősége is van. Újabb kutatásokban sok szó esik az olyan rendszerekről, melyekben különböző anyagi komponensek igen nagy felületen érintkeznek egymással; elég ha a kolloid-oldatokra, zselatinás testekre utalok; az állati és növényi szervezetben is lépten-nyomon találkozunk ily rendszerekkel. Ezeknek sajátos viselkedése természetesen szoros összefüggésben áll az érintkező felületükön lefolyó kapilláris jelenségekkel. Módszeremmel tehát nemcsak az anyagokat jellemző állandó ismeretéhez juthatunk, hanem az más tudományos téren is jó szolgálatokat tehet.

A módszer leírása.

3. Ha a szilárd test foyadékkal érintkezik, felületi feszültsége f_{sc} , ha a foyadék telített gőzével érintkezik, f_{sl} legyen:

¹ WINKELMANN: Handbuch d. Phys. I. p. 1285. 1908.

² H. G. MÖLLER: Ann. d. Phys. (IV). 25. p. 725—744. 1908.

a tárgyalandó módszerrel közvetlenül lemérhető az $f_{sc} - f_{sl}$ különbség; a következőkben azt egyszerűen a szilárd test és folyadék közti feszültségnek fogom nevezni és f -fel jelölöm.

A módszer alap gondolata a következő: Ha valamely folyadék telített gőzével érintkezik, akkor, a mint ismeretes, a határfelület minden elemére a különben működő külső nyomáshoz hozzájárul egy másik ú. n. kapilláris nyomás K , melynek nagysága $f_{cl} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$, hol ρ_1 és ρ_2 a felületi elem két fögörbületi sugara. f_{cl} előjelét úgy választjuk, hogy pozitív f_{cl} esetén a kapilláris nyomás a homorú oldal felé legyen irányítva. Hasonlóképen, ha szilárd test érintkezik telített gőzzel, a határon ugyanilyen feszültséget és kapilláris nyomást kell felvennünk, mely utóbbi hozzájárul a külső nyomáshoz $f_{sl} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$ értékkel. A kapilláris nyomás jelenléte abban nyilvánul, hogy a szilárd testet összenyomja. Ha most a szilárd test folyadékba merül, más lesz a felületi feszültség, más lesz a kapilláris nyomás, más lesz a deformáció. Feltéve, hogy mindkét esetben a deformáció oly kicsiny, hogy ρ_1 és ρ_2 változása számot nem tesz, s így elhanyagolható, a kapilláris nyomás értéke a második esetben $f_{sc} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$ lesz. A mikor tehát a szilárd test telített gőzből folyadékba merül s p a külső nyomásnak e közben beálló megváltozása, a szilárd test minden egyes felületi elemére működő összes nyomásváltozás

$$P = p + (f_{sc} - f_{sl}) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = p + f \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = p + K$$

lesz. Módszerem már mostan abban áll, hogy lemérjük a p hidrosztatikai és K kapilláris nyomás okozta térfogatváltozást s ebből következtetünk a felületi feszültség értékére. Annak belátására, hogy ilyen módon célt érhetünk, mindenekelőtt két kérdést kell tisztáznunk:

1. Elég nagy-e a kapilláris nyomás arra, hogy jól mérhető térfogatváltozást hozzon létre?

2. Miképen választható el a p hidrosztatikai nyomás okozta térfogatváltozás a kapillarisétól.

4. Az első kérdésre feleljen a következő számítás:

Képzeljünk egy egyenes csövet az illető szilárd anyagból körös keresztmetszettel; külső sugara legyen R , belső sugara $R-a$; a tehát a fal vastagsága; a cső hossza legyen nagy a sugarához képest. Két végén zárjuk sík lappal, melyek deformációját elhanyagoljuk. A cső külső falára működjék P nyomás; akkor a cső sugara mentén beálló lineáris dilatáció

$$\rho = \frac{1}{E} \frac{R}{a} P,$$

hol E a cső anyagának nyújtási modulusa. A cső keresztmetszetének viszonylagos megváltozása ennek következtében

$$2\rho = \frac{2R}{E} \frac{P}{a}.$$

Az egész térfogatváltozás, mely egy l hosszúságú csődarabon beáll, lesz

$$\pi R^2 l \cdot \frac{2R}{E} \frac{P}{a}.$$

Legyen már most P a kapilláris nyomás; mivel most $\rho_1 = \infty$, $\rho_2 = R$, $P = -\frac{f}{R}$ lesz, hol f a felületi feszültség, s így a kapilláris nyomás okozta egész térfogatváltozás

$$\Delta V = \frac{1}{E} \frac{2\pi l R^2}{a} f.$$

Gondoljuk a csövet platinából $\left(E = 17000 \frac{\text{kg. súly}}{\text{mm}^2}\right)$, legyen $l=10$ cm, $R=1$ cm és $a=0.0001$ cm, f akkora, mint a víz feszültsége, azaz $7.5 \frac{\text{mg. súly}}{\text{mm}}$, akkor $\Delta V = \frac{1}{40}$ mm³, a mi egy 0.1 mm sugarú kapilláris csőben közel 0.8 mm hosszúságú darabnak felel meg, tehát már jól mérhető.

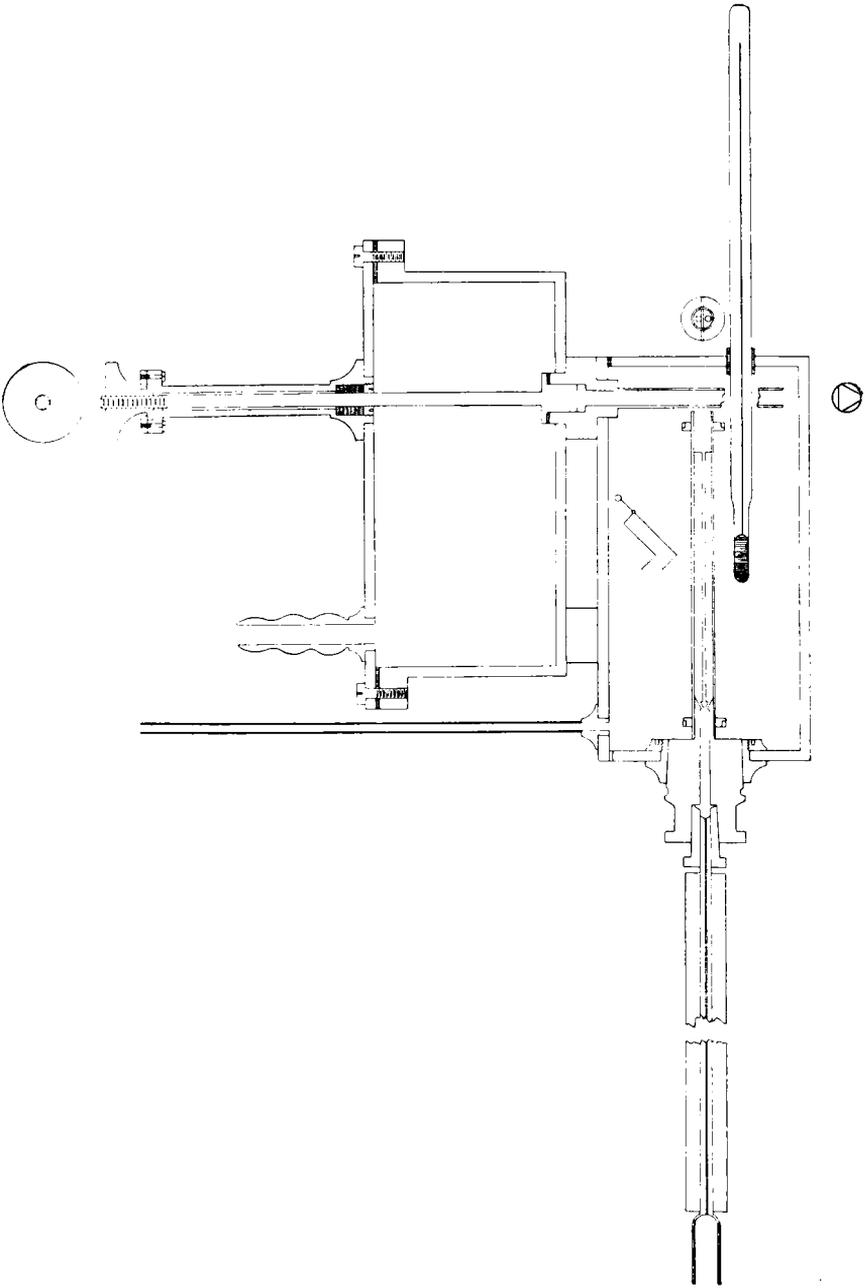
Persze az ilyen vékonyfalu cső előállítása platinából vagy más anyagból s a vele való kísérletezés nagyon bajos volna. Sokkal kedvezőbb méreteket kapunk oly anyaggal, melynek rugalmassági modulusa jóval kisebb. Ilyen például a kaucsuk

($E=0.1 \frac{\text{kg. súly}}{\text{mm}^2}$ körül); ilyen cső még 1 mm falvastagság mellett is — különben betartva a fenti méreteket — 170-szer akkora térfogatváltozást adna mint az 0.0001 cm-es platinacső. Ezért az első méréseket vulkanizált kaucsukcsövön végeztem. A valóságban a térfogatváltozás kisebb volt, egyrészt a számításnál tett elhanyagolások, másrészt az eszköz későbbben leirandó berendezése miatt.

Ilyen kaucsukcső közvetítésével más anyagokat is vizsgálhatunk, olyanokat, melyekkel a kaucsukot vékony rétegben bevonhatják, így például bevontam paraffin-, gyantaréteggel, arany-, aluminiumfüsttel. E dolgozatomban csak a kaucsukra és paraffinra vonatkozó mérésekről leszen szó.

5. A p külső nyomás hatását a kapillárisétól két mérés segítségével lehet elválasztani: ezzel két egyenletet kapunk, melyekből p kiküszöbölhető. Mielőtt ezt tárgyalnám, talán célszerű lesz előbb a kísérleti berendezést legalább nagyjában leírni s ehhez fűzni a fejtegetéseket.

Kísérleteimhez több próbálgatás után vulkanizált vörös kaucsukcsövet használtam, melynek külső átmérője 9 mm körül, falvastagsága 0.8 mm, egy másik fajtánál 0.4 mm volt. Az ú. n. patentgummi érzékenyebb lett volna, de annál nagyobbak voltak a rugalmas utóhatások. A csőből egy körülbelül 13 cm hosszú darabot egy 10 cm hosszú és 1 mm vastag sárgarézléczre huztam, melynek szélessége éppen akkora volt, mint a kaucsukcső belső átmérője, mely tehát a cső belsejét két rekeszre osztotta. A lécz két végéhez egy-egy közel 1.5 cm hosszú sárgarézhengert erősítettem, melyre a cső éppen ráillet. Mindkét henger kerületén barázda futott körül. A kaucsukcsövet vékony nikkeldróttal erősen a barázdába nyomtam, teljesen elzárva azzal a cső belső terét. Az egyik henger egy nagyobb konushoz volt forrasztva (l. 1. ábra, hol a cső az alsó edényben látható). A konus tengelye mentén 2 mm-es furat volt, mely az előbb említett léczhez erősített hengerben két ágban folytatódott, úgy hogy a konus furata összeköttetésben állott a kaucsukcső belsejével, még pedig mindkét rekeszszel. A konus furatának szélesebb részébe egy 40 cm hosszú kapilláris cső



1. ábra.

illeszkedett pontosan, melynek belseje tehát összeköttetésben állott a cső belsejével. A kapilláris csőhöz milliméterekre osztott alumíniumskálát helyeztem. A kaucsukcsövet teljesen megtöltöttem vízzel, mely beleért a kapilláris csőbe, ügyelve arra, hogy levegőbuborék ne maradjon benne. A kaucsukcső térfogatának változásával a folyadékoszlop eltolódott a kapillárisban; az eltolódás mértéke a térfogatváltozásnak.

A kaucsukcső külső felületéhez a tengelyvel párhuzamos két réz-sínt fektettem, melyek a csövet a benne lévő sárgaréz-léczhez szorították, teljesen rögzítve ezzel a cső ama keskeny darabját, mely a belső léczhez ért.

6. Ha a kaucsukcsövet víz lepi el, akkor a p hidrosztatikai és a K kapilláris nyomás működik reá. A kapilláris csőben a folyadékszál eltolódik egy bizonyos δ értékkel, mely arányos a nyomással (l. a):

$$\delta = c(p + K).$$

Most emeljük a viznivót, míg a hidrosztatikai nyomás $p + p'$ lesz. A folyadék újból eltolódik, mondjuk δ' -vel; a mennyiben a kapilláris nyomás változását a külső nyomással elhanyagolhatjuk,

$$\delta' = cp'.$$

A két egyenletből

$$K = \frac{p'\delta - p\delta'}{\delta'} = -p + \frac{\delta}{\delta'} p'.$$

A felületi feszültség pedig K -ból egyszerűen adódik:

$$f = KR,$$

hol R a cső külső sugara.

A két eltolódáson kívül lemérve tehát a p és p' hidrosztatikai nyomásokat, K s vele a feszültség kiszámítható. p' lemérése semmi gondot sem okoz, a két viznivó magasságkülönbségéből rögtön adódik; p meghatározása azonban megfontolást igényel.

A mikor a cső vízbe merül, a hidrosztatikai felhajtó erő a csövet felfelé hajlítja. Meggyőződtem arról, hogy a belső lécz 1 mm-nyi vastagsága mellett ez a felgörbülés elhanyagolható.

Számba veendő továbbá, hogy a p nyomás a cső felülete mentén változik, felül kisebb, alul nagyobb. Képzeljünk a cső belső terében a lécz egy tetszőleges A pontján át egy vízszintes S síkot fektetve; ebben legyen a nyomás p_0 . A csövet állítsuk úgy, hogy a benne lévő lécz lapja vízszintes legyen; az S sík tehát rajta áthalad. Az eme síkban fekvő csőrészek deformációt nem szenvednek, mert hisz rögzítve vannak a belső léczhez. A deformált cső egy tetszőleges elemére működő nyomás $p_0 + \pi$ alakban írható, π tehát függ a felületi elem helyétől, S fölött negatív, az alatt pozitív.

Ha az S sík a csövet két teljesen kongruens felső és alsó részre osztaná, ha továbbá a cső anyaga mindenütt teljesen homogén volna, akkor a felső részre működő negatív π nyomások ugyanolyan nagyságú, csak ellentett előjelű deformációt hoznának létre, mint az alsó részre működő pozitív π nyomások, feltéve, hogy a deformáció arányos a nyomással, s így a teljes $p_0 + \pi$ nyomás okozta térfogatváltozás ugyanakkora volna, mint hogyha az egész csőre a mindenütt egyforma p_0 nyomás hatna. A valóságban persze a cső nem lesz teljesen szimmetriás, nem is lesz teljesen homogén; azonban az ebből származó hibát kiküszöbölhetjük. Ugyanis forgassuk a csövet tengelye körül 180° -kal úgy, hogy az S sík megint vízszintes legyen s ezzel a cső alsó része fel-, felső része lekerül. Egy ugyanazon felületi elemre most $p_0 - \pi$ hidrosztatikai nyomás működik, feltéve, hogy a deformáció s ezzel a ds felületi elem eltolódása oly kicsiny, hogy az S síktól való távolsága most is ugyanannak vehető, mint előbb. Kísérleteimben ez teljesült, mert az egyes felületi elemek eltolódása átlag 0.001 mm rendű volt. Ily kicsiny deformációk továbbá arányosaknak vehetők a nyomással. Ha tehát az első állásban a p_0 nyomás v_0 , az összes π nyomások pedig v térfogatváltozást hoznak létre, akkor az egész hidrosztatikai nyomás okozta térfogatváltozás az első állásban $v_0 + v$, a másodikban pedig $v_0 - v$.

Ha tehát az első, illetve második állásra vonatkozó adatokat 1, illetőleg 2 indexxel látjuk el, a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= c_1(p_{01} + K) + A, \\ \delta'_1 &= c_1 p'_1, \\ \delta_2 &= c_2(p_{02} + K) - A, \\ \delta'_2 &= c_2 p'_2,\end{aligned}$$

hol A a v térfogatváltozásnak megfelelő eltolódás. Ezekből

$$K = \frac{\delta_1 + \delta_2}{c_1 + c_2} - \frac{c_1 p_{01} + c_2 p_{02}}{c_1 + c_2} \quad (5)$$

c_1 és c_2 a δ'_1 és δ'_2 -re vonatkozó egyenletekből számíthatók; ezek a cső érzékenységet jellemzik: az egységnyi nyomásra eső eltolódást. Az érzékenység egy észlelési sorozatban kis változást mutatott, azért történt az (5) levezetése oly módon, hogy az érzékenységet a két állásban különbözőnek vettem. Ha tehát a cső két, 180° -kal különböző állásában végezzük a mérést, csak a p_0 hidrosztatikai nyomás ismeretére van szükségünk. Az A pontot úgy választottam mindig, hogy a cső hosszát felező keresztmetszetben a függélyes átmérőt felelje; a hosszát felező keresztmetszetben azért, hogy a cső nem pontosan vízszintes állásából származó hiba is kiessék.

7. Mint már említettem, a kaucsukcső egy planparallel falakból készült négyszögletes üvegedény egyik vertikális falán keresztül az edény belsejébe ért s ott vízszintesen állott. Az edény méretei: hossza 15 cm, szélessége 7 cm, magassága 7 cm. A csővel egy magasságban egy vízszintes, tizedfokokra osztott hőmérő is ért az edénybe. Az edény fémlappal volt légmentesen lefödve; ehhez erősítettem a vizeztartót ugyancsak fémből (sárgaréz), melyből egy szelep nyitásával az alsó edénybe mélyen érő csövön át vizet bocsáthattam (l. 1. ábra). A vizeztartó is légmentesen volt födve, a tetején lévő csövön át közlekedett csak a külső levegővel. Ezen át szívást lehetett gyakorolni, s az alsó edényből a vizet a tartóba visszaszívni. A belső edényből egy vékonyabb cső vezetett ki a szabad levegőre, az edényben lévő levegő nyomása tehát mindig a légköri nyomással volt egyenlő.

Az egész eszköz vízfürdőbe került a hőmérséklet állandósítása végett; ezzel elértem azt, hogy egy kísérlet tartama

alatt, mely mintegy 4 órát vett igénybe, a hőmérséklet ingadozása 1—2 századfoknál többet ritkán tett ki. Erre szükség is volt, mert hisz a kaucsukcső a kapillárisal érzékeny hőmérőt képezett. Maga a kapilláris cső is benne volt a vízfürdőben; a cső végére kaucsukcsövet húztam, mely kiért a fürdőből s így a kapilláris cső belseje szabadon közlekedett a külső levegővel. A vízfürdő falán a kellő helyen planparallel ablakok voltak, hogy a kapilláris csőben a folyadékoszlop állását, az edényben pedig a folyadéknívó állását le lehessen olvasni. A kapillárisban a folyadékoszlop állását egy mögéje helyezett aluminiúmskálán egy LEITZ féle leolvasó mikroskoppal figyeltem meg; ennek okularmikrométerével 0·01 mm-t tudtam leolvasni. A p_0 és p' hidrosztatikai nyomások mérésére az üvegedényben lévő kicsiny állványra két csúcsot erősítettem egymás fölé, melyek az őket éppen ellepő folyadéokban tükröződtek (l. 1. ábra). A csúcs és tükörképének közepe jelezte a nivó helyét. A nivó magasságát mindig a cső függélyes középcső keresztmetszetében a függélyes átmérő közepétől mértem egy a Sociéte Génevoisenál készült csavar-mikrométerrel, melynek dobján 1 osztályrész 0·01 mm-nek felelt meg.

Különböző átmérőjű kapilláris csöveket használtam, 0·4 mm-től 0·6 mm-ig. Különös gondot kellett fordítani ezek tisztaságára, különben megszűnt a folyadékszál mozgékonyága. Forró kénsavval való tisztítás bizonyult a legjobbnak.

Kísérletek.

8. A módszer hasznavehetőségét néhány példán szándékozom bemutatni. Első kísérleteimet ú. n. patentgummi csövekkel, majd igen vékony gummihártlyából készült csövekkel végeztem; ezekről nem fogok szólni, mert ezek a csövek igen nagy rugalmas utóhatásokat mutattak, melyek a mérést nagy mértékben nehezítették. Jobbnak bizonyult e szempontból a vulkanizált vörös kaucsuk, ha nem volt nagyon vékony; rendszeren 0·8 mm falvastagságú csövet használtam; 0·4 mm-es csövön jóval nagyobb rugalmas utóhatásokat találtam, de még használható volt; ellenben paraffinnal bevonva mérésre már alkalmatlan volt (l. a.).

E dolgozatomban azon méréseket mutatom be, melyeket vízgőzzel telített levegőből vízbe merülő csupasz és paraffinnal bevont csöveken végeztem, melyek tehát végeredményben a kaucsuk-víz és paraffin-víz felületi feszültségét adták vízgőzzel telített levegőből indulva ki.

9. A mérés maga a következő lépésekből állott: a kaucsuk-csővet vízszintesen az üvegedénybe helyeztem, azután vizet bocsátottam az edény aljára, úgy hogy a cső vízgőzzel telített levegőben állott bizonyos ideig, átlag 12—18 órát. Meghatároztam a folyadék állását a kapillárisban. Azután emeltem a víznívót az edényben addig, míg a csövet teljesen, az első csúcsot pedig (l. 7. pont) éppen ellepte, úgy hogy maga a csúcs és tükörképe 0·1—0·3 mm-re esett egymástól; megmértem a nivó magasságát a cső közepe felett és meghatároztam a folyadékoszlop hozzátartozó állását a kapillárisban; ezek a mérések szolgáltaták δ t és μ_0 -t (l. 6. pont). Ezután újból emeltem a víznívót, míg a második csúcsot is éppen ellepte, lemértem a nivó-emelkedést, újból meghatároztam a folyadékoszlop állását; e mérések adták δ' -t és μ' -t.

A folyadékoszlop állásának meghatározását nagyban nehezítették a következő körülmények:

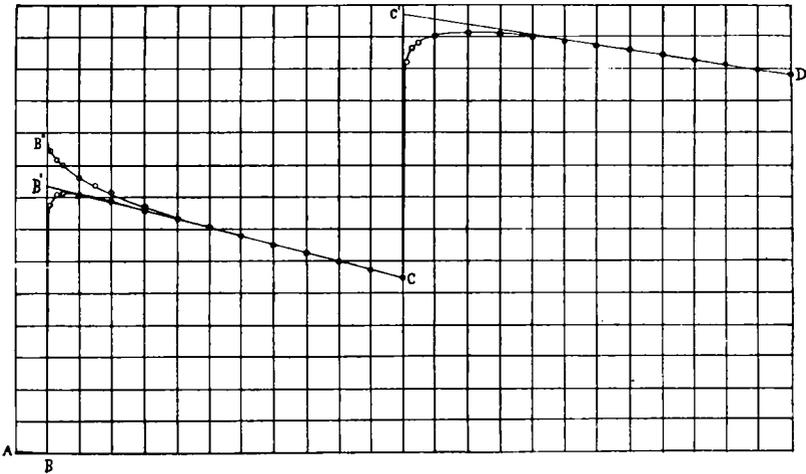
1. A kaucsukcsövet víz fölé helyezve, a folyadékoszlop még hosszú idő múlva sem foglalt el fix állást, hanem egyirányú mozgást, járást mutatott, mely 4—5 óra múlva lett csak stacionárius, de sohasem szűnt meg. A stacionárius jelző úgy értendő, hogy további 4—5 órán belül nem volt észlelhető változás a járásban.

2. A mikor a cső vízbe merült, a folyadékoszlop hirtelen eltolódott és csak közel egy óra múlva lett annyira stacionárius, hogy járása további 2—3 óra alatt nem változott, de ez a járása más volt, mint a bemerülés előtt.

3. Mikor ez az új stacionárius állapot beállott, a víznívót újból emelve, a folyadékoszlop megint hirtelen eltolódott és a csupasz kaucsukkal átlag 40—60 percz, a paraffinnal bevont csővel 60 percz múlva lett annyira stacionárius, hogy járása további 60 percz alatt nem változott; ez a járása megint más volt, mint előbb.

Egy ily kísérlet lefolyását, egy 0·4 mm vastagságú csővel, rajzban a 2. ábra állítja elő, hol az idő abszcisszájának, a folyadékszál állása ordinátájának van felrakva, az AB darab az első szakasznak, a BC a másodiknak, a CD a harmadiknak felelve meg.

10. Az a kérdés már most, hogyan számítandó a fenti kísérletből a folyadékszál δ és δ' eltolódása? A kísérlet utolsó szakaszában (CD) egyszerűbbek a viszonyok, mert a C pontban a meglévőhöz csak a p' hidrosztatikai nyomás járul hozzá,



2. ábra.

mely a szakasz egész tartama alatt állandó; ezen szakaszban tehát az összes nyomás is állandó, feltéve, hogy a felületi feszültség nem változik már (l. a.). A görbe alakjából látható, hogy az állandó nyomáshoz tartozó stacionárius állapotot a cső csak bizonyos idő múlva, bizonyos késéssel veszi fel, a mikor a CD görbe egyenesbe megy át. Mivel a nyomás e közben állandó, a késést a rugalmas utóhatás egy nemének kell tekintenünk s kérdezhetjük, milyen alakja volna a görbének, ha a cső a stacionárius állapotot rögtön felvette volna, azaz a késés zérus volna? Nyilván olyan egyenes, mely meghosszabbítása a CD görbe egyenes részének. Az a C' pont, melyben a stacionárius állapot egyenese metszi a C ponthoz tartozó

ordinátát, ábrázolja majd a folyadékoszlop ama állását, melyet mutatott volna, ha a p' nyomáshoz tartozó stacionárius állapot rögtön beállott volna. A p' nyomáshoz tehát legtermészetesebben a $C'C'$ egyenes darabot rendelhetjük, mint a hozzátartozó δ' eltolás mértékét.

Ha ezt teszszük, akkor megvizsgálandó azonban, hogy az ily módon megállapított δ' eltolódás és p' nyomás között fennáll-e a

$$\delta' = cp'$$

összefüggés, melynek felhasználásával állítottuk fel a (4) és (5) formulát a kapilláris nyomás kiszámítására. E czélból a következő kísérletet végeztem: a kaucsukcső néhány órán át vízben állott, míg állapota stacionárius lett; ekkor emeltem a víz-nívót, a mi által csak a hidrosztatikai nyomás változott meg P -vel; a mikor a járás újból stacionárius lett, megint emeltem a nivót s a nyomás P' -vel nagyobbodott. Az előbbi megállapodással a P és P' nyomásokhoz rendelt eltolódások legyenek δ , illetve δ' . A mennyiben az így számított eltolódás arányos a nyomással, kell hogy

$$\frac{\delta}{P} = \frac{\delta'}{P'} \quad \text{és} \quad \delta = \frac{P}{P'} \delta'.$$

Hat ilyen mérést végeztem, még pedig vastag és vékonyfalú csupasz és paraffinnal bevont csövön. A mérések eredményét a következő táblázat tünteti fel. A mennyiben arányosság áll fenn δ és P között, a δ és $\delta' \frac{P}{P'}$ -vel jelzett oszlopok megfelelő számainak egyezniök kell. A δ eltolások milliméterekben, a P nyomások pedig milliméter vízoszlop nyomásában vannak megadva, az eltolódások mind egyforma hőmérsékletre redukált állásokból számítvák.

	δ	P	δ'	P'	$\delta' \frac{P}{P'}$
Csupasz, 0·8 mm.-es ---	4·79	5·50	7·74	7·69	4·72
Csupasz, 0·8 mm.-es ---	9·79	5·80	15·23	9·06	9·75
Csupasz, 0·4 mm.-es ---	4·16	3·96	9·54	9·01	4·20
Csupasz, 0·4 mm.-es ---	4·60	5·15	7·78	8·62	4·65
Paraffinozott, 0·8 mm.-es ---	3·49	5·58	5·62	8·84	3·54
Paraffinozott, 0·8 mm.-es ---	1·58	5·70	2·38	8·81	1·58

A táblázatból kitűnik, hogy a hibahatárokon belül δ és $\delta' \frac{P}{P'}$ egyenlőnek vehetők (l. a). A kísérlet lefolyását a 3. ábra tünteti elő, hol $\delta = BB'$ és $\delta' = CC'$.

Hogy ezen vizsgálatra szükség volt, kitűnik abból is, hogy akadtam olyan csőre, melynél a fenti arányosság már nem áll. A 0·4 mm-es, vékonyfalú kaucsukcsövet bevontam igen vékony, majd vastagabb paraffinréteggel: mindkettőnél a késés nagyobb volt mint a csupasz csőnél. E két csővön a következőket észleltem:

δ	P	δ'	P'	$\delta' \frac{P}{P'}$
4·01	5·78	6·49	8·84	4·24
2·10	4·49	4·90	8·81	2·75

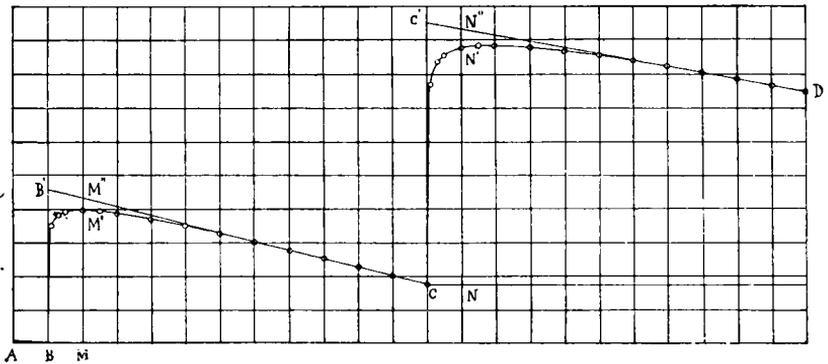
Itt már érezhető eltérés van az arányosságtól, azért el kellett állanom a vékonyfalú cső használatától, ámbar érzékenyebb lett volna.

E kísérletekben talán czélszerűbb lett volna P és P' -t közel egyenlőnek választani. Azonban azzal, hogy különbözőknek vettem, egy másik kérdést is el lehetett dönteni. Mint már említettem, a nivó emelése után a cső nem vette fel rögtön a stacionárius állapotát, hanem csak bizonyos idő múlva: addig

a folyadékoszlop elmaradt a stacionárius állapotnak megfelelő állásától, bizonyos késést mutatott; a késés értéke egy bizonyos, a nivóemelés pillanatától számított t idő múlva legyen k . Ha a a folyadékoszlop tényleges észlelt eltolódása számítva a nivóemelés előtti helyzetétől, a_s pedig az eltolódás, melyet a t időpontban mutatna, ha a stacionárius állapot rögtön beállt volna, akkor

$$k = a_s - a.$$

A 3. ábrán $M'M''$, illetőleg $N'N''$ egyenes darab felel meg a késésnek.



3. ábra.

A fenti mérésekkel el lehetett dönteni, hogyan függ az egy-ugyanazon t értékhez tartozó k késés az a észlelt eltolódástól. Mint látni fogjuk, erre az összefüggésre szükség van, a mikor a kapillaris nyomás értékét keressük rögtön a bemerülés után. A mérések tanúsága szerint a k késés arányos az a eltolódással. Ennek a kimutatására kellett a P és P' nyomást eltérőnek választani.

A következő táblázat mutatja e vizsgálat eredményét ugyanazon mérési sorozaton, melyből a δ és P arányosságát lehetett kimutatni. Az első oszlop adja a folyadékoszlop észlelt eltolódását az első nivóemelés után 1, 2, 3, 4 és 5 percz múlva (a), a második oszlop a megfelelő késést (k), a harmadik oszlop a folyadékszál észlelt eltolódását a második nivóemelés után 1, 2,

3, 4 és 5 percz mulva (a'), a negyedik oszlop a megfelelő kését (k'), az ötödik végre a $k' \frac{a}{a'}$ értéket, melynek egyeznie kell a megfelelő k értékkel, ha k arányos a -val.

Csúpasz, 0·8 mm.-es cső $\delta = 4\cdot79$ $\delta' = 7\cdot74$						Csúpasz, 0·4 mm.-es cső $\delta = 4\cdot16$ $\delta' = 9\cdot54$				
t	a	k	a'	k'	$k' \frac{a}{a'}$	a	k	a'	k'	$k' \frac{a}{a'}$
1	4·31	0·46	7·01	0·71	0·44	3·23	0·90	7·50	2·02	0·87
2	4·49	0·37	7·17	0·54	0·34	3·39	0·71	7·91	1·59	0·69
3	4·54	0·20	7·24	0·45	0·28	3·46	0·62	8·14	1·35	0·57
4	4·57	0·15	7·28	0·39	0·24	3·48	0·57	8·27	1·20	0·51
5	5·57	0·13	7·33	0·33	0·21	3·50	0·52	8·37	1·08	0·45

Csúpasz, 0·4 mm.-es cső $\delta = 4\cdot60$ $\delta' = 7\cdot78$						Paraffinozott cső $\delta = 3\cdot49$ $\delta' = 5\cdot62$				
t	a	k	a'	k'	$k' \frac{a}{a'}$	a	k	a'	k'	$k' \frac{a}{a'}$
1	3·50	1·07	5·95	1·81	1·07	2·40	1·07	3·72	1·82	1·17
2	3·72	0·83	6·39	1·35	0·79	2·52	0·93	3·06	1·54	0·96
3	3·82	0·71	6·61	1·11	0·65	2·61	0·82	3·24	1·35	0·83
4	3·87	0·63	6·73	0·98	0·56	2·67	0·74	3·36	1·21	0·74
5	3·90	0·57	6·81	0·88	0·50	2·71	0·68	3·46	1·11	0·64

Paraffinozott cső $\delta = 1\cdot58$ $\delta' = 2\cdot38$					
t	a	k	a'	k'	$k' \frac{a}{a'}$
1	1·14	0·44	1·73	0·65	0·43
2	1·24	0·34	1·86	0·52	0·35
3	1·28	0·30	1·92	0·46	0·33
4	1·32	0·26	1·98	0·40	0·30
5	1·35	0·23	2·02	0·36	0·27

E táblázatok alapján azt mondhatjuk, hogy az észlelési hibák határán belül (l. a 11. pontot) k és $k' \frac{a}{a'}$ egyeznek, tehát a t időhöz tartozó késés arányosnak vehető az eltolódással. A késés különösen nagy a vékonyfalú s a paraffinozott csöveknél: az előbbi kettőnél a késés a δ eltolódásnak 0·22-szerese, az utóbbi kettőnél 0·31, ill. 0·28-szorosa. A paraffinozott vékonyfalú csöveknél, hol a δ és p arányossága már nem áll fenn, ezen viszony 0·32, ill. 0·55.

A harmadik ábrán az $M'M''$ és $N'N''$ egyenes darabok ábrázolják a késést az első, illetőleg a második nivóemelés utáni t időpontban, MM' , illetőleg NN' az a és a' eltolódásokat. A hibahatárokon belül $M'M'' = NN' \frac{MM'}{NN'}$; ha tehát az M' pontokban felrakjuk az $NN' \frac{MM'}{NN'}$ egyenes darabot, a $B'C$ egyenes pontjaihoz jutunk.

A felsorolt kísérletekben a stacionárius állapotnak megfelelő járás más volt az első nivóemelés előtt, más azután és más a második emelés után is. A fenti eredmény tehát érvényes akkor is, ha ez a járás a nivóemeléssel megváltozik, azaz a $B'C$ és DC' egyenesek hajlása különböző.

11. A használt csövek igen érzékenyek voltak hőmérsékletváltozásokkal szemben. Így például a vastagabb kaucsukcsőnél 1° hőfokemelkedésre a folyadékszál közel 5 mm-rel húzódott vissza; ez igen sok, mert hisz 1 mm víznyomás a szálat csak 1 mm-rel tolta el s így 0·01 hőfokváltozás — a mennyit a hőmérőn még lemérni tudtam — már 0·05 mm-nyi eltolódást adott, tehát többet, mint a folyadékszál állásának leolvasásakor elkövetett hiba — 0·01 mm — kitesz. Ez a körülmény képezi a legjelentősebb hibaforrást, mely miatt a folyadékszál eltolódásában a legjobb számítás szerint is 0·05 mm-nyi hiba felléphet.

Hogy a hőmérsékleti együtthatót leszállítsam, vékonyabb kaucsukcsöveket próbáltam használni. 0·4 mm falvastagságú csőből 5 cm hosszú darabot alkalmazva, 1° -nyi hőfokváltozás tényleg csak 1·5 mm-nyi eltolódást adott, míg az érzékenysége ugyanakkora volt mint előbb, azaz 1 mm vízszlop nyomása

1 mm eltolódást okozott. Sajnos, mint már előbb említettem, a rugalmas utóhatás akkora volt, hogy paraffinnal bevonva már hasznavehetetlen lett (l. 10. pont). A paraffinnal bevont vastagabb csőnél a hőmérsékleti együttható aránylag még nagyobb, a helyzet tehát még kedvezőtlenebb volt: míg ugyanis a paraffinnal való bevonás az érzékenységet majdnem a harmadára csökkentette, addig a hőmérsékleti együttható közel ugyanaz maradt s így $0\cdot01^\circ$ -nyi hőfokváltozás akkora eltolódást adott, mint $0\cdot2$ mm vízoszlop nyomása. Ezért a paraffinozott csöveken végzett mérések jóval nagyobb ingadozásokat is mutatnak.

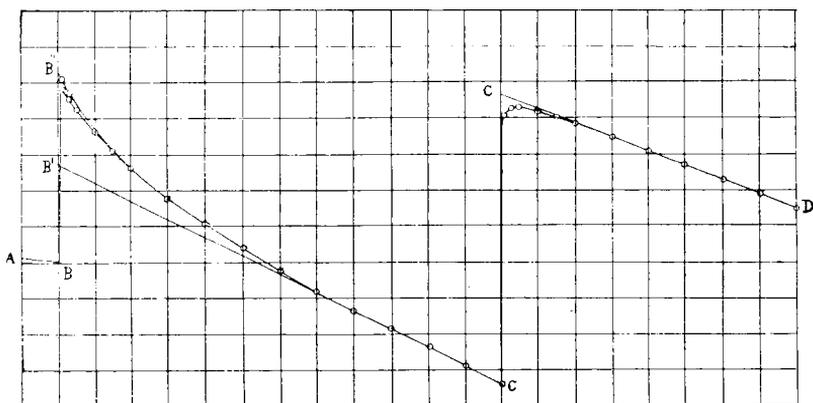
A hőmérsékleti együtthatót úgy is lehetett volna csökkenteni, hogy a csövet nem vízzel, hanem olyan folyadékkal töltjük meg, melynek kiterjedése a kaucsukét nagyrészt kompenzálja. Ekkor azonban külön megvizsgálandó, hogy az esetleg beálló ozmózis nem hamisítja-e meg az eredményeket. Ez a vizsgálat még nincsen befejezve.

a) Kísérletek kaucsukkal.

12. A 9. pontban leírt módon három hosszabb kísérleti sorozatot végeztem: egyet $0\cdot8$ mm, kettőt $0\cdot4$ mm vastagságú csővel. A mérés előtt a cső 14—18 óráig állott az edényében víz felett, tehát vízgőzzel telített levegőben. A kísérlet lefolyását a vastagabb csövön a 4. ábra, a vékonyabbon a 2. ábra mutatja. Maga a kísérlet ca. 4 órát vett igénybe. Egyik nap az egyik, másnap a 180° -kal különböző állásban mértem; a két mérés szolgáltatta a felületi feszültség egy értékét. A $0\cdot8$ mm-es csővel 8 egymásra következő napon 8 ilyen mérést, az egyik vékony csővel ugyancsak 8, a másikkal 6 mérést végeztem. Az érzékenység akkora volt, hogy az első csőnél 1 mm vízoszlop nyomása kereken $0\cdot9$ mm eltolódást adott $0\cdot56$ mm átmérőjű kapillárisban, a másodiknál $0\cdot9$ mm-t $0\cdot74$ mm átmérőjű kapillárisban, a harmadiknál $1\cdot1$ mm-t $0\cdot71$ mm-es kapillárisban.

A kísérlet lefolyását ábrázoló görbén (4. és 2. ábra) rögtön szembeötlik a görbe két szakasza közti különbség: míg a második szakasz ugyanolyan lefolyású, mint a 10. pontban leírt

kísérletekben, hol a cső kezdettől fogva vízben állott s a nivó-emeléssel csak a hidrosztatikai nyomás változott meg, addig az első szakasz ettől eltér: a vastagabb csövön már 1 perczcel a bemerülés után erősen esik, esése aztán folyton kisebbedik, végre közel 1 óra múlva stacionárius lesz és a görbe egyenesbe megy át; a vékonyabb csövön a nagyobb késés miatt a különbség nem annyira szembeötlő; csak a késéssel korrigált görbén ($B''C$ a 2. ábrán) lesz azzá. Ezt az eltérő viselkedést mindenesetre annak kell tulajdonítanunk, hogy a csővel, a mikor vízbe merül, más egyéb is történik, mint hogy a meglévőhöz



4. ábra.

hozzájárul egy állandó hidrosztatikai meg egy kapilláris nyomás. Vagy azt kell mondanunk, a kapilláris nyomás gyorsan változik az idővel, hisz a hidrosztatikai nyomás biztosan állandó; vagy azt, hogy más olyan hatás lép fel, mely térfogatváltozással jár. Elsősorban az abszorpczióra kell gondolnunk. Ha a kaucsuk abszorbeálja a vizet, létrejöhet térfogatnagobbodás s így egyelőre nem tudhatjuk, az észlelt térfogatváltozásokból mennyit tulajdonítsunk az abszorpczióknak, mennyit a felületi feszültség időbeli változásának. Gondolhatunk továbbá adszorpczióra a kaucsuk felületén, azt azonban nyilván hozzászámíthatjuk a felületi feszültség időbeli változásához, mert hisz a felületen végbemenő változásról van szó.

Hogy az abszorpczió szerepét megtudhassuk, ismernünk kell az abszorpczió és a vele természetszerűen együtt fellépő diffuzio időbeli lefolyását, nevezetesen azt, hogyan függ a külső felületen áthaladt víz mennyisége az időtől.

13. Hogy a kaucsuk abszorbeálja a vizet, már PAYEN¹ észlelte, kinek adatai szerint két hónap alatt 0·04 százalék vizet vesz fel. R. A. LUNDIE² vízzel telt gummigömbökön azt tapasztalta, hogy veszítenek vizet, tehát van abszorpczió és diffuzio. Mint említettem, a mérés előtt a kaucsukcső hosszabb ideig állott nedves levegőben. Ha van abszorpczió, akkor várható, hogy nedves levegőből is elnyel vizet. Ezért megvizsgáltam, hogyan viselkedik a cső, ha száraz levegőből nedvesbe jut. A 0·4 mm vastagságú cső hosszabb ideig száraz levegőben állott, míg járása stacionárius lett s naponkint 16 mm-t tett ki, még pedig visszafelé, azaz a folyadékszál befelé húzódtott a kapillárisban. A cső zárt üvegedényben állott. Ezután vizet bocsátottam az edény aljára, úgy hogy a csövet ne érje, a cső tehát vízgőzzel telített levegőbe került. Rögtön megindult a folyadékoszlop visszafelé s járása csak 4 nap után lett újból stacionárius. A folyadékoszlop észlelt állásait a következő táblázatba foglaltam, hol az első oszlop az időt jelzi, a második az egy-ugyanazon hőmérsékletre redukált állásokat tartalmazza.

Közvetlenül a víz bebocsátása előtt a folyadékoszlop állása :

jul. 27. d. e. 9^h5^m-kor 294·3.

Ekkor vizet bocsátva az edénybe :

jul. 27.	d. e.	9 ^h	10 ^m	290·4	290·5
			15	288·1	288·3
			30	283·1	283·6
		10	0	276·3	277·5
		11	0	266·1	268·4
		12	0	257·8	261·3
	d. u.	5	10	223·5	232·8
		7	54	207·6	219·2

¹ Musspratt's Chemie IV. köt. p. 1122. 1893.

² Beiblätter 23. p. 927. 1899.

jul. 28.	d. e.	9	12	158·7	186·7
	d. u.	6	43	129·5	168·1
jul. 29.	d. e.	9	5	91·9	147·9
	d. u.	4	30	80·5	144·7
jul. 30.	d. e.	9	2	54·4	138·4
	d. u.	4	57	46·8	139·9
jul. 31.	d. e.	9	5	27·0	139·0
	d. u.	4	35	18·3	138·5

Az észlelést ekkor félbeszakítottam, mert a fonál a skála végéhez jutott s behúzódott volna. Különben a járás ekkor már stacionárius kezdett lenni, a mint az utolsó két napon észlelt állások mutatják. Ez a stacionárius járás egy napra 28·0 mm-t tett ki. Kereshetjük, hogy a stacionárius járáson kívül hogyan változott a folyadékoszlop állása. E czélból az észlelt állásokhoz hozzá kell adnunk annyit, a mennyit a folyadékoszlop a stacionárius járás következtében eltolódott volna a kísérlet kezdetétől az észlelés időpontjáig. Az így korrigált állások a harmadik oszlopban állanak.

Ezután a csövet újból száraz levegőbe helyeztem; járása ekkor ellenkező irányú lett, azaz a folyadékoszlop kifelé mozgott, majd megfordult s megint befelé kezdett húzódni, míg ez a járása 4 nap után stacionárius lett s ugyanazt a naponkinti 16 mm-nyi járást vette fel, mint a melyet a kísérlet elején mutatott. Ez észleléseket nem sorolom fel részletesen, csak azért említem, mert kitűnik belőlük, hogy a nedves levegőbe került kaucsukon megfordítható változás áll be, olyan, mely visszafejlődik, ha újból száraz levegőbe jut.

Meg kell most vizsgálnunk, hogy az észlelt térfogatváltozások időbeli lefolyása olyan-e, hogy azt az abszorbeált víz diffúziójának tulajdoníthatjuk. Ismernünk kell tehát mindenkéül a diffúzió időbeli lefolyását.

14. Képzeljünk egy l hosszúságú kaucsukhengert, mindenütt egyforma keresztmetszettel. Egyik határfelületén érintkezzék valami A gázzal vagy folyadékkal, melyet elnyel s mely diffundál a hengeren át; másik határfelületén érintkezzék olyan anyaggal, melyet a kaucsuk nem nyel el, melybe az A anyag

gyorsan diffundál vagy párolog; a henger köpönyegén át anyag se be, se ki ne menjen. Egy tetszőleges keresztmetszet távolsága a kezdő keresztmetszettől, hol az A anyag behatol, legyen x ; tegyük fel, hogy az abszorbeált anyagi komponens sűrűsége ρ bármely keresztmetszet minden pontjában ugyanaz, akkor ρ csak x -nek s az időnek függvénye, mely eleget tesz a következő differenciálegyenletnek:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (6)$$

hol a k állandó a diffuzio-együttható.

Igen hosszú idő múlva beáll majd egy stacionárius állapot, a mikor $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, tehát egyúttal $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$; vagyis

$$\rho = a \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (7)$$

ha azt a feltételt szabjuk, hogy az $x=0$ keresztmetszetben a sűrűség a legyen, az $x=l$ keresztmetszetben pedig zérus.

Gondoljuk meg, hogy a kísérletekhez használt kaucuksző belsejében víz van, mely onnan diffundál. Aránylag vékonyfalú csővel lévén dolgozunk, feltehetjük, hogy a cső egyes koaxialis rétegeiben a víz a (7) egyenlet szerint oszlik el, mielőtt beállott a stacionárius állapot; x akkor az egyes koaxialis rétegek radialis távolságát jelenti a cső belső határától, l pedig a cső vastagságát.

Miután az előbbeni kaucukhengerben beállott a stacionárius állapot, másik véglapját is hozzuk érintkezésbe ugyanazon A anyaggal. A diffuzio megint a (6) egyenlet értelmében történik. Jelentse most x egy tetszőleges keresztmetszet távolságát az utóbbi határlaptól. Akkor a következő kezdő- és határfeltételek állanak: a $t=0$ időpillanatban $\rho = a \frac{x}{l}$; t minden későbbi értékére $x=0$ -ban $\rho = a'$ és $x=l$ -ben $\rho = a$. A (6) differenciálegyenlet megoldása e feltételek mellett:

$$\rho = a \frac{x}{l} + a' \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{2a}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{l} e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} e^{-\frac{9\pi^2 kt}{l^2}} + \dots \right]^1 \quad (8)$$

Végtelen hosszú idő múlva beáll egy stacionárius állapot, a mikor

$$\rho = a \frac{x}{l} + a' \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (9)$$

Az $x=0$, illetve az $x=l$ keresztmetszeten a 0-tól t időig a pozitív x -ek irányában a keresztmetszet egységén áthaladt anyagmennyiség legyen Q , illetve Q' , akkor

$$Q = -k \int_0^t \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x=0} dt, \quad Q' = -k \int_0^t \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x=l} dt$$

(8)-ből

$$\begin{aligned} -k \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x=0} &= k \frac{a' - a}{l} + \frac{2a'k}{l} \left[e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} + e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} + e^{-\frac{9\pi^2 kt}{l^2}} + \dots \right] \\ -k' \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x=l} &= k \frac{a' - a}{l} + \frac{2a'k}{l} \left[e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} - e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} + e^{-\frac{9\pi^2 kt}{l^2}} - \dots \right] \end{aligned}$$

és innen

$$\begin{aligned} Q &= k \frac{a' - a}{l} t + \frac{2a'l}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} - \frac{1}{4} e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} - \dots \right] \\ Q' &= k \frac{a' - a}{l} t - \frac{2a'l}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{12} - e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} - \dots \right] \end{aligned} \quad (10)$$

felhasználva a

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \\ \frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

összefüggéseket. Továbbá

$$Q - Q' = \frac{2a'l}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{4} - 2 \left(e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} + \frac{1}{9} e^{-\frac{9\pi^2 kt}{l^2}} + \dots \right) \right]. \quad (11)$$

¹ J. STEFAN: Wien. Ber. 77. H. p. 371—409. 1878.

Látható, hogy

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{t=\infty} = \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)_{t=\infty} = k \frac{a'-a}{l}.$$

A kaucsukcsőre alkalmazhatjuk e megfontolásokat, ha x jelenti az egyes koaxialis rétegek távolságát a külső felülettől. Ha a (10) és (11)-ből csak az első exponenses tagot tartjuk meg, marad

$$\begin{aligned} Q &= k \frac{a'-a}{l} t + \frac{2a'l}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - e^{-nt} \right], \\ Q' &= k \frac{a'-a}{l} t - \frac{2a'l}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{12} - e^{-nt} \right], \\ Q - Q' &= \frac{2a'l}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{4} - 2e^{-nt} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

hol

$$n = \frac{\pi^2 k}{l^2}.$$

Ha a 13. pontban leírt kísérletekben a folyadékoszlop járását a víz abszorpcziójának és diffuziójának tulajdonítjuk, akkor számba kell vennünk, hogy járást okoz a belső felületen átlépő vízmennyiség, tehát Q' , továbbá a $Q - Q'$ mennyiség, ha felvesszük, hogy a kaucsukba belépett összes vízmennyiség (algebrai értelemben, tehát a belépett és kilépett különbsége) vele arányos térfogatváltozást okoz; vagyis a folyadékoszlopnak a kísérlet kezdetétől számított eltolódását D -vel jelölve

$$D = c_1 Q' + c_2 (Q - Q'). \quad (13)$$

15. (13)-ből következik, hogy a stacionárius állapot beálltával az időegységre eső járás arányos $k \frac{a'-a}{l}$ -l-el. Száraz levegőben $a'=0$, a járás tehát arányos $-k \frac{a}{l}$ -l-el. Mivel észszerűen csak azt tehetjük fel, hogy a vízgőzzel telített levegővel érintkező felületen az abszorbeált víz sűrűsége kisebb mint a vízzel érintkezőn, vagyis $a' < a$, azt kell várnunk, hogy mindkét esetben víz áramlik belülről kifelé, vagyis $\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{\infty} = \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)_{\infty} < 0$. Tényleg a folyadékszál mindkét esetben visszahúzódott. De az is követ-

kezik, hogy a stacionárius járásnak nedves levegőben kisebbnek kell lennie, mint szárazban. Az észlelés az ellenkezőjét mutatta: száraz levegőben 16 mm-t, nedvesben 28 mm-t járt naponkint. Lehet, hogy nedves levegőben még 4 nap múlva sem lett stacionárius, de lehet, hogy a víz abszorpciója következtében lassú szerkezetbeli változások állanak elő a kaucsukban, melyek térfogatnagyoobbodással járnak. Hisz ismeretes, hogy a kaucsuk rugalmas sajátságai is megváltoznak idővel s mi sem valószínűbb, hogy az elnyelt víznek is befolyása van a lassú változásra.

A (13) képletben szereplő $c_1 k \frac{a'-a}{l}$ t tag stacionárius járást jelent; a

$$\Delta = D - c_1 k \frac{a'-a}{l} t$$

kifejezés tehát azt mutatja, mennyire tér el a járás a stacionáriustól, a folyadékszál ennek megfelelő állásait a stacionárius járás miatt korrigált állásoknak nevezhetjük. Igen hosszú idő múlva Δ átmegey a

$$\Delta_\infty = -c_1 \frac{a'l}{\sigma} + c_2 \frac{a'l}{2}$$

értékbe. Írhatjuk tehát

$$\frac{\Delta}{\Delta_\infty} = 1 + C \cdot e^{-nt}.$$

Ha t' időponthoz Δ' tartozik, akkor

$$\frac{\log\left(\frac{\Delta'}{\Delta_\infty} - 1\right) - \log\left(\frac{\Delta}{\Delta_\infty} - 1\right)}{t' - t} = n. \quad (14)$$

A 13. pontban közölt észlelésekből számíthatjuk n értékét (14) alapján. Δ és Δ' -t kapjuk, ha a folyadékszál korrigált állásait (3 oszlop) levonjuk a kezdeti állásból, 294·3-ból; $\Delta_\infty = = 294·3 - 139·0 = 155·3$. Ha abszorpcióval van dolgunk, akkor n -re állandó értéket kell kapnunk. E számításra nem használhatjuk ama állásokat, melyeket rövid idővel a víz bebocsátása után észleltem, mert akkor a (12) képletek még rossz közelítést

adnak, lévén nt igen kicsiny. Azért tartozzék Δ a jul. 27. 12^h0^m-hoz, Δ tehát legyen az eltolódás 3 órával a kísérlet kezdete után; Δ' legyen sorra az azután észlelt eltolódás. Az idő egysége legyen 1 nap. Ily módon n -re rendre a következő értékeket kapjuk (lognat. helyett Brigg-félet használva):

0·53,
0·55,
0·46,
0·48,
0·60,
0·59.

Vegyük számba, hogy a 4 nap alatt a hőmérséklet 2·5°-kal ingadozott, hogy lehüléskor vízgőz csapódhatott a csőre, a mi mindenesetre befolyásolja a cső állapotát: akkor a fenti számokból azt következtethetjük, hogy n állandó s így a csővön észlelt nagy járásokat a víz abszorpcziójának és diffuziójának kell tulajdonítanunk.

A 13—15. pontban leírt jelenség behatóbb vizsgálata folyamatban van; mellőzve a leírt és azonkívül végzett mérésekből vonható egyéb következtetéseket, e helyen csak a mellett tanuskodjanak, hogy lefolyásuk magán viseli az abszorpczió jellegét.

16. Visszatérve ama kísérletekhez, melyek a felületi feszültség meghatározását célozták, mindenekelőtt meg kell vizsgálnunk, hogy a cső vízbe merülése után mutatkozó járás magán viseli-e az abszorpczió jellegét. Nem lesz talán fölösleges, ha a sok kísérlet közül egyet részletesen közlök, még pedig a 0·4 mm-es kaucsukcsőre vonatkozók közül, hol a késés jelentékeny; szolgáljon például az aug. 8-iki észlelés. A cső előző nap délután víz fölé került, tehát nedves levegőben állott a mérés kezdetéig. A következő tábla már az állandó 20·70°-ra redukált állásokat adja az első oszlopban:

aug. 8. d. e.	9 ^h 35 ^m	123·21,
	40	123·16,
	45	123·11,
	50	123·07.

A víznívót most emelem, míg a csövet teljesen ellepi és 10·55 mm-re van cső középső keresztmetszetének közepe felett. A folyadékoszlop következő állásait észleltem:

8 ^h	51 ^m	130·82	132·52,
	52	131·05	132·38,
	53	131·14	132·26,
	54	131·17	132·16,
	55	131·19	132·06,
9	0	131·14	131·67,
	5	131·06	131·44,
	10	130·94	131·21,
	20	130·66	130·78,
	30	130·38	130·46,
	40	130·11	130·14,
	50	129·84	129·86,
10	0	129·58	129·59,
	10	129·32	129·32,
	20	129·06	129·06,
	30	128·79	128·79,
	40	128·54	128·54.

Ekkor emelem a víznívót 8·93 mm-rel s a következőket olvasom le:

10 ^h	41 ^m	135·28,
	42	135·58,
	43	135·73,
	44	135·83,
	45	135·91,
	50	136·12,
	55	136·18,
11	0	136·20,
	10	136·18,
	20	136·06,
	30	135·95,
	40	135·81,
	50	135·69,

	12	0	135·52,
		10	145·30,
		20	135·21,
		30	135·04,
		40	134·88,
aug. 9. d. e.	9	10	114·47,
		20	114·31.

A 10. pont alapján kiszámítható a folyadékszál késése a vízbemerülés után s állása ezzel korrigálandó; az így korrigált állásokat a második oszlop tartalmazza.

Azonnal látható, hogy a járás sokkal kisebb, mint a 13—15. pontban leírt kísérletben, hol a cső száraz levegőből jutott nedvesbe, a mi azt mutatja, hogy a kaucsuk már a vízgőzből nyeli el tulnyomó részben azt a vizet, melyet elnyelni képes. De az is látható, hogy a stacionárius állapotot hasonlíthatatlanul rövidebb idő alatt éri el, mint előbb: míg előbb legalább 4 nap kellett hozzá, most csak 1 óra; tényleg, a mint a táblázatból látható, az első szakasz utolsó 50 perceze alatt a járás teljesen stacionárius. Igaz, hogy a járás stacionárius voltának megállapítására ez az 50 percz talán nem elég, még hosszabb ideig észlelve, talán mutatkozott volna még kis változás a járásban. Hogy az esetben is csak kicsit változott volna, mutatja a kísérlet utolsó szakasza: a nivóemelés után 1 órával észlelt járást megtartotta változatlanul további 21 óra alatt.

Abból, hogy a stacionárius állapot jóval rövidebb idő alatt áll be, azt következtethetjük, hogy a diffuzio időbeli lefolyását ábrázoló formulában (10) az exponenses tagok kitevőjében a $-t$ szorzója jóval nagyobb. Mivel pedig a diffuzio-együtt-ható (k) nem változott, azt kell mondanunk, hogy l lett kisebb, vagyis hogy a diffuzio már csak vékony felületi rétegben történik, a kaucsuknak csak vékony rétege nyel el vizet. De ez esetben tulajdonképen nem is abszorpczióval, hanem adszorpczióval állunk szemben, tehát felületi jelenséggel s az ezzel járó energiaváltozást kapilláris energiaváltozásnak, a feszültség- és nyomásváltozást kapilláris feszültség- és nyomásváltozásnak minősíthetjük.

Ezek alapján a 12. pontban felvetett kérdésre azzal felelhetünk, hogy a nedves levegőből vízbe merülő csövön észlelt térfogatváltozásokat — eltekintve a hidrosztatikai nyomás hatásától — a kapilláris nyomásnak s annak időbeli változásának tulajdoníthatjuk azzal a kiegészítéssel, hogy utóbbit a víz adszorpcziója okozza.

Behatóbb s részletesebb vizsgálat talán arról is adhat pontosabb felvilágosítást, hogy milyen vastagságú az a vékony felületi réteg, melyben az abszorpczió történik.

17. Ezek után visszatérhetünk tulajdonképeni feladatunkhoz: a felületi feszültség meghatározásához. A 12. pontban említett 3 sorozat közül az első, a vastagabb csővel a következő eredményeket adta:

	δ	P	δ'	P'	k	f
1	5·14	9·49	8·53	9·15		
2	2·90	9·55	8·90	9·01	— 5·20	— 22·3
3	4·77	9·56	8·34	9·11	— 5·40	— 23·1
4	2·64	9·52	8·66	9·02	— 5·57	— 23·9
5	4·52	9·61	8·59	8·93	— 5·84	— 25·1
6	2·34	9·51	8·24	9·02	— 5·93	— 25·6
7	3·92	9·52	8·04	9·05	— 6·03	— 26·0
8	2·70	8·46	8·06	9·07	— 5·80	— 25·0

A kísérlet első szakasza — a bemerülés után — 2 óráig, a második szakasz 1^h 30 perczig tartott, mivel a késés aránylag kicsiny volt (l. 10. pont) s a stacionárius állapot a második szakaszban már 40 percz múlva beállott. A δ és δ' számítása a 9. pontban mondottak alapján, K számítása az (5) képlet alapján történt. A 4. ábra egy ily kísérlet lefolyását ábrázolja; abban δ és δ' -nek a BB' ill. CC' ordináta felel meg. K értéke $\frac{\text{mg. súly}}{\text{mm}^2}$, 7 értéke $\frac{\text{mg. súly}}{\text{mm}}$ -ben van megadva. A negatív előjel azt jelenti, hogy az érintkező felület nagyobbítása negatív külső munkával jár, azaz a kapilláris erők tendenciája a felületet

nagyobbítani, nem úgy mint a szabad vízfelület esetén. Ennek következtében a kapilláris nyomás nem a homorú, hanem a domború oldal felé van irányítva a kaucsukcsövünknel a víz felé.

A felületi feszültség igen nagy: több mint háromszor akkora, mint a vízé szobahőmérsékleten. A 2. pont szerint azt kell várnunk, hogy az illeszkedési szög zérus. Tényleg a víz igen jól nedvesítette a csövet: vízből kivéve a csövet, azt vékony összefüggő vízréteg borította. Azonban a száraz csövet vízbe befelé mozgatva, a víz 90°-kal illeszkedett (l. 19. pont).

A második kaucsukcsőre vonatkozik a következő táblázat:

	δ	P	δ'	P'	K	f'
1	7·20	9·52	10·39	9·05	— 3·18	— 13·7
2	5·51	8·35	9·56	9·11	— 2·86	— 12·3
3	7·95	9·59	10·38	9·11	— 2·48	— 10·7
4	6·59	8·38	9·74	8·94	— 2·70	— 12·3
5	7·71	9·77	10·53	9·16	— 2·83	— 12·4
6	6·60	8·63	9·91	9·07	— 2·74	— 12·0
7	7·93	9·81	10·32	9·03	— 2·83	— 12·4
8	6·10	8·55	9·70	9·19		

A kérés itt jóval nagyobb volt mint az előbbi csőnél; a kísérlet mindkét szakasza 1^h 50 perczig tartott. A felületi feszültség ezen csőnél is nagyobb, mint a vízé, tehát itt is 0° illeszkedési szög várható. Tényleg, a csövet vízből kifelé mozgatva az illeszkedési szög 0 volt; azonban a vízből kivett csövet nem borította teljesen összefüggő vízréteg, hanem helyenként megszakadva, nagyobb vizes foltokban rakódott a víz a csőre; ez bizonyára összefügg azzal, hogy a felületi feszültség jóval kisebb mint előbb, közel a fele. A csőfelület külső képe is más volt: az utóbbi felülete sokkal simább, fényesebb volt; nem csoda, ha a felületi feszültség is más lett.

Ugyanílyen fajta másik csőre vonatkozó eredmények:

	δ	P	δ'	P'	K	f
1	6·76	10·31	7·27	8·92	— 1·93	— 8·7
2	7·09	9·92	7·79	8·86	— 1·88	— 8·5
3	7·03	10·01	7·74	8·92	— 2·24	— 10·1
4	6·75	10·37	7·77	8·97	— 2·05	— 9·3
5	8·33	10·55	8·24	8·93	— 1·86	— 8·5
6	7·84	10·46	8·38	8·84		

Nedvesítés tekintetében ez a cső is úgy viselkedett, mint az előbbi.

Az első csőnél a felületi feszültség határozott növekedést mutat a kísérletek során, a másodiknál és harmadiknál ez nincs meg. A kísérletek során a cső sugarán is észrevehető változás volt kimutatható; a következő tábla rendre adja a sugárnak az egyes kísérletekben észlelt értékét:

1. cső	2. cső	3. cső
4·283	4·312	4·457
4·283	4·341	4·513
4·285	4·338	4·516
4·288	4·338	4·535
4·303	4·357	4·555
4·322	4·387	4·564
4·308	4·390	4·583
4·322	4·392	

Mindegyik kísérletben a kaucsuk telítve volt vízzel, a sugár nagyobbodása tehát nem tulajdonítható az abszorpciónak, hanem inkább lassú szerkezetbeli változásnak, melyre a víznek azonban lehet befolyása. Hasonló változásnak tulajdonítottuk a 12. pontban azt a jelenséget, hogy vízgőzzel telített levegőben

a stacionárius járás nagyobb, mint száraz levegőben. Hasonló sajátos viselkedésre itt is reámutathatók. T. i. a cső nedves levegőben bizonyos szabályos stacionárius járást mutatott; vízbe merítve, járása bizonyos idő múlva megint stacionárius lett, de más, mint előbb s pedig nagyobb; a víznívót emelve a stacionárius járás megint más értékű lett. A következő táblázat a folyadékoszlop 10 perc alatti stacionárius járását adja a vastagabb csövön, még pedig vízgőzzel telített levegőben (I), a vízbemerülés után (II), a nivå újból emelése után (III):

I.	II.	III.
0·47	0·74	0·61
0·23	0·65	0·52
0·24	0·52	0·39
0·45	0·65	0·53
0·27	0·58	0·48
0·03	0·54	0·40
0·14	0·47	0·37
0·10	0·51	0·40

Ugyanígy a vékonyabb csöveken:

I.	II.	III.	I.	II.	III.
0·09	0·53	0·36	0·19	0·38	0·25
0·07	0·50	0·32	0·25	0·29	0·23
0·16	0·30	0·18	0·17	0·33	0·24
0·16	0·37	0·24	0·15	0·35	0·23
0·08	0·38	0·24	0·09	0·26	0·16
0·08	0·43	0·29	0·17	0·26	0·16
0·08	0·35	0·21			
0·09	0·44	0·28			

A stacionárius járás hasonló megváltozását észleltem a 9. pontban leírt kísérletekben is, a mikor a cső kezdettől fogva vízben állott, s a nivót két ízben emeltem; a következő táblázat ad erről számot: -

I.	II.	III.
0·24	0·17	0·16
0·92	0·82	0·71
0·37	0·29	0·18
0·33	0·26	0·19

18. A kapilláris nyomás számításához szükséges δ eltolódás a 9. pont szerint a stacionárius állapotból számítottatott s így a \bar{K} ama értékét kaptuk, mely ahhoz az időponthoz tartozik, mikor a stacionárius állapot beállott, tehát átlag 1 órával a bemerülés utáni időpontra. Kereshetjük a felületi feszültség értékét rögtön a bemerülés után. E végből az észlelt állásokat mindenek előtt korigálnunk kell a késéssel a 12. pont szerint s ezekből extrapolálni a bemerülés pillanatára. Az extrapolációt a bemerülés után 1, 2, 3, 4, 5 percczel észlelt állásokból grafikusan végeztem; az így nyert δ_0 eltolódást a 2. és 4. ábrán a BB'' egyenes darab ábrázolja. Így a három csőnél a kezdeti kapilláris nyomás és feszültség következő értékei adódnak:

	δ_0	K_0	f_0
1	— 0·69	— 2·12	— 9·1
2	— 3·25	— 2·60	— 11·1
3	— 1·57	— 2·45	— 10·5
4	— 3·07	— 2·48	— 10·7
5	— 1·69	— 2·61	— 11·2
6	— 3·15	— 2·68	— 11·6
7	— 1·69	— 2·75	— 11·9
8	— 3·19		

	δ_0	K_0	f_0		δ_0	K_0	f_0
1	—0·53			1	0·00		
2	—0·51	—0·91	—3·9	2	—0·54	—0·31	—1·4
3	—0·17	—0·76	—3·3	3	—0·04	—0·33	—1·5
4	—0·58	—0·78	—3·4	4	—0·02	—0·01	—0·5
5	—1·58	—0·95	—4·1	5	—0·07	—0·30	—1·4
6	—0·90	—1·10	—4·8	6	—0·54	—0·32	—1·5
7	—1·62	—1·12	—4·9				
8	—1·02	—1·20	—5·3				

A felületi feszültség tehát nagy mértékben változik az idővel: 1 óra alatt például a vastagabb csőnél —22·3-ról —9·1-re, a vékonyabbaknál —12·4-ről —5·3-re, ill. —9·5-ről —1·5-re esett.

A felületi feszültségnek időbeli változása nem új jelenség. Észlelték gázzal érintkező folyadékon is. Így például STÖCKLE és MAYER¹ vizsgálatai alapján kétségtelen, hogy a friss higanyfelület feszültsége kisebbedik akkor is, ha a lehető legtisztább gázzal érintkezik; vákuumban ellenben ily esést nem mutat. A változást adszorbeált gáznak tulajdonítják. QUINCKE² már 1870-ben két folyadék közös határán a felületi feszültség gyors esését észlelte, a mit a két folyadék kölcsönös oldásának tulajdonít. Hasonlót észlelt R. H. WEBER³ víz és olivaj közös határán. Vizes sóoldatok felületi feszültsége is mutat időbeli változást, a mi a felület közvetlen közelében beálló koncentrációváltozásnak tulajdonítható. A thermodynamika alapelveiből következik,⁴ hogy a határfelület közelében egyensúly esetén más a koncentráció, mint a folyadék belsejében; ezt a koncentrációváltozást kapilláris csövekben J. MATHIEN⁵ ki is mutatta.

A felületi feszültség itt felsorolt változásai mind arra vezethetők vissza, hogy az egymással érintkező anyagi kom-

¹ J. STÖCKLE: Wied. Ann. 66. p. 49. 1898.

G. MAYER: Wied. Ann. 66. p. 523. 1898.

² G. QUINCKE: Pogg. Ann. 139. p. 18. 1870.

³ R. H. WEBER: Ann. d. Phys. 4. p. 706. 1901.

⁴ L. H. FREUNDLICH: Kapillarchemie p. 50. 1909.

⁵ J. MATHIEN: Ann. d. Phys. 9. p. 340. 1902.

ponensekben a felület közelében koncentráció- vagy sűrűségbeli változások állanak elő, melyek kifejlődéséhez bizonyos idő kell.

Kaucsuk és víz esetében is észleltünk időbeli változást, a mit ugyanilyen okokra lehet visszavezetni. Tudjuk, a kaucsuk abszorbeál vizet; azt is láttuk, hogy a mikor a kaucsuk nedves levegőből vízbe merül, már csak vékony felületi rétegben történik abszorpczió, a mit adszorpcziónak lehetett minősíteni. Ilyen átmeneti határréteg kifejlődését be is láthatjuk, mert hisz az abszorbeált víznek a határfelületen fekvő vékony rétege egyik oldalán tiszta vízzel, másik oldalán kaucsukkal és abszorbeált vízzel érintkezik, természetes tehát felvennünk e rétegről, hogy más állapotban lévén, mint a kaucsuk belsejében lévő réteg, mely minden oldalról kaucsukkal és elnyelt vízzel érintkezik, más is lesz a sűrűsége, valamint azt is, hogy e réteg kifejlődésére bizonyos idő kell. Ez a kapilláris határréteg elválasztja az egyik anyagi komponens, a víz, egyik homogén fázisát a másiktól.

E határréteg szerkezetét úgy gondolhatjuk, hogy abban folytonos az átmenet az egyik fázisból a másikba. Ez a fel fogás teljesen megfelel annak, melyre VAN DER WAALS, BAKKER alapították a telített gőzével érintkező folyadék kapillaritásának elméletét. Felveszszük, hogy a folyadék a cseppfolyós halmazállapotból folytonosan megy át a légneműbe, hogy tehát egy ú. n. kapilláris határrétegben folytonos átmenetben egymás mellett megtalálhatók az összes közbeeső sűrűségek.

A 14—16. pontban ismertetett abszorpcziós kísérletek eddigi eredményei alapján valószínű, hogy a vízgőzzel érintkező kaucsukon is kimutatható lesz ilyen átmeneti réteg jelenléte; az erre vonatkozó vizsgálatok folyamatban vannak; azok befejeztéig talán elegendő lesz a várható eredmény rövid jelzése.

A mi a feszültségnek rögtön a bemerülés után meghatározott értékét illeti, az bizonytalanabb, mint a stacionárius állapothoz tartozó későbbi érték. Először azért, mert hisz extrapolációval jutottunk hozzá s éppen a bemerülés után erősen és nem egyenletesen változik a folyadékoszlop állása, például a vastagabb csőnél a stacionárius állapotban 1 percz alatt 0.03—0.04 mm-rel, a bemerülés után 0.2 mm-rel változott.

Továbbá maga a bemerítés is bizonyos időt vett igénybe; átlag 10 másodpercig tartott, míg a nivó annyira emelkedett, hogy a csövet ellepte; arra törekedtem, hogy ez az idő minden kísérletben lehetőleg ugyanaz legyen.

Megemlítem, hogy a felületi feszültségre csak akkor kaptam elég jól egyező értékeket, ha az előzőleg gyorsan szárított cső legalább 14—18 órát állott nedves levegőben s e közben nagyobbfokú (1° — 2°) gyors lehülés nem érte; az előbbieken alapján ez érthető is.

E dolgozatban csak azzal az esettel foglalkozom, a mikor a kaucsuk nedves levegőből merül vízbe. Jóval nehezebb a mérés, ha száraz levegőből jut vízbe. Ezt az esetet is vizsgáltam; itt is olyan rendű abszorpczió lép fel, mint mikor szárazból nedves levegőbe teszszük a kaucsukot; éppen ezért a kapilláris nyomás kihámozása tetemes nehézségeket okoz, melyek legyőzésére azonban van kilátás.

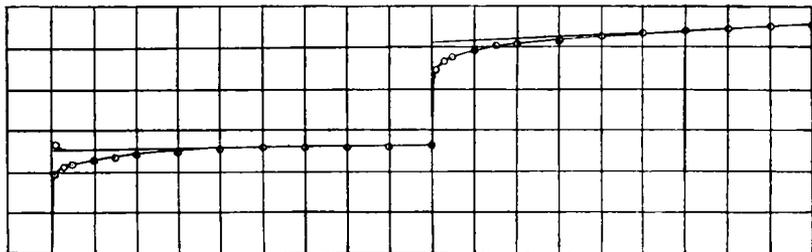
b) Kísérletek paraffinnal.

19. A kaucsukcsövet vékony paraffinréteggel vontam be úgy, hogy a csövet megolvasztott paraffinba mártottam; a csövet kivéve s tovább melegítve, a fölösleg lefolyhatott s vékony paraffinréteg maradt a csövön. Nehézséget okozott az, hogy a kaucsuk beissza a folyékony paraffint s így ügyelni kellett arra, hogy a melegítést a kellő pillanatban szüntessem be, mielőtt még mind beitta volna a cső s mikor a réteg már nem volt túl vastag. Több próbálgatás után sikerült oly csövet készíteni, melynek felületén volt még mindenütt jól látható paraffinréteg, a nélkül, hogy az érzékenysége a réteg túlvastag volta miatt a hasznavehetetlenségig csökkent volna. Mivel a kaucsuk láthatóan is elég gyorsan magába szívja a paraffint, nem is tudtam megállapítani a paraffinréteg vastagságát.

A méréseket kedvezőtlenebb körülmények között kellett végeznem. A bevonással ugyanis az érzékenység közel a harmadára csökkent, míg a hőmérsékleti együttható alig változott. Így például 1 mm vízoszlop nyomása kereken $0\cdot3$ mm eltolódást adott, míg 1° hőfokváltozás $5\cdot3$ mm-t. Vékonyabb kaucsuk-

csónél pedig a rugalmas utóhatás akkora volt, hogy paraffinnal bevonva mérésre teljesen alkalmatlan volt. E kedvezőtlen körülmények miatt az eredmények is kevésbé pontosak.

A kísérlet menete egészen olyan, mint a csupasz csóvel. Egy 11 kísérletből álló sorozat eredményeit közlöm; a csó



5. ábra.

mindegyikben nedves levegőből merült vízbe, miután 14—18 állott víz felett. A folyadékoszlop járása 50 perczel a bemerülés után már stacionárius lett, úgy hogy 1 óra 30 perczel a bemerülés után már újból emeltem a nivót. Egy ily kísérlet lefolyását az 5. görbe ábrázolja. A stacionárius állapothoz tartozó kapillaris nyomást és felületi feszültséget a következő táblázatba foglaltam:

	δ	P	δ'	P'	K	f
1	3·78	10·38	3·10	8·47	+ 0·05	+ 0·2
2	3·00	9·49	2·95	9·03	— 0·10	— 0·4
3	3·12	10·44	2·65	9·04	— 0·50	— 2·2
4	2·52	9·63	2·57	8·68	— 0·86	— 3·8
5	2·73	10·46	2·52	9·09	— 0·82	— 3·6
6	2·36	9·64	2·42	8·85	— 0·68	— 3·0
7	2·65	10·24	2·49	9·32	— 0·34	— 1·5
8	2·52	9·51	2·48	9·05	— 0·66	— 2·9
9	2·55	10·25	2·50	9·10	— 0·72	— 2·8
10	2·65	9·46	2·69	9·13	— 0·44	— 1·9
11	2·86	10·23	2·68	9·27		

A közölt értékek nagyobb szabálytalan ingadozásokat mutatnak, mint a csupasz csőnél, a mit az érzékenység apadásának kell betudni. Annyi azonban kétségtelen, hogy a felületi feszültség a kísérletek során megváltozik: kezdetben pozitív, azután negatív lesz s negatív értéke kissé növekszik. Ezzel összhangzásban áll az a tapasztalat, hogy a frissen paraffinozott csövet vízből kivéve, az majdnem teljesen száraz maradt, csak itt ott tapadt hozzá egy-egy kicsiny vízcsepp, közel 90°-kal illeszkedve. A mérések után azonban nagyobb lapos vízfoltok maradtak a csövön, kicsiny szöggel illeszkedve. A mérések befejezte után lángot húztam végig a csövön, miáltal a paraffin megolvadt; miután megszilárdult, ismét mértem a felületi feszültséget: a kapilláris nyomás +0·26, a felületi feszültség +1·15, tehát újból pozitív lett. A paraffin-felület tehát vízzel hosszabb ideig érintkezve megváltozik; friss felületen a feszültség pozitív, azután negatív lesz, de a vizénél kisebb marad.

Úgy mint a csupasz kaucsukcsővel, ezzel is meghatároztam a kezdő értékeket s a következő eredményre jutottam:

	δ_0	K_0	f_0
1	+ 0·23		
2	+ 0·38	+ 0·91	+ 4·0
3	+ 0·06	+ 0·62	+ 2·8
4	+ 0·13	+ 0·25	+ 1·1
5	— 0·03	+ 0·28	+ 1·2
6	— 0·03	0·00	0·0
7	— 0·03	— 0·11	— 0·5
8	+ 0·12	+ 0·16	+ 0·7
9	— 0·04	+ 0·14	+ 0·6
10	+ 0·31	+ 0·45	+ 2·0
11	— 0·10	+ 0·47	+ 2·1

A feszültségben ugyanolyan irányú változás észlelhető, mint előbb: a friss felület nagyobb pozitív feszültséget mutat, mely azután esik a kísérletek során. A feszültség pozitív, azaz

oly irányú, hogy az érintkező felületet kisebbiteni törekszik. A paraffinréteget mint előbb megolvasztva $K_0+0.70$ és $f_0+3.1$ lett, tehát újból nagyobb értéket vett fel.

A felületi feszültségnek időbeli változása a bemerülés után itt is megvan, ha nem is oly nagy mértékben mint a kaucsukon.

Az illeszkedési szög.

20. A felületi feszültség időbeli változásából nevezetes következtetést vonhatunk az illeszkedési szögre. Legyen ugyanis

a kaucsuk és víz feszültségének kezdeti értéke f'_{cs} , későbbi értéke f_{cs} ; legyen továbbá, hogy a vízfelület ϑ szöggel illeszkedik a kaucsukhoz az A határgörbe mentén (l. 6. ábra). Adjunk a folyadékfelületnek egy virtuális elmozdulást, melynek folytán A A' -be jut; akkor, a mint ismeretes, az egyensúly egyik feltétele:

$$-(f'_{cs}-f_{ts})-f_{cl} \cos \vartheta \leq 0.$$

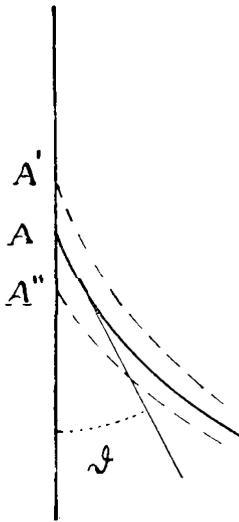
Világos, hogy ezen virtuális eltolódásnál az f'_{cs} feszültség szerepel, mert hisz olyan felületi részt lep el a folyadék, mely eddig nem érintkezett vízzel, hanem vízgőzzel és levegővel. Ha a virtuális elmozdulással A'' -be jut A , akkor az egyensúly feltétele

$$(f_{cs}-f_{ts})+f_{cl} \cos \vartheta \leq 0.$$

Itt az f_{cs} értékkel kell számolni, mert hisz a virtuális elmozdulással oly felületi rész jut ki a vízből, mely eddig vízzel érintkezett. Tehát egyensúly áll be, ha

$$\cos \vartheta \geq -\frac{f'_{cs}-f_{ts}}{f_{cl}} \quad \text{és} \quad \cos \vartheta \leq -\frac{f_{cs}-f_{ts}}{f_{cl}}.$$

Nyilvánvaló, ha $f'_{cs} = f_{cs}$, akkor a két feltétel csak az egyenlőség jelével állhat meg egyidejűleg. Ha azonban $f'_{cs} > f_{cs}$,



6. ábra.

akkor lehetséges, hogy mindkét feltétel ϑ végtelen sok értékére nyerhet kielégítést, azaz végtelen sok oly illeszkedési szög létezik, melynél egyensúly van. A kaucsuk és víz, paraffin és víz esetén — $\frac{f'_{cs}-f'_{ls}}{f_{ct}} < -\frac{f_{cs}-f_{ls}}{f_{ct}}$, tehát a két feltétel megfér egymással s így tényleg ϑ végtelen sok értéke mellett lehet egyensúly, mely értékek alsó, illetve felső határa:

$$\theta = -\frac{f'_{cs}-f'_{ls}}{f_{ct}} \quad \text{és} \quad \theta' = -\frac{f_{cs}-f_{ls}}{f_{ct}}.$$

Ekkor be fog következni az, a mit a tapasztalat is mutat, hogy befelé mozgatva a szilárd testet, az illeszkedési szög más, még pedig nagyobb, mint kifelé mozgatásnál.

Ezzel azonban távolról sem adtuk az illeszkedési szög tényleg észlelt nagy ingadozásának magyarázatát. Így például a vastagabb kaucsukcsövet a vízbe befelé mozgatva, a víz 90° kal illeszkedett, holott a felületi feszültségnek úgy a kezdeti, mint a végső értéke nagyobb a vízenél s így az illeszkedési szögnek mindkét esetben zérusnak kellene lennie. A vékonyabb kaucsuknál az illeszkedési szög 0° és 100° között ingadozott, míg a felületi feszültség kezdeti és végső értékéből az egyik csőnél 45° és 0° , illetőleg a másiknál 78° és 0° következnek. De nem is várhatunk kvantitatív egyezést, mert hisz az illeszkedési szög nagy ingadozásait akkor is mutatja, ha csak igen rövid ideig volt érintkezés, míg a felületi feszültség változása a kezdő értéktől a végsőig átlag 1 órát vesz igénybe.

Az illeszkedési szög a paraffinnál is tág határok között ingadozott: friss csövön befelé mozgatásnál 110° , kifelé mozgatásnál 55° körül; régibb csövön 90° , illetve 10° körül volt. E szögek meghatározása egyszerű módon reflexio útján történt. Egy vízszintes fonálú izzólámpát helyeztem a vízben álló paraffinozott cső elé s kerestem azt az irányt, melyben a fonálból jövő fény éppen hogy nem verődött már vissza a meniskusról. Főlöszleges lett volna az illeszkedési szög meghatározására több fáradságot fordítani. A felületi feszültség kezdő értékéből számított illeszkedési szög értéke friss csövön ca. 120° , használt csövön pedig 105° volna, míg az észlelés 110° , illetve 90° -ot

adott, a mi elég jó egyezés, tekintve a mérési hibákat. A felületi feszültség végső értékéből friss csövön 90° , régi csövön 70° következnek, míg az észlelés 55° , illetve 10° -ot adott.

A felületi feszültség időbeli változása tehát okozhat ingadozást az illeszkedési szögben; de az utóbbinak tényleg észlelt ingadozásai nagyobbak, mint a milyenek a fenti okból következnek.

Összefoglalás.

21. *a)* Új módszert ismertettem, melylyel közvetlenül meg lehet határozni, mennyit változik a felületi feszültség a szilárd test határán, a mikor levegőből vagy más légnemű anyagból folyadékba merül.

b) E módszerrel tényleg lemértem a felületi feszültség változását kaucsukon és paraffinon, a mikor a vízgőzzel telített levegőből vízbe merül.

c) Meg lehetett állapítani, hogy a felületi feszültség mindkét esetben nagy időbeli változást mutat a bemerülés pillanatától fogva, a mit adszorpcziónak lehetett tulajdonítani.

d) Az időbeli változásból az illeszkedési szög ingadozása következik; a tényleg észlelt ingadozások azonban ennél nagyobbak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1909 október 18.-án tartott üléséből.)

LEBESGUE-FÉLE ÁLLANDÓK ÉS DIVERGENS FOURIER-SOROK.

FEJÉR LIPÓT I. tagtól.

BEVEZETÉS.

Két nem régen megjelent cikkben¹ példákat közöltem olyan mindenütt folytonos függvényre vonatkozólag, melynek Fourier-sora valamely helyen divergens.

E példák szerkesztésénél szem előtt tartottam LEBESGUE-nek² ide vonatkozó nagyon figyelemreméltó vizsgálatait.

E dolgozatban egyrészt a LEBESGUE-féle eredményeknek egy új tárgyalását adom, hozzácsatolván ezekhez számos új eredményt. Másrészt az I. és II. cikkemnek egy bővebb tárgyalását és analysisét adom, mely azt hiszem, figyelemreméltó új kifejtéseket tartalmaz.

¹ Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 137, Heft 1, 1909. (A következőkben mint I. cikket idézem.)

Eine stetige Funktion, deren Fourier-sche Reihe divergiert. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXVIII, 2^o semestre, 1909. (A következőkben mint II. cikket idézem.)

² Sur la divergence et la convergence nonuniforme des séries de Fourier. Comptes-Rendus, 1905, II. semestre, pag. 875—877.

Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906, Art. 45, 46, pag. 86—88.

A mi a bizonyos általánosabb orthogonális sorokra vonatkozó általánosítást illeti, utalok HAAR ALFRED tartalmas göttingeni dissertációjára:

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Göttingen, 1909.

TARTALOMJEGYZÉK.

Bevezetés.

1. §. A Fourier-sor LEBESGUE-féle állandói.
2. §. A $\psi(n + \frac{1}{2}, x)$, $\psi(2n, x)$, $\theta(n, x)$, $\theta(n, r, x)$ függvény-sorozatokról.
3. §. Mindenütt folytonos és divergens Fourier-sorral bíró függvények.
4. §. E Fourier-sorok divergenciájának természetéről.
5. §. Záró megjegyzések.

1. §. A Fourier-sor Lebesgue-féle állandói.

1. Legyen $s_n(x)$ valamely, a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban véges és (a RIEMANN-féle értelemben) integrálható $f(x)$ függvény Fourier-sorának n -ik részletösszege. Legyen tehát

$$s_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

hol

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt. \end{aligned} \tag{1}$$

$(k=1, 2, 3, \dots)$

Legyen továbbá x a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumnak egy határozott helye és n az indexnek egy határozott értéke.

Tekintsük most már, LEBESGUE-et követve, azon $f(x)$ függvények összességét, melyek a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban végesek és integrálhatók, és melyeknek abszolút értéke ezen intervallum tetszőleges helyén kisebb vagy legfeljebb egyenlő 1-gyel. Ezen összesség minden $f(x)$ függvényére nézve a Fourier-sor n -ik részletösszegének az x helyen megvan a maga határozott abszolút értéke

$$|s_n(x)|.$$

A nem negatív értékek ezen sokaságának van egy határozott véges WEIERSTRASS-féle felső határa, melyet $\rho_n(x)$ -szel jelölök. E felső határ $\rho_n(x)$ valóban véges. Ugyanis

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt, \quad (2)$$

tehát

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right| dt. \quad (3)$$

Itt a jobboldalon egy határozott pozitív érték áll. Tehát $\rho_n(x)$ valóban véges.

Azt állítom most már, LEBESGUE-et követve, hogy függvényösszegünknek egy $\varphi(x)$ függvényére nézve a (3) alatti egyenlőtlenségben az egyenlőség jele érvényes, vagyis hogy

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right| dt. \quad (4)$$

Valóban a

$$\varphi(t) = \text{sign.} \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}}$$

függvény (hol KRONECKER jelölése szerint

$$\text{sign. } a = \begin{cases} +1, & \text{ha } a > 0 \\ 0, & \text{ha } a = 0 \\ -1, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

az $|f(x)| \leq 1$ függvényösszeghez tartozik. Továbbá erre a $\varphi(x)$ függvényre nézve

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right| dt.$$

Tehát a $\varphi(x)$ függvényre nézve a szóban forgó x helyen valóban

$$|s_n(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right| dt.$$

E szerint $\rho_n(x)$ nemcsak felső határa, hanem egyszersmind maximuma is az $|s_n(x)|$ értéknek az $|f(x)| \leq 1$ függvényösszeségre vonatkozólag.

A $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumnak minden egyes x helyéhez tartozik egy ilyen határozott $\rho_n(x)$ érték. Ámde ezen összes $\rho_n(x)$ értékek egymással egyenlők. Ugyanis, a periodicitásnál fogva, az

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right| dt$$

integrál minden x értékre nézve ugyanazon értéket veszi föl. Én tehát $\rho_n(x)$ -et röviden ρ_n -nel jelölhetem és nyerem ρ_n számára, ha a (4) alatti egyenletbe x helyébe zérust írok, a következő alakot:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt. \end{aligned}$$

Az n index minden értékéhez tartozik ilyen pozitív ρ_n állandó.

A

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$$

$$\rho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt, \quad (5)$$

végtelen sorozat egy egészen határozott sorozata a pozitív állandóknak, mely a FOURIER-féle sorhoz tartozik. Itt ρ_n jelenti azon, a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallum összes x helyeire nézve közös, maximális értéket, melyet $|s_n(x)|$ fölvesz, midőn $f(x)$ átfutja a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban integrálható és abszolút értékben 1-nél kisebb (vagy legfeljebb 1-gyel egyenlő) függvények összességét. Ezen ρ_n állandók fontosságát először LEBESGUE ismerte fel; ezért a «Fourier-sor Lebesgue-féle állandói»-nak nevezem őket.¹

Könnyű megadni a ρ_n LEBESGUE-féle állandónak geometriai jelentését.

Tekintsük a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban az

$$y = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

egyenletű DIRICHLET-féle görbét. Ez a görbe hullámalakú menetekből áll, melyek részint az abszcissatengely fölött, részint pedig e tengely alatt fekszenek. Ha most a görbe által definiált pozitív hullámterületek algebrai összegét képezem, akkor az

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

¹ Ha a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban

$$|f(x)| \leq M, \quad (6)$$

akkor ezen intervallum tetszőleges x helyére nézve és tetszőleges n -re

$$|s_n(x)| \leq M\rho_n. \quad (7)$$

Ha n és x rögzítve vannak, akkor a (6) alatti függvényösszegség alkalmasan választott függvényére nézve a (7) alatti egyenlőtlenségben az egyenlőség jele érvényes.

E ρ_n állandót egyébként még úgy is lehet jellemezni, hogy az a legnagyobb pozitív értékét adja meg $s_n(x)$ -nek valamely x helyen akkor, a midőn $f(x)$ az $|f(x)| \leq 1$ függvényösszegséget átfutja.

Végre szorítkozhatunk azon folytonos függvények összességére, melyekre nézve $|f(x)| \leq 1$. Csakhogy akkor ρ_n nem mint maximum, hanem mint WEIERSTRASS-féle felső határ jelentkezik.

értéket, vagyis 1-et kapok, bármilyen értéke is van az n indexnek. Ha pedig ezen pozitív hullámterületek összegét képezem, akkor az

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right| dx$$

értéket, az n -ik LEBESGUE-féle állandót, ρ_n -et nyerem.

2. LEBESGUE a ρ_n állandókra nézve a következő tételt bizonyította be (Art. 45, Leçons etc.):

ρ_n növekedő n -nel minden határon túl nő. Vagyis

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = +\infty.$$

Én a következőkben többet akarok kimutatni. Föl akarom ugyanis állítani ezen fontos állandóknak aszimptotikus kifejezését.

E végből egy segédtételt bocsátok előre.

Legyen $f(x)$ egy az $a \leq x \leq b$ intervallumban véges és integrálható függvény. Akkor RIEMANN szerint ismeretes, hogy

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin nx}{\cos nx} dx = 0.$$

[Ez a Fourier-sorok konvergencia-elméletének alaplemmája.]

Ki akarom most mutatni, hogy egy tetszőleges, az $a \leq x \leq b$ intervallumban véges és integrálható $f(x)$ függvényre nézve

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

és

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) |\cos nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx. \quad (9)$$

E tételek igen egyszerű bizonyítása a következőképpen történik.

Legyenek k és l azon (pozitív vagy negatív) egész számok, melyekre nézve

$$(k-1) \frac{\pi}{n} < a \leq k \frac{\pi}{n} < (k+1) \frac{\pi}{n} < \dots < l \frac{\pi}{n} \leq b < (l+1) \frac{\pi}{n}.$$

Akkor

$$\int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \int_{k \frac{\pi}{n}}^{(k+1) \frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx| dx + \dots + \\ + \int_{(l-1) \frac{\pi}{n}}^{l \frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx| dx + \varepsilon_n,$$

hol ¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ámde az integrálokra vonatkozó első középértéktétel alapján

$$\int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{n} f_1 + \frac{2}{n} f_2 + \dots + \frac{2}{n} f_{l-k} + \varepsilon_n.$$

Itt

$$m_1 \leq f_1 \leq M_1,$$

hol m_1 jelenti az $f(x)$ függvénynek a $\left(k \frac{\pi}{n}, (k+1) \frac{\pi}{n}\right)$ intervallumra vonatkozó alsó, M_1 pedig a felső határát.

Továbbá

$$m_2 \leq f_2 \leq M_2,$$

etc.

Tehát

$$\int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \left(f_1 \frac{\pi}{n} + \dots + f_{l-k} \frac{\pi}{n} \right) + \varepsilon_n$$

és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

Hasonlóképen bizonyítható a (9) alatti tétel.

Mielőtt ρ_n asymptotikus kifejezésének a meghatározásához

¹ E dolgozat folyamán ε_n mindig olyan értéket jelent, melyre nézve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

kezdenék, meg akarom mutatni, hogy miként lehet a (8) alatti tétel segítségével bebizonyítani, hogy

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = +\infty.$$

Legyen $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Akkor

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt > \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt > \\ &> \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} + \varepsilon_n = \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \log \varepsilon + \frac{4}{\pi^2} \log \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Ha tehát n elegendő nagy, akkor

$$\rho_n > \frac{4}{\pi^2} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mint hogy ε -t tetszőleges kicsinynek választhattam, tehát

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = +\infty.$$

A ρ_n pontos asymptotikus kifejezése a következőképen határozható meg:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t| dt}{\sin t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) |\sin(2n+1)t| dt = \lambda_n + \mu_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Itt, tekintettel a (8) alatti tételre,

$$\lim_{n=\infty} \mu_n = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt. \quad (11)$$

Továbbá

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{(n+1)\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{(n+1)\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt =$$

$$= \nu_n + \varepsilon_n. \quad (12)$$

Ámde

$$\nu_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{(n+1)\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+\pi} + \dots + \frac{1}{t+n\pi} \right) \sin t dt. \quad (13)$$

Továbbá ismeretes, hogy¹

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \log n + \eta_n(x), \quad (14)$$

hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(x) = 0,$$

és pedig egyenletesen minden olyan intervallumban, melynek határai nem negatívak.

E szerint a (14) alatti egyenletet tekintetbe véve:

$$\nu_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{\log n}{\pi} \sin t dt - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)} \sin t dt \right\} + \varepsilon_n,$$

vagyis

$$\nu_n = \frac{4}{\pi^2} \log n - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)} \sin t dt + \varepsilon_n. \quad (15)$$

¹ A minden x -re érvényes

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{Cx} \Pi\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

egyenletből a (14) alatti könnyen levezethető. Itt C jelenti az EULER-MASCHERONI-féle állandót.

A (10), (11), (12), (15) alatti egyenletekből következik, hogy

$$\rho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n,$$

hol

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\Gamma' \left(\frac{t}{\pi} \right)}{\Gamma \left(\frac{t}{\pi} \right)} \sin t dt.$$

Tehát végre a következő tételhez jutottam:

A ρ_n *LEBESGUE-féle* állandónak a következő alakja van:

$$\rho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n. \quad (16)$$

Itt c_0 jelenti a következő állandót:¹

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int_0^1 \log \Gamma(t) \cos \pi t dt,$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

A (16) alatti egyenletből megint következik, hogy ρ_n növekedő n -nel minden határon túl nő. De látom ezen egyenletből egyszer szersmind azt is, hogy ρ_n az n -nel igen lassan, logaritmikusan nő a végtelenbe.

Egyébként be lehet bizonyítani, hogy

$$\rho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}, \quad (17)$$

¹ Az

$$\int_0^1 \log \Gamma(t) \cos \pi t dt,$$

valamint a (24) alatti formulában föllépő

$$\int_0^1 \log \Gamma(t) \sin 2\pi t dt$$

állandót czélszerűen a $\log \Gamma(t)$ -t adó KUMMER-féle Fourier-sorral lehet kiszámítani.

hol c_1 egy az n -től független állandó és $a(n)$ abszolút értékére nézve egy az n -től független felső határ alatt marad.

A (17) alatti formula bizonyítása már valamivel körülményesebb. Ámde e bizonyítás mégis nem nehezen eszközölhető, ha előbb az

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

integrál ismeretes — nagy n -re vonatkozó — asymptotikus sorfejtésének analogonjaként meghatározzuk az

$$\int_a^b f(x) |\sin nx| \, dx$$

integrálnak megfelelő asymptotikus sorfejtését. Az utóbbi az EULER-MACLAURIN-féle összegezési formula segítségével könnyen meghatározható.

A (17) alatti egyenletből következik, hogy

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} - \rho_n &= \frac{4}{\pi^2} (\log(n+1) - \log n) + \frac{a'(n)}{n^2} = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{a''(n)}{n} \right), \end{aligned}$$

hol $a'(n)$, $a''(n)$ abszolút értékben, minden n -re nézve, egy véges felső határ alatt maradnak. Ebből következik, hogy $\rho_{n+1} - \rho_n$ pozitív, ha csak n elegendő nagy. E szerint:

Egy bizonyos tagtól kezdve a

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$$

állandók folyton nőnek.¹

3. Ezen paragraphust azzal zárom be, hogy a $s_n(x)$ -ekre vonatkozó LEBESGUE-féle kérdésnek analogonját megbeszélem az

¹ Valószínűleg kezdettől fogva nőnek. Ha ez az eset fogyna fenn, akkor kívánatos volna e tételnek egy egészen elemi bizonyítását adni, mely talán direktre a ρ_n állandónak (5) alatti képletére, nem pedig annak (17) alatti asymptotikus sorfejtésére támaszkodik.

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n}$$

arithmetikai közepekre vonatkozólag.

Ismeretes, hogy

$$S_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt. \quad (18)$$

Tekintsük ismét azon $f(x)$ függvények összességét, melyek a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban integrálhatók és a melyekre nézve ugyanott

$$|f(x)| \leq 1.$$

Akkor az $f(x)$ függvényre nézve az x helyen

$$|S_n(x)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt.$$

Ámde

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt = 1,$$

tehát

$$|S_n(x)| \leq 1,$$

minden egészszámú n -re és minden reális x -re.¹

Az 1 értéket $|S_n(x)|$ az

$$f(x) = 1 \\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

függvénynél veszi fel.

E szerint az $S_n(x)$ arithmetikai középértékekre nézve egyszerűen

¹ Ezt a tételt először „Untersuchungen über Fourier-sche Reihen” (Math. Annalen, Bd. 58, 1904, pag. 60) című dolgozatomban bizonyítottam be.

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

azon sorozat, mely az $s_n(x)$ részletösszegeknek

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$$

LEBESGUE-féle állandóinak megfelel.

2. §. A $\phi(n + \frac{1}{2}, x)$ $\phi(2n, x)$, $\theta(n, x)$, $\theta(n, r, x)$ függvény-sorozatokról.

4. Az 1. §-ban tárgyaltam, LEBESGUE-et követve, az $|f(x)| \leq 1$ függvényösszességhez tartozó

$$\varphi_n(x) = \text{sign.} \frac{\sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad (20)$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi, \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

függvényekről. Kimutattam, hogy a $\varphi_n(x)$ függvénynek n -ik FOURIER-féle részletösszege az $x = 0$ helyen olyan $s_n(0) = \rho_n$ értéket vesz fel (n -ik LEBESGUE-féle állandó), mely az n -nel együtt minden határon túl növekedik.

Minthogy

$$\text{sign.} \frac{\sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \text{sign.} \sin(2n+1) \frac{x}{2},$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

tehát rövidebben:

$$\varphi_n(x) = \text{sign.} \sin(2n+1) \frac{x}{2} \cdot \quad (21)$$

$$(0 < x < 2\pi, \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Az $|f(x)| \leq 1$ függvényösszességnek ezen $\varphi_n(x)$ függvényei azonban mind (a $\varphi_0(x)$ kivételével) *diskontinuusak*. A szakadási helyek száma az n indexsel minden határon túl nő.

Kívánatos azonban az $|f(x)| \leq 1$ függvény sokaságból egy olyan *folytonos* függvényekből álló

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \dots$$

sorozatot kiválasztani, melynek $\psi_n(x)$ tagjához egy olyan $s_n(0)$ érték tartozik, a mely az n indexsel minden határon túl nő.

Elvben könnyű a $\varphi_n(x)$ szakadós függvények sorozatából ilyen folytonos sorozatát a $\psi_n(x)$ függvényeknek meghatározni. Ilyen meghatározás lehetősége, mint LEBESGUE megjegyzi, következik ismeretes tételekből, melyek bizonyos szakadós függvényeknek folytonosokkal való approximációjára vonatkoznak.¹

Ámde igen egyszerű és további fontos különös tulajdonságokkal bíró $\psi_n(x)$ sorozatot kapok azáltal, hogy a (21) alatti egyenlet jobb oldalán a signumjelet elhagyom; $\psi_n(x)$ -et tehát így definiálom

$$\psi_n(x) = \sin(2n+1) \frac{x}{2}. \quad (22)$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2\pi, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

Először is világos, hogy a

$$\sin \frac{x}{2}, \sin 3 \frac{x}{2}, \dots, \sin(2n+1) \frac{x}{2}, \dots$$

függvények mind az $|f'(x)| \leq 1$ függvénysokasághoz tartoznak.

Továbbá a (2) alatti képlet alapján $\psi_n(x)$ -re nézve

$$s_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sin(2n+1) \frac{t}{2} \right)^2}{\sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t} dt.$$

Azt állítom most már, hogy $\psi_n(x)$ -re nézve

¹ Megjegyzem, hogy például a $\varphi_n(x)$ FOURIER-féle sorának arithmetikai közepi nagyon alkalmasak erre a célra. (L. pl. 1. §. 3. pont.)

$$\sigma_n = |s_n(0)| = s_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t} dt \quad (23)$$

növekedő n indexxel minden határon túl nő.

Valóban legyen $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Akkor

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t} dt > \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{t} dt > \\ &> \frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2(2n+1)t}{2t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2(2n+1)t}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \log \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Ha tehát n elegendő nagy, akkor

$$\sigma_n > \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mintthogy ε -t tetszőleges kicsinynek vehettem fel, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty.$$

Az a módszer, melylyel a

$$\rho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt \quad (5)$$

állandó asymptotikus kifejezését megállapítottam, a

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t} dt \quad (23)$$

asymptotikus kifejezésének a megállapítására is alkalmas.

Ugyanis

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2n+1)t)^2}{\sin t} dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) (\sin(2n+1)t)^2 dt = a_n + \beta_n. \end{aligned}$$

Ámde

$$\sin^2(2n+1)t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(2n+1)t,$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Továbbá

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+\pi} + \dots + \frac{1}{t+n\pi} \right) \sin^2 t dt + \varepsilon_n.$$

Ha tehát ismét tekintetbe veszem a (14) alatti formulát, nyerem

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\log n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma' \left(\frac{t}{\pi} \right)}{\Gamma \left(\frac{t}{\pi} \right)} \sin^2 t dt \right\} + \varepsilon_n.$$

Eljutottam tehát a következő tételhez:

A σ_n alakja

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \log n + \gamma_0 + \varepsilon_n, \quad (24)$$

a hol

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int_0^1 \log \Gamma(t) \sin 2\pi t dt,$$

és

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ezzel először is megint ki van mutatva, hogy $\lim_{n=\infty} \sigma_n = +\infty$, vagyis, hogy a

$$\sin \frac{x}{2}, \sin 3 \frac{x}{2}, \dots, \sin (2n+1) \frac{x}{2}, \dots$$

sorozat n -ik tagjára nézve az $s_n(0)$ érték egy olyan pozitív érték, mely n -nel minden határon túl nő. De a (24) alatti asymptotikus kifejezés ezen felül még precizizozza azt a módot, melylyel σ_n a növekedő n -nel a végtelenbe nő.

5. Az előbbieken annak a bizonyítására, hogy a

$$\sin (2n+1) \frac{x}{2}$$

függvényhez tartozó $s_n(0)$ érték az n -nel minden határon túl nő, az 1. §. módszerét alkalmaztam. Ámde könnyű a $\sin (2n+1) \frac{x}{2}$ függvénynek n -ik FOURIER-féle részletösszegét direkte tanulmányozni. Egyáltalában könnyű a $\sin (2n+1) \frac{x}{2}$ függvény tetszőleges indexű FOURIER-féle részletösszegét (vagyis végtelen Fourier-sorát) expliczite előállítani és ezen előállításból ezen részletösszegeknek összes, az $x=0$ helyre vonatkozó nevezetes tulajdonságaikat leolvasni.

A $\sin (2n+1) \frac{x}{2}$ Fourier-sora (ez egy tiszta kosinussor) ugyanis a következőképen hangzik:

$$\sin (2n+1) \frac{x}{2} = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_k \cos kx + \dots, \quad (25)$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)$$

hol

$$a_k = \frac{2}{\pi} \frac{n + \frac{1}{2}}{(n + \frac{1}{2})^2 - k^2},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

($k=1, 2, 3, \dots$)

(26)

A (26) alatti képletekből látjuk, hogy az

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

együtthatók mind pozitívek, míg az

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

együtthatók mind negatívek. Ámde a (25) alatti formula $x=0$ -ra is érvényes. Tehát

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots = 0.$$

Ebből következik, hogy az

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

végtelen sor összes részletösszegei pozitívek. Továbbá következik, hogy ezen részletösszegek kezdetben folyton nőnek, az s_n n -edik részletösszegben eléri legnagyobb értéküket és hogy az indexnek n értékétől fogva, folytonosan fogyva, a zérushoz konvergálnak. Végre a (26) alatti formulából egyszerűen következik, hogy ezen maximális részletösszeg s_n (vagyis a $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ függvényre vonatkozó $s_n(0)$ érték) nagyobb mint

$$\frac{1}{2\pi} \log(2n+1)$$

és hogy tehát a nevezett $s_n(0)$ érték növekedő n -nel minden határon túl növekedik. (L. I. cikkemet.)

E szerint én, egészen elementárisan, a (25), (26) alatti formulák kizárólagos alkalmazásával, kimutattam a következőket:

A

$$\sin \frac{x}{2}, \sin 3 \frac{x}{2}, \dots, \sin(2n+1) \frac{x}{2}, \dots \quad (22)$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)$$

függvényeknek a következő tulajdonságai vannak:

1. Valamennyien a folytonos függvényeknek azon sokaságához tartoznak, melyre nézve $|f(x)| \leq 1$, ha $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Ezen függvények bármelyikének összes FOURIER-féle részletösszegei az $x=0$ helyen pozitívek.

3. A $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek n -dik (vagyis maximalis) FOURIER-féle részletösszege az $x=0$ helyen olyan pozitív értékkel bír, mely nagyobb mint

$$\frac{1}{2\pi} \log(2n+1),$$

és a mely tehát növekedő n -nel minden határon túl nagyobbodik.

Itten különösen a (22) alatti sorozatnak 2. alatti tulajdonságára hívom fel a figyelmet. A 3. §-ban adott példáimnak átlátszó volta lényegesen ezen tulajdonságon alapszik.

6. A $\phi_n(x)$ sorozat azáltal keletkezik, hogy a

$$\sin \mu x \tag{27}$$

függvénybe a μ helyébe rendre az

$$\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \dots, n+\frac{1}{2}, \dots$$

számokat teszszük.

Tegyük most a $\sin \mu x$ függvénybe a μ helyébe rendre a

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

számokat. Akkor a

$$\sin 2x, \sin 4x, \dots, \sin 6x, \dots \tag{28}$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

sorozathoz jutunk, mely bírja a $\phi_n(x)$ sorozat összes lényeges tulajdonságait.

Legyen általában

$$\phi(\mu, x) = \sin \mu x, \tag{29}$$

ha

$$0 \leq x \leq \pi,$$

és

$$\phi(\mu, x) = \phi(\mu, 2\pi - x),$$

ha

$$\pi < x \leq 2\pi.$$

Itt μ egy tetszőleges pozitív valós számot jelent.

A $\phi(\mu, x)$ függvénynek FOURIER-féle sora (ez egy tiszta kosinussor) a következőképen hangzik:

$\psi(\mu, x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_k \cos kx + \dots,$
 hol

$$a_k = \frac{1 + (-1)^{k+1} \cos \mu\pi}{\pi} \frac{2\mu}{\mu^2 - k^2}, \quad (30)$$

$$a_0 = -\frac{1 - \cos \mu\pi}{\pi} \frac{1}{\mu}.$$

($k=1, 2, 3, \dots$)

Ha tehát $[\mu]$ jelöli azt a legnagyobb egész számot, mely $\leq \mu$, akkor az

$$a_0, a_1, \dots, a_{[\mu]}$$

együtthatók mind nem negatívak, míg az

$$a_{[\mu]+1}, a_{[\mu]+2}, \dots$$

együtthatók mind nem pozitívak. Minthogy ismét

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots = 0,$$

tehát a $\psi(\mu, x)$ függvényre vonatkozó összes $s_k(0)$ FOURIER-féle részletösszegek nem negatívak. Az $s_k(0)$ értékek megint könnyen tanulmányozhatók. Például $\psi(2n, x)$ -re nézve $s_{2n-1}(0) = s_{2n}(0)$ a maximális részletösszegek és értékük növekedő n -nel a végtelenhez konvergál.

E szerint a

$$\psi(2, x), \psi(4, x), \dots, \psi(2n, x), \dots \quad (31)$$

sorozat tagjai mind az $|f(x)| \leq 1$ függvénysokasághoz tartoznak és bírják mindazokat a lényeges tulajdonságokat, melyeket előbb a $\psi_n(x) = \psi(n + \frac{1}{2}, x)$ függvényekre nézve kiemeltem.

7. II. cikkemben a folytonos függvényeknek egy olyan sorozatát állítottam fel, mely az összes tekintetbe jövő tulajdonságokkal bír és a mely a következő paragraphus céljainak talán legjobban megfelel. Legyen

8. II. cikkemben azt állítottam, hogy

$$|\theta(n, x)| = \left| \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} \right| < 34,$$

ha n egy tetszőleges pozitív egész szám és x egy tetszőleges valós szám, és erre nézve ott a bizonyítást vázoltam.

Most itt ezen egyenlőtlenséget egyrészt általánosítani, másrészt élesebbé akarom tenni.

Érvényes a következő, azt hiszem nagyon figyelemre méltó tétel.

Legyen

$$\theta(n, r, x) = \frac{\cos(r+1)x}{n} + \frac{\cos(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(r+n)x}{1} - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos(r+2n)x}{n}. \quad (33)$$

Akkor

$$|\theta(n, r, x)| < 25.6,$$

ha n egy tetszőleges pozitív egész számot, r egy tetszőleges nem negatív egész számot,¹ x pedig egy tetszőleges valós számot jelent.

Bizonyítás. A (33) alatti definíció szerint

$$\theta(n, r, x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{\nu} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos(r+n+\nu)x}{\nu},$$

és így

$$\theta(n, r, x) = 2 \sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}. \quad (34)$$

Az első tényezőre nézve:

$$|2 \sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x| \leq 2.$$

Tehát csak azt kell kimutatnom, hogy

¹ Sőt jelenthet r egy tetszőleges valós számot.

$$|\lambda_n(t)| = \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)t}{\nu} \right| < 12,8, \quad (35)$$

ha n jelent egy tetszőleges pozitív egész számot, t pedig egy tetszőleges valós számot a

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

intervallumban.

Lássuk most már a (35) alatti egyenlőtlenség bizonyítását.
Legyen

$$\mu_n(t) = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \dots + \frac{\sin nt}{n},$$

és legyen M egy pozitív állandó, úgy hogy

$$|\mu_n(t)| = \left| \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \dots + \frac{\sin nt}{n} \right| < M, \quad (36)$$

ha n jelent egy tetszőleges pozitív egész számot, t pedig egy tetszőleges valós számot. Akkor — ezt állítom —

$$|\lambda_n(t)| = \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)t}{\nu} \right| < 2 + 3M.$$

Valóban:

$$\mu_{2n-1}(t) - \frac{1}{2}\mu_{n-1}(2t) = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}, \quad (37)$$

és

$$\frac{\lambda_n(t)}{2} = \frac{\sin t}{2} + \frac{\sin 3t}{4} + \dots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n}. \quad (38)$$

A (38) alatti egyenletből kivonva a (37) alattit:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(t)}{2} = & \mu_{2n-1}(t) - \frac{1}{2}\mu_{n-1}(2t) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \sin t + \\ & + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \sin 3t + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1}\right) \sin(2n-1)t. \end{aligned}$$

E szerint

$$\frac{|\lambda_n(t)|}{2} < M + \frac{M}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < \\ < 3 \frac{M}{2} + 1,$$

vagyis

$$|\lambda_n(t)| < 2 + 3M.$$

Azt állítom most már, hogy a (36) alatti egyenlőtlenség ki van elégítve, ha benne

$$M = 3 \cdot 6.$$

Ismeretes ugyanis, hogy

$$\mu_n(t) = -\frac{t}{2} + \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} d\xi.$$

Ha itt t helyébe $2z$ -t írok:

$$\mu_n(2z) = -z + \int_0^z \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} d\xi. \\ (0 \leq z \leq \frac{\pi}{2})$$

E szerint

$$|\mu_n(2z)| \leq \frac{\pi}{2} + \left| \int_0^z \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} d\xi \right|.$$

Ámde a z -nek

$$\int_0^z \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} d\xi$$

függvénye pozitív, ha

$$0 < z \leq \frac{\pi}{2}$$

és maximumát a

$$z = \frac{\pi}{2n+1}$$

helyen éri el. Tehát

$$|\mu_n(2z)| \leq \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} d\xi.$$

Ámde

$$\int_0^{\frac{\pi}{\nu}} \frac{\sin \nu \xi}{\sin \xi} d\xi = \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha}{\nu \sin \frac{\alpha}{\nu}} d\alpha$$

folytonosan fogy, ha ν a $\nu=2$ értékétől kezdve folytonosan nő. Tehát n -nek tetszőleges pozitív egész számú értékére nézve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\xi d\xi}{\sin \xi} < \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \int_0^{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = 2.$$

Vége tehát nyerem:

$$|\mu_n(2z)| < \frac{\pi}{2} + 2 < \frac{3 \cdot 2}{2} + 2 = 3 \cdot 6,$$

ha n tetszőleges pozitív egész szám és

$$0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ebből azután már következik, hogy

$$|\lambda_n(t)| < 2 + 3 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \cdot 8, \\ (0 \leq t \leq \pi)$$

és ebből, hogy

$$|\theta(n, r, x)| < 25 \cdot 6,$$

ha

$$n = 1, 2, 3, \dots, \\ r = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ -\infty < x < +\infty.$$

A

$$\theta(1, r, x), \theta(2, r, x), \dots, \theta(n, r, x), \dots$$

sorozat, ha benne az általános tagot például 26-tal elosztom, ugyanolyan jellegű sorozat, mint a már tárgyalt $\phi(n + \frac{1}{2}, x)$, $\phi(2n, x)$, $\theta(n, x)$ sorozatok. Itt r egy olyan nem negatív egész számot jelent, melynek értéke a sorozat minden egyes tagjára nézve egészen tetszőlegesen választható. Ezt a tetszőlegességet a nem negatív egész számú r paraméternek a megválasztására nézve a következő paragrafusban előnyösen fogom kihasználni.

3. §. Mindenütt folytonos és divergens Fourier-sorral bíró függvények.

9. LEBESGUE-nek az a figyelemreméltó eszméje támadt, hogy a (21) alatt definiált $\varphi_n(x)$ signumfüggvényeket használja fel olyan mindenütt folytonos függvény szerkesztésére, melynek Fourier-sora az $x=0$ helyen divergens. Ő megjegyzi, hogy ezen szakadásos $\varphi_n(x)$ függvények alkalmas folytonos függvényekkel pótolhatók és ezen új, folytonos függvényekből álló sorozat segítségével mutatja ki olyan mindenütt folytonos függvény existenciáját, melynek Fourier-sora az $x=0$ helyen divergens. Ezt a függvényt ő végtelen sor alakjában definiálja.

Én a $\psi(n + \frac{1}{2}, x)$, (1. (22)), $\psi(2n, x)$, (1. (31)), $\theta(n, x)$, (1. (32)) sorozataimnak a fölállítás után abban a helyzetben voltam, hogy *explicit* példákat adhattam meg ilyen LEBESGUE-féle konstrukciójú folytonos függvényekre. Minthogy az idézett sorozatok bármely tagjának összes FOURIER-féle részletösszegei az $x=0$ helyen nem negativek, azért az én *explicit* példáimnak még azon előnyük is van, hogy Fourier-soruknak az $x=0$ helyen való divergenziája elemi és rövid úton bizonyítható be. Végre példáimnak egyszerű és *explicit* voltának köszönhetem még azt is, hogy rájuk nézve nemcsak azt tudom kimutatni, hogy a Fourier-soruk az $x=0$ helyen divergens, hanem képes vagyok e divergens sorokat természetükre nézve tovább is elemezni.

A

$$\sin \frac{x}{2}, \sin 3 \frac{x}{2}, \dots, \sin(2n+1) \frac{x}{2}, \dots \quad (22)$$

sorozatnak előbb részletezett tulajdonságaiból rögtön következik:

Az

$$f_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(2v^2+1) \frac{x}{2}}{v^2}, \quad (22')$$

$(0 \leq x \leq 2\pi)$

végtelen sor egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos függvényt állít elő. E függvénynek FOURIER-féle sora az $x=0$ helyen divergens.

Ezt a példát először I. cikkemben közöltem.

A

$$\psi(2, x), \psi(4, x), \dots, \psi(2n, x), \dots \quad (31)$$

sorozatnak előbb részletezett tulajdonságaiból rögtön következik:

A:

$$f_2(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin(2^v x)}{v^2}, \quad (31')$$

végtelen sor egy a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumban mindenütt folytonos függvényt állít elő. E függvénynek ugyanezen intervallumra vonatkozó FOURIER-féle kosinussora az $x=0$ helyen divergens.

Ezt a példát ugyancsak I. cikkemben közöltem először.

Definiáljuk a $F(x)$ függvényt a következőképen:

$$F(x) = f_2(x),$$

ha

$$0 \leq x \leq \pi$$

és

$$F(x) = f_2(2\pi - x) = -f_2(x),$$

ha

$$\pi < x \leq 2\pi.$$

Az így definiált $F(x)$ függvény az egész $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban folytonos és ezen intervallumra vonatkozó Fourier-sora identikus az $f_2(x)$ függvénynek a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumra vonatkozó kosinussorával. E szerint a $F(x)$ FOURIER-féle sora az $x=0$ helyen divergens.

Az $f_2(x)$ -et definiáló (31') sor egy a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumra vonatkozó FOURIER-féle sinussor. Azt hiszem, hogy sok olvasó érdekesnek fogja tartani azt a körülményt, hogy épen egy a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumra vonatkozó FOURIER-féle sinussor segítségével sikerült definiálnom olyan mindenütt folytonos függvényt, melynek ugyanazon $0 \leq x \leq \pi$ intervallumra vonatkozó FOURIER-féle kosinussora az $x=0$ helyen divergens.

A

$$\theta(1, x), \theta(2, x), \dots, \theta(n, x), \dots$$

függvénysorozatnak előbb részletezett tulajdonságaiból rögtön következik:

Az

$$f_3(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta(2^{\nu}, x)}{\nu^2}, \quad (32')$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)$$

végtelen sor egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos függvényt állít elő. Ennek Fourier-sora (ez egy tiszta kosinussor) az $x=0$ helyen divergens.

Ezt a példát II. cikkemben közöltem először.

Ezen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ példákban $x=0$ az a hely, a melyen e függvények FOURIER-féle kosinussora divergens. Könnyű most már olyan példát megalkotni, melyre nézve a FOURIER-féle sor a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumnak $x=a$ helyén divergens. Vegyük például az $f_1(x)$ függvényt. Ezt $0 \leq x \leq 2\pi$ -re nézve a (22') alatti sor definiálja. Az összes többi valós x értékekre nézve a függvényértékeket a periodikus folytatás által definiáljuk. Akkor világos, hogy $f_1(x-a)$ egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos függvény, melynek Fourier-sora az $x=a$ helyen divergens.

Még egy negyedik $f_4(x)$ példát akarok itt közölni.

Az $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ példák definíciója elég egyszerű. Ha azonban ezen függvények bármelyikének FOURIER-féle kosinussorát

$$a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_k \cos kx + \dots$$

tényleg képezem, akkor benne az a_k együttható formulája már nem elég egyszerű. Az a_k — mind a három esetben — egy végtelen sor alakjában adódik.

Én itt egy olyan mindenütt folytonos $f_4(x)$ függvényt akarok definiálni, melynek a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumra vonatkozó FOURIER-féle kosinussora az $x=0$ helyen

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots$$

divergens és a melyre nézve az a_k törvénye lehetőleg egyszerű.¹

¹ LEBESGUE egy hozzám intézett levelében tette fel ezt a kérdést.

Legyen $\theta(n, r, x)$ a (33) alatt definiált trigonometrikus polynom. Akkor azt állítom, hogy

$$f_4(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta(2^\nu, r_\nu, x)}{\nu^2}, \quad (33')$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

hol ¹

$$r_1=0, \quad r_\nu = 2 \cdot 2^{1^3} + 2 \cdot 2^{2^3} + \dots + 2 \cdot 2^{(\nu-1)^3},$$

$$(\nu=2, 3, 4, \dots)$$

ilyen keresett $f_4(x)$ függvény.

A $\theta(n, r, x)$ sorozatnak előbb tárgyalt tulajdonságai alapján világos, hogy az $f_4(x)$ függvénynek FOURIER-féle kosinussora az $x=0$ helyen divergens.

A mi most már az

$$f_4(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_k \cos kx + \dots,$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

kosinussorban föllépő a_k együttható törvényét illeti, ez egyszerűen a következőképen adható meg:

Tekintsük a következő, $2n$ számból álló számcsoportot:

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}.$$

Képezzük ezt a számcsoportot az n -nek következő értékeire:

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, 2^{4^3}, \dots, 2^{\nu^3}, \dots$$

és írjuk az így keletkező számcsoportokat rendre egymás mellé, miután azonban a ν -dik csoport számait mind ν^2 -tal elosztottuk. Ilyen módon egy egészen határozott végtelen sorozatot nyerünk. Ezen számsorozat k -dik száma az a_k . Az a_0 pedig egyenlő zérussal.

Tehát például

¹ Az r_ν -k úgy vannak választva, hogy fölbontván a zárójeleket a (33') sorban, olyan kosinussor áll elő, melyben az x összes többszöröseinek a kosinusa egyszer és csakis egyszer fordul elő.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -\frac{1}{2},$$

$$a_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{256}, \quad a_6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{255}, \quad a_7 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{254}, \text{ etc.}$$

10. Az előbbiekhöz még a következőt jegyzem meg.
Én állítottam föl először olyan divergens

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad (39)$$

végtelen sort, melyre nézve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

és melyre nézve a részletösszegek arithmetikai középértékeinek

$$s_0, \quad \frac{s_0 + s_1}{2}, \dots, \quad \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}, \dots$$

sorozata mégis konvergens. Elég volt ugyanis arra a divergens Fourier-sorra utalnom, mely egy mindenütt folytonos függvényhez tartozhatik. Utánam PRINGSHEIM alkotott egészen elemi úton ilyen természetű sorokat.¹ Később, székfoglaló értekezésemben,² újabb, a nevezett tulajdonsággal bíró egyszerű sorokat állítottam fel. Például az

$$\frac{1}{1-z} = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

sorfejtés szolgáltat egy ilyen

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

sort. Most már e dolgozat egy különösen egyszerű példát szolgáltat: a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sort, melyet épen most definiáltam.

¹ Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Sitz. der bayer. Akademie. Bd. XXXI, Heft IV, 1901, pag. 505—524.

² Asymptotikus értékek meghatározásáról. Math. és Term. Értesítő, XXVII. kötet, 7. oldal, 1909.

4. §. E Fourier-sorok divergenciájának természetéről.

11. A következőkben néhány megjegyzést közlök, melyek a (22'), (31'), (32'), (33') alatt definiált folytonos függvények Fourier-sorainak divergenciáját közelebbről jellemzik.

Legyen $f(x)$ egy mindenütt folytonos függvény és $s_k(x)$ e függvény Fourier-sorának k -dik részletösszege. Akkor, mint ismeretes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf s_k(x) \leq f(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup s_k(x).$$

Az $x=0$ helyet tekintve, e tételt még úgy is fejezhetem ki röviden, hogy az $s_k(0)$ részletösszegek az $f(0)$ függvényérték körül oscillálnak. Ez nem zárja ki azt, hogy például minden k -ra nézve $s_k(0) > f(0)$. Ismeretesek is ilyen példák, melyekben a FOURIER-féle sor az $x=0$ helyen *konvergens* és a mely példákra nézve a fenti egyenlőtlenség fönnáll. Az $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ függvények példája azt mutatja, hogy a szóban forgó jelenség a divergencia esetében is fölléphet.

Vegyük ugyanis például az $f_1(x)$ függvényt. Láttuk, hogy az összes

$$\sin(2n+1) \frac{x}{2},$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2\pi, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

függvényekre nézve az összes $s_k(0)$ FOURIER-féle részletösszegek pozitívek. Ebből következik, hogy az $f_1(x)$ függvénynek összes FOURIER-féle részletösszegei is pozitívek az $x=0$ helyen. Mint-hogy pedig

$$f_1(0) = 0,$$

tehát a mindenütt folytonos $f_1(x)$ függvényre nézve valóban

$$s_k(0) > f_1(0).$$

($k=1, 2, 3, \dots$)

Hasonló megfontolások érvényesek az $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ függvényekre nézve.

Ezt az eredményt még így is fejezhetem ki: a mindenütt folytonos $f_1(x)$ függvényre nézve az $s_k(0)$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

részletösszegek *egyoldalúlag* fekszenek az $f_1(0)=0$ függvényértékhez képest.

12. Jelöljük az $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ függvények egyikét $f(x)$ -szel. Kimutattam, hogy

$$f(0) = 0$$

és hogy az $f(x)$ függvényhez és az $x=0$ helyhez tartozó FOURIER-féle részletösszegeknek sorozata

$$s_0(0), s_1(0), s_2(0), \dots, s_k(0), \dots$$

egy *nem negatív* számokból álló sorozat. Ez a sorozat, az előbb kimutattam, *divergens*. Ha azonban képezem az arithmetikai közepek sorozatát:

$$s_0(0), \frac{s_0(0)+s_1(0)}{2}, \dots, \frac{s_1(0)+\dots+s_k(0)}{k+1}, \dots$$

akkor kell, hogy ezen sorozat *konvergens* legyen és hogy *határértéke* $f(0) = 0$ legyen.¹

Ez a körülmény a (33') egyenletben definiált $f_4(x)$ függvényre nézve minden nehézség nélkül *verifikálható*. E függvény FOURIER-féle sora az $x=0$ értékre nézve át megy az

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots \quad (40)$$

sorba, hol az a_k állandók előbb egyszerűen definiáltattak. Könnyű erről a sorról kimutatni, hogy részletösszegeinek arithmetikai közepei zérushoz konvergálnak; csak tekintetbe kell venni, hogy az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + 0 + 0 + 0 + \dots$$

sor részletösszegeinek összes arithmetikai közepei egy véges, n -től független, felső határ alatt maradnak.

A bizonyítás részleteit itt nem közlöm, csak megjegyzem

¹ Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes-Rendus, 10 décembre, 1900 és «Untersuchungen etc.», Math. Annalen, Bd. 58.

még, hogy a (40) alatti sor azon részletösszegei, melyeknek indexei

$$2, 2 \cdot 2^{1^3} + 2^{2^3}, 2 \cdot 2^{1^3} + 2 \cdot 2^{2^3} + 2^{3^3}, \dots, 2 \cdot 2^{1^3} + \dots + 2 \cdot 2^{v^3} + 2^{(v+1)^3}, \dots$$

a végtelenhez konvergálnak, míg azon részletösszegek, melyeknek indexei rendre

$$2^{1^3}, 2 \cdot 2^{1^3} + 2 \cdot 2^3, \dots, 2 \cdot 2^{1^3} + \dots + 2 \cdot 2^{v^3}, \dots$$

mind egyenlők zérussal, tehát a zérushoz konvergálnak.

13. A 3. §-ban olyan mindenütt folytonos függvények után kérdeztünk, melyeknek Fourier-sora a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallum egy helyén divergens. E pontban e kérdéstételnek egy új formáját akarom bemutatni.

Mínt hogy a Fourier-sornál a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallum összes helyei egyenlő szerepet játszanak a konvergencia és divergencia tekintetében, tehát föltehetjük, hogy $x=0$. Továbbá a mindenütt folytonos $f(x)$ függvényt mindjárt alávethetem a következő megszorításnak:

$$f(x) = f(2\pi - x),$$

ha

$$0 \leq x < \pi.$$

Tekintsük e függvény Fourier-sorát. Ez egy tiszta kosinussor:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_k \cos kx + \dots, \\ (0 \leq x \leq \pi)$$

hol

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt, \\ a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos kt dt, \\ (k=1, 2, 3, \dots)$$

Mínt hogy $x=0$ -ra a fenti kosinussor az

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots$$

sorba megy át, tehát a 3. §. problémáját még így is fogalmazhatom:

Keressünk egy olyan a

$$0 \leq x \leq \pi$$

intervallumban mindenütt folytonos $f(x)$ függvényt, melyre nézve az ő koszinus állandóiból alkotott végtelen sor

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots, \quad (41)$$

(hol

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos kt dt, \quad (42)$$

$$k=1, 2, 3, \dots)$$

divergens.

Ezt a problémát meg is oldottuk a 3. §-ban. Ha $f(x)$ jelenti az $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ függvények egyikét, akkor az $f(x)$ -hez tartozó (41) alatti sor divergens.

Emlékeztetek arra, hogy a (41) alatti koszinus állandókból alkotott sornak arithmetikai középértékei már konvergens sorozatot alkotnak és $f(0)$ -hoz konvergálnak egy tetszőleges, mindenütt folytonos $f(x)$ függvényre nézve és hogy ugyancsak egy tetszőleges, mindenütt folytonos $f(x)$ függvényre nézve az

$$a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 + \dots$$

sor összetartó. Ebből következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A legtöbbször használatos véges és folytonos függvényekre nézve egyenesen meg lehet állapítani egy olyan G pozitív állandót, hogy

$$|a_n| < \frac{G}{n},$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

Ki akarom most mutatni, hogy egy alkalmas véges és folytonos függvénynek a koszinusállandói tetszőleges lassúsággal konverghatnak a zérushoz.

Legyen pl. $f(x)$ a következő végtelen sor által definiálva:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 4^{\nu^2} x}{\nu^2}.$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

E függvény mindenütt folytonos a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumban; ugyanott véges is, mert

$$|f(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

A definícióból látszik, hogy ezen $f(x)$ függvénynek összes a_k kosinusállandói egyenlők zérussal, kivéve azon a_k -kat, melyeknek indexei rendre

$$4^1, 4^2, \dots, 4^{\nu^2}, \dots$$

Legyen röviden $4^{\nu^2} = n$. Akkor

$$a_n = \frac{1}{\nu^2} = \frac{\log 4}{\log n} > \frac{1}{\log n}.$$

Tehát a definiált $f(x)$ függvény esetében az n indexnek végtelen sok értéke mellett áll az

$$a_n > \frac{1}{\log n}$$

egyenlőtlenség.

