50639

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA.

SZERKESZTI

KŐNIG GYULA
OSZTÁLYTITKÁR.

A VÁCI KEGYES-TANITÓRENDI FŐGIMNÁZIUM TANÁRI KÖNYVTÁRA

TIZENNEGYEDIK KÖTET.
1896.

A VÁCZI KEGYES TANÍTÓRENDI FŐGIMNÁZIUM TANÁRI KÖNYVTÁRA 1883

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1896.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM.

Lap

Abt Antal: A moraviczai vasércztelepben előforduló természetes mágnesekről ... 33
Csiky János: A sima izomsejtek idegvégződése ... 299
Daday Jenő: A magyar fauna édesvízi fonálférgei ... 402
— Adatok a tátrai tavak mikrofaunájának ismeretéhez ... 416
B. Eötvös Loránd: Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köréből ... 221
Gruber Nándor: A Fermat-féle congruentia elméletéhez ... 22
Hegyfoky Kabos: Az alsó és felső légáramlatok a magyar alföld közepén 176
Herzfelder Armand Dezső: Cementes János, XVI. századi magyar chemikus 438
Konek Frigyes: Az asymmetrikus meta nitrosalicylsav néhány új származéka ... 16
— China alkaloidák hydroszármazékai ... 50
Korda Dezső: Egy elektromos fénytüneményről ... 211
Kosutány Tamás: Ujabb adatok a növényi fehérje képződéséhez ... 1
— Erjedéstani tanulmányok ... 12
— Súly- és térfogatváltozás a szeszes erjedésnél ... 367
Kövesligethy Radó: Perturbatiók többtagú bolyórendszerben ... 323
Lengyel Béla: Adatok a calcium chemiájához ... 42
Mihalkovics Géza: Vizsgálatok az orrnak és járulékos üregeinek fejlődéséről 56
Rados Gusztáv: Adjungált négyzetes alakok ... 26
— Az adjungált bilinear alakok elméletéhez ... 165
Réthy Mór: A legkisebb actio elvéről és a Hamilton-féle elvről ... 267
Rigler Gusztáv: A Duna vize chemiai és bakteriologiai sajátságai Budapest fölött, mellett és alatt, különös tekintettel a napfény és az üllepedés hatására a folyam tisztulására ... 104
Schuller Alajos: A Röntgen-féle sugarak magyarázatáról ... 145
Strausz Ármin: A ritkitás fokának befolyása a Röntgen-féle tüneményekre 215
Szüts Miklós: Az egyenes tengelyű gerendák külső erőinek és elhajlásának elméletéről ... 85
Than Károly: A kiegyenlítő gazometrikus módszerről ... 150
Vályi Gyula: Többszörös involutio ... 381

G 44.



UJABB ADATOK A NÖVÉNYI FEHÉRJE KÉPZŐDÉSÉHEZ.

KOSUTÁNY TAMÁS l. tagtól.

A növényi fehérje képződésére vonatkozólag épen egy év előtt tartott székfoglaló értekezésem * alkalmával volt szerencsém kisérleteim eredményét beterjeszteni.

Tekintettel egy részről a kérdés rendkivüli fontosságára, továbbá arra, hogy több pontra nézve mult évi kisérleteim nem adtak kielégitő választ, szükségesnek láttam a kisérleteket ismételni; részint azért, hogy mult évi következtetéseim mintegy felülvizsgáltassanak, részint, hogy különösen a víz- és czukor-tartalom éjjel-nappali változását is megfigyelhessem.

A vizsgálatok ugyanazon Riparia sauage-szőlőkön május 8-tól okt. 23-ig megszakitás nélkül folytak és pedig minden két hétben, s igy míg a mult évben csak 8, ez évben 20 megfigyelés történt: a szőlő leveleinek fejlődése kezdetétől késő őszig, a levél hullatásáig.

A vizsgálatot ép úgy végeztem, mint az elmult évben, s még nagyobb pontosság és biztosság elérhetése czéljából az adatok legnagyobb része 3—3 pontos meghatározás átlaga, s csak az esetben vontam az átlagot két számból, ha valamely elemzés munka közben tö kre ment, mi a Kjeldahl-féle nitrogen meghatározásoknál a kénsavval való főzés közben néha megtörtént.

A mult évi meghatározások csak annyiban változtak, hogy az ammoniák, az amid-nitrogen és salétromsav meghatározáso-

* Math. és Term.-tud. Ért. XII. köt. 428. lap.

kat ez alkalommal elhagytam. Ezen meghatározások ugyanis nem tűrik a szigorú kritikát, s a mult évi első közleményekben közölt adatok csak azért veendők figyelembe, mert szigoruan azonos viszonyok között végeztetvén, ha nem is mutatják a tényállást a kellő szabatossággal, de egymással mégis összehasonlíthatók. Ezek helyett a czukortartalmat, nedvességtartalmat, savtartalmat és hamútartalmat határoztam meg. A czukortartalom invert czukornak számíttatott s Fehling folyadékkal lett titrálva. A savtartalmat $^1/_{10}$ normal nátron-lúggal titráltam és borkősavnak számítottam. A hamútartalomra vonatkozó adatok egyelőre csak nyers hamút jelentenek, a mint az az elhamvasztás után leméretett; egyéb elfoglaltatásom nem engedte annak feldolgozását, azonban az anyag el van téve s később szándékozom a hamú alkotó részekre vonatkozó jelentésemet előterjeszteni.

A szóban forgó vizsgálatok tehát a következő szám-adatokat eredményezték:

I. tábla.

A vizsgálat ideje	Viztartalom %	Összes nitrogen %	Fehérje nitrogen %	Czukor %	Sav %	Hamu %	Összes nitrogen %	Fehérje nitrogen %	Czukor %	Sav %	Hamu %
	a fris anyagban						a száraz anyagban				
Május 8.-án regg. 9 ó. egész levél	84·82	0·8067	0·6335	0·783	1·82	1·432	5·314	4·173	5·158	11·98	9·43
« 28.-án szölővirág regg. 8 ó.	84·94	0·5390	0·4525	1·06	1·725	1·8395	3·579	3·004	7·038	11·454	12·214
Jun. 4. én délután	78·01	0·915	0·884	1·12	1·740	3·90	4·161	4·020	5·093	7·912	17·73
« 5.-én hajnalban	80·18	0·915	0·889	0·722	1·740	—	4·616	4·485	3·642	8·779	—
« 19.-én nappal	78·26	0·925	0·8523	1·42	1·840	4·1	4·254	3·920	6·531	8·463	18·86
« 20.-án hajnalban	80·03	0·854	0·840	0·964	1·840		4·276	4·206	4·827	9·213	—
Julius 3.-án nappal	77·76	0·8516	0·7784	1·68	1·44	—	3·829	3·500	7·554	6·474	10·93
« 4.-én éjjel	77·60	0·903	0·826	1·29	2·16	2·45	4·031	3·687	5·758	9·642	—
« 17.-én nappal	76·46	0·8793	0·7924	2·05	1·80	2·183	3·735	3·366	8·708	7·646	9·273
« 31.-én nappal	75·44	0·7168	0·672	1·832	2·046	3·6515	2·918	2·736	7·459	8·331	14·864
Aug. 14.-én nappal	76·74	0·7924	0·777	1·525	1·920	2·7735	3·406	3·341	6·556	8·254	11·924
« 15.-én éjjel	76·94	0·798	0·7812	1·426	1·600		3·461	3·387	6·184	6·934	—
« 28.-án nappal	77·85	0·8848	0·8288	1·667	1·92	2·308	3·994	3·741	7·526	8·668	10·419
« 29.-én éjjel	78·87	0·8554	0·8428	1·222	2·046	—	4·048	3·988	5·783	9·682	—
Szept. 11.-én nappal	74·76	0·952	0·882	2·147	2·046	2·541	3·771	3·494	8·506	8·108	10·006
« 25.-én nappal	72·61	0·8652	0·7924	1·800	2·343	4·099	3·158	2 893	6·571	8·554	14·96
« 26.-án éjjel	73·61	0·8232	0·8050	1·520	2·343		3·119	3·050	5·759	8·878	—
Okt. 9-én nappal	70·62	0·6664	0·6188	2·645	1·875	5·176	2·268	2·106	9·002	6·381	17·617
« 10.-én éjjel	72·32	0·6636	0·5992	2·030	1·665		2·258	2·039	7·333	6·015	—
« 23.-án nappal	75·13	0·3150	0·2968	1·008	2·625	4·956	1·266	1·193	4·053	10·556	19·927

Ezekből kitetszik, hogy

1. A *szőlőlevelekben található összes nitrogen százalékos mennyisége a levelek korával ismét csökkent*, mint az első közleményben kifejtettem, sőt a csökkenés még sokkal nagyobb mértékben mutatkozik, mint a mult évben, minek az az egyedüli magyarázata, hogy a 94-ik évi kisérletek csak jun. 21-től aug. végéig tartottak, a 95-ikiek azonban május 8.-án vették kezdetüket s október végéig tartván, mind a két irányban bővültek; s igy a legfiatalabb gyenge levelekben lelhető 5·3% összes nitrogen október végéig, levélhulláskor, 1·25%-ra esett alá.

Ia. tábla.

Kivonat a meteorologiai állomás feljegyzéseiből.

A vizsgálat ideje	Hőmérsék Celsius fokokban			Páranyomás	Viszonylagos nedvesség	Eső	Megjegyzések
	reggel 7-kor	d. után 2-kor	napi közép	m/m	%	m/m	
Máj. 8	15·0	18·0	10·8	7·2	60		A páranyomás és viszonylagos nedvesség mindig a reggeli, illetve esteli megfigyelésre vonatkozik.
Máj. 28	16·6	20·8	14	8·8	62	23·4	
Jun. 4	—	25·4	20·6	2 órakor 12·4	51	—	
Jun. 5	17·4	—	19·9	reggel 7 órakor 13·3	90	—	
Jun. 19	—	27·4	23·3	2 órakor 13·9	51	—	
Jun. 20	22·2	—	23·4	reggel 7 órakor 14·1	71	—	
Jul. 3	—	28·0	23·1	17·1	61	—	
Jul. 4	17·8	—	20·3	13·0	86·0	6·0	
Jul. 17	—	28·0	—	16·7	60	—	
Jul. 31	—	28·2	—	13·7	49	—	
Aug. 14	—	18·2	17·1	12·2	78	—	
Aug. 15	18·0	—	17·1	10·0	65	6·2	
Aug. 28	—	26·3	20·3	12·2	48·0	—	
Aug. 29	18·4	—	21·0	10·9	69	—	
Szept. 11	—	25·7	19·0	10·5	43	—	
Szept. 25	—	24·6	16·2	11·6	50	—	
Szept. 26	11·2	—	16·5	8·2	83·0	—	
Okt. 9	—	23·0	17·5	11·4	55	—	
Okt 10	18·4	—	14·7	12·1	77	—	
Okt. 23	—	12·2	9·1	7·4	70	—	

II. tábla.

Összes nitrogen a szőlőlevél szárazanyagában.

	Nappal %	Éjjel %	Különbség % az éjjeli több +; az éjjeli kevesebb —
Junius 4.-én	4·161	4·661	+ 0·455
« 19.-én	4·254	4·276	+ 0·022
Julius 3.-án	3·829	4·031	+ 0·202
Aug. 14.-én	3·406	3·461	+ 0·055
« 28.-án	3·994	4·048	+ 0·054
Szept. 25.-én	3·158	3·119	— 0·039
Okt. 9.-én	2·268	2·258	— 0·010
Összeg	25·070	25·809	
Átlag	3·581	3·687	+ 0·106

2. *Éjjel az összes nitrogen-tartalom átlaga valamivel nagyobb, mint nappal.* A nappali átlag úgy áll az éjjeli átlaghoz, mint 3·581 : 3·687, a különbség + 0·106 (mult évi arányszám 3·537 : 3·621), mi a megfigyelések szigorú pontosságát mutatja. Figyelemre méltó azonban, hogy szept. 25.-én és okt. 9.-én végzett megfigyelések ezen általános elvtől eltérést mutatnak, s az éjjeli összes nitrogen valamivel kisebb a nappalinál; ezen jelenségnek magyarázatába csak akkor ereszkedhetünk, ha a következő pontot is fontolóra vehettük.

III. tábla.

Fehérje nitrogen a száraz anyagban.

	Nappal %	Éjjel %	Különbség % az éjjeli több +
Junius 4.-én	4·020	4·485	+ 0·465
« 19.-én	3·920	4·206	+ 0·286
Julius 3.-án	3·500	3·687	+ 0·187
Aug. 14.-én	3·341	3·387	+ 0·046
« 28.-án	3·741	3·988	+ 0·247
Szept. 25.-én	2·893	3·050	+ 0·157
Okt. 9.-én	2·106	2·164	+ 0·058
Összeg	23·521	24·967	
Átlag	3·360	3·566	+ 0·206

3. *Éjjel a nem-fehérjeszerű anyagok mennyisége csekélyebb vagyis a fehérje mennyisége több.*

Ezt mutatják a jelen évi megfigyelések is, még pedig kivétel nélkül. A nappali fehérje mennyiségének átlaga úgy áll az éjjeliéhez, mint 3·360 : 3·566, a különbség +0·206 (mult évi arány 3·199 : 3·385) s így már most két évi vizsgálat egybehangzó eredménye után ki lehet mondani, hogy *éjjelen át a fehérjeszerű anyagok mennyisége a nem fehérjeszerű nitrogen-tartalmú anyagok rovására nagyobbodik,* hogy tehát a *nitrogen-tartalmú nem fehérjeszerű anyagok éjjel nagyobb mértékben alakulnak fehérjévé, mint nappal.*

Szóvá téve most a második pont alatt említett nitrogen-tartalmú anyag csökkenését, látjuk, hogy ezen csökkenés nem a fehérjére, hanem a nem fehérjeszerű nitrogen-tartalmú anyagokra vonatkozik, s a nélkül, hogy bizonyitékokkal szolgálhatnék, meg kell említenem, a mit 12 év előtt a dohánynövényen észleltem, hogy a salétromsav őszszel a növényből visszadiffundál a talajba. Ez történhetik esetleg a szőlőnövénynél is; és hogy ezen folyamat

inkább éjjel történik, mint nappal, az abból magyarázható, hogy a nappali vízelpárolgás sokkal erélyesebb lévén, mint az éjjeli, a növénylevelek mint szivattyúk működnek, felszíván a talaj nedvességét s a lefelé irányuló osmotikus mozgást ellensúlyozzák; éjjel ellenben, midőn a környező levegő jóformán telítve van vízpárával, a levelek vízelpárologtatása is jóval alább hagy, s a növényből kifelé diffundálni törekvő oldott anyagok könnyebben czélhoz jutnak.

IV. tábla.

Savtartalom a szárazanyag százalékában kifejezve.

A vizsgálat ideje	Nappal %	Éjjel %	Különbség % az éjjeli több +
Junius 4.-én	7·912	8·779	+ 0·867
« 19.-én	8·463	9·213	+ 0·750
Julius 3.-án	6·474	9·642	+ 3·268
Aug. 14.-én	8·254	6·934	— 1·320
« 28.-án	8·668	9·682	+ 1·014
Szept. 25.-én	8·554	8·878	+ 0·324
Okt. 9.-én	6·381	6·015	— 0·366
Összeg	54·706	59·143	
Átlag	7·815%	9·449%	+ 0·634

4. *A savtartalom éjjel nagyobb, mint nappal.* Ezen elvet a mult évben három megfigyelés alapján csak nagy tartózkodással mondhattam ki, de most hét megfigyelésre alapítva biztosra vehető. Az átlagos nappali és éjjeli savtartalom úgy áll egymáshoz mint 7·815 : 8·449, a különbség tehát +0·634% s így igen jelentékeny. Egy pár megfigyelés azonban bővebb magyarázatra szorul.

Julius 3.-án szokatlanúl — a rendestől nagyon is eltérően — nagyobb az éjjeli savtartalom. Legyen szabad itt megjegyezni, hogy jul. 3.-án éjjel két órakor 6 mm. eső esett, de a fél leveleket

hajnalban azért megszedtük s megtörölve reggel 7 óráig a laboratoriumban szikkadni hagytuk, mielőtt feldolgoztuk volna; ezen levelek tehát nem voltak egészen frissek a feldolgozáskor.

Az aug. 14-iki minust talán az időjárásból lehet megmagyarázni, ugyanis hirtelen nagyfokú hőcsökkenés mutatkozott; az általam vezetett meterologia-állomás hivatalos feljegyzései szerint aug. 12.-én átlag hőmérsék 25·1° C., maximum 30·5° C.; 14,-én átlag csak 14·8° C., maximum 18·0°. Ez oly nagy különbség ily rövid idő alatt, hogy annak a növény tevékenységére okvetlenül zavarólag kellett hatnia.

Az éjjeli savtartalom-nagyobbodást két körülménynyel lehet összefüggésbe hozni.

a) Éjjel az oxydatio uralván a helyzetet, a szénhydratokat, nevezetesen a czukrot savvá oxydálja.

b) Éjjel a levegő viszonylagosan nagyobb vízpára-tartalma mellett kisebb lévén a vízfelvétel és az elpárologtatás: ezzel a savakat neutralizáló ásványi aljak felvétele is kisebb mértékben folyik mint nappal. Ezen utóbbi feltevésbe igen jól beleillik az aug. 14.-én éjjel kivételesen talált kevesebb savtartalom; a meteorologiai állomás szerint ezen éjjel a viszonylagos nedvtartalom 65% volt, a nappali 78%-kal szemközt s igy ezen éjjel a vízelpárologtatás is erélyesebb lehetett a nappalinál s igy a képződött sav is nagyobb mértékben közönbösíttetett a nagyobb mértékben felvett aljak által.

V. tábla.

Czukor a száraz anyag százalékában.

A vizsgálat ideje	Nappal %	Éjjel %	Különbség % az éjjeli kevesebb —
Junius 4.-én	5·093	3·642	— 1·451
» 19.-én	6·531	4·827	— 1·704
Julius 3.-án	7·554	5·758	— 1·796
Aug. 14.-én	6·556	6·184	— 0·372
» 28.-án	7·526	5·783	— 1·743
Szept. 25.-én	6·571	5·759	— 0·812
Okt. 9.-én	9·002	7·333	— 1·669
Összeg	48·682	39·286	—
Átlag	6·954	5·612	— 1·342

5. *A czukortartalom nappal jelentékenyen nagyobb, mint éjjel*, a nappali átlag úgy áll az éjjelihez, mint 6·954 : 5·612, a különbség 1·342%. A különbség az éjjeli és nappali czukortartalom között legcsekélyebb s mondhatnám szokatlanúl csekély aug. 14.-én, ezt azonban az előző pontban említett rendkívüli időjárás talán megmagyarázza.

Az éjjeli csekélyebb czukormennyiséget az éjjeli több savval is lehetne összefüggésbe hozni, állítván, hogy éjjel a czukornak egy része borkősavvá válik az éjjel folyó oxydatio következtében; ez valószínűnek látszik ugyan, de erre vizsgálataim egyelőre elegendő alapot nem szolgáltatnak. A folyamatot ily módon képzelhetjük:

$$10\,(C_6H_{12}O_6) + 45O = 15\,(C_4H_6O_6) + 15\,H_2O$$

ez azonban alig történik ilyen símán.

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

VI. tábla.

Víztartalom.

A vizsgálat ideje	Nappal %	Éjjel %	Különbség % az éjjeli több +
Junius 4.-én	78·01	80·18	+ 2·17
« 19.-én	78·26	80·03	+ 1·77
Julius 3.-án	77·76	77·60	— 0·16
Aug. 14.-én	76·74	76·94	+ 0·20
« 28.-án	77·85	78·87	+ 1·02
Szept. 25.-én	72·61	73·61	+ 1·00
Okt. 9.-én	70·62	72·32	+ 1·70
Összeg	531·85	539·55	
Átlag	75·98	77·08	+ 1·10

6. A levelek nappali víztartalmát az éjjelivel összehasonlítva azt találjuk, hogy *éjjel a levelek víztartalma nagyobb.* Mert a nappali víztartalom átlaga úgy viszonylik az éjjelihez, mint 75·98 : 77·08, a különbség 1·10%.

Ennek a jelenségnek könnyű a magyarázata: éjjel a levegő párateltebb lévén, a levelek is kevesebb vizet párologtatnak el; azonkívül tudjuk, hogy a világosság a velejáró melegtől függetlenül is fokozza az elpárolgást, éjjel sötét levén, az elpárolgásnak ez okból is kisebbnek kell lenni; végül az elpárolgást fokozza a levegő hőfoka is, éjjel hüvösebb levén, az elpárolgás ennek megfelelően csekélyebb, de a gyökér-nyomás valószínűen éjjel-nappal egyarányosan működik, s így azután a levelek víztartalmának éjjel meg kell gyűlnie.

Ezen megfigyeléseknél két adatra kell megjegyzést tenni. Jul. 3.-án éjjel valamivel kevesebb vizet találtam, de mint fentebb közöltem, ez éjjel 6 mm. eső esett, s a leveleket pár óráig a laboratoriumban szikkadni hagytam a feldolgozás előtt. Ezen levelek víztartalma tehát változást szenvedvén, nem vehető tekintetbe.

Aug. 14.-én a különbség szembeszökően csekély; ennek magyarázatául szolgálhat, hogy ezen napon a levegő relativ nedvessége is rendellenesen nappal nagyobb volt, mint éjjel, mint az I*a*. táblázat mutatja.

7. A nyers hamutartalom május 8-tól okt. 23-ig nevezetes mértékben emelkedik; e közben azonban nagyobb fokú ingadozások mutatkoznak. Addig míg a tiszta hamú (szénsav-, szén-, porstb. mentes ásványi anyagok) mennyisége nem ismeretes, ezen pont érdemleges tárgyalásába ereszkedni feleslegesnek tartom.

Végül annak magyarázatával kell szolgálnom, hogy julius 14.-én és 31.-én éjjel megfigyeléseket miért nem tettem. Gázkészülékem volt ezen időközben átépítés alatt, a gázzal a legnagyobb mértékben takarékoskodnom kellett, s örvendettem, hogy annyi gázom volt a gasometerben, a mivel az elemzési lánczolat fentartása czéljából legalább a nappal gyűjtött anyagot feldolgozhattam.

Végül köszönetemet jelentem Dr. Nyiredy Jenő és Dr. Baintner Ferencz assistens uraknak, kik ezen munkálatok végzésénél készségesen közremüködni szivesek voltak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának deczember 16.-án tartott üléséből.)

ERJEDÉSTANI TANULMÁNYOK (I.)

KOSUTÁNY TAMÁS l. tagtól.

A f. évi junius 24.-én tartott ülésen bátor voltam «Egy új saccharomyces» czím alatt egy különös magaviseletű élesztőről értekezni, megjegyezvén, hogy ezen szervezet tisztán tenyésztése a jelentés tételéig nem sikerült, s hogy további tanulmányozásra van szükség.

Azóta az erjedéstani értelemben vett tiszta tenyészet — egyetlen górcső alatt kikeresett sejtből kiindulva — sikerülvén, kijelenthetem, mit előadásomon csak mint gyanítást fejeztem ki, hogy vizsgálataim közben valóban két különböző organismussal volt dolgom, ezek egyike a valódi szeszélesztőkhöz, másika a borvirágfélék közé sorolandó.

I. **Saccharomyces hungaricus** n. sp.

A valódi szeszélesztő gömbölyű sejteket képez nagy vacuolákkal, ascosporái 2—3-asak, óriás telepe gelatinmuston egészen normális kinézésű — tehát közepe bemélyedő —, erjedés közben hártyát nem képez. A mustot erélyesen erjeszti s e közben annyira habzik, hogy attól tarthatni, hogy a félig töltött palaczkból is kifut, de azután tevékenységét végezvén, bő üledéket ver, a felette álló folyadék teljesen megtisztul s kristálytiszta lesz.

Feltünő, hogy a sörlében csak alig képez habot, de azért hártya nélkül erjeszt; sok üledéket ver s az erjedés végeztével a felette levő folyadék kristálytiszta.

Az erjedést glycerinnel elzárt üvegkotyogók védelmezték a külső levegő behatolásától, s két heti állás után 16—18° hőmér-

sékű szobában, az erjedés biztosan egészen befejeződött, s a kierjesztett folyadék a következő összetételt mutatta.

	Must			Sörlé		
Czukor (invert)	0·1545	súly	%	maltose	2·78	súly %
Alkohol	8·64	«	«	—	4·31	« «
Extract	2·22	«	«	—	8·42	« «
Összes sav (borkősav)	0·804	«	«	(tejsav)	0·264	« «
Illó sav (eczetsav)	0·0192	«	«	(eczetsav)	0·0144	« «
Extractsav	0·768	«	«	—	0·213	« «

Ezek szerint ezen élesztő a maltosét nem képes teljesen kierjeszteni, mert daczára a kedvező hőmérséknek, noha csak 4·3% szesz képződött, 2·78% maltosét erjesztetlenül hagyott; ellenben a mustban, daczára a 8·64% súly szesz jelenlétének, az erjedést befejezte, s talán ha még több czukor lett volna jelen, még többet is kierjesztett volna.

Minden esetre figyelemre méltó, hogy azon elegyben is, melyről jun. 24.-én tartott értekezésemben szóltam, míg a must teljesen kierjedt, a sörlében 2·61% maltose maradt erjedetlenül. Minthogy pedig a juniusban bejelentett kísérletnél az erjedésnél képződött szeszt az egyidejüleg jelenlevő borvirág elégette s ez még sem erjedt ki jobban, mint a mostani, bátran következtethető, hogy a maltose kierjedését nem az egyidejüleg képződő 4·3% szesz akadályozta meg. De az erjedés korai megszünését az illó zsírsavak nagyobb mennyiségéből sem magyarázhatjuk, s így önkénytelenül azon feltevésre kell jutnunk, hogy a magyar-óvári sörlé jelentékeny mennyiségben tartalmaz *isomaltosét*, s ezt a Saccharomyces hungaricus kierjeszteni nem képes.

Pár év óta tudjuk ugyanis, hogy a sörczefrék maltosén kivül isomaltosét is tartalmaznak, valamint azt is, hogy a különböző élesztők az isomaltoséval szemközt eltérő magatartást mutatnak, így ismeretes például, hogy míg a saazi sörélesztő az isomaltosét nem erjeszti, addig a frohbergi sörélesztő még a sörléhez mestersége-sen hozzáadott isomaltosénak $^4/_5$ részét kierjeszteni képes. E tekintetben tehát a S. hungaricus a saazi sörélesztővel egy sorba állitandó.

Mennyiben jogosult ezen feltevésem, azt további kisérleteim lesznek hivatva eldönteni, melyek eredményéről később leszek bátor jelentésemet előterjeszteni.

Ezen sok tekintetben az eddig ismertektől eltérő magatartású élesztő jelölésére bátor vagyok a *Saccharomyces hungaricus* elnevezést javaslatba hozni.

II. Saccharomyces mycoderma.

A mártonvásári eredetű penészek másodika határozottan a mycoderma-borvirágfélékhez tartozik. Sejtjei közel kétszer olyan hosszúk, mint szélesek, s jóval nagyobbak a S. hungaricus sejtjeinél, mindenik sejtben egy-két erősen fénytörő golyócskát lelhetni; belőle ascosporákat nevelni nem sikerült. Ezen organismus úgy a muston, mint a sörleven hártyát képez, a muston képzett hártya vastagabb, a sörleven képződő fodrosabb, lassanként mind a két folyadékban némi üledék verődik.

Igen feltünő, hogy a tiszta tenyészetnek óriás telepei szintén homorú közepüek, mint a rendes Saccharomyces óriás telepek; a Saccharomyces hungaricussal képezett elegyek óriás telepeinek közepe ellenben székfüvirágszerűen kiemelkedő; ezen óriás telep szélét a borvirágszerű élesztő, a közepét ellenben a S. hungaricus foglalja el.

A mycodermaféléknek — melyeket némelyek endoblastodermáknak is neveznek — több faját ismerjük, de ezek még rendszerbe foglalva nincsenek s így ezen mycodermának azoktól való különbözőségét ez idő szerint nem lehet biztosan megállapítani.

Ezen mycodermának a sörlé és must iránt való magatartását a következő elemzések mutatják:

	Must	Sörlé
Czukor	17·00 %	11·18 %
Szesz	0·0 «	0·0 «
Extract	19·22 «	16·30 «
Összes sav	0·864 «	0·178 «
Extractsav	0·768 «	0·102 «
Illósav	0·024 «	0·0026 «

Az erjedés, illetve a szaporodás ez esetben is két hétig tartott, szesz egyáltalában nem képződött, vagy ha igen, az elégettetett; a mustnak eredeti czukortartalma 18·1% volt s így valamelyes czukrot mégis elfogyasztott, azonkívül a savtartalmat némileg szaporította. A mustban valamivel több, a sörlében ellenben valamivel kevesebb illósavat képezett, mint a Saccharomyces hungaricus ugyanazon idő alatt és ugyanazon hőviszonyok között.

III. Vörös élesztő, Saccharomyces mycoderma roseus n. sp. (?)

Egy tályai bor seprűjéből gelatina-kultura segélyével különítettem el, s azután sterilizált mustba oltottam át, melyben sötét rózsaszínű üledéket képezvén, nagyon elszaporodott a nélkül, hogy annak czukortartalmát kierjesztette volna. Azután sterilizált gyenge borra oltottam át, a nélkül, hogy abban növekedésre bírni sikerült volna.

Függő cseppben nevelve, igen szép koronát képezett és számos ascosporát nemzett. Óriás telepei gelatina-mustban normális kraterszerűek és homorúközepüek fehéres fuvallattal.

Ezen vörös élesztőt átoltottam sterilizált mustra és sörlére s a levegőtől glycerinnel töltött kotyogóval zártam el, ez alkalommal heteken keresztül volt alkalmam megfigyelni, hogy légritkulást okozott és semmi szénsavat nem fejlesztett, mert a glycerint felszívta az üvegcsőbe, bizonyára azért, mert a vele elzárt levegőből oxygent vont el.

A sörlevet megzavarta s rajta állandóan nagyobb szivást mutatott, mint a muston. A vörös élesztő sejtjei jóval nagyobbak az előbbi két élesztőéinél, hosszúkások, számos fényes pontot mutatnak, ascosporái aránylag igen kicsinyek, s kettőnél többet egy sejtben sem találtam.

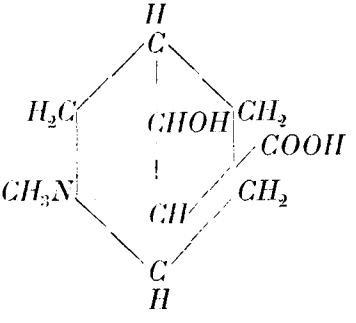
A vörös élesztők sincsenek még rendszerbe foglalva, s így az eddig ismertektől való különbözőséget megállapítani ez idő szerint nem lehet; ezen species új volta tehát ez idő szerint még kérdéses.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1895. decz. 16.-án tartott üléséből.)

AZ ASYMMETRIKUS META NITROSALICYLSAV NÉHÁNY ÚJ SZÁRMAZÉKA.*

Dr. KONEK FRIGYES-től.

Valószinű, hogy a cocaïn érzéketlenítő hatásának alapfeltétele, hogy az ecgoninnak mind alkoholos, mind carboxyl alakjában előforduló hydroxylja, benzoyl- és methylgyökkel telítve, azaz esterré egyesülve legyen.



Ha e feltételek egyike nincs teljesítve, az érzéketlenítő hatás megszűnik. Ezen eszmemenet nyomán lehetséges talán a cocaïnhoz hasonló hatású vegyületeket más egyszerűbb és könnyen hozzáférhető anyagokból synthesis útján előállítani. Jelen kisérleteim alapjául a salicylsavat választottam, melyet, eltekintve antiseptikus és egyéb becses tulajdonságaitól, a modern gyógyászatban a legkülömbözőbb származékok alakjában alkalmaznak. Czélom volt egy «amidobenzoylsalicylsavmethylesterchlorhydrát»

---

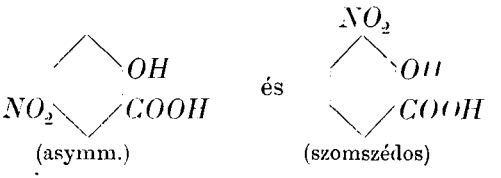
* Közlemény a k. József műegyetem által. chemiai laboratoriumából.

vegyületet előállítani, és megvizsgálni, vajjon mutatja-e az ilyen alkotású molekula, melyben a fent említett követelményeknek elég van téve, a cocaïnhatást?

A synthesis menete a következő.

Asymmetrikus-m nitrosalicylsav.

Az irodalomban két isomer mononitrosalicylsav ismeretes:



az asymmetrikus és a szomszédos,* a melyek körülbelül egyenlő mennyiségben keletkeznek, ha tömény salétromsav hat salicylsavra. Kiindulási anyagul a chemiai iparban is inkább ismert asymmetrikus savat választottam.

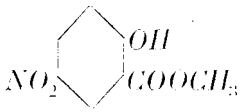
A salicylsavból sikerült 50% tiszta nitrosavat előállítani, míg HÜBNER 40%-ot kapott.

20 gr. füstölgő salétromsavnak és 20—25 gr. jégeczetnek jeges vízzel 5—6°-ra hűtött elegyéhez folytonos kavarás közben 20 gr. tiszta, kristályos salicylsavat adunk; a hőmérséklet lehetőleg állandó maradjon, míg az összes salicylsav fel van dolgozva. Most a pépes tömeget csészébe öntjük, midőn néhány percz mulva heves hatás nyilvánul, mi ha lecsillapult, félliter jeges vízzel felhigítva, a nitrosavakat leválasztjuk. A csapadékról a feles savat gondosan leszürve, forró vízben kissé feles baryumcarbonattal pállítjuk, forrón gyorsan megszürjük, mire a szomszédos nitrosalicylsavas baryum, mely az asymmetrikus sótól eltérőleg vízben nehezen oldódik, szép vörös kristályok alakjában azonnal kiválik. Kihülés után szüréssel eltávolítjuk, és a szüredékben az asymnitrosalicylsavat sósavval leválasztjuk és forró vízből kristályo-

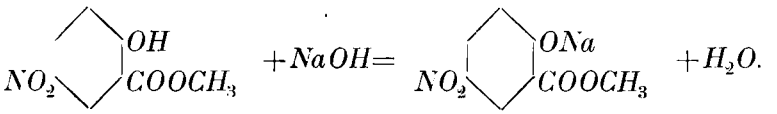
* HÜBNER. Ann. 195, 30; 198, 258.

sitjuk. Az (*a*)-*m*-nitrosalicylsav hosszú, vékony, fehér tűket képez; 228—229°-nál olvad.

(a)-m-nitrosalicylsaʌmethylester:

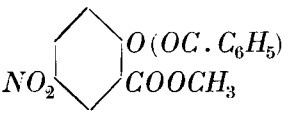


A baryum sóból leválasztott és tisztán csak is így készíthető (*a*)-*m*-nitrosalicylsavat átváltoztattam methylesterré, mely vegyület az irodalomból még hiányzik. A methylestert az ismeretes æthylvegyület helyett azért választottam, hogy a cocaïnnal teljesebb legyen az analogia. A sav ammonium sójának vízoldatából ezüstnitrattal leválasztottam az oldhatlan ezüstsót és szárazan, finom poralakban, száraz ætherben feloszlatva, feles jodmethyllel elegyítettem. Már közönséges hőnél is végbemegy a hatás, mi látható a zöldes sárga jódezüst keletkezéséből; az átalakulást félórai melegítéssel fejezzük be. Az ætherből szürés után kiválik az új vegyület; a maradékot úgy különítjük el, hogy a jódezüstöt forró alkohollal néhányszor kioldjuk. Forró methyl- vagy æthylalkoholból az ester több cm.-nyi hosszú, vékony fehér tűk alakjában kristályosodik, melyek 118—119°-nál olvadnak. Hübner előállította a homolog æthylestert; ennek olvadási pontja 92°. Miután így a methylestert és tulajdonságait megismertem, könnyű volt ezen új vegyületet az általános módszer szerint, azaz úgy előállítani, hogy a nitrosav methylalkoholos oldatát száraz sósavgázzal telítjük; ezen eljárás szerint a százalékos eredmény majdnem quantitativ. Említésre méltó az (*a*)-*m*-nitrosalicylsavas methyl rendkivüli érzékenysége alkáliák iránt; *KOH*-val még ötvenmilliomod higításban is erősen sárga színű lesz; ilyen higításban a phenolphtaleïn pl. már nem szinez. A megfelelő mennyiségű sav azonnal elszínteleníti az oldatokat, és az átmenet rendkívül éles. E színhatás sóképzésen alapszik; ha pl. az ester vizes-alkoholos oldatát csak egy csepp lúgos vízzel elegyítjük, azonnal intensiv sárga színeződés, nemsokára pedig pelyhes csapadék keletkezik:



E phenolátok nehezen oldhatók. Ezen előleges kisérletek nyomán azt hiszem, hogy a könnyen hozzáférhető (*a*)-*m*-nitrosalicylsavmethylester az alkali- és acidimetria terén mint új és rendkívül érzékeny indicator érvényesülni fog.

(*a*)-*m-nitrobenzoylsalicylsavmethylester:*



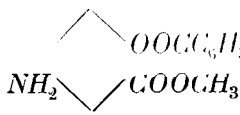
Benzoylchlorid a nitrooxysavesterre már 140°-on hat. A benzoylálást legczélszerűbben következőkép végezzük: 5 gr. estert 7 gr. (valamivel több egy molekulánál) benzoylchloriddal olajfürdőben 140—150°-ra hevítünk és addig tartjuk ily hőfokon, míg az erős sósavfejlődés csaknem teljesen megszűnik. Néhány óra múlva felmegyünk 180°-ra, ha már itt sem távozik el sósav, a lombik tartalmát csészébe öntjük, hol az csakhamar egész tömegében kristályosan megmerevedik. Huzamosabb idei állás után (hogy a chlorid levegőn lehetőleg elbomoljék) ezt a nyers terméket feloldjuk forró methylalkoholban, a melyből az új vegyület 1 cm. hosszú, erősen fénytörő, vastag, prizmás fehéres tűkben kristályosodik. Olvadási pontja 120—121°. Conc. kénsavban gyengén melegítve feloldódik; ha most egy-két csepp alkohollal elegyítjük és újra melegítjük, a benzoëæther charakteristikus szagát tisztán érezhetjük, tehát tényleg benzoylszármazékkal van dolgunk. A mily állandó ez a benzoylszármazék savak iránt, hogy conc. sósavval pl. hosszú ideig főzni lehet, a nélkül, hogy benzoësav válnék le: ép oly érzékeny alkáliák iránt; mert ha pl. absol. alkoholos oldatát hidegen sódával, vagy absol. alkoholban oldott natriumæthylattal elegyítjük, azonnal intensiv sárga szineződéssel leválik a nehezen oldható: $C_6H_3{}^{-NO_2}_{-ONa}{}_{-COOCH_3}$-só (egy phenolat), és a benzoëæther jellemző szaga tisztán kivehető.

Elemzés:

talált:	számított:	$C_6H_3{-}\overset{-NO_2}{\underset{-COOCH_3}{OOCC_6H_5}} =$
$C = 60{,}07\%$	$C = 59{,}80\%$	$C_{15}H_{11}O_6N$
$H = 3{,}76\%$	$H = 3{,}65\%$	
$N = 4{,}97\%$	$N = 4{,}65\%$	

5 gr. esterből ezen eljárással 5 gr. tiszta benzoylestert kapni. A methylalkoholos anyalúgokból, ha az alkoholt ledestilláljuk, finom fehér tűk válnak ki; ez a vegyület nem egyéb, mint változatlan methylester; mennyisége igen csekély.

(a)-m-amidobenzoylsalicylsavmethylester:



A nitroestert a szokásos módon: ón és conc. sósav segélyével nem lehet a megfelelő amidovegyületté redukálni, mert a test ezen közegben teljesen oldhatlan, és ha forró vízfürdőn igen sokáig hevítjük conc. sósav jelenlétében, megbomlik, s benzoësav válik ki. Sok kisérletezés után végre következőleg sikerült a redukálás: 1—2 gr. nitroestert feloldunk absolut alkoholban, mely sósavgázzal telítve van, és időnkint melegítve granulált ónt adunk bele, úgy, hogy mindig élénk hydrogenfejlődés legyen észlelhető. Már negyed óra múlva az oldat megzavarodik, fehér csapadék képződik; kihülés után a csapadékot leszürjük, alkoholos sósavval kimossuk és 90°-on szárítva, az alkoholt teljesen elűzzük. Ez a csapadék nem más, mint a keresett amidoszármazék chlorhydrátja; itt azon rendellenesség tapasztalható, hogy az ónchlorür kettős só helyett közvetlenül maga a redukált vegyület chlorhydrátja válik le; ennek oka talán abban keresendő, hogy az absolut alkoholos közegben ezek a kettős sók nem képződnek. A nyers só sósavval jól megsavanyított forró vízből hosszú fehér tűkben kristályosodik; 224°-nál pezsegve elbomlik, de már jóval előbb megvörösödik és meglágyul. A termék mennyisége megegyezik a számított értékkel.

Elemzés:

talált:	számított:	$C_6H_3\overset{-NH_2.HCl}{\underset{-COOCH_3}{-OOCC_6H_5}}$ =
$Cl = 11{,}20\%$	$Cl = 11{,}54\%$	$C_{15}H_{13}O_4N.HCl.$

Az amidobenzoylsalicylsavmethylesterchlorhydrát vizes oldatban vaschloriddal nem ad valami jellemző színreactiót.

$PtCl_4$ sósavsavanyú oldatában nehezen oldható, sárga pelyhes kristályos csapadékot idéz elő. Ha egy gr. chlorhydrátot feloldunk fél liter forró, sósavval savanyított vízben (ennyi szükséges) és a tiszta folyadékot tömény ammoniával elegyítjük, azonnal leválik a szabad (*a*)-*m*-amidobenzoylsalicylsavas methyl, hófehér kristályos csapadék alakjában, mely sok forró absolut alkoholból gyémántfényű, fehér, rövid, prizmás tűkben kristályosodik. Olvad 181—183°-nál, lassan és bomlás nélkül.

Elemzés:

talált:	számított:	$C_6H_3\overset{-NH_2}{\underset{-COOCH_3}{-OOCC_6H_5}}$ =
$C = 66{,}20\%$	$C = 66{,}42\%$	$C_{15}H_{13}O_4N$
$H = 4{,}98\%$	$H = 4{,}89\%$	
$N = 5{,}55\%$	$N = 5{,}16\%$	

Az asymmetrikus meta-amidobenzoylsalicylsavmethylesterchlorhydrát a nyelvet határozottan elérzékteleníti; részletes élettani vizsgálatok azonban még hiányzanak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1895. deczember 16.-án tartott üléséből.)

A FERMAT-FÉLE CONGRUENTIA ELMÉLETÉHEZ.

GRUBER NÁNDOR-tól.

Ismeretes, hogy törzsszám modulus esetében x bármely egész számu értékénél

$$x^{p-1}-1\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-1}) \pmod{p},$$

hol a baloldalon álló szorzatban $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ a p-hez relativ prim maradékok egy teljes rendszere. A következőkben meg fogjuk vizsgálni, *vajjon, ha m nem törzsszám és $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ az m-hez relativ prim maradékok egy teljes rendszere* mod. m, *lehetséges-e az*

$$x^{\varphi(m)}-1\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\varphi(m)}) \pmod{m} \qquad 1)$$

identikus congruentia fennállása?

Az $m=2$ kizárása után $\varphi(m)$ mindig páros szám — és így az $x=0$ helyettesítés rögtön megadja a következő szükséges föltételt:

$$-1\equiv a_1a_2\ldots a_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Ez azonban az általánosított Wilson-féle tétel szerint csak akkor lehetséges, ha $m=4$, p^α vagy $2p^\alpha$, hol p páratlan törzsszám. A tétel $m=4$-re fönnáll, mert

$$x^2-1\equiv(x-1)(x-3) \pmod{4};$$

s így csak azt kell megvizsgálnunk, érvényes-e $m=p^\alpha$ és $m=2p^\alpha$ alakú modulusokra is. E czélból differenciáljuk az (1) alatt levő congruentiát és tegyünk azután x helyébe 1-et, ez által lesz

$$\varphi(m)\equiv-(a_2-1)(a_3-1)\ldots(a_{\varphi(m)}-1) \pmod{m}, \qquad (2)$$

ha ugyanis az m-hez relativ prim maradékok teljes rendszerében $a_1 \equiv 1$ volt. Ha $\alpha > 1$ és $m = p^\alpha$, akkor

$$p+1,\ 2p+1,\ \ldots,\ (p^{\alpha-1}-1)p+1$$

incongruens és m-hez relativ prim maradékok; ha pedig $m = 2p^\alpha$, akkor

$$2p+1,\ 4p+1,\ \ldots,\ 2(p^{\alpha-1}-1)p+1$$

ilyenek és így a (2) alatt levő congruentia jobb oldalán levő szorzat tényezői között előfordúl

$$p,\ 2p,\ \ldots,\ (p^{\alpha-1}-1)p,$$

illetőleg

$$2p,\ 4p,\ \ldots,\ 2(p^{\alpha-1}-1)p.$$

Az említett szorzat tehát mindkét esetben osztható p-nek $p^{\alpha-1}-1$-ik hatványával, vagyis

$$\varphi(m) \equiv p^{p^{\alpha-1}-1} Q \pmod{m},$$

hol Q egész szám. De

$$p^{\alpha-1} \geq (1+2)^{\alpha-1} \geq 1+2^{\alpha-1} \geq 1+\alpha$$

vagyis

$$p^{\alpha-1}-1 \geq \alpha$$

s így volna

$$\varphi(m) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

mi sem $m = p^\alpha$, sem $2p^\alpha$ esetében nem lehetséges. Ebből következik, hogy α nem lehet nagyobb 1-nél. Ha tehát vannak összetett modulusok, melyekre az említett tétel érvényes, azok csak a $2p$ alakúak között fordulhatnak elő.

Ha fölírjuk az összes relativ prim maradékokat (mod. $2p$)

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p-2,\ p+2,\ \ldots,\ 2p-1,$$

azt veszszük észre, hogy ezek mod. p tekintve szintén teljes rendszert képeznek, tehát

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)} (x-a_r) \equiv \prod_{s=1}^{p-1} (x-s) \pmod{p}$$

$$\equiv x^{p-1}-1 \pmod{p}$$

s így

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k c_k x^{p-k-1}\equiv x^{p-1}-1 \bmod. p.$$

Utóbbi congruentiából most már következik, hogy

$$c_1\equiv c_2\equiv\cdots\equiv c_{p-2}\equiv 0 \pmod{p},$$
$$c_0=1,\ c_{p-1}\equiv -1 \pmod{p},$$

vagyis az első és utolsó kivetelével minden c együttható osztható p-vel; $2p$ által csak azok lesznek oszthatók, melyek egyszersmind párosak. De mivel az összes relativ prim maradékok páratlanok, következik, hogy

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv(x-1)^{p-1} \pmod{2}$$

s ha $p-1=2^i n$, hol n páratlan, akkor

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r)\equiv((x-1)^{2^i})^n \pmod{2}.$$

A jobb oldalon levő

$$(x-1)^{2^i}$$

hatvány kifejtésénél azt veszszük észre, hogy az utolsó kivételével minden binomiális együttható páros. Mert hiszen

$$u\binom{2^i}{u}=2^i\binom{2^i-1}{u-1}$$

s ha $u=2^{i_1}u_1$, hol u_1 páratlan, akkor

$$u_1\binom{2^i}{u}=2^{i-i_1}\binom{2^i-1}{u-1}$$

s mivel $i>i_1$, mig $u<2^i$, következik, hogy

$$\binom{2^i}{u}\equiv 0 \pmod{2}$$

és

$$(x-1)^{2^i}\equiv x^{2^i}+1 \pmod{2}.$$

Az előbbi congruentia tehát

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k c_k x^{p-k-1} \equiv (x^{2^i}+1)^n \pmod 2$$

alakban írva mutatja, hogy

$$c_1 \equiv c_2 \equiv \cdots \equiv c_{2^i-1} \equiv 0 \pmod 2$$

és

$$c_{2^i} \equiv \binom{n}{1} \equiv 1 \pmod 2,$$

mert n páratlan szám; c_{2^i} tehát nem osztható $2p$ által s így ezen esetben is vannak incongruens együtthatók, hacsak nem $n=1$, mert akkor az első nem osztható együttható egyszersmind az utolsó, vagyis

$$\prod_{r=1}^{\varphi(2p)}(x-a_r) \equiv x^{p-1}-1 \pmod{2p}$$

ha $p-1=2^i$.

Vizsgálatunk eredménye tehát a következő: *az összetett modulusok között $m=4$ és a $2(2^i+1)$ alakúak — ha 2^i+1 törzsszám — az egyedüliek, melyekre nézve*

$$x^{\varphi(m)}-1 \equiv \prod_{r=1}^{\varphi(m)}(x-a_r) \pmod m$$

x bármely egész számú értékénél.

Az itt oly kiváló tulajdonsággal bíró 2^i+1 alakú törzsszámoknak — mint ismeretes — a körosztás elméletében is fontos szerepük van.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1895 decz. 16.-án tartott üléséből.)

ADJUNGÁLT NÉGYZETES ALAKOK.

RADOS GUSZTÁV l. tagtól.

Az

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k \qquad (c_{ik} = c_{ki})$$

négyzetes alak együtthatói mint a

$$c = \| c_{ik} \|_{(i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n)}$$

matrix elsőfokú aldeterminánsai foghatók fel. Legyenek e matrixból alkotható összes m-edfokú aldeterminánsok:

$$C_{i1}^{(m)},\ C_{i2}^{(m)},\ \ldots,\ C_{i\mu}^{(m)},$$
$$\left(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

a hol

$$C_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \ldots & c_{i_1 k_m} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \ldots & c_{i_2 k_m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{i_m k_1} & c_{i_m k_2} & \ldots & c_{i_m k_m} \end{vmatrix},$$

továbbá i-t és k-t az $1, 2, \ldots, n$ elemek $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ és $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ ismétlés nélkül való m-ed osztályú kombinációinak jelölésére alkalmaztuk, a mi nyilván megengedhető, mert ha az $1, 2, \ldots, n$ elemek kombinációi között sorrendet állapítunk meg, akkor ezzel köztük és az

$$1, 2, \ldots, i, \ldots, k, \ldots, \mu = \binom{n}{m}$$

sorozat számai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás létesül.

A c matrixnak imént jellemzett m-edfokú aldeterminánsai segítségével ismét négyzetes alak képezhető:

$$f_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} C_{ik}^{(m)} x_i x_k;$$
$$(m=1, 2, \ldots, n-1)$$

ezt az alakot akarom az f_1 *m-edik adjungált alakjának* nevezni. Ezt a terminologiát igazolja az a körülmény, hogy $m=n-1$ esetében a GAUSS-tól eredő közönséges adjungált alakot kapjuk, úgy hogy az imént definiált alakok ennek egyenes általánosításai.

A geometriában, algebrában, de nemkülönben a számelméletben is a megadott alaknak magasabb adjungált alakjaival való együttes használata gyakran tetemes előnynyel jár. Ez a körülmény indított arra, hogy a jelen dolgozatban e magasabb adjungált alakoknak néhány egyszerű tulajdonságát közzétegyem. E tulajdonságok az alant kifejtendő tételekben fejezhetők ki.

1. tétel. Ha a megadott f_1 alak definit pozitiv, akkor minden adjungált alakja is ilyen; ha f_1 pedig definit negativ, akkor f_m definit pozitiv vagy negativ a szerint, a mint m páros vagy páratlan.*

Ha ugyanis f_1-et valós orthogonális helyettesítés alkalmazásával a

$$\rho_1 y_1^2 + \rho_2 y_2^2 + \cdots + \rho_n y_n^2$$

alakra hozzuk, akkor — mint ismeretes — a

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$$

együtthatók nem egyebek, mint a

$$\varphi_1(\rho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22}-\rho & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

charakteristikus egyenletnek gyökei.

* f_1-ről, valamint a reá alkalmazandó helyettesítésekről felteszem, hogy valósak.

Ha f_m-et szintén orthogonális helyettesítéssel alakítjuk át négyzetösszeggé, akkor *ennek* az együtthatóit a

$$\varphi_m(\rho) \equiv \begin{vmatrix} C_{11}^{(m)}-\rho & C_{12}^{(m)} & \dots & C_{1\mu}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{22}^{(m)}-\rho & \dots & C_{2\mu}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \\ C_{\mu 1} & C_{\mu 2} & \dots & C_{\mu\mu}-\rho \end{vmatrix}$$

egyenlet fogja szolgáltatni. De ennek az egyenletnek * gyökeit megkapjuk a

$$\rho_{i_1 i_2 \dots i_m} = \rho_{i_1}\rho_{i_2}\cdots\rho_{i_m}$$

szorzatból, ha $i_1 i_2 \dots i_m$ helyébe rendre az 1, 2, ..., n elemek összes m-ed osztályú kombinációit teszszük.

Ha most f_1 definit pozitiv, akkor a

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$$

gyökök mindannyian pozitivok lévén, a $\rho_{i_1}\rho_{i_2}\dots i_m$ gyökök is ilyenek lesznek és így, minthogy ekkor f_m-nek négyzetösszeg alakjában minden együttható pozitiv, f_m definit pozitiv alak lesz.

Ha pedig f_1 definit negativ, akkor a

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$$

sorozat minden száma negativ lévén, az összes $\rho_{i_1 i_2 \dots i_m}$ gyökök pozitiv vagy negativ előjelüek a szerint, a mint m páros vagy páratlan; tehát f_m szintén definit pozitiv vagy negativ a szerint, a mint m páros vagy páratlan.

2. tétel. Ha f_1 indefinit, akkor az

$$f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$$

sorozat összes alakjai is indefinitek.

Ekkor ugyanis a

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$$

* L. «*Az adjungált helyettesítések elméletéről*» című dolgozatomat; Math. és Term. Értesítő X. k. 34. l.

sorozat pozitiv és negativ gyököket is tartalmaz. Legyenek a pozitiv gyökök

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$$

a negativ gyökök pedig

$$\varrho_{k+1}, \varrho_{k+2}, \ldots, \varrho_n$$

akkor a

$$\Phi_m(\varrho) = 0$$

egyenlet pozitiv gyökeinek száma

$$P_m = \binom{k}{m} + \binom{k}{m-2}\binom{n-k}{2} + \binom{k}{m-4}\binom{n-k}{4} + \ldots,$$

a negativ gyökök száma pedig

$$N_m = \binom{k}{m-1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{m-3}\binom{n-k}{3} + \binom{k}{m-5}\binom{n-k}{5} + \ldots,$$

és minthogy P_m és N_m minden esetben pozitiv számok, f_m-nek négyzetösszeg alakjában mindenkor pozitiv és negativ együtthatók fognak előfordulni, a minek következtében f_m indefinit alak.

Még mellékesen megjegyezzük, hogy az f_m signaturáját, azaz $(P_m - N_m)$-et is könnyen kifejezhetjük az f_1 signaturája s_1 segitségével, ugyanis

$$s_m = P_m - N_m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{m-r}\binom{n-k}{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{\frac{n+s_1}{2}}{m-r}\binom{\frac{n-s_1}{2}}{r}.$$

3. tétel. Arra, hogy az

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$$

sorozat összes alakjai definitek legyenek, szükséges és elegendő feltétel, hogy e sorozat egyik tetszőlegesen választott alakja definit legyen.

Ha ugyanis f_m definit, akkor a 2. tétel értelmében f_1 nem lehet indefinit és igy az 1. tétel értelmében a sorozat összes alakjai definitek.

Ha pedig f_m indefinit, akkor az 1. tétel következtében f_1 nem

lehet definit, de akkor a 2. tételnél fogva a sorozat összes alakjai indefinitek.

4. tétel. Ha f_1 semidefinit, akkor az

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$$

sorozat összes alakjai ugyanilyenek. Mert ekkor a

$$\Phi_1(\varrho) = 0$$

egyenlet bizonyos számú gyökei zérussal egyenlők, míg a többiek megegyező előjelűek, de ugyanekkor a

$$\Phi_m(\varrho) = 0$$

gyökei között bizonyos számú zérus lesz, míg a többiek előjelben megegyeznek; tehát az f_m négyzetösszeg alakjában is a zérus együtthatókon kívül csak megegyező előjelű együtthatók szerepelnek és így f_m semidefinit.

5. tétel. Az f_{n-m} adjungált alakot a következőképen is megkaphatjuk. Megalkotjuk a

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nm} \\ u_{11} & u_{21} & \ldots & u_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \ldots & u_{n2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{1m} & u_{2m} & \ldots & u_{nm} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

determinánst; ezt LAPLACE tételének ismételt alkalmazásával kifejtvén, lesz:

$$\Delta = (-1)^k \sum_{\substack{(i,\,k) \\ (\alpha,\,\beta,\,s,\,t=1,\,2,\,\ldots,\,m)}} u_{i_\alpha s} \, | u_{k_\beta t} | \text{ adj. } | c_{i_\alpha k_\beta} |,$$

a mely kifejezésben az összeadás az összes

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$$

és

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$$

kombinációkra kiterjesztendő és

$$\text{adj.}\ |c_{i_\alpha k_\beta}|_{(\alpha,\beta=1,2,\ldots,m)}$$

a

$$c_{ik}\quad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

determinánsban a

$$c_{i_\alpha k_\beta}\quad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,m)$$

m-edfokú aldeterminánsnak kellő előjellel vett adjungált aldeterminánsát jelenti. Ha Δ-ban

$$|u_{i_\alpha s} \quad \text{és} \quad |u_{k_\beta t}\quad (\alpha,\beta,s,t=1,2,\ldots,m)$$

helyébe x_i illetőleg x_k-t helyettesítünk, megnyerjük az f_{m-n}-et.

Ha $m=1$, akkor már Δ maga adja meg f_{n-1}-et.

6. tétel. Ha f m-edrangú alak, akkor az

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{n-1}$$

sorozatban az m-edik alak után következő alakok azonosan eltünnek, f_m pedig teljes négyzet.

Minthogy ebben az esetben a

$$|c_{ik}|_{(i,k=1,2,\ldots,m)}$$

determináns minden $(m+1)$-edfokú aldeterminánsa zérus, Jacobinak egyik ismeretes tételét * alkalmazván, azt találjuk, hogy

$$C_{ik}^{(m)} C_{ki}^{(m)} - C_{ii}^{(m)} C_{kk}^{(m)} = 0$$

és minthogy

$$C_{ki}^{(m)} = C_{ik}^{(m)}$$

---

* L. Jacobi «De formatione et proprietatibus determinantium» czímű ért. Crelle Journ. 22. köt. 285. l.

lesz

$$C_{ik}^{(m)} = \sqrt{C_{ii}^{(m)}}\,\sqrt{C_{kk}^{(m)}}$$

és így

$$f_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{C_{ii}^{(m)}}\,\sqrt{C_{kk}^{(m)}}\,x_i x_k$$

$$= \left(\sqrt{C_{11}^{(m)}}\,x_1 + \sqrt{C_{22}^{(m)}}\,x_2 + \cdots + \sqrt{C_{\mu\mu}^{(m)}}\,x_m\right)^2.$$

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1896 február 20.-án tartott üléséből.)

A MORAVICZAI VASÉRCZTELEPBEN ELŐFORDULÓ TERMÉSZETES MÁGNESEKRŐL.

Dr. ABT ANTALTÓL.

Előfordulási viszonyok.

Ama gazdag és államgazdasági tekintetben is nagy fontosságú vasércztelepeken, melyek Krassó-Szörény megyében a moravicza-dognácskai hegységben, különösen Moravicza falu mellett a banatit (trachyt és csillámpala) és mészkő érintkezési helyén keletkezett úgynevezett contactkőzetben előfordulnak, egyes helyeken tiszta *mágnesvasérczek* és *vörös vasérczek* nagy mennyiségben találhatók, melyekre ott már régtől fogva élénk bányászat folyt. E két vasérczen kívül leginkább pyrit, pyrrhotit, ezüsttartalmú ólomfényle és rézérczek fordulnak elő szabálytalan contactkőzetben, mely gránátból, helyenkint tremolitból, augitból vagy serpentinből áll, és a legtöbb ércztelepet magában zárja. Az egész érczvonulat Ezerestől a Dunáig húzódik, 20 geografiai mértföldre, és a vasérczek 150 méternyi mélységig terjednek.

Moraviczán túlnyomóan a mágnesvasércz fordul elő, mely mintegy 80 százalékát teszi az ottani összes vasércz-előfordulásnak; a barna és a vörös vasércz meg a hæmatit pedig mintegy 20 százalékát. A vörös vasércz Dognácskán fordúl elő nagyobb mennyiségben.

Ezen érczvivő érintkezési helyeket alkotó kőzetek és előfordulási viszonyaik, valamint a bennök található számos különböző ásványok és kristályok, úgy bányászati tekintetben, mint a geologusra és mineralogusra nézve is rendkívül érdekesek és fontosak. A physikusok figyelmét pedig a néha igen jelentékeny erejű természetes mágnesek vonzzák magukra, melyek a moraviczai mágnetit-telep egyes helyein nagy mennyiségben találhatók.

De nemcsak települve, hanem hömpölyekben is fordúl elő mindenütt természetes mágnesvasércz, hol a talaj az úgynevezett bolussal van födve és ebben találhatók a legerősebben likacsos szövetű természetes mágneskövek.

Ezek a természetes mágnesek, melyeket a bányászok attractorius vasérczeknek neveznek, némely helyen, különösen a Danieli felszíni érczfejtési helyen, oly erősek, hogy a fejtésnél néha 3 cm. hosszú vasfonalak függnek a széttört darabokon és ökölnagyságú darabok néha fél kilogramm súlyú vastárgyakat is képesek függve tartani. Ilyen attractorius vasérczekben robbantási célokra szükséges 30—50 cm. mélységű lyukaknak fúrása nagy nehézséggel jár és néha majdnem lehetetlen. Magnetit nevét ezen vasércz, melynek chemiai összetétele Fe_3O_4, mágneses tulajdonságától nyerte.*

A magnetit mágneses viselkedése.

A magnetitnek és más vasérczeknek, pl. a pyrrhotitnek (Fe_7S_8) természetes mágnességével leginkább csak a mineralogusok foglalkoztak és vizsgálataik csak abból állottak, hogy mágnestűvel ezen vasérczeknek mágneses polárosságát kimutatták. Physikailag a magnetit mágnességét csekély mágnesező erőknél először Becquerel E.** vizsgálta 1845-ben. Specifikus mágnességét a vaséhoz viszonyítva, ugyanazon mágnesező erő mellett 0·48-nak találta. Nagyobb és különösen közepes mágnesező erőknél először Holz A. L.*** vizsgálta a magnetit mágnességét 1878-ban a berlini egyetem physikai intézetében, még Helmholtz alatt. Holz az ottani egyetemi ásványgyűjtemény egyik magnetitpéldányából három különböző nagyságú négyoldalú hasábot metszetett és ezeket ugyanakkora aczélhasábokkal hasonlította össze mágneses viselkedésre nézve. A mágnesezést árammal eszközölte alkalmas tekercsben; a viszonylagos mágneses erőket tükrös galvanometerrel mérte. Úgy találta, hogy a magnetit remanens mágnessége

---

* Ezen geologiai és bányászati adatokat Fucskó József bányamérnök után közöltem.

** Becquerel E. Compt. rend. 20. p. 1708, 1845.

*** Holz A. L. Wiedermann Ann. Bd. V, p. 169, 1878.

1·58-szor nagyobb, mint az aczélé; és hogy növekedő mágnesező erőknél a két test mágnességének viszonya az egységhez közeledik.

A Holz által megvizsgált magnetit példányban, a mint ő maga mondja, *repedések* és *törési* helyek voltak, s e miatt nem lehetett abból ép prismákat metszetni s azokkal teljesen egyenlő aczélprismákat készíttetni. Ezen oknál fogva az általa megvizsgált magnetit nem vehette fel a mágnességnek akkora quantumát, mint egy ép, homogen magnetitprisma, a milyenek az általam megvizsgált, a moraviczai magnetitból előállított prismák voltak. De a magnetit mágnessége még vastartalmától is függ, mely a Holz által megvizsgált magnetitnél nem volt közölve.

Az erősebb mágnesezést Holz oly módon eszközölte, hogy a magnetit- vagy aczélprismát egy erős elektromágnes egyik sarkával hozta érintkezésbe. Ez irányban tett saját vizsgálataim arra vezettek, hogy ily módon nem lehet szabályos mágneseket előállítani. Egyszer nagyobb, máskor kisebb a mágnesség az érintkezés után, egészen szabálytalanúl. Nincs más biztos eljárás arra, mint erős árammal alkalmas tekercsben erős mágneses teret előállítani, és a megmágnesezendő testet ebben elhelyezni.

Kisérleteimnél dynamo-elektromos áramokkal értem el a mágnesség maximumát. Egy 61·421 százalék tiszta vasat tartalmazó magnetitprismát és egy egyenlő alakú és méretű üvegkeménységű aczélprismát alkalmas tekercsben 16 Ampère-ig fokozott áramokkal megmágnesezvén, találtam, hogy az aczél itt már elérte mágnességének legnagyobb értékét, de a magnetit még nem. Ebben az állapotban a magnetit specifikus mágnessége 2·26-szor nagyobb volt, mint az aczélé. A mágnességet egy tükrös magnetometerrel észleltem skálával és távcsővel. A prismák a Gauss-féle első főállásban voltak elhelyezve.

Folytatván azután a mágnesezést 25 Amp.-ig, míg a magnetit is elérte a telítést, találtam, hogy 25 Amp.-nél az aczél nem adott nagyobb kitérést, de a magnetit okozta kitérés 11·5-ről 13·5-ig növekedett. 26·3 Amp.-nél a magnetit sem adott már nagyobb kitérést, ez is elérte volt mágnességének maximumát. Ebben az állapotban a magnetit specifikus mágnessége 2·356-szer multa felül az aczélét. Inductiós áramokból ezt a viszonyt

2·405-nek találtam. E szerint a mágneses testek közül a magnetitnek legnagyobb a specifikus mágnessége, mint ez már Holz méréseiből is kitűnt, sőt ezen legújabb méréseim szerint még az aczélét is jelentékenyen fölülmúlhatja.

Más vasérczeknek mágneses viselkedése.

A *pyrrhotit* nevű vasérczek közt is előfordulnak természetes mágnesek, és ez a vasércz is vizsgálataim szerint erős mágneses térben jelentékeny mennyiségű remanens mágnességet vesz fel. Chemiai összetétele a tiszta állapotra átszámítva Fe_7S_8.* Az általam megvizsgált pyrrhotitek egyikének vastartalma 57·58 százalék volt; remanens mágnessége 3·56-szer kisebbnek találtatott, mint a magnetité; az aczéléhoz képest 0·66.

A moraviczai vasércztelepben előforduló *haematitet* (Fe_2O_3) is megvizsgáltam mágneses tulajdonságaira nézve és egy közel a telítésig megmágnesezett hæmatit-prisma specifikus mágnességét az aczélhoz viszonyítva 0·214-nek találtam.

Mellőzve itt mindazokat az észleleti adataimat, melyek együttesen véve meghatározzák az említett vasérczek mágneses viselkedését, csak a Moraviczán előforduló természetes mágnesekre szorítkozom, melyek ott, mint fentebb említettem, nagyobb mennyiségben és nem ritkán jelentékeny mágneses erővel találhatók.

A települt magnetit-tömegek polárossága.

Kérésemre az osztr. magy. állami vasútak igazgatósága 1889-ben szives volt vizsgálataimhoz tiszta ép magnetit-példányokat küldeni, melyeknek ugyan kicsi volt a mágneses erejük, de épségük és tisztaságuk miatt — a legtisztábbak átmetszetben úgy néznek ki, mint a szürke aczél — mágnesezésre kiválóan alkalmasak. Themák temesvári reáliskolai tanártól egynehány erősebb mágneses vaskövet kaptam.

1894 október havában *a m. kir. természettudományi társu-*

---

* Dr. Nyiredy Géza három különböző lelhelyről (Borévről, Oraviczáról és Óradnáról) való pyrrhotittel végzett elemzése szerint.

lat szives anyagi támogatásával a helyszínén vizsgáltam meg ezen természetes mágneseknek előfordulási viszonyait, különösen arra nézve, vajjon a fölszínen előforduló, de a földből még ki nem fejtett mágneses vasérczeknek milyen a polárosságuk, merre fekszik északi s merre déli mágnességük. Ezekre a vizsgálatokra részint boussole-t használtam, részint ingaszerüleg felfüggesztett kis golyókat lágy vasból. Az utóbbiakat a mágneses vonzás mekkoraságának megitélésére.

Az első módon tett vizsgálatokból kitűnt, hogy helyenkint igen nagy volt a mágneses érczeknek a hatása, és hogy az egyes vasérczrétegek nemcsak különböző, egymástól alig félméternyi magasságban különböző polárosságot tanúsítottak, hanem még ugyanazon vízszintes réteg mentén mozgatva a boussole-t, hol az északi, hol pedig a déli sark vonzatott az érczek felé, az átmeneti helyeken a tű az észak-déli irányban helyezkedett el. Ha a tű az erős hatás folytán ferde állásba jött (lehajlott) és hegyével a skálán megakadt, azonnal ellenkezőre változott polárossága, a mi vizsgálat közben többször is megtörtént.

Ezekből az első megfigyelésekből ezen még ki nem fejtett természetes mágnesek sarkainak fekvésére nézve nem lehet még semmi bizonyosat mondani. Nem állítható fel azokból ama valószínűnek látszó törvényszerűség, hogy a földmágnesség inductio-hatása folytán valamely vasérczréteg alsó lapján északi, felső lapján déli sark keletkezik, mint valamely függőleges vagy ferde irányban tartott vasrúdnál. A polárosság többszöri változása közel egymás mellett, ugyanabban a vizszintes rétegben fekvő vasércztömegekben valószínűleg szintén inductiohatástól eredt, melyet egyik mágneses tömeg a másikra gyakorol. Az inductiohatástól valószínűleg nemcsak a sarkok fekvése, hanem azok intensitása is függ. Valamint lehetséges és valószínű az is, hogy valamely az eredeti helyzetéből kivett vasérczdarabnak más a mágnesereje, mint a milyen volt eredeti helyzetében, környezete szerint.

Csak behatóbb többszöri vizsgálatok alapján lesz talán lehetséges erre vonatkozólag némi felvilágosítást nyerni.

Nehány természetes mágnes ereje.

A számos természetes mágneskő közül, melyeket Moravicán a társulati igazgatóság szives ajánlata folytán az ottani bányamérnök segítségével gyűjtöttem, nehányat mágneses erejükre nézve relativ mértékben meghatároztam és közülök egynehány jelentékeny erejűt is találtam. Az eredmények tíz magnetit példányról a következő táblázatban vannak összeállítva, melyben K a két sark 100 cm.-nyi távolságról okozta tűkitérést — skálarészekben —, S az ásvány súlyát grammokban, M a viszonylagos specifikus mágnességet, vagyis az 1 grammra átszámított relativ mágneses momentumot jelenti.

I. TÁBLÁZAT.

Magnetit	K	S	M
I	43·20	2987·0	0·0144
II	30·65	2054·6	0·0149
III	15·00	981·5	0·0152
IV	16·15	1064·4	0·0152
V	22·65	1329·2	0·0170
VI	11·95	686·4	0·0175
VII	30·00	1435·0	0·0209
VIII	23·90	1065·0	0·0224
IX	111·50	3968·0	0·0281
X	12·25	322·2	0·0380

Összehasonlítás végett megmértem egy a telítési pontig megmágnesezett 8·41, 2·41, 1·92 cm. méretű üvegkeménységű acélprismának (A) hatását a magnetometerre ugyancsak 100 cm. távolságról keletnyugoti állásban. A megfigyelt kitérés 13·4 skálarész volt. Az *aczélprisma súlya* 316·75 gr., mágneses momentuma absolut mértékegységekben pedig 850·5 $C^{\frac{5}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}$-nak találtatott, viszonylagos specifikus mágnessége tehát 0·0423. Ehhez nagyon közel áll a X-zel jelölt természetes mágneskőé, a kettő viszonya:

$$\frac{X}{A} = \frac{0{\cdot}0380}{0{\cdot}0423} = 0{\cdot}898.$$

Ebből látható, hogy a magnetit közt gyakran olyan természetes mágnesek találhatók, melyekben a mágnességnek jelentékeny quantuma létezik. A X-es után a IX-esnek van a legtöbb mágnessége, viszonya az acélához 0·664. Az V és VI-é egyenlő egymással, úgy a III és IV-é, valamint az I és II-é. A legerősebbé 2·64-szer nagyobb, mint a leggyengébbé.

De a *pyrrhotitpéldányok közt is fordulnak elő jelentékeny erejű természetes mágnesek.* Így pl. egy 927·6 gr. súlyú pyrrhotit Borévről ugyanarról a távolságról + 14·8 és — 16·0 kitérést adott; specifikus mágnessége 0·0166, tehát akkora, mint az V-tel jelölt magnetitpéldányé.

A magnetit nevű vasérczek között találhatók, habár már ritkábban, olyan természetes mágneskövek is, melyeknek ereje még az elősoroltakét is felülmúlja és a telítési pontig megmágnesezett acélnak specifikus mágnességét még jobban megközelíti. Magam is rendelkezem egy ilyen érdekes példánynyal, melyet még 1865-ben kaptam egyik nagybátyámtól, ki alá, mint dognácskai bányaigazgató alá, a vaskői bányák is tartoztak több mint húsz éven keresztül.

Tartóképesség.

Ezen jelentékeny erejű mágneskő gömbölyded alakú és 1008 gramm súlyú. Főméretei a következők: a sarkok irányában 6 cm., erre merőlegesen 8, illetőleg 9 cm. Vasreszelékből tetemes menynyiséget vonz magához és a mágnestűt már távolról erősen kitéríti. Az általam használt magnetometer tűjét 100 cm. távolságról 42 skálarészszel kimozdította a mágneses délkörből; specifikus mágnessége tehát 0·0416, majdnem akkora, mint az említett acélé. Viszonyuk 0·983. Huzalon felfüggesztve legyőzi a huzal torsióját és beáll a mágneses meridiánba. Tartóképességének meghatározása végett egy hű gipszlenyomatot készítettem és arra egy alkalmas fegyverzetet csináltattam lágy vasból. Ebben a fegyverzetben mindjárt az első mérésnél, 1888 deczember havában, 800 grammnál szakadt le a horgonya. A sarklapoknak szélesbítése és egymáshozi közelítése (3 mm.-ig) által sikerült tartóképességét 1099 gr.-ig fokozni. Ez a súly már felülmúlja a saját súlyát. Ezután 400 gr.-mal megterhelve állott hosszabb ideig, míg egy újabb

mérésnél, a hol a megterhelés fokozatosan poronddal történt, tartóképessége 1411 gr.-nak találtatott. Egy második mérésnél nyomban az első után már 1099 gr. elég volt a horgony leszakítására.

Ezen utóbbi mérések után néhány hétig 1 kg.-mal megterhelve csüngött a mágneskő egy alkalmas állványon, melyen csavar segélyével lassankint addig lehetett emelni a mágneskövet, míg a rajta csüngő serpenyő az állvány alzatáról felemelkedett. Egy újabb mérésnél a horgony leszakadása 2730 gr.-nál történt.

Bányaművelés Vaskőn.

Hogy a moravicza-dognácskai vasércz-bányászat egészen a rómaiak idejéig vezethető vissza, azt az ott talált kohók falmaradványai és más tárgyak bizonyítják. 1718-ban az ottani vasérctermelés négy kohóra elegendő volt, a melyek közül kettő Német-Bogsánban, kettő pedig Resiczán volt felállítva. Nagyobb lendületet nyert az itteni bányászat 1855-ben, a mikor az osztrák-magyar állami vasúti társaság a Krassó-Szörény megyei kincstári összes bányákat, erdőségeket és uradalmakat megvette.

Régebben, a míg a vasérczeket a felszínen és ehhez közel csekély mélységben találták, aknákban dolgoztak és ezekből szállították fel az érczeket. Jelenleg egymás alatt emeletesen fekvő tárnákban dolgoznak a bányászok és a tömegesen előforduló magnetitet mindenütt dynamittal robbantják szét. Minden egyes tárnában az érczfejtéssel egy bizonyos mélységig haladnak, és a kifejtett érczeket a tárnákból kis kocsikban szállítják ki, azután új tárnát nyitnak és a régiben most lefelé dolgoznak. A robbantások egy időben történnek, mialatt a munkások biztos helyre menekülnek.

A mikor ott jártam, tíz helyen folyt a bányaművelés és az összes évenkinti vasérctermelés Vaskőn és a szomszédos Dognácskán az üzletvezető szerint közel 120,000 tonna volt, melylyel 1000 bányász van elfoglalva. A magasabb tárnákhoz két sikló vezet, az egyik 67, a másik 45 meter magas; az alsó 437, a felső 490·6 meter magasságban fekszik a tenger színétől. A legmagasabb tárna a völgy színétől közel 164 meter magasságban van.

A magnetit vastartalma és ennek viszonya a mágneses momentumhoz.

A különböző bányákban talált mágnesvasérczeknek vastartalma a társulat chemiai laboratoriumában végzett elemzések szerint 46·592 százaléktól 57·585 százalékig terjed. Egyes tisztább érczek sokkal nagyobb mennyiségű vasat tartalmaznak; így az általam mágneses viselkedésre nézve megvizsgált magnetitekben is a kolozsvári egyetem chemiai intézetében történt elemzések szerint 61·42, 67·527 és 67·850 százalék tiszta vas találtatott.

Ha ezen különböző vastartalmú magnetitekből metszett és a telítési pontig megmágnesezett prismáknak mágneses momentumait összehasonlítom a bennök levő összes vasmennyiséggel, akkor közelítőleg egy állandó viszonyszám jön ki, mint a következő táblázat mutatja:

Vasérez.	Vastartalom százalékban.	Absolut vasmennyiség. (Q).	Mágneses momentum (M).	$\frac{Q}{M}$
I	61·42	112·90	13·5	8·36
II	61·42	111·28	12·5	8·90
III	67·527	96·22	10·7	8·99
IV	67·850	125.15	15·0	8·34

Ezen viszonyosság biztosabb megállapítása végett nagyobb számú meghatározások volnának szükségesek. Megjegyzendő, hogy ilyen összehasonlításokat csak olyan magnetitprismákkal lehet tenni, melyeknek hossza keveset különbözik egymástól, minthogy vizsgálataim szerint a magnetit-rudak specifikus mágnessége is, mint az aczélrudaknál, a hosszúsággal növekszik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. február 17.-én tartott üléséből.)

ADATOK A CALCIUM CHEMIÁJÁHOZ.

LENGYEL BÉLA r. tagtól.

Nem tulzás, ha állítom, hogy annyi calciumfém még senkinek sem volt a birtokában mint nekem, mert eddigelé senkinek sem sikerült a calciumot elektrolysis útján — tehát tiszta állapotban — oly mennyiségben előállítani, hogy ez érdekes fémnek a chemiai jellege tanulmányozható lett volna.

A fémeknek elektrolysis útján való leválasztására tudvalevőleg DAVY volt az úttörő; de a földfémeket neki nem sikerült előállítani. Később BUNSEN[1] a magnesiumnak elektrolytikus úton való leválasztását dolgozta ki és megállapította a módszert, a melylyel a magnesium és lithium[2] leválasztása biztosan sikerül. Ugyanezen módon kisérlette meg a calcium, strontium és barium leválasztását is, de e kísérleteit nem koronázta a kellő siker.

BUNSEN után, felhasználva Bunsen tapasztalatait, MATHISSEN[3] foglalkozott a földfémek előállításával s sikerült is neki bizonyos feltételek között calciumot kapni, de a calcium többnyire apró szemecskékben vált ki és szétszóródott a megolvadt tömegben. Csak kivételesen történt meg, hogy lencsenagyságú regulust kapott.

Mind a mellett MATHISSEN a calcium physikai tulajdonságait és a legszembeszökőbb chemiai tulajdonságait is megállapíthatta.

Mások is foglalkoztak e fém előállításával. FREY[4] szerint a

---

[1] Ann. d. Chem. u. Pharm. LXXXII. 137.
[2] U. o. XCIV. 107.
[3] U. o. XCIII. 277.
[4] Ann. d. Chem. u. Pharm. CLXXXII. 367.

Mathissen ajánlotta eljárással sikerül a calciumot 2—4 gr. súlyú regulusokban megkapni. Liés-Bodart és Jobin a calciumot calciumjodidból natriummal redukálták; de a reactio, mely magas hőmérsékleten megy végbe, Dumas * szerint csak nagy nyomás alatt jön létre. Caron a fémet calciumchloridnak fölös mennyiségű natriummal és zinkkel való reductioja révén állította elő s a zink és calcium ötvözetéből a zinket magas hőmérsékleten elpárologtatta. Ez előállítási módok közül okvetlenül a Mathissen-féle szolgáltatja legtisztábban a fémet; de tapasztalataim szerint az így előállított calcium sem teljesen tiszta, hanem vastartalmú. Mathissen ugyanis a calciumchloridot vaspolusok között elektrolizálta úgy, hogy a positiv polus nagy felületű vashengerből, a negativ pedig vékony vasdrótból állott. Világos, hogy a positiv sarkon keletkező vaschlorid is az áram hatása alatt elbomlik és a vas a calciummal együtt a negativ poluson kiválik. Tiszta, vastól mentes calciumot ez eljárás szerint legfeljebb akkor kaphatni, ha az elektrolysist rövid idő mulva félbe szakítjuk, akkor, mikor még a vaschlorid nem szaporodott fel a tömegben. Mathissen 6 Bunsen-féle elemmel dolgozott s mindenkor egy fél óráig tartott az elektrolysis. Csak egy esetben sikerült neki — mint megjegyzi — calcium regulust kapni, máskor a fém apró szemecskékben volt szétszóródva a tömegben. Szerinte biztosabban sikerül a fém előállítása, ha positiv polusnak nagy felületű szénlemezt, negativ polusnak pedig vasdrótot használunk s a vasdrótot az elektrolysis alatt minden 3 perczben kiemeljük és a reá tapadt picziny calciumgömböt róla lefejtjük.

Megitélhető ezekből, hogy a calciumnak tiszta állapotban való előállítására olyan biztos módszerrel eddig nem rendelkeztünk, melylyel a fémet nagyobb mennyiségben lehessen előállítani. Igaz, hogy Caron-nak sikerült egyszerre 40 gr. fémet előállítani; de az ő módszerével véleményem szerint tiszta calciumot nem lehet kapni. Nem hiszem ugyanis, hogy a zink-calcium ötvözetből a zinket destillatio útján el lehessen távolítani, sőt valószínű, hogy az így előállított calcium még a natriumtól sem volt mentes.

---

* Ann. d. Chem. u. Pharm. CVIII. 128.

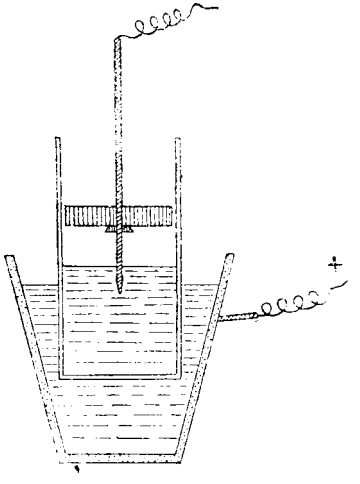
Én egy év előtt kezdtem foglalkozni a calcium előállításával és pedig a czélból, hogy e még alig ismert fémet behatóbban tanulmányozhassam. Ilyen nagyobb tanulmánynak eddig az állott útjában, hogy a fémnek tiszta állapotban és nagyobb mennyiségben való előállítása, az irodalomban felsorolt adatokból itélve, csaknem lehetetlennek vagy legalább kétségesnek látszott. Legelőször is arra törekedtem tehát, hogy e fémnek elektrolysis útján való előállítására oly eljárást állapítsak meg, mely cserben nem hagy és a mely tiszta calciumot szolgáltasson nagyobb mennyiségben. E törekvést siker koronázta, a mennyiben ma semmi nehézséggel nem jár e fémet 6—15 gr. súlyú regulusokban előállitanom. Nem látszik szükségesnek, hogy az egy év óta végzett kisérleteket és sikertelenségök okait leirjam; de annyit megemlíthetek, hogy valóban sok munkát kellett a czél elérésére áldozni és kitartó akarat volt szükséges, hogy annyi sikertelen fáradozás után a kérdés megoldását egészen el ne ejtsem.

A calcium előállítására a már fent jelzett okból, hogy t. i. véleményem szerint tiszta calciumot csakis elektrolysis útján állíthatni elő, én is az elektrolysist választottam. A kisérletezés fonalát ott vettem fel, a hol az MATHISSEN kezeiben megszakadt s végül a következő eljárásra jutottam.

Az elektrolytikus készülék tágasabb 7—8 cm. átmérőjű graphittégelyből áll, melybe 3—4 cm. átmérőjű likacsos agyagcella van belefüggesztve úgy, hogy a cella a tégely fenekét ne érje. Úgy a tégelyt mint a cellát megtöltjük vízmentes calciumchloriddal. A calciumchloridnak, megolvasztása után, a cellában valamivel magasabb szintben kell állania mint a tégelyben. A tégelyt összekötjük a positiv sarokkal, a cellába pedig a negativ sarkot mártjuk. A negativ sarok (az áram erősségéhez képest) vékonyabb vagy vastagabb, 1—2 mm. átmérőjű vasdrótból áll, mely a cellaénál valamivel kisebb átmérőjű agyagkorong közepén van átdugva. Az agyagkorong arra való, hogy a cellába lebocsáttatván, a megolvadt calciumchloridot a levegővel való érintkezéstől megóvja. Hogy az agyagkorong a megolvadt calciumchloriddal ne érintkezhessék, a rajta keresztül dugott dróton, annak bemártandó hegyétől megfelelő magasságban karima van, mely a cellába csusztatott agyagkorongot fentartja. A készülék mellékelt

keresztmetszetéből a szerkezet könnyen megérthető. Miután a calciumchlorid a tégelyben és cellában megolvadt, zárjuk az áramot és a cellát az agyaglapra hintett durva porrá tört calciumchloriddal töltjük meg és felületét egy pillanatra megolvasztjuk. Ezzel azt érjük el, hogy a cellát szilárd calciumchlorid-kéreggel légmentesen elzárjuk.

A mi az áramot illeti, én sokkal erősebb áramokkal dolgoztam mint MATHISSEN. Ő hat Bunsen-féle elemből álló batteriát használt, mely 10—11 voltos áramot szolgáltatott. Én 70, sőt most



110 voltos árammal dolgozom és 10—18 ampère-nyi áramot bocsátok át az elektrolyton. Az elektrolysist 1—1½ óráig megszakítás nélkül folytatjuk, mialatt ügyelni kell arra, hogy a calciumchlorid meg ne meredjen. A graphit-tégelyt a felületén kiváló chlor megtámadja és ennek következtében sűrű, salakhoz hasonló, félig olvadt réteg keletkezik a chlorcalcium felületén, melyben a fejlődő chlor nagy buborékokat duzzaszt. Ezt a salakszerű tömeget czélszerű időnként leszedni és a chlorcalciumot pótolni, hogy annak szintje a tégelyben ne csökkenjen. Miután az áramot az elektrolysis befejezésével megszakítottuk, a cellát a megolvadt

tömegből mindenestől kiemeljük s ha kihült, széttörjük. Ha a kisérlet hibátlanul ment végbe, akkor a calciumot 5—15 gr.-os regulusban a vasdrót végéhez tapadva találjuk, honnan könnyen leválasztható. A regulust üllőn kissé szétkalapáljuk, mitől a még reá tapadt calciumchlorid lepattogzik róla. A calciumchlorid végleges eltávolítása végett a fémet vízmentes alkoholba teszszük, hol a chlorcalcium leázik róla. A fém nem támadja meg az alkoholt, ha az teljesen vízmentes.

Az ekként előállított calcium, leszámítva a silicium nyomait, melyet a cellából vesz fel, egészen tiszta, a miről quantitativ vizsgálat alapján győződtem meg. Megmért mennyiségű calciumot vízzel calciumhydroxyddá alakítván: ezt élénken virítva calciumoxyddá változtattam és ennek súlyát megmértem.

0·5590 gr. calcium adott 0·7766 gr. calciumoxydot
elméletileg kellett volna adnia 0·7824 « «

Ez analysis szerint a regulus 99·2% calciumfémet tartalmaz.

A calcium physikai tulajdonságait én is olyanoknak találtam mint Mathissen. A fém sárgás-színű, hasonló az olyan aranyhoz, mely sok ezüsttel van ötvözve. Nyujtható, de ha sokáig kalapáljuk, törékeny lesz. Fajsúlya 18°-on végzett öt kisérletből középértékben 1·5540 (Bunsen és Mathissen szerint 1·5778).

A fém száraz levegőn nem veszti el fémfényét; nedves levegőn elég gyorsan oxydálódik és szürkés-fehér calciumhydroxyd kéreggel vonódik be. Ha a levegőn hevitjük, meggyulad és vakító fénynyel ég el calciumoxyddá. Gyulási hőmérséklete magasan fekszik, mert élénk vörös izzásra kell hevíteni, hogy meggyuladjon. Chlorban hévítve, vörös izzáson meggyulad és vakító lánggal calciumchloriddá ég el; jodgőzben vörös izzásra hevítve egyesül a joddal, de feltünőbb fényjelenség nélkül; ellenben kéngőzben vörös izzáson vakító lánggal ég. A vizet közönséges hőmérsékleten élénken bontja, calciumhydroxyd keletkezvén belőle, mitől a víz — minthogy e hydroxyd kevéssé oldható — megzavarosodik. Tömény kénsav, valamint tömény, füstölgő salétromsav hidegen nem hatnak reá; forráspontjukon kéndioxyd, illetve nitrogentetroxyd fejlődésével élénk pezsgés közben oldják fel. Tömény sósav hevesen hat s hydrogen fejlődése mellett oldja a fémet; higított salétrom-

sav szintén igen hevesen oldja. Mindezen sajátságokat a fent idézett buvárok megállapitották s én az ő észleléseiket a magaméival csak megerősíthetem. Az előadott sajátságokból azonban még távolról sem domborodik ki a calcium chemiai jellege, minélfogva szükségesnek mutatkozik, hogy a fémnek viselkedését más testekkel szemben is megismerjük.

Ez alkalommal a calciumnak a hydrogenhez való viszonyáról szólok.

Calciumhydrogen CaH_2

Ez az eddigelé nem ismert vegyület a két elemnek közvetlen egyesülése révén könnyen keletkezik. A calcium és hydrogen ugyanis gyönge vörös izzáson eléggé erélyesen egyesülnek egymással, miközben a hydrogent mohón elnyelő calcium élénken megtüzesedik. E vegyületet következőképen állítjuk elő: Tiszta, fényes felületüre csiszolt calciumból nehány grammot fényesre kitisztított vascsónakba teszünk s a csónakot mázzal ellátott porczellán-csőbe toljuk, melyen gondosan megtisztított és különös gonddal megszárított hydrogent vezetünk keresztül. A porczellán-csőből kiáramló hydrogen fölöslegét czélszerű egy reservoirba (vízzel elzárt üvegharang, vagy Deville-féle palaczkokból összeállított gasometer), illetve ezen keresztül vezetni, hogy akkor, midőn a hydrogen absorbtioja megindúl, elegendő hydrogen-készletünk legyen. A hydrogen fejlesztő készülék ugyanis nem győz elég hydrogent szolgáltatni, mikor az absorbtio megindul. Önként érthető, hogy a reservoir és a porczellán-cső közé szárító készülékek alkalmazandók. Mikor a készülékből a levegő teljesen ki van űzve, a porczellán-csövet óvatosan vörös izzásra hevítjük s a reactio befejeződése után még $^1/_2$ óráig e hőmérsékleten tartjuk. A porczellán-csövet hydrogenáramban hagyjuk lehülni s azután a keletkezett calciumhydrogent a csónakból gyorsan átteszszük jól beköszörült dugóval ellátott, lehetőleg kis üvegbe.

A calciumhydrogen szürkés színű, alaktalan földes test. Vízbe vetve, a vizet sokkalta hevesebben bontja el, mint a calcium maga; elannyira, hogy ha nagyobb darabot dobunk a vízre, a fejlődő hydrogen néha meg is gyulad s e közben a folyadék erősen megmelegszik. Oxygenáramban hevítve vörös izzáson meggyulad

és vakító lánggal ég; e közben sok víz csapódik le a cső hideg részeire. Chlorral vörös izzáson hevesen egyesül, úgy mint maga a calcium; de a calciumhydrogen chlorban két lánggal ég; az egyik valószínűleg a hydrogennek chlorral való elégésétől, a másik a calciumnak elégésétől származik. Jodgőzben hevítve izzóvá lesz s szikrákat szór. Kéngőzben hevítve sötétszínű porrá omlik szét s alig lesz izzóvá (a calcium vakító lánggal ég kéngőzben). Tömény sósav hevesen oldja, miközben hydrogen fejlődik; tömény kénsav és salétromsav hidegen hatástalanok vagy alig hatnak, forrón pezsgés közben oldják. Higított kénsav és még inkább salétromsav igen hevesen támadja meg, hydrogen fejlődése mellett az illető calciumsókká alakítván.

A calciumhydrogen chemiai alkatának megállapítása végett megmértem a hydrogen mennyiségét, melyet e vegyület vízzel fejleszt és meghatároztam a calcium mennyiségét, a mely a képződött calciumhydroxydban van. A kisérlet kivitele egyszerű. Egyik végén beforrasztott, osztályzattal ellátott csövet higanynyal megtöltve a higanykádban felállítottam. A csőbe előbb a calciumhydrogent, azután pedig vizet bocsátottam. 12—24 óra mulva, mikor már a pezsgés megszünt, a gáz térfogatát megmértem s normális térfogatra redukáltam. Ugyanazon calciumhydrogen egy más részletéből pedig a calciumot az ismert módon meghatároztam. Két különböző előállításból származó calciumhydrogennel a következő eredményt kaptam:

	súlyszázalékban		középérték
	I.	II.	
a fejlesztett hydrogen	8·76	8·52	8·64
calcium	94·95	94·00	94·48

A súlyszázalékos mennyiségeket elosztva az illető atomsúlyokkal, kiadódik, hogy a calcium atomszáma úgy viszonylik a hydrogenéhez mint 2·382 : 8·64-hez, azaz egy atom calciumra négy atom kifejlesztett hydrogen esik. Egy atom calcium azonban csak két atom hydrogent fejleszt, minélfogva a másik két atom hydrogen a calciumhoz volt kötve. Ezek szerint e calciumhydrogen alkata CaH_2. Az e képletből számított százalékos alkat a találttal összehasonlítva a következő:

	számolt	talált
calcium	95·2	94·48
hydrogen	4·8	4·32
	100·0	98·80

Az eltérések nem lényegtelenek, de azért könnyen érthetők. A calciumhydrogen a levegőn annak nedvessége következtében igen gyorsan változik és calciumhydroxyd lesz belőle. A calciumhydroxyd képződése úgy a hydrogen, mint a calcium százalékát csökkenti. A calciumhydrogen hatását vízre ezek szerint a következő egyenlettel fejezhetjük ki:

$$CaH_2+2HOH=2H_2+Ca(OH)_2.$$

Nem érdektelen megemlíteni, hogy a calciumhydrogen nem csupán a vízre hat erélyesebben mint maga a calcium, hanem más hydroxydtartalmú vegyületekre is. A calcium, mint értekezésem elején említettem, a vízmentes borszeszre nem hat, ellenben a calciumhydrogen a borszeszt eléggé élénken bontja el. A borszeszszel fejlődő gáz tiszta hydrogen, minélfogva a reactio ez:

$$CaH_2+2C_2H_5OH_2=(C_2H_5O)_2\,Ca+H_4.$$

Hogy vajjon valóban calciumalcoholat keletkezik-e, most van vizsgálat alatt.

Megkisérlettem a strontium és barium electrolytikai előállítását is. A strontium előállítása sokkal nehezebb, mint a calciumé, és ritkán sikerül. A bariumot pedig eddig nekem sem sikerült előállítani. Reményem van azonban, hogy a nehézségeket leküzdhetem és e fémek elektrolysisére is biztos módot fogok találni.

Ezeket volt szerencsém ez alkalommal a tek. Akadémiának előterjeszteni. Remélhetem, hogy többször nyilik alkalmam a calcium chemiájához adatokkal járulni, a miről nem fogom elmulasztani a tek. Akadémiának jelentést tenni.

Végül kötelességem elismeréssel megemlékezni Weszelszky Gyula okl. gyógyszerész-mesterről, a ki dolgozatom kisérleti részében buzgósággal segédkezett.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896 márczius 16.-án tartott üléséből.)

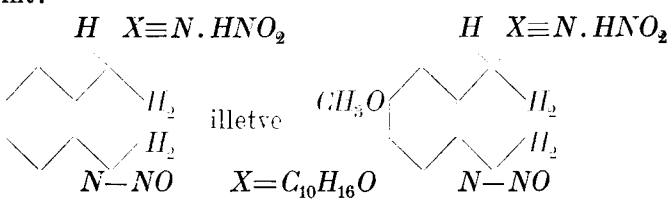
EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

CHINAALKALOIDÁK HYDROSZÁRMAZÉKAI.*

Dr. KONEK FRIGYES-től.

Azon kedvező eredmények, melyeket natriumnak és amylalkoholnak cinchoninra való hatásánál elértem, midőn egy tetrahydrocinchoninnitrosonitritet** sikerült találnom: arra birtak, hogy ezek hatását a többi chinabasisokra is megvizsgáljam, és a cinchonidint, chinint és chinidint is belevonjam kutatásaim körébe.

Forró amylalkoholos oldatban fémnatrium hatására mind a négy chinabasis átalakul főtömegében tetrahydroszármazékká, a melyeket az olajos, ætherben oldható basiskeverékből, fejlődés pillanatában levő salétromos savval, szépen kristályosodó sók alakjában lehet elkülöníteni. Ezek másod- és harmadrendű basisok salétromossav sói: «nitrosonitritek», a következő általános typusok szerint:



E vegyületek sárga, narancs és rózsa színűek. Bennök a salétromossav az erősebben basikus nitrogenatomhoz (a szerkezetileg még ismeretlen alkaloidfélben), a nitrosocsoport ellenben

---

* Közlemény a k. József műegyetem általános chem. laboratoriumából.

** Monatshefte f. Chemie XVI. 298. és Ber. d. d. chem. Gesellsch. XXVIII. 1637.

a kevésbbé basikus chinolinnitrogenhez van kötve. Ez onnan van, hogy oldatban alkáliákkal megbontva olajos nitrosobasisokat létesítenek, melyek a Liebermann-féle nitroso-kémhatást kitünően mutatják és ætheres oldatban már közönséges hőnél jodmethyllel csak gyengén színezett additio-termékeket adnak; tehát a nitrosocsoportot azon nitrogenatomhoz kötve tartalmazzák, a mely a közönséges színtelen jodalkylátokban és az egyszerűen savanyú sókban érintetlen maradt. Ebből meg viszont az is következik, hogy a chinolinnitrogenatom ezekben a testekben másodrendű, minélfogva ezek mint igazi «tetrahydrochinolinszármazékok» foghatók fel. Ezek a vegyületek híg sósav, vagy ón és sósav hatása folytán vörösbarna, nem kristályosodó, könnyen elszarusodó basikus testekké alakulnak, melyekből rendkívül könnyen oldható sók keletkeznek, de további megvizsgálásuk előreláthatólag sok nehézségbe fog ütközni. Minthogy a Liebermann-féle reactiót már nem mutatják, bennök a nitrosocsoport nem fordul elő.

Érdekes, hogy az így átalakított chinin vagy chinidinszármazék chlor- vagy bromvízzel az annyira jellemző, thalleïochin-reaktiót nem mutatja; tehát közelfekvő az a feltevés, hogy ezek a testek, melyek mindenesetre «alkaloid $4H$»-t tartalmaznak, természetüknél fogva már nem igazi chinin- illetve chinidinszármazékok; és hogy a magas kisérleti hőnél az alkaloid azon felében, melyben a chlor vagy brom támadva, a smaragdszineződést létrehozza, talán mégis valami atomáthelyeződés történhetett.

Rejtélyes az a körülmény, hogy ezek a növényi basisok, ha tényleg egy vinylcsoportot, vagy más telítetlen gyűrűszerkezetet a cinchoninsav-chinolingyűrűvel összefüggésben tartalmaznak — mint azt többen felteszik és a mint az természetes alkaloidáknál oly gyakran található — a nagy hydrogenfelesleg ellenére is csak négy, nem pedig hat vagy nyolcz hydrogénatomot kötnek meg. Emlékeztetni akarok itt a nicotinra, a mely némely búvár szerint csak hat atom hydrogent vesz fel, míg más, kevésbbé megbízható munkák egy octohydronicotin létezése mellett is szólnak. Felemlítendőnek tartom még azon megfigyelést, hogy míg a cinchonin majdnem quantitativ és a chinin igen jó százalékos eredménynyel adja a tetrahydronitrosonitritet, addig a megfelelő alkaloidapár:

cinchonidin és chinidin, sokkal kevesebbet szolgáltatnak ezen vegyületből; hasonlóképen pl. cinchonidin az oxydatiónál sokkal kevesebb cinchoninsavat ad, mint az isomer cinchonin; kétségtelen, hogy ezen viselkedés a molekula stereochemiai alakulásával szorosan összefügg. Egyelőre ezeket az új vegyületeket «tetrahydroalkaloidnitrosonitritek»-nek nevezem; további kisérletek hivatvák szerkezetüket teljesen kideríteni.

Tetrahydrocinchonidinnitrosonitrit.

A kiindulási anyag gyönyörűen kristályosodott tiszta cinchonidin volt, melynek olvadási pontja az irodalomban feljegyzett adattal megegyezett. 10 gr.-ot 300 gr. forró amylalkoholban hydráltam. Kezdetben erősen sárga az oldat, idővel azonban ez a szín eltünik. Egyébiránt egészen úgy jártam el, mint ezt a cinchoninnál közöltem.*

Czélszerűnek bizonyult a hydrobasisokat az æther elűzése után híg sósavban oldani és a savanyú oldatot az amylalkohol maradékok eltávolítása végett néhányszor ætherrel kioldani. Azután a basisokat conc. ammoniákkal újból leválasztottam és ætherben oldottam. Az így tisztított termék hidegen és ætherben teljesen oldható, tiszta sárga, sűrű olaj (tehát változatlan cinchonidint már nem tartalmaz), mely idővel elszarúsodik.

A nitrosálást az idézett helyen leírt módon végezzük. A keletkező nitrosonitrit nem oly szilárd, és kevesebb is mint a cinchoninnál. Leszűrjük, hideg vízzel kimossuk és vacuumban szárítjuk. Ezt a nyers terméket hideg absolut alkohollal jól szétdörzsöljük, szürőre gyűjtjük és alkohollal addig mossuk, míg ez már nem színeződik és a visszamaradt só tiszta fehér lesz. Most nehányszor forró vízből kristályosítunk; az új vegyület sárga, fénylő tűk alakjában rögtön kiválik; 192—93°-on olvad és bomlik; gyorsan hevítve az olvadás-pont nehány fokkal magasabb. A test összetétele megfelel egy «tetrahydrocinchonidinnitrosonitrit»-nek: $C_{19}H_{22}N_2O.H_3.NO.HNO_2$. 110°-on nem veszít súlyából.

* Ber. XXVIII. 1637.

Elemzések:

talált:	számított: $C_{19}H_{20}N_4O_4$
$C = 60{,}31\%$	$C = 60{,}96\%$
$H = 7{,}04\%$	$H = 6{,}95\%$
$N = 15{,}16\%$	$N = 14{,}97\%$

A só különbözik a tetrahydrocinchoninnitrosonitrittől, a mely utóbbi egyszerre, ugyanazon hőmérőn hevítve 199—200°-on elbomlik, továbbá más az oldhatósága is. A cinchonidinszármazék forró vízben nehezebben oldható, tehát sokkal gyorsabban válik ki; a kristályoknak színe és alakja eltérő. Valamint a vegyületek, melyekből kiindulunk, azonképen ezen származékok is különböznek egymástól. (Minthogy a circulár poláros fény síkjának elforgatása — ha az elforgatás előjelére vagyunk tekintettel — a chinabasisok sóinál gyakran szabálytalan: nem tartottam szükségesnek ezeket az új sókat polarizálni). Ha ezen só vizes oldatát ammoniával telitjük, a szabad nitrosobasis tejes csapadék alakjában leválik, mely ætherben könnyen oldható; mint sárga olaj marad vissza és a Liebermann-féle kémhatást mutatja; a vizes oldatban pedig salétromossav ismerhető fel. Aetheres oldatban már közönséges hőmérsékleten azonnal egyesül jodmethyllel; fehéres-sárga, szilárd, könnyen elszarusodó test válik le. A basis más sói is kristályosodnak, pl. a chlorhydrát, az oxalat stb.

Tetrahydrochininnitrosonitrit.

Vizsgálataimhoz tiszta chinint használtam. A hydrálást az imént leírt módon végeztem. A hydrobasisok sósavas oldata zöldes-sárgán fluoreskál. A tisztított basisok könnyen és maradék nélkül oldódnak ætherben; a száraz híg ætheres oldat kék színnel fluoreskál, de a concentrált nem és az oldat színe sárga. Az æther-oldatból nehéz sárga olaj marad vissza, mely vékony rétegben szintén kék színnel fluoreskál. A nitrosovegyület előállításakor első pillanatra baraczkvirág színű olaj válik le, mely csakhamar megbarnul és erre fehéres-sárga törmelékes testté szilárdul. A jól kimosott só a vacuumban végzett szárításnál is rózsaszínű lesz. Szárítva hideg absolut alkohollal digeráljuk, és szűrőn addig

mossuk, míg a só megfehéredik (az alkohol biborvörös színt ölt), de idővel levegőn ismét rózsaszínű lesz. Az így tisztított vegyület forró vízből rögtön finom fénylő sárga tűkben válik ki, s ezek színe is rózsásba megy át. Néha a só közvetlen is rózsaszínű finom fénylő tűkben válik ki. Olvadáspontja 188°, de ugyanott bomlik is. Az új test «tetrahydrochininnitrosonitrit»: $C_{20}H_{24}N_2O_2 . H_3 . NO . HNO_2$. 110°-on sulyából nem veszít.

Elemzések:

talált:	számított: $C_{20}H_{28}N_4O_5$
$C = 58{,}68\%$	$C = 59{,}40\%$
$H = 6{,}86\%$	$H = 6{,}93\%$
$N = 14{,}30\%$	$N = 13{,}86\%$

Alkaliák ezen só vizes oldatából gyenge rózsaszínnel leválasztják a nitrosobasist. Ez ætherben könnyen oldódik és mint vöröses színű, elszarusodó olaj marad vissza. A Liebermann-féle kémhatást mutatja, a vizes oldatban pedig salétromos sav mutatható ki. Feltünő, hogy a nitrobasis alkoholos oldata sem chlor-, sem bromvízzel nem adja a thalleiochinreactiót. Ha híg sósavas oldatát pár perczig főzzük, pezsgés közben salétromssavgáz távozik el s az oldat olajzöld lesz. Higításkor a sötétvörös folyadékból ammonia veres pelyheket csap le, melyek ætherben oldódnak. Az æthermaradék szintén nem mutatja a smaragdzöld szineződést.

Tetrahydrochinidinnitrosonitrit.

E vizsgálatokat tiszta kristályos chinidinnel végeztem. A hydrálást úgy végeztem, mint a megelőző esetekben. A tisztított hydrobasis nehéz, barnás-színű olaj; levegőn állva szarusodik, könnyen oldódik ætherben és vékony rétegben kék színnel fluoreskál. A nitrosovegyület előállításakor ugyanazokat a színtüneményeket mutatja mint a chinin; a termék barna szarúnemű test, mely nem szilárdul meg. A vizet a mennyire lehet kisajtoljuk, vacuumban kénsav felett szárítjuk; azután hideg absolut alkohollal szétdörzsöljük és szűrőn jól kimossuk. 10 gr. chinidinből kiindulva 4 gr.-ot sikerül ebből a termékből előállítani. Forró vízből a test gyakran mint sűrű olaj válik ki, de rögtön sárgásbarna színű

fénylő tűkké merevedik. Olvad 178—79°-on és ugyanott bomlik is. Alkoholból ez a só sárgaszínű fénylő prismákban kristályosodik; olvadáspontja változatlan. Ennél a vegyületnél azok a színváltozások, melyek az isomer chininszármazéknál észlelhetők, hiányzanak, és olvadáspontját, színét, kristályalakját tekintve is sokkal élesebben különbözik attól, mint a cinchonidin a cinchonidinszármazéktól. Az új test, mint az várható is volt, «tetrahydrochinidinnitrosonitrit»: $C_{20}H_{24}N_2O_2 . H_3 . NO . HNO_2$. 110°-on nem veszít súlyából.

Elemzések:

talált:	számított: $C_{20}H_{28}N_4O_5$
$C = 59{,}88\%$	$C = 59{,}40\%$
$H = 7{,}01\%$	$H = 6{,}93\%$
$N = 14{,}03\%$	$N = 13{,}86\%$

A tiszta só vizes oldatából ammonia kiválasztja a hófehér nitrosobasist (a chininnél rózsaszínű), mely könnyen oldódik ætherben; phenollal és tömény kénsavval elegyítve a nitrosovegyületek kémhatását adja, ellenben a thalleïochin-szineződést nem. A vizes oldatban salétromossav mutatható ki.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896 március 16.-án tartott üléséből.)

VIZSGÁLATOK AZ ORRNAK ÉS JÁRULÉKOS ÜREGEINEK FEJLŐDÉSÉRŐL.

Dr. MIHALKOVICS GÉZA, r. tagtól.

(9 ábrával).

3 hetes emberi embryonál (4·5—5·5 mm. tarkónyakszirti hosszúság) a fej idoma a későbbi állapotoktól lényegesen eltér: a kiemelkedő homlokdudor alatt arcz- és orrüreg még nincsenek jelen, hanem a koponyának leendő rostacsonti része alatt mindjárt a nagy elemi szájüreg (stomodæum) fekszik, melyet mindkét oldalról a felső állcsonti nyujtványok, alulról az ívalakulag görbült alsó állkapcsi nyujtvány (1-ső zsigeriv) kerítenek körül.

A koponya rostacsonti része ekkor még kevés embryói kötőanyagból (mesenchyma) áll, kivül a homlokdudorról az elemi szájüreg tetejére lehajló ektodermai hám által takarva; ezen helyről indul meg az orrüreg fejlődése. Ott a hám a 3. hét elején mindkét oldalon petéded kiterjedésben megvastagszik, és az ú. n. *szaglási mezővé* (area nasalis, His) * lesz. Figyelemre méltó körülmény az, hogy ezen páros mezők nem feküsznek az előagyvelő és elemi szájüreg között, hanem a koponyának homloki részén oldalfelé szabadon és egymástól távol; a hámvastagodás hossza 0·5 mm., szélessége 0·2 mm.; a szaglási mezők közötti széles állományhíd a homlokdudorról lehajlik a szájüreg tetejére s a másodagyvelő alapjáig terjed, ebből lesz a koponya ikrostacsonti része (pars sphenoethmoidalis). Tekintettel arra, hogy a szaglási szervnek épen olyan páros embryói telepe van, mint a látó- vagy hallószervnek, ebből az következik, hogy két önálló orrüreg van; az elválasztó

* His W. Anatomie menschlicher Embryonen, III. Leipzig, 1885.

sövénynek később beálló megkeskenyedése miatt szoktunk csak egy orrüreg részarányos két fél részéről szólni. Minden gerinczes állatnak páros az orrürege, még a petromyzoné is, melynek ugyan látszólag közös szaglási mezeje van, de ezt is ketté választja a középvonalban egy közömbös hámcsík (Ayers) ;* ettől eltekintve a szagoló ideg páros jelenléte is a kettős embryói telep mellett szól.

A szaglási mező körül a környező szegély csakhamar sánczalakúlag kiemelkedik, mire a mezőnek megvastagodott hámja csészealakú bemélyedésbe jut (3. hét végén, 8—9 mm. a tarkófark hosszuság) ; ennek Baer ** óta *orr-* vagy *szaglási árok* (fossa olfactoria) a neve. Alakja megnyúlt hosszukás petéded, lenn a szájüreg bemenete felé szegélyei alacsonyabbak, a többi részén jól kiemelkedő hullámosak ; alsó megkeskenyedő részének belső oldalán igen korán, lehet mondani már a szaglási mező kifejlődésével egyidejüleg kis hámbehuzódás jelenik meg, ami a *Jacobson-féle szerv* (organum vomerobasale [Jacobsonii]) első fejlődési telepét teszi.

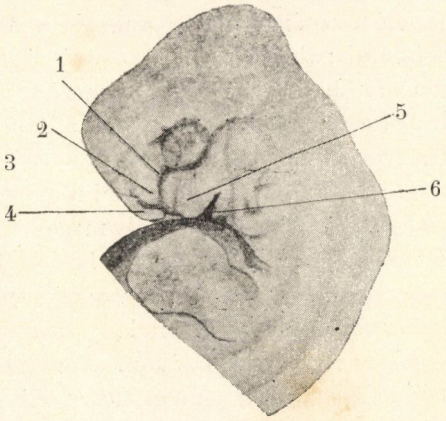
Eleinte a szaglási árkok a fej homloki részén egészen szabadon feküsznek, s ami figyelemre méltó, oly magasan állnak, mint a szem ; felszinök nem előre, hanem oldalfelé fordult, tehát arányitva a kifejlődött állapothoz, oly helyeken vannak, melyek fekvésre megfelelnek az arcz járomcsonti részének, a szemek pedig egészen oldalfelé feküsznek a halántéki tájékon. A szaglási árkok és a szemtől lehuzódó könnybarázda (sulcus lacrymalis) által az arcz három mezőre osztott: középső páratlanra s oldali párosakra, ezek teszik a leendő orr- vagy homloknyujtványoknak (processus nasales) fejlődési telepeit, de egyelőre még kevéssé körülirtak, azért e nevet csak akkor érdemlik meg, ha az orrárok mélyebb lett s a felszinről visszahuzódott.

A 4-dik hét folyamán a szaglási árok szegélyei a hám szaporodása következtében magas ránczokká lesznek, egyszersmind a szomszéd kötőanyag jelentékenyen megszaporodik s ezáltal az árkot betemeti; akkor az árokból, minthogy kezdettől fogva megnyúlt alakú volt, hosszukás lapos hámtömlő lesz, amit *orrtasaknak* (saccus nasalis) neveznek. Ez nem benövés által jutott a koponya alap-

* Ayers H., Journal of Morphology IV., 1890.

** Entwickelungsgeschichte der Thiere. Bd. I.

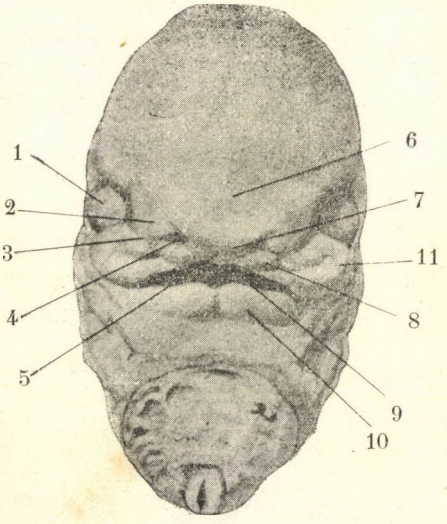
jára, hanem az elemi szagárok megtartotta eredeti szomszédságát az előagyvelőhöz, csak a környező kötőanyagnak megszaporodása által jutott a tasak mélyebb fekvésbe. Minthogy pedig a szagárok és a belőle lett tasak kezdettől fogva egészen oldalfelé feküdtek az arczon, közel a szemhez, e miatt a tasak két oldalán fekvő kötőanyagi halmaz nem egyforma mennyiségü, t. i. a külső oldalon kevés, a belső oldalon sok. Ezen kötőanyagi halmazokat s az őket takaró hámokat nevezik külső és belső orr- vagy homloknyujtványoknak. (1. ábra, 2 és 4) A *külső orrnyujtvány (processus nasalis lateralis)* egy kis lebeny-



1. ábra. 20 mm. hosszú *macskaembryo* feje oldalról nézve. Lupe-nagyitás. 1. Könybarázda. 2. Oldalsó orrnyujtvány. 3. Külső orrlik. 4. Belső orrnyujtvány. 5. Felső állcsonti nyujtvány. 6. Állkapcsi nyujtvány.

alakú függelék az orrtasak (3) és könnybarázda (1) között, minthogy pedig az utóbb említett barázda csak felületesen metsz be, e miatt joggal mondható, hogy a külső orrnyujtvány csak egy kis függeléke a küloldalán fekvő erős *felső állcsonti nyujtványnak (processus maxillaris)* (5). Másképp áll a dolog a *belső orrnyujtványnyal (processus nasalis medialis)* (4), ez egy széles önálló részlete az arcznak a két orrtasak között (2. ábra 7) s nem egyéb, mint a koponya ikrostacsonti részének legelülső darabja (1. ábra 8), mely az előagy alapjától (7) leterjed az elemi szájgödör (4) tetejéig, s úgy az arcz szabad felszinén, mind a szájüreg tetején ektoderma által takar-

tatik. Ezen lebenyalakú függeléken a 4. hét folyamán az orrtasak szomszédságában mindkét oldalon golyóidomú duzzanat keletkezik, amit His *golyóalakú lebenynek (processus globularis)* (2. ábra 10) nevezett, közöttük a középső orrnyujtvány állománya a felszinén kissé besüpped. Akkor a szájnyílás igen tág ötoldalú (2. ábra): fenn a középső homloknyujtvány (7) és felső állkapcsi nyujtványok (11) szabad szegélyei, lenn az alsó állkapcsi nyujt-



2. ábra. 20 mm. hosszú *macskaembryo* feje elülről nézve. Lupe-nagyítás. 1. Szem. 2. Oldalsó orrnyujtvány. 3. Könybarázda. 4. Külső orrlik. 5. Állelőtti szájpad. 6. Háromoldalú mező (area triangularis, His.) 7. Orralatti mező (area infranasalis, His). 8. Golyóidomú nyujtvány (process. globularis, His). 9. Szájrés. 10. Állkapcsi ív. 11. Felső állcsonti nyujtvány.

vány (10) kerítik körül; a golyóidomú lebeny (3. ábra, 10) szemben áll a felső állcsonti nyujtvány csúcsával (11) s az általuk bekerített résalakú zúgba (3) nyílik bele az orrtasak (7) alsó szabad nyilása

* Alkalmas fiatal emberi embryok nem állván rendelkezésemre, az első fejlődési folyamatokat macskaembryokon vizsgáltam meg s rajzoltattam le (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8. ábrák). A lényeges viszonyokat illetőleg nincs eltérés az embertől, csak a nyujtványok arányaiban van némi nagysági külömbség (pl. a felső állcsonti nyujtvány nagy), de ez mellékes jelentőségü.

