ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 79

FASCICULI 1–2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1974

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (1363 Budapest Pf. 24. Bankszámla 215 11448), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankszámla: 218 10990) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespendenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 32.00

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankkonto Nr. 218 10990) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Béres, E.: Three-Dimensional Stress Analysis by Means of a Continuum Sub-space — Dreidimensionale Spannungsanalyse mit Hilfe eines Kontinuum-Unterraums — *Береш Э.:* Анализ трехмерного напряжения с помощью чонтинуумного подпространства 239

Bogárdi, J.: Actual Theoretical and Practical Problems of Sediment Transportation — Zeitmäßige theoretische und praktische Probleme der Geschiebeführung — *Богарди, Я.:* Современные теоретические и практические вопросы движения наносов 15

Bondy, T.: Berechnung der Kenngrößen von pseudostochastischen vielstufigen Signalen — Calculation of the Characteristics of Pseudorandom Signals — *Бонди, Т.:* Расчет показателей многоуровненных псевдуспучайных сигналов, параметров псевдослучайных многоступенчатых сигналов 267

Csemniczky, J.: Linear Characteristics of Stationary and Rotary Cascades under Three-dimensional Flow Conditions of an Ideal Incompressible Liquid — Die linearen Eigenschaften von stationären und rotierenden Schaufelgittern bei dreidimensionaler Durchströmung mit einer inkompressiblen Flüßigkeit — *Чемицки, Я.:* Линейные свойства наподвижной и вращающейся решеток, образуемых лопатками, а случае трехмерного движения потока идеальной несжимаемой жидкости 143

Cserna, T.: Allgemeintheoretische Annäherung und neue Ausführungsmethode der Rundheitsmessungen im Prisma — A General Theory of Roundnes Measurement in Vee-Blocks — *Черна, Т.:* Общее теоретическое приближение и новый практический метод измерения концентрич?ости в призме 351

Csonka, P.: Regular Polygon Based Paraboloid Shells of Revolution, Having a Circular Skylight Opening — Rotationsparaboloidschale über regelmäßigem Vieleckgrundriß mit kreisförmiger Oberlichtöffnung — *Чонка, П.:* Оболочки параболида вращения с основанием в виде правильного моноугольника и с круглым верхним фонарем 73

Csutor, J.: Verdichtungstechnische Beiträge zur Entwurfstheorie der Kiesbetone — Contribution from Compaction-technical Viewpoint to the Theory of Planning Gravel Concrete — *Чутор, Я.:* Данные к технологии уплотнения по теории проектирования гравийных бетонов ....

Czibere, T.: Über die Berechnung der ebenen Unterschallströmung von kompressiblen Medien — The Calculation of the Plane Subsonic Flow of Compressible Fluids — *Цибере, Т.:* О расчете двухмерного движения потока ниже звуковой скорости сжимаемых сред 277 93

Farkas, J.: Structural Synthesis of Press Frames Having Columns and Cross Beams of Welded Bow Cross-section — Konstruktionssynthese von Pressengestellen mit Städern und Querträgern geschweißten Kastenquerschitts — *Фаркаш, Й.:* Конштрукционный синтез станин прессов со стойками и поперечинами сварного скоробчатого сечения 191

Hangos, I. — Frl. Juhász, I.: Simultane Gleichgewichte in Halogenlampen mit zwei verschiedenen Halogenzusätzen. Gleichgewichte beim gleichzeitigen Vorhandensein von H_2Br_2 und J_2 — Simultaneous Equilibriums in Halogen Lamps Containing Two Different Halogens. Equilibriums in the Case of Pure Halogens — *Хангош, И.*, Юхас, И.: Одновременные равновесия в галогеновых лампах, содержащих два различных галогена. Равновесия в случае однвременного присутствия 101

Horváth, Gy.: Red Mud Smelting Experiments — Versuche über die Verhüttung des Rotschlammes — *Хорват, Д.:* Экспериментальные опыты по доменной переработке красного шлама 413

Kalló, P.: Critical Summary of the Design Methods of Form-independent Thin Triplet Systems — Kritische Zusammenfassung der Entwurfsmethoden des gestaltungabhängigen dünnen Systems des Triplets — *Калло, П.:* Критическое обобщение метода проектирования формонезависимой тонкой системы триплета 133

Lenkei, P.: Local and Overall Specific Inelastic Rotation Capacities in Reinforced Concrete Beams — Zusammenhang zwischen der örtlichen und der mittleren spezifischen, nicht elatischen Verdrehungsfähigkeit von Stahlbetonträgern — *Ленкеи, П.:* стные и средние удельные неупругие повожелее 451

Kerek, A.: Berechnung von einschichtigen auf Biegung beanspruchten anisotropen Fachwerkschalen — Calculation of Single-Layer Anisotropic Bent Shells Consisting of Scalene Web System — *Керек, А.:* Расчет изогнутых анизотропных оболочек, состоящих из однослойных решеток с общей треугольной сеткой 383
Kolonits, F.: Flash Temperature of Gears Part I. Review of the Problem and Stationary Models — Blitztemperaturen von Zahnrädern. I. Teil Überblick und stationäre Modelle — *Колонич, Ф.:* Температура молнии зубчатого колеса, I. Обзор и стационарные модели 153
Michelberger, P.—Keresztes, A.: The Estimation of Stresses due to Production Inaccuracies by Means of Higher Order Moments — Schätzung der aus Fertigungsungenauigkeiten herrührenden Beanspruchungen mit Hilfe von höheren Momenten — *Михел§ергер, П., Керестеш, А.:* Оценка нагрузок от неточностей производства при высоких моментах 63
Millner, T.: Über die Fremdstoff-Frage der Fasergrenzen bzw. der Kristallgrenzen von gezogenen bzw. rekristallisierten Wolframdrähten — Influence of Foreign Matter on the Fibre Boundary (Crystallite Boundary of Drawn Recrystallized) Tungsten Wires — *Мильнер, Т.:* О вопросе посторонних веществ фазовых границ или же кристаллитных границ волоченых и кристаллизированных вольфрамовых проводок 1
Nath, G.: Local Similarity Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer Equations — Lokale Ähnlichkeitslösungen für die kompressiblen laminaren Grenzschichtströmungen — *Нат, Г.:* Местные решения подобия для сжимаемых ламинарных граничных урашений 225
Soare, M. V.: On the Statics and Dynamics of Double-Layer Oblique Square Mesh Grids — Statik und Dynamik der zweilagigen, zweiläufigen schrägen Stabroste — *Мирча Соаре:* Статика и динамика пространственных пластинообразных косых сеток с квадратной рештком 335
Somlyódi, L.: Improvement of the Efficiency of Free-Blow-out Axial Fans Using Variable Circulatio n— Verbesserung des Wirkungsgrades von frei ausblasenden Axiallüftern durch veränderliche Zirkulation — *Шомлоди, Л.:* Повышение кпд аксиальных вентиляторов со свободным сдувом применением переменной циркуляции 115
Soriano, A.—Krizek, R. J.—Gyuk, I.: Application of Conformal Mapping to Transient Tile Drainage — Anwendung der konformen Abbildung auf transiente Tonrohrdränung — *Сориано, А., Критцек, Р. Й., Дюк, И.:* Применение конформного отображения для глиняных дренажных труб 203
Szabó, J.—Scharle, P.: Über die Beziehungen zwischen der Theorie der Stabkonstruktionen und der Kontinuumaufgabe — Relations between the Theory of Bar Structures and the Continuum Problem — *Сабо, Я., Шарле, П.:* О связи между теорией стержневых конструкций и континуумной задачей 51
Szalai, J.: Inconsistencies in the Linear Theory of Creep of Concrete Suggestion for their Elimination — Einige Widersprüche der linearen Theorie des Kriechens des Betons und ein Vorschlag zu deren Beseitigung — *Салаи, Я.:* Противоречия линеарный теории ползучести бетона и предложения по устранению этих противоречий 309
Szücs, L.: Physico-chemical Investigation of the Effect of Nickel Dissolved in a Steel Bath on Desulfurization — Physikalisch-chemische Untersuchung der Einwirkung des im Stahlbad gelösten Nickels auf die Entschwefelung — *Сюч, Л.:* Физико-химическое исследование десульфирующего действия никеля, растворенного в стальной ванне 175

BOOK REVIEW

Beleş, A. A.—Soare, M. V.: Berechnung von Schalentragwerken (Csonka, P.) 465
Hampe, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke (Csonka, P.) 466
Gabriel Kron and Systems Theory, (Csáki, Fr.) 466
Márkus, Gy.: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung (Kollár, L.) 467
Rehbein, H.: Basic, leicht gemacht (Vámos, T.) 468
Ribbek, W.: Grundlagen der Time-Sharing-Anwendung (Vámos, T.) 468
Palotás, L.: Theorie des Stahlbetons (Csonka, P.) 469
Porter, B.—Crossley, R.: Modal Control, Theory and Applications (Bosznay, Á.) 471
Szilárd, R.: Theory and Analysis of Plates. Classical and Numerical Methods (Csonka, P.) 473
Szilárd, R.: Hydromechanically Loaded Shells (Csonka, P.) 473
Széchy, K.: The Art of Tunnelling (Varga, L.) 474
Zementtaschenbuch 1972/1973 (Palotás, L.) 475

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 79

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1974

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 1—14 (1974)

ÜBER DIE FREMDSTOFF-FRAGE DER FASERGRENZEN BZW. DER KRISTALLITENGRENZEN VON GEZOGENEN BZW. REKRISTALLISIERTEN WOLFRAMDRÄHTEN

FESTSTELLUNGEN UND VORSTELLUNGEN

T. MILLNER*

MITGLIED DER UNG. AKADEMIE DER WISS.

[Eingegangen am 14 Febr. 1973]

In den Wolframglühfäden mit Zusätzen (z. B. mit 1...50 ppm K, Si, Al Zusatzspuren) spielen neben der chemischen Beschaffenheit der Zusatzspuren auch ihre Verteilung und ihre Ortsänderungen eine bedeutende Rolle im Zustandekommen des großkristallinen Gefüges der Wolframglühkörper, in ihrer Formbeständigkeit bei hoher Temperatur und in der Ausbildung ihrer bei Zimmertemperatur auftretenden mechanischen Eigenschaften. Gemäß den Feststellungen des Verfassers werden diese Tatsachen a) durch die Unabhängigkeit der Kristallitwachstumsgeschwindigkeit von der Art der Zusätze, b) durch die Ortsänderungen der Fremdphasenteilchen während der Rekristallisation, c) durch die Wirkung von Fremdatomen statt von Fremdphasenteilchen in der Rekristallisation, z. B. von Ga-Atomen statt Al_2O_3, von Tl-Atomen statt K_2O, d) durch die Rolle des durch Be ersetzbaren Si-Zusatzes in den creep-Erscheinungen bei 2800°K, sowie e) durch das Aufeinandergleiten der Fasern der gezogenen Wolframdrähte während der gleichmäßigen Dehnung und hauptsächlich bei der Ausbildung der Kontraktion beim Zerreißen — klar ersichtlich.

Einleitung

Seit etwa 60 Jahren, seitdem langkristallinische Wolframdrähte für Glühlampenspiralen auf pulvermetallurgischem Wege hergestellt und weltweit benutzt werden, war und ist ihre Kristallstruktur nie befriedigend gleichmäßig: es traten und treten zwischen den langen Kristallen immer wieder auch kleinere Kristalle oder kleinkristallinische Gebiete auf. Außerdem war und ist die durchschnittliche Kristallitenlänge — trotz bewußt gleichgehaltener Technologie — schwankend, z. B. zeitweise verschieden.

Die großkristallinischen Wolframdrähte werden mit Hilfe von Fremdstoffen, d. h. mittels kleinen Mengen von oxydischen Zusatzstoffen hergestellt. Soviel steht seit etwa 30 Jahren fest, daß ihre Großkristallstruktur von winzigen Spuren (0,1—50 ppm) dieser Zusatzstoffe hervorgerufen wird [1]. Anscheinend üben also diese Zusatzspuren eine Kristallwachstum fördernde Wirkung aus. Warum wachsen aber nicht alle wachsende Keime zu langen Kristallen aus? Treffen manche Kristalle an fremde Hindernisse in ihrem

* Dr. T. MILLNER, Mikszáth K. u. 108, 1046 Budapest, Ungarn

Weiterwachsen? Oder werden sie in ihrem Weiterwachsen einfach durch Zusammentreffen mit einem anderen Kristall gehemmt? Hat die Keimbildungswahrscheinlichkeit entlang des Drahtes nicht überall denselben Wert?

Sind die Zusatzspuren im Draht nicht genügend gleichmäßig verteilt? Tatsache ist, daß es Kristalle gibt, die ohne mit einem anderen zusammenzutreffen, auf einmal stehen bleiben, d. h. nicht weiterwachsen [2, 3].

Welche Erklärung kann man für eine nichtstatistisch schwankende Keimbildungswahrscheinlichkeit finden? Worin kann man die Ursache einer spontanen Stockung des Weiterwachsens suchen? Was wissen wir vom Verhalten der Zusätze in der Reduktion, im Sintervorgang? Was wissen wir von dem Verhalten und von der Wirkungsweise der Zusatzspuren im Bearbeitungsprozeß, während der Rekristallisation der Drähte und während ihrer Wärmebehandlung im allgemeinen?

Was hat die ungarische Wolframforschung zur Klärung besonders der letzten Fragen — die selbstverständlich auch außerhalb ihrer Grenzen aufgetaucht sind — beigetragen?

2. Über die Wachstumsgeschwindigkeit der Kristallite im Rekristallisationsprozeß von gezogenen, pulvermetallurgisch hergestellten Wolframdrähten

Seitdem man Wolframdrähte — geeignet für nichtdurchhängende Glühspiralen elektrischer Glühlampen — mittels oxydischer Zusatzstoffe herstellt, also seit einem Vorschlag von A. PÁCZ [4] aus dem Jahre 1920, zu diesem Zwecke Alkalien und Kieselsäure vor der Wasserstoff-Reduktion dem WO_3 zuzusetzen, konnte man bisher noch nie bezüglich Kristallitenlänge, Formbeständigkeit und mechanischer Eigenschaften eine die Massenfabrikation von Glühlampen völlig befriedigende Strukturgleichmäßigkeit erreichen. Auch seit etwa 1933 nicht, seitdem man nach einem Vorschlag von P. TÚRY und T. MILLNER [5] neben Alkalien und Kieselsäure auch »Aluminiumoxyd« d. h. auch einen aluminiumhaltigen Zusatzstoff zusetzt.

Im Jahre 1942 unterzog G. S. ROBINSON [6] diese Frage mittels einer damals neuen »elektronenoptischen« Methode einer näheren Untersuchung. Auf Grund dieser Mitteilung haben auch wir (um 1955—1960) das Entstehen und Weiterwachsen der Kristallite unserer Drähte, und zwar der K-, Si-Spuren enthaltenden »UC«- Drähte und der K-, Si-, Al- Zusatzspuren enthaltenden »GK«- Drähte nach derselben Methode messend verfolgt [3, 7, 8].

Dazu wurden die elektropolierten Wolframdrähte von rund 0,10 cm Durchmesser in der Längsachse einer evakuierten Glasröhre ausgespannt und auf eine entsprechende Temperatur erhitzt. Die innere Wand der Röhre wurde mit einer Willemit-Pulverschicht überzogen. Durch die Beschleunigung der thermischen Elektronen in radialer Richtung mit einer Gleichspannung von etwa 8000 V konnte man die Willemitschicht derart zum Leuchten erregen, daß an ihr die Entstehung und das Weiterwachsen der einzelnen Kristallite von Zeitpunkt zu Zeitpunkt photographisch festgehalten und die Wachstumsgeschwindigkeit berechnet werden konnte.

Einem 0,10 cm starken, elektropolierten GK- Wolframdraht, in welchem die numerische Konzentration der K-, Si- und Al-Atome in der Nähe von 10^{-5} lag, haben wir an 25 Stellen 25 Drahtstücke von je 25 cm entnommen und die sekundäre Rekristallisation dieser Stücke untersucht. In gleicher Weise haben wir auch entsprechende UC- Drähte geprüft und dabei folgendes gefunden [2].

a) Bei 2200°K unterscheiden sich die Durchschnittswerte der Kristallwachstumgeschwindigkeiten für GK- und UC- Drähte (0,02 cm sec^{-1}) nicht nennenswert.

b) Bei 2200°K sind die Durchschnittswerte der Keimbildungsgeschwindigkeiten in GK- Drähten (30 cm^{-3} sec^{-1}) rund 30÷10mal kleiner als in den UC- Drähten (300 cm^{-3} sec^{-1}).

c) Bei 2200°K ist die durchschnittliche Kristallitenlänge der GK- Drähte (z. B. 0,9 cm) rund 9÷3mal größer als die der UC- Drähte (z. B. 0,3 cm).

d) Bei einem Drahtdurchmesser von 0,085 cm sind die Kristallite der GK- Drähte 60÷70mal und die der UC- Drähte etwa 10mal länger als der Drahtdurchmesser.

Man darf aus diesen Beobachtungen den Schluß ziehen, daß Al enthaltende Zusatzspuren eine Verringerung der Keimbildungsgeschwindigkeit verursachen.

Da die Vorbedingung einer homogenen Glühlampenproduktion offenbar eine nahe identische Qualität von Miliarden von meterlangen Wolframdrahtstücken ist, tauchte in uns schon früh die Frage auf: Reichern sich an in Bewegung befindlichen Kristallgrenzen im Falle kleiner Kristalle irgendwelche *hemmende* Fremdstoffspuren an, oder sind dort, wo die Kristalle zu langen Indivuduen weiterwachsen, gewisse *wachstumfördernde* Fremdstoffspuren vorhanden?

Man sieht zugleich, daß für eine gleichmäßige Massenproduktion von Glühlampen nicht nur die Kenntnis der chemischen und physikalischen Beschaffenheit der wirksamen Ursachen (Frendstoffspuren usw.) und nicht nur deren statische Verteilung (Topographie) nötig wäre, sondern auch die Kenntnis ihres dynamischen Verhaltens, d. h. die Kenntnis ihrer Ortsänderungen während der Bearbeitung, während der Rekristallisation, während jeglicher Erhitzung von großer Wichtigkeit wäre.

Es fehlen uns aber auf diesem Gebiet die ausreichenden Kenntnisse. Die Beseitigung dieses Mangels ist der künftigen Wolframforschung vorbehalten. In der Robinsonschen Methode steht uns dazu ein entsprechendes Mittel zu Verfügung.

3. Autoradiographische Untersuchung der Bewegungsart geringer Fremdsubstanzmengen während der sekundären Rekristallisation von Metallen

Seit etwa 1946 haben wir die für die Wolframtechnologie so wichtige Frage wiederholt aufgeworfen, ob es nicht möglich wäre, die Verteilung und die Ortsänderungen der K, Si und Al enthaltenden Zusatzspuren in den einzelnen Fertigungsphasen der Wolframdrahtherstellung mittels radioaktiver Isotopen aufzuklären? Da wir aber keine Methode gefunden haben, mit welcher man aktive K-, Si- und Al- Spuren im Wolframmetall bei uns hätte bestimmen können, haben wir von 1959 an Modellversuche mit Zinn angestellt. Als Grundmetall wählten wir zu diesen Versuchen reines Zinn und als eine kaum lösliche Fremdsubstanz Silber, d. h. ein mit radioaktiven Isotopen markiertes Silber [9].

Es wurden rasch abgekühlte Zinn-Gußkörper mit einem Gehalt von 0,2—0,005% Silber hergestellt. Das Silber enthielt in diesem Fall das Isotop ^{110}Ag/β, 270 d, 0,59 MeV. Die Silberverteilung wurde nach der Stripping-Film-Methode also mittels photographischer Selbstabbildung festgestellt. Wir haben damit folgende Beobachtungen gemacht.

In Zinn-Gußkörpern mit 0,2 bis 0,005% Ag häuft sich das Silber sowohl an den Kristallgrenzen, als auch an den Subgrenzen an, u. zw. unabhängig davon, ob die Silberkonzentration oberhalb oder unterhalb der in der Literatur angegebenen Löslichkeitsgrenze von 0,02% liegt. Das Silber *verläßt* sowohl in dem allein durch Wärmebehandlung hervorgerufenen Kristallwachstum, als auch in der irgendeinen Walzvorgang begleitenden (z. B. in der nach 80%-igem Walzen bei Zimmertemperatur erfolgenden) Rekristallisation seine alten Plätze und sammelt sich an den neugebildeten Korngrenzen an [10, 11].

Da aber in der Literatur die Löslichkeitsgrenze von Silber in Zinn nicht genügend genau angegeben wird, haben wir die Versuche auch mit bedeutend geringeren Silberkonzentrationen, mit der stärker radioaktiven ^{111}Ag/β (7,5d, 0,8 MeV)- Atomart, durchgeführt [11, 12]. Die trägerfreien ^{111}Ag- Präparate waren Produkte des ungarischen Versuchsatomreaktors. Als Grundmaterial wurde eine spektralreine Zinnsorte verwendet, welche — nach dem Prüfschein — weniger als 10^{-4}% Silber enthielt. Die zugesetzte ^{111}Ag- Konzentration lag bei 10^{-7}% Ag. Das Silber reichert sich auch in diesen Zinn/Silber-Gußkörpern bevorzugt an den Korn- und Dendritgrenzen an und wird dort derart stark festgehalten, daß auch eine 20stündige Erhitzung auf 210°C zu keiner Homogenisierung führt.

Auch die mit Hilfe von ^{111}Ag durchgeführten Aktivitätsmessungen haben die mit ^{110}Ag gemachten autoradiographischen Beobachtungen bekräftigt.

Unseren oben geschilderten Robinsonschen Versuchen lag die Vermutung zu Grunde, daß »unlösliche« Fremdsubstanz-Teilchen das Kristallwachstum im allgemeinen behindern und da sie in einem Metallkörper nicht leicht gleichmäßig verteilt werden können, ihre Anwesenheit zu einer ungleichmäßigen (ungleichmäßig gehinderten) Kristallstruktur führt. Man sollte also womöglich mit Atomdispers verteilten (gelösten) Wirkstoffen anstatt Fremdstoffteilchen arbeiten, wenn man eine sehr gleichmäßige Rekristallisationsstruktur erreichen will.

Worin kann man außerdem eine Bedeutung dieser Beobachtungen für die Wolframtechnologie erblicken?

Die autoradiographischen Untersuchungen der Rekristallisation des Sn/Ag- Systems haben die Fähigkeit gewisser punktförmiger Anhäufungen (Fremdsubstanzteilchen) zum Vorschein gebracht, die in Bewegung befindlichen Kristallgrenzen im Rekristallisationsvorgang, *also in fester Phase* begleiten zu können. Man muß also überlegen und prüfen, ob nicht dasselbe im Rekristallisationsvorgang von dotierten Wolframdrähten sich ereignen kann? In diesem Fall würden Fremdstoffteilchen kein arges Hindernis für das Wachsen der Kristalle bedeuten. Wären sie aber in der Rekristallisationsstruktur einmal ungleichmäßig verteilt, so könnte man sie nachträglich nicht durch »egalisierenden« Wärmebehandlungen gleichmäßig verteilen.

Die Autoradiographie könnte uns auf diesem Gebiet vielleicht noch gute Dienste leisten.

4. Sind die Wirkstoffe der großkristallinischen Rekristallisation in den Wolframdrähten als oxydische Fremdstoffteilchen oder als Fremdatome anzusehen?

Seit 1955 wurden — wie bekannt — viele gute Argumente besonders seitens J. L. MEIJERING [13] und G. D. RIECK [14—18] als Beweis dafür aufgeführt, daß die ungewöhnlichen Rekristallisationseigenschaften der mit K, Si und Al enthaltenden Zusätzen dotierten Wolframdrähte und die nutzbaren Festigkeitseigenschaften der rekristallisierten Glühkörper von gewissen kleinen, an den Faseroberflächen des gezogenen Drahtes befindlichen oxydischen *Fremdstoffteilchen* hervorgerufen und von dem im ganzen Draht feinverteilten oxydischen Fremdkörperteilchen bestimmt werden. Das sorgfältig gesammelte interessante Beweismaterial von RIECK hat zwar allgemeine Anerkennung gefunden, doch sind gegen diesen Erklärungsversuch auch gewisse Bedenken erhoben worden.

In 1959 haben wir z. B. darauf hingewiesen [19], daß die analytisch feststellbare Konzentration der gesamten Zusatzspuren so gering ist, daß die Fremdstoffe nicht einmal dazu ausreichen, die gesamte Faseroberfläche eines aus 1 Mikron starken Metallfasern bestehenden Drahtes monoatomar zu bedecken.

Schon um 1955 hielten wir eine andere Erklärung als viel wahrscheinlicher, u. zw. eine solche, welche auf die spezifischen Wirkungen derjenigen *Fremdatome* aufgebaut ist, die in den Zusatzstoffen enthalten sind [1]. Hauptsächlich darum, weil die Besonderheiten der Rekristallisation von GK- Drähten (u. a. die hohe Rekristallisationstemperatur usw.) nicht mittels beliebige (oder wenigstens einige andere) Atomarten enthaltende Zusatzstoffen, sondern eben nur mittels K und Si und Al enthaltenden oxydischen Zusatzstoffen erreichbar waren. Es entstand unsere Vermutung, daß in den gesinterten GK-Stäben und gezogenen GK- Drähten neben oxydischen Zusatzspuren auch K- und Si- und Al- Atome als die Kristallisation und Rekristallisation lenkende Wirkstoffe in entsprechender Konzentration zugegen sind und anwesend sein müssen.

Unsere nach der Robinsonschen Methode durchgeführten Versuche haben — wenigstens bezüglich der Al- Atome — diese Auffassung bekräftigt, da die Ergänzung der K- und Si-haltigen Zusatzstoffe (UC) mit einem Al-haltigen oxydischen Zusatzstoff (GK) die Keimbildungswahrscheinlichkeit stark herabgesetzt hat. Die Keimbildung kann aber eher durch im Metall gelöste,

Tafel 1

Siehe auch Tafel 2	Rekr. Temp. °K	Kristallgröße		
		Sinterung:		
Drahtsorte		rasch r	wie üblich ü	langsam l
1. W ohne Zusätze	<1800	klein	klein	klein
2. KAl	1800	klein	klein	klein
3. UC (K Na *Si*)	2300	klein	mittel	mittel
4. GK (K *Si* Al)	2500	klein	mittel	groß
5. K *Si* Ga	2600	groß	groß	groß
6. Tl *Si* Al	<2500	mittel	mittel	mittel
7. K Be Al	2500	·	groß	·

· = nicht bestimmt

überall mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftretende spezifische Fremdatome unterdrückt werden, als durch verstreut vorhandene, unbewegliche oder schwerbewegliche oxydische Fremdstoffteilchen.

So sind wir auf die Frage gekommen, ob in mit K, Si, Al enthaltenden Zusatzstoffen hergestellten Drähten die Fähigkeit, eine aus langen Kristallen bestehende Rekristallisationsstruktur zu entwickeln auch dann bestehen bleibt, wenn man den als Al_2O_3 angesehenen Zusatzstoff — welcher, wie damals von anderer Seite angenommen wurde, als oxydischer Fremdstoff vorhanden bleibt — durch einen als Ga_2O_3 angesehenen Zusatzstoff ersetzt, welcher in der Reduktion durch Wasserstoff völlig zu elementarem Ga reduziert wird, also keine oxydische Teilchen bildet. Die mit K, Si, Ga enthaltenden oxydischen Zusätzen hergestellten Wolframdrähte haben sich als vorzüglich großkristallinisch erwiesen [20]. Ein analoger Versuch mit Tl_2O anstatt K_2O hat bewiesen, daß Tl- Atome in einem mit Tl, Si, Al enthaltenden Zusatzstoffen hergestellten Wolframdraht denselben Effekt hervorzurufen imstande sind, wie die als K_2O enthaltend angesehene Zusatzstoffe [21].

Unlängst wurde es bewiesen [22], daß der K-Gehalt der mit K, Si, Al enthaltenden Zusätzen hergestellten Wolframdrähte in elementarer Form vorhanden ist.

Man ist also schrittweise zu der Ansicht gekommen, daß die großkristallinischen Eigenschaften der mit K, Si, Al enthaltenden Zusätzen hergestellten (z. B. GK)- Drähten:

1. höchstens teilweise auf das Verhandensein von oxydischen Zusatzspuren (wie von Mullit-Teilchen oder von Leucit-Teilchen) zurückzuführen sind; und

Tafel 2

Siehe auch Tafel 1	Dehnungsgeschw.			Ätzlöcher		
	2800 °K; % pro St			an den Grenzen		
Drahtsorte	r	ü	l	r	ü	l
1. W ohne Zus.	5	4	4	viele	viele	viele
2. K Al	4	4	6	viele	viele	viele
3. K Na *Si*	4	1	0,2	viele	wenige	∅
4. K *Si* Al	0,5	0,06	0,05	viele	wenige	∅
5. K *Si* Ga	0,05	0,05	0,09	∅	∅	∅
6. Tl *Si* Al	0,03	0,07	0,02	∅	∅	∅
7. K Be Al	·	·	·	·	·	·

2. wenigstens teilweise der Wirkung von spezifischen Fremdatomen (von z.B. K-, Al-, Tl-, Ga- Atomen) zuzuschreiben sind.

Die Al-Atome üben ihre Wirkung als Nukleation hemmende Faktoren aus; die K-Atome bauen im Metall ein Dampfblasen-Netzwerk auf, das als kristallwachstumshemmend angesehen werden kann.

Diese letzte Feststellung ist eine große Leistung der neuzeitlichen Wolframforschung. Ihre auf die Untersuchung der Faseroberflächen der Wolframdrähte ausgedehnte Methodik verspricht weitere wesentliche Erfolge.

5. Das Verhalten von Rekristallisierten Drähten verschiedener Wolframdrahtsorten im Dehnungsversuch bei 2800 °K

1962 haben wir erstmalig von unseren bei hohen Temperaturen (d. h. bei 2800°K) durchgeführten Creep-Versuchen berichtet [25]. Seit diesen Versuchen — welche wir einerseits an ohne Zusätze hergestellten »W«- Drähten, andererseits an mit K, Al enthaltenden Zusätzen hergestellten »K-, Al«- Drähten, mit K, Na, Si enthaltenden Zusätzen gefertigten »UC«- Drähten und schließlich mit K, Si, Al enthaltenden Zusätzen hergestellten »GK«- Drähten durchgeführt haben — haben wir die Deutung der Ergebnisse im Laufe der Zeit wiederholt versucht [2, 26, 27].

Später breiteten wir die Creep-Versuche auch auf mittels K, Si, Ga enthaltenden Zusatzstoffen hergestellte »Ga«- Drähte [20], [28] und auf mittels Tl, Si, Al enthaltenden Zusatzstoffen hergestellte »Tl«- Drähte aus [21, 28].

Bei den vier ersten Drahtsorten wird verbreitet angenommen [2, 23, 24], daß dieselben oxydische Zusatzreste enthalten, und daß das Vorhandensein dieser Spuren im Falle der UC- und GK- Drähte zu den bekannten großkristallinischen Rekristallisationsstrukturen führt. Bei den zwei letzteren Drahtsorten gilt es als bewiesen, daß die »Ga«- Drähte anstatt Al_2O_3- Spuren sicher Ga-Fremdatome enthalten, und daß die »Tl«- Drähte anstatt K_2O- Spuren sicher Tl- Fremdatome enthalten, da Ga_2O_3 und Tl_2O im Reduktionsprozeß durch Wasserstoff völlig zu elementarem Ga und elementarem Tl reduziert werden. Trotzdem rekristallisieren auch die »Ga«- und »Tl«- Drähte — ähnlich wie die GK- Drähte — großkristallinisch.

Bei der Durchführung unserer Creep-Versuche verfolgten wir die langsame Dehnung von 0,9 mm starken, rekristallisierten, bis 2900°K vorerhitzten Wolframdrähten bei 2800°K während einer Drahtbelastung von 1300 g/mm^2. Aus jedem der sechs Metallpulver stellten wir durch rasche, übliche und langsame Sinterung Stäbe her [25, 26] und verarbeiteten diese mit der gleichen Technologie zu Drähten. In der Tafel 1 sind die Rekristallisationstemperaturen und die Kristallgrößen, in der Tafel 2 die Kriechgeschwindigkeiten und eine karakteristische Erscheinung: die Ätzlochbildung nach dem Kriechen (beim Anätzen der Schliffe) zusammengestellt. Die Ätzlöcher entstehen — wenn überhaupt — an den zur Zugrichtung quer stehenden Kristallgrenzen.

Solange uns nur die Eigenschaften der ersten vier Drahtsorten bekannt waren und durch unsere Robinsonsche Versuche klar geworden ist, daß Al enthaltende Zusatzspuren die Kristallitenabmessungen vergrößern, haben wir folgende Vorstellungen entwickelt.

1. Vorstellung. In Abwesenheit von Si enthaltenden Zusätzen entstehen während der Reduktion und im Laufe der Sinterung nur wenige derartige Fremdatome, die in das Gitter eingebaut werden und die Nukleation hindern

können: es entstehen z. B. viel zu wenig Al-Atome. Es erscheinen demzufolge nur kleine Kristalle bei einer niedrigen Rekristallisationstemperatur. Die so entstandenen Kristallgrenzen sind nur durch wenige Fremdatome und viele Fremdphasenteilchen verunreinigt. In Abwesenheit von Si-haltigen Zusätzen geschieht das unabhängig von der Art der Sinterung und es kriechen alle »W«- und »KAl«- Drähte vielleicht darum rasch, weil sie alle gestörte oder schwache Grenzen haben und so alle diese Drähte — unabhängig von der Art der Sinterung — Kristallitengrenzen haben, die leicht in Bewegung zu setzen sind.

2. Vorstellung. In Anwesenheit von Si-haltigen Zusätzen entstehen während der Sinterung viele, die Nukleation hindernde Atome, z. B. viele Al-Atome. Es entstehen demzufolge *lange* (große) Kristalle. Diese sind um so größer und ihre Grenzen sind umso reiner, je länger der Stab im Laufe der Sinterung in einem mittleren Temperaturgebiet auf einer konstanten Temperatur gehalten wurde [26, 29]. Die Anwendung von Si-haltigen Zusatzstoffen und das »langdauernde« Sintern sind die Mittel mit welchen man in den »UC«- und »GK«- Drähten eine gute Kriechfestigkeit hervorrufen kann. Vermutlich haben die langen Kristallite entweder besonders reine oder aber durch Si irgendwie verfestigte Grenzen.

Unsere seit 1962 mit »Ga« [20]- Drähten gemachten Beobachtungen haben diese Vorstellungen in gewisser Hinsicht bekräftigt. In den reduzierten Metallpulver dieser Drähte befinden sich Si enthaltende — also vermutlich reine, oder durch Si verfestigte Kristallgrenzen schaffende — Zusätze und es sind in ihnen chemisch mit Al-Atomen verwandte — möglicherweise ebenfalls Nukleation hindernde — Ga- Fremdatome in beträchtlicher Konzentration vorhanden. Bemerkenswert ist, daß hier die Ga-Atome nicht erst während der Sinterung entstehen müssen. Demzufolge ist es nicht überraschend, daß die »Ga«- Drähte unabhängig von der Art der Sinterung alle Großkristallstruktur aufweisen und sich alle kriechfest verhalten.

Eine Frage bleibt aber unbeantwortet: warum bleiben die »Ga«- und »Tl«- Drähte bei *jeder* Sinterungsart kriechfest, und umgekehrt, warum verhalten sich die »UC«- und »GK«- Drähte nur nach einer langsamen Sinterung und nicht bei jeder Sinterungsart kriechfest, obwohl alle vier Drahtsorten mittels Si enthaltenden Zusatzstoffen hergestellt werden?

Man empfindet zwar in dieser Unempfindlichkeit der »Ga«- und »Tl«- Drähte gegenüber etwaigen Schwankungen des Sintervorganges einen technischen Vorteil, bleibt aber eben wegen der noch nicht wiederspruchsfrei geklärten Rolle des Siliziums unsicher im technischen Handeln im Falle der »UC«- und »GK«- Drähten.

Die ungenügend geklärte Siliziumfrage hat uns weiterhin beschäftigt. So haben wir auch die Rolle der Vakantien und der Morphologie der Rekristallisationsstruktur geprüft [26, 28, 30] und erwogen, welche Rolle diese Faktoren beim Entstehen derjenigen empfindlichen Punkte spielen können, welche nach dem Kriechen zu einer Ätzlochbildung führen [26]. Von der Beschaffenheit dieser Punkte wissen wir zur Zeit leider noch wenig. Soviel steht aber fest, daß ein aus langen Kristallen bestehendes Rekristallisationsgefüge, ein kriechfestes Verhalten und dazu ein Wegbleiben der Ätzlochbildung — miteinander verknüpft — ohne Si nicht zustandekommen. Darin offenbart sich eine chemische Vorbedingung der Kriechfestigkeit. Das Entstehen einer aus langen Kristallen bestehenden Struktur (durch Mitwirkung spezifischer Zusätze) weist eigentlich schon an sich allein auf diese chemische Vorbedingung hin. Man muß nur bedenken, daß das kleinkristallinische Gefüge der »KAl«- Drähte unterhalb 1800°K, in Gegenwart von K und Al enthaltenden Zusatzresten entsteht, wogegen das großkristallinische Gefüge der »GK«- Drähte bei etwa 2500°K sich durch den gleichzeitigen Einfluß von K, Al *und Si* enthaltenden Zusatzresten entwickelt.

Neuerdings (1971) gelangten wir zur Ansicht, daß die Kristallitgrenzen in Anwesenheit von Si enthaltenden Zusatzresten durch W—O—Si—O—W-Brücken befestigt werden, da SiO_2 von H_2 nicht reduziert wird und in solchen Brücken die Si Atome ihre Verbindung mit O- Atomen wenigstens zum Teil behalten können. Außerdem kann eine W—O—Si- Bindung (etwa 79,5 Kcal) als stärker angesehen werden, als eine W—O—W- Bindung (etwa 67 Kcal) [31]. Diesen Gedanken haben wir auf einem Umweg, mittels Be enthaltenden oxydischen Zusätzen, geprüft. Gegenüber O- Atomen verhalten sich Be-Atome in gewisser Hinsicht ähnlich, wie Si- Atome. Zuerst: BeO läßt sich durch H_2 ebenfalls nicht reduzieren. Weiterhin ist Be im Mineralreich immer ebenso mit vier O- Atomen umgegeben, wie die Si- Atome: die beiden befinden sich in ihren oxydischen Mineralien stets in tetraedrischer Sauerstoff-Koordination. Nun, die Versuche haben uns gezeigt, daß man mittels Be enthaltenden anstatt Si enthaltenden oxydischen Zusatzstoffen (in Gegenwart von K_2O und Al_2O_3) im Rekristallisationsgefüge ebenfalls lange Kristalle und gute Festigkeitseigenschaften hervorrufen kann [32]: vermutlich infolge der beträchtlichen Stärke (95,2 Kcal) von W—O—Be- Bindungen.

Darin ist die Annahme enthalten, daß sowohl Si enthaltende, wie auch Be enthaltende oxydische Zusätze ihre Wirkungen — in den »UC«,- »GK«-, »Ga«-, »Tl«- und »Be«- Drähten — nicht allein als Fremdatome, sondern *mit Sauerstoff vergesellschaftet* ausüben.

Zu einer Klärung der offenen Fragen der Großkristallbildung und Kriechfestigkeit reichen allein physikalische Betrachtungen nicht aus. Erst systematische, der chemischen Art der Fremdstoffe Rechnung tragende Robinsonsche und Creep-Versuche versprechen der Wolframtechnologie die noch fehlenden, nötigen Erkenntnisse von der physikalischen *und* chemischen Beschaffenheit und vom Verhalten der Kristallitgrenzen. In der Literatur findet man Hinweise [22], daß die dazu nötigen Mittel uns heutzutage schon zu Verfügung stehen.

6. Über Dehnung und Kontraktion von gezogenen Wolframdrähten im Zerreißversuch

Worin erblicken wir eine Forschungsfrage auf dem Gebiet der Kontraktion von Wolframdrähten?

Man muß die Tatsache beachten, daß im Ziehprozeß ein Wolframdraht nicht deswegen dünner wird, weil wir ihn durch starken Zug dehnen — sondern gerade im Gegenteil, beim Drahtziehen muß darauf geachtet werden, daß der Draht nach der Ziehdüse sich nicht verlängert (weil er sich so unkontrollierbar ungleichmäßig dehnen würde); beim Drahtziehen wirken an der Innenwand der kegelförmigen Ziehkanäle *Druckkräfte*: diese in fast radialer Richtung wirkende Kräfte sind es, die den Draht irgendwie dünner machen.

Mit von 100°C zu 100°C erhöhten Temperaturen durchgeführten Zerreißversuchen konnte man feststellen, daß das Drahtziehen in der Praxis, bei etwa 800°C, von z. B. 0,6 mm starken Wolframdrähten — gleich, ob sie »W«- oder »KAl«- Drähte, oder aber »UC«- oder »GK«- Drähte sind — unabhängig von der Art ihrer Zusätze bei 1% Dehnung und mehr als 90% Einschnürung (Kontraktion) vor sich geht. Es kann daher kein Zweifel bestehen, daß die Kontraktionsfähigkeit (diese Art der Verformbarkeit) eine der wichtigsten physikalischen Vorbedingungen des Wolframdrahtziehens ist [1].

Was wissen wir vom physikalischen Wesen der Kontraktionsfähigkeit, haben wir um 1955 uns selbst gefragt. In den Fachbüchern haben wir gelesen, daß sie mit der Dehnungsfähigkeit identisch sei. Demgemäß wären die physikalischen Grundvorgänge der Dehnung und der Kontraktion dieselben. S. Rejtő hat in seinem »Lehrbuch der mechanischen Technologie« diese Auffassung schon in 1924 abgelehnt [33]. Auch wir haben uns diese Ansicht nicht zu eigen gemacht. Die Meßwerte zeigten uns, daß bei allen untersuchten Drähten die Einschnürung zwischen 800°C und 20°C von 95% auf 50% sinkt, die Dehnung hingegen von 1% auf 3,5% ansteigt. Die Temperaturkoeffizienten der Dehnung und Einschnürung weisen zwischen 400°C und 20°C bei sämtlichen Arten von Wolframdrähten *entgegensetztes Vorzeichen* auf, was nicht auf einen gemeinsamen physikalischen Charakter hinweist [1].

Erst 1972 ist es uns gelungen, das Zustandekommen von kontrahierten Stellen im Zerreißversuch aufzuklären [34].

1. Wir haben die Zahl der Metallfasern in den effektiven Querschnitten der kontrahierten und nicht kontrahierten Strecken eines im Zerreißversuch bis zu einer Kontraktion von 50% verformten Drahtes bestimmt und gefunden, daß die Metallfasern an beiden Stellen dieselbe Dicke aufweisen, ihre Zahl aber an der kontrahierten Stelle wesentlich abgenommen hat.

2. Mikrohärtemessungen haben uns gezeigt, daß die Härte der kontrahierten Strecke nicht angestiegen ist: sie blieb unverändert.

3. Röntgen-Koherenzlängen haben sich auf beiden Strecken — die gleiche Dislocation-Konzentration beider Stellen anzeigend — als gleich erwiesen.

Aus diesen Feststellungen haben wir den Schluß gezogen, daß in bei Zimmertemperatur durchgeführten Zerreißversuchen von pulvermetallurgisch hergestellten ungeglühten Wolframdrähten das Gleiten der Fasern aneinander eine ausschlaggebende Rolle spielt. Die gleichmäßige Verlängerung und Verjüngung des Drahtes entsteht nicht überwiegend durch eine gleichmäßige Volumenkontraktion, sondern größtenteils durch eine relative Verschiebung der Fasern. Bleibt die Fasergleitung auf irgendeine Strecke des Drahtes beschränkt, dann entsteht eine Einschnürung. Die im Zerreißvorgang auftretende Kontraktion der Wolframdrähte ist keine plastische Volumendeformation im gebräuchlichen Sinne, sondern eine Folge des Gleitens der Metallfasern aneinander. Die geometrischen Abmessungen des Drahtes und der Metallfasern in Betracht ziehend kann man in Kenntnis der Bruchfestigkeit des Drahtes den Zahlenwert der Schubspannung, welche nötig ist, um das Gleiten der Faser aneinander in Bewegung setzen, zahlenmäßsig bestimmen. Daraus hat sich ergeben, daß dieser Wert — bei allen untersuchten Drahtsorten — überraschend niedrig, d. h. bei etwa 0,2 kp/mm^2 liegt.

Man kann dies als einen wesentlichen Befund ansehen.

Die Zerreißfestigkeit von 0,6 mm starken Wolframdrähten (von »W«-, »KAl«-, »UC«- und »GK«- Drähten) sinkt von etwa 180 kp/mm^2 bei 20°C auf den Wert von etwa 95 kp/mm^2 bei 800°C herab. Da die Zerreißpannung im kontrahierten Querschnitt sich mit der Temperatur kaum ändert, muß diese Temperaturabhängigkeit der Zerreißfestigkeit (im Meßbereich von 20°C bis 800°C) lediglich von der Temperaturabhängigkeit des Gleitens der einzelnen Faser aneinander, also von der Temperaturabhängigkeit der Schubspannung, die zu der Bewegung der Fasern aneinander nötig ist, stammen. Die Beschaffenheit der Faseroberflächen, die gegen eine relative Verschiebung einen geringen, von der Art der Zusatzspuren anscheinend unabhängigen, von der Temperatur aber beträchtlich abhängigen Widerstand leisten und trotzdem den aus zahllosen Fasern bestehenden Draht im Gleitvorgang selbst und auch nach dem Gleiten fest zusammenhalten — diese sonderbare Beschaffenheit der Faseroberflächen bietet der künftigen Wolframforschung sicher sehr wichtige Aufgaben, da durch diese neuen Erkenntnisse die Technologie des Drahtziehens uns in einem neuen Licht erscheint.

Vor etwa drei Jahrhunderten hat die Forschung einmal die Aufgabe bekommen dem chinesischen Kaiser ein kaiserliches Porzellanservice in den wundervollen Farben von Pfirsichblüten herzustellen. Dazu waren — gemäß Aufzeichnungen — mehr als 8000 Versuche nötig, bis man endlich mittels einer wolframoxydhaltigen Glasur die Lösung gefunden hat [35].

Es hat den Anschein, daß wir zu Lösung unserer offenen Wolframfragen — d. h. zur Klärung der Beschaffenheit von Zusatzspuren und des dynamischen

Verhaltens derselben an den Kristallitengrenzen und Faseroberflächen — unsere 8000 Versuche schon gemacht haben, so daß man eine baldige nutzbringende Lösung unserer offenen Fragen mittels den neuesten Untersuchungsmethoden hoffen darf. Als das wichtigste erscheint dabei die Untersuchung der Ortsänderungen und des *dynamischen* Verhaltens der Fremdstoffspuren. Ein chinesischer Weiser hat schon vor langer Zeit behauptet, daß nichts in der Welt eine so stabile Unveränderlichkeit besitzt, wie die ständige Veränderlichkeit selbst.

SCHRIFTTUM

1. MILLNER, T.: *Acta Techn. Hung.* **17** (1957), 67
2. MILLNER, T.: *Acta Techn. Hung.* **50** (1965), 203
3. PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.—MILLNER, T.: Festkörperphysik-Tagung in Balatonfüred (Ungarn) 1959. Akademie Verlag, Berlin 1961, S. 60
4. PÁCZ, A.: USA Pat. 1 410 499 (1920)
5. MILLNER, T.—TURY, P.: USA Pat. 2 012 825 (1935)
6. ROBINSON, C. S.: J. Appl. Phys. **13** (1942), 647
7. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.: *Acta Techn. Hung.* **17** (1957), 289
8. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.: *Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közleményei* **21** (1957), 349
9. BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J.—MILLNER, T.: Festkörperphysik. Festkörperphysik-Tagung in Balatonfüred (Ungarn) 1959. Akademie Verlag, Berlin 1961, S. 143
10. MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J.: *Z. Metallk.* **51** (1960), 639
11. MILLNER, T.: *Chem. Ing.-Technik* **33** (1961), 224
12. MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J.: *Z. Metallk.* **54** (1963), 17
13. MEIJERING, J. L.: Warmfeste und korrosionsbeständige Sinterwerkstoffe 2. Plansee-Seminar 1955, Reutte (Tirol); 1956, S. 305
14. RIECK, G. D.: *Acta Metallurgica* **4** (1956), 47
15. MEIJERING, J. L.—RIECK, G. D.: *Philips' Technische Rundschau* **19** (1957/58), 113
16. RIECK, G. D.: Hochschmelzende Metalle 3. Plansee. Seminar 1958, Reutte (Tirol), Springer Verlag, Wien 1959, S. 108
17. RIECK, G. D.: *Acta Metallurgica* **6** (1958), 360
18. RIECK, G. D.: *Acta Metallurgica* **9** (1961), 825
19. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—NEUGEBAUER, J.: Festkörperphysik, Festkörperphysik-Tagung in Balatonfüred (Ungarn) 1959. Akademie Verlag, Berlin 1961, S. 219
20. MILLNER, T.—NEUGEBAUER, J.—KERÉNYI, L.: Ung. Pat. 152 086 (1965), USA Pat. 3 351 438
21. MILLNER, T.—NEUGEBAUER, J.: Ung. Pat. 155 352 (1966)
22. SELL, H. G.—STEIN, D. F.—STICKLER, R.—JOHSI, A.—BERKEY, E.: *J. Metals* **100** (1972), 275
23. WALTER, J. L.: *Trans. Met. Soc. AIME* **239** (1967), 272
24. RIECK, G. D.: *High Temperatures—High Pressures* **2** (1970), 149
25. MILLNER, T.—SASS, L.—NEUGEBAUER, J.—PROHÁSZKA, J.—ÁCS, V.: II. Intern. Pulvermet. Tagung. Eisenach, 1961 *Abh. der DAW* zu Berlin (1962), S. 281
26. MILLNER, T.—HORACSEK, O.: *Tungsram Techn. Mitt.* Budapest (1964) Nr. 12, S. 515
27. MILLNER, T.: *Acta Techn. Hung.* **70** (1971), 269
28. HORACSEK, O.—MILLNER, T.: *MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézet Közleménye*, 0—7 (1972), S. 67
29. MILLNER, T.—NEUGEBAUER, J.: Ung. Pat. 143 027 (1954), USA Pat. 2 948 609
30. HORACSEK, O.—MILLNER, T.: *Z. Metallk.* **58** (1967), 345
31. MILLNER, T.—GROH, R.—RAKK, T.—TEKULA, E.: MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézet. Jelentés az 1970. évben a wolframkutatás terén elért eredményekről. Budapest 1970, S. 145
32. MILLNER, T.: MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézet. Jelentés az 1971. évben a wolframkutatás terén elért eredményekről. Budapest 1970, S. 44
33. REJTŐ, S.: Az elméleti mechanikai technológia alapelvei és a fémek technológiája II. kötet, Budapest 1924
34. MILLNER, T.—VARGA, L.—VERŐ, B.: *Z. Metallk.* **63** (1972), 754
35. LI, R. C.—WANG, C. J.: Tungsten. Reinhold P. Co. New York 1955. 3. Edition, p. 364

Influence of Foreign Matter on the Fibre Boundaries (CrystalliteBoundaries) of Drawn (Recrystallized) Tungsten Wires (Statements and Ideas). In the tungsten filaments containing additions (e.g. 1 ÷ 50 ppm K, Si, Al traces) not only the chemical quality of the traces but also the position of the additive traces and their changes of place are of considerable importance in the development of the large-crystal structure of the filaments, the maintaining of filament shape at high temperatures and the development of the filament mechanical characteristics at room temperature. These statements are illustrated, as the author has ascertained, by a) the independence of the crystallite growing speed from the quality of the additions, b) displacement of the foreign-phase particles during recrystallization, c) influence of foreign atoms instead of foreign-phase particles during recrystallization (e.g. Ga atoms instead of Al_2O_3, Tl atoms in the place of K_2O), d) the role played by the Si addition — replaceable by Be — in the creep characteristics at 2800°K, e) the slipping on each other of the drawn tungsten wire fibres during the development of uniform yield and chiefly of the reduction of area during tensile tests.

О вопросе посторонних веществ фазовых границ или же кристаллитных границ волоченных и кристаллизированных вольфрамовых проволок. Наряду с химическим качеством микродобавок вольфрамовых накальных нитей с добавками (напр. при микросодержании в количестве 1÷50 pp*m* K, Si, Al) значительную роль играют также расположение микродобавок и их дрейф в формировании крупнокристаллической структуры вольфрамов накальных тел, далее в определении формы накальных тел при высоких температурах и в формировании механических свойств накальных тел, наблюдаемом при комнатной температуре, что демонстрируется на основе определений, а именно а. независимость от качества добавки скорости роста кристаллитов, б. смещение частиц посторонней фазы в процессе протекания рекристаллизации, в. воздействие вместо частиц посторонней фазы посторонних атомов напр. вместо Al_2O_3 атомов Ga, вместо K_2O атомов Tl при рекристаллизации, г. роль добавки Si, замещаемой Be, в свойствах крипа при 2800° K, далее д. скольжение по отношению друг к другу волокон волоченных вольфрамовых проволок — при формировании равномерного растяжения и в основном контракции во время разрыва.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 15—49 (1974)

ACTUAL THEORETICAL AND PRACTICAL PROBLEMS OF SEDIMENT TRANSPORTATION

J. L. BOGÁRDI*

MEMBER OF THE HUNG. ACADEMY OF SCI.

[Manuscript received 28 February, 1974]

The actual theoretical investigations of sediment transportation are based on the fundamental laws of physics. Considering the sediment transportation as a physical phenomenon, according to the principle of conservation, author establishes the balance equations of the mass, kinetic energy, internal energy and momentum. Their comparison and evaluation led to several basic perceptions. Starting from theoretical principles, the sediment-transportation capacity of water courses are investigated. Measurements carried out on the river Drave parallel with observations, the energy requirement needed to the sediment transportation and to the re-arrangement of the river bed is determined.

Symbols

L	length
T	time
M	mass
Θ	temperature
E	energy, work, heat ($ML^2T^{-2} = FL$)
F	force, weight (MLT^{-2})
A	parameter (L)
B	average channel width (L)
c	specific heat ($EM^{-1}\Theta^{-1}$)
C	sediment concentration (FL^{-3})
C_k	average sediment concentration (FL^{-3})
d	particle diameter (L)
d_g	average particle diameter (L)
D	average water depth (L)
D_s	length of settling path (L)
$D_{s\,act}$	actual length of the settling path (L)
e_z	density of internal energy (EL^{-3})
E	energy loss over the length L in various periods (FL)
E_1	energy demand of suspended sediment transportation in the individual periods (FL)
E_2	energy demand of bed-load transport in the individual periods (FL)
E_3	energy demand of channel re-arrangement in the individual periods (FL)
E_4	energy demand to overcome various resistances in the individual periods (FL)
f	friction coefficient
F	weight of sediment-loaded water running down the reach (F)
F_1	submerged weight of suspended sediment passing the reach (F)
F_2	submerged weight of bed load passing the reach (F)
F_3	submerged weight of re-arranged material (F)
F_i	total friction surface of the i-th sediment fraction (L^2)
g	acceleration of the gravity (LT^{-2})
G_B	yield of bed load (FT^{-1})
G_S	yield of suspended sediment (FT^{-1})

*Prof. Dr. J. L. BOGÁRDI, Mártírok u. 31/33, 1024 Budapest, Hungary

h_v	head difference, drop of water level, kinetic energy of a liquid of unit weight (L)
i, j, k, l	subscripts
L	length of the experimental reach (L)
L_{ik}	conductivity of kinetic energy transfer (ETL^{-5})
L_{il}	conductivity of a conductive current density (L^2T^{-1} for mass; $FL^{-2}T$ for momentum)
M	total mass of the water (M)
M_1	total mass of the sediment (M)
$M_{1,i}$	mass of the i-th fraction (M)
N	total number of particles in all fractions (1)
N_i	total number of particles in the i-th fraction (l)
q_i	source density ($ML^{-3}T^{-1}$ for mass; FL^{-3} for momentum)
$q_{h,i}$	source density of the i-th fraction ($ML^{-3}T^{-1}$ for mass; FL^{-3} for momentum)
Q_{mn}	minimum of discharge (L^3T^{-1})
Q_{mi}	mean discharge (L^3T^{-1})
Q_{max}	maximum discharge (L^3T^{-1})
Q_B	volume of suspended sediment load (L^3T^{-1})
Q_z	discharge of sediment-loaded water (L^3T^{-1})
S	slope of water surface; slope of the energy line
t, t_1, t_2	time (T)
Δt	length of the individual periods (T)
$\mathbf{v}$	convective flow velocity, flow velocity (LT^{-1})
$\mathbf{v}'$	pulsation velocity of flow (LT^{-1})
$\mathbf{v}_h$	average velocity of the sediment (LT^{-1})
$\mathbf{v}'_h$	pulsation velocity of the sediment (LT^{-1})
$\mathbf{v}_{h,i}$	mean velocity of the i-th sediment fraction (LT^{-1})
$\mathbf{v}'_{h,i}$	pulsation velocity of the i-th sediment fraction (LT^{-1})
v_k	mean flow velocity (LT^{-1})
V	total volume of the water (L^3)
V_1	total volume of the sediment (L^3)
$V_{1,i}$	total volume of the i-th fraction (L^3)
x	co-ordinate (L)
x_i	extensive quantity
y_l	intensive quantity
γ	specific weight of water (FL^{-3})
γ_1	specific weight of the sediment (FL^{-3})
γ_z	specific weight of sediment-loaded water (FL^{-3})
$\varepsilon_{h,i}$	conductivity of the i-th sediment fraction (L^2T^{-1})
ε_h	average conductivity of the sediment (L^2T^{-1})
η	the measure of sediment-transporting capacity
λ	heat conductivity ($ET^{-1}L^{-1}\Theta^{-1}$)
μ	dynamic viscosity ($FL^{-2}T$)
ν	kinematic viscosity (L^2T^{-1})
ν_i	density of the i-th extensive quantity
ϱ	density of the liquid (ML^{-3} or $FL^{-4}T^2$)
ϱ_1	density of the sediment (ML^{-3} or $FL^{-4}T^2$)
$\varrho_{1,i}$	density of the i-th sediment fraction (ML^{-3} or $FL^{-4}T^2$)
ϱ_z	density of sediment-loaded water (ML^{-3} or $FL^{-4}T^2$)
τ_h	average shear stress on the sediment particles (FL^{-2})
$\tau_{h,i}$	shear stress on the i-th fraction (FL^{-2})
φ_i	specific surface of the i-th fraction (L^2M^{-1})
φ_1	mean specific surface of sediment particles (L^2M^{-1})
$\overline{\omega}$	average settling velocity of the sediment (LT^{-1})

Introduction

The determination of sediment transportation in natural watercourses is a task of utmost importance in water management. The laws governing sediment transportation are expressed by a number of valuable theoretical and empirical relationships. Usually, these refer to some partial phenomenon and, excepting the results of recent research, most of them are even in lack of an adequate physical foundation. Another shortcoming of these relationships is the inaccurate definition of their range of validity. There is no reference to the value of errors to be committed in consequence of assumptions and approximations made in the course of their derivation. Frequently, there is not even an estimate of the deviations to be expected available. From the above it follows that so far, one was deprived of the opportunity to clear the interrelations between theoretical, semi-empirical and empirical relationships. This is, of course, not a particularity of research and empirical results connected with sediment transportation. Obviously, similar conditions are encountered in the investigation of other phenomena of the nature as well. It is equally obvious that these shortcomings are not the result of some "negligence" but are the necessary consequences of ramifying research conducted over a long period.

Together with the growing abundance of our knowledge, the necessity of their fitting into a system and of their comparative criticism became more and more urgent. Obviously, the general description of sediment transportation as a physical phenomenon is indispensable when attempting a synthesis. Scattered investigations of this kind are to be met in the international literature of the last 10—15 years.

Together with theoretical research, observations and measurements made on natural watercourses and resulting in semi-empirical and empirical relationships have underwent a change too. These are nowadays oriented towards the clearing of certain details of the problem as a whole and, owing to a highly developed equipment of measurement and observation practice, have already yielded valuable results.

A comprehensive and general discussion of the above outlined up-to-date theoretical research and empirical experiences would be prohibited not only because of delimitations in available space but also owing to the limits of our rather narrow knowledge. This is why the author wishes to illustrate his views with aid of two examples taken from his own research work. The term "example" is perhaps not quite justified since they refer to actual results. But, first of all, it seems useful to summarize the most striking features of theoretical research as well as of semi-empirical and empirical relationships.

When dealing with the descriptive part theory is playing in the field of sediment transportation, one should not forget the fact that it is a physical phenomenon of extreme complexity. It is an intricate multi-phase flow, the description of which being still made difficult by the fact that its solid phase is by far not of a homogeneous composition but is a mixture of particles with various material properties and sizes. During the movement of this poly-disperse aggregate collisions will occur, accompanied by an exchange of momentum and loss of energy. The interaction between the solid and fluid phases is displaying a phenomenon of almost imperceivable structure. According to our present knowledge, this escapes every attempt of an accurate description. This is why the researchers have introduced various methods in order to describe this intricate physical phenomenon.

Purely empirical descriptions are to be found most frequently, not deserving the name of a theory since these are restricted to the establishment of so-called empirical functions with a rather limited range of validity, based generally upon a high number of measurement and experimental data collected. Subsequently, it will be shown how valuable these relationships are, but one should always be aware of the fact that they are usually not to be generalized.

A more developed description of sediment- transportation phenomena is yielded by the so-called *semi-empirical* relationships. After having introduced several preliminary assumptions and approximations, these relationships are very efficient in explaining certain partial phenomena, though not without substantial neglects.

In the literature, one meets an immense amount of semi-empirical relationships. But unfortunately, as already pointed out, hardly any attempts were made so far towards their fitting into a system, the establishing of their range of validity and the margin of errors or deviations due to the approximations introduced.

One of the main goals of up-to-date sediment research is the establishment of fundamental laws of general validity for the sediment transportation as a whole.

The present paper will deal at first with investigations based upon the *transport theory*, applied successfully in thermodynamics and other fields of technical sciences. These will be followed by a discussion of the sediment-transporting capacity of watercourses, derived from measurements made in the nature.

1. TRANSPORT THEORY AND ITS APPLICATION IN SEDIMENT TRANSPORTATION

1.1. The general balance equations

Generally speaking, any phenomenon encountered in engineering may be considered as a physical process varying with time, to be described with aid of the laws of flow of certain (material) properties proportional to the extension of the substance. Material properties connected with the extension of substance are called *extensive quantities*, such as volume, mass, energy, momentum. Briefly, all phenomena in engineering are *transport processes* to be described by the balance equation of the extensive quantity in question. *Balance equations* written for the extensive quantities (the so-called transport equations), constitute thus the fundamental law of every technical phenomenon formulated in mathematical language.

The variation of extensive quantities with time are caused by extensive currents as well as by sources or sinks of these extensive quantities. A source or a sink is expressing the concentrated origin (addition) or disappearance (extraction) of an extensive quantity.

Extensive currents are composed of *convective* and *conductive* currents.

Convective currents are easily to be calculated as the product of flow velocity **v** and the extensive quantity.

Conductive currents are — as known from Onsager's research — produced by *intensive quantities* y_l (e.g. temperature, stress, density) tending towards equalization. Since the measure of inhomogeneity is symbolized by the ∇ operator, the conductive current produced by an intensive quantity y_l is to be obtained by multiplying the gradient of the intensive quantity by the conductivity L_{il} of the intensive quantity in question (e.g., in the case of fluids, the conductivity of molecular momentum diffusion is identical with the dynamic viscosity μ of the fluid). It was also ONSAGER who recognized the fact that individual extensive currents may be produced jointly by the gradients of several characteristic intensive quantities. In a way, this means the taking into account of cross-effects.

A balance equation may also be written for the change of an extensive quantity contained in a certain volume. But since in the mechanics of fluids (and thus also in the investigation of sediment transportation) the knowledge of local changes is wanted, it is expedient to write the balance equation for the *change of density of the extensive quantity*. In this case one will have to consider current density and source density (or sink density) instead of the current, source and sink, respectively.

Thus, the integral form of the general balance equation will assume, after substituting the surface integral of convective and conductive current densities through the volume integral of their divergence, the following form:

$$\int_V \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(v_i\mathbf{v} + \sum_{l=1}^{n} - L_{il} \quad \operatorname{grad} y_l\right) - q_i\right] \mathrm{d}V = 0 \tag{1}$$

But since the above equation holds only if the integrand is zero, one will arrive to

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(v_i\mathbf{v} + \sum_{l=1}^{m} L_{il} \quad \operatorname{grad} y_l\right) = q_i \tag{2}$$

The differential balance equation thus obtained is but an expression of the statement that a local variation of the density v_i of the i-th extensive quantity is the consequence of the surface density of convective and conductive currents, as well as of the volume density of sources.

When describing engineering phenomena, the problem consists of finding out the *characteristic extensive and intensive quantities, the numerical value of conductivities and the actual distribution of source densities.*

Finally, in addition to the balance equations, also the unambiguity *conditions* should be specified. These may be listed, as it is known, into four groups:

a) The *domain of interpretation*, i.e. specifications for the interval where the variables of the equations have to occur and for the geometric confining of the system investigated.

b) *Boundary conditions* expressing the terms of interaction between the system and its environment.

c) *Initial conditions* defining the state of the system at the moment selected for beginning the investigations. In sediment- transportation research a steady state is usually assumed, permitting the omission of initial conditions.

d) *Equations of state* characterizing the behaviour of the working medium of the system.

1.2. Balance equations for sediment transportation

Sediment transportation should be considered as a two-phase flow. Accordingly, there are separate balance equations describing the flow of extensive quantities connected with the movement of water and with that of the sediment.

When one attempts to give an accurate formulation then, neglecting electrical, chemical, optical, acoustical and biological effects from the very beginning, one has to write up balance equations for four extensive quantities, namely mass, kinetic energy, internal energy and momentum, both for the water and the sediment. Thus, one will obtain 4 balance equation for each of the phases, three of which being scalar equations and one vector equation.

With regard to the dissipation of kinetic energy, the equations of kinetic and internal energy may be merged into a single equation.

The equations of kinetic energy and momentum, if based upon the same assumptions, are not mutually independent, i.e., any of these may be derived from the other.

When establishing balance equations for sediment transportation and assuming a steady flow, initial conditions listed under c) are omitted as already pointed out. But it is absolutely necessary to define the other three kinds of unambiguity equations.

First of all, the domain of interpretation has to be described. Geometrically, the domain of interpretation is coinciding with the surfaces confining the watercourse, including the open surface. Physically, the domain of interpretation is restricted to permissible limits for the values of physical variables.

When dealing with boundary conditions, one has to clear up possible interactions between the system investigated and its environment. Thus e.g. in the case in question, a part of the suspended sediment may become deposited along the boundary (the channel wall) or inversely, a part of the bed material may become scoured by flowing water. The existence of an open surface is equivalent to the condition of prohibiting fluid or sediment particles passing through it in either direction.

When establishing the equations of state, the composition and material properties of the sediment have to be specified unambiguously, as well as the most important physical characteristics of the fluid (water).

If writing up thus the balance equations of sediment transportation, differences between suspended sediment transportation and bed-load transportation will manifest themselves with regard to unambiguity equations, or more specifically, the boundary conditions. Thus, for instance, the most characteristic feature of suspended sediment transportation is the interaction between the solid and fluid phase, whilst in case of bed-load- transportation, the displacement of solid particles along the bed-load covered bottom or the separation of solid particles from the bottom is most conspicuous.

Table I contains the extensive quantities (a) of both phases (I = water, II = sediment), their currents (b), their sources and sinks (c). When establishing the balance equations (1 = mass balance, 2 = balance of the kinetic energy, 3 = balance of internal energy and 4 = balance of momentum) in agreement with Eq. (2), one will have to consider the density of extensive quantities (a), the density of extensive currents (b) and the density of the sources and sinks (c), respectively.

Even from the brief list of Table I one will easily perceive the intricate interrelationships between the two phases, as well as between the various balance equations.

The source of energy and momentum of the two-phase system (i.e. the system input) is solely the energy communicated through the labour of mass performed in the gravitational field (if heat transfer from solar radiation or from the surrounding air is neglected), together with the momentum transferred from the field of force. This source is augmenting equally the energy and momentum of both water and sediment.

The settling of sediment is produced by the external effect (gravitational field) which also determines the settling velocity.

Also the slope of water movement is due to the external field. A part of the labour exerted by the gravitational field is used up in sediment transportation, another substantial part is consumed in overcoming various resistances linked with the maintenance of movement (friction, turbulence, bends, etc.).

Table I

Balance equations of water and sediment

		I. Water		
		a extensive quantity	b extensive current	c extensive source (or sink)
1.	Mass balance	mass	convective	zero, owing to continuity
2.	Balance of kinetic energy	kinetic energy	convective	work of gravity field as *source*, energy transfer to sediment and energy dissipation, both as *sinks*
3.	Balance of internal energy	internal energy	convective and conductive	energy dissipation as *source*
4.	Balance of momentum	momentum	convective and conductive	gravity field as *source*; transfer to sediment as *sink*

		II. Sediment, *i*-th fraction		
		a extensive quantity	b extensive current	c extensive source (or sink)
1.	Mass balance	mass of *i*-th fraction	convective and conductive	comminution as a source (usually neglected)
2.	Balance of kinetic energy	kinetic energy of *i*-th fraction	convective	work of gravity field, energy transferred from water, energy gain from collision are the three *sources*; energy dissipation of sediment motion as *sink*
3.	Balance of internal energy	internal energy of sediment fractions	convective	energy dissipation of sediment motion as *source*
4.	Balance of momentum	momentum of *i*-th fraction	convective and conductive	field of the gravity, momentum received from water and from collision are the three *sources*; dissipation of sediment movement as *sink*

Owing to interaction, a part of the kinetic energy and momentum of the water is transferred to the sediment. The horizontal component of sediment velocity is the result of this fact, but also the remaining in suspension of the sediment in the gravitational field. The dissipation of kinetic energy is increasing the internal energy of the partial systems water and sediment being in thermal interaction (heat exchange). There is also a thermal interaction between the whole system and its environment, being sometimes intense enough to be responsible in most practical cases for changes of internal energy of the water-sediment system. This should not mean the absence of dissipation but an expression of the fact that compared with evaporation of water and with heat exchange between the system and its environment, dissipation is negligibly low.

Our attention should now be devoted to the extensive quantities figuring in Table I, to their currents and sources as well as their densities, both in water and sediment, and by using certain approximative assumptions, also the balance equations should be established.

1. *Mass balances* (1.*I.* *and* 1.*II.*)

I. Water

1.*I/a.* For water, *if the extensive quantity in question is mass then its density is the mass density* ϱ.

Water is considered as an incompressible homogeneous medium, its total differential quotient according to time being zero:

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3}$$

Eq. (3) may otherwise be written as

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho = 0 \tag{4}$$

where $\varrho = \varrho(t, x)$ and $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$, the flow velocity of water.

1.*I/b.* The *convective mass-current density* for water is:

$$\varrho \mathbf{v} \tag{5}$$

with $\mathbf{v}$ being the vector of flow velocity.

The *conductive mass-current density* (also to be termed auto-diffusion) can be disregarded since, in accordance with assumptions (3) or (4), any mass leaving the volume element will be replaced by the same amount of the same substance.