Hasonlóképen lehet olyan mindenütt folytonos és véges $f(x)$ függvényt definiálni, melynek n -edik kosinusállandójára, a_n -re nézve végtelen sokszor érvényes az

$$a_n > \frac{1}{\log \log n}$$

egyenlőtlenség.

5. §. Záró megjegyzések.

14. Az előzőkből láthatjuk, hogy $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ egyszerű és könnyen analysálható példákat szolgáltatnak olyan mindenütt folytonos függvényre, melynek Fourier-sora a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallum egy helyén divergens.

Ismeretes, hogy P. DU BOIS-REYMOND fedezte fel az ilyen

folytonos függvények existenciáját. Az ő, valamint az ő követőinek példái más elv alapján vannak megszerkesztve. Ezek a példák, bár nagyon tanulságosak, nem olyan egyszerűek, mint az én példáim.

Du Bois-REYMOND még azt a problémát is fölvetette, hogy létezik-e olyan mindenütt folytonos függvény, melynek Fourier-sora *mindenütt* divergens.

E probléma még máig sincs megoldva.

Azt lehetne talán gondolni, hogy az

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{\nu^2} x}{\nu^2}, \quad (31')$$

$(0 \leq x \leq \pi)$

függvény FOURIER-féle kosinussora nemcsak az $x = 0$ helyen divergens (ezt kimutattam az elébb), hanem hogy egyáltalában minden x helyen divergens.

Ez az eset azonban nem forog fönn. Legyen x_0 a $(0, \pi)$ intervallumnak egy olyan *belső* helye, melynek alakja

$$x_0 = \frac{r}{2^s} \pi, \quad (43)$$

hol r és s pozitív egész számok.

Legyen k a legkisebb pozitív egész szám, melyre nézve

$$k^2 > s.$$

Akkor, ha csak t elegendő kicsiny,

$$f_2(x_0 + t) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\sin(2^{\nu^2}(x_0 + t))}{\nu^2} + \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{\sin(2^{\nu^2}t)}{\nu^2} = \Phi'(t) + \Phi''(t).$$

A $\Phi'(t)$ függvény transcendens egész függvénye a t -nek és így a $t=0$ környezetében bőven eleget tesz azon föltételeknek, melyek a Fourier-sor konvergenciájára nézve elegendők. Ámde $\Phi''(t)$ is eleget tesz a $t=0$ -nak elegendő kicsiny és *kétoldalú* környezetében egy ilyen elegendő föltételnek. Ugyanis

$$\Phi''(-t) = -\Phi''(t).$$

Röviden kifejezve: $f_2(x)$ egyenlő két olyan függvény összegével, melyek közül az első evidenten FOURIER-féle sorba fejthető, a második pedig «páratlan az $x=x_0$ hely elegendő kicsiny és két-oldalú környezetében».

Tehát az $f_2(x)$ FOURIER-féle kosinussora a (43) alatti x_0 helyen *konvergens*. A (43) alatti helyek a $(0, \pi)$ intervallumot mindeütt sűrűen lepik el.

De talán ezen dolgozatban közölt megfontolások mégis alkalmasak lesznek arra, hogy fölhasználásukkal a mindenütt divergens Fourier-sorral bíró mindenütt folytonos függvények existenciájára nézve végre világosságot kapjunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1909 decz. 13.-án tartott üléséből.)

PYRIT SAJÓHÁZÁRÓL.

ZIMÁNYI KÁROLY I. tagtól.

(Két táblával.)

ZEPHAROVICH¹ említi, hogy a pyrit Sajóházán (előbb Nadabula) a bányák felső szintjén *pyrrhotin*, *chalkopyrit* és *tetraédrit* kíséretében fordul elő. Újabban MELCZER² már kiemeli, hogy a sajóházai Károly-bányában a pyritnek nagyon szép pentagondodekaéderes kristályai a vaspátnak rhomboéderein ülnek. A magyar kir. kincstár egyik bányájából való az a pyrit, a melynek alakjai $o\{111\}$, $a\{100\}$ és $s\{711\}$.³

A következőkben leírt pyritek a Rimamurány-Salgótarjáni vasmű részvénytársaságnak ugyanabból a bányájából valók, a melyből az *albit*⁴ és *baryt*;⁵ néhány év óta ebben a bányában gyakrabban találunk szép, kristályodott pyritet.

A jól kifejlett kristályok öregszemű sideriten ülnek; a bánya VI. szintjén előforduló kristályok egyszerűbbek, míg a VII. szint déli fejtéséről a második sikló közeléből valók sokkal szebbek és többlapúak. A pyritkristályok felülete nem ritkán aransárgára vagy vörösesre befuttatott, néha laza és könnyen eltávolítható limonitos kéreg borítja. A kristályok többnyire kicsik (2—5 mm), ritkán nagyobbak (10—15 mm) is, egyenként vagy csoportosan ülnek a sideriten; nagyon szépek az olyan

¹ Mineralog. Lexikon. Wien 1859. 1. 336. l.

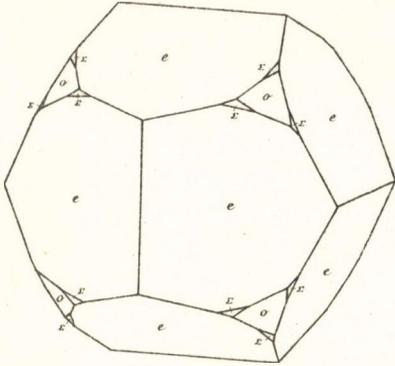
² EISELE G.: Gömör és Kishont törv. egyes. vármegyének bányász. monographiája. Selmezbánya, 1907. 536. l.

³ Földt. Közlöny 1905. 35. 493—494. l.

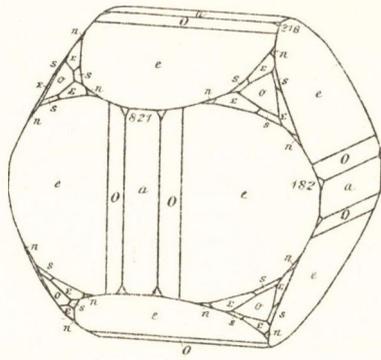
⁴ Ugyanott 153. l.

⁵ Földt. Közlöny 1909. 39. 12. l.

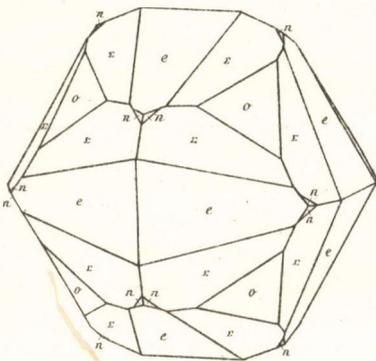
1.



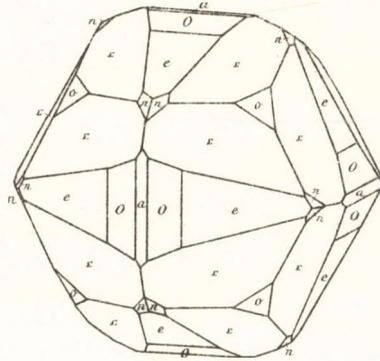
2.



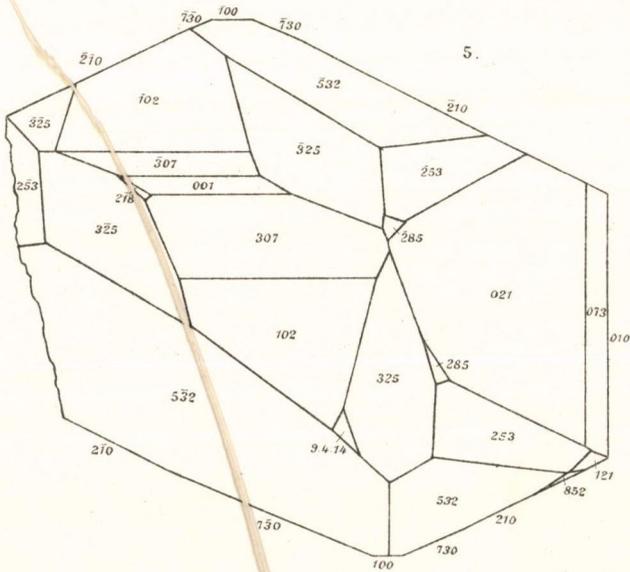
3.



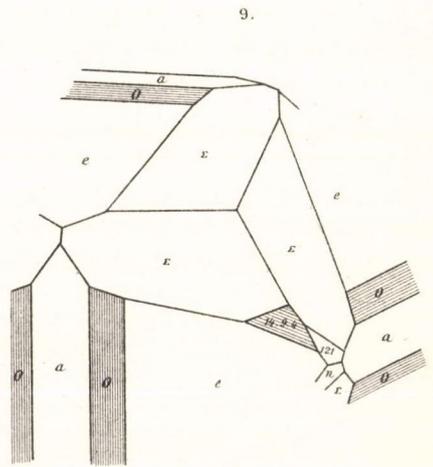
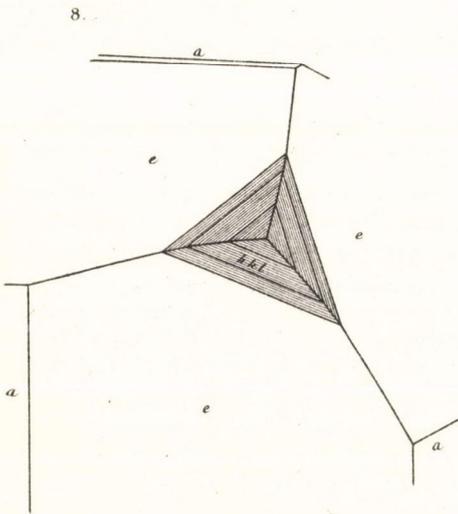
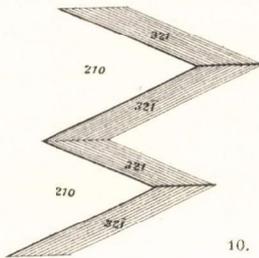
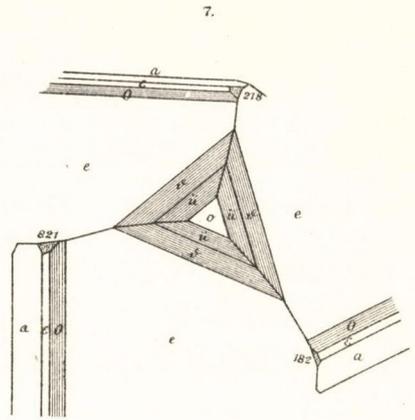
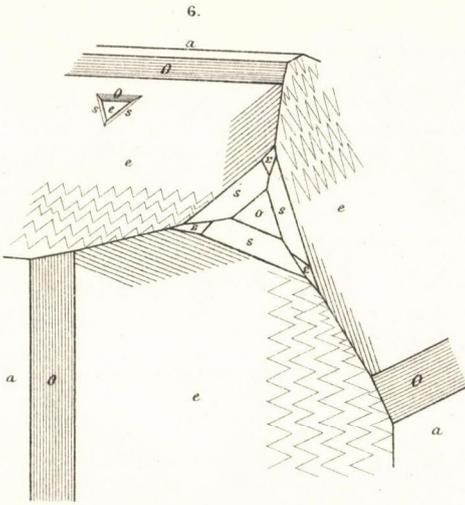
4.



5.







példányok, a melyeken a kristályok úgy telepedtek szorosan egymás mellé, hogy összeségükben stalaktitos képződményekre emlékeztetnek.

A legegyszerűbb kristályokon csak $e\{210\}$ fejtett ki, ehhez azonban többnyire még $o\{111\}$ és $a\{100\}$ is járul; a komplikáltabbakon $n\{211\}$ és egy vagy két dyakisdodekaéder is felismerhető. A kombinációk túlnyomó része pentagondodekaédes, vannak azonban kristályok, a melyeken $e\{210\}$ és $\Sigma\{532\}$ lapjai körülbelül egyenlő nagyok vagy az utóbbi néhány lapja nagyobb, úgy hogy a kristályok dyakisdodekaéderesek (3. és 4. ábra). Nem ritkán egyes lapok hiánya vagy túlnövekedése következtében a kristályok meglehetősen szimmetriátlan külsejűek, eltorzultak, mintegy összenyomottak (5. ábra). A lapok csaknem kivétel nélkül fényesek és jól tükrözők, a kombinációk nagyobbára egyszerűek.

A jól kifejtett, biztosan megállapítható 12 alak közül a *-gal jelöltek újak a pyritre, a dyakisdodekaéderek közül pedig négy $[210:111=1\bar{2}1]$ övhöz tartozik.

$a\{100\}$	$\Sigma\{532\}$
$o\{111\}$	$s\{321\}$
$e\{210\}$	$*\bar{u}\{14.9.4\}$
$\varepsilon\{10.3.0\}$	$b\{852\}$
$*O\{730\}$	$j\{741\}$
$n\{211\}$	$\{821\}$

Ezek közül csak $e\{210\}$ állandó; gyakoriak, de nincsenek minden kristályon meg $\Sigma\{532\}$, $*O\{730\}$, $o\{111\}$, $a\{100\}$, $n\{211\}$ és $s\{321\}$.

A mindig fényes és sima hexaéderlapok nagyobbára keskenyek; hasonlóan az oktaéder lapjai is kitűnően tükröznek, csak néha vannak rajtuk finom háromszögű rajzok, a melyeknek kissé görbült oldalai párhuzamosak $[532:111]$ élekkel. Az oktaéderlapok kisebbek vagy nagyobbak (2. és 3. ábra), néha egyáltalában hiányzanak, vagy csak egy-két oktansban látjuk apró lapocskáit (5., 8. és 9. ábra). Gyakran az $e\{210\}$ hexaédes csúcsait alkotó három szomszédos lapon az oktaédernek

apró laprészeletei egyszerre tükröznek, a miről a megfelelő övek beállításakor és a közelítő mérésekkel meggyőződhetünk.

Az uralkodó $e\{210\}$ lapjai vagy egészen simák, többnyire azonban csak a jellegző élekhez közelfekvő részük az, míg a másik lapfél ékalakú és orientált fekvésű rajzokkal fedett (6. ábra), még gyakrabban a lapok ez a része sűrű lapismétlődésektől facettált. Ezek a lapismétlődések többé-kevésbé párhuzamosan, mint cserépszindelyek, közelfekvő sorokban húzódnak egymás mellett; néha nagyobb megszakításokkal mint alacsony, fogazott szélű lépcsőfokok emelkednek egymás fölé. A lapismétlődéseket $e\{210\}$ sima és $s\{321\}$ vagy ehhez közelálló dyakisdodekaéder rostos lapocskái idézik elő (10. ábra), a melyek közt néha $o\{111\}$ laprészeletei is tükröznek. Az $e\{210\}$ és $s\{321\}$ lapocskák alkotta csúcsok többnyire legömbölyödöttek, ezekről a görbült felületekről reflektált sajátos damaszt-szerű fény látszólag a rhombtizenkettős lapjaitól ered, a melyek s , Σ és n lapjaival egy övben fekszenek. A pentagondodekaéderlapok két oldalán, az oktaéder lapjai mellől, $[e:o]$ élekkel párhuzamosan, durvább rostozás húzódik $*O\{730\}$ lapjai felé. (6. ábra.) Többször $e\{210\}$ sima lapjain kissé kiemelkedő, szimmetriás háromszögű alakokat is láthatunk, a melyeken a tetőző, sima lap $\{210\}$, a rostos oldallapok pedig $\{730\}$ és $\{321\}$ vagy ezeknek vicinalisai (6. ábra).

$*O\{730\}$ gyakori alak, szélesebb vagy keskenyebb, de többé-kevésbé rostos lapokkal, ennek daczára a keskenyebbek közt mindig találunk jól tükrözőket, elég éles reflexekkel. A nagy, széles lapok kissé görbültek, a mit sok sávalakú, egymást nagyon tompa szög alatt metsző pentagondodekaéderlap okoz, a melyeknek tükörképei sűrűn egymás mellé sorakoznak; a közelítő mérések $f\{310\}$, $\xi\{11.4.0\}$, $k\{520\}$, $\{830\}$ és $\{12.5.0\}$ alakokra, illetőleg vicinálisaikra vezethetők vissza. Ezt az új pentagondodekaédert mint kérdéses alakot az ötösbányai (előbb Kotterbach) pyriten is megfigyeltem¹ és keskeny lapjai elvéve a dognácskai pyriten is felismerhetők.

¹ Annales histor.-natur. Musei Nation. Hungar. 1904. 2. 109. 1.

Ennek a pentagondodekaédernek mért és számított értékei a következők:

	Mérés	n	Számítás
$O : a = (730) : (100) = 23^\circ 22'$		15	$23^\circ 11' 55''$
$: O' = : (307) = \text{—}$		—	68 46 21
$: o = : (111) = 40 37$		2	40 42 11

$\varepsilon \{10.3.0\}$ lapjai mindig keskenyek és fényesek (7. ábra).

$n \{211\}$ lapjai kicsik vagy keskenyek, simák és jól tükröznek, ha nagyobbak, akkor $[100 : 111]$ él irányában finoman rostozottak.

A dyakisdodekaéderek közt leggyakoribb és erre az előfordulásra jellegző $\Sigma \{532\}$; ennek az alaknak lapjai $[210 : \bar{1}02 = 2\bar{4}1]$ övhöz tartoznak, a mely kristályokon $s \{321\}$ és $n \{211\}$ megfelelő lapjai is jelen vannak, azokon $[321 : 211 = \bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ és $[100 : 132 = 0\bar{2}3]$ öveket szintén meg lehet állapítani. Feltűnő, hogy ez az egyszerű jelű és több fő övben fekvő alak a pyritnél aránylag ritka; erre vonatkozólag csak azt említem, hogy oly lelethelyek mint Elba, Traversella és Brosso alakjai közt még nem ismeretes; az alakokban és különféle kombinációkban oly gazdag dognácskai pyritnek mintegy harmincz megmért kristályán $\Sigma \{532\}$ dyakisdodekaédernek csak egyetlen kicsi lapocskáját találtam $[421 : 111 = \bar{1}\bar{3}\bar{2}]$ és $[321 : 211 = \bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ övekben. Ezt az alakot először HELMHACKER¹ a waldensteini pyriten figyelte meg alárendelt lapocskákkal, ellenben a porkurái pyriten ez az alak jól kifejlett, mint azt SCHMIDT² és a későbbi kutatók³ vizsgálataiból tudjuk. A sajházai kristályokon ennek az alaknak lapjai mindig simák és kitűnően tükröznek; vagy egészen aprók (1. és 6. ábra), vagy csaknem egyensúlyban fejlettek ki $e \{210\}$ lapjaival (3., 4. és 9. ábra), találhatunk azonban kristályokat, a melyeken ennek a dyakisdodekaédernek legalább néhány lapja a pentagondodekaéder rovására nagyobbra is nőtt.

¹ TSCHERMAK's Mineralog. Mittheil. 1876. 12. I. I. tábla, 3. ábra.

² Természetrzaji Füzetek 1891. 13. 89. l.

³ Zeitschrift f. Krystallogr. 1901. 36. 386. l. — Bulletin internat. de l'Acad. des Sci. Bohème. 1903. 8. 1. l. — Mathem. és természettud. Értesítő 1903. 21. 358. l. — Földt. Közlöny 1908. 38. 286. l.

$s\{321\}$ lapjai többnyire kicsik, keskenyek, rostozásuk daczára mégis jól mérhetők; ellenben a következőkben leírt ki-fejlődésnél lapjai vagy egyáltalában hiányzanak, ha pedig megvannak, hajlásuk ingadozó, úgy hogy tulajdonképen inkább $s\{321\}$ vicinálisainak felel meg; ebben az esetben $s\{321\}$ lapjainak hajlása az oktaéderhez rendszeren $1^\circ - 1\frac{1}{2}^\circ$ -kal nagyobb a számítottnál, t. i. $23^\circ 16' - 23^\circ 46'$.

A pyritnek egy fontos és lapokban gazdag öve $[210:111 = \bar{1}\bar{2}1]$; a sajóházai kristályokon sokszor $o\{111\}$ és $e\{210\}$ közt nagyobb vagy szélesebb rostos lapok vannak (7. és 8. ábra), a melyek valóságban több, egymást nagyon tompa szög alatt metsző dyakisdodekaéderlapok összesége. A goniométeres mérés-kor a különböző erős tükörképeknek egész sorát láthatjuk; ezeket az öveket több kristályon mértem, különböző incidens szögek alatt, a sík lapokról csak az elég erős és éles tükörképeket vettem figyelembe. A hajlások többnyire ingadozóak, úgy hogy az eltérések az egyes mérések és számítások közt $30^\circ - 1^\circ$ is, a mi a közelfekvő vicinális lapoktól ered; találhatunk azonban kevésbé rostos, vagy magános, egészen sima lapokat, a mikor t. i. csak egy vagy két dyakisdodekaéder van az illető övben (5. és 9. ábra), ezeknek mért hajlása nagyon jól egyezik a számítottakkal. Némely kristályon ezeknek a keskeny dyakisdodekaéder lapoknak a $[210:102]$ és $[hkl:532]$ élékhez közelfekvő része fényesebb, a rostozás sokkal gyöngébb, de itt a lap felülete kissé görbült, a minek következtében a $[210:111 = \bar{1}\bar{2}1]$ főöv erősebb reflexeiből kiágazva sokkal gyöngébb reflexsorok huzódnak és a főöv reflexorát hegyes szög alatt metszik; ezeket a melléköveket azonban nem állapíthattam meg. Az $[\bar{1}\bar{2}1]$ övnek biztosan megállapítható dyakisdodekaéderei közt a leggyakoribbak $\delta\{852\}$ és az új dyakisdodekaéder $*\bar{u}\{14.9.4\}$, a mely utóbbi még $[102:532 = \bar{6}83]$ övhöz is tartozik (9. ábra); különben ellenőrzés végett a jobban kifejlett lapokat lehetőleg több alak lapjaihoz is mértem. Újabban TRAVIS¹ a cornwalli (Pennsylvania) pyriten a $\{14.9.3\}$ tautozonális alakot állapította meg.

¹ Proceed. Americ. Philos. Soc. Philadelphia, 1906. 45. Nr. 183. 133. l.

A következő szögtáblázatban csak a legjobb mérések középértékeit adom:

	Mérés	n	Számítás
$\ddot{u} : a = (14.9.4) : (111) = 24^\circ 23'$		12	$24^\circ 23' 58''$
$: a =$	$: (100) = 35 \ 0$	1	35 7 33
$: a' =$	$: (010) = 58 \ 15$	1	58 16 42
$: a'' =$	$: (001) = 76 \ 32$	2	76 29 2
$: O =$	$: (307) = 57 \ 23$	1	57 31 20
$: \Sigma =$	$: (532) = 5 \ 43$	5	5 40 42
$: \Sigma' =$	$: (253) = 36 \ 19$	1	36 20 11
$: \Sigma'' =$	$: (325) = 40 \ 37$	1	40 41 50

$j\{741\}$ alakot először a dognácskai pyriten találtam, a melyen övekből határozhattam meg jelét; a sajházai kristályokon csak egy keskeny, jól tükröző lapocskáját találtam, az $[1\bar{2}1]$ övhöz tartozó más dyakisdodekaéderekkel.

Vannak még vicinális lapok, a melyeknek hajlását az oktaéderhez a következő határok közt mértem: $27^\circ 9' - 27^\circ 53'$, $28^\circ 7' - 28^\circ 56'$, $30^\circ 26' - 30^\circ 39'$, $34^\circ 12' - 34^\circ 16'$, $35^\circ 15' - 36^\circ 32'$; ezek közül egyesek talán a már ismert $Z\{531\}$ dyakisdodekaéderhez tartoznak, a melynek számított hajlása az oktaéderhez $28^\circ 34'$.

A $\{821\}$ dyakisdodekaédert először MAURITZ¹ figyelte meg a porkurai pyriten, ez az alak a sajházain sem gyakori; hiányos számú lapocskái kicsik, síkok ugyan, de mindig érdekes és gyöngéfényűek (2. és 7. ábra), némelyek alig tükröztek. Jelének meghatározására $[100 : 021 = 0\bar{1}2]$ és $[210 : 0\bar{2}1 = \bar{1}24]$ öveket is felhasználhattam, ezeknek mindegyikéhez egyúttal $n\{211\}$, az utóbbihoz $\Sigma\{532\}$ lapjai is tartoznak; az elsőnek lapjai (100), (821), (121), (021), ($\bar{1}21$), (821), ($\bar{1}00$) stb., a másik övnek lapjai pedig (210), (821), ($2\bar{1}1$), (253), (021), ($2\bar{1}0$) stb.

A mért és számított szögeket az alább közölt táblázatban foglaltam össze, a melyben n a mért élek számát jelenti.

¹ Mathemat. és természettud. Értesítő 1903. 21. 358. l.

	Mérés	n	Számítás
$a : \varepsilon = (100) : (10.3.0) = 16^\circ 37\frac{1}{2}'$		6	$16^\circ 41' 57''$
$: e = : (210) = 26\ 34\frac{1}{2}$		28	26 33 54
$o : n = (111) : (211) = 19\ 15$		6	19 28 26
$: a = : (100) = 54\ 44$		5	54 44 8
$: s = : (321) = 22\ 13\frac{1}{2}$		9	22 12 57
$: b = : (582) = 26\ 4\frac{1}{2}$		16	26 6 0
$: j = : (741) = 31\ 29$		1	31 28 36
$: e = : (210) = 39\ 15$		14	39 13 53
$\Sigma : o = (532) : (111) = 20\ 30$		24	20 30 50
$: a = : (100) = 35\ 48$		4	35 47 44
$: e = : (210) = 19\ 25$		17	19 25 4
$: \Sigma' = : (325) = 35\ 21$		8	35 20 4
$: \Sigma'' = : (532) = 58\ 21$		2	58 14 35
$: s = : (321) = 4\ 17$		4	4 18 24
$: n = : (211) = 6\ 30$		5	6 35 12
$: j = : (741) = 11\ 55$		1	11 58 57
$(821) : o = : (111) = 40\ 11$		2	40 7 58
$: a = : (100) = 15\ 32$		3	15 36 56
$: e = : (210) = 14\ 42$		1	14 16 50
$: \Sigma = : (532) = 20\ 28$		2	20 22 50
$b : a = (852) : (100) = 33\ 59$		1	33 56 47
$: \Sigma = : (532) = 6\ 58$		2	7 2 3
$: \Sigma' = : (253) = 37\ 45$		1	37 45 25

Az alább következő összeállításban a kombinációk egyes alakjait fejlettségük szerint csökkenőleg soroltam fel; a mely kristályokon az $[1\bar{2}1]$ övek lapjait biztosan meg nem határozhattam, azokat csak $\{hkl\}$ általános indexekkel jelöltem. Az I. és II. táblán néhány jellegző kombináció rajzát láthatjuk.

e, o	e, Σ, O, o, a, n
$e, \{hkl\}$	$e, \{hkl\}, a, o, \Sigma$
$e, \{hkl\}, o$	e, Σ, O, o, s, n, a
$e, \{hkl\}, a$	$e, \Sigma, O, a, o, s, b, j$
e, o, a	$e, a, O, o, \Sigma, s, \ddot{u}, n$
e, o, Σ	$e, O, a, \ddot{u}, b, \Sigma, (821), o, \varepsilon$

e, o, Σ, a	$e, a, O, \ddot{u}, b, s, o, \Sigma, (821)$
e, Σ, o, n	$e, \Sigma, O, o, \ddot{u}, b, s, a, n$
$e, \{hkl\}, o, \Sigma$	$e, \Sigma, O, a, o, \ddot{u}, b, n, \{821\}, \varepsilon$
	$e, a, O, o, s, b, \ddot{u}, n, \{821\}, \varepsilon$

Megvizsgált kristályaim közt, a melyek mind a magyar Nemzeti Múzeum gyűjteményéből valók, ikrek nem voltak.

Végül köszönetemet fejezem ki dr. KRENNER JÓZSEF egyetemi tanár úrnak szíves engedélyeért, hogy a tudom. egyetem ásványtani intézetében a kristályméréseket végezhettem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 április 18.-án tartott üléséből.)

A BRACHYURÁK ÉS PAGURIDÁK STEREOTROPISMUSÁRÓL.¹

VERESS ELEMER-től.

(Négy táblával.)

A legtöbb rák idegen testek mellett igyekszik meghúzódni; ez sok esetben abban nyilvánul, hogy egyesek testüket több oldalról idegen tárgyakkal veszik körül. J. LOEB az efféle saját-ságot általában stereotropismusnak nevezi.² Ezt a kifejezést rövidség kedvéért ebben a tanulmányban én is alkalmazom, bár némely esetben az illető állatok magatartása nem csupán az idegen testek mechanikai hatásának, hanem másféle ingereknek is eredménye.

A Decapoda-nak főleg két, az Anomura és a Brachyura sectiójába tartozó fajtájában a rendszertani rokonságnak a különböző ingerekkel szemben való viselkedés is megfelel. Az Anomura közé a Paguridákat (remeterákok) és a Galatheákat is sorolják; a Brachyura között pedig, mint rokonok, a Dromia, Dorippe, Maja stb. szerepelnek. A stereotropismus mindegyiken nyilvánul. E tekintetben fokozatokat lehet fölállítani, melyek tetőpontján a Pagurusok, ezek között is a Paguristesek foglalnak helyet. A stereotropismussal kapcsolatos érzékenység skáláját néhány közelopon, a nápolyi öbölben gyakori rákfélére vonatkozólag³ a következőkben állíthatom föl.

¹ A nápolyi zoológiai állomás élettani osztályán készült dolgozat.

² I. LOEB: Vorlesungen über die Dynamik d. Lebenserscheinungen. Leipzig, J. A. Barth. 1906. 229. l.

³ Lo BIANCO lovag úrnak a kísérleti anyag bőséges beszerzéseért, BURIAN magántanár úrnak pedig a kísérleti felszerelés átengedéseért hála köszönettel tartozom.

1. *Pilumnus*. Idegen tárgyat nem vesz magára, de teste hátulsó felével szögletekbe, kövek közé, stb. vonul be. Ha a védelműl szolgáló test — pl. nagy *Pagurus*, nagy csigahéjban, *Actiniákkal*, moszatokkal stb. tele — helyét változtatja, a *Pilumnus* sok esetben követi azt, attól el nem válva, miközben az aránylag gyors helyváltoztatás közben igen rövid reakcióidők tűnnek föl.

2. *Dorippe lanata*. Két utolsó pár lába akként módosult, hogy ezekkel, főleg a karmok segítségével idegen tárgyat a hátán rögzítve tud tartani. A karmok az idegen testbe beleakadván, ezt akkor is fogva tarthatják, ha esetleg az ingerlékenység és ezzel kapcsolatban az izomműködés nem is volna kielégítő. Ezért az idegen tárggyal való kapcsolat az ingerlékenységet nem mindig oly szempontból jellemzi, mint pl. a *Pagurusok* esetében.

3. *Dromia vulgaris*. A *Dorippe* sokféle idegen testet, a *Dromia* ellenben többnyire szivacsot (*Suberites*) hord a hátán. A szivacs lassú növekedés közben fokonkint sapka módjára szorosan rásimul a rák hátára és ott biztosan rögzül. Az életmóddal kapcsolatos cselekvések úgy a *Dromián*, mint a *Dorippén* is csak ezeknek az idegen testeknek jelenlétében folynak le rendes medrükben. Az idegen testek eltávolítása ép úgy megzavarja ez állatok életfolyását, mint a *Paguridákét* a csigahéjtól való megfosztás. A különbség e tekintetben csak fokozati.

4. *Galathea strigosa* és *squammifera* (*Anomura*, fam. *Galatheidae*). Potrohuk hasi felületét igen vékony, lágy pánczél fedi, azért ezek a rákok potrohukat behajlítják és így védik az érzékeny felületet. Ez a behajlítás ugyanolyan ingerekre módosul, mint a mely ingerek a *Dromiának*, *Dorippének* és főleg a *Paguridáknak* idegen tárgyakkal való kapcsolatát is megváltoztathatják.

5. *Eupagurus Prideauxii*. Teljesen puha, csigavonalban görbülő potrohát csigahéjba rejti és szabályszerűen az erre telepedt *Actiniával* (*Adamsia palliata*) él együtt. Törzse legtöbbször védelem nélkül marad, de erre nincs is föltétlenül szükség. A csigahéjjal való kapcsolat nem is oly szoros, mint a kö-

vetkező fajtáknál; az *Eupagurus*, ráíjesztés következtében, rázkódtatásra stb. igen heves mozgásokat végez, nagyokat ugrik stb., miközben a héjból kieshetik. Az ingerlékenység mesterséges csökkentése is hamarabb vezet a héjjal való kapcsolat megszűnésére, mint a *Pagurus* vagy a *Paguristes* esetében.

6. *Pagurus striatus* és *Paguristes maculatus*. A testnagysághoz és más szükségletekhez képest gondosan megválogatott csigahéjakban tartózkodnak, melyekbe alkalomadtán a lehető legmélyebben lehúzódni szeretnek. A héjra szintén *Actiniák*, legtöbbszörre *Adamsia Rondeletii*-k telepednek, melyeket néha maga a rák szed össze, esetleg a rokonok csigaházáról. A héjjal való kapcsolat megzavarására irányuló beavatkozásokkal szemben a védekezés a *Paguristes*-en a legkitartóbb. A stereotropikus érzékenység ezen a fajtán jutott a kifejlődés tetőfokára. Ezt úgy a héjjal való kapcsolat megszüntetésére irányuló beavatkozások hatása, mint a potroh érzékenységének topographiája egybehangzóan bizonyítja.

A stereotropismus tényezőit keresve, azt vizsgáltam, hogy milyen ingereknek van részük a stereotropismusra vezető reakciók kiváltásában. E szempontból főleg a fénynek, a hőmérsékletnek, a víz oxygeniumkészletének és a mechanikai ingereknek hatását figyeltem meg. Nehány kísérleti sorozat az elektromos áram hatására vonatkozólag inkább csak összehasonlítás szempontjából érdekes.

I. Vizsgálatok a fényérzékenységre vonatkozólag.

1. A *Pilumnus* fényérzékenysége. A rákot négyszögletes üvegedényben tengervízbe tettem. Az edény fenekére egyenletesen homok volt szétterítve. Az edény egyik felét beárnyékoltam, a másik felére közvetlen napfényt bocsájtottam. A *Pilumnus*-on mechanikai ingerekre igen könnyen gátlás támad; ebből eredőleg, ha szokatlan környezetben van, mozgás közben meg-megáll és általában igen óvatos. Bárha az állat hátuljával az edény szögletének támaszkodik, megvilágításra e védelmet nyújtó helyzetből kimozdul. Hosszú reactioidővel, 6—7 percczel a megvilágítás után lassan elvonul és valamelyik árnyékos szögletben

telepedik meg. Ha e helyzetben hirtelen megvilágítjuk, össze-
rezzen és még jobban odalapulni igyekszik; a fény tehát a
szokásos védelemkeresésre irányuló működést és így az izom-
tónust is fokozza, legalább a behatás kezdetén. Később meg-
lazul a szilárd testtel való kapcsolat s az állat a kedvező hely-
zetet elhagyja. Ha az árnyék és a napfény határát a Pilumnus
fölött lassan tovamozdítjuk, ezt a határvonalat az állat épügy,
mint a védelmet nyújtó tárgyat is, követi.

2. *Dorippe lanata*. A hátát fedő élő vagy élettelen testek-
től megfosztva fényingerekre élénkebben reagál, mint az ide-
gen testek védelme alatt, jóllehet szemeit ezek az idegen testek
nem szokták elfedni. Védtelen helyzetben, pl. az edény köze-
pén, megvilágításra jellemző védekező mozgások támadnak. Ha
az üvegfal felé teste hátuljával van fordulva, tehát bizonyos
fokú védelmet érez, közvetlen napfényvel megvilágítva, helyé-
ről nem távozik, hanem 15—25"-nyi lappangási idő multán
első két pár lábával a homokban ásó mozdulatokat végez és
nemsokára megnyugszik. A fal mellől akkor sem mozdul el, ha
az árnyék határvonalát a szemekre állítjuk be.

Ha a Dorippét szemeivel fordítjuk a fal felé, elfordul attól
és eltávozik, akár sötétbe, akár világosságba kerül. Utóbbi eset-
ben magát a homokban elásni igyekszik. A *Dorippe* reactiói-
ban tehát, ha ezek többféle ingerlésre következnek be, a mecha-
nikai ingerlékenység nagyobb súlylyal szerepel, mint a fény-
érzékenység.

3. *Dromia vulgaris*. Nyugodt magatartásánál fogva efféle
kísérletekre igen alkalmas; helyét ritkán változtatja. Lomha
mozgásának megfelelően a fényingerekre különleges módon
reagál. Ha közvetlen napfényvel hirtelen szembekerül, 90—
180°-nyi szög alatt, nagyjában helytmaradva, megfordul és az-
tán a homokban ollójával gödröt ás magának. A lappangási
idő hosszú, a fordulás néha csak 20—25" multán kezdődik.
A *Dromia* beárnyékolásra is megrezzen, de helyéből nem moz-
dul ki. A 90°-nyi elfordulás után elfoglalt helyzet legtöbbször
csak viszonylag kedvező az állatra; az állat ezt mind jobb és
jobb helyzettel lassankint fölcseréli. Ha pl. 10 percznyi árnyé-
kolás után a napsugarakat oldalról bocsátjuk a *Dromiára*, körül-

belül csak 90" mulva következik be a fordulás, melynek értéke most csak 5--10°; és 150" telik el, míg az állat teljesen hátat fordít a fényforrásnak. E fordulások egyes szakaszainak megfelelő reakcióidők a viszonylag mind megfelelőbb helyzet elfoglalása közben elég szabályosan növekednek, az inger intenzitásának csökkenése miatt. E csökkenés pedig abból ered, hogy a mint az állat helyét változtatja, a fény beesési szöge megfelelően változik.

4. *Galathea strigosa*. Közvetlen napfény elől elvonul és pedig különleges mozgástypusának megfelelően lehetőleg oldalogva, vagy hátrafelé. Ha az edényhez teste hátulsó felével odasimult és közvetlen napfény éri, még szorosabban odasimulni igyekszik, de nem fordul el, mint a *Dromia*. Ha most az edény valamelyik szögletét beárnyékoljuk, odavonul, ollóit eleinte előre tartva; csakhamar azonban oldalogni kezd, végül hátrafelé fordulva halad az árnyékba és ott meglapul. Ha az egész edény meg van világítva, a szögletből nem mozdul ki, legfeljebb eleinte hátrálni igyekszik és lábaival oldalra tapogatózik. Fényingerlésre sohasem ás a homokban, hanem a lehetőségig hátrálni igyekszik.

5. *Galathea squammifera*. Megvilágításra valamennyi vizsgált rákfélénél szabályosabban és igen rövid reakcióidővel reagál. A lassan tovamozdított árnyékhatárt, ha az pl. 1 mp.-ben 1—1½ cm.-nyi utat tesz is meg, szabályosan, késés nélkül követi. A fényérzékenység és a stereotropikus érzékenység reflexindító hatása között itt is bizonyos algebrai összegeződésről lehet beszélni. Ha ugyanis a hátulsó felével árnyékos szögletbe vonult *G. squammiferát* elülről megvilágítjuk, az elvonulást megelőző lappangási idő 15—20-szor akkora is lehet, mint midőn pl. az állat oldalgó mozgással juthat árnyékba. Az említett helyzetben megvilágított *G. squammifera* az előremozgás révén elérhető árnyék felé nem indul el, hanem még hátrább vonulni igyekszik, a szögletben még jobban meglapul, lábaival izgatottan tapogat és a homokban magát elásni igyekszik. Ha az említett helyzetben megvilágított rákot úgy fordítjuk meg, hogy oldala tekintsen az edény árnyékos része felé, oldalgó mozgással, sőt hátrafelé fordulva, azonnal és gyorsan elvonul. Az érintés hatása itt nem zavaró körülmény.

Ha az edény egyik felében a *G. squammiferát* szétszórt napfényvel világítjuk meg, nem vonul el azonnal, hanem előbb, körülbelül 15—20 mp.-ig lábaival a homokot túrja és csak azután vonul árnyékba.

6. *Eupagurus Prideauxii*. 15 darab csigahéjas *Eupagurust* körülbelül 25 l. térfogatú, szögletes üvegmedenczében vízbe tettem. Ennek fenekére a középén homokból kis halmot csináltam, úgy azonban, hogy az az edény széle mentén a közlekedést sehol sem zárta el. Az edény szélső $\frac{1}{3}$ -át beárnyékoltam, a középső $\frac{1}{3}$ -ot a homokdombbal együtt közvetlen napfényvel megvilágítottam, a tulsó $\frac{1}{3}$ -ot pedig gyöngén beárnyékoltam. A sötétebb árnyékba került *Eupagurusok* nyugodtak voltak, a félarányékban levők ellenben nyugtalankodtak, ide-oda mászkáltak, ugráltak és egymást támadták; a megvilágított középső részben levők pedig a homokot észrevevén, ebben magukat mélyen elásták, úgy, hogy csak csápjaik, szemük és szájrészeik látszottak ki. A teljes árnyékból a napos részbe tévedt 1—2 *Eupagurus* a homokban magát szintén elásta, holott ez, ha az állatok héjban vannak, legalább az aquariumban, nem szokásuk. A homokban elrejtőzött *Eupagurusokon* hosszabb beárnyékolás után alkalmazott megvilágításra érdekes reflexmozgásokat lehet látni. Ha közvetlen napfényt bocsájtok valamelyikükre, 5—6" múlva csápjaival (oldalsó hosszú antennáival) hátrafelé nyúlva, teste mediánvonalára felé két oldalról homokot halmoz föl. Elsötétítésre az ilyen mozgás azonnal megszűnik. Ez a finom mozgás elemi tényező a fényérzékenység bemutatására és elemi tényező azok között a jelenségek között is, melyek a csigahéjba elrejtőzéssel kapcsolatosak. Ezt annál is inkább állíthatom, mivel másfajta kísérletek alkalmával azt tapasztaltam, hogy az antennák, főleg a medialis kisebb pár antenna mozgásainak élénksége és jellege, és a stereotropismus (a potroh elrejtése) határozott kapcsolatban van egymással. Mindkét mozgás az ingerlékenység viszonyainak jellemzésére alkalmas.

A napfény hatását az *Eupagurusok* csoportjára a következő adatok szemléltetik: míg pl. déli 12 órakor az edénynek napos felében 8 darab, az árnyékban 6 darab tartózkodott, addig fél óra múlva a napos félben csak 2 darab, árnyékban tehát 13 da-

rab volt (15° hőmérséken). Az elosztásnak ez a változása nem valami szabályos tropismusos reactio. Magyarázata az, hogy a napon levő rákok igen nyugtalanok, folyton ugrálnak és kergetőznek. Közülük aztán az, a melyik véletlenül árnyékba került, azonnal nyugodtabb lesz maga is és nyugodt a környezete is, mely nem zavarja és így a helyváltoztatásra, a fáradtan idekerült állat nem igen hajlandó. Mivel $15-16^{\circ}$ -nál magasabb hőmérséken a mozgások még hevesebbek, mint alacsonyabb hőmérséken, a hőviszonyokat ily kísérletekben szem előtt kell tartani.

A héjuktól kiűzött Eupagurusok a következő szakaszokra osztott edényben: árnyék — megvilágított mély homok — közvetlen napfény, még határozottabb törekvéssel ássák el magukat a homokban, mint a héjas Eupagurusok. A napfényre került példányok számára a homokhegy valóságos kerítés, melyen túl az árnyékba, bár az bizonyos fokú védelmet és megnyugvást nyújt, nem igyekeznek, hanem a naptól elfordulva a homokban elássák magukat. Néha az árnyékból is kijön egy-egy rák a napos homokra és ott elássá magát. Az Eupagurusok stereotropismusára vonatkozólag tehát az ingerhatások algebrai resultánsa a mechanikai ingerlékenységet emeli ki.

7. Pagurus striatus. A napfény elől az első percekben szintén árnyékba vonul, majd többszörös ide-oda vándorlás után, talán az alkalmazkodás révén ez a törekvés veszt elevenességéből. Hosszabb idő, pl. 17—20 percz mulva azonban a fénynek mozgásra kényszerítő hatása elől a többség mégis az árnyékban keres nyugalmat.

8. Paguristes maculatus. Csigahéjától megfosztva igen gyámoltalanná s a világossággal szemben érzékenyebbé válik. Szétszórt, de azért erős világossággal elárasztott helyről árnyékba vonul. Mihelyt azonban héjába visszakerül, ez az érzékenység erősen csökken, a Paguristes most már a világos területeken is megmarad és csak esetleg hosszú reactióidővel vonul árnyékba. Csoportok, melyek egyes tagjai egymást folytonos éberségben tartják, az edény napos oldalán is szívesen tartózkodnak.

Az alkalmazkodás szerepe a mozgások sajátosságaira annyiból nyilvánul, hogy az árnyékban hosszasan időzött

Paguristes, ha a világosságra kénytelen jönni, a fényforrástól többé-kevésbé elfordulva, szemei számára a nagy héj és függelékei (actiniák stb.) által vetett árnyékot biztosítani igyekeznek és sajátságosan oldalogva kúszik tova. Épp ezért a fény keresésére való hajlandóság sokszor csak látszólagos. Ha a világítási különbségeket erősen lefokozzuk, az állatok nagyobb csapatában is soká tartó nyugalom áll be.

Az eddig közölt megfigyelésekből következik, hogy a Pagurusok erős megvilágításra oly módon keresnek védelmet, hogy az a stereotropismussal vonatkozásba hozható. A stereotropismus tehát nem pusztán mechanikai ingerek eredménye, bár az ingerek összeségében a fény alkalomadtán nem a legnagyobb értékkel szerepel.

II. A) Alacsony hőmérsék hatása.

1. A *Dromia vulgaris* átmeneti lehülés nélkül — 2°-os tenger-vízbe kerülvén, ollóit a lehetőségig közelíti egymáshoz, mediális antennái csapkodni megszűnnek.

2. A *Galathea squammifera* hasonló behatásra ollóit kifeszíti, de teste középvonalában egymáshoz közelíti és potrohának görcsös csapkodása közben az edény faláig hátrál.

3. Az *Eupagurus* — 2°-os vízben lábait behajlítva közelíti testéhez, a csigahéjba teljesen behúzódik, medialis antennáinak billegető mozgása megszűnik. 12°-os vízben görcsös, explosív mozgásokkal tér magához. Az *Eupagurus* + 5°-os vízben is azonnal beljebb húzódik a héjba, 5—6 percz múlva kissé kijebb jön, de azután ismét szemtengelyéig behúzódik.

4. *Pagurus striatus*, — 2°-os tenger-vízbe kerülve, eleinte kis rángásokkal, majd lassú folytonos mozgással behúzódik. A mediális kis antennák rhythmusos mozgásai és a héjjal való kapcsolat minősége között a vonatkozás itt is nyilvánul. Mihelyt az alacsony hőmérsék a stereotropismusra módosító hatását kifejtette, az antennák mozgása megváltozik. Rendes mozgásokat az 1. ábrán igyekeztem föltüntetni.¹ Középnagyságú Pagu-

¹ Az antennák mozgását irókészülékkel ábrázolni meg sem kíséreltem, nemcsak azért, mert a megfelelő finom készülékek előállítására idő

rus antennáján 1—1½ másodpercenként látható 1—1 billentés. —2°-nak pár percnyi behatása után 4—5 másodpercenként, 10—12 percnyi behatása után pedig 6—7 másodpercenként következik be 1—1 billentés.

Egyúttal ennek lefolyása is megváltozik, mint azt a 2. ábra mutatja. Ilyen stádiumban a védelemkeresés a lehetőségig befejeződött. —2°-nak félórai behatása a Pagurusokat többnyire megöli. Elhalás közben a potroh izmai legtovább megtartják ingerlékenységüket.

5. A *Pagurites maculatuson* a kor és fejlettség közrejátszását is alkalmam volt megfigyelni. A magatartás e szempontból csak akkor különböző, ha a lehülés eléggé tekintélyes. 12°-ról

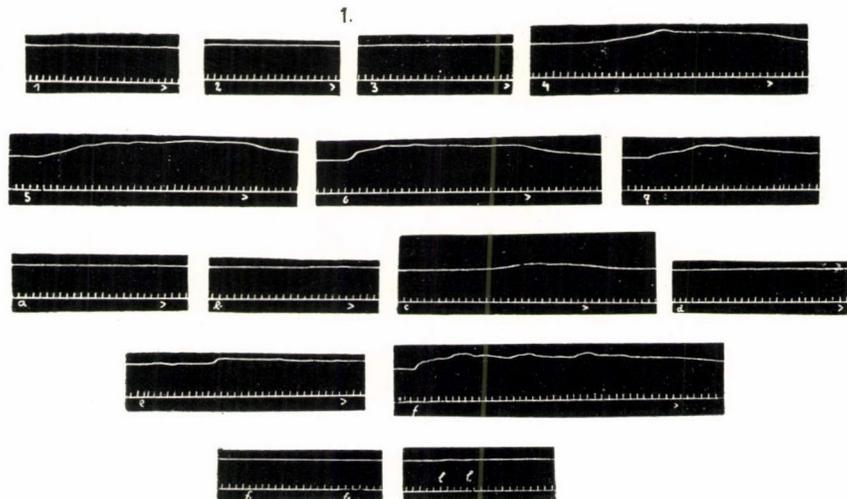
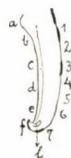


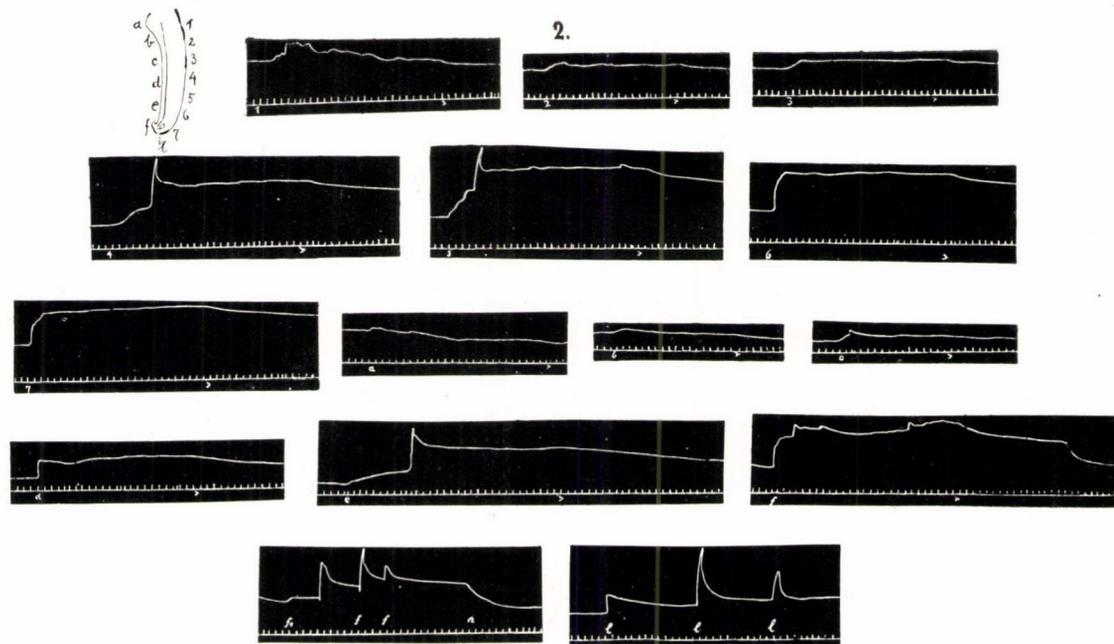
1. ábra. A medialis, kis antennák mozgásait szemléltető görbék. *Pagurus striatus*. Időjelzés 1".
Hőmérsék 15°.

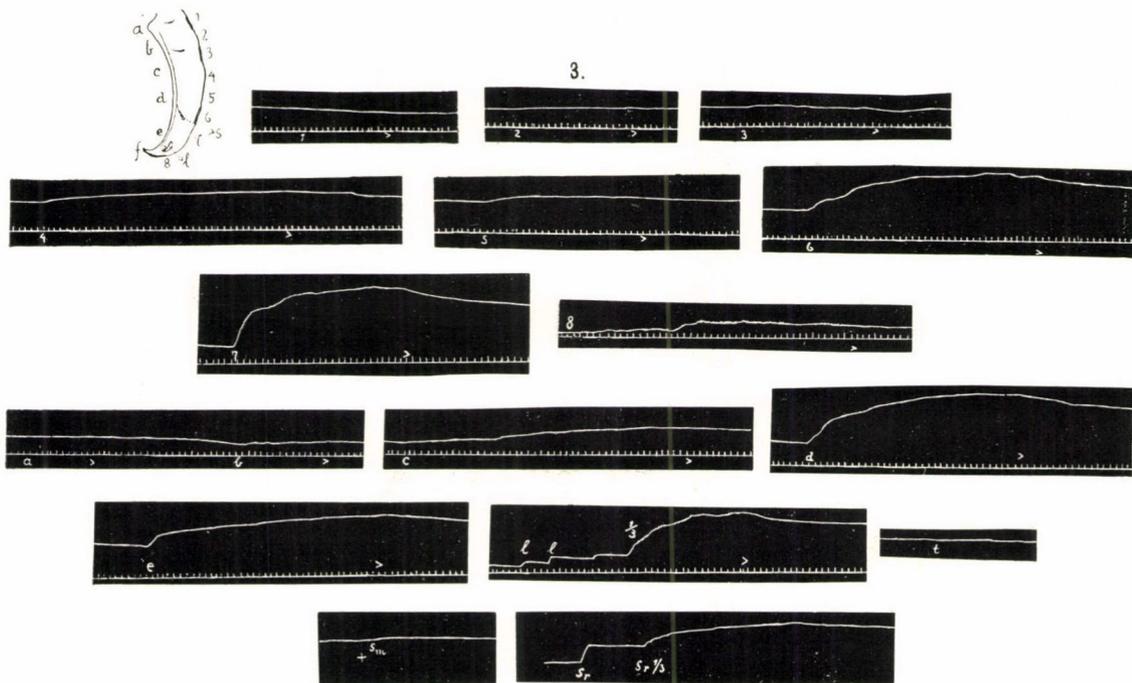
2. ábra. A medialis, kis antennák mozgása, —2° hőmérséknek 3—4 percnyi behatása után. *Pagurus striatus*. Időjelzés 1".

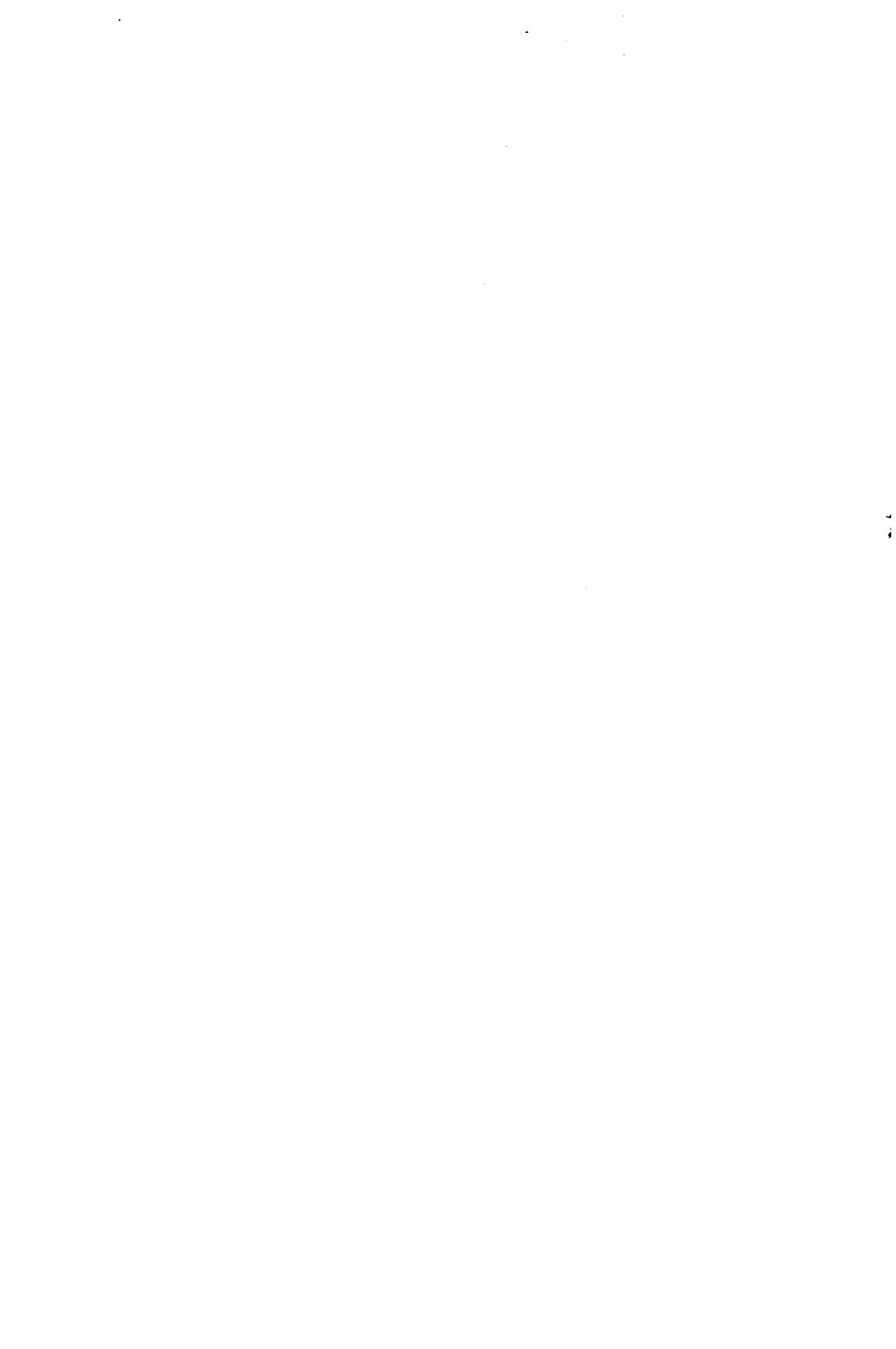
7°-ig haladva a lehüléssel, kis és nagy Paguristések között a különbség még nem feltűnő. Ellenben a 12°-ról + 3°-ra lehűtött vízben a kis Paguristések stereotropismusa kevésbé kifejezetté válik, a vízből kiemelt Paguristések a héjból kiesnek; a kevésbé nagyobbak is megbénulnak, de ezeket bizonyos mértékű tonus a héjban még benntartja. Ha az állatokat 19°-os vízbe visszatesszük, a kisebbek később bújnak vissza héjukba. Jól fejlett, közép nagyságú Paguristes a kisebbekkel szemben 12°-ról lassan + 3°-ig lehűtve, lassankint a lehetőségig beljebb vonul héjába és többé ki sem jön, míg a behatás tart. — 1, — 2°-on a szájrészek és a mediális antennák még mozognak, azután,

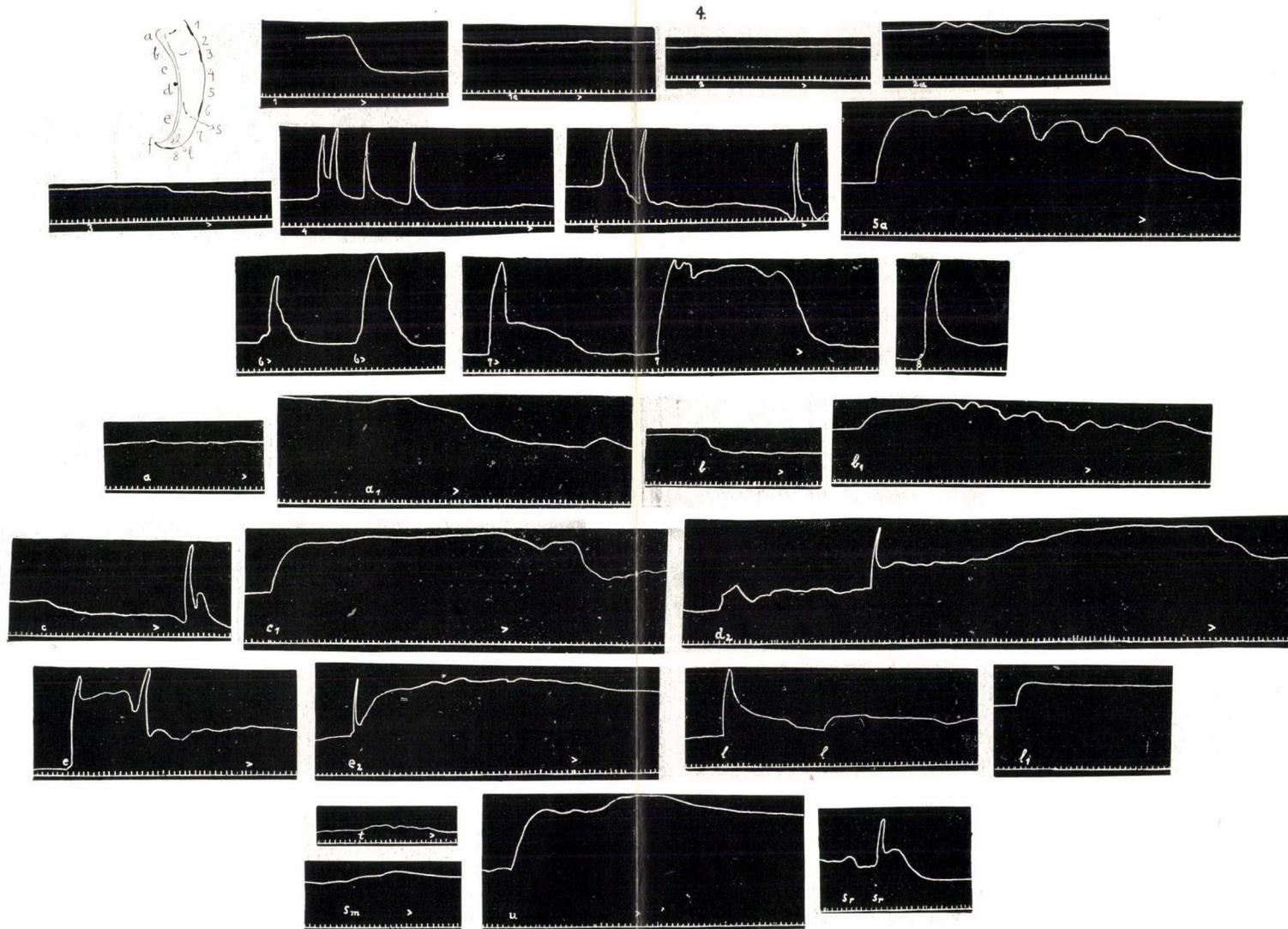
nem volt, hanem főleg azért sem, mert az antennák érintése ezek mozgását természetesen nagy mértékben módosítja. Ezért egyszerűen a mozgások megfigyelésére szorítkoztam és elképzelttem, hogy a mozgó antenna valamely myographion forgó hengerére feszített papírra milyen vonalakat rajzolhatna le. Ezeket tünteti fel az 1. és 2. ábra.

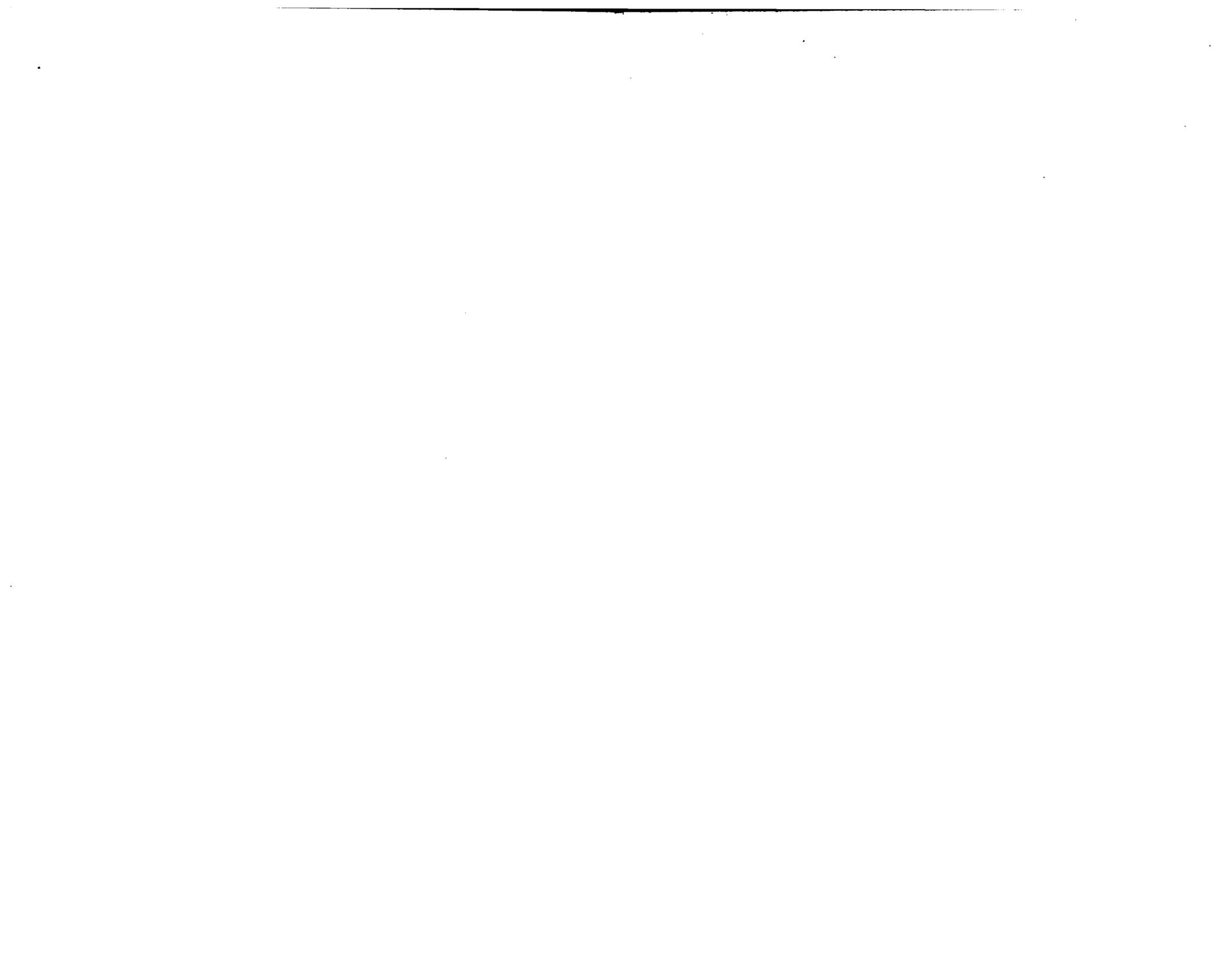












néha hirtelen, megszűnnek mozogni. Ha a Paguristések a 12° -os vízbe visszakerülnek, expansiók következnek be, a lábak abdukalódnak s a potroh tonusának változásával egyidejűleg az antennák is megkezdik mozgásaikat.

Héjatlan, $+4$, $+5^{\circ}$ -ra lehűtött Paguristes a körülötte heverő csigahéjakról nem vesz tudomást; $8-10^{\circ}$ -ra lassankint fölmelegítve, először az antennák, aztán az utolsó pár gyöngén fejlett thorakalis láb kezd mozogni, a mi már a rendes ingerlékenység visszatérésének előjele. Ezek a lábak ugyanis az állatnak a héjban és a héjjal együtt végzett mozgásai alkalmával segítségre szolgálnak. A Paguristes később két utolsó pár jól fejlett lábával olyanformán fogja körül a csigahéjat, mint a Dorippe a hátán viselt élő vagy holt testeket. Ez a mozdulat tehát őstypus. A Paguristes majd átfekszik a csigahéj bemenete fölött, de bár potroha az üreggel is többször érintkezik, még nem megy bele. 12° -ra emelkedvén a hőmérsék, a Paguristes most már rendes szokása szerint, de még kissé tétova mozdulatokkal, lábaival és ollóival a csigahéj üregébe belenyúlkal és csak e kémlélődés után bocsátja be potrohát a héjba.

II. B) Magas hőmérsék hatása.

1. *Dromia vulgaris* vizének hőmérsékét lassankint 28° -ra emeltem, a nélkül, hogy az állat valamikép reagált volna. Már süllyedőben volt a hőmérsék, 27.5° -on, midőn a *Dromia* hátán fekvő *Suberites* meglazult, a rák nyugtalankodni kezdett, ollóira állott és átbukva hátára került, vergődött, kapálódott, miközben a *Suberites* leesett róla. Ezt azonban ily helyzetben sem bocsájtotta el, hanem ismét birtokába véve lábaival hasára tette és ott megtartani igyekezett. Úgy látszik, hogy a stereotropismus oly kifejezettsége mellett, minőt a *Dromián* is tapasztalunk, az ösztönszerű cselekvés, a védelemkeresés nem szállítható le a gépszerű cselekvések szintjára. A megfontolás kategóriájához közel álló központi idegrendszer-működések itt az egyszerű mechanikai ingerlékenység megnyilvánulásába belejátszanak. Ugyanez látható Paguridákon is, melyek a héjat megválogatják és a védelmi eszközt Actiniák fölszedésével lehetőleg tökéletesi-

tik. Ezek ugyanis a rákok ellenségei előtt épen nem kellemes állatok.

A *Dromia* fölfordult helyzetében még 24° -on is megmaradt; 22° -ra süllyedvén a hőmérsék, a *Dromia* 1·5 percz mulva a *Suberites* rendbeszedvén, ismét visszafordult szokott helyzetébe. Két perczcel azután, hogy a hőmérsék a 22° -ot elérte, a *Suberites* ismét a rák hátára került. $21\cdot5^{\circ}$ -on, további 2 percz lefolyása után, finomabb illesztgető mozgások révén, miközben a leg-hátulsó lábak a szivacsnak megfelelő mélyedéseibe beleilleszkedtek, ez végre teljesen szilárdan állott.

A *Dromia* az efféle kísérleteket megsínyli; a leírt kísérlet után másnapra a szivacs hátrafelé félig lecsúszott a rák hátáról, az ollók tonustalanul heverték a talajon, az antennák nem mozogtak. Az utóbbi jelenség a *Suberites* helyzetével összhangzásban volt. Érintésre csak a szemtengelyek reagáltak lassú mozgásaikkal. Később a *Dromia* elpusztult.

2. *Eupagurus* 14° -tól kiindulva, lassan melegített vízbe tettem. 23° -on az *Eupagurus* már nyugtalanul mozgolódott, oldalirányban ingadozott s az edénynek a vízfürdőben melegedő falaitól elvonult. Majd ásni kezdett a homokban, főleg 26° -on igen nagy igyekezettel s azután rövid időre megnyugodott. 27° -on reszketeg, kapkodó mozgásokkal, ollóival is segítve, magát a homokba még jobban leásni igyekezett. 28° -on a mediális antennák mozgása megszűnt. E hőfokon bénulás folytán nyugalom állott be, a melyet csak 1—1 görcsös rángás zavart meg. A szájrészek még ekkor is mozogtak, de sokkal lassabban, mint 26° -on. Az *Eupagurus* 30° -on görcsösen feszítette ollóit, 31° -on pedig a potroh és a mell határán történt feszítések folytán az állat kissé kijebb került a héjból. $31\cdot5^{\circ}$ -on oldalra dült; az utolsó thorakális lábakon járó mozgások voltak láthatók. 32° -on heves rángások támadtak, az ollók, lábak, antennák rendetlen egymástutánban megfeszültek és ellazultak.

14° -os vízben az *Eupagurus* néhány szemtengelyabductio és rángás után helyrejött. Rázkódtatásra valamennyi végtagját addukálta, illetőleg maga alá húzta. Az adductiós állapot, feszítésekkel váltogatva, 10—20 perczig is eltartott és a lateralis hosszú antennákra is kiterjedt. Csak 25—30' mulva, mikor a

mediális antennák is szabályosan billegtettek, tért vissza az egész állat rendes magatartása.

3. *Paguristes maculatus*. Ha a hőmérsék 14° -ról 27° -ra emelkedik, a rák nyugtalanul kezd ásni a homokban. 28° -on a med. antennák még mozognak; 29° -on még rendezett mozgással folyton ás a homokban, 30° -on néhányszor félig kimáshzik a héjból, de aztán ismét visszavonul. Később nem ás többé, hanem beljebb húzódik; 32° -on végleg bevonul a héjba. Friss 14° -os vízben $\frac{1}{4}$ óra múlva helyrejön és kissé kifelé terjeszkedik.

A hőmérsék hatására vonatkozó megfigyelésekből a következőket emelem ki: Alacsony hőmérséken a védelem keresése általában kifejezettebb lesz, ha a lehülés még nem okoz bérülést. A hőmérsék emelkedése közben az *Eupagurus* 23° -on, a *Paguristes* 27° -on mutat egymáshoz hasonló reakciókat, tudniillik a homokban mindkettő elássa magát, vagyis a védelmezettség mértékét lehetőleg növelni igyekeznek. A *Paguristes* stereotropismusának behatóbb természetére mutat, hogy míg 32° -on a héjba való végleges visszavonulás minden egyéb reakción uralkodik, addig az *Eupagurus* e hőfokon a legkülönfélébb rendetlen mozgásokat végzi.

III. A gázcsere módosulásának hatása.

A víz hiányos szellőztetésének hatását csak *Paguridákon* vizsgáltam. Ezek között is a különböző fajok, főleg az *Eupagurus* és a *Paguristes*, továbbá ugyanazon faj keretében a különböző korú egyének nem egyformán érzékenyek.

1. *A fajbeli különbség szerepe*. Az *Eupagurus* a hiányos szellőztetéssel szemben sokkal érzékenyebb, mint a *Pagurus striatus*, vagy a *Paguristes*; a héjjal való kapcsolata a víz oxygeniumának fogyása közben sokkal hamarabb meglazul, mint az utóbbiakon. Ha az *Eupagurus* oxygeniumot csak nyomokban tartalmazó vízbe kerül, ebből mindenáron menekülni igyekszik; menekvési kísérletei közben aztán héjából többnyire kibújik vagy kiesik. 15—20 percnél tovább héjában ily körülmények

között nem marad, a Paguristes ellenben bennmarad. A Pagurus striatus és a Paguristes között e szempontból lényeges különbség nincsen.

Ha a víz oxygeniumkészlete fokozatosan csökken és ezzel karöltve a CO_2 mennyisége növekedik, a Paguridák lassankint kijebb- és kijebb jönnek a csigahéjból, különböző ingerekre azonban eleinte még visszavonulnak. A visszavonulás azonban mind lassabban és lassabban megy végbe. 5—6 napig föl nem frissített vízben, palackban elzárt Paguristes visszavonulása az ép ingerlékenységű rákénál 150-szer lassabban mehet végbe, 2—2 $\frac{1}{2}$ percig is tarthat. A mediális antennák billegető mozgása és a visszavonulásra való készség között a kapcsolat itt is szembetűnik. Az előbbi mozgás kellően nem szellőztetett vízben meggyérül, de korábban megszűnik, főleg Paguristesen, mint a potroh különleges ingerlékenysége. Midőn az antennák mozgása megszűnik és semmiféle izomkészülék mesterséges ingerlés nélkül mozgásokat nem végez, a potroh görbülete az izomzat tonusa folytán még fennáll s ez az izomzat fáradós és mechanikai ingerlésre reagál. Ezért a Paguristes az önkénytes mozgások megszűnte után is egy ideig még nem rázható ki a csigahéjból.

Hogy a stereotropikus érzékenységnek fajszerinti különbségét számokkal is kifejezhessem, meghatároztam a víznek oxygenium-tartalmát akkor, midőn a Pagurus és a héj között a kapcsolat meglazult, illetve megszűnt.

5 darab Paguristest és 5 darab Eupagurust külön két edényben, friss tengervízben a külső levegőtől üveglap segítségével teljesen elzártam. Másnap reggelre még valamennyien héjukban voltak, csak az egyik *Eupagurus* bújt valamivel kijebb; a Paguristesek ellenben szemtengelyükig behúzódva ültek. A mediális antennák mozgásaiban is volt már különbség, mig ugyanis a Paguristeseken ezek a rendes módon billegtek, addig az Eupagurusokon mozgásuk gyérült és szabálytalanabb lett. Ugyanaznap délután két Eupagurus teljesen kivonult héjából, egy harmadik rák potrohának fele is láthatóvá lett s a másik kettő is a rendesnél kijebb vonult a héjból. A Paguristesek magatartása nem változott. Az Eupagurusok vízének oxygeniumtartalmát most

WINKLER szerint meghatároztam.¹ E meghatározás alapján kiderült, hogy az Eupagurus és a héj között a kapcsolat meglazul, ha az aquariumi víz oxygeniumtartalma 1 liter vízben a rendes 4—5 cm³-ről 0,3750 cm³-re apad.

A kibújt Eupagurusok közül az egyik friss vízben $\frac{3}{4}$ óra múlva héjába visszabújt, a másik ellenben elpusztult.

A fullasztás révén kiűzött Eupaguruson a stereotropikus ingerlékenység jellemző fokozatokban tér vissza, ha az állatot idejekorán friss vízbe tesszük. 1. Közvetlen villanyfény elől árnyékba vonul. Ez vonatkozásban áll azzal, a mit a fény hatására nézve említettem. Az ingerlékenységnek ilyen állapota mellett a stereotropismusra való hajlandóság egyelőre csak primitív formájában nyilvánulhat. 2. Egyenletes homoktalajon homokot igyekszik magára kaparni; ilyenkor az előtte levő héjba még nem vonul be, ez előtte érdektelen. 3. 2—2 $\frac{1}{2}$ óra múltán a csigahéjba bevonul.

Az említett csekély oxygeniumtartalmu vízben a fényérzékenység nem nyilvánulhat. A fényhatás tárgyalásakor már vázolt kísérleti berendezés mellett az Eupagurusok helyzete, illetőleg elosztásuk aránya 30 percz múlva sem változott. Ha a lehűtött víz oxygeniumtartalma csekély, akkor az alacsony hőmérséknek a héjba beűző hatása sem érvényesül teljesen.

Az Eupagurusokkal végzett párhuzamos kísérlet alkalmával a *Paguristesek* az elzárás 3. napjának reggelén még valamenyien benn voltak héjukban, antennáik elég élénken mozogtak, mialatt az Actiniák fogó-koszorúja teljes expansióban nyugodott. A 3. nap estéjén az egyik Paguristes az utolsó, gyengén fejlett thorakális lábíg kibújt a héjból, ingerlésre azonban még elég élénken visszavonult, a héjat nem hagyta el. A Paguristesek a negyedik napon valamivel kijebb vonulva nyugodtak voltak, antennáik szabályosan csapkodtak. Az ötödik nap reggelén két Paguristes a potroh fele hosszúságáig kibújt, de fényingerlésre egyi-

¹ Berichte d. deutschen chem. Gesellschaft. 1888. XXI. 2. 2845. 1. A képlet:

$$A = \frac{0,055825 \cdot n \cdot 1000}{v}$$

HENZE dr. úrnak szíves segítségeért hálás köszönettel tartozom.

kük élénken, a másik vontatottabban visszavonult. Az antennák mozgása gyérült. Estére az egyik Paguristes a potrohnak $\frac{2}{3}$ részéig kivonult. Ugyanezt a 6. nap reggelén, az előző napon elfoglalt helyzetben holtan találtam, más kettő teljesen kibújva szintén elpusztult, a többi héjában volt és élt. Az Actiniák nagyobb része friss vízben magához tért. A vízben rothadásos szagot nem lehetett érezni, benne oxygenium kimutatható nem volt.

2. *A kor szerepe.* Fiatal Paguridák hamarabb kiköltözködnének, mint az idősebbek. A stereotropismus a korrallal intenzívebbé válik. Sajnálatomra lárvákat nem kaphattam s a peték kiköltése az aquariumban nem sikerült és ezért a fejlődés hatását rendszeresen nem vizsgálhattam. Csupán annyit vehettem észre, hogy a csigahéjjal való kapcsolat már oly korban is megvan, midőn a species-jelenségek teljes számukat és kifejltségüket még nem érték el. Pl. a Paguristes maculatus oly fiatal korában, midőn az ollók mediális felületén előforduló s a felnőttre jellemző élénk kék folt még nem fejlődött ki s a test többi területén sincs meg a felnőttek élénk perzsavörös színezete, már héjat keres magának. E mellett azonban figyelemreméltó, hogy az ilyen fiatal állat sokkal könnyebben rábirható a héj elhagyására, mint a felnőtt. A fejletlen Paguristesen a potroh és a törzs (thorax) méretei másképp aránylanak egymáshoz, mint a felnőttön; például 16·5 mm. hosszú példányon a potroh csak 2·66-szor volt hosszabb a törzsnél, míg felnőttben a potroh a törzsnél 3·27-szerre hosszabb is lehet. A fiatalos, fakó színezetű Paguristes körülbelül ugyanoly oxygeniumtartalom mellett vonul ki héjából és pusztul el, mint az Eupagurus. Mihelyt az ollók foltja határozottan kiképződött, a szívósság a fajtára jellemzővé válik.

IV. Vizsgálatok a Pagurusok potrohán az érzékenység és az összehúzóerő topográfiájára vonatkozólag.

Mint hogy effajta vizsgálatokat és graphikai fölvételeket az irodalomban nem találtam, érdemesnek tartom főleg a mechanikai ingerek hatását lehetőleg rendszeres összeállításban kö-

zölni. Az első tájékoztató kísérletek után, a reakciókból következtetve, a potroh hasi és háti oldalán legalább is azokat a helyeket kellett megkülönböztetnem, melyeket a potrohnak az I—IV. ábrasorozathoz mellékelte képén feltüntettem. Külön végeztem kísérleteket az egész, sértetlen állat potrohán, és külön vizsgáltam a lemetszett potrohot is, úgy mechanikai, mint elektromos ingerlés segítségével. A fölvételeket 4·5-szeres nagyítással dolgozó íróval végeztem, 1 mp. időjelzés mellett.

Ha egész állattal kísérleteztem, ezt törzsénél, lábait összefogva, alkalmas széles fogóba erősítettem, gyakran nedvesítettem s az író gombostűjét az analis uszó pánczélszerű, kemény képletébe akasztottam be. Ha a lemetszett potrohot akartam vizsgálni, ezt az utolsó törzslábszárral együtt távolítottam el és a legoralisabb pánczélrészeknél fogva függesztettem föl.

A Pagurusokat a kísérletek céljaira héjukból ki kellett űznöm. Az Eupagurusokon ez könnyen sikerült. Ha ezeket a vízből kivesszük és jól megrázzuk, többnyire kiesnek a héjból, melybe mélyebbre, mint a törzs distalis része, a térviszonyok miatt nem húzódnak be. A Paguristések ellenben héjukból ilyen erőszakkal nem űzhető ki, ezeknek inkább letörnek ollóik, lábaik, vagy a potroh és törzs határán kettészakad az állat, de nem enged. Potroha végén levő pánczélós függelékeivel a csigahéj legbelső kanyarulatában megkapaszkodva, potrohizomzatának hasi felületével mindenütt szorosan nekitámaszkodik a héj többszörös kanyarulatainak; így aztán erőhatása emeltyűhatások révén az emelőcsigarendszer értelmében megsokszorozódik.

A Paguristések kényelmes kiűzésére egyetlen mód az volt, hogy a héjat a potroh háti felületének megfelelően egy vagy több helyen meglékeltem, vagy, ha a héj eléggé mállekony volt, nagy darabon roncsoltam. Utóbbi esetben a Paguristesek azonnal nagy elszántsággal kimászik a héj maradványaiból. Ilyenkor sem azok az ingerek, melyeknek a stereotropismusra tevőleges hatását megismertük, sem a potroh sajátos ingerlékenysége nem érvényesülhetnek. Fényingerlés, alakmozgás látása, mechanikai és elektromos ingerek a visszavonulásra ilyenkor hatástalannak. Úgy látszik, hogy a héj változtatása, a rendes viszonyok

közötti kiköltözködés amaz apró ingerek összegeződésének eredménye, melyeknek a bomladozó, elkopott csigahéjban a Pagurus folytonosan ki van téve.

Erősebb, jó állapotban levő héjből a Paguristéseket úgy üttem ki, hogy a lékelés helyén kilátszó potrohot a háti felületen gyöngén ütöttem vagy dörzsöltem, vagy pedig farádos árammal izgattam. A bekövetkezett feszítések az állatot helyének elhagyására kényszerítik; ebben a törzslábak (a héjba bevonható gyengén fejlett utolsó pár is) járó mozgásukkal az állatnak segítségére vannak.

1. Mechanikai ingerekre következő reakciók.

A) *Eupagurus Prideauxii*. Az ingerlést, a hol külön megjegyzés erről nem ad felvilágosítást, úgy végeztem, hogy az illető helyet szalmaszállal 1 mp.-ben 3—4-szer finoman megdörzsöltem. Az I. ábrasorozatból kitűnik, hogy a mechanikai ingerekkel szemben a lemetszett potrohnak csak aboralis fele számbavehetően érzékeny, vagyis az a szakasz, melyet az állat kedvező körülmények között mindenáron védeni igyekszik.

Az I. és II. ábrasorozat egymással közvetlenül összehasonlítható, mert a kettő teljesen azonos körülmények között készült. A II. ábrasorozat az egész, sértetlen *Eupagurus* viselkedését tünteti fel. Az összehúzódások képét itt a reflexjelenségek jellemzően színezik. Úgy a hasi, mint a háti felületen az aboralis rész érzékenysége itt is feltűnően szembeállítható az oralisabb részek tompább érzékenységgel. Jellemző, hogy a legoralisabban fekvő *a*) pont ingerlésére a tonus alászállott.

A potroh függelékeinek ingerlésekor az egész állaton szintén élénk reflexmozgások válthatók ki. Míg az I. ábrasorozatban f_1 -nek megfelelően az analis úszó egyszerű érintésére izgalom nem nyilvánult, addig az ép állat (II. ábrasorozat) igen élénken reagált. Ugyanez látható az *l* ábrákon is, melyeknek megfelelően a potroh végén oldalt fekvő végláb egyszerű megbilentése szolgált inger gyanánt.

B) *Paguristes maculatus*. Az érzékenység elosztása szempontjából a lemetszett *Paguristes*-potrohon nagyjában ugyanoly

viszonyok tűnnek föl, mint az Eupaguruson (l. a *III. ábraszorozatot*). Némi különbség az összehúzódások amplitudójában és az összehúzódások élénkebb megindulásában van, a Paguristes előnyére. A Paguristes potroha függelékekkel is jobban föl van szerelve, mint az Eupagurusé; utóbbin ugyanis hiányoznak azok a sörteszerű, fekvésüknél fogva lábagnak nevezhető képződmények, melyek közvetítésével a Paguristesnek még a lemetezett abdomenén is összehúzódásokat lehet kiváltani. Ezek szaporítják az ingerelhetés föltételeit, a minnek e képletek mozgékony-sága is megfelel.

A lemetezett potrohnak oly gyöngéd mechanikai ingerekkel szemben tanúsított érzékenysége, mely ingerek az izomzat részéről idiomuscularis rángások kiváltására nem alkalmasok, különös figyelmet érdemel. Más alacsonyabb rendű állatokon is tapasztalták, hogy bizonyos lemetezett testrészek a tapintás-érzékenység és izomreakciók tekintetében, az ingerelhetőség szempontjából teljes individuumok, bizonyos önállóságuk van.

A sértetlen Paguristes reakcióiban több szeszélyesség mutatkozik, mint az Eupaguruséiban. Az ingerlékenység egyéni változatai számára több a lehetőség; ezért az ingerlékenység viszonyainak kellő feltüntetésére a *IV. ábraszorozatban* három Paguristesen végzett vizsgálatokat kellett összeszednem. A Paguristesen is feltűnő, hogy a potroh oralis és aboralis felének ingerlékenysége különbözik oly értelemben, hogy az oralisabb, 1—2, *a—b* jelzéseknek megfelelő részek izgatása, ha ez épen a fokozott tonus állapotában történik, igen gyakran a tonus alászállását vonja maga után; az aboralis fél izgatására, ha a tonus a rendesnél nagyobb is, ez még fokozódni szokott. A függelékes képletek felől (az utolsó törzslábak, a potroh szőrlábai, az anális úszó stb.) oly reakciók nyerhetők, melyek az Eupagurussal szemben a Paguristest élesen jellemzik; az utóbbtól tehát többféle myogramma gyűjthető, mint az Eupagurustól. E képletek a lemetezett Paguristes-potrohon is alkalmasak reakciók kiváltására, melyek az ép Paguristesen nyerhető reakcióktól néha csak quantitative különböznek, máskor azonban természetesen a minőség tekintetében is mutatkoznak különbségek.

A mechanikai kísérletek arra mutatnak, hogy a potroh

aboralis felén alkalmazott mechanikai ingerek a potroh tonusát fokozzák, illetve heves összehúzódásokat váltanak ki (ez részben az ingerek minőségétől is függ). Az érzékenység az aboralis vég felé, ha szabálytalanul is, de mégis erősen fokozódik, a mi e felület védelmét kiváltja.

*

A lemetszett egész potrohon, mint említettem, mechanikai ingerekre olyan összehúzódások következnek be, melyek, tekintettel az ingerlés gyöngé voltára, idiomuscularis reakcióknak nem tekinthetők, hanem reflex képével bírnak. Ezért érdekes az a körülmény, hogy a potrohtól elkülönített erős hasi izomnyaláb gyöngé mechanikai ingerlésekre, mint pl. szapora egymásutánban szalmaszállal gyakorolt érintésekre összehúzódik és pedig a farkvéghez közelebb eső rész ingerlésére (mely az ábrákon *e*-nek felel meg) sokkal nagyobb mértékben, mint más területek ingerlésére.

A potroh háti felületén a vékony, puha pánczél alatt szintén van izomréteg, mely az említett mechanikai ingerlésekre szintén reagál és pedig oly összehúzódásokkal, melyek a békaizmon nyerhető neurodirekt tetanus képéhez jóval közelebb állanak, mint pl. az ép állat ingerlésére nyerhető összehúzódások.

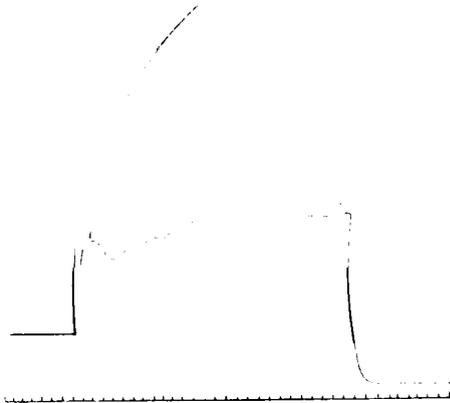
2. Farádos ingerlés.

Mínthogy a tengervízzel nedvesített potrohon az áramszálak igen könnyen szétsugározhatnak, a mechanikai ingerlékenységre vonatkozólag megállapított topographiai rajz szerinti izgatás nem nyújt olyan jellemző képeket, mint a mechanikai ingerlés. Így pl. már az 1. és 2., továbbá az *a* és *b* helyek izgatására tekintélyes összehúzódások, többé-kevésbé szabályos tetanusok támadnak. Ép, egész Paguristesen csak akkor kapjuk meg a mechanikai ingerlékenységhez hasonlítható topographiát, ha az állat kimerült, ha ingerlékenysége erősen csökkent. Kellően ingerlékeny állat potroha már az oralisabb területek izgatására is heves összehúzódással felel. Erre vonatkozólag csak a 3. ábrát közlöm, melyet 10-szeres nagyítású íróval vettem föl. A farádos ingerlés egy chromsavas elemmel táplált du Bois Reymond-

féle inductorium segítségével, 70 mm. szánkatávolsággal történt. Az izgatás helye az *a* és *b* közötti területnek felelt meg.

A kezdetbeli igen gyors lefolyású rángás és az azután lerajzolódó emelkedő tetővonalú görbe (szabálytalan tetanus) legjobban jellemzi, hogyan szokott a héjából kissé kibújt állat ingerek hatására héjába visszavonulni.

A fáradós ingerlés hatásaira vonatkozólag csak azt emelem még ki, hogy az oralisabb potrohterületek izgatására az egész potroh tonusa igen gyakran alászáll, ha az áram nem igen erős s ha az ingerlékenység kissé csökkent. Ilyenkor az inger-



3. ábra. A potroh hasi felületének (*a—b* tájékán, l. a III. ábrásorozathoz tartozó beosztást) izgatása indukált árammal. Paguristes. 1 chromsavas elem, 70 mm. szánkatávolság; *s* = az ingerlés beszüntetése. Az eredetinek felére kisebbítve. Időjelzés 1".

lés helyén körülírt apró rángások folyhatnak le, melyek azonban az egész potroh tonusának reflex csökkenését nem akadályozzák. Ha pl. a 2. jelzésnek megfelelő helyet izgatjuk, a közvetlen környéken a háti felület convexitása csökken. Ez részben az oka annak, hogy a meglékelt héjból a Pagurusok fáradós árammal kiűzhetők. A mint az ingerléssel aboralisabb potrohterületekre megyünk át, az izgalom egyre általánosabb lesz. A reakciónak ily finomabb fokozása azonban csak már némileg csökkent ingerlékenység mellett érhető el.

Összefoglalás.

1. A stereotropismus tekintetében a Paguridák (Anomura) és a Brachyurák között fokozati különbségek vannak. A stereotropismus legkifejezettebb a Paguridákon, ezek között is a Pagurus striatuson és a Paguristes maculatuson.

2. A fény a védelemkeresésre irányuló izomtonust és a hasznos munkával járó izomműködést is fokozza, illetve eleveníti. Ezzel kapcsolatos az a jelenség, hogy a védelmet nyújtó tárgy távollétében bizonyos rákfélék fényre elevenebben reagálnak, mint az idegen test védelme alatt. A Pagurusok erős megvilágításra oly módon keresnek védelmet, hogy az a stereotropismussal vonatkozásba hozható. A stereotropismussal kapcsolatos működésekben tehát a fény is szerepel, mint inger.

3. Alacsony hőmérséken, ha a lehülés még nem okoz békülést, a védelemkeresés általában kifejezettebbé válik. A hőmérsék emelkedése közben az Eupagurus 23°-on, a Paguristes 27°-on végez hasonló mozgásokat, mindkettő igyekszik magát a homokban elásni, vagyis a védelmezettség mértékét növelni. A Paguristes stereotropismusának kifejezettebb voltát jellemzi az is, hogy míg 32°-on a héjba való végleges visszavonulás minden más reakción uralkodik, addig az Eupagurus e hőfokon a legkülönbélebb rendetlen mozgásokat végzi.

4. A víz oxigeniumtartalmának megfogyása következtében a Pagurusoknak a csigahéjjal való kapcsolata meglazul, még pedig az Eupaguruson korábban, mint a Paguristesen, fiatal Paguristesen korábban, mint felnőttön. A csekély oxigeniumtartalmú vízben elalélt és héjából kivonult Eupagurus friss vízben ingerlékenységét lassankint visszanyerve, egymásután elének tárja a stereotropikus törekvés elemeit; eleinte csak fényre reagál, majd a homokban keres védelmet, végül a héjba vonul. Hogy tehát a héjjal való kapcsolat fennmaradjon, a víznek a kellő oxigenium-mennyiséget kell tartalmaznia.

5. A Paguristes a csigahéj nagymérvű, hirtelen rombolása segítségével a héjből kiűzhető. Ilyenkor a bevonulásra készítő ingerek hatástalanok. Valószínű, hogy a természetes viszonyok között bekövetkező átköltözködés apró ingerek összegeződésének

eredménye, mely ingereknek az állat a fogyatékos védelmet nyújtó, elvénhedt héjban úgyszólván folytonosan ki van téve.

6. A potrohnak a törzshöz legközelebb eső területén alkalmazott mechanikai vagy farados ingerlés következtében a tonus igen gyakran csökken. A potroh vége felé haladólag az ingerlékenység, habár szabálytalanul, erősen fokozódik. Ez a körülmény az állatot potrohának védelésére kényszeríti, és a stereotropismusos viselkedésben homolog tényező, a mechanikai ingerlés homolog voltának értelmében.

A lemetezett potroh, gyöngge mechanikai ingerlésre, főleg az aboralisabb területeken, összehúzódik; minthogy itt az izomzat közvetlen ingerléséről nem lehet szó, e reakcióképességet a potrohnak különleges sajátóságaként kell tekintenünk.

A farados áram az áramszálak szétsugárzása miatt a potroh ingerlékenységi topographiájának megállapítására nem oly alkalmas, mint a mechanikai, a homolog ingerlés. A farados árammal csak akkor kapunk oly reakciókat, mint a mechanikai ingerléssel, ha az áram ereje mérsékelt s az ingerlékenység csökkent.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 január 17.-én tartott üléséből.)

I. ábraszorozat. (III. tábla.) Az Eupagurus lemetszett potrohának reakciói mechanikai ingerlésre. A potroh háti oldalán az ingerelt helyeket 1—7 számok, a hasi oldalon $a-f$ betűk jelzik. Inger gyanánt az I—IV. ábraszorozatnak megfelelően, ha csak erről külön megjegyzés nem tájékoztat, másodpercenként 3—4 finom dörzsölés szolgált.

f_1 = az analis úszó egyszeri érintése.

l = a potroh «vég láb»-ának egyszeri megbillentése.

$A >$ jel az ingerlések bevezését jelenti.

II. ábraszorozat. (IV. tábla.) Sértetlen, egész Eupagurus potrohának reakciói mechanikai ingerlésre. A potroh hossza, mint az I. ábraszorozatnak megfelelően is, 21 mm. volt.

III. ábraszorozat. (V. tábla.) Paguristes maculatus lemetszett potrohának reakciói mechanikai ingerlésre.

l = a potroh aboralis végén levő lábképlet megbillentése; $\frac{1}{3}$ jelnél másodpercenként 3-szor.

t = a thorakalis utolsó láb gyöngéd megmozgatása.

S_m = az egyik oldalsó, a thorax felől számítva a harmadik sörteláb megmozgatása (ez a képlet a potroh ábráján S -sel van jelölve).

S' = ugyanezen képlet durva megrántása.

IV. ábraszorozat. (VI. tábla.) Egész, ép Paguristes potrohának és potrohfüggelékeinek mechanikai ingerlésére bekövetkező reakciók. A kettős jelzések, pl. $1a$, c_1 , d_2 stb. más és más egyénektől származó fölvételekre vonatkoznak. Ebben a sorozatban tehát három Paguristestől származó fölvételek vannak összeválogatva, az egyéni változatok s az ingerlékenységi viszonyok hatásának feltüntetése végett.

u = az analis úszó hasi felületének (körülbelül f -nél) ingerlése, másodpercenként 3-szor. Egyéb jelzések, mint a III. ábraszorozatban.

ÉLETTANI ÉS ENERGETIKAI VIZSGÁLATOK A METAMORPHOSISRÓL.

TANGL FERENCZ lev. tagtól.

I. A vizsgálatok célja.

Az általam «fejlődési munkának» elnevezett complex nagyság elemzése mindenekelőtt azért jár nehézségekkel, mert eddigelé nem vagyunk képesek e munkát egyes részeire bontani és ezeket megmérni. A szervezetnek a petesejtből való fejlődése nemcsak számtalan morphologiai folyamatból, hanem ugyanannyi energiaátalakulásból tevődik össze, melyekkel chemiai és physikai folyamatok járnak együtt s melyek alapját képezik a morphologiai változásoknak. Ehhez járul még az is, hogy a tulajdonképeni fejlődésen kívül — mely sejteknek és szerveknek keletkezésében és növekedésében áll — azzal egyidejűleg élettani folyamatok is szerepelnek, melyek nem magát a szorosabb értelemben vett fejlődést, hanem csakis az ujonnan keletkezett alakelemek életben tartását szolgálják. (*Életben tartó munka.*)

A *fejlődés munkája* azon chemiai energia mennyisége, mely az embryonális fejlődés közben más energiákká és végül hővé alakul át. Hogy ebből mennyi esik a sejtek és sejtközi anyagok képzésére (*alakítás vagy alkotás munkájára*), mennyi az ujonnan képzett sejtek növekedésére (*a növekedés munkájára*), mely kettő együttvéve *a tiszta fejlődési munkát adja*, végül mennyi jut az életbentartás munkájára és esetleg accidentális életjelenségekre, pl. izomösszehúzódásokra, ezt egyelőre nem lehet eldönteni.

E kérdés tisztázása oly fejlődési folyamatok vizsgálatától várható, melyek egynemely tekintetben egyszerűbben folynak le. Ilyen a metazoák között nagyon elterjedt metaboliás fejlődés, különösen pedig a rovaroknak bábképzéssel járó metamorphosisa.

A fejlődésnek ezen neme nemcsak morphologiai érdekű, hanem egész sorát mutatja az általános biologia szempontjából is érdekes jelenségeknek. A báb-stádiumban, melyet a legtöbb zoologus nyugalmi stádiumnak tekint, történik a teljesen kifejlett álcának átalakulása az ivarérett imago-vá a nélkül, hogy ezen átalakulás egész tartama alatt valamennyire is tekintetbe jövő izomműködés szerepelne. E stádiumban az élő anyag mennyisége nem gyarapszik, vagyis az állat nem növekszik; az imago fejlődése főleg abban áll, hogy szervezett, sejtekké differenciálódott anyagok histolysis útján szétesnek és másképen differenciált sejtsoportokká alakulnak át. A fejlődés e módjánál tehát lehetségessé válik az átalakulás munkáját azon munkától menten mérni, melyet az élő anyag növekedése igényel. Ezen körülmény ösztönzött az alatt leírt kísérletek végzésére akkor, mikor a véletlen folytán erre az alkalmas kísérleti anyagra tettem szert.

Ugyanezen ok indította E. WEINLAND-ot¹ szép és fontos kísérleteinek megejtésére, melyekben a húslégy (*Calliphora vomitoria*) bábjainak átalakulása közben végbemenő anyagcserefolyamatokat tanulmányozta s melyekben nemcsak az átalakuló anyagok mineműségét állapította meg, valamint azok elbomlásának időbeli lefolyásában érdekes szabályszerűséget derített ki, hanem igen jellemző különbséget is talált az álcák és bábok anyagcseréjében: oly különbséget, melyet a metamorphosissal járó morphologiai folyamatokra, valamint azon komplikált folyamatokra vezet vissza, melyekkel a szervek szétesése és ujjonnan képződése jár.

¹ Midőn kísérleteimet megkezdtem, WEINLAND első közleménye sem jelent még meg. Azóta a *Calliphora*-n végzett vizsgálatait a *Zeitschr. für Biologie* következő számaiban közölte: a) 47. k. 186. o., b) 47. k. 232. o., c) 48. k. 87. o., d) 49. k. 351. o., e) 49. k. 421. o., f) 49. k. 466. o., g) 49. k. 486. o., h) 51. k. 197. o., i) 52. k. 273. o.

Az én kísérleteim, melyeket egy más, sokkal kisebb légyfajon végeztem, részint igazolják WEINLAND kísérleteinek legfontosabb eredményeit, részben pedig kiegészítik; így többek közt annyiban is, hogy egyrészt a már nem táplálkozó, bebábozás előtt levő álcza anyag- és energiaforgalmát is meghatároztam; másrészt a bábstádiumban is végeztem calorimetriás méréseket.

II. A vizsgálatok tárgya és methodusa.

Vizsgálataim tárgyát GENERSICH ANTAL udvari tanácsos úr szivességének köszönöm, ki egy bonczolásra került exhumált gyermekhullában mintegy 1½ kg. légyálczát talált. Ezeknek bábjait és az azokból kikelt legyeket — *Ophyra cadaverina*¹ — a m. kir. rovar-tani állomás igazgatója, JABLONOWSKY JÓZSEF úr határozta meg, miért is neki hálás köszönettel tartozom.

Az álczák 1905 április 19.-én kerültek az intézetbe; 5–6 mm. hosszúak voltak és élénken nyüzsgő sárgásszürke tömeget képeztek, mely a közbekeveredett piszok eltávolítása után az álczák «tisza tenyészetének» volt tekinthető. Mivel e kísérleti anyaghoz teljesen váratlanul jutottam s a kísérleteket azonnal meg kellett kezdenem, a gázcsere vizsgálatára szükséges készüléket amúgy hevenyészve kellett összeállítanom s azért egyik-másik tekintetben hiányos is volt.

Az álczáknak a bebábozási stádium előtti anyag- és energiaforgalmát eredetileg éhező és táplált állaton akartam vizsgálni; de nemsokára kitűnt, hogy az álczák már teljesen ki voltak fejlődve s a bebábozást megelőző időszak azon stádiumában voltak, melyben már nem táplálkoznak.

Tehát csak éhező álczákon végezhettem kísérleteket; meghatároztam, hogy bebábozásukig, majd pedig báb alakban a legyek kikeléséig mennyi szénsavat termelnek; milyen a chemiai összetételük és chemiai energiatartalmuk a kísérlet elején és végén, a czélból, hogy ezen adatokból a metamorphosis-sal járó fejlődés anyagfogyasztását és energiaforgalmát megállapíthassam.

¹ P. MÉGNIN: La faune des cadavres. Encyclop. scientifique de aide-mém. 1894, p. 59. MASSON, Paris.

E kísérletek alapelve tehát ugyanaz volt, mint azoké, melyek intézetemben már ezelőtt több ízben más szervezetek fejlődési munkájának megállapítása céljából végeztek: összehasonlítani az illető szervezetek chemiai összetételét és energiatartalmát a kérdéses fejlődési szak elején és végén. Mint azt első¹ közleményemben kifejtettem, az energiatartalomban észlelt csökkenés, feltéve, hogy chemiai energia illó vegyületek alakjában nem veszett el a folyékony vagy szilárd váladékok felfogása veszteség nélkül történt, közvetlenül megadja a fejlődés munkáját, vagyis a chemiai energia azon mennyiségét, mely a fejlődés közben hővé alakult át. A chemiai analysis pedig azon változásokról nyújt felvilágosítást, melyek az illető szervezet összetételében mentek végbe.

Azáltal, hogy a csak kb. 0·01 gr. súlyú állapotoknak igen nagy mennyisége állott rendelkezésemre és kísérleteimet rendszerint több ezer állaton végezhettem, kellő biztosítékot szereztem az iránt, hogy megbízható átlagértékeket kapok.

Kísérleteim leírása előtt röviden meg akarok emlékezni azok methodikájáról.

A chemiai analysisre szánt álczákat, bábokat és legyeket chloroformmal öltem meg, majd 1—2 napig vacuumban 98° C-on szárítottam és azután por ellen védve, néhány napig nyílt csészékben, szobahőmérséken tartottam. Az így kezelt anyagból egyidejűleg mértem le részleteket a következő analysisekre: 1. szárazanyagmeghatározás az anyag 0·3—0·5 gr.-ján vacuumban 98° C-on való szárítás által, 2. hamumeghatározás, 3. zsírmeghatározás; még pedig, ha a rendelkezésre álló anyag mennyisége megengedte, úgy extractio, mint a LIEBERMANN-féle elszappanosítás útján. Az extractiót kiizzított quarczhomokkal eldörzsölt 1·0—1·5 gr.-nyi anyagon végeztem petroleumætherrel, miután előzőleg már 24 órán át absolut alkohollal főztem (visszafolyó hűtővel). Az alkoholos kivonatot bepároltam, a maradékot petroleumætherrel extraháltam és ezen kivonatot a többi petroleumætheres kivonattal egyesítve bepároltam és a maradékot megmértem. A LIEBERMANN-féle zsírmeghatározás

¹ PFLÜGER's Archiv 93. k. 327. o. 1903.

0·4—1·5 gr.-nyi anyaggal történt. 4. A *N*-t 0·3—0·5 gr.-nyi anyagban KJELDAHL-féle eljárással, 5. az energiatartalmat 0·4—0·8 gr.-nyi anyagban a BERTHELOT-MAHLER-féle calorimetriás bombában határoztam meg. Eleinte abból támadott nehézség, hogy különösen az igen zsíros álczákból, de a bábokból és legyekből is, lehetetlen volt pastillákat préselni a nélkül, hogy zsír ne sajtolódott volna ki. Végül úgy sikerült e nehézséget elkerülnöm, hogy a lemért mennyiségű álczát, illetőleg bábót vagy legyet a bomba elégető platincészéjében néhány csepp vízzel megnedvesítve újra beszárítottam; mire az egész egy tömeggé ragadt össze és teljesen elégett, a nélkül, hogy égés közben szétfreccsent volna.

Az álczákon és bábokon végzett respirációs kísérletek anynyiból hiányosak, hogy hibás berendezés következtében a víz meghatározása és ennek következtében az oxygénfelvétel kiszámítása is lehetetlenné vált. Így tehát csakis a szénsavat határoztam meg. Nagyjából ugyanolyan volt a kísérletek berendezése, mint WEINLAND¹ légykísérleteiben.

Az álczákat és bábokat a respirációs kísérletek közben «LIEBIG-féle kacsá»-nak nevezett üvegcsőben tartottam. E készülék elé két nátronmeszes tornyot és egy tömény kén-savat tartalmazó mosóüveget kapcsoltam, utána pedig két tömény kén-savat tartalmazó mosóüveget, GEISSLER-féle, az elementaranalysis-nél használatos káliedényt és egy ugyanilyen, de tömény kén-savat tartalmazó edényt. Ezen rendszeren szivattyú segítségével lassú légáramot szivtam át, melyet naponként csak egyszer, az absorptiós edények lemérése alkalmából kellett félbeszakítanom.

Ezen kísérleteimben főleg akkori gyakornokom, SOMOGYI MIHÁLY úr volt segítségemre, ki a számos analysis legnagyobb részét nagy lelkiismeretességgel végezte.

III. A kísérletek leírása.

1. *Álcza-kísérletek.*

Az 1905 április 19.-én beküldött, élénken nyüzsgő álcza-tömeget a beléje keverődött pizsoktól, valamint az elhalt és

¹ Zeitschrift f. Biologie 47. k. 191. o.

beszáradt álcáktól pontosan megtisztítottuk és az álcák legnagyobb részét 0.1 gr.-nyi pontossággal mért 100 gr.-os adagokra osztva, porzellántálakba helyeztük. Az egyes álcák súlyának meghatározására 100—100 darabot csipesz segítségével mérőedényekbe helyeztünk és analitikai mérlegen megmértünk. A porzellántálba helyezett álcákból két 100—100 gr.-os részletet mindjárt lemérésük után chloroformmal megöltem és 98° C-on vacuumban megszáritva, megelemeztem.

I. kísérlet.

Az álcák súlya és összetétele április 19.-én.

	100 db álcza súlya
1. próba	1.3510 gr.
2. " "	1.3004 "
3. " "	1.3369 "
4. " "	1.4058 "
5. " "	1.3265 "
6. " "	1.2706 "
Egy álcza súlya tehát	0.01333 "

100 gr. álczában van :

Víz	69.10 gr.
Száraz anyag	30.90 "
Szerves anyag	29.03 "
Hamu	1.87 "
Zsír (extractióval)	14.05 "
Zsír (LIEBERMANN-féle elszappanosítással)	13.03 "
N	2.22 "
Chemiai energia	212.9 Cal.

II. kísérlet.

Az április 19.-én lemért álcaadagok egy részét súlyuk csökkenésének megállapítása céljából naponként megmérttem. Nemsokára megindult a bebábozás, úgy, hogy április 21.-én már

1—2 bábót találtam az álcák között, másnap többet; 23.-án már nagy részük be volt bábozva, 25.-én pedig már csak igen csekély részük volt még bebábozatlanul. Április 25.-én az április 19.-én lemért 22,731 álca közül bebábozatlanul maradt 1621 darab álcát megöltem és megelemeztem. Az álcák súlyának a bebábozásukig észlelt változását a következő szám-
adatok mutatják:

	I. próba	II. próba	III. próba.
Az álcák súlya április 19.-én	100 gr.	100 gr.	103 gr.
" " " " 21.-én	90·9 "	88·9 "	93·1 "
" " " " 22.-én	85·4 "	83·0 "	86·0 "
" " " " 23.-án	80·6 "	77·6 "	80·6 "
" " " " 24.-én	76·4 "	73·3 "	76·2 "
" " " " 25.-én	72·2 "	70·5 "	72·2 "
Súlycsökkenés április 25.-ig — —	27·2 gr.	29·5 gr.	30·8 gr.
Közülök bebábozatlan maradt	740 álca	301 álca	580 álca.

Mindhárom próba összes súlyvesztése tehát 87·5 gr. volt, vagyis 28·9% és a 22,731 álca közül április 25.-én még 1621 darab vagyis 7·13% volt bebábozatlan. Ezek súlya 16·22 gr., 100 álca közepsúlya tehát 1·00 gr.

Összetételük a következő:

	100 gr. álcában:
Víz... ..	62·74 gr.
Száranyag... ..	37·26 "
Szerves anyag... ..	34·65 "
Hamu... ..	2·61 "
Zsír (LIEBERMANN-féle elszappa- nosítással... ..	13·90 "
N... ..	2·84 "
Chemiai energia... ..	247·7 Cal.

III. kísérlet.

Április 20.-án, vagyis az anyag beérkezését követő napon 23·4 gr.-ot (= 1755 darab) egy LIEBIG-féle kacsába mértem és azokkal rögtön respirációs kísérleteket kezdtem. Az

egyek kísérletek 17—24 óráig tartottak. Az utolsó kísérlet április 26.-án délben végződött, a mikor is az álcák legnagyobb része, ha nem is valamennyie, már be volt bábozva; súlyuk ekkor 21·4 gr. volt. Az egész hatnapos kísérleti időszak tartama alatt feltűnt, hogy ezen sorozat álcái nem mozogtak oly élénken, mint a többiek, melyeket még a porzellántálakban tartottam.

Szénsavtermelésüket a következő táblázat mutatja:

I. táblázat.

Az álcák súlya április 20.-án 23·4 gr.; április 26.-án 21·4 gr.

A kísérlet száma	A kísérlet kezdete	A kísérlet tartama órákban	Szénsavtermelés a kísérlet tartama alatt (lemért szén-sav) gr.	24 órára átszámított szén-savtermelés gr.	1000 álca napi szén-savtermelése gr.
1	Ápr. 20. d. u. 1° 30'	22 ¹ / ₄	0·4074	0·4394	0·2503
2	„ 21. „ „ 7° 15'	20 ³ / ₄	0·2500	0·2892	0·1647
3	„ 22. „ „ 5° 00'	17	0·1717	0·2424	0·1381
4	„ 23. d. e. 10° 30'	24	0·1890	0·1890	0·1077
5	„ 24. délb. 12° 00'	24	0·1459	0·1459	0·0831
6	„ 25. d. u. 12° 45'	23 ¹ / ₄	0·1049	0·1083	0·0627
Középérték				0·2357	0·1342

IV. kísérlet.

Április 19.-én 100 gr. keményre főtt tojásfehérjét kis darabokra vágva 2 porzellántálba raktam és rájuk 50—50 gr. álcát helyeztem. Az álcák a fehérjedarabkák alá bújtak s nagyobbára ott is maradtak; legnagyobb részük néhány nap alatt elpusztult.

Április 26.-án este — tehát a fehérjén való elhelyezésnek 7-dik napján — az ekkor még élő és élénken nyüzsgő álcák közül 2500—2500 darabot egy-egy mérőedénybe helyeztem és súlyukat megmértem:

a) 2500 darab álcza súlya	29·162 gr.
tehát 100 darabé	1·160 "
b) 2500 darab álcza súlya	28·238 "
tehát 100 darabé	1·129 "

Az a) próbát mindjárt lemérése után megöltem, a b) próba súlyát pedig bebábozásáig naponként megmértem.

Ezen álczák összetétele április 26.-án.

Az a) próbában:

Víz	68·87 gr.
Száranyag	31·18 "
Zsír (extractióval)	12·55 "
N	2·55 "
Chemiai energia	209·9 Cal.

A b) próba súlyváltozása következő volt:

Április 26.-án	28·34	fogyás
" 27.-én	25·55	2·79 gr.
" 28.-án	23·70	1·85 "
" 29.-én	21·60	2·10 "
május 1.-én	17·90	3·70 "
" 2.-án	16·26	1·74 "

Május 1.-jén az álczák legnagyobb része, 2.-án pedig valamennyi be volt bábozva.

2. Báb-kísérletek.

Az álczakísérletek leírásánál megemlítettem, hogy az anyag beérkezését követő második napon, április 21.-én már volt néhány kész báb. Számuk a következő napok folyamán mindjobban nőtt, úgy, hogy — a fehérjére helyezett álczáktól eltekintve — április 25.-én már majdnem mind be volt bábozva. A szoba hőmérséke a kísérlet egész ideje alatt nagyon állandó volt; csak 20—22° C. között ingadozott.

V. kísérlet.

Április 25.-én mindenek előtt a kész bábok súlyát állapítottam meg több 200—200 darabból álló próbán.

1. próba (20 ^c darab) súlya	___	___	___	___	1·9298 gr.
2. " " " " " " " "	___	___	___	___	1·9086 "
3. " " " " " " " "	___	___	___	___	1·7342 "
4. " " " " " " " "	___	___	___	___	1·8264 "
5. " " " " " " " "	___	___	___	___	1·8885 "
6. " " " " " " " "	___	___	___	___	1·8762 "
100 darab báb közép súlya	___	___	___	___	0·9303 gr.

E bábok 100 gr.-jában volt:

Viz...	___	___	___	___	59·71 gr.
Száranyag...	___	___	___	___	40·29 "
Szerves anyag...	___	___	___	___	37·48 "
Hamu	___	___	___	___	2·81 "
Zsír (extractióval)	..	___	___	___	16·44 "
Zsír (elszappanosítással)	·	___	___	___	14·90 "
N	___	___	___	___	3·19 "
Chemiai energia	___	___	___	___	265·1 Cal.

VI. kísérlet.

A IV. kísérletbeli *b*) próbát, mint említettem, április 26.-án a bebábozás bekövetkeztéig félretettem; május 2.-ára mind a 2500 álca be volt bábozva. Súlyuk 16·26 gr. volt, tehát 100 darab báb súlya 0·650 gr. Összetételüket a következő szám adatok mutatják:

		100 gr.-ban.
Viz.	___	50·50 gr.
Száranyag	___	49·50 "
Szerves anyag	___	46·17 "
Hamu	___	3·33 "
Zsír (extractióval)	___	18·20 "
N	___	4·48 "
Chemiai energia	___	321·5 Cal.

VII. kísérlet.

Ezen kísérlet tulajdonképen 4 kísérleti sorozatból áll, melyekben a szénsavtermelést a bábstádium kezdetétől a legyek kikéleség határozta meg.

II. táblázat.
A bábok szénsavtermelése.

A kísérlet száma	A párhuzamos kísérleti sorozatok kezdete	A kísérlet tartama órákban	Az álcák súlya a kísérlet kezdetén	Szénsavtermelés a kísérlet tartama alatt	A 24 órás szénsavtermelés	Megjegyzések	Az álcák súlya a kísérlet kezdetén	Szénsavtermelés a kísérlet tartama alatt	A 24 órás szénsavtermelés	Megjegyzések	
			«A» sorozat (20-21° C-on) 2545 báb								
1	Ápr. 25. d. u. 5° 45'	19	23·68	0·1313	0·166		26·97	0·1629	0·206		
2	« 26. « « 6° 00'	22	—	0·1355	0·148		—	0·1627	0·177		
3	« 27. « « 5° 30'	23 ^{1/2}	23·2	0·1388	0·142		26·4	—	0·167		
4	« 28. « « 5° 00'	24	—	elvesztett			elvesztett				
5	« 29. « « 7° 00'	20	—	0·0955	0·115		—	—	0·149		
6	« 30. « « 3° 00'	24	21·9	0·1098	0·110		24·4	0·1255	0·125		
7	Máj. 1. « « 5° 00'	24	—	0·1090	0·109		—	0·1437	0·144		
8	« 2. « « 5° 00'	23	21·4	0·1155	0·120		24·1	0·1265(?)	0·132(?)		
9	« 3. « « 4° 00'	24	—	0·1417	0·142		—	0·1470	0·147		
10	« 4. « « 4° 00'	25	—	0·1548	0·149		elvesztett				
11	« 5. « « 5° 00'	23	21·2	0·1738	0·181	23 légy kelt ki	—	0·1466	0·153	8 légy kelt ki	
12	« 6. « « 7° 00'	22	20·5	0·2503	0·273	132 « « «	23·3	0·2920	0·318	83 « « «	
			«C» sorozat (30-33° C) 1699 báb								
1	Ápr. 27. d. u. 5° 30'	23 ^{1/2}	14·56	0·3851	0·195		15·38	0·4208	0·213		
2	« 28. « « 5° 00'	24	—		0·173		—		0·213		
3	« 29. « « 7° 00'	20	—	0·1715	0·171	2 légy kelt ki	—	0·1777	0·213		
4	« 30. « « 3° 00'	24	13·8	0·2030	0·203		25 « « «	14·0	0·2154	0·215	
5	Máj. 1. « « 5° 00'	24	—	0·2132	0·222	26 « « «	13·4	0·2063	0·206	néhány légy kelt ki	
6	« 2. « « 5° 00'	23	13·4	0·1700	0·170	légy többé nem kelt ki	—	0·2169	0·226	15 légy kelt ki	
7	« 3. « « 4° 00'	24	—	0·0933	0·090		—	—	0·1688	0·169	légy többé nem kelt ki
8	« 4. « « 4° 00'	25	—	0·0647	0·067		—	—	0·0834	0·080	
9	« 5. « « 5° 00'	23	—				—	0·0480	0·050		
			«D» sorozat (30-33° C) 1795 báb								

Ezen középértéktől eltér a respirációs kísérletekre felhasznált bábok súlya:

Az *A.* kísérlet 2545 bábjának súlya május 6.-án 20·5 gr., százának súlya tehát 0·805 gr.; a *B.* kísérlet 2899 bábjának súlya pedig ugyancsak május 6.-án 23·3 gr., százának súlya tehát 0·804 gr.

Május 6.-án, mely napon a legyek kikelése megkezdődött, a még ki nem ürült bábok egy részét megöltem és megelemeztem; összetételük a következő volt:

	100 gr. báb tartalmaz május 6-án
Víz_ _ _ _ _	52·92 gr.
Szárazanyag_ _ _ _ _	47·08 "
Szerves anyag_ _ _ _ _	43·96 "
Hamu_ _ _ _ _	3·12 "
Zsír (extractióval)_ _ _ _ _	20·38 "
Zsír (elszappanosítással)_ _ _ _ _	16·43 "
N_ _ _ _ _	3·98 "
Chemiai energia_ _ _ _ _	305·2 Cal.

IX. kísérlet.

A legyek kikelése alkalmával gondot fordítottam arra, hogy azokat hiánytalanul gyűjthessem. E célból a bábokat máj. 6.-án PETRI-féle csészékbe helyezve üveghengerekbe tettem, melyeket finom dróthálóval úgy borítottam le, hogy a légy a hengerből el ne szállhasson. Kikelésük több napig eltartott; a kikelteket, melyek a hengerben élénken röpdöstek, napjában kétszer, dél előtt és délután eltávolítottam, megszámláltam és megmértem. Még pedig úgy, hogy a dróthálóra kicsi, chloroformmal átitatott wattapamatot helyeztem, mire a legyek azonnal elkábultak. A narkózis beálltával a legyeket csipeszszel egyenként szedtük ki: egyébként a narkózis oly gyenge volt, hogy a legyek néhány percz múlva teljesen magukhoz tértek. A mint a legyek kikelése megszűnt, mindenek előtt elkülönítettük az üres bábhüvelyeket azon báboktól, melyekből a légy ki nem kelt. Az üres bábhüvelyeket megszámláltuk s csakúgy megelemeztük, mint a legyeket. A legyek közül azokat, melyeket nem használtam éheztetési

kísérletekre, még kikelésük napján chloroformmal megöltem és súlyukat megmértem.

III. táblázat.

«A» csoport; bábok száma 4814.

Kikelés napja	Kikelt legyek száma	Hány százaléka az összes kikelt legyeknek?	A kikelt legyek súlya gr.	100 darab kikelt légy súlya gr.
Május 6. — — —	29	1·6	0·207	0·714
« 7. — — —	204	11·1	1·525	0·748
« 8. — — —	598	32·7	4·449	0·744
« 9. — — —	657	35·9	4·606	0·701
« 10. — — —	327	17·9	2·222	0·680
« 11. — — —	15	0·8	—	—
« 12. — — —	—	—	—	—
« 13. — — —	—	—	—	—
« 14. — — —	—	—	—	—
Mindössze: 1830 darab légy, vagyis a bábok 38·0 %-a.				

«B» csoport; bábok száma 5444.

Kikelés napja	Kikelt legyek száma	Hány százaléka az összes kikelt legyeknek?	A kikelt legyek súlya gr.	100 darab kikelt légy súlya gr.
Május 6. — — —	31	1·5	0·254	0·819
« 7. — — —	215	10·2	1·733	0·806
« 8. — — —	509	24·0	3·941	0·774
« 9. — — —	863	40·7	6·061	0·702
« 10. — — —	369	17·4	3·016	0·817
« 11. — — —	60	2·8	0·423	0·706
« 12. — — —	38	1·8	0·271	0·713
« 13. — — —	23	1·1	—	—
« 14. — — —	10	0·5	—	—
Mindössze: 2118 darab légy, vagyis a bábok 38·9 %-a.				

A III. táblázatban felsorolt 1815, illetőleg 2085 darab lemért légygyel még 48, illetőleg 846 darab május 4.-én, illetőleg 9.-én kikelt legyet egyesítettem és az egészet megelemeztem.

A frissen kikelt legyek középsúlyát a következő négy mérésből számítottam ki:

1815 darab légy súlya	13·009 gr.,	tehát százának súlya	0·717 gr.
2085 " " "	15·699 " " "	" " "	0·753 "
48 " " "	0·375 " " "	" " "	0·779 "
846 " " "	6·026 " " "	" " "	0·712 "
<hr/>			
4794 darab légy súlya	35·109 gr.,	tehát százának súlya	0·7324 gr.

Az üres bábhüvelyek gyűjtése és számlálása alkalmából gondom volt rá, hogy csakis üres és össze nem tört hüvelyek kerüljenek elemzésre. Összesen 8149 üres bábhüvelyt gyűjtöttem, melyek súlya május 18.-án 7·742 gr. volt, száz darab üres hüvelyé tehát 0·0950 gr. A május 6—10-ig frissen kikelt legyek és az üresen maradt bábhüvelyek összetétele a következő volt.

	100 gramm.	légyben	üres bábhüvelyben volt
Viz	— — — — —	66·62 gr.	5·57 gr.
Szárazanyag	— — — — —	33·38 "	94·43 "
Szerves anyag	— — — — —	31·88 "	81·06 "
Hamu	— — — — —	1·50 "	13·37 "
Zsir (extractióval)	— — — — —	14·13 "	9·17 "
Zsir (elszappanosítással)	— — — — —	12·10 "	6·84 "
N	— — — — —	2·61 "	10·32 "
Chemiai energia	— — — — —	224·1 Cal.	467·5 Cal.

IV. A kísérletek eredményei.

Az imént leírt kísérletek eredményeit, melyekből az álczában és bábban végbemenő változásokra következtethetünk, a IV. számú táblázatban foglaltam össze.

IV. táblázat.

Kísérlet száma	Dátum	A vizsgálat tárgya	Súly gr.	Víz gr.	Száraz anyag gr.	Szerves anyag gr.	Hamu gr.	Zsír (petroleum-etheres kivonata) gr.	Zsír (Liebermann-féle elszappanosítással) gr.	N gr.	Chemiai energia Cal.	Megjegyzés
<i>100 gr. tartalmaz :</i>												
I.	Április 19. _	álca	—	69·10	30·90	29·03	1·87	14·05	13·03	2·22	212·9	
II.	" 25. _	"	—	62·74	37·26	34·65	2·61	—	13·90	2·84	247·7	
III.	" 25. _	báb	—	59·71	40·29	37·48	2·81	16·44	14·90	3·19	265·1	
VIII.	Május 6. _	"	—	52·92	47·08	43·96	3·12	20·38	16·43	3·98	305·2	
IX.	Május 6—10.	bábhüvely légy	—	66·62	33·38	31·88	1·50	14·13	12·10	2·61	224·1	
<i>1000 darab tartalmaz :</i>												
I.	Április 19. _	álca	13·33	9·21	4·12	3·87	0·25	1·87	1·70	0·295	28·38	
II.	" 25. _	"	10·00	6·27	3·73	3·47	0·26	—	1·39	0·284	24·77	
V.	" 25. _	báb	9·30	5·55	3·75	3·49	0·26	1·53	1·35	0·296	24·66	
VIII.	Május 6. _	"	7·40	3·92	3·48	3·25	0·23	1·51	1·22	0·295	22·58	
IX.	Május 6—10.	bábhüvely légy	0·95 7·32	0·05 4·88	0·90 2·44	0·77 2·33	0·13 0·11	0·09 1·03	0·06 0·09	0·098 0·191	4·44 16·40	
<i>100 gr. tartalmaz :</i>												
IV.	Április 26. _	álca	—	68·87	31·13	—	—	12·55	—	2·55	20·9	
VI.	Május 2. _	báb	—	50·5	49·5	46·17	3·33	18·2	—	4·48	321·5	
<i>1000 darab tartalmaz :</i>												
IV	Április 26. _	álca	11·60	7·99	3·61	—	—	1·46	—	0·296	24·35	
VI	Május 2. _	báb	6·50	3·28	3·22	3·00	0·22	1·18	—	0·291	20·91	Az álcákat április 19—25-ig főt fehérrjén tartottam.

1. A kísérleti anyag jellemzése.

Mint már említettem, az ophyra cadaverina álczái, melyekkel kísérleteztem, a kísérletek megkezdését megelőző napon kerültek ki egy hullából. Akkor még nem tudtam, hogy az álczák már teljesen érettek voltak, vagyis közvetlenül bebábozás előtt álltak, s így táplálékot már nem vesznek fel. De mindez rövidesen kitűnt, mert 21—22° C-on tartva, már két nappal reá megkezdődött bebábozásuk és további négy nap folyamán 6% híjján valamennyien bebábozódtak. Legnagyobb részük a beszállításukat követő 5—6. napon bábozódott be, mi arra vall, hogy koruk is egyenlő volt. A hordóalakú bábok első napon sárgás-szürkék, másnap azonban már sötétbarnák.

Érdekesek azon megfigyelések, melyeket a IV. kísérletben, főtt fehérjén tartott álczákon tettem. Elvárhattam ugyanis, hogy a fehérjéből, mely nem volt nekik megfelelő táplálék, még az esetben sem igen fognak enni, ha még nem is lettek volna teljesen megérve. Az álczák csakhamar a nedves fehérjedarabok alá bújtak. Legnagyobb részük tönkrement; de az életben maradtak még a 7. napon is, a midőn a többi, nem fehérjén tartott álca már mind be volt bábozva, bebábozatlanok voltak.¹ Az életben maradtakat összegyűjtöttem s mint a többi álczát porcellántálban szobahőmérsékleten tartottam; további hat nap múlva ezek is bebábozódtak. A bebábozódást tehát csakis azzal, hogy az álczákat főtt fehérjén tartottam, körülbelül egy héttel elodáztam, noha, mint később kitűnt, a fehérjéből mit sem ettek.

A többi álca, mely nem volt fehérjére helyezve, majdnem mind egy időben bábozódott be, úgy, hogy joggal tehető fel, hogy az egész kísérleti anyag homogen volt, meglehetősen egykorú és egyenlő súlyú érett álczákból állott. Ez természetesen a bábokról is áll. A 200-ával lemért bábok súlya a bábstádium

¹ Ezzel megegyeznek WEINLAND tapasztalatai is. (Zeitschrift für Biologie 47. k. 244. o.) Szerinte ugyanis, ha az érett álczákat arra kényszerítjük, hogy a tartózkodási helyüket képező húspémben maradjanak, legnagyobb részük — még pedig rendszerint bebábozatlanul — elpusztul.

kezdetén közel egyforma volt és a belőlük kikelt 4842 darab legynek 72%-a, vagyis 3476 darab a bábstádium 13. és 14. napján kelt ki. (A III. sz. táblázat adatai alapján a bábstádium átlagos tartama $13\frac{1}{2}$, pontosabban 13.53 nap.)

A IX. kísérlet folyamán a bábokból kikelt legyeknek csak kisebb része maradt életben; mivel legnagyobb részük nappal kelt ki, a kikelteket pedig napjában kétszer, délelőtt és délután kiszedtem és azonnal megöltem, a legtöbb légy élete a $\frac{1}{2}$ napnál is rövidebb volt.

Megemlítendő, hogy a legyek nem ürítenek közvetlenül kikeltek után, hanem csak az azután következő napon; azon minimális ürülék pedig, melyet még bábállapotban vagy közvetlenül kikelésük előtt ürítenek, az üres bábhüvelyekben marad. Hogy kísérleteimben ürülékükből semmisen ment veszendőbe, kiténik abból, hogy a bábhüvely + légy *N*-tartalma azonos volt az álczáéval.

A báboknak csak 39%-ából kelt ki légy; a többiek részben mint már teljesen kifejlődött legyek pusztultak el a bábhüvelyben, részben pedig a metamorphosis korai vagy késői stádiumában. Ezen kedvezőtlen költési eredmény oka nyilván a kísérleti körülményekben rejlett, melyek a természetes viszonyoknak nem feleltek meg teljesen.

2. Az álczák, bábok és legyek összetétele.

Ha az álczák, bábok és legyek chemiai összetételét hasonlítjuk össze, mindenekeelőtt feltűnik a víztartalmukban észlelhető különbség.