és a könybarázda (9); az oldalsó orrnyújtvány (2) csúcsa feljebb szorul s nem éri el a szájrést.

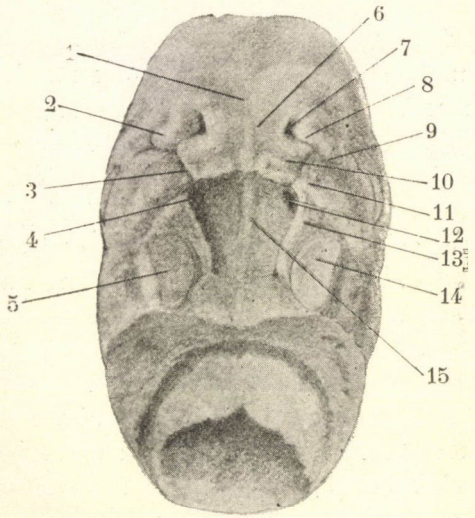
A külső orr és orrüreg fejlődésére a legfontosabb képződmények a középső és az oldalsó orrnyujtványok. A középső orrnyujtvány arczi felszinének közepe a 4. héten kissé besüpped (2. ábra 6; 3. ábra 1). Ha ezen besüppedés hosszában az orrtasakok legmagasabb pontjait haránt vonallal összekötjük, akkor a középső homloknyujtványt két részre osztottuk: a felső *háromoldalú mező (area triangularis*, His) később a külorr hátává lesz (6. ábra, 11), mélyebb részéből pedig az orrsövény keletkezik (6. ábra, 8); mindezen részek 4—5 hetes emberi embryoban igen alacsonyak s csak kezdeti szakaikban mutatkoznak. Annál jobban fejlett a két orrtasak nyilása által közrefogott *orralatti mező (area infranasalis*, His), ennek középső darabjából (2. ábra, 5) utóbb a mozgatható orrsövény, oldalti gömbölyded részeiből (processus globulares) (3. ábra, 10) a felső ajknak azon része lesz, mely az orralatti barázdát (philtrum) két oldalról határolja; ugyancsak a mélyebb része az állközti csont (præmaxillare, intermaxillare) fejlődési telepét teszi.

4—5 hetes emberi embryoban a szagoló szerv főbb részeinek meg van vetve az alapja, ú. m.: *a)* a középső orrnyujtvány (2. ábra 5) szolgáltatja a külorr hátát, az állközötti csontot s az orrsövény elülső részét, benne a Jacobson-féle szervvel; *b)* az oldalsó orrnyujtvány (2) átalakul az orr szárnyává; *c)* az orrtasak bemenete (4) lesz a külső orrlikká, a tasak falai az orrüreg falaivá (5. ábra 5, 11); a tasak tetején fekvő kötőanyag (14) teszi a rostacsont embryoi telepét, melyben már ezen korai állapotban a szagideg rostjai (3) haladnak le az orrtasak hámjához. Ellenben hiányoznak még ezen korai állapotban: *a)* a belső orrlikak; *b)* az orrüreg fenekét tevő kemény szájpad és *c)* az orrsövény hátulsó nagyobbik része.

Ezentúl az arczi felszin átalakulásai karöltve járnak a szájüreg tetején végbemenő változásokkal, de a leirás könnyítésére a kettőt külön fogjuk választani. Az arczi felszin átalakul a külső orrá, az orrtasak falai és szomszédsága az orrüreggé; eszerint leirandó: 1. a külső orr, 2. az orrüreg fejlődése.

A) A külső orr (Nasus externus).

11—12 mm. hosszú emberi embryonál a középső orrnyujtvány két oldalsó csúcsa (processus globularis) lefelé növése következtében az általuk közrefogott behuzódás mélyebb lesz s hasadékot fog közre, mely ha rendellenes módon megmarad, nyúlajk (labium



3. ábra. Ugyanaz az állkapcsi ív eltávolítása után. A fej úgy van fordítva, hogy a szájüreg tetejére látni. Lupe-nagyitás. 1. Háromoldalú mező (area triangularis, His.) 2. Oldalsó orrnyujtvány. 3. Barázda a belső orrnyujtvány és felső állcsonti nyujtvány között. 4. Belső orrlik (choana primitiva.) 5. Állkapcsi ív (levágva). 6. Belső orrnyujtvány. 7. Külső orrlik. 8. Oldalsó orrnyujtvány. 9. Könybarázda. 10. Golyóalakú nyujtvány (process. globularis, His). 11. Felső állcsonti nyujtvány. 12. Belső orrlik. 13. Szájpadi lécz. 14. Átmetszett állcsonti ív. 15. Elemi szájüreg teteje.

leporinum) képzésére vezet. Az ilyen hasadék az arcz középsikjában fekszik, azért középső ajkhasadéknak (fissura mediana labii) nevezendő, megkülönböztetésül az oldalsóktól, amelyek párosak lehetnek. Rendszerint a közepetti hasadék felülről lefelé megszaporodó kötőanyag által megtöltetik s akkor a felső ajkszélen a közepetti behuzódás elenyészett (3. ábra). Oldalfelé a golyóidomú lebeny

(3. ábra 10) a vele szemben álló felső állcsonti nyujtvány (11) csúcsával szintén hasadékot fog közre (3), melybe fenn az orrtasak (7) és könybarázda (9) nyilnak; ez a hasadék (3) is megmaradhat, s ugynevezett oldalsó nyulajk (fissura labii lateralis) képzésére vezethet; ezen hasadékok persze párosak lehetnek. Felnőtt emberben az oldalsó ajkhasadék helyét az ú. n. ajkbarázda (philtrum) oldalsó szegélyei jelzik, ennek hosszában történt az egybeforradás a golyóidomú lebeny és a felső állcsonti nyujtvány belső csúcsa között.

Rendszerint a golyóidomú lebeny a felső állcsonti nyujtvány csúcsával a 2. hónap közepén (14—16 mm. hosszú emberi embryonál; macskaembryonál is ezen hosszuságnál) összeforrad s akkor a felső ajk teljes lett; ennek középső része a középső orrnyujtványból, oldalsó részei a felső állcsonti nyujtvány arczi elülső lebenyéből lettek; utóbb a középső rész aránylag keskeny lesz s csak az orrsövény alatti darabot (philtrum) szolgáltatja; az orrlikak szintájától a szájzugig terjedő nagyobbik rész a felső állcsonti nyujtványból származott.

Mindazon képződmények, melyek a két orrüreg között feküsznek, eleinte aránylag szélesek (3. ábra 6; 8. ábra 4), de utóbb az erősen kifejlődő felső állcsonti nyujtványok részéről reájuk gyakorolt nyomás következtében keskenyednek; ezt legjobban látni az egymástól távol álló orrlikaknak (3. ábra 7) egymáshoz való közeledéséből. 6 hetes emberi embryonál a sövény még széles (1·2 mm.), az orrlikak meredeken álló hosszukás hasadékok (mint a 3. ábrán), a kettő felett a középső orrnyujtvány egy kiemelkedő duzzanattá lett (6. ábra 12), mely oldalfelé a külső orrlik felett pontosabb határ nélkül áthajlik a külső orrnyujtványokra; ezen félholdalakú duzzanatot His *orrszegélynek* (Nasenkante) nevezi. Minél jobban kiemelkedik az orrszegély az orrlikak sikján túl előfelé, annál szembetünőbb lesz az orrcsúcs megjelenése s az orrlikak a meredek állásból fokozatosan lejtősbe mennek át, mig végül a 7—8. hónapban a vizszintest megközelítik, de azt teljesen csak a születés után érik el, egész addig a gyermeki orr, kevés kivétellel, pisze formájú. Az újszülött orra magán hordja az embryoi jellegeket: csúcsa tompa, kevéssé kiemelkedő, háta kurta és széles, az orrgyökér alacsony, az orrnyereg alig fejlett, az orrszárny kicsiny,

az orrlikak aránylag nagyok, egymástól távol állnak és előfelé fordultak. Ha e jellegek átmennek a kifejlett állapotba, létrejönnek a nyerges orrok (nasus incurvus), melyeknek enyhébb alakjai teszik a pisze orrokat (nasus simus); ezek alsóbb tipushoz tartoznak, de nőknél tetszenek, mert fiatalabb állapotot képviselnek. Egyenes orrok gyermekeknél ritkák, felnőtteknél csak a czivilizált nemzetek tulajdona, még jobban a görbe orrok (nasus aduncus), amelyeknek nemesebb alakjai a sas- és római orr, a kevésbbé kedveltek a szemita és kampós orr. *

Fiatalabb embryoknál az orr hátának kurtasága miatt az orrlikak magasan feküsznek, 12—14 mm. hosszúaknál az orrlikak felső csúcsa eléri a szemek alsó részét összekötő vizszintes szinvonalat (2. és 3. ábra), ezen magas szintájon fekszik az orrcsúcs is (1. ábra). A 3-dik hónaptól kezdve az arcz meghosszabbodásával arányt tartva az orr megnyúlik és az orr csúcsa lefelé vonul, vele együtt az oldalsó orrnyujtvány is, melyből az orrszárny lett. Időközben a könybarázda eltünt, illetőleg lefüződött hámjából a könyorrvezeték (ductus naso-lacrymalis) lett; a barázda iránya eleinte vizszintes volt (2. ábra 3; 3. ábra 9), a felnőtt emberben majdnem merőleges; ezen helyzetváltozás a felső állcsonti nyujtvány erős kifejlődésének és függőleges irányban való kinövésének az eredménye. Minthogy a könybarázda már a 2. hónap végén eltünik, ettől kezdve a határ az oldalsó orrnyujtvány és felső állcsonti nyujtvány között elenyészett, s nem lehet meghatározni, hogy az orrszárny feletti részből mennyi fejlődött a középső és mennyi az oldalsó orrnyujtványból.

B) Az orrüreg (Cavum nasi).

A gerinczes állatok orrürege háromféle tipus szerint van alkotva: 1. a halaknál az arcznak bemélyedett gödreiből állnak, melyek a szájüreggel nem közlekednek; 2. kétéltüeknél az arczról a szájüregbe vezető levegőcsövek, melyeknek fenekét az állközötti csont teszi; 3. a többi gerinczeseknél az állközötti csonthoz kemény

* Az orralakokról alaposan értekezik: Hovorcka. Die äussere Nase. Wien, 1893.

szájpad csatlakozott, s az orrüreghez hátul az elemi szájüregnek egy része csatoltatott. Ezen haladottabb állapotot *másodlagos orrüregnek (cavum nasi secundarium)* nevezem, szemben a kétéltüeknél előforduló elemi orrüreggel *(cavum nasi primitivum)*. A halaknak nincsenek orrüregeik, hanem csak orrgödreik, ezeket ezen alkalommal figyelmen kivül hagyjuk.

I. Az elemi orrüreg (Cavum nasi primitivum).

12—13 mm. hosszú emberi embryoknál az orrnyujtványokban felhalmozódó kötőanyag által a szaglási árokból laposdad hámtömlő, az ú. n. *orrtasak (saccus nasi)* lesz, mely az arczon a megnyúlt külső orrlikkal (nares) nyilik. Ezen tasaknak belső vak vége 14—16 mm. hosszú embryoknál a szájüreg felé kihasad, s pedig azáltal, hogy az összetapadt hám ott vékony hártyává kihuzódik (membrana bucconasalis Hochstätter),[1] azután szétfoszlik. A szájüreg tetején kifejlődött új nyilás (3. ábra, 12) teszi a belső orrlikat, amelyet elemi hortyogónak (Choana primitiva Dursy)[2] kell nevezni, mert nem azonos a maradóval. A külső és belső orrlik között fekvő állományhid (6. ábra, 3) befelé a középső orrnyujtvány (8. ábra, 4), oldalfelé a külső orrnyujtvány állományába (6) megy át, ezekkel együtt az *elemi szájpadot* teszi (palatum primitivum Dursy, 8. ábra, 5), melyet *állelőtti szájpadnak (palatum præmaxillare)* nevezek azért, minthogy utóbb az állelőtti csontot szolgáltatja.

A belső orrlik fejlődéséről régebben a buvárok más nézeten voltak mint ma. Ecker[3] szerint a középső orrnyujtvány oldalsó csúcsa összeforr a felső állcsonti nyujtvány csúcsával, de csak elül, ellenben hátrább visszamarad szabadon a belső orrlik. De Hochstätter (i. m.) és Kaibel[4] kimutatták, hogy az orrtasak

---

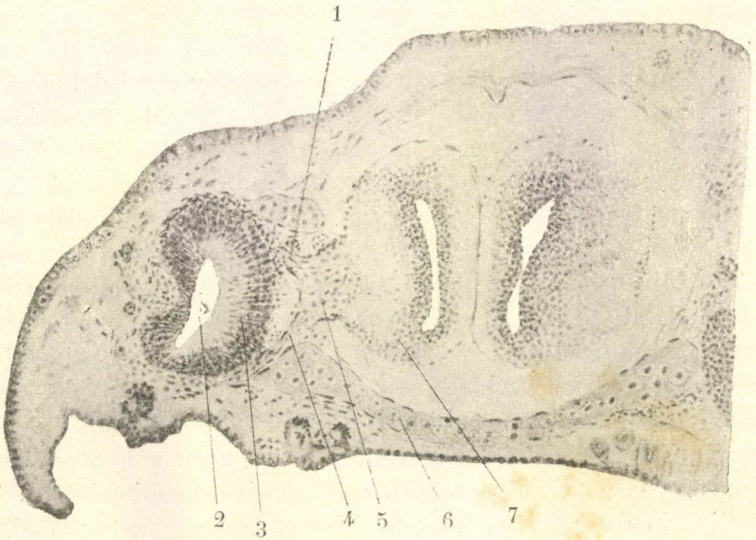
[1] Hochstädter F., Ueber die Bildung der inneren Nasengänge oder primitiven Choanen. Verhandlungen der anat. Gesellschaft zu München 1891, u. zu Wien 1892.

[2] Dursy E., Entwickelungsgeschichte des Kopfes. Tübingen, 1869.

[3] Ecker, Bericht d. naturf. Ges. zu Freiburg. VI. 1873.

[4] Kaibel F., Zur Entwickelungsgeschichte u. vergl. Anatomie der Nase etc. Anatomischer Anzeiger. 1893.

hámja a mélységben is összetapad, tehát az orrtasak a szájüreggel eleinte nem közlekedik; ez csak 14—16 mm. hosszú embryoknál áll be a hám széthuzódása után. Ez a folyamat azért nevezetes, mert az orrüreg fejlődésének hasonló módját mutatja, mint a mely szerint a zsigerhasadékok származnak, eszerint az orrüreg is a zsigerhasadéki szervek sorába tartoznék (MARSCHALL,* BEARD**).



4. ábra. 25 mm. hosszú *szalamandraporonty* fejének haránt metszete a szagideg törzsökének szintáján. Lupe-nagyítás. 1. Szagideg felső ága. 2. Orrüreg. 3. Szaghám. 4. Szagideg alsó ága. 5. Szagideg törzsöke. 6. Porczos koponyaalap. 7. Előagyvelő.

A kihasadási módon kivül a szagidegnek az elemi orrüreghez való viszonya is támogatja ama nézetet. Ezen ideg ugyanis alsóbb rangú gerinczeseknél két ággal fogja közre az orrüreg hámját. Jól lehet látni a háti és hasi ágat szalamandra porontyok fejének haránt metszetein (4. ábra). A két ág (1 és 4) megfelel a porczos halak

* MARSCHALL M. The Morphology of the Vertebrate Olfactory Organ. Quart. Journal of microsc. Science. IX. 1879.

** BEARD, The system of branchial sense organs ectr. XVI. 1885.

zsigeríveiben előforduló szelvényidegek elülső és hátulsó ágának (ramus præ-et posttrematicus).

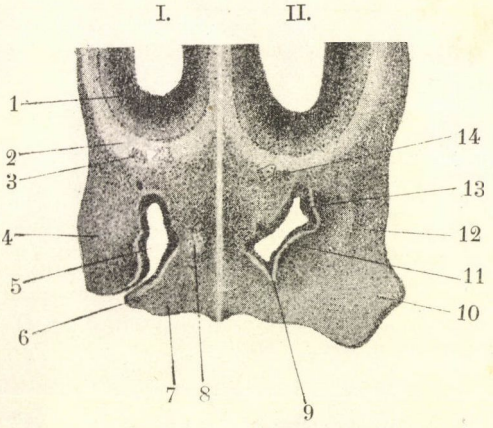
Az állelőtti szájpadot a középső orrnyujtvány szolgáltatja; olyan ezen nyujtvány mint egy függő ⊥, melynek vizszintes szárai (3. ábra 10; 6. ábra 8) oldalfelé a felső állcsonti nyujtványnyal (11) összeforradtak; az összeforradási helyet egyideig a két nyujtvány között lehaladó hámfonal jelzi (6. ábra 9), mely azonban csakhamar elenyészik s akkor a két nyujtvány kötőanyaga annyira összevegyült, hogy csak az elemi orrüreg irányában lehúzott függőleges vonal mutatja a volt határt a belső orrnyujtvány és felső állcsonti nyujtvány között. Az oldalsó orrnyujtványnak az állelőtti szájpad képezésében része nincsen, az magasabban állott már kezdettől fogva (2. ábra 2; 3. ábra 2), s egyedül az orr szárnyaivá, valamint az oldalsó fal legelülső részévé lesz, ennek folytatásában az oldalsó fal már a felső állcsonti nyujtványból származik; a határt a két rész között körülbelül a könyorrvezeték mutatja, mely a könybarázda hámjától való lefüződés által keletkezett (Born. *) Az oldalsó orrnyujtvány mindenben úgy viselkedik, mint a felső állcsonti nyujtványnak egy kis függeléke, amit egyebek között beidegzése is bizonyít, mert ugyanaz az ideg látja el, mint a felső állcsonti nyujtványt (n. supramaxillaris trigemini II.); ellenben a középső orrnyujtványnak saját idege van (n. nasociliaris trigemini I.) Az állelőtti szájpad mögött nyilik az elemi hortyogó, aránylag tág likkal, a szájüreg tetején (3. ábra, 12); az elemi szájpad ekkor még kurta, csak azt a darabot foglalja magában, mely kifejlődött állapotban az orrszájpadi csatornáig (canalis nasopalatinus) terjed.

Az elemi hortyogó mögött azonnal a koponyaalap ikcsonti része következik (6. ábra 10); mindaz, ami kifejlődött állapotban az orrszájpadi csatornától egész a maradó hortyogóig terjed, tehát a kemény szájpad összes hossza, eleinte egészen hiányzik, emiatt az arcz mélységi átmérője kurta, s minthogy alacsony is, igen fejletlen állapotú. Csak a haránt átmérője tesz ez alól kivételt, ennek oka pedig az igen széles középső orrnyujtványban van; ennek a két oldalán feküsznek az elemi orrüregek. Fiatal emlős embryokon (1. ábra) az arcz jobban hasonlít az orthognath alkotású emberi

* Born, Ueber die Nasenhöhlen etc. Morpholog. Jahrbuch II. 1876.

koponyához, mint később; ennek oka az állcsonti részeknek fejletlenségében van; az emlős embryo arcza olyan orthognath szerkezetü, mint az emberi embryoé; a prognath alakba való átmenetel a felső állcsonti nyujtványnak előfelé való hatalmas kinövésével áll be utóbb.

Az elemi orrüregek hámmal fedett laposdad menetek az állelőtti szájpad felett (5. ábra), belülről a belső orrnyujtvány (7),

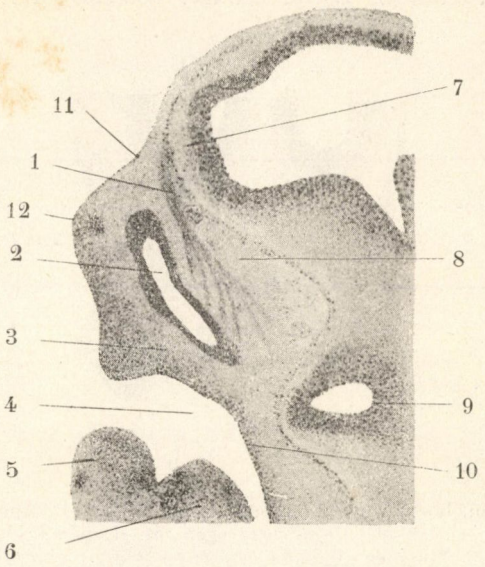


5. ábra. 20 mm. hosszú macskaembryo arczának haránt átmetszete I. a külső orrlik tájékán, II. az elsődleges orrüregen át. Lupe-nagyitás. 1. Előagy. 2. Agyburkok. 3. Szagideg. 4. Oldalsó orrnyujtvány. 5. Fejlődő Jacobson-féle menet. 6. Külső orrlik. 7. Belső orrnyujtvány alsó része (leendő állelőtti szájpad.) 8. Belső orrnyujtvány felső része (orrsövény állelőtti része). 9. Hámfonal az elsődleges orrüreg fenekétől le a szájüreg tetejéhez (határ a belső orrnyujtvány és felső állcsonti nyujtvány között). 10. Felső állcsonti nyujtvány. 11. Alsó orrkagyló (maxilloturbinale). 12. Oldalsó orrnyujtvány. 13. Szaghám. 14. Szagideg.

oldalfelé felszinén az oldalsó orrnyujtvány (4), mélyebben a felső állcsonti nyujtvány (12) kötőanyaga határolja, tehát hártyás falai vannak. Viszonyainak helyes megismerésére 2—2½ hónapos (16—18 mm. hosszú) emberi embryok fejeiből sorozatos metszeteket kell áttanulmányozni, vagy megfelelő korú emlős embryokat. 20 mm. hosszú macskaembryok homlok-, nyíl- és vizszintes irányú metszetein az elemi orrüregnek viszonyai a következők:

Nyílirányú hosszmetszeten (6. ábra) az elemi orrüreg félí v-

alakúlag görbült menetből áll (2), mely az áll előtti szájpadot (3) megkerüli. Előtte nagyobb mennyiségű kötőanyag van, mely a menet arczi nyílása (külső orrlik) felett a hámot kiduzzasztja (12), ebből lesz az orr csúcsa, a felette fekvő horpadás helyéből (11) a külső orr háta. Innen egész a mélyen lenyuló másodagyvelőig (9) kötő-



6. ábra. 20 mm. hosszú *macskaembryo* feje elülső részének nyílirányú átmetszete az orrüregen át. Lupe-nagyitás. 1. Szagideg. 2. Orrüreg. 3. Állelőtti szájpad. 4. Szájüreg. 5. Állkapcsi nyujtvány. 6. Nyelv. 7. Előagy. 8. Koponya-alap rostacsonti része. 9. Másodagyvelő feneke. 10. Koponya-alap ikcsonti része. 11. Orrnyereg helye. 12. Orrcsúcs helye.

szöveti halmaz (8) van a féltekevelő alapja és az orrüreg teteje között, benne terjednek el a szagideg ágai (1); eszerint ezen kötőanyag (8) megfelel a későbbi rostacsonti tájéknak. Az elemi orrüregnek meredeken leeső hátulsó fala mögött a szájüreg tetején fekvő kötőanyagi halmaz van (10); minthogy ez közvetlenül a másodagyvelő alatt fekszik, kétségtelen, hogy a koponyaalap ikcsonti részének felel meg. Oldalfelől ezen darab szemben fekszik a felső állcsonti nyujtvány gyöki részével s ezzel határ nélkül egybe is folyik; középrésze az elemi hortyogó mögött a szájüreg tetején

kiemelkedő duzzanatot tesz, melyből utóbb az ikcsonti előfok (promontorium sphenoidale) lesz, azaz azon szöglet, hol az ikcsont testének elülső felszine az alsóba áthajlik. Ez most még igen lenn fekszik s a szájüregben elől, ami a későbbi viszonyoktól lényegesen eltér.

Közvetlenül az ikcsonti előfok alatt az alsó állcsonti nyujtvány van, maga az elemi hortyogó is a szájréshez közel nyilik, mind oly viszonyok, melyek az arcz mélységi átmérőjének hiányában lelik magyarázatukat. A későbbi viszonyoktól lényegesen eltér a koponya rostacsonti részének fekvése is (6. ábra, 8). Az orrüreg felett fekvő kötőanyaghalmazban van a szagideg (1), ennek törzse ebben az időben az előagy homloki csúcsától vizszintesen hátrafelé huzódik, azután legyezőalakú nyalábokra oszlik, melyek az orrüreg hámjának tetejéhez és oldalsó falaihoz mennek. Ezen fiatal állapotban a koponya rostacsonti része a homloki agyvelő alatt vizszintesen fekszik (6. ábra, 8); az embernél e helyzetben meg is marad, de emlősöknél tudvalevőleg a függőlegest megközelítő meredek fekvésbe jut és præcerebralis fekvést vesz fel; ettől az állapottól azonban a fiatal emlős embryo rostacsonti része lényegesen különbözik, mert olyan infracerebrális fekvésü (6. ábra), mint az emberé. Az átalakulás utóbb áll csak be az arcz állkapcsi részének erős kinövésével előfelé; akkor a szagideg a vizszintesen hátrafelé futó fekvésből előbb meredek, azután ellenkező irányú helyzetbe jut előfelé, tehát majdnem 180° körüli fordulaton halad át. Az arcz kinövésével előfelé az állelőtti csont és az elemi hortyogó is távoznak a koponyaalap ikcsonti részétől s kettejük közé a felső állcsont ékelődik be szájpadi nyujtványával. Ezekről a viszonyokról később lesz szó, most az elemi orrüregnél maradva, ennek alakját homlokirányú metszeteken kell megvizsgálnunk.

Ilyeneken látni (5. ábra), * hogy az orrüreg laposdad hámtömlőből áll, melynek oldalsó falán a felső állcsonti nyujtvány (10), a belsőn a belső orrnyujtvány kötőanyaga van (8), az üreg tetején és alapján ezek egybefolynak. A tömlő falán már ezen korai időben

* A metszetek kissé rézsútosak, úgy hogy a bal oldalon kissé elülsőbb tájékból valók, mint a jobb oldalon, azért az orrüreg alakja a két oldalon nem egyforma.

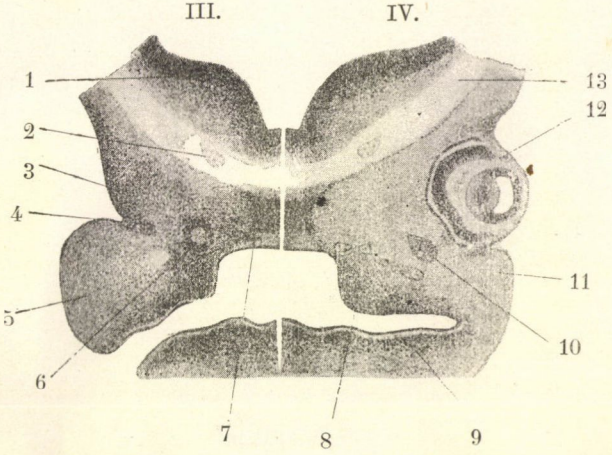
kiemelkedések és kitüremlések látszanak. A lapos duzzanatból az oldalsó falon (11) az alsó orrkagyló (maxilloturbinale) lesz; a belső fal alsó szárnyán fekvő kerek kitüremkedés (5) a JACOBSON-féle szerv; amaz a felső állcsonti nyujtványhoz, ez a belső orrnyujtványhoz tartozik. A hám több helyen megvastagodott, oda a szagideg szálai vonulnak, ú. m. a tömlő tetejéhez, a JACOBSON-féle vezetékhez és az alsó kagylóhoz is. Az utóbbi körülmény azt bizonyítja, hogy az alsó orrkagyló is szaglási kagyló volt eredetileg — úgy mint a reptiliák egyetlen kagylója most is, melylyel amaz egyértékű —, de emlősöknél működési változáson ment át és lélegzési kagylóvá lett. A középső orrnyujtvány — leendő orrsövény — igen széles (8), hátrafelé alacsonyabb lesz s az elemi choana szintáján túl az ikcsont embryoi telepébe folytatódik, eszerint a középső orrnyujtvány nem egyéb, mint a koponya ikrostacsonti darabjának legelülső része. Minthogy pedig a középső orrnyujtvány ezen korai időben csak az elemi hortyogók szintájáig terjed, mely utóbbiakból az orrszájpadi csatorna lesz: ebből bebizonyodik, hogy az orrsövénynek eleinte csak az elülső része van jelen, annyi, amennyi az állelőtti darab hosszának megfelel, a többi a kemény szájpad kifejlődésével csatlakozik emehhez, mint a koponyaalap ikcsonti részének előfelé terjedő folytatása. A régibb résznek az 1., az újabbnak a 2. trigeminus az idege. Ezen különbség miatt amazt az orrsövény *állelőtti (pars præmaxillaris septi)*, emezt *ikcsonti részének (pars sphenoidalis septi)* fogom nevezni.

Az állelőtti szájpadon át vezetett harántmetszeten (5. ábra) megvan még azon hámfonal maradéka (9), mely a középső orrnyujtványt (7) a felső állcsonti nyujtványtól (10) elválasztotta. A felső állcsonti nyujtványt barázdák választják el szomszédjaitól. Az elemi hortyogó szintáján túl vezetett haránt metszeten (7. ábra) a felső állcsonti nyujtvány belső oldalától alacsony duzzanat nyulik be a szájüreg felé (8), ebből lesz a felső állcsonti nyujtvány részéről kinövő szájpad; a két szájpadi nyújtvány (ú. n. *elemi szájpadi léczek)* által közrefogott vájulatba hátrább a nyelv illeszkedik bele.

Ha az alsó állkapcsi nyújtványt eltávolítva nézzük a szájüreg tetejét (3. ábra), jól látjuk a felső állcsonti nyújtvány (11) belső oldalától kiinduló szájpadi léczet (13); ez elül a felajki baráz-

dától kiindulva az elemi hortyogó oldalsó falán halad hátra és az alsó állkapcsi nyújtvány gyöki részénél elvész. Haránt metszeten látni (7. ábra), hogy a két lécz összekötő darabját a koponyaalap ikcsonti része (7) teszi.

Az elemi orrüreg vizszintes metszetén a következőt látjuk (8. ábra): A két orrüreg hosszukás hámmenetből áll, melyek hátul az elemi hortyogókkal (2) nyilnak a szájüregbe (10).



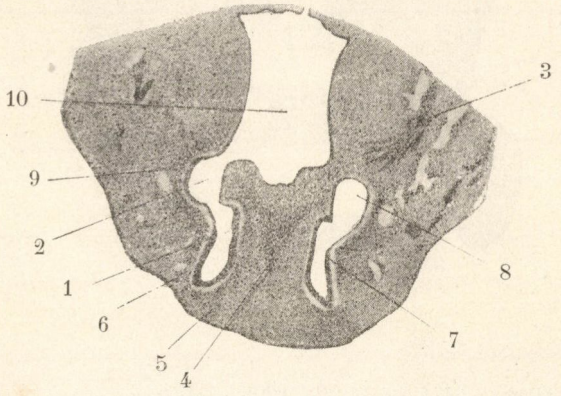
7. *ábra.* Ugyanaz az orrüreg mögötti tájékból. III. Közvetlen az elemi hortyogó mögött. IV. Valamivel hátrább. Lupenagyitás. 1. Előagyvelő. 2. Elülső agyverőér. 3. Oldalsó orrnyujtvány. 4. Könybarázda. 5. Felső állcsonti nyujtvány. 6. Az orrüreg hátulsó falának megmetszett hámja. 7. Ikcsont testének porczosodó telepe. 8. Szájpadi lécz. 9. Alsó állcsonti ív. 10. Felső állcsonti ideg. 11. Felső állcsonti nyujtvány. 12. Szem. 13. Agyburkok.

Az orrüreg külső falán fekvő gazdag kötőanyag (9) teszi a felső állcsonti nyujtvány embryoi telepét; benne baloldalon a háromosztatú ideg 2. ága látszik (3), amint az orrsövény felé hajlik. A két orrüreget elválasztó széles kötőanyagi állomány (4) a középső orrnyujtványnak mélyebb részét teszi; benne a sövényporcz már kezd kiválni. A középső orrnyujtványnak legelülső arczi része (5) a felső ajkat és állelőtti szájpadot szolgáltatja.

II. Másodlagos orrüreg (Cavum nasi secundarium).

1. Hártyás állapot.

A felső állcsonti nyújtvány belső oldalától benövő szájpadi léczek eleinte egymástól távol állnak (3. ábra 13), de nemsokára az orrsövénynek beálló keskenyedésével elül az elemi hortyogók mögött egymáshoz közelednek s itt a nyolczadik-kilenczedik héten találkozva, összeforrni kezdenek; az egyesülés elülről hátrafelé halad, rendszerint a 10—11. héten a 2. zsigerív tájé-



8. ábra. Ugyanolyan embryo arczának vizszintes átmetszete az elsődleges orrüreg tájékán át. Lupe-nagyitás. 1. Alsó orrkagyló. 2. Elemi hortyogó. 3. Felső állcsonti ideg. 4. Orrsövénynyé tömörülő porczszövet a belső orrnyujtványban. 5. Áll előtti szájpad. 6. Oldalsó orrnyujtvány. 7. Jacobson-féle vezeték kiöblösödése. 8. Elemi hortyogó. 9. Felső állcsonti nyujtvány. 10. Szájgaratüreg.

kát elérte s ott megszünik. Ha az összeforradás be nem áll, úgy annak farkastorok (fauces lupinæ) az eredménye. Az összeforradás a közbeneső hámnak elsorvadása után állhat csak be, csak legelül az állelőtti szájpad hátulsó szélénél fekvő elemi hortyogóknál nem következik be egybeforradás s az ott létező hám az orrszájpadi csatorna (canalis nasopalatinus) borítékává lesz; ennek az orrüreg fenekén két bemenete van, mert a középső orrnyujtvány alsó szabad széle ékelődik ott be az állelőtti és állcsonti szájpad-

nyujtványok közé. A kétféle nyújtvány harántul fekvő vonalban találkozik, eddig terjed a határa az állelőtti szájpadnak; 4—5 hónapos embryonál ott még megvannak az összenyomott hám maradékai (LÉBOUCQ), * később egy tömöttebb kötőszöveti huzam mutatja helyét (MERKEL).** Az összeforradásban az orrsövénynek ikcsonti darabja is részt vesz, ennek sorvadó hámja a két szájpadi léczével T alakban találkozik. Amely állatoknak nincsen felső állcsonti szájpaduk (kétéltüek), azoknak nincs ikcsonti orrsövényük sem; csak a középső orrnyujtványból származó elemi orrsövény van jelen az (elemi) hortyogók színtájáig.

Az állcsonti szájpad kifejlődésével az elemi orrüreg a szájüreg részéről oly járulékot kapott, melyet orrgaratjáratnak *(meatus nasopharyngeus* DURSY, op. cit.) neveznek. Kifejlődött állapotban ennek a határa, mint azt SCHWALBE *** helyesen megismerte, oly vonal hosszában fekszik, melyet az orrszájpadi csatorna bemenetétől az ikcsonti előfokig huzunk. Ebből egyszersmind az következik, hogy az elemi hortyogó nem azonos a maradóval, s az elemi orrüreg csak egy részét teszi a maradónak. Az elemi hortyogónak hátulsó határát az ikcsont embryoi telepe teszi. Az állcsonti szájpad kifejlődésével az arcznak minden része előfelé tolatik s az ikcsonti teleptől távolodik, ezzel kapcsolatosan az elemi hortyogóból lett az orrszájpadi csatorna is. Ha a szájpad egészen kifejlődött, akkor az orrszájpadi csatorna messze jutott az ikcsonti előfoktól, mely mindvégig megtartotta eredeti helyét a másodagyvelő alapján; az új (maradó) hortyogónak alsó határát most a kemény szájpad hátulsó vége teszi. Akkor a határt az elsődleges orrüreg és a hozzája csatlakozott orrgaratjárat között az orrszájpadi csatornától az ikcsonti előfokig húzott vonal jelzi. Mindezekből világos, hogy az elemi hortyogó mint olyan nem marad meg, az orrszájpadi csatorna annak csak volt helyét mutatja, de nem azonos vele, mert a közbeékelődő szájpad az eredeti viszonyokat egészen

* LÉBOUCQ H., Note sur le perles epitheliales de le voute palatine. Arch. de biologie, II. 1881.

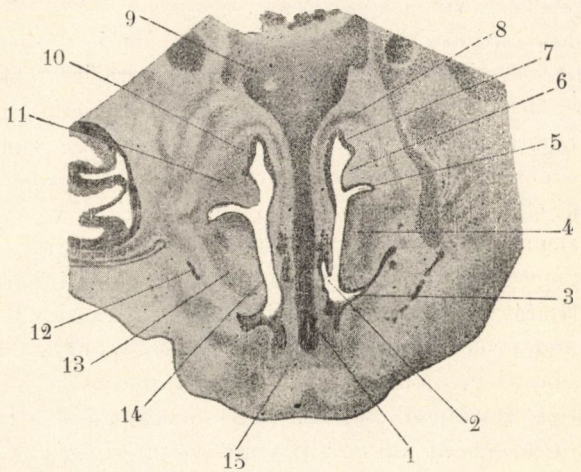
** MERKEL F. Jacobson'sche Organ u. Papilla palatina. Anat. Hefte v. Merkel u. Bonnèt, I. 1892.

*** SCHWALBE G., Ueber die Nasenmuscheln der Säugethiere und des Menschen. Sitzungsb. d. physik-oekon. Gesellsch. zu Königsberg, XXIII. 1882.

átalakította. Csak annyi mondható, hogy az orrszájpadi csatornának elülső fala mutatja azt a helyet, ahol az elemi hortyogó elülső határa feküdt.

2. A porczos orrtok.

Egészen a 2. hónap végeig az orrüreg falai a hámon kivül laza embryoi kötőanyagból állnak. Ezen «*hártyás állapotra*» következik a «*porczos*»; a hámfalak szomszédságában a kötőanyagban



9. ábra. 3 hónapos emberi embryo arczának vizszintes átmetszete az orrüreg tájékán át. Lupe-nagyitás. 1. Sövényporcz. 2. Jacobson-féle menet. 3. Alsó orrjárat. 4. Alsó orrkagyló. 5. Középső orrjárat. 6. Középső orrkagyló. 7. Felső orrkagyló. 8. Oldalsó porczlemez (fejlődőfélben). 9. Ikcsont testének porczos telepe. 10. Felső orrkagyló. 11. Középső orrkagyló. 12. Állcsonti csontmag. 13. Középső orrkagyló porcza (fejlődőfélben). 14. Közös orrjárat (meatus nasi communis). 15. Állelőtti szájpad (palatum præmaxillare).

már a 2. hónap végén tömörülés áll be, azután a 3. hónapban porczos lemezek fejlődnek belőle, s ezeknek összege teszi a *porczos orrtokot (capsula nasi cartilaginea)*. Viszonyairól $3^1/_4$—$4^1/_2$ hónapos emberi embryok fejének homlokirányi átmetszetei adnak felvilágosítást.

A kötőanyagnak porczczá való tömörülése a 7—8. héten az ikcsont testének tájékáról indul ki (9. ábra, 9) s onnan terjed a

sövényben előre (1); itt a porczfejlődés mindig előbbre haladt állapotban van, mint az oldalsó falon (11). Ha itt is kifejlődött a porczlemez, akkor az csak az alsó orrkagylóig terjed, ettől lefelé az alsó orrjárat külső falán és a szájpadban porcz nem fejlődik ki. Maguk a kagylók nem a porczképződésnek az eredményei, mert a kagylói duzzanatok megvannak már a porcz megjelenése előtt, mint az embryoi kötőanyag helybeli megszaporodásai (13, 6, 7); a különválasztást a hámnak ránczalakú activ benövései a kötőanyagba okozzák, amiről egérembryok fejének haránt metszetein győződtem meg. Hártyás állapotban az alsó orrkagyló igen korán jelen van, első nyoma már az elemi orrüreg kifejlődésekor mutatkozik (5. ábra, 11); a másik két kagyló a 10—11-dik héten jelenik meg (9. ábra, 6, 7), porcz eleinte egyikben sincs. Ez azt bizonyitja, hogy a kagylók fejlődése nem a porczos orrtok részéről indul meg, mint azt KOELLIKER * állította, s hogy a kagylóknak nem a váz teszi a lényeges részét, hanem a lágyrészek és a hám, amely eleinte minden kagylón szaglási hám jellegű, de utóbb a rostalemez alatt fekvő kagylórészekre vonul vissza s a kagylók többi része levegővezető készülékké lesz.

Ha a tömörült kötőanyagból a másodlagos orrüreg körül porcz lett, akkor az orrtok egy nyíliránytú páratlan lemezből áll az orrsövényben, és oldalsó páros lemezekből az orrüreg oldalsó falain; fenn a két lemez csak a külorr hátán hajlik át egymásba megszakítás nélkül, hátrább egyes porczlemezkék által vannak összekötve, melyekből utóbb a rostalemez lesz; ennek likai a szagideg szálait bocsátják keresztül. A porcz és hám között mindenütt vastag kötőanyag maradt vissza, ez teszi a nyálkahártyának embryoi telepét, benne fekszik az orrszájpadi csatorna szintáján, de feljebb, a bemenet a JACOBSON-féle csatornához (9. ábra, 2.). A sövényporcz a kakastaréjtól leterjed a szájpadig; alsó lekerekedett végén az állelőtti szájpadban két kis függelékes C alakú porcz fejlődik, melyeknek homorulatában sok emlősnél a JACOBSON-féle vezeték fekszik; ezek és a JACOBSON- vagy HUSCHKE-féle porczok később jelennek meg, mint a sövényporcz. Hátrafelé a sövényporcz alacsonyabb s vastagabb lesz, átmetszete megnyúlt orsóidomú; hátul az ikcsont testét tevő

* KOELLIKER A., Entwickelungsgeschichte. Leipzig, 1879. 440. l.

széles porczállományba megy át (9. ábra, 9.). Sajátszerű, hogy a sövényporcz alsó részén már 3—4 hónapos embryoban elgörbítéseket láttam; e szerint a sövénygörbüléseket (deviatio septi) veleszületetteknek tartom. Az oldalsó porczlemez a rostalemez szintájától leterjed az alsó orrkagylóba, hátul alacsonyabbá lesz s a hortyogó szintáján megszünik. A tőle kifelé eső kötőanyag felső része egészen a szemig terjed, ebből lesz a rostacsont tömkelege, az alsó része pedig átmegy a felső állcsonti nyújtvány kötőanyagába, ebben fog kifejlődni a felső állcsont teste és a szájpadcsont függőleges lemeze.

3. Az orrüreg csontjainak fejlődése.

Az orrüreget környező csontok kétféle módon fejlődnek: egy részök a porczos orrtokból, más részök a környező kötőanyagból; amazok teszik az *elsődleges,* emezek a *másodlagos csontokat.* A kötőszövetből fejlődő csontok korábban mutatkoznak, mint a porczból csontosodók; már a 2. hónap végén megjelennek apró kis csontlemezkék képében a sövény alsó részében és az alsó orrjárat oldalsó falán, tehát egyáltalában az orrgaratjárat csontjai fejlődnek másodlagos úton hártyából, mig az elemi orrüreg körül fekvők nagyobbára a porczos elemi orrtokból származnak. Ez megfelel azon fejlődéstani szabálynak, hogy az orrüreg rostacsonti része nem egyéb, mint a porczos elemi koponyának előfelé tolt arczi darabja, módosított származéka az a csigolyatesteknek; ellenben az orrüreg fenéki része a felső állcsonti nyujtványokból származik, melyek zsigerívi természetűek. A fogrendszer fejlődése miatt megváltozottak ugyan, de némi rokonságot velök mégis megtartottak, mert 3—4 hónapos emberi embryoban a porczos orrtok oldalsó falából a könyorrvezetéket megkerülő porczos pálczát láttam előrehaladni, mely alakjára nézve megfelel az alsó állkapocs MERKEL-féle porczának s valószinüleg mint zsigerivi porczmaradék értelmezendő.

A másodlagos csontok fejlődése a kötőszövetnek helyi megtömörülésével indul meg, festett készítményeken e helyek sötétebb szinükön ismerhetők meg. Azután a kötőszöveti kötegekre csontos gerendák rakódnak le s igy ott reczés csontanyag keletkezik. Né-

mely ily mag a porczos orrtoknak közvetlen szomszédságában jelenik meg s azt elsorvasztja, pl. az orrcsont, könycsont, ikcsont, a felső állcsont és a szájpadcsont.

a) Másodlagos (kötőszövetből fejlődő) csontok:

Az orrüreg alsó részét a felső állcsont és szájpadcsont teszik, ehhez járul az állelőtti csont. Az utóbbinak *(præmaxillare)* magva a 8. héten jelenik meg, de a 9—10. héten már odaforrad az állcsont magvához (KOELLIKER T.) * — Az *állcsont (maxilla)* magva a 8. héten jelenik meg görbült kis csontlemezke képében az alsó orrjárat külső oldalán a felső állcsonti nyújtvány kötőanyagában; ehhez nemsokára még nehány lemezke csatlakozik, de mindezek már a 3. hónapban közös maggá egyesülnek. — A *szájpadcsont (os palatinum)* magva is a 8. héten kezd mutatkozni. — Az *orrcsont (os nasale)* magva a 3., a könycsonté *(os lacrymale)* a 4. hónapban jelenik meg. — Az *ekecsont (vomer)* nem egyéb, mint a porczos orrsövény állcsonti darabjának fedőcsontja; V alakúlag egyesülő két csontlemezkéből fejlődik a 9. héten, melynek barázdájába (sulcus vomeris) a porczos orrsövény alsó része illeszkedik; a 3—4. hónapban a csont oldalsó szárnyai a sövényporcz oldalán belenőnek a vastag nyálkahártyába, mignem az ikcsont testét elérik; később a sövényporcznak közrefogott része elsorvad. Az ikcsonttal szemben a sövényporcz felülről lefelé csontosodik meg a rostacsont függőleges lemezének képezésére; a találkozási helyen megmarad a porczos orrsövénynek egy karcsú nyújtványa az ikcsontig (processus sphenoidalis septi cartilaginei, KOELLIKER). A két ellenkező irányból összetartó csontosodás az oka a sövényen képződő taréjnak (crista lateralis septi, Theile), vagy gyakori elhajlásának az ikcsont felső széle hosszában (deviatio septi), aminőket már fiatal gyermekeknél is észleltek (PATRZEK),** felnőtteknél pedig ha nem is nagyban, de enyhébb alakban majd minden esetben jelen van (RÉTHI); *** nagyobb fokánál (scoliosis septi) a sö-

---

* KOELLIKER T., Verhandl. d. anat. Gesellsch. zu Würzburg. 1888.

** PATRZEK, Ueber Verbiegungen der Nasenscheidewand bei Neugeborenen, 1890. N. 14.

*** RÉTHI, Verbiegungen der Nasenscheidewand. Wiener klin. Wochenschrift, 1890. S. 514 etc.

vény az orrkagylókig elhajolhat és a lélegzést az egyik orrüregben megszüntetheti.

b) Elsődleges (porczból fejlődő) csontok:

A porczos orrtokból az emlősöknél a rostacsont és az alsó orrkagyló csontosodnak, egy kisebb része a porczos orrtoknak elsorvad, és ezen az ikcsont által közrefogott rész, a külorr csontjai alatt fekvő darab, végül csekély kivétellel az összekötő hid a középső és alsó orrkagyló között. A porczos orrtok megmaradó részeit a sövényporcz *(cartilago septi)*, és az oldalsó orrporczok *(cartilagines laterales nasi)* teszik. Az orrszárnyi porczok *(cartilagines alares nasi)* a porczos orrtoknak arczi részéből füződnek le az 5. hónapban. A madaraktól kezdve lefelé a porczos orrtok megmarad az egész életen át, felette fejlődnek ki a fedőcsontok és a porczos orrtokot betakarják.

A *rostacsont* (os ethmoideum) embryoi telepe az előagyvelő alapja alatt fekvő kötőanyagban van (1. ábra 8); ebben fejlődik ki a porczos orrtok felső része, mely eleinte egy páratlan és oldalsó páros lemezekből áll; ezeket az orrüreg boltozata felett haránt porczgerendák egyesítik, melyek között a rostalikak maradnak szabadon. A porczos állapotú rostacsontnak alakja a 4—5. hónapban ∩-hez hasonlít, mely sok embryoi kötőanyagba van beágyazva az előagy alatt. Az 5—6. hónapban a porczlemezek homorulatában porczos lemezkék jelennek meg s durva gerendázattá egyesülnek, melyből utóbb a rostacsont tömkelegi része (labyrinthus ethmoidalis) lesz, az oldalsó porczlemezből a papirlemez (lamina papiracea), a sövényporczból a rostacsont függőleges lemeze (lamina perpendicularis). A csontosodás a papirlemezben a 6. embryoi hónapban indul meg s innen beterjed a tömkeleg lemezkéire; a sövényporczban a csontosodás a 6. hónapban a születés után kezdődik meg a kakastaréjtól kiindulólag lefelé, az ikcsont felső-külső felét csak a 2. év végén éri el, néha még később (3—5. évben). A különféle darabok csak az 5. évben forradnak egybe. A rostacsont kampónyujtványa *(processus uncinatus)*, szintúgy mint a kagylók, kötőszöveti helyi szaporulatokból származik a 3. embryoi hónapban, takarva az orrüreg hámja által, tehát egy nyálkahártyaránczban képződik. Ilyen a rostacsonti hólyag *(bulla ethmoidalis)* is; ez már a 4. hónapban

kinő a porczos oldallemez belső oldalain. Akkor az orrüreg oldalsó fala a sok kagylószerű képződmény miatt sokkal jobban hasonlít az emlős állatok kagylódús orrüregéhez, mint a kifejlődött ember orrürege. A rostacsont tömkelegének üregei a magzatban kötőszövettel vannak megtöltve, az üressé válás csak a születés után indul meg 2—3 helyen a rostacsont kagylóit elválasztó bemélyedésekből *(fissuræ ethmoidales)*, ott a nyálkahártya bemélyed és a kötőszövet visszafejlődése közben a rostasejtek üregeinek borítékává lesz; a bemenet a felső és legfelső orrjáratból indul ki s mindig szűk marad *(aperturæ cellularum ethmoidalium.)*

Az *orrkagylók (conchæ)* csontosodása a 6. embryoi hónapban indul meg s terjed alulról felfelé. A kagylókat ekkor igen vastag nyálkahártya takarja, úgy mint a porczos orrtok idején (9. ábra); ez az alsó kagylón felfelé hajló nyujtványnyal van ellátva, melyből a kampónyujtvány lesz; a porczos alsó kagylónak felfelé hajló melléknyujtványa is van.

4. Az orr járulékos üregei (Sinus paranasales).

Az orr járulékos üregei (sinus maxillaris, frontalis, sphenoidalis, cellulæ ethmoidales) az utólag fejlődő képződmények közé tartoznak, a hártyás orrüreg idején azokból még semmi sincs jelen. Dursy (id. mű) azt hitte, hogy a porczos orrtok nyálkahártyától takart kiöblösödéseket küld a környező kötőszövetbe; utóbb ezek körül kifejlődnek az illető fedőcsontok s róluk a csontosodás átterjed a porczra is, eszerint a csontosodásban a fedőcsonton kivül a porcz is résztvesz. Koelliker (id. mű, 456. l.) ezen állítást oda módosította, hogy a kitüremkedő porcz nem vesz részt a csontosodásban, hanem elsorvad, minek megtörténtével a nyálkahártya az illető járulékos üreg borítékává lesz. Részemről úgy találtam, hogy a porczos orrtok sajátszerű méghajlásai és a nyálkahártyának zugokba való bejutása szolgál bevezetésül a melléküregek fejlődésére. Az *állcsonti öbölnél* (sinus maxillaris [Highmori] a folyamat így megy végbe.

3 hónapos emberi embryoban a középső orrjárat egész hosszán végigvonul a porczos orrtok oldalsó lemeze. Ez már a 3., de még jobban a 4. hónapban a középső orrjárat helyén szöglet-

alakban oldalfelé, azután lefelé hajlik, az így keletkezett rajba bemélyed a nyálkahártya s ez teszi az állcsonti öböl fejlődésének kezdeti szakát. A két ereszkedő nyálkahártya ívalakban lefelé hajlik és duzzadt vak végével belehelyezkedik a felső állcsont testének homorulatába, mely utóbbi most még csak e vékony csontlemezkéből áll és igen alacsony. Ott, honnan a kitüremkedés a középső orrjáratból kiindul, vagyis ennek felső és alsó szélén nyálkahártyai duzzanatok s bennök porczok keletkeznek, a felsőből a bulla, az alsóból a proc. uncinatus lesz. A fejlődés leírt módja bizonyítja, hogy az állcsonti öböl fejlődése a porczos orrtok meghajlásával indul meg; s az üregképződés a mirigytömlők fejlődéséhez hasonlító hámkitüremkedésekből indul ki a környező kötőszövetbe, annak szomszédságában az 5—6. hónapban a kötőszövet ritkul s felszivódik, úgy a mint az a savós üregek fejlődésénél előfordulni szokott; azzal egyidejűleg a hámkitüremkedés az állcsonti öböl nyálkahártyai borítékává lesz.

A csontok az üregképződésre tényleg befolyással nincsenek, az általuk közrefogott üreg csak fészkéül szolgál a belejutó nyálkahártyai kitüremkedésnek. Az állcsonti öböl addig, míg az arcz alacsony, természetesen kicsiny, falai egymással érintkező laposdad tasakból állnak, melynek kissé duzzadt vége a szivacsos csontnak kis bemélyedésében fekszik. Az öböl falainak széthuzódása csak a tejfogak kihasadásával indul meg, midőn az állcsont testét elfoglaló fogzacskók belőle levonulnak a fejlődő fogmedri nyujtványba és a szemüreg feneke a fogmedri nyujtványtól távozni kezd. De ez lassan történik, az üreg még a 4—5. évben is nem nagyobb egy jókora borsónál és a szivacsos csontanyagnak felső részében fekszik, tehát magasabban, mint az orrüreg feneke. Jelentékenyebb tágulás csak a maradó fogak kihasadásával áll be a 7—8. évtől kezdve, akkor az üreg addig gömbölyded alakját felváltja háromoldalú loborhoz hasonlító alakkal.

Felnőttben a felső állcsonti öböl a fejlettség legkülönfélébb szakait mutatja; vagy szűk, vagy igen tág. *Szűkebb öböl* (stenosis sinus maxillaris) kétfélekép jöhet létre: *a)* Mint gátolt fejlődés a szivacsos csontanyagnak hiányos felszívódása után; az ilyen esetekben az öblöt környező szivacsos csont nagy mennyiségű, az öböl falai vastagok, különösen az oldalsó fal és a teteje. *b)* Szűkületek

beállhatnak valamelyik falnak besüppedéséből, nevezetesen az orrüregi vagy az arczi falon szokott ilyesmi bekövetkezni. A szűkület annyira fokozódhatik, hogy a felső állcsonti öböl csak szűk hasadékból áll; egy ilyen esetben az öbölhöz való bemenetet szűk menetté összeesve láttam. Az arczi falról a besüppedés rendszerint az ebfogi árok (fossa canina) helyéről indul ki. A belső fal besüppedésének eredményekép az orrüreg az illető oldalon igen tág, az alsó orrkagyló a sövénytől távol esik.

Az állcsonti öböl *tágulata* lehet általános, vagy csak egyes részein beálló. Az utóbbi esetben a tágulat beterjed a fogmedri nyujtványba (recessus alveolaris), vagy a szájpadi nyujtványba is (recessus palatinus), ritkábban a járomnyujtványba (recessus zygomaticus), vagy a szájpadcsont állcsonti nyujtványába (recessus palatoorbitalis). Leggyakoribb a fogmedri nyujtványba terjedő tágulat; az ilyen esetben az öböl feneke lejebb ér, mint a kemény szájpad és a fogak (szemfogtól a 2. zápfogig) gyökerei csak vékony csontanyagtól takarva benyúlnak az öböl fenekére. Bővebben értekezik ezen viszonyokról Zuckerkandl.*

A homloköbölről (sinus frontalis) Steiner ** azt állította, hogy ez nem egyéb, mint egy legelülső rostasejt, mely egy porczos rostasejtnek a homlokcsont orri részébe való benövéséből keletkezik; utóbb az elülső rostasejtek részéről kiinduló felszivódás folytán üres lesz s a porczos tokja elenyészik. E nézet helytelen, mert a porczos orrtok felső része a rostacsont kifejlődésével elenyészik, s a homlokböl a hámnak helyi kitüremkedéséből származik a kötőszövetté átalakuló porczos anyag helyén. A kitüremkedés a bulla ethmoidalis és a proc. uncinatus között fekvő bemélyedésnek *(infundibulum ethmoidale)* legelülső részéből indul ki, előbbre és magasabban mint a felső állcsonti öbölé, mig az elülső rostasejteké rendszerint a bulla felett van, tehát a különféle helyről való kiindulás is mutatja, hogy a homlokböl nem az elülső rostasejtek részéről fejlődik. A kitüremkedés egész

---

* Zuckerkandl, Normale u. pathologische Anatomie der Nasenhöhle u. ihrer pneumatischen Anhänge. Wien 1882.

** Steiner Fr., Ueber die Entwickelung der Stirnhöhlen etc. Langenbeck's Archiv f. klin. Chirurgie, XIII. 1871.

a 4. évig kicsi marad, a fanosodás idején sem nagyobb egy borsónál; az öböl jelentékenyebb tágulása csak a 14—15. évben indul meg, s vagy kisebb fokú marad, avagy kiterjed a szemgödör tetejének nagy részére, elérheti a járomcsontot s felmehet a homlokdombok tájékáig. Ritka esetekben az öböl az egész életen át kicsiny marad vagy ki sem fejlődik; ez gátolt fejlődési állapotnak vehető. Akkor a homlok kevéssé emelkedik ki s az orrnyereg (sella nasi) gyenge vagy hiányzik. A gyermeki pisze orroknál ez rendes állapot.

Az *ikcsonti öböl (sinus sphenoidalis)* fejlődése mindenben követi a többi járulékos üreg fejlődési módját. A kiöblösödés a szaghasadék leghátulsó részéről indul ki (recessus sphenoethmoidalis), beterjed az ormány oldalsó falának porczába, már négy hónapos embryoban jelen van. De csak a porcz felszívódásával áll be az öböl jelentékenyebb tágulása, a fanosodási időtől kezdve; addig az öböl jelentéktelen.

5. A gyermek orrürege.

A gyermek orrürege nemcsak nagysági méreteiben, de alakját illetőleg is különbözik a felnőttétől. Disse-nek *. ezen állítását különféle gyermeki fej hossz- és harántmetszetének áttanulmányozása alapján helyesnek találtam.

Felnőttnél az orrüreg két fő része: a *rostacsonti* (pars ethmoidalis) és a *felső állcsonti rész (pars maxillaris)* majdnem egyforma magasak, ellenben magzatokban és fiatal gyermekeknél az állcsonti rész felényivel alacsonyabb, mint a rostacsonti rész, azonkivül nyilirányban is aránylag kurtább, mert a zápfogaknak megfelelő állcsonti darab még hiányzik. Az állcsonti résznek nagyobbodása megindul már az 1. életévben, de jelentékenyebb eredménye csak a 7. életévben van, akkor az orrüreg átlag 40 mm. magas lett, ennek fele része a rostacsonti, fele része az állcsonti részre jut. Újszülöttnél az orrüregnek nemcsak az állcsonti része alacsony és szűk, hanem az orrüreg kimenete is; ez csak 4—5 mm. magas, ami

* *Disse* J. Die Ausbildung der Nasenhöhle nach der Geburt. Archiv f. Anat. u. Entwickelungsgeschichte. 1889. Suppl.

azután a 7. évig 20 mm.-re fokozódik. Hasonló viszonyú az alsó orrjárat is; ez is alacsony, és az alsó orrkagyló szabad széle eléri az orrüreg fenekét; a takaró vastag nyálkahártyája az alsó orrjáratot egészen elzárja, úgy hogy annak hasznát az újszülött a lélegzésnél nem veheti. Minthogy a szaghasadék is igen keskeny, e miatt a csecsemő csak a középső orrjáratával és a közös orrjárattal lélegzik, de ezek fejletlenek az orrüreg állcsonti részének alacsonysága miatt, s minthogy a hortyogó is szűk, ebből magyarázható a nátha veszedelmes volta a csecsemőknél, mely betegség ezekre nézve egészen más jelentőségű, mint a felnőttre, mert a szopásnál beálló légvételi nehézségek miatt a csecsemőnek hiányos táplálkozását és elpusztulását vonhatja maga után.*

Az orrüreg levegőbefogadási viszonyai csak a tejfogak kihasadása után javulnak, amikor a felső állcsont magassága gyarapszik s azzal együtt a levegő bevezetése tágasabb úton megy végbe. Fiatal gyermeknél az állcsont teste oly alacsony, hogy a szemüreg teteje jóformán a fogmedri nyujtványon ül, amennyiben a tejfogaknak nagy zacskói foglalják most el az állcsonti öböl helyét. Ilyenek maradnak a viszonyok a 2—3. évig, amikor a tejfogak kihasadásával az állcsonti öböl kibővülésére hely kinálkozik; de jelentékenyebben az állcsont csak a maradó fogak kihasadásával bővülhet, tehát a 7. év után, akkor az alsó orrkagyló is feljebb vonul és az alsó orrjárat szerepe, mint levegőbevezető úté, jelentékenyebb érvényre jut. Egész a 3. életévig az alsó orrjárat oly szűk, hogy nem is vezet levegőt s az alsó orrkagyló széle érinti az orrüreg fenekét; feljebb vonulása a 4—7. évig folyik le.

Az orrüreg állcsonti darabjának magasabbá válásához nyilirányban való megnyulás is csatlakozik, ez is csak a 6—7. életévtől kezdve lesz jelentékenyebb. Ennek oka a zápfogak és a nekik megfelelő fogmedrek későbbi fejlődésében van. Egész az 5—6. évig a fogmedri nyujtvány hátul az 1. zápfog tájékával megszünik, mert egész addig a 2. és 3. zápfognak csak a jelentéktelen embryoi telepei vannak jelen. Amint a zápfogak zacskóinak jelen-

---

* L. ezekről Friedreich, Krankheiten der Nase, Virchow's Handbuch der Pathologie V. Abth. — Baginsky, Lehrbuch der Kinderkrankheiten, III. Auflage.

tékenyebb fejlődése megindul, a meglevő tejfogak fogmedri részéhez fokozatosan csatlakozik a zápfogi hátulsó darab, és pedig az 5—6. évben az 1. zápfognak megfelelő, a 7—8. évben a 2. zápfogé, a 11—12. évben a 3. zápfogé. Ezek ugyan egyelőre még zacskóikban maradnak, de jelentékeny tágulásuk miatt helyet kívánnak, ezt pedig nem kaphatják másutt, mint a meglevő fogmedri részhez való csatlakozás által hátul. Azzal együtt természetesen a szájpad és az orrüreg is megnyúlik nyiliányban.

Az orrüregnek magasságban való kinövése nem felfelé, hanem lefelé történik, ezt bizonyítja egyebek között a fülkürt garati nyilásának változó fekvése is. Már KUNKEL * említi, hogy a fülkürt nyílása embryoban a szájpad alatt fekszik s később magasabbra jut. Ez azonban nem activ felhágás által történik, mint azt ZUCKERKANDL ** helyesen megemlíti, hanem a fülkürt megmarad helyén és a kemény szájpad jut a felső állcsont magasabbá válásával mélyebb fekvésbe, azaz a szájpad a fülkürt nyilásán túl lefelé nő; akkor persze a fülkürt a kemény szájpadhoz viszonyítva magasabb fekvésbe jut. 9 hónapos magzatban a kürtnyílás még a kemény szájpad szinvonala alatt fekszik; újszülöttnél vele egymagasságban, az első életévben az alsó orrjárat mögött, a másodikban az alsó orrkagyló csúcsánál, s itt marad egész a 7—8. évig, azon időn túl kissé feljebb jut. Eszerint a 3—7. évig igen keveset nő ki magasságban a felső állcsont, nagyobbodik ugyan, de ezzel a többi részek is arányt tartanak. A nyugvás ideje egybeesik a tejfogak kihasadásának befejeztétől a maradó fogak kihasadásának idejéig, azaz legjelentéktelenebb az orrüreg állcsonti részének magasabbá válása a 3—7. évig.

---

* *Kunkel:* Die Lageveränderungen der pharyngealen Tubenmündung während der Entwickelung. Hasse's anat. Studien, 172. l.

** *Zuckerkandl:* Zur Morphologie des Gesichtsschädels. Stuttgart, 1877. 60. l.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. márczius 16.-án tartott üléséből.)

AZ EGYENES TENGELYŰ GERENDÁK KÜLSŐ ERŐINEK ÉS ELHAJLÁSÁNAK ELMÉLETÉRŐL.

SZŰTS MIKLÓS-tól.

E dolgozat a *csupán* hajlításra terhelt, egyenes tengelyű gerendatartók külső erőinek és elhajlásának elméletét tárgyalja, a keresztmetszeti idom tetszés szerinti változásának tekintetbe vételével.

A közleménynek czélja: a gerendatartók elméletét oly általánosságban tárgyalni, *hogy a gerendatartók minden fajára nézve érvényes legyen; tehát úgy, hogy a leszármaztatott egyenletek alkalmazásában a gerendatartók egyes csoportjai egyszerűen egyes specialis eseteket képezzenek.* A föltett kérdést egyébiránt, az alkalmazásokra való tekintet nélkül, tisztán szilárdságtani problema gyanánt tárgyaljuk, oly módon azonban, hogy a leszármaztatott egyenletek a hidak gerendatartóira, $\sigma = -1$-nek helyettesítése után, közvetlenül érvényesek legyenek.

1. *A nyomaték, a nyiró erő és az elhajlás képleteinek fölsorolása.* Vizsgáljunk meg valamely, *csupán* hajlításra terhelt, és eredetileg egyenes tengelyű oly rudat, melyre tetszőleges értelmű erők hatnak, a tartó tengelyét tartalmazó síkban, a rúd tengelyére merőleges irányban. Vegyük fel a rúdtengely irányát, minthogy ezzel a tárgyalás általánosságát nem csorbítjuk, vízszintesnek, az erők irányát tehát függőlegesnek. A rugalmas vonalat, mint az erők síkjában fekvő görbét, ugyanezen síkban fekvő derékszögű oly koordináta rendszerre vonatkoztatjuk, melynek x tengelye a rugalmas vonal fölött lévő valamely vízszintes, y tengelye pedig a tartó baloldali végpontján átmenő függőleges.

A tartóra ható erőket *positiv* vagy *negativ* előjellel vezetjük be a számításba, a szerint, a mint ezek *le-* vagy *fölfelé* hatnak; a nyomatékot pedig pozitiv vagy negativ előjelűnek veszszük, a szerint, a mint az erők jobbra (az óramutató forgásának irányában) vagy balra forgatnak.

Jelölje:

l a tartó hosszát, 0 ennek baloldali, n jobboldali végpontját;

x valamely keresztmetszet távolságát a tartó baloldali végpontjától;

M_x a nyomatékot, V_x a nyiró erőt, y a rugalmas vonal ordinátáját, τ_x pedig e vonal háromszögtani érintőjét az x abszcisszájú keresztmetszet helyén;

M_0 és M_n a nyomatékot, y_0 és y_n a rugalmas vonal ordinátáját, τ_0 és τ_n e vonal háromszögtani érintőjét sorban a tartó bal- és jobboldali végpontján;

V' és V'' a nyiró erőt sorban a tartó bal- és jobboldali végpontjától végtelen kis távolságban fölvett keresztmetszetre nézve;

K a tartóra ható valamely erőt, k pedig ez erőnek távolságát a tartó baloldali végpontjától;

μ_x a nyomatékot, v_x a nyiró erőt az x keresztmetszetre nézve abban az esetben, ha $M_0=M_n=0$; legyen végre $\sigma=+1$ vagy $\sigma=-1$, a mint a K erő föl- vagy lefelé hat.

Ekkor a következő egyenletek állanak:

$$M_x = \mu_x + \frac{1}{l} \cdot (M_0 (l-x) + M_n x) \tag{1}$$

$$\mu_x = -\frac{1}{l} \cdot \left((l-x) \sum_0^x \sigma K k + x \sum_x^l \sigma K (l-k) \right) \tag{2}$$

$$V_x = v_x + \frac{1}{l} (M_n - M_0) \tag{3}$$

$$v_x = -\frac{1}{l} \cdot \sum_0^l \sigma K (l-k) + \sum_0^x \sigma K \tag{4}$$

Legyen továbbá:

$$M_x' = M_x - \mu_x \tag{5}$$

tehát

$$M_x' = \frac{1}{l} \cdot (M_0 l - x) + M_n x) \tag{5a}$$

A tartó meghajlását kicsinynek tételezve föl, a rugalmas vonal egyenlete tudvalevőleg a következő:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x \varphi(x)}{E_0 I_0} \tag{6}$$

ha

$$\varphi(x) = \frac{E_0 I_0}{E I} \tag{7}$$

midőn E a rugalmassági modulust, I a keresztmetszeti idom tehetetlenségi nyomatékát jelenti, a közönyös tengelyre nézve; E_0 és I_0 pedig egy-egy állandót jelent.

Winkler szerint a következő jelzéseket vezetjük be:

$$A = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x)\, dx;\ B = \frac{2}{l^2} \cdot \int_0^l x\varphi(x)\, dx$$

$$c = \frac{3}{l^3} \int_0^l x^2 \varphi(x)\, dx;\quad \alpha = 3A - 3B + C;\ \beta = C;\ \gamma = 3B - 2C \tag{8}$$

$$\mathfrak{M}' = 6 \int_0^l x \mu_x \varphi(x)\, dx \text{ és } \mathfrak{M}'' = 6 \int_0^l (l-x)\, \mu_x \varphi(x)\, dx$$

Az α, β és γ mennyiségeket még más alakban fejezzük ki. Ha e czélból: $\psi_0(x) = x \,.\, \varphi(x)$ és $\psi_1(x) = (l-x) \,.\, \varphi(x)$, ha továbbá $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$ és $\psi_1(x)$-et rendre az x abscissához tartozó ordinátának tekintjük, akkor az ekként keletkező görbék a tartó végpontjainak függőlegeseivel s az x tengelylyel együttvéve az F, F_0 és F_1 felületeket határozzák meg.

Ha ezeknek területeit T, T_0 és T_1-gyel; súlypontjaiknak távolságát a tartó baloldali végpontjától sorban d, $g^{(0)}$ és $f^{(0)}$-val; az F felület tehetetlenségi nyomatékát a súlyponton, a tartó baloldali és ennek jobboldali végpontján átmenő függőlegesekre nézve pedig sorban θ, θ' és θ''-vel jelöljük, akkor a következő egyenletek érvényesek:

$$T = \int_0^l \varphi(x)\,dx;$$

$$T_0 = \int_0^l \psi_0(x)\,dx = Td$$

$$T_1 = \int_0^l \psi_1(x)\,dx = T(l-d)$$

$$\theta' = \int_0^l x^2\varphi(x)\,dx = \int_0^l x\psi_0(x)\,dx = T_0 g^{(0)} = Tdg^{(0)} \tag{9}$$

$$\theta'' = \int_0^l (l-x)^2\varphi(x)\,dx = \int_0^l (l-x)\,\psi_1(x)\,dx = T_1(l-f^{(0)}) =$$

$$= T(l-d)(l-f^{(0)})$$

továbbá:

$$\theta = \theta' - Td^2 = \theta'' - T(l-d)^2 = Td(g^{(0)}-d) =$$

$$= T(l-d)(d-f^{(0)})$$

Ezen egyenletek szerint és tekintettel a (8) sz. a. egyenletekre:

$$f^{(0)} < d < g^{(0)} < l \tag{10}$$

$$\frac{d}{l-d} = \frac{f^{(0)}}{l-g^{(0)}} \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{3\theta''}{l^3} = \frac{3T(l-d)(l-f^{(0)})}{l^3}; \quad \beta = \frac{3\theta'}{l^3} = \frac{3Tdg^{(0)}}{l^3}$$

$$\gamma = \frac{6Tf^{(0)}(l-d)}{l^3} \tag{12}$$

Amint ezekből látjuk,

$$f^{(0)} \gtreqless l-g^{(0)} \text{ a mint: } \frac{l}{2} \lesseqgtr d; \qquad \alpha \gtreqless \beta \text{ a mint: } \frac{l}{2} \gtreqless d$$

$$\gtreqless \gamma \qquad \text{a mint: } \frac{l}{3} \gtreqless f^{(0)} \text{ és } \gamma \gtreqless \beta \text{ a mint: } \frac{2l}{3} \gtreqless g^{(0)} \tag{13}$$

$$f^{(0)} = \frac{\gamma . l}{\gamma + 2\alpha} \tag{14}$$

és

$$g^{(0)} = \frac{2\beta . l}{\gamma + 2\beta} \tag{15}$$

2. *Az alappontok.* Ha f és g a tartó két tetszőleges keresztmetszetének abscissáját jelenti, és ha meghatározzuk (5*a*) szerint $x=f$ és $x=g$ értékeknél M_f' és M_g'-t, továbbá a (6) egyenlet integrálása által τ_0 és τ_n értékeit, s azután M_f' egyenletéből M_n értékét a τ_0, M_g' egyenletéből pedig M_n értékét, a τ_n egyenletébe helyettesítjük, akkor az

$$M_f' = -\frac{f.(\overline{\mathfrak{N}}''-S_0)}{\gamma.l^3} \tag{16}$$

és

$$M_g' = -\frac{(l-g)(\overline{\mathfrak{N}}'+S_n)}{\gamma.l^3} \tag{17}$$

képletek származnak, melyekben

$$S_0=6E_0I_0(l\tau_0-\delta); \quad S_n=6E_0I_0(l\tau_n-\delta), \quad \delta=y_n-y_0, \tag{18}$$

szemmel tartva, hogy:

$$\left.\begin{array}{llllll} f=0 & \text{ha} & M_0=0 & \text{és} & f=f^{(0)} & \text{ha} \quad M_0 \gtrless 0 \\ g=l & \text{ha} & M_n=0 & \text{és} & g=g^{(0)} & \text{ha} \quad M_n \gtrless 0 \end{array}\right\} \tag{19}$$

A tartón az $x=f$ és $x=g$ abscissával meghatározott pontot sorban a *baloldali* és *jobboldali alappontnak* nevezzük.

E pontok helyzete a föntebbi megállapítások után *mindig ismeretes* és teljesen független a tartóra ható külső erőktől. A tartót az alappontok három részre osztják, melyek közől a baloldalit az *elsőnek*, a középsőt *másodiknak*, a jobboldalit *harmadiknak* nevezzük.

3. *A képletek átalakítása.* Ha az M_f' és M_g' mennyiségek egyenleteit $x=f$ és $x=g$ esetére meghatározzuk, és ezekből az M_0 és M_n értékét (5*a*)-ba helyettesítjük, akkor tekintettel az (5) sz. a. egyenletre az M_x nyomaték általános egyenlete

$$M_x = \mu_x + \frac{(x-f).M_g'-(x-g).M_f'}{g-f} \tag{20}$$

származik.

A tartó végpontjain számított nyomatékok egyenletei ennek folytán, minthogy $x=0$ és $x=l$ esetekben $\mu_x=0$,

$$M_0 = -\frac{gM'_f - fM'_g}{g-f} \tag{21}$$

$$M_n = \frac{(l-f)M'_g - (l-g)M'_f}{g-f} \tag{22}$$

A (20) egyenletből látható, hogy M'_f és M'_g mennyiségek különböző módon határozzák meg az M_x nyomatékot, a szerint, a mint:

$$x \leqq f, \quad \text{vagy} \quad f \leqq x \leqq g \quad \text{vagy} \quad g \leqq x \leqq l,$$

tehát a szerint, a mint az x keresztmetszet a tartó első, második, vagy harmadik részén van.

A (3), (21) és (22) egyenletekből

$$V_x = v_x + \frac{M'_g - M'_f}{g-f} \tag{23}$$

a nyiró erő általános egyenlete következik, s ebből azt látjuk, hogy az M'_f és M'_g mennyiségek ugyanazon módon határozzák meg a nyiró erőt, a tartó bármelyik részén legyen is a keresztmetszet.

A (16) és (18) sz. a. egyenletek szerint M_x és V_x-et még a következőképen is kifejezhetjük:

$$M_x = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} M_x^{(\varrho)} \tag{24}$$

$$V_x = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} V_x^{(\varrho)} \tag{25}$$

ha

$$\begin{aligned} M_x^{(1)} &= \mu_x + \frac{1}{\gamma l^3 (g-f)} (f(x-g)\,\bar{\mathfrak{N}}'' - (l-g)(x-f)\,\bar{\mathfrak{N}}') \\ M_x^{(2)} &= -\frac{6E_0 I_0}{\gamma l^2 (g-f)} (f\,(x-g)\,\tau_0 + (l-g)(x-f)\,\tau_n) \\ M_x^{(3)} &= \frac{6E_0 I_0 \cdot \delta}{\gamma l^3 (g-f)} (f\,(x-g) + (l-g)(x-f)) \end{aligned} \tag{26}$$

$$V_x^{(1)} = v_x + \frac{1}{\gamma l^3(g-f)}(f\bar{\mathfrak{N}}'' - (l-g)\bar{\mathfrak{N}}')$$

$$V_x^{(2)} = -\frac{6E_0I_0}{\gamma l^2(g-f)}(f\tau_0 + (l-g)\tau_n) \qquad (27)$$

$$V_x^{(3)} = \frac{6E_0I_0\delta(l+f-g)}{\gamma l^3(g-f)}$$

A (6) sz. a. egyenletet integrálva, ered:

$$\tau_x - \frac{\delta}{l} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} \tau_x^{(\varrho)} \qquad (28)$$

és

$$y - y_0 - \frac{\delta x}{l} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} y^{(\varrho)} \qquad (29)$$

E két egyenlet elseje a *rugalmas vonal háromszögtani érintőjének*, másodika magának a *rugalmas vonalnak egyenlete*, ha

$$\tau_x = \frac{dy}{dx},$$

$$\tau_x^{(\varrho)} = -\frac{1}{lE_0I_0}\int_0^l (l-x)\,\varphi(x)\,M_x^{(\varrho)}dx - \frac{1}{E_0I_0}\int_0^x \varphi(x)\,M_x^{(\varrho)}dx$$

és

$$y^{(\varrho)} = -\frac{1}{E_0I_0}\left(\frac{x}{l}\cdot\int_0^l (l-x)\,\varphi(x)\,M_x^{(\varrho)}dx - x\int_0^x \varphi(x)\,M_x^{(\varrho)}dx + \right. \qquad (30)$$

$$\left. + \int_0^x x\varphi(x)\,M_x^{(\varrho)}dx\right)$$

és ha $\rho = 1, 2, 3$.

Legyen y' a tartó két végpontját összekötő egyenes ordinátája, η pedig a meghajlás az x abscissáju ponton; akkor:

$$y' = y_0 + \frac{\delta \cdot x}{l}$$

az *összekötő egyenes egyenlete*, s ennek következtében:

$$\eta = y - y' \qquad (31)$$

vagyis

$$\eta = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} y^{(\varrho)} \qquad (31a)$$

a *meghajlás egyenlete.*

Mindezen egyenletek a gerendatartók minden csoportjára nézve érvényesek.

Ha az EI a tartó egész hosszára nézve állandó, akkor az $E_0 I_0 = EI$, s a (8), (14) és (15) egyenletek szerint:

$$\varphi(x)=1\,;\quad A=B=C=1,\quad \alpha=\beta=\gamma=1\,;\quad f^{(0)}=\frac{l}{3}\,;\quad g^{(0)}=\frac{2l}{3}\,;$$

$$\overline{\mathfrak{N}}' = 6\int_0^l x\mu_x dx = \sum_0^l \sigma K k\,(l^2-k^2)\,;$$

$$\overline{\mathfrak{N}}'' = 6\int_0^l (l-x)\,\mu x dx = \sum_0^l \sigma K k\,(l-k)\,(2l-k).$$

4. *A tartó beosztása szakaszokra.* Az M_x, V_x, τ_x, y és η mennyiségeket még más alakban is kifejezhetjük, ha a tartót szakaszokra osztjuk. E célból oszszuk be a tartót két végpontja között $n-1$ számú, tetszőleges helyzetű ponttal n szakaszra; a választott pontokat *osztópontoknak* nevezzük és a tartó baloldali végpontjától kezdve 0, 1 . . . n-el számozzuk meg; tehát 0 a tartó baloldali, n pedig jobboldali végpontját jelöli.

Jelölje l_r az r-ik szakasz hosszát, úgy, hogy: $l=\sum_{r=1}^{r=n} l_r$; M_r a nyomatékot, y_r a rugalmas vonal ordinátáját az r-ik osztópontban;

τ_0 és τ_n a rugalmas vonal háromszögtani érintőjét a tartó bal-, illetőleg jobboldali végpontján, $\tau_0^{(r)}$ és $\tau_1^{(r)}$, ezen mennyiségeket az r-ik szakaszra nézve;

x_r az r-ik szakasz valamely keresztmetszetének távolságát e szakasz baloldali végpontjától; M_{x_r} a nyomatékot és V_{x_r} a nyiró erőt e keresztmetszetre nézve; μ_{x_r} és v_{x_r} ugyane mennyiségeket abban az esetben, ha az r-ik szakasz a végpontjain szabadon nyugvó oly tartót képez, melyre csak a szakaszbeli erők hatnak; V_r' és V_r'' a nyiró erőt az r-ik szakasz bal-, illetőleg jobboldali végpontján;

K_r az r-ik szakaszban működő egyik erőt, és k_r ezen erő távolságát e szakasz baloldali végpontjától. Jelölje továbbá rendre: $\varphi_r(x_r)$, A_r, B_r, C_r, α_r, β_r, γ_r, d_r, $\overline{\mathfrak{N}}_r'$, $\overline{\mathfrak{N}}_r''$, $\overline{N}_r'$ és $\overline{N}_r''$ a $\varphi(x)$, A, B, C, α, β, γ, d, $\overline{\mathfrak{N}}'$, $\overline{\mathfrak{N}}''$, $\overline{N}'$ és $\overline{N}''$ mennyiségeket, ha ezek

egyenleteiben x, l, $\varphi(x)$, μ_x, K és k helyett megfelelőleg x_r, l_r, $\varphi_r(x_r)$, μ_{x_r}, K_r és k_r-et helyettesítünk; továbbá $f^{(r)}$ és $g^{(r)}$ az $f^{(0)}$ és $g^{(0)}$ mennyiségeket, ha ezek egyenleteiben α, β, γ helyett α_r, β_r, γ_r-et írunk. Ekkor:

$$f^{(r)}<g^{(r)}<l_r \quad \text{és} \quad f^{(r)}=\frac{\gamma_r l_r}{\gamma_r+2\alpha_r}; \quad g^{(r)}=\frac{2\beta_r l_r}{\gamma_r+2\beta_r} \tag{32}$$

Az r-ik szakaszon továbbá az (1)—(4)-el jelzett egyenletek szerint:

$$M_{x_r}=\mu_{x_r}+\frac{1}{l_r}(M_{r-1}(l_r-x_r)+M_r x_r) \tag{33}$$

$$\mu_{x_r}=-\frac{1}{l_r}\left((l_r-x_r)\sum_0^{x_r}\sigma K_r k_r+x_r\sum_{x_r}^{l_r}\sigma K_r(l_r-k_r)\right) \tag{34}$$

$$V_{x_r}=v_{x_r}+\frac{1}{l_r}(M_r-M_{r-1}) \tag{35}$$

Legyen még

$$M'_{x_r}=M_{x_r}-\mu_{x_r} \tag{36}$$

tehát

$$M'_{x_r}=\frac{1}{l_r}(M_{r-1}(l_r-x_r)+M_r x_r) \tag{36a}$$

Ha x_r az r-ik, x_{r+1} pedig az $r+1$-ik szakasz valamely tetszőleges keresztmetszetét jelentik és ha $\tau_0^{(r)}$ és $\tau_1^{(r)}$ értékét meghatározzuk, továbbá $\tau_0^{(r)}$ egyenletében és (36a) sz. a. r helyett $(r+1)$-et írunk s azután $M^x{}_r$ egyenletéből M_{r-1} értékét $\tau_1^{(r)}$, $M'_{x_{r+1}}$kifejezéséből pedig M_{r+1} értékét $\tau_0^{(r+1)}$ egyenletébe helyettesítjük, akkor a következő egyenlet származik:

$$\begin{aligned}M_r\cdot\{&x_{r+1}[l_r[2\beta_r l_r+(\gamma_{r+1}+2\alpha_{r+1})l_{r+1}]-x_r[l_r(\gamma_r+2\beta_r)+\\&+l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2\alpha_{r+1})]]-\gamma_{r+1}l_{r+1}^2(l_r-x_r)\}+\\&+M'_{x_r}\gamma_r l_r^2 x_{r+1}+M'_{x_{r+1}}(l_r-x_r)\gamma_{r+1}l_{r+1}^2=\\&=-Q_r x_{r+1}(l_r-x_r)\end{aligned} \tag{37}$$

és ebben

$$Q_r=\frac{\overline{\mathfrak{N}}'_r}{l_r}+\frac{\overline{\mathfrak{N}}''_{r+1}}{l_{r+1}}+6E_0 I_0 B_r; \qquad B_r=\frac{\delta_{r+1}}{l_{rn}}-\frac{\delta_r}{l_r} \tag{37a}$$

$$\delta_r=y_r-y_{r-1}$$

Még a következő jelzéseket vezethetjük be:

$$Q_0 = \frac{\overline{\mathfrak{N}}_1''}{l_1} + 6\,E_0 I_0\,\frac{\delta_1}{l_1} \quad \text{és} \quad Q_n = \frac{\overline{\mathfrak{N}}_n'}{l_n} - 6\,E_0 I_0\,\frac{\delta_n}{l_n},$$

ha megállapítjuk, hogy: (37*b*)

$$\frac{\overline{\mathfrak{N}}_0'}{l_0} = \frac{\overline{\mathfrak{N}}_{n+1}''}{l_{n+1}} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\delta_0}{l_0} = \frac{\delta_{n+1}}{l_{n+1}} = 0$$

A (37) sz. a. egyenletnek említésre méltó specialis alakja az, a mely $x_r=0$ és $x_{r+1}=l_{r+1}$ esetén keletkezik.

5. *Az egyes szakaszok fixpontjai.* Vegyünk fel az r-ik szakaszon egy pontot és az $(r+1)$-iken egy másodikat akképen, hogy

$$x_{r+1}\cdot\{l_r[2_i\beta_r\cdot l_r + l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2a_{r+1})] - x_r\cdot[l_r(\gamma_r 2_i\beta_r) + \\ + l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2a_{r+1})]\}_i - \gamma_{r+1}\cdot l_{r+1}^2\cdot(l_r - x_r) = 0 \qquad (38)$$

legyen, t. i. úgy, hogy a (37) egyenletből az M_r-et tartalmazó tag eltünjék és jegyezzük meg, hogy a mint az egyenletből belátható

$$x_{r+1} \leqq f_{r+1} \quad \text{ha} \quad x_r \leqq g^{(r)} \qquad (39)$$

és

$$g^{(r)} \leqq x_r \leqq l_r \quad \text{ha} \quad x_{r+1} \geqq f^{(r+1)} \qquad (39a)$$

Vegyük fel x_1-et $f^{(1)}$-nek vagy 0-nak a szerint, hogy keletkezik-e a tartó baloldali végpontján nyomaték vagy sem; és számítsuk, jobb felé szakaszról-szakaszra haladva, (38) szerint, az első szakaszban felvett ponthoz tartozó pontok x abscissáit valamennyi többi szakaszon; és nevezzük a talált hosszakat sorban: $f_1, f_2, \ldots f_r, \ldots f_n$-nek s jegyezzük meg, hogy (39) szerint

$$f_r \leqq f^{(r)} \qquad (40)$$

Vegyük fel továbbá x_n-et $g^{(n)}$-nek vagy l_n-nek, a szerint, hogy keletkezik-e a tartó jobboldali végpontján nyomaték vagy sem; és nevezzük az egészen hasonló módon, a tartó utolsó szakaszán kezdett és balfelé folytatott számítások eredményeit

g_n- $g_{n-1}, \ldots g_r$- $\ldots g_1$-nek, akkor (39*a*) szerint

$$g^{(r)} \leqq g_r \leqq l_r \qquad (41)$$

A (32), (40), (41) sz. a. egyenletek szerint

$$f_r < g_r \tag{42}$$

Az f_r abscissákkal meghatározott pontokat az egyes szakaszok baloldali, a g_r-rel meghatározottokat pedig a jobboldali *fixpontjainak* fogjuk nevezni.

Az, hogy miért vettük föl f_1-et és g_n-et a föntebb jelzett módon, a legközelebbi pontnak (1') és (2')-vel számozott egyenleteiből látható.

Az (1')-vel számozott egyenletben előforduló τ_0 és M_0 mennyiségek közül ugyanis az egyik mindig ismeretes. Mert ha τ_0 ismeretlen, akkor $M_0=0$, ha pedig $M_n \gtrless 0$, akkor τ_0 ismeretes. Az f_1-et tehát akképen kell meghatározni, hogy az a tag, mely az M_0 és τ_0 mennyiségek közül az ismeretlent tartalmazza, eltünjék, ez pedig f_1-nek a fentebb jelzett választása által érhető el. Hasonló módon okadatolható g_n-nek meghatározása a (2') egyenletből.

Két egymás után következő szakasz baloldali (jobboldali) fixpontjainak abscissái f_r és f_{r+1} (ill. g_r és g_{r+1}) közötti összefüggést a következő egyenletek fejezik ki:

$$f_{r+1} = \frac{\gamma_{r+1} l_{r+1}^2 (l_r - f_r)}{l_r[2\beta_r l_r + l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2\alpha_{r+1})] - f_r[l_r(\gamma_r+2\beta_r)+l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2\alpha_{r+1})]} \tag{43}$$

és

$$g_r = \frac{l_r\{g_{r+1}[2\beta_r l_r + l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2\alpha_{r+1})] - \gamma_{r+1} l_{r+1}^2\}}{g_{r+1}[l_r(\gamma_r+2\beta_r)+l_{r+1}(\gamma_{r+1}+2\alpha_{r+1})] - \gamma_{r+1} l_{r+1}^2} \tag{44}$$

s ezekből még a következő kifejezéseket képezhetjük:

$$\lambda_{r+1} = \frac{\lambda_r (l_r - f_r)}{f_{r+1}} \tag{45}$$

és

$$\lambda_r = \frac{\lambda_{r+1} g_{r+1}}{l_r - g_r} \tag{46}$$

ha

$$r = 1, 2, \ldots (n-1) \quad \text{és} \quad \lambda_1 = f_2; \quad \nu_n = l_{n-1} - g_{n-1} \tag{47}$$

6. *Az ismeretlenek meghatározása a fixpontokra nézve számított nyomatékok megállapítása után.*

Ha a (37)-tel számozott egyenletben egyszer $x_r=f_r$; $x_{r+1}=f_{r+1}$-et, másszor $x_r=g_r$; $x_{r+1}=g_{r+1}$-et helyettesítünk, a következők származnak:

$$M'_{f_r}\gamma_r l_r^2 f_{r+1}+M'_{f_{r+1}}\gamma_{r+1} l_{r+1}^2(l_r-f_r)=-f_{r+1}(l_r-f_r)\,Q_r \qquad (48)$$

és

$$M'_{g_r}\gamma_r l_r^2 g_{r+1}+M'_{g_{r+1}}\gamma_{r+1} l_{r+1}^2(l_r-g_r)=-g_{r+1}(l_r-g_r)\,Q_r \qquad (49)$$

Ezen egyenletek alapján leszármaztathatjuk M'_{f_r} és M'_{g_r} *independens* egyenleteit. Ha ugyanis a (48) egyenletben r helyett egymás után $1, 2 \ldots r$ értékeket helyettesítjük s az ekként talált egyenleteket összeadjuk, miután előbb a ρ-ik egyenletet:

$$\pi_\varrho=(-1)^{\varrho+1}\pi_1\frac{\lambda_{\varrho+1}}{l_\varrho-f_\varrho}$$

tényezővel megszoroztuk; ha továbbá a (49) egyenletben r helyett egymásután: $r, (r+1), \ldots, (n-1)$ értékeket helyettesítjük s az ekként származó egyenleteket összeadjuk, miután a ρ-ik egyenletet

$$\pi_\varrho=(-1)^{n-\varrho-1}\frac{\pi_{n-1}\nu_\varrho}{g_{\varrho+1}}$$

tényezővel megszoroztuk, akkor könnyen áttekinthető számítások után a következő egyenletek származnak:

$$M'_{f_r}=-\frac{1}{\lambda_r\gamma_r l_r^2}\left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{r+\varrho}\lambda_\varrho f_\varrho\,Q_{\varrho-1}+(-1)^r f_2(6E_0I_0f_1\tau_0+\right.$$
$$\left.+M_0 l_1(\gamma_1+2\alpha_1)(f_1-f^{(1)})\right) \qquad (1')$$

és

$$M'_{g_r}=-\frac{1}{\nu_r\gamma_r l_r^2}\left(\sum_{\varrho=r}^{\varrho=n}(-1)^{r+\varrho}\nu_\varrho(l_\varrho-g_\varrho)\,Q_\varrho+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-r}(l_{n-1}-g_{n-1})(6E_9I_0\tau_n(l_n-g_n)+M_n l_n(\gamma_n 2\beta_n)(g^{(n)}-g_n)\right) \qquad (2')$$

Az f_1 és g_n mennyiségeknek a megelőző pont végén megállapított fölvétele folytán azonban az (1') egyenletben az M_0-t, a (2') egyenletben pedig az M_n-et tartalmazó tag eltünik; minek következtében M'_{f_r} és M'_{g_r} *independens alakja:*

$$M'_{f_r} = -\frac{1}{\lambda_r \gamma_r l_r^2}\left\{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}(-1)^{r+\varrho}\lambda_\varrho f_\varrho Q_{\varrho-1}+(-1)^r 6E_0 I_0 \cdot f_1 f_2 \tau_0\right\} \quad (50)$$

és

$$M'_{g_r} = -\frac{1}{\nu_r \gamma_r l_r^2}\left\{\sum_{\varrho=r}^{\varrho=n}(-1)^{r+\varrho}\nu_\varrho (l_\varrho - g_\varrho) Q_\varrho + \right.$$
$$\left. +(-1)^{n-r} 6E_0 I_0 \tau_n (l_{n-1}-g_{n-1})(l_n - g_n)\right\} \quad (51)$$

Ha ezen egyenletekben a $Q_{\varrho-1}$ és Q_ϱ mennyiségeket (37*a*) és (37*b*) szerint kifejezzük, akkor

$$M'_{f_r} = -\frac{1}{\lambda_r \gamma_r l_r^2}\left\{\frac{\lambda_r f_r \mathfrak{N}''_r}{l_r} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r-1}(-1)^{r+\varrho}\frac{\lambda_\varrho}{l_\varrho}\mathfrak{N}''_\varrho + \right.$$
$$\left. +6E_0 I_0\left(\frac{\lambda_r f_r \delta_r}{l_r} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r-1}(-1)^{r+\varrho}\lambda_\varrho \delta_\varrho + (-1)^r f_1 f_2 \tau_0\right)\right\} \quad (52)$$

és

$$M'_{g_r} = -\frac{1}{\nu_r \gamma_r l_r^2}\left\{\frac{\nu_r (l_r - g_r)\mathfrak{N}'_r}{l_r} - \sum_{\varrho=r+1}^{\varrho=n}(-1)^{r+\varrho}\frac{\nu_\varrho \mathfrak{N}'_\varrho}{l_\varrho} - \right.$$
$$-6E_0 I_0\left(\frac{\nu_r (l_r - g_r)\delta_r}{l_r} + \sum_{\varrho=r+1}^{\varrho=n}(-1)^{r+\varrho}\nu_\varrho \delta_\varrho - \right.$$
$$\left.\left. -(-1)^{n-r}\tau_n (l_{n-1} - g_{n-1})(l_n - g_n)\right)\right\} \quad (53)$$

ha

$$\mathfrak{N}'_\varrho = g_\varrho \overline{\mathfrak{N}}''_\varrho - (l_\varrho - g_\varrho)\overline{\mathfrak{N}}'_\varrho \quad \text{és} \quad \mathfrak{N}''_\varrho = f_\varrho \overline{\mathfrak{N}}''_\varrho - (l_\varrho - f_\varrho)\overline{\mathfrak{N}}'_\varrho \quad (54)$$

Ha még a következő jelzéseket bevezetjük:

$$m_{f_r}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_r \gamma_r l_r^2}\left\{\frac{\lambda_r f_r \overline{\mathfrak{N}}''_r}{l_r} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r-1}(-1)^{r+\varrho}\frac{\lambda_\varrho}{l_\varrho}\mathfrak{N}''_\varrho\right\}$$
$$m_{f_r}^{(2)} = -\frac{6E_0 I_0}{\delta_r \gamma_r l_r^2}\left\{\frac{\lambda_r f_r \delta_r}{l_r} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r-1}(-1)^{r+\varrho}\lambda_\varrho \delta_\varrho\right\} \quad (55)$$
$$m_{f_r}^{(3)} = -\frac{(-1)^r 6E_0 I_0 f_1 f_2 \tau_0}{\lambda_r \gamma_r l_r^2}$$

$$m_{q_r}^{(1)} = -\frac{1}{\nu_r \gamma_r l_r^2}\left\{\frac{\nu_r (l_r - g_r)\,\overline{\mathfrak{N}}_r'}{l_r} - \sum_{\varrho=r+1}^{\varrho=n} (-1)^{r+\varrho}\,\frac{\nu_\varrho\,\mathfrak{N}_\varrho'}{l_\varrho}\right\}$$

$$m_{g_r}^{(2)} = \frac{6E_0 I_0}{\nu_r \gamma_r l_r^2}\left\{\frac{\nu_r (l_r - g_r)\,\vartheta_r}{l_r} + \sum_{\varrho=r+1}^{\varrho=n} (-1)^{r+\varrho}\,\nu_\varrho\,\vartheta_\varrho\right\} \tag{56}$$

$$m_{g_r}^{(3)} = -(-1)^{n-r}\,\frac{6E_0 I_0 (l_{n-1} - g_{n-1})\,(l_n - g_n)\,\tau_n}{\gamma_r \nu_r l_r^2}$$

akkor

$$M_{f_r}' = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} m_{f_r}^{(\varrho)} \tag{50a}$$

$$M_{g_r}' = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} m_{g_r}^{(\varrho)} \tag{51b}$$

tehát

$$M_{f_r} = \mu_{f_r} + M_{f_r}' = \mu_{f_r} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} m_{f_r}^{(\varrho)} \tag{57}$$

az r-ik szakasz *baloldali* fixpontjában keletkező nyomaték egyenlete, és

$$M_{g_r} = \mu_{g_r} + M_{g_r}' = \mu_{g_r} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} m_{g_r}^{(\varrho)} \tag{58}$$

az r-ik szakasz *jobboldali* fixpontjában keletkező nyomaték egyenlete.

Ha $x_r = f_r$ és $x_r = g_r$-et helyettesítünk (36*a*)-ba s a talált egyenletekből M_{r-1}- és M_r-et (36*a*)-ba helyettesítjük, akkor tekintettel (36*a*)-ra, az

$$M_{x_r} = \mu_{x_r} + \frac{1}{g_r - f_r}\cdot[(x_r - f_r).M_{g_r}' - (x_r - g_r)\,M_{f_r}'] \tag{59}$$

egyenletet találjuk, s ez az r-ik szakasz valamely x_r keresztmetszetében keletkező *nyomaték általános* képlete.

Ha még a következő jelzéseket bevezetjük:

$$\begin{aligned} M_{x_r}^{(1)} &= \mu_{x_r} + \frac{1}{g_r - f_r}\left((x_r - f_r)\,m_{g_r}^{(1)} - (x_r - g_r)\,m_{f_r}^{(1)}\right) \\ M_{x_r}^{(2)} &= \frac{1}{g_r - f_r}\left((x_r - f_r)\,m_{g_r}^{(2)} - (x_r - g_r)\,m_{f_r}^{(2)}\right) \\ M_{x_r}^{(3)} &= \frac{1}{g_r - f_r}\left((x_r - f_r)\,m_{g_r}^{(3)} - (x_r - g_r)\,m_{f_r}^{(3)}\right) \end{aligned} \tag{60}$$

akkor:

$$M_{x_r} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} M_{x_r}^{(\varrho)} \tag{59a}$$

$x_r=0$ és $x_r=l_r$ értékeknél $\mu_{x_r}=0$, továbbá $M_{x_r}=M_{r-1}$ és $M_{lr}=M_r$, tehát (59) szerint:

$$M_{r-1} = \frac{g_r M'_{f_r} - f_r M'_{g_r}}{g_r - f_r} \tag{61}$$

$$M_r = \frac{1}{g_r - f_r}((l_r - f_r) \cdot M'_{g_r} - (l_r - g_r) \cdot M'_{f_r}) \tag{62}$$

A (61) egyenletben r helyett $(r+1)$-et írva, ered:

$$M_r = \frac{g_{r+1} M'_{f_{r+1}} - f_{r+1} M'_{g_{r+1}}}{g_{r+1} - f_{r+1}} \tag{63}$$

A két utolsó egyenletből látható, hogy minden r-ik osztópontban keletkező nyomaték kétféle módon fejezhető ki: (63) szerint mint az *r-ik szakasz végpontján*, (62) szerint pedig mint az $(r+1)$-ik szakasz kezdőpontján keletkező nyomaték. A tartó *baloldali végpontján* keletkező M_0 nyomatékot a (61) és (63) egyenletek fejezik ki, $r=1$, illetőleg $r=0$ értéknél, a *jobboldali végpontban keletkező* M_n nyomatékot pedig a (62) egyenlet szolgáltatja $r=n$ értéknél.

Ha az (59) egyenletet x_r szerint differenciáljuk a

$$V_{x_r} = v_{x_r} + \frac{M'_{g_r} - M'_{f_r}}{g_r - f_r} \tag{64}$$

képlet ered, s ez az r-ik szakasz valamely x_r keresztmetszetében keletkező *nyiró erő általános egyenlete.*

Ha még a következő jelzéseket bevezetjük:

$$V_{x_r}^{(1)} = v_{x_r} + \frac{m_{g_r}^{(1)} - m_{f_r}^{(1)}}{g_r - f_r}; \qquad V_{x_r}^{(2)} = \frac{m_{g_r}^{(2)} - m_{f_r}^{(2)}}{g_r - f_r}$$

és

$$V_{x_r}^{(3)} = \frac{m_{g_r}^{(3)} - m_{f_r}^{(3)}}{g_r - f_r} \tag{65}$$

akkor:

$$V_{x_r}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} V_{x_r}^{(\varrho)} \tag{64a}$$

Jelölje y_{x_r} a rugalmas vonal ordinátáját; τ_{x_r} e vonal háromszögtani érintőjét; y'_{x_r} a tartó két végpontját összekötő egyenes ordinátáját; és η_{x_r} a meghajlást az r-ik szakasz valamely x_r keresztmetszete helyén, akkor:

$$\tau_{x_r}-\frac{\delta_r}{l_r}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=3}\tau_{x_r}^{(\varrho)} \tag{66}$$

a rugalmas vonal háromszögtani érintőjének egyenlete,

$$y_{x_r}-y_{r-1}-\frac{\delta_r x_r}{l_r}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} y_{x_r}^{(\varrho)} \tag{67}$$

a rugalmas vonal egyenlete,

$$y'_{x_r}=y_{r-1}+\frac{\delta_r x_r}{l_r} \tag{68}$$

a tartó két végpontját összekötő egyenes egyenlete,

$$\eta_{x_r}=y_{x_r}-y'_{x_r} \tag{69}$$

vagy

$$\eta_{x_r}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} y_{x_r}^{(\varrho)} \tag{69a}$$

a *meghajlás egyenlete az r-ik szakaszban,* és

$$\begin{aligned}
\tau_{x_r}^{(\varrho)} &= \frac{1}{l_r E_0 I_0}\int_0^{l_r}(l_r-x_r)\,\varphi_r(x_r)\,M_{x_r}^{(\varrho)}\,dx_r- \\
&\quad -\frac{1}{E_0 I_0}\int_0^{x_r}\varphi_r(x_r)\,M_{x_r}^{(\varrho)}\,dx_r, \\
y_{x_r}^{(\varrho)} &= \frac{1}{E_0 I_0}\left(\frac{x_r}{l_r}\cdot\int_0^{l_r}(l_r-x_r)\,\varphi_r(x_r)\,dx_r\,M_{x_r}^{(\varrho)}-\right. \\
&\quad \left.-x_r\int_0^{x_r}\varphi_r(x_r)\,M_{x_r}^{(\varrho)}\,dx_r+\int_0^{x_r}x_r\,\varphi_r(x_r)\,M_{x_r}^{(\varrho)}\,dx_r\right)
\end{aligned} \tag{70}$$

7. *A föltételekhez kötött meghajlás esete.*

Az eddig előadottak alapján megoldhatjuk azt a feladatot, hogy állapíttassanak meg a külső erők ama feltétel alatt, ha a rugalmas vonalnak i adott pontjához tartozó $y_1\ y_2 \ldots y_i$ ordináták a következő i föltételi egyenletnek

$$\psi_\tau(y_1, y_2 \ldots y_i)=0 \tag{71}$$

tartoznak megfelelni. Specialis eset az, ha azt követeljük, hogy a rugalmas vonal adott pontokon menjen át. Ez esetben a föltételi egyenlet, ha $c_1 c_2 \ldots$ egy-egy ismert állandót jelent, egyszerűen:

$$y_\tau = c_\tau \tag{72}$$

Megkülönböztethetjük ezek alapján 1) azokat a gerendákat, melyeknek meghajlása a tartó két végpontja között semmiféle föltételnek sincsen alávetve: és 2) azokat, melyeknek meghajlása a (71) vagy (72) egyenletrendszer által meghatározott föltételeknek tartozik eleget tenni.

Az 1) alatt említett gerendatartókra az (1)—(3) egyenleteket alkalmazzuk, míg a 2) alatt említettekre a (4)—(6) egyenleteből következtetünk, az *adott pontokat osztópontoknak* választva.

8. *Az adott pontokon átmenő rugalmas vonalú gerendatartók.*

Minthogy ezen esetben az y_r elhajlási ordináták a beosztó pontokban előre megadott állandó mennyiségek, a $\delta_1 \ldots \delta_n$-nek szintén *állandók*. Ha e mellett

$$y_1=y_2 \ldots y_r= \ldots y_n=c \tag{73}$$

vagyis ha a megadott pontok mind ugyanegy vízszintesen fekszenek, akkor

$$\delta_r = 0 \tag{74}$$

Az (59*a*), (64*a*), (66), (67) és (69*a*) egyenletek a jelen pontban tárgyalt gerendatartókra nézve az M_{x_r}, V_{x_r}, τ_{x_r}, y_{x_r} és η_{x_r} mennyiségeket határozzák meg, ha a δ mennyiségeket *adott állandóknak* tekintjük.

Az (57) és (58) egyenletekből pedig a következő tétel ered:

Ha a szakaszokra osztott tartó meghajlása az osztópontok-

ban állandó nagyságú, akkor mindegyik szakasz baloldali (jobboldali) fixpontjában keletkező nyomaték független 1) *az ezen szakasztól jobbra (balra) ható erőktől,* 2) *a tartó rugalmas vonalának ezen szakasz jobboldali (baloldali) végpontjától jobbra (balra) fekvő osztópontokhoz tartozó ordinátáitól és* 3) *a tartónak a jobboldali (baloldali) végponton való befogásának nemétől.*

A beosztó pontokra ható külső erőket, esetleg a reactiókat, minthogy ezek a föntebb leszármaztatott egyenletekben közvetlenül nem szerepelnek, az

$$A_r = V'_{r+1} - V''_r$$

egyenlet alapján határozzuk meg. Ha ebbe (64) szerint V_{r+1} és V''_r értékét bevezetjük, az

$$A_r = v'_{r+1} - v''_r + \frac{M'_{g_{r+1}} - M'_{f_{r+1}}}{g_{r+1} - f_{r+1}} + \frac{M'_{f_r} - M'_{g_r}}{g_r - f_r} \tag{75}$$

képlet származik s ebben v'_{r+1} és v''_r az $(r+1)$-ik szakasz bal-, illetőleg az r-ik szakasz jobboldali végpontján keletkező nyiró erőt jelenti akképen számítva, mint ha e szakaszok mindegyike, a végpontjain szabadon nyugvó oly tartót képezne, melyre a szakaszbeli erők hatnak. Ha az utolsó egyenletbe $M'_{f_{r+1}}$ és $M'_{g_{r+1}}$ értékét a (48), illetőleg (49) egyenletből bevezetjük, akkor tekintettel (37*a*) és (37*b*)-re, A_r a következő alakban fejezhető ki:

$$A_r = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} A_r^{(\varrho)} \tag{76}$$

ha

$$A_r^{(1)} = v'_{r+1} - v''_r - \frac{1}{\gamma_{r+1} \cdot l_{r+1}^2} \left(\frac{\overline{\mathfrak{N}}'_r}{l_r} + \frac{\overline{\mathfrak{N}}''_{r+1}}{l_{r+1}} \right) + m_{f_r}^{(1)} \mathfrak{A}_r - m_{g_r}^{(1)} \mathfrak{B}_r$$

$$A_r^{(2)} = -6 E_0 I_0 \left(\frac{\delta_{r+1}}{l_{r+1}} - \frac{\delta_r}{l_r} \right) + m_{f_r}^{(2)} \mathfrak{A}_r - m_{g_r}^{(2)} \mathfrak{B}_r$$

$$A_r^{(3)} = m_{f_r}^{(3)} \mathfrak{A}_r - m_{g_r}^{(3)} \mathfrak{B}_r \tag{76a}$$

$$\mathfrak{A}_r = \frac{\gamma_{r+1} l_{r+1}^2 (l_r - f_r)(g_{r+1} - f_{r+1}) + \gamma_r l_r^2 f_{r+1} (g_r - f_r)}{\gamma_{r+1} l_{r+1}^2 (l_r - f_r)(g_r - f_r)(g_{r+1} - f_{r+1})}$$

$$\mathfrak{B}_r = \frac{\gamma_{r+1} l_{r+1}^2 (l_r - g_r)(g_{r+1} - f_{r+1}) + \gamma_r l_r^2 g_{r+1} (g_r - f_r)}{\gamma_{r+1} l_{r+1}^2 (l_r - g_r)(g_r - f_r)(g_{r+1} - f_{r-1})}$$

az $m_r^{(\varphi)}$ és $m_{g_r}^{(\varphi)}$ mennyiségeket pedig az (55) és (56) egyenletek határozzák meg.

Ha a tartó baloldali (jobboldali) végpontján *nem* keletkezik nyomaték, akkor a baloldali (jobboldali) végpontra ható A_0, illetőleg A_n erőt a következő egyenlet fejezi ki:

$$A_0 = V_1' \quad \text{és} \quad A_n = -V_n'' \tag{77}$$

s ez egyenletek alapján A_0 és A_n *independens* alakban könnyen kifejezhetők.

Önként értetődik, hogy az utóbbi és a (4)—(8) pontban leszármaztatott többi egyenlet az állandó keresztmetszetű gerendatartókra nézve is érvényes, ha az ezen egyenletekben előforduló α, β, γ és $\varphi(x)$ mennyiségek helyett: $+1$-et írunk.

A jelen pontban tárgyalt problemanak fontos specialis esete a *többtámaszú gerenda.*

Azt a föltételt ugyanis, hogy a tartó meghajlása adott pontokon meghatározott nagyságú legyen, az által valósíthatjuk meg, hogy a tartót e pontokon akképen támasztjuk meg, hogy a tartó a támaszpontokat megfeküdje. Ha e támaszpontokat osztópontoknak választjuk, akkor az egyes keresztmetszetekben keletkező nyomatékokat, nyiró erőket, az elhajlásokat s a támaszpontokon keletkező reactiókat az (59*a*), (64*a*), (69*a*) és (76) egyenletekből úgy kapjuk meg, hogy ezekben a δ mennyiségeket *adott állandóknak* tekintjük és σ helyett: (-1)-et írunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1895. október 21.-én tartott üléséből.)

A DUNA VIZE

CHEMIAI ÉS BAKTERIOLOGIAI SAJÁTSÁGAI BUDAPEST FÖLÖTT, MELLETT ÉS ALATT, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A NAPFÉNY ÉS AZ ÜLLEPEDÉS HATÁSÁRA A FOLYAM TISZTULÁSÁRA.*

Dr. Rigler Gusztáv-tól.

I. Bevezetés.

Régi szokás, hogy a városok a házi és konyhai, az utczai és gyári szennyes vizeket a lakók ürülékével együtt a mellettük elfolyó, vagy falaik között elhaladó folyamokba, folyókba, patakokba vezetik. Azon óriási mennyiségű szennynek — melyet egy nagyobb vagy éppen világváros termel — ily módon való eltávolítása kétségtelenül a legkényelmesebbnek és legolcsóbbnak látszik. Az utóbbi évtizedek alatt végzett vizsgálatok, de még inkább a járványok alkalmával tett tapasztalatok azonban kiderítették, hogy az ürülékek és a szennyes víz ilyféle eltávolítása a legtöbb esetben csak látszólag olcsó, — és e mellett csak ritka esetben ártalmatlan. A több millió lakost számláló angol metropolis, London tapasztalta ezt legelőbb, mely a rajta áthaladó Themse vizét és partjait az évek hosszú során belé vezetett csatornatartalommal olyannyira beszennyezte, hogy az nem csak folytonosan és undorítóan piszkos és zavaros lett, hanem úgy a vízben úszó, mint különösen a partjaira lerakódott szenny bomlása és rohadása által a partokon és azok közelében való lakást a bűz miatt kellemetlenné és egészségtelenné, — sőt sok esetben tűrhetetlenné tette; a halak benne elpusztultak, vizét mosás, főzés, fürdésre használni egyátalán nem lehetett. Ugyanilyenek voltak a tapasztalatok Párisban a

---

* A budapesti kir. m. tudomány-egyetem közegészségtani intézetében készült dolgozat.

Szajna, s Berlinben a Spree vizével. A szennyeződés azonban még ezeknél is jóval nagyobb, majdnem hihetetlen fokot ért el az angol gyárvárosokon áthaladó kisebb folyóknál, melyeket valóságos csatorna-vizeknek lehetett tekinteni.

Nemcsak a szenny és bűz, hanem a járványok alatt tett tapasztalatok — melyek szerint a folyók, különösen a nagy mértékben szennyezettek mellett épült városok és községek lakói szenvednek sokat a fertőző és járványos betegségektől — adták meg az alkalmat arra, hogy a folyóknak a városok által való szennyezését úgy nagyságra, mint minőségre nézve tanulmányozzák. A chemiának ujabban segítségére jött itt is a bakteriologia úgy, hogy manapság már kontinensünk számos folyóvizének szennyeződéséről birunk positiv chemiai és bakteriologiai ismeretekkel.