1.*I/c*. The ***mass- source density*** for water is assumed to be zero, i.e. the mass current is source-free (excluding thus e.g. the case of water decomposition) and hence

$$q_i = 0 \tag{6}$$

From the above

1.*I*. ***the mass- balance equation*** for water will become

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0 \tag{7}$$

which, with regard to div $\varrho \mathbf{v} = \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho$ and to Eq. (4) may be rewritten as

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Since $\varrho \neq 0$, thus obviously

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{8}$$

that is, the mass current of water is source-free or continuous. We have seen that in the mass- balance equation of water there is no unknown factor.

II. Sediment

1.*II/a*. According to our present knowledge, the mass of sediment detailed to its granulometric fractions is to be determined only approximately. Its accurate description would require a high number of measurements. It will be the task of further research to accomplish the mathematical description of sediment fractions based upon the probabilistic modell of *Kolmogorov*. It is to be ascribed to difficulties arising in this respect that an "average" grain size is used still by the majority of researchers, i.e. the sediment is assumed a monodisperse aggregate.

Subsequently, for reasons of principle, balance equations of the sediment will be written separately for each fraction.

In the case of sediment, ***the density of the extensive quantity is the mass density*** ϱ_1 ***of the sediment***. If the number of fractions considered is $i = 1, 2, \ldots, n$, then the ***density of the extensive quantity*** may be denoted as $\varrho_{1,i}$.

1.*II*/*b*. For the sediment, the *convective mass-current density* of the *i*-th fraction will be

$$\varrho_{1,i}\,\mathbf{v}_{hi} \tag{9}$$

where $\mathbf{v}_{h,i}$ is the velocity vector of the *i*-th fraction.

The *conductive mass-current density* is termed turbulent diffusion and, by analogy of the molecular diffusion, it is calculated as the product of a certain coefficient of turbulent diffusion $\varepsilon_{h,i}$ (a special kind of the coefficient of conductivity) and the gradient of mass density. Accordingly, the *conductive mass-current density* will be

$$\varepsilon_{h,i}\,\mathrm{grad}\,\varrho_{1,i} \tag{10}$$

1.*II*/*c*. In the case of a monodisperse sediment, the question of "mass source" does not even arise. But an accurate discussion — the investigation of separate fractions — requires the description of how, affected by what forces and at what speed the comminution of greater particles into smaller ones occurs, or what the mass source of each fraction does like to. Obviously, their sum for the whole sediment is equalling zero.

The source density of the i-th fraction is $q_{h,i}$. For the total of the fractions $i = 1, 2, \ldots, n$ one has

$$\sum_{i=1}^{n} q_{h,i} = 0$$

In agreement with the foregoing, 1.*II*. *the mass balance equation of the sediment for the i-th fraction* will be, by applying Eq. (2):

$$\frac{\partial \varrho_{1,i}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho_{1,i}\,\mathbf{v}_{h,i} + \varepsilon_{h,i}\,\mathrm{grad}\,\varrho_{1,i}) = q_{h,i} \tag{11}$$

Contrarily to the mass-balance equation of water, one has to meet several difficulties in determining certain terms of Eq. (11).

The first of unknowns is the velocity vector $\mathbf{v}_{h,i}$ of the *i*-th fraction itself. In the case of suspended sediment, this difficulty may rather easily be overcome by making the very good assumption of sediment particles having the same velocity $\mathbf{v}$ as water has. With regard to the velocity vectors, this condition may be expressed as

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v} \tag{12}$$

and as far as the velocity components are concerned, if the sediment has a settling velocity ω, one will have

$$v_{hx} = v_x \text{ and } v_{hy} = v_y - \omega \tag{13}$$

In the case of bed load, however, this approximation is already not permissible.

The conductivity $\varepsilon_{h,i}$ too, is not accurately known. According to research conducted so far, its value does not deviate substantially from the conductivity of momentum. In fact, when dealing with suspended sediment, one makes use of the assumption of the two conductivities being equal, although certain experiments show the conductivity of sediment slightly higher, others again slightly lower than the conductivity of momentum. It should be mentioned here too, that for the sake of simplicity, the conductivity of sediment is often regarded as a scalar magnitude.

The determination of conductivity for bed-load movement is one of the problems to be solved by future research.

It is a difficult task to find the source density q_i in the mass balance of the i-th fraction. The dimensions of a particle are obviously reduced through repeated collisions and rolling. This fact represents a loss or a sink for one fraction, but a gain or a source for other smaller fractions, as a rule. This difficulty may be overcome in the case of not- too- wide size intervals, by using average grain sizes and by assuming *the mass of sediment to be source-free.*

There is another remark to be made concerning mass balances. In principle, mass balance of water and that of sediment are mutually independent. The two equations have no term in common. With regard to the conditions assumed for water (incompressibility, homogeneity, absence of decomposition) the mass balance of water is characteristic only of properties and streamflow conditions of the liquid phase. When dealing separately with the two mass balances, that of water is playing a role solely by introducing the approximation $\mathbf{v}_{hi} \cong \mathbf{v}$.

2. *Balances of kinetic energy* (2.*I.* and 2.*II.*)

2.***I/a***. In the case of water, kinetic energy is calculated as the product of mass and the square of the mean flow velocity, that is, kinetic energy originating in velocity pulsation, is neglected:

$$\frac{Mv^2}{2} \tag{14}$$

With ϱ as the mass density, *the density of this extensive quantity will be*:

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 \tag{15}$$

2.***I/b***. As far as the kinetic energy of water is concerned, only its convective current

$$\left(\frac{Mv^2}{2}\right)\mathbf{v} \tag{16}$$

is taken into account. Hence, the *surface density of the current of kinetic energy* as an extensive quantity will be:

$$\frac{1}{2}(\varrho\,\mathbf{v}^2)\mathbf{v} \tag{17}$$

2.*1*/*c*. The only source increasing the kinetic energy is the work performed in the gravity field. Thus, for a fluid of the mass M, the energy gain per unit time, i.e. the "acceleration work" of the field is the source

$$\frac{1}{2} M\,\mathbf{g}\,\mathbf{v} \tag{18}$$

with $\mathbf{v}/2$ being the average velocity. *The source density* on the other hand will be

$$\frac{1}{2}\varrho\,\mathbf{g}\,\mathbf{v} \tag{19}$$

This gain of energy, (or energy source) is, however, counteracted by several kinds of energy loss (or energy sink) from the point of kinetic energy balance of the water. The most important ones among these are the work performed in sediment transportation and the energy used up in overcoming the internal friction of the water having a kinematic viscosity ν, termed as *energy dissipation*. Compared with the complexity of this phenomenon, these two energy dissipators can be determined relatively easily and the remaining error due to neglected effects is still admissible.

The moving of the sediment of mass M_1 will reduce the kinetic energy of the water in unit time by the loss

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{M_1(v - v_h)^2}{2}\right] \tag{20}$$

If ϱ_1 denotes the mass density of the sediment, *the sink density* will be:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho_1(v - v_h)^2}{\partial t} \tag{21}$$

As it is known, the friction force acting upon the unit mass of an incompressible fluid is expressed by the term

$$\nu\nabla^2\mathbf{v} \tag{22}$$

Thus, when determining the energy dissipation of the mass M through internal friction, and assuming the average velocity $\mathbf{v}/2$ corresponding to the work of acceleration, this dissipation is

$$\frac{1}{2}(\nu\nabla^2\,\mathbf{v})M\,\mathbf{v} \tag{23}$$

or, in terms of *the corresponding sink density*:

$$\frac{1}{2}(\nu\nabla^2 \mathbf{v})\varrho\, \mathbf{v} \tag{24}$$

With regard to the above,

2.*I*. *the balance equation of kinetic energy of the water* will become, in agreement with Eq. (2):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varrho v^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\varrho\, v^2\, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\varrho\, \mathbf{g}\, \mathbf{v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho_1 (v - v_h)^2}{\partial t} - $$
$$- \frac{1}{2}(\nu\nabla^2 \mathbf{v})\varrho\, \mathbf{v} \tag{25}$$

When establishing the balance equation of the kinetic energy of water, an approximation is applied when neglecting the kinetic energy coming from velocity pulsation, which, in principle, appears also in connection with the velocity $\mathbf{v}_h$ of the sediment.

In the case of suspended sediment, assumptions expressed in Eqs (12) and (13) may be used for the sediment velocity $\mathbf{v}_h$. It is obvious, however, that this assumption must not be applied to bed load.

II. Sediment

2.*II*/*a*. In the case of sediment, kinetic energy is to be dealt with expediently in a separate way for each fraction. If $M_{1,i}$ is the mass of the *i*-th fraction. ($i = 1, 2, \ldots, n$), and $v_{h,i}$ the mean velocity of the same, then, by neglecting the kinetic energy coming from velocity pulsation, the kinetic energy will be

$$\frac{M_{1,i}\, v_{h,i}^2}{2} \tag{26}$$

The density of this extensive quantity is, $\varrho_{1\,i}$ being the mass density of the *i*-th fraction:

$$\frac{1}{2}\varrho_{1,i}\, v_{h,i}^2 \tag{27}$$

2.*II*/*b*. In the case of sediment too, the convective current of the kinetic energy is only taken into account:

$$\frac{M_{1,i}\, v_{h,i}^2}{2}\mathbf{v}_{h,i} \tag{28}$$

From Eq. (28) the *surface current density of the kinetic energy current of the sediment* as an extensive quantity will be

$$\frac{1}{2}(\varrho_{1,i}\, v_{h,i}^2)\mathbf{v}_{h,i} \tag{29}$$

2.*II/c. The kinetic energy of the i-th fraction of the sediment* is increased by a source containing work of the gravity field as well as the energy transferred by streaming water.

For the i-th sediment fraction of the mass $M_{1,i}$, the energy gain per unit time (i.e. the source) can be obtained, with $1/2\ \mathbf{v}_{h,i}$ as the average velocity as

$$\frac{1}{2} M_{1,i}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_{h,i} \tag{30}$$

Accordingly, the *source density* is:

$$\frac{1}{2}\varrho_{1,i}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_{h,i} \tag{31}$$

Obviously, the kinetic energy transferred from the water is identical with the energy loss (20) suffered by the water. The only difference is that, whilst establishing the balance of kinetic energy of the water, the total amount of the sediment was taken into account, now the i-th fraction was investigated only. Thus, the i-th fraction with a mass $M_{1,i}$ will gain an energy of

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{M_{1,i}(v_{h,i}-v)^2}{2}\right] \tag{32}$$

from the streaming water. Hence, *the source density of kinetic energy* will become:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho_{1,i}(v_{h,i}-v)^2}{\partial t} \tag{33}$$

One may still conceive the collision of the i-th fraction with those of a higher velocity as another source of energy. On the other hand, a collision with fractions having a lower velocity constitutes an energy loss for the i-th fraction. Expectedly, the sum of these two kinds of collision may result in a negligibly small change of the energy.

Nevertheless, the balance equations of sediment being referred to the i-th fraction only, it is useful to determine the source of kinetic energy yielded by collisions.

Let N_i be the number of particles of the i-th fractions, and N_k that of the k-th fraction.The overall number of particles of all fractions, N is defined as

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

Now, the i-th fraction, having a velocity $\mathbf{v}_{h,i}$, will obtain from, or transfer to, the k-th fractions (with $k = 1, 2, \ldots, n$ and $k \neq i$) a momentum of

$$\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i}) \frac{N_k}{N} \tag{34}$$

if L_{ik} is the conductivity of momentum. If the scalar product of this source or sink density of the momentum of the i-th fraction of sediment with $1/2\ \mathbf{v}_{h,i}$ is taken, this already means the *source density of kinetic energy arising out of collisions.* In mathematical terms:

$$q_{h,i} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{h,i} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} L_{ik} (\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i}) \frac{N_k}{N} \tag{35}$$

Here it should be noted that since an energy exchange within the whole mass of the sediment does not affect the total energy of the latter, for the entirety of the n fractions the relationship

$$\sum_{i=1}^{n} q_{h,i} = 0 \tag{36}$$

will obviously hold.

The effect of collisions being already taken into account in the above, *the sink reducing the kinetic energy of the i-th fraction* is only the work arising out of friction. It is not possible either, to calculate the energy loss due to friction accurately. But by making certain assumptions, there is a possibility for their being established approximately.

Let F_i be the total area exposed to friction of sediment particles pertaining to the i-th fraction with a mass $M_{1,i}$.

Also, let us suppose the development of a certain shear stress

$$\tau_{h,i} \tag{37}$$

over the area F_i owing to the velocity difference between water and sediment. If the absolute value of the average velocity difference between water and sediment is $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|$ then the energy loss per unit time, or in other terms, the work done by friction forces in unit time yields already a formulation for the energy sink wanted:

$$\tau_{h,i} F_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \tag{38}$$

Approximately, the total volume of the i-th fraction, having a mass $M_{1,i}$ and a density $\varrho_{1,i}$ will be:

$$V_{1,i} = \frac{M_{1,i}}{\varrho_{1,i}} \tag{39}$$

The sink density can obviously be obtained by dividing the sink of (38) by $V_{1,i}$. Thus, the sink density will be:

$$\tau_{h,i} F_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \frac{\varrho_{1,i}}{M_{1,i}} \tag{40}$$

But since

$$F_i / M_{1,i} = \varphi_i \tag{41}$$

is exactly the surface- per- unit mass of the i-th fraction, termed the *specific surface*, it will be more convenient to write (40) in the form

$$\tau_{h,i} \varphi_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \varrho_{1,i} \tag{42}$$

which also makes apparent that for constant values of $\tau_{h,i}$, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{v}_{h,i}$, the transfer of energy will be in a linear proportion to the specific area.

According to the considerations made so far

2.*II. the balance equation of kinetic energy of the i-th fraction* will be, in agreement with (2):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\varrho_{1,i} v_{h,i}^2)}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div} [(\varrho_{1,i} v_{h,i}^2) \mathbf{v}_{h,i}] = \frac{1}{2} \varrho_{1,i} \mathbf{g} \mathbf{v}_{h,i} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial [\varrho_{1,i}(v - v_{h,i})^2]}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{h,i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i}) \frac{N_k}{N} -$$

$$- \tau_{h,i} \varphi_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \varrho_{1,i} \tag{43}$$

In this balance equation too, the assumption of the kinetic energy originating in velocity pulsation being negligible, is adopted. The determining of $\mathbf{v}_h$ for suspended sediment is possible here too, according to (12) and (13). In the case of bed load, this is obviously not admissible.

In order to calculate the energy source originating in particle collision, one has to know the conductivity of momentum. By assuming a monodisperse sediment, this difficulty is to be discarded.

Also the determination of friction losses, representing an energy sink, is only an approximate one but in our opinion the discrepancy arising thereof is still tolerable.

Also it should be pointed out that, if the range of particle sizes is not too large, it seems to be more expedient to write up the balance equation of kinetic energy of the sediment for the whole mass of the latter, based upon average velocity, particle diameter and mass density. This approximation too seems to be advantageous, particularly for suspended sediment.

3. *Balances of internal energy* (3.*I and* 3.*II*)

A change of the internal energy can manifest itself in temperature changes only, since the respective masses of water and sediment are invariable, i.e., the system has a constant volume and constant mass.

The two-phase system composed of water and sediment, as it has been already said in the foregoing, is in a thermal interaction with its environment, that is, with the air at the open surface and with the soil along the sides and bottom of the channel. It is a fair approximation to assume the two-phase system being in a thermal equilibrium with the soil. The interaction with the air is depending upon weather conditions and appears partly as a warming-up or cooling-down, partly as evaporation. It has been stated already that the internal energy of the system may be modified to a high extent due to interactions with the atmosphere. In spite of its influencing the conditions for friction through the viscosity, however, this change of the internal energy has hardly any bearing upon sediment movement. Therefore, with regard to the internal energy, it appears justified to neglect interactions with the environment in sediment investigations.

The entire surface area of sediment particles is in contact with water. This holds especially for suspended sediment. Accordingly, sediment and water are in an almost perfect thermal equilibrium. This fact makes the balance equation of internal energy of the sediment superfluous.

Consequently, one may thus write up the balance equation of internal energy by considering the two phases as a single system.

I. Water + II. Sediment

3.*I*.—*II*/*a*. The total mass of the water-sediment system is $(M + M_1)$ and its total volume $(V + V_1)$, hence the mass density of the mixture of water and sediment will be

$$\varrho_z = \frac{M+M_1}{V+V_1} \tag{44}$$

and the *density of internal energy* as an extensive quantity will be

$$e_z = \varrho_z ct \tag{45}$$

with $t[\Theta]$ being the temperature and $c[E/M\Theta]$ the specific heat.

3.*I.*—*II*/*b*. The *convective current* of internal energy of the water-sediment system is

$$(M + M_1)ct\mathbf{v} \tag{46}$$

having a surface current density of

$$e_z \mathbf{v} \tag{47}$$

The *conductive current density* of internal energy may be — analogously to mass current density, — defined as the product of the coefficient of heat transfer

$$\lambda\left[\frac{E}{TL\Theta}\right] \tag{48}$$

and the temperature gradient $t[\Theta]$. Accordingly, the conductive current density of internal energy will be

$$\lambda \operatorname{grad} t \tag{49}$$

3.*I.*—*II*/*c*. The *source of internal energy* of the water-sediment system will be identical with the dissipation of kinetic energy of water and sediment, since influences of the environment have been excluded.

In the case of *water*, the source density

$$\frac{1}{2}(\nu\nabla^2\mathbf{v})\varrho\mathbf{v} \tag{50}$$

corresponding to (24) is to be used immediately. For the *sediment*, the dissipation of

$\tau_{h,i}\varphi_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \varrho_{1,i}$ as described in (42)

must be summed for all the fractions $i = 1, \ldots, n$, in order to write up the source density of internal energy, since (42) refers to the i-th fraction only.

For a sediment with a total mass of $\sum_{i=1}^{n} M_{1,i}$, the overall surface area of all particles (N) exposed to friction is $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Let us assume the average value of shear stress over this surface area to be

$$\tau_h \tag{51}$$

and let $\mathbf{v}_h$ be the average velocity of particles of all the fractions. Then, the work performed by friction forces in unit time will be on the average

$$\tau_h \sum_{i=1}^{n} F_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \mid \tag{52}$$

which is already the *source of internal energy wanted*. If the sediment has an average mass density ϱ_1, then the total volume of all sediment particles is

$$V_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{1,i}}{\varrho_1} \tag{53}$$

dividing by which the term (52) the source density is obtained. If, by analogy to (41) one introduces for all sediment fractions the average specific surface referring to the mass unit

$$\varphi_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\sum_{i=1}^{n} M_{1,i}} \tag{54}$$

the *source density of internal energy originating from the energy dissipation of the sediment* will become:

$$\tau_h \varphi_1 \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \mid \varrho_1 \tag{55}$$

In agreement with the foregoing,

3.*I—II. the balance equation of internal energy of the water-sediment system* is

$$\frac{\partial e_z}{\partial t} + \operatorname{div}(e_z \mathbf{v} - \lambda \operatorname{\mathbf{grad}} t) = \frac{1}{2}(\nu \nabla^2 \mathbf{v})\varrho \mathbf{v} + \tau_h \varphi_1 \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \mid \varrho_1 \tag{56}$$

The determination of several factors in the balance equation (56) is met with difficulties. Among others, further investigations and experiments are needed in order to be able to determine the values of τ_h and v_h.

Despite approximations introduced during its derivation, the balance equation is fairly characteristic for the internal energy of the water-sediment system isolated from interactions with the environment.

Even if regarding the very substantial interactions of thermal character between the system and its environment, one will be convinced easily that internal energy is not of a decisive importance upon the phenomenon of sediment transportation. Thus, most of the investigators make a use of this opportunity by neglecting the internal energy in the course of investigations.

4. *Momentum balances* (4.*I and* 4.*II*)

I. Water

4.*I*/*a*. The *momentum* of water is calculated as the product of mass and average velocity

$$M\mathbf{v} \tag{57}$$

by neglecting momentum produced by velocity pulsation.

The density of this extensive quantity is

$$\varrho\mathbf{v} \tag{58}$$

4.*I*/*b*. As far as the *momentum current* of water is concerned, both convective and conductive currents are taken into account.

The *surface density of convective current* is equal to the dyadic product of momentum density and the vector of streamflow velocity:

$$\varrho\mathbf{v} \circ \mathbf{v} \tag{59}$$

The *surface density of conductive current* may be considered as the time average of the dyadic product of pulsation-momentum density and vector-of-pulsation velocity:

$$\varrho\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'} \tag{60}$$

4.*I*/*c*. The only momentum source for water as well as the only source of its kinetic energy is due to the field of gravity. Thus, the *source density of momentum* will be

$$\varrho\mathbf{g} \tag{61}$$

A loss of momentum occurs through momentum transferred to the sediment fractions $i = 1, \ldots, n$ and another momentum is lost that equals the dissipation of kinetic energy of water. These two *sink densities of momentum* are to be considered as follows.

The intensive quantity characterizing momentum exchange is the velocity. If the velocity of the *i*-th fraction is $\mathbf{v}_{h,i}$, the number of its particles N_i, and the source conductivity of momentum L_i, then the momentum transferred to this fraction will be

$$L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v})N_i \tag{62}$$

If the overall number of particles of all fractions is N, then the *sink density of momentum* will become

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v})\frac{N_i}{N} \tag{63}$$

The other kind of momentum loss is owed to viscous stresses, to be given in case of incompressible fluids as

$$(\nu\nabla^2 \mathbf{v})\varrho \tag{64}$$

By multiplying this term by $\mathbf{v}/2$, Eq. (24) describing the dissipation losses of kinetic energy, was derived.

With regard to the foregoing,

4.*I*. *the momentum balance equation of the water will be*, in accordance with (2)

$$\frac{\partial(\varrho\mathbf{v})}{\partial t} + \mathrm{Div}\,(\varrho\mathbf{v}\circ\mathbf{v} + \overline{\varrho\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'}) = \varrho\mathbf{g} + \sum_{i=1}^{n} L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v})\frac{N_i}{N} - (\nu\nabla^2\mathbf{v})\varrho \tag{65}$$

II. Sediment

4.*II/a*. The *momentum of the i-th fraction* of sediment is to be obtained as the product of the average velocity $\mathbf{v}_{h,i}$ of the sediment and the mass $M_{1,i}$:

$$M_{1,i}\mathbf{v}_{h,i} \tag{66}$$

Thus, the momentum density of the i-th fraction is

$$\varrho_{1,i}\mathbf{v}_{h,i} \tag{67}$$

4.*II/b*. Also in case of *the momentum current of sediment*, both convective and conductive currents are taken into account.

The *surface density of convective current* is the dyadic product of momentum density and the velocity vector of the *i*-th fraction

$$\varrho_{1,i}\mathbf{v}_{h,i} \circ \mathbf{v}_{h,i} \tag{68}$$

The *surface density of the conductive current* may be obtained similarly, as a time average of the product of the pulsation momentum density and the vector of pulsation velocity

$$\varrho_{1,i}\overline{\mathbf{v}'_{h,i} \circ \mathbf{v}'_{h,i}} \tag{69}$$

4.*II/c. The momentum of the i-th fraction of sediment* is augmented primarily by the gravity field as a source. Accordingly, the *source density of momentum* of the sediment may be written as

$$\varrho_{1,i}\mathbf{g} \tag{70}$$

Another source of momentum is the momentum transferred from the water. The density of this source of momentum is, according to (62):

$$L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v}) \tag{71}$$

And finally, a source of momentum for the i-th fraction may be the exchange of momentum occurring at the collision with the fractions $k = 1, \ldots, n$ but $k \neq i$. If the velocity of the k-th fraction is $\mathbf{v}_{h,k}$ and the momentum conductivity between this and the i-th fraction is $L_{i,k}$ then, this momentum source density will be

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i}) \frac{N_k}{N} \tag{72}$$

A *loss of momentum, a sink,* is constituted by the momentum corresponding to the friction energy accompanying sediment transportation. This sink may be obtained from the sink density of (42) referring to the dissipation of kinetic energy of sediment

$$\tau_{h,i}\varphi_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \varrho_{1,i}$$

by taking its scalar product with $2\mathbf{v}^{-1}$. Thus, the *momentum sink density arising out of the friction taking place during the movement of the i-th fraction* will be

$$2\tau_{h,i}\varphi_i \mid \mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i} \mid \mathbf{v}^{-1}\varrho_{1,i} \tag{73}$$

With regard to the above,

4.*II. the momentum balance equation of the i-th sediment fraction*, based also upon (2), will become

$$\frac{\partial(\varrho_{1,i}\mathbf{v}_{h,i})}{\partial t} + \mathrm{Div}\,(\varrho_{1,i}\mathbf{v}_{h,i}\circ\mathbf{v}_{h,i} + \varrho_{1,i}\overline{\mathbf{v}'_{h,i}\circ\mathbf{v}'_{h,i}}) =$$

$$= \varrho_{1,i}\mathbf{g} + L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v}) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i})\frac{N_k}{N} -$$

$$- 2\tau_{h,i}\varphi_i\,|\,\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}\,|\,\mathbf{v}^{-1}\varrho_{1,i} \tag{74}$$

In the case of the momentum balance equation of the sediment, all the conditions and statements hold that were mentioned in relationship with the balance equation of kinetic energy of the *i*-th fraction.

1.3. Comparison and evaluation of balance equations of sediment transportation

The momentum balance equations are interdependent, if written up by using the same conditions and neglections as introduced into the balance equations of kinetic energy, as it has been already pointed out.

As it may be seen from the foregoing, balance equations of kinetic energy can be derived from momentum balance equations through calculating the scalar product the latter ones by $\mathbf{v}/2$.

Nevertheless, there are certain differences between the two systems of balance equations, as they have been derived above.

The differences are partly formal ones, since momentum currents have been written as dyadic products, whilst currents of kinetic energy as currents of work of acceleration.

The other difference consisted in having neglected the rather unimportant conductive currents in case of the kinetic energy, but the same was considered in the momentum balance as a rather substantial effect.

A material difference between balance equations of the water and those of sediment is that in case of water, these equations always refer to its whole mass regarded as *homogeneous*, whilst in the case of sediment, they refer to the individual fractions only.

So far, it was not possible to find an exact solution of the balance equations. Several physical variables have been introduced and even interpreted, but for the time being, these are yet unknown. The elimination of relevant difficulties by means of certain approximating assumptions requires still further research work. And finally, it is obvious that the solution of this intricate set of equations will be a difficult task.

1.4. Balance equations of suspended sediment

Even before launching the idea of general balance equations, it became possible to establish the equations of *suspended sediment transportation* by assuming *isothermal conditions.*

In isothermal conditions there is a thermal equilibrium and thus, also the *dissipation of kinetic energy* is to be disregarded.

After having made these assumptions, suspended sediment transportation is to be characterized by means of *mass balance* and *momentum balance.*

The equations have been derived for *the entire mass of the sediment,* by introducing the mean density ϱ_1 of the particles and the resulting settling velocity $\bar{\omega}$, as well as the average sediment velocities $\mathbf{v}_h$ and $\mathbf{v}_h'$ and the average conductivity ε_h of the mass current of sediment. Upon base of velocity components of suspended sediment motion occurring in the momentum exchange between water and sediment, it was found that for a specific gravity γ_1 of the sediment, the conductivity of the momentum source will be the ratio $\gamma_1/\bar{\omega}$.

Both water and sediment were assumed to have constant masses and thus, the mass balance of both phases is source-free.

According to the above assumptions, the *mass balance of water* (7) will remain unchanged:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0 \tag{75}$$

and its momentum balance, by modifying (65), will become

$$\frac{\partial \varrho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{Div}(\varrho \mathbf{v} \circ \mathbf{v} + \varrho \overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) = \varrho \mathbf{g} + \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \tag{76}$$

whilst the *mass balance of sediment* will be by transforming (11):

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_1 \mathbf{v}_h + \varepsilon_h \operatorname{\mathbf{grad}} \varrho_1) = 0 \tag{77}$$

and its *momentum balance* by modifying (74):

$$\frac{\partial \varrho_1 \mathbf{v}_h}{\partial t} + \operatorname{Div}(\varrho_1 \mathbf{v}_h \circ \mathbf{v}_h + \varrho_1 \overline{\mathbf{v}_h' \circ \mathbf{v}_h'}) = \varrho_1 \mathbf{g} - \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \tag{78}$$

When comparing the above balance equations with theories on suspended sediment transportation known from the literature, one will find that most of them were taking into consideration the mass balance of the sediment (77) only. In the course of comparative studies the author has succeeded to insert almost all theories of sediment transportation into a unified system. The classification was based upon the possible neglections or assumptions made. Relevant details are to be found in the references.

As an example of the applications it seems useful to draw attention upon the fact that the *O'Brien—Christiansen equation describing the distribution of concentration* was to be derived in an extremely simple and clear manner from Eq. (77) by considering all possible and admissible neglections.

But herewith we arrived to the practical applicability of theoretical results to suspended sediment motion. The O'Brien—Christiansen equation is namely even in these days the one accepted as the most reliable. With its aid one may calculate the mean concentration, yielding immediately the suspended sediment load G_s [kp/sec].

2. MEASUREMENTS AND INVESTIGATIONS IN THE FIELD

2.1. The role played by measurements and investigations

Simultaneously with theoretical research, also measurements and investigations in the field are covering more and more details. Such are, e.g., the observations on alluvial channel formations, intended to clear the effects of channel formations upon discharge, flow velocity, suspended sediment and bed load.

All these are generally known from the literature and thus their details will not be dwelt upon.

But similarly to the method followed in the discussion of recent theoretical research, it is indicated to show an example of field measurements and investigations. Essentially, these belong to the semi-empirical methods already discussed and the classification of which was also facilitated by the theoretical research already described.

2.2. The sediment-transporting capacity of watercourses

It is well known that alluvial watercourses do, next to the transport of suspended sediment and bed load, modify their channel form within a relatively short period to a great extent. It is a desire of the researchers dating far back to determine numerically the sediment-transporting capacity of watercourses, or in other terms, the energy requirements of sediment transportation. Obviously, the amount of energy used up in modifying the channel form is equally of much interest. Ultimately, it would yield a very valuable information if one were able to know the part of the full available energy owing to the motion of sediment-loaded water, that has been used to keep suspended sediment and bed load moving, and the other part used up in modifying the channel form.

Investigations carried out with these goals in mind have been conducted by the Research Institute for Water Resources Development (VITUKI) Budapest, guided by Dr. J. Csoma. The measurements had been carried out over a reach of the Drava River, 6 km in length, situated up to 6 km upstream the Drávaszabolcs gauge.

2.3. Observations made on the experimental reach of the Drave River

The survey of cross sections, discharge gaugings, measurement of suspended and bed loads are regularly carried out by the Research Institute since 1968. Hydrological and hydraulic features of the experimental Drava reach are summarized in Table II. According to the data obtained, this reach is in fair agreement with the properties of several other rivers of European plains. The only deviation from average conditions is perhaps the high amount of siltings and scours occurring annually along this reach, or, by formulating this fact in another way, one may say that along this reach, the volume of bed material re-arranging itself in a very short time, is very great.

By departing from measured data, the weight of sediment-loaded water (values F) has been calculated for several periods together with the weight of immersed suspended sediment (F_1), the immersed weight of bed load (F_2) and the weight of bed material characterizing the re-arrangement of bed formations (F_3). *Three periods* were selected for presentation.

The volume of material, appeared as a scour, has been accepted as the measure of re-arrangement (see row 5 of Table III) with the restriction that if the balance over a period had a resultant scour, this was considered as suspended sediment leaving the reach and became thus subtracted from the amount of re-arranged material. Furthermore, it was assumed that re-arrangement of bed load occurs only once within the periods surveyed. The average channel width, 300 m, was taken as the travelling length of re-arrangement.

Already here it should be noted that thus one will obtain the minimum of energy demand spent on re-arrangement. It is namely obvious that the re-arrangement owing to scours and silting means a continuous movement of the bed material and thus, the actual amount of energy used up is a manifold of that calculated.

The weight of sediment-loaded water, suspended sediment, bed load and material re-arranged, respectively, is shown in Table III.

By adopting certain simplifying assumptions, the work E done by sediment-loaded water, the amount of work used up in transport of suspended

Table II

Hydrological and hydraulic features of the Drávaszabolcs experimental reach on the Drava River

Location of experimental reach:	River reach upstream the Drávaszabolcs river gauge
Catchment area	35,764 km^2 at the Drávaszabolcs gauge
Length of experimental reach	$L = 6000$ m
Character of experimental reach	sinuous, very unstable
Channel depth	6–8 m below channel edge
Average water depth	$D = 4$ m during the periods investigated, at medium river stage
Average length of settling path = half of average water depth	$D_s = D/2 = 2.00$ m
Channel width	200–500 m
Average channel width	$B = 300$ m
Average channel slope	$S = 16$ cm/km
Head drop of the entire reach	$h_v = 0.96$ m
Discharges in m^3/sec	$Q_{\min} = 150$; $Q_m = 850$; $Q_{\max} = 2500$
Mean flow velocity	$v_k = 1.0$ m/sec
Difference of max. and min. stage	586 cm
Average diam. of suspended sediment	$d_g = 0.04$ mm
Average diameter of bed load and bed material	$d_g = 0.3$ mm
Specific weight of sediment and bed material	$\gamma_1 = 2650$ kp/m^3
Average concentration of suspended sediment in the three periods	$C_k = 0.063-0.050-0.045$ kp/m^3, resp.
Specific weight of sediment-loaded water in the three periods	$\gamma_z = 1000.041-1000.031-1000.025$ kp/m^3
Settling velocity of suspended sediment	$\omega = 0.0015$ m/sec
Average annual suspended sediment transport	$G_s = 750\ 000$ m^3
Average annual bed-load transport	$G_B = 110\ 000$ m^3
Overall scour of experimental reach in the three periods	836,298 m^3; 751,350 m^3; 587,065 m^3
Overall silting-up of experimental reach during the three periods	681,907 m^3; 1 227 354 m^3; 659,897 m^3

sediment and bed load, and the work required for bed re-arrangement are to be calculated as follows.

For the individual periods, the weight of sediment-loaded water, the immersed weight of suspended sediment and bed load has been determined with aid of discharge durations and the relationships established between discharge and sediment load (cf. rows 2, 3 and 4 of Table III). The immersed weight of re-arranged material (row 5 of Table III) has been calculated from the scours

Table III

Sediment transport of Drave River at Drávaszabolcs in three different periods

	First period 1. October 1968 to 15 March 1969	Second period 15 March 1969 to 15 October 1970	Third period 16 October 1970 to 15 May 1971
1. Drop of the energy line (m)	0.96	0.96	0.96
2. Weight of sediment-loaded water passing the reach F [kp]	5.5×10^{12}	31.15×10^{12}	5.28×10^{12}
3. Submerged weight of suspended sediment passing the reach F_1 [kp]	3.48×10^{8}	15.70×10^{8}	2.17×10^{8}
4. Submerged weight of bed load passing the reach F_2 [kp]	0.19×10^{8}	2.14×10^{8}	0.16×10^{8}
5. Submerged weight of displaced material F_3 [kp]	11.20×10^{8}	12.40×10^{8}	9.70×10^{8}

in agreement with the foregoing. With regard to relatively low variations of flow velocity, the slope of the energy line along this reach of 6000 m was assumed to equal the surface slope of 0.96 m.*

The weight G_S [kp/sec] of the suspended sediment and G_B [kp/sec] of the bed load have been taken into account by means of average values derived from discharge durations and from relationships between discharge and sediment load.

For the sake of completeness let us review the method used in calculating the entire energy and the individual partial energy demands.

The work performed by sediment-loaded water

If h_v [m] is the drop of the energy line over the length L [m] and if one uses the average concentration C [kp/m^3] in calculating the specific gravity γ_z of sediment-loaded water, that is, if

$$\gamma_z = \gamma - \frac{\gamma C}{\gamma_1} + C \tag{79}$$

then the work performed by sediment-loaded water during the period Δt [sec] will be

$$E = \gamma_z Q_z h_v \Delta t \tag{80}$$

where Q_z was assumed approximately equal to the actual discharge.

* With regard to the numerical examples, the angular brackets after physical quantities and relationships henceforth will contain not the dimensions but the units of measure adopted, contrary to general use.

Namely, the weight of sediment-loaded water running down within the individual periods Δt is

$$F = \gamma_z Q_z \Delta t \text{ [kp]} \tag{81}$$

If the surface slope is S, then the drop of the energy line over a length L [m] will be

$$h_v = SL \text{ [m]} \tag{82}$$

The total work performed by sediment-loaded water along the experimental reach will thus be

$$E = Fh_v \text{ [kpm]} \tag{83}$$

Work spent on the transportation of suspended sediment

By calculating this work it was assumed that suspended sediment is kept in suspension over an average settling-path length D_s against a settling velocity ω [m/sec] at the expense of the energy of sediment-loaded water. The sediment would take a time

$$t_1 = D_s/\omega \text{ [sec]} \tag{84}$$

to arrive to the channel bottom.

But since v_k [m/sec] is the mean flow velocity and the experimental reach has a length L [m], the sediment should be kept in suspension over the time

$$t_2 = L/v_k \text{ [sec]} \tag{85}$$

Thus, the length of the settling path will obviously be

$$D_{s\,\mathrm{act}} = D_s \frac{t_2}{t_1} \tag{86}$$

If G_s [kp/sec] is the average suspended sediment load in unit time, then the immersed weight of suspended sediment during the interval Δt will become

$$F_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_s \Delta t \text{ [kp]} \tag{87}$$

and the work required for keeping the sediment in suspension:

$$E_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_s D_s \frac{t_2}{t_1} \Delta t = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_s D_s \frac{L}{v_k} \frac{\omega}{D_s} \Delta t \tag{88}$$

or, by considering Eq. (87):

$$E_1 = F_1 L \frac{\omega}{v_k} \tag{89}$$

Work spent on the transportation of bed load

If G_B [kp/sec] is the average bed load transport, then its immersed weight is

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_B \text{ [kp/sec]} \tag{90}$$

Thus, the immersed weight of bed load carried in the interval Δt will become

$$F_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_B \Delta t \text{ [kp]} \tag{91}$$

This weight F_2 is causing friction over the distance $L = 6000$ m. Thus, if, according to Bagnold, the friction factor of a bed load having an average diameter of 0.3 mm is assumed to be $f = 0.75$, then

$$E_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_B \Delta t \; L \cdot f = F_2 \cdot L \cdot f \text{ [kpm]} \tag{92}$$

is the work required for bed- load movement.

In the row 5 of Table III, values of F_3 calculated upon the basis of the foregoing assumptions are to be found, referring to the three intervals.

If one calculates, as already said, the *work spent on re-arrangement* over a distance $B = 300$ m corresponding to average channel width and also a factor of friction $f = 0.75$ being applied, one obtains

$$E_3 = F_3 B \cdot f \tag{93}$$

The energy loss E as well as the energy requirements E_1, E_2 and E_3 for the three periods, calculated in agreement with the above, is contained in Table IV.

If the energy loss E in Table IV, representing the average energy source is taken as 100%, then in the last column are the percentages of this energy spent on transporting suspended sediment and bed load and on rearranging the channel. By subtracting the sum $(E_1 + E_2 + E_3)$ from 100% the value of E_4 thus obtained is yielding the energy spent on overcoming various resistances (friction, bends, deformations, turbulence, etc.) and on maintaining the movement.

When reviewing the contents of Table IV it becomes apparent that only about 4 to 7% of the total energy is spent on sediment transportation and channel rearrangement. With regard to the foregoing approximations it is that this low percentage of energy consumption should be considered as a

Table IV

The energy requirements of suspended sediment and bed-load transport as well as channel re-arrangement over a reach of the Drave River, 6000 m in length, over three different periods

Period	Energy loss or energy demand	Weights F, F_1, F_2 and F_3 [kp]	Distance covered L, B [m]	Gradient $S = h_v/L$	Drop of gradient h_v [m]	Ratio of settling velocity to mean flow velocity ω/v_k	Friction coefficient f	Required or lost energy	
								in [kpm]	in per cent of E
1*st*	E	$F = 5.50\times10^{12}$	6000	1.6×10^{-4}	0.96	—	—	5.280×10^{12}	100.000
1. 10. 1968	E_1	$F_1 = 3.48\times10^8$	6000	—	—	1.5×10^{-3}	—	31.320×10^8	0.059
to	E_2	$F_2 = 0.19\times10^8$	6000	—	—	—	0.75	8.550×10^{10}	1.619
15. 3. 1969	E_3	$F_3 = 11.20\times10^8$	300	—	—	—	—	2.520×10^{11}	4.773
	E_4	—	—	—	—	—	—	4.939×10^{12}	93.549
2*nd*	E	$F = 31.15\times10^{12}$	6000	1.6×10^{-4}	0.96	—	—	29.904×10^{12}	100.000
15. 3. 1969	E_1	$F_1 = 15.70\times10^8$	6000	—	—	1.5×10^{-3}	—	141.300×10^8	0.047
to	E_2	$F_2 = 2.14\times10^8$	6000	—	—	—	0.75	0.963×10^{12}	3.221
15. 10. 1970	E_3	$F_3 = 12.40\times10^8$	300	—	—	—	0.75	0.279×10^{12}	0.933
	E_4	—	—	—	—	—	—	20.648×10^{12}	95.799
3*rd*	E	$F = 5.28\times10^{12}$	6000	1.6×10^{-4}	0.96	—	—	5.069×10^{12}	100.000
16. 10. 1970	E_1	$F_1 = 2.17\times10^8$	6000	—	—	1.5×10^{-3}	—	19.530×10^8	0.038
to	E_2	$F_2 = 0.16\times10^8$	6000	—	—	—	0.75	0.072×10^{12}	1.420
15. 5. 1971	E_3	$F_3 = 9.70\times10^8$	300	—	—	—	0.75	0.218×10^{12}	4.301
	E_4	—	—	—	—	—	—	4.777×10^{12}	94.241

minimum only. In the given case it could be said with certainty that the energy spent by watercourses upon sediment transportation and channel re-arrangement is substantially more.

If the energy demands for suspended sediment transport, bed load transport and channel re-arrangement are considered separately, one may state the following:

In all three periods, the percentage of the total energy, spent on suspended sediment transport was 0.06 to 0.04% only. This, if compared e.g. with the value of 0.15%, found at the Nagymaros reach of the Danube, is a conspicuously low value. One of the possible explanations may lie in the fact that in the Danube, the sediment is kept in suspension over a settling path 2 to 4 times as long. Another reason may be the relatively low concentration of suspended sediment in the Drava river during the period investigated.

1.4 to 3.0% of the total energy was spent on bed-load transport. Obviously, this value too is actually much greater, since a continuous work of friction was assumed, whilst in the reality, bed load has an intermittent motion, as shown by recent research results.

1 to 4.8% of the energy was used up in re-arrangement. This value should by all means considered as a minimum and with regard to an obviously repeated re-arrangement, the actual value may be higher by orders of magnitude.

The investigations related to the Drávaszabolcs reach are in harmony with investigations on the sediment-transporting capacity of watercourses. Usually, the sediment- transporting capacity of watercourses is characterized by the ratio of Eq. (89) spent on suspended sediment transportation to the full energy loss of sediment-loaded water. In fact, if the quotient of Eqs (89) and (80) is formed, one will arrive to the expression

$$\eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_z} \frac{\omega}{vS} \frac{Q_s}{Q_z} \tag{94}$$

well known from the literature. Here, Q_s and Q_z are the volume yields of suspended sediment and sediment-loaded water, respectively and the slope of the energy line is

$$S = \frac{h_v}{L} \tag{95}$$

By comparing the relatonships (94) and (76), the analogy between

$$\frac{\gamma_z}{\gamma_1 - \gamma} \frac{v}{\omega} S \frac{Q_z}{Q_s} \quad \text{and} \quad \frac{\gamma_1}{\omega} (v_h - v)$$

becomes apparent.

Measurements on the Drávaszabolcs experimental reach are still in progress. It may be well expected that further measurements will enable the drawing of new conclusions but it is equally likely that results of similar investigations conducted in different locations may yield further results of value.

Investigations on the experimental reach Drávaszabolcs are a good proof of the inseparable coherence of theoretical research and field measurement results on the sediment transportation of watercourses.

3. METHODS OF SOLVING THE PROBLEMS

An exact formulation of the established problem has an equally outstanding importance in the case of field measurements as well as up-to-date theoretical research. This should be followed by the selection of the most expedient method. In their most generalized form, the problems are defined by relationships between physical variables and the relevant unambiguity conditions, constituting together a mathematical model.

Obviously, a mathematical model should be formulated exactly even if its solution at the time is not possible, owing to deficient knowledge. It is the exact formulation that compels the researcher to take all important circumstances into account and to range our knowledge on the process investigated into an exact system.

One will perceive from the foregoing that the solution of the system of differential equations describing the phenomenon is still unknown. But it is equally obvious that by introducing certain assumptions an approximate solution is perhaps to be obtained. One of these simplifications is the otherwise generally admissible one of substituting the conductivities — tensors from the theoretical point of view — by scalars. Or another such simplification is to take the turbulence of flow into account, not by means of the Reynolds stresses, but by the product of some conductivity and the gradient of the mean flow velocity. Still more generally accepted is the simplification of discussing the problem as if it were a two-dimensional or one-dimensional phenomenon.

In certain cases it becomes possible to convert the set of equations into a set of finite-difference equations enabling its solution by means of up-to-date high-speed digital computers, with respect to unambiguity conditions.

There are also possibilities for experimental solutions, to be performed on the natural watercourse itself or on a model. By the way, it is already a well-known fact that one must not separate experimental and numerical solutions from each other. In the language of cybernetics there is a mutual feedback between them. In the possession of a solution obtained by numerical methods one may decide upon what assumptions should be tested experimentally and numerical methods are gaining in accuracy through results obtained from experimental data.

Consequently, theoretical and experimental means are needed equally for the solution of practical problems. Or, by adopting a more exact formulation, theoretical investigations into sediment transportation are not to succeed without an adequate experimental support. Of course, the opposite may be said too. No experiment may yield reliable and useful results without proper theoretical considerations.

REFERENCES

1. BOGÁRDI, J.: Sediment Transportation in Watercourses (in Hungarian), Akadémiai Kiadó, Budapest 1971. pp. 837. (English version in press)
2. BOGÁRDI, J.: Fluvial Sediment Transportation. *Advances in Hydroscience*, **8** (1972), pp. 183—259. Academic Press Inc. New York & London
3. BOGÁRDI, J.: General Equations of Suspended Sediment Transport (In Hungarian). *Hidrológiai Közlöny*, **50** (1970). 529—536
4. BOGÁRDI, J.: The Sediment Transporting Capacity of Alluvial Streams. *Acta Techn. Hung.* **75** (1973), No. 1—4
5. BOGÁRDI, J.: Feststoffproblem-Theorie und Praxis. ÖWWV, und Institut für Wasserwirtschaft der Hochschule für Bodenkultur, *Hydrologie-Fortbildungskurs*, Band **14**/B, Wien 1973
6. BOGÁRDI, J.—SZŰCS, E.: Balance Equations of Suspended Sediment Transportation. *Acta Techn. Hung.* **69** (1970), No. 1—2
7. BRUK, S.: Observations on some Assumptions in Suspended Sediment Transport Kinetics. *Saopstenja Instituta za Vodoprivedu "Jaroslav Cerni"*, Belgrade, XIV., No. 40
8. SZŰCS, E.: Dialogues on Technical Sciences (in Hungarian). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
9. SZŰCS, E.: Similitude and Model (in Hungarian). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972

Zeitgemäße theoretische und praktische Probleme der Geschiebeführung. Die modernen theoretischen Untersuchungen der Geschiebeführung basieren auf den Grundgesetzen der Physik. Der Autor betrachtet die Geschiebebewegung als eine physische Erscheinung, und aufgrund des Gesetzes der Erhaltung stellter Gleichungen für die Massen- und kinetischen Energie, innere Energie und für den Impuls auf. Die Gegeneinanderstellung dieser Gleichungen und deren Auswertung führten zu zahlreichen grundsätzlichen Festsetzungen. Von theoretischen Grundsätzen ausgehend wird die Geschiebeführungsfähigkeit der Wasserläufe untersucht. Aufgrund der auf dem Fluß Drau durchgeführten Messungen und Beobachtungen wird auch der Energiebedarf zur Geschiebeführung und zur Umgestaltung des Flußbetts ermittelt.

Современные теоретические и практические вопросы движения наносов. В работе теоретические вопросы движения наносов рассматриваются с помощью балансовых уравнений. Автор вводит дифференциальные уравнения массы, кинетической энергии, внутренней энергии и сохранения импульса. Автор производит их анализ, и при сравнении их устанавливает характерные закономерности. Балансовые уравнения принципиально действительны как для взвешенных, так и для перекатывающихся наносов, естественно для обоих этих видов исходя из действительных для них и сильно отличающихся друг от друга условий однозначности. Рассматривается также вопрос транспортируемости наносов водотоками как в теоретическом, так и в практическом отношениях. На основе измерений и наблюдений, проведенных на экспериментальном участке р. Дравы, в числовой форме демонстрируется доля энергии, использованная для передвижения взвешенных и перекатывающихся наносов, также доля энергии, использованной для перемещения материалов после углубления и наполнения русла.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 51—62 (1974)

ÜBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER THEORIE DER STABKONSTRUKTIONEN UND DER KONTINUUMAUFGABE

J. SZABÓ*

KORRESP. MITGLIED DER UNG. AKADEMIE DER WISS.

und

P. SCHARLE**

[Eingegangen am 4. Febr. 1974]

Die in der Theorie der Stabkonstruktionen bekannte Zustandsgleichung läßt sich als Bedingungsgleichung der Stationärität eines Energiefunktionals aufstellen. Im vorliegenden Aufsatz wird der Gedankengang für den Fall der (ohne Berücksichtigung von Anfangsformänderungen und -spannungen formulierten) Aufgabe der linearen Theorie ausführlich erläutert.

1. Einleitung

In der klassischen Elastizitätslehre wird das mechanische Verhalten des geprüften Körpers (des irgendein Teilbereich V des dreidimensionalen Raumes ausfüllenden Materials) durch das Gleichungssystem

$$\sigma_{ij,j} + k_i = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(u)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \tag{4}$$

$$u_i = v_i, \tag{5}$$

$$\sigma_{ij} n_j = q_i \tag{6}$$

gekennzeichnet.[1] Die drei ersten Gleichungen sind innerhalb des Bereichs V gültige Feldgleichungen: es drücken die Gl. (1) das Gleichgewicht, die Gl. (2) die Verträglichkeit der Verschiebungen und Formänderungen, die Gl. (3) den Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen (die mechanischen Eigenschaften des Materials) aus. $W(\varepsilon_{ij})$ ist die Formänderungs-Energiedichtefunktion, eine homogene quadratische Funktion der Komponenten

* Prof. Dr.-Ing. J. Szabó, Ménesi út 21., 1118 Budapest, Ungarn

** Dr.-Ing. P. Scharle, Péterfy u. 44., 1076 Budapest, Ungarn

[1] Bei der Behandlung der räumlichen Aufgabe wird das Bezeichnungssystem der kartesischen Tensorenrechnung angewandt (siehe z. B. [11]).

des Formänderungstensors. Es wird an der Teilfläche S_σ der das Bereich V begrenzenden Fläche S durch die Gl. (4) die statische, an der komplementären Fläche S_u durch die Gl. (5) die geometrische Randbedingung und durch die Gl. (6) der Zusammenhang zwischen den Reaktionen und den inneren Kräften erfaßt.

Es bedeuten in den Gleichungen:

u_i den Verschiebungsvektor im Bereich V
ε_{ij} den Formänderungstensor im Bereich V
σ_{ij} den Spannungstensor im Bereich V
q_i den Reaktionsvektor an der Fläche S_u
n_j den normalen Einheitsvektor an der Fläche S
k_i die vorgegebene verteilte räumliche Kraft im Bereich V
p_i die vorgegebene Flächenkraft an der Fläche S_σ
v_i den vorgegebenen Verschiebungsvektor an der Fläche S_u.

In der Theorie der Stabkonstruktionen läßt sich die das Verhalten des mechanischen Modells beschreibende Zustandsgleichung durch entsprechende Reduktion der die Einzelstäbe betreffenden statischen, kinematischen und mechanischen Zusammenhänge aufstellen [2]. Nach der Theorie erster Ordnung gilt z. B.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

wobei die Matrix **G** die geometrische Lage der Stäbe, die Matrix **F** die elastischen Eigenschaften des Materials kennzeichnet; **u** und **S** sind die Knotenpunktverschiebungen bzw. die in den Stäben wirkenden inneren Kräfte enthaltende Vektoren.[2]

Die für Stabkonstruktionen geltende Gleichung (7) kann in allgemeinerer Form, als Matrizendifferentialgleichung und auch für den Fall von Stäben beliebiger Gestalt angeschrieben werden. Derart ist sie auch zur numerischen Untersuchung von räumlichen Aufgaben (z. B. eines aus gekoppelten Tetraedern bestehenden Systems) geeignet [3]. Zwischen dem Grundgleichungssystem (1)—(6) und der Zustandsgleichung (7) muß also ein enger Zusammenhang bestehen — die Gl. (7) ist, wie wir es sehen werden, tatsächlich den Gln. (2), (4), (5) und (6) äquivalent.

2. Formulierung der Kontinuumaufgabe unter Anwendung von Variationen

Die durch die Gleichungen (1)—(6) formulierte Aufgabe der linearen Elastizitätslehre ist auch auf andere Weise formulierbar. Es kann nämlich ein Funktional Π vorgegeben werden, in dem die Skalarfunktionen der Zu-

[2] In den die Stabkonstruktionen betreffenden Zusammenhängen werden die in [2] gebräuchlichen Bezeichnungen angewandt. Zur besseren Übersichtlichkeit der Ausführungen beschränken wir uns auf die Behandlung der geometrisch und physisch linearen Aufgaben, machen ferner die Annahme, daß keine Anfangseinflüße (Spannungen, Formänderungen) vorhanden sind. Die Form der Gln. (1)—(7) ist dementsprechend so einfach wie möglich.

standsfelder u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, q_i beliebig variierbar sind und Π bei der exakten Lösung stationär wird, d. h. der Bedingung

$$\delta\Pi = 0 \tag{8}$$

genügt [4]. An das Funktional knüpft sich nach der Entwicklung

$$\Pi = U + P + D \tag{9}$$

auch eine unmittelbare mechanische Definition [5]. Es bedeuten hier:
U die gesamte Formänderungsenergie des geprüften Körpers,

$$U = \int\limits_V W(\varepsilon_{ij})dV \tag{10}$$

P die Arbeit der vorgegebenen äußeren Lasten,

$$P = -\int\limits_V k_i u_i dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i u_i dS \tag{11}$$

und D das Dislokationspotential des Körpers

$$D = \int\limits_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^{(u)} - \varepsilon_{ij})dV + \int\limits_{S_u} (v_i - u_i)q_i dS. \tag{12}$$

Die Äquivalenz des Zusammenhanges (8) und des Gleichungssystems (1)—(6) ist durch unmittelbare Entwicklung der ersten Variation von Π nachweisbar. Falls anstatt des unabhängigen Variierens der Zustandsfunktionen die Erfüllung irgendeiner (evtl. auch gleichzeitig mehrerer) der Gln. (1)—(6) bei der Variationsbildung a priori gesichert werden kann, so nimmt auch Π eine einfachere Form an. Im Prinzip sind die vornherein zu erfüllenden Gleichungen frei wählbar; in den weiteren muß anstatt der aus diesem Gesichtspunkt vernachlässigten Gleichungen jeweils die für die entsprechende Funktionalvariante geltende Stationäritätsbedingung berücksichtigt werden. Die Anzahl der möglichen Varianten ist dementsprechend groß — die bei Flächenkonstruktionen in Betracht kommenden wichtigeren Fälle sind z. B. in [6] tabellarisch zusammengefaßt. Hingegen kann ohne weitere Einschränkung der Verallgemeinerung $W(\varepsilon_{ij})$ als bekannt angenommen werden. Für elastische Materialien läßt sich in diesem Fall die Funktion der verteilten komplementären Energiedichte direkt anschreiben ([1], [4]):

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W(\varepsilon_{ij}), \tag{13}$$

wobei $\Phi(\sigma_{ij})$ schon die homogene quadratische Form der Komponenten des Spannungstensors ist. Somit kann anstatt der Gl. (3) der Zusammenhang

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{14}$$

berücksichtigt werden, diesen in die Gl. (2) einsetzend und ε_{ij} eliminierend schreibt sich

$$\frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}^{(u)}. \tag{15}$$

Im Funktional die unter Berücksichtigung von (3) möglichen Umformungen durchführend wird für das Kontinuum mechanisch und geometrisch linearen Verhaltens die allgemeinste, *Hellinger—Reissner*'sche Form erhalten ([4], [7]):

$$\Pi_R = \int_V \varepsilon_{ij}^{(u)} \sigma_{ij} dV - \int_V \Phi(\sigma_{ij}) dV - \int_V k_i u_i dV -$$
$$- \int_{S_\sigma} p_i u_i dS - \int_{S_u} (u_i - v_i) q_i dS. \tag{16}$$

Hier sind nur noch die die Zustandsfelder u_i, σ_{ij}, q_i zu variieren. Durch partielle Integration des ersten Gliedes an der rechten Seite und durch Anwendung des *Gauss—Ostrogradskij*'schen Satzes gelangt man zu einer sich in den weiteren als vorteilhaft erweisenden Variante der Gl. (16):

$$\Pi_R = - \int_V \Phi(\sigma_{ij}) dV - \int_V (\sigma_{ij,j} + k_i) u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i u_i dS -$$
$$- \int_{S_u} (u_i - v_i) q_i dS + \int_S \sigma_{ij} n_i u_i dS \tag{17}$$

(von der Reduktion der Flächenintegrale wurde mit Rücksicht auf die späteren Zusammenhänge abgesehen).

Der Gedankengang gilt auch für den Fall, daß man das Bereich V als aus Teilbereichen V^e gekoppeltes System betrachtet (Mosaikprinzip). In diesem Fall müssen aber außer den Gln. (1)—(6) zwei weitere Bedingungsgleichungen eingeführt werden, die die Berührungsflächen der Elemente V^e betreffen:

$$[u_i] = g_i \text{ entlang } \Gamma_u, \tag{18}$$

$$[\sigma_{ij} n_j] = h_i \text{ entlang } \Gamma_\sigma. \tag{19}$$

Es bedeuten hier [...] den die algebraische Differenzbildung der Zustandsparameter entlang der Berührungsflächen (der im Bereich V liegenden »inneren« Flächen Γ) vorschreibenden Operator, g_i die vorgegebene Verschiebungsverteilung und h_i die vorgegebene Spannungsverteilung entlang dieser Flächen. Γ_u und Γ_σ bilden ebenso ein komplementäres System, wie S_i und S_σ. (Für $g_i = h_i = 0$ formulieren die Gln. (18) und (19) die im üblichen Sinne verstandene Kontinuität der Zustandsfelder). Dementsprechend wird auch die Struktur des Funktionals verändert, mit den die Berührungsflächen der Elemente V^e betreffenden entsprechenden Dislokations-Energieintegralen ergänzt ([8]).

Falls die Form des Bereiches V und das Randbedingungssystem komplizierter sind, so ist die Lösung der mit den Gleichungen (1)—(6) formulierten Aufgabe in geschlossener (stetige Funktionen endlicher Anzahl enthaltender) Form meistens nicht möglich. Eine Näherung der exakten Lösung wird in diesem Fall als lineare Kombination von willkürlich angenommenen, einfachen (oder komplizierteren, jedoch günstige Eigenschaften besitzenden) Näherungsfunktionen mit unbekannten Koeffizienten gesucht. Die frei wählbaren Parameter dieser linearen Kombination werden derart vorgegeben, daß die Näherungslösung in irgendeinem Sinne »optimal« wird. Falls man z. B. die zu variierenden Zustandsfunktionen in Form solcher linearen Kombinationen in die Gl. (17) einsetzt, so wird das Funktional eine Funktion der unbekannten Parameter. Folglich wird auch die Variationsbildung durch partielle Derivation nach den letztgenannten Parametern durchgeführt und derart das für die weitere Berechnung als Grundlage dienende Gleichungssystem erhalten. Falls — wie auch in der klassischen Elastizitätslehre — Π eine quadratische Funktion der Parameter ist, so führt (8) zu einem linearen Gleichungssystem.

Eigentlich ist Π ein Fehlerpotential, das die zwischen dem Energieniveau bei der exakten Lösung und bei einer beliebigen Näherung bestehende Abweichung angibt [9]. Durch die mit dem Ansatz $\delta\Pi = 0$ erhaltene Näherung wird im linearen Bereich der angenommenen Näherungsfunktionen der Fehler im *Galjorkin*'schen Sinne minimiert ([4], [10]). Natürlich kann auch eine andere Fehlerbedingung gewählt werden, in welchem Fall jedoch dem Fehlerintegral keine energetische Definition zugehört ([11], [12]). An diesem Punkt ist der Gedankengang schon direkt mit den allgemeinen Grundsätzen der Methode der gewogenen Reste verknüpft und die Behandlung der diesbezüglichen Detailfragen würde über den Rahmen unseres Aufsatzes hinausgehen ([13]).

3. Die Energiefunktionale des Linienkontinuums

Vorstehend wurden die Zusammenhänge der klassischen Elastizitätslehre mit Gültigkeit für die allgemeine räumliche Aufgabe behandelt. Im Falle von zwei- und eindimensionalen Kontinuum wird die Anzahl der zustandskennzeichnenden Skalarfunktionen geringer und die das mechanische Verhalten des geprüften Körpers (Flächen- oder Linienbereichs) beschreibenden Gleichungen werden einfacher.

Nachfolgend werden die das Linienkontinuum betreffenden Zusammenhänge dargestellt mit der Absicht, eine Verbindung zwischen den Gln. (7) und (8) herzustellen. Bei der Herstellung der entsprechenden Form des Potentials (17) suchen wir eine Formulierung, nach der das Modell des Linienkontinuums mit dem in der linearen Theorie der Stabkonstruktionen angewandten Modell übereinstimmt. Zu diesem Zweck werden die nachfolgenden Annahmen gemacht:

a) Das Linienkontinuum besteht aus geraden Abschnitten, für deren räumliche Anordnung keine Einschränkung vorgegeben wird. Die Endpunkte der Linienabschnitte werden Knotenpunkte genannt, mit laufenden Nummern versehen und die Linienabschnitte jeweils mit den Nummern ihrer beiden Endpunkte bezeichnet. In den weiteren werden die Linienabschnitte kurz Stäbe genannt.

b) Das Analogon des Bereiches V ist die Summe der Stablängen, $\sum\limits_{j,k} \mathrm{l}_{j,k}$ (siehe Bild 1). Anstatt der in den Gln. (1) und (2) stehenden Differentialoperatoren (def, div) wird hier der Differentialoperator entlang des Stabes, d/dl eingesetzt.

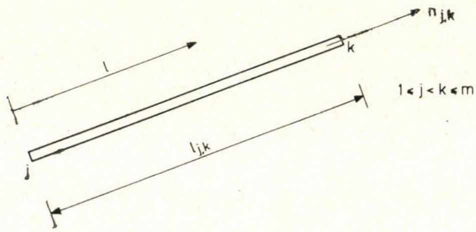


Fig. 1

Wegen der beliebigen Anordnung der Stäbe ist im Laufe der Untersuchung die (wenigstens stillschweigende) Anwendung des Mosaikprinzips immer notwendig. Neben dem allgemeinen Bezugskoordinatensystem muß auch ein den Einzelstäben angepaßtes lokales System eingeführt werden. Als Koordinatenursprung dieses letzteren Systems wird der die kleinste Nummer tragende Knotenpunkt gewählt (die normale positive Definition von $\mathbf{n}_{j,k}$ ergibt sich dementsprechend). Die Beziehung zwischen den zweierlei Koordinatensystemen wird auf die übliche Weise, mit Hilfe der Drehmatrix $\mathbf{T}_{j,k} = (\mathbf{T}^*_{j,k})^{-1}$ gesichert.

Besondere Überlegung erfordert die Frage der Definition der Flächen S und Γ. Es wird nämlich vorausgesetzt, daß die gekoppelten Stabenden dieselbe Nummer haben und daß ihre Verschiebung der Knotenpunktverschiebung gleich ist, das Vorhandensein einer äußeren Kraft an jedwedem Knotenpunkt wird aber auch nicht ausgeschlossen. Das Analogon der Gl. (18) ist also immer homogen, das der Gl. (19) hingegen nicht unbedingt. Andererseits wird die Form der Gln. (4) und (19) vollkommen gleich, unabhängig davon, ob der Knotenpunkt als äußeres oder inneres »Flächenelement« betrachtet wird. Es ist also nicht zweckmäßig, zwischen »äußeren« und »inneren« Knotenpunkten zu unterscheiden — ihre Gesamtheit kann als Analogon der Fläche S betrachtet werden.[3] Derart genügt in den nachfolgenden die Untersuchung des *Hellinger—Reissner*'schen Funktionals.

c) Anstatt der im Bereich V definierten Zustandsparameter u_i und σ_{ij} werden jetzt die Vektoren $\mathbf{u}_{j,k}(l)$ und $\mathbf{S}_{j,k}(l)$ eingeführt (Bild 2). Diese Vektoren enthalten je sechs Elemente in der gewohnten Anordnung, es wird aber

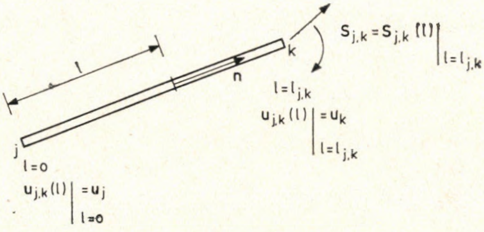


Fig. 2

angenommen, daß sie entlang des Stabes Veränderungen unterliegende Skalarfunktionen sind. In dieser Phase der Überlegungen wird nämlich das Vorhandensein einer entlang der Einzelstäbe angreifenden verteilten Last $\mathbf{K}_{j,k}(l)$ nicht ausgeschlossen.

d) Der Einfachheit halber wird angenommen, daß die Randbedingungen getrennt vorliegen. Bei einem Teil der Knotenpunkte ist der gesamte Verschiebungsvektor $\mathbf{v}_k$ (alle Komponenten dieses Vektors), bei den übrigen Knotenpunkten der gesamte Lastvektor $\mathbf{Q}_\lambda$ vorgegeben $(1 < k, \lambda < m)$. Derart ist die Menge der Punkte vorgegebener Verschiebung zur Fläche S_u und die Menge der Punkte vorgegebener Belastung zur Fläche S_σ analog. Auf die Punkte vorgegebener Verschiebung wirkt die unbekannte Reaktion $\mathbf{R}_k$; ($\mathbf{v}_k$, $\mathbf{R}_k$, $\mathbf{Q}_\lambda$ sind ebenfalls sechsdimensionale Vektoren).

e) Es wird angenommen, daß das Verhalten des Stabmaterials durch eine als quadratischer Ausdruck des Vektors $\mathbf{S}_{j,k}(l)$ herstellbare, verteilte komplementäre Energiedichtefunktion $\Phi_{j,k}(l)$ eindeutig gekennzeichnet werden kann.

[3] Da diese Möglichkeit naheliegend ist, wird das Mosaikprinzip in der Theorie der Stabkonstruktionen üblicherweise nicht weiter betont — die Fragen der Verbindung der Elemente ergeben sich dann nur noch in der verallgemeinerten Theorie [3].

Die beschriebenen Annahmen und Definitionen machen es jetzt schon möglich, die für Stabkonstruktionen gültige Form des *Hellinger—Reissner*'schen Funktionals anzuschreiben. Der gewählten positiven Richtung im lokalen Koordinatensystem entsprechend steht in dem (jetzt auf die Stabenden bezogenen) Ausdruck der Flächenitegrale $-\mathbf{S}_{j,k}(0)$ und $\mathbf{S}_{j,k}(l_{j,k})$, und das Analogon von $\sigma_{ij}n_j$ nimmt auf das allgemeine Koordinatensystem bezogen die Form

$$\sum_{(\mu)} \mathbf{T}^*_{\mu,j}\mathbf{S}_{\mu,j}(l_{\mu,j}) - \sum_{(\nu)} \mathbf{T}^*_{j,\nu}\mathbf{S}_{j,\nu}\,(0)$$

an, wobei μ und ν den anderen Endpunkt der an den Knotenpunkt j angeschlossenen Stäbe bedeuten und $\mu < j < \nu$ gilt. Die hinsichtlich der äußeren Kräfte positive Normale zeigt in die zum Knotenpunkt entgegengesetzte Richtung, derart kann die Gl. (17) unter Anwendung der eingeführten Bezeichnungen in nachfolgender Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\Pi_R = &- \sum_{(j,k)} \int_{l_{j,k}} \Phi_{j,k}(l)dl - \sum_{(j,k)} \int_{l_{j,k}} \left\{\frac{d}{dl}\,\mathbf{S}_{j,k}(l) + \right.\\ &\left. + \mathbf{K}_{j,k}(l)\right\}^* \mathbf{u}_{j,k}(l)dl - \sum_{(\lambda)} \mathbf{Q}^*_\lambda \mathbf{u}_\lambda - \sum_{(\varkappa)} \mathbf{R}^*_\varkappa(\mathbf{u}_\varkappa - \mathbf{v}_\varkappa) + \\ &+ \sum_{(j)} \left\{\sum_{(\mu)} \mathbf{T}^*_{\mu,j}\mathbf{S}_{\mu,j}(l_{\mu,j}) - \sum_{(\nu)} \mathbf{T}^*_{j,\nu}\mathbf{S}_{j,\nu}\,(0)\right\}^* \mathbf{u}_j\,. \qquad (20)\end{aligned}$$

Die Stationäritätsbedingung $\delta\Pi_R = 0$ ist den für die gesamte Stabkonstruktion geltenden Gleichgewichts-, Kontinuitäts- und Randbedingungsgleichungen äquivalent (die Komponenten von $\mathbf{u}_{j,k}(l)$ können nach den für kleine Verschiebungen geltenden kinematischen Zusammenhängen in Funktion der Knotenpunktverschiebungsvektoren $\mathbf{u}_j$ und $\mathbf{u}_k$ angeschrieben werden).

Die in der Theorie der Stabkonstruktionen zugelassene Näherung anwendend sei jetzt für alle Stäbe $\mathbf{K}_{j,k}(l) = 0$ angenommen. In diesem Fall kann das zweite Glied an der rechten Seite der Gl. (20) bei beliebiger Größe $\delta\mathbf{u}_{j,k}$ nur dann eliminiert werden, wenn die Bedingung

$$\frac{d}{dl}\,\mathbf{S}_{j,k}(l) = 0 \qquad (21)$$

erfüllt ist. Der Zusammenhang (21) ist eine den Stab j, k betreffende Gleichgewichtsgleichung, das Analogon der Gl. (1) und drückt die Tatsache aus, daß ein aus dem Stabnetz herausgegriffenes Stabelement nur an seinen Endpunkten durch je eine Verbindungskraft beansprucht wird. Darum genügt es, z. B.

die Stabendkraft zu erfassen, und die Vereinfachung $\mathbf{S}_{j,k}(l_{j,k}) = \mathbf{S}_{j,k}$ einführend, schreibt sich

$$\mathbf{S}_{j,k}(0) = \mathbf{B}^*_{j,k}\mathbf{S}_{j,k}, \tag{22}$$

wobei $\mathbf{B}_{j,k}$ wie üblich definiert wird [2]. Durch Ausschließen von entlang des Stabes angreifenden äußeren Kräften kann derart in Gl. (20) das zweite Glied vernachlässigt werden und die übrigen Ausdrücke sind die Gl. (22) berücksichtigend umzuformen.