Az álczák víztartalma	április 19.-én	— — — —	69.1%
Az " " "	" 25.-én	— — — —	62.7%
A bábok " "	" 25.-én	— — — —	59.7%
A " " május	8.-án	— — — —	59.6%
A legyek " "	— — — —	— — — —	66.6%
Az üres bábhüvelyek víztartalma	— — — —	— — — —	5.6%

Ezen különbség akkor is megmarad, ha a LIEBERMANN-féle eljárással megállapított zsirmennyiség levonása után a víztartalmat zsirmentes anyagra vonatkoztatjuk.

Ily számításnál

az álczák víztartalma	április 19.-én	— — — —	79·4%
a bábok	“	25.-én	70·2%
a “	“	május 8.-án	67·4%
a kikelt legyek	“	8.-án	75·8%.

Az álczák tehát vízben fokozatosan szegényebbé lesznek. Sőt úgy látszik, hogy maga a bebábozás is lényeges vízvesztéssel jár; illetőleg, hogy a vízvesztés és a bebábozás egymással összefügg. Mindenesetre feltűnő, hogy április 25.-én a még bebábozatlan álczák víztartalma 62·7%, a bábóztaké pedig csak 59·7. Azon álczák víztartalma, melyeket április 19—25-ig főtt fehérjén tartottam (IV. kísérlet), április 25.-én 68·9% volt, május 2.-án pedig, midőn bebábozódtak, csak 50·5%, míg az április 25.-én bebábozóttaké 59·7%. Ezek szerint tehát nem lehet azt állítani, hogy a bebábozás bizonyos víztartalomhoz van kötve; legfeljebb csak annyit, hogy, ha egyáltalán van a kettő között összefüggés, a bebábozás bizonyos (60%) víztartalom túl nem megy végbe. Erre nézve biztosat majd csak rendszeres és oly vizsgálatok fognak kideríteni, melyek a környezet hőmérsékleti és nedvességi viszonyaira is tekintettel lesznek.

Érdekes tény az, hogy az álcza, noha már bebábozása előtt is hosszabb ideje, azontúl pedig az egész báb-stádiumban éhezik, vízben szegényebb lesz; míg a közönséges éhezésről úgy tudjuk, hogy tartama alatt a test relatív víztartalma nő. Utóbbi tényt magának az ophyrának imago-ján is észlelhettem: a frissen kikelt légy víztartalma 66·6% volt, a két napig éhezőé pedig 70·4. A normálisan táplált fehér egér testének víztartalma BÖTHLINGK¹ szerint 67·2%, az éhezőé pedig 71·5%; RUBNER a rendszeren táplált házinyúlban 67, az éhezőben pedig 73·7% vizet talált.

De úgy látszik, hogy más rovarok metamorphosisa közben ugyanez történik, mint a mit az imént a légynél láttunk: KELLNER² szerint a begubózásra kész selyemhernyó víztartalma

¹ BÖTHLINGK: Arch. d. sienc. biolog. 5. k. 395. o. 1897.

² Die landwirtsch. Versuchstationen. 30. k. 59. o. 1884.

80·33%, a lepkéé pedig csak 71·8% ; FARKAS KÁLMÁN¹ a selyemhernyóban 79·1% vizet talált, a hím lepkében 69·8%-ot, a nőstényben 79%-ot.

Abban, hogy az imago viztartalma nagyobb a bábénál, ha úgy tetszik, a természeti jelenségekben észlelhető takarékoság elvének nyilvánulását láthatjuk, sőt, ha ezen anthropomorphosisos gondolatfűzést tovább viszzük, a természet egy fogásának tekinthetjük, melylyel kerülő uton egy különben nehezen elérhető állapot teremtetik. A míg ugyanis az egész bábban csak 60%-nyi víz van, addig a bábnek tartalmában, mely a tulajdonképeni élő anyag, a vízben szegény (6%) bábhüvely kiküszöbölése által 69·5%-ra emelkedik. Ezen folyamat biológiai jelentősége tehát nemcsak abban áll, hogy védőhüvely fejlődik a báb teste körül, hanem főleg abban, hogy a sejtekben és az azok körül lévő oldatoknak oly concentratioja létesül, mely nélkülözhetlen az illető chemiai reakciók lefolyásakor.

Selyemhernyón nem találni oly nagy különbséget: KELLNER szerint a báb + gubó 70·9%, a kikelt lepke pedig 71·8% vizet tartalmaz.

A viztartalomnak ezen meggyarapodása különben ügylátszik általánosan el van terjedve a rovarok fejlődése közben: így az embryonalis fejlődésnél is felleljük. FARKAS KÁLMÁN szerint a selyemhernyó érett petéjében 64·6%, a frissen kikelt hernyóban pedig 71·8% víz van.

Mint alant látni fogjuk, a bábhüvely kiküszöbölése által a légy összetételében még más, gazdasági szempontból ép oly fontos változások állanak be.

A szárazanyag változását az V. sz. táblázat mutatja be.

¹ PFLÜGER's Archiv 98. k. 490. o. 1903.

V. táblázat.

A száraz anyag összetétele.

Kísérlet-száma	Datum	Fejlődési szak	Szerves anyag	Hamu	Zsír (petroleum-ætheres kivonat)	Zsír (Liebermann szerint)	N	Chemiai energia
			gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	Cal.
100 gr. száraz anyagban van								
I.	Április 19.	álcza	94.44	5.56	45.46	41.21	7.18	689.0
V.	" 25.	báb	93.02	6.98	40.81	36.97	7.91	658.0
IX.	Május 6-10.	légy + bábhüvely	92.82	7.18	33.53	28.44	8.54	632.0
IX.	" 6-10.	légy	95.50	4.50	42.31	36.24	7.82	671.2

Ezen változásokat következésképen foglalhatjuk össze: miközben az álczából metamorphosis által imago lesz, *testanyaga hamuban és N-ban gazdagabbá, szerves anyagban, zsírban és chemiai energiában szegényebbé lesz.*

A metamorphosissal járó anyagcsere-folyamatok tehát — eltekintve a víztartalom apadásától — a testállomány ugyanolyan elváltozásával járnak, mint az egyszerű éhezésnél. Noha ezen két állapot között annyiból nagy a hasonlatosság, hogy a metamorphosisban lévő állat is éhezik, közöttük már csak nagy biológiai különbségüknél fogva is lényeges különbségnek kell lennie a chemiai és energetikai folyamatokban is; ezeknek tudhatóak be egyrészt azon különbségek, melyek a morphológiai folyamatokban észlelhetők, másrészt az, hogy az egyik állapot az életképesség lassú, de teljes elmulására, a másik pedig újabb élettani működések kifejlődésére vezet.

Különös eredményeket adott az álczákon, bábokon és a legyeken végzett zsírmeghatározás. Mint a táblázatból látható, a legtöbb kísérletben kétféleképpen határoztam meg a zsírt: egyrészt petroleumætherrel való extractio, másrészt a LIEBERMANN-féle elszappanosítás útján. Míg az eddigi tapasztalatok azt mutatták, hogy a legtöbb állati szervből elszappanosítással több zsírt kapni, mint az (emésztés nélküli) extractióval, addig az én kísérleteimben kivétel nélkül mindig az extractióval kaptam

többet, sőt némelykor jóval többet. A LIEBERMANN-féle elszappanosító eljárással, a melynél az el nem szappanosítható vegyületek mellőztetnek, helyesebb értéket kapunk, mint az extrac-tióval. A petroleumætheres kivonatba kétségkívül nem zsirnemű anyagok is kerülnek, melyeknek *N*-tartalmát azonban, sajnos, nem határoztam meg; a kivonat égési hője 9244, illetőleg 9234 cal. volt (pro 1 gr.), középértékben 9239. Ezen érték valamivel kisebb annál, melyet RUBNER a zsirokra talált (9423); a mi szintén a mellett szól, hogy a kivonatba nem zsirnemű anyagok is átmentek. Annál különösebb, hogy, mint a metamorphosis anyagforgalmának tárgyalása alkalmával alant ki fog tűnni, a zsirfogyasztásnak mindkét meghatározás útján nyert értékei azonosak.

WEINLAND igen érdekes és gondos vizsgálataival kiderítette, hogy mily fontos szerepe van a zsirnak a báb anyagcseréjében; joggal tehetta fel tehát azon kérdést is, hogy a bebábozás első mozzanata, vagyis a táplálkozás beszüntetése, az állat zsirtartalmának bizonyos fokához van-e kötve, vagy nem? ¹ Annál is inkább, mert szerinte a zsir azon tartalékanyag, melyet az állat álczakorában a metamorphosis munkájára felhalmoz.

WEINLAND e kérdésre egyelőre csak két kísérlet alapján felel, melyekben a frissen bebábozott állatok szárazanyagából 21.35, illetőleg 21.7% zsirt talált. W. egyelőre lehetségesnek tartja, hogy itt is bizonyos chemiai egyensúly nyilvánulásáról van szó.

Saját tapasztalataim nem vallanak arra, hogy a bebábozás bekövetkezte a szárazanyagnak bizonyos meghatározott zsirtartalmához van kötve. Az április 25.-én elkészült bábok szárazanyaga 40.8%-nyi petroleumætheres kivonatot adott; azoké, melyeket április 19-től 26-ig főlt fehérjén tartottam (IV. kísérlet), utóbbi napon — midőn őket a fehérjéről eltávolítottam — 40.3%-ot; ez utóbbi bábok mindazonáltal csak május 2.-án, tehát 6 nappal későbbben bábozódtak be, s ekkor szárazanyaguk petroleumætheres kivonata már csak 36.8% volt. Ha a szárazanyag zsirtartalma és a bebábozás kezdete között

¹ Zeitschr. f. Biologie 49. k. 492. o.

valójában volna valamilyen összefüggés, ez, mint azt a víztartalomra nézve már kifejtettem, csak annyiban állhatna, hogy a bebábozás a szárazanyag zsírtartalmának bizonyos maximumán — az én kísérletemben 41%-on — túl nem következhetik be; ezen alul azonban különböző zsírtartalom mellett lehetséges. Tehát az eddigi kísérletek értelmében a bebábozás bekövetkezte ép oly kevéssé függ az álcza szárazanyagának zsírtartalmától, mint víztartalmától. E kérdés eldöntése csak további rendszeres vizsgálatoktól lesz elvárható.

Az álcza teste a metamorphosis végén bábhüvelyre és légyre válik szét; ezen szétválás a légy zsír-, illetőleg szerves anyagtartalmára ugyanolyan hatással van, mint a víztartalmára. Azáltal, hogy a bábhüvelynek zsírban szegény és hamuban dús tömege kiküszöbölődik és a légy testállományába nem megy át, ez utóbbinak zsír- és energiatartalma lényegesen emelkedik, hamutartalma pedig csökken. Az egész bábnek szárazanyagában a metamorphosis végén 92·8% szerves anyag, 7·2% hamu és gr.-ként 6·3 Cal. chemiai energia van; míg a kikelt légyében 95·5%-a szerves anyag, 4·5%-a hamu, és 6·7 Cal. az energiatartalom.

A *N*-tartalom a metamorphosis folyamán néhány tized százalékkal emelkedik, a *N*-ban gazdag bábhüvely kiküszöbölése által azonban az elért 8·5%-ról a légy szárazanyagában 7·8%-ra süllyed. Ezen számadatokból a fehérjére természetesen nem lehet következtetni, mivel a talált *N*-ban a fehérjék *N*-jén kívül a *N*-tartalmú bomlási termékek *N*-je is befogaltatik.

3 Az álczák és bábok szénsavtermelése.

A III. kísérletben meghatároztam az álczák szénsavtermelését a bebábozásukat megelőző 6 napon, a VII. kísérletben pedig a bábokét a legyek kikeléséig. Az erre vonatkozó adatokat az I. és II. sz. táblázatban (l. 218. és 221. old.) állítottam össze.

Az I. sz. táblázatból világosan kitűnik, hogy az álczák szénsavtermelése közvetlenül bebábozásuk előtt rohamosan apad, különösen a bebábozást megelőző 5. és 4. napon. Így pél-

dául 1000 darab álcza az 5. napon 250 mgr. szénsavat termelt, a következő 4. napon (április 21—22-ig) már csak 165 mgr.-ot, pedig a bebábozás alig hogy elkezdődött, csak 23.-án volt nagyobb számmal található kész báb. A szénsavtermelésnek ezen rohamos csökkenését mindazonáltal a metamorphosis megkezdődésének tulajdoníthatjuk; ez tudvalevőleg azal indul meg, hogy az azelőtt még élénk álczák mozdulatlaná válnak; majd megindul az alakváltozás, az állat a hordóalakú báb formáját ölti, mely eleintén még oly színű, mint a milyen az álcza volt s csak a következő napon lesz jellemző sötétbarna. Mivel az izommozgás a legnagyobb mérvben növeli a szénsavtermelést, úgy hiszem, hogy a szénsavtermelés rohamos apadását épen az izomműködés megszűntének kell tulajdonítanunk; ezzel természetesen nem akarom mondani, hogy egyéb szervek működésében beálló változásoknak ne lenne részük benne. Erről különben alant bővebben lesz szó.

Az álczák a bebábozásukat megelőző 5 napon átlag 134 mgr. szénsavat termeltek pro 1000 állat és 24 óra. Ha ez értéket 100 gr. álcza kezdeti súlyára számítjuk át, 1.007 gr.-nyi napi szénsavtermelést kapunk.

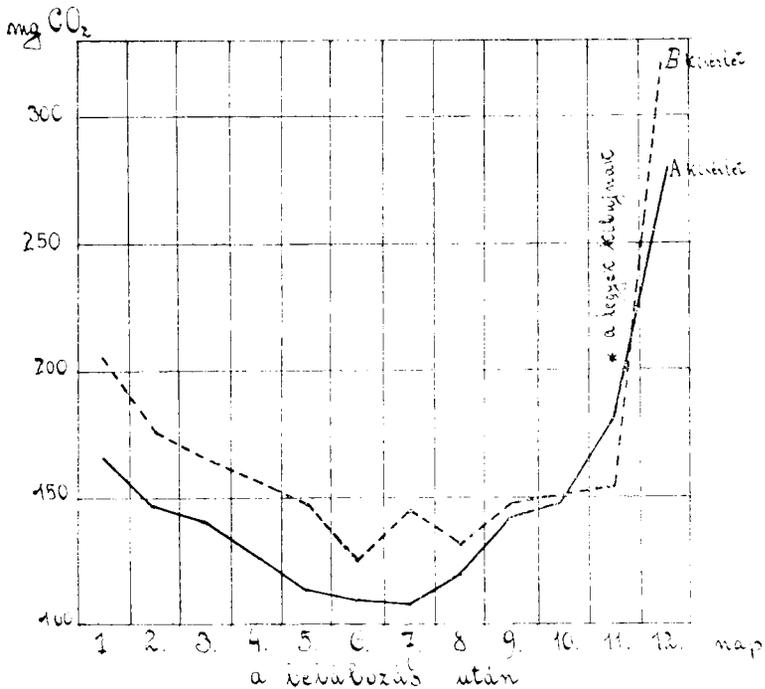
A II. sz. táblázat adatait, melyek a báboknak a metamorphosis alatti napi szénsavtermelését fejezik ki, az I. sz. ábra görbéje ábrázolja.

Ezen ábrából mindenekelőtt az tűnik ki, hogy az *A.* és *B.* kísérletek egymással megegyeznek és hogy a görbék majd nem azonosak WEINLAND-éival. Az *ophyra*-bábok szénsavtermelése a metamorphosis alatt tehát teljesen úgy viselkedik, mint ezt WEINLAND a *calliphora*-bábról kimutatta. Az *ophyra*bábok szénsavtermelése is bábéletük első 2—4 napján lesüllyed, majd néhány napig körülbelül állandó marad, végül pedig eleintén lassabban, a legyek kikelésének megindulásakor pedig rohamosan emelkedik.

Az, hogy a szénsavtermelésnek ezen sajátos viselkedése két különböző légyfaj metamorphosisánál fellelhető, megerősíti W. azon feltevését, hogy a metamorphosist alkotó anyagsere-

¹ Zeitschrift f. Biologie 47. k. 205. o.

folyamatokra directe jellemző. Nézetem szerint WEINLAND-dal joggal magyarázhatjuk a szénsavtermelésnek fokozódását a metamorphosis végén úgy az imago szövetének folytonos növekedéséből, mint az izomműködésből is, mely lassanként kezdődik, mindjobban fokozódik s különösen a legyek kikelése napján (12. nap) igen élénk. Ezen izomműködés első sorban az



1. ábra.

imago kikelésének előkészítésében szerepel, a midőn t. i. a bábüvely egyik polusán nyílást rág, majd pedig a kikeléskor, mikor csavaró mozdulatokkal furakodik át e nyíláson.

Nem oly egyértelműen magyarázható a szénsavtermelés apadású a bábélet első napján.

WEINLAND felteszi, hogy az álczáknak csak elpusztuló, széteső izmainak működése csökken fokozatosan; mely feltevés ellen azonban maga WEINLAND hozza fel, hogy az izmok már a bábélet

kezdetétől fogva is aligha működnek. Ezért a szénsavtermelés megváltozását a metamorphosis közben lefolyó két ellentétes folyamat eredőjének tekinti. Még pedig 1. szövetek beolvadása, 2. szövetek képződése. A metamorphosis elején főleg a negatív folyamat volna túlsúlyban, mely különösen a bebábozás kezdetén igen élénk autolysisben (phagocytosis) áll; a végén pedig a pozitív, szövetképző folyamat. E két stádium közötti időszakban a két folyamat egyenlő erős; ez időszaknak megfelel a görbe középső, majnem egyenes része.

WEINLAND ezen magyarázatát nem fogadhatom el. Mindenekelőtt nincsen bebizonyítva, hogy az erőteljesebb autolysis fokozott szénsavtermeléssel járna. Még eddig közzé nem tett vizsgálataim szerint az autolysisfolyamatok valószínűleg ép oly csekély hőtermeléssel járnak, mint az emésztő enzymből okozta hydrolysisok. Ez magában véve nem zárja ki ugyan a fokozottabb szénsavtermelést; de másrészt az alantiakkal bebizonyíthatom, hogy az ophyra-álczák akkor, mikor chemiai energia fogyasztásuk kövekszik, több szénsavat is termelnek.

Ezen következtetésem helyességén az sem változtat semmit, hogy mint KOWALEVSKY¹ vizsgálataiból kitűnt, a histolysis intensív phagocytosis-sal jár s hogy a phagocytáknak ilyenkor, mint felteszik, activ szerepük van; sőt a phagocytosis maga volna az elsődleges folyamat. Ez utóbbi feltevést egyáltalán nem tartom valószínűnek, mert noha tény, hogy a bebábozás kezdetén élénk phagocytosis észlelhető, a chemotaxisról, opsoninokról, stb. szerzett ismereteink alapján joggal feltehetjük, hogy bizonyos, az illető sejtekben már végbement chemiai folyamatok azok, melyek a phagocytáknak odavándorlását okozzák. De még ettől eltekintve is kérdéses, hogy a phagocytáknak a szöveteknek bomlásakor mennyiben van activ szerepük, melynek értelmében ők okoznák az anyagcsere és különösen a szénsavtermelés fokozódását.

Még a phagocyták «activ» szereplése is számbavehető anyag- és energiafogyasztás nélkül is elképzelhető; mert hiszen

¹ Zeitschrift f. wissenschaftliche Zoologie 45. k. 542. o.

odavándorlásuk és a sejttörmelékek felfalására szükséges alakváltozásuk vagy semmilyen, vagy csak igen csekély energiafogyasztással jár. Ha pedig a szöveteket emésztő enzymák segélyével pusztítják el, ez mai ismereteink szerint¹ ugyan-csak igen csekély mennyiségű chemiai energia felhasználásával jár.

Végül pedig épen az tűnik ki kísérleteimből, hogy, ha a szervek szétesése vagy feloldása tényleg intenziv phagocytosis segélyével indul meg a metamorphosis kezdetén, ezen szétesés bizonyára nem okoz fokozott szénsavtermelést, mert hiszen az csekélyebb, mint a bebábozást megelőző utolsó napokon, a midőn bizonyára nincsen intenziv histolysis.

Ez ellen az sem hozható fel ellenérvül, hogy az ophyra-álczákban talán már néhány nappal bebábozásuk előtt kezdődött meg a szövetek pusztulása — WEINLAND negatív folyamata —, hogy tehát a szénsavtermelés fokozódását már az előző napok valamelyikén kellett volna keresni. Ezen ellenvetés megdől, ha tekintetbe vesszük, hogy az álczák még a bebábozódást megelőző napon is mozogtak, sőt épen az álczakísérletek megkezdésekor igen élénkek voltak: széteső izmokkal pedig ez alig lett volna lehetséges.

Kísérleteim eredményei továbbá WEINLANDnak azon állítása ellen is szólnak, mely szerint a bábélet első napjain különösen nagyfokú lenne a szénsavtermelés. Az ophyra-álczáknál ez bizonyára nincsen így s nyilván WEINLAND sem állította volna, ha a szénsavtermelés vizsgálatát már a bebábozás előtt, tehát az éhező calliphora-álczákon kezdte volna.

¹ HÁRI, PFLÜGER'S Archiv 115. k. 11. o. és 121. k. 460. o.

VI. táblázat.

1000 darab állat 24 órai szénsav-termelése.

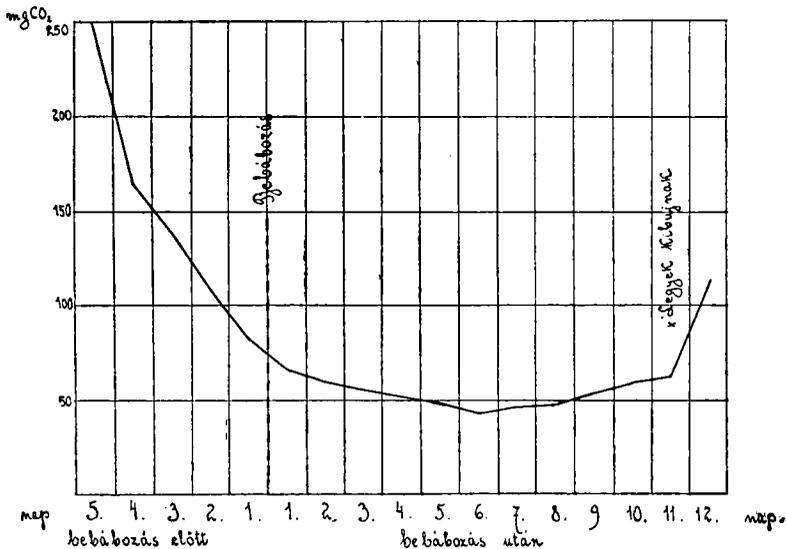
	Datum	Stádium	CO ₂ mgr.
5 nappal bebábozás előtt	Április 20—21. ...	álcza	250
4 " " "	" 21—22. ...	"	165
3 " " "	" 22—23. ...	"	138
2 " " "	" 23—24. ...	"	108
1 " " "	" 24—25. ...	"	83
	" 25—26. ...	"	62
1 nappal bebábozás után	" 25—26. ...	báb	66
2 " " "	" 26—27. ...	"	60
3 " " "	" 27—28. ...	"	57
4 " " "	" 28—29. ...	"	—
5 " " "	" 29—30. ...	"	49
6 " " "	Ápr. 30-tól május 1-ig	"	43
7 " " "	Május 1—2. ...	"	46
8 " " "	" 2—3. ...	"	46
9 " " "	" 3—4. ...	"	53
10 " " "	" 4—5. ...	"	59
11 " " "	" 5—6. ...	"	62
12 " " "	" 6—7. ...	"	109

A VI. sz. táblázatban összeállítottam az álcáknak és báboknak 1000 állatra számított szénsavtermelését. Az «A» és «B» bábkiérletekben minden egyes napi termelésnek középértékét vettem a táblázatba. Az április 25-től 26-ig tartó nap úgy az álcák mint a bábok között szerepel; ezen napon kezdetem meg ugyanis a bábkiérleteket oly bábokon, melyek az említett színváltozáson már túlestek.

A VI. táblázat adatait a 2. számú ábra görbéje tünteti fel (az április 25—26-ig terjedő nap a görbén csak egyszer szerepel).

E számadatokból kétségkívül kitűnik, hogy a szénsavtermelésnek a bábstádium első napjaiban észlelhető apadása csak

folytatása a szénsavtermelés azon jóval rohamosabb apadásának, mely az ophyra-álczákon már néhány nappal bebábozásuk előtt kezdődik. A bebábozást megelőző 4. napon (április 20—21.), midőn még csak néhány báb volt készen és az állatok legnagyobb része még mozgékony volt, legrohamosabb volt az apadás s így lehet, hogy az ezt megelőző időben, melyről nincsenek kísérleteim, még rohamosabb. Feltehejük, hogy a szénsavtermelés apadása azon napon kezdődik, melyen az



2. ábra.

álczák a táplálékfelvételt beszüntetik s hogy az apadás java részben az izomműködés ugyanekkor kezdődő fokozatos megszűnésének tulajdonítható. Az izomműködés ugyanis nem egyszerre s valószínűleg nem egyidejűleg szűnik meg az egész izomrendszerben. Azt, hogy a szemmel látható mozgások megszűnte után még tovább apad a szénsavtermelés, az izomtonus megszűntének tulajdoníthatjuk. A szénsavtermelés adatai mindenesetre a mellett szólnak, hogy a szervek működése, első sorban pedig az izomzaté, lassanként gyengül és hogy e gyengülés még a bábhüvely képződése előtt indul meg.

A szénsavtermelés görbéje értelmében nincsen tehát az anyagcserében éles határ az álca- és bábstádium között, a mivel természetesen nem az van mondva, hogy kettejük között ne volna különbség. Már csak azért sem állana ez, mert hiszen WEINLAND gondos kísérletei kétségkívül bebizonyították, hogy az álca anyagcseretermékei (ammoniak és aminok) mások, mint a bábéi (hugysav); továbbá hogy az álca testanyaga képes fehérjenemű anyagból zsírt képezni, míg a bábé nem; másrészt azonban a báb czukrot és chitint tud képezni. De viszont az is lehetséges és WEINLAND kísérletei nem szólnak ellene, hogy a két fejlődési szakban észlelhető ezen különbség csak lassanként áll be.

Kísérleteim eredményei arról győznek meg, hogy az ophyran észlelt anyagcserefolyamatok, illetőleg azok intenzitása — melynek mértékét a szénsavtermelés adja — KORSCHOLT és HEIDER ¹ felfogását igazolják. Szerintük az álca, báb és imagó főleg külsejükben térnek el élesen egymástól, *míg belső fejlődésük az átalakulások folytatódólagos sorozatából áll, melynek egyes mozzanatai egymástól szorosan el nem különíthetők.* Ezzel nagyon jól összeegyeztethető WEINLAND-nak ² azon felfogása, melyet magamévá is teszek, hogy t. i. az egyes fejlődési stádiumokban észlelhető különbségek lényeges oka a chemiai folyamatok megváltozásában keresendő; s hogy ezen változás az elsődleges és az átalakulás lényege, míg az alakváltozások csak másodlagosnak tekintendők.

A mi a bebábozás előtt és után való szénsavtermelést illeti, már az imént tárgyalt görbéből is kitűnik, hogy az álcaé jóval nagyobb; a bebábozást megelőző 5 napon a napi átlag 149 mgr. 1000 állatra számítva, míg a báboké csak 59 mg. Ezen különbség akkor is fennáll, ha a napi szénsavtermelést egyenlő test-súlyra vonatkoztatjuk; t. i.

¹ Lehrbuch der vergleichenden Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere. Spec. Theil. 2. f. 876. o. 1892.

² Zeitschr. f. Biologie 47. k. 246. és 247. o.

		szénsavat termelnek
az áleczák	100 gr. kezdeti súlyra számítva	1·007 gr.
a bábok	„ „ „ „ „	0·628 „

WEINLAND a calliphorabábok szénsavtermelését hasonló nagynak találta: három kísérletben ugyanis 0·7097, 0·748 és 0·619 gr.-nak naponként 100 gr. kezdeti súlyra vonatkoztatva.

4. *A környezet-hőmérsékletének befolyása a bábok szénsavtermelésére és a metamorphosusra.*

A környezet hőmérsékletének az anyagcserefolyamatokra gyakorolt ismert befolyásánál fogva elvárhattam, hogy az áleczák és bábok szénsavtermelése a külső hőmérséklet fokozódásával emelkedni fog. Ez irányban azonban csakis a bábokon végezhettem kísérleteket, melyek annál érdekesebbnek ígértek, mert így egyidejűleg azt is eldönthettem, vajjon a hőmérséklet emelkedésével a metamorphosis is gyorsítható-e. Ezen kérdéssel WEINLAND is foglalkozott két előzetes kísérletében, melyekben szénsavmeghatározásokat ugyan nem végzett, de melyekből a hőmérsékletnek gyorsító hatása a metamorphosusra valóban kiderül. Az egyik kísérletben 27 darab, 28° C-os thermostatban tartott báb közül 8 nap múlva 18 légy kelt ki, a többi pedig elpusztult; a másikban pedig, melyben a külső hőmérsékletről csak annyit mond, hogy «nagyon magas» volt, 12 napig tartott a metamorphosis.

A III. sz. kísérletem 4 sorozata közül az *A* és *B* sorozatot 20—21° C-on, a *C* és *D* sorozatot pedig 30—33° C-on végeztem: a 2—2 sorozatban tehát 10° C-nyi hőmérsékletkülönbség volt; a *C* és *D* sorozatot sajnos, csak két nappal későbbben kezdetem meg és az első két nap szénsavtermelését tévedés folytán csak együttesen határoztam meg.

Ezen *C* és *D* kísérletben is eleintén sülyedt a szénsavtermelés, majd a 7. naptól fogva emelkedni kezdett; ez emelkedés azonban csak három napig tartott és azután mihamarább rohamos sülyedés követte. A «*C*» sorozatban már a 6. kísérleti napon (április 30.—május 1.), a «*D*» sorozatban pedig

a 7. napon kelt ki egynehány légy. A legyek kikelése azonban mindkét sorozatban csak két napig tartott, amiközben csak kevés légy kelt ki, míg a túlnyomó részük elpusztult. Ezért nem fokozódott e két sorozatban a szénsavtermelés, úgy mint a többi sorozatban, a legyek kikelésével. Ezzel függ össze a szénsavtermelés rohamos súlyedése is a bábstádium 9. napján, a mikor légy már nem kelt ki többé. A következő napon úgy látszik az addig még életben maradt bábok túlnyomó része is elpusztult, mert a szénsavtermelés az előző napi érték felére súlyedt.

A VII. sz. táblázatban a 21° és 31° C-on végzett kísérletek eredményei vannak feltüntetve, még pedig a párhuzamos kísérletek középértékeivel.

VII. táblázat.

1000 darab báb szénsavtermelése 24 óra alatt.

	20-21 C°-on mgr.	30-31° C-on mgr.
Április 27-28.	57	117
" 28-29.	—	
" 29-30.	49	110
" 30-tól május 1-ig ...	43	110
Május 1-2.	46	117
" 2-3.	46	128
" 3-4.	53	97
" 4-5.	59	48
" 5-6.	62	34

Ha a táblázatban a *C* és *D* sorozatokban eltekintünk a két utolsó naptól, melyben a bábok legnagyobb része már el volt halva, 1000 báb napi szénsavtermelésére a következő középértékeket kapjuk:

21° C-on 49 mgr.
31° " 113 "

A két érték aránya 1 : 2.3.

Azt látjuk ebből, hogy a hőmérsékletnek 10° C-kal való emelésére a metamorphosis idejében termelt szénsav mennyisége kétszer akkora lesz. VAN'T HOFF-nak¹ szabálya, melynek értelmében a chemiai reactiók sebessége a hőmérsékletnek 10° -kal való emelésére kétszer vagy háromszor nagyobb lesz, tehát a metamorphosis chemiai folyamataira is érvényes. S mivel éppen ezen chemiai folyamatok azok, melyeken a báboknak az imagová való átváltozását képező morphologiai folyamatok alapulnak, természetes, hogy utóbbiak ugyancsak meg fognak gyorsulni. Tényleg meg is gyorsultak s körülbelül ugyanazon arányban: a 21° C-on tartott bábokból a legyek a bebábozás 11. napján kezdtek kikelni, a 31° C-on tartottakból pedig már a 6. napján, daczára annak, hogy az utóbbiak a kísérlet első két napján ugyancsak 21° C-on voltak tartva (különben mindenek szerint még gyorsabban keltek volna ki belőlük a legyek). A báb metamorphosisának sebessége tehát a hőmérsékletnek 10° C-kal való emelése által, VAN'T HOFF szabályának megfelelően, körülbelül megkétszereződött.

CLAUSEN² már 1890-ben kimutatta növényi csirák szénsavtermeléséről, hogy az 10° -nyi hőemelésre VAN'T HOFF szabálya értelmében 2·1—2·8-szorosára emelkedik. Ugyanazt találta C. HERTWIG³ a békapete fejlődéséről is. BOHR⁴-nak újabb kísérletei szerint a sikló-peték fejlődésének gyorsasága és szénsavtermelése 28° C-on majd háromszor akkora, mint szobahőmérsékleten. Ezeken kívül számos más megfigyelés is arra vall, hogy a VAN'T HOFF-féle szabály a legkülönbélebb élettani folyamatokra érvényes.

A hőmérsékletnek 10° C-kal való emelése azonban a legtöbb biologiai folyamatra egyáltalán nem lehet közömbös. Tekintve azt, hogy az anyagcserefolyamatok igen finomul működő szabályozó-berendezéseknek vannak alávetve; hogy a külön-

¹ Vorlesungen über theoret. u. physik. Chemie 1. f. 222. old. 1898.

² Citálva COHEN munkájában: Vorlesungen über physikal. Chemie 42. o. 1901.

³ Arch. f. mikroskop. Anatomie 51. k. 319. o. 1898.

⁴ Skandinav. Archiv f. Physiolog. 15. k. 23. o. 1903.

féle chemiai reakciók kapcsolódásából komplikált egyensúlyi viszonyok keletkeznek; hogy a fejlődés és metamorphosis folyamataiban bizonyára lényeges szerepük van a hőváltozások iránt nagy mértékben és különböző módon érzékeny fermentumoknak: belátható, hogy a hőmérséklet emelése igen könnyen okozhat oly anyagcsere- és egyensúly-zavarokat, melyek rövid időn belül a szervezetet elpusztítják. Ez a calliphora-bábokra már WEINLAND kísérleteiből is kitűnik, a mennyiben a 28° C-on tartott 27 báb közül csak 18 légy kelt ki, a többi pedig elpusztult. Még jobban kitűnik ez saját kísérleteimből: A 21° C-on tartott báboknak átlag 39% -ából kelt ki légy, a 31° C-on tartottaknak pedig alig 2% -ából. A metamorphosisnak hőmérséklet-emelés által előidézett gyorsulásába tehát a bábok túlnyomó száma belepusztult.

5. Anyagforgalom a bebábozás előtt és után.

A metamorphosis ideje alatti anyag- és energia-forgalom a IV. táblázat adataiból számítható ki. E számítás eredménye a VIII. táblázatban látható.

Talán nem kell hangsúlyoznom, hogy e számok nem engednek mély betekintést az anyagcserefolyamatokba; s tulajdonképpen csak arról világosítanak fel, hogy mindössze mennyi anyag és chemiai energia használódott el; részben pedig arról is, hogy mily anyagok szolgáltatták az elhasznált energiát.

Mint a táblázat mutatja, úgy az álcák, mint a bábok anyag- és energiaforgalmának kiszámítására 2—2 kísérleti sorozat állott rendelkezésemre: az álcákéra az április 19-től 25-ig terjedő időszak folyamán végzett I. és V. valamint az I. és II. kísérlet; melyek között csak az a különbség, hogy a II. kísérlet álcái április 25.-én még nem voltak bebábozva, az V.-ben pedig éppen hogy befejeződött a bebábozás. Mivel a metamorphosis ezen időszakának határáként éppen a bebábozás befejezése tekinthető, kétségekívül az V. kísérletbeli, kész bábokkal való számítás (első számítás a táblázaton) a helyesebb; a másik sorozat pedig csak ellenőrző kísérletül szolgálhat. (Második számítás.)

A bábokra vonatkozó számítást egyrészt az V. és VIII., másrészt az V. és IX. kísérlet adatain végeztem. A VIII. kísérlet bábjaiban lévő legyek ugyan május 6.-án már kikelésre készen voltak — más, ugyanolyan külső viszonyok között tartott bábokból e napon kezdődött ugyanis a legyek kikelése —, mindazonáltal valójában még nem keltek ki; míg a IX. kísérletben tényleg frissen kikelt legyeket és bábhüvelyeket vizsgáltam.

A VIII. kísérlettől számított eredményeknek tehát már eleve is helytelen, még pedig a valódinál kisebb értékeket kellett adnia; először is, mert a legyek kikeléséig még egy bizonyos mennyiségű élő anyag használódott volna el; másodsor pedig azért, mert hiszen a 40%-nyi kikelési arány is arra vall, hogy a bábok jó része a metamorphosis közepette különböző, de ismeretlen időben elpusztulván, az anyagcserefolyamatokban nem vehetett részt. A VIII. kísérletből számított adatok tehát csak ellenőrzésképen voltak használhatók, a IX. kísérletből történt az «I. számítás».

Alanti fejtegetéseim tehát úgy az álczákon, mint a bábokon az «I. számítás»-on alapulnak. (L. VIII. táblázat, 246. old.)

1000 darab érett álca a bebábozást megelőző hat nap mindegyikén átlag 610 mgr.-ot vesztett súlyából; ezen súlyvesztés túlnyomó része (90%) víz volt, mert a szárazanyagból csak 62 mgr. hiányzott. Mivel ugyanezen idő alatt a zsirfogyasztás 58 mgr.-ra rúgott, az elhasznált szárazanyagnak 93·5% -a zsir volt. *Az éhező álcák anyagcsereje tehát 6·5% híjján teljesen zsírjuk rovására folyik s már ezen leletből is következtethető, hogy elhasznált chemiai energiájuknak legnagyobb része zsírból származik.*

Már fennebb meg volt említve, hogy az elhasznált zsir mennyiség egyforma nagy, akár a kivonással, akár az elszappanosítással meghatározott zsírból számítjuk ki, úgy az álca, mint a bábkísérletben. Mivel extractióval úgy a bebábozás előtt, mint utána is állandóan többet kaptam, mint az elszappanosítással, ez azt bizonyítja, hogy a petroleumætheres kivonatokba zsíron kívül más, még pedig el nem szappanosítható anyagok kerültek, melyek az anyagcsereben nem használódtak el. (Így április 19.-én az álcákban 0·17, április 25.-én pedig a bábokban 0·18 gr. ilyen el nem szappanosítható anyag volt.)

VIII. táblázat.

Az álcák és bábok anyag- és energiaforgalma.

Kísérlet száma	1000 darabra számítva	Súly gr.	Víz gr.	Száraz anyag gr.	Szerves anyag gr.	Hamu gr.	Zsir (kivonással) gr.	Zsir (Lieberman-féle elszáppanosítással) gr.	N gr.	Chemiai energia Cal.
Álcák.										
I. számítás.										
I.	Az álcákban április 19-én volt	13·33	9·21	4·12	3·87	0·25	1·87	1·70	0·295	28·38
V.	A bábokban " 25-én "	9·30	5·55	3·75	3·49	0·26	1·53	1·35	0·296	24·66
	Tehát bebábozás közben 6 nap alatt elfogyott	4·03	3·66	0·37	0·38	—	0·34	0·35	—	3·72
	Vagyis naponként elfogyott	0·672	0·610	0·062	0·063	—	0·057	0·058	—	0·620
II. számítás.										
I.	Az álcákban április 19-én volt	13·33	9·21	4·12	3·87	0·25	1·87	1·70	0·295	28·38
II.	A bábokban " 25-én "	10·00	6·27	3·73	3·47	0·26	—	1·39	0·284	24·77
	Tehát bebábozás közben 6 nap alatt elfogyott	3·33	2·94	0·39	0·40	—	—	0·31	0·011	3·61
	Vagyis naponként elfogyott	0·555	0·49	0·065	0·065	—	—	0·051	—	0·601
Bábok.										
I. számítás.										
V.	A bábokban ápril 25-én volt	9·30	5·55	3·75	3·49	0·26	1·53	1·35	0·296	24·66
IX.	13½ nappal { a bábhüvelyekben volt	0·95	0·05	0·90	0·77	0·13	0·09	0·06	0·098	4·14
		7·32	4·88	2·44	2·33	0·11	1·03	0·89	0·191	16·40
		8·27	4·93	3·34	3·10	0·24	1·12	0·95	0·289	20·84
	Tehát 13½ nap alatt elfogyott	1·03	0·62	0·41	0·39	—	0·41	0·40	0·007	3·82
	Vagyis naponként elfogyott	0·076	0·046	0·030	0·030	—	0·030	0·030	—	0·282
II. számítás.										
V.	A bábokban április 25-én volt	9·30	5·55	3·75	3·49	0·26	1·53	1·35	0·296	24·66
VIII.	A " május 6-án volt	7·40	3·92	3·48	3·25	0·23	1·51	1·22	0·295	22·58
	Tehát elfogyott 11 nap alatt	1·90	1·63	0·27	0·24	0·03	0·02	0·13	—	2·08
	Vagyis naponként elfogyott	0·173	0·15	0·02	0·02	—	—	0·011	—	0·19

A kísérletek pontosságára és a számítások megbízhatóságára vall azon tény, hogy a hamunak az álczában megállapított mennyiségét változatlanul és hiánytalanul megeltem a bábokban; az itt észlelt különbségek a kísérleti hibák határán belül maradtak. *Ép oly változatlan a N-állomány is*; ezzel be van bizonyítva, hogy az éhező álca anyagcseréjében N sem elemi gáz, sem illó vegyületek alakjában nem vész el. WEINLAND kísérleteiből kétségtelenül kitűnik, hogy a húson tartott calliphora-álcák nagy mennyiségű ammoniakot és illó aminokat választanak ki;¹ a N-kiválasztás csökkent ugyan, a mint az állatok belsejéből eltűnt a táplálék; de teljesen üres belü álcák is, melyek bebábozása már megkezdődött, naponta 36 mgr. N-t választottak ki.

Abból, hogy az én álcáim N-állományukból hat nap lefolyta alatt semmit sem veszítettek, következik, hogy nem választanak ki sem ammoniakot, sem illó aminokat. A WEINLAND és az én megfigyeléseim közti ellentét talán abból magyarázható, hogy az ophyraálcák — ha ugyan húsevés esetén is egyáltalán képesek ammoniakot elválasztani — már egy napnál tovább éheztek, midőn kísérleteimet megkezdtem. Noha valószínű, hogy az ophyraálcák nem viselkednek másként, mint a calliphora-álcák, hiszen szintén húsevők, mégis biztos, hogy vannak rovarálcák, melyek nem választanak ki ammoniakot. Így pl. KELLNER a selyemhernyóról kifogástalanul bizonyította, hogy «testüknek és táplálékuknak N-tartalmú vegyületeiből sem elemi N-t, sem N-tartalmú illó anyagokat nem hasítanak le.» Ugyanilyen következtetésre jutott, mint KELLNER említi, már PELIGOT² is. Saját kísérleteim is arra vallanak, hogy az éhező ophyra-álcákban nincs N-deficit.

Ha az álcák anyagfogyasztását úgy az I., mint a II. számítással (lásd a táblázatot) állapítjuk meg, meglehetősen egyező értékeket kapunk: különbség csak a vízfogyasztásban, továbbá a zsir- és ennek következtében az energiafogyasztásban van, mely a II. számítás szerint csekélyebb. A N-meghatározásból

¹ Zeitschr. f. Biologie 47. k. 232. old.

² Die landwirtsch. Versuchsstationen 30 k. 81. o. 1884.

N-deficit derül ki, mi mindezek szerint egy a II. kísérletben elkövetett analysishibának tudandó be; annival is inkább, mert a bábokban a *N*-nak eredeti mennyiségét kaptam meg.

A *bábok anyagfogyasztása* a legyek kikeléséig sokkal csekélyebb, mint az álcáké a bebábozás előtt; a metamorphosis egész ideje alatt 1000 darab bábnek napi súlyvesztése csak 76·1 mgr., miből 46 mgr. esik vízre és 30 mgr. szárazanyagra. Ha a szárazanyagvesztéséget a zsírfogyasztással összemérjük, kitűnik, hogy e két érték közel azonos, vagyis tisztán csak zsír égett el, mit különben már WEINLAND is kimutatott a calliphora-bábokról, a mire az energiaforgalom tárgyalásakor még bővebben ki fogok térni. A bábstádiumban aránylag csekélyebb a vízfogyasztás: 1 gr. szárazanyagvesztésre 1·53 gr. víz esik, bebábozás előtt pedig 9·84 gr.

Változatlan maradt a bábok *hamutartalma* is; mert ama csekély különbség, mely a számításból kiadódik, még a kísérleti hibák határán belül esik. Ugyanaz áll a *N*-re is. A metamorphosis végén ugyan 0·289 gr. volt a *N* mennyisége, eredetileg pedig 0·295 gr.; de egyrészt megfontolandó, hogy május 6.-án a kikelésre kész, érett bábokban tényleg 0·295 *N*-t, tehát az eredeti mennyiséget találtam, másrészt pedig fenti 2%-nyi hiba annál is inkább esik a kísérleti hibák határán belül, mert hiszen a metamorphosis végén a *N*-mennyiséget a légyben és bábüvelyben talált mennyiségekből kellett kiszámítanom. Tehát joggal állíthatjuk a bábstádiumról is, hogy nincsen *N*-deficit. Ugyanezt találta KROGH¹ a *Smerinthus ocellatus*-, WEINLAND² pedig a *Calliphora* bábjain.

Mielőtt összehasonlítanám a bebábozás előtti és utáni stádium anyagforgalmát, még csak a főtt fehérjére helyezett álcák anyagcseréjéről akarok röviden megemlékezni. Ezek ápr. 19-től 26-ig, tehát 7 napon át a fehérjedarabok alá bújva éltek (IV. kísérlet); majd április 26-tól május 2-ig, mely utóbbi napon már mind be voltak bábozódva (VI. kísérlet), porcellán-tálakban tartózkodtak, mint az V. kísérletbeli éhező álcák. Anyagcseréjüket a következő IX. táblázat mutatja.

¹ Sitzungsberichte d. kais. Akademie d. Wissensch. in Wien; mathemat. naturw. Klasse 115. k. 3 rész. 1906. okt.

² Zeitschr. f. Biologie 47. k. 186. o.

IX. táblázat.

Az április 19–26-ig főtt tojásfehérjén tartott álcák anyag- és energiaforgalma.

Kísérlet száma	1000 darab állatra számított	Súly	Víz	Száraz anyag	Zsír (Petrol-ætheres kivonat)	N	Chemiai energia
		gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	Cal.
I.	Az álcákban volt április 19-én — — — — —	13·33	9·21	4·12	1·87	0·295	28·38
IV.	„ „ „ „ 26-án — — — — —	11·60	7·90	3·61	1·46	0·296	24·35
VI.	a bábokban május 2-án — — — — —	6·50	3·28	3·22	1·18	0·291	20·91
	tehát elfogyasztott április 19–26-ig — — —	1·73	1·22	0·51	0·41	—	4·03
	„ „ naponként — — — — —	0·247	0·174	0·073	0·058	—	0·576
	„ „ április 26-tól május 2-ig — — — — —	5·10	4·71	0·39	0·28	—	3·44
	„ „ naponként — — — — —	0·85	0·785	0·065	0·47	—	0·573
A «második számítás» szerint (l. a VIII. táblázatot) a nem fehérjén tartott álcák napi fogyasztása a következő volt:							
	Április 19–25. — — — — —	0·555	0·49	0·065	0·051	—	0·601

Ha a vízvesztéstől eltekintünk, a két periodus anyag- és energiafogyasztása majdnem egyforma volt.

A főtt fehérjén való tartózkodás ideje alatt *a vízkialás lényegesen kisebb volt*: 1000 álca naponként 174 mgr. vizet vesztett, míg később, szárazon tartva, 785 mgr.-ot (a fehérjén való tartózkodás a zsírfogyasztást kissé fokozza, ez azonban esetleg kísérleti hibából is eredhet). Abból, hogy az álcák *N*-állománya mindkét periodus folyamán teljesen változatlan maradt, joggal következtethetjük, *hogy a nedves fehérjéből semmit sem fogyasztottak, tehát csakúgy éheztek, mint a szárazon, porcellántálakban tartott álcák*. Erre vall az is, hogy anyag- és energiaforgalmuk megegyezik a II. kísérletbeliekével, melyek szintén «szárazon» koplaltak április 19—25-ig; különösen akkor feltűnő ez egyezés, ha a fehérjén tartott álcákra vonatkozó középértéket az egész, ápr. 19-től máj. 2-ig, tehát bebábozásukig tartó időszakból (IX. táblázat) számítjuk ki. Érdekes tény az, hogy ezen átlagszámítással a vízvesztésre is ugyanazon eredményt kapjuk, mint a II. kísérletben; mit legegyszerűbben abból lehet megmagyarázni, hogy ápr. 19-től 26-ig a fehérjedarabok alatt a nedves levegő megátolta a víz elpárolgását testükből; de az így visszatartott víz az ezután következő «száraz» periodusban annál nagyobb mennyiségben távozott belőlük.

Ezen kísérleti sorozat még egy érdekes következtetést enged: ha összehasonlítjuk a fehérjén tartott álcáknak május 2-án, tehát bebábozásuk napján észlelt anyag- és energiatartalmát, a többiekén ápr. 25.-én, tehát ugyancsak bebábozásuk napján észlelt megfelelő adatokkal, azt látjuk, hogy *a bebábozás az álcáknak igen különböző anyag- és energiatartalma mellett indulhat meg a nélkül, hogy ez a metamorphosisban zavart okozna*. Így az ápr. 25.-én bebábozásnak induló álcák zsirtartalma 1000 állatként 1·53 gr. volt, a máj. 2.-án bebábozódóké 1·18 gr., vagyis annyi, mint a mennyi az előbbieken a metamorphosis befejezte után maradt. Így viselkedett chemiai energiatartalmuk is. Mégis teljesen normális légy fejlődött belőlük. (Sajnos, e sorozatban nem számoltam meg a kikelő legyeket és így a kikelési arányról nem állapíthattam meg, hogy eltér-e a többi sorozatokétól vagy nem.)

Az álcák ezen képességének, hogy különböző anyag- és energia-állománnyal kezdhetik meg a metamorphosist, a létért való küzdelemben nagy fontossága lehet: *lehetővé teszi, hogy a bebábozás, melyet kelvezőtlen külső körülmények megakadályoztak vagy késleltettek, jóval későbbben is megindulhasson és még szabályszerű metamorphosist eredményezhessen.*

Ha összehasonlítjuk a metamorphosis előtt éhező álcza anyagforgalmát a metamorphosis alatti forgalmával, rögtön látjuk, hogy az utóbbi jóval csekélyebb, a mint az már a szén-savforgalomból is kitűnt.

	1000 állat napi vesztesége	
	a bebábozás előtti 6 napi éhezés alatt	a 13 ¹ / ₂ napi metamorphosis ideje alatt
Súly — — — — —	672 mgr.	76·0
Víz — — — — —	610 "	45·8
Száraz anyag — — — — —	62 "	30·3
Zsír — — — — —	58 "	30·0

A vízkidás legnagyobb mértékben csökkent: részben az anyagcserefolyamatok csökkenése következtében, részben azonban nyilván azért, mert a bábüvely a párolgást gátolja. Mivel az állatoknak súlya állandóan csökkent, anyagcserejükről csak akkor kapunk helyes képet, ha a fenti adatokat egyenlő testsúlyra vonatkoztatjuk. E célból úgy a 6 napos álcza-, mint a 13¹/₂ napos bábperiodus kezdeti és végsúlyaiból középértéket vettem és a fenti adatokat e közepsúlyra vonatkoztattam. Igaz ugyan, hogy a számítás e módja nem egészen helyes, mert hiszen az állatok testsúlya nem változott egyenletesen, az így elkövetett hiba azonban igen csekély.

A bebábozás előtti hatnapos éhezési periodusban 1000 álcza közepsúlya 11·32 gr., 1000 bábé 8·785 gr.; ezen súlyokból azonban még levonandó a bábüvelyé, mely az álczastádium vége felé már teljesen kivált, főleg chitinből áll és vála-

déknak tekintendő, mely az anyagcserében nem vesz részt; 1000 álca közép súlya így 10·84 és 1000 bábé 7·835 gr.

Ezen számítással a következő értékeket nyerjük:

	1 gr. állat napi vesztesége	
	a bebábozás előtti 6 napi éhezés alatt	a 13 ¹ / ₂ napi metamorphosis ideje alatt
Víz _ _ _ _ _	56·27 mgr.	5·85
Száraz anyag _ _ _	5·72 "	3·87
Zsír _ _ _ _ _	5·35 "	3·83

Ha a bábok fogyasztását 1-nek vesszük, akkor az álcák

vizfogyasztása _ _ _ _ _	9·6
szárazanyagfogyasztása _ _	1·5
zsírfogyasztása _ _ _ _ _	1·4

6. Energiaforgalom a metamorphosis alatt.

A VII. sz. táblázatból az I. számítás szerint a következő adatokat kapjuk az energiafogyasztásra:

I.

április 19.-én 1000 álca chemiai energiatartalma	28·38 Cal.
" 25.-én 1000 " " " "	24·66 "
tehát a bebábozást megelőző 6 nap alatt az energiafogyasztás _ _ _ _ _	3·72 Cal.
vagyis naponként _ _ _ _ _	0·62 "

II.

április 25.-én 1000 báb chemiai energiatartalma	24·66 Cal.
13 ¹ / ₂ nappal később a legyek kikelésekor _ _ _	20·84 "
tehát a 13 ¹ / ₂ napi energiafogyasztás _ _ _ _ _	3·82 Cal.
vagyis naponként _ _ _ _ _	0·282 "

E számok azt mutatják, hogy az álczáknak a bebábozást megelőző 6 napi energiafogyasztása csaknem annyi, mint a báboké az egész $13\frac{1}{2}$ napi metamorphosis ideje alatt; az álcák napi energiaszüksége tehát kétannyi, mint a báboké; sőt lehetséges, hogy még valamivel nagyobb is, mert a kísérletek megkezdése előtti nap fogyasztása valószínűleg még valamivel nagyobb volt. Ez azonban aligha változtat valamit a fenti középértéken.

Hogy a két periodus energiafogyasztását összehasonlíthassuk, a testsúlyok fennszámított középértékének egységére kell vonatkoztatnunk:

1 gr. álca energiafogyasztása a 6 napos álcza- stádiumban... ..	57.2 Cal.
1 gr. báb napi energiafogyasztása a $13\frac{1}{2}$ báb- stádiumban... ..	36.0 «

WEINLANDnak¹ két, jó kikelési arányt mutató, V. és VI. számú kísérletéből a calliphorabábok 1 gr.-jának napi zsírfogyasztásából 25.7, illetőleg 33 cal.-nyi energiafogyasztás számítható ki, mely értékek az enyéimmal jól megegyeznek. A calliphora- és ophyrabáboknak a súlyegységre számított energiafogyasztása tehát egyforma.

Saját kísérleteimből az is meg volt állapítható, *hogy mily anyagokból került ki a hővé átalakult chemiai energiának ily jelentős mennyisége.* Már a zsírfogyasztásnak és szárazanyagelhasználásnak arányából is azt lehetett következtetni, hogy főleg zsírt fogyasztott az állat, illetőleg, hogy főleg a zsírnak chemiai energiája alakult át hővé. Megerősíti e következtetést az átalakult chemiai energia és a szárazanyagfogyasztás közötti viszony. Ebből ugyanis kiderül, hogy az álczastádiumban

1 gr. elfogyasztott szárazanyagra	10.05 Cal. ²
a bábstádiumban 1 gr. elfogyasztott szárazanyagra	9.34 «

¹ Zeitschr. f. Biologie 47. k. 192. és 198. o.

² Ha az álczastádiumban elhasznált szerves anyaggal számolnék, nem, mint fenn tettem, a szárazanyaggal, a 10.05 cal. helyett 9.79-et kapnék; ezen érték azonban kevésbé megbízható, mert a hamumeghatározás esetleges hibája is befolyásolja.

esik: vagyis az elfogyasztott szárazanyagoknak specifikus energia-tartalma (= égési hője) megfelel a zsírok specifikus energia-tartalmának. Az álczákon nyert érték valamivel nagyobb, a mi részben kísérleti hibákból eredhet, részben pedig abból, hogy nemcsak zsír vett részt az anyagforgalomban, a mi természetesen a bábstádiumra is áll. Az álczastádiumban a hatnapos kísérlet alatt 0·35 gr. zsír fogyott el; ha e zsírmennyiség teljesen elégett, 3·30 Cal.¹ chemiai energia alakult át hővé.

Mivel mindössze 3·72 Cal. fogyott el,

ebből pedig — — — $\frac{3\cdot30 \text{ «t (= 88}\cdot7\%)}{0\cdot32 \text{ Cal. (= 11}\cdot3\%)}$ a zsír szolgáltatott, származott.

Ugyanígy kiszámíthatjuk, hogy a bábkísérletekben, melyekben 0·40 gr. zsír égett el,

mindössze — — — 3·82 Cal. fogyott el,

ebből — — — $\frac{3\cdot77 \text{ «t (= 98}\cdot6\%)}$

a zsír szolgáltatott, tehát — — $\frac{0\cdot05 \text{ Cal. (= 1}\cdot4\%)}$ származott más anyagból.

Mivel minden életfolyamat bizonyos fehérjemennyiség felhasználásával jár (Rubner «elhasználási hányadosa»); másrésről pedig WEINLAND kísérleteiből kitűnik, hogy úgy az álcza, mint a báb fehérjéi élénk részt vesznek az anyagcserében — a bábokról pedig már régen tudjuk, hogy húgysavat választanak el —, nem lehet kételyünk az iránt, hogy úgy álcza-, mint bábkísérleteimben a zsírokon kívül még fehérje és más anyagok is részt vettek az anyagcserében, és pedig az álczában aránylag nagyobb mennyiségben, mint a bábokban.

Nem érdektelen a fent tárgyalt adatokat összehasonlítani azokkal, melyeket FARKAS KÁLMÁN² az ugyanazon fejlődési stádiumban levő selyempille anyagcseréjéről kapott.

¹ A zsír égési hőjéül e számításban a RUBNER-értéket (= 9425 Cal. pro 1 gr. zsír) vettem, nem pedig álczáim petroleumætheres kivonatának égési hőjét; mert mint már említettem, ebben zsíron kívül más anyagok is voltak.

² Pflüger's Archiv 98. k. 490. o. 1903.

Kísérletei szerint a begubózásra kész selyemhernyó a kész bábbá való átalakulásáig 6079 cal. égési melegű szárazanyagot használ el; a báb pedig lepkévé való átalakulásáig 7765 cal. nyit. Tehát mindkét stádiumban az értékek kisebbek, mint az ophyránál és kisebbek a zsír specifikus energiatartalmánál, a mi arra vall, hogy a selyemhernyóban az elfogyasztott szárazanyag-nak csekélyebb része áll zsírból; de az is kitűnik e számokból, hogy a selyempille bábja aránylag több zsírt fogyaszt, mint a bábbá alakuló álczája. Ez jól egyezik KELLNER leleteivel, ki azt találta, hogy a selyemhernyó az etetés utolsó stádiumában N-mentes kivonható anyagokat halmoz fel, melyeknek $\frac{3}{4}$ része bábképzés közben használtatván el, zsírt takarít meg, melynek így csak $\frac{1}{7}$ része fogy el. A zsírok a bábstádiumnak csak utolsó szakaszában égnek el fokozottabb mértékben, úgy hogy KELLNER szerint a selyempille bábjában a zsírnak mindössze csak $\frac{1}{8}$ része használtatik el.

Ezzel ellentétben az ophyra-álczának légygyé átalakulása közben zsírjának 44%-a fogy el; a zsírnak tehát a légy anyag-cseréjében nagyobb szerep jut, mint a selyemhernyóéban.

Kísérleteimmel tehát — WEINLAND calliphora-kísérleteivel egyezően — beigazolódott, hogy, noha más anyagok chemiai energiájának is van része az energiatforgalomban, mégis az érett álczának imagóvá átalakulása közben épen úgy, mint a rovarok és madarak embryonális fejlődése közben a zsír szolgáltatja az életfolyamatokra szükséges chemiai energia legnagyobb mennyiségét.

A madarak embryonális fejlődéséről ezt HASSELBALCH¹ és én,² a selyempille petéjéről pedig FARKAS KÁLMÁN bizonyította be.

7. Az ophyra és más holometaboliás rovarok átalakulási munkája.

Épen úgy, mint a hogy a chemiai energia azon mennyiségét, mely valamely szervezet embryonális fejlődése közben

¹ Skandinav. Archiv f. Physiolog. 10. k. 394. o. 1900.

² Pflüger's Archiv 93. k. 327. o. 1903.

hővé alakult át, a *fejlődés munkájának* nevezhetjük el, úgy az érett álczának imagóvá átalakulása közben átalakult energiát *átalakulási munkának* nevezhetjük. Ez pedig 2 részből áll: egyik része az, mely a bebábozás előtti, a másik pedig, mely a bebábozás utáni időszakra esik.

Mivel a bábstádium viszonyai egyszerűbbek, mint a bábbá alakuló érett álczái, mindenekelőtt a *bábstádiumban* végbemenő átalakulási munkával fogok foglalkozni.

A fenti adatok értelmében a $13\frac{1}{2}$ napig tartó metamorphosis ideje alatt 1000 darab bábban $3\cdot82$ Cal. chemiai energia fogyott el; tehát a *légy átalakulási munkája a bábstádiumban* $3\cdot82$ cal.; vagyis egy-egy bábnak légygyé való átalakulása közben $3\cdot82$ cal. chemiai energia alakul át hővé.

Ezen adat azonban már definitiója értelmében sem felel meg azon egész energiamentiségnek, mely metamorphosis közben a légy számára elvész. Valójában e veszteség épügy, mint az embryonális fejlődés közben, jóval nagyobb: mert hiszen a metamorphosis időszakára eső ürüléknek, valamint a visszamaradó bábhüvelynek chemiai energiátartalma a légyre nézve elveszett.

Az egyes bábhüvelynek (a benne maradt ürülékkel együtt) súlya $0\cdot95$ mgr., égési hője $4\cdot44$ cal.; hogy a légyre nézve veszendőbe menő chemiai energia egész mennyiségét megkapjuk, ennyit kell hozzáadni az átalakulás munkájához; így tehát $3\cdot82 + 4\cdot44 = 8\cdot26$ cal., vagyis amannak kétszerese vész el. Ha az átalakulási munkát a kész légy súlyegységére vonatkoztatjuk, megkapjuk a *specifikus átalakulási munkát*,¹ melynek alapján a különféle rovarok átalakulási munkáját összehasonlíthatjuk egymással, vagy a szervezet egyéb munkájával.

A bábstádiumban $3\cdot82$ cal. chemiai energia használtatik el

¹ Első dolgozatomban az 1 gr. friss szervezetre eső fejlődési munkát «relatív», az 1 gr. szárazanyagra esőt pedig «specifikus»-nak neveztem el. A physikában és chemiában használatos elnevezések értelmében célszerűbb az előbbit specifikus fejlődési munkának, az utóbbit pedig a szárazanyag specifikus fejlődési munkájának nevezni. Ily értelemben neveztem el ezúttal az átalakulási munkákat.

akkor, mikor 7·32 mgr. súlyú légy keletkezik, melynek 2·44 mgr. a szárazanyaga. Ennek következtében

1 gr. légy specifikus átalakulási munkája	— —	523 cal.
1 „ „ szárazanyagának specifikus átalakulási munkája	— — — — — — — —	1566 „

Hasonlítsuk össze ezen eredményeket mindenekelőtt WEINLANDnak a calliphoralégyen talált értékeivel. WEINLAND egy darab calliphorabáb átalakulásakor elfogyasztott chemiai energiát 27 cal.-ra számítja. Adataiból azonban a specifikus átalakulási munkát csak közvetve számíthatjuk ki, mert nem mérte meg a kikelt calliphoralégy súlyát, sőt, mivel ezen adatokra nem is volt szüksége, a legyeket a bábhüvelyektől el sem különítette s dolgozatában a légy mindig »légy + hüvely» elnevezés alatt szerepel.¹

Ha ily alapon végezzük a számítást, akkor következő eredményre jutunk: WEINLAND V. kísérletében a 13 napig tartó metamorphosis alatt egy-egy légy 2·271 mgr. zsírt = 21·4 cal. chemiai energiát fogyasztott. A »légy + hüvely» súlya frissen 0·0639 gr., 0·02022 gr. szárazanyaggal; VI. sz. kísérletében pedig — melyben az átalakulás 14 napig tartott — a zsírfogyasztás legyenként 2·889 mgr. = 27·22 cal. A friss »légy + hüvely» súlya 0·05882, szárazanyaga 0·02078 gr.

	WEINLAND V. sz. kísérletében	WEINLAND VI. sz. kísérletében	Középérték
1 calliphorabáb légygé alakulása közben az átalakulási munka — — — — —	21·41 cal.	27·22 cal.	24·3 cal.
1 gr. »légy + hüvely»-re számított átalakulási munka —	335 „	463 „	399 „
1 gr. »légy + hüvely» szárazanyag átalakulási munkája —	1058 „	1310 „	1184 „

¹ Zeitschr. f. Biologie 47. k. 229. o.

Ha saját kísérleteim adatait úgy számítom át, hogy a légy súlyához hozzáadom a bábüvelyét, miáltal súlya 8·27 mgr.-ra, szárazanyagáé pedig 3·34 mgr.-ra emelkedik, csaknem ugyanolyan értékekre jutok, mint WEINLAND, t. i. 462, illetőleg 1144 cal.-ra.

Különben WEINLAND adatai is (még pedig az V. kísérletbeliek) átszámíthatók a bábüvely nélküli «tiszta» légy súlyára. WEINLAND t. i. megmérte 6 darab, korábban kikelt légynek súlyát = 0·3263 gr.; egy légyre tehát 0·0544 gr. esett. Ha ezzel az értékkel számolunk, a fenti 335 cal. helyett 393-at, vagyis 17·3%-kal többet kapunk, a VI. kísérlet 463 cal.-jából pedig 543 cal. lesz, a két kísérlet középértékében tehát 470 cal., mely érték az én kísérleteim eredményével jól egyezik.

Ezen összehasonlításból tehát kitűnt, *hogy az ophyrabáb metamorphosisának specifikus átalakulási munkája ugyanolyan, mint a calliphorabábé.*

Épen oly érdekes eredményre jutunk, ha az ophyra átalakulási munkáját összehasonlítjuk a selyempille bábjáéval, mely FARKAS KÁLMÁNNak már említett dolgozatából számítható ki.

A báb metamorphosisának periodusa aznap kezdődik, melyen a begubózás befejezte után a báb teljesen kifejlődött, mit FARKAS KÁLMÁN szerint testének vörösesbarna színeződéséről lehet felismerni. A báb metamorphosisa a lepkének kikeléséig tart 13—14 napig, FARKAS kísérleteiben átlag 13·6 napig.

Ezen periodus elején

egy báb súlya (gubó, bélsár és lehámlott bőr	
nélkül) — — — — — — — — — —	1·314 gr.
szárazanyagtartalma — — — — — — — — — —	22·1% = 0·2911 « volt,

e periodus végén pedig

a kész pillangó súlya — — — — — — — — — —	0·788 gr.
szárazanyagtartalma — — — — — — — — — —	24·5% = 0·1932 «

volt.

Ezen 13·6 nap alatt 379 cal. chemiai energia alakult át hővé; ennyi a kész báb lepkévé alakulásának munkája; vagyis

1 gr. lepkéé — — — — — — — — — —	481 cal.
1 « lepkeszárazanyagé — — — — — — — — — —	1962 «

Ezen értékek annyira megegyeznek a légyen találtakkal, hogy joggal állíthatjuk, hogy *a légy és a selyempille bábjaianak specifikus átalakulási munkája közel egyforma.*

Tekintve azt, hogy a különféle rovarok metamorphosisa alatt szereplő histologiai folyamatok nagy mértékben egyeznek, nagy valószínűséggel kimondhatjuk azt is, hogy *mindazon rovarbábok specifikus átalakulási munkája egyforma nagy, melyekben a metamorphosis hasonló külső feltételek mellett megy végbe.*

Az *álczák átalakulási munkájának* kiszámításakor tekintetbe kellett vennem, hogy az *álczaperiodus*¹ tulajdonképen 7 napig tart;² a hatnapos kísérleti időszakra talált energiafogyasztáshoz, mely bábokként 3·72 cal., az egy napra eső átlagos energiafogyasztás fejében 0·62 cal.-t kell hozzá adnunk. Egy *álczának* energiafogyasztása tehát 7 nap alatt 4·34 cal.

A selyemhernyó átalakulása 5 napig tart, mely idő alatt az átlag 2·726 gr. súlyú, begubózásra kész hernyóból (a gubó, lehámlott bőr és bélsár leszámítása után) 1·314 gr.-nyi báb képződik, melynek 22·1% = 0·2911 gr. a szárazanyaga. Ez átalakulás közben 416 cal. chemiai energia fogyott el. A további számításokat a X. táblázatban állítottam össze, melybe összehasonlítás kedvéért belevettem a bábstádiumra vonatkozó adatokat is.

¹ Rövidség kedvéért a metamorphosisnak azt a szakaszát, melyben az érett *álcza* bábbá alakul, a következőkben «a metamorphosis-*álcza periodusa*»-nak vagy még rövidebben «*álczaperiodus*»-nak vagy «*álczaszakasz*»-nak nevezem. A metamorphosis második szakasza azután a «*bábszakasz*».

² Az *álczák* egy nappal az intézetbe jutásuk előtt kerültek ki a hullából.

X. táblázat.

	Átalakulási munka	
	Ophyra cadaverinában	Bombyx moriban
	a) az érett álczának bábbá átalakulása közben	
	Tartama: 7 nap Báb súlya 9·30 mg. 4·34 cal.	Tartama: 5 nap Báb súlya 1·314 gr. 416 cal.
Egy drb báb átalakulási munkája		
Egy gr. báb specifikus átalakulási munkája — — — — —	467 "	317 "
Egy gr. báb-szárazanyag speci- fikus átalakulási munkája —	1157 "	1429 "
	b) az érett bábnak imagová átalakulása közben	
	Tartama: 13½ nap Légy súlya 7·32 mg.	Tartama: 13·6 nap Lepke súlya 0·788 gr.
Egy darab imago átalakulási mun- kája — — — — —	3·82 cal.	379 cal.
1 gr. imago specifikus átalakulási munkája — — — — —	523 "	481 "
1 gr. imago-szárazanyag speci- fikus átalakulási munkája —	1566 "	1962 "

Ezek szerint az álczaperiodusban a specifikus átalakulási munka mindkét állatnál kisebb, mint a bábszakaszban. A két állatfaj között az álczaszakaszban a különbség nagyobb, mint a bábstádiumban; de minthogy itt alig elkerülhető, nagyobb kísérleti hibák is szerepelnek — melyek a kísérleti berendezés természetében rejlenek —, e különbségnek nagyobb jelentőséget nem lehet tulajdonítani, úgy hogy joggal mondhatjuk, hogy *egy érett ophyra- és bombyx-álczának érett bábbá való átalakulása egyforma nagy munkát igényel.*

Meglepő tény az, hogy mindkét állatban csekély különbség

van a metamorphosis 2 periodusának átalakulási munkája között (a selyemhernyónál az álczastádiumé határozottan kisebb); vagyis daczára annak, hogy nagy különbség van a két periodus élettani functiói között, mégis közel egyforma mennyiségű chemiai energia használtatik el egy későbbi fejlődési fokozat elérésére.

Ha kiszámítjuk a specifikus átalakulási munkának azon részét, mely az illető periodus egy-egy napjára esik, azt találjuk, hogy

	az ophyra	a bombyx
az álczaperiodusban	67 cal.-t	63 cal.-t
a bábperiodusban	39 «	35 «

fogyaszt 1 nap alatt, tehát az álczaperiodusban majdnem kétszer annyit, mint a bábperiodusban. E tekintetben is teljes a meg egyezés az ophyra és bombyx között.

Az álcza- és bábstádiumok átalakulási munkájának összege megfelel az egész metamorphosis munkájának és ha ezen munkát a kész imago súlyegységére, illetőleg annak szárazanyagára vonatkoztatjuk, megkapjuk az imagónak teljes specifikus átalakulási munkáját.

Átalakulási munka	Ophyra cadaverina; tartama 20 ¹ / ₂ nap; az imago súlya 7.32 mgr.	Bombyx mori; tartama 18 ¹ / ₂ nap; az imago súlya 788 mgr.
Pro 1 imago	816 cal.	795 cal.
« 1 gr. imago	1115 «	1032 «
« 1 gr. « -száraz anyag..	3344 «	4115 «

Ezen számok még jobban mutatják, hogy a légy és pille specifikus átalakulási munkája egyenlő.

8. *A metamorphosis és ébrényi fejlődés energetikai összehasonlítása.*

I.

Mielőtt az átalakulási munka további fejtegetésébe bocsátkoznám s annak viszonyát az ébrényi fejlődési munkához megbeszelném, tekintsünk végig azon biológiai folyamatokon, melyek a metamorphosist és az ébrényi fejlődést jellemzik.

A metamorphosist külsőleg az anatómiai átalakulás jellemzi, melylyel — legalább a tipikus bábót képező holometaboliás rovaroknál — *testnagyobboldás nem jár együtt*; ezen körülmény lényegesen megkülönbözteti a metamorphosist az embryonális fejlődéstől, mert utóbbinak lényegéhez a test nagyobboldása épügy hozzátartozik, mint új szervek képzése. KORSCHÉLT és HEIDER¹ szerint ugyan a metamorphosis stádiuma sok tekintetben hasonlít az embryonális élet stádiumaihoz «és a bábstádium az embryonális fejlődés folytatásának volna tekinthető»; de különbségek is vannak. «Az embryonális időszakban a szervek többnyire csak egységes góczokból fejlődnek, míg a metamorphosisnál gyakran különálló fejlődési centrumokból, ú. n. imaginális korongokból ezek összenövése által keletkeznek (pl. a középbél, a hypodermis stb.). Ezen imaginális korongokat embryonális maradványoknak kell tekintenünk, melyek az álczastádiumot mintegy latensen túlélék, s melyekben az embryo regeneratív képességei megmaradtak. Azon szervecsoportok azonban, melyek az álczában működést fejtettek ki, szétesnek. (*Histolysis.*)» Legelőbb az izmok esnek szét, még pedig, mint már említettem, KOWALEVSKY szerint phagocyták közreműködésével; kérdés azonban, hogy valamennyi izom elpusztul-e. Az izmokon kívül elpusztulnak a bélhuzam és a nyálmirigyek; míg a szív és központi idegrendszer² csak csekély

¹ Lehrbuch der vergleichenden Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere. Spec. Theil 1892. 848. o.

² BREUER (Zoolog. Jahrb. 20. köt., anatom. rész, 123. o. 1907) újabban azt mondja, hogy alig van a rovarnak szerve, mely oly mély átalakuláson menne át, mint központi idegrendszere.

változást szenvednek, az ivarszervek csirái pedig egyenesen átmennek az imagóba. A szétesési folyamattal egyidejűleg fejlődnek ki az embryonális korongokból az új szervek, még pedig úgy, hogy az «illető szerv continuitása ez átalakulások alatt többnyire nem szakad meg». KORSCHOLT és HEIDER szerint az álca, báb és imago fejlődési folyamatait egymástól nem lehet élesen elkülöníteni, mert ezek az átalakulásoknak folytatódó sorozatából állanak. Ilyen belső átalakulások már az álcák vedlésekor is szerepelnek; csak hogy minden vedlés után oly időszak keletkezik, melyben a histolysis és regeneratív folyamatok szünetelnek (DEGENER).¹ Így tehát már az álcában is végbemennek metamorphosisos folyamatok, de csekélyebb mérvben és csekélyebb intenzitással, mint a bábban. Lényegére nézve tehát az álcának bábbá való átalakulása nem különbözik a bábnak imagóvá való átalakulásától; csak hogy míg a be nem bábozott érett álcában még számos élénk élettani funkció folyik, addig a bábban, jóval előrehaladott belső átalakulása következtében, sokkal kevesebb és csak csekélyebb intenzitású működésre akadunk. Már az érett álca sem táplálkozik, de a bábban megszűnnek az izommozgások is. Ezzel egyidejűleg megváltozik az anyagcsere is, a mit legszembetűnőbben a CO₂-termelés fokozatos süllyedése, majd emelkedése mutat.

A metamorphosisos fejlődés fő jellemvonása: *részleges, regenerációs növekvés, egyes embryonális csirák (imaginális korongok) növekedése, miközben azonban sem az állategyén nem nő, sem az élő protoplasma mennyisége nem nagyobbodik*. Utóbbit külön kell hangsúlyoznom, mert az is el volna képzelhető a szervek megnagyobbodása nélkül is, hogy pl. zsír vagy bizonyos más sejtanyagok felhasználása mérvében protoplasma képezetnék ujonnan. Egyes szervek ugyan metamorphosis közben is megnagyobbodhatnak; de tényleg csak annyi szövet nőhet újra, mint a mennyi azelőtt histolysis útján elpusztult; e növekedés tehát csak hiányt pótol, de nem alkot újat; ez jellemzi a regenerációs növekedést.

Ép oly jellegzetes — a szövettani leletek alapján — a

¹ Die Metamorphose der Insecten, 1909. 53. o.

metamorphosisos fejlődésre, hogy szervcsirák ujonnan nem képezhetnek, csak meglévő csirák növekednek. Igaz, hogy az embryonális fejlődés is meglévő csirák növekedésében áll, mégis lényeges különbség van embryonális fejlődés és metamorphosis között annyiban, hogy az imaginális korongok növekedésekor azon anyag használtatik el, mely már szervült, meghatározott physiologiai functiók teljesítésére differenciált anyag «hystolysis»-éből keletkezett oly folyamatok útján, melyek lényegéről még mit sem tudunk.

Mindezen folyamatok végeredményeképen metamorphosis közben *a szervezet tömege kisebb lesz, mert hiszen a kész imago szárazanyagának súlya és mennyisége mindig csekélyebb mint a bábé.*

Ezzel kétségkívül együtt jár *az élő anyag mennyiségének megfogyása is*, nem pedig csak olyan anyagoké, melyek nem képezik az élő protoplasma alkotórészét. Mivel a fehérje «*elhasználási hányolása*» nélkül életfolyamat nincsen, következik, hogy a bábban is protoplasmafehérje használtatik el; ennek bomlási termékei valóban fel is lehettek. Lehetséges ugyan, hogy csak «nem szervült» fehérje használtatik el; de nem igen valószínű már csak azért sem, mert a metamorphosis meglehetősen hosszú ideig eltart és ezen idő alatt szövetképző anyag ép oly kevéssé jut be az állatba, mint éhezés közben.

A metamorphosissal ellentétben *az embryonális fejlődésre épen az állategyén nagyfoku növekedése jellemző, a protoplasma mennyiségének nagyobboldása új élő anyag és új szerv-csirák képződése által nem differenciált anyagból.*

Ezekben különbözik lényegére nézve a nevezett két fejlődési folyamat, melyek azonban más tekintetben hasonlítanak egymásra. Így az embryonális fejlődésben is szerepelnek a negatív folyamatok, mint «histolysis», egyes sejtcsoportok felszívódása, de nem oly mérvben, mint a metamorphosisban. Másrészt utóbbiban is észlelhető oly sejtek képződése, melyek az álczáéitól teljesen elütnek: KULAGIN¹ szerint az imaginális

¹ Zoolog. Anzeiger, 1098, 21. szám, 661. o. Czitálva DEEGNER-nél l. c. 53. o.

korongok sejtjeiben kétannyi a chromatin, mint a belőlük származó sejtekben.

Közös tulajdonsága a nevezett két életperiodusnak az is, hogy az ujonnan képzett vagy átalakulás útján keletkezett szervek életképességük fentartására közvetlenül létrejöttek után is már bizonyos mennyiségű chemiai energiát fogyasztanak és azonkívül bizonyos élettani functiókat is teljesítenek, mi az energiaforgalom szempontjából jelentős körülmény.

II.

Miután ilyen módon megállapítottuk a metamorphosis és embryonális fejlődés között lévő különbséget, hasonlítsuk össze azon munkát, mely e két folyamat közben végeztetik. Ilyen összehasonlításra azonban, sajnos, csak kevés megfigyelés áll rendelkezésre, mivel úgy a fejlődési munka, mint az átalakulási munka eddigelé csak néhány állaton van megállapítva. Hogy a különböző kísérletek adatait összehasonlíthassuk, természetesen azoknak külső körülményeikben — főleg a hőmérsékletet illetőleg — egymással egyezniök kell. Ezen kívánalomnak eddigelé csak tanítványomnak, FARKAS KÁLMÁN-nak¹ selyem-pille petéin és álcain végzett kísérletei felelnek meg; saját kísérleteim és WEINLAND-éi csak az érett légyalca metamorphosisaira vonatkoznak, míg ezek embryonális fejlődési munkája ismeretlen. De különben is igen kevés az a megfigyelés, mely az embryonális fejlődési munkára vonatkozik, illetőleg a melyből azt ki lehetne számítani.

Tudtommal csak saját magamnak és FARKAS K.-nak tyuktojáson,² pisziráng-³ és selyempille-petén végzett kísérleteinken kívül még csak HASSELBALCH-nak tyuktojáson végzett kísérletei sorolhatók ide. Az emlős-embryo fejlődési munkáját egyáltalán nem ismerjük, mert eddigelé mindössze csak néhány fejlődési stádiumának gázcserejét vizsgálták meg (Zuntz és Cohnstein,⁴ Bohr.⁵

¹ Pflüger's Archiv, 98. k., 490. o.

² Pflüger's Archiv, 93. k. 927. o. és 121. k. 437. o.

³ Pflüger's Archiv, 104. k., 624. o.

⁴ Pflüger's Archiv, 34. k., 173. o.

⁵ Skandinav. Arch., 10. k., 413. o.

XI. táblázat.
Fejlődési és átalakulási munka.

Állatfaj	Melyik periodusban	Tartama napokban	Egy állat súlya a periodus végén	Száraz anyag tartalma ‰	Összes energia-fogyasztás	1 gr. testsúlyra számított energia-fogyasztás Cal.	1 gr. száraz anyagra számított energia-fogyasztás Cal.
<i>Embryonális fejlődés.</i>					Fejlődési munka		Specifikus fejlődési munka
Tyúk	A petében a teljes fejlődésig	21	28·800 g	18·7	23 Cal.	0·81	3·8
Selyemhernyó	" " " "	15	0·463 mg	28·2	0·408 cal.	0·88	3·1
<i>Metamorphosis.</i>					Átalakulási munka		Specifikus átalakulási munka
Légy (ophyra cadaverina)	I. periodus: az érett álcza átalakulása bábbá	7	9·3 mg	40·3	4·34 cal.	0·47	1·2
	II. " a báb átalakulása imago-vá	13·5	7·32 mg	33·9	3·82 "	0·52	1·6
	I + II. periodus	20·5	7·32 mg	33·9	8·16 "	1·1	3·3
Légy (calliphora vomitoria)	II. periodus: a báb átalakulása imago-vá	13·5	60·00 mg	—	24·3 "	0·40	—
Selyemhernyó (bombyx mori)	I. " az érett álcza átalakulása bábbá	5	1·314 g	22·1	416 "	0·32	1·4
	II. " a báb átalakulása imago-vá	13·6	1·788 g	24·5	379 "	0·48	2·0
	I + II. periodus	18·6	0·788 g	24·5	795 "	1·0	4·1

A XI. sz. táblázatban összeállítottam azon néhány adatot, melyeket az embryonális fejlődés és az átalakulás munkájának megállapítása czéljából végzett kísérletek adtak. Ezen táblázatból mindenekelőtt azon igen érdekes és fontos tény derül ki, hogy *a selyempille- és a tyúk-embryo fejlődési munkája egyforma nagy: tehát 1 gr. élő szervezet embryonális fejlődésére a selyempille és a tyúk petéjében egyforma mennyiségű chemiai energia alakul át hővé.* Nem felesleges megemlítenem, hogy ha HASSELBALCH-nak ¹ a csirkeembryón végzett anyagcsere-kísérleteiben a zsirfogyasztásból kiszámítjuk az embryo fejlődési munkáját, 21 Cal.-t kapunk, LIEBERMANN vizsgálataiból ² pedig 26 Cal.-t; míg az én kísérleti sorozatom eredményeképen 23 Cal.-t kaptam. Tehát teljesen egyező értékek!

Az embryonális fejlődési munka egyforma nagy volta annál szembetűnőbb és érdekesebb, mert nemcsak, hogy a kifejlett szervezetnek nagyságában — a csirke vagy 40,000-szer nagyobb a selyemhernyónál — és a fejlődési munkák abszolút nagyságában van igen nagy különbség, hanem rendszertani állásában, fejlettségi fokában és ennél fogva élettani működéseik változottságában is.

Noha ezen megfigyelések természetesen még nem elegendők arra, hogy belőlük egy általános természeti törvény kellő biztonsággal volna levezethető, mégis azon valószínű — és további kísérletekkel könnyen megvizsgálható — hypothesis felállítására jogosítanak, hogy *az állati szervezetek specifikus fejlődési munkája nem funkciója fejlettségi fokuknak; hogy ennek megfelelően különböző fejlettségi fokú élő állati anyag képződése egyenlő mennyiségű chemiai energiának felhasználásával járhat és — mint az eddigi vizsgálatok mutatják — jár is.*

Fentieket azért kellett ilyen óvatosan kijelentenem, mert, noha a fejlődési munka a fejlettségnek nem funkciója, mégis függhet az eddigelé ismeretlen, de nem az embryóban létező feltételektől. Így pl. elképzelhető, hogy többek között azon kö-

¹ Skandinav. Archiv, 10. k., 391. o. 1900.

² Pflüger's Archiv, 43. k., 81. o. 1888.

zeg is, víz vagy levegő — melyben az embryo kifejlődése közben tartózkodik — megváltoztatja a fejlődés munkáját.

De mindenesetre joggal állítható, hogy a *légy és a selyempille álczájának specifikus embryonális fejlődési munkája egyenlő, vagyis 1 gr. álczáé körülbelül 0·9 Cal, és 1 gr. álca szárazanyagé 3 Cal.*

Ezzel szemben a bábstádiumban az átalakulási munka úgy a légy mint a selyempille bábjában a kísérletek kitünően egyező eredményei szerint 1 gr. imagóra számítva 0·5 Cal., 1 gr. imago-szárazanyagra számítva pedig 1·6 Cal.; vagyis a *bábstádiumbeli átalakulási munka csak felannyi, mint az embryonális fejlődési munka.* Megközelítőleg ugyanilyen nagy az álcza-periódus átalakulási munkája is. Ebből természetesen az is következik, hogy ha mindkét periódus átalakulási munkáját a kész imago súlyegységre vonatkoztatjuk — tehát kiszámítjuk az érett álczá-nak imagóvá való átalakulására szükséges munkát —, oly értékeket kapunk, melyek a specifikus fejlődési munkával körülbelül megegyeznek. Fenti táblázatból ez tényleg ki is tűnik.

A fejlődési és átalakulási munka nagysága azonban még nem helyes mértéke az embryonális fejlődést és a metamorphosist alkotó energiaforgalom intenzitásának. Ezt csak úgy kapjuk meg, ha az embryonális fejlődés és metamorphosis energiafogyasztását a közép-élősúlyra vonatkoztatjuk és kiszámítjuk az 1 gr. középsúlyra és egy napra eső energiafogyasztást.

A középső élősúly meghatározása nehézségekbe ütközik, mert sem az embryo súlyának gyarapodása, sem pedig az álca, illetőleg báb súlycsökkenése nem egyenletes. A csirkeembryo növekedési görbéjét HASSELBALCH¹ állapította meg, melyből azután ki lehet számítani, hogy az embryonak a 21 napig tartó fejlődési időszak alatt mi a középsúlya. A rovarok embryonális fejlődésére ily görbénk nincs; így a csirkeembryo görbéje segítségével számítottam ki a frissen kikelt selyemhernyó végsúlyából középsúlyát embryonális fejlődésének tartamára.

¹ HASSELBALCH kísérleteiből (Skandinav. Archiv, 10. köt., 364. old. 1900.) 0,5885-öt kaptam mint factort, melylyel az embryo fél-testsúlyát szorozni kell, hogy középső testsúlyát megkapjuk. Ezen factorral számítottam ki a selyemhernyó közepes testsúlyát is.

A metamorphosis idejére vonatkozólag naponként meghatároztam az álczáknak súlycsökkenését behábozás előtt és után, egészen a legyek kikeléséig; ezen adatokból kiszámíthattam a középtestsúlyt. Kísérleteim szerint e számot a metamorphosis mindkét periodusára megkapjuk, ha a kezdeti és végsúlyok számtani középárayosát 0·971-gyel szorozzuk. Tekintettel azonban arra, hogy a selyemhernyó álczájának a metamorphosis alatti napi súlycsökkenését nem ismerjük, a testsúly középértéket tehát csak a kezdeti és végsúlyból magából számíthatjuk ki: úgy a légyre mint a selyemhernyóra vonatkozó adatok kiszámításában e súlyok számtani középárayosát tekintetem középtestsúlynak. A végeredményen ez alig változtat. A szárazanyag közepsúlyát hasonlóan számítottam ki. Mindezen számításoknál a báhüvely súlyát levontam, mert hiszen az energiafogyasztásban nem vesz részt. (L. XII. táblázat 270. oldal).

Bármilyen hibásak is a rovarok középtestsúlyára vonatkozó adatok, e hibák nem lehetnek oly nagyok, hogy az embryonális fejlődés és a metamorphosis energiafogyasztásában levő hatalmas különbséget megmagyaráznák. *Az embryonális fejlődés tehát sokkal (3—4-szer) nagyobb energiafogyasztással jár, mint a metamorphosis.* A míg pl. a selyemhernyó 1 gr.-ja embryonális fejlődés közben 2·97 Cal.-nyi energiát fogyaszt, addig metamorphosisa közben csak 0·61 Cal.-t.

Ennek meg is felel a napi, a súlyegységre vonatkoztatott energiafogyasztás. Embryonális fejlődése közben a selyemhernyó 1 gr.-ja naponként 198 cal.-t fogyaszt, a metamorphosis alatt pedig csak 33 cal.-t. Természetes, hogy az energiafogyasztás intenzitása, mint kísérletemből ki is tűnik, nagy mértékben függ a hőmérséklettől; ezért különösen hangsúlyozom, hogy FARKAS KÁLMÁNNAK azon kísérleteiben, melyekből a táblázatban felsorolt értékeket kiszámítottam, a selyemhernyó embryonális fejlődése és metamorphosisa ugyanolyan hőmérsékleten történt, (22—25°C); az értékek tehát egymással directe összehasonlíthatók. *Az embryonális fejlődés energiafogyalma tehát jóval intenzívebb, mint a metamorphosisé.*

Ezen két fejlődési periodus még más tekintetben is mutat energetikai különbséget.

XII. táblázat.

1 gr. középtestűlyra vonatkoztatott energiafogyasztás az embryonális fejlődés és a metamorphosis ideje alatt.

Állatfaj	Életperiodus	Tartama napokban	Középsűlya		Az egész szakasz tartamára és		Egy napra és	
			az állatnak	az állat száraz anyagának	1 gr. állatra számítva cal.	1 gr. száraz anyagra számítva cal.	1 gr. állatra számítva cal.	1 gr. száraz anyagra számítva cal.
	<i>Embryonális fejlődés.</i>							
Tyúk	Az egész embryonális fejlődés alatt	21	8·47 gr.	1·584 gr.	2708	14481	129	691
Selyemhernyó (Bombyx mori)	Az egész embryonális fejlődés alatt	15	0·128 mg.	0·0385 mg.	2972	10528	198	702
	<i>Metamorphosis.</i>							
Selyemhernyó (Bombyx mori)	I. periodus: az álca átalakulása	5	2·02 gr.	0·43 gr.	206	967	44·1	193
	II. " a báb "	13·6	1·051 "	0·243 "	361	1566	26·5	115
	I. + II. periodus	18·6	1·312 "	0·293 "	606	2713	32·6	146
Légy (Ophyra cadaverina)	I. periodus: az álca átalakulása	6	10·84 mg.	3·48 mg.	343	1067	57·2	178
	II. " a báb "	13·5	7·835 "	2·64 "	486	1444	36·0	107
	I. + II. periodus	19·5	8·802 "	2·90 "	857	2596	43·9	133
Légy (Calliphora vomitoria)	II. periodus: a báb átalakulása Weinland V. kíséretében	13	69·1 "	—	310	—	23·8	—
	" VI. "	14	69·9 "	—	389	—	27·8	—

Eddig a chemiai energiának csak azon mennyiségét vettük tekintetbe, mely elhasználódott, helyesebben mondva más energiákká s végül hővé alakult át. Az energiának ezen mennyisége azonban épenséggel nem felel meg azon chemiai energiának, mely a forgalomban részt vesz. Az «elhasznált» energián kívül az energiaforgalom egy részét azon chemiai energia is képezi, mely az embryo, illetőleg az imago testének felépítésére fordítatik; valamint az is, mely az ürülékben és más hulladéokban, pl. bábhüvelyben értékesítés nélkül elvész. Csakis ezen három energiarészlet összege felel meg az összes chemiai energiaszükségletnek. Ha kiszámítjuk azt, hogy az említett részletek egyenként hány százalékát teszik ezen összes szükségletnek, oly viszonyszámokat kapunk, melyek felvilágosítanak a forgalomba jött chemiai energia értékesítéséről. Ha a chemiai energia ezen relatív értékesítésében van különbség embryonális fejlődés és metamorphosis között, a különbség a metamorphosis azon stádiumában várható leginkább, melyben az átalakulási munka a legkevésbé komplikálódik más physiologiai functiókkal: vagyis a bábstádiumban. Mint a következő számok mutatják, ez valóban így is van.

A selyemhernyó embryonális fejlődése közben az érett pete chemiai energiájának 28%-a a fejlődés munkájára fordítatik, 49·7%-a a hernyó testének felépítésére, 23·5% pedig értékesítetlenül elvész (pete héjja, ürülék). Ellenben a bábnak imagóvá átalakulása közben a báb chemiai energiájából:

	Bombyx mori-ban	Ophyra cadaverina-ban
Az átalakulás munkájára fordított	22·0%	15·5%
Az imago testének felépítésére fordított	69·1%	66·5% ¹
Értékesítetlenül elveszett (bábhüvelyben, ürülékben)	8·9%	18·0%

¹ A légnél e számi azért kissé bizonytalan, mert a légy kikelte után nem mindig ad ki ürüléket magából; tehát testanyaga energiájának egy bizonyos része határozottan az értékesítetlenhez tartozik.

Legnagyobb a különbség a chemiai energia azon részében, mely az ujonnan képződött szervezet felépítésére fordított; ez a metamorphosisnál sokkal nagyobb, mint az embryonális fejlődésnél, viszont a chemiai energiánál metamorphosis közben veszendőbe menő része sokkal csekélyebb. *A chemiai energia értékesítése tehát az átalakulásnál sokkal kedvezőbb, mint az embryonális fejlődésnél; első sorban azért, mert a nem értékesíthető energia útján sokkal kevesebb megy veszendőbe.*

Mindez adatokból joggal következtethetjük, hogy az embryonális fejlődés és a metamorphosis energiaforgalmában lényeges különbségek vannak; úgy az energiafogyasztás nagyságában mint az energia-átalakulások intenzitásában és az energia értékesítésében.

III.

Az embryonális fejlődés és a metamorphosis között fennálló energetikai különbség okát kétségtelenül a biológiai folyamatoknak fenn bővebben tárgyalt különbségében kell keresnünk.

Az álczában és bábban elsősorban szakadatlanul folyik a *fentartó munka*, még pedig az embryonális csirák, az imaginális korongok fentartási munkája, mely megfelel a chemiai energia azon mennyiségének, mely ezen csirák életbentartásánál hővé alakul át. Hogy milyen nagy e munka, azt nem tudjuk, hiszen ezen csirák mennyiségét sem ismerjük. Csak annyit mondhatunk, hogy az álczastádiumban és a bebábozás alatt az elfogyasztott chemiai energiának egy része az imaginális korongok fentartására fordítatik és hogy ezen munka a korongoknak a bebábozás után fokozódó működésével nagyobb lesz; már csak azért is, mert a korongok maguk is nagyobbodnak. Ezen csirákon kívül azonban még más szervek fentartása is igényel munkát; olyanoké, melyek histolysist nem szenvednek, s — mint a szív, idegrendszer — a metamorphosis egész ideje alatt működésben vannak. A chemiai energiának ezeknek működése közben elhasznált mennyisége szintén egy részét teszi a báb fentartó munkájának. Ezen tulajdonképeni fentartási munkához hozzá-

járul még azon energiamennyiség is, mely az imaginális korongok produktív működése közben fogy el. E produktív működés a korongok növekedésében áll, mely által a histolysis útján elpusztult szerv pótoltatik. Ez utóbbi munka *a tulajdonképeni, tiszta átalakulási munka*, csakhogy ennek nagyságáról szintén nem tudunk semmit.

Az energia-forgalmat az is növeli, hogy az átalakulás útján keletkezett új szervek rögtön *új működést* kezdenek. Így KOWALEVSKY¹ említi, hogy a légybábok közepbe már a 3. napon kezd összehuzódni, és ezen hátulról előre terjedő összehuzódások azontul folyton megismétlődnek. Az ivarszervek, melyek különálló imaginális korongokból keletkeznek, szintén megkezdik működésüket, mely abban áll, hogy az ivarmirigyekben az ivarsejteket megérlelik. Mindezen munkák, melyek a fentartási munkát növelik, nem képezik azonban ennek lényeges alkotórészét. Így pl. az izmok regenerálása után mihamarább megkezdődő izomösszehuzódások, melyek a metamorphosis vége felé mind intenzívebbé lesznek, nem olyan functiók, melyek az állategyén fentartására okvetlenül szükségesek, de lényeges energiafogyasztással járnak és így növelik a fentartási munkát.

Mivel a metamorphosisra jellemző folyamatok közül lényeges a szervek szemcsés szétesése — a histolysis — különösen a bábstádium kezdetén, energetikai szempontból elvi fontosságú kérdés az, vajjon a histolysis chemiai energia fogyasztásával jár-e vagy nem, más szóval növeli-e a hőképződést. A 237. oldalon kifejtettek alapján jogunk van feltenni azt, hogy a histolysis maga nem jár energiafogyasztással, tehát nem növeli a hőképződést. Sőt valószínű, hogy épen ellenkezőleg, chemiai energia megtakarításával jár. Épenséggel nem biztos, hogy a histolysis a protoplasmában mélyreható chemiai bomlást idézne elő, melynek következtében úgy, mint az emésztési folyamatnál, egyszerű szerkezetű hasadási termékek keletkeznének. Lehetőséges, hogy a protoplasmának a histolysis közben szenvedett

¹ l. c. 564. o.

chemiai elváltozása távol sem oly mélyreható, mint a szövettani; hogy tehát a protoplasma szétesési termékei még oly komplex természetűek és még annyira differenciáltak, hogy igen csekély elváltozásuk árán épül fel belőlük újra a régihez hasonló protoplasma. Ez jóval csekélyebb energiafogyasztással járhat, mint az embryonális vagy postembryonális növekedés, a mikor a sejteknek nyújtott differenciálatlan, illetőleg indifferens tápanyagokból történik a szövatképzés, különösen ha meggondoljuk, hogy mindenek szerint a metamorphosisnál is enzimás folyamatok szerepelnek, melyek valószínűleg csekély hőfejlődéssel járnak és melyeket oly enzímák okoznak, melyek histolysis közben keletkeznek.

Mindezek oly körülmények, melyek az átalakulás munkáját csökkenteni képesek.

Ha a mondottakból azt következtetjük, hogy a báb átalakulási munkája két részre osztható: 1. fentartási és 2. tulajdonképeni (tisztá) átalakulási munkára, akkor bizonyos valószínűséggel azt is mondhatjuk, hogy az egész átalakulási munkának legnagyobb része *fentartási munka*, s csak kisebb része *tulajdonképeni (tisztá) átalakulási munka*.

E mellett szól mindenekelőtt azon tény, hogy a test súlyegységére és az időegységre számított energiaforgalom egyenlő hőmérsékleti viszonyok mellett egy életperiodusban sem, teljes éheztetéskor sem oly kicsiny, mint a metamorphosis alatt, tehát kisebb, mint bármely életszakaszban a legkisebb életfentartó munka. Erről lejjebb bővebben lesz szó.

Azon chemiai energiából, mely az embryonális fejlődés közben elhasználtatik, egy rész azon munkára fordítatik, mely az élő anyag és új sejtek képzésére szükséges s melyet az élő protoplasma gyarapodása is igényel: ez a *növekedési munka*. Az ujonnan képzett élő anyag csak úgy tartható fenn, hogy szakadatlanul chemiai energia használtatik el, vagyis *fentartási munkának* is kell végeztetnie. Minél tovább halad a fejlődés, minél nagyobb az ujonnan képződött szervek száma, annál nagyobb a fentartási munka, mi még azzal is nagyobb lesz, hogy az új szervek speciális functióikat is kezdik teljesíteni, a mi ismét csak chemiai energia rovására történhetik.

Az embryonális fejlődés közben is történnek izomösszehúzódások, szívmozgás, innervatio, mirigyelválasztás stb., melyek szintén chemiai energia átalakulásával járnak; tehát ezek is részét teszik a *fenntartó munkának*.

Így tehát az embryonális fejlődési munka is két részre bontható: 1. *növekedési* és 2. *fenntartási munkára*. Ezeknek egymáshoz való viszonyát meghatározni, vagy őket tovább elemezni egyelőre ép oly lehetetlen, mint az átalakulási munkánál. Mindazonáltal egy lépéssel előbbre visz bennünket a fejlődési munka tanulmányozásában annak összehasonlítása az átalakulási munkával.

Ha ugyanis azt látjuk, hogy egyrészt az embryonális fejlődést a metamorphosistól jellemző módon megkülönbözteti a növekedés, másrészt pedig mindkettőnél *fenntartó* munka is végeztetik, mely a metamorphosisnál elhasznált energia legnagyobb részét teszi, úgy, miután teljes joggal feltehető, hogy a fejlődés közben végzett *fenntartó* munka nem kisebb, mint a metamorphosis közben, következtethetjük, hogy az új szövetek képzése és a növekedés azon folyamatok, melyeken az embryonális fejlődés nagyobb és intenzívebb energiafogyasztása alapul; hogy tehát *a fejlődési munkából csekélyebb rész esik a fenntartó munkára, mint az átalakulási munkából*.

Mindezekből az következik, hogy az embryonális fejlődési munkának legnagyobb részét a növekedési munka teszi. *Élő anyagnak, sejteknek képződése és növekedése tehát nagyobb munkát igényel, vagyis több chemiai energia elhasználásával jár, mint a sejteknek életbentartása*. Ehhez hozzá kell azonban tenni, hogy mindez *kizárólag az embryonális állapotra vonatkozik*, melyben a *fenntartási* munka végzésére szükséges energia nem kívülről bevitt táplálék alakjában kerül a szervezetbe, mi újabb energiafogyasztással járna. *Tehát csakis a fenntartó munkára rendkívül kedvező embryonális viszonyokra áll az, hogy az élő anyag képzése nagyobb munkát igényel, mint annak fenntartása*.

Mivel már azt is megállapítottuk, hogy a fejlődési munka lényegesen nagyobb, mint az átalakulási munka, még azt is kimondhatjuk, hogy *sejteknek képzése és gyarapodása nagyobb*

munkát igényel, mint sejteknek újból való felépítése oly anyagból, mely histolysis által keletkezett élő sejtanyagból.

IV.

Fent azt fejtettem ki, hogy a bábstádium átalakulási munkájának legnagyobb része fentartó munka és egyéb bizonyítékokon kívül azt is említettem, hogy hasonló külső körülmények között az energiaforgalom legkisebb a bábstádiumban. Ezt a következőkkel akarom bebizonyítani:

Ha külső mechanikai munka nem végeztetik, akkor-éhezés közben — egyforma külső körülmények között — legkisebb az energiaforgalom; mert (lehetőleg csekély izommunka esetén) ekkor csak olyan functiók végeztetnek, melyek az élet fentartására okvetlenül szükségesek; a szervezet tehát csak belső fentartó munkát végez. Hasonlítsuk össze ezzel az átalakulási munkát.

A bábból kikelt imagó már nem nő tovább; ha éheztetjük és ha, mint az én kísérleteimben, az imago nem végez azonnal szaporodási munkát, akkor az állat valóban csak fentartó munkát végez. Igaz, hogy az állatok nagy energiafogyasztással járó munkát, testmozgásokat is végeznek; mivel azonban ezen mozgások az állatnak egészen spontán, természetes és elkerülhetlen életnyilvánulásai, melyeket csak mesterségesen lehetett volna elnyomni, a nekik megfelelő energiafogyasztást is a fentartó munkához kell számitanunk.

Két kísérleti sorozatban meghatároztam a bábokból kikelő ophyra cadaverina légy anyagcseréjét ugyanazon eljárás szerint, mint az álca- és bábkísérletben le volt írva. A legyek az egyik kísérletben 44 óráig, a másikban halálukig éheztek. A legyek gyűjtése a 223. oldalon van leírva. A második sorozat legyei közül néhány már a kikelés negyedik, a legtöbb a hatodik napján pusztult el. Élettartamukat nem határoztam meg pontosan. Miután valamennyi elpusztult, megszámloltam őket, s valamennyit egy időben mértem le, úgy, hogy a negyedik napon elhullottak három napig heverték és száradtak az üvegen. Mindezt meg kell említenem, hogy érthető legyen, miért nem

számítható ki e kísérletben sem a vízfogyasztás, sem a testsúlyegységre és egy napra eső energiafogyasztás. A legyek egész idő alatt igen elevenek voltak, fűgén mászkáltak és röpdöstek az üvegben s csak az elhullásukat megelőző napon látszóttak bágyadtnak, hasuk lelapult s mintegy összeaszta.

A kikelésüket követő napon hűgysavból álló ürüléket bo-csátottak. Ezen ürüléket összegyűjtöttem és benne a N-t meghatároztam; de a hűgysavkiválasztást nem ebből határoztam meg, hanem a legyek N tartalmának változásából, azon jogos feltevés alapján, hogy elemi N nem illan el, hogy tehát az egész N hiány hűgysav rovására írható. Kikelésüket követő 44 óra múlva már semmit sem ürítettek.

Az első kísérleti sorozatot 1222 légyen végeztem; ezek május 9.-én d. u. 4 órától május 11.-én déli 12 óráig éheztek, mire megöltem őket; súlyuk ekkor 7.777 gr. volt.

A második sorozatban csak 932 légy állott rendelkezésemre, melyek súlya holtan 2.070 gr. volt.

Különösen hangsúlyozom azt, hogy ezen kísérleteket épűgy, mint az álca- és bábkísérleteket, szobahőmérséken (22° C-on) végeztem.

E kísérletek eredményeit a következő XIII. sz. táblázatban foglaltam össze, melynek a frissen kikelt legyek összetételére vonatkozó adatai a IX. táblázatból vannak véve.

XIII. táblázat.
Az éhezé légy anyag- és energiaforgalma.

	Súly	Víz	Száraz anyag	Zsír (Liebermann-féle elszappanosítással)	N	Chemiai energia
	gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	Cal.
<i>I. A legyek összetétele.</i>						
100 gr. légyben van:						
Közvetlenül a bábóiból való kikelés után	—	66.62	33.38	12.10	2.61	224.1
44 órai éhezés után	—	70.43	29.57	10.25	2.52	198.1
Haláluk alkalmával (kb. 6 napi éhezés után)	—	35.11 ?	64.89 ?	—	7.63	399.3
1000 darab légyben van:						
Közvetlenül a bábóiból való kikelés után	7.32	4.88	2.44	0.89	0.191	16.40
44 órai éhezés után	6.36	4.48	1.88	0.65	0.161	12.61
Haláluk alkalmával (kb. 6 napi éhezés után)	2.09	0.73 ?	1.36	—	0.160	8.36
<i>II. Anyag- és energiaforgalom éhezés közben.</i>						
1000 darab légyre számítva:						
Az I. sz. kísérletben a kikélest követő első 44 óra alatt elvesztett	0.96	0.40	0.56	0.24	0.030	3.79
Telát naponként elvesztett	0.324	0.219	0.305	0.128	0.0164	2.067
A napi veszteségből a kiválasztott hűgysavra esik	0.049	—	0.0491	—	0.0164	0.135
Telát naponként elvesztett	0.475	0.219	0.256	0.128	—	1.932
A II. sz. kísérletben a halálig való kiéheztetésig (6 nap) elvesztett	5.23	4.15 ?	1.08	—	0.031	8.04
A kiválasztott hűgysavban volt	0.033	—	0.033	—	0.031	0.085
Telát elhasználtatott	5.197	4.15 ?	1.047	—	—	7.955
Telát naponként (megközelítőleg) elhasználtatott	0.86	0.69 ?	0.174	—	0.005	1.33

E táblázat adatai tipusos éheztetési kísérletre vallanak. Jelentékeny zsír- és nem jelentéktelen fehérjefogyasztást mutatnak; utóbbi a kísérlet utolsó négy napján nem tűnik ki, mivel a legyek a N-tartalmú bomlási termékeket már nem ürítették ki. A napi vízvesztés jóval, a zsírfogyasztás pedig négyszer nagyobb mint a bábstádiumban; a zsírfogyasztás azonban itt nem azonos, mint a bábstádiumban, a szárazanyagvesztéssel, még akkor sem, ha a szárazanyagvesztésből a húgysavat levonjuk. Magvarázata az, hogy zsíron kívül más anyagok is elégték. A napi energiaforgalom majd kétszer akkora, mint a bábstádiumban, daczára annak, hogy az éhező légy közepestsúlya kisebb.

A báb és éhező légy anyagcseréje között levő különbség abban is nyilvánul, hogy az éhező légyben elhasznált szárazanyag specifikus energiataralma sokkal kisebb:

az éhezés két első napján	— —	7550 cal.
“ “ négy utolsó napján	8173	“
míg a bábstádiumban	— — —	9340 “

Az éhező legyek ugyanis a nem-zsírnemű anyagból, még pedig fehérjéből többet fogyasztanak, mint a bábok, melyek energiaszükségletüket majdnem kizárólag zsírból veszik. Ha tehát a báb éhezik is, anyagcserefolyamatai mégis egészen más képen folynak le, mint az éhező imagóban.

Ha már az imagó napi anyag- és energiafogyasztásának abszolút értékei jóval nagyobbak mint a bábéi, úgy a különbség még szembeűnőbb az 1 gr. középsúlyra és 1 gr. középszárazanyagra számított értékeken. (L. XIV. tábl.)

E táblázat számadatai bővebb magyarázatra nem szorulnak: kétségtelenül azt bizonyítják, hogy *az éhező légy energiafogyasztása hasonló külső körülmények között, mindenekelőtt pedig hasonló hőmérséken nagyobb — körülbelül kétszer akkora — mint a bábé, és nagyobb, mint az álczáé közvetlen a bebábozás előtt.*

Ennek megfelelőleg anyagfogyasztása is jóval nagyobb: mintegy nyolczszor annyi szárazanyagot, négyszer annyi zsírt és ötször annyi vizet fogyaszt, mint a báb. *Az éhező légy fentartási munkája tehát jóval nagyobb, mint átalakulási munkája.*

XIV. táblázat.

Az *Ophyra cadaverina*-álcza, -báb és -imago anyag- és energiaforgalmának összehasonlítása.

	Víz gr.	Száraz anyag gr.	Zsír gr.	Chemiai energia cal.
<i>Naponként</i>				
1000 darab álcza	0·610	0·062	0·058	620
1000 „ báb	0·046	0·030	0·030	282
1000 „ légy (2 nappal a kikelés után)	0·219	0·256	0·128	1932
1000 darab (kikeléstől halálig) körül- belül	—	0·174	—	1330
<i>Egy napra és 1 gr. (közép) testsúlyra számítva</i>				
álcza	53·9	5·48	5·08	57·2
báb	5·85	3·87	3·82	36·0
légy	31·9	44·7	18·7	282·5
<i>Egy napra 1 gr. (közép) száraz anyag tartalomra számítva</i>				
álcza	159	15·5	14·6	178
báb (bábhüvely nélkül)	17·3	11·5	11·3	107
légy (a kikelést követő 2 napon)	101	141	59·3	894
légy (éhhalálig = körülbelül 6 nap) körülbélül	—	94·7	—	700
<i>Ha 1 báb anyag- és energiafor- galma = 1, akkor</i>				
1 álczáé	13·3	2·1	1·9	2·2
1 bábé	1	1	1	1
1 légyé (az első 2 napon)	4·8	8·5	4·3	6·8
<i>Ha 1 gr. báb anyag- és energiafor- galma = 1, akkor</i>				
1 gr. álczáé	9·2	1·4	1·3	1·6
1 gr. bábé	1	1	1	1
1 gr. légyé	5·5	11·5	4·9	7·8

E nagy fentartási munkát kétségkívül a légy igen élénk mozgása okozza, mely nagy energiafogyasztással jár. Ez már BACHMETJEV-nek¹ lepkekísérleteiből is következtethető, melyekben thermoelectromos tűkkel mutatta ki a szárnycsapásokkal járó nagy hőfejlődést.

Az éhezési stádium második felében, melyben — különösen az elhullást megelőző napon — a legyek csak igen bágyadtan mozogtak, sőt egy ideig mozdulatlanul is heverték, lényegesen csekélyebb az energiaforgalom intenzitása. Átlag hat naposnak véve az éhező legyek élettartamát, 1 gr. szárazanyagra eső energiafogyasztásuk a halált megelőző 100 órában mintegy $\frac{1}{8}$ -dal csökken. De még ezen utolsó periodusban is jóval nagyobb az energiafogyasztás, mint a bábstádiumban.

Az éhező selyempille energiaforgalmáról FARKAS KÁLMÁN kísérletei adnak felvilágosítást, a melyekből a következő adatokat vettem:

	A selyempille		A kettő középértéke
	nőstényében volt	hímjében volt	
A bábból való kikelése után közvetlenül — — — — —	0·2549 gr. száraz anyag	0·1536 gr. száraz anyag	
Éhhalálakor — — — — —	0·1011 gr. száraz anyag	0·0785 gr. száraz anyag	
Átlag az éhezés tartama alatt	0 1730 gr. száraz anyag	0·1160 gr. száraz anyag	0·1445 gr. száraz anyag
Elhasználtatott éhezés közben összesen — — — — —	264 cal.	477 cal.	371 cal.
Elhasználtatott éhezés közben pro 1 gr. száraz anyag — ..	1526 "	4112 "	2567 "

A him és nőstény lepkék nem élnek egyenlő hosszú ideig; a nőstény 1—2 napig élhet, a him közvetlenül a copulatio

¹ Experimentelle entomolog. Studien, 1. köt. Leipzig, 1901.

után elpusztul. Számítsuk mindkettőnek élettartamát átlag két naposnak, tehát lehetőleg hosszúnak, akkor 1 gr. szárazanyagra

a nőtény pillangónál napi	763 cal.-t
a hím	„ „ 2056 „
közéértékben napi 1283 cal.-t kapnánk.

Ez érték jóval nagyobb mint az ophyraé (894 cal.), sőt azon esetben is, ha a selyempille élettartamát a valójánál hosszabb időre, három napra tennők, még mindig 865 cal.-t kapunk, a mi körülbelül megegyezik az ophyra-n talált értékkel.

Biztos tehát, hogy *a bábból épen kikelt selyempille energiafogyasztása jóval nagyobb, mint az ophyra-légyé. Napi energiafogyasztása tízszer akkora* (ha három napi élettartammal számolunk, nyolczszor akkora) *mint a bábé.* A selyempille ezen energiafogyasztásában befoglaltatik a fentartási munkán kívül azon munka is, melyet a nemi functiók — copulatio, peterakás — igényelnek, a melyeket az éhező ophyralégy nem végzett, ezért kisebb is az energiaszükséglete mint a selyempilléé.

FARKAS K. egy külön sorozatban meghatározta a frissen a petéből kikelt, teljesen éhező selyemhernyó energiaforgalmát is. A hernyók 26° C-on átlag három napig éltek és ezen idő alatt energiatartalmuk 32·4%-át fogyasztották el. Energiafogyasztásuk középtestsúlyra számítva:

1 gr.-onként napi 197·6 cal. volt,
ezzel szemben a bábé 26·52 cal.
az érett hernyóé a bebábozás előtt	... 44·13 cal.

Ez rendkívül érdekes jelenség! *A fejletlen hernyó önkénytelen éhezés közben naponként (súlyegységre számítva) mintegy 4·5-szer annyi energiát fogyaszt, mint az éhező, érett álcza közvetlenül a begubózás előtt és mintegy 7·3-szor annyit, mint a báb.* Tehát az átalakulási munka lényegesen csekélyebb, mint az éretlen, éhező álczák fentartó munkája.

Ha a petéből kikelt álcza bőven táplálkozik, teste erősen növekedik. KELLNER kísérletei szerint a begubózásra kész selyemhernyó testsúlya 5400-szor, szárazanyagtartalma 4500-szor na-

gyobb eredeti súlyánál. Az álczában ilyenkor nemcsak fentartási, hanem hatalmas növekedési munka is folyik, úgy, hogy már a priori is biztosan feltehetjük, hogy az 1 gr.-ra számított napi energiafogyasztás sokkalta nagyobb, mint bármely más életszakaszban. KELLNER-nek minden tekintetben mintaszerű anyagcserekísérleteiből ez valóban ki is tűnik. KELLNER ugyan nem határozta meg az energiafogyasztást, de viszont rendkívül pontosan megállapította a hernyó tápanyag-felvételét és kiadásait és testanyagának változásait kikelése pillanatától begubózásáig, úgy, hogy adataiból könnyen ki lehet számítani a hernyó energiaforgalmát. Ezen számítás eredményei a következők:

A hernyó vedlése által elhatárolt periodusok	Tartama	1000 hernyó közép test-súlya gr.	1 gr.-ra eső napi energiafogyasztás
I. periodus — — — — —	175 óra	2·574	407·9 cal.
II. „ — — — — —	159 „	15·15	357·4 „
III. „ — — — — —	150 „	69·81	334·3 „
IV. „ — — — — —	165 „	314·11	171·1 „
V. „ — — — — —	177 „	1367·58	107·6 „

Az energiafogyasztás tehát az első periodusban, melyben a növekedés a legnagyobb, 12-szer, és még az V. periodusban is négyszer akkora, mint a bábstádiumban.

5.

Miután így megismertük a holometaboliás rovarok minden életszakának energiafogyasztását — kezdve az embryonális fejlődéstől életük utolsó szakaszáig —, bebizonyítottunk tekintetű, hogy a bábstádium a holometaboliás rovarok életének azon szakasza, melyben — egyforma külső viszonyok, főleg egyforma hőmérséklet mellett — legkisebb az energiaforgalom.

Az energiaforgalom vizsgálata ily módon bebizonyította a

zoologusok azon már régen hangoztatott nézetének helyességét, hogy a bábstádium tulajdonképen nyugalmi stádium; mert joggal nevezhetjük nyugalmi periodusnak az élet azon szakaszát, melyben az energiaforgalom a legkisebb.

A nyugalmi periodus tulajdonképen azon pillanatban kezdődik, midőn az álcza megszűnt enni; s WEINLANDnak igazat adhatunk, ha azt mondja, hogy az állatokban végbemenő chemiai folyamatok megváltozása az, mely a metamorphosisnak ilyenkor intensívebben meginduló folyamatait kiváltja.

Ezen elváltozás okozza azt is, hogy még a tökéletes bebábozás előtt, tehát az érett álczának bábbá alakulása közben az energiafogyasztás lényegesen csökken. Az energiafogyasztásnak oly hatalmas csökkenése a bábstádium nyugalmi állapotában csak azáltal lesz lehetségessé, hogy nemcsak a táplálkozás, hanem az izmok elpusztulása következtében a mozgások, valamint az izomtonus is, megszűnnek. DEGENER-nek tehát teljesen igaza van, midőn azt mondja, hogy a bábstádiumnak, mint nyugalmi stádiumnak létrejöttében az izomzat átalakulásának vagy ujonnan képzésének döntő szerep jut. Ezzel azonban nincsen az mondva, hogy ezen nyugalom föltétele a metamorphosisnak, mely nélkül tehát végbe sem mehetne. Ez ellen már csak azon tény is szólana, hogy mozgó bábót is ismerünk. Igen érdekes lenne ilyen mozgó bábnek vagy a tökéletlen bábképzéssel járó metamorphosisnak energiaforgalmát megvizsgálni, s kideríteni, vajjon ezeknél is azon stádiumban legcsekélyebb az energiaforgalom, melyben az imagoképzés folyik.

Vizsgálataimból tehát a bábstádiumnak újabb érdekes biológiai sajáttsága tűnik ki. Eddig e stádiumnak többnyire csak morphológiáját vizsgálták; már pedig, mint DEGENER helyesen mondja, a báb morphológiájából lényegének csak felét ismerjük meg. Lényegéhez tartozik energetikája is, melynek terén vizsgálataimmal az első lépés történt meg.

AZ ALGEBRAI ITERATIO HATÁRFÜGGVÉNYÉRŐL.

DÁVID LAJOS-tól.

1. Legyenek ${}^{(0)}a_1, {}^{(0)}a_2, \dots, {}^{(0)}a_n$ tetszőlegesen megadott komplex számok és legyen a

$$\begin{array}{cccc} {}^{(0)}a_1, & {}^{(0)}a_2, & \dots, & {}^{(0)}a_n \\ {}^{(1)}a_1, & {}^{(1)}a_2, & \dots, & {}^{(1)}a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}^{(i)}a_1, & {}^{(i)}a_2, & \dots, & {}^{(i)}a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{array}$$

végtelen matrix olyan, hogy álljanak a következő, x -re vonatkozó identitások:

$$\begin{aligned} x^n - (n)_1 {}^{(i+1)}a_1 x^{n-1} + (n)_2 {}^{(i+1)}a_2^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n {}^{(i+1)}a_n^n &\equiv \\ &\equiv (x - {}^{(i)}a_1)(x - {}^{(i)}a_2) \dots (x - {}^{(i)}a_n), \\ &\quad (i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

hol $(n)_\nu = \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \dots \nu}$.

Más szóval a matrix elemei feleljenek meg a következő algoritmusnak, az ú. n. SCHAPIRA-féle¹ vagy algebrai iterációnak:

$${}^{(i+1)}a_\nu^r = \frac{1}{(n)_\nu} \sum_{(i=0, 1, 2, \dots)} {}^{(i)}a_{r_1} {}^{(i)}a_{r_2} \dots {}^{(i)}a_{r_\nu}, \quad (1)$$

(r=1, 2, ..., n)

hol, az előbbi identitás szerint, a summatio kiterjesztendő az összes oly r_1, r_2, \dots, r_ν rendszerekre (és csakis azokra), melyek

¹ V. ö. a következő jegyzet alatti harmadik dolgozatot.

az $1, 2, \dots, n$ számokból ismétlés nélkül alkothatók és a melyek egymástól nemcsak elemeik sorrendjében különböznek.

Bebizonyítottam,¹ hogy $\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_\nu$ ($\nu=1, 2, \dots, n$) léteznek és pedig

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2 = \dots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_n. \quad (2)$$

Mivel a ${}^{(0)}a_\nu$ számok, az algorithmus «kezdő elemei» a matrixot nem határozzák meg egyértékűleg,² azért a (2) alatti közös határérték a ${}^{(0)}a_\nu$ -k többértékű függvénye. E határfüggvény néhány tulajdonsága az említett helyeken található.

A következőkben e határfüggvényekkel abban az esetben foglalkozunk, mikor a kezdő elemek egy komplex változó hatványsorai (raczionális egész függvényei). És az alábbi két tétel közül az első arra nézve szolgál pontos fölvilágosítással, hogy miként történik a közeledés a határfüggvényhez, mely ebben az esetben szintén hatványsor. A második tétel pedig az első, formális tételnek tartalmát ad az által, hogy e hatványsor konvergenciáját állapítja meg, bár egyelőre csak $n=2$ mellett, de oly eljárással, mely az általános esetben is irányítóul szolgálhat.

2. Egyszerűség kedvéért írjuk, hogy

$${}^{(0)}a_\nu = a_\nu.$$

Legyen $z=0$ bizonyos környezetében

$$a_\nu = a_\nu(z) = a_0 + a_{\nu 1}z + a_{\nu 2}z^2 + \dots + a_{\nu k}z^k + \dots$$

($\nu=1, 2, \dots, n$)

Föltételezzük tehát, hogy

$$a_1(0) = a_2(0) = \dots = a_n(0),$$

a mi nem lényeges megszorítás.

Az (1) alatti algorithmusból az ${}^{(1)}a_\nu(z)$ -k, tehát az ${}^{(i)}a_\nu(z)$ -k számára is közönséges hatványsorok adódnak. Továbbá, mivel

¹ Pozitív számokra: Math. és Természettud. Ért. XXV. (1907), p. 319—325. Komplex számokra: U. o. XXVI. (1908), p. 230—240 (az előbbtől függetlenül). V. ö. még: Crelle Journal, 135. (1908), p. 62—74.

² Egyetlen, triviális kivétel, ha a ${}^{(0)}a_\nu$ -k közül $(n-1)$ zérus.

az előbb fölirt matrix minden eleme gyanánt választható ugyanaz a szám, például ω_0 , azért $z = 0$ téve, könnyen észrevehető, hogy az $(i)a_\nu(z)$ számára nyerhető hatványsorok között mindig van egy és csakis egy olyan, a melyiknél az állandó tag ω_0 , azaz

$$(i)a_\nu(0) = \omega_0.$$

Válaszszuk $(i)a_\nu(z)$ -nek ezt a hatványsorát minden i és ν mellett. Ezáltal algorithmusunk egyértékű lett.

A hatványsorokban megfelelő koeficiensok alatt értjük azokat, melyek z ugyanazon hatványa mellett állanak. Ha $(i)a_\nu(z)$ -ben z^k koeficiense, vagyis a $(k+1)$ -ik koeficiens $a_{\nu k}^{(i)}$, akkor az említett első tétel a következő:

Ha

$$a_\nu(z) = \omega_0 + a_{\nu 1}z + a_{\nu 2}z^2 + \dots$$

$(\nu = 1, 2, \dots, n)$

és $\omega_0 \neq 0$, akkor az

$$(i)a_{\nu_1}(z), (i+1)a_{\nu_2}(z), (i+2)a_{\nu_3}(z), \dots \text{ in inf. } (i=0, 1, 2, \dots)$$

$(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots = 1, 2, \dots, n)$

hatványsorokban már az első $(i+1)$ megfelelő koeficiens ugyanaz és pedig akként, hogy

$$(i)a_\nu(z) = \omega_0 + \frac{1}{n} (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) z + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n} (a_{11}^{(i-1)} + a_{21}^{(i-1)} + \dots + a_{n1}^{(i-1)}) z^i + a_{\nu, i+1}^{(i)} z^{i+1} + \dots$$

Vagyis ν -től függetlenül

$$a_{\nu k}^{(i)} = \frac{1}{n} (a_{1k}^{(i-1)} + a_{2k}^{(i-1)} + \dots + a_{nk}^{(i-1)}),$$

ha csak $i \geq k$.

Tehát formálisan írható, hogy

$$\lim_{i=\infty} (i)a_1(z) = \lim_{i=\infty} (i)a_2(z) = \dots = \lim_{i=\infty} (i)a_n(z) = \mu(z),$$

hol

$$\mu(z) = \omega_0 + \frac{1}{n} (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) z +$$

$$+ \frac{1}{n} (a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(1)} + \dots + a_{n1}^{(1)}) z^2 + \dots$$

Csakis a tétel első állítását kell bebizonyítani és ez teljes indukcióval így történhetik.

Az (1) szerint $(n)_\nu$ ${}^{(1)}a_\nu^r$ -t kapjuk, ha az a_ν -kből minden lehetőképen ν -t (ismétlés és permutálás nélkül) összeszorozunk s e szorzatokat összeadjuk. Jelen esetben a megfelelő hatvány-sorokat véve, lesz

$$(n)_\nu {}^{(1)}a_\nu^r = (n)_\nu \omega_0^r + (n-1)_{\nu-1} \omega_0^{r-1} (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{n1}) z + \dots,$$

azaz

$${}^{(1)}a_\nu^r = \omega_0^r + \frac{\nu}{n} \omega_0^{r-1} (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{n1}) z + \dots$$

Ha írjuk, megállapodás szerint, hogy

$${}^{(1)}a_\nu = \omega_0 + \alpha_{11}^{(1)} z + \dots,$$

akkor lévén

$${}^{(1)}a_\nu^r = \omega_0^r + \nu \omega_0^{r-1} \alpha_{11}^{(1)} z + \dots,$$

mivel $\omega_0 \neq 0$, azért valóban ν -től függetlenül

$$\alpha_{11}^{(1)} = \frac{1}{n} (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{n1}).$$

Tehát az ${}^{(1)}a_\nu$ -kben már a két első megfelelő koeficiens ugyanaz. Tegyük föl, hogy az ${}^{(i)}a_\nu$ -kben már az $(i+1)$ első megfelelő koeficiens egyenlő:

$${}^{(i)}a_\nu = A + \alpha_{\nu, i+1}^{(i)} z^{i+1} + \dots,$$

$(\nu=1, 2, \dots, n)$

hol

$$A = \omega_0 + \frac{1}{n} (\alpha_{11} + \dots + \alpha_{n1}) z + \dots + \frac{1}{n} (\alpha_{1i}^{(i-1)} + \dots + \alpha_{ni}^{(i-1)}) z^i.$$

Ekkor épen úgy, mint az előbb, csak ω_0 helyett A s $i=0$ helyett $i=i$ áll

$$\begin{aligned} & (n)_\nu {}^{(i+1)}a_\nu^r = \\ & = (n)_\nu A^r + (n-1)_{\nu-1} A^{r-1} (\alpha_{1, i+1}^{(i)} + \alpha_{2, i+1}^{(i)} + \dots + \alpha_{n, i+1}^{(i)}) z^{i+1} + \dots \end{aligned}$$

azaz

$${}^{(i+1)}a_\nu^r = A^r + \frac{\nu}{n} A^{r-1} (\alpha_{1, i+1}^{(i)} + \alpha_{2, i+1}^{(i)} + \dots + \alpha_{n, i+1}^{(i)}) z^{i+1} + \dots$$

Ebből, mivel A nem identikusan zérus (például $z = 0$ téve $A = \omega_0 \neq 0$), kapjuk

$${}^{(i+1)}a_v = A + \frac{1}{n} (a_{1,i+1}^{(i)} + a_{2,i+1}^{(i)} + \dots + a_{n,i+1}^{(i)}) z^{i+1} + \dots$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha szokásos módon írjuk

$$\left(\frac{d^k {}^{(i)}a_v(z)}{dz^k} \right)_{z=0} = \frac{d^k {}^{(i)}a_v(0)}{dz^k},$$

akkor ezek szerint:

$$\begin{aligned} \mu(z) &= a_\lambda(0) + \\ &+ \frac{d {}^{(1)}a_\nu(0)}{dz} z + \frac{1}{2!} \frac{d^2 {}^{(2)}a_\rho(0)}{dz^2} z^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 {}^{(3)}a_\sigma(0)}{dz^3} z^3 + \dots, \quad (3) \end{aligned}$$

hol $\lambda, \nu, \rho, \sigma, \dots$ értékei egymástól teljesen függetlenül $1, 2, \dots, n$.

3. Mindezek átvihetők arra az esetre, mikor az $a_\nu(z)$ -k z -nek nem zérusodik, hanem tetszőleges, de ugyanazon pozitív vagy negatív egész hatványával kezdődő hatványsorok, föltéve, hogy e kezdő hatvány koefficiense mindenik $a_\nu(z)$ -nél ugyanaz és zérustól különböző.

Ekkor ugyanis van oly egész k (negatív vagy pozitív), hogy $a_\nu(z) \cdot z^k$ olyan hatványsorok, mint az előbb tárgyaltak s így eredményeink rájuk alkalmazhatók. Mivel pedig az algoritmus homogén, azért az 1.-ben levő matrix minden eleme most z^k -val lesz szorozva. Tehát z^k -val való osztás után, vagyis magukra a mostani ${}^{(i)}a_\nu(z)$ -kre is állanak, mutatis mutandis, az előbbieik.

Arra az esetre is átvihető tételünk, mikor az $a_{\nu k}$ -k maguk is egy vagy több komplex változó hatványsorai. Ezzel az általános esettel más alkalommal foglalkozunk.

Ezek után jelentsenek az $a_\nu(z)$ -k újra közösleges hatványsorokat.

4. A $\mu(z)$ határfüggvény konvergenciájára $n=2$ esetben a következő tétel áll:

Ha az $a_\nu(z)$ -k ($\nu=1, 2$) racziomális egész függvények vagy

$|z| < \rho$ mellett konvergens hatványsorok ugyanazon, zérustól különböző állandó taggal, ha továbbá az

$$\begin{aligned} a_1(z) &= 0; & a_2(z) &= 0; \\ a_1(z) + a_2(z) &= 0; & a_1(z) - a_2(z) &= 0; \end{aligned}$$

egyenletek zérustól különböző gyökei abszolút értékre nézve σ -nál nem kisebbek, akkor az $a_1(z)$ és $a_2(z)$ -hez tartozó $\mu(z)$ konvergens

$$|z| < \min.(\rho, \sigma)^1$$

értékek mellett.