A mennyire az irodalom számomra hozzáférhető volt, az alábbiakban felsorolom a legfontosabb idevágó vizsgálatokat.

Rosenberg * a Majna vizét vizsgálta Würzburg fölött és alatt. Bakteriologiai kutatásaiban úgy a mikroorganismusok számára, mint azok fajára is tekintettel volt. Vizsgálatainak értelmében a Majna vizében 20-szor annyi a város alatt a bakterium, mint annak a város fölött folyó szakaszában. A bakteriumok száma bizonyos határok között ingadozásokat mutatott. Igy emelkedett a számuk a levegő, s evvel együtt a folyó vizének hőmérsékével: márczius hóban több mikroorganismust talált a Majna vizében, mint februárban. Érdekes azon tapasztalata is, hogy a város alatt vett vízpróbákban sok volt az erjesztő és penészgomba, míg a város fölött vett próbákban, melyekben a coccusok adták a túlnyomó számot, azok hiányoztak. Minél jobban haladt a folyón lefelé, annál jobban szaporodtak ezekhez képest a gelatinát folyósító és nem folyósító bacillusok. Rosenberg e tüneményt abból iparkodik magyarázni, hogy a folyónak a város fölötti szakaszaiban a bomlásra kevésbbé hajlandó humusból állanak a szerves anyagok, — míg a város alatti részekben már a csatornák könnyen szétesö szerves anyagai képezik a tulnyomó, s a bakteriumok tenyészését elősegítő közeget.

* Archiv für Hygiene V. 446—482. lap.

G. FRANK * a Spree folyó vizét vizsgálta Berlinen való átfolyásában és alatta, úgy chemiailag, mint bakteriologiailag. Vizsgálatait PLAGGE és PROSKAUER adataiból egészíti ki, a kik Berlin fölött a Spree vizében átlag 6140 bakteriumot találtak 1 cm^3-re. Frank szerint a bakteriumok száma a folyó vizében lefelé fokozatosan emelkedik, s világos képét nyujtja azon szennyezésnek, melynek a különböző helyekről belé ömlő csatornák által ki van téve. Közvetlen Berlin alatt kapta a legnagyobb számot, vagyis 243,000 bakteriumot 1 cm^3 vízben. Innen a szám csekély ingadozással állandó maradt Spandauig (14 kilométer), a hol a Havel ömlik a folyóba. Innen lefelé állandó apadást tapasztalt a bakteriumok számában úgy, hogy Potsdam előtt (32 kilométer) már kevesebbet talált, mint a mennyi Berlin fölött a stralaui vízművek mellett a folyó vizében volt.

PRAUSNITZ ** művében az Isar folyóról vannak érdekes adatok fölsorolva. Az Isarban átlag kevesebb a bakterium, mint a Spreeben; ennek oka szerinte az, hogy az Isar hegyi folyó, gyors esésű és vizének hőmérzéke is kisebb amazénál. Ha vizsgálataiból a bakteriumok átlagos mennyiségét kiszámítjuk, úgy látjuk, hogy:

München fölött	1 cm^3-ben volt	305	bakterium		
München alatt	3·1	km-re	«	15,231	«
«	«	7	«	« 12 606	«
«	«	13	«	« 9,111	«
«	«	22	«	« 4,796	«
«	«	33	«	« 2,378	«

Szerinte az Isar München alatt 8 óra alatt válik oly tisztává, mint a milyen a város fölött volt.

BUJWID-nak *** Varsó város ivóvizéről szóló érdekes munkájából tudjuk, hogy a nem szűrt Visztula vizében

---

* Zeitschrift für Hygiene III. 355—403. lap.

** Der Einfluss der Münchener Canalisation auf die Isar, mit besonderer Berücksichtigung der Frage der Selbstreinigung der Flüsse (Habilit.-Dissert. Cbl. f. Bakt. Bd. VII. 404.)

*** Resultate der bakt. Untersuchungen der Warschauer Trinkwasser in den Jahren 1887, 1888, 1889. (Cblt. f. Bakt. B. VIII. 395.)

1888	januárban	volt	480	bakterium
«	februárban	«	2,200	«
«	márcziusban	«	1,500	«
«	áprilisban	«	1,250	«
«	májusban	«	165	«
«	juniusban	«	66	«
«	juliusban	«	360	«
«	augusztusban	«	1,300	«
«	szeptemberben	«	150	«
«	októberben	«	7,700	«
«	novemberben	«	320	«
«	deczemberben	«	2,900	«

Toporoff * a Sunscha folyó vizét vizsgálta Groznoe város mellett, midőn azt találta, hogy a tavaszi hóolvadás és a nyári esözés által megáradt folyó vizében szaporodik a szilárd anyag, az ammoniak és salétromsav. Ugyanekkor a bakteriumok száma 9,000—12,000 között ingadozik, míg máskor az csak 800—9000-t tesz ki.

Celli és Scala ** a Tiber folyó vizét vizsgálták Róma mellett, s azt találták, hogy az tisztább, mint a Spree vize Berlin mellett; a tünemény okát a folyónak a Spreehez viszonyított aránytalanul nagyobb vízbőségében és a partokon lakó népesség kisebb számában találják.

Schlatter *** a Limmat vizét vizsgálta Zürich város csatornáinak beömlése fölött és alatt, és meghatározván a bakteriumokkal való szennyeződés fokát, kereste, mily messzire lehet azt a folyó alsóbb szakaszaiban még kimutatni. Az eredmény az volt, hogy a Limmat folyó vizének 1 cm^3-ében a zürichi csatornák beömlése fölött 1000—2000, azok beszájadzása alatt pedig 18,000—1.500,000, sőt még ennél is több volt a bakterium. A mikroorganismusok száma azonban a város alatt gyorsan fogyni kezd úgy, hogy sok-

* Die hygien. Wasseruntersuchung des Flusses Sunscha bei der Stadt Groznoe (Cbltt. f. Bakt. XIII. 487.)

** Über das Wasser der Tiber. Hyg. Rundschau I. H. 4. 133. lap.

*** Zeitschrift für Hygiene IX. H. 1. 1890.

szor már 6—7 kilométernyire, — rendesen azonban 30 kilométernyire a város alatt annyira sülyedt a csirák száma a vízben, mint a mennyi a város fölött volt.

Girard és Bordas * a Szajnát Corbeiltől — azaz Páris fölötti részétől — egészen Rouenig — vagyis a folyónak a tengerbe való ömléséig — vizsgálták meg. Munkájukból a régibb vizsgálatokkal szemben az tünik ki, hogy a Szajna nem Nantesnél éri el tisztaságának a Páris fölöttivel azonos fokát, — hanem, hogy a folyó még közel tengerbe ömléséhez is oly sok szerves anyagot és bakteriumot tartalmaz, hogy a lakosok ivásra nem használhatják. Különösen kiemelik azon körülményt, hogy a folyó áradásakor úgy a bakteriumok száma, mint a szerves anyagok mennyisége tetemesen emelkedik, a minek okául az iszap fölkavarodását tartják.

Stutzer és Knublauch ** a Rajna vizének Köln városa által okozott szennyeződéséről akarván meggyőződni, azt úgy a középen, mint a két parton több helyen vett próbákban bakteriologiailag megvizsgálták. Vizsgálatukból kitünt, hogy a Rajna vizének 1 cm^3-ében minimumban 200, maximumban 100,000 bakterium van, továbbá, hogy a folyó bal partja mellett elhuzódó viztömeg sokkal szennyesebb, mint a középen vagy a jobb part mellett tovahaladó víz. Az elsőben 12-szer, az utóbbiakban pedig csak 2-szer több a város alatt a bakterium, mint fölötte volt. A csatornavíz tehát a Rajna bal partja mentén folyik hosszú ideig, s csak lassanként keveredik a folyó vizével.

Köln legutolsó csatornája alatt 3 kilométernyire a bakteriumok száma felényire, — 9 kilométernyire pedig egyharmadára fogy le. A folyam vize a várostól 40 kilométernyire lefelé nyeri vissza a bakteriumok tekintetében azon tisztaságot, melylyel a fölött birt.

Figyelmet érdemel továbbá Draer *** munkája is, melyben a Königsberg mellett elfolyó Pregelnek a város által okozott szeny-

* La Seine de Corbeil à Rouen. Annal. d'hyg. publ. 1893. Sept.

** Untersuchungen über den Bakteriengehalt des Rheinwassers oberhalb und unterhalb der Stadt Köln. Centralblatt f. allgem. Gesundheitspflege 1893.

*** Das Pregelwasser oberhalb, innerhalb und unterhalb Königsberg in bakteriol. und chem. Beziehung ect. Zeitschrift f. Hyg. XX. H. 3. 1895.

nyeződését ismerteti. Összesen 15 ponton vett vízpróbát, melyek közül 7 a város határain belül, 5 a város fölött, 3 pedig az alatt feküdt. A vegyi vizsgálatnál érdekes azon tapasztalata, hogy a hideg évszakokban több volt a folyó vizében a szerves anyag, mint a nyári hónapokban. Ezen tüneménynek — melyet különben más folyóknál is tapasztaltak (igy Pfeiffer és Eisenlohr az Isarnál) — abban keresi az okát, hogy a meleg évszakokban leapadt folyóba éppen a szárazság miatt nem ömölnek a szántóföldekről a sok szerves anyagot hozó folyókák, — míg a nedves ősz, tél és tavasz hó- és esővize bőségben látja el a folyót ilyenekkel. Eltekintve a tenger közelsége miatt az árapály által okozott érdekes tünemények leirásától, csak azt említem föl, hogy a város fölötti folyószakasz vizének 1 cm^3-ében minimumban 115, maximumban 9400 bakteriumot, közvetlenül a város alatt fekvő vizsgálati helynél pedig minimumban 10,400, maximumban pedig 693,000 mikroorganismust talált.

Munkám szempontjából kétségtelenül legérdekesebbek azon adatok, melyeket Heider,* Fodor** és Balló*** munkájában találunk. Heider ugyanis a Dunának Bécs csatornái által okozott szennyeződését vizsgálta. A Dunából az osztrák főváros fölött tudvalevőleg egy 16·8 km. hosszú mellékág válik ki, mely másodperczenkint átlag 200 m^3 vizet visz el az ugyancsak másodperczenként 1400 m^3 vizet tovahömpölygető anyafolyamból. E mellékágba körülbelől 120 csatorna ömlik, melyeknek tartalma 2—3-szor concentráltabb azon városokénál, melyekben az úsztató csatornázás teljesen be van hozva. A csatornák tartalma alacsony vízállásnál undorító vizesések alakjában ömlik a Duna-ágba, melyek abban piszkos sávokat képeznek, s csak lassan tünnek el. A víz szennyeződése reggel jóval kisebb, mint délben és este, s a jobb parton szemmel láthatólag tetemesebb, mint a bal parton. A chemiai vizsgálatnál kitünt, hogy míg a Duna-ágnak a város fölötti szakaszában literenkint 181 mgr. oldott szilárd anyag, 3 mg. chlor,

* Untersuchungen über die Verunreinigung der Donau durch die Abwässer der Stadt Wien. Oesterr. Sanitätswesen, 1893. H. 13.

** Budapest csatornázása. Orv. Hetilap 1884.

*** Jelentés Budapest főváros vegyészének működéséről 1874—1883-ban.

és 8·6 mgr. chameleonnak megfelelő oldott szerves anyag van a salétromsav és ammoniak nyomai mellett, — addig a város alatt elfolyó szakaszának vizében 198·5 mg. szilárd anyag van, s a szerves anyag, chlor és ammoniak szintén, bár nem túlságos szaporodást mutatnak. Mikroskopiai vizsgálatnál a vízben könnyen ki lehetett mutatni az emberi bélsár részeit az epétől sárgára festett harántcsikolt izomrostok alakjában. Sokkal érzékenyebben mutatta azonban mindezeknél a Duna-ág vizének szennyeződését a bakteriologiai vizsgálat. Ez a város fölötti szakaszban cm^3-enként 2000 bakteriumot mutatott ki, míg a város alattiban már 21,000—1.200,000 mikroorganismust tüntetett föl, és pedig a jobb parton mindig többet, mint a bal parton, és körülbelől 10—60-szorosát annak, a mit Heider az anyafolyamban talált.

A Duna-ágnak a Nagy-Dunába való beömlése után a szennyeződés chemiai és mikroskopiai jelei csakhamar eltüntek, — bakteriologiai jelei azonban még 23·3 kilométernyire is megmaradtak a város alatt, a mennyiben Heider még itt is 4,200 csirával többet talált a víz 1 cm^3-ében, mint a Bécs fölött vett próbákban.

Fodor három évi vizsgálat (1877—1880) alapján átlagban talált a Duna vizében

Szilárd alkotórészt	252·2 mg-ot.
Szerves anyagot ($KMnO_4 \times 5$)	62·5 «
Chlort	12·31 «
Salétromsavat	0·99 «

Idézett munkájában Klimm tanártól kapott adatok alapján a Duna a következő mennyiségű vizet hord el Budapest alatt 24 óra alatt:

Alacsony vízállásánál		60½ millió	m^3-t.
Közepes	«	198½ «	«
Legmagasabb	«	950 «	«

Ebből és a csatornatartalom elemzéséből kiszámítja Fodor, hogy a csatornavíz által a Duna szennyezése oly csekély mértékben növeltetnék, hogy akkori (1877—1880.) elemzési módszereink alig volnának képesek különbséget kimutatni azon Dunavíz szerves anyaga között, a melyben még nincsen csatornafolyadék és a

között, a melyben már benne van az egész fővárosi csatornavíz. Fodor számítása szerint ugyanis a Duna vizének szerves anyagait a csatornavíz, a fekáliákkal együtt, növelné:

Alacsony vízállásnál	55·5*	mg-ról	59·4-re.
Közepes	«	«	«	56·7 «
Magas	«	«	«	55·7 «

Balló 1877/78-ban megejtett vizsgálatai alapján úgy nyilatkozik, hogy a Dunavíz Budapesten keresztülhaladva már gazdagabb összes szilárd alkotórészekben, chlorban és szerves anyagokban; az ammoniakban szintén növekedés mutatkozik, még pedig különösen a bal parton.

*

Az irodalomnak a fönnebbiekben fölhozott adataiból világosan kitünik azon igyekezet, melyet az egyes vizsgálók annak kiderítésére fordítottak, hogy a folyók és folyamok vize a szennyeződés utolsó forrásától mily távolságban és mily idő alatt nyeri vissza chemiai és bakteriologiai tekintetben eredeti tisztaságát. Ezen igyekezet azon megfigyelésen alapszik, melyet az első vizsgálók tettek, s a mely a folyóvizek azon képességében áll, hogy a beléjük került vegyi anyagokat és bakteriumokat bizonyos idő mulva, illetve bizonyos útszakasz hátrahagyása után képesek kiküszöbölni magukból.

A vizsgálók ezen képességet a folyók tisztuló képességének (Selbstreinigung) nevezték el.

Hosszú volna e helyen fölsorolni mindazon kisérleteket, melyek a tisztulás módjának, lefolyásának, legfőbb tényezőinek kiderítése czéljából végeztettek, azért alább csakis azon kisérleteken alapuló nézeteket fogom fölemlíteni, melyek a kérdés tisztázásához különösen fontos érvekkel járultak.

Ezek szerint a folyók tisztulási képességében úgy a tisztán physikai, mint a chemiai folyamatoknak, valamint az élő lények anyagcseréjének is szerepe van. A physikai tényezők közül főképpen a vízben uszkáló, — de annál valamivel még is nehezebb szerves

* Átlagos érték Fodor 1877—80. és Balló 1878/9. évi 11 havi átlagaiból.

és szervetlen részecskéknek azon tulajdonsága jön számba, hogy azok saját súlyuknál fogva lefelé, a fenék felé törekednek, vagyis leülepedni iparkodnak. Utjukban azután az eléjük kerülő kisebb élő és élettelen anyagokat is magukkal rántják; ez utóbbiak közé tartoznak a bakteriumok is, melyeknek a vízből való kiküszöbölödése részben ezen természeti tüneményben leli okát.

A vegyi folyamatok közül különösen kettő érdemel említést; ezek elseje az, hogy a mész és magnesia ketted szénsavas sóiból a lazán lekötött második szénsav-molekula a víznek levegővel való bőséges érintkezése folytán kiválik, midőn is azok pehelyszerű csapadékot alkotó egyszerű szénsavas sókká változnak át. Az így képződött aránylag sulyos és nagy terjedelmű csapadék már most nehézségének befolyása alá kerül, s magával rántván az utjába eső kisebb részecskéket, úgy physikailag, mint a fönnebbiek szerint chemiailag is hozzájárul a tisztulás létrejöttéhez. Kétségtelenül segitségére van a fönnebbi folyamatnak a vízzel érintkező levegő oxygen tartalma is, mely a nagy felületen való behatás folytán sok szerves és szervetlen oxydálható anyagot bont meg és alakit át kevésbbé ártalmassá, a kiválásra alkalmasabbá.

A vízben levő szerves anyagok elpusztítása, földolgozása azonban kiválólag az abban élő alsóbb és magasabb rendű növények és állatok, nevezetesen pedig a legegyszerűbb élő lények, a bakteriumók működése, anyagcseréje következtében megy végbe. A természet azonban gondoskodik arról is, hogy eme mikroorganismusok vég nélkül el ne szaporodhassanak, mert olyan antagonismust teremtett közöttük, melynél fogva azok, melyek a vízben a megélés és szaporodásra alkalmasabb viszonyokat találnak (saprophyták) nemcsak a számra szárnyalják túl a többieket (parasiták) s ezek között a betegséget okozókat is, hanem azoktól a tápláló anyagot elvonván, sőt talán anyagcsere termékeikkel életükre is kedvezőtlen, sőt ártalmas befolyást gyakorolván, az utóbbiak elpusztulását és a vízből való kiválását nagy fokban előmozditják. A pathogen (parasita) mikroorganismusok megölésében nevezetes szerep jut még a napfény bakteriumölő képességének is, a melyet több vizsgáló a folyók tisztulása legfontosabb és leghatásosabb tényezőjének tart.

*

Mindezek fölemlítése után legyen szabad áttérnem a Duna vizének Budapest fölött, mellett és alatt elfolyó szakaszain végzett vizsgálataim leirására.

II. A vizsgálat czélja, ideje, helye és módja.

Budapest csatornázása az 1894. év óta nagy változáson megyen át. A bal parton eddig fönnállott, s radiális irányban a Dunába haladó csatornák beömlési nyilásait lassanként elzárják, mivel a Duna-part mentén és a Nagy-Körúton kiépített, utóbb pedig a főcsatornában egyesülő gyűjtő csatornák veszik magukba ezeknek tartalmát, mely az összekötő vasuti hid alatt géperővel lesz a parttól 40 méternyire befelé, a Duna fenekébe épített nyomócsövön át a folyamba szorítva.

Eltekintve azon rendkívüli előnytől, mely így a városra az ürülékek és szennyes vizek gyors és biztos elvezetéséből származik, — a közegészségügy tekintetéből nem kevésbbé fontosnak kell tekinteni azon méltán várható hasznot is, a mely a fővárosra a partjai között elfolyó Duna vizének az új csatornák által a régieknél relative sokkal kisebb mértékben okozott chemiai és főleg bakteriologiai szennyeződése folytán fog származni.

A szennyeződés kisebbedésének nem csak az lesz az oka, hogy az új csatornák tartalma előzetes üllepítés után kerül ezután a Dunába, hanem az is, hogy annak a folyam vizével való gyors keveredéséről, igen nagy fölhigításának biztos voltáról s így tisztulási képessége elősegítéséről is gondoskodva van.

A régi viszonyoknak a jövendőkkel való összehasonlítása és az utóbbiak által a Duna vizének chemiai és bakteriologiai tekintetben előidézett javulása megbirálhatásának szempontjából vettem 1894 tavaszán a folyamnak a főváros fölött, mellett és alatt folyó szakaszait vizsgálat alá. Kutatásaimnak ezen főczélja mellett másodsorban azon rendkívül érdekes és fontos tünemény magyarázatához is kivántam néhány kisérleti adatot szolgáltatni, a melyet fönnebb a folyók tisztulási képességének neve alatt ismertettem.

A kitűzött föladat megfejtésénél sok nehézségre volt kilátás.

Ezek között első helyen állott az, hogy a Dunának nem csak sok pontjára, hanem egyúttal lefolyásának aránylag hosszú szakaszára kellett vizsgálataimat kiterjesztenem. De ezenkívül a fővároshoz érkező dunavizet folyása felsőbb szakaszában is tanácsos volt megismerni, ha a Budapest alatti folyamrészlet vizének változásait kellő helyességgel magyarázni akartam. Az eredmény egyöntetűsége és hibák elkerülése végett szükséges volt arra is ügyelni, hogy a főváros alá került Duna-szakasz vizét a viszonyoknak megfelelőleg, vagyis olyképpen vizsgáljam, hogy a belőle vett próbákban a fönn már megvizsgált víz változásait tanulmányozhassam. Erre az volt szükséges, hogy a Duna árjával úszva vegyem a kijelölt helyeken a vizsgálatra szükséges vízpróbákat.

Kutatásaimat az előzetes kisérletek elvégzése után mindezeknél fogva a Budapest fölött 72 kilométer távolságra fekvő Esztergom város fölött, mellett és alatt elterülő Duna-szakaszon kezdtem meg, összesen véve négy — és pedig a város fölött két, a város mellett egy, s az alatt szintén egy — helyen vizsgált, mintegy 4·7 kilométer hosszú folyamszakaszon. Az itt végzett tisztán bakteriologiai vizsgálatokkal nem csak a fővárostól távol, fölfelé eső Duna-részlet minőségéről akartam meggyőződést szerezni, hanem azon körülménynél fogva, hogy a nevezett 18,000 lakósú város közvetlenül a Dunának egy körülbelül 40—60 méter széles és 3 kilométer hosszú mellékága (Kis-Duna) mellett épült, meggyőződést ohajtottam szerezni azon viszonyokról is, a melyek az anyafolyamnál sokszorta kisebb és a szennyezésnek rendkívül kitett folyamrészletben uralkodnak, fölhasználhatni vélvén ebbeli tapasztalataimat a főváros mellett később végzett nagyobb szabású kisérleteim eredményének magyarázásánál. Az Esztergom mellett elhúzódó Duna-ág sekély és lassú folyású vizébe ugyanis nemcsak a vízöblítés nélkül szükölködő csatornák, hanem a vágóhíd és egy nagyobb szabásu börgyár szennye is belefolyik; partjai valósággal bűzös szemétdombok, vize nyáron és alacsony vízállásnál szemmel láthatólag szennyes, olyannyira, hogy 1895-ben miniszteri rendelettel lett betiltva ujabb csatornáknak belevezetése.

A vizsgálat legfontosabb és bizonyára legérdekesebb része azonban a Dunának közvetlen Budapest fölött, mellett és alatt elhömpölygő, mintegy 40 kilométer hosszú szakaszára esett. Itt az

első vizsgálati vonalul a főváros fölött az *óbudai hajógyári sziget* felső harmadának irányában fekvő jobb és balparti, valamint Duna-középi folyamrészlet szolgált. *A második vizsgálati* vonal ettől 10 kilométernyire, *közvetlenül az összekötő vasuti híd alatt,* tehát közvetlenül a város alatt szelte a folyamot. *A harmadik vonal* a másodiktól 5·2 kilométernyire lefelé, *Budafok község felső vége* irányában haladt át a Dunán. *A negyediket* ettől 6·8 kilométernyire lefelé, *Tétény község fölött* vettem föl. Az ötödik vizsgálati vonalul azon irányt vettem, mely *Tököl községnél* az előbbitől 9 kilométernyire lefelé szeli át a folyamot. Végül a *hatodik* vizsgálati vonal az ötödiktől 8·8 kilométernyire lefelé és *Ercsi község* felső határánál vágta át a Dunát.

*

A vízpróbákat *chemiai és bakteriologiai* vizsgálatnak vetettem alá. A próbavételt mindenkor csónakról ejtettem meg, melyet a kivánt helyen horgonynyal egy helyben tartottam. A vizsgálatot minden egyes alkalommal a kijelölt Duna-szakasz legfelső pontján, és pedig a jobb parton reggeli 6 órakor kezdettem meg; innen haladtam a középre, majd az átellenes bal partra. A chemiai vizsgálatra szükséges 2 liternyi vízpróba vétele a partokon a bakteriologiaiakkal együtt a száraz földtől 10 méternyire befelé történt, és jég közé való elhelyezése után az alább ismertetendő módon a bakteriologiai vizsgálathoz fogtam. Most a víz sebességének megközelítő meghatározása következett, melyet egy háromszögletű, s alapjával lefelé álló deszkadarabbal ejtettem meg, melyre 40 méter hosszú, vékony zsinór volt kötve.

Ezután a csónakot fölszabadítottam és azt a Duna árjának engedtem át, az evezőket csak az esetben hozatván működésbe, ha éppen valamely szemben jövő hajó elől való kitérés azt szükségessé tette. A vízvétel második és a többi helyén a fönnebb elmondottakhoz hasonlóan jártam el úgy, hogy a sebesség-meghatározásoknál talált átlag — vagyis 1 méter 1 mp. alatt — értelmében a második állomásra (beleszámítva a vizsgálatra szükséges időt is) reggeli 9, a harmadikra 11, a negyedikre d. u. $12^1/_2$, az ötödikre $2^1/_2$, a hatodik, vagyis az utolsóra pedig délután $4^1/_2$ órakor érkez-

tem, a honnan gőzhajóval, folyton jég között tartott málhámmal együtt esti 9 órára Budapestre jutottam vissza.

Másnap reggel azonnal a vízpróbák quantitativ chemiai vizsgálatába fogtam. Az itt használt módszerekről, azok általánosan használatban lévén, csak annyit említek meg, hogy a chlort a Mohr-féle titrálással, az ammonákat Frankland szerint, a szerves anyagokat ($KMnO_4 \times 5$) Kubel-Tiemann nyomán, a salétromossavat colorimetriailag Trommsdorff szerint, a salétromsavat indigóval való titrálással Trommsdorff módszerével, a szilárd anyagokat és az üledéket súlyanalysissel határoztam meg. Megjegyzendőnek tartom azonban azt, hogy a chlor és salétromsav meghatározását a pontosság végett a negyed részére vízfürdő fölött bepárolt vízpróbában végeztem, valamint azt is, hogy a szerves anyagok meghatározását egyrészt a víz szűrése után, másrészt pedig a szüretlen és felrázott vízben is megejtettem.

Részletesebben kell azonban leírnom azon módszert, melyet a bakteriologiai vizsgálatnál követtem. Említettem fönnebb, mily különös súlyt fektettem arra, hogy a víz árjával haladva a legutolsó vízvétel helyén is lehetőleg azon vizet vizsgáljam, melyet a legelsőnél elemeztem. E czél elérhetése nemcsak azt hozta magával, hogy a vizsgálathoz szükséges összes eszközöket és anyagokat jég között vigyem magammal, hanem azt is, hogy vizsgálataimban lehetőleg egyszerű, könnyen kezelhető, de azért teljesen megbizható készülékeket használják. Annyival inkább szükség volt erre, mert — mint az alábbiakból kitünik — nemcsak a Duna fölszines rétegeinek bakterium tartalmát akartam meghatározni, hanem a folyók tisztulása egyik hathatós tényezőjének, az üllepedésnek tanulmányozása czéljából az 1 méternyire fekvő mélyebb rétegekből is akartam próbákat venni bakteriologiai vizsgálat czéljaira. Az előzetes próbák azt bizonyították, hogy legalkalmasabb lesz a felületes vízrétegből való próbavételre 1·2 cm. átmérőjű és 30—40 cm. hosszú, az 1 méter mélyen fekvők számára pedig ugyanilyen vastag, de 150—160 cm. hosszú, egyik végén asbesttel lazán bedugott, a másikon pedig finomra kihuzott és beforrasztott, és előzetesen sterilisált üvegcsöveket vinni magammal. Ezeket azután a beforrasztott végük óvatos letörése és a gelatina fölolvasztására is használt, borszeszszel fűtött forrasztó lámpa lángján való át-

huzása után pipették gyanánt használtam. A felületes vízrétegből történt próbavételről ezek után nincsen mit mondanom; az 1 m. mélységből fölhozandóknál azonban már körülményesebben kellett eljárnom. A hosszú üvegcsövet, finomra kihuzott végének letörése és lángon való áthuzása, valamint asbesttel bedugott szabad végének befogása után erős lökéssel egy pillanat alatt taszítottam le a vízbe azon jelig, mely a csövön az 1 méter mélységet mutatta. A szabad végről ujjamat most eltávolítva, a vizet saját nyomásával a csőbe tódulni engedtem. Most a cső szabad végébe addig fujtam levegőt, míg az a benne levő vizet teljesen kiszorította, a minek megtörténtét az üvegcső mellett fölszálló légbuborékok jelezték. A csőbe most ujból betódulni engedett víznek ismételt kiszorítása után a harmadszor föltóduló vizet vettem csak vizsgálat alá; ezen eljárásommal arra törekedvén, hogy a csőnek, habár csak egy pillanatig tartó letolása alatt az abba esetleg beletódult fölszines vizet lehetőleg kiküszöböljem. A harmadízben megtelt üvegcsövet — fölső nyílását ujból befogva, — most ismét egy pillanat alatt kiemeltem a vízből, s külső felületét egy nagyobb fajta Petri-féle csészében magammal vitt és előzetesen sterilisált szürőpapir lemezzel, melyet kihevített csipővel fogtam meg, alsó nyilásától kezdve fölfelé végigtörültem, hogy a külső részén tapadt víz rajta végig ne folyhasson. Most az előre kikészített steril és *üres* Petri-féle csészékbe, a födél óvatos félrehuzása után, az üvegcső közepéből jövő vízből 3, 5, 8 és 10 cseppet cseppentettem. Erre a szokásos cautelák betartásával steril tenyésztő gelatinát öntöttem beléjük, melyet a vízzel az edénynek többszörös és óvatos himbálása által alaposan elkevertem. A csészéket most az intézetnek a bakteriologiai vízvizsgálatokhoz használt szállítható jéghütőjébe * helyeztem el, a melyből azokat a gelatina megmeredése után kivéve, erős csomagoló papirba kötöttem be, majd a csónakon árnyékban tartott ládában helyeztem el. Míg a hütőben a gelatina megalvadott, elég idő volt arra, hogy a vízvételre használt üvegcsöveket calibrálhassam, vagyis a magammal vitt büretta segélyé-

* A jéghűtő két egymásba tolt, 45 cm. hosszú és 20, illetve 12 cm. átmérőjű bádoghengerből áll, melyek közül a belsőbe jönnek a csészék; a kettő közötti tért pedig jéggel töltjük meg.

vel meghatározhassam azt, hogy az üvegcsőből kijövő vízcseppek közül hány tesz ki 1 cm^3-t.

A lemezeken fejlődött tenyészeteket 4×24 óra mulva számláltam össze, külön jegyezvén föl a gelatinát folyósító és a gelatinát nem folyósító tenyészeteket.

Ezen eljárás használhatóságáról nemcsak az előzetes próbák, hanem az egész vizsgálat alatt is sokszorosan alkalmam volt meggyőződni, mert a mellett, hogy 4 csészében összesen véve aránylag nagy mennyiségű — $^1/_2$ cm^3-nél több — vizet dolgoztam föl tenyésztés czéljára, a mi az 1 cm^3 vízben létező bakteriumok számának a pontosságot igen megközelítő meghatározására igen előnyös volt: ilyenformán elértem még azt is, hogy lemezeim egyetlen esetben sem folytak el, s nem fordult elő az sem, hogy a rajtuk fejlődött tenyészeteket azok túlságos sokasága miatt össze ne számíthattam volna. Úgy az előző kisérletek, mint magának a vizsgálatnak tartama alatt kiderült végül az is, hogy a nagyobb mennyiségű vízből készített lemeztenyészeteken fejlődött coloniák száma igen jól összevágott azzal, a mit a kevesebb vízből készítetteken fejlődöttek számának a hányadossal való megszorzásával nyertem.

Megjegyzem végül még azt is, hogy vizsgálataimra oly napokat választottam, a melyek előtt huzamosabb ideig nem volt sem Budapesten, sem a Dunának a főváros fölött nagyobb messzeségben elterülő szakaszain esőzés.

III. A Duna vize chemiai vizsgálatának eredményei.

A chemiai vizsgálat eredményeit a mellékelt 1., 2., 3., 4. és 5. számú táblázatok mutatják. Ezen táblázatok adatainak áttekintésénél sok érdekes és fontos körülmény hívja föl figyelmünket.

Kitünik azokból első sorban a *suspendált* alkotórészek mennyiségének úgy helyi, mint időbeli változatossága. Eltekintve az ó-budai hajógyári szigetnél a jobb parton *minimumban* kapott 76 mg. és az ó-budai hajógyári szigetnél a bal parton *maximumban* mutatkozott 377 mg. mennyiségtől, mindjárt föltünik az, hogy az előbbi a folyam jobb, az utóbbi pedig annak bal partja mentén vett vízpróbában találtatott. Ha már most az átlagos érté-

ket keressük, akkor a következő adatokat nyerjük: az egész vizsgált Duna-szakasz jobbparti részén merített vízpróbákban a suspendált anyagok átlagos mennyisége literenkint 138 mg.-ot, a középen merítettekben 131 mg.-ot, a bal parton merítettekben végül 157 mg.-ot tett ki.

Ha a víz *összes szerves anyagait* figyeljük meg, úgy azt találjuk, hogy itt a *minimumot* (26·2 mg.) ugyancsak Budapest fölött, az ó-budai hajógyári szigetnél a jobb parton vett próba mutatja, s hogy *a maximum* (105·24 mg.) Budafoknál a bal parton vett vízpróbában constatálható. Az *átlagos* számítás szerint a suspendált anyagokkal megegyezőleg legkevesebb szerves anyag van a szűretlen Dunavízben a vizsgált folyamszakasz közepén, legtöbb pedig a bal parton tovahaladó vízben.

A Duna vize *oldott szilárd anyagaiból* (szűrt vízben) szintén az ó-budai hajógyári szigetnél a jobb parton vett próba mutatta a *minimumot* (100 mg.); *a maximumot* (252 mg.) pedig az összekötő hídnál a bal parton vett vízpróbában találtam. Az *átlagos számítás* értelmében a vizsgált Duna-szakasz jobbparti részében volt a legkevesebb (167·3 mg.) szilárd anyag, a maximum (183·4 mg.) pedig a bal parton mutatkozott.

A Duna vize *oldott szerves anyagai* tekintetében (szűrt vízben) *a legalacsonyabb értéket* (21·20 mg.) a fővárostól legtávolabb lefelé eső vizsgálati vonal jobbparti végén (Ercsinél) találjuk (a mely még a főváros fölé eső vizsgálati vonal jobbparti végén, az ó-budai hajógyári szigetnél talált (21·904 mg.) értéknél is kisebb), *a maximum* (54·75 mg.) pedig a budapesti csatornák beömlése alatt levő második vizsgálati vonal (Budafoknál) jobbparti végénél vett vízpróbára esett. Az *átlagot* mutató táblázat adatai szerint az egész Duna-szakasznak középvonalában volt a legkevesebb szerves anyag (32·0 mg.) a legtöbb pedig a balpart mentén elfolyó vízben (37·303 mg.)

Chlorból a *minimumot* (3·0 mg.) szintén az ó-budai hajógyári szigetnél találtam a jobb parton vett vízpróbában, a *maximum* (8·0 mg.) pedig az összekötő vasuti hidnál a bal parton merített vízpróbában volt konstatálható. *Átlagban* legkevesebb chlor volt (4·14 mg.) a Duna közepén, legtöbb pedig (4·8 mg.) annak bal partja mentén haladó vízben.

A salétromsav minimumát (0·109 mg.) az ó-budai hajógyári szigetnél a Duna közepének vize, a *maximumot* pedig (0·491 mg.) az összekötő vasuti hídnál a bal parton vett vízpróba mutatta. *Átlagban* legkevesebb volt a salétromsav (0·277 mg.) a jobb parton, legtöbb pedig* (0·315 mg.) a bal parton folyó vízben.

Salétromossavat a legalsó vizsgálati vonal (Ercsi) három pontján *egyetlen alkalommal sem találtam* a Duna vizében, a *maximumot* (1·5 mg.) pedig az összekötő hídnál a bal parton merített vízpróba adta. *Átlagban* legkevesebb (0·01 mg.) salétromossav a Duna jobb partja, legtöbb (0·183 mg.) pedig annak bal partja mellett elfolyó vízben volt.

Ammoniak szintén sokszor és sok helyen nem volt a Duna vizében kimutatható, azonban *legtöbbet* (0·3 mg.) és legtöbbször az összekötő hídnál a bal part mellett merített vízben találtam. Az *átlagos* számítás végül itt azt mutatja, hogy a Duna vizsgált szakaszának jobbparti részében van a legkevesebb (0·013 mg.), s a balpartiban a legtöbb (0·26 mg.) ammoniak.

A 4. számú táblázat adatainak összehasonlításából kiviláglik, hogy a csatornák beömlése alatt 12 kilométernyire — Tétynél — a Duna vize chemiai tekintetben visszanyerte azon tisztaságot, melylyel akkor birt, mielőtt a főváros csatornái beléömlöttek volna.

IV. A Duna vize bakteriologiai vizsgálatának eredményei.

Bakteriologiai vizsgálatokat, miként a mellékelt 6., 7., 8., 9., 10. és 11. számu táblázatokból kitünik, a Dunának Esztergomtól Ercsi-ig elterülő részén végeztem.

A Duna vizének bakteriologiai vizsgálatából első sorban azon érdekes körülmény vonja magára figyelmünket, hogy a hatalmas folyam csiratartalma közvetlenül Budapest fölött majdnem épen olyan, mint attól 67·5 kilométerre fölfelé, Esztergom fölött volt. Az anyafolyamnál jóval magasabb számot mutat az Esztergom fölött abból kiágazó és megközelítőleg 3 kilométer hosszú Duna-ág (Kis-Duna) már a város fölött is, annál inkább pedig a

* Lásd a 2. és 5. táblához adott jegyzetet.

város mellett az anyafolyamba való beömlésénél, a hol bakteriumtartalma a Nagy-Dunáénál a szélen 5-ször, a középen pedig majdnem 10-szer nagyobb. A Nagy-Duna közepén folyó víz bakteriumtartalmában alig van valami különbség az Esztergom fölötti és alatti szakaszban; annál tetemesebb az a folyam szélén, a hol a város fölött nyert számnak körülbelül 7-szerese mutatkozik, daczára annak, hogy a víz az utolsó csatorna beömlése alatt mintegy $^1/_2$ kilométernyire lett vizsgálva. Ezen körülmény élénken ellene mond azon valószinűnek látszó gondolatnak, hogy még az olyan óriási vízmennyiséget tovahömpölygető folyam is — mint a milyen a Duna — rövid idő alatt képes volna a beléje jutott szennyet oly nagy mértékben fölhigítani, hogy az szinte észrevehetetlenné váljék.

Ezen tény, melyet különben több más folyónál is tapasztaltak, még kifejezettebben tűnik szemünkbe akkor, ha a Budapestnél végzett bakteriologiai vizsgálatok eredményét mutató táblázatokat áttekintjük. Az egész vizsgálat alatt *minimumként* 58 bakteriumot találtam 1 cm^3 dunavízben a fölszinen, még pedig Budapest fölött, az ó-budai hajógyári szigetnél a Duna közepén; 1 méter mélységben pedig ugyanezen vizsgálati vonalon, de a jobb parton kaptam 68 minimális értéket. A *maximum* a víz fölszinén közvetlen Budapest alatt, az összekötő hídnál a folyam bal partján jelentkezik 15,277 számmal; ugyanitt mutatta az 1 méter mélységben haladó víz is a maximális bakterium-tartalmat 25,060 csirával.

Rendkívül érdekes a bakteriumok szaporodásának és fogyásának lefolyása is. *A szaporodás* átlag 3—4-szeresét teszi ki azon számnak, melyet a főváros fölött találtam. Hely tekintetében legelőször és legnagyobb fokban észlelhető az a bal parton (az összekötő vasuti hídnál), és pedig úgy a fölszínről, mint az 1 m. mélyből vett vízben. Ez után a jobb part következik; legkésőbb pedig a Duna közepén folyó víz mutatja a bakteriumok szaporodását, a mennyiben az előbbi az összekötő vasuti hídnál tetemesen több csirát mutat ugyan föl, mint a Budapest fölötti szakasz, de a maximális számot mégis csak 5·2 kilométerrel alább, Budafoknál tárja elénk. Az utóbbiban pedig az összekötő hídnál még csak alig szaporodtak valamit a csirák, úgy hogy a maximális számot szintén

csak a Budafoknál vett vízpróba mutatta. A bakteriumok számbeli viszonyainak ezen magatartása azonos úgy a fölszinről, mint az 1 m. mélységből vett próbáknál.

A csirák fogyása azonban csakhamar megkezdődik, úgy, hogy a budapesti csatornák alatt 12 kilométernyire — Téténynél — úgy a fölszinről, mint a mélyből vett vízpróbákban, valamint a partok mentén és a Duna közepén is akkora, sőt még kisebb bakteriumszámot kaptam, mint a mekkorát a Budapest fölött merített vízpróbákban találtam. *Ez más szóval annyit tesz, hogy a Duna a csatornák beömlése alatt 12 kilométernyire éri el bakteriumtartalma tekintetében azon tisztaságot, a melylyel Budapest fölött birt.*

Azon csekély emelkedés, mely az alább fekvő 5. és 6. vizsgálati vonalnál (Tököl, Ercsi) mutatkozik, valószínüleg abban leli okát, mert a folyam Tétény alatt a szabályozás által majdnem $^2/_3$-ára szükül össze, a mi az áramlás gyorsulásával járván, az iszap fölkavarodását, s ezzel a csirák számának szaporodását hozza létre.

Azon nagy ugrások, melyeket a csirák számában többször tapasztalunk, nem ejthetnek csodálatba, ha meggondoljuk, hogy mily rendkívül erősen képes a bakteriumok számát felszöktetni a vizsgált vízmennyiségbe esetleg belejutott és a mikroorganismusok sok ezerjének táplálékot adó egyetlen, apró, szerves testecske is.

V. A Duna vizének chemiai és bakteriologiai tekintetben való összehasonlítása Bécs és Budapest fölött, mellett és alatt.

Dolgozatom bevezető soraiban megemlékeztem már azon vizsgálatok eredményéről, melyeket Heider az 1891—93. évben az osztrák közegészségi tanács megbizásából azon befolyás pontos kiderítése czéljából végzett, melyet Bécsnek csatornái a mellette elfolyó Duna-ág és Duna folyamra hygienikus tekintetben gyakorolnak. Tudományos adatok ilyenformán rendelkezésemre állván, érdekesnek és tanulságosnak találtam a Heider munkájának adataiból kiszámított átlagok alapján összehasonlítást tenni a Duna vizében egyrészt Bécs, másrészt Budapest csatornái által bekövet-

kezett változásokat, nevezetesen a szennyezés quantitativ viszonyait illetőleg.

*

A XII. táblából, melybe Heider munkája után a Duna vizének 1878-ban Bécs fölött Wolfbauer által végzett vizsgálatait is fölvettem, kitünik első sorban az, hogy a két vizsgálat között eltelt 13 évi időközben a Duna vize Bécs fölött változást szenvedett, a mely különösen a szilárd és még inkább a szerves anyagok tekintetében tetemesnek is mondható, és pedig a víz tisztaságának rovására.

Ha a Bécs fölött 1891—93-ban nyert átlagos adatokat az általam Budapest fölött találtakkal összehasonlítjuk, úgy azt kell mondanunk, hogy a folyam vize jóval tisztább a mi fővárosunk, mint Bécs fölött.

Még fokozottabban áll ez a Dunának a két főváros alatt elfolyó szakaszaira, melyekre a XIII. tábla nyujt érdekes és tanulságos adatokat. Ezen adatokból nem csak az tünik ki, hogy a Duna vize Budapest összes csatornáinak beömlése után sokkal tisztább, mint a Bécs melletti Duna-ágé, hanem — a mi sokszorta fontosabb — az is, hogy a folyam vize sokkal rövidebb út hátrahagyásával, tehát sokkal rövidebb idő alatt is tisztul meg a mi fővárosunkból beléjutott szennytől, mint a Bécs csatornái által szenvedett szennyeződéstől.

A viszonyok ilyetén állását még inkább bizonyítják a XIV. tábla adatai, melyeknek Bécsre vonatkozó számaiból Heider egészen jogosan jutott azon meggyőződésre, hogy közegészségügyi tekintetből lehetetlen megengedni azt, hogy Bécs csatornái továbbra is a kevés vizű és lassú folyású Duna-ágba vezettessenek. Nem csodálkozhatunk azon sem, hogy a másfél milliós osztrák főváros szennyét az anyafolyam még Hainburgnál a csatornák beömlése alatt 23·3 kilométernyire sem birta magából kiküszöbölni és hogy Budapestnél a víz megtisztulása a csatornák alatt 12 kilométernyire már teljes, mert hiszen Bécsnél a jóval kevesebb vizű Duna majdnem háromszor annyi szennyet vesz föl, mint Budapestnél, melynek falai között legalább is 10-szer annyi víz folyik el, mint az osztrák főváros alatt.

A Duna szennyeződése és megtisztulásának Budapest mellett és alatt Bécscsel szemben kimutatott relativ kedvező viszonyainak hangsulyozásával azonban egyátalán nem szándékozom azt mondani, hogy fővárosunk csatornatartalmának az 1894. év előtt a folyamba vezetése czélszerű, ártalmatlan és a hygiene követelményeinek megfelelő volt. Sőt ellenkezőleg éppen a természet adta kedvező viszonyok daczára az I—XI. táblák adataiból azon meggyőződésre kell jutnunk, hogy a főváros csatornái folytonos veszedelemben tartották a jelzett 12 kilométer távolságnál közelebb eső azon dunamenti községek lakosait, a kik használati, s még inkább ivóvíz szükségletüket megszokásból avagy jobbnak hiján a Dunából födözték. Hogy ez különösen a fővárosban uralkodott cholera és typhus-járványok alkalmával mily veszedelmet rejtett magában, azt bővebben részletezni fölöslegesnek tartom. És ha végül figyelembe veszszük a táblázatokból kiderülő azon tényt, hogy a *víznek úgy chemiai, mint bakteriologiai szennyeződése a Duna bal partján már Budapest fölött is tetemesen nagyobb és jóval később tünik el, mint a középen és a jobb part mentén elhúzódó vízből,* akkor csakis azon szerencsés körülménynek kell betudnunk a főváros csatornái által a járványok alkalmával a bal parton lefelé eső községekre háramlott ártalom relativ csekélységét, hogy ezek a folyam partjától több kilométernyire befelé épülvék, s így a folyam vizét használat és ivás czéljaira csak kevéssé vagy egyátalán nem is alkalmazzák.

Eltekintve tehát azon nagy haszontól, mely a fővárosra az új csatornázás által a szennyanyagoknak az eddiginél gyorsabb és biztosabb eltávolításában áll, nem kevésbbé fontosnak kell tekintenünk a fővárostól lefelé eső községek lakosainak egészségére is az új csatornázás végpontjának azon berendezését, mely a szennyanyagokat a Duna fenekén, a folyam leggyorsabb árjába géperővel nyomja be, ilyenformán gondoskodván annak gyors és biztos elkeveredéséről és fölhigításáról.

A haszon absolut értékének megitélése természetesen csak a közöltekhez hasonló ujabb vizsgálatok segélyével a csatornázás teljes kiépítése után lesz lehetséges.

A Duna vizének a főváros fölött a *bal parton,* úgy chemiai mint bakteriologiai tekintetben tapasztalt nagyobb fokú szennye-

zettsége azonban még egy igen fontos és sajnálatos körülményre irányítja figyelmünket, arra t. i., hogy éppen a bal part talajában, vagyis a szennyes Dunavízhez oly közel vannak elhelyezve azon vízművek, melyek Budapest nagy részét természetesen és mesterségesen szűrt vízzel ellátják.

VI. Az üllepedés és a napfény hatása a Duna tisztulásánál.

A folyóvizek tisztulásának tényezői között — miként fönnebb említve volt — különösen két tünemény ragadta meg a vizsgálók figyelmét, úgy mint az üllepedés és a napfény bakteriumölő hatása.

A vízben úszkáló élő és élettelen anyagok leüllepedésének a folyók megtisztulására gyakorolt hatását a rendelkezésemre álló irodalom szerint Frank G. hangsulyozta legelőször a Spree vizének 1886—87-ben megejtett vizsgálatánál. Utána Krüger * foglalkozott az üllepedés lefolyásának és az azt elősegítő tényezők hatásának vizsgálatával. Fölemlíti Gärtner-nek azon nézetét, mely szerint a bakteriumok lesülyedésének egyrészt az önálló mozgással nem biró mikroorganismusoknak a víznél nagyobb fajsulya, másrészt pedig a mozgással bíróknak azon szintén lefelé szálló, úszó anyagok után való törekvése az oka, melyek eme mikroorganismusoknak táplálékul szolgálhatnak, végül pedig az elhalt bakteriumok a vízben már jelen levő avagy ott képződött sülyedő anyagok (csapadék) által is a fenék felé sodortatnak. Krüger indifferens anyagot poralakban kevert ismert mennyiségű bakteriumot tartalmazó vízpróbákhoz és azt tapasztalta, hogy a lefelé törekvő úszkáló anyagok tényleg eltávolítják a víz mikroorganismusainak egy részét az által, hogy sülyedésük közben magukkal ránt ják őket. Krüger után Fol és Dunant, majd Lortet foglalkoztak e kérdéssel; az előbbiek kimutatták, hogy egy 8 napig csendesen álló víz felszinéről a bakteriumok 94%-a eltünik a fenékre való sülyedés folytán. Lortet a Genfi-tó iszapját vizsgálva, reájött arra, hogy abban rendkívül sok és virulens bakterium van, vagyis hogy

* Die physik. Einwirkung von Sinkstoffen auf die in Wasser befindl. Mikroorganismen (Zeitschr. f. Hygiene 1889. H. 1.)

a bakteriumok ily nagy vízmedenczékben is a fenékre szállanak és ott hosszú ideig életben is maradnak.

KARLINSKY * munkájában, mely a tenger színe fölött 403 m. magasan fekvő és a hóvíz által táplált Borke-tó vizének vizsgálatáról szól, érdekes adatok vannak a víz különböző mélységében talált csirák számáról; így a felületen 1 cm^3 vízben 4000, 5 méter mélységben 1000, 10 méternél 600, 12—16 m-nél 2—300 bakteriumot talált, a fenéken pedig, ha az iszapot fölkavarta, 6000 csirát kapott 1 cm^3 vízből.

RUBNER ** a marburgi közegészségtani intézet pinczéjében levő kútban vizsgálta az üllepedés hatását a bakteriumok számára, s a fönnebb említett vizsgálókkal azonos eredményre jutott. A sülyedést a bakteriumok fajsulyával hozza különösen összefüggésbe. Kimutatta ugyanis, hogy a gelatinát gyorsan folyósító bacillusok fajsulya 1,0651, a gázképzőké 1,0465, a burgonyán erősen tenyészőké 1,038, a prodigiosusé pedig 1,054.

A sülyedés hatását a folyóvíz bakteriumtartalmára tudomásom szerint csak DRAER *** vizsgálta egyszer a Pregel folyó vizében 1894-ben.

Az eredmény a következő volt:

Mélység	Csirák száma 1 cm^3 vízben		
	a bal parton	a középen	a jobb parton
Fölszin	177,600	55,200	124,800
1 m.	85,600	80,200	105,600
2 m.	90,200	62,000	108,400
3 m.	—	47,200	—

*

A folyók bakteriumtartalmának kevesbedésében vagyis tisztulásában BUCHNER * szerint nagy szerep jut a napfény bakterium-

* Zur Kentniss der Vertheilung der Wasserbakterien in grossen Wasserbecken.

** Beitrag zur Lehre von den Wasserbakterien.

*** Das Pregelwasser . . . etc. bei Königsberg . . .

ölő hatásának is. Bakterium-ölő hatást már azelőtt is többen tulajdonítottak ugyan a napfénynek (Arloing, Downes, Blunt, Pansini), de meggyőzően Buchner mutatta ki azt először. Ismeretesek azon, a mai napig sok buvár által megismételt és megerősített kisérletei, melyeket egyrészt ismert bakteriumtartalmu és napsugaraknak kitett vízpróbákkal, másrészt olyan lemeztenyészetekkel végzett, melyeknél a Petri-féle csésze fenekének egy részét fekete papirlappal elfödte.

Úgy az első, mint a második kisérlet-sorozatnál rendkívül megkapó volt az eredmény, mert a napsugarak fényének kitett és cm^3-enként 100,000 bakt. coli communet tartalmazó vízben már 1 óra mulva elpusztultak az összes csirák, a lemeztenyészeteken pedig csak a fekete papirral elfödött részeken fejlődtek coloniák, míg a napfénynek kitett részek sterilek maradtak. Buchner ezen kisérleteket többféle változtatással, végül pedig nagyban (a Starnbergi tavon) is megismételte, úgy hogy kimondhatta, miszerint a napfénynek elegendőleg átlátszó víznél még 2 méter mélységben is erélyes bakterium-ölő képessége van.

*

Az *üllepedés és a napfény* hatásának megismerését a Duna vizére vizsgálataim alkalmával magam is bővebben tanulmányoztam.

Az előbbinek kiderítésére szolgált az, hogy minden egyes bakteriologiai vizsgálatnál nemcsak a fölszinről, hanem 1 méter mélységből is vettem ugyanazon helyen és időben próbákat. Az eredményt a 6., 7., 8., 9., 10., 11., 14. és 15. tábla mutatja, melyeknek megfelelő rovataiból egyszerűen le lehet olvasni a számbeli viszonyokat. Ilyenformán csak annak kijelentésére kell szorítkoznom, hogy azon körülmény, miszerint az 1 m. mélységből vett vízpróbákban állandóan sokkal (majdnem 2-szer) több bakteriumot kaptam, mint a fölszinről vettekben, *a mellett látszik szólani, hogy a mikroorganismusoknak a víznél nagyobb fajsu-*

* Über den Einfluss des Lichtes auf Bakterien, und über die Selbstreinigung der Flüsse. Archiv. f. Hygiene XVII. 177.

*lyuk folytán való lefelé törekvése a Duna tisztulásában előmozdító tényezőként szerepel.**

*

A napfény bakterium-ölő, illetve a Duna tisztulására gyakorolt hatását két alkalommal vizsgáltam. Az elsőt Esztergom fölött a Nagy-Duna szélén, a parttól 10 méternyire befelé, 3 egymás után következő verőfényes napon reggeli 6 és esteli 7 órakor vett vízpróbákkal vizsgáltam. Ha a nap fénye bakterium-ölő hatást fejtett volna ki a Dunában levő mikroorganismusokra, akkor az este és legalább is a fölszinről vett vízpróbákban jóval kevesebb csirát kellett volna találnom, mint a reggel vizsgáltakban. Az eredmény, mint a 16. tábla mutatja, nem felelt meg a várakozásnak, mert a napfénynek éppen legjobban kitett fölszines vízpróbákban este több bakteriumot találtam, mint reggel. A vizsgálat napjain uralkodó magas (+312, +315, +318 cm.) és folyton növekvő vízállás, továbbá a folytonos, bár gyönge szél által okozott hullámzásnak tulajdonitván a várttal homlokegyenest ellenkező eredményeket, ez irányú kisérleteimet egy évvel utóbb Budapesten megismételtem. Ez alkalommal különös gondot fordítottam oly vizsgálati hely és idő kikutatására, melynél a fönnebbi zavaró tényezők közül legalább a hullámzás által felvert iszaptól nem kellett tartanom, s a mely helyen ki lehessen zárni a folyó fölsőbb szakaszaiban esetleg végbement szennyeződés befolyását.

E czélra a Duna közepén álló Margit-sziget legfölső, durva kavicscsal födött csúcsát találtam a legalkalmasabbnak, a hol 1895 juliusában az előbbi évével majdnem azonos magasságú vízállásnál összesen 6 napon át reggel 6, és este 7 órakor vizsgáltam meg a Duna vizét. A kisérlet Buchner theoriáját megerősíti, mert miként a 17. tábla adataiból látható, este egy nap kivételével mindig kevesebb bakteriumot kaptam, mint reggel. Az esteli kevesbedés nem csak a fölszinen, hanem még 1 méter mélységben is meghaladja a reggel talált bakteriumok számának $^1/_3$-át, úgy hogy

---

* Természetes, hogy az üllepedésen kívül itt a napfény hatásának is szerepe van, csak úgy, mint alább az ülepedésnek is.

a napfénynek a Duna tisztulására gyakorolt erőteljes hatása igen valószínűnek tekinthető.

VII. Befejezés.

A Duna vizének Budapest fölött, mellett és alatt chemiai és bakteriologiai tekintetben tanusított magatartása megismerésére, valamint a napfény és az üllepedésnek a folyam tisztulásában játszott szerepe tanulmányozására végzett és a fönnebbiekben részletesen ismertetett vizsgálatokból a következő tanulságot meríthetjük:

1. A Duna a Budapest csatornáiból belé jutott anyagok által jelentékenyen beszennyeztetik, ámbár sem chemiai, sem bakteriologiai tekintetben nem oly nagy mértékben, mint az eddig vizsgált és nagyobb városok mellett elhaladó folyók, sőt sokkal kevésbbé annál is, a minek Bécsnél ugyancsak a csatornák miatt ki van téve. A szennyeződés különösen bakteriologiai vizsgálattal állapítható meg, és legerősebb a csatornák beömlése alatt fekvő területen, a folyam bal partja mentén. A szenny csak igen kevéssé jut el a part mellől a Duna közepe, vagy épen az ellenkező part felé.

2. A Duna a belé jutott szennyes anyagoktól gyorsan megtisztul, úgy hogy a csatornák beömlésétől 12 kilométernyire lefelé, Téténynél, a szennyezettebb bal oldalon is úgy chemiai, mint bakteriologiai tekintetben visszanyerte azon tisztaságot, melylyel Budapest fölött birt. Erre $3^1/_2$ órára volt szüksége.

3. A csatornatartalom folyamba való vezetésének eddig gyakorolt módja mellett az elkeveredés és föltisztulás a szennynek a partok mentén való haladása miatt lassú és nehézkes; éppen ezért nagy javulás várható attól, hogy az új csatornázásnál a csatornatartalom a folyam közepébe és leggyorsabban haladó részébe fog beáramolni, a hol az gyorsan elkeveredik és fölhigul.

4. A Duna tisztulásában fontos szerep jut a napfény bakterium-ölő képességének, valamint

5. az üllepedésnek is.

1. tábla.

A vizsgálat történt 1894. április 19.-én. A Duna vize hőfoka 14 °/C. Vizállás + 125 cm.

A vizpróba vételének helye	A szüretlen víz literében mg.		A szűrt víz literében mg.					
	Üledék	Szerves anyag ($KMn_4O_4 \times 5$)	Szilárd anyag	Szerves anyag ($KMn_4O_4 \times 5$)	Chlor	Salétromsav	Salétromos sav	Ammoniak
A jobb parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	160·5	67·76	196·0	29·127	5·0	0·166	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	177·0	62·208	226·0	33·188	5·6	0·182	0·0	0·0
Budafoknál	180·0	84·888	204·0	54·75	4·66	0·256	0·1	0·2
A középen.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	173·0	47·88	202·0	36·28	4·60	0·109	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	269·0	68·16	220·0	51·58	5·8	0·170	0·0	0·0
Budafoknál	200·0	89·104	196·0	46·7	4·33	0·256	0·2	0·2
A bal parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	377·0	80·632	200·0	44·867	5·70	0·146	0·7	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	312·0	82·424	252·0	47·2	7·80	0·195	1·5	2·8
Budafoknál	170·0	105·24	198·0	44·58	4·33	0·358	0·28	0·2

2. tábla.

A vizsgálat történt 1894. május 28-án. A Duna vize hőfoka 16 °/C. Vizállás + 245 cm.

A vizpróba vételének helye	A szüretlen víz literében mg.		A szűrt víz literében mg.					
	Üledék	Szerves anyag ($KMn_4O_4 \times 5$)	Szilárd anyag	Szerves anyag ($KMn_4O_4 \times 5$)	Chlor	Salétromsav	Salétromos sav	Ammoniak
A jobb parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	150·0	52·96	146·5	41·73	5·0	0·266	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	86·0	58·0	209·7	49·93	5·0	0·246	0·05	0·0
Budafoknál	171·0	58·24	256·4	45·217	5·5	0·327	0·0	0·0
Téténynél	188·0	58·628	196·7	37·328	4·75	0·368	0·0	0·0
Tökölnél	186·0	42·128	150·0	38·43	4·5	0·368	0·0	0·0
Ercsinél	170·0	43·384	200·0	43·824	4·75	0·368	0·0	0·0
A középen.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	112·0	51·52	209·7	42·24	5·25	0·205	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	133·0	61·28	199·8	49·05	4·25	0·348	0·0	0·3
Budafoknál	100·0	54·40	203·1	39·967	5·0	0·368*	0·0	0·0
Téténynél	120·0	43·04	210·0	29·0	4·5	0·368	0·0	0·0
Tökölnél	148·0	41·648	185·0	25·41	4·5	0·368	0·0	0·0
Ercsinél	157·0	48·16	255·0	51·344	4·5	0·368	0·0	0·0
A bal parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	87·0	61·12	209·7	46·46	4·5	0·327	0·0	0·1
Az összekötő vasuti hidnál	102·0	59·60	233·1	41·712	8·0	0·491	0·1	0·3
Budafoknál	188·0	56·54	263·1	43·05	5·375	0·368	0·0	0·0
Téténynél	115·0	47·696	210·0	44·08	4·5	0·368	0·0	0·0
Tökölnél	160·0	53·12	200·0	43·56	4·875	0·368	0·0	0·0
Ercsinél	174·0	48·8	175·0	39·57	4·5	0·368	0·0	0·0

* Helyesbitett érték, a mennyiben a nyert 5·57 mg minden bizonynyal téves; a tévedés forrását azonban megtalálni utóbb már lehetetlen volt.

3. tábla.

A vizsgálat történt 1894. julius 19-én. A Duna vizének hőfoka 20 °/C. Vizállás + 193 cm.

A vizpróba vételének helye	A szüretlen víz literében mg.		A szűrt víz literében mg.					
	Üledék	Szerves anyag ($KMnO_4 \times 5$)	Szilárd anyag	Szerves anyag ($KMnO_4 \times 5$)	Chlor	Salétromsav	Salétromos sav	Ammoniak
A jobb parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	76·0	26·2	100·0	21·904	3·0	0·206	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	124·0	34·91	115·0	23·36	3·0	0·206	igen gyönge nyom.	0·0
Budafoknál	116·0	32·89	130·0	28·96	3·25	0·309	0·0	0·0
Téténynél	102·0	28·8	135·0	22·12	3·75	0·309	0·0	0·0
Tökölnél	92·0	26·4	120·0	21·36	3·5	0·309	0·0	0·0
Ercsinél	98·0	27·09	125·0	21·20	3·0	0·309	0·0	0·0
A középen.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	74·0	22·96	110·0	22·44	3·0	0·206	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	96·0	28·33	125·0	24·16	3·0	0·361	igen gyönge nyom.	0·0
Budafoknál	112·0	35·16	125·0	24·96	4·0	0·309	0·0	0·0
Téténynél	98·0	28·16	150·0	23·36	3·30	0·309	0·0	0·0
Tökölnél	94·0	28·49	200·0	23·44	3·0	0·309	0·0	0·0
Ercsinél	82·0	28·88	150·0	23·04	3·0	0·309	0·0	0·0
A bal parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	96·0	40·792	115·0	25·32	3·75	0·232	0·025	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	116·0	43·60	125·0	29·85	4·5	0·361	0·075	0·3
Budafoknál	158·0	33·97	138·0	30·24	3·5	0·309	0·025	0·15
Téténynél	121·0	34·64	160·0	26·30	3·0	0·309	0·025	0·0
Tökölnél	104·0	30·40	150·0	26·86	3·0	0·309	0·025	0·0
Ercsinél	91·0	30·608	125·0	25·84	3·0	0·309	0·0	0·0

4. tábla.

Az egyes helyeken nyert számokból vont átlagos értékek.

A vizpróba vételének helye	A szüretlen víz literében mg.		A szűrt víz literében mg.					
	Üledék	Szerves anyag ($KMn_4O_4 \times 5$)	Szilárd anyag	Szerves anyag ($KMn_4O_4 \times 5$)	Chlor	Salétromsav	Salétromos sav	Ammoniak
A jobb parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	130·0	48·97	137·0	30·91	4·3	0·199	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	129·0	51·70	183·0	35·49	4·5	0·211	0·016	0·0
Budafoknál	156·0	58·67	196·0	42·97	4·49	0·297	0·03	0·066
Téténynél	145·0	43·71	166·0	29·72	4·25	0·338	0·0	0·0
Tökölnél	139·0	34·16	135·0	29·89	4·4	0·338	0·0	0·0
Ercsinél	134·0	35·23	162·0	32·51	3·875	0·338	0·0	0·0
A középen.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	119·0	40·78	174·0	33·65	4·28	0·173	0·0	0·0
Az összekötő vasuti hidnál	166·0	52·59	181·0	41·59	4·35	0·293	0·0	0·1
Budafoknál	137·0	59·55	174·0	34·87	4·44	0·311*	0·066	0·066
Téténynél	109·0	35·78	180·0	26·20	3·9	0·338	0·0	0·0
Tökölnél	122·0	35·07	192·0	24·42	3·75	0·338	0·0	0·0
Ercsinél	119·0	38·52	202·0	24·19	3·75	0·338	0·0	0·0
A bal parton.								
Az óbudai hajógyári szigetnél	186·0	60·85	177·0	38·88	4·65	0·235	0·241	0·03
Az összekötő vasuti hidnál	177·0	61·87	203·0	39·58	6·8	0·349	0·558	0·13
Budafoknál	173·0	65·28	199·0	39·30	4·435	0·345	0·102	0·116
Téténynél	118·0	46·16	185.0	35·19	3·75	0·338	0·012	0·0
Tökölnél	132·0	41·76	170·0	35·21	3·937	0·338	0·012	0·0
Ercsinél	132·0	39·70	150·0	32·70	3·75	0·338	0·0	0·0

* A 2. tábla helyesbitett értéke után számitott átlag.

5. tábla.

A Duna vizének chemiai vizsgálataiból vont átlagos értékek.

	Alkotórészek 1 literben mg.	A jobb parton	A középen	A bal parton
Szűretlen vízben	Üledék	138·0	131·0	157·0
	Szerves anyag	46·872	45·145	53·938
Szűrt vízben	Szilárd anyag	167·0	182·8	183·4
	Szerves anyag	34·162	32·0	37·303
	Chlor	4·27	4·14	4·68
	Salétromsav	0·277	0·2908*	0·315
	Salétromos sav	0·01	0·013	0·183
	Ammoniak	0·013	0·033	0·26

* Lásd a 2. táblához adott megjegyzést.

6. tábla.

A vizsgálat történt 1894. márczius 22-én. A Duna vizének hőfoka + 4. Vízállás + 224 cm.

A vizpróba vételének helye	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben			A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-ben		
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
A jobb parton.						
Duna Esztergom fölött ...	570	94	496	2555	442	2113
Dunaág Esztergom fölött	1024	247	777	882	242	640
Dunaág Esztergom mellett*	2794	184	2610	9911	306	9605
Duna Esztergom alatt* ...	4412	245	4167	12431	1·319	11112
A középen.						
Duna Esztergom fölött ...	682	175	507	1638	206	1432
Dunaág Esztergom fölött	1025	154	871	1333	302	1031
Dunaág Esztergom mellett*	5615	291	5324	3811	135	3676
Duna Esztergom alatt* ...	779	172	607	763	150	613

* Hőmérsék az egész part hosszában előtörő hőforrások miatt a Dunaágban Esztergom mellett 12 °/C, — a Dunában pedig Esztergom alatt 13·7 °/C.

7. tábla.

A vizsgálat történt 1894. april 19.-én. A Duna vizének hőfoka 14°/C. Vizállás + 125 cm.

A vizpróba vételének helye	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben			A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-ben		
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
A jobb parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	59	4	55	68	8	60
Az összekötő vasuti hidnál	2371	147	2224	1808	144	1664
Budafoknál	2363	163	2200	3942	550	3392
A középen.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	58	3	55	192	11	181
Az összekötő vasuti hidnál	150	14	136	—	—	—
Budafoknál	6710	490	6220	10558	426	10132
A bal parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	4674	82	4592	8828	486	8342
Az összekötő vasuti hidnál	9164	109	9055	23611	604	23007
Budafoknál	6972	304	6668	3106	174	2932

8. tábla.

A vizsgálat történt 1894. május 28.-án. A Duna vizének hőfoka 16° C. Vizállás + 245 cm.

A vizpróba vételének helye	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben			A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-		
	Összesen	Gelatinát folyósítók	Gelatinát nem folyósítók	Összesen	Gelatinát folyósítók	Gelatinát nem folyósítók
A jobb parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	1208	151	1057	863	121	742
Az összekötő vasuti hidnál	215	8	207	544	33	521
Budafoknál	1856	235	1621	3084	377	2706
Téténynél	938	195	743	1728	240	1488
Tökölnél	719	61	658	1404	138	1266
Ercsinél	1053	87	966	2760	338	1431
A középen.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	726	33	693	731	68	663
Az összekötő vasuti hidnál	916	58	858	1565	108	1457
Budafoknál	1124	66	1058	1554	158	1396
Téténynél	751	26	725	1008	75	933
Tökölnél	2795	129	2666	2898	111	2784
Ercsinél	1984	98	1886	3567	175	3292
A bal parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	1811	205	1606	1797	222	1575
Az összekötő vasuti hidnál	15277	772	14505	9714	186	9528
Budafoknál	3744	560	3184	8494	287	8207
Téténynél	1643	160	1483	1997	245	1752
Tökölnél	3301	377	2924	8674	816	7858
Ercsinél	4008	282	3726	4535	172	4363

9. tábla.

A vizsgálat történt 1894. julius 19.-én. A Duna vizének hőfoka 20°/C. Vizállás + 193 cm.

A vizpróba vételének helye	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm³-ben			A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm³-ben		
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
A jobb parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	835	136	690	875	132	743
Az összekötő vasuti hidnál	2944	237	2707	1365	80	1285
Budafoknál	1619	224	1395	1413	184	1229
Téténynél	361	121	240	382	96	286
Tökölnél	533	108	425	680	131	549
Ercsinél	151	8	143	715	35	680
A középen.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	1092	103	989	3707	516	3191
Az összekötő vasuti hidnál	1173	112	1061	973	77	896
Budafoknál	2780	274	2506	3619	249	3370
Téténynél	391	118	273	620	72	548
Tökölnél	820	77	743	1683	121	1564
Ercsinél	840	15	825	1349	18	1331
A bal parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	2380	208	2172	2666	299	2367
Az összekötő vasuti hidnál	5265	310	4955	25060	1954	23106
Budafoknál	5651	400	5251	6850	1027	5823
Téténynél	654	110	544	2868	585	2280
Tökölnél	4242	349	3893	2242	251	1991
Ercsinél	2493	404	2089	2034	89	1945

10. tábla.

Az egyes helyeken talált számokból vont átlagos értékek.

A vizpróba vételének helye	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben			A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-ben		
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
A jobb parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	701	100	601	602	85	517
Az összekötő vasuti hidnál	1874	161	1713	1244	86	1158
Budafoknál	1985	207	1778	2813	370	2443
Téténynél	655	158	497	1055	168	887
Tökölnél	626	84	542	1043	135	908
Ercsinél	602	48	554	1241	186	1055
A középen.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	625	46	579	1396	198	1198
Az összekötő vasuti hidnál	746	61	685	1269	92	1177
Budafoknál	3538	277	3261	5244	278	4966
Téténynél	571	72	499	814	73	741
Tökölnél	1807	103	1704	2291	116	2175
Ercsinél	1412	56	1356	2459	97	2362
A bal parton.						
Az óbudai hajógyári szigetnél	2955	165	2790	4432	336	4096
Az összekötő vasuti hidnál	9903	397	9506	19457	915	18544
Budafoknál	3455	421	3034	6153	499	5654
Téténynél	1148	135	1013	2433	417	2016
Tökölnél	3771	363	3408	5458	534	4924
Ercsinél	3250	343	2907	3284	130	3154

11. tábla.

A Duna vizének átlagos bakterium tartalma a vizsgált vonalakon.

A vizsgálat irányvonala	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm³-ben			A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm³-ben		
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
Az óbudai hajógyári szigetnél	1427	104	1323	2143	206	1937
Az összekötő vasuti hidnál	4174	206	3968	7323	364	6959
Budafoknál	2992	301	2691	4737	382	4355
Téténynél	791	122	669	1434	219	1215
Tökölnél	2068	183	1885	2931	262	2669
Ercsinél	1755	149	1606	2328	137	2191
Átlagban	2201	177	2023	3483	262	3221

12. tábla.

A Duna vize chemiai alkotó részeinek összehasonlitó táblázata Bécs és Budapest fölött.

Alkotórész 1 literben mg.	Bécs fölött (Nussdorf-nál) [Wolfbauer szer.] Átlag 1878-ból	Bécs fölött (Nussdorf-nál) [Heider szerint] * Átlag 1891—93-ból	Budapest fölött Átlag 1894-ből **
Suspendált részek	10377	—	1450
Szilárd anyag	1721	18116	1626
Oldott szerves anyag ($KMn_nO_4 \times 5$)	5·6 (elégetéssel)	3755	3448
Chlor	2·4	336	441
Salétromsav	1·8	nyomok	0202
Salétromos sav	—	—	0078
Ammoniak	—	0011	001

* Heider: Untersuchungen über die Verunreinigung der Donau durch die Abwässer der Stadt Wien (Österr. Sanitätswesen, 1894.) czimű munkája XII. táblájából vont átlag.

** Az értékek a Duna jobb partján, közepén és bal partján, vagyis egész átmetszetében talált adatokból vont átlagot képviselik.

13. tábla.

A Duna vize chemiai alkotó részeinek összehasonlító táblázata Bécs és Budapest mellett és alatt.

Alkotórész 1 literben mg.	Bécsnél a Donaucanal vize a csatornák beömlése alatt (Heider után) **	Bécsnél a Donaustrom vize Hainburgnál, a csatornák beömlése alatt 23·3 km-re (Heider után) *	Budapestnél a csatornák beömlése alatt, az összekötő hidnál ***	Budapest alatt a csatornák beömlésétől 16 km-re Téténynél ***
Suspendált részek	—	—	157·0	124·0
Oldott szilárd anyag	193·66	179·5	189·0	177·0
Oldott szerves anyag	61·25	35·05	38·88	30·37
Chlor	5·36	3·57	5·22	3·96
Salétromsav	—	—	0·281	0·338
Salétromos sav	—	—	0·191	0.004
Ammoniak	1·366	0·022	0·41	0·0

* Heider munkájának XXVIII., XXIX., XXX., XXXI. és XXXII. tábláiból vont átlag.

** Heider munkájának XXVI. táblázata után számított átlag.

*** Az értékek a Duna egész átmetszetében talált adatokból vont átlagot képviselik.

14. tábla.

A Duna-viz fölszine átlagos baktérium-tartalmát Bécs és Budapest fölött, mellett és alatt összehasonlító táblázat.

Bécs fölött Nussdorf-nál	Budapest fölött az óbudai hajógyári szigetnél	Bécs mellett (Donaucanal) a Donauuferbahn-nál	Budapest mellett az összekötő vasuti hidnál	Bécs alatt Hainburgnál (23·3 km.)	Budapest alatt Téténynél (12 km.)
1997	1427	55838	4174	5295	791

15. tábla.

A Duna vizének fölszinén és 1 m. mélységében levő bakteriumok összehasonlitó táblázata.

A vizsgálat irányvonala	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben	A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-ben
Esztergom fölött (Duna)	626	2097
Esztergom fölött (Duna-ág)	1024	1107
Esztergom mellett (Dunaág)	4204	6861
Esztergom alatt (Duna)	2595	6597
Bpest fölött az óbudai hajógyári szigetnél	1427	2143
Bpest mellett az összekötő vasuti hidnál	4174	7323
Budafoknál	2992	4737
Tétánynél	791	1434
Tökölnél	2068	2931
Ercsinél	1755	2328

16. tábla.

A vizsgálat történt Esztergom fölött a parttól 10 m.-rel befelé. A viz hőfoka 18 °/C.

Vizállás { *aug. 17-én + 312 cm.* / « *18-án + 315* « / « *19-én + 318* « }

A vizsgálat napja	Reggel 6 óra			Este 7 óra			Reggel 6 óra			Este 7 óra		
	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben						A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-ben					
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
1894 aug. 17.	3165	340	2825	4342	335	3987	6821	637	6184	8056	492	7564
« « 18.	3008	261	2747	3695	208	3487	4818	455	4373	2893	230	2633
« « 19.	3193	318	2875	3393	281	3112	5677	561	5116	4195	308	2887

17. tábla.

A vizsgálat történt Budapestnél a Margit-sziget felső csúcsán. A viz hőfoka 20 °/C.

Vizállás { *julius 12-én + 316 cm.*; « *16-án + 266* «; « *17-én + 290* «; « *18-án + 294* «; « *19-én + 274* «; « *20-án + 252* «

A vizsgálat napja	Reggel 6 óra			Este 7 óra			Reggel 6 óra			Este 7 óra		
	A bakteriumok száma a fölszinen 1 cm^3-ben						A bakteriumok száma 1 m. mélységben 1 cm^3-ben					
	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók	Összesen	Gelatinát folyósitók	Gelatinát nem folyósitók
1895 juli 12.	720	6	714	539	4	535	3102	4	3098	1590	6	1584
« « 16.	317	0	317	174	0	174	201	0	201	153	0	153
« « 17.	239	0	239	492	33	459	729	8	721	286	11	275
« « 18.	270	0	270	169	5	164	457	0	457	257	3	254
« « 19.	313	10	303	171	4	167	472	6	466	273	4	269
« « 20.	422	0	422	254	0	254	588	2	586	265	0	265
Átlagban ...	380	2	378	298	8	290	925	3	922	470	4	466

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. február 17-én tartott üléséből.)

A RÖNTGEN-FÉLE SUGARAK MAGYARÁZATÁRÓL.

SCHULLER ALAJOS r. tagtól.

A RÖNTGEN-től úgynevezett X-sugarak meglepő tulajdonságokkal bírnak, nevezetesen áthatolnak az átlátszatlan anyagokon, mint a fénysugarak az átlátszókon, mindamellett sem visszaverődést, sem törést nem tapasztalni rajtuk, csupán nagymérvű elnyeletésnek vannak alávetve. Eme sajátságok kielégítő magyarázatát eddig nem sikerült megtalálni. RÖNTGEN hajlandó az X-sugarakat az äther hosszrezgéseinek tartani. Ilyen rezgéseknél azonban szabályos törés és visszaverődés teljes hiánya csak úgy lenne magyarázható, ha a terjedési sebesség minden közegben egyenlő lenne, a mit más rezgéseknél nem tapasztalunk és a mit nehéz lenne a nagymérvű elnyeletéssel összeegyeztetni, mert az utóbbi világosan mutatja, hogy az egyes anyagok nagyon különböző mértékben befolyásolják a szóban forgó sugarakat. Nézetem szerint a következő magyarázat jobban egyezik a tapasztalatokkal.

A magyarázat pillanatnyi elektromos rázkódásokra van alapítva, melyek megosztás útján a környező molekulákra elterjednek és ezekben az illető anyagnak megfelelő saját rezgéseket megindítják. Képzeljünk ugyanis elektromos testet, melynek elektromosságát rögtön levezetjük. Ezalatt a környezetben lévő testekben a megosztás következtében fellépő elektromosságok hirtelen felszabadulnak és az anyag minősége, meg a méretek által meghatározott, rendszerint gyorsan csillapodó rezgésbe jutnak, a mint többek közt a HERTZ-féle kisütőnél tapasztalhatjuk. Minél kisebbek a vezetők, annál rövidebb lesz a rezgési idő, és annál rövidebb idő alatt kell a megosztó elektromosságnak eltünni, hogy a rezgések kifejlődhessenek. A folyamat egészen hasonló, mint a kifeszített

húrnál: lassú nyomás nem hozza rezgésbe, csak gyors ütés vagy pengetés. A RÖNTGEN-féle sugaraknál a fénytünemények, a phosphoros és fluoros fény igen gyors rezgésekre mutatnak, a melyek alig képzelhetők máskép, mint hogy legnagyobb részt az egyes molekulákban vagy atomokban folynak le, talán a közöttük előforduló kisülések kiséretében. Úgy képzelem tehát, hogy a kathod-sugarak a légüres edénynek a kathoddal szemben lévő falát egyes pillanatokban elektromossággal töltik meg, mely azután visszafelé ismét kisül. Eközben a környező anyagok molekuláiban az elektromosság egyensúlya megzavartatván, az anyagnak megfelelő saját rezgések lépnek fel. A rezgések tehát nem mint olyanok terjednek tovább, hanem az egyes molekulákban keletkeznek, a hol azután a fluoros vagy phosphoros fénylés, vagy a chemiai hatás útján észrevehetővé válnak.

Hogy az itt föltételezett töltések és az azokat követő kisülések a vacuumcsövek fénytüneményeire befolyással vannak, a következő körülmények mutatják. A töltésektől származó, az eredetivel ellenkező kisülések szembeszökő fénytüneményeket és RÖNTGEN-féle sugarakat képesek előidézni. Ezek feltünővé válnak, ha keresztalakú csövet használunk sík elektrodokkal, mely utóbbiak az egymásra merőleges ágakban foglaltatnak. A mikor a ritkítás már megközelíti azt a határt, melynél a kisülések a csőben kimaradnak, az anoddal szemben ugyanolyan fényjelenség mutatkozik a falakon, mint a másik csőben a kathod-sugarak hatása alatt és a két fényjelenség annál kevésbbé különbözik intensitás tekintetében, minél tovább folytatjuk a ritkítást. Utoljára mindkettő elenyészik. A töltések szerepére mutat az is, hogy a RÖNTGEN-féle hatásra igen káros az a melegedés, melyet a kathod-sugarak a szemben lévő falakon okoznak. A mikor ugyanis erős melegedés tapasztalható, a mi különösen homorú kathodnál és tökéletlen ritkításnál fordúl elő, akkor a RÖNTGEN-féle sugarak igen gyöngék. Közel esik a gondolat, hogy a melegedés káros volta összefügg a vezetőképességgel, mely, a mint ismeretes, az üvegnél melegedés közben fokozódik.

A RÖNTGEN-féle sugarak itt közölt magyarázatának egyik előnye, hogy ismeretes tulajdonságra, az elektromos megosztó hatásra van felépítve; másik fontos előnye, hogy az X-sugarak min-

den eddig ismert tulajdonságáról képes számot adni, a mint a következőkben jelezni akarom.

Az egyenes terjedés és az elhajlás hiánya azonnal következik a COULOMB-féle törvény értelmében az összekötő vonal irányában ható erőből. Ugyanezzel összefüggésben magyarázatunk már eleve kizárja a rendes visszaverődést és törést, ellenben nem zárja ki az ezekhez némileg hasonló jelenségeket. Így például érthetővé teszi RÖNTGEN-nek azon kisérletét, melylyel a visszaverődést kimutatni vélte. Ugyanis RÖNTGEN az érzékeny gelatin-réteg után, vele szoros érintkezésben, fémlapot alkalmazott és azt találta, hogy a gelatin-rétegen áthaladt sugarak a fémlap előtt erősebb hatást gyakoroltak, mint a többi helyeken. Könnyen képzelhető, hogy a fémben előforduló elektromos rázkódás a közvetlen szomszédságban lévő gelatin-rétegben észrevehető hatást idéz elő.

Magyarázatunk teljesen megegyezik az X-sugarak keletkezési módjával. A nagyfokú ritkítás mellett, mely keletkezésüknek, úgy látszik, feltétele, az elektromosság mozgása rendkívül gyorsan történhetik, a töltés és kisülés tehát felette gyorsan mehet végbe, a mi nem érhető el vezetőknek közönséges megtöltésével és kisütésével, mert úgy az ellenállás, mint az öninductio lassítólag hatnak. Felfogásunk szerint nem is várható, hogy állandó rezgési állapot létesüljön, hanem a jelenség valószinűleg csak a légüres térben történő szakgatott kisülések kiséretében léphet fel. Ezzel megegyezőleg sem közönséges condensatornak, sem a HERTZ-féle kisütőnek lemezei közt nem tapasztaltam a RÖNTGEN-féle sugaraknak megfelelő photographiai hatást. RÖNTGEN szerint, valamint SCHWARTZ OTTÓ tapasztalatai szerint is, az X-sugarak onnan indulnak ki, a hol a kathodsugarak a falat érik, a mi szintén megegyezik az elektromos rázkódások keletkezési helyével.

Magyarázatunk megvilágítja a kathod-sugarak és a RÖNTGEN-féle sugarak közötti különbséget is. A kathod-sugarak elektromos anyagi részek mozgása által, vagy legalább ilyen mozgás kiséretében keletkeznek, ehhez képest mágnes közelítésére a hajlékony folyamok módjára eltérnek. A gyorsan haladó anyagi részek az üveg felületére ütődve, ott rendkívül heves rázkódást okoznak, mely az üveg felületén élénk fluoros fénylést eredményez. Ez a hatás, keletkezésének megfelelően, a felületi részekre szorítkozik,

s vele szemben minden szilárd testnek vékony rétege is átlátszatlannak mutatkozik. Ellenben a kathod-sugaraknál, mint az elektromos megosztáson alapuló tüneményeknél, a távolhatásra vonatkozó eddigi tapasztalataink szerint nem várható a mágnesnek eltérítő hatása, kivéve, ha a megosztáson kívül még valóságos áramlás is előfordulna, a mi az erősen elektromos csövek közelében nem látszik teljesen kizártnak, minthogy az X-sugarak a kisüléseket nagy mértékben elősegítik. A fénytünemények elterjedése is lényegesen eltér a kathod-sugarakétól, mert a távolhatás, legalább szigetelőkben, az anyag belsejébe is elterjed, a minek megfelelően a fényhatás és a photographiai hatás nemcsak a felületen, hanem az anyag egész terjedelmében érvényesül.

A RÖNTGEN-féle sugaraknak a kisüléseket elősegítő hatása, melynél fogva a szigetelők is vezetőkké válnak, szintén összeegyeztethető ugyan magyarázatunkkal, de erre nem kívánok súlyt fektetni, mert maga a kisülési folyamat nem is ismeretes eléggé, tehát nem is szolgálhat magyarázatunk lényeges támaszául.

A RÖNTGEN-féle sugarak egyik tulajdonságával azonban magyarázatunk az első tekintetre ellentétben látszik állani, azzal, hogy vezetőkön, különösen fémeken is áthatolnak. Ugyanis az elektromosság statikai megosztó hatása nem mutatkozik a vezetőkön túl s nevezetesen a földdel összekötött vezetők e tekintetben a tökéletesen átlátszatlan testek módjára viselkednek. Közelebbről tekintve a dolgot, ez az ellentmondás is csakhamar megszünik. Ugyanis a szigetelés foka a töltés tartamától függ: minél rövidebb ideig tart a töltés, annál jobb szigetelést tapasztalunk. Már a legjobb szigetelők dielektrikus állandójának mérésénél szükségét érezték annak, hogy rövid töltéseket alkalmazzanak s a vezető folyadékoknak, mint például a víznek dielektrikus állandóját nem sikerült a szigetelőknél használt módon megmérni, míg ellenben a HERTZ-féle kisütővel előállított gyors rezgések hatása alatt ez is mint szigetelő viselkedik s dielektrikus állandója meghatározható. Közel fekszik tehát a gondolat, hogy igen gyors töltésekkel szemben, melyek már fényrezgések indítására is alkalmasak, a fémek is hasonlóan viselkednek, mint a szigetelők, azoknak is megfelel dielektrikus állandó. Ez esetben a fémek sem képesek többé védő burkolatot képezni, akkor sem, ha a földdel állandó összeköttetésbe

hozattak, mert a megosztás útján felszabaduló elektromosság levezetése, illetőleg az elektromos áram teljes kifejlődése, az ellenállás és öninductio következtében több időt igényelne, mint a mennyi az elektromos rázkódás tartama. Ezen felfogást támogatják RIGHInek, továbbá BENOIST- és HURMUZESKU-nak, valamint másoknak kísérletei, melyeknél a RÖNTGEN-féle sugarak fémburkolaton, különösen aluminiumon keresztül nemcsak az elektromosság kisülését segítik elő, hanem új töltést is létesítenek.

Mindezek a mellett szólnak, hogy a RÖNTGEN-féle jelenség kimagyarázható felette gyors elektromos töltésekből, melyek az elektromosság megosztó hatásából kifolyólag a testek részecskéiben elektromos rezgéseket ébresztenek.

Végül még megemlítendőnek tartom, hogy ugyane magyarázatot az elektromos folyamok mágneshatásával is kapcsolatba hozhatjuk. A kathod-sugár, mint egyenes elektromos áram, szükségképen mágneshatást fejt ki, melyről tanuságot tesz a közelített mágnestől származó eltérés. Ez a mágneshatás rögtön megszünik, a mint a sugár az üvegre ütődik, illetőleg irányát megváltoztatja; az elektromos töltés jelensége tehát a fenforgó esetben mágneses rázkódást is képvisel, mely magyarázatunknak szintén alapjául szolgálhat.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. márczius 16.-án tartott üléséből.)

A KIEGYENLÍTŐ GAZOMETRIKUS MÓDSZERRŐL.

THAN KÁROLY r. tagtól.

Régibb gazometrikus dolgozataimban alkalmilag említést tettem egy oly módszerről, melyben a legközönségesebb észlelési hibák egymást kiegyenlítik és ennélfogva az eddigieknél pontosabb eredményeket ad.

E módszer kieszelésére az indított, hogy két általam sejtett új gáz jelenlétét törekedtem más gázok elegyében kimutatni, mely utóbbiak gazometrikus tekintetben még szintén nem igen alaposan tanulmányozottak.

Sok gázanalysist kellett végeznem, maguk az észlelések, kivált pedig a számítások tömérdek időt emésztettek fel, a mely felett nem rendelkezem. Ezenfelül az észlelési és számítási hibák néha oly zavart okoztak, a mely kétségbeejtő volt.

Bunsen classikus és egyszerű módszerének az a gyengéje, hogy mikor sok analysist kell végeznünk, igen sok időbe kerül, továbbá hogy állandó hőmérsékű szobában kell végezni a kisérleteket és különösen, hogy többnyire hosszadalmas számítás után kapjuk meg az eredményt. Sokan igyekeztek a gazometrikus módszereket gyorsabbá tenni és ezt többen el is érték, de rendesen a szigoruság rovására.

A legközönségesebb hibaforrások gazometrikus észlelésekben a következők. Már a gázok térfogatának lemérésekor a hőmérsék és a nyomás pontos észlelése kissé szigorúbb igények mellett nehézséggel jár. Eltekintve ugyanis a hőmérők állandó hibáitól és renyhe járásától, bizonyos, hogy közönséges és gyorsabb észleléseknél az eudiometerben levő gáznak hőmérséke pontosan soha sem ugyanaz, mint a hőmérőé, ha a szoba hőmérséke csak

kissé ingadozó is, mert a gáz és a thermometer nem ugyanazon sebességgel jutnak el a hőmérséki egyensulyba. A hőmérsékreductiót számítással végezvén, ennélfogva mindig hibás eredményt kapunk, mely nem igen nagy ugyan, de ha a gáz mennyiségének absolut értékére van szükségünk, nem kicsinyelhető. Ez a hiba különösen akkor jelentékeny, ha mint rendesen, nedves állapotban mérjük le a gázt, mert a telített gőz egyensúlya még kevésbé tarthat lépést a hőmérő ingadozásával. BUNSEN alapvető levegő analysiseiben * e bajokon úgy segített, hogy igen nagy eudiometereket használt, és minden gáztérfogat leolvasását óránkint három ízben ismételte, az ezekből számított normáltérfogat középértéke adta a helyes eredményt.

Másik hibaforrás az eudiometer és a barometer higanyoszlop magasságának észlelése és hőmérsékének számított javítása. Pontos észleléseknél a messzelátóval közvetlenül észlelt higany meniscus látszólagos magassága a világítás minőségével és a nap állásának magasságával, meg a reflex világítás irányával észrevehetően változó.** Nagyobb a hiba a hőmérsékcorrectiónál, mert a thermometer vékony higanyoszlopa meg az eudiometer vastag higanyoszlopa különféle magasságú rétegeikben különböző hőmérsékűek, és egyátalában ezek sem tartanak a hő kiegyenlítésben lépést a thermometer ingadozásaival.

Durvább hibaforrás ered a szilárd absorbeáló anyagok alkalmazásából, milyenek a kaliumhydroxyd, a manganhyperoxyd, a papier machée-ból, gypszből vagy szénből készült golyók. Ezen anyagok nemcsak az absorbeálandó gázt, hanem a többi gázokból is elnyelnek ismeretlen mennyiségeket; gyakran pedig a bennük volt levegőt az eudiometer ritkított terében részben kibocsátják. Ezek használata mellett a gáz-analysis eredményét többnyire csak közelítőnek tekinthetjük. Az absorptió műveletével pontosabb eredményt kapunk, ha az absorptióhoz kifőzött oldatokat használunk, melyeknek tensioja ismert, kivált ha az oldatoknak térfogatát is pontosan ismerjük és az általuk netalán ab-

* BUNSEN: Gasometrische Methoden 2. Aufl. 92. l.

** L. THAN K. Vegyerélytani vizsgálatok. Akad. értekezések a természettudományok köréből 1881.

sorbeált idegen gázok mennyiségét correctió utján számításba veszszük.

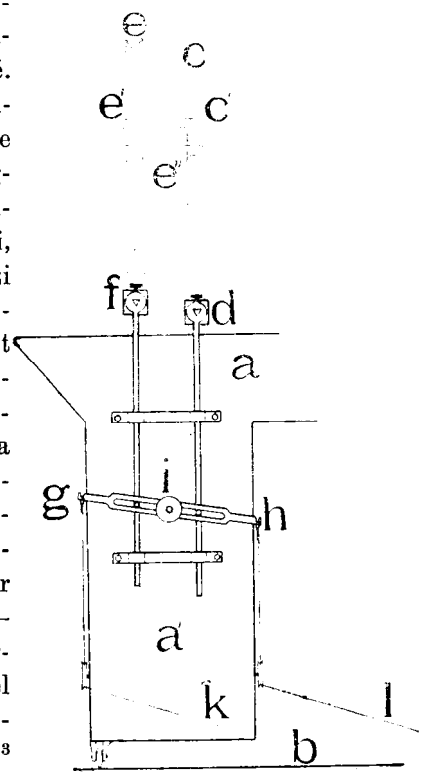
Közönséges vagy épen technikai gázanalysisekben a föntebb említett correctiókat rendesen elhanyagolják, mert ez által e műveletek nagyon hosszadalmassá és fáradságossá válnak, az eredmény gyakorlati jelentősége pedig evvel arányban nincsen. Tudományos tekintetben azonban nagyon kivánatos oly gazometrikus módszer megállapítása, mely lehetőleg szigorú. Ennek indokolására, eltekintve az analytikai szempontoktól, elég azt kiemelnem, hogy újabban a gazometrikus módszerek a gázalakú testek dissociatió jelenségeinek tanulmányozásában, sőt ugyanilyen halmazállapotú testek atomsulyának és mulekulasúlyának meghatározásában, különösen pedig a gáztörvényektől való eltérések szabatos vizsgálatában az eddiginél még fontosabb szerepre vannak hivatva. Ha az ily kellékeknek megfelelő módszer még gyorsan ki is vihető, nemcsak a tisztán tudományos, de a gyakorlati alkalmazás szempontjából is értékes.

E megfontolásokból és saját kutatásaim érdekében már évek óta fáradoztam az érintett kellékeknek megfelelő gazometrikus módszer megállapitásán, mely eléggé sikerült is. E módszer tanulmányozása még nincsen teljesen befejezve és összefüggőleg részleteiben később szándékozom azt a Tek. Akadémia elé terjeszteni. A hozzá való készülékek az ezredéves kiállítás tárgyai között kiállítva lévén, nem lesz érdektelen előzetes jelentés alakjában a módszer elvét, a készülékek lényegét és az eddig elért fontosabb eredményeket most közzétennem.

A módszer czélja, hogy a gázok normáltérfogatának meghatározásakor, lehetőleg kevés észleléssel, minden correctiót és számitást kiegyenlítés útján mellőzzünk.

A kiegyenlítő gazometrikus készülék leglényegesebb szerkezete az 1. számú vázlatos rajzból megérthető. A vékony öntött vasból készült a higanykádnak lefelé menő szára a' igen tömör és jól kiszáritott juharfával van kitöltve. Ez a fatöltelék kautsuk és kolofoniumból készült ragasztóval van légmentesen a vasedény falához ragasztva és ezenfelül kivülről a vasfalon átmenő csavarral megerősítve. A juhar fába két merőleges lyuk van befúrva, melyeknek átmérője 2·5 cm., mélysége mintegy 35 cm. A fával

való kitöltés arra szolgál, hogy kevesebb higanynyal lehessen a kádat megtölteni és hogy a furatokba lesüllyesztett eudiometer az esetleges törés elkerülése végett ne vassal, hanem fával érintkezzék. A higanynyal megtöltött kádba *d* és *f* vastartók segítségével a furatok tengelyébe állítjuk a *c kiegyenlítő csövet* és az *e eudiometert*. A kiegyenlítő csőben lemért mennyiségű tiszta száraz nitrogen gázt teszünk a higany fölé. A kiegyenlítő csőbe (a compensatorba) levegőt is lehetne tenni, de hosszabb idő alatt a levegő megtámadja a higanyt és ezért czélszerű a tiszta nitrogent használni, mely évek multán sem szennyezi el a higany meniscusát. A nitrogenből tetszés szerinti mennyiséget is vehetünk, ha csak relativ értékekre van szükségünk, mint a közönséges gázanalysisekben. De ha a gázmennyiségek lemérésekor absolut értékeiket akarjuk meghatározni, akkor a nitrogen mennyiségét is absolut értékben kell egyszer mindenkorra meghatároznunk. — E czélra egy kis készüléket szerkesztettem, melynek segítségével nehány percz alatt, egészen pontosan lemérhetünk 10 normál cm^3 gázt. Ez a készülék is ki van állítva az ezredéves kiállításon. A kiegyenlítő csőre három-négy finom vizszintes körvonás van beétetve, melyek közül a felső pontosan 12·5 cm^3, a második 14·286 cm^3, a harmadik 20 cm^3, az alsó pedig 50 cm^3 térfogatnak felel meg. Ha a kiegyenlítő csövet emeljük vagy süllyesztjük, úgy hogy a higany meniscusa e gyürűket épen érintse, akkor a nitrogen nyomása a csőben igen közelítőleg 0·8 vagy 0·7 illetve 0·5 és 0·2 atmosphära.



1. rajz.

Az *e* eudiometer pontosan 0·1 cm^3-ekre beosztott cső; czélszerű, ha az osztályzat finom és éles vonalakból áll. Jó, ha az eudiometer ugyanazon fajta üvegből készül s méretei lehetőleg megegyezők a kiegyenlítő csövével. A platinadrótok a letörés elkerülése végett a cső felső domborulatának oldalán vannak oly üvegzománczczal beforrasztva, melynek kiterjedési tényezője közel áll a platináéhoz és így az elpattanás esélye el van kerülve. A köbözéskor a cső aljára forrasztott SCHULLER-WARTA-féle csapos csővel eresztjük ki a higanyt előre megmért edénybe és a higany meniscust természetes állásában olvassuk le, úgy hogy a meniscus-correctio felesleges.

A kiegyenlítő cső és az eudiometer *d* és *f* parafadugóval béllelt tartókban van merőlegesen felállítva. E tartók két vezető sínen át lefelé mennek, a rudak száraira erősített síma szögek pedig a belsejében kivájt *g h* emeltyű üregébe illenek. Ha az emeltyűt *i* tengely körül mozgatjuk, akkor a csövek egyike süllyed, a másika pedig emelkedik. Az emeltyű végére erősített *gk* és *hl* zsinegek csigákon át a két méter távolságban felállított messzelátóig haladnak, hol a zsinegek külön-külön fékkel ellátott olyan tengelyekre csavarodnak, melyek kerékkel forgathatók. A két mérő csőnek felfelé vagy lefelé mozgatását nagy szabatossággal végezhetjük a messzelátó mellől.

A vizszintes messzelátó egy merőlegesen felállított állvány különböző pontjain könnyen megerősíthető. Vízmértékkel és mikrometer csavarral pedig vizszintesen állítható fel. Az állvány egy meter magasságú vascsőből áll, melyre egy tágasabb nickelezett cső úgy van ráhúzva, hogy forgatáskor a belső cső a külsőnek vezetékeül szolgál, mint a kathetometereknél. Ez biztosítéka annak, hogy a távcső a tengely körül szigorúan vizszintes síkban mozdítható el.

Ezt a mozgást végtelen csavarral végezzük, mely a külső állványcsőnek aljára erősített fogaskerékbe fog.

Méréskor a megmérendő gázt beviszszük az *e* eudiometerbe, azután a kiegyenlítő csövet *d* fogóba úgy állítjuk be, hogy a higany meniscus 1—2 mm.-rel alább legyen, mint a körvonások valamelyike, pl. az 0·5-del jelölt. Ezután az eudiometert *f* fogóba úgy erősítjük meg, hogy benne a higany magassága közelítőleg ugyanaz legyen

mint a kiegyenlítő csőben. Ezután a két csőre ráteszszük a megvilágítást szabályozó ernyőt, mely egy merőleges rúdon eltolható. Az ernyő két fekete bádoghengerből áll *e'* és *c'*. Ezeket úgy kell beállítanunk, hogy alsó szélük 4—5 millimeternyivel magasabban legyen, mint a higanymeniscus. A két henger ablak felé eső oldalára kis rámában *e''* kifeszített vékony czigarettapapiros van erősítve, mely az ernyő és a meniscus közötti tért szétszórt fénynyel úgy világítja meg, hogy minden zavaró visszaverődés ki van zárva. Mintegy 5—10′ mulva, mikor feltehető, hogy a két csőben a hőmérsék egyenlő lett, következőképen végezzük a leolvasást. A messzelátót a kiegyenlítő csőre irányozzuk és most *k* és *l* zsinegek fel- és lecsavarásával úgy toljuk lefelé a kiegyenlítő csövet, hogy a higanymeniscus tetőpontja épen érintse a csőre étetett körvonalat. Minden beállításkor arra kell ügyelni, hogy a meniscus alulról fölfelé emelkedve érintse a körvonalat. Most a messzelátó keresztfonalát pontosan beállítjuk a higanymeniscus legmagasabb pontjára. Miután ez megtörtént, az alsó végtelen csavar segítségével az állványt merőleges tengelye körül 2—3°-nyira balra fordítjuk, úgy hogy a látó tér közepén élesen jelenjék meg az eudiometer higanymeniscusa. Ez a meniscus általában nem fog összeesni a keresztfonállal, mert az eudiometer többnyire 1—2 mm-rel magasabban vagy alacsonyabban állott, mint a kiegyenlítő cső. Ezután *k l* zsinegekkel akként állítjuk be az eudiometert, hogy a higanymeniscus éppen érintse a messzelátó keresztfonalát és ekkor leolvassuk a gáz köbcentimetereinek számát. E műveletek alkalmával természetesen nagy gondot kell fordítanunk arra, hogy a messzelátó keresztfonala szigorúan ugyanazon vizszintes síkban maradjon. Ezt úgy érjük el, ha a végtelen csavart a beállításkor mindig egy irányban forgatva használjuk, tehát ha a messzelátót a meniscustól jóval jobbra csavarjuk el és a végleges beállításkor mindenkor jobbról balra fordítjuk, mi által a csavar holt menete által okozott hibákat lehetőleg elkerüljük. A beállítás és leolvasás közben a messzelátót kézzel közvetlenül nem érintjük. Ellenőrzés végett tanácsos az eudiometer leolvasása után a kiegyenlítő csövet még egyszer a messzelátóba beállítani; ha a leolvasás jó volt, a higanymeniscusnak ismét pontosan össze kell esni a keresztfonállal és a kiegyenlítő cső körvonalával.

A módszer elméletének kifejtésére a következő megfontolások szolgálnak.

Jelöljük az eudiometerben észlelt gázmennyiség térfogatát V-vel, ismeretlen nyomását P-vel és hőmérsékét t-vel, a kiegyenlítő csőben foglalt gáz megfelelő értékeit ugyanazon vonásos betükkel, akkor:

az eudiometerben foglalt gáz normál térfogata

$$V_n = \frac{VP}{0{\cdot}76(1+at)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

a kiegyenlítő csőben foglalt gáz normál térfogata

$$V_n' = \frac{V'P'}{0{\cdot}76(1+at')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

A két egyenletet egymással osztva, ha megfontoljuk, hogy az észleléskor adott körülmények közt $P=P'$ és $t=t'$, az eredmény lesz

$$\frac{V_n}{V_n'} = \frac{V}{V'}, \text{ miből } V_n = \frac{V_n'}{V'} V \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

vagyis az eudiometerben foglalt gáz normáltérfogatát (V_n) megkapjuk, ha a méréskor észlelt térfogatát V szorozzuk $\frac{V_n'}{V'}$-vel. De V_n' nem egyéb mint a kiegyenlítőben foglalt nitrogen gáz ismert normál térfogata, esetünkben $=10$ cm³, V' pedig ugyane gáznak tényleges térfogata, vagyis a kiegyenlítő cső körvonásának űrtartalma, melyet úgy választottunk meg, hogy a normál térfogathoz egyszerű rationalis viszonyban legyen. Ez állandó tényező $\frac{V_n'}{V'}$ értéke esetünkben tehát a szerint, a mint a mérést a felső (12·5 cm³) a második (14·286 cm³) harmadik (20 cm³) vagy az alsó vonáson (50 cm³) végeztük, 0·8, 0·7, 0·5, illetve 0·2. *Az eudiometerben leolvasott gáz térfogatát V-t tehát egyszerüen ezen factorok egyikével kell szoroznunk, hogy a gáz normál térfogatát köbcentimeterekben megkapjuk,* minden egyéb számítás teljesen fölösleges.

Az explosiót úgy végezzük, hogy az eudiometer alatt levő furat nyilásába egy öntött vasból készült dugót teszünk, melynek

teteje vastag kautsuk lemezzel van bevonva. Erre állítva az eudiometert szokásos módon, a mellette levő állvány rúdjával erősen a kautsuk lapra nyomjuk, az elektromos szikrával történő meggyujtás előtt.

Nedves állapotban való leolvasáskor úgy a kiegyenlítő csőbe, mint az eudiometerbe 1—2 csepp vizet adunk. A leolvasás éppen úgy történik, mint azt előbb leirtuk. Kissé eltérő a leolvasás módja, ha az eudiometerbe nagyobb mennyiségű lúggal történt az absorptio. A lúgot az általam szerkesztett præcisio pipettával (Természettud. Közlöny 17. k. 1885. 201. l.) viszszük az eudiometerbe. Ekként egész szabatosan ismerjük a betolt oldat térfogatát és ezt egyszerűen levonjuk a higany meniscusáig leolvasott térfogatból, miáltal megkapjuk a nedves gáz térfogatát. Előbb a nedves kiegyenlítő csőben a higany meniscusra beállítjuk a keresztfonalat. Ezután az eudiometerre irányítjuk a messzelátót és a vizes oldat oszlopmagasságát leolvassuk. Ha az oldat fajsúlya s, az oszlop magassága n osztályrész, akkor a keresztfonalat $\frac{ns}{13{\cdot}56}$ osztályrészszel magasabban állítjuk be a higanymeniscus fölé. Az oldat és a víz tensiója által okozott eltérést a gáz valódi térfogatában úgy javítjuk meg, ha a 3) egyenlet jobb oldalát $\frac{P_n - l}{P_n - v}$ hányadossal szorozzuk, hol P_n a nedves gázok nyomását, l a lúg tensióját, v a vizét jelenti. Az átlagos barometer állást, 750 mm.-t véve, tegyük fel, hogy 0·8 atm. nyomás alatt történt a leolvasás, 0·5 normál kálilúggal. Ez utóbbinak tensiója 15°-on = 11·45, a vizé pedig 12·7, ennélfogva a föntebbi tényező értéke $= \frac{0{\cdot}8 \times 750 - 11{\cdot}45}{0{\cdot}8 \times 750 - 12{\cdot}7} = 1{\cdot}002$. A gáznak leolvasott térfogatát ez esetben tehát még evvel az egyszerű számmal kell szoroznunk, hogy egész pontosan megkapjuk a normál térfogatot.

Ez a correctio főképen akkor szükséges, ha igen nagy térfogatokat olvasunk le. Ha a leolvasás előtt egy vagy két óráig nyugodtan hagytuk az eudiometert, a szünet nélkül történő destillatio és condensatio következtében az absorbeáló oldat felső rétege csaknem tiszta vízből áll és a gőz tensiója is megegyezik a tiszta vizével. Ily feltétel mellett, kivált közönséges analysiseknél, a föntebb említett correctiót nyugodtan el is hanyagolhatjuk.

A módszer helyességének kipróbálására, mielőtt még az eljárásban nagyobb gyakorlottságot szereztek volna, Buchböck Gusztáv intézeti assistens és Frankfurter Ármin vegyésznövendék urakkal végeztettem nehány analysist, melyeknek eredményét ide mellékelem. A kisérletek nagyobb részt fűtött szobában végeztettek, néha verőfényes, máskor borús napokon.

A széndioxydtól megtisztított levegő analysiseket 1892 nov. 27. és 28.-án Buchböck Gusztáv úr végezte; az adatok következők:

1. kisérlet.

	V	$\frac{V'_n}{V'}$	V_n	
levegő nedvesen	71·31	0·7	49·92 cm³	α)
hydrogennel nedvesen	113·00	0·8	90·40 «	β)
explosio után	84·32	0·7	59·02 «	γ)

2. kisérlet.

levegő nedvesen	70·40	0·7	49·28 cm³	α)
hydrogennel nedvesen	115·08	0·8	92·06 «	β)
explosio után	87·33	0·7	61·13 «	γ)

Ebből a levegő százalékos összetétele:

		1. kis.	2. kis.
$o = \frac{100(\beta - \gamma)}{3\alpha}$	képlet szerint oxygen	20·95	20·92
$n = \frac{100(\alpha - o)}{\alpha}$	« « nitrogen	79·05	79·08

Bunsen nagy gonddal végzett 26 levegőanalysisének eredménye,* melyekben az oxygén 20·84—20·970% szélső határok között ingadozott középértékben

oxygen	20·921
nitrogen	79·079
	100·000

Látható ez adatokból, hogy az általam leírt módszer kiválóan szigorúnak mondható, mert a föntebbi értékek, melyek nem valami feltünő gonddal nyerettek, csaknem teljesen megegyeznek

* Gasometrische Methoden 2. Aufl. 85. l.

az utóbbi adatokkal, ámbár BUNSEN nagyméretű eudiometerrel dolgozott, minden correctiót tekintetbe vett, és kitünő észlelő volt.

Mily tökéletesen történik a fönntebb leírt készülékben a compensatio, még akkor is, ha gázok mindkét csőben nedvesek és a szoba hőmérséke változó, kiderül a következő adatokból. Ezeket BUCHBÖCK úr oly szobában észlelte, mely kezdetben nem lett fűtve és a melyben az észlelést a fűtés folyamán is folytatta, és pedig ugyanazon nedves gázzal, de oly elővigyázattal, hogy a gazometrikus készülék és gőzzel fűtött vízkemencze közé egy papirossal bevont vászon spanyolfalat állított fel.

	t° időszak	V	$\frac{V_n}{V'}$	V_n
fűtetlen szobában a hőmérsék...	12°9	—11°15′	—84·32	—0·7—59·02
« « «	12°85	—11°25′	—84·31	—0·7—59·02
a fűtés kezdésekor «	13°4	—11°40′	—84 30	—0·7—59·01
« folyamán «	13°8	—11°50′	—84·30	—0 7—59·01
« « «	13°8	—11°55′	—84·30	—0·7—59·01
« « «	14°3	—12° 5′	—84·31	—0·7—59·02
« « «	14°7	—12°15′	—84·31	—0·7—59·02
« « «	14°75	—12°25′	—84·31	—0·7—59·02
« megszüntével «	14°6	—12°35′	—84·31	—0·7—59·02
« « «	14°5	—12°55′	—84·31	—0·7—59·02

Bonyolódottabb műveletet igénylő összetett gázok analysisének példájául felhozom a FRANKFURTER úr által végzett szénmonoxyd és æthylen analysiseit. E gázok a szokásos módon felesleges oxygennel elégettettek és a képződött széndioxyd 1·5 norm. kaliumhydroxyddal absorbeáltatott.

Az összes észlelt térfogatok középértékéből vannak elméleti alapon a számított értékek a találtakkal összehasonlítva. Az æthylen polymerjeitől alkoholban oldással és kifőzéssel tisztíttatott meg.

A szénmonoxyd CO analysise.

	1. kisérlet.			2. kisérlet.		
	talált	száml.	külömb.	talált	száml.	külömb.
Szénoxyd	$v=26·019$	26·026	—0·007	$v=28·385$	28·418	—0·033
Összehuzódás	$c=13·069$	13·013	+0·056	$c=14·273$	14·209	+0·064
Absorptio	$a=25·971$	26·026	—0·055	$a=28·355$	28·418	—0·063
Elégett oxyg.	$o=13·021$	13·013	+0·008	$o=14·243$	14·209	+0·034

Az aethylen C_2H_4 analysise.

	1. kisérlet.			2. kisérlet.		
	talált	száml.	külömb.	talált	száml.	külömb.
Aethylen	$v = 5{\cdot}216$	5·233	—0·017	$v = 5{\cdot}684$	5·656	+0·028
Összehuzódás	$c = 10{\cdot}448$	10·466	—0·018	$c = 11{\cdot}280$	11·312	—0·032
Absorptio	$a = 10{\cdot}483$	10·466	+0·017	$a = 11{\cdot}317$	11·312	+0·005
Elégett oxyg.	$o = 15{\cdot}715$	15·699	+0·016	$o = 16{\cdot}913$	16·968	—0·055

A számok, mint látjuk, igen jól egyeznek, ámbár az analysisek nem rendkivüli gonddal végeztettek. Az eudiometer csak vízzel volt kiköbözve. A leolvasások részint nappal, részint este, távol az eudiometer mögé állított lámpa világánál történtek.

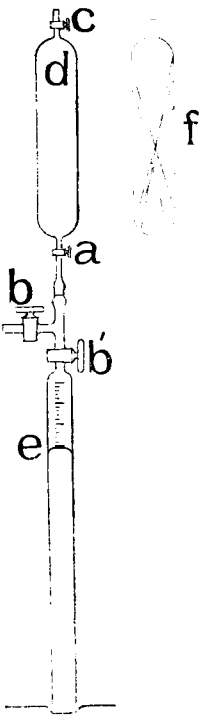
Meg vagyok győződve, hogy ez eljárás, ha a műveletek apróbb csinjai részletesebben meg lesznek állapitva, az eddig ismert gazometrikus módszereket a szabatossággal párosult gyorsaság és kényelem szempontjából határozottan túl fogja szárnyalni. A módszer elsőbbsége a régiek felett abban áll, hogy a gázok mennyiségének meghatározásakor egyetlen észleléssel közvetlenül a helyes értéket kapjuk meg. A kiegyenlítő csőnek a leírt módon való alkalmazása a hőmérséknek, a nyomásnak közvetlen észlelését és a mindezekkel járó javító számításokat feleslegessé teszi, a mennyiben bármint változzék is a környezetben a hőmérsék és a nyomás, mindkettő egyenlően befolyásolja az eudiometert és a kiegyenlítő csövet. Ennélfogva e módszer a közönséges módszereknél ezekből eredő hibákat helyesebben kiegyenlíti, mint az időt és fáradságot igénylő észlelések alapján számítással elérhető.

A kiállított készüléken a leirthoz hasonló három gázkád van sugárszerüleg egy köralakú vascsatornával összekötve, melyek mind higanynyal lévén megtöltve, egymással közlekednek, úgy hogy a vascsatorna közvetítésével a gáztartó edények egyik kádból a másikba kiemelés nélkül áthelyezhetők. A másik két kád arra szolgál, hogy azokban a tartalék kiegyenlítő csöveket tartsuk és hogy a gázokat egyik edényből a másikba alkalmas módon átvigyük, hogy absorptiókat és qualitativ vizsgálatokat stb. végezzünk.

E kádak szintén fával vannak bélelve, furataik azonban nem olyan mélyek mint az elsőé, úgy hogy az egész készülék megtöl-

tésére legfeljebb 25 kgr. higany szükséges. A kád középső része egészen olyan szerkezetű, mint az általam 1885-ben leírt revolver gázkádé. (l. Természettud. Közlöny 17. k. 204. l.), melyből egy példány jelenleg az egészségügyi osztályban van kiállítva. A készülék e része arra való, hogy a köralakban felállított kémlőcsövekben és gazometerekben a gázokat felfogjuk és eltartsuk. A egész középső rész a köralakú vályúban forgatható lévén mindenik edényt kényelmesen vihetjük át a három kádnak bármelyikébe.