Von der ausführlichen Berechnung der gesamten komplementären Energie der einzelnen Stabelemente an dieser Stelle absehend, verweisen wir auf Abschnitt 2.46 des Werkes [2]. Den in der linearen Elastizitätslehre gültigen Zusammenhang

$$\Phi(\sigma_{ij}) = W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

mit berücksichtigend nimmt das erste Glied an der rechten Seite der Gl. (20) die Form

$$-\frac{1}{2}\sum_{(j,k)}\mathbf{S}^*_{j,k}\mathbf{F}_{j,k}\mathbf{S}_{j,k}$$

an, wobei $\mathbf{F}_{j,k}$ die Nachgiebigkeitsmatrix des Stabes ist. (Dazu sei erwähnt, daß $\mathbf{S}_{j,k}$ mit den entlang des Stabquerschnittes angreifenden eigentlichen Spannungen σ_{ij} nach der *Bernoulli—Navier*'schen Hypothese zusammenhängt). Schließlich wird auch das letzte Glied an der rechten Seite der Gl. (20) unter Berücksichtigung der Gl. (22) umgeformt:

$$\sum_{(j)}\left\{\sum_{(\mu)}\mathbf{T}^*_{\mu,j}\mathbf{S}_{\mu,j}(l_{\mu,j}) - \sum_{(\nu)}\mathbf{T}^*_{j,\nu}\mathbf{S}_{j,\nu}(0)\right\}^*\mathbf{u}_j =$$
$$= \sum_{(j)}\left\{\sum_{(\mu)}\mathbf{T}^*_{\mu,j}\mathbf{S}_{\mu,j} - \sum_{(\nu)}\mathbf{T}^*_{j,\nu}\mathbf{B}^*_{j,\nu}\mathbf{S}_{j,\nu}\right\}^*\mathbf{u}_j =$$
$$= \sum_{(j)}\left\{\sum_{(\mu)}\mathbf{S}^*_{\mu,j}\mathbf{T}_{\mu,j} - \sum_{(\nu)}\mathbf{S}^*_{j,\nu}\mathbf{B}_{j,\nu}\mathbf{T}_{j,\nu}\right\}\mathbf{u}_j,$$

wonach sich Π_R in der folgenden vereinfachten Form schreibt:

$$\Pi_R = -\frac{1}{2}\sum_{(j,k)}\mathbf{S}^*_{j,k}\mathbf{F}_{j,k}\mathbf{S}_{j,k} - \sum_{(\lambda)}\mathbf{Q}^*_\lambda\mathbf{u}_\lambda -$$
$$-\sum_{(\varkappa)}\mathbf{R}^*_\varkappa(\mathbf{u}_\varkappa - \mathbf{v}_\varkappa) + \sum_{(j)}\left\{\sum_{(\mu)}\mathbf{S}^*_{\mu,j}\mathbf{T}_{\mu,j} -\right.$$
$$\left. - \sum_{(\nu)}\mathbf{S}^*_{j,\nu}\mathbf{B}_{j,\nu}\mathbf{T}_{j,\nu}\right\}\mathbf{u}_j. \tag{23}$$

Dieser Ausdruck ist das für die ausschließlich an ihren Knotenpunkten belastete Stabkonstruktion linear elastischen Materials im Falle kleiner Verschiebungen geltende Energiepotential. Seine Stationäritätsbedingung ist der Erfüllung der Gleichungen (2), (4), (5) und (6) äquivalent.

Die rechte Seite des Zusammenhanges (23) kann in eine bekannte Form überführt werden, wenn man bei dei die Gesamtkonstruktion betreffenden Summierung die Vektoren $\mathbf{S}_{j,k}$ zu einem einzigen Vektor $\mathbf{S}$ und die Verschiebungen $\mathbf{u}_j$ zu einem einzigen Vektor $\mathbf{u}$ zusammenfaßt. Da nach der in Abschnitt 3 unter Punkt d) gemachten Annahme $\mathbf{u}_k$ und $\mathbf{u}_\lambda$ ein komplementäres System bilden, können anstatt von $\mathbf{Q}^*_\lambda$ und $\mathbf{R}^*_\varkappa$ die Vektoren $\mathbf{Q}^*$ und $\mathbf{R}^*$ eingeführt werden, die die Dimension $6m$ haben und deren Ergänzungselemente komplementärer Lage gleich Null sind. Schließlich sei anstatt der weiteren ausführlichen Untersuchung des letzten Gliedes von Gl. (23) auf die Abschnitte 2.1 und 2.2 des Werkes [2] verwiesen: mit Hilfe der dort eingeführten Matrix $\mathbf{G}_{j,k}$ läßt sich auch dieser — zweifache Summierung enthaltende — Ausdruck in kompakter Form anschreiben. Als Ergebnis erhält man

$$\Pi'_R = -\frac{1}{2}\mathbf{S}^*\mathbf{F}\mathbf{S} - \mathbf{Q}^*\mathbf{u} - \mathbf{R}^*(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathbf{S}^*\mathbf{G}\mathbf{u} \tag{24}$$

(mit der Umformung des Vektors $\mathbf{R}^*_\varkappa$ übereinstimmend wurde auch der nicht zu variierende Vektor $\mathbf{v}_\varkappa$ mit Nullelementen ergänzt). Durch ausführliche Entwicklung der Bedingung (8) (freie Variation der Elemente von $\mathbf{u}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{S}$) erhält man die aus der Theorie der Stabkonstruktionen gut bekannten Zusammenhänge:

$$\delta\Pi'_R\,|_{\mathbf{u}} \qquad -\mathbf{S}^*\mathbf{G} - \mathbf{Q}^* - \mathbf{R}^* = 0, \tag{25}$$

$$\delta\Pi'_R\,|_{\mathbf{R}^*} \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v} = 0, \tag{26}$$

$$\delta\Pi'_R\,|_{\mathbf{S}^*} \qquad -\mathbf{F}\mathbf{S} - \mathbf{G}\mathbf{u} = 0. \tag{27}$$

Der Zusammenhang (25) ist die statische Randbedingungsgleichung, die das Gleichgewicht der Knotenpunkte, darunter die an den Knotenpunkten vorgegebener Verschiebung erregten Reaktionen erfaßt (vgl. [2], 2.44), die Gl. (26) enthält die geometrische Randbedingung, schließlich die Gl. (27) die geometrische Kontinuitätsbedingung (für den Fall, daß die kinematische Belastung gleich Null ist).

4. Schlußfolgerungen

Bei der Darstellung der zwischen der energetischen Formulierung der Kontinuumaufgabe und der Theorie der Stabkonstruktionen bestehenden Beziehung beschränkten wir uns auf die Behandlung des einfachsten Falles. Ein ähnliches Verfahren ist auch für den Fall möglich, daß das Vorhandensein von (statischen oder kinematischen) Anfangseinflüssen nicht ausgeschlossen wird. Auf die für Stabkonstruktionen geltenden allgemeineren Zusammenhänge haben wir schon hingewiesen — im Falle von Kontinuumaufgabe ist auch eine beim Vorhandensein großer Formänderungen und Anfangsspannungen gültige Verallgemeinerung des Potentials (16) bekannt [4]. Erwähnenswert ist noch der Umstand, daß sich das Potential (16) auch für nichtlinear elastisches Kontinuum anwenden läßt.

Wie in Abschnitt 2 schon erwähnt, lassen sich einzelne Varianten des Potentials Π erhalten, wenn bei der Variation der Zustandsfelder einige Gleichungen des Grundgleichungssystems erfüllt werden. Wenn z. B. u_i der geometrischen Bedingung (5) genügt und ε_{ij} anstatt der freien Variation nach Gl. (2) vorgegeben wird, so wird bekanntlich Π_R auf den Ausdruck der gesamten potentiellen Energie vereinfacht. Falls σ_{ij} a priori der Gleichgewichtsbedingung (1) und der statischen Randbedingung (4) genügt, so erhält man das komplementäre Energieintegral. Die Anwendung dieser beiden Varianten ermöglicht im Falle von Kontinuumaufgaben die Einschränkung der exakten Lösung [5]. Bei der Formulierung der die Stabkonstruktion betreffenden analogen Zusammenhänge ergibt sich nur dadurch eine Abweichung, daß die Erfüllung der Gl. (1) — unter Ausschließen der den Massenkräften entsprechenden, entlang der Stäbe verteilten Belastung — nach (22) gesichert wird. Deswegen wird aus dem Ausdruck der potentiellen Energie nur die Gleichgewichts-Randbedingung erhalten.

Das Potential (24) wurde — unseren Zielsetzungen entsprechend — mit deduktivem Verfahren, durch Vereinfachung des allgemeinen Ausdruckes bestimmt. Es sei erwähnt, daß Π_R' im Falle sowohl der räumlichen Kontinuumaufgabe, als auch der Theorie der Stabkonstruktionen auch mit zeichnerischem Verfahren bestimmt werden kann. Mit dem Ausdruck der gesamten komplementären Energie können z. B. unter Anwendung des Lagrange'schen Multiplikationsverfahrens die die Gleichgewichtsbedingung ausdrückenden Gleichungen gekoppelt werden — der Multiplikator wird dann gerade dem Verschiebungsvektor gleich [4], [14].

SCHRIFTTUM

1. LURJE, A. I.: Teorija uprugosti, Nauka, 1971, Moskva
2. SZABÓ, J., ROLLER, B.: Rúdszerekezetek elmélete és számítása (Theorie und Berechnung der Stabkonstruktionen) Műszaki Kiadó, Budapest 1971
3. SZABÓ, J.: The Equation of State-change of Structures. *Periodica Politechnica*, **17** Budapest, (1973), No 1
4. WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1968
5. DE VEUBEKE, F.: Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis, Pergamon, 1964
6. ATLURI, S.—PIAN, T. H.: Theoretical Formulation of Finite Element Methods in Linear Elastic Analysis of General Shells, *Journal of Structural Mechanics*, **1** (1972)

7. REISSNER, E.: On Some Variational Theorems in Elasticity, SIAM, Philadelphia, 1961 (in Problems of Continuum Mechanics)
8. OLIVEIRA, A.: The Convergence Theorems and their Role in the Theory of Structures, IUTAM, High Speed Computing of Elastic Structures, Liège 1971
9. ÖDMAN, S.: Studies of Boundary Value Problems, Stockholm 1954
10. CRANDALL, S. H.: Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956
11. ODEN, J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972
12. LYNN, P. P.—ARYA, S. K.: Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation *Int. Jnl. for Num. Methods in Eng.* **6** (1973), No 1
13. SCHMID, G.: Die Methode der Finiten Elemente. *ZAMM*, **52** (1972), September
14. SANDER, G. Application of the Dual Analysis Principle, IUTAM, High Speed Computing of Elastic Structures, Liège 1971

Relations between the Theory of Bar Structures and the Continuum Problem. The well-known state-equation in the theory of bar structures can be regarded as stationarity condition of a functional of energetic type. The paper presents the chain of thought in detail for the case of the linear problem (formulated without considering initial strains and stresses).

О связи между теорией стержневых конструкций и континуумной задачей. Уравнение состояния, известное в теории стержневых конструкций, можно вывести в качестве стационарного уравнения условия. В работе детально показан ход мыслей для случая задачи линейной теории (сформулированной без учета начальных деформаций и напряжений).

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1–2), pp. 63–72 (1974)

THE ESTIMATION OF STRESSES DUE TO PRODUCTION INACCURACIES BY MEANS OF HIGHER ORDER MOMENTS

P. MICHELBERGER*

DR. OF TECHN. SCI.

and

A. KERESZTES**

[Manuscript received September 9, 1973]

In statically indeterminate structures any production inaccuracy may lead to considerable stresses, the estimation of which by the Tchebishev inequality is rather pessimistic. This is why the elaboration of far more accurate estimations has become necessary.

1. Introduction

Dimensional inaccuracies during production and assembly can generate considerable stresses in structures. Investigations to this end have been reported on in several papers [1], [2], involving gradual generalization of the structural and stress model.

So far information on the distribution function of these dimensional inaccuracies was always assumed. By measuring the production inaccuracies of a sufficient number of structures, their expected empirical value as well as covariance matrix and, in the form of the linear combination of the latter, the first and second empirical central moments of the stresses caused thereby could be determined. With all these known factors, conclusions may be drawn by Tchebishev inequality on the number of structures expected to be qualified as acceptable [2].

Exact analysis results verified that the Tchebishev inequality would lead to an estimation much more pessimistic than is the actual situation. For the sake of economic production any unnecessarily strict dimensional accuracy specification should be avoided. This is why an estimation far more precise than the *Tchebishev* inequality, taking into account several characteristics of the empirical distribution function, is needed.

* Prof. Dr. P. MICHELBERGER, Egri József u. 19, 1111 Budapest, Hungary
** A. KERESZTES, Dob u. 38, 1072 Budapest, Hungary

2. Production of higher- order empirical moments

Let us take measurements at k points of a total of N structures, and sum up the dimensional deviations from the specified values in the following matrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kN} \end{bmatrix} = [\overset{1}{\mathbf{a}} \dots \overset{j}{\mathbf{a}} \dots \overset{N}{\mathbf{a}}], \tag{1}$$

where a_{ij} indicates the dimensional difference measured at the i-th point of the j-th structure.

When treating the inaccuracies at the different points of the structure as probability variables, we obtain

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix}, \tag{2}$$

where ξ_i indicates the probability variable values representing the dimensional inaccuracies at the i-th structural points.

Thus ξ_i can be realized as

$$\xi_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{iN}] \tag{3}$$

that is, a linear vector of matrix $\mathbf{T}$.

On the basis of the relations derived in [2], the stress due to the inaccuracies at an s-coordinate point of the structure can be determined by equation

$$M(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \tag{4}$$

where

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \tag{5}$$

represents the dimensional inaccuracy values measured at point k of a given structure, that is, a column vector of matrix **T**, while

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(s) = [\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_k(s)], \tag{6}$$

is the linear vector transforming the dimensional inaccuracies into stress. Let us indicate by $\mu_j[M(s)]$ the j-th central moment of the stress generated in the s-coordinate point of the structure.

The expected empirical value of the stress has been determined in (2) on the basis of relation

$$\mu_1[M(s)] = \frac{1}{N}\mathbf{ATe} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \overset{n}{\mathbf{a}}\right) = \psi_1 \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \overset{n}{\mathbf{a}}\right) \tag{7}$$

where **e** is an additive vector consisting of units,
ψ_1 is the operator of the scalar multiplication,
and **a** indicates the n-th column vector of matrix **T**

Since the calculation is mainly interested in the behaviour of the measured red values around the expected value, a new probability variable should be introduced. So let us have

$$\eta_i = \xi_i - m_i \tag{8}$$

where the realizations of η_i are

$$\eta_i = [b_{i1}, \ldots, b_{ij}, \ldots, b_{iN}], \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{9}$$

and

$$b_{ij} = a_{ij} - m_i \tag{10}$$

while $E(\xi_i) = m_i$ is the expected value of ξ_i. In other words, the new element is generated by deducting from each element of the dimensional inaccuracy's matrix **T** the expected value corresponding to its own row.

Using these relations will give, as the second central moment of the stress:

$$\mu_2[M(s)] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\right)^2\right] = E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=2}^{k}\alpha_i\alpha_j\eta_i\eta_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j E(\eta_i\eta_j) = \psi_2\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_{in} \cdot b_{jn}\right] \tag{11}$$

$$i = 1, 2, \ldots, k$$

$$j = 1, 2, \ldots, k.$$

By making use of the dyadic multiplication, (11) may be rewritten in the form:

$$\mu_2[M(s)] = \psi_2\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\overset{n}{\mathbf{b}}\circ\overset{n}{\mathbf{b}}\right], \tag{12}$$

where ψ_2 is an operator multiplying the dyad with a row vector from the left side, and by a column vector from the right, i.e., which will thus produce a scalar;

n indicates the n-th column vector of matrix **T** which had been reduced to an expected

$\overset{n}{\mathbf{b}}$ value of zero.

Similarly, the empirical third central moment of the stress of the s-coordinate point will be

$$\mu_3[M(s)] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\right)^3\right] = E\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\alpha_i\alpha_j\alpha_l\eta_i\eta_j\eta_l\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\alpha_i\alpha_j\alpha_l E(\eta_i\eta_j\eta_l) = \psi_3\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}b_{in}b_{jn}b_{ln}\right], \tag{13}$$

$$i = 1, 2, \ldots, k$$
$$j = 1, 2, \ldots, k$$
$$l = 1, 2, \ldots, k$$

where

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}b_{in}b_{jn}b_{ln}$$

supplies the b_{ijl} element of a $k\times k\times k$ cubic matrix.

Taking into account all the co-ordinate values, a cubic matrix will be arrived at, in whose principal diagonal the third central moment of the components of

$$\vec{\eta} = \begin{bmatrix}\eta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \eta_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \eta_k\end{bmatrix} \tag{14}$$

probability vector variable is found, while the other elements indicate the numerical figures characteristic of the individual component dependencies.

Operator ψ_3 will transform this cubic matrix into a single numerical figure.

Depending on the $\psi_3(s)$ operator, the transformation is performed with a $\mu_3[M(s)]$ value characteristic of different s-co-ordinate points of the structure which then will be obtained.

Let us stipulate that the double dyadic multiplication **ab c** can be performed only in the following sequence: first the column vector **a** is multiplied by row vector **b**, then the matrix thus produced is multiplied dyadically by the row vector **c** normal to the plane involved. Thus (13) can be rewritten in the form

$$\mu_3[M(s)] = \psi_3\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \overset{n}{\mathbf{b}} \circ \overset{n}{\mathbf{b}} \circ \overset{n}{\mathbf{b}}\right). \tag{15}$$

Using (13) and (14) needs much calculation, therefore, it is best to employ the relation

$$\mu_3[M(s)] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i b_{in}\right)^3 \tag{16}$$

which, in turn, means the multiplication of the realizations of the probability variables reduced to an expected value of zero, before involution, by the transformation matrix related to co-ordinate s. In this case, however, any direct information on the moments and interdependence of the dimensional inaccuracies will be lost, and nothing but the central moments of the stress of the single s-co-ordinate point will be obtained.

Similarly to what has been said above, the fourth central moment of the stress at the point of co-ordinate s can be determined by means of the relation

$$\mu_4[M(s)] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i b_{in}\right)^4. \tag{17}$$

In the relations used for the determination of the moments the data set available has been assumed to be sufficiently large. In the case of an insufficient sample the well-known corrections must be used, whereby (12), (16) and (17) will be modified as follows:

$$\mu_2[M(s)] = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i b_{in}\right)^2 \tag{18}$$

$$\mu_3[M(s)] = \frac{N}{(N-1)(N-2)}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i b_{in}\right)^3, \tag{19}$$

$$\mu_4[M(s)] = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i b_{in}\right)^4. \tag{20}$$

3. Estimation methods using higher- order moments

So far we have determined the first four empirical central moments of the stress (load) on the η- or ξ- probability- vector variable, which means that of the s-co-ordinate point. This is how we shall attempt to obtain information on the empirical distribution of the load.

A. WALD [3] has elaborated the following estimation method by means of two optional absolute central moments:

$$P(| M(s) - \mu_1[M(s)] | < d) > a_d \tag{21}$$

where

$|M(s) - \mu_1[M(s)]|$ is the deviation of the load from the expected value,
d is an optional figure specified, whose unit value is identical to the load or stress, and
a_d is the lower limit of the probability of occurrences (21).

The investigation includes two possibilities:
(a) If

$$\frac{\overline{\mu}_r[\,| M(s) |\,]}{d^r} \leq \begin{cases} \dfrac{\overline{\mu}_q[\,| M(s) |\,]}{d^q}, \\ 1 \end{cases} \tag{22}$$

then

$$a_d = 1 - \frac{\overline{\mu}_r[\,| M(s) |\,]}{d^r}, \tag{23}$$

or else

$$a_d = 0 \tag{24}$$

where

$\overline{\mu}_r[| M(s) |]$ is the r-th absolute central moment,
$\overline{\mu}_q[| M(s) |]$ is the q-th absolute central moment,

and

$$q > r. \tag{25}$$

It should be noted here that if $r = 2$, then (23) is identical to the *Tchebishev* inequality.
(b) If

$$\frac{\overline{\mu}_r[\,| M(s) |\,]}{d^r} > \frac{\overline{\mu}_q[\,| M(s) |\,]}{d^q}, \tag{26}$$

then

$$a_d = 1 - \frac{\overline{\mu}_q[\,| M(s) |\,] - \overline{\mu}_r[\,| M(s) |\,]\delta_0^{q-r}}{d^r(d^{q-r} - \delta_0^{q-r})} \tag{27}$$

where d_0 is the positive root of equation

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}_r[\,| M(s) |\,]d^q - \overline{\mu}_q[\,| M(s) |\,]d^r + \delta^r(\overline{\mu}_q[\,| M(s) |\,] - d^q) + \\ &\quad + \delta^q(d^r - \overline{\mu}_r[\,| M(s) |\,]) = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

other than d.

If

$$P\{| M_{meg} | \geq | \mu_1[M(s)] | + d\} \geq a_d \tag{29}$$

then relations (23) and (27) supply the estimation of the number of expected acceptable units.

An estimation making use of an optional number of central moments has been elaborated by C. L. MALLOWS [4]. The method, using the first four central moments is as follows:
Let the values of the next central moments be

$$\{\mu_0[M(s)],\ \mu_1[M(s)],\ \mu_2[M(s)],\ \mu_3[M(s)],\ \mu_4[M(s)]\} = \\ = \{1, 0, 1, \mu_3[M(s)],\ \mu_4[M(s)]\}. \tag{30}$$

In this case, the precondition of estimation is

$$\Delta = \det \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu_3[M(s)] \\ 1 & \mu_3[M(s)] & \mu_4[M(s)] \end{vmatrix} = \mu_4[M(s)] - \mu_3^2[M(s)] - 1 \geq 0. \tag{31}$$

Now let us introduce the polynome

$$Q_0(\beta) = -\beta^2 + \mu_3[M(s)]\beta + 1 \tag{32}$$

where

$+\beta$ is the top limit of the confidence interval,
$-\beta$ is the lower limit thereof.

The roots of Eq. $Q_0(\beta) = 0$ are

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2}\,[\mu_3[M(s)] \pm \sqrt{\mu_3[M(s) + 4}]. \tag{33}$$

Let us introduce now the polynome

$$Q_\beta^*(z) = Q_0(\beta)z^2 - [\mu_3[M(s)]Q_0(\beta) + \beta\Delta]z - Q_0(\beta) - \Delta. \tag{34}$$

If the equation $Q_\beta^*(z) = 0$ is solved, then we obtain roots z_1, z_2. The estimation is performed intermittently.

a) If $\beta < \beta_1$

then

$$P(M(s) < \beta) \leq \frac{1 + z_1 z_2}{\beta^2 - \beta(z_1 + z_2) + z_1 z_2} = p(\beta). \tag{35}$$

b) If $\beta > \beta_2$

then

$$P(M(s) > \beta) < p(\beta) \tag{36}$$

which corresponds to inequality

$$P\big(M(s) < \beta\big) > 1 - p(\beta). \tag{37}$$

c) If $\beta_1 < \beta < \beta_2$
is true, then

$$\frac{1 + \beta z_2}{(z_1 - z_2)(z_1 - \beta)} \leq P\big(M(s) < \beta\big) < 1 - \frac{1 + \beta z_1}{(z_2 - z_1)(z_2 - \beta)}. \tag{38}$$

Since the expected zero value has been regarded as the precondition of estimation, from engineering or technical aspects we get

$$\pm \beta = M_{meg}. \tag{39}$$

4. Some aspects in selecting the method of estimation

(a) The method elaborated by A. WALD is, with respect to the amount of calculation, much simpler than the method offered by C. L. MALLOWS.

(b) If even moments are employed, then the central moments coincide with the central absolute moments, whereas in the case of odd moments they do not, so the WALD method is not sensitive to the inclination of the distribution function.

(c) By means of the *Wald* method the estimation is feasible only in a given interval, which is symmetric to the expected value. The *Mallows* method, on the other hand, is suitable for an estimation of any optional value assumed by the probability variable, whereby the limits of the estimation interval need not be symmetrical to the expected value.

5. Numerical examples

Assuming a normal probability distribution of unit scatter according to [2], and selecting

$$\pm 3\sqrt{\mu_2[M(s)]}$$

confidence interval limits, the probability of the acceptable items will be (as it was in our case):

$$P\big(|\, M(s) - \mu_1[M(s)] \,| < 3\sqrt{\mu_2[M(s)]}\big) \geq 0{,}888.$$

Now let us see the results we obtain by the estimation methods described above, at the same confidence interval, and again assuming a normal distribution:

$$\mu_1[M(s)] = 0,$$
$$\mu_2[M(s)] = 1,$$
$$\mu_3[M(s)] = 0, \quad \bar{\mu}_3[|\, M(s) \,|] = 1{,}590.$$
$$\mu_4[M(s)] = 3,$$

The results in a tabulated form are:

Estimation method	Estimated probability	
Tchebishev	0 888	
A. Wald	0 9877	if μ_2 and μ_4 are taken into account
	0 971	if μ_2 and $\bar{\mu}_3$ are reckoned with
C. L. Mallows	0 9752	
Theoretical	0 997	

This Table reveals a considerable improvement of the estimations as compared to the Tchebishev figures.

In the example let us select an asymmetric density function, thus let us have

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < -\sqrt{2} \\ 2(x+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} & \text{ha } -\sqrt{2} \leq x < \infty \end{cases}$$

and then we shall get

$$\mu_1[M(s)] = 0,$$
$$\mu_2[M(s)] = 1,$$
$$\mu_3[M(s)] = \sqrt{2},$$
$$\mu_4[M(s)] = 6.$$

The confidence interval limits are: $\pm 3\sqrt{\mu_2[M(s)]}$, whereas the results, again in a tabulated form:

Estimation method	Estimated probability	
Tchebishev	0 8888	
A. Wald	0 9275	with μ_2 and μ_4 taken into account
C. L. Mallows	0 9325	
Theoretical	0 9855	

6. Conclusions

(a) Because of the pessimistic estimation of the *Tchebishev* inequality, structure production permits only a narrow tolerance range which, in turn, leads to a considerable production cost increase.

(b) Using higher-order moments supplies far more accurate estimations on the acceptability of the structural elements, whereby less strict production specifications will be required with, however, the same waste percentage permitted.

(c) The numerical exampled offered by the present paper confirm that in the case of symmetrical distribution functions the *Wald* method, whereas for asymmetric distributions the *Mallows* method supplies more accurate estimations.

REFERENCES

1. MICHELBERGER, P.: Calculation of Assembly Stresses Due to the Inaccurate Production of Vehicle Structures — *Műszaki Tudomány* **45** (1972), 331—342 (in Hungarian)
2. MICHELBERGER, P.: The Effect of Production and Assembly Inaccuracies on Bar Structure Stresses — *Acta Techn. Hung.* under press, (in Hungarian)
3. A. WALD: A Generalization of Markoff's Inequality — *Annals of Mathematical Statistics* (1938), 244
4. C. L. MALLOWS: Generalization of Tchebycheff's Inequalities — *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B (1956), 139—167

Schätzung der aus Fertigungsungenauigkeiten herrührenden Beanspruchungen mit Hilfe von höheren Momenten. Bei den statisch unbestimmten Konstruktionen können, infolge von Fertigungsungenauigkeiten, hohe Beanspruchungen entstehen, deren Schätzung mit Hilfe der Tschebischewschen Ungleichheit allzu pessimistisch ausfällt, weshalb genauere Schätzungen ausgearbeitet werden müssen.

Оценка нагрузок от неточностей производства при высоких моментах. В случае статически неопределенных конструкций возникают вследствие неточностей производства значительные нагрузки. Оценка их с помощью неравенства Чебышева является довольно пессимистической. Вследствие сказанного выше необходимо разработать более точные методы оценки.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 73—91 (1974)

REGULAR POLYGON BASED PARABOLOID SHELLS OF REVOLUTION, HAVING A CIRCULAR SKYLIGHT OPENING

P. CSONKA*

DOCTOR OF. TECHN. SCI.

[Manuscript received 9 October, 1973]

Paper presents on the bases of the usual assumptions of the membrane theory an appropriate method for the determination of the state of stresses in the shells mentioned in the title. It is assumed that the skylight opening of the shell is bordered by an edge ring which exerts no resistance on horizontally planed bending moments and the arches supporting the outer edge of the shell do not resist lateral forces. The presented solution is of approximate character: the conditions relating to the edge ring of the skylight opening are exactly satisfied, but those referring to the edge arches are only approximately so. The application of the given formulae is explained by a numerical example, a circumstance which at the same time testifies the suitability of the expounded method.

1. Introduction

Present paper deals with the calculation of paraboloid shells of revolution based on a k-sided regular polygon, having a circular skylight opening in the centre (Fig. 1). The outer edge of the investigated shells is supported by vertically planed edge arches and the edge of the skylight opening is bordered by an edge ring. As loads, circular symmetrically distributed forces acting in vertical direction, are taken into consideration.

A similar problem, namely, that of a paraboloid shell of revolution over an equisided triangle base, having a circular skylight opening, was treated in a previous paper by the author [1]. The solution given there was elaborated

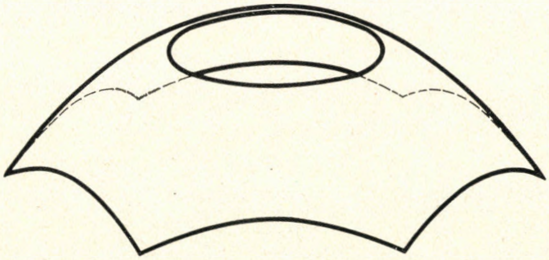


Fig. 1. Paraboloid shell of revolution, regular polygonal in projected shape, with a centrally situated circular skylight opening

* Prof. Dr. P. Csonka, Bartók B. út 31, 1114 Budapest, Hungary

for shells, the edge ring of which was able to resist all kinds of forces acting on them. Contrarily to the ideas evolved in the previous paper, the present one treats the case where the edge ring exerts no resistance to horizontal bending moments. As to the arches supporting the outer edge of the shell, present paper, similarly to paper [1], also assumes that they do not resist lateral forces, but this latter condition is only approximately fulfilled here, similar to the case treated in paper [1].

2. Basic concepts

The investigations should be undertaken in the orthogonal system of co-ordinates $O(x, y, z)$, or in the cylindrical system of co-ordinates $O(r, \varphi, z)$. The origin O of both systems coincides with the apex of the paraboloid, the axis z with its axis; the positive branche of axis z points downwards. Plane $y = 0$, respectively $\varphi = 0$ halves one of the sides of the shell's base polygon. The radius of the circle circumscribed around the base polygon is marked by R, the one of the inscribed circle by a, the radius of the circular skylight opening is indicated as r_0.

The geometrical shape of the middle surface of the shell is characterised by the equation

$$z = \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) = \frac{ha^2}{R^2}(\xi^2 + \eta^2), \tag{1}$$

or by the formula

$$z = \frac{h}{R^2} r^2 = \frac{ha^2}{R^2} \varrho^2 \tag{2}$$

where

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{a}, \qquad \varrho = \frac{r}{a}.$$

The specific value of the load related to unit area of the ground-plan will be expressed as

$$\bar{p} = \sum_{i=0}^{j} \bar{p}_i \varrho^i. \tag{3}$$

In this formula the dimension of the coefficients $\bar{p}_i$ is force/length^2. The specific value of forces (dead-weight + loads), to which the edge ring is submitted, is considered to be constant and marked by G_0. Its dimension is force/length.

In order to describe the state of stresses of the shell, a stress function, having the same symmetry properties as the shell itself, is introduced, from which the reduced stress resultants are obtained by formulae

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$\bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \tag{4a, b, c}$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

or by

$$\bar{N}_r = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right),$$

$$\bar{N}_{r\varphi} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \tag{5a, b, c}$$

$$\bar{N}_\varphi = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Function F has to satisfy Pucher's differential equation [2, 3]. For the case of paraboloid shells of revolution this equation takes the form

$$\frac{2h}{R^2} \Delta F + \bar{p} = 0, \tag{6}$$

where

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right). \tag{7}$$

3. Edge conditions

Stress function F, after satisfying the governing differential equation, has also to fulfil the prevailing edge conditions of the problem which express the rigidity and supporting conditions of the edge arches.

3.1. *First edge condition*

The edge ring of the shell is subjected to various forces: to its own weight, the loads burdening it and to the forces exerted on it by the shell itself. These forces have to form a system at equilibrium. Since all these forces possess the same symmetry conditions as the shell itself, the conditions of equilibrium for moments and horizontal force components are a priori fulfilled. Thus, there only remains as exigency of equilibrium that the condition relating to the vertical force components

$$\Sigma Z = 0 \tag{8}$$

should be satisfied.

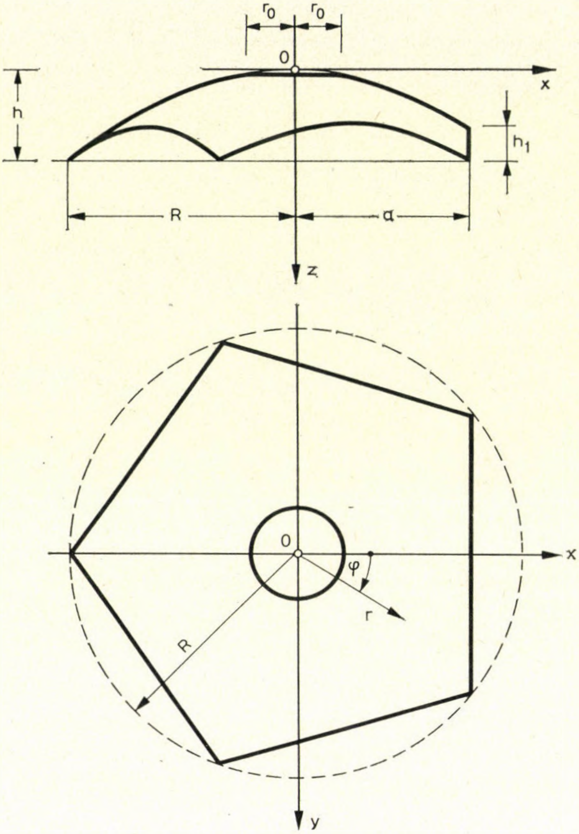


Fig. 2. Paraboloid shell of revolution, regular polygonal in projected shape, with a centrally situated circular skylight opening

3.2. *Second edge condition*

According to the previous requirements, the edge ring of the skylight-opening is unable to withstand horizontally planed bending moments. Consequently, no horizontally planed bending moments can arise at the cross-sections of the edge ring. This edge condition can be expressed by the formula

$$M_z = 0. \tag{9}$$

3.3. *Third edge condition*

It was assumed that the vertically planed edge arches, supporting the outer edge of the shell, were not resistant to lateral forces. This requirement may be considered as approximately fulfilled if the lateral forces, exerted by the shell upon the edge arches, are insignificant. For the edge arch $\xi = 1$, this condition can be expressed by the following equation:*

$$[\overline{N}_x]_{\xi=1} \simeq 0. \tag{10}$$

If this equation is satisfied, then, considering the existing polygonal symmetry, similar conditions referring to the other edge arches, will a priori, be automatically fulfilled as well.

4. Solution of the problem

The stress function of the problem to be solved will be set up from three function parts:

$$F = F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}} + F^{\mathrm{III}}. \tag{11}$$

The symbols of the stress resultants corresponding to these three function parts will be supplied with superscripts I, II, III in order to distinguish them from those without subscripts corresponding to function F. For instance, the symbols of the radially directed stress resultants, corresponding to functions F^{I}, F^{II}, F^{III}, will be marked by $\overline{N}_r^{\mathrm{I}}$, $\overline{N}_r^{\mathrm{II}}$, $\overline{N}_r^{\mathrm{III}}$. Obviously,

$$\overline{N}_r = \overline{N}_r^{\mathrm{I}} + \overline{N}_r^{\mathrm{II}} + \overline{N}_r^{\mathrm{III}},$$

and similar equations are also valid for the other stress resultants.

4.1. *Function* F^{I}

As function F^{I} the expression

$$F^{\mathrm{I}} = -\frac{R^2a^2}{2h}\sum_{i=0}^{j}\frac{\overline{p}_i}{(i+2)^2}\varrho^{i+2} = -\frac{R^2a^2}{2h}\sum_{i=0}^{j}\frac{\overline{p}_i}{(i+2)^2}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{i+2}{2}} \tag{12}$$

satisfying the inhomogeneous differential equation will be chosen.

The radius-and arch-directed stress resultants can be determined with the aid of formulae (5)

$$\begin{aligned}
\overline{N}_r^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{a^2\varrho}\cdot\frac{\partial F^{\mathrm{I}}}{\partial\varrho} = -\frac{R^2}{2h}\sum_{i=0}^{j}\frac{\overline{p}_i}{i+2}\varrho^i,\\
\overline{N}_{r\varphi}^{\mathrm{I}} &= 0,\\
\overline{N}_\varphi^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2} = -\frac{R^2}{2h}\sum_{i=0}^{j}\frac{i+1}{i+2}\overline{p}_i\varrho^i,
\end{aligned} \tag{13a, b, c}$$

* In case of $k = 4$ this condition can only be fulfilled in edge points not lying in the immediate vicinity of the corner points. If we want condition (10) to be satisfied there too, we have to apply a method of calculation differing from the one to be expounded below, namely, the method usually applied for calculating paraboloid shells with a quadrangular base.

and the x, y directed ones can be calculated according to formulae (4):

$$\bar{N}_x^{\mathrm{I}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^{j} \frac{\bar{p}_i}{i+2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i-2}{2}} (\xi^2 + \eta^2 + 2i\eta^2),$$

$$\bar{N}_{xy}^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = \frac{R^2}{2h} \xi\eta \sum_{i=0}^{j} \frac{i\bar{p}_i}{i+2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i-2}{2}}, \tag{14a, b, c}$$

$$\bar{N}_y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^{j} \frac{\bar{p}_i}{i+2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i-2}{2}} (\xi^2 + 2i\xi^2).$$

4.2. *Function* F^{II}

As function F^{II} the potential function

$$F^{\mathrm{II}} = C_0 \ln \varrho^2 = C_0 \ln (\xi^2 + \eta^2) \tag{15}$$

satisfying the homogeneous differential equation will be introduced. The quantity C_0 figuring in this formula will be treated, for the moment, as an indetermined constant; its dimension is: force$\times$length.

The radius-and arch-directed stress resultants can be calculated in the same way as above

$$\bar{N}_r^{\mathrm{II}} = \frac{1}{a^2 \varrho} \cdot \frac{\partial F^{\mathrm{II}}}{\partial \varrho} = \frac{2C_0}{a^2 \varrho^2},$$

$$\bar{N}_{r\varphi}^{\mathrm{II}} = 0, \tag{16a, b, c}$$

$$\bar{N}_\varphi^{\mathrm{II}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} = -\frac{2C_0}{a^2 \varrho^2},$$

and the same refers to the x, y directed stress resultants too:

$$\bar{N}_x^{\mathrm{II}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{\mathrm{II}}}{\partial \eta^2} = +\frac{2C_0}{a^2} \cdot \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$

$$\bar{N}_{xy}^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{\mathrm{II}}}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = +\frac{4C_0}{a^2} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \tag{17a, b, c}$$

$$\bar{N}_y^{\mathrm{II}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{\mathrm{II}}}{\partial \xi^2} = -\frac{2C_0}{a^2} \cdot \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.$$

The first edge condition. By appropriately selecting the value of the indetermined coefficient C_0, it may be achieved that the total $F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}}$ satisfies the first edge condition, given by formula (8). In this case this requirement can be expressed by equation

$$(\bar{N}_r^{\mathrm{I}} + \bar{N}_r^{\mathrm{II}}) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} + G_0 = 0.$$

Since, according to the formulae (13a) and (16a), at place $\varrho = \varrho_0$ the relations

$$\bar{N}_r^{\mathrm{I}} = -\frac{R^2}{2h}\sum_{i=0}^{j}\frac{\bar{p}_i\varrho_0^i}{i+2},$$

$$\bar{N}_r^{\mathrm{II}} = \frac{2C_0}{a^2\varrho_0^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{2ha\varrho_0}{R^2},$$

are valid, the mentioned condition will be fulfilled if the following equation holds:

$$\left(\frac{2C_0}{a^2\varrho_0^2} - \frac{R^2}{2h}\sum_{i=0}^{j}\frac{\bar{p}_i\varrho_0^i}{i+2}\right)\frac{2ha\varrho_0}{R^2} + G_0 = 0\,.$$

Thus, for coefficient C_0 — indetermined up till now — the following value is obtained:

$$C_0 = \frac{R^2a^2}{4h}\left(-\frac{G_0\varrho_0}{a} + \sum_{i=0}^{j}\frac{\bar{p}_i\varrho_0^{i+2}}{i+2}\right), \tag{18}$$

and so

$$F^{\mathrm{II}} = \frac{R^2a^2}{4h}\left(-\frac{G_0\varrho_0}{a} + \sum_{i=0}^{j}\frac{\bar{p}_i\varrho_0^{i+2}}{i+2}\right)\ln\varrho^2 =$$

$$= \frac{R^2a^2}{4h}\left[-\frac{G_0}{a}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j}\frac{\bar{p}_i(\xi^2+\eta^2)^i}{i+2}\ln(\xi^2+\eta^2)\right]. \tag{19}$$

The second edge condition. The stress resultants corresponding to functions F^{I} and F^{II} have circular symmetrical shapes. Thus, the stress resultants $\bar{N}_r^{\mathrm{I}}$ and $\bar{N}_r^{\mathrm{II}}$, to which the edge ring of the skylight-opening — a planar structure — is subjected, are uniformly distributed along the edge ring. Under the influence of these forces arch-directed inner forces (hoop-forces) arise at the cross-sections of the edge ring (Fig. 3). For reasons of equilibrium the value of the hoop force is

$$P^{\mathrm{I}} + P^{\mathrm{II}} = (\bar{N}_r^{\mathrm{I}} + \bar{N}_r^{\mathrm{II}})a\varrho_0\,.$$

Since the equilibrium of the outer and inner forces, to which the planar edge ring is subjected, can be assured even without horizontally-planed bending moments, so the total $F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}}$ also satisfies the second edge condition expressed by formula (9).

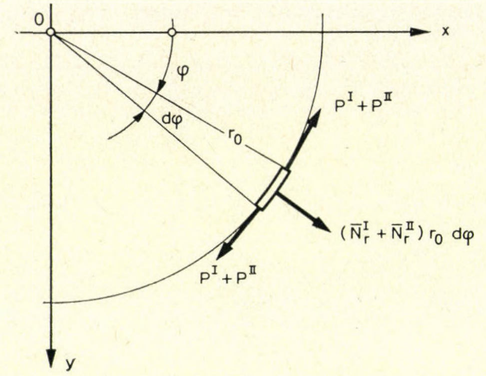


Fig. 3. An elemental part of the edge ring, and the inner and outer forces, which it is subjected to

4.3. *Third edge condition*

As function F^{III} the potential function

$$F^{III} = \sum_{m=1}^{n} C_{mk}(\varrho^{mk} - \varrho_0^{2mk}\varrho^{-mk}) \cos m k\varphi = \tag{20}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} C_{mk}\left[1 - \frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2+\eta^2)^{mk}}\right] \cdot \left[\xi^{mk} - \binom{mk}{2}\xi^{mk-2}\eta^2 + \binom{mk}{4}\xi^{mk-4}\eta^4 - + \ldots\right]$$

will be selected which, as such, satisfies the homogeneous differential equation The quantities C_{mk} figuring in this formula are for the moment indetermined constants; their dimension is: force$\times$length.

The radius-and arch-directed stress resultants can be calculated with the aid of formulae (5):

$$\bar{N}_r^{III} = -\frac{1}{a^2}\sum_{m=1}^{n} C_{mk}\left[(m^2k^2 - mk)\varrho^{mk-2} - (m^2k^2 + mk)\varrho_0^{2mk}\varrho^{-mk-2}\right] \cos m k\varphi\,,$$

$$\bar{N}_{r\varphi}^{III} = +\frac{1}{a^2}\sum_{m=1}^{n} C_{mk}\left[(m^2k^2 - mk)\varrho^{mk-2} + (m^2k^2 + mk)\varrho_0^{2mk}\varrho^{-mk-2}\right] \sin m k\varphi\,,$$

$$\bar{N}_{\varphi}^{III} = +\frac{1}{a^2}\sum_{m=1}^{n} C_{mk}\left[(m^2k^2 - mk)\varrho^{mk-2} - (m^2k^2 + mk)\varrho_0^{2mk}\varrho^{-mk-2}\right] \cos m k\varphi\,.$$

(21a, b, c)

The x, y directed stress resultants can also be expressed by simple formulae.

According to formula (4a) the value of the stress resultant $\bar{N}_x^{\mathrm{III}}$ is:

$$\bar{N}_x^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{a^2}\sum_{m=k}^{n} C_{mk}\Big\{(m^2k^2 - mk)\times$$

$$\times\left[\xi^{mk-2} - \binom{mk-2}{2}\xi^{mk-4}\eta^2 + \binom{mk-2}{4}\xi^{mk-6}\eta^4 - + \dots\right] -$$

$$-(m^2k^2 + mk)\frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2+\eta^2)^{mk}}\times$$

$$\times\left[\xi^{mk+2} - \binom{mk+2}{2}\xi^{mk}\eta^2 + \binom{mk+2}{4}\xi^{mk-2}\eta^4 - + \dots\right]\Big\}. \tag{22a}$$

The value of the stress resultant $\bar{N}_{xy}^{\mathrm{III}}$ is given by formula (4b)

$$\bar{N}_{xy}^{\mathrm{III}} = +\frac{1}{a^2}\sum_{m=1}^{n} C_{mk}\,\xi\eta\left\{(m^2k^2 - mk)\times\right.$$

$$\times\left[\binom{mk-2}{1}\xi^{mk-4} - \binom{mk-2}{3}\xi^{mk-6}\eta^2 + \binom{mk-2}{5}\xi^{mk-8}\eta^4 - + \dots\right] +$$

$$+(m^2k^2 + mk)\frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2+\eta^2)^{mk}}\times$$

$$\left.\times\left[\binom{mk+2}{1}\xi^{mk} - \binom{mk+2}{3}\xi^{mk-2}\eta^2 + \binom{mk+2}{5}\xi^{mk-4}\eta^4 - + \dots\right]\right\} \tag{22b}$$

and that of $\bar{N}_y^{\mathrm{III}}$ by formula (4c):

$$\bar{N}_y^{\mathrm{III}} = +\frac{1}{a^2}\sum_{m=1}^{n} C_{mk}\left\{(m^2k^2 - mk)\times\right.$$

$$\times\left[\xi^{mk-2} - \binom{mk-2}{2}\xi^{mk-4}\eta^2 + \binom{mk-2}{4}\xi^{mk-6}\eta^4 + - \dots\right] -$$

$$-(m^2k^2 + mk)\frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2+\eta^2)^{mk}}\times$$

$$\left.\times\left[\xi^{mk+2} - \binom{mk+2}{2}\xi^{mk}\eta^2 + \binom{mk+2}{4}\xi^{mk-2}\eta^4 - + \dots\right]\right\}. \tag{22c}$$

The first edge condition. Expression F^{III} is of trigonometrical build-up, so it satisfied a priori the first edge condition, expressed by formula (8). Since under 4.2 the same has been proved for the expression $F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}}$, it is obvious, that the sum of both expressions, that is, the function

$$F = F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}} + F^{\mathrm{III}}$$

satisfies the first edge condition as well.

The second edge condition. Under (4.2) it has been proved, that the total $F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}}$ corresponds to the second edge condition, expressed by formula (9). Now the same will be proved for function F^{III} as well.

As a first step, let us investigate an elementary part of the planar edge ring, limited by the cross-sections φ and $\varphi + d\varphi$. This elementary part is subjected to inner and outer forces as shown in Fig. 4. Of these forces the stress resultants $\overline{N}_r$ and $\overline{N}_{r\varphi}$ can be calculated with the aid of formulae (21), substituting in place of ϱ the value ϱ_0:

$$\overline{N}_r = \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^{n} C_{mk} mk \varrho_0^{mk-2} \cos mk\varphi , \tag{23}$$

$$\overline{N}_{r\varphi} = \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^{n} C_{mk} m^2 k^2 \varrho_0^{mk-2} \sin mk\varphi . \tag{24}$$

Thus, $\overline{N}_r$ and $\overline{N}_{r\varphi}$ can be considered as known.

Finally, let us investigate the state of equilibrium of the elementary part in question, to determine whether or not the equilibrium between the inner and outer forces can likewise be attained with the aid of forces shown in Fig. 4, that is, without activating any bending moments at the cross-sections. For this purpose let us put down the condition of equilibrium for both, the radius-directed and arch- directed stress components:

$$\overline{N}_r^{\mathrm{III}} r_0 \mathrm{d}\varphi - P^{\mathrm{III}} \mathrm{d}\varphi = 0 , \tag{25}$$

$$\overline{N}_r^{\mathrm{III}} r_0 \mathrm{d}\varphi + \frac{\mathrm{d}P^{\mathrm{III}}}{\mathrm{d}\varphi} \mathrm{d}\varphi = 0 . \tag{26}$$

Substituting value $\overline{N}_r^{\mathrm{III}}$ given under (23) into equation (25) and solving the so obtained equation for P^{III}, we shall find — taking into consideration the relation $r_0 = a\varrho_0$ — that in case of equilibrium the following equation also holds:

$$P^{\mathrm{III}} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{n} C_{mk} mk \varrho_0^{mk-1} \cos m\, k\varphi . \tag{27}$$

If after this we introduce the equations (24), (27) into equation (26) and perform the substitution $r_0 = a\varrho_0$, we may ascertain that, in the case (25) is satisfied, the same also holds for equation (26). This circumstance, as well as the fact, that the condition concerning the equilibrium for moments are fulfilled, justifies that the equilibrium of inner and outer forces is assured even without force couples to be activated upon the cross-sections. Thus, function F^{III} corresponds to the second edge condition, given under (9). Since the same has also been proved under 4.2 for the total $F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}}$, it is obvious that the function $F = F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}} + F^{\mathrm{III}}$ itself satisfies the second edge condition.

The third edge condition. Now there only remains to assure the third edge condition given under (10), i.e., the demand that direct force $\overline{N}_x$ should satisfy the requirement

$$\overline{N}_x^{\mathrm{I}} + \overline{N}_x^{\mathrm{II}} + \overline{N}_x^{\mathrm{IIII}} = 0 \tag{28}$$

along the edge line $\xi = 1$. For the case $k = 4$ this requirement can only be fulfilled in places not lying in the close vicinity of the corner points. Values $\overline{N}_x^{\mathrm{I}}$, $\overline{N}_x^{\mathrm{II}}$, $\overline{N}_x^{\mathrm{III}}$ figuring in equation (28) can be calculated according to formulae (14a), (17a), (22a):

$$\overline{N}_x^{\mathrm{I}} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^{j} \frac{\overline{p}_i}{i+2} (1+\eta^2)^{\frac{i+2}{2}} (1+\eta^2+2i\eta^2),$$

$$\overline{N}_x^{\mathrm{II}} = \frac{2C_0}{a^2} \cdot \frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}, \tag{29a, b, c}$$

$$\overline{N}_x^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{n} C_{mk} \left\{ (m^2k^2 - mk) \left[1 - \binom{mk-2}{2} \eta^2 + \binom{mk-2}{4} \eta^4 - + \ldots \right] - \right.$$
$$\left. - (m^2k^2 + mk) \frac{\varrho_0^{2mk}}{(1+\eta^2)^{mk}} \left[1 - \binom{mk+2}{2} \eta^2 + \binom{mk+2}{4} \eta^4 - + \ldots \right] \right\}.$$

The fulfilment of condition (10) can be arrived at by appropriate selection of coefficients $C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}$ figuring in formula (29c). This can be attained in different ways, among others, for example, by a simple collocation. To carry this out, the condition

$$\overline{N}_x^{\mathrm{I}} + \overline{N}_x^{\mathrm{II}} + \overline{N}_x^{\mathrm{III}} = 0$$

is to be set up for appropriately selected n points of the edge line $\xi = 1$. Proceeding in this way, a system consisting of n linear equations containing n unknowns will be obtained which has to be solved for the unknown coefficients $C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}$. Another method for the determination of coefficients $C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}$ is to prescribe that the integral of values $|\overline{N}_x|$ or $\overline{N}_x^2$ should be minimal. In cases when the outer edge line of the basic polygon is an equilateral triangle, it is expedient to set up that the highest absolute value of $\bar{N}_x$ should be minimal.

Note. In practical cases, the radius r_0 of the skylight opening is small in comparison to the radius a of the circle inscribed into the basic polygon, not being more than its 0,3 - fold. Under such conditions the circumstance whether or not the edge ring of the skylight opening has any bending resistance, has hardly any influence on the state of stresses of the shell. This, however, is not valid for the immediate vicinity of the edge ring. Here the state of stresses is greatly influenced by the fact whether the edge ring possesses any bending resistance or not.

5. Checking of results

The method of calculation expounded above is only approximative. For this reason, in order to check the reliability of the results, it is expedient to determine the values $\bar{N}_x$ at different points of the edge line $\xi = 1$ and compare them to the values $\bar{N}_y$ acting at the same places. The applied method may be considered as appropriate if the quotient

$$q = \left| \frac{\bar{N}_x}{\bar{N}_y} \right| \tag{30}$$

is small as compared to the unit.

Additional data are obtained for checking the results by comparing the known exact values to the approximate ones obtained by the method suggested here. Such a comparison is possible concerning the stress resultants $\bar{N}_y$ along the edge line $\xi = 1$, further for the stress resultants $\bar{N}_x$, $\bar{N}_{xy}$ and $\bar{N}_y$ at the corner points of the shell [4]. The exact value of stress resultant $\bar{N}_y$ acting

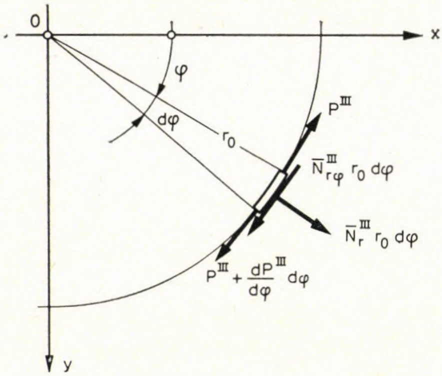


Fig. 4. An elemental part of the edge ring and the inner and outer forces, which it is subjected to

along the edge line $\xi = 1$ is namely known, it is

$$\bar{N}_y = -\frac{2a^2}{h}\bar{p}, \tag{31}$$

and the exact values of $\bar{N}_x$, $\bar{N}_{xy}$, $\bar{N}_y$ at the corner points are:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= 0, \\ \bar{N}_{xy} &= -\frac{\sqrt{3}a^2}{h}\bar{p}, \\ \bar{N}_y &= -\frac{2a^2}{h}\bar{p}. \end{aligned} \tag{32}$$

As can be seen, the radius of the skylight opening does not figure in formulae (31) and (32). This circumstance shows that the stress resultants figuring in these formulae are independent of the radius of the skylight opening. This means that the fact whether there is a skylight opening in the shell or not, and if there is, whether its edge ring resists bending moments or not, is of no influence whatsoever on the state of stresses of the shell.

6. Numerical example

Let us apply the method of calculation explained above to the paraboloid shell of revolution with vertical axis, equilateral triangular in projected shape, having a circular skylight opening (Fig. 5). The shell should be subjected to a force system acting in the vertical direction, uniformly distributed over the ground-plan projection. Its intensity should be

$$\bar{p} = \bar{p}_0 = 300 \text{ kp/m}^2,$$

and the dead weight of the edge ring should have the value

$$G_0 = 150 \text{ kp/m}.$$

Since in the present case the shell is triangular in projected shape, there is

$$k = 3.$$

Dimensional data of the shell are

$$a = 10{,}0 \text{ m}, \; R = 20{,}0 \text{ m}, \; r_0 = 3 \text{ m}, \; h = 8{,}0 \text{ m},$$

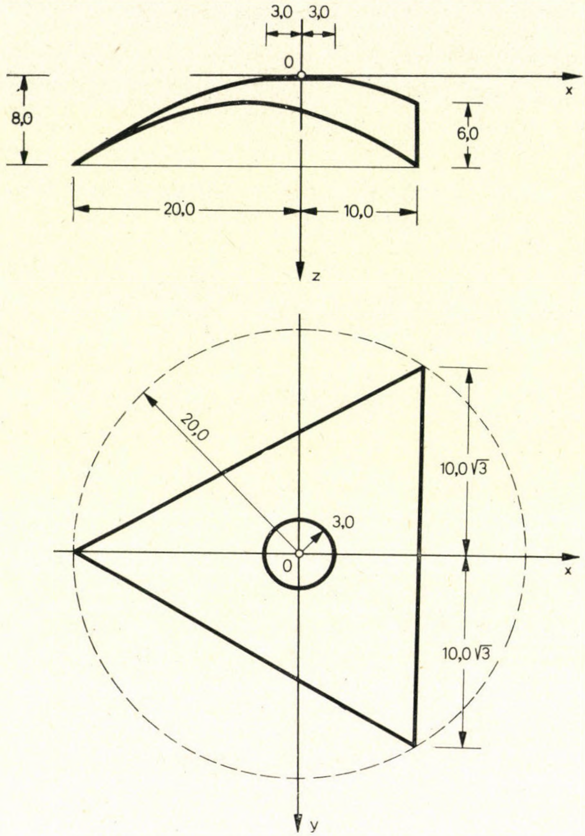


Fig. 5. Paraboloid shell of revolution, equilateral triangular in projected shape, with centrally situated circular skylight opening

so that for the shell to be investigated the quotient ϱ_0 has the value

$$\varrho_0 = \frac{r_0}{a} = 0,3$$

which is just the extreme case occurring in practice. Since in the present case the shell is subjected to a uniformly distributed force system, it is:

$$\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = \ldots = \overline{p}_j = 0\,.$$

First of all the value C_0 must be determined with the aid of formula (18)

$$C_0 = \frac{20{,}0^2 \cdot 10{,}0^2}{4 \cdot 8{,}0}\left(-\frac{150, \cdot 0{,}3}{10{,}0} + \frac{300.0{,}3^2}{2}\right) = 11\ 250\ \text{kp/m}\,. \tag{33}$$

The next step is to determine the three parts of $\overline{N}_x$, that is the values $\overline{N}_x^{\mathrm{I}}$, $\overline{N}_x^{\mathrm{II}}$ and $\overline{N}_x^{\mathrm{III}}$ along the edge line $\xi = 1$. According to formula (29a)

$$\overline{N}_x^{\mathrm{I}} = -\frac{20{,}0^2}{2 \cdot 8{,}0} \cdot \frac{300}{2}(1+\eta^2)^{-1} \cdot (1+\eta^2) = -3750 \text{ kp/m}, \tag{34a}$$

and to formula (29b)

$$\overline{N}_x^{\mathrm{II}} = \frac{2 \cdot 11\,250}{10{,}0^2} \cdot \frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2} = 225\,\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}\,. \tag{34b}$$

When determining $\overline{N}_x^{\mathrm{III}}$ for the sake of simplification, only the members $m = 1$ and $m = 2$ will be considered, and so

$$\begin{aligned}\overline{N}_x^{\mathrm{III}} &= -\frac{1}{10{,}0^2}\left\{C_3\left[(3^2-3)\cdot 1-(3^2+3)\frac{0{,}3^6}{(1+\eta^2)^3}(1-10\eta^2+5\eta^4)\right]+\right.\\ &\left.+C_6\left[(6^2-6)(1-6\eta^2+\eta^4)-(6^2+6)\frac{0{,}3^{12}}{(1+\eta^2)^6}(1-28\eta^2+70\eta^4-28\eta^6+\eta^8)\right]\right\}=\\ &=\left[-0{,}06+0{,}000\,087\;48\,\frac{1+10\eta^2+5\eta^4}{(1+\eta^2)^3}\right]C_3+\\ &+\left[-0{,}3+0{,}000\,000\,2232\,\frac{1-28\eta^2+70\eta^4-28\eta^6+\eta^8}{(1+\eta^2)^6}\right]C_6\,.\end{aligned} \tag{34c}$$

The stress resultant $\overline{N}_x$ is the total of these three parts:

$$\begin{aligned}\overline{N}_x &= -3750+225\,\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}-\left[0{,}06-0{,}000\,087\,48\,\frac{1-10\eta^2+5\eta^4}{(1+\eta^2)^3}\right]C_3-\\ &-\left[0{,}3(1-6\eta^2+\eta^4)-0{,}000\,000\,2232\,\frac{1-28\eta^2+70\eta^4-28\eta^6+\eta^8}{(1+\eta^2)^6}\right]C_6\,.\end{aligned} \tag{35}$$

In the above formula the second member of the expression in square brackets, is insignificant in comparison to the first one, and as such, can be neglected in the first approximation. Proceeding along this line, instead of the former formula, the following one may be written:

$$\overline{N}_x = -3750+225\,\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}-0{,}06\,C_3-0{,}3(1-6\eta^2+\eta^4)C_6\,. \tag{36}$$

Since *two* unknown coefficients are figuring in this formula, we are able to demand the fulfillment of *two* conditions.

As a ***first condition*** it can be prescribed that $\overline{N}_x$ should have the same value at two appropiately selected points, namely, at points $\eta = 0$ and $\eta = \sqrt{3}$, of the edge line $\xi = 1$. This requirement can be expressed on ground of formula (36) by the following equation:

$$-3750+225-0{,}06\,C_3-0{,}3\,C_6=-3750-225\,\frac{2}{16}-0{,}06\,C_3+0{,}3\cdot 8\,C_6\,.$$

From this it follows

$$C_6 = 93{,}75. \tag{37}$$

Making use of this value, instead of (36) the following equation can be written:

$$\overline{N}_x = -3750+225\,\frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}-0{,}06\,C_3-28{,}125\,(1-6\eta^2+\eta^4)\,. \tag{38}$$

In the interval $-\sqrt{3} \leqq \eta \leqq \sqrt{3}$ the above expression has extreme values at the point where

$$\frac{\partial N_x}{\partial \eta} = 0 ,$$

that is, where

$$450\eta \frac{(\eta^2 - 3)}{(1 + \eta^2)^3} - 112{,}5\eta(\eta^2 - 3) = 0 \tag{39}$$

holds. The abscissae of these points are roots of equation (38). Three of the mentioned roots can be immediately expressed:

$$\eta = 0, \ \eta = \pm \sqrt{3}.$$

Simplifying equation (39) by the above roots, it becomes

$$\frac{450}{(1 + \eta^2)^3} - 112{,}5 = 0 .$$

Therefrom

$$(1 + \eta^2)^3 = 4$$

which means that the further roots of equation (39) are

$$\eta_1 = \pm \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} = \pm\, 0{,}766\,421 . \tag{40}$$

As *second condition* it can be demanded that the value of stress resultant $\overline{N}_x$ at point $\xi = 1$, $\eta = 0$ should be just the opposite of its value at points $\xi = 1$, $\eta = \pm\eta_1$. On ground of formula (38) this requirement may be expressed by the following equation:

$$-3750 + 225 - 0{,}06\, C_3 - 28{,}125 =$$

$$3750 - 225 \frac{1 - \eta_1^2}{(1 + \eta_1^2)^2} + 0{,}06\, C_3 + 28{,}125(1 - 6\eta_1^2 + \eta_1^4) .$$

Using η_1 as given under (40), the following value will be obtained from the former equation for the unknown coefficient C_3:

$$C_3 = -60\,041{,}57. \tag{41}$$

As was mentioned above, coefficients C_3 and C_6 were determined on ground of relation (36). Considering the values thus obtained as approximate ones and this time repeating the calculation using equation (35), the following more exact values will be obtained for coefficients C_3 and C_6:

$$C_3 = -60\,055{,}208, \tag{42}$$

$$C_6 = 92{,}291\,124.$$

Substituting these into formula (35), the values compiled in Table I will be obtained for the stress resultant $\overline{N}_x$ at different points of the edge line $\xi = 1$. Fig. 6 shows the distribution of these unbalanced forces along the edge line $\xi = 1$.

Table I

Values of stress resultant $\overline{N}_x$ at different points of edge line $\xi = 1$

$\pm\eta$	$\overline{N}_x$ kp/m
0	+45,37
0,2	+29,09
0,4	−6,47
0,6	−36,23
0,8	−45,29
1,0	−33,31
1,2	−8,10
1,4	+20,09
1,6	+40,80
$\sqrt{3}$	+45,37
$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$	−45,37

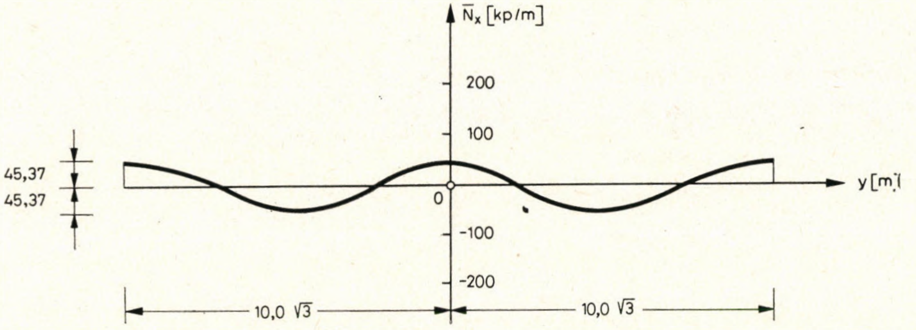


Fig. 6. Diagram of unbalanced stress resultants $\overline{N}_x$ to which the edge arch $\xi = 1$ is subjected

As can be seen from Table I and Fig. 6, the maximum of the absolute value of the unbalanced stress resultant is

$$|\,\overline{N}_x\,| = 45{,}37 \text{ kp/m}\,.$$

In relation to this, the absolute value of the stress resultant $\overline{N}_y$ acting along the edge line $\xi = 1$, is

$$|\,\overline{N}_y\,| = \frac{2a^2}{h}\,\overline{p}_0 = \frac{2 \cdot 10{,}0^2}{8{,}0}\,300 = 7500 \text{ kp/m}\,,$$

so that the quotient q expressing the error is not more than

$$q = \frac{49{,}37}{7500} \cong 0{,}006\,.$$

In comparison to the unit, this value is insignificant and so the suggested method of calculation may be considered as being of sufficient exactitude.

As a further check, the value of the stress resultant $\bar{N}_y$ corresponding to the approximate stress function was determined at points of the edge line $\xi = 1$ with the aid of formula

$$\bar{N}_x = -3750 - 225 \frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2} + \left[0{,}06 - 0{,}000\,087\,48 \frac{1 - 10\eta^2 + 5\eta^4}{(1+\eta^2)^3}\right] C_3 + \\ + \left[0{,}3(1 - 6\eta^2 + \eta^4) - 0{,}000\,000\,2232 \frac{1 - 28\eta^2 + 70\eta^4 - 28\eta^6 + \eta^8}{(1+\eta^2)^6}\right] C_6 .$$

Results of this calculation are shown in Table II. As can be seen, the values obtained according to the approximate method only slightly differ from the exact value

$$\bar{N}_y = -\frac{2 \cdot 10{,}0^2 \cdot 300}{8{,}0} = -7500 \text{ kp/m}$$

set up on ground of formula (31).

Table II

Values of stress resultant $\bar{N}_y$ at different points of edge line $\xi = 1$

$\pm\eta$	$\bar{N}_y$ kp/m
0	−7454,63
0,2	−7470,91
0,4	−7506,47
0,6	−7536,23
0,8	−7545,29
1,0	−7533,31
1,2	−7508,10
1,4	−7479,91
1,6	−7459,20
$\sqrt{3}$	−7454,63
$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$	−7545,37

At the corner points the situation is similar in regard to the stress resultants $\bar{N}_x$, $\bar{N}_{xy}$, $\bar{N}_y$. At these points the stress resultants calculated by the suggested approximate method are

$$\bar{N}_x = -3750 + 225 \frac{(-2)}{4^2} - \left[0{,}06 - 0{,}000\,087\,48 \frac{16}{4^3}\right] C_3 - \\ - \left[0{,}3(-8) - 0{,}000\,000\,2232 \frac{(-128)}{4^6}\right] C_6 = 45{,}37 \text{ kp/m},$$

$$\bar{N}_{xy} = \pm \left\{0 + 225 \frac{2}{4^2} + \left[0{,}06 - 0{,}000\,087\,48 \frac{16}{4^3}\right] C_3 + \right. \\ \left. + \left[0{,}3(-8) + 0{,}000\,000\,2232 \frac{128}{4^6}\right] C_6 \right\} \sqrt{3} = \mp\, 3795{,}37 \cdot \sqrt{3} \text{ kp/m},$$

$$\bar{N}_y = -3750 - 225 \frac{(-2)}{4^2} + \left[0{,}06 - 0{,}000\,087\,48 \frac{16}{4^3}\right] C_3 - \\ - \left[0{,}3(-8) - 0{,}000\,000\,2232 \frac{(-128)}{4^6}\right] C_6 = -7454{,}63 \text{ kp/m}.$$

Conversely to the above approximate values the exact ones calculated with the aid of formulae (33) are

$$\overline{N}_x = 0\,,$$

$$\overline{N}_{xy} = \mp \frac{10{,}0^2 \cdot 300}{8{,}0} \sqrt{3} = \mp\ 3750 \sqrt{3}\ \text{kp/m}\,,$$

$$\overline{N}_y = -\frac{2 \cdot 10{,}0^2 \cdot 300}{8{,}0} = -\ 7500\ \text{kp/m}\,.$$

As can be seen, the divergence between the exact and approximate results is also for this case insignificant.

REFERENCES

1. CSONKA, P.: Paraboloid Shell of Revolution Triangular in Plan with a Circular Skylight Opening *IASS Bulletin* **36** (1960), 77—84
2. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen* **59** (1964) 327—331, 375—377
3. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. 5. Aufl. Springer Verlag, Wien 1959
4. CSONKA, P.: Formulae for Controlling Stress Calculation of Calotte Shells. *Acta Techn. Hung.* **29** (1960), 355—368
5. CSONKA, P.: Membranschalen. *Bauingenieur- Praxis*, Heft 16. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München 1966
6. FLÜGGE, W.: Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik. (Berechnung einer Paraboloidschale mit einer quadratischen Oberlichtsöffnung.) *Federhofer-Girkmann-Festschrift.* Beiträge zur angewandten Mechanik. Franz Deutlicke Verlag, Wien 1950, pp. 17—35
7. CSONKA, P.: Paraboloid Shell of Revolution with an Eccentrical Skylight Opening. *World Conference on Shell Structures* October 1—4, 1962, San Francisco, California. National Academy of Sciences — National Research Council, Washington, D. C. 1964, 501—508

Rotationsparaboloidschale über regelmäßigem Vieleckgrundriß mit kreisförmiger Oberlichtöffnung. Zur Bestimmung des Kräftespiels der im Titel erwähnten Schalen wird eine Lösung im Rahmen der gewohnten Annahmen der Membrantheorie mitgeteilt. Es wird angenommen, daß die Oberlichtsöffnung von einem Ringbalken umrandet ist, der keinerlei Widerstand gegen horizontale Biegemomente leistet, während die äußeren Randbögen Seitenkräften gegenüber keinen Widerstand ausüben. Die mitgeteilte Lösung ist von annäherndem Charakter: sie erfüllt die innere Randbedingungen genau, die äußeren aber nur annäherungsweise. Die Anwendung der Methode wird durch ein Zahlenbeispiel illustriert, das gleichzeitig auch die Zweckmäßigkeit des Verfahrens beweist.