A bebizonyítást a következő segédtételezre alapítjuk:

«Ha a_1, a_2 olyan komplex számok, hogy

$$\begin{aligned} a_1 &\neq 0; & a_2 &\neq 0; \\ a_1 + a_2 &\neq 0; & a_1 - a_2 &\neq 0; \end{aligned}$$

akkor ugyanezek az egyenlőtlenségek az $(i)a_1, (i)a_2$ -re is állanak, bármekkora az i . Azaz akkor

$$\begin{aligned} (i)a_1 &\neq 0; & (i)a_2 &\neq 0; \\ (i)a_1 + (i)a_2 &\neq 0; & (i)a_1 - (i)a_2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Valóban, mivel (1) szerint

$$\begin{aligned} 2^{(1)}a_1 &= a_1 + a_2; & (1)a_2^2 &= a_1a_2; \\ (1)a_1 + (1)a_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2; & (1)a_1 - (1)a_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2; \end{aligned}$$

azért az a_1, a_2 -re tett megszorítások következtében

$$\begin{aligned} (1)a_1 &\neq 0; & (1)a_2 &\neq 0; \\ (1)a_1 + (1)a_2 &\neq 0; & (1)a_1 - (1)a_2 &\neq 0; \end{aligned}$$

és így tovább, mikor $i=2, 3, \dots$

Legyenek már most $a_1(z), a_2(z)$ az $|z| < \rho$ mellett konvergensek, hol $\rho=\infty$ is lehet. Akkor mindenesetre

$$\frac{1}{2}(a_1(z) + a_2(z)) = (1)a_1(z)$$

¹ min. (ρ, σ) jelenti a ρ, σ számok közül a kisebbiket.

konvergens $|z| < \min.(\rho, \sigma)$ mellett, hol σ az előrebecsített tétel által jellemzett szám. Ugyanazon z értékeknél

$$\sqrt{a_1(z) \cdot a_2(z)} = {}^{(1)}a_2(z)$$

is konvergens, mivel ama z értékeknél a gyökjel alatti függvény véges és zérustól különböző.

Ha $0 < |z| < \min.(\rho, \sigma)$, akkor $a_1(z)$, $a_2(z)$ oly számok, melyek a segédtételnek eleget tesznek, tehát

$$\begin{aligned} & {}^{(i)}a_1(z) \neq 0; \quad {}^{(i)}a_2(z) \neq 0; \\ & {}^{(i)}a_1(z) + {}^{(i)}a_2(z) \neq 0; \quad {}^{(i)}a_1(z) - {}^{(i)}a_2(z) \neq 0. \\ & \qquad \qquad \qquad (i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

A miből ugyanaz következik ${}^{(i)}a_1(z)$, ${}^{(i)}a_2(z)$ konvergenciájára nézve, mint a mit találtunk az ${}^{(1)}a_1(z)$, ${}^{(1)}a_2(z)$ -jére. Az i -t végtelenbe növelve, tételünkhöz jutunk.

5. Példaként említjük, hogy GAUSS¹ fölállította $\frac{1}{\mu(z)}$ hatványsorát, ha

$$a_1(z) = 1 + z; \quad a_2(z) = 1 - z.$$

A GAUSS eljárásához szorosan illeszkedő, eléggé bonyolult konvergencia vizsgálattal v. MANGOLDT² foglalkozott.

Tételünk szerint egy csapásra találjuk, hogy mivel ebben az esetben

$$\rho = \infty, \quad \sigma = 1,$$

azért $\mu(z)$ konvergens, ha $|z| < 1$ s e tartományban $\mu(z)$ -nek nem lévén zéruspontja: ugyanott $\frac{1}{\mu(z)}$ is konvergens.

¹ Werke, III. p. 366. s köv.

² Zeitschr. f. Math. u. Phys., 20. (1875), p. 362—369.

AZ OXÁLSAV EGY ÚJABB SYNTHESISÉ.

SZARVASY IMRE és RÓKA KÁLMÁN-tól.

A csendes elektromos kisülések segítségével megvalósítható chemiai reakciók különösen érdekesek sajátos lefolyásuk, a nyert termékek sokfélesége miatt és főképen azért, mert módot nyújtanak arra, hogy laboratoriumi segédeszközeinkkel utánózhassuk ama vegyfolyamokat, melyek a természet háztartásában mennek végbe. Eddigi ismereteink alapján igen valószínűnek látszik, hogy a légköri elektromosságnak és az elektromos kisülések chemiai hatásainak beható tanulmányozása hivatva van világot vetni a növényi anyagokat létesítő folyamatokra.

Az alapvető munkálatokat e téren is — mint a chemia sok más fejezetében — BERTHELOT végezte. Nagyszámú terméket állított elő ozonizátorában és rámutatott a hasonlatosságra, mely e reakciók és a természet munkája között van, miután megállapította azt, hogy e laboratoriumi készülékek és a levegőrétegek közötti feszültségkülömbösek kiegyenlítődése részben azonos termékeket létesítenek.

BERTHELOT-n kívül főleg MAQUENNE, DE HEMPTINNE, újabban LÖB és LOSANITSCH foglalkozott az ozonizátorban végbemenő reakciókkal. E kutatók azonban fősúlyt arra helyeztek, hogy minél többféle új vegyfolyamatot dolgozzanak ki, de nem adnak számot e reakciók mechanizmusáról, sem pedig a hatást létesítő energia minőségéről és mennyiségéről.

Érdeemes feladatnak látszott eme függőben hagyott kérdések tisztázása czéljából kísérleteket végezni, mert a reakciók lefolyásának czeltudatos irányítása csakis akkor lesz lehetséges a mikor ezen alapvető tényezők hatását megismertük.

Czélunk elérésére elsősorban néhány egyszerűbb reactio mikénti lefolyását tanulmányoztuk s ezen munka folyamán a *glyoxal* és az *oxálsav* synthetikai előállításához jutottunk.

A kísérletekhez használt elektrisatorok úgy voltak berendezve, hogy a reactiotér két concentrikus üvegeső között volt; külső és belső fegyverzetül víz szolgált. A külső folyadék a vízvezetékekkel összekötve állandóan hűtötte a cső falát, a mire különösen a széles gázterű készülékeken mutatkozó erős melegeedés elkerülése végett van szükség. A folyós reactiótermékek befogadására a készülék alsó részéhez köszörülettel hozzáilleszthető gyűjtő van, melyet erősen lehűtöttünk, mikor a vizgőznek a reactiotérből való gyorsabb eltávolítása volt kívánatos.

Az elektrisator fegyverzetei egy nagyobb induktor második tekercsével voltak összekötve; az első tekercset — az itt leirandó összes kísérletekben — a városi hálózatból vett váltakozó árammal tápláltuk, főleg azért, hogy egyformán tarthassuk a hatást előidéző tényezők egyikét, és lehetőleg egyenlő erősségű és lefolyású kisüléseket lehessen mindvégig alkalmazni. A külső fegyverzet a hűtővíz révén a földdel volt vezető összeköttetésben.

A mely kísérletekben folytonos gázáramot hajtottunk a készüléken keresztül, lényeges volt, hogy ennek összetétele és sebessége állandó maradjon. Ezt úgy értük el, hogy a megfelelő gázelegyet aczéltartányba szoritottuk (5–20 Atm. nyomáson); ebből a gáz redukáló szelepen és — túlnyomás ellen biztosító kénesőzár közbeiktatásával — mosóedényeken keresztül jutott az elektrisatorba.

Száraz széndioxydot gyors áramban hajtva az elektrisatoron keresztül, az eltávozó gázban szénóxydot, oxygent és kevés ozont találunk; nedves, vagy vizgőzzel telített széndioxyd formaldehydet és hangyasavat ad. Lassú gázáram, vagy a készülékben maradó gázelegy esetében, egy idő múlva, a gyűjtőben halvány sárgás színű folyadék gyűlt össze, mely formaldehyd és hangyasav mellett más aldehyd- és savtermészetű vegyületeket is tartalmaz. Hogy a széndioxyd redukálásáról tisztább képet nyerhessünk: teljesen száraz 1 térfogat széndioxydot és 1 térfogat hydrogen tartalmazó eleggyel végeztünk kísérleteket.

E gázelegy 28 óra hosszat ment igen lassú áramban az elektrisatoron keresztül; már a második óra végén folyadék mutatkozott a falakon s az eltávozó gázban 3.2% CO volt. A gyűjtőben néhány csepp barnás színű, sűrű folyadék gyűlt össze, mely vízben tisztára feloldódott. A vizes oldatot alacsony nyomáson, hydrogenáramban destilláltuk; a destillatum formaldehydet és hangyasavat tartalmazott. A maradék barnás-sárga, karamel szagú, erősen savanyú kémhatású folyadék, mely methylibolyát is kékre fest. Eczetsavas közegben, calciumsóval, igen kevés csapadékot adott, mely összegyűjtve és mikrochemiai reakciók segítségével megvizsgálva, *oxálsav* jelenlétére mutatott.

A destillálás után visszamaradt oldat ammoniás ezüstnitrát-oldatból ezüstöt választ ki; eczetsavas phenylhydrazinnal kristályos csapadékot ad, mely alkoholból többször átkristályosítva halvány sárgás táblákban válik ki és $175^{\circ} C$ -on olvad; az aethynphenylhydrazin (glyoxalphenylosason) korr. olvadási pontja $178^{\circ} C$. Az eredeti oldat kaliumcyaniddal melegítve sötétvörösre festődik és állás után fekete porszerű csapadékot választ ki; benzidinnel sárgás csapadékot ad, mely tömény kénsavban indigókék színnel oldódik. Mind e reakciók a *glyoxal*-ra jellemzők.

Egy következő kísérletsorozatban a gázelegyet nem hajtottuk állandó áramban az elektrisatoron keresztül, hanem kénesőgazometerből csak annyi gázt bocsájtottunk a készülékbe, a mennyit a reactio következtében beálló contractio megkívánt.

Negyvenkét óra alatt elfogyott 2270 cm^3 gáz. A készülékben visszamaradt gázban csak igen kevés hydrogen volt kimutatható 77% CO_2 és 13% CO mellett.

A kísérlet kezdetén a cső fala harmatos lett; később folyadék-cseppek jelentek meg, melyek utóbb összefolytak s a gyűjtőben sárgás színű folyadék gyűlt össze. A huszonhatodik órában az elektrisator falán már szabad szemmel is látható kristályok mutatkoztak.

Mikor contractio már nem volt észlelhető, szétszedtük a készüléket. A gyűjtőben 1.4805 g. súlyú folyadék volt; a cső faláról 0.2378 g. súlyú kristályos anyagot lehetett összegyűjteni. A sárgásbarna színű, sűrű folyadék savanyú kémhatású és benne *formaldehydet*, *hangyasavat*, *glyoxall* és igen kevés

oxálsavat lehetett kimutatni. A csőből vett kristályok, mikroskop alatt megvizsgálva, az oxálsav reakcióit adják.

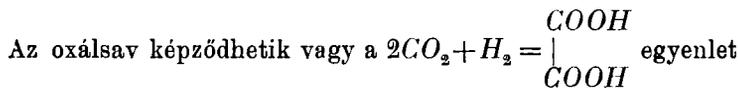
A oxálsav mennyiségének meghatározását két hasonló módon végzett kísérletből kapott termékek egyesítésével végeztük; közelítőleg négy liter gázelegyből 0.124 g. oxálsav képződött; a mi a csőben lévő száraz anyagnak körülbelül 25%-a.

Kísérleteinkből azt következtettük, hogy az oxálsav a vegy-folyamat egy későbbi időpontjában keletkezik, a mikor a gázelegy már aránylag kevesebb hidrogént tartalmaz.

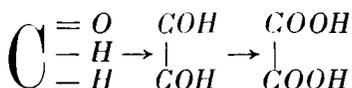
E feltevés alapján egy kísérletsorozatot 66% szénsavból és 34% hydrogenből álló gázeleggyel végeztünk. Ily feltételek mellett a reactio sokkal hamarabb megszűnik, a mennyiben átlagosan már 500 cm³ gáz elfogyasztása után nincs további contractio. Az elektrisorban aránylag kevesebb folyadék és több szilárd termék keletkezik. A cső falán már az első órákban kristályok jelennek meg, melyek a kísérlet folyamán a külső cső falát egészen elborítják; részben egymásba szövődött tük, részben vaskosabb oszlopok alakját mutatják és helyenként körülbelül egy cm. hosszúra megnőnek.

A kristályok nagyobb részét az üveg faláról lekaparva, összegyűjtöttük; a maradékot feloldottuk vízben s az oldatból exsiccatorban kikristályosítottuk. Összesen 0.1421 g. szilárd termék keletkezett a csőben; az elemzés szerint ennek 50%-a oxálsav. Ugyanazon egységnyi gázmennyiségre számítva az adatokat, körülbelül ötszörannyi oxálsav keletkezett, mint az előző kísérletekben és a száraz anyagban 25%-ról 50%-ra emelkedett.

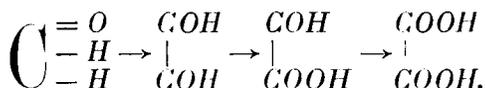
A reactio mechanizmusát megállapítandó, két irányban végeztünk kísérleteket.



értelmében, mint a széndioxydnak első reductioterméke; vagy pedig az első sorban keletkező formaldehyd condensatiója és fokozatos oxidálása létesíti a következő vegyfolyamatok egyike szerint:



vagy:



Formaldehydet és glyoxalt mindég ki lehet mutatni; a glyoxalsavat még nem sikerült elkülönítenünk, de valószínűnek tartjuk, hogy szintén keletkezik.

Ha az oxálsav elsődleges reductiotermék volna és mellette egyidejűleg formaldehyd és víz is keletkeznék, akkor e termékeknek a reactiotérből való gyors eltávolítása által az oxálsav is a gyűjtőbe jutna. Az erre kedvező kísérleti feltételeket úgy valószínűsítettük meg, hogy hosszú, szűk gáztérrel ellátott elektrisatort használtunk; huzamos ideig gyors áramban hajtottuk a gázelegyet a készüléken keresztül, hogy állandóan az eredeti összetételű (50% CO_2 és 50% H_2) gáz legyen a reactiotérben és a keletkező termékeket lehetőleg gyorsan eltávolíthassuk.

Harmincz óra után a szedőben 2·5 g. sárgás színű folyadék gyűlt össze, mely 62·8% vizet, 26·90% karamel-szerű száraz maradékot, sok formaldehydet, hangyasavat és glyoxalt tartalmazott, oxálsavra azonban csak bizonytalan reactiót adott.

Ha az oxálsav az eleinte képződő termékekből a kisülések további behatására fokozatos oxydatio révén képződik, akkor az oxálsav relativ mennyiségének fokozásához szükséges feltétel, hogy az elsődleges termékek huzamosabb ideig a reactiotérben maradjanak s a gázelegy a reactio későbbi időpontjában viszonylag kevesebb hydrogent tartalmazzon. Ezen feltételek megvalósítására három teljesen egyforma alakú és nagyságú elektrisatort úgy kötöttünk össze, hogy az elsőnek gázelvezető csöve a másodiknak bevezető csövével volt összekötve; ugyanúgy a második a harmadikkal. E készüléksorozaton 50% széndioxydot és 50% hydrogent tartalmazó gázelegyet hajtottunk keresztül. Ily módon a reactio tulajdonképen három phasisra volt osztva.

Az ötödik óra elteltével már mutatkozott különbség az egyes készülékekben: az első edény fala harmatos volt, a má-

sodikban folyadék gyűlt össze, a harmadik pedig folyadék mellett már kristályokat is tartalmazott.

Negyven órai behatás után az egyes elektrisorokban keletkezett oxálsavat külön-külön meghatároztuk. Az elsőben: 0·0037 g., a másodikban: 0·0111 g., a harmadikban: 0·0184 g. oxálsavat találtunk.

Beigazoltnak látjuk tehát azt, hogy az oxálsav a csendes elektromos kisülések hatására: az első sorban keletkező termékek fokozatos oxidatiója révén képződik.

A talált eredményeket növény-physiologiai szempontból is figyelemre méltónak tartjuk; első sorban azért, mert a növényi assimiláló folyamatban résztvevő gázokból állítottunk elő olyan vegyületet, mely a növényekben elég gyakori; másodsorban pedig azért, mert a kísérleteinkből megállapított reactio-mechanismus nyomós érv BERTHELOT feltevésének helyessége mellett.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910. január 17.-én tartott üléséből.)

ENZYMAHATÁS ÉS ELEKTROLYTES DISSOCIATIO.¹

ROHONYI HUGO-tól.

1.

Mióta kiderült, hogy az enzymbák hatása nincsen az őket tartalmazó sejtek életműködéséhez kötve (BUCHNER) s hogy az enzyimahatások több jellemző sajátosságával szervesetlen katalysatorok s különösen a kolloidális fémoldatok egészen hasonlóan rendelkeznek (BREDIG), azóta az enzyimakérdés különös rejtélyességét elvesztette. Az enzyimakérdés azóta lényegében arra szorítkozik, hogyan lehet a chemiai kinetika törvényeit a szervesetlen katalysisekhez hasonlóan az enzymbák hatására is kiterjeszteni s így ezeknek teljesen exakt, matematikai leírását adni; hogyan lehet az enzyimahatásokra megállapított komplikáltabb kinetikai összefüggések eltérését egyszerűbb kinetikai törvényektől magyarázni, azokat ezekre visszavezetni. Ez a feladat tisztára fizikai-chemiai, legnagyobb részben kolloidchemiai feladat.

Az enzyimahatás lényegét, illetőleg mechanismusát 15 évvel ezelőtt NASSE O. az elektrolytes dissociatio elméletével igyekezett «magyarázni».² Azt a kísérleti tényt, a melyre elméleti következtetéseit építi, NASSE következőleg írja le. Ha valamely enzyma aktiv oldatához azt az anyagot (az enzymp «substratumát») adta, a melyre az hatni képes (például diastasehez keményítőt), akkor az eredeti oldat vezetőképességének

¹ A budapesti kir. m. tudományegyetem általános kórtani intézetében készült dolgozat.

² O. NASSE: Über die Wirkung der Fermente. A dolgozat egészében közöltetett Maly's Jahrb. 1894. 718.

növekedése nagyobbfokú volt, mint a mikor ugyanazon enzima forralás által inaktivált oldatához adta ugyanazon anyagot. Ez a különbség az aktív és inaktivált enzima vezetőképességének változása között egészen specifikus természetű, azaz csak akkor volt jelen, ha a «substratumot» adta az enzimaoldathoz; egyéb testeket adva hozzá, a vezetőképesség változását aktív és inaktív enzimánál ugyanakkorának találta.

Kísérleteimmel mindenekelőtt két kérdést kellett tisztáznom; először, hogy van-e különbség aktív és inaktív oldatok vezetőképessége között; másodsor, hogy az enzymahatás ideje alatt, a hatás kezdetétől annak befejeztéig változik-e egy enzima-rendszer vezetőképessége?

NASSE az első kérdésre vonatkozólag azt találta, hogy a különbség aktív és inaktív enzimaoldatok vezetőképessége között nem egyértelmű, hogy némely esetben (*diastase*, *invertase*) az inaktív oldat jobban vezet, mint az aktív; más enzymáknál (*pepsin*) megfordítva. A különbség okát azokban a szennyezésekben látja, a melyek bizonyos enzymákban előállításuk tökéletlensége következtében jelen vannak, míg másokban hiányoznak.

A második kérdésre NASSE azt válaszolja, hogy az enzima-és substratum-oldatok elegyítése után azonnal mért vezetőképesség később fokozatosan csökken, a míg az enzymahatás tart. Ezt a jelenséget szerinte a substratum hasadási termékei idézik elő.

Az enzymák, a melyeknek a fentebbiekre vonatkozó viselkedését vizsgáltam, *diastase*, *pepsin*, *ptyalin* és *invertase* voltak. Az első három poralakú MERCK-féle præparatum volt. Az invertaset oldatban magam állítottam elő friss tiszta anyaélesztőből desztillált vizes kivonás útján; a szüredékből L. MICHAELIS eljárása szerint¹ kaolinnal razás útján a fehérséget teljesen eltávolítottam és így egy szintelen, tiszta oldatot nyertem. Mind a négy enzima hatásképessége külön végzett kísérletekben igen jónak bizonyult.

Fontos volt, hogy a megfelelő oldatok vezetőképességének mérése ugyanazon hőmérsékleten történjék; ezért az elektrodok mindig az egytized foknyira pontosan beállítható OSTWALD-féle

¹ Biochemische Zeitschrift 7. (1907) 722.

vizthermostatban mérettek, miután annak hőmérsékletét teljesen felvették. Azoknál a méréseknél, a melyek enzymbrendszerek vezetőképesség-változására a hatás ideje alatt vonatkoztak, szükséges volt a rothadás meggátlásáról gondoskodni, mert azt tapasztaltam, hogy a rothadás magában a vezetőképesség növekedését idézi elő. A rothadás meggátlására a toluol volt legalkalmasabb, mert hosszabb ideig is biztosan hat és a vizsgált enzimek működését legkevésbé sem akadályozza.

A vezetőképesség mérése elmerülő elektroddal (Tauchelektrode) a KOHLRAUSCH-féle methodus szerint telefonsystemával történt. Az értékeket reciprok Ohm-cm.-ekben fejezem ki.

2.

A következőkben az aktív és inaktív enzymboldatok vezetőképességének adatait foglalom össze. Az oldatok az illető enzymanak desztillált vízzel készült oldataí.

Hőmérsék C°	Enzymboldat	$k \cdot 10^4 \frac{1}{\text{Ohm}}$	
		aktív	inaktív
38°	diastase _ _ _ 1·0 %	9·50	9·78
22°	diastase _ _ _ 0·5 "	4·07	4·33
22°	diastase _ _ _ 0·5 "	3·89	4·15
16°	diastase _ _ _ 0·2 "	1·73	1·95
16°	diastase _ _ _ 0·2 "	1·69	1·90
17·5°	pepsin _ _ _ 1·0 "	9·46	9·89
38°	ptyalin _ _ _ 0·5 "	4·35	4·86
16°	invertase _ _ _ — "	19·5	20·2

Az inaktiválás úgy történt, hogy az oldatot néhány perczig 100°-ra melegítettem.

A táblázat azt mutatja, hogy az inaktív oldat vezetőképessége nagyobb, mint az aktívé. Két körülményre lehetett gondolni, mint a melyek alkalmasak lehetnek ennek a változásnak előidézésére: az egyik az, hogy az inaktiválás alatt a folyadékban némi csapadék képződött (vagy legalább opákabb lett a folyadék); a másik, hogy az oldat vízpárolgás követ-

keztében koncentráldott. Hogy nem az első körülmény szerepelt, azt következőleg mutattam ki: fehérjeoldatokat 1—2 percig 75° C-on tartottam, mely idő alatt a fehérje jórésze kicsapódott, a nélkül, hogy a folyadék számbavehető mértékben besűrűsödött volna és az oldat vezetőképességét a kicsapás előtt (k_1) és után (k_2) megmértem.

	$k_1 \frac{1}{\text{Ohm}}$	$k_2 \frac{1}{\text{Ohm}}$
Serumalbumin (1.5%)	$2.01 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$
Serumalbumin + globulin (0.5%)	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$

A változás minden esetben ilyen volt, azaz az «inaktívált» oldat kevésbé vezetett, mint az aktív. Ebből az következik, hogy az előbb leírt jelenséget nem fehérje- vagy enzima-kicsapódás okozza, mert ez a folyamat a vezetőképesség csökkenésével jár.

A vízpárolgás okozta koncentráldás hatását következően vizsgáltam: lemért súlyú enzimaoldat vezetőképességét mértem (k_I). Azután forralással inaktíváltam s a talált súlycsökkenést (1—1.5 gr-ot) ugyanazon destillált vízből, a melyben az enzymát oldottam, mérlegen pontosan pótoltam s újra mértem a vezetőképességét (k_{II}).

Enzimaoldat		$k_I \cdot 10^4 \frac{1}{\text{Ohm}}$	$k_{II} \cdot 10^4 \frac{1}{\text{Ohm}}$
Diastase	0.5 %	4.46	4.48
Diastase	0.5 «	4.27	4.26
Ptyalin	0.5 «	4.35	4.37
Pepsin	1.0 «	9.46	9.44

A víz pótlása után tehát a vezetőképesség eredeti értékére tér vissza, a minek alapján mondhatjuk, hogy az inaktíválás után az enzymoldatok elektromos vezetőképessége azért nagyobb, mert az oldatok vízpárolgás folytán besűrűsödnek.

3.

A második kérdés az volt, hogy változik-e egy enzima-rendszer vezetőképessége az enzumahatás kezdetétől annak befejeztéig?

A megfelelő koncentrációkban külön készített diastase (invertase) oldatok és keményítő (nádcukor) oldatok választótölcsér útján toluollal telítették; ezután az állandóan 38° -ú vízthermostatba kerültek s egy negyed óra múlva elegyítették. Az elegyítés után azonnal megmértem a rendszer vezetőképességét s azután időről-időre újból mértem. Ellenőrizhetetlen tényezők szerepét inaktívált enzimás rendszerrel kontrolláltam. Először a diastase-keményítő rendszert vizsgáltam (mert NASSE ezt citálja leginkább); a dextrin- és cukorképződést jód-oldattal ellenőriztem. (Az alábbiakban *-gal azt az időpontot jelöltem meg, a mikor a folyadékból vett próba Lugol-oldatra már nem színeződött.)

1. 20 cm^3 0.5% diastase + 20 cm^3 2% keményítő. *Toluol nélkül.*

2. Ugyanaz. Az oldatok toluollal telítették.

	1.		2.
k_0'	$3.16 \cdot 10^{-4}$	k_0'	$3.13 \cdot 10^{-4}$
k_{10}'	3.18 "	k_{10}'	3.15 "
k_{25}'	3.22 "	k_{25}'	3.17 "
$k_{40}'^*$	3.27 "	$k_{40}'^*$	3.19 "
k_{55}'	3.33 "	k_{55}'	3.20 "
$k_{10'15}'$	3.41 "	$k_{10'15}'$	3.20 "

A vezetőképesség folyton nő. k egy darabig nő, majd megáll.

3. 20 cm^3 1% diastase + 20 cm^3 3% keményítő.

4. 20 cm^3 0.2% diastase + 20 cm^3 3% keményítő.

	3.		4.
k_0'	$4.85 \cdot 10^{-4}$	k_0'	$2.72 \cdot 10^{-4}$
k_{15}'	4.94 "	k_{15}'	2.79 "
$k_{40}'^*$	4.98 "	k_{40}'	2.82 "
$k_{10'10}'$	4.98 "	$k_{10'10}'$	2.84 "
		$k_{10'20}'$	2.84 "

5. 20 cm^3 0.5% diastase + 20 cm^3 5% keményítő.

6. 20 cm^3 0.5% diastase + 20 cm^3 5% keményítő.

5.		6.	
k_0'	$3\cdot37 \cdot 10^{-4}$	k_0'	$3\cdot58 \cdot 10^{-4}$
k_{25}'	3\cdot52 "	k_{10}'	3\cdot66 "
k_{40}'	3\cdot55 "	k_{35}'	3\cdot72 "
$k_{1\text{ óra}}$	3\cdot55 "	k_{45}'	3\cdot73 "

Ugyanilyen eredményt kaptam, ha a keményítőt glycogennel helyettesíttem, csakhogy itt a vezetőképesség növekedése még nagyobb volt.

7. 20 cm^3 0\cdot5% diastase + 20 cm^3 3% glycogen.

k_0'	$34\cdot5 \cdot 10^{-4}$
k_{15}'	35\cdot1 "
$k_{1\text{ óra}}$	35\cdot3 "
$k_{10'30}'$	35\cdot3 "

Ha a diastase inaktívált volt, akkor a vezetőképesség változását számbajöhető mértékben nem észleltem.

8. 20 cm^3 0\cdot5% inaktívált diastase + 20 cm^3 5% keményítő.

k_0'	$3\cdot61 \cdot 10^{-4}$
k_{15}'	3\cdot62 "
$k_{1\text{ óra}}$	3\cdot62 "

Ezekből az adatokból kiderül, hogy a diastase-keményítő-rendszer vezetőképessége nem *csökken* a hasadás folyamán, a mint azt NASSE állította, hanem ellenkezőleg: nő. E változás nagysága független az enzima koncentrációjától, mely utóbbi a változásnak csak sebességére van befolyással; ellenben függ a substratum minőségétől (glycogen-e az vagy keményítő) és annak koncentrációjától. A vezetőképesség növekedése az enzymahatás első negyedórájában a legnagyobbfokú, a dextrin-stádiumban még jelen van, de az achroodextrin-stádium bekövetkeztekor már megáll, tehát megszűnik, noha az enzima hatása még tovább tart.

Ezen változások viszonyát az enzymahatáshoz teljesen tisztázni csak úgy lehetett, hogy a hasadás előrehaladását a képződött cukor mennyiségének mérésével pontosan kontrolláltam s hogy a vezetőképesség változásának időbeli lefolyását kicsiny időközökben regisztráltam. A cukorképződés előrehaladását a PAVY-SAHLI-KUMAGAWA-féle cukortitrálással kontrolláltam; a rot-

hadás pontos ellenőrzése céljából — minthogy a mérések egy óránál tovább tartottak — az erjesztő-rendszerből időközönként lepipettázott s centrifugált próbák üledékéből fedőlemez-præparatumokat készítettem. (Bakteriumfestés.)

1. 0·5% diastase + 2% keményítő.

A mérések ideje az elegyítés pillanatától számítva	$k \cdot 10^4$	Szőlőcukor	Baktérium
0'	3·42	0·00 %	—
1'	3·44	— "	—
2'	3·45	— "	—
4'	3·46	0·24 "	—
9'	3·47	— "	—
17'	3·478	0·28 "	—
55'	3·478	0·32 "	—
75'	3·48	0·36 "	—
120'	3·48	0·39 "	—

2. 0·5% diastase + 5% keményítő.

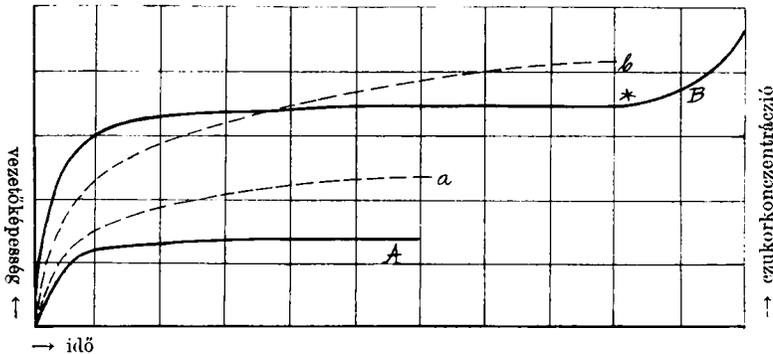
0'	3·78	0·00 "	—
2'	3·82	— "	—
4'	3·85	— "	—
8'	3·88	0·36 "	—
13'	3·89	— "	—
18'	3·90	0·41 "	—
23'	3·905	— "	—
38'	3·91	0·49 "	—
120'	3·92	0·64 "	—
180'	3·92	0·68 "	—
195'	3·95	— "	kevés
215'	4·00	— "	—
235'	4·06	— "	sok

E táblázat adatainak összefüggését a következő ábra tünteti fel grafikailag. *A* és *B* görbék az 1. és 2. rendszerek vezetőképességének, *a* és *b* görbék azok czukortartalmának időbeli változását ábrázolják.

[Az egyszerűsítés céljából mindkét vezetőképességi görbe

kezdetét egy pontba helyeztem (a koordináta-rendszer közép-pontjába), holott k értéke $0'$ -ban a -nál $3.42 \cdot 10^{-4}$, B -nél $3.78 \cdot 10^{-4}$, tehát nem egyenlő. Ez azonban a változás megítélése szempontjából teljesen közömbös.]

E görbékről világosan leolvasható, hogy a vezetőképesség növekedése csak egy darabig követi nyomon a cukorkonzentráció növekedését, azután megáll, míg az utóbbi még tovább folytatódik. Azt is láthatjuk, hogy a míg a görbék együtt haladnak, irányuk is annyira egyezik, mintha egy és ugyanazon anyagtól egyenletnek tenne eleget. Ez arra mutat, hogy a vezetőképesség növelését valami olyan folyamat eredményezi,



a mely a keményítő és a dextrinek hasadásával szoros összefüggésben van, a mint azonban a joddal színeződő dextrinek eltűnnek, maga is megszűnik, bár az enzima hatása még tovább is tart. Ebből megállapítható, hogy az enzima hatásához ennek a jelenségnek nincs köze. Mindenekelőtt arra kellett gondolni, hogy a keményítő- és glycogén-részecskékhez adszorbeált vagy chemiailag kötött s a hydrolysis alkalmával belőlük kiszabaduló sók oldatba jutása az a folyamat, a mely a vezetőképesség növekedését előidézti.

E feltevés helyességét a következő vizsgálatokkal igyekeztem bizonyítani. Extrakciós égetéssel meghatároztam az általam használt keményítő és glycogén hamutartalmát. A keményítőnél ez 0.4% -ot tett, a minnek 10% -át viszont (a keményítő 0.04% -át) extrahálható, oldható sók képezték. A keményítő oldatának

vezetőképességet csak ez utóbbiak kölcsönözhetek, a mennyiben egy részük a keményítő oldásakor oldatba jutott (3%-nyi keményítő az oldószerül használt desztillált víz vezetőképességét 38°C -on $2\cdot 0 \cdot 10^{-5}$ -ről $6\cdot 8 \cdot 10^{-5}$ -re emelte), másik része a keményítő hydrolysises hasadásakor jutott oldatba (s okozta az enzymrendszer kétszeres higitásában [7. oldal, 3. kísérlet] a $4\cdot 98 \cdot 10^{-4} - 4\cdot 85 \cdot 10^{-4} = 1\cdot 3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{Ohm}}$ differenciát). Egy 3%-os keményítő-oldatban tehát összesen 0·12% só jutott az oldatba s növelte annak vezetőképességét $3\cdot 4 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 1\cdot 3 \cdot 10^{-5} = 6\cdot 0 \cdot 10^{-5}$ rec. Ohmmal. Ha desztillált vízben ennyi oldhatósót, például *NaCl* ot oldunk, körülbelül ugyanakkora vezetőképesség-növekedést észlelhetünk.

Az általam használt glycogén hamutartalma sokkal nagyobb (8·3%) volt s ezzel függ össze, hogy oldatának vezetőképessége és annak a hasadás folyamán beállott növekedése is nagyobb volt, mint a keményítőnél.

Minden kétséget kizáró módon bebizonyítani, hogy a szóban forgó jelenséget egyedül a substratum sói idézik elő, úgy látszott lehetségesnek, ha egy bizonyos mennyiségű keményítőt elégetve, annak összes hamuját vízben föloldjuk s a víz vezetőképességének ez által okozott növekedését megállapítjuk; ennek körülbelül akkorának kell lennie, mint az oldás és hydrolysis alatt észlelt változások összegének. Ezt elvégezve, azt találtam, hogy 3 gr. keményítő összes hamuja 100 cm^3 desztillált víz vezetőképességét $2\cdot 0 \cdot 10^{-5}$ -ről csak $6\cdot 38 \cdot 10^{-5}$ -re emelte, tehát kevésbé, mint 3 gr. keményítő puszta oldása; mert egy 3%-os keményítő-oldat vezetőképessége ugyanazon hőmérséken $6\cdot 8 \cdot 10^{-5}$. Ezen különben nem jelentékeny különbség abban lelheti magyarázatát, hogy az elhamvasztáskor a sók összetétele s így oldhatósága részben megváltozott.

Ha már ezen kísérletekkel feltevésünk valószínűségét megállapíthattuk, más úton kétségtelenül kimutathattam, hogy a diastase-keményítő-rendszerben az enzymahatás alatt észlelt vezetőképesség-változás egy az enzymahatás lényegével össze nem függő, másodlagos folyamat kifejezése. E czélból hamu-mentes anyag hydrolysisét kellett vizsgálnom. Minthogy a kemé-

nyitót hosszas dialysálás után sem tudtam sóitól teljesen mentesíteni, nádcukor inverzióját invertaseval vizsgáltam.

A methodus ugyanaz volt, mint a diastase-keményítőnél; az inversio előrehaladását polározással kontrolláltam az időnkint vett próbákban.

1. 20 cm³ (hamumentesnek bizonyult) kb. 10%-os nádcukor-oldat + 2 cm³ invertase-oldat. 38° C.

Idő az elegyítéstől számítva	$k \cdot 10^4$	Forgatóképesség
0'	2·07	+ 6°23'
15'	2·09	+ 5°13'
30'	2·08	+ 4°43'

2. 60 cm³ 5%-os nádcukor-oldat + 5 cm³ invertase-oldat. 38° C.

0'	2·74	+ 3·44°
10'	2·74	—
20'	2·72	+ 2·59°
35'	2·72	+ 2·03°
3 óra	2·75	+ 0·06°

Látjuk, hogy az inversio gyors előrehaladása mellett a vezetőképesség a mérési hibákon belül nem változik.

4.

Ezek a tények még nem zárják ki teljesen Nassenek az enzimák disszociáló képességére vonatkozó hypothesisét, bár arra magukban is alkalmasak, hogy azt valószínűtlenné tegyék. Kimutathattam ugyan, hogy a disszociációs viszonyok az enzimás hasadás folyamán lényegileg nem változnak meg; de elgondolható, hogy azok talán az enzimahatás megindulásának pillanatában változtak meg s azután meg is maradtak: az elegyítés után végzett mérés (a 0' adata) már a megváltozott viszonyokat jelezheti s azért nem találtunk az enzimahatás alatt változást. Ezt a — mindenesetre valószínűtlen — feltevést kísérletileg következően igyekeztem eldönteni. Megmértem egy enzima aktiv

oldatának vezetőképességét, azután hozzáadtam a megfelelő substratumot s följegyeztem a vezetőképesség változását. Ugyanezt tettem az enzima inaktív oldatával. Ha a vezetőképesség megváltozása a két esetben állandóan különböző nagyságú, akkor bizonyos egyéb szempontok figyelembevételével esetleg az enzymahatás dissociatív szerepére következtethetünk. Ilyen méréseket végzett NASSE is, sőt egyedül ezekből vonta le következtetéseit; azt találta, hogy az aktív oldat vezetőképességének növekedése nagyobb, mint az inaktívé akkor, ha a megfelelő substratumot adta az enzimához; különben a változás aktív és inaktív enzyminél ugyanakkora.

Az alábbiak az általam ugyanígy végzett mérések adatait tartalmazzák. A mérések 38°-on történtek, tekintve, hogy az enzymhatással összefüggőnek vélt jelenségről volt szó. A keményítőt poralakban nem adhattam az enzimhez, mert nagyobb koncentrációban csak forralás után oldódott; oldatban különben is pontosabban lehetett adagolni.

1a)	0.5% aktív diastase	$k = 5.44 \cdot 10^{-4}$
	hozzáadva $\bar{a}\bar{a}$ 1% keményítő	$k = 3.50 \text{ "}$
	Változás	$- 1.94 \cdot 10^{-4}$
1b)	0.5% inaktív diastase	$k = 5.58 \text{ "}$
	+ $\bar{a}\bar{a}$ 1% keményítő	$k = 3.47 \text{ "}$
	Változás	$- 2.11 \cdot 10^{-4}$
2a)	0.5% aktív diastase	$k = 6.04 \text{ "}$
	+ $\bar{a}\bar{a}$ 3% keményítő	$k = 4.24 \text{ "}$
	Változás	$- 1.80 \cdot 10^{-4}$
2b)	0.5% inaktív diastase	$k = 6.20 \text{ "}$
	+ $\bar{a}\bar{a}$ 3% keményítő	$k = 4.22 \text{ "}$
	Változás	$- 1.98 \cdot 10^{-4}$
3a)	1% aktív diastase	$k = 9.47 \text{ "}$
	+ $\bar{a}\bar{a}$ 2% keményítő	$k = 5.75 \text{ "}$
	Változás	$- 3.72 \cdot 10^{-4}$
3b)	1% inaktív diastase	$k = 9.72 \text{ "}$
	+ $\bar{a}\bar{a}$ 2% keményítő	$k = 5.74 \text{ "}$
	Változás	$- 3.98 \cdot 10^{-4}$

Ezekben az esetekben az elektrolytok hozzáadására az enzymoldatok vezetőképessége ugyanúgy változott, mint a mikor a specifikus substratumot alkalmaztuk, t. i. a most közölt méréseknél az aktív oldat vezetőképessége jobban nőtt, mint az inaktív; a keményítő-oldat hozzáadására pedig az aktív oldat vezetőképessége kevésbé csökkent, mint az inaktív, a mi ugyanaz. Ennélfogva megállapíthatjuk, hogy ezek a jelenségek sem függenek össze az enzymahatással; legegyszerűbben úgy érthetjük meg azokat, ha felteszszük, hogy az inaktiválás folyamán az enzima sókötő-képessége, vagy adsorbeáló képessége nagyobb lett, s több só-t kötve meg, ezáltal a hozzáadott elektrolytok ionjainak koncentrációját nagyobb fokban kisebbíti, mint az aktív; a vezetőképesség-változás differenciája ennek a kifejezése. Annyit mindenesetre mondhatunk, hogy egy egyszerű kolloidális változás feltételezése teljesen elégséges a közölt adatok magyarázására s így mindennemű távolabb fekvő hypothesis fölösleges.

5.

Egy további kérdés, a melyet tisztáznom kellett s a melynek felvevését később fogom indokolni, az volt: változik-e egy enzymarendszer hydrogén-ion koncentrációja az enzymahatás alatt?

Az eljárás abból állott, hogy megmértem egy aktív enzymarendszer hydrogén-ion-koncentrációját az enzymahatás két különböző időpontjában; vagy abban, hogy összehasonlítottam egy aktív s egy ugyanolyan összetételű inaktív rendszer hydrogén-ion-koncentrációját. A H^+ koncentráció meghatározása mindig elektrometriás úton történt.

Az enzima- és substratum-oldatok összekegyítése után azonnal megtöltöttem a (FARKAS-SZILI-féle) elektródokat és 38° -ú thermostatba helyeztem. A lánczok elektromótoros ereje két óra múlva állandó volt, tehát az egyensúly az aktív oldatokban abban az időben jött létre, a mikor az enzima hatása erős volt.

A mérések eredménye az volt, hogy az aktív enzymával készült láncz elektromótoros ereje a kísérleti hibákon belül mindig ugyanakkora volt, mint az inaktív. Ha pedig az egyik

elektródban aktív, a másokban inaktívált enzimás rendszer volt, akkor a két elektród között elektromos potenciálkülönbség nem volt kimutatható. Ha az aktív enzimás elektródok újabb 2 órára thermostatba kerültek, potenciáljuk értéke akkor sem változott meg.

E mérések részben már befejeztettek, mikor S. P. L. SÖRENSEN¹ eredetileg más célból végzett colorimetriás hidrogén-ion koncentráció mérései alapján közölte, hogy invertin és pepsin erjesztő oldatok H^+ koncentrációja a hatás kezdetén ugyanakkora, mint a hatás végén. Az én méréseim a diastasera és az invertasera vonatkoztak és az eredmény ilyen egyezése mellett azoknak egyéb enzímákra való kiterjesztése feleslegesnek látszott.

6.

Mindezek szerint azt, hogy az enzimhatással specifikus elektrolytes dissociatio-jelenségek fűggnék össze, kimutatni az ilyen jelenségek vizsgálatának mai methodikájával nem sikerűlt. Ennek megállapítása annyival is inkább volt indokolt, mert újabban H. EULER egészen függetlenül NASSE vizsgálataitól a katalysis lényegét ugyancsak ionhatással igyekezett «magyarázni», még pedig sokkal határozottabb formában, mint NASSE. EULER ugyanis következőkép jellemzi a katalysises folyamatokat: «Allen (diesen) als Katalysen bezeichneten Erscheinungen liegt ein gemeinsamer Vorgang zu Grunde: die Vermehrung einer oder mehrerer derjenigen Molekülarten, durch welche die nicht beschleunigte Reaktion vor sich geht, d. h. bei Anwendung der elektrochemischen Principien auf das Gesamtgebiet der Chemie, die Vermehrung der in die Reaktion eingehenden Ionen».² Ez a felfogás, a melyet azóta többen megtámadtak,³ támaszt nyert a tőle függetlenül C. KULLGREN által végzett vizsgálatokban. KULLGREN meghatározta a nádcukor elektrolytes dissociatio-állandóját

¹ SÖRENSEN: Enzymstudien II. Biochem. Zeitschr. 21. (1909 okt.) 263.

² H. EULER: Zur Theorie katalytischer Reaktionen. Zeitschr. für physik. Chemie 36. (1901) 644.

³ LIPPMANN (Ber. d. d. chem. Ges. 33. 3560.), H. E. ARMSTRONG (Proceed. roy. soc. of London 73. 537).

különböző hőmérsékleteken s azt találta, hogy a nádcukor sav-inverziójának különböző hőmérsékleteken észlelt különböző sebessége a nádcukor dissociációs állandójának temperatura-coefficienséből levezethető. Ez volt szerinte az első eset, a melyben kísérletileg ki volt mutatható, hogy egy katalyzált organikus reakció sebessége a hasadó anyag dissociáció-állandójának függvénye.¹

Ezért érdemeltek különös figyelmet Nassenak azon adatai, a melyek szerint az enzymahatás pillanatában az oldat vezetőképessége nő. Nasse ugyan ezt a méréseimben helytelennek bizonyult adatot elméletileg is helytelenül magyarázta, mert belőle a víz dissociációjának fokozódására következtetett: «... kann die somit nachgewiesene bedeutende Zunahme der Leitfähigkeiten der substrathaltigen Lösung von rohem Ferment als auf vermehrter Dissociation des Wassers beruhend angesehen werden, so darf auch der Beweis für die Bildung von Ionen durch Fermente als erbracht gelten».² Hogy ez nem áll, azt hidrogén-ion koncentráció méréseim kísérletileg is megmutatták. Azonban az ő adataiból arra is lehetett gondolni, hogy az enzymahatás alatt a substratum (keményítő, nádcukor) dissociáció-állandója változik meg, a minek elméleti jelentősége a katalysis szempontjából a fentebbiek alapján könnyen érthető. Kísérleteim szerint az enzymák hatása ilyenemű dissociációs változásokkal sem járt együtt.

Mindezek nem befolyásolják azt a kérdést, hogy az enzymarendszer harmadik tagjának viselkedése, az *enzyma* hatásossága összefüggésben van-e az enzyma-molekulának elektrolytes dissociációjával? Néhány kísérletem alapján azon feltevéshez jutottam, hogy az enzymák, mint fehérjetermészetű testek, sav vagy bázis módjára, vagy amphoter módon dissociálnak vizes oldatukban s hogy az enzymahatás szempontjából ennek a dissociációnak nagy jelentősége van, mert a hatást, úgy látszik, csak az elektromos töltéssel ellátott enzyma-ionok fejtik ki. Érdekes,

¹ C. KULLGREN: Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit der Inversion mit der Temperatur. Zeitschr. für physik. Chemie 43. 70.

² Maly's Jahrbuch 1894. 722.

hogy kizárólag elméleti megfontolások alapján ugyanerre a feltevésre jutott JAQUES LOEB is, a mint azt nemrég egy kisebb közleményben megírta.¹

Összefoglalás.

1. Aktiv és inaktív enzymboldatok vezetőképessége között a különbséget az okozza, hogy az inaktíválást czélzó forralás közben víz párolog el, miáltal az oldat besűrűsödik. Ezért az a különbség az elpárolgott víz pótlása után megszűnik.

2. Egy enzymbarendszer vezetőképessége a hatás kezdetétől annak befejeztéig vagy nem változik (invertase-nádcukor), vagy egy ideig fokozódik, a minék oka a substratum részecskéiből hasadásuk alatt kiszabaduló sók oldatba jutása (diastase-keményítő, diastase-glycogén).

3. Azon jelenség, a mely szerint az enzymbák aktiv oldatának vezetőképessége substratum-oldat hozzáadására másként változik, mint az inaktív, nem specifikus a substratumra, hanem elektrolýt-oldatok hozzáadása után hasonlóan észlelhető.

4. Aktiv és inaktív enzymbarendszerek hydrogén-ion koncentrációja között különbség nincs. Ép így változatlan marad a hydrogén-ion koncentráció az enzymba hatásának előhaladása közben is.

*

Kísérleteimet TANGL FERENCZ egyetemi tanár vezetése alatt és utasításai szerint végeztem.

¹ JAQUES LOEB: Elektrolytische Dissociation und physiologische Wirksamkeit von Pepsin und Trypsin. Biochem. Zeitschr. XIX. 6. (1909 aug.) 534.

ADATOK A TENGERI CSONTOS HALAK BÉL- CSATORNÁJÁNAK SZÖVETTANÁHOZ.¹

ABONYI SÁNDOR-tól.

(VII.—XI. tábla.)

A halak boncztanával foglalkozó munkák részletesen tárgyalják a csontos halak bélcsatornájának makroszkópos és mikroszkópos anatómiáját is. Egész sereg értekezés és tanulmány eredménye van egy-egy szerves egészsze öntve, melyből ezen szervről való mai tudásunk világlik ki. A róla való ismereteink általában kielégítőek, csak egyes részleteiben kívánatos még a mélyebbre pillantás. OPPEL (31)² nagy összefoglaló munkájában is megtaláljuk az erre való törekvést, a mennyiben ő a buvárlati eredmények szorgalmas összehalmozásán kívül hézagpótló vizsgálati eredményeit közbeiktatja s a hol csak lehet szervesen köti a különféle dolgozatok mozaik-eredményeit. Több helyen azonban kiemeli, hogy kívánatos volna egyik-másik buvárlatot a mai szövettani vizsgálati módszerekkel megismételni és tovább fejteni. Ezen buzdítás volt a munkám rugója jelen vizsgálatom keresztülvitelében.

A halak emésztő készülékéről szóló irodalom áttanulmányozása után meggyőződést szereztem a felől, hogy a halak bélcsatornájával foglalkozó rengeteg számú dolgozat közül az én célom elérésében csak azokra a vizsgálati eredményekre alapíthatok, melyek szigoruan összehasonlítási alapon tárgyalják

¹ Közlemény a budapesti Királyi Magyar Tudomány-Egyetem állattani intézetéből. Igazgató: Dr. ENTZ Géza m. k. udvari tanácsos, ny. r. tanár.

² A zárójel közötti szám az irodalomjegyzékben felsorolt mű sor-száma.

anyagukat. Nevezetesen a dolgozatok nagy része vagy monographikusan feldolgozva tartalmazza anyagát, mint pl. ARCANGELI (1), EGOUNOFF (14), HITAN (21), PIPER (34) és még mások dolgozatai, vagy pedig igen tág összehasonlító alapon, a mikor gyakran egészen távol eső formáknál a kirívó és össze nem hozható különbségek dominálnak. Az így kiadódott, bár igen értékes eredmények úgy az első, mint a második esetben — mérték hiányában — a szervezetek összehasonlító irányú tanulmányozásakor nehezen értékesíthetők. A vizsgálatok azon részét, melyet az anyagnak a kellő szempontból való összeválogatása jellemez és a melyben érvényesül is az összehasonlító szövettani irány, mint ez BIZZOZERO (3, 4, 5), GEGENBAUR (17), OPPEL (29, 30), PILLIET (32) és még mások értekezéséből is kiviláglik, tartottam szem előtt első sorban s mint kiinduló bázist vettem fel eredményeiket.

Részletes irodalmi ismertetést adni ilyen gazdag irodalmat felmutató tárgyról ilyen kis dolgozat keretén belől nem lehet s azután meg jobbat, mint az OPPEL (31) műveinek idevonatkozó összeállítása, nem is tudnék összerendezni. A szoros vonatkozással levő értekezések és munkák az irodalom jegyzékében vannak felsorolva s az egyes esetekben szervesen kapcsolódó munkák és értekezések idevonatkozó tartalmát a vizsgálati eredményeimhez csatolva kiemelem.

A halak bélcsatornájának elő-, közép- és utó-bélre való felosztása — mely RATHKE-től származik — ma általában elfogadott. A három béltáj némely csontos halnál eredeti egyszerűségében van meg; semmi különös differenciá lódás nem fordul elő rajta (pl. Labridæ). Másoknál ellenben az előbél alsó része gyomorra van kitérülve. A középbélen szintén lehetnek elkülönülések, ilyenek számos halnál a pylorus függelékek. Különben sem a közép-, sem pedig az utó-bél nincs olyan tájakra különítve, mint ez a magasabb rangú gerincesek bélcsatornáján közönséges.

A bélcsatorna fala OPPEL (31) értelmezése szerint I. *mucosa* (nyálkahártyaréteg), II. *muscularis* (izomhártyaréteg), III. *adventitia* (savóshártyaréteg) egymásra rendeződött lemezeiből áll. Ezen szövetlemezek a következők:

- | | | |
|--------------------------------|---|------|
| 1) hám | } | I. |
| 2) tunica propria mucosæ | | |
| 3) stratum compactum | | |
| 4) muscularis mucosæ (2 réteg) | | |
| 5) submucosa | } | II. |
| 6) muscularis interna | | |
| 7) muscularis externa | } | III. |
| 8) subserosa | | |
| 9) serosa | | |

A csontos halaknak bélmirigyei csak a gyomorban vannak kifejlődve. Már itt kiemelem, hogy a csontos halak gyomrának jelenléte vagy hiánya csakis ezen mirigyek jelenléte ill. hiánya szerint állapítható meg.

A vizsgálati anyagom a nápolyi tengeröbölből származik. A halak csaknem valamennyien ivarérett nagyságra kinőtt példányok voltak. Egyeseknek közülök fiatal példányait is belevontam vizsgálatomba.

A vizsgálatom kezdeti részét ugyancsak Nápolyban, a «Stazione zoologica» magyar asztalánál dolgoztam fel, majd pedig a budapesti királyi magyar tudomány-egyetem, dr. ENTZ GÉZA ny. r. tanár igazgatása alatt álló, állattani intézetében fejeztem be. Kedves kötelességet teljesítek azzal, hogy e helyen Ő Nagyméltóságának, gróf APPONYI ALBERT m. k. vallás- és közoktatásügyi miniszter úrnak kiküldetésemért hálás köszönetet mondok, úgyszintén méltóságos dr. ENTZ GÉZA m. kir. udvari tanácsos úrnak, mélyen tisztelt tanáromnak és főnökömnek kegyes támogatását hálás szívvel köszönöm meg. Hálával vagyok eltelve PAUL MAYER tanár úr, a nápolyi «Stazione zoologica» vezető tanára iránt, a kinek a mikrotechnikában tett útbaigazításáért mondok köszönetet.

Jelen dolgozatomban a *Blennius guttoruginae* LAC. (Blenniidae), *Scorpaena schropha* L. (Cottidae), *Trigla hirundo* BL. (Cottidae), *Gobius niger* L. (Gobiidae), *Coricus rostratus* BL. (Labridae), *Crenilabrus pavo* BRÜNN. (Labridae), *Labrus turdus* L. (Labridae), *Smaris alcedo* RISSO (Mænidæ), *Smaris vulgaris* C. V. (Mænidæ), *Mugil capito* CUV. (Mugilidae), *Mullus barbatus*

C. V. (Mullidæ), *Heliastes chromis* (L.) GÜNTH. (Pomacentridæ), *Anthias anthias* L. (Percidæ), *Box salpa* L. (Sparidæ), *Sargus annularis* L. (Sparidæ), *Corvina nigra* BL. (Sciænidæ), *Conger conger* L. (Murenidæ) és a *Motella tricirrata* BL. (Gadidæ) bélsatornájával foglalkozom.

Vizsgálataim túlnyomó részét rögzített és festett készítményeken végeztem. Rögzítő folyadékul leggyakrabban sublimatalkoholt használtam eczetsavval vagy salétromsavval megsavanyítva. Kitünő szolgálatot tett továbbá a Tellyesniczky-féle folyadék, még pedig olyan módon használva — MAYER professor tanácsára —, hogy destillált víz helyett tengervízben oldottam 3% kalium bichromicumot. Nagyon tiszta præparatumokat kaptam az 1% chromsav és eczetsav (100 : 5) keverékkel is, melynek hibájául kell felrónom azt, hogy nagyon nagy részét kioldja a sejt tartalomnak, a miért is csak olyan esetekben használható, ha mag- vagy cuticulaszerkezet feltüntetése áll érdekünkben. Többek között még a tengervíz-salétromsav és formol (10 : 2 : 1) keverékét tartom megemlítendőnek, melynek kiváló tulajdonsága, hogy nem zsugorít s ezenkívül különösen a nem hám-szövet-elemeket nagyon jól rögzíti.

Beágyazásra eleintén paraffint, majd pedig celloidint használtam. Több ízben használtam a celloidin-paraffin kettős beágyazást is.

Metszeteimet néha egészben átfestett, többnyire azonban festetlen tömbökből Yung- és Reichert-féle mikrotomokkal szeltem le.

Festésre, czélomnak megfelelően, hæmatein-(Mayer-féle) eosin, hæmatein-picrinsav és más hæmateinnel kapcsolt festési eljárást használtam. Alkalmaztam továbbá a vashæmatoxylin festési eljárást. Ezeken kívül még számos szövetdifferenciálásra szolgáló festést. Megemlítendőnek vélem még azt a festési eljárást, melyet igen sokszor használtam eredménnyel; nevezetesen a Mayer-féle timsós hæmateinnel túlfestett metszeteket híg salétromsavval elszíntelenítettem; kellő időben akasztva meg a sav hatását, különösen a hám cuticulája s ezenkívül kiválóan a szemcsés leukocyták élesen tüntek elő.

Előbél.

Száj-garatüreg. A halak szájürege a külbőr hámjától alig eltérő hámmal van bélelve, a külbőr hámjától a nyálkasejtek megszűnése és a hátra felé mind gyakrabban jelentkező kehelysejtek különböztetik meg. A szájüreg izlőbimbói (általában a szerzők érzékbimbói) is a külbőr hámjával együtt kerültek be, s elhelyezésükből mélyebb értelmű következtetés nem vonható le. Az izlőbimbók a szájgaratüregben hátrafelé mind sűrűbben tűnnek fel, a legtömöttebb sorok a garatra esnek.

A szájüreg hámja több rétegű. Ez a hám a gyakori használat következtében vékonyabb és kevesebb rétegű, mint a külhám. Ugyanis a felső rétegek sejtjei, melyek rendes elpusztulási módja az elnyálkásodás volna, nagyon hamar tönkremennek, a lazán álló sejteket vagy a folytonos vízáram, vagy pedig a többnyire durva felületű zsákmány lehorzsolja. Ugyanis a halak szájüregébe nem szájadzanak nyálmirigyek, melyeknek a váladéka a falatot bevonva sikamlóssá tenné. A szájüregen keresztül segítik a táplálékot a hátra felé álló apróbb-nagyobb fogak, mely alkalommal a nyeléshez szükséges sikamlós nyálka az elroncsolt kehelysejtekből származik. Különösen nagy tömegben jelennek meg a kehelysejtek a garat hátsó részében és az oesophagusban, a hol már az agyonmorzsolts, vagy még mindig ellenkező falatot közvetlen izomerő préseli be a gyomorba.

A csontos halak szájüregét határoló csontokhoz és porcokhoz, valamint az izmokhoz a hámot vékonyabb vagy vastagabb kötőszövet kapcsolja hozzá. A szájbélnek saját izomzata csak a száj hátsó részétől kezdődik, a hol fokozatosan átcsap a pharynx izomzatába.

A csontos halak szájürege családok, sőt nemek szerint is igen változatos kialakulású, azonban a felhám kialakulása nem mutat megegyezést ezen változatossággal. Valamennyi általam részletesebben vizsgált esetben a száj-garatüreg hámját és kötőszövetét, valamint az izomzatát is, bár különbségek a szövetelemek nagyságát és elrendeződését illetőleg szembeötlők, de még sem oly mértékben differálók, hogy az együtt való tárgyalás nehéz lenne. Közös szempontokból vizsgálva, mégis szükséges,

hogy az egyöntetű eredményeket azonos helyekre vonatkoztassam, éppen ezért kiemelem a szájból azon tájait, melyek vizsgálatom alkalmával mint fix pontok szerepeltek és a melyekre a következőkben hivatkozom. Ezek a külbőrnek az állkapcsokon való befordulási helye, az állkapcsokban levő fogak áttörési vonala, a szájüreg alsó és felső rekeszlemeze, a nyelvhegy, a nyelvhát, a kopolyűrések és ezek íveivel szemben fekvő garatdudorok. Kiemelem még azt, hogy ezen tájakon tett észleleteim leírásánál különösen a *Sargus annularis*, a *Box salpa*, a *Mujil capito* és a *Coricus rostratus* állanak szemem előtt.

A külbőr hámját a szájüregbe való befordulásnál az irhában levő pigment-réteg nem követi. Az alaphártyája is kb. egyharmadára ($1-3\mu$) vékonyodik. Az állkapocs élén ülő fogak szomszédságában megjelennek a rendkívül egyszerű, már régóta ismert izlőbimbók (IX. tábla, 5. ábra), melyek különben elszórtan a külbőrön is előfordulnak. A hám 8—10 sejtrétegnyi vastagságban a szájüregben hátrafelé húzódik, a mely a már említett elvékonyodott alaphártyán emelkedik. A hám ezen vastagságban a szájrakeszek külső felületén egészen az éleig felhúzódik, majd ezen lemez hátsó lapján 2—3 rétegre vékonyodva húzódik tovább. Ez az elvékonyodott hám a hártyás szájrakeszek szélességének megfelelő területen túl — tehát a lélegzés és a nyelés alkalmával hátrahajló lemezek által védett területen túl — ismét 6—10 sejtnyi vastagságra szaporodik. (VIII. tábla, 6. ábra.)

A rekeszlemezek után közvetlenül megjelennek a kehelysejtek, melyek hátrafelé mind gyakrabban jelentkeznek.

A csontos halak szájüregének a hámsejtei tömött protoplasmájúak, nagy sejtmagokat zárnak be. Az alsó rétegek sejtjei szemcsések, közöttük vacuolizáltak látszó határvonalak tűnnek fel (IX. tábla, 5. és VIII. tábla, 6. ábra sh.), melyek feljebb mind jobban összezsugorodnak, végül elenyésznek. A felső rétegek sejtjei nem is mutatnak élénk élettevékenységet, magoszlások bennük egyáltalán nem észlelhetők, protoplasmájuk több, mint az alsó sejtrétegeké, de ez abból származik, hogy az alsó sejtek protoplasmájában lévő szemcsék helyett apró vacuolumok jelennek meg, melyek a plasmát eleintén habossá, majd össze-

folyva végre nyálkasejt vagy kiegyénült kehelysejt tartalmává duzzasztják.

Az eivacuolásodással kapcsolatban a sejtmagok is fokozatosan veszítenek chromatus állományukból. A maghártján belől csak itt-ott jelenik meg egy-egy magtestecske. A sejtmag duzzadtá válik, de mikorra a nyálka- vagy kehelysejtté alakult hámsejt tartalma elfolyósodik, akkorra a sejtmag is gyorsan tönkremegy, valószínűleg vízének osmoticus módon való elvesztése által, összeolvad, mint egy légüres gummilabda. A nyálkasejt leválása vagy a kehelysejt kiürülése után még rövid ideig a hám felszínén észlelhető, majd az alatta kihaladt újabb sejtek váladékával, vagy más leváló sejtekkel egyetemben a víz vagy a táplálék elsodorja.

A szájbél sajátságos elkülönült hámképletei az érzékbimbók (IX. tábla, 5. ábra), melyek minden valószínűség szerint izlésre szolgálnak. Felépítésük LEYDIG szövettani vizsgálataiból kifolyólag ma már közismert. Az alaphártyát felnyomó irharéteg, vagy helyesebben a hám saját kötőszöveti alaprétege kúpszerűen fel emeli a hámot, ezen kúpszerű kiemelkedést néhány sejtnyi (5—6) vastagságban borítják a hámsejtek. A kiemelkedés tetőpontján a sejtek kicsiny kerek nyílást hagynak, melyen át az érzéksejtek szőrnyulványai kiemelkednek.

Az érzéksejtek közvetlen az alaphártyán ülnek, melyen áthaladnak az érzéksejteket ellátó idegrostágak. Az érzéksejtek lombikforma csoportokba vannak elrendeződve, melynek a hasában gerezdes elrendeződést mutatnak. A hosszukás sejtmagokat a duzzadt alsó rész tartalmazza, míg a kéveszerűen összeálló felső rész egészen egyszerű rostozottságott mutat, s az egész nyulvány-pamatot a hámsejtek által alkotott nyílás, mint kissé elálló gallér övezi. A plasma-nyulványokon levő 4—5 μ hosszúságú érzékstértek tömötten emelkednek fel. Valamennyi serte szabad vége kicsiny duzzadt gombban végződik. Az érzékbimbóknak a szájjüregben való elrendeződése szórványos, de annál sűrűbben jelennek meg a pharynxban és a oesophagus kezdeti részén.

Az érzékbimbók gyakorisága érdekes összefüggést mutat a fogak elhelyezésével. A hegyes áralakú fogak mindig körül

vannak véve egész koszorú érzékbimbóval, tekintet nélkül arra, hogy hol vannak az illető fogak elhelyezve. A kopolyúréseket fegyverző fogak mellett, valamint a garaton és a garatpárnákon levők mellett állanak legtömöttebben. Úgyszintén gyakoriak a nyelv csúcsán, míg a nyelv hátsó része felé csak olyan szét-szórtnak jelentkeznek, mint a szájüregben általában.

Nyilvánvaló, hogy az egész állatokat, vagy csak nagy falatokat lenyelő csontos halakra ez a berendezés igen fontos, mert ez által a minden mozgót megragadó s a szájukba gyömöszölő halak az elnyelendő tápláléknak fogaikkal történő felületes megszaggatása és meghorzsolása után juthatnak izlésre alkalmas váladékhoz, illetve már a fogaik bemélyesztése alkalmával az azokat környező ezernyi izlőbimbó végkészüléke is benyomul a hasadó részbe, miáltal az izlés egy időben történhet a zsákmány megragadásával.

A zsákmány elnyelését, illetőleg a garatba való betuszkolását a kopolyúrésekkel szemben fekvő garatdudorok is elősegítik, melyek szintén bőven vannak ellátva fogakkal (Mugil, Box), másoknál ellenben a garatcsontokról emelkednek fogak (Labridæ), melyek környéke szintén dúsan el van látva izlőbimbókkal. Ezen fogak körül a garatdudoron levők rendszeren hátra csuklós izülettel vannak ellátva, melyek lehetővé teszik azt, hogy a garatfogak miatt visszajutni nem tudó falaton a nyomó készülék a száj felé sikolhat, majd a hátra húzáskor az ezernyi csuklós fog felegyenesedve belevályul a falatba, melyet kiméletlenül hátra húz. Bizonyára ezen művelet alatt van az izlőbimbóknak érzékelésre legnagyobb alkalmuk s valóban az izlőbimbók egész légiója van ezen tájra és ezen táj mögé koncentrálva. A pharynxnak és az oesophagus kezdeti részének minden kis redőle, minden kidudorodása valóságos izlőtelepeket alkot. Mielőtt a lenyelendő zsákmány a bázrsingba jutna, a hal mintegy meggyőződést szerez, falatját környöskörül megizlelve, afelől, hogy zsákmánya tényleg a gyomrába illő falat. Ha azonban a nyelésre szánt falat nem elégíti ki az izlőkelyheket, a hal már a félig elnyelt zsákmányt is kilöki szájüregéből. A minden prédára rárohanó hal gyomrának ezen izlőbimbók a kizárólagos őrei.

A szájbél kötőszöve nagyon jelentéktelen vastagságú, magyarázata ennek az, hogy a falának vázát a szájgaratüreg és a hyoidivek csont- és porczrészei alkotják s a kötőszövet itt csak mint hézagöltelék szerepel.

A szájbél kötőszöve kevés kötőszöveti sejtből és glutinogen rostokból van összeszöve, melyek között lymphocyták és a vér-edények szövetei fordulnak elő. A kötőszövetnek saját izomelemei többnyire nincsenek, azonban a rekeszlemezekben sima izom-sejtek mindig kimutathatók.

A szájbél azon részei, melyek harántcsikolt izomelemekkel állanak összefüggésben a környező vázzal, dúsabb kötőszöveti alappal vannak ellátva. Úgyszintén a garatdudorok, valamint a szájbél hátsó, a pharynxba átmenő, tehát a fejtől már elváló bélrész tűnik ki erősebb kötőszöveti réteggel.

A csontos halak nyelve igen primitív szerv, keskeny porcz alkotja az alapvázát, melyet kötőszövet kapcsol a hámphoz. Izomelemei egyáltalán nincsenek, a mozgatása a hyoidivek izomzata által történik, melyek kötőizeinek (copula) a tengelyébe esik (OPPEL 31). A hámpja azonos a szájüreg hámpjával, izlőbimbók is elszórtan jelentkeznek rajta, csakis a nyelvhegyen halmozódnak nagyobb csoportokba (Box, Sargus).

A *garat*. A garat hámpja fokozatosan alakul ki az előző szájbél hámpjából. Jellemző reá, hogy a kehelysejtek tömegesen lépnek fel. A hámpsejtek itt már kevés (3—4) réteget alkotnak. A garatnak a bárzsingba való átmeneténél a kehelysejtek már olyan zártan tűnnek fel, hogy egységes kehelysejtes hámpnak tekinthetjük.

Sajátságos mikroszkópi képet nyújt ez a bélrészlet. A szabad felületre felnyúló hámpredők a már említett izlőbimbók seregeit viselik, melyeket közömbös rétegzett hámp vesz körül. A redők oldalsó és alsó mélyedései, minél alább kutatunk, annál zártabb sorban elrendezett kehelysejt-tömeget tartalmaznak. A redők átmetszete első pillanatra összetett mirigynek látszik, csak a tüzetes vizsgálat győz meg bennünket a felől, hogy zárt sorba rendeződött kehelysejtekkel van dolgunk, melyek alatt 1—2, ritkábban több rétegben a közömbös bélhámpsejtek fekszenek. A sejtrétegek nem határozottak, mert a sejtek igen kevés proto-

plasmából állanak s ez egymással váltakozó elrendezésben levő sejtek sokszor nem tüntetnek fel feltünő rétegzettséget.

A hám alaphártyája az előző béltájánál erősebb, vastagabb s ezt ugyancsak erős kötőszöveti réteg, a tunica propria muscosæ fekszi meg. Elemei tömötten rendeződnek, különösen a középtáj és a felső harmad között, a hol gyakran stratum compactummá tömörülnek össze, mely alatt ismét ellazulnak a kötőszöveti rostszövedékek. A sejtek és rostok közé itt már nagy számban szövődnek be sima izomsejtek.

A garat izomzata, valamint az œsophagusé is tulnyomó részben harántcsikolt rostokból áll, melyek a stratum muscularisba vannak összerendeződve. A belső réteg szétszórtan álló, hosszant futó kötegeket alkot, a gyűrűs izomréteg külső zárt lemezben burkolja az összes bélszöveteket.

A gyűrűs izomrostok tekintélyes vastagságban borítják a garatot, a hosszant futók csak szórványosan fordulnak elő, ez a kifejelettség a pharynxon túl is megy, vagy egészben, vagy pedig részben az œsophaguson is így van kialakulva.

A pharynx harántcsikolt izomrostjai nem térnek el alapjában a többi harántcsikolt izomelemektől. A sejtmagok közvetlen a sarcolemma alatt fekszenek. A sarcoplasmában erős myofibrillák éles harántcsikolattal tűnnek fel. A rostok elágazók s egymással anastomozálnak, végződésük elkeskenyedéssel történik. Nemesak végeiken, de egész hosszukban rögzítik őket a környező kötőszövet, valamint a szomszéd izomrostok ágai.

A pharynx a csontos halaknál igen rövid, hátrafelé hirtelen szűkülő tölcsér. A halak termete szerint néhány mm-től több cm-ig váltakozik hosszúsága. A hámját borító rengeteg kehelysejt feladata nyilván a nyelés munkájának a megkönnyítésére való. A redőkbe szedett tölcsér a gyakran óriás termetű zsákmány elnyelésekor szétfeszül, a redők kisimulnak s a szoruló falat maga horzsolja le a pukkadásig duzzadt kehelysejteket, melyek nyálkatartalmukkal sikamlóssá teszik a falat külsejét és a hatalmas izomréteg nyomása alatt könnyen síklik hátrafelé.

A nyelőcső (œsophagus). A pharynx a jellemző harántredők fokozatos eltűnése által átmegy az œsophagusba. Az œsophagus elején izlőbimbók még mindig észlelhetők, melyek azonban las-

sanként elmaradnak. Az izlőbimbók elmaradásával a hám képe is megváltozik. A hámban, kezdetben csak szigetenként, hátrafelé fokozatosan, mind gyakrabban egyrétegű hám jelenik meg. A redő mélyében azonban a kehelysejtes többrétegű hám megmarad.

A legtöbb csontos halnál ezen egyrétegű hámszigetek alatt bő véredényeket észleltem, míg a rétegzett hám alatt csak hajszálerek fordulnak elő. Ezen berendezés jelentőségére a rendelkezésemre álló irodalom nem ad felvilágosítást, sem pedig a saját észleleteim nem adnak elfogadható értelmezést.

Úgy a redők mélyében, valamint a szabad éleken fekvő kehelysejtes hám, gyakran az egyrétegű hám is nyelés alatt elpusztul. Nagyon érdekes képet nyújt az ezután fellépő hámregeneráció, mely az épen maradt hámból s azonkívül a lehorzsolts sejtek közül ott maradt sejtmaggal bíró plasmarészekből indul meg. Az oesophagusnak ezen regeneratiót mutató helyeit a magoszlások gyakorisága rögtön elárulja.

A gyomros csontos halaknál az oesophagus cardialis táján a kehelysejtes hám egyszerre megszűnik. Ezentúl egészen a gyomornedvmirigyek megjelenéséig a gyomor hámjához hasonló egyrétegű hám jelenik meg. A gyomor nélküli csontos halaknál ezen egyrétegű hám után közvetlenül a középbél következik.

Az oesophagus és gyomor közötti határt csak mikroszkopi készítményeken lehet megállapítani. Az ép (VII. tábla, 2—6. ábra) vagy frissen felhasított béleső ezen átmeneti tája fokozatosan történő átmenetre enged következtetni. Ugyanis az oesophagus sajátságos hosszredőzetét felváltja a gyomor redőzete, a nélkül, hogy a makroszkopos benyomást lényegesen megváltoztatná.

A gyomor és oesophagus között kifejlett cardia nincsen. A gyomor nyitását, illetőleg előlről való zárását az oesophagus izomzata teljesíti. A két bélrész közötti határ még tágabb, ha figyelembe vesszük azt, hogy a pharynxra és oesophagusra jellemző harántcsikolt izomzat többé-kevésbé a gyomor mellső részére csaknem mindig átterjed, ha gyomor nincs, akkor a harántcsikolt izomelemek a középbélíg húzódnak. Mindazáltal

mégis jogosítva vagyunk a gyomor és oesophagus határát a hám-szövetet illetőleg megállapítani, a mely arra a körre teendő, a melyben legfelső csöves gyomornedvmirigyek fellépnek. A határ megállapítása azért fontos, mert belőle joggal vonhatunk következtetést az oesophagus és gyomor egymáshoz való tágabb vagy szorosabb viszonyára.

A hámsejtek az oesophagusban többnyire két formában tűnnek fel. Nevezetesen közömbös hámsejtek és duzzadt kehelysejtek képében. Az előző formában levő sejtek állapota csak ideiglenes, átmeneti. Szemcsés, tömött protoplasmájuk nagyon hamar elvacuolizálódik s a protoplasma felhasználódása után a nyálkával telt sejtek térfogata tízszeresnél is nagyobb lehet. A sejtmag is megváltozik. Chromatin-állománya összezsugorodik s a sejt aljában mint egy lencseszem pihen s alkalomadtán még regenerálódva a sejtet is protoplasmadússá teszi, hogy az előbb vázolt folyamatban végre is tönkremenjen.

A *Sargus annularis* oesophagusának a hámja az említett formákon kívül közvetlen a gyomormirigyek megjelenése előtt még sajátságosabb viszonyt tüntet fel. Ugyanis a hámsejtek itt nem duzzadnak kehelysejtekké (hólyagsejtekké), hanem szemcsézett protoplasma-tartalmukat elroncsolódás nélkül kiválasztják, mely hyalin állománnyá duzzadva elborítja a felületüket. A sejtek kiürült felső részöket, úgy látszik, vékony plasma-réteg borítja s ezek a regenerálódó sejtek felett mint gallérok tűnnek elő. Minek következtében a sejtek igen magas oszlopsejtekhez hasonlóak, de a záróléczek átmetszete felvilágosítja a vizsgálót arról, hogy az eredeti hámfelszín milyen magasan van. Éppen a záróléczeknek a figyelembe vétele és a szomszédos hámhoz való átmenet vizsgálása által meggyőződhetünk, hogy a hám normális magassága itt is akkora, mint az oesophagus indifferens hámrétegénél. Ezek a magas hengerhámsejtek azok, a melyek a gyomor közönséges hámjához átvezetnek s tulajdonképen azok előfutárjaiként tekinthetők.

A *Box solpa* megfelelő bélsatornarészlete a hámkialakulásban az előbb említettektől csak annyiban tér el, hogy az átmeneti öv élesebben van kiegyénülve. A gyomormirigyek előtti oesophagus-hámrészlet nem tüntet fel olyan értékű kialakulást,

mint a *Sargus*-é. Ugyanis ennél a hámnak csak az a része válik le, a mely a táplálékkal közvetlenül érintkezik, tehát erőművi hatás után. Épen ezért a *Box* salpanál a hám regenerálódása az átmeneti övben is közönséges. Ezzel összefüggően megemlítem, hogy a *Motella tricirrata* (lásd részletesen 333. l.) oesophagusában a hám regenerálódását a legpontosabban észlelhettem. Kiviláglik a metszetekből, hogy a tönkrement kehelysejtek helyét vagy az alattuk levő sejtek foglalják el, vagy ha a horzsolás az irhágig terjedt s még az alaphártyát is esetleg lesodorta, akkor előző esetben a helyben maradt néhány sejt regenerálódik s ezek gyorsan osztódva az üres foltot beborítják, vagy a második esetben az üres területet a környező sejtek alapsejtjei töltik be ivadékaikkal. (VIII. tábla, 5. ábra.) Az így képződött fiatal hám rendszeren egyrétegű, mely azonban hamar többrétegűvé válik sejtoszlások által s ha a sejtrétegek száma normális, akkor megkezdődik a sejteknek kehelysejtes desorganisatiója. Még kell még említenem azt, hogy a lehorzsolts felületek alatt nagy számban jelennek meg vándorsejtek (vs), melyek a betolakodó bakteriumokat ártalmatlanná teszik.

A bélnek ezen védelmi berendezését a *Heliastes chromis*-nál sikerült szembeötlő módon feltüntetnem. E berendezést alább még részletesen kívánom tárgyalni. Itt csak azt említem meg, hogy az oesophagus hámja, de különösen a submucosa alsó rétegei töménytelen mennyiségben tartalmazzák az említett szervezetőröket. A *Heliastes chromis* oesophagus-hámját illetőleg megemlítem, hogy a gyomorral határos részeiben a magas oszlopos hám regeneratiója szintén köbös kialakulású hámmal történik. Ugyancsak ezen halon észlelhető leginkább a csontos halak előbéli rétegelrendeződése is. Nevezetesen a nyálkahártyaréteg legbelső szöveteleme, a hám, a garattal szomszédos helyen többrétegű, majd lejjebb fokozatosan egyrétegűvé válik. Míg a felső részben a sejtek kehelysejtes degeneráció által mennek tönkre, addig az alsó rész hengerhámja felső protoplasmájának elváltozása folytán. A hám alatt alaphártya van kifejlődve, melyen kívül kötőszövet és ebbe beleszótt sima izomelemek következnek. A nyálkahártyaréteghez még a laza kötőszöveti határreteg csatlakozik, melytől kifelé az izomréteg (stratum muscu-

lare) következik. A stratum musculare csupán harántesikolt izomelemekből áll, melyek úgy a belső hosszirányban futó rétegben, mint a külső gyűrűs rétegben kötegekbe vannak szedve. 10—20 izomrost alkot egy-egy köteget, melyek igen vékony kötőszöveti hártáival vannak összefoglalva. A stratum muscularis-ban igen sok szövetközötti járat van, melyekben több-kevesebb vándorsejt állandóan felismerhető.

A serosa és subserosa tekintélyes vastagságú. A belső kötőszöveti réteg mintegy pólyaként szerepel az izomréteg körül, az endothel rétege lapos sejtjei következtében alig mérhető vastagságban alkotja a bél külső falát. A savós hártának a mesenteriumba való átmeneténél töménytelen leukocyta van.

A *Smaris vulgaris* nyelöcsövét azért kell külön megemlítenem, mert ezen észleltem a legélénkebb kehelysejtképződést (IX. tábla, 2. ábra). A hám többrétegű részén a kehelysejtek leválva egész halmazokat képeznek, melyek a bél lumenében szétpukkadva, nyálkás protoplasmájukkal összefolynak, majd teljesen elvacuolizálódva elenyésznek. Végső hírmondóik a tönkrement, összetöppörödött sejtmagok. Ezen csekély ellenállást feltűnő hám aránytalanul erősebb alaphártyán (IX. tábla, 2. ábra, *a h*) nyugszik, mint a fentebb tárgyalt állatok megfelelő sejtjei. A *Smaris vulgaris*-nál ugyanis az alaphártya vastagsága 40—50 μ , míg a legtöbb halnál alig néhány μ vastagságú.

Az alaphártya maga sajátos szerkezettel tűnik ki. A belső, azaz a hámmal érintkező része egészen egyszerű, szerkezet nélküli, a kötőszövet felé eső része ellenben laza. Egymásra következő 4—5 lemez vehető ki, melyek legalsóbbjai helyenként sejtmagokat zárnak be. Nagyon valószínű, hogy ez a vastag alaphártya nem tisztán a hámsejtek basalis részeinek az elváltozási terméke, hanem a kötőszöveté is, mely rendkívül tömött lemezrendszerekben sorakozik amarra. OPPEL stratum compactumával vélem azonosnak, bár az elhelyezése nem egyező.

A *Scorpaena scropha* oesophagusa sajátos módon kialakult hámja és dús kötőszöveti rétege miatt érdemel külön említést. A hám duzzadt sejtekből épül fel, melyek szétpukkanva nyálkát szolgáltatnak. A többrétegű hámnak az egyrétegűhöz

való átmenetét ezen halból származó készítményen sikerült legvilágosabban megállapítanom. A hám helyenkint sok, másutt pedig csak egy réteg benyomását kelti. Nevezetesen a sejtek az oesophagus felső részében úgy rendeződnek el, hogy a vacuolizált plasmájú sejtek a szemcsés plasmájú sejteket vagy fel-, vagy pedig leszoritják, illetőleg az alattuk levőket oldalt szoritják.

Mindenütt lelhetők olyan nagy hólyagforma sejtek, melyek az alaphártyától a felszínig nyúlnak, míg mellette 2—3 sejtecske egymás fölött szorong. A sejtmagok eleintén a duzzadó sejtek középső részében foglalnak helyet, majd az egészen duzzadt sejteknél a sejt alapjára húzódnak le.

A dúsan fejlett kötőszöveti réteg hatalmas vastagságban övezi a hámot. A kötőszöveti rostok főleg kétféle irányban futnak, nevezetesen a hámfelülettel párhuzamosan és arra merőlegesen, tehát sugarasan. Ennek a folyománya az, hogy a szövet közti hézagok az említett irányokban meg vannak nyúlva.

A *Tigla hirundo* oesophagusának szöveti felépítése csaknem teljesen megegyezik a *Scorpaena scrofa*-éval, legegységesebb még a hám kialakulása, mely az előzőénél gazdagabb kehelysejtekben.

A *Mugil capito* oesophagus-hámja nagyon elüt az előbbi halak bélhámjától. Kehelysejtek csak az oesophagus első felében fordulnak elő, ott is csak szórványosan s összefüggő kehelysejtes hámmá sohasem tömörülnek. A nyálkaelválasztás itt, úgy látszik, másként történik. Nevezetesen az oesophagus hámja gyűszűszerű bemélyedéseket visel, melyek zárt sorokban vannak elhelyezve. Ezek a kriptaszerű mélyedések egészen mirigyek benyomását keltik, azonban mégsem azok, mert secret granulatiót nem lehet plasmájukban észlelni. Minden valószínűség szerint regenerációs krypták, mert az egész kialakulás arra vall, hogy sejtreprodukáló működése van a mélyedéseknek. Ha hozzávesszük, hogy a mélységben sok magoszlási figurát lehet észlelni, feltevésünknek még biztosabb alapot teremtünk.

A *Corvina nigra* oesophagusának a hámja rétegzettségét illetőleg kétféleképen van kialakulva. Nevezetesen egy része több-rétegű kehelysejtes hám, más része egyrétegű, melyben szintén

vannak elszórtan gömbölyded kehelysejtek. A többrétegű hám legalsó hámrétege egyenletesen kifejlett str. basilare-t alkot, a mely fölött levő sejtek néhány rétegben még változatlanok, majd kehelysejteké alakulnak át. Az egyrétegű hám foltonként lép fel s mind nagyobb és nagyobb összefüggő területeket von be a gyomor felé eső oesophagus részben. Már a gyomorba való átmenet előtt teljesen egyrétegűvé válik.

A hám alatt tekintélyes vastagságú kötőszövet következik, melyen kívül a harántesikolt izomréteg van, mely csaknem egész tömegében gyűrűsen övezi az oesophagust.

A *Gobius niger* oesophagusára nézve különösen áll, hogy makroszkopiailag (VII. tábla, 2. ábra) az átmenet a gyomorba nem állapítható meg, még csak megközelítőleg sem. A mikroszkopos vizsgálat azonban meggyőz bennünket, hogy valódi gyomra van (X. tábla, 3. ábra). Értve ezalatt azt, hogy az oesophagus alsó része és a középbél közét elfoglaló bél hámja mirigycsövekkel vannak megrakva, melyek, ha nem is annyira fejlettek, mint más jól kifejlett gyomrú halaknál, de mindenesetre a bélrésznek gyomorjelleget adnak. Maradjunk azonban egyelőre az oesophagus tárgyalásánál.

Az oesophagus kezdeti részén a hám többrétegű, 30–40 μ vastagságban borítja a bél nyálkahártyáját. A hám tipikus kehelysejtes hám, melynek az elemei 4–5, hátrább 2–3 rétegben fekszenek. A kehelysejtek magassága 15–20 μ , s az alattuk levő közönséges hámsejteket laposra nyomott rétegekbe szorítják. (IX. tábla, 1. ábra.)

Az alapréteg sejtjeinek szokatlanul lapos volta minden valószínűség szerint a kehelysejtek oldalt való szétnyomó erejének a folyománya. A mi annál inkább érvényesülhet, mert a *Gobius*nál az alaphártya alig észlelhető vastagságú. A kehelysejtek képződése és pótlása az azok alatti sejtek megduzzadása s a már meglevők közé való befurakodása által történik. A kehelysejtek elpusztulása nem következik be azonnal a tartalom kiürítése után, hanem a visszamaradt mag és plasma regenerálódik; csak ha a sejt magja a kehelysejt réteg által felszorul a felületre, akkor történik meg a hamaros elhalás, de ezek a sejtek elpusztulásuk előtt a kehelyhám felett szétterülő plasmájuk-

kal bevonják a felületet s legkívül vékony, szerkezetnélküli cuticulát képeznek, mely az időről-időre felhasadó kehelysejtek felett levettetik. A kehelysejtek néhol olyan gyorsan fejlődnek ki, hogy egymást a szintből kiszorítva, zeg-zugossá teszik a hámot.

Az oesophagus hátrább fekvő részein, a bélredők élén mind nagyobb és nagyobb területeken jelenik meg az egyrétegű oesophagus-hám, melyben oszloposan rendezett, 12—15 μ magasságú és 3—4 μ vastagságú sejtek sorakoznak egymás mellé. Csekélységben tér el ezen hámtól a regenerálódó felületek hámja, mely inkább köbalakú sejtekből van kiépítve s igen gyakran a még ép hám alá oldalról befurakodik. Érdekesen szembeötlő dolog még az, hogy az egyrétegű hám alatti kötőszövetben mindig sűrűbben állanak a fehér vérsejtrajok, mint a kehelysejtes többrétegű hám alatt.

Az oesophagus egyrétegű hámjában, volt légyen az regenerálódásban vagy állandó, kehelysejtté alakulót nem észleltem.

Az oesophagusnak a gyomor felé közeledő részében a kehelysejtes hám mind ritkábban jelentkezik, míg végre az apró szigeteskékben csoportosult néhány kehelysejt is kétrétegű hámjával egyetemben elmarad. A gyomorra jellemző mirigyek megjelenése előtt jóval már az oesophagus hámja is megváltozik s az oszlop-hám magasabb sejtekből álló rétegbe megy át, melynek a sejtjei 50 μ magasak és csak 2.5 μ vastagságúak. A sejtek szabad felülete felé eső végein világos sáv jelenik meg, melyre kívül valamelyes cuticulaszerű hártya következik, mely nem is mérhető vastagságú, inkább csak fénytörése által tűnik fel. Ha készítményem hámját egy mm. nyire követjük a gyomor felé, sőt még hátrább is haladunk, ugyanezt a hámot leljük a gyomorban is, melyben azonban a hámból kitürt mirigyek már a gyomorphám bélyegét adják.

A *Gobius niger* oesophagusában a nyálkaréteg kötőszövege igen tekintélyes vastag, laza összeállású, helyenként 20—30 μ vastag, harántcsikolt izomrostok apró kötegei járnak át, melyek kifelé mind sűrűbben és mind nagyobb kötegekben jelennek meg, míg végre fokozatosan csupán az izomréteg — a muscula-

ris — áll előttünk, melynek a rostjai belől hosszirányban, kívül pedig gyűrűsen futnak.

Síma izomsejtek a muscularisnak nem képezik alakelemeit, de a mucosa hám alatti részében gyéren kötegeket alkotnak.

A *Coricus rostratus* oesophagusa a garat utáni részében, mely a garatfogak mögött következik, még néhány izlőbimbót visel, melyek a hám legkiállóbb gerinczredőin ülnek. Az izlőbimbók magasságában szórványosan és kevés számban fordulnak elő kehelysejtek. A hám ezen része, mint az előbbi esetekben is, többrétegű, egészben 20—25 μ vastag, melyet 3—4 sejtréteg épít fel. A kehelysejtek az oesophagus alsó része felé mind tömöttebb sorban jelentkeznek, úgy, hogy az felső harmadától kezdve már egységes kehelyhámval van bélelve.

A *Coricus*nak — mint általában a *Labridák*nak — gyomra nincsen, tehát a középbéllel közlekedő oesophagus közvetlen összefüggésben áll egymással. A makroszkopos vizsgálat a *Labridák* bélesatornáján tényleg ezt mutatja. (Rajz: *Crenilabrus pavo* bélesöve, VII. tábla, 1. ábra.) Sötét mikroszkopos vizsgálattal sem fedezhető fel még olyan fejletlen gyomor sem, mint pl. az előbb tárgyalt *Gobius niger*-nél.

Ugyanis a *Coricus rostratus*, a *Labrus turdus* és a *Crenilabrus pavo* oesophagusának alsó része után nem fejlődtek ki gyomor- nedvet termelő mirigyek s a hám, mely az oesophagusra jellemző kehelysejtes hám megszűnése után egy rétegben tovább folytatódik, néhány kehelysejt helyenkint való megjelenésétől eltekintve, változatlanul marad egészen a középbéli valvuláig, mely a többi halnál pylorus névvel jelöltetik.

A *Coricus* «alsó oesophagus tájéka», melynek helyén más csontos halaknál gyomor van — értve ezalatt csöves, mirigyos hámval bélelt tápláléktartót —, szintén elűt az oesophagus általános felépítésétől. Szöveti képe olyan, mint a többi csontos hal gyomor és oesophagus közötti átmeneti része (IX. tábla, 7. ábra e).

Reám olyan benyomást tesz, mintha ezen bélrész a vezetés funkciójának a teljesítésén kívül már reservoir-működést — emésztés-megindítás nélkül — teljesítene, tehát gyomorkezdemény volna.

A kérdés végleges tisztázásáig ezen bélrészt az űsophagus tárgyalásától nem választom el. S ha GEGENBAUR (17.) magyarázatát a gyomor keletkezésére vonatkozólag elfogadjuk, nincs okunk el nem fogadni, hogy a Labridæ-családot, bélsővét illetőleg, ősi állapotban való visszamaradottság jellemzi.

Térjünk azonban még vissza a Coricus egész űsophagusának a hám alatt következő szöveteinek a vizsgálatára. A hám alatt egész a középbélig egyenletesen kifejlett laza kötőszövet terül el, melyet közvetlenül követ a muscularis belső hosszirányban futó harántcsikolt izomelemeivel, ezenkívül pedig a hatalmas gyűrűs izomréteg, mely szintén egyenletesen van az egész űsophaguson kifejlődve. A középbéllel való összekapcsolódás helyén síma izomnyalábok vonulnak az űsophagus hámja alá, a melyek mind finomabb kötegekben húzódva felbomlanak.

A gyűrűs harántcsikolt rétegből a középbél és előbél határán egy erős záróizom van leválva, mely síma izomelemekkel összeszőve alkotja a pylorus-sphinctert.

A *Motella tricirrata* űsophagusa sajátságos szöveti felépítése miatt érdemel különös figyelmet.

A hám többretegű, kehelysejtes, helyenként regenerálódó egyrétegű foltokkal (VIII. tábla, 5. ábra, *r l*). Vannak azonban állandóan egy réteget feltüntető hámrészek is, a melyek az alattuk fekvő véredények által az előzőtől határozottan külön válnak (IX. tábla, 3. ábra). Ez tehát olyan kialakulású, mint egyebütt. Nagyon sajátságos felépítésű azonban a nyálkahártya másik része, nevezetesen a kötőszöveti hártya és az izomréteg mindkét része.

A nyálkahártya-réteg kötőszöveti részlete két részre különül, nevezetesen a hám alatti tömött kötőszövetre, melynek az összeállása csaknem hézag nélküli. Ez a tömött réteg alkotja az űsophagus fő- és mellékredőinek fő alapvázát, melyre a hám alaphártyája mint vékony egynemű lemez simul. Tömötten álló rostjai össze-vissza futó kötegekbe vannak rendezve, néhol azon hosszant hullámos vonalba rendeződve olyanféleképen haladnak, mint az a halak és amphibiumok bőrmetszeteiről ismeretes. Azonosnak tartom ezen kialakulást az OPPEL (31) által str. com-

pactum-nak nevezett réteggel, habár BIENENFELD-del (2) együtt nem is tartom a bél védelmi berendezésére szolgáló lemeznek, hanem inkább bélfal-szilárdítónak. A vastag rostkötegeknek néhol határozott lefutási iránya észlelhető s ilyenkor úgy látszik, mintha a belső rostok leginkább gyűrűs irányban követnék a hámot.

Fokozatosan megy át a tömött kötőszövet az alatta levő laza kötőszövetbe, melyben viszont a hosszirányban futók vannak túlsúlyban. Ugyancsak ezen laza kötőszövetben a szövet természeténél fogva sok szövetközi hézag, lymphajarat van. Véredény úgy a tömött, mint a laza rétegben aránylag igen kevés van.

A laza kötőszöveti rétegbe ágyazva jelennek meg a hosszirányban futó harántcsikolt izomrostok is, melyek vagy egyenként, vagy pedig néhányan kötegekben fordulnak elő (IX. tábla, 8. ábra). Egy csontos halnál sem találtam ilyen hatalmas izomrostokat (vastagságuk átlag $50\ \mu$), mint a *Motella oesophagus*-ában. Nemcsak az izomelemek maguk, hanem az összeköttetési módjuk is igen eredeti. Az átmetszetük épen olyan fejlett izomrostról tanúskodik, mint a milyenek ismeretesek valamely más gerinces végtag, vagy más hasonlóan jól fejlett izom rostjainak a keresztmetszetén. A fibrillák vastagok, jól elkülönültek, a Cohnheim-féle mezők szinte tipikusan jelentkeznek, jól elkülönült sarcolemmával és kitűnően észlelhető epilemmával.

A halak harántcsikolt oesophagus-izomzatának a *Motella tricirrata* oesophagusának a gyűrűs izomelemei tipikus képét adják. A mi a többi csontos halnál a szövetelemek kicsinysege miatt igen erős nagyítás mellett is csak alig oldható fel, arról itt az izomrostok óriásokként való feltűnése és izolált fekvése következtében már kis nagyítás alkalmazásával is áttekinthető képet kapunk.

A gyűrűs izomréteg 10—12 rostot tartalmaz egymás fölött, melyek keresztül-kasul — bár kevés oldalággal — szomszéd rostjaikkal összefüggésben állanak. A sejtmagok közvetlenül a sarcolemma alatt fekszenek. Valóban érdekes képet kapunk, ha erős nagyítás mellett az izomrostoknak szomszédjaiktól való elszigetelésüket vizsgáljuk, a mely kép szemléltetően érzékíti az izom-

rostok táplálkozási berendezését. Az izomrostok között az őket összekapcsoló kötőszövet, mely epilemmájukhoz csatlakozik, szivacs módjára kisebb-nagyobb hézagokkal át van járva, melyek közül a nagyobbak közvetlenül az epilemmára fekszenek (VIII. t., 7. ábra). Minden valószínűség szerint a muscularis és serosa között fekvő nagy nyiroküregekkel közlekednek. A bélcső falát ellátó hajszáledények szintén az itt huzódó artériák és vénák összekötő edényei.

A serosa kötőszövege is szokatlanul vastag (50—60 μ). Főként gyűrűsen haladó kötőszöveti rostokat tartalmaz, melyeket a peritonium lapos, élben lencseformájú sejtjeinek hámsora határol.

A *Conger vulgaris* oesophagus-hámját jellemzik szintén egysejtrétegű szigetecskék s ezek alatt mindig meglehetősen vastag véredény húzódik, míg más halaknál egy vagy több hajszáledény tűnt fel a hasonló felépítésű hámszigetek alatt.

A *gyomor* (ventriculus). Az oesophagus csaknem valamennyi csontos halnál minden észrevehető határ nélkül folytatódik a gyomorba (VII. tábla, 2—6. ábra). Az egyenletesen való átmenet csak makroszkopos megtekintésnél áll, mert mikroszkoppal való vizsgálatnál a határ többé-kevésbé élesen megállapítható. A mikroszkoppal észlelhető éles elkülönülés különösen a magasabban differenciálódott gyomrokra áll s ez WEBER t (44) arra indította, hogy az elő- és középbél határát az oesophagus és gyomor közé helyezze. Ez a feltevés azonban — legalább a csontos halakra — nem állhat fenn. A későbbiek során magától kiviláglik, hogy az egységes előbél először szövétileg is egységes, csakis akkor kezd szövétileg is differenciálódni, mikor már az oesophagus alsó részén a fokozatos tágulás, a hám és mirigyek elkülönülése megindult, a mit a harántcsikolt izomzatnak sima izomzattal való felváltása lomhán követ.

A csontos halak között néhány olyan család is van, melynél az előbelet GEGENBAUR (17) értelmezése szerint passagenak tekinthetjük, melyen át a táplálék időzés nélkül jut át az emésztő középbélbe. A legősibb gerinczes bélforma ez, mikor gyomornak nyoma sem észlelhető, mint pl. a *Labrus* és *Crenilabrus* (VII. tábla, 1. ábra) nembe tartozó csontos halak bél-

csatornái, melyeknél az œsophagus teljes egyöntetűségben halad a középbélig. Igen primitív fejlődési stadiumban levő «gyomor» az u. a. családba tartozó *Coricus*nak már tárgyalt «alsó œsophagus-része», melynek a hámja már elűt a rendes œsophagus-hámtól, egyrétégű hengerhám mirigyek nélkül, de az izomréteg és a kötőszöveti réteg még ugyanolyan szerkezetű az egész œsophagus alsó részén. Azonban ezen alsó előbélrész már tágabb s úgy látszik, hogy alkalmas a táplálék rövid ideig való raktározására, de mirigyek hiánya miatt emésztési folyamat nem indulhat meg benne. Már igazi gyomor — bár igen kezdetleges állapotban — észlelhető a *Gobius*nál, melynél a tömlőszerűen tágult előbélrész (VII. tábla, 2. ábra) hámjába mirigyek vannak beiktatva (X. tábla, 3. ábra *gym*). Valamint jól fejlett gyomorral bírnak az összes pylorus-függelékes csontos halak. Előre bocsájtom azt a megjegyzést, hogy a morfológiailag élesen differenciálódott csontos halgyomor többnyire nagyon jól fejlett gyomor-nedvmirigyekkel van ellátva.

HALLER (19 p. 752.) a csontos halak előbélét illetőleg három típust állít fel. Nevezetesen, hogy a növényevő halak *gyomor-nélküliek*, a többinél ellenben *gyomor* van kialakulva, vagy *fundus-zsák nélkül*, vagy pedig *fundus-zsákkal*.

A fejlődés menete a gyomorkialakulásnál minden bizonynyal összeköti az említett három esetet. A fokozatos fejlődést GEGENBAUR idézett értekezésében velősen ki is fejtí. Ugyanis a *nervus vagus*-nak a gyomorhoz való köze csakis úgy érthető meg, ha az embryonalis gyomor-bélrésznek a kopoltyúbél folytatását tevő előbél már a zsigerivek tája, az eredeti kezdeménye.

Mellesleg említem meg, hogy GEGENBAUR ezen hypothesis a szívnek és a tüdőnek a vagussal való beidegzését is világossá tette.

A gyomor makroszkopos tárgyalása nem czélom, azonban mikroszkopos vizsgálataim menetének megjelölése, valamint észleleteim eredményeinek összehasonlíthatása végett kell foglalkoznom véle.

A csontos halak gyomra, ha az egyszerű clőbél-tágulat, úgy helyezkedik el, hogy a közép-bél, az előbél, ill. a gyomor tengelyén fekszik (VIII. tábla, 1. ábra); ha ellenben a gyomor

fundus-zsákkal van ellátva, akkor a középbél a pyloralis kanyarulattal hátra hajlik (VIII. tábla, 3. és 4. ábra) s a gyomor fundus-zsákját megfeküdve húzódik hátra. Ugyanez áll akkor is, ha a ventriculus nincs is ellátva jól fejlett fundus-zsákkal, de maga is egy gyomorkanyarulatot alkotva, felfelé haladó pyloralis résszel folytatódik (VIII. tábla, 2. ábra).

A gyomor nyálkahártyája hosszirányú redőket visel, melyek a gyomor teletöltésénél kisimulnak. Ha a gyomor egyszerű előbél (Gobiidæ), vagy még egyszerűbb esetben, ha csak valamicskét tágulékonyabb előbél (Labridæ), akkor az izomzata egész a középbélig harántcsikolt izomrostokból áll. Ha azonban funduszsák van kifejlődve, akkor annak a tágulékony résznek az izomzatát legnagyobb részét sima izomelemek alkotják.

A cardialis táj makroszkoposan vizsgálva csak nagyon ritkán (Conger) van jól kialakulva (VIII. tábla, 4. ábra). A többi csontos halnál legfőljebb a sűrűbb gyomornyálkahártyaredők megjelenése jelzi, melyek azonban legtöbbször élesen nincsenek is kialakulva. A pylorus ellenben nagyon jól van kiegyénülve s valamennyi csontos halnál erősebb vagy gyengébb, de mindig jelenlevő pylorus-billentyű van a középbél elé iktatva (X. tábla, 1. ábra *p v*).

Általában a halak cardialis gyomornyitójának hiánya nem lephet meg bennünket, mert hiszen — a mint az sok dologból következik — a gyomor a halak saját szerzeménye, azaz hogy nem is valamennyi s az összehasonlító anatomiában az ilyen szervszerzemények tökéletlen, de változatos volta nagyon is közönséges. A functio és a berendezés még nincsen egyensúlyban. Mindazáltal, hogy cardiajuk a halaknak nincsen, a gyomruk elül zárva van. Zárják a rövid œsophagus összes izmai.

A csontos halak között azoknak a bélcsatornája, a melyek gyomorral nem rendelkeznek, minden valószínűség szerint ősi állapotot tüntet fel, mint a magasan differenciálódott gyomruké. Nem pedig, mint EDINGER (13) vallja, hogy visszaesés. Érdekesen tart lépést ezen kialakulással a gyomor mikroszkópos szerkezete is. A legelső lépés, mely a gyomorkialakulásra vezetett, az œsophagus többretegű hámjának egy rétegével való

felváltása. Az egy réteg azoknál a halaknál jelenik meg, a melyeknél az előbél alsó része ideiglenes tápreservoirul szolgál. Azoknál a halaknál, melyeknek gyomra nincs, vagy esetleg az oesophagus alsó része tágulékonyabb, többsejtű mirigyek az egész előbélben, tehát az előbél alsó részében sincsenek; azoknál a halaknál, a melyeknél határozott gyomorelkülönülés már észlelhető, ezen a tájon a nyálkahártya apró, csakis néhány sejtből álló, gyomornedvet elválasztó mirigyeket visel, ellenben a jól fejlett gyomrúaknál hatalmasan fejlődött mirigycsősereg áll a hámmal összefüggésben. A gyomor kifejlődése így egyenes arányban áll a gyomornedvmirigyek megjelenésével. Ebből következik, hogy előbb alakult ki a kezdetleges tápanyagreservoir s csak az itt előállott ingerre különültek el az alsó előbélrészi sejtek indifferens fedő- és mirigysejtekké s az így kialakult bél-rész fokozatosan lett valódi emésztő gyomorrá.

Fordított arány van a gyomor kifejlődése s a halaknál annyira általános harántcsikolt előbélizomzat kiterjedése között. Nevezetesen sima izomelemek kevés számmal a gyomornélküli és a fejletlen gyomrú csontos halak előbél és középbél közötti átmeneténél átsarjadzanak ugyan az előbéltre, a harántcsikolt izomrostok közé, de az előbéltre való felsarjadzás a gyomornak a fejlettségével arányosan történik. Úgy, hogy a legfejlettebb csontos hal gyomrán a harántcsikolt izomrostokat teljesen kiszorítják.

A csontos halak gyomrának összehasonlító histologiai vizsgálata nemcsak általánosságban, de részleteiben is lekötheti érdeklődésünket. A következőkben most már azokat vesszük, a melyeknél «gyomor» van.

A mint már kiemeltem, az oesophagusnak a gyomorba való átmeneténél csakis a hám változik meg hirtelen. A hám módosulása azáltal válik szembeötlővé, hogy a többretegű vagy egyrétegű oesophagus-hám fokozatosan, de igen rövid határokon belül egyrétegű hengerhamba csap át, a melyben már kehelysejtek sincsenek, de még gyomornedvmirigyek sem váltak ki sorukból. Ez a cardiális hámnak nevezhető hámgyűrű az általam vizsgált valamennyi gyomros halnál megvan. Ugyanez a hám van kifejlődve az u. n. gyomornélküli halak oesophagusá-

nak alsó, kissé tágítható részében, keskenyebb vagy szélesebb terjedelemben (IX. t., 7. ábra e).

Ez a hám folytatódik az egész gyomron végig s mint ilyen a gyomor többi táján, a pylorus táját szintén kivéve, viseli a gyomornedv-mirigyeket.

Az a lelet, hogy sok csontos halnál ez a hám még mint indifferens előbéli (oesophagus alsórészi) hám szerepel, arra enged következtetni, hogy a többi csontos hal gyomorhámja ezen hámból differenciálódott ki, míg a gyomor kezdeti és végső részében, tehát ott, a hol a táplálék mint differenciálódást kiváltó inger nem működhetett, eredeti változatlanságban megmaradt. Nagy eltérések vannak a mirigyek gyomornedv-felépítését illetőleg egyes esetekben, de ezek a különbségek összehasonlítás és hasonlónak a közbeiktatása által mindig beleilleszkednek a rendes fejlődési sorba, mely a kevéssé fejlett mirigytől a jól differenciálódotthoz vezet. A mirigyek kifejlődése, fejlettségi foka, szövettani alkata természetes összhangban áll a gyomor teljesítő képességével.

A nélkül, hogy physiologiai fejtegetésekbe bocsájtkoznék, állíthatom, hogy a gyomornedvmirigy nélküli halaknál a gyomor egyszerű tápanyag reservoir, melyben emésztés nem történik; a feladata az ilyen tápreservoirnak, mely különben szerkezeténél fogva sem igen tágulékony, mindenesetre az, hogy az állat a kínálózó alkalommal élve, magát hosszabb-rövidebb időre tápszerrrel ellássa s az ott raktáron legyen, míg az aránylag szűk és nem igen hosszú középbélbe apránként bekerülhet, hogy a lassan történő emésztés és felszívás teljesen feldolgozza.

A mirigyos gyomrú halak egészen másként táplálkozhatnak, ezek felvehetnek nagyobb terjedelmű táplálékot, akár egy darabban is, mert az a gyomoremésztés következtében szétfolyósodik s már egy egész sereg felszívásra alkalmas anyag jut a középbélbe s a megemésztetlenek is kellő előkészítésben jutnak a középbél enzimáihoz. Ezen berendezés hiánya miatt a tápreservoirs, vagy éppen előbéltagulat nélküli halak csak apró darabkákat vagy csak igen apró szervezeteket vehetnek magukhoz táplálékul, mert azok gyomoremésztésen nem esvén át, a szűk középbélbe szintén egészben jutnak be.

Ez a néhány gondolat figyelmeztet bennünket arra, hogy hogyan kapcsolódik össze pl. a *Labridae* gyomortalansága a többi csontos hal jól fejlett gyomrával s ezek non plus ultrájával, a mély tengervízi halak sokszor bámult nyúlékony gyomrával, mely sokszor a zsákmányoló állatnál is nagyobb prédát fogad be.

A csontos halak gyomrának a histológiája szakadatlan láncz-sorban tüntet fel összehasonlításra alkalmas kapcsokat, melyek végeredményben nagyon érdekes és tanulságos fejlődési menettel ismertetnek meg bennünket.

A gyomornedvmirigyek kiegyenülése nemcsak a halaknál, de a többi gerinczes állatnál is magasra hágó fejlődés alapindító berendezéseihez tartozik.

A *Gobius niger* gyomra (VII. tábla, 2. ábra *v*; X. tábla, 3. ábra *c*) a többi valódi gyomrú csontos hal gyomrához képest igen alsó fokon áll. A hámsejtek alig, vagy éppen nem különböznek a cardiális kezdetű mirigytelen hámtól. A gyomornedvmirigyek jobbra igen rövid csövecskék, sokszor annyira rövidek, hogy szélük-hosszuk egy s ilyenkor a lumenük, ha tág, bogyós mirigykialakulást tüntet fel. A mirigyek többen összeszájadzva nyílnak a felületre. Azonban a kiszájadzásra nincs semmiféle szabály, éppen olyan gyakori a redők mélyén, mint a redők taraján vagy az oldalán fekvő hámon való nyílás. Nagyon sajátos a kivezető mirigynyílás, mely állandóan nyílt cső, melyet a hámsejtek között formált nyílt rés alkot. A legtöbb csontos halnál a hámsejtek visszahajolva képezik az u. n. nyaki sejteket. Itt ilyenek nincsenek s az egész mirigy csakis működő: *aktív* sejtekből áll.

A hám- és mirigyréteg alatt kötőszöveti réteg következik, melybe sima izomelemek vannak beágyazva. Ezek a rétegek együtt teszik a tulajdonképeni mucosát.

Az izomréteg, éppen úgy mint az oesophagusnál, harántcsikolt izomrostokból van egészen a középbél kezdetéig összeszöve. Az izomréteg, mint az előbéli mindenütt, belső hosszant és külső gyűrűsen futó rostokból áll. A gyűrűs és hosszant futó rostokon kívül vannak ferdén futó rostok is, melyek elszórtan nyalábokba szedődve jelentkeznek.

A sorozat következő tagjának a *Box salpa* gyomra (VII. tábla, 3. ábra) tekinthető. A *Box salpa* gyomra külső morfológiáját tekintve csak kevéssé üt el a *Gobius* gyomrától, ugyanis sem fundus-zsák nincs kifejlődve, sem más külső bélyegeg nem árulják el a jól differenczialódott gyomrot. A *Box salpa* gyomra a cardiális táj után V alakban visszafordul s a pylorus táj a cardiális tájjal körülbelül egy magasságba kerül. Az állat különösen növényi táplálékot vesz fel, de az állatit sem veti meg.

Az oesophagus alsó része sejtjeinek elvékonyodása által magas hengerhamba csap át, mely a cardiális tájon olyan felépítésű, mint a *Gobius* bélesövények azonos helyein. A sejtek víztiszták, hyalinok, minimalis szemcsét tartalmaznak. Hogy valamelyes elválasztási működésük mégis van, azt abból következtetem, hogy a sejtmagvakat mindig az alaprésze lehúzódba találtam. A sejtek átlag 4 μ vastagok, 24 μ magasak. A sejtmagok 3—4 μ átmérőjű, dús chromatintartalmú gömböcskék.

A hám lumen felé eső részének sajátos képet adnak a körülbelül 4 μ -onként következő zárólécz-átmetszetek, melyek mint tömzsi ékek tűnnek fel átmetszetben. Jellegzetessé teszi ezen tájat még az, hogy a hámsejtek felső részében hámatoxylinnal festve pontsor tűnik fel. Ezen a tájon ötlenek leginkább szembe ezen apró pontsorok, melyek különben kedvező körülmények között a bélcső más részében is jelen vannak, éppen úgy festődnek s éppen olyan elhelyeződésűek, mint a csillangók basalis testeskéi.

A cardiális táj alsó részén a hengerhámsejtek zavaros tartalmúvá válnak s megjelennek a hám alatt a gyomornedvmirigyek, a melyek szintén olyan rövid csövecskéket alkotnak, mint a milyenek a *Gobius* egész gyomrát elborító gyomornedvmirigyek. A *Box*-nál azonban nem maradnak meg az egész gyomor felületén ezen alacsony mirigycsövek, melyek valamennyien igen tág lumennel tűnnek ki, hanem keskeny átmeneti öv után fokozatosan megnyúlnak s a hámréteggel együtt mintegy 100 μ vastag réteget alkotnak, míg a cardiális táj utáni mirigy és közbős hám együttes vastagsága ennek alig harmadát teszi.

Az egészen csőformára fejlett mirigyeknél is azért arány-

lag nagy lument találunk s a szabadba való szájadzás itt is közvetlenül, azaz nyaki sejtek közbeiktatása nélkül történik. S a sejtek mikroszkópi megjelenése is nagyon hasonlít az előbb tárgyalt *Gobius* mirigysejtjeihez. A mirigycsövek szintúgy többedmagukkal egyesülve, közös kivezető csőben folytatódnak, melyeknek élesen fénytörő fala elüt a környező hámtól.

Az egész mirigyés rétegnek minimalis kötőszöveti rétege van és élesen el van válva a tulajdonképeni nyálkahártya kötőszöveti rétegetől. A gyomor falából redők emelkednek ki, melyeknek a vázát ezen kötőszövetből felemelkedő gerendázat alkotja.

A muscularis a *Box salpa* gyomrában is csaknem egészen végig harántcsikolt izomelemekből áll, melyekhez a gyomor hátsó része felé mind több sima izomsejt-nyaláb csatlakozik.

Az izomréteg meglepően vékony, a mennyiben a belső hosszirányú $40\ \mu$, a külső gyűrű $60\ \mu$ átlagos vastagságú, az egyes izomrostok $4\text{--}10\ \mu$ vastagok. Általában az izomrétegek is kevés kötőszövettel vannak ellátva. Úgyszintén alig tartalmaz kötőszövetet a serosa is, melynél az endothel a külső izomréteget csaknem közvetlenül fekszi meg. A serosa egész vastagsága nem több $2\ \mu$ -nál.

Rendkívül érdekes a *Blennius gattoruginae* gyomrának a szövettani felépítése. A mirigyek és a hám fejlettségét illetőleg egészen magas differenzialódást mutat, az izomréteg azonban fejletlenebb, mint a fenti esetekben, a *Gobius*t kivéve. Nevezetesen az izomréteg külső rétege tisztán harántcsikolt rostokból áll, a belső réteg azonban sima és harántcsikolt izomelemek keverékéből szövődik össze.

A mucosa kötőszöveti rétege igen fejletlen, csakis a mirigycsövek burkolására szorítkozik.

A gyomrhám hengeres sejtekből áll, melyek hyalin plasmából s kissé megnyúlt magokból állanak. A mirigyek szájadzása itt is mélyedésekbe történik, melyekbe direkt szájadzanak a mirigycsövek. A mirigycsövek megnyúltak, öblösek s ebben hasonlítanak a *Gobius* és a *Box* gyomornedvmirigyeihez. Különösen az alsó részük van tömlőszerűen felduzzadva. A mirigysejtek szemcsések, a plasmájuk telve secretum-granulatioval. A mirigycsövek nyaki része csak néhány sejtből áll, soknál a

közönséges hám redőlein történik a szájadzás, ilyenkor a nyaki sejtek hiányozhatnak s a kivezetés, mint a Boxnál, sajátfalú mirigyvezetéken át történik.

A gyomor pylorus-tájékan megszűnnek a tulajdonképeni gyomornedvmirigyek, helyettük csakis kryptaszerű mélyedések fordulnak elő, melyeknek szemcsézett sejtjei még bizonyára valamelyes mirigyes működést fejthetnek ki. PILLIET (33) ezen pylorustáji hámmélyedéseket a *Pleuronectes* gyomrán végzett vizsgálatai alapján nyálkát elválasztó kryptáknak tartja. A hámsejtek között tág intercellularis járatok tűnnek fel, melyek kifelé a zárólécek által vannak elrekesztve. A pylorus táján a gyomor jól fejlett muscularis mucosæ-val van ellátva s ezenkívül a muscularis csupán sima izomelemekből áll. A pyloralis táj legalsó, azaz a középbéllel szomszédos részén a hámból az említett kryptaszerű mélyedések is eltűnnek. Új elkülönülés a sejtek szabad szélén megjelenő cuticulaszerű lemez, melyet a sejt plasmájától sötétre festett pontsor választ el, továbbá új módosulata a sejteknek a gyéren megjelenő kehelysejtek, melyek a gyomor mirigyes részén éppen nem, vagy csak igen ritkán alakulnak ki, míg az előbél oesophagialis részében közönségesek.

A *Smaris albedo* gyomrának (VII. t., 5. ábra, v) középtáján histológiailag a következő megjegyzésre méltó kialakulások vannak. A hám a mucosa kötőszövetének a fejletlensége folytán nincsen nagy redőkbe felemelve. Azonban annál egyenletlenebb a hámfelület a sűrűn egymás mellé rendeződött gödörszerű mélyedések miatt, melyek alján egy-két, ritkán több csöves mirigy nyílik. A hámsejtek a redő élein és oldalain különböző alakúak és fejlettségűek. A gödör fenekén levő sejtek közvetlenül átmennek a mirigyesövek nyaki részébe. A mirigyek nem öblösek, a mirigysejtek szemcsésék, duzzadtak s a nyaki sejtektől jól elváltak.

A mucosa kötőszöveve fejletlen, kevés. A muscularis olyan fejlettségű, mint a *Blennius* középgyomra táján, azzal a különbséggel, hogy a muscularisnak a mucosával való rétege közé erős, sima izomréteg ékelődik. A külső gyűrűs és belső hosszirányú izomelemek itt is harántesikoltak.

A *Sargus annularis* gyomrának histologiai szerkezete (X. t., 4. ábra) a fejlettségnek olyan fokát mutatja, mely az előbb tárgyalt halak között a Blennius-éhoz áll legközelebb. Fölibe emelkedik mégis emennek, különösen gyomornedvmirigyeit tekintve, melyek igen fejlettek. Azonban a hámok és a bél falát felépítő szövetek is sok sajátosságukat tüntetnek fel.

A cardialis táj hámja az oesophagusnál már részletesen tárgyalt egyrétegű hengerhámából közvetlenül folytatódik. A hám eleintén csak szórványosan s igen alacsony, néha tömlőszerű mirigycsöveket fejleszt. Sajátosságát azonban a hám az egész gyomron át megőrzi.

A hengeres sejtek 20—25 μ magasak, 2·5—3 μ szélesek, kb. 3 μ átmérőjű ovalis sejttaggal. A sejtek protoplasmája erősen szemcsés, míg a legtöbb hal ezen tájon levő hámsejtjeinél gyakoribb a világos plasma. A protoplasma lumen felé eső része 1—1·5 μ vastagságban sötétebb, hyalin állományú, a mely a sejtek szélén egy-egy világos, körülbelül 2·5 μ hosszú és $\frac{1}{2}$ μ vastag léczkeresztmetszet által fel van darabolva. Ezen apró sejtfedőcskék alsó harmadukban halvány pontsört tartalmaznak, kissé ovalisra vannak nyomva, a sejt tengelyével párhuzamosan halad a legnagyobb átmérőjük. A sejtek között a zárólécz keresztmetszete alatt mindenütt szembeötlik egy-egy fénytelen, üres sáv, melyen helyenkint plasma-gerendácskák nyúlnak át. Ezek a sávok sejtközötti járatok, melyek gyakran tömve vannak vándorsejtekkel. A sejtek az alaphártyán ülnek s az alsó részeik néhol nagyobb közöket alkotnak egymás között s ezen közökbe egyes, dús protoplasmájú sejtek vannak beszorulva, a melyekből az esetleges regeneratio megindul. A mirigycsövek a hámmal közös kivezető csövekkel állanak összefüggésben. A mirigycsövek rendszeren tág lumennel vannak ellátva, mely reservoirul is szolgál (X. t., 4. ábra). A mirigysejtek rendkívül sajátosságos elrendeződést mutatnak. A sejttagok a mirigy alaphártyájához közel ülnek s protoplasmájuk közvetlenül a mag felett magasra felemelkedik. A granulatioja különben úgy a magasra feltölt résznek, valamint a mag körül maradt résznek is ugyanaz. Meglepő ezen sejteknél az, hogy a lumen felé eső szabad felületük pálczikás

szegélyt visel, a mely pálczikák aránylag vastagok s az alapi részük erősen fénytörő testecsskéken nyugszik. Olyan benyomást kelt a kép első pillanatra, mint egy csillangóitól megfosztott hám, melyen csak a csillangók basalis testecsskéi és a csillangók alaprészei maradtak vissza.

A gyomornál külön muscularist alig lehet megkülönböztetni. Nem annyira az izomelemek gyér előfordulása miatt, mint inkább a gyomor fala kötőszöveti rétegének sima izomelemekkel való átszőődése miatt. A harántesikolt izomrostok a gyomron még jó darabon követhetők, fokozatosan helyettesítik azonban a sima izomsejtek, melyek tömött réteggé csakis a serosa alatt tömörülnek. A gyomor falának laza kötőszövege és laza izomrétegei között nagy számmal vannak szemcsés vándorsejtek, melyek a többi szövetelem közül élesen kiválnak.

A *Mullus barbatus* gyomrának a szöveti felépítése differenciálódottabb, mint az eddig tárgyaltaké. Már hatalmas, sima izomrétege is megkülönbözteti, úgyszintén a mirigyek kialakulása.

A hám alacsony hengerhám, melynek hyalin külső és szemcsés belső protoplasmája van. A szemcsés rész tartalmazza az alig 2 μ átmérőjű magot. A sejtek magassága 10—12 μ és a szélességük 2·5 μ körül van. (A *Mullus barbatus* egyike azon csontos halaknak, melyeknél igen kicsinyek a sejtek.) A sejteknek a lumen felé levő szabad felületén igen vékony, alig $\frac{1}{4}$ μ vékony cuticularis lemez van, melyben éles pontsor vonul végig, melynek az egyes testecskéi nem lehetnek nagyobbak 0·2 μ -nál. Ugyanazon pontsor ez, mint a már eddig is többször említett, csaknem valamennyi hálnál felismerhető testecskek, melyek a sejtplasma szabad végén sorakoznak egy síkba. Kicsinységük mellett is jól láthatók még a záró léczátmetszetek is, melyek a felülről tekintett hámnak éles körvonalat adnak.

A hám sűrűn egymás mellett gödröket képez, melyek a gyomor felső vonalában nem viselnek mirigyeket, míg a fundus táján ezen gödröcskékből egy-két, néha több cső is folytatódik, melyekbe a gyomornedvmirigyek szájadzanak. A gyomornedvmirigyek kis lumenűek, sűrűn sorakoznak egymás mellé s nyaki sejtekkel kapcsolódnak a közös kivezető csőhöz.

A kötőszöveti alapréteg, a gyomor cardialis táját kivéve, jól fejlett. Ugyancsak jól van kifejlődve az izomréteg is, mely a cardialis táj kivételével harántcsikolt izomrostokat nem tartalmaz.

A *Corvina nigra*-nak a gyomorhámja érdemel különös figyelmet. A sejtek hengeresek, átlag 30 μ magasak, a mely magasságból 3 μ a cuticulaszerű szegélyre esik. A sejtek protoplasmája sajtószerűen szemcsézett, nevezetesen a sejt csaknem valamennyi szemcséje a sejt felső harmadában van felhalmozódva, a mely szemecskés plasmától a sejt basalis részében nyugvó magot hyalin protoplasma választja el. A hám gödörkés bemélyedések következtében többé kevésbé egyenetlen kialakulású. Különösen a redő mélyében ülő sejtek térnek el a többiek-től, az által, hogy ezeken az említett elkülönülések alig, vagy éppen nem láthatók.

A cuticulaszerű szegély itt is tagokra van osztva, az egyes sejteknek megfelelően, azonban itt a már sokszor emlegetett pontsor éppen csak hogy látszik. Azt hinnők, hogy itt ezen vastag cuticularis szegélyben a pontsor tagjai is nagyobbak, pedig éppen ellenkezőleg áll az eset, mert jó ideig kell a vas-hæmatoxyllinnal festett készítményt vizsgálnunk, míg az első pontsört megtaláljuk, ha azonban már egynéhány sejten keresztül tudjuk követni, felötlenek a szomszéd hámfelületeken is. A testcskéik igen kicsinyek, becslés szerint nem lehet nagyobb az átmérőjük $\frac{1}{10}$ μ -nál s nem is az egyeseket látjuk, hanem egyszerre az egész sejtsoron végigvonuló sort, mely finoman szaggatott vonalként áll elő.

A *Trigla hruno* gyomrának kezdeti része a fentebb vázolatokkal csaknem megegyezik (VII. tábla, 6. ábra). Azonban itt az átmenet a cardialis tájtól igen gyorsan történik. Úgyszintén csaknem átmenet nélkül jelennek meg a pompásan fejlett csöves gyomornedvmirigyek. A gyomorhám hengeres sejtekből áll, melyek kevés granulát tartalmaznak s a külső szabad felületük a sejtfelülettől 2 μ távolságban, élesen jelentkező pontsor által van elhatárolva. Ezen külső rész élesebben fénytörő s benne helyenkint merőleges csikok láthatók. A sejtmagok mindig alól vannak, az alaphártya közelében. A hámsejtek igen különböző

magasságúak, míg a kiemelkedő apró redőleken 40 μ magasak, addig a redők oldalain a magasságuk általában nem több 10 μ -nál. A vastagságuk a magassággal fordított arányban áll: míg a magas hengersejtek elkeskenyedők, 3—4 μ vastagságúak, addig az alacsony oldalsejtek csaknem köbalakúak.

Ezen alacsony sejtek által bélelt ür lefelé közvetlen folytatását képezi a mirigyek közös kivezető nyílásának. A Triglánál ugyanis a mirigyek nem nyílnak úgy közvetlen a felületre, mint a Gobiusnál, sem pedig olyan éles körvonalú kivezető saját csövek nincsen, mint a *Box salpa*-nál, hanem mindig közbeiktatott sejtek összekötése révén, melyek mint a közös mirigy-lumen folytatása belevezetnek a bélhám kehelyszerű mélyedéseibe.

Az összekötő-sejtek plasmája is más összetételű, mint a többi hámsejté. Nevezetesen protoplasmájuk világos, a záróléczátmetszetek közöttük nem igen szembeötlők s a már említett pontsor hiányzik belőlük, tehát az azok által kirekesztett erősen fénytörő réteg is. A sejtmagjuk azonban az indifferens hámsejtével teljesen megegyező.

A mirigyekre magukra az eddigiekkel szemben jellemző, hogy lumen az alsó részükben egyáltalán nem látható, míg a felső részben már kivehető, de igen vékony kivezető saját falú csövet formál, de olyasféle tág, öblös lumen, mint az előző esetekben, nem fordul elő.

A mirigysejtek polyedrikus, 6—8 μ nagyságú sejtek, 2—2.5 μ átmérőjű gömbölyded maggal.

Az egyes mirigycsövek között jól látható kötőszövet foglal helyet. Szintén jól van kifejlődve a nyálkahártyaréteg kötőszövege is, úgyszintén a muscularis is, mely itt már sima izomsejtekből áll.

A kötőszöveti réteg laza, finom kötőszöveti rostokon és sejteken kívül számos sima izomsejtnyaláb húzódik benne keresztül-kasul.

Az izomréteg a cardialis tájon még harántcsikolt rostokból áll, ezeket fokozatosan felváltja a sima izomréteg, mely belső gyűrűs és külső hossziránt futó-rétegre van tagolva. A külső izomréteg a serosától befelé haladó kötőszöveti lemezek által egymásután következő tagokra van felosztva.

A serosa igen vékony réteget képez, kevés kötőszövetből s ezen az endothelből áll.

A *Scorpaena scropha* gyomra részletekben tér el csupán a *Trigla* gyomrának mikroszkopi szerkezetétől. Az egészben legszembeötlőbb a sima izomrétegnek, különösen a külsőnek a rendeződése. A nyálábokba szedett sima izomsejtek a köztük levő kötőszövet által szokatlanul messze el vannak egymástól tolvá.

A *Mugil capito* gyomra egyike a legmagasabban differenciálódott csontos halgyomroknak. A gyomor kialakulása a hal táplálkozásának a folyománya. A táplálékának javarészét különösen tizlábú páncélos rákok teszik, melyeknek finom összemorzsolására a gyomruk szolgál. A gyomrukon három tájat lehet jól megkülönböztetni: a cardialis-, fundus- és a zúzó-tájat; ez utóbbi nem egyéb, mint gyomornedvmirigy nélküli, hatalmas izomzatú pylorustáj. Ezek a tájak szövettani képei is nagyon elütnek egymástól.

Az oesophagus után következő cardialis táj csakis hámjának a módosulata által tér el az előző bélrészttől. A hám alacsony hengerhámmal folytatódik egészen a fundus-tájjig. A hám mirigyszerű mélyedéseket visel, melyek éppen úgy, mint az oesophagusnál tárgyalt ilyen bemélyedések, regenerációs kelyhek. Ezen kehelyszerű bemélyedéses hám a gyomornak a fundussal szembeeső falán egészen a zuza kezdetéig ilyen marad. A szembeeső hám azonban már a cardialis tájon csöves mirigyeket visel, melyek kezdetben rövidek, míg a fundus felé mind hosszabbak és fejlettebbek lesznek. A fundusban a mirigycsövek már 3—4-szer olyan hosszúak, mint a cardialis táj mirigycsövei. A gyomornedvmirigyek teljesen megszűnnek a zuza előtt, melynek a hámja hosszirányú redőket alkotva ugyanígy futó kemény cuticulát választ el, mely egymáson fekvő rétegekből áll. Ezen cuticula védi az alattuk fekvő matrix-sejteket a szétzúzó-dástól.

Az egyes tájak hámjának részletesebb vizsgálata a sejtek alakjáról és egymáshoz való viszonyáról nyújt felvilágosítást. A cardialis táj hámsejtjei protoplasmadúsak, 10—20 μ magasak, 4—5 μ vastagok s a kelyhek alján több osztódásban levő

mag tűnik fel, mint a felső részeken. Ezen a tájon gyakran lelünk regenerálódó hámfelületeket, melyek csaknem mindig a redőelekre szorítóznak, a kemény héjú táplálék bizonyára valamennyiszer meghorzsolja a szabad hámfelületet, melynek a regenerálása a kelyhek oldalairól felsarjadzó hám által hamar történik.

A gyomornedvmirigyeket viselő hám nyúlánkabb, jobban összenyomott sejtekből áll. A gödrök mélyén nyílnak a mirigyek, melyek igen szűk lumennel tűnnek ki. A mirigysejtek maguk közvetlenül csatlakoznak a kivezető nyíláshoz, esetleg többedmagukkal. Nyaki sejteket csak kevés mirigynél láthatni s akkor is igen rövid az általuk formált kivezető cső.

A zúzó gyomor hámsejtjei szorosan egymás mellé sorakozva a szarunemű cuticulához csipkézetten csatlakoznak, ugyanis minden sejten 2—3 kiemelkedés van, melyek a cuticulához való szilárdabb kötésre szolgálnak.

A nyálkahártyaréteg kötőszöveti részei jól ki vannak fejlődve. A sima izomsejtek beszövődése csak a fundus-táj előtt kezdődik. A kötőszövet sok lymphá-üreget és járatot tartalmaz s ezek szomszédságában sok granulás vándorsejt észlelhető, melyek szétszórtan, a hám alatt közvetlenül is előfordulnak.

Az izomréteg a három gyomortájon különbözően van kialakulva. A cardialis tájon csupán harántcsikolt izomrostokból áll (külső gyűrűs, belső hosszanti), mely a fundus-tájjal szemben fekvő bélfalon egészen a zuzáig terjed. A fundus-táj azonban sima izomsejtekkel van ellátva, melyek nemcsak hosszirányú és gyűrűs, hanem ferdén futó nyalábokat is alkotnak.