Ez a módszer és készülék kiválóan hasznos szolgálatokra van hivatva a gázok és gőzök dissociatiojának tanulmányozásában, az oldatok tensiocsökkenésének, általában a molekula súlyok és a chemiai mechanika némely kérdéseinek megoldásában. A készülék pontos felszereléséről és ezen alkalmazásairól reménylem, hogy máskor bővebben szólhatok. Most még csak a gázok sűrűségének meghatározásánál való hasznosságáról akarok megemlékezni.



2. rajz.

A gázsűrűségek meghatározására szolgál a 100—120 cm³ tartalmú üvegedény, 2. rajz *d*, mely felül és alól finom üvegcsapokkal elzárható, alsó végén pedig *a* alatt köszörüléssel illeszthető *e* eudiometerre, mely *b'*-ig higannyal megtöltve a gázkádban van felállítva a kiegyenlítő cső mellett. A *d* edény térfogata a két csap között pontosan kalibrálva van és a levegőmentes edény súlya is egyszer mindenkorra meg van határozva. Használatkor a *d* edényt megtöltjük a gázzal, melynek sűrűségét meg akarjuk határozni, a nélkül hogy a hőmérsékre és a nyomásra tekintettel volnánk. Ezután a csapokat elzárván, *d* edényt a gázzal együtt félórai állás után a mérlegen pontosan lemérjük.

Erre való az ugyanazon fajta üvegből készült taraedény *f*, a melynek súlya és térfogata a *d* edényével közelítőleg egyenlő. A két edény súlykülömbségét egyszer mindenkorra meghatározzuk. Méréskor a taraedény a másik csészén van. A mérést a Borda-

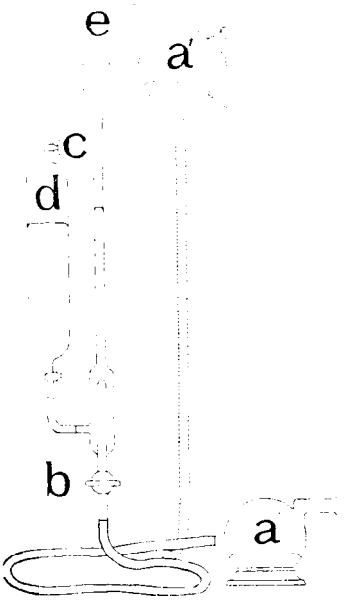
féle eljárás szerint lengésekkel lehetőleg pontosan végezzük. Ekként a taraedény alkalmazásával a mérési hibák elenyésző csekélységig compensáltatnak. A gázzal telt *d* edényt most felteszszük az eudiometerre és *b* csapon át az *a b b'* közötti térből teljesen kiszivattyúzzuk a levegőt. Ez a tér pontosan kalibrálva van és az eudiometer osztályzatába be van számítva. Ezután *b* csap elzárása után előbb a *d* edény alsó csapját, azután *b'* csapot nyitjuk ki. Ekkor az edényben foglalt gáz kiterjed és az eudiometerben a higanyt 3—4 cm-nyire lenyomja *e*-ig. Most az eudiometerben a föntebb leírt módon a kiegyenlítő cső használatával meghatározzuk a gáz normál térfogatát köbcentimeterekben. A 10 cm^3 száraz nitrogent tartalmazó csövet a 0·8 körvonásra állítjuk be. Ekként adott mennyiségű gáznak sulyát és térfogatát pontosan ismerjük és sűrűségét egyszerű osztással számíthatjuk ki minden más javitási számítás mellőzésével.

A gáz sűrűségének meghatározása e módszer szerint egyetlen mérlegelésből és egy térfogat mérésből áll, melyek gyorsan kivihetők és egészen pontosak, mert ha a műveletekre kellő gondot forditunk, minden mérési hiba compensálódik és a számításoknak terhesebb része egészen elesik. Az egész eljárás a számítással együtt mintegy két órát vesz igénybe. FRANKFURTER úr előleges gyakorlat nélkül a széndioxyd sűrűségét két kisérletben 1·5265 és 1·5228-nak találta, két különböző edénnyel dolgozván, melyeknek térfogata csak 120 cm^3 volt. BUNSEN kisérleteinek középértéke 1·5273, melyekhez 200—300 cm^3 széndioxydot használt. RÉGNAULT remek kisérleteiben csaknem 10 liter széndioxydot mért meg és a sűrűséget 1·52901-nek találta. Kellő számú kisérlet hiányában a módszer hiba-határa még nem állapítható meg, de kétségtelen, hogy nagy kényelem mellett igen gyors és nagy pontosságot igér.

Kezdetben nehézséget okozott a gázsűrűségi edény két csapja kenőcsének súlyváltozása különféle kenési módok mellett. E hiba úgyszólván teljesen mellőzhető, ha a csaptokok végei pontosan simára vannak köszörülve és a csapokat vaselin és viasz elegyével jól megkenve erősen bedugjuk a csaptokokba. Az ekkor kiszorult kenőcsöt tiszta vászondarabkákkal teljesen letisztítván, sokszor ismételt mérésből kiderült, hogy a csapkenőcs súlykülömbsége

$^1/_{10}$ milligrammnak csak tört részeit teszi ki, tehát teljesen elhanyagolható.

A módszernek a kényelmen kívül az a haszna is van, hogy csekély mennyiségű gázra van szükségünk és hogy a sűrűség meghatározása után ugyanazt a gázt analysisre, absorptiókra és egyéb kisérletekre felhasználhatjuk. E czélra a gázsűrűségi edényt következő módon gazometer gyanánt használjuk. A felső *c* csapra (3. rajz) kautsuk csővel gázvezető csövet erősítünk, az alsó csap csövét hajszálpipetta segítségével megtöltjük higanynyal, ezután kautsuk csővel a szintén higanyt tartalmazó *e b* cső oldalszárával úgy kötjük össze, hogy semmi levegő se maradjon a csap alatt. Mind a két részt egy alkalmas állványban oly helyzetben erősítjük meg, mint a rajzban látjuk. Ugyanezen állvány egy karikájára felteszszük az *a* higanytartó edényt az *a'* magasabb helyre, és ebből a hosszú kautsuk csövön át *b e* csövet tele töltjük higanynyal. Ezután *b* csapot elzárván, a *d* edény alsó csapját óvatosan kinyitjuk, mikor a higany *d*-be befolyik és a gázt kissé összeszorítja. Ekkor az egész készülék egy kis gazometer. Ha ebből gázt akarunk az eudiometerbe vezetni, *c* csapot kinyitván *b* csapot úgy szabályozzuk, hogy az *a'* tartóból lefolyó higany *b e* csőben körülbelül egy cm-rel magasabban álljon mint *d*-ben. Ez a szint-külömbség szabja meg azt, hogy lassúbb vagy gyorsabb áramban hajtjuk ki a gázt, de a gázáram sebessége teljesen állandó marad, ha a *b* csap jól van beállítva. Egészen így járunk el, ha a *d* edénybe gázt akarunk bevezetni, mikor a gázfejlesztő csövét *c* csappal kötjük össze, csakhogy ekkor a higanytartó edényt magas helyéről *a'*-ról levéve *a* helyzetbe az asztalra teszszük le. Nagyobb méretű ilyen gazometereket is szerkesztettem, melyek a czélnak minden tekin-



3. rajz.

tetben jól megfelelnek. Egy példány szintén a kiállításban van. E gazometereken a *d* edény és *e b* cső össze vannak forrasztva, a szilárd állvány pedig olyan szerkezetű, hogy a gazometer a higanytartóval együtt mindenestül felemelhető és különféle magasságban megerősíthető.

E gazometer nemcsak igen kényelmes, hanem csekély nyomás alatt benne a gáz hónapokon át eltartható a nélkül, hogy levegővel elegyedhetnék.

A leirt eszközök fémrészeit WEBER R. intézeti gépész, az üvegrészeket dr. KISS Károly üvegtechnikai intézete készítették.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)

AZ ADJUNGÁLT BILINEÁR ALAKOK ELMÉLETÉHEZ.

RADOS GUSZTÁV l. tagtól.

Ha

$$C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots \qquad G)$$

az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

határozatlanok lineár helyettesítéseinek oly sorozata, a mely csoportot alkot és e csoport minden helyettesítésére nézve megalkotjuk a neki megfelelő m-dik adjungált helyettesítést, akkor ezen adjungált helyettesítések sorozata:

$$A^{(m)}(C_1), A^{(m)}(C_2), \ldots, A^{(m)}(C_i)^*, \ldots \qquad A^{(m)}(G)$$

— miként ki fogjuk mutatni — szintén csoportot alkot. Ezt a csoportot az eredeti G csoport *m-dik adjungált csoport*jának nevezem és $A^{(m)}(G)$-vel jelölöm.

Ezen adjungált csoportok és az eredeti csoport szerkezete közötti összefüggés tanulmányozása képezi jelen dolgozatom első részének tartalmát. A részletesebb vizsgálat arra az eredményre vezet, hogy az eredeti csoport és ennek adjungált csoportjai között isomorph rokonság áll fönn, a melynek révén az eredeti csoport szerkezetéből az adjungált csoportok összetételére következtethetünk.

A dolgozat második részében az *adjungált bilineár alak* fogalomalkotását hozom be a tárgyalásba. Ennek segítségével

---

* A C helyettesítés m-dik adjungált helyettesítésének jelölésére az $A^{(m)}(C)$ jelet alkalmazom.

bilineár alakokra nézve sikerül a GAUSS-tól eredő közönséges æquivalentia fogalmát a KRONECKER-től tárgyalt absolut æquivalentia fogalmával oly kapcsolatba hozni, a melynek alapján WEIERSTRASS * æquivalentia-tételének új fogalmazásához jutunk. E mellett még egyéb tételek is adódtak ki, a melyek mindannyian az eredeti alak és adjungált alakjainak kapcsolatára vonatkoznak.

Az eredeti alak és adjungált alakjainak elemi osztói között szintén igen jellemző összefüggések állanak fenn. Ezeknek részletesebb tárgyalására — remélem — alkalmam lesz más alkalommal visszatérhetni.

*

I. Adjungált csoportok.

1. *tétel. Két lineár helyettesítés összetételének (szorzatának) m-dik adjungált helyettesítése azonos e két helyettesítés m-dik adjungált helyettesítéseinek összetételével.*

Legyen a két megadott lineár helyettesítés

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n \qquad (C)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

és

$$x_i = p_{i1}\xi_1 + p_{i2}\xi_2 + \cdots + p_{in}\xi_n ; \qquad (P)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

a belőlük összetett helyettesítést, a

$$D = C.P$$

-t, az

$$y_i = d_{i1}\xi_1 + d_{i2}\xi_2 + \cdots + d_{in}\xi_n \qquad (CP)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer fejezi ki, a melyben

$$d_{ik} = c_{i1}p_{1k} + c_{i2}p_{2k} + \cdots + c_{in}p_{nk} ; \qquad (1)$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n)$$

akkor bebizonyítandó, hogy

$$A^{(m)}(D) = A^{(m)}(CP) = A^{(m)}(C)\,A^{(m)}(P).$$

Legyenek az $A^{(m)}(C)$, $A^{(m)}(P)$, $A^{(m)}(D)$ helyettesítések rendre:

* L. Monatsberichte der k. preussischen Akademie 1868 p. 310.

$$Y_i^{(m)} = c_{i1}^{(m)} X_1^{(m)} + c_{i2}^{(m)} X_2^{(m)} + \cdots + c_{i\mu} X_\mu^{(m)} A^{(m)}(C)$$
$$X_i^{(m)} = p_{i1}^{(m)} \Xi_1^{(m)} + p_{i2}^{(m)} \Xi_2^{(m)} + \cdots + p_{i\mu}^{(m)} \Xi_\mu^{(m)} A^{(m)}(P)$$
$$Y_i^{(m)} = d_{i1}^{(m)} \Xi_1^{(m)} + d_{i2}^{(m)} \Xi_2^{(m)} + \cdots + p_{i\mu}^{(m)} \Xi_\mu^{(m)} A^{(m)}(CP)$$
$$\left(i=1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

a hol a $c_{ik}^{(m)}$, p_{ik} és $d_{ik}^{(m)}$ együtthatókat megkapjuk, ha rendre a

$$c_{ik}^{(x)} = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \cdots & c_{i_1 k_m} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \cdots & c_{i_2 k_m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ c_{i_m k_1} & c_{i_m k_2} & \cdots & c_{i_m k_m} \end{vmatrix}, \qquad p_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} p_{i_1 k_1} & p_{i_1 k_2} & \cdots & p_{i_1 k_m} \\ p_{i_2 k_1} & p_{i_2 k_2} & \cdots & p_{i_2 k_m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ p_{i_m k_1} & p_{i_m k_2} & \cdots & p_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

$$d_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} d_{i_1 k_1} & d_{i_1 k_2} & \cdots & d_{i_1 k_m} \\ d_{i_2 k_1} & d_{i_2 k_2} & \cdots & d_{i_2 k_m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ d_{i_m k_1} & d_{i_m k_2} & \cdots & d_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

determinánsokban $i=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ és $k=(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ helyébe az $1, 2, \ldots, n$ elemek bizonyos sorrendben vett m-ed osztályú combinátióit helyettesítjük.

A $d_{ik}^{(m)}$ determináns elemei — a mint ezt az (1) alatti képlet mutatja — a

$$\begin{Vmatrix} c_{i_1 1} & c_{i_1 2} & \cdots & c_{i_1 n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{i_m 1} & c_{i_m 2} & \cdots & c_{i_m n} \end{Vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{Vmatrix} p_{1 k_1} & p_{2 k_1} & \cdots & p_{n k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{1 k_m} & p_{2 k_m} & \cdots & p_{n k_m} \end{Vmatrix}$$

mátrixok soraiból vannak komponálva; tehát $d_{ik}^{(m)}$ a mátrixok szorzására vonatkozó CAUCHY-BINET-féle tétel alapján így állítható elő:

$$d_{ik}^{(m)} = \sum_{(\alpha)} \begin{vmatrix} c_{i_1 \alpha_1} & \cdots & c_{i_1 \alpha_m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ c_{i_m \alpha_1} & \cdots & c_{i_m \alpha_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{\alpha_1 k_1} & \cdots & p_{\alpha_m k_1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p_{\alpha_1 k_m} & \cdots & p_{\alpha_m k_m} \end{vmatrix},$$

a mely kifejezésben az összeadás $(\alpha)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$-re vonatkozik és $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ helyébe az 1, 2, 3, ..., n elemek összes ismétlés nélkül való m-ed osztályú combinatiói helyettesítendők. De minthogy

$$\begin{vmatrix} c_{i_1\alpha_1} & \ldots & c_{i_1\alpha_m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ c_{i_m\alpha_1} & \ldots & c_{i_m\alpha_m} \end{vmatrix} = c_{i\alpha}^{(m)}$$

és

$$\begin{vmatrix} p_{\alpha_1 k_1} & \ldots & p_{\alpha_m k_1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p_{\alpha_1 k_m} & \ldots & p_{\alpha_m k_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{\alpha_1 k_1} & \ldots & p_{\alpha_1 k_m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p_{\alpha_m k_1} & \ldots & p_{\alpha_m k_m} \end{vmatrix} = p_{\alpha k}^{(m)}$$

azért $d_{ik}^{(m)}$ végül ily alakban írható:

$$d_{ik}^{(m)} = \sum_{(\alpha)} c_{i\alpha}^{(m)} p_{\alpha k}^{(m)},$$

$$\left(i, k=1, 2, \ldots, \mu;\ \mu=\binom{n}{m}\right)$$

a mely alak mutatja, hogy az $A^{(m)}(D)$ helyettesítés az $A^{(m)}(C)$ és $A^m(P)$ helyettesítésekből van összetéve, azaz, hogy

$$A^{(m)}(CP)=A^{(m)}(C) \,.\, A^m(P).$$

E tétel n-ről $(n+1)$-re való következtetés útján a lineár helyettesítéseknek akárhány tényezőből álló szorzataira általánosítható. Ha pl.

$$C_1, C_2, \ldots, C_k$$

tetszés szerinti lineár helyettesítések, akkor

$$A^{(m)}(C_1 C_2 \ldots C_k) = \prod_{\alpha=1}^{k} A^{(m)}(C_\alpha);$$

ha

$$C_1=C_2=\ldots=C_k=C,$$

akkor az imént levezetett egyenlőségből az

$$A^{(m)}(C^k) = [A^{(m)}(C)]^k$$

egyenlőséget kapjuk, a mely mutatja, hogy az $A^{(m)}$ jellel kifejezett művelet a hatványozás műveletével felcserélhető.

2. *tétel. Valamely helyettesítés megfordításának m-dik adjungáltja azonos e helyettesítés m-dik adjungáltjának megfordításával.*

Jelöljük rövidség kedveért az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

együtthatórendszerhez tartozó azonos helyettesítést E-vel, akkor a tetszőleges (a zérustól különböző determinánssal biró) C helyettesítés megfordítását, C^{-1}-et, a

$$CC^{-1} = E$$

egyenlet definiálja. Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalára az $A^{(m)}$ műveletet alkalmazzuk, lesz

$$A^{(m)}(C)\ A^{m}(C^{-1}) = A^{(m)}(E);$$

de minthogy

$$A^{(m)}(E) = E$$

következik, hogy

$$A^{(m)}(C)\ A^{(m)}(C^{-1}) = E$$

azaz

$$[A^{(m)}(C)]^{-1} = A^{(m)}(C^{-1}).$$

3. *tétel. Ha a*

$$C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_k, \dots \qquad G$$

helyettesítések sorozata csoportot alkot, akkor e helyettesítések m-edik adjungált helyettesítéseiből alkotott

$$A^{(m)}(C_1),\ A^{(m)}(C_2), \dots, A^{(m)}(C_i), \dots, A^{(m)}(C_k), \dots\ A^{(m)}(G)$$

sorozat szintén csoportot ád.

Ennek bebizonyítására elégséges kimutatni, hogy az $A^{(m)}(G)$ sorozat az $A^{(m)}(C_i)$ és $A^{(m)}(C_k)$ helyettesítésekkel egy időben az $A^{(m)}(C_i)\ .\ A^{(m)}(C_k)$ helyettesítést is tartalmazza. De ez közvetetlenül világos, mert az 1. tétel értelmében

$$A^{(m)}(C_i)\ A^{(m)}(C_k) = A^{m}(C_i C_k)$$

és C_iC_k a G sorozat csoport voltánál fogva G-ben, tehát $A^m(C_iC_k)$ az $A^{(m)}(G)$ sorozatban foglaltatik.

Ebből egyszersmind az is következik, hogy a G minden alcsoportjának $A^{(m)}(G)$-ben megint alcsoport felel meg.

4. *tétel. Valamely csoport minden invariáns alcsoportjának m-dik adjungált csoportjában ismét invariáns alcsoport felel meg.*

Legyen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots, \Gamma_{i_s}, \ldots$$

a G csoportnak invariáns alcsoportja, azaz oly alcsoportja, a mely a G bármely helyettesítésével transformálva, változatlanul marad. Tehát

$$C_s^{-1}\,\Gamma_i\,C_s = \Gamma_{i_s}.$$
$$(i, s = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ha ennek az egyenlőségnek mindkét oldalára az $A^{(m)}$ műveletet alkalmazzuk, lesz:

$$A^{(m)}(C_s^{-1})\,A^{(m)}(\Gamma_i)\,A^{(m)}(C_s) = A^{(m)}(\Gamma_{i_s});$$

de a 2. tételnél fogva

$$A^{(m)}(C_s^{-1}) = [A^{(m)}(C_s)]^{-1}$$

és igy

$$[A^{(m)}(C_s)]^{-1}\,A^{(m)}(\Gamma_i)\,[A^{(m)}(C_s)] = A^{(m)}(\Gamma_{i_s}),$$
$$(i, s = 1, 2, 3, \ldots)$$

de ez az egyenlet mutatja már, hogy

$$A^{(m)}(\Gamma_1),\ A^m(\Gamma_2), \ldots, (A^{(m)}(\Gamma_i), \ldots, A^m(\Gamma_{i_s}), \ldots$$

az $A^{(m)}(G)$ csoportnak invariáns alcsoportja.

5. *tétel. Szakaszos helyettesítés minden adjungált helyettesítése ismét szakaszos.*

Legyen a C szakaszos helyettesítés olyan, hogy k-szoros ismétlése az azonos helyettesítésre vezet, azaz

$$C^k = E,$$

akkor

$$A^{(m)}(C)^k = A^{(m)}(E);$$

de minthogy

$$A^{(m)}(C^k) = [A^{(m)}(C)]^k$$

és

$$A^{(m)}(E) = E,$$

azért

$$[A^{(m)}(C)]^k = E;$$

de ez az egyenlőség mutatja, hogy $A^{(m)}(C)$ oly szakaszos helyettesítés, a melynek rendszáma k-nak osztója.

II. Adjungált bilineár alakok.

A

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i y_\varkappa$$

bilineár alak együttható rendszeréből alkotható összes m-edfokú determinánsok a

$$c_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \dots & c_{i_1 k_m} \\ \vdots & & & \\ c_{i_m k_1} & c_{i_m k_2} & \dots & c^{i}_{m\, k_m} \end{vmatrix}$$

determinánsból adódnak ki, ha ebben $i = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ és $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ helyébe az 1, 2, 3, $\dots$, n elemek bizonyos sorrendben vett m-ed osztályú ismétlés nélkül való combinatióit helyettesitjük. Ha e

$$c_{ik}^{(m)}$$

$$\left(i, k = 1, 2, \dots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

együtthatókkal az

$$A^{(m)}(C) = \sum_{(i)} \sum_{(k)} c_{ik}^{(m)} x_i y_k$$

$$\left(i, k = 1, 2, \dots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

bilineár alakot alkotjuk, akkor ezt a *C m-dik adjungált alakjának* akarom nevezni. Ezen adjungált alakoknak az eredetivel való összefüggését a következő tételekben fejezzük ki.

1. *tétel. Ha a C lineár alakot a*

$$P = (x_i \mid p_{i1} x_1 + p_{i2} x_2 + \dots + p_{in} x_n)$$
$$Q = (y_i \mid q_{i1} y_1 + q_{i2} y_2 + \dots + q_{in} y_n)$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

helyettesítések az

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_{ik} x_i y_k$$

bilineár alakba transformálják, akkor az $A^{(m)}(C)$ m-dik adjungált alak az $A^{(m)}(P)$ és $A^{(m)}(G)$ m-edik adjungált helyettesítésekkel transformálható $A^{(m)}(E)$-be.

Az e_{ik} együtthatók a következő alakokra hozhatók:

$$e_{ik} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\, p_{ri}\, q_{sk} = \sum_{r=1}^{n} d_{rk}\, p_{ri}, \qquad (1)$$
$$(i,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

a hol

$$d_{rk} = c_{r1}\, q_{1k} + c_{r2}\, q_{2k} + \cdots + c_{rn}\, q_{nk}. \qquad (2)$$
$$(r,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Számítsuk ki most már az

$$e_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} e_{i_1 k_1} & e_{i_1 k_2} & \ldots & e_{i_1 k_m} \\ \vdots & & & \\ e_{i_m k_1} & e_{i_m k_2} & \ldots & e_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

determinánst. Ennek elemei, mint azt az (1) alatti kifejezésük mutatja, a

$$\begin{vmatrix} p_{1 i_1} & p_{2 i_1} & \ldots & p_{n i_1} \\ \vdots & & & \\ p_{1 i_m} & p_{2 i_m} & \ldots & p_{n i_m} \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} d_{1 k_1} & d_{2 k_1} & \ldots & d_{n k_1} \\ \vdots & & & \\ d_{1 k_m} & d_{2 k_m} & \ldots & d_{n k_m} \end{vmatrix}$$

mátrixok soraiból vannak komponálva és így a mátrixok szorzási tétele értelmében

$$e_{ik}^{(m)} = \sum_{(r)} \begin{vmatrix} p_{r_1 i_1} & \ldots & p_{r_m i_1} \\ \vdots & & \\ p_{r_1 i_m} & \ldots & p_{r_m i_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{r_1 k_1} & \ldots & d_{r_m k_1} \\ \vdots & & \\ d_{r_1 k_m} & \ldots & d_{r_m k_m} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{(r)} p_{ri}^{(m)}\, d_{rk}^{(m)}, \qquad (3)$$

a hol az összeadásnál $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ helyébe az $1, 2, \ldots, n$ elemek összes ismétlés nélkül való combinatio (a megállapított sorrendben) behelyettesítendők. A

$$d_{rk}^{(m)} = \begin{vmatrix} d_{r_1 k_1} & d_{r_1 k_2} & \ldots & d_{r_1 k_m} \\ \vdots & & & \\ d_{r_m k_1} & d_{r_m k_2} & \ldots & d_{r_m k_m} \end{vmatrix}$$

determináns elemei — a mint ezeknek (2) alatt felírt részletes kifejezésök mutatja — a

$$\begin{Vmatrix} c_{r_1 1} & c_{r_1 2} & \cdots & c_{r_1 n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{r_m 1} & c_{r_m 2} & \cdots & c_{r_m n} \end{Vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{Vmatrix} q_{1k_1} & q_{2k_1} & \cdots & q_{nk_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{1k_m} & q_{2k_m} & \cdots & q_{nk_m} \end{Vmatrix}$$

mátrixok soraiból vannak összetéve és így

$$A_{rk}^{(m)} = \sum_{(s)} \begin{vmatrix} c_{r_1 s_1} & \cdots & c_{r_1 s_m} \\ \vdots & & \\ c_{r_m s_1} & \cdots & c_{r_m s_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{s_1 k_1} & \cdots & q_{s_m k_1} \\ \vdots & & \\ q_{s_1 k_m} & \cdots & q_{s_m k_m} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{(s)} c_{rs}^{(m)} q_{sk}^{(m)}$$

a hol az összeadásnál megint $s=(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ helyébe 1, 2, ..., n összes m-ed osztályú combinatiói (a megállapított sorrendben) behelyettesítendők. Ha $A_{rk}^{(m)}$ talált értékét a (3) alatti kifejezésbe behelyettesítjük, az

$$e_{ik}^{(m)} = \sum_{(r)} \sum_{(s)} c_{rs}^{(m)} p_{ri}^{(m)} q_{sk}^{(m)}$$

egyenlőséget kapjuk, a mely világosan mutatja, hogy az $A^{(m)}(P)$ és $A^{(m)}(Q)$ helyettesítések az $A^{m}(C)$ alakot az $A^{(m)}(E)$ alakba viszik át.

2. *tétel. Arra, hogy két bilineár alak aequivalens legyen, szükséges és elegendő, hogy megfelelő adjungált alakjaik a szónak* KRONECKER-*től* * *eredő értelmében absolute aequivalensek legyenek.*

Két bilineár alak, a melynek együtthatói rationális egész mennyiségek, (egész számok vagy bizonyos parameter egész függvényei), akkor æquivalens, ha egész együtthatókkal ellátott helyettesítések segítségével kölcsönösen egymásba transformálható. Legyen C az E alakkal ilyen értelemben æquivalens és legyenek P és Q amaz egész együtthatós helyettesítések, a melyek C-t az E-be transformálják, akkor az $e_{ik}^{(m)}$ (4) alatti kifejezése mutatja, hogy az

$$e_{ik}^{(m)} \equiv 0 \,(\text{modd. } c_{11}^{(m)},\ c_{12}^{(m)},\ \ldots,\ c_{\mu\mu}^{(m)})$$
$$\left(i, k=1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

* L. Crelle, Journal, 92. k. 89. l.

congruentiák fennállanak, de minthogy E ugyancsak egész helyettesítések segítségével átvihető C-be, azért az 1. tétel következtében egyszersmind

$$c_{ik}^{(m)} \equiv (\text{modd. } e_{11}^{(m)}, e_{12}^{(m)}, \ldots, e_{\mu\mu}^{(m)}), \quad \left(i, k = 1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

úgy hogy

$$(c_{11}^{(m)}, c_{12}^{(m)}, \ldots, c_{\mu\mu}^{(m)}) \sim (e_{11}^{(m)}, e_{12}^{(m)}, \ldots, e_{\mu\mu}^{(m)}), \quad (m = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

de ez a relatio maga után vonja az $A^{(m)}(C)$ és $A^{(m)}(E)$ alakok absolut æquivalentiáját. Ezzel a fönt említett feltétel szükséges volta be van bizonyítva.

Hogy e feltétel egyszersmind elegendő, onnan tünik ki, hogy ha az (5) alatti æquivalentiák fennállanak, akkor a C alak együttható rendszerének m-edfokú aldeterminánsaiból (a $c_{ik}^{(m)}$ mennyiségekből) alkotott legnagyobb közös osztó megegyezik az E determinánsának m-edfokú aldeterminánsaiból (az $e_{ik}^{(m)}$-kból) alkotott legnagyobb közös osztóval, de ekkor E és C összes elemi osztói is megegyezők és így WEIERSTRASS-nak idézett tétele értelmében C az E-vel æquivalens.

3. *tétel. Ha a P helyettesítés a*

$$C = \sum_{i=k}^{n} \sum_{i=1}^{n} e_{ik}\, x_i\, x_k$$

négyzetes alakot az

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i^2$$

négyzetösszegbe transformálja, akkor az $A^{(m)}(C)$ alakot az $A^{m}(P)$ helyettesítés alakítja át négyzetösszeggé.

Ha ugyanis az $A^{(m)}(C)$ quadratikus alakra az $A^{(m)}(P)$ helyettesítést alkalmazzuk, az 1. tétel értelmében az $A^{(m)}(E)$ alakot nyerjük; de minthogy négyzetösszeg minden adjungált alakja ismét négyzetösszeg, $A^{(m)}(E)$ is az lesz és így az $A^{m}(P)$ helyettesítés az $A^{(m)}(C)$ alakot valóban négyzetösszeggé transformálja.

4. *tétel. Orthogonalis helyettesítés minden adjungált helyettesítése ismét orthogonális.**

* V. e. «Az orthogonális helyettesítések elméletéről» című dolgozatommal. Math. és Természettud. Értesítő X. k. 16. l.

Ha ugyanis a P helyettesítés orthogonális, akkor a

$$C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

alakot önönmagába transformálja, de akkor az $A^{(m)}(P)$ helyettesítés az

$$A^{(m)}(C) = \sum_{i=1}^{u} x_i^2$$
$$\left(\mu = \binom{n}{m}\right)$$

alakot fogja önönmagába transformálni és így $A^{(m)}(P)$ valóban orthogonális helyettesítés.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1896 április 20.-án tartott üléséből.)

AZ ALSÓ ÉS FELSŐ LÉGÁRAMLATOK A MAGYAR ALFÖLD KÖZEPÉN.

HEGYFOKY KABOS, turkevei lelkésztől.

BEVEZETÉS.

A nagy alföldön, Turkevén, melynek geografiai fekvése 88 meter tengerszíni magasság, 47° 6′ északi szélesség s 20° 45′ Gr.-től számitott keleti hosszuság által van meghatározva, az 1893. évi szeptember 29. napjától kezdve oly megfigyelésekkel foglalkozom, melyeknek czélja: egyfelől a különböző felhőalakok vonulási sebességét év- és napszakok szerint kideríteni, másfelől pedig megállapítani azon viszonyt, mely a szél és felhővonulás iránya között létezik, valamint feltüntetni a fordulatok gyakoriságát és mekkoraságát a föld szinén és a felhők regiojában honos áramlatoknál.

E czél elérése végett 1894-ben márczius 8-tól s 1895-ben márczius 16-tól szeptember 30-ig reggeli 5-től esti 9 óráig minden páratlan számú órában és délután 2 órakor, tehát naponta 10 ízben feljegyeztem a borulat terjedelmét, a szél irányát és erejét, valamint a felhőalakok vonulási irányát és látszólagos sebességét. A téli napokon, mikor néha 1—2 hétig is folyvást egyszínű szürke lepel borítja az eget, melyből olykor-olykor hó is hull, s melyet hol nimbus, hol stratus, hol alto-stratus névvel jelölhetni, megelégedtem azzal, hogy rendesen reggel 7, délután 2, és este 9 órakor, s csak elvétve máskor is, observáltam.

Eszközeim voltak: erősségtáblával ellátott szélvitorla és nyolcz 0·6 méter hosszú átmérővel bíró drótkör, mely szálfa végére 5·4 meternyire a talaj fölött volt megerősitve.

Az eredményről, melyet egy évig (1893 okt.—1894 szept.) folytatott megfigyeléseim szolgáltattak, röviden már beszámoltam

1895 febr. 18.-án.[1] Jelen alkalommal kissé részletesebben szándékozom megismertetni az 1893 októbertől 1895 szeptemberig, tehát 2 teljes éven át gyűjtött s mondhatom szemrontás árán gyűjtött adataimat.

Azt hiszem, hogy ezzel némileg hozzájárulok első sorban magyar Alföldünk légáramlati viszonyainak megismertetéséhez, másod sorban pedig a meteorologia általános érvényű tételeinek tisztázásához. Hiszen hazánk klimatikus viszonyairól újabb, meteorologiai hálózatunk 1871-ben történt szervezése óta eszközölt megfigyeléseink alapján még vajmi keveset tudunk, s így csekély jelentőségűnek látszó dolgozattal is kötelességünk e nemű ismereteink terjesztéséhez hozzájárulni. Egyébiránt 1 vagy 2 óránkinti felhőmegfigyelések egyáltalában még igen ritkán történnek, úgy hogy SATKE, midőn Tarnopolban az 1894. évi nyáron eszközölt e nemű megfigyeléseit megismertette, feljogosítva érzé magát kinyilatkoztatni, mikép a felhők sebességét illető 2 óránkinti észleleteket előtte senki sem végzett.[2]

A felhők sebességét feltüntető adatok fontosságát HANN is kiemeli azon értekezésében, melyet 1894 junius 14.-én a bécsi tudományos akadémiában tartott a Sonnblicken és egyéb hegycsúcsokon mutatkozó szélerő napi periodusáról. Azt tartja ő, hogy csak következetesen végrehajtott óránkénti felhőmegfigyelések, habár csak a nappali viszonylagos sebességre vonatkoznának is, lesznek képesek kideríteni, vajjon a szabad légkörben is dél körül mutatkozik-e a sebesség minimuma, miként magas hegyeken.[3]

A szél fordulása napközben az utóbbi években többször képezte vitatkozás tárgyát. Magam is iparkodtam ehhez adatokat szolgáltatni, a mennyiben a Sonnblicken történt óránkinti följegyzéseket,[4] valamint saját megfigyeléseimet[5] ezen czélból tanul-

[1] Math. és Természettud. Értesitő. XIII. köt., 2. füzet, 181. l.

[2] Meteorol. Zeitschrift. 1895. évf. 145. l.

[3] Die tägliche Periode der Windstärke au dem Sonnblickgipfel . . . 50. lap.

[4] Die Drehung der Windfahne auf dem Sonnblick. Meteorol. Zeitschrift. 1894. évf. 315. l.

[5] Meteorol. Zeitschrift. 1895. évf. 351. l. és Math. és Természettud. Értesitő. XII. köt., 7—8. füz., 378. l.

mányoztam. Most 2 óránkinti észleleteim által oly adatoknak jutottam birtokába, hogy a szél fordulását a különböző magasságban elterülő légrétegekre vonatkozólag is kutathatom.

I. A borulat.

Mielőtt a légáramlatok bemutatására áttérnék, röviden a borulat napi szakaszával fogok foglalkozni. Az adatok feljegyzése 1894 márczius 8.-ától s 1895 márczius 16.-ától kezdve szeptember 30.-áig történt.

1. A borulat terjedelme.

A följegyzés 3435 esetre vonatkozik. A délutáni 3, 5, 7 óra kivételével, melyek mindenikére 381 eset jut, a többi óra egyenkint 382 adattal szerepel. A következő számok %-ban tüntetik fel az égnek azon részét, melyet a felhők átlagosan elboritottak.

Óra	5	7	9	11	1	3	5	7	9	5 r.—9 e.
	reggel				délután					
Borulat	40·1	38·3	**37·6**	41·5	45·7	**47·4**	46·0	42·9	37·7	41·9

A borulat maximuma délután 3 órakor, tehát körülbelül a hőfok maximalis állása idején jelenkezett. Hőség és borulati terjedelem között e szerint a nyári hónapokban kapcsolat mutatkozik, mely akként létesül, hogy a hő okozta függőleges áramlás oly regioig emelkedik, hol alacsonyabb hőfok mellett a párák lecsapódása végbe mehet. A borulat minimuma reggel és este 9 órakor mutatkozik. Nagyon valószínű, hogy ugyanakkor leszálló áramlások fejlődnek ki, melyek a felhőket részint feloszlatják, részint keletkezésöket gátolják.

A közlött számok arról is bizonyságot tesznek, hogy a borulat délelőtt rendesen kisebb terjedelmű szokott lenni, mint délután; a mennyiben 5—11 óra között a szemhatár 39, délután pedig 1—9 óra között 44%-a felhővel volt borítva. Ennek oka abban keresendő, hogy a nyári félév tipikus felhője a cumulus,

mely tudvalevőleg a nap melegebb óráiban felszálló légáramlat következtében szokott keletkezni s így nagyobb terjedelmű borulatot eredményezni.

2. A borulati fokok gyakorisága.

Itt szorosan csak a két nyári félév (ápr.—szept.) följegyzéseire szoritkozom. Azon tény, hogy az ég csak 42 századrésznyire volt felhővel borítva, arra enged következtetni, hogy a borulati fokok között azoknak kellett gyakrabban előfordulniok, melyek az elfogadott 0—10-es fokozatban 0-tól 5-ig találkoznak. És valóban, ha a borulati fokok nyakoriságát 100—100 esetre vonatkoztatva fejezzük ki. azon eredményre jutunk, hogy az egyes fokoknak következő %-ok felelnek meg:

A borulati fok	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Összeg
A borulati fokok gyorsasága %-ban	30·2	14·1	6·6	4·2	4·0	3·1	3·1	4·1	4·2	7·7	18·7	100·0

Leggyakrabban a két szélsőséggel találkozunk, vagy teljesen tiszta, vagy teljesen borult az ég; legritkábban a 4—6 közötti fokok fordulnak elő.

Érdekes annak kimutatása, hogy mily gyakran találkozunk az egyes borulati fokokkal a nap 9 megfigyelő órájában. A következő csoportosítás e czélra szolgál.

Borulati fok	A borulati fokok gyakorisága									Összeg
	5	7	9	11	1	3	5	7	9	
	óra reggel				óra délután					
0	135	145	147	100	69	60	78	106	**149**	993
1—3	74	72	77	99	112	**115**	104	88	75	816
4—6	17	24	25	44	**59**	58	39	33	27	336
7—9	44	56	54	62	70	71	**80**	63	31	531
10	82	69	63	61	56	61	64	75	**84**	615

Ime, míg a megszakgatott borulás (1—9 fok) esetei a nap legmelegebb óráiban fordulnak elő leggyakrabban, addig a teljes borulás és borulatlanság leginkább este mutatkozik. Megszakgatott felhőzettel (1—9 fok) legritkábban reggel és este, teljesen borult vagy teljesen tiszta éggel pedig délután 1—3 óra tájban találkozunk. A teljesen borult szemhatár reggeltől dél felé gyakran tisztulni, a teljesen tiszta pedig elborulni szokott. A téli félévben épen ellenkezőleg alakulnak e viszonyok.

3. A felhőalakok gyakorisága.

A felhőalakok közül a cirrust és cirro-stratust a felső, a cirro-cumulust, alto-cumulust és alto-stratust a közepes, a többit az alsó légrétegekben előforduló felhőzethez szokták számitani; jóllehet a cumulo-nimbus, a zivatarfelhő, igen gyakran a közepes regioba, mintegy 5000 méter magasságig is emelkedik. Ezt szem előtt tartva lássuk, mily gyakran találkozunk napközben alsó, közepes és felső felhőkkel általában s mily gyakran feltünőbb alakjaikkal különösen.

A következő kimutatásba mind azokat az eseteket vettem fel, mikor a két nyári félévben (ápr.—szept.) felhő mutatkozott, nem tekintve azt, vajjon lehetett-e vonulásának irányát meghatározni.

Gyakoriság:	5	7	9	11	1	3	5	7	9	Összeg
	óra reggel				óra délután					
Az alsó felhőknél ...	159	139	121	260	**301**	297	267	241	158	1943
A közepes felhőknél	115	110	**129**	110	97	100	114	116	87	978
A felső felhőknél ...	97	109	115	100	122	118	134	**135**	84	1014

Leggyakrabban találkozunk alsó felhőkkel délután 1, közepesekkel reggel 9, és felsőkkel délután 5—7 órakor; legritkábban pedig alsókkal reggel 9, közepesekkel és felsőkkel este 9 órakor.

Ha 3—3 terminus órát együvé foglalunk, azon eredményt kapjuk, hogy 100—100 esetben előfordulnak:

	5+7+9	11+1+3	5+7+9
	óra között		
Az alsó felhők	21·5	**44·2**	34·3
A közepes felhők	**36·2**	31·4	32·4
A felső felhők	31·7	33·5	**34·8**

Leghatározottabban kidomborodik a napi periodus az alsó felhőknél, és pedig maximummal a nap legmelegebb óráiban; a mi arra mutat, hogy ezek leginkább fölszálló meleg áramlások folytán keletkeznek. Kevésbbé élesen mutatkozik a napi szakasz a közepes és felső felhőknél; a közepeseknél a maximum a nap felkelte után néhány órával később áll be, a felsőknél pedig néhány órával nap nyugta előtt szokott az beköszönteni.

A mi az egyes felhőalakok napi előfordulását két nyári félévünkben (ápr.—szept.) illeti, arról a következő csoportositás adhat felvilágositást.

Gyakoriság:	5	7	9	11	1	3	5	7	9	Összeg
	óra reggel				óra délután					
A fracto-cumulusnál	4	7	16	28	40	**42**	40	35	6	218
A cumulusnál	7	9	24	158	**206**	189	139	40	5	777
A strato-cumulusnál	94	52	29	35	34	49	47	**110**	79	529
Az alto- / A cirro- } cumulusnál	78	85	**87**	63	61	43	73	60	31	581

Az alto- és cirro-cumulus alakok leggyakrabban reggel 9 és 7 óra körül tünnek fel, egy másodrendű maximum pedig délután 5 órakor mutatkozik, épen akkor, mikor a cirrus és cirro-stratus alakok főmaximuma jelenkezik. Valamint délután az egyik csoportnak főmaximuma a másik csoportnak másodrendű maximumával egyidejűleg szokott beköszönteni, úgy van az délelőtt is 9 órakor, mikor az alto- és cirro-cumulus csoportnak főmaximumával a cirrus és cirro-stratus alakoknak másodrendű maximuma találkozik.

A strato-cumulus felhők leggyakrabban a nap hűvösebb óráiban mutatkoznak, este és reggel; legritkábban dél tájban.

Épen ellenkező napi periodust találunk a cumulusnál; a maximum a nap legmelegebb óráira, a minimum a legalacsonyabb hőfok idejére esik.

A fracto-cumulus részben a cumulus, részben a strato-cumulus napi szakához alkalmazkodik.

Ha már most azon kérdést vetjük fel, mekkora valószínűséggel számíthatunk arra, hogy a reggeli, déli és esti órákban bizonyos felhőalakkal találkozandunk, akkor a két nyári félév adataira támaszkodva azon feleletet adhatjuk, hogy annak valószínűsége a következő:

	5+7+9	11+1+3	5+7+9 óra között
A fracto-cumulusnál	·12	**·51**	·37
A cumulusnál	·05	**·71**	·24
A strato-cumulusnál	·33	·22	**·45**
Az alto- és cirro-cumulusnál	**·43**	·29	·28
A cirrus- és cirro-stratusnál	·32	·33	**·35**

Leghatározattabban mutatkozik a napi periodus a cumulus- és fracto-cumulusnál, tehát a legalsóbb alakoknál; legkevésbbé pedig a cirrus- és cirro-stratusnál, azaz a legfelsőbbeknél.

E ténynek constatálása igen fontos gyakorlati szempontból. A meteorologiai megfigyelések nálunk rendesen naponta három ízben történnek, úgy mint: reggel 7, délután 2, és este 9 órakor. Ha felhőtanulmányokkal akarnánk foglalkozni, e három terminust okvetlenül meg kellene változtatnunk s a feljegyzést oly időben eszközölnünk, midőn az illető felhőalak feltünésének maximuma jelenkezik. Igy, hogy minél rövidebb idő alatt megtudhassuk, honnan jönnek leggyakrabban a cirrus és cirro-stratus alakok, délután 5—7 óra tájban kellene észlelnünk; hogy ugyanezt az alto- és cirro-cumulusra vonatkozólag megállapíthassuk, reggel 7—9 órakor kellene megfigyelésekkel foglalkoznunk.

II. A légáramlatok.

A légáramlatok följegyzése 16 irány szerint történt ép úgy a szélnél, mint a felhők vonulásánál. Szemügyre veszem előbb az

áramlatok gyakoriságát, majd látszólagos sebességüket és fordulásukat, végre bemutatom a viszonyt, mely az alsó és felsőbb áramlatok iránya között fenáll, vagyis a függőleges elrendezést.

1. A légáramlatok gyakorisága.

E helyütt csak a két nyári (ápr.—szept.) félév alatt megfigyelt áramlatokkal fogunk megismerkedni, és pedig először általában, majd részletesen órák szerint történt csoportosítás alapján.

a) Az áramlatok általában véve.

Hogy az áttekintés könnyebb legyen, a 16 irányt 8 irányra redukáltam. A gyakoriság eseteit, valamint a *C* rovatban álló szélcsend, illetőleg felismerhetetlen irányú vonulás gyakoriságát a következő csoportosításban mutatom be.

Gyakoriság:	*N*	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	*C*	Összeg
A szélnél	278	**517**	189	189	272	308	337	335	866	3291
Az alsó felhőknél ...	187	117	87	87	168	357	**402**	342	254	1991
A közepes felhőknél ...	69	29	34	37	57	**242**	212	120	216	1016
A felső felhőknél ...	66	25	35	41	55	150	**221**	186	242	1021

A szél északkeletről és a nyugoti negyedből fúvott leggyakrabban, a felhők kizárólag csak a nyugoti negyedből vonultak leginkább; de míg az alsóknál SW, W, NW csaknem egyaránt gyakran szerepel, a közepeseknél főkép SW és W, a felsőknél pedig W és NW a kiindulás leggyakrabbi pontjai. Legritkábbak a keleti és délkeleti áramlatok.

b) Az áramlatok a terminus órákban.

Hogy a tipikus jellemvonások mennél hívebben felismerhetőkké váljanak, a 16 irányt a szemhatár 4 főtájára redukálom. Ezen eljárást végrehajtván, a következő eredmény áll elő.

Gyakoriság:		5	7	9	11	1	3	5	7	9	Összeg	%
		óra reggel				óra délután						
A szélnél	*N*	52	69	88	88	**96**	88	95	70	57	704	29·0
	E	47	66	**75**	69	61	61	58	52	55	544	22·4
	S	38	57	75	**86**	76	67	51	35	35	520	21·4
	W	53	57	71	85	88	**96**	91	62	55	658	27·2
	C	176	117	57	38	45	53	70	146	164	866	—
Az alsó felhőknél	*N*	32	21	24	60	**75**	64	60	48	32	416	23·8
	E	14	13	12	30	**35**	27	26	20	12	189	10·8
	S	33	36	26	56	**65**	55	50	46	25	392	22·5
	W	68	57	46	92	120	**121**	115	82	49	750	42·9
	C	21	16	16	23	16	35	39	46	42	254	—
A közepes felhőknél	*N*	19	**21**	17	14	10	11	17	20	13	142	17·7
	E	9	10	**11**	7	6	7	7	6	5	68	8·5
	S	20	**31**	26	21	21	21	21	21	14	196	24·5
	W	51	**55**	50	40	44	38	47	47	22	394	49·3
	C	17	25	23	27	15	23	23	27	36	216	—
A felső felhőknél	*N*	18	23	16	16	17	18	**27**	25	11	171	22·0
	E	8	6	6	6	10	9	9	**10**	4	68	8·7
	S	19	17	15	15	18	17	**24**	20	7	152	19·5
	W	35	47	48	40	51	37	51	**52**	27	388	49·8
	C	17	15	28	24	30	39	26	26	37	242	—

Reggel és este gyakori a szélcsend. Ha ezt 1-nek veszszük, a szelet reggel 5 és 7 órakor 1·5-del, este 7 és 9 órakor 1·4-del egyenlőnek vehetjük. Reggel 7 és este 7 óra között oly gyakori a szél, hogy a csend és szél közötti viszony 1 : 5·8. Legmozgalmasabb a lég délelőtt 11 órakor, a csend pedig ugyanakkor legritkább.

A szél gyakoriságának maximuma minden iránynál más és más időpontra esik. A keleti iránynál reggel 9, a déli iránynál délelőtt 11, a nyugotinál délután 3 órakor szokott az jelentkezni; az északi iránynál, bizonyára a megfigyelés rövid volta miatt, nem mutatkozik a maximum oly határozottan, a mennyiben délután 1 és 5 órakor csaknem egyforma nagy a gyakorisága. A három előbb említett irány maximuma a nappal együtt látszik keletről nyu-

gotra haladni. Ha az északi szélnél csupán csak a délután 5 órai maximum jelenkeznék, akkor azt mondhatnók, hogy a maximumok vándorlása napközben a nappal egyezőleg halad s 24 óra alatt teljes kört ír le. E tünemény másutt is így jelenkezik.

A felhők regiojában e jelenséggel már nem találkozunk. A mennyire a kevés adatból következtetést vonhatunk, állíthatjuk, hogy a gyakoriság maximuma minden iránynál ugyanegy időben jelenkezik; az alsó felhőknél délután 1 órakor, a közepeseknél reggel 7 órakor, a felsőknél délután 5 órakor.

Míg a szélnél az uralkodó irány az északi, a felhőknél már kivétel nélkul a nyugoti áramlások a leggyakrabbak és pedig annál inkább, minél föntebb járnak a felhőalakok. A keleti felhővonulás azonban fölfelé egyre ritkábbá válik, úgy hogy a közepes és felső regioban már csak 8—9 esettel találkozunk 100 észlelésnél, holott a nyugoti 49—50%-ot mutat fel.

2. A légáramlatok sebessége.

Mindenek előtt a felhők látszólagos sebességével fogok foglalkozni.

A látszólagos sebességet azon másodperczek száma fejezi ki, mely eltelt, míg valamely felhőpont a zenith közelében áthaladt a 0·6 meter átmérővel bíró drótkörön, mely a talaj felett 5·4 meternyire volt rögzítve. Itt tehát csak arról van szó, mennyi idő alatt haladt át a felhőpont azon (5·4 m.) egyenszárú háromszögön, melynek alapvonala, a drótkör átmérője, 0·6 metert tesz. Ezen látszólagos, máskép szögsebességnek nevezett, sebesség a felhők magasságával fordított viszonyban van; minél magasabb a felhő, e sebesség annál kisebb, következőleg annál több másodpercz telik el, míg a felhőpont az alapvonallal szemközt levő szögön áthalad. A látszólagos sebesség ennélfogva épen ellenkezője a valódi sebességnek. A cirrusfelhők látszólagos sebessége legcsekélyebb, holott valódi sebességök a felhők többi alakjához mérve legnagyobb szokott lenni. A valódi magasság és sebesség meghatározásához theodolit vagy photogrammeter és két észlelő lévén szükséges, természetes, hogy egyes megfigyelő ilyen munkát, távol tudományos intézetektől, nem végezhet. Addig, míg a meteorolo-

gusok a felhők valódi magasságát és sebességét meghatározó egyszerű és olcsó eszközöket ki nem találnak, némi szolgálatot a látszólagos sebesség megfigyelése is tehet.

a) A látszólagos sebesség valószínűsége.

Azon kimutatásba, mely itt következik, minden adatot felvettem, melyet 1893 szeptember 29-től 1895 szeptember 30-ig összegyűjtöttem. A téli hónapokban a megfigyelés rendesen három, és csak néha több ízben, a nyári időszakban pedig tíz ízben történt naponta. Előbb osztályoztam az eseteket, 13 osztályba sorozván őket, úgy aztán a valószínűséget számítottam ki. Az eredményt a következő csoportosítás tünteti fel, hol a sűrűbben előforduló esetek másodperczekben kifejezett valószínűségük, a ritkábbak gyakoriságuk szerint szerepelnek.

A valószínűség nagyobb, mint:	30	60	90	120	150 mp.	A gyakoriság nagyobb, mint:	180	360	540 mp.	Összes eset
A stratusnál	·03	—	—	—	—		—	—	—	108
A nimbus-, fracto-nimbus-, fracto-cumulusnál	·45	·12	·04	·01	·007		3	—	—	705
A strato-cumulusnál	·66	·23	·10	·04	·02		7	1	—	552
A cumulusnál	·75	·30	·14	·05	·03		15	1	—	952
Az alto-cumulusnál	·80	·29	·13	·07	·05		18	1	—	575
Az alto-stratusnál	·77	·30	·15	·07	·05		14	—	—	426
A cirro-cumulusnál	·84	·35	·17	·07	·03		4	—	—	267
A cirro-stratusnál	·90	·45	·25	·10	·05		7	—	—	273
A cirrusnál	·95	·54	·31	·17	·09		47	4	3	789

A 30 másodperczet meghaladó sebesség esetei annál gyakoriabbak, minél magasabban jár az illető felhőalak; a stratusnál 100 között 3, a cirrusnál 95 ily esettel találkozunk. 60 másodpercznél nagyobb sebességet a stratusnál már nem lelünk, a cumulusnál 100 között még 30, a cirrusnál 54 eset fordul elő. Hogy 150 másodpercznél is tovább tartana a felhőpont átvonulása a 0·6 meter

átmérőjü drótkörön, az már igen ritkán tapasztalható; a cumulusnál 100 eset között mindössze 3, a cirrusnál 9 ízben.

A 180 másodperczet meghaladó sebesség eseteit már nem valószínűségük, hanem előfordulásuk gyakorisága szerint tüntettem fel. Így például 540 másodpercznél több idő telt el három ízben, és pedig a cirrus átvonulásánál; úgy mint: 1894 április 10.-én 11 órakor délelőtt. midőn az északnyugotról történő vonulás 500, 1894 ápilis 8.-án 5 órakor délután, midőn a dél-délnyugotról jövő áramlás 600, 1895 szeptember 19.-én 11 órakor délelőtt, midőn a nyugot-délnyugotról tartó vonulás 600 másodperczet tett. Ha az időjárási térképeket előveszszük, azon tapasztalatra jutunk, hogy mind a három napon magas légnyomás terült el Európa fölött; és pedig 1894 április 10.-én állomásunk a 760 és 765 millimeteres izobár között feküdt s a maximum 770 millimeterrel a Skandináv félsziget felett terült el; 1894 április 8.-án csaknem azonos viszonyokkal találkozunk, a mennyiben a 769 millimeteres maximum megint a Skandináv félszigetet boritja; 1895 szeptember 19.-én a légnyomás maximuma Közép-Európában van s a 765 millimeteres izobár az Atlanti oczeán francziaországi partjaitól a Fekete tengerig vonul Krakón át, onnan Rómát útjába ejtvén, az Atlantikra kerül vissza, szép kerüléket alkotva.

A legnagyobb sebesség a stratus alaktalan ködtömegeinél tapasztalható s 2 másodperczet tett. Talán még kevesebbet is, csak hogy ennek megállapítása már lehetetlenné válik.

b) A sebesség légnyomási maximumok és minimumok idején.

Azon körülmény, hogy a cirrusnál tapasztalható leglassúbb vonulás három esete légnyomási maximum idején jelenkezett, arra utal, hogy közelebbről szemügyre vegyük a légáramlatok sebességét légnyomási maximumok és minimumok idején. A két év (1893 okt.—1895 szept.) alatt gyűjtött adatokból válogassuk ki azokat a napokat, midőn az izobárok jobbára köralakúaknak vannak időjárási térképeinken feltüntetve, s csoportositsuk őket téli és nyári félév szerint. Ekkép a minimumokra vonatkozólag okt.—márcz. alatt 75, ápr.—szept. hónapokban 61; a maximumokat illetőleg a téli félévben 78, a nyáriban pedig 63 napot találtam.

Számításomat a napi átlagra alapítom; sajnos, hogy a felhőknél néha napján csak egy-egy esettel, sőt olykor egygyel sem rendelkezem, vagy azért, mert felhő nem mutatkozott, vagy pedig, mivel vonulását felismerni nem lehetett. A stratus, fracto-cumulus és fracto-nimbus alakokat alább következő kimutatásomnál tekintetbe nem vettem. Minimumnak a 760 mm.-nél kisebb, maximumnak az ennél nagyobb szamú izobárokat tekintem. A szélnél a 0—10 fokozat, a felhőknél a látszólagos sebesség, másodperczekben kifejezve, értendő.

A légnyomási maximumok és minimumok idején a légáramlatok sebessége a következőnek bizonyul.

Sebesség	Minimum				Maximum			
	A szél	Az alsó felhők	A közepes felhők	A felső felhők	A szél	Az alsó felhők	A közepes felhők	A felső felhők
Téli félév	2·17	27	39	61	1·11	48	55	103
Nyári félév	2·26	37	53	62	0·89	73	77	95

Ezen adatokból kiderül, hogy a légáramlatok sebessége a talajtól kezdve a legfelsőbb cirrusig minden légrétegben a téli félévben épen úgy, mint a nyáriban, nagyobb szokott lenni barometer-minimumok, mint maximumok idején.

c) A látszólagos sebesség a téli és nyári félévben.

Az imént bemutatott adatok is már arra engednek következtetni, hogy a felhők télen gyorsabben vonulnak, mint nyáron. Lássuk tehát, vajjon összes két évi anyagunk szintén a mellett bizonyit-e? Minthogy azonban a téli hónapokról jóval kevesebb adattal rendelkezünk, mint a nyáriakról, tökéletes párvonalasságot ne keressünk a különböző alakoknál. Ennek elérése végett bizonyára tovább kellene még végezni a megfigyeléseket.

A látszólagos sebesség, másodperczekben kifejezve s a 0·6 m. átmérőjű körre vonatkoztatva, következő:

Sebesség:	Stratus	Nimbus. Fr.-cum. Fr.-nb.	Strato-cumulus	Cumulus	Alto-cumulus	Alto-stratus	Cirro-cumulus	Cirro-stratus	Cirrus
Téli félév	15	26	40	37	45	42	60	59	70
Nyári félév ...	13	39	54	60	68	67	65	75	93
Különbség	−2	+13	+14	+23	+23	+25	+5	+16	+23

A legalsóbb felhőalak, a stratus kivételével, valamennyi lassabban vonul nyáron, mint télen. A különbség legkisebb a cirro-cumulusnál. Valószínű, hogy ezt a téli megfigyelések csekély száma (57) okozza.

Azon tényből, hogy a légnyomási depressiók kengyelfutói a cirrusok, némi útbaigazítást kapunk arra nézve, vajjon nem depressió hatása alá került-e időjárásunk? Ha a cirrusok a szokottnál gyorsabban vonulnak, nagy valószínűséggel időváltozásra, depressiós időjárásra számíthatunk; télen melegedésre, nyáron hűvösödésre, továbbá fokozódó borulatra és talán csapadékra is.

d) A sebesség a szemhatár tájai szerint.

A sebességet a szélnél a 0—10 fokozat, a felhőknél másodperczek szerint a többször említett drótkörre vonatkoztatva tüntetem fel, még pedig a két esztendő alatt feljegyzett valamennyi adat alapján, úgy hogy itt is ugyanazon összegek szerepelnek, mint a 2. *a)* alatti kimutatásnál. A 16 irányt a szemhatár négy főtája szerint redukáltam. Az eredményt a következő csoportosításban láthatjuk.

Sebesség:	A szemhatár negyede:				Átlag
	N	*E*	*S*	*W*	
A szélnél	2·19	1·85	2·11	**2·46**	2·18
A str.-, fr.-cm.-, fr.-nb.- és nimbusnál	39	42	35	**29**	34
A strato-cumulusnál	55	78	54	**43**	52
A cumulusnál	59	75	61	**53**	58
Az alto-cumulusnál	70	73	67	**51**	61
Az alto-stratusnál	76	71	67	**53**	62
A cirro-cumulusnál	65	102	70	**58**	64
A cirro-stratusnál	68	95	89	**64**	72
A cirrusnál	81	127	105	**79**	87

A föld színétől a legfentebb járó cirrus szintájáig valamennyi légrétegben a nyugoti áramlatok jóval felülmúlják sebesség tekintetében a többieket, kiváltképen a keletieket. Ha ezen utóbbiakét 1-nek veszszük, a nyugotiakét 1·54-nek vehetjük. A bemutatott adatok ezen a keleti és nyugoti áramlatok között mutatkozó viszonyt állandónak tételezik fel az alsó, a közepes és a felső felhők regiójára nézve; kivétel csak a szélnél jelenkezik, hol a keleti szelek viszonya a nyugotiakhoz 1 : 1·33, tehát kisebb mértékűnek tűnik fel.

e) A szél és a felhők sebességének viszonya.

Az imént constatált tényből, hogy a légáramlatok sebességének maximuma és minimuma a szélnél ép úgy, mint a felhőknél, a szemhatár ugyanazon pontjára esik, könnyen arra a következtetésre juthatnánk, hogy annak oka valószínűleg az, mikép a szél és felhők között bizonyos viszony áll fenn, melynél fogva közöttök a sebesség egyformán változik, még pedig akként, hogy sebesebb felhővonulásnak gyorsabb szél, csendesebb szélnek lassúbb felhővonulás felel meg. Hogy ez az alsó felhőkre nézve csakugyan így van, kitünik a következőkből.

Előbb a két téli félévnek 7, 2, 9 órai, majd a két nyári félévnek reggeli (5, 7, 9), déli (11, 1, 3) és esteli (5, 7, 9 órai) feljegyzéseit, végre mindkét évét csoportositom a szél és az alsó felhőkre vonatkozólag. A szélerőnek megfelelő látszólagos felhősebesség másodperczekben kifejezve következő:

A szél ereje:	Téli félév	Nyári félév.				2 teljes év		
	Óra 7+2+9	Reggel 5+7+9	Dél 11+1+3	Este 5+7+9	Átlag	Átlag	Diff.	Eset
0	58	55	77	70	68	66	10	356
1	38	45	64	63	59	56	8	481
2	30	40	54	55	51	48	9	360
3	20	26	44	44	41	39	8	293
4	24	22	31	40	32	31	5	152
5	22	18	26	32	27	26	4	73
6	20	17	23	31	23	22	6	34
7	15	—	16	20	16	16	—	9
8	7	—	—	27	27	17		4

E táblázatból világosan kitűnik, hogy télen úgy, mint nyáron, reggel és este úgy, mint délben fokozódó erejű szélnek növekedő sebességű felhővonulás felel meg. Kivétel csak a téli félév 3 erejű szelénél, valamint a nyári félév 8 erejű szelénél este mutatkozik. Okát az esetek csekély voltában kereshetjük, kiváltképen a nyári félévben, hol a 8 erejű szélnél mindössze 2 eset szerepel.

Ha már most meg akarnók tudni, micsoda valószínűséggel számíthatunk arra, hogy bizonyos erejű szélnél milyen látszólagos sebességgel fognak vonulni az alsó felhők, akkor a következő kimutatás útba fog igazítani. Az alsó felhők sebességének valószínűsége nagyobb, mint:

Milyen fokú szél idején?	20	40	60	80	100 mpercz
0	·93	·63	·36	·25	·15
1	·90	·54	·28	·15	·01
2	·83	·45	·20	·11	·05
3	·73	·33	·12	·07	·03
4	·66	·25	·05	·02	(1 eset)
5	·57	·14	·04	·02	(1 eset)
6	·35	·06	—	—	—
7	·22	—	—	—	—
8	·20	—	—	—	—

E csoportosítás tanúsítja, hogy a gyengébb erejű szeleknél jóval többször találkozunk oly sebességgel, midőn az alsó felhők 20 másodperccnél lassabban vonulnak, mint a nagyobb erejű szeleknél. Például szélcsend idején 100 eset között 93, 7 fokú szélkor pedig csak 22 ízben tapasztalhatni, hogy az alsó felhők 20 másodperccnél lassabban vonulnának; az első esetben tehát 7, a másodikban pedig 78 ízben fordul elő 20 másodperccnél gyorsabb sebesség.

A szél és alsó felhők sebessége között fenálló kapcsolat a nyári félév tipikus alakjánál, a cumulusnál is szépen kivehető; de az alto-cumulusnál, a közepes magasságban járó felhőknek eme fajánál, már kevésbbé határozottan mutatkozik az. E két felhőalaknak látszólagos sebessége ugyanis másodperczekben kifejezve a következő:

A szél ereje:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Sebesség másodperczben									
A cumulusnál	92	71	60	48	40	30	24	17	—
Az alto-cumulusnál	88	61	73	57	44	50	35	45	—
Az alto-cumulusnál	73		66		46		38		—
Az esetek:									
A cumulusnál	82	158	136	123	50	21	15	5	—
Az alto-cumulusnál	93	120	82	61	16	9	2	1	—

Mig a cumulus látszólagos sebessége a szél minden fokának erősbödéséhez mérve növekedik, az alto-cumulusnál e növekedés szabályos járást csak úgy mutat, ha 2—2 fokú szélhez mérjük gyorsaságát. Természetes, hogy e párvonalasságot nem minden egyes esetnél, hanem csak több esetnek átlagánál tapasztalhatni.

f) A sebesség napi szakasza.

Már az előbbeni pont alatt volt alkalmunk tapasztalni, hogy ugyazon erejű szélnél gyorsabban vonulnak az alsó felhők reggel (5, 7, 9 órakor), mint délben és este. Lássuk már most részletesen, miképen alakul a sebesség napi periodusa a légkör különböző magasságában levő rétegek áramlatainál.

Az adatok, melyek következő kimutatásunk alapját teszik, a

két nyári félévből valók, az 1894. év márczius 8-tól szeptember 30-ig s az 1895. évi márczius 16-tól szeptember 30-ig terjedő időszakból. A szélnél a 10-es fokozat, a felhőknél a többször említett drótkörre vonatkoztatott másodperczek értendők.

A sebesség a nap páratlan óráiban reggel 5-től este 9-ig következő:

Sebesség:	5	7	9	11	1	3	5	7	9	5—11 d. e.	1—9 d. u.	Napi átlag
	óra reggel				óra délután							
A szélnél	0·79	1·18	1·83	2·12	**2·22**	2·18	1·79	1·06	1·03	1·52	1·66	1·58
Az alsó felhőknél	48	47	**33**	43	52	53	51	56	58	42	53	50
A közepes felhőknél	69	67	66	63	61	**56**	57	63	77	67	62	64
A felső felhőknél	78	81	82	86	84	90	86	93	**72**	82	88	85

A sebesség maximuma a szélnél délután 1, az alsó felhőknél délelőtt 9, a közepeseknél délután 3, a felsőknél pedig este 9 órakor mutatkozik. Ha azonban a felső felhők esti 9 órai adatait, melyek mindössze 19 esetre vonatkoznak, tekintetbe nem vennők, úgy a maximumot reggel 5 órára kellene tennünk. Úgy látszik tehát, mintha a cirrus sebessége nagyobb volna a nap hűvösebb, mint melegebb óráiban.

A sebesség a szélnél kisebb délelőtt (5—11 óra közt), mint délután (1—9 óra között); az alsó felhőknél megfordítva, délelőtt nagyobb, mint délután; a közepes felhők a széllel, a felsők az alsó felhőkkel egyeznek a látszólagos sebesség napi szakaszát illetőleg.

A szélnél nem annyira a délután 1—3 óra tájban jelenkező maximum, mint annak kimutatása érdemel figyelmet, hogy sebessége reggel 7 és 9 óra között legnagyobb mértékben fokozódik. S e tény épen így mutatkozik a Kalocsán,[1] mint az Ó-Gyallán,[2] Bécsben [3] és Berlinben [4] történt regisztráló műszerek följegyzései-

[1] Fényi szives értesítése alapján; az anyag kissé hézagos.

[2] Az ó-gyallai központi observatorium havi jelentései szerint.

[3] Hann. Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen zu Wien. 44. l. szerint az 1878—1890. április—szept. időszakból.

[4] Meteorol. Zeitschrift. 1895. évf. 436. l. szerint az 1884—1893. április—szept. időszakból.

ben is. Hogy adataim e regisztráló műszerek adataival összemérhetők legyenek, átszámítottam azokat KNIPPIG táblázata szerint (Meteorol. Zeitschr. 1894. évf. 156. l.) másodperczekre és meterre. Az ó-gyallai, a berlini és bécsi adatok szintén metert másodperczenkint, a kalocsaiak azonban kilometert óránkint jelentenek. A szél sebessége e szerint az 1894. és 1895. évi április—szeptember hónapokban Ó-Gyallán, Turkevén és Kalocsán következőnek bizonyul:

Sebesség:	5	7	9	11	1	3	5	7	9
	óra reggel				óra délután				
Ó-Gyallán	1·14	1·51	2·29	2·90	**3·22**	3·11	2·63	1·63	1·28
Turkevén	1·18	1·77	2·74	3·23	**3·43**	3·32	2·68	1·59	1·54
Kalocsán	5·41	6·27	8·01	8·84	**9·94**	9·88	9·25	7·34	6·44
Különbség:	5—7		7—9	9—11	11—1	1—3	3—5	5—7	7—9
	óra reggel				óra délután				
Ó-Gyallán	·37		**·78**	·61	·32	—·11	—·48	—1·00	—·35
Turkevén	·59		**·97**	·49	·20	—·11	—·64	—1·09	—·05
Kalocsán	·86		**1·74**	·83	1·10	—·06	—·63	—1·91	—·90
Bécsben	—·08		·55	**·61**	·39	—	—	—	—
Berlinben	·22		**·81**	·73	·25	—	—	—	—

A két nyári félévben mind a három magyar állomásunkon a szélsebesség maximuma a páratlan órák csoportosítása szerint délután 1 órakor jelenkezik ugyan, de a sebesség fokozódásának maximuma délelőtt 7—9 óra közé esik. Ugyanez tapasztalható a síkon fekvő Berlinben és csekély eltéréssel a hegyek alatt levő Bécsben a Hohe Warte-n, hol délelőtt 9—11 óra között valamivel nagyobb az intensitas növekedése, mint 7—9 óra között. Itt, úgy látszik, általános érvényű tüneménynyel van dolgunk, legalább a continens belsejét illetőleg, mert a berlini adatok 10, a bécsiek pedig 20 évre vonatkoznak.

A szélsebesség e nagy mértékű növekedése délelőtt 9 óra tájban összeesik az alsó felhők sebességének maximumával s a borulat minimumával. Mindez arra enged következtetni, hogy a levegőben lefelé tartó áramlások feloszlatólag hatnak a borulatra és

fokozódólag a szél sebességére reggel, kiváltképen délelőtt 9 óra körül. Ha alkalmunk volna részletesen tanulmányozhatni a borulat napi változását cyklonok és anticyklonok idején, valószínűleg élesebb körvonalakkal jelenkeznék szóban levő tárgyunk is. De ily adatok megszerzése egyelőre pium desiderium marad édes hazánkban.

Minthogy az átlagokban az egyes adatok jellemvonásai elmosódnak, szükséges lesz a felhők 3 regiojában mutatkozó különböző alakokat egyenkint szemügyre vennünk, hogy meggyőződjünk, vajjon fentebb bemutatott eredményünket nem valamely igen gyakori alak létesítette-e.

A felhőalakok sebességét feltüntető s itt következő kimutatásban a 10 esetnél kevesebb adatból számított átlagokat zárjel közé teszem, jelezvén ez által a többinél csekélyebb értéküket.

Sebesség:	5	7	9	11	1	3	5	7	9	5—11	1—9	Napi átlag	Összes eset
	óra reggel				óra délután					d. e.	d. u.		
Stratus, Fracto-nimbus	32	23	20	**15**	20	21	26	31	(52)	21	28	25	181
Nimbus	46	48	**39**	46	44	43	49	47	(62)	45	49	46	226
Strato-cumulus	57	52	45	**38**	40	49	56	59	51	51	53	52	422
Fracto-cumulus	(42)	(44)	**24**	28	28	34	34	39	(49)	29	34	33	188
Cumulus	(40)	(63)	**39**	48	61	63	65	81	(65)	47	63	59	661
Alto-stratus	65	82	61	52	**51**	60	60	61	86	68	61	64	318
Alto-Cirro-cumulus	66	67	68	69	66	**56**	58	68	76	67	64	66	560
Cirro-stratus Cirrus	78	81	82	85	84	90	86	93	**72**	82	87	85	727

E csoportosítás tanusítja, hogy:

1. Az alsó felhők alakjainál a látszólagos sebesség maximuma délelőtt 9—11 órára esik s vonulásuk délelőtt gyorsabb, mint délután, kiváltképen a fracto-cumulusnál és cumulusnál, mely reggeli 9 órától este 7 óráig egyre lassabban szokott haladni.

2. A közepes felhőknél délután 1—3 órakor mutatkozik a sebesség maximuma, miért is délután sebesebben vonulnak, mint délelőtt.

3. A felső felhőknél este és reggel nagyobb a sebesség, mint nap közben; eltekintve a 19 esetből számított esti 9 órai átlagtól, reggeltől este felé a sebesség csökkenni látszik.

Jóllehet a cirrus és cirro-stratus legtöbb esettel van képviselve, napi periodusa kevésbbé szabályos, mint pl. a fracto-cumulusé és cumulusé. Ennek oka abban keresendő, hogy vonulása a legtágabb határok (16—600 másodpercz) között ingadozik s néha irányváltozás esetén két terminus óra között 200—300 másodpercz különbség is mutatkozik. Ezen alakoknál tehát legtovább kellene folytatni megfigyeléseinket, hogy a napi periodus szabályosnak mutatkozzék. Megkisérlettem ugyan minden napra nézve — legalább 2 észlelettel — átlagot számítani s az egyes eseteknek ettől való eltéréseiből minden órát illetőleg új átlagot megállapítani, de az eredmény, miként a következő számok tanusítják, igy sem mondható kielégítőnek. A cirrusfelhők látszólagos sebességének óránkinti eltérése a napi átlagtól a következő:

	5	7	9	11	1	3	5	7	9
	óra reggel				óra délután				
Eltérés ..	0	—2	—1	—2	0	0	—1	+8	—3

Ezen számok, melyeknél a + jel az átlagnál lassúbb, a — jel pedig gyorsabb vonulást jelent, sem tüntetnek fel napi periodust.

Más eljáráshoz is folyamodtam még. Mikor tapasztaltam, hogy a felső felhők vonulása este felé olykor gyorsabbnak, máskor meg lassúbbnak mutatkozik, ezen szempont szerint csoportosítottam a napokat. Ekként három tipus állott elő; ugymint: napok, midőn a látszólagos sebesség reggeltől estig gyorsabbá vagy lassubbá válik, és olyanok, midőn lényeges különbség észre nem vehető.

A következő kimutatásban a látszólagos sebesség átlagos eltérései a napi átlagtól vannak feltüntetve; a + jel a napi átlagnál lassúbb, a — jel a gyorsabb vonulást jelzi. Reggeltől estig a sebesség:

Óra	5	7	9	11	1	3	5	7	9	5—11	3—9	Napok száma
	reggel				délután					d. e.	d. u.	
1. Gyorsul ...	+21	+11	+9	+3	−0·5	−8	−15	−11	−23	+11·7	−12·1	53
2. Lassul ...	−22	−14	−8	−8	+2	+1	+13	+23	+10	−11·2	+11·5	63
3. Alig változik	+0·7	−1·1	+3·7	+0·4	−2·9	−1·4	−0·2	+1·6	−2·5	+0·9	−0·2	45

Jóllehet a két óránkénti sebesség változása még korántsem egészen szabályos, a + és — jelek előfordulása délelőtt és délután teljesen egyforma úgy az első, mint a második csoportnál. A gyorsabbodásnak és lassubbodásnak este felé meglehetősen egyenletesnek kell lenni az esetek nagy számánál, mi abból következtethető, hogy a 4 órának átlagos eltérése délelőtt és délután egyenlő.

Tudjuk, hogy légnyomási minimum fölött az áramlás még a cirrus-regioban is gyorsabb, mint maximum fölött. Ha tehát látjuk, hogy némely napokon a felső felhők sebessége reggeltől este felé növekedik, akkor minden valószínűség szerint arra következtethetünk, hogy légnyomási depressio közeleg felénk; ellenkezőleg, ha tapasztaljuk, hogy a cirrusfelhők este felé egyre lassúbbá váló gyorsasággal haladnak, fel kell tennünk, hogy a depressio hatása mindinkább gyengül észlelő helyünkön. Megkisértettem ugyan e kapcsolatot esetenkint is napi időkártyáinkból kideríteni, de az eredmény nem egészen kielégítőnek mondható azért, mivel ezeken csak a reggeli, nem pedig egyszersmind az esteli adatokat is szokták közölni s így a légnyomás napi változását a cirrusfelhők vonulásával össze nem hasonlíthatjuk; ha pedig a következő napnak reggeli állapotú idejét vennők tekintetbe, akkor meg a felső felhők éjjeli vonulásáról nem rendelkeznénk adatokkal.

Ha ezek után felvetnők a kérdést, micsoda viszony van a felhők látszólagos és valódi sebességének napi periodusa között, csak a következő feleletet adhatnók:

Vagy változatlan marad, vagy pedig megváltozik a felhők magassága napközben. Ehhez képest más és más alakot ölt a napi szakasz is. Ha változatlan marad, a felhők tehát egész nap ugyanazon szintájon vonulnak, akkor a látszólagos sebesség periodusa arányos a valódi sebesség napi szakaszához. Ha pedig e magasság

napközben megváltozik, akkor megfigyeléseim a következő periodikus fel- és alászálló áramlásokról tesznek bizonyságot:

1. Az alsó felhőknél mintegy reggeli 10 óráig leszálló, azután pedig felszálló áramlásnak kell uralkodnia, mely este 9 óra tájban újra leszállóvá lesz.

2. A közepes felhőknél reggeltől délután 1—3 óráig leszálló, azután gyorsan felszálló mozgást kell feltételeznünk.

3. A cirrusfelhőknél némely napokon, midőn gyorsulásuk este felé növekszik, leszálló, midőn pedig sebességök fogy, felszálló áramlást kellene keresnünk; néha azonban oly esetek is előfordulnak, midőn ezt az áramlást alig lehet észrevenni.

3. A légáramlatok fordulása.

A légáramlatok fordulását háromféleképen szokták feltüntetni. Csoportosítják ugyanis irány szerint s a különböző órákban mutatkozó maximumokból a fordulás miként történő módjára vonnak következtetést. Mások valamennyi irány eredőjét számítják ki s változó helyzetéből a fordulást tüntetik fel. Sprung eljárása szerint pedig az óráról-órára történő fordulatokat veszik számba egyenkint s csoportosítják bizonyos szempontok szerint. Ezen utóbbi mód szerint fogok én is a légáramlatok fordulásával foglalkozni, és pedig először általában, majd irányukra való tekintettel.

a) A fordulás általában.

A légáramlatoknak 16 irány szerint történő feljegyzésénél két-két irány között $22^1/_2$ foknyi szög van. Fel fogom tehát tüntetni, hány foknyi a szög, mely 9 terminus óránknál az 5—7, 7—9, 9—11, 11—1, 1—3, 3—5, 5—7, 7—9 órai irány között mutatkozik. Az adatok az 1894 és 1895. évi április—szeptemberi félévre vonatkoznak. A széllel szemközt állva a jobbra való fordulást +, a balra hajlót — jellel jelölöm. Az eredményt a következő kimutatás tárja elénk.

A légáramlatok fordulása.

	—							Összeg	+						
A szél:	157½°	135°	112½°	90°	67½°	45°	22½°	0°	22½°	45°	67½°	90°	112½°	135°	157½°	180°
5 r.— 7 r.	—	—	—	1	—	5	16	119	25	7	1	4	1	—	—	—
7 r.— 9 r.	—	—	—	3	2	15	25	102	57	25	8	2	1	1	—	—
9 r.—11 r.	—	1	1	3	7	7	38	143	57	22	2	8	—	2	—	—
11 r.— 1 d.u.	—	1	—	2	1	19	53	138	51	32	8	2	2	—	—	—
1 d.u.—3 d.u.	1	—	—	6	8	14	46	115	62	25	5	5	2	—	2	2
3 d.u.—5 d.u.	—	—	—	2	2	17	44	112	46	29	6	3	5	2	—	2
5 d.u.—7 d.u.	—	—	1	—	1	12	34	94	42	15	6	4	1	—	1	—
7 d.u.—9 d.u.	2	—	2	3	4	7	25	83	24	8	2	—	2	—	1	—
Az alsó felhők:																
5 r.— 7 r.	—	—	—	—	2	6	9	72	5	—	—	—	—	—	—	—
7 r.— 9 r.	—	—	—	1	—	5	13	37	13	2	3	2	2	—	—	—
9 r.—11 r.	—	—	1	—	1	2	15	43	19	2	2	1	—	—	—	1
11 r.— 1 d.u.	2	1	1	1	2	6	38	117	37	11	4	2	1	—	2	—
1 d.u.—3 d.u.	2	1	2	1	3	11	37	113	50	13	9	3	1	—	—	—
3 d.u.—5 d.u.	—	—	—	2	3	10	42	108	29	11	1	—	—	—	—	—
5 d.u.—7 d.u.	—	—	—	1	1	11	24	83	28	7	4	2	1	—	—	—
7 d.u.—9 d.u.	—	—	—	—	—	—	13	62	18	5	3	1	—	1	—	—
A közepes felhők:																
5 r.— 7 r.	—	—	—	2	—	—	9	40	6	1	—	—	—	—	—	—
7 r.— 9 r.	—	1	1	1	1	5	12	29	8	3	—	—	—	—	—	—
9 r.—11 r.	—	1	—	1	—	1	13	26	3	1	1	—	—	—	—	—
11 r.— 1 d.u.	—	—	—	—	1	1	7	26	7	3	—	—	—	—	—	—
1 d.u.—3 d.u.	—	—	—	—	—	—	11	17	8	1	—	—	—	—	—	—
3 d.u.—5 d.u.	—	—	—	—	—	1	8	20	10	4	—	—	—	—	—	—
5 d.u.—7 d.u.	—	—	—	—	1	3	2	31	6	2	—	1	—	—	—	—
7 d.u.—9 d.u.	—	—	1	—	—	—	3	19	3	—	1	—	1	1	—	—

A felső felhők:																
5 r.— 7 r.	—	—	—	—	—	1	13	34	7	—	—	—	—	—	—	—
7 r.— 9 r.	—	—	—	—	—	2	12	31	8	—	—	—	1	—	—	—
9 r.—11 r.	—	—	—	—	1	—	11	33	3	—	1	—	—	—	—	—
11 r.— 1 d.u.	—	—	—	—	1	—	8	34	4	1	1	—	—	—	—	—
1 d.u.—3 d.u.	—	—	—	—	—	—	8	30	3	3	—	—	—	—	—	—
3 d.u.—5 d.u.	—	—	—	—	—	1	17	32	7	—	—	1	—	—	—	—
5 d.u.—7 d.u.	—	—	—	—	—	—	12	41	5	2	1	—	—	—	—	—
7 d.u.—9 d.u.	—	—	—	—	—	—	4	25	3	—	1	—	—	—	1	—

	— Összeg								+ Összeg							
A szél:	157½°	135°	112½°	90°	67½°	45°	22½°	0°	22½°	45°	67½°	90°	112½°	135°	157½°	180°
5 r.—1 d.u.	—	2	1	9	10	46	132	502	190	86	19	16	4	3	—	—
1 d.u.—9 d.u.	3	—	3	11	15	50	149	404	174	77	19	12	10	2	4	4
Az alsó felhők:																
5 r.— 1 d.u.	2	1	2	2	5	19	75	269	74	15	9	5	3	—	2	1
1 d.u.—9 d.u.	2	1	2	4	7	32	116	366	125	36	17	6	2	1	—	—
A közepes felhők:																
5. r.—1 d. u.	—	2	1	4	2	7	41	121	24	8	1	—	—	—	—	—
1 d.u.—9 d.u.	—	—	1	—	1	4	24	87	27	7	1	1	1	1	—	—
A felső felhők:																
5 r.—1 d. u.	—	—	—	—	2	3	44	132	22	1	2	—	1	—	—	—
1 d.u.—9 d.u.	—	—	—	—	—	1	41	128	18	5	2	1	—	—	1	—

	5 r.—1 d. u.			%	1 d. u.—9 d. u.			
	—	0°	+	180°	—	0°	+	180°
A szél --- ---	19·6	49·2	**31·2**	—	24·6	43·2	**31·8**	0·4
Az alsó felhők	21·9	55·6	**22·3**	0·2	22·8	51·1	**26·1**	—
A közepes felhők	**27·0**	57·4	15·6	—	19·4	56·1	**24·5**	—
A felső felhők ---	**23·7**	63·8	12·5	—	**21·3**	65·0	13·7	—

E kimutatásból kitűnik, hogy:

1. A szél a délelőtti órákban ép úgy, mint a délutániakban többnyire jobb kéz felé fordult; továbbá, hogy többször tért el bal kéz felé délután, mint délelőtt.



2. Az alsó felhőknél délelőtt egyaránt gyakoriak a fordulások jobb és bal kéz felé, délután azonban valamivel gyakoriabbak az eltérések jobbra, mint balra.

3. A közepes felhők délelőtt sűrűbben fordulnak balra, mint jobbra; délután pedig az alsó felhőkkel egyezőleg inkább jobb, mint bal kéz felé szoktak eltérni.

4. A felső felhőknél délelőtt ép úgy, mint délután gyakoriabbak a bal, mint a jobb kéz felé hajló eltérések.

A táblázatból az is kitűnik, hogy a nagy mértékű fordulások nagyon ritkák s hogy két egymásra következő órában többnyire ugyanazon áramlattal találkozunk. A szélnél a jobb kéz felé történő fordulások reggel 7 és délután 1 óra között óráról-órára egyenlő gyakoriságot mutatnak, a bal felé való hajlások azonban egyre szaporodnak, a mennyiben számuk 7—9 között 45, 9—11 között 57, 11—1 között 76-ra rúgott. Az alsó felhőknél, hol egész nap túlnyomólag jobb kéz felé való fordulatokkal találkozunk, délután 3—5 óra között a balra tartó eltérések vannak többségben.

A szél fordulásának oka leginkább a légnyomási depressiók kelet felé tartó haladásában keresendő. A szél jobbra fordul, ha a depressio középpontja tőlünk északra van, balra pedig, ha centruma délen van. A szél és alsó felhők fordulása egyező lévén, ugyanegy okra vezetendő vissza. A felső felhők többnyire bal kéz felé fordulnak, mivel többnyire északnyugoton levő depressiókból indulnak ki s egyre délnyugot felé térnek el, mialatt a légnyomási minimumok mindinkább odább haladnak keletre néző pályáikon. A közepes felhők részint a felsőkhöz, részint az alsókhoz alkalmazkodnak; délelőtt többnyire bal kéz felé fordulnak, délután inkább jobb felé. Úgy látszik, mintha délelőtt csakugyan magasabban járnának s napközben, délután az alsó felhők regiojába ereszkednének, mivel velök egyformán fordulnak. A fordulatok a Sonnblicken egyeznek az itt bemutatott adatokkal.

b) A fordulás irányok szerint.

A 16 irány szerint történt megfigyeléseimet abból a szempontból is csoportosítottam, hogy az egyes irányok változása 2—2 terminus óra között kitünjék. Miként előbb, itt is a két nyári félév

adatait használom fel. Rövidség és könnyebb áttekintés okáért valamennyi fordulást $22^1/_2$ és $157^1/_2$ fok között összegezem s az eredményt %-ban mutatom ki, még pedig külön-külön a déli (ESE—W) és északi (WNW—E) irányokra nézve.

A fordulás következőleg alakul:

Áramlatok *E S E*—*W* között %							Áramlatok *W N W*—*E* között %					
Óra:	5 r.—1 d.u.			1 d.u.—9 d.u.			5 r.—1 d.u.			1 d.u.—9 d.u.		
Fordulás:	—	0°	+	—	0°	+	—	0°	+	—	0°	+
A szélnél	17·9	42·4	**39·7**	23·7	36·5	**39·8**	20·7	54·3	**25·0**	25·4	49·0	**25·6**
Az alsó felhőknél	17·1	59·0	**23·9**	18·6	52·1	**29·3**	**27·2**	50·9	21·9	**28·0**	49·7	22·3
A közep. felhőknél	**23·8**	58·0	17·5	16·0	55·7	**28·3**	**33·8**	54·4	11·8	**26·0**	56·0	18·0
A felső felhőknél	**21·1**	64·0	14·9	**21·5**	61·7	16·8	**26·9**	63·4	9·7	**21·2**	68·8	10·0

E csoportosításból kiderül, hogy a szemhatár ESE—W tájairól jövő áramlatok a szélnél délelőtt és délután egyaránt gyakran jobb kéz (+) felé fordulnak 2—2 terminus óra között; bal kéz (—) felé pedig, kiváltképen délelőtt, jóval ritkábban. A szemhatár északi vidékeiről (WNW—E) fúvó szeleknél e sajátság már nem mutatkozik, a mennyiben délután ép oly gyakran balra, mint jobbra történik a fordulás s reggel is csak kevéssel gyakoriabbak a +, mint a — fordulatok. Változatlan irányt mindkét csoportnál inkább délelőtt, mint délután találunk.

Ha az alsó felhők a horizon déli feléből jönnek, akkor délelőtt és délután is gyakrabban jobb kéz felé fordulnak, kiváltképen délután; ha vonulásuk északi tájakról történik, délelőtt és délután is egyaránt gyakrabban balra, mint jobbra szoktak eltérni. Az első csoportbeliek inkább megtartják irányukat 2 terminus órán át, kivált délelőtt, mint a második csoportbeliek.

A felső felhők úgy délelőtt, mint délután gyakrabban bal, mint jobb kéz felé szoktak fordulni, bárhonnan jönnek is; de mégis leginkább akkor, ha délelőtt a szemhatár északi feléből vonulnak.

A közepes felhők mintegy középütt állanak az alsók és felsők között fordulás tekintetében is. Délelőtt a horizon déli felében feltünő áramlatok inkább balra, mint jobbra fordulnak, épen úgy,

mint a felső felhők; délután pedig, miként az alsók, inkább jobbra. Az északi áramlatok WNW—E között egész nap, de kiváltképen délelőtt, leginkább bal kéz felé szoktak eltérni, ép úgy, mint a felső felhőknél. A Sonnblicken, mely már némileg a közepes felhők regiójában fekszik, csaknem tökéletesen egyező fordulatokkal találkozunk ép ugy a déli, mint az északi áramlatoknál.

Hogy e tünemény létrejötténél a hőmérsékletnek s az általa okozott függőleges áramlatoknak nagy szerepet kell játszani, a mellett bizonyít az, hogy a szélfordulatok épen a melegebb déli áramlatok idején fordulnak elő főképen.

4. A légáramlatok függőleges elrendezése.

Azon viszony megállapításával fogok most foglalkozni, mely a szél s a felhők három regiojában uralkodó légáramlati irányok között fennáll. A két nyári félévben történt följegyzéseimből ki fogom mutatni, honnan vonultak a felhők ezen vagy azon irányú szél idején. A 9 páratlan órán kívül a délutáni 2 órát is számba veszem, hogy mennél több esettel rendelkezzem. Előbb feltüntetem, hányszor egyezett (0°) s hányszor tért el jobbra (+) vagy balra (—) a felhővonulás a szél irányától; azután pedig valamennyi vonulási esetet minden 16 irányú szélhez mérve külön-külön fogom csoportosítani.

a) A függőleges elrendezés általában.

Az alsó, közepes és felső felhők vonulása egyezett a széllel, vagy pedig jobbra s balra eltért tőle, az áramlással szemközt állva képzelvén magunkat, a következő esetekben:

Az eltérés:	A felhők vonulásának eltérése a széltől																	
	—								+								$22\frac{1}{2}°-157\frac{1}{2}°$	
	$157\frac{1}{2}°$	135°	$112\frac{1}{2}°$	90°	$67\frac{1}{2}°$	45°	$22\frac{1}{2}°$	0°	$22\frac{1}{2}°$	45°	$67\frac{1}{2}°$	90°	$112\frac{1}{2}°$	135°	$157\frac{1}{2}°$	180°	—	+
Az alsó felhőknél ...	37	33	49	63	79	99	180	**318**	241	161	68	45	28	29	20	31	540	592
A közepes felhőknél .	17	28	38	33	48	47	66	**81**	76	65	51	28	22	26	12	27	277	279
A felső felhőknél ...	36	30	45	35	21	36	60	69	59	**83**	53	48	23	34	27	25	263	327

A felhők a széltől gyakrabban jobb, mint bal kéz felé tértek el; a felsők nagyobb mértékben, mint az alsók, a közepeseknél a két rendbeli eltérés között nem mutatkozik különbség. Egyező irányú eset legtöbb a szél és alsó felhők között fordult elő, a közepeseknél kevesebb s a felsőknél még kevesebb.

A szél és felhővonulás viszonyánál azok az esetek fordulnak elő leggyakrabban, mikor a felhők a széllel és szél mellől többnyire $22^1/_2$—$67^1/_2$ foknyi szögön belül jönnek, miként a %-ban kifejezett s itt következő számok tanusítják:

Az eltérés	— $67^1/_2°$—$22^1/_2°$	0°	+ $22^1/_2°$—$67^1/_2°$	Összeg %
Az alsó felhőknél	24·2	21.5	31·7	77·4
A közepes felhőknél	24·2	12·2	28·9	65·3
A felső felhőknél	17·1	10·1	28·5	55·7

b) A függőleges elrendezés irányonként.

Honnan jönnek a felhők bizonyos szél idején, azt a következő táblázatról tudhatjuk meg, hol szintén a két nyári félév esetei némileg összevonva vannak kitüntetve. Az alsó felhők *A*-val, a közepesek *K*-val, a felsők *F*-fel vannak jelölve.

A felhők vonulásának eltérése a szél irányától							
Mely irányú szélnél?	A vonulás eltérése:	— 135°—90°	— 67½°—22½°	0°	+ 22½°—67½°	+ 90°—135°	+ — 157½°—157½°
N+NNE	A.-nál	26	**75**	**43**	33	6	17
	K.-nél	**22**	14	9	10	4	10
	F.-nél	**19**	15	12	4	10	10
NE+ENE	A.-nál	**57**	56	33	39	17	41
	K.-nél	**36**	16	4	14	11	28
	F.-nél	**53**	6	4	19	15	31
E+ESE	A.-nál	6	17	13	**27**	16	8
	K.-nél	2	3	4	**14**	10	10
	F.-nél	11	5	—	9	4	**16**
SE+SSE	A.-nál	2	18	15	**62**	29	8
	K.-nél	1	2	3	14	**21**	2
	F.-nél	1	1	1	12	**24**	14
S+SSW	A.-nál	1	16	35	**101**	23	4
	K.-nél	2	4	5	**65**	23	3
	F.-nél	1	5	6	**54**	30	7
SW+WSW	A.-nál	5	37	**49**	**90**	5	3
	K.-nél	5	23	**24**	**41**	2	—
	F.-nél	1	17	13	**59**	14	1
W+WNW	A.-nál	7	55	76	**94**	4	3
	K.-nél	6	**59**	22	27	4	2
	F.-nél	2	**48**	23	30	5	3
NW+NNW	A.-nál	41	**84**	54	24	2	4
	K.-nél	25	**40**	10	7	—	1
	F.-nél	**22**	20	10	8	3	6

A felhők vonulásának eltérése a szél irányától *ESE — W* szél idején. % *WNW — E* szél idején								
Átvonulás eltérése	— 157½°—22½°	0°	+ 22½°—157½°	180°	— 157½°—22½°	0°	+ 22½°—157½°	180°
Az alsó felhőknél	17·0	20·9	**61·2**	0·9	**53·0**	21·9	21·9	3·2
A közepes felhőknél	22·7	13·6	**62·5**	1·2	**60·7**	10·8	21·6	6·9
A felső felhőknél	16·8	9·1	**71·4**	2·7	**59·7**	11·0	24·6	4·7

E táblázatból kiderül, hogy eme szabály, mely szerint a felhők többnyire jobb felől vonulnak a szél mellől, valamennyi irányú szélre nézve érvényes ugyan, de nem érvényes minden irányra külön-külön. Csak azon felhőkre nézve áll e szabály, melyek a szemhatár keleti és nyugoti pontjai között elterülő déli tájakról fúvó szelek idején mutatkoznak; a horizon északi feléről jövő szelek mellől a felhők leggyakrabban bal kéz felé szoktak eltérni.

Ha a felhővonulást 3—3 égi táj szerint csoportosítjuk, miként a táblázaton tettük, azon eredményre fogunk jutni, hogy az alsó felhők vonulási maximuma mindig azon 3 égi tájra esik, mely a szél irányától $22^1/_2$, 45 és $67^1/_2$ fokkal jobbra vagy balra fekszik. Az északkeleti és kelet-északkeleti szelek idején némi kivétel mutatkozik, a mennyiben a maximum még a $67^1/_2$ fokon túlra is terjed. — A közepes és felső felhők eltérése a széltől többnyire 90—135 fok közé esik. A keleti és kelet-délkeleti szelek idején a cirrusfelhők leggyakrabban a szemhatár ellentett pontjairól szoktak jönni. Ilyen szeleknél azonban két nyári félévünkben aránylag igen kevés esettel rendelkezünk.

Hogy a felhők a szél iránya mellett levő 3 égi táj felől, azaz a széltől $22^1/_2$, 45, $67^1/_2$ foknyira jobb kéz felől jönnek, ezt leginkább S és SSW szél idején van alkalmunk tapasztalhatni. Ilyenkor 100 eset között az alsó felhők 56·1, a közepesek 63·7 s a felsők 53·5 ízben szoktak ilyen eltérést felmutatni. Legközelebb áll ezekhez a SW, WSW szélcsoport, mikor is az alsó felhők 47·6, a közepesek 43·2 s a felsők 56·2 ízben vonulnak 100 eset közül a szél mellől jobbról $22^1/_2$, 45, $67^1/_2$ fokkal.

Minthogy a felhők vonulásának eltérése a széltől más tipust mutat fel a szemhatár déli, és mást északi feléből fúvó szelek idején, jónak láttam az adatokat összevonva, 4 csoportba sorozni, a szerint, a mint a vonulás a széllel egyez (0°), vagy ellenkező (180°) irányú, vagy pedig e két pont közé jobbra és balra esik.

Látni való a táblás csoportosításból, hogy fölötte ritkák azok az esetek, akár ESE—W, akár WNW—E tájakról fújjon is a szél, midőn a felhők a szemhatár ellentett (180°) pontjáról jönnek. Hogy a szél és felhővonulás egyező iránynyal birna, az szintén elég ritka, annál ritkább, minél föntebb járnak a felhők.

A felhővonulás eltérése a széltől 0° és 180° között jobbra a ESE—W szelek idején háromszorta gyakoribb, mint WNW—E szelek uralkodásakor; ellenben a balra való eltérések szintén háromszorta gyakoriabbak a WNW—E, mint a ESE—W szelek fuvásakor.

Hazánkban a szél más irányú, mint Európa északnyugoti részein, melyek az Izland körül elterülő mély légnyomási minimum hatása alatt vannak. Ha tehát a szél és felhővonulás között mutatkozó viszonyt Európa északnyugoti vidékein történt megfigyelések alapján állapítanók meg, bizonyára más eredményre jutnánk, mint a minőt soraimban kimutattam. Így magyarázható meg, miért vonulnak például Németországban a felhők a szél mellől többnyire jobb kéz felől, s miért nem oly gyakran Magyarország róna vidékén is? Ennek oka az, hogy Németországban az uralkodó szél a délnyugoti, nálunk pedig nem az. Délnyugoti szél idején igenis többnyire jobb kéz felől jönnek a felhők nálunk is ép úgy, mint Német- vagy Svédországban; ámde ha Magyarországon csaknem ép oly gyakran déli, mint északi szelek fúnak, sőt az utóbbiak még valamivel gyakrabban is, akkor természetes, hogy a szél és felhők között más viszonynak kell lenni függőleges elrendezés tekintetében nálunk, mint Európa északnyugoti országaiban, melyek az Atlanti oczeán légnyomási depressióinak hatását első sorban érzik.

Összefoglalás.

A megfigyelési hely Turkeve volt. Az észlelés két évre terjed. A nyári félévben naponta tíz, a téliben rendesen három följegyzés történt, és pedig erősségmutatóval biró szélzászlón és 5·4 meter magasan álló drótkörön.

I. A borulat.

A felsőbb áramlatokról csak a felhők útján vehetvén tudomást, a borulattal okvetlenül foglalkozni kellett.

A borulat a nyári félévben délután három órakor öltött legnagyobb terjedelmet. Reggel kilencz és este kilencz órakor legderültebb az ég.

A borulati fokok között leggyakoriabb a 0, majd a 10-es fok,

és pedig este. A megszakgatott borulat (1—9 fok) esetei a nap legmelegebb óráiban mutatkoznak legtöbbször.

Az alsó felhők előfordulási maximuma délutáni három, a közepeseké délelőtti kilencz, a felsőké délutáni hét órára esik a nyári félévben.

II. A légáramlatok.

1. A két esztendő alatt a szél leggyakrabban NE, az alsó felhők W, a közepesek SW, a felsők W felől jöttek.

A keleti szelek délelőtt kilencz, a déliek tizenegy, a nyugotiak délután három, s az északiak egy órakor leggyakoriabbak. A felhőknél a maximumok vándorlása a nappal egyezőleg nem tapasztalható; ezek minden irányt illetőleg az előfordulás gyakoriságának periodusához alkalmazkodnak.

2. A látszólagos sebesség annál kisebb, minél magasabban jár a felhő. A stratus leggyorsabban 2, a cirrus leglassabban 600 másodpercz alatt haladt át a 0·6 meter átmérőjű drótkörön.

Légnyomási minimumok idején általában véve a légáramlatok sebesebbek szoktak lenni, mint maximumok alkalmával.

A téli félévben gyorsabb a felhők vonulása, mint nyáron.

A nyugoti áramlatok minden légrétegben sebesebbek, mint a keletiek, északiak és déliek. Leglassúbbak a keletiek.

A szél és felhők sebessége között egyenes viszony áll fenn; erősebb szél és gyorsabb felhővonulás, gyengébb szél és lassúbb felhővonulás együtt jár. E viszony némileg még a közepes felhők regiojába is felér.

A szélnél a sebesség maximuma délután egy órakor, az alsó felhőknél délelőtt kilencz, a közepeseknél délután három, a felsőknél este kilencz órakor mutatkozik. E látszólagos sebesség az egyes felhőalakoknál is határozott maximumot mutat akkor, mikor az az illető légrétegben általában jelenkezni szokott. A felső felhőknél három tipust különböztethetünk meg: reggeltől este felé gyorsuló, lassuló és alig változó sebességet, mely jelenség a légnyomási maximumok és minimumokra vezethető vissza.

Ha a felhők egész nap ugyanazon magasságban haladnának, a látszólagos sebesség napi periodusa arányos lenne a valódi sebesség napi szakaszához; ha pedig e magasság napszakonkint külön-

bözö, akkor a látszólagos sebesség napi változásából fel- és alászálló áramlásokra lehet következtetnünk.

3. A szél délelőtt és délután egyaránt leginkább jobbra szokott fordulni; az alsó felhőknél alig gyakoriabbak a jobbra, mint a balra való fordulások; a közepeseknél délelőtt a balra, délután a jobbra valók gyakoriabbak, a felsőknél pedig egész nap a balra való fordulások vannak túlsúlyban.

A délről fúvó szelek egész nap inkább jobbra, mint balra fordulnak; az északiaknál csaknem egyaránt gyakoriak mindkét rendbeli változások. Inkább jobbra, mint balra fordulnak a déli felhővonulások az alsó felhők regiojában, és a közepesekében délután; különben pedig gyakoriabbak mind a három regioban a bal kéz felé való fordulások úgy a déli, mint az északi áramlatoknál.

4. A felhők mind a három regioban gyakrabban jönnek a szél mellől jobb, mint bal kézről; kiváltképen $67^1/_2$ foknyira a szél irányától.

Déli szelek idején a felhők háromszorta gyakrabban vonulnak jobbról, mint balról; északi szelek idején megforditott viszonyokkal találkozunk.

A függőleges elrendezés viszonya hazánkban különbözik a nyugoti országokétól, mert nálunk a szél iránya más, mint ott.

*

A felhők birodalmában honos áramlatok, mint láttuk, nincsenek oly gyors változásoknak kitéve, mint szelünk a föld szinén. Épen azért az elmondottak nagyobb vidékre nézve is megtartják érvényöket, mint a melyen a megfigyelések történtek. Nagyon óhajtandó volna, ha Meteorologiai Központi Intézetünk a szél rovatain kivül a felhők vonulására vonatkozókat is felvenné évkönyveibe, s legalább 5—10 állomás adatait közzétenné. Az észlelők is bizonyára szivesebben foglalkoznának eféle följegyzésekkel, ha tapasztalnák, hogy lelkiismeretesen gyűjtött adataik mégis napvilágot látnak s nem maradnak örökre eltemetve a levéltár gyomrában. Kétszeresen óhajtandó, hogy meteorologiai följegyzésekkel foglalkozó csillagvizsgáló intézeteink részt vegyenek azon

nemzetközi munkában, mely jeles műszerekkel igyekszik majd 1896 május 1-től kezdve 1897 április 30-ig a felhők valódi magasságát és sebességét meghatározni s levegői birodalmuk titkait felderíteni.

TARTALOM.

	Lap
Bevezetés	176
I. A borulat	178
1. A borulat terjedelme	178
2. A borulati fokok gyakorisága	179
3. A felhőalakok gyakorisága	180
II. A légáramlatok	182
1. A légáramlatok gyakorisága	183
a) Az áramlatok általában véve	183
b) Az áramlatok a terminus órákban	183
2. A légáramlatok sebessége	185
a) A sátszólagos sebesség valószinűsége	186
b) A sebesség légnyomási maximumok és minimumok idején	187
c) A látszólagos sebesség a téli és nyári félévben	188
d) A sebesség a szemhatár tájai szerint	189
e) A szél és a felhők sebességének viszonya	190
f) A sebesség napi szakasza	192
3. A légáramlatok fordulása	198
a) A fordulás általában	198
b) A fordulás irányok szerint	201
4. A légáramlatok függőleges elrendezése	203
a) A függőleges elrendezés általában	203
b) A függőleges elrendezés irányonkint	204
Összefoglalás	207

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)

EGY ELEKTROMOS FENYTÜNEMÉNYRŐL.

KORDA DEZSŐ-től.

Ruhmkorff-tekercs segélyével kísérleteket végeztem oly izzólámpákon, melyeknek szénszála el volt törve, és ezen kísérletezés eredményeképen egy érdekes fénytüneményt állapítottam meg, mely átmenetet látszik alkotni egyrészről a Hittorf-Crookes-féle, másrészről a Geissler-féle csövekben észlelhető tünemények között. Czélomra oly izzólámpákat választottam, melyek az Edison-hüvely számára csavarmenetekkel vannak ellátva és a melyekben a szénszálat tartó két platinaszál szabadon áll, azaz nincs a lámpán belül üvegnyereggel összekapcsolva. A szénszál elszakadását elektromos úton idéztem elő, például akként, hogy egy 70 voltos lámpát 150 voltos dynamo-gépre csatoltam. Egy szerencsés esetben épen a csúcspontján szakadt el a szén, úgy hogy két egyenlő symmetrikus szál állott rendelkezésemre, néhány millimeternyi közzel; a többi esetben a két ág különböző hosszúságú volt. E körülmény azonban mit sem változtat az észlelhető tüneményen, mely a következő lefolyású:

A szakadt szénszálú lámpát előbb még a benne uralkodó csekély légnyomás szempontjából némi előkészítésnek kellett alávetnem. Ugyanis e lámpák nem bírnak elegendő légürrel arra, hogy Crookes-féle tüneményeket rajtok észlelni lehetne, de más részről sokkal is jobban ki van belőlök a levegő szivattyúzva, hogysem a levegőnek azt a kevert ibolya- és rózsaszínű fluorosságát mutassák, mint a Geissler-csövek. Ha tehát lámpámnak egyik szénszálát a vele fém-kapcsolatú csavarmenetes sárgarézhüvely közvetítésével a Ruhmkorff tekercsnek egyik sarkával összekapcsoltam, a jelentkező fénytünemény igen gyenge, alig észlelhető volt. Ennélfogva

érdekemben állott csekély mennyiségű levegőt szivárogtatni a lámpába, a mit akként értem el, hogy a tekercs másik sarkával kapcsolatos sodrony segélyével szikrát ugrattam a lámpa csúcsa körül az üvegen keresztül, mi által parányi repedés keletkezett az utóbbi falán. Mihelyt ily módon elég levegő ment be s a lámpa belső üre vörösödni kezdett, a repedést és környékét pecsétviaszszal jól elzártam, úgy hogy a czéljaimra szükséges, habár rendkívül csekély légnyomás uralkodott mindvégig kisérleteim folyamán izzólámpáimban. Különben, ha az elzárás jó pecsétviaszszal és gondosan történik, úgy a létesített belső nyomás heteken át változatlanúl csekély marad.

Az ekként előkészített lámpával már most a következő kisérlet végezhető. Kössük össze újra a csavarmenetes hüvelyt, mely a törött szénszál egyik ágával közlekedik, a Ruhmkorff tekercs egyik sarkával, teszem az anoddal, megjegyezvén, hogy a tekercs sarkait előzetesen Crookes-cső segélyével megállapíthattuk. Azonnal szép ibolyaszínű, egy-két millimeter átmérőjű hüvely veszi körül ezt az ágat a platinaszáltól kezdve a törési pontig, mig a másik ágnak nincs fényhüvelye, hanem sötét marad. Ha a lámpa csúcsát tenyerünkbe fogjuk, úgy hogy kezünk condensatort alkot, akkor az említett hüvelynek fénye többszörösen erősödik. Közelítsük már most a tekercs kathodjával kapcsolatos sodronynak szabad végét a lámpa alján levő fémcontactus felé, mely a másik szénággal vezető kapcsolatban áll és a mely a csavarmenetes hüvelytől jól el van szigetelve.

A használtam Ruhmkorff-tekercs maximum 25 millimeteres szikrát lévén képes adni, eme távolságnál és azon alúl szikra ugrik át az említett fémcontactusra és ugyanakkor fényhüvely keletkezik a második szénág körül is, mig a szakadási helyen a de la Rive-féle forgó effluvium észlelhető.

Mihelyt azonban — és itt áll be a jelzett tünemény — a szóban forgó szikra körülbelül tiz millimeteres lett a sodronyvégnek közelítése folytán, a kathod-ág szakadási helyén gyengén izzó fénypont keletkezik, melyből időnként parányi izzó szénrészecskék lövöldöztetnek minden irányban és ugyanakkor az anoddal kapcsolatos szénág körül a kezdettől fogva ott lebegő fényhüvely teljesen eltűnik, úgy hogy most eme szénág marad

sötét. Ha még folytatólagosan közelítjük ama sodronyvéget contactusa felé, akkor körülbelül két millimeteres szikránál eltűnik a kathodág szakadási helyéről az említett fénypont és egyszersmind újra előtünik az anodág körül, és pedig sokkal fényesebben, mint kezdetben, a szóban levő fényhüvely, úgy hogy ettől a pillanattól kezdve a contactus teljes érintéséig és utóbbi időpontot is beleértve, mindkét szénág egyenlően szép, intensiv fényü, ibolyaszinü fényhüvelylyel pompázik, mig a szakadási helyen sötét köz marad.

Ha visszafelé, ellenkező irányban ismételjük a kisérletet a sodronyvégnek lassú eltávolítása útján, akkor a jelzett tünemények ellenkező irányban ismétlődnek. Nevezetesen az anodhüvely eltűnik, ismét előtűnik stb.

Ha megfordítjuk a Ruhmkorff-tekercs sarkait, úgy hogy a csavarmenetes sárgarézköpeny jön a kathoddal kapcsolatba, akkor a tünemény annyiban változik, hogy az említett szikrahosszúság mellett a kezdetben sötét anodág körül keletkező fényhüvely tűnik el, hogy 2 millimeteres szikránál megint előtűnjék, mig a kezdettől fogva fényes kathodág csak annyiban változik, hogy most az ő végén jön létre az izzó fénypont. Még megjegyzendőnek tartom, hogy erős aczélmágnesnek közelítése semmi befolyással sem bír eme tüneményekre, arra pedig, hogy elektromágnes befolyását észleljem, eddig nem volt alkalmam, mert nem rendelkezhettem Faraday-féle mágnessel.

Meggyőződést szerzendő, hogy nem Hertz-féle elektromágneses hullámzás csomópontja okoz befolyást a szénszálak fénytüneményeire, sokféleképen változtattam a lámpa és tekercs közt alkalmazott összekötő sodronyok hosszát, de a «kritikus» szikrahosszúság mindennek daczára állandó maradt.

Összevetve az észlelteket, arra a következtetésre jutottam tehát, hogy *a meglevő fényhüvely eltünését csakis egyedül a kathodvégből kiáramló, láthatlan sugarak — akár kathodsugarak, akár ultraviolett sugarak — okozhatják.*

Tudvalevő dolog ugyanis, hogy úgy az ultraviolett sugarak, valamint a kathod- és Röntgen-sugarak elektrizált testeknek kisülését elősegítik, olyformán, mintha az egyébként elszigetelő tulajdonságú környező közeget jó vezetőképességgel ruháznák fel.

Véleményem szerint lámpáimban bizonyos meghatározott szikrahosszaságok határai között ilyféle sugarak áramolnak ki az izzóvá lett kathodvégpontból és elősegitik az anodág kisülését, úgy hogy róla a fényhüvely eltűnik, hogy ismét előtűnjék, mihelyt az emlitett áramlás a kathod végpontjából megszünt. Az utóbbi sötét áramlás különben nem jár okvetlen fénypont kiséretével, a mi onnét is kitűnik, hogy a fényhüvely el- és előtűnése időbelileg nem esik pontosan egybe a fénypont fel- és eltűnésével.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)

A RITKÍTÁS FOKÁNAK BEFOLYÁSA A RÖNTGEN-FÉLE TÜNEMÉNYEKRE.

STRAUSZ ÁRMIN-tól.

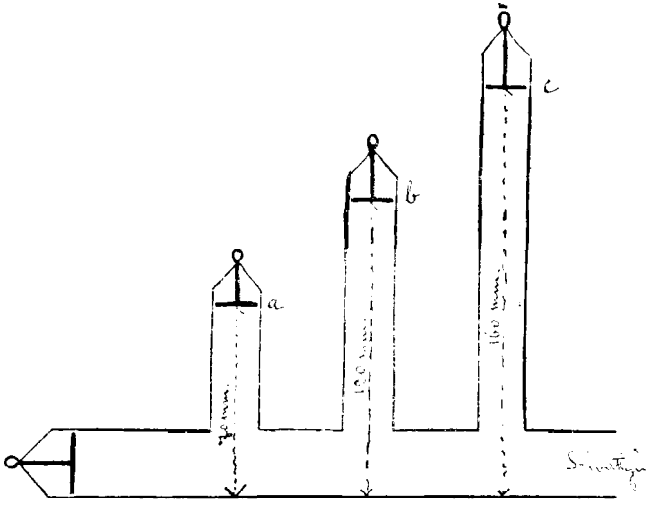
Kisérleteim azt mutatták, hogy minden tényező, mely a kisülő elektromosság feszültségét növeli, egyszersmind fokozza a Röntgen-sugarak hatásosságát. Az inductort tápláló elemek számának szaporítása, nagyobb és nagyobb inductor alkalmazása, szikratávolság a cső és inductor közzé való iktatása, az elektrod távolság növelése és a mi a leghatásosabb, a ritkítás fokának nagyobbítása: ezen tényezők mindegyike fokozza a Röntgen-sugarak hatását. Leglényegesebb azonban a ritkítás foka, melynek befolyását a keletkező sugarak hatására úgy vizsgáltam, hogy ugyanazon fotografiai lemeznek más-más részét tettem ki a Röntgen-sugarak hatásának, mialatt a lemez többi részét 4 mm. vastag zinklemezzel födtem. Az expositio idő (2 percz), továbbá a lemez távolsága a higanylégszivattyúval összekötött csőtől (16 cm.) ugyanaz volt az egymásutáni felvételeknél és csakis a ritkítás fokát változtattam, a mit az elektrodokhoz párhuzamosan kapcsolt csúcsok közti szikratávolságból, valamint a higanylégszivattyúra alkalmazott manometerből is megítélhettem. A kisérletek azt mutatták, hogy fokozódó ritkítással a sugarak hatása is növekszik mindaddig, míg csak a kisülések a cső belsejében ki nem maradoznak, és helyettük a cső felületén, továbbá a kathod és az azt körülvevő üveg közt végbemenő kisülések nem jelentkeznek. Legfeltünőbb a hatás erősbödése azalatt, míg a párhuzamosan kapcsolt szikratávolság 1 cm.-ről 8 cm.-ig növekszik, azontúl a hatás már csak keveset erősödik, sőt szük csöveknél, kivált ha a kathodot körülvevő üvegben levegőcsövecskék vannak, azt is tapasztalhatni, hogy a fotografáló hatás további ritkításnál gyengül, a minek oka abban keresendő, hogy az elektromosság egy része az elektrod és a szomszédos üvegfal közt sül ki, továbbá hogy

az ilyenkor az üveg felületén fellépő kisülések a kathodsugarakat irányukból eltérítik, sőt a kathodból kiinduló kékes sugárnyaláb egészen el is tűnhetik, a mi eléggé megmagyarázza a fotografáló hatás gyengülését.