Оболочки параболоида вращения с основанием в виде правильного многоугольника и с круглым верхним фонарем. В работе описывается приближенный метод для определения работы указанных в заглавии оболочек в рамках обычных условий мембранной теории. Работа исходит из предположения, что верхний фонарь оболочки охвачен таким краевым кольцом, которое по отношению к изгибающему моменту горизонтальной плоскости не развивает никакого сопротивления, а краевые дуги, подпирающие наружный край оболочки, не сопротивляются боковым усилиям. Описываемое решение имеет приближенный характер, т. к. решение в отношении краевых условий, касающихся кольца, окаймляющего верхний фонарь, дает точное удовлетворение, однако в отношении краевых условий, касающихся краевых дуг, — только приближенное. Применение предлагаемого метода демонстрируется числовым примером, который одновременно доказывает также целесообразность предлагаемого решения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 93—99 (1974)

ÜBER DIE BERECHNUNG DER EBENEN UNTERSCHALLSTRÖMUNG VON KOMPRESSIBLEN MEDIEN

T. CZIBERE*

DOKTOR DER TECHN. WISS.

[Eingegangen am 22. Januar 1974]

Die nichtharmonischen Strom- und Potentialfunktionen der isentropen Unterschallströmung von kompressiblen Medien können mit Hilfe der Dichte des Mediums, sowie von entsprechend den Randbedingungen gewählten harmonischen Funktionen und ihrer Ableitungen ausgedrückt werden. Auf diese Weise ergeben sich zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten in der Strömungsebene geeignete Ausdrücke, welche die Durchführung der Berechnungen — ausgehend vom Geschwindigkeitsfeld der entsprechenden inkompressiblen Strömung — mittels Iteration ermöglichen.

Die bekannten Verfahren zur Berechnung der ebenen, stationären, wirbelfreien Strömung von reibungsfreien kompressiblen Medien beruhen auf der Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials. Diese Linearisierung kann direkt in der Strömungsebene oder, mittels einer geeigneten Transformation, in der Hodographenebene, erfolgen.

Wird die Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials in der Strömungsebene linearisiert, so kann die Lösung des kompressiblen Problems auf die des inkompressiblen Problems zurückgeführt werden. Hier muß man jedoch darauf achten, daß diese Methode wegen der Linearisierung nur dann angewendet werden kann, wenn sich die lokalen Geschwindigkeiten von denen der ungestörten Strömung wenig unterscheiden, wie z. B. bei der Strömung um schwach gekrümmte dünne Tragflügelprofile [1], [2].

Zur Lösung der Aufgabe ergibt sich eine andere (indirekte) Methode, indem man nach einer geeigneten Transformation die der nichtlinearen Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials entsprechende lineare (Tschapliginsche) Differentialgleichung in der Hodographenebene löst. Den zweifellosen Vorteilen der Linearität der zu lösenden Differentialgleichung stehen jedoch die bedeutenden Schwierigkeiten gegenüber, die die Randbedingungen in der Hodographenebene verursachen [3].

Im folgenden wird ein Iterationsverfahren zur Berechnung der ebenen wirbelfreien Strömung von kompressiblen Medien dargelegt, mit dessen Hilfe, ausgehend von einer gegebenen inkompressiblen Strömung, die entsprechende kompressible Strömung direkt in der Strömungsebene bestimmt werden kann.

* Prof. Dr. T. CZIBERE, Aulich Lajos u. 9., 3529 Miskolc, Ungarn

Die nichtharmonische Potentialfunktion und Stromfunktion der kompressiblen wirbelfreien Strömung können durch die Dichte des strömenden Mediums, sowie durch entsprechend den Randbedingungen gewählte harmonische Funktionen und deren Ableitungen ausgedrückt werden. Durch Differenzierung der Potential- und Stromfunktionen erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten der kompressiblen Strömung zur iterativen Berechnung geeignete Ausdrücke. Den Ausgangspunkt der Iteration bilden die der kompressiblen Strömung entsprechenden (die Randbedingungen erfüllenden) Geschwindigkeitskomponenten der inkompressiblen Strömung.

Als Grundgleichungen der ebenen wirbelfreien kompressiblen Strömung stehen uns die Kontinuitätsbedingung, die Gleichung der Wirbelfreiheit, sowie die Bernoullische Gleichung für isentrope Strömung zur Verfügung:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho c_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho c_y) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\left(\frac{c}{a_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}}, \tag{3}$$

wobei c, bzw. c_x und c_y die Geschwindigkeit der kompressiblen Strömung, bzw. deren Komponenten in der x- und in der y-Richtung, weiters ϱ die Dichte des Mediums, ϱ_0 und a_0 die zum Ruhezustand gehörige Dichte und Schallgeschwindigkeit bedeuten. Auf Grund von Gln. (1) und (2) können die Potentialfunktion φ und die Stromfunktion ψ definiert werden:

$$c_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \qquad c_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_0}\, c_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0}\, c_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\,. \tag{5}$$

Nach Einführung der Bezeichnung $H = \varrho_0/\varrho$ ergeben sich auf Grund der Gln. (4) und (5) die folgenden zwei Beziehungen zwischen der Potential- und der Stromfunktion der kompressiblen Strömung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = H\frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -H\frac{\partial \psi}{\partial x}\,. \tag{6}$$

Hiermit wurde die Lösung des Differentialgleichungssystems (1), (2) auf die Bestimmung der durch die Gln. (6) definierten Potentialfunktion φ und Stromfunktion ψ zurückgeführt.

Es sei Φ die Geschwindigkeitspotentialfunktion und Ψ die Stromfunktion der (die Randbedingungen erfüllenden) inkompressiblen Strömung, die der untersuchten kompressiblen Strömung entspricht. Dies sind also harmonische Funktionen, die die Cauchy—Riemannschen Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{7}$$

Die Lösung des Systems von Differentialgleichungen (6) suchen wir in der Form

$$\varphi = k_1 \Phi + u_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{8}$$

$$\Psi = k_2 \Psi + u_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \tag{9}$$

wobei k_1 und k_2 Konstanten sind, ferner $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ und $v_2(x, y)$ später zu bestimmende Funktionen bedeuten. Zwecks Bestimmung dieser vier unbekannten Funktionen werden die Ausdrücke (8) und (9) in die Differentialgleichungen (6) eingesetzt. Durch den Vergleich der Koeffizienten der Ableitungen von Φ und Ψ in den so gewonnenen Gleichungen (unter Berücksichtigung der Gln. (7)) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$u_1 = H u_2, \quad v_1 = H v_2, \tag{10}$$

$$k_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} = H \left(k_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = - H \frac{\partial v_2}{\partial x}, \tag{12}$$

$$k_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} = H \left(k_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = - H \frac{\partial u_2}{\partial y}. \tag{14}$$

Durch Subtraktion der Gln. (11) und (13) sowie Verwendung der Beziehung (10) erhält man die Gl.

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_1 u_2) = \frac{u_2}{v_2} \frac{\partial}{\partial y} (v_1 v_2), \tag{15}$$

ferner ergibt sich durch Addition der Gln. (12) und (14) unter Berücksichtigung von Gl. (10) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_1 u_2) = -\frac{u_2}{v_2}\frac{\partial}{\partial x}(v_1 v_2)\,. \tag{16}$$

Aus Gl. (10) folgen die Zusammenhänge

$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1}\,, \quad \left(\frac{u_2}{v_2}\right)^2 = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2}\,.$$

Durch Einführung der Bezeichnungen $U = \sqrt{u_1 u_2}$ und $V = \sqrt{v_1 v_2}$ gehen die Gln. (15) und (16) in die Cauchy—Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{17}$$

über, folglich sind $U(x, y)$ und $V(x, y)$ harmonische Funktionen. Auf Grund der Gln. (10) können die Zusammenhänge

$$u_1 u_2 = H u_2^2\,, \quad v_1 v_2 = H v_2^2$$

geschrieben werden und so erhält man die vier gesuchten Funktionen ausgedrückt mit den harmonischen Funktionen U und V in der Form:

$$u_1 = \sqrt{H}\, U\,, \quad u_2 = \frac{U}{\sqrt{H}}\,, \quad v_1 = \sqrt{H}\, V\,, \quad v_2 = \frac{V}{\sqrt{H}}\,. \tag{18}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gln. (8) und (9) erhält man für das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion der kompressiblen Strömung die Ausdrücke

$$\varphi = k_1 \Phi + \sqrt{H}\left(U\frac{\partial \Phi}{\partial x} + V\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right), \tag{19}$$

$$\psi = k_2 \Psi + \frac{1}{\sqrt{H}}\left(U\frac{\partial \Psi}{\partial x} + V\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right), \tag{20}$$

die statt der früheren vier nur mehr zwei unbekannte Funktionen enthalten, d. h. die harmonischen Funktionen U und V. Φ und Ψ sind nämlich nach unseren Voraussetzungen die Potential- und die Stromfunktion derjenigen inkompressiblen Strömung, die der zu bestimmenden kompressiblen Strömung entspricht.

Die harmonischen Funktionen U und V können durch die Funktion H und ihre Ableitungen ausgedrückt werden. Davon kann man sich dadurch überzeugen, daß man z. B. die Gln. (18) in die Gln. (11) und (12) oder in die Gln. (13) und (14) einsetzt und dieselben für U und V löst

$$U = 2\sqrt{H}\,(k_2 H - k_1)\,\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2}\,, \tag{21}$$

$$V = 2\sqrt{H}\,(k_2 H - k_1)\,\frac{\dfrac{\partial H}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2}\,. \tag{22}$$

Zwecks Vereinfachung werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$A = U\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + V\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2\sqrt{H}(k_2 H - k_1)\,\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial y}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2}\,, \tag{23}$$

$$B = U\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + V\,\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2\sqrt{H}\,(k_2 H - k_1)\,\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial y}\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2}\,. \tag{24}$$

Die so definierten Funktionen A und B sind ebenfalls harmonische Funktionen, wie es nach einfacher Differenzierung leicht einzusehen ist. Auf Grund der Gln. (23), (24) und (19), (20) ergeben sich für die Geschwindigkeitspotentialfunktion φ und Stromfunktion ψ der zu berechnenden kompressiblen Strömung die Beziehungen

$$\varphi = k_1 \Phi + \sqrt{H}\,A\,, \tag{25}$$

$$\psi = k_2 \Psi + \frac{1}{\sqrt{H}}\,B\,. \tag{26}$$

Hierzu sei erwähnt, daß die nichtharmonischen Potential- und Stromfunktionen der kompressiblen Strömung mittels der (harmonischen) Potential- und Stromfunktionen der entsprechenden inkompressiblen Strömung sowie mittels der Dichte des Mediums dargestellt wurden und daher die Lösung für die entsprechende inkompressible Strömung aus der erhaltenen Lösung mit der Bedingung $\varrho \equiv \varrho_0$ (d. h. $H \equiv 1$) abgeleitet werden kann. In diesem Fall ist $k_1 = 1$ und $k_2 = 1$, weiterhin $A \equiv 0$ und $B \equiv 0$.

Für die Geschwindigkeitskomponenten der ebenen wirbelfreien Strömung von kompressiblen Medien erhält man durch Einsetzung der Gln. (25), (26) in (4), (5) folgende Ausdrücke:

$$c_x = k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{H}} \frac{\partial H}{\partial x} A + \sqrt{H} \frac{\partial A}{\partial x} = \\ = k_2 H \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{1}{2\sqrt{H}} \frac{\partial H}{\partial y} B + \sqrt{H} \frac{\partial B}{\partial y}, \tag{27}$$

$$c_y = k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2\sqrt{H}} \frac{\partial H}{\partial y} A + \sqrt{H} \frac{\partial A}{\partial y} = \\ = - k_2 H \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{H}} \frac{\partial H}{\partial x} B - \sqrt{H} \frac{\partial B}{\partial x}. \tag{28}$$

Aus den abgeleiteten Zusammenhängen geht hervor, daß ausgehend vom Geschwindigkeitsfeld einer, gegebene Randbedingungen erfüllenden, inkompressiblen Strömung das Geschwindigkeitsfeld der entsprechenden kompressiblen Strömung — natürlich durch Iteration — bestimmt werden kann. Die für die Geschwindigkeitskomponenten erhaltenen Ausdrücke enthalten implizite nicht nur die (gerade zu bestimmenden) Geschwindigkeitskomponenten, sondern auch deren Ableitungen. Beim ersten Iterationsschritt geht man so vor, daß man mit den Geschwindigkeitskomponenten der durch die Funktionen Φ, Ψ definierten inkompressiblen Strömung die Funktionen H, A und B, bzw. ihre Ableitungen und mit deren Hilfe aus den Gln. (27) und (28) die erste Näherung für die Geschwindigkeitskomponenten der kompressiblen Strömung berechnet. Beim zweiten Schritt und allen weiteren Schritten geht man, ausgehend von den im vorhergehenden Schritt berechneten Geschwindigkeitskomponenten, ebenso vor. Die numerischen Berechnungen können mit Hilfe einer digitalen Rechenanlage durchgeführt werden.

SCHRIFTTUM

1. Zierep, J., Vorlesungen über theoretische Gasdynamik. G. Braun, Karlsruhe, 1963, S. 125—165.
2. Oswatitsch, K., Gasdynamik. Springer, Wien 1952, S. 211—234.
3. Kotschin, N. J.—Kiebel, I. A.—Rose, N. W., Theoretische Hydromechanik Bd. II, Berlin, Akademie Verlag 1955, S. 94—124.

The Calculation of the Plane Subsonic Flow of Compressible Fluids. The non-harmonic potential and stream functions of the isentropic plane flow of compressible fluids at subsonic velocities can be expressed with the aid of fluid density, harmonic functions selected in accordance with the boundary conditions, and their derivatives. By this method equations suitable for the direct calculation of the velocity components in the plane of flow are obtained, which are suitable for carrying out the calculations by iteration, starting from the velocity field of the corresponding incompressible flow.

О расчете двухтерного движения потока ниже звуковой скорости сжимаемых сред. Негармонические потенциальные и поточные функции изентропического движения потока ниже звуковой скорости сжимаемых сред можно выразить с помощью гармонических функций и их производных, подобранных в соответствии с плотностью среды и краевых условий. Таким образом получаются зависимости, пригодные для определения компонентовскор ости непосредственно в плоскости движения потока; на основе этих зависимостей вычисления можно выполнять с помощью итерации, исходя из поля скорости соответствующего несжимаемого потока.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 101—113 (1974)

SIMULTANE GLEICHGEWICHTE IN HALOGENLAMPEN MIT ZWEI VERSCHIEDENEN HALOGENZUSÄTZEN

GLEICHGEWICHTE BEIM GLEICHZEITIGEN VORHANDENSEIN VON H_2, Br_2 UND J_2

I. HANGOS* und I. JUHÁSZ**

[Eingegangen am 8. Dezember 1972]

Die simultanen Gleichgewichte im $W-Br_2-J_2-H_2$-System wurden unter den in den Halogenlampen vorherrschenden Temperatur- und Druckverhältnissen untersucht. Es wurde festgestellt, daß von den im Gasraum vorhandenen Verbindungen die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration eindeutig das Zurückdrängen der Bildung von Wolframhaloiden bewirkt. Die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration beeinflußt die Kurven der Partialdrücke der Br-, J- und H-Atome nur geringfügig.

1. Einleitung

In einer früheren Publikation [1] befaßten wir uns mit den simultanen Gleichgewichten, die sich in den, zwei verschiedene Halogenzusätze enthaltenden Glühlampen abspielen. In einigen Fällen wird dem Gasgemisch auch Wasserstoffgas beigemengt [2], was, Literaturdaten zufolge, im Zusammenhang mit der Korrosion der zum Glühfaden führenden Metallteile höherer Temperatur von Bedeutung sein kann. Daten zur Berechnung solcher Gleichgewichte sind im Falle des HBr schon in den Arbeiten von NEUMANN, YANNOPOULOS und PEBLER so wie KOPELMAN und WORMER angegeben [3—5]. In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit dem Problem, wie die Anwesenheit des Wasserstoffes die simultanen Gleichgewichte beim gleichzeitigen Vorhandensein von Jod und Brom beeinflußt.

2. Die Berechnung des Gleichgewichtes im Gasraum

Die Grundprinzipien der Berechnung des Gleichgewichts wurden bereits in einer vorangegangenen Publikation [1] dargelegt, in dem jetzt vorliegenden Fall mußte nur die Anzahl der vorkommenden Komponenten um eins erhöht werden. In unserem Ausgangssystem kommen verschiedene Mengen von Jod, Brom und Wasserstoff vor, deren Gesamtgasdruck in jedem Fall

* I. HANGOS, 1027 Budapest, Mártírok u. 62, Ungarn
** Frl. I. JUHÁSZ, Váci u. 77, 1344 Budapest, Ungarn

zu $1{,}05 \times 10^{-2}$ Torr, während der Gesamtgasdruck der im Gasraum vorhandenen neutralen Gase zu 6 Atmosphären angenommen wurde. Bei unseren Berechnungen berücksichtigten wir die folgenden Komponenten: H_2, J_2, Br_2, WJ_2, WBr_2, WBr_5, J, Br, H, HJ und HBr. Der Partialdruck dieser Komponenten wird jeweils mit $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ bezeichnet. Die Anwesenheit von WBr_4, WJ_4 und WBr_5 wurde teils wegen ihrer thermodynamischen Instabilität, teils zwecks Vereinfachung der Rechnungen außer acht gelassen.

Zur Berechnung des Gleichgewichtszustandes des Systems wurden die folgenden, voneinander unabhängigen Reaktionen gewählt:

$$2H \rightleftarrows H_2 \tag{1}$$

$$2J \rightleftarrows J_2 \tag{2}$$

$$2\,Br \rightleftarrows Br_2 \tag{3}$$

$$H_2 + Br_2 \rightleftarrows 2\,HBr \tag{4}$$

$$H_2 + J_2 \rightleftarrows 2HJ \tag{5}$$

$$W + J_2 \rightleftarrows WJ_2 \tag{6}$$

$$W + Br_2 \rightleftarrows WBr_2 \tag{7}$$

$$W + Br_2 \rightleftarrows WBr_5 \tag{8}$$

für die die Zusammenhänge (1a)–(8a) gelten.

$$K_1 = \frac{p_1}{p_9^2} \tag{1a}$$

$$K_2 = \frac{p_2}{p_7^2} \tag{2a}$$

$$K_3 = \frac{p_3}{p_8^2} \tag{3a}$$

$$K_4 = \frac{p_1^2}{p_1 \cdot p_3} \tag{4a}$$

$$K_5 = \frac{p_{10}^2}{p_2 \cdot p_2} \tag{5a}$$

$$K_6 = \frac{p_4}{p_2} \tag{6a}$$

$$K_7 = \frac{p_5}{p_3} \tag{7a}$$

$$K_8 = \frac{p_6}{p_8^{5/2}} \tag{8a}$$

Unter dei Annahme, daß in Gln. (6), (7) und (8) die Tension des Wolframs bei einer vorgegebenen Temperatur konstant ist, kann dies in die Gleichgewichtskonstante eingesetzt werden, so daß in K_5–K_8 (Gln. (5a)–(8a)) der Wert p_w in K_5–K_8 eingesetzt werden kann.

Für das System können außerdem noch drei, voneinander unabhängige Erhaltungssätze aufgeschrieben werden:

$$\sum P_p = \sum_{j=1}^{11} p_i\,, \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{\Sigma p y}{\Sigma p_{B\nu}} = \frac{2p_2 + 2p_4 + p_7 + p_{10}}{2p_3 + 2p_5 + 5p_6 + p_8 + p_{11}} \tag{10}$$

$$\gamma = \frac{\Sigma p_H}{\Sigma p_{B\nu}}\ \frac{2p_1 + p_9 + p_{10} + p_{11}}{2p_3 + 2p_5 + 5p_6 + p_8 + p_{11}}\,. \tag{11}$$

Bei der Berechnung der Gleichgewichte wurden die neuesten thermochemischen Daten verwendet (6—9). Da das Hauptziel dieser Arbeit bloß die Erkenntnis der Tendenz der Effekte und die Aufdeckung der Zusammenhänge ist, werden aus den berechneten Werten, eben wegen der allgemein bekannten relativ großen Streuung der thermochemischen Daten [10], keine quantitativen Schlußfolgerungen gezogen.

3. Berechnungsergebnisse und Diskussion

Bei der Untersuchung der simultanen Gleichgewichte, die sich mit den gegebenen Ausgangskomponenten bei den 16 verschiedenen Zusammensetzungen abspielen, wurden für jede Zusammensetzung Diagramme, wie im Bild 1 dargestellt, erhalten. Für eine ausführliche Analyse der erhaltenen Diagramme empfiehlt es sich, die von uns gewählten Zusammensetzungen in einem Dreieckdiagramm wie im Bild 2 darzustellen. Ein sorgfältiges Studium der mit

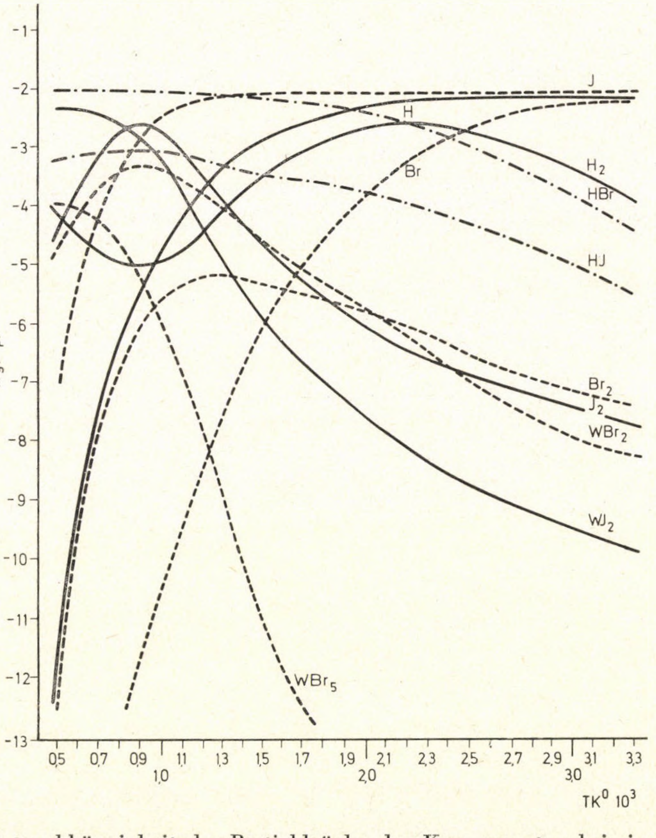


Bild 1. Temperaturabhängigkeit der Partialdrücke der Komponenten bei einer Ausgangszusammensetzung von äquivalenten Mengen von J_2, Br_2 und H_2. (Mischungsverhältnis: 1 : 1 : 1)

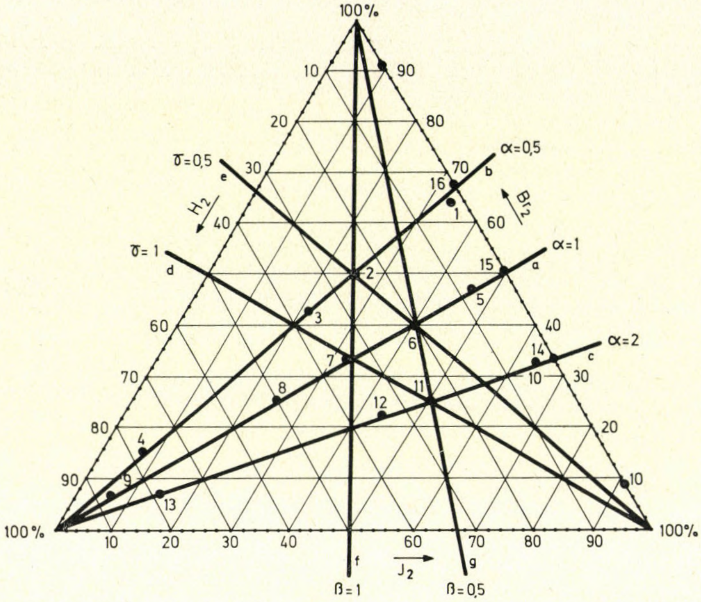


Bild 2. Darstellung der prozentuellen Ausgangszusammensetzung von Gasgemischen verschiedener Zusammensetzung

der Rechenmaschine erhaltenen Ergebnisse ergab, daß die Kurven, die die Temperaturabhängigkeiten der Kurven der Partialdrücke der entstandenen Verbindungen darstellen, in drei Gruppen eingeteilt werden können: die Wolframhaloiden, die infolge der Dissoziation entstandenen freien Atome, und die Haloidsäuren und Halogenatome. Bei den letzteren wurde auch die Temperaturabhängigkeit des Partialdruckes der Wasserstoffmoleküle dargestellt.

Wenn wir außer den durch die Gleichungen (10) und (11) definierten Faktoren α und γ, auch die Bezeichnung

$$\beta = \frac{\Sigma pH}{\Sigma pJ}$$

einführen, dann entsprechen die durch dicke Linien verbundenen Punkte des Bildes 2 gleichen α-, β- und γ-Verhältnissen. Die Wirkung der verschiedenen Komponenten auf die Kurven der Partialdrücke kann also bei den jeweils durch eine ausgezogene Kurve verbundenen Zusammensetzungen unter Konstanthaltung des Verhältnisses der anderen beiden Komponenten untersucht werden.

Zunächst wird entlang der Kurve *a* (Bild 2) für $\alpha = 1$ die Wirkung des Wasserstoffes untersucht. Die diesen Punkten entsprechenden prozentuellen Zusammensetzungen wurden in Tafel I zusammengefaßt.

Tafel I

Wirkung des Wasserstoffes für $\alpha = 1$

Nr. s. Bild. 2	Ausgangszusammensetzung		
	J_2 %	Br_2 %	H_2 %
15	50	50	0
5	47,6	47,6	4,8
6	40	40	20
7	33,3	33,3	33,3
8	25	25	50
9	8,3	8,3	83,4

Wir wollen jetzt die Wirkung des Wasserstoffes auf die Entstehung der Wolframhaloiden untersuchen (Bild 3). Als allgemeingeltende Gesetzmäßigkeit kann ausgesagt werden, daß die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration in dem gesamten untersuchten Temperaturbereich die Konzentration aller drei untersuchten Wolframhaloide zurückdrängt. Diese Feststellung besitzt ihre stärkste Gültigkeit für das Pentabromid, das bereits bei einer Ausgangskonzentration von 50% Wasserstoff praktisch verschwindet. Diese Wirkung ist beim Wolframjodid bei weitem nicht so ausgeprägt: die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration beeinflußt den Kurvenverlauf erst bei sehr großen Wasserstoffkonzentrationen. Beim Wolframdibromid ist diese Wirkung in erster Linie bei niedrigen Temperaturen von Bedeutung, während sie in unmittelbarer Nähe des Glühfadens und in dem heißen Gasraum geringfügig ist. Bei kleinen Wasserstoffkonzentrationen ist auch ihre Wirkung sehr klein.

Die infolge der Dissoziation entstandenen freien Atome stellen die zweite Gruppe der Kurven dar. Die Kurven ihrer Partialdrücke sind auf Bild 4 dargestellt. Der Kurvenverlauf ist vollkommen parallel zu jenem der Wasserstoff-freien Systeme. Die Absolutwerte werden durch die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration nur geringfügig beeinflußt: die der Halogenatome werden etwas verringert, während die der Wasserstoffatome etwas erhöht werden.

Das interessanteste Bild entsteht bei den Kurven der Partialdrücke der Haloidsäuren sowie der Halogen- und Wasserstoffmoleküle (Bild. 5). Durch die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration wird die Konzentration der Brom- und Jod-Moleküle verringert, während die der Haloidsäuren erhöht. In dem Temperaturbereich von 500÷1500°C, dh. in dem sog. Korrosionsbereich und entlang der Kolbenwand entsteht in erster Linie HBr, erst bei höheren Temperaturen auch HJ. Dementsprechend wächst die Bromkonzentration schon im anfänglichen Bereich stark an, während die Konzentration des J_2 in Abhängigkeit von der Temperatur ein Maximum durchläuft. Dementsprechend weist die Kurve des Partialdruckes des H_2 zwischen 900 und 1200 K bei höherem Wasserstoffgehalt ein Minimum auf. Bei weiterem Temperaturanstieg beginnt die Dissoziation von HBr und von HJ. Bei der Temperatur des glühenden Wolframs halten sich Br_2 und J_2 von praktisch gleicher Größenordnung das Gleichgewicht. Die Konzentration des HBr ist jedoch auch bei dieser Temperatur noch um etwa zwei Größenordnungen höher als die des HJ. Bei Temperaturen über 2000°C wird die aus dem Dissoziationsgleichgewicht stammende H_2-Konzentration von der aus der Dissoziation der Haloidsäuren stammenden H_2-Konzentration übertroffen. Auf diese Weise entsteht über 2500°C in der Kurve des Partialdruckes des H_2 bis zu einem 50%igen Wasserstoffgehalt ein Maximum. Bei noch höheren Temperaturen zeigt der Kurvenverlauf eine abfallende Tendenz wegen dem schlagartigen Entstehen von freien Wasserstoffatomen. Bei höheren Wasserstoffkonzentrationen fehlen sowohl das Minimum als auch das Maximum.

Ändern wir α, indem wir die Konzentration des Br_2 auf Kosten der J_2-Konzentration erhöhen, so erhalten wir die Kurve *b* auf Bild 2. Die Ausgangs-

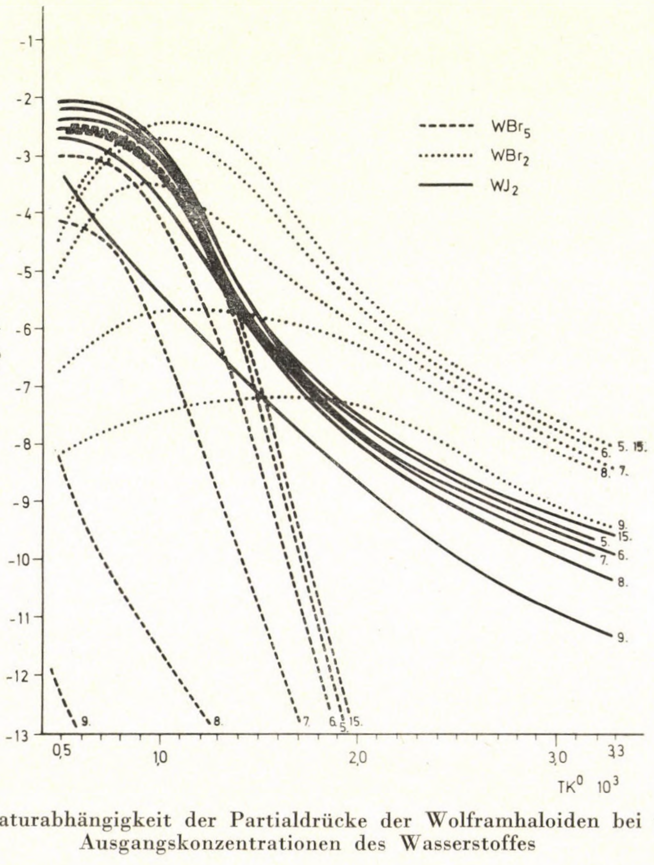


Bild 3. Temperaturabhängigkeit der Partialdrücke der Wolframhaloiden bei verschiedenen Ausgangskonzentrationen des Wasserstoffes

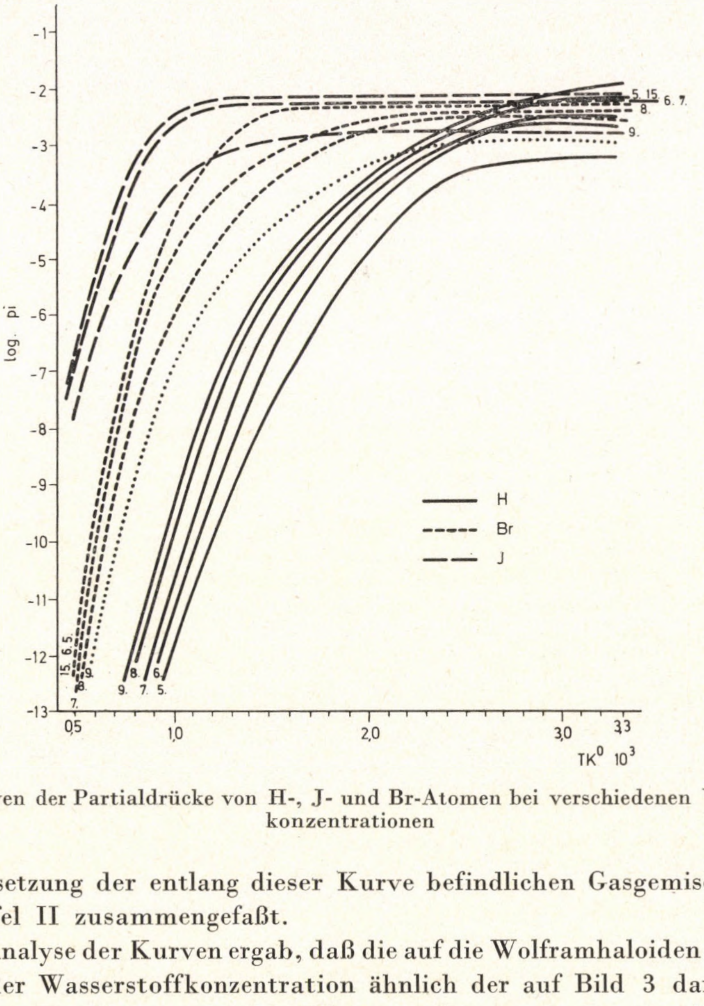


Bild 4. Kurven der Partialdrücke von H-, J- und Br-Atomen bei verschiedenen Wasserstoffkonzentrationen

zusammensetzung der entlang dieser Kurve befindlichen Gasgemische haben wir in Tafel II zusammengefaßt.

Die Analyse der Kurven ergab, daß die auf die Wolframhaloiden ausgeübte Wirkung der Wasserstoffkonzentration ähnlich der auf Bild 3 dargestellten Wirkung ist. Die Kurven gleicher Wasserstoffkonzentration überdecken sich

Tafel II

Wirkung der Wasserstoffkonzentration bei $\alpha = 0,5$

Nr. s. Bild. 2	Ausgangszusammensetzung		
	J_2 %	Br_2 %	H_2 %
16	33,3	66,6	
2	25	50	25
3	22,2	44,4	33,4
4	7,7	15,4	76,9

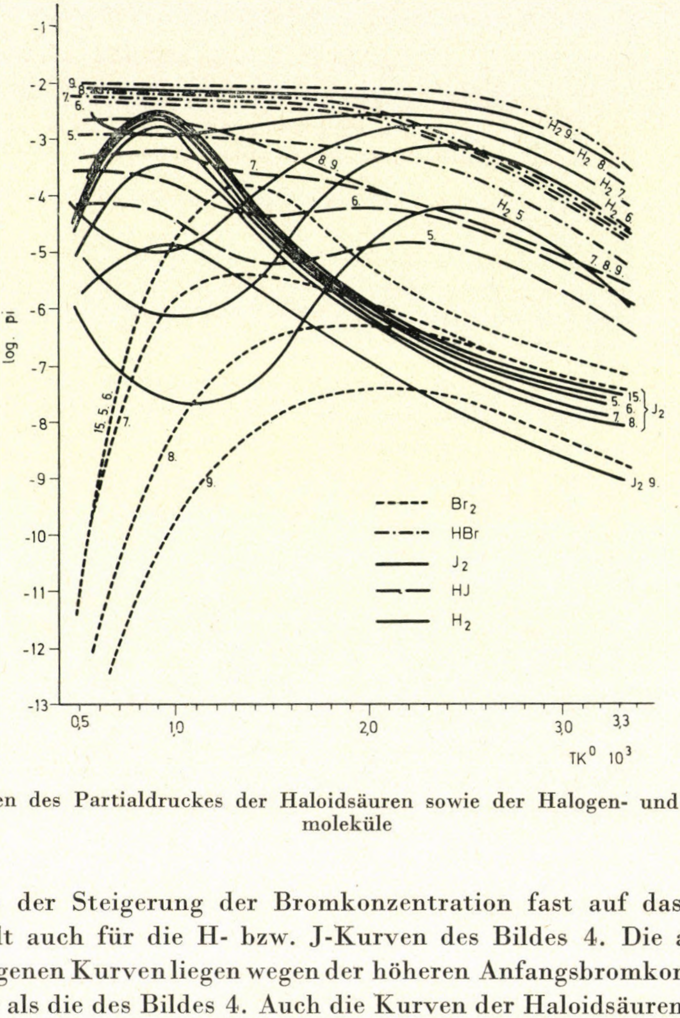


Bild 5. Kurven des Partialdruckes der Haloidsäuren sowie der Halogen- und Wasserstoffmoleküle

sogar trotz der Steigerung der Bromkonzentration fast auf das Doppelte. Dasselbe gilt auch für die H- bzw. J-Kurven des Bildes 4. Die auf die Br-Atome bezogenen Kurven liegen wegen der höheren Anfangsbromkonzentration etwas höher als die des Bildes 4. Auch die Kurven der Haloidsäuren, der Halogenmoleküle und des H_2 verlaufen ähnlich, die Konzentration des HBr ist wegen der obengenannten Gründe höher. Eine Steigerung der Jodkonzentration ist mit einer Fortbewegung entlang der Kurve *c* auf Bild 2 gleichbedeutend. Die diesbezüglichen Ausgangskonzentrationen sind in Tafel III zusammengefaßt. In diesem Fall wird — abgesehen vom Wolframdibromid — ein anderer Kurvenverlauf beobachtet. Als Beispiel sollen die, der lfd. Nr. 10 bzw. 13 entsprechenden Gasgemische dienen, bei denen die Kurven des Partialdruckes aller übrigen Komponenten völlig übereinstimmen, obwohl die Ausgangskonzentrationen ganz verschieden sind. Zur Veranschaulichung dieses interessanten Effektes wurden die Kurven der Partialdrücke der Halogen- und der Wasserstoffmoleküle sowie die der Haloidsäuren auf Bild 6 dargestellt. Bei extrem kleinen oder besonders großen Wasserstoffkonzentrationen (Zusammensetzungen 10 bzw. 13) sind die Kurven des Partialdruckes der Komponenten fast identisch. Die Wirkung der Wasserstoffkonzentration durchläuft also für $\alpha = 2$ ein Maximum.

Nun sollen die Fälle für die gleichen β-, bzw. γ-Verhältnisse untersucht werden. Die entsprechenden Zusammensetzungen liegen entlang der *d*-, *e*-, *f*-

Tafel III

Wirkung des Wasserstoffes bei $\alpha = 2$

Nr	Ausgangszusammensetzung		
	J_2 %	Br_2 %	H_2 %
14	66,6	33,3	0
10	64,5	32,4	3,1
11	50	25	25
12	44,3	22,1	33,6
13	15,4	7,2	77,4

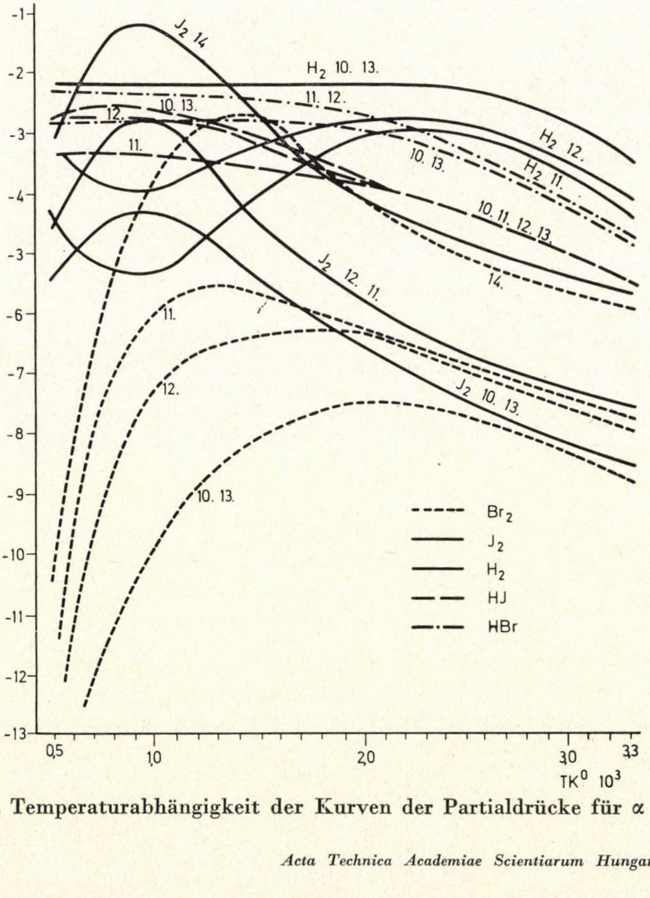


Bild 6. Temperaturabhängigkeit der Kurven der Partialdrücke für $\alpha = 2$

und g-Kurven des Bildes 2. Die Ausgangszusammensetzungen sind in Tafel IV zusammengefaßt. Eine Analyse dieser Kurven ergibt, daß in solchen Fällen die Konzentration des Wolframdibromids und Pentabromids, des Br und Br_2 sowie des HBr nur von der Ausgangskonzentration des Br_2 abhängt. Diese

Tafel IV

Lfd. Nr. (s. Bild. 2)	Be_2 %	J_2%	Ausgangszusammensetzung		
			H_2%	β	γ
2	50	25	25	1	0,5
6	40	40	20	0,5	0,5
7	33,3	33,3	33,3	1	1
11	25	50	25	0,5	1

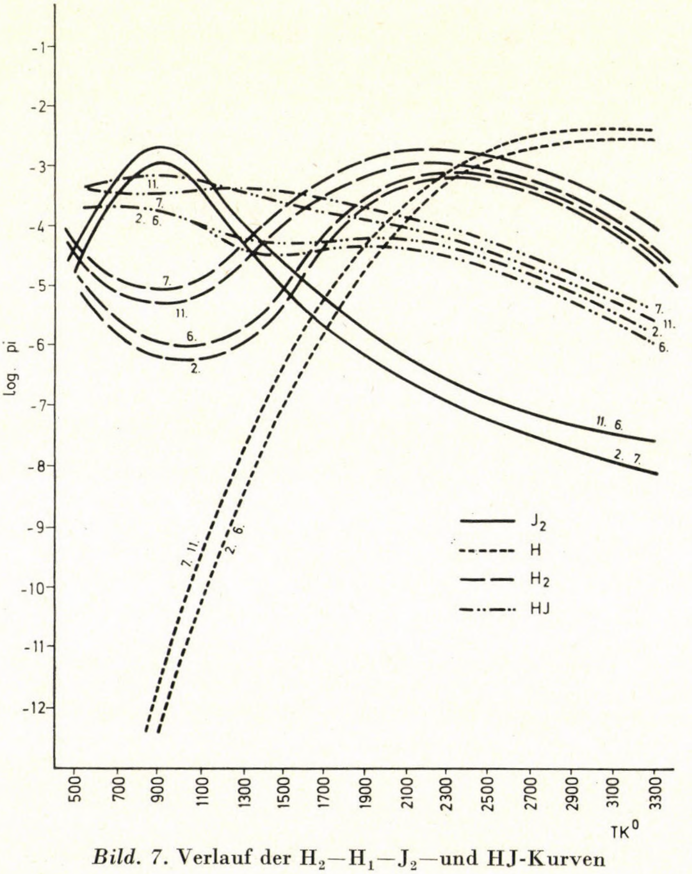


Bild. 7. Verlauf der H_2—H_1—J_2—und HJ-Kurven

Wirkung kommt beim WBr_2, WBr_5 und Br_2 stark, beim Br und dem HBr hingegen nur schwach zur Geltung. Die Konzentration des Wolframdijodids ist nur der Ausgangsjodkonzentration proportional, während die Konzentration der J-Atome praktisch auch hiervon unabhängig ist. Der Verlauf der H_2-, H-, J_2- und HJ-Kurven wurde auf Bild 7 dargestellt.

Aus dem Bild ist ersichtlich, daß die J_2-Konzentration allein von β abhängt, d. h. für dieselben β-Werte dieselbe ist, daß die Konzentration der freien Wasserstoffatome allein von γ abhängt, d. h. für dieselben γ-Werte dieselbe ist, und daß die H_2- sowie die HJ-Kurven sowohl von der Ausgangskonzentration des H_2 bzw. des J_2 als auch vom β-Wert abhängen.

4. Schlußfolgerungen

Bei der Auswertung der Ergebnisse empfiehlt es sich, aus den Gleichgewichtsverhältnissen des wasserstofffreien Systems auszugehen. Werden die Kurven der Partialdrücke für das in unserer vorangegangenen Publikation beschriebene $W-Br_2-J_2$-System für verschiedene α-Werte ähnlich wie in der vorliegenden Arbeit analysiert, so kann festgestellt werden, daß die Entstehung von freien J- und Br-Atomen kaum von α abhängt. Demgegenüber nimmt für wachsendes α die J_2-Konzentration im gesamten Bereich ab, während die des Br_2 zunimmt; die Kurven der entsprechenden Wolframhaloiden sind gerade umgekehrt. In Abwesenheit von Wasserstoff entstehen also mit und entsprechend der Veränderung von α aus den Jod- bzw. Brommolekülen Wolframhaloide.

In der Arbeit von KOPELMAN und WORMER [5] wurde gezeigt, daß die Erhöhung der Wasserstoffkonzentration in dem Bereich von $\gamma = 0 \div 1$ in dem $W-Br_2-H_2$-System zu einem Zurückdrängen der Wolframbromide führt, während die Konzentration der entstandenen H- und Br-Atome praktisch überhaupt nicht beeinflußt wird. Dies wird — umgerechnet auf unser Koordinatensystem — auf Bild 8 veranschaulicht. Wasserstoff bewirkt also das Entstehen von HBr auf Kosten in erster Linie der Wolframbromide für $\gamma = 0{,}5$ und auch des Br_2 für $\gamma = 1$.

In dem $W-Br_2-J_2-H_2$-System sind die Verhältnisse besonders wegen der Bildung von zwei Haloidsäuren verschiedener Stabilität komplizierter. Wegen der viel größeren thermodynamischen Stabilität des HBr im Vergleich zu der des HJ wird die Entstehung der Wolframbromide in Systemen mit Bromüberschuß zurückgedrückt; ein wesentlicher Anteil der Bromatome bildet anstelle von Wolframbromiden HBr. Wegen der thermodynamisch kleinere Stabilität des HJ kommt es in den, an J_2 reicheren Systemen in extremen Fällen zur Herausbildung von Minimum—Maximum-Kurven, besonders bei jenen Kurven, die die Temperaturabhängigkeit der Partialdrücke von HJ und

H_2 darstellen. Ein solcher Kurvenverlauf wird in erster Linie durch den Zerfall des WJ_2 sowie durch die von der Wasserstoffkonzentration hervorgerufenen komplexen Dissoziationsgleichgewichte des J_2-Moleküls und des J-Atoms herbeigeführt.

Bei Halogenlampen, die in der Praxis Anwendung finden, wird HBr oder HJ als Gasfüllung verwendet, zu dem — in erster Linie wegen der während der langen Einbrennzeit durch die Quarzwand diffundierenden Wasserstoffatome – in geringem Überschuß noch Wasserstoff hinzugefügt wird. Es empfiehlt sich, einen zu großen Wasserstoffüberschuß, wegen der dadurch verursachten hohen Wärmeleitung, zu vermeiden. Den technisch anwendbaren Zusammensetzungen entsprechen also die Zusammensetzungen 5 und 10 vom Bild 2. Beim ersteren kann bei einer Zusammensetzung von etwa 48,5% HJ und 48,5% HBr mit 3% Wasserstoffüberschuß, beim letzteren bei einer Zusammensetzung von 66% HJ und 33% HBr mit einem Wasserstoffüberschuß von 1% gerechnet werden.

Durch die Beimengung von HJ zum HBr wird in erster Linie die Entstehung von WBr_5 unterdrückt und gleichzeitig die Entstehung von WJ_2 ausgelöst. Bei größeren HJ-Mengen überwiegt gerade in dem Korrosionsbe-

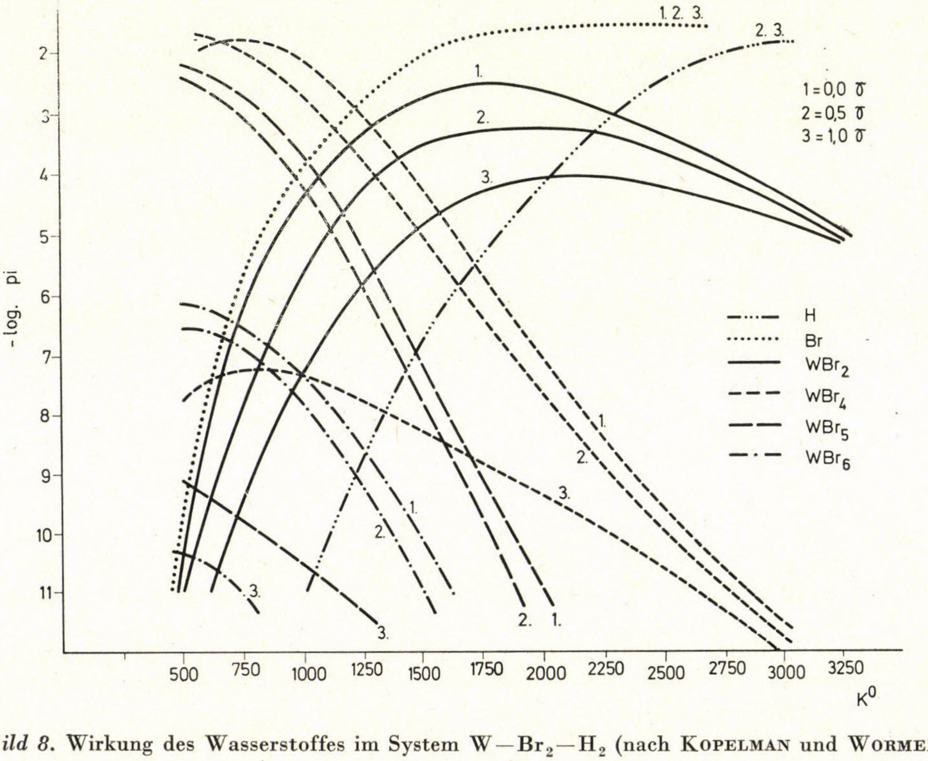


Bild 8. Wirkung des Wasserstoffes im System $W-Br_2-H_2$ (nach KOPELMAN und WORMER)

reich die Entstehung des in viel geringerem Maße korrosiven J_2, J und HJ auf Kosten des viel stärker korrosiven Br, Br_2 und HBr. Die Gleichgewichte des heißen Gasraumes und der Umgebung des Glühfadens werden, wenn wir von der Erscheinung des WJ_2 absehen, von der Erhöhung der HJ-Konzentration nicht wesentlich beeinflußt.

Bei unseren Berechnungen wurden im Gegensatz zu KOPELMAN und WORMER, die mit allen WBr_n rechneten, der Einfachheit halber nur die Entstehung der stabilsten Verbindungen (WBr_2, WBr_5 und WJ_2) berücksichtigt. Dieser Unterschied beeinflußt jedoch — wie oben gezeigt — die Erkenntnis der Tendenz der Effekte nicht wesentlich. Auch die von der Strahlung des Glühfadens verursachten photochemischen Prozesse wurden hier nicht berücksichtigt und auf diese werden wir in einer folgenden Arbeit zurückkommen.

SCHRIFTTUM

1. HANGOS, I.—JUHÁSZ, I.—VÁRKONYI, L.: *Acta Techn. Hung.* (Im Druck)
2. G. R. T.'JAMPENS, H. A. VAN DE WEIER: *Phil. Tech. Rdsch.* **27** 7, 165, (1966)
3. G. M. NEUMANN, G. GOTTSCHALK: *Z. f. Naturforschung.* **26** 5, 870. (1971)
4. J. N. YANNOPOULOS, A. PEBLER: *J. Appl. Phys.* **42** 2, 858 (1971)
5. KOPELMAN, B.—VAN WORMER, K. A.: *Illum. Eng.* (1969), 230
6. SUKARJEW, S. A.—KOKOVIN, G. A. *Zhurn. Nyeorg, Chim.*, **9** (1964), 1309
7. L. BREWER, L. BROMLEY: The Chemistry and Metallurgy of Misc. Materials. Mc.Graw-Hill. N. Y. 1945
8. JANAF thermochemical Tables. Dow Chem. Co. 1968
9. G. D. RIECK: Tungsten and its Compounds. Pergamon Press N. Y. 1967
10. G. M. NEUMANN: Techn. *Wiss. Abh. d. Osram Ges.* **10** 49 (1969)

Simultaneous Equilibriums in Halogen Lamps Containing Two Different Halogens. Equilibriums in the Case of Pure Halogens. The temperature- dependence of the equilibrium concentration of tungsten haloids was calculated from thermodynamical data for the combined use of Br and J under conditions corresponding to the gas charge of halogen-filled incandescent lamps. Generalizing the results for real conditions, it appears that the combined injection of two different halogens into the gas space, at suitably chosen conditions, goes with considerable advantages as compared to the use of one single halogen.

Одновременные равновесия в галогеновых лампах, содержащих два различных галогена. Равновесия в случае одновременного присутствии H, Br, и J_2. В рамках данной статьи ставилась задача — дать метод для изучения дисперсионных свойств, а также для оценки результатов измерений. Видно, что также зависимость модифицированного идеального смешивания можно использовать с надежностью, но проще всего применение метода функции переноса, так как вне среднего времени пребывания получается также число Пецлета, или же его обратное значение — дисперсионное число.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 115—132 (1974)

IMPROVEMENT OF THE EFFICIENCY OF FREE BLOW-OUT AXIAL FANS USING VARIABLE CIRCULATION

L. SOMLYÓDY*

[Manuscript received January 10, 1973]

Variable circulation at a given geometry has a twofold effect: a) higher outlet losses due to the distortion of the axial velocity; b) the reduction of the load acting on the blade sections at the root. The latter permits the reduction of the hub dimensions. If the hub can be diminished to a larger degree than would be necessary to compensate for the higher loss, the static efficiency could be appreciably increased. The author solves this task by using the equation of the optimisation of free blow-out deflectorless axial fans generalized for variable circulation and by the establishment of the maximum attainable diminution of the hub diameter.

Symbols

Q	air flow	m^3/s
Δp_{th}	theoretical total head rise	N/m^2
$\overline{\Delta p_{th}}$	theoretical average head rise	N/m^2
Δp_{st}	static head rise	N/m^2
$\Delta p'$	system resistance	N/m^2
p_a	atmospheric pressure	N/m^2
p_{3t}	static pressure behind the impeller	N/m^2
p_0	total head behind the fan	N/m^2
$\Delta p'_{L0-3}$	loss in the fan	N/m^2
ϱ	density	kg/m^3
u_T, u	peripheral velocity	m/s
c_{3a}	axial velocity behind the impeller	m/s
$\underline{c_{3u}}$	tangential velocity behind the impeller	m/s
$c_a = c_{0a}$	average axial velocity satisfying the continuity	m/s
r	radius	m
r_T	outer radius	m
r_H	hub radius	m
$F_T = r_T^2\pi$	cross section	m^2
D_T	outer diameter	m
η_h	hydraulic efficiency	
η_{st}	static efficiency	
l	chord length	m
t	pitch	m
c_L	lift coefficient	
c_D	drag coefficient	
α	angle of incidence	
β_∞	the angle enclosed by the resultant flow velocity and the direction of u	
$\varepsilon = c_D/c_L = \mathrm{tg}\,\delta$	profile drag to lift ratio	
$\varkappa = \sin(\beta_\infty + \delta)/\sin\beta_\infty \cdot \cos\delta$		
$R = r/r_T$	dimensionless radius	

* Dr. L. SOMLYÓDY, Guszev u. 4, 1051 Budapest, Hungary

$\nu = r_H/r_T$	diameter ratio
$\psi_{th} = \Delta p_{th}/\varrho/_2 \cdot u_T^2$	theoretical total head coefficient
$\bar{\psi}_{th} = \overline{\Delta p_{th}}/\varrho/_2 \cdot u_T^2$	theoretical average head coefficient
$\psi_{thl} = \Delta p_{th}/\varrho/_2 \cdot u^2 = \psi_{th}/R^2$	local head coefficient
$\psi_{st} = \Delta p_{st}/\varrho/_2 \cdot u_T^2$	static head coefficient
$\bar{\psi}'_{L0-3} = \Delta p'_{L0-3}/\varrho/_2 \cdot u_T^2$	loss rendered dimensionless
ψ'_d, ψ'_s	two components of the outlet loss rendered dimensionless with $\varrho/_2 \cdot u_T^2$
$\varphi = Q/F_T u_T$	flow coefficients
$\varphi^* = \bar{c}_a/u_T$	
$\varphi_3 = c_{3a}/u_T$	
$\varphi_{03} = (c_{oa} + c_{3a})/2u_T$	
n	power
m, F_1, F_2	ν-dependent characteristics
$q(\nu)$	the characteristic of the linear axial velocity distribution
$\beta(\nu) = \bar{\psi}_{th}/\psi_{th}(\nu)$	head coefficient ratio
$k_1 \ldots k_4$	coefficients of ηh

Introduction

The greater part of the total loss in free blow-out deflectorless axial fans is caused by the unutilized kinetic energy of the outflowing medium.

To diminish this, the outlet velocity must be reduced. At an unchanged rotor tip diameter this can be achieved by the selection of a smaller hub. Since this aim is to be attained by a circulation varying along the radius, unlike the well-known advantages of variable circulation, we wish to find out whether and to what degree variable circulation is suitable for increasing efficiency.

Let us assume that at $r \cdot cu$ = constant the hub diameter is as small as possible in the given case, on the basis of the so-called boundary conditions [1], for instance the Strscheletzky and the de Haller criteria, or even more frequently, considering the $(l/t \cdot c_L)_{hub}$ conditions of construction, blade calculation and separation. Let us call it the case 1.

Let us now reduce the hub diameter assuming that $r \cdot c_u \neq$ const and call it case 2. Naturally, the diameter ratio $\nu_2 < \nu_1$ is determined by the boundary conditions which are the same as with ν_1.

However, in spite of the relationship $\nu_2 < \nu_1$, it is not quite sure that the efficiency can be improved, since variable circulation due to increasing velocities toward the periphery, cause a greater outlet loss than would occur in the case of $r \cdot c_u$ = const and with the same diameter ratio.

The only way to achieve this aim is to attain a greater diameter reduction than is required to compensate for the mentioned increase in loss.

The precondition for the applicability of the method is that variable circulation should be possible at all under the starting parameters. To find the answer an approximative solution is used, whereafter the result depends on whether the diameter can be reduced (Chapter 2) and on the trend of the losses (Chapter 3).

As regards the trend of the losses, we shall not perform the examination which is usual for the optimisation of axial fans [2, 3], since our aim is only the comparison of the two cases. This, namely, permits the elimination of several uncertain factors (profile drag to lift ratio, boundary conditions at the hub) which may, anyway, be more accurately considered in a concrete case.

Finally, a numerical example will be demonstrated.

It is also to be mentioned that circulation, swirl or total head rise will figure in the paper alternately. These differ in the multiplicating factor only.

The following assumptions were made during the work:

a) that the outgoing swirling air stream completely fills out the annular surface:

b) that the radial velocity component is negligible in relation to the rest: axial velocity (which, "farther away" from the impeller c_{3a}, can be exactly calculated [4]) in the median plane of the impeller represents $c_{03a} = (c_{0a} + c_{3a})/2$, c_{0a} here is the value before the impeller [5]. Thus, all that we know about the velocity in the outlet plane is that it will be somewhere between c_{0a} and c_{3a}. Therefore, the outlet loss is pessimistically determined to be at c_{3a}, in this way setting an upper limit to the actual loss.

The determination of the velocity distribution in the outlet plane can be made more exact, both theoretically and experimentally. This work is included in the author's programme. Its result will readily fit into this paper, only the parameters of the final general loss curves will have to be corrected.

1. Assumption of the distribution of circulation

The relationships in dimensioning at $r \cdot c_u \neq$ const are only briefly treated to such depth as make it possible to judge what distribution of the circulation should be assumed on the basis of the starting parameters.

Accordingly, the differential equation describing the correlation of the axial velocity behind the impeller and the total head rise, with dimensionless quantities (provided that the characteristics before the impeller and the losses in the fan along the radius are constant and there is no pre-swirl) [4] will be:

$$2\varphi_3(R)\,\frac{d\varphi_3(R)}{dR} = \left[1 - \frac{\psi_{\text{th}}(R)}{2R^2}\right]\frac{d\psi_{\text{th}}(R)}{dR}\,. \qquad (1)$$

In the solution two auxiliary conditions, namely, continuity

$$\varphi^x = \frac{2}{1-\nu^2}\int_\nu^1 \varphi_3(R)R\,dR\,, \qquad (2)$$

and the relationship for the average head coefficient

$$\overline{\psi}_{th} = \frac{2}{(1-\nu^2)\varphi^x} \int_\nu^1 \psi_{th}(R)\varphi_3(R)RdR \tag{3}$$

must be taken into consideration. It is expedient to assume $\psi_{th}(R)$ as the form of a power function

$$\psi_{th}(R) = \psi_{th}(\nu)\left(\frac{R}{\nu}\right)^n, \tag{4}$$

where the selection of the power n is of the greatest interest. For this purpose, that approximative solution of the system of equations (1)—(3) at (4) is used [6], in which the axial velocity is assumed to be the linear function of the radius.

The same assumption is made when the losses are calculated. We shall revert to this error later.

Let, therefore,

$$\varphi_3(R) = \varphi^x\left[1 + q(\nu)\,\frac{1-mR}{1-m\nu}\right] \tag{5}$$

be where m from (2) is

$$m = \frac{3}{2}\,\frac{1-\nu^2}{1-\nu^3},$$

while $q(\nu)$ expresses the degree to which the axial velocity at the hub diminishes in relation to the average. If this is as was prescribed, from the approximative solution of equation (1) according to [6] $\varphi = Q/F_T \cdot u_T$ can be derived in the following way:

$$\varphi = (1-\nu^2)\sqrt{\frac{\varphi_3^2(1)-\varphi_3^2(\nu)}{\left\{\left[\frac{q(\nu)}{1-m\nu}\right]^2 + 2\,\frac{q(\nu)}{1-m\nu}\,F_2(\nu)\right\}\frac{F_1(\nu)}{F_2(\nu)}}}. \tag{6}$$

Here $F_1(\nu) = -m(1-\nu)$, $F_2(\nu) = [2-m(1+\nu)]^{-1}$. The expression $\varphi_3^2(1) - \varphi_3^2(\nu)$ is obtained after the substitution of the relationship (4) by the integration of (1). Thus,

$$\varphi = f[\nu, n, \psi_{th}(\nu), q(\nu)], \tag{6a}$$

and provided that also the correlation of $\psi_{th}(\nu)$ and ψ_{th} is expressed from (3), making use of (4) and (5)

$$\beta = \frac{\overline{\psi}_{th}}{\psi_{th}(\nu)} = \frac{2}{\nu^n(1-\nu^2)}\left[\frac{1-\nu^{2+n}}{2+n}\left(1+\frac{q(\nu)}{1-m\nu}\right) - \frac{1-\nu^{3+n}}{3+n}\,\frac{mq(\nu)}{1-m\nu}\right], \tag{3a}$$

on the basis of the starting parameters we shall be able to judge when and what power has to be assumed and as a result what will be the value of $q(\nu)$.

Figs 1 through 4 show the variation of function (6) along ν at different values of n and at the parameters $q(\nu)$ and $\psi_{th}(\nu)$. The former was selected to be $-0{,}2\ldots-0{,}6$ (viz. $c_{3a}(\nu)$ decreases to $80\ldots40$ per cent of the average) while the latter was assumed according to the relationship

$$\psi_{th}(\nu) = \psi_{thl}\ \nu^2 = 0{,}7 \cdot \nu^2.$$

This may be regarded as a frequent average in free blow-out machines in which $l/t \cdot c_L = 0{,}5\div0{,}8$.

The figures indicate that a total head rise along the radius strongly deviating from the constant must not be assumed unless the flow coefficients are very great. The lower limit of applicability is $\varphi \approx 0{,}15$, while for the correlation of φ and n, the following values may give a directive:

n	0,5	0,75	1,0	2,0
φ	$>0{,}15$	$>0{,}20$	$>0{,}25$	$>0{,}40$

Within these values smaller $q(\nu)$ is associated with smaller φ (the effect of the parameter $\psi_{th}(\nu)$ is similar).

The error due to the linear approximation consists of a slightly greater reduction of the axial velocity at the hub than was expected and calculated from Figs 1—4, in coordinating the starting parameters (Fig. 10). However,

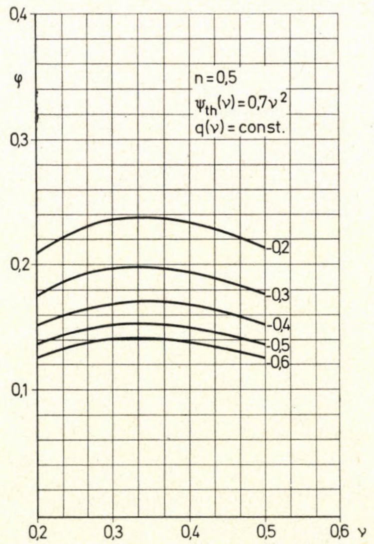


Fig. 1

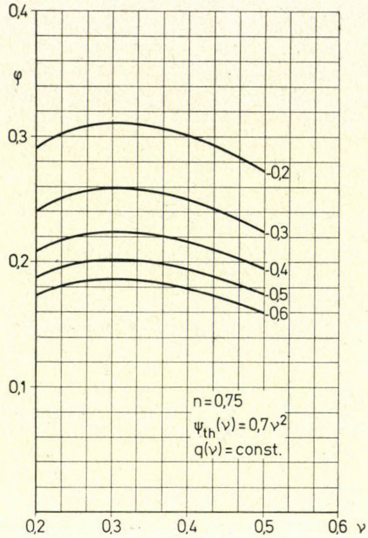


Fig. 2

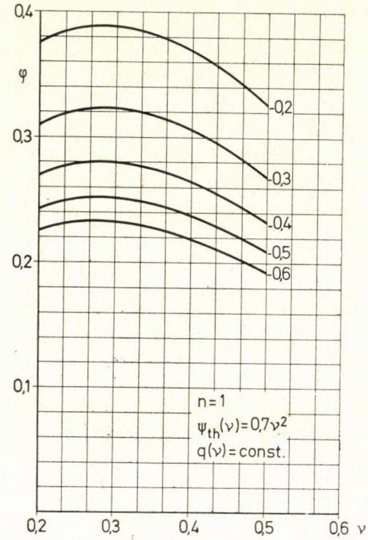


Fig. 3

the parameter $q(\nu)$ corresponding to the approximation, should be retained even in the knowledge of the exact solution, since it will help in the coordination of the results obtained now, and in the calculation of the loss.

When determining the losses, on the other hand, and wherever $\varphi_3(R)$ appears under an integral, the error caused by linear approximation is negligible, since $\varphi_{3\,\mathrm{lin}}(R)$ was 'a priori' obtained in compliance with an integral criterion.

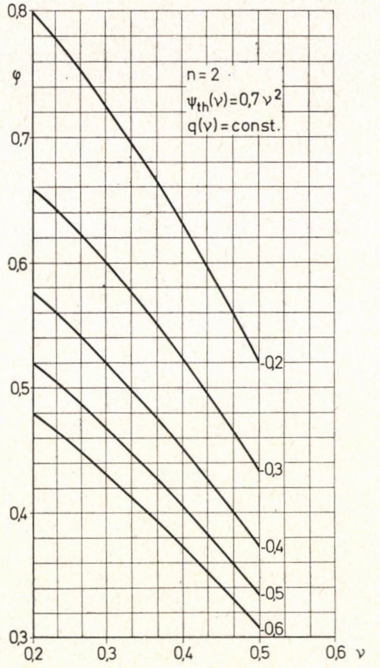


Fig. 4

2. Diminution of the hub

To establish the degree to which the diameter could be diminished, first the boundary conditions best suited to our purposes should be determined.

The most frequently used assumption in literature, particularly in the optimization of axial fans [2, 3] is the Strscheletzky swirl-core criterion. However, apart from small flow coefficients, it involves a high $l/t \cdot c_L$ and a correspondingly large number of blades, furthermore the requirement of the compatibility of isolated aerofoils and the cascade characteristics. It seems, therefore, more rational to prescribe the coefficient $l/t \cdot c_L$ which also reflects the constructional criteria. And since this coefficient is difficult to handle because it partly depends on the flow coefficients, we shall use the local head, instead. There is no need to determine numerical values. Only the identity of the values $\psi_{\text{th}_l}(\nu) = \psi_{\text{th}}(\nu)/\nu^2$ and $l/t \cdot c_L$ must be ensured in cases 1 and 2 mentioned in the Introduction.

Making use of (3a), the equation $\psi_{\text{th}_{l_1}}(\nu_1) = \psi_{\text{th}_{l_2}}(\nu_2)$ may be written down in the form of $\bar{\psi}_{\text{th}_1}/\nu_1^2 = \bar{\psi}_{\text{th}_2}/\beta(\nu_2)\nu_2^2$, whence the degree of diameter reduction

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\beta(\nu_2)}\sqrt{\frac{\bar{\psi}_{\text{th}_1}}{\bar{\psi}_{\text{th}_2}}} \tag{7}$$

can be determined. If, however, $\bar{\psi}_{th_1} = \bar{\psi}_{th_2}$ then

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\beta(\nu_2)}. \tag{7a}$$

Figure 5 illustrates this latter ratio with different power n in function of ν at $q(\nu_2) = -0{,}4$ (ν_1/ν_2 is little dependent on $q(\nu_2)$). We have indicated the curves ν_1/ν_2 pertaining to $\nu_1 =$ const as well. To what ν_2 the diameter ratio ν_1 can be diminished in the knowledge of n, is determined by the intersection of the two corresponding curves (for instance if $n = 1{,}5$ than to $\nu_1 = 0{,}6$, $\nu_2 = 0{,}3$ will pertain).