A fundus-rész után egy sima izomsphincter van a muscularisba beiktatva, a mely után a zuza izomfala következik, mely sima izomelemekből áll. A Mugil oesophagus és ventriculusa mindenütt hatalmasan fejlett izomrétegével tűnik ki, itt azonban az izomelemeknek egész halmazata áll előttünk. Az izomnyalábok gyűrűsen futó lemezekbe vannak egyesülve, melyek vastagsága 80—100 μ , s melyeket vékony kötőszövet-rétegek választanak el egymástól. Az izomrétegek együttes vastagsága 30 cm.-es hal gyomránál 0.5 cm., ezzel szemben a hosszirányt futó külső izomréteg csak 10 μ .

A *Conger conger* gyomra jól kifejtett fundus-zsákkal tűnik ki (VIII. t., 4. ábra). A szövettani differenciálódását különösen az izomzatának a kialakulása emeli ki. Nevezetesen az oesophagus barántsíkosított izomelemei az oesophagus alsó részén, még a cardialis táj előtt egyszerre megszűnnek, tehát nem csapnak át a gyomorra, mint az kisebb-nagyobb mértékben az eddig tárgyalt esetek valamennyijénél előfordult.

A hám kialakulása is másként történik. Az előző esetekben az átmenet szakadat nélkül történt az oesophagus sokrétegű kehelysejtes hámból a hengeres gyomrhámig. A Congernél nincs átmenet: a többretegű kehelysejtes oesophagus-hámhoz közvetlenül csatlakozik a gyomor hengeres hámja, melynek már a 2., 3. sejtje tipikus gyomrhámsejt. A hám azonban itt is csak a cardialis táj után visel gyomornedvmirigyeket.

A cardialis táj hámsejtjei hengeresek, 35—40 μ magasak, a vastagságuk 8—10 μ . A sejt plasmájának felső $\frac{2}{3}$ -a szemcsés, egynemű, s az alsó $\frac{1}{3}$ -a az ovalis sejtmagot tartalmazza. Majd a gyomornedvmirigyek elkülönülése után olyan hámsejtekben folytatódnak, melyeknél a külső plasmából a szemcsék hiányoznak s így a protoplasma hyalin.

A gyomrhám apró, csészeszerű bemélyedéseket képez, melyek aljába a gyomornedvmirigyek szájadzanak. A gyomornedvmirigyek szűk lumenű csövek, melyek többedmagukkal közös kivezető csövekbe szájadzanak. Ezen mirigykivezető csövek mélyen alányúlnak a hámból s faluk indifferens hámból áll.

A gyomor pyloralis táján megszűnnek a mirigyek s a hengerhámban megjelennek kehelysejtek, melyek a gyomor miri-gyes tájain nem fordulnak elő.

A gyomor hámsejtjei általában egyforma kialakulásúak egészen végig. A sejtek jól elkülönült záróléczek által vannak felső részükön összekötve, melyek alatt sejtközötti hézagok nyílnak. A sejtek cuticularis szegélye vékony, 1—1.5 μ , benne, illetőleg alatta sötét pontsor csaknem minden tájon kivehető.

Ezen pontsorok és az eddig is már említett pontsorok miltéte felől felvilágosítást nyújtanak a *Conger* cardialis hengerhámsejtjei, melyeken nemcsak a pontsorok vannak jelen, hanem velük összefüggésben kifelé következnek csillangók is.

TRINKLER (45) szerint a csillangós hám az alsórendű gerinczesek gyomrában a lárvakori állapotból marad fenn. Így a pontsorok sem lehetnek mások, mint basalis testecskék. Ezek a pontsorok is csak basalis testecskék lehetnek. Így a gyomor hámját borító cuticula is a hámsejtek csillangóinak a csökevényes maradványa, mely csakis a basalis testecskéből és az ezen kívül fekvő hosszabb vagy rövidebb, mozdulatlan csillangó kezdeti részéből áll. Ez a következtetés különben nem áll ellentétben az eddigi ismeretekkel, mert — az Amphioxusra nem akarok hivatkozni — a csontos halakkal közel rokon ganoid halak előbelében a csillangós hám általánosan elterjedt. MACALLUM (26) vizsgálatai szerint a porczos halak oesophagus-hámja csillangós. A gyomor hámja is egészen csillangós az *Amia*-nál, a *Lepidosiren*-nél csak a pylorus-tájék, az *Acipenser*-nél pedig csak a gyomor nem csillangós. Ebből is kitűnik, hogy már a ganoid halaknál sem általános az egész előbél csillangós volta.

HOPKINS (22) szintén egy egész sereg ganoid halnál észlelt az előbélben csillangókat, észleletei szerint ha hiányzanak, rendszeren a pars pylorica-ban sincsenek jelen.

A Conger gyomrának kötőszöveti fala a felette levő hám-mal és mirigyekkel egyetemben redőkbe emelkedik s a kötőszövetnek a redőkbe nyúló része tömött, míg az egészet burkoló laza, közbeszótt sok sima izomrosttal.

Az izomréteg belső gyűrűs és külső hossziránt futó sima izomrostokból áll, melyek a belső gyűrűs rétegben egymás mellé rendeződött nyalábokba vannak szedve.

A savós hártya nem tér el semmiben az eddigiektől.

A *Motella vulgaris* gyomorhámját azért emelem ki, mert magas hengersejtjei, melyek külső részükben egészen szemcsétlenek, a cuticularis pontsor vizsgálatára különösen alkalmasok. A sejtek 20 μ magasak és 6—8 μ szélesek. A cuticularis rész 2—3 μ vastag s ennek a középrészén látszanak a kicsiny pontsorok.

Középbél.

A csontos halak középbéle a gyomortól rendszeren jól kifejlett pyloralis billentyűvel van elválasztva. Az elzárást biztosítja

még a pylorus-táj erősebb izomzata. Rajta olyanféle tájakra különülést, mint a magasabb gerinczeseknél, hiába keresünk. Még a szöveti felépítésében sincs különbség a felső és alsó tájak között, legfeljebb a felső tájak sejtjei tömöttebben tartalmaznak felszitt anyagszemcséket, mint az alsók, viszont az alsó táj több kehelysejtet tartalmaz, mint a felső táj. Egészen az utóbél kezdetét jelző valvuláig egységes kialakulást találunk. Szöveti felépítése egyhangú, a gerinczesekre jellemző nyálkahártya, izomréteg és savós hártya egymáshoz való viszonya csak árnyalatban mutat eltéréseket. Az általános megegyező kialakulást érthetővé teszi, hogy ezen bélrész működésében egyáltalán nem variál. A mi még érdeklődésünket lekötheti, az az eredmények összevetése s histológiai összehasonlítása.

A középbél hámja mindig hengerhám, melyet közbeiktatott kehelysejtek jellemeznek. Ezeken kívül vannak egyes szétszórta fekvő sejtek, melyek a hengeres sejtek alapi részei között foglalnak helyet, s az elpusztuló hámsejtek pótlására, tehát a hám regenerálására szolgálnak. Abban BIZZOZERO-nak (3) igaza van, hogy a hámgyödrök aljában (fornices) leggyakoribb a magoszlás, de a redőeleken is elég gyakori. Így a regeneratio sincs éppen a forniceshez kötve, a mit különben másutt (4) ő is kiemel. Ugyanis észleli, hogy a hám regeneratiója a hám alaphártyáján levő csirasejtekből is történik. Ezen rendes hám-elemek kivül nagy számban találunk a sejtközötti hézagokba befurakodott vándorsejteket, melyek a hám védelmi berendezését czélozzák. Egészen feleslegesnek tartom ARCANGELI (1) hámfelosztását, mely szerint külön felszívó és külön assimiláló sejteket különböztet meg. A hámfelület sohasem síma, hanem azon redők futnak le, melyek legegyszerűbb esetben hosszirányúak, majd haránt kiemelkedésekkel együtt gödörserű mélyedések állanak elő, melyek apróbb hámkiemelkedések által még apróbb kelyhecskékre tagolódhatnak. A csontos halaknál nagyon ritkán fordul elő kehelyszerű kinövés.

A hámalatti kötőszöveti réteg nagyon jól fejlett. Elemei: kötőszöveti sejtek, lazán futó rostok, beszótt síma izomsejtek, melyek a hámréteg alatt, a muscularis mucosæ rétegben tömött lemezbe rendeződve fordulnak elő. A kötőszöveti laza rétegben

sok véredény, de különösen sok lympháüreg és edény észlelhető. Ugyancsak nagy számban vannak szemcsés leukocyták, melyek néha csaknem zárt lemezeket alkotnak.

A muscularis belső gyűrűs és külső hossziránt futó sima izomsejtekből van összeszöve. A két réteg közül mindig a belső gyűrűs az erősebben fejlett. A muscularis általában a gyomortól a végbél felé, mint azt BIENENFELD (2) is kimutatta, fokozatosan vékonyodik, az utóbélen azonban hirtelen megvastagszik.

A serosa kevés tömött kötőszövetből és azt megfekvő endothelből áll.

A hámsejteknek az egyes halaknál való vizsgálata meggyőző bennünket arról, hogy a sejtek protoplasmája, sejtmagja és u. n. cuticulája nagyon is különböző kialakulást mutathat. Alaphártya vagy van, vagy pedig nincsen.

A *Crenilabrus pavo* (XI. tábla, 2. ábra), a *Labrus turdus* s a *Coriscus rostratus* hámsejtjei a finom alaphártyán ülnek, melyhez elvékonyult talprészük tapad. A sejtek protoplasmája alól világosabb, mint a sejtmag feletti részben. A sejtmagok közepén fekvők, ovalisok, dús chromatinnal. A sejtek közötti hézagokba vándorsejtek nyomulnak be s itt-ott az alaphártyán regeneráló sejtek nyugosznak. A sejtek szabad felületéről a tengelyükkel párhuzamosan rostozott cuticula emelkedik, melyen a sejteknek megfelelően megszakadások látszanak, melyeknek az alján kis gödörkék vannak, melyeket a záróléczek határolnak el. A szemcsés protoplasma és cuticula között itt is feltűnik az előbélnél tárgyalt pontsor, mely festődéséből ítélve, itt is basalis testecske eredetű lehet.

A hámsejtek sorában álló kehelysejtek kezdetben szemcsés, majd hyalinná duzzadt nagy vacuolát zárnak be, melyből a váladék a fedőszerű cuticula-darab leválása által kerül ki.

A *Gobius niger* hámsejtjei csaknem zártan sorakoznak egymás mellé. A sejtközötti hézagok sokkal keskenyebbek, ezekben vándorsejt alig található. A mi talán összefüggésben áll azzal, hogy a sejteket a lumen felől borító cuticula egészen zárt, a sejteknek megfelelő elkülönülések nincsenek s a záróléczek is közvetlenül a cuticulához csatlakoznak. A sejtsorban aránylag

kevés kehelysejt van, de ezek igen nagyok, gömbölyű vacuolával, mely csak a lumen felé csúcsosodik ki kissé. A ponttestecskék egyenkint nem láthatók, de egész soruk, mint szakadatlan vonal, a protoplasma külső felületén közvetlen a cuticula alatt látható.

Különös figyelmet érdemelnek a *Scorpaena scropha* és a *Trigla hirundo* bélhámsejtjei. A sejtjeik aránylag nagyok, különösen a Scorpaenáéi 30 μ magasak, 5—8 μ szélesek. A Triglaéi alacsonyabbak s egyszersmind szélesebbek. A cylindrikus sejtek között mindkettőnél sok ovalis vacuolájú kehelysejt van. A sejtek erős alaphártyán ülnek. A sejtek szabad felülete a Scorpaenanál 10 μ , a Triglanál 12 μ magas cuticulával van fedve, mely mindkettőnél finom szálacskákból van összetéve, sok helyen ezen szálacskák egészen szét is válnak, mintha csillangók volnának. Ez a cuticula tehát valójában pálczikás szegély. S ezen pálczikás szegély alsó felületén, közvetlenül a plasmán ülve a Scorpaenanál a ponttestecskék is felötlenek, a Triglanál azonban nem. A Scorpaena és Trigla kehelysejtjei tartalmukat tekintve eltérnek a többi általam vizsgált csontos hal ilyen sejtjeitől, ugyanis ezen kehelysejtek kehelyvacuolájában hámateinnal élesen festett, fonalgomolyhoz hasonló csapadék jelentkezik.

Ugyancsak pálczikás szegélyként van a cuticula a *Smaris alcedo* középbélhámsejtjein is kialakulva s itt a pontsor és szemcsézett plasma közé igen tiszta plasma-rész iktatódik közbe, miáltal úgy látszik, mintha a sejteknek cuticulájuk és ezen pálczikás szegélyük lenne kifejlődve, az álcuticula külső határának a ponttestecskék sorát véve.

Nagyon hasonló ehhez a kialakuláshoz a *Bleinius gattoruginae* hámcuticulája, mely 35—40 μ magas hengersejteken fekszik. A cuticula látszólagos vastagsága 2.5 μ , a cuticula vastagságának alsó harmadában azonban finom pontsor húzódik, mely sejtről sejtre egy-egy vastag rövid pálcza által, a mely a záróléc keresztmetszete, meg van szakítva. Itt is a pontsoron belől fekvő plasma-rész nyilván nem cuticula.

A *Mugil capito* hámsejtjei elrendezés és kialakulás tekintetében a közönséges típussal megegyezők. A magas henger-

sejtek felső részükkel szorosan egymás mellé illeszkednek s a szabad felületüket egységes hyalin cuticula borítja; a cuticula és plasma közé zárt vonal iktatódik, melyet az egymáshoz igen közel fekvő ponttestecskek alkotnak.

A *Mullus barbatus* középbél-hámja alig észlelhető vékony cuticulát visel, mely alatt a sejtektől elkülönült pontsor egyáltalán nem észlelhető. Azonban a cuticulán minden sejtnék megfelelő darab keresztmetszetben élesen meg van jelölve egyegy sötét, ovalis testecske által, mely nem egyéb, mint a zárólécz keresztmetszete, mely itt a cuticulával össze van olvadva.

A *Corvina nigra* középbél-hámsejtjei alakjukban térnek el a típustól. A sejtek csúcsukon álló kúpokhoz hasonlítanak s e széles kúptalp a lumen felé esik s itt ezeket kb. 3 μ vastag, teljesen egyneműnek látszó cuticula borítja. A cuticula s az alatta levő sejtek között nem észleltem ponttestecskéket s mintha e sejtek közvetlenül, zárólécz nélkül érintkeznének szabad végükkel. A tág sejt közötti hézagok egészen a cuticuláig felnyúlnak.

A *Sargus annularis* középbél-hámja az előzőével ellentétesen minimalis sejt közötti hézagokat tartalmaz, a sejtek henger alakúak, 30 μ magasak s aránylag vastag (5—6 μ) cuticulával bírnak, mely egészen szerkezet nélküli. A sejt plasmája és a cuticula között egy igen vékony, szintelen vonal húzódik, melyben semmi elkülönülést sem tudtam észlelni. Ez a vonal ott fekszik, a hol a legtöbb hal középbélhámjában a basalis testecske-sort észleltem.

A *Box salpa* középbél-sejtjei (XI. t. 1., 4. és 5. ábra, X. t., 2. és 6. ábra) hengerek, kb. 70 μ magasak, 3—4 μ vastagok. Ki kell emelnem elsősorban a kehelysejtjei miatt, melyek nála, valamennyi általam vizsgált halak között, a leg-tömöttebben sorakoznak a hámban. ARCANGELI (1) szerint intercellularis járatok csak az emésztő egyének hámjában képződnek. A kehelysejtek palaczkformájúak, melyek szűk, nyakszerű elvékonyodással a sejtek cuticuláján keresztül — úgy látszik — hosszasan megmaradó nyílással szájadzanak. A cuticula lemezszerű, közvetlen megfekszi a hámsejteket, a pontsor, ha elő-

tűnik, a felszíntől néhány μ -nyira beljebb fekszik a protoplasmában. Különösen a pylorus-függelékek hámszámban észlelhető, míg a bélcső hátrább eső részeiben ritkábban tűnik fel.

A nyálkahártyaréteg kötőszövetét illetőleg összehasonlítás által meggyőződhetünk, hogy ennek a fejlettsége a bél hámszámban a redőzöttségével egyenes arányban áll. A kötőszöveti réteg legfejletlenebb azoknál a formáknál, melyeknél a redőzöttség minimális, míg legfejlettebb ott, ahol a hám sok redőt, esetleg bohólyszerű nyúlványokat visel.

A *Conger conger* és a *Motella tricirrata* középbelének kötőszöveti rétege kötőszöveti sejtekből és ezek közti anyagból áll, melyben rostos elkülönülés alig észlelhető. Már fejlettebb és változatosabb a *Mullus barbatus*, *Corvina nigra*, *Sargus annularis* és *Box salpa*-nál, a melyeknél a kötőszövet tömöttebb és tekintélyesebb vastagságban fordul elő, a muscularis mucosæ, mely az előzőknél alig van kifejlődve, itt egészen jól kivehetően követi a hám hullámzását. A *Scorpaena scropha*, a *Trigla hirundo*, a *Smaris alredo*, a *Heliastes chromis* és a *Mugilo capito* kötőszövet-rétegei megegyeznek abban, hogy dús réteget alkotnak, melyben a kötőszöveti sejtek igen sűrűn vannak kifejlődve, nagyon kevés köztes állománnyal. A *Labrus turdus*, a *Crenilabrus pavo*, *Coricus rostratus*, a *Gobius niger* és a *Bleenniuss galloruginae* ellenben igen vastag kötőszöveti réteggel tűnnek ki, melyben kötőszöveti sejtek csak szórványosan jelentkeznek. Ez utóbbiak közül különösen a *Gobius* kötőszöve válik ki az által, hogy fejlettségében alig áll magasabban, mint egy embryonális, kocsonyás kötőszövet.

Az izomréteg mindig sima izomelemekből van összeszöve s rendszeren egy belső gyűrűs és egy külső hosszantfutó rétegre van szétválva. A két rétegből a gyűrűs mindig erősebben fejlett.

Az izomzat fejlettségét illetőleg három typust lehet megkülönböztetni. Az első typusba tartoznak azok, melyek bélizomrétege tekintélyes vastagságú, a bélfala vastagságának legalább felét, azonban annak többszörösét is teheti, pl.: a *Labrus turdus*, *Crenilabrus pavo*, *Coricus rostratus*, *Gobius niger*, *Conger conger* és a *Motella tricirrata*. A *Motella tricirrata* bélizomzata

még azért érdemel külön említést, mert az általános két rétegen belől még egy zárt, hosszant futó réteg van kifejlődve. A második típusba tartoznak azok, a melyek izomvastagsága a bélfalnak fél-vastagságát nem éri el, de $\frac{1}{4}$ -énél vastagabb; ide sorolom a *Box salpa*, *Sargus annularis*, *Mullus barbatus* és *Bleinnius gattoruginae* bélizomzatát. Végül a harmadik típusba tartoznak azok, a melyek bélizomzata a bél egész falvastagságának az $\frac{1}{4}$ -ét sem üti meg. Ezek a *Smaris alcedo*, *Mugil capito*, *Mugil chelo*, *Scorpaena scrofa*, *Trigla hirundo*, *Corvina nigra*, *Helicastes chromis*.

Ha ezen három typust összevetjük, feltétlenül szembeötlik, hogy a gyomor fejletlensége rendszeren izmosabb középbéllel jár együtt. Mintha azt az izommennyiséget, a mely a gyomor falában felhalmozódik, a középbélen megtakarítaná a szervezet. A berendezés kialakulásának okául azt tartom, hogy a gyomortalan halak középbelébe nem folyékony táplálék jut, miként a gyomrosokéiba s a bél falának a gyomortalanoknál nagyobb izommunkára van szüksége a szilárd táplálék teljes megemésztéséig való továbbítására. A *Labridae* «zabálása» is mindenesetre a gyomruk hiányának vagy kezdetleges fejlettségének a folyománya. Ezeknél tehát a középbél is állandóan «erős munkában» van.

Még a savós hártya összehasonlító vizsgálata hiányzik. Ennek a határlemeznek a kialakulása változatos, fejlettsége arányos a muscularis fejlettségével, a mennyiben erősebb muscularisa vastagabb serosa-val van borítva. Vastagsága 1 μ . (*Mugil*) és 15 μ . (*Box*) között ingadozik; szöveti elemei kötőszöveti sejtek, melyek tömött, többnyire hyalinszerű kötőszöveti lemezt hoztak létre. A lemezek a hosszantfutó izomrétegbe is benyomulhatnak (*Gobius*, *Box*). Az endothel, mint általában, igen lapos sejtekkel fekszi meg az említett kötőszöveti hártyát. Megemlítésre érdemes, hogy a bél nagyobb véredényei és lymphaedényei a serosában ágaznak szét vékony edényekre, melyek a muscularis kötőszöveti sövényeit áttörve jutnak be a mucosa kötőszövetébe és a bélhám alá.

A csontos halak középbelének szöveti kialakulása sokkal egységesebb képet ad, mint a már külső morfológiájában is

változatos előbél. Ez természetes is, mert a működése csupán csak a felszívásban nyilvánul, tehát mint ilyen egy irányban differenciálódott szerv, már az ősgérczeseknél ugyanezt a funkciót végezte. Rajta tehát működés, változás által kiváltott szöveti kialakulás alig észlelhető. Azaz hogy mégis van a közép-bélnek is új differenciálódása, az *appendices pyloricæ*, melyek a csontos halak nagy részénél és rajtuk kívül a ganoid-halak nagyobb részénél szintén megvannak. GEGENBAUR (18) egy czápánál (*Scymnus*) is talált két ilyen vakbél szerű függelék, melyet ő a porczos és csontos halak app. pyl. előfutárjának vél. Azonban ezt ilyen általánosságban állítani nem reális, mert hiszen nagyon közel rokon halak egyike el van vele látva, másikánál hiányzik. Ez pedig a gyomorműködés által kiváltott reagálás mellett tanúskodik. Ezen vakbél szerű függelékek mindig a gyomor után következnek s a közép-bélbe való szájadzásuk magassága alatt nyílik be rendesen a máj és hasnyálmirigy vezetéke. A számuk 2—500 között ingadozik. Az app. pyloricæ azonban szöveti kialakulásukban nem mutatnak ujságot, amennyiben a közép-bél falának keztyűszerű kitüremlései, melyekben a közép-bélnek mind a három rétege azonos sorrendben, azonos kialakulásban vesz részt. Keletkezésükre vonatkozólag WEBER (43) azt véli, hogy éppen úgy, mint a többi bélmirigy, az ősgérczes bélhámjának a mirigyeiben volt megalapozva. Szerintem az *appendices pyloricæ* előállításának a lehetősége a bél falának a szerkezetéből következett. Ugyanis azon gyomros halaknál is, melyeknek pylorus-függelékei nincsenek, az ezeknek megfelelő helyen, pl. a Congernél is, igen vékony izomréteget találunk, melynél a gyomor izomrétege 4—5-ször, a vékonybél 3-szor vastagabb. Ezáltal a bélfelület növekedésekor ezen rész könnyen kigyűrődhetik. Ez EGOUNOFF-nak (14) a lazacon végzett vizsgálatából is kitűnik, nevezetesen csak akkor fejlődnek ki, mikor már a bél fala teljesen kialakult, ugyanis ez keztyűujjmódra kitüremkedik.

Az *appendices pyloricæ* nek a közép-béltől való külön szöveti tárgyalása nemcsak hogy felesleges, de helytelen is. Az ilyen értelmű szétválasztás abból az időből maradt fenn, mikor ezeket még a halak hasnyálmirigyeinek tartották.

Már BLASIUS hasnyálmirigyeknek tartotta őket. Ma, hogy a halak valamennyijének hasnyálmirigyét ismerjük, ez a feltevés magától esik. BOUDOUY (7) feltevése, hogy nyálkakészítő szerv, szintén indokolatlannak látszik, mert hiszen akkor az azonos szöveti felépítésű középbél is mint olyan működne. Vizsgálataim során kifejlődésükre vonatkozólag azt a tényt állapíthattam meg, hogy bizonyos összefüggés van a gyomor- és pylorus-függelékek között.

Nevezetesen azoknak a halaknak, melyeknek gyomruk van — értve ez alatt gyomornedvmirigyes, jól kifejlett gyomrot —, csaknem mindig van *appendices pyloricæ*jük, míg a gyomortalanoknak soha sincs. Ebből következik, hogy azoknak a halaknak, melyekben *appendices pyloricæ* vannak, mindig jól fejlett emésztő gyomruk van.

Most már ha összehasonlítjuk a gyomornélküli, a gyomros pylorus-függelék nélküli és a gyomros pylorus-függelékű halak középbelét, okvetlenül szembe ötlük, hogy a gyomornélküli halak középbelé aránylag a legrövidebb, a pylorus-függelék nélküli gyomrosoknál többnyire a leghosszabb, míg a pylorus-függelékeseknél közbeeső hosszúságú a középbél.

A gyomor azáltal, hogy felszívásra alkalmas táplálékot is juttat a középbélbe, annak a kialakulására lényeges befolyást gyakorol. A pylorus-függelékek sem tekinthetők másnak, mint a gyomor-emésztés eredményét felszívó középbél-résznek. Nevezetesen a gyomorból jövő pépszerű anyag közvetlenül a pyl.-függelékekbe kerül, még mielőtt az epével és hasnyállal keveredhetne.

A vakbél szerű függelékekben visszamaradt, nagyobb részben még emésztetlen pép azok izomfalának összehúzódása következtében a középbél lumenébe kerül, a hol az epe és hasnyál enzimei hathatnak rája.

A berendezés physiologiai működésének magyarázásába nem bocsátkozom, mert célomon kívül esik.

Utóbél.

A csontos halak utóbele a középbél alsó részétől gyűrűs valvula által van elválasztva. Ugyancsak a valvula alatt már jelentkezik az utóbél erős izomzata, ennek felső része mint sphincter is működik.

Az utóbél szöveti kialakulása csaknem teljesen egybevégo valamennyi csontos halnál. A bélrétegek ugyanazok, mint a középbélnél, s a rétegek sorrendje is ugyanaz. A hám mindig magas hengerhám, melyet cuticula határol, azonban minduntalan át van lékelve a töméntelen számú kehelysejt szájadzása által s néhol a redők mélyén nagyobb számban találunk osztódásban levő sejteket (XI. t., 7. ábra), a melyeknek az összeségét mint csirafészket foghatjuk fel. A sejtek protoplasmája habos, a fejlődő kehelysejteké vacuolás. A sejtmagok a sejtek közepmagasságában vannak elhelyeződve. A nyálkahártya rétege sokkal vastagabb és tömöttebb, mint a középbélen. Úgyszintén fejlettebb az izomréteg is, mely mint a középbélen, szintén gyűrűs és hosszantfutó lemezekbe szótt sima izomsejtekből áll s csak az anus-sphincter tartalmaz megint harántcsikolt izomrostokat. A serosa szintén vastagabb és tömöttebb, mint a középbélen (pl. *Crenilabrus*-nál 25—30 μ).

Nagy számmal találunk még az utóbél hámban vándorsejteket is, melyek szerteszórtan a hámban és kötőszöveti rétegben fordulnak elő.

A bélcső leukocytái.

Megelőzőleg már többször megemlítettem, hogy helyenkint a bélcső szöveteiben kisebb-nagyobb számban lehet leukocytát észlelni. Megjelenésük a bélcsőben, úgylátszik, nem minden rendszer nélkül történik. A bélcső egyes részleteit vizsgálva azt találjuk, hogy különösen az előbél az, tehát az oesophagus és a gyomor, a hol nagyobb számban jelentkeznék, mint a közép- és utóbélben. A bélben való eloszlásuk, úgy látszik, védelmi berendezésül szolgál betolakodó idegen szervezetek ellen, esetleg más, előttem nem ismeretes feladat teljesítésére is. ARCAN-
GELI (1) szerint enzimákat is termelnek, de a felszívódáshoz

semmi közük sincsen. Ugyanezt állítja DE WAELE (42) is, de hozzáteszi még, hogy működésük: szervezetvédelem s a káros szövet-szétesések eliminációja. Én itt csak a tényt akarom megállapítani, mely szerint a leukocyták eloszlása történik.

A bél leukocytáinál a kevés plasmájú vándorsejtektől a bél szöveteinek egyes helyein legalább ideiglenesen megállapodott granulás plasmájú, óriás termetű, szintelen véresejtekig szakadatlan átmenet vezet. Egyik helyen az apróbb, más helyütt vegyesen, minden átmeneti formában, ismét máshol többnyire a nagy szemcsés leukocyták dominálnak. A különböző csontos halaknál az egyes sejtfarmák között nincs lényeges különbség, illetőleg a különbség a tárgyak kicsinysege miatt talán észlelhetetlen.

Itt különösen a *Heliastes chromis*-on (Pomacentridæ) észlelt leleteimet akarom részletezni. A leukocyták mint vándorsejtek felynomulnak egészen a bélhámig, sőt azt a bélüreg felé el is hagyhatják. Azok a leukocyták, a melyek itt a sejtek közötti hézagokba befészkelődnek s a sejtek alapi részéhez közel hosszabb-rövidebb ideig vesztegelnek, lassankint megtelnek szemcsékkel s miut ilyenek a mucosa kötőszöveti rétegébe húzódnak vissza, a hol tömegesen zárkozhatnak egymás mellé. A bél izomrétegében, a serosában s a bélfalon kívül talált sejtek meg azt bizonyítják, hogy azok a szervezetben tovább vándorolnak, magukkal czipelve azt a tartalmat, melyet a hám- és a kötőszöveti rétegben felvettek. A tartalmukra vonatkozólag kiemelem, hogy az a bél lemezéből kerül beléjük, s a rögzített præparatumon észleltek alapján, a sejtek felületébe vándorolva, ott felvétetik. Ezek a felvett testecskek részben bakteriumok, részben ezek szétesett törmelékei. A bél lemezében ugyanis, közel a hámfelülethez, ugyanazon mód színezett testecskek jelentkeznek, a melyek, bár módosult formában, de szintén azonos színárnyalatban festve a szemcsés leucocytákban is jelen vannak.

Feltüntetésükre hæmatein-eosin kettős festéssel túlfestett, majd pedig hig salétromsavval szintelenített metszeteket használtam. Ezen esetben a leukocyták sötétbarnák, egész kékesfeketék lettek, míg a többi szövet a festéket kiengedte.

A *Smaris alcedo*-nál sokkal elszórtabban jelentkeznek az előbélben. Úgyszintén a legtöbb más halnál is.

A bél hizósejtjei nem egyebek ezen nagyranövekedett vándorsejteknél, melyek a hámtól a kötőszövetbe levándoroltak.

Összefoglalás.

Vizsgálati eredményeim veleje néhány pontba foglalva a következő:

a) A csontos halak bélcsatornájának egyes differenciálódott tájai között szoros fokozati különbségek vannak, melyek nem mint szétválasztó, hanem mint összekötő kapcsok szerepelnek. Az indifferens előbél *oesophagus*a fokozatosan vezet át a jól differenciálódott fundus-zsákkal ellátott gyomorhoz. Az egyes fokok az általam vizsgált esetben alólról felfelé a következők: 1. az előbéli *oesophagus* táj teljesen egynemű kialakulású egészen a középbélig, jellemző reá a kehelysejtes hám és a harántcsikolt izomzat (*Labrus*, *Crenilabrus*); 2. az *oesophagus* alsó tája tápreservoirrá tágul, jellemző az *oesophagus* felső részében a többrétegű kehelysejtes hám, az alsó táján pedig az egyrétegű hengerhám — mirigyek nélkül —, izomrétege harántcsikolt (*Coricus*); 3. az *oesophagus* többrétegű kehelysejtes hámjára egyrétegű hám következik, mely mirigyeket visel, tehát igazi gyomor, harántcsikolt izomelemek egészen a középbélig húzódnak, külsőleg a gyomor itt sem különböztethető meg az előzők ugyanezen tájaitól (*Gobius*); 4. a gyomorhám jól fejlett, jól fejlettek a mirigyek is, csaknem végig harántcsikolt izomzat van, ha fundus-zsák van, az igen fejletlen (*Box*, *Blennius*); 5. a gyomor hámjá pompásan fejlett gyomornedvmirigyes hámmal tűnik ki, harántcsikolt izomelemek csak a cardialis rész alatt, a fundus-zsáig terjednek, melynek az izomrétege tisztán sima izomsejtekből áll (*Heliastes*, *Scorpæna*, *Trigla*, *Smaris*, *Mugil*); 6. a gyomor olyan, mint a megelőző csoportnál, azonban a harántcsikolt izomelemek a cardialis tájon egy csapásra megszűnnek (*Conger*).

b) Az *oesophagus* hámjában helyenkint egyrétegű hám-szigetek vannak, melyek alatt bő véredények futnak (különösen nagyok a *Congernél* és a *Motellánál*), melyek jelentőségére sem

a rendelkezéseimre álló irodalom, sem vizsgálataim nem nyújtának kellő felvilágosítást.

c) A bélhámban jelentkező cuticula és pálczikás szegély alatt közvetlenül apró testecskék sora észlelhető, melyeket én a csillangós sejtek basalis testecskéivel azonosoknak tartok. Úgyszintén azonosnak vélem a bélcuticulát és az ú. n. pálczikás szegélyt is, a mennyiben ezek a csillangók alapi testecskéire következő mozdulatlan csillangó-alaptagoknak felelnek meg, melyek vagy külön-külön maradnak: pálczikás szegély, vagy pedig többé-kevésbé összetapadva hézagok maradnak: likacsos csatornás cuticula, majd pedig az összeolvadásuk teljes: egyenmű cuticula, ez utóbbin néha még merőleges rostozottság is marad fenn.

d) A pylorus-függelékek correlatióban állanak a gyomor fejlettségével, de nem megfordítva. Nevezetesen minden általam vizsgált, pylorus-függelékkel viselő halnak jól fejlett valódi gyomra van, ellenben az igazi gyomrú halak nem mindenikének van pylorus-függeléke.

Irodalomjegyzék.

1. ARCANGELI, A., I cambiamenti nell' epitelio intestinale de Box salpa L. durante l'assorbimento. Arch. Ital. Anat. Embr. Firenze. Vol. 5 p. 150—176 4 F. T. 7.
2. BIENENFELD, B., Das anatomische Verhalten der Muscularis mucosæ in Beziehung zu ihrer physiologischen Bedeutung. 1903. in: Arch. ges. Physiol. Bd. 98. p. 389—402.
3. BIZZOZERO, E., Sulla rigenerazione dell' epitelio intestinale nei Pesci. 1903. Atti Accad. Sc. Torino. Vol. 38 p. 966—78, 1 tav.
4. BIZZOZERO, E., Sur la régénération de l'épithélium intestinal chez les poissons. 1904. Arch. ital. biol. Vol. 233—245.
5. BIZZOZERO, G., Über die schlauchförmigen Drüsen des Magendarmkanals und die Beziehungen ihres Epithels zu dem Oberflächenepithel der Schleimhaut. Arch. Mikr. Anat. 40. Bd. p. 325—375 T. 18—19., 1889 u. o. 42. Bd. p. 82—152 T. 7—10. 1892.
6. BLANCHARD, R., 1. Sur les fonctions des appendices pyloriques. Bull. Soc. Zool. France 1883 VIII. p. 143—146.
7. BOUDOY, T., Du rôle des tubes pyloriques dans la digestion chez les Téléostéens. Arch. Zool. Exp. (3) VII. p. 419—60.
8. BOUDOY, T., Recherches sur la valeur physiologique des tubes pyloriques de quelques Téléostéens. Compt. Rend. T. 128 p. 745—46.

9. DU BOIS-REYMOND, R. Über quergestreifte Darmmuskulatur, insbesondere der Schleie, Diss. Berlin p. 44. 1889.
10. CAJETAN, J., Ein Beitrag zu der Lehre von der Anatomie und Physiologie des Tractus intestinalis der Fische. Diss. 28 pag. Bonn 1883.
11. CARUS, C. G., Erläuterungstafeln z. vergleich. Anat. 4. Heft. Verdauungsorgane. Leipzig, 1835.
12. CATTANEO, G., Istologia e sviluppo de tubo digerente dei Pesci. Atti Soc. Ital. Sc. N. Milano. Vol. 29. p. 73—132. T. 1—3. 1886.
13. EDINGER, L., Über die Schleimhaut des Fischdarmes, nebst Bemerkungen zur Phylogenese der Drüsen des Darmrohres. Archiv f. mikr. Anat. Bd. XIII. p. 651—692. 1876.
14. EGOUNOFF, S., Développement histologique du tubes digestifs de la Truite. R. Suisse Z. Tome 15. p. 19—74. T. 2., 3.
15. EPELING, H., Dünndarmrelief und Ernährung bei Knochenfischen. Jena. Zeitschr. f. Naturw. 43. Bd. p. 417—529. T. 16—18.
16. FLEMING, W., Über Cuticularsäume und ihren Bau etc. Münchener Med. Wochenschr. No. 48. 4. p. 1898.
17. GEGENBAUR, C., Bemerkungen über den Vorderdarm niederer Wirbeltiere. Morph. Jahrb. Bd. IV. p. 314—19. 1878.
18. GEGENBAUR, C., Über Cöcalanhänge am Mitteldarm der Selachier. 1892. Morph. Jhrb. XVIII. Bd. p. 180—184.
19. HALLER, B. gr. L. d. vergleichenden Anatomie. 1904. Jena.
20. HALLER, B. gr. Zur Anatomie und Histologie von Luvarus imperialis. Vergleichende physiol. Studien. Adria, von Krukenberg. 4. Abth. p. 1—20.
21. HILTON, W. A., On the Intestine of *Amia calva*. Amer. Natural. XXXIV. p. 717—727.
22. HOPKINS, G. S., On the Enteron of American Ganoids. Journ. Morph. Boston. Vol. 11. p. 411—442. T. 25a, 25b. 1895.
23. HOWES, G. B., On the intestinal canal of the Ichtyopsidie etc. Journ. Linn. Soc. London. Vol. 23. p. 381—410. T. 1., 2.
24. KOHLBRUGGE, J., H. F., Bijdragen tot de natuurlijke Geschiedenis van Menschen en Dieren. Nat. Tijd. Nederl. Indie. Batavia, 55. Deel, p. 33—56.
25. LAGUESSE, E., Structure du pancreas et pancreas intrehepatiques chez les Poissons. Compt. Rend. Tome 112. p. 440—42.
26. MACALLUM, A. B., The alimentary canal and pancreas of Acipenser, *Amia* and *Lepidosteus*. Journ. Anat. Phys. London, 1886. Vol. 20. p. 604—36. T. 20.
27. MEEK, A., On the Structure of *Trachypterus arcticus*. Stud. Mus. Z. Dundee Vol. 1. No. 6. 24. p. 2. Taf.
28. MONTI, R., Sulla morfologia comparata dei condotti escretori delle ghiandole gastriche nei Vertebrati. Boll. Sc. Pavia 1898. Anno 20. p. 33—39., 65—75., 101—108. 2. Taf.

29. OPPEL, A., Die Magendrüsen der Wibelthiere. Anat. Anz. 11. Bd. p. 596—601. 7 Fig. 1896.
30. OPPEL, A., Über die Funktionen des Magens, eine physiologische Frage im Lichte der vergleichenden Anatomie. 1896. Biol. Centrbl. 16. Bd. p. 406—10.
31. OPPEL, A., Lehrbuch der vergleichenden mikroskopischen Anatomie der Wirbeltiere. I., II., III. Theil. Jena 1896., 1897., 1898.
32. PILLIET, A., Sur la structure du tube digestif de quelques poissons de mer. Bull. Sc. Z. France 10. tome. p. 283—303. 1885.
33. PILLIET, A., Note sur l'estomac des Pleuronectes. C. R. Soc. Biol. Paris (9) Tom 5. p. 881—2. 1893.
34. PIPER, H., Die Entwicklung von Magen, Duodenum, Schwimmblase und Milz bei *Amia calva*. Arch. Anat. Suppl. 1902. pp. 1—78. pls. I—IV.
35. ROWNTREE, W., On some Points in the Visceral Anatomie of the Characinidæ. etc. Trans. Linn. Soc. London (2) Vol. 9. p. 47—81. T. 3. 4.
36. SANCTIS, L. DE, Morfologia delle appendici piloriche dei Pesci ossei. R. Accad. dei Lincei, 2. ser. vol. II. 1875.
37. SCHREINER, K. E., Zur Histologie des Darmkanals bei *Myxine glutinosa*. Bergens Mus. Aarbog. f. 1898. No. 1. 16. p. 3. Taf.
38. SUNDBIK, O., Über das Bindegewebe des Fischdarmes unter bes. Berücksichtigung von Oppels Str. compactum. Anat. Anz. 30. Bd. p. 310—15. 5 Fig.
39. TRINKLER, N., Zur Kenntniss des feineren Baues der Magenschleimhaut, insbesondere der Magendrüsen. Centralbl. Med. Wiss. 21. Jg. p. 161—163. 1883.
40. TRINKLER, N., Über den Bau der Magenschleimhaut. Arch. f. mikr. Anat. Bd. XXIV. p. 174—214. T. 2. 1884.
41. YUNG, E., Sur la structure intime et les fonctions de l'intestin des Poissons. Arch. Sc. Nat. (4). Vol. VI. p. 509—11.
42. YUNG, E., et O. FUHRMANN, Recherches sur la digestion des Poissons (histologie et physiologie de l'intestine). Arch. Zool. Exp. (3) Tome 8 p. 333—51. T. 9—10.
43. DE WAELE, H., Recherches sur le rôle des globules blancs dans l'absorption chez les Vertébrés. Livre Jubil. Ch. van Bombelle. Bruxelles p. 23—67. 2 Taf. 1899.
44. WEBER, A., L'origine des glandes annexes de l'intestine moyen chez les Vertébrés. Arch. Anat. Micr. Paris. Tome 5. p. 485—727. Fig. 60. T. 17—27.
45. WEBER, A., Où passe chez les Vertébrés adultes la limite entre l'intestine antérieur et l'intestine moyen? C. R. Soc. Biol. Paris Tome 55. p. 583—84.

A VII- XI. táblán alkalmazott betűjelek értelme.

<i>a</i> = appendices pyloricæ	<i>kh</i> = kehelysejthám
<i>ah</i> = alaphártya	<i>ksz</i> = kötőszövet
<i>b</i> = basalis testeskék	<i>m</i> = izomréteg
<i>c</i> = cardialis táj	<i>mmuc</i> = muscularis mucosæ
<i>css</i> = csirasejtek	<i>muc</i> = mucosa
<i>ch</i> = epevezeték	<i>oe</i> = nyelőső
<i>cu</i> = cuticula	<i>p</i> = pylorus
<i>e</i> = hám	<i>pc</i> = pálcikás szegély
<i>és</i> = érzéksejtek	<i>pv</i> = pylorus-valvula
<i>f</i> = fundus-zsák	<i>rh</i> = regenerált hám
<i>gyi</i> = gyűrűs izomréteg	<i>se</i> = serosa
<i>gym</i> = gyomornedvmirigy	<i>s</i> = utóbéli valvula
<i>h</i> = máj	<i>sl</i> = sarcolemma
<i>he</i> = hajszáledény	<i>sh</i> = sejtközi vacuola-sor
<i>hi</i> = hosszant futó izomréteg	<i>sse</i> = subserosa
<i>hk</i> = harántesíktolt izomrost keresztmetszete	<i>szk</i> = szivacsos közti anyag
<i>ic</i> = sejtközi járat	<i>u</i> = utóbél
<i>ip</i> = izompólya	<i>v</i> = gyomor
<i>k</i> = középbél	<i>ve</i> = véredény
<i>ke</i> = kehelysejt	<i>vs</i> = vándorsejt
	<i>zl</i> = záróléc-átmetszet

A VII. tábla ábrái:

1. *Crenilabrus pavo* Brünn bélcsatornája term. n. ² 3-a
2. *Gobius niger* L " " " ²/₃ "
3. *Box salpa* (L) " " " 1 2 "
4. *Helicostes chromis* (L) " " " ² 3 "
5. *Smaris alcedo* Risso " " " ²/₃ "
6. *Trigla hirundo* Bl " " " 1 3 "

A VIII. tábla ábrái:

1. *Gobius niger* L bélcsatornája situsban term. n.
2. *Box salpa* (L) " " " " ²/₃-a
3. *Anthias anthias* (L) " " " " "
4. *Conger conger* (L) gyomorfekvése " "
5. *Motella tricirrata* (Bl) oesophagus-hám, egy rétegű regenerált hámfelülettel. Km. Rögz.: Sublimát-alcohol-ecetsav. N: 3 oc. 8 a.*

* A lencsekombinációk Reichert-féle mikroszkópra vonatkoznak.

6. *Sargus annularis* (L) juv. szájúri hámja. Rögz.: Sublimát-alcohol-salétromsav (Frenzel-f. f.). Festés: Mayer-f. timsós hæmatein-eosin. N: 3 oc. $\frac{1}{15}$ " imm.

7. *Motella tricirrata* (Bl), az œsophagus harántesíkkolt izomrostjai között kitöltő szivacsos állományú közti anyag. Rögz.: Sublimát-alcohol-ecetsav. N: 3 oc. 8 a.

A IX. tábla ábrái:

1. *Gobius niger* L. œsophagu-hámja. Rögz.: tengervíz-formalin-salétromsav (33%), 10 : 2 : 1. N: 3 oc 8 a.

2. *Smaris vulgaris* œsophagus-hámja igen vastag alaplemezzel (ah) Rögz.: 1% Chromsav-jégecet, 100 : 5. N: 3 oc 8 a.

3. *Motella tricirrata* (Bl) œsophagus-hám. Rögz.: Sublimát-alcohol-ecetsav. N: 3 oc 8 a.

4. *Motella tricirrata* (Bl) pylorusfüggelék-hám. Rögz.: mint 3.-nál. N: 1 oc 8 a.

5. *Sargus annularis* (L) juv. garathámja izlõbimbóval. Rögz.: Sublimát-alcohol-salétromsav (Frenzel-f. f.). Festés: Mayer-f. timsós hæmatein-eosin. N: 3 oc $\frac{1}{15}$ " imm.

6. *Motella tricirrata* (Bl). Mirigyszerű mélyedés a gyomor pylorus-tájáról. Rögz.: Sublimát-alcohol-ecetsav. N: 5 oc. 8 a.

7. *Coricus rostratus* alsó œsophagus-tája. A többrtegű kehelysejtes hám átmenete az egyrétegű mirigytelen alsó œsophagus-tájba. Rögz.: Sublimát-alcohol-ecetsav. N: 3 oc. 8 a.

8. *Motella tricirrata* (Bl) œsophagus-izomzatából km. Rögz.: mint 6. Festés: Mayer-féle timsós hæmatein-savanyúfuxin. N: 3 oc. 8 a.

A X. tábla ábrái:

1. *Box salpa* (L) pylorus-függelékének a gyomorhoz és a vékonybélhez való viszonyát feltüntetõ vázlatos rajz.

2. *Box salpa* (L) pylorus-függelékének a hámja. Rögz.: tengervíz-formalin-salétromsav 10 : 2 : 1. N: 3 oc 8 a.

3. *Gobius niger* L gyomorphámja. Rögz.: tengervíz-formalin-salétromsav 10 : 2 : 1. N: 3 oc 8 a.

4. *Sargus annularis* L gyomorphámja. Rögz.: tengervíz-formalin-salétromsav 10 : 2 : 1. N.; 3 oc 8 a.

5. *Motella tricirrata* (Bl) gyomorphámja a pylorus táján. Rögz.: Sublimát-alcohol-ecetsav. N.: A, B és C rajzok 3 oc 8 a, D 3 oc $\frac{1}{15}$ " imm.

6. *Box salpa* (L) középbéle, hm., muscularis, subserosa és serosa. Rögz.: mint 2. N.: 3 oc 8 a.

XI. tábla ábrái:

1. *Box salpa* (L) középbélhámja. Rögz.: tengervíz-formalin-salétromsav. N.: orth. 6 oc $\frac{1}{15}$ " imm.
2. *Crenilabrus pavo* Brünn középbélhámja. Rögz.: 6% sublimát-salétromsav 100 : 5. N.: orth. 6 oc $\frac{1}{15}$ imm.
3. *Motella tricirrata* (Bl) középbélhámja, felső tájékról. Rögz.: sublimát-alcohol-ecetsav. N.: 3 oc 8 a.
4. *Box salpa* (L) pylorusfüggeléki hám cuticularis szegélye. Rögz.: tengervíz-formalin-salétromsav 10 : 2 : 1. N.: orth. 6 oc $\frac{1}{15}$ imm.
5. *Box salpa* (L) középbélhámja. Rögz.: mint 4. N.: 3 oc 8 a.
6. *Motella tricirrata* (Bl) középbélhámja a középtájról. Rögz.: mint 3. N.: 3 oc 8 a.
7. *Motella tricirrata* (Bl) utóbele, km. Rögz.: mint 3. N.: 3 oc 8 a.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1909 június 14.-én tartott üléséből.)

A FOLYTONOS ERŐTÉR STATIKÁJA.

Ifj. SZILY KÁLMÁN-tól.

A v térfogatú testben legyen megadva egy folytonos erőter, még pedig úgy, hogy a test bármely pontjának környezetében fölvevett dv térfogatelemet támadja meg a Qdv erő és a Q fajlagos erő nagyságát és irányát illetőleg a test belsejében pontról-pontra folytonos módon változzék. Ha tehát föl vesszük a fix $O(x, y, z)$ térbeli derékszögű tengelyrendszert, akkor a Q fajlagos erőnek a tengelyek szerinti X, Y, Z vetületei a testen belül az x, y, z koordinátáknak folytonos függvényei. Vegyük fel a v térfogatú test S súlypontjában mint kezdőpontban az előbbi tengelyrendszerrel párhuzamos ξ, η, ζ tengelyrendszert és a súlyponti fajlagos erő legyen $Q_0(X_0, Y_0, Z_0)$. Ekkor a test ξ, η, ζ relativ koordináták meghatározta pontjában a Q fajlagos erő alkotói a következők lesznek:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \zeta \right) + \dots \\ Y &= Y_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \xi + \frac{\partial Y}{\partial y} \eta + \frac{\partial Y}{\partial z} \zeta \right) + \dots \\ Z &= Z_0 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \xi + \frac{\partial Z}{\partial y} \eta + \frac{\partial Z}{\partial z} \zeta \right) + \dots \end{aligned}$$

Első megközelítésben eltekinthetünk a sorkifejtésekben a magasabb rendű tagoktól, vagyis a változó erőteret a testen belül egyenletesen változónak vehetjük fel és ebben az egyszerűbb erőterben tárgyalhatjuk a vizsgált physikai tüneményt; klasszikus példa ezen eljárásra báró EÖRTVÖS LORÁND-nak a földünk nehézségi erőtere változását megállapító módszere. Azt

hisszük, hogy nem teljesen érdektelen dolog tisztára mechanikai szempontból felfogni a testben adott erőteret és így felvetni azt a kérdést, hogy a Q fajlagos erő változásában csakis az elsőrendű tagokra szorítkozva, a testet megtámadó Qdv erők rendszere statikailag hogyan redukálható. Erre a kérdésre adják meg a választ a következő sorok.

A legutolsó egyenletek szerint a Q fajlagos erő felfogható úgy, mint két vektornak geometriai összege, nevezetesen a $Q_0(X_0, Y_0, Z_0)$ vektoré és az F vektoré, mely utóbbinak vetületei a következők:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \zeta \\ F_y &= \frac{\partial Y}{\partial x} \xi + \frac{\partial Y}{\partial y} \eta + \frac{\partial Y}{\partial z} \zeta \\ F_z &= \frac{\partial Z}{\partial x} \xi + \frac{\partial Z}{\partial y} \eta + \frac{\partial Z}{\partial z} \zeta. \end{aligned}$$

A Qdv erők redukálását tehát végezhetjük úgy is, hogy előbb külön összetesszük a Q_0dv erőket és azután külön az Fdv erőket. A mi a Q_0dv erőket illeti, ezek, mint párhuzamos és egyenletes eloszlású erők, szolgáltatni fognak egy az S súlypontban támadó R eredő erőt, melynek nagysága Q_0v és melynek iránya megegyezik a Q_0 irányával.

Térjünk most át az F fajlagos erő jellemezte elsőrendű erők összetételére. Ha a redukálás alappontjául az S súlypontot választjuk, akkor az Fdv erőkből származó eredő erő zérus lesz, mert például ennek x menti alkotóját illetőleg:

$$\int F_x dv = \frac{\partial X}{\partial x} \int \xi dv + \frac{\partial X}{\partial y} \int \eta dv + \frac{\partial X}{\partial z} \int \zeta dv = 0,$$

marad tehát mindössze egy eredő erőpár, a melynek T tengelyértékvektorának a koordinátatengelyek szerinti alkotói jelöltesenek rendre az L , M , N betűkkel. Már most:

$$\begin{aligned} L &= \int (\eta F_z - \zeta F_y) dv \\ M &= \int (\zeta F_x - \xi F_z) dv \\ N &= \int (\xi F_y - \eta F_x) dv. \end{aligned}$$

Ha az F'_x , F'_y , F'_z kifejezéseinek behelyettesítése után figyelembe vesszük azt, hogy

$$\int \xi \eta \, dv = C_{xy}, \quad \int \eta \zeta \, dv = C_{yz}, \quad \int \xi \zeta \, dv = C_{zx}$$

illetőleg

$$\int \xi^2 \, dv = I_{yz}, \quad \int \eta^2 \, dv = I_{zx}, \quad \int \zeta^2 \, dv = I_{xy}$$

jelentik a v térfogatú testnek a súlyponti koordináta-tengely-párokra vonatkozó centrifugálnyomatékait, illetőleg a súlyponti koordinátasíkokra vonatkozó inertianyomatékait, akkor a tengelyérték-alkotók számára a következő képleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} L &= I_{zx} \frac{\partial Z}{\partial y} - I_{xy} \frac{\partial Y}{\partial z} + C_{yz} \left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + C_{xy} \frac{\partial Z}{\partial x} - C_{zx} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ M &= I_{xy} \frac{\partial X}{\partial z} - I_{yz} \frac{\partial Z}{\partial x} + C_{zx} \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + C_{yz} \frac{\partial X}{\partial y} - C_{xy} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (1) \\ N &= I_{yz} \frac{\partial Y}{\partial x} - I_{zx} \frac{\partial X}{\partial y} + C_{xy} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} \right) + C_{zx} \frac{\partial Y}{\partial z} - C_{yz} \frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned}$$

E képletek sokkal bonyolódottabbak, semhogy eredeti alakjukban világos képet nyújthatnának arról, hogy miképen határozza meg a T vektort egyrészt a test alakjától és méreteitől függő hat másodrendű nyomaték és másrészt a fajlagos erő változásától függő kilencz differenciálhányados.

Sikerülni fog azonban képleteink jobboldalait átalakítani úgy, hogy a T vektor keletkezése áttekinthetőbb legyen. Mindekenelőtt hozzuk be a súlyponti koordinátasíkokra vonatkozó inertianyomatékok helyett a súlyponti koordinátatengelyekre vonatkozó inertianyomatékokat, vagyis az

$$I_x = \int (\eta^2 + \zeta^2) \, dv, \quad I_y = \int (\xi^2 + \zeta^2) \, dv, \quad I_z = \int (\xi^2 + \eta^2) \, dv$$

mennyiségeket. Figyelembe véve az inertianyomatékok elméletéből ismeretes

$$\begin{aligned} I_{xy} + I_{zx} &= I_x & 2I_{xy} &= I_x + I_y - I_z \\ I_{yz} + I_{xy} &= I_y & \text{és} \quad 2I_{yz} &= I_y + I_z - I_x \\ I_{zx} + I_{yz} &= I_z & 2I_{zx} &= I_z + I_x - I_y \end{aligned}$$

összefüggéseket, nyilvánvaló, hogy az (1) képletekben meg lehet tenni a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} I_{zx} \frac{\partial Z}{\partial y} - I_{xy} \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{1}{2} I_x \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \\ I_{xy} \frac{\partial X}{\partial z} - I_{yz} \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{1}{2} I_y \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (I_x - I_z) \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (2) \\ I_{yz} \frac{\partial Y}{\partial x} - I_{zx} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{1}{2} I_z \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (I_y - I_x) \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ily módon aztán a T meghatározására a test, mint geometriai alakzat, a súlyponti tengelyekre vonatkozó három inertianyomaték es három centrifugálnyomaték képében folyik be, a mely hat mennyiség tudvalevőleg jellemez egy tensorhármast, az 1, 2, 3 súlyponti inercia főirányokra vonatkozó I_1, I_2, I_3 főinertianyomatékokat.

Vizsgáljuk most behatóbban azt, hogy az erőváltozást jellemző differenciálhányadosok miképen folynak be a T meghatározására. Az (1) képletek szerint úgy látszik, hogy a T vektor függvénye volna külön-külön mind a kilencz differenciálhányadosnak; ez azonban nincs így, mert könnyű kimutatni, hogy csakis e differenciálhányadosokból összerakott egyszerű jelentéssel bíró kifejezéseknek a függvénye.

Közeleső sejtés az, hogy e kifejezések ugyanazok lesznek, mint a melyek a rugalmasság-elméletben a végtelen kicsiny alakváltozások leírásánál szerepelnek, a mikor X, Y, Z a test egy pontja elmozdulás-vektorának derékszögű alkotóit jelentik. És ez a sejtés valóra is válik.

E szerint mindenekelőtt jelentkezni fog a következő három kifejezés:

$$W_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right), \quad W_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \quad W_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right), \quad (3)$$

a melyek, mint a vektorelméletből ismeretes, felfoghatók úgy, mint egy bizonyos, teljesen meghatározott, a koordinátarendszer speciális választásától teljesen független W vektornak derékszögű alkotói, a mely W vektort nevezhetjük az erőtér örvény-

vektorának az S pontban. Ezután szerepelni fog még a három nyúlásnak megfelelően a következő három differenciálhányados:

$$E_x = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (4)$$

és a három szögváltozásnak megfelelően a következő három kifejezés:

$$G_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right), \quad G_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right), \quad G_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Ez a hat utóbbi kifejezés épen úgy, mint az alakváltozások elméletében, most is meghatároz egy a koordinátarendszer választásától független tensorhármast. Ezen tensorhármassal jellemző mennyiségeinek most a következő egyszerű értelmezés adható. Határozzuk meg az erőnek az a, b, c iránycosinusokkal bíró n irány szerinti

$$N = aX + bY + cZ$$

vetületét és képezzük ennek az n irány szerinti differenciálhányadosát:

$$\frac{\partial N}{\partial n} = a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} + c \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

A jobboldalon kijelölt differenciálások elvégzése után azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial N}{\partial n} = a^2 E_x + b^2 E_y + c^2 E_z + 2ab G_{xy} + 2bc G_{yz} + 2ca G_{zx}. \quad (6)$$

Kérdezzük most azt, hogy mely irányok szerint ér el ez a kifejezés szélső értéket? Így kapjuk a következő három feltételi egyenletet:

$$\begin{aligned} (E_x - \lambda) a + G_{xy} b + G_{zx} c &= 0 \\ G_{xy} a + (E_y - \lambda) b + G_{yz} c &= 0 \\ G_{zx} a + G_{yz} b + (E_z - \lambda) c &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

a mely egyenletek az

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

összefüggéssel kapcsolatban az ismert módon meghatározunk

három és általában csakis három, egymásra merőleges irányt, a melyek szerint $\frac{\partial N}{\partial n}$ -nek szélső értéke van és megadják ezt a három szélső értéket, mint egy λ -ban harmadfokú egyenlet három gyökét. Nevezzük ezt a három főirányt erőváltozási főirányoknak és jelöljük őket az I, II, III számokkal; $\frac{\partial N}{\partial n}$ három szélső értékének jelölése így természetesen E_I, E_{II}, E_{III} lesz. Az S pont környezetére vonatkozó erőváltozástól megadott tenzorhármast jellemzi a három erőváltozási főirány és az ezekbe eső erőcomponenseknek saját irányuk szerint vett differenciálhányadosai.

Legyen továbbá két egymásra merőlegesen álló irány $r(a', b', c')$ és $s(a'', b'', c'')$, a melyekre vonatkozólag határozzuk meg a

$$G_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial r} \right)$$

kifejezést. A számítás elvégzése azt adja, hogy

$$G_{rs} = a'a''E_x + b'b''E_y + c'c''E_z + (a'b'' + b'a'')G_{xy} + (b'c'' + c'b'')G_{yz} + (c'a'' + a'c'')G_{zx}. \quad (8)$$

Ha már most az r irány egybeesik a három erőváltozási főirány valamelyikével, akkor a (7) egyenletek figyelembevételére arra vezet, hogy

$$G_{rs} = \lambda(a'a'' + b'b'' + c'c'').$$

Ha tehát r főirány és s bárminő rá merőlegesen álló irány, akkor mindig $G_{rs} = 0$. Ebből tüstént következik, hogy a három főirány adta koordinátarendszerben

$$G_{I II} = 0, G_{II III} = 0, G_{III I} = 0.$$

Teljesség kedvéért mutassuk még meg azt, hogy általában nem létezik még egy másik olyan koordinátarendszer, a mely ezzel a tulajdonsággal bír. Tegyük fel, hogy a főirányokra vonatkozólag az $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$ iránycosinusoktól meghatározott x, y, z rendszer ilyen volna, ekkor a (8) képlet szerint kellene, hogy

$$\begin{aligned}
 (i_{xy} &= a_1 a_2 (E_I - E_{III}) + b_1 b_2 (E_{II} - E_{III}) = 0 \\
 (i_{yz} &= a_2 a_3 (E_I - E_{III}) + b_2 b_3 (E_{II} - E_{III}) = 0 \\
 (i_{zx} &= a_3 a_1 (E_I - E_{III}) + b_3 b_1 (E_{II} - E_{III}) = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Legyen először is a három E számértéke egymástól különböző. Ha egyik koordinátatengely sem esik egybe valamelyik főiránnyal, akkor mindenik iránycosinus különbözik a zérustól és így a (9) feltételekből az következnek, hogy

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3},$$

a mi azonban teljes lehetetlenség. Ha az x tengely egybeesik az I főiránnyal, akkor

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 0$$

és a (9) egyenletek átmennek a következőkbe:

$$(i_{xy} = 0, (i_{yz} = b_2 b_3 (E_{II} - E_{III}) = 0, (i_{zy} = 0.$$

A középső feltétel csakis úgy teljesíthető, ha a b_2 vagy b_3 zérus, mikor is azonban a másik két tengely is egybeesik a másik két főiránnyal. Tehát három különböző E mellett egyedül a három főirány adta tengelyrendszernek van meg a szóban forgó tulajdonsága.

Legyen másodszer $E_{III} = E_{II}$, akkor a (9) egyenletek szerint kell, hogy

$$a_1 a_2 = 0, a_2 a_3 = 0, a_3 a_1 = 0,$$

a mihez szükséges, hogy például

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0.$$

Ekkor tehát minden koordinátarendszer, melynek egyik tengelye összeesik az I főiránnyal, a kívánt tulajdonsággal bír és bármelyik az I-re merőleges n irány tekinthető főiránnyal, a melyre vonatkozólag a (6) szerint

$$E_n = \frac{\partial X}{\partial n} = E_{II} = E_{III}.$$

Ha végre harmadszor $E_I = E_{II} = E_{III}$, akkor a (9) egyenletek az iránycosinusoktól függetlenül vannak kielégítve és bármely n irány tekinthető főiránynak, a melyre vonatkozólag

$$E_n = \frac{\partial N}{\partial n} = E_I = E_{II} = E_{III}.$$

Ezen kitérés után térjünk vissza a T tengelyérték alkotójának meghatározására. Könnyű szerrel meggyőződhetünk arról, hogy az (1) képletek jobboldalai azonos átalakításokkal hozhatók a következő alakokra:

$$\begin{aligned} L &= L' + L'' \\ M &= M' + M'' \\ N &= N' + N'', \end{aligned} \quad (10)$$

a hol

$$\begin{aligned} L' &= I_x W_x - C_{xy} W_y - C_{zx} W_z \\ M' &= -C_{xy} W_x + I_y W_y - C_{yz} W_z \\ N' &= -C_{zx} W_x - C_{yz} W_y + I_z W_z \end{aligned} \quad (11)$$

és

$$\begin{aligned} L'' &= C_{yz} (E_z - E_y) + (I_z - I_y) G_{zy} + C_{xy} G_{zx} - C_{zx} G_{xy} \\ M'' &= C_{zx} (E_x - E_z) + (I_x - I_z) G_{zx} + C_{yz} G_{xy} - C_{xy} G_{yz} \\ N'' &= C_{xy} (E_y - E_x) + (I_y - I_x) G_{xy} + C_{zx} G_{yz} - C_{yz} G_{zx}. \end{aligned} \quad (12)$$

A (10) alatti átalakításnak jelentősége abban áll, hogy könnyen igazolhatólag az L' , M' , N' mennyiségek külön meghatározhatnak egy T' vektort és az L'' , M'' , N'' mennyiségek külön egy T'' vektort, úgy hogy így a T tengelyérték elő van állítva, mint a T' és T'' tengelyértékek geometriai összege, melyek közül az elsőt meghatározza a v térfogat inertia-tensor hármasa és az erőváltozási örvényvektor, a másodikat meghatározza az inertia-tensorhármass és az erőváltozási tensorhármass.

Vizsgáljuk most meg a két tengelyérték természetét külön-külön. A mi először is a T' tengelyértéket illeti, ennek alkotói egyszerű jelentéssel bírnak. Legyenek ugyanis a W örvényvektor egyenesének iránycosinusai a , b , c , ekkor a v térfogatnak ezen egyenesre vonatkozó inertianyomatéka tudvalevőleg a következő kifejezéssel van megadva:

$$I = I_x a^2 + I_y b^2 + I_z c^2 - 2C_{xy} ab - 2C_{yz} bc - 2C_{zx} ca.$$

Azonnal látható, hogy a (11) képletek most már írhatók a következő alakban:

$$L' = \frac{1}{2} W \frac{\partial I}{\partial a}, \quad M' = \frac{1}{2} W \frac{\partial I}{\partial b}, \quad N' = \frac{1}{2} W \frac{\partial I}{\partial c}. \quad (11)$$

A T' tengelyérték iránya és nagysága igen áttekinthetően határozható meg a v térfogat súlyponti CLEBSCH-féle inertia-ellipsoidja segítségével, a mely, mint ismeretes, azzal a tulajdonsággal bír, hogy bármelyik átmérőjére merőleges érintősíknak a középponttól való távolsága megadja az illető átmérőre, mint tengelyre vonatkozó inertiasugarat. Egyszerűség kedvéért válasszuk átmenetileg a koordinátarendszert úgy, hogy tengelyei párhuzamosak legyenek a v térfogat súlyponti inertia főirányaival. Ebben a rendszerben a (11) képletek átmennek a következőkbe:

$$\begin{aligned} L' &= I_1 W_1 = v i_1^2 W_1 = v i_1^2 W a \\ M' &= I_2 W_2 = v i_2^2 W_2 = v i_2^2 W b \\ N' &= I_3 W_3 = v i_3^2 W_3 = v i_3^2 W c, \end{aligned} \quad (11'')$$

a hol i_1, i_2, i_3 jelentik a főinertiasugarakat és a CLEBSCH-féle inertiaellipsoid az

$$\frac{x^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_2^2} + \frac{z^2}{i_3^2} = 1 \quad (13)$$

egyenlettel van jellemezve. A W vektor irányára merőleges érintősíknak az ellipsoiddal való érintési pontja legyen P , az SP félátmérő hossza ρ , és iránycosinusai l, m, n , továbbá a W vektor egyenesére vonatkozó inertiasugár i ; ekkor ez a P érintési pont a következő képletekkel van meghatározva:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{i} \sqrt{i_1^4 a^2 + i_2^4 b^2 + i_3^4 c^2} \\ l &= \frac{i_1^2 a}{i \rho}, \quad m = \frac{i_2^2 b}{i \rho}, \quad n = \frac{i_3^2 c}{i \rho}. \end{aligned}$$

Ezen összefüggések figyelembevételével a (11'') képletek végre a következő alakokat öltik fel:

$$L' = W i_1 \rho l, \quad M' = W i_2 \rho m, \quad N' = W i_3 \rho n.$$

Vagyis a T' tengelyérték iránya beleesik az SP összekötő egyenesbe és nagyságát illetőleg

$$T' = Wv\rho \quad (14)$$

Azt találtuk tehát, hogy a T' tengelyérték párhuzamos a W örvényvektor normálsíkjának a CLEBSCH-féle inertiaellipsoidra vonatkozó konjugált irányával.

A T' tengelyérték nagyságát megadó (14) képlet még egyszerűbbé válik abban a speciális esetben, a mikor a v térfogat alakja olyan, hogy a W örvényvektor iránya inertia főirány, ekkor ugyanis a T' tengelyérték beleesik ebbe az irányba és $\rho = i$ lévén

$$T' = Wv^2 = WI.$$

A (14) képlet mutatja, hogy a T' tengelyérték akkor és csakis akkor zérus, ha a v térfogat súlypontjában a W örvényvektor eltűnik. Ennélfogva potenciális erőtvény esetében T' tengelyérték mindig zérus, a mi különben részben már abból látható volt, hogy ekkor a (3) értelmezte W_x , W_y , W_z és így a (11) értelmezte L' , M' , N' is eltűnnek; részben pedig abból, hogy

$$\begin{vmatrix} I_x - C_{xy} - C_{zx} \\ -C_{xy} \quad I_y - C_{yz} \\ -C_{zx} - C_{yz} - I_z \end{vmatrix} = 0.$$

A T'' tengelyértéket két tensorhármas értelmezi, a melyeknek komponensei

$$E_x, E_y, E_z, \quad G_{yz}, G_{zx}, G_{xy},$$

illetőleg

$$I_x, I_y, I_z, \quad -G_{yz}, -G_{zx}, -G_{xy}$$

és a (12) képletektől megadatott tengelyérték-komponensek ez utóbbi tizenkét mennyiségnek homogén quadratikusan alternáló függvényei, úgy hogy a T'' vektor értelme megváltozik, ha a két tensorhármas szerepét a vektor értelmezésénél felcseréljük.

A (12) egyenletek tüstént elárulják azt, hogy általában két olyan koordináta-rendszer van, a melyben a T'' tengelyérték komponenseit különösen egyszerű kifejezések adják meg, nevezetesen a két tensorhármas főirány-rendszerével egybeeső két

koordinátarendszer. Az inertiafőirányok meghatározta rendszerben

$$\begin{aligned} L'' &= G_{23} (I_3 - I_2) \\ M'' &= G_{31} (I_1 - I_3) \\ N'' &= G_{12} (I_2 - I_1) \end{aligned} \quad (12')$$

és az erőváltozási főirányok meghatározta rendszerben

$$\begin{aligned} L'' &= G_{II\ III} (E_{III} - E_{II}) \\ M'' &= G_{III\ I} (E_I - E_{III}) \\ N'' &= G_{I\ II} (E_{II} - E_I) \end{aligned} \quad (12'')$$

lesznek a tengelyértékkomponensek kifejezései. E képletek szerint a T'' eltűnik, ha a viszonyok olyanok, hogy az inertia főirányok összeesnek az erőváltozási főirányokkal. Ez magában foglalja azt a három speciális esetet, hogy 1. tetszőleges erőtvörvény mellett a térfogat alakja olyan, hogy minden irány erőváltozási főirány; 2. tetszőleges alakú térfogat mellett az erőtvörvény olyan, hogy minden irány erőváltozási főirány; 3. az egyik inertia főirány összeesik valamelyik erőváltozási főiránnyal és a normálsíkban vagy minden irány inertiafőirány, vagy minden irány erőváltozási főirány.

Látnivaló tehát, hogy a T'' vektort a két tensorhármas főirányainak különböző volta hívja létre. A T'' vektor jellegéből következik, hogy a (12) képletekből kiszámított

$$T''^2 = L''^2 + M''^2 + N''^2$$

kifejezés a két tensorhármasnak a koordinátarendszer választásától független invariánsa. Vizsgáljuk most közelebbről azt a törvényszerűséget, a melylyel a két tensorhármas meghatározza a T'' vektort. Mindenekelőtt bocsássunk előre egy speciális esetet.

Legyenek nevezetesen a viszonyok olyanok, hogy összeesik egy inertia főirány és egy erőváltozási főirány. Essék össze például az 1 és a I irány; ekkor a (12') és (12'') képletek szerint $M'' = N'' = 0$, és

$$T'' = L'' = G_{23} (I_3 - I_2) = G_{II\ III} (E_{III} - E_{II}).$$

Vagyis ekkor a tengelyérték irányát megadja a két összeeső főirány és a nagyságát megadó képlet még hozható a következő alakra:

$$T'' = (I_3 - I_2) (E_{III} - E_2) \sin \varphi \cos \varphi$$

a hol φ jelenti a (II, III) tengelyrendszer elfordulási szögét a (2, 3) tengelyrendszerhez képest.

Ez után lássuk azt, hogy az általános esetben miképpen határozza meg a két tensorhármas a T'' tengelyértékvektort. Induljunk ki a (12') egyenletekből. Az erőváltozási főirányok és az inertiáfőirányok közti iránycosinusokat tüntesse fel a következő táblázat:

	1	2	3
I	a_1	a_2	a_3
II	b_1	b_2	b_3
III	c_1	c_2	c_3

A (12') képletek jobboldalain álló i_{ik} mennyiségek a (8) képlet értelmében kifejezhetők az erőváltozási főtenzorok segítségével, a mennyiben

$$\begin{aligned} G_{23} &= a_2 a_3 E_I + b_2 b_3 E_{II} + c_2 c_3 E_{III} \\ G_{31} &= a_3 a_1 E_I + b_3 b_1 E_{II} + c_3 c_1 E_{III} \\ G_{12} &= a_1 a_2 E_I + b_1 b_2 E_{II} + c_1 c_2 E_{III}. \end{aligned} \quad (16)$$

Igy aztán a tengelyértékcomponensek a következő alakokban jelentkeznek:

$$\begin{aligned} L'' &= (a_2 a_3 E_I + b_2 b_3 E_{II} + c_2 c_3 E_{III}) (I_3 - I_2) \\ M'' &= (a_3 a_1 E_I + b_3 b_1 E_{II} + c_3 c_1 E_{III}) (I_1 - I_3) \\ N'' &= (a_1 a_2 E_I + b_1 b_2 E_{II} + c_1 c_2 E_{III}) (I_2 - I_1). \end{aligned} \quad (12''')$$

Közel esik a gondolat felfogni a T'' vektort három más vektor eredője gyanánt, a melyek az inercia főirányokra való vetületeikkel a következőképen vannak értelmezve:

$$T''_I \begin{cases} L''_I = a_2 a_3 E_I (I_3 - I_2) \\ M''_I = a_3 a_1 E_I (I_1 - I_3) \\ N''_I = a_1 a_2 E_I (I_2 - I_1) \end{cases} \quad (17')$$

$$T''_{II} \begin{cases} L''_{II} = b_2 b_3 E_{II} (I_3 - I_2) \\ M''_{II} = b_3 b_1 E_{II} (I_1 - I_3) \\ N''_{II} = b_1 b_2 E_{II} (I_2 - I_1) \end{cases} \quad (17'')$$

$$T''_{III} \begin{cases} L''_{III} = c_2 c_3 E_{III} (I_3 - I_2) \\ M''_{III} = c_3 c_1 E_{III} (I_1 - I_3) \\ N''_{III} = c_1 c_2 E_{III} (I_2 - I_1) \end{cases} \quad (17''')$$

A T'' vektor ily módon történő három más vektorra való felbontásának jogosultságát megadja az a körülmény, hogy minden egyes alkotó vektor egy bizonyos erőváltozási főtenzor-nak hatását tünteti fel és a felbontás hasznát látjuk abban a tényben, hogy mindenik alkotó vektor keletkezése igen áttekinthetően szemléltethető a CLEBSCH-féle inertiaellipsoid segítségével.

Vizsgáljuk a T''_I vektort, a melyet az I erőváltozási főirányba eső E_I főtenzor hív létre. Mindenekelőtt határozzuk meg a T''_I irányát. A (17') egyenletek mutatják, hogy

$$a_1 L''_I + a_2 M''_I + a_3 N''_I = 0,$$

a mi azt árulja el, hogy a T''_I merőleges az I irányra. De ugyan-csak a (17') egyenletekből az is következik, hogy

$$a_1 I_1 L''_I + a_2 I_2 M''_I + a_3 I_3 N''_I = 0,$$

a mely összefüggésnél fogva a T''_I merőleges arra az irányra is, melynek iránycosinusai rendre arányosak az $a_1 I_1$, $a_2 I_2$, $a_3 I_3$ mennyiségekkel. Ennek az iránynak azonban egyszerű jelentése van a CLEBSCH-féle inertiaellipsoidban, melynek egyenlete (13) alatt már szerepelt. Határozzuk meg az ellipsoidnak az I irányra merőleges azon érintősíkját, a melyiknél a P_I érintési pont-hoz húzott $SP_I = \rho_I$ félátmérő a hegyes φ_I szöget zárja be az I iránynyal; ezt az érintő síkot az I irány átdöfi az R_I pont-ban és az SR_I távolság adja meg az I irányra vonatkozó inerta-sugarat. Már most

$$\rho_I = \frac{1}{i_I} \sqrt{a_1^2 i_1^4 + a_2^2 i_2^4 + a_3^2 i_3^4}$$

és l_1, l_2, l_3 jelentvén az SP_I iránynak az inertia-főirányokra vonatkozó iránycosinusait

$$l_1 = \frac{a_1 i_1^2}{\rho_I i_I}, \quad l_2 = \frac{a_2 i_2^2}{\rho_I i_I}, \quad l_3 = \frac{a_3 i_3^2}{\rho_I i_I}.$$

Látjuk tehát, hogy a keresett irány nem egyéb, mint az SP_I irány, úgy hogy a T_I'' vektor erre is merőlegesen fog állni. Vagyis a T_I'' vektor merőlegesen áll arra a síkra, melyet az E_I'' főtenzor iránya és ennek normálsíkjának a CLEBSCH-féle inertiaellipsoidra vonatkozó konjugált iránya meghatároz. Állapodjunk meg abban, hogy e sík pozitív normálisra legyen az a normális-ág, a melyből nézve az I irány az óramutató forgásával megegyező értelemben megy át a ρ_I irányába; ekkor ennek a pozitív normálisnak az inertiafőirányokra vonatkozó iránycosinusait a következő képletek adják meg:

$$\lambda_1 = \frac{a_2 l_3 - a_3 l_2}{\sin \varphi_I}, \quad \lambda_2 = \frac{a_3 l_1 - a_1 l_3}{\sin \varphi_I}, \quad \lambda_3 = \frac{a_1 l_2 - a_2 l_1}{\sin \varphi_I}$$

vagyis az l_i iránycosinus-értékek behelyettesítése után

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sin \varphi_I} \frac{a_2 a_3 (i_3^2 - i_2^2)}{i_I \rho_I}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sin \varphi_I} \frac{a_3 a_1 (i_1^2 - i_3^2)}{i_I \rho_I},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sin \varphi_I} \frac{a_1 a_2 (i_2^2 - i_1^2)}{i_I \rho_I}.$$

Ezen kifejezések figyelembevételével a T_I'' vektor (17') kifejezései a következő alakokra hozhatók:

$$L_I'' = E_I v i_I \rho_I \sin \varphi_I \lambda_1$$

$$M_I'' = E_I v i_I \rho_I \sin \varphi_I \lambda_2$$

$$N_I'' = E_I v i_I \rho_I \sin \varphi_I \lambda_3.$$

E képletek először is meghatározzák a T_I'' vektor értelmét, még pedig úgy, hogy a vektor a szerint esik bele az (I, ρ_I) sík pozitív vagy negatív normálisába, a mint az E_I főtenzor szám-

értéke pozitív vagy negatív; és másodszer megadják a T_I'' vektor nagyságát, a mennyiben

$$T_I'' = E_I i_I \rho_I \sin \varphi_I. \quad (18)$$

Ha az $SR_I P_I$ derékszögű háromszöget rövidség kedvéért az I irányhoz konjugált háromszögnek nevezzük és területét t_I -el jelöljük, akkor

$$2t_I = i_I \rho_I \sin \varphi_I,$$

úgy hogy még

$$T_I'' = 2E_I t_I. \quad (18')$$

Ha tehát a háromszög területét mint annak pozitív normálisára felrakott vektort értelmezzük, akkor azt mondhatjuk, hogy az E_I főtenzorától előidézett tengelyérték nem egyéb, mint az irányához az inertiaellipsoidban konjugált háromszög kétszeres területe szorozva a térfogattal és a főtenzor előjeles számértékével.

Már most egész hasonlóképen értelmezve az E_{II} és E_{III} főtenzoroknak megfelelő

$$T_{II}'' = 2E_{II} t_{II}'' \text{ és } T_{III}'' = 2E_{III} t_{III}''$$

tengelyértékvektorokat, kimondhatjuk azt az eredményt, hogy a T'' tengelyértéket megkapjuk, ha meghatározzuk mindenik főtenzorhoz az inertiaellipsoidban konjugált háromszög kétszeres területét, ezt szorozzuk a főtenzor számértékével, az így nyert három vektor geometriai összeget képezzük és ezt még megszorozzuk a test térfogatával.

A T_I'' tengelyérték három utóbbi alkotójának még más szempontból is adható egyszerű jelentés. A (17') képletekből ugyanis azonos átalakítással következik, hogy

$$T_I'' = E_I^2 [a_2^2 a_3^2 (I_3 - I_2)^2 + a_3^2 a_1^2 (I_1 - I_3)^2 + a_1^2 a_2^2 (I_2 - I_1)^2] = \\ = E_I^2 [C_{I \ II}^2 + C_{III \ I}^2]$$

és ha még bevezetjük a

$$C_I = [C_{I \ II}^2 + C_{III \ I}^2]^{\frac{1}{2}}$$

jelölést, akkor azt kapjuk, hogy

$$T_I'' = E_I C_I. \quad (18'')$$

a hol a C_I mennyiség épen úgy csakis az I iránynak a függvénye, mint az I_I inertianyomaték és a (18')-vel való összehasonlítás mutatja, hogy

$$C_I = 2vt_I.$$

Ugyanígy felírhatjuk még a

$$T''_{II} = E_{II}C_{II} \text{ és } T''_{III} = E_{III}C_{III}$$

összefüggéseket is. Ennélfogva a T'' tengelyérték nagyságát megadja a következő képlet:

$$T''^2 = E_I^2 C_I^2 + E_{II}^2 C_{II}^2 + E_{III}^2 C_{III}^2 + 2E_I E_{II} C_I C_{II} \cos(T''_I, T''_{II}) + \\ + 2E_{II} E_{III} C_{II} C_{III} \cos(T''_{II}, T''_{III}) + 2E_{III} E_I C_{III} C_I \cos(T''_{III}, T''_I).$$

Ha ellenben a (12''') képletek alapján számítjuk ki a T''^2 -t, akkor a számítás arra vezet, hogy:

$$T''^2 = E_I^2 C_I^2 + E_{II}^2 C_{II}^2 + E_{III}^2 C_{III}^2 - 2E_I E_{II} C_I^2 C_{II} - 2E_{II} E_{III} C_{II}^2 C_{III} - \\ - 2E_{III} E_I C_{III}^2 C_I$$

a két utolsó kifejezés egybevetése azt adja, hogy

$$\cos(T''_I, T''_{II}) = -\frac{C_I^2 C_{II}}{C_I C_{II}}, \quad \cos(T''_{II}, T''_{III}) = -\frac{C_{II}^2 C_{III}}{C_{II} C_{III}}, \\ \cos(T''_{III}, T''_I) = -\frac{C_{III}^2 C_I}{C_{III} C_I}. \quad (19)$$

Mivel mindenik cosinus lényegesen negatív, azért a három vektor közül, melyeket az inertiaellipsoidban a három egymásra merőleges I, II, III irányhoz tartozó konjugált háromszögek határoznak meg, bármelyik kettő egymással tompa szöget zár be. Könnyű kimutatni azt, hogy ennek a három területvektor-nak geometriai összege zérus. Az eredő vektor nagyságát illetőleg ugyanis

$$C_I^2 + C_{II}^2 + C_{III}^2 - 2C_I^2 C_{II} - 2C_{II}^2 C_{III} - 2C_{III}^2 C_I = 0.$$

A geometriai összeg zérus voltából meg szükségképpen következik, az, hogy a három területvektor egy síkban fekszik, a mely sík normálisának iránycosinusai számára a számítás a következő képleteket eredményezi:

$$p = \frac{A}{D}, \quad q = \frac{B}{D}, \quad r = \frac{C}{D} \quad (20)$$

a hol az egyes betűk a következő jelentéssel bírnak:

$$\begin{aligned} A &= (i_1^2 - i_3^2)(i_2^2 - i_1^2) a_1 b_1 c_1 \\ B &= (i^2 - i_1^2)(i_3^2 - i_2^2) a_2 b_2 c_2 \\ C &= (i_3^2 - i_2^2)(i_1^2 - i_3^2) a_3 b_3 c_3 \\ D &= \sqrt{A_2 + B_2 + C_2} = 8l \end{aligned} \quad (20')$$

t alatt értvén a t_I , t_{II} , t_{III} konjugált háromszögek területvektoraitól mint oldalaktól körülzárt háromszög területét.

Az utóbbi eredmények a következő geometriai tételt foglalják magukban. Ha adva van egy ellipszoid és három ennek középpontjában metsződő egymásra merőleges egyenes és ha meghatározzuk e három egyeneshez tartozó három konjugált háromszöget, akkor ezeknek területvektorai egy síkban fekszenek és a geometriai összegük zérus.

Ennélfogva a T'' vektor benne fekszik abban a síkban, melyet a három erőváltozási főirány az inertiaellipszoidban a konjugált háromszögek területvektorai segítségével meghatároz.

A T'' tengelyértéknek fentiekben előadott értelmezésénél a (12') képletekből indultunk ki és a test alakjától meghatározott tensorhármast ábrázoltuk geometriailag a CLEBSCH-féle inertiaellipszoiddal; de a két tensorhármast egyenlő szerepe miatt nyilvánvalólag úgy is eljáráhatunk, hogy a (12'') képletekből indulunk ki és az erőváltozási tensorhármast adunk a CLEBSCH-féle inertiaellipszoidnak megfelelő geometriai ábrázolást. Ez az ábrázolás azon másodrendű felületek segítségével történik, a melyeknek egyenletei az erőváltozási főirányok megadta koordináta-rendszerben a következők:

$$\frac{x^2}{E_I} + \frac{y^2}{E_{II}} + \frac{z^2}{E_{III}} = \pm 1, \quad (21)$$

a hol a főtenzorok lehetnek úgy pozitív, mint negatív mennyiségek, úgy hogy

$$E_I = \pm e_I^2, \quad E_{II} = \pm e_{II}^2, \quad E_{III} = \pm e_{III}^2.$$

Ha mindhárom főtenzor egyenlő előjelű, akkor a (21) egyenlet jobboldalán csakis az egyik előjel vétele ad valós felületet, a mely ellipsoid. Ha ellenben a főtenzorok vegyes előjelűek, akkor a (21) jobboldalán mindkét előjel vétele valós felületet eredményez, melyeknek egyike egyágú és másika kétágú hyperboloid és melyeknek

$$\frac{x^2}{E_I} + \frac{y^2}{E_{II}} + \frac{z^2}{E_{III}} = 0 \quad (22)$$

egyenletű közös asymptota kúpjuk van.

Mindenekelőtt bizonyítsuk be egész általában a (21) egyenletű másodrendű felületekre azt a geometriai tételt, a melyre a fentiekben az ellipsoidnál közvetett úton jutottunk. Vegyünk fel három egymásra merőleges és az adott másodrendű felületek középpontjában metsződő egyenest (1, 2, 3) és rendre határozzuk meg az ezen irányokhoz tartozó konjugált háromszögeket. Megjegyzendő, hogy valamely a középpontból kiinduló félegyeneshez tartozó konjugált háromszög alatt azt a háromszöget akarjuk érteni, a melynek csúcspontjai: a középpont, a másodrendű felületnek a félegyenesre merőleges érintősíkjaival való érintési pontja és ezen érintősíknak a félegyenessel való át-dőfési pontja. Ha a (21) egyenletek ellipsoidot ábrázolnak, akkor bármely irányhoz lehet találni rá merőleges érintő síkot; ha pedig a (21) egyenletek két valós felületet, tehát két hyperboloidot ábrázolnak, akkor adott irányra merőleges érintősíkot vagy az egyik vagy a másik hyperboloid fog szolgáltatni. Határozzuk meg az a_1, b_1, c_1 iránycosinúsú 1 irányhoz tartozó konjugált háromszöget. Ha a rá merőlegesen álló érintősík P' érintési pontjának koordinátái u_1, v_1, w_1 , akkor az érintősík egyenlete:

$$\frac{u_1 x}{E_I} + \frac{v_1 y}{E_{II}} + \frac{w_1 z}{E_{III}} \mp 1 = 0.$$

Ezen érintősíknak a középponttól való $SR_1 = e_1$ távolságát megadja az

$$e_1^2 = \frac{1}{\frac{u_1^2}{E_I^2} + \frac{v_1^2}{E_{II}^2} + \frac{w_1^2}{E_{III}^2}} = \pm (a_1^2 E_I + b_1^2 E_{II} + c_1^2 E_{III})$$

képlet és az érintési pont koordinátái az

$$u_1 = \pm \frac{1}{e_1} a_1 E_I, \quad v_1 = \pm \frac{1}{e_1} b_1 E_{II}, \quad w_1 = \pm \frac{1}{e_1} c_1 E_{III}$$

képletekkel vannak meghatározva. Ezen egyenletekben, úgy-szintén a következőkben is, mindenhol a felső vagy alsó előjel veendő a szerint, a mint az érintősík a (21) másodrendű fel-letek közül a + vagy -1-től meghatározottra vonatkozik. Ha az SP_1 radiusvektor hosszát ρ_1 -nek nevezzük, akkor

$$\rho_1^2 = \frac{1}{e_1^2} (a_1^2 E_I^2 + b_1^2 E_{II}^2 + c_1^2 E_{III}^2)$$

és ha ezen radiusvektor iránycosinusai l_1, m_1, n_1 , akkor

$$l_1 = \pm \frac{a_1 E_I}{\rho_1 e_1}, \quad m_1 = \pm \frac{b_1 E_{II}}{\rho_1 e_1}, \quad n_1 = \pm \frac{c_1 E_{III}}{\rho_1 e_1}.$$

Az SR_1P_1 konjugált háromszög pozitív normálisra alatt értjük azt a normális ágat, a melyből nézve az 1 irányú SR_1 vonal-darab az óramutató járásával megegyező értelemben forgatható át az SP_1 egyenesbe, miközben a φ_1 hegyes szöveget írja le. E pozitív normálisnak iránycosinusait a következő képletek fog-ják megadni:

$$\lambda_1 = \frac{b_1 n_1 - c_1 m_1}{\sin \varphi_1} = \pm \frac{1}{\rho_1 e_1 \sin \varphi_1} b_1 c_1 (E_{III} - E_{II})$$

$$\mu_1 = \pm \frac{1}{\rho_1 e_1 \sin \varphi_1} c_1 a_1 (E_I - E_{III})$$

$$\nu_1 = \pm \frac{1}{\rho_1 e_1 \sin \varphi_1} a_1 b_1 (E_{II} - E_I).$$

Állapodjunk meg abban, hogy a konjugált háromszögek

$$t_1 = \frac{1}{2} \rho_1 e_1 \sin \varphi_1$$

területét vektor gyanánt ábrázoljuk, még pedig úgy, hogy a terület mérőszámát felrakjuk a háromszög S pontbeli pozitív vagy negatív normálisára a szerint, a mint a R_1 érintési pont

a plus vagy minus jobboldalú másodrendű felületen fekszik. Ezen megállapodás után a t_1 területvektor derékszögű vetületei minden körülmények között a

$$t_{1x} = \frac{1}{2} b_1 c_1 (E_{III} - E_{II}), \quad t_{1y} = \frac{1}{2} c_1 a_1 (E_I - E_{III}), \quad t_{1z} = \frac{1}{2} a_1 b_1 (E_{II} - E_I)$$

képletektől vannak meghatározva.

Ha ugyanígy előállítjuk a 2 és 3 irányokhoz tartozó konjugált háromszögek t_2 és t_3 területvektorait, akkor ezeknek derékszögű vetületei a következők lesznek:

$$\begin{aligned} t_{2x} &= \frac{1}{2} b_2 c_2 (E_{III} - E_{II}), & t_{3x} &= \frac{1}{2} b_3 c_3 (E_{III} - E_{II}), \\ t_{2y} &= \frac{1}{2} c_2 a_2 (E_I - E_{III}), & t_{3y} &= \frac{1}{2} c_3 a_3 (E_I - E_{III}), \\ t_{2z} &= \frac{1}{2} a_2 b_2 (E_{II} - E_I), & t_{3z} &= \frac{1}{2} a_3 b_3 (E_{II} - E_I). \end{aligned}$$

Látnivaló, hogy a három vektor hasonló vetületeinek összege zérus és így a három vektor geometriai összege is zérus. Ezzel bebizonyítottuk egész általánosan azt a geometriai tételt, hogy a centrális el nem fajuló másodrendű felületeknél három tetszőleges, egymásra merőleges irányhoz tartozó konjugált háromszögek területvektorai mindig egy síkban fekszenek és geometriai összegük zérus. Teljesség kedvéért említsük fel azt a látszólagosan kivételes esetet, mikor a másodrendű felületek hyperboloidok és a három egymásra merőleges félegyenes valamelyike merőlegesen áll az asymptotakúp egyik érintősíkjára. Ekkor a P érintési pont a kúpnak az érintősíkba eső alkotójának végtelenben lévő pontja, az R átdőfési pont összeesik az S középponttal, úgy hogy a konjugált háromszög egy végtelenbe nyúló félegyenessé fajul el. Noha ekkor $\rho = \infty$, $e = 0$, $\sin \varphi = 1$, és így a

$$t_2 = \frac{1}{2} \rho_1 e_1 \sin \varphi_1$$

képlet nem használható, azért a folytonossági elvnel fogva a háromszög területének most is teljesen meghatározott zérustól

különböző értéket kell tulajdonítanunk, a melynek nagyságát megadja a

$$t_1 = \frac{1}{2} [a_1^2 E_I^2 + b_1^2 E_{II}^2 + c_1^2 E_{III}^2]^{\frac{1}{2}}$$

képlet.

Ha már most a T'' tengelyérték vektor értelmezésénél a (12'') képletekből indulunk ki és tekintetbe vesszük azt, hogy

$$C_{II\ III} = -(b_1 c_1 I_1 + b_2 c_2 I_2 + b_3 c_3 I_3)$$

$$C_{III\ I} = -(c_1 a_1 I_1 + c_2 a_2 I_2 + c_3 a_3 I_3)$$

$$C_{I\ II} = -(a_1 b_1 I_1 + a_2 b_2 I_2 + a_3 b_3 I_3)$$

akkor arra az eredményre jutunk, hogy a T' tengelyérték beleesik abba a síkba, melyet a három inertiafőirány az erőváltozási másodrendű felületekre vonatkozó konjugált háromszögek területvektorai segítségével meghatároz és felfogható úgy, mint három olyan alkotónak eredője, a melyek rendre párhuzamosak az előbbi három területvektorral és a melyek nagyságát s értelmét megadják a

$$T''_1 = -2I_1 t_1, \quad T''_2 = -2I_2 t_2, \quad T''_3 = -2I_3 t_3$$

képletek.

A két tensorhármastól meghatározott T'' vektornak kétféle előállításí módjának ténye lényegileg a következő geometriai tételt fejezi ki. Legyen megadva két közös középpontú cenztrális el nem fajuló másodrendű felületpár, melyeknek a főtengelekre vonatkoztatott egyenletei:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \pm 1,$$

illetőleg

$$\frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + \frac{\zeta^2}{\gamma} = \pm 1,$$

a hol az x, y, z és ξ, η, ζ irányok jelentik az első, illetőleg a második felületpár főirányait. Határozzuk meg a második felületpár főirányaihoz az első felületpárban konjugált t_ξ, t_η, t_ζ területvektorokat és az első felületpár főirányaihoz a második felületpárban konjugált t_x, t_y, t_z területvektorokat, alkossuk

meg továbbá az αt_ξ , βt_η , γt_ζ vektorok geometriai összegezésével keletkező eredő vektort és az At_x , Bt_y , Ct_z vektorok eredő vektorát, ekkor ez a két eredő vektor egyenlő nagy, párhuzamos és ellentett értelmű és közös irányukat természetesen megadja az egyensúlyban lévő t_ξ , t_η , t_ζ területvektorok síkjának és az ugyancsak egyensúlyban lévő t_x , t_y , t_z területvektorok síkjának metsző egyenese.

Emeljük még ki külön azt a speciális esetet, hogy az egyik felületepár forgási felületekből áll. Ha például ez a második felületepárnál következik be és $\beta = \gamma$, úgy hogy a ξ tengely adja a forgási tengelyt, akkor a βt_η és γt_ζ vektorok geometriai összege $-\beta t_\xi$ és így az αt_ξ , βt_η , γt_ζ vektorok eredője egyszerűen $(\alpha - \beta)t_\xi$, vagyis ekkor a fenti két eredő vektor közös iránya párhuzamos a forgási tengelyhez tartozó területvektorral.

Végezetül mutassuk meg egy egyszerű példán a T tengelyértékvektor tényleges meghatározását. Létesítse az erőteret egy fix vonzó vagy taszító centrum és tőle gyakorolt erő legyen egyedül a távolság függvénye, úgy hogy

$$Q = f(r).$$

Igy aztán az O kezdőpontú tetszőleges derékszögű koordinátarendszerben a V térfogat S súlypontjában működő fajlagos erő componensei:

$$X = \frac{f(r)}{r} x, \quad Y = \frac{f(r)}{r} y, \quad Z = \frac{f(r)}{r} z.$$

Mivel most van potenciál, azért a T' tengelyérték zérus és így a T'' adja meg a T tengelyértéket.

Az erőváltozási tensorhármának hat componensét a következő kifejezések fogják megadni:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{f(r)}{r} + \frac{x^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) \\ E_y &= \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{f(r)}{r} + \frac{y^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) \\ E_z &= \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{f(r)}{r} + \frac{z^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) \end{aligned}$$

$$G_{xy} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right)$$

$$G_{yz} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{yz}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right)$$

$$G_{zx} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{zx}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right).$$

Ha speciálisan úgy választjuk a koordinátarendszert, hogy az x tengely egybeesik az OS egyenessel, akkor

$$E_y = E_z = \frac{f(r)}{r}, \quad E_x = \frac{f(r)}{r} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right)$$

$$G_{xy} = G_{yz} = G_{zx} = 0,$$

a mik azt mutatják, hogy az S pontban az OS egyenes adja az egyik erőváltozási főirányt és hogy minden rá merőleges irány főirány, vagyis hogy az erőváltozási másodrendű felületek most forgási felületek az OS egyenessel, mint forgási tengelyel. Ennélfogva a T'' tengelyérték párhuzamos az OS egyenesnek a v térfogat inertiaellipsoidjára vonatkozó területvektorával és nagyságát meg értelmét megadja a

$$T'' = 2r \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) v t_1.$$

Innen látnivaló, hogy tetszőleges törvényű centrális erő mellett a T tengelyérték csakis úgy lehet zérus, hogy $t_1 = 0$, vagyis hogy az OS összekötő egyenes a v térfogatú testnek inertia főiránya.

Van azonban egy bizonyos erőtvény, a melyik mellett T mindig zérus, nevezetesen az, a melyiknél

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) = 0$$

a honnan következik, hogy

$$f(r) = kr.$$

Newtonikus erő esetében

$$f(r) = \frac{k}{r^2}$$

és így akkor az elsőrendű erők szolgáltatva erőpár tengelyértékvektorát a

$$T = T'' = -6 \frac{k}{r^3} vt_1$$

képlet adja meg.

A fentiekben a T'' tengelyértékvektor geometriai meghatározását az egész elméleti mechanikában oly nagy szerepet játszó CLEBSCH-féle inertia ellipsoid segítségével végeztük; ez azonban történhetik másképen is egy új másodrendű felület felhasználásával. Vegyük ugyanis figyelembe azt a másodrendű felületet, melynek főirányai az inertia-főirányok, és melynek ezekre vonatkoztatott egyenlete a következő:

$$\frac{x^2}{i_3^2 - i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2 - i_3^2} + \frac{z^2}{i_2^2 - i_1^2} = \pm 1 \quad (23)$$

A (12') képletek ekkor a következő nyilvánvaló geometriai értelmezésre vezetnek. Gondoljuk előállítottunk azt a vektort, a melynek az inertiafőirányokra való vetületei rendre G_{23} , G_{31} , G_{12} , s határozzuk meg ezen vektor normálsíkjának a (23) felületre vonatkozó konjugált irányát; ezzel az iránynyal lesz párhuzamos a T'' tengelyérték.

A VIZ SZILÁRDSÁGÁRÓL.

KLUPATHY JENŐ 1. tagtól.

Székfoglaló értekezésemben¹ kimutattam, hogy néhány kolloid-anyag vékony rétege csavarási és nyulási rugalmasságot mutat, melynek nagysága a réteg vastagságától, a hőmérséklettől és a nyugodt állás időtartamától függ.

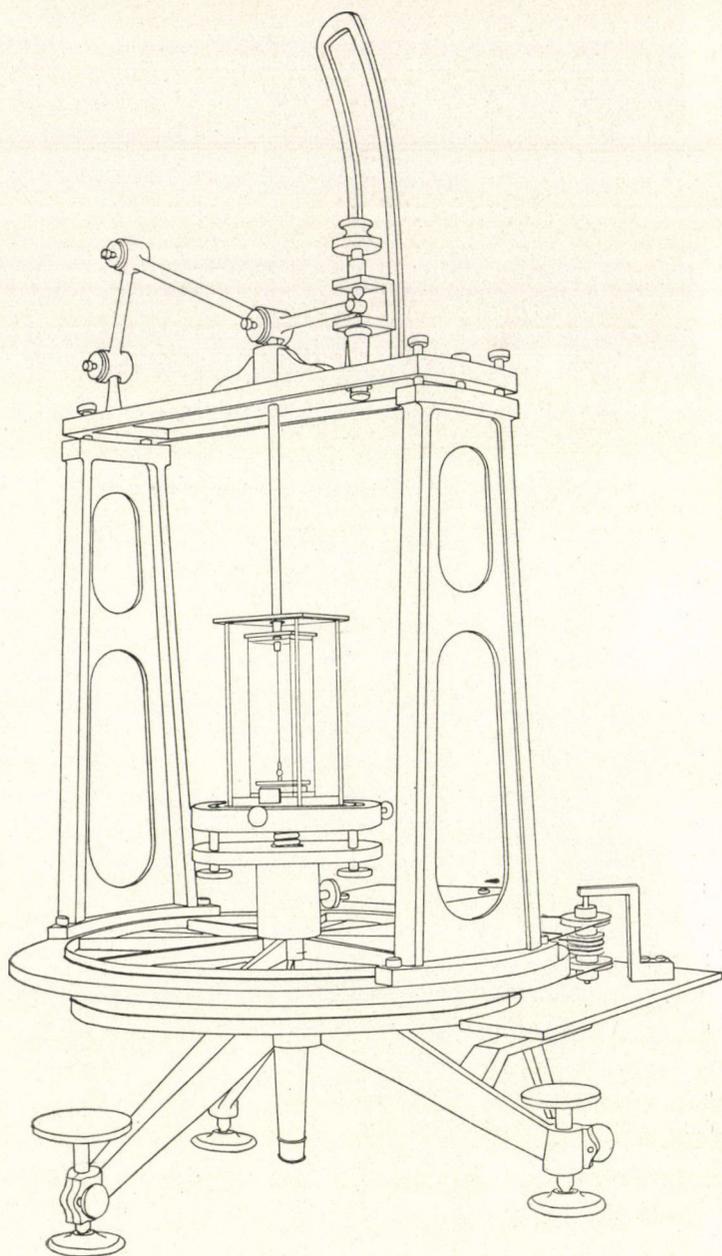
Az a tény, hogy az akkor végzett kísérleteimben csak albumin és gelatin vizes oldatain tapasztaltam e szilárdsági jelenségeket, míg czukoroldat esetében nem, első sorban annak a vizsgálatát tette szükségessé, hogy kristalloid-anyagok is bírnak-e olyanfajta szilárdsággal, mint a minőket a vizsgált kolloid-anyagokon tapasztaltam. Ezenkívül fontosnak látszott a réteg vastagságától, a hőmérséklettől és az állás időtartamától való függés minőségét is megvizsgálni; ha egyelőre nincs is rá kilátás, hogy valami egyszerű törvényszerűséget lehessen találni.

Mind e kísérletek a régebben használt eszköz és berendezés átalakítását tették szükségessé, első sorban azért, hogy a rétegvastagság csökkenthető s az anyag állandó hőmérsékleten vizsgálható legyen.

E feladatnak megfelelően igyekeztem eszközömet átalakítani, melyet új alakjában az 1. ábra mutat be.

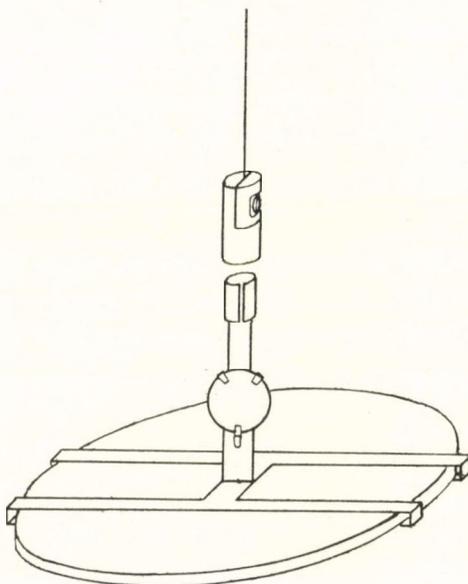
Az első változtatás az, hogy míg a régin az óramű és a torsiofej külön tartókon volt elhelyezve, ma az egész eszköz egységesen van összeépítve oly módon, hogy az óraművel tetszés szerint vagy az edényt tartó asztalka, vagy pedig a torsiofej forgatható. Pontosabb lett a lemezek távolságának be-

¹ Math. és Természettud. Értesítő. XXVII. köt. 422. lap.



1. ábra.

állítására; e célból a felső lemezt tartó rúd a foglalatjában először durva könyökemelővel tolható el és pedig az edény egész magasságában, úgy hogy a felfüggesztett korongot ez emelő segítségével gyorsan ki lehet emelni vagy leereszteni, a finomabb beállítás azután csavarral történik. Ily módon a csavardob 1 osztályrészszel való elfordítása a felfüggesztett korong magasságát 4·36 mikronnal (μ) változtatja.



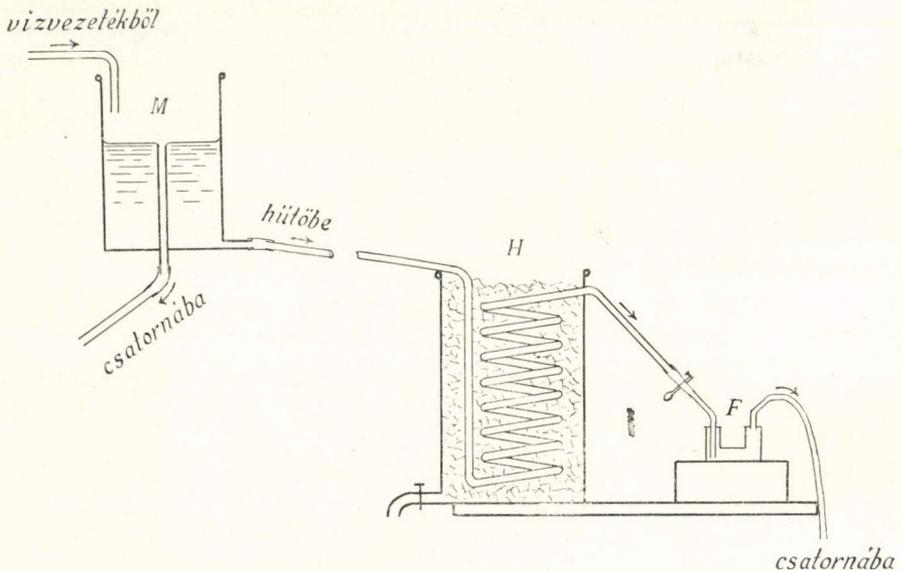
2. ábra. A felfüggesztett korong megerősítése.

A quarczfonal és a felfüggesztett korong hozzáerősítésénél a ragasztó-szert mellőztem, nehogy ezen a réven az oldás folytán tisztátlanság kerüljön a folyadékba. A fonal két parafával bélelt kis fémlap közé volt erősítve, az üvegorong pedig a szélén finom fémkampókkal volt megfogva (2. ábra). Ez a megerősítés teljesen kifogástalannak bizonyult s a mellett az egész felfüggesztés súlya 0·18 gr., koronggal együtt 1·56 gr. Az összes, a folyadékkal érintkező fémrészek aranyozva vannak.

Meg kell még említenem, hogy az új eszközön átváltó-szerkezetet is alkalmaztam, melylyel az edény forgatásának irányát

aránylag könnyen meg lehet változtatni. Ezt azonban egyelőre a méréseknél nem használtam.

A hőmérséklet változtatása céljából a vizsgálandó folyadékot tartalmazó Leybold-edény másik nagyobb edénybe van helyezve és a kettő között állandóan hűtőfolyadék kering. A hűtőfolyadék a vízvezetéki víz volt, mely a 3. ábrán feltüntetett vázlatos rajznak megfelelően az (*M*) állandó nyomást



3. ábra. Hűtőberendezés.

tartó és (*H*) olvadó jéggel megtöltött edényen haladva jutott a mérőeszközön levő edények közébe (*F*) s onnan lassan csepegve a csatornába.

Ugyanezt a hűtőberendezést használtam az abszolút erősség mérésénél is a folyadék hőmérsékletének változtatására s ott igen jól bevált; a torsio-eszköznél azonban úgy látszik nem tartja annyira állandó hőmérsékleten a vizsgálandó folyadékot, hogy az érzékeny quarczfonal közben ne csavarodnék el s így a réteg nem marad nyugodtan.

Egyébként az eszköz és a leolvasási módok a régiek ma-

radtak; lehetett volna az eszközt kisebbre és egyszerűbbre készíteni, de ezt költségkimelés végett mellőztem.

A mérések.

A vizsgált folyadék destillált víz volt, mely pergament-papír szűrőkön való többszöri és gondos tisztítás után került a mérőedénybe. Itt is megint különösen nehéz dolog volt elérni, hogy a korongok és a víz teljesen tiszták legyenek, illetve hogy a réteg vastagságához viszonyítva számbavehető méretű tisztátalanság ne legyen. E fáradságos munkában, valamint az észlelésekben való részvételért nagy köszönettel tartozom SELÉNYI PÁL egyetemi tanársegéd úrnak.

Hogy a korongok felülete a folyadékban teljesen tiszta-e, arról ferde átvilágítás útján, a felületre beállított távcső segítségével győződünk meg.

A destillált víz szilárdságának megvizsgálására végzett méréseknél a felfüggesztő fonál mindig ugyanaz maradt: 69 mm. hosszú kvarczfonál, melynek torsio-momentuma a lengésidőből (41 s) kiszámítva $\tau_{qu} = 0,0079$ c. g. s. A felfüggesztett üvegkorong vastagsága 1·06 mm., átmérője 26·5 mm.; az alatta levő, az edény fenekén nyugvó üvegkorong vastagsága 3 mm., átmérője pedig 22 mm. volt.

A mérések főként a rétegvastagság és az időtartam befolyására vonatkoznak, mert a hőmérséklet változtatására az idej enyhe tél nem volt alkalmas. Az észlelő helyiségül használt pinczében a hőmérséklet 7·5 C°-nál alacsonyabbra nem szállt le; a mesterséges hűtés pedig nem bizonyult eléggé állandónak a torsio-eszköz érzékenységéhez viszonyítva. A kvarczfonál járása s így az egyensúlyi helyzet folytonos eltolódása megakadályozta e réteg nyugodtan maradását s így hosszabb állás után sem mutatott a 4 C°-ig lehűtött víz csavarási rugalmasságot, míg hűtés nélkül a 8 C°-os víz szilárdsága is könnyen mérhető volt.

Három különböző vastagságnál (0·032, 0·04 és 0·1 mm.) vizsgáltam a csavarási rugalmasságot s annak időbeli változását oly módon, hogy az edényt elforgattam azonnal az össze-

állítás után, illetőleg a mint annyira megnyugodott a folyadék, hogy a felfüggesztett korongnak állandó egyensúlyi helyzete volt; azután nyugodt állás után több időközben, míg végre a réteg elszakadásáig forgattuk az edényt, úgy hogy a felfüggesztett korong visszatért eredeti egyensúlyi helyzetébe. Ily módon összesen öt teljes, jól felhasználható méréssorozatot végeztem, melynek jegyzőkönyvi adatait feldolgozva és a megfelelő grafikonokat a következőkben közlöm.

A táblázatokban foglalt jelölések megfelelnek az első értekezésemben közölt értelmezésnek, úgy hogy az elfordulások skálaértékben van k adva állandó 2080 mm. skálátávolság mellett. A felfüggesztett korong elcsavarodásának (δb), valamint a torsio-momentum és a csavarási modulus kiszámítására ismét

$$\delta b = \delta k \frac{n-1}{n} + \frac{\delta \Delta}{2n}; \tau_f(\delta k - \delta b) = \tau_q \delta b \text{ és } \tau_f = \frac{\pi}{2} c_f \frac{r^4}{l}$$

összefüggéseket használtam fel, hol δk a külső edény szögelfordulását, $\delta \Delta$ pedig a belső felfüggesztett korong látszólagos elfordulását jelenti.

Első sorozat. Ez a csoport négy mérésből áll, 0,04 mm. vastagságú réteggel, melyek közül az első a torsio-fej forgatásával történt, a többi három az edényt tartó asztalkáéval; innen ered az első és a többi három görbe menetében észlelhető különbség.

Az elszakítási kísérlet e sorozatban nem sikerült, mert a forgató szerkezet elakadt s javítás közben kénytelenek voltunk az eszközt annyira megbontani, hogy a réteg magától elszakadt.

Az első mérés az összeállítás után 14 órával kezdődött; eredménye a következő:

I. sorozat, 1. tábla. Víz.

A kísérlet a torsiofej forgatásával történt.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0\cdot04 mm.

Összeállítva jan. 1-én este.

Jan. 2. d. e.

Idő		Torsiofej	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
10	20	236\cdot8	193\cdot7	0\cdot0	0\cdot0	0\cdot0	Megindítva Hőmérs. 8\cdot0°
—	25	37\cdot4	93\cdot6	0\cdot0	— 0\cdot1	—	
—	30	40\cdot6	93\cdot8	+ 0\cdot3	+ 0\cdot1	—	
—	35	44\cdot0	94\cdot6	1\cdot9	0\cdot9	+ 0\cdot33	
—	40	47\cdot0	96\cdot2	3\cdot6	2\cdot5	0\cdot93	
—	45	50\cdot5	98\cdot3	5\cdot1	4\cdot6	1\cdot72	
—	50	53\cdot9	201\cdot0	6\cdot8	7\cdot3	2\cdot74	Megállítva
—	55	56\cdot7	04\cdot2	8\cdot5	10\cdot5	3\cdot94	
11	00	56\cdot8	07\cdot8	9\cdot9	14\cdot1	5\cdot30	
—	05	—	10\cdot8	10\cdot0	18\cdot1	6\cdot81	
—	10	—	13\cdot3	—	19\cdot6	7\cdot36	
—	15	—	15\cdot1	—	21\cdot4	8\cdot05	
—	20	—	16\cdot3	—	23\cdot6	8\cdot93	
—	35	—	17\cdot8	—	25\cdot1	9\cdot44	
—	50	—	18\cdot3	—	25\cdot6	9\cdot62	

Mint hogy a felfüggesztett korong a megesavarás után visszavert eredeti helyzetébe ($\delta b = \delta k$), a folyadék-rétegnek nincs szilárdsága, tehát $\tau_f = 0$. A következő mérés 5 $\frac{1}{4}$ napi állás mulva kezdődik, ez idő alatt a hőmérséklet ingadozása 0\cdot1 C°-nál kisebb. A mérések ezután mind az edény asztalának forgatásával történtek.

I. sorozat, 2. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0\cdot04 mm.

Jan. 7. d. u.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
4	30	225\cdot0	191\cdot23	0\cdot0	0\cdot0	0\cdot0	Megindítva Hőmérs. 8\cdot0°
—	35	28\cdot2	92\cdot8	+ 1\cdot6	+ 1\cdot5	+ 0\cdot96	
—	40	32\cdot2	94\cdot4	3\cdot6	3\cdot1	2\cdot07	
—	45	36\cdot0	97\cdot0	5\cdot5	5\cdot7	3\cdot52	
—	50	39\cdot9	98\cdot5	7\cdot4	7\cdot2	4\cdot56	
—	55	43\cdot9	99\cdot9	9\cdot4	8\cdot6	5\cdot59	
5	00	48\cdot0	201\cdot5	11\cdot5	10\cdot2	6\cdot70	
—	05	52\cdot0	03\cdot2	13\cdot5	11\cdot9	7\cdot84	
—	10	56\cdot0	04\cdot4	15\cdot5	13\cdot1	8\cdot80	
—	15	59\cdot7	04\cdot1	17\cdot4	12\cdot8	9\cdot15	
—	20	63\cdot7	05\cdot2	19\cdot4	13\cdot9	10\cdot06	
—	25	67\cdot6	04\cdot5	21\cdot3	13\cdot2	10\cdot28	
—	30	71\cdot9	04\cdot8	23\cdot5	13\cdot5	10\cdot93	Megállítva
—	36	—	02\cdot6	—	11\cdot3	10\cdot11	
—	45	—	00\cdot5	—	9\cdot2	9\cdot31	
—	55	—	199\cdot8	—	8\cdot5	9\cdot05	
6	25	—	99\cdot4	—	8\cdot1	8\cdot91	

Ez esetben a végső $\delta b > 0$, tehát a réteg állandó megcsavarást mutat a forgatás megszüntével. Az elfordulás adataiból

$$\tau_f = 0\cdot0049 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 8\cdot5 \times 10^{-6} \text{ c. g. s.}$$

További egy napi állás után a korong látszólag visszatért egyensúlyi helyzetébe, mert $\delta A = 1, 6$, de ez valószínűleg a hőmérséklet változásának a következménye, mert jan. 7.-én estétől másnap reggelig a felfüggesztett korong helyzete csak 2 osztályrészszel változott s csak a nap folyamán következett azután a

gyorsabb változás. Délutánra ismét megcsillapodott s ekkor az újabb megcsavarás következett, melynek adatai a következő táblázatban vannak.

I. sorozat, 3. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.04 mm.

Jan. 8. d. u.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
3	30	272.0	192.8	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	35	74.9	95.2	1.5	2.4	1.27	Hőmérs. 7.8°
—	40	79.6	99.1	3.8	6.3	3.32	
—	45	83.4	201.5	5.7	8.7	4.09	
—	50	87.1	03.2	7.6	10.4	5.80	
—	55	91.2	06.4	9.6	13.6	7.51	
4	00	95.0	07.8	11.5	15.0	8.51	
—	05	99.0	08.4	13.5	15.6	9.23	
—	10	303.0	10.1	15.5	17.3	10.37	
—	15	06.9	13.0	17.5	20.2	11.96	
—	20	10.8	14.8	19.4	22.0	13.12	
—	25	14.4	17.5	21.2	24.7	14.58	
—	30	18.2	20.8	23.1	28.0	16.30	Megállítva
—	35	—	20.5	—	27.7	16.18	
—	45	—	20.1	—	27.3	16.03	
5	30	—	18.8	—	26.0	15.55	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0.016 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 2.8 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

a mi a szilárdulás folyamatának előhaladását mutatja.

További 1 nap és 15 órai állás után megcsavarva a réteget, a következő adatsorozatot nyertük.

I. sorozat, 4. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0\cdot04 mm.

Jan. 10. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
8	45	318\cdot3	217\cdot3	0\cdot0	0\cdot0	0\cdot0	Megindítva Hőmérs. 7\cdot6°
—	50	27\cdot4	21\cdot0	+ 2\cdot1	+ 3\cdot7	+ 1\cdot90	
—	55	26\cdot5	24\cdot6	4\cdot1	7\cdot3	3\cdot76	Megállítva
9	00	30\cdot9	28\cdot6	6\cdot3	11\cdot3	5\cdot82	
—	05	35\cdot0	32\cdot5	8\cdot4	15\cdot2	7\cdot80	
—	10	38\cdot5	35\cdot4	10\cdot1	18\cdot1	9\cdot33	
—	15	42\cdot0	38\cdot5	11\cdot9	21\cdot2	10\cdot93	
—	20	46\cdot1	42\cdot2	13\cdot9	24\cdot9	12\cdot72	
—	25	50\cdot2	45\cdot8	15\cdot9	28\cdot5	14\cdot70	
—	30	54\cdot1	49\cdot3	17\cdot9	32\cdot0	16\cdot51	
—	35	58\cdot3	53\cdot1	20\cdot0	35\cdot8	18\cdot46	
—	40	62\cdot3	56\cdot9	22\cdot0	39\cdot6	20\cdot38	
—	45	66\cdot0	60\cdot0	23\cdot9	42\cdot7	22\cdot01	
—	50	70\cdot2	64\cdot0	25\cdot9	46\cdot7	24\cdot05	
—	55	73\cdot8	66\cdot8	27\cdot8	49\cdot5	25\cdot56	
10	05	—	66\cdot7	—	49\cdot4	25\cdot51	
—	20	—	66\cdot7	—	49\cdot4	25\cdot51	
11	35	—	61\cdot8	—	44\cdot5	23\cdot66	

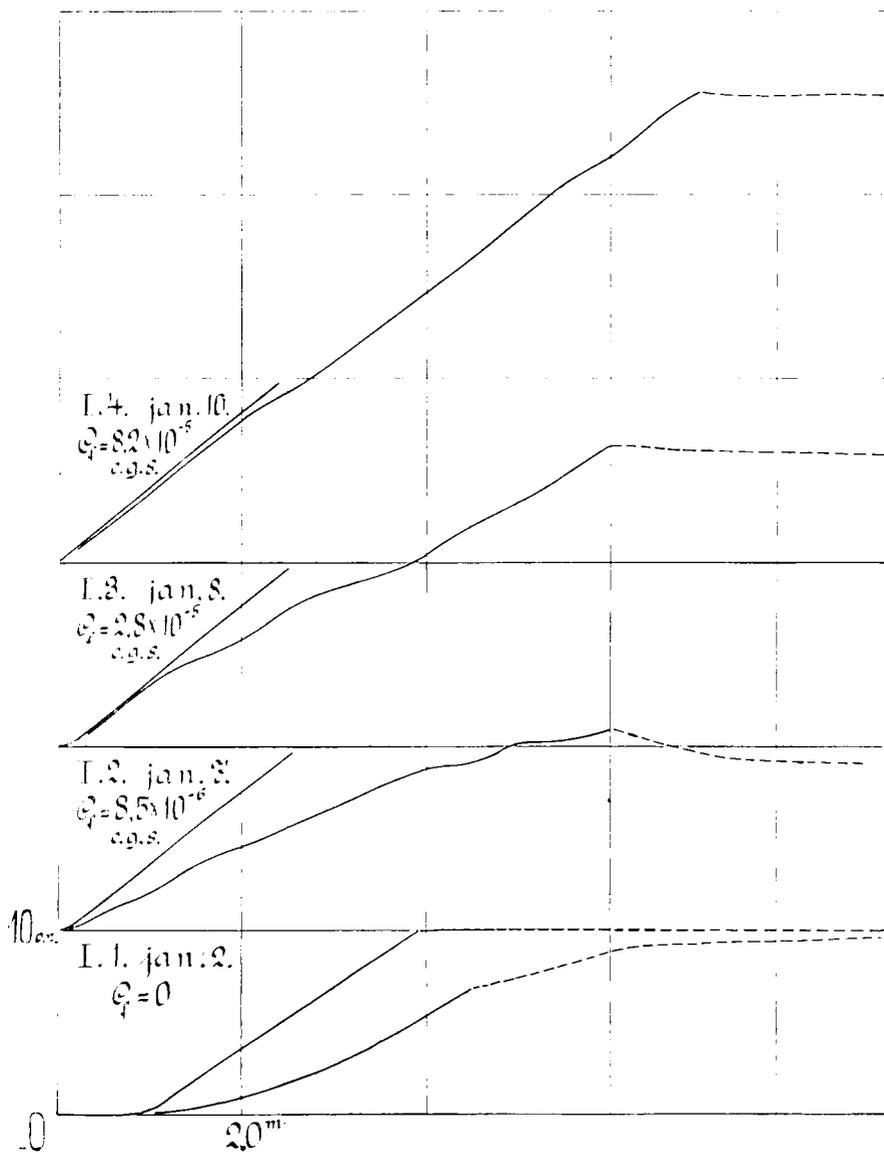
Kiszámítva ez adatokból

$$\tau_f = 0\cdot047 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 8\cdot2 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

növekedő értékeket nyerjük.

Ezután megkísérlettük a réteget csavarással elszakítani; közben azonban megakadt a forgató szerkezet s a javítás alatt a réteg, valószínűleg lökés következtében, magától elszakadt, úgy hogy a csavarási erősségnek megfelelő maximális forgató nyomatékot e sorozatban nem sikerült meghatározni.



4. ábra.

Az első sorozat eredményei összefoglalva a 4. rajzon vannak grafikusán ábrázolva, melyből világosan látszik a csavarási rugalmasság növekedése az idő folyamán.

Második sorozat. A forgató szerkezet javítása, illetve átalakítása és kipróbálása pár napot vett igénybe, úgy hogy a második kísérletsorozathoz az eszköz csak január 15.-én délután volt véglegesen összeállítva. Az első csavarás 1 nap és 16 órai állás után kezdődött. A rétegvastagság e sorozatban mindig 0·1 mm. volt.

II. sorozat, 1. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0·1 mm.

Összeállítva jan. 15.-én d. u.

Jan. 17. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	$\delta \Delta$	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
9	45	250·0	323·0	0·0	0·0	0·0	Megindítva
—	50	52·2	25·5	+ 1·1	+ 2·5	+ 1·20	Hőmérs. 7·8°
—	55	56·0	27·0	3·0	4·0	2·25	
10	00	60·0	27·5	5·0	4·5	2·93	
—	10	67·5	24·0	8·8	+ 1·0	2·57	
—	15	71·0	22·7	10·5	— 0·3	2·51	
—	20	75·0	21·7	12·5	1·3	2·63	
—	25	79·0	20·5	14·5	2·5	2·69	
—	30	83·2	19·2	16·6	3·8	2·72	
—	40	91·4	17·5	20·7	5·5	3·11	
—	45	95·2	16·0	22·6	7·0	3·02	Megállítva
11	15	—	09·0	—	14·0	+ 0·39	
12	30	—	08·2	—	14·8	— 0·09	

Ennél a rétegvastagságnál tehát 2 napi állás után nincs csavarási rugalmasság $\tau_f = 0$; újabb 24 órai állás után azonban már a következő adatok mutatják a csavarási rugalmasságot.

II. sorozat, 2. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0\ 0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0·1 mm.

Jan. 18. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	nap	tükre					
10	30	295·0	307·8	0·0	0·0	0·0	Megindítva Hőmérs. 7·9°
—	35	98·3	10·0	+ 1·7	+ 2·2	+ 1·23	
—	40	302·0	10·1	3·5	2·3	1·73	
—	45	06·2	11·6	5·6	3·8	2·83	
—	50	10·2	12·2	7·6	4·4	3·55	
—	55	14·2	11·3	8·6	3·5	3·46	
11	00	18·6	09·8	11·8	2·0	3·70	
—	05	22·6	08·8	13·8	1·0	3·83	
—	10	26·2	08·9	15·6	1·1	4·32	
—	15	30·2	10·2	17·6	2·4	5·30	
—	20	34·1	11·3	19·6	3·5	6·20	
—	25	38·0	13·2	21·5	5·4	7·40	
—	30	42·0	14·6	23·5	6·8	8·43	
—	35	46·2	17·2	25·6	9·4	9·93	
—	40	50·0	19·5	27·5	11·7	11·28	Megállítva
—	49	—	19·5	—	11·7	11·28	
12	05	—	18·6	—	10·8	10·94	
—	52	—	17·9	—	10·1	10·67	

Ez észlelések eredménye, hogy

$$\tau_f = 0\ 0050 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 2\ 2 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

Ismét 24 órai állás után a csavarás eredménye a következő sorozatból adódik.

II. sorozat, 3. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.1 mm.

Jan. 19. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
9	00	350.0	311.4	0.0	0.0	0.0	Megindítva Hőmérs. 8.0°
—	05	53.1	13.8	+ 1.6	+ 2.4	+ 1.28	
—	10	57	16.4	3.5	5.0	2.75	
—	15	61	19.2	5.5	7.8	4.30	
—	20	65	22.2	7.5	10.8	5.93	
—	25	69.5	25.7	9.8	14.3	7.81	
—	35	77	31.8	13.5	20.4	11.04	
—	40	81	34.8	15.5	23.4	12.67	
—	45	85	38.0	17.5	26.6	14.37	
—	50	89	41.1	19.5	29.7	16.03	
—	55	93	44.8	21.5	33.4	17.93	
11	00	97	47.8	23.5	36.4	19.56	Megállítva
—	05	"	"	"	"	"	
—	10	"	"	"	"	"	
—	20	"	"	"	"	"	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0.04 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1.7 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

A következő mérést másnap (24 óra) végeztük, de meg kell jegyeznem, hogy az előző délután a pinczehelyiségben kénytelenek voltunk, az abszolút erősség mérésére szolgáló eszköz összeállítására véget, sokat járni és egy gázlángot hosszabban égetni. Ez magyarázza az egyensúlyi helyzet nagyobb eltolódását és a szilárdság csökkenését, mely a következő adatokban mutatkozik.

II. sorozat, 4. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.1 mm.

Jan. 20. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	gyzet
óra	perc	tükre					
10	00	397.0	271.8	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	05	400.8	74.8	+ 1.9	+ 3.0	1.60	Hőmérs. 8.0°
—	10	04.6	75.6	3.8	3.8	2.38	
—	15	08.3	76.2	5.6	4.4	3.06	
—	20	12.1	77.0	7.5	5.2	3.84	
—	30	20.1	77.0	11.5	5.2	4.84	
—	40	28.8	76.9	15.9	5.1	5.89	
—	50	37.0	77.2	20.0	5.4	7.03	
—	55	40.6	78.8	21.8	7.0	8.08	
11	00	44	80.5	23.5	8.7	9.14	Megállítva
—	07	"	80.3	—	8.2	8.95	
—	15	"	79.2	—	+ 7.4	8.65	
d. u.							
4	35	44	79.0	—	—	—	Megvilágítva
—	40	"	70.0	—	— 1.8	5.2	
5	30	"	63.0	—	— 8.8	2.57	
—	55	"	62.3	—	— 9.5	2.31	

E mérés eredménye, hogy

$$\tau_f = 0.0045 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1.9 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

Az értékek csökkenése, mint már említettem, az előző napi zavaroknak tulajdonítandó s ez újabb bizonyítéka, hogy a nyugodt, változatlan állás mily fontos tényező a réteg megszilárdulásában. Ezzel a meglazult réteggel sikerült a *megvilágítás* befolyását is kimutatni. A 4 óra 35 perczkor egy 16 gyertyás homályos üvegű izzólámpával 35 cm. távolságból 20°-ig meg-

világított réteg szilárdsága rohamosan csökkent, úgy hogy δb 8·65-ről 2·57-re esett egy óra alatt.

A megvilágítás után a réteget 2 napig állni hagytuk, mert főként a csavarási erősséget akartam meghatározni. A két napi állás után a következő mérési eredményeket nyertük.

II. sorozat, 5. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0·1 mm.

Jan. 22. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
9	00	444·0	254·7	0·0	0·0	0·0	Megindítva
—	05	48·0	57·8	+ 2·0	+ 3·1	+ 1·07	Hőmérs. 8·2°
—	10	51·7	59·0	3·8	4·3	2·57	
—	15	55·4	58·2	5·7	3·5	2·66	
—	20	59·5	58·0	7·8	3·3	3·08	
—	25	63·1	57	9·5	2·3	3·25	
—	30	68·0	56·2	12·0	1·5	3·56	
—	35	71·0	55·7	13·5	1·0	3·75	
—	40	75·0	55·2	15·5	+ 0·5	3·69	
—	45	79·0	54·3	17·5	— 0·4	4·23	
—	50	84·0	54·5	20·0	— 0·2	4·93	
—	55	88·3	54·9	22·1	+ 0·2	5·47	
10	00	92·2	55·8	24·1	1·1	6·67	
—	05	96·0	57·0	26·0	2·3	7·36	
—	10	500·0	59·2	28·0	4·5	8·68	Megállítva
—	15	„	58·7	—	4·0	8·50	
—	26	„	58·0	—	3·3	8·24	
11	10	„	56·0	—	1·3	7·49	

Ezekből látszik, hogy a réteg előbbi szilárdságát majdnem teljesen visszanyerte, mert

$$\tau_f = 0\cdot0029 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1\cdot3 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

A következő táblázat a 0·1 mm. vastagságú réteg elszakításának folyamatát mutatja, melyet újabb két napi állás után csavarással értünk el.

II. sorozat, 6. tábla. Víz.

Szakítási kísérlet.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze 0·1 mm.