Minthogy a nagy ritkításnál az üveg felületén fellépő szikrák a csövet könnyen átüthetik, azért czélszerű a ritkítást csak addig folytatni, mig a szikratávolság nem haladja meg a 8 cm.-t, ilyen körülmények közt a csövek 20 cm. távolságból 2 percz alatt elég sötét alapú képet adnak. Ha azonban a cső a leforrasztás előtt nem volt igen gondosan kihevítve, akkor a kathodsugarak hatása alatt a cső faláról felszabaduló gázok által a gáznyomás annyira megnövekszik, hogy a szikratávolság minimálisra száll le és a cső alig fotografál. A különböző üvegfajból készült csövek a kihevítés tekintetében nagyon különböző munkát igényelnek: egyes könnyen olvadó üvegfaj csak igen erős és hosszas kihevítés után marad hosszabb ideig használható állapotban, bár akkor is gyakran megtörténik, hogy az üveg azon a helyen, hol a kathodsugár a falat éri, megolvad vagy elreped; ellenben a nehezen olvadó üvegből készült csövet egyetlen hevítéssel oly állapotba hozhatjuk, hogy az inductor 3—4 óra hosszáig is járhat egy folytában anélkül, hogy a gáznyomás és evvel kapcsolatban a szikratávolság észrevehetőleg változnék. Az ilyen nehezen olvadó üvegből készült csövek a kathodsugarak hatása alatt nem zöld, hanem kék fényben fluoreskálnak, a mi azonban a fotografáló hatás tekintetében nem tesz különbséget; nagy előnyük, hogy sem a platina beforrasztási helyén, sem ott, hol a kathodsugár a falat éri, nem repednek.

A fotografáló hatás annál erősebb, minél kisebb felületen érik a kathodsugarak az üvegcső falát; ez okból mellőzendők a túlságosan szűk csövek, továbbá a gömbalakú kathodok. Sík kathodot használva gondoskodni kell, hogy a hatásos kathodsugárnyaláb tényleg létrejöjjön; ismeretes ugyanis, hogy a síkfelületű kathodból, ha hengeralakú csőben van, kellő ritkításnál a felületre merőleges sugárnyaláb indul ki, melynek átmérője addig, míg a ritkítás nem nagy, akkora mint a kathodé; fokozódó ritkítással e nyaláb folyton vékonyodik és a kathod azon pontjából indul ki, mely a cső tengelyében fekszik, akár összeesik ez a kathod középpontjával, akar nem esik össze vele. E nyaláb, mely a leg-

hatásosabb Röntgen-sugarakat kelti, csak akkor jön létre, ha a kathod hengeralakú csőben van, mely a kathodsugarakat mintegy irányítja; ellenben nem jön létre, ha a kathod keresztalakú csőnek keresztezési csomójában vagy más erős hajlású kúpalakú részében van, a mikor is a kathodból minden irányban lépnek ki sugarak, a cső mindenütt világít, a hatás nagy felületre oszlik el. Szük csöveknél a hatásos kathodsugárnyaláb a fokozódó ritkítással majdnem észlelhetlen vékonyra zsugorodik össze, sőt egészen



el is tünhetik, ha a cső falán fellépő kisülések jelentkeznek és e tünemény eléggé megmagyarázza a fotografáló hatás ilyenkor bekövetkező gyengülését.

Azoknál a csöveknél, melyekben a kathodsugárnyaláb fellép, a ritkításon kívül annak a távolságnak is lényeges befolyása van a Röntgensugarak hatásosságára, mely a kathod és a szemközt levő csőfal között van. Ha ugyanis oly csövet veszünk, melyben a különben egyforma nagyságú elektródok nincsenek egyenlő távolságban a szemközt levő csőfalaktól, akkor azt tapasztaljuk, hogy az elektromos áram irányának megváltoztatásával úgy a szikratávolság, valamint a Röntgen-sugarak hatásossága is lényegesen megváltozik, bár a kommutálás közben állandó maradt úgy a ritkítás foka, valamint az elektrodok egymástóli távolsága. E tünemény

megvizsgálására nehezen olvadó üvegből oly csövet készítettem, mely négy elektroddal van felszerelve oly formán, hogy az elektrodok különböző távolságban vannak a csőnek szemközt levő falától (ábra). A hatás megitélésére egyenlő távolságból egyenlő ideig tartott fotografiai felvételeket csináltam, de egyszerűbbnek és mégis tökéletesen megfelelőnek találtam a Balmain-féle anyagok használatát is, melyek kartoncasettába zárva, a fluoros fény intensitásával jól megbecsülhető mértékét adják a Röntgen-féle sugarak hatásosságának.

A következő táblázatokban fel akarom tüntetni három különböző ritkítás esetében a kisérletek eredményét, megjegyezve, hogy egy-egy csoportban a ritkítás foka állandó volt:

I.

	Kathod	Anod	Szikra-hossz	Fény
1.	*a*	*b*	16 m/m	Semmi
	b	*a*	34 «	Gyenge
2.	*a*	*c*	16 «	Semmi
	c	*a*	46 «	Erős
3.	*b*	*c*	32 «	Gyenge
	c	*b*	49 «	Erős

II.

	Kathod	Anod	Szikra-hossz	Fény
1.	*a*	*b*	31 m/m	Gyenge
	b	*a*	59 «	Erős
2.	*a*	*c*	33 «	Gyenge
	c	*a*	92 «	Igen erős
3.	*b*	*c*	58 «	Erős
	c	*b*	88 «	Igen erős

III.

	Kathod	Anod	Szikra-hossz	Fény
1.	*a*	*b*	37 m/m	Igen gyenge
	b	*a*	76 «	Igen erős
2.	*a*	*c*	36 «	Igen gyenge
	c	*a*	100 «	Rendkivül erős
3.	*b*	*c*	82 «	Rendkivül erős
	c	*b*	100 «	Rendkivül erős

Tovább folytatva a ritkítást és az *a* elektrodot használva kathodnak, az alatta jelentkező fluoros fény intensitása folyton nőtt és rendkívül erős volt, mikor a megfelelő szikratávolság a 60 mm.-t elérte; eközben azonban az üvegcsőnek *a*-val szemközt levő fala annyira megmelegedett, hogy az inductor megszakítása után a gyors hülés közben elrepedt.

A táblázatokban az első verticalis rovat a kathodnak használt elektrodot jelöli, a második rovat az anodot, a harmadik a megfelelő legnagyobb szikratávolságot és végre a negyedik rovat a kathod alatt jelentkező fluoros fény intensitását adja, melyet a Balmain-anyag mutatott. Két-két egymás alá irt és közös számmal megjelölt horizontális sorban az elektrodtávolság ugyanaz és csak a folyam iránya ellenkező.

Az adatokból kiviláglik, hogy ugyanazon ritkításnál és ugyanazon elektrodtávolságnál a Röntgen-sugarak hatásossága, valamint a párhuzamosan az elektrodokhoz kapcsolt szikratávolság is lényegesen függ azon távolságtól, melyben a kathod a cső szemközt levő falától van és pedig minél nagyobb e távolság, annál nagyobb a megfelelő szikrahossz, annál erősebb a Röntgen-sugarak hatása és annál előbb kezd a cső jól fotografálni, míg más cső, melyben a kathod csak nehány centimeternyire (5—7 cm.) van a faltól, csak a végső ritkításoknál kezd jól fotografálni.

Egyszersmind kitünik, hogy a viszonyok megitélésére nem elégséges a csőben uralkodó gáznyomás nagyságát ismerni, hanem sokkal megfelelőbb a szikratávolságot megadni, mert eddigi tapasztalataim szerint egyenlő szikratávolságnál közel egyenlő hatásuak a különböző csövek úgy, hogy a szikratávolságot ismerve, biztosan következtethetünk a cső jóságára.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)

VIZSGÁLATOK
A GRAVITATIO ÉS MÁGNESSÉG KÖRÉBŐL.

(Előleges jelentés.)

B. EÖTVÖS LORÁND r. tagtól.

E jelentésemben a tárgyalt anyag terjedelméhez mérten röviden foglalom össze azon kutatásaim eredményét, melyeket immár nyolcz év óta a gravitatióra és a földi mágnességre vonatkozólag végeztem. Azok a rendkivül érzékeny módszerek, melyeket különösen az erők változásainak mérésére megállapítanom sikerült, lehetővé tették a foglalkozást olyan feladatokkal, melyek eddig úgyszólván hozzáférhetlenek voltak. Így történt az, hogy a kutatás folyamán mindig újabb kérdések megoldására törekedvén, a már elért eredmények közzétételére, egyéb sokféle teendőm mellett, alig maradt időm. A m. t. akadémiának tettem ugyan időről-időre rövid előterjesztéseket munkám állásáról, de ez a néhány szó és még kevesebb sor nem volt elég arra, hogy annak eredményét biztosítsa és másoknak is hozzáférhetővé tegye. Addig is tehát, míg e feladatnak teljes mértékben eleget tehetni időm lesz, ezt az összefoglaló jelentést bocsátom közre, a mely, bár mellőztem benne az elméleti tárgyalások és számítások, valamint a kisérleti adatok részletes felsorolását, talán mégis elég lesz arra, hogy érthetővé tegye azt, a mi kutatásomban lényegesen új.

Kötelességet mulasztanék, ha, a midőn a magam munkásságáról szólok, említetlenül hagynám munkatársaim nevét. Éveken át buzgó segédem volt dr. Kövesligethy Radó, ma egyetemi rendkívüli tanár úr, és kutatásaim egész idején át, kezdetben mint tanuló, utóbb mint egyetemi tanársegéd velem együtt dolgozott dr. Tangl Károly úr. Fogadják ma közreműködésükért hálás köszönetemet.

Az új eszközöket, melyekre vizsgálataimhoz szükségem volt, mind Süss Nándor úr, az állami mechanikai tanműhely igazgatója

itt Budapesten készítette, avval a kiváló gonddal, pontossággal és csinnal, a mely keze munkáját jellemzi.

I. A nehézség térbeli változásainak méréséről.

1. A feladat.

Ismereteink a nehézség térbeli változásaira vonatkozólag, a felismerésükre szolgáló módszerek elégtelensége miatt, mindeddig nagyon hiányosak. Az inga e változások kicsinységéhez mérten ki nem elégítő érzékenységével csak nagy távolságokban teszi lehetővé azoknak felismerését, a mérleg pedig, úgy a mint azt JOLLY használta, ugyan érzékenyebben, hanem csak egy kiváltságos irányban, t. i. lefelé tárja fel a változás nagyságát. Azok a módszerek és azok az eszközök, melyekről e jelentésemben fogok szólni, lehetővé teszik e változások lemérését kicsiny, néhány decimeternyi távolságokban és külömböző irányokban. Sőt az e módszerek szerint tett mérések az ingával és JOLLY-féle mérleggel tett megfigyeléseket úgy egészítik ki, hogy ezekkel együtt a nehézség nagyságát és irányát teljesen ismertté teszik, nemcsak egyes pontokban, hanem a térnek egy olyan nagy kiterjedésű részében, a melyben ez erőt egyenletesen változónak feltételezhetjük. Ezt a czélt állítván magam elé, mindenekelőtt a megoldandó feladatokat fogom kijelölni.

A nehézségnek egyenletesen változó terében ez erő gyorsulásainak derékszögű összetevőit a következő egyenletek adják:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \frac{\partial X}{\partial x} x + \frac{\partial X}{\partial y} y + \frac{\partial X}{\partial z} z, \\ Y &= Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial x} x + \frac{\partial Y}{\partial y} y + \frac{\partial Y}{\partial z} z, \\ Z &= Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial x} x + \frac{\partial Z}{\partial y} y + \frac{\partial Z}{\partial z} z, \end{aligned} \qquad 1)$$

ezekben X, Y, Z a gyorsulás összetevőit az x, y, z pontban, X_0, Y_0, Z_0 pedig ugyanazokat a tengelyrendszer kezdetpontjában jelölik.

A nehézséget mint a földi tömegek vonzásának és a föld for-

gásából eredő középpont futó erőnek eredőjét állítván elő, ha V-vel a föld tömegének potentiál függvényét, ω-val a föld forgásának szögsebességét, ρ-val az x, y, z pont forgás-sugarát és U-val a nehézség erőfüggvényét jelöljük, akkor írhatjuk:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x}(V+\tfrac{1}{2}\rho^2\omega^2) = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y}(V+\tfrac{1}{2}\rho^2\omega^2) = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z}(V+\tfrac{1}{2}\rho^2\omega^2) = \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \qquad 2)$$

E szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \qquad 3)$$

és

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2. \qquad 4)$$

Ha most a coordináta-rendszert úgy választjuk, hogy Z tengelye egyirányú legyen a nehézséggel a coordináták kezdőpontjában, akkor:

$$X_0 = 0 \quad Y_0 = 0 \quad \text{és} \quad Z_0 = g_0.$$

Az 1) egyenletek a nehézség gyorsulását az egész egyenletesen változó térben tizenkét állandó segélyével fejezik ki, ez állandók közül a függőn a Z tengely irányát jelölvén ki, kettőnek X_0 és Y_0 null értékét állapítja meg, egynek, a harmadiknak Z_0-nak értékét pedig az inga adja meg. A többi kilencz, a változás arányát kifejező állandó között a 3) és 4) egyenletek négy összefüggést állapítanak meg, úgy hogy a feladat teljes megoldására még öt adatot kell mérés által meghatározni. Mielőtt az erre szolgáló módszerekről szólanék, előre bocsátom azon egyszerű vonatkozások felsorolását, melyekben az itt szereplő mennyiségek a nehézség niveau-felületéhez, az $U=C$ felülethez állanak. Ha ugyanis ρ_x e felület normál

metszetének görbületi sugarát jelenti az x tengely irányában, ρ_y pedig ugyanazt az y tengely irányában, akkor:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_x},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_y};$$

tengelyrendszerünket azonban úgy is választhatjuk, hogy X és Y tengelyei a főgörbületek irányába essenek, s akkor ρ_1 és ρ_2-vel a főgörbületi sugarakat jelölvén, leszen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_1}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_2}$$

és

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

Az ezeken kívül itt meghatározandó $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ differenciál-hányadosoknak kettős jelentősége van. Ha írjuk:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

úgy látjuk, hogy e mennyiségek a nehézség változásának arányát az X, illetve Y tengely irányában állítják elő. Tegyük még:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}\cos\alpha$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s}\sin\alpha$$

∂s-sel a nehézség niveau-felületén az állandó nehézség görbéjére merőleges ívelemet jelölvén, akkor a $\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ meghatározását a $\frac{\partial g}{\partial s}$

és az α szög meghatározásával pótolhatjuk. A $\frac{\partial g}{\partial s}$ nem egyéb mint a nehézség változásának aránya magában a niveau-felületben, az α pedig az e változás irányát meghatározó szög.

A fenti mennyiségek második értelmezéséhez akkor jutunk, ha teszszük

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z};$$

ebből t. i. azt következtethetjük, hogy z-vel a kezdetpont alatt fekvő pontban $\frac{\partial X}{\partial z} z$ és $\frac{\partial Y}{\partial z} z$ gyorsulások járulnak hozzá a z irányába eső g gyorsuláshoz, úgy hogy az eredő nehézség e pontban

$$\frac{1}{g}\frac{\partial X}{\partial z} z \text{ és } \frac{1}{g}\frac{\partial Y}{\partial z} z$$

szögekkel hajlik el a Z tengelytől. Így tehát:

$$E_x = \frac{1}{g}\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{és} \quad E_y = \frac{1}{g}\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

azokat a szögeket jelentik, melyekkel a nehézség iránya, a hosszegységgel lefelé haladva, az XZ, illetőleg YZ síkokban a Z tengelytől eltér. Ez a nehézség irányváltozásának aránya lefelé.

A feladatunk teljes megoldására szükséges öt adat e szerint meg lesz határozva, ha ismerjük egyrészt a főgörbületek irányát és nagyságát, másrészt a nehézség változásának irányát és nagyságát magában a niveau-felületben. Mivel pedig a JOLLY-féle mérlegelés a 4) egyenlet értelmében az $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ értékét adja, azért a főgörbületi sugarak ismeretére elégséges lesz az $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$ értékének meghatározása, a melyről alább fogok szólni.

2. A módszer.

A fent körvonalozott feladat megoldására a COULOMB-féle mérleget használtam.

Az előbbi fejezet 1) és 3) egyenleteinek értelmében a COULOMB-féle mérlegrúd nehézségének forgásmomentumát a felfüggesztő drót tengelyébe helyezett Z tengely körül a következő alakban fejezem ki:

$$F=\int(Y_x-X_y)\,dm=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\int xy\,dm+$$
$$+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\int(x^2-y^2)\,dm-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\int xz\,dm-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\int yz\,dm$$

a hol az integrálás kiterjesztendő a dróton függő összes tömegekre.

Ha pedig a mérlegrúd tömegelemeinek helyzetét egy szilárdan e rúdhoz kötött $\xi\eta\zeta$ tengelyrendszerre vonatkoztatjuk, melynek ζ tengelye a z forgási tengelylyel összeesik, ξ tengelye pedig a rúddal együtt forogván, az x tengelylyel α szöget képez, akkor a forgásmomentum értéke:

$$F=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha\int\xi\eta\,dm+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos 2\alpha\int(\xi^2-\eta^2)\,dm-$$
$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}2\sin 2\alpha\int\xi\eta\,dm+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\cos\alpha-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\sin\alpha\right)\int\xi\zeta\,dm-$$
$$-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\sin\alpha+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos\alpha\right)\int\eta\zeta\,dm. \qquad 5)$$

Ez az egyenlet a mérlegtestnek bármely alakjára vonatkozólag érvényes. Czélom elérésére két alakot használtam. Az első alak egyszerű hengeres rúd volt, végén golyó vagy hengeralakú tömegekkel, a második alak ettől annyiban különbözött, hogy a rúd egyik végén a golyó vagy henger fonálra függesztve, mélyebben volt elhelyezve. A ξ tengelyt a rúd geometriai tengelyébe helyezvén, mindkét esetben:

$$\int \xi\eta dm=0,$$

$$\int \zeta\eta dm=0,$$

az első esetben ezenkívül:

$$\int \xi\zeta dm=0,$$

a másodikban ellenben:

$$\int \xi\zeta dm=hlm,$$

a hol l a felfüggesztett golyó karját, m tömegét, h pedig függélyes távolát jelöli a rúdtól, illetőleg az annak másik végén megerősített golyótól.

Vizsgáljuk most meg a COULOMB-féle mérleg mechanikai viszonyait külön-külön e két esetre.

Az első esetben, t. i. a rúd két végén egy magasságban megerősített golyók esetében, az 5) egyenlet szerint lesz:

$$F=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2a}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos 2a\int(\xi^2-\eta^2)\,dm;$$

ha pedig az X, Y tengelyeket úgy választjuk, hogy $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=0$, azaz, hogy X és Y a főgörbületek irányai legyenek (lásd fent), akkor:

$$F=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2a}{2}\int(\xi^2-\eta^2)\,dm.$$

Tegyük:

$$\int(\xi^2-\eta^2)\,dm=K',$$

és:

$$\int(\xi^2+\eta^2)\,dm=K,$$

és:

$$\frac{K'}{K}=(1-\varepsilon).$$

K a rúd tehetetlenségi momentumát fejezi ki, hosszúkás rúd esetében az ε kicsiny, sőt a legtöbb esetben elhanyagolható lesz.

A nehézségnek forgásmomentuma F a COULOMB-mérleg drótját vagy fonalát ϑ szöggel megcsavarja úgy, hogy:

$$\tau\vartheta=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)K(1-\varepsilon)\frac{\sin 2a}{2}$$

vagy

$$\vartheta\tau = g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) K(1-\varepsilon)\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$\tau\vartheta$ a drótnak csavarás ellenében ható forgásmomentumát állítván elő.

A ϑ szöget a mérleg rúdjának egy egyetlen állásából ugyan nem olvashatjuk le, de ha a mérleg szekrényét torsio fejével együtt függélyes tengely körül úgy forgatjuk, hogy a rúd középvonala az x tengelylyel az előbbitől eltérő α' szöget képezzen, akkor a drót csavarási szöge is megváltozik, s ez a változás $(\vartheta' - \vartheta)$ a rúdhoz és a szekrényhez erősített mutatóknak vagy jobban tükröknek viszonyos elfordulásából felismerhető és mérhető lesz.

A rúdnak három állása elég már arra, hogy a drót csavarodásában előálló változások észlelése alapján úgy az α szög értékét, mint a $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ mennyiség értékét megállapíthassuk; jobban áttekinthető s a számításban egyszerűbb lesz azonban eljárásunk, ha négy állást létesítünk, úgy hogy az állások közül kettő-kettő egymásra merőleges legyen, e két pár pedig egymással 45 foknyi szöget képezzen.

Így lesz az eredeti állásban:

$$\vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

erre merőlegesen:

$$\vartheta' = -\frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

az eredetitől 45 fokra:

$$\vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\cos 2\alpha}{2},$$

az eredetitől 135 fokra:

$$\vartheta_1' = -\frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\cos 2\alpha}{2};$$

e szerint:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{K}{\tau}(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha,$$

$$\vartheta_1' - \vartheta_1 = \frac{K}{\tau}(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha,$$

és:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta_1' - \vartheta_1},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = \frac{\tau}{K(1-\varepsilon)} \sqrt{(\vartheta' - \vartheta)^2 + (\vartheta_1' - \vartheta_1)^2};$$

az ε-nak amúgy is kicsiny értéke, a mérlegrúd méreteiből, $\frac{\tau}{K}$ pedig annak lengési idejéből határozható meg.

Légüres térben végtelen kicsiny amplitudokkal egyedül a drót rugalmassága által okozott lengések esetében volna:

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T^2}.$$

A levegő ellenállása és a nehézség változásaiból eredő forgásmomentum befolyása azonban különös megfontolást követel. A rúd mozgásának differenciálegyenletét ismert alakjában írjuk:

$$K\frac{d^2\omega}{dt^2} + H\frac{d\omega}{dt} + \mathrm{F}\omega = 0,$$

itt ω a szögkitérést, H a levegő surlódásától függő állandót, K mint előbb a tehetetlenségi momentumot jelenti. Ebből folyólag a rúd egy pontjának kitérése:

$$\omega = ae^{-\beta t} \sin \pi \frac{t}{T},$$

a hol

$$\beta = \frac{H}{2K},$$

és

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\mathrm{F}}{K} - \beta^2.$$

A mi esetünkben:

$$\mathrm{F} = \tau - \frac{\partial F}{\partial \omega} = \tau - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) K(1-\varepsilon)\cos 2\alpha,$$

s igy

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha - \beta^2,$$

ha pedig α helyébe $\alpha + \frac{\pi}{2}$ értéket teszünk, a mi a rúd merőleges állításának felel meg, akkor:

$$\frac{\pi^2}{T'^2} = \frac{\tau}{K} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha - \beta^2$$

ezekből kapjuk:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T'^2}\right) = \frac{2\tau}{K} - 2\beta^2$$

s így kiszámíthatjuk $\frac{\tau}{K}$ értékét.

Ez okoskodásunkból kitűnik még az is, hogy a lengési idők észlelése már egymagában is elég az elcsavarodások által lemérhető adatok meghatározására. Két egymásra merőleges helyzetre nézve ugyanis az előbb megállapított értékekből nyerjük:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha,$$

és két más ezekkel 45 foknyi szögletet képező helyzetre vonatkozólag

$$\pi^2\left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_1^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)(1-\varepsilon)\sin 2\alpha$$

tehát úgy a főgörbületek iránya α, mint

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

meg vannak határozva.

Ha az általam használt mérlegrudakra vonatkozólag amúgy is kicsiny ε mennyiséget elhanyagoljuk, és a lengési idő értékét egyedül a drót rugalmassága folytán T_0-al jelöljük, akkor közelítésben a következőleg mondhatjuk ki okoskodásunk eredményét: a COULOMB-féle mérleg drótja a mérlegszekrény és torsiofejnek együttes forgatása közben megcsavarodik, e csavarodás nagysága a rúdnak 90 fokkal egyenlő elforgatásánál:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\sin 2\alpha;$$

a mérlegrúd lengési ideje ugyanilyen forgatásnál megváltozik, 90 fokos forgatásnál e változás:

$$T' - T = -\frac{T_0^3}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2\alpha = -\frac{T_0^3}{\pi^2} g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cos 2\alpha$$

$\vartheta' - \vartheta$ maximum lesz, mikor $\alpha = 45°$ és $= 135°$ $T' - T$ maximum lesz, mikor $\alpha = 0$ és $= 90°$, $(T' - T)_{\max} = T_0 (\vartheta' - \vartheta)_{\max}$.

A Coulomb-féle mérlegnek még azon második alakjáról kell most szólanom, melynél a rúd egyik végén a fonálon felfüggesztett tömeg mélyebben áll, mint az ellensúlyozó tömeg a rúd másik végén. Erre vonatkozólag már tudjuk, hogy

$$\int \xi\zeta dm = mlh$$

s így az 5) egyenlet tetszőlegesen irányított X tengelyre vonatkoztatva, adja:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}\int (\xi^2 - \eta^2)\, dm +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2)\, dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cos\alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\sin\alpha\right) hlm.$$

Ha a mérlegrudat előbb az X tengely irányába állítjuk, úgy hogy $\alpha = 0$ legyen s azután az eszköz szekrényét és vele a torsiofejet átforgatjuk addig, a míg $\alpha = \pi$, akkor a mérődrót $(\vartheta' - \vartheta)$ szöglettel csavarodik meg, e szögletnek értéke az F értékéből kiszámítva:

$$\vartheta' - \vartheta = -\frac{2hlm}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = -2\frac{\partial g}{\partial y}\frac{hlm}{\tau}$$

és ha a rudat előbb $\alpha = \frac{\pi}{2}$ azután $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ állásba hozzuk, akkor e két helyzet között a csavarodás

$$\vartheta_1' - \vartheta_1 = \frac{2hlm}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{hlm}{\tau}$$

az $\frac{lm}{\tau}$ mennyiséget vagy az eszköz méreteiből, vagy a függő súlyra

kivülről ható vonzó tömegek által okozott kitérésből könnyen meghatározhatjuk. Így a $\frac{\partial g}{\partial x}$ és a $\frac{\partial g}{\partial y}$ vízszintes irányú változásoknak, vagy eredőjüknek és ez eredő irányának ismeretéhez jutunk. Tudjuk már, hogy

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial s} = E$$

a nehézség irányváltozását lefelé méri.

A COULOMB-féle mérleg e két alakjában és e két módon használva, az előadottak szerint lehetővé teszi azt, hogy meghatározzuk egyrészt a nehézség niveau-felületének főgörbületi irányait és e főgörbületek különbségét $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$, másrészt a nehézség változását a niveau-felület érintő síkjában (a vízszintesben) és e változásnak irányát. Feladatunkat tehát teljesen megoldhatjuk, mert a JOLLY-féle mérlegelés a $\frac{\partial g}{\partial z}$ értékét adja s így a 4) egyenletből folyó

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + 2\omega^2$$

egyenlet segélyével az $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ értékével együtt magukat a ρ_1 és ρ_2 görbületi sugarakat is kiszámíthatjuk.

Megjegyzem még, hogy a függélyes síkban lengő inga mechanikáját abban a modorban tárgyalva, mint azt itt a COULOMB-féle ingára vonatkozólag röviden előadtam, az elmélet a $\frac{\partial g}{\partial z}$ meghatározására a JOLLY-féle eljárásnál előnyösebb módszerekkel kecsegtet, azoknak megvalósítása azonban a vízszintes forgási tengelyeket létesítő szerkezetek tökéletlensége miatt nekem mindeddig nem sikerült.

3. Az eszközök.

A tervbe vett mérések kivitelére olyan eszközökről kellett gondoskodnom, melyeknek érzékenysége a lemérendő igen kicsiny erőknek megfelelő legyen. A megkivánt érzékenység fokának megitélése végett közlöm itt a lemérendő adatoknak értékeit egy olyan

mintaszerű földre vonatkozólag, a minőt közelítésben a föld alakjának s rajta a nehézség változásainak előtüntetésére szoktunk használni. Ilyen például LISTING forgás-ellipsoidja. Ennél:

$$a=637\ 736\ 500 \text{ C.}$$
$$b=635\ 529\ 800 \text{ C.}$$

és

$$g_\varphi=978\ 0728\,(1+0{,}005\ 201\ 3\sin^2\varphi)$$

A számítás ez adatokból $\varphi=47°30'$ szélességre vonatkozólag, azaz Budapest helyzetére, a következő értékeket adja:

$$g=980{,}838$$
$$g\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)=4\ 836.10^{-12}$$
$$\frac{\partial g}{\partial s}=7\ 960.10^{-12}$$
$$E=\frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{g}=8\ 115.10^{-15}$$

vagy

$$E=0{,}000\ 001\ 673 \text{ másodpercz}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}=3\ 080.10^{-9}.$$

A két végén golyókkal ellátott mérlegrúd drótjának elcsavarodása a legnagyobb akkor lesz, a mikor e rúd tengelye a meridiánnal 45 foknyi szögletet képez, a meridián két oldalán fekvő két ilyen állás között az elcsavarodás

$$\vartheta'-\vartheta=\frac{T_0^2}{\pi^2}g\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)$$

s ha teszszük $T_0=1000$ s, akkor:

$$\vartheta'-\vartheta=\frac{1000^2}{\pi^2}.4\ 836.10^{-12}=0{,}000\ 490$$

azaz 1,7 percz.

Ha pedig a lengési időt a meridián körül T-vel, arra merőlegesen T'-gyel jelöljük, akkor:

$$T - T' = T_0(\vartheta' - \vartheta) = 0{,}49 \text{ s.}$$

azaz körülbelül egy fél másodpercz.

Abban a második esetben, mikor a rúd egyik súlyát mélyebbre függesztjük, a rudat e mintaszerű földön a meridiánra merőleges két állásba helyezzük, ezek között a drót elcsavarodása:

$$\vartheta' - \vartheta = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{hlm}{\tau};$$

egy eszközömnél például $h = 100$ c., $l = 13^1/_3$ c., $m = 30$ gr. és $\tau = 0{,}4$ volt s így esetünkben $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}$ lévén, találjuk:

$$\vartheta' - \vartheta = 2.7\ 960.10^{-12} . 100\ 000 = 0{,}001\ 492$$

azaz körülbelül 5 percz.

Világos ezekből, hogy eszközeim szerkesztésénél mindenekelőtt nagy lengési idők létesítésére kellett törekednem s ennek a megfontolásnak köszönhetem, hogy sikerült lemérnem e kicsiny erőváltozásokat, melyek kisebb lengési idejű eszközök használatánál mindeddig rejtve maradtak.

Ilyen nagy 10 egész 20 percznyi s egyes esetekben még ennél is nagyobb lengési idők és eddig aligha elért érzékenység mellett mérlegrúdjaim egyensúlyi állását úgy mint mozgását bámulatosan szabályossá tudtam tenni és pedig nemcsak jól védett pinczékben, hanem a laboratoriumnak bármely helyiségében, sőt éjjel egyszerű vászonsátor alatt még a szabadban is.

Az egyetlen fogás, ha egyáltalában annak nevezhetem, az volt, hogy rúdjaimat kettősfalú és kicsiny magasságú fémszekrényekbe zártam. Vizsgálódásaim folyamán különböző alakú szekrényeket használtam, majd vízszintes hengeres csövet, mely a mérlegrúdat szorosan körülvette, majd lapos hosszúkás parallelepidet, majd kis magasságú körhengert. Legelőnyösebbnek ez utolsó alakot találtam, a melyben a rúd szabadon lenghet s minden helyzetében egyformán áll a szekrény falaihoz viszonyítva.

A szekrények kettős, $^1/_2$—1 centimeternyi levegőréteg által egymástól elválasztott falai 2—4 millimeter vastag sárgarézből készültek, ilyen kettős falúak s ugyanakkora vastagságúak a drótot

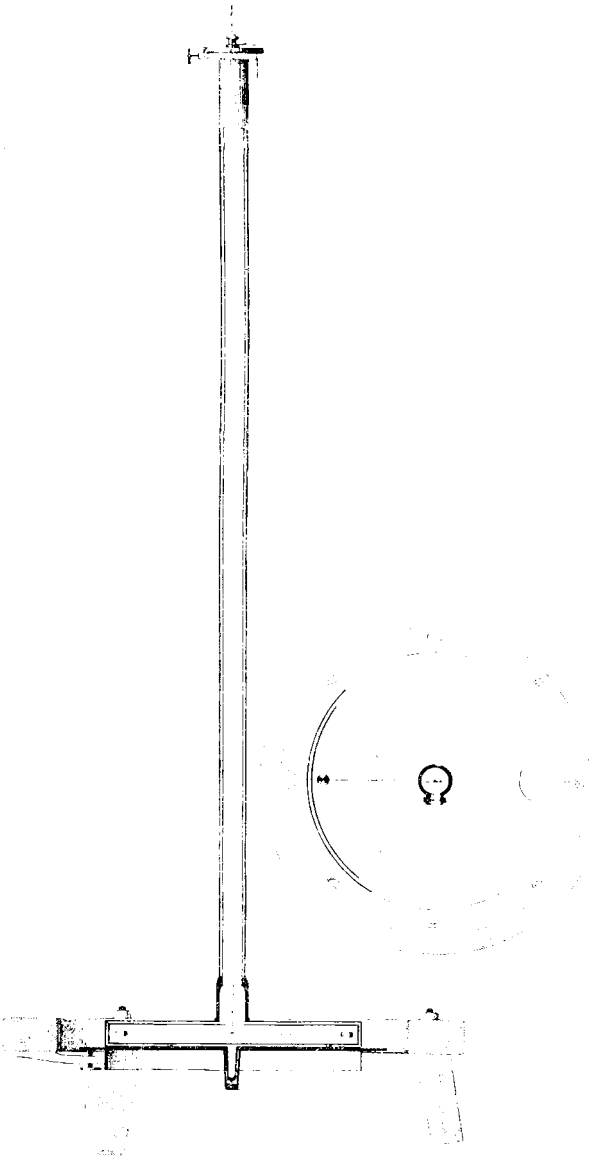
bezáró csövek is. A belső szekrényben ily módon az egyoldalú melegedések hatása jelentékenyen kisebbedik, s a külső hőmérsékváltozások a minden részükben lehetőleg egyenlő vastagságú fémfalakon és légrétegeken át minden oldalról majdnem egyidejűleg hatolnak a rudat környező térbe. A csak két vagy három centimeter magas lengési térben a felfelé irányított légáramlások hatása is alig lesz érezhető. Ehhez hozzátéve még azt, hogy a minden oldalról jól vezető környezet a külső elektromos befolyásokat is teljesen kizárja, magyarázatát adtuk az eszközeimben a COULOMB-féle mérleggel eddig tett tapasztalatok után bizonyára meglepő állandóságnak.

A mérleg rúdját rendesen 100—150 centimeter hosszú platindrótra függesztettem, a mely előzetesen már hónapok óta reá akasztott súlyokkal ki lett nyújtva. A rendesen használt drót átmérője $^1/_{25}$ millimeter, hordképessége 120—130 gramm, a reá felfüggesztett szerkezet súlya pedig 80—100 gramm volt. A drót egy méter hosszúságú részére vonatkozólag átlagban $\tau = 0{,}3$ C. G. S.

BOYS nyomán tettem kisérleteket ugyanakkora hordképességű és hosszaságú kvarczfonalakkal is, a melyeknek elkészíttetésük után azonnal bámulatosan állandó rugalmassága sok előnynyel kecsegtet, de különösen hordozható eszközeimnél egyelőre mégis megtartottam az előzetesen kinyújtott platinát, mert e nagy hordképességű rideg kvarczfonalak könnyen törnek. Érzékenységük is kisebb a platináénál, alig sikerült olyan 100 grammot hordó kvarczfonalat készítenem, melynek egy méter hosszú részére vonatkozólag τ az egységnél kisebb lett volna. A hosszú időn át kinyújtott és erősen megterhelt platindrótok is kielégítő állandóságot mutattak, s ha azonnal az eszközök új felállítása után némi járást tanusítottak, az is szabályos volt és így könnyen vehettem számításba.

E jelentésemben előterjesztendő vizsgálatok folyamán eszközeim száma nagyra nőtt s azért azoknak megkülömböztetése végett kénytelen vagyok azoknak neveket adni.

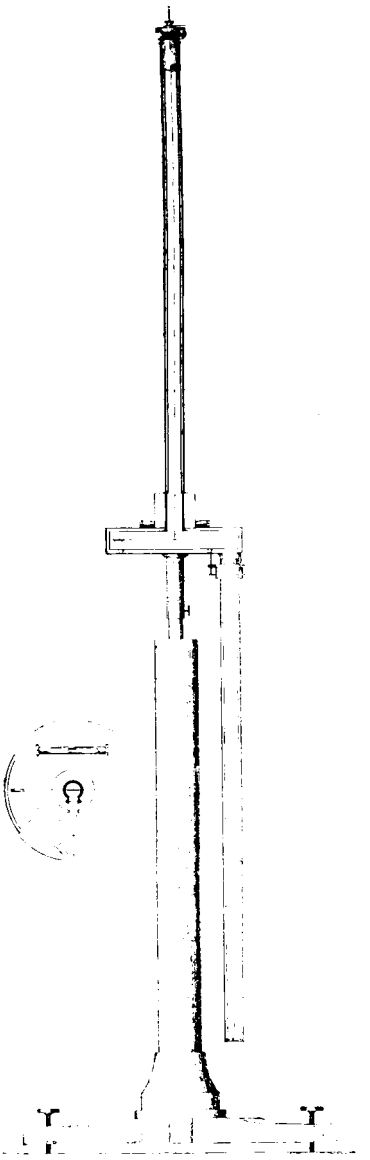
Így azt az eszközt, melylyel a $g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ mennyiséget mérem, *görbületi variometernek*, azt a másikat pedig, melylyel a nehézség változását a vizszintesben, s egyszersmind a nehézség



1. és 2. ábra.

irányváltozását lefelé határozom meg, *horizontális variometernek* fogom nevezni.

A görbületi variometer képét az 1. és 2. ábra tünteti elő, az 1. ábra függélyes, a 2. ábra vízszintes átmetszetben. E jelentésem keretében nem szándékozván eszközeim részletes leírásába bocsátkozni, röviden csak a következőket emelem ki. A hengeres mérlegszekrény erős fagyűrűben ahhoz erősített fémkarokra van helyezve. A fagyűrű három 120 centimeter magas szétterpeszthető falábon áll, a mérlegszekrényt hordó fémkarok állító-csavarokban végződnek, az eszköz vízszintezése végett. A hengeres szekrény függélyes tengely körül fokokra beosztott kör felett foroghat. A cső alsó részén köralakú ablak van, melynek egyik fele tükörrel van elfödve, másik fele pedig a bent lengő rúdhoz erősített tükröt tárja fel. A csőhöz erősített tükör hajlása csavarokkal úgy változtatható, hogy az elébe helyezett skála képét a mozgó-rúd tükrével egyszerre mutassa a leolvasási távcső látterében. E két skálakép eltolódása szolgál a $\vartheta' - \vartheta$ csavarodás lemérésére. A lengő-rúd végén hengeres súlyok feküsznek, tömegük egyenkint 30 gramm, középpontjaiknak egymástóli távola 34 cm., a belső szekrény átmérője 40 cm. A belső úgy mint a külső szekrénynek teteje leemelhető. A drót végein fémlemezkékhez van forrasztva és csavarokkal megerősítve, egyrészt a torsiofej rúdjához, másrészt a mérlegrúdhoz; a drót hossza 150 cm.



3. és 4. ábra.

Másik eszközömet, a horizontális variometert a 3. és 4. ábra mutatja.

A hengeres mérlegszekrény ez eszközön 140 centimeter ma-

gas, 4 lábon álló faoszlop végén erős fémtengelyen nyugszik. A forgás nagyságának lemérésére a szekrény felső lapján elhelyezett iránytű szolgál. A rúdra függesztett hengeres súly kettősfalú csőben van elzárva, a mely a szekrény fenekén alkalmazott csavarokkal függélyesen állítható. A csavarodás lemérésére szolgáló tükrök úgy vannak elhelyezve, mint a görbületi variometeren. A felső mérő-drót hossza 110 cm., a függő-henger súlya 30 gr., forgási karja 13,2 cm., felfüggesztő-drótjának hossza pedig 100 cm.

4. Az eddig tett mérések eredményei.

Az itt röviden előadott mérési módszereket mindenekelőtt magában a physikai intézetben próbáltam ki. Mindkét eszközt, a görbületi variometert és a vízszintes variometert a pincze, a földszint és az első emelet különböző pontjain állítottam fel. Az észlelt változások általában az épület tömegeloszlásának megfelelők voltak, különösen érezhető volt az alúl elterülő hosszúkás pincze látszólagos taszítása. Az intézeten kívül először a Gellért-hegy tövében, a Rudas-fürdő igazgatósági épületének földszintjében tettem méréseket. A görbületi variometer rúdjának lengési ideje e helyen a hegy felé irányított egyensúlyi állás körül 564,6 s., arra merőlegesen 572,2 s. volt. Ugyanott a mérő-drót elcsavarodását a mérlegrúdnak két egymásra merőleges, az előbbi iránynyal 45° szöget képező állítása közben 45 perczczel egyenlőnek találtam. Ez utóbbi érték alig 1 perczczel tér el attól, melyet a lengési időkből számítás útján nyerünk. A variatiónak ezekből folyó értéke megfelel a hegy alakjának és tömegének, a mennyiben ezeket szabálytalanságuk mellett számításba vehetjük.

Ezután szt.-lőrinczi kertemben, a szabadban vízmentes ponyvával bevont sátorban állítottam fel horizontális variometeremet. Nappal, főképen a sátorra tűző nap sugarainak behatása mellett, eszközöm folytonos majd lassúbb, majd gyorsabb járása folytán az észlelés nem volt lehetséges. Éjjel azonban minden megváltozott, a mérlegrúd olyan biztosan és állandóan foglalta el egyensúlyi helyzetét, mint a laboratoriumban.

Több éjjelen át ismételvén a méréseket, egymással jól megegyező adatokat nyertem. Biztosan felismerhető volt azokból a gyengén emelkedő lejtőnek hatása, melyen kertem elterül.

Ez előzmények után lehetségesnek mutatkozott a nehézség változásainak a szabadban rendszeres megvizsgálása. 1891 nyarán Bodola Lajos, dr. Kövesligethy Radó és Tangl Károly urak eszközeimmel ellátva, a Kis-Czell mellett emelkedő Ságh-hegyen ütötték fel sátraikat, hova őket később én is követtem. Ez a síkságból kiemelkedő 150 meter magas csonka bazaltkúp elszigetelt állása és szabályos alakjánál fogva a tömegvonzásnak aránylag egyszerű s így jól tanulmányozható esetét valósítja meg. A nehézség tanulmányozása szempontjából különösen érdekessé teszik a Ságh-hegyet azon vizsgálatok, melyeket rajta Sterneck ezredes, az ingamegfigyelések e fáradhatatlan mestere eszközölt s a melyek azt látszottak mutatni, hogy a nehézség a hegy lapos tetején fekvő két egymástól csak 150 méter távolságra fekvő és közel egymagasságú pont között $\frac{1}{30000}$ részével változik meg. Ily kis távolságban ilyen nagy változást a nehézségre vonatkozó elméleteink nem tudnának indokolni.

A Ságh-hegyen módszerem szerint tett mérések eredményeiről fent nevezett urak fognak kimerítő jelentést tenni, annyit azonban már itt elárulhatok, hogy a Sterneck-féle kritikus pontok között ily nagy változásokat nem találtak, s méréseik eredményei szerint a Ságh-hegyen is minden rendben van.

Megemlítem még azt, hogy a görbületi variometert még azon kérdésnek megoldására is használtam, van-e befolyása a testek anyagi minőségének arra a vonzásra, melyet reájuk a föld tömege gyakorol.

A mérlegrúdnak két végére két különböző anyagot, például parafát és rezet helyezve, annak 180 fokkal átforgatása után nyilvánulnia kellene a különbségnek, mely netán e két anyag nehézségének iránya között fennáll. A mennyiben pedig ilynemű megfigyeléseim azon eredményhez vezettek, hogy a különböző anyagok nehézségének irányai között még e rendkívül érzékeny megfigyelések sem árulnak el különbséget, annyiban arra a következtetésre lettem jogosítva, hogy ez anyagokra maga a föld vonzása is ugyanaz, vagy legalább csak az észlelés határánál kisebb mértékben különböző. A vonzó-erők között fennálló különbségeknek ugyanis a nehézség irányának különbségeiben is kellene nyilvánulniok azért, mert a nehézséget a vonzó-erőnek és az anyag minő-

ségétől független középpontfutó erő eredőjének kell tekintenünk. Így kimutattam, hogy a különböző anyagokra gyakorolt vonzóerők közötti különbség ha volna is, mindenesetre kisebb mint annak egy húszmilliomoda. (Lásd 1889 jan. 20.-án a m. t. akadémiának tett előterjesztésemet.)

II. A földi mágneses erő térbeli változásainak méréséről.

Feladatúl tűztem ki magamnak a földi mágneses erő térbeli változásait teljességükben mérhetőkké tenni, olyan értelemben, mint az nekem a nehézségre vonatkozólag sikerült.

A mágneses folyadékegységre ható erőnek (a mágneses intensitásnak) összetevőit X, Y, Z megfelelő értelmezéssel ugyancsak az I. fejezet 1) alatti egyenletei által állíthatjuk elő, s ha tekintetbe veszszük, hogy e mágneses erőnek is van potenciálfüggvénye, akkor tisztába jövünk azzal, hogy feladatunk teljes megoldására itt is a változást kifejező hat adat meghatározása szükséges. Ezek az adatok:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z};$$

közöttük a ható mágneses testeken kívül fekvő pontokra vonatkozólag a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{dy^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Figyelmünk e feladat kitűzésénél mindenekelőtt arra a translatorius erőre irányúl, melynek mint az egész mágnesre ható összes erőnek kell nyilvánulnia akkor, midőn megfigyelő képességünket olyan érzékenynyé teszszük, hogy a mágneses intensitás változásait felismerni tudjuk. Valóban első teendőmnek ezen erő lemérését tekintettem.

A megelőző fejezet 1) egyenleteinek alapján könnyen kiszámíthatjuk a translatorius erő összetevőit olyan mágnesre, mely-

nek momentumát annak M_x, M_y, M_z vetületei által fejezzük ki. Ezen erő összetevői:

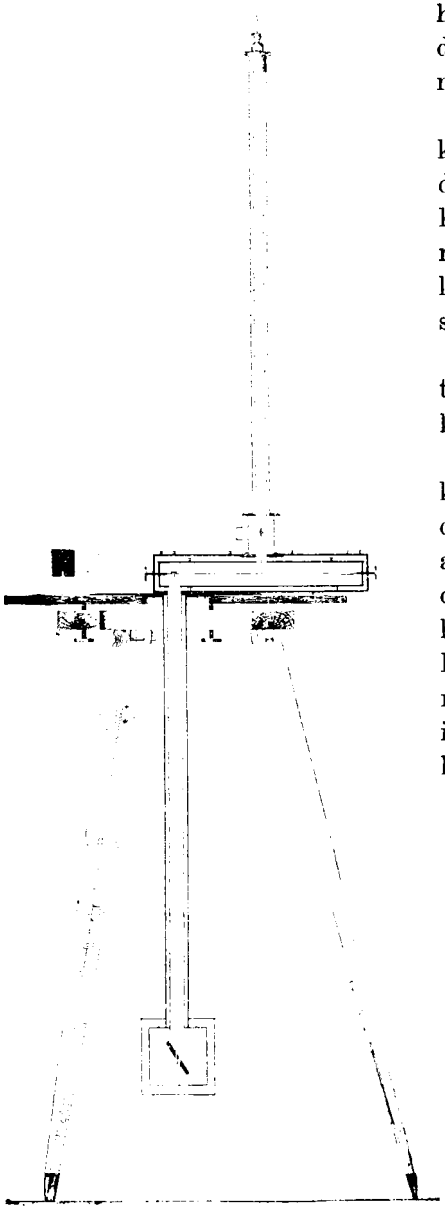
$$P_x = M_x \frac{\partial X}{\partial x} + M_y \frac{\partial X}{\partial y} + M_z \frac{\partial X}{\partial z},$$
$$P_y = M_x \frac{\partial Y}{\partial x} + M_y \frac{\partial Y}{\partial y} + M_z \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad 1)$$
$$P_z = M_x \frac{\partial Z}{\partial x} + M_y \frac{\partial Z}{\partial y} + M_z \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Tengelyrendszerünket most úgy választjuk, hogy annak Z tengelye lefelé, X tengelye a mágneses meridián irányában észak felé, Y tengelye pedig kelet felé irányuljon. Egyelőre azon esetre szorítkozunk, a mikor a mágnes tengelye a mágneses meridiánnal kicsiny ε szöget zár be, s ez esetben az erőnek vízszintes összetevőit (a melyek itt egyedül érdekelnek) a következő alakban állítjuk elő:

$$P_x = M_h \frac{\partial X}{\partial x} + M_h \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial X}{\partial z};$$
$$P_y = M_h \frac{\partial Y}{\partial x} + M_h \frac{\partial Y}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial Y}{\partial z};$$

a hol M_h a mágnes momentumának vízszintes, M_v pedig ugyanannak függélyes összetevőjét jelöli.

Ezen vízszintes erő-összetevők lemérésére egy a COULOMB-féle mérleg elvére alapított eszközt használok, melyet *mágneses translatometernek* neveztem el. Ezen eszközt az 5. ábra függélyes, a 6. ábra vízszintes átmetszetben tünteti elő. Külső alakjában a nehézség horizontális variometeréhez hasonlít, a mérlegrúd végén azonban mágnes függ, melynek hajlását a vízszinteshez változtatni lehet. A szekrény forgatása ez eszközön nem a mérlegrúd közepe, hanem annak vége körül, illetőleg azon függélyes cső körül történik, melyben a felfüggesztett mágnes drótja van elzárva. Ez a cső és annak végén a mágnest körülvevő szekrény vasmentes rézből készült. Nagyobb súlyt kell fektetni ez eszköznél a torsiofej finomabb beosztására; kívánatos, hogy azon legalább 1 perczet leolvasni lehessen. Az eszköz szekrényének szögelfordulását ugyancsak körosztályzaton, a mérlegrúdnak a szekrényhez és torsiofej-



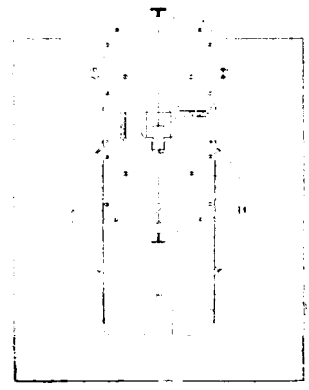
5. ábra.

hez viszonyított elfordulását pedig tükrök segélyével lehet lemérni.

A szövegbe foglalt 7. ábránkon OA a mérlegrudat, C a rudat hordó drótnak lábpontját jelöli. Az eszköz forgatása O körül történik, úgy hogy forgatás közben a C pont, tehát a torsiofej is $OC=l$ sugarú kört ir le.

Ezt az eszközt a translatorius erő lemérésére a következő módon használom.

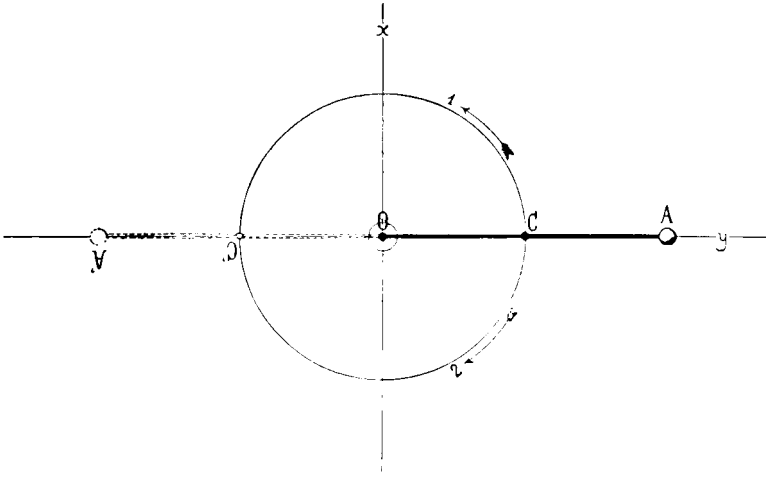
A mérlegrudat a szekrény kellő elhelyezése és a mérődrótnak a torsiofejen kiigazítása által először a mágneses meridiánra merőleges OCA állásba hozom és pedig úgy, hogy a lent függő mágnes tengelye a mágneses meridiánnal ha nem is zérus, de legalább lehetőleg kicsiny (ε) szöget képezzen. A



6. ábra.

felső, a mérlegrudat hordó drótot, melyet mérő-drótnak nevezek, ez esetben két erő csavarja meg, ú. m. először a translatorius erőnek az X irányába, vagyis a meridián irányába eső összetevője, a mely l karon működik, és másodszor a függő mágnesnek forgató ereje a H horizontális mágneses intensitás behatása alatt. A mérő-drót e szerint a rúdnak ez állásában meg van csavarva, s a csavarás szögét ϑ-val jelölvén, egyensúly esetében lesz:

$$\tau\vartheta = lM_h\frac{\partial X}{\partial x} + lM_h\frac{\partial X}{\partial y}\varepsilon + lM_v\frac{\partial X}{\partial z} - M_hH\varepsilon = lP_x - M_hH\varepsilon.$$



7. ábra.

Most az eszközt szekrényével együtt 180 fokkal átforgatom a szemben álló helyzetbe, előbb az 1 nyíl irányában, azaz ellentetten az óramutató járásával. A drót felső végének a torsiofejen tett forgatásával a mérlegrudat pontosan $OC'A'$ állásba hozom. E közben a mágnest hordó drótnak felső vége is 180 fokkal fordúlt el s ezért a mágnes tengelye is kitért előbbi helyzetéből, most $\varepsilon - \alpha$ szöget képezvén a meridiánnal. Finom drótjaim alkalmazásánál α egy, két foknál kisebb marad. Ezért a mérő-drótnak ez újabb egyensúlyi helyzetére nézve tehetjük:

$$\tau\vartheta_1' = -lP_x + lM_h\alpha\frac{\partial X}{\partial y} - M_hH\varepsilon + M_hH\alpha.$$

Ha végre eszközünk szekrényét az első OCA álláson át a 2 nyíl irányában forgatjuk addig, míg az újra ebbe az $OC'A'$ állásba visszatér, azaz egyszer egészen körülforgatjuk és a mérlegrudat a torsiofejen újra pontosan beigazítjuk, akkor lesz:

$$\tau\vartheta_2' = -lP_x - lM_h\alpha\frac{\partial X}{\partial y} - M_hH\varepsilon - M_hH\alpha,$$

és $\tau\vartheta$, $\tau\vartheta_1'$ és $\tau\vartheta_2'$ ez értékeiből:

$$\tau(\vartheta - \vartheta_1') = 2lP_x - lM_h\alpha\frac{\partial X}{\partial y} - M_hH\alpha,$$

$$\tau(\vartheta - \vartheta_2') = 2lP_x + lM_h\alpha\frac{\partial X}{\partial y} + M_hH\alpha,$$

tehát:

$$P_x = \frac{\tau}{4l}((\vartheta - \vartheta_1') + (\vartheta - \vartheta_2')).$$

A $\vartheta - \vartheta_1'$ és a $\vartheta - \vartheta_2'$ csavarodási szögeket a mérő-drót torsiofején mérjük le, azt keressük ugyanis, hogy mekkora szöggel kell a drót felső végét forgatnunk, hogy a mérlegrudat az 1-gyel és 2-vel jelelt átforgatások után az eszköz szekrényére erősített tükör normálisához viszonyítva a kezdetállásba visszahozzuk. A mennyiben a rúdnak ilyen pontos beállítása nehézséggel jár, az annak megfelelő csavarodási szögeket, két közel szomszédos állásra vonatkozó adatokból interpolatio segélyével számíthatjuk ki. Épen úgy mint a translatorius erőnek északi irányú P_x összetevőjét, lemérhetjük annak keleti irányú P_y összetevőjét is, arra a mérlegrúdnak a mágneses meridián irányába eső állásait használván fel.

Okoskodásunk folyamán csak a mágneses erőre fordítottuk figyelmünket, tudjuk azonban, hogy eszközünk mérlegrúdjának állására a nehézség változásai is befolyást gyakorolnak. Ezt a befolyást azonban könnyen felismerhetjük s attól észlelésünk eredményét mentté tehetjük, ha a mágnes helyébe nem mágneses tömeget akasztván, az eszközt mint a nehézség horizontális variometerét használjuk.

A mágneses translatorius erő összetevőinek lemérését, a mágneses intensitás térbeli változásainak felismerésére jól értékesíthetjük, a legelőnyösebben úgy, ha a mérést előbb lefelé s azután felfelé hajlított mágnessel végezzük. Legyen például a mágnes tengelyének hajlásszöge a vízszinteshez előbb $=i$ s azután $=-i$, akkor az első esetben:

$$M_h = M\cos i, \quad M_v = M\sin i;$$

a második esetben:

$$M'_h = M\cos i, \quad M'_v = -M\sin i;$$

s ha továbbá pontos beállítást feltételezvén, teszszük $\varepsilon = 0$, akkor az összetevők értékei a következők lesznek: az első esetben:

$$P_x = M\cos i\frac{\partial X}{\partial x} + M\sin i\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P_y = M\cos i\frac{\partial Y}{\partial x} + M\sin i\frac{\partial Y}{\partial z},$$

a második esetben pedig:

$$P'_x = M\cos i\frac{\partial X}{\partial x} - M\sin i\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P'_y = M\cos i\frac{\partial Y}{\partial x} - M\sin i\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Ezekből:

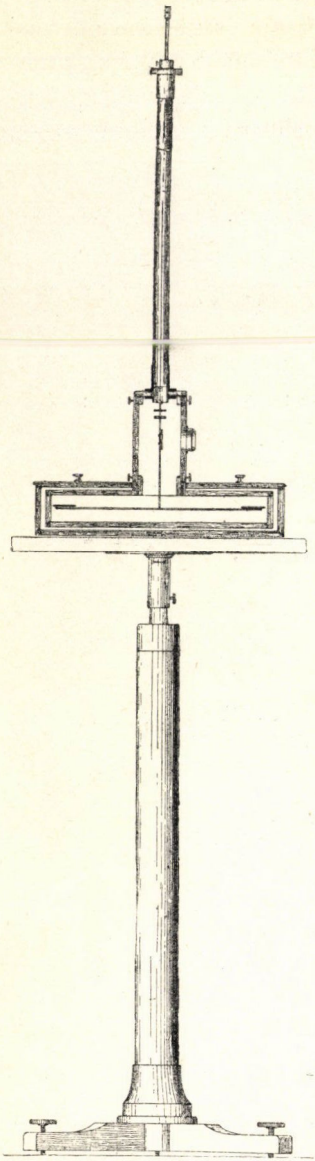
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{P'_x + P_x}{2M\cos i},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{P_x - P'_x}{2M\sin i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{P_y + P'_y}{2M\cos i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{P_y - P'_y}{2M\sin i}.$$

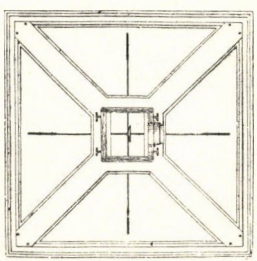
Feladatunk teljes megoldásához szükséges hat adatból e szerint ez úton négyet mérhetünk le s hátra van még kettőnek, illetőleg a $\Delta V = 0$ egyenlet felhasználásával még csak egynek meghatározása.



8. ábra.

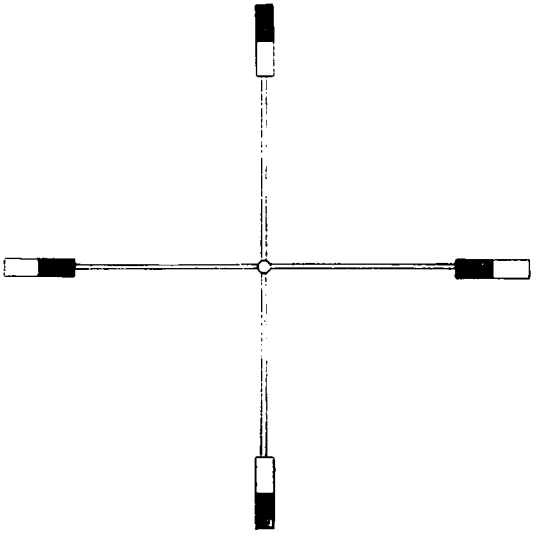
Erre szolgál egy másik eszközöm, az *astatikus variometer*. Az eszköz egyszerű szerkezetét a 8. ábra függélyes, a 9. ábra vízszintes átmetszetben mutatja. COULOMB-féle mérleg ez is; finom drótján könnyű aluminium csövekből összerakott vízszintes kereszt függ, melynek végein négy egymást lehetőleg astatizáló mágnes van elhelyezve. A keresztet alkotó két rúd egyikén a mágnesek északi polusai kifelé, másikán pedig befelé vannak irányítva, úgy a mint azt a 10. ábra mutatja. Az astatizálás lehető megközelítésére a rúdra könnyen reá rakható kis segédmágnesek szolgálnak. A keresztalakú mérlegtesten és az eszköznek vasmentes rézből vagy fából készült szekrényén az irány kijelölésére szolgáló tükrök vannak megerősítve. Az egész függélyes tengely körül forgatható asztalon áll.

E keresztalakú elrendezésnek nagy előnye az, hogy feleslegessé



9. ábra.

teszi úgy a nehézség változásaiból, mint a mágnesekben indukált momentumokból származó forgató-erők külön megfigyelését. A jelentésem első fejezetében előadottakból kitűnik ugyanis, hogy az ilyen keresztalakú mérlegtestre a nehézség változásának forgásmomentuma $=0$. Külön e czélra tett pontos mérések pedig, melyeket dr. TANGL KÁROLY úr felszólításomra az egyetem physikai intézetében végzett, azt mutatták ki, hogy egy astatikus tűpárnak



10. ábra.

a földi mágneses erő inductiója olyan forgásmomentumot ad, a mely $C \sin 2\alpha$ alakban állítható elő s így két egymásra merőleges tűpárra:

$$C \sin 2\alpha + C \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

E szerint a keresztalakú szerkezet forgásmomentumának kiszámításánál csak a mágneses erőt kell tekintetbe vennünk s annak hatását oly módon állapíthatjuk meg, mintha a mágnesek inductiotól mentek, azaz állandóak volnának.

E jelentésem keretében nem bocsátkozhatom a számítás rész-

leteibe, melyet tetszőleges alakú s a kereszten tetszőlegesen elhelyezett mágnesekre vonatkozólag végeztem. Abban az egyszerű esetben, mikor a mágnesek tengelyei a kereszt rúdjain azokkal párhuzamosan feküsznek, e mágnesek egyikére vonatkozólag, melynek északi polusa kifelé áll, lesz:

$$F = -HM \sin \alpha + Ml \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha ;$$

tudjuk, hogy tengelyrendszerünk X tengelye a mágneses meridiánba esik, s így itt α azt a szöget jelöli, melyet a mágnes középpontjának forgássugara az X-el képez. H a mágneses intensitás vízszintes összetevője, l pedig a mágnes középpontjának forgássugara.

Ha a mágnes északi polusa a rúdon befelé áll, akkor M helyébe $-M$ helyettesítendő. Összetévén a kereszt egyes mágneseire ható forgásmomentumokat, mind a négyre együttvéve találjuk:

$$F = -H\mu \sin \gamma + (M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4) \cdot \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right)$$

a hol μ-vel a négy mágnesből alkotott közel astatikus csoportozatnak összes kicsiny mágneses momentumát, γ-val pedig ez összesített mágnes tengelye és az X tengely által bezárt ismeretlen szöget jelöltem. M_1, M_2, M_3, M_4 az egyes mágnesek momentumainak absolut értékeit, l_1, l_2, l_3, l_4 pedig e mágnesek középpontjainak forgássugarait állítják elő.

Tegyük most rövidség kedvéért:

$$M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4 = 4Ml;$$

a mi egyenlő momentumú és a forgás tengelyétől egyenlő távolságokra elhelyezett mágnesek esetében állana és fejezzük ki a mérő-drót csavarodásának értékeit az eszköznek α által meghatározott külömböző helyzeteiben:

$$\alpha=0 \qquad \tau\vartheta_0 = -\mu H \sin\gamma + 8Ml\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

$$\alpha=\pi \qquad \tau\vartheta_\pi = +\mu H \sin\gamma + 8Ml\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4} \qquad \tau\vartheta_{\frac{\pi}{4}} = -\mu H\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\gamma+\cos\gamma)+4Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$$

$$\alpha=3\frac{\pi}{4} \qquad \tau\vartheta_{\frac{3\pi}{4}} = -\mu H\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\gamma+\cos\gamma)-4Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right).$$

Ezekből:

$$2\mu H \sin\gamma = \tau(\vartheta_\pi - \vartheta_0)$$

és

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\mu H \sin\gamma - 8Ml\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = \tau(\vartheta_{\frac{3\pi}{4}} - \vartheta_{\frac{\pi}{4}})$$

e szerint a mérődrótnak elcsavarodásai ez állások közben lemérve, úgy mint azt már fentebb előadtam, arra szolgálhatnak, hogy általuk a $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$ értékét meghatározzuk.

Felhasználhatjuk arra a rúdnak más négy állását is, sőt egy ötödik állásra vonatkozó észleléssel még a $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ értékét is lemérhetnők. A translatometerrel eszközölt mérések azonban ezt már feleslegessé teszik, mert a feladatot a $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$ értékével és $\Delta^2 V=0$ egyenlettel együtt teljesen megoldják.

Annak megitélésére, hogy mennyire fokozható eszközeim érzékenysége, szolgáljon egy példa. Mágneses térképeink szerint a mágneses intenzitás horizontális összetevője Budapestről 20 kilometerrel dél felé haladva, körülbelől 0,001 C. G. S. értékkel nagyobbodik. Hozzávetőleg tehetjük ezért:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{0{,}001}{2\,000\,000} = 5.10^{-10}.$$

Mágneses translatometerem drótja 30—35 gramm súlyú mágnes felfüggesztését engedi meg, melynek momentumát $M=1000$ tehetjük, a mágnes forgássugara $l=20$ cm., a drót csavarási állandója

$\tau = 0{,}25$, úgy hogy egyéb változásoktól eltekintve a csavarodás szögét a következőnek találjuk:

$$\vartheta = \frac{l}{\tau} M \frac{\partial X}{\partial x} = 0{,}000\,04,$$

a lemérendő csavarási szög az eszköznek 180 fokkal átforgatása után ennek kétszerese, azaz k. b. $^1/_4$-e percz lesz.

Eszközeim azonban nem arra valók, hogy velük egy ország vagy világrész általános mágneses térképét vegyük fel, hanem inkább arra, hogy azokat a változásokat keressük fel, melyeket a mágneses erőben közelfekvő tömegek, hegyek, völgyek vagy a föld belsejében elrejtett mágneses kőzetek létesítenek. Ily értelemben jó szolgálatot tehetnek a geologiának. Erre azonban már kisebb érzékenység is elegendő. Így azon méréseknél, melyeket eddig a physikai laboratoriumban és utóbb 1895 őszén szt.-lőrinczi kertemben is végeztem, olyan mágnesnek felfüggesztése is elégséges volt, melynek momentuma csak 200 C. G. S., s így az eszköz érzékenysége az előbbinek $^1/_5$-e volt.

A physikai laboratoriumban még evvel is olyan nagy csavarodásokat észleltem, melyek több fokot tettek ki. Szt.-Lőrinczen a szabadban sátor alatt észleltem, úgy mint a nehézségi variometerekkel. Ez utóbbi megfigyeléseket rendesen éjjel, borús, esős napokon azonban nappal is végezhettem.

Módszereimet különösen alkalmasoknak tartom a föld felületének közelében áramló elektromos áramok felkutatására, mert lehetővé teszik azokat magán a helyszínén vizsgálni, nem pedig úgy mint az eddig történt, csupán a földbe mélyített fémlapokat összekötő vezetőkben. Ha ugyanis valamely helyen, a hol a mágneses erő változásait már lemértük, a környező földtömegek egy részét eltávolítjuk, például árkot ásunk, úgy a mágneses erőkben ennek folytán előálló változás nemcsak e tömegek eltávolításának, hanem az azokat áthatoló áramrészek kiigtatásának s az áramelosztás módosításának következménye lesz. Szt.-lőrinczi megfigyeléseim folyamán e végből a föld színétől 150 centimeter magasan felállított astatikus variometerem lábpontjától másfél méter távolságban két méter hosszú, egy méter széles és egy méter mély gödröt ástam. Az eszköz adataiban ez által létesített változás a gödör

közepébe helyezett mintegy 100 C. G. S. momentummal biró mágnes hatásának felelt meg. A tél beállta erős havazásokkal véget vetett kutatásomnak s így nem dönthettem el azt a kérdést, mennyi része volt e hatásban a kiásott homokos földtömeg mágneses állapotának és mennyi a netán azon áthatoló áramoknak.

Mágneses variatio eszközeim mint igen érzékeny galvanometerek is használhatók. Jól meghatározható velük az állandó mágnesek momentuma is. Egy mágnes, melynek momentuma 10 000 C. G. S., még 15—20 méter távolságban is érezhető hatást gyakorol a translatometerre.

Egy érdekes kérdés, melynek tanulmányozására az eszközök hivatva vannak, a térbeli variatiok időbeli változásainak kérdése. A physikai intézetben több hónapon át fotografálás útján jegyeztük fel a translatometer járását, azaz a translatorius erőnek időbeli változásait. E változásnak szembetűnő módon nyilvánuló napi periodusa nagy részében bizonyára azoknak a városi áramoknak következménye volt, melyeket az utczáinkon lefektetett vezetékek szolgáltatnak a város talajának. Mindenesetre kívánatos volna ilynemű megfigyeléseket a városon kívül oly helyen ismételni, a hol ezen áramforrások hatása ki van zárva.

III. A gravitatio állandójának meghatározása.

A gravitatio jelenségeinek megfigyelése 1888 óta az egyetemi physikai intézetben a mindennapos kisérletek közé tartozik. Hallgatóimnak bőven van alkalmuk arra, hogy úgy az előadásban, mint a gyakorlatokban a tömegek kölcsönös vonzásáról saját megfigyelésük útján meggyőződést szerezzenek.

Az első eszköz, melylyel 1888-ban egy népszerű előadás alkalmával a tömegvonzás jelenségét bemutatni tudtam, a quadrans-elektrometer mintájára készült. A fémszekrényében jól védett Coulomb-féle mérlegrúd alatt quadransokra osztott hengeres vasedény volt elhelyezve, melynek szemben álló quadranspárjait felváltva, alúlról befolyatott higanynyal töltöttem meg. Az eszköz már három egész négy percznyi lengési idővel is elegendő érzékenységet s a mellett a kivilágított és fűtött tanteremben is kellő

állandóságot tanusított. A quadransokat kitöltő higany vonzásának kiszámítása kissé hosszadalmas. A mérő-kisérleteknek hosszú és változatos sorát végeztem azután majd golyóalakú, majd parallelepipedalakú ólomtömegekkel, a melyeknek súlya némely kisérleteknél 50—100 kilogramm, másoknál 1 kilogramm vagy annál is kisebb volt.

Ezen mérésekre, melyeknek módszere CAVENDISH eljárásához egyébként közel áll, jellemző volt különösen az, hogy a vonzótömegeket többnyire nem a rúddal ugyanazon magasságban, hanem a rúd alatt vízszintes síkban forgatható asztallapokra helyeztem el. Ez az elhelyezés már azért is előnyös, mert a mellett a mérlegrudat a megvédésére annyira alkalmas lapos hengeralakú fémszekrénybe lehet zárni, úgy mint azt az I. fejezetben leírtam. De előnyös ez az elhelyezés különösen azért is, mert úgy választható, hogy a lemérendő erőnek változása a mérlegrúd kitérítése közben elhanyagolhatóan kicsiny legyen. A vonzó-tömegek ugyanis a rúd alatt lévő vízszintes lapon abba a helyzetbe hozhatók, a melyben hatásuk a rúdra maximalis lesz. Így lesz az például golyók vonzásának esetében, ha a középpontjaikat a rúd golyóinak középpontjaival összekötő egyenesek a rúdra merőlegesen állván, a vízszintessel közel 55 foknyi szöget képeznek. Ebben a maximumnak megfelelő állásban elég, ha az egymásra ható tömegek viszonyos helyzetének meghatározásánál csak függélyes távolságuk lemérésére fordítunk gondot, ez pedig minden nehézség nélkül eszközölhető.

Az a körülmény, hogy ilyen elhelyezésnél a lemérendő erő kisebb lesz, mint egymagasságú tömegek esetében az általam elért érzékenység mellett számba sem jő, mert 10 percznyi vagy annál is nagyobb lengési idejű eszközeimben úgyis két-három fokot meghaladó kitéréseket létesítettem. E kitéréseknek és a velükjáró lengéseknek szabályosságáról tanuskodhatnak a fotografiai felvételek, melyeket akként készítettem, hogy a mozgó-rúd tükréről visszavert fényt fényérzékeny papiron fogtam fel, a mely órával egyenletesen forgatott hengeren volt kifeszítve.

Megjegyzem, hogy magukat a méréseket rendesen a POGGENDORFF-féle skálaleolvasással végeztem, s a fotografálást inkább csak állításaim okmányszerű igazolására vagy olyan esetekben

alkalmaztam, a midőn a túlfokozott érzékenység az eszközökhöz közeledést meg nem engedhette. Ilyen esetekről még alább lesz szó.

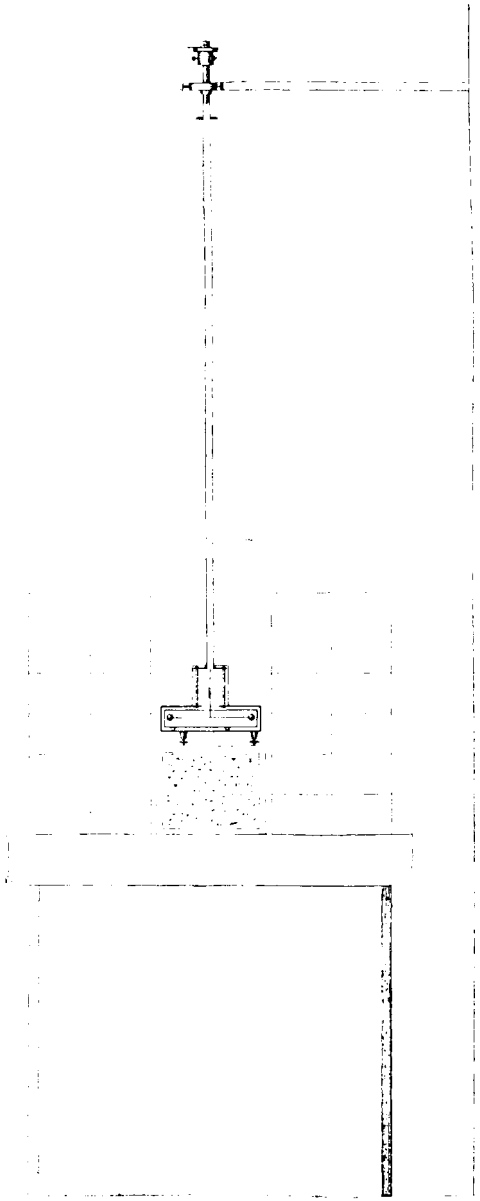
Áttérek most egy lényegében új módszernek leírására, a melynek megállapításához a nehézség változásaira vonatkozó kutatásaim nyomán jutottam. Ezen a gravitatio állandójának meghatározására szolgáló módszer lényege ugyanis az, hogy arra nem magát az erőt, hanem annak változását, tehát nem a mérlegrúdnak kitérését, hanem egyedül lengési idejét és annak változását használom fel.

E végből a kettősfalú fémszekrényében jól megvédett Coulomb-féle mérleget két quadratikus alapú függélyes ólomoszlop között állítottam fel, a mely oszlopok között ugyancsak quadratikus alapú üres tér volt hagyva. A felállítás módját a 11. ábra tünteti elő. Az oszlopok alapja közel 30×30 centimeter, magasságuk 60 centimeter, az oszlopok egymásfelé fordított lapjainak távolsága úgyancsak 30 centimeter, úgy hogy az egész ólomtömeget 60 centimeter magas, 90 centimeter hosszú és 30 centimeter vastag falnak tekinthetjük, a melynek közepéből egy 30 centimeter oldalú négyzetes oszlop van eltávolítva.

A mérleg rúdjának lengéseit két egymásra merőleges egyensúlyi helyzet körül figyeltem meg, ú. m. a fal hosszának irányába eső longitudinális állás körül és a fal vastagságának irányába eső transversális állás körül. A lengési időt a longitudinális állás körül 641 másodperczczel, a transversális állás körül pedig 860 másodperczczel egyenlőnek találtam.

A vonzó-tömegek ezen alakjának megválasztására a következő, egy eszményi esetre vonatkozó megfontolások vezettek. Állítsunk magunk elé képzeletünkben egy végtelen hosszú, végtelen magas, de véges vastagságú függélyes parallelepiped alakú homogén falat s fektessünk annak közepén mint kezdetponton át egy olyan derékszögű tengelyrendszert, melynek z tengelye lefelé, y tengelye a fal hosszának irányába, x tengelye pedig a fal végtelen lapjára merőlegesen, azaz vastagságának irányában álljon.

Az ilyen falnak belsejében a középtől véges x, y, z távolságra fekvő pontokban a fal tömegének vonzó-ereje merőleges lesz annak függélyes lapjára, úgy hogy:



11. ábra.

$$\frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

továbbá:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}=0,$$

s így

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=4\pi f\sigma,$$

ha σ-val a homogen fal anyagának sűrűségét, f-fel pedig a gravitatio állandóját, azaz a vonzó-erőt jeleljük, melyet NEWTON törvénye értelmében a tömegegység a tömegegységre egységnyi távolságban gyakorol.

E szerint e fal belsejének közepe körüli része egyenletesen változó térnek tekinthető, s ha a mérlegrudat az XY síkban a fal középpontja körül egyelőre annak belsejében forogható nak gondoljuk, akkor lengéseire az I. fejezetben megállapítottakat alkalmazhatjuk. Ha tehát T_l-lel a fal hosszának irányába eső longitudinális álláskörüli lengések idejét, T_t-vel pedig az arra merőleges transversális álláskörüli lengések idejét jelöljük, lesz:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T_l^2}-\frac{1}{T_t^2}\right)=2(1+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right);$$

vagyis

$$\frac{1}{T_l^2}-\frac{1}{T_t^2}=\frac{8\pi f\sigma}{\pi^2}(1+\varepsilon). \qquad 1)$$

Ez az egyenlet még abban az esetben is érvényes lesz, ha a végtelen falból egy quadratikus alapú függélyes oszlopot eltávolítunk, a melynek középpontja a rúd forgási tengelyébe esik, úgy hogy a rúd az ekként létesített üres térben tényleg szabadon lenghet. Ha t. i. teljes fal esetében a rúd forgásmomentumát a longitudinális álláskörüli lengések közben $f_l\omega$-val-, a transversális álláskörüli lengések közben pedig $f_t\omega$-val jelöljük, és a megfelelő mennyiségeket a leírt oszlop eltávolítása után $f'_l w$ és $f'_t w$-vel jelöljük, akkor könnyű látni, hogy:

$$f'_l\omega-f'_t\omega=f_l\omega-f_t\omega,$$

mert a rúd mind a két egymásra merőleges állásban a fent leírt quadratikus oszlophoz ugyanazon viszonyos elhelyezésben van s így ez oszlop tömegének eltávolítása mindkét esetben ugyanannyival változtatja meg a vonzó erők forgásmomentumát. Így tehát megfelelő jelzésekkel:

$$\frac{\pi^2}{T_l^2} - \frac{\pi^2}{T_t^2} = \frac{\pi^2}{T_l'^2} - \frac{\pi^2}{T_t'^2} = \frac{f_l - f_t}{K};$$

egyenlet folytán valóban igazolva van az I. egyenlet érvényességére vonatkozó állításom.

Azon véges méretű oszlopokra, a melyeket az előbb leírt módon felállítottam, és tényleg méréseimnél használtam, lényegükben hasonló okoskodások érvényesek. Ez esetben azonban, mint a számítás mutatja, az 1) egyenletben a 8π érték helyébe 13,427 volt teendő. Igaz, hogy ez a szám szigorúan csak a rúd végén alkalmazott golyókra érvényes, de a választott méretek mellett a rúdnak a forgástengelyhez közelebb álló részeire vonatkozólag csak igen csekély javításra szorúl. Lesz tehát:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13{,}427}{\pi^2} f \cdot \sigma(1 - \varepsilon')$$

a hol ε' egy kicsiny, egy százaléknál kisebb, a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő correctio tagot jelent.

A lengési idők lemérése meglepő biztonsággal és pontossággal eszközölhető. Dr. Kövesligethy Radó és dr. Tangl Károly urak 1891. év január 26.-ától márczius 26.-áig 59 észlelési sorozatban határozták meg az $\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2}$ mennyiség értékét. Minden észlelési sorozat nyolcz lengésre terjedt ki a longitudinális s ugyanannyira a transversalis állásban.

Az észlelések e hosszú sorában, mely alatt az arra szolgáló besötétített pinczehelyiség hőmérséklete 2° C.-ról 5° C.-ra emelkedett, a végtelen kicsiny amplitudokra redukált lengési idők szélső értékei a longitudinális állásban 640,97 s. és 641,28 s., a transversalis állásban pedig 859,29 s. és 860,32 s. voltak. Az észlelések kiszámításánál összefoglaltam az egy ugyanazon napon a két állás-

ban lemért lengési idők értékeit. Az így megállapított 59 értékből mint középértéket találtam:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = 0{,}000\,001\,080\,31.$$

az 59 egyes érték között nincsen egy sem, mely e középértéktől annak egy ezeredrészével vagy annál többel térne el. Az eredmény valószinű hibája annak itt felírt utolsó számjegyét csak 4-gyel nagyobbítja vagy kisebbíti, tehát az egésznek csak $\frac{1}{25000}$ részével egyenlő. Meghatároztam azután a két iránykörüli lengési időt akkor is, a mikor az ólomoszlopokat eltávolítottam; ekkor úgy találtam, hogy a longitudinális állás körül $T_l = 742{,}82$ a transversális állás körül pedig $T_t = 759{,}07$. Ez a külömbség az észlelés helyét környező falak és földtömegek vonzásának eredménye volt. Számításba vettem a fent ε'-sal jelölt correctiót is, de feladatomat véglegesen és teljesen megoldani mindeddig még sem tudtam, mert egy tényezőnek t. i. a rúd lengése közben mozgásba hozott levegőnek befolyását az eredményre az itt megkivánt pontossággal kikutatni ez ideig még nem volt alkalmam. Olyan kisérletekből ugyanis, a melyeket ugyanavval a COULOMB-féle mérleggel, de nem az oszlopok között, hanem más helyen, egy az egész eszközt bezáró, e czélra készített fémbura alatt légritkitott térben végeztem, azt mutatták, hogy e szűk szekrényekben történő lassú lengéseknél a levegő mozgása sokkal nagyobb befolyást gyakorol a lengési időre, mint azt BESSEL-nek az ingára vonatkozó vizsgálatai alapján várhattam. Például egy rúdnak lengési ideje, mely rendes nyomású levegőben 648,92 másodpercz volt, 20 millimeter nyomású levegőben 648,00 másodperczre kisebbedett. Ezen és hasonló észleléseim azonban nem nyujtanak elegendő biztosítékot arra, hogy a correctiót azoknak alapján kivánt pontossággal kiszámíthassuk, mert úgy tapasztaltam, hogy a lengőrúd mozgása a levegőben még attól is függ, hogy milyen magasan áll ez a rúd a maga szekrényében, és mindenesetre megfontolandó volna az is, vajjon a levegő ezen hatására okoz-e számbavehető befolyást a vonzó erőknek változása a szekrény belsejében.

Ezen nehéz kérdések elkerülésével a feladat megoldására czélszerűbb volna a méréseket maguk között az oszlopok között

légüres térben végezni, a mit azonban a rendelkezésemre álló eszközöknek méretei mellett eddig nem tehettem.

$$f = 0{,}000\,000\,066\,5$$

Ezért és a használt ólomtömegek homogenitásának megbízhatlansága miatt is, nem bocsátkozhatom eddigi méréseim alapján a gravitatio állandójának megállapításába azon pontossággal, melyet módszeremmel elérhetni reménylek. Legfeljebb megemlíthetem, hogy eddigi megfigyeléseim alapján ez állandó értéke: értéktől aligha tér el többel, mint annak $\frac{1}{500}$ részével.

Jelen közleményemben azonban nem ez értékre, hanem a módszerre fektetem a súlyt, mert úgy gondolom, hogy az a pontosság, melyet a lengési idők lemérésénél már is elértem, biztosítékot nyújt arra nézve, hogy magát ezt a nagyfontosságú állandót ugyanavval a pontossággal tudjuk meghatározni, mint a milyennel a nehézséget az inga lengéseiből állapítjuk meg. Erre azonban a lengési idők helyes megfigyelésén kívül még légüres tér és a megbizhatatlan ólom helyett valóban homogén higany szükséges.

IV. Két segédeszköz a gravitatio tanulmányozására.

1. A gravitatiós compensálás.

Azon eszközöknél, melyekkel e helyen eddig leírt vizsgálataimat végeztem, az érzékenységnek határt szabott a mérlegrúd felfüggesztésére használt drót vagy kvarczfonál csavarás ellenében ható rugalmassága. Még nagyobb érzékenység elérésére törekedvén, a compensálás segédeszközéhez fordultam, s e czélra magát a tömegvonzást használtam fel, a mely állandósága folytán erre minden más erőnél kétségtelenül alkalmasabb.

A vonzó erejükkel compensáló tömegeket a mérlegrúd végeinek közelében két oldalon úgy helyeztem el, hogy a rúd egyensúly állásában maga ez az erő zérus vagy legalább igen kicsiny, annak változása azonban a rúd kimozdulása közben jelentékeny legyen. A rúdra ható összes erők forgásmomentuma akkor az egyensúlyi helyzettől mért kicsiny ω kitérések esetében $(\tau \pm \varphi).\omega$ lesz, azaz a compensáló tömegek elhelyezése szerint kisebb vagy nagyobb

mint az, mely egymagában a drót csavarodásának felelne meg. Ily módon valóban sikerült olyan eszközt készítenem, melynek érzékenységét kivánságom szerint tetszőlegesen egészen a végtelenig, azaz a labil-helyzet beálltáig fokozhatom.

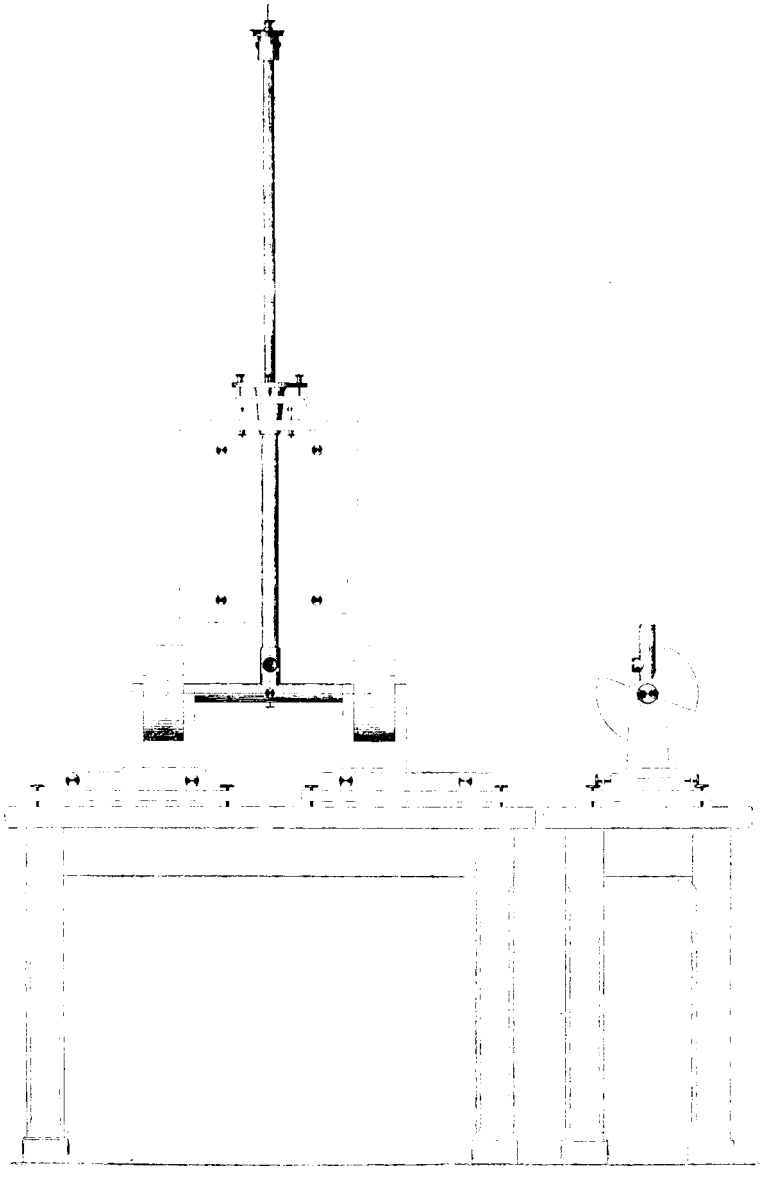
Ez az eszköz a 12. és 13. ábrán látható. Magát a végén golyókkal terhelt könnyű mérlegrudat a compensáló súlyok czélszerű elhelyezhetése végett ez esetben kettősfalú, kivül 4 cm. átmérőjű fémhengerbe zártam, úgy hogy az eszköz szekrénye ⊥ alakú hengeres tok alakját nyerte, melynek 1,5 meter hosszú függélyes része a felfüggesztő drótot vagy kvarczfonalat, vízszintes 55 centimeter hosszú része pedig a mérlegrudat foglalja magába. A mérlegrúd hossza 50 centimeter, a végein reá tolt golyók tömege egyenkint 30 gramm volt, az egész szerkezetnek forgásmomentumát az egyensúlyi helyzettől számított ω kitérés esetében a compensáló súlyok nélkül: 0,1478 C. G. S. értékkel egyenlőnek találtam. Ez a forgásmomentum a drót csavarás ellenében ható rugalmas momentumán kivül még azt is magába foglalja, a mely az észlelés helyén a nehézség változásaiból származik (l. I. fejezet).

A compensáló ólomsúlyok a rudat védő fémtokot körülvevő 5 cm. belső átmérőjű fémcsőre vannak forrasztva, a mely vízszintes tengelyágyakon fekszik s igy a belső tok körül e súlyokkal együtt forgatható.

A compensáló súlyoknak hengerquadransok alakját adtam, e quadransok belső része a cső által van lemetszve, a melyhez illesztve vannak. Két ilyen szemben álló quadrans egy csövön megerősítve egy compensatort alkot. Méretei a következők: az egyes quadrans belső sugara 2,5 cm., külső sugara 12 cm., vastagsága azaz két sík határlapjának egymástóli távola 9,5 cm.

Eszközöm mindkét végére állíthatok egy egy ilyen compensatort, úgy hogy a mérlegrúd végén alkalmazott golyók a hengerquadransok közepei körül mozogjanak.

E golyók és a rúd is ily módon a két oldalt szemben álló quadransok vonzásának befolyása alatt állanak. A rúd középső állásában ezen két oldalról ható és egyenlő quadransok esetében egyenlő vonzó erők ellensúlyozzák ugyan egymást, de az erők változásai e helyzet körül mint egyenlő előjelűek egyirányú hatásokat létesítenek.



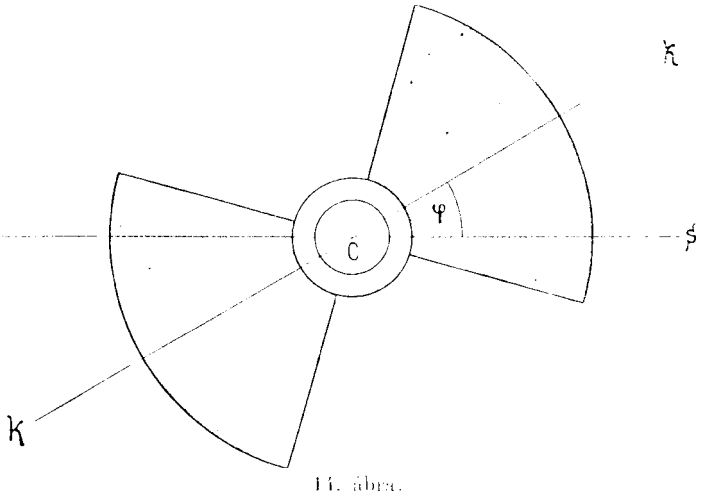
12. és 13. ábra.

Ha meggondoljuk, hogy a COULOMB-mérleg rúdján elhelyezett golyó középpontja végtelen kis kimozdulása közben

$$\delta s = l\delta\omega$$

vízszintes ívelemet fut be, akkor az egyensúlyi helyzetéhez közel állásaiban a reá mozgásának irányában ható kitérítő erő:

$$fm\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\delta s = fm\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}l\delta\omega;$$



14. ábra.

lesz, ennek az erőnek forgásmomentuma pedig:

$$fm\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}l^2\delta\omega.$$

Könnyen belátható, hogy a $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ értéke változik akkor, mikor a quadransok hajlását a vízszinteshez forgatás által változtatjuk és számítás útján bebizonyíthatjuk, hogy ha φ-vel jelöljük azt a szöget, melyet a quadransok középvonala KK (l. 14. ábra) a vízszintes CS-sel képez, akkor:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = a + b\cos 2\varphi.$$

Az a és b állandóknak a quadransok méretei és sűrűsége, valamint a gravitatio állandója által meghatározott értékeit eszközömre vonatkozólag a következőknek találtam:

$$a=0{,}000\,001\,190,$$
$$b=0{,}000\,003\,722.$$

Ebből azután (tévén $m=30$ gr., $l=25$ cm.) kiszámítottam a rúd két végén alkalmazott két compensator együttes hatását s az egyensúlyi helyzettőli távolodást létesítő forgásmomentumát és találtam

$$F\omega=(0{,}044\,62+0{,}139\,57\cos 2\varphi)\,\omega;$$

A compensáló súlyok nélkül felállított mérlegrúdra nézve, mint már jeleztem, az egyensúlyi helyzet felé forgató momentum:

$$\tau\omega=0{,}147\,8\,\omega;$$

lévén, a compensatorokkal ellátott eszközömben az a forgásmomentum, mely a rudat egyensúlyi helyzetébe visszatereli

$$\mathrm{F}\omega=(\tau-F)\,\omega=(0{,}103\,15-0{,}139\,57\cos 2\varphi)\,\omega$$

lesz.

A forgásmomentumnak s vele együtt az érzékenységnek megváltoztatására csak a quadransok hajlásszögét kell változtatnunk. Így például

$\varphi=90°$-ra $\quad \mathrm{F}=0{,}242\,72;$
$\varphi=45°$-ra $\quad \mathrm{F}=0{,}103\,15;$
$\varphi=25°$-ra $\quad \mathrm{F}=0{,}013\,44;$

$\varphi=21°10'45''$ hajlásszögnél pedig $\mathrm{F}=0$, azaz a rúd labil állapotba jut. Ha mérlegrudunk tehetetlenségi momentumát kerekszámban 38000-nek teszszük, akkor a levegő ellenállásától eltekintve

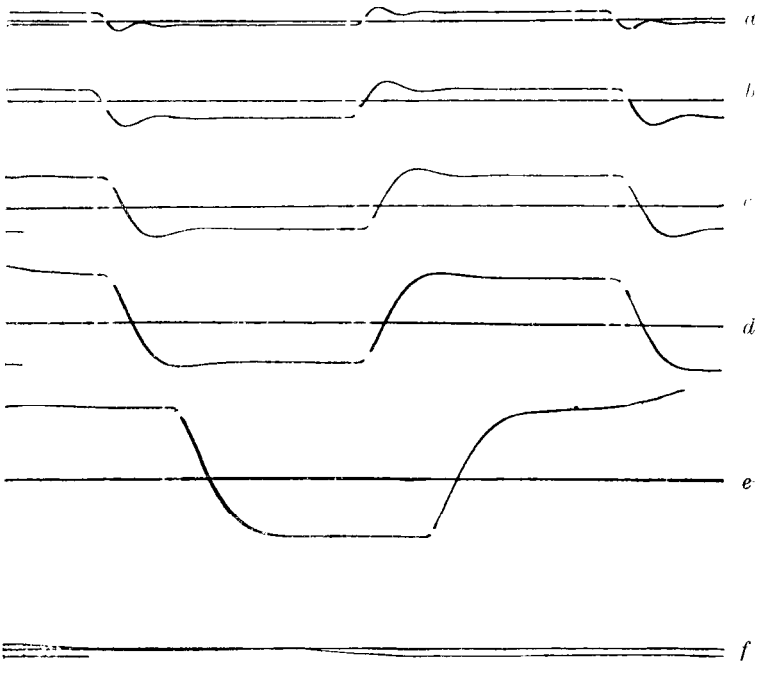
$$T=\pi\sqrt{\frac{K}{\mathrm{F}}}$$

képlet szerint találjuk:

$\varphi=90°$-ra $\quad T=124\,3$ s.
$\varphi=45°$-ra $\quad T=190\,7$ s.
$\varphi=35°$-ra $\quad T=528\,3$ s.

A levegő ellenállása folytán azonban ezen egy óránál is hosszabb idejű lengések már nem létesülhetnek, mert a mozgás aperiodikussá válik.

Ily nagy érzékenységű beállítás esetében az eszköz csak lehetőleg védett helyen, például jól temperált és besötétített pinczében foglal el biztos egyensúlyi állást s a megfigyelés csak foto-



15. ábra.

grafálás útján ad megbízható eredményt. Így azonban teljesen megfelel a várakozásnak. Sikerült például a pinczében felállított eszköztől *öt méter* távolságban a szomszédos udvarban elhelyezett 300 kilogrammnyi tömegek hatását kimutatnom. E tömegeknek ugyanazon távolságban az ellentett hatás oldalára átrakása a mérlegrudat, úgy mint az elmélet alapján is várhattam, több mint 4 percznyi szöglettel térítette ki (l. 15. ábra *f*).

Az eszköznek a quadransok hajlásával fokozható érzékeny-

ségét a mellékelt 15. ábra is mutatja. Az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* görbéket a mérleg rúdja mind ugyanazon reá ható vonzó erőknek (5 kilogramm $^1/_2$ méter távolságban) behatása alatt írta le, de különböző volt e közben a quadransoknak φ hajlásszöglete. *a*-nál 90°, *b*-nál 45°, *c*-nél 35° és *d*-nél 30° és *e*-nél 27,5°. Jól mutatják e képek azt is, hogyan alakúl át az *a*-nál még lengő mozgás *d* és *e*-nél aperiodikus mozgássá.

Az elérhető érzékenység fokának megitélésére még egyet akarok megemlíteni. Ha majd egyszer alkalmam lesz eszközömet valamely folyó, tenger vagy tó partján úgy felállítani, hogy drótja a függélyes falakkal határolt vízfelülettől 1 méter távolságban legyen s a mérlegrúd a parttal 45 foknyi szögletet képezzen, akkor a vízszintjének emelkedése egy centimeterrel a compensatornak 45 foknyi hajlásánál 1 percznyi, 25 foknyi hajlásánál pedig már közel 7 percznyi kitérést fog létesíteni. Jól használhatnók ezért ez eszközt a dagály és apály jelenségének fotografiai feljegyzésére is, annál is inkább, mert bármennyire hullámzó tenger közelében mindig csak a középszint változásait tüntetné elő.

2. *A gravitatiós multiplikálás.*

A COULOMB-féle mérlegrúdnak a tömegvonzás által létesített kis kitéréseit multiplikálás útján nagy kilengésekké tudom növelni. Ezt a multiplikálást olyan módon végezem, hogy a rúd alatt forgható asztallapon elhelyezett vonzó tömegeket, melyek kezdetállásukban a rudat például az óramutató járásának irányában térítik ki, abban a pillanatban, melyben a rúd ez irányban legnagyobb kilengését eléri, az asztallap forgatása által egy más olyan helyzetbe viszem át, melyben a tömegek vonzása ellentett irányú kitérést létesít, s az ezen irányban elért legnagyobb kilengés pillanatában a tömegeket újra az első állásba helyezem és így tovább. A multiplikálás ezen módjánál, melynél a rúd lengései felváltva két egyensúlyi helyzet körül történnek, az ekként sokszoros ismétlés által megnövelt kilengéseknek határértéke:

$$A = a\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta};$$

lesz, a hol a-val a két egyensúlyi helyzetnek egymástóli távolát, ϑ-val pedig a csillapodás viszonyát jelöltem, melyet az állandó egyensúlyi helyzet körül történő lengésekből oly módon határozunk meg, hogy egy kilengés hosszát a megelőző kilengés hosszával osztjuk.

Az így multiplikált lengések fotografiai felvételei fényesen tanuskodnak arról, mennyire sikerült eszközeim berendezése által mindazon zavaró tényezőket kizárnom, melyek a COULOMB-féle mérleg megbízhatóságát sok esetben annyira kétessé tették. Multiplikáltam ily módon nagyobb 10 percznyi idejű lengéseket és kisebb 1 percznyi lengési idejüeket is. Az első esetben a kilengést a kitérésnek közel húszszorosára, a másodikban százötvenszeresére tudtam növelni mindig egyforma biztonsággal és állandósággal.

A multiplikálás ezen módja kétségtelenül jó szolgálatokat fog tehetni a gázok surlódásának tanulmányozásánál is.

Nekem egyelőre más volt a czélom. Felhasználtam ugyanis a multiplikálást mint igen érzékeny módszert a lengési idők és azok változásainak lemérésére. Ha t. i. a tömegek periodikus áthelyezésének, tehát az erő változásának időszaka: T nem ugyanaz mint a rúd lengési ideje T, akkor olyan végső kilengések létesülnek, melyeknek nagysága A nem csupán az a kitérés nagyságától és a ϑ csillapodástól, hanem e két időszak T és T értékeitől függ. A rúd ilyenkor egy ide-oda mozgását már nem a maga lengési idejében, hanem az erő változása által reá kenyszerített időben fogja végezni. Az ilyen lengéseket azért kényszerített lengéseknek nevezem, ezek a két egyensúlyi helyzet körül történő egyszerű lengések részeiből vannak összetéve.

Világos, hogy ha egy ugyanazon T lengési idejű mérlegrudat külömböző időszakaszú áthelyezésekkel kényszerített lengésekbe hozunk, akkor a végső kilengések értékei olyan adatokat fognak szolgáltatni, melyekből magát a T lengési időt meghatározhatjuk. És épen úgy világos az is, hogy ha a kényszerített lengések T időszakasza állandó maradván, a rúd T lengési ideje változik meg, akkor ennek a változásnak a végső kilengés nagyságában kell nyilvánulnia. Mennyire érzékeny ez a végkilengés a T vagy a T időszakaszok változásainak felismerésére, arra szolgáljon egy példa:

A végkilengéseket perczekben fejezvén ki, találtam:

$T=611$ s. és $\mathrm{T}=611$ s. időkkel $A=252'$
$T=611$ s. és $\mathrm{T}=600$ s. « $A=225'$
$T=611$ s. és $\mathrm{T}=590$ s. « $A=180'$

a T kisebbedése 10 másodperczczel e szerint a végkilengés szögértékét 45 perczczel kisebbítette, úgy hogy átlagban 1 másodpercznyi időváltozásnak $4^1/_2$ perczny szögváltozás felelt meg.

Ezek a kényszerített lengések tehát valóban felhasználhatók arra, hogy végkilengéseik hosszának lemérésével lengési időket határozzunk meg, s ez az eljárás jó szolgálatot tehet különösen olyankor, mikor a csillapodás nagy lévén, hosszú lengési sorozatok megfigyelése egyébként nem lehetséges.

A gyakorlati kivitel megkönnyítése czéljából, különösen azért, hogy a tömegek áthelyezésének hosszú időn át tartó és lélekölő munkájától szabaduljak, egy a multiplikálást az óra pontosságával teljesítő gépet, az *elektromágneses multiplikátort* szerkesztettem, a melyet Süss Nándor úr, az állami mechanikai tanműhely igazgatója szokott ügyességével készített.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)

A LEGKISEBB ACTIÓ ELVÉRŐL ÉS A HAMILTON-FÉLE ELVRŐL.

RÉTHY MÓR l. tagtól.

Kritikai megjegyzések, melyeket MAYER ADOLF velem levélben közölni szives volt arra az értelmezésre vonatkozólag, melyet HELMHOLTZ bizonyításairól előző közleményemben és a «Berichte»-ben közzétettem, arra indítottak engemet, hogy tovább képezzem ez értelmezésem alapgondolatát és hogy vizsgálataimnak még általánosabb alapot adjak. Jelesül általánosítottam magukat a LAGRANGE-féle mozgási egyenleteket és velük a HAMILTON-féle elvet is.

1. §. A jelölések összefoglalása.

I. Jelölje mindenütt

T a pontrendszer eleven erejét,

U « potentiálját,

q_i « független koordinátáit,

a_i, b_i ezek kezdő és végső értékeit,

a_i', b_i' a sebességek kezdő és végső értékeit,

t a változó időt,

t_1 egy időtartamot,

n a független koordináták számát.

Jelöljön továbbá F egy, az U kifejezésében előforduló változót, és $E(t)$ egy a variációt tekintve változatlan időfüggvényt. Legyenek továbbá

$$q_i' \equiv \frac{dq_i}{dt}, \tag{1}$$

$$f \equiv T+U, \tag{2}$$

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F, \tag{3}$$

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'}, \tag{4}$$

$$H \equiv \int_0^{t_1} (T+U)\, dt \equiv \int_0^{t_1} f dt, \tag{5}$$

$$I \equiv \int_0^{t_1} (f+F)\, dt, \tag{6}$$

$$A \equiv \int_0^{t_1} (f+F+G)\, dt \equiv \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' dt. \tag{7}$$

Az f mennyiség a függetlenül változó q_i, q_i', F és t mennyiségek adott függvénye, és tartalmaz egy az U-ban lévő önkényszerű additiv állandót is, mely azonban ne legyen variálásnak alávetve. A H, I és A időintegrálokban a t idő is variálandó lévén, vezessünk be sorozó elemül egy nem variálandó φ változót, és jelöljük az időnek és a koordinátáknak szerinte vett differenciálhányadosait következőképen:

$$\dot{t} \equiv \frac{dt}{d\varphi},$$

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{d\varphi}.$$

Így fönnállanak ez identitások:

$$q_i' \equiv \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}},$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{t}^2} = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{t}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i'} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i'} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\dot{t} = \frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{q}_i}, \tag{8}$$

$$\dot{t}\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{t}\sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}\frac{\partial q_i'}{\partial t} = -\sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i',$$

$$\frac{\partial (f\dot{t})}{\partial \dot{t}} = -\sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' + f.$$

A (3) egyenletből kiindulva könnyen igazolhatólag

$$H_0 \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_j'}q_j' \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'}q_i' q_j'. \tag{9}$$

Legyen végül

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^4 f}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix} \tag{9'}$$

Avval a föltevéssel fogunk élni, hogy a H_0 és a D_1 mennyiségek értéke a 0-tól t_1-ig terjedő időközben sehol sem zérus.

2. §. A pontrendszer mozgási egyenletei.

II. Álljon fönn a pontrendszer mozgására nézve a következő közönséges differenciálegyenletek rendszere:

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'} = 0, \tag{10'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{dG}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i' - f - F\right) = 0. \tag{10''}$$

A q_i és q_i' változók szerint való parciális differenciálások

végzésekor a f függvényben netán explicite előforduló t és F mennyiségek mindenesetre állandó gyanánt tekintendők.

Az egyenletek, ha a F nem fordul elő explicite a f kifejezésében, miként ismeretes, nem egyebek a LIPSCHITZ és SCHERING-től általánosított LAGRANGE-féle mozgási egyenleteknél.* Ebben a specziális esetben F *a rendszer energiája.*

Ha a F explicite is előfordul a f kifejezésében, avval a föltevéssel fogunk élni, hogy a (10′) és (10″) alatti $n+1$ számú egyenlet mindig elegendő a bennük lévő

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, F$$

szintén $n+1$ számú időfüggvény meghatározására, és hogy a koordináták, a sebességek és a F kezdőértékei meg lévén adva, azokat *egyértékűleg* határozzák meg. Az egyenleteket ebben az általánosabb esetben is LAGRANGE-féle *mozgási egyenletek*nek, és a F *mennyiséget a rendszer energiájá*nak fogom nevezni.

III. *Az eleven erő tétele.* A (3) identikus egyenletből folyólag

$$\frac{dG}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) q_i' - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial F} \frac{dF}{dt} - \frac{dF}{dt}, \qquad (10)$$

ez alapon a (10′) és (10″) mozgási egyenletek hozzávételével ered:

$$-\frac{dG}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\right) \frac{dF}{dt} = 0. \qquad (11)$$

Az egyenlet a szóban levő mozgás esetén az eleven erő elvét mondja ki, és általánosan szólva meghatározza az energiának az időszerinti differenciálhányadosát, mint a q_i, q_i', t és F egyértékű függvényét. Egy a következőkre nézve fontos specziálesetben azonban kiesik az egyenletből. Ez az eset az, a midőn a f explicite független a t-től, és a midőn a F-ről előre ki van kötve, hogy *változó*. A (11) egyenletből akkor következik, hogy az

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0 \qquad (11')$$

---

* LIPSCHITZ: Untersuchungen etc. Crelle's Journal Bd. 74. E. SCHERING: Hamilton-Jac. Theorie etc. Göttinger Abhandlungen 1873.

egyenlet minden időben fönnáll. Ebben a speciális esetben tehát épen ez az egyenlet közvetlenül meghatározza a F-et mint a q_i és a q_i'-k függvényét. Azt az érdeknélküli esetet ugyanis, a midőn a (11′) egyenlet identitás volna, teljesen kizárjuk a további vizsgálatok köréből.

Ha megfordítva az f explicite független a t-től, és a mozgásban mindenkor fönnállanak a (10′) egyenleteken kívül a (11′) egyenletek is, akkor a (10) alatti identitás egyszerű megtekintéséből látható, hogy a

$$\frac{dG}{dt} = 0$$

egyenlet is mindenkor érvényes; minélfogva a mozgás LAGRANGE-féle mozgás.

A következőkben a (10′) és (11′) egyenletek meghatározta mozgást *másodosztályú Lagrange-féle mozgásnak* fogom nevezni; ellenben azt a mozgást, mely ha f explicite független a F-től, már magukkal a (10′) egyenletekkel meg van határozva, *első osztályú Lagrange-féle mozgásnak*.

Megemlítést érdemel, hogy a másodosztályú LAGRANGE-féle mozgásnak van olyan *általános* integrálja, melyben a F nem fordul elő. Miután ugyanis a (10″)-ből folyólag

$$G = \text{const.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F$$

általános integrál, és azonkivül a (11′) egyenlet is érvényes, ebben pedig se gyorsulás, se $\frac{dF}{dt}$ nem fordul elő, hanem igenis F, tehát a F-nek a nevezett két egyenletből való eliminálása révén egy általános integrált nyerünk, melyben a F nem fordul elő, hanem csakis a q_i és a q_i' mennyiségek, meg az integrál-állandó.

Megjegyzés. A (11′) egyenlet megoldása F szerint legyen

$$F = \bar{F}(q_1, a \ldots, q_n; q_1', \ldots, q_n'),$$

és legyen $\bar{f}$ az a függvény, a mely az f-ből keletkezik, ha benne F helyett $\bar{F}$ tétetik.

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial \bar{F}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_i'},$$

tehát a (11') egyenlet folytán

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\bar{f}+\bar{F});$$

és épúgy

$$\frac{\partial f}{\partial q_i'} = \frac{\partial}{\partial q_i'}(\bar{f}+\bar{F}).$$

Ha tehát a mozgás másodosztályú, akkor $(n+1)$ számú mozgási egyenlete a következő n számú, a F-et teljességgel nem tartalmazó, egyenletet adja:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i'}(\bar{f}+\bar{F}) - \frac{\partial}{\partial q_i}(\bar{f}+\bar{F}) = 0, \qquad (10^*)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Az U potentiálhoz tartozó másodosztályú mozgás e szerint, a *kinematika* szempontjából, azonos az $\bar{U}+\bar{F}$ potentiálhoz tartozó elsőosztályú mozgáshoz. De a rendszer energiája a két esetben nem ugyanaz.

Mert a rendszer összes energiája, a másodosztályú mozgás esetén $=F$, tehát változó; a (10*) egyenletek definiálta elsőosztályú mozgás esetén ellenben ez a mennyiség

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\bar{f}+\bar{F})}{\partial q_i'} q_i' - (\bar{f}+\bar{F}),$$

tehát állandó. A két mozgás tehát *physikailag* véve egymástól különböző. Az actió elvével és általában a mechanikai variációelvekkel szemben való magaviseletük is különböző.

3. §. A Hamilton-féle elv a szóban levő mozgások esetén.

IV. A H időintegrál variációjának kiszámításánál tegyük föl, hogy a rendszer összes pontjai az a_i kezdőhelyeket a $t=0$ időben együtt hagyják el és hogy a b_i végső helyzetbe is mind-

nyájan együtt érkeznek meg, csakhogy az *eredeti* pályákban t_1, a *variáltakban* pedig $t_1+\delta t_1$ időpontban. Akkor ismeretes úton a következő eredményhez jutunk:

$$\delta\int_0^{t_1} f dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial q_i}-\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i d\varphi$$
$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial t}-\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial\dot{t}}\right)\delta t d\varphi$$
$$+\int_{\varphi_1}^{\varphi_1}\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial F}\delta F d\varphi+\left(\frac{\partial(f\dot{t})}{\partial\dot{t}}\delta t\right)_{t_1}.$$

Ebből a (3), (4), (5), (8) és (9) alatti jelölések és eredmények felhasználásával

$$\delta\int_0^{t_1} f dt=\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\delta q_i+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'-f\right)\right)\delta t+\frac{\partial f}{\partial F}\delta F\right)dt-$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i'}q_i'-f\right)_{t_1}\delta t_1 \qquad (12^*)$$

azaz

$$\delta H=\int_0^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\delta q_i+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dF}{dt}+\frac{dG}{dt}\right)\delta t+\frac{\partial f}{\partial F}\delta F\right)dt-(F+G)_{t_1}\delta t_1. \qquad (12)$$

Tekintettel még a (6) és a (7) alatti jelölésekre és tekintettel e következő identitásokra

$$\delta\int_0^{t_1} F dt=\int_0^{t_1}\left(\delta F-\frac{dF}{dt}\delta t\right)dt+F_{t_1}\delta t_1,$$
$$\delta\int_0^{t_1} G dt=\int_0^{t_1}\left(\delta G-\frac{dG}{dt}\delta t\right)dt+G_{t_1}\delta t_1,$$

a δH-hoz való hozzáadásuk révén ered

$$\delta I=\int_0^{t_1}\left(L_i\delta q_i+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dG}{dt}\right)\delta t+\left(1+\frac{\partial f}{\partial F}\right)\delta F\right)dt-G_{t_1}\delta t_1, \qquad (13)$$

$$\delta A=\int_0^{t_1}\left(L_i\delta q_i+\frac{\partial f}{\partial t}\delta t+\left(1+\frac{\partial f}{\partial F}\right)\delta F+\delta G\right)dt. \qquad (14)$$

Hogy tehát akár a ∂H, akár a ∂I, akár pedig a ∂A elenyészszenek bármekkora, egymástól független, ∂q_i-k esetén is, arra nézve szükséges föltétel, hogy az

$$L_i = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer fönnálljon.