Naturally, this will satisfy the approximate equality

$$(l/t \cdot c_L)_1 \approx (l/t \cdot c_L)_2$$

only. If in any given case exact equality is aimed at, ν_1/ν_2 may slightly deviate from the value given in equation (7). For example, if $q(\nu_2) = -0{,}4$ then below

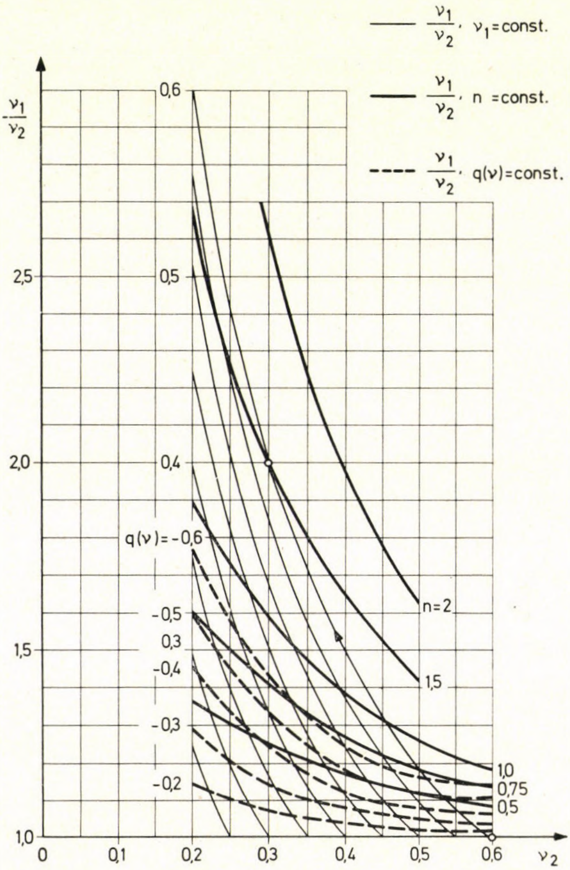


Fig. 5

$\nu_2 \approx 0{,}3$, while if $q(\nu_2) = -0{,}2$ then below $\nu_2 \approx 0{,}4$ the reduction of the hub-diameter may be greater.

In what follows a case will be examined where $\bar{\psi}_{\text{th}_1} > \bar{\psi}_{\text{th}_2}$. Here the hub can be reduced to a higher degree than in (7a). The case may be so interpreted that at ν_1 corresponding to the ratio of

$$\psi_{\text{th}_2}/\psi_{\text{th}_1},$$

a smaller ν_1 can be changed to ν_2 on the basis of Figures 5 and (7a).

Comparing these results with Figures 1—4 it will be apparent that in the case of $\varphi > 0{,}2$, ν can be diminished to a degree so much greater than the increase of the flow coefficient.

3. Losses and efficiency

Figure 6 illustrates a free blow-out machine. We wish to establish the total head rise which the fan must produce to overcome the resistance $\Delta p'$ of the system, respectively, the magnitude of $\Delta p'$ at a given power.

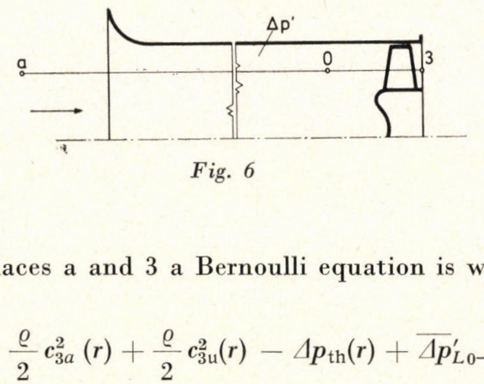


Fig. 6

Between the places a and 3 a Bernoulli equation is written:

$$p_a = p_3(r) + \frac{\varrho}{2} c_{3a}^2(r) + \frac{\varrho}{2} c_{3u}^2(r) - \Delta p_{\text{th}}(r) + \overline{\Delta p'_{L0-3}} + \Delta p'$$

where $\overline{\Delta p'_{L0-3}}$ designates the average loss between 0 and 3.

The static pressure $p_3(r)$ is obtained by the integration of the relevant Euler equation:

$$p_3(r) = p_a - \varrho \int_r^{r_T} \frac{c_{3u}^2(r')}{r'} dr'$$

bearing in mind that $p_3(r_T) = p_a$ and hence

$$\Delta p_{\text{th}}(r) = \Delta p' + \overline{\Delta p'_{L\,0-3}} + \frac{\varrho}{2} c_{3a}^2(r) + \frac{\varrho}{2} c_{3u}^2(r) - \varrho \int_r^{r_T} \frac{c_{3u}^2(r')}{r'} dr' \quad . \tag{8}$$

Since $\Delta p'$ can be expressed here with another Bernoulli equation (Fig. 6), respectively, from (8), the definition of the static head rise is as follows:

$$\Delta p' = p_a - p_0 - \frac{\varrho}{2} c_0^2 = p_a - p_{0t} = \Delta p_{st}(r_T). \tag{9}$$

Accordingly, $\Delta p_{st}(r_T)$ should be regarded as being useful and the efficiency will be

$$\eta_{st} = \Delta p_{st}(r_T)/\overline{\Delta p}_{\text{th}}.$$

The average head rise $\overline{\Delta p}_{\text{th}}$ can be determined on the basis of the relationship

$$\overline{\Delta p}_{\text{th}} = \frac{2\pi}{Q} \int_{r_H}^{r_T} \Delta p_{\text{th}}(r) c_{3a}(r)\, r dr$$

from (8):

$$\Delta p_{\text{th}} = \Delta p_{st}(r_T) + \overline{\Delta p'_{L0-3}} + \frac{\varrho\pi}{Q} \int_{r_H}^{r_T} c_{3a}^2(r) r dr +$$

$$+ \frac{\varrho\pi}{Q} \int_{r_H}^{r_T} \left[c_{3u}^2(r) - 2 \int_{r}^{r_T} \frac{c_{3u}^2(r')}{r'} dr' \right] c_{3a}(r) r dr .$$

Rendering the equation dimensionless with $\varrho/2 \cdot u_T^2$, introducing the quantities

$$\varphi = Q/F_T u_T, \varphi^x = \overline{c_a}/u_T, \varphi_3 = c_{3a}/u_T, R = r/r_T, \nu = r_H/r_T$$

and considering that in conformity with the Euler turbine equation $\psi_{\text{th}} = 2Rc_{3u}/u_T$, for the average head we arrive at the relationship

$$\overline{\psi}_{\text{th}} = \psi_{st}(1) + \overline{\psi'_{L0-3}} + \frac{2\varphi^2}{(1-\nu^2)^3} \int_{\nu}^{1} \left[\frac{\varphi_3(R)}{\varphi^x} \right]^3 R dR +$$

$$+ \frac{\overline{\psi}_{\text{th}}}{2(1-\nu^2)} \int_{\nu}^{1} \left\{ \frac{1}{R^2} \left[\frac{\psi_{\text{th}}(R)}{\overline{\psi}_{\text{th}}} \right]^2 - 2 \int_{R}^{1} \frac{1}{R'^3} \left[\frac{\psi_{\text{th}}(R')}{\overline{\psi}_{\text{th}}} \right]^2 dR' \right\} \frac{\varphi_3(R)}{\varphi^x} R dR. \tag{10}$$

Here the second member includes those losses which are comprised in the hydraulic efficiency

$$\eta_h = 1 - \overline{\psi'_{L0-3}}/\overline{\psi}_{\text{th}}$$

while the rest represent the outlet losses. The first part corresponds to the average dynamic pressure calculated with c_{3a}, the second is the loss due to swirl, ψ'_s. Apparently, since the pressure p_3 is not compensated within the system, the latter is smaller by the second member in the brackets than would be in a fan working in a tube.

Accordingly, introducing η_h, ψ'_d and ψ'_s, (10) can be written down in the following form:

$$\eta_h \overline{\psi}_{th} = \psi_{st}(1) + \varphi^2 \left(\frac{\psi'_d}{\varphi^2}\right) + \overline{\psi}_{th} \left(\frac{\psi'_s}{\overline{\psi}^2_{th}}\right) \tag{10a}$$

where

$$\left(\frac{\psi'_d}{\varphi^2}\right) = \frac{2}{(1-\nu^2)^3} \int_\nu^1 \left[\frac{\varphi_3(R)}{\varphi^x}\right]^3 R dR\,, \tag{11}$$

$$\frac{\psi'_s}{\overline{\psi}^2_{th}} = \frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_\nu^1 \left\{ \frac{1}{R^2} \left[\frac{\psi_{th}(R)}{\overline{\psi}_{th}}\right]^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \int_R^1 \frac{1}{R'^3} \left[\frac{\psi_{th}(R')}{\overline{\psi}_{th}}\right]^2 dR' \right\} \frac{\varphi_3(R)}{\varphi^x} R dR\,. \tag{12}$$

This proves that the values depend solely on the diameter ratio and the distribution $\psi_{th}(R)$ (these two characteristics and φ, namely, through the equations (1)—(3), determine the $\varphi_3(R)$ also).

From equation (10a) both the static efficiency

$$\eta_{st} = \eta_h - \frac{\varphi^2}{\overline{\psi}_{th}} \left(\frac{\psi'_d}{\varphi^2}\right) - \overline{\psi}_{th} \left(\frac{\psi'_s}{\overline{\psi}^2_{th}}\right), \tag{13}$$

and the head coefficient

$$\overline{\psi}_{th} = \frac{\eta_h - \sqrt{\eta_h^2 - 4\left[\left(\frac{\psi'_d}{\varphi^2}\right)\varphi^2 + \psi_{st}(1)\right]\left(\frac{\psi'_s}{\overline{\psi}^2_{th}}\right)}}{2\left(\frac{\psi'_s}{\overline{\psi}^2_{th}}\right)} \tag{14}$$

can be expressed (with the latter only the negative sign has meaning).

The examinations were subsequently performed for the two cases already mentioned:

1. At given efficiency (Q, $\overline{\Delta p}_{th}$, η_h and ϱ being known), given r. p. m. and given diameter we seek the attainable $\Delta p_{st}(r_T) = \Delta p'$ value, viz. the optimum efficiency according to (13):

2. the system (ϱ, Q, $\Delta p'$) as well as n, D_T are given and we seek the lowest efficiency. In this case $\overline{\psi}_{th}$ is calculated from (14) whereby $\eta_{st} = \psi_{st}(1)/\overline{\psi}_{th}$.

3.1. Efficiency at a given power

Equation [13] which is suitable for the calculation of η_{st}, after the expression [15] has been substituted into it, may be regarded as being the basic equation of the Marcinowski optimization, generalized for variable circulation.

Due to several reasons, however, we do not wish to indicate a solution, like the one known from the literature for the case if $r \cdot c_u =$ constant:

Since $\psi_{\text{th}}(R)$ may vary within wide limits, the number of parameters is greater, and their correlations and effects should be considered through the equations (1)—(3);

the selection of the boundary conditions for the hub and the profile drag to lift ratio are uncertain;

the process cannot influence the attainable absolute efficiency optimum, since it is obtained with so small φ (0,1÷0,13, [3]) that a condition of $\psi_{\text{th}}(R) \neq$ $\neq$ constant cannot even be assumed.

What is concerned, thus, is that at given ψ_{th}, $\varphi > \varphi_{\text{opt}}$ we attempt to increase the efficiency η_{st_1} at $r \cdot c_u =$ const and ν_1. This can be judged by the illustration of the coefficients (11) and (12) as a function of ν.

Applying variable circulation and reducing ν_1 to ν_2, the efficiency can surely be increased provided that

$$(\psi'_{\text{d}}/\varphi^2)_2 < (\psi'_{\text{d}}/\varphi^2)_1 = 1/1 - \nu^2$$

and

$$(\psi'_s/\overline{\psi}^2_{\text{th}})_2 < (\psi'_s/\overline{\psi}^2_{\text{th}})_1 = 1/4$$

(assuming for the time being that $\eta_{h_1} = \eta_{h_2}$).

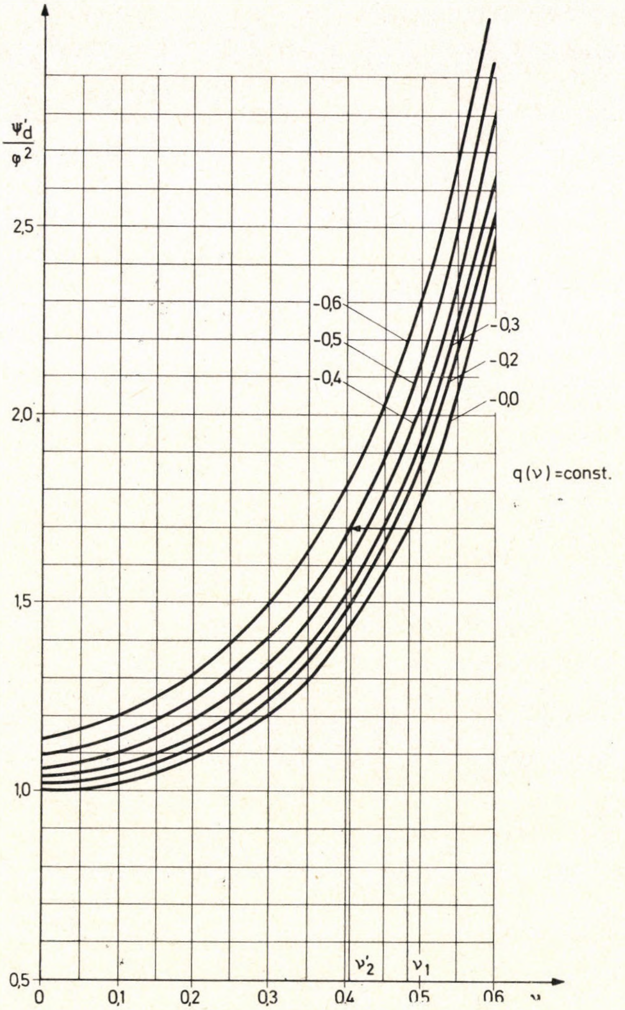
To examine the coefficients, let us substitute the relationships (4) and (5) into (11) and (12). They permit integration in the closed form and we may illustrate (ψ'_d/φ^2) respectively making use of (3a) $(\psi'_s/\overline{\psi}^2_{\text{th}})$ as a function of the diameter ratio, with the parameters n and $q(\nu)$ (Figs 7 and 8). The coordination of n and $q(\nu)$ and the starting data takes place in the manner as outlined in Chapter 1.

As the Figures show, due to the effect of variable circulation, with the same diameter ratio, the portion of the outlet loss caused by the axial velocity will increase, while the portion caused by the peripheral component will diminish.

Since from the two kinds of losses ψ'_d is considerably greater $((\psi'_d/\varphi^2) >$ $>(\psi'_s/\overline{\psi}^2_{\text{th}}))$ and since in general $\varphi > \overline{\psi}_{\text{th}}$, and ψ'_s is always favourable, it may be said that to assume $\psi_{\text{th}}(R) \neq$ const is only reasonable then if it helps to diminish ψ'_d.

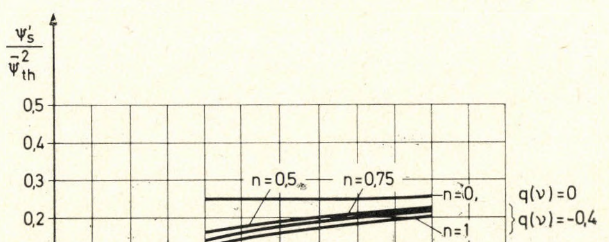
It will become clear from Figure 7 that the value ν'_2 pertaining to any ν_1 at which the losses ψ_d are equal, is easy to determine. Thus, with the parameter $q(\nu)$ the curves ν_1/ν'_2 can also be plotted in Fig. 5.

If, with interrelated n and $q(\nu)$, the curve ν_1/ν_2 goes higher than ν_1/ν'_2, the efficiency can be improved. To what degree that can be calculated from the drop in the coefficients (11) and (12) can be judged from Figs 7 and 8.



$\frac{\psi'_d}{\varphi^2}$
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
ν
-0,6
-0,5
-0,4
-0,3
-0,2
-0,0
q(ν) = const.
ν'_2
ν_1

Fig. 7



$\frac{\psi'_s}{\bar{\psi}^2_{th}}$
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
ν
n = 0,5
n = 0,75
n = 0,
n = 1
q(ν) = 0
q(ν) = -0,4

Fig. 8

Fig. 5 shows that a small $|q(\nu)|$ is favourable. Considerably higher efficiency can be attained if circulation is strongly variable but the axial velocity distribution is only slightly distorted. This occurs at high flow coefficients.

Those values of $q(\nu)$ on the other hand which pertain to the individual powers at which η_{st} may still be increased (Fig. 5) in the cases of

$$n = 0{,}5 \qquad q(\nu) > -0{,}3$$

$$n = 0{,}75 \qquad q(\nu) > -0{,}5$$

respectively $n > 1q\ (\nu)$ may be even $-0{,}6$ (of course, the permissible value of $q(\nu)$ also depends on some other considerations).

3.2. *The power required in a given system*

Although the case dealt with in the foregoing ensures easier survey, in design work this formulation is generally used.

If the best solution is obtainable at $\psi_{\text{th}}(R) = \text{const}$, fixing ν_1, $\bar{\psi}_{\text{th}_1}$ can be determined without any difficulty from equation (14), (obviously with increasing ν the load on the blade at the hub cannot be reduced in every case since with increasing (ψ_d'/φ^2) $\bar{\psi}_{\text{th}}$, too, will increase).

If we use variable circulation but do not compare cases 1 and 2, the following procedure is carried out:

a) From Figs 1—4 we determine what n may be assumed and approximately what $q(\nu)$ it will yield.

b) From Figs 7 and 8 we read the coefficients pertaining to various diameter ratios, and estimate η_h.

c) On the basis of (14) we determine $\bar{\psi}_{\text{th}}$ in the function of ν then establish the final hub dimensions.

d) We resolve the system equations (1)—(3) (this will require iteration) and check upon (11) and (12). Should they appreciably deviate from the values assumed in b), the procedure must be repeated all over again.

The method, accordingly, is more general than had been aimed at in the Introduction, and applicable even without the comparison. If $\nu_1 = \nu_2$ and we aim at reducing $(l/t \cdot c_L)_{hub}$ (this would naturally go with a drop in efficiency). In another case ν_1 might be greater than ν_2 and $(l/t \cdot c_L)_{hub_1} > (l/t \cdot c_L)_{hub_2}$ etc.

If we are also interested in the degree of efficiency increase, calculation will take place in the following sequence (see the numerical example):

a) The value of ν_1 and $\bar{\psi}_{\text{th}_1}$ is determined ($\psi_{\text{th}}(R) = \text{const}$).

b) In possession of the values, substituting (14) ν_2 is established from (7). Since β as well as $(\psi_d'/\varphi^2)_2$ and $(\psi_s'/\bar{\psi}_{\text{th}}^2)_2$ depend on ν_2, either iteration is necessary or the determination of the function $\nu_1 = f(\nu_2)$ from (7) in such a way that the function's point of intersection with the known straight line $v_1 = \text{const}$ will yield the value sought for.

c) Otherwise the calculation process is the same as described in the previous paragraph.

3.3. *The hydraulic efficiency*

So far we disregarded the examination of η_h and assumed that $\eta_{h_1} = \eta_{h_2}$. The question arises whether this assumption was erroneous.

The quantity η_h includes four types of loss: frictional, secondary, annulus and tip-clearance loss. The first two, sometimes even the third, are considered with a drag coefficient.

If in the calculation of the blading the same profile and the same points are selected in cases 1 and 2, the factors of the frictional and secondary losses will be identical and the coefficient for the other two losses may also be regarded to be nearly unchanged.

In this way, without determining the numerical values, we may safely assume that the resultant profile-drag-to-lift ratio characterizing the said losses (together with the $\varkappa$ factor) will be identical in both cases.

If so, the average loss $\overline{\psi'_{L0-3}}$ [4] will be

$$\overline{\psi'_{L0-3}} = \frac{2}{\varphi} \int_v^1 \frac{l}{t} \frac{\Sigma c_D \varphi_{03}^2}{\sin^3 \beta_\infty} R dR .$$

This, making use of the basic equation $l/t \cdot c_L$ and the expression of $\sin \beta_\infty$, furthermore, with dimensionless quantities, can be written down in the following form:

$$\overline{\psi'_{L0-3}} = \frac{2}{\varphi} \int_v^1 \frac{\varepsilon}{\varkappa}(R) \psi_{\text{th}}(R) \left[\varphi_{03}^2(R) + \left(R - \frac{1}{4} \frac{\psi_{\text{th}}(R)}{R} \right)^2 \right] dR .$$

Here

$$\varepsilon = \Sigma c_D / c_L, \; \varkappa = \sin(\beta_\infty + \delta) / \sin\beta_\infty \cos \delta .$$

If $\varepsilon/\varkappa(R) = \text{constant}$, the hydraulic efficiency can be expressed by the following term:

$$\eta_{\text{h}} = 1 - \frac{2}{\varphi} \frac{\varepsilon}{\varkappa} \int_v^1 \frac{\psi_{\text{th}}(R)}{\overline{\psi}_{\text{th}}} \left[\varphi_{03}^2(R) + \left(R - \frac{1}{4} \frac{\psi_{\text{th}}(R)}{R} \right)^2 \right] dR$$

subsequently, with slight transformations:

$$\eta_h = 1 - \frac{\varepsilon}{\varkappa} \left[k_1 \varphi + k_2 \frac{1}{\varphi} - k_3 \frac{\overline{\psi}_{\text{th}}}{\varphi^x} + k_4 \left(\frac{\overline{\psi}_{\text{th}}}{\varphi} \right)^2 \varphi \right] \tag{15}$$

where $k_1 \ldots k_4$ represent the generalizations of the Marcinowsky constants [2],

$$k_1 = \int_\nu^1 \frac{2}{(1-\nu^2)^2} \frac{\psi_{\mathrm{th}}(R)}{\overline{\psi}_{\mathrm{th}}} \left[\frac{\varphi_{03}(R)}{\varphi^x}\right]^2 dR\,, \; k_2 = \int_\nu^\nu 2R^2 \frac{\psi_{\mathrm{th}}(R)}{\overline{\psi}_{\mathrm{th}}}\, dR\,,$$

$$k_3 = \int_\nu^1 \left[\frac{\psi_{\mathrm{th}}(R)}{\overline{\psi}_{\mathrm{th}}}\right]^2 dR\,, k_4 = \int_\nu^1 \frac{1}{8R^2}\left[\frac{\psi_{\mathrm{th}}(R)}{\overline{\psi}_{\mathrm{th}}}\right]^3 dR\,.$$

These, like (11) and (12), can be determined and illustrated as a function of ν. Since, in either case φ, $\overline{\psi}_{\mathrm{th}}$ are identical and $(\varepsilon/\varkappa)_1 \approx (\varepsilon/\varkappa)_2$, the trend of η_h is determined by the coefficients k. These are shown in Figur 9 at $\psi_{\mathrm{th}}(R) = \mathrm{const}$, further at $n = 1$, $q(\nu) = -0{,}4$. It is obvious that the value of k_2, which plays the most important role, remains nearly unchanged and only k_3 from the remaining part changes in an unfavourable manner.

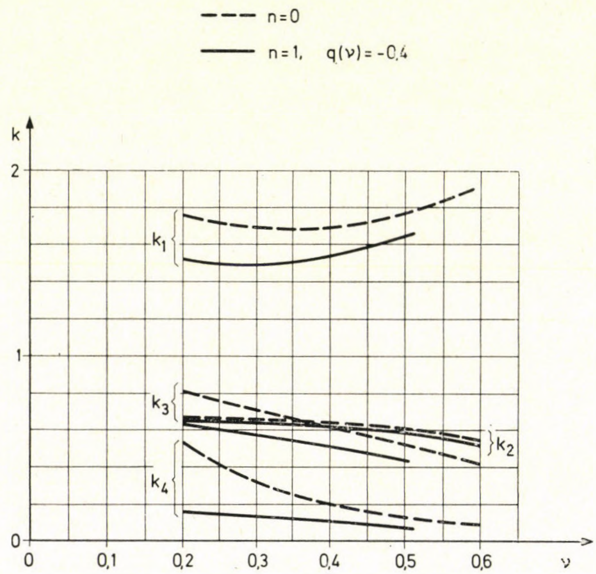


Fig. 9

Thus due to the diameter reduction, η_h, increases mostly to a slight degree only, and assuming η_h to be constant, causes no error, whatsoever.

On the basis of equation (15) we may also establish that since η_h depends on ψ_{th} (10a) and (15) should be solved together, or else iteration should be applied. As, however, this dependence is rather loose and since η_h can be calculated with a fair approximation right at the outset, neither has been done.

4. Numerical example

Let the design data $\varphi = 0{,}279$, $\psi_{st}(1) = 0{,}090$ be given as the dimensionless characteristics of a Nordisk- type wall- mounted fan [7], and let us look into the matter according to III.2. and see what efficiency increase can be attained by the application of variable circulation.

With this end in view, let us first estimate η_h, $\eta_{h_1} = \eta_{h_2} = 0{,}9$ and solve equation (14) at various diameter ratios. In the examples where $\psi_{st}(1)$ is given, $(l/t \cdot c_L)_{hub} = f(\nu)$ has a minimum (see [14]), and obviously, for a boundary condition the smallest $(l/t \cdot c_L)_{hub}$ value is chosen. This is obtained at $\nu_1 = 0{,}6$ when

$$\overline{\psi}_{th_1} = 0{,}3429, \qquad \eta_{st_1} = 0{,}2620$$

$$\psi_{th_1}(\nu_1) = 0{,}9524 \qquad (l/t \cdot c_L)_1 = 0{,}8650$$

Subsequently, a variable circulation characterized by the $n = 1$ power is assumed to which, on the basis of Fig. 3 — considering that to

$$\psi_{th_2}(\nu_2) > 0{,}7\,\nu_2^2 - q(\nu_2) \simeq -0{,}5$$

will pertain, then reading the values of (3a), (11), (12) from Figs 5, 7 and 8 at $\nu_2 = 0{,}3$; 0,35 0,40, and using (14) in the manner outlined 3.2. — ν_2 may be determined as $\nu_2 = 0{,}33$. The further characteristics are

$$(\psi_d'/\varphi^2)_2 = 1{,}48, \qquad (\psi_s'/\overline{\psi}_{th}^2)_2 = 0{,}165$$

$$\beta(\nu_2) = 2{,}31, \qquad \overline{\psi}_{th_2} = 0{,}2377$$

$$\eta_{st_2} = 0{,}3779$$

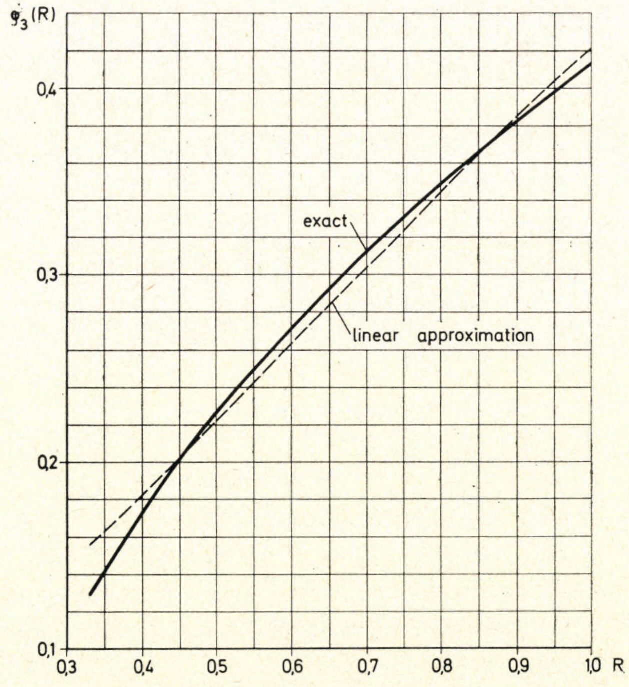


Fig. 10

In possession of φ, $\overline{\psi}_{th_2}$, ν_2 with the values $q(\nu_2)$, $\beta(\nu_2)$ as the 0th approximation, the system of equations (1)—(3) can be solved.

The exact and linear distribution $\varphi_3(R)$ obtained as a result, is illustrated in Fig. 10. With the exact solution from (11), (12), (3), the following values are obtained:

$$(\psi_d'/\varphi^2)_2 = 1{,}4776, \qquad (\psi_s'/\overline{\psi}_{th}^2)_2 = 0{,}1765$$

$$\beta(\nu_2) = 2{,}3329.$$

These are used to determine $\overline{\psi}_{th_2}$:
$\overline{\psi}_{th_2} = 0{,}2400$
while the efficiency
$\eta_{st_2} = 0{,}3769.$

The agreement with the starting data is so good that there is no need to repeat the calculations.

The method in this case has made it possibe to increase the static efficiency by more than 11 per cent.

REFERENCES

1. Hausenblas: Vergleich der verschiedenen Grenzbedingungen für den Innendurchmesser von Axialgebläsen. *Heizung, Lüftung, Haustechnik* **24** (1963), No. 5.
2. Marcinowski, H.: Optimalproblem bei Axialventilatoren. *Voith Forschung und Konstruktion.* (1959) Heft 5.
3. Protic, Z.: Beitrag zur optimalen Auslegung freiausblasender, leitradloser Axialventilatoren. Doctor's Thesis. Berlin 1961.
4. Somlyódy, L.: Axialventillátorok tervezése és jelleggörbeszámítása (Design of Axial Fans and Calculation of Characteristic Curves). Doctor's thesis, Budapest 1971.
5. Ruden, P.: Untersuchungen über einstufige Axialgebläse. *Luftfahrt-Forschung* **14** (1937).
6. Somlyódy, L.: Wirkung der Drallverteilung auf die Kenngrößen von Axialventilatoren. *Per. Polytechnica* **15** (1971), No. 3.
7. *Nordisk Catalog*, 1970, No. 16.

Verbesserung des Wirkungsgrades von frei ausblasenden Axiallüftern durch veränderliche Zirkulation. Die Verwendung von veränderlicher Zirkulation bei gegebener Geometrie hat eine zweifache Wirkung: a) wegen der Verzerrung der axialen Geschwindigkeit erhöht sich der Austrittsverlust; b) die Belastung der Schaufelquerschnitte am Schaufelfuß sinkt. Letzteres ermöglicht eine kleinere Nabenabmessung. Wenn die Nabe stärker verkleinert werden kann, als es die Kompensation der Verluststeigerung nach a) erfordert, so kann der statische Wirkungsgrad bedeutend erhöht werden. In der Arbeit wird diese Aufgabe durch die für veränderliche Zirkulation verallgemeinerte Optimierungsgleichung von frei ausblasenden, leitschaufellosen Axialventilatoren, sowie durch Berechnung der erzielbaren Nabenverkleinerung gelöst.

Повышение кпд аксиальных вентиляторов со свободным сдувом применением переменной циркуляции. Применение переменной циркуляции при данной геометрии дает двоякий эффект: а. вследствие искажения аксиальной скорости возрастают потери выхода; б. падает нагрузка сечений лопаток у основания. Вследствие чего становится возможным брать меньший размер ступицы. Если размер ступицы можно уменьшить в значительной мере, чем это необходимо для компенсации роста потерь по пункту а., тогда в значительной мере можно увеличить статический кпд. В данной работе задачу решают с помощью уравнения, обобщенного для случая с переменной циркуляцией задачи оптимума аксиальных вентиляторов со свободным сдувом и без направляющих, далее с определением достижимого уменьшения размера ступицы.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 133—142 (1974)

CRITICAL SUMMARY OF THE DESIGN METHODS OF FORM-INDEPENDENT THIN TRIPLET SYSTEMS

P. KALLÓ*

[Manuscript received January 18, 1974]

Following a critical review of the known methods used for the data determination of triplet- form independent thin systems, a new simple algorithm readily adaptable for computerization is described for the focal length and other data of the components, as well as their relations. The correctness and systemization plus detection capacity of the new algorithm is evidenced first by already analyzing well-known triplets. Thereafter the applicability of the new algorithm will be proved by a numerical example, with reference to the possibilities of generalization and further fields of application.

1. Introduction

József PETZVAL and Harold Denis TAYLOR, in the late 19th century, were the first to create objectives on the basis of deliberate calculations. Although PETZVAL's objective was designed earlier, TAYLOR's construction had a wider concept and was far more suitable for generalization.

TAYLOR patented his triplet about 80 years ago and, because of its simplicity and diversity, many of its analysis alternatives are widely known by now. However, the triplet theory can still not be regarded as settled. This can be well illustrated by the critical review of some well-known methods used for the determination of the data of the form-independent thin systems of triplets, and by describing a new technique.

2. Critical review of some known methods

The "uniformized" symbols hence used for the form-independent thin systems of triplets are summarized in Table I, while the structure of the methods studied [1—7], each, are presented in Table II, including the characteristics of the new procedure suggested by us in the last column. In a manner justified by the modest extent corresponding to the topic, Table II does not aim at completeness but rather at a concise, rapid, high-quality survey.

* Dr. P. KALLÓ, Kapy u. 26/b, 1025 Budapest, Hungary.

Table I

"Standardized" symbols of the form-independent thin system of a triplet

For the Lenses (Components)			
Focal distance	$f_1 = \frac{1}{\varphi_1}$	$f_2 = \frac{1}{\varphi_2}$	$f_3 = \frac{1}{\varphi_3}$
Refractive index	n_1	n_2	n_3
Abbe number	V_1	V_2	V_3
Thermo-optical coefficient	Q_1	Q_2	Q_3

Height of incident marginal ray

Distance of object and image

Distance of aperture stop from the middle lens

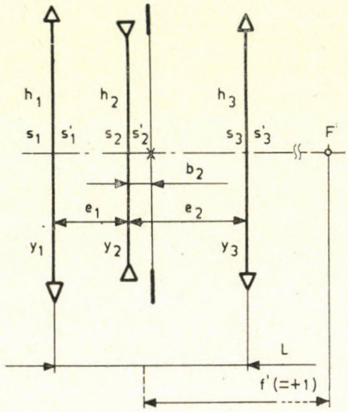
Air spaces

Height of incident central ray

For the Entire Triplet

Overall length

Focal distance



Field angle	$2\beta_{c1}$
Relative aperture $\left(\text{geometrical: } \frac{2h_1}{f'} = \frac{1}{\Phi_R}\right)$	Φ_R
Petzval curvature	$\Delta P'$
Sum of powers: $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$	Φ
Aperture stop parameter	$\varkappa$
(Form-independent condition of) distortion	$\Delta \mathrm{T}'$
Longitudinal color aberration	$\Delta s'$
Transversal color aberration	$\Delta Y'$
Equivalent Abbe number	V
Longitudinal thermo-optical aberration	$\Delta q'$

In our opinion, instead of the often lengthy derivations and the heterogeneity of unjustified or questionable assumptions and indications, the structure of Table II illustrates the objectives (4 in Table II) and mentality (1, 2 and 3 in Table II) of authors [1—7 and 16] in a sufficiently complete manner.

Based on the correlations of the data in Table II (hence only the serial number of the Table and its relevant points will be referred to), as well as in our own opinion, the following statements may be made:

Table II

Construction of the known methods we have studied, suitable for the determination of the thin system of triplets

Correlations, characteristics, objectives	Related to	Condition equation, notion, parameter, data, etc	Berek [1]	Kirchhof [2]	Flügge [3]	Argentieri [4]	Malý [5]	Havliček [6]	Volosov [7]	Kalló [16]
1. Left-side of the condition equations	1. The whole triplet	1. f'	x	x	x	x	x	x	x	x
		2. $\Delta P'$	x	x	x	x	x	x	x	0
		3. $\Delta s'$	x		x	x		x	x	0
		4. $\Delta Y'$	x			x		x	x	0
		5. $\Delta T'$	x			x	x	x	x	0
		6. $\Delta q'$							x	(0)
		7. L, (e_1, e_2)	x	x			x	x^0		x
		8. Φ					x			0
2. Considered as given (value "assumed")	1. The whole triplet	1. h_1,(Φ_R)								x
		2. $L(\sim 2\beta_c)$					x			x
		3. s'_3							(x)	x
		4. Φ					x			0
		5. $\Delta P'$			x			x		0
		6. V			x	x		(x)		0
	2. The lenses	1. φ_1, (φ_3)		x						0
		2. φ_1/φ_3					x	x		0
		3. h_2/h_1	x^0		x					0
		4. h_3/h_1			x					0
		5. $\varkappa$	x, "x"	x^0	x	x	"x"	"x"	x	0
		6. b_2				x				0
		7. V_1	x^0							0
		8. V_1/V_3						(x)		0
3. Selected as material optical glass types	2. The lenses	1. n_1	x	x	x	x	x	x	x	0
		2. n_2	x	x	x	x	x	x	x	0
		3. n_3	x	x	x	x	x	x	x	0
		4. V_1		0	x	x	x	(x)	0	0
		5. V_2		0	x	x		x	0	0
		6. V_3		0	x	x		x	0	0
		7. Q_1							x	(0)
		8. Q_2							x	(0)
		9. Q_3							x	(0)
4. Determined	2. The lenses	1. f_1, (φ_1)	x		x	x		x^0	x	x^0
		2. f_2, (φ_2)	x	x^0	x	x	x	x	x	x
		3. f_3, (φ_3)	x	x^0	x	x	x		x	x^0
		4. e_1	x	x	x	x	x	x	x	x
		5. e_2	x	x	x	x	x	x	x	x
		6. h_2				x	x	x	x	x
		7. h_3	x			x	x	x	x	x
		8. V_2	x	0			x		0	0
		9. V_3	x	0			x		0	0

Note

x^0 employed as a parameter
its consideration is not regarded as (absolutely) necessary
0 its assumption or determination is omitted on the basis of the arguments offered
"x" position of the aperture stop is considered as coincident to that of the central lens

KIRCHHOF [2] and FLÜGGE [3] start out from an insufficient number of condition equations (2—11), and consider the stop parameter $\varkappa$ (2—2.2.5) as an independent variable; they assume a relatively high number of data on the components, and regard the determination of the form-independent thin system data as nothing but an indispensable starting point [2, 3] for bending the thin system. MALÝ, on the other hand [5], starts from a greater number of condition equations, assuming two data on the components (2—2.2.2 and 2—2.2.5), and his method has the powerful advantage of nomograms easy to survey and handle (LEEUWEN published [17] a similar graphic method somewhat different, however, in its beginning). The algebraic methods selected by BEREK [1] and ARGENTIERI [4] are built on 6 and 5 condition equations, respectively, and may be considered as exact only by assuming several data in advance.

Among the methods we have studied, that by VOLOSOV [7] seems to be the most complete and circumspect one. Its exactness, however, is due to selecting 3 refractive indices in advance (2—3.2.1...3.2.3) and its adherence, in a traditional or not sufficiently justified manner, to the stop parameter impossible to predetermine (2—2.2.5). The serious drawback of the method suggested by VOLOSOV is that the focal length (2—4.2.1...4.2.3) and air space (2—4.2.4, 2—4.2.5) values are given as the final results of rather long calculations and, if for some reason or other, a modification is needed, the entire calculation must be repeated several times by successive approximations until the required result is achieved.

Our idea, as far as its final result and not its start is concerned, is best approximated by the method of HAVLIČEK who, without derivation and by assuming $\varphi_3 = \alpha\varphi_1$ (2—2.2.2), $e_1 = \alpha d$, and/or $e_2 = d$, has published [6] the following relation (2—4.2.2):

$$\varphi_2 = \frac{1 - \varphi_1(1 + \alpha) + \alpha d \varphi_1^2(1 + \alpha)}{1 - \alpha d \varphi_1(2 - \alpha d \varphi_1)} . \tag{1}$$

Eq. (1), even without the starting points required for the selection of the α and d values, is rather simple and can readily be manipulated from practical design purposes, and may be advantageously employed for the determination of the relations of fundamental data (φ_1, φ_2, φ_3 and e_1, e_2).

Based on the structural correlations of the data set in Table II as well as on the above considerations, the following conclusions may be arrived at on methods [1—7].

Determination of the thin system data of triplets in all the hitherto known versions including our own has been an underdefined problem (the number of unknowns exceeds that of the condition equations). The difference between two methods depends, in each case, on the way the author has attempted to resolve the above contradiction, whereto the following possibilities exist:

(1) Expression of further condition equations with questionable justification and accuracy (e.g. 2—1.1.6 [7], 2—1.1.8 [5], 2—1.1.5 [1], [4—7]).

(2) Assumption of data with a limited validity for the entire thin system of the triplet and with no starting point for the predetermination of the size involved (e.g. 2—2.1.4 [5], 2—2.1.5 [3], [6], 2—2.1.6 [3], [4], etc.), or those applying to the individual components (arbitrary, or the most likely successful one since it is supported by extensive design experiences), like 2—2.2.1 [2], 2—2.2.2 [5], [6], 2—2.2.5 [1—7], etc.

(3) In the case of suitable selection possibilities, the application of a parameter type expression permitting a satisfactory survey (data indicated by x° in Table II).

(4) Graphic illustration (similar to the above paragraph), or the use of nomograms [2], [5], [17].

3. Description of a new method

In the following paragraphs an attempt will be made to define and solve the problem of how to determine the form-independent thin- system data of a triplet according to our interpretation.

3.1. *As for the definition*:

3.1.1 To begin with, data applying only to the entire thin system of the triplet or derived therefrom (f', L, $1{:}\Phi_R$, s'_3) may be given or assumed.

3.1.2 As for a primary aim, "it is always expedient to select the range of solutions in the vicinity of the minimum objective length and the maximum focal distance of the components . . ., since these are the most efficient parameters that critically govern the possibilities of balancing the individual aberrations" [7].

3.2. *As for the solution*:

3.2.1 Exposition method: instead of the algebraic solution of the equation systems often expressed "artificially" in an exact form (see 1 and 2 at the end of the previous Para), which occasionally leads to irrealistic results [4], rather the parametric form far more suitable for characterizing the properties of underdefined problems is chosen. In this case, when assessing the set of solutions, it will be possible to select in advance, then make our choice from among the optimum solution alternatives not distorted or constricted by any presupposed conditions or data, according to several aspects (such as those under 3.1.2, limitations of the available glass stock, etc.).

3.2.2 Due to their speed, computers widely employed nowadays even in the practice of optical design will be the means of solution, excellently suitable for selection as well (see 3.2.1).

3.3. *The algorithm of the method suggested*

Starting from the data in the last column of Table II, and by using the condition equations of a build-up indicated there, the following new algorithm was obtained [16]:

$$f_2 = -\frac{f_1 f_3[(L-f_1)(f_3-s_3') + s_3' f_3]}{[f_1(f_3-s_3') - f_3]^2}, \tag{2}$$

which satisfies all the requirements and expectations specified earlier.

4. Summary of the experiences collected by using the new algorithm

Correctness of the new algorithm, in the case of triplets of different L, s_3'; f_1, f_3 data, will be evidenced now by numerical examples. Investigations have been conducted within the ranges

$$L = 0{,}15\ldots 1{,}00 \qquad f_1 = 0{,}30\ldots 0{,}90$$

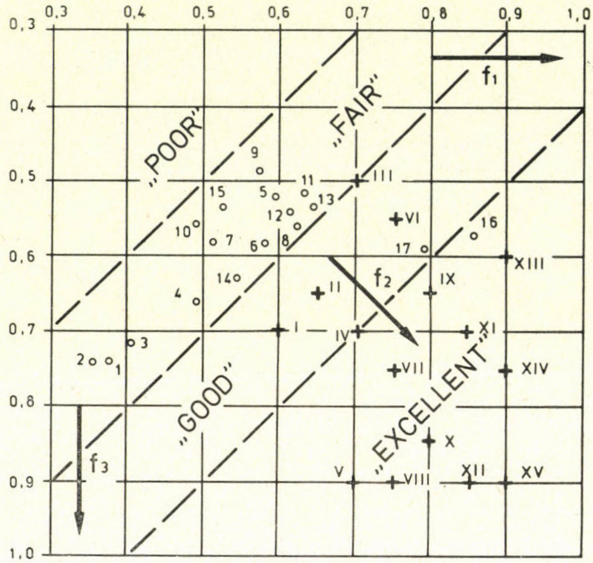
$$s_3' = 0{,}50\ldots 1{,}20 \qquad f_3 = 0{,}30\ldots 0{,}90$$

by selecting sufficiently small steps. Because of the great amount of calculations, a computer was employed. Table III presents the "superimposed X-ray pattern" of the f_2 values depending on the size of the focal distances f_1 and f_3, pertaining to the L and s_3' values given in advance, as well as the data of the triplets obtained from the sources indicated. Regardless of the fact that each point of the graph in Table III was determined with the different L and s_3', taking values shown in the lower part of the Table into account, the set of the $|f_2|$ values obtained by assuming any L and s_3' will always show the same main characteristic, that is, a monotonously increasing trend towards the right-side lower corner, together with the f_1 and f_3 values. This has inspired the somewhat arbitrary categorization in Table III and the recognition that, according to the objectives under 3.1.2 (in the case of given L and s_3'), the solutions considered as optimum must be located within the right-side lower domain ("excellent") of the field of Table III.

From among the optimum focal length triads of a value specified by the overall length L and the last sectional distance s_3' a solution is then selected

Table III

Location of the ("o") triplets known from literature and patents, and of the ("+") triplets calculated by means of the new algorithm on the basis of $L = 0{,}29$, $s_3' = 0{,}84$, and $h_1 = 0{,}17$, in the f_1 & f_3 field



No	Designer	Source	$\sim\Phi_R$	$\sim 2\beta_c^\circ$	L	s_3'	f_2
1	Richter R.	[9], E. P. 364994	4	48	0,184	0,820	−0,290
2	Malý M.	[5]	4	45	0,200	0,836	−0,280
3	Tronnier, A. W.	[8], USA, 1,987,878	5	54	0,180	0,900	−0,300
4	Kalló, P.	[12]	3,5	48	0,220	0,880	−0,350
5	Flügge, J.	[3]	—	—	0,240	0,860	−0,334
6	Havlíček, F. J.	[6]	3,5	50	0,230	0,890	−0,362
7	Havlíček, F. J.	[6], (Tessar!)	2,8	50	0,264	0,810	−0,322
8	Argentieri, D.	[4], I. Numerical exampl.	—	—	0,269	0,900	−0,352
9	Argentieri, D.	[4], II. Numerical ex.	—	—	0,280	0,900	−0,296
10	Argentieri, D.	[4], IV. Numerical ex.	—	—	0,278	0,780	−0,297
11	Hudson, L. et. al.	[8], USA, 2,818,777	2,8	40	0,289	0,840	−0,339
12	Lee, H. W.	[3], Brit. P., 155640	3	43	0,281	0,850	−0,348
13	Brendel, T.	[8], USA, 2,731,884	2,8	40	0,298	0,820	−0,355
14	Sandback, I. C.	[8], USA, 2,720,816	2,3	34	0,363	0,667	−0,347
15	Warmisham, A.	[8], USA, 2,270,234	2,3	34	0,360	0,740	−0,287
16	Havlíček, F. J.	[6]	2	42	0,500	0,680	−0,466
17	Litten, W. et. al.	[8], USA, 2,503,751	2	30	0,506	0,782	−0,400

(on the basis of the almost identical components relative apertures, restrictions set by the data of the glass stock available, aperture- stop- positioning possibilities, etc.) which, subsequently, may be regarded as a starting point for the next design phases. Execution is by means of the following relations, with $h_1 = f'/2\Phi_R$, that can be readily calculated if the relative aperture of the triplet that had been given, was taken into consideration [16]:

$$e_1 = f_1 + f_2 - \frac{f_1 f_2 (f_3 - s_3')}{f_3}, \tag{3}$$

$$e_2 = L - e_1, \tag{4}$$

$$h_2 = \frac{h_1}{f_1}(f_1 - e_1), \tag{5}$$

$$h_3 = \frac{h_2 s_3'}{s_3' + L(f_3 - s_3')/f_3}. \tag{6}$$

5. Numerical example

Variants 11, 12 and 13 in Table III are characterized by almost identical L and s_3' data. Let us now examine this case by using the new method described above. Let us consider the following data as given:

$$L = 0{,}29 \quad s_3' = 0{,}84 \quad (1 : \Phi_R \approx 1 : 3) \quad h_1 = 0{,}17. \tag{7}$$

Since, as was verified above, nothing but the data of the "excellent" category thin systems deserve determination, algorithm (2) was applied only to the 0,6...0,9 values of f_1 and f_3 (with 0,05 steps). The other data of thin triplets conforming to the requirements indicated by (7) were determined by making use of relations (3...6). For the sake of careful selection, the relative apertures of the individual components as related to the marginal rays Φ_{A1}, Φ_{A2}, Φ_{A3} have also been calculated. Table IV presents the data of the apparently "most optimum" alternatives.

In order to attempt completeness, although neglecting further calculations, Table V presents the constructional data and residual aberrations of a triplet, designed by using the data of version No VI in Table IV. The relative aperture could be improved to 1 : 2,6 during correction. (It will have to be noted here that a precondition of realizing the triplets listed in the second part of Table IV is to produce new optic materials with much better material constants than those displayed at present.) Finally, it should be mentioned that, by using algorithm (2) in extreme cases, the results obtained were still more

Table IV

Characteristics of the form-independent system of certain triplets calculated from $L = 0{,}29$, $s_3' = 0{,}84$, $h_1 = 0{,}17$, by using the new algorithm

$L = 0{,}290$, $s_3' = 0{,}840$, $h_1 = 0{,}170$

No	f_1	f_2	f_3	e_1	h_2	e_2	b_2	Φ_{A1}	$\|\Phi_{A2}\|$	Φ_{A3}
I	0,600	−0,431	0,700	0,117	0,137	0,173	+0,043	1,76	1,58	2,45
II	0,650	−0,434	0,650	0,134	0,136	0,156	+0,028	1,91	1,61	2,27
III	0,700	−0,360	0,500	0,169	0,129	0,121	0,000	2,06	1,40	1,75
IV	0,700	−0,497	0,700	0,134	0,138	0,156	0,026	2,06	1,81	2,45
V	0,700	−0,626	0,900	0,103	0,145	0,187	+0,051	2,06	2,16	3,15
VI	0,750	−0,417	0,550	0,168	0,132	0,122	0,000	2,21	1,58	1,92
VII	0,750	−0,565	0,750	0,134	0,140	0,156	+0,024	2,21	2,02	2,62
VIII	0,750	−0,673	0,900	0,111	0,145	0,179	+0,043	2,21	2,32	3,15
IX	0,800	−0,520	0,650	0,159	0,136	0,131	+0,029	2,35	1,91	2,27
X	0,800	−0,680	0,850	0,127	0,143	0,163	+0,029	2,35	2,38	2,97
XI	0,850	−0,591	0,700	0,158	0,138	0,132	0,000	2,50	2,14	2,45
XII	0,850	−0,767	0,900	0,127	0,145	0,163	+0,027	2,50	2,65	3,15
XIII	0,900	−0,526	0,600	0,183	0,136	0,107	−0,019	2,65	1,95	2,10
XIV	0,900	−0,670	0,750	0,158	0,140	0,132	0,000	2,65	2,39	2,62
XV	0,900	−0,814	0,900	0,135	0,145	0,155	+0,020	2,65	2,82	3,15

Relevant data of the thin triplets in Table III (No 11, 12, 13)

11	0,626	−0,339	0,510	Hudson, L. et. al.	1,74	1,21	1,70
12	0,614	−0,348	0,535	Lee, H. W.	1,86	1,34	1,91
13	0,637	−0,355	0,530	Brendel, T.	1,77	1,36	1,90

favourable: a triplet of 1 : 1,9 relative aperture with a $2 \times 20°$ field angle, and a triplet of 1 : 3,2 relative aperture with a field angle of $2 \times 30°$ could be designed.

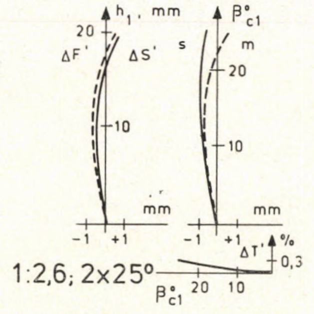
6. Conclusions

A method entirely different from the starting points and techniques found and reviewed in the literature has been described for designing the form-independent thin system of triplets, whose simplicity, speed, and capacity to detect the correlations of the complete problem scope was illustrated by a numerical example as well. The new method is of conceptual importance, with a validity far exceeding the triplet. By introducing and utilizing the idea of equivalent simplet [14], it is suitable for exploiting the possibilities offered by

Table V

Constructional data and graphs of residual aberrations of a triplet designed by starting from the form-independent thin system obtained by means of the new algorithm

r, mm	d, e, mm	n_e/V_e
+44,79		
	8,18	1,70/56,2
+255,7		
	6,00+4,40	
−57,27		
	1,94	1,62/31,0
+51,74		
	8,08	
+296,6		
	4,40	1,79/50,5
−51,85		



triplet modifications (Tessar, Heliar, etc.), and is of such a build-up that, according to the most promising results of preliminary research work, it seems to be adaptable for generalization, whereby optical systems fundamentally different from the triplets might also be studied and discussed. Last but not least, reference should be made to our opinion that an indispensable precondition of the fully automatic design of certain optical system types is the application of new algorithms similar to that described above, or somewhat like the same.

REFERENCES

1. Berek, M.: Grundlagen der praktischen Optik. Gruiter et Co., Berlin—Leipzig 1930.
2. Kirchhof, C.: Ein Beitrag zur Seidelschen Theorie der Triplets aus dünnen Linsen. *Optik* **14** (1957), 388—398.
3. Flügge, J.: Das photographische Objektiv. Springer, Wien 1955.
4. Argentieri, D.: Ottica Industriale. Hoepli, Milano 1954.
5. Malý, M.: Analytischer Entwurf eines Triplets und seiner Modifikationen. *Rozpravy C. A. V.* (1955), 34.
6. Havliček, F. J.: Einführung in das Korrigieren optischer Systeme. Wissenschaftlicher Verlag, Stuttgart 1960.
7. Volosov, D. S.: Fotografischeskaia optika. Iskusstvo, Moscow 1971.
8. Cox, A.: A System of Optical Design. The Focal Press, London, New York 1964.
9. Michel, K.: Handbuch der wissenschaftlichen und angewandten Photographie. Springer, Wien 1943.
10. Hardy, A. C.—Perrin, F. H.: The Principles of Optics. Mc. Graw-Hill Book Co., Inc., New York—London 1932.
11. Emsley, H. H.: Aberrations of Thin Lenses. Constable an Co., London 1956.
12. Kalló, P.: A triplet tervezésének egy módszere. *Kép- és Hangtechn.* **16** (1970) 15—24.
13. Volosov, D. S.: Metody rascheta slozhnykh fotograficheskikh sistem. Tekhniko-Teoreticheskaia Literatura, Leningrad—Moscow 1948.
14. Újváry, I.: Approximációs módszer kéttagú ragasztott szimplet tervezésére a Coddington—Taylor egyenletek módosításával. *Kép- és Hangtechn.* **5** (1962), 129—134.

15. KALLÓ, P.: Szimmetrikus átvetítő. *Kép- és Hangtechn.* **18** (1972) 135—137.
16. KALLÓ, P.—LACK, G.: A tripletek alaktól független vékony rendszerének alapegyenlete. *Kép- és Hangtechn.* **20** (1974) 17—19.
17. LEEUWEN, F. R.: Nomograms for the Pre-Calculation of Triple-Lens Systems. *Optica Acta* **14** (1967), 93—110.

Kritische Zusammenfassung der Entwurfsmethoden des gestaltungabhängigen dünnen Systems des Triplets. Es wird nach einem kritischen Überblick der bekannten Verfahren zur Ermittlung der Daten von gestaltunabhängigen dünnen System des Triplets ein neuer, für Rechenmaschine gut anwendbarer Algorythmus einfacher Form für die Zusammenhänge der Fokusabstände und sonstiger Daten der Komponenten vorgeführt. Der Verfasser hat sich über die Richtigkeit sowie die Systematisierungs- und Eröffnungskraft des neuen Algorythmus erstmal durch Analyse von bereits bekannten Triplets überzeugt. Danach wurde die Anwendbarkeit des neuen Algorythmus auch durch ein Zahlenbeispiel bestätigt, hinweisend auf die Möglichkeiten der Verallgemeinerung sowie der weiteren Anwendungen.

Критическое обобщение метода проектирования формонезависимой тонкой системы триплета. После критического обзора наиболее распространенных методов для определения данных формонезависимой тонкой системы триплета в рамках настоящего обзора приводится новый, по структуре несложный алгоритм, хорошо поддающийся обработке на ЦЭВМ, в области компонентов фокусных расстояний и других зависимостей их параметров. Правильность применения и мощность систематизирующего обнаружения данного нового алгоритма подтверждается проведенным анализом уже известных триплетов. При этом возможность применения нового алгоритма подтверждается и вводом нового нумерического примера, имея в виду возможность обобщения и его дальнейшего применения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1–2), pp. 143–151 (1974)

LINEAR CHARACTERISTICS OF STATIONARY AND ROTARY CASCADES UNDER THREE-DIMENSIONAL FLOW CONDITIONS OF AN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

J. CSEMNICZKY*

[Manuscript received 15 May, 1971]

The paper derives the linear flow properties by the fundamental kinematic relations applied to the flow. Thus, it determines the relation between the parameters of stationary and rotary cascades of the same geometry, as well as the expression of the theoretical characteristic curve containing these parameters. By replacing the areas in front of and behind the blading with a suitable model, these boundary conditions can be defined for a circular symmetric plane flow. As a consequence, the correlation between the cascade parameters and the angles characteristic of the inflow and outflow, respectively, is formally identical to that obtained for a two-dimensional flow. The two cascade parameters pertaining to a stationary, and the three to a rotary blading are defined by special working conditions.

Notations

$\mathbf{v}$, $\mathbf{c}$	— velocity in a stationary cascade, absolute velocity
$\mathbf{w}$	— relative velocity in a rotary cascade
ω	— angular velocity
$\mathbf{n}$	— normal vector of the boundary wall surface
$\mathbf{r}$	— locus vector
k	— coefficient used in linear combinations
α, α', γ	— angles in stationary systems
β	— angle in a rotary system
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$	— blading parameters
φ	— flow coefficient
ψ	— pressure coefficient
c_m, v_m	— meridian velocity
$\mathbf{u}$	— peripheral velocity
u_1^*, u_2^*, c_{1u}, c_{2u}	— components of peripheral velocity direction

Indices

a, b	— indication of two different operational conditions
1, 2	— indication of the velocities in cross sections (1) and (2)

1. Introduction

The velocity field of an ideal incompressible fluid flowing through two-dimensional cascades reveals certain linear characteristics when the direction of the inflow is changed. From these properties the relation between the

* Dr. J. Csemniczky, Tornavár u. 20, 1113 Budapest, Hungary

parameters of stationary and rotary cascades, respectively, of the same geometry, may be arrived at. Considering the cascade as the impeller of a turbomachine, the theoretical characteristic curve, too, can be determined on the basis of the above properties. In the case of three-dimensional cascades actually employed, the usual procedure is to regard the runner or guide wheel as consisting of part channels, then to reduce the flow in these part channels to that around a plane grid, and from the relations expressed the final results are derived [1, 2, 3] for this configuration.

In turbomachines, the actual stream surfaces are not axisymmetric in the case of an ideal fluid, either. The present paper proves, however, that properties similar to those in two-dimensional cases can be found for the parameter correlation of both stationary and rotary cascades, as well as for the theoretical characteristic curve, without the approximations used in reducing them to a two-dimensional case. The model is shown in Fig. 1.

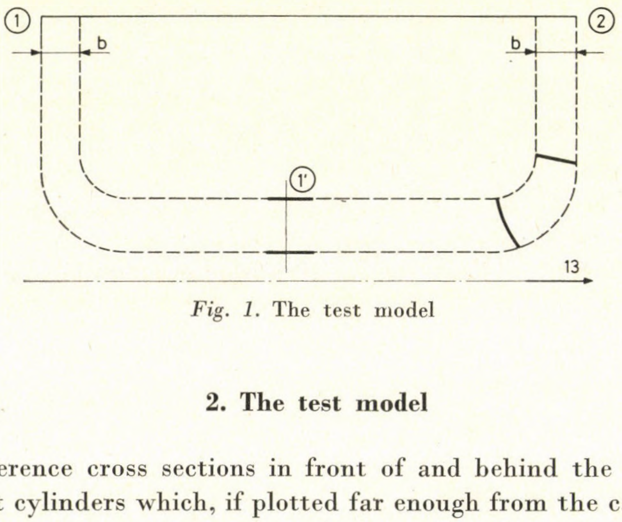


Fig. 1. The test model

2. The test model

The reference cross sections in front of and behind the cascade (1, 2) are congruent cylinders which, if plotted far enough from the cascade, permit the assumption of a circular symmetric plane flow. Such a plotting of cross section No 1 has practical advantages with respect to the subsequent investigation as well without, however, any limitations whatsoever, since the velocity distribution of cross section No 1' plotted similarly far enough from the cascade, can always be calculated from 1 on.

3. Fundamental relations

a) In the case of a flow from a stationary area, with a similarly stationary cascade, we have

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

With a rotary cascade in a system fixed to the blade

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{w} = -2\boldsymbol{\omega}.$$

b) Along the blades and the limiting rotary surfaces the following equations are valid:

With a stationary cascade

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$$

and for a rotary cascade

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

c) The precondition of smooth flow in leaving the blades is represented — in the case of a sharp outlet edge, when approaching from the pressure side, by the same finite value for the velocity at this outlet edge [1], while, in the case of a round-off outlet, a zero velocity at the fixed stagnation point [6].

The above criteria, together with the velocity given for one of the reference cross sections, e.g. No 1, make the problem as being in the case of a given geometry.

4. Linear characteristics of the velocity

a) If $\mathbf{v}_a(\mathrm{r})$ and $\mathbf{v}_b(\mathbf{r})$ represent two different velocity fields pertaining to the stationary blading, then the relation

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = k_a \cdot \mathbf{v}_a(\mathbf{r}) + k_b \cdot \mathbf{v}_b(\mathbf{r}) \tag{4.1}$$

will satisfy the conditions under (3), since

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = k_a \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_a + k_b \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_b = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = k_a \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_a + k_b \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_b = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = k_a \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_a + k_b \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_b = 0.$$

A direct observation reveals the satisfaction of condition $3/c$ as well.

b) If $\mathbf{w}_a(\mathbf{r})$ and $\mathbf{w}_b(\mathbf{r})$ indicate the velocity fields of the rotary system pertaining, however, to two different operational conditions, then

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = k_a \cdot \mathbf{w}_a + k_b \cdot \mathbf{w}_b$$

will be, if (4.2)

$$k_a = k_b = 1$$

again satisfies the conditions under 3, since

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = k_a \operatorname{rot} \mathbf{w}_a + k_b \operatorname{rot} \mathbf{w}_b = (k_a + k_b) \cdot (-2\omega)$$

or, written in another form,

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}_a + k_b(\mathbf{w}_b - \mathbf{w}_a)$$

that is, if we know at a given point the velocity vectors pertaining to the two different operational conditions, then the velocity vector corresponding to all the other operational conditions created as described above will be located as shown in Fig. 2.

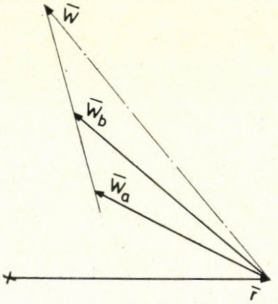


Fig. 2. Linear combination of the velocity vectors in a relative system

c) Similarly, it can be readily realized that if $\mathbf{w}^*(\mathbf{r})$ is a velocity field of the rotary cascade, and $\mathbf{v}^*(\mathbf{r})$ is that of the stationary cascade of the same geometry, then we obtain

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}^* + k\mathbf{v}^* \tag{4.3}$$

to satisfy the conditions under 3.

d) If the angular velocity of the rotary cascade is varied, and w is changed proportionally, then a velocity field again satisfying the conditions under 3 will be obtained:
if

$$\omega = k \cdot \omega^*$$

then

$$\mathbf{w} = k \cdot \mathbf{w}^*. \tag{4.4}$$

e) The above relations apply to the entire velocity field, including the reference cross sections 1, 2 as well where, however, since a circular symmetric plane flow is being dealt with, the linear combinations must be performed only for one vector. If the problem is definite, the linear combination performed, for example, in cross section No 1 would apply to the entire velocity field, also including cross section No 2.

5. Correlation between the inlet and outlet angles of flow through stationary and rotary bladings

The inlet and outlet angles are interpreted for the velocity vectors in cross sections 1 and 2.

a) In the case of a stationary cascade:

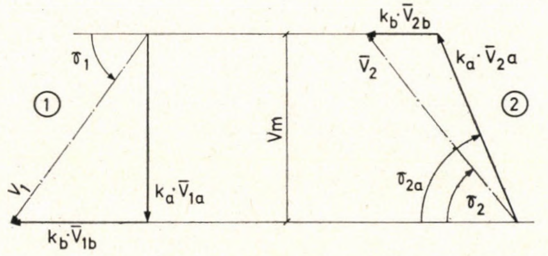


Fig. 3. Inlet and outlet velocities in the case of a stationary blading

If two special working conditions are selected with the boundary conditions shown in Fig. 3, we obtain

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = k_a \cdot \mathbf{v}_a + k_b \cdot \mathbf{v}_b$$

[see (4.1)].

Since $\mathbf{v}_{1b}$ has no component in the meridian direction, $\mathbf{v}_{2b}$ can be only in the direction shown in the figure. Thus, the following equations may be written:

$$\cot \gamma_1 = k_b \cdot v_{1b}/v_m$$

$$v_m \cdot \cot \gamma_2 = v_m \cdot \cot \gamma_{2a} + k_b \cdot v_{2b}.$$

If k_b is eliminated from the equations, we shall obtain

$$\cot \gamma_2 = \cot \gamma_1 \cdot v_{2b}/v_{1b} + \cot \gamma_{2a}.$$

However,

$$v_{2b}/v_{1b} = \mathbf{A} = \text{const},$$

$$\cot \gamma_{2a} = \mathbf{B} = \text{const}, \tag{5.1}$$

thus

$$\cot \gamma_2 = \mathbf{A} \cdot \cot \gamma_1 + \mathbf{B}. \tag{5.2}$$

Since initially k_b and k_a, just as v_m were optional, the so obtained result will apply to every and each operational condition.

b) In the case of a rotary cascade, the correlation between the angles pertaining to the relative inlet and outlet velocities can be derived from Eq. (4.3):

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}^* + k\mathbf{v}^*$$

where the boundary condition for $\mathbf{w}^*$ shall be $\mathbf{w}_1^* = 0$. The velocity triangles for this case are shown in Fig. 4.

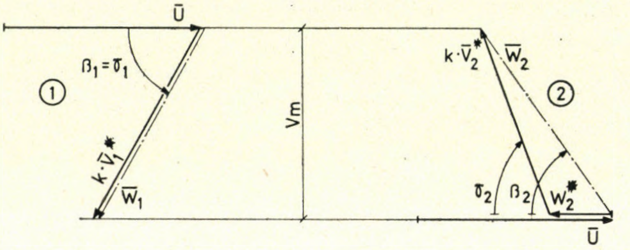


Fig. 4. Relative inlet and outlet velocities with a rotary blading

Thus velocity $\mathbf{w}_2^*$ may have a component only in direction of $\mathbf{u}$ with respect to continuity. We may write

$$\cot \beta_1 = \cot \gamma_1$$

$$v_m \cdot \cot \beta_2 = w_2^* + v_m \cot \gamma_2,$$

but γ_1 and γ_2 are, for a stationary cascade, conjugate angles to which the following relation applies:

$$\cot \gamma_2 = \mathbf{A} \cdot \cot \gamma_1 + \mathbf{B}.$$

On the other hand, because of (4.4), we have

$$w_2^*/u = \mathrm{C} = \text{const.} \tag{5.3}$$

In addition

$$v_m/u = \varphi \tag{5.4}$$

which is the flow coefficient.

With all these taken into consideration, we obtain

$$\cot \beta_2 = \mathbf{A} \cot \beta_1 + \mathbf{B} + \mathrm{C}/\varphi. \tag{5.5}$$

Since γ_1 and k, as well as v_m are optional, the so obtained relation is valid for every and each working point.

It is to be seen that the constants in (5.5) are identical to the characteristics of the stationary cascade, and only C is a new parameter, due to rotation [4].

6. Theoretical characteristic curve

The theoretical characteristic curve means, in general, the function $\psi(\varphi)$ as calculated for an ideal liquid, where ψ is the pressure coefficient:

$$\psi = 2(C_2u - C_1u)/u. \tag{6.1}$$

On the basis of the velocity triangles not shown here we obtain

$$C_{2u} = u - v_m \cdot \cot \beta_2$$
$$C_{1u} = u - v_m \cdot \cot \beta_1.$$

In addition, (5.4) defining φ and (5.5) describing the cot β relations are still valid, whereby we get,

$$\psi = 2\left[(1 - \mathbf{A})\frac{v_m}{u} \cdot \cot \beta_1 - \mathbf{B}\frac{v_m}{u} - \mathrm{C}\right]. \tag{6.2}$$

On the basis of the above relation and Fig. 5 it is easy to realize that the precondition for the linearity of the characteristic curve is to have point P travel along the straight line when the operational conditions change. In this case v_m. cot β_1 will change in a linear manner with the variation of v_m, and the right-hand side of (6.2) will become the linear function of $\varphi = v_m(u)$. The straight line is indicated in Fig. 5 by the dash line.

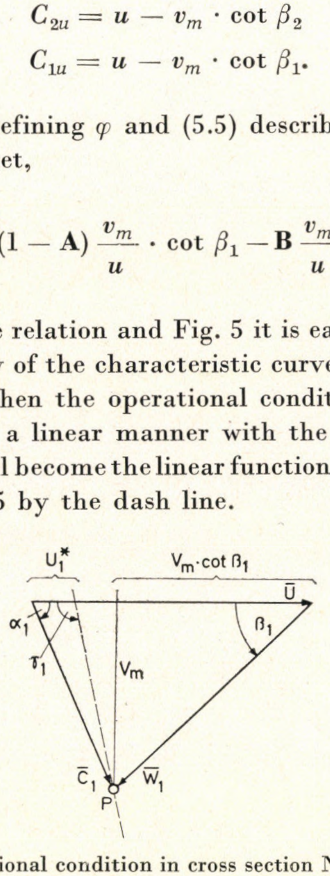


Fig. 5. Variation of the operational condition in cross section No 1, in the case of a linear characteristic curve

In cross section No 1 the terminals of the relative velocity vectors pertaining to the individual operational conditions travel along a straight line. According to (4.2) and Fig. 2 this means that the theoretical characteristic curve will be linear if the velocity fields associated to the individual operational conditions can be derived from those of two such different conditions by a linear combination corresponding to the above (4.2).

Variation of the operational conditions is characterized in this case by the γ_1 and u_1^* data of Fig. 5. Accordingly,

$$v_m \cot \beta_1 - v_m \cot \gamma_1 + u_1^* = u$$

whereby the pressure number will be

$$\psi = 2[(1 - \mathbf{A})\ (1 - u_1^*/u) - C] - 2\varphi[\mathbf{B} - (1 - \mathbf{A}) \cot \gamma_1]. \qquad (6.3)$$

In the case of a constant inflow angle we have

$$\gamma_1 = \pi - \alpha_1,\ u_1^* = 0,$$
$$\psi = 2[1 - \mathbf{A} - \mathrm{C}] - 2\varphi[\mathbf{B} + (1 - \mathbf{A}) \cot \alpha_1]. \qquad (6.4)$$

It is to be noted here that since ψ and φ depend on the dimensions of the reference cross sections, to carry on our train of thoughts on the usual values, the data ought to be converted from position No 2 to the outlet diameter and width of the runner.