Jan. 24. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
8	40	350	100·6	0·0	0·0	0·0	Megindítva
—	45	54	03·5	2·0	2·9	1·58	Hőmérs. 7·9°
—	50	58	07	4·0	6·4	3·41	
—	55	62	10·4	6·0	9·8	5·18	
9	00	65·5	14·5	7·7	13·9	7·16	
—	10	74	21·5	12·0	20·9	10·95	
—	20	82·5	29·8	16·2	29·2	15·03	
—	25	87·5	34·8	18·7	34·2	17·54	
—	30	91·6	39·0	20·8	38·4	19·46	
—	35	96·2	42·3	23·1	41·7	21·08	
—	40	400	46·2	25·0	45·6	23·38	Megállítva
—	45	*	46·1	—	45·5	—	
—	50	*	46·1	—	45·5	—	
—	55	.	46	—	45·4	23·12	

Jan. 24. d. u.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tűkre					
3	00	400	36·7	—	36·1	+19·83	
—	15	"	137·0	25·0	36·1	19·83	Megindítva
—	20	03·3	40·5	26·6	39·6	21·55	
—	25	01·0	45·0	28·5	44·1	23·71	
—	30	11·2	48·0	30·6	47·1	25·37	
—	35	15·2	51·3	32·6	50·4	27·10	
—	40	19·3	53·1	34·7	52·2	28·30	
—	45	23·6	55·2	36·8	54·3	29·62	
—	50	27·6	59·0	38·8	58·3	31·62	
—	55	31·2	62·5	40·6	61·6	33·31	
4	00	35·5	66·8	42·7	67·9	35·47	
—	10	43·0	72·5	46·5	71·3	38·10	
—	15	46·5	76·0	48·3	75·1	40·30	
—	20	50·0	79·6	50·0	78·7	42·09	
—	25	54·0	83·7	52·0	82·8	44·14	
—	35	62·0	90·8	56·0	89·9	47·80	A réteg elszakadt
—	44	73·0	20·0	61·5	19·1	22·56	Megállítva
—	45	—	110·0	—	+ 9·1	18·80	
—	53·5	—	97·5	—	—10·4	13·48	
—	59	—	85·0	—	—15·9	9·40	
5	18	—	88·0	—	—12·9	10·53	
—	55	—	87·8	—	—13·1	10·46	

Ezekből az adatokból kiszámítható az elszakítás pillanatában a csavarási momentum, a mely tehát a réteg csavarási erősségének mértéke, mert az a maximális forgató nyomaték, melyet a réteg még kibírt. És pedig

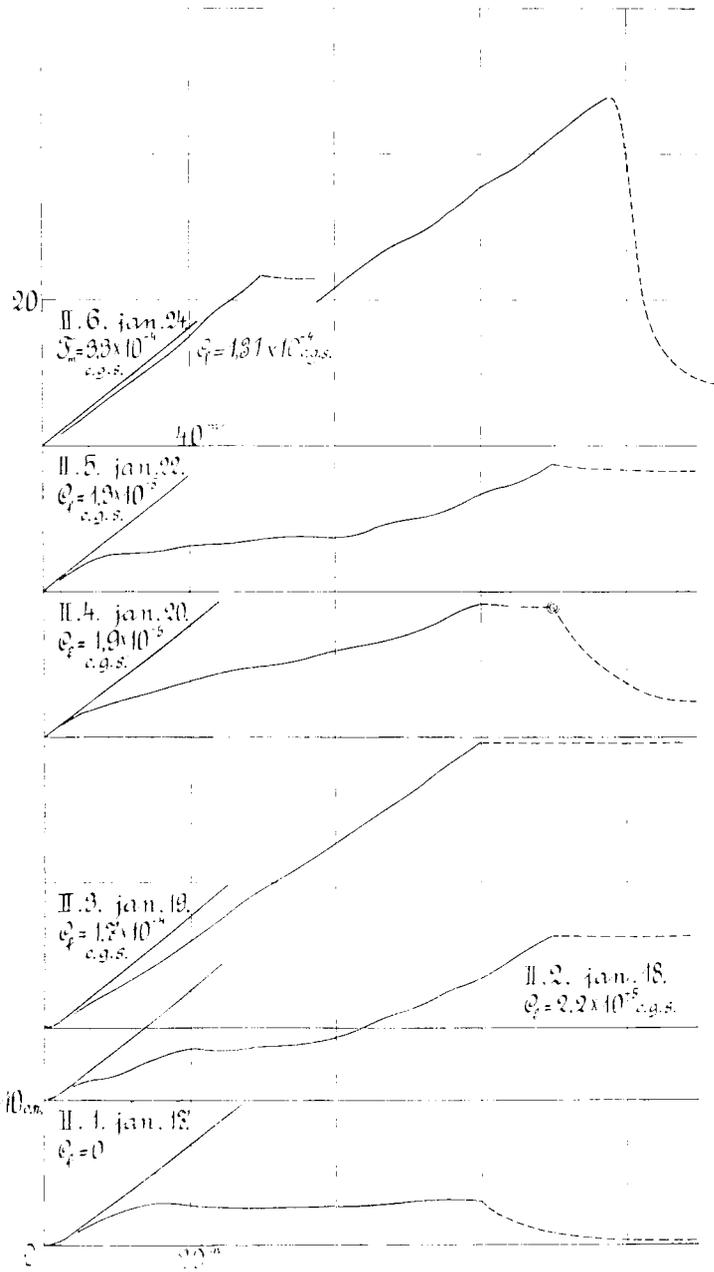
$$\tau_f = 0\cdot030 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1\cdot31 \times 10^{-4} \text{ c. g. s. és}$$

$$F_m = 3\cdot3 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

A második sorozat eredményeit az 5. ábra mutatja az egyes mérések grafikonjaival.

Az elszakítás után a korongot leeresztettük az alsótól 0·057 mm. távolságra s ez a vékony réteg már 12 órai állás után muta-



5. ábra.

tott szilárdságot, a mennyiben $\tau_f = 0.007$ c. g. s. $C_f = 1.7 \times 10^{-5}$ c. g. s. volt; további egy napi állás után azonban az elszakítási kísérlet nem sikerült, mert a forgató szerkezet megakadt és a kézzel való forgatás sem vezetett eredményre.

Ennek a kísérletnek az adatai a következők:

Víz, összeállítva jan. 24.-én este 8 órakor.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0,057 mm.

Jan. 25. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
9	30	350	365.3	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	35	52	65	+ 1.0	— 0.3	+ 0.36	Hőmérs. 7.6°
—	40	55.8	66.8	2.9	+ 1.5	1.28	
—	45	60	69.8	5.0	4.5	2.93	
—	50	64	72.2	7.0	7.1	4.42	
—	55	68	74.2	9.0	8.9	5.59	
10	00	72	76.1	11.0	10.8	6.81	
—	05	75.5	78.6	12.2	13.3	8.19	
—	10	79.7	79.9	14.3	14.6	9.20	
—	16	84	82	17.0	16.7	10.53	
—	20	87.5	83.6	18.7	18.3	11.57	
—	25	91.4	86.0	20.7	20.7	12.95	
—	30	95.2	88.2	22.6	22.9	14.25	Megállítva
—	55	—	86	—	20.7	12.95	
11	08	95.2	85.2	22.6	19.9	12.65	
12	04	—	82.7	—	17.4	12.19	
d. u.							
3	15	95.2	78.3	22.6	13.0	10.54	
6	45	—	77.8	—	12.5	10.37	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0.0068 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1.7 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

Újabb egy napi állás után, mialatt a korongok köze kissé csökkent:

Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

Jan. 26. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
9	00	200	180.3	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	05	203.5	82.3	+ 1.7	+ 2.0	+ 1.19	Hőmérs. 7.4°
—	15	12	89	6.0	8.7	4.77	
—	20	15.8	91.8	7.9	11.5	6.30	
—	25	19.5	95	9.7	14.7	7.94	
—	30	23.6	98.4	11.8	18.1	9.76	
—	35	27.4	201.6	13.7	21.3	11.43	
—	40	31.3	05.0	15.6	24.7	13.19	
—	45	35.4	08.8	17.7	27.7	14.83	
—	50	39	11.1	19.5	30.8	16.45	
—	55	42.8	14.2	21.4	33.9	18.10	
10	00	46.5	17.5	23.2	37.2	19.79	Megállítva
—	05	—	—	—	35.3	19.08	
—	12	46.5	17.5	23.2	34.7	18.85	
d. u.							
6	45	—	—	—	33.2	18.39	

Kiszámítva a nyugalmassági állandókat:

$$\tau_f = 0.030 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 5.9 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

Ez adatokból ismét kitűnik, hogy a rétegvastagság csökkentése a megszilárdítás folyamatának tartamát tetemesen csökkenti. Az elszakítás sem az óraművel, sem a kézzel való továbbforgatásnál nem következett be mindaddig, míg a korongot fel nem emeltük, ezért, és a korongok közének kísérlet közben való csökkenése miatt, e mérést nem vettem fel a sorozatokba.

Harmadik sorozat. Minthogy a kisebb rétegvastagságnál a

korong leszállása miatt a sorozatot nem lehetett befejezni s ezt a leszállást egyelőre nem tudtuk biztosan kiküszöbölni, újból 0·1 mm. rétegvastagsággal ismételtük meg a kísérleteket. Az első mérés az összeállítást követő 3½ napi állás után történt.

III. sorozat, 1. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0\cdot0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0·1 mm.

Összeállítva: jan. 28.-án este.

Febr. 2. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δl	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
8	45	350·0	358·5	0·0	0·0	0·0	Megindítva Hőmérs. 8·6°
—	50	47·7	57·5	—1·1	—1·0	—0·67	
—	55	44·0	56·4	3·0	2·1	1·54	
9	00	40·0	55·5	5·0	3·0	2·38	
—	05	36·0	55·1	7·0	3·4	3·03	
—	10	32·1	54·4	8·9	4·1	3·78	
—	15	28·5	54·8	10·7	3·7	4·08	
—	20	24·7	54·7	12·6	3·8	4·59	
—	25	21·1	53·8	14·4	4·7	5·37	
—	30	18·5	52·5	15·7	6·0	6·20	
—	35	13·8	50·8	18·1	7·7	7·41	
—	40	09·2	47·2	20·4	11·3	9·35	
—	45	06·2	46·2	21·9	12·3	10·09	
—	51	—	47·0	—	11·5	9·81	
10	03	—	46·7	—	11·8	9·91	
11	20	—	46·4	—	12·1	10·02	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0\cdot0061 \text{ c. g. s.}$$

$$G_f = 2\cdot7 \times 10^{-5} \text{ c. g. s.}$$

a mi kisebb, mint az előző kísérletben 3½ napi állás után (közben naponkénti megcsavarásokkal) nyert érték ($1\cdot7 \times 10^{-4}$),

de ennek az emelkedő hőmérséklet adja magyarázatát (emelkedés 0.6 C°).

További 6 napig tartó nyugodt állás után a következő szakítási kísérletet végeztük:

III. sorozat, 2. tábla. Víz.

Szakítási kísérlet:

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.1 mm.

Febr. 8. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δk	Jegyzet
óra	perc	tükre					
8	30	306.3	365.4	0.0	0.0	0.0	Megindítva Hőmérs. 8.9°
--	35	03.5	64.1	-1.4	-1.3	-0.84	
--	40	00.2	62.4	3.1	3.0	1.89	
--	45	296.2	60.5	5.1	4.9	3.10	
--	50	92.8	58.4	6.7	7.0	4.52	
9	00	85.0	52.4	10.6	13.0	6.53	
--	05	81.2	49.6	12.5	15.8	8.78	
--	10	77.4	46.5	14.4	18.9	10.71	
--	15	74.1	43.5	16.1	21.9	12.26	
--	20	70.4	40.3	17.9	25.1	13.93	
--	25	66.7	36.8	19.8	28.6	15.70	
--	30	63.0	33.3	21.6	32.1	17.48	Megállítva
--	35	—	33.4	—	32.0	17.44	
--	40	—	33.4	—	32.0	17.44	
--	52	—	34.0	—	31.4	17.22	

Febr. 10. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
8	40	263·0	335·1	21·6	31·4	17·22	Megindítva Hőmérs. 8·9°
—	45	59·5	32·0	23·3	34·5	18·83	
—	50	55·8	28·4	25·2	38·1	20·64	
—	55	51·8	24·5	27·2	42·0	22·60	A réteg elszakadt Megállítva
9	00	48·0	21·0	29·1	45·5	24·29	
—	05	244·5	317·6	30·8	48·9	26·11	
—	10	40·7	14·3	32·7	52·2	27·83	
—	10·8		17·0		49·5	26·82	
—	12		22·3		44·2	24·82	
—	13		24·5		42·0	23·99	
—	14		29·2		37·3	22·23	
—	15		35·7		36·7	19·79	
—	16		41·2		31·1	17·71	
—	17		46·2		26·2	15·83	
—	19		54·5		17·9	12·72	
—	20		58·5		13·9	11·21	
—	22		65·0		7·4	8·77	
—	24		70·0		2·4	6·89	
—	26		75·0		—2·6	5·01	
—	28		78·3		—5·9	3·77	
—	30		81·4		9·0	2·60	
—	35		86·5		14·1	0·68	
—	40		89·1		16·7	—0·29	
—	45		91·0		18·6	—1·01	
—	50		91·8		19·4	—1·31	
10	00		91·8		—	—	
—	30		91·5		—	—	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0\cdot032 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1\cdot4 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

$$F_m = 2\cdot2 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.,}$$

melyek nagyon jól megfelelnek az e rétegvastagságra az előző mérésorozatban nyert értékekkel

$$(F_m = 1\cdot9 \times 10^{-4} \text{ c. g. s., } \tau_f = 0\cdot03 \text{ c. g. s., } C_f = 1\cdot31 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}).$$

A harmadik sorozat grafikonjait a 6. ábra mutatja be.

Ezután a hőmérséklet már 9 C° -ra emelkedett s ekkor a 0.1 mm. réteg többé nem mutatott szilárdságot a csavarásnál, azért megpróbáltam az edényt a már ismertetett módon hűteni. A berendezés elkészültével, de még a hűtés megkezdése előtt leeresztettem a korongot 0.05 mm. távolságra és 12 órai állás után a réteg már olyan szilárdságot mutatott, hogy szakítási kísérletet lehetett végezni, melyből a szilárdságra

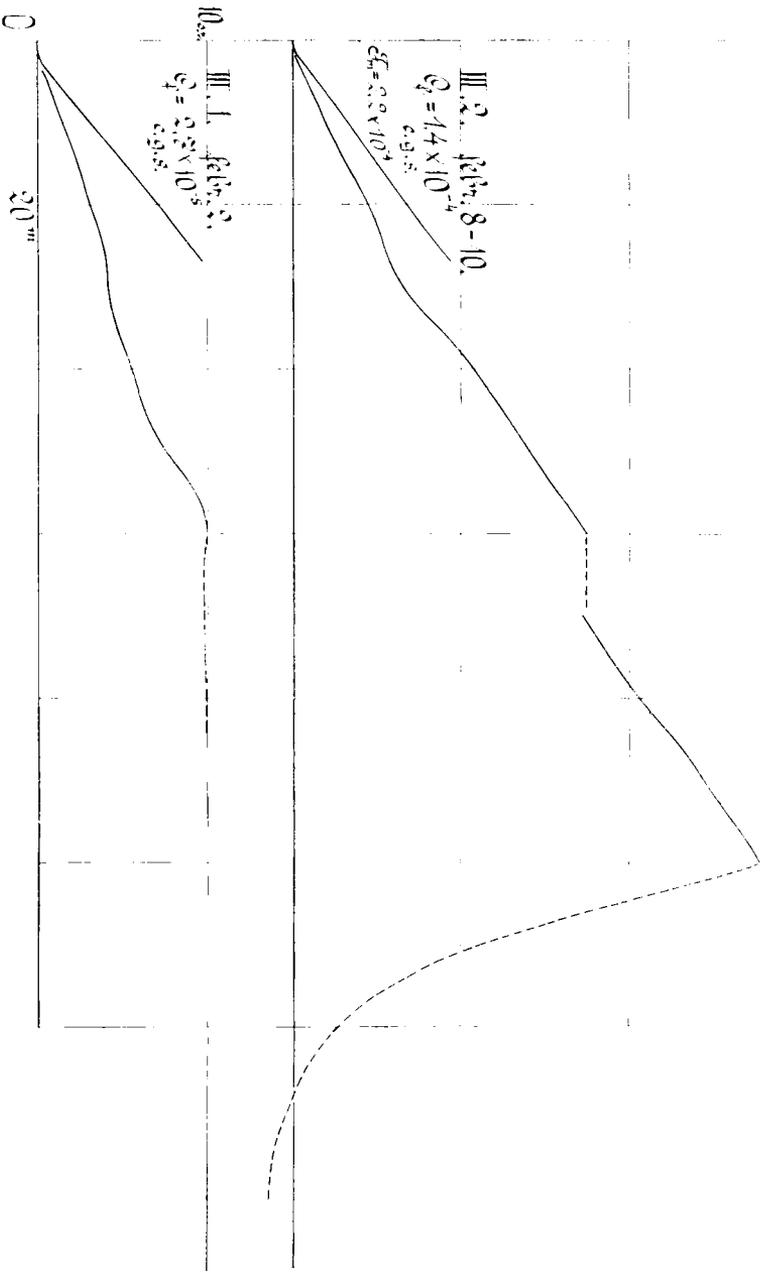
$$F'_m = 2.4 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

adódott. Az elszakítás után azonban a korong nem tért vissza egyensúlyi helyzetébe, a réteg vastagsága is megváltozott, 0.025 mm. lett; valószínű, hogy a két jelenség összefügg. Azt, hogy a rétegvastagság állás közben csökken, több ízben tapasztaltuk s úgy látszik a csavarmenet hibájával függ össze, mert mikor külön e leereszkedés vizsgálata végett a holtmenet hibájára ügyelve állítottuk be a korongok közét, az teljesen változatlan maradt, hosszabb állás után is.

A hűtés, mint már említettem, nem sikerült, mert közben a felfüggesztett korong egyensúlyi helyzete folytonosan vándorolt s a réteg hosszabb állás után sem szilárdult meg; ez természetesen a hűtővíz csekély hőmérsékleti ingadozásainak tulajdonítandó, melyek iránt a quarezfonál igen érzékeny.

A hűtés kipróbálása után, daczára 9 C° -on felüli hőmérsékletnek, megkísérlettem ismét vékony réteg szilárdságát megvizsgálni, mert erre utalt a hűtés előtt 0.05 mm. réteggel tett kísérlet sikere.

Negyedik sorozat. A réteg vastagsága 0.032 mm. volt és az első mérést ennél a kis vastagságnál már a leeresztés után 1 órával végeztük, melynek eredménye az, hogy kezdetben nincs a rétegnek szilárdsága. Miután a nagy surlódás folytán a korong gyorsan megnyugodott, megkísérlettük rövidebb időközökben végezni csavarási kísérleteket; mert eleve valószínű, hogy minél vékonyabb a réteg, annál gyorsabban bekövetkezik a megszilárdulás.



6. fibru.

IV. sorozat, 1. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

Összeállítva márcz. 14. d. e. 10. ó. 30. p.

A korongok köze: 0.032 mm.

Márc. 14. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	$\delta \Delta$	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
11	30	190 *	206.0	0.0	0.0	0.0*	Megindítva
—	35	91.5	06.5	+0.7	+0.5	+0.30	*Tulajdonképeni
—	40	95.0	10.0	2.5	4.0	2.12	kiinduló helyzet
—	45	98.7	13.4	4.3	7.4	3.87	160, tehát
—	50	202.3	16.4	6.1	10.4	5.45	$\delta b_{\text{corr}} = \delta b + 17.22$
—	55	06.0	18.0	8.0	12.0	6.51	
12	00	09.5	18.7	9.2	12.7	7.21	Megállítva
—	05	—	18.0	—	12.0	6.91	
—	10	09.5	17.9	9.2	11.9	6.90	
—	20	—	17.6	—	11.6	6.79	Hőmérs. 10.1 C°
—	32	09.5	17.0	9.2	11.0	+6.57	
d. u.							
3	15	09.5	173.2	9.2	—	—	
5	23	—	71.5	—	—	-10.54	$\delta b_{\text{corr}} = + 6.68$

Ez adatokból

$$\tau_f = 0.$$

Ugyanaznap délután összesen 6 órai állás után a mérés adatai a következők:

IV. sorozat, 2. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.032 mm.

Márc. 14. d. u.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
5	30	209.5	171.3	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	35	12.5	73.8	1.5	2.5	1.31	Hőmérs. 10 C°
—	40	16.1	76.8	3.3	5.5	2.88	
—	45	19.7	80.0	5.1	8.7	4.54	
—	50	23.3	83.1	6.9	11.8	6.15	
—	55	27.1	86.6	8.8	15.3	7.95	
6	00	31.0	90.1	10.7	18.8	9.76	Megállítva
—	05	34.8	93.5	12.6	22.2	11.50	
—	10	38.4	96.8	14.4	25.5	13.20	
—	15	242.0	200.0	16.2	28.7	14.85	
—	20	—	199.9	—	28.6	14.83	
—	30	—	99.2	—	27.9	14.55	
—	53	—	78.0	—	6.7	6.57	
7	15	—	78.2	—	6.9	—	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0.0053 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 10.9 \times 10^{-6} \text{ c. g. s.}$$

tehát már 6 órai állás után tetemes szilárdságot mutat e vékony réteg.

A rákövetkező éjszaka folyamán nyugodtan állva maradt a folyadék; a másnap reggeli mérésnél már szakadásig csavartuk a réteget mint az a következő táblázatból látható.

IV. sorozat, 3. tábla. Víz.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.032 mm.

Márc. 15. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	k	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
8	35	242.0	173.0	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	40	45.4	75.9	+ 1.7	+ 2.9	1.51	Hőmérs. 9.9°
—	50	53.0	82.5	5.5	9.5	3.53	
—	55	56.6	86.0	7.3	13.0	6.70	
9	00	60.0	89.5	9.0	16.5	8.45	
—	05	63.7	92.8	10.8	19.8	10.15	
—	10	67.3	96.0	12.6	23.0	11.80	
—	15	71.0	99.5	14.5	26.5	13.58	
—	20	74.8	202.9	16.4	29.9	15.34	
—	25	78.7	06.7	18.3	34.7	17.63	
—	30	82.5	10.1	20.2	37.1	19.01	
—	35	86.0	13.5	22.0	40.5	20.73	Megállítva
—	40	"	12.5	"	39.5	20.35	
—	45	"	12.3	"	39.3	20.27	
—	50	"	12.3	"	"	"	
10	07	"	12.1	"	39.1	20.20	
—	12	"	12.1	"	"	"	
—	35	286.0	212.0	"	39.0	20.16	Megindítva
—	40	89.4	15.1	23.7	42.1	21.75	
—	45	92.9	18.7	25.4	45.7	23.55	
—	50	96.7	22.3	27.3	49.3	25.37	
—	55	300.1	26.0	29.0	53.0	27.19	

Márc. 15. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
11	00	03·5	29·0	30·7	56·0	28·74	Megállítva
—	05	07·0	32·5	32·5	59·5	30·49	
—	10	310·5	236·0	34·2	63·0	32·25	
—	20	17·7	43·0	37·8	70·0	35·78	
—	30	25·1	50·2	41·5	77·2	39·41	
—	40	32·0	51·3	45·0	78·3	40·69	
—	40·5	32·5	—	45·2	—	—	
—	42	“	47·8	“	74·8	39·43	
—	45	“	35·0	“	62·0	34·62	
—	48	“	25·0	“	52·0	30·86	
—	51	“	13·2	“	40·2	26·42	
—	54	“	01·7	“	28·7	22·10	
—	57	“	191·0	“	18·0	17·07	
12	00	“	80·8	“	+ 7·8	14·24	
—	03	“	72·0	“	— 1·0	10·94	
—	06	“	68·0	“	— 5·0	9·43	
—	10	“	61·0	“	12·0	6·80	
—	15	“	52·0	“	21·0	3·41	
—	20	“	44·8	“	28·2	+0·71	
—	25	“	39·4	“	33·6	—1·31	
—	30	“	35·3	“	37·7	—2·86	
—	40	“	27·8	“	45·2	—5·68	
—	50	“	24·0	“	49·0	—7·11	

Ez adatokból

$$\tau_f = 0\cdot088 \text{ c. g. s.}$$

$$C_f = 1\cdot2 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

$$f_m = 1\cdot58 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

Ez értékek világosan mutatják a rétegvastagság befolyását a folyamat időbeli lefolyására, mert 0·032 mm. vastagságú réteg már 20 órai állás után olyan szilárdságot mutat, mint a 0·1 mm. vastagságú 6—8 nap múlva. Hogy az időtartam befolyását láthassuk, ezt a réteget most az elszakítás után közel 3 hétig állva hagytam s azután újból elszakítottuk. Ennek a mérésnek az adatait tartalmazza a következő táblázat.

IV. sorozat, 4. tábla. Víz.

Összeállítva márcz. 17.-én d. u.

$$\tau_{qu} = 0.0079 \text{ c. g. s.}$$

A korongok köze: 0.032 mm.

Ápr. 7. d. u.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
4	00	187.5	203.5	0.0	0.0	0.0	Megindítva
—	20	200.7	15.0	+ 6.6	+ 11.5	+ 5.98	Hőmérs. 10.4°
—	40	14.0	27.5	13.2	24.0	12.33	
5	00	28.0	40.0	20.2	37.5	19.16	Megállítva
—	15	*	39.9	*	37.4	19.12	
ápr. 8. d. u.							
8	45	228.0	238.7	20.2	35.2	18.29	Megindítva
9	10	45.6	55.3	29.1	51.8	30.12	
—	40	66.0	75.2	39.2	71.7	36.77	
10	10	87.0	97.0	49.7	93.5	47.60	
—	40	308.0	319.7	60.2	116.2	58.74	
11	10	28.5	42.0	70.5	138.5	69.58	
—	45	53.5	67.1	83.0	163.6	82.25	
12	01	64.5	79.5	88.5	176.0	88.29	
—	45	95.0	412.0	103.7	208.5	104.27	Megállítva
d. u. *							
3	15	227	240	103.7	207.0	01.33	Megindítva
—	45	48.2	62.9	114.3	229.9	15.03	
4	10	64.8	83.2	122.6	250.2	24.73	
—	35	82.0	302.0	131.2	269.0	33.94	
5	04	300.0	20.0	140.2	143.5	42.97	
—	29	16.0	36.7	148.2	303.7	51.25	
6	05	45.5	64.4	163.0	331.4	65.36	
—	46	75.0	93.0	177.7	360.0	179.80	Megállítva

Apr. 9. d. e.

Idő		Asztalka	Korong	δk	δA	δb	Jegyzet
óra	perc	tükre					
9	45	75·4	69·7	77·9	36·7	71·09	Megindítva
10	00	86·0	80·5	83·2	47·5	76·47	
—	30	408·0	400·5	94·2	67·5	86·74	
11	04	32·2	06·5	206·3	373·5	91·99	A réteg elszakadt
—	15	—	386	—	53	83·73	
—	20	32·2	301	206·3	268	52·37	
—	24	—	238	—	205	28·68	
—	28	32·2	179	206·3	146	106·50	
—	32	—	140	—	107	91·83	
—	34	32·2	119	206·3	86	83·94	
—	38	—	78	—	+45	68·52	* 40·5 perekor
—	43	32·2	190	206·3	—04	50·10	skálát eltólva
—	53	—	135	—	59	29·42	
12	05	32·2	129	206·3	65	27·20	
—	57	—	127	—	67	+26·41	

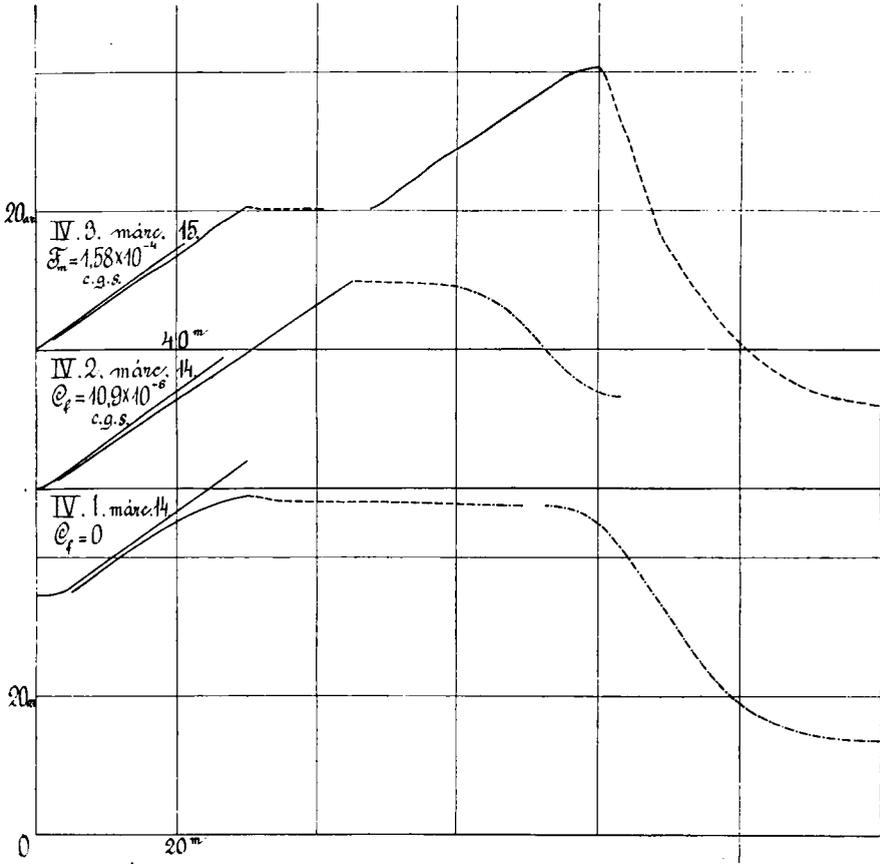
Ezekből az adatokból a mérés eredménye, hogy

$$\tau_f = 0\cdot074 \text{ c. g. s.}$$

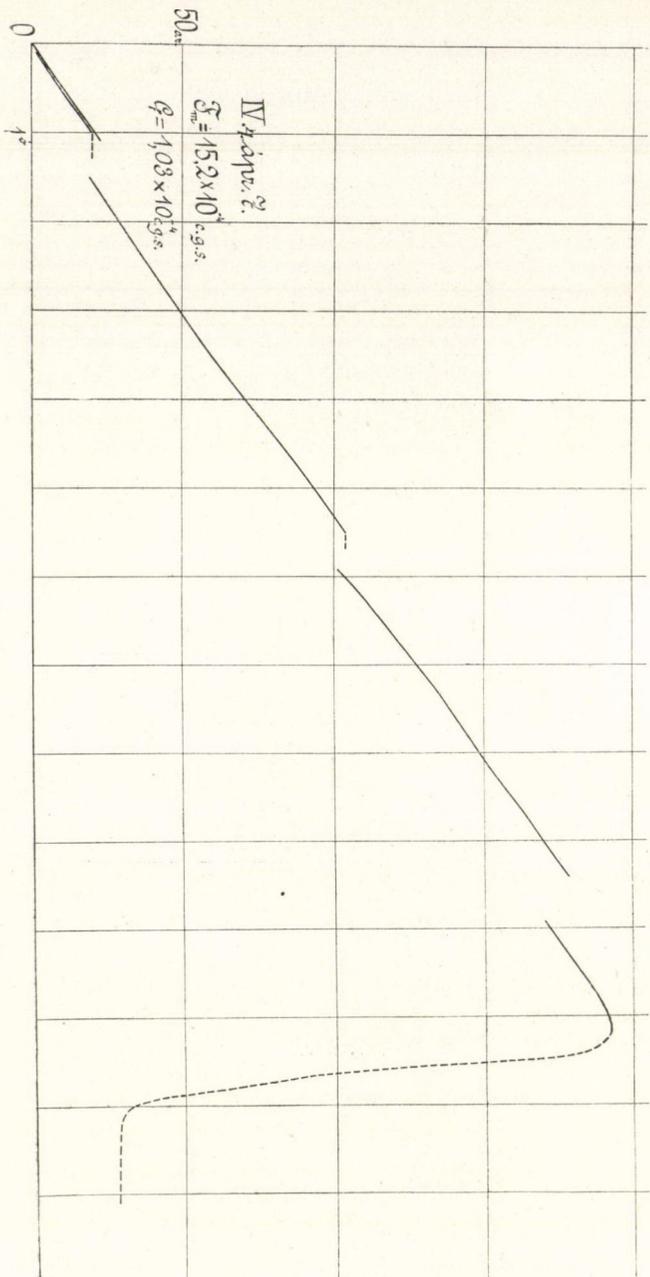
$$C_f = 1\cdot03 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

$$F_m = 15\cdot2 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.}$$

Ezek a számértékek is mutatják, hogy a réteg szilárdsága az időtartammal növekszik, viszont a réteg vastagságának kisebbitése a megszilárdulás folyamatát nagy mértékben gyorsítja. A negyedik sorozat grafikonjai a 7. és 8. ábrán vannak feltüntetve.



7. ábra.



8. ábra.

A vízre vonatkozó e méréseim eredményeit jobb áttekintés végett a következő táblázatban foglaltam össze, melybe összehasonlításként az albumin- és gelatin-oldatokra vonatkozó néhány adatot is felvettem.

Folyadék	Réteg- vastagság (μ)	Állás ideje (nap)	$Cf \times 10^{-6}$ ($\text{cm}^{-1} \text{gr sec}^{-2}$)	$Fm \times 10^{-6}$ ($\text{cm}^2 \text{gr sec}^{-2}$)	Hőmérséklet ($^{\circ}\text{C}$)
Víz	40	5 $\frac{1}{4}$	8.5	—	8°
	"	6 $\frac{1}{4}$	28	—	8
	"	7 $\frac{7}{8}$	82	—	7.8
	100	1 $\frac{1}{2}$	0.0	—	7.8
	"	2 $\frac{1}{2}$	22	—	7.9
	"	3 $\frac{1}{2}$	170	—	8
	"	4 $\frac{1}{2}$	19	—	8
	"	6 $\frac{1}{2}$	13	—	8.1
	"	8 $\frac{1}{2}$	131	380	7.9
	57	$\frac{1}{2}$	17	—	7.6
	100	3 $\frac{1}{2}$	27	—	8.6
	"	9 $\frac{1}{2}$	140	220	8.9
	25—50	$\frac{1}{2}$	29	240	9.5
	32	1 $\frac{2}{3}$	0.0	—	10.1
	"	1 $\frac{1}{3}$	11	—	10
"	$\frac{5}{6}$	120	160	9.9	
"	24	103	1520	10.4	
0.6 $\frac{0}{10}$ -os gelatinoldat	105	5 $\frac{1}{2}$	40	—	10.2
		$\frac{5}{6}$	47	—	7.5
0.04 $\frac{0}{10}$ -os albuminoldat	100—120	2 $\frac{1}{2}$	94	—	7.9
		4 $\frac{5}{6}$	270	—	8.5

Ez adatokból valami egyszerű törvényszerűséget levonni természetesen nem lehet, de ezt nem is várhattam, mert ennél a hosszú időben lefolyó jelenségnél a másik fontos változót: a hőmérsékletet eddig nem sikerült állandósítani. Ebből a szempontból, sajnos, az idej enyhe tél nagyon kedvezőtlen volt és hátráltatta e kísérleteket. Annyi azonban már is látszik, hogy a rétegvastagság csökkentésével tetemesen le lehet szállítani azt az időtartamot, a mely alatt mérhető megszilárdulást észlelünk. Ez világosan látszik a 32 és 100 mikron vastagságú

rétegek észlelési adataiból, a melyek szerint az első esetben már 6 órai állás után olyan torsio-coefficiens mutatkozik, mint a második esetben körülbelül 2 napi állás után, noha ez utóbbinál még a hőmérséklet is kedvezőbb, közel 2 C°-kal alacsonyabb volt. Másrészt úgy a torsio-coefficiensnek, mint a szakítónyomatékok értékeiben nincsenek igen nagy eltérések s az idő folyamán határértékek felé közeledni látszanak.

E tényekből azt a fontos következtetést vonhatjuk le, a mi tulajdonképen vizsgálataim kiindulási pontja volt, hogy a réteg vékonyítása által valószínűleg elérhetjük azt, hogy e szilárdsági adatok az illető határfelületre nézve jellemző állandókul határozhatók meg. És akkor várhatjuk, hogy a határfelületi réteg ezen rugalmassági állandói és a felületi feszültség között összefüggést találunk s ez felvilágosít a határfelületi réteg struktúrájáról. A határfelületi rétegben mintegy folytonos átmenet látszik lenni, az anyag tulajdonságai szempontjából, a folyékony halmazállapotból a szilárdba.

A rétegvastagság csökkentésével azután nagy mértékben növekszenek a mérés nehézségei, első sorban azért, mert az anyagokat oly tisztán kezelni, hogy a válaszfelületen a rétegvastagsághoz képest csak elenyésző csekély méretű tisztátlan-ság legyen, már eddig sem volt könnyű feladat. Másrészt a súrlódás is mindinkább zavaró hatásúvá válik a réteg vékonyításánál s növeli az észlelés időtartamát.

Minde nehézségek kiküszöbölésére, úgyszintén a hőmérséklet állandósítására a kísérletek már folyamatban vannak.

A destillált víz és üveg határfelületi rétegeinek e torsio-szilárdsága, egybevetve azzal, hogy a mint már közöltem, kolloid-oldatok vékony rétegei szintén mutatnak, még pedig általában, nagyobb szilárdságot, indokoltá teszi azt a kérdést, vajjon ez a szilárdság nem az üvegnek a vízben való feloldása közben keletkező kovasavoldaté-e tulajdonképpen. Erre a kérdésre biztos választ ma nem adhatok, mert ez irányban vizsgálatokat nem tettem, de némi tájékozódást nyújt az a tény, hogy pár órai állás után már kimutatható a 32 mikron vastag réteg szilárdsága, holott az üveg oldása sokkal lassúbb folyamat. Az oldás feltevése ellen szól továbbá az, hogy az üvegkorong tükrö-

zése, mely pedig igen érzékeny reagens ebben a tekintetben, semmi változást sem mutatott. Ellene szól továbbá az a körülmény is, hogy a 26·8%-os nádcukor-oldat 30 mikronos rétege három heti állás után sem mutatott szilárdságot, holott az oldás jelensége ebben az esetben is szerepelne.

A nádcukor-oldat torsio rugalmasságának vizsgálatát, melyről első értekezésemben is szóltam, megismételtem, mert a vízre vonatkozó mérések pozitív eredménye után jelentőséggel bírt, hogy a vizes oldatok nem mutatnak-e mind legalább akkora szilárdságot, mint a víz. A kísérletet megint e rétegnek polározott fényben való vizsgálatával kapcsoltam össze.

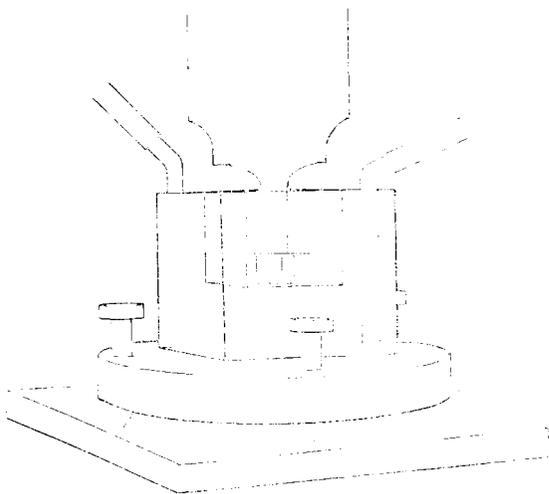
Az április 18.-án összeállított kísérletben a rétegvastagság 30—35 mikron volt (a mérés a megvilágítás meg nem felelő volta miatt bizonytalan), a 12 óra múlva végzett csavarási kísérlet eredménye az, hogy a belső súrlódás igen nagy, de ($\tau_f = 0$) nincs szilárdság. Ugyanez az eredménye a május 7.-én és 13.-án végzett csavarási kísérleteknek s ennek megfelelően a polározó eszközben sem mutatkozik a biquarz színezésében változás.

A vízréteg abszolút erőssége.

A vízréteg torsio-szilárdságának vizsgálata után megkísérlettem, úgy mint a gelatin-oldatnál, az abszolút erősséget is kimutatni. Minthogy a víz torsio erőssége kisebb, mint a gelatin-oldaté s mert a pincze hőmérséklete az enyhe tél folytán az idén magasabb volt, szükségessé vált a folyadékot hűteni, hogy sikerre legyen kilátás. Erre a célra a már előbb ismertetett (3. ábra) hűtőberendezést használtam fel, melyből a hűtőfolyadék a vizsgálandó vizet tartalmazó mérő-edény (9. ábra) körül áramlott. Egyébként a kísérlet berendezése teljesen ugyanaz volt, mint a gelatin-oldat esetében. A hűtés itt teljesen megfelelt feladatának, mert a vizsgálandó réteg nyugvó lemezek között volt s az esetleges tizedfokos ingadozások a rétegben nem okoztak zavaró elmozdulást.

A mikroszkop tubusára erősített üveglemezke átmérője 15 mm., vastagsága 0·16 mm. volt; míg az alsó, a platinaháromlábban nyugvó, eleinte szintén üveglemez volt, átmérője 10 mm.,

vastagsága 0·06 mm. A rétegvastagság mérésére a LEITZ-féle leolvasó mikroskoptól használtam oly módon, hogy távcsövet alulról kissé ferdén a felső korong felé irányítva, az alsó koronggal együtt annak a felső korongon keletkező tükörképét láttuk. A két kép távolságát lemérve, ez a rétegvastagság kétszerese. A folyadék hőmérsékletét közvetlenül nem mérhettem, mert a kis edénybe a mikroszkop tubusa miatt hőmérőt nem helyezhettem, azért csak az edényt körülvevő és a kifolyó víz



9. ábra. A vízréteg abszolút erősségének mérésére szolgáló eszköz hűtése.

hőmérsékletét mértük le. Ez a hűtés folyamán nagyon kevésbé ingadozott, közel $4\cdot5\text{ C}^\circ$ volt, úgy hogy a folyadék hőmérsékletét $3\text{--}4\text{ C}^\circ$ -ra becsülhetjük.

Az első kísérlet, melyben a két üveglemez köze 50 mikron (μ) volt, két napi állandó hűtés után nem mutatott pozitív eredményt, mert a felső lemez lassú felemeléskor az alsó lemezke a három lábán maradt. Ez a negatív eredmény arra indított, hogy az alsó üveglemezke helyett, mely mégis elég vastag (0·06 mm.) volt, vékonyabb csillámlemezt használjak. Szétszedtük az egész összeállítást és az alsó lemezt lehetőleg vékony

csillámlemezzel igyekeztünk helyettesíteni. SELÉNYI PÁL tanársegéd úr nagy ügyességgel 4—5 μ -ig terjedő csillámlemezkeket hasított, melyeknek vastagságát a TALBOT-féle csikok észlelésével határozta meg. Ezek közül a leginkább megfelelőt, mely lehetőleg sík felületű és egyenletes vastagságú volt, választottuk ki. Alakja hatszögletű volt, vastagsága 10·7 μ , felülete 85 mm², súlya levegőben 2·4 mgr., vízben 1·5 mgr.

Az összeállított eszközön a kísérlet febr. 18.-án délután 6 órakor kezdődött, a lemezeket közel 30 μ távolságra beállítva. Az összeállítás befejezése után azonnal megpróbáltuk a felső lemezt igen lassan felemelni (emelési kísérlet), de az alsó lemez nem követte, tehát a rétegnek kezdetben nincs szilárdsága. A hűtővíz állandóan folyik. Másnap este emelési kísérlet megint negatív eredménnyel, úgyszintén febr. 21.-én este, tehát 3 napi hűtés után.

E kísérletek sikertelensége arra indított, hogy a folyadék rétegvastagságát csökkentsem, azért e felső lemezkét 10 μ -nal leeresztettük s azután rögtön emelési kísérletet tettünk. A csillámlemezke a háromláb egyik lábáról kissé felemelkedett, de 5 percz alatt fokozatosan ismét visszaesett; ez tehát csak a felső lemez által mozgásba hozott folyadék áramlásának hatása volt.

Ezután egy egész héten át állandóan hűtöttük az edényt s emelési kísérletet csak febr. 28.-án, tehát 8 nap múlva végeztünk.

Hogy a folyadékáramlás hatását lehetőleg elkerüljük, a felső lemezkét a leggondosabban egyenletes lassúsággal 0·03 mm-rel emeltük s *akkor a csillámlemezke is vele emelkedett*, de igen lassan ismét visszazállt. De most már nem 5 percz alatt, hanem 25 percz alatt az egyik lábba, újabb 20 percz alatt közelebb jutott a másik lábhoz is, a harmadik lábtól való távolság egy óra alatt mit sem változott.

Ebből következik, hogy a megszilárdulás még nem volt elegendő arra, hogy a csillámlemezke megtartsa, azért a felső lemezt ismét leeresztettük és pedig előbbi helyzeténél 5 μ -nál mélyebbre, úgy hogy a réteg vastagsága most átlag 15 mikron.

A hűtést most újabb nyolcz napon át folytattuk s márczius 7.-én, hétfőn ismét emelési kísérletet tettünk. Délután 5 óra

30 perczkor a felső lemezt gondosan felemelve 0·03 mm-nyire, a csillámlemez is vele emelkedik; egy óra alatt, tehát 6 óra 30 percig a lemezek köze lassan növekszik, úgy hogy a lemez és tükör képének távolsága 0·7 osztályrészről (az okulár mikrométeren mérve) 0·9-ig növekszik, azután változatlan marad. A rákövetkező éjjeli állásnál ismét csak 0·1 osztályrészszel növekszik a lemez és képének távolsága, mely azután kedden az egész nap folyamán változatlan maradt. Szerda reggelre ismét kissé leszállt a lemezke, de daczára a hűtés megszüntetésének s a közelbe helyezett izzólámpa hatásának, csak péntek reggelre — tehát 4 nap mulva — szállt le ismét a háromlábra.

E kísérletből határozottan következik, hogy a 15 mikronos vízréteg két heti állás után olyan abszolút erősségűvé vált, hogy az 1·5 milligramm súlyú lemezkét elbirta. Ebből a réteg abszolút erőssége

$$e \geq \frac{1\cdot5 \text{ mgt}}{85 \text{ mm}^2} = 0\cdot018 \frac{\text{mgrs.}}{\text{mm}^2} \approx 1\cdot8 \times 10^{-8} \frac{\text{kgrs.}}{\text{mm}^2}$$

Összehasonlítva ezt a 0·5 %-os gelatinoldat abszolút erősségével¹ ($e_g = 0\cdot034 \frac{\text{mgrs}}{\text{mm}^2}$) látjuk, hogy a vízrétegé félakkora, daczára annak, hogy két hétig állott s a rétegvastagság csak 15—20 mikron volt, míg a gelatinoldat hűtve és 60—120 mikron rétegvastagságnál 2 óra mulva megszilárdult.

Az a tény, hogy a folyadékéreg vastagsága a felső lemez felemelése után eleinte gyorsan, azután lassabban növekszik, úgy értelmezhető, hogy ez a csillámlemezke súlya folytán megnyúlik s ez esetben ebből a Young-féle rugalmassági modulust ki lehet számítani.

A folyadékéreg viselkedése általában olyanforma, mint a kevésbé rugalmas nyúlós anyagoké, például a kaucsuké; úgy hogy itt a rugalmassági modulusnak igazában csak pillanatnyi értékeiről lehet szó, és természetesen ennél a mérési módnál csak igen durva közelítéssel.

A számításra a következő adatokat használhatjuk fel:

¹ L. M. és T. É. XXVII. k. 454. l.

Idő	Lemezek köze	E (mgrs/mm ²)
márcz. 7. d. u. 5 ó. 30 p.	μ 15	—
“ 7. d. u. 6 “ 30 “	19.5	0.059
“ 8. d. e. 8 “ 45 “	26	0.025
“ 9. d. e. 9 “ — “	36.4	0.013
“ 10. d. e. 9 “ — “	49.8	0.008

Igen kis értékek ezek, ha a kaucsukkal hasonlítjuk is össze. A nyers kaucsukon $E = 0.04—0.05$ (20 C°) kgs/mm², tehát közel milliószor akkora, mint a vízre itt nyert érték.

Már első értekezésemben említettem, hogy a folyadékrétegek abszolút erősségének és nyúlási rugalmasságának pontosabb mérése is lehetséges ily módon. Erre a célra már összeállítottam egy kis érzékeny torsiós eszközt, melylyel néhány előzetes kísérletsorozatot végeztem is a vízrétegek abszolút erősségének és rugalmassági modulusának mérésére s e mérések biztatók arra nézve, hogy ily módon sokkal pontosabban lehet meghatározni a folyadékok e rugalmassági állandóit.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 május 23.-án tartott üléséből.)

A ZSIROK OLVADÁSPONTJÁNAK JELENTŐSÉGE A GYOMOR MECHANIKAI MŰKÖDÉSÉBEN.¹

TANGL FERENCZ r. tag és ERDÉLYI SÁNDOR-tól.

I.

Az irodalom tanúsága szerint már többször vizsgálták úgy emberen, mint állatokon különböző módszerekkel, hogy a gyomorba jutott zsír mikor kerül a vékonybélbe. Tudunkkal azonban még egyáltalában nem vizsgálták, vajjon egyenlő sebességgel ürülnek-e ki a test hőmérsékletén folyékony és szilárd zsírok? E kérdésnek tanulmányozása annál inkább ígérkezett érdekesnek, mivel Pawlow kimutatta, hogy a zsírok reflex útján lassítják a gyomor kiürülését, úgy hogy a zsíros eledel tovább marad a gyomorban. Így arra is lehet gondolni, hogy ha a különböző olvadáspontú zsírok különböző sebességgel ürülnek ki a gyomorból, különböző mértékben befolyásolják a gyomor mechanikai működését. Ha már most meggondoljuk, hogy a gyomortartalom továbbításának sebessége mily befolyással van a gyomor emésztésére, nem kell még külön kiemelnünk e kérdés gyakorlati jelentőségét is.

Kísérleteink célja volt megállapítani, hogy a különböző olvadáspontú zsírok, mint a lenolaj, olivajolaj, disznózsír és marhafaggyú, minő sebességgel ürülnek ki a gyomorból. Ezek közül az első kettő szobahőmérsékleten folyékony, a disznózsír még testhőmérsékleten kenőcsszerű, a marhafaggyú pedig szilárd.

¹ A budapesti m. kir. tud. egyetem ált. kórtani intézetében készült dolgozat.

A kísérleteket úgy kellett berendeznünk, hogy a különböző zsírokkal talált eredményeket egymással össze lehessen hasonlítani, tehát a zsírokat lehetőleg egyenlő viszonyok között kellett a gyomorba hozni. Erre szükséges volt mindenekelőtt arról gondoskodni, hogy a különböző zsírok a gyomortartalomban lehetőleg egyformán legyenek elosztva, a mi tekintettel a zsírok különböző halmazállapotára, csak úgy volt elérhető, hogy a zsírokat *emulsió* alakjában hoztuk a gyomorba. Ezzel elértük azt is, hogy ugyanazon elszélesztő anyagot (emulgenst) használva, teljesen ugyanazon anyagokkal együtt hoztuk a gyomorba, úgy hogy a gyomor nyálkahártyájára a zsírokon kívül mindenkor ugyanazon kémiai ingerek hatottak.

Az emulsiókat úgy készítettük, hogy 4 rész zsírra 5 rész tiszta gummi arabicumot és 7·5 rész vizet vettünk s porcelláncsészében alaposan összekevertük. E sűrű fejetet azután folytonos dörzsölés közben vízzel annyira higitottuk, hogy az emulsió 3—4% zsírt tartalmazott, tehát körülbelül annyit, mint a tehéntej. A disznózsírral s marhafaggyúval csak úgy tudtunk emulsiót készíteni, hogy előzetesen megolvasztottuk s jó melegen dörzsöltük szét. Így azután ezekkel is igen jó és eléggé tartós emulsiókat kaptunk.

A kísérletek pontossága megkövetelte lehetőleg pontosan meghatározni a gyomorba vitt zsír mennyiségét. Minthogy nem minden állat ette meg a különböző zsír-emulsiókat, melyeknek az íze is különböző volt s azonkívül még arra is kellett ügyelnünk, hogy lehetőleg egyenlő ideig tartson mindig a zsírbevitel, minden kísérletben gyomorszondán át öntöttük be a fejetet. Mindig 200 cm³-t. Az állatokat (kutyákat) is úgy választottuk, hogy lehetőleg egyenlő nagyságúak voltak, 6—10 kg. súlyúak. Minden kísérletből közvetlenül a beöntése előtt az emulsióból 50 cm³-t vettünk a zsírtartalom meghatározásához. Minthogy a szonda falán is tapadva maradt zsír, ezt néhány cm³ langyos vízzel a gyomorba öblítettük. Minimális zsír — igaz számba sem jövő — még ezután is maradt a szondában, ezt azután hozzá mostuk a gyomorból visszanyert zsírhoz.

Annak meghatározására, hogy a gyomorba öntött zsírból mennyi jutott a belekbe, nem a Pawlow-féle *fistulás* módszert

alkalmaztuk, hanem azt a sokkal egyszerűbb eljárást, melyet MÜLLER A. a Kreidl vezetése alatt végzett kísérletében¹ használt, t. i. az apomorphinos hánytatóst, mely eljárásnak használhatóságáról magunk is meggyőződünk. MÜLLER apomorph. hydrochlor. 10%-os oldatából 1—2 cm³-t fecskendezett kutyáinak bőre alá, mire néhány percz múlva a kutyák kihányták gyomruk tartalmát.

Ezt az eljárást használtuk mi is. A kutyák 1—2 ctgr. apomorphin után többszöri ismétléskor nagyobb dosisra mindig hánytak; a befecskendés után pár perczcel csendesek, merev tekintetűek lesznek, pupilláik kitérülnek, kevés nyálfolys jelentkezik, azután hátulsó lábaikra ülnek, néhány hangos görcsös légvétel s utána bekövetkezik a hányás. Majdnem az egész gyomortartalom egyszerre ürül ki, ritkábban kisebb részletekben; a második jóval kisebb részlet hígabb. Hányás után az állatok kábultak, nem esznek, de 1—2 óra múlva magukhoz térnek. Túlnagy adagra toxikus tünetek, főleg jellemző incoordinatiós mozgások jelentkeztek.

Hogy biztosan visszanyerjük az egész gyomortartalmat, megpróbáltuk a hányás után a szondán át kimosni a gyomrot. Ez nem jól sikerült. E helyett a hányás után szondán át 100—200 cm³ meleg vizet öntöttünk be a gyomorba, a mit az állatok kevéssel utána, esetleg 1 ctgr. apomorphin újabb befecskendésére kihánytak. Ez a hányadék majdnem mindig tiszta folyadék volt.

Az állatokat a kísérlet előtt 2—3 napig éhezettük, hogy a gyomruk biztosan üres legyen. Ha ételmaradékot nem is találtam, szőr néhányszor volt a hányadékban. Ugyanazon állatot többször használtam kísérletre, bár nem annyiszor, a hányászor kívánatos lett volna, mert némely kutya hamar megszokta az apomorphint s nem hányt.

A gyomorba öntött emulsiókban s a hányadékban ugyanazon eljárással határoztuk meg a zsírt. Külön kiemeljük, hogy minden kísérletben közvetlenül az emulsió beeresztése előtt,

¹ A. Müller, Beitr. z. Physiol. d. Verdauungsaktes. Pfügers Arch. 116. kötet.

abból 50 cm³-ot vettünk a zsír meghatározására. A hányadékot vízzel 500 cm³-re hígítottuk s ebből 100 cm³-t vettünk a zsír meghatározásához. A zsirt petroleumætherrel való kirázással határoztuk meg. A kirázandó oldathoz 50, illetőleg 100 cm³ 30% kálilugot adtunk, azután 50 cm³ 60° C alatt forró petroleumætherrel s 25 perczig rázógéppel kiráztuk. A petroleumætherből most 25 cm³-t ismert súlyú üvegcsészében elpárologtattunk s a maradékot vacuum-exsiccatorban állandó súlyig szárítottuk. Megjegyezzük, hogy minden zsirmeghatározást duplán végeztünk, úgy hogy a közölt értékek mind két meghatározásból vett középértékek.

Mielőtt kísérleteink leírásához fogunk, a methodika választását kell még néhány szóval megokolnunk s annak használhatóságát s megbízhatóságát bebizonyítanunk. A választott módszer mindenekelőtt rendkívül egyszerű, sokkal egyszerűbb, mint a fistulás eljárás, semmiféle operatiós beavatkozást nem tesz szükségessé. Ezért a természetes viszonyok egyáltalában nem változtak meg, a mit még a legtökéletesebb fistuláról sem lehet állítani.

Hátránya a fistulás eljárással szemben kétségtelenül az, hogy egy-egy állaton nem lehet folytatólagos kísérleteket végezni s egyszeri zsír beadása után meghatározni, hogy bizonyos időközökben mennyi zsír távolodott el a gyomorból. Ezt mindig csak új kísérlettel, esetleg több állaton végzett kísérletekkel lehet eldönteni.

Aggályosnak látszott a módszer abban a tekintetben, hogy a hánytatással nem lehet a gyomor tartalmát hiány nélkül kiüríteni. Mindenekelőtt arra kell gondolni, hogy a gyomor nyálkahártyáján annyi zsír marad tapadva, hogy a meghatározás nagyon hibás lesz. Ezt kísérletileg kellett eldönteni, bár már MÜLLER is meggyőződött arról, hogy a hánytatás után öblítéssel jóformán semmit sem lehet a gyomorból kihozni s ezenkívül leölt állatainak gyomrát teljesen üresen találta. A kísérleteket, melyekkel a módszer hibájának nagyságáról győződünk meg, a következőképen végeztük: Beadtunk a kutyának annyi és olyan emulsiót, mint valamennyi kísérletünkben, s azután a zsírbeadás után félórával meghánytatva, a leírt módon a gyomrát kimostuk s azután rögtön elvéreztetéssel

megöltük, gyomrát a pylorusnál s cardiánál lekötve kivágtuk, nyálkahártyáját gondosan lemostuk s a mosóvizben a fent közölt módon meghatároztuk a zsírt. Összesen öt ilyen kísérletet végeztünk, egyet-egyét lenolajjal, disznózsírral és marhafaggyúval, kettőt olivaolajjal. Az eredményeket a következő táblázat mutatja:

I. Táblázat.

	Szám	Kutya száma	A gyomorba bevitt zsír	A gyomorból visszakerült zsír	A kivágott gyomorban talált odatapadt zsír	
					gramm	o/o
Lenolaj ---	1.	XV.	6·40	3·36	0·164	2·6
Olivaolaj ---	2.	XIII.	6·35	3·62	0·121	1·9
	3.	XIV.	5·03	2·71	0·133	2·6
Disznózsír ---	4.	XVI.	8·15	3·58	0·295	3·5
Marhafaggyú	5.	XVII.	7·43	3·57	0·352	4·8

E kísérletekből legelőször is kitűnik az, hogy a hánytatással valóban nem lehet a gyomorból az összes zsírt kikapni, de látható az is, hogy az, a mi a gyomor nyálkahártyájához tapadva marad, oly kevés, 2—5%, hogy alig jön számba, de különben is, minthogy az egyes zsírokra meghatároztuk a talált értékeket, mint correcturát alkalmazhatjuk. Érdekes, hogy már ezen ellenőrző kísérletek is mutatják, hogy az egyes zsírok között különbség van. Míg az olivaolajból s lenolajból körülbelül egyenlő sok maradt a gyomor nyálkahártyájához tapadva (2·5%), addig a disznózsírból, marhafaggyúból, különösen az utóbbiból, jelentékenyen több.

Ezek után joggal állíthatjuk, hogy a kísérleteinkben alkalmazott methodika megbízhatósága s pontossága teljesen kielégítő.

II.

Összesen 19 kutyán kísérleteztünk, de csak 13-on sikerültek a kísérletek úgy, hogy legalább egy részüket felhasználhattuk, mert csak azokat a kísérleteket vettük figyelembe, a melyek

minden tekintetben kifogástalanok voltak. Így sok kísérletet, melyben a kutya viselkedése folytán vagy az emulsió beöntésénél vagy a hánytatásnál bármily csekély hiba lett elkövetve, nem is dolgoztuk fel. Némely kutyát, mint pl. az V., VI., VIII. és IX. számút, igen számos kísérlethez használhattuk, az V-öt 11 kísérlethez, az utóbbi kettőt pedig 9-hez. Természetesen a leghelyesebb lett volna minden kutyán mind a négyféle zsírral minden kísérletet végezni, de ez nem volt lehetséges, mindenekelőtt azért, mert, mint már említettük, a kutyák nagyon könnyen megszokták az apomorphint.

A kísérleteket úgy végeztük, hogy minden zsírra nézve négy időpontban vizsgáltuk, mennyi távolodott belőle a gyomorból a bélbe, még pedig az emulsiónak a gyomorba öntése után 1. néhány percz, 2. $\frac{1}{2}$ óra, 3. 1 óra, 4. 2 óra múlva. Ezen időközöket az egyes kísérletekben csak néhány percznyi pontossággal lehetett betartani, mert az apomorphin nem egyforma gyorsan hatott. Így pl. a «néhány percz» 3 és 7 percz között változott. Az időközt különben minden kísérletben pontosan meghatároztuk. Minden időpontra nézve mind a négy zsírral legalább is három kísérletet végeztünk, részben ugyanazon, részben más állaton, úgy hogy eléggé tájékozódhattunk az «egyéni ingadozásokról» s az értékek pontosságáról.

Mint már említettük, négyféle zsírral kísérleteztünk, melyek közül kettő szobahőmérsékleten folyékony volt (len- és olivaolaj). Mind a négy zsírnak meghatároztuk a szokásos módon az olvadási és merevedési pontját. A 3—3 mérésből nyert középértékeket a következő táblázat (II.) mutatja:

II. Táblázat.

	Olvadáspont. Merevedéspont Celsius fokokban	
	kb. ...	—
Lenolaj	12°	—
Olivaolaj	2·5°	0·5°
Disznózsír	36·5°	31·5°
Marhafaggyú	42·8°	38·5°

A zsírok igen eltérő merevedési pontja miatt a gyomorba öntött emulsiók hőmérséklete nem lehetett egyforma. A len- és olivaolajjal az emulsiót szobahőmérsékleten könnyen lehetett elkészíteni, 20—21° C volt a beöntéskor a hőmérséklete. A disznózsírral 30—35°-ra, a marnafaggyúval pedig 41—42° C-ra kellett felmelegítenünk az emulsiót, hogy egyenletes legyen. Ilyen volt a beöntéskor is a hőmérséklet.

A kísérletek eredményeit a következő III—VI. táblázatban állítottuk össze :

III. Táblázat.

Olivaolaj.

Szám	Nap	Kutya száma	Mennyi ideig volt a zsír a gyomorban	Az emulsió hőmérséklete	A gyomorba bevitt zsír	A gyomorból visszakérült zsír	A gyomorból a bélbe távozott zsír		
							gramm	o/o	Átlag o/o
1.	III/17.	II.	4 perc	21° C	7·26	5·47	1·79	24·6	} 22·3
2.	III/19.	III.	7 "	21°	7·40	6·08	1·32	17·8	
3.	III/24.	V.	4 "	21°	8·12	6·13	1·99	24·5	
4.	IV/26.	II.	32 "	21°	7·84	3·72	4·12	52·7	} 43
5.	IV/27.	VI.	32 "	20°	5·98	3·85	2·13	35·6	
6.	IV/28.	VI.	35 "	20°	7·20	4·28	2·92	40·6	
7.	V/8.	V.	63 "	20°	7·89	3·10	4·79	60·8	} 60·8
8.	V/10.	V.	63 "	20°	7·84	2·65	5·19	66·2	
9.	V/11.	V.	64 "	21°	7·96	3·55	4·41	55·4	
10.	VI/8.	VIII.	124 "	21°	6·77	1·14	5·63	83·2	} 85
11.	VI/8.	IX.	125 "	21°	6·77	0·86	5·91	87·3	
12.	VI/8.	X.	125 "	21°	6·77	1·05	5·72	84·5	

IV. Táblázat.

Lenolaj.

Szám	Nap	Kutya száma	Mennyi ideig volt a zsír a gyomorban	Az emulzio hőmérséklete	A gyomorba bevitt zsír	A gyomorból visszakérült zsír	A gyomorból a bélbe távozott zsír		
							gramm	‰	Átlag ‰
1.	V/22.	VII.	5 perc	22°C	6·61	4·48	2·13	32·2	33·2
2.	V/22.	VIII.	5 "	22°	6·61	4·62	1·99	30	
3.	V/22.	IX.	6 "	21°	6·61	4·07	2·54	38·4	
4.	V/25.	VII.	33 "	20°	7·02	4·41	2·61	39	50
5.	V/25.	VIII.	35 "	21°	7·02	3·22	3·80	54·1	
6.	V/25.	IX.	33 "	21°	7·02	3·08	3·94	56·1	
7.	V/26.	VII.	66 "	21°	6·36	3·36	3·00	47·2	65·6
8.	V/26.	VIII.	64 "	21°	6·36	1·48	4·88	76·6	
9.	V/26.	IX.	64 "	21°	6·36	1·72	4·64	72·9	
10.	VI/7.	X.	125 "	21°	5·89	0·40	5·49	93	88·8
11.	VI/7.	VIII.	125 "	21°	5·89	0·88	5·01	85	
12.	VI/7.	IX.	124 "	21°	5·89	0·66	5·23	88·6	

V. Táblázat.

Disznózsír.

Szám	Nap	Kutya száma	Mennyi ideig volt a zsír a gyomorban	Az emulzio hőmérséklete	A gyomorba bevitt zsír	A gyomorból visszakérült zsír	A gyomorból a bélbe távozott zsír		
							gramm	‰	Átlag ‰
1.	III/20.	III.	4 perc	32°	5·19	4·85	0·34	7	17·3
2.	III/23.	II.	4 "	32°	5·54	4·31	1·23	22	
3.	III/27.	IV.	5 "	32°	7·89	6·28	1·61	20	
4.	IV/14.	V.	4 "	29°	7·21	6·57	0·64	9	
5.	IV/16.	V.	5 "	31°	6·57	4·31	2·26	34	
6.	IV/19.	V.	3 "	31°	7·16	4·33	0·83	12	
7.	V/1.	VI.	33 "	32°	7·05	4·81	2·24	31·7	30
8.	V/3.	VI.	33 "	34°	7·08	4·84	2·24	31·6	
9.	V/4.	VI.	31 "	32°	7·47	5·49	1·98	26·5	
10.	V/13.	V.	64 "	35°	8·30	2·81	5·49	66·2	67
11.	V/15.	V.	67 "	32°	8·80	3·21	5·59	63·5	
12.	V/19.	VI.	65 "	32°	7·00	2·00	5·00	71·4	
13.	V/12.	X.	123 "	32°	7·08	1·29	5·79	81·6	82·3
14.	V/12.	VIII.	122 "	32°	7·08	1·24	5·84	82·4	
15.	V/12.	IX.	121 "	32°	7·08	1·20	5·8	83	

VI. Táblázat.
Marhafaggyú.

Szám	Nap	Kutya száma	Mennyi ideig volt a zsír a gyomorban	Az emulsió hőmérséklete	A gyomorba bevitt zsír	A gyomorból vissza-került zsír	A gyomorból a bélbe távozott zsír		
							gramm	%	Átlag %
1.	IV. 20.	V.	4 perc	42°	7·31	6·84	0·47	6·4	9·1
2.	IV. 21.	V.	5 "	42°	6·26	5·72	0·57	8·6	
3.	IV. 23.	VI.	5 "	42°	6·25	5·48	0·77	12·3	
4.	V/29.	VII.	33 "	40°	6·34	4·38	1·96	30·9	31·4
5.	V 29.	VIII.	34 "	41°	6·34	4·69	1·65	26	
6.	V/29.	IX.	34 "	42°	6·34	3·97	2·37	37·4	
7.	VI 2.	VII.	65 "	41°	4·19	1·80	2·39	57	61·6
8.	VI/2.	VIII.	64 "	41°	4·19	1·43	2·76	65·8	
9.	VI/2.	IX.	64 "	41°	4·19	1·59	2·60	62	
10.	VI/15.	X.	122 "	42°	6·91	1·53	5·38	77·9	80
11.	VI 15.	VIII.	123 "	42°	6·91	1·40	5·51	79·7	
12.	VI 15.	IX.	124 "	42°	6·91	1·23	5·68	82·2	

III.

Mielőtt az egyes zsírok között talált különbségek tárgyalásába bocsátkozunk, nem hagyhatjuk megjegyzés nélkül azon különbségeket, melyek egy és ugyanazon zsírnál ugyanazon időpontra vonatkozó kísérletek között mutatkoznak. Igaz, a legtöbbször az azonos kísérletek eredményei elég jól egyeznek egymás között, mert 6—8% eltérés ilyen természetű kísérletekben nem jön számba. De vannak jóval nagyobb különbségek, a melyek különösen a disznózsír-sorozatban az első ciklusban olyan nagyok voltak, hogy három kísérlet helyett hatot végeztünk, hogy némileg elfogadható közepértékeket kapjunk. E hat kísérlet értékei — t. i. bélbe távozott zsír mennyisége a gyomorba került zsír százalékában kifejezve — 7 és 34% között váltakoznak. Ily nagy különbségek, a lenolaj-sorozat 3. ciklusá-

tól eltekintve, másutt nem fordulnak elő. Ha az egyik-másik esetleg kísérleti hibának is tudható be, a nagy eltérések mégis a mellett szólnak, hogy itt egyrészt egyéni különbségek szerepelnek s hogy másrészt ugyanazon állatban sem egyforma sebességgel ürül ki a gyomor. Hogy miért éppen a disznózsírnál ilyen nagyok az eltérések, nem mondható meg. Általában azt látjuk, hogy minél később a beöntés után vizsgáljuk a bélbe átment zsír mennyiségét, annál jobban egyeznek az egyes kísérletek egymás között. (L. pl. egy-egy sorozat 2 órai kísérleteit.) Ez részben abban leli magyarázatát, hogy minél nagyobb részlet ment át a bélbe, annál kisebb az analitikai hiba is, másrészt pedig valószínűleg abban is, hogy az egyéni különbségek főleg kezdetben érvényesülnek, a mikor a gyomorba került zsír ingerlő hatását a gyomor nyálkahártyájára kezdi kifejteni.

Az egyes zsírok közötti különbséget legjobban mutatják az egy-egy ciklus kísérleteiből vont középértékek. Erre a célra természetesen elegendő a százalékos viszonyszámokból a középértéket venni, mert valamennyi kísérletben majdnem egyenlő mennyiségű zsír került a gyomorba. Ezen középertekek a III—VI. táblázat utolsó függélyes rovatában vannak. Könnyebb áttekintés végett a következő VII. táblázatba állítottuk össze. (A tized százalékot lekerítettük.)

VII. Táblázat.

Mennyi idő alatt	A gyomorból a bélbe távozott			
	A lenolajból 21°-on	Az olivajból 21°-on	A disznózsírból 32°-on	A marhafaggyúból 42°-on
3—7 perc alatt	33%	22%	17%	9%
Fél óra alatt	50%	43%	30%	31%
Egy óra alatt	66%	61%	67%	62%
Két óra alatt	89%	85%	82%	80%

E számok minden kétséget kizárólag bizonyítják, hogy a különböző zsírok egyenlő kísérleti feltételek mellett is külön-

bőző sebességgel ürülnek ki a gyomorból. A különbség különösen az első félórában mutatkozik. Legjobban az első öt perczben, a mikor a lenolajból pl. majdnem négyszer, az olivaolajból majdnem háromszor, a disznózsírból kétszer annyi megy át a vékonybélbe, mint a marhafaggyúból. 30 percz múlva a különbségek már kisebbek. Egy óra múlva mind a négy zsírból körülbelül 60%, 2 óra múlva 80—89% ment át a bélbe. De még 2 óra múlva is hasonló, bár kisebb különbség mutatkozik, a mennyiben a lenolajból a legtöbb, 89%, a marhafaggyúból a legkevesebb, 80% ment át a bélbe. Valamennyi zsír legnagyobb része ($\frac{8}{10}$ — $\frac{9}{10}$) 2 óra alatt kiürül a gyomorból.

Azon különbség, mely a különböző zsírok kiürülésének sebessége között mutatkozik, *szoros összefüggésben áll a zsírok halmazállapotával, illetőleg olvadáspontjával*; ugyanis a folyékony len- és olivaolaj különösen kezdetben sokkal gyorsabban távozik a bélbe, mint a pépes disznózsír vagy a szilárd marhafaggyú s a disznózsír is gyorsabban, mint a marhafaggyú, úgy hogy félóra után a len- és olivaolajnak mintegy fele, a disznózsírnak s marhafaggyúnak nem egészen harmadrésze van a bélben. *Minél magasabb valamely zsírnak az olvadáspontja, annál kisebb a sebesség, melylyel a gyomorból távozik.* A legalacsonyabb olvadáspontja van a lenolajnak, ez a leggyorsabban ürül ki a gyomorból, a legmagasabb a marhafaggyúé, ez leglassabban jut a gyomorból a bélbe.

E következtetésre kísérleteink csak az esetben jogosítanak, ha a kísérleti feltételek a különböző zsíroknál egészen egyenlők s így a talált különbségek más okra nem vezethetők vissza. Ez áll valóban a lenolaj- és olivaolaj-sorozatról, de nem a másik kettőről, mert ezekben a gyomorba öntött zsír-emulsióknak más volt a hőmérséklete. Az első két olaj 21° C-ra volt melegítve, a disznózsír-emulsió átlag 32° C-ra, a marhafaggyú 42° C-ra. Arra lehetne tehát gondolni, hogy ezen magasabb hőmérséklet az oka annak, hogy ezen zsírok lassabban ürültek ki. Ez ugyan azok alapján, a miket a hőmérséklet hatásáról a táplálósaternak mozgására tudunk, már eleve sem valószínű, de azonkívül közvetlenül kísérletek útján is meggyőződünk arról,

hogy a hőmérséklet emelése ellenkezőleg gyorsíthatja a zsírok kiürülését a gyomorból. Ezen kísérletekről mindjárt lesz szó. Mindenesetre bizonyos az, hogy a disznózsír-, illetőleg marhafaggyú-emulsió magasabb hőmérséklete inkább gyorsította a kiürülést, úgy hogy valószínűleg még lassabban ürültek volna ki, ha 21° C lett volna a hőmérsékletük.

IV.

Annak magyarázatát keresve, hogy miért ürül ki a disznózsír és marhafaggyú lassabban a gyomorból, mint a len- és olivaolaj, elsősorban a halmazállapot különbözőségére kell gondolnunk. Ha a két első zsír azért ürül ki lassabban, mert nem folyékony, vagy legalább nem annyira folyékony, mint a két olaj, akkor, ha az emulsió hőmérsékletének emelésével folyékonyabbá válnak, gyorsabban kell kiürülniök. Ilyen pozitív eredmény azonban csak akkor jogosít a fenti következtetésre, ha a hőmérsékletemelés egymagában — halmazállapot vagy folyóság változása nélkül — nem gyorsítja a zsírok kiürülését a gyomorból. Ezen kérdés tisztázására öt kutyán 12 kísérletet végeztünk: négyet lenolajjal, kettőt olivaolajjal, négyet disznózsírral és kettőt marhafaggyúval. Úgy a len-, mint az olivaolaj-emulsiót 42° C-ra, tehát ugyanazon hőmérsékletre, mint a marhafaggyút, felmelegítve öntöttük be a gyomorba. Ezek a kísérletek arra szolgáltak, hogy megmutassák, vajjon a hőmérséklet emelése az olajok kiürülését a gyomorból gyorsítja-e. A disznózsírral 42° C és 55° C-os, a marhafaggyúval két 55° C-os emulsiót készítettünk s ezt öntöttük a gyomorba. Az 55° C már jóval túl van a marhafaggyú olvadáspontján, ezen hőmérsékleten a faggyú is már hígán folyó; 42° C-on a disznózsír szintén folyékony már. A kísérletek eredményeit a következő VIII. táblázat mutatja:

VIII. Táblázat.

	Szám	Nap	Kutya száma	Mennyi ideig volt a zsir a gyomorból	Az emulsió hőmérséklete	A gyomorból bevitt zsir	A gyomorból visszakerült zsir	A gyomorból a bélbe távozott zsir		
								gramm	%,	átlag %,
Lenolaj	1.	XII 14.	XVIII.	33 perc	42°	9·21	4·74	4·47	48·6	} 51·6
	2.	XII 14.	XIX.	34 "	42°	9·21	4·18	5·03	54·6	
	3.	VI 19.	X.	65 "	42°	6·72	2·05	4·67	70	} 68·5
	4.	VI 19.	XI.	64 "	42°	6·72	2·28	4·44	67	
Olivaolaj	5.	VI 14.	X.	32 "	42°	6·43	3·43	3·00	46·7	} 49·8
	6.	VI 14.	XI.	33 "	42°	6·43	3·04	3·39	52·8	
Disznózsir	7.	VI 17.	X.	33 "	42°	8·24	3·32	4·92	59·7	} 60·5
	8.	VI 17.	XI.	33 "	42°	8·24	3·19	5·05	61·3	
	9.	XII 17.	XVIII.	33 "	55°	9·16	3·93	5·23	57·1	} 61
	10.	XII 17.	XIX.	33 "	55°	9·16	3·22	5·94	64·9	
Marha-faggyú	11.	X 6.	XII.	34 "	55°	7·71	3·20	4·51	58·6	} 54·8
	12.	X 3.	XII.	33 "	55°	7·18	3·62	3·56	51	

A mint e táblázatból látszik, a félórai időközt választottuk az összehasonlításra, csak a lenolajjal végeztünk még két kísérletet 1 órával az olaj beöntése után. A mint látszik, a párhuzamos kísérletek egymás között jól egyező értékeket adtak. Könnyebb összehasonlítás végett a különböző hőfokokon nyert középértékeket a következő kis táblázatban állítottam össze:

IX. Táblázat.

Félóra múlva a gyomorból a bélbe távozott a								
lenolajból		olivaolajból		disznózsirből			m. faggyuból	
hőmérséklet a beöntés kor								
21° C	42° C	21° C	42° C	32° C	42° C	55° C	42° C	55° C
50%	51%	43%	50%	30%	60%	61%	31%	55%

Az eredmény igen érdekes. A lenolaj, daczára a 20 fokos felmelegítésnek, nem távozott gyorsabban a gyomorból, mint 21° C-on, alig változott az olivaolaj sebessége. Ellenben igen jelentékeny a változás a disznózsírnál és a marhafaggyúnál. A disznózsírnál a felmelegítés 32°-ról 42° C-ra megkétszerezte a sebességét és majdnem épp oly jelentékeny a gyorsulás a marhafaggyúnál, a mikor a hőmérséklete 42° C-ról 55° C-ra emelkedett. Tehát a folyékony zsiroknál — az olajoknál — a hőmérséklet *emelése nem gyorsította* az átjutásukat a *gyomorból a bélbe, ellenben a szilárd zsírokat igen jelentékenyen*. Azonban e hőmérsékletemelés szilárd zsíroknál, úgy látszik, csak akkor hat gyorsítólag, ha a zsírok halmazállapotát vagy folyósságát változtatja meg. 32° C majdnem azonos a disznózsír merevedési pontjával; ezen hőmérsékleteken a zsírok igen közel állanak a szilárd halmazállapothoz. Ha innen kiindulva emeljük a hőmérsékletet 10—15°-kal, a folyósságuk jelentékenyen változik, higan folyóvá változnak. Ezen változás esetében gyorsul is a távozásuk a gyomorból, körülbelül oly gyorsan ürülnek ki, mint az olajok. Ha ezen túl emeljük a hőmérsékletet, ez már nincs hatással. A mikor a disznózsír hőmérsékletét 55°-ra emeltük, ez csak olyan gyorsan ürült ki a gyomorból, mint a 42° C-ra melegített. Ezekből az olajokkal végzett kísérletekből egyúttal az is kiderül, hogy a hőmérsékletemelés egymagában nem gyorsítja a zsírok kiürülését a gyomorból, hanem csak akkor, ha azzal egyúttal halmazállapotváltozás is jár. Ezzel megegyezik még az a kísérlet eredménye is, melyet 42° C-ra melegített lenolajjal végeztünk. Egy órával a beöntés után csak annyi távozott a gyomorból (68%), mint a 21°-osból (66%).

Úgy a len-, mint az olivaolaj szobahőmérsékleten folyékony, még inkább a gyomor belsejének hőmérsékletén. Ezen mindkettő higan folyó s mégis a lenolaj gyorsabban ürül ki. Itt nem szerepelhet olyan halmazállapotkülönbség, mint a disznózsírnál, marhafaggyúnál, de szerepelhet esetleg oly fizikai tulajdonság, a mely a halmazállapotnak a hőmérséklet emelésével járó változásánál szintén megváltozik látható halmazállapotváltozás nélkül is, pl. a viscositás, a belső surlódás. Arra lehetne

gondolni, hogy a zsiremulsiókban lebegő zsírszemcsék kisebb vagy nagyobb viscositásuk szerint kevésbé vagy erősebben tapadnak a gyomor nyálkahártyájához. E szempontból érdekesnek látszott a kérdéses zsírok viscositását meghatározni azokon a hőmérsékleteken, a melyekkel a gyomorba kerültek. Egyben meg is néztük, hogy a hőmérséklet emelése a kísérletekben adott határok között miképen változtatja meg a zsírok viscositását.

A négy zsírnak viscositását a HIRSCH-BECK-féle készülékkel határoztuk meg, az összes kautelák szigorú betartásával. A következő értékek 5—5 mérés középértékei:

X. Táblázat.

	21° C-on		32° C-on		42° C-on		55° C-on	
	átfolyási idő	η^*	átfolyási idő	η^*	átfolyási idő	η^*	átfolyási idő	η^*
Destillált víz ...	20·7"	1	18·3"	1	14·7"	1	13·2"	1
Lenolaj ...	15' 2·4"	40·7	11' 4·8"	33·7	7' 29·1"	28·3	5' 32·4"	23·2
Olivajolaj ...	29' 24·8"	78·9	15' 49·6"	47·2	10' 26·7"	38·7	8' 1·6"	33
Disznózsír ...	—	—	19' 17·6"	58·3	12' 21"	46·3	8' 52·2"	36·8
Marhafaggyú ...	—	—	—	—	13' 15·6"	49·5	8' 52·8"	36·3

$$* \eta = \eta_1 \frac{s t}{s_1 t_1}$$

η_1 = destill. víz viscositása = 1; s = a zsír fajsúlya; s_1 = a víz fajsúlya; t és t_1 = a zsír s a víz átfolyási ideje.

E kísérletek szerint valóban a lenolaj viscositása minden hőmérsékleten a legkisebb s ez ürül ki mindig leggyorsabban a gyomorból s az egyes zsírok viscositása éppen fordított sorrendben következik egymásután, mint a kiürülésük sebessége. A legnagyobb a viscositása a marhafaggyúnak s ez leglassabban ürül ki a gyomorból. A hőmérséklet emelésével, a mint várható is volt, csökken a viscositás; a disznózsírnál akkor, a mikor a hőmérséklet emelésével a kiürülése a gyomorból gyorsult (32°-ról felmelegítve 42° C-ra), viscositása is tetemesen csökkent. Épp úgy volt a marhafaggyúnál is.

A lenolajnál a hőmérséklet emelése sokkal kevésbé csökkentette a viscositást, mint az olivaolajnál s épp úgy nem is változtatta meg kiürülésének sebességét, míg az olivaolajnál (IX. tábl.), mégis némileg emelte. Figyelemre érdemes még a következő számokkal kifejezett párhuzamosság:

	hőmérséklet	viscositás	$\frac{1}{2}$ óra alatt a gyomorból kiürül
lenolaj	21° C	40·7	50%
olivaolaj	42° C	38·7	50%
dizsnózsír	55° C	36·8	61%
disznózsír	32° C	58	30%
marhafaggyú	42° C	49·5	31%

vagyis a különböző zsírok, ha a hőmérsékletük változtatásával körülbelül egyenlő viscositásra hozatnak, nagyjában egyenlő sebességgel ürülnek ki a gyomorból. E mellett nem szabad felednünk, hogy a gyomorba került zsír hőmérséklete nem marad állandó, míg a viscositás meghatározása közben állandó, úgy hogy az összefüggés talán még szembetűnőbb lenne, ha ezen körülmény nem zavarná.

Mindezek alapján nagyon valószínűnek kell tartanunk, hogy a *szolyékony zsíroknak a gyomorból való kiürülésének sebessége első sorban viscositásuktól függ s ezzel fordított arányban áll.*

Azonban nemcsak ettől függ, a mint leginkább a disznózsír mutatja; 42°-ról 55°-ra felmelegítve viscositása épp oly arányban s majdnem ugyanazzal az abszolút értékkel csökkent, mint a marhafaggyúé s mégis alig ürül ki gyorsabban, míg a marhafaggyú majdnem kétszer oly gyorsan. E viszonyokról csak további kísérletek adhatnak felvilágosítást.

A viscositás befolyását a kiürülés sebességére úgy magyarázhatjuk legegyszerűbben, hogy a nagyobb viscositású zsírok jobban tapadnak a gyomor nyálkahártyájához. Ezt azonban nem lehet mint magától értetődő következtetést viscositási méréseinkből levonni. Nemesak azért, mert a viscosiméterben a zsír üveghöz tapad s ez a tapadás egészen más lehet a különböző zsíroknál a gyomor nyálkahártyáján, hanem azért sem,

mert a viscositást az illető tiszta zsírral határoztuk meg, a kísérletekben pedig zsiremulzio szerepelt. Meg kellett tehát kísérletileg győződnünk arról, hogy a nagyobb viscositású zsírok valóban erősebben tapadnak-e a gyomor nyálkahártyájához, mint a kisebb viscositásúak.

Erre tulajdonképen már az I. táblázatban összeállított ellenőrző kísérletek is adtak feleletet, a mennyiben belőlük kitűnt, hogy a hánytatas után a gyomor nyálkahártyáján valóban legkevesebb marad vissza a lenolajból, a legtöbb a marhafaggyúból, a kettő között sem megfelelő sorrendben az olívaolajból és a disznózsírból. De meggyőződünk még külön e célra végzett kísérletekkel is a következő módon:

Azonnal a kutya leölése után gyomrának lepréparált nyálkahártyájából négy egyenlő nagy, körülbelül 2 cm²-nyi négyzetet vágunk lehetőleg egy helyről. E nyálkahártyadarabokat dróton függesztve pontosan 10 perczen át belógattuk 50 cm³ emulzióba s azután 1 perczen át lecsurogtattuk. Az 50 cm³ emulzió súlyát a kísérlet kezdetén és végén (a lecsorgatás után) analitikai mérlegen pontosan lemértük. Hogy megtudjuk, mennyit vesztett az emulzio súlyából párolgás útján, hasonló edénybe ugyanazon emulzióból ugyancsak 50 cm³-t öntöttünk és mérés útján megállapítottuk a párolgás okozta súlyvesztéséget s mint correctiót számításba vettük. Valamennyi kísérletben az emulziók hőmérséklete 42° C volt. Az eredmények a következők:

XI. Táblázat.

	50cm ³ emulzio súlya	A nyálkahártyához tapadt az emulzióból	
		gramm	%
Lenolaj — — — —	53·345	0·384	0·72
Olívaolaj — — — —	53·777	0·622	1·18
Disznózsír — — — —	52·810	0·742	1·41
Marhafaggyú — —	53·129	0·980	1·85

Ezek szerint összhangzásban az I. táblázat kísérleteivel, csakugyan *viscositásuknak teljesen megfelelő sorrendben leg-*

erősebben tapad a gyomor nyálkahártyájához a marhafaggyú s legkevésbé a lenolaj.

Kísérleteink mindezek alapján kétségtelenül bebizonyították, hogy még az emulsió alakjában finoman eloszlott zsírok is olvadáspontjuk és viscositásuk szerint különböző sebességgel ürülnek ki a gyomorból, még pedig a magas olvadáspontúak s nagyobb viscositásúak lassabban.

Ezen kísérletekkel a felvetett kérdés még nincs kimerítve. Mindenekelőtt még további kísérletekkel kell megvizsgálni, hogy a nem emulgeált zsírok, úgy a mint a különböző táplálékokkal kerülnek a gyomorba, hasonlóan viselkednek-e. Valószínűleg ugyanazon különbségek fognak mutatkozni. Ezen különbségek így nemcsak elméletileg érdekesek, de gyakorlati jelentőségük is van. Megmagyarázzák az orvosok előtt régóta ismeretes tényt, hogy a gyomorbetegek sokkal jobban tűrik az alacsony olvadáspontú zsírokat (vaját), mint a magas olvadáspontúakat (disznózsírt), a mi valószínűleg egyebek között azzal függ össze, hogy az utóbbiak az által, hogy tovább maradnak a gyomorban, öregbítik a gyomormunkát.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 május 23.-án tartott üléséből.)

A HETEROCHROM PHOTOMETRIA ÚJ MÓDSZERE (KONTRASZTMÓDSZER).¹

RÉVÉSZ GÉZÁ-tól.

Ezen közlemény szoros kapcsolatban áll a *Zeitschrift für Sinnesphysiologie* 41. kötetének 1. s következő lapjain megjelent dolgozatommal.²

A heterochrom photometria egy új módszeréről van itt szó. Ezen módszer a színek relatív világosságai értékeinek (*W*-értékek) meghatározására szolgál és úgy elvben, mint módszertani szempontból új.

A színes fények (ill. pigmentpapirok) világosságának meghatározására szolgáló módszerek közül a legtöbbször a színeket közvetlenül hasonlítjuk össze szürke árnyalatokkal. Az elv ezen módszereknél az, hogy két qualitativ különböző érzet egy közös résztartalmát tesszük egyenlővé. Ezen módszereket *direkt módszereknek* nevezhetjük. Ide tartozik HERING és HILLEBRAND, továbbá BRÜCKE módszere, a HESS-féle periferiás módszer és BRÜCKNER módszere.

Az *indirekt módszereknél* a színes fényingerek bizonyos hatásait figyelik meg. Az indirekt módszerek révén talált értékeket csak annyiban lehet *W*-értékeknek tekinteni, a mennyiben az értéksorai igen hasonlóak a direkt módszerek által nyert értéksorokhoz. Ezen módszerekhez tartoznak ROOD és SCHENK

¹ A budapesti kir. magy. tudományegyetem általános kórtani intézetében készült dolgozat.

² G. Révész: Über die Abhängigkeit der Farbenswellen von der achromatischen Erregung.

módszere (Flimmermethode), a világossági meghatározás a különbözőzeti érzékenység útján, SACHS és ABELSDORF pupillophotometriája és mások. Azon módszer, melyet itt fogok tárgyalni, szintén ebbe a csoportba tartozik.

A színek W -értékének meghatározására a *világossági kontrasztot* használok.

I.

A fent említett munkában közöltem, hogy minden színnek és minden intenzitásnak meg lehet határozni a maximális színességi pontját. Ha egy tetszőleges intenzitású színes fényt figyelünk meg, a mely nincsen körülvéve feketét indukáló mezőtől, akkor a szín nem látszik a legtelitettebbnek. Minél nagyobb az illető szín fizikai intenzitása, annál kevésbé tetszik telítettnek.¹ Emeljük fokozatosan ennek a világosságát, akkor kezdetben nagyobbodik a színessége, a míg egy bizonyos ponthoz jutunk — s ez a kontrasztot okozó mező világosságától függ —, melyen túl a színesség már újból csökken.

Ezt a pontot neveztem el a *maximális színesség pontjának*.² A maximális színesség pontját tehát ott találjuk, a hol az indukált S -inger (S = fekete folyamatot keltő) éppen kompenzálja a színben lévő W -értéket. Ennél a pontnál van az achromatikus folyamatoknak a legkisebb értékük, ennél a pontnál gátolják legkevésbé a chromatikus folyamatokat és így a színesség itt éri el a maximumát.³

Világos tehát, hogy minél nagyobb egy színnek a W -értéke, annál nagyobbak kell lennie azon S -ingernek, a mely a színben levő W -értéket éppen hogy kompenzálja. Tehát két színnek, pl. egy pirosnak és egy zöldnek egyenlő a W -értéke akkor, ha a kontrasztgerjesztő felület *ugyanazon intenzitása mellett* éri

¹ Hogy minden kontraszt hatást kizárjunk, a színes mezőt sötétebb alappal szoktuk körülvenni. Természetesen a sötét alap nem teljesen hatástalan, mert fehéret indukál a színre, a mi által némi világosodás áll elő.

² Zeitschr. f. Sinnesphysiol. 41. köt. 26. old.

³ G. Révész: Über das kritische Grau. Zeitschr. f. Sinnesphysiol. 43. köt. 345. old.

el színessége maximumát, azaz ha a W -értékük ugyanazon S -érték által lesz éppen kompenzálva.

Ha tehát meg akarjuk állapítani a színek viszonylagos W -értékeit, akkor a kontrasztokozó felület bizonyos konstans világossága mellett megkeressük a különböző színek azon intenzitását, a melynél legszínesebbnek tűnnek fel. Minél nagyobb egy színnek a W -értéke, annál csekélyebb intenzitás szükséges ahhoz, hogy egy állandó kontrasztokozó mező mellett a maximális színességi pontot elérje. Ha ezen eljárást alkalmazzuk a kvalitatív különböző spektralfényeknél, különböző intenzitási értékeket, különböző pigment színeknél pedig különböző szektornagyságokat nyerünk.

Az intenzitások nagyságssorrendje reprezentálja a színek belső fehér értékének nagysági sorrendjét.

A helyett, hogy a kontrasztokozó mező világosságát fenntartjuk és a színes fények intenzitását variáljuk, úgy is járhatunk el, hogy a színes fények intenzitását állandósítjuk és a kontrasztokozó felület világosságát variáljuk. Ez az eljárás kényelmesebb és kevesebb technikai nehézséggel jár.

Ezen eljárásnál egy és ugyanazon intenzitású (szektornagyságú) színeket használunk és a kontrasztgerjesztő felület fényerejét addig variáljuk, a míg meg kapjuk a színesség maximumát. Minél nagyobb egy színnek a W -értéke, annál világosabbnak kell lenni a kontrasztokozó felületnek, hogy azt éppen kompenzálhassa. A színek különböző W -értékeit tehát a nekik megfelelő kontrasztgerjesztő felület intenzitásával fejezzük ki. Ezen módszer alkalmazhatóságának semmi sem áll útjában, annál kevésbé, minthogy elméleti okok is szólnak mellette. A MÜLLER-féle «Gegenfarbentheorie»¹ és az én kísérleteim a színesség maximumának megállapítására szolgáltatják a theoretikus és az experimentális megoldási módokat ezen módszer keresztülviteléhez. Nagy fontossággal bír azonban, hogy a különböző színeknek a kontraszt módszer által kapott W -értékeinek nagysági sorrendje megegyezék más kifogástalan mód-

¹ G. E. MÜLLER, Zeitschr. f. Psychol. 10. köt., 1. és 321. old. és Bericht über den I. Kongress. f. exper. Psychol. 1904. 6. old.

szerek útján megállapított W értékek nagysági sorrendjével. Ha ezt ki tudjuk mutatni, akkor jogunk van állítani azt, hogy a mi kontraszt módszerünk is alkalmas az úgynevezett világossági értékek megvizsgálására.

Azonban egyáltalán nem szükséges; hogy a mi módszerünkkel meghatározott viszonyértékek teljesen megegyezzenek más módszerek értékeivel. A többi módszer által nyert W -értékek között sincs abszolút megegyezés. Így pl. a direkt összehasonlítási módszerek útján nyert relatív W -értékek nem vágnak össze sem a «Flimmer-methode», sem pedig a BRÜCKNER által ajánlott módszer útján nyert értékekkel.

Ki tudtam mutatni először, hogy a W -értékek nagysági sorrendje megegyezik az összes eddig alkalmazott módszerekével. Másodszor azt is, hogy a kontraszt módszerem útján meghatározott W -értékek alig különböznek a foveára vonatkozó direkt módszerekkel nyert relatív világossági értékektől. Nagyon jól megegyeznek a periferiás értékekkel is, azaz a színek W -értékével, melyet erősen *excentrális* látásnál nyerünk. Már KRIES állításából — hogy u. i. a színes fények világossága körülbelül megfelel periferiás értéküknek — is következik, hogy a módszerem által nyert értékeknek meg kell egyezniök a centrális értékekkel.

Mivelhogy pedig a foveával meghatározott «Flimmer»-értékek megközelítőleg egybeesnek a periferiás értékekkel, mind a kettőt a hullámhossz ugyanazon funkciójának tekinthetjük, ennél fogva kontraszt-módszerem a «Flimmer-methode» és a direkt összehasonlítás módszeréhez sorakozik és szintén megállapíthatja a színeknek a világosságához alkalmazott szem foveájára vonatkozó W -értékeit.¹

A kísérleti berendezés ugyanaz volt, mint a melyet fent említett dolgozatomban «A kritikus szürké»-ről stb. leírtam. Fekete és színes korongból álló gyűrűt helyeztem szürké alapra (kontrasztgerjesztő felület), a mely egy fekete és egy fehér korongból volt előállítva. A kontrasztgerjesztő felület

¹ Kitént az is, hogy a kontraszt értékek jobban megegyeznek a centrális értékekkel, mint a «Flimmer»-értékek.

fekete és fehér szektorainak változtatásával tetszés szerint lehetett a kontraszthatást a középső színes gyűrűn változtatni.

Kísérleteimben két teljesen egyforma korongcsoportot alkalmaztam, ezeket egymás mellé állítottam. Mindkét korongcsoport vegyítése elektromos szinpörgettyű által történt.

A maximális színességi pont megállapítása a következő módon történt:

Az egyik korong középső gyűrűjébe beállítottam egy 10° -os piros szektort, e mellett a korong kontrasztgerjesztő mezeje majdnem teljesen sötét volt, azaz 360° feketéből állott. Most fokozatosan növeltem a kontrasztgerjesztő felület világosságát egész addig, a míg a középső konstans színes gyűrű a legszínesebbnek tetszett. Hogy ne kelljen a kísérletnél előforduló összes színességi fokokat successive összehasonlítani, mindegyik elért állapotot összehasonlítás céljából előállítottam a másik korongon is. Tehát a középső színes gyűrű itt is konstans maradt, míg a kontrasztgerjesztő felület világossága fokozódott. A második korong középső gyűrűje mindig az első korong középső gyűrűjén legutóbb elért világossági és színességi fokot mutatta (objektív összehasonlítás). Ha most az első korong valamivel erősebb *S*-inductionnak kitett gyűrűje színesebbnek látszott a második gyűrűnél, tovább fokoztam az első korong kontrasztgerjesztő felületének világosságát.

Ez az eljárás okvetlenül szükséges volt, mert oly berendezésnél, a hol a variabilis inger nem változtatható egy-két másodperc alatt, nem szabad kizárólag az emlékezetre támaszkodni.

Tehát az első korong kontrasztgerjesztő felületének világosságát minden alkalommal növeltem egy-két fokkal és összehasonlítottam a két gyűrű színességét egymással. Így eljutottam végre a kontrasztgerjesztő felület azon világosságához, melyen túl a színesség már észrevehetőleg csökkent. A kontrasztgerjesztő felület ezen világossága adja a maximális színességi pontot, ezen ponton kompenzálja éppen a kontraszt útján előidézett *S*-inger a szín *W*-értékét.¹ Feljegyeztem már most a

¹ Tulajdonképpen nemcsak a színnek, hanem a fekete szektornak csekély *W*-értéke is kompenzálva lett.

kontrasztgerjesztő felület ezen világosságát és ez az adott szín világosságának mértékéül szolgált. Ha már ismételten megállapítottam egy színnek a maximális színességi pontját, átmentem egy másik színre, ugyanazon szektornagyságot használva, és kerestem a kontrasztgerjesztő felületnek azon világosságát, a mely mellett a konstans színes szektor által felkeltett érzet a maximális színességet érte el.

A talált értékek nagysági sorrendje és viszonyszámai képviselik különböző pigmentszíneknek nagysági sorrendjét és viszonylagos W-értékeit.

A meghatározásokat rendszerint naponta a négy főszínnel: piros, sárga, zöld és kék színnel végeztem. Később hozzávettem még néhány vegyített szint is, így az orangeot, violettet és purpurt. A vegyített színek világosságának megállapítása bizonyos nehézséggel járt, mert az egyik komponens más kontraszt-erő mellett éri el színességének a maximumát, mint a másik. Így pl. kísérleteztem egy purpural, a melynél a kék komponens volt túlsúlyban. Ebben az esetben csekélyebb kontrasztnál a piros, kissé erősebbnél azonban a kék jutott előtérbe. Általában azt mondhatjuk, hogy mennél tisztább az alkalmazott szín, annál könnyebb és exaktabb a meghatározás. Tehát a kontrasztmódszernek *spektral alapszínéknél* egészen különösen exakt eredményeket kell szolgáltatnia. Spektral-fények alkalmazásánál a W-értékek megállapítása is sokkal gyorsabban fog menni, habár ezzel a módszerrel némi gyakorlat mellett a legfontosabb pigmentszínek világossági értékét is rövid idő alatt meg tudjuk határozni. A legkönnyebben meghatározható színek: piros, zöld, világoskék, indigó és violet. A sárgának színességi maximumát azonban nehéz megtalálni, mert a szín-tónusa változik. A pigment-sárga csekély intenzitás mellett soha sem vált ki specifikus sárga érzetet, hanem vagy olivzöldnek, vagy barnának látszik. A sárgánál a W-érték középhibája relative is a legnagyobb, mind a mellett 4°-ot sohasem halad meg.

A kísérleteknél alkalmazott konstans színinger nagysága rendszerint 10° színes szektor volt. A színek W-értékének megállapításához ezen kontraszt módszer mellett ezt az intenzitást találtam a legalkalmasabbnak. Konstans ingernagyságnak hasz-

náltam még 5° , 10° és 20° -os színes szektorokat is. Meg kell jegyeznem, hogy ennél a módszernél nem lehet bármilyen szektornagyságot alkalmazni. Könnyen megtalálhatjuk azt a kedvező szektornagyságot, a melyet minden színnél, tekintet nélkül világosságukra, alkalmazhatunk.

Már a rendszeres kísérletezés előtt meg kell keresnünk azt az ingernagyságot, a mely mellett az összes színeknél a leg-állandóbb eredményeket kapjuk. Azon színes papiroknál, melyeket én használtam, 10° -os szektor mutatkozott legalkalmasabbnak. 15° és 20° -os színes szektorok alkalmazásakor is még elég jó, használható értékekhez jutottam.

Ha a kísérleteket az összes elővigyázati szabályok figyelembevételével végezzük, akkor látjuk, hogy a többszörösen egymásután végzett mérések nagyon összeválnak. Ezt a következő táblázatok mutatják.

A táblázatok első vertikális sora az alkalmazott színeket, a második a kontrasztgerjesztő felület azon világosságát adja, a melynél a színek maximális színességi pontja fekszik, a harmadik pedig a kékre, mint egységre átszámított viszonyszámokat. A harmadik sor értékeit tehát a második sor ingernagyságaiból számítjuk ki, úgy, hogy a kéket egységnek vesszük. *Ezen értékek reprezentálják tehát az alkalmazott pigment-színek relativ világossági (W) értékeit.*

Az I—III. táblázat 10° -os, a IV. 15° -os, az V. pedig 20° -os konstans színes szektor alkalmazása mellett talált világossági értékeket adja.

A táblázatokban az S-inger erejét egyszerűen a kontrasztgerjesztő felület W-szektorával fejeztem ki. Ehhez jogom van, mert felvehetjük, hogy a kontrasztgerjesztő felület ereje directe arányos a kontrasztgerjesztő felület elsötétülésével. Ez a feltevés HESS és PRERORI vizsgálatain alapszik.¹

¹ Archiv für Ophthalmologie. 40. köt. 4. füzet, 1. s. köv. 1.

I. Táblázat.

Kísérletsor	1		2		3		4	
	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték
10°								
Piros	12	2·4	13	2·1	15	2·6	12	2·4
Sárga	35	7·0	40	6·6	45	7·5	35	7·0
Zöld	23	4·6	26	4·3	22	3·6	22	4·4
Kék	5	1·0	6	1·0	6	1·0	5	1·0

Az első és második kísérletsor R. kísérleti személytől, a harmadik és negyedik K-tól van.

II. Táblázat.

Kísérletsor	1		2		3		4	
	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték
10°								
Piros	7	2	6	2	4·8	1·6	6·3	1·8
Orange	12	3·4	12	4	13	4·3	15·7	4·5
Sárga	25	7·1	22	7	19·5	6·5	24·5	7·0
Zöld	16	4·5	14	4·7	12·5	4·2	15·6	4·5
Kék	3·5	1	3·0	1	3·0	1	3·0	1
Violet	3·0	0·8	2·0	0·7	1·8	0·6	2·8	0·8

III. Táblázat.

Kísérletsor	1		2	
	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték	A fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték
Piros (sötét)	3	1	4	1·3
Piros (világos) ..	7	2·3	7	2·3
Orange	12·5	4·1	13	4·3
Natriumsárga	15	5·0	17	5·6
Sárga	20	6·6	22	7·3
Zöldeskék	12	4·0	11	3·6
Kék (világos)	5	1·6	5	1·6
Kék (sötét)	3	1	3	1
Violet	2·5	0·8	3	1
Purpur	5	1·6	6	2

IV. Táblázat.

15°	Fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték
Piros	11	1·8
Orange	22	3·6
Sárga	—	—
Zöld (kékes)	24	4·0
Kék (világos)	10	1·6
Kék	6	1
Violet	7	1·1
Purpur	9	1·5

V. Táblázat.

20°	Fehér szektor nagysága fokokban	Relatív W -érték
Piros	17	1·7
Orange	32	3·2
Sárga	—	—
Zöld (kékes)	38	3·8
Kék (világos)	20	2·0
Kék	10	1
Violet	12	1·2
Purpur	15	1·5

Összehasonlítás céljából még egy táblázatot közlök, a melyben a módszeremmel nyert relativ értékeket a más módszerek útján nyert relativ értékek mellé állítom. E célból a periferiás és a cenztrális értékeket adom, minthogy mindkettő a hullámhosszak ugyanazon funkcióját képviselik.

VI. Táblázat.

	Centrális értékek	Periferiás értékek		Kontraszt értékek ⁴	
	SCHENK ¹	KRIEIS ²	RÉVÉSZ ³	III. Táblázat	
				1	2
Piros	2·1	1·35	2·1	Sötét 1 Világos 2·3	1·3 2·3
Orange	3·8	4·03	3·71	4·1	4·3
Sárga	6·2	6·78	6·8	6·6	7·3
Zöld	4·8	4·92	4·6	5·1	—
Kékes-zöld	3·6	3·87	3·7	4·0	3·6
Kék (sötét)	1·0	1·0	1·0	1·0	1·0
Violet	0·6	0·86	0·7	0·8	1·0
Purpur	1·05	1·04	1·3	1·6	2·0

A táblázatokból kitűnik, hogy a mi módszerünkkel talált viszonylagos W -értékek eloszlása feltűnően megegyezik a periferiás és a központi értékekkel. A világosság maximuma a sárgánál fekszik és a kék sugaraknak sokkal kisebb W -értékük van, mint a piros sugaraknak. Ebből következik, hogy a mi módszerünkkel nyert W -értékek a színek világossági eloszlását reprezentálják világossághoz alkalmazkodott fovea számára.

A kontraszt módszeremmel talált W -értékeket össze akartam még hasonlítani a «Flimmer-methode» értékeivel is, de sajnos, nincsen készülékem az u. n. «Flimmer-photometrie» számára. De minthogy egyrészt POLIMANTI szerint a «flimmer»-értékek és a periferiás értékek⁵ a spektrumban majdnem egybeesnek, másrészt pedig a kontraszt-módszer útján megállapított világossági értékek igen jól megegyeznek a periferiás értékekkel,

¹ Pflügers' Archiv, 64. kötet, 670. l. 1896.

² Zeitschr. f. Psychol. 15. kötet, 251. l.

³ G. Révész, Über die vom Weiss ausgehende Schwächung stb. Zeitschr. f. Sinnesphysiol. 41. köt. 112. l.

⁴ Kontraszt-értékek alatt az ezen módszerrel nyert relativ W -értékeket értem.

⁵ Zeitschr. f. Psychol. 24. köt. 263. l. s. köv., különösen 273. l.

felvehetjük, hogy az én módszeremmel nyert W -értékek a «Flimmer-methode» értékeivel is összevágna.

II.

A színek W -értékeit továbbá még a fent (5. old.) említett módon is meghatározhatjuk.

Különböző, de ugyanazon szektornagyságú színes felületeket kiteszünk egy *konstans* S -inductio hatásának (S). A kontrasztnak kitett színhez aztán annyi objektív fehéret adunk, a mennyi szükséges a maximális színesség *benyomásának felkeltéséhez*. Az egyes esetekben úgy járunk el, hogy veszünk egy bizonyos konstans szürkéből előállított kontrasztgerjesztő és egy pl. 10° színes szektorból és 350° fekete szektorból álló kontraszt-szenvedő felületet. Most felkeressük mindegyik színhez, a kontrasztszenvedő felülethez hozzáadandó W -szektornak azon nagyságát, a mely mellett a 10° piros, zöld, sárga stb. a legszínesebbnek látszik.

A talált W -értékek matematikai feldolgozásához szükséges még az S értékének, a kontraszthatás mértékének, más szóval a kontraszthatás intenzitásának ismerete is. Az adott S -inductio intenzitását azon fehér fejezi ki, a mely az S -inductiót éppen hogy kompenzálja.

Ezt hasonló módon érzük el, mint a hogy azt a kritikus szürkéről szóló dolgozatomban leírtam.¹ Az egyik korongon egy, a kritikus szürke világosságával biró kontrasztfelületet állítunk elő. A mellette felállított másik korongnak, a melynek kontrasztmezejét a kontrasztgerjesztő fehér alkotja, a középső gyűrűjéhez nem színt, hanem fehéret adunk hozzá és az első korong kontrasztmezejével való direkt összehasonlítás útján megkeressük a W -szektornak azon fokszámát (W_s), a melynél a kontrasztmező a kritikus szürke világosságával bir.

Ebben az esetben

$$W_s = S. \quad 1)$$

¹ Math. és Természettud. Értesítő, XXVI. köt. 86. old. és Zeitschr. f. Sinnesphysiol. 43. köt. 345. l.

A fekete inductio nagysága S alatt a fehér szektor azon nagyságát (fokszámát) értjük, a mely kompenzálásához szükséges.

Jelezzük V_p , V_s , V_z , V_k s általában V -vel a kontraszt-szenvedő felületbe applikált (10°) piros, sárga, zöld és kék színeknek relativ fehér értékét (W -érték). Azonkívül jelezzük W_p , W_s , W_z , W_k -val azon objektív fehér pótlékot, mely szükséges ahhoz, hogy a (10°) piros, sárga stb. szín maximális színességben tűnjön fel. Ezek szerint a fekete-inductio S minden egyes színnél a megfelelő V - és W -értékek összegével lesz kompenzálva.

Ebben az esetben a következő egyenletek állanak :

$$\begin{aligned} V_p + W_p - S &= 0 & 2) \\ V_s + W_s - S &= 0 \\ &\text{stb.} \end{aligned}$$

Mint hogy mi már S értékét ismerjük, a színek W -értékeit, azaz a V_p , V_s stb. értékeket a W_p , W_s stb. értékekkel kifejezhetjük.

Ennélfogva a színek W -értékeit a következő egyenletekkel fejezzük ki :

$$\begin{aligned} V_p &= S - W_p & 3) \\ V_s &= S - W_s \\ &\text{stb.} \end{aligned}$$

Itt közlök még egy kísérletsorozatot, melyet a most leírt módszerrel végeztem.

A *konstans S-inductio* egy 180° fehér és 180° feketéből álló kontrasztgerjesztő felületből indult ki. A kontrasztfelület 345° fekete és 15° színes szektorból állott. A kontrasztmezőben volt még azonkívül egy fehér korong is, a mely a maximális színesség elérésére szolgált.

A kísérleti berendezés ugyanaz volt, mint a melyet a 4. oldalon leírtam. Itt is két egymás mellé állított korongot alkalmaztam.

A maximális színességi pontnak meghatározása oly módon történt, hogy állandó kontraszthatás mellett addig növeltem fokozatosan a kontrasztmező fehér szektorának nagyságát, a

míg az a maximális színesség benyomását adta. Az ezen módon talált W -értékeket W_p , W_s , W_z -nek jeleztem.

A mellékelt táblázaton (VII. táblázat) az első vertikális sor (1) azt az objektív fehéret mutatja, a melynek hozzáadásával a konstans szektornagysággal bíró színek (15° színes szektor) a maximális színességüket elérték. A második vertikális sor (2) ellenben azon értékeket szolgáltatja, melyeket a következőkben tárgyalandó módszer által nyertünk.

Észrevettem, hogy a kontrasztszenvedő felület világossága a kontrasztmezőn az összes színeknél a maximális színesség elérésekor egyenlő. Ha ugyanis egy kontrasztmezőn beállítunk pl. 15° pirosat a maximális színességéhez szükséges fehérrel és egyidejűleg egy másik kontrasztmezőn 15° sárgát, 15° zöldet stb., szintén a maximális színességük eléréséhez szükséges fehérrel, akkor azt vesszük észre, hogy a kontrasztmezők világossága minden esetben teljesen azonos. Régebbi kísérleteim és theoretikus megfontolások alapján azt kell felvennem, hogy a kontrasztmezőnek a maximális színességkor megállapított világossága azonos a kritikus szürke világosságával.

Ehhez a feltevéshez oly módon akartam érdekes bizonyítékot nyerni, hogy előállítva az egyik korong kontrasztmezején a kritikus szürkét, megkerestem a másik korong kontrasztmezejének konstans színes szektorának megfelelő (15° piros, sárga stb.) azon fehér szektort, a mely mellett a kontrasztfelület világossága egyenlőnek tűnik fel a kritikus szürke világosságával. Már most, ha eltekintünk a nehézségektől, a mit egy színes felületnek egy szintelen szürke felülettel való összehasonlítása okoz, azt kell várnunk, hogy az így talált W -értékek megegyeznek a W_p , W_s stb. értékekkel. Várakozásunk feltűnő módon bevált.

VII. Táblázat.

Kísérletsor	1	2
	A fehér szektor nugysága fokokban	
Piros	7·0	7·0
Orange	3·0	3·5
Sárga	1·0	0·8
Zöld	3·5	4·5
Kék	9·0	9·0
Violet	9·5	9·5
Purpur	6·0	6·0

A táblázatból kitűnik, hogy minél nagyobb egy színnek a W -értéke, annál kevesebb fehéret kell hozzáadnunk, hogy a maximális színesség benyomását adja. Ugyanis: a konstans világosságú kontrasztgerjesztő felület minden színre egyenlő erős feketét indukál, tehát egy kisebb W értékkel bíró szinhez *több* objektív fehéret kell hozzáadnunk, hogy az esetleg túlnagy mennyiségben indukált feketét kompenzálhassuk. Az S -inductiónak az a célja, hogy a színekben levő W -értéket éppen kompenzálja, a mi által az achromatikus ingerületkomponensek minimális értékükre redukálódnak és ennek következtében a chromatikus folyamatok súlya maximális értékét éri el. Ha azonban a kontrasztgerjesztő felületnek meglehetősen nagy világosságot adunk, akkor az S -inductio annyira megerősödik, hogy a szín W -értékének kompenzálása után még fekete-többlet áll elő a kontrasztmezőben. Hogy azonban ezt a fekete-többletet hatástalanná tegyük, a túlsúlyban levő S -ingert objektív fehérrel kell kompenzálnunk. Egy szinnél, mely csekély W -értékkel bír, az S -többlet nagyobb lesz, mint egy nagyobb W -értékkel bíró szinnél, mert a csekély W -érték kompenzálása után az S -inductio még igen erősen jut érvényre.¹

¹ A kontrasztgerjesztő felület világosságának, azaz a kontraszterő megválasztásának alkalmával figyelnünk kell arra, hogy olyan nagy-

Az előbbiek szerint tehát a *színek W-értékei annál nagyobbak, minél kisebb a kompenzációhoz szükséges fehér-pótlék, azaz a W_p , W_s stb. érték.*

Ha a fent közölt egyenleteket (463. old. 3. egyenlet) alkalmazni akarjuk a színek relatív W-értékeinek kiszámításánál, ismernünk kell az S értékét is. A módot ezen kiszámításhoz már a 463. oldalon megadtuk. Egy kontrasztgerjesztő felületnél, a mely 180° fehérből és 180° feketéből áll, $S = 10^\circ W$ -vel. Helyettesítsük be az előbbi egyenletekben S helyébe ezen értéket és W_p , W_s stb. helyébe a VII. táblázat 1. sora alatt felsorolt értékeket, akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} V_p &= S - W_p = 3 \\ V_o &= S - W_o = 7 \\ V_s &= S - W_s = 9 \\ V_z &= S - W_z = 6.5 \\ V_k &= S - W_k = 1 \\ V_v &= S - W_v = 0.5 \\ V_{pwp} &= S - W_{pwp} = 4 \end{aligned}$$

A 3) alatti egyenlettel ki tudjuk számítani az applikált színes szektor fehér értékének összegét. Ha azonban a színes szektor *egy fokának W-értékét* akarjuk megállapítani, akkor a következő egyenleteket kell alkalmaznunk:

Legyen α a színes szektor egy fokának W-értéke és X a szektornak tényleg alkalmazott fokszáma, akkor $V = \alpha X$. Most már α számára igen könnyen állíthatunk fel egyenletet, mert

$$V = S - W \tag{3}$$

$$W = S - V = S - \alpha X;$$

ebből következik

$$\alpha = \frac{S - W}{X}; \tag{4}$$

Ha a fent jelzett V_p , V_s stb.-t X -szel (= 15) elosztjuk, akkor megkapjuk a színes szektor egy fokára eső W-értéket.

nak vegyük, hogy a legvilágosabb szín W-értéke se kompenzálhassa az S-inductiót. Hogy egy bizonyos kontraszterő mellett mekkora színes szektort vegyünk, azt az S-inger nagysága fogja meghatározni.

α értékének természetesen a szektor nagyságától, X -től függetlennek kell lennie. Hogy ezen bár magától értetődő tételt megvizsgálhassam, egy rövid kísérletet végeztem piros, orange és purpural, a mely kísérletben a beállított konstans színes szektor egyszer 15° , másszor 20° volt. Az eredmény a következő:

$$S = 14 \quad W$$

$$\begin{array}{llll} W_p & 15^\circ \text{ színes szektornál} & = 7 & 20^\circ \text{ színes szektornál} & = 4 \\ W_o & \text{'' '' ''} & = 5 & \text{'' '' ''} & = 2 \\ W_{p.p.} & \text{'' '' ''} & = 5 & \text{'' '' ''} & = 2.5 \end{array}$$

A 3) alatti egyenlet alapján tehát

$$\begin{array}{llll} a_p & 15^\circ \text{ színes szektornál} & = 0.47 & 20^\circ \text{ színes szektornál} & = 0.5 \\ a_o & \text{'' '' ''} & = 0.6 & \text{'' '' ''} & = 0.6 \\ a_{p.p.} & \text{'' '' ''} & = 0.6 & \text{'' '' ''} & = 0.57 \end{array}$$

α értékének azonkívül még a kontraszt erejétől sem szabad függnie. Mert jelezzük az egyik alkalmazott kontraszt erejét S_1 -gyel, egy másikat S_2 -vel, azonkívül az S_1 -et kompenzáló W -pótlékot W_1 -gyel és az S_2 -t kompenzáló W -pótlékot W_2 -vel, akkor a következő egyenletek érvényesek:

$$\begin{aligned} W_1 + V - S_1 &= 0 \\ W_2 + V - S_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$W_1 + V - S_1 = W_2 + V - S_2,$$

azaz a fehér és fekete értékek összege a kontraszt erejétől független, mert minden egyes esetben a kritikus szürke áll elő.

Egyszerű matematikai eljárás alapján két-két értékből egy harmadikat tudunk megadni, így tehát egyedül mitőlünk függ, hogy mely értékeket állapítsuk meg kísérletileg és melyeket számítsuk ki.

Most még néhány fontos körülményre akarok rámutatni.

Az előbb leírt módszernél úgy jártunk el, hogy egy konstans S -inger és egy konstans szektornagyság mellett megkerestük azon fehéret, a melynél a szín a maximális színesség benyomá-

sát adta. Ennek a módszernek a principiuma az, hogy a színben levő fehér és a hozzáadott fehér kompenzálja a fekete ingert. A compensatio létrejötte esetében elértük a maximális színességi pontot. Tehát a színek viszonylagos világosságának (W -érték) megállapításához ismernünk kell úgy az S , mint a W értékét.

A módszert megváltoztathatjuk bizonyos mértékig a nélkül, hogy az elvet fel kellene adnunk. Előállítunk egy kontrasztgerjesztő felületet tetszés szerinti világossággal, a kontrasztmezőbe pedig behelyezünk egy színes szektort objektív fehér hozzáadása nélkül. Már most a színes szektor fokszámát addig változtatjuk, a míg a legszínessebb benyomást kapjuk. Célszerű ezen pont megállapításakor próba gyanánt egy igen csekély objektív fehérrel a színhez hozzáadni. Kezdetben ez az objektív fehér emelni fogja a színességet, mert a kontrasztfekete nagyobb a színes szektor W -értékénél. Végül azonban olyan ponthoz jutunk, a melynél az objektív fehér, még pedig a legkisebb mennyiségben is, a színességet nem fokozza többé, hanem ellenkezőleg, gyengíti. Ebben az esetben a színes szektor éppen annyi fehérrel tartalmaz, a mennyi a fekete inductio kompenzálásához szükséges.

Tehát egy bizonyos színes szektorból kiindulva, e módon érhetjük el a maximális színesség benyomását. Mind a két esetben az indukált feketét akarjuk kompenzálni; csak hogy az egyik esetben egy konstans színes szektor mellett az objektív fehérrel fokozzuk (u. n. compensatiós fehér), a másik esetben pedig a színes szektort növeljük annyira, hogy a hozzáadott szín W -értéke egyenlő legyen a compensatiós fehérrel.

Az utóbbi módszer jól használható és gyorsan célhoz vezet. Ezen módszerrel a maximális színesség érzetének felkeltésekor nem teszünk egyebet, mint hogy a konstans S -ingert a szín W -értékével kompenzálattjuk.

Ebben az esetben:

$$V = S \qquad 5)$$

Ezen módszer tehát csak a kivitelben különbözik az előbbi-től, az elv ugyanaz. Mert minél világosabb egy szín, minél

nagyobb a W -értéke, annál kisebb színes szektor szükséges ahhoz, hogy a maximális színesség benyomását felkeltsük.

A szín W -értékét e szerint a színes szektor nagyságával mérjük. Homogén fényeknél a színes fény intenzitása szolgál mértékül.

Jelezzük G -vel a színes szektor azon nagyságát (fokát), a mely a maximális színesség előidézésére szükséges, α -val a színes szektor *egy* fokát, így fennáll a következő egyenlet:

$$\alpha G = V,$$

minthogy 5) szerint

$$V = S,$$

tehát

$$\alpha G = S,$$

s így végül

$$\alpha = \frac{S}{G}. \quad (6)$$

A következő úton jutunk W értékéhez:

$$S = W + V \quad (2)$$

$$W = S - V$$

és minthogy $V = \alpha X$

$$W = S - \alpha X. \quad (7)$$

Ha 6)-ba α értékét az előbbi egyenletből behelyettesítjük, 7)-ből lesz:

$$W = S \left(1 - \frac{X}{G}\right). \quad (8)$$

8) alatti egyenlet α számára a következő értéket adja:

$$S = W + V$$

$$S = W + \alpha X.$$

Helyettesítsük ezen értéket 8)-ba, akkor

$$W = (W + \alpha X) \left(1 - \frac{X}{G}\right),$$

ebből következik

$$\alpha = \frac{W}{G - X}. \quad (9)$$

A 4) és 9) alatti egyenlet segítségével kiszámíthatjuk S és G értékét:

$$\alpha = \frac{S - W}{X} \quad 4)$$

$$\alpha = \frac{W}{G - X} \quad 9)$$

$$\frac{S - W}{X} = \frac{W}{G - X}$$

a két kifejezés különbségéből adódik

$$S G - W G - S X = 0.$$

Ebből az egyenletből S és G a következő módon határozható meg:

$$S = \frac{W G}{G - X} \quad 10)$$

$$G = \frac{S X}{S - W} \quad 11)$$

Mi tehát α számára három egyenletet állítottunk fel.

A 6) alatti egyenlet a legegyszerűbb. Ha ezt akarjuk alkalmazni, akkor egyszer s mindenkorra megállapítjuk S értékét és csak G -t kell minden egyes színre külön meghatározni. A 4) alatti egyenlet alkalmazásakor elegendő, ha a W -t egy tetszés szerinti színes szektorra, X -re állapítjuk meg. Ebben az esetben S -et ismernünk kell. A 9) alatti egyenlet azért előnyös, mert abban S nem fordul elő, bár ezzel szemben G és W értékét kell megállapítani.

Ha felvesszük, hogy a megfigyelések nem változó, kontrollálhatlan befolyásoktól, hanem egyedül a különbség iránti érzékenységtől (Unterschiedschwelle) függenek, ebben az esetben *mind a három* egyenletet alkalmazhatjuk.

Állítsuk egymás mellé az α számára nyert három egyenletet:

$$\alpha = \frac{S}{G}$$

$$\alpha = \frac{S - W}{X}$$

$$\alpha = \frac{W}{G - X}$$

A fenti három egyenletből levezethetjük az egyenleteket S és W számára.

S -re érvényesek a következők :

$$S = a G$$
$$S = a X + W.$$

W -re érvényesek a következők :

$$W = S - a X$$
$$W = a (G - X).$$

Ha már most az a számára felállított egyenletek használhatóságát kísérletileg meg akarjuk vizsgálni, akkor ha W , G , S és X empirikusan talált értékeit behelyettesítjük a fenti három egyenletbe, a számára minden esetben megközelítőleg azonos értéket kell kapnunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 május 23.-án tartott üléséből.)

A KÉKSZÍNŰ MOLYBDAENOXYD KÉFT ŰJ MÓDOSULATÁRÓL.

ILOSVAY LAJOS r. t. és SCHEITZ PÁL-tól.

A kékszinű molybdænoxyd összetételéről az irodalomban nagyon eltérő adatokat találunk. Képlete BERZELIUS¹ szerint $MoO_2 \cdot 4MoO_3$, RAMELSBERG² szerint MoO_2 , MoO_3 , MUTHMANN³ szerint $MoO_2 \cdot 2MoO_3$, míg GUICHARD⁴ a $MoO_2 \cdot 4MoO_3 \cdot 6H_2O$ képletet találta helyesnek, de későbben⁵ $Mo_2O_5 \cdot 3MoO_3 \cdot 6H_2O$ -ra változtatta. Kristályosan először MARCHETTI⁶ állította elő s azt találta, hogy összetétele $Mo_3O_8 \cdot 5H_2O$. Újabban BAILHACHE⁷ és KLASON⁸ is állított elő kékszinű molybdænoxydot. A BAILHACHE által előállított vegyület összetétele $Mo_2O_3 \cdot 2MoO_4 \cdot 6H_2O$ és $(Mo_2O_3)_3(Mo_7O_{24})_2 \cdot 18H_2O$. A KLASON által előállított vegyületek szintén igen bonyolult összetételűek. Az oldható féleség: $Mo_2O_5 \cdot 18MoO_3 \cdot 21H_2O$; az oldhatatlan: $Mo_2O_5 \cdot 24MoO_3 \cdot 24H_2O$.

A molybdænkékkal a szerzők egyike⁹ is tüzetesen foglalkozott és azt találta, hogy több különböző összetételű kékszinű molybdænoxydnek kell lenni és hogy a keletkezési feltételek és a kémlőszerek változtatásával új vegyületek állíthatók elő.

¹ Pogg. A. d. Phys. u. Chemie. 6. 380.

² Pogg. A. 127. 281.

³ LIEBIG'S Annalen. 238. 108.

⁴ Compt. rend. 131. 389.

⁵ Bull. de la Soc. chimique (IV). 1. 446. 1907.

⁶ Z. f. anorg. Chemie. 19. 391.

⁷ Compt. rend. 133. 1210–13.

⁸ Ber. Dtsch. Chem. Ges. 34. 158.

⁹ Ilosvay. Math. és Természettud. Értesítő. XXVII. 609.

A kékszinű molybdænoxyd két új vegyületét a következő egyszerű eljárással állítottuk elő: 50 g. molybdænsavas ammoniumot 300—400 cm³ hideg vízben oldunk és most addig elegyítünk az oldathoz hígított sósavat, míg a kezdetben leváló molybdænsav oldódik. A sósavas oldatot 1200 cm³-ra hígítjuk és beleöntünk 20 g. hydrazinchlorhydrátból és kevés hideg vízből készült oldatot. Az elegyet 12 óráig állani hagyjuk. A hatás azonnal észrevehető, az oldat sötétkék színt ölt, lassú gázfejlődést észlelhetünk és idővel az edény aljára fekete színű csapadék ülepedik le. 12 órai állás után a csapadékról a halvány sárgás-barna oldatot lepipettázzuk és a csapadékot egy liter vízzel jól összekeverjük. A csapadék leülepedése után az oldatot lefejtjük és ismét vízzel elegyítjük. Ezt az eljárást 3—4-szer ismételve, a csapadékot szűrjük és addig mossuk, míg a lecsepegő oldatban sósavat többé nem mutathatunk ki.

A csapadék hideg vízben zöldes árnyalattal némileg oldható; jobban oldja forró víz. Ez az oldat sötétkék színű; azonban a forró víz sem oldja tökéletesen. Ha azonban a csapadékot vízzel 5—10 percig élénken forraljuk, teljesen oldhatóvá válik. Ha ezt az oldatot szárazra pároljuk, sötétkék színű anyag marad hátra, mely hideg vízben is könnyen oldódik. Ha az anyag hideg vízzel huzamosabban érintkezik, szintén kék színnel oldható. Ha a csapadékot 50—60°-on szárítjuk, átalakul; a szárított anyag ugyanis hideg vízben könnyen oldódik.

Mint hogy a termék hő hatására átalakul, az elemzéshez a vegyületet léghijas térben kénsav fölött szárítottuk. A szárított termék sötétkék színű és alaktalan. 50 g. molybdænsavas ammoniumból 15 g. anyag keletkezik. A vegyület néhány napi állás után hideg vízben némileg oldható és az oldat színe kék.

A vegyület viktartalmát gyöngye vörös izzáson, nitrogén-áramban határoztuk meg.

Az elemzéshez lemért anyag súlya g.-okban	A keletkezett víz súlya g.-okban
I. 1·2110	0·1357
II. 1·1216	0·1296
III. 1·1078	0·1266

Salétromsavval oxydált anyag súlya g.-okban	A keletkezett MoO_3 súlya g.-okban
I. 0·3475	0·3110
II. 0·3855	0·3449
<i>H</i> -áramban redukált anyag súlya g.-okban	A keletkezett szín molybdæn-súlya g.-okban
III. 0·4359	0·2601

Kísérletileg talált értékek:

H_2O	Mo
I. 11·20 %	59·65 %
II. 11·55 "	59·63 "
III. 11·42 "	59·66 "

Középérték: H_2O = 11·39 %
 Mo = 59·64 "

A $MoO_3 \cdot H_2O$ képletre számított összetétel:

H_2O = 11·11 %
 Mo = 59·25 "

Miként már említettük, a hideg vízben oldhatatlan molybdænkék vízzel forralva egész tömegében gyorsan átalakul hideg vízben is oldható molybdænkékké. E vegyület megvizsgálhatása czéljából az eredeti csapadékot fél óráig vízzel forraltuk és a leszűrt oldatot szárazra párologtattuk. A 100°-on szárított anyag világoskék színű és hideg vízben is kék színnel oldódik. A vegyület alaktalan.

A vegyület víztartalmát gyenge vörös izzáson nitrogén-áramban határoztuk meg.

Az elemzéshez lemért anyag súlya g.-okban	A keletkezett víz súlya g.-okban
I. 1·1964	0·0666
II. 1·2474	0·0701
III. 1·3418	0·0737

Salétromsavval oxydált anyag súlya g.-okban	A keletkezett MoO_3 súlya g.-okban
I. 0·5076	0·4821
II. 0·5253	0·4987
<i>H</i> -áramban redukált anyag súlya g.-okban	A keletkezett szín molybdæn-súlya g.-okban
III. 0·6787	0·4299

Kísérletileg talált értékek:

H_2O	<i>Mo</i>
I. 5·56 %	63·29 %
II. 5·61 "	63·27 "
III. 5·49 "	63·29 "

Középérték: $H_2O = 5·55\%$
 $Mo = 63·28\%$.

A $Mo_2O_6 \cdot H_2O$ képletre számított érték:

$H_2O = 5·88\%$
 $Mo = 62·74\%$.

A hideg vízben is oldható molybdænkéket közvetlenül is előállíthatjuk: A molybdænsavas ammonium sósavas oldatát 50—60°-ra melegítjük és most hozzáöntve a hidrazinchlorhydrat oldatát, 10 perczig 60°-ra pállítjuk. A hidrazinchlorhydrat hatására élénk gázfejlődés mellett azonnal sötétkék színű oldat keletkezik. Az így előállított molybdænkék azonban nem tiszta és a sósavat és chlorammoniumot mellőle eltávolítani nem lehet.

Összefoglalás.