Ha pedig ez az egyenletrendszer érvényes, akkor a (12), (13) és (14) alatti kifejezések a (10) alatti identitás felhasználásával a következő alakot öltik fel:

$$\partial H = \int_0^{t_1} \frac{\partial f}{\partial F}\left(\partial F - \frac{dF}{dt}\,\partial t\right) dt - (F+G)_{t_1}\,\partial t_1, \tag{12'}$$

$$\partial I = \int_0^{t_1} \left(1+\frac{\partial f}{\partial F}\right)\left(\partial F - \frac{dF}{dt}\,\partial t\right) dt - G_{t_1}\,\partial t_1, \tag{13'}$$

$$\partial A = \int_0^{t_1} \left(1+\frac{\partial f}{\partial F}\right)\left(\partial F - \frac{dF}{dt}\,\partial t\right) dt + \int_0^{t_1} \left(\partial G - \frac{dG}{dt}\,\partial t\right) dt. \tag{14'}$$

Ezekből következik, hogy az $L_i=0$ egyenletrendszer fönnállása *általánosan* szólva nem elegendő föltétel se a ∂H, se a ∂I elenyészésére nézve még akkor sem, ha $\partial t_1=0$.

V. *Hamilton elve az első osztályú Lagrange-féle mozgás esetén.* Ha f explicite független a F-től, és megköveteljük, hogy nem variáló időtartam esetén elenyészszék a ∂H egymástól egészen független önkényszerű ∂q_i-k mellett, akkor erre nézve az

$$L_i = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer fönnállása nemcsak szükséges, de elegendő föltétel is. A mozgás tehát mindenesetre első osztályú LAGRANGE-féle.

A Hamilton-féle elv általános Lagrange-féle mozgás esetén. Ha pedig a variálásra nézve azt írjuk elő, hogy a $\partial H=0$ legyen ugyan nem variáló időtartam és *egészen* önkényszerű ∂q_i-k esetén, de nem kötvén ki, hogy a f explicite független legyen a F-től, megköveteljük, hogy a ∂F és a ∂t között a

$$\delta F = \frac{dF}{dt}\delta t \tag{15}$$

összefüggés mindenkor fönnálljon, és ha a mozgásra nézve eleve felállítjuk a $G=0$ egyenlet érvényes voltát, akkor a mozgás minden esetre LAGRANGE-féle.

Miután ugyanis a $\delta t_1=0$ és a (15) alatti egyenleteknek fönn kell állniok, tehát a (12′) egyenlet jobb oldala $=0$; de ez a (12′) igaz, mihelyt a variálatlan mozgás az $L_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egyenletek értelmében történik, és csakis akkor igaz. Ez $L_i=0$ egyenletek pedig az eleve kiszabott $G=0$ egyenlettel egyetemben a (10′, 10″) általános LAGRANGE-féle mozgást jellemzik.

1. Megjegyzés. A (15) alatti követelés egyenértékű avval a követeléssel, hogy az energia a variálatlan és a variált mozgásban egyazon numerice meghatározott időfüggvény legyen. Szóval a (15) egyenlet egyenértékű az

$$F=E(t) \tag{16}$$

egyenlettel (pag. 1).

2. Megjegyzés. Miután az f-ben előfordul egy önkényszerű nem variálandó állandó is (pag. 2), tehát a $G=0$ egyenlet egyenértékű a $G=$const. egyenlettel. Látni való, hogy ez a $G=0$ egyenlet nem *következménye* az előző variáczióelvnek; az itt következő variáczióelv e tekintetben tökéletesebb.

VI. *Variáczióelv a Lagrange-féle második osztályú mozgásra nézve.* Hogy $\delta I=0$ legyen egészen önkényszerű δq_i-k, δF és δt_1 esetén még akkor is, ha a mozgást olyan variálttal hasonlítjuk össze, mely 0 időpontban ugyanazokból az a_i kezdő helyzetekből indul ki, mint a variálatlan mozgás, de a mely $\tau+\delta t_1$ időpontban azokba a helyzetekbe érkezik meg, melyeket a variálatlan mozgás τ időben foglal el, bármi legyen is a τ értéke, ha csak $0<\tau\leqq t_1$, akkor erre nézve az

$$L_i = 0,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0,$$
$$G = 0$$

egyenletek fönnállása szükséges és elegendő feltétel. E szerint a mozgás LAGRANGE-féle másodosztályú mozgás.

A megfelelő variációelv az általános Lagrange-féle mozgás jellemzésére. Ha pedig az imént kimondott elvet *csak* annyiban módosítom, hogy a δF ne legyen független a δt-től, hanem vele a (15) egyenlet szabta összefüggésben legyen, akkor a ∂I elenyészésére nézve az

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$G = 0$$

egyenletek fönnállása szükséges és elegendő föltétel. A mozgás tehát bizonyosan LAGRANGE-féle.

4. §. Az actió elve, ha az energia variálandó.

VII. Az A-val jelölt időintegrált abban a specziális esetben, a midőn a T a q_i'-k négyzetes függvénye, és az U csakis a helyzettől függ, — miként ismeretes — a rendszer *actió*jának nevezik; úgy nevezem a *legáltalánosabb* esetben is. Miután a (14′) kifejezés a (14)-nek a következménye, hacsak a ∂q_i-k *egészen* önkényszerűek, a (14′) pedig elenyészik, hacsak a variálást oly módon korlátozzuk, hogy az F és a G ugyanazon numerikus időfüggvények legyenek úgy a variált mint a variálatlan mozgásban (15, 16), azért a következő tételek érvényesek:

1. Ha megköveteljük, hogy az actió variációja mindenesetre elenyészszék a fix kezdőhelyzetből a fix végső helyzetbe való átvitelnél, föltéve csak, hogy úgy az F mint a G ugyanazok az időfüggvények a variált mozgásban mint a variálatlanban, akkor erre nézve az

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer fennállása szükséges és elegendő föltétel.

Miután e szerint a G folytonos módon még akárhogy változhatik, tehát ennek a variációproblemának a megoldása *nem csak* a LAGRANGE-féle mozgás.

2. Ha az F-re nézve fentartjuk a követelményt, ellenben a

G variációját az időétől függetlennek nyilvánítjuk, akkor a δA elenyészésére nézve az

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0,$$

$$\int_0^{t_1} \delta G dt = 0 \tag{17'}$$

egyenletek fennállása bizonyosan elegendő föltétel.

A követelményeknek tehát a LAGRANGE-féle mozgás is csak a (17') egyenlet előszabta *korlátolt* variációkörben felel meg. De épen ezen (17') egyenletnél fogva a δq_i és a δt variációk többé nem *egészen* függetlenek egymástól, minélfogva ezek az

$$L_i = 0, \quad \frac{dG}{dt} = 0$$

elegendő föltételek nem egyszersmind szükségesek is.

3. Ha végül úgy az F mint a G variációját függetlennek nyilvánítjuk az időétől, akkor két esetet különböztetünk meg, a szerint a mint a f explicite *függ* a F-től vagy *nem* függ.

a) Ha az első esetben

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$1 + \frac{\partial f}{\partial F} = 0,$$

$$\frac{dG}{dt} = 0$$

egyenletek fennállván a mozgás LAGRANGE-féle második osztályú mozgás, akkor a δA elenyészésére nézve a (17') egyenlet szabta korlátozás még szükséges, de egyszersmind elegendő feltétel is.

b) A második esetben a (14') egyenlet így szól:

$$\delta A = \int_0^{t_1} \left(\delta F + \delta G - \left(\frac{dF}{dt} + \frac{dG}{dt} \right) \delta t \right) dt.$$

Ennélfogva a ∂A elenyészésére nézve elegendő, ha az

$$L_i = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$F+G \equiv \sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f = \text{const.}$$

$$\int_0^{t_1} \partial (F+G)\, dt \equiv \int_0^{t_1} \partial \left(\sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f \right) dt = 0 \qquad (17'')$$

egyenletek fönnállnak. A mozgás tehát olyan első osztályú LAGRANGE-féle, melyben az eleven erő megmaradásának elve érvényes; és az actiónak fix határhelyzetek esetén való elenyészésére nézve szükséges és elegendő föltétel, hogy a variáczió köre a (17'') egyenlettel legyen megszabva.

VIII. *Az általános actió-elv formulázása.* Az imént előterjesztett *b)* eset vizsgálatát MAYER idézett dolgozatában teljesen kimerítette. Az *a)* specziáleset az 5. §-ban fog bennünket foglalkoztatni. Itten a 2. alatti általános tételnek olyan kiegészítéseiről lesz szó, a melyek a variáczió probléma követelményeihez csatolva, az összes követelményeknek *csakis* a LAGRANGE-féle mozgás felel meg. A kiegészített tétel ez:

Követeljük meg, hogy az actió variácziója elenyészszék fix kezdő helyzetből fix végső helyzetbe, variáló időtartam alatt való átvitel esetén is. A $G=0$ *egyenlet fönnálljon nemcsak a variálatlan hanem a variált mozgásban is, és a variáczió köre korlátoztassék a* (15) *megszabással is, mely szerint* $E(t)$*-vel egy változatlan időfüggvényt jelölvén*

$$\partial F = E'(t)\, \partial t.$$

Követeljük meg továbbá a következő kikötések egyvalamelyikét:

A) *Az actió variácziója akkor is elenyészszék, ha a keresett mozgás bármelyik időpontbeli helyzete lesz is a variált mozgások végső fix helyzetévé.*

B) *A mozgás az adott* b_i *végső helyzetbe az adott* b_i' *sebességekkel érkezzék meg; és a megadott* $E(t)$ *időfüggvény épen a*

megadott b_i, b_i' értékekhez tartozó Lagrange-féle energiafüggvény legyen.

C) *A keresett mozgásban érvényes legyen az eleven erő tétele.*

D) *A keresett mozgásban e helyett érvényes legyen bármely más olyan tétel, a melyet kifejező egyenlet a Lagrange-féle mozgási egyenletekből lineár módon van összetéve.*

Az összes követelményeknek e négy alternativ eset mindegyikében egyes egyedül a Lagrange-féle mozgás felel meg.

Megjegyzés. Az *A), C)* és *D)* alatti kikötéseknek megfelelő tételek azonosak azokkal, melyeket előző két közleményemben az f-re vonatkozó specziálisabb föltételek mellett fölállítottam és bebizonyítottam volt. A *B)* alatti kikötéseknek megfelelő tétel első közleményemben némi módosítással hasonlóképen olvasható; de az ott közölt bizonyításra nézve kimondottam volt második közleményemben, hogy nem kielégítő; ezt a hiányt is kívánom ez alkalommal pótolni.

IX. A felállított theorémát LAGRANGE módszerével fogom bebizonyítani. E módszer értelmében

$$\Omega \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + (\lambda - 1) G \tag{18}$$

téve, hol $(\lambda - 1)$ a LAGRANGE-féle szorzó és hol

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F = 0, \tag{17}$$

a variáczió föltételi egyenlete, kiszámítandó

$$\partial \int_0^{t_1} \Omega dt.$$

E variáczió kiadódván a (12*) egyenletből, ha f helyett benne mindenütt Ω-t teszünk, a probléma ismeretlenei — t. i. a q_i-k, az F és a λ — úgy határozandók meg, hogy a ∂q_i-k, a ∂t és a ∂t_1 szorzói elenyészszenek; megjegyezvén, hogy előbb a (15) egyenlet felhasználásával a követelmények értelmében ∂F helyett értéke teendő.

Ha tehát egyelőre még eltekintünk az *A), B), C), D)* alatti alternativ követelményektől, akkor a (17) alatti egyenleten kívül mindössze csak a következő egyenletek teljesítendők:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega\right)_{t_1} = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{b}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F}\frac{dF}{dt} = 0 \tag{c}$$

Miután a (*c*) alatti egyenlet a (*b*) alatti egyenletrendszer következménye, azért a meghatározandó $n+2$ számú ismeretlen

$$\lambda, F, q_1, q_2, \ldots, q_n$$

számára a (17), a (*b*) és az (*a*) alatti egyenletek állnak rendelkezésünkre, melyek közül azonban az utolsó csak a t_1 időpontban teljesítendő. Mindenekelőtt ezt a határegyenletet fogjuk megvizsgálni.

A (18) egyenletet így írva

$$\Omega \equiv f + F + \lambda G, \tag{18'}$$

$$\Omega \equiv (1-\lambda)(f+F) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i', \tag{18''}$$

a (9) fölhasználásával kiadódik

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' \equiv (1-\lambda) \sum_{1=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_i' q_j' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q'\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \lambda H_0,$$

azért a (18) tekintetbe vételével

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \equiv \lambda H_0 + (1-\lambda) G.$$

Minélfogva a (17) föltételi egyenlet révén *minden* időben

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega = \lambda H_0 . \qquad (19')$$

Azért a jobb oldalon álló szorzat az (*a*) értelmében zérus, ha $=t_1$. A H_0 az f-re vonatkozó előleges megállapodások szerint sohase enyészhetvén el, kimondhatjuk tehát, hogy $t=t_1$ *időben*

$$\lambda = 0. \qquad (19)$$

Ez az egyenlet azonban, miként a (*c*) megtekintéséből látható, általánosan szólva *csakis* a t_1 időpontban érvényes. Minélfogva a minden időpontban érvényes egyenletek száma $n+1$, míg a meghatározandó ismeretleneké, miként láttuk, $n+2$. A míg tehát újabb követelmény hozzá nem jő az eddig tekintetbe vettekhez, a probléma bizonyára határozatlan.

X. Az újabb követelmény legyen először az *A)* alatti követelés, melyet részletesebben így fogalmazunk:

Követeljük, hogy a keresett mozgás akkor is megfeleljen az eddigi követelményeknek, ha olyan variált mozgásokkal hasonlítjuk össze, melyek 0 időben ugyanazokból az a_i helyzetekből indulnak ki, mint a keresett mozgás, míg a $\tau+\delta t$ időpontban azokba a végső helyzetekbe érkeznek meg, melyeken a keresett mozgás a τ időpontban ment át; és ez álljon függetlenül a τ számértékétől, ha csak

$$0 < \tau \leqq t_1 .$$

A IX. czikk eredményeiből közvetetlenül folyik ekkor, hogy a (19) egyenlet érvényes $t=\tau$, azaz a t bármely értékénél; tehát

$$\lambda \equiv 0,$$

és így

$$\Omega = f + F;$$

minélfogva a (*b*) egyenletek a LAGRANGE-féle mozgási egyenletekbe menvén át, a (17) egyenlettel együtt a LAGRANGE-féle mozgást határozzák meg.

XI. Az újabb követelmény legyen másodszor a *B)* alatti. Azt állítom, hogy a keresett mozgás ekkor is a (10′, 10″) LAGRANGE-féle egyenletek szerint végbemenő mozgás.

Ugyanis a

$$\lambda;\quad q_1, q_2, \ldots, q_n;\quad q_1', q_2', \ldots, q_n'$$

számértékei a t_1 időpontban sor szerint

$$0;\quad b_1, b_2, \ldots, b_n;\quad b_1', b_2', \ldots, b_n'. \tag{20}$$

Továbbá a variáczó-probléma $(n+1)$ differenczialegyenlete lineáris a

$$\frac{d\lambda}{dt};\quad \frac{dq_1'}{dt}, \frac{dq_2'}{dt}, \ldots, \frac{dq_n'}{dt}$$

$n+1$ számú ismeretlenben.

Végül ez egyenletek determinánsának a (20) alatt álló adott számértékekhez tartozó értéke zérustól különböző. Ugyanis a *(b)* egyenletek i-edikében a $\frac{d\lambda}{dt}$ együtthatója

$$A_i = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial\lambda\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} q_j';\quad (t=t_1)$$

míg a többi együttható a (19) egyenlet tekintetbe vételével sor szerint

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_1'}\right)_{t_1}, -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_2'}\right)_{t_1}, \ldots, -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_n'}\right)_{t_1}.$$

Miután pedig a *(c)* egyenlet a (19′) tekintetbe vételével így irandó

$$\frac{d}{dt}(\lambda H_0) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} E'(t) = 0,$$

tehát a fentnevezett differenczialhányadosok együtthatóinak értékei *általánosan* sor szerint

$$H_0;\quad \lambda\frac{\partial H_0}{\partial q_1'}, \lambda\frac{\partial H_0}{\partial q_2'}, \ldots, \lambda\frac{\partial H_0}{\partial q_n'},$$

tehát épen a t_1 időpontban, a midőn a (19) egyenletnél fogva $\lambda=0$, ezek számértékei sor szerint

$$(H_0)_{t_1};\ 0,\ 0, \ldots, 0.$$

A determináns tehát

$$\begin{vmatrix} A_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ A_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & & & & \\ A_n & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \\ H_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{t=t_1} \pm (H_0 D_1)_{t_1}.$$

Miután e szerint a determináns két mennyiség szorzatába esik szét, a melyik egyike se enyészhetik el (a f-re vonatkozó előleges megállapodások értelmében), tehát a probléma ismeretlenei a lineáris egyenletekből kifolyólag olyan sorokba fejthetők, a melyek a $(t-t_1)$ egész hatványai szerint haladván azokat *egyértékűleg* meghatározzák, legyen bár az $E(t)$ *akármilyennek is* megadva.

Ebből pedig következik, hogy ha az $E(t)$ épen a LAGRANGE-féle időfüggvény, akkor ezek az *egyértékűleg* meghatározott sorok nem lehetnek mások, mint épen a LAGRANGE-féle differenciálegyenleteknek az adott b_i, b_i' értékekből kiinduló megoldásai; mert hiszen ezek $\lambda \equiv 0$-sal egyetemben *mindenesetre* megoldásai a (17) és (b) alatti differenciálegyenleteknek. Mert valójában a $\lambda \equiv 0$ helyettesítés a (b) rendszert épen a LAGRANGE-féle (10′) rendszerbe viszi át.

XII. Az újabb követelmény legyen harmadszor a *C)* alatti, mely szerint a pontrendszer mozgására nézve az eleven erő elve fönnálljon. Most tehát a F nincs ugyan eleve megadva, de a helyett ki van kötve, hogy a (11) értelmében e következő egyenlet szabja meg a változását

$$K \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial F}\right) \frac{dF}{dt} = 0. \qquad (21)$$

Írjuk a (c) egyenletet a (19′) alapján e következő alakban

$$\frac{d(\lambda H_0)}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F} \frac{dF}{dt} = 0, \qquad (c')$$

és helyettesítsük az Ω-t a (18'') alatti értékével. Tekintettel a $G=0$ egyenletre azt találjuk, hogy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial F}\frac{dF}{dt} = (1-\lambda)K + \lambda H_1,$$

hol

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial F}\frac{dF}{dt}\right)q_i'. \tag{22}$$

Miután pedig a (21) értelmében $K=0$, azért a (c') helyébe írható már mostan

$$\frac{d(\lambda H_0)}{dt} + \lambda H_1 = 0. \tag{c''}$$

De ha a t_1 időtartam elég rövid, akkor mindig föltehető, hogy ebben a t_1 időtartamban a H_1 soha sem végtelen nagy; a (c'') egyenletből, mely érvényes az egész időtartam alatt, és a (19) egyenletből, mely érvényes a t_1 időpontban, az következik tehát, hogy a $\lambda \equiv 0$.*

A variáczió-probléma differenciálegyenletei tehát ismét a LAGRANGE-féle mozgási egyenletek.

XIII. Az újabb követelés legyen végül a *D)* alatti, mely azt mondja, hogy a mozgásra nézve fönnálljon a

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i'}\right) = 0 \tag{23}$$

egyenlet, hol a ν szorzók csakis annak a megszorításnak legyenek alávetve, hogy a 0-tól t_1-ig terjedő időtartamban a

$$K_0 \equiv \sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

sohase legyen $=0$, és hogy a

$$K_1 \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\nu_i \frac{\partial G}{\partial q_i} + \nu_i' \frac{\partial G}{\partial q_i'}\right)$$

sohase legyen $=\infty$.

---

* L. Értesítő XIII. kötet 302. lap.

Tényleg a (*b*) alatti egyenletekből a (23) egyenlet bal oldalának levonása után közvetlenül a

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\lambda \frac{\partial G}{\partial q_i'}\right)\right) = 0,$$

egyenlet ered, mely a K_0 és K_1 jelölések révén a következő alakot ölti fel:

$$\frac{d(\lambda K_0)}{dt} - \lambda K_1 = 0. \tag{24}$$

Miután pedig a $t=t_1$ időpontban a (19) egyenlet fönnáll, tehát ebből az egyenletből, úgy mint előbb, az következik, hogy $\lambda \equiv 0$.

Evvel a VIII. czikkben kimondott theoréma minden részében be van bizonyítva.

Az actió-elvnek azt a négy alakját, mely az *A), B), C), D)* mellékkövetelmény hozzávételéből ered, a továbbiakban szintén ugyanezekkel a betükkel fogom jelölni.

5. §. Az actió elve, ha az energia nem variálandó.

XIV. A VII. czikk 3. tétele szerint *a Lagrange-féle második osztályú mozgás esetén* $\partial G=0$ mellékföltétel mellett eltünik az actió variácziója akkor is, ha a ∂F független a ∂t-től; eltünik tehát akkor is, ha $\partial F=0$, a ∂t pedig önkényszerű. Ez az észrevétel a következő probléma fölállítására vezet:

Legyen a f a q_i koordinátáknak, a q_i' sebességeknek és az F energiának megadott függvénye. Követeljük meg, hogy az actió variácziója zérus legyen az a_i fix kezdőhelyzetből a b_i fix végsőhelyzetbe való olyan átvitelnél, melynél az időtartam bármiként variálván, a

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f - F = 0 \tag{17}$$

egyenlet úgy a variált mint variálatlan mozgásban érvényes; az energia változó legyen és mindamellett ne variáljon. Mik a mozgás differenczialegyenletei a variálatlan pályákon?

Ha ismét, úgy mint a IX. czikkben

$$\Omega \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + (\lambda - 1)\, G \tag{18}$$

téve, kiszámítjuk a $\delta \int_0^{t_1} \Omega dt$ kifejezését a (12*)-ból kifolyólag oly módon, hogy f helyett Ω-át teszünk, akkor tekintettel a $\delta F = 0$ korlátozásra mostan a LAGRANGE eljárása értelmében szükségképen teljesítendők a következő egyenletek, és csakis ezek teljesítendők

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} = 0, \tag{b'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \tag{c'}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right)_{t_1} = 0. \tag{a'}$$

Ámde

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' + \frac{d\lambda}{dt} G + (\lambda - 1) \frac{dG}{dt};$$

ebből, tekintettel arra, hogy a föltételi egyenlet szerint $G = 0$ *minden* időben, és hogy továbbá az f most, miként eleve kikötöttük, a t-től explicite független, az következik tehát, hogy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

Azért a (c') helyébe most ez lép:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} q_i' - \Omega \right) = 0. \tag{c''}$$

Az (a') és ezen (c'') egyenletekből pedig a IX. czikk most is érvényes (19') egyenletének alkalmazásával az következik, hogy λH_0 állandó és hogy a t_1 időpontban $= 0$.

Miután e szerint a λH_0 szorzat mindig is $= 0$, a H_0 pedig az f-re vonatkozó megállapodás értelmében a mozgás folyamán sohasem enyészik el, tehát most is arra az eredményre jövünk, hogy $\lambda \equiv 0$.

E szerint az itt fölállított variáczió-probléma egyetlenegy megoldása a Lagrange-féle második osztályú mozgás.

XV. E tétel alapján nem variálandó energia mellett is oly módon fogalmazhatjuk a legkisebb actió elvét, hogy a *legáltalánosabb* esetben, a midőn a f az időtől is függ explicite, az *általános* LAGRANGE-féle egyenletekre vezessen.*

Az új fogalmazás czéljából gondoljuk az eredetileg a q_i-k, q_i'-k, az F és a t független változóknak numerikus függvénye gyanánt megadott f-et a következőképen átalakítva.

Gondoljuk a kezdő energiát az F_0-t, a kezdő koordinátákat a q_i-ket, a kezdő sebességeket a q_i'-ket numerice megadva, és az ezekből kiinduló megoldásait a LAGRANGE-féle (10′, 10″) egyenleteknek meghatározva; ezekben a

$$q_i = K_i(t); \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$
$$F = E(t) \tag{25}$$

megoldásokban a $K_i(t)$ és $E(t)$ *numerice* teljesen meghatározott időfüggvények. Az $F=E(t)$ megoldásával ismét egy *numerice* teljesen meghatározott

$$t = \zeta(F) \tag{25*}$$

függvényt nyerünk. Behelyettesítvén már mostan ezt a $\zeta(F)$ függvényt a t helyett az f függvényben *mindenütt*, míg a többi változókat *érintetlenül* meghagyjuk az

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q_1', q_2', \ldots, q_n';\ F;\ t)$$

eredeti f függvény a következő alakban jelenik meg:

$$\bar{f} \equiv f(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q_1', q_2', \ldots, q_n';\ \zeta(F)).$$

Ezt az átalakított $\bar{f}$ függvényt fogom úgy az actió variáczió-jának kiszámításánál, mint a probléma mellékföltételének kimondásánál igénybe venni.

---

* Ez a formulázása az elvnek e szerint általánosabb lesz, mint a XIII. kötet 303—306 lapokon fölállított és bebizonyított alakja, mely csak akkor vezet mindig a LAGRANGE-féle egyenletekre, ha az f a külső pontok *sebességének nem* függvénye.

Kijelentem már mostan az actió elvének a következő *E)*-vel jelölendő alakját:

1. *Követeljük meg, hogy*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' dt = 0$$

legyen az a_i fix kezdőhelyzetből a b_i fix végső helyzetbe való átmenetelnél variáló t_1 mellett is.

2. *Követeljük meg, hogy a*

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' - f - F = 0$$

egyenlet érvényes legyen, úgy a variált, mint a variálatlan mozgás esetén.

3. *Követeljük meg, hogy $\delta F = 0$ legyen minden időben, noha az F semmikép se állandó.*

4. *Követeljük meg végül, hogy a kezdőenergia F_0, a kezdőhelyzet a_i és a kezdősebesség a_i' az i index minden értékénél ugyanazok a numerikus értékek legyenek, a melyeket az $\bar{f}$ átalakított függvény kiszámításánál felhasználtunk volt.*

Mindezeknek a követelményeknek megfelel a Lagrange-féle mozgás és ha csak az F_0, a_i, a_i' értékrendszer nem tartozik a később (27. lapon) meghatározandó szinguláris értékrendszerekhez, kivüle nem felel meg mindezeknek a követelményeknek semmiféle más mozgás.

Miután ugyanis az $\bar{f}$ függvény explicite független a t-től, mert hiszen a $\vartheta(F)$ numerice *teljesen* meghatározott függvénye az F-nek, tehát az előző czikk alapján kimondhatjuk, hogy a mozgás differenciálegyenletei az

$$L_i \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} = 0; \qquad (26)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i'} q_i' - f - F = 0$$

egyenletrendszer. Ezek az egyenletek abban különböznek a (10′, 10″) LAGRANGE-egyenletektől, hogy f helyén $\bar{f}$ — hogy t. i. az explicite előforduló t helyén $\zeta(F)$ — áll. Ennélfogva a (26) egyenletrendszer *általános* megoldása egészen más mint a (10′, 10″) egyenletrendszeré. De a 4. követelmény értelmében nem erről, hanem csak azokról a *partikuláris* megoldásokról lehet szó, a melyek a megadott F_0, a_i, a_i' kezdőértékekből indulnak ki; és ezek a partikuláris megoldások *közösek*. Ha ugyanis a (26) egyenletrendszerben a parciális differenciálások végzése *után* $\zeta(F)$ helyébe t-t teszünk, akkor egészen átmegy ez a rendszer a (10′, 10″) LAGRANGE-féle rendszerbe; azért a (25) alatti partikuláris megoldások megoldásai a (26) rendszernek is. *Csak* annak a bebizonyítása szükséges tehát még, hogy ezen megoldás-rendszeren kívül más nincs; és ez alkalommal egyszersmind megjelölendők a kivételes F_0, a_i, a_i' értékrendszerek.

XVI. Miután a (26) egyenletrendszer a (10′, 10″) rendszernek azt a speciális esetét alkotja, a midőn az f a t-től explicite független, miután továbbá a 3. követelés értelmében $\frac{dF}{dt}$ nem lehet folytonosan zérus, azért a III. czikk (11′) egyenlete alkalmazható. És ha a kijövő

$$1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial F} = 0$$

helyett mindjárt a mindenkép teljesítendő

$$\frac{d}{dt}\left(1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial F}\right) = 0$$

egyenletet alkalmazzuk, és úgy ebben, mint az $\bar{L}_i$-ben kifejtjük a t szerint való differenciálásokat, akkor a

$$\frac{dF}{dt}, \frac{dq_1'}{dt}, \frac{dq_2'}{dt}, \ldots, \frac{dq_n'}{dt}$$

$(n+1)$ számú mennyiség meghatározására a következő $(n+1)$ egyenletből álló lineáris rendszer áll rendelkezésünkre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial F}\frac{dF}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial q_j}q_j'=0\\ \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_i'\partial F}\frac{dF}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_i'\partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_i'\partial q_j}q_j'-\frac{\partial\bar{f}}{\partial q_i}=0;\\ (i=1,2,\ldots,n)\end{aligned}\tag{27}$$

A lineáris egyenletrendszer determinánsa tehát nem más, mint az $\bar{f}$ függvénydeterminánsa az $F, q_1', q_2', \ldots, q_n'$ változókban, t. i.

$$D\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial F} & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial q_n'}\\ \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_1'\partial F} & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_1'\partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_1'\partial q_n'}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_n'\partial F} & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_n'\partial q_1'} & \cdots & \frac{\partial^2\bar{f}}{\partial q_n'\partial q_n'}\end{vmatrix}\tag{28}$$

Ez a determináns nem *identice* zérus. Az állítást igazolandók elégséges arra az esetre szorítkoznunk, a mikor az eredeti f explicite független az F-től, minélfogva az átalakított $\bar{f}$ *csakis* annyiban függ a F-től, a mennyiben a f-ben a t helyébe mindenütt a $\vartheta(F)$ függvény lépett; különben is ez a tényleges ez időszerinti dinamika kizárólagos esete.

Ebben az esetben

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial F}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial F}=\frac{1}{E'(\vartheta)}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\vartheta},$$

tehát

$$\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F^2}=\frac{1}{E'(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{E'(\vartheta)}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\vartheta}\right)=\frac{1}{E'(\vartheta)^2}\left(\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial\vartheta^2}-\frac{E''(\vartheta)}{E'(\vartheta)}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial F\partial q_i'}=\frac{1}{E'(\vartheta)}\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial\vartheta\partial q_i'}.$$

De $t=0$ időben egyszersmind $\vartheta=0$, és a VIII. és XV. 3 szerint

$$E'(0)=-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0};$$

ha tehát még a következő azonosságokat is felhasználjuk

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=\vartheta(F)}; \quad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \vartheta^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{t=\vartheta(F)}; \quad \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \vartheta \partial q_i'} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'}\right)_{t=\vartheta(F)},$$

akkor kimondhatjuk, hogy $t=0$ időben a parciális differenciálhányadosok értékei a következők:

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F \partial F} = \frac{1}{E'(0)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{E''(0)}{E'(0)}\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{1}{E'(0)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + E''(0)\right)_{t=0},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial q_i' \partial F} = \frac{1}{E'(0)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t}\right)_{t=0},$$

a hol a jobb oldalon a differenciálás végzése után a koordináták és a sebességek az a_i és az a_i'-kel helyettesítendők. Ezt a műveletet a 0 jelképnek az f-hez való csatolásával jelölvén, a D-nek $t=0$ pontbeli értékét a D_0-t a következőképen fejezhetjük ki:

$$E'(0)^2 D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + E''(0) & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}$$

A $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial F^2}$ kifejezés reductiójánál felhasználtuk volt azt a körülményt, hogy az $E(t)$ értelmezésénél fogva az eleven erő tételének

$$E'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

LAGRANGE-féle egyenlete a LAGRANGE mozgásra nézve *minden* időben érvényes lévén, a keresett mozgásra nézve bizonyosan érvényes *a $t=0$ időben*. Ugyanezen körülmény meggondolásán alapszik az $E''(0)$-nak eliminálása is a D_0 kifejezéséből. Az előző egyenletet teljesen differenciálván t szerint lészen ugyanis

$$E''(t)+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t}q_j'+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j' \partial t}\frac{dq_j'}{dt}=0,$$

a mely egyenlet bizonyosan érvényes, ha benne a q_i, q_i' és $\frac{dq_i'}{dt}$ mennyiségek a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial t}-\frac{\partial f}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j'}q_j'+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'}\frac{dq_j'}{dt}=0,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

LAGRANGE-féle egyenleteknek hódolnak. A $\frac{dq_j'}{dt}$-knek ezekből az egyenletekből való eliminálásával e következő a $t=0$ időre adott a_i, a_i' kezdőértékekre nézve bizonyosan érvényes egyenlet folyik:

$$0=\begin{vmatrix} E''(0)+\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_j}q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_2'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial t}-\frac{\partial f_0}{\partial q_1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_j'}q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial t}-\frac{\partial f_0}{\partial q_2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_j'}q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial t}-\frac{\partial f_0}{\partial q_n}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n \partial q_j'}q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix},$$

és az előző determinánsnak ebből a determinánsból való levonása után ered

$$-E'(0)^2 D_0=\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_j}q_j' & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_j'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial t \partial q_n'} \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_j'}q_j'-\frac{\partial f_0}{\partial q_1} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_j'}q_j'-\frac{\partial f_0}{\partial q_2} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_j'}q_j'-\frac{\partial f_0}{\partial q_n} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix} \quad (28')$$

De ez a determináns az a_i és a_i' kezdőértékeknek *csakis* igen *speciális* rendszere esetén tünhetik el. Ha ugyanis az erők

potencziálja csak a koordinátáktól és az időtől függ, a pontrendszer összeköttetései pedig az időtől függetlenek, akkor általánosan

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

tehát

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i'} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial q_i'} = 0,$$

ellenben a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial q_i}$$

mennyiségek általánosan *nem* egyenlők zérussal; továbbá

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i' \partial q_j'} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i' \partial q_j'}.$$

Azért a (28′) egyenlet ebben az esetben átmegy a következőbe

$$-E'(0)^2 D_0 = D_{10} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U_0}{\partial q_j \partial t} a_j', \qquad (28'')$$

hol az U_0 jelkép jelentése hasonló az f_0 jelképéhez, és hol

$$D_{10} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_1' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_1' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_1' \partial q_n'} \\ \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_2' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_2' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_2' \partial q_n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_n' \partial q_1'} & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_n' \partial q_2'} & \cdots & \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_n' \partial q_n'} \end{vmatrix}.$$

De miután a D_{10} az alapföltevések értelmében nem lehet zérus, az $E'(0)$ pedig nem ∞, azért *még ezen speciális esetben is* csak akkor enyészik el a D_0, ha

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U_0}{\partial q_j \partial t} a_j' = 0.$$

Ebből következik, hogy a (28) determináns általánosan se lehet identice zérus.

Zárjuk ki ezentúl mindazokat a szinguláris F_0, a_i, a_i' értékrendszereket, a melyek esetén a $D_0=0$ vagy pedig a (27) egyenletek valamelyik együtthatója $=\infty$. Akkor a (27) egyenletekből kifolyólag kiszámithatók az F és a q_i-knak az adott F_0, a_i, a_i' kezdőértékekből kiinduló időfüggvényei mint MACLAURIN-féle hatványsorok; a meghatározás tehát *egyértékű*.

Miután úgy, miként a XIV. czikkben megmutattuk volt, a LAGRANGE-féle megoldások is megoldásai a (27) rendszernek, tehát az egyértékűleg meghatározott időfüggvények szükségkép a LAGRANGE-félék.

De ebből végül az következik, hogy a XIV. czikk variáczióproblémája a ki nem rekesztett — *rendes* — (F_0, a_i, a_i') rendszerek *összességére* kiterjesztve szükségkép az általános LAGRANGE-féle mozgási egyenletekre vezet.

Evvel az actió elvének E)-vel jelölt alakja is igazolva van.

6. §. Dolgozatom viszonya az actió elvének Helmholztól eredő fogalmazásához, és a főbb eredmények összefoglalása.

XVII. Miután a legkisebb actió elvére vonatkozó vizsgálataimat ezzel befejeztem, kötelességemnek vélem, hogy munkám viszonyát HELMHOLTZ többször idézett munkájához részletesen előadjam; munkám ugyanis tényleg ennek az elemezéséből eredt azon szigorú módszerek segélyével, melyeket A. MAYER erre a problémára speciálisabb érvényességi körben alkalmazott volt. Mert a milyen szellemesek HELMHOTZ vizsgálatai, ki kell jelentenem, hogy bizonyitásai — legalább én úgy látom — hézagosak és nem meggyőzők.

Az idő *differenciálját* ugyanis variálja, de az időt *magát* nem *; ez eljárás értelme és jogosultsága azonban sehol sincsen megvilágitva. És még ha meg is engedjük ezt azt eljárást, végül mégis csak annyit látunk be, hogy a természetes mozgás *is* megfelel a variáczió-probléma követelményeinek, nem pedig hogy *csakis* ez az egyetlen mozgás felel meg neki.

De az az eljárás, hogy az időt magát *nem*, a differenciálját

* Sitz. Ber. d. Ak. zu Berlin 1887, pag. 232, 234.

pedig *igenis* variálja, az actió elvének HELMHOLTZ szerint való fogalmazásánál szükséges, elannyira, hogy nélküle nem is jutunk az elv általánosításához. HELMHOLTZ ugyanis a 231. lapon így szól:

«. . . In allen Fällen verlangt man, dass der Gesammtbetrag der Action ein Grenzwerth sei für den Uebergang aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage. Die Variation wird bewirkt dadurch, dass man die Coordinaten p_a* der einzelnen während des Uebergangs eintretenden Lagen des Körpersystems variirt, gleichzeitig aber auch die Zeit, und zwar letztere so, dass der vorhandene Betrag der Energie nicht geändert wird. Da nämlich die Energie ausser der potentiellen Energie F*, welche nur von der Lage abhängig ist, auch noch die lebendige Kraft enthält, die von den Geschwindigkeiten abhängig ist, und die letzteren, durch Variirung der Wegstrecken, die im Zeitelement dt zurückgelegt werden, variirt werden, so kann man sämmtliche Geschwindigkeiten durch Variation des Werthes von dt, der zur betrachteten Wegstrecke gehört verändern, und dabei die Aenderung von dt so einrichten, dass der Betrag der Energie bei der Variation nicht geändert wird.»

Ha a legkisebb actió elvét LAGRANGE szerint szélsőérték probléma gyanánt fogjuk fel *fix* mellékföltétellel, akkor az első két mondat azt követeli, hogy a

$$\delta \int_0^{t_1} 2T dt = 0,$$

legyen és hogy a variáczió mellékfeltételét a

$$T - U = F$$

egyenlet szabja meg, hol az F energiának ugyanazon az értéksoron kell végigmenni a variált mozgásban, mint a variálatlanban, és hol az U potenczial az időtől explicite is függ. De ez a probléma, ha az U-ban explicite meglévő idő is variáltatik, csakis úgy nem tartalmaz belső ellentmondást, ha a $\frac{\partial U}{\partial t}$ eleve $=0$, azaz ha a rendszerre nézve az eleven erő elve fönnáll.

* A mi HELMHOLTZ-nál p_a-val, itt q_i-vel, és a mi ott $-F$-fel, itt U-val van jelölve.

Ha tehát az elvet általánosítani akarjuk és a mellett ragaszkodunk LAGRANGE felfogásához, mely szerint ez elv szélsőérték probléma fix mellékföltétellel, akkor csak két útunk lehet: vagy elvetjük azt a követelést, hogy az energia variálatlanul maradjon, vagy pedig fentartjuk ugyan ezt a követelést, de a mellékföltételt oly módon alakítjuk át, hogy belőle az idő kiessék.

XVIII. Az első útat e munka 4. §. VIII—XIII. czikkeiben a T és U-ra vonatkozó általánosabb föltevések mellett részletezve, ezen az úton az actió elvének négyféle fogalmazásához jutottam. E fogalmazások közül a C-vel jelölt igen közel áll a HELMHOLTZ-éhoz. Miután ugyanis HELMHOLTZ speciális esetében

$$\partial F = \partial T - \partial U$$

azaz

$$E'(t)\,\partial t = \partial T - \sum_1^n{}^i \frac{\partial U}{\partial q_i}\partial q_i - \frac{\partial U}{\partial t}\partial t$$

a megtartandó mellékföltétel; miután továbbá a C) követelés ebben a speciális esetben a

$$\frac{dF}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

azaz

$$E'(t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

egyenletben nyeri kifejezését, tehát a variáczió mellékföltétele egyszerűen:

$$0 = \partial T - \sum_1^n{}^i \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i .$$

Ámde ugyanehhez az egyenlethez jutunk, ha HELMHOLTZ szerint az energiát és az időt — a mennyiben ez utóbbi az U-ban előfordul — variálatlanul hagyjuk. És ha ezt a mellékföltételt alkalmazzuk a variáczió-problémában, a HELMHOLTZ számításaival tényleg LAGRANGE mozgási egyenleteihez jutunk. De nem valószínű, hogy HELMHOLTZ szeme előtt az itt felhozott indokolás lebegett volna. Mert többször hangsúlyozza, hogy az energia tényleg nem variálandó, és *sehol sem szól arról, hogy a* (*) *alatti egyenlet is alapföltevés volna.*

XIX. A második úton az 5. §-ban haladva a XV. czikkben megmutattam, hogy e fölfogással *directe* olyan mozgási egyenletekhez jutunk, a melyek a LAGRANGE-félékkel *csak külső alakjukra nézve* egyeznek meg; a következő czikkekben pedig bebizonyítottam, hogy azok a *partikuláris* megoldásaik, a melyek a megadott kezdő értékrendszerből indulnak ki, általánosan szólva *egyértékűleg* meghatározottak és közösek. Elannyira, hogy ha a kezdő értékrendszerek összességét tartjuk szem előtt, akkor az e §-ban fölállított, *E)*-vel jelölt, variáczióelv *indirecte* mégis csak szükségképen a LAGRANGE-féle mozgási egyenletekre vezet.

Az actió-elvnek ennél az *E)*-vel jelölt formulázásánál az energia, épúgy mint a HELMHOLTZénál, variálatlan; az az eljárása, hogy a dt-t variálja, magát a t-t pedig nem, így teljesen érthetővé válik: és a variáczió-probléma nyujtotta differenczialegyenletek tartalmazzák a nem variálandó változót, a mit pag. 233 utolsó kikezdésében HELMHOLTZ is kiemel. Ez a formulázás abban is megegyezik a HELMHOLTZéval, hogy az eleven erő tételét nem teszi föl *eleve;* míg az első úton nyert *C)* fogalmazásnál ezt *eleve* kell föltenni.

Csakhogy HELMHOLTZ bizonyítása a formulázásnak ezen értelmezése mellett, végső következtetéseiben, úgy látom, épen nem meggyőző. Mert a nagy szerző nem veszi észre, hogy az ő $1g$ (illetőleg $2g$)-vel jelölt egyenletein kívül még a variáczió-probléma föltételi egyenlete is teljesítendő, és hogy ennélfogva — az energiát választva épen a variálás független változójául — épen annyi egyenlet teljesítendő, a mennyi az ismeretlenek száma; és azt se veszi észre, hogy egyenleteinek a LAGRANGE-félékkel csak bizonyos partikuláris megoldás rendszere lehet közös.

XX. Vizsgálataim legfőbb eredményeit a következő mondatokban foglalom össze:

1. Általánosítom a LAGRANGE-féle mozgási egyenleteket, és több variáczió-elvet formulázok, a melyek mindnyájan ezekre a mozgási egyenletekre vezetnek.

2. A legkisebb actió elve az *A), B), C), D), E)* alakok mindegyikében megegyező a HAMILTON-féle elvvel úgy az összeköttetésekre, mint az erőkre vonatkozó föltevésekre nézve.

3. Az *A)* és az *E)* alakok megegyeznek a HAMILTON-féle elvvel abban is, hogy az eleven erő tételét (vagy helyette a pag. 279. *D)* tételt) nem teszik föl eleve, hanem igenis mint következményt maguk után vonják.

4. A LAGRANGE-féle egyenletek szóban levő általánosítása esetén, a midőn a potenciál az energiától is függ adott módon, nemcsak a legkisebb actió elve, hanem a HAMILTON-féle elv általánosítása is eleve megköveteli, hogy a mozgásra nézve a $G=0$ egyenlet (pag. 8) fönnálljon.

5. De a közönséges LAGRANGE-féle mozgási egyenletek esetén, a midőn a potenciál csak a koordinátáktól, a sebességektől és az időtől függ, csak a legkisebb actió elve követeli meg *eleve* a $G=0$ egyenlet fönnállását; míg ez esetben a HAMILTON-féle elv ezt az egyenletet mint következményét vonja maga után.

6. A VI. czikkben kimondott variáczióelv pedig a legáltalánosabb esetben se követeli meg a $G=0$ egyenletet eleve; hanem ez az egyenlet épúgy folyománya, mint a többi általánosított LAGRANGE-féle egyenletek.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. április 20.-án tartott üléséből.)

A SIMA IZOMSEJTEK IDEGVÉGZŐDÉSE.

CSIKY JÁNOS-tól.

I. Bevezetés és irodalom.

A sima izomsejtek idegvégződése a sokféle vizsgálat daczára, a histologiának még mindig nyilt kérdése. Egyike a búvároknak, mint lentebb látni fogjuk, a sejtek között, másika a sejtekben hiszi az ideg végződését elterülni, egynémelyike pedig a sejtmaggal hozza azt összeköttetésbe.

Mintegy három éve foglalkozom THANHOFFER egyetemi tanár úr ösztönzésére intézetében e kérdés tisztázásával s az alábbiakban lesz szerencsém vizsgálati eredményeimet közölni, a melyek azt hiszem, a kérdés végleges tisztázására hozzájárulhatnak.

Ujabb és ujabb szövettani módszereket próbáltam ki e czélra, de azokat is kipróbáltam, a melyeket a szerzők annak előtte is dicsérve ajánlgattak. A legjobb eredményt mégis az a módszer nyujtotta, melylyel már először is a legszebb képeket kaptuk: *az aranyozás*, az aranyreactióra nyert készítményekkel. A szerzők egyhangu elismerése mellett van elég hang, mely oda figyelmeztet, hogy e módszer csal, hogy nem tökéletes, nehézkes; az én kisérleteim az aranyozó methodusokat, s különösen ezek egyikét, valamennyi módszernél jobbaknak mutatták s azokkal is tettem legszivesebben kisérleteimet. Az aranyozás nem szeszélyes, mindig egyforma szép képeket nyujt, csak kezeléséhez kell érteni. A RANVIER, de még jobban a THANHOFFER-LŐWIT-féle aranyozó módszerrel értem el a legszebb eredményeket.

Még egy-két szót a mellékelt rajzokról. Megtekintve igénytelenek; nem is művészi számba akarom vétetni őket. De azt

állíthatom, hogy híven mutatják meg, hogy mit láthatunk készített præparatumaimon.

Ott, a hol nem voltam bizonyos, inkább kevesebbet rajzoltam, mint többet. Az a czélom velük, hogy bárkinek rögtön bemutathassam a képet s ha mégis kétely támadna, felkereshető a készítmény illető helye.

Mindezek után legyen szabad beszámolnom a szerzők véleményéről.

A piócza az az állat, mely körkörös, síma izomelemekből áll, másrészről igen nagy sejtjei vannak s azért többen ezen végezték vizsgálataikat. Ez állatokon kétféle izmot lehet megkülönböztetni: a tulajdonképeni külső körkörös testizmokat és a gyomorzacskó izmait. Az előbbit erős bőrtakaró fedi, dús kötőszövetben van elhelyezve s igen sűrű pigment takarja. Bajos azért őket elkülöníteni egymástól s minden pigmenttől megszabadítva a kisérleteknek alávetni. RANVIER[1] szerint * ezekben az izmokban az idegek ismételten osztódnak, anastomosisokat nem képeznek és bunkósan végződnek az izomsejt felületén. Ugyanilyenek a viszonyok ugyancsak RANVIER szerint a kerti csigában *(helix pomatia)* is.

Sokkal kényelmesebb a vizsgálatra és más képeket mutat a gyomorzacskó. Az izmok nagyobbak és szélesek. Tisztán látszik plasma tartalmuk és sűrűn szemcsézett voltuk. Egymással közlekedve nagy hálókat képeznek; az idegtörzsek keresztben haladnak rajtuk. Ez idegtörzsekből vékonyabb, fonalszerű idegszálak futnak az izmokhoz, hogy ott — RANVIER szerint — egy kis motorius foltban (motorische Platte) végződjenek.

GSCHEIDLEN[2] a piócza gyomorzacskóján azt találta, hogy minden síma izomsejt kap egy vékony fonalat, ezeket LÖWIT végszálacskáknak (Endfibrille) nevezte el.

KLEBS[3] a béka hólyagján tett vizsgálatokat s itt megkülönböztetett egy alapfonatot (Grundplexus), mely a hólyag alapján foglal helyet. Az alapplexusból indulnak ki az intermediär fonat részei, melyek az egész hólyagot borítják s csak ezekből ágaznak el szerinte az izomközötti fonatok (Intermusculär-plexus); ezek

* Irodalmat l. a végén.

már az izomsejtek között foglalnak helyet. Ugyanilyenek a viszonyok a tengeri nyul, béka, valamint a gerinczesek bélfalának sima izomelemeinél is, úgyszintén általában az artériák, vénák falazatában is e háromféle plexust lehet megkülönböztetni.

Természetes, hogy a vizsgálók egy része (KLEBS,[3] ARNOLD,[6] LÖWIT,[4] GSCHEIDLEN[2]) kivált az intermusculáris fonatra fektették a fősulyt s azt figyelték meg behatóan. A végződésről azt vélik, hogy a velőhüvely nélküli idegek rajta feküsznek az izmokon s így az impulzust *contactus* útján közvetitik. Ugyancsak KLEBS állítja azt is, hogy az idegfonál helyenkint az izomsejteken függ s ilyen képeket magam is láttam. LÖWIT meg GSCHEIDLEN arról is megemlékeznek, hogy helyenkint az intermusculáris fonat törzse benső összeköttetésben van az izomsejttel.

ARNOLD[6] megy a legmesszebbre s valóban merészen azt állítja, hogy az intermusculáris fonat szálai az izomsejtet és magját is átjárják, de itt sem végződnek, hanem átmenve elhagyják a sejtet s egyesülésbe lépnek a sejtközi ideghálózattal.

Egy másik része a vizsgálóknak (TRINCHESE,[11] FRANKENHÄUSER,[8] HÉNOCQUE,[9] ELISCHER[10]) úgy irja le az idegvégződést, mintha az a sima izomsejtben *szabadon* terülne el.

Részletezve: TRINCHESE a gastropodák izomsejtjeiben a következő viszonyokat irja le. Az idegfonalak az izomsejtek közelében odaszegeződnek, majd a sejttestbe hatolnak be, ott villalakúlag elágazódnak s közel a sejt csúcsához szabadon végződnek. RANVIER vele szemben azt állítja, hogy TRINCHESE a sima izomsejt protoplasma kötegét tartotta idegvégződésnek.

FRANKENHÄUSER úgy találta, hogy az idegfonal az izomsejt magvában kis duzzanatban (Kernkörperchen; magvacska) végződik.

ELISCHER a végződést a magban lelte fel, illetve ennek közvetlen közelében. E véleményre alábban még bővebben kell figyelmet fordítanom.

LUSTIG A.[17] újra csak a mag felé irányítja a figyelmet. Ő a Mytilus edulis záróizmán, anadontán, disznóhólyagon, ló- és tengeri malacz hólyagon vizsgált egy régebbi aranyozó methodus szerint. Azt állítja, hogy az ideg párhuzamosan fut az izommal, a mag táján érintkezésbe lép az izomsejttel s ugyancsak párhuza-

mosan odább fut; máskor meg két divergáló ideg fut párhuzamosan az izommal. Végre a végződés akkép történik, hogy az ideg vagy a protoplasma nyujtványnyal, vagy az izommag «*contourjával*» egybeolvad.

Kölliker[17] finom szálakba látta oszlani az ideget, melyek aztán szabadon végződnének. De nem képzeli, hogy minden síma izomsejt kaphatna külön ideget.

Ranvier véleménye a gerinczesek síma izomelemeiben található idegvégekre vonatkozólag az, hogy e végkészülékek azonosak a piócza gyomorzacskójában találtakéval. Mégis ezek az idegszálak a végződés helyétől ellenkező irányban anastomisálnak s számos fonatot képeznek.

Löwit a béka hólyagját vizsgálta s a végződéseket illetőleg azt találta, hogy a fentebb már részletezett intermuscularis fonat idegtörzsei azon a helyen, a hol az izomsejt magva van, kevéssé megvastagszanak s odatapadnak. Ranvier erre azt mondja, hogy ezek nem egyebek, mint motorikus foltok, csakhogy igen rövid nyéllel.

Tolotschinoff,[7] ki a fiatal rana esculantának hólyagján tette ide vonatkozó vizsgálatait, azt találta, hogy az idegek két ellentétes oldalról térnek az izomkötegekhez, de onnan el is távoznak, a nélkül, hogy velük közelebbi érintkezésbe jönnének. Ujra más idegek az izomköteggel haladnak, dichotomikusan elágaznak s szorosan a maghoz szorulnak. Szóval az idegfibrilla a mag oldalán végződik, de máskor tovább fut s eltünik az izomkötegek között.

Krause V. szerint síma izomsejtekben is vannak idegvéglemezkék, csakhogy igen aprók s nincs magjuk.

Tholdt szerint az intermuscularis kötegből jövő s így már valamennyi között legfinomabb idegszálak odafekszenek az izomrosthoz.

Smirnov,[13] kasani búvár, vizsgálatai a lumbricusra vonatkoznak. Vizsgált methylenkékkel s különösen Golgi-nak egy általa módosított eljárásával. Szerinte a methodusával előállított készítmények meglepő világosan mutatják az igen finom varicosus idegfonalakat, melyek szabadon végződnek. Élesség tekintetében a képek semmivel sem maradnak el a methylenkékkel festettek mö-

gött, de nem is igen sikerült neki e módszer, mint maga említi. Csinos képekkel is illusztrálja leleteit. Némely intraepitheliál idegszál majdnem elér az epithel felületére, de mégis a cuticula alatt ívszerüen meghajlik, egy darabon lefelé fut, hogy aztán különböző magasságban szabadon végződjék. Szóval minden idegszál, mely betér az epitheliumba, successive annyi igen finom terminalis ágacskát ad, hogy végre ez egy kis *végfácskát* (Endbäumchen) képez. Ennek szabad idegvégei az epithelsejtek között fekszenek. Véleménye, hogy vannak LENHOSSÉK M.-féle sensibilis, terminalis idegsejtek, vannak bokrocskaszerü szabad idegvégződések, hasonlóan a központi idegrendszer végfácskáihoz. S még hosszasabban foglalkozik a subepitheliál plexus képzésére concurráló idegekkel s idegsejtekkel.

Nyomósan kell még megemlékeznem egy hazai tudós szerzőről, APÁTHY[12]-ról, ki valamennyi között legtöbbet foglalkozott olynemű kisérletekkel, melyek világot vetnek különösen a piócza, általán a najadeák szövettanára s speciálisan idegeikre és idegvégeikre is.

Sokféle módszerrel dolgozott: MÜLLER-féle folyadékkal és hæmatoxylinnal, chlórarany-, hangyasav-glycerinnel, MÜLLER-féle folyadék- és chlóraranynyal s végre is e módszerek után legjobbnak tartja az ő sublimát-alkohol módszerét. Mindezeket a primitiv fibrillák előállítására, kimutatására használja.

Az idegek végső elágazódását illetőleg kijelenti, hogy ezek kimutatása és vizsgálata a szövettan legkényesebb feladatai közé tartozik. FLEMMING az ideg végső rostjait lefutásukban mereveknek, szögletben megtörteknek látta. APÁTHY szerint az idegek s végrostocskák lefutása bizonyos sajátságos hullámzatosság s szelid görbék által jellemeztetik, mint a hogy ez tényleg így is van; e hullámzatosság a végső ágakban éri el tetőpontját. A végső ágakat sikerült neki már hæmatoxylinnal is előállítani, máskor meg savfuchsinnal; legtöbb eredményt mégis az aranyozó methodusoktól nyert, bár ez szerinte néha a kétségbeesésig szeszélyes eljárás. Megkisérlette a GERLACH, COHNHEIM, KLEIN, HOYER, RANVIER aranyozó módszereit. Különösen a RANVIER módszerével nyerte legszebb eredményeit, ezt azonban lényegesen mégis oda módosította, hogy az alább még bővebben méltatandó módszert a hyper-

osmiumsav hatásával kötötte össze. APÁTHY direkt 1½ százalékos hyperosmiumsavba dobta a készítményt 1—3 perczre; a továbbiakban megtartotta RANVIER ajánlatát. Mikor a készítmények már végig mentek minden phásisán a methodusnak, napfénynek tette ki azokat és két—három hét után látta a legszebb eredményt, azután sötét helyen tartotta ujból azokat, mert különben elsötétedtek, sőt ezt az elsötétedést a leggondosabb eljárással sem lehet feltartóztatni. Ezt én a magam használta aranyozó módszernél, a THANHOFFER-LÖWIT-félénél, sohasem tapasztaltam. Mégis, a mig használhatók a készítmények, a következő képet mutatják. Az idegrostok szerinte sötét-ibolyaszínüek, a dúczsejtek valamivel halványabbak, magjuk hólyagosan válik ki s csaknem színtelen. Az izomrostok világos rózsaszínüek, halvány maggal, a kötőszöveti rostok színtelenek, a kötőszöveti sejtek feketék, rajtuk magot megkülönböztetni nem lehet. Az idegvégekre vonatkozólag ezek minden egyes szervben és képződményben csakis sejtes elemekkel jönnek összeköttetésbe. Vagy finom fonál alakjában hatnak be a sejtbe, vagy pedig a protoplasma felületén, nem pediglen belsejében, véglapocskává vagy gömböcskévé szélesednek. Mennyiben függ össze, vagy összefügg-e egyáltalán a maggal az ideg, nem sikerült eldöntenie. Az idegek az izomkötegekben a mag táján közelítik meg az izomrostokat, keresztül hatolnak az összehúzékony állományon s a maggal akár egyik végén, akár közepén összefüggésbe lépnek. Ha egy ilyen idegágacskát jól megfigyelünk, észreveszszük, hogy az nem egészen egynemű, mert benne mintegy tengelyképen egy igen éles, sötétebben színeződő rostocska van, melyet burkol a fonál egyéb, világosabb állománya. Ez a rostocska a fonál egy-egy elemi rostocskájának felelne meg. Ez az utóbbi a magbalépéskor nem is furja keresztül a mag burkát, hanem rásimul, míg a tengelyrostocska határozottan benyomul a mag belsejébe s ott a maghálózat közt eltünik. Ez APÁTHY véleménye az aranyozó methodus alapján.

Nevezetesek APÁTHYnak a methylen-kékkel tett vizsgálatai. Röviden be kell számolnom ezekről, annál is inkább, mert ép az ő methodusával hosszasan kisérleteztem, igaz, hogy nem a kivánatos eredménynyel.

A methylen-kéket kitűnő festőszernek tartja, mely kétféleképp

reagál, másképen a ganglion, máskép az idegszövetre. A primitiv fibrillákat aczél-ibolyakékre festi, a protoplasmatikus részét az idegeknek, meg a ganglionokat jóval világosabban hagyja. Az inter- és perifibrilláris anyag vagy egészen színtelen, vagy kékes-viola színt kap. Tehát minden feltétele meg van ahhoz, hogy tökéletes idegfestő anyag számba menjen. Kétféle differentiálódást is talál a methylen-kék festésnél: primärt, meg secundärt. A primär abban áll,hogy a tinctió az ideg különféle alkotó részeiben különféle gyorsan halad előre, a secundär az által tételeztetik fel, hogy a tingált idegalkotórészek a festéket különböző gyorsan adják le. Tény, hogy e szer gyönyörüen fest. A legszebb kék színeket adja a szövetnek az égszínkéktől egészen a sötét aczélkékig a tinctió különböző foka és a szövet milyensége szerint. De a legszebb tinctió is 1—2 óra alatt tönkre megy, a szövet elhalványodik, a festék gyönyörű jegeczekben kicsapódik. Természetes hát, hogy fixálásról kellene gondoskodni. Rég elfogadott fixáló a jód, meg az ammonium pikrát. Ez utóbbit használja és ajánlja Apáthy bizonyos utasítás szerint. Sikerült is neki képeket előállítania, melyek még hónapok mulva is megtartják jellegüket, bár a szép kék szín helyet ad bizonyos barnás-vörös színnek. A magam kisérleteinek eredményéről e festőanyaggal majd alább leszek bátor szólani.

Evvel kapcsolatosan szükséges mégis a methylen-kék módszerek első művelőiről szólanom.

Ehrlich,[14] a módszer nagymestere ajánlotta először ezelőtt mintegy tiz évvel. Utána Arenstein[15] nevezi e módszert az ujabbak közül a legelegánsabbnak s specifikus, kitünő idegfestőnek tartja, melylyel a tengelyfonalakat messze követhetni s több Ranvier féle gyűrűt lehet áthidalni. Főelőnye pedig az, hogy az összes fonalas állományú szövetek között egyedül az idegeket festi, minden egyéb festetlenül marad; hátránya, hogy az idegvégek festődése gyakran tökéletlen. Ez volna pedig reám nézve a legfontosabb.

Sokáig beszél még hátrányairól, de ez nem vág szerény munkálatom szoros keretébe. Smirnovnak[13] sikerült pár hétre jóddal állandósítani a reactiót azzal, hogy barnás-kékké tette a tinctiót. Majd pikrokarminnal sikerült az állandósítás, végre

megmaradnak a pikrinsavas ammoniáknál, melyre nézve DOGIEL mutatta ki, hogy a pikrokarminban is csak ez fixál.

A DOGIEL-féle 4%-os methylen-kéket a magam czéljaira egyáltalán nem használhattam, hisz még az 1:100, 1:1000, sőt 1:10000 oldatok is intensive festenek s maga az oldat is intensive kék. APÁTHY maga is minél hígabb oldatokat ajánl.

II. Saját vizsgálataim.

Vizsgálataimhoz a pióczát használtam. Már fennebb megokoltam, hogy miért; külső, erős izomgyűrű rendszere ép úgy kitűnően megfelelt czéljaimnak, mint belső lágy, könnyen festődő, tingálódó étcsöve.

A vizsgáló módszerek közül beváltak a LÖWIT-THANHOFFER[16] eljárása, RANVIER methodusa s némileg a methylen-kék APÁTHY tanár értelmében, bár ez utóbbi nem oly mértékben, mint kívánatos lett volna.

Egyenkint leirva s méltatva ezeket, szóljunk legelébb is a RANVIER methodusáról, olyanképen irva le, a mint azt én használtam. A chloroformmal elkábított állatot parafára hosszan kifeszítjük s szájnyílásán át PRAVAZ-fecskendővel czitromsavat fecskendünk be — természetes, hogy két végén alkalmasan le kell kötni a pióczát, hogy a sav ki ne szivároghasson — mindaddig, míg az állat fel nem duzzad keményre. Öt percz mulva az állatot felmetszszük, gyomorzacskóját kikészítjük s destillált vízben mosva, az epithelt róla lehetőleg leecseteljük. Azután a darabkákat 1%-os chlóraranyoldatban tartjuk körülbelül 20 perczig, majd destillált vízzel készült 25%-os hangyasav oldatba (acid. formicar.) téve, 24 óráig sötét helyen marad; azután glycerinbe jő a készítmény. Innen kisebb darabkák vizsgálhatók újra csak glycerinben s lakkal elzárva állandósíthatók. A methodussal az idegek, izmok szép sötét ibolyára festődnek, egyedül azzal a különbséggel, hogy az idegek jobban felveszik a tinctiót.

A LÖWIT-THANHOFFER eljárása, melylyel összes eredményeinket elértük, a következő:

A pióczát chloroformmal elkábítván, darabkákra vágjuk szét, e darabkákat parafalemezekre kifeszítjük s kissé behasogatjuk,

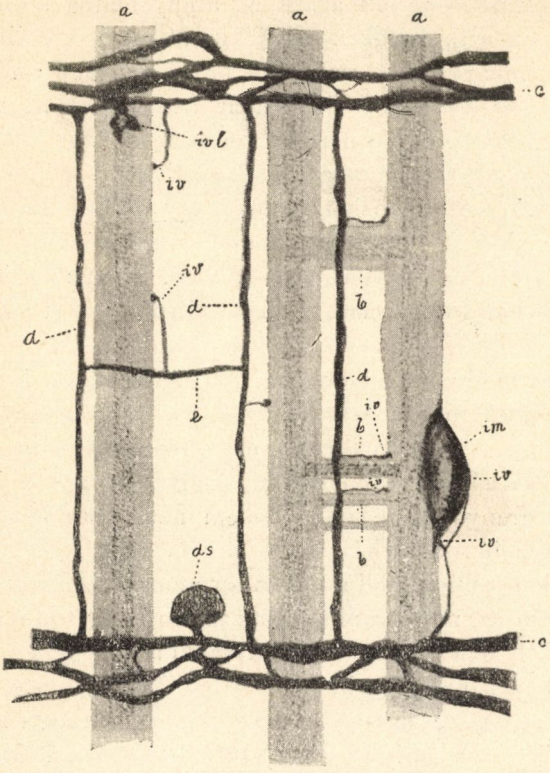
erre tiszta hangyasavba teszszük, hogy ez 7—8 percz mulva felvilágosítsa a készítményt. Azután 0·5%-os chlórarany oldatban körülbelül egy óráig (néha 1/4, 1/2, 3/4 óráig) hagyjuk sötét helyen állani a készítményeket; mellé teszünk egy másik edényben egy csepp 1%-os hyperosmiumsavat, hogy gőze külön hasson be az izomdarabkákra. Nem jó magába az aranyoldatba tenni a savat, mert összezsugorítja, megkeményíti, úgyszólván használhatatlanná teszi a készítményeket. A szükséges idő leteltével destillált víz és hangyasav (āā) keverékébe jönnek az izmok s benne maradnak sötét helyen 24 óráig. Innen 48 órára ugyancsak sötét helyen tiszta, conc. hangyasavba teszszük őket. Erre glycerinben tartjuk, melyből heteken át dolgozhatjuk fel az így kezelt készítményeket. Ha egyszer lakkal körülkerített, állandó készítményünk van, tarthatjuk egyaránt napfényen vagy sötétben. Ezzel az eljárással az izomkötegek halvány vörösre, az idegek ellenben sötét biborpirosra festődnek.

Apáthy methylen-kékjével 1 : 1000 higítással kb. 1—2—3 óra mulva festődnek meg a készítmények, frissen gyönyörű égszíntől aczélkékig menő színben festődnek s megerősítik az aranyozó methodusokkal elért eredményeket; fixálva olyanok, mint a nem jól sikerült aranyozás, legalább nekem nem sikerült szép fixált képeket nyernem.

Röviden szólnom kell a piócza gyomorzacskójának szerkezetéről. Egy cső az, mely az állat egész testén végig vonul, kitüremkedik, öblöket képez. Fala erős hártyából áll, melyben izoláltan lelhetők fel az izomsejtek hosszú csövei. Mikroskopice párhuzamosan futnak, de az úgynevezett *izomhidak* gyakorta kötik őket össze s ilyen sok látható præparatumainkon. E hidak ugyanolyan szerkezetet mutatnak, mint az izomcsövek; gyakran mégis hiányzik belőlük a velőállomány és igen finomak, halványak. Sokszor két egymáshoz közel futó izom között roppant sok ily hidacska mutatkozik, rendkívül finom szerkezettel s majdnem valamennyit ideg kiséri.

Magukat az izomsejteket gyengéd s itt-ott csomós megvastagodást — varicositást — mutató szerkezet nélküli hártya vonja be, a *kéregállomány* (Rindensubstanz); ezen belül a szemcsézett *velőállomány* foglal helyet (Marksubstanz, Axentheil; Ranvier).

A velőállományban megkülönböztethetni a középső, sűrűn szemcsézett, kisebb-nagyobb rögöcskékben bővelkedő középső részt, melyet két oldalról a kéregig világosabb rész övez, mely szintén rendkívül finoman vonalozott, szemcsézett, de sokkalta világosabb

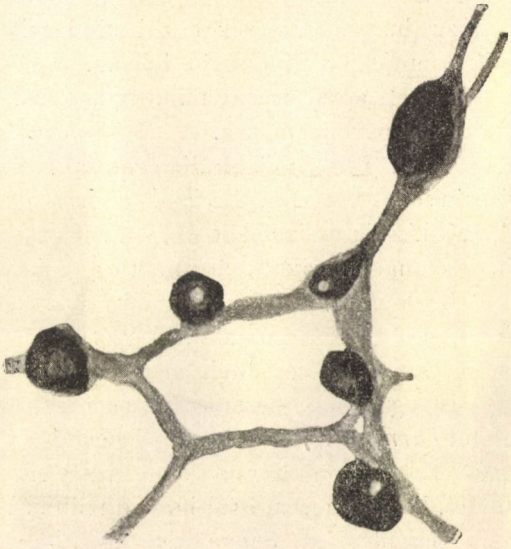


1. ábra. Schematikus feltüntetése a sima izomsejtek és idegeik viszonyának. *a* izomsejt. *b* izomhid. *im* izomsejtmag. *c* az idegek alaphálózata. *d* I. rendű idegszál. *e* II. rendű idegszál. *ds* dúczsejt. *ivl* idegvéglemezecske. *iv* idegvégződések foltocskák alakjában.

a középső résznél. Magot nem minden sejtben találhatni; a hol van — és pedig gyakorta van —, ott vagy az izomrost közepén foglal helyet, vagy annak oldalához símul s bizonyos rétegezettséget, szemcsézettséget mutat. Néha meg úgy tünik fel, mintha ez a mag kiszorult volna a plasma állományból s a sejthártyán kívül

foglalna helyet. Mégis természetesen belül van a sejthártyán, mely a magvat finom réteggel öleli körül egyik oldalán. Közepén mindig világosabb, hólyagszerű rész foglal helyet. Az izomsejtek maguk is adnak anastomosisokat. És pedig olyanformán, hogy két sejt hegyesszögben találkozik, sejthártyájuk egy darabig összetapad, majd elvész s a velőállomány összefolyik, a két sejt ekkép egyesül.

Az izomsejteken keresztben futnak át az idegek, melyek vagy



2. ábra. Különböző nagyságú és alakú dúczsejtek.

többszörösen összefonódottak, sűrűn egymás mellett futnak, közben közlekedő ágakat bocsátanak egymáshoz, varicosusosak, szeliden hullámzatos, máskor meg erősen kanyarulatos, merész lefutást mutatnak, vagy pedig egyesek vastagok, melyekből vékonyabb szálak, ezekből meg még vékonyabbak futnak ki. *Dúczsejtekkel* (l. a 2. ábrát) nagy számban függnek össze. Ez utóbbiak nagyon változatosak, kisebb-nagyobb, vékonyabb-vastagabb idegekkel vannak egybekötve. Lehetnek uni-, bi-, multipolárok. Alakjuk kerek, máskor elliptikus, néha szabálytalan, még körtealakúak is lehet-

nek. HERMANN gyakrabban látott kerek, meg ovális, mint körtealakú dúczsejteket. GSCHEIDLEN azt tartja, hogy mind gömbölyüek s csakis a præparálás alatt lesznek más alakúakká. Vékonyabb-vastagabb idegfonallal függnek össze a főidegtörzszsel s gyakran igen érdekes elrendeződést mutatnak. Néha meg rajta is fekszenek az idegtörzsön. Számuk helyenkint nagy, máskor csak egy, vagy egy—három változatos alakú dúczsejt fordul elő egy helyen. Szemcsézettek, rétegzettek, sötétebb magrészszel; olykor belsejükben világosabb hézag mutatkozik. Néha oly rajzot mutatnak, mintha egy hártyán belül több ikerdúczsejt foglalna helyet; 2—3 van egy közös burokban s ezek közül mindegyiknek a közepén mutatkozik a fentjelzett világosabb hólyag.

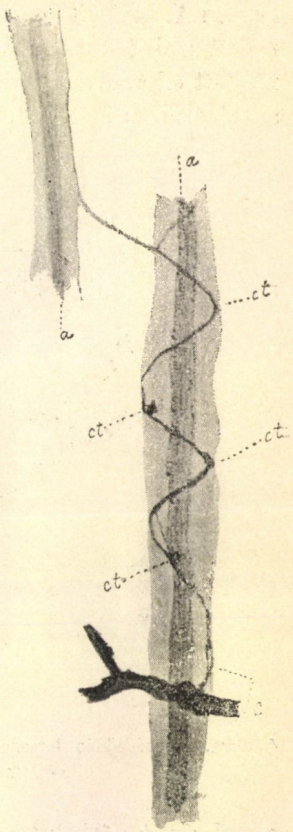
Maguk az idegek sűrű, vastag fonattal keresztezik az izmokat (l. az 1. ábrát); párhuzamosak. E sűrű *alapfonattól* egyes vékonyabb idegszálak futnak el, hullámzatosan, szép görbéket képezve, varicositásokat mutatva. Ezek az *elsőrendű elágazódások*, a melyek már kisérik az izmokat, vagy a kéregrészen, sokszor meg az izmon haladnak. Gyakran átfutnak egy másik keresztben futó vastag, sűrű alapfonathoz s egyesülnek vele. Dúczsejtekkel úgy ezek, mint az elsőrendű idegszálak is összefüggnek. Ezekből az elsőrendű idegszálakból erednek a másodrendűek, melyek gyakorta maguk is végződnek, máskor csak a contactust közvetítik. Vannak ezenfelül *harmad-*, *negyedrangú* idegek is. Az ezek után következő *végső hálózat* finom reczét képez, mely egészen bejárja az izmok felületét, hogy impulzusával hasson reájuk. Ez a hálózat adja a legszebb végződéseket. Schematice így a legczélszerübb a síma izomsejtek idegeit osztályozni. Mert a régi elnevezés a végződések különféleségét tételezi fel, erre pedig jogunk nincs, mert a végződés mindig egynemű és egyenrangú. De maguk az idegek nem vehetők ilyen tekintetek alá, mert tényleg különböznek méreteikkel, lefutásukkal. Belőlük indulnak ki azután az egynemű végződések.

Egyéb érdekes, de még magukat a végződéseket nem érintő viszonyokat az alábbiakban foglalom össze. Gyakran láthatni oly képet, hol az izmokat az idegek oly sűrű hálózattal és fonatokkal járják be, mely alig rajzolható. Majd sűrűn váltakoznak erősebb, vékonyabb idegek, dúczsejtekkel összeköttetésben, az izmok körül

a legváltozatosabb, legmeglepőbb formákban, sok idegvégződéssel. Máskor meg találunk egy izomsejtet, melyen kacskaringósan, szinte szeszélyesen fut egy hullámos ideg, itt-ott contactust ad, majd más izomsejtre fut át s vagy elvész, vagy folytatja szeszélyes lefutását (l. a 3. ábrát).

A végződésekről való véleményemet legyen szabad a következőkben összefoglalnom.

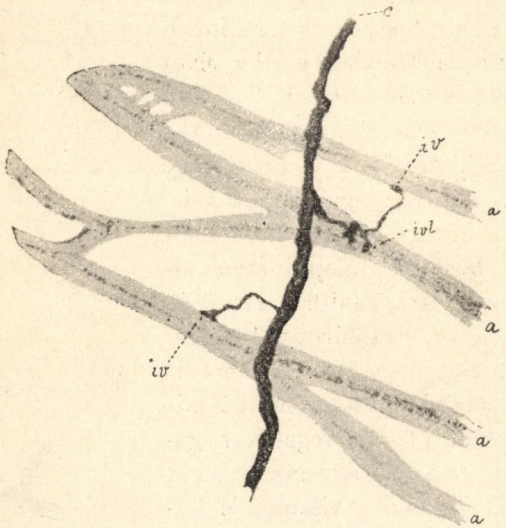
Az alapfonatból is indul ki végződés, olyanformán, hogy egy kis, rövidebb nyélen ülő megvastagodás, esetleg elvékonyodás adja a végződést. Ezt tartjuk a *Ranvier-féle motoriuus foltnak.* Az ideg eljut a sejthártyához s ehhez vagy hozzátapad, mintegy egybeolvad vele, vagy betér a kéreg-, esetleg a velőállományba is. Máskor az alapfonatból kiindulólag nem egyszerű foltban végződik az ideg, de bogyós, szőlőfürtszerű végkészüléket ad. Sőt még ennél többet is állíthatni. A sűrű hálós alapfonatból kiinduló elsőrendű ideg ad végződést egy-két foltban, gyakran egymás mellett kettőt-hármat is. Az a viszony is látható, hogy egyrészt direkt az alapfonatból, másrészt az elsőrendű szálból indul ki olyan végződés, mely hasonló a harántcsíkos izmok véglemezkéihez és varicosus, többszörös ágú véget mutat. E helyen megjegyezhetem azt, hogy véleményem szerint nem tételezhető fel oly nagy különbség harántcsíkos és síma izomsejtben való végződés közt, mint a hogy ezt eddig hitték. Mindenesetre finomabbak a síma izomsejtekben a viszonyok, hiszen finomabb az izom is, a mint ezt a præparatumok bizonyítják.



3. ábra. Kacskaringós lefutású ideg contactussal. *a* izomsejt. *c* idegek. *ct* contactusok.

Előfordul az is, hogy az ideg végződése előtt előbb con-

tactust ad, ezután folytatódik s végződik az izomsejt kérgén. Gyakori a contactus az izomhidak mentén, hol rendesen ideg is halad, mely helyenkint megvastagodik s ép ez a contactus. Azt hiszem, hogy ezeket a contactust adó megvastagodásokat tartja LUSTIG A. közbeiktatott idegsejteknek. Máskor az ideg egy másodrendű szálból foltban végződik, tovább fut, eljut egy izomhídig, e mellett elhalad s egy másik izmon végződik. Majd végződést ad az elsőrangu ideg is, összeköttetésbe lép egy másik ideggel; egy

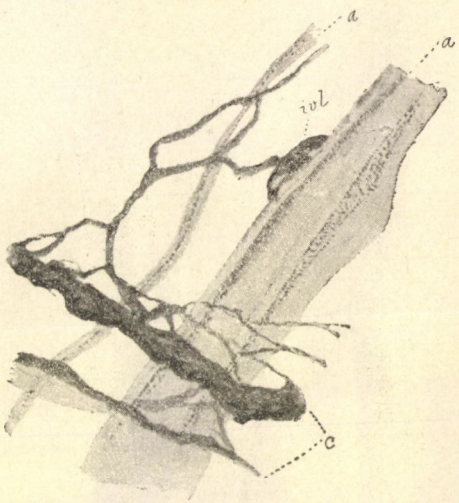


4. ábra. Idegvégződés lemezecskében és foltban. *a* izomsejt. *c* idegfonál. *ivl* idegvéglemezecske. *iv* idegvégződés foltban.

másik ága tovább fut s alább ad végződést. Ugyancsak az elsőrendű idegből elfutó másodrendű ág 2—3 kis foltocskában végződik. Általában pedig jellemző az, hogy mindenütt sok az ideg s igen gyakori a végződés. Különösen pedig vékonyabb idegek számtalanszor szép képeket adnak a contactusra. KÖLLIKER azt állítja, hogy képtelenség volna azt gondolni, hogy minden egyes izomsejt kap idegszálat. Véleményem szerint ebben rendszer nem mutatható ki. Tény, hogy egy-egy izomsejt 2—3—4, sőt több végződést kap, az idegháló meg mindenütt sűrű, a contactus gya-

kori, úgy hogy biztosan állíthatni, hogy az egy-egy kötegben előforduló sejtcsoportok rendkívül dúsan, gazdagon vannak ellátva idegekkel s ennek megfelelőleg idegvégződésekkel is.

Az eddig mondottakat összegezve az tűnik ki, hogy van az izolált síma izomsejtek között egy *alapideghálózat*. Ez adja az *első, másodrendű* stb. *idegfonalakat*, szálakat, melyek aztán idegvégződéseket bocsátanak; ép igy már az alaphálózat is. Ez adja a nagyobb idegvégződéseket *lemezecskék*, fürtöcskék alakjában (l. a 4—5. ábrát). E lemezecskékben való végződésre különösen

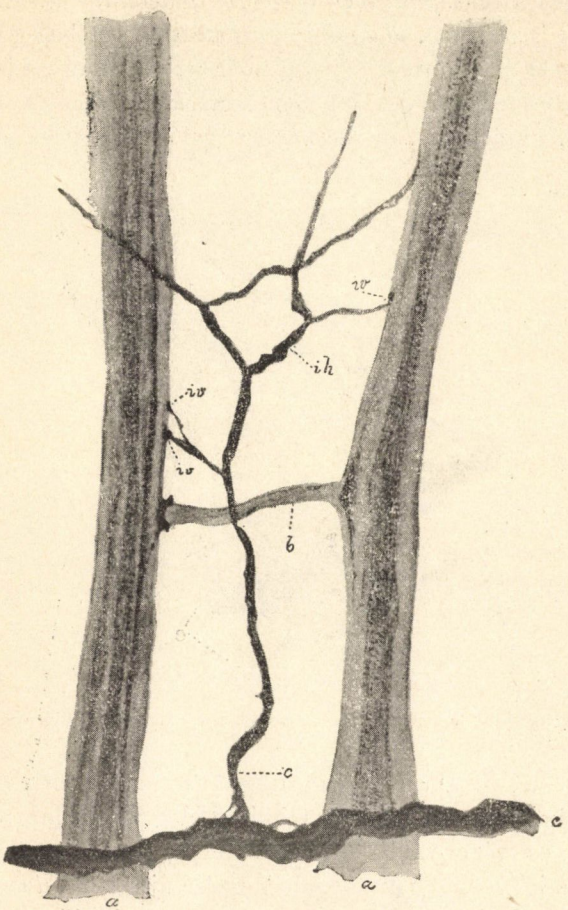


5. ábra. Idegvégződés lemezecskében. *a* izomsejt. *c* idegfonal. *ivl* idegvéglemezecske.

szép példa az 5. ábrában feltüntetett hármas lemezecske, hol a vastag, sürű, kuszált fonatból elinduló ideg az izomkéreghez egy hosszabb és vékonyabb és két kurtább, vastag, széles lemezt bocsát. Az idegszálakból magukból pedig újra kis *foltocskák* alakjában észlelhetni a végződést (l. a 6., 7. és 8. ábrát) s e viszonyok annál finomabbak, annál gyengédebbek, minél osztódottabbak az idegek, minél finomabb idegszálakból áll az idegháló. Tehát van *fürtöcskékben* való végződés, vannak Ranvier-féle *motorius foltok* s van a Gscheidlen állitotta *contactus* ideg és izom között.

De ezeken kívül vannak egyéb, igen érdekes viszonyok is,

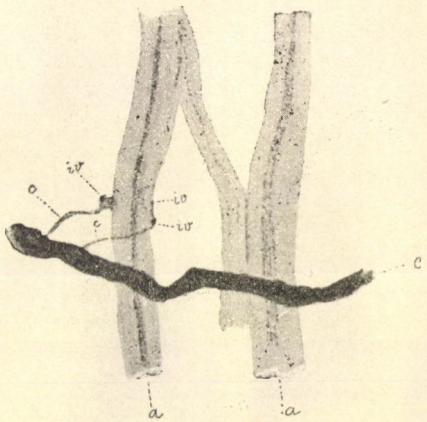
melyeket eddig — tudtommal legalább — senki sem jelzett. Ugyanis a_1^1 mellett, hogy egy külön motorius foltban van végződés, található az is, hogy két vastag, talán elsőrendű idegszál fut



6. ábra. Idegvégződés foltocskákban. *a* izomsejt. *c* idegfonalak. *ih* ideghálócska. *iv* idegvégződések.

két izomsejt között, elágazik, communikál egy másik ilynemű ideggel és e két izomsejt között sűrűn adja a végkészülékeket a kéregállományhoz. E sűrű végkészülékek úgy látszik, kis izom-

hidacskák mentén futnak és végződnek. Az idegszál egyik vége pedig belefut az izom protoplasma (velős) állományába, hogy ott szabadon elveszszen, végződjék. Máskor meg az tünik fel, hogy a nagyon varicosus idegszál egy izomhid mentén fut, folytonos contactusban van vele, akkor azután eljutva egy másik izomhoz, ott több foltocskában végződik. Egyáltalán néha igen kanyargósan, kiszámíthatlanul futnak szét a vékonyabb idegek. Érdekes az a viszony is, mikor egy feltünően kitüremkedő izommag mellett vastagabb idegszál fut s belőle e maghoz és — úgy látszik — a magba is beletérnek vékony, igen varicosus szálacskák. Egyszer-

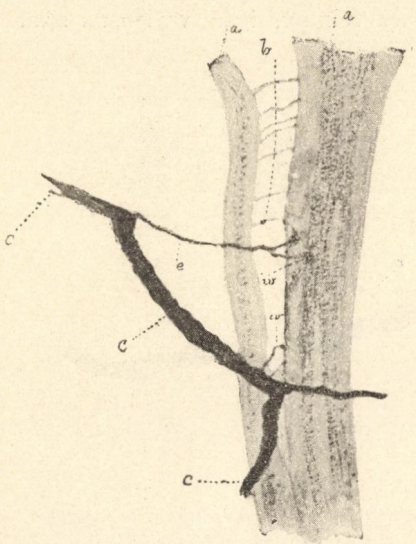


7. ábra. Idegvégződés foltocskákban. *a* izomsejt. *c* idegfonál. *iv* idegvégződés foltocskákban (az egyik kettős foltban).

másszor hosszú úton, 3—4 sejt felett követhető egy finom idegecske, mígnem foltban végződik.

Nem érdektelen az a fajtája sem a végződésnek, a milyet a körkörös izomzatban lelhetni. Azt hiszem, hogy ezek tisztán csak motorikus végek. A sűrűn egymás mellé ragasztott izomsejtekhez ideg halad, bemegy az izomba s ott varicosus véggel elenyészik. Máskor mag látható, melynek mentén oszlik és elenyészik az ideg, vagy a kérgén ágazik el s folytatólag halad a másik izom magvához. Végre egyszerű foltban végződik, vagy elvész a velőállományban; a magon való áthaladása nem mindig vehető ki, de már végződése az izom kérgén igen.

Mivel a magban való végződésről csak Elischer és Lustig A. emlékeznek meg s mivel magam is észleltem ilyeneket, szükségesnek tartom erről is a megemlékezést. Elischer, mint fentebb említettem, a magban, illetve ennek közvetlen közelében, Lustig pedig ugyancsak a magban, illetve ennek protoplasma nyujtványán lelt végződést, máskor meg szerinte az ideg egybeolvad az izommag contourjával. A magam véleménye a következő. Volt példa — nem egy — arra, hogy az izomnak velőállománya

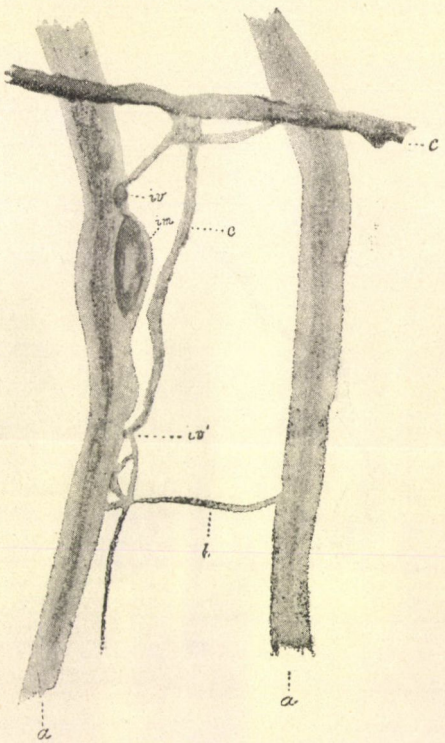


8. ábra. Idegvégződés az izomsejt kéreg- és velőállományában. *a* izomsejt. *b* izomhidacskák. *c* idegfonalak. *iv* idegvégződések.

megsűrűsödik egy helyen, olyan, mintha egy mag volna, de mellette, nem egészen elválasztva tőle, van még egy másik ilyen magféle kitüremkedés is. Bajos itt azt megkülönböztetni, vajjon e két magforma képződmény közül mindkettő a sejthártyán belül van-e, vagy pedig kívül van-e az egyik. Tény, hogy ideg halad hozzá, belemegy s el is enyészik benne. Ez Elischer végződése, a mely véleményem szerint csakugyan létezik is. Máskor meg határozottan követhető a magféle sűrű velőállományba az ideg, megtörik benne s úgy látszik, mintha két helyen végződnék. És még azt az

érdekes viszonyt is láttam, hogy a magot ívszerűen veszi körül a a végkészülék, a mely valószínüleg sok foltocskából van alkotva.

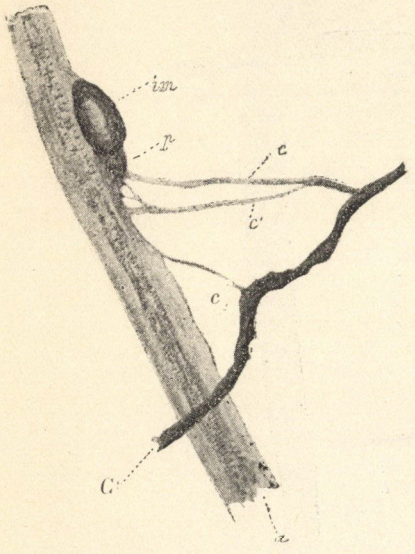
A LUSTIG-féle eredményekre vonatkozólag készítmények alapján a következőket jegyezhetem meg. Észleltünk oly képet, a melyen egy izomsejt látható, oldalán kissé kitüremkedő maggal.



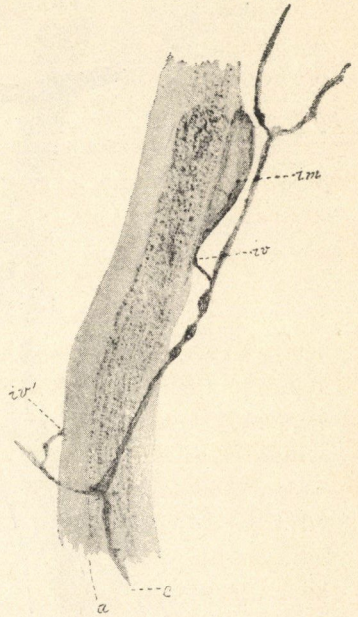
9. ábra. Idegvégződés az izommag táján és egy másik helyen foltban. *a* izomsejt. *b* izomhid. *im* izomsejtmag. *c* idegfonalak. *iv* idegvégződés a mag felett. *iv'* idegvégződés foltban rövid nyélen.

Keresztben áthalad rajta egy vastagabb ideg, mely vékony ágat bocsát e maghoz, úgy, hogy a mag egyik végén, csúcsához közel megvastagszik s végződik, esetleg a mag burkával is közelebbi érintkezésbe lép. Egy másik idegág közel a mag mellett halad el, tulhaladja azt s az izomsejt kérgén képez motorius foltot. Közel e helyhez két izomsejt közt hidacska van, mely szintén kap az

idegtől ágat (l. a 9. ábrát). Ismét egy másik esetben oldalt kitüremkedő mag van, mely mellett ideg halad el, ágat és motorius foltot adva a mag alsó csúcsához s mintegy összefolyik a sejthártyával; az ideg folytatásán a sejt másik oldalán megint csak fellelhető a motorius folt (l. a 10. ábrát). Egy másik kép a követ-



10. ábra. Különböző idegvégződések a mag táján. *a* izomsejt. *im* izommag. *p* az izomnak protoplasma nyujtványa. *C* idegfonal. *c* idegfonal, a mely a protoplasma nyujtványhoz halad és végződik. c^1 idegfonal, amely hármas ágra oszolva végződik az izom kérgén. c^2 idegfonal, mely az izomkérgére rásimul.



11. ábra. Idegvégződés az izommag alatt, annak protoplasma nyujtványán foltban. *a* izomsejt. *im* izommag. *c* idegfonal. *iv* idegvégződés foltban az izomsejt protoplasmanyújtványán. *iv'* idegvégződés az izomsejt kérgén foltocskában.

kező viszonyokat tünteti fel. Erősen kitüremkedő izommaghoz egy vastagabb idegből három idegszálacska halad. Az egyik korán eljut az izomkéreghez és rajta elmosódik, a másik a mag alatt látható protoplasma megsűrűdéshez jut, előtte két vékonyabb meg egy vastagabb szálacskává oszlik s ott végződik, a harmadik vastagabb ág e végződések felett lép érintkezésbe a maggal s lát-

szólag végződést nem mutatva, elmosódik az izommag hártyáján (l. a 11. ábrát).

Ezekből azt következtetem, hogy az izom magja maga is kap olyan idegeket, melyek olyanformán végződnek, hogy az ideg a maghártyával jut összeköttetésbe, illetve a körülötte levő protoplasma sűrűsödéssel, sőt néha beterjed, bár elmosódott körvonalakkal, magának a magnak az állományába. Felmerülhetne itt újra az a kérdés, hogy vajjon az ideg burkoló hártyája nem olvad-e itt egybe a mag hártyájával s talán így terjed be az ideg a magba. E kérdést eldöntenem mindeddig nem sikerült.

Ennyit a kitünőnek bizonyult Löwit-Thanhoffer-féle methodussal elért eredményekről. A methylen-kék, melylyel sokáig kisérleteztem, s több száz præparatumot készítettem, heveny vizsgálásra igen alkalmas volt s minden eredményemet a főbb vonásokban, melyekre én is sulyt helyeztem, teljes mértékben igazolta. De szépen állandósítani a készítményeket nekem semmiképen sem sikerült, olyan értelemben, hogy a frisshez legalább hasonló képeket nyerhettem volna. Múlhatik ez járatlanságomon, ügyetlenségemen; bármennyire igyekeztem is, a friss készímények en túl semmi eredményt sem érhettem el.

Beszámolva ekként mindarról, a mit mint valószínüt vagy mint bizonyosat láttam, állíthatjuk, hogy az idegfestés egyik leghatalmasabb eszköze az aranychlorid-reductió s a sok methodus közt a legkitünőbbnek találtam a Thanhoffer-Löwit-félét. E módszerrel nyert készítmények eltarthatók bármeddig (három évesek vannak birtokunkban), maga az eljárás kis gondossággal is már biztos eredményeket nyujt az $^1/_2$—$^3/_4$—1 óra alatt beállt gyönyörü tinctióval. Fenmaradt készítményeim, különösen a melyek rajzaimhoz szolgáltak, a II. leiró és tájboncztani intézetben vannak elhelyezve s bármikor megtekinthetők.

Végül el nem mulaszthatom, hogy Thanhoffer tanár úrnak őszinte, hálás köszönetet ne mondjak szíves útbaigazításaiért és becses támogatásáért.

III. Végeredmény.

1. Vizsgálataimnál a *methylen-kék festést* és a RANVIER, nemkülönben a THANHOFFER-LÖWIT-féle aranyozó módszert találtam a síma izomsejtek idegeinek festésére alkalmasaknak; a három említett módszer közül a THANHOFFER-LÖWIT-félével értem el a legtöbb eredményt.

2. Vizsgálataimat a piócza teste és gyomorzacskója izmain tettem, nemkülönben béka hólyagján, de az előbbin tudtam a legszebben tanulmányozni az idegvégződéseket.

3. Az idegek durvább és finomabb fonatokat, de biztosan kimutathatólag reczéket is képeznek s ezek csomópontjait egy-, két- vagy több nyúlványú idegsejtek képezik.

4. A piócza gyomorzacskójának izomsejtjein kéreg- és velőállományt lehet megkülönböztetni; az utóbbi finom szemcsézetű protoplasma. Két-két izomsejtet számos vékony és vastag izomhid köt egybe, a mely hidak maguk is idegszálakat vezetnek az izomsejtekhez. A sejteken keresztül futó idegek *alaphálózatot* alkotnak, a mely vastagabb, sűrű fonatokból áll, melyekből *első-*, *másod-* és *többedrendű* idegek mennek ki, végül sűrű reczét képezve. Az említett idegsejtek a reczében oválisak vagy gömbölyüek, közepükön hólyagszerű maggal. Köztük ikerdúcz-sejtek is találhatók.

5. Az idegvégződés sok formában történik, de azért az egy typusra vezethető vissza; így egyszer a RANVIER állította *ideg-foltocskák* képében, máskor ezek többszörös alakzatában, a *fürtöcskék* módjára. Gyakori GSCHEIDLEN értelmében az egyszerű contactus is akként, hogy az idegszálacska az izomsejteken való lefutásában egyes csomócskákkal érintkezik azzal. De nemcsak az izomsejten, hanem annak magján, sőt ebben benne is találhatni idegvégződéseket, mint APÁTHY és LUSTIG állította; de mindenkor visszavezethető e sokféle alakzat a foltocskára, a melyet először a nagy franczia tudós, RANVIER mutatott ki.

Felhasznált irodalom.

1. Ranvier: Technisch. Lehrbuch d. Histologie. (Lipcse. 1888. p. 786—791.)
2. Gscheidlen: Beiträge zur Lehre v. d. Nervenendigungen in d. glatten Muskelfasern. Arch. f. mikr. Anat. Bd. XIV. 1877. p. 321.
3. Klebs: Die Nerven d. org. Muskelfasern. Virch. Arch. Bd. 32. p. 168.
4. Löwit: Die Nerven d. glatten Muskelfasern. Wiener Sitzungsber. Bd. III. p. 71.
5. His: Über d. Endigungen d. Gefässnerven. Virch. Arch. Bd. 28. 1883. p. 427.
6. Arnold: Strickers Handbuch. p. 142.
7. Tolotschinoff: Über d. Verhalten d. Nerven i. d. glatten Muskelfasern d. Froschharnblase. Arch. f. mikr. Anat. Bd. V.
8. Frankenhäuser: Die Nerven d. Gebärmutter u. ihre Endigungen i. d. glatten Muskelfasern. Jena. 1867. p. 79.
9. Hénocque: Du mode de distribution et de la terminaison des nerfs dans les muscles lisses. Arch. d. l'anat.et de la physiol. Páris 1870.
10. Elischer: Beiträge z. fein. Anat. d. Muskelfasern d. Uterus. Arch. f. Gynäk. Bd. XII. 1876.
11. Trinchese: Mémoire sur la terminaison pèripherique des nerfs moteurs dans la série animal. Journ. d. l'anat. et physiol. T. IV. 1867.
12. Apáthy: Erfahrungen i. d. Behandlung d. Nervensystems f. hist. Zwecke. Zeitschr. f. wissensch. Anat. u. mikr. Technik. Bd. VI. 1889, p. 422—436.

— Nach welcher Richtung soll die Nervenlehre reformirt werden? Biol. Zentralblatt Bd. IX. 1889—90.

— Leitende u. contract. Primitivfibrillen. Bd, X. H. 3. 1892.

— Über d. Muskelfas. v. Ascaris etc. Zeitschr. für wissensch. Anat. u. mikr. Technik. Bd. X. 1893. p. 319—361.

— Tanulmány a Najadeák szövettanáról. Budapest. 1885. p. 95.

13. A. Smirnow: Über d. Nervenendigungen im Epithel d. Regenwurms. Anat. Anzeig. 1884. Nr. 18. 570. és kk. l.

14. Ehrlich: Üb. d. Methylenblau-Reaction. Deutsch. Med. Wochenschr. 1886. Nr. 4.
15. Arnstein: Die Methylenblau-Färbung. I—II. Mittheil. Anat. Anzeig. Bd. II.
16. Thanhoffer: A szövettan és szövettani technika. Budapest. 1894.
— A mikroscop. Bpest. 1894.
— Ujabb módszerek a harántcsíkos izmok idegvégződésének vizsgálatára.
17. A. Lustig: U. d. Nervenendig. i. d. glatten Muskelfasern. Wiener Sitzungsber. 1881. B. 83.
18. Mihálkovics: Általános boncztan.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. június 15.-én tartott üléséből.)

PERTURBATIÓK TÖBBTAGÚ BOLYGÓRENDSZERBEN.

KÖVESLIGETHY RADÓ, lev. tagtól.

A háborgási elmélet bonyolódott problemájának a gyakorlati czéloknak megfelelő közelítő megoldása tudvalevőleg csak azon szerencsés körülmények által válhatott lehetségessé, melyek a bolygórendszerben tényleg fennállanak. A perturbatióknak, azaz a bolygóknak a tiszta KEPLER-féle mozgásoktól eltérő mozgási anomáliáinak az említettem körülményekből folyó kicsinysége teszi, hogy a végtelen kis rezgések tanában haszonnal bevett superpositió elve itt is előnyösen alkalmazható, úgy hogy az n-tagú bolygórendszer mozgási jelenségei tényleg a három test problemájában tanulmányozhatók. Vagyis valamely bolygó összes perturbatiója a megfigyelések pontosságán belül az egyes bolygók okozta egyenkénti perturbátiók összegével azonosítható. Ezen eljárás természetesen a mozgás eredeti differentiál-egyenleteiben nem indokolt nomenclaturára vezet, melyben perturbáló és perturbált bolygó között külömbséget teszünk; az előbbi első közelítésben egyszerűen a KEPLER-féle törvényeknek megfelelőleg kering és csak a perturbált bolygó esetlegesen észrevehető visszahatása teszi szükségessé a második megközelítést. Más szóval, a három test problemáját képező hat másodrendű differentiál-egyenletből álló simultán rendszert a Nap körül való relativ mozgások tanulmányozásában helyettesítjük egy háromtagú simultán másodrendű differentiál-egyenletrendszerrel. De még ez egyszerű esetben is fölötte nehéz feladat előtt áll az analizis, melyet kétes összetartású végtelen sorokkal is csak bajosan sikerül megoldani, ha nem tekintjük a bolygórendszer lényeges tulajdonságának, hogy az egyes, a Naphoz viszonyított csekély tömegek közel barycentri-

kusak, hogy saját méreteikhez képest igen nagy sugarú, a körtől csak nagyon kevéssé eltérő pályákban, kis szögek alatt hajlított síkokban keringenek a közös tömegközéppont körül.

A probléma analitikai kifejtésének nem csekély és lényegtelen hátránya az is, hogy az úgynevezett perturbátió-függvénynek valamely időargumentum trigonometrikus függvényei szerint haladó végtelen sorba való bontása már a számítás legelején elkerülhetlen. A parameterek variatiója neve alatt ismeretes és ezen elméletben majdnem kizárólag alkalmazásba jövő methodus (mely a régebbi tárgyalási modorban a KEPLER-féle ellipsisből, GYLDÉN-nél a tényleges mozgást jobban visszaadó görbéből mint komplementár integrálból indul ki) ezen sorbafejtés következtében szükségképen oly integrálokhoz vezet, melyek az időt a periodikus functión kívül is tartalmazzák, melyek tehát aperiodikusak, s melyek mint ilyenek a rendszer stabilitását már formailag is veszélyeztetik, a nélkül, hogy fellépésük talán a ki nem elégítő integráló módszernél egyébbel volna indokolható. Azonkívül az ily módon keletkező végtelen sorok összetartása a legtöbb esetben ki sem mutatható, a számoló constatálja utólag a sor convergentiáját, vagy helyesebben mondva, numerikus alkalmazhatóságát. S tudjuk, hogy még a GYLDÉN-féle elméletben is vannak divergens, vagy legfölebb semiconvergens soraink.

Mindezekhez járul még, hogy a mozgás eredeti differentiálegyenletei a koordináták oly összetett kifejezéseit tartalmazzák, hogy csak számos substitutió árán sikerül az elemeket — parametereket — kifejező egyenletekhez jutni, melyek ki lévén már vetkőztetve minden symmetriából, fárasztóvá teszik a tárgyalást előadóra és olvasóra, és terhessé a számoló csillagászra, ki, ha csupán gyakorlati alkalmazásról van szó, szivesebben fordul a problemának a speciális perturbátiók nevén ismeretes, tisztán mechanikai quadraturákon alapuló megoldásához.

A régibb és a GYLDÉN-féle tárgyalási modorral szemben a perturbátió-elméletnek egészen elütő, és azt hiszem, igen előnyös levezetése vált lehetségessé azon tapasztalatom folytán, hogy a rezgési elmélet egyenleteiben követett integráló módszerek az égi mechanikába átvive mindig hasznos átalakitásokat eredményeztek. Az integrátió azon módját választva, melylyel a combi-

natióhangok, a resonantia, a fluorescentia és phosphorescentia jelenségeit magyarázzuk, az n test problemája szorosan véve végtelen sok, háromtagú simultán differentiál-egyenletcsoportra bomlik, melyek a jobb, csak ismert időfunctiókat tartalmazó oldaltól eltekintve, mind azonosak, a koordinátákban másodrendűek és lineárok. A számítás tehát tényleg három másodrendű, lineár simultán differentiál-egyenlet megoldására van visszavezetve, az integrátió, mint látni fogjuk, zárt alakban lehetséges és a koordináták explicit kifejezéseihez vezet, úgy, hogy az egymásután következő közelítések az említetteknél fogva igen egyszerűen és közvetlenül összegezhetők.

A következő levezetések lényegesen már régen megvoltak, midőn meggyőződtem arról, hogy az eredeti egyenletek szétbontásában használt módszer, már CAUCHY-nál is előfordul. A tényleges integrátió azonban nincs keresztülvive, és ennélfogva jelen értekezés is elég újat tartalmaz, eltekintve attól, hogy a kész eredményeket érdekes, eddig nem tárgyalt esetre alkalmazom.

Az új eljárás előnyei, röviden kijelölve, a következők: Egyenlő analitikai (de nem számolási) munkával egyszerre tárgyalható az n test problemája; megszünik a különbség perturbált és perturbáló bolygó között, a mennyiben a rendszer minden teste egyenlő joggal szerepel; a levezetés egész menetében megtarthatjuk a bolygó koordinátáit, miáltal a tárgyalás symmetriája mindvégig óva marad (ha előnyösnek látszanék az elemekre való átmenet, ez a koordináták ismert időértékeivel mindig könnyen eszközölhető); a koordináták mindig lineárisan és explicite fordúlnak elő, még pedig valamennyi közelítésben ugyanazon együtthatókkal, úgy hogy az egymásra következő közelítések egyszerűen összegezhetők. Azonkívül különösen kiemelendőnek tartom, hogy a levezetés rendkívül könnyű, és világos betekintést enged a perturbátiószámítás menetébe, úgy hogy valóban hivatott lehet, hogy a speciális perturbatiók elméletét is kiszorítsa.

Mindez természetesen nem zárja ki azt, hogy az eredményekben akkor, ha gyakorlati alkalmazásról van szó, ne reflectáljunk ama könnyítésekre, melyek a problema természeténél fogva megengedvék: a tömegek kicsinységére és a másodrendű háborgások elhanyagolhatóságára.

I. Az n-tagú bolygórendszer relativ mozgásának egyenletei és azok átalakítása.

Ha M és m két, egyetlenegy tömegpont által helyettesíthető bolygó tömege, melyek között a NEWTON-féle tömegvonzás hat, akkor tetszőleges derékszögű koordinátarendszerre vonatkozólag az $M(\xi', \eta', \zeta')$ és $m(\xi, \eta, \zeta)$ pont mozgása ellentállás nélküli térben adva van

$$M\frac{d^2\xi'}{dt^2} = k^2\frac{Mm}{r^2}\frac{\xi-\xi'}{r}, \quad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2\frac{Mm}{r^2}\frac{\xi'-\xi}{r}$$

egyenletek által, melyekhez hasonlók járulnak, míg a többi η', ζ', η, ζ koordinátákra vonatkozólag is, és melyekben

$$r^2=(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2,$$

k=0,017 202 098 95 pedig a GAUSS-féle állandó, mely a vonzás nagyságát a Nap tömegére, a közép solaris napra és a közepes földpályasugárra, mint egységekre vonatkoztatja.

Ha ennélfogva $M=1$ alatt a Nap tömegét értjük, és a bolygók mozgását czélszerűbben a Nap középpontjára vonatkoztatjuk, miután absolut mozgásokat úgy sem figyelhetünk meg, a bolygók relativ vagy heliocentrikus koordinátái lesznek:

$$\xi-\xi'=x;\ \eta-\eta'=y;\ \zeta-\zeta'=z \text{ és } r^2=x^2+y^2+z^2,$$

úgy, hogy a fenti egyenletrendszer a következő egyszerűbbe megy át:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{x}{r^3}=0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{y}{r^3}=0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{z}{r^3}=0,$$

melynek véges alakban való megoldása tudvalevőleg semmi nehézséget sem okoz. A csoport egy integráléja

$$Ax+By+Cz=0$$

kifejezi azt, hogy a bolygó pályája a Nap középpontján átmenő sík. Ha ezen pályasíkot választjuk a koordinátarendszer x, y síkja gyanánt, akkor $z=0$ lévén, a csoport harmadik egyenlete elesik. Ha továbbá az x tengely positiv ágát a π hosszúsággal biró perihélium felé irányítjuk, állanak az ismeretes, a két test problemáját megoldó egyenletek:

$$x=r\cos v, \quad y=r\sin v, \quad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}; \qquad E-e\sin E=M_0+\frac{k(1+m)}{a^{\frac{3}{2}}}t,$$

melyekben a és e a pályát képező kúpmetszet fél nagy tengelye és számbeli excentricitása, M_0 az időszámítás kezdetén való középanomália, E az excentrikus, v a valódi anomália, t pedig a folyó idő; a két anomália a perihéliumtól veszi kezdetét, a negyedik integrálási állandó π tehát kiesett.

A két test problemájának megoldása végtelen sorok alakjában is adható, melyek az

$$M=M_0+\frac{k(1+m)}{a^{\frac{3}{2}}}t$$

úgynevezett középanomália többszöröseinek sinusai és cosinusai szerint haladnak. Ha ugyanis $I_n(e)$ az e argumentummal biró n-edrendű Bessel-féle függvényt jelenti, akkor:

$$E-M=2\left(I_1(e)\sin M+\frac{1}{2}I_2(2e)\sin 2M+\frac{1}{3}I_3(3e)\sin 3M+\cdots\right),$$

$$x=-\frac{3}{2}ae-a\left((I_2(e)-I_0(e))\cos M+(I_3(2e)-I_1(2e))\cos 2M+\cdots\right),$$

$$y=-\frac{2a}{e}\sqrt{1-e^2}\left(I_1(e)\sin M+\frac{1}{2}I_2(2e)\sin 2M+\frac{1}{3}I_3(3e)\sin 3M+\cdots\right),$$

$$\frac{r}{a}=1+\frac{e^2}{2}+e\left((I_2(e)-I_0(e))\cos M+(I_3(2e)-I_1(2e))\cos 2M+\cdots\right),$$

és mindezen sorok az excentricitás bármely értékénél összetartók. A fent adott zárt kifejezések alaki transformálás útján

és a képzetes mennyiségek szereplése által valamennyi kúpszelet számára érvényeseknek tekinthetők.

Ha most a meglévő két testhez, melyek közül a Nap, mint koordináta-kezdőpont immár explicite nem szerepel, még egy harmadik $m_1(x_1, y_1, z_1)$ heliocentrikus koordinátákkal biró bolygó is járul, úgy ennek hatása m-re az x tengely mentén

$$k^2 \frac{m_1}{\rho^2} \frac{x_1 - x}{\rho}$$

által van adva, míg a Napra való hatása ugyanezen irány mentén

$$k^2 \frac{m_1}{r_1^2} \frac{x_1}{r_1},$$

mely hatás a Nap körül való relativ mozgás tekintetbe vétele miatt az előbbi erőből levonandó. A három test problemája tehát az x tengelyre nézve:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right),$$
$$\rho^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

és hasonló egyenletek állanak $\frac{d^2y}{dt^2}$ és $\frac{d^2z}{dt^2}$ a koordináta-gyorsulásokra is.

Mivel egy még hozzájáruló erő a már ható erő jelenlételétől független, mindjárt felirhatjuk az n test problemáját kifejező egyenleteket a következőképen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_i}{dt^2} + k^2(1+m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= k^2 \Sigma m_k \left(\frac{x_k - x_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{x_k}{r_k^3} \right) \\
\frac{d^2y_i}{dt^2} + k^2(1+m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= k^2 \Sigma m_k \left(\frac{y_k - y_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{y_k}{r_k^3} \right) \qquad 1) \\
\frac{d^2z_i}{dt^2} + k^2(1+m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= k^2 \Sigma m_k \left(\frac{z_k - z_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{z_k}{r_k^3} \right)
\end{aligned}$$

hol $i = 1, 2, \ldots n-1, n$ és $k = 1, 2, \ldots n$ hiányzó i-val; a Nap az $(n+1)$-dik testnek tekinthető. Ha az egyenleteket az n különböző bolygó számára felirjuk, $3n$ másodrendű differentiál-egyen-

letből álló simultán rendszert kapunk, melynek teljes megoldása $6n$ tetszőleges állandót vezet be. A teljes megoldás idáig ismeretlen; a mechanikai alapelveket, úgymint a súlypont tételét, a területek megmaradását és az eleven erő törvényét kifejező integrálokon kivül egyéb megoldások csak végtelen sorok segítségével voltak elérhetők. Ezek épen nem egységes elvet követnek; hol a perturbáló bolygók tömegének hatványai szerint rendeződnek el, hol pedig valamely, a perturbált bolygóra vonatkozó és különösen előnyösnek látszó pályaelem szerint haladnak.

A perturbátió-számítás egész mechanismusába rendkivül könnyű betekintést nyerünk, ha valamely bolygó koordinátáit valamely tetszésszerinti kis, de a számítás tartama alatt állandó ε mennyiségnek hatványai szerint haladó sorba bontjuk s az i-dik bolygó számára irunk:

$$x_i = x_{i0} + x_{i1}\varepsilon + x_{i2}\varepsilon^2 + \cdots; \quad y_i = y_{i0} + y_{i1}\varepsilon + y_{i2}\varepsilon^2 + \cdots;$$
$$z_i = z_{i0} + z_{i1}\varepsilon + z_{i2}\varepsilon^2 + \cdots \qquad 2)$$

hol tehát általában x_{in} az i-dik bolygó x coordinátájának sorbafejtésében az n-dik tag coefficiense. Ezen ε valamennyi bolygó számára természetesen közös. Ha még a bolygó m_i tömege helyett új tömegadatot vezetünk be

$$m_i = \varepsilon\mu_i \qquad 3)$$

egyenlet segítségével, akkor látnivaló, hogy a 2) egyenletrendszer az n test problemájának megoldását adja, ha e rendszer $\varepsilon = 1$ esetében is összetartó sor marad.

A tényleges kiszámításnál legczélszerűbben felhasználjuk a polynom tételét, melynek értelmében

$$(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \cdots)^n = U_0 + U_1\varepsilon + U_2\varepsilon^2 + \cdots$$

a hol:

$$U_0 = u_0^n$$

$$U_1 = nu_0^{n-1}u_1$$

$$U_2 = \frac{n(n-1)}{2!}u_0^{n-2}u_1^2 + nu_0^{n-1}u_2$$

$$U_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u_0^{n-3}u_1^3 + n(n-1)u_0^{n-2}u_1u_2 + nu_0^{n-1}u_3$$

$$U_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} u_0^{n-4} u_1^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} u_0^{n-3} u_1^2 u_2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} u_0^{n-2} u_2^2 + n(n-1) u_0^{n-2} u_1 u_3 + n u_0^{n-1} u_4 .$$

. . . . . .

Az U együtthatóknak ránk nézve fontos jellemző tulajdonsága, hogy a legmagasabbrendű u mindig lineárisan és ugyanazon $n u_0^{n-1}$-hez kötve fordul elő. Ha tehát a 2) egyenleteket az 1) csoportba helyettesítjük, és ε egyenlő hatványainak együtthatóit egyenlőkké teszszük egymással, akkor először is a 3) egyenlet miatt x_0, y_0, z_0 egyenlete teljesen független a jobb oldalon lévő m_k tömegű háborgó bolygók mozgásától, másodsorban ε^m együtthatói oly egyenletet adnak, melyben x_m, y_m, z_m mindig ugyanazon combinatióban fordulnak elő; az egyenletben szereplő x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}; x_{m-2}, y_{m-2}, z_{m-2}; . . . x_0, y_0, z_0 mennyiségek nyilván a megelőző egyenletek által vannak adva, tehát ismeretesek tekinthetők, úgy hogy az x_m, y_m, z_m meghatározására szolgáló egyenlet bal oldala ugyanaz minden m számára, míg a jobb oldal a megelőző egyenletek megoldása által ismeretes időfüggvény. Ily úton pl. az x koordináta számára az i-dik bolygó a következő egymásutáni egyenleteket adja:

$$x''_{i0} + k^2(1+m_i)\frac{x_{i0}}{r_{i0}^3} = 0$$

$$x''_{i1} + k^2(1+m_i)((r_{i0}^{-3} - 3x_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) . x_{i1} - 3x_{i0}y_{i0}r_{i0}^{-5} . y_{i1} -$$

$$- 3x_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5} . z_{i1}) = k^2 \Sigma' \mu_k \left(\frac{x_{k0} - x_{i0}}{\rho_{ki0}^3} - \frac{x_{k0}}{r_{k0}^3} \right)$$

$$x''_{i2} + k^2(1+m_i)((r_{i0}^{-3} - 3x_{i0}^2 r_{i0}^{-5}) . x_{i2} - 3x_{i0}y_{i0}r_{i0}^{-5} . y_{i2} -$$

$$- 3x_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5} . z_{i2}) = k^2 \Sigma \mu_k \left(\frac{x_{k1} - x_{i0}}{\rho_{ki1}^3} - 3\frac{x_{k0} - x_{i0}}{\rho_{ki0}^5}((x_{k0} - x_{i0})\right.$$

$$(x_{k1} - x_{i1}) + (y_{k0} - y_{i0})(y_{k1} - y_{i1}) + (z_{k0} - z_{i0})(z_{k1} - z_{i1})) - \frac{x_{k1}}{r_{k0}^3} +$$

$$\left. + 3\frac{x_{k0}}{r_{k0}^5}(x_{k0}x_{k1} + y_{k0}y_{k1} + z_{k0}z_{k1}) \right) .$$

$$-k^2\left(x_{i0}\left(\frac{3\cdot5}{2}r_{i0}^{-7}(x_{i0}x_{i1}+y_{i0}y_{i1}+z_{i0}z_{i1})^2-\frac{3}{2}r_{i0}^{-5}r_{i1}^2\right)-\right.$$

$$\left.-3x_{i1}r_{i0}^{-5}(x_{i0}x_{i1}+y_{i0}y_{i1}+z_{i0}z_{i1})\right) \qquad 4)$$

. . . . . .