In the case of a prerotation-free flow we have

$$\alpha_1 = \pi/2;$$
$$\psi = 2(1 - \mathbf{A} - \mathrm{C}) - 2\varphi\mathbf{B}. \qquad (6.5)$$

With an infinite number of blades, on the basis of (5.5) and since the direction of the relative outlet velocity is independent of the operational conditions [3], we get

$$\mathbf{A} = 0,$$
$$\mathbf{B} = \cot \beta_{20},$$
$$\mathrm{C} = 0. \qquad (6.6)$$

Thus, in the case of a vortex-free inlet we shall have

$$\psi = 2 - 2\varphi \cot \beta_{20}.$$

REFERENCES

1. CZIBERE, T.: Potential Theory Solution of the Two Main Problems in the Hydrodynamic Cascade Idea — Doctor's Thesis, Miskolc 1965 (in Hungarian)
2. NYIRI, A.: On the Theoretical Characteristics of Rotating Cascades of Airfoils — *3rd Conference on Fluid Mechanics and Fluid Machinery*, Budapest 1969
3. DAIGUJI, H.: Theoretical Performance Investigation of Mixed-flow Variable Pitch Reversible Pump Turbines — *ISME*, No. 49, 1969
4. CSANÁDY, G. T.: Theory of Turbomachines — McGraw-Hill, 1964
5. LOTSYANSKY, L. C.: Fluid and Gas Mechanics — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965 (in Hungarian)

6. FÜZY, O., and THUMA, A.: Calculating the Velocity Distribution of a Plane Airfoil Cascade Given by its Geometry — *Proc. of the 3rd Conference on Fluid Mechanics and Fluid Machinery*, Budapest 1969
7. FÜZY, O.: Employment of the Singularity Carrier Auxiliary Curve for Designing Airfoil Cascades — *Proc. of the 3rd Conf. on Fluid Mech. and Machinery*, Budapest 1969

Die linearen Eigenschaften von stationären und rotierenden Schaufelgittern bei dreidimensionaler Durchströmungen mit einer inkompressiblen Flüssigkeit. Im Aufsatz werden die linearen Eigenschaften der Strömung mit Hilfe der für dieselbe angeschriebenen kinematischen Grundgleichungen abgeleitet. Mit deren Hilfe wird der Zusammenhang zwischen den Parametern eines stationären und eines rotierenden Schaufelgitters mit gleicher Geometrie, sowie die Gleichung der diese Parameter enthaltenden theoretischen Charakteristik bestimmt. Durch Ersatz des Raumes vor und nach der Beschaufelung mittels eines geeigneten Modells können diese Randbedingungen für eine axialsymmetrische ebene Strömung formuliert werden und infolgedessen stimmt der Zusammenhang zwischen den die Ein- und Ausströmung charakterisierenden Winkeln und Gitterparametern formell mit dem für die zweidimensionale Strömung erhaltenen überein. Spezielle Betriebszustände definieren die zur stationären Beschaufelung gehörenden zwei und die zur rotierenden Beschaufelung gehörenden drei Gitterparameter.

Линейные свойства неподвижной и вращающейся решеток, образуемых лопатками, в случае трехмерного движения потока идеальной несжимаемой жидкости. В статье с помощью основных кинематических зависимостей, записанных для движения потока, выводятся линейные свойства движения потока. При их использовании определяются связь между параметрами неподвижной и вращающейся решеток, образуемых лопатками и имеющих одну и ту же геометрию, и выражение теоретической характеристики содержащей эти параметры. С помощью модели, пригодной для замещения полости перед и после лопаток, эти краевые условия можно сформулировать для центрально симметричного движения потока, а вследствие чего связь между углами, характеризующими вток и выток, и параметрами решетки по своей форме совпадает с полученными для двухмерного движения потока. Два параметра решетки, соответствующие неподвижным лопаткам, и три параметра решетки, соответствующие вращающимся лопаткам, определяются специальными режимами работы.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1–2), pp. 153–173 (1974)

FLASH TEMPERATURE OF GEARS

PART I. REVIEW OF THE PROBLEM, AND STATIONARY MODELS

F. KOLONITS*

[Manuscript received December 12, 1972]

The results attained so far in the calculation of the contact temperature of gears have been surveyed and the models assuming one- and two-dimensional heat conduction and stationary state have been examined in detail. Equations for arbitrary heat-source distribution have been deduced, which involve as special cases the already published results for given distributions. It has been shown that the distribution for the one-dimensional case is, in general, the asymptotic approximation of the two-dimensional case for large Blok numbers B, the difference diminishes in inverse proportion to $\sqrt{B}$. The results can be applied not only to gears, but to the investigation of any moving heat source.

Symbols

p_n	normal line pressure
v	velocity (index s: sliding velocity)
X, Y, Z	stationary system of co-ordinates
x, y, z	system of co-ordinates moving with the heat source
$2w$	width of contact band
ξ, β	x/w, y/w dimensionless co-ordinates
$P(\beta)$	distribution of surface pressure or heat source
F	integral of P over the contact band
μ	coefficient of friction
p	surface pressure
q	intensity of heat source
ϱ	density
c	specific heat
λ	thermal conductivity
a	heat diffusion constant
b	$\sqrt{\varrho c \lambda}$
t, τ	time
A	mechanical equivalent of heat
φ, Φ	proportion of heat introduced into the pinion by points, and in average on the contact band
T	temperature
Θ	contact- temperature rise (flash temperature)
R	quantity characterizing the geometry of the temperature pattern
B	Blok number wv/a
r_i	coefficients of the series expansion of P
I, W_i	auxiliary functions for two-dimensional temperature calculation
f, ψ	arguments of above functions, depending on location, $f = B\psi/2$
$a_{i,n}, b_{i,n}$	coefficients of the power- series expansion of $W_{1,2}$
$N_{1,2}$	contact points of pressure line and base circles

Other, less frequently used symbols are defined at their respective places.

* Dr. F. KOLONITS, Őrmezei ltp. IX. A, 1112 Budapest, Hungary

The scoring of gears is related, according to the most generally accepted theory, to the maximum operating temperature of the surfaces in contact, which — during contact — is the sum of the mean gear temperature and an instantaneous temperature rise (flash temperature). Numerous research workers have published theoretical and experimental results concerning the temperature conditions in gear drives. The present paper reviews in detail the main tendencies of research and investigates two usual models of flash temperature calculation.

1. Review of the problem

A large part of the types of injury causing the breakdown of gears (tooth fracture, pitting etc.) has been theoretically and experimentally investigated during the first third of this century by analyzing the fatigue phenomenon and the contact pressure, using the results of the general development in the science of Strength of Materials. Based on the results, design procedures providing due safety from the point of view of these influences were evolved. But starting from the 1930s, a newer form of failure has come more and more into the foreground: scoring. The reason is, that the rising of requirements and of technological level has also caused the rising of the design speeds and specific design of loads gears [1]. According to WELCH and BORON, from 1945 to 1960, the specific loads in turbine-driven gears designed for the US Navy rose to about twice its original value and this trend asserted itself in other navies [2] too.

For characterizing the combined action of load and speed, semi-empirical indices were evolved. Such is, e.g., the Almen-product, or the specific friction work related to the rolling arc element (which depends on load and relative sliding). According to the theory of BLOK dating from 1937, as far as the danger of scoring is concerned, the maximum instantaneous temperature arising in the contact band is decisive, and for calculating it he elaborated a simplified method. The theory as well as the calculation method has become wide spread. Based on this, in 1954 BOTKA proposed a toothing system designed for maximum safety against scoring (GANZ—BOTKA toothing, where the maximum temperatures on the sections before and after the pitch point are equal) [3], [4], [5].

In the last three decades the theoretical and experimental investigation into the nature and causes of scoring as well as of the temperature conditions during operation resulted in numerous new concepts. Up to now, attempts at combining the partial results into a unified, experimentally proved theory did not succeed. NIEMANN [6] publishes the proposals of nine different authors for an index $p_n v^k$ characterizing the danger of scoring: for the exponent k, six different values are given, based on experiment or on theory, ranging from 0,25 to 2.

In order to improve the accuracy of the temperature calculations, THEYSE replaces the approximate parabolic heat- source model of BLOK by a semielliptic distribution corresponding to the Hertz theory, leaving the other simplifications unchanged [1]. In this model the heat flow parallel to the tooth surface was disregarded, the tooth is considered as an infinite half-space consisting of insulated planes of elementary thickness, at right angles to the limiting surface and to the direction of movement of the band-like heat source of constant intensity.

Also taking into consideration the heat flow parallel to the surface, i.e. for a homogeneous half-space, several results are known. Assuming a linear source, ROSENTHAL obtained a solution containing exponential and Bessel functions. NAKADA and HASHIMOTO start out from the temperature of the oil film in the contact band, also considering the heat transmission between the film and the tooth surface, give the temperature in the surface and interior points of the film by Fourier integrals, continuing the calculations with LIEBMANN's numerical method [7]. TERAUCHI and HASHIMOTO solved in a closed form, with the aid of Bessel functions, the heat- transfer equation for a parabolic heat- source band. The distribution of the frictional heat between the engaging teeth is more complicated to calculate than with the Blok model: for this they evolved a numerical method and proposed a simplified approximation method [8].

For an experimental check on the calculations TERAUCHI and MIYAO [9], as well as NIEMANN and LECHNER [10], [11] made temperature measurements using the thermoelectric effect. The results did not arrive at an unequivocal decision — according to the arguments advanced in the discussion of the question, the cause of the difference may also be the erroneous interpretation of the theory and the neglecting of some factors influencing the experimental results. From the measurements NIEMANN derived an empirical formula, but this is connected with the experimental arrangement used and is not suitable for general calculations. It is an interesting fact, important for the dimensioning of temperature-balanced toothings,that the ratio of the exponents of the factors p_n and v is the same as in the formula of BLOK, although the exponents themselves are smaller. A generalized formula built up from dimensionless groups has lately been proposed by YOKOYAMA—ISHIAKAWA—HAYASHI [12].

Certain factors have been investigated in more detail: the conditions of the lubricant film by elasto-hydrodynamic methods [13], friction [14], the relation between the experimental thermoelectric measurement and the real temperature [15] and the so-called permanent tooth temperature during operation (when the tooth is not engaged — on this is superposed at the moment of engagement the instantaneous temperature rise) [6], [10], [11]. NIEMANN and co-laborators deduced from the scoring experiments that from the point of view of scoring danger not the maximum, but the above mean temperature is decisive [6], [17]. In the published representation the measuring results seem to prove this, but their dispersion is considerable. A large number of specialists do not agree with these final conclusions: in more recent papers they try to explain the results of the scoring experiments by the Blok formula (modified in some cases by taking into consideration plastic deformation) or by empirical peak temperature formulae (and measured temperature values) [18], [19].

The most recent theoretical and experimental investigations are due to TOBE, KATO and TAKATSU. Their calculation method considers the load and velocity conditions varying from point to point during engagement, therefore it is very laborious and can be carried out only on a computer. For a theoretical progress of line pressure they obtained results, generally more or less conforming in character and value to those calculable with the Blok formula, except for those engagement points where the line pressure changed abruptly. On the other hand, they compared the experimental results with the calculations carried out for measured dynamic loads and obtained good agreement (although for an extreme material pair: steel/constantan with an assumed $\mu = 0{,}4$).

In order to be able to analyze temperature conditions in agreement with reality, one must not disregard those influences which are due to the operation of the gear drive as a whole and influence the usual model in the progress of the engagement. The engagement errors caused by the deformations due to the structural forces were investigated by KUDRYAVCEV and co-laborators [21]. According to WELCH and BORON, the thermal dilatations, too, may unfavourably influence the load distribution [2], (although they did not intend to explain the causes of scoring but of a certain kind of tooth fracture). Neither can the thermal investigation in the narrower sense of the word be limited to the surroundings of the engagement: in the last resort, the operational temperature elevation is determined by the thermal conditions of the whole installation [21], [23].

The circumstance merits special attention that the method giving the best agreement between theoretical and experimental values (TOBE) based the calculations on measured dynamic loads, whose pattern was quite different from the generally accepted theoretical values. Although there exist results describing the real progress of operational load (NIEMANN [22], [23]), but for the time being no temperature calculation based on them is known.

2. Flash- temperature- calculation models

In the following, several temperature-calculation methods will be examined in more detail. First, the basic physical assumptions of these methods will be presumed. The temperature field at engagement to be calculated — and within it the peak temperature — is generated by the short-time temperature rise around the point of contact being superposed on the permanent operating temperature of the tooth (when it is not engaged). The permanent operating temperature is determined by the cooling conditions of the gear drive and by the frictional losses. The frictional heat developed in the contact band flows into the two engaging teeth, divided in such a proportion that from point to point in the contact band equal temperatures develop in both teeth (the eventual modifying action of the lubricating oil film between the teeth is disregarded). But the permanent temperatures of the two teeth are not necessarily the same: although the teeth emerge from engagement at equal surface temperatures, due to the different speed of the pinion and wheel, their cooling conditions etc., their engagement temperatures generally differ. This fact naturally influences the distribution of the friction heat too. But the phenomenon may also be considered as withdrawing a certain amount of heat from one tooth and feeding it into the other one, so that a common surface temperature develops, and subsequently the distribution of the friction heat will be calculated accordingly. It is easy to see that the foregoing is correct by taking into consideration that in a given thermal system the supplementary introduction of a certain quantity of heat (boundary condition of the second kind) brings about the same temperature changes in any initial temperature field.

According to the foregoing, finally it is possible to calculate with the two teeth engaging at some common temperature, uniform in space. This temperature is assumed to be known. The instantaneous increase of temperature at engagement is calculated for these conditions and referred to this temperature. The maximum temperature rise calculated in this way is called temperature flash.

It would be very circumstantial to calculate with the real tooth shape; the phenomenon taking place very quickly, and the contact band being very small with respect to the other dimensions of the tooth, in the calculations the tooth will be taken into consideration as an infinite half-space (limited by a plane). The frictional heat development will be modelled by a band-like heat source, of infinite crosswise length, the shape and size of which is determined by the pressure distribution and the friction conditions in the contact band, and which moves along the boundary of the half-space. Only a part of the heat developed penetrates into the investigated half-space (the rest heats the other engaging tooth) — the proportion of the heat passing into the pinion tooth is denoted by φ. In general, this distribution factor φ changes as a function of location as well as of time. Let there be Φ the total heat-distribution coefficient for the whole contact band at a given moment for the heat developed during an elementary time (the integral mean of the φ-s). Conditions can be better examined in a system of co-ordinates x, y, z moving together with the heat source. The system in parallel to it, but when stationary, it will be denoted by X, Y, Z (Fig. 1, the represented heat source corresponds to the Hertzian pressure distribution). Using these approximations, the problem is a plane one,

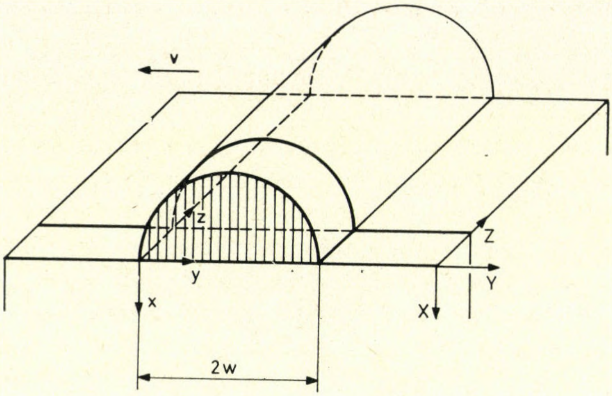


Fig. 1

there are no temperature differences along the z-axis, it is sufficient to investigate the unit width plane layer cut out along the y-axis.

Making further assumptions, three customary approximations have developed; the first two investigate stationary, the third one changing conditions:

— a unidimensional model (Blok), which determines the temperature rise at constant velocity (v), constant pressure band width ($2w$), constant heat source intensity, and disregards heat conduction in the y direction. Hence essentially heat conduction towards the interior of the tooth is considered; the half-space is built up from elementary layers being parallel to x, z and insulated from each other;

— a two-dimensional model (TERAUCHI), identical with the first one, but heat conduction in the y direction is also considered;

— TOBE's model, based on two-dimensional heat conduction which takes into consideration that the contact band does not arrive into the investigated position from infinite, and with constant v, w and heat- source intensity, calculating from point to point the temperature rise, according to the varying characteristics from the beginning of the engagement.

In the present paper the first two methods are examined, the third will be analyzed in a subsequent publication.

3. The Blok model

3.1. *The total developed heat flows into one tooth*

In order to obtain a general view, it is assumed that the distribution of the pressure in the contact band is characterized by an arbitrary function

$$P = P\left(\frac{y}{w}\right) = P(\beta) \tag{1}$$

(β is the co-ordinate expressed in relative units of length, on the contact band $0 \leq \beta \leq 2$). If furthermore

$$F = \int_0^2 P(\beta)\mathrm{d}\beta, \tag{2}$$

then the real surface pressure is

$$p = \frac{p_n}{Fw} P(\beta)\,. \tag{3}$$

The temperature distribution q can be obtained from this by multiplication with $A\mu v_s$ (corresponding to the stationary model it is assumed that within the space and time interval of the calculation v_s and μ are constant).

If at the end point of a half-line unidimensional system the heat pulse Q is injected, the temperature will be, as a function of location and time,

$$T(x, t) = \frac{Q}{b\sqrt{\pi t}} \exp\left(-x^2/4at\right) \tag{4}$$

(unidimensional heat shock, [24], $b = \sqrt{\varrho c \lambda}$). The action of the heat source is produced by the sum of elementary heat shocks (Fig. 2, where the heat source is represented according to BLOK's parabolic approximation). Into the elementary half-space layer being in the represented position, the heat source part situated in the domain $0 \leq y \leq w$ has supplied heat. The (constant) velocity provides a link between the co-ordinate y and the time counted from the passing of the front of the heat source through the investigated point: at this point there is heat input, since the time $t = \beta w/v$. The elementary heat source acting between times τ and $\tau + \mathrm{d}\tau$ (at the location $\beta = v\tau/w$ of the contact band) delivered at the investigated point the heat quantity $q\mathrm{d}\tau$ — corresponding to Q of Eq. (4) — and since the action the time $t - \tau$ has elapsed.

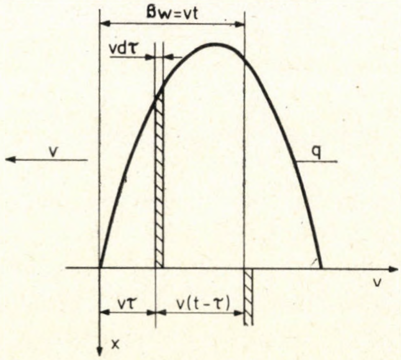


Fig. 2

Adding the effect of the elementary heat shocks having occurred since the time $0 \leq \tau \leq t$, at the investigated point the temperature rise is

$$\Theta = \frac{A\mu v_s p_n}{Fbw\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{P\left(\frac{v\tau}{w}\right)}{\sqrt{t-\pi}} d\tau . \tag{5}$$

For the sake of easier mathematical treatment, a new integration variable according to $t - \tau = u^2 w/v$ is introduced:

$$\Theta(\beta) = \frac{2A\mu p_n v_s}{Fb\sqrt{\pi v w}} \int_0^{\sqrt{\beta}} P(\beta - u^2) du . \tag{6}$$

3.2. *The distribution factor*

Analyzing the factors of Eq. (6), it is to be seen that merely the group $b\sqrt{v}$ refers to only one engaging tooth, the others are characteristics in common to both teeth, i.e. to the engagement. The variation according to β is influenced by the mentioned group only as a factor of proportionality, it does not act on the shape of the distribution. Obviously equal contact temperatures are brought about in the contact band at constant φ (which has the same value as Φ), with a pitch proportional to $1/(b_i\sqrt{v_i})$:

$$\Phi = \frac{b_1\sqrt{v_1}}{b_1\sqrt{v_1} + b_2\sqrt{v_2}} , \tag{7}$$

$$\Theta(\beta) = \frac{A\mu p_n v_s}{(b_1\sqrt{v_1} + b_2\sqrt{v_2})\sqrt{w}} \frac{2}{F\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\beta}} P(\beta - u^2) du . \tag{8}$$

Hence, the function describing the pressure distribution is only a coefficient of proportionality and has no influence on the power of the engagement characteristics to which the temperature rise is proportional. The equation of BLOK:

$$\Theta_{\max} = \text{const} \cdot \mu p^{3/4} n^{1/2} \tag{9}$$

where n is the rpm of one wheel, is not a consequence of the parabolic heat-source approximation as chosen by him, but a consequence of the heat- conduction model and the characteristics being considered as constant.

Here a complementary remark is made: it can be proved that, when calculating the contact of teeth at different temperatures T_i (cf. 2) under the conditions of the Blok model, the temperature rise according to (8) must be superpositioned on the arithmetic mean formed from the values T_i with the weights $b_i\sqrt{v_i}$:

$$T_{av} = \frac{T_1 b_1 \sqrt{v_1} + T_2 b_2 \sqrt{v_2}}{b_1\sqrt{v_1} + b_2\sqrt{v_2}} . \tag{10}$$

3.3. *Characteristic pressure distributions*

Investigating the influence of distribution shape which is proportional to the temperature distribution, for several cases the coefficient

$$R = \frac{2}{F\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\beta}} P(\beta - u^2)du \tag{11}$$

will be examined.

3.3.1. *Constant distribution*

In this case $P = 1$, the temperature distribution is

$$R_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\beta} . \tag{12}$$

The largest value arises at $\beta = 2$, $R_{A,\max} = \sqrt{2/\pi} = 0{,}7979$.

Such a pressure distribution occurs when the surfaces in contact are plastically deformed.

3.3.2. *Parabolic distribution* (Blok)

$$P = 2\beta - \beta^2, \tag{13}$$

$$R_B = \frac{2}{5\sqrt{\pi}} \beta\sqrt{\beta}(5 - 2\beta) . \tag{14}$$

The location of the maximum temperature is $\beta = 1{,}5$, while its value is $R_{B,\max} = 1{,}2\sqrt{1{,}5/\pi} = 0{,}8292$.

3.3.3. *Elliptical Hertzian distribution* (Theyse)

$$P = \sqrt{2\beta - \beta^2}, \tag{15}$$

$$R_T = \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\beta}} \sqrt{(\beta - u^2)(2 - \beta + u^2)}\, du . \tag{16}$$

For numerical evaluation of the integral, let us introduce the new variable $u = \sqrt{\beta}\cos\varphi$. This gives

$$R_T = \frac{4\sqrt{2}\varphi}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\sqrt{1-\frac{\beta}{2}\sin^2\varphi\,d\varphi}\,. \tag{17}$$

After suitable rearrangements

$$R_T = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{\pi}}\left[K\left(1-\frac{\beta}{2}\right)+E(\beta-1)\right], \tag{18}$$

where K and E are the complete elliptic integrals of first and second kind for the argument $\sqrt{\beta/2}$. The location of the maximum temperature is $\beta = 1{,}6318$, its value is $R_{T,\max} = 0{,}7680$ (which agrees with the maximum value as given by THEYSE).

The three kinds of distributions are shown in Fig. 3.

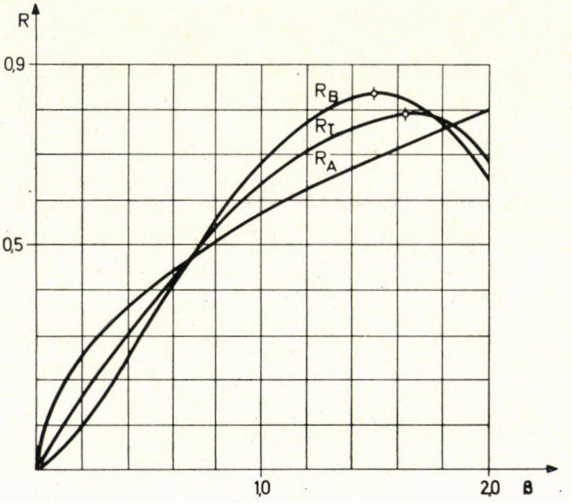


Fig. 3

3.4. *Complementary remarks*

The temperature distribution of the half-space can be calculated, in general, for given conditions (no variation in direction z, boundary conditions varying with time) from the following differential equation:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\,. \tag{19}$$

Passing to the system of co-ordinates moving together with the heat source [25]

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=\frac{v}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial t}. \tag{20}$$

If to this is added as an initial condition that the heat source appears at the first moment in the form of a pulse and (assuming that outside the contact band there is no heat exchange with the surroundings) the boundary condition

$$-\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_0P\left(\frac{y}{w}\right) \tag{21}$$

the problem is an exact one. Using the methods of the theory of similarity [26] the solution is for identical P (geometrical similarity)

$$\vartheta=f(\xi,\beta,\tau,B) \tag{22}$$

where

$$\vartheta=\frac{\lambda\Theta}{q_0w},\quad \xi=\frac{x}{w},\quad \beta=\frac{y}{w},\quad \tau=\frac{at}{w^2} \tag{23}$$

are the invariant temperature, length and time scales, and

$$B=\frac{wv}{a} \tag{24}$$

is the criterion of similarity. Being ni form equal to the Péclet number used in the theory of heat transmission, it bears this name in literature [1]. But the Biot and Nusselt numbers are of equal shape too, nevertheless, due to their different physical meanings, they are considered as being different. Therefore, the dimensionless group (24) will be called, when interpreted according to the present investigation, Blok number. (Blok has pointed out in his basic paper [3], that the accuracy of his model is determined by the value of B). With the values (23), (24) the relations (20), (21) become

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\beta^2}=B\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}, \tag{25}$$

$$-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}=P(\beta). \tag{26}$$

The Blok model considers as being zero the partial derivative with respect to time in (25) (it examines a quasi-stationary problem, "without initial conditions"), and it omits the second derivative with respect to β on the left side. Due to the first neglection, the switching-on phenomena are excluded. In gear heating-up problems mostly such points play a preferred role, where the linear pressure and thus the intensity of the heat source abruptly change (extreme and individual engagement points [4]), therefore — in the case of increase — the switching-on phenomena may influence the developing peak temperature (the problem will be examined in more detail in connection with the Tobe model).

The influence of the second neglection was investigated by BLOK and he concluded that for $B \geq 20$ this does not cause any considerable error. For an elliptical heat source, THEYSE designates $B \geq 8$ as an approximate limit [1].

The solutions according to (6), (8), (14) can also be obtained from (25), (26) if according to the above, (25) is simplified to the form

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} = B \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} . \tag{27}$$

The derivatives with respect to the relative co-ordinates of location in Eq. (25) are proportional to the derivatives with respect to the stationary co-ordinates: the heat flow densities and their variations. With increasing B the gradient along the direction y (heat flux) decreases as compared with the left side, from which we may infer on a reduction of the corresponding heat-flow variations (although strictly speaking this should be separately proved). Within the sum at the left side of (25), with increasing B the share of the first member increases. Examining Eqs (6), (14) also shows that the heat-flow density in direction y, as compared to the mean heat-source intensity, decreases in inverse proportion to the square root of B.

The physical meaning of B can be examined, in itself, using the following transformation, if the heat source is considered as being stationary and the half-space as moving:

$$B = \frac{v \varrho c}{\lambda / w} . \tag{28}$$

The denominator is proportional to the conductive heat-flow density (w is the characteristic dimension in the y direction of the contact considered as a thermal system), the numerator is proportional to the "convective heat-flow density" delivered by the moving half-space as "mass flow". For a large B the importance of the heat conduction in the heat transportation in direction y is small, the characteristic transportation phenomenon is heat transportation by the moving half-space.

Furthermore BLOK examined, what difference is caused by a varying velocity of the heat source, as compared to the result obtained for the constant velocity corresponding to the instantaneous engagement situation. In his investigations he assumed a uniform distribution of the heat source and also considered the heat intensity variation due to the changing sliding velocity. According to his results, the difference is not important; but he did not take into account that during engagement, w changes, too. This variation may cause a large variation of the heat-source intensity when approaching points N_1 and N_2 (in the extreme engagement points playing the most important role from the point of view of maximum temperature, in particular, in the one near to N_1). If elastic teeth are considered, the heat-source intensity also changes because of the continuous variation of the line pressure [5], [21].

3.5. *General pressure distribution*

The shape of the pressure and heat-source distribution developing in the contact band cannot be considered as finally elucidated at present. The cases discussed above are approximations, which, due to theoretical and experimental developments especially of the elasto-hydrodynamic theory of lubrication [13], may require modification. Besides, the investigation of moving heat sources arises not only in connection with gears: all this requires a generalized formulation of the results.

According to Eq. (6) the temperature configuration can be obtained for an arbitrary distribution of P (or the heat source) by numerical integration. In order to develop formulae, it is assumed that

$$P(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \beta^n \tag{29}$$

is given in the form of an absolutely convergent power series (or as a finite power function). Then, in general, (6) will be

$$\Theta(\beta) = \frac{2A\mu p_n v_s}{F\lambda} \sqrt{\frac{\beta}{\pi B}} \sum_{n=0}^{\infty} r_n \beta^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \tag{30}$$

where according to (2)

$$F = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n r_n}{n+1} . \tag{31}$$

Formula (30) is true not only for gears, but also, in general, for heat sources distributed over $2w$ according to P: in the place of $\mu p_n v_s$ steps the heat delivered per unit of z by the heat source.

4. The Terauchi model

In his paper [8] TERAUCHI further developed the Blok model by also considering the heat conduction in the y direction and calculating a solution for the stationary form of (25).

4.1. *The total heat developed flows into one tooth*

4.1.1. *General solution*

The solution [8] is also calculated by the summation of elementary heat shocks (let us remark that BLOK also developed a formula for two-dimensional heat conduction [3], but he did not transform the integral contained therein into a tabulated function, and he used it only in numerical calculations for checking purposes). As an analogy to formula (4), for an n-dimensional heat shock [27]

$$T(\bar{r}, t) = \frac{2Q}{\varrho c(4a\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\bar{r}|^2}{4at}\right) \tag{32}$$

where $\bar{r}$ is the position vector taken from the heat input, n is the number of dimensions, the heat input Q is the specific value corresponding to the $(3-n)$th power of unit length.

According to the above, let the heat source be

$$q = \frac{A\mu v_s p_n}{Fw} P(\beta) = q_0 P(\beta) . \tag{33}$$

The elementary heat shock in some investigated place β must be calculated backwards to the beginning (assumed to be infinitely far) for all time intervals dt at times t and all elementary heat sources $Q = qw\mathrm{d}\beta'$ at all locations β', and summarizing:

$$\Theta(\xi, \beta) = \frac{q_0 w}{2\pi\lambda} \int_0^2 d\beta' \int_0^\infty \frac{P(\beta')}{t} \exp\left\{-\frac{[(\beta' - \beta)w + vt]^2 + w^2\xi^2}{4at}\right\} dt . \tag{34}$$

The integral with respect to time can be transformed according to the relation [28] for the modified Bessel function of the second kind and zero order K_0:

$$\Theta(\zeta, \beta) = \frac{q_0 w}{\pi\lambda} \int_0^2 P(\beta') \exp\left[-\frac{B}{2}(\beta' - \beta)\right] K_0\left(\frac{B}{2}\sqrt{(\beta' - \beta)^2 + \xi^2}\right) d\beta' . \tag{35}$$

The surface temperatures ($\xi = 0$) are, with a new integration variable

$$\Theta(\beta) = \frac{2q_0 w}{B\pi\lambda} \int_{-\frac{B}{2}\beta}^{\frac{B}{2}(2-\beta)} P\left(\beta + \frac{2u}{B}\right) e^{-u} K_0(|u|) du . \tag{36}$$

If the value of the integral in (36), calculated for 0 lower and f upper limit, is denoted by $I(f)$, then

$$\Theta(\beta) = \frac{A\mu v_s p_n}{B\lambda} \frac{2}{F\pi} \left\{ I\left[\frac{B}{2}(2-\beta)\right] - I\left[-\frac{B}{2}\beta\right]\right\}. \tag{37}$$

K_0 becoming infinite for zero argument, the numerical calculation of (35), (36) is not a routine task, as in the one-dimensional case. In the following this problem is not dealt with, but as in para. 3.5, general relations are aimed at. It can be proved that

$$I = [W_0(f)K_0(|f|)\mathrm{F} W_1(f)K_1(|f|)e^{-f} - W_2 \tag{38}$$

where

$$\frac{dW_0}{df} - W_0 + W_1 = P|_{u=f} = S(\beta, f), \tag{39}$$

$$\frac{dW_1}{df} - \left(1 + \frac{1}{f}\right) W_1 + W_0 = 0 .$$

W_2 is the limit of (38) if f converges to zero; in (38) the upper sign applies to a positive f, the lower to a negative f; for $f = 0$, $I = 0$.

To the power series (29) the transformation of variable introduced in (36) is applied; in the right side of (39/1) the disturbing member is

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f^n \left(\frac{2}{B}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} r_n \binom{k}{n} \beta^{n-k} . \tag{40}$$

The solution of the system of equations (39) is obtained by the superposition of the partial solutions for the disturbing members $S_n = f^n$. These are sought for in the form of

$$w_{0,n} = \sum_{i=0}^{n+1} a_{i,n} f^i , \quad w_{1,n} = \sum_{i=0}^{n+1} b_{i,n} f^i . \tag{41}$$

Substituted into (39), the coefficients can be calculated:

$$a_{n+1,n} = b_{n+1,n} = \frac{1}{2n+1} ;$$

$$a_{i,n} = -\frac{i-1}{i} b_{i,n} , \quad b_{i,n} = \frac{n^2(n-1)^2 \dots i^2}{(2n+1)(2n-1)\dots(2i-1)} \tag{42}$$

$$(n + 1 > i > 0);$$

$$a_{0,n} = b_{0,n} = 0.$$

In the integration limits the factor $B/2$ is contained, therefore the notation

$$\psi = \frac{2f}{B} \tag{43}$$

is introduced. With this

$$W_0 = \frac{B}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{B}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+m} \sum_{k=m}^{n+m} a_{k-m+1,k} \binom{n+m}{k} \beta^{m+n-k} \psi^{k-m+1}, \tag{44}$$

writing b in the place of a, W_1 is obtained, wherefrom

$$W_2 = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{B}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+m} b_{1,m} \binom{n+m}{k} \beta^n \tag{45}$$

if the formulae

$$K_0(x) \approx \ln \frac{2}{\gamma x}, \quad K_1(x) \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \ln \frac{2}{\gamma x} - \frac{x}{4} \, (\gamma = 1{,}781072) \tag{46}$$

are used, which approximate the Bessel functions in the formulae the better, the more the argument approaches zero (their correctness is easily understood from the series expansions [16]), and if it is taken into consideration that from $W_{1,2}$, f can be taken out. The results are equally valid for positive and for negative f.

The W have been calculated in the form of a power series progressing according to the reciprocals of B; with increasing B, there is an ever-increasing difference between the orders of magnitude of consecutive members and for a sufficiently large B, the sum of the series can be approximated by the first (non-zero) member (so much the more, as according to (37), division by B is required):

$$\begin{gathered} W_0 \approx W_1 \approx \psi \frac{B}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \binom{n}{k} \beta^{n-k} \psi^k = \psi \frac{B}{2} W^*(\psi), \\ W_2 \approx - \sum_{n=0}^{\infty} r_n \beta^n = - P(\beta). \end{gathered} \tag{47}$$

The asymptotic series expansions of the Bessel functions for large arguments (the first member omitted estimates the error) [16] are

$$\begin{gathered} K_0(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} \mp \ldots \right), \\ K_1(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} \pm \ldots \right). \end{gathered} \tag{48}$$

If the value I/B is denoted by I^*, so for a B increasing beyond all limits and for $0 < \beta < 2$

$$I_1^* = I^*\left[\frac{B}{2}(2-\beta)\right] = -\frac{W^*(2-\beta)}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{B}(2-\beta)}}\, e^{-B(2-\beta)} + \frac{P(\beta)}{B},$$

$$I_2^* = I^*\left[-\frac{B}{2}\beta\right] = -W^*(-\beta)\sqrt{\frac{\pi\beta}{B}} + \frac{P(\beta)}{B}. \tag{49}$$

For $\beta = 2$ the above approximation is not valid for I_1^*, its value is zero, the temperature is given by I_2^*. The second member of this is smaller than the first member in the ratio of the square root of B, so for an increasing B, the first member dominates more and more. Evaluating (37) while considering this, the generalized Blok formula (30) is obtained.

For $0 < \beta < 2$ both I^* can be calculated by the approximated formulae. By deductions similar to the above, in this case, too, (30) is obtained.

According to the Blok model, $\beta = 0$ should give $\Theta = 0$. For I_2^* the approximated formula is not valid, its value is zero; on the other hand, the members of I_1^* decrease in proportion with higher powers of B than $1/2$, which is the exponent characterizing the temperatures of the other points, because of the dominant member. Thus compared to the latter, the temperatures which can be calculated for the point $\beta = 0$ indeed disappear with increasing B. Let us remark that for $P(0) = 0$ Eq. (49/1) cannot be considered as an approximate formula, because in this case as the first relevant member of the series of W_2— not $P(\beta)/B$ must be taken for the approximation according to (47), but a member of higher order instead: however, such members decrease still more strongly with increasing B, hence the deductions remain valid.

So the Blok formula indeed provides the asymptotic value of the temperature distribution for the assumed two-dimensional heat flow for great B, and the error committed decreases at least in proportion to the square root of B (cf. the considerations in 3.4).

4.1.2. *Special cases*

Applying formulae (44) and (45), for a uniform heat-source distribution ($r_0 = 1$, the others are zero)

$$W_0 = W_1 = \frac{B}{2}\psi,\quad W_2 = -1\,; \tag{50}$$

and for a parabolic distribution $r_0 = 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = -1$:

$$W_0 = B\left(\beta\psi + \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{2}\beta^2\psi - \frac{1}{3}\beta\psi^2 - \frac{1}{10}\psi^3\right) + \frac{2}{15}\psi^2,$$

$$W_1 = B\left(\beta\psi + \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{2}\beta^2\psi - \frac{1}{3}\beta\psi^2 - \frac{1}{10}\psi^3\right) + \frac{2}{3}\psi - \frac{2}{3}\beta\psi -$$

$$- \frac{4}{15}\psi^2 - \frac{8}{15B}\psi\,, \tag{51}$$

$$W_2 = -2\beta + \beta^2 - \frac{4}{3B} + \frac{4}{3B}\beta + \frac{16}{15B^2}\,.$$

TERAUCHI and co-laborators integrated (35) numerically for a parabolic source and various values of ξ. For the surface-temperature distribution they give a closed formula which — not considering differences of printing error — agrees with (51), of course, after the suitable transformations of co-ordinates [8]. The temperature distributions (for equal total intensities) based on the data in their paper are shown in Fig. 4 for a uniformly distributed heat source and one-dimensional heat conduction and parabolic heat source and two-dimensional heat conduction (dashed curve E, continuous curve P_1, dotted curve P_2). Fig. 5 shows the maximum temperatures for different values of ξ, equally according to TERAUCHI (the dashed curve for $\sqrt{B}$ = const corresponds to the Blok formula). The figures show that if THEYSE's condition $B \geq 8$ is fulfilled, an approximation practically equal to the application of the Blok formula is

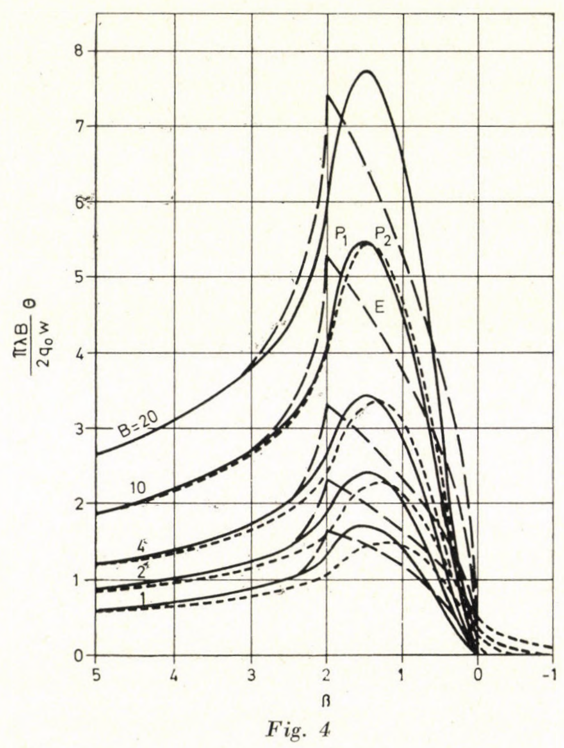


Fig. 4

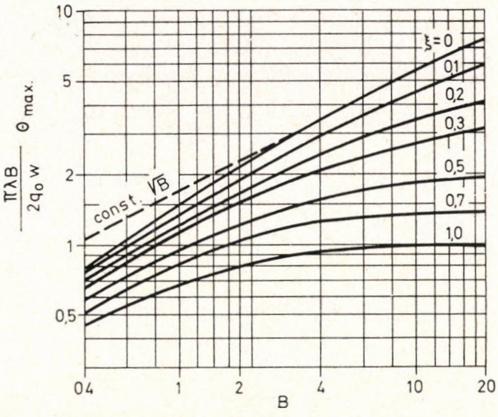


Fig. 5

obtained, while for a smaller B the maximum temperatures are overestimated more and more and also the character of the distribution changes the maximum is shifted towards the centre.

4.2. *The distribution of the developed heat*

The problem is examined in detail with numerical methods by [8]: the contact band is divided into sections and the heat flows are calculated from the condition that the surface temperatures of the bodies in contact are equal and independent of time. Here the method is not examined in detail, because [8] also proposes an approximate method, and the temperature distribution calculated in this way does not diverge very greatly from the results of the detailed analysis calculated with 40 divisions; especially in the vicinity of the maximum temperature the approximation is very good.

The basic idea of the approximate method is the following: if the whole developed heat would flow into one tooth, the temperatures $q_0\Theta_i^*$ $(i = 1, 2)$ would develop (Θ^* includes the other factors of (36) relating to the examined wheel). If it is assumed that the distribution factor is constant over the whole contact band, q_0 must be distributed in proportion to the values Θ_i^* in order to obtain the same surface temperature. Finally, for a given point

$$\Theta = \frac{\Theta_1 \Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2}, \tag{52}$$

where Θ_i is the temperature calculated with the whole quantity of heat.

The distribution factor obtained in this way obviously changes from one point of the contact band to the other, in Θ_i the variation along the contact band depending also on B which is different for each wheel: the physical characteristics cannot be taken out as in the Blok formula. At a given point the heat quantity introduced during the moving contact is determined by different distribution factors, with (52) some sort of mean value is formed. The calculations of TERAUCHI [8] for $B_2/B_1 = 10$, $B_2 = 0{,}4 \div 20$ justify the approximation.

5. Summary

Having reviewed the results of calculating gear-flash temperatures obtained up to now, the stationary models assuming one- and two-dimensional heat conduction were thoroughly analyzed. Relations [(30) and (37), (44), (45), respectively] have been deduced, valid for any heat-source pattern as well as containing the results given in the literature for special patterns as specialized cases. The solution obtained by assuming one-dimensional heat flow has been proved generally an asymptotic approximation of two-dimensional case for great valves of B Blok number, the difference diminishing about in inverse proportion to $\sqrt{B}$. The results are useful not only for gears but in studying arbitrary moving heat sources, too.

REFERENCES

1. THEYSE, F. H.: Die Blitztemperaturhypothese nach Blok und ihre praktische Anwendung bei Zahnrädern, *Schmiertechnik* **14** (1967), 22—29
2. WELCH, W. P.—BORON, J. F.: Thermal Instability in High-Speed Gearing, *Trans. ASME* (Ser. A, Power), **83** (1961), 91—107
3. BLOK, H.: The Surface Temperatures under Extreme Pressure Lubricating Conditions, Author's Edition, Delft 1937
4. BOTKA, I.: Fogaskerékméretezés kiegyenlített kontakthőmérsékletre, GÉP, **16** (1967) 339—343
5. VÖRÖS, I.: Gépelemek III. (Fogaskerekek), Tankönyvkiadó Budapest 1961
6. NIEMANN, G.—SEITZINGER, K.: Die Erwärmung einsatzgehärteter Zahnräder als Kennwert für ihre Fresstragfähigkeit, *VDI—Z*, **113** (1971) 97—105
7. NAKADA, T.—HASHIMOTO, S.: Heat Conduction in a Semi-Infinite Solid Heated by a Moving Heat Source along the Boundary, *Bulletin of JSME*, **6** (1963), 59—69
8. TERAUCHI, Y.—HAMAMOTO, T.: On the Surface Temperature Rise Caused by Frictional Heating, *Journal of JSLE*, **15** (1970), 133—138
9. TERAUCHI, Y.—MIYAO, Y.: On the Measurement of Temperature Flashes on Spur Gear Teeth, *Bulletin of JSME*, **7** (1964), 444—451; **8** (1965), 109—120
10. NIEMANN, G.—LECHNER, G.: The Measurement of Surface Temperatures on Gear Teeth, *Trans. ASME* (Ser. D, Basic), **87** (1965), 641—654
11. NIEMANN, G.—LECHNER, G.: Die Erwärmung der Zahnräder im Betrieb, *Schmiertechnik*, **14** (1967), 13—20
12. YOKOYAMA, M.—ISHIKAWA, J.—HAYASHI, K.: Measurement of Surface Temperatures on Gear Teeth by Dynamic Thermocouple Method, *Journal of JSLE*, **16** (1971), 475—485
13. DOWSON, D.—HIGGINSON, G. R.: Theorie der Evolventenzahnradschmierung, *Maschinenbautechnik*, **20** (1971), 185—190
14. TERAUCHI, Y.—KUMAMOTO, Y.—KIMOTO, I.—SASAKI, T.: Die Reibung der Zahnflanken bei geradverzahnten Stirnrädern, *Bulletin of JSME*, **10** (1967), 550—558
15. YOKOYAMA, M.—ISHIKAWA, J.—HAYASHI, K.: A Note on the Indicated Temperature of a Surface Thermocouple, *Journal of JSLE*, **16** (1971), 437—443

16. "*PATTANTYÚS*" Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve (Mechanical and Electrical Engineers' Handbook) I., Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1959
17. Niemann, G.—Lechner, G.: Die Fress-Grenzlast bei Stirnrädern aus Stahl, *Erdöl und Kohle*, **20** (1967), 96—106
18. Terauchi, Y.—Miyao, Y.—Nadano, H.: On the Seizure Caused by Pure Sliding and Rolling-Sliding Motion, *Trans. JSME.* **36** (1970), 119—125
19. Yokoyama, M.—Ishikawa, J.—Hayashi, K.: A Study on the Effect of Tooth Profile Modification upon the Seizure Resistance of Heavy-Duty Spur Gears, *Journal of JSLE*, **16** (1971), 656—665
20. Tobe, T.—Kato, M.—Takatsu, N.: Surface Temperatures on Gear Teeth, MTA IV. Korszerű Méretezési Konferencia, B szekció (Hung. Ac. Sc., IVth Conference on Modern Dimensioning, B Section), 5—7th October, Budapest 1971
21. Kudryavcev, V. N.—Dyerzhavec, Yu. A.—Glukharyev, Ye. G.: Konstrukcii i raztchot zubtchatikh reduktorov, *Izd. «Mashinostroyeniye»*, Leningrad. 1971
22. Niemann, G.—Schmidt, G.: Untersuchungen über den Einfluss von Zahnbreite und Schrägungswinkel auf die Zahnbelastung bei Stirnrädern, *VDI-Z* **113** (1971), 165—170
23. Niemann, G.: Maschinenelemente II., Springer, Berlin 1961
24. Freud, G.: Parciális differenciálegyenletek (Műszaki matematikai gyakorlatok B. VIII.) (Partial Differential Equations — Exercises in Technical Mathematics B. VIII), Tankönyvkiadó, Budapest 1958
25. Kolonits, F.: Fogaskerék-fogprofil hőokozta igénybevétele (Stresses Caused by Temperature in the Tooth Profile of Gears; Doctor's thesis) Budapest Techn. University.
26. Szűcs, E.: A hasonlóságelmélet alapjai (The Bases of the Theory of Similarity), Műszaki könyvkiadó, Budapest 1967
27. Steinhilper, W.: Der zeitliche Temperaturverlauf in schnellgeschalteten Reibungskupplungen und -bremsen, *ATZ* **65** (1963), 223—229
28. Rizhik, I. M.: Tablitzi integralov, sum, rvadov i prozvedyenyiy, Ogiz, Moscow—Leningrad 1948

Blitztemperaturen von Zahnrädern, I. Teil. Überblick und stationäre Modelle. Die bisherigen Ergebnisse der Verfahren für die Berechnung der Kontakttemperaturen von Zahnrädern wurden überblickt, und die Modelle für stationären Zustand und ein- bzw. zweidimensionale Wärmeleitung wurden eingehend analysiert. Zusammenhänge für beliebige Wärmequellenverteilung wurden abgeleitet, welche die im Schrifttum für eine gegebene Verteilung mitgeteilten Ergebnisse als Sonderfälle enthalten. Es wurde festgestellt, daß im allgemeinen die unter Voraussetzung von eindimensionaler Wärmeleitung erhaltene Verteilung, bei großen Blok-Zahlen B, eine asymptotische Näherung des zweidimensionalen Falles ist, die Abweichung verringert sich in umgekehrtem Verhältnis zu $\sqrt{B}$. Die Ergebnisse können nicht nur auf Zahnräder, sondern auch auf die Untersuchung von beliebigen beweglichen Wärmequellen angewendet werden.

Температура молнии зубчатого колеса, I. Обзор и стационарные модели. Заедание зубчатых колес на основе наиболее широко принятой теории тесно связано с наибольшей рабочей температурой контактирующих поверхностей, что — при сцеплении — получается в качестве суммы средней температуры тела зубчатого колеса и многовенного роста температуры (т. н. температуры молнии). Для температурных условий зубчатых приводов сообщены теоретические и экспериментальные результаты рядом авторов. В данной работе дается обобщение основных направлений ведущихся исследований и более глубоко анализируются две модели вычисления температуры молнии зубчатых колес.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 175—190 (1974)

PHYSICO-CHEMICAL INVESTIGATION OF THE EFFECT OF NICKEL DISSOLVED IN A STEEL BATH ON DESULFURIZATION

L. SZŰCS*

CAND. OF TECHN. SCI.

[Manscript received: Oktober 6, 1973]

The paper investigates the special behaviour to be noticed when desulfurizing chromium-nickel content steels (Ni content: max 3,5%) with the aid of plant experiences and thermodynamic calculations. It was established that the development of the desulfurizing reaction was greatly slowered in case of nickel-content steel batches than in those not containing nickel. With the latter the desulfurization reaction approached the state of equilibrium more quickly, as in terms of time-unit a greater amount of the motive force of the reaction was used up. The experiments confirmed the empirical experience that nickel hinders the desulfurization of steel.

1. Aim of the investigation

Nickel-content steels distinguish themselves among structural nickel-steels not only due to their utilization properties, but also because their behaviour is different in certain metallurgical processes. Experience indicates that when manufacturing steel, those with a nickel content prove more difficult to desulfurize; in sulfur-containting gases they deteriorate rapidly, at a similar thermal stability the quicker, the higher their nickel content.

As the special behaviour of nickel-content steels has major economic consequences, great care is taken in the plants when manufacturing and metalworking such steels. Up till now the basic reason for this special behaviour could not be discovered. A chemical combination between sulfur and nickel can be taken into consideration, for example, which may explain such anomalies or — as is generally believed — nothing is possible. Perhaps the anomalous behaviour may be explained by some other cause or, perhaps it is but seemingly so and can be ascribed to some simple technological cause. But all these questions have yet to be answered.

Seeking for the reason of the behaviour of nickel-content steels, we investigated the relevant and available literature and also carried out a number of plant and laboratory tests.

* Dr. L. Szűcs, Teachers' Training College, Chemistry Department, 3300 Eger, Hungary.

2. Literary precedents of the subject matter

The following consequences may be drawn from literature concerning the impact of nickel on the sulfur activity of steel and the nickel properties influencing the desulfurization process:

Chipman et al. [1], found on basis of 1955 tests that nickel did not change the activity of sulfur dissolved in iron in a major way. This observation was further confirmed by their tests carried out in 1960. Alcock et al. [2, 3], however, found that nickel does diminish the activity of sulfur dissolved in iron.

Literature, when discussing the impact of nickel on the activity of sulfur and on desulfurizing once accepted the standpoint of Chipman, and at other times, that of Alcock. A statistical evaluation would indicate, however, that the majority accepts the view that nickel diminishes the activity of sulfur, the more so, as practice seems to prove this, too. In this respect, the experts at the Mining High School in Ostrawa (Czechoslovakia) seem to have arrived to the best conclusions as they have even published data concerning the impact of nickel on the coefficient of sulfur activity, on basis of a great number of test batch evaluations [4, 5].

Samarin [6] is quite definite in this opinion that nickel diminishes the sulfur activity, a phenomenon to be noticed in practice by the fact that nickel inhibits the sulfur-content decrease of the steel bath, viz. the desulfurization. Hungarian experience seems to indicate that together with an increase of the nickel content, the activity of sulfur dissolved in iron diminishes and this may play a major role when desulfurizing nickel-content steels.

3. Plant tests and their evaluation on the basis of thermodynamics

The relationship between nickel and the desulfurization of steel was investigated on basis of analysing batches produced according to programme, under plant conditions.

The manufacturing (desulfurization) processes were studied with the aid of four case-hardened steel batches containing 3,5 per cent Ni and 0,5 per cent Cr and five steel batches containing about 0,2 per cent C and a maximum of 0,7 per cent Mn. Figs 1 and 2 give information concerning the amount of the added slagformer, alloying addition and deoxidizing medium, as well as the time of batching.

When comparing the times of charging, it could be noticed that the preparation time for nickel-content charges was longer than that of nickel-free ones, in general by 1,8 hours. The longer preparation time is only in part explained by the fact that a part of the charge was CrNi-waste and thus oxidizing took a longer time than with those not containing Cr.

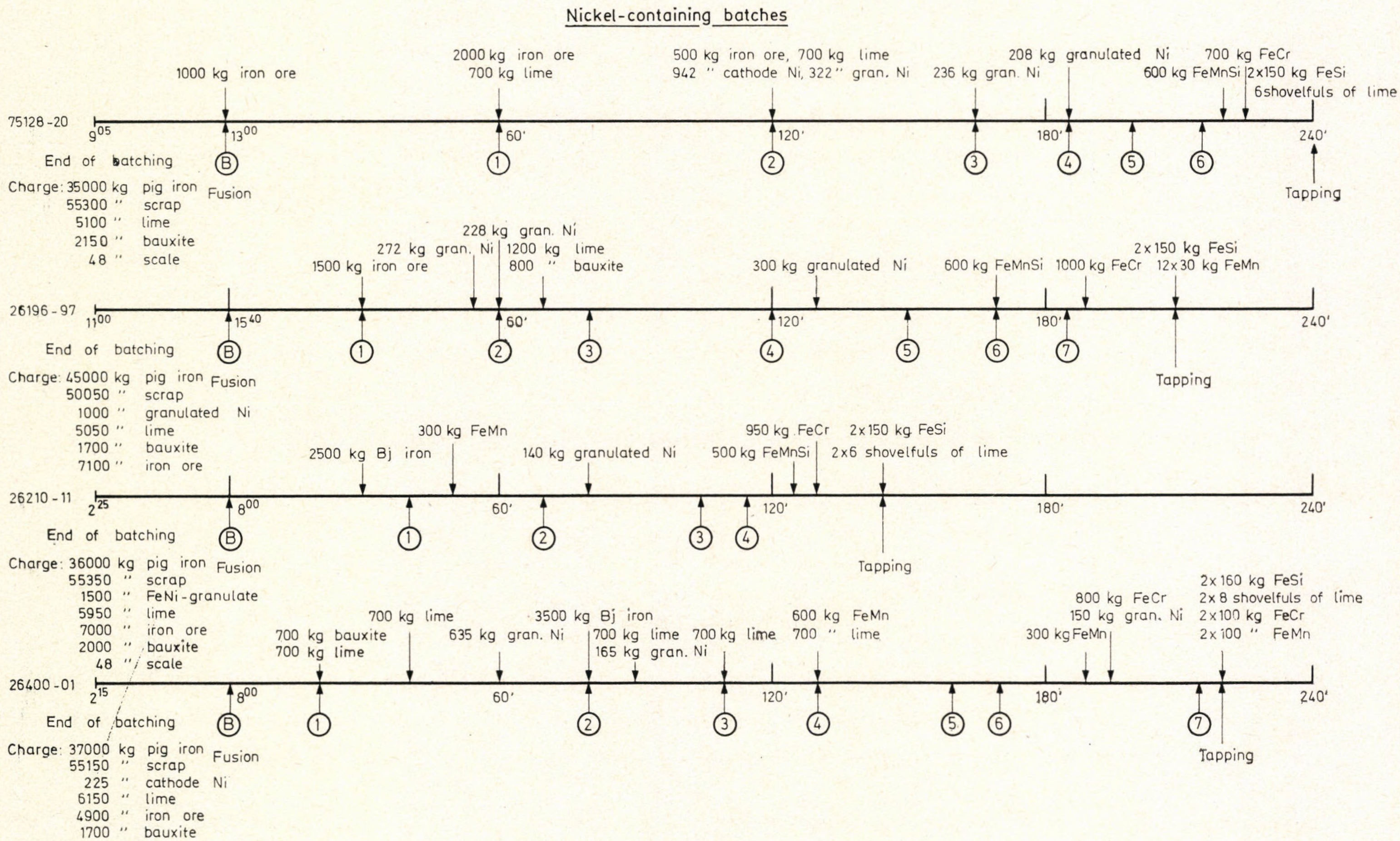

Nickel-containing batches
1000 kg iron ore
2000 kg iron ore
700 kg lime
500 kg iron ore, 700 kg lime
942 " cathode Ni, 322 " gran. Ni
236 kg gran. Ni
208 kg granulated Ni
600 kg FeMnSi
700 kg FeCr
2x150 kg FeSi
6shovelfuls of lime
75128-20
9 05
13 00
60'
120'
180'
240'
End of batching
Fusion
Tapping
Charge: 35000 kg pig iron
55300 " scrap
5100 " lime
2150 " bauxite
48 " scale
228 kg gran. Ni
272 kg gran. Ni
1500 kg iron ore
1200 kg lime
800 " bauxite
300 kg granulated Ni
600 kg FeMnSi
1000 kg FeCr
2x150 kg FeSi
12x30 kg FeMn
26196-97
11 00
15 40
Charge: 45000 kg pig iron
50050 " scrap
1000 " granulated Ni
5050 " lime
1700 " bauxite
7100 " iron ore
300 kg FeMn
2500 kg Bj iron
140 kg granulated Ni
950 kg FeCr
500 kg FeMnSi
2x150 kg FeSi
2x6 shovelfuls of lime
26210-11
2 25
8 00
Charge: 36000 kg pig iron
55350 " scrap
1500 " FeNi-granulate
5950 " lime
7000 " iron ore
2000 " bauxite
48 " scale
700 kg lime
700 kg bauxite
700 kg lime
635 kg gran. Ni
3500 kg Bj iron
700 kg lime
165 kg gran. Ni
700 kg lime
600 kg FeMn
700 " lime
300 kg FeMn
800 kg FeCr
150 kg gran. Ni
2x160 kg FeSi
2x8 shovelfuls of lime
2x100 kg FeCr
2x100 " FeMn
26400-01
2 15
8 00
Charge: 37000 kg pig iron
55150 " scrap
225 " cathode Ni
6150 " lime
4900 " iron ore
1700 " bauxite

Fig. 1

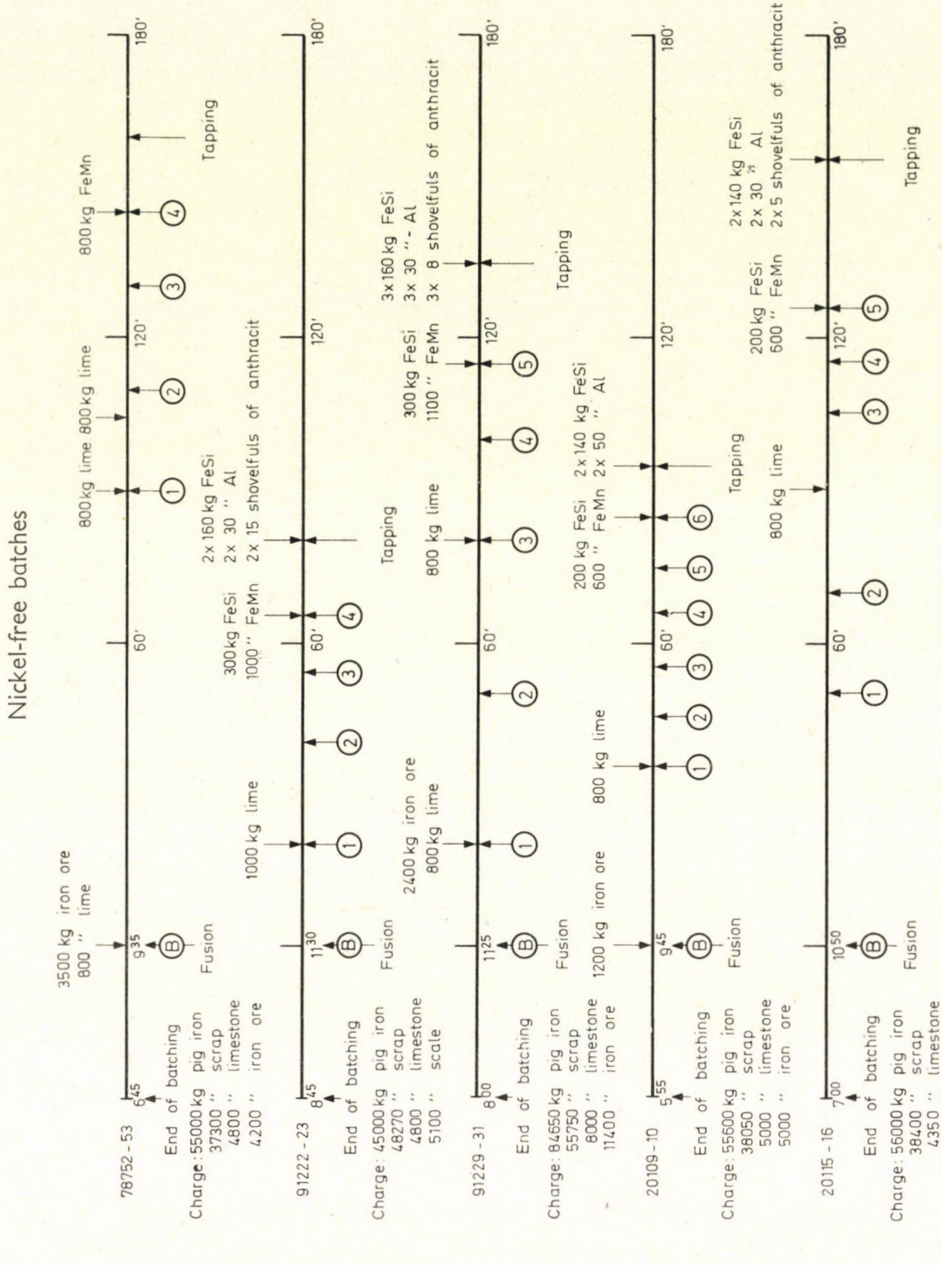


Fig. 2

Among the causes of a lengthy preparation let the fact be mentioned that reducing the sulfur content of nickel-content charges takes a longer time. When comparing the process of nickel-content and non nickel-content batches according to desulfurization, a major difference is to be observed.

The data in Tables Ia and Ib show that the specific lime yield (**TTT**) of nickel-content batches is higher, in general, than of those not containing nickel. In general, it may be stated that it is 8,3 per cent in case of nickel-content batches, and 6,45 per cent with no nickel-content ones, though the fusion sulfur content was well-nigh similar, in practice, in general even identical. However, in the measuring of desulfurization — as indicated in the data of Table I, and Figs 1 and 2 — the effect of surplus lime did not show itself.

Let us keep in mind that nickel-content steels contain chromium, and their slags also contain chromium-oxide. Due to the chromites present in the slag, the fluidity of the slag and thus also its reaction capability decrease. We also have to consider the possibility that a certain part of the free calcium-oxide is bonded by the chromium-oxide in the form of $CaO . Cr_2O_3$.

Of course, the presence of chromites and the developing of calcium chromite hinders desulfurization. The condensing effect of chromites on slag may be balanced with bauxite. As shown by the records of batch management, this possibility was utilized when producing steel. Specified according to charge, 21—25 kg of bauxite were sufficient to maintain an ideally fluid slag.

When evaluating the plant charges, a relationship was tried to be mainly established for the sulfur distribution coefficient (η) and the basicity of the slag and/or the base surplus values (N_b) which better serve to express basicity. The value of base surplus was determined with the following formula:

$$N_b = (N_{CaO} + M_{MgO} + N_{MnO}) - (2N_{SiO2} + 2N_{Al_2O_3})$$

where N was the number of moles in 100 g of slag. When calculating the base surplus the iron content of the slag was not taken into consideration, as it has but a slight influence on the desulfurizing effect of slag in the concentration to be considered with the basic SM technique.

Table II shows the mean basicity, base-surplus as well as sulfur- distribution- coefficient values for preparation slags of both nickel content and no nickel content steels. The data are also shown in graphs in Figs 3 and 4.

The abscissa in Fig. 3, shows the mean C_aO/S_iO_2 ratio of the finishing slag, while the ordinate the measure of the sulfur- distribution coefficient η. As is to be seen, the value of η increases with an increase in basicity, both in the case of nickel- containing batches and those not containing nickel. There is, however, a perceptible difference in the measure of increase. In case of nickel-free batches, a much higher measure of desulfurization can be obtained at a much lower basicity (1,70 $\div$ 2,61) than in case of nickel- containing ones with a higher basicity (2,28 $\div$ 4,89). The figure also shows that a unit increase in basicity increases the distribution- coefficient value (continuous line) of nickel-containing steels in a lesser way than in case of nickel- free ones (result line).

On the horizontal axis in Fig. 4 the value of base surplus N_b and on the vertical one the value of η is shown. It can be seen that the sulfur- distribution

Table I

Major values for the calculation of plant steel

The batch	Number	Batch number	Quality	Weight of charge, kg	Slag- forming materials (Sk) kg				Alloying and deoxidizing materials, kp			
					Lime	Baux-ite	Ore-scale	ΣSk	Ni carrier	FeCr	Deoxi-dizes	ΣSk + Ni + D + Cr
Nickel-containing	1	75128-29	BNC-35	91300	7800	2150	3548	13498	1708	700	900	16800
	2	26196-97	BNC-35	95050	7550	2500	8600	18850	1800	1000	1260	22910
	3	26210-11	BNC-35	93850	5950	2000	7048	14998	1640	950	1100	18688
	4	26400-01	BNC-35	95650	9650	2400	4900	16950	1175	1000	1420	20545
Nickel-free	5	78752-53	ST-33	92300	7200	300	7700	15200	—	—	800	16000
	6	91222-23	A-42	93270	5800	—	5100	10900	—	—	1680	12580
	7	91229-31	A-38	140400	9600	—	13800	23400	—	—	1970	25370
	8	20109-10	37-C	93650	5800	—	6200	12000	—	—	1180	13180
	9	20115-16	A-38	94400	5150	—	5500	10650	—	—	1140	11790

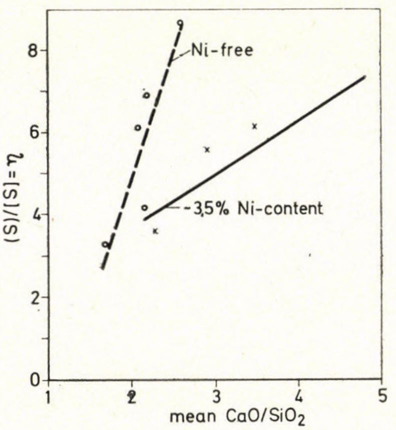


Fig. 3

batches containing nickel and free of nickel

Filler material specific values in percentage of the charge					CaO/SiO₂		S fusion] %	Desulfurization Δs $(S_b - S_v)$ %	The decrease in sulfur content as a percentage of fusion-sulfur content	Decrease in carbon ΔC $(C_b - C_v)$ %	Specific carbon decrease $\frac{\Delta C}{C\ fusion}$ %
Lime	Ore	Bauxite + ore	ΣSk	ΣSk + Ni + D + Cr	Initial	Final					
8,54	3,88	6,24	14,78	18,4	4,35	5,42	0,018	−0,002	−11,11	1,32	92,30
8,15	9,04	11,67	19,83	24,1	2,24	3,50	0,035	0,010	28,50	1,04	84,55
6,33	6,33	9,64	15,98	19,91	2,08	2,48	0,031	0,006	19,30	0,21	63,63
10,08	10,00	7,63	17,72	21,47	3,22	3,70	0,049	0,020	40,81	0,28	71,79
8,3 mean											
7,80	8,34	8,6	16,46	17,30	1,63	3,58	0,024	0,004	16,66	1,40	89,74
6,21	5,46	5,46	11,68	13,48	1,55	1,84	0,035	0,005	14,28	0,56	84,41
6,83	9,83	9,83	16,66	18,07	1,79	2,36	0,033	0,006	18,18	0,93	87,73
6,19	6,62	6,62	12,81	14,07	1,93	2,32	0,026	−0,004	−15,38	0,61	80,26
5,45	5,82	5,82	11,28	12,48	1,52	2,90	0,044	0,014	31,81	0,80	86,95
6,45 mean											

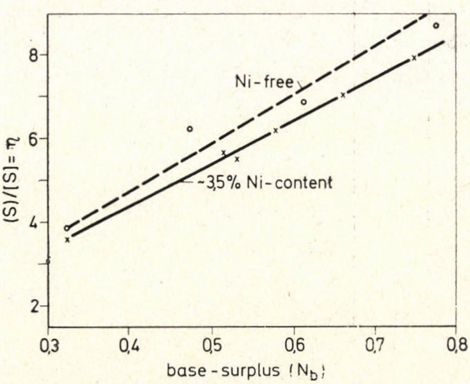


Fig. 4

Table II

Sulfur distribution and basicity values of plant steel batches

Number	Batch number	Quality	N_b	$\frac{(S)}{[S]} = \varrho$	Mean basicity	Remark
1	75128—29	BNC-35	0,662	7,0	4,89	During batching the steel took up surplus sulfur and thus could not be evaluated
2	26196—97	BNC-35	0,535	5,6	2,87	—
3	26210—11	BNC-35	0,324	3,6	2,28	—
4	26400—01	BNC-35	0,577	6,15	3,46	Sampling the one before the last one
5	78752—53	ST-33	0,780	8,65	2,61	—
6	91222—23	A-42	0,308	3,3	1,70	—
7	91229—31	A-38	0,474	6,18	2,08	—
8	20109—10	37-C	0,620	4,17	2,13	During batching the steel took up surplus sulfur and thus could not be evaluated
9	20115—16	A-38	0,614	6,83	2,21	—

Table III

Chemical composition of steel- and slag

Number	Batch number	Quality	Sampling	Steel composition %						Sampling
				C	Mn	P	S	Cr	Ni	
1.	75128	BNC-35	a	0,19	0,19	0,020	0,022	0,47	3,61	a
			b	0,11	0,16	0,018	0,020	0,40	3,70	b
2.	26196	BNC-35	a	0,28	0,18	0,014	0,028	0,22	3,34	a
			b	0,19	0,40	0,016	0,025	0,23	3,31	b
3.	26210	BNC-35	a	0,29	0,28	0,014	0,027	0,20	3,39	a
			.	0,12	0,26	0,021	0,025	0,39	3,44	b
4.	26400	BNC-35	a	0,125	0,295	0,014	0,034	0,355	3,315	a
			b	0,11	0,32	0,014	0,029	0,62	3,42	b
5.	78752	ST-33	a	0,33	0,13	0,011	0,036	—	—	a
			b	0,16	0,20	0,016	0,020	—	—	b
6.	91222	A-42	a	0,41	0,16	0,014	0,038	—	—	a
			b	0,12	0,16	0,018	0,030	—	—	b
7.	91229	A-38	a	0,30	0,19	0,011	0,030	—	—	a
			b	0,13	0,21	0,014	0,027	—	—	b
8.	20109	37-C	a	0,24	0,23	0,014	0,038	—	—	a
			b	0,15	0,18	0,014	0,030	—	—	b
9.	20115	A-38	a	0,22	0,12	0,008	0,032	—	—	a
			b	0,12	0,12	0,008	0,030	—	—	b

coefficient value increases in a linear way with the increase in base surface, viz. the desulfurization measure increased.