A molybdænsavas ammoniumból hidrazinchlorhydrát hatására a $MoO_3 \cdot H_2O$ összetételű vegyület keletkezik, mely hideg vízben nem oldódik. Ez a vegyület vízzel forralva polimerizálódik és átalakul a $Mo_2O_6 \cdot H_2O$ összetételű vegyületté, mely hideg vízben is könnyen oldódik, még pedig kék színnel.

A képlet helyessége azonban még ellenőrzésre szorul.

Megjegyzendő, hogy VIVIER¹ szintén előállított egy $MoO_3 \cdot H_2O$ összetételű vegyületet, mely fehér színű. Újabban pedig ROSENHEIM és BERTHEIM² is előállította a fehér színű $MoO_3 \cdot H_2O$ összetételű vegyületet.

¹ Compt. rend. 106. 901.

² Z. f. anorg. Chem. 34. 427.

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1910 június 13.-án tartott üléséből.)

A SEISMIKUS HYSTERESISRŐL.

KÖVESLIGETHY RADO r. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Az utolsó évek sűrű földrengési katastrópháinak hatása alatt fel kellett vetni újra azt a régebben már több ízben félénken felmerült kérdést, vajjon a tudomány mai állása mellett nem lehet-e legalább a tektonikus rengéseket tudományos alapon előre jelezni?

A kérdés feltevése nem új. Légió azon statisztikai dolgozatok száma, melyek a földrengések sorrendjében periodust keresnek, vagy a melyek gyakoriságukat egyrészt meteorologiai, másrészt kosmikus tényezőkhez kapcsolják. Ismeretes, hogy e kutatások eredményei országonként teljesen ellentmondók és csak legújabban ismerték fel, hogy ezen szempontból még hazánk területével bíró ország sem tekinthető geographiai egységnek, hanem apróbb, külön tárgyalandó területekre osztandó, hogy valamelyes állandóbb jellegű eredményhez juthassunk.

Nem szabad csodálkoznunk, hogy ily viszonyok mellett a statisztikai módszer hitelét veszítette és az általános véleménynek adott csak kifejezést MONTESSUS DE BALLORE, midőn a seismologia ezen ágától megtagadja a létjogosultságot.¹

A statisztikai módszer legkevesetebb eredményeinek egyike, hogy Japánban a romboló földrengések azon időre esnek, midőn a sarkmagassági változások folyamán Japán geographiai

¹ MONTESSUS DE BALLORE, La science séismologique, Paris, 1907. 226. lap.

szélessége maximum vagy minimum.¹ Noha eléggé jól ismerjük már a sark mozgásának periodusát, még ezen tétel sem vezethet prognosishoz, egyrészt, mert meg nem fordítható, másrészt, mert a rengés helyére vonatkozólag a legkisebb útmutatást sem adja.

De a látszólag tudományosabb alapon álló kísérletek is meddők. Ma is vissza-visszatér az a gondolat, mely a földrengéseket a belső árapály kifolyásául tekinti. Pontosán megállapíthatjuk az árkeltő erő nagyságát és a maximális feszültség helyét és idejét, de használható prognosig ezen elméletnek még egyik követője sem emelkedett.

Ilyen és hasonló dolgozatok beható bírálata két fontos dologra mégis tanít: hogy ezen az alapon földrengéseket előre jelezni semmiképen sem lehet, és hogy meteorologiai és kosmikus tényezők magukban véve nem elsősorú okok, hanem legfőlebb más úton érlelődő rengésnek kiváltó okai.

De épen ezért nem tehetem magamévá MONTESSUS DE BALLORE kemény ítéletét. Dolgozatom folyamán látni fogjuk, hogy a gondos statisztikai kutatásnak megvan a maga figyelmeztető szerepe, mely épen a rengést megelőző kritikus időben fölötte fontos lehet. Az én nézetem szerint tehát ilyes munkák minden országban ezentúl is lelkiismeretesen végzendők és sokan meglepődéssel fogják venni, hogy a multnak becsületes és szorgalmas munkája nem volt hiábavaló.

*

Aprioristikus prognosis el sem képzelhető: erre a Föld és minden egyes része történetének és a most működő összes erők teljes ismerete kellene. De symptomatikus prognosis lehetőségéről talán szólhatunk. Ha nem is mondotta ki, felismerte ezt OMORI és REID; az előbbi megtörtént rengések utóhatásai-ból újabb rengésekre iparkodik következtetni,² az utóbbi pedig

¹ Publications of the Earthquake Investigation Committee in Foreign Languages (P. E. I. C.), Nr. 18. Tokyo, 1904. 13. l.

² Bulletin of the Imperial Earthquake Investigation Committee. Vol. I. Nr. 2. Tokyo, 1907. 66. l.

alkalmasan választott fixpontok mozgásaiból már a seismikus feszültséget akarja levezetni.¹ Az előbbi módszer nagy személyes tapasztalatot tételez fel, tehát tudományos rendszerbe foglalni alig lehet, a második inkább javaslat, a melynek keresztülvitelére vonatkozólag még hiányzik minden tapasztalat. Egyik, különben már a szerzőtől felismert hibája, hogy a feszültségnek csak térbeli és időbeli különbségeit adhatja, a melyek esetleg oly kicsinyek lehetnek, hogy a megfigyelhetőség határain túl esnek.

*

A seismikus prognosis lehetőségének szükséges feltétele kétségen kívül az, hogy megállapíthassuk valamely, a rengéssel együttjáró lényeges kísérő jelenségnek legalább gyakorlati czélokra eléggé pontosan kifejezhető időfüggvényét. És ez a követelmény, úgy tetszik, ma már teljesen kielégíthető.

A seismikus hysteresis.

A tektonikus földrengések nyomában — és e dolgozatomban csak ilyenekre fogok kiterjeszkedni — mindenkor utólökések járnak, a melyeket az 1891. évi mino-owarii nagy földrengés óta ENYA és különösen OMORI² tanulmányozott behatóan. E földrengést nyolcz éven át 3482 utólökés követte.

Sietek hozzátenni, hogy a japán földrengési katalogusok segítségével ily utólökéseket korábbi rengésekre is sikerült kinyomozni; a legrégebbek az 1847. évi zenkoji és az 1830. évi tenpoi rengéséi.³ Ezen régi rengések utólökései még ma is kimutathatók, azzal, hogy a vidék seismicitásának évi átlagát

¹ Comptes Rendus des séances de la troisième réunion de la Commission permanente de l'Association internationale de sismologie à Zermatt, 1909. Budapest, 1910. 164. l.

² Journal of the College of Science, Imperial University Tokyo. Vol. XII. Tokyo, 1895. 113—200. l. Hasonlóan: P. E. I. C. Nr. 4. Tokyo, 1900. 40. l. — U. o. Nr. 7. Tokyo, 1902. 27. l.

³ Bull. Imp. Earthquake Invest. Comm. Vol. II. Nr. 2. Tokyo, 1908. 185. l.

előre számítható és utólag tényleg kimutatható módon növelik. Még hozzáteszem, hogy ezen utólökések empirikus formuláját az első néhány nap megfigyeléseiből vezették le; a mino-owarii kísérőlökések egyenlete például az első öt nap megfigyeléseire támaszkodván nyolcz éven át megadja az észlelt lökések számát.

OMORI tehát formulájával oly empirikus szabályt adott kezünkbe, a mely néhány nap észlelése alapján mindenesetre félszázadra extrapolálható.

Ha t egy tetszőlegesen választott időköznek folyó időben kifejezett kezdőpontja és N ezen közben az utólökések száma vagy gyakorisága, akkor OMORI szerint

$$N = \frac{b}{t+a}, \quad (1)$$

a hol a és b két állandót jelent. A behatóbb vizsgálat azonban csakhamar feltűnteti, hogy csak első közelítéssel, mintegy útmutató formulával van dolgunk. A görbe ugyanis rohamosabban közeledik az ordinátatengelyhez, mint az egyenoldalú hyperbola és későbbi folyamatában is kissé deformálja egy superponált periodikus görbe, a mely az utólökések számában már felismerni engedi a másodlagos kosmikus és meteorológiai behatásokat. E periodikus eltéréseket, melyek a közepes görbe menetének hyperbola-jellegét nem változtatják meg, OMORI nagyon ügyesen használta fel a földrengések gyakoriságában mutatkozó periodusok levezetésére.¹ E periodusoknak ugyanazon rengés keretén belül és más rengéseknél is mutatkozó állandósága következtetéseinek reális voltára vall. Valóban lényeges csak az ordinátatengely közelében fellépő deformatio.

Az utólökések már pusztá létezése kétségtelenné teszi, hogy a tektonikus földrengést feszültség idézi elő, mely a Föld rétegeiben utóhatással jár. A rengés pillanatában a primær feszültség megszűnik és a hysteresis folytán az egyensúlyi állapot csak nagyon lassan áll helyre. Régi rengések nyomai még félszázaddal később is biztosan kimutathatók.

Ha a hysteresist a rengés pillanatában, a midőn maximum

¹ P. E. I. C. Nr. 8. Tokyo, 1902. 1. l.

lett a feszültség fokozatos növekedése folytán, h_0 -val jelöljük, későbbi időben pedig h -val, akkor $h_0 - h$ a hysteresises felélézés mértéke és a momentán seismicitás nyilván a rugalmas lábbadozás sebességével arányos. Ezért tehető a t időben észlelt utólökések $N(t)$ száma:

$$N(t) = c \frac{dh(t)}{dt}, \quad (2)$$

a hol c arányossági tényező.

Az eddig tett feltevések, hogy az utólökések száma a hysteresis differentiaalquotiensével arányos és *közelítésben* időbeli lefolyásában egyenoldalú hyperbolával ábrázolható, már teljesen elegendők a seismikus hysteresis függvényének megállapítására. Csupán azon feltevésre lesz még szükségünk, hogy a hysteresisre a superpositio elve áll. A *seismikus* jelzőt azért használom, mert némi különbséget látok természet és laboratorium között. Amott nagy területen heterogén, sokszorosán töredezett és ismét összeforrasztott anyag szenved bonyolult folyamat révén változást, emitt pedig meghatározott homogén anyag kísérletileg gondosan izolált egynemű hatásnak van alávetve. Semmi szükségem sincs ugyan ama feltevésre, hogy a földrengés energiája akár az egyes rétegek hővezető képességének, akár pedig közvetlenül a geothermikus gradiensnek megváltozásából ered, de mindenesetre valószínű, hogy itt thermikus hysteresis is játszik szerepet és mágneses behatások lehetősége sem utasítható el mereven. Körülbelül úgy vagyunk, mint a physikus a gázzal: az egyes molekula mechanikája legyőzhetetlen nehézségeket okoz, a molekulák összesége egyenkint bonyolult mozgásukkal ellenben egyszerű törvényhez vezet. Ha tehát laboratoriumi kísérletek nem vezettek eddig a hysteresisfüggvény egyszerű és egységes alakjához, az nem bizonyítja, hogy a Föld méhében végbemenő folyamatok közös végeredményére is ugyanaz áll.

Azon négy rengés, melynek utólökéseiről pontosabb tanulmányaink vannak, Japán különböző részeiben keletkezett, sőt némelyikének fészke a tenger partján volt. Nagyon valószínű tehát a feltevés, hogy az egyes esetekben a rengést előidéző feszültség a legkülönfélébb módon keletkezett és nőtt. És ha

mégis az utólökések gyakoriságára ugyanazon empirikus képlet áll, kimondhatjuk mindenesetre a következő tételt:

Az utólökések gyakoriságának időgörbéje egyenoldalú hyperbola, melyre a rengést előidéző feszültség történetét kifejező, általában ismeretlen görbe superponálódik.

E meghatározás a hysteresis-függvény ismeretére elegendő. Vegyünk ugyanis tetszőleges, az idővel változó $p(t)$ erőt, a mely t_0 -tól t_1 -ig nő és ekkor hirtelenül megszűnik. Ha az elemi hysteresist állandó erő esetén $h(t)$ -vel jelöljük, akkor t időben a $p(t)$ feszültséghez tartozó hysteresis

$$H_0 = \int_0^{t-t_0} p'(t) h(t) dt. \quad (3)$$

Az adott feladatot már most a következőképen oldjuk meg. A helyett, hogy az erőt t_1 -kor megszüntetnők, a tetszőlegesen nagy t időig engedjük nőni; a hysteresis természetesen most is az imént talált H_0 . Most t_1 -kor az eredeti feszültséggel egyenlő nagy, de ellentétes irányú feszültséget engedünk hatni, ismét t időig. Ezen feszültségnek megfelelő hysteresis

$$H_1 = - \int_0^{t-t_1} p'(t) h(t) dt.$$

A superpositio elvénél fogva $H_0 + H_1$ nyilván olyan erő hysteresise, a mely t_0 -tól t_1 -ig nőtt, de t_1 -tól fogva folytonosan ugyanannyival csökken, mint a mennyivel nő, azaz a mely t_1 -tól fogva állandó. Ezen állandó erő hysteresise, minthogy az erő t_1 pillanatban $p(t_1 - t_0)$:

$$H_{01} = p(t_1 - t_0) h(t - t_1).$$

Ha ezt még levonjuk, akkor azon feszültség hysteresisét kapjuk, a mely t_0 -tól t_1 -ig nőtt és t_1 -kor hirtelenül megszakadt; ennek értéke:

$$H(t) = \int_{t-t_1}^{t-t_0} p'(t) h(t) dt - p(t_1 - t_0) h(t - t_1), \quad (t \geq t_1), \quad (4)$$

ha a változó erő hysteresisének nagyságát t időben $H(t)$ -vel jelöljük.

A (2) és (1) egyenlet, továbbá az utólökésekre vonatkozó elv értelmében az utólökések törvényszerűsége a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$N(t) = p(t_1 - t_0) h'(t - t_1) + p'(t - t_1) h(t - t_1) - p'(t - t_0) h(t - t_0) = \frac{b}{t + a} + \phi(t), \quad (5)$$

melyben $\phi(t)$ ismeretlen, igen gyorsan fogyó időfüggvény, a mely a $p(t)$ feszültség analitikai kifejezésétől függ. A (2) egyenlet c arányossági tényezőjét a jobb oldalban bennfoglaltak gondolhatjuk.

Mint hogy $p(t_1 - t_0)$ állandó, a fenti egyenlet az állandók megfelelő változtatása mellett így is írható:

$$h'(t - t_1) + \frac{p'(t - t_1)}{p(t_1 - t_0)} h(t - t_1) - \frac{p'(t - t_0)}{p(t_1 - t_0)} h(t - t_0) = \frac{B}{t - t_1 + A} + \frac{\phi(t)}{p(t_1 - t_0)}. \quad (6)$$

A bal és jobb oldal első tagja teljesen független az erő növekedési módjától, azaz a rendszer történetétől, míg a többi tag a rendszer történetének kifejezője. Az egyenlet tehát szét-esik két egyenletre. Az első

$$h'(t - t_1) = \frac{B}{t - t_1 + A} \quad (7)$$

a hysteresis függvényét adja, a mely, ha $t - t_1$ helyett t -t írunk:

$$h(t) = \nu \text{ l. } \frac{t + A}{\tau}.$$

τ az integratio, ν a hysteresis állandója, a melyek közül az első A -val egyenlő. Az elemi hysteresis kifejezése tehát végre

$$h(t) = \nu \text{ l. } \frac{t + \tau}{\tau}, \quad (8)$$

ha τ azon idő, a melynek eltelte után a hysteresis nagyságát mérjük.

A levezetés ezen egyszerű útja volt a legkésőbbi, melyet találtam. Eleinte a hőelmélet első tételéből indultam ki, a mely

időben nagyon lassan folyó folyamatokra még alkalmazható. BRILLOUIN, DUHEM és mások¹ dolgozataiban, a kik hasonló alapon állanak, a függvény explicit alakjára vonatkozólag hiába kerestem okulást. A helyes nyomra SZILY KÁLMÁNNAK 1875-ben tartott székfoglaló értekezése vezetett.² Bizonyos, hogy szerzője *ma* nem fogja fenntartani értekezése címét, de a hysteresis szempontjából érdemes volna e dolgotatot revisionak alávetni. A függvény hasonló logaritmikus alakját egy speciális esetben elméletileg BOLTZMANN is levezette.³

A legbővebben foglalkozott a hysteresissel, még pedig már a seismologia szempontjából, KUSAKABE.⁴ A különféle formatiókhoz tartozó kőzeteken tett rugalmassági kísérleteiből tényleg a (8) egyenletben adott logaritmikus alakot találja, a melyet kifejezetten hypothetikusnak fogad el, hogy azután belőle az utólökések törvényét vezesse le. Minthogy legterjedelmesebb közölt észleleti sorozata is csak néhány napot számol, ezen az alapon elindulni nem mertem. Csak az utólökésekkel való huzamosabb foglalkozás és különösen azon észrevételem után, hogy az utólökésekből a főrengés ideje pontosan kiszámolható, ismertem fel, hogy KUSAKABE gondolatmenete megfordítható és egyben tetszőlegesen ható erőre nézve általánosítható.

Az utólökésekben biztos empirikus alapot nyerünk, a melyből a hysteresis függvénye levezethető és az eddigi tapasztalatok kezeskednek a mellett, hogy az így talált törvény évek hosszú sorozatára is alkalmazható. Mísem dicséri jobban KUSAKABE megfigyeléseinek pontosságát és merész inductiójának jogosultságát.

Ha az (5) egyenletben a rendszer történetét kifejező tagokat egyelőre elhagyjuk, a melyek, mint utólag is látni fogjuk, csupán a rengést közvetlenül követő időben jelentősek, az OMORI-féle empirikus formulát kapjuk, mely a mino-owarii 1891 október 28.-i rengésre alkalmazva

¹ BRILLOUIN: Comptes Rendus, T. 106, 1888. 416, 482, 537, 589. II. P. DUHEM, értekezés-sorozat a Mémoires de l'Acad. belge-ben, 1896—1902.

² SZILY KÁLMÁN: A hőelmélet második főtétele, s í. t. Érték. a math. tud. köréből. Budapest, 1875.

³ WINKELMANN: Handb. d. Phys. 2-ik kiad. I. köt. 805. l.

⁴ P. E. I. C. Nr. 14. Tokyo, 1903 és Nr. 17. Tokyo, 1904.

$$N = \frac{440,7}{x+2,314}.$$

Ebben N az utólökések száma az x -szel jelölt időközben; az időköz a fél nap, a kiinduló epocha 1891 október 29.-én 0^h. Ha ezen empirikus képlet alapján a főrengést azzal meghatározzuk, hogy számára az utólökések száma végtelen, akkor ezen képletből a főrengés idejéül 1891 okt. 29, 0 - $\frac{1}{2}$ · 2,314 = 1891 október 28-án 8^h14^m d. e. következnek, holott a rengés ideje valóban 1891 október 28-án 6^h37^m d. e. volt. E retrospektív prognózis valamely rengés idejének meghatározására első eset, és az eredmény bizonyára pontosabb volna még, ha OMORI empirikus képletében az (5) egyenlet többi tagját nem hanyagoltuk volna el.

OMORI jelölése különben a következő módon függ össze azzal, a melyet az (5) egyenletben használtam. Legyen t_1 a főrengés, azaz a feszültség megszűntének ideje, T az epocha, melyből kiindulva az utólökéseket számítjuk és m a napok száma, melyeket időegységül összefoglalunk. Az elméleti (7) formula nevezője $t-t_1+\tau$, az OMORI-féleé $x+a$, a melyben nyilván

$$x = \frac{t-T}{m}.$$

Áll tehát

$$\frac{b}{x+a} = \frac{c}{t-t_1+\tau},$$

és ebből

$$c = bm \text{ és } t_1 = T - am + \tau.$$

A rendelkezésemre lévő adatok gondos átszámolása arra utal, hogy $\tau = m$ veendő és ezzel a rengés ideje

$$t_1 = T - (a-1)m.$$

Az előbbi példára alkalmazva az eredmény ugyanaz marad; az első öt nap megfigyeléseiből a rengés ideje csak 1^h37^m hibával volt meghatározható. Ilyesrendű pontosságot még évek múltán figyelt utólökésekből is érhetünk el.

Különösen ennek a felismerése buzdított e tanulmányra. De a hysteresis függvényének ismerete még korántsem adja

az előrejelzés kulcsát, mert a földrengés meg nem fordítható folyamat lévén, nem áll az az elv, hogy a jövő negatív múlt; emez érezteti ugyan hatását, de a jövő nem veti előre árnyékát.

Az a mód, melylyel a hysteresis a hőelmélet első tételével kapcsolható, legegyszerűbben talán a CLAUSIUS-féle disgregatio behozatalával, mutatja, hogy az entropiával rokon fogalom, a mit alakilag logaritmikus volta is igazol. A cyclikus változások behatóbb tanulmányozásakor látni fogjuk, hogy az entropia mintájára szintén maximum felé törekszik és hogy végtelen hosszú idő múlva logaritmikusan végtelen lesz. Ha LORD KELVINNEL maximumban 40 millió évre teszszük azt az időt, a mely előtt a Föld szilárd kéreggel bevonódott, a midőn tehát az első földrengés is jelentkezhetett, akkor is a jelenlegi hysteresis eredeti értékének legfeljebb húszszorosára emelkedhetett.

Mechanikai jelentősége, mint az az alakjából könnyen levezethető, a sebesség négyzetével arányos késleltető erő és mechanikai képe egy az idővel arányosan zsugorodó ideális kosmikus gázgömb entropiája.¹

Még nem vizsgáltuk meg azt a második egyenletet, a melyre (6) szétesése vezet. Ha rövidség kedvéért

$$t - t_1 = x, \quad t_1 - t_0 = \vartheta, \quad p'(u) h(u) = P(u) \quad \text{és} \quad \frac{\psi(t)}{\vartheta} = -\varphi(x), \quad (9)$$

akkor ezen egyenlet

$$\frac{P(x + \vartheta) - P(x)}{\vartheta} = \varphi(x) \quad (10)$$

alakban írható. Az utólökések görbéjéből $\varphi(x)$ legalább numerikusan teljesen ismeretes, t_1 a rengés ideje, t_0 azon, később meghatározandó idő, melyben a feszültség kezdetét vette és h alakja (8)-ból veendő. A rendszer történetét tehát egy differentiaegyenlet fejezi ki, melynek megoldása az erő teljes megismeréséhez vezet. E kifejezésben természetesen benne lehetnek

¹ A. RITTER: Anwend. der mech. Wärmetheorie auf kosmog. Probleme. Leipzig, 1882. 25. l.

azon periodikus tagok is, melyek mint másodlagos meteorológiai és kosmikus factorok a feszültséget módosították, de a görbe későbbi szakaszaiban fellépő periodikus tagok nyilván a rengés hatása alatt meg érzékeny rétegek reactióját jellemzik periodikus külső befolyások ellenében.

A (6) egyenlet természetesen egyetlen egy izolált rengés kifejezője. A megelőző rengések miatt mindenképp le kell vezetnünk a cyclikus változásokkal járó hysteresis kifejezését. Ezek természetesen a (10) egyenletet is módosítják, de csak annyiban, hogy a jobb oldali $\varphi(x)$ -hez egy később meghatározandó és minden esetben kis correctio járul, úgy hogy ezen egyenletre még egyszer visszatérnünk nem lesz szükséges.

Habár az általános levezetésekben a feszültséget közelebb-ről nem határozzuk meg, a tényleges számításainkban csak az idővel arányosan növekedő feszültségeket tételezek fel, egyrészt, mert formularendszerünk tetemesen egyszerűbbé válik, másrészt, mert ezen feltevés nem hypothetikusabb, mint bármely más felvétel.

A földrengés primær oka ugyanis — bár erre a következőkben nem hivatkozom — alig lehet más, mint az a feszültség, a melyet a Föld méhében végbemenő hőmérsékletváltozás okoz. Nagyon lassú folyamatokról lévén szó, a hőelmélet mindkét tétele egészen a rengés kitöréséig alkalmazható. Kiindulhatunk tehát a hőelmélet kombinált két tételéből, melynek egyik foglalatja szilárd testekre a szokásos jelölésekkel a következő:

$$dQ = C_p dT + \left(\frac{dV}{dT} \right)_p T dp, \quad (11)$$

vagy a szilárd testek közelítésben ismert

$$\frac{ds}{s} = \frac{dp}{E} + \alpha dT \quad (12)$$

állapoti differenciálegyenletének felhasználásával:

$$dQ = C_p dT - \alpha v T dp, \quad (13)$$

ha α az anyag hőbeli kiterjedés-coëfficiense. A bal oldalon álló hőmennyiséget a réteg súlyegysége alulról való vezetés útján kapja; értéke tehát időegységenként

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\lambda}{s} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right),$$

ha λ a hővezetés coefficiense, s a sűrűség, ρ a réteg sugara, T hőmérséklete és t a folyó idő. De ezen hőmennyiségben két coëxistáló hőmennyiség foglaltatik. A gyorsan lefolyó földrendgésekkel szemben az egyiket stationærnek tekinthető folyamat, a Föld sæcularis hűlése szállítja. E hő nagyrésze a hegygyürődés munkájára fordittatik. Erre vonatkozólag HERGESELL tett igen figyelemreméltó vizsgálatokat,¹ melyek folyamán a főbb elemeknek számbeli értékeit is megadhatta a nélkül, hogy a FOURIER-féle problémának hypothetikus kezdeti feltételeit be kellett volna vezetnie.

E stationarius állapotra ráhelyezkednek ennek időbeli változásai, a melyek épen a rengés primær okai lehetnek. A mennyiben tehát csak földrengésekről van szó, a felvett hőmennyiség helyébe csak a fentjelzett kifejezés időszerinti differentiaal-quotiensét szabad bevezetnünk. Ha még a γ geothermikus gradienst hozzuk be, melyet a szokásnak megfelelőleg az x mélység irányában olvasunk, akkor végre

$$\frac{\lambda}{s} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial t} - \frac{2}{r-x} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) dt = C_p x \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt - avTdp. \quad (14)$$

Úgy látszik tehát, hogy a készülődő feszültség a gradiens megváltozásában észlelhető. Erre vonatkozó megfigyelésekről nincsen tudomásom, de jelentős, hogy a gradiens meghatározása Japánban a földrengési bizottság feladataihoz tartozik.

Ezen egyenletből adódik

$$\frac{dp}{dt} = \mu, \quad (15)$$

a feszültségnek időbeli növekedése, mely a gradiens megváltozásával jár. Az egyenletben szereplő mennyiségek nem állandók ugyan, de szükségképen azokul kell tekintenünk, egyrészt, mert az állapottól való függésüket nem ismerjük, másrészt,

¹ Beiträge zur Geophysik. II. köt. 1895. 153. l.

mert a gradiens és még inkább változásának megfigyelése olyan nehézségbe ütközik, mely bonyolultabb törvény felismerését úgyszólamint lehetetlenné tenné. Nem volna tehát gyakorlati alapja, ha a feszültség növekedésére az egyszerű arányosságnál bonyolultabb törvényt tételeznénk fel.

Ha térfogategységül a köbmétert, időegységül az évet választjuk, akkor a homokkő és bazalt között álló kőzetre nézve $\frac{\lambda}{sC_p} = 26,3$ adódik, míg SCHMIDT meteorologiai megfigyelésekből 27,8-at vezet le. A gradiensnek csak abszolút tagját tartjuk meg, mert sorfejtésének többi tagja teljességgel bizonytalan és legalább a földkéreg felső rétegeiben zérusnak vehető; közepes értéke $\gamma = 0,0281$. A fészek átlagos mélységéül $x = 10,000$ métert választunk. Ezen adatokból következik, hogy a fenti egyenlet bal oldala a jobb oldallal szemben teljesen elhanyagolható és az egész folyamat adiabatikusnak tekinthető; a feszültség tehát a THOMSON-féle egyenletről számítható. Ha most felteszszük, hogy a gradiens egy év alatt $\frac{1}{35,6}$ -ről $\frac{1}{34,6}$ -ra nő, akkor

$$\mu = 360 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2},$$

míg ugyanezen egységekben az elasticitási modulus homokkőre $630 \cdot 10^6$ és angol aczélra $20,000 \cdot 10^6$.

A tételt megfordítva kerdezhetjük, hogy a legerősebb föld-rengés magyarázatára mekkora gradiensváltozás szükséges? A leghévesebb rengés kevéssel felülmulja a nehézség gyorsulását. Ha tehát $t - t_0$ az idő, a mely alatt e feszültség felhalmozódott, akkor

$$\frac{d\gamma}{dt} (t - t_0) = 67 \cdot 10^{-6},$$

a mi, ha $t - t_0 = 1$ év, 10 kilométer szintkülönbségre még mindig csak $\frac{2}{3}^\circ$ hőmérséklet-különbséget ad. Az a gondolat, hogy az érlelődő földrengés talán a geothermikus gradiens megváltozásából felfedezhető, egyelőre legalább mindenesetre elvetendő.

Az alternáló feszültségekkel járó hysteresis tanulmányozásánál abból a már igen általános és az idővel egyenletesen változó feszültség esetén legáltalánosabb feltevésből indulok ki, hogy a feszültség $t_0, t_2, \dots, t_{2n-2}$ időkben nőni kezd, ellenben $t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}$ időkben megszakad. Ezen utóbbi idők tehát egyszersmind az 1, 2, ..., n -ik földregzés epochái. $t_2 - t_1, t_4 - t_3, \dots, t_{2n-2} - t_{2n-3}$ időközökben feszültség egyáltalában nincs.

A levezetés talán kissé világosabb lesz, ha a t_0 -tól olvasott időt a $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta$ szakaszokra osztjuk, úgy hogy

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= t_1 - t_0, \quad \vartheta_2 = t_2 - t_1, \quad \dots, \quad \vartheta_{2n-1} = t_{2n-1} - t_{2n-2}, \\ \vartheta_{2n} &= t_{2n} - t_{2n-1}, \quad \vartheta \doteq t - t_{2n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ha az erőt a ϑ_1 szakasz elejétől fogva folytonosan nőni engedjük, de a ϑ_2 elejétől ugyanoly nagyságú ellenkező irányú erőt alkalmazunk, végre a ϑ_2 elején a $p(\vartheta_1)$ nagyságra megnőtt erőt egészen elvonjuk, akkor, mint a (4) egyenlet levezetésénél, nyilván oly erő hysteresisével van dolgunk, mely a ϑ_1 közön át nőtt és a ϑ_1 köz végén teljesen megszűnt. E hysteresis értéke

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta} p'(t) h(t) dt - \int_0^{\vartheta_2 + \vartheta_3 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta} p'(t) h(t) dt - \\ &\quad - p(\vartheta_1) h(\vartheta_2 + \vartheta_3 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta). \end{aligned}$$

Ha az erő ismét ϑ_3 szakaszon át nőtt és ϑ_4 elején megszűnt, akkor hasonlóan

$$\begin{aligned} H_3 &= \int_{\vartheta_3 + \vartheta_4 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta} p'(t) h(t) dt - p(\vartheta_3) h(\vartheta_4 + \vartheta_5 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta), \\ &\quad \vartheta_4 + \vartheta_5 + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta \end{aligned}$$

és így tovább. A superpositio elvének feltételezése mellett lesz vegre

$$\begin{aligned} H_n(t) &= \sum_1^n \int_{\vartheta_{2i} + \vartheta_{2i+1} + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta}^{\vartheta_{2i-1} + \vartheta_{2i} + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta} p'(t) h(t) dt - \\ &\quad - \sum_1^n p(\vartheta_{2i-1}) h(\vartheta_{2i} + \vartheta_{2i+1} + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta), \end{aligned} \quad (17)$$

vagyis azon erő hysteresise, a mely a $\vartheta_1, \vartheta_3, \dots, \vartheta_{2n-1}$ szakaszokon át nőtt, e közök végén megszűnt és a $\vartheta_2, \vartheta_4, \dots, \vartheta_{2n}$

időszakaszok alatt pihent. Minthogy az erő az utolsó szakasz végén elenyészett, azaz t_{2n-1} időben, $H_n(t)$ nyilván az n -edik földrengés utáni hysteresis kifejezője.

Ha ellenben csak az $(n-1)$ -ik rengésig megyünk, de ez után a feszültséget még a $\vartheta_{2n+1} + \vartheta_{2n} + \vartheta$ időn át nőni engedjük, a

$$\begin{aligned}
 {}_n H(t) = & \sum_1^{n-1} \int_{\vartheta_{2i} + \vartheta_{2i-1} + \dots + \vartheta_{2n+1} + \vartheta}^{\vartheta_{2i-1} + \vartheta_{2i} + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta} p'(t) h(t) dt - \\
 & - \sum_1^{n-1} p(\vartheta_{2i-1}) h(\vartheta_{2i} + \vartheta_{2i+1} + \dots + \vartheta_{2n} + \vartheta) + \int_0^{\vartheta_{2n+1} + \vartheta_{2n} + \vartheta} p'(t) h(t) dt, \quad (18)
 \end{aligned}$$

kifejezést nyerjük, mely nyilván azon hysteresis, a mely az $(n-1)$ -edik rengés után, de a feszültségnek újra való növekedése folytán az n -edik rengés előtt érvényes. A H mellett álló n index helyzete szerint tehát az n -edik rengés előtti, illetőleg utáni hysteresisre utal.

A (16) egyenletek segítségével a folyó időt hozván be, kissé egyszerűbb alakokhoz jutunk. Áll ugyanis

$$H_n(t) = \sum_1^n \int_{t-t_{2i-1}}^{t-t_{2i-2}} p'(t) h(t) dt - \sum_1^n p(t_{2i-1} - t_{2i-2}) h(t - t_{2i-1}), \quad (19)$$

és a (17) és (18) egyenlet összehasonlítása folytán:

$${}_n H(t) = H_n(t) + \int_0^{t-t_{2n-1}} p'(t) h(t) dt + p(t_{2n-1} - t_{2n-2}) h(t - t_{2n-1}). \quad (20)$$

Ha végre az erőt az idővel arányosnak vesszük, $h(t)$ helyébe pedig (8)-ban talált értékét helyettesítjük és a $\mu\nu$ arányossági factort elhagyjuk, lesz:

$$\begin{aligned}
 {}_n H(t) = & \sum_1^{n-1} (t - t_{2i-2} + \tau) \text{ l. } \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} - \sum_1^{n-1} (t_{2i-1} - t_{2i-2}) + \\
 & + (t - t_{2n-2} + \tau) \text{ l. } \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-2}), \quad t \geq t_{2n-2}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$H_n(t) = \sum_1^n i (t - t_{2i-2} + \tau) \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} - \sum_1^n i (t_{2i-1} - t_{2i-2}), \quad t \geq t_{2n-1}. \quad (22)$$

A kettő összehasonlítása ad

$${}_n H(t) = H_n(t) + (t - t_{2n-2} + \tau) \cdot \frac{t - t_{2n-1} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-1}), \quad t \geq t_{2n-1}, \quad (23)$$

mely egyenletből azonnal érdekes következtetés vonható. Az n -edik rengés pillanatában ugyanis $t = t_{2n-1}$ és ezért

$${}_n H(t_{2n-1}) = H_n(t_{2n-1}). \quad (24)$$

A rengés pillanatában tehát a rengés előtti és utáni hysteresis ugyanaz és ennél fogva a rengés tisztán csak a primær feszültséget emészti fel, míg a hysteresis kizárólag lassú kiegyenlítődéssel szűnik meg az idők folyamán. Ha ugyanis $H_n(t)$ t

$$H_n(t) = - \sum_1^n i \left\{ (t - t_{2i-2} + \tau) \cdot \left(1 - \frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{t - t_{2i-2} + \tau} \right) + (t_{2i-1} - t_{2i-2}) \right\}$$

alakban írjuk, azonnal látjuk, hogy az utolsó földrengés utáni hysteresis idővel eltűnik. Hasonlóképen belátjuk, hogy ${}_n H(t)$ ezzel ellentétben újabb földrengés előtt folytonosan nő és hogy a hysteresis annál nagyobb lesz, minél hosszabban várat magára a rengés.

Minthogy az egész feszültség F a primær erő és a hysteresis összege, áll a rengés környezetében:

$$F(t_{2n-1}-0) = \mu(t_{2n-1} - t_{2n}) + \mu\nu {}_n H(t_{2n-1})$$

és

$$F(t_{2n-1}+0) = \mu\nu H_n(t_{2n-1}), \quad (25)$$

a mi az imént talált eredménynyel egyezően azt jelenti, hogy a rengéskor a feszültségben $\mu(t_{2n-1} - t_{2n})$ nagyságú ugrás áll be. Ezen ugrásnak a feszültséggel való összefüggése egyszersmind annak is bizonyítéka, hogy a rengés előtti és utáni ν hysteresis-coëfficiens *ugyanaz*.

Két egymásra következő rengés utáni hysteresisre áll

$$H_n(t) - H_{n-1}(t) = (t - t_{2n-2} + \tau) \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{t - t_{2n-1} + \tau} - (t_{2n-1} - t_{2n-2}). \quad (26)$$

Minthogy $t \geq t_{2n-1}$ és a logaritmus argumentuma

$$1 + \frac{t_{2n-1} - t_{2n-2}}{t - t_{2n-1} + \tau}$$

alakban is írható, a jobb oldal csak pozitív lehet. Ebből következik, hogy a hysteresis minden egyes rengés után nő; a formula különben ugyanaz, mintha csak egyetlen egy izolált rengéssel volna dolgunk, mert a jobb oldal alakilag $H_1(t)$ -vel egyező.

Ez könnyen arra a gondolatra csábíthatna, hogy az n -edik rengés úgy áll be, mintha a Föld a megelőző $(n-1)$ rengés után szűz állapotban volna, mert csakugyan

$${}_n H(t) - H_{n-1}(t) = (t - t_{2n-2} + \tau) \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-2}), \quad (27)$$

a mi alakilag teljesen ${}_1 H(t)$ -vel hasonlítható össze. Ám a bal oldalon álló két feszültség nem egymás *mellett* áll fenn, mert vagy ${}_n H(t)$ a másodlagos feszültség, ha még egy rengés fog beállani, vagy $H_{n-1}(t)$ a hysteresis, ha az $(n-1)$ -edik után soha többé rengés nem lesz.

Ha, mint láttuk, a hysteresis a földrengések n számával folyton nő, akkor a pillanatnyi feszültség megállapítása a megelőző rengések számára a történelmi adatoknak egy teljesen ismeretlen sokaságát követeli. Hogy mégis némileg fogalmat nyújthassak a hysteresis magaviseletéről, felteszem, átmenetileg, hogy az összes közök átlagban egyenlők, azaz, hogy

$$t_i - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_{2n-1} - t_{2n-2} = \theta, \quad (28)$$

ha θ két egymásra következő rengésnek fél átlagos köze; azért fél intervallum, mert a rengések ideje $t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}$.

Ha az időket t_{2n-2} -től fogva olvassuk, akkor

$$t - t_{2i-2} + \tau = t - t_{2n-2} + \tau + 2(n-i)\theta,$$

és a megelőző rengések nagy száma mellett írhatjuk:

$$\begin{aligned}
 {}_n H(t) &= \\
 \int_1^n [t - t_{2n-2} + \tau + 2(n-i)\theta] l. \frac{t - t_{2n-2} + \tau + 2(n-i)\theta}{t - t_{2n-2} + \tau + (2n-2i-1)\theta} dt - n\theta + \\
 &+ (t - t_{2n-2} + \tau) l. \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-1}) = \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ t - t_{2n-2} + \tau - \frac{7}{2}\theta + \theta l. \frac{t - t_{2n-2} + \tau + (2n-3)\theta}{t - t_{2n-2} + \tau - \theta} - \right. \\
 &- \left. \frac{(t - t_{2n-2} + \tau)^2}{\theta} l. \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{t - t_{2n-2} + \tau + \theta} \right\} + \\
 &+ (t - t_{2n-2} + \tau) l. \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-1}), \quad (29)
 \end{aligned}$$

és ezen kifejezés $n = \infty$ számára logaritmikusan végtelen lesz, mint maga az entropia. Ezzel szemben $H_n(t)$, mint a (22) egyenlet már megmutatta, $n = \infty$ számára a zérus felé convergál.

Most már fogalmazhatjuk a seismikus prognózis gondolatmenetét, de azonnal meg fogunk győződni arról, hogy a gyakorlati kivitel ezen az úton lehetetlen.

Legyen F a maximális feszültség, melyet valamely réteg elbír; akkor az n -edik rengés ideje a (25) egyenlet értelmében

$$\mu \{(t - t_{2n-2}) + \nu {}_n H(t)\} = F$$

egyenletnek a gyöke.

Hogy a mai hysteresis pontosan megállapítani nem lehet, épen most láttuk. Jelenlegi értéke kezdeti nagyságának olyan kisszámú többszöröse még, hogy a megelőző földrengések számának és átlagos intervallumának nem ismerése rendkívül nagy hibát hozna be; az egyenlet ${}_n H(t)$ -től függő tagja tehát ki sem számolható. De nem ismerjük a maximális megterhelés F értékét sem, sőt igen valószínű, hogy ez az egymásután következő rengések nyomában járó újrahegedések folytán még ugyanazon szintben fekvő rétegre is időben folyton változó. A μ meghatározásának is megvannak a maga nehézségei. Ha a hőelmélet, mint azt átmenetileg feltettük, meg is adná értékét, nincs módunkban ezt meg is figyelni a gradiens megváltozása alapján. De épen nem valószínű, hogy a gradiens megváltozásából

származó feszültséggel μ tartalma már ki van merítve, mert kosmikus és meteorologiai folyamatok is idézhetnek elő feszültségeket és az utóbbiakat előrelátnunk nem is lehet. Nincs tehát módunkban megállapítani még azt sem, vajjon μ valóban létezik-e, azaz vajjon valamely rengés várható-e.

A felírt egyenletnek tehát még csak elméleti értéke sincs. A prognosishoz nem szabad tehát a hysteresis-függvényre közvetlenül támaszkodnia, hanem annak változásait kell igekeztetnie értékesíteni, a melyekből a fenti egyenlet ismeretlenei kiesnek. Teljesség kedvéért felemlitem, hogy a talált formulákból kiszámíthatók alternáló körfolyamatokra az ismeretes tipikus hysteresis-hurkok, a melyek tényleg megfigyelt hysteresis-görbékhez meglepően hasonlítanak.

Szemléltetés céljából ide iktatom még a legelső néhány rengésre vonatkozó hysteresis explicit kifejezését és graphikai ábrázolását.

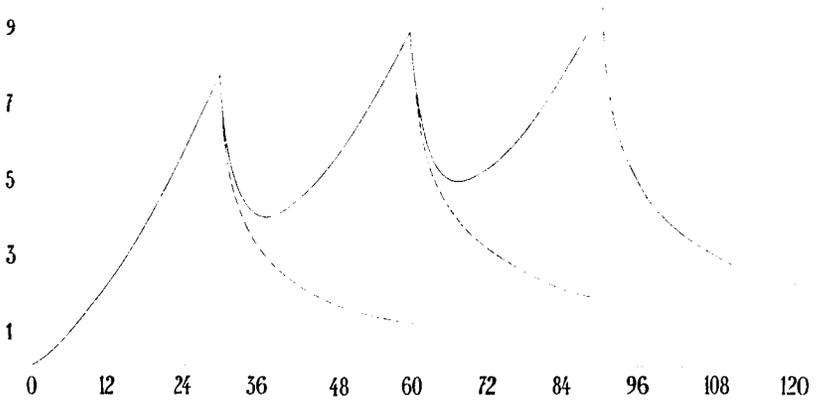
$${}_1H(t) = (t-t_0+\tau) \lg \frac{t-t_0+\tau}{\tau} - (t-t_0), \quad t \geq t_0;$$

$$H_1(t) = (t-t_0+\tau) \lg \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} - (t_1-t_0), \quad t \geq t_1;$$

$${}_2H(t) = (t-t_0+\tau) \lg \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} + (t-t_2+\tau) \lg \frac{t-t_2+\tau}{\tau} - \\ - (t_1-t_0) - (t-t_2), \quad t \geq t_2;$$

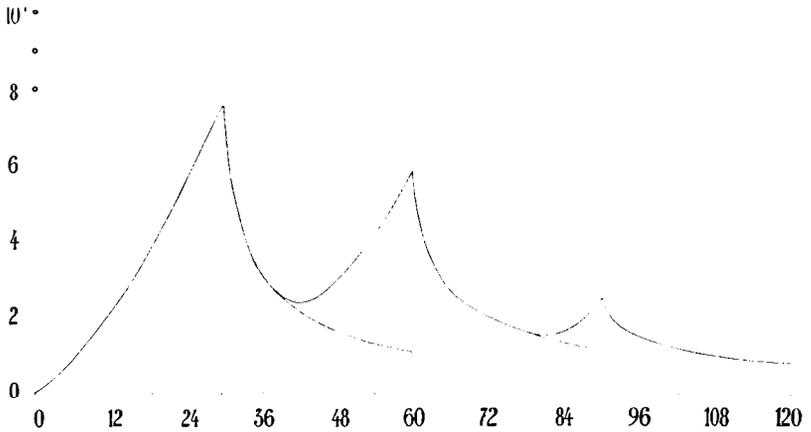
$$H_2(t) = (t-t_0+\tau) \lg \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} + (t-t_2+\tau) \lg \frac{t-t_2+\tau}{t-t_3+\tau} - \\ - (t_1-t_0) - (t_3-t_2), \quad t \geq t_3.$$

A következő 1. ábrában, a mely japán átlagos viszonyokra vonatkozik, fel van tüntetve az első három földrengés hysteresise. Állandó közük 30 hó, úgy hogy $t_0=0$, $t_1=30$, $t_2=60$, $t_3=90$ hó és $\tau=1$ hó. Fel van továbbá tételezve, hogy a feszültség növekedésének mértéke μ mindig ugyanaz, s hogy az új feszültség a rengés beálltakor azonnal ismét nőni kezd, azaz, hogy $t_2=t_1$, $t_4=t_3$. Az ábra igen szépen feltünteti a hysteresis növekedését az egyes rengések után. A pontozott görbe $H_n(t)$ értékét adja, a hysteresist, ha újabb rengés nem állna már be.



1. ábra.

A második ábrában csak a feszültség újraélédeése esik más időkre; nevezetesen $t_0 = 0$, $t_2 = 39$ és $t_4 = 81$ hó. Ez annyit



2. ábra.

jelent, hogy a feszültség az első, illetve második földrengés után 9, illetve 21 hónapig teljesen szünetelt. A többi feltevés az előzőkkel egyezik.

A kísérő lökések.

A mennyiben eddigi levezetéseink, a melyek az utólökésekből a hysteresis ismeretére vezettek, helyesek, az elméletből szükségképen az is következik, hogy a tektonikus rengéseket általában intő- vagy előlökések fogják bevezetni. A hysteresis a rengés előtt még növekedőben van és ezért áll a (2) egyenlet mintájára az elő- és utólökések gyakoriságára:

$${}_nN(t) = \frac{\partial {}_nH(t)}{\partial t} \quad \text{és} \quad \dot{N}_n(t) = - \frac{\partial H_n(t)}{\partial t}, \quad (30)$$

vagy explicite írva a (21) és (22) egyenlet nyomán:

$${}_nN(t) = \sum_1^{n-1} i \cdot 1. \frac{t-t_{2i-2}+\tau}{t-t_{2i-1}+\tau} - \sum_1^{n-1} i \frac{t_{2i-1}-t_{2i-2}}{t-t_{2i-1}+\tau} + 1. \frac{t-t_{2n-2}+\tau}{\tau} \\ t \geq t_{2n-2}; \\ \dot{N}_n(t) = \sum_1^n i \frac{t_{2i-1}-t_{2i-2}}{t-t_{2i-1}+\tau} - \sum_1^n i \cdot 1. \frac{t-t_{2i-2}+\tau}{t-t_{2i-1}+\tau}, \quad t \geq t_{2n-1}. \quad (31)$$

Az első pár földrengésre vonatkozó speciális esetek ezekből:

$${}_1N(t) = 1. \frac{t-t_0+\tau}{\tau}, \quad t \geq t_0;$$

$$N_1(t) = \frac{t_1-t_0}{t-t_1+\tau} - 1. \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau}, \quad t \geq t_1;$$

$${}_2N(t) = 1. \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} + 1. \frac{t-t_2+\tau}{\tau} - \frac{t_1-t_0}{t-t_1+\tau}, \quad t \geq t_2;$$

$$N_2(t) = \frac{t_1-t_0}{t-t_1+\tau} + \frac{t_3-t_2}{t-t_3+\tau} - 1. \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} - 1. \frac{t-t_2+\tau}{t-t_3+\tau}, \quad t \geq t_3.$$

Tényleges alkalmazás előtt ezen egyenletek jobb oldala még a $c\mu\nu$ factorral megszorozandó, a mely egyszerűség kedvéért el van hagyva. c a kísérő lökések, ν a hysteresis, μ az idővel arányos erő coefficientense.

A (31) egyenletek másodika az OMORI-féle empirikus egyenletnek az utólökésekre vonatkozó pontosabb alakja. Minthogy

$t_1 - t_0$ azon idő, mely alatt az első rengés érlelődött, $c(t_1 - t_0)$ nyilván igen nagy c -hez képest. Ebből következik, hogy a logaritmikus tag befolyása csak nagyon csekély és hogy azonkívül az argumentuma alakjánál fogva rohamosan fogy. Látni fogjuk, hogy e gondolatmenet még akkor is helyes marad, ha előzőleg nagyon sok rengés is volt. Ezzel az (5) egyenletbe behozott $\phi(t)$ függvényre tett feltevésünk utólag igazoltatik.

A (26) és (27) egyenletekhez hasonló vonatkozások a kíséző lökésekre is felírhatók. Áll nevezetesen

$$\begin{aligned} N_n(t) - N_{n-1}(t) &= \frac{t_{2n-1} - t_{2n-2}}{t - t_{2n-1} + \tau} - 1 \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{t - t_{2n-1} + \tau}, \\ {}_nN(t) + N_{n-1}(t) &= 1 \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau}, \quad t \geq t_{2n-2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Az n -edik rengést előkészítő feszültség $t = t_{2n-2}$ -kor lép fel. Ekkor ${}_nN(t_{2n-2}) = -N_{n-1}(t_{2n-2})$. Növekedő idővel az egyenlet jobb oldala nő, ellenben $N_{n-1}(t)$ fogy, mint ezt a (31) egyenlet közvetlenül mutatja és ezért ${}_nN(t)$ csak annál gyorsabban nő. Valamely földrengés előlökései tehát bizonyos időn át a megelőző rengés utólökéseivel azonosak és ezért negatív előjelűek; csak azután mennek át tulajdonképeni intőlökésekbe.

Fontos lesz megállapítani a zérusponton való átmenetnek idejét, melyet t_{2n-2}^0 -vel jelölök, mert ebből könnyen meghatározható a feszültség újraeledésének t_{2n-2} ideje. E feladatot későbben oldom meg, mikor ${}_nN(t)$ kifejezését teljesebb alakjában ismerjük.

A (31) egyenlet másodikának pusztá meg szemlélése is mutatja, hogy növekedő idővel az utólökések száma rohamosan fogy, a mi az összes megelőző földrengések behatásának tekintetbe vételét lehetségessé teszi.

A (31) egyenletek alapján ugyanis az $(n+i)$ -dik rengés intőlökései a következőképen írhatók:

$$\begin{aligned}
 n+iN(t) = & \sum_1^n \lambda \cdot l. \frac{t-t_{2\lambda-2}+\tau}{t-t_{2\lambda-1}+\tau} - \sum_1^n \lambda \frac{t_{2\lambda-1}-t_{2\lambda-2}}{t-t_{2\lambda-1}+\tau} + \\
 & + \sum_1^{i-1} \lambda \cdot l. \frac{t-t_{2n+2\lambda-2}+\tau}{t-t_{2n+2\lambda-1}+\tau} - \sum_1^{i-1} \lambda \frac{t_{2n+2\lambda-1}-t_{2n+2\lambda-2}}{t-t_{2n+2\lambda-1}+\tau} + \\
 & + l. \frac{t-t_{2n+2i-2}+\tau}{\tau}. \tag{33}
 \end{aligned}$$

A formulát azért osztottuk két részre, hogy az első részben az első n rengést az átlagos θ közzel, a rákövetkező újabb i rengést ellenben a maga pontos időadatával számolhassuk. E szerint t_{2n-1} -ben az n -edik rengés az utolsó a sorozatban, melyet az átlagos közzel számolunk. t_{2n} -kor kezd újra nőni a feszültség és ezen pillanatot választom az időszámítás kezdetéül. Ekkor írhatunk:

$$t-t_{2\lambda-2}+\tau = t-t_{2n}+\tau+(2n-2\lambda+2)\theta,$$

és ha n elég nagy, a (33) egyenlet első sora, mely a megelőző rengések miatt fellépő javítást adja, integrállal cserélhető fel. Az egyszerű számítás eredménye:

$$\begin{aligned}
 n+iN(t) = & l. \frac{t-t_{2n+2i-2}+\tau}{\tau} + \sum_1^{i-1} \lambda \cdot l. \frac{t-t_{2n+2\lambda-2}+\tau}{t-t_{2n+2\lambda-1}+\tau} - \\
 & - \sum_1^{i-1} \lambda \frac{t_{2n+2\lambda-1}-t_{2n+2\lambda-2}}{t-t_{2n+2\lambda-1}+\tau} + \\
 & + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{t-t_{2n}+\tau+2\theta}{\theta} \cdot l. \frac{t-t_{2n}+\tau+2\theta}{t-t_{2n}+\tau+\theta}, \tag{34}
 \end{aligned}$$

melyben a jobb oldal két utolsó tagja a nevezett correctio.

Ha röviden

$$t-t_{2n}+2\theta+\tau = u,$$

akkor ezen correctiós tag

$$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{u}{\theta} \cdot l. \frac{u-\theta}{u} \right] = -\frac{1}{2} \sum_2^\infty k \cdot \frac{1}{k} \left(\frac{\theta}{u} \right)^{k-1}$$

alakra hozható, tehát növekedő t mellett gyorsan fogy. Az $(n+i)$ -dik rengés számára tehető τ elhanyagolásával és állandó közepes θ közt tételezve fel

$$u = (2i+1)\theta,$$

és ezért a correctiotag első tagja

$$\frac{1}{4(2i+1)}.$$

Ha csak az utolsó három rengést is számítjuk helyesen, a javítás már csak körülbelül $\frac{1}{30}$ -ra rúg. Míg tehát a hysteresis maga lényegesen függ a földkéreg történetétől, addig a kísérő lökésekben ennek a multnak már csak halvány emléke él: a Föld gyorsan felejt.

Mínt hogy $t=t_{2n}$ és $t=\infty$ számára nyilván áll

$$0 < \frac{\theta}{u} < \frac{1}{2},$$

a megelőző rengések mind egy csekély terjedelmű, $\frac{\theta}{u}$ argumentummal számolt C correctióstábla segítségével tekintetbe vehetők, a mely

$$0 < C < \left(\frac{1}{2} - 1.2\right)$$

határok között mozog.

A (32) egyenlet segítségével azonnal adódik $n+iN(t)$ értékéből $N_{n+i-1}(t)$ vagy $N_{n+i}(t)$ értéke is, úgy hogy az utóbbi kifejezésének explicit felírása mellőzhető.

Ha ismét minden közt átlag egyenlőnek veszünk, akkor két egymásra következő rengés pillanatában az intőlökések számára a következő egyenletet nyerjük:

$$n \cdot N(t_{2n-1}) - n_{-1} N(t_{2n-3}) = 1. \frac{(2n-1)\theta + \tau}{(2n-2)\theta + \tau} - \frac{\theta}{(2n-2)\theta + \tau} < 0.$$

Átlag tehát minden következő rengés pillanatában az előlökések száma kisebb, mint a megelőző rengés esetén. A tétel pontosan csak akkor áll, ha a feszültség mindig ugyanazon a módon nő az idővel és ha a kísérő lökések c együtthatója is

állandó. A fogyás ma, midőn n már igen nagyra nőtt, $\frac{1}{4(n-1)^2}$ rendű, tehát teljesen jelentéktelen.

Ezen megjegyzés idővel talán fontos lehet, mert ime egy mennyiségre tettünk szert, a mely, míg a hysteresis maga folyton nő, idővel állandósulni igyekszik.

Intő lökésekét észlelték ugyan néhány újabb rengés esetén, nevezetesen a messinai földrengés előtt is,¹ de még nagyon keveset tudunk róluk. Szomszédos helyeken észlelt földrengések gyakran annyira hasonlóak, hogy a felvett seismogrammok még a kényesebb részletekben is egyezők és hasonlóan látszanak viselkedni az előlökések is. OMORI említ is két esetet, a melyben az időlökések a főrengés előtt állandó közökben jelentkeztek. A további tanulmányozástól mindenesetre fontos útmutatások várhatók, de jelenlegi ismereteink még nem jogosítanak arra, hogy ezen még kétes eredményt a prognózis szolgálatába állítsuk rendszeresen.

Az intőlökések kifejezése nem tartalmazza t_{2n-1} -et, a főrengés idejét és ezért bármikor észlelt lökések számából ezen idő nem határozható meg. A főrengést megelőző összes intőlökések számába integrálás folytán t_{2n-1} természetesen behozható ugyan, de meghatározása csak akkor lehetséges, ha e számra vonatkozólag már bizonyos aprioristikus ismereteink vannak, a melyek legalább ma még teljesen hiányoznak.

Egyetlenegy földrengés esetén áll:

$$\frac{N_i}{t_i} = c \int_{t_i}^{\tau} \left(\frac{t - t_0}{t - t_0 + \tau} - 1, \frac{t - t_0 + \tau}{t - t_0 + \tau} \right) dt + c \left\{ (t_1 - t_0 + \tau) \cdot \frac{t_1 - t_0 + \tau}{\tau} - (t_1 - t_0) \right\},$$

és

¹ Bull. of the Imp. Earthqu. Invest. Comm. Vol. II. Nr. 2. Tokyo, 1908. 89. l. és Bollettino Sismologico, Vol. XIII. 1909. 305. l.

$$\sum_{t_0}^{t_1} {}_1N(t) = c' \int_{t_0}^{t_1} \text{l.} \frac{t-t_0+\tau}{\tau} dt = \\ = c' \left\{ (t_1-t_0+\tau) \text{l.} \frac{t_1-t_0+\tau}{\tau} - (t_1-t_0) \right\}.$$

ha a lökések száma oly nagy, hogy az összegezés integrálással felcserélhető. A bal oldalon álló összegek az utó- és előlökések teljes számát jelentik.

Ha tehát a főrengés előtt és után c és c' ugyanaz, akkor az összes előlökések száma megegyezik az összes utólökések számával. És hasonló vonatkozás áll bármely rendű rengésre is. De minthogy az utólökések száma előre nem ismeretes, ezen egyszerű vonatkozás prognózis alapját nem teheti.

Eltérően a hysteresistől, a kísérő lökések számára a rengés pillanatában $nN(t_{2n-1})$ és $N_n(t_{2n-1})$ nem egyenlők. Az ugrás most is a rengéskor kiváltott feszültséggel arányos, a mi csak úgy érthető, ha az elő- és utólökések c és c' tényezője rengés előtt és után ugyanaz. A hysteresis coefficiensére hasonló vonatkozást már feljebb mutattunk ki.

A kísérő lökések közepes intenzitásáról is alkothatunk némi fogalmat. A főrengésben felszabaduló feszültség $\mu_n(t_{2n-1}-t_{2n-2})$ lévén, a hysteresisben rejlő energia egészen a kísérő lökések intenzitásának fedezésére szolgál. Ha ezeknek átlagos intenzitása n_i , illetve i_n , akkor áll nyilván, minthogy $H(t)$ integrálja az $N(t)$ -nek:

$$n_i \sum_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} {}_nN = c\mu_n \nu \{ {}_nH(t_{2n-1}) - {}_nH(t_{2n-2}) \}, \\ i_n \sum_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} N_n = c'\mu_n \nu \{ H_n(t_{2n}) - H_n(t_{2n-1}) \}, \quad (35)$$

a hol még csak a μ feszültségi tényező fejezendő ki máskép. Ha a pontalakúnak képzelt fészek mélysége x , akkor a rengéskor kiváltott feszültség

$$\mu_n(t_{2n-1}-t_{2n-2}) = \frac{\Gamma_n}{g} xsg, \quad (36)$$

a mennyiben a rengési feszültség a fészek felett álló x oszlopnak a I_n gyorsulást kölcsönzi. g_s ezen oszlop fajsúlyát jelenti. Ha végre G_n a rengés erőssége a FOREL-MERCALLI-féle skálában kifejezve, akkor a CANCANI-féle egyenlet értelmében ¹

$$G_n = 3 \log \frac{4}{3} I_n, \quad (37)$$

a melyből a G_n erősséghez tartozó μ_n kivehető.

A következő két görbe ábrázolja az elő- és utólökések gyakoriságát ugyanazon feltevések mellett, melyeket az 1. és 2. ábrára vonatkozólag tettem. A c és c' arányossági factor az egységgel egyenlőnek vétetett. A 3. ábrában ${}_2N(t)=0$ és ${}_3N(t)=0$ egyenletnek gyöke, illetve $t_2^0 = 37.23$ és $t_4^0 = 67.68$, azon időpontok, melyekben az előlökések előjele pozitívvá válik és egyszersmind az az idő, melyben a rengés előtti hysteresis minimum. A megfelelő idők a 4. ábrában, melyben az új feszültség keletkezésének ideje már szabálytalanabb eloszlást, $t_2^0 = 41.32$ és $t_4^0 = 81.48$. Ezen időpontok közvetlenül nem figyelhetők meg és ezért ismeretők legfőlebb elméletileg érdekes.

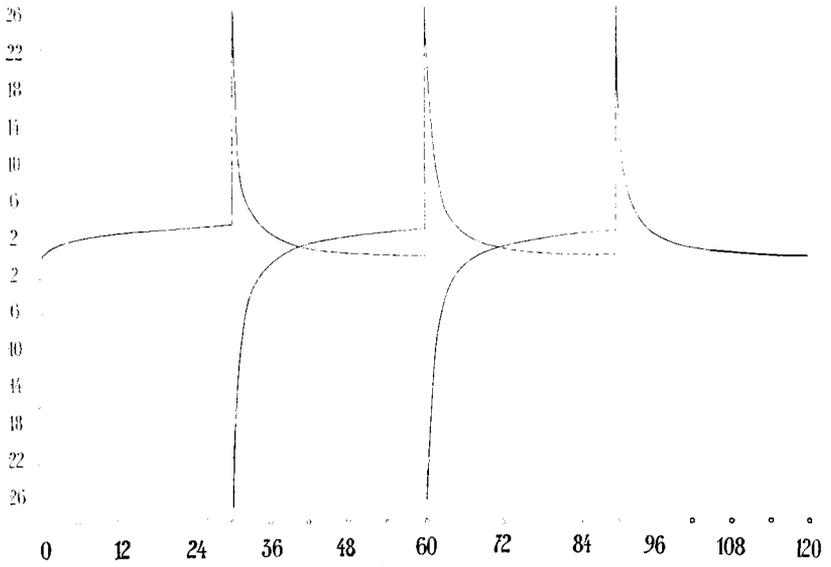
Az ábra kapcsán dönthető el legszemléltetőbb módon a kísérő lökések osztályozásának kérdése. A rengés maga természetesen tumultuáris folyamat, de két rengés között a feszültségben és a kísérő lökések gyakoriságában folytonosság van. Ebből következik, hogy az n -edik rengés előlökései ott kezdődnek, a hol az ${}_nN(t)$ görbe a megelőző földrengés ${}_{n-1}N(t)$ görbéjét metszi. E pontban éri el az észlelt lökések gyakorisága minimumát. Ezen időpont, melyet t'_{2n-2} -vel fogok jelölni, tehát valóban észlelhető, még pedig, a mint a következőkben látni fogjuk, kielégítő pontossággal.

Numerikus meghatározása a következő módon történik: t'_{2n-2} azon idő lévén, melyben ${}_nN(t)$ és ${}_{n-1}N(t)$ egymással egyenlő, áll (32) folytán a következő egyenlet

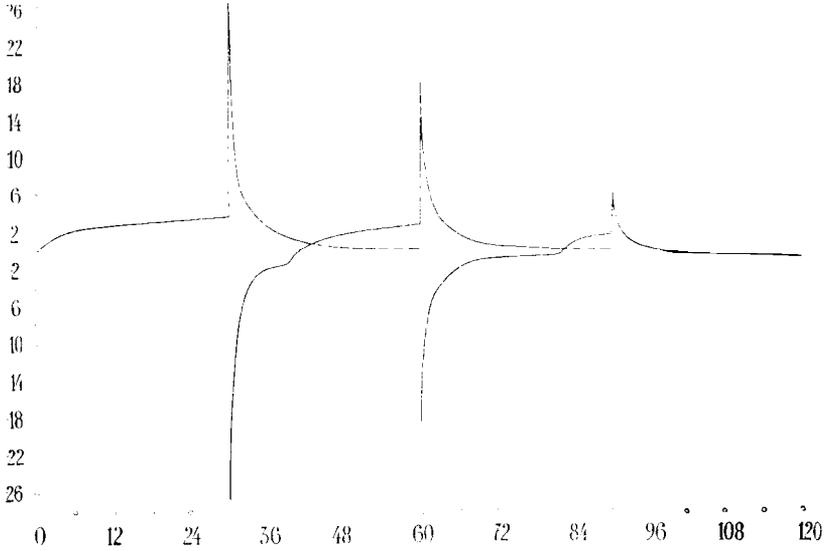
$$1. \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} = 2N_{n-1}(t),$$

vagy

¹ Seismonomia, Modena, 1906. 77. l.



3. ábra.



4. ábra.

$$1. \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{t - t_{2i-1} + \tau} - 1 \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} \right], \quad (38)$$

a melynek megoldása a keresett t'_{2n-2} .

A 3. ábrában $t'_2 = 41,02$ és $t'_4 = 71,98$, a 4. ábrában $t'_2 = 44,03$ és $t'_4 = 82,13$.

Mint hogy a (38) egyenletnek jobb oldala mindig pozitív, áll még $t'_{2n-2} > t_{2n-2}$, vagyis az első előlökések mindig az új feszültség fellépte után jelentkeznek.

A (38) egyenletből még következik végre

$$t_{2n-2} = t'_{2n-2} - \tau (e^{2N_{n-1}(t'_{2n-2})} - 1),$$

a mi által a feszültség újraeledésének ideje is meg van határozva. Ez az utolsó ismeretlen, mely a kísérő lökések egyenletében szerepelt.

A seismikus hullámok terjedéssébsége.

A hysteresis folytán a rugalmassági modulus a mindenkori állapot függvénye lévén, közel fekszik az a gondolat, hogy a terjedéssébséget is a feszültség függvénye gyanánt állítsuk elő. Ezt a seismikus elemet aránylag könnyen és biztosan észlelhetjük, a mint a Japánban 1895-től 1898-ig folytatott seismikus triangulatio gyakorlatilag is kimutatta. A földrengések nagy száma mellett pedig a földfelület bármely pontja feszültségi állapotát illetőleg szinte folytonos ellenőrzésnek vethető alá.

Legyen u valamely test térfogata vagy alakját kifejező alkalmas jellemzője. Ha e testre rugalmas erő hat, akkor kis változásokra a következő egyenlet áll:

$$-\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta p}{E_0} + \frac{\nu}{E_0} \delta H(t), \quad (39)$$

ha E_0 a test pillanatnyi neutrális állapotának megfelelő rugalmassági modulusa. Ez természetesen nem azonos a test szűz állapotának modulusával, a mely a történelmi előzmények nem ismerése folytán szintén ismeretlen. Végtelen hosszú nyugalom

után azonban a neutrális állapot mégis a szűz állapotba megy át. A felírt egyenlet egyszerűen annak a kifejezője, hogy a tényleges alak- vagy térfogatváltozás a Hook-féle törvényből és a hysteresisből folyó változások összege. A bal oldal

$$-\frac{\delta u}{u} = -\frac{\delta p}{E} \quad (40)$$

alakban is írható, ha E a hysteresissel folyton változó modulust jelenti.

A két utolsó egyenlet összehasonlítása ad

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} \left(1 + \nu \frac{\partial H(t)}{\partial p} \right),$$

vagy ha a sűrűség és a harántos összehúzódás coefficiensének csekély változását elhanyagoljuk,

$$\frac{(v)^2}{v^2} = 1 + \nu \frac{\partial H(t)}{\partial p}, \quad (41)$$

a hol v a megfigyelt, (v) a pillanatnyi neutrális állapotnak megfelelő terjedéssébséget jelenti. Lényeges az a megjegyzés, hogy $\frac{\partial H(t)}{\partial p}$ mindig positiv, hogy tehát $\frac{\partial H(t)}{\partial t}$ és $\frac{\partial p}{\partial t}$ mindig egyenlő jelzésű. Ebből következik, hogy az idővel egyenletesen növekedő erő esetén $\frac{\partial H(t)}{\partial p}$ helyébe a kisérő lökések kifejezése írható, a melyből az erő nagyságát jellemző μ factor is kiesett. Áll tehát végre a

$$\frac{(v)^2}{v^2} = 1 + \nu {}_n N(t) \quad \text{és} \quad \frac{(v)^2}{v_n^2} = 1 + \nu N_n(t) \quad (42)$$

egyenlet az n -edik rengés előtt és után észlelhető sebességre. Bár a μ factor kiesett, ezen egyenletek korántsem állítják, hogy a sebesség a feszültség növekedésének módjától is független.

A sebességi görbe folytonos; az $(n-1)$ -edik rengés után $N_{n-1}(t)$ fogy, tehát v_{n-1} nő, még pedig egészen t'_{2n-2} időpontig. Innen kezdve az ${}_n N(t)$ előlökések száma nő, tehát v fogy. A t'_{2n-2} pontban a sebesség görbéje csúcspontjának megfelelő

maximumban megtörik. Ha ezen maximális értéket ismerjük észlelések alapján, akkor belőle (38) alapján t_{2n-2} is számolható.

A terjedésssebesség fogyása tehát mindig növekedő feszültségre és ezzel új rengés érlelődésére utal.

Mint hogy az egyenletből a μ factor, a mely az erőt jellemzi, kiesik, a tétel egyaránt érvényes, bármi legyen a feszültség növekedésének oka; a sebességnek tehát az eddig tanulmányozott elemek felett azon kiváló előnye van, hogy a feszültség tektonikus, kosmikus vagy meteorologiai eredete teljesen közömbös. Megvan tehát az érlelődő rengés első intő jele, a mely valóban megfigyelhető; mert könnyen beláthatjuk, hogy az $N_{n-1}(t)$ utólökéseknek az ${}_nN(t)$ előlökésekbe való átmenetelésnek megfigyelése, a melyről a megelőző fejezetben szó volt, teljességgel bizonytalan lehet.

A rengés pillanatában magában megszűnik azonban a terjedésssebesség folytonossága. ${}_nN(t_{2n-1})$ és $N_n(t_{2n-1})$ ugyanis az n -edik rengés pillanatában $\frac{t_{2n-1} - t_{2n-2}}{\tau}$ nagyságú ugrást szenved, mely nyilván a rengéskor kiváltott feszültséggel $\mu(t_{2n-1} - t_{2n-2})$ -vel arányos. Áll tehát közvetlenül az n -edik rengés után és előtt is:

$$\frac{(v')^2}{v_n^2} - \frac{(v'')^2}{v_n^2} = \frac{\nu}{\tau} (t_{2n-1} - t_{2n-2}). \quad (43)$$

Az ugrás megfigyelhető értékéből levezethető ν értéke is.

A sebesség értékét a leendő rengés pillanatában ez idő szerint nem tudjuk és ezért a (42) egyenlet a prognosis céljára közvetlenül szintén nem használható fel. Lehetséges, hogy idővel felismerünk valamely vonatkozást, a mely ezen határsebességet előre engedni jelezni: az előző lökéseknek állandóság felé törekvése sejteni engedni, hogy hasonló vonatkozás a terjedésssebességre is állhat. De a prognosisnak ezen módja, ha keresztülvihető is lesz, nem kimerítő, mert a várható rengés erősségéről mitsem mond. Ennek oka egyszerűen az, hogy a sebesség már nem a hysteresissel magával, hanem olyan függvényével kapcsolatos, a melyből az erőt mérő μ factor kiesett. Kellenek tehát még módszerek, melyek a mindenkori feszültséget is megmérni engedik.

A nélkül, hogy a jövőre biznók a feladat teljes megoldását, már most is megállapíthatunk két határt, a melyen belül az új rengésnek esnie kell. A meghatározás két feltétel segítségével történhetik, melyek helyessége nyilvánvaló.

Az egyik elv a hőelmélet második tétele irreversibilis folyamatokra, a mely, a térfogatot most u -nak nevezve, a különben szokott jelöléssel így hangzik:

$$dQ < TdS. \quad (44)$$

Kiindulva a (12) és (13) egyenletekből következik

$$\frac{\partial p}{\partial s} = v^2 \quad \text{és} \quad (v)^2 = \frac{E_0}{s} \quad (45)$$

számára:

$$v'^2 = (v)^2 \frac{C_p dT - dQ}{(C_p - a^2 (v)^2 T) dT - dQ}$$

vagy, mint ismeretes,

$$C_p - a^2 (v)^2 T = C_u$$

lévén, végre

$$v'^2 = (v)^2 \frac{C_p dT - dQ}{C_u dT - dQ}. \quad (46)$$

Igaz, hogy ezen egyenletben, mely közvetlenül szilárd homogén testekre vonatkozik, a hőelmélet második tétele már benne foglaltatik, de tisztán formailag, úgy hogy az imént levezetett egyenlet általánosan érvényes. Ideális gázokra ezen vonatkozás csakugyan már az első tételből magából is adódik.

Ha a hysteresis alatt álló mennyiségeket accentussal látjuk el, lesz a $dQ_{\text{irr.}} < dQ_{\text{rev.}}$ egyenletből:

$$\frac{C_u v'^2 - C_p (v)^2}{v'^2 - (v)^2} < \frac{C_u v'^2 - C_p (v)^2}{v^2 - (v)^2}, \quad (47)$$

vagy

$$v'^2 < v^2 \quad (48)$$

és a sebesség értelmezésénél fogva, mely számára ismét az egyszerű v betűt használjuk:

$${}_n N(t) > 0. \quad (49)$$

Ha az ${}_nN(t) = 0$ egyenletnek megoldása t_{2n-2} , akkor tekintettel arra, hogy ${}_nN(t)$ csak nő, a rengés t_{2n-1} ideje számára áll

$$t_{2n-1} > t_{2n-2}^0.$$

A talált egyenlőtlenség azt mondja, hogy szűz állapotú földben a rengés nem állhat be azon időnél korábban, a melyben a megelőző rengés utólökései pozitívvá válnak, vagy a melyben a terjedésssebesség a szűz állapotú értéke alá kezd süllyedni. Ezen eredmény annyira természetesnek tetszik hogy szinte trivialisnak nevezhetnők.

A talált eredmény azonban tágasabb értelemben is vehető. A már előzetesen fellépett rengések miatt a szűz állapot még nem állhatott helyre és így tulajdonképen az utólökések görbéjének assymptotikus ága az abcisszatengely helyettesítője. Az előlökések értelmezése is, mint korábban láttuk, csak az utólökések görbéje fölé emelkedő ágra áll. Ha ennek értelmében u' és v helyébe az n -edik rengés előtti és az $(n-1)$ -edik rengés utáni sebességet teszszük, akkor az előbb talált egyenlőtlenség

$${}_nN(t) > N_{n-1}(t) \quad (50)$$

egyenlőtlenséggel helyettesítendő. Az előbbi tétel pedig a következő foglalatot nyeri: A rengés alsó időhatára azon idő, a melyben a megelőző rengés utólökései az új előlökésekbe mennek át. Az (50) feltétel megoldása, mint korábban is, t'_{2n-2} , a melyet azonban most czélszerűbben t'_{2n-1} -vel jelölünk. Áll tehát végre a földrengés idejének alsó határául:

$$t_{2n-1} > t'_{2n-1}. \quad (51)$$

Mindenesetre nem csekély fontosságú, hogy a bekövetkezendő rengés alsó időhatára, az első vészkiáltás, csak egyetlen ismeretlen mennyiségtől, a feszültség újraeledésének epochájától függ, a mely a sebesség maximumából könnyen és biztosan meghatározható.

A rengés idejének felső határa is könnyen megállapítható. A rengések, melyek a Föld anyagát összetörik és lazítják, nyilván kisebbítik a terjedésssebességet. Szélső minimuma V mindenesetre azon érték, melyet felvesz, ha a Föld teljesen részecs-

kékre hullott szét, a melyek között már nem molekuláris erők hatnak, hanem tisztán csak a tömegvonzás.

Mínthogy a tényleges sebesség mindenesetre nagyobb, mint ezen határérték, áll még

$$\frac{1}{(v)^2} [1 + \nu {}_nN(t)] < \frac{1}{V^2}, \quad (52)$$

a miből

$${}_nN(t) < \frac{1}{\nu} \left(\frac{(v)^2}{V^2} - 1 \right). \quad (53)$$

Ha az egyenletnek felfogott vonatkozás gyöke t''_{2n-1} , akkor ${}_nN(t)$ folytonos növekedésére való tekintetből a földrengés idejére

$$t_{2n-1} < t''_{2n-1} \quad (54)$$

következik. Az (51) és (54) egyenlőtlenségek összefoglalása ad végre

$$t'_{2n-1} < t_{2n-1} < t''_{2n-1}, \quad (55)$$

a mivel a földrengés ideje határok közé van szorítva. E határokon belül megférnek mindazon accessorikus tényezők, melyeknek kiváltó hatásuk lehet, tehát a tektonikus feszültség mellett a kosmikus, meteorologiai vagy mágneses eredetű feszültségek is. Ha már az alsó határtól kijelölt kritikus időn belül vagyunk, akkor akár az előlökések gyakoriságának, akár a terjedéss sebességnek gondos megfigyelése, különösen pedig kosmikus és meteorologiai tényezőknek folytonos szemmeltartása a rengés idejének pontosabb meghatározását megengedheti. Itt válnak azután értékesé a statisztikai csoportosításokból nyert eredmények.

Az alsó határral szemben a rengés felső határa szükségszerűen bizonytalanabb, mínthogy három, a megfigyelésekből meghatározandó paramétertől függ.

Nyilván a leendő rengés erőssége is megbecsülhető. A (36) egyenlet kissé általánosabban

$$\mu_n (t_{2n-1} - t_{2n-2}) = c\Gamma_n \quad (56)$$

alakban írható, a hol c valamely arányossági tényező és μ_n a rengést előidéző összes feszültség mértéke. Ha nincs idő előtt

kiváltó ok, akkor a rengés lassan megérve a felső határon tör ki $G = \text{XII}$ -fokú erősséggel. E szerint

$$\mu_n(t'_{2n-1} - t_{2n-2}) = c\Gamma_{\text{XII}}. \quad (57)$$

és ezzel, tekintettel a CANGANI-féle egyenletre:

$$G_n = \text{XII} - 3 \log. \frac{t'_{2n-1} - t_{2n-2}}{t_{2n-1} - t_{2n-2}}. \quad (58)$$

Minél korábban pattan tehát ki a rengés, annál gyengébb lesz.

Hátra van még a V határsebesség megállapítása, mely discret anyagi pontokból álló szerkezet számára a

$$v^2 = \frac{\partial P}{\partial s}$$

egyenletből számítható. Ha a Föld belsejének sűrűségeloszlására a ROCHE-féle törvény áll, akkor e törvényszerűség a szétesés első pillanatában is érvényben marad még. Ebből kiszámíthatjuk a nehézségi gyorsulást, továbbá a nyomást, mint a középponttól mért távolság függvényét, végre a terjedéssebességet is tetszőleges mélységben. Ha végre a Föld felszínére megyünk át, a

$$s = s_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (59)$$

ROCHE-féle törvényből a

$$V^2 = \frac{1 - \alpha}{2\alpha} gR \quad (60)$$

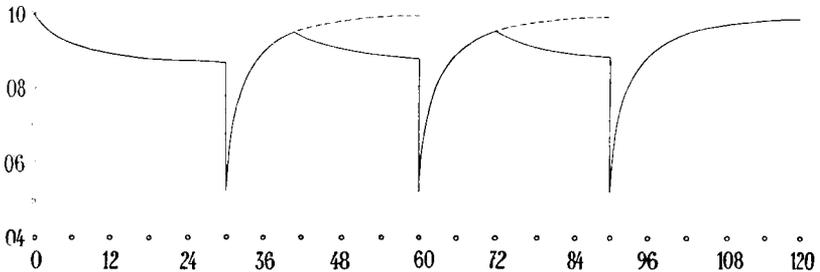
sebességet nyerjük. Ezen egyenletekben s_0 a Föld középponti sűrűsége, r a Föld középpontjától számított távolság és R a Föld sugara. $\alpha = 0.764$ a ROCHE-féle állandó, mely egyebek között legközvetlenebbül például a felszíni és közepes sűrűség összehasonlításából adódik.

Az utolsó egyenlet jobb oldala szigorúan véve még az állandó nyomás és állandó térfogat mellett fajhő viszonyával szorzandó. A szétesett Föld egyes részecskéi azonban végtelenül összetett molekuláknak tekinthetők, a melyek számára ezen

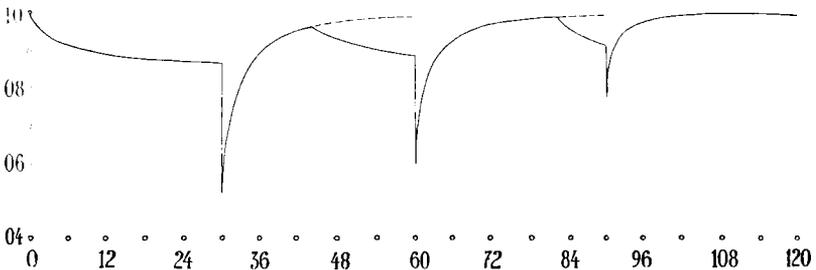
érték az egység felé konvergál. A numerikus számolás eredménye

$$V = 3 \cdot 10^2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}, \quad (61)$$

mely érték már elég közel áll a Japánban ténylegesen megfigyelt sebességekhez, jelezve ezzel a Földnek nagy korát és a megelőző rengések nagy számát.



5. ábra.



6. ábra.

Az 5. és 6. ábrában fel van tüntetve a sebességi görbe $\frac{v}{(v)}$ értéke ugyanazon numerikus felvételek mellett, melyek az eddigi ábrázolásokban is szerepeltek; $\nu = 0.1$ -nek vétetett. A pontozott görbe a sebességet adja, mely ezen túl többé meg nem zavart talajban volna észlelhető. A 3–6. ábra megtekintése azon, a prognosira nem kedvező körülményre figyelmeztet, hogy a rengés előtti változások minden esetben tetemesen kisebbek, mint a rengés után fellépő változások. Ebben nagyon

közelfekvő magyarázata rejlik annak az ismeretes ténynek, hogy statisztikai kutatások a rengés prognosisa alapjává nem tehetők.

A terjedésssebesség állandó megfigyelésére e pillanatban nem ismerünk jobb módszert, mint a seismikus triangulatiót, a melyről e helyen szólanom már egyszer alkalmam volt. A látszó vagy felületi sebességet az

$$u = \frac{\varphi' - \varphi}{t' - t}$$

egyenlet alapján határozzuk meg, melyben $\varphi' - \varphi$ két állomás epicentrális távolságának különtsége és $t' - t$ a lökésnek a két állomásra érkezésének időköze. Míg a számláló mindig kellő pontossággal megállapítható, addig a nevező a két állomáson alkalmazott műszer különböző érzékenysége, de különösen az óra állásának pontatlansága miatt tetemesen bizonytalan lehet. A hibát még súlyosbitja, hogy u maga az epicentrális távolság függvénye lévén, meghatározása két lehetőleg közel fekvő állomást kíván. Már pedig a sebességre nyert formuláink vagy szemléltetőbben az 5. és 6. ábra mutatják, hogy mindig csak kis sebességi változások megfigyeléséről lehet szó.

A seismikus triangulatio e hibáktól lehetőleg mentes, de még az erre vonatkozó ismereteink is gyérek, mert eddig mindössze csak egyetlenegy kísérlet történt Japánban.¹ Egy újabb, állandó jellegű berendezést PALAZZO indítványára Délolaszországban készülnek létesíteni, a melyben már a drótnélküli telegraphiát is felhasználni kívánják.²

Ha e a seismikus sugár emersioszöge, akkor a valódi v terjedésssebesség az ismert

$$v = u \cos e$$

egyenlettel adódik.

Ezen így nyert sebesség természetesen azon helyre vonatkozik, a melyen észlelték. E megjegyzés alapján lehetőségessé válik idővel a hely prognosisa is. Ha ugyanis a háromszögelés

¹ P. E. I. C. Nr. 7. Tokyo, 1902. 5. l.

² C. R. Comm. perm. de l'Assoc. internat. de sism. Zermatt, 1909. Budapest, 1910. 159. l.

hálózata legalább az érdekelt országokban eléggé terjedelmes és sűrű, akkor a meteorológiai synoptikus térképek módjára megszerkeszthetjük az isotachytákat, az egyenlő helyi sebességet feltüntető pontok összeségét. E folytatólagos szerkesztés alapján követhetjük a meiotachyta, a sebesség minimum görbéjének vándorlását és ezzel a leendő rengés lokalizálható.

A földrengések egymásutánja eléggé sűrű ahhoz, hogy kellően érzékeny műszerekkel gyakorlatilag folytonos ellenőrzés lehetséges legyen. De a nyert helyi sebességek bizonyára a rengésnek a megfigyelő állomástól számított távolsága szerint különböző mélységű rétegekre fognak vonatkozni. Hátra van tehát még, hogy a megfigyelésekből közvetlenül levezetett sebességeket a Föld belsejében lokalizálni és tetszőleges szintre redukálni tudjuk. E művelet mai ismereteink mellett lényeges nehézséget már nem okoz. Rendszeres kidolgozásának eredménye a seismikus mélységi kutatás, melynek a geológia is hasznát fogja látni.

Számpélda. Az 1898 augusztus 10.-i chikuzeni földrengés.

Ha az eddigi eredményeket alkalmazni akarjuk, a legnagyobb nehézségekkel találkozunk: sehol sem kapunk seismikus földön folytonos helyi sebesség-sorozatot, a melyet csak némileg is megbízhatónak lehetne mondani. Különben is retrospektív prognosistról lévén szó, olyan rengést igyekeztem választani, a melynek bekövetkezését a most szerzett ismeretekkel annak idején is előre lehetett volna látni. Szükségszerűen annak az egyetlen triangulációs műveletnek eredményeire kell szorítkoznunk, melyet 1895 és 1898 között Japánban nyertek. A triangulatio Tokyo három pontja és a fővárostól 10 kilométerre levő Hitsosubashi között folyt. A nyert sebességek tehát tokyoi helyi sebességek és szigorúan véve csak Tokyo közelében kipattanó rengések előrejelzésére alkalmasak.

A következő táblázat magában foglalja a nyert észlelésanyagot.¹ Az első, harmadik és negyedik rovat megadja a föld-

¹ P. E. I. C. Nr. 7. Tokyo, 1902. 23. l.

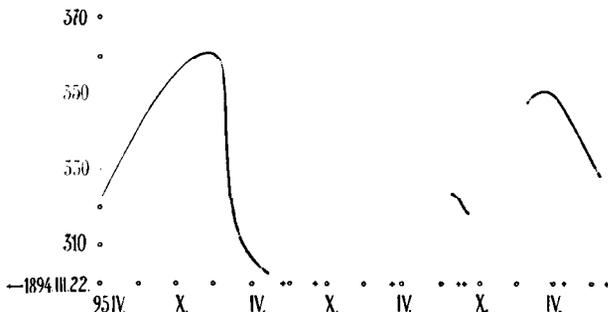
rengés idejét és Tokyóra vonatkoztatott helyét, a második rovat e rengésnek Tokyóban megfigyelt látszó sebességét. Az azimuth északtól keleten át van számítva. A vertikális lökés amplitudója, a mely Tokyóban átlag a horizontálisénak $\frac{1}{2}$ -e, csak két esetben adott számbavehető javítást, a mennyiben a 3. és 7. sorban közölt sebességet 3·11-re és 3·28-ra redukálja. De hozzá kell tennem mindjárt, hogy a horizontális és vertikális componens lemérésére szolgáló műszerek annyira különböző elveken alapszanak, hogy belőlük az emersioszög levezetése egészen illusorius. A valósághoz talán közelebb járnánk, ha az összes sebességeket egyszerüen az átlagos emersioszög cosinusával, tehát $\cos(\arctg \frac{1}{2}) = 0\cdot9899$ -cel szoroznók. IMAMURA, a japáni seismikus triangulatio feldolgozója maga is teljesen bizonytalanannak tartja a javítást és a továbbiakban a nem redukált, látszó sebességekkel operál. Példáját én is követem.

A tokyoi seismikus helyi sebesség változása.

Észlelés ideje	Sebesség km per sec.	Rengés epicentruma	
		távolság Tokyótól	azimuth
1895. IV. 3.	3·22	110 km	325°
1896. II. 23.	3·58	160	35
1896. III. 6.	3·13	120	20
1896. IV. 24.	3·04	70	335
1897. VIII. 5.	3·23	450	50
1897. VIII. 16.	3·20	300	42
1898. II. 13.	3·49	60	335
1898. VII. 12.	3·30	80	315

A sebességi graphikont, a mint az minden elméleti okoskodás nélkül, mint lehetőleg folytonos görbe megrajzolható, a 7. rajz mutatja be. Az abscissa-tengelyen jelzett pontok részben a japán katalógus, részben OMORI rajza nyomán¹ azon erős és

¹ Journ. of the Coll. of. Sc., I. Univ. Tokyo, 1899. Vol. XI. Part. IV. 401. l. és P. E. I. C. Nr. 18. Tokyo, 1904. Pl. V.



7. ábra.

romboló földrengéseket adják, a melyek a triangulatio időkorébe esnek. Ezen földrengések lajstroma a következő:

Sorszám	A rengés ideje	A rengés helye és leírása
$i=1$	$t_{2n+1} = 1894. \text{ III. } 22. =$	0 nap Nemuro, Kushiro és Kunashiri sziget.
$i=2$	$t_{2n+3} = 1894. \text{ VI. } 20. = 90$	« Tokyo és vidéke; 1855 óta a legerősebb.
$i=3$	$t_{2n+5} = 1896. \text{ VI. } 15. = 816$	« Tengeralatti, nagy árhullám N. Japán E partjain.
$i=4$	$t_{2n+7} = 1896. \text{ VIII. } 31. = 893$	« Ugo és Rikuchiu.
$i=5$	$t_{2n+9} = 1897. \text{ II. } 20. = 1065$	« Sendai és Rikuzen E részében.
$i=6$	$t_{2n+11} = 1897. \text{ VIII. } 5. = 1231$	« Tengeralatti, 220 km. SE-re Miyakótól.
	1897. VIII. 27.	Gyenge, tengeralatti, 160 km SE Miyakótól.
$i=7$	$t_{2n+13} = 1898. \text{ IV. } 23. = 1492$	« Tengeralatti, 200 km. ESE Miyakótól.
$i=8$	$t_{2n+15} = 1898. \text{ VIII. } 10. = 1601$	« Chikuzen, 900 km. WSW Tokyótól; romboló.

A hetedik helyen említett földrengést, bár a sebességi görbébe bele van rajzolva, e számításban nem vettem tekintetbe, mert erőssége, ideje és helye szerint a csak három héttel megelőző földrengésnek utólokése.

A 7. ábra első ága igen szépen mutatja a sebességnek növekedését földrengés után és hirtelen esését földrengés előtt. A meglévő sebességi adatok alapján tehát már 1896 III. 6.-án és még határozottabban IV. 24.-én előre lehetett volna látni,

hogy újabb földrengés készül, a mely — ha a submarin eredetű 3. rengést nem tekintjük — 1896 VIII. 31.-én bekövetkezett.

Ezen naptól fogva $1\frac{1}{3}$ éven át nincs megfigyelés, a sebességi görbe tehát nem is folytatható. 1897 VIII. 5.-én a sebességnek egy gyenge esése, úgy látszik, ismét rámutat a következő rengésre. A görbe harmadik és utolsó ága némileg bizonytalan, egyrészt, mert az egyetlen két sebességi megfigyelés közre egy rengés esik, melynek közelében észlelések nincsenek, másrészt, mert az 1898 II. 13.-án mért sebesség maga is kétes az emersioszög miatti nagy, de bizonytalan javítás miatt.

Az 1898 IV. 23.-i rengés eredete tengeralatti és messze esik Tokyótól. Nagyon hasonlít a megelőző két rengéshez és ezért a sebességi görbében amazoknál nagyobb változást alig fog létesíthetni. Ha tehát a görbének ezen ágát IMAMURA adataira támaszkodva elfogadjuk, akkor tetemes esése az 1898 VIII. 10.-i rengésnek előhírnökéül tekinthető; ha nem fogadjuk el, elvesztettük e figyelmeztető jelt.

Látjuk, hogy a rendelkezésünkre levő észlelési anyag szegényes és bizonytalan; egyetlenegy rengésünk van, a mely Tokyo területére esik, de ezt megelőzőleg még nincsenek sebességi megfigyeléseink. A többi rengés mind nagy távolságra ered Tokyótól, úgy hogy a prognózis jogosultsága tokyói adatok alapján kétes. Nem is tekintem az alább adandó eredményt az elmélet helyességének bizonyítékául, hanem egyszerű szám-például.

A prognózisra a chikuzeni rengést választom, míg a szükséges állandókat kizárólag a sebességi görbének ezen rengéstől időben lehetőleg messze eső első ágából vezetem le, a mely eléggé megbízhatónak tetszik. A harmadik ág bizonytalansága a prognózisra egyéb behatással nincs, mint hogy vele legrosszabb esetben az intó jel elesik, ha ugyanis a sebesség esése nem reális.

Az időszámítás kezdőpontjául az 1894 III. 22.-i rengés napját választom. A megelőző ismeretlen, de mindenesetre igen nagyszámú n rengést javításképpen veszem tekintetbe. Kyótóban, a mely számára, mint egykori főváros számára a seismikus történelmet legjobban ismerjük, az erős és romboló rengések

száma¹ — és ezekre kell szorítkoznunk, hogy esetlegesen utó-lökések ne kerüljenek számításainkba önálló rengések gyanánt — 800-tól 1904-ig 228 volt; az átlagos köz tehát két rengés között 1769 nap és ezzel a (28)-ban adott értelmezés szerint $\theta = 884,5$ nap. Ezen, 30 hónapra kikerekített közzel számoltam feljebb az 1—6. ábrát.

Most meg kell határozni a chikuzeni rengés számára az előző lökések gyakoriságát, azaz $n+sN(t)$ -t a (34) egyenlet alapján. $t_{2n+1}, \dots, t_{2n+13}$ helyébe a fenti táblázat megfelelő értékei veendő, de $t_{2n}, t_{2n+2}, \dots, t_{2n+12}$, a feszültség újraeledezésének epochái teljesen ismeretlenek. Meghatározhatók a (38) egyenlet segítségével, ha a sebességi görbe maximumait ismerjük. Ezen ismeret híján felteszem, hogy az új feszültség mindig két egymásra következő rengés intervallumának felében éledt, úgy hogy

$$t_{2n} = t_{2n-1} - \theta, \quad t_{2n+2} = \frac{1}{2}(t_{2n+1} + t_{2n+3}), \dots, t_{2n+12} = \frac{1}{2}(t_{2n+11} + t_{2n+13}).$$

Mint hogy a kísérő lökések görbéjére, mint láttuk, csak a legutolsó rengés gyakorol döntő behatást, ezen önkényes feltevések nem módosítják érezhetően az eredményt. A chikuzeni rengést előkészítő feszültség eredetét, t_{2n+14} -t már nagyobb gonddal kellene megállapítanunk, de a sebesség maximumának teljes bizonytalansága mellett ez sem lehetséges. Teszem tehát azt a szélső és a prognosisnak legkevésbé kedvező feltevést, hogy a feszültség rögtön a közvetlenül megelőző 1898 IV. 23.-i rengés után keletkezett, a mi az összes levezetendő időadatokat nyilván túlságosan koraiakká fogja tenni, úgy hogy a számolandó alsó határ valóban abszolút alsó határ, a felső határ pedig szintén túlkicsiny.

Ha végre τ számára $eg\eta$ napot választunk és a (34) és (32) egyenletet 20 napról 20 napra számoljuk, akkor nyerjük a következő, a számítás menetét ellenőrző és az egyes rengések befolyását feltüntető táblázatot:

¹ P. E. I. C. Nr. 19. Tokyo, 1904. 13. 1.

$t-t_{2n+1}$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	corr. l.	$\frac{t-t_{2n+14}+\tau}{\tau}$
1492	0·1314	0·0007	0·1070	0·0020	0·0176	0·0416	125·1211	0·0628	0·0000
1512	1244	6	1015	19	0165	0362	4·2384	630	3·0445
1532	1217	5	0967	18	0150	0320	1·7518	623	3·7136
1552	1190	4	0920	15	0138	0284	0·9953	623	4·1108
1572	1161	4	0878	16	0134	0254	6513	622	4·3945
1592	1136	4	0838	14	0119	0228	4624	615	4·6151
1612	1112	5	0801	12	0111	0207	3470	607	4·7958
1632	1087	4	0766	12	0102	0188	2702	601	4·9487

A rovatok felirata rövidítésül szolgál az

$$(i) = \frac{t_{2n+2i-1} - t_{2n+2i-2}}{t - t_{2n+2i-1} + \tau} - 1 \cdot \frac{t - t_{2n+2i-2} + \tau}{t - t_{2n+2i-1} + \tau}$$

kifejezés számára, a corr. rovat pedig a

$$\frac{1}{2} \frac{t - t_{2n+1} + 3\theta + \tau}{\theta} - 1 \cdot \frac{t - t_{2n+1} + 3\theta + \tau}{t - t_{2n+1} + 2\theta + \tau} - \frac{1}{2}$$

mennyiség helyett áll, mely az összes megelőző földrengéseket sommásan számbaveszi. A fenti táblázat értékei a (34) és (32) egyenletek utasításai szerint összefoglalva a következő táblázat-hoz vezetnek:

$t-t_{2n+1}$	Kelet	$N_{n+7}(t)$	$_{n+8}N(t)$
1492 = 1898.	IV. 23.	125·484	-125·484
1512	V. 13.	4·582	-1·538
1532	VI. 2.	2·082	+1·632
1552	VI. 22.	1·313	+2·798
1572	VII. 12.	0·958	+3·436
1592	VIII. 1.	0·758	+3 857
1612	VIII. 21.	0·632	+4·163
1632	IX. 10.	0·546	+4·402

melyet graphikusan a 8. ábra mutat be.

Az ábrából azonnal látni, hogy $_{n+8}N(t)=0$ gyöke

$$t_{2n+14}^0 = 1519 = 1898. \text{ V. } 20.$$

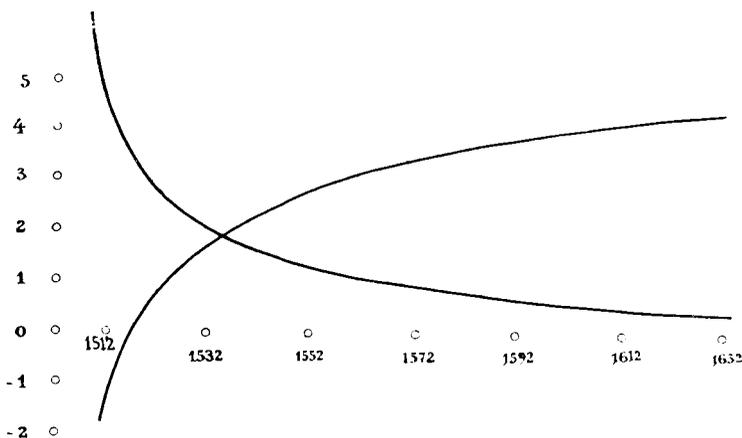
és ez a várható újabb rengés idejének legszélsőbb alsó határa.

Azon idő, melyben ${}_{n+3}N(t) = N_{n+7}(t)$, a melyben tehát a megelőző rengés utólökései az újabb rengés előlökéseibe mennek át,

$$t_{2n+15} = 1537 : : 1898 \text{ VI. 7.}, \quad (62)$$

a rengés tehát ezen időnél előbb nem következhetik be.

A felső határ megállapítása a (53) feltétel értelmében (ν) és ν ismeretét követeli, a mely a sebességi görbe (7. ábra) első ágából származtatható.



8. ábra.

Hogy egymástól lehetőleg távol eső megfigyeléseket kapcsolhassunk, a mi az észlelési hibák befolyását csökkenti, felveszem, hogy a sebesség 1896 januárius 11.-én 3.62 km. per sec. maximumáról ugyanazon év ápr. 24-ig 3.04 km. per sec-ra esett.

t_{2n+2} ismeretének bizonytalansága az eddigi számításban nem döntött, mert az időben távolfekvő chikuzeni rengésre befolyást már alig gyakorolhat. Most azonban lényeges szerepe van és ezért a megfigyelésekből magukból levezetendő.

A (34) egyenlet alapján az 1896 VI. 15.-i rengés előlökései az

$${}_{n+3}N(t) = 1. \frac{t - t_{2n+2} + \tau}{\tau} - x$$

egyenletből határozandók meg, a hol x a szóban forgó észlelési idők számára az alábbi táblázatban összeállított értékekkel bír:

Idő	$t-t_{2n+1}$	x
1896. I. 11.	660 nap	-0.5732
II. 23.	703 "	-0.5256
III. 6.	715 "	-0.5129
IV. 24.	764 "	-0.4682.

Ezekhez járul még

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{(v)^2} + \frac{\nu}{(v)^2} n+3N(t)$$

egyenlet is, melyben az ismeretlenek $\frac{1}{(v)^2}$ és $\frac{\nu}{(v)^2}$.

A megoldás, mely néhány rendszeres próbálgatással azonnal adódik:

$$t_{2n+2} = 641 - 1895 \text{ XII. } 23., \quad \nu = 0.4522, \quad (v) = 5.240 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

Az 1896 június 15.-i rengés ezek szerint csak 1895 december 23-ig nyomozható, a mi a sebességi görbe éles maximumát tekintve előre is sejthető volt.

A mint a (v) sebesség értékét nyertem, azonnal eszembe jutott az 1886. évi charlestoni rengés, melynek jól meghatározott terjedéss sebessége $5.197 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ volt, oly szám, melyet, e rengéssel évekket ezelőtt foglalkozva, nem tudtam megérteni. E szám azonnal világossá tette előttem, hogy Charleston újabb időben kevésbé háborgatott, neutrális, általában mélyebb rétegeiben csak kevésse gyűrt és töredezett földön áll. E következtetés annál biztosabb, minthogy a rengés félszke biztosan meghatározott¹ mélysége 100 km, úgy hogy a felső rétegek esetleg kissé elütő magaviselete befolyást nem nyerhet.

Mondhatjuk tehát, hogy a jelenkorban a neutrális Földben (a mi még nem teljesen egyenértékű a szűzföld jelentésével) a terjedéss sebesség $5.2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Ha a Föld részecskéi teljesen szétestek, akkor e sebesség, mint láttuk $3.102 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Ekkor

¹ C. R. Comm. perm. de l'Assoc. internat. de sism. Rome, 1906. Budapest, 1906. 175. l.

harántos összehúzódás nincs. E jellemző rugalmassági adat tehát az elmélet adta

$$\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \left(\frac{5 \cdot 240}{3 \cdot 102} \right)^2,$$

egyenletből számítható és értéke

$$\mu = 0 \cdot 2721,$$

majdnem teljesen egyezően a megfigyelésből talált értékekkel.¹

Ha tehát a longitudinális rezgések terjedésssebességéül $11 \cdot 160 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ -át választunk, akkor a keresztrezgéseké

$$\frac{v_t'}{v_t^2} = \frac{1-2\mu}{2-2\mu}$$

egyenletből $6 \cdot 244 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ -nak adódik, a mi a tapasztalattal jól egyezik.

A hysteresisre vonatkozólag csak egyetlenegy adatot ismerek, melyet KUSAKABE megfigyeléseiből sikerült következtetnem. Egy palaeozoi korú metamorphizált márványdarabra számítottá észlelései alapján a terjedés sebesség-változását,² ha cyclikusan és alternálva csavarásnak vetjük alá. Az így nyert hysteresis-coëfficiens

$$\nu = 0 \cdot 4393,$$

igen szépen egyezik azon értékkel, melyet fentebb földrengések-ből ugyancsak Japán földjére találtunk. Úgy látszik tehát, hogy ν és (ν) talált értékei valóban physikai állandók és nem csupán a posteriori meghatározott paraméterek.

Ha ezeket végre az (53) feltételbe helyettesítjük,

$$z_{n+15} N(t) < 4 \cdot 100 \quad (63)$$

adódik, a melynek megoldása

$$t''_{2n+15} < 1610 \quad \text{vagy} \quad 1898. \text{ VIII. } 19. \quad (64)$$

¹ Über Erdbebenwellen. III. k. Zöppritz u. L. Geiger. Nachr. der k. Ges. d. Wiss. Gött. 1909.

² P. E. I. C. Nr. 14. Tokyo, 1903. 54. l.

Egyesítve a (62) és (64) feltételt, a prognózis kifejezése

$$1898 \text{ VI. } 7. < t_{2n+15} < 1898 \text{ VIII. } 19, \quad (65)$$

míg a rengés tényleges ideje $t_{2n+15} = 1898 \text{ VIII. } 10.$ A feszültség keletkezése idejére tett feltevésünk értelmében a felső határ pontosabb értéke a talátnál nyilván valamivel nagyobb kell hogy legyen. Hogy a rengés mégis a lehetséges felső határához közel pattant ki, a mellett szól, hogy idő előtt kiváltó másodlagos ok ezúttal nem működött, hogy a rengés ráért megérni és hogy ezért erősnek kellett lennie. A japán katalogus valóban destructivnak jelzi; a meizoseismikus területen épületek megsérültek és földcsuszamlások észleltettek.¹ Vulkáni és omlásos rengéseknél az epicentrum alatti rétegekben a láva odakifolyása, illetőleg a boltozatok és falaik anyagának oldása és elvitele miatt nem csupán feszültségi változások lesznek figyelhetők, hanem valóságos tömegátvitelek is, a melyek talán graviméteres módszerekkel kimutathatók lévén, a prognózis és különösen a hely prognózisának lehetőségét csak fokozzák.²

¹ Journ. of the Coll. of Sc. I. Univ. Tokyo, 1899. Vol. XI. Part. III. 141. l.

² C. R. Comm. perm. de l'Assoc. internat. de sism. Rome, 1906. Budapest, 1906. 177. l.

KAUKAZUSI UTAZÁSAIM TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEI.

DÉCHY MÓR I. tagtól.

Utazásaim színtere a Kaukaszus, kutatásaim tárgya e hegyrendszer fiziogeografiai viszonyainak tanulmányozása volt.¹

A kaukasziai vidékek a XIX. században kezdődő tudományos kikutatásának útját vágta a Kaukaszus égbemeredő, havasi övében érintetlen magashegysége és sokáig áthághatatlan határt szabott a feléje törő ember tudományos vizsgálódásai elé. Csak hézagosan — részben tévesen — ismertük e hegyrendszer természeti viszonyait, magas régióinak külső fiziognomiáját, hiányoztak azt hiven visszatükröztető térképek és fényképek, nem foglalkozhattak még behatóbban a magashegység geomorfológiájával, glaciológiájával. Tág területek vártak átkutatásra a Kaukaszus magas öveiben, hova emberi tekintet még be nem hatolt és nagyon hálás tér kínálkozott a földrajzi kutatásokra a Kaukaszus még érintetlen magasságaiban.

A Kaukaszusban véghezvitt kutatásaimat főbb vonásaiban előre meghatározott munkaprogramm szerint kezdtem meg és folytattam. Első helyen állott a magas régiók arczatának, szerkezetének, geomorfológiájának, a hótakarónak és a gleccsertüneménynek, a jelenlegi és a diluviális eljegesedésnek tanulmá-

¹ A geografus a Kaukaszus névvel nem, mint az sokszor történik, a kaukaszusi földszoroson elterülő vidékeket, hanem csak az azon végig húzódó lánczhegységet jelöli. A Kaukaszus elnevezést a kaukaszusi hegyrendszerre magára kell lefoglalni, az összes vidékre pedig a Kaukaszia elnevezést alkalmazni. A hegység két részre osztja a kaukaszusi földszorost és annak északi oldalán elterülő terület a Cis-Kaukaszia, a déli pedig a Trans-Kaukaszia elnevezést kapja.

nyozása, úgyszintén, minthogy a kikutatandó magashegység fizio-geografiájának a megértése okszerűen a geológiai viszonyainak ismeretén alapszik, a geológiai téren való kutatás is, kőzetek és kővületek gyűjtése. Azon szoros viszonylatnál fogva, mely a kikutatandó terület arculata és növénytakarója közt fennáll, súlyt fektettem növényföldrajzi megfigyelésekre és botanikai gyűjtésekre.

Minden földrajzi fölfogás alapja a térkép, ennél fogva topografiai megfigyelések, fotografiai felvételek és magasságmérések alapján kívántam a kaukazusi magas régiók térképi ábrázolatának hézagjait betölteni.

A meteorológiai megfigyelések a levegő nyomására, nedves-ségtartalmára, temperaturájára és ingadozásainak meghatározására vonatkoztak.

Expedícióm alatt a fényképi felvételeket a tudományos kutatás szolgálatába szegődttetem, hogy szemlélhetővé tegyem a felületi alakulást és hogy a Kaukázus hegylakóinak különböző típusait szintén hű képekben ábrázoljam. Mert, bár vizsgálódásaim szorosabb körén kívül estek az embertani, régészeti és néprajzi kutatások, de azért figyelemmel kísértem különösen az organikus élet jelenségeit, melyek mindenütt színterük fizikai feltételeitől függenek. A terület földrajzi konfigurációja a legnagyobb befolyással volt a népek történetére, a népáramlatokra Kaukaziában is és sehol sem annyira nyilvánvaló az okozati kapcsolat a természet és az ember között, mint épen Kaukaziában.¹

¹ Engem és utitársaimat fokozott mértékben érdekelték a Kaukázus völgyeit lakó néptörzsek ama kérdés folytán, hogy a Kaukázus alján végighullámszó népvándorlás idején nem verődtek-e vajjon a hegyek közé velünk magyarokkal rokon törzsek avagy néptörzsek és mennyiben mutatnak ki ott esetleg még nyomai a mi őseinknek, a kik hosszabb tartózkodás után Magyarország felé vették útjokat. Utazásaimban elvetődtem a hegység legrejtettebb zugaiba s érintkezésbe jutottam az ott élő sokféle néptörzs legnagyobb részével. Nem nyilvánítottam ugyan hangosan, hogy ennek a kérdésnek a tanulmányozása, még kevésbé, hogy a megfejtése lett volna a cél, amely engem a Kaukázusba vezérelt, de megfigyeléseimből és nézeteimből egyet-mást munkámban is közzétettem és úgy remélem, más helyütt még visszatérhetek ezeknek a behatóbb összefoglalására.

Hogy lehetővé váljék a tervezett tudományos kutatásoknál a munkafelosztás elve és hogy az egyes tudományágakban a vizsgálódásokat és különösen a gyűjtéseket intenzívebben lehessen eszközölni, magyar szaktudósokat, geologusokat és botanikusokat kértem fel, hogy több, általam vezetett expedícióban résztvegyenek. Így egyúttal alkalmat adtam magyar tudósoknak, hogy szakmájukban az önálló kutatás terén működjenek, a kutató expedíciók technikájával megismerkedjenek és résztvegyenek ismeretlen vidékek földrajzi kikutatásában.

Utazásaimban résztvettek: a második utazásban néhai LOJKA Hűgő botanikus, a harmadik utazásban SCHAFARZIK FERENCZ geologus, a hatodik utazásban HOLLÓS LÁSZLÓ botanikus és PAPP KÁROLY geologus, végre a hetedik utazásban LACZKÓ DEZSŐ geologus.¹

Geologus utitársaim a harmadik, hatodik és hetedik expedíción, a botanikusok a második és hatodik expedíción kizárólag csak szakmájukkal és abba vágó gyűjtésekkel foglalkoztak,² a fiziogeográfia, geomorfologia és glaciologia köréhez tartozó munkálatokat és megfigyeléseket magam végeztem, úgyszintén a térképészeti és fényképi felvételeket, a magasságméréseket és a meteorológiai megfigyeléseket. Figyelemmel voltam a geológiai és a botanikai viszonyokra és több alkalommal gyűjtöttem is, különösen akkor, ha utazásaimon geologus és botanikus nem vett részt. Az expedíciók vezetése és gondozása reám hárult.³

¹ SZÁDECZKY GYULA, ki sajnos, ötödik utazásom alkalmával elkésve érkezett Kaukaziába és már a hegységben működő expedíciómmal nem találkozhatott, a Terek-völgyben és a grúz hadiút vidékére tett geológiai kirándulásokat és e vidékről érdekes geológiai gyűjteményt hozott magával.

² SCHAFARZIK a harmadik és HOLLÓS a hatodik utazásról egy kis bogárgyűjteményt hozott magával.

³ Kétszeres erőt, kitartást és időt igényel a kutatás a magashegység nehezen járható, egyes részeiben csak nagy fáradtsággal és veszélyllyel hozzáférhető havas öveiben. Tudományos munkálataimon és megfigyeléseimen kívül, az expedíciókat vezetnem, számtalan nehézség leküzdésével karavánom továbbjuthatásáról, eltartásáról gondoskodnom kellett, az élelem, a fedél, a lovak vagy a hordárok beszerzéséről, a gyűjtemények továbbításáról. Hogy pedig mennyivel több erőt és energiát kíván egy-egy sikeres tudományos expedíció a magashegység lakatlan havasi régióiban,

A Kaukaszus magas öveinek kikutatása csak úgy válik lehetővé, ha a kutató képes a terep természetes nehézségeinek leküzdésével a jéggel és hóval takart régiókba behatolni és azokat bejárni. Csak az tanulmányozhatja a magashegység jelenségeit, nehezen hozzáférhető részeinek komplikált szerkezetét, a gleccsertünemény formáit és kiterjedését, a ki fölemelkedik a magasvölgyökön és gleccsereken át a gerincek és hágók magaságáig, föl a csúcsok tetejéig, hogy azokról áttekintést nyerjen a hegység tagozottságáról, oroplastikájáról, a geológiai formációkról, bepillantást nyerjen elrejtett zugaiba, melyek zárva maradnak mindenki előtt, ki csak lent, a hegység alján, a mély völgyekben veszi útját.¹

A magashegység bejárására pedig több, legalább két vagy három, a hegymászás technikájában tapasztalt ember együttműködése szükséges és ennél fogva utaimban többször szerződött európai hegyvezetőket vittem magammal. Elkísértek első útamban: ALEXANDER BURGNER és PETER RUPPEN a svájci Walliszból, a negyedik utazásban FRANCOIS DEVOUASSOUD, MICHEL és JOSEPH DÉSAILLOUD, savoyardiak Chamonix-ból, az ötödik utazásban két tiroli, HEINRICH MOSER és GEORG KRÖLL a zillertali Mayerhofenből, a hatodik útamban PETER UNTERBERGER a tiroli Kalsból és hetedik utazásban szintén két tiroli, JOSEF KOSTNER Corvarából és ALOIS FLECKINGER Pflerschből.

Már kezdettől fogva úgy terveztem, hogy tekintettel a hegység magas öveinek bejárására alkalmas nyári idő rövidségére, az utazásokat több évre kiterjesztem, hogy a Kaukaszus

mint a középhegységben, avagy a síkságon, az afrikai steppéken és erdőkben vagy az ázsiai pusztákon, csak az tudja, a ki maga is rá adta magát ilyen vállalkozásra.

¹ A tudomány céljainak szolgálatába kell állítani Európán kívül eső még többé-kevésbé ismeretlen hegységek kikutatásában az Alpok hasonló vagy azonos jelenségeiben való avatottságot s ama veszélyek és nehézségek ismeretét, a melyekkel a kutatónak szembe kell szállania. Sajnos, hogy vannak, a kik a magashegységbeli tudományos célokkal összekötött felfedező utakat már eleve is, úgy fogják fel, mint sportvállalkozásokat és a tudományos cél szolgálatába szegődött eszközt — a mi nélkül nem érhet el eredményeket a kutató — összetévesztik magával a céllal.

egymástól nagy távolságra eső, fizikai és klimatologiai jelenségeiben egymástól oly különböző részeivel megösmarkedhessem.

Hét expedíczió jartam be a földrajzi kutatás szolgálatában a Kaukazust és útjaim sűrű hálózata vonja be a hegységet egész hatalmas kiterjedésében, nyugattól keletig.

Utazásaim és kutatásaim eredményeit, az azokon alapuló tanulmányaimat és a gyűjtött anyag feldolgozását tartalmazza 1905-től 1907-ig megjelent háromkötetes munkám. A három kötet 1210 oldalból áll; 38 réznyomatú tábla, 18 nagy körkép, 400 szöveggép, valamint 5 geologiai szelvény illusztrálja a szöveget; 35 fénynyomatú tábla az új növényfajokat és az új kővületeket ábrázolja, egy tábla pedig kőzetecsiszolatokat tartalmaz. Több ezerre megy az útaimról hozott fénykép-lemezek száma, mely e gazdag képdisz alapját teszi. A felvételek reprodukálásában szintén a fotografiai módszert alkalmaztam. Igyekeztem a kaukazusi magashegység felszíni alakulásának tiposus jellegét felismerni s a fizikai földrajz szempontjából a maga teljességében képben is bemutatni. Számos kép ethnografiai vonatkozású és ábrázolja a hegységet lakó különböző népek típusát.

A munkához a Kaukazus térképe van csatolva, két 50×92 , 56.5×83.5 centiméternyi lapon, $1:400,000$ mértékben. A térkép első sorban a magashegység orografiai ábrázolására és a glaciologiai viszonyoknak kutatásaimon alapuló helyes kitüntetésére törekszik és szoros kapcsolatban áll utazásaim leírásával ¹

¹ A fokbeosztást és a hidrografiai hálózatot átvettem az orosz tizversznyi ($1:420,000$) térképből és ott, a hol rendelkezésre állottak az egyversznyi mértékben készült mérőasztali felvételek, az orografiai anyagot térképem mértékére redukáltam. A hézagok ki töltésére felhasználtam saját különböző módszerekkel eszközölt felvételeimet, részben a prizmatikus kompasz egyidejű megfigyelésével felvett fotogramkokat, valamint számos higany-barometerek, forrpont-thermometerek és aneroidok segítségével eszközölt magasságméréseimet. Különösen a gleccserek körvonalai fényképeim fölhasználásával rajzoltattak be a térképbe; nagy gondot fordítottam a sok tekintetben hézagos vagy kétes nomenclatura kiegészítésére és helyesbítésére. A hidrografiai hálózat és a gleccser és hótakaró kék színben, a terepábrázolás barna színben, utak, nevek és a többi jelző fekete színben vannak feltüntetve. A felszíni alakulás megjelölésére oldalvilágítással egybekötött árnyékolást használtam.

A munka első és második kötetében közöltem az utazások leírását és már itt is felhasználtam a földrajzi tudomány különböző ágaiban tett kutatásaim eredményeit és a természeti viszonyokra egyáltalában, valamint a néprajzi jelenségekre vonatkozó megfigyeléseimet. A harmadik kötet tartalmazza a gyűjtött természetrajzi anyag feldolgozását és fiziogeografiai kutatásaim végeredményeit.¹

A *botanikai eredményeket* az utazásaimon gyűjtött anyag alapján FILARSZKY NÁNDOR állította össze rendszeres, könnyen áttekinthető enumeráció alakjában.

A botanikai gyűjtéseket a második utazás alatt LOJKA HUGÓ boldogult hirneves lichenologusunk eszközölte: gyűjtött zuzmókat és magvas növényeket. Az ötödik utazás alkalmával a Chevszuri-Alpok kevésbé ismert havasi tájain magam gyűjtöttem magvas növényeket. A hatodik utazáson HOLLÓS LÁSZLÓ gyűjtött gombákat, zuzmókat, mohákat, edényes kryptogamokat és magvas növényeket, különös figyelmét a gombákra irányítván. Hetedik útamban LACZKÓ DEZSŐ és saját magam a bejárt havasi tájakon magvas növényeket gyűjtöttünk.

A második utazáson LOJKA gyűjtötte zuzmókat WAINIO lichenologus Helsingforsban meghatározta, az ugyanezen útról származó magvas növények meghatározásával pedig SOMMIER és LEVIER florisztikusok Firenzében bizattak meg. Az ötödik utazáson általam a Chevszuri-Alpokon gyűjtött növényanyagot szintén SOMMIER és LEVIER uraknak küldtem determinálásra. A hatodik utazás alkalmával gyűjtött botanikai kollekczióból maga a gyűjtő HOLLÓS LÁSZLÓ a gombákat dolgozta fel, a zuzmók nagy részét ZAHLBRUCKNER Bécsben, az összes mohákat PÉTERFFY Déván és az edényes kryptogamokat KÜMMERLE Budapesten határozta meg. HOLLÓS gyűjtésének legnagyobb részét, nevezetesen a magvas növényekből álló tekintélyes anyagot, valamint a

¹ Utitársaim közül PAPP KÁROLY-nak köszönhetem a *kövületgyűjtemény* meghatározását és leírását. SCHAFARZIK FERENCZ a *közzetani eredményeket* tárgyaló szakaszt írta. Hozzájárult, de csak munkám magyar kiadásához, LACZKÓ DEZSŐ «Geologiai jegyzetek az 1902-iki expedicióról» című értekezésével.

hetedik utazás alkalmával LACZKÓ és általam gyűjtött növény-kollekciót FILÁRSZKY NÁNDOR Budapesten, KÜMMERLE és JÁVORKA segédkezésével határozta meg.

A gombák osztályából 365 fajt tartalmaz a gyűjtemény; a zuzmók 376 fajjal, illetőleg fajváltozattal vannak képviselve. Tartalmaz továbbá a gyűjtemény a moszatok osztályából egy fajt, a mohák köréből 11 fajt, az edényes kryptogamok osztályából 24 fajt. A gyűjtemény zöme a magvas növényekre esik: összesen 894 faj és fajváltozat 1103 termőhelyről.

A gyűjtött gombák között 6, a zuzmók között 20 fajt mint újat határoztak meg; a magvas növények között pedig mindössze 47 új fajt, illetőleg fajváltozatot sikerült utazásaimon felfedezni.

A gyűjtött anyag legnagyobb értéke abban rejlik, hogy tekintélyes része oly termőhelyekről származik, melyeket sem botanikus szakférfiak, sem más utazók eddig nem érintettek, részint pedig a magashavi glaciális zónáról, melyet 3000—3600 méter magasságban bejártunk.

Munkám első kötetében a bejárt területek leírásával összekapcsolva közöltem növényföldrajzi adatokat saját följegyzéseim és a gyűjtött anyag alapján.

Az utazásaimból eredő botanikai gyűjteményeket a Magyar Nemzeti Múzeum növénytani osztályának ajándékképpen engedtem át.

Utazásaimon különös figyelmet fordítottam geológiai gyűjtemények beszerzésére és a Kaukasz minden részéből úgy közetsorozatokat, mint kövületeket szép számban gyűjtöttünk. A geológiai anyagot a magyar királyi Földtani Intézetnek adományoztam. Csak az első és második utazásból eredő kisebb kőzetgyűjtemény került a Budapesti Tudomány-Egyetem ásványtani intézetébe, az ásványgyűjtemény pedig a Nemzeti Múzeumba.

A magyar királyi Földtani Intézetben elhelyezett gyűjtemény áll 250 darab kövületből, 20 darab ércmintából és 235 darab kőzetből.

A kövesült szerves maradványokból álló gyűjtemény feldolgozását utitársamra, PAPP KÁROLY-ra bízom, ki annak első részét ZITTEL KÁROLY tanár müncheni nagyhirű intézetében meg

is határozta, majd Bolognában a CAPELLINI tanár vezetése alatt álló Museo Geologico gyűjteményeiben pótló vizsgálatokat tett, második részét pedig itt Budapesten dolgozta fel.

PAPP az utazásaimon felfedezett 13 új fajról¹ és 2 új fajváltozatról részletes leírást közöl, miután előzőleg az összes gyűjtött fajokat stratigrafiai sorrendben összeállította. Az új fajokat és fajváltozatokat tíz fénynyomatú táblamellékleten közöltük.

A kaukazusi *liaszbeli zárványok* általában mediterrán jellegűek és gyűjteményekben két kis, valósággal piritté átváltozott ammonita, *Lytoceras incertum* et *Racophyllites caucasicus* néven új alakok gyanánt különítettett el.

A *barnajúrabeli* maradványok igen elterjedtek; köztük számos olyan faj van, a mely csak a Kaukaszban otthonos. Így a Közép-Kaukaszból, a Fiag-don völgyéből való az a szép ammonita, a mely új fajtanak bizonyult és *Stephanoceras Liechtensteini* nevet kapott. A Keleti-Kaukaszban a Günib alatt levő sötét palák középső doggerrétegeiből két új fajtát gyűjtött SCHAFARZIK: a *Perisphinctes Loczyi*-t és a *Perisphinctes daghestanivus*-t. A *barnajúra* felső emelete, a callovien is sok kőületet zár magába és ezen emeletből igen becses kagylók és ammoniták vannak gyűjteményekben, különösen Nyugat-Kaukaszból, úgy hogy ezeknek a *márgás-homokkő-rétegeknek* a kora most már bizonyos.

A *fehérjúra* vagy *malm* rétegei az egész Kaukaszban a callovien-emeletre telepednek és gazdag fauna — köztük több új faj — került ki a rétegekből. Így Nyugat-Kaukaszban a Kuban völgyében gyűjtve két új fajt fedezhettem fel: a *Montlivaultia Széchenyii*-t és a *Nerinea Kubanensis*-t.

Egy másik díszes új faj, a *Rhabdocidaris caucasica* a Közép-Kaukaszból a Bakszan-völgyből, az Ozroková melletti mészkőből származik.

A Keleti-Kaukaszban, a Günib felső mészkő emeletében gyűjtötte SCHAFARZIK a *Pholadomya Schafarziki* néven meghatá-

¹ Utólag az új fajoknak meghatározott kőületek száma egygyel szaporodott, úgy hogy a gyűjteményben most összesen 14 új faj van.

rozott új fajt, Laczkó pedig ugyanott a *Pleuromya Merzbacheri* kagylócskáját és végre a Kuszur folyó melletti vörhenyes színű mészkőből került napfényre egy gyönyörű koráltörzs, a *Cyathophora Déchyi* néven keresztelt új faj.

A *krétakorbeli* lerakódásokból gyűjteményemben különösen a neokom-, aptien- és gault-emeletek kőületekben bővelkedő rétegeiből származó fauna van gazdagon képviselve. Új fajnak bizonyult az *Eriphyla Grigoriewi*, melyet PAPP Kelet-Kaukaszban, Tandó és Bottlich között a fehér márgák sziklafalaiban gyűjtött, továbbá a *Parahoplites Déchyi* n. sp., melyet Laczkó fedezett fel, ugyancsak Kelet-Kaukaszban Levasi mellett, a dagesztani aptien-emeleten és végre az ugyanonnét való szép ammonita, az *Aconthoceras Waageni* var. nov. PAPP.

Geológiai gyűjteményem *közetsorozatát* SCHAFARZIK FERENCZ utitársam vette át feldolgozás céljából. Készítettem továbbá DOBY GÉZÁ-val több tipikus kőzetről *chemiai analíziseket*. Mint-hogy a Kaukasz kőzeteiről eddig csak rendkívül ritkán találkozzunk mennyiségi analitikai adatokkal, azok szakkörökben érdeklődést keltettek.

SCHAFARZIK az eruptív és metamorf kőzetekből álló összetett kristályos kőzetsoportokat rendszeresen feldolgozta és a mikroskopi vizsgálatok és chemiai analízisek alapján nyert eredményeket a tudományra nézve számos új szempont és új adat kiemelésével közölte.

A *gránitokra* vonatkozólag megállapítható volt, hogy szemcsés, ritkábban gránitporfiros szövetűek és mindig tömeges szerkezetűek. Nyújtott palás és kataklasztos szövetű gránit ritkábban akad és gyéribben figyelhetjük meg a barna csillám kloritosodását is, úgy hogy egészben véve az Alpok protogyn gránit típusa a Kaukaszban csak alárendeltebbnek mondható.

A *diabázok*-hoz tartozó általában sötétszínű telérek részint porfiros, részint pedig szemcsés szövetű kőzetek. Gyakran észlelhetjük rajtuk az ú. n. intersertális szövetet is. Az augit kevésbé állandó elegyrésze a Kaukasz diabázainak, a mennyiben sokszor zöldes amfibollá alakul át. A diabáz, részint mint diabázporfirit, részint afanitosan tömött féleségekben, telérek alakjában a Közép-Kaukaszban előfordul, nemcsak a gránitokon és

a kristályos palákon áttörve, hanem paleozoikus agyagpalák közt, sőt helyenként verrucano-szerű kőzetekkel érintkezve. De expedícióim kimutatták többé-kevésbé uralitos diabázok föllépését is, úgy a kelet-kaukazusi jura- és krétakorú képződményekből álló hegységekben, mint a nyugat-kaukazusi területen, a hol mint diabáztufa és a diabázokkal rokon augitporfiritek formájában előfordulnak.

A Kaukaszus *dioritjai* sötét színű, túlnyomó részben apró, sőt finomszemű, ritkábban durvaszemű telérekőzetek, melyek többnyire a gránitos alaphegységben törnek ki. Expedícióim e kőzeteket különböző varietásban különösen az Elbrusztól nyugatra kimutatták.

A *kvarczporfirok* és *porfirok* körébe sorozható kaukaszusbeli kőzeteket túlnyomólag a Kaukaszus főlánczán kívül találtuk, miből következtetni lehet, hogy e kőzetek nem annyira a hegység gránitból és kristályos palákból álló alaphegységét, hanem inkább az ezt körülvevő régibb szedimenteket törik át.

A *fiatalabb tömeges* kőzetekhez tartozó suitek gyűjteményekben dacitokból, andezitokból, liparitokból és bazaltokból állanak. Nagy szerepet játszanak a Kaukaszusban az *andezitek* és különösen az Elbrusz kolosszális hegytömegének alkotásában vesznek részt, még pedig oly mértékben, hogy a *dacitok* úgy tünnek fel, mintha az andeziteknek csak faciesbeli féleségei volnának.

A *liparitok* fellépése csak a Kaukaszus északi oldalán elterülő krétaterületen Pjetigorszki körül volt ismeretes, de utazásaim közben még két más ponton is, a felső Kirtik-völgyben és az alsó Bakszan-völgyben fedezte fel ezen savas harmadkori kőzeteket SCHAFARZIK FERENCZ.

A *bazalt* — igazi olivinbazalt — a Kaukaszus kőzeteinek sokaságában ritkán található, a mi annál feltűnőbb, mert a tőle délre fekvő örmény fennföldön uralkodó szereplése van. Egyetlen egy ponton találtuk mégis, Közép-Kaukaszusban a bazaltot, még pedig a hegység északi tövében, az alsó Bakszan-völgyben, a hol SCHAFARZIK fedezte föl, bár sajnos, itt sem szálban, hanem csak laza heverő darabokban.¹

¹ De megvan a Kaukaszusban az olivin-andezitek érdekes csoportja,

A *kristályos, palás kőzeteknek* nem jutott a Kaukaszban oly kiváló szerep, mint például az Alpok hegrendszerében, úgy hogy a geológusok talán túlságosan hangoztatták hegységünk eme fogyatékoságát. Ez talán onnét is származik, hogy a Kaukasz derekát átszelő, legkönnyebben járható és régóta ismeretes grúz hadiút mentén a kristályos palák hiánya legkirívóbban tűnik fel. De a Kaukasz még kevésbé ismert részeiben mégis akadunk a gránittömszök szomszédságában kristályos palákra is. Hogy sikerült a kristályos palák egy bizonyos kiterjedésben való előfordulását kimutatnunk, talán expedícióim egyik tudományos főérdemének fogják beszámítani.

SCHAFARZIK-nak sikerült továbbá a gyűjteményeimben meglévő kristályos paláknak egy részét jellemző kontakt-paláknak minősíteni, a milyenek az epidot-zoizot tartalmú amfibolitok és az albitfillitek.

A Közép-Kaukaszból származó kristályos-palás kőzetek a legszorosabban függnek össze a Közép-Kaukasz gránit-lakkolitjaival. Sőt egy nagy részük közvetlenül a közeli gránitmasszívumok kontakt hatása alatt jött létre, metamorfózis útján egykori szedimentekből.¹

Munkám harmadik kötetének utolsó részében közöltem *fizio-geografiai* kutatásaim és tanulmányaim végeredményeit. Bevezetésül rövid áttekintést nyújtottam a Kaukasz *orogeniájáról*. A kaukaszsi szárazulatnak először felmerülő *archaikus* tömegei a paleozoikus korszakban részben ismét a tenger hullámai alá merültek és csak a paleozoikum és a miocén között ismétlődő fázisokban emelték föl a Kaukaszt is a földkéreg ama gyűrődései, a melyek az Atlanti-oczeántól kezdve az ázsiai konti-

mely mintegy középhelyet foglal el az andezit és a bazalt kőzetsaládók között. Elég nagy kiterjedésben fordulnak elő a Kazbek DK-i oldalán, a grúz hadiút mentén és onnét származnak a gyűjteményemben meglévő példányok.

¹ A harmadik kötetben közzétettem továbbá a Magyar Nemzeti Múzeumnak felajánlott kis bogárgyűjtemény feldolgozását, melyet CSIKI ERNŐNEK köszönhetek. Az egyetemi anthropologiai múzeumnak ajándékképpen átengedett koponyagyűjteményről csak az igazgatóság hivatalos *leltári leírását* közölhettem.

nens széléig a hegylánczolatokat létrehozták. A paleozoikum végén a párhuzamosan csapó déloroszországi és armeniai hegyek között egy bemélyedett és hasonlókorú, már csak kevéssé vagy egyáltalán ki nem töltött zóna maradt meg: *a mostani Kaukaszus*.