Ez egyenletek bal oldalai mindig ugyanazok maradnak, a jobb oldalok azonban csakhamar bonyolódnak, de mindig a megelőző egyenletből nyert x, y, z értékeknek algebrai függvényei. Az első egyenlet az egyszerű KEPLER-féle mozgás kifejezője, vagy a két test problemájáé, s ennélfogva a következő egyenletek jobb oldalai mind ismeretes időfüggvények, melyekben rövidség okáért:

$$r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2; \quad r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2. \qquad 5)$$

Ha az egyenletek jobb oldalát röviden X_{im}-mel jelöljük, akkor nyerjük az i-dik bolygó m-dik koordináta közelitései számára a következő egyenletrendszert:

$$\frac{d^2x_{im}}{dt^2}+k^2((r_{i0}^{-3}-3x_{i0}^2r_{i0}^{-5})\,.\,x_{im}-3x_{i0}y_{i0}r_{i0}^{-5}.\,y_{im}-$$

$$-3x_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5}.\,z_{im})=X_{im}$$

$$\frac{d^2y_{im}}{dt^2}+k^2(-3x_{i0}y_{i0}r_{i0}^{-5}.\,x_{im}+(r_{i0}^{-3}-3y_{i0}^2r_{i0}^{-5})\,.\,y_{im}-$$

$$-3y_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5}.\,z_{im})=Y_{im}$$

$$\frac{d^2z_{im}}{dt^2}+k^2(-3x_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5}.\,x_{im}-3y_{i0}z_{i0}r_{i0}^{-5}.\,y_{im}+$$

$$+(r_{i0}^{-3}-3z_{i0}^2r_{i0}^{-5})\,.\,z_{im})=Z_{im}. \qquad 6)$$

melyben i sorban 1, 2 . . . n, m pedig 1, 2 . . . ∞ veendő. Az eredeti simultán rendszer szétbomlott tehát végtelen sok háromtagú simultán rendszerre, melyek egészen a jobb oldalakig teljesen azonosak, s melyek az ismeretlen x_m, y_m, z_m koordinátaközelítésekben elsőrendűek. Ha egy ilyen rendszert sikerül integrálni, akkor az n test problemája egyszerűen végtelen sok egyszerű quadratura kiszámítására van visszavezetve.

A következőkben mellőzhetjük egyelőre az i és m indexeket, és eltekinthetünk a jobb oldaloktól, melyek, mint említők, a meg-

előző egyenletek megoldása után ismeretes időfüggvények. Ennélfogva a következő

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^5}(r_0^2 - 3x_0^2).x - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0y_0.y - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0z_0.z = X$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0y_0.x + \frac{k^2}{r_0^5}(r_0^2 - 3y_0^2).y - \frac{3k^2}{r_0^5}y_0z_0.z = Y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{3k^2}{r_0^5}x_0z_0.x - \frac{3k^2}{r_0^5}y_0z_0.y + \frac{k^2}{r_0^5}(r_0^2 - 3z_0^2).z = Z \qquad 7)$$

egyenletrendszerrel van dolgunk, melyben

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2\frac{x_0}{r_0^3} = 0; \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} + k^2\frac{y_0}{r_0^3} = 0; \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} + k^2\frac{z_0}{r_0^3} = 0. \qquad 8)$$

II. A differentiál-egyenlet integrátiója, ha jobb oldala 0.

Koordinátarendszerünk kezdőpontja összeesik ugyan a Nap középpontjával, de egyebekben még nem rendelkeztünk fölötte. Bárminő is legyen a bolygó pályája, pillanatnyi helyzete és sebessége x, y, z $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ mennyiségekben hat meghatározó darabot szolgáltatnak, melyekből egy, focusával a Nap középpontján átmenő ellipsis szerkeszthető, melyben a bolygó a dt időelem alatt a KEPLER-féle mozgás törvényei szerint halad. Azon KEPLER-féle pálya, mely egy adott T_0 pillanatban valamely bolygó helyzetét és pillanatnyi sebességét ábrázolhatja, osculáló pályának neveztetik, e pálya elemei az osculáló elemek a T_0 osculatió idejében. Ha tehát koordináta-alapsík gyanánt választjuk a bolygó egy pillanatban osculáló pályáját, akkor

$$z_0 = 0 \qquad 9)$$

s ha azonkivül a positiv x_0 tengelyt az osculáló ellipsis perihéliuma felé fordítjuk, állanak a nem perturbált mozgás ismeretes egyenletei:

$$x_0 = r_0\cos v; \quad y_0 = r_0\sin v; \quad r_0(1+e\cos v) = a(1-e^2), \qquad 10)$$

melyekben v a valódi anomáliát, a a fél nagy tengelyt és e a numerikus excentricitást jelenti. Ezen három mennyiség szükség esetén a bolygó i indexével látandó el; a 0 index azonban elmaradhat, mert az egész számítás menete alatt csak az osculáló pályára vonatkozó anomáliával és pályaelemekkel lesz dolgunk. Ezen egyszerűsítés tisztán csak a koordinátarendszer fekvését határozza meg, csökkenti ugyan az integratió állandóinak számát az első közelítésül felvett két test problemában, de nem bir semmiféle befolyással vagy korlátozással a később fellépendő állandók számára.

A mondottak folytán a 7) egyenletcsoport a következő egyszerű alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^3}(1-3\cos^2 v)\,.\,x - \frac{3k^2}{r_0^3}\sin v\cos v\,.\,y = X\\
&\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3k^2}{r_0^3}\sin v\cos v\,.\,x + \frac{k^2}{r_0^3}(1-3\sin^2 v)\,.\,y = Y\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2}{r_0^3}z = Z, \qquad 11)
\end{aligned}$$

mely a z koordinátában ugyan kevésbé symmetrikus, de a számításra sokkal kényelmesebb.

A differentiálhányadosban rejlő folyó idő nem függ össze egyszerű módon az anomáliával, s ezért előnyös, ha az időt az osculáló ellipsis anomáliája által mérjük. Ez természetesen azon hátránynyal jár, hogy minden bolygó mozgása más-más időmértékre vonatkozik.

Minthogy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dv^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dv}\frac{d^2v}{dt^2},$$

és a két test problemájának ismert egyenletei folytán

$$\frac{dv}{dt} = k\sqrt{1+m}\sqrt{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r_0^2} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1+e\cos v)^2, \qquad 12)$$

így

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2(1+m)}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos v)^4\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{2k^2(1+m)\,e}{a^3(1-e^2)^3}\sin v\,(1+e\cos v)^3\frac{dx}{dv} \qquad 13)$$

és ennélfogva a 11) alatti egyenletrendszerünk:

$$(1+e\cos v)\frac{d^2x}{dv^2} - 2e\sin v\frac{dx}{dv} + (1-3\cos^2 v)x - 3\sin v\cos v y = \\ = \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{X}{(1+e\cos v)^3}$$

$$(1+e\cos v)\frac{d^2y}{dv^2} - 2e\sin v\frac{dy}{dv} - 3\sin v\cos v x + (1-3\sin^2 v)y = \\ = \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Y}{(1+e\cos v)^3}$$

$$(1+e\cos v)\frac{d^2z}{dv^2} - 2e\sin v\frac{dz}{dv} + z = \\ = \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Z}{(1+e\cos v)^3}. \qquad 14)$$

A jobb oldalak helyébe egyszerűbben $\frac{r_0^3}{k^2(1+m)}X$ stb. is tehető.

Ha most a jobb oldalak helyett nullákat képzelünk, akkor a harmadik egyenlet

$$(1+e\cos)z = \zeta \qquad 15)$$

helyettesítés által tüstént megoldható; ugyanis

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{1+e\cos v}\frac{d\zeta}{dv} + \frac{e\sin v}{(1+e\cos v)^2}\zeta;$$

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{1}{1+e\cos v}\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \frac{2e\sin v}{(1+e\cos v)^2}\frac{d\zeta}{dv} + \frac{e^2+e\cos v+e^2\sin^2 v}{(1+e\cos v)^3}\zeta$$

helyettesítések eszközlése után a z koordináta közelítő egyenlete

$$\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \zeta = 0 \qquad 16)$$

alakban áll elő, melynek megoldása

$$\zeta = E\sin v + F\cos v, \qquad 17)$$

s mely a parameterek variatiója útján tüstént

$$z(1+e\cos v) = \mathfrak{E}\sin v + \mathfrak{F}\cos v + \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\left(\sin v\int\frac{Z\cos v}{(1+e\cos v)^3}dv\right. \\ \left. - \cos v\int\frac{Z\sin v}{(1+e\cos v)^3}dv\right) \qquad 18)$$

végleges integrálhoz vezet, melyben $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{F}$ az integratió szükséges két állandóját jelenti.

A 15) alatti helyettesítés ismételt alkalmazása:

$$x(1+e\cos v)=\xi\,;\quad y(1+e\cos v)=\eta \tag{19}$$

a többi két egyenletet is egyszerűsíti. A 14) csoport első két egyenlete lesz ily módon:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2}+\xi-\frac{3\cos v}{1+e\cos v}(\xi\cos v+\eta\sin v)&=\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{X}{(1+e\cos v)^3}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2}+\eta-\frac{3\sin v}{1+e\cos v}(\xi\cos v+\eta\sin v)&=\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)}\frac{Y}{(1+e\cos v)^3}
\end{aligned} \tag{20}$$

melyeket, jobb oldalaikat ismét 0 téve, iparkodunk integrálni.

Ha ezen feltételek mellett az első egyenletet $\sin v$, a másodikat $-\cos v$-vel szorozzuk és összeadunk, integrálható egyenletet nyerünk:

$$\frac{d\xi}{dv}\sin v-\frac{d\eta}{dv}\cos v-\xi\cos v-\eta\sin v=C_1. \tag{21}$$

Az első egyenletből következik továbbá:

$$\eta=\frac{1+e\cos v}{3\sin v\cos v}(\xi''+\xi)-\xi\operatorname{cotg} v, \tag{22}$$

mely az imént talált integrál egyenletbe téve ξ-ben a következőt adja:

$$\begin{aligned}
\sin v\cos v(1+e\cos v)\frac{d^3\xi}{dv^3}+(2+e\cos v-3\cos^2 v-2e\cos^3 v)\frac{d^2\xi}{dv^2}+\\
+\sin v\cos v(e\cos v-2)\frac{d\xi}{dv}+\\
+(2+e\cos v-2e\cos^3 v)\xi+3\sin^2 v\cos vC_1=0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Ennek megoldása C_1-gyel együtt a szükséges négy állandót hozza be, mely a 20) egyenletrendszernek megfelel.

A

$$\xi=C_2\sin v+\sin v\int U dv \tag{24}$$

helyettesítés a következő egyszerűbb egyenlethez vezet:

$$\sin^2 v \cos v (1+e\cos v)\frac{d^2U}{dv^2} + \sin v (2+e\cos v+e\cos^3 v)\frac{dU}{dv} -$$
$$-(\cos v+\cos^3 v+2e\cos^4 v)\,U+3\sin^2 v\cos v C_1=0, \qquad 25)$$

melyből a hasonló

$$U=C_3\sin v+\sin v\int V dv \qquad 26)$$

helyettesítés által végre lesz:

$$\sin v\cos(1+e\cos v)\frac{dV}{dt} + (2+e\cos v+2\cos^2 v+3e\cos^3 v)\,V+$$
$$+3C_1\cos v=0. \qquad 27)$$

Ha rövidség kedvéért

$$\omega=\int\frac{2+e\cos v+2\cos^2 v+3e\cos^3 v}{\sin v\cos v(1+e\cos v)}\,dv, \qquad 28)$$

akkor V integrálja is

$$V=e^{-\omega}\left(C_4-3C_1\int\frac{e^{+\omega}dv}{\sin v(1+e\cos v)}\right) \qquad 29)$$

alakban adott. Az ω kiszámításánál könnyítésül szolgálhat, hogy az integrálandó tört számlálója $(1+e\cos v)(1+3\cos^2 v)+\sin^2 v$ alakban írható; a kész elég egyszerű eredmény:

$$\omega=\lg\left(\frac{\sin^4 v}{\cos^2 v}(1+e\cos v)\right), \qquad 30)$$

a mivel végre

$$V=\frac{\cos^2 v}{\sin^4 v(1+e\cos v)}\left(C_4-3C_1\int\frac{\sin^3 v}{\cos^2 v}dv\right)$$

vagy kiszámítva:

$$V=\frac{C_4-6C_1\cos v-C_4\sin^2 v+3C_1\sin^2 v\cos v}{\sin^4 v(1+e\cos v)}. \qquad 31)$$

Az előbbi helyettesítésekre való tekintetből most már

$$\xi=C_2\sin v-C_3\sin v\cos v+\sin v\int dv\sin v\int V dv. \qquad 32)$$

A tényleges kiszámítás a következő quadraturák ismeretét követeli:

$$\int \frac{dv}{\sin^4 v(1+e\cos v)} = \frac{e}{3(1-e^2)}\sin^{-3}v - \frac{e^3}{(1-e^2)^2}\sin^{-1}v -$$
$$- \frac{1}{3(1-e^2)}\cos v\sin^{-3}v - \frac{2-5e^2}{3(1-e^2)^2}\cos v\sin^{-1}v + \frac{e^4}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E;$$
$$\int \frac{\cos v dv}{\sin^4 v(1+e\cos v)} = -\frac{1}{3(1-e^2)}\sin^{-3}v + \frac{e^2}{(1-e^2)^2}\sin^{-1}v +$$
$$+ \frac{e}{3(1-e^2)}\cos v\sin^{-3}v - \frac{e(1+2e^2)}{3(1-e^2)^2}\cos v\sin^{-1}v - \frac{e^3}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E;$$
$$\int \frac{dv}{\sin^2 v(1+e\cos v)} = -\frac{1}{1-e^2}\cos v\sin^{-1}v + \frac{e}{1-e^2}\sin^{-1}v -$$
$$- \frac{e^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}E;$$
$$\int \frac{\cos v dv}{\sin^2 v(1+e\cos v)} = \frac{e}{1-e^2}\cos v\sin^{-1}v - \frac{1}{1-e^2}\sin^{-1}v +$$
$$+ \frac{e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}E;$$

melyekben E mindig az excentrikus anomáliát jelenti, úgy hogy

$$E = 2\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{e+\cos v}{1+e\cos v}.$$

Ezen quadraturákkal lesz azután

$$\int V dv = \frac{C_4 e + 6C_1}{3(1-e^2)}\sin^{-3}v + \frac{C_4(1+2e^2)+3e(5+e^2)C_1}{3(1-e^2)^2}\cos v\sin^{-1}v$$
$$- \frac{C_4+6C_1 e}{3(1-e^2)}\cos v\sin^{-3}v - \frac{eC_4+3C_1(1+e^2)}{(1-e^2)^2}\sin^{-1}v +$$
$$+ \frac{e^2C_4+3C_1e(1+e^2)}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E. \qquad 33)$$

Az $\int dv\sin v\int V dv$-ben előforduló integrálok már nagyon egyszerűek, és csupán $\int E\sin v dv$ okozhatna nehézséget. Partiális integrátió által lesz azonban:

$$\int E\sin v dv = -E\cos v + \sqrt{1-e^2}\int\frac{\cos v dv}{1+e\cos v} = -$$
$$- E\cos v - \frac{1}{e}E + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}v.$$

Ezek tekintetbe vételével a 32) egyenlet lesz végre:

$$\xi = \frac{1}{3(1-e^2)^2}(C_4(2+e^2)+3eC_1(7-e^2))+C_2\sin v - \\ - \frac{eC_4+6C_1}{3(1-e^2)}\cos v - C_3\sin v\cos v - \\ - \frac{C_4(1+2e^2)+3eC_1(5+e^2)}{3(1-e^2)^2}\cos^2 v - \\ - \frac{eC_4+3C_1(1+e^2)}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E\sin v(1+e\cos v) \qquad 34)$$

és pusztán differentiálás által ebből a 22) egyenlet alapján η is vezethető le; a hosszadalmas számolás eredménye:

$$\eta = C_3+(eC_3-C_2)\cos v+C_3\cos^2 v - \\ - \frac{(1+2e^2)C_4+3C_1(5e+e^3)}{3(1-e^2)^2}\sin v\cos v - \\ - \frac{(2e+e^3)C_4+(2+3e^2+e^4).3C_1}{3(1-e^2)^2}\sin v + \\ + \frac{eC_4+3C_1(1+e^2)}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}E(1+e\cos v)(e+\cos v). \qquad 35)$$

E két egyenlet azonosan elégíti ki a 20) egyenletrendszert, ha $X=Y=0$ volna, mint arról közvetlenül is meggyőződtem esetleges számolási hibák kiküszöbölése végett.

A $C_1 \ldots C_4$ négy állandó helyett czélszerű lesz újakat bevezetni a következő határozatok nyomán:

$$\frac{C_4}{3(1-e^2)^2} = A; \quad \frac{3C_1}{3(1-e^2)^2} = B; \quad C_2 = C; \quad C_3 = D. \qquad 36)$$

Ezek bevezetései után integráljaink a következő alakot öltik:

$$\xi = ((2+e^2)A+(7e-e^3)B)+C\sin v - \\ -(e(1-e^2)A+2(1-e^2)B)\cos v - D\sin v\cos v - \\ -((1+2e^2)A+(5e+e^3)B)\cos^2 v - \\ - \frac{3}{\sqrt{1-e^2}}(eA+(1+e^2)B).E\sin v(1+e\cos v)$$

$$\eta = D(1+\cos^2 v) + (eD - C)\cos v -$$
$$-((1+2e^2)A + (5e+e^3)B)\sin v \cos v -$$
$$-((2e+e^3)A + (2+3e^2+e^4)B)\sin v +$$
$$+ \frac{3}{\sqrt{1-e^2}}(eA + (1+e^2)B) \cdot E(e+\cos v)(1+e\cos v). \quad 37)$$

III. A teljes differentiál-egyenlet megoldása.

Ha az eredeti 20) egyenletekre térünk vissza, ezek integrálját is a 37) alakban írhatjuk, ha az A, B, C, D állandók helyett megfelelő új függvényeket vezetünk be. Ha röviden

$$\frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)} \frac{X}{(1+e\cos v)^3} = X'; \quad \frac{a^3(1-e^2)^3}{k^2(1+m)} \frac{Y}{(1+e\cos v)^3} = Y' \quad 38)$$

írunk, akkor a következő egyenletek állanak:

$$\frac{dA}{dv}\left(-e(2+e^2)\sin v + 2(1+2e^2)\sin v\cos v - \right.$$
$$\left. - \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E(2e\cos^2 v + \cos v - e)\right) +$$
$$+ \frac{dB}{dv}\left(-(1+5e^2)\sin v + 2e(5+e^2)\sin v\cos v - \right.$$
$$\left. - \frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E(2e\cos^2 v + \cos v - e)\right) +$$
$$+ \frac{dC}{dv}\cos v - \frac{dD}{dv}(2\cos^2 v - 1) = X'$$
$$\frac{dA}{dv}\left((1+5e^2) + (e-e^3)\cos v - 2(1+2e^2)\cos^2 v - \right.$$
$$\left. - \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v (e^2+1+2e\cos v) E\right) +$$
$$+ \frac{dB}{dv}\left((8e+4e^3) + (1-e^4)\cos v - 2(5e+e^3)\cos^2 v - \right.$$
$$\left. - \frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E\sin v(1+e^2+2e\cos v)\right) +$$
$$+ \frac{dC}{dv}\sin v - \frac{dD}{dv}\sin v(e+2\cos v) = Y'$$

$$\frac{dA}{dv}\left((2+e^2)-e(1-e^2)\cos v-(1+2e^2)\cos^2 v-\right.$$
$$\left.-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\right)+$$
$$+\frac{dB}{dv}\left((7e-e^3)-2(1-e^2)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v-\right.$$
$$\left.-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}.E\sin v(1+e\cos v)\right)+$$
$$+\frac{dC}{dv}\sin v-\frac{dD}{dv}\sin v\cos v=0$$
$$\frac{dA}{dv}\left(-(1+2e^2)\sin v\cos v-(2e+e^3)\sin v+\right.$$
$$\left.+\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(1+e\cos v)(e+\cos v)\right)+$$
$$+\frac{dB}{dv}\left(-(5e+e^3)\sin v\cos v-(2+3e^2+e^4)\sin v+\right.$$
$$\left.+\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}.E(1+e\cos v)(e+\cos v)\right)-$$
$$-\frac{dC}{dv}\cos v+\frac{dD}{dv}(1+e\cos v+\cos^2 v)=0. \qquad 39)$$

Ha most röviden

$$\frac{dA}{dv}=A';\quad \frac{dB}{dv}=B'\ldots$$

és a négy egyenletnek A' és B'-t tartalmazó részeit sorban I, II, III és IV-gyel jelöljük, akkor egyenletcsoportunk áttekinthetőbben a következő módon is írható:

$$\mathrm{I}+C'\cos v-D'(2\cos^2 v-1)=X'$$
$$\mathrm{II}+C'\sin v-D'(e\sin v+2\sin v\cos v)=Y'$$
$$\mathrm{III}+C'\sin v-D'\sin v\cos v=0$$
$$\mathrm{IV}-C'\cos v+D'(1+e\cos v+\cos^2 v)=0. \qquad 40)$$

Az első és negyedik egyenlet összege, a második és harmadik különbsége a következő egyenletet adja:

$$\text{I}+\text{IV}+D'(2+e\cos v-\cos^2 v)=X';$$
$$\text{II}-\text{III}-D'(e\sin v+\sin v\cos v)=Y'$$

és ezekből D' eliminatiója után

$$(\text{I}+\text{IV})(e\sin v+\sin v\cos v)+(\text{II}-\text{III})(2+e\cos v-\cos^2 v)=$$
$$=X'(e\sin v+\sin v\cos v)+Y'(2+e\cos v-\cos^2 v), \qquad 41)$$

mely egyenlet már csak az A'-t és B'-t tartalmazza.

Ha ellenben az első és harmadik egyenletet levonjuk egymásból, miután ezt $\cos v$, emezt $\sin v$-vel szoroztuk; a másodikat és negyediket összeadjuk, miután sorban $\cos v$ és $\sin v$-vel szoroztuk, lesz:

$$\text{I}\sin v-\text{III}\cos v+D'(\sin v-\sin v\cos^2 v)=X'\sin v;$$
$$\text{II}\cos v+\text{IV}\sin v+D'(\sin v-\sin v\cos^2 v)=Y'\cos v,$$

melyekből levonás által egy újabb, csak A'-t és B'-t tartalmazó egyenletet nyerünk:

$$(\text{I}-\text{IV})\sin v-(\text{II}+\text{III})\cos v=X'\sin v-Y'\cos v. \qquad 42)$$

A 41) és 42) egyenletben lévő $\text{I}\pm\text{IV}$ és $\text{II}\pm\text{III}$ kifejezéseket kiszámítva, lesz:

$$\text{I}+\text{IV}=A'\Big(-(4e+2e^3)\sin v+(1+2e^2)\sin v\cos v+$$
$$+\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(2v+e^2\cos v-e\cos^2 v)\Big)+$$
$$+B'\Big((3+8e^2+e^4)\sin v+(5e+e^3)\sin v\cos v-$$
$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E(2v+e^2\cos v-e\cos^2 v)\Big);$$

$$\text{I}-\text{IV}=A'\Big(3(1+2e^2)\sin v\cos v$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(2\cos v+e^2\cos v+3e\cos^2 v)\Big)+$$
$$+B'\Big((1-2e^2+e^4)\sin v+3(5e+e^3)\sin v\cos v-$$
$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E(2\cos v+e^2\cos v+3e\cos^2 v)\Big);$$

$$\text{II}+\text{III}=A'\Big((3+6e^2)-3(1+2e^2)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(2+e^2+3e\cos v)\Big)+$$
$$+B'\Big((15e+3e^3)-(1-2e^2+e^4)\cos v-3(5e+e^3)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(2+e^2+3e\cos v)\Big);$$
$$\text{II}-\text{III}=A'\Big(-(1-4e^2)+2(e-e^3)\cos v-(1+2e)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e^2+e\cos v)\Big)+$$
$$+B'\Big((e+5e^3)+(3-2e^2-e^4)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v-$$
$$-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e^2+e\cos v)\Big).$$

Ezek behelyettesítése után a 42) egyenletben az A' teljesen kiesik, és marad:

$$(1-e^2)^2 B'=X'\sin v-Y'\cos v, \qquad 43)$$

míg a 41) egyenlet átmegy a következőbe:

$$-2(1-e^2)^2 A'-(e(1-e^2)^2-3(1-e^2)^2\cos v)B'=$$
$$=X'\sin v(e+\cos v)+Y'(2+e\cos v-\cos^2 v). \qquad 44)$$

Ebből és a megelőző egyenletből azután lesz:

$$(1-e^2)^2 A'=-(X'\sin v(e-\cos v)+Y'(1+\cos^2 v)). \qquad 45)$$

Ezen két értéknek folytatólagos behelyettesítése azon egyenletek egyikébe, melyek D'-n kívül csak az I, II, III, IV mennyiségeket tartalmazzák, ad:

$$(1-e^2)^2\sin v(e+\cos v)D'=X'\sin v\Big((2e+e^3)+(2+e^4)\cos v$$
$$-(2e+e^3)\cos^2 v-(1+2e^2)\cos^3 v-$$
$$-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e+\cos v)(1+e\cos v)\Big)+$$

$$+Y'\Big(-(2e^2+e^4)-3(e+e^3)\cos v-(1-e^4)\cos^2 v+$$

$$+3(e+e^3)\cos^3 v+(1+2e^2)\cos^4 v+$$

$$+\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e+\cos v)(e+\cos v+e^2\cos v+e\cos^2 v)\Big) \quad 46)$$

Végül pedig a 40) csoport bármely tagjából következik:

$$(1-e^2)^2\sin v(e+\cos v)C'=-X'\sin v\Big((5e^2-2e^4)+$$

$$+(3e+e^3-e^5)\cos v-(2+e^2)\cos^2 v-(4e-e^3)\cos^3 v-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)(e+\cos v)\Big)-Y'\Big(-(2e+e^3)-$$

$$-(2+5e^2-e^4)\cos v-2(e-e^3)\cos^2 v+(2+5e^2-e^4)\cos^3 v+$$

$$+(4e-e^3)\cos^4 v+\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(e^2+(2e+e^3)\cos v+$$

$$+(1+2e^2)\cos^2 v+e\cos^3 v)\Big); \quad 47)$$

némi összevonás után irhatjuk:

$$A=\mathfrak{A}-\int\frac{X'\sin v}{(1-e^2)^2}(e-\cos v)\,dv-\int\frac{Y'}{(1-e^2)^2}(1+\cos^2 v)\,dv$$

$$B=\mathfrak{B}-\int\frac{X'\sin v}{(1-e^2)^2}\,dv-\int\frac{Y'\cos v}{(1-e^2)^2}\,dv$$

$$C=\mathfrak{C}-\int\frac{X'}{(1-e^2)^2}\Big((5e-2e^3)-(2-3e^2+e^4)\cos v-$$

$$-(4e-e^3)\cos^2 v-\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\Big)\,dv-$$

$$-\int\frac{Y'}{(1-e^2)^2}\Big(-(2+e^2)\sin v-(4e-e^3)\sin v\cos v+$$

$$+\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}E(1+e\cos v)(e+\cos v)\Big)\,dv$$

$$D = \mathfrak{D} + \int \frac{X'}{(1-e^2)^2}\left((2+e^2)-(e-e^3)\cos v-(1+2e^2)\cos^2 v- \right.$$
$$\left. -\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\right)dv$$
$$+\int \frac{Y'}{(1-e^2)^2}\left(-(2e+e^3)\sin v-(1+2e^2)\sin v\cos v+ \right.$$
$$\left. +\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(e+\cos v)(1+e\cos v)\right)dv \qquad 48)$$

és ezen értékekkel a 20) rendszer teljes integrálja, tekintettel a 37) egyenletekre és a 38) és 19) jelzésekre lesz:

$$\xi=(1+e\cos v)x=A\left((2+e^2)-e(1-e^2)\cos v-(1+2e^2)\cos^2 v- \right.$$
$$\left. -\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\right)$$
$$+B\left((7e-e^3)-2(1-e^2)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v- \right.$$
$$\left. -\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\right)+$$
$$+C\sin v-D\sin v\cos v$$
$$\eta=(1+e\cos v)y=A\left(-(1+2e^2)\sin v\cos v-(2e+e^3)\sin v+ \right.$$
$$\left. +\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}E(e+\cos v)(1+e\cos v)\right)$$
$$+B\left(-(5e+e^3)\sin v\cos v-(2+3e^2+e^4)\sin v+ \right.$$
$$\left. +\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E(e+\cos v)(1+e\cos v)\right)-$$
$$-C\cos v+D(1+e\cos v+\cos^2 v), \qquad 49)$$

melyekben az A, B, C, D együtthatók természetesen az előbbi egyenletcsoportból veendők.

A 18) és 48—49) egyenlet teljes megoldása a 14) egyenletcsoportnak a szükséges hat állandóval: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ . . $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$.

Ha ezen egyenleteket az i-dik bolygó m-ik koordinátaközelítésére vonatkoztatjuk, akkor az $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{F}$, az X', Y', Z és x, y, z az im indexet, e, a, és m, v és E ellenben az i indexet kapják, a mennyiben minden közelítés számára ugyanazon bolygónál e, a és az m tömeg, v és E ugyanaz. n bolygó esetében tehát a teljes 14) egyenletrendszer a megkivánt $6n$ állandót adja. Miután azonban e rendszerek száma végtelen nagy, de úgy, hogy bennük a különböző m számára csak a jobb oldalak különbözők, könnyen hihetnők hogy az integrátió összesen $6mn$, tehát $m=\infty$ számára, végtelen sok állandót vezet be. Ez tévedés volna, a végtelen sok integrátió mellett is csak $6n$ állandónk van. Ha ugyanis valamely bolygó számára felírjuk az egymásra következő közelitéseket, pl.:

$$x_{i0},\ x_{i1},\ x_{i2},\ \ldots\ x_{im}$$

és ezeket sorban megszorozzuk: ε^0, ε^1, ε^2, $\varepsilon^3 \ldots \varepsilon^m \ldots$ hatványokkal és összeadjuk, akkor az A, B, C, D együtthatói függetlenek lévén m-től, a végtelen sok állandó a következő elrendezésben fordul elő:

$$\mathfrak{A}_{i0}+\varepsilon\mathfrak{A}_{i1}+\varepsilon^2\mathfrak{A}_{i2}+\cdots+\varepsilon^m\mathfrak{A}_{im}+\cdots$$

s hasonlóképen a többi öt is. Ez nyilván csak egyetlenegy $\mathfrak{A}_i$-vel jelölhető állandót jelent, úgy hogy minden egyes bolygó mozgása tényleg csak hat állandó által van meghatározva.

A számítás bonyolódott volta mellett fontosnak tartom a megjegyzést, hogy a 49) integrál 48) tekintetbevétele mellett 20)-ba helyettesítve tényleg $0=0$ azonos egyenlethez vezet. Az itt adott algebrai kifejezések tehát teljesen megbizhatók.

Különösen egyszerű eredményekre jutnánk, ha az osculáló pálya kör volna; ez esetben $e=0$ és $E=v=M$ a közép anomáliával egyenlő. Ekkor volna:

$$\begin{aligned}\xi=x=&(2-\cos^2 M)\,(\mathfrak{A}+\int X'\sin M\cos M dM-\int Y'(1+\cos^2 M)dM)-\\&-(2+3M\sin M)\,(\mathfrak{B}+\int X'\sin M dM-\int Y'\cos M dM)+\\&+\sin M\,(\mathfrak{C}+\int X'\,(2\cos M+3M\sin M)\,dM+\\&+\int Y'(2\sin M-3M\cos M)\,(dM)-\\&-\sin M\cos M\,(\mathfrak{D}+\int X'(2-\cos^2 M)\,dM-\int Y'\sin M\cos M dM);\end{aligned}$$

$$\eta = y = -\sin M \cos M \left(\mathfrak{A} + \int X' (\sin M \cos M dM - \right.$$
$$\left. - \int Y' (1 + \cos^2 M) dM \right) - (2 \sin M - 3M \cos M) \cdot$$
$$\left(\mathfrak{B} + \int X' \sin M dM - \int Y' \cos M dM\right) -$$
$$- \cos M \left(\mathfrak{C} - \int X' (2 \cos M + 3M \sin M) dM + \right.$$
$$\left. + \int Y' (2 \sin M - 3M \cos M) dM \right) +$$
$$+ (1 + \cos^2 M) \left(\mathfrak{D} + \int X' (2 - \cos^2 M) dM - \int Y' \sin M \cos M dM\right).$$

Ezen osculáló pálya a perturbátió elmélet eddigi eredményei szerint általában véve csak képzetes osculatió epocha mellett tételezhető fel; de ha ezen képzetes időpontot feltételeznők, a quadraturák valamivel egyszerűbb alakot öltenének, a mennyiben ekkor nem a különböző bolygók valódi anomáliája szerint történnék az integrátió, hanem azok közép anomáliája szerint, mely egyszerű, a folyó idővel arányos mennyiség.

Különben most már az általánosabb 7) egyenletrendszernek is könnyen felirhatjuk teljes integrálját. Ha az általános szokásnak megfelelőleg az ekliptikát választjuk közös koordinátasík gyanánt s erre vonatkoztatjuk a bolygó x', y', z' koordinátáit, melyek az osculáló pályasíkra, mint xy síkra vonatkozólag x, y, z voltak, akkor a következő transformátióval élünk:

Az (xyz) rendszert z tengelye körül forgatjuk, míg a perihélium felé fordított x tengely a csomóvonalba esik. Ha a perihélium távolsága a csomóponttól ω, akkor ezen rendszerben a koordináták értékei:

$$x_1 = x \cos \omega - y \sin \omega ; \quad y_1 = x \sin \omega + y \cos \omega ; \quad z_1 = z.$$

Ha most az x_1 tengely körül forgatjuk a coordinátarendszert, míg alapsíkja az ekliptikába nem jut, mire a pályahajlással egyenlő forgási szög kivántatik, akkor

$$x_2 = x_1 ; \quad y_2 = y_1 \cos i - z_1 \sin i ; \quad z_2 = y_1 \sin i + z_1 \cos i.$$

Végül pedig egy újabb forgatás a z_2 tengely körül az x_2 tengelyt az æquinoctium pontjába, a hosszúságok kezdőpontjába hozza. A forgási szög ez esetben a csomó hosszúságával Ω-val egyenlő és

$$x' = x_2 \cos \Omega - y_2 \sin \Omega ; \quad y' = x_2 \sin \Omega + y_2 \cos \Omega ; \quad z' = z_2.$$

A felírt egyenletek folytatólagos substitutiója a következő rendszerhez vezet:

$$\begin{aligned}
x' &= (\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i)\,x - \\
&\quad -(\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i)\,y + (\sin i\sin\Omega)\,z \\
y' &= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\,x + \\
&\quad +(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\,y - (\sin i\cos\Omega)\,z \\
z' &= (\sin\omega\sin i)\,x + (\cos\omega\sin i))\,y + (\cos i)\,z. \qquad 50)
\end{aligned}$$

Ha ezen egyenletekbe az x, y, z számára talált 48—49) eredményeket beviszszük, az általános, az ekliptikára vonatkozó megoldást kapjuk. Az a, e, ω, Ω, i és M_0 a két test problemának hat integrálási állandója, vagyis az osculáló pályának elemei, melyek ugyanazon bolygó számára állandók és ezért csak a bolygó indexével látandók el.

IV. A perturbátiószámítás menete.

Valamely tetszés szerint adott epochára kiveszszük a bolygók elliptikus elemeit, melyek a számítás egész menete alatt állandók maradnak. Ezek képviselik mintegy a 4) egyenletrendszer első egyenletének megoldását. Ezzel tüstént számíthatjuk ugyanezen rendszer következő egyenletét, melynek jobb oldalán

$$k^2\Sigma\mu_k\left(\frac{x_k - x_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{x_k}{r_k^3}\right); \qquad k^2\Sigma\mu_k\left(\frac{y_k - y_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{y_k}{r_k^3}\right);$$

$$k^2\Sigma\mu_k\left(\frac{z_k - z_i}{\rho_{ki}^3} - \frac{z_k}{r_k^3}\right)$$

mennyiségek tisztán csak az elliptikus mozgástól függenek, s melyek x_1, y_1, z_1 első koordinátaközelítéseket adják a 49), illetve 50) egyenlet szerint; ha ily módon az elsőrendű közelítés megvan minden n bolygó számára (s ez nem igényel egyebet, mint az integrál-egyenletben a bolygóindex variatióját), akkor kiszámítható ezen közelítéssel és a tiszta elliptikus mozgás segítségével, a második közelítő egyenlet jobb oldalán álló X, Y és Z, és ezzel ismét 49) vagy 50) szerint a második közelítés és így tovább. Ha az egyes közelítések megvannak, s ezekben μ alatt a bolygók tömegeit

értjük, akkor az egyes közelítések összege szolgáltatja a bolygók megfelelő koordinátáit az n bolygó rendszerében szükséges $6n$ tetszőleges állandóval, melyek még czélirányosan határozandók meg.

Némi különbséget tesz, vajjon a 49) egyszerűbb, vagy az 50) bonyolódottabb egyenletből indulunk ki. Az első esetben minden egyes koordináta közelítése ezen bolygó osculáló pályasíkjára, mint koordinátasíkra vonatkozik; az X, Y, Z jobb oldalok kiszámítása előtt tehát minden x, y, z ugyanazon fundamentális síkra, pl. az ekliptikára transformálandó. Ha ellenben az 50) egyenletrendszerből indulunk ki, akkor az egész számítás menete alatt több koordináta-transformatióra nem lesz szükségünk.

Ezen utasítások természetesen nem zárják ki mindazon könnyítéseket, melyek a gyakorlati számítás szempontjából meg vannak engedve. Feltehetjük például, mint ez az általános elméletben is többnyire szokásos, hogy a háborgó bolygók befolyása érezhetően nem változik, ha számukra a tényleges mozgás helyett állandóan a tiszta KEPLER-féle mozgást fogadjuk el, mi lényegileg azt mondja, hogy a háborgó tömegek és a perturbatiójuk szorzata elhanyagolható legyen. Ez esetben az n bolygó számára álló simultán $3n$ tagú differentiál-egyenletrendszerből csak azon háromtagú simultán rendszer marad, mely a perturbált bolygó mozgását írja le.

A gyakorlatban soha sem keressük a bolygó tényleges mozgását, hanem csupán perturbátióit, azaz a tiszta KEPLER-féle mozgástól való eltéréseit, még pedig vagy derékszögű, vagy poláris koordinátákban kifejezve, vagy végre a KEPLER-féle ellipsis elemeinek változásai által kifejezve. Mivel a 2) egyenletben x_0, y_0, z_0 már az elliptikus mozgás teljes kifejezője, azaz maga x, y és z azon eset számára, midőn $m_k=\mu_k=0$, tehát háborgó tömeg nincs, világos, hogy

$$\partial x=x_1+x_2+\cdots; \quad \partial y=y_1+y_2+\cdots; \quad \partial z=z_1+z_2+\cdots$$

kifejezik $\varepsilon = 1$ esetében a derékszögű koordináta-perturbatiókat. Ennélfogva a háborgó tömegek első hatványától függő perturbátiók, melyek gyakorlati czélokra a legtöbb esetben elegendők, a következő módon fejezhetők ki:

$$X' = \frac{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{1+m} \sum m_k \left(\frac{x_k - x}{\rho_k^3} - \frac{x_k}{r_k^3} \right),$$

$$Y' = \frac{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{1+m} \sum m_k \left(\frac{y_k - y}{\rho_k^3} - \frac{y_k}{r_k^3} \right),$$

$$Z' = \frac{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{1+m} \sum m_k \left(\frac{z_k - z}{\rho_k^3} - \frac{z_k}{r_k^3} \right),$$

mely értékek egyszerűen a 18) és 49) egyenletbe viendők, miáltal a feladat meg van oldva; X', Y' és Z' pedig egyszerűen az elliptikus mozgás elemeivel fejezendő ki. Könnyítésül szolgál azon megjegyzés, hogy mindhárom kifejezés a

$$V = \frac{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{1+m} \sum m_k \left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{x_k x + y_k y + z_k z}{r_k^3} \right)$$

úgynevezett háborgási függvény x, y, z szerinti differentiálhányadosa gyanánt állítható elő; ezen függvénynek valamely az idővel egyenletesen változó szög sokszorosainak cosinusai szerint haladó sorba való bontása pedig ismeretes és gyakran idézett. Ugyanaz szól azon képletekről is, melyek segítségével a derékszögű koordinátákban adott perturbátiókról átmehetünk a poláris perturbátiókra, vagy az elemek variátiójára.

Ha ugyanis pusztán elsőrendű háborgásokat veszünk tekintetbe, melyek számára poláris koordinátákban:

$$\partial r = \partial x \cos v + \partial y \sin v \quad \text{és} \quad r\partial v = \partial y \cos v - \partial x \sin v,$$

akkor a 49) egyenletek értelmében:

$$(1+e\cos v)\,\partial r = A\Big(-e(2+e^2)+(1-e^2)\cos v+e(1+2e^2)\cos^2 v+$$
$$+\frac{3e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} E\sin v(1+e\cos v)\Big)$$
$$+B\Big(-(2+3e^2+e^4)+2e(1-e^2)\cos v+$$
$$+e^2(5+e^2)\cos^2 v-\frac{3e(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E\sin v(1+e\cos v)\Big)$$
$$+D(1+e\cos v)\sin v;$$

$$(1+e\cos v)\,r\partial v = A\left(-(2+e^2)\sin v - e(1+2e^2)\sin v\cos v + \right.$$
$$\left. + \frac{3e}{\sqrt{1-e^2}} E(1+e\cos v)^2\right)$$
$$+ B\left(-(7e-e^3)\sin v - e^2(5+e^2)\sin v\cos v + \right.$$
$$\left. + \frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}} E(1+e\cos v)^2\right)$$
$$- C + D\cos v(2+e\cos v).$$

Az idevonatkozó egyenletek levezetése tehát bátran mellőzhető, legfölebb az elliptikus elemek változásáról szólhatnánk. A két test problemájának teljes megoldása tudvalevőleg ezen alakban is irható:

$$xy' - yx' = c_1; \quad xz' - zx' = c_2; \quad yz' - zy = c_3$$

$$x\left(\frac{k^2(1+m)}{r} - y'^2 - z'^2\right) + (yy' + zz')x' + f_1 = 0$$

$$y\left(\frac{k^2(1+m)}{r} - x'^2 - z'^2\right) + (xx' + zz')y' + f_2 = 0$$

$$z\left(\frac{k^2(1+m)}{r} - x'^2 - y'^2\right) + (xx' + yy')z' + f_3 = 0$$

$$k^2(1+m)\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right) + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

$$E - e\sin E = k\sqrt{\frac{1+m}{a^3}}(t-t_0), \quad r = a(1-e\cos E)$$

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^3}\sin E,$$

hol az utolsó három egyenlet helyébe a következő is léphet

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}; \quad r(1+e\cos v) = a(1-e^2);$$

$$x(1+e\cos v) = a(1-e^2)\cos v; \quad y(1+e\cos v) = a(1-e^2)\sin v.$$

A vonásos mennyiségek itt az idő szerint vett differentiálhányadosokat jelölnek és az integratió állandói a, c_1, c_2, c_3,

f_1, f_2, f_3 és t_0, tehát kettővel kelleténél több. Ennek megfelelőleg áll még a következő két feltételi egyenlet:

$$f_1c_3-f_2c_2+f_3c_1=0, \qquad \frac{k^2(1+m)}{a}=\frac{k^4(1+m)^2-(f_1^2+f_2^2+f_3^2)}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}.$$

Mindezen egyenletek még akkor is érvényeseknek tekinthetők, ha két test helyett többet veszünk tekintetbe, csakhogy akkor az integratió állandói az idővel általában véve lassan változó mennyiségek lesznek. Ha tehát az idézett egyenletekbe a 48—49) egyenleteket helyettesítjük, a $c_1 \ldots f_3$, t_0 időfüggvényekké válnak, melyekből a pálya most már változó elemei ismeretes módon kifejezhetők. A fél nagy tengely, excentricitás, perihélium hosszúsága, csomópont hosszúsága, a hajlásra és a perihélium idejére állanak ugyanis a következő egyenletek:

$$\frac{k^2(1+m)}{a}=\frac{k^4(1+m)^2-(f_1^2+f_2^2+f_3^2)}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}; \qquad e=\frac{\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}}{k^2(1+m)};$$

$$\operatorname{tang}\pi=\frac{f_2}{f_1}; \quad \operatorname{tang}\Omega=\frac{c_3}{c_1}; \quad \operatorname{tang} i=\frac{\sqrt{c_2^2+c_3^2}}{c_1};$$

$$t_0=t-\sqrt{\frac{a^3}{k^2(1+m)}}\left(\arcsin\frac{y}{a\sqrt{1-e^2}}-\frac{ey}{a\sqrt{1-e^2}}\right),$$

melyekhez rendesen a perihélium csomótávolsága:

$$\omega=\pi-\Omega$$

is járul. A folyó időre vonatkozó differentiálhányadosok a 12) egyenlet szerint a valódi anomáliában is fejezhetők ki, úgy, hogy pl.

$$x'=k\sqrt{(1+m)\,a\,(1-e^2)}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{dx}{dv}$$

s i. t. Ha mindez egyenleteket variáljuk és ∂x, ∂y, ∂z alatt értjük a perturbátiókat, akkor az elemek variatiói ∂a, ∂e ... elsőrendű megközelítésben tüstént felirhatók.

A mi végül az állandók meghatározását illeti, arra szolgál azon megjegyzés, hogy a 48—49) egyenletrendszer a két test mozgását adja, ha perturbáló tömegek nincsenek; azaz $X'=Y'=$

$=Z'=0$ számára a pont mozgása az osculáló pályában megy végbe. Ámde ez esetben $A=\mathfrak{A}$; $B=\mathfrak{B}$; $C=\mathfrak{C}$; $D=\mathfrak{D}$ és $v=0$ számára:

$$E=0,\quad x(1+e\cos v)=a(1-e^2)\quad \text{és}\quad y(1+e\cos v)=0.$$

Ebből:

$$\mathfrak{A}-2\mathfrak{B}=\frac{a}{1-e}\qquad \text{és}\qquad \mathfrak{C}=(2+e)\mathfrak{D}.$$

Ellenben

$$v=180^\circ \text{ számára: } E=\pi;\quad x(1+e\cos v)=-a(1-e^2)$$
$$\text{és}\quad y(1+e\cos v)=0,$$

a miből ismét:

$$\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}=-\frac{a}{1+e}$$

és

$$+3\pi\sqrt{1-e^2}\,(\mathfrak{A}e+\mathfrak{B}(1+e^2))=\mathfrak{C}+(2-e)\mathfrak{D}.$$

Ezen négy egyenlet megoldása után:

$$\mathfrak{A}=\frac{ae}{1-e^2};\qquad \mathfrak{B}=-\frac{a}{2(1-e^2)};$$

$$\mathfrak{C}=-\frac{3\pi}{8}(2+e)\sqrt{1-e^2}\,a;\qquad \mathfrak{D}=-\frac{3\pi}{8}\sqrt{1-e^2}\,.\,a \qquad 51)$$

és mivel az osculáló ellipsisben $z=0$ állandóan, a 18) egyenlet szerint még:

$$\mathfrak{E}=0;\quad \mathfrak{F}=0, \qquad 52)$$

a mivel az összes állandók meg vannak határozva. Ez állandók természetesen, miként azon egyenletek is, melyekből levezettük, a pályasíkra mint fundamentális síkra vonatkoznak; ha alapsík gyanánt az ekliptikát választanók, akkor a teljesebb 50) egyenletrendszer volna választandó, úgy hogy ez esetben az $\mathfrak{A}\ldots\mathfrak{F}$ állandókban a és e-n kivül még ω, Ω és i is szerepelne.

Hátra van még, hogy a 6) egyenletbe bevezetett X, Y, Z, vagy a 38) egyenlet szerint behozott X', Y', Z' mennyiségek számára alkalmas definitiót adjunk.

Legyen e czélból rövidség kedveért

$$-k^2\frac{x_i}{r_i}+\Sigma k^2 m_k\left(\frac{x_k-x_i}{\rho_{ki}^3}-\frac{x_k}{r_k^3}\right)=\Xi(\varepsilon), \qquad 53)$$

ha t. i. benne a 2) alatti helyettesítést végezve gondoljuk. Hasonlóképen definiáljuk x-nek y és z-vel való felcserélése által $H(\varepsilon)$ és $Z(\varepsilon)$-t.

Az 1) egyenletek elseje most már tekintettel 13)-ra a következő alakban is írható:

$$\frac{d^2x_i}{dv_i^2}(1+e_i\cos v_i)-2e_i\sin v_i\frac{dx_i}{dv_i}=\frac{a_i^3(1-e_i^2)^3}{k^2(1+m_i)}\frac{\Xi(\varepsilon)}{(1+e_i\cos v_i)^3} \quad 54)$$

Ámde az m-dik koordinátaegyenlet 14) ezen egyenlet ε hatványai szerint való kifejtésének m-dik tagja, tehát azonos

$$\frac{d^2x_{im}}{dv_i^2}(1+e_i\cos v_i)-2e\sin v_i\frac{dx_{im}}{dv_i}=$$
$$=\frac{a_i^3(1-e_i^2)^3}{k^2(1+m_i)}\frac{1}{m!}\frac{\Xi^{(m)}(0)}{(1+e_i\cos v_i)^3} \quad 55)$$

egyenlettel, melyben $\Xi^{(m)}(0)$ azon értéket képviseli, melyet $\Xi(\varepsilon)$ m-szeres differentiatió és $\varepsilon=0$ tétele után felvesz. Ezen egyenlet tehát megegyezik a 14) csoport elsejével, a miből következik

$$X'_{im}=x_{im}-3\cos v_i(x_{im}\cos v_i+y_{im}\sin v_i)+\frac{1}{m!}\frac{r_{i0}^3}{k^2(1+m_i)}\Xi^{(m)}(0)$$
$$Y'_{im}=y_{im}-3\sin v_i(x_{im}\cos v_i+y_{im}\sin v_i)+\frac{1}{m!}\frac{r_{i0}^5}{k^2(1+m_i)}H^{(m)}(0)$$
$$Z'_{im}=z_{im}+\frac{1}{m!}\frac{r_{i0}^3}{k^2(1+m_i)}Z^{(m)}(0). \quad 56)$$

A legfontosabb kérdés most már, valjon a 48—49) megoldások behelyettesítése a 2) egyenletbe convergens sort adnak-e? Mivel úgy 48) mint 49)-ben az egy és ugyanazon bolygóhoz tartozó X'-ek és Y'-ok mindig ugyanazon együtthatókkal vannak szorozva, úgy ezen kérdés egyszerűen így is tehető: convergens-e az

$$\varepsilon X'_{i1}+\varepsilon^2X'_{i2}+\varepsilon^3X'_{i3}+\cdots \quad \text{és} \quad \varepsilon Y'_{i1}+\varepsilon^2Y'_{i2}+\varepsilon^3Y'_{i3}+\cdots$$

sor $\varepsilon=1$ számára? A mondott helyettesítés ugyanis $x(1+e\cos v)$-nek pl.

$$B\left((7e-e^3)-2(1-e^2)\cos v-(5e+e^3)\cos^2 v-\right.$$
$$\left.-\frac{3(1+e^2)}{\sqrt{1-e^2}}E\sin v(1+e\cos v)\right)$$

tagjában a következő eredményt adja:

$$\mathfrak{B}_i\left((7e_i-e_i^3)-2(1-e_i^2)\cos v_i-(5e_i+e_i^3)\cos^2 v_i-\right.$$
$$\left.-\frac{3(1+e_i^3)}{\sqrt{1-e_i^2}}E_i\sin v_i(1+e_i\cos v_i)\right)+$$
$$+\int\frac{dv_i\sin v_i}{(1-e_i^2)^2}(X'_{i1}\varepsilon+X'_{i2}\varepsilon^2+\cdots)-$$
$$-\int\frac{dv_i\cos v_i}{(1-e_i^2)^2}(Y'_{i1}\varepsilon+Y'_{i2}\varepsilon^2+\cdots),$$

miáltal állításunk bebizonyítottnak tekinthető.

Ha most X'_{im} értékeit behelyettesítjük, akkor ezek egy része, t. i.

$$\frac{r_{i0}^3}{k^2(1+m_i)}\left(\frac{\varepsilon}{1!}\Xi'(0)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\Xi''(0)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\Xi'''(0)+\cdots\right)$$

egy 53)-ban részletesen megadott függvény TAYLOR-sor alakja; a második

$$(1-3\cos^2 v)(x_{i0}+\varepsilon x_{i1}+\varepsilon^2 x_{i2}+\cdots)-$$
$$-3\sin v_i\cos v_i(y_{i0}+\varepsilon y_{i1}+\varepsilon^2 y_{i2}+\cdots)$$

összetartására vonatkozólag azonban eleve mitsem mondhatunk. Csak annyi bizonyos, hogy x_{im} a perturbáló tömegek m-dik hatványával lévén megszorozva, e koordinátaközelítések e tömegek kicsinysége folytán gyorsan fogynak, úgy hogy a levezetett eredmény numerikus alkalmazásokra jogosít, a nélkül azonban, hogy az összetartást bebizonyíthatnók.

V. Az elmélet alkalmazása egy eddig nem tárgyalt esetre.

A Nap felületén végbemenő folyamatok miatt a Nap potentiálja nem tekinthető állandónak, és épúgy változik a Föld vonzása is a felületén végbemenő meteorologiai processusok folytán, a melyek félévenként tudvalevőleg tetemes víz- és levegőmennyiségeket szállítanak egyik félgömbről a másikra. Felmerülhet tehát a kérdés, vajjon e változásokból megmagyarázható-e pl. a Hold évszázados acceleratiójának egy része, vagy legalább azon sajátságos zökkenései a Földnek, melyek létezését a nehézségi változások pontos megfigyelése lehetségeseknek tartja.

Egyszerűség kedveért azt képzelhetjük, hogy a Nap tevékenysége abban áll, hogy egy μ tömegű concentrikus gömbréteget pl. felhős protuberantia alakjában a Nap felületére emel s bizonyos idő mulva ismét leterit. Ha a Nap tömegét ismét egységül veszszük, akkor a Földre gyakorolt állandó potentiál

$$V=k^2\frac{1+m}{r},$$

holott a változó potentiál

$$V=k^2\frac{1-\mu'+m}{r}+k^2\frac{\mu'}{l} \qquad 57)$$

által fejezhető ki, melyben l a μ' tömeg távolsága a Föld középpontjától. Ha a μ tömeg heliographikus szélessége φ és hosszúsága vonatkoztatva a korong látszó közepén átmenő első meridiánra λ, akkor távolsága a korong közepétől θ, hol is

$$\cos\theta=\cos\varphi\cos\lambda \qquad 58)$$

és

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{a}\left(1-2\frac{R}{a}\cos\theta+\frac{R^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{R}{a}\cos\theta+\cdots\right), \qquad 59)$$

mivel a Nap sugarának második hatványa mérve a Föld naptávolsága által már elhanyagolható $\left(\frac{R}{a}=\frac{1}{215}\right)$. E szerint a Nap potentiálja

$$V=k^2\frac{1+m}{r}+\frac{k^2\mu' R}{r^2}\cos\lambda\cos\varphi \qquad 60)$$

alakban írható. Bárminő legyen is a változás, melyet a Nap tömege szenved, ez mindig

$$\mu'=\Sigma\mu_n\sin(nt+\alpha_n) \qquad 61)$$

alakban állítható elő, mely sorból itt egyszerűség kedveért csak $\mu\sin(nt+\alpha)$ tagot tartjuk meg. A talált megoldás lineár volta mellett összegezés által tüstént μ' bonyolódottabb kifejezéséhez mehetünk át.

A Föld relativ mozgása most már

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2\frac{1+m}{r^3}x=-\frac{2k^2\mu R}{r^4}\cos\varphi\cos\lambda\sin(nt+\alpha)x \qquad 62)$$

egyenlet által adott, melyhez hasonló járul az y és z koordináta számára is. Tekintettel μ kicsinységére az

$$x-x_0=\delta x;\quad y-y_0=\delta y;\quad z=\delta z \qquad 63)$$

háborgások mindenesetre oly kicsinyek, hogy azok második hatványai elhanyagolhatók; xy koordinátasíkja gyanánt választjuk magát az ekliptikát, miért is $z_0=0$. Ha hasonlóképen elhanyagoljuk a perturbátiók szorzatát μ-vel, akkor a 14) egyenletcsoporthoz jutunk, ha

$$X=-\frac{2k^2\mu R x_0}{r_0^4}\cos\varphi\cos\lambda\sin(nt+\alpha);$$

$$Y=-\frac{2k^2\mu R y_0}{r_0^4}\cos\varphi\cos\lambda\sin(nt+\alpha);\quad Z=0, \qquad 64)$$

vagy ebből folyólag:

$$X'=-\frac{2\mu}{1+m}R\cos v\cos\varphi\cos\lambda\sin(nt+\alpha);$$

$$Y'=-\frac{2\mu}{1+m}R\sin v\cos\varphi\cos\lambda\sin(nt+\alpha), \qquad 65)$$

hol $1+m$ helyett még bátran az egység tehető.

A tényleges alkalmazásban nem tesz lényeges különbséget, ah a földpályát körnek tekintjük, a 49) egyenletrendszer helyett

tehát a 345—346. oldalon lévőt választjuk. Ha a Föld szögsebességét w-vel, a Napét q-val jelöljük, akkor a könnyű quadraturák kiszámitása után a következő eredményhez jutunk:

$$\partial\xi = (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2M)\,\mathfrak{A} - (2 + 3M\sin M)\,\mathfrak{B} + \sin M\,\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\sin 2M\,\mathfrak{D} -$$

$$- \tfrac{1}{4}\mu w R\cos\varphi\left(-\frac{\sin((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \right.$$

$$+ \frac{\sin((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} + \frac{\sin((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w} -$$

$$\left. - \frac{\sin((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w}\right) +$$

$$+ \tfrac{3}{4}\mu w R\cos\varphi\left(\frac{\sin((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} - \right.$$

$$- \frac{\sin((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \frac{\sin((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w} -$$

$$\left. - \frac{\sin((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w}\right) +$$

$$+ 2\mu w R\cos\varphi\sin wt\left(\frac{\cos((n+q)t+\alpha-\gamma)}{n+q} + \frac{\cos((n-q)t+\alpha-\gamma)}{n-q}\right),$$

$$\partial y = -\tfrac{1}{2}\sin 2wt\,.\,\mathfrak{A} - (2\sin wt + 3wt\cos wt)\,\mathfrak{B} - \cos wt\,.\,\mathfrak{C}'$$

$$+ (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2wt)\,\mathfrak{D} + \tfrac{1}{4}\mu w R\cos\varphi\left(\frac{\cos((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \right.$$

$$+ \frac{\cos((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} + \frac{\cos((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w} +$$

$$\left. + \frac{\cos((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w}\right) +$$

$$+ \tfrac{3}{4}\mu w R\cos\varphi\left(\frac{\cos((n+q+w)t+\alpha+\gamma)}{n+q+w} + \right.$$

$$+ \frac{\cos((n+q-w)t+\alpha+\gamma)}{n+q-w} + \frac{\cos((n-q+w)t+\alpha-\gamma)}{n-q+w} +$$

$$\left. + \frac{\cos((n-q-w)t+\alpha-\gamma)}{n-q-w}\right) -$$

$$- 2\mu w R\cos\varphi\cos wt\left(\frac{\cos((n+q)t+\alpha+\gamma)}{n+q} + \frac{\cos((n-q)t+\alpha-\gamma)}{n-q}\right) \quad .. 66)$$

Az állandókat azon megfontolás által határozzuk meg, hogy a háborgás elesik, ha $\mu=0$; ebből következik

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=\mathfrak{D}=0. \tag{67}$$

Mivel

$$x=r\cos wt\,; \quad y=r\sin wt,$$

úgy következik ∂x és ∂y kicsinysége folytán:

$$\begin{aligned}\partial r&=\partial x\cos v+\partial y\sin v\\ r\partial v&=\partial y\cos v-\partial x\sin v,\end{aligned} \tag{68}$$

vagy kiszámítva és kellőképen összevonva:

$$\begin{aligned}\partial r=\mu R\cos\varphi\Big(&\frac{w^2}{(n+q)^2-w^2}\sin\left((n+q)t+\alpha+\gamma\right)+\\ &+\frac{w^2}{(n-q)^2-w^2}\sin\left((n-q)t+\alpha-\gamma\right)\Big)\\ r\partial v=2\mu R\cos\varphi\Big(&\frac{w^3}{(n+q)\left((n+q)^2-w^2\right)}\cos\left((n+q)t+\alpha+\gamma\right)+\\ &+\frac{w^3}{(n-q)\left((n-q)^2-w^2\right)}\cos\left((n-q)t+\alpha-\gamma\right)\Big)\end{aligned} \tag{69}$$

Tehát azon nevezetes eredményhez jutunk, hogy valamely protuberantia által okozott perturbátió tisztán csak annak lefolyási periodusától és a Nap tengelyforgásának tartamától függ, ellenben teljesen független az év hosszától; az aperiodikus tagok mind kiestek, és ennélfogva hasonló folyamatok a Nap vagy a Föld felületén nem alkalmasak a Hold évszázados acceleratiójának magyarázatára, ellenben teljesen megmagyarázhatják a Föld rövid lefolyású trepidátióját. Ha ugyanis a protuberantia lefolyása gyors, n tehát elég nagy, akkor mellette q elhanyagolható, a mennyiben a Nap tengelyforgása folytán, mely synodice 27,5 napot tesz, q igen kicsiny, és a zökkenés időbeli lefolyása igen közel ugyanaz, mint a protuberantiáé vagy a napfolté. Ha ellenben a jelenség több tengelyforgáson át marad meg, mire — bár ritkábban — szintén vannak esetek, akkor n hanyagolható el q mellett, és a zökkenés periodusa közel a Nap tengelyforgásának periodusával esik össze. Mivel hasonló egyenletek állanak a Nap mágneses hatására is, világos immár, hogy HORNSTEIN a mágneses elemek változásából

oly meglepő pontossággal tudta levezetni a Nap synodikus tengelyforgását. Elég érzékeny gravitatiós variometerekkel bizonyára sikerül ez úton is megállapítani a Nap forgását.

$11^1/_9$ év lefolyása alatt a Nap tevékenysége maximumot és minimumot ér el. Ekkor nagyszámú folt, fáklya és protuberantia helyezkedik el egy mindkét oldalt mintegy 30°-os æquatori övön, melyek a minimum idején ismét teljesen eltünnek. Habár e jelenség nem felel meg teljesen azon feltevéseknek, melyeket a potentiál változására vonatkozólag tettünk (most helyesebben azt kellene gondolnunk, hogy a μ tömegű gömbhéj æquatori sávolylyá változott), egyenleteink legalább némi becslést fognak megengedni. Ez esetben a Nap tengelyforgása jelentőséggel nem bir, q és γ nullnak vehető, s ennélfogva a Föld a napfoltperiodus alatt egy vele isochron parallacticus és hosszúságbeli lengést végez. FÖRSTER a berlini csillagvizsgáló meridiánkörének oszlopaiban sajátságos kis mozgást vett észre, mely teljesen párhuzamban halad a Nap tevékenységének 11·11 évi periodusával, s mely nagyon jól magyarázható az itt adott elmélettel.

Ellentállás nélküli térben az egyszer nyert impulsus folyton tartó rezgésekre ad alkalmat. Noha ezek, a tömegáthelyezéseket periodikusoknak tételezve fel, szigorúan periodikusok, a folytonos superpositiók által mégis tetemes értéket érhetnének el, úgy hogy ∂r amplitudoja folyton nő, és utóbb is a rendszer stabilitását kérdésessé tehetné. A dolog korántsincs úgy. Ha ugyanis feltételezzük, hogy a Nap tevékenysége által áthelyezett tömegek érezhetően egyenlők, akkor az összes parallacticus háborgások összege az

$$\int_0^\infty \frac{\cos(n \pm q)t}{w^2-(n\pm q)^2}\, d(n\pm q) = \frac{\pi}{2w}\sin wt \qquad 70)$$

integráltól függ, a mennyiben a tömegáttétel periodusa minden képzelhető értéket elérhet. Ennek megfelelőleg végtelen hosszú idő alatt

$$\Sigma \partial r = -\pi\mu w R \cos\varphi \,.\, \sin wt \qquad 71)$$

lehet csak, tehát oly háborgás, melynek periodusa az év, s melynek amplitudoja mindig igen kicsiny, μ-rendű marad.

Ha a tömegáttétel periodusa olyan, hogy

$$(n \pm q) = w, \tag{72}$$

akkor a perturbatió látszólag végtelen nagyra növekedik. Ha azonban

$$(n \pm q) = w + \partial, \quad \lim \partial = 0,$$

hol ∂ oly kicsiny, hogy négyzete elhanyagolható, s általában véve 0 felé convergál, akkor

$$\frac{w^2}{(n \pm q)^2 - w^2} \sin((n \pm q)t + (\alpha \pm \gamma)) = \frac{w}{2\partial} \sin(wt + (\alpha \pm \gamma)) + \tfrac{1}{2} wt \cos(wt + (\alpha \pm \gamma)) \tag{73}$$

A kifejezés első része a $\mathfrak{C} \sin wt$ elhagyott tag alá subsumálható, úgy hogy pl. $n+q=w$ esetében marad:

$$\partial r = \tfrac{1}{4} \mu R \cos\varphi \left(2wt \cos(wt + \alpha + \gamma) + \frac{w}{q(q-w)} \sin((w-2q)t + \alpha - \gamma) \right) \tag{74}$$

míg a második kifejezés, ha ismét $\frac{w^2}{2(n \pm q)\partial} \cos(wt + \alpha \pm \gamma)$ a $\mathfrak{C} \cos wt$ taggal egyesíttetik ad, ha ugyancsak $n+q=w$

$$r\partial v = \tfrac{1}{2} \mu R \cos\varphi \left(\frac{w^3}{(w-2q)\, q(q-w)} \cos((w-2q)t + \alpha - \gamma) - 2wt \sin(wt + \alpha + \gamma) \right) \tag{75}$$

Mindkét kifejezésben már előfordulnak aperiodikus tagok is, mi különösen a Földre nézve fontos.

Ha ugyanis a Nap felületén végbemenő tömegáthelyezések az évi periodushoz volnának kötve, akkor ∂v aperiodikus volta miatt az év hosszában tetemes nem periodikus változások jöhetnének létre. Ugyde az évi periodus a Nap felületi tömegátvitelében képviselve nincs, miért is az év hossza a Nap potentiáljának periodikus változása daczára sæculáris háborgásokkal nem bír.

Kissé mások a viszonyok, ha a Föld és a Holdból álló rend-

szert tekintjük. Ekkor $\frac{2\pi}{w}$ a Hold siderikus keringését jelenti, melynek lefolyása alatt tetemes víztömeg vándorol a tengerjárási jelenség úgynevezett félhavi periodusa miatt az egyik félgömbről a másikra. Miután e tömeg nagy közelítéssel a Holdat napi mozgásában követi, a Föld tengelyforgásától teljesen eltekinthetünk, úgy hogy $q=0$ és $\gamma=0$ tehető. Ez esetben azután ismét az $\frac{w}{q(q-w)}$ $\sin((w-2q)t+\alpha-\gamma)$ és $\frac{w^3}{q(w-2q)(q-w)}\cos((w-2q)t+\alpha-\gamma)$ tag a már elhagyott tagok alá foglalható, s ennélfogva a Hold perturbatiója az árapály félhavi periodusa miatt lesz:

$$\partial r=\tfrac{1}{2}\mu R\cos\varphi\,.\,wt\cos(wt+\alpha)$$

és

$$r\partial v=-\mu R\cos\varphi\,.\,wt\sin(wt+\alpha) \qquad 76)$$

n perioduson át ezen két perturbatió összege:

$$\int_0^{\frac{2n\pi}{w}} wt\cos(wt+\alpha)\,dt=\frac{2\pi}{w}n\sin\alpha$$

és

$$\int_0^{\frac{2n\pi}{w}} wt\sin(wt+\alpha)=-\frac{2\pi}{w}n\cos\alpha$$

lévén, a következő alakban áll elő:

$$(\partial r)=\tfrac{1}{2}\frac{2\pi}{w}n\mu R\cos\varphi\sin\alpha \text{ és } (r\partial v)=\frac{2\pi}{w}n\mu R\cos\varphi\cos\alpha, \qquad 77)$$

melyben φ, minthogy a tömegáttételek mindig az æquator tőszomszédságában mennek végbe, nullnak vehető. α pedig azon idő, melylyel ez áttételek a Hold perigæum átmenete után kezdetüket veszik. A mennyiben a perigæumban a tengerjárási jelenségek nagyobbodnak, α igen kicsinynek vagy éppen 0-nak veendő, úgy hogy parallacticus egyenlőtlenség nem is keletkezik, a hosszuságbeli változás pedig közel

$$r(\delta v) = \frac{2\pi}{w} n_{\prime\prime} R \qquad 78)$$

értéket vesz fel. E szerint tényleg az idővel nagyobbodó acceleratiót kapunk, melynek előjele megegyezik az észlelt holdgyorsulással, s mely mintegy 5″ tesz ki egy évszázad alatt. Ha e szerint n az egy században foglalt holdkeringések száma, úgy hogy $\frac{2\pi}{w} n = 36525$ nap, $\frac{R}{r} = \frac{1}{60}$ és $\delta v = 5$ arc 1″, akkor $\mu = 398{,}3.10^{-10}$ földtömeggel egyenlő.

Ha ellenben a Napon egy protuberantiát vagy napfoltot tételezünk fel, melynek tömege 0,000.001 naptömeg, s melynek lefolyása sorban 10 percz, 1 óra vagy 11,11 év; ha továbbá

$$R = 691{,}600.000 \text{ m} \text{ és } \frac{R}{r} = \frac{1}{215},$$

akkor a 69) egyenletek sorban a következő értékekhez vezetnek:

$$\delta r = 2498.10^{-10} \sin((n+q)t+\alpha+\gamma) + 2501.10^{-10} \sin((n-q)t+\alpha-\gamma) \text{ (m)}$$

vagy

$$= 8972 \cdot 10^{-9} \quad \ldots \qquad \ldots \quad +9030 \cdot 10^{-9} \quad \ldots \qquad \ldots$$

vagy

$$= 3{\cdot}851 \qquad \ldots \qquad \ldots \quad +3{\cdot}851 \qquad \ldots \qquad \ldots$$

és hasonlóképen

$$\delta v = 1326 \cdot 10^{-20} \cos((n+q)t+\alpha+\gamma) + 1328 \cdot 10^{-20} \cos(n-q)t+\alpha-\gamma) \text{ (ivmp)}$$

vagy

$$= 2854 \cdot 10^{-18} \quad \ldots \qquad \ldots \quad +2882 \cdot 10^{-18} \quad \ldots \qquad \ldots$$

vagy

$$= 7691 \cdot 10^{-10} \quad \ldots \qquad \ldots \quad +8006 \cdot 10^{-10} \quad \ldots \qquad \ldots$$

úgy, hogy a hosszúságbeli változások minden esetben teljesen érezhetetlenek, míg a parallactikus háborgások különösebb esetekben, tetemes és nagy magasságra törő tömegáthelyezés mellett érezhetőkké válhatnak.

Mindezen háborgások azonban, mindig feltéve, hogy $\mu = 0{,}000.001$, bármily különféle periodusok alatt menjenek is végbe, együttvéve nem tehetnek ki a 71) egyenlet értelmében többet, mint 37 metert, úgy hogy az egyes háborgások között idők folytán tetemes kiegyenlítődések jönnek létre.

Azon változások, melyek periodusa az év, tetemesebb hatásokat szülhetnek; a 76) egyenlet ugyanis a fenti feltevések mellett ad:

$$\delta r = 5{,}93 \,.\, t \cos(wt+a) \text{ meter} \quad \text{és} \quad \delta v = 0''000{\cdot}016\, t \sin(wt+a),$$

úgy hogy az év meghosszabbodása még ezen kedvezőtlen és a természetben általában elő nem forduló esetben sem volna tekintetbe vehető.

Számbelileg még kedvezőbb eredményekhez jutunk, ha a tényeknek jobban megfelelve, a tömegátvitel módját

$$\mu' = \mu \sin^2(nt+a) = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2}\cos(2nt+2a) \qquad 79)$$

alakban szabjuk meg. Ez esetben ugyanis a tömegátvitel nem változtat előjelt, tehát nem megy át ellentétesébe. A 69) eredmények még most is érvényesek, ha egyszer n helyébe 0-t, a helyébe $\frac{\pi}{2}$-t, máskor meg n helyébe $2n$-t és a helyébe $2a + \frac{3}{2}\pi$-t irunk, mindkét esetben μ-t $\frac{\mu}{2}$-lel helyettesítjük és az egyes eredményeket összegezzük. A teljes integrál tehát

$$\begin{aligned}
\delta r = \frac{\mu}{2} R \cos\varphi \Big(& \frac{2w^2}{q^2-w^2}\cos(qt+\gamma) - \\
& - \frac{w^2}{(2n+q)^2-w^2}\cos((2n+q)t+\gamma+2a) - \\
& - \frac{w^2}{(2n-q)^2-w^2}\cos((2n-q)t+2a-\gamma)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\delta v = \mu R \cos\varphi \Big(& - \frac{2w^3}{q(q^2-w^2)}\sin(qt+\gamma) + \\
& + \frac{w^3}{(2n+q)((2n+q)^2-w^2)}\sin((2n+q)t+2a+\gamma) + \\
& + \frac{w^3}{(2n-q)((2n-q)^2-w^2)}\sin((2n-q)t+2a-\gamma)\Big) \qquad 80)
\end{aligned}$$

Ha a tömegátvitel ismét ugyanazon periodus alatt játszódik le, mint a Föld vagy a Hold keringése, azaz, ha

$$2n+q=w \tag{81}$$

s ha a tisztán w-t tartalmazó tagokat ismét elvetjük, a következő eredményhez jutunk :

$$\delta r = \frac{\mu}{2} R\cos\varphi\left(\frac{2w^2}{q^2-w^2}\cos(qt+\gamma)+\tfrac{1}{2}wt\sin(wt+2\alpha+\gamma)-\right.$$
$$\left.-\frac{w^2}{4q(q-w)}\cos((w-2q)t+2\alpha-\gamma)\right)$$
$$r\delta v=\mu R\cos\varphi\left(-\frac{2w^3}{q(q^2-w^2)}\sin(qt+\gamma)+\tfrac{1}{2}wt\cos(wt+2\alpha+\gamma)+\right.$$
$$\left.+\frac{w^3}{4q(q-w)(w-2q)}\sin((w-2q)t+2\alpha-\gamma)\right). \tag{82}$$

Minthogy végül a keringési idő alatt lejátszódó tömegelhelyezés megváltozásánál, mint pl. a tengerjárási jelenségeknél, a tengelyforgás szerepet nem játszik, $q=0$ és $\gamma=0$ tehető. Az ily módon kiváló tagok : $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}((w-2q)t+2\alpha-\gamma)$ ismét az integratió elvetett állandóival egyesíthetők, és mivel

$$\lim\left(\frac{\sin(qt+\gamma)}{q(q^2-w^2)}\right)_{q=0,\ \gamma=0} = -\frac{t}{w^2}$$

úgy lesz végül :

$$\delta r = \frac{\mu}{2} R\cos\varphi\,(-2+\tfrac{1}{2}wt\sin(wt+2\alpha))$$
$$r\delta v=\mu R\cos\varphi\,(2wt+\tfrac{1}{2}wt\cos(wt+2\alpha)), \tag{83}$$

hol a parallacticus perturbatió első $-\mu R\cos\varphi$ értékű tagja is az állandókkal egyesíthető. Ha ismét $\varphi=0$, $\mu=1$ milliomod és $\frac{R}{r}=\frac{1}{60}$, akkor wt egy század alatt $2\pi\frac{36525}{27\cdot3}$ lévén :

$$\delta v=(57''.78+14''.45\cos(wt+2\alpha))\,t, \tag{84}$$

hol most t évszázadokban fejezendő ki. Ha az évszázados acceleratio $5''$, akkor ennek magyarázatára $\mu=866\cdot10^{-10}$ nagyságú tömeg elegendő.

GYLDÉN (Astron. Nachr. 109. No 2593) a két test problemájának azon esetét tárgyalja, melyben a centrális test tömege az idővel arányosan megnövekszik. Ez esetben, μ-vel jelölve az időegység alatti tömegszaporodást, írhatunk:

$$X' = -2\mu Rt \cos M; \quad Y' = -2\mu Rt \sin M; \quad M = wt \qquad 85)$$

feltéve, hogy az új tömeg az R sugarú gömb egy pontjában halmozódik; ez esetben a körmozgásra vonatkozó egyenletek (pag. 15) adnak:

$$\partial r = \mathfrak{A} \cos M - 2\mathfrak{B}(\cos M + \sin^2 M) + \mathfrak{D} \sin M - \\ - 2\mu R\left(\frac{1}{w} \sin 2M - t \cos 2M\right)$$

$$r\partial v = -2\mathfrak{A} \sin M + (3M + 2 \sin M - 2 \sin M \cos M)\mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \\ + 2\mathfrak{D} \cos M - 2\mu R\left(\frac{2}{w} - wt^2\right), \qquad 86)$$

mely egyenletekben az összes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ állandók 0, a mennyiben eltünő μ tömeg mellett háborgásnak helye nincs.

Ezen egyenletek ismét mutatják, hogy tömegszaporodás esetén a Hold sæculáris gyorsulást szenved, s mérlegelni engedik azon befolyást, melyet a Föld felületén pl. a hegyképződés gyakorolhatna a Hold futására. Jelenlegi acceleratiójának magyarázatára elegendő volna azon feltevés, hogy a Himalaya hegységgel körülbelül egyenlő tömeg emelkedett egy évszázad alatt.

Ha ellenben a tömegszaporodást előidéző anyag gömbhéj alakjában rakódik le, akkor a potentiál megváltozása $\frac{\mu t}{r}$, és GYLDÉN esetéhez jutunk. Az állandók kellő megválasztása után

$$\partial r = -\mu r^2\left(\frac{1}{w} \sin 2M - t \cos 2M\right)$$

$$r\partial v = -\mu r^2\left(\frac{2}{w} - wt^2\right) \qquad 87)$$

s ebből az egyenletből következtette már OPPOLZER, hogy talán a Földre minduntalanul lehulló meteoritok megnövelhetnék a Föld tömegét annyira, hogy ennek hatása a Hold mozgásában felfedezhető. Ha a kosmikus csapadék magassága az egész föld felületén 2·8 mm egy évszázad alatt, akkor ez már elegendő a Hold észlelt

acceleratiójának magyarázatára. Erre szükséges volna, hogy a világür sűrűsége átlag a levegőének 3,76 billiomodát tegye.

Meglehetősen biztosan állíthatjuk tehát, hogy a Hold évszázados acceleratiója részben a tengerjárási surlódásból következik, részben azonban a Földnek tömegnagyobbodásával és mindazon potentiálváltozásaival jár, melyet benne hegyképződés és általában a periodikus tömegváltozás, de periodikus, meteorologiai vagy tengerjárási jelenségekkel járó tömegáttételek is okoznak, feltéve, hogy ezek periodusa a siderikus hónappal egyenlő. A Nap potentiálváltozásai ugyan nem változtathatják meg a földi év hosszaságát, de igenis előidézhetnek kivételesebb esetekben még épen érezhető parallactikus trepidatiókat.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. október 19.-én tartott üléséből.)

SÚLY- ÉS TÉRFOGATVÁLTOZÁS A SZESZES ERJEDÉSNÉL.

KOSUTÁNY TAMÁS l. tagtól.

A szeszes erjedés bizonyára egyike a legtüzetesebben tanulmányozott vegytani folyamatoknak, mit eléggé megokol annak elsőrendű ipari és nemzetgazdasági fontossága. Nem szándékozom a különböző erjedési elméletek fejtegetésébe ereszkedni, hanem kizárólag a szeszes erjedésnél mutatkozó súly- és térfogatváltozást teszem tanulmány tárgyává.

Ezen fejtegetések kiindulási pontjául azon általánosan ismert tény szolgálhat, hogy az erjedésnél a dextrose és a lævulose molekula, minden további nélkül két molekula æthyl-alkohol és két molekula szénsavra hasad. A nádczukor és maltose molekula ellenben előbb egy-egy tömecs vizet vevén fel, négy molekula alkoholt és négy molekula szénsavat ad, mit képletben a következőképen fejezhetünk ki:

$$C_6H_{12}O_6 = 2C_2H_6O + 2CO_2$$

vagy számokban* 179·58 gm. dextrose ad 91·8 gm. alkoholt és 87·78 gm. szénsavat, azaz 100 gm. dextrose ad 51·12 gm. alkoholt és 48·88 gm. szénsavat és

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O = 4C_2H_6O + 4CO_2$$

vagy számokban

341·20 gm. nádczukor + 17·96 gm. víz =
=183·6 gm. alkohol + 175·6 gm. szénsav azaz
100 gm. nádczukor + 5·26 gm. víz =
= 53·81 gm. alkohol + 51·45 gm. szénsav=105·26.

* L. Mayer számai $C=11·97$, $O=15·96$.

Elméletileg tehát:

100 gm. vízmentes dextrose ad 51·12 gm. alkoholt és 48·88 gm. szénsavat vagy az alkohol fajsulyát 0·7943 * véve, 64·37 cm.^{3} vízmentes alkoholt.

100 gm. nádczukor ad 53·81 gm. alkoholt és 51·45 gm. szénsavat, azaz 67·74 cm.^{3} vízmentes szeszt.

Az erjedési folyamat azonban nem megy ilyen simán, mert, mint általánosan ismeretes, a czukorból szeszen és szénsavon kivül még glycerin-succinsav stb. is keletkeznek.

Pasteur szerint nyerhető a gyakorlatban: **

100 gm. vízmentes dextroseból 60·58 cm.^{3} = 48·04 gm. szesz
100 gm. nádczukorból 63·77 cm.^{3} = 50·57 gm. szesz

Balling szerint (Bierbrauerei 1865.):

Pálinka czefrénél 61·02 cm.^{3} = 48·391 gm. szesz
Bor czefrénél 63·02 cm.^{3} = 49·977 gm. szesz.

---

* Az absolut alkohol fajsúlyát 0·7943-nak vettem fel. Tralles szerint az alkohol súlya 15·55° C. = 12·44° R. = 0·7939 kg. s ha 1 liter ugyanezen hőfokú víz 0·9991 kg.-ot nyom, a valódi fajsúly 0·7946.

Nálunk az alkohol-táblázatok 15° C.-ra vonatkoznak, 1 liter 15° C. alkohol súlya 0·7950 kg., de a 15° C. víz 0·99915 kg.-ot nyomván, az alkohol fajsúlya 0·7943.

** A glycose erjedési terményeit a különböző vizsgálók a következőnek találták. 100 gm. glycose ad:

	Pasteur	Jodlbauer	A. Meyer	Tollens	Lippman	Sieben
Alkohol	48·3 qm. = 60·58 cm^3	48·64	—	—	—	47·3
Szénsav	46·4	46·54	37·42—42·2	41·02—43·01	45·26	—
Glycerin	2·5—3·6	3·71	—	—	—	—
Succinsav	0·4—0·7		—	—	—	—
Egyéb	1·3	0·94	—	—	—	—

A nádczukor erjedésére következő adatokkal rendelkezünk; 100 gm. nádczukor ad:

	Pasteur	Balling	Jodlbauer
Alkohol	51·1 gm.	51·111 gm.	51·11 gm.
Szénsav	49·2 «	48·889 «	49·05 «
Glycerin	3·4 «	—	3·96 «
Succinsav	0·65 «	—	

Évek során számos erjesztési kisérletet végeztem különösen borélesztőkkel, s ezek átlagából a PASTEUR által közölt számokat nagyon megközelítő érték számítható ki. Az erjedésnél a szénsav elszállása folytán beálló súlyveszteség normalis viszonyok között olyan állandó, hogy ezt a folyadékban levő czukornak meghatározására is javaslatba hozták.*

Az erjedésnél bekövetkező térfogatváltozás azonban ez ideig nem képezte tanulmány tárgyát, noha elméleti szempontból ennek is lehet fontosságot tulajdonítani. Számítsunk ennélfogva előbb s azután lássuk, miképen egyezik a számítás eredménye a kisérlet eredményével.

Mindenek előtt ki kell számítanunk 100 gm. különböző czukornak térfogatát, a mi a következő képlet $V = \frac{P}{S}$ alkalmazása mellett semmi nehézséggel nem jár, feltéve, hogy az illető czukorféle fajsúlya eléggé pontosan ismeretes.

Dextrose.

BÖDECKER szerint a vízmentes glycose fajsúlya 1·5384 **
s így 100 gm. glycose térfogata . . . . . 65·002 cm.³
A glycosehydrat fajsúlya ellenben . . . 1·5714
s így 100 gm. glycosehydrat térfogata . . . 63·64 cm.³

Nádczukor.

A nádczukor fajsúlyát sokan meghatározták, ezen meghatározások azonban 1·63-tól 1·58-ig ingadozó értékeket mutatnak; én a KOPP által talált 1·580 fajsúlyt tartom leghelyesebbnek, azért is, mert ez a GERLACH által kiszámított 1·5813-mal, melynek pontossága általánosan elismert, majdnem teljesen egyezik.

E szerint a nádczukor fajsúlya 15° C.-nál 1·580
s így 100 gm. nádczukor térfogata 15° C.-nál 63·29 cm.³

* TOLLENS, JODLBAUER, BAU, EINHORN stb.

** Milyen hőfokra vonatkozik ezen fajsúly, nem tudtam kinyomozni. E tekintetben nagy differentiák lelhetők: GUÉRIN-VARRY l. 3861, HEINTZ l. 386 fajsúlyt találtak, de alig dolgoztak egészen kifogástalan anyaggal.

Ezen számokat azonban közvetlenül nem használhatjuk számításaink alapjául, mert a czukor oldott állapotban némileg másképen viselkedik.

Így például GERLACH, SCHEIBLER és MATEGCZEK szerint a 10%-os nádczukor-oldat fajsúlya 17·5/17·5° C.-ra vonatkozva 1·040104.

100 cm.³ 10%-os nádczukor-oldat súlya tehát

	104·0104 gm.
ebben czukor	10·0000 gm.
ebben víz	94·0104 gm.
Összesen	104·0104 gm.

Ha most felteszszük, hogy a víz fajsúlya 17·5° C.=1, akkor 100 cm.³ 10%-os czukor-oldatban van:

100 cm.³—94·0104 cm.³ = 5·9896 cm.³ czukor, holott az imént 100 gm. czukor térfogatát 63·29 cm.³-nek, illetve 10 gm.-ét 6·329 cm.³-nek számítottuk; a különbség tehát a két számítás között 6·329—5·9896=0·3394 cm.³ vagy miután a 17·5° C. víz fajsúlya a 4° C. vízre vonatkozva 0·99875,

a 94·0104 gm. 17·5°-nál mért víz valódi térfogata

$$94{\cdot}0104 : 0{\cdot}99875 = 94{\cdot}1285 \text{ cm.}^3,$$

ezt levonva a 100 térfogatból 100—94·1285=5·8715 cm.³ térfogat marad a 10 gm. nádczukorra.

Az oldásnál tehát összehuzódás történik és ez GERLACH szerint 10% nádczukor-oldatra 0·99819, azaz 1·0000 térfogat 0·99819-re huzódik össze; s így a czukor elméleti sűrűsége folyékonyan képzelve más, nevezetesen ugyancsak GERLACH szerint* 1·56086; 100 gm. feloldott nádczukor térfogata tehát nem

$$63{\cdot}29 \text{ cm.}^3, \text{ hanem } 64{\cdot}067 \text{ cm.}^3$$

SALOMON szerint** a 10%-os dextrose-oldat fajsúlya 17·5/17·5° C.-nál 1·0381.

---

* Die Chemie der Zuckerarten. Dr. E. O. LIPPMANN. Braunschweig 1895. 607 lap.

** Berichte der deutschen chem. Gesellsch. XIV. 2711.

100 cm.³ 10%-os glycose v. dextrose-oldat súlya tehát	103·81 gm.
ebben dextrose	10·00 «
ebben víz	93·81 «
Összesen	103·81 gm.

Feltéve ismét, hogy 17·5° C. víz fajsúlya =1, mondhatjuk, hogy 100 cm.³ 10%-os dextrose-oldatban van 93·81 cm.³ víz és 100—93·81 cm.³ = 6·19 cm.³ czukor, holott a dextrose térfogatát a fajsúlyból 6·5002 cm.³-nek találtuk, a különbség tehát 0·3102 cm.³ (6·5002—6·19=0·3102 cm.³). A glycose oldásánál is történik tehát összehuzódás, melynek nyomát az irodalomban — már a mennyire rendelkezésemre áll — nem találtam.

Hönig és Tesser * szerint a kristályos víztelen lævulose fajsúlya 1·6691, s így 100 gm. térfogata 59·912 cm.³, a 10%-os oldat fajsúlya 17·5/17·5° C.-nál 1·0387.

100 cm.³ 10%-os lævulose-oldat súlya	103·87 gm.
ebben lævulose	10·00 «
ebben víz	93·87 «
Összesen	103·87 gm.

Feltéve, hogy a 17·5° C. víz fajsúlya =1, mondhatjuk, hogy 100 cm.³ 10%-os lævulose-oldatban van 93·87 cm.³ víz és 6·13 cm.³ lævulose, holott a lævulose fajsúlyából térfogatát 5·9912 cm.³-nek számítottuk; a helyett, hogy már most azt mondanók, hogy a lævulose másképen viselkedik az oldásnál, mint a nádczukor és a dextrose, azt hiszem azt jelenthetem ki, hogy ezen czukorfélék fajsúlyának meghatározása revisiora szorul.

Lássuk most a következő táblázatos számítást, melynek alapját azon feltétel képezi, hogy:

1. *Nádczukor* fajsúlya 1·580 (Gerlach), oldatban 1·56086, térfogata 64·067 cm.³, ad szeszt 53·81 gm.-ot = 67·84 cm.³

2. *Dextrose vagy glycose* fajsúlya 1·5384 (Bödecker), térfogata 65·002, ad szeszt. 51·12 gm.-ot = 64·45 cm.

* * *

* Monatshefte für Chemie. IX. 562.

Nádczukor fs. 1·580 Gerlach; oldatban 1·5606, térfogata 0·64067, ád szeszt 0·5381 gm = 0·6784 cm³.

Dextrose fs. 1·5384 Bödecker; térfogata 0·65002, ád szeszt 0·5112 gm = 0·6445 cm³.

		5%		10%		15%		20%	
		nádczukor	dextrose	nádczukor	dextrose	nádczukor	dextrose	nádczukor	dextrose
1	Fajsuly $^{17.5}/_{17.5}$	1·01969	1·0192	1·040104	1·0381	1·06128	1·0571	1·08323	1·0762
2	100 cm³-ban van czukor gm	5·0985	5·0960	10·4104	10·381	15·92	15·8565	21·66	21·524
3	Czukor-térfogat cm³	3·2664	3·3125	6·6636	6·7478	10·199	10·307	13·877	13·991
4	A czukornak megfelel szesz cm³	3·4588	3·2844	7·0560	6·690	10·800	10·2195	14·694	13·872
5	Viz cm³ (czukor cm³—100)	96·7336	96·6875	93·3364	93·2522	89·801	89·693	86·123	86·009
6	Szesz cm³+viz cm³	100·1924	99·9719	100·3924	99·9422	100·601	99·9125	100·817	99·881
7	Összehuzódás	—0·206	—0·194	—0·432	—0·434	—0·731	—0·729	—1·074	—1·073
8	Összes térfogat	99·9864	99·7779	99·9604	99·5082	99·970	99·1835	99·733	98·808
9	Viz Brix szerint	—	96·915	—	93·745	—	90·513	—	87·195
	Szesz	—	3·2844	—	6·690	—	10·2195	—	13·872
10	Összes térfogat	—	100·1994	—	100·435	—	100·7325	—	101·067
	8 és 10 átlag	—	99·988	—	99·97	—	99·95	—	99·987

Annak tisztába hozatalára, miképen viselkednek tényleg az erjedő folyadékok, számos kisérletet tettem. Erjedő folyadékul Siciliából származó condenzált mustot használtam, melyet jellel ellátott palaczkban engedtem kierjedni, a palaczk egy kénsavval töltött kotyogóval volt elzárva, ennek tetejére ismét egy chlorcalciummal töltött csövet helyeztem, ily módon a kénsav csak azon vizpárákat kötötte meg, melyeket az erjedésnél származó szénsav ragadott magával, a külső levegőből azonban a chlorcalcium cső közbeiktatásánál fogva nedvesség nem juthatott a kénsavba. Az erjedő folyadékokba továbbá egy $^1/_5°$ C.-ra osztott hőmérőt helyeztem, hogy a térfogatváltozás megállapításánál a hőfok az erjedés befejeztével ugyanaz legyen, mint az erjedés kezdetén volt.

Ezen kisérletekből egy pár példát legyen szabad felsorolni:

I. kisérlet. 1896 junius 25-től julius 8-ig.

1. *Súlyviszony. Erjedés előtt:*

Erjesztő palaczk súlya 83·3855 gm.
Erjesztő palaczk + hőmérő súlya 89·9645 «

Erjesztő palaczk + hőmérő + must erjedés *előtt* ... 612·9720 gm.
Levonva a palaczk és hőmérő súlyát ... ... 89·9645 «
Kierjesztendő must ... 523·0075 gm.

Erjedés után:

Az edény súlya ... ... 581·4500 gm.
Levonva a tarát ... ... 89·9645 «
Az újbor súlya ... ... 491·4855 gm.

A kénsavval telt kotyogó súlya erjedés után ... ... 30·529 gm.
« « « « « « előtt ... ... 30·040 «
A szénsav által elragadott víz mint súlyszaporulat ... 0·489 gm.
Súlyvesztesége a mustnak 523·0075—491·4855 = 31·5220 gm.
Levonva a kotyogó súlyszaporodását ... ... — 0·4890 «
Valóban elszállt CO_2 = 31·0330 gm.

2. *Térfogat viszony:* Erjedés előtt 17·5° C-nál.

A must térfogata levonva a hőmérő térfogatát 500—5·55= =494·45 cm.³ Erjedés után némi apadás mutatkozott, ezt destillált vízzel ugyancsak 17·5°-nál feltöltve a súly 582·240 gm. Levonva ebből a feltöltés előtti súlyt 582·240—581·450=0·790 gm., vagy 1 gm. vizet 1 cm.³-el egyenlőnek véve hiány 0·790 cm.³, levonva ebből a kotyogó súlygyarapodását 0·790—0·489=0·201 cm.³ a valódi hiány, mi igen csekély, kivált ha meggondoljuk, hogy az elszálló CO_2 valamelyes alkoholt is ragadhatott magával.

3) *Elemzés:*

A must fajsúlya 1·0577=14·54% extract; összesen 523·0075 gm.-ban 523·0075×14·54=76·0453 gm. extract.

A szesztelenített újbor fajsúlya 1·0068 = 1·77%, összesen 491·4855 gm.-ban 491·4855×1·77=8·699 gm. extract.

Kierjedt czukor 76·0453—8·699 gm.=67·3463 gm.
Képződött szesz fajsúlya 0·9888=6·47 gm. 100 cm.³-ben
=8·15 cm.³
494·45 cm.³-ben, tehát 31·99, illetve 40·297 cm.³ szesz.

Az eltünt czukor térfogata *

64·3763 gm.×0·6364=40·969 cm.³; 64·3763 gm.×0·65=41·844 cm.³.

A képződött szesz térfogata 40·297 cm.³; szesz térf. 40·297 cm.³
Kettő közti különbség 0·672 cm.³; 1·547 cm.³

Vagy a különbséget az erjedés előtti térfogat százalékára számítva
=−0·13 −0·312

A mi már az észlelési hibák közé esik.
Tekintetbe veendő még azonban:

* Az eltünt czukor térfogatát egyszer glycose hydratnak, máskor anhydridnek számítom s azért a szorzó egyszer 0·6364, máskor 0·65, nem lévén bizonyos, hogy az oldott czukor térfogatának számításánál melyik a helyes.

1. A czukor eltünésével az általa okozott összehuzódás megszünt s ez *

Scheibler szerint		Brix szerint
+ 1·8235 cm.³		1·152 cm.³
0·6760 «		0·676 «
+ 2·4995 cm.³	illetve	+ 1·828 cm.³

2. A folyadék szénsavval ** van telítve s ez térfogat gyarapodást okoz.

Levonásba helyezendő azonban az alkohol oldása által okozott összehuzódás, melyet —2·1260 cm.³-nek számítottam, s igy a különbség

$$2{\cdot}4995 - 2{\cdot}1260 = +0{\cdot}3735 \text{ cm.}^3,$$

illetve

$$+1{\cdot}828 - 2{\cdot}126 = -0{\cdot}298 \text{ cm.}^3.$$

Vagy e két szám között keresve az igazat

$$+0{\cdot}3735 - 0{\cdot}298 = +0{\cdot}0755$$

egy oly kis számot kapunk, hogy bátran elmondhatjuk, hogy az erjedés előtti és utáni térfogat ugyanaz; azaz, hogy az erjedés folytán a folyadék térfogata nem változik.

Ezen számításoknál nem feledkeztem meg arról, hogy az erjedésnél élesztő keletkezik, mely a fenékre ülepszik, s minden esetre a folyadékban oldva levő anyagokat sűrűsíti meg. Ezen élesztő mennyiséget a fenti esetben 3·232 gm.-nak találtam, térfogata pedig 2·016 cm.³-t tett.

---

* A czukor contractiója az oldásnál

Scheibler szerint: $v = 0{\cdot}0273731\,x - 0{\cdot}000114939\,x^2 - 0{\cdot}00000158792\,x^3$.

Brix szerint: $v = 0{\cdot}0288774\,x - 0{\cdot}000083613\,x^2 - 0{\cdot}0000020513\,x^3$.

** Az oldott szénsav-térfogat nagyobbító hatását következőleg számítom:

A folyadék térfogata 494·45 cm.³, ebben szesz

8·1% × 494·45 = 39·5 cm.³ ez old × 2·969 = 77·775 cm.³ CO_2 17·5°-nál
marad 454·9 cm.³ víz ez old × 0·9082 = 413·140 « « «
Összesen = 490·91 cm.³ « «

1 liter CO_2 nyom 1·9712 gm. × 490·91 = 0·9677 gm. CO_2 van elnyelve s ez nagyobbítja az őtet elnyelő folyadék térfogatát 17·5°-nál +0·676 cm.³-rel.

II. kisérlet. 1896 junius 21-től julius 16-ig.

1. *Súlyviszony erjedés előtt:*

Erjesztő palaczk + hőmérő súlya ... ... 102·847 gm.
Palaczk súlya a musttal ... ... 619·1285 gm.
Így az erjesztendő must súlya

$$619{\cdot}1285 - 102{\cdot}847 = 516{\cdot}2815 \text{ gm.}$$

Erjedés utáni súly ... ... 589·2634
Levonva a palaczk súlyát ... ... 102·8470
A kierjedt must súlya ... ... 486·4164

A kotyogó súlya erjedés után ... 27·150
« « « « előtt ... 26·692 } különbség 0·458 gm.

Súly vesztesége a mustnak 516·2815—486·4164 = 29·8651 gm.
Levonva a kotyogó gyarapodását... ... ... = 0·4580 «
Valóban elszállt CO_2 = 28·4071 gm.

2. *Térfogat erjedés előtt:*

A must térfogata 17·5°-nál 500, levonva a hőmérő térfogatát: 500·0 cm.^{3}—11·2 cm.^{3}=488·8 cm.^{3}

Erjedés után némi apadás mutatkozván, vízzel feltöltve súlya 590·247 gm., ebből levonva a feltöltés előtti súlyt
589·2634 «
0·9836 gm. vagy felvéve 1 gm.=1 cm.^{3}=0·9836 cm.^{3}

levonva ebből a kotyogó súlyszaporodását ... ... 0·4580 «
Valódi hiány ... 0·5256 cm.^{3}

Elemzés:

A must fajsúlya 1·0562=13·761% extract, összesen 516·2815 gm.-ban 516·2815×13·761%=61·0455 gm. extract.

A szeszteleníttett újbor fajsúlya 1·0088 = 2·20% extract, összesen 486·4164×2·20=10·7011 extract.

Kierjedt czukor $71{\cdot}0455 - 10{\cdot}7011 = 60{\cdot}3444$ gm.

Képződött szesz fajsúlya $0{\cdot}98938 = 6{\cdot}34$ gm. 100 cm.^{3}-ben

$= 7{\cdot}89$ cm.^{3} = « «

Összesen $488{\cdot}8 \times 7{\cdot}89 = 30{\cdot}9899$ gm. illetve $38{\cdot}566$ cm.^{3}

Az eltünt czukor térfogata

$60{\cdot}3444 \times 0{\cdot}6364 = 38{\cdot}4032$ cm.^{3}; $60{\cdot}3444 \times 0{\cdot}65 = 39{\cdot}244$ cm.^{3}

Ezek a szesz térfogatával összehasonlítva

$$38{\cdot}566 - 38{\cdot}4032 = -0{\cdot}1638 \text{ cm.}^3$$

illetve

$$+38{\cdot}5660 - 39{\cdot}224 = -0{\cdot}658 \text{ cm.}^3$$

az eredmény.

Ezek szerint elméletileg levezettük s kisérletileg is beigazoltuk, hogy az erjedésnél beálló térfogatváltozás vagy épen semmi vagy csak igen csekély, s nézetem szerint kijelenthető, hogy

1. *A folyadék térfogata az erjedés következtében nem változik, vagyis az erjedés előtti és utáni térfogat ugyanaz.*

Ha azonban ez áll, akkor a képződött szesz térfogatának egyenlőnek kell lennie az erjedésnél felbontott czukor térfogatával.

Számítsunk:

100 térfogat vízmentes dextrose súlya 153·84 gm., ez ad 51·12% súly szeszt, ennek fajsúlya $0{\cdot}79321 = 64{\cdot}447$ cm.^{3} alkohol, $64{\cdot}447 \times 153{\cdot}84 = 99{\cdot}145$ térfogat szesz.

Ezen szám oly közel áll a 100-hoz, hogy tekintettel arra, hogy fajsúly meghatározásokban esetleg már a harmadik tizedesben hiba lehet, bebizonyítottnak vehetjük, hogy:

2. *Az erjedésnél képződött szesznek térfogata az erjedésnél felbontott czukor térfogatával egyenlő.*

Ha ez áll, akkor az egyidejüleg képződött szénsav térfogatának is egyenlőnek kell lenni úgy a felbontott czukor, mint a képződött alkohol térfogatával. Ezen állítás azonban nem vonatkozhatik a gáznemű, hanem csak a folyékony szénsav térfogatára.

A folyékony szénsav fajsúlyára nézve következő adatokkal rendelkezünk.

	Andreffs	Winkelman	Dammer
$-10°$	= 0·9951	—	—
$0°$	= 0·947	0·95	—
$+15$	= —	0·86	—
$+20$	= 0·8266	—	—
$+25$	= 0·7831	—	30°-nál 0·60
$+31·35$ kritikus fok	—	0·464	—

Miután 100 súlyrész czukorból 48·88 gm. CO_2 keletkezik, ha ennek fajsúlyát 0·7519-nek veszszük fel, akkor térfogata 65·002, mit 153·84-gyel, a 100 térfogat czukor súlyával szorozva és 100-zal osztva $\frac{65·002 \times 153·84}{100} = 100·00$ térfogat.

Így nagy valószínüséggel állítható, hogy az erjedésnél képződő szénsav folyékonynak gondolva szintén ugyanazon térfogattal bír, mint a kierjedt czukor és a képződött szesz.

Ha a szénsav fajsúlyának és a hőmérséknek correspondeáló görbe vonalat szerkesztünk, a folyékony szénsavnak előbb feltételezett 0·7519 fajsúlya körülbelől a 26·5° C.-ra esik.

3. *Noha a folyékony szénsav fajsúlyára vonatkozólag teljesen kifogástalan adatokra nem támaszkodunk, mindazonáltal valószínűnek tartjuk, hogy az erjedésnél keletkező szénsav folyékony állapotban szintén ugyanazon térfogattal bír, mint az eltünt czukor és a keletkező szesz.*

4. Ezekből következik, hogy

1 térfogat czukor = 1 térfogat alkohol
= 1 térfogat folyékony szénsav.

*

Ha ezen állításokat elfogadjuk, akkor még tovább számitgathatunk:

a) ha az alkohol fajsúlya 0·79321 $^{15}/_{15}°$ C.-ra s 100 s. r. víztelen dextrose 64·447 cm.^{3} alkoholt ád, akkor a 2. értelmében a dextrose elméleti fajsúlya $\frac{100}{64·447} = 1·5516$;

β) ha a víztelen dextrose fajsúlya, mint felvettük, 1·5384 s

belőle 51·22 súlyrész alkohol származik, akkor az alkohol theoretikus fajsúlya 0·78643, mi MENDLJEFF szerint $\frac{23·6}{4°}$ -nál helyes;

γ) ha a víztelen dextrose fajsúlya 1·551, akkor a folyékony szénsav fajsúlyának ezen hőfoknál 0·75825-nek kell lennie;

δ) ha a víztelen dextrose elméleti fajsúlya 1·551, miután ez két különböző fajsúlyú, de ugyanazon térfogatú anyaggá bomlik:

$$\frac{1·551}{2} = 0·7755.$$

Nyeretik pedig

51·12 alk. $\times 0·79321 = 40549$
48·88 $CO_2 \times 0·75825 = 37063$
Összeg $77·612$

$$\frac{77·612}{100} = 0·77612,$$

tehát a 0·7755 számot igen könnyen megközelíti, vagy:

$$51·12 \frac{\text{alkohol} \times \text{a theoretikus fajsúlylyal}}{100} =$$

$$= \frac{51·12 \times 0·75825}{100} = 0·4020$$

a 0·7755—0·4020=0·3735, mi a szénsavnak megfelel s így a szénsav theoretikus fajsúlyának 0·7645 kellene lennie, mi a 26° C. körül tényleg észleltnek vehető;

ε) ha a folyékony szénsav theoretikus fajsúlyát az előbbi számítás szerint 0·7645-nek veszszük, így is számíthatunk:

Miután 100 súlyrész czukorból 48·88 súlyrész CO_2 keletkezik, ennek térfogata 0·7645-tel osztva=63·9 cm.^{3}; de 100 cm.^{3} térfogat czukor súlya 153·84×63·9 cm.^{3}=98·30 cm.^{3} 100 cm.^{3} helyett.

Végül még következő törvényszerűségeket lehetne ezen viszonylatokban kifejezni.

α) A czukor fajsúlyának fele

$$\frac{1·5384}{2} = 0·7692$$

$$\frac{1·551}{2} = 0·7755,$$

egyenlő az erjedésnél keletkező alkohol és szénsav molekularis térfogat-súlyának összegével

$$\begin{aligned} 51{\cdot}12 \text{ alkohol} \times 0{\cdot}79321 &= 0{\cdot}40549 \\ 48{\cdot}88 \text{ szénsav} \times 0{\cdot}7645 &= 0{\cdot}3736 \\ \text{Összeg} \quad & 0{\cdot}77909, \end{aligned}$$

tehát a számítottat igen megközelíti.

β) Az alkohol fajmelege 16—30° C. között 0·6019*, a kristályos nádczukoré 0·301,** tehát az alkoholé közel kétszer akkora, a mire csak a figyelmet akartam felhivni, fejtegetéseimben felhasználni azonban ez alkalommal nem szándékozom.

---

* Schüller. Pogg. Ann. V. 116. 192 (1871).

** Kopp. Liebig Annal. Suppl. III. p. 1. 289.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. október 19.-én tartott üléséből.)

TÖBBSZÖRÖS INVOLUTIO.

Harmadik közlemény.*

VÁLYI GYULA l. tagtól.

Az előbbi közlemények kiegészítésére most a véges számú pontból álló *térbeli* pontrendszerek többszörös involutioit keressük fel.

I.

Involutio alatt a térben is két collinearis pontrendszernek azt az esetét értjük, mikor bármely pontnak — akár az egyik, akár a másik pontrendszerhez is számíttassék az — ugyanaz a pont a collinearis társa.

Ha $X(x_1x_2x_3x_4)$ és $Y(y_1\,y_2\,y_3\,y_4)$ egymásnak ilyen módon kétszeresen megfelelő pontok, akkor egyszerre állanak a következő egyenletek:

$$\begin{aligned}\rho y_i &= a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4\\ \sigma x_i &= a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3+a_{i4}y_4.\end{aligned}\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad 1)$$

Ezekből az egyenletekből következnek:

$$\begin{aligned}&a_{i1}a_{1k}+a_{i2}a_{2k}+a_{i3}a_{3k}+a_{i4}a_{4k}=0, \quad (i\gtrless k)\\ &a_{i1}a_{1i}+a_{i2}a_{2i}+a_{i3}a_{3i}+a_{i4}a_{4i}=\rho\sigma, \ (i=1, 2, 3, 4).\end{aligned} \qquad 2)$$

$\rho\sigma$-nak ezt a négy alakban kifejezhető értékét, a mely igazi collinearis viszonynál 0 nem lehet, α-val fogjuk jelölni.

---

* Az első közlemény a XII. kötet 394—407, a második közlemény a XIII. kötet 408—417. lapjain.

Könnyen látható, hogy

$$a_{ik}=0 \qquad (i \gtrless k)$$
$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}$$

felvételek a 2) egyenleteket kielégítik. Az ehez tartozó involutioban minden pont maga magának involutiós társa. Ezt az *identikus* involutiot a következőkben figyelmen kivül hagyjuk és így feltesszük, hogy maguknak megfelelő pontokon *(kettős pontok)* kívül vannak olyanok is, a melyek involutiós társaikkal nem esnek össze *(egyszerű pontok)*.

Legyenek X és Y egymásnak megfelelő egyszerű pontok. Az XY pontsor azon tagjának, a melynek coordinátái

$$\rho y_i+\lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

az 1) egyenletek szerint az a pont felel meg, a melynek coordinátái

$$\rho(\sigma x_i+\lambda y_i) \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

Tehát az XY pontsor pontjai páronként involutiósak. Kettős pontok azok, a melyekre nézve

$$\lambda^2=\rho\sigma=a.$$

Két kettős pontot, ha $\sqrt{a}$ ugyanazon értékéhez tartoznak, *egynemű*-nek, ellenkező esetben *különnemű*-nek fogunk nevezni.

Az XY egyenes egészben maga magának felel meg *(kettős egyenes)*. Minden egyszerű ponton keresztül egy ilyen kettős egyenes megy, rajta két különnemü kettős ponttal.

A kettős pontokról a következő tantételek állanak:

1. tantétel. Két egynemű kettős pontot összekötő egyenes minden pontja ezekkel egynemű kettős pont.

Mert, ha X és Y, X' és Y' egymásnak megfelelő egyszerű pontok, akkor

$$\rho y_i+\sqrt{a}x_i+\lambda(\rho' y_i'+\sqrt{a}x_i') \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

pontnak az 1) egyenletek szerint megfelel

$$\rho(\sigma x_i+\sqrt{a}y_i)+\lambda\rho'(\sigma' x_i'+\sqrt{a}y_i')=$$
$$=\sqrt{a}(\rho y_i+\sqrt{a}x_i+\lambda(\rho' y_i'+\sqrt{a}x_i'))=$$
$$=\sqrt{a}(\rho y_i+\lambda\rho' y_i'+\sqrt{a}(x_i+\lambda x_i')).$$
$$(i=1, 2, 3, 4)$$

A coordináták második alakja mutatja, hogy ez a pont kettős pont, harmadik alakja pedig, hogy ez a kettős pont az előbbiekkel egynemű.

2. tantétel. Két különnemű kettőspontot összekötő egyenesen több kettős pont nincs, hanem az ezekhez harmonikus pontpárok involutiós egyszerű pontok.

Mert a

$$\rho y_i+\sqrt{a}x_i+\lambda(\rho' y_i'-\sqrt{a}x_i')$$

pontnak az 1) egyenletek szerint megfelel

$$\rho(\sigma x_i+\sqrt{a}y_i)+\lambda\rho'(\sigma' x_i'-\sqrt{a}y_i')=$$
$$=\sqrt{a}(\rho y_i+\sqrt{a}x_i-\lambda(\rho' y_i'-\sqrt{a}x_i')),$$
$$(i=1, 2, 3, 4)$$

a mi a tantételt bizonyítja.

Ezek szerint a kettős egyeneseknek két faját kell megkülönböztetnünk. *Első fajú*-nak két egynemű, *második fajú*-nak két különnemű kettős pont összekötő egyenesét fogjuk nevezni.

Az 1. tantétel következése, hogy az egynemű kettős pontok összessége vagy egy pontot, vagy egy egyenest, vagy egy síkot alkot. Abból pedig, hogy minden egyszerű ponton egy második fajú kettős egyenes megy át, az következik, hogy

ha egyik nemű kettős pont csak egy van, akkor a másik nemű kettős pontok egy síkot töltenek be, és

ha az egyik nemű kettős pontok egyenest alkotnak, akkor a másik nemű kettős pontok is egy egyenest töltenek be.

Ez utóbbi esetben a két egyenes nem metszheti egymást, mert ha metszené, az általuk meghatározott sík minden más pontján át, a melyek pedig a 2. tantétel szerint egyszerűek volnának, végtelen sok második fajú kettős egyenes menne, a mi lehetetlen.

Így az identikus involution kívül a térben kétféle involutio lehetséges.

1. Ha az egyik nemű kettős pontból csak egy van (az involutio *centruma)*, míg a másik nemű kettős pontok síkot (az involutio *sík*-ja) alkotnak, akkor a 2. tantétel szerint a centrum és sík harmonikusan választják el az involutiós pontpárokat.

Ezt az involutiót *perspectiv*-nek mondjuk.

2. Ha mind a kétnemű kettős pontok egy-egy egyenest (az involutio *tengelyei)* alkotnak, akkor a második fajú kettős egyenesek a két tengely közös szelői és rajtok az involutiós pontpárokat a tengelyek harmonikusan választják el.

Ezt az involutiot *két tengelyű*-nek mondjuk.

Reális involutionál még két alesetet kell megkülönböztetnünk a szerint, a mint a tengelyek reálisak ($a>0$), vagy képzetesek ($a<0$).

Ezek után nem nehéz mind a kétféle involutio egyenleteit meghatározni.

1. *Perspectiv involutio*-nál legyenek a centrum coordinátái $c_1c_2c_3c_4$ és $\sqrt{a}$-nak a centrumhoz tartozó értéke λ.

Akkor

$$\underset{(i=1,\,2,\,3,\,4)}{\rho y_i+\lambda x_i}$$

arányos c_i-vel ($i=1, 2, 3, 4$), bármelyik egyszerű pontot is jelentse X. E szerint az involutio egyenleteinek alakja:

$$\underset{(i=1,\,2,\,3,\,4)}{\rho y_i=-\lambda x_i+c_i}(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4). \qquad 3)$$

Ezekből látszik, hogy a $(d_1d_2d_3d_4)$-sík minden pontja kettős pont. Ez tehát az involutio síkja.