The sulfur- distribution coefficient of nickel- free steels is higher than the one of nickel- containing steels, even at an identical base surplus. For the evaluation, it is necessary to consider the finishing time of nickel free and nickel containing batches, from the point of fusion till that of tapping. To obtain the sulfur distribution coefficient concerning nickel containing batches shown in the figure, in general, double the time is at disposal than with nickel-free ones. If the differences between the sulfur distribution coefficient of nickel- free and nickel- containing steels is estimated also considering the time spent for distribution, it can be seen that the effect of the nickel content is much higher on the desulfurization process, as could be assumed from the data in the diagrams in Figs 3 and 4.

Following the technological and statistical evaluation of the experimental data, these were also assessed on the basis of thermodynamics. For the calculations, we considered the sampling preceding the last one by two (a) and the last one (b). These two data were selected from each batch, as the nickel

samplings of experimental plant- steel batches

Slag composition %									
S	CaO	MgO	MnO	FeO	Fe_2O_3	P_2O_5	SiO_2	Al_2O_3	Cr_2O_3
0,13	46,70	8,84	5,68	15,04	3,82	1,01	8,09	5,96	4,97
0,14	44,66	7,67	5,58	14,74	6,30	0,92	8,24	6,43	4,97
0,15	45,75	8,70	4,80	9,81	3,06	1,14	12,40	10,48	1,78
0,14	44,93	10,89	6,09	9,07	3,10	1,01	12,86	9,63	1,90
0,10	37,44	7,58	9,50	9,16	2,22	1,36	15,89	9,19	7,25
0,09	38,67	7,69	9,19	10,20	2,42	1,30	15,57	8,40	8,82
0,18	38,40	11,50	7,23	12,86	3,15	1,25	12,58	7,88	4,87
0,26	42,35	8,81	8,52	12,34	3,73	1,15	11,44	7,04	3,93
0,108	42,22	15,20	5,10	14,89	—	—	18,10	6,09	—
0,173	47,26	15,73	3,67	14,77	—	—	13,18	3,06	—
0,081	36,06	13,93	6,97	15,16	—	—	21,55	5,61	—
0,099	39,43	14,46	5,70	11,48	—	—	21,48	5,86	—
0,125	35,18	14,78	7,14	20,52	—	—	16,19	7,04	—
0,167	41,19	15,73	6,55	12,89	—	—	17,41	7,27	—
0,100	38,11	20,70	5,65	12,24	—	—	18,30	5,76	—
0,125	39,72	20,69	5,10	12,64	—	—	16,94	5,41	—
0,122	36,94	17,94	6,63	16,20	—	—	16,67	5,81	—
0,207	42,65	15,20	5,13	15,34	—	—	14,69	5,41	—

content of the batches can be regarded as stable beginning from sampling (a). (see Tables IIIa and IIIb)

On basis of plant data, we investigated the conditions of the process of desulfurizing reaction

$$[FeS] + (CaO) = FeO) + (CaS) \tag{1}$$

both concerning nickel- free and nickel- containing batches.

The normal free enthalpy change function of reaction

$$[FeS] + CaO_S = FeO_{(l)} + CaS_{(l)} \tag{2}$$

in a temperature interval of 1400÷1700°C [7], is: $\Delta G_2^0 = -8372 + 10{,}53\ T$, [cal/mol].

The values of ΔG_2^0 refer to a system, where the pure phases of $CaO_{(s)}$, $FeO_{(l)}$ and $CaS_{(l)}$ are present. However, the slags of our experimental steels ar real solutions, due to which a correction has to be added to the normal free enthalpy values (ΔG_2^0) of reaction (2).

The *standard* state of pure calcium oxides at the temperatures in question is a pure, solid state; if taken into a solution

$$CaO_S \rightarrow (CaO) \tag{3}$$

the free enthalpy change of the process is:

$$\Delta G_3 = 19\,000 - 6{,}61\ T + RT \ln a_{(CaO)}\ [cal/mol].$$

Pure calcium sulfide at an experimental temperature is fluid, thus the free enthalpy change is

$$\Delta G_4 = RT \ln a_{(CaS)}$$

accompanying its dissolving

$$CaS_f \rightarrow (CaS) \tag{4}$$

has to be taken into consideration. But, similarly, also the dissolving of the fluid iron(II) oxide:

$$FeO_f \rightarrow (FeO)\ ; \tag{5}$$

$$-\ \Delta G_5 = RT \ln a_{(FeO)}\,. \tag{6}$$

The free enthalpy of the process to be observed in plant steel batches, can be calculated from the following function

$$\Delta G_6 = [FeS] + (CaO) = (FeO) + (CaS)\,.$$

It is probable that calcium sulfide dissolves in the slag as a real component, however, its activity value is unknown. As its concentration in the slag is not high, it may be considered as an ideal behaviour component and its mole fractions (X) are taken as a basis to calculate the correction.

The calcium-oxide activity was determined by the ternary diagram of Elliott (Fig. 5). The activity values of the iron (II)-oxide component of the slag were determined on basis of the Pearson — Turkdogan ternary diagram (Fig. 6). The molar fractions of the basic components were taken into consideration as $X_{CaO} + X_{MgO} + C_{MnO}$, those of the acidic ones as $X_{SiO_2} + X_{P_2O_5}$, the total iron content of the slag as FeO.

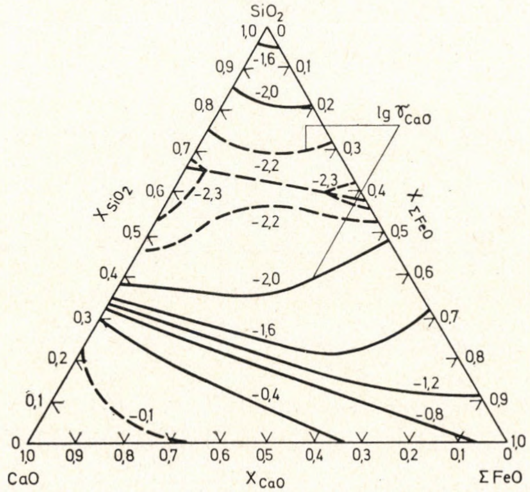


Fig. 5

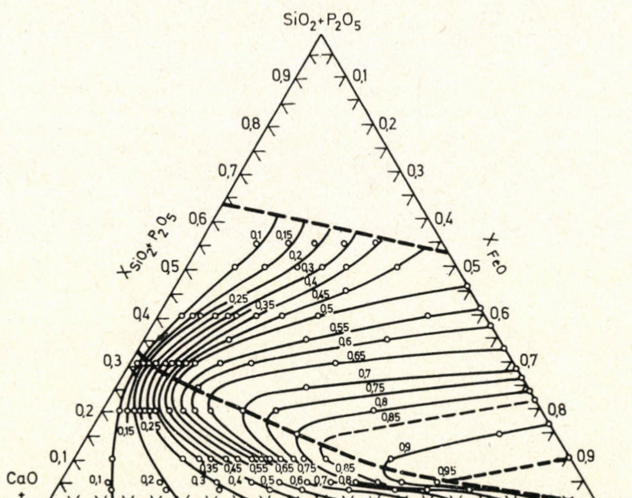


Fig. 6

Table IV

Calculation of the sulfur activity (a_S) in plant- steel batches containing nickel and free of nickel

The batch	Number	Batch number	Number of sample	$\lg \gamma_S^C$	$\lg \gamma_S^{Mn}$	$\lg \gamma_S^P$	$\lg \gamma_S^S$	$\lg \gamma_S^{Cr}$	$\lg \gamma_S^{\Sigma Ötv}$	$\gamma_S^{\Sigma Ötv}$	$a_{[S]}$
				$24 \cdot 10^{-2} \cdot [C\%]$	$-2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot [Mn\ \%]$	$4{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot [P\ \%]$	$-2{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot [S\ \%]$	$-2{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot [Cr\ \%]$			$\gamma_S^{\Sigma Ötv} \cdot [S\ \%]$
contains nickel	1	75128—29	a	0,0456	0,00475	0,00090	0,00062	0,01034	0,03079	1,0735	0,0236
			b	0,0264	0,0040	0,00081	0,00056	0,0088	0,01385	1,0322	0,0206
	2	26196—97	a	0,0672	0,0045	0,0063	0,00078	0,00484	0,05771	1,1421	0,0320
			b	0,0456	0,0100	0,00072	0,00070	0,00506	1,03056	1,0739	0,0268
	3	26210—11	a	0,0696	0,0070	0,00063	0,00076	0,0044	0,05807	1,1431	0,0309
			b	0,0288	0,0065	0,00094	0,00070	0,00858	0,01396	1,0327	0,0258
	4	26400—01	a	0,0300	0,00737	0,00065	0,00095	0,00781	0,01452	1,0340	0,0355
			b	0,0264	0,0080	0,00063	0,00081	0,01364	0,00458	1,0106	0,0293
is nickel-free	5	78752—53	a	0,0792	0,0033	0,0005	0,00101	—	0,0754	1,190	0,0428
			b	0,0384	0,0040	0,00072	0,00056	—	0,0346	1,083	0,0217
	6	91222—23	a	0,0984	0,0040	0,00063	0,00106	—	0,0940	1,242	0,0472
			b	0,0288	0,0040	0,00081	0,00084	—	0,0248	1,059	0,0318
	7	91229—31	a	0,0700	0,0048	0,00050	0,00084	—	0,0669	1,166	0,0350
			b	0,0312	0,0053	0,00063	0,00077	—	0,0258	1,061	0,0286
	8	20109—10	a	0,0576	0,0058	0,00063	0,00106	—	0,0514	1,126	0,0428
			b	0,0360	0,0018	0,00063	0,00084	—	0,0340	1,082	0,0325
	9	20115—16	a	0,0528	0,0030	0,00036	0,00090	—	0,0493	1,120	0,0358
			b	0,0288	0,0030	0,00036	0,00084		0,0253	1,060	0,0318

There are no experimental data concerning the thermodynamic activity of iron (II)-sulfide. It was calculated from relationship:

$$a_{[\mathrm{FeS}]} = \gamma_s^{\Sigma\mathrm{alloy}} \, [\mathrm{FeS}\,,\,\%] . \tag{7}$$

On basis of the above, the equation of the free enthalpy change of the desulfurization reaction is modified as follows:

$$\Delta G_6 = -\,27\,372 + 17{,}14\,T + RT \ln \frac{a_{(\mathrm{FeO})} \cdot X_{(\mathrm{CaS})}}{a_{[\mathrm{FeS}]} \cdot a_{(\mathrm{CaO})}} \,,\ [\mathrm{cal/mol}] .$$

In our calculations the Fe_2O_3 content of the slag was reduced to FeO, while the sulfur content to calcium (II)-sulfide and the calcium-oxide amount was decreased accordingly.

Table IV shows the sulfur activity in the baths of the batches, while Table V contains the free enthalpy values of the same batches calculated concerning 1600°C as well as plant temperature.

4. Summation of the results

The following may be deduced from plant experiments and thermodynamic calculations:

a) in case of both kinds of steel the ΔG_6 values calculated concerning plant temperature are relatively high negative figures. This means that the sulfur distribution is rather far from the equilibrium;

b) in case of all batches, during the time (Δt) from test "a" to test "b", the desulfurization reaction approached the equilibrium;

c) the decrease in the ΔG_6 value of nickel-free batches calculated concerning plant temperature, — during the time (Δt) from test "a" to test "b" — is much higher, though the desulfurization reactions even in this case did not achieve the state of equilibrium.

These observations are the more surprising when considering the changes in the ΔG values as specifications of the time between the sampling. The results are summarized in Table VI.

It can be seen from the Table, that the progress of the reaction was slower in the case of nickel- containing batches than in that of nickel-free ones (in general: 39,90 cal $mole^{-1}$ $minute^{-1}$), viz. in the nickel- containing batches the desulfurization reaction approached the state of equilibrium to a lesser degree. With the nickel-free steels, the desulfurization reaction approached the state of equilibrium more rapidly as — in a unit time — it spent more from the motive force the reaction.

We may thus state that the results of thermodynamic calculations underscore the empirical experience that nickel makes (slows down) the desulfurization process of steel more difficult.

Table V

Free enthalpy values of plant- steel batches containing nickel

The batch	Number	Batch number	Number of sample	$\gamma_{[S]}$	[s, %]	[FeS, %]	$a_{[FeS]}$	lg $\gamma_{(CaO)}$	$\gamma_{(CaO)}$	$X_{(CaO)}$	$a_{(CaO)}$
							$\gamma_S \cdot [FeS, \%]$				$\gamma_{(CaO)} \cdot X_{(CaO)}$
Contains nickel	1	75128—29	a	1,0735	0,0220	0,0603	0,0647	0,78—1	0,6026	0,5100	0,3070
			b	1,0322	0,0102	0,0549	0,0566	0,75—1	0,5624	0,4990	0,2806
	2	26196—97	a	1,1421	0,0260	0,0766	0,0875	0,71—1	0,5130	0,5060	0,2600
			b	1,0730	0,0250	0,0685	0,0735	0,72—1	0,5248	0,4840	0,2535
	3	26210—11	a	1,1431	0,0270	0,0740	0,0846	0,63—1	0,4266	0,4290	0,1830
			b	1,0327	0,0250	0,0685	0,0707	0,65—1	0,4467	0,4370	0,1950
	4	26400—01	a	1,0340	0,0340	0,0932	0,0965	0,70—1	0,5012	0,4200	0,2105
			b	1,0106	0,0290	0,0795	0,0804	0,70—1	0,5012	0,4650	0,2328
Is free of nickel	5	78752—53	a	1,1900	0,0360	0,0989	0,1178	0,70—1	0,5012	0,2440	0,2125
			b	1,0830	0,0200	0,0549	0,0594	0,80—1	0,6310	0,4810	0,3035
	6	91222—23	a	1,2420	0,0380	0,1041	0,1292	0,60—1	0,3981	0,3780	0,1509
			b	1,0590	0,0300	0,0823	0,0870	0,62—1	0,4169	0,4090	0,1705
	7	91229—31	a	1,1660	0,0300	0,0823	0,0958	0,65—1	0,4473	0,3625	0,1621
			b	1,0610	0,0270	0,0745	0,0785	0,65—1	0,4470	0,4100	0,1833
	8	20109—10	a	1,1260	0,0380	0,1041	0,1172	0,80—1	0,6310	0,3750	0,2366
			b	1,0820	0,0300	0,0823	0,0870	0,75—1	0,5625	0,3910	0,2199
	9	20115—16	a	1,1200	0,0320	0,0877	0,0982	0,79—1	0,6173	0,4190	0,2586
			b	1,0600	0,0300	0,0825	0,0871	0,76—1	0,5754	0,4310	0,2479

and free of nickel at 1873°*K and at plant temperature*

$a_{(CaS)}$ / $X_{(CaS)}$	$a_{(FeO)}$	$K_a = \frac{a_{(FeO)} \cdot a_{(CaS)}}{a_{(CaO)} \cdot a_{[FeS]}}$	lg K_a	R.T. lg K_a	ΔG°_{1873} K°	ΔG°_{1873} K°	Plant temperature K°	ΔG°_T	$\Delta G_{T,\text{ plant}}$
0,0025	0,30	0,0378	−1,4231	−12194,54	4731,22	−7463,32	1883	4902,62	−7291,92
0,0028	0,34	0,0589	−1,2300	−10539,87		−5808,65	1883	4902,62	−5637,25
0,0030	0,32	0,0414	−1,3835	−11855,21	4731,22	−7123,99	1873	4731,22	−7123,99
0,0027	0,30	0,0432	−1,3650	−11696,68		−6965,46	1883	4902,62	−6794,06
0,0020	0,50	0,0652	−1,1858	−10161,12	4731,22	−5429,90	1853	4388,42	−5772,70
0,0018	0,52	0,0676	−1,1701	−10026,59		−5295,37	1893	5074,02	−4952,57
0,0035	0,40	0,0684	−1,1651	−9983,74	4731,22	−5252,52	1883	4902,62	−5081,12
0,0051	0,40	0,0108	−0,9662	−8279,37		−3548,15	1888	4988,32	−3291,05
0,0019	0,43	0,0326	−1,4868	−12740,39	4731,22	−8009,17	1803	3531,42	−9208,97
0,0031	0,25	0,0431	−1,3650	−11696,69		6965,47	1893	5074,02	−6622,67
0,0015	0,55	0,0414	−1,3830	−11850,93	4731,22	−7119,71	1793	3360,02	−8490,91
0,0018	0,45	0,0547	−1,2618	−10812,36		−6081,14	1873	4731,22	−6081,14
0,0023	0,52	0,0758	−1,1203	−9599,85	4731,22	−4868,63	1823	3874,22	−5725,63
0,0030	0,40	0,0839	−1,0762	−9221,98		−4490,76	1883	4902,62	−4319,36
0,0017	0,30	0,0188	−1,7249	−14780,67	4731,22	−10049,45	1873	4731,22	−10049,45
0,0022	0,29	0,0328	−1,4841	−12717,25		−7986,03	1893	5074,02	−7643,25
0,0037	0,33	0,0476	−1,3228	−11335,07	4731,22	−6603,85	1833	4045,62	−7289,45
0,0037	0,30	0,0514	−1,2896	−11050,58		−6319,36	1873	4731,22	−6319,36

Table VI

Free enthalpy values calculated concerning 1600°C and/or plant temperature and concerning time unit cal/mole

The batch	Number	Δt minute	$(\Delta G_a - \Delta G_b)$ (1600 °C)	$(\Delta G_a - \Delta G_b)$ (plant temperature)	$\frac{(\Delta G_a - \Delta G_b)_{1600}\ °C}{\text{minute mean}}$		$\frac{(\Delta G_a - \Delta Ge)_{Ta}}{\text{minute mean}}$	
contains nickel	1	30	−1654,67	−1654,67	−55,16	−23,41	−55,16	−28,84
	2	35	−158,53	−329,93	−4,53		−9,43	
	3	45	−134,53	−820,13	−2,99		−18,22	
	4	55	−1704,37	−1790,07	−30,99		−32,54	
is nickel-free	5	35	−1043,70	−2586,30	−29,82	−39,90	−73,89	−75,85
	6	25	−1038,57	−2409,77	−41,54		−96,39	
	7	35	−377,87	−1406,27	−10,79		−40,18	
	8	20	−2063,42	−2406,20	−103,17		−120,31	
	9	20	−284,49	−970,09	−14,22		−48,50	

REFERENCES

1. Cordier, J. A.—Chipman, J.: *Journal of Metals Trans. AIME.* (1955), 905—907
2. Alcock, C. B.—Richardson, F. D.: *Acta Metallurgica* **6** (1958), 385—395
3. Alcock, C. B.—Cheng, L. L.: *Journal of the Iron and Steel Institute*, (1969), 169—173
4. Buzek, Z.—Prabhala, K. S.: Sbornik vedeckych praci Vysoké skoly bánské v Ostrave Rocnik. XI. rok 1965, cislo 3, rada hutnická, clánek 213
5. Prabhala, K. S.—Buzek, Z.—Benda, M.: Sbornik vedeckych praci Vysoké skoly bánské v Ostrave Rocnik XI, rok 1965, cisko 3, rada hutnická, clánek 212
6. Samarin, A. M.: *Journal of the Iron and Steel Institute*, (1962), 95—101
7. Simon, S.: Investigations to Clear Up the Sulfur Oxidation Thermodynamical and Reaction-Kinetical Laws in Oxigene Steel Production (in Hungarian). Doctoral Dissertation, Miskolc 1965

Physikalisch-chemische Untersuchung der Einwirkung des im Stahlbad gelösten Nickels auf die Entschwefelung. In der Arbeit werden die Ursachen für das besondere Verhalten der chrom-nickelhaltigen (max 3,5% Ni) Stähle bei der Entschwefelung auf Grund von Betriebserfahrungen und thermodynamischen Berechnungen untersucht. Es wurde festgestellt, daß das Fortschreiten der Entschwefelungsreaktion in nickelhaltigen Stahlchargen wesentlich langsamer war als in nickelfreien Chargen. Bei den letzteren näherte sich die Entschwefelungsreaktion schneller dem Gleichgewichtszustand, weil von der Triebkraft der Reaktion pro Zeiteinheit mehr verbraucht wurde. Die Untersuchungen bestätigen die in der Praxis gemachte Erfahrung, daß Nickel die Entschwefelung des Stahls behindert.

Физико-химическое исследование десульфирующего действия никеля, растворенного в стальной ванне. В работе исследуется причина особого поведения при десульфировании хромо-никелевых сталей (макс. 3,5% никеля) при использовании данных производственного опыта и термодинамических расчетов. Установлено, что протекание процесса реакции десульфирования в никелесодержащих плавках стали является более медленным, чем в случае плавок, свободных от никеля. В случае последних реакция десульфирования быстрее приближалась к состоянию равновесия, так как из движущей силы реакции за единицу времени было использовано больше. Проведенные исследования подтвердили то определение, установленное также практически, что никель тормозит десульфирование стали.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 191—201 (1974)

STRUCTURAL SYNTHESIS OF PRESS FRAMES HAVING COLUMNS AND CROSS BEAMS OF WELDED BOX CROSS-SECTION

J. FARKAS*

CAND. TECHN. SCI.

[Manuscript received December 6, 1973]

A complex design procedure is presented for the welded box sections of a press frame having two columns and two cross beams. Both the frame and the cross-sections are of double symmetry. Only a centric loading is considered. The eight unknown sizes of the sections are calculated by means of a systematic treatment of the following conditions: constraints of maximum bending and shear stresses, limitation of maximum deflection of cross beams, conditions of local buckling of flange and webs of cross beams, criterion of minimum volume and limitation of the ratio of flange thickness to web thickness, in order to avoid lamellar tearing of weld-affected zone of box sections. In the calculation of deflection, the shear deformation must be taken into account. The inner space of work must also be guaranteed. In the calculation of bending stresses of cross beams, corner moments can be neglected, but in column design they must be considered.

Symbols

A	cross- sectional area
$A_g = v_g h$	cross- sectional area of webs (Fig. 1)
B, L	sizes of inner space of work (Fig. 1)
b	sizes of the frame (Figs 1, 2; Eqs 21, 22)
C_0, C_1	constants (Eq. 31)
E	modulus of elasticity
F	pressing force
f	displacement (Fig. 2)
G	shear modulus
h	height of webs (Fig. 1)
I	moment of inertia
K	section modulus
M	bending moment
n_h	safety factor
S_x	statical moment
s	width of flanges (Fig. 1)
T	shear force
V	volume
v	thickness of flanges (Fig. 1)
v_g	thickness of webs (Fig. 1)
β	web buckling ratio (Eqs 6, 7)
δ	flange buckling ratio (Eq. 8)
$\zeta = s_1/h_1$	a parameter (Eq. 15, Fig. 3)
$\vartheta = I_1/I_2$	a parameter
λl	length of pressing- force distribution (Fig. 2)
$\mu = v_{g1}/2v_1$	a parameter (Eq. 15, Fig. 3)
ν	Poisson's ratio
$\xi = b/l$	a parameter

* Dr. J. FARKAS, Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc-Egyetemváros, Hungary

ϱ	coefficient of shear-stress distribution (Eqs 14, 15; Fig. 3)
σ_m	allowable normal stress
τ_m	allowable shear stress
$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$	angular deformations (Eq. 2, Fig. 2)
$\varphi = h_2/h_1$	a parameter (Eq. 25)
ψ_m	allowable ratio of displacement (Eqs 9, 19)

Subscripts

1	for cross beams
2	for columns

1. Introduction

Welded frames are widely used for various types of presses of larger load-carrying capacity, e. g. hydraulic presses for vulcanization of rubber, pressing of plastics, etc. A design method has been worked out for such presses, having open section columns, by NUDELMAN [12, 13], but VORONIN [8] pointed out that open-section columns are very sensitive to warping torsion due to eccentric pressing. Thus, it is more advantageous to use welded box sections instead of open ones. Experiments carried out by KILP [4] have shown that the sensitivity to the eccentric pressing of a welded frame is less than that of a cast one.

Presses of large load-carrying capacity may consist of two or more welded frames. There are some features which designers have to consider: the inner space of work (sizes L and B in Fig. 1) must be guaranteed; the shear deformations of the cross girders should be taken into account; the ratio of flange thickness to web thickness must be limited to avoid lamellar tearing [3] of weld-affected zones. These special constraints were, up to the present, not taken into consideration. SCHWEER [7] did not take into account shear deformations, in the book [10] box sections were not treated at all.

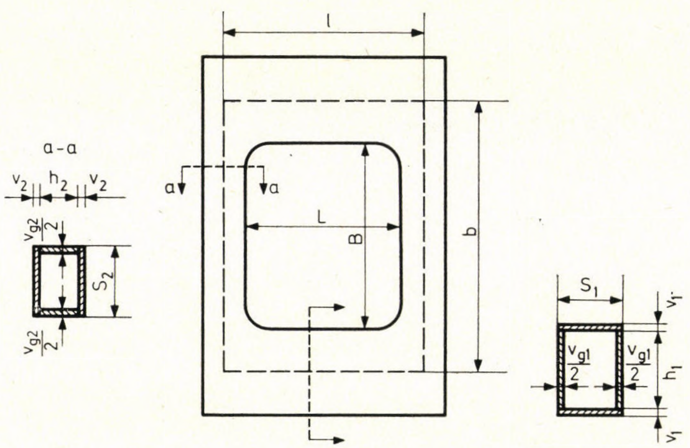


Fig. 1

The aim of the present paper is to give a more complex structural synthesis, taking into account not only the constraints of strength and deformation but also the special conditions of geometry and welding technology mentioned above. PRAGER has also shown [5] that a wide range of constraints must be taken into consideration in order to obtain a really producible construction.

It should be noted that the author collaborated at the test series carried out in the laboratory of Csepel Individual Machine Works on a welded model and on a prototype of a 10000 kN (1000 Mp) press for the vulcanization of rubber. The strain and deflection measurements showed that stresses and deformations can be calculated by treating the construction as a simple closed frame having constant cross section rods (the difference between the calculated and measured values was about 10%), excepting stress concentrations occurring at the corners. The corners must be carefully designed by using rounded, stiffened and thickened inner flanges to avoid larger stress concentrations which can cause low-cycle fatigue. Some experimental stress data and design considerations relating to such corners can be found in [4, 6, 8].

2. Considerations

1. The frame has three axes of symmetry.
2. The cross sections of transverse girders and columns are constant and double symmetric.
3. The corners are so designed that a constraint relating to the stresses in corners should not be considered. It is recommended to take a lower value of allowable stress σ_m to avoid low-cycle fatigue at the corners.
4. The state of stress is elastic, Hooke's law is valid.
5. The torsion due to eccentric load may be neglected.
6. The load is uniformly distributed over a considerable part of cross beams (Fig. 2, length λl), therefore, the maximum bending moment and the maximum shear force do not occur in the same section.

3. Design conditions

1. Constraint of max. stress due to bending at the center of the transverse beams:

$$\sigma_{1\max} = M_{1\max}/K_1 \leq \sigma_{\mathrm{m}} . \tag{1}$$

The bending moment at the corners can be calculated from an equation relating to the angular deformations according to Fig. 2:

$$M = \frac{\varphi_0}{\varphi_1 + \varphi_2} \tag{2}$$

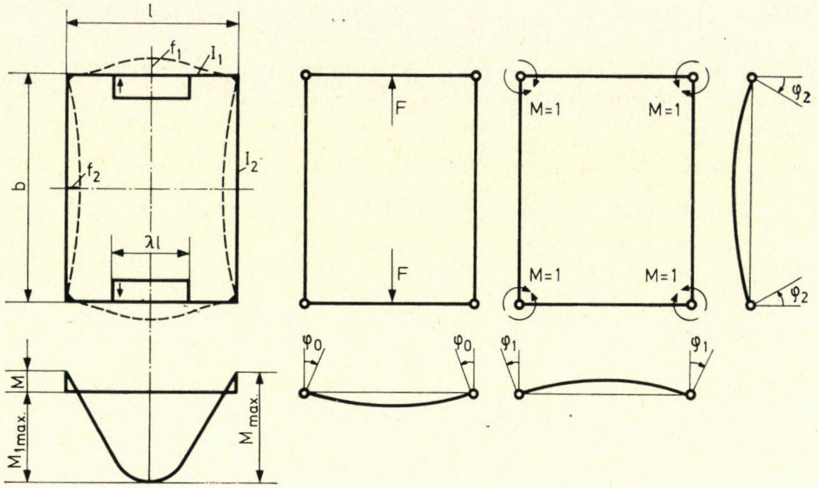


Fig. 2

where

$$\varphi_0 = \frac{Fl^2(3 - \lambda^2)}{48EI_1}; \quad \varphi_1 = \frac{l}{2EI_1}; \quad \varphi_2 = \frac{b}{2EI_2}.$$

I_1 and I_2 are the moments of inertia of cross beams and columns, respectively. Using symbols $\vartheta = I_1/I_2$ and $\xi = b/l$, Eq. (2) becomes

$$M = \frac{Fl}{24} \cdot \frac{3 - \lambda^2}{1 + \xi\vartheta}. \tag{3}$$

Thus,

$$M_{1\max} = M_{\max} - M = \frac{Fl(2-\lambda)}{8} - \frac{Fl}{24} \cdot \frac{3-\lambda^2}{1+\xi\vartheta}. \tag{4}$$

It should be noted that the calculation of the corner moment in [14] is erroneous because the shear does not cause any angular displacement at the corners.

2. Constraint of max shear stress in the transverse girders, using an approximation

$$\tau_{1\max} \cong \frac{1{,}2T_{\max}}{A_{g1}} = \frac{1{,}2F}{2v_{g1}h_1} \leqq \tau_m. \tag{5}$$

3. Condition of cross-beam-web buckling caused by shear

$$\frac{\tau_{kr}}{n_h} = \frac{5{,}35\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)\,n_h} \cdot \left(\frac{v_{g1}}{2h_1}\right)^2 \geqq \tau_m \tag{6}$$

or

$$v_{g1}/2 \geqq \beta h_1 \tag{7}$$

$n_h = 1{,}35$ safety factor; $\nu = 0{,}3$ Poisson's ratio, $E = 2{,}1.10^5$ N/mm^2 $= 2{,}1.10^6$ kp/cm^2.

With $\tau_m = 92$ N/mm^2 is $\beta = 1/90$. Because of the presence of bending, it is recommended to calculate with a value $\beta = 1/60 \div 1/80$.

4. Condition of cross-beam-flange buckling may be written as

$$v_1 \geqq \delta s_1\,, \tag{8}$$

taking into account the effect of residual welding stresses $\delta = 1/30 \div 1/40$.

5. Constraint of max relative displacement between the central points of the cross beams:

$$f_1 = f_{1M} + f_{1T} + f_{2N} \leqq f_{1m} = \psi_{1m} l\,. \tag{9}$$

ψ_{1m} is the allowable ratio of displacement, $\psi_{1m} = 1/800 \div 1/1000$. Deflection of the cross girder due to bending

$$f_{1M} = \frac{Fl^3\,(8 - 4\lambda^2 + \lambda^3)}{384 E I_1} - \frac{Ml^2}{8 E I_1} \tag{10}$$

$$I_1 = \frac{v_{g1} h_1^3}{12} + 2 s_1 v_1 \left(\frac{h_1 + v_1}{2}\right)^2. \tag{11}$$

Deflection due to shear deformation

$$f_{1T} = \frac{\varrho F l}{8 G A_1}(2 - \lambda) \tag{12}$$

where

$$A_1 = v_{g1} h_1 + 2 s_1 v_1 \tag{13}$$

and

$$\varrho = \frac{A_1}{I_1^2} \int_{(A)} \left(\frac{S_x}{v}\right)^2 \mathrm{d}A\,. \tag{14}$$

ϱ is the coefficient of shear-stress distribution, S_x statical moment. In the case of a box section (see also [2]) is

$$\frac{1}{4}\int_{(A)} \left(\frac{S_x}{v}\right)^2 \mathrm{d}A = \int_0^{s_1/2} \left(\frac{h_1 x}{2}\right)^2 v\,\mathrm{d}x + \int_0^{h_1/2} \left[\frac{h_1 s_1 v_1}{2 v_{g1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right]^2 \frac{v_{g1}\mathrm{d}y}{2}\,.$$

Using symbols $\mu = v_{g_1}/2v_1$ and $\zeta = s_1/h_1$, formula (14) becomes

$$\varrho = \frac{3\,(1 + \mu\zeta)}{5\,(1 + 3\mu\zeta)^2}\,(2 + 10\mu\zeta + 15\mu^2\zeta^2 + 5\mu\zeta^3)\,. \tag{15}$$

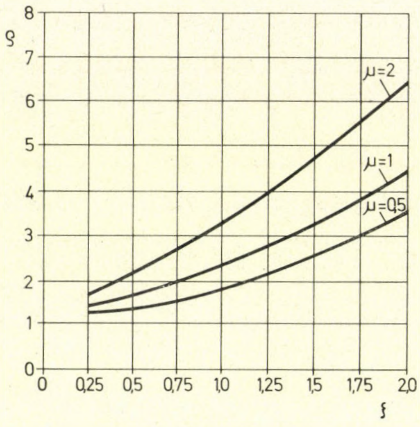


Fig. 3

Some values of ϱ are shown in Fig. 3. Approximative is $\varrho \cong A/A_g$. Note that a calculation method of shear deformations is given in [11].

The half elongation of columns is given by

$$f_{2N} = \frac{F}{4bA_2} \tag{16}$$

where

$$A_2 = v_{g2}h_2 + 2s_2v_2 \,. \tag{17}$$

6. Constraint of max stress in columns:

$$\sigma_{2\max} = \frac{F}{2A_2} + \frac{M}{K_2} \leqq \sigma_m \,. \tag{18}$$

7. Condition for the max horizontal displacement at the center of a column:

$$f_2 = \frac{Mb^2}{8EI_2} \leqq \psi_{2m} b \,. \tag{19}$$

8. In order to simplify the production, it is suitable to take

$$s_1 = s_2 = s \,. \tag{20}$$

9. Geometrical relations between the sizes of inner space of work and the sizes of frame (Fig. 1):

$$b = B + h_1 \,, \tag{21}$$

$$l = L + h_2 \,. \tag{22}$$

10. Relations between the flange and web thicknesses defined in order to avoid lamellar tearing (according to [9]):

$$v_1 \geqq 0{,}7 v_{g1}/2\,, \tag{23}$$

$$v_2 \geqq 0{,}7 v_{g2}/2\,. \tag{24}$$

11. For the reasons of production it is useful to take

$$\varphi = h_2/h_1 \geqq \varphi_{\min}\,, \tag{25}$$

$$\varphi_{\min} = 0{,}3 \div 0{,}5\,.$$

12. Condition of minimum volume:

$$V \cong 2A_1 l + 2A_2 b = \min\,. \tag{26}$$

4. Structural synthesis

In this special case of loading, the cross girders are loaded by bending and shear, the main load of the columns is, however, the tension. Formula (3) shows that the corner moment decreases when I_2 decreases. Thus, it would be useful, according to (25), to take the value of φ as small as possible. When $\varphi = \varphi_{\min}$, $I_1 \gg I_2$, namely $\vartheta > 10$. In this case, some simpler formulae can be used, neglecting M in (4) and in (10).

It can be seen that, for the calculation of eight unknown sizes, there are twelve conditions as follows: (1), (5), (7), (8), (9), (18), (19), (20), (23), (24), (25) and (26). Because M is relatively small condition, (19) may be neglected. It will be shown that condition (23) will be satisfied automatically. In order to minimize the volume, the thicknesses determined by buckling conditions (7) and (8) must be taken as small as possible.

Further, Eq. (26) can be written as

$$V/2l = A_1 + \xi A_2$$

where

$$\xi = \frac{b}{l} = \frac{B + h_1}{L + h_1 \varphi} \cong \frac{B}{L} = \text{const.}\,,$$

and, one can assume that A_2 is approx. independent of A_1 (see Eq. (38)), thus, instead of (26) it may be written as

$$A_1 = \min. \tag{27}$$

Then, the proposed design procedure is as follows:

1. The four sizes of the cross beams may be calculated using (1), (7), (8) and (5) or (27).

2. Taking $s_2 = s_1$ and $h_2 = \varphi_{\min} h_1$, the remaining two unknown sizes of the column section may be calculated by means of (24) and (9) or (18).

5. Detailed design procedure

Using (5) and (7) we obtain

$$h_{1T} = \sqrt{\frac{1{,}2F}{4\beta\tau_m}}. \tag{28}$$

With (13) Eq. (1) can be written in the form

$$K_1 \cong \frac{2I_1}{h_1} = \frac{v_{g1}h_1^2}{6} + s_1 v_1 h_1 = \frac{A_1 h_1}{2} - \frac{v_{g1}h_1^2}{3} \geq \frac{M_{1\max}}{\sigma_m}. \tag{29}$$

From (29), taking into account (7), we obtain

$$A_1 = \frac{2M_{1\max}}{\sigma_m h_1} + \frac{4\beta h_1^2}{3}. \tag{30}$$

With approximation $M = 0$ in (4), considering (22), Eq. (30) can be written as

$$A_1 = \frac{2C_0}{h_1} + 2C_1 + \frac{4\beta h_1^2}{3} \tag{31}$$

where

$$C_0 = \frac{FL(2-\lambda)}{8\sigma_m}; \quad C_1 = \frac{F\varphi(2-\lambda)}{8\sigma_m}.$$

From the condition

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}h_1} = 0$$

we obtain

$$h_{1M} = \sqrt[3]{\frac{3C_0}{4\beta}} = \sqrt[3]{\frac{3FL(2-\lambda)}{32\beta\sigma_m}}. \tag{32}$$

This formula is the same as that obtained in [1]. The suitable value of h_1 is the larger one from (28) and (32).

Then, from (7)

$$v_{g1}/2 = \beta h_1 . \tag{33}$$

With (29) and (8)

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{\delta}\left[\frac{F(L+\varphi h_1)(2-\lambda)}{8\sigma_m} - \frac{v_{g1}h_1}{6}\right]} \tag{34}$$

and

$$v_1 = \delta s_1 . \tag{35}$$

Note that in the case of a box section optimally designed for bending, according to [1], the following relation is valid: $s_1 = h_1\sqrt{\beta/\delta}$; when $\beta = 1/60$ and $\delta = 1/30$, then $s_1 = 0{,}7h_1$, therefore, condition (23) is satisfied because (23) can be written in the form $\delta s_1 \geqq 0{,}7\,\beta h_1$ or $s_1 \geqq 0{,}35 h_1$.

While

$$K_2 \cong \frac{K_1}{\varphi\vartheta} \tag{36}$$

and considering $\vartheta \rightarrow \infty$, Eq. (18) can be written as

$$\frac{F}{2A_2} + \frac{FL\varphi(3-\lambda^2)}{24K_1\xi} \leqq \sigma_m . \tag{37}$$

Using (29), from (37) we obtain

$$A_{2M} = \frac{F}{2\sigma_m\left[1 - \dfrac{\varphi(3-\lambda^2)}{3\xi(2-\lambda)}\right]} . \tag{38}$$

On the other hand, from (9), considering (16), (22), (23)

$$A_{2f} = \frac{F(B+h_1)}{4E\left[\psi_{1m}(L+\varphi h_1) - f_{1M} - f_{1T}\right]} \tag{39}$$

where f_{1M} should be calculated by means of (10) assuming that $M \cong 0$. Further calculations may be carried out with the larger A_2 value from Eqs (38) and (39).

Using (17) and the equation

$$K_2 = \frac{K_1}{\varphi\vartheta} = \frac{A_2h_2}{2} - \frac{v_{g2}h_2^2}{3} , \tag{40}$$

v_{g2} and v_2 can be expressed by ϑ:

$$v_{g2} = -\frac{3K_1}{\varphi\vartheta h_2^2} + \frac{3A_2}{2h_2} \tag{41}$$

and

$$v_2 = \frac{3K_1}{2sh_2\varphi\vartheta} - \frac{A_2}{4s}. \tag{42}$$

Substituting (41) and (42) into (24), we obtain

$$\vartheta \leq \frac{K_1}{\varphi h_2 A_2} \cdot \frac{1{,}050 + 1{,}500h_2/s}{0{,}525 + 0{,}250h_2/s}. \tag{43}$$

6. Numerical example

Data: $F = 5{,}5 \cdot 10^6$ N ($= 550$ Mp); $L = 150$ cm; $B = 280$ cm; $\sigma_m = 140$ N/mm^2 (steel 37); $\tau_m = 92$ N/mm^2; $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2; $G = 8 \cdot 10^4$ N/mm^2; $\delta = 1/30$; $\beta = 1/60$; $\psi_{1m} = \psi_{2m} = 1/800$; $\lambda = 0{,}3$; $\varphi = 0{,}4$.

According to (28) $h_{1T} = 104$ cm; using (32) $h_{1M} = 82{,}5$ cm, thus $h_1 = 105$ cm (rounded); with (7) $v_{g1}/2 = 1{,}8$ cm. $h_2 = \varphi h_1 = 42$ cm. According to (22) $l = 192$ cm, with (34) $s_1 = s_2 = s = 52$ cm and with (8) $v_1 = 1{,}8$ cm. It can be seen that condition (23) is fulfilled.

Using (11) $I_1 = 8{,}82 \cdot 10^5$ cm^4, with (10), taking $M = 0$, we obtain $f_{1M} = 4{,}16 \cdot 10^{-2}$ cm; for the values of $\mu = 1$ and $\zeta = 0{,}495$ formula (15) gives $\varrho = 1{,}64$. Further, according to (13), $A_1 = 565$ cm^2 and with (12) $f_{1T} = 8{,}13 \cdot 10^{-2}$ cm. According to (9) $f_{1m} = 0{,}24$ cm. Using (21) $b = 385$ cm. Then, using (39) $A_{2f} = 217$ cm^2. With $\xi = b/l = 2{,}0$ Eq. (38) gives $A_{2M} = 222$ cm^2. Thus, $A_2 = 222$ cm^2. From Eq. (43) $\vartheta = 13{,}5$. Finally, Eqs (41) and (42) give $v_{g2}/2 = 1{,}4$ cm and $v_2 = 1{,}0$ cm, resp.

Control of the fulfilment of design conditions: according to (3) $M = 4{,}57 \cdot 10^6$ cmN, with (4) $M_{1\max} = M_{\max} - M = 2{,}24 \cdot 10^8 - 4{,}57 \cdot 10^6 = 2{,}19 \cdot 10^8$ cmN. It can be seen that the corner moment M is small as compared to $M_{\max}$. Condition (1): $\sigma_{1\max} = 135 < 140$ N/mm^2. Considering also the value M, Eq. (10) gives $f_{1M} = 4{,}16 \cdot 10^{-2} - 1{,}13 \cdot 10^{-3} = 4{,}05 \cdot 10^{-2}$ cm; with (16) ($A_2 = 221$ cm^2) $f_{2N} = 1{,}15 \cdot 10^{-1}$ cm. Condition (9) is fulfilled because $f_1 = 4{,}05 \cdot 10^{-2} + 8{,}13 \cdot 10^{-2} + 11{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}237 < 0{,}240$ cm.

It can be seen that the values of f_{1T} and f_{2N} are considerably greater than that of f_{1M}. Condition (18) is also fulfilled because

$$\sigma_{2\max} = 125{,}0 + 15{,}4 = 140{,}4 \approx 140 \text{ N/mm}^2.$$

Note that the stress of value 15,4 N/mm^2 caused by M is small, but not negligible as compared with the value 125 N/mm^2.

The condition (19) is also fulfilled because f_2 is very small: $f_2 = 0{,}0615 < 0{,}48$ cm.

REFERENCES

1. Farkas, J.: Festigkeitseigenschaften von geschweißten, auf Biegung optimal bemessenen I- und Kastenträgern. — *Acta Techn. Hung.* **66** (1969), 427—439
2. Farkas, J.: Fémszerkezetek. (Metal Constructions. A university text-book in Hungarian) Tankönyvkiadó, Budapest 1974
3. Farrar, J. C. M.—Dolby, R. E.: Lamellar Tearing in Welded Steel Fabrication. The Welding Institute, Abington, Cambridge, England, 1972. 22 pp.
4. Kilp, K. H.: Untersuchungen an Pressengestellen bei statischer und dynamischer Belastung. — *Maschinenbautechnik* **19** (1970), 114—126
5. Prager, W.: Conditions for Structural Optimality. — *Computers and Structures* **2** (1972), 833—840

6. Puchner, O.—Ruža, S.: Měření na modelu svařovaného stojanu třecího lisu. — *Zváranie* **4** (1955), 141—149
7. Schweer, W.—Mewes, W.: Beitrag zur Frage geschweißter oder gegossener Pressenständer. — *Blech* **16** (1969), 116—121
8. Воронин, В. Г.: Конструкции станин гидравлических прессов для пластмасс. — *Вестник Машиностр.* **46** (1966), № 5., 67—71
9. гост 5264—69. Швы сварных соединений. Ручная электродуговая сварка. Основные типы и констр. элементы
10. Ланской, Е. Н.—Банкетов, А. Н.: Элементы расчета деталей и узлов кривошипных прессов. М., Машиностроение, 1966.
11. Ланской, Е. Н.—Андронов, Г. Ф.—Силанов, В. И.: Об учете влияния поперечных сил при расчете деформаций станин прессов. — *Кузнечно-штамп. Произв.* 1972. №. 7., 14—16
12. Нудельман, Л. Г.—Верещагин, Ю. Ф.: Методика расчета сварных станин гидравлических прессов для изделий из пластмасс. — Сборник «Наука и производство. НТО МАШПРОМ, Оренбург, 1963. Вып. 1.», 72—84
13. Нудельман, Л. Г.: Исследование жесткости и прочности станины гидравлического пресса П474. — *Кузнечно-штамп. произв.* (1961) №. 7., 20—25.
14. Хаит, Ш. С.: Расчет напряжений и перемещений в рамных станинах прессов. — *Кузнечно-штамп. произв.* (1969) №. 2., 27—29

Konstruktionssynthese von Pressengestellen mit Ständern und Querträgern geschweißten Kastenquerschnitts. Der Artikel behandelt ein komplexes Bemessungsverfahren für die geschweißten Kastenquerschnitte von Pressengestellen mit zwei Ständern und zwei Querträgern. Der untersuchte Rahmen und die Querschnitte sind doppelsymmetrisch. Nur eine zentrische Belastung ist berücksichtigt. Zur Berechnung der acht unbekannten Abmessungen der Querschnitte dienen die folgenden Bedingungen: Begrenzung der maximalen Spannung aus Biegung und Schub, Begrenzung der maximalen Durchbiegung der Querträger, Beulbedingungen der Gurt- und Stegbleche von Querträgern, Bedingung des minimalen Konstruktionsvolumens und Begrenzung des Verhältnisses von Gurt- und Stegblechdicken um die Lamellarrissigkeit der Nahtzonen von Kastenquerschnitten zu verhindern. Bei der Berechnung der Durchbiegung von Querträgern sind die Schubverformungen zu berücksichtigen. Man muß die vorgeschriebenen Abmessungen des Arbeitraums auch garantieren. Bei der Berechnung der Spannungen und Durchbiegungen von Querträgern kann man die Eckmomente vernachlässigen, bei der Bemessung von Ständern müssen aber diese berücksichtigt werden.

Конструкционный синтез станин прессов со стойками и поперечинами сварного коробчатого сечения. Предложен комплексный расчетный метод сварных коробчатых сечений станин прессов с двумя стойками и двумя поперечинами. Рама и сечения имеют две оси симметрии. Рассматривается только центральное нагружение. Для определения восьми неизвестных размеров сечений использованы следующие условия: условие, ограничивающее наибольшее напряжение от изгиба и сдвига и наибольший прогиб поперечин, условия местной устойчивости поясов и стенок поперечин, критерий наименьшего объема конструкции и предписание отношения толщин пояса и стенки для предотвращения расслаивания околошовных зон коробчатых профилей. При расчета прогиба поперечин необходимо учитывать действие поперечных сил. Данные размеры рабочего пространства станины надо тоже обеспечить. При расчете напряжений и прогиба поперечин узловыми изгибающими моментами можно пренебречь, но при проектировании стоек надо их учитывать.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 203—223 (1974)

APPLICATION OF CONFORMAL MAPPING TO TRANSIENT TILE DRAINAGE

A. SORIANO* R. J. KRIZEK**, I. GYUK***

[Manuscript received July 7, 1973]

The problem of transient drainage toward a tile drain in an aquifer of finite depth involves the solution of Laplace's equation within a strip domain bounded by a curved and moving free surface, a straight impervious boundary, and a small circular drain contour within the domain. Application of conformal mapping allows the problem to be stated in a new plane in which the moving free surface and the impervious boundary are mapped into fixed straight lines, whereas the drain is mapped into an upward moving closed contour. The boundary conditions of the problem in the new plane are time-dependent, and the potential and mapping functions appear coupled. This system of boundary conditions is expanded into a series of time-independent systems in terms of the coefficients of the Taylor- series expansions for all functions entering the problem. Two operations, termed "Complex Integration" and "Complex Regularization", allow a solution to be found for each of these systems up to third order of the time- power expansion. Finally, a parameter study is performed with the use of a digital computer, and the effect of different variables is evaluated.

1. Introduction

A time-dependent conformal mapping is applied to the problem of transient flow toward a tile drain a homogeneous, isotropic aquifer of finite depth. As shown in Fig. 1, the strip domain of the flow is bounded by a curved and moving boundary (the free surface), a fixed straight line (the underlying

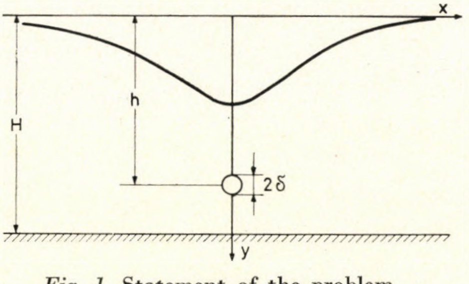


Fig. 1. Statement of the problem

* Antonio Soriano, Ingeniero de Caminos, Madrid, Spain.
** Raymond J. Krizek, Professor of Civil Engineering, The Technological Institute, Northwestern University, Evanston, Illinois.
*** Imre Gyuk, Research Associate, School of Architecture, University of Wisconsin— Milwaukee, Milwaukee, Wisconsin.

impervious bottom), and a small closed curve (the drain). By use of a complex pressure potential, the governing field equation (Laplace's equation) is automatically satisfied, and the boundary conditions can be stated by assuming Darcy's law. The initial condition for the complex pressure potential corresponds to a horizontal free surface, and it is found by applying the method of images. To overcome the difficulty associated with the free boundary, the transformation is such that the free surface is always mapped into the fixed real axis of the new plane, while the straight bottom boundary is unchanged. The motion of the free surface toward the drain is represented in the new plane by an upward motion of the drain. Once stated in the mapped plane, the problem is solved by expanding the boundary conditions in a Taylor series of time, and the resulting series of time-independent equations are solved by use of two operations, which are termed complex integration and complex regularization. This approach yields the definition of the first four terms of the Taylor-series expansion of the mapping function, whose value at the real axis gives the position of the free surface.

2. Mathematical statement of the problem

The complex function, P, chosen to desribe the flow, is related to the actual pressure, p, by

$$\mathrm{Re}\{P\} = -\frac{p}{\gamma H} \tag{1}$$

where γ is the weight density of water and H is the depth of the impervious boundary from the original free surface. The coordinate system and time axis to which this function is referenced are normalized by use of the thickness of the aquifer, H, and the time unit, t_u, defined as

$$t_u = \frac{mH}{k} \tag{2}$$

where m is the effective porosity of the aquifer and k is the coefficient of permeability. The field equation for the dimensionless complex function, P, is Laplace's equation, which will be automatically satisfied, provided P is regular within the domain. The boundary condition at the free surface is expressed by the constancy of the pressure during the drainage process. This may be expressed mathematically as

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}_* = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \tau}\right\}_* = 0 \tag{3}$$

where * replaces the equation of the unknown free surface and z and τ are the dimensionless complex coordinate of the xy plane and time, respectively. The boundary condition at the bottom is given by the fact that the vertical (or imaginary) component of the pressure gradient at this boundary is equal to the hydrostatic pressure gradient, which is unity in this dimensionless system; mathematically, this becomes

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}\right\}_{y=1} = i\,. \tag{4}$$

The boundary condition at the drain is one of constant atmospheric pressure along its contour, and this may be stated as

$$\mathrm{Re}\{P\}_{z=(\alpha+\delta)i} = 0 \tag{5}$$

where $\alpha = h/H$ is the dimensionless depth of drainage and δ is any complex number whose modulus is the dimensionless drain radius. The initial condition for the problem is that the original free surface is horizontal and coincident with the real axis, x. The complex pressure potential at $t = 0$ is found by applying the method of images.

3. Application of method of images

The initial condition of the problem is described by a complex potential function

$$P_0 = \{P\}_{\tau=0} \tag{6}$$

within a strip domain bounded by a straight equipotential line ($y = 0$), a straight line ($y = 1$) at which the imaginary part of its derivative is specified, and a small circular equipotential boundary representing the drain. If P_0 is assumed to have the structure

$$P_0 = U_0 + iz\,, \tag{7}$$

the boundary conditions for U_0 are

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial U_0}{\partial z}\right\}_{y=0} = 0\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial U_0}{\partial z}\right\}_{y=1} = 0\,, \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial U_0}{\partial z}\right\}_{z=(\alpha+\delta)i} = 0\,. \tag{10}$$

To find such a function we seek the potential field associated with a sink located at the drain center and its source and sink images with respect to the boundaries; the resulting field is symmetric with respect to the axis $y = 1$ and antisymmetric with respect to the axis $y = 0$. The symmetry with respect to an axis implies that the axis is an impervious line, and the antisymmetry with respect to the other axis implies that this axis is an equipotential line. The replacement of the drain by a singularity is done on the basis that the equipotential lines near the singularity can be assumed to be circles; hence, the small circular equipotential boundary of the drain is closely represented. The relation between the flow rate and the residue of the derivative of the potential function at the singularity can be found by integrating along the drain circumference:

$$\tilde{q} = \mathrm{Im}\left\{\oint \bar{v}\, dz\right\} \tag{11}$$

where $\bar{v}$ is the dimensionless complex discharge velocity which is related to the potential function by

$$\bar{v} = m \frac{\partial U_0}{\partial z}. \tag{12}$$

Substitution of Eq. (12) into Eq. (11) yields

$$\tilde{q} = \mathrm{Im}\left\{\oint m \frac{\partial U_0}{\partial z} dz\right\} = 2\pi m \,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Residue}\right\}. \tag{13}$$

To avoid further use of the factor πm, a dimensionless flow rate, q is defined as

$$q = \frac{\tilde{q}}{\pi m} = 2\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Residue}\right\}. \tag{14}$$

With this relation between the drain and the singularity, the potential field can be found, and the distribution of sinks and sources is given in Fig. 2. The position of the singularities is described by

$$X_n = (2n - 1)i \pm (1 - \alpha)i \tag{15}$$

where sources are associated with even values of n and sinks with odd values of n. The potential field associated with this distribution of sinks and sources is described by

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = \frac{q}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)}{z - X_n}. \tag{16}$$

The summation of this series can be accomplished by replacing each term by a Fourier integral of the type

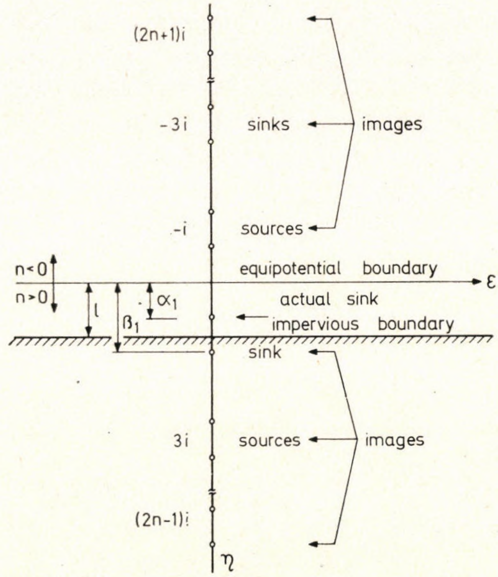


Fig. 2. Application of the method of images and distribution of singularities

$$\frac{1}{z - X_n} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm(z - X_n)t} dt \tag{17}$$

and adding the integrals to obtain the following result (SORIANO, 1972):

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = \frac{q}{2\Delta} \left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} - \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-} \right) \tag{18}$$

where

$$C_\alpha^+ = \cosh\left[(\zeta + \alpha i)/\Delta\right], \tag{19}$$

$$S_\alpha^+ = \sinh\left[(\zeta + \alpha i)/\Delta\right], \tag{20}$$

$$C_\beta^+ = \cosh\left[(\zeta + \beta i)/\Delta\right], \tag{21}$$

$$S_\beta^+ = \sinh\left[(\zeta + \beta i)/\Delta\right], \tag{22}$$

$$\Delta = \frac{4}{\pi} \tag{23}$$

and C_α^-, S_α^-, C_β^-, and S_β^- are the corresponding symmetric definitions, where $\beta = 2 - \alpha$. The expression for U_0 given by Eq. (18) can be readily integrated to yield the initial condition of the problem:

$$P_0 = L \left(\frac{S_\alpha^+}{S_\alpha^-} \cdot \frac{S_\beta^+}{S_\beta^-} \right) + iz. \tag{24}$$

4. Application of conformal mapping

As stated, the problem involves a moving boundary at which a nonlinear boundary condition is to be applied. However, the difficulty associated with the unknown position of the free surface may be overcome if the mapping function is chosen such that the free surface maps at any time into the real axis of the new plane, the impervious boundary being a double line; under such a mapping the boundary condition at the free surface is transformed as follows. In Eq. (3) the term $\partial z/\partial \tau$, which represents the seepage velocity at the free surface, is transformed by use of Darcy's law to

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \left(\frac{\overline{\partial P}}{\partial z} + i\right). \tag{25}$$

The coefficient of permeability and the effective porosity enter the equation through the dimensionless time parameter, τ. When the value for $\partial z/\partial \tau$ given by Eq. (25) is introduced into Eq. (3), the boundary condition at the free surace becomes

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\overline{\partial P}}{\partial z} + i\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \tau}\right\}_{*} = 0. \tag{26}$$

Once expressed in this way, the time-dependent mapping function, $z = z(\zeta, \tau)$, can be used to transform the boundary condition to the new plane. This change in variables yields

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial P}{\partial \zeta} \cdot \frac{\overline{\partial P}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \frac{\overline{\partial \zeta}}{\partial z} + i\frac{\partial P}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\right\}_{\eta=0} = 0. \tag{27}$$

Since the pressure is constant along the real axis of the new plane, Eq. (27) can be divided into two parts, as follows:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial P}{\partial \zeta}\right\}_{\eta=0} = 0 \tag{28}$$

and

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\overline{\partial P}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \frac{\overline{\partial \zeta}}{\partial z} + i\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\right\}_{\eta=0} = 0. \tag{29}$$

Multiplying by the real term $(\partial z/\partial \zeta).(\overline{\partial z}/\partial \zeta)$ and making use of the identity

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\right\}_{\eta=0} = 0, \tag{30}$$

we can write Eq. (29) as

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial P}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial \tau}\cdot\overline{\frac{\partial z}{\partial \zeta}}+i\,\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right\}_{\eta=0}=0\,. \tag{31}$$

This states mathematically that the free surface of the z plane is mapped into the real axis of the ζ plane. The boundary condition at the bottom, as given by Eq. (4), can be transformed directly to

$$\operatorname{Im}\left\{\overline{\frac{\partial P}{\partial \zeta}}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right\}_{\eta=1}=i\,. \tag{32}$$

Use of the condition that the mapping does not change the shape of the impervious boundary, expressed mathematically as

$$\operatorname{Im}\{z\}_{\eta=1}=0\,, \tag{33}$$

allows Eq. (32) to be expressed more conveniently as

$$\operatorname{Im}\{P\}_{\eta=1}=iz\,. \tag{34}$$

The boundary condition at the drain contour is the same, but specified at

$$\operatorname{Re}\{P\}_{\zeta=\alpha_t+\delta_t}=0\,, \tag{35}$$

where α_t and δ_t are the drain center and drain radius, respectively. In summary, the problem consists of finding two time-dependent complex functions, P and z, which are regular within a strip domain bounded by two parallel straight lines, $\eta=0$ and $\eta=1$, and a small time-dependent circle, $\zeta=\alpha_t i+\delta_t$, and satisfy the boundary conditions

$$\operatorname{Re}\{P\}_{\eta=0}=0\,, \tag{36}$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial P}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial \tau}\cdot\overline{\frac{\partial z}{\partial \zeta}}-i\,\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right\}_{\eta=0}=0\,, \tag{37}$$

$$\operatorname{Im}\{P\}_{\eta=1}=iz\,, \tag{38}$$

$$\operatorname{Im}\{z\}_{\eta=1}=0\,, \tag{39}$$

$$\operatorname{Re}\{P\}_{\zeta=\alpha_t i+\delta_t}=0\,,$$

and the initial conditions

$$z(\zeta\,,0)=\zeta_0\,, \tag{40}$$

$$P(\zeta\,,0)=P_0\,. \tag{41}$$

5. Explicit form of the mapping function

With the initial condition for P given by Eq. (24) and the system of Eqs (36) through (41), the problem is completely defined. Due to the complexity caused by the time dependency, the two complex functions entering this system are expanded into Taylor series of time, and the system of time-dependent equations is then expressed in terms of a series of time-independent systems of complex functions. The expansions of the functions are

$$P = P_0 + P_1\tau + P_2\tau^2 + \dots \tag{42}$$

and

$$z = z_0 + z_1\tau + z_2\tau^2 + z_3\tau^3 + \dots \tag{43}$$

which, when used in conjunction with the time-dependent system, yield the following systems:

First system:

$$\mathrm{Re}\{P_0\}_{\eta=0} = 0\,, \tag{44}$$

$$\mathrm{Im}\{P_0' + z_1 - i\}_{\eta=0} = 0\,, \tag{45}$$

$$\mathrm{Im}\{P_1\}_{\eta=1} = \mathrm{Im}\{iz_1\}_{\eta=1}\,, \tag{46}$$

$$\mathrm{Im}\{z_1\}_{\eta=1} = 0\,. \tag{47}$$

Second system:

$$\mathrm{Re}\{P_1\}_{\eta=0} = 0\,, \tag{48}$$

$$\mathrm{Im}\{P_1'\} + 2z_2 + z_1\bar{z}_1' - iz_1'\}_{\eta=0} = 0\,, \tag{49}$$

$$\mathrm{Im}\{P_2\}_{\eta=1} = \mathrm{Im}\{iz_2\}_{\eta=1}\,, \tag{50}$$

$$\mathrm{Im}\{z_2\}_{\eta=1} = 0\,. \tag{51}$$

Third system:

$$\mathrm{Re}\{P_2\}_{\eta=0} = 0\,, \tag{52}$$

$$\mathrm{Im}\{P_2' + 3z_3 + 2z_2\bar{z}_1' + z_1\bar{z}_2' - iz_2'\}_{\eta=0} = 0\,, \tag{53}$$

$$\mathrm{Im}\{P_3\}_{\eta=1} = \mathrm{Im}\{iz_3\}_{\eta=1}\,, \tag{54}$$

$$\mathrm{Im}\{z_3\}_{\eta=1} = 0 \tag{55}$$

where $P_0, P_1, P_2, \dots, z_0, z_1, z_2, z_3, \dots$ and their derivatives are time-dependent complex functions. The boundary condition at the drain is not included here, but it is used later to determine the flow rate. At this point the complex pressure, P, is divided into two parts:

$$P = U + W \tag{56}$$

such that $\partial U/\partial\zeta$ has a first-order pole at the moving drain center (and hence it gives the flow rate) and W is a regular function within the domain and inside the drain. The expansion of U can be found directly by introducing the time-dependent coordinate of the drain into Eq. (18), whose position may be written as

$$\alpha_t = \alpha + d_1 i\tau + d_2 i\tau^2 + \ldots \tag{57}$$

where $d_1, d_2, \ldots$ are constants to be defined. The imaginary part of the derivative of U, which is the function which enters the boundary condition, is expanded to obtain

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right\}_{\eta=0} = \mathrm{Im}\left\{U_0'\right\}_{\eta=0} + \mathrm{Im}\left\{U_1'\right\}_{\eta=0}\tau + \mathrm{Im}\left\{U_2'\right\}_{\eta=0}\tau^2 + \ldots \tag{58}$$

where

$$U_0' = \frac{q_0}{\Delta}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right\}, \tag{59}$$

$$U_1' = \frac{q_1}{\Delta}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right\} + \frac{q_0 d_1}{\Delta^2}\left\{\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{1}{S_\beta^{+2}}\right\}, \tag{60}$$

$$U_2' = \frac{q_2}{\Delta}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right\} + \frac{q_0 d_2 + q_1 d_1}{\Delta^2}\left\{\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{1}{S_\beta^{+2}}\right\}, + \frac{q_0 d_1^2}{\Delta^3}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^{+3}} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^{+3}}\right\} \tag{61}$$

and $q_0, q_1, q_2, \ldots$ are the coefficients of the expansion of the flow rate

$$q = q_0 + q_1\tau + q_2\tau^2 + \ldots \tag{62}$$

to be defined by use of the boundary condition at the drain. Once these expansions are known, Eq. (45) can be considered; by substituting into Eq. (45) the value of U_0' given in Eq. (59), we obtain

$$\mathrm{Im}\left\{z_1\right\}_{\eta=0} = -\frac{q}{\Delta}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right\}_{\eta=0}. \tag{63}$$

Since the right-hand term of Eq. (63) is regular and real-valued at $\eta = 1$, we may write

$$z_1 = -\frac{q_0}{\Delta}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right\} \tag{64}$$

which satisfies Eq. (47). With this value for z_1, Eq. (46) can be written as

$$\mathrm{Im}\left\{W_1\right\}_{\eta=1} = -\,\mathrm{Im}\left\{\frac{q_0 i}{\Delta}\left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right)\right\}_{\eta=1}. \tag{65}$$

In order to find an expression for W_1 which satisfies Eq. (65) and is imaginary-valued at the real axis, an operation termed "complex integration" is performed. This operation, which replaces a complex Fourier integration (KALININ, 1948; SORIANO, 1972), consists of multiplying the function in the right-hand term by its argument over twice the imaginary unit and subtracting the conjugate of the resulting expression. Under this operation the imaginary part of the expression is unchanged, and the following imaginary-valued function is obtained at the real axis:

$$W_1 = -\frac{q_0}{2}\left\{\frac{\zeta+\alpha i}{\Delta}\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{\zeta+\beta i}{\Delta}\frac{C_\beta^+}{S_\beta^+} - \frac{\zeta-\alpha i}{\Delta}\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} - \frac{\zeta-\beta i}{\Delta}\frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right\} \tag{66}$$

where W_1 is regular within the domain and inside the drain. We find z_2 by dividing it into three parts

$$z_2 = z_{21} + z_{22} + z_{23}, \tag{67}$$

each one satisfying the bottom boundary condition and such that

$$-2\mathrm{Im}\{z_{21}\}_{\eta=0} = \mathrm{Im}\{U_1'\}_{\eta=0}, \tag{68}$$

$$-2\mathrm{Im}\{z_{22}\}_{\eta=0} = \mathrm{Im}\{W_1' - iz_1'\}_{\eta=0}, \tag{69}$$

$$-2\mathrm{Im}\{z_{23}\}_{\eta=0} = \mathrm{Im}\{z_1\bar{z}'_1\}_{\eta=0}. \tag{70}$$

Substitution of the known values for P_1' and z_1' into Eqs (68) and (69) yields directly the following regular expressions for z_{21} and z_{22}

$$-2z_{21} = \frac{q_1}{\Delta}\left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right) + \frac{q_0 d_1}{\Delta^2}\left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{1}{S_\beta^{+2}}\right), \tag{71}$$

$$\begin{aligned}-2z_{22} = \frac{q_0}{2\Delta}\bigg\{&\frac{\zeta-\beta i}{\Delta}\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \frac{\zeta-\alpha i}{\Delta}\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{\zeta-\alpha i}{\Delta}\frac{1}{S_\alpha^{-2}} - \frac{\zeta-\beta i}{\Delta}\frac{1}{S_\beta^{-2}}\\ &- \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} - \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+} + \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\bigg\}\end{aligned} \tag{72}$$

which are real-valued at $\eta = 1$ and hence satisfy Eq. (51). The right-hand term of Eq. (70) can be evaluated from Eq. (64) to yield

$$-2\,\mathrm{Im}\{z_{23}\}_{\eta=0} = \frac{q_0^2}{\Delta^3}\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \frac{1}{S_\beta^{+2}}\right)\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right)\right\}_{\eta=0}. \tag{73}$$

Since the expression in the right-hand term of the equation is singular at $\zeta = \alpha i$, a "complex regularization" must be performed to remove the singularities without changing the imaginary part of the expression at the real axis; the resulting expression must also be real-valued at $\eta = 1$. The operation of "complex regularization" is accomplished by use of a partial fraction expansion to isolate the singularities and a conjugation and change of sign to remove the singularity from the relevant domain. The partial fraction-expansion identities used in this operation are

$$\frac{1}{S_\alpha^+ S_\alpha^-} = \frac{i}{\cos}\left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right) \tag{74}$$

$$\frac{1}{S_\alpha^{+2} S_\alpha^-} = \frac{i}{\cos}\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^{+2}} + \frac{1}{\cos^2}\left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right) \tag{75}$$

where

$$\cos = \cos\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha). \tag{76}$$