Hatalmas mész- és homokkő tömegek, a jura, kréta és az eocén üledékei, töltötték ki lassankint ezt a folytonosan mélyedő óriási medenczét és miként a magas hegységekben mindenhol, úgy itt is csak az üledékek fölhalmozódása után, a harmadkor fiatalabb szakaszaiban következett a fölgyűrődés és a redőzés.

A diszkordanciák, a melyek a különböző szisztémákban többszörösen jelentkeztek és a melyek a denudációkból vagy abrációkból s az ezeket követő messzeterjedt transzgressziókból magyarázhatók meg, azt bizonyítják, hogy a hegység nem csupán a harmadkorbeli kéregmozgásoknak a szülöttje, hanem inkább azoknak a hegyalkotó folyamatoknak az eredménye, a melyeknek kezdete már a jurakorszakba esik. A harmadkor végén, a negyedkor kezdetén azután az egész láncz hosszában hatalmas vulkanikus kitörések támadtak, a melyek a kristályos mag alapzata fölé az andezitvulkánokat fölhalmozták. A vulkánosság hatásai és a jégkorszakok a hegység geológiai kifermálását folytatták.

A Kaukaszus *legrégebbi eruptív kőzetei, a gránitok*, egyetlen középponti tömegben helyezkednek s a hegység kristályos magva gyanánt a Kuban keleti forrásvidékétől a Terek áttörésén levő szurdokig húzódnak. A Kaukaszusnak gránitos kőzetekből és kristályos palákból alkotott ez egyetlen középponti tömegére a paleozoikus palák, a jura- és krétakorbeli hegyvonulatok zónái következnek.

A *paleozoikus képződmények* a hegység cenztrális részének északi lejtőjén csekély kiterjedésűek, míg délen hatalmasan kifejlődtek és ellentétesen az északi oldallal, északi lejtéssel a gránit alá dülnek. Nyugat-Kaukaszusban a hegység alapzata keskeny kristályos zóna, a melyet eruptív kőzetek szaggatnak meg, a hegygerinceket gnejsz és metamorf palák építik föl. A Kelet-Kaukaszus a régi agyagpalák birodalma; Dagesztán hegyvidékének szabályszerűen alakult redős lánczaiban érik el

a paleozoikus palák kifejlődésük tetőpontját. Hogy ezek a kaukzusi sötét agyagpalák kétségtelenül a paleozoikumhoz számítandók-e — bár több helyen a geotektonikai viszonyok mellette szólnak —, azt az eddigelé talált silány és szinte meghatározhatatlan kövületek alapján nem lehet biztosan állítani.¹

Triaszbeli lerakódásokat 1907-ig, mikor munkámat a sajtóba adtam, a Kaukaszban nem lehetett kimutatni. Azóta VOROBIJEV a Nyugat-Kaukasz északi oldalán, nem messze Psszebaitól, gazdag felső triaszkorú brachiopoda- és bivalva-faunát fedezett fel, úgy hogy ma már a triasz nem ismeretlen a Kaukaszban.

Az archaikus kőzetekkel és a paleozoikus képződményekkel kapcsolatban jelentkezik a *jura*. A hegrendszer északi lejtőjén a liaszbeli palákat és homokköveket, valamint a középső- és felső-jura meszes és dolomitos lerakódásait messze elterjedve találtuk. Különösen ki van fejlődve a liaszikus zóna az Elbrusz északi oldalán és egy jurabeli meszekből alkotott láncolat messze kelet felé kiterjedve, párvonalosan huzódik ott a főlánczolatattal. Keleten, vagyis Dagesztánban, a jurá nem összefüggő láncolatban, hanem a krétameszékkel gyöngén, szinklinálisan települt platószerű kiemelkedésekben jelentkezik. A hegység nyugati felének déli lejtőjén a jurazóna tetemesen elterjedt és leginkább alsó-jurabeli lerakódásokból alkotott hegylánczokban nyilvánul. A *kaukzusi juráformáció* üledékeinek faciesbeli kifejlődésében, valamint emeleteinek sorozatában főképp a *közép-*

¹ SCHAFARZIK ugyan 1886-ban a Közép-Kaukaszról, az Uruch völgyéből, a Kamunta melletti sötét agyagpalából hozott apró kagyló- és brachiopoda töredékeket, a miket azonban megközelítőleg sem lehetett meghatározni. Majd LACZKÓ 1902-ben a keleti Kaukaszról, a Bazargyuzi és Tfan hegyesúcsok között, a selymesen fénylő sötét palákból egy karnagyságú darabot ütött ki, a mely rendkívül hasonlított a karbonkorbeli *Lepidodendron* nevű fa ágára. De PAPP bővebb vizsgálatára kitént, hogy nem növény-maradvány, hanem az a sajátos képződmény, a mely a paleontológiában *Glenodictyum* néven ismeretes. Papp szerint a kaukzusi alak eltér, mint sokkal régiebb korú kövület, az eddig ismert ilyenmő maradványoktól és ő mint *Glenodictyum caucasicum* n. sp. PAPP határozta meg, a melynek rendszertani helyzete talán a *spongiák* csoportjába illeszthető.

európai juraprovincziához csatlakozik. Ki kell azonban emelnem — a miként erről az utazásaimon eszközölt gyűjtések is tanúskodnak —, hogy a kaukazusi jurafaunában a *mediterrán* vagy *alpi juraprovincziának* számos alakja ott van. A *callovieni fauna* első sorban *mediterrán* s másodsorban *középeurópai* elemeket tartalmaz; ép úgy a malm is, a melynek korálos és nerineás meszei az alpi hasonló képződményekkel csaknem teljesen azonosak.

A *krétabeli lerakódások* északon a kristályos főtengelyvel párvonalosan húzódnak széles zónában, a mely a felső-júránt átkap, délen ellenben az alsó-júra, sőt egyenesen a gránit fölé tolódtak és ezeket számos eruptív kőzet töri át, a miket a nagy tektonikus háborgások hoztak a felszínre. Az alsó-kréta üledékeinek a Kaukaszban *mediterrán* jellege van. A felső-kréta ellenben a *mediterrán*-elemek mellett számos olyan alakot is tartalmaz, a melyek az északeurópai faciesben honosak. Gyűjteményemben a krétaformáczióknak csaknem minden tagja megvan és ezek között a *turon*-emeletnek *legelső biztos alakjai*, és pedig úgy a keleti, mint a nyugati Kaukaszból; amonnet az *Inoceramus Brogniarti* s eminnét a *Panopaea regularis* példányaival. A felső-kréta emeleteiből mindaddig a Kaukaszban csak a felső emeletet: a *szenont* ismertük, expedicióm alkalmával tehát a középső emeletet, a *turont* is konstatálhattuk.

A *harmadkori lerakódások* az északi oldalon a hegység lábánál, a krétabeli hegyvonulatok északi lejtői és a steppeterület között, a platószerű kiemelkedések terjedelmes zónájában terülnek el. A déli oldalon az eocén és miocén lerakódások hatalmasan kifejlődtek, messze benyúlnak a hegységbe és egészen a délkeleti szögletig terjednek, sőt a Kaukasz-láncz végső nyúlványait is alkotják.

A *harmadkorszakban* a kaukazusi isztnusz nagy tektonikus mozgások színhelye volt. A szarmata tenger borítá a Kaukasz mindkét lejtőjét, a mely a közepén hosszan nyúló sziget gyanánt emelkedett ki; azonban a vetődések, a melyek a láncz déli lejtőjén ezeket a rétegeket érték és a magasságok, a melyekig egyes pontokon föltolódtak, azt mutatják, hogy a lánczolatnak

utolsó fölemelkedése az említett képződmény után történt és hogy a miocén tenger ezen új fölgyűrődés előtt visszahúzódott.

A harmadkorszakhoz csatlakoznak a *vulkánosság* fiatal tüneményei, a melyek ennek a korszaknak a végén és a negyedkorszak kezdetén a lávát ontó vulkáni kúpokat és a kitörésbeli központok egész sorozatát hozták létre, kitörésbeli közeik sokféleségével és ezzel a Kaukaszus tektonikájában a legfeltűnőbb vonásokat megalkották, a miket az Alpok fizikai története nem ismer. A posttertiar és a negyedkorszakba esnek a gleccserek legjelentősebb kifejlődései: a *kaukaszusi jégkorszakok*, a mik jéges irónjukkal egykori létüket a kaukaszusi magashegység arczulatára is följegyezték.

A *negyedkorszak* képződményei legtöbbszörre a hegység lábán levő mélyedésekben rakódtak le és a hol magasabbra nyúlnak — a miként ezt a különböző kaukaszusi völgyekben a görgeteg és konglomeratum-lerakodások eloszlása bizonyítja — ott a mai völgyrendszerek alapjukban véve már megvoltak.

Azok a különböző hatások, a melyekkel a Kaukaszus északi és déli részén a tektonikai mozgások jártak, mélyreható különbséget okoztak az északi és a déli oldal geologiai és orografiai szerkezetében. Az északi oldalon a mezozoikus és harmadkori lerakodások szabályos sorrendben, északnak dülő rétegekben és emeletszerű eloszlásban jelentkeznek. Itt a kristályos központi részhez csatlakoznak, az idősebbektől a fiatalabb képződmények felé haladva, a jurabeli lerakodások, az alsó- és a felső-neokom homokkövek, a kréta- és a harmadkoru rétegek zónái. A déli oldalon ellenben a mélyreható tektonikai mozgások és a hatalmas kitörések az üledékes lerakodások sorozatának szabályosságát megzavarták és ellentétben az északi oldal egyszerűbb szerkezetével, behatásukkal sokkal bonyolódottabb tektonikai viszonyokat hoztak létre. Iszonyú törések okozták azt, hogy sok helyen nagy gyűrődések keletkeztek és hogy ott a mészkövek hiányoznak. Másrészt a nagy diszlokációk azt idézték elő, hogy a krétánál régibb lerakodások rétegeikkel észak felé, a gerincevidék felé, tehát ellenlejtősen dülnek és egyes vidékeken, így a Rion forrásvidékén, a kristályos palákat teljesen eltüntették.

Ez a különös hegyalakulás, melynél *rétegtanilag idősebb*

lerukodások a fiatalabbakra rátelepülnek, arra a konkluzióra vezet, melynek munkámban kifejezést is adtam, hogy a tektonika mezején az Alpokban és a Kárpátokban tett tapasztalatok és újabb nézetek alapján keletkezett rátolódási elmélet a Kaukaszra is alkalmazható és hogy itt is hatalmas áttolódással van dolgunk. Az Alpok hegyszerére alkalmazott új genetikai hipotézis a Kaukasz orogeniájának kikutatására nézve új perspektivákat nyit és megfigyeléseim alapján már most is kijelenthetem, hogy itt is, mint új diszlokácziótipust, a *takaróáttolódást* kell elfogadnunk.

Ezek a tektonikus zavarodások és az üledékes kőzeteknek ezekből folyó metamorfozisos átváltozásai a keleti Kaukasz déli oldalán csekélyebb mérvűek. Itt hiányzik ugyanis a kristályos központi tömeg. A Kaukasz középső részén kívül gránit nem üti ki magát a felületre és a gránitos mag mindenestre igen mélyen fekszik, kapcsolatosan az injicziált és a kontaktmetamorf burokkal

Ezt bizonyítja a Dagesztánban, a Szamur-völgyben, a Lucek körül a kontaktköpeny egyik kőzetének, a zoizot-amfibolitnak expedícióm alkalmával konstataált előfordulása és e helyen nem nagy mélységben kétségtelenül egy gránit lakkolithot tételezhetünk fel.

A második fejezetben tárgyaltam a Kaukasz tagozottságát. A hegyszer beosztásánál geotektonikus fővonásai, geológiai viszonyai és orográfiai arculata voltak vezérlő támpontjaim. Előadtam összefoglalva a hegység geológiai szerkezetére, orográfiájára és hidrografiájára vonatkozó ismereteinket, valamint kiterjedt vándorlásaim alatt autopszia alapján szerzett felületi alakulásának jellemző vonásait.

Külön fejezetben foglaltam össze a Kaukasz glaciológiai viszonyaira vonatkozó kutatásaimat. A glaciális tünemények tanulmányozása munkaprogrammom legelső helyén állt; utazásaim alatt a glaciológiai jelenségeket rendszeresen megfigyeltem, fölvételeket és méréseket végeztem. Vizsgálódásaim tárgya volt azon összefüggés, a mely a gleccsertüneménynek a kaukaszusi magashegységben való megjelenése és az ott uralkodó, létezését okozó viszonyok között megnyilatkozik. Ezek a kuta-

tások pedig annál fontosabbak voltak, mert ismereteink a Kaukasz gleccsereinek létezéséről és kiterjedéséről a legújabb idő-kig nagyon hézagosak, sőt tévesek voltak és a tudományos munkák és térképek is vagy egészen hamis, vagy csak igen silány képet adtak ezekről a jelenségekről.

Elteltekintve AGGASIZ és KEITH-JOHNSTON a mult század 50-es és 60-as években közzétett munkáinak téves adataitól, még ELISÉE RECLUS is 1881-ben megjelent monumentális Géographie Universelle című művében következőkép szól a Kaukasz hó- és jégtakarójáról:

«Jóllehet a Kaukasz csúcsai magasabbak az Alpokénál, ezeket aránylag mégis kevés hó és jég födi és pedig nem csak délibb fekvése és egyéb klimatikus okok miatt, hanem azért is, mert magas gerinczei keskenyek s hiányoznak a czirkuszok, a hol kiszélesedhetnének a hőtömegek, a gleccserek firngyűjtői. A firngyűjtők szegénysége az okozója a gleccserek ritkaságának.» Kutatásaim bebizonyították, hogy ezen állítások majdnem kivétel nélkül nem felelnek meg a kaukaszsi hegyrendszer alakulásának és a belőlük meritett következtetések mindannyian helytelenek.

MUSKETOW, a híres orosz geologus 1882-ben, tehát két évvel első utazásom előtt a következőket hirdeti:

«A felület, a melyet a kaukaszsi gleccserek borítanak, kisebb, mint csupán a Mont-Blanc csoporté és a kaukaszsi gleccserek által elfoglalt terület az alpi gleccserek területéhez viszonyítva igen csekély.» Kutatásaim pedig mutatják, hogy a valóságban a Kaukasz csak középső részeiben 1850 négyszögkilométernyi oromhóval és jéggel födött területet — tehát azonost a svájci Alpok eljegesedésével — kell fölvennünk, míg ezzel szemben a Mont-Blanc-csoportot — melynek eljegesedése MUSKETOW állítása szerint nagyobb volna, mint az egész kaukaszsi hegységé — csak 280 négyszögkilométernyi gleccser- és hótakaró födi!

De a Kaukasz glaciologiai viszonyairól még ALBERT HEIM, a hirneves geologus és glaciologus 1885-ben megjelent «Handbuch der Gletscherkunde» című művében szintén egytől-egyig téves adatokat közöl. Ebben a kitünő munkában a Kaukasz magashegységének összes hó- és jégtakaróját az addig rendelke-

zésre álló adatok alapján 120 négyszögkilométerre becsüli, a melyből fele az Elbrusz tömegére esnék. Mind a két adat helytelen, mert egyedül az Elbrusz masszívum területének hó- és jég-takarója 200 négyszögkilométerre rug és az egész hegrendszer eljegesedése sokszorosán nagyobb. Tévedés az addig uralkodott felfogást visszatükröztető állítás is, hogy a Kaukaszban az alpi nagy gleccserek dimenzióihoz fogható jégárak nincsenek és hogy a legtöbb kaukaszsi gleccser a függő-gleccserek csoportjához tartozik.

Ily téves fogalmakból állott tudásunk a kaukaszsi gleccservilágról, midőn 1884-ben első útamra indultam és már két első utazásom eredménye gyanánt rámutathattam a Kaukasz eljegesedésének nagyszerű kifejlődésére. Először 1886-ban a magyar földrajzi társaság közleményeiben, azután a külföldi geográfiai irodalomban közöltem kutatásaimnak az uralkodó felfogással szemben egészen eltérő eredményeit. Állításaim bizonyosságául szolgáltak méréseim és a Közép-Kaukasz gleccservilágából első és második utazásom alatt fölvetett fényképeim. E felvételekről állítja MERZBACHER, a hírneves kutató: «hogy a kaukaszsi magashegység első fotografiai felvételei, a melyek Európába kerültek s itt ennek a magashegységnek a szerkezetéről és eddigelé ismeretlen, hatalmas elgleccseresedéséről legelőször nyújtottak helyes képet.¹

Munkám glaciológiai fejezetében egymásután tárgyaltam a gleccserképződésre kiható *klimatikus viszonyokat*, a *hóhatárt*, a *gleccserek formáit*, *terjedését* és *méreteit*, a nevezetesebb gleccserek *leírását* fekhelyük orográfiai viszonyainak feltüntetésével, összefoglaltam az adatokat a kaukaszsi gleccserek *méreteiről*, összehasonlítva az Alpok gleccsereivel. Végre vizsgálódásaim tárgyává tettem a kaukaszsi gleccserek *ingadozásait* és különösen behatóan foglalkoztam a kaukaszsi *jégkorszak problémájával*.

Megállapítottam, hogy a Kaukaszban a *hóhatár* kisebb-nagyobb ingadozásokkal nyugatról keletre emelkedik és levontam a számbeli értékeket. A Nyugat- és Közép-Kaukaszban, kivéve ott, a hol orográfiai viszonyok és lokális meteorológiai

¹ MERZBACHER: Hochregionen des Kaukasus. Leipzig, 1901. I. köt. 230. oldal.

folyamatok kisebb szakaszokban némi eltérést okoznak, egyáltalában a pontusi csapadékdús klíma hatása a hóhatárt mélyebbre szorítja délen, mint északon; míg a hegység keleti felében a Kura-völgy steppetermészetének és már az ázsiai klímának befolyása alatt a déli lejtőn magasabb a hóhatár.

Leghatalmasabban kifejlődött az elgleccseresedés a hegység középső részében, ott felületét 1840 km²-nek vehetjük, tehát körülbelül azonosnak a svájci Alpok eljegesedett területével, a mely 1838 km²-re rug. Kimutattam, hogy 20 kaukázusi völgyi gleccsernek a felülete nagyobb 20 km²-nél, míg a Nyugati- és Svájci-Alpokban 17, a Keleti-Alpokban (Tirolt beleértve) csak 2 gleccser van, a melynek felülete nagyobb 20—20 km²-nél.

A Kaukázus gleccserei az *alpi gleccsertípusnak* felelnek meg. Az orográfiai viszonyok hatása csak az Elbrusz vulkanikus tömegének eljegesedésében idéz elő átmeneti formát a skandináviai és az alpi gleccsertípus között és kisebb mértékben a Kazbek-csoportban.

A *tengerszin fölötti magasságot* vizsgálva, a melyben a Kaukázus gleccserei végződnek, kimutattam, hogy a gleccserek nyelvei a legerősebben eljegesedett és legkiterjedtebb hógyűjtő területeket rejtő vidékeken egyúttal a legmélyebbre is nyúlnak.

A nagy völgyi gleccsereknek a hóhatár alá való *lenyomulását* tekintve azt találjuk, hogy általában a gleccserzóna északon mélyebbre nyúlik le, mint a déli oldalon, a mi a hegység orográfiai szerkezete mellett főképp a klimatikus viszonyokban leli magyarázatát. Jóllehet az alpi gleccserek közül néhány kissé mélyebben végződik, mint a Kaukázusban, kimutattam, hogy a nagy kaukázusi völgyi gleccserek nemcsak absolute, hanem a hóhatár alá is sokkal mélyebben nyúlnak, mint azt a régi téves felfogás állította.

A kaukázusi gleccserek *ingadozásait* tekintve, mint végeredményt megállapítottam, hogy úgy saját húszévi időtartamra vonatkozó megfigyeléseim, mint a hegylakók adatai szerint az utolsó félszázad óta általában hátráló mozgásban vannak.

De a kaukázusi gleccserek ingadozásai a jelenkor bizonyos periodusaiban csak jelentéktelen tünemények egykori kiterjedé-

sükkel szemben, a mely a geologiai időrend szerint a negyedkorban uralkodott és a melylyel a Kaukázusban is jégkorszakot idéztek elő. Azok az okok, a melyek a harmadkor végén és a negyedkor kezdetén, sőt még fiatalabb időszakokban is a föld nagy területét többé-kevésbbé összefüggő, kiterjedt jégtakaróval burkolták be s így a föld fejlődéstörténetében jelentőségteljes hatású korszakot teremtettek, miként az Alpokban és más nagy hegységekben, a Kaukázusban is jégkorszakot idéztek elő.

A kaukázusi hegrendszerben talált jégkorszaki nyomok elrendezése az eljegesedés kiterjedésének különböző fázisaira enged következtetni. Mindazonáltal, megengedve, hogy a legjobban tanulmányozott hegységben, az Alpokban, megállapítható volt, hogy ott a jégkorszak periodusokra oszlott, olyképen, hogy az eljegesedés ismételt bekövetkezett, közbeneső 3 vagy 4 interglaciális periodussal, a Kaukázusban — többek közt szem előtt tartva az Alpokénál sokkal kisebb jégkorszaki elgleccseresedését — interglaciális időszakok helyett inkább csak az eljegesedés állásában bekövetkezett többé-kevésbbé intenzív *oszciillációkat* vehetünk fel, köztük két-három oly periodussal, melyekben az eljegesedés bizonyos állandóságot mutatott egy következő posztglaciális korszakkal.

A jégkorszaknak a Kaukázusban is számos és biztos jele maradt meg és azoknak a kimutatása kutatásaimnak egyik feladata volt. A jégkorszak nyomait a hegység belsejében egészen fel, a jelenlegi gleccserek határáig megtaláljuk s ezek a kaukázusi hegrendszer majdnem minden vidékén többé-kevésbbé intenzív alakban tárulnak elénk. Hatalmas glaciális lerakódásokat, vándorköveket, glaciális diluviumot és fluvioglaciális törmelékeket, sziklacsiszolást és lekerekítést megjelöltem azokon a kiterjedt területeken, melyeket ismételt utazásaimban bejártam. Kimutathattam ott számos völgyben túlmélyedést, teknőalakot és a völgyfalakon a glaciális terraszokat, régi végmorénákat, a melyek a völgyek torkolatáig sorakoznak és a jégkorszakbeli gleccserek nyugvó pontjait megjelölik.

A Közép-Kaukázusban találkozunk a leggazdagabb glaciális jelenségekkel és itt is volt a jégkorszakban az eljegesedés legnagyobb birodalma. Nyugat felé szintén megtaláljuk az egy-

kori kiterjedtebb gleccsereknek a nyomait, bár jóval kisebb mértékben. A keleti részben a jégkorszakbeli gleccser takaró aránylag jelentéktelen volt, úgy mint a jelen korban ezen a középázsiai kontinentális klimabeli hatások alá eső hegyvidéken is.

A *jégkorszakbeli jelenségek* kiterjedésének folytonos kisebb-bedeése a hegység keleti felében egyúttal azt az érdekes kérdést veti föl, hogy mennyire érvényesültek azokban a geológiai periodusokban is a különbségek, a melyek jelenleg Európa nedves mediterrán klimája és a keleten uralkodó, sokkal szárazabb ázsiai kontinentális klíma között vannak. Kutatásaim egyelőre megállapították, hogy a Kaukaszban világosan kidomborodó párhuzamot látunk a jégkorszakbeli gleccservilág fejlődése és gleccsereinek jelenlegi kiterjedése között. A leghatalmasabb elgleccseresedés jelenlegi központja, a Közép-Kaukasz, a negyedkorszakban is a legelterjedtebb jégvilág helyszíne volt és akkor is úgy a nyugaton, mint különösen a keleten kisebbedett az eljegesedés.

A Kaukasz jégkorszaki gleccserei nem voltak olyan összefüggő óriási jégtakarók, mint az Alpok jégkori gleccserei és nem is nyúltak le olyan mély szintekbe, mint Európában, azonban a Közép-Kaukaszban még mindig mélyebbre lenyúltak, mint a középázsiai Tian-Sanban, a melyhez a Kelet-Kaukasz jégkorszakának tüneményeiben mint összekötő kapocs közeledik. A Kaukasz arczatának számos jellemző vonásán alapuló *euróázsiai jellege*, a melylyel a középázsiai hegylánczok és az európai hegyvonulatok között *átmeneti hegység gyanánt szerepel, a jégkorszakban is érvényesült.*

Munkám fiziogeográfiai részének utolsó fejezetében a Kaukasz *geomorfológiai alapvonásait* tárgyaltam.

A tektonikai, hegyképző erők munkáját követte a geologia legfiatalabb korában, a negyedkorban, a föltornyosított hegyrendszer további morfológiai kialakulása, a mely még a jelenben is folytatódik. Hogy már most mily formában játszották le a kialakulási tényezők morfológiai munkájukat, meghatározni a kialakulási erők munkájának nagyságát és a kialakult domborzat közötti viszonylatot és végre a kaukaszusi alakvilág képének

a megismerése, ecsetelése, mint geomorfologiai kialakulásának az eredménye, fiziogeografiai kutatásaim körébe tartozott.

A kaukazusi *magashegység arculata* a nagyon érdekes problémáknak egész sorozatát rejti magában és munkám ezen utolsó fejezetében adtam kifejezést nézeteimnek a kaukazusi *magashegység morfológiai kialakulásáról*, leírtam sok vonásban annyira különböző részeinek fiziognómiai képét, tüneményeinek sokféleségével.

Abból az általánosan elfogadott föltevésből kiindulva, hogy a pliocén idők óta a földkéreg mozgásai a Kaukaszban is gyöngültek, a formát adó kialakulást ebben a hegységben is első sorban a víz és jég szétromboló hatásának kell tulajdonítani.

A *tektonikai szerkezet* adta meg mindenesetre a Kaukaszban az alapvető *völgyirányokat, a lefolyások pályáját*. A hegység gyűrődésének intenzitása, a redők közé nyomódott medencékkel, északon a tektonikai hosszantás völgyek kifejlődésére nem volt kedvező és a lefolyás iránya túlnyomóan harántos völgyszakaszokba terelődött. A déli lejtőn pedig a formációk hatalmas áttolódásai és az antiklinális által keletkezett hatalmas diszlokációk — ellentétben az északi lejtő eroziós keresztvölgyeivel — a tektonikai hosszantás völgyek egész sorozatát hozták létre.

A völgyrendszer alapvonásaiban *már a jégkorszak beköszönése előtt megvolt*; a Kaukasz már át volt völgyelve, a mint az első eljegesedés bekövetkezett. De a völgyképződés egyuttal régibb volt, mint az eruptív működés. Azok a hatalmas lávavonulatok, a melyek a hegység gerinczéről északon és délen lenyomultak és tömegükkel a diluviális kavicsokat és konglomerátokat beborították, mutatják azt a magasfokú kiképződést, a mi akkoron a völgyekkel szaggatott hegységnek már a sajátja volt. Éles különbség rejlik itt az Alpok és a Kaukasz szerkezete közt, mert az Alpoknak valamennyi eruptív közete idősebb mint a földgyűrődés, idősebb mint a völgyképződés és idősebb mint az elgleccseresedés.

A *völgyek szélesítése és mélyítése* későbbi munka volt, a mely nyugalmi közökkel váltakozott s a melyben a folyóvíz, a gleccser és olvadó vizei közreműködtek. Azokban a völgyekben,

a melyek a jégkorszaki gleccserek útjaul szolgáltak, az ezeket követő jelenségek is mutatkoznak: Az U-alakú kimélyítés, a besüllyedt teknők, a két völgylejtőn az egymásnak megfelelő terraszok és a völgyi lépcsők. Ott pedig, a hol a jégkorszaki eljegesedés csekélyebb mérvű volt, mint ez Dagesztánban meggyőző példákban nyilvánul, a fővölgyek felső folyása és az ezekbe szájadzó oldalvölgyek, a melyeket a jégkorszak jegesei töltöttek meg, a megfelelő völgyformákat mutatják, míg ellenben, a hol a jégkorszaki eljegesedés hiányzott, a középső vagy az alsó völgyszakaszai szorosszerű szűkülletben húzódnak és a tiposus V-alakú eroziós szurdokok következnek.

Igen fontos tény, melyet a kaukazusi völgyek futásában konstatálhatunk: a *tavak előfordulásának ritkasága*. Ellentétben az Alpokkal a Kaukazuusnak egyáltalában nincsenek nagyobb terjedelmű völgyi tavai és *hiányzanak a nagy peremtavak*. És ez a tény nemcsak a Kaukazuus geomorfologiai képének egyik nagyon jelentős vonása, hanem a tavak keletkezése és a gleccserek erozióképesége kérdésére nézve nagyon érdekes problema.

Azok az elméletek, a miket különösen PENCK, BRÜCKNER és követői az Alpokban tett bűvárlataikkal megállapítottak, a tavak eredetét a glaciális erozióknak tulajdonítják. Eszerint a nagy alpi peremtavak a glaciális völgykimélyedés végeit jelzik; a jégkorszaki gleccserek nyelvmedenczéit visszavonulásuk periodusában víz töltötte ki; egyúttal az erozióműködés szünetelésével az akkumuláció lépett előtérbe és az így képződött peremtavakat nagy kavicstömegek és végmoréna-gátak vették körül. Most már miért nincsenek a Kaukazuusnak is peremtavai és nagy völgyi tavai, *habár* jelentőséges jégkorszaki elgleccseresedése — a mint kimutattam — neki is volt!

A peremtavak keletkezésére nézve döntő, vajjon a jégárak nyelvei az előhegyeken túl, a hegység pereméig kinyúltak és ott kifejthették-e azt az erodáló munkát, melynek az említett elmélet szerint az Alpok peremtavai létezésüket köszönhetik. Bár a Kaukazuusban a glaciális diluvium elterjedéséről és természetéről, a moréna-övekről, a glaciális sorozatokról és a fluvio-glaciális kavicserakodásokról a rendszeres és részletes meg-

figyelések még hiányoznak, vizsgálódásaim eredményeit a következőkben összpontosítom.

A jégkorszakbeli eljegesedésre vonatkozólag megállapíthatam, hogy a Közép-Kaukázus északi harántos *völgyeit kétségtelenül gleccserek töltötték ki*. De megfigyeléseim alapján arra a meggyőződésre is jöttem, hogy a jégárak nyelvei az előhegyeken túl *nem nyomultak ki a hegység peremére*.

Ha tehát fölteszszük, hogy a jégkorszaki gleccserek nem nyomultak le a Kaukázus előhegyein túl, ott nem is érvényesülhetett a jégkorszakbeli gleccsereknek olyan nagymérvű talajátalakító hatása, mint a melyet PENCK és követői az Alpok jégkorszaki gleccsereinek a hegység peremén tulajdonítanak; ott a Kaukázusban oly nagy tömedenczéket nem is csiszolhattak ki a gleccserek nyelvén, nem is keletkezhetek és fönnt nem maradhattak a Kaukázus északi és déli szélén a nagy glaciális eredetű peremtavak, mint az Alpokban.

Ha tehát így a Kaukázusban a nagy peremtavak hiánya nem is jut ellentétbe a PENCK-féle elmélettel, a mennyiben fölteszszük, hogy a jégkorszakbeli gleccserek nyelvei nem is nyúltak ki a hegység pereméig, a nagy völgy-tavak hiányának a magyarázata már sokkal nehezebb lesz, mihelyt keletkezésüket, úgy mint az Alpokban, a gleccserek eróziójának tulajdonítjuk. Mert a jégkorszaki gleccserek, különösen a Közép-Kaukázus úgy északi, mint déli lejtőjén, hatalmas kiterjedésben kinyomultak számos völgy középső és alsó szakaszán keresztül — és mégis egyetlenegy nagyobb völgy-tó nem maradt meg a Kaukázusban!

Igaz ugyan, hogy úgy északon, mint délen a középső és az alsó folyószakaszok vidékén számos ponton a völgytágulatokban lakusztris lerakódásokat lehet látni és láttam völgylépcsőket, a melyeknek fiziognómiája kiürült tömedenczére utal. De a geológiai időkben itt-ott létezett, inkább tektonikai okból vagy torlódásokból keletkezett tavak medenczéje kiürült és görgeteggel, morénatörmelékekkel és a gleccserpatakok kő- és iszap tömegével feltöltődött. Már pedig így a jégkorszaki gleccserek a Kaukázusban, különösen az állandóságukra következett hátráló periodusokban, inkább feltöltő, kiegyenlítő hatást vé-

geztek, *mintsem kivéső, kilapátoló működést.* Ha a Kaukaszus jégkorszaki gleccserei — amiként az Alpokban a glaciológusok nagy része tartja — hatalmas erodáló munkát végeztek volna és gleccseryelvükkel mély medencéket csiszoltak volna ki, akkor a tavak a fiatal Kaukaszusban — figyelembe véve a jégkorszakok többé-kevésbé egyidős jelentkezését és a kőzetek hasonlóságát — eddig el nem tűnhettek volna, amiként a hasonló fiatal Alpokban sem tűntek el.

A Kaukaszusban aránylag a hegyi tó is kevés s ezek is jelentéktelen terjedelműek. Egy részük, különösen az előhegyekben, elrekesztett vízfolyásokból támadt, más részük azonban, a hegység magasabb régiójában, kétségtelenül a nagy jégkorszaki elgleccseresedés kivéső munkásságából eredt. Kisebb fülkék és károk a sziklás lejtőkön kicsiszolódtak és tavi vápákká lettek, míg más pontokon csak a végmorénák gátjai mögött feltorlódtott tavak alakultak.

A kaukaszusi völgyek esése általában meglehetősen egyöntetű és kevésbé van olyan meredek lépcsőkkel megszagatva, mint az Alpokban. Ennek a völgyi kialakulásnak egyik következménye a számbavehető *vizesések ritkasága* és nagy vizesések teljes hiánya. Utazásaimban ugyan, különösen az erősebb jégkorszakbeli elgleccseresedés szinterén, több völgyben az egyes völgyi lépcsők között meredek szakaszokat, valamint olyan oldal-völgyeket is találtam, a melyeket torkolatuknál tetemes szintkülönbségű emelet választ el a fővölgytől, de itt is hiányzik a vizesés, mert ezt a szintkülönbséget rendszeren a patak mélyen kivágott horhójával legyőzi. A kőzet azonossága mellett tehát a Kaukaszus hegyi vizeinek régibb idő óta kellett a hegységet erodálniok, mint az Alpokban, hacsak e jelenség nem inkább annak a körülménynek tulajdonítható, hogy a Kaukaszusban létező nagyobb vertikális különbség a gerinczmagasság és völgyfenék között erősebb esést és azzal gyorsabb eroziót is eredményezett.

Sorra vettem azokat a tényezőket, melyek a kaukaszusi magashegység geomorfológiai kialakulására befolyással voltak és melyek külső reliefjének fiziognomiáját megteremtették: a *különböző klíma-régiókat*, a hegység egyes csoportjainak felépíté-

sében résztvevő kőzetek különféleségét, a növénytakarót, az eljegesedést. Abban a hatalmas kiterjedésben, a melyben a Kaukázus két tenger között végignyúlik, a hegység arczulatát továbbalakító erők — különböző tényezők által befolyásolva — különböző módon működtek és olyan hegyvidékeket nemzettek, a melyek arczulatukban bámulatos sokféleséget, nagyszerű változatosságot mutatnak.

★

A messze földről hozott gyűjtemények most már hazai intézetekben találtak elhelyezést. Utazásaim eredményeit munkámban közzétettem és ha visszapillantok a lefolyt évek munkájára, elégtétellel tölt el, hogy részt vehettem a művelt nemzeteknek abban a nemes versengésében, a melyet a Föld ismeretlen tájainak megismeréséért folytatnak s hogy *a Kaukázus havasi öveinek fellírásában része lesz mindenkoron a magyar tudományos kutatásnak.*

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 márczius 14.-én tartott üléséből.)

A FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK FOURIER-FÉLE SORÁNAK SINGULARITÁS AIRÓL.

FEJÉR LIPÓT I. tagtól.

Bevezetés.

E dolgozat tárgya főrészen az általános folytonos függvény Fourier-féle sorának a konvergencia- és summabilitási elméletének alapjaiba vág.

Egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvény Fourier-féle sora mutathatja a DU BOIS-REYMOND-féle singularitást. Ez alatt azt értjük, hogy e Fourier-féle sor valamely helyen, pl. az $x = 0$ helyen *divergens* lehet. P. DU BOIS REYMOND fedezte fel az ilyen folytonos függvény létezését (1876).

Egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvény Fourier-féle sora mutathatja továbbá a LEBESGUE-féle singularitást. Ez alatt azt értjük, hogy e Fourier-féle sor mindenütt konvergens ugyan, de egy helynek a környezetében, pl. az $x = 0$ helynek a környezetében *nem-egyenletesen* konvergens. H. LEBESGUE fedezte fel az ilyen folytonos függvény létezését (1905).

Ide tartozik még egy harmadik faja a singularitásnak. Létezik olyan mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvény, melynek Fourier-féle sora egy helyen (pl. az $x = 0$ helyen) *divergens*, de még hozzá e Fourier-féle trigonometrikus sor azzal a tulajdonsággal is bír, hogy u. n. *konjugált* trigonometrikus sora is egy *Fourier-féle sor* és pedig egy ugyan-csak mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora. Egy ilyen konjugált Fourier-féle sorpárnak a létezését PRINGSHEIM sejtette meg. Létezését én bizonyítottam be (1910).

Én e dolgozatban egy numerikus végtelen számsorozatot definiálok (l. a 13. pontot), melynek segítségével példákat szolgáltatok olyan Fourier-féle sorokra, melyek ezen most felsorolt singularitások egyikét-másikát mutatják. Akár izolált helyen, akár egy intervallumban mindenütt sűrűn lévő helyeken.

Az én példáim egyszerűek. Élesen a szemünk elé hozzák ezeket a singuláris jelenségeket, minden részletükkel együtt. Bizonyításaim is egyszerűek; úgyszólván közvetlenül az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

harmonikus sor divergenciájából vezetek le mindent.

Egészen új a példáimban azonban az, hogy én nem a *függvényt* definiálok, melyhez tartozó Fourier-féle sor a föl-sorolt singularitások egyikét mutatja, hanem direkt ezt a *Fourier-féle sort* (vagyis annak a_k együtthatóit) definiálok, mely épen a szóban forgó singularitást mutatja. Én tehát, más szóval, explicite fölírok numerikus együtthatókkal bíró (és a lehetőség szerint egyszerű együttható-törvénynyel bíró) Fourier-féle sorokat, melyek a szóban forgó singularitást mutatják.

Ilyen explicit példák birtokában lévén, bizonyos világosság árad szét erre az egész elvont vizsgálódási tartományra.

Példáim szerkesztésénél alapul szolgálnak a

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos (n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} \quad (\alpha)$$

és

$$\frac{\sin x}{n} + \frac{\sin 2x}{n-1} + \dots + \frac{\sin nx}{1} - \frac{\sin (n+1)x}{1} - \dots - \frac{\sin 2nx}{n} \quad (\beta)$$

trigonometrikus polynomok (n pozitív egész szám).

Az (α) alatti cosinuspolynom úgyszólván «csirájában» mutatja a DU BOIS-REYMOND-féle singularitást az $x=0$ helyen. Valóban. E polynom abszolút értéke minden valós x -re nézve kisebb, mint 6, bármilyen értéke is van az n egész számnak. (L. e dolgozat 6. pontját.) Nézzük most e cosinuspolynom Fourier-féle sorának n -dik részletösszegét, vagyis az

$$s_n(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1}$$

összeget. Ez az

$$\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$$

intervallumban (hol ε tetszőleges kicsiny, de rögzített pozitív szám) abszolút értékben kisebb, mint $\frac{2\pi}{\varepsilon}$, bármilyen értéke van is az n egészszámnak. (L. e. dolgozat 9. pontját.) Nézzük végre e részletösszeg értékét az $x = 0$ helyen. Ez

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 > \log n.$$

Ha most már n igen nagy, akkor az (a) alatti függvény abszolút értéke *véges* marad. *Véges* marad az $|s_n(x)|$ is az $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ intervallumban. *Azonban $s_n(0)$ tetszőleges nagy lesz.*

Hasonlóképen a (β) alatti sinuspolynom a LEBESGUE-féle singularitást mutatja «csirájában». Ugyanis e polynom abszolút értéke szintén kisebb mint 6, minden valós x -re nézve és minden egészszámu n -értékre nézve. (L. e. dolgozat 6. pontját. Fourier-sorának n -edik részletösszege:

$$s_n(x) = \frac{\sin x}{n} + \frac{\sin 2x}{n} + \dots + \frac{\sin nx}{1}.$$

Ez az

$$\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$$

intervallumban abszolút értékére nézve szintén kisebb mint $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ bármilyen értéke van is az n pozitív egészszámnak. (L. e. dolgozat 9. pontját.)

Az $x = 0$ helyen e részletösszeg egyenlő

$$0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

-sal. Ámde az

$$x = \frac{\pi}{2n}$$

helyen

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{n} + \frac{\sin 2 \frac{\pi}{2n}}{n-1} + \dots + \frac{\sin n \frac{\pi}{2n}}{1} > \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{n}{2} \right],$$

hol $\left[\frac{n}{2} \right]$ az $\frac{n}{2}$ -ben foglalt legnagyobb egészszámot jelenti. (L. e dolgozat 10. pontját.)

Ha már most az n igen nagy, akkor $|s_n(x)|$ az $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ intervallumban, valamint az $x = 0$ helyen véges; de a $0 \leq x \leq \varepsilon$ intervallumban (valóban ide esik az $x = \frac{\pi}{2n}$ hely, ha csak n elég nagy) igen nagygyá válik. Etc.

Megjegyzem, hogy az (α) , (β) alatti polynomok fölhasználása a jellemzett singularitásokkal bíró Fourier-sorok szerkesztésére nem ötletszerű, hanem egészen természetes. Ugyanis (l. e dolgozat 6. pontját)

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos (n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} = \\ = 2 \sin (2n+1) \frac{x}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin (2\nu-1) \frac{x}{2}}{\nu} \end{aligned}$$

Ámde

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin (2\nu-1) \frac{x}{2}}{\nu} > 0,$$

ha

$$\begin{aligned} 0 < x < 2\pi, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Tehát

$$\text{sign.} \left(\frac{\cos x}{n} + \dots - \frac{\cos 2nx}{n} \right) = \text{sign.} \sin (2n+1) \frac{x}{2},$$

$$\begin{aligned} 0 < x < 2\pi, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

A sign. $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ függvényről pedig LEBESGUE óta ismeretes, hogy fontos szerepe van a DU BOIS-REYMOND-féle singularitás kérdésénél. (L. «Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier-sorok» című dolgozatom 1. §-át és e dolgozat függelékét.)

E dolgozat tartalmára nézve az alább adott tartalomjegyzék ad némi áttekintést. Külön fölhivom itt a figyelmet a 9. §-ra és a függelékre.

E dolgozatnak összefüggését előbbi, e tárgyakra vonatkozó dolgozataimmal¹ a kellő helyeken alkalmazott lábjegyzetekkel tüntetem fel. Megjegyzem azonban, hogy e dolgozataim ismeretét *nem* tételezem fel.

A mi vizsgálataim irodalmi előzményeit illeti, e dolgozataimra kell utalnom.

Mégis kiemelem e helyen, hogy DU BOIS-REYMOND óta H. LEBESGUE adta a legnagyobb lendítést e kérdések tisztázására.

Tartalomjegyzék.

Bevezetés.

1. §. Egy tétel a Fourier-féle részletösszegek határaitól. Alkalmazások.
2. §. Néhány trigonometrikus polynomra vonatkozó egyenlőtlenség.
3. §. Egy új jelölési mód bevezetése. Egy tétel a trigonometrikus sorokra vonatkozólag.

¹ Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. CRELLE J., Bd. 137. (Röviden mint «I. czikk»-et idézem.)

Eine stetige Funktion deren Fourier-sche Reihe divergiert. Rendiconti di Palermo, Tomo XXVIII. (II. czikk.)

Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier-sorok. Math. és Term. Értesítő. (III. czikk). (Ugyanez németül: Lebesgue-sche Konstanten und divergente Fourierreihen. CRELLE J., Bd. 138.)

Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Sitzungsberichte der k. Bayerischen Akademie. Jahrgang 1910. (IV. czikk.)

Sur une paire de séries de Fourier conjuguées. Comptes-Rendus, 28 février 1910. (V. czikk.)

Sur les sommes partielles de la série de Fourier. Comptes-Rendus, 23 Mai, 1910. (VI. czikk.)

4. §. Egy numerikus végtelen számsorozat definiálása.
5. §. A du Bois-Reymond-féle singularitás egy helyen.
6. §. A Lebesgue-féle singularitás egy helyen.
7. §. A du Bois-Reymond-féle singularitás mindenütt sűrűn elosztott helyeken.
8. A konjugált Fourier-féle sorpárra vonatkozó singularitás; egy helyen és mindenütt sűrűn elosztott helyeken.
9. §. A Fourier-féle sor arithmetikai közepeire vonatkozó tételeknek verifikálása az 5. §. példáján.
Függelék. A Lebesgue-féle állandóknak egy új kifejezése.

1. §. Egy tétel a Fourier-féle részletösszegek határaitól.
Alkalmazások.

1. Legyen $f(x)$ egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban *véges és integrálható* függvénye az x független változónak. Jelölje M e függvénynek a $(0, 2\pi)$ intervallumra vonatkozó felső határát és m ugyanazon intervallumra vonatkozó alsó határát.

Tekintsük az $f(x)$ függvény Fourier-féle sorának

$$s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (1)$$

részletösszegeit. Mindegyik részletösszegnek van a $(0, 2\pi)$ intervallumra vonatkozólag egy felső és egy alsó határa. Azt a kérdést vetem most már fel, hogy a Fourier-féle részletösszegeknek ezen felső és alsó határai milyen, egyenlőtlenség által kifejezhető, vonatkozásban vannak magának az $f(x)$ függvénynek M felső és m alsó határával?

E kérdéssel itt nem foglalkozom részletesen.¹ E helyen csak néhány megjegyzést teszek e tárgyra vonatkozólag; annyit, a mennyit egy mindjárt közlendő tétel megvilágítására okvetlenül szükségesnek tartok.

2. Az (1) alatti Fourier-féle részletösszegeknek sorozata helyett tekintsük az

$$s_0(x), \frac{s_0(x) + s_1(x)}{2}, \dots, \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}, \dots \quad (2)$$

arithmetikai közepek sorozatát.

¹ L. erre nézve III. cikkem 1. §-át, továbbá e dolgozat függelékét.

Az arithmetikai közepekre nézve a fenti kérdés könnyen oldható meg.

Mintthogy ugyanis

$$s_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} dt, \quad (3)$$

tehát¹

$$\begin{aligned} S_{n-1}(x) &= \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n} = \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Ámde a föltevés szerint

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M, \\ (0 &\leq x \leq 2\pi), \end{aligned}$$

tehát a határozott integrálra vonatkozó első középértéktétel értelmében

$$S_{n-1}(x) \leq M \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} \right)^2 dt,$$

és

$$S_{n-1}(x) \geq m \int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} \right)^2 dt.$$

¹ Ez egyrészt a határozott integrál alaptulajdonságaiból, másrészt az

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos m\theta = \frac{\sin(2m+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

és

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin(2m-1)\theta = \frac{(\sin m\theta)^2}{\sin \theta}$$

identitásokból tüstént következik.

Mintthogy pedig a (4) alatti egyenletbe $f(x) \equiv 1$ -et téve nyerjük, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt = 1,$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots),$$

tehát

$$m \leq S_n(x) \leq M, \quad (5)$$

midőn

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2\pi, \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Bebizonyítottuk tehát, hogy a Fourier-féle sor bármelyik arithmetikai közepének felső határa $\leq M$ és alsó határa $\geq m$.¹ Ez, azt hiszem, a Fourier-féle sorok konvergencia- és summabilitási elméletének legegyszerűbben nyerhető, legprimitívebb ténye.

Az (5) alatti tételből következik: ha a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban integrálható $f(x)$ függvény «határolt» (vagyis abszolút értékben $\leq G$ pozitív számmal, ha $0 \leq x \leq 2\pi$), akkor az $S_n(x)$ középértékek is határoltak. Ugyanis akkor

$$\begin{aligned} |S_n(x)| &\leq G, \\ 0 &\leq x \leq 2\pi, \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

3. Térjünk vissza a Fourier-féle részletösszegekre.

Ezekre nézve az (5) alatti tétel általában *nem érvényes*. Valamely $s_n(x)$ Fourier-féle részletösszegnek pl. a felső határa az $f(x)$ függvény M felső határát tetszőleges nagy értékkel múlhatja felül. (Hasonló megjegyzés érvényes az alsó határookra.) Erre nézve igen egyszerű példát szolgáltat az

¹ L. a következő dolgozatomat: Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Annalen, Bd. 58, pag. 60.

$$f(x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos (n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n}$$

cosinuspolynom.

Ezen $f(x)$ függvény abszolút értéke ugyanis kisebb, mint $5 \cdot 14 \dots$, bármi legyen is a reális x -nek és a pozitív egészszámú n -nek az értéke. (Ezt e dolgozat folyamán igen egyszerűen fogjuk bebizonyítani.) Mégis e függvény Fourier-sorának n -edik részletösszege

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1}$$

az $x = 0$ helyen olyan

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1$$

értéket vesz fel, mely tetszőleges nagy, ha csak eredetileg az n elegendő nagynak választatott.

Egyébként már DU BOIS-REYMOND mutatta ki, hogy egy véges és folytonos $f(x)$ függvény Fourier-féle részletösszegei valamely x helyen abszolút értékben tetszőleges nagyok lehetnek. Röviden kifejezve: az $f(x)$ függvény határolt voltából nem következik az $s_n(x)$ sorozat határolt volta.

A következőkben most már egy olyan kriteriumot adok meg, melynek segítségével fontos esetekben belehet bizonyítani, hogy az $f(x)$ -hez tartozó Fourier-féle részletösszegek *határoltak*. Továbbá e kriterium egyszersmind *elég jó határokat* ad meg a Fourier-féle részletösszegekre nézve. A szóban forgó tétel így hangzik: ¹

Legyen $f(x)$ egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban integrálható függvény; legyen M ezen függvény felső határa és m ezen függvény alsó határa a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumra vonatkozólag. Tegyük fel továbbá, hogy

¹ L. VI. cikkemet.

$$|a_n| \leq \frac{A}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{B}{n}, \quad (6)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \infty.$$

Itt $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$, az $f(x)$ függvény Fourier-féle sorának együtthatóit jelentik;¹ A, B nem negatív állandókat jelölnek. Akkor, ha $s_n(x)$ jelenti az $f(x)$ függvény Fourier-féle sora első $(n+1)$ tagjának az összegét, érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$m - (A+B) \leq s_n(x) \leq M + (A+B), \quad (7)$$

ha

$$0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \infty.$$

E tétel bizonyítása nagyon egyszerű.

Legyen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

egy tetszőleges végtelen sor. Legyen

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Akkor

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = \frac{(n+1)u_0 + nu_1 + \dots + u_n}{n+1} =$$

$$= \frac{(n+1)u_0 + (n+1)u_1 + \dots + (n+1)u_n}{n+1} - \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n+1},$$

vagyis

$$S_n = s_n - \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n+1},$$

tehát

$$s_n = S_n + \frac{\sum_{v=1}^n v u_v}{n+1}.$$

E formulát az $f(x)$ Fourier-féle sorára alkalmazva nyerjük

$$s_n(x) = S_n(x) + \frac{\sum_{v=1}^n v (a_v \cos vx + b_v \sin vx)}{n+1}. \quad (8)$$

¹ Az a_0 együttható nem szerepel.

Ámde az (5) alatti egyenlőtlenség szerint

$$m \leq S_n(x) \leq M.$$

A (6) alatti föltételből kifolyólag pedig

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)}{n+1} \right| &\leq \frac{\sum_{\nu=1}^n (|a_\nu| + |b_\nu|)}{n+1} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{\nu=1}^n \left(\frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu} \right)}{n+1} = \frac{\sum_{\nu=1}^n (A+B)}{n+1} = \\ &= \frac{n(A+B)}{n+1} \leq A+B. \end{aligned}$$

Tehát valóban

$$\begin{aligned} m - (A+B) &\leq s_n(x) \leq M + (A+B), \\ 0 &\leq x \leq 2\pi, \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

a mit bizonyítani akartunk.

4. Lássunk két egyszerű példát. Legyen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi - x}{2}, \\ 0 &< x < 2\pi. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots, \quad (9)$$

és

$$M = \frac{\pi}{2}, \quad m = -\frac{\pi}{2}; \quad A = 0, \quad B = 1.$$

A (7) alatti egyenlőtlenségből tehát következik, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right| &< \frac{\pi}{2} + 1 = 2.57 \dots, \quad (10) \\ 0 &\leq x \leq 2\pi, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Második példának vegyük a következő sort

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{2} + \dots + \frac{\sin (2n+1)x}{n} + \dots \quad (11)$$

Ez az

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x + \sin x \log (2 \sin x),$$

$$0 < x < \pi,$$

függvénynek Fourier-féle sinussora. Ezen függvénynek a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumra vonatkozó felső határa $\frac{\pi}{2} = f(+0)$, alsó határa pedig $\log 2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. E szerint a (11) alatti sor egy olyan, a $(0, 2\pi)$ intervallumban véges és integrálható függvénynek a Fourier-féle sora, melyre nézve

$$M = \frac{\pi}{2}, \quad m = -\frac{\pi}{2}.^1$$

Alkalmazva most már a (8) alatti formulát,² nyerjük:

$$\begin{aligned} |s_{2n-1}(x)| &= \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin (2\nu-1)x}{\nu} \right| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\sum_{\nu=1}^n (2\nu-1) \cdot \frac{1}{\nu}}{2n} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sum_{\nu=1}^n 2 - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}}{2n} = \frac{\pi}{2} + \frac{2n - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}}{2n} = \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} < \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

Tehát bebizonyítottuk a következő, számunkra nagyon fontos egyenlőtlenséget

¹ Ezen adatokat a (11) alatti sorra nézve LANDAU úrnak egy hozzám intézett leveléből veszem.

² Czélsezerűbb ezt, mint a belőle levezetett (7) alatti egyenlőtlenséget alkalmazni.

$$\left| \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{2} + \dots + \frac{\sin (2n-1)x}{n} \right| < 2.57 \dots, \quad (13)$$

$$0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots^1$$

Megemlítem, hogy LANDAU úr egy hozzám intézett levelében egészen *elemi* bizonyításokat közölt velem a (10) és (13) alatti egyenlőtlenségek számára. Módszere segítségével neki sikerült először a $\frac{\pi}{2} + 1 = 2.57 \dots$ állandót megadni a (11) alatti sor részletösszegeinek abszolút értéke számára, mint felső határt.

5. Megjegyzés. Legyen $f(x)$ egy tetszőleges, a JORDAN-féle értelemben «véges ingadozású» függvény (fonction à variation bornée) a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban. Akkor könnyű kimutatni egy olyan nem negatív A, B számpár létezését, úgy hogy

$$|a_n| \leq \frac{A}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{B}{n},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Alkalmazva most már a (7) alatti egyenlőtlenséget, mondhatjuk:

Egy tetszőleges véges ingadozású függvény Fourier-féle részletösszegei abszolút értékben határoltak a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban.

Ez a részletösszeget kifejező DIRICHLET-féle integrállal is kimutatható.

¹ II. cikkemben $\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{2} + \dots + \frac{\sin (2n-1)x}{n}\right)$ számára a 17-et, III. cikkem 2. §-ában a 12.8-et adtam meg, mint felső határt. A következőkre nézve ugyan nem fontos a szóban forgó állandó számára lehetőleg kicsiny értéket megjelölni; de ez talán önmagában nem érdektelen kérdés.

2. §. Néhány trigonometrikus polynomra vonatkozó egyenlőtlenség.

6. Tekintsük a

$$\theta(n, r, x) = \frac{\cos(r+1)x}{n} + \frac{\cos(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(r+n)x}{1} - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos(r+2n)x}{n} \quad (14)$$

cosinuspolynomot és a konjugált

$$\gamma(n, r, x) = \frac{\sin(r+1)x}{n} + \frac{\sin(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(r+n)x}{1} - \frac{\sin(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\sin(r+2n)x}{n} \quad (15)$$

sinuspolynomot.

Itt n jelent egy tetszőleges pozitív egész számot, r jelent egy tetszőleges pozitív egész számot (de még a zérust is beleértve), x pedig egy tetszőleges valós számot. (Azonban természetesen elég x -et a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumra szorítani.)

Azt állítom most már, hogy ha n, r, x ilyen értékeket jelentenek, akkor

$$|\theta(n, r, x)| < 5 \cdot 14 \dots, \quad (16)$$

és

$$|\gamma(n, r, x)| < 5 \cdot 14 \dots \quad (17)$$

Valóban

$$\begin{aligned} \theta(n, r, x) &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{\nu} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos(r+n+\nu)x}{\nu} = \\ &= 2 \sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}. \end{aligned}$$

Ámde a (13) alatti egyenlőtlenség szerint

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu} \right| < \frac{\pi}{2} + 1.$$

Tehát.

$$|\theta(n, r, x)| < 2 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = 5 \cdot 14 \dots,$$

$$0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

Hasonlóképen

$$\begin{aligned} \eta(n, r, x) &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(r+n-\nu+1)x}{\nu} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(r+n+\nu)x}{\nu} = \\ &= -2 \cos\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}. \end{aligned}$$

Tehát ismét a (13) alatti egyenlőtlenségre való tekintettel

$$|\eta(n, r, x)| < 5 \cdot 14 \dots,$$

$$0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

7. Megjegyzés. A (16), (17) alatti egyenlőtlenségek helyesek maradnak, ha az egyenlőtlenség baloldalában az x helyébe sx -et írok, hol s tetszőleges pozitív egész szám. Ezáltal nyerem az

$$|\theta(n, r, sx)| < 5 \cdot 14 \dots, \quad (18)$$

$$|\eta(n, r, sx)| < 5 \cdot 14 \dots, \quad (19)$$

$$0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$r = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s = 1, 2, 3, \dots,$$

egyenlőtlenségeket.

8. Tekintsük a

$$\lambda_1 \cos(r+1)x + \lambda_2 \cos(r+2)x + \dots + \lambda_m \cos(r+m)x$$

cosinuspolynomot és a konjugált

$$\lambda_1 \sin(r+1)x + \lambda_2 \sin(r+2)x + \dots + \lambda_m \sin(r+m)x$$

sinuspolynomot.

Itt m jelent egy tetszőleges pozitív egész számot, r jelent egy tetszőleges pozitív egész számot (azonban a 0-t is beleértve). A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ számok pozitív számokat jelentenek, melyek vagy *sohasem nőnek*, vagy *sohasem fogynak*. Vége L -lel akarok jelölni egy olyan pozitív számot, mely egyik λ számnál sem kisebb.

Tegyük fel most már, hogy x az

$$\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$$

intervallumra van szorítva, hol ε egy (tetszőleges kicsiny, de rögzített) pozitív szám.

Akkor

$$|\lambda_1 \cos(r+1)x + \lambda_2 \cos(r+2)x + \dots + \lambda_m \cos(r+m)x| < \frac{2\pi L}{\varepsilon} \quad (20)$$

és

$$|\lambda_1 \sin(r+1)x + \lambda_2 \sin(r+2)x + \dots + \lambda_m \sin(r+m)x| < \frac{2\pi L}{\varepsilon}. \quad (21)$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^r \cos px = \frac{\sin(2r+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

$r = 0, 1, 2, \dots$

Tehát ha

$$\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon,$$

akkor

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^r \cos px \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Írjunk itt r helyébe egy l egész számot, mely nagyobb mint r . Akkor nyerjük

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^l \cos px \right| < \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Tehát kivonással

$$\left| \sum_{p=r+1}^l \cos px \right| < 2 \cdot \frac{\pi}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon},$$

$$r = 0, 1, 2, \dots,$$

$$l = r+1, r+2, \dots$$

Ha most a

$$\lambda_1 \cos(r+1)x + \dots + \lambda_m \cos(r+m)x$$

polynomra az ABEL-féle parciális összegezést alkalmazzuk, akkor nyerjük a (20) alatti bebizonyítandó egyenlőtlenséget.

Hasonlóan végezhető a konjugált polynomra vonatkozó (21) alatti egyenlőtlenség bizonyítása, ha a megfelelő

$$\sum_{p=1}^r \sin px = \frac{\sin \frac{r}{2} x \sin \frac{r+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

formulából indulunk ki.

9. A (20) és (21) alatti egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\left| \frac{\cos(r+1)x}{l+1} + \frac{\cos(r+2)x}{l+2} + \dots + \frac{\cos(r+m)x}{l+m} \right| < \frac{2\pi}{\varepsilon}, \quad (22)$$

$$\left| \frac{\cos(r+1)x}{l+m} + \frac{\cos(r+2)x}{l+m-1} + \dots + \frac{\cos(r+m)x}{l+1} \right| < \frac{2\pi}{\varepsilon}, \quad (23)$$

$$\left| \frac{\sin(r+1)x}{l+1} + \frac{\sin(r+2)x}{l+2} + \dots + \frac{\sin(r+m)x}{l+m} \right| < \frac{2\pi}{\varepsilon}, \quad (24)$$

$$\left| \frac{\sin(r+1)x}{l+m} + \frac{\sin(r+2)x}{l+m-1} + \dots + \frac{\sin(r+m)x}{l+1} \right| < \frac{2\pi}{\varepsilon}. \quad (25)$$

Itt x jelent egy tetszőleges számot az

$$\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$$

intervallumban ($\varepsilon > 0$); m jelent egy tetszőleges pozitív egész számot, r, l szintén tetszőleges pozitív egész számokat jelentenek (ám ezeknél a zérus értéket is megengedve).

10. Tekintsük a

$$\frac{\cos (r+1) x}{n} + \frac{\cos (r+2) x}{n-1} + \dots + \frac{\cos (r+n) x}{1} \quad (26)$$

cosinuspolynomot. Itt n tetszőleges pozitív egész szám, r tetszőleges nemnegatív egész szám. E polynom az $x = 0$ helyen az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1$$

értéket veszi fel. Ezen érték nagyobb, mint $\log n$. (És így az n -nel együtt minden határon túl nő.)

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \frac{\sin (r+1) x}{n} + \frac{\sin (r+2) x}{n-1} + \dots + \frac{\sin (r+n) x}{1} = \\ = \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin (r+\nu) x}{n-\nu+1} \end{aligned} \quad (27)$$

konjugált polynomot.

Ez az $x=0$ helyen a 0 értékeket veszi fel. Ámde vizsgáljuk értékét az

$$x = \frac{\pi}{2(r+n)}$$

helyen. (E hely igen közel van az $x = 0$ helyhez, ha az r vagy n értékek közül az egyik igen nagy.)

Mínt hogy

$$(r+\nu) \cdot \frac{\pi}{2(r+n)} \leq \frac{\pi}{2},$$

ha

$$\nu = 1, 2, 3, \dots, n,$$

tehát ¹

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin (r+\nu) \frac{\pi}{2(r+n)}}{n-\nu+1} > \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n \frac{\sin (r+\nu) \frac{\pi}{2(r+n)}}{n-\nu+1}.$$

¹ Én fölteszem, hogy $n > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, vagyis $n \geq 3$. Ugyis csak az n nagy értékeire nézve fogjuk a levezetendő egyenlőtlenséget használni. $\left[\frac{n}{2}\right]$ jelenti az $\frac{n}{2}$ -ben foglalt legnagyobb egész számot.

Ámde

$$\frac{\pi}{4} < (r+\nu) \frac{\pi}{2(r+n)} \leq \frac{\pi}{2},$$

ha

$$\nu = \left[\frac{n}{2} \right] + 1, \left[\frac{n}{2} \right] + 2, \dots, n,$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(r+\nu) \frac{\pi}{2(r+n)}}{n-\nu+1} &> \sqrt{\frac{2}{2}} \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2} \right] + 1}^n \frac{1}{n-\nu+1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n - \left[\frac{n}{2} \right]} \right) \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{n}{2} \right]} \right) \\ &> \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

E szerint a (27) alatti konjugált sinuspolynomra nézve a következő eredményhez jutottunk:

Az

$$x = \frac{\pi}{2(r+n)} \quad (28)$$

helyen

$$\begin{aligned} \frac{\sin(r+1)x}{n} + \frac{\sin(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(r+n)x}{1} &> \\ &> \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{n}{2} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$n = 3, 4, 5, \dots, \infty,$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n}{2} \text{ -ben foglalt legnagyobb egész szám.}$$

(Már a bevezetésben említettem ezen egyenlőtlenség egy

Ha pl.

$$g_1 = g_2 = \dots = g_\nu = \dots = 2,$$

akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

sorra nézve

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \right)_{g_\nu}$$

jelentí a

$$0 + 0 + 0 + \dots$$

sort. Vagy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sorra nézve

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right)_{g_\nu}$$

jelentí az

$$\frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

sort. Etc.

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ végtelen sor konvergens, akkor a $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right)_{g_\nu}$ végtelen sor is az, bármilyen sorozat legyen is a g_ν sorozat és

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right)_{g_\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (30)$$

Viszont lehet $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ divergens, míg $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right)_{g_\nu}$ alkalmasan választott g_ν sorozat mellett konvergens.

E jelölési mód jó szolgálatot fog tenni a következőkben.

12. Ismeretes a következő klasszikus tétel:

Ha az

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (31)$$

trigonometrikus sor $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban *egyenletesen*

konvergens, akkor összege egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény és az

$$a_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots$$

együtthatók nem egyebek, mint ezen $f(x)$ függvénynek Fourier-féle állandói. (Vagyis hogy akkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt,$$

$k = 1, 2, 3, \dots$).

E tételnek igen egyszerű, de nagymérvű általánosítása a következő tétel.

Ha az

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{31}$$

sor konvergenziájára nézve nem tudunk ugyan semmi adatot, de ha tudjuk, hogy a tagösszevonásokkal nyert

$$a_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)_{g_v} \tag{32}$$

végtelen sor (hol

$$g_1, g_2, \dots, g_v, \dots$$

a pozitív egész számoknak egy bizonyos (de különben tetszőleges) végtelen sorozata) a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens, akkor, $f(x)$ -szel jelölve a (32) alatti sornak mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus összegét, az

$$a_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots$$

együtthatók ezen $f(x)$ függvény Fourier-féle állandói. Röviden: a szóban forgó esetben a (31) alatti sor a (32) alatti egyenle-

tesen konvergens sor által jellemzett mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora.

4. §. Egy numerikus végtelen számsorozat definiálása.

13.¹ Tekintsük az

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{n} \quad (33)$$

$2n$ számból álló számcsoportot, hol n pozitív egész számot jelent. Képezzük ezt a számcsoportot az n -nek következő értékeire:

$$n = 2^{1^2}, 2^{2^2}, 2^{3^2}, 2^{4^2}, \dots, 2^{v^2}, \dots, \quad (34)$$

és írjuk az így keletkező számcsoportokat rendre egymás mellé, miután azonban a v -dik csoport számait mind v^2 -tal elosztottuk. Ilyen módon egy egészen határozott

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots \quad (35)$$

végtelen számsorozatot nyerünk. A sorozat első tagjainak értéke

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -\frac{1}{2},$$

$$a_5 = \frac{1}{4 \cdot 2^8} = \frac{1}{1024}, a_6 = \frac{1}{4(2^8-1)} = \frac{1}{1020}, \dots$$

A (35) alatti sorozat segítségével nyerem az 5., 6., 7., 8. paragrafus példáit.

5. §. A du Bois-Reymond-féle singularitás egy helyen.

14. A^2

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (36)$$

¹ L. III. cikkemet: 45—47. old., IV. cikkemet: 2. §., V. cikkemet.

² L. III., IV., V. cikkemet.

végtelen sor egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora. E Fourier-sor az $x = 0$ helyen divergens.

Bizonyítás. A (36) alatti trigonometrikus sor valóban Fourier-féle sora egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek. Ugyanis ha

$$g_1 = 2 \cdot 2^{13}, g_2 = 2 \cdot 2^3, \dots, g_\nu = 2 \cdot 2^\nu, \dots, \quad (37)$$

akkor a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right)_{g_\nu} \quad (38)$$

végtelen sor a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen (és föltétlenül) összetartó. Valóban; ezen (38) alatti végtelen sor ν -dik tagjának abszolút értéke, tekintettel az a_k számok definíciójára és a (16) alatti egyenlőtlenségre, tetszőleges x értékre nézve kisebb, mint

$$\frac{6}{\nu^2},$$

és minthogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{6}{\nu^2}$$

sor konvergens, tehát a (38) alatti végtelen sor tényleg egyenletesen (és föltétlenül) konvergens a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban.

De akkor a 12. pont tétele alapján már következik, hogy a (36) alatti sor egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora.

Még csak azt kell kimutatni, hogy a (36) alatti Fourier-sor tényleg mutatja a DU BOIS-REYMOND-féle singularitást az $x = 0$ helyen, vagyis hogy az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

sor divergens. Ez azonban evidens. Ugyanis e sor

$$\left(g_1 + g_2 \dots + g_{\nu-1} + \frac{g_\nu}{2} \right)$$

-dik részletösszegének értéke:

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{2^{\nu^2}} + \frac{1}{2^{\nu^2-1}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right).$$

Ezen érték a ν -vel együtt minden határon túl nő, lévén ez nagyobb mint

$$\frac{1}{\nu^2} \cdot \log 2^{\nu^2} = \nu \cdot \log 2.$$

Ezzel a (36) alatti sorra vonatkozó tételt bebizonyítottuk.

A (36) alatti Fourier-féle sor az $x = 0$ helyen, és így az $x = 2\pi$ helyen is, divergens. *Érdekes,¹ hogy az*

$$\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$$

intervallumban egyenletesen konvergens. Itt ε egy tetszőleges kicsiny (de rögzített) pozitív számot jelent.

Bizonyítás. Nevezük, egyszersmindenkorra, a (36) alatti Fourier-féle sor első g_1 tagját «első tagsoportnak», a következő g_2 tagját «második tagsoportnak», ..., a következő g_ν tagját « ν -dik tagsoportnak», (Itt $g_1, g_2, \dots, g_\nu, \dots$ a (37) alatt definiált számokat jelentik.)

A ν -dik tagsoport g_ν tagból áll. A csoport tagjainak első fele pozitív együtthatókkal bir. Ezt az első felét a tagoknak « ν -dik pozitív tagsoport»-nak fogom nevezni. A ν -dik tagsoport másik fele negatív együtthatókkal bir. Ezt a másik felét a ν -dik tagsoportnak « ν -dik negatív tagsoport»-nak fogom nevezni.

Megjegyzem, hogy «tagsoport» alatt némelykor a tagsoportot alkotó számok *összegét* is értem. Nem tartok félreértéstől ebben a tekintetben.

E szerint, formulával kifejezve, a « ν -dik tagsoport» képlete

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\cos (r+1) x}{n} + \frac{\cos (r+2) x}{n-1} + \dots - \frac{\cos (r+2n) x}{n} \right),$$

hol

$$n = 2^{\nu^2}, \tag{39}$$

$$r = g_1 + g_2 + \dots + g_{\nu-1} (= 2 \cdot 2^{1^2} + 2 \cdot 2^{2^2} + \dots + 2 \cdot 2^{(\nu-1)^2}).$$

A « ν -dik pozitív tagsoport» képlete

¹ L. V. cikkemet.

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{n}{x \cos (r+1) x} + \frac{\cos (r+2) x}{n-1} + \dots + \frac{\cos (r+n) x}{1} \right),$$

hol

$$\begin{aligned} n &= 2^{\nu^3}, \\ r &= g_1 + g_2 + \dots + g_{\nu-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

A « ν -dik negatív tagsoport» képlete

$$\frac{1}{\nu^2} \left(-\frac{\cos (r+n+1) x}{1} - \dots - \frac{\cos (r+2n) x}{n} \right),$$

hol

$$\begin{aligned} n &= 2^{\nu^3}, \\ r &= g_1 + g_2 + \dots + g_{\nu-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Tekintsük most már a (36) alatti Fourier-féle sornak egy

$$R_{p, q}(x) = \sum_{k=p}^{k=q} a_k \cos kx$$

maradékösszegét ($p < q$). Jelöljük ν_p -vel azon tagsoport indexét, melyhez az $R_{p, q}(x)$ összeg első tagja: az $a_p \cos px$ tag tartozik, és jelöljük ν_q -val azon tagsoport indexét, a melyhez az utolsó tag: $a_q \cos qx$ tartozik. (Esetleg lehet $\nu_p = \nu_q$, vagyis az $R_{p, q}(x)$ tagjai a (36) alatti sor ugyanazon tagsoportjához tartoznak.)

Most már $|R_{p, q}(x)|$ mindenesetre \leq mint a benne szereplő teljes pozitív tagsoportoknak és negatív tagsoportoknak az abszolút értékei együttvéve + két, esetleg föllépő, tagsoport-töredéknek az abszolút értéke. Minthogy pedig, ha $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, a (22) és (23) alatti egyenlőtlenségek alapján a ν -dik pozitív vagy negatív tagsoportnak az abszolút értéke (vagy ezen tagsoportok bármely töredékének abszolút értéke) kisebb mint

$$\frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{2\pi}{\varepsilon},$$

tehát

$$\begin{aligned} |R_{p, q}(x)| &< 2 \cdot \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\nu_p^2} + \frac{1}{(\nu_p+1)^2} + \dots + \frac{1}{\nu_q^2} \right) < \\ &< \frac{4\pi}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\nu_p^2} + \frac{1}{(\nu_p+1)^2} + \dots \text{ad. inf.} \right) < \\ &< \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\nu_p-1}. \end{aligned}$$

Mintthogy pedig ν_p a μ -vel együtt minden határon túl nő, tehát $|R_{p,q}(x)|$ tetszőleges kicsiny, ha csak p elegendő nagy és $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$.

Ezzel ki van mutatva, hogy a (36) alatti Fourier-féle sor az $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ intervallumban egyenletesen konvergens, bármilyen kicsiny legyen is a rögzített ε pozitív szám.

6. §. A Lebesgue-féle singularitás egy helyen.

15. A¹

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \quad (42)$$

végtelen sor egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallum minden helyén folytonos és 2π szerint periodikus függvény Fourier-féle sora. E Fourier-féle sor a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallum minden helyén konvergens. De nem egyenletesen konvergens egy olyan intervallumban, mely az $x=0$ helyet tartalmazza.

Bizonyítás. Legyen ε egy tetszőleges kicsiny (de rögzített) pozitív szám. Akkor az $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ intervallumban a (42) alatti sor konvergens. Sőt egyenletesen konvergens ezen intervallumban. Ennek bizonyítása, pontról-pontra, ugyanúgy intézhető, mint a (36) alatti sornak ugyanazon intervallumban való egyenletes konvergenciájának bizonyítása.

Mintthogy ε tetszőleges kicsiny, tehát a (42) alatti Fourier-féle sor² a $(0, 2\pi)$ intervallum belsejében mindenütt konvergens. De konvergens az $x=0$ helyen is, mert e helyen a

$$0+0+0+\dots$$

sorba megy át.

¹ L. V. cikkemet.

² A (42) alatti sor tényleg egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora. Ugyanis a (17) alatti egyenlőtlenség alapján a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \right)_{g_v}$$

sor $0 \leq x \leq 2\pi$ -re egyenletesen (és föltétlenül) konvergens. Tehát a 12. pont tétele alapján állításom bizonyítva van.

E szerint a (42) alatti Fourier-féle sor *minden* x értékre nézve konvergens.

Most kimutatom, hogy a (42) alatti sor az $x = 0$ hely környezetében a LEBESGUE-féle singularitást mutatja, vagyis hogy a $0 \leq x \leq \rho$ intervallumban nem-egyenletesen konvergens. Itt ρ jelent egy tetszőleges kicsiny (de rögzített) pozitív számot.

Tekintsük e végből a (42) alatti sornak ν -dik pozitív tagcsoportját: ¹

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\sin(r+1)x}{2^{r^3}} + \frac{\sin(r+2)x}{2^{r^3-1}} + \dots + \frac{\sin(r+2^{\nu^3})x}{1} \right), \quad (43)$$

$$r = 2 \cdot 2^{1^3} + 2 \cdot 2^{2^3} + \dots + 2 \cdot 2^{(\nu-1)^3}.$$

Ha a (42) alatti sor a $0 \leq x \leq \rho$ intervallumban egyenletesen konvergálna, akkor a (43) alatti összegnek *egyenletesen* kellene a zérushoz konvergálnia a $0 \leq x \leq \rho$ intervallumban, a midőn a ν minden határon túl nagyobbodik. Ez azonban nincsen így.

Tekintsük ugyanis (a ν -vel változó)

$$x = \frac{\pi}{2(r+2^{r^3})},$$

$$(r = 2 \cdot 2^{1^3} + 2 \cdot 2^{2^3} + \dots + 2 \cdot 2^{(\nu-1)^3})$$

helyet. (Ez a hely mindenesetre a $0 \leq x \leq \rho$ intervallumban van, ha csak ν elegendő nagy. E hely zérushoz konvergál, ha ν minden határon túl nagyobbodik.)

A (29) alatti egyenlőtlenség értelmében e helyen a (43) alatti összeg nagyobb, mint

$$\frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{2^{r^3}}{2} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\log 2) \cdot \frac{\nu^3 - 1}{\nu^2}.$$

Ezen érték azonban a ν -vel együtt minden határon túl na-

¹ A 14. pontban a (36) alatti sorra előbb megállapított elnevezéseket átviszzük a (42) alatti sorra. E szerint csak a (39), (40), (41) alatti formulákba a «cos» jel helyett a «sin» jelet kell írunk, hogy a (42) alatti sorra nézve megkapjuk a különböző tagcsoportok definícióját.

gyobbodik. Tehát a (43) alatti összeg *nem* konvergálhat növekedő ν -vel *egyenletesen* a 0-hoz a $0 \leq x \leq \rho$ intervallumban.¹

E szerint a (42) alatti Fourier-féle sor a $0 \leq x \leq \rho$ intervallumban nem lehet egyenletesen konvergens.

Megjegyzés. A (36) alatti sor példa a du Bois-Reymond-féle singularitásra, a (42) alatti sor példa a Lebesgue-féle singularitásra. Tekintsük most a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsort. A (36) alatti sor nem más, mint e hatványsor valós része a $z = e^{i\theta}$ egységkörön; a (42) alatti sor pedig nem más, mint e hatványsor képzetes komponense a $z = e^{i\theta}$ egységkörön. *E szerint a du Bois-Reymond-féle singularitás és a Lebesgue-féle singularitás rendre ugyanazon, egyszerű együtthatótörvénytől biró, hatványsornak valós és képzetes komponensén jelentkezhetnek, midőn ezen komponenseket a hatványsor konvergencia-körére nézve vesszük. A kétféle singularitás e két konjugált Fourier-féle soron ugyanazon helyen, a $\theta = 0$ helyen, lép fel.*

Megjegyzem még, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ hatványsor által jellemzett függvény a $|z| \leq 1$ tartományban mindenütt folytonos. (L. a 8. §-t.)

7. §. A du Bois-Reymond-féle singularitás mindenütt sűrűn elosztott helyeken.

16. Vegyük² a (36) alatti végtelen sort. Irjunk az első tagcsoportba x helyébe $1!x$ -et, a második tagcsoportba x helyébe $2!x$ -et, ..., a ν -dik tagcsoportba x helyébe $\nu!x$ -et, ... Ilyen módon egy új, egészen határozott végtelen trigonometrikus sor

¹ Bár a (43) alatti maradékösszeg a $0 \leq x \leq \rho$ intervallum minden egyes helyén a 0-hoz konvergál.

² L. IV. cikkemet.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x \tag{44}$$

áll elő.

(Formulával kifejezve:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1 ! k, & \text{ha } 1 \leq k \leq g_1, \\ \lambda_k &= 2 ! k, & \text{ha } g_1 + 1 \leq k \leq g_1 + g_2, \\ & \dots & \dots \\ \lambda_k &= \nu ! k, & \text{ha } g_1 + g_2 + \dots + g_{\nu-1} + 1 \leq k \leq g_1 + \dots + g_{\nu}, \\ & \dots & \dots \end{aligned}$$

A (44) alatti trigonometrikus sor egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek Fourier-féle sora.

E Fourier-sor az

$$x = \frac{m}{n} \pi, \tag{45}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

helyeken divergens.

Bizonyítás. A

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x \right)_{\eta_{\nu}} \tag{46}$$

végtelen sor a (18) alatti egyenlőtlenségre való tekintettel a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen (és föltétlenül) összehajtható. Tehát a 12. pont tétele értelmében a (44) alatti sor valóban egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora.

Vegyük most már egy

$$x = \frac{m}{n} \pi \tag{45}$$

helyet. E helyen a (44) alatti sor ν -dik pozitív tagcsoportjának az értéke, ha csak ν elegendő nagy, ugyanaz, mint az $x = 0$ helyen, vagyis

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{2^{1^{\nu}}} + \frac{1}{2^{2^{\nu}} - 1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right).$$

Mínt hogy ezen érték a ν -vel együtt minden határon túl nő, tehát a (44) alatti sor valóban az összes $x = \frac{m}{n} \pi$ helyeken divergens.

17. Megjegyzem, hogy a (44) alatti cosinus-sor konjugált sora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \lambda_k x \quad (47)$$

szintén egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a Fourier-féle sora. Ugyanis a (19) alatti egyenlőtlenség alapján a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \lambda_k x \right)_{g_\nu}$$

sor a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban egyenletesen (és föltétlenül) összetartó.

8. §. A konjugált Fourier-féle sorpárra vonatkozó singularitás; egy helyen és mindenütt sűrűn elosztott helyeken.

18. PRINGSHEIM vetette fel azt a kérdést, hogy egy a $|z| < 1$ körön belül konvergens és a $|z| \leq 1$ zárt tartományban mindenütt folytonos függvényt jellemző hatványsor lehet-e a $|z| = 1$ körön valahol divergens?

A kérdés azonos azzal a kérdéssel, hogy létezik-e olyan, egymással konjugált, párja a Fourier-féle soroknak, melyek mindketten egy-egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvényhez tartoznak és a mely Fourier-soroknak legalább az egyike egy bizonyos helyen (pl. a zérus helyen) divergens. A PRINGSHEIM-féle kérdésre a következő példával felelhetünk.

Vegyük a z komplex változónak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad (48)$$

hatványsorát.

Mínthogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0,$$

tehát a (48) alatti hatványsor a z komplex változó síkjában a $z = 0$ középponttal és egységnyi sugárral rajzolt kör belsejében konvergens és ugyanott a z komplex változónak egy reguláris függvényét állítja elő.

Azt állítom most már, hogy az ilyen módon az egységnyi sugarú kör belsejében definiált analitikai függvény egyenletesen-folytonosan megy át egy folytonos kerületi függvénybe, midőn a z független változó a kör kerületének pontjaihoz konvergál. Röviden: a (48) alatti hatványsor által jellemzett függvény folytonos a $|z| \leq 1$ tartományban.

Tekintsük ugyanis a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right)_{g_v} \tag{49}$$

végtelen sort, hol

$$g_1, g_2, \dots, g_v, \dots$$

megint a

$$2 \cdot 2^{1^3}, 2 \cdot 2^{2^3}, \dots, 2 \cdot 2^{v^3}, \dots$$

értékeket jelentik.

A (49) alatti sor a z komplex változó polinomjai szerint haladó sor. Mínthogy pedig az előző fejtegetések szerint e sor a $|z| = 1$ kör kerületén egyenletesen (és föltétlenül) konvergens, tehát, a harmonikus függvényeknek ismert tulajdonságai alapján, egyenletesen konvergens az egész $|z| \leq 1$ tartományban. Mínthogy pedig a kör belsejében a (49) alatti sor által definiált függvény szükségképen összeesik a (48) alatti sor által definiált függvénnyel (l. a (30) alatti egyenletet), tehát a (48) alatti sor által a $|z| < 1$ tartományban definiált függvény valóban folytonos a $|z| \leq 1$ tartományban.

A $z = 1$ helyen a (48) alatti hatványsor az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

divergens sorba megy át.

Mondhatjuk tehát:

A (48) alatti

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsor konvergens, ha $|z| < 1$ és összege a $|z| \leq 1$ tartományban mindenütt folytonos. Mégis előáll az a jelenség, hogy a hatványsor összetartási körének egy pontjában, nevezetesen a $z = 1$ helyen, divergens.¹

Egyébként a (48) alatti hatványsor a $z = 1$ pont kivételével a konvergenciakör kerületének minden egyéb pontjában konvergens. Sőt az előzőek alapján mondhatjuk, hogy a (48) alatti hatványsor a konvergenciakör minden

$$e^{i\theta}, \quad \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon$$

ívén egyenletesen konvergens. Itt ε jelent egy tetszőleges kicsiny (de rögzített) pozitív számot.

19. A (48) alatti hatványsor összetartási körének kerületén a szöben forgó singularitást egy pontban mutatja.

Tekintsük most a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \tag{50}$$

hatványsort, hol a_k megint a 13. pontban, és λ_k megint a 16. pontban definiált számokat jelentik.

A 16. és 17. pont alapján evidens a következő:

A

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \tag{50}$$

hatványsor a $|z| < 1$ értékekre nézve konvergens és összege a $|z| \leq 1$ tartományban mindenütt folytonos. De a hatványsor divergens minden

$$z = e^{\frac{m}{n} \pi i}, \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right)$$

pontban, melyek a $|z| = 1$ kör kerületét mindenütt sűrűn lepik el.

¹ L. IV. cikkemet.

A szóban forgó singularitás tehát a hatványsor konvergenciakerületének mindenütt sűrűn elhelyezett pontsokaságában is fölléphet.

Összefoglalva a 18. és 19. pont tartalmát:

Valamely analitikai függvény hatványsora akkor is lehet divergens az összetartási körén, ha e körre nézve egyenletesen folytonosan megy is át egy a körön mindenütt folytonos kerületi függvénybe; a hatványsor ilyen esetben az összetartási kör kerületének nemcsak egy izolált pontjában lehet divergens, hanem lehet divergens egy az összetartási kör kerületét mindenütt sűrűn ellepő pontsokaság minden pontjában is.

9. §. A Fourier-féle sor arithmetikai közepeire vonatkozó tételnek verifikálása az 5. §. példáján.

20. Egy véges és integrálható függvény Fourier-féle sora minden helyen, a hol a függvény folytonos, summabilis. Vagyis a Fourier-féle sor részletösszegeiből képezett

$$s_0(x), \frac{s_0(x) + s_1(x)}{2}, \dots, \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}, \dots$$

sorozat minden x -helyen, a hol $f(x)$ folytonos, konvergens és $f(x)$ -hez konvergál, mint határértékhez.

E tétel bizonyítása, mint ismeretes, nagyon egyszerű.

E tétel közlése óta (1900) igyekeztem egy alkalmas folytonos és divergens Fourier-sorral bíró függvényt találni, melynek arithmetikai közepein e tételt *individuális számítással* tudom bizonyítani. Más szóval igyekeztem olyan specziális $f(x)$ -et találni, melynek Fourier-féle során a tételt *verifikálni* lehet. Azt hiszem sokan érezhették egy ilyen numerikus, folytonos függvényhez tartozó, divergens Fourier-sor hiányát, melyen úgyszólván «látni» lehet az arithmetikai közepeknek a függvény értékéhez való konvergenciáját. Egy ilyen numerikus eset, ha elég egyszerű, mindenestre élenken illusztrálja az általános tételt.

A DU BOIS-REYMOND, SCHWARZ, LEBESGUE példáin e verifikálást nem tudtam keresztül vinni. Nem is hiszem, hogy ez e példákön könnyen lehetséges. Ámde az általam föllállított pél-

dákon e verifikáló számítás már tényleg egyszerűen végezhető. Különösen a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (36)$$

sor az, mely itt is kitünően beválk.¹ Ez egy mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-féle sora. E Fourier-sor az $x = 0$ helyen az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (51)$$

sorba megy át, mely *divergens*. Most már, *direkt számítással*, ki akarom mutatni, hogy az (51) alatti sor *arithmetikai közepei konvergens sorozatot alkotnak és $f(0) = 0$ -hoz konvergálnak mint határértékhez.*²

Előre bocsátom a következőt.

Tekintsük az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \quad (52)$$

véges összeget. (Ennek értéke egyenlő zérussal.) Ha úgy tetszik, az (52) alatti véges összeget végtelen sornak is fölfoghatjuk, ilyen értelemben:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + 0 + 0 + 0 + \dots \quad (52)$$

E sornak n -edik részletösszege

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1$$

tetszőleges nagy, ha n elég nagy. Azt állítom azonban, hogy az (52) alatti sor összes arithmetikai közepei (ezek mind pozi-

¹ III. cikkemben jeleztem már, hogy a (36) alatti példán a szóban forgó tétel verifikálása egyszerűen eszközölhető. Itt következik ennek részletes bemutatása.

² $f(0) = 0$. Ugyanis

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos x \right)_{g_v}, \\ 0 \leq x \leq 2\pi,$$

tehát

$$f(0) = 0 + 0 + \dots = 0.$$

tív számok) kisebbek 2-nél, bármilyen értéke is van az n pozitív egész számnak.

Bizonyítás. Jelöljük

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$$

-val az (52) alatti sor részletösszegeit.

(Tehát

$$\sigma_1 = \frac{1}{n}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}, \text{ etc.})$$

Három esetet különböztetek meg:

a) eset. $1 \leq k \leq n$. Akkor

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{k} &= \frac{\frac{k}{n} + \frac{k-1}{n-1} + \dots + \frac{k-(k-1)}{n-(k-1)}}{k} < \\ &< \frac{\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n-1} + \dots + \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)}}{k} = \\ &= \frac{1+1+\dots+1}{k} = \frac{k}{k} = 1. \end{aligned}$$

b) eset. $n < k \leq 2n$. Vagyis $k = n + r$, hol $0 < r \leq n$. Akkor

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{k} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{n+r}}{n+r} = \\ &= \frac{1}{n+r} \left(\frac{n+r}{n} + \frac{n+r-1}{n-1} + \dots + \frac{r+1}{1} - \frac{r}{1} - \frac{r-1}{2} - \dots - \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{n+r} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{r+\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^r \frac{r-\nu+1}{\nu} \right) = \\ &= \frac{1}{n+r} \left(\sum_{\nu=1}^r \frac{r+\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^r \frac{r-\nu+1}{\nu} + \sum_{\nu=r+1}^n \frac{r+\nu}{\nu} \right) = \\ &= \frac{1}{n+r} \left(\sum_{\nu=1}^r \frac{2\nu-1}{\nu} + \sum_{\nu=r+1}^n \frac{r+\nu}{\nu} \right) < \\ &< \frac{1}{n+r} (r \cdot 2 + (n-r) \cdot 2) = \frac{2n}{n+r} < 2. \end{aligned}$$

c) eset.¹ $2n < k < +\infty$. Vagyis $k = n + r$, hol $n < r < +\infty$.
Akkor

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{k} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{n+r}}{n+r} = \\ &= \frac{1}{n+r} \left(\frac{n+r}{n} + \frac{n+r-1}{n-1} + \dots + \frac{r+1}{1} - \frac{r}{1} - \frac{r-1}{2} - \dots - \frac{r-n+1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+r} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{r+\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^n \frac{r-\nu+1}{\nu} \right) = \frac{1}{n+r} \sum_{\nu=1}^n \frac{2\nu-1}{\nu} < \frac{2n}{n+r} < \\ &< \frac{2n}{2n} = 1. \end{aligned}$$

E szerint az (52) alatti sorra nézve valóban

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{k} < 2,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Ezután áttérek annak a bizonyítására, hogy az (51) alatti sor arithmetikai közepei a zérushoz konvergálnak.

Jelöljük

$$s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$$

-val az (51) alatti sor részletösszegeit. Legyen k az indexnek egy tetszőleges értéke. Osszuk fel a k értéket a következőképen:²

$$k = g_1 + g_2 + \dots + g_\nu + r,$$

hol

$$0 \leq r < g_{\nu+1}.$$

Akkor

$$\begin{aligned} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_k}{k} &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_k}{g_1 + g_2 + \dots + g_\nu + r} \\ &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{g_1} + s_{g_1+1} + \dots + s_{g_1+g_2} + \dots}{g_1 + g_2 + \dots} = \\ &= \frac{g_1 \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{g_1}}{g_1} + g_2 \frac{s_{g_1+1} + \dots + s_{g_1+g_2}}{g_2} + \dots}{g_1 + g_2 + \dots}. \end{aligned}$$

¹ A c) esetet csak a teljesség kedvéért tárgyalom. Szükségem nem lesz rá.

² Mint eddig is: $g_\nu = 2 \cdot 2^{\nu-1}$, ($\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty$).

Ámde az *a)* és *b)*-ben kifejtett egyenlőtlenségek alapján

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{g_1}}{g_1} < \frac{1}{1^2} \cdot 2$$

$$\frac{s_{g_1+1} + \dots + s_{g_1+g_2}}{g_2} < \frac{1}{2^2} \cdot 2$$

.....

$$\frac{s_{g_1+g_2+\dots+g_\nu+1} + \dots + s_{g_1+g_2+\dots+g_\nu+r}}{r} < \frac{1}{(\nu+1)^2} \cdot 2.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_k}{k} &< \frac{g_1 \cdot \frac{1}{1^2} \cdot 2 + \dots + g_\nu \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot 2 + r \cdot \frac{1}{(\nu+1)^2} \cdot 2}{g_1 + \dots + g_\nu + r} = \\ &= 2 \frac{\frac{g_1}{1^2} + \dots + \frac{g_\nu}{\nu^2} + \frac{r}{(\nu+1)^2}}{g_1 + \dots + g_\nu + r}. \end{aligned}$$

E tört ismert súlyponttétel alapján minden határon túl növekedő ν -vel (és így: minden határon túl növekedő k -val) a zérushoz konvergál.

Tehát

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_k}{k} = 0.$$

21. Ha $f(x)$ egy tetszőleges, mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvény, akkor az $f(x)$ -hez tartozó Fourier-féle sorok arithmetikai középértékei a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban *egyenletesen* konvergálnak az $f(x)$ -hez, mint határfüggvényhez. Én azt hiszem, hogy az arithmetikai középértékeknek ezen tulajdonsága is könnyen lesz *verifikálható* a (36) alatti példán. Csak a

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{n}$$

polynom arithmetikai közepet kell egy előleges vizsgálatnak alávetni.¹

¹ E paragraphussal III. czikkem 4. §-a hasonlítandó össze. Érdekes a $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx$, etc. sorokat tekinteni, midőn az α_k számok definíciójá-

Függelék. A Lebesgue-féle állandóknak egy új kifejezése.

Láttuk, hogy a

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right)_{g_v} \quad (38)$$

végtelen sor által jellemzett, mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvénynek a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (36)$$

Fourier-féle sora az $x = 0$ helyen divergens. Az $x = 0$ -ra nézve a (36) alatti sor az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

sorba megy át. E sor részletösszegei nem negatív számok, melyek között *tetszőleges nagy* értékűek is vannak, pedig a (38) alatti függvény, melyhez a (36) alatti sor, mint Fourier-féle sor tartozik, abszolút értékben minden x -re nézve kisebb, mint

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{6}{v^2}.$$

Legyen $f(x)$ egy a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban *véges* és integrálható függvénye az x független változónak. És legyen

$$|f(x)| \leq 1,$$

ha

$$0 \leq x \leq 2\pi.$$

Kérdezem: mi az $|s_n(x)|$ -nek felső határa, midőn $f(x)$ a most jellemzett $f(x)$ függvények összességét átfutja. Itt $s_n(x)$ jelenti az $f(x)$ függvénynek n indexű Fourier-féle részletösszegét,

nál (l. ezen dolgozat 4. §-át) *nem* a

$$2^1, 2^2, \dots, 2^v, \dots$$

számokat használjuk, *hanem* a

$$2^{1^2}, 2^{2^2}, \dots, 2^{v^2}, \dots$$

számokat.

n jelenti az indexnek egy bizonyos értékét és x a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumnak egy bizonyos helyét. Mint «Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier-sorok» című értekezésem 1. §-ában, LEBESGUE-után, kimutattam, ilyen felső határ létezik, független az x -helytől és értéke

$$\rho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt, \quad (53)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Mint hogy a felső határ független az x helytől, tehát szorítkozhatunk az $x = 0$ helyre. Akkor

$$\text{sign. sin}(2n+1) \frac{x}{2}, \quad (54)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$

azon függvény, melynek n indexű Fourier-féle részletösszege az $x = 0$ helyen abszolút értékben *nem kisebb*, mint bármely más, a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban az $|f(x)| \leq 1$ föltételnek eleget tevő függvény n indexű Fourier-féle részletösszegének az abszolút értéke az $x = 0$ helyen. Ezen (54) alatti függvénynek n -indexű Fourier-féle részletösszege az $x = 0$ helyen ugyanis épen egyenlő ρ_n -nel, a mint az a (3) alatti formulából tüstént következik.

Én e fontos

$$\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n, \dots$$

állandóknak, melyeket a Fourier-féle sor LEBESGUE-féle állandóinak neveztem, az asymptotikus kifejezését is meghatároztam. Azt találtam, hogy

$$\rho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n,$$

hol

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int_0^1 \log \Gamma(t) \cdot \cos \pi t dt,$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Itt $F(t)$ az EULER-féle függvényt jelenti.

A következő sorokban a ρ_n Lebesgue-féle állandónak egy új kifejezését akarom bemutatni.

Legyen

$$\text{sign. sin } (2n+1) \frac{x}{2} = l_0 + l_1 \cos x + \dots + l_\nu \cos \nu x + \dots \quad (55)$$

a $\text{sign. sin } (2n+1) \frac{x}{2}$ függvénynek a Fourier-féle sora. (Ez egy tiszta cosinussor, mert

$$\text{sig. sin } (2n+1) \frac{2\pi-x}{2} = \text{sign. sin } (2n+1) \frac{x}{2}.)$$

Akkor

$$\rho_n = l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_n.$$

E szerint csak az l_ν formuláját kell megállapítanom.

A Fourier-féle formula szerint

$$l_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign. sin } (2n+1) \frac{x}{2} \cdot \cos \nu x dx,$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots$$

Tehát

$$\begin{aligned} \pi l_\nu &= \left[\frac{\sin \nu x}{\nu} \right]_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} - \left[\frac{\sin \nu x}{\nu} \right]_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{2\pi}{2n+1}} + \\ &+ \left[\frac{\sin \nu x}{\nu} \right]_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{3 \cdot 2\pi}{2n+1}} - \dots + \left[\frac{\sin \nu x}{\nu} \right]_{\frac{2n \cdot 2\pi}{2n+1}}^{\frac{2n+1 \cdot 2\pi}{2n+1}} = \\ &= \frac{2}{\nu} (\sin t - \sin 2t + \sin 3t - \sin 4t + \dots - \sin 2nt)_{t=\frac{2\pi}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Ámde

$$\begin{aligned} &\sin t - \sin 2t + \dots + \sin (2n-1)t - \sin 2nt = \\ &= \frac{\sin nt \cos \frac{2n+1}{2} t}{\cos \frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

tehát

$$\pi l_\nu = -\frac{2}{\nu} \frac{\sin n \cdot \nu \frac{2\pi}{2n+1}}{\cos \nu \frac{\pi}{2n+1}} \cdot \cos \nu \pi.$$

De

$$\cos \nu \pi = (-1)^\nu,$$

és

$$\begin{aligned} \sin n \nu \frac{2\pi}{2n+1} &= \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \nu = \sin \frac{2n+1-1}{2n+1} \pi \nu = \\ &= \sin \left(\nu \pi - \frac{\nu \pi}{2n+1} \right) = -\cos \nu \pi \cdot \sin \frac{\nu \pi}{2n+1} = \\ &= -(-1)^\nu \cdot \sin \frac{\nu \pi}{2n+1}, \end{aligned}$$

tehát

$$\pi l_\nu = \frac{2}{\nu} \frac{\sin \nu \frac{\pi}{2n+1}}{\cos \nu \frac{\pi}{2n+1}} = \frac{2}{\nu} \operatorname{tg} \nu \frac{\pi}{2n+1}.$$

E szerint végre

$$\begin{aligned} l_\nu &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\nu} \operatorname{tg} \nu \frac{\pi}{2n+1}, & (56) \\ \nu &= 1, 2, 3, \dots \infty.^1 \end{aligned}$$

Még csak az l_0 -t kell kiszámítani.

$$l_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign.} \sin (2n+1) \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

¹ E formula tényleg minden pozitív egészszámú ν -re érvényes. A $\nu \frac{\pi}{2n+1}$ argumentum ugyanis sohasem lehet egyenlő $(2m+1) \frac{\pi}{2}$ -vel, a hol a $\operatorname{tg} x$ függvény singularis.

Mert ha

$$\nu \frac{\pi}{2n+1} = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

volna, akkor

$$2\nu = (2m+1)(2n+1)$$

volna, a mi lehetetlen.

Az n -edik Lebesgue-féle állandó számára tehát a következő érdekes alakot nyertem:

$$\rho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \operatorname{tg} \nu \frac{\pi}{2n+1}, \quad (57)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \infty.$$

Látjuk, hogy a ρ_n LEBESGUE-féle állandók az

$$y = \operatorname{tg} x$$

görbének $0 < x < \frac{\pi}{2}$ -re vonatkozó darabja által uralhatók.

Az hiszem nem lesz nehéz a ρ_n állandóknak ezen kifejtéséből tulajdonságaikat levezetni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 június 13.-án tartott üléséből.)

A β PERSEI PHOTOGRAPHIKUS FÉNYVÁLTOZÁSA ÉS A LEVEGŐ PHOTOGRAPHIKUS EXTINCTIÓJA.

TERKÁN LAJOS-tól.

A photographia sikeres alkalmazása a csillagászatban csakhamar oly módszerek megteremtését sürgette, melyekkel az állócsillagok fényességét legalább is a visualis módszerek pontosságával lehet megállapítani. Az első ily módszerek természetesen nem feleltek meg az összes szigorú tudományos követelményeknek. Extrafocalis felvételeket készítettek, melyek a különböző fényességű csillagokról különböző nagyságú körképeket adtak. A keletkező átmérők nagysága tehát a csillagok fényességének függvényeként volt felfogható egy és ugyanazon műszernél. Néhány csillag visualis fényességét elfogadva, csupán empirikus képleteket állítottak fel, melyekkel a lemez többi csillagának fényességét a lemezen kimérhető csillagkörök átmérőjéből számíthatták. E képletek pontossága elmaradt a visualis módszereké mellett, mert a képletek állandóit az önkényesen elfogadott visualis fényességekből határozták meg. Már elméletileg is jól kifejtett módszert teremtett meg K. SCHWARZSCHILD a csillagok által a lemezen előidézett sötétedésekből.¹ SCHWARZSCHILD vizsgálatai szerint a sötétedés növekménye arányos a fényerősség növekményével s a künn tartási időnek az egységhez közel eső hatványával, azaz:

$$ds = kt^p di, \quad (1)$$

¹ Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne. Publik. der v. Kuffner'schen Sternwarte. Schwarzschild. Über eine Interpolationsaufgabe der Aktinometrie. Schwarzschild. A. N. B. 172.

melyből

$$s = kt^p i. \quad (1^*)$$

Az (1*) egyenletet alkalmazva i és i_0 fényerőségekre nyerjük:

$$\frac{s}{s_0} = \frac{kt^p}{kt_0^p} \cdot \frac{i}{i_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^p \cdot \frac{i}{i_0}. \quad (2)$$

A (2) összefüggésbe hozható már a csillagrenddel, mert:

$$m - m_0 = -2.512 \log \frac{i}{i_0}. \quad (3)$$

E szerint az i és i_0 fényerőségeknek megfelelő fényességkülönbség

$$m - m_0 = 2.512 p \log \frac{t}{t_0} - 2.512 \log \frac{s}{s_0}. \quad (4)$$

A (4) alatti képlet már tüstént használható fényességkülönbségek megállapítására, mert a MARTENS-féle polarisatiós sötétedésmérővel a sötétedések a használatban levő visualis ZÖLLNER-féle photometer pontosságával kimérhetők. SCHWARZSCHILD a csillagok fényességéből egy nagyságrendet lefedett és a kinntartás idejét mindaddig változtatta, a míg az ily módon keletkező sötétedések az egy nagyságrend lefödése nélkül nyert sötétedésekkel teljesen egyenlők lettek. E kísérletekből úgy találta, hogy p értéke a különböző lemezfajták szerint 0.97—0.78 értékek között változik s hogy egy nagyságrendnyi fényességkülönbség elérésére szükséges idők viszonya 1 : 3 a csillagászati felvételekre igen alkalmas ultrarapid lemezekre. Emez utóbbi tapasztalata alapján igen kényelmes gyakorlati módszert fejtett ki. Egy és ugyanazon lemezre ugyanazon csillagokról egyszeres és háromszoros künntartással készített felvételt, melyen az egyes csillagok képei épen egy teljes nagyságrendben különböztek. A csillagok keltette sötétedéseket fokozatosan növekvő sötétedésű ékkel mérte ki a HARTMANN-féle mikrophotometeren és az egymáshoz tartozó sötétedések összefüggéséből kiszámította a csillagok fényességét.

Legyen a háromszoros künntartással készült csillagfelvételek

sötétedése s , mely a csillagok fényességének (m) valami φ függvénye, azaz:

$$s = \varphi(m) \quad (5)$$

Az egyszeres künntartással nyert sötétedések s' pedig $m+1$ nagyságrend φ függvényei lesznek, azaz:

$$s' = \varphi(m+1). \quad (6)$$

E függvények megfordításából:

$$\begin{aligned} m &= \Psi(s) \\ m+1 &= \Psi(s'). \end{aligned} \quad (7)$$

A (7)-ből:

$$\Psi(s') - \Psi(s) = 1, \quad (8)$$

mely egyenletből meghatározandó $\Psi(s)$. E feladat megoldására interpolációs úton meg kell állapítanunk s' és s sötétedések összefüggését. SCHWARZSCHILD eme relatio helyett

$$s' - s = \eta \left(\frac{s+s'}{2} \right) = \mu(T) \quad (9)$$

függvényt állapította meg, melylyel:

$$\Psi(T + \frac{1}{2}\eta(T)) - \Psi(T - \frac{1}{2}\eta(T)) = 1 \quad (10)$$

symmetrikus relatiohoz jutunk. Ebből $\eta(T)$ adott alakja $\Psi(T)$ ismeretéhez vezet.

Ha a sötétedések kimérésére készített fokozatos sötétedesű ék és a csillagfelvétel egy és ugyanazon lemezfajtából valók és előhívásuk is normális, akkor a tapasztalat szerint:

$$\eta(T) = 2 \frac{b-1}{b+1} (T-a) \quad (11)$$

alakban állítható elő. Az $\eta(T)$ emez alakja mellett a Ψ függvénynek Taylor-sorba fejtésével kapjuk $T = a$ helyen:

$$d \frac{d\Psi}{d(T-a)} \eta'(T) (T-a) + 2 \frac{1}{3!} \frac{d^3\Psi}{d(T-a)^3} \left(\frac{1}{2} \eta' \right)^3 + \dots = 1 \quad (12)$$

differentialegyenletet, melyet

$$\varphi = \frac{\log (T-a)}{\log b} \quad (13)$$

függvény elégít ki. E függvény behelyettesítésével nyerjük ugyanis:

$$\frac{2}{\log b} \left[\frac{b-1}{b+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^5 + \dots \right] = 1$$

azonosságot.

E módszer már az extrafocalis felvételeknél is igen jó eredményeket adott, bár a keletkező diffractiók gyűrűk nagyon megnehezítették a sötétedések pontos kimérését. E nehézséget is kitűnően elhárította SCHWARZSCHILD az által, hogy a lemezt elmés mechanizmussal oly mozgásoknak vetette alá, melyekkel a csillag majdnem focalis képe 1 mm² területet egyenletesen rajzolt be. Emez egyenletes sötétedésű képek kimérése már semmi kívánni valót sem hagyott.

SCHWARZSCHILD elmés sötétedési módszere az első photographikus eljárást is tökéletesebbé tette. Az extrafocalis körképek átmérői ép úgy felhasználhatók, mint a sötétedések, ha egy és ugyanazon lemezre két felvételt csinálunk egyszeres és háromszoros künntartással.

Új photographikus photometriai eljárás. Az előbbi photographikus fényességmeghatározások teljesen kifogástalanok volnának akkor, ha a levegő fénykioltó képessége minden színű csillagra teljesen egyenlő volna. Már a visualis légköri extinctio is lényegesen más a vörös színű és a kékesfehér csillagokra, annál jelentékenyebb a különbség a photographikusnál, különösen nagy zeníthtávolságban készült felvételeken, mert a levegő photographikus extinctiója majdnem háromszorosa a visualisnak. E hibaforrás mellett még egy nagy hátrányuk az előbbi módszereknek az, hogy a változó csillagok fényváltozásának kísérésében óriási munkaidő vész el kevés eredményért és hogy az algotypusú csillagok fénymérésére nem is alkalmazható. Igen szükséges tehát oly módszerről gondoskodni, mely az előbbi módszerek előnyeit tartalmazza, hátrányaiktól pedig egészen mentes. Már a mult évben tettem erre kísérletet annyiban, hogy oly lemezszekrényt készítettem, melylyel egy és

ugyanazon lemezre 15 napszinképet vehettem fel. E felvételen az egyszeres és háromszoros künntartású szinkép egymásután készült úgy, hogy a két felvétel nem tartott tovább a legérzékenyebb lemeznél sem 4 percznél. Ennyi idő alatt pedig extinctiováltozásról nem is beszélhetünk. Ezen első két felvétel szolgáltatta ama skálát, melylyel a többi egyenlő künntartású felvételek fenyességét hullámhossz szerint megállapíthattam.

Ezen eljárást alkalmaztam csillagfelvételekre is. E célra oly lemezszekrényt csináltattam, melylyel a lemezre a SCHEINER-féle sensitometerrel egyszeres és háromszoros künntartással fokozatos sötétedésű ékeket vettem fel a csillagfelvétel elkészülte után. A lemezszekrényre ugyanis skála készíthetésére kihuzókat csináltattam úgy, hogy a fény csak a kihuzólap által elfödhető felületre hathat. Két ily kis kihuzható lap van a kazettán, hogy a lemez megfordítása által két egyszeres és két háromszoros künntartású skálát készíthessek. A fényforrás ugyanis benzinyertya, melynek lángmagassága szabályozható ugyan, de hosszabb idő után mégis intenzitásbeli növekedés állhat be, melyet a négy skála következő egymásutánjával küszöbölhettem ki: először az egyszeres, aztán a két háromszoros, végül a második egyszeres künntartású skálát készítettem el. Az így nyert ékfelvételek sötétedéseit a HARTMANN-féle mikrophotométerrel kimerve, a (11) alatti $\gamma(T)$ függvényt és a (13) alatti $m = \mathcal{F}(T)$ magnitudo függvényt szerkesztettem meg, melyekkel a lemezre már előbb felvett csillagok sötétedéseit és magnitudoit a leg-tökéletesebb módon számíthattam ki. E módszernek ugyanis óriási előnye még abban is nyilvánul, hogy minden egyes észlelési napra a napi extenctiót is pontosan megállapíthatjuk egy és ugyanazon lemezre felvett két különböző időpontban (legalább $1\frac{1}{2}$ órai különbséggel) készült csillagfelvételek magnitudokülönbségeiből, a mi az aznap készült csillagfelvételek fenyességét kétségkívül igen nagy pontossággal adja meg.

E módszerrel nyert megfigyeléseimből az astrophotometriának egyik legfontosabb tárgyát, a β Persei fényváltozásának photographikus követését bátorokodom a Tekintetes M. T. Akadémia elé terjeszteni, mert ezzel nemcsak módszeremet mutathatom be, hanem a β Persei legelső photographikus fénygörbéjét

is elég terjedelmes photographikus, légköri extinctiovizsgálattal együtt.

Két ízben követtem β Perseit a minimumban, 1910 márczius 9.-én és márczius 12.-én. Az első alkalommal igen kedvező időben kilencz felvételt készítettem, másodszer már csak három lemezt használhattam a tünemény kezdetén nagyon zavaró felhők miatt. Mind a 12 lemezre három egyszeres künutartású felvételt készítettem, hogy az így nyert három kép sötétedésének középértékével az extinctiomeghatározás és a fénygörbe biztosabb alapon nyugodjék. A magnitudo kiértékesítését, illetve az egyik lemezről a másikra való átvitelét nem zavarta semmi, mert az öszes lemezek ugyanakkora künntartással, a benzinyertya ugyanakkora lángmagassága mellett kaptak skálákat. A skálákat létesítő fényforrás fényességét a skála legsötétebb szélén önkényesen megválasztva, a különböző zeníthtávolságoknál észlelt magnitúdók különbségeit felhasználhattam extinctiomeghatározásra, melyből β Perseire igen megbízható fényességeket kaptam.

A lemezen kimért csillagokat, a felvételek idejét és a csillagok zeníthtávolságait az I. táblázat adja.

Az $\eta(T)$ függvényt nem határoztam meg minden lemezre külön-külön, mert — a skálák megvilágítása egyidejű lévén — mindegyikre azonos $\eta(T)$ volt várható.

A 3., 4., 5., 8., I., II. és III. felvétel 4 skálájából a következő sötétedési adatokat kaptam:

3. felvétel		4. felvétel		5. felvétel	
s	s'	s	s'	s	s'
51·0	39·7	50·6	39·7	49·0	40·4
48·7	39·4	50·3	37·8	47·0	59·6
		47·8	37·4	45·6	39·3
47·7	38·0	47·0	37·2	43·7	37·8
44·8	36·3	45·3	36·0	41·4	35·4
42·6	35·3	44·0	35·4	39·7	34·3
40·4	34·7	43·7	34·4		
38·0	33·6	40·0	33·7		
35·4	31·8	38·6	33·2		

8. felvétel		I. felvétel		II. felvétel		III. felvétel	
<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>
50·2	41·8	48·6	41·4	54·6	44·0	55·4	46·2
47·8	38·4	46·7	37·3	52·4	42·8	51·4	43·2
46·2	38·0	44·7	36·2	51·4	42·2	49·3	41·8
44·0	34·4	42·8	34·8	48·8	40·0	47·8	39·4
40·7	32·0	40·4	32·4	47·3	38·4	44·4	36·8
				44·3	36·7	40·8	34·1

Itt *s* és *s'* a megfelelő háromszoros, illetve egyszeres künn-tartással nyert két skála azonos helyeiből nyert középérték. A skálák azonos helyeinek kimérésére a mikrophotometer mérő-lécze szolgált.

Az 1., 2., 6., 8. és 9. lemez skálaértékei pedig a követ-kezők:

1. felvétel		2. felvétel		6. felvétel		8. felvétel		9. felvétel	
<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>
46·0	38·8	58·4	47·3	59·6	47·9	50·2	41·8	45·4	38·7
45·4	37·2	56·4	46·3	59·0	46·9	47·8	38·4	44·0	37·0
43·5	35·7	55·4	44·7	58·3	47·1	46·2	38·0	42·5	35·1
		53·4	44·0						

Itt *s* és *s'* sötétedések csak egy-egy skála azonos helyei-nek sötétedése. Ezen értékeket az $\eta(T)$ függvény megszerkesz-tésénél nem is vettem figyelembe, mert az előbbi homogen cso-port e függvényt a második csoportra is kifogástalanul alkal-mazhatónak adta, a mi várható is volt azonos lemezekre azonos künn-tartás mellett.

Az első csoportból kapjuk:

$$\eta(T) = \frac{1}{3} \cdot (T - 17) \quad (14)$$

függvényt, mely

$$m = 6 \cdot 843 \log (S - 17) \quad (15)$$

magnitudo-függvényhez vezet. A (15)-tel számítottam a csillagok fényességét az egyes lemezeken, a skálák legsötétebb éles szélét véve minden lemezen összehasonlítóul. A skála ezen helyének fényességét pedig oly módon értékesítettem ki, hogy a lemért

sötétedéseket a skála egyes helyeitől függő értékeknek fogva fel, megkerestem e görbén a zérus (kezdő) távolsághoz tartozó helyesbített sötétedési értéket, melynek fényessége természetesen minden egyes lemezre a (15)-tel lett számítva.

A skála e helyének fényességét, a lemezen levő csillagok sötétedését, illetve az e sötétedésekhez tartozó fényességet, majd a skála szélével nyert összehasonlítás adta fényességet a II. táblázatban foglaltam össze. Emez utóbbi redukált fényesség a csillagok valódi fényessége az összehasonlításra használt benzinyertya fényességéhez viszonyítva a skála szélén. A csillagok fényessége a skálák magnitudo-függvényével számítottak. Ha tehát e fényességi adatokból a skálaszél fényességét levonjuk minden egyes lemeznél külön-külön, akkor az összes lemezek egy magnitudo-rendszerre vonatkoznak már, melynél már csak a kezdő magnitudo érték önkényes.

A csillagok eme redukált fényessége az észlelt zenithtávolságokhoz tartozó fényesség, melyből a zenithalis fényességet az extinctio levonásával nyerjük. A photographikus légköri extinctiót a potsdami visualis extinctio 2.5—3-szorosának szokták venni a reductióban. Ezen eljárást nem követtem, mert a II. táblázat adataiból módomban volt az extinctio kiszámítása.

A Laplace-féle extinctio-elmélet szerint a z zenithtávolság mellett észlelt m fényesség:

$$m = m_0 - \frac{\log A}{0.4} \left| \frac{a_z}{a_0} \sec z - 1 \right|, \quad (16)$$

a hol m_0 a zenithalis fényesség, A az extinctio, a_z a refractio együtthatója. Az utóbbit minden egyes zenithtávolságra ismerjük.

Az extinctio együtthatójának megállapítása végett képeztem 6—1, 6—2, 6—3; 7—1, 7—2, 7—3, 7—4; 8—1, 8—2, 8—3, 8—4, 8—5; 9—1, 9—2, 9—3, 9—4, 9—6, 9—7; I—1, I—2, I—3, I—4, I—5; II—1, II—2, II—3, II—4, II—5; III—1, III—2, III—3, III—4, III—5, III—6 felvételek között mutatózó fényességkülönbségeket minden egyes csillagra, kivéve a β Perseit. Ily módon az A meghatározására 326 egyenletet nyertem. Ezen egyenleteket azonban a csillagok színe szerint

II. Táblázat.

A csillag jelölése B. D.	1			2			3			4			5			6		
	sötételés	fényesség	red. fényesség	sötételés	fényesség	red. fényesség	sötételés	fényesség	red. fényesség	sötételés	fényesség	red. fényesség	sötételés	fényesség	red. fényesség	sötételés	fényesség	red. fényesség
o																		
38·630	36·1	8·76	1·32	44·1	9·81	1·29	38·6	9·14	1·35	37·5	8·98	1·62	36·8	8·88	1·73	42·1	9·58	1·99
39·681	38·0	9·04	1·04	48·3	10·23	0·97	39·8	9·29	1·20	40·1	9·34	1·36	39·7	9·28	1·33	44·3	9·83	1·74
37·646	39·7	9·28	0·80	48·4	10·24	0·86	41·1	9·46	1·03	40·7	9·41	1·19	39·6	9·27	1·33	46·2	10·02	1·55
33·395	42·8	9·66	0·42	52·0	10·56	0·54	40·8	9·42	1·07	40·8	9·42	1·18	38·1	9·06	1·55	—	—	—
34·381	48·7	10·27	—0·19	60·8	11·23	—0·13	46·1	10·02	0·47	44·5	9·85	0·75	43·6	9·75	0·86	—	—	—
31·642	45·4	9·95	0·13	56·8	10·95	0·15	47·9	10·20	0·29	49·6	10·35	0·25	47·1	10·12	0·49	53·8	10·72	0·85
31·666	52·9	10·64	—0·56	63·9	11·44	—0·34	56·6	10·94	—0·45	51·3	10·50	0·10	52·0	10·56	0·05	62·0	11·31	0·26
35·775	44·4	9·85	0·23	59·5	11·14	—0·04	47·6	10·18	0·31	46·8	10·09	0·51	47·1	10·12	0·49	52·6	10·61	0·96
39·895	54·7	10·79	—0·71	65·4	11·53	—0·43	57·3	10·98	—0·49	52·3	10·60	0·00	52·4	10·60	0·01	64·1	11·45	0·12
44·631	37·5	8·98	1·10	45·5	9·95	1·15	38·2	9·07	1·42	39·1	9·20	1·40	38·5	9·11	1·50	45·1	9·92	1·65
42·815	42·8	9·66	0·42	54·9	10·81	0·29	43·6	9·75	0·74	44·7	9·87	0·73	44·5	9·85	0·76	50·0	10·40	1·17
41·395	44·6	9·86	0·22	57·5	11·00	0·10	45·7	9·98	0·51	44·5	9·85	0·75	43·3	9·72	0·89	51·6	10·53	1·04
β Persi	54·4	10·76	—0·68	64·1	11·45	—0·35	55·0	10·81	0·32	49·8	10·37	0·23	49·9	10·38	0·23	60·0	11·18	0·39
A reductióra használt skálaszél fényessége.																		
10·08			10·98			10·49			10·60			10·61			11·57			

A csillag jelölése B. D.	7		8		9		I		II		III						
	sötétedés	fényesség	sötétedés	red. fényesség	sötétedés	red. fényesség	sötétedés	red. fényesség	sötétedés	red. fényesség	sötétedés	red. fényesség					
α																	
38-630	39-0	9-19	1-75	32-6	8-16	2-32	33-0	8-24	2-71	34-4	8-49	1-90	35-6	8-70	2-08	—	—
39-681	40-6	9-40	1-54	33-9	8-40	2-08	34-3	8-47	2-48	35-2	8-62	1-77	36-0	8-75	2-03	—	—
37-646	40-1	9-33	1-61	33-6	8-35	2-13	33-4	8-31	2-64	36-3	8-80	1-59	36-0	8-75	2-03	—	—
33-395	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
34-381	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
31-642	47-1	10-12	0-82	38-5	9-12	1-36	39-0	9-19	1-76	41-8	9-54	0-85	42-1	9-58	1-20	41-0	9-45
31-666	57-7	11-02	-0-08	47-0	10-11	0-37	46-6	10-07	0-88	49-3	10-34	0-05	—	—	—	46-3	10-04
35-775	48-7	10-27	0-67	40-2	9-35	1-13	40-8	9-42	1-53	41-5	9-51	0-88	42-3	9-60	1-18	42-0	9-57
39-895	60-2	11-19	0-25	50-0	10-63	0-05	53-8	10-72	0-23	54-5	10-77	-0-38	55-0	10-81	-0-03	55-3	10-84
44-631	40-2	9-35	1-59	32-8	8-21	2-27	35-0	8-59	2-36	36-4	8-81	1-53	36-4	8-82	1-96	36-4	8-82
42-815	46-5	10-06	0-88	39-0	9-20	1-28	39-2	9-21	1-74	40-4	9-37	1-02	41-0	9-45	1-33	41-0	9-45
41-395	45-3	9-94	1-00	36-6	8-85	1-63	—	—	—	39-0	9-19	1-20	39-1	9-20	1-58	—	—
β Persei	54-7	10-79	0-15	48-3	10-24	0-24	51-0	10-73	0-22	55-0	10-81	-0-42	57-8	11-02	-0-24	56-6	10-95
A reductióra használt skálászel fényessége.																	
	10-94			10-48			10-95			10-39			10-78				10-98

3 csoportba használtam fel. Már SCHWARZSCHILD megállapította, hogy a photographikus—visualis magnitudo-különbség a legnagyobb és positiv előjelű a vörös és sárgás színű csillagokra, e különbség elenyésző a sárgásfehér csillagoknál, elég nagy negatív érték a kékesfehér csillagoknál. E tapasztalatra támaszkodva képeztem az 1. felvétel és a csillagok visualis fényessége között levő különbségeket:

41°395	38°630	39°681	37°646	33°395	34°381
2.15	2.48	3.84	3.78	4.68	3.50
31°642	31°666	35°775	39°895	44°631	42°815
3.72	3.70	4.09	3.87	2.92	3.61.

E különbségek szerint a következő 3 csoportba foglaltam a csillagokat:

1. csoport	2. csoport	3. csoport
38°630	39°681	37°646
44.631	33.395	34.381
41.395	35.775	31.642
	39.895	31.666
		42.815

Az első csoportbeliek a vöröses, sárgás színű csillagok, a 2. csoportbeliek a fehéres, a 3. csoportbeliek a sárgásfehér színű

Az első csoportban 86 egyenletből:
csillagok.

$$A_{RG} = 0.6378$$

együtthatót, a másodikban 108 egyenletből:

$$A_w = 0.5788$$

értéket, a harmadikban 132 egyenletből:

$$A_{GW} = 0.6025$$

extinctiós együtthatót nyertem. E 326 megfigyelésből:

$$A_K = 0.6037$$

közép extinctiós coefficienshez jutottam, melylyel a III. táblázatban összeállított photographikus extinctiót számítottam.

III. Táblázat.

A photographikus extinctio magnitudóban.

Zenith-távolság	Extinctio	Zenith-távolság	Extinctio
0°	0·00	54°	0·38
10	0·01	55	0·41
20	0·04	56	0·43
30	0·09	57	0·46
31	0·09	58	0·48
32	0·10	59	0·51
33	0·11	60	0·54
34	0·11	61	0·57
35	0·12	62	0·61
36	0·13	63	0·65
37	0·14	64	0·69
38	0·15	65	0·74
39	0·16	66	0·79
40	0·17	67	0·86
41	0·18	68	0·92
42	0·19	69	0·98
43	0·20	70	1·04
44	0·21	71	1·12
45	0·23	72	1·22
46	0·24	73	1·31
47	0·26	74	1·41
48	0·27	75	1·54
49	0·29	76	1·68
50	0·30	77	1·85
51	0·32	78	2·03
52	0·34	79	2·24
53	0·36	80	2·50
54	0·38		

Az A együttható tehát színről színre más. Az extinctio tehát leginkább a kékesfehér csillagokat, legkevésbé a vörös színűeket gyengíti, miként a visualis fényességnél is tapasztalható ez. A visualis magnitudoznál a különböző színű csillagokra nincs lényeges befolyással az extinctio különbözősége, de a photographikus fényességeknél már tekintélyes e hatás, miként ez az alábbi adatokból kiviláglik. Számítottam ugyanis a két szélső

A értékkel $z = 60^\circ$, 70° és 80° -nál az extinciót és a következő eredményeket kaptam:

	$z = 60^\circ$	$z = 70^\circ$	$z = 80^\circ$
<i>RG</i> színű csillagoknál	0·49	0·93	2·25
<i>W</i> „ „	0·59	1·13	2·74.

Ezen adatok tehát világosan mutatják, mennyire helytelen, ha kis magasságokban a photographikus magnitudót a SCHWARZSCHILD-féle eljárással akarjuk megállapítani és mennyivel jobb, ha a magnitudoszámításra szolgáló skálát a lemezre rávezetjük.

A felhasznált csillagok zenithalis fényességét a IV. táblázatba foglaltam. E csillagok extincióját a III. táblázatból vettem.

E táblázatba foglalt photographikus fényességet úgy kaptam, hogy a $31^\circ 666$ csillag potsdami visualis fényességét ($3\cdot14$) photographikusnak is elfogadtam. E photographikus fényességnek a visualissal való összehasonlításából a színekre is biztos adatokat nyerünk. A «Közép» rovatban adott potsdami színjelzést egészen jól igazolják photographikus fényességeink, csupán a $33^\circ 395$ csillagnál kaptam ellenkező irányú eltérést, melyből e csillag színére határozottan a fehér (*W*) jelzést kell használnunk. Ily eltéréseket SCHWARZSCHILD is kapott, a min nem is csodálkozhatunk, hisz gyengébb csillagnál nagyon bizonytalan a szín megítélése.

Kiszámítottam ezután minden egyes csillagra egy megfigyelés középhibáját és a középérték valószínű hibáját, hogy bemutathassam e módszer várható pontosságát.

IV. Táblázat.

Csillag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	I	II	III	Potsdami fényesség	Közép	Photogr. fényesség
α 38-630	1.12	1.00	0.97	1.13	1.16	1.18	0.70	0.99	1.03	0.90	0.62	—	—	0.98 RG	4.77
39-681	0.68	0.83	0.80	0.85	0.71	0.92	0.47	0.71	0.75	0.77	0.55	—	4.88	0.73 IV	4.52
37-646	0.56	0.53	0.58	0.61	0.64	0.59	0.36	0.53	0.57	0.44	0.29	—	4.58	0.52 WG	4.31
33-395	0.02	0.00	0.31	0.18	0.28	—	—	—	—	—	—	—	5.10	0.16 WG	3.95
34-381	0.56	0.64	0.23	0.20	0.34	—	—	—	—	—	—	—	3.31	0.40 W	3.39
31-642	0.05	0.09	0.05	0.19	0.05	0.12	0.16	0.09	0.12	0.07	0.18	0.35	3.85	0.07 GW	3.72
31-666	0.72	0.56	0.75	0.31	0.45	0.42	0.98	0.79	0.63	0.80	—	0.77	3.14	0.65 GW	3.14
35-775	0.10	0.22	0.05	0.17	0.07	0.41	0.04	0.20	0.37	0.22	0.19	0.08	4.32	0.13 W	3.92
39-895	0.88	0.60	0.72	0.29	0.37	0.36	0.85	0.70	0.73	0.95	0.84	0.91	3.16	0.68 GW	3.11
44-631	0.93	0.92	1.12	1.02	1.03	1.06	0.84	1.33	1.23	0.88	0.96	0.91	4.02	1.02 G	4.81
42-815	0.30	0.12	0.51	0.43	0.38	0.69	0.27	0.53	0.84	0.45	0.51	0.51	4.03	0.46 WG	4.25
41-394	0.12	0.34	0.06	0.00	0.04	0.20	0.58	0.38	—	0.27	0.58	—	2.37	0.26 G	3.53
β Persei	0.87	0.61	0.47	0.23	0.32	0.34	0.80	0.92	1.22	1.30	1.54	1.60	—	—	—

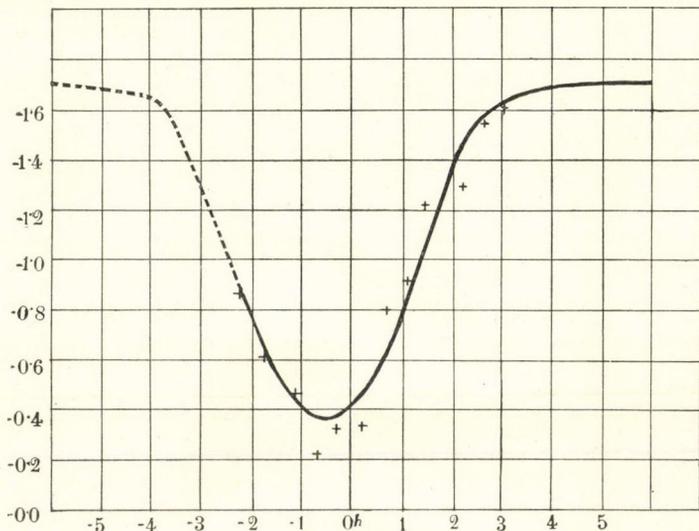
V. Táblázat.

Csillag <i>B D</i>	Egy megfigyelés középhibája	A középérték valószínű hibája
°		
38·630	± 0·20	± 0·06
39·681	± 0·13	± 0·04
37·646	± 0·11	± 0·03
33·395	± 0·14	± 0·06
34·381	± 0·20	± 0·09
31·642	± 0·13	± 0·04
31·666	± 0·20	± 0·06
35·775	± 0·17	± 0·05
39·895	± 0·23	± 0·07
44·631	± 0·15	± 0·04
42·815	± 0·19	± 0·05
41·395	± 0·21	± 0·07

Már ezen értékek is a várható pontosság határain belül vannak, de feltétlenül jobb eredményt értem volna el, ha az extinciót a mélyebb helyeken a helyes együtthatóval számítottam volna.

Ezek után megállapíthattam a β Persei photographikus fénygörbéjét is. HARTWIG a «Katalog und Ephemeriden veränderlicher Sterne»-ben 1910 márczius 9.-én $10^h 9^m$ -ra, márczius 12.-én $7^h 58^m$ -ra adja a minimum idejét. Az első alkalommal észlelt 9 értéknek felhasználásából azt találtam, hogy a minimum körülbelül 40 perczel előbb következett be. Ezt számításba véve, a márczius 12.-i 3 megfigyelést szintén beilleszthettem a fénygörbébe, melynek alakját ily módon az alábbi képen kaptam meg. E szerint a β Persei fényváltozásának intervalluma 1·42 magnitudo és pedig 2·09-től 3·51 változik, ha a *BD* 31°666 csillag potsdami (3·14) fényességét itt is felhasználom photographikusnak. A nyert fénygörbe alakja egészen jól vág a visuallissal, csupán az intervallum nagyobb valamivel. A jövőben e megfigyeléseket — sűrűbb hálózattal vezető okulárt alkalmazva —

egy és ugyanazon lemezen hajtom végre, a mi kétségtelenül még pontosabb eredményt fog szolgáltatni.



Végül még megjegyzem, hogy e módszer kitűnően alkalmazható a Holdra, a Nap foltjaira, a bolygókra és üstökösökre is. A Halley-üstökösnél e módszer alkalmazása folyamatban is van. A Holdra való alkalmazás a Hold hegyeinek magasságához újabb meghatározó eszközt fog nyújtani.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1910 június 13.-án tartott üléséből.)