A 3) egyenletekből

$$\rho(d_1y_1+d_2y_2+d_3y_3+d_4y_4)=$$
$$=(-\lambda+c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3+c_4d_4)(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4).$$

Azonban az előbbiek szerint

$$\underset{(i=1,\,2,\,3,\,4)}{\rho y_i-\lambda x_i}$$

mint az XY egyenes második kettős pontja, az involutio síkján van, azaz

$$\rho(d_1y_1+d_2y_2+d_3y_3+d_4y_4)=\lambda(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4).$$

A két utóbbi egyenlet összehasonlításából következik

$$2\lambda = c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + c_4d_4. \qquad 4)$$

Tehát a 3) egyenletek a 4) feltétel alatt a perspectiv-involutio egyenletei.

Legegyszerűbbek az egyenletek, ha a centrum egyik alappontja a coordinátarendszernek, az involutio síkja pedig szemben fekvő alapsík.

Ha a centrum coordinátái 0, 0, 0, 1, az involutio síkjának coordinátái 0, 0, 0, 1, akkor

$$2\lambda = 1$$

és az involutio egyenletei

$$\begin{aligned} 2\rho y_1 &= -x_1 \\ 2\rho y_2 &= -x_2 \\ 2\rho y_3 &= -x_3 \\ 2\rho y_4 &= x_4. \end{aligned} \qquad 5)$$

Hasonlóképen egyszerűek az egyenletek akkor is, ha két alappont (pl. az első és második) involutiós pontpár és a másik két alappont az involutio síkján van.

Ha a centrum coordinátái c_1c_200, akkor feltevéseink szerint az involutio síkjának coordinátái c_2c_100 és így

$$\lambda = c_1c_2.$$

Az involutio egyenletei lesznek

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= c_1^2 x_2 \\ \rho y_2 &= c_2^2 x_1 \\ \rho y_3 &= -c_1c_2x_3 \\ \rho y_4 &= -c_1c_2x_4. \end{aligned} \qquad 6)$$

2. *Kéttengelyü involutio*-nál legyenek $A(a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ és $C(c_1c_2c_3c_4)$ az egyik tengely pontjai és $\sqrt{\alpha}$-nak ezekhez tartozó értéke λ.

Akkor

$$\rho y_i + \lambda x_i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

az AC egyenes pontja, bármelyik egyszerű pontot is jelentse X.

E szerint az involutio egyenleteinek alakja:

$$\rho y_i = -\lambda x_i + a_i (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4) + \\ + c_i (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4). \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 7)$$

Minthogy azonban A és C kettős pontok, kell, hogy

$$d_1 a_1 + d_2 a_2 + d_3 a_3 + d_4 a_4 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = 0 \qquad 8)$$

legyen.

A 7) egyenletekből látszik, hogy a $(b_1 b_2 b_3 b_4)$ és $(d_1 d_2 d_3 d_4)$ síkok metszésvonalának minden pontja kettős pont. Ha még a 8) egyenleteket tekintetbe veszszük, látjuk, hogy a b és d síkok a második tengelyen és C illetőleg A ponton mennek át.

A 7) egyenletekből a 8) egyenletek felhasználásával következnek

$$\rho (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4) = \\ = (-\lambda + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4)$$

$$\rho (d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + d_4 y_4) = \\ = (-\lambda + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + c_4 d_4)(d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4).$$

Minthogy pedig az előbbiek szerint

$$\rho y_i - \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

pont a második tengelyen, azaz a b és d síkok metszésvonalán van, kell hogy

$$2\lambda = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + c_4 d_4 \qquad 9)$$

legyen.

Tehát a 7) egyenletek a 8) és 9) feltételek alatt a kéttengelyü involutio egyenletei.

Legegyszerűbbek az egyenletek, ha A és C két alappont (pl. első és harmadik), míg a másik két alappont a második tengelyen van. Ekkor

A pont cordinátái		1, 0, 0, 0
C pont	«	0, 0, 1, 0
b sík	«	1, 0, 0, 0
d sík	«	0, 0, 1, 0

tehát

$$\frac{2}{\rho}\lambda = 1$$

és az involutio egyenletei

$$\begin{aligned} \frac{2}{\rho}y_1 &= x_1 \\ \frac{2}{\rho}y_2 &= -x_2 \\ \frac{2}{\rho}y_3 &= x_3 \\ \frac{2}{\rho}y_4 &= -x_4. \end{aligned} \qquad 10)$$

Hasonlóképen egyszerűek az egyenletek akkor is, ha két-két alappont (pl. az első és második, a harmadik és negyedik) involutiós pontpár. Válaszszuk A és C pontoknak az első tengely és az említett involutiós pontpárok egyeneseinek metszéspontjait.

Ha A pont coordinátái $a_1\ a_2\ 0\ 0$

C « « $0\ 0\ c_3\ c_4$

akkor feltevéseink szerint

b sík coordinátái $a_2\ a_1\ 0\ 0$

d sík « $0\ 0\ c_4\ c_3$

és igy

$$\lambda = a_1 a_2 = c_3 c_4.$$

Az involutio egyenletei lesznek

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= a_1^2 x_2 \\ \rho y_2 &= a_2^2 x_1 \\ \rho y_3 &= c_3^2 x_4 \\ \rho y_4 &= c_4^2 x_3 \end{aligned} \qquad 11)$$

a mihez jön

$$a_1 a_2 = c_3 c_4$$

feltételi egyenlet.

A többszörös involutio tárgyalásánál a 6) és 11) egyenletekre van szükségünk.

Előre megjegyzem, hogy csak az általános eseteket tárgyalom. A speciális esetek épen úgy, mint a hogy a síkra nézve a második közlemény III. fejezetében történt, könnyen megvizsgálhatók, de kevésbbé érdekes eredményekhez vezetnek.

II.

Keressünk fel a térben olyan pontrendszereket

$$A_h B_h \qquad (h=0,1,2,\ldots r-1)$$

a melyek között egyszerre fennállanak az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+1} \end{pmatrix}$$

involutiók, a hol az indexek mod. r redukálandók.

1. Legyen mind a két involutio perspectiv CC' centrumokkal és dd' síkokkal.

A CC' egyenesen fellépő két pont-involutio közös pontpárját válaszszuk a coordináta-rendszer első és második alappontjának, a másik két alappontot válaszszuk a dd' egyenesen.

Igy mind a két involutio egyenletei a 6) egyenletek szerint alakulnak.

Ha A_h coordinátái $\alpha_{h1}\,\alpha_{h2}\,\alpha_{h3}\,\alpha_{h4}$

B_h « $\beta_{h1}\,\beta_{h2}\,\beta_{h3}\,\beta_{h4}$,

akkor a két involutiot kifejezik

$$\begin{aligned}
\rho_h\,\beta_{h1} &= c_1^2\,\alpha_{h2}, & \rho'_{h+1}\,\beta_{h+1,1} &= c_1'^2\,\alpha_{h2},\\
\rho_h\,\beta_{h2} &= c_2^2\,\alpha_{h1}, & \rho'_{h+1}\,\beta_{h+1,2} &= c_2'^2\,\alpha_{h1},\\
\rho_h\,\beta_{h3} &= -\,c_1 c_2\,\alpha_{h3}, & \rho_{h+1}\,\beta_{h+1,3} &= -\,c'_1 c'_2\,\alpha_{h3},\\
\rho_h\,\beta_{h4} &= -\,c_1 c_2\,\alpha_{h4}, & \rho_{h+1}\,\beta_{h+1,4} &= -\,c'_1 c'_2\,\alpha_{h4}.
\end{aligned} \qquad (h=0,1,\ldots r-1)$$

Ezekből

$$\frac{\alpha_{h3}}{\alpha_{h4}} = \frac{\beta_{h3}}{\beta_{h4}} = \frac{\beta_{h+1,3}}{\beta_{h+1,4}} \qquad (h=0,1,\ldots r-1)$$

tehát ezen hányadosok értéke h-tól független. Legyen közös értékük c. Akkor az $A_h B_h$ pontok mindenike azon a síkon van, a melynek egyenlete

$$x_3 - c x_4 = 0.$$

Tehát síkbeli többszörös involutioról van szó, a melyet a második közleményben már letárgyaltunk.

2. Legyen mind a két involutio kéttengelyű. Ekkor a négy tengely két közös metszője mind a két involutioban második fajú kettős egyenes. Az ezeken fellépő involutiok közös pontpárjait választva alappontoknak, mind a két involutio egyenletei a 11) egyenletek szerint alakulnak.

Tehát

$$\rho_h \beta_{h1} = a_1^2 a_{h2}, \quad \rho'_{h+1} \beta_{h+1,1} = a_1'^2 a_{h2},$$
$$\rho_h \beta_{h2} = a_2^2 a_{h1}, \quad \rho'_{h+1} \beta_{h+1,2} = a_2'^2 a_{h1},$$
$$\rho_h \beta_{h3} = c_3^2 a_{h4}, \quad \rho'_{h+1} \beta_{h+1,3} = c_3'^2 a_{h4},$$
$$\rho_h \beta_{h4} = c_4^2 a_{h3}, \quad \rho'_{h+1} \beta_{h+1,4} = c_4'^2 a_{h3},$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

a hol

$$a_1 a_2 = c_3 c_4, \qquad a'_1 a'_2 = c'_3 c'_4.$$

Ezekből az egyenletekből

$$\frac{a_{h1} a_{h2}}{a_{h3} a_{h4}} = \frac{\beta_{h1} \beta_{h2}}{\beta_{h3} \beta_{h4}} = \frac{\beta_{h+1,1} \beta_{h+1,2}}{\beta_{h+1,3} \beta_{h+1,4}}.$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

Tehat ezen hányadosok értéke h-tól független. Legyen közös értékük c.

Akkor $A_h B_h$ mindenike azon másodrendű felületen van, melynek egyenlete

$$x_1 x_2 - c x_3 x_4 = 0.$$

Azt is könnyű látni, hogy mind a két involutio tengelyei ezen felületre nézve conjugált polárok.

3. Legyen az első involutio perspectiv C centrummal és d síkkal, a második involutio kéttengelyű $t_1 t_2$ tengelyekkel.

Legyen e_1 egyenes a C ponton átmenő közös szelője $t_1 t_2$-nek, és e_2 egyenes a d síkban fekvő közös szelője $t_1 t_2$-nek.

e_1 mind a két involutioban második fajú kettős egyenes. A rajta fellépő két involutio közös pontpárját válaszszuk első és második alappontnak.

e_2 egyenesen t_1 és t_2 metszéspontjaihoz harmonikus pontpárt válaszszunk harmadik és negyedik alappontnak.

Akkor az első involutio egyenletei a 6), a második involutioéi pedig a 11) egyenletek szerint alakulnak. Tehát

$$\begin{aligned}
\rho_h \beta_{h1} &= c_1^2 a_{h2}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,1} &= a_1'^2 a_{h2},\\
\rho_h \beta_{h2} &= c_2^2 a_{h1}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,2} &= a_2'^2 a_{h1},\\
\rho_h \beta_{h3} &= -c_1 c_2 a_{h3}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,3} &= c_3'^2 a_{h4},\\
\rho_h \beta_{h4} &= -c_1 c_2 a_{h4}, & \rho'_{h+1}\beta_{h+1,4} &= c_4'^2 a_{h3}.
\end{aligned}$$
$(h=0, 1, \ldots r-1)$

és a mellett

$$a'_1 a'_2 = c'_3 c'_4.$$

Ezekből

$$\frac{a_{h1}a_{h2}}{a_{h3}a_{h4}} = \frac{\beta_{h1}\beta_{h2}}{\beta_{h3}\beta_{h4}} = \frac{\beta_{h+1,1}\beta_{h+1,2}}{\beta_{h+1,3}\beta_{h+1,4}}$$
$(h=0, 1, \ldots r-1)$

tehát független h-tól. Legyen értéke c.

Az A_hB_h pontrendszerek megint másodrendű felületen vannak, melynek egyenlete

$$x_1x_2 - cx_3x_4 = 0.$$

C és d polus és polársík, t_1 és t_2 conjugált polárok ezen felületre nézve.

Ezzel a monocyclikusan többszörös involutio vizsgálatát átvittük másodrendű felületen fekvő többszörösen involutiós pontrendszerek felkeresésére.

III.

Minden másodrendű és másodosztályú felület egyenlete

$$x_1x_4 - x_2x_3 = 0$$

alakra hozható.

Tegyük

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_4}{x_3} = \lambda,$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_4}{x_2} = \mu,$$

akkor a felület pontjainak a következő parameteres előállitását kapjuk:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \lambda : \mu : \lambda\mu.$$

Ezt a pontot $(\lambda\mu)$-vel jelöljük. Igy pl. a coordináta-rendszer alappontjai:

$$(00),\ (\infty 0),\ (0\infty),\ (\infty\infty).$$

A $(\lambda\mu)$ ponton két egyenese megy át a felületnek, ú. m.

$$x_2-\lambda x_1=0,\quad x_4-\lambda x_3=0,$$

és

$$x_3-\mu x_1=0,\quad x_4-\mu x_2=0.$$

Az elsőt λ-egyenesnek, a másodikat μ-egyenesnek mondjuk. A két egyenesen átmenő sík egyenlete:

$$\lambda\mu x_1-\mu x_2-\lambda x_3+x_4=0.$$

Ez a $(\lambda\mu)$-ponthoz tartozó érintési sík. Jelöljük $[\lambda\mu]$-vel.

Az $A(a_1a_2a_3a_4)$ ponton átmenő érintési síkok érintési pontjait

$$a_1\lambda\mu-a_2\mu-a_3\lambda+a_4=0$$

egyenlet köti össze. Könnyen látható, hogy ezek a pontok mind benne vannak az

$$a_4x_1-a_3x_2-a_2x_3+a_1x_4=0$$

síkban. Ez tehát A polársíkja.

Ismeretes, hogy a polus és a polársík harmonikusan választják el a poluson átmenő egyeneseken a felületből kimetszett pontpárokat. Tehát a polus és a polár-sík meghatározta perspectiv-involutioban a felület maga-magának felel meg és pontjai páronként perspectiv-involutiósak.

Ezt az involutiot már centruma meghatározza. Centrumnak bármely pont vehető, a mely nem fekszik a felületen.

Ezen involutio egyenleteinek meghatározására megjegyzendő, hogy a $(\lambda\mu)$ és $(\lambda'\mu')$ pontokat összekötő egyenes úgy is jellemezhető, mint a $[\lambda\mu']$ és $[\lambda'\mu]$ síkok metszésvonala. E szerint ezen egyenes egyenletei:

$$\lambda\mu' x_1-\mu' x_2-\lambda x_3+x_4=0,$$
$$\lambda'\mu x_1-\mu x_2-\lambda' x_3+x_4=0.$$

A $(\lambda\mu)$ és $(\lambda'\mu')$ pontokat összekötő egyenes tehát $A(a_1a_2a_3a_4)$ ponton megy át, ha

$$\begin{aligned} a_1\lambda\mu'-a_2\mu'-a_3\lambda+a_4&=0,\\ a_1\lambda'\mu-a_2\mu-a_3\lambda'+a_4&=0. \end{aligned} \qquad 12)$$

Ezek tehát az A centrumu involutio egyenletei.

Kéttengelyű involutiohoz jutunk a következőképen.

A $(\lambda_1\mu_1)$ és $(\lambda_2\mu_2)$ pontokhoz tartozó érintési síkok metszésvonala, a mint már előbb is láttuk, a $(\lambda_1\mu_2)$ és $(\lambda_2\mu_1)$ pontokon metszi a felületet és viszont. A két első és a két utolsó pontot összekötő egyeneseket *conjugált polárok*-nak hivjuk. Ismeretes, hogy ezek közös szelőiken harmonikusan választják el a felületből kimetszett pontpárokat. Tehát bármely conjugált polárpártól meghatározott kéttengelyü involutioban a felület maga-magának felel meg és pontjai páronként involutiósak.

Ilyen involutiot egyik tengelye már meghatározza, a mely bármely metsző egyenes lehet.

Ezen involutio egyenleteinek meghatározására annak a feltételét kell keresnünk, hogy a $(\lambda\mu)$ és $(\lambda'\mu')$, $(\lambda_1\mu_1)$ és $(\lambda_2\mu_2)$ pontokat összekötő egyenesek metszik egymást. Ez akkor történik meg, ha az említett négy pont egy síkban van, azaz ha van négy olyan szám (A_1, A_2, A_3, A_4), a melyek mellett

$$\begin{aligned}
&A_1+A_2\lambda+A_3\mu+A_4\lambda\mu=0,\\
&A_1+A_2\lambda'+A_3\mu'+A_4\lambda'\mu'=0,\\
&A_1+A_2\lambda_1+A_3\mu_1+A_4\lambda_1\mu_1=0,\\
&A_1+A_2\lambda_2+A_3\mu_2+A_4\lambda_2\mu_2=0.
\end{aligned}$$

Ez a négy egyenlet azonban, mint ismeretes, azt mondja ki, hogy a $\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2$ és $\mu\mu'\mu_1\mu_2$ számok kettős arányai egyenlők. A kettős arányok szokott jelölésével

$$(\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2)=(\mu\mu'\mu_1\mu_2).$$

A $(\lambda\mu)$ és $(\lambda'\mu')$ pontokat összekötő egyenes a $(\lambda_2\mu_1)$ és $(\lambda_1\mu_2)$ pontokat összekötő egyenest is metszi, ha

$$(\lambda\lambda'\lambda_2\lambda_1)=(\mu\mu'\mu_1\mu_2).$$

A két egyenletből következik:

$$(\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2)=(\mu\mu'\mu_1\mu_2)=-1,$$

vagy kibontott alakban

$$\begin{aligned} \lambda\lambda' - \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda+\lambda')+\lambda_1\lambda_2=0 \\ \mu\mu' - \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)(\mu+\mu')+\mu_1\mu_2=0 \end{aligned} \qquad 13)$$

ezek tehát a kéttengelyű involutio egyenletei.

Ezen egyenletekből látható, hogy ha $(\lambda\mu)$ és $(\lambda'\mu')$ involutiósak, $(\lambda\mu')$ és $(\lambda'\mu)$ is azok.

Megjegyzendő, hogy coordináta-rendszerünk első és negyedik, második és harmadik alappontjait összekötő egyenesek conjugált polárok.

A coordináta-rendszer választásánál a felület két tetszés szerinti pontja vehető első és negyedik alappontnak, azzal az egy megszorítással, hogy ne feküdjenek a felület egyik egyenesén. Az összekötő egyenes conjugált polárja kimetszi a második és harmadik alappontot.

Czélszerűen választva a coordináta-rendszert, az involutio egyenletei is egyszerűbbek.

Ha az első és negyedik alappont involutiós pontpár, akkor a perspectiv-involutio egyenletei:

$$\begin{aligned} \lambda\mu' &= a \\ \lambda'\mu &= a \end{aligned} \qquad 14)$$

a kéttengelyű involutio egyenletei pedig

$$\begin{aligned} \lambda\lambda' &= b \\ \mu\mu' &= c. \end{aligned} \qquad 15)$$

A többszörös involutio tárgyalásához épen ezekre az egyenletekre van szükségünk.

Keressük fel az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_h \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+1} \end{pmatrix}$$

involutiokkal összekötött pontrendszereket.

A később meghatározandó coordináta-rendszerben legyenek

$$\begin{aligned} A_h &\text{ parameterei } \lambda_h\mu_h \\ B_h &\quad\ \text{«} \quad\ \nu_h\rho_h. \end{aligned}$$

1. Ha mind a két involutio perspectiv C és C' centrumokkal, válaszszuk CC' egyenesnek a felülettel közös pontjait első és ne-

gyedik alappontnak. Akkor mind a két involutio egyenletei a 14) szerint alakulnak, tehát

$$\begin{aligned} \lambda_h\rho_h &= a & \lambda_h\rho_{h+1} &= a' \\ \mu_h\nu_h &= a & \mu_h\nu_{h+1} &= a' \end{aligned} \qquad (h=0, 1, \ldots r-1)$$

Ezekből

$$\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = \frac{\mu_{h+1}}{\mu_h} = -\frac{\nu_h}{\nu_{h+1}} = \frac{\rho_h}{\rho_{h+1}} = \frac{a}{a'}. \qquad (h=0, 1, \ldots r-1)$$

Az r egyenlet összeszorzásával kapjuk, hogy $\frac{a}{a'}$ r-ik egységgyök. Jelöljük ε-nal. Akkor

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \lambda_0\varepsilon^h, & \nu_h &= \nu_0\varepsilon^{-h} \\ \mu_h &= \mu_0\varepsilon^h, & \rho_h &= \rho_0\varepsilon^{-h} \end{aligned} \qquad (h=0, 1, \ldots r-1)$$

a hol

$$\lambda_0\rho_0 = \mu_0\nu_0.$$

Épen ebből következik, hogy A_hB_h pontok a

$$\mu_0x_2 - \lambda_0x_3 = 0$$

síkban vannak és ugyanazon redszerhez tartozó quadratikus pontsorbeli r-ászokat alkotnak, a melyeket már az első és második közleményben megismertünk.

A két r-ász között az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix} \qquad (k=0, 1, \ldots r-1)$$

perspectiv involutiok mindenike fennáll.

2. Ha mind a két involutio kéttengelyű, válaszszuk a négy tengely egyik közös szelőjének a felülettel közös pontjait első és negyedik alappontnak. Akkor mind a két involutio egyenletei 15) szerint alakulnak. Tehát

$$\begin{aligned} \lambda_h\nu_h &= b & \lambda_h\nu_{h+1} &= b' \\ \mu_h\rho_h &= c & \mu_h\rho_{h+1} &= c'. \end{aligned} \qquad (h=0, 1, \ldots r-1)$$

Ezekből

$$\lambda_h = \lambda_0 \varepsilon_1^h \qquad \nu_h = \nu_0 \varepsilon_1^{-h}$$
$$\mu_h = \mu_0 \varepsilon_2^h \qquad \rho_h = \rho_0 \varepsilon_2^{-h}$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

a hol ε_1 és ε_2 r-ik egységgyökök.

Legyen ε primitiv r-ik egységgyök és

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{n_1}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon^{n_2}.$$

Az A_h pontok akkor lesznek különbözők, ha $n_1 n_2 r$ számoknak nincs közös osztójuk.

A két pontrendszer között, a melyeket itt is *r-ászok*-nak nevezhetünk, az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix}$$
$$(k=0, 1, \ldots r-1)$$

kéttengelyű involutiok mindenike fennáll és mindenik involutionak egyenletei olyan alakúak, mint a két elsőnek. Tehát mindenik involutio tengelyei közös szelői a coordináta-rendszer első és negyedik, második és harmadik alappontjait (az r-ászok *alappontpárjai)* összekötő egyeneseknek.

Involutio-sereg-nek mondjuk azon kéttengelyű involutiok kétszeresen végtelen sokaságát, a melyek tengelyei a felület conjugált polárjai és egyszersmind közös szelői két adott conjugált polárnak. Ez utóbbiaknak a felülettel közös pontjait az involutiosereg *alappontpárjai*-nak mondjuk.

Azon r-ászok, melyek alappontpárjai a coordináta-rendszer első és negyedik, második és harmadik alappontja

$$\lambda_h = \lambda_0 \varepsilon_1^h$$
$$\mu_h = \mu_0 \varepsilon_2^h \qquad 16)$$
$$(h=0, 1, \ldots r-1)$$

egyenletekkel vannak meghatározva, a hol ε_1 és ε_2 r-ik egységgyökök.

Egy ilyen r-ász főtulajdonsága az, hogy az alappont párjaitól meghatározott involutio-sereg bármely involutiojában olyan pontrendszernek felel meg, mely vele r-szeresen involutiós r-ászt alkot. Ezen involutiok ugyanazon sereghez tartoznak.

A 16) egyenletekkel adott r-ászok között vannak síkbeliek is.

Lineáris pontsorbeli r-ászt kapunk, ha λ_0 vagy μ_0 értéke 0, vagy ∞.

Quadratikus pontsorbeli r-ászt kapunk, ha

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1 \quad \text{vagy} \quad \varepsilon_2=\varepsilon_1^{-1}.$$

Az r-ász alappontjai első esetben az első és negyedik, második esetben a második és harmadik alappont.

Ha $\varepsilon_2=\varepsilon_1^2$ és az egységpontot úgy választjuk, hogy $\lambda_0=\mu_0=1$ legyen, akkor az r-ász pontjainak coordinátái

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \varepsilon_1^h : \varepsilon_1^{2h} : \varepsilon_1^{3h}$$

tehát az r-ász minden pontja azon a térbeli harmadrendű görbén van, melynek parameteres előállítása

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \lambda : \lambda^2 : \lambda^3.$$

Ilyen r-ászszal már az első közlemény VII. fejezetében találkoztunk volt.

3. Ha az első involutio perspectiv C centrummal, a második kéttengelyű t_1t_2 tengelyekkel, válaszszuk t_1t_2 egyeneseknek C ponton átmenő közös szelőjétől a felületből kimetszett pontokat első és negyedik alappontnak. Akkor az első involutio egyenletei a 14), a másodikéi a 15) egyenletek szerint alakulnak. Tehát

$$\begin{aligned} \lambda_h\rho_h &= a, & \lambda_h\nu_{h+1} &= b, \\ \mu_h\nu_h &= a, & \mu_h\rho_{h+1} &= c. \end{aligned} \qquad (h=0,1,\dots r-1) \qquad 17)$$

Ezekből

$$\frac{\lambda_{h+2}}{\lambda_h} = \frac{a^2}{bc}. \qquad (h=0,1,\dots r-1) \qquad 18)$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk a szerint, a mint r páratlan vagy páros.

a) Ha r páratlan $(2r_1+1)$, az r egyenlet összeszorzásával rájövünk, hogy $\frac{a^2}{bc}$ r-ik egységgyök. Jelöljük ε-nal.

A 18) egyenletekből továbbá

$$\lambda_{2h} = \lambda_0 \varepsilon^h, \qquad (h=0, 1, 2, \ldots r_1)$$

$$\lambda_{2h+1} = \lambda_0 \varepsilon^{h+r_1+1}. \qquad (h=0, 1, \ldots r_1-1)$$

Ha

$$\varepsilon^{r_1+1} = \varepsilon_1$$

teszszük, a mely szintén r-ik egységgyök, egyszerűbben lesz

$$\lambda_h = \lambda_0 \varepsilon_1^h \qquad (h=0.1, \ldots r-1)$$

és a 17) egyenletekből

$$\mu_h = \mu_0 \varepsilon_1^h$$

$$\nu_h = \nu_0 \varepsilon_1^{-h}$$

$$\rho_h = \rho_0 \varepsilon_1^{-h} \qquad (h=0, 1, \ldots r-1)$$

a hol

$$\lambda_0 \rho_0 = \mu_0 \nu_0.$$

Ezek szerint az A_h és B_h pontrendszerek ugyanazon síkban fekvő és ugyanazon rendszerhez tartozó quadratikus pontsorbeli r-ászok, tehát ugyanaz a pontrendszer, a melyet az 1. pontban találtunk.

Ez onnan van, mert a perspectiv involutionál a centrumon és a kéttengelyű involutionál az egyik tengelyen átmenő síkban ugyanaz a síkbeli involutió alakul. Igy egy síkban fekvő két r-ász involutioinak akármelyike akár perspectiv, akár kéttengelyű involutisnak tekinthető a térben.

b) Ha r páros ($2r_1$), akkor a 18) egyenletek közül az első r_1 egyenlet összeszorzásával azt találjuk, hogy $\frac{a^2}{bc}$ r_1-ik egységgyök. Jelöljük η-val.

Akkor a 18) egyenletekből

$$\lambda_{2h} = \lambda_0 \eta^h, \qquad \lambda_{2h+1} = \lambda_1 \eta^h \qquad (h=0, 1, \ldots r_1-1) \qquad 19)$$

és a 17) egyenletekből

$$\begin{aligned} \mu_{2h} &= \mu_0 \eta^h, & \mu_{2h+1} &= \mu_1 \eta^h, \\ \nu_{2h} &= \nu_0 \eta^{-h}, & \nu_{2h+1} &= \nu_1 \eta^{-h}, \\ \rho_{2h} &= \rho_0 \eta^{-h}, & \rho_{2h+1} &= \rho_1 \eta^{-h}, \end{aligned} \qquad (h=0, 1, \ldots r_1-1) \qquad 19)$$

a hol

$$\begin{aligned} \lambda_0 \rho_0 &= \mu_0 \nu_0 = \lambda_1 \rho_1 = \mu_1 \nu_1 = a \\ \lambda_0 \nu_1 &= \lambda_1 \nu_0 \eta^{-1} = b \\ \mu_0 \rho_1 &= \mu_1 \rho_0 \eta^{-1} = c \end{aligned} \qquad 20)$$

Ezek szerint az A_{2h}, A_{2h+1}, B_{2h}, B_{2h+1} pontrendszerek egyenkint quadratikus pontsorbeli r-ászt alkotnak ugyanazon alappontokkal. Ezek közül A_{2h} és B_{2h}, A_{2h+1} és B_{2h+1} pontrendszerek r-ászai egy-egy síkban vannak, de a két sík lehet különböző is.

Arról is könnyű meggyőződni, hogy az $A_h B_h$ teljes pontrendszerek között az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+2k} \end{pmatrix}_{(k=0, 1, \ldots r_1-1)}$$

perspectiv — és az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+2k+1} \end{pmatrix}_{(k=0, 1, \ldots r_1-1)}$$

kéttengelyű involutiok mindenike fennáll.

Lássuk az A_{2h} és A_{2h+1} pontrendszerek között fennálló viszonyt.

A 20) egyenletek közül

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nu_1 &= \lambda_1 \nu_0 \eta^{-1} \\ \mu_0 \nu_0 &= \mu_1 \nu_1 \end{aligned}$$

egyenletekből következik

$$\lambda_1 \mu_1 = \lambda_0 \mu_0 \eta$$

átszorozva η^{2h}-val és a 19) egyenleteket felhasználva

$$\lambda_{2h+1} \mu_{2h+1} = \eta^{2h+1} \lambda_0 \mu_0 . \qquad (h=0, 1, \ldots r_1-1)$$

Ha az A_h coordinátái $x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}$, akkor ez az egyenlet azt mondja ki, hogy

$$x_{01} x_{2h+1, 4} = \eta^{2h+1} x_{04} x_{2h+1, 1} . \qquad (h=0, 1, \ldots r_1-1)$$

Ez adja A_{2h+1} geometriai helyét, ha A_0 már meg van választva. Megjegyzendő azonban, hogy az A_{2h+1} pontrendszert egy pontja már meghatározza.

Az eredményt így foglalhatjuk össze:

a felületen minden quadratikus pontsorbeli r_1-ászhoz (A_{2h}) a 19), 20) egyenleteknek megfelelő egyszerűen végtelen sok quadratikus pontsorbeli r_1-ász (A_{2h+1}) tartozik. Ezek pontjainak geometriai helyei kúpszeletek, a melyek síkjai az első r_1-ász alappontjait összekötő egyenes conjugált polárján mennek át és páratlan r_1 esetében síksorbeli r_1-ászt, páros r_1 esetében síksorbeli $\frac{r_1}{2}$-ászt alkotnak. Ez utóbbi esetben két-két pont (A_{2h+1} és A_{2h+1+r_1}) geometriai helye ugyanaz a kúpszelet.

Ha már $A_{2h}A_{2h+1}$ pontrendszereket ily módon megválasztottuk, az alappontokat összekötő egyenes bármely pontjából ezt a pontrendszert a felületre projiciálva olyan B_h pontrendszert nyerünk, a melyet az elsőhöz r_1 perspectiv és r_1 kéttengelyű involutio köt.

Az A_{2h+1} pontrendszer úgy is választható, hogy az A_{2h} pontrendszerrel egy síkban legyen. Ennek feltétele:

$$\lambda_0 \mu_1 = \lambda_1 \mu_0.$$

Ehez véve a

$$\lambda_1 \mu_1 = \lambda_0 \mu_0 \eta$$

egyenletet, következnek:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\eta}, \quad \mu_1 = \mu_0 \sqrt{\eta}.$$

Ha ezeket a 19) egyenletekbe teszszük, látjuk, hogy ebben az esetben az A_{2h} és A_{2h+1} pontrendszerek egymást $2r_1$-ászra egészitik ki. Igy páros r-re kapjuk azt az esetet, a melyet páratlan r-re már előbb találtunk volt.

IV.

Az r-ászok pontjainak parametereit képzetes alakban kaptuk meg. Kérdés, hogy vannak-e reális r-ászok?

1. A concav convex másodrendű felületek egyenlete reális coordináta-rendszer mellett

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$$

alakra hozható.

Ha

$$\frac{x_3+x_4 i}{x_1+x_2 i}=\frac{x_1-x_2 i}{x_3-x_4 i}=\lambda$$

$$\frac{x_3-x_4 i}{x_1+x_2 i}=\frac{x_1-x_2 i}{x_3+x_4 i}=\mu$$

teszszük, a hol i a képzetes egység, észreveszszük, hogy a felület reális pontjaihoz

$$|\lambda|=|\mu|=1$$

tartozik — és viszont.

Tehát a 16) egyenletekkel meghatározott r-ász úgy lesz reális, ha

$$|\lambda_0|=|\mu_0|=1.$$

E szerint ilyen felületeknél az r-ászok minden faja között vannak reálisok. De ezek alappontpárjai képzetesek.

2. A biconvex másodrendű felületek egyenlete reális coordinátarendszer mellett

$$x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$$

alakra hozható.

Ha

$$\frac{x_3+x_4 i}{x_1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_3-x_4 i}=\lambda$$

$$\frac{x_3-x_4 i}{x_1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_3+x_4 i}=\mu$$

teszszük, látjuk, hogy a felület reális pontjaihoz λ és μ conjugált complex értéke tartozik — és viszont.

Tehát a 16) egyenletekkel adott r-ász minden pontja csak úgy lehet reális, ha λ_0 és μ_0 conjugált complex is a mellett

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1^{-1}.$$

E szerint a biconvex felületeken csak a quadratikus pontsorbeli r-ászok között vannak reálisok. Az r-ászok más fajainál legfennebb egyes pontok lehetnek reálisok.

Végül megemlítem, hogy a polycyclikusan többszörös involu-


EGYETEMI KÖNYV
FOLYÓIRATOK

tionál, a melyet épen úgy vizsgálhatunk meg, mint az egy- és kétdimensiós geometriában, az egyes cyclusok pontrendszerei egy-egy másodrendű felületen vannak, a melyek egyenletei

$$x_1x_4 - cx_2x_3 = 0$$

alakra hozhatók, a hol c az egyes cyclusoknál más-más értékű lehet.

Tehát ezen felületeknek négy közös egyenesük van. Azonban ezek reális pontrendszerek esetében képzetesek.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. október 19.-én tartott üléséből.)

A MAGYAR FAUNA ÉDESVÍZI FONÁLFÉRGEI.

DADAY JENŐ l. tagtól.

(Kivonat.)

A magyar fauna édesvízi, szabadonélő *fonálférgeinek* behatóbb tanulmányozásával még ezideig csupán néhai ÖRLEY L. foglalkozott, a ki «Az Anguillulidák magánrajza» című dolgozatában * összesen nyolcz fajt jegyzett fel és ismertetett, névszerint a a következőket:

Plectus cirratus BAST.
Plectus parvus BAST.
Diplogaster macrodon ÖRL.
Diplogaster rivalis LEYD.
Diplogaster striatus BAST.
Dorylaimus stagnalis BAST.
Trilobus gracilis BAST.
Monhystera stagnalis BAST.

Az ÖRLEY L. említett munkájának megjelenése utáni időben alig egy-két potló adat látott napvilágot. Én hazánk mikrofaunájára vonatkozó egynehány dolgozatomban ** a Balatonból, a retyezáti, a mezőségi és az alföldi székesvízű tavakból említettem néhány fajt. Az elszórtan már közlött adatokon kívül azonban a különböző termőhelyekről korábban s a magy. tud. Akadémia math. term. tud. állandó bizottságának anyagi támogatása mellett ez évben

* Természetrajzi füzetek. 4. köt. 1—2. füz. p. 16. Táb. I—VIII. 1878.

** Adatok a Retyezát tavai Crustacea-faunájának ismeretéhez. — Term. rajz. füz. 7. köt. 1883. p. 41. — Adatok az alföldi székesvizek mikrofaunájának ismeretéhez. Math. term. tud. Értesítő. XII. köt. 1. füz. p. 10—42. Tab. 1—2. — Újabb adatok a Balaton mikrofaunájának ismeretéhez. Math. term. tud. Értesítő. XII. köt. 4—5. füz. p. 122—145. — Adatok a mezőségi tavak mikrofaunájának ismeretéhez. Term. rajz. füz. 15. köt. 1. füz. 1892.

gyűjtött anyag tanulmányozása folyamában a megfigyelt és hazánkból még eddig ismeretlen fajok száma annyira szaporodott, hogy mikrofaunánk részletesebb ismertetésére való tekintetből helyén valónak láttam közzétételüket.

Az Örley L. adatainak s az én korábbi feljegyzéseimnek hozzáadásával a magyar fauna édesvízi fonálférgei gyanánt a következőket mutathatom be:

Alaimus filiformis Dad.
Deontolaimus tatricus Dad.
Aphanolaimus aquaticus Dad.
Monhystera dubia Bütsch.
Monhystera vulgaris d. Man.
Monhystera stagnalis Bast.
Monhystera tatrica Dad.
Monhystera crassa Bütsch.
Monhystera similis Bütsch.
Monhystera pseudobulbosa Dad.
Monhystera paludicola d. Man.
Monhystera microphthalma d. Man.
Tripyla glomerans Bast.
Tripyla papillata Bütsch.
Tripyla dentata Dad.
Tripyla gigantea Dad.
Desmolaimus balatonicus Dad.
Cyatholaimus tenax d. Man.
Chromadora bioculata M. Sch.
Chromadora tatrica Dad.
Chromadora balatonica Dad.
Chromadora bathybia Dad.
Chromadora bulbosa Dad.
Ethmolaimus tatricus Dad.
Mononchus macrostoma Bast. var. *armatus* Dad.
Ironus Entzii Dad.
Trilobus gracilis Bast.
Trilobus longicauda Linst.
Trilobus pellucidus Bast.
Trilobus tenuicaudatus Dad.
Prismatolaimus dolichurus d. Man. var. *bulbosus* Dad.
Prismatolaimus aquaticus Dad.
Diplogaster rivalis Leyd.
Diplogaster macrodon Örl.
Diplogaster lacustris Dad.
Diplogaster striatus Bütsch.
Cephalobus emarginatus d. Man.
Cephalobus elongatus d. Man.
Cephalobus Lóczyi Dad.
Cephalobus stagnalis Dad.
Teratocephalus terrestris Bütsch.
Teratocephalus crassidens d. Man.
Teratocephalus palustris d. Man. var. *crassicauda* Dad.
Plectus palustris d. Man.
Plectus cirratus Bast.
Plectus parvus Bast.
Rhabdolaimus aquaticus d. Man.
Rhabdolaimus balatonicus Dad.
Symplocostoma lacustris Dad.
Dorylaimus Bastiani Bütsch.
Dorylaimus Bastiani Bütsch. var. *longicaudatus* Dad.
Dorylaimus bryophilus d. Man.
Dorylaimus Carteri Bast.

Dorylaimus crassus d. Man.
Dorylaimus microdorus d. Man.
Dorylaimus obtusicaudatus Bast.
Dorylaimus stagnalis Duj.
Dorylaimus macrolaimus d. Man.
Dorylaimus macrolaimus d. Man. var. *balatonicus* Dad.
Dorylaimus halophilus Dad.
Dorylaimus filiformis Bast.
Dorylaimus intermedius d. Man.
Dorylaimus limnophilus d. Man.
Dorylaimus striatus Dad.

A magyarországi édesvizi mikrofaunából tehát ez idő szerint összesen 59 fajt és 5 varietást ismerünk, vagyis 51 fajjal és 5 varietással többet, mint a mennyit Örley L. magánrajzában feljegyzett volt.

A fajok közül részben az Örley L. leírása (Diplogaster macrodon), részben az én korábbi feljegyzéseim és újabb vizsgálataim alapján 24 és az 5 varietás még ezideig hazánk édesvízi mikrofaunájára jellemző s a tudományra nézve új, névszerint pedig a következők:

Alaimus filiformis Dad.
Deontolaimus tatricus Dad.
Aphanolaimus aquaticus Dad.
Monhystera tatrica Dad.
Monhystera pseudobulbosa Dad.
Tripyla dentata Dad.
Tripyla gigantea Dad.
Desmolaimus balatonicus Dad.
Chromadora tatrica Dad.
Chromadora balatonica Dad.
Chromadora bathybia Dad.
Chromadora bulbosa Dad.
Ethmolaimus tatricus Dad.
Mononchus macrostoma Bast. var. *armatus* Dad.
Ironus Entzii Dad.
Trilobus tenuicaudatus Dad.
Prismatolaimus dolichurus d. Man. var. *bulbosus* Dad.
Prismatolaimus aquaticus Dad.
Diplogaster macrodon Örl.
Diplogaster lacustris Dad.
Cephalobus Lóczyi Dad.
Cephalobus stagnalis Dad.
Teratocephalus palustris d. Man. var. *crassicauda* Dad.
Rhabdolaimus balatonicus Dad.
Symplocostoma lacustris Dad.
Dorylaimus Bastiani Bütsch. var. *longicaudatus* Dad.
Dorylaimus macrolaimus d. Man. var. *balatonicus* Dad.
Dorylaimus halophilus Dad.
Dorylaimus striatus Dad.

A fel nem sorolt többi faj, összesen 35, már régebben és Európa különböző fauna területeiről ismeretes. Ha hazánk édes-

vízi mikrofaunájának fonálféreg-fajait előfordulási körülményeik tekintetéből egybevetjük az eddig ezen irányban átkutatott más európai faunaterületekéivel, arra az eredményre jutunk, hogy közöttük igen sok a még ezideig csupán édes vízben élő, de vannak olyanok is, a melyek édes vízben és nedves földben, édes és brakkvíztől, csupán édes vagy csupán brakkvíztől áztatott talajban növény gyökereken egyaránt tenyésznek.

Hogy áttekinthetővé tegyem a különböző természetű termőhelyeken tenyésző fajokat, czélszerűnek látom az épen említett előfordulási körülmények szerint külön-külön csoportosítani.

a) *Még ezideig csupán édes vízből ismert fajok.*

Alaimus filiformis Dad.
Deontolaimus tatricus Dad.
Aphanolaimus aquaticus Dad.
Monhystera dubia Bütsch.
Monhystera stagnalis Bast.
Monhystera tatrica Dad.
Monhystera similis Bütsch.
Monhystera pseudobulbosa Dad.
Monhystera paludicola d. Man.
Tripyla glomerans Bast.
Tripyla dentata Dad.
Tripyla gigantea Dad.
Desmolaimus balatonicus Dad.
Chromadora bioculata M. Sch.
Chromadora tatrica Dad.
Chromadora balatonica Dad.
Chromadora bathybia Dad.
Chromadora bulbosa Dad.
Ethmolaimus tatricus Dad.
Mononchus macrostoma Bast.
var. *armatus* Dad.
Ironus Entzii Dad.
Trilobus longicauda Linst
Trilobus tenuicaudatus Dad.
Prismatolaimus dolichurus d. Man.
var. *bulbosus* Dad.
Prismatolaimus aquaticus Dad.
Diplogaster rivalis Leyd.
Diplogaster macrodon Örl.
Diplogaster lacustris Dad.
Diplogaster striatus Bütsch.
Cephalobus Lóczyi Dad.
Cephalobus stagnalis Dad.
Teratocephalus palustris d. Man.
var. *crassicauda* Dad.
Plectus palustris d. Man.
Rhabdolaimus aquaticus d. Man.
Rhabdolaimus balatonicus Dad.
Symplocostoma lacustris Dad.
Dorylaimus Bastiani Bütsch.
var. *longicaudatus* Dad.
Dorylaimus stagnalis Duj.
Dorylaimus macrolaimus d. Man.
var. *balatonicus* Dad.
Dorylaimus halophilus Dad.
Dorylaimus filiformis Bast.
Dorylaimus striatus Dad.

b) *Édes vízből és nedves földből egyaránt ismert fajok.*

Monhystera crassa Bütsch.
Trilobus gracilis Bast.
Cyatholaimus tenax d. Man.
Cephalobus emarginatus d. Man.
Plectus cirratus Bast.
Dorylaimus Bastiani Bütsch.

c) *Még eddig csupán édes víztől áztatott földből ismert fajok.*

Trypila papillata Bütsch.
Trilobus pellucidus Bast.
Plectus parvus Bast.
Dorylaimus intermedius d. Man.
Dorylaimus bryophilus d. Man.
Dorylaimus microdorus d. Man.
Dorylaimus limnophilus d. Man.
Dorylaimus crassus d. Man.
Dorylaimus macrolaimus d. Man.

d) *Még eddig csupán édes és brakkvíztől áztatott földből ismert fajok.*

Monhystera vulgaris d. Man.
Cephalobus elongatus d. Man.
Teratocephalus terrestris Bütsch.
Teratocephalus crassidens d. Man.
Dorylaimus obtusicaudatus Bast.
Dorylaimus Carteri Bast.

e) *Még eddig csupán brakkvíztől áztatott földből ismert faj.*
Monhystera microphthalma de Man.

A fentebbiekben összeállított öt csoport adatainak összegezése első sorban arra az eredményre vezet, hogy legnagyobb a még ez ideig csupán az édes vizekből ismert fajok száma (42). Utánuk következik a még eddig csupán az édes víztől áztatott talajban élőké (9). Ennél valamivel kisebb az édes vízben és nedves földben, nemkülönben az édes és brakkvíztől áztatott talajban tenyészőké (6—6) s legkisebb a még eddig csupán brakkvíztől áztatott földet lakóké, a mennyiben ilyen csupán egy van. De világosan demonstrálja azt is, hogy hazánk édesvízi mikrofaunájában nem csupán oly fonálféreg-fajok tenyésznek, a melyek más európai faunaterületek édes vizeiben is otthonosak; hanem tenyésznek olyanok, a melyek azokban még eddig teljesen ismeretlenek

és tenyésznek olyanok is, a melyek egyebütt más természeti körülmények között lelik meg életföltételeiket. Ha pedig figyelemre méltatjuk a még eddig csupán édes vízből ismert fajok névsorát, abban csupán 12 olyanra találunk, a melyet más európai faunaterületről is ismernek, 30 pedig még eddig hazánk kizárólagos faja gyanánt szerepel. Ez a körülmény pedig a mellett tanuskodik, hogy hazánk édesvízi mikrofaunája e tekintetben valamennyi másnál gazdagabb. Ennek természetes okát hazánk édes vizeinek igen változatos s a fonálférgek tenyészésére nyilván nagyon kedvező természeti viszonyaiban találhatjuk meg. Hazánk édes vizei közül különben e tekintetben legelső helyen áll a Balaton, melynek víztömege, főleg pedig homokos partjai valóságos melegágyai a legváltozatosabb fonálféreg-fajoknak.

A hazai termőhelyek földrajzi fekvése és ezzel szoros kapcsolatban természeti viszonyai szerint, az eddig megfigyelt fajok alföldiek, hegyvidékiek és havastájiak. Az első csoportba az alföldi álló vizekből, a Kis- és Nagy-Balatonból, továbbá a mezőségi tavakból feljegyzetteket, míg az utóbbiba a Retyezát és a Magas-Tátra, 1300 méter tengerszínfeletti magasságban fekvő tavaiból észlelteket sorolom. De mint igen érdekes jelenséget, nem mellőzhetem hallgatással azt, hogy a fajok között találtam néhány olyant is, a mely a fentebb említett területek mindenikén otthonos s épen úgy megleli megélhetésének feltételeit a Retyezát és a Magas-Tátra 6—8 C°-os víztömegében, mint a Balatonban, vagy az Alföld álló vizeiben. A fentebbiekben megkülönböztetett három csoport külön-külön a következő fajokat foglalja magába.

a) *Alföldi és hegyvidéki fajok.*

Alaimus filiformis Dad.
Aphanolaimus aquaticus Dad.
Monhystera dubia Bütsch.
Monhystera vulgaris d. Man.
Monhystera stagnalis Bast.
Tripyla glomerans Bast.
Tripyla dentata Dad.
Tripyla gigantea Dad.
Desmolaimus balatonicus Dad.
Chromadora balatonica Dad.
Chromadora bathybia Dad.
Chromadora bulbosa Dad.
Mononchus macrostoma Bast. var. *armatus* Dad.
Trilobus longicauda Linst.
Trilobus pellucidus Bast.
Trilobus tenuicaudatus Dad.
Prismatolaimus aquaticus Dad.

Diplogaster rivalis Leyd.
Diplogaster macrodon Örl.
Diplogaster lacustris Dad.
Diplogaster striatus Bütsch.
Cephalobus emarginatus d. Man.
Cephalobus elongatus d. Man.
Cephalobus Lóczyi Dad.
Cephalobus stagnalis Dad.
Plectus cirratus Bast.
Plectus parvus Bast.
Rhabdolaimus balatonicus Dad.
Symplocostoma lacustris Dad.
Dorylaimus Bastiani Bütsch.
Dorylaimus Bastiani Bütsch. var. *longicaudatus* Dad.
Dorylaimus bryophilus d. Man.
Dorylaimus crassus d. Man.
Dorylaimus microdorus d. Man.
Dorylaimus obtusicaudatus Bast.
Dorylaimus stagnalis Duj.
Dorylaimus macrolaimus d. Man.
Dorylaimus macrolaimus d. Man. var. *balatonicus* Dad.
Dorylaimus halophilus Dad.
Dorylaimus filiformis Bast.
Dorylaimus limnophilus d. Man.
Dorylaimus intermedius d. Man.
Dorylaimus striatus Dad.

b) *Havastáji fajok.*

Deontolaimus tatricus Dad.
Monhystera tatrica Dad.
Monhystera crassa Bütsch.
Monhystera similis Bütsch.
Monhystera pseudobulbosa Dad.
Monhystera paludicola d. Man.
Monhystera microphthalma d. Man.
Cyatholaimus tenax d. Man.
Chromadora tatrica Dad.
Ethmolaimus tatricus Dad.
Prismatolaimus dolichurus d. Man.
Teratocephalus terrestris Bütsch. var. *bulbosus* Dad.
Teratocephalus crassidens d. Man.
Teratocephalus palustris d. Man. var. *crassicauda* Dad.
Rhabdolaimus aquaticus d. Man.
Dorylaimus Carteri Bast.

c) *Alföldi, hegyvidéki és havastáji termőhelyeken egyaránt tenyésző fajok.*

Tripyla papillata Bütsch.
Chromadora bioculata M. Sch.
Ironus Entzii Dad.
Trilobus gracilis Bast.
Plectus palustris d. Man.

Ha már most egybevetjük eme csoportok fajainak jegyzékét s illetőleg számát, arra az eredményre jutunk, hogy legtöbb faj népesíti alföldi, hegyvidéki vizeinket (43). Sokkal csekélyebb a havastáji fajok száma (16) és legcsekélyebb az alföldi, hegyvidéki és a havastáji állóvizeket egyaránt lakóké (5). Itt meg kell jegyeznem azonban, hogy e számadatok csupán hazai viszonyaink tekintetéből érvényesek, mert ha a többi európai faunaterületeket is figyelembe veszszük, akkor a harmadik csoport fajainak száma 5-ről 13-ra emelkedik, a mennyiben én a havastáji vizekben 8 oly fajt észleltem, a melyet egyébünnen hegyvidéki, vagy síktáji termőhelyeken találtak s ezek a következők:

Monhystera crassa Bütsch.
Monhystera similis Bütsch.
Monhystera paludicola d. Man.
Monhystera microphthalma d. Man.
Cyatholaimus tenax d. Man.
Teratocephalus terrestris Bütsch.
Teratocephalus crassidens d. Man.
Rhabdolaimus aquaticus d. Man.

Hogy a termőhelyek természeti viszonyai, a víz hőmérsékének magasabb vagy alacsonyabb foka, a táplálék bősége vagy szegénysége mily nagy mértékben befolyásolhatja s tényleg befolyásolja a fajok tenyészetét, igen szépen illustrálja az a körülmény, hogy míg a Balatonban találtak majdnem kivétel nélkül jóval nagyobbak voltak a más termőhelyről megfigyelt példányoknál, addig a havastáji vizekben élők kivétel nélkül valamennyien kisebbeknek bizonyultak.

Befejezésül még csak a tudományra nézve új fajok leírása van hátra. Mielőtt azonban erre áttérnék, meg kell jegyeznem, hogy ezen alkalommal csupán azokat írom le, a melyeket, mint újabbi vizsgálataim folyamában találtakat, még eddig irodalmunkban s egyáltalán sehol sem ismertettem. A tőlem korábban újak gyanánt leírt fajok ismertetését «Újabb adatok a Balaton mikrofaunájának ismeretéhez» című s a «Math. term. tud. Értesítő» XII. kötetében megjelent dolgozatom tartalmazza.

1. *Deontolaimus tatricus* Dad.

Teste igen vékony, közepén legvastagabb, általában orsóforma, de hátul sokkal vékonyabb. A cuticula szembetünően gyű-

rüzött. Szájnyilása egészen síma. Garatja egyszerű, alig oly hosszú mint a testnek ötödrésze. A garatnyilás előtt két, gömbjével hátrafelé tekintő, gömböstűforma cuticula-pálczikát különböztethettem meg. Ivarnyilása a test közepén túl nyilik, de attól nem nagy távolságban. Alfelnyilása a test hátulsó negyedében fekszik. Oldalain éles hosszvonal fut végig. Hímje ismeretlen.

A rendelkezésemre állott egyetlen nőstény-példány méreti viszonyai a következők:

testhossza	0·6 mm.
garathossza	0·13 «
farkhossza	0·15 «
legnagyobb átmérete	0·013 «

A Magas-Tátrában fekvő tarpataki negyedik tóban találtam más fonálférgek társaságában. A *Deontolaimus papillatus* d. Man. fajtól főleg szájnyilásának szerkezetében és farkának alakjában tér el. Egyik megkülönböztető jele még az oldalvonal jelenléte is.

2. *Monhystera tatrica* Dad.

Teste vékony, elől és hátul erősebben vékonyodott, de farka nyakánál mégis jóval vékonyabb. A cuticula sima, de oldalán hosszvonal fut végig. Szája körül kis papillák vannak csupán. A garat legmellső végén két, ferdén álló, rövid pálczikaforma cuticula-képlet látható. Petefészke páratlan és ivarnyilása a test hátulsó harmadában fekszik. Alfelnyilása a test hátulsó ötödében nyilik. Farka meglehetős rövid, vékony és egyszerű csúcsban végződik. Hímje ismeretlen.

A rendelkezésemre állott nőstény-példány méreti viszonyai a következők:

testhossza	0·52 mm.
garathossza	0·098 «
farkhossza	0·13 «
legnagyobb átmérete	0·024 «

Még eddig csupán a tátrai tarpataki negyedik tóból ismerem. Az eddig ismert fajok közül legközelebb áll a *Monhystera*

similis Bütsch. fajhoz, a melytől abban tér el, hogy szája körül papillái vannak, de sörtéi nincsenek; továbbá van oldalvonala; farka rövidebb, tompább s általában jóval kisebb termetű.

3. *Monhystera pseudobulbosa* Dad.

Teste meglehetős vékony, elől és hátul vékonyodott, de farka feltünően vékonyabb nyakánál. Cuticulája egészen sima, de oldalán hosszvonal fut végig. Szája körül papillák nincsenek, ellenben négy sörtével fegyverzett. A garat legmellső végén két vízszintesen fekvő, kis cuticula-pálczika látható. A garat hátulsó vége kis bulbussá különült, illetőleg füződött be, de belsejében cuticula-képletek nincsenek. A bélcsatorna mellső vége erősebben, bulbusszerűen befűződött és belsejében két, hegyes végével hátrafelé tekintő, körteforma cuticula-képletet tartalmaz. A bélcsatorna falazata szemcsés protoplasma, elszórtan fekvő magvakkal. Petefészke páratlan. Ivarnyilása valamivel a test hátulsó harmada előtt nyilik. Alfelnyilása a test hátulsó negyedében fekszik. Farka meglehetős hosszú, erősen vékonyodott és csúcsán háromszögletű kis lemezfüggelék van. Hímje ismeretlen.

A rendelkezésemre állott nőstény-példány méreti viszonyai a következők voltak:

testhossza	0·63 mm.
garathossza	0·11 «
farkhossza	0·17 «
legnagyobb átmérete	0·026 «

A tátrai tarpataki negyedik tóban találtam. Az eddig ismert fajoktól garatjának, bélcsatornájának és farkának szerkezete alapján könnyen megkülönböztethető.

4. *Chromadora tatrica* Dad.

Teste elől és hátul vékonyodott, hátul azonban sokkal feltünőbben. Cuticulája igen finoman gyűrűzött. Szájüregében elől két kis cuticula-szemecske van, melyek mögött némileg ívesen futó cuticula-léczen függő pálczikák foglalnak helyet. A pálczikák

közül a legbelső egyenes s ez a leghosszabb, az utána következő középső és külső jóval rövidebb, a középső azonban a külsőnél is kurtább s mindkettő íves. A garat vékony, rövid, de a bulbus meglehetős terjedelmes és majdnem gömbforma. A fark vékony, a garatnál rövidebb, belsejébe két nagy mirigyet zár, csúcsán lándzsaforma függeléket visel. A női ivarszerv páros s a kidudorodott ivarnyilás a test közepén fekszik. Hímje ismeretlen.

A rendelkezésemre állott egyetlen nőstény-példány méreti viszonyai a következők:

testhossza	0·078 mm.
garathossza	0·013 «
farkhossza	0·008 «
legnagyobb átmérete	0·005 «

A kézsmárki csúcs alatt fekvő fehér tóban találtam a *Trilobus gracilis* társaságában. Némileg a *Chromadora Ratzenburgensis* Linst. fajhoz hasonlít, de eltér ettől s az összes többiektől szájának szerkezetével.

5. *Ethmolaimus tatricus* Dad.

Teste meglehetős vékony, elől és hátul elvékonyodott, hátul azonban sokkal feltünőbben. Cuticulája finoman gyűrűzött. Szájnyilása körül papillák és sörték emelkednek. Garatja a test egy negyedrészénél nem hosszabb; bulbusa jól elkülönült. A garatnyilásban legelől négy, némileg sugarasan rendeződött, többékevésbbé négyszögletű cuticula-fogacska van, melyek egyik végükkel előre, a másikkal hátra irányulnak. Ezek után a középen egy ékforma cuticula-képlet következik, a melynek két oldalán egy-egy íves pálczika foglal helyet harántfekvésben. E pálczikák belső vége bunkós, a külső ellenben erősen elvékonyodott. A garatüreg legnagyobb részét két vékony cuticula-pálczika tölti ki, a melyek az előbbeniek alapján erednek s itt ívesen ki- és hátrafelé hajlanak, legnagyobb részük azonban kissé ferdén a garat lumene felé halad. A női ivarszerv páros. Az ivarnyilás valamivel a test közepén túl nyilik. Az alfelnyilás körülbelül a test hosszának

végső hatodában fekszik. Farka rövid és hegyesen végződik. Hímje ismeretlen.

A rendelkezésemre állott nőstény-példányt a tarpataki negyedik tóban találtam és méreti viszonyai a következők voltak:

testhossza	0·64 mm.
garathossza	0·12 «
farkhossza	0·08 «
legnagyobb átmérete	0·02 «

Az eddig ismert egyetlen fajtól, az *Ethmolaimus pratensis* d. Man.-től főleg garatjának szerkezetével és méreti viszonyaival tér el.

6. *Prismatolaimus dolichurus* de Man. var. *bulbosus* Dad.

Teste elől és hátul elvékonyodott, hátul azonban majdnem fonálvékonyságú. Cuticulája finoman gyűrűzött. Szája körül kétféle sörtét visel, erősebbeket és finomabbakat. Szájüregében négy cuticula-pálczika van, melyek közül a mellsők a test hossztengelyével és egymással is párhuzamosan fekszenek, a hátulsók ellenben ferdén a test középpontja felé és egymás átellenében futnak. Garatja igen hosszú és belső lumenének cuticulája erősen megvastagodott. A garat hátulsó végén kis bulbus különült el. Páratlan petefészke a test közepén nyilik a külvilágba. Alfelnyilása a test hátulsó negyedében fekszik. Farka fokozatosan vékonyodik és fonálvékonyságúvá finomodik. Hímje ismeretlen.

A rendelkezésemre állott példány méreti viszonyai a következők:

testhossza	1 mm.
garathossza	0·32 «
farkhossza	0·34 «
legnagyobb átmérete	0·025 «

E fajt a kézsmárki csúcs alatt fekvő háromszög-tóban találtam. Igen hasonlít a de Man.-féle *Prismatolaimus dolichurus*-hoz, a melytől, eltekintve méreti viszonyaitól, legfőképen abban különbözik, hogy garatja bulbust formál.

A törzsalakot DE MAN erdei, humusgazdag talajban találta, de termőhelyéül a Luzern közelében fekvő Rothersee-t is feljegyzi.

7. *Prismatolaimus aquaticus* DAD.

Teste orsóforma, elől és hátul vékonyodott, hátul azonban sokkal erősebben. Cuticulája finoman gyűrűzött. Szájnyilása csupasz, papillái és sörtéi nincsenek. Szájüregében két, a test hossztengelyével és egymással is párhuzamosan fekvő, felső végén gyengén íves cuticula-pálczika van, melyeknek hátulsó végével egy-egy, fordén ki- és hátrafelé irányuló, ékforma cuticula-testecske izesül. A garat egyszerű, hátulsó végén megvastagodott, de bulbust nem alkot. Női ivarszerve páratlan és ivarnyilása a test közepén fekszik. Farka fokozatosan vékonyodik és bunkóban végződik, a melynek csúcsán kis kiemelkedés van. Hímje ismeretlen.

Még eddig csupán a mezőségi czegei tóból ismerem és méreti viszonyait a következőknek találtam:

testhossza	1·2 mm.
garathossza	0·36 «
farkhossza	0·37 «
legnagyobb átmérete	0·05 «

Az eddig ismert fajoktól garatjának és farkának szerkezete alapján könnyen megkülönböztethető.

8. *Teratocephalus palustris* DE MAN. var. *crassicauda* DAD.

Teste elől és hátul vékonyodott, de hátul erősebben. Cuticulája egészen sima. Szája körül finom sörtenemű nyujtványok emelkednek. Szájüregében négy, körteforma cuticula-képlet különböztethető meg. Garatja meglehetős nagy bulbusba megy át, melynek kocsánya a bélcsatornába nyúlik be. Női ivarnyilása a test közepén nyilik, míg ellenben alfelnyilása a test hátulsó nyolczadában. Farka igen rövid, aránylag vastag, de hegyes csúcsban végződik. Hímje ismeretlen.

A kézsmárki csúcs alatt fekvő háromszög-tóban találtam és méreti viszonyai a következők voltak:

testhossza	0·6	—1·4 mm.
garathossza	0·2	—0·35 «
farkhossza	0·07	—0·12 «
legnagyobb átmérete	0·019	—0·03 «

Nagyon közel áll a de MAN-féle *Teratocephalus palustris*-hoz, de különbözik ettől mindenekelőtt farkának és szájának szerkezetében, továbbá méreti viszonyaiban.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. október 19.-én tartott üléséből.)

ADATOK A TÁTRAI TAVAK MIKROFAUNÁJÁNAK ISMERETÉHEZ.

DADAY JENŐ l. tagtól.

A Magas Tátrában elszórtan fekvő, mintegy 90, kisebb-nagyobb terjedelmű tó mikrofaunájának tanulmányozásával még ez ideig csupán egyetlen egy búvár foglalkozott, névszerint WIERZEJSKI A., a ki 1881-től 1883-ig megjelent három különálló dolgozatában * a következő tavakra vonatkozó megfigyeléseinek eredményeit tette közzé:

Toporowi hátsó tó.
Toporowi középső tó.
Toporowi mellső tó.
Szmrecsini tó.
Halas-tó.
Poprádi tó.
Kézsmárki zöld tó.
Kézsmárki fekete tó.
Tengerszem.
Fehér tavak a rézaknák alatt.
Szobkow (Hernyós tó).
Fekete tó a Kóscelek alatt.
Kettős tó a kis Kóscelek alatt.
Nagy tó az 5 tó völgyben.
Sucsi tó a hernyós tavak között.
Kurtkowi tó a hernyós tavak között.
Mellső tó az 5 tó völgyben.
Kis tó az 5 tó völgyben.
Fekete tó az 5 tó völgyben.
Jeges tó a Zawrat alatt.
Hosszú hernyós tó.
Hátsó tó az 5 lengyel tó között.
Hátsó hernyós tó.
Hinczó tó.
Tócsa a halas tó mellett.
Tócsa a halas tó kifolyásánál.
Kettős tavak a kis hernyós tavak előtt.

---

* *a)* O faunie jezior tatrzańskich. Krakó, 1881.
b) Materyjały do fauny jezior tatrzańskich. Krakó, 1882.
c) Zarys fauny stawów tatrzańskich. Krakó, 1883.

Eme 27 tóból aztán a nevezett búvár összesen 96 állatfajt jegyzett fel, a melyek rendszertani csoportosításban a következőleg oszlanak meg: *Spongiae* 1, *Hydromedusae* 1, *Turbellaria* 4, *Nemathelminthes* 3, *Rotatoria* 2, *Chaetopoda* 8, *Copepoda* 14, *Cladocera* 27, *Branchiopoda* 1, *Ostracoda* 4, *Acarina* 1, *Thysanura* 5, *Hemiptera* 5, *Coleoptera* 14, *Lamellibranchiata* 4, *Pisces* 2, *Amphibia* 1.

Az 1894. év nyarán a földmivelésügyi magyar kir. miniszterium anyagi támogatása mellett alkalmam volt a nevezetesebb hazai tavak, s köztük több tátrai tó mikrofaunájának tanulmányozására, s ez utóbbira annyival nagyobb súlyt fektettem, miután Wierzejski A. csupán hetet, s névszerint a *szmrecsini-*, a *halas-*, a *poprádi-*, a *kézsmárki zöld-*, a *kézsmárki fekete-*, a *Hinczó*-tavat és a *tengerszemet* tette volt tanulmánytárgyává, tehát a Magas Tátra hazánkhoz tartozó déli oldalán fekvő tavaknak csak kis részét. Én különben a következő, hazánkhoz tartozó tavakat kerestem fel és tettem tanulmány tárgyává.

Kézsmárki zöld tó.
Kézsmárki fekete-tó.
Háromszög tó.
Kézsmárki fehér tó.
Halas tó.
Tengerszem.
Csorbai tó.
Poprádi tó.
Jeges tó a menguszfalvi völgyben.
Hinczói nagy tó.
Hinczói kis tó.
Békás nagy tó.
Békás kis tó.
Felkai tó.
Tarpataki első tó.
Tarpataki második tó.
Tarpataki harmadik tó.
Tarpataki negyedik tó.

Mielőtt tanulmányaim eredményeinek felsorolására áttérnék, előre bocsátom azt, hogy én az említett tavakat 1894 augusztus 4.-étől 9.-éig bezárólag kerestem fel és gyüjtéseim folyamában csupán a mikroszkopos állatfajokra voltam tekintettel. Kirándulásaim sorozatát a kézsmárki csúcs alatt fekvő tavakkal kezdettem s innen első sorban a galicziai határon fekvő *halastó*-hoz és *tengerszem*-hez mentem. E két tó megvizsgálása után a *csorbai* tóhoz vettem útamat, a mikor is bejártam a *poprádi* tavat, továbbá szomszédjait is. A *felkai* tó felkeresése egy külön napot vett igénybe, úgyszintén a *kis-tarpataki* 5 tóé is.

A megfigyelt fajokat a legtöbb esetben rendszertani sorrendben sorolom fel, de a hol a körülmények megengedték, megállapítani igyekeztem elterjedésük határait is, s ily esetekben aztán a partlakókat, nyilt tükrieket és fenéklakókat külön-külön csoportosítom. Oly esetekben, mikor valamelyik tóra vonatkozólag Wierzejski A. közleményei is nyujtanak adatokat, a magaméinak felsorolásával ezeket is befoglalom s az összehasonlítás kedvéért párhuzamba állítom.

Dolgozatom végén táblázatokban összeállítom a megfigyelt fajok névjegyzékét és előfordulását állatkörök szerint. Az egyes tavakra vonatkozó vizsgálataim eredményeit külö-külön röviden a következőkben összegezhetem.

1. Kézsmárki zöld tó.

E tó mikroskopi állatvilágára vonatkozólag Wierzejski A. «Zarys fauny stawów tatrzańskich» czimű, lengyel nyelven megjelent dolgozata nyujtja az első és még eddig egyetlen adatot, a mennyiben itt hat fajt találunk feljegyezve. Magam 1894 augusztus 4.-én kerestem fel, s ezen alkalommal 20 mikroskopi állatfajt sikerült megfigyelnem, tehát majdnem négyszer annyit, mint a mennyit Wierzejski A. feljegyzett. Eme 20 faj között nyilvánvalólag a legtöbb olyan, a melyet még eddig csupán én figyeltem meg, de van közöttük három olyan is, a melyet Wierzejski A. is, meg én is találtunk s ezek a következők: *Cyclops strenuus*, *Cyclops serrulatus*, *Chydorus sphaericus*, s van olyan is egy, a melyet csupán Wierzejski A. jegyzett fel s ez az *Alona quadrangularis*. Meg kell említenem azonban azt is, hogy a felsorolt fajokon kívül a tó víztömegét még meglehetős sok *Chironomus*- és *Corethra*-lárva is népesíti; Wierzejski A. pedig a *Pisidium fossarum*-ot is megtalálta.

A fajok előfordulását illetőleg azt találtam, hogy a *Gyökérlábúak* és a *Fonálférgek* úgy a parti, valamint a parttól nyolcz méter távolságban fekvő iszapban is egyaránt otthonosak. az *Evezőlábú-rákok* a szabad vízben mindenütt, az *Ágascsápú-rákok* ellenben a parti szabad vízben tenyésznek.

2. Kézsmárki fekete tó.

Mikroskopi állatvilága felől a legelső és eddig egyedüli adatokat Wierzejski A. nyujtotta «Zarys fauny stawów tatrzańskich» című 1883. évi dolgozatában, a melyben összesen hét fajt jegyzett fel. Én 1894 augusztus 4.-én kerestem fel e tavat, és vizsgálataim eredménye, a Wierzejski A. adatainak hozzáadásával, 23 mikroszkopos állatfaj birtokába juttatott. Ezek szerint nekem 16-tal több fajt sikerült megyfigyelnem, mint Wierzejski-nek.

A fajok egy nagy része olyan, a melyet még eddig csupán én figyeltem meg, s ezek száma 16; van azonban hat olyan, a melyet Wierzejski is feljegyzett s én is megtaláltam, névszerint a következők:

Cyclops vernalis Fisch.
Cyclops strenuus Fisch.
Cyclops serrulatus Fisch.
Diaptomus bacillifer Koel.
Chydorus sphaericus M. O. F.
Pleuroxus excisus Schödl.

Végre van egy olyan is, névszerint a *Holopedium gibberum*, a melyet csupán Wierzejski A. feljegyzése után idézek.

A *Gyökérlábúak*, *Fonálférgek* és *Kagylós-rákok* csupán az iszapos és növénytörmelékes partokon tenyésznek, míg a többiek a szabad vízben otthonosak. Az *Ágascsápú-rákok*, az egy *Holopedium gibberum* kivételével, a partok közelében tartózkodnak, míg az előbbi bizonyára nyilt tükri. Az *Evezőlábú-rákok* valamennyien a nyilt tükrön tenyésznek tömegesen, de közülök mégis legfontosabb a *Diaptomus bacillifer*, melynek nagyszámú egyénei, a retyezáti fekete tóéihoz hasonlólag, egészen paprikaszínüek.

3. Háromszög-tó.

E tó mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adatot sem találunk. Én 1894 augusztus 4.-én kerestem fel, s ekkor összesen 26 mikroskopi állatfajt sikerült összegyüjtenem. A fajok között különben legtömegesebben lépnek fel a *Ceriodaphnia rotunda* egyénei, de elég gyakoriak a *Strebloceras*-éi is.

4. Kézsmárki fehér tó.

Mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adat sem jelent meg. Én 1894 augusztus 4.-én kerestem fel, s az ezen alkalommal gyüjtött anyagban 28 mikroskopi állatfajt sikerült találnom, a mi nem csekély eredmény. A fajok közül a *Gyökérlábúak, Örvény-* és *Fonálférgek* kivétel nélkül a partok és távolabbi fenék iszapjában, meg növénytörmeléke között tenyésznek, melléjük sorakoznak a *Kagylós-rákok*, továbbá a *Phryganea-, Ephemera-* és szúnyogféle lárvák. A *Kerekesférgek, Evezőlábú-* és *Ágascsápú-rákok* a víztömeg minden pontján otthonosak, de a *Cyclops*-fajok, a *Diaptomus tatricus*, az *Acroperus leucocephalus* és a *Ceriodaphnia rotunda* egyénei legtömegesebben a sik vizen tenyésznek.

5. Halas tó.

E tó mikroskopi állatvilágára vonatkozólag még ez ideig csupán Wierzejski A. két rendbeli dolgozata nyujtott adatokat, nevezetesen a «Materyały do fauny jezior tatrzańskich» 1882. évi, és a «Zarys fauny stawów tatrzańskich» 1883. évi dolgozata, a melyekben a két pisztráng-fajon kívül még 14-et jegyez fel. Magam 1894 augusztus 6.-án kerestem fel Javorinából kiindulólag.

Vizsgálataim eredményének összegezésénél a Wierzejski A. adataira is tekintettel vagyok, s ezeknek befoglalásával összesen 39 mikroskopi állatfajt konstatáltam, a melyek között 5 *Gyökérlábút*, 3 *Ostoros-ázalékállatkát*, 1 *Örvényférget*, 4 *Fonál-*, 10 *Kerekesférget*, 5 *Evezőlábú-*, 10 *Ágascsápú-rákot* és egy *Atkát* találunk. A fajoknak egy tekintélyes része olyan, a melyet eddig még csak én figyeltem meg s ezeknek száma 25. Van azonban több olyan is, a melyet kívülem Wierzejski A. is feljegyzett s ezeknek száma 10, névszerint a következők:

Asplanchna Brightwellii Goss.
Cyclops strenuus Fisch.
Canthocamp. staphylinus Jur.
Canthocamptus minutus Cls.
Polyphemus pediculus D. G.
Chydorus sphæricus M. O. F.
Acroperus leucocephalus Koch.
Bosmina longirostris M. O. F.
Holopedium gibberum Zad.
Cyclops serrulatus Fisch.

De van végre néhány olyan is, a melyet csupán WIERZEJSKI A. adatai nyomán ismerünk, s ezeknek száma négy, névszerint a következők:

Alona quadrangularis M. O. F.	Daphnia pennata M. O. F.
Alona oblonga M. P. E.	Nesæa ungviculata (?).

WIERZEJSKI A. azonban feljegyezte még a *Hydra fusca*-fajt is, a melyet én nem találtam meg.

A fajok között előfordulásuk szerint partlakókat és nyilt tükrieket különböztethetünk meg. A partlakók száma 22, a melyek közül a *Gyökérlábúak*- és a *Fonálférgek* a növénytörmelékes iszapban, a többiek részint az iszap fölületén, részint a parti vízben élnek. Az *Evezőlábú-rákok* közül a *Cyclops serrulatus* azonban nem csak itt, hanem a partoktól nagyobb távolságban s a nyilt tükrön is otthonos. Ezekhez járulnak még a *Hydra fusca* s a tömegesen tenyésző szúnyogféle lárvák, közöttük pedig a *Chironomus*- és a *Corethra*-félék.

A nyilt tükröt lakók száma 18, a melyek majdnem valamennyien rengeteg tömegekben tenyésznek. Valamennyi között legérdekesebb a *Dinobryon stipitatum*, a melyet csupán itt találtam meg, s a *Holopedium gibberum*, a mely még ezen kívül csak még igen kevés más tátrai tóban otthonos.

6. Tengerszem.

Mikroskopi állatvilága felől még eddig csupán egy irodalmi közlemény nyujt adatokat, nevezetesen WIERZEJSKI A. «Zarys fauny stawów tatrzańskich» című 1883. évi dolgozata, a melyben összesen 14 állatfaj nevét találjuk meg. Az itt feljegyzett fajok közül kettő a rovarok osztályából való. Én 1894 augusztus 6.-án kerestem fel e tavat s az adott körülmények között a partokon és a partoktól 10 méter távolságban gyüjtöttem.

Vizsgálataim adatai s a WIERZEJSKI A. megfigyelései alapján összesen 25 mikroskopi állatfajt sikerült konstatálnom. A fajok egy részét, még pedig hatot, mindketten megtaláltuk, s nevezetesen a következőket:

Asplanchna Brightwellii Goss.
Cyclops serrulatus Fisch.
Chydorus sphæricus M. O. F.
Acroperus leucocephalus Koch.
Polyphemus pediculus D. G.
Holopedium gibberum Zadd.

Vannak azonban oly fajok is, a melyeket csupán Wierzejski A. gyüjtött s ezek a következők:

Cyclops strenuus Fisch.
Cyclops viridis Jur.
Chydorus cælatus Schödl.
Alona quadrangularis M. O. F.
Daphnia obtusa Kurz.

A feljegyzett fajok kivételével a többit, tehát 14-et, még eddig csupán én gyüjtöttem, s ezeknek egy része, nevezetesen a *Gyökérlábúak* valamennyien, a *Kerekesférgek* közül a *Rotifer vulgaris*, az *Ágascsápú-rákok* közül a *Chydorus sphaericus* és *Alona affinis* határozott partlakók, míg a többiek tömegesen a nyilt tükröt lakják.

A mikroskopi fajokon kivül a part közelében és a növénytörmelékek között sok *Ephemera-*, *Chironomus-*, *Corethra-* és más szúnyoglárva tenyészik, a melyekhez csatlakozik Wierzejski A. feljegyzései szerint a *Desoria glacialis* Nic. és *Agabus bipunctatus* Z. nevü rovar is.

7. Csorbai tó.

E tó mikroskopi állatvilágára vonatkozólag az irodalomban még eddig semmi adatot sem találunk. Én 1894 augusztus 7.-én kerestem fel. A fajok összegyüjtésénél nagy súlyt fektettem annak megállapítására, hogy melyek a partokat, a nyilt tükröt, a mélyebb vízrétegeket és a tófenéket lakók.

A partokat lakó fajok számát 21-nek találtam. De a kizárólag partokat lakók között még oly fajok példányait is gyüjtöttem, a melyek a nyilt tükrön tenyésznek tömegesen.

A tó nyilt tükréről csupán 15 fajt jegyezhettem fel, a melyek, egy-kettőnek kivételével, tömegesen tenyésznek; míg a 13 méter mélységben fekvő vízrétegekből csupán 10-et gyüjtöttem, s ezek is mind olyanok voltak, a melyek a nyilt tükrön is tömegesen tenyésznek.

A fenékről gyüjtött anyagban 19 fajt konstatáltam, melyek között leggyakoriabbak a *Gyökérlábúak* és *Fonálférgek*, míg a többi csoportok fajait csak egyes példányokban gyüjtöttem.

A különböző területeken megfigyelt fajok számának összesítése arra az eredményre vezetett, hogy a csorbai tóból összesen 32 mikroskopi állatfajt sikerült feljegyeznem, a melyek között 6 *Gyökérlábút*, 2 *Ostoros-ázalékállatkát*, 3 *Fonál-*, 7 *Kerekesférget*, 6 *Evezőlábú-* és 8 *Ágascsápú-rákot* találunk. A fajok között csak egy-kettő olyan, a mely a tónak csupán egy pontján otthonos, ilyenek a *Hyalosphaenia tincta* a fenéken, és a *Cyclops strenuus* a nyilt tükrön, míg a többiek a tónak két-három pontján egyaránt tenyésznek. Legnagyobb azoknak a fajoknak a száma, a melyek a partokon és fenéken, továbbá, a melyek a nyilt tükrön és 13 méter mélységben egyaránt otthonosak. Az előbbiek száma 16, az utóbbiaké 9. Találunk a fajok között olyant is, a mely a parton és a nyilt tükrön otthonos, ilyen a *Peridinium cinctum* és a *Cyclops serrulatus;* találunk olyant is, a mely három ponton egyaránt tenyészik, ilyen a *Cyclops vernalis*, *Alona affinis* és *Euchlanis dilatata*. Az első ugyanis a partokat, a nyilt tükröt és a 13 méter mélységet, a két utóbbi ellenben a partokat, a nyilt tükröt és a tófenéket lakja.

8. Poprádi tó.

Állatvilága felől még ez ideig csupán két irodalmi adat szól, nevezetesen Wierzejski A. 1882. évi «Materyały do fauny jezior tatrzańskich» és 1883. évi «Zarys fauny stawów tatrzańskich» című dolgozatai, a melyekben a pisztrángon és a *Pisidium*-nevű kis kagylón kívül 21 mikroskopi állatfajt találunk feljegyezve. Én 1894 augusztus 7.-én kerestem fel e tavat. Az innen gyüjtött anyagban, hozzá számítva a Wierzejski A. adatait is, összesen 48 mikroskopi állatfajt sikerült észlelnem, a melyek között 7 *Gyökérlábút*, 2 *Ostoros-ázalékállatkát*, 2 *Örvény-*, 3 *Fonál-*, 13 *Kerekes-*, 1 *Sörtelábú férget*, 4 *Evezőlábú-*, 14 *Ágascsápú-*, egy *Kagylós-rákot* és 1 *Atkát* találunk. A fajok egy tekintélyes része a partok növénytörmeléke között vagy a fenéken lakik, kisebb része a szabad víztömegben tartózkodik. Az elsők között találjuk az összes *Gyökérlábúakat*, az *Örvény-* és *Fonálférgeket*, nem különben a *Candona*

*pubescens*t. A *Kerekesférgek* közül a partokat lakja a *Rotifer vulgaris*, a *Proales decipiens*, a *Rattulus tigris*, a *Cathypna luna*, a *Colurus uncinatus*, az *Evezőlábú-rákok* közül a *Canthocamptus minutus* s az *Ágascsápú-rákok* csoportjából a *Chydorus sphaericus*, a *Pleuroxus*- és az *Alona*-fajok. A fel nem sorolt összes többiek a szabad víztömegben tartózkodnak.

A megfigyelt 48 faj között találunk olyanokat, a melyeket csupán WIERZEJSKI A. feljegyzéseiből ismerünk; ezeknek száma nyolcz, névszerint a következők:

Prostomum lineare OERST.
Vortex viridis M. SCH.
Tubifex sp.
Cyclops viridis JUR.
Alona oblonga M. P. E.
Eurycercus lamellatus M. O. F.
Daphnia pennata M. O. F.
Nesæa ungviculata (?)

Vannak azonban oly fajok is, a melyeket WIERZEJSKI-n kívül én is megfigyeltem, ezeknek száma 10, névszerint a következők:

Asplanchna Brightwellii Goss.
Cyclops strenuus FISCH.
Cyclops serrulatus FISCH.
Polyphemus pediculus D. G.
Chydorus sphæricus M. O. F.
Pleuroxus excisus SCHÖDL.
Alona quadrangularis M. O. F.
Acroperus leucocephalus KOCH.
Simocephalus vetulus M. O. F.
Holopedium gibberum ZAD.

A fenti két csoportból hiányzó fajokat, tehát összesen 30-at, ez idő szerint még csak magam vizsgáltam.

9. Jeges tó.

E tó mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adat sem jelent meg. Én 1894 augusztus 7.-én kerestem fel. Az adott körülmények között csupán partjain és a partoktól 10 méter távolságból gyüjthettem anyagot, s ebben összesen 17 fajt találtam, a melyek egy része a partokat, más része a szabad viztömeget lakja, de valamennyi a többi tátrai tóban is otthonos.

10. Hinczói nagy tó.

Mikroskopi állatfajaira vonatkozólag még ez ideig csupán két irodalmi közlemény nyujt adatokat, nevezetesen WIERZEJSKI A. 1882. évi «Materyały do fauny jezior tatrzańskich» és 1883. évi «Zarys fauny stawów tatrzańskich» című dolgozatai, a melyekben összesen 10 fajt találunk. Én 1894 augusztus 8.-án kerestem fel. A tőlem gyüjtött anyagban talált fajok és a WIERZEJSKI A. adatai együttvéve arra az eredményre vezetnek, hogy e tóból, ez idő szerint, összesen 24 mikroskopi állatfajt ismerünk, a melyek közül a *Gyökérlábúak*, a *Fonálférgek* s az egyetlen *Sörtelábúféreg* kizárólag a partok iszapos és növénytörmelékes fölületét lakják, míg a többiek a szabad víztömegben is teljesen otthon érzik magukat, sőt egyik-másik itt tömegesebben tenyészik, mint a partokon. Ilyen a *Peridinium cinctum*, a *Kerekesférgek* közül az *Euchlanis dilatata*, az *Evezőlábú-rákok* közül a *Cyclops vernalis*, a *Diaptomus bacillifer* s az *Ágascsápú-rákok* közül az *Acroperus leucocephalus* és a *Daphnia caudata*.

A fajok között különben vannak olyanok, a melyeket csupán WIERZEJSKI A. észlelt. Ezeknek száma négy, névszerint a következők:

Tubifex sp.
Cyclops viridis JUR.
Alona quadrangularis M. O. F.
Daphnia pennata M. O. F.

Sokkal nagyobb azoknak a fajoknak a száma, a melyeket WIERZEJSKI A. és magam is észleltünk, nevezetesen hat, névszerint a következők:

Cyclops vernalis FISCH.
Cyclops strenuus FISCH.
Cyclops serrulatus FISCH.
Diaptomus bacillifer KOELB.
Chydorus sphæricus M. O. F.
Acroperus leucocephalus KOCH.

A megelőző két csoportban fel nem sorolt összes többi fajt, tehát összesen 14-et, még ez ideig csupán én figyeltem meg.

11. Hinczói kis tó.

E tó mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adat sincs. Én 1894 augusztus 8.-án kerestem fel. Az anyag gyüjtésénél, az adott körülmények között, csupán a partokra és a partoktól 20 méter távolságra kellett szorítkoznom. Vizsgálataim folyamában összesen 21 mikroskopi állatfajt sikerült megfigyelnem, a melyeknek legnagyobb része a partok növénytörmelékei között tartózkodik, kisebb része pedig a szabad víztömeget lakja. Az utóbbiak között a *Ceratium hirundinella*, a *Cyclops vernalis*, a *Diaptomus denticornis*, az *Acroperus leucocephalus* és a *Daphnia caudata* tulajdonképen nyilt tükri, s egyúttal ezek tenyésznek legtömegesebben. A partok növénytörmeléke között azonban még *Chironomus*-lárvák is találhatók.

12. Alsó békás tó.

Mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adatot sem találunk. Én 1894 augusztus hó 8.-án kerestem fel, s az adott körülmények között a partokon és a partoktól 10 méter távolságban gyüjtöttem. A gyüjtött anyag átvizsgálása folyamában 16 mikroskopi állatfajt jegyeztem fel, a melyeknek legnagyobb része a partok növénytörmelékét lakja, s csak kevés a szabad víztömegben tenyészők száma. Az utóbbi csoportba sorolhatjuk a *Kerekesférgek* közül az *Euchlanis dilatata*-t, az *Evezőlábú rákok* közül a *Cyclops vernalis*-t, s az *Ágascsápú-rákok* közül a *Daphnia caudata*-t. A felsorolt fajokon kivül találtam még *Chironomus*-lárvákat is.

13. Felső békás tó.

Mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adat sincs. Én 1894. évi augusztus 8.-án kerestem fel. Az innen gyüjtött anyagból összesen 19 mikroskopi állatfajt jegyeztem fel.

A fajok legnagyobb része, különösen pedig a *Gyökérlábúak* s a *Fonálférgek* valamennyie a partok növénytörmeléke között él. A többi állatcsoportok fajai között partlakókat és szabad vizben

élőket találunk. A *Kerekesférgek* közül kizárólag partlakó a *Rotifer*, a *Mastigocerca rattus* és a *Colurus uncinatus*, míg ellenben a *Monostyla lunaris* és az *Euchlanis dilatata* a szabad vizet lakja. Az *Evezőlábú-rákok* közül a *Canthocamptus minutus* csupán a partok növénytörmeléke között tenyészik, míg a *Cyclops vernalis* és a *Cyclops serrulatus* a szabad vízben otthonos. Az *Ágascsápú rákok* közül a *Chydorus sphaericus* és az *Alona quadrangularis* csupán a partokat lakja, az *Acroperus leucocephalus* és a *Daphnia caudata* ellenben nyilt tükri.

14. Felkai tó.

E tó mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adat sem jelent meg. Én 1894 augusztus 8.-án kerestem fel. Az anyagot, az adott körülmények között, a partokon és a partoktól 10 méter távolságban gyüjtöttem, s ebből összesen 31 mikroskopi állatfajt sikerült feljegyeznem. Ezeknek nagy része jellemző partlakó, kisebb része nyilt tükri. A *Gyökérlábúak* és *Fonálférgek* kivétel nélkül valamennyien a partokat, illetőleg a partok növénytörmelékeit lakják. Az *Ostoros-ázalékállatkák* két fajat a 10 méter távolságban gyüjtött anyagban találtam. A *Kerekesférgek* közül a *Rotifer*, a *Mastigocerca rattus*, a *Monostyla lunaris* és a *Colurus uncinatus* a növénytörmelékes partokat lakja, míg a többiek a szabad víztömeget népesítik, sőt épen nyilt tükriek. Az *Evezőlábú-rákok*, az egy *Canthocamptus minutus* kivételével, a mely kizárólag partlakó, úgy a partokon, valamint a szabad víztömegben is otthonosak, sőt az utóbbi helyen tömegesen tenyésznek. Az *Ágascsápú-rákok* közül az *Acroperus leucocephalus* és a *Daphnia caudata* a szabad víztömeget, sőt épen a nyilt tükröt lakja, míg a többiek a partok növénytörmelékei között tartózkodnak. De találtam *Szúnyog-* és *Phryganaea*-lárvákat is.

15. Tarpataki legalsó tó.

Mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adat sincs. Én 1894 augusztus 9.-én kerestem fel, s az ekkor gyüjtött anyagból összesen 16 fajt jegyeztem fel, a melyek valamennyien a többi tátrai tóban is otthonosak.

16. Tarpataki második tó.

E tó mikroskopi állatvilága felől még eddig egyetlen irodalmi adat sem szól. Én 1894 augusztus 9.-én kerestem fel, s az adott körülmények között a partokon és a partoktól 10 méter távolságban gyüjtöttem. Az átvizsgált anyagból összesen 36 fajt sikerült feljegyeznem. A fajok egy tekintélyes részét a parti, kisebb részét a partoktól 10 méter távolságból gyüjtött anyagban találtam. A *Gyökérlábúak* és *Fonálférgek* fajait kivétel nélkül a partok növénytörmeléke között találtam, de ezeknek társaságában volt a *Kerekesférgek* közül a *Rotifer*, a *Cathypna luna*, a *Colurus uncinatus*; az *Evezőlábú rákok* közül a három *Canthocamptus*-faj, s az *Ágascsápú-rákok* közül a *Chydorus sphaericus*, a *Pleuroxus excisus* s a két *Alona*-faj. A többi fajt szabad víztömegből gyüjtött anyagban találtam és meglehetős tekintélyes egyénszámmal szerepelt. A partok növénytörmelékét és iszapbevonatát a *Phrygenaeák* lárvái népesítették, a melyek mellett tekintélyes egyénszámban tartózkodtak a *Chironomus*- és *Corethra*-lárvák is.

17. Tarpataki harmadik tó.

Mikroskopi állatvilága felől az irodalomban még eddig egyetlen adatot sem találunk. Én 1894 augusztus 9.-én kerestem fel és a víz tömegéből gyüjtött anyagban 22 mikroskopi állatfajt találtam. A fajok legnagyobb része a partok növénytörmeléke között tartózkodik, így különösen a *Gyökérlábúak*, a *Vortex* és a *Fonálférgek* mindannyian, míg a többiek a szabad víztömegben is otthonosak, főleg pedig az *Evezőlábú-rákok* s az *Ágascsápú-rákok* közül az *Acroperus leucocephalus* és a *Daphnia caudata*. Ezekhez sorakoznak a partokon meglehetős gyakori *Phryganaea*- és *Chironomus*-lárvák.

18. Tarpataki negyedik tó.

E tó mikroskopi állatvilága felől épen úgy, mint az előzőkéé felől is, ez ideig az irodalomban egyetlen adat sem szól. Én 1894 augusztus 9.-én kerestem fel, s ezen alkalommal, az adott körülmények között, csupán a partokon és a partoktól 10 méter

távolságban gyüjtöttem. A gyüjtött anyag átvizsgálása folyamában 45 mikroskopi állatfajt sikerült feljegyeznem. A megfigyelt fajok közül a *Gyökérlábúakat*, az *Örvény-*, *Fonál-* és *Sörtelábú-férgeket* kivétel nélkül a partok növénytörmelékes és iszapos anyagában találtam, míg a többi csoportok fajai nagy részben a szabad víztömegből valók. Az utóbbiak között több olyan van, a melyet más tavakban való előfordulása után határozottan nyilt tükrinek lehet és kell tartanunk. Ilyenek a *Ceratium hirundinella*; a *Kerekesférgek* közül az *Asplanchna Brightwellii*, a *Conochilus volvox*, a *Floscularia mutabilis*; az *Evezőlábú-rákok* közül a *Cyclops vernalis*, a *Cyclops strenuus*, a *Cyclops serrulatus* és a *Diaptomus bacillifer*; az *Ágascsápú-rákok* közül pedig a *Bosmina longirostris*, a *Daphnia caudata* és a *Daphnella brachyura*, a melyek egyúttal tömegesen tenyésznek. Nem tartom különben lehetetlennek azt sem, hogy az *Anuraea longispina*, a *Polyphemus pediculus* és a *Holopedium gibberum* is népesíti e tó víztömegét, de ezeknek, mint jellemző és kizárólagos nyilt tükröt lakóknak egy példányát sem sikerült kézre kerítenem, épen azért, mert a nyilt tükrön való gyüjtés nem állott módomban.

De a partok növénytörmelékes és iszapos fölületén még *Phryganaea-* és *Chironomus*-lárvákat is találtam.

Hogy teljes és könnyen áttekinthető képet nyujtsak vizsgálataim eredményéről, illetőleg bemutathassam a tőlem átkutatott 18 tátrai tó mikroskopi állatvilágának eddig ismert fajait, czélszerűnek láttam az alább következő táblázatos kimutatás összeállítását.

I. Véglények.

Species	Zöld tó	Fekete tó	Háromszög-tó	Fehér tó	Halas tó	Tengerszem	Csorbai tó	Poprádi tó	Jeges tó	Hincói nagy tó	Hincói kis tó	Békás alsó tó	Békás felső tó	Felkai tó	Tarpataki alsó tó	Tarpataki 2. tó	Tarpataki 3. tó	Tarpataki 4. tó
Difflugia acuminata Ehrb.	+	.	+	+	+	+	+	+	+	.	.	.	+	+	+	+	+	+
Difflugia pyriformis Perty.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Difflugia globulosa Duj.	+	+	+	.	+	+	+	.	.	.	.	+	.	+	.	.	+	+
Difflugia corona Ehrb.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Difflugia constricta Ehrb.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Difflugia lobostoma Leid.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Difflugia urceolata Cart.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	.	.
Pontigulasia spiralis Rhum.	.	+	+	.	.	+	+	+	+	+	+	+	.	+	+	+	+	+
Centropyxis aculeata Ehrb.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Arcella vulgaris Ehrb.	+	.	.	.	+	+	.	+	.	+	.	.	.	.	.	+	.	+
Arcella dentata Ehrb.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Euglypha alveolata Ehrb.	+	.	+	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	+	.	+	.	.
Euglypha ciliata Ehrb.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Nebela carinata Ehrb.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Hyalosphenia tincta Leid.	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Orbulinella smaragdea Entz.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Dinobryon stipitatum St.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Peridinium cinctum Ehrb.	.	.	.	+	.	+	+	.	+	.	.	.	.	+	.	+	.	+
Ceratium hirundinella M. O.	+	.	.	+	+	+	+	.	.	+	.	.	.	+	.	+	.	+
Lagenophrys vaginicola Ehr.	+	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Összesen	7	7	6	7	8	6	8	9	5	5	4	4	3	8	4	8	4	10

E táblázat adatai szerint a 18 tátrai tóból összesen 20 *Véglény*-fajt sikerült megfigyelnem, a melyek között 15 *Gyökérlábút*, egy *Napállatkát*, 1 *Ostoros-* és egy *Csillangós-ázalékállatka*-fajt találunk. A fajok számát illetőleg a leggazdagabb a tarpataki negyedik tó, és legszegényebb a felső békás tó. A fajok közül legközönségesebb a *Difflugia pyriformis*, a melyet valamennyi tóban megtaláltam. Utána nyomban következik a *Pontigulasia spiralis*, a *Difflugia acuminata* és a *Difflugia globulosa*, melyek közül az első 3, a második 4, és a harmadik 8 tóból hiányzik csupán. Aránylag igen csekély a csupán egy-egy tóból ismert fajok száma, a mennyiben a 20 között csak hat ilyent találunk.

A fajok valamennyie különben, az egy *Pontigulasia spiralis* kivételével, mind olyan, a melyet hazánk más vidékeiről is ismerünk, mig ellenben a *Pontigulasia spiralis*-t hazánkból még eddig senki sem jegyezte és nem is jegyezhette fel, miután csak

a múlt év folyamában irta le Rhumbler németországi termőhelyekről.

Nem mellőzhetem hallgatással azt, hogy a dolog természeténél fogva csupán a tokot lakó vagy pánczélos *Véglényeket* figyelhettem meg, s biztosra vehető, hogy a további helyszíni, s a *Csillangós-ázalékállatkákra* vonatkozó tanulmányok számos más faj ismeretére fognak vezetni.

II. Férgek.

	Species	Zöld tó	Fekete tó	Háromsóg.-tó	Fehér tó	Halas tó	Tengerszem	Csorbai tó	Poprádi tó	Jeges tó	Hincói nagy tó	Hincói kis tó	Békás alsó tó	Békás felső tó	Felkai tó	Tarpataki alsó tó	Tarpataki 2. tó	Tarpataki 3. tó	Tarpataki 4. tó
	Monhystera crassa Büt.	+	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	+	+	.	.	+	+
	Monhystera similis Büt.	+	+	+	.	.	.	.	.	+	+	+	+	.	.	.	+	.	.
	Monhystera microphtlalma d. M.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	+
	Monhystera paludicola d. M.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	Monhystera filiformis Büt.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.
	Monhystera tatrica Dad.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.
	Monhystera pseudobulbosa Dad.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+
	Tripyla papillata Büt.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Tripyla filicaudata Ba.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.
10	Trilobus gracilis Ba.	+	.	.	+	+	.	.	.	+	+	.	+	+	+	+	+	+	+
	Trilobus pellucidus Ba.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Cyatholaimus tenax d. M.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Ironus Entzii Dad.	.	+	+	+	+	.	+	+	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.
	Teratocephalus palustris	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	Terahocephalus crassidens	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
	Prismatolaimus dolichurus d. M.	.	.	+	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Chromadora tatrica Dad.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Chromadora bioculata M. Sch.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	+
	Rhadolaimus aquaticus d. M.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	+	.	.	+	+	.	+	.	.
20	Deontolaimus tatricus Dad.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
	Ethmolaimus tatricus Dad.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
	Dorylaimus Carteri Bas.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
	Vortex sp.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+
	Vortex viridis	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	Prostomum lineare	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Macrostoma sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	+
	Rotifer vulgaris Ehr.	.	.	+	+	+	+	.	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.
	Rotifer macrurus Ehr.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Rotifer sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	+	.	+	+	+
30	Asplanchna priodonta Gass.	.	.	.	.	+	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Asplanchna Brightwellii	.	.	.	.	+	+	+	.	.	.	.	.	.	+	.	+	.	+
	Conochilus volvox Ehr.	.	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	+	.	+	.	+
	Stephanoceros Eichhornii	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Notommata aurita Ehr.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
35	Proales decipiens Ehr.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Species	Zöld tó	Fekete tó	Háromszög-tó	Fehér tó	Halas tó	Tengerszem	Csorbai tó	Poprádi tó	Jeges tó	Hincói nagy tó	Hincói kis tó	Békás alsó tó	Békás felső tó	Felkai tó	Tarpataki alsó tó	Tarpataki 2. tó	Tarpataki 3. tó	Tarpataki 4. tó
Mastigocerca rattus Ehr.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	.	.	.
Synchaeta tremula Ehr.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Monostyla lunaris Ehr.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	+	+
Cathypna luna Ehr.	.	.	+	+	+	.	+	+	+	+	+	+	.	.	+	+	.	.
Rattulus tigris Ehr.	+	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Anuraea cochlearis Gass.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Anuraea longispina Kell.	.	.	.	.	+	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Euchlanis dilatata Ehr.	+	+	.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	.	+	+
Euchlanis deflexa Ehr.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.
Colurus uncinatus Ehr.	.	.	+	.	.	+	+	+	.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Brachionus urceolaris Ehr.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.
Polyarthra platyptera Ehr.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Chaetonotus larus Ehr.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Nais barbata	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Tubifex sp.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+
Floscularia mutabilis Gass.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	+	.	.	+	.	+	.	+
Summa	6	4	12	8	15	6	11	18	6	8	8	6	8	12	6	15	9	20

A *Férgek* állatköréből tehát összesen 51 fajt jegyezhettem fel, a melyek között 22 *Fonál-*, 4 *Örvény-*, 23 *Kerekes-* és 2 *Sörtelábú férget* találunk. A fajok legnagyobb részét csak egy-egy tóból ismerjük eddig, még pedig összesen 23-at, a többiek már több tóban otthonosak, sőt találunk olyanokat is, a melyeket majdnem ubiquistáknak tekinthetünk. Ilyenek különösen az *Euchlanis dilatata*, a *Colurus uncinatus*, a *Trilobus gracilis* és a *Cathypna luna*, a melyek közül az első 16, a második 13, a harmadik 12, és a negyedik 11 tóban otthonos.

A végösszeg adatai szerint legtöbb *Féregfaj* tenyészik a *tarpataki* 4. tóban (20), melléje sorakozik aztán a *poprádi tó* 8, a *halas tó* és a *tarpataki 2. tó* 15—15, a *háromszög* és *felkai tó* 12—12 fajjal; legszegényebb a *fekete tó* 4, a *zöld, tengerszem jeges, alsó békás és tarpataki alsó tó* 6—6 fajjal.

III. Izeltlábúak.

Species	Zöld tó	Fekete tó	Háromszög-tó	Fehér tó	Halas tó	Tengerszem	Csorbai tó	Poprádi tó	Jeges tó	Hincói nagy tó	Hincói kis tó	Békás alsó tó	Békás felső tó	Felkai tó	Tarpataki alsó tó	Tarpataki 2. tó	Tarpataki 3. tó	Tarpataki 4. tó
Cyclops vernalis Fisch.	+	+	+	+	+	+	+	.	.	+	+	+	+	+	.	+	+	+
Cyclops strenuus Fisch.	+	+	.	.	+	+	+	+	+	+	.	.	.	+	+	+	+	+
Cyclops serrulatus Fisch.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Cyclops viridis Jur.	.	.	.	.	.	+	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.
5 Canthocamptus staphylinus	.	.	.	+	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	+	.	+
Canthocamptus minutus Cls.	.	+	.	.	+	.	+	+	+	.	+	+	+	+	+	+	+	+
Canthocamptus tatricus D.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Canthocamptus pygmaeus	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	+
Diaptomus bacillifer Kl.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+
10 Diaptomus tatricus Wi.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.
Diaptomus denticornis Wi.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	+	.	.	.	.	.	+	.
Diaptomus gracilis Sr.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.
Polyphemus pediculus DG.	.	.	.	.	+	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Chydorus sphaericus M. OF.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15 Chydorus caelatus Sch.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Pleuroxus excisus Sch.	.	+	+	+	.	.	+	+	.	.	.	.	.	+	.	+	.	+
Pleuroxus nanus Sch.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Alona quadrangularis M. O. F.	+	.	.	.	+	+	.	+	.	+	.	.	+	+	+	+	+	+
Alona affinis Lev.	.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	.	.	.	.	+	.	.
20 Alona lineata Sr.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Alona guttata Sr.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Alona oblonga M. P. E.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Acroperus leucocephalus K.	.	.	.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	.
Eurycercus lamellatus M. O. F.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25 Streblocerus minutus F.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Macrothrix laticornis M. O. F.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	+
Bosmina longirostris Leyd.	.	.	.	.	+	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Ceriodaphnia rotunda Sr.	.	.	+	+	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Simocephalus vetulus M. O.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30 Daphnia pennata M. O. F.	.	.	.	.	+	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Daphnia obtusa Kr.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Daphnia magna St.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Daphnia caudata Sr.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	+	+	+	+	.	+	+	+
Daphnella brachyura Liev.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
35 Holopedium gibberum Zad.	.	+	.	.	+	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Cypria ophtalmica Jur.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Cypris incongrusus R.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Cypris sp. juv.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Candona pubescens	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
40 Macrobiotus macronix s. Sch.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
Nesaea unguiculata	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Summa	7	11	8	13	16	14	14	20	6	12	8	6	7	11	6	13	9	15

E táblázat adatainak összegezéséből mindenek előtt kitűnik az, hogy a vizsgált tavakból összesen 41 *Izeltlábú állatfajt* sikerült megfigyelnem, a melyek között 12 az *Evezőlábú*, 23 az *Ágascsápú*, 4 a *Kagylós-rákok*, 1 a *Medveállatkák* és 1 az *Atkák* csoportjára esik. A fajok számát illetőleg leggazdagabb a *poprádi tó* 20 fajjal, utána következik a *halas tó* 16, és a *tarpataki 4. tó* 15 fajjal. Még meglehetős gazdag a *tengerszem* és *csorbai tó*, mindenik 14—14 fajjal, továbbá a *fehér-* és *tarpataki 2. tó* 13—13 fajjal. Legszegényebb a *jeges*, az *alsó békás* és a *tarpataki alsó tó*, a melyekből csupán 6—6 fajt sikerült feljegyeznem. Mindjárt ezek után következik a *zöld* és a *felső békás tó* 7—7, a *háromszög* és a *hinczói kis tó* 8—8 fajjal.

A fajok között két olyan van *(Cyclops serrulatus, Chydorus sphaericus)*, a mely mindenik tóban egyaránt otthonos, a többiek ellenben egyik-másik, sőt igen sok a tavak legtöbbjéből hiányzik. Az előbb említett két ubiquista mellé sorakozik a *Cyclops vernalis* 15, az *Acroperus leucocephalus* 14, a *Cyclops strenuus* és *Canthocamptus minutus* 13, az *Alona quadrangularis* és *Alona affinis* 11, végre a *Daphnia caudata* 9 termőhelylyel. Találunk aztán 13 olyan fajt, a melynek mindenike csupán egy-egy tóban él, vagy legalább is nekem csupán egy-egy tóból sikerült megfigyelnem. Máskülönben a fajok legnagyobb része hazánk más vidékeiről is ismeretes. Jellemzőnek az ujakat és a *Holopedium gibberum*-ot vehetjük, miután más hazai termőhelyről még ez ideig senki sem jegyezte fel.

A három táblázat adatainak összegezése pedig végre arra az eredményre vezet, hogy a hazai, megvizsgált tátrai tavakból ez idő szerint 112 fajt ismerünk, a melyek osztályonként és rendenként a következőleg oszlanak meg:

Rhizopoda	15
Heliozoa	1
Mastigophora	3
Ciliata	1
Turbellaria	4
Nemathelminthes	22
Rotatoria	22

Gastrotricha	1
Chætopoda	2
Copepoda	12
Cladocera	23
Ostracoda	4
Tardigrada	1
Hydrachnidæ	1
Összesen	112

Ebből az összegből WIERZEJSKI A. többször említett dolgozataiban csupán 25 fajt jegyzett fel, s így vizsgálataim 87 fajjal gazdagították a hazai tátrai tavak mikrofaunájának ismeretét.

A megfigyelt fajok között van nyolcz a tudományra és hazánk mikroskopi állatvilágára új, melyek közül a *Fonálférgeket* «Magyarország édezvizi fonálférgei» czímű dolgozatomban már ismertettem, s így ezen alkalommal csupán a még le nem írt egyetlen faj bemutatására szorítkozom.

Canthocamptus tatricus n. sp.

Fejtora valamivel szélesebb, mint potroha. Valamennyi testszelvényének hátulsó szegélye fürészfogazott, de sörtékkel sehol sem fegyverzett. Rostruma rövid. A villafüggelékek mindkét ivaregyénnél egyforma szerkezetüek. Alapjuk és csúcsuk valamivel keskenyebb, mint közép részük, a mely kissé duzzadtnak látszik. Külső oldalukon két kis dudor emelkedik, a melyeken két nagyobb és több kisebb sörte nyugszik. Belső oldalukon, nem messze az alaptól, egy hegyes csúcsú, sajátságos ujjforma nyujtvány indul ki, a melynek egész fölülete finom sörtékkel födött. Hátoldaluk közepéről egy erős sörte emelkedik. Csúcssörtéik közül legerősebb a középső, a melynek alapja hagymaszerűen duzzadt, egész hosszában finoman czimpás. A külső sörte alig egy hatodát teszi a középsőnek, czimpás. A belső sörte a középsőnek majdnem egy harmadát éri el, alapján kis mértékben térdelt.

A nőstény első csáppárja nyolczízű, a fejtor első szelvényénél rövidebb, tapintópálczikája igen hosszú, majdnem az utolsó csápiz csúcsáig ér.

A hím ölelőcsápjának negyedik íze erősen duzzadt, belső szegélye kerekített, a külső egyenes.

A lábak külső ága háromízű, az első lábpár belső ága mindkét ivaregyénnél, a harmadik lábpáré a hímnél három, a többi lábaké kétízű.

A nőstény első lábának külső ágán a két első íz egy-egy külső csúcstüskét, a második még egy belsőt is visel. Az ízek külső és belső oldala finoman szőrözött. A harmadik íz külső csúcsának közelében egy erős tüskét, végcsúcsán pedig egy erősebb és két gyengébb sörtét visel. A belső ág valamivel hosszabb a külsőnél. Ízeinek belső oldala a csúcstól meglehetős távolságban egy-egy tüskével fegyverzett, az utolsó íz végcsúcsán egy erősebb és két gyengébb sörte emelkedik. A hím első lábpárja hasonlít a nőstényéhez, de belső ága jóval hosszabb a külsőnél. A nőstény második, harmadik és negyedik lábpárja majdnem azonos szerkezetű, de a másodiknak belső ági utolsó ízén csupán egy, a két utolsóén ellenben két sörte van. A hím második lábpárja hasonlít a nőstényéhez, úgyszintén a negyedik is, míg ellenben a harmadik láb belső ága három ízű, első ízének belső csúcsán egy rövid, a másodikén egy feltünően hosszú sörte ered; a harmadik íz csúcsa kétsörtés.

A nőstény ötödik lábpárjának mindkét fele jól fejlődött. A külső részlet erősen megnyúlt, kétszer oly hosszú, mint a belső, de annál sokkal keskenyebb, külső szegélyén két fogazott, csúcsán három tollas sörte emelkedik, belső oldala finoman sörtézett. Belső részletének csúcsán öt, majdnem egyforma hosszú és vastag tollas sörte van, ugyanilyen található belső szegélyének közepe táján is. Az alapíz külső csúcsán egy rövid, sima sörte ered. A hím ötödik lábpárjának csupán külső részlete fejlett ki jól, míg a belső csenevész. A külső részlet megnyúlt, keskeny, külső csúcsának közelében rövidebb, a belsőének közelében ellenben hosszabb, tüskeforma, végcsúcsán egy rövidebb és egy hosszabb, tüskeforma sörtével fegyverzett. A belső részletén egy rövidebb külső és egy hosszabb belső vastag sörte emelkedik.

Nőstény hossza: 0·52 mm.; hím hossza: 0·43 mm.

A kézsmárki csúcs alatt fekvő zöld tóból gyüjtöttem néhány példányát.

Az eddig ismert fajok közül leginkább hasonlít a *Cantho-*

camptus crassus Sars. fajhoz, különösen villájának szerkezete miatt, eltér ettől azonban abban, hogy hímjének ölelőin és harmadik lábpárjának külső ági második ízén nincsenek meg azok az erős cuticula-képletek, a melyeknek jelenléte annyira jellemző a *Canthocamptus crassus* Sars. fajra. De van különbség a két faj között a lábak sörteszámában is.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. november 16.-án tartott üléséből.)

CEMENTES JÁNOS, XVI. SZÁZADI MAGYAR CHEMIKUS.

HERZFELDER ARMAND DEZSŐ-től.

A *M. N. Múzeum kéziratárában* Oct. Hung. 484. szám alatt «*arany olvasztott könyv*» czímen van egy XVI. századi magyar kézirat, melyet eddig figyelemre alig méltattak. E mű részben naplója, részben emlékirata Kolozsvári Cementes János-nak, ki 1525 körül Kolozsvártt született és már ifjúságában az ötvösséget tanulta és gyakorolta. Mesterségétől azonban csakhamar elpártolt és már 1558-ban a «szebeni kamarának» azaz pénzverdének volt alkalmazottja. Itt csak lassan haladt előre. Sokáig maradt czementes, míg végre 1572-ben kinevezték kamaraispánnak, a mely állást 1583-ban bekövetkezett haláláig töltött be.

A kézirat első része számos chemiai præparatum készítésével foglalkozik; a következő fejezetekben pedig napló alakjában írja le szerző az általa végzett kisérleteket és műveleteket.

A kézirat középső fejezetei főleg az arany tisztítását és értékének meghatározását tárgyalják, a mi abban leli magyarázatát, hogy szerző ezen fejezetek megírásakor, mint pénzverdei czementes, e műveletekkel hivatalból foglalkozott. Később azonban kamaraispánná neveztetvén ki, a kézirat már inkább emlékirattá válik; szerző elmondja élete fontosabb eseményeit és több a korra jellemző történelmi tényt említ föl.

Erdély geografiája e műben több folyó- és helységnévvel szerepel, melyek közül Kalotaszeg talán itt fordúl elő először. Találunk vonatkozásokat a kor legfontosabb politikai személyeire;

felsorolja az erdélyi pénzverdéket, beszél szervezetükről és az ott vert aranypénzről és végül az ott gyakorolt eljárásokat igen érdekesen világítja meg. De nyelvemlék számba is megy e mű. A magyar könyvszemle f. é. 3. füzetében jelent meg az eredeti szöveg első része, bibliographiai és nyelvészeti jegyzetekkel, és a mi ismertetésünk csak azon kifejezéseket említi meg, melyek a chemia szempontjából is érdekeseknek mondhatók. Mellőzve az egyebünnen is ismert kifejezéseket, mint «grispan», «russica» stb., van néhány olyan, mely egészen új. Mindenekelőtt a «*közsó*» kitétel, mely a konyhasó helyett volt használatos, a «*kolcs*», mely átkristályosított közsó, azután a görebnek magyaros neve «a töküveg», és hogy mást ne említsek az «ἄμβιξ-ból származó lombik átmeneti alakja az *alombik*.

Az edények egész sorát említi szerző és elnevezéseiket rajzokkal is magyarázza. Ránk nézve érdekes, hogy találunk szebeni és nagybányai tégely-formákat épp úgy, mint magyar elemzési éljárásokat. Chemiai ismereteit illetőleg szerző kora tudományos szinvonalán áll, sőt az aranynyal való bánást illetőleg, hivatalos elfoglaltságából kifolyólag, kiváló jártassággal birt. A mit tud, abból sokat elmond. Leirásai mindig világosak és nyelvezete semmiben sem hordozza magán a XVI. század alchymiai irodalmának titkolódzó jellegét. Mégis sok vonatkozásra, sok hasonlatosságra akadunk a leirásokban, egyrészt az ismert alchymista irók műveivel, másrészt egy kiadatlan kézirattal, mely a M. Tud. Akadémia birtokában van és végre Kecskeméti Péter ötvös könyvével is, mely művünknél 100 évvel fiatalabb. Egynéhány esetben kimutatható, hogy szerzőnket illeti meg az elsőbbség.

A mű nyelve majdnem mindenütt magyar, csak néhol latin ; a terminologia, mint már láttuk, részben magyar, de latin és német is. Az irás, különösen az elején, igen nehezen olvasható, később mindinkább világossá válik. Különös jellemvonása a munkának, hogy egyes helyeken a fontosabb szavak, mint arany, ezüst, mixtura stb. titkos abc jeleivel irvák. E titkos irás jegyeinek hamis használata bizonyítja egyebek közt két szakasznak idegen eredetű utólagos bejegyzését, noha e hamisító személye iránt tisztába

jönni nem lehet. A mű mai kötésében nem tartalmazza a lapokat az eredeti sorrendben, és már régóta hiányos. A könyv utolsó oldalára ugyanis, alighanem a szerző halála után, annak neje «Bis hiro sein Blatt 101 geschrieben» megjegyzést irta és valóban 101 irott lap fekszik előttünk ma is.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1896. november 16.-án tartott üléséből.)