After performing the complex regularization, we obtain the following result for z_{23}:

$$-2z_{23} = \frac{q_0^2}{\Delta^3}\left\{(2 + \Sigma_\alpha)\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + (2 + \Sigma_\beta)\frac{C_\beta^+}{S_\beta^+} + \frac{1}{\cos}\left(\frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}} + \frac{C_\beta^+ S_\alpha^+}{S_\beta^{+2}}\right)\right\} \tag{77}$$

where

$$\Sigma_\alpha = \frac{1}{\cos^2}(C_\alpha^{+2} + C_\alpha^{-2}), \tag{78}$$

$$\Sigma_\beta = \frac{1}{\cos^2}(C_\beta^{+2} + C_\beta^{-2}). \tag{79}$$

The addition of Eqs (71), (72) and (77) gives

$$\begin{aligned} -2z_2 = {} & \left(\frac{q_1}{\Delta} - \frac{q_0}{2\Delta}\right)\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{q_0 d_1}{\Delta^2}\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \\ & + \frac{q_0}{2\Delta}\left\{\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\left(\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}}\right) + \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right\} + \\ & + \frac{q_0^2}{\Delta^3}\left\{(2 + \Sigma_\alpha)\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{1}{\cos}\frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}}\right\} + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta) \end{aligned} \tag{80}$$

where the symbol Sym (α/β) represents an expression which is equivalent to the written part, but with an interchange in the roles of α and β; Eq. (80) is symmetric with respect to the line $\eta = 1$. Substituting the value for z_2 into Eq. (50) gives

$$
\begin{aligned}
-2\,\mathrm{Im}\{W_2\}_{\eta=1} = \mathrm{Im}\Bigg\{ & \left(\frac{q_1}{\Delta} - \frac{q_0}{2\Delta}\right) i \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{q_0 d_1}{\Delta^2} i \frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \\
& + \frac{q_0}{2\Delta} i \left\{ \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta} \left(\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}} \right) + \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} \right\} + \\
& + \frac{q_0^2}{\Delta^3} i \left\{ (2 + \Sigma_\alpha) \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{1}{\cos} \frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}} \right\} + \\
& + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta)_{\eta=1}
\end{aligned}
\tag{81}
$$

As with W_1, a complex integration is performed on Eq. (81), and, since the imaginary part remains unchanged at $\eta = 1$, we may write

$$
\begin{aligned}
-2\,\mathrm{Im}\{W_2\}_{\eta=1} = \mathrm{Im}\Bigg\{ & \left(\frac{q_1}{2} - \frac{q_0}{4}\right) \left\{ \frac{\zeta + \alpha i}{\Delta} \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} - \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta} \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} \right\} + \\
& + \frac{q_0 d_1}{2\Delta} \left\{ \frac{\zeta + \alpha i}{\Delta} \frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta} \frac{1}{S_\alpha^{-2}} \right\} + \\
& + \frac{q_0}{4} \left\{ \frac{\zeta + \beta i}{\Delta} \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta} \left(\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\zeta + \beta i}{\Delta} \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} - \frac{\zeta - \beta i}{\Delta} \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} \right\} + \\
& + \frac{q_0}{2\Delta^2} \left\{ \frac{\zeta + \alpha i}{\Delta} (2 + \Sigma_\alpha) \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} - \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta} (2 + \Sigma_\alpha) \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\cos} \left(\frac{\zeta + \alpha i}{\Delta} \frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{-2}} - \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta} \frac{C_\alpha^- S_\beta^-}{S_\alpha^{-2}} \right) \right\} \Bigg\} + \\
& + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta)_{\eta=1}
\end{aligned}
\tag{82}
$$

where the symbol Sym $(+/-)$ is used to replace an expression similar to the written part, but with sign of α and β interchanged; this is the conjugate of the expression with respect to the real axis. Since the expression given by Eq. (82) is not regular, the poles must be moved. The singularities in this expression are

$$
\mathrm{Pl} = \frac{\zeta + \alpha i}{\Delta} \frac{1}{S_\alpha^{+2}} \left(\frac{q_0 d_1}{2\Delta} + \frac{q_0^2}{2\Delta^2} \frac{1}{\cos} \cdot C_\alpha^+ S_\beta^+ \right) - \mathrm{Sym}(+/-) + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta) \tag{83}
$$

which have a first-order pole at the drain. The expression

$$
\mathrm{RF} = -\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} \left(\frac{q_0 d_1}{2\Delta} + \frac{q_0^2}{2\Delta^2} \frac{1}{\cos} \cdot C_\alpha^+ S_\beta^+ \right) - \mathrm{Sym}\,(+/-) + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta)\,, \tag{84}
$$

which has a pole of the same type, but with opposite sign, is such that the addition of Eqs (83) and (84) yields a regular expression. On the other hand, the expression given by Eq. (84) is real-valued at $\eta = 1$ and imaginary-valued at $\eta = 0$; hence, the boundary conditions are not affected when this expression is added to Eq. (82) to make W_2 regular. Thus, we may write

$$
\begin{aligned}
-2W_2 = {} & \left(\frac{q_1}{2} - \frac{q_0}{4}\right)\left\{\frac{\zeta + \alpha i}{\Delta}\,\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+}\right\} + \frac{q_0 d_1}{2\Delta}\left\{\frac{\zeta + \alpha i}{\Delta}\,\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+}\right\} + \\
& + \frac{q_0}{4}\left\{\frac{\zeta + \alpha i}{\Delta}\cdot\frac{\zeta - \beta i}{\Delta}\,\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \frac{\zeta - \beta i}{\Delta}\,\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+}\right\} + \\
& + \frac{q_0}{2\Delta^2}\left\{\frac{\zeta + \alpha i}{\Delta}(2 + \Sigma_\alpha)\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{1}{\cos}\left(\frac{\zeta + \alpha i}{\Delta}\,\frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}} - \frac{C_\alpha^{+2} S_\beta^+}{S_\alpha^+}\right)\right\} - \\
& - \mathrm{Sym}\,(+/-) + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta)\,. \qquad (85)
\end{aligned}
$$

The evaluation of z_3 from Eq. (53) is done by dividing it into three parts,

$$z_3 = z_{31} + z_{32} + z_{33} \qquad (86)$$

such that each part satisfies the boundary condition at the impervious boundary and

$$-6\,\mathrm{Im}\,\{z_{31}\}_{\eta=0} = 2\,\mathrm{Im}\,\{U_2'\}_{\eta=0}\,, \qquad (87)$$

$$-6\,\mathrm{Im}\,\{z_{32}\}_{\eta=0} = 2\,\mathrm{Im}\,\{W_2' - iz_2'\}_{\eta=0}\,, \qquad (88)$$

$$-6\,\mathrm{Im}\,\{z_{33}\}_{\eta=0} = 2\,\mathrm{Im}\,\{2z_2\bar{z}_1' + z_1\bar{z}_2'\}_{\eta=0}\,. \qquad (89)$$

Direct substitution of the values for U_2', W_2', and z_2', derived from Eqs (61), (85), (80), respectively, into Eqs (87) and (88) gives the following regular expressions for z_{31} and z_{32}:

$$-6z_{31} = 2\,\frac{q_2}{\Delta}\,\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + 2\,\frac{q_0 d_2 + q_1 d_1}{\Delta^2}\,\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + 2\,\frac{q_0 d_1^2}{\Delta^3}\,\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^{+3}} + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta) \qquad (90)$$

and

$$
\begin{aligned}
-6z_{32} = {} & \frac{1}{2\Delta}\left(q_1 - \frac{q_0}{2} + \frac{2q_0^2}{\Delta^2}\right)\left\{\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^{-3}} - \frac{C_\beta^+}{S_\beta^{+3}}\right) - \left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}}\right)\right\} + \\
& + \frac{q_0}{2\Delta}\left\{\left(\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\right)^2\left(\frac{C_\beta^+}{S_\beta^{+3}} - \frac{C_\beta^-}{S_\alpha^{-3}}\right) - \frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\left(\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}}\right)\right\} + \\
& + \frac{q_0^2}{2\Delta^3}\left\{\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\left(\frac{\Sigma_\beta}{S_\beta^{+2}} - \frac{\Sigma_\alpha}{S_\alpha^{-2}} + 2\pi_\alpha\left(\frac{C_\beta^+}{S_\beta^+} + \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right)\right) - \right. \\
& \left. - \Sigma_\alpha\left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right) + \frac{1}{\cos}\,F\right\} + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta) \qquad (91)
\end{aligned}
$$

where

$$\pi_\alpha = \frac{1}{\cos^2}(C_\alpha^+ S_\alpha^+ + C_\alpha^- S_\alpha^-) \tag{92}$$

and

$$F = \left\{\frac{S_\alpha^+}{S_\beta^+}(1 + C_\beta^{+2}) - C_\alpha^+ C_\beta^+\right\}\left\{\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+}\right\} - \\ - \left\{\frac{S_\beta^-}{S_\alpha^-}(1 + C_\alpha^{-2}) - C_\alpha^- C_\beta^-\right\}\left\{\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\frac{1}{S_\alpha^{-2}} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right\} + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta)\,. \tag{93}$$

To evaluate z_{33} from Eq. (89), its right-hand term may be written by use of Eqs (64) and (80) as

$$-6\,\mathrm{Im}\{z_{33}\}_{\eta=0} = \mathrm{Im}\left\{\frac{q_0}{\Delta^3}\left(3q_1 - 2q_0 + \frac{6q_0^2}{\Delta^2}\right)\left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \frac{1}{S_\beta^{+2}}\right)\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \right. \\ + \frac{2q_0^2}{\Delta^4}d_1\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^{+3}}\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right) - \frac{1}{S_\alpha^{+2}}\left(\frac{1}{S_\alpha^{-2}} + \frac{1}{S_\beta^{-2}}\right)\right\} + \\ + \frac{q_0^2}{\Delta^3}\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\left(\frac{C_\beta^+}{S_\beta^{+3}} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^{-3}}\right)\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right) - \\ - \left(\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}}\right)\left(\frac{1}{S_\alpha^{-2}} + \frac{1}{S_\beta^{-2}}\right)\Bigg\} + \\ + \frac{q_0^3}{\Delta^5}\left\{2\Sigma_\alpha\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} + \frac{1}{S_\beta^{+2}}\right) + \frac{1}{S_\alpha^{+2}}\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right) - \right. \\ \left. - 2\pi_\alpha\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+}\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right)\right\} + \frac{q_0^3}{\Delta^5}\frac{1}{\cos^2}\frac{1}{S_\alpha^{+2}} \times \\ \times\left\{\left(\frac{S_\beta^+}{S_\alpha^+}(1 + C_\alpha^{+2}) - C_\alpha^+ C_\beta^+\right)\left(\frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right) + \right. \\ \left. + 2\left(\frac{C_\alpha^- S_\beta^-}{S_\alpha^{-2}} + \frac{C_\beta^- S_\alpha^-}{S_\beta^{-2}}\right)\right\} + \mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta)_{\eta=0}\,. \tag{94}$$

Since thisexpression is not regular at $\zeta = \alpha i$, a complex regularization must be performedThe first, second, and fourth terms of the expression can be regulared by use of the partial fraction expansion identities given by Eqs (73) and (74) ad their extensions

$$\frac{1}{S_\alpha^{+2}S_\alpha^{-2}} = -\frac{1}{\cos^2}\left(\frac{C_\alpha^{+2}}{S_\alpha^{+2}} + \frac{C_\alpha^{-2}}{S_\alpha^{-2}}\right) + \frac{2i}{\cos^3}\left(\frac{C_\alpha^{+2}C_\alpha^-}{S_\alpha^+} - \frac{C_\alpha^+ C_\alpha^{-2}}{S_\alpha^-}\right), \tag{95}$$

$$\frac{1}{S_\alpha^{+3}S_\alpha^-} = \frac{i}{\cos}\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^{+3}} + \frac{1}{\cos^2}\frac{C_\alpha^+ C_\alpha^-}{S_\alpha^{+2}} - \frac{i}{\cos^3}\left(\frac{C_\alpha^+ C_\alpha^{-2}}{S_\alpha^+} - \frac{C_\alpha^{-3}}{S_\alpha^-}\right). \tag{96}$$

When these expressions are substituted into Eq. (94), the singularities are isolated; then, the poles are removed from the relevant strip by simply conjugating and changing the sign of the irregular terms, operations which do not change the imaginary part of the expression. The third term, however, is treated differently, because the fact that the functions are multiplied by their arguments, makes this procedure somewhat complicated. The regularization of this term is accomplished by analyzing its singularity at $\zeta = \alpha i$ and determining a regularization factor, which does not affect the boundary condition. By evaluating the regular part of the term at the pole and using this constant value to multiply functions of the type $1/S_\alpha^{-2}$ and C_α^-/S_α^- to compensate for any second-and first-order singularities, we find this regularization factor to be

$$\mathrm{RF} = \left\{\frac{3}{\sin^2} - \frac{1}{\cos^2} + 3\frac{\alpha-\beta}{\Delta}\left(\frac{\sin}{\cos^3} + \frac{\cos}{\sin^3}\right)\right\}\left\{\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\beta^+}{S_\beta^+} + \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-} + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^-}\right\} -$$
$$- i\left\{\frac{\alpha-\beta}{\Delta}\left(\frac{1}{\sin^2} - \frac{1}{\cos^2}\right) + \frac{\cos}{\sin}\right\}\left\{\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}} + \frac{1}{S_\beta^{-2}}\right\} \quad (97)$$

where

$$\sin = \sin\left[\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)\right]. \quad (98)$$

Use of this complex regularization allows the resulting expression for z_{33} to be written as

$$- 6z_{33} = \frac{q_0}{\Delta^3}\left(3q_1 - 2q_0 + \frac{6q_0^2}{\Delta^2}\right)\left((2 + \Sigma_\alpha)\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{1}{\cos}\frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}}\right) +$$
$$+ \frac{2q_0^2 d_1}{\Delta^4}\left\{\frac{C_\alpha^{+2} S_\beta^+}{\cos S_\alpha^+}\left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \Sigma_\alpha - \frac{4}{\cos^2}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\cos^2 S_\alpha^{+2}}(C_\alpha^{+2} C_\alpha^{-2} + 2C_\alpha^{+2} + \cos^2)\right\} +$$
$$+ \frac{q_0^2}{\Delta^3}\left\{\frac{\zeta - \alpha i}{\Delta}\right\}\frac{2}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\beta^{-2}}\left(\frac{1}{S_\beta^{+2}} - \frac{1}{S_\beta^{-2}}\right) + \frac{C_\beta^-}{S_\beta^+}\left(\frac{C_\beta^+}{S_\beta^{-3}} - \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^{-3}}\right) +$$
$$+ \left(\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+} + \frac{C_\alpha^-}{S_\alpha^-}\right)\left(\frac{3}{\sin^2} - \frac{1}{\cos^2} + 3\frac{\alpha-\beta}{\Delta}\left(\frac{\sin}{\cos^3} + \frac{\cos}{\sin^3}\right) +\right.$$
$$\left. + i\left(\frac{1}{S_\alpha^{+2}} - \frac{1}{S_\alpha^{-2}}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{\Delta}\left(\frac{1}{\cos^2} - \frac{1}{\sin^2}\right) - \frac{\cos}{\sin}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{q_0^3}{\Delta^5}\frac{C_\alpha^+}{S_\alpha^+}(6 + 4\Sigma_\alpha^2) + \frac{1}{\cos}\frac{C_\alpha^+ S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}}(1 + 4\Sigma_\alpha) +$$

$$+\frac{1}{\cos^2}\frac{C_\alpha^+ S_\beta^{+2}}{S_\alpha^{+3}}(1+C_\alpha^{+2})+\frac{1}{\cos^3}\frac{C_\alpha^{+3}S_\beta^+}{S_\alpha^{+2}}(3+C_\alpha{}^2)+$$

$$\left.+\frac{1}{\cos^4}\frac{C_\alpha^{+3}C_\alpha^{-2}}{S_\alpha^+}(6+\cos^2\Sigma_\alpha)\right\}+\mathrm{Sym}\,(\alpha/\beta). \tag{99}$$

Finally, the addition of Eqs (90, 91), and (99) define the third power of the Taylor expansion of the mapping function.

6. Determination of the constants

The condition that the moving singularity in the mapped plane corresponds to the fixed drain center in the actual plane is sufficient to characterize the constants d_1, d_2, . . ., which define the motion of the singularity, and this situation may be expressed as

$$z(\alpha_t i) = \alpha i \tag{100}$$

which, upon substitution of the expansion for α_t given by Eq. (57), yields

$$z(\alpha i - d_1\tau - d_2\tau^2 \dots) = \alpha i. \tag{101}$$

Using Eq. (101), expanding in time series, and equating terms with similar powers of time, we obtain

$$d_1 = z_1(\alpha i), \tag{102}$$

$$d_2 = z_2(\alpha i) - d_1 z_1'(\alpha i). \tag{103}$$

The boundary condition at the drain

$$\mathrm{Re}\{U+W\}_{\zeta=\alpha_t i+\delta_t} = 0 \tag{104}$$

is applied to define the constants q_0, q_1, q_2, ... The mapped drain contour, along which this boundary condition is applied, is obtained by use of the correspondence

$$\alpha i + \delta = z(\alpha_t i + \delta_t) \tag{105}$$

from which, by expansion at $\zeta = \alpha_t i$, we obtain

$$\delta_t = \delta/\{z'\}_{\zeta=\alpha_t i} + \dots . \tag{106}$$

By use of the known expansions for U and W for the substitution of the value for δ_t from Eq. (106), Eq. (104) can be written as

$$1/2(q_0 + q_1\tau + q_2\tau^2 + \dots)\,(R_0 + R_1\tau + R_2\tau^2 + \dots) +$$
$$+ T_0 + T_1\tau + T_2\tau^2 + \dots = 0 \tag{107}$$

where

$$R_0 = L[\Delta \cdot \cot/\delta], \tag{108}$$

$$R_1 = -\delta_1 + \frac{2id_1}{\Delta}(\tan + \cot), \tag{109}$$

$$R_2 = -\left(\delta_2 - \frac{\delta_1^2}{2}\right) + \frac{2id_2}{\Delta}(\tan + \cot) + \frac{2d_1^2}{\Delta^2}\left(\frac{1}{\cos^2} - \frac{1}{\sin^2}\right), \tag{110}$$

$$T_0 = -\alpha, \tag{111}$$

$$T_1 = \{W_1\}_{\zeta=\alpha i} - d_1 i, \tag{112}$$

$$T_2 = \{W_2\}_{\zeta=\alpha i} - d_1\{W_1\}_{\zeta=\alpha i} - d_2 i. \tag{113}$$

By rearrangement of Eq. (107) into terms with equal powers of time, we may define explicit values for $q_0, q_1, q_2, \ldots$ as

$$q_0 = -\frac{2T_0}{R_0}, \tag{114}$$

$$q_1 = -\frac{q_0 R_1 + 2T_1}{R_1}, \tag{115}$$

$$q_2 = -\frac{q_0 R_2 + q_1 R_1 + 2T_2}{R_2}. \tag{116}$$

7. Numerical evaluations

A digital computer was used to obtain numerical values for a representative parameter study; several values were assumed for the dimensionless parameters, and the results are plotted in Figs 3 through 7. Fig. 3 shows the evolution of the free surface with time, Figs 4 and 5 present a study of the drawdown above the drain and the flow rate, and Fig. 6 gives the status of the potential field at two different stages of the drainage process. The effect of the relative position of the drain within the aquifer is shown in Fig. 7, where the initial flow rate, q_0/kH, is plotted versus the relative depth, h/H, for different sizes of drain, δ/H. Since the variation of flow with time is almost linear in all cases, conclusions can be obtained for time equal to zero and conveniently extrapolated to other values of time. As seen in Fig. 7, there exists some depth beyond which the flow from the aquifer no longer increases; this optimum location for the drain is very close, but not at the bottom boundary, and the variation is quite flat between the optimum location and the bottom boundary.

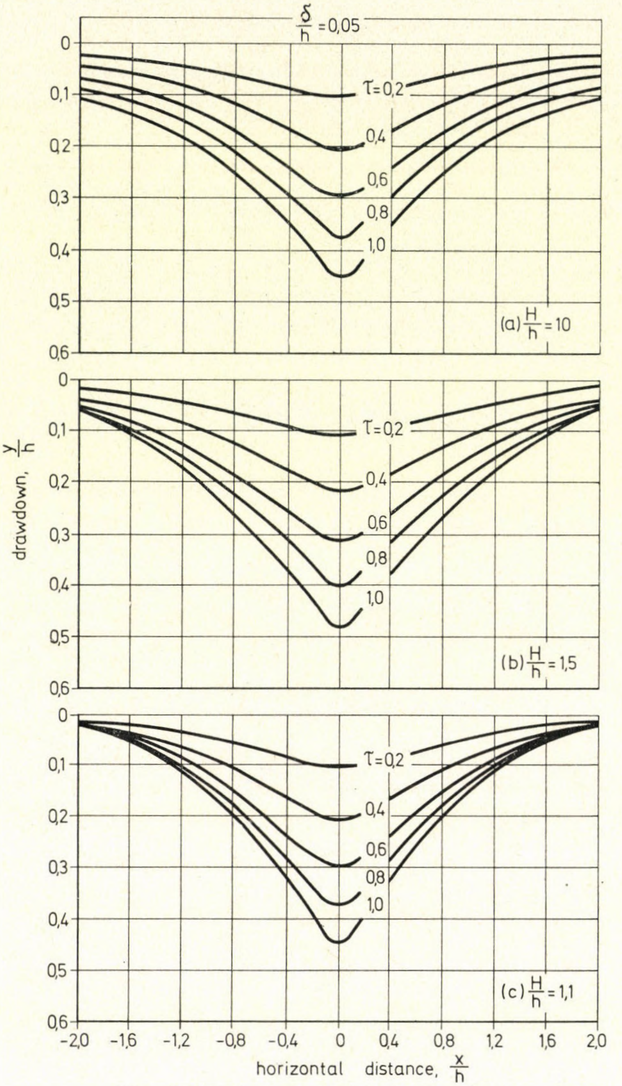


Fig. 3. Evolution of the free surface

Due to the type of approach utilized herein, the error increases with time, and a limit for the time parameter must be imposed. The value of this limit is selected by considering the contribution of each new term of the series. For values of the time parameter smaller than unity, the contribution of the third-order term is less than approximately ten per cent; therefore, for times lower than this limit, the series, which consists of alternating positive and negative terms, is considered to approach the true solution with reasonable accuracy.

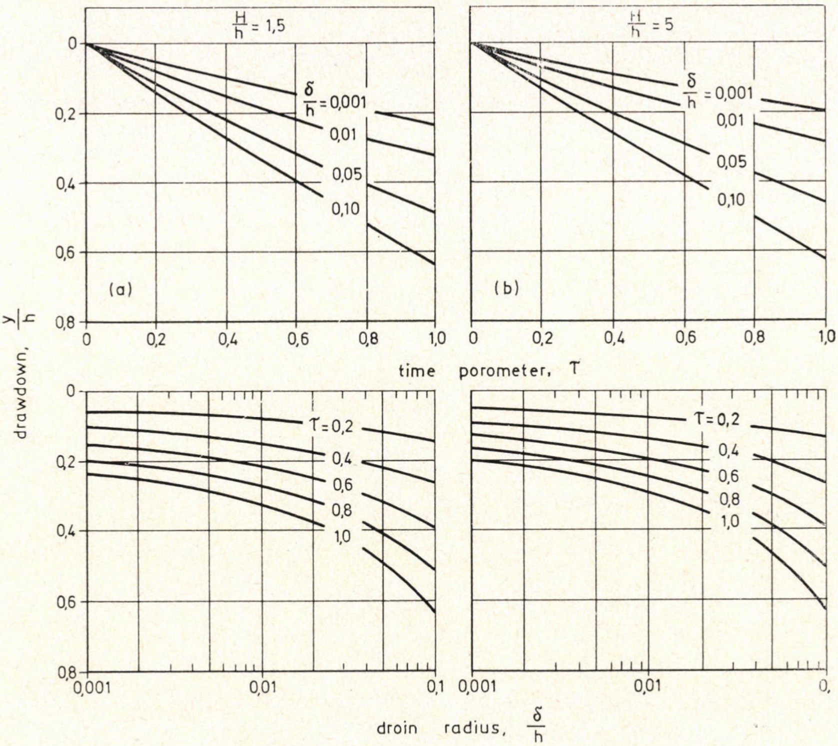


Fig. 4. Drawdown relations

8. Conclusions

Based on the results of this study and cognizant of its inherent assumptions and limitations, the following conclusions can be advanced:

1. A transient conformal mapping technique can be used to solve the problem of flow to a tile drain for times lower than some limiting value; for larger values of time, the truncated series approach will probably become unduly complicated.

2. The procedure of evaluating the Fourier integral of a function of a complex variable can be replaced by a simpler operation, termed complex integration, in order to solve Laplace's equation for a time-dependent free-surface boundary condition.

3. The partial fraction expansion applied to hyperbolic functions of a complex variable, as described in this work, provides a useful way for removing the singularities of irregular functions of a certain type without changing their boundary values.

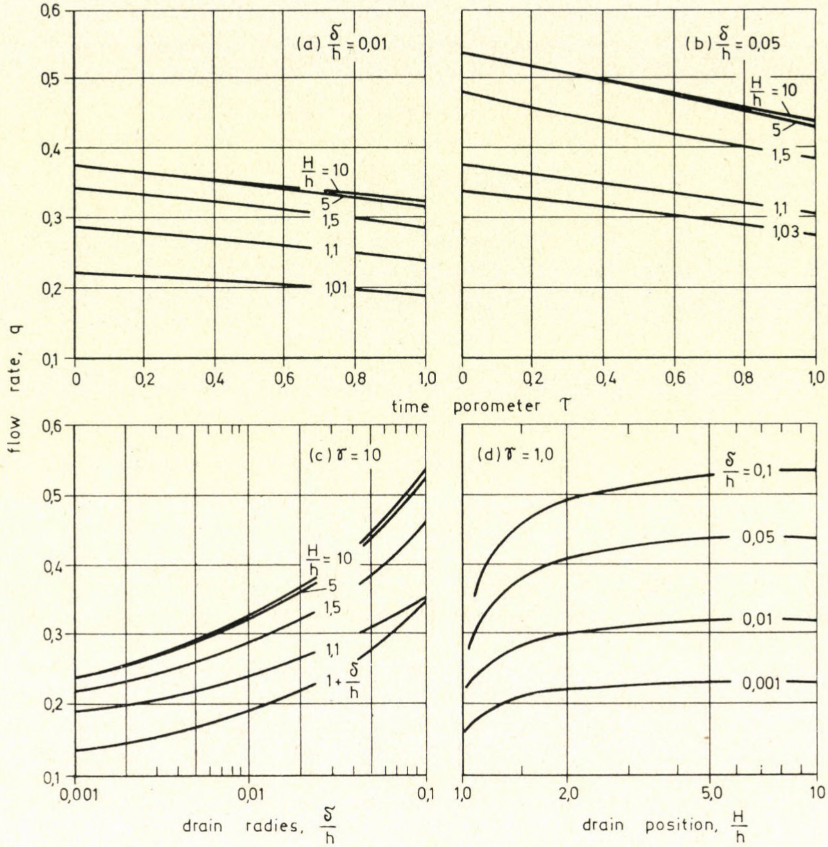


Fig. 5. **Flow-rate relations**

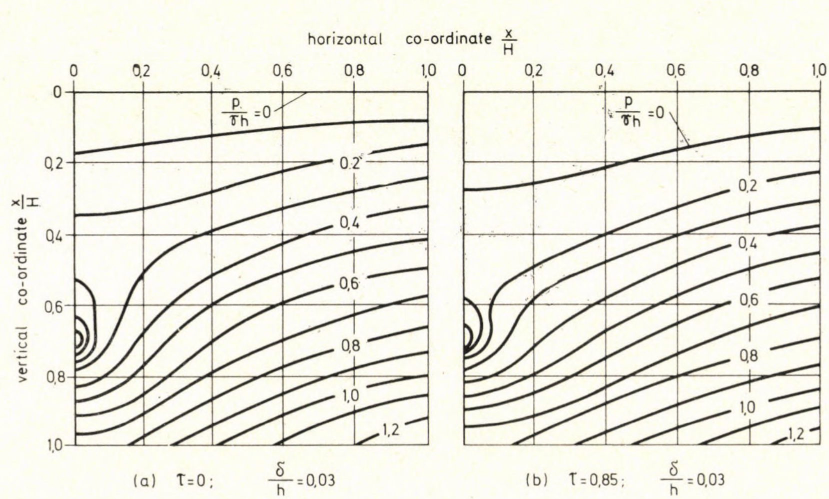


Fig. 6. **Evolution of the pore-pressure distribution**

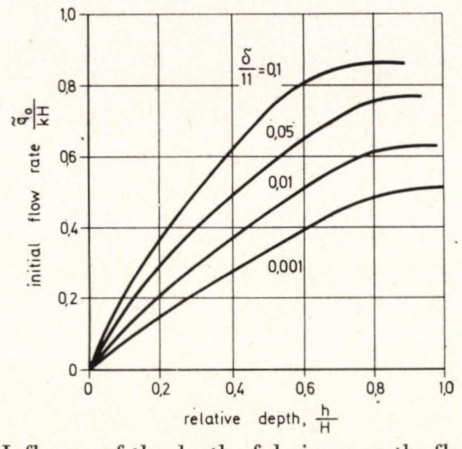


Fig. 7. Influence of the depth of drainage on the flow-rate

REFERENCES

Kalinin, N. K.: "On Unsteady Seepage in the Case of a Tile Drain in an Aquifer of Finite Depth", *Prikladnaia Matematika i Mekhanika.* **12** (1948), 199—206

Soriano, A.: Application of Conformal Mapping to Transient Seepage Problems, Doctoral Dissertation, Department of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois (1972)

Anwendung der konformen Abbildung auf transiente Tonrohrdränung. Das Problem der transienten Dränung in Richtung auf einen Tonrohrdrän in einem Grundwasserträger von endlicher Tiefe erfordert die Lösung der Laplaceschen Gleichung in einem Bandbereich der durch eine krumme und bewegliche freie Oberfläche, eine gerade undurchlässige Fläche und eine kleine kreisrunde Dränkontur innerhalb des Bereiches begrenzt ist. Die Anwendung der konformen Abbildung ermöglicht das Problem in einer neuen Ebene zu formulieren in welcher die bewegliche freie Oberfläche und die undurchlässige Begrenzung in Form einer festen Gerade abgebildet werden, während der Drän als eine sich nach oben bewegende geschlossene Kurve abgebildet wird. Das System der Randbedingungen wird in eine Reihe von zeitunabhängigen Systemen entwickelt, die von den Koeffizienten der Taylorschen Reihen aller im Problem enthaltenen Funktionen abhängig sind. Zwei Operationen, genannt »komplexe Integration« und »komplexe Regularisierung« ermöglichen es, für jedes dieser Systeme eine Lösung bis zur dritten Potenz der Zeit zu finden. Schließlich wurde mit einem Digitalrechner eine Parameterstudie durchgeführt und der Einfluß verschiedener Variablen ausgewertet.

Применение конформного отображения для глиняных дренажных труб. Проблема переходного отвода воды вверх глиняной трубы, размещенной в водонесущем слое конечной глубины, требует решения уравнения Лапласа для некоторого диапазона полосы, которая ограничивается одной свободно движущейся кривой поверхностью, одной прямой водонепроницаемой поверхностью и одним малым круглым трубным периметром в пределах диапазона. Применением конформного отображения проблему можно сформулировать в новой плоскости, на которую отображены движущаяся свободная поверхность и непроницаемая граница в качестве фиксированной прямой. В новой плоскости граничные поверхности проблемы зависят от времени, и являются зависимыми потенциал и функции отображения. Эта система краевых условий выражается в системах, независимых от времени; эти последние системы являются функциями коэффициентов рядов Тейлора всех фигурирующих в проблеме функций. Две операции, а именно «комплексное интегрирование» и «комплексная регуляризация» позволяют найти решение для каждой системы до третьего показателя степени степенного ряда по времени. В завершение авторы с помощью цифровой вычислительной машины анализируют параметры и определяют воздействие различных переменных.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 225—238 (1974)

LOCAL SIMILARITY SOLUTIONS FOR THE COMPRESSIBLE LAMINAR BOUNDARY LAYER EQUATIONS

G. NATH*

[Manuscript received 5 July 1972]

Similar solutions of the steady compressible laminar viscous fluid, both at the stagnation point and away from the stagnation point of two-dimensional and axisymmetric bodies at zero incidence have been obtained without imposing any restriction on the total enthalpy at the wall, the product of viscosity and density, and the Prandtl number. The two coupled non-linear ordinary differential equations, representing momentum and energy equations, are simultaneously solved using Runge—Kutta—Gill method. The results show that the skin- friction coefficient and the Nusselt number decrease when moving away from the stagnation point. The skin- friction coefficient increases but the Nusselt number decreases as the total enthalpy at the wall increases. The skin-friction coefficient and the Nusselt number for a two-dimensional body (a cylinder) are less than those of an axisymmetric body (a sphere).

1. Introduction

Within recent years, the problem of aerodynamic heat transfer at the stagnation point of a blunt body in hypersonic flow with or without mass transfer, characterized by large temperature gradients in boundary layer, has received a considerable amount of interest in the literature (see, for example, LEVY [1], COHEN and RESHOTKO [2], SIBULKIN [3], LEES [4], LIBBY and LIU [5], [6], BACK and WITTE [7], BACK [8—9] etc.), due to the advent of guided missiles and space vehicles. The effect of massive blowing at the stagnation point of a blunt body has been considered by LIBBY [10], ZEIBERG [11] and KASSOY [12]. FAY and RIDDELL [13] have considered the more general problem by including the effects of variable fluid properties in the boundary layer, chemical processes such as dissociation and recombination, and diffusion of atoms. In these cases, a similarity variable can be found such that the equations for the stagnation-point boundary layer can be reduced to ordinary differential equations. The stagnation-point theory can also be extended to regions away from the stagnation point. There are regimes of flight, such as high altitudes, where the boundary layer remains laminar for some distances

* G. NATH, Department of Applied Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, India

away from the stagnation point, and a laminar theory is of considerable interest.

The special features of the viscous hypersonic flow, caused by high flight velocity, are the large ratio of external- to- wall enthalpy (or temperature) and the dissociation. Therefore, large variations of fluid properties occur across the boundary layer. Hence, the product of density and viscosity across the boundary layer may vary by a factor of 5 or more instead of being nearly constant. Several authors [1—2, 4—9] have considered this product as constant. McLeod and Serrin [14] have discussed the mathematical properties of similar solutions for compressible laminar boundary layer equations taking the product of density and viscosity as constant and they have obtained the conditions for the existence of the velocity overshoot analytically. Lees [4] has discussed the heat transfer for highly cooled bodies in dissociating flow using the concept of "local similarity". At each point of the body, the boundary layer is assumed to be described by ordinary differential equations involving one independent similarity variable with boundary, conditions- and parameters depending upon local external and wall conditions. He concluded that the pressure gradient had little effect on heat transfer and the variation of the product of density and viscosity across the boundary layer could be approximated by taking it constant at the external value. Probstein [15] has extended Lees' work in which the wall- enthalpy gradient is obtained by solving the energy equation by iteration, using Cohen's and Reshotko's velocity and enthalpy profiles. He showed that only one or two iterations are necessary for good convergence in most practical cases. Kemp et al [16] used the local similarity concept to solve the governing differential equations with dissociation, variable external pressure- gradient parameter, variable $\varrho\,\mu$, and the dissipation term for highly cooled walls at points away from the stagnation point. They obtained numerical solutions of the pertinent equations for the case of axisymmetric body by extending the method of Fay and Riddell [13] used at the stagnation point. The solutions, which depend on local external flow conditions, vary around the body, in contrast to the constant values used by Lees [4]. It would be interesting to know the effects of the total enthalpy at the wall (i. e. when the wall is not highly cooled) on the solutions of the equations. Dewey [17] has used the concept of local similarity to study the hypersonic viscous interaction problem.

Separating or reverse self- similar solutions for laminar boundary- layer equations have been obtained by Rogers [18—20], Fox and Saland [21], Buckmaster [22], and Wortman and Mills [23]. The inviscid flow solutions in the stagnation region of blunt bodies (cylinder and sphere) have been obtained by Whitham [24] and Lighthill [25], using constant density model. Some related inviscid problems in hypersonic flow have been studied by Bloor [26], and Sedney and Gerber [27]. Bloor has considered the effect of radiative heat loss in the case of a blunt body and SEDNEY and GERBER have studied the shock curvature and the gradient effects at the tip of a pointed axisymmetric body in nonequilibrium flow.

In the present analysis, the local similarity concept is used to obtain the solutions of the governing equations at points away from the stagnation point for a two-dimensional body (a cylinder) and for axisymmetric body (a sphere) without imposing any restriction on the total enthalpy at the wall, the product of density and viscosity, and the Prandtl number.

It has been assumed that the temperature is not so high as to produce dissociation and recombination, that is, the fluid is assumed to be perfect. In addition to the determination of the velocity and total enthalpy profiles, the skin friction and the heat transfer have also been obtained.

2. Basic equations

We shall consider the hypersonic viscous flow in the neighbourhood of the stagnation point of a two-dimensional and an axisymmetric blunt body. It is assumed that the free stream Mach number is, not so high as to produce dissociation etc. behind the shock wave, that is, the fluid behaves as a perfect fluid behind the shock wave. We also assume that the boundary layer thickness is small compared to the body radius of curvature and that the centrifugal forces are negligible. With these assumptions, the governing equations can be expressed as [28]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho u r_0^J) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v r_0^J) = 0\,, \tag{1}$$

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \varrho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\varrho\left(u\frac{\partial I}{\partial x} + v\frac{\partial I}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{P_r}\frac{\partial I}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{1}{P_r} - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] \tag{3}$$

where $J = 0$ for two-dimensional flow and $J = 1$ for axisymmetric flow, x and y are distances along perpendicular to the body, u and v are the velocity components along x and y directions, e is the density, I is the total enthalpy, $P_r = \mu Cp/K$ is the Prandtl number, μ is the viscosity, Cp is the specific heat at constant pressure, K is the conductivity, r_0 is the distance from the axis of an axisymmetric body (a sphere), and the suffix e denotes the condition at the edge of the boundary layer. The boundary conditions are:

$$\begin{aligned} &y = 0:\ u = 0,\ v = 0,\ I = I_w\,, \\ &y = \infty:\ u = u_e,\ I = I_e \end{aligned} \tag{4}$$

where the suffix, w, denotes the condition at the surface of the body. Using the transformation due to LEES—LEVY [4]

$$S = \int_0^x \varrho_e u_e \mu_e r_0^{2J}\, dx\,, \quad \eta = \frac{u_e}{(2S)^{\frac{1}{2}}} \int_0^y r_0^J \varrho\, dy\,, \tag{5}$$

satisfying the condition of continuity by the use of the stream function ψ,

$$\varrho u r_0^J = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \varrho v r_0^J = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

and introducing the following dimensionless quantities:

$$f = \frac{\psi}{(2S)^{\frac{1}{2}}} \quad \left(\text{so that} \quad f' = \frac{u}{u_e}\right), \quad g = \frac{I}{I_e} \tag{7}$$

we can reduce the equations (2) and (3) in non-dimensional form [28]:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(C \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta \left\{ \frac{\varrho_e}{\varrho} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 \right\} = 2S \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial S} - \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{C}{P_r} \frac{\partial g}{\partial \eta}\right) + f \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{u_e^2}{I_e} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[C \left(1 - \frac{1}{P_r}\right) \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = 2S \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \tag{9}$$

where

$$\beta = \frac{2S}{u_e} \frac{du_e}{dS}$$

is the pressure- gradient parameter,

$$C = \frac{\varrho \mu}{\varrho_e \mu_e}\,,$$

and u_e^2/I_e is the dissipation parameter.

Similarity or S- independent solutions of the boundary- layer equations (8) and (9) require that all terms should be independent of S, so that these equations reduce to ordinary differential equations with independent variable η. This occurs for a cone of constant pressure, where external flow and wall enthalpy are independent of S. The equations also become independent of S for two-dimensional or axisymmetric stagnation point flow. In the region of the stagnation point, both for two-dimensional or axisymmetric bodies, the external velocity u_e can be written as

$$u_e = x\left(\frac{du_e}{dx}\right)_0$$

where the suffix o denotes stagnation-point condition. Similarly, $r_0 \simeq x$ in the region of the stagnation point of an axisymmetric body. Substituting for u_e from above in equation (5),

$$S = \varrho_e \mu_e \left(\frac{du_e}{dx}\right)_0 \frac{x^2}{2}$$

for a two-dimensional body and

$$S = \varrho_e \mu_e \left(\frac{du_e}{dx}\right)_0 \frac{x^4}{4}$$

for an axisymmetric body.
Now it can be easily shown that

$$\beta = \frac{2S}{u_e}\frac{du_e}{dS}$$

is equal to 1 and 0,5 respectively for two-dimensional and axisymmetric bodies. At the stagnation point, the dissipation parameter, $u_e^2/I_e = 0$. Hence, equations (8) and (9) reduce to ordinary differential equations in the form:

$$(Cf'')' + ff'' + \beta\left(\frac{\varrho_e}{\varrho} - f'^2\right) = 0\,, \tag{10}$$

$$\left(\frac{C}{P_r}g'\right)' + fg' = 0 \tag{11}$$

with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} \eta = 0: &\quad f = 0, f' = 0, g = g_w, \\ \eta \to \infty: &\quad f' = 1, g = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

where prime denotes differentiation with respect to η.

In the present study, we are more interested in obtaining the solutions of equations (8) and (9) at points away from the stagnation point. It is extremely useful to reduce these equations to ordinary differential equations, as partial differential equations are very difficult to solve numerically. This can be accomplished by using the idea of local similarity which has been discussed by LEES [4], FAY and RIDDEL [13] and KEMP et al [16]. In this case, at any point x, the dependence of the dependent variable on S is taken in such a manner that their derivatives with respect to S may be neglected. Hence, the terms of the right- hand side of equations (8) and (9) are considered to be negligible compared with those of the left- hand side and the terms on the left- hand side of these equations, which depend on S, are assumed to have their local values. Therefore, equations (8) and (9) again reduce to ordinary differential equations in η at any point away from the stagnation point of the body containing parameters which depend on the local external and wall conditions. They are expressed as:

$$(Cf'')' + ff' + \beta\left(\frac{\varrho_e}{\varrho} - f'^2\right) = 0 \tag{13}$$

$$\left(\frac{C}{P_r}g'\right)' + fg' + \frac{u_e^2}{I_e}\left[C\left(1 - \frac{1}{P_r}\right)f'f''\right]' = 0\,. \tag{14}$$

These equations can be solved in the same manner as equations (10) and (11), using the boundary conditions given by equation (12).

The local similarity solutions represent a patching together of local solutions. In this case, dependence of flow on x co-ordinate is neglected, except when it is contained in the external and the wall conditions, which form the coefficients of the differential equations. This approximation is valid only when external flow properties vary slowly with S and the terms which are neglected in the differential equations (8) and (9) are really negligible compared to those retained. There are several methods to verify the validity of the above approximation as discussed by KEMP et al [16].

3. Solutions of equations

The local similarity solutions of equations (13) and (14) differ from the stagnation point solutions of equations (10) and (11) in two respects. The first is that the pressure- gradient parameter β is not equal to 1 (for two-dimensional bodies) or 0,5 (for axisymmetric bodies) at points away from the stagnation point. The second is that the dissipation parameter, u_e^2/I_e, is not zero at points away from the stagnation point. Hence, equations (13) and (14) can be solved with the same boundary conditions as those of equations (10) and (11), using the local values of β and u_e^2/I_e which are different from those of the stagnation-point values.

The density and the viscosity at points away from the stagnation point can be expressed as:

$$\frac{\varrho_e}{\varrho} = \frac{T}{T_e} = \frac{g - f'^2 \dfrac{u_e^2}{2 I_e}}{1 - \dfrac{u_e^2}{2 I_e}} \tag{15}$$

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{\lambda} \tag{16}$$

It is assumed that the viscosity μ varies as T^{λ}.
Hence,

$$C = \frac{\varrho\mu}{\varrho_e\mu_e} = \left[\frac{1 - \dfrac{u_e^2}{2 I_e}}{g - f'^2 \dfrac{u_e^2}{2 I_e}}\right]^{1-\lambda} \tag{17}$$

where λ is a constant and T is the absolute temperature. The dissipation parameter u_e^2/I_e is related to the local Mach number M_e by the expression

$$\frac{u_e^2}{I_e} = \frac{2}{1 + \dfrac{2}{(K_1 - 1) M_e^2}} \tag{18}$$

where K_1 is the ratio of specific heats.

The simultaneous numerical solutions of equations (13) and (14) with boundary conditions given by equation (12) was carried out on Elliot Computer using Runge—Kutta—Gill method for $\beta = 0{,}5$ and 1, $u_e^2/I_e = 0$, $P_r = 0{,}72$, $\lambda = 0{,}5$, $g_w = 0{,}2$ and 0,6 (for the stagnation point of a two- dimensional and an axisymmetric body); and for $\beta = 0{,}47$ and 0,93, $u_e^2/I_e = 0{,}30$ and 0,22, $P_r = 0{,}72$, $\lambda = 0{,}5$, $g_w = 0{,}2$ and 0,6 (for a point away from the stagnation point, that is at $\Theta° = \pi/6$ of a two-dimensional and an axisymmetric body). The variation of the velocity, f (η), the total enthalpy $g(\eta)$ and the product of viscosity and density C with η and g_w at the stagnation point and at a point away from the stagnation point of both the cylinder and the sphere are shown in Figs 1—6.

4. Skin friction and heat transfer

The skin friction at any point away from the stagnation point of a two-dimensional or an axisymmetric body can be expressed as:

$$\tau = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{(\varrho\mu)_w u_e^2}{(2S)^{1/2}} r_0^J f''_w \tag{19}$$

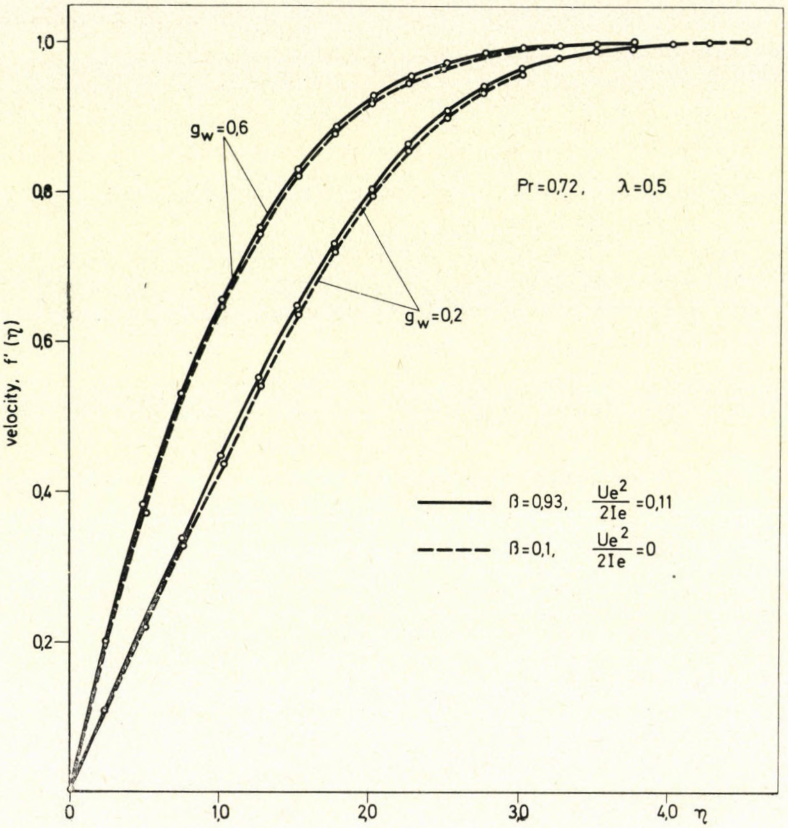


Fig. 1. Velocity distribution for a cylinder

where τ denotes the skin friction or shear stress at the wall at any point away from the stagnation point. Similarly, the skin friction at the stagnation point can be written as:

$$\tau_0 = \left[\mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w\right]_0 = \frac{(\varrho_w \mu_w)_0 x \left(\frac{du_e}{dx}\right)_0^2 (1+J)^{1/2}}{\left[\varrho_e \mu_e \frac{du_e}{dx}\right]_0^{1/2}} (f''_w)_0 \tag{20}$$

where τ_0 is the shear stress or the skin friction at the stagnation point. Hence the skin friction coefficient at the stagnation point is given by:

$$C_{f0} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}(\varrho_e u_e^2)_0} = \frac{2(1+J)^{1/2} g_w^{\lambda-1}}{(R_{ex})_0^{1/2}} (f''_w)_0 \tag{21}$$

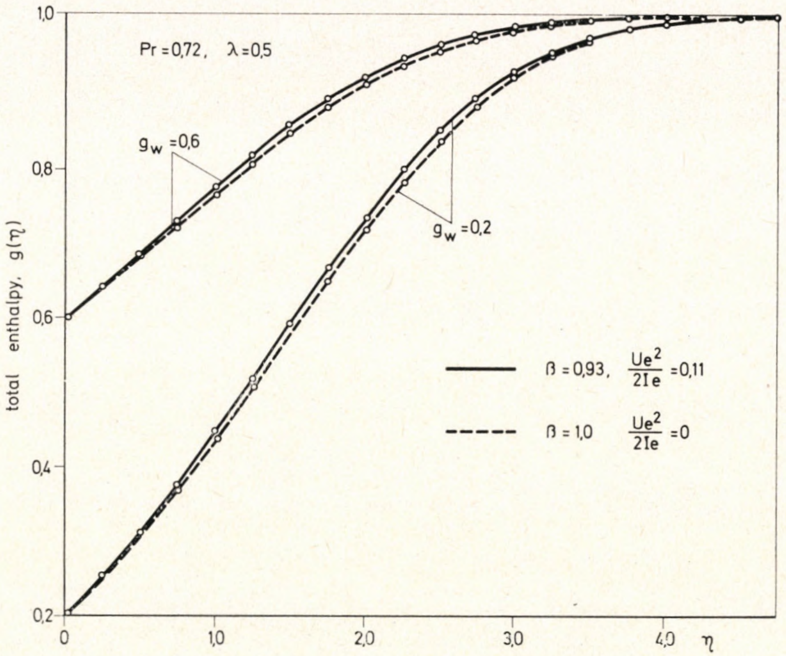


Fig. 2. **Total enthalpy distribution for a cylinder**

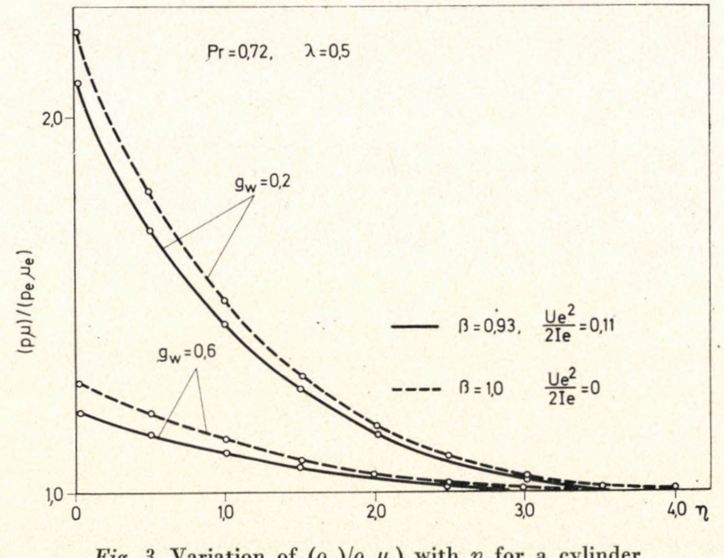


Fig. 3. **Variation of $(\varrho_\mu)/\varrho_e\,\mu_e)$ with η for a cylinder**

where

$$(R_{\mathrm{ex}})_0 = \frac{(du_e/dx)_0 x^2}{(\nu_e)_0}$$

is the Reynolds number at the stagnation point and Cf_0 is the skin friction coefficient at the stagnation point. If we define the skin- friction coefficient at a point away from the stagnation point in the same manner as we have defined at the stagnation point (i.e. normalizing the shear stress τ with $1/2(\varrho_e u_e^2)_0$), then the skin- friction coefficient at the stagnation point and at a point away from the stagnation can be related as:

$$\frac{C_f}{(C_f)_0} = \frac{\varrho_w \mu_w}{(\varrho_w \mu_w)_0} \cdot \frac{u_e^2}{x\left(\dfrac{du_e}{dx}\right)_0^{3/2}} \cdot \frac{(\varrho_e \mu_e)_0^{1/2}(1+J)^{-1/2} r_0^J}{(2S)^{1/2}} \times \frac{f''_w}{(f''_w)_0} \tag{22}$$

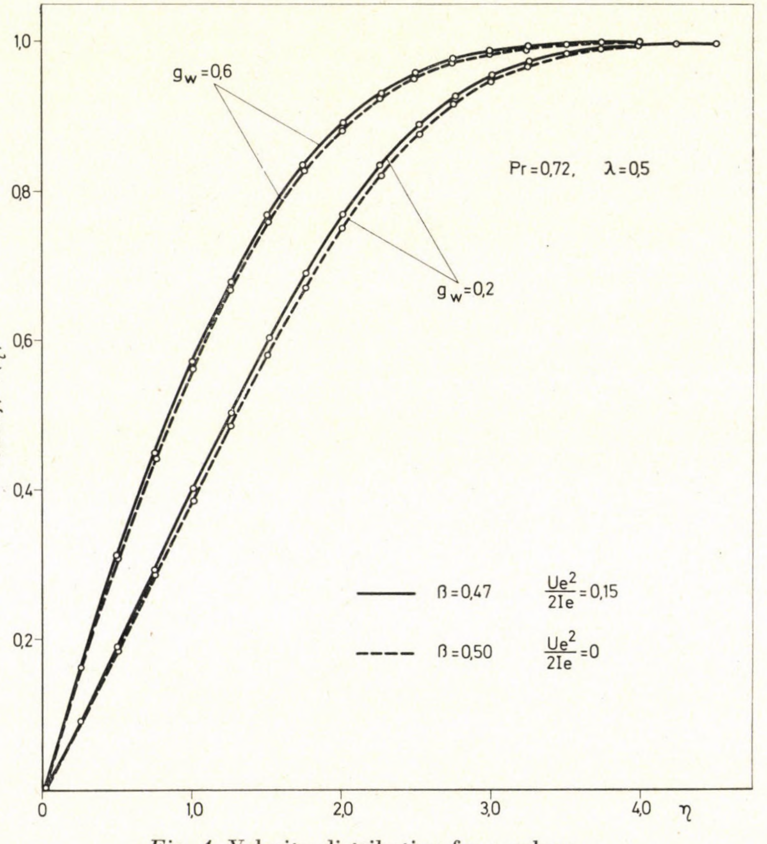


Fig. 4. Velocity distribution for a sphere

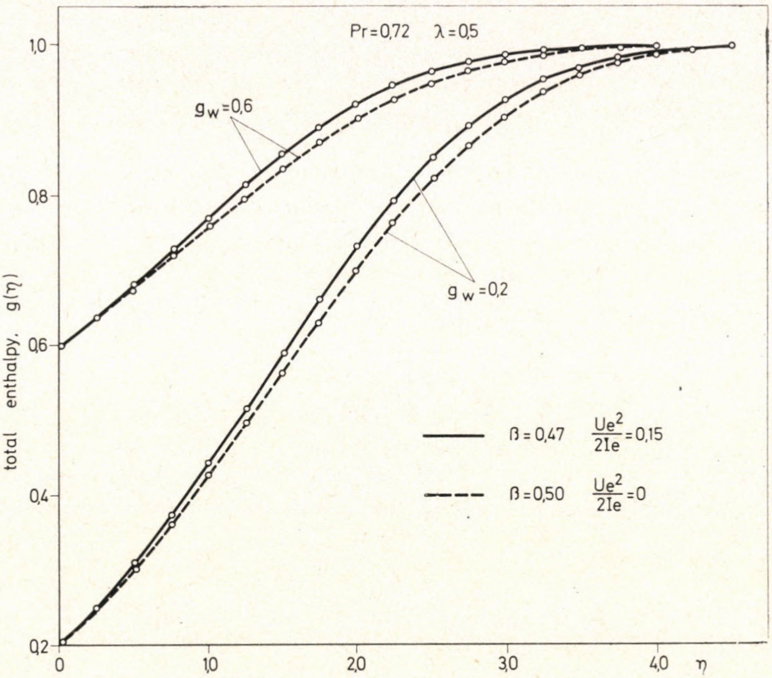


Fig. 5. Total enthalpy distribution for a sphere

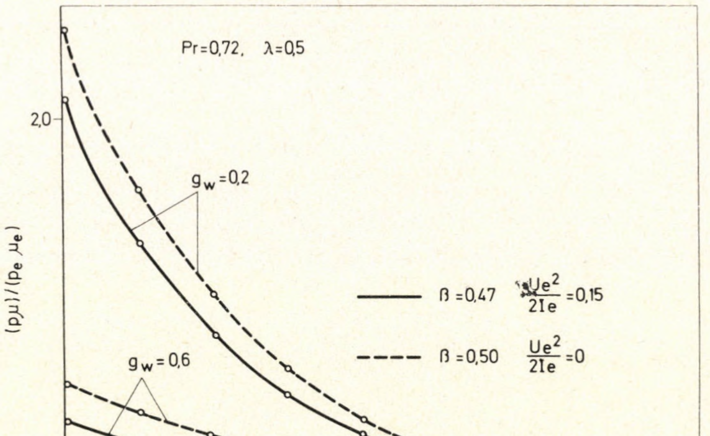


Fig. 6. Variation of $(\varrho_\mu)/(\varrho_e\ \mu_e)$ with η for a sphere

where

$$\frac{\varrho_w \mu_w}{(\varrho_w \mu_w)_0} = \left(1 - \frac{u_e^2}{2I_e}\right)^{1-\lambda}.$$

It is assumed that the product of density and viscosity at the edge of the boundary layer $\varrho_e \mu_e$ does not differ much from its stagnation-point value, that is from $(\varrho_e \mu_e)_0$, as we move away from the stagnation point. Hence, $\varrho_e \mu_e$ can be considered to have the same value as that of $(\varrho_e \mu_e)_0$ if the distance x or the angular distance Θ is small (i.e. $\varrho_e \mu_e \simeq (\varrho_e \mu_e)_0$).

The heat-transfer rate at any point away from the stagnation point can be expressed as:

$$-\dot{q} = \left(K \frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{K I_e}{C_p} \frac{u_e \varrho_w r_0^J}{(2S)^{1/2}} g_w' \tag{23}$$

where $-\dot{q}$ is the heat-transfer rate at any point away from the stagnation point. Similarly, the heat- transfer rate at the stagnation point can be written as:

$$-\dot{q}_0 = \frac{K I_e (\varrho_w)_0 \left(\frac{du_e}{dx}\right)_0^{1/2} (1+J)^{1/2}}{C_p (\varrho_e \mu_e)_0^{1/2}} g_w' \tag{24}$$

where $-\dot{q}_0$ is the heat-transfer rate at the stagnation point. Hence, the Nusselt number at the stagnation point can be expressed as:

$$\left[\frac{N_u}{(R_{ex})^{1/2}}\right]_0 = \frac{(1+J)^{1/2} g_w'}{g_w (1 - g_w)} \tag{25}$$

where

$$N_u = \frac{-\dot{q}_{w0} C_p x}{K(I_e - I_w)}.$$

If the Nusselt number at any point away from the stagnation point is defined in the same manner as that at the stagnation point, then the Nusselt number at any point away from the stagnation point is related to that of the stagnation point by

$$\frac{N_u}{(N_u)_0} = \frac{\varrho_w}{(\varrho_w)_0} \frac{r_0^J (\varrho_e \mu_e)_0^{1/2}}{(2S)^{1/2}} \frac{u_e (1+J)^{-1/2}}{\left(\frac{du_e}{dx}\right)_0^{1/2}} \frac{g_w'}{(g_w')_0} \tag{26}$$

where

$$\frac{\varrho_w}{(\varrho_w)_0} = \left(1 - \frac{u_e^2}{2I_e}\right).$$

The skin- friction coefficient and the Nusselt number at any point of the body can be obtained if the local similarity solution, the inviscid flow, and the skin- friction coefficient and the Nusselt number at the stagnation point are known. For the inviscid flow outside the boundary layer of a two-dimensional body (a cylinder) and an axisymmetric body (a sphere), the constant density solutions due to WHITHAM [24] and LIGHTHILL [25] are used. From their solutions, the velocity outside the boundary layer can be obtained for a given free stream Mach number M_∞, specific heat ratio K_1, and the density ratio $\varepsilon = \varrho_\infty/\varrho_e$ (ϱ_∞ is the density in the free stream). Hence, (du_e/dx), S, M_e, β, and $u_e^2/2I_e$ at any point of the body can be easily obtained (M_e is Mach number at the edge of the boundary layer).

The skin-friction coefficient and the Nusselt number at the point $\Theta = 30°$ ($x = R\Theta$, where R is the radius of the body and is taken as unity) and at the stagnation point for a two-dimensional body (a cylinder) and an axisymmetric body (a sphere) are given in Table I. From the results, it is concluded that the skin- friction coefficient and the Nusselt number at any point away from the

Table I

$M_\infty = 10$, $\varepsilon = 0{,}175$, $K_1 = 1{,}4$, $P_r = 0{,}72$ $\lambda = 0{,}5$

	Cylinder				Sphere			
$\Theta°$	0	0	30	30	0	0	30	30
M_e	0	0	0,7861	0,7861	0	0	0,9393	0,9393
β	1	1	0,93	0,93	0,5	0,5	0,47	0,47
$u_e^2/(2I_e)$	0	0	0,11	0,11	0	0	0,15	0,15
g_w	0,2	0,6	0,2	0,6	0,2	0,6	0,2	0,6
f''_w	0,4150	0,8470	0,4241	0,8565	0,3464	0,6616	0,3574	0,6646
g'_w	0,1914	0,1588	0,1954	0,1574	0,1853	0,1519	0,1922	0,1492
$C_f(\mathrm{Rex})_0^{1/2}$	1,8562	2,1868	1,6503	1,9241	2,1905	2,4155	1,8987	2,0382
$N_u/(\mathrm{Rex})_0^{1/2}$	1,1961	0,6616	1,0494	0,5752	1,6377	0,8951	1,3775	0,7132

stagnation point are less than those of the stagnation point and they decrease as we move away from the stagnation point. In both cases, the skin- friction coefficient increases, but the Nusselt number decreases, as the total enthalpy at the wall increases, keeping the Reynolds number at the stagnation point as constant. Again for both cases, the skin- friction coefficient decreases, but the Nusselt number increases if the Reynolds number increases.

5. Conclusions

The skin-friction coefficient and the Nusselt number decrease as we move away from the stagnation point of a cylinder or a sphere and their magnitude for a cylinder is less than those of a sphere. The skin- friction coefficient increases but the Nusselt number decreases as the total enthalpy at the wall increases.

REFERENCES

1. Levy, S.: *J. Aero. Sci.* **21** (1954), 459—474
2. Cohen, C. B.—Reshotko, E.: Similar Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer with Heat Transfer and Pressure Gradient, NACA Rep. No. 1294 (1956)
3. Sibulkin, M.: *J. Aero. Sci.* **19** (1952), 570—571
4. Lees, L.: *Jet Propulsion* **26** (1956), 259—269, 274
5. Libby, P. A.—Liu, T. M.: *AIAA J.* **6** (1968), 1541—1548
6. Libby, P. A.: *AIAA J.* **8** (1970), 2095—2096
7. Back, L. H.—Witte, A. B.: *J. Heat Transfer* **88** (1966), 249—256
8. Back, L. H.: *AIAA J.* **8** (1970), 780—788
9. Back, L. H.: *AIAA J.* **9** (1971), 966—969
10. Libby, P. A.: *J. Aerospace Sci.* **29** (1962), 48—60
11. Zeiberg, S. L.: *AIAA J.* **4** (1966), 157—158
12. Kassoy, D. R.: *J. Fluid Mech.* **48** (1971), 209—228
13. Fay, J. A.—Riddell, F. R.: *J. Aero. Sci.* **25** (1958), 73—85, 121
14. McLeod, J. B.—Serrin, J.: *J. Fluid Mech.* **34** (1968), 337—342
15. Probstein, R. F.: *Jet Propulsion* **26** (1956), 497—499
16. Kemp, N. H.—Rose, P. H.—Detra, R. W.: *J. Aerospace Sci.* **26** (1959), 421—430
17. Dewey, C. F.: *AIAA J.* **1** (1963), 20—33
18. Rogers, D. F.: *Phys. Fluids* **12** (1969), 517—523
19. Rogers, D. F.: *AIAA J.* **8** (1970), 2107—2109
20. Rogers, D. F.: *AIAA J.* **10** (1972), 828—830
21. Fox, H.—Saland, H.: *AIAA J.* **8** (1970), 780—788
22. Buckmaster, J.: *J. Fluid Mech.* **44** (1970), 237—247
23. Wortman, A.,—Mills, A. F.: *AIAA J.* **9** (1971), 2449—2451
24. Whitham, G. B.: *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 531—535
25. Lighthill, M. J.: *J. Fluid Mech.* **2** (1957), 1—32
26. Bloor, M. I. G.: *J. Fluid Mech.* **29** (1967), 485—494
27. Sedney, R.—Gerber, N.: *J. Fluid Mech.* **29** (1967), 765—779
28. Hayes, W. D.—Probstein, R. F.: Hypersonic Flow Theory, Academic Press, New York 1959, 288—292

Lokale Ähnlichkeitslösungen für die kompressiblen laminaren Grenzschichtströmungen Ähnlichkeitslösungen für die zweidimensionale und die achsialsymmetrische stationäre, laminare Strömung einer zähen Flüßigkeit am Staupunkt und entfernt davon bei Inzidenz Null wurden abgeleitet, ohne Einschränkungen für die Gesamtenthalpie an der Wandung sowie für das Produkt aus Dichte und Zähigkeit und die Prandtl-Zahl. Die zwei gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen für Bewegungsgröße und Energie werden simultan mittels der Runge — Kutta — Gillschen Methode gelöst. Die Ergebnisse zeigen, daß der Wandreibungskoeffizient und die Nusselt-Zahl sich mit der Entfernung vom Staupunkt verringern. Der Wandreibungskoeffizient steigt an, aber die Nusselt-Zahl sinkt mit steigender Gesamtenthalpie an der Wandung. Der Wandreibungskoeffizient und die Nusselt-Zahl sind für einen zweidimensionalen Körper (einen Zylinder) kleiner als die für einen achsialsymmetrischen Körper (eine Kugel).

Местные решения подобия для сжимаемых ламинарных граничных уравнений. Автор для сжимаемо вязкой среды в случае двумерного и осесимметрического стационарного движения дает решение подобия потока в динамической точке и в далеке от этой точки, при угле атаки равном нулю, без того, чтобы для энтальпии возле стенки, вязкости и произведения плотности, а также числа Прандтля применить какое-либо ограничение. Два связанных нелинейных обычных дифференциальных уравнения, которые отражают количество движения и уравнение энергии, решаются автором одновременно с помощью метода Рунге—Кутта— Гилла. Результаты показывают, что коэффициент трения о стенку и число Нуссельта уменьшаются, если удаляться от динамической точки. Коэффициент трения о стенку возрастает, но уменьшается число Нуссельта с ростом общей эталпии возле стенки. Коэффициент трения о стенку и число Нуссельта являются меньшими в случае двумерного тела (цилиндра), чем в случае осесимметричного тела (шара).

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1–2), pp. 239–266 (1974)

THREE-DIMENSIONAL STRESS ANALYSIS BY MEANS OF A CONTINUUM SUB-SPACE

E. BÉRES*

CAND. OF TECHN. SC.

[Manuscript received January 3, 1973]

The paper describes a three-dimensional stress- analysis method expressing the equilibrium equations directly for the finite- size elements, and the continuity conditions for the one-dimensional sub-space of the three-dimensional continuum, that is, for the network of the lines of intersection of the dividing surfaces. An approximation, with polynomes, the functions describing the stresses making the numerical solution lead to a linear system of equations whose coefficients are given by definite integrals. In the case of a uniform division they may be written down by using operators of general validity and, therefore, the concrete determination of the integrals is not necessary.

1. Introduction

The classic method of stress calculation involves the expression and solution of the differential equations obtained by the equilibrium and continuity equations expressed for differential-size volume elements. Since the solution of the problem satisfying the given boundary conditions cannot be expressed in a closed form for a general case, usually an approximative result supplied by a numerical method will suffice. Formerly, rather the method of finite differences or the solution by a function series, when only the first or the first few terms thereof are reckoned with, was considered as a theoretical possibility for any solution at all. The awkwardness of this solution is particularly conspicuous in the method of finite differences where, instead of direct expression, essentially from the relations of the infinitesimally small elements has been reconcluded for those of the finite dimensions.

High-capacity computers operating at a high speed make the direct utilization of the principles employed when expressing the above differential equations possible. Thus, it is possible to express the equilibrium conditions for finite- size volume elements cut off by a given surface system, and the continuity equations for a network consisting only of one-dimensional elements, represented by the edges of the volume elements referred to, that is, for the sub-space of the continuum. This latter novel idea illustrates the fundamental peculiarity of the method described here.

* Dr. *E. Béres*, Hunyadi J. u. 11, 1011 Budapest, Hungary

The functions describing the stresses are approximated by polynomes, which have to satisfy the requirement of coinciding the function to be approximated in to a finite number of predetermined points. The direct objective of this calculation is to determine the approximative values pertaining to the finite number of points of the functions describing the stresses involved referred to above. At such an approximation of these functions, the equilibrium and continuity equations may be written in a linear form, whereafter the totality of these linear equations will supply the linear equation system from which the stress values associated with the points thus selected can be calculated. The following paragraphs will explain this fundamentally rather simple method, with the remark that its approximative character is due to nothing but the approximation of the functions by polynomes. The advantages of this method may be summarized as follows:

a) It does not require any approximation, whatsoever, in the geometry of the body in question, nor in that of the surface surrounding this body;

b) the continuity equations should be expressed for the one-dimensional network;

e) coefficients of the linear equation system are given by integrals, which increases the stability of the solution.

2. Description of the method

The body to be examined is divided in parts by surfaces. Stresses generated in the body are to be determined along these surfaces. The individual elementary parts of the body are in equilibrium on the effect of the stresses acting on its surface, and on the mass forces exerted. In the case of equilibrium, the sum of the force projections related to three straight lines, not in the same plane, as well as that of the moment vector components parallel to vectors, similarly not in the same plane; separately equal zero. The equilibrium condition related to each volume element means, therefore, 6 equations generally.

On the effect of the stresses produced in, and exerted on, the surface of the elements thus cut off, these elements will be deformed in such a way so as to enable them to be connected without a clearance. This condition of deformation is called the condition of continuity and this connection, continuous for each volume element and for each surface part thereof, means an infinite number of conditions, for which reason any endeavour to its satisfaction would mean the exact solution of the partial differential equation describing this relation which, in turn, would be impossible in a general case.

The generally employed numerical methods known so far approach the continuity conditions by fitting the selected points of the elements into one another. This approach, however, restricts continuity to the O-dimension sub-space of the continuum, that is, to the points specified. On the other hand, the method described here specifies the continuity conditions for the one-dimensional sub-space, i.e. for the network proper. Since the dimensional reduction is only of a value of two here, the approximation is performed in an order of one dimension higher.

At the same time, the method is both theoretically and practically rather simple, since it will express the deformation (for the sake of illustration) for a bar element that might, however, be regarded as a line, in the geometrical sense of the term. The use of the term "bar" is justified by the fact that, when calculating the deformation, an actual bar is also considered as a one-dimensional continuum.

The method described here specifies displacement coincidence along the lines, i.e., along the common edges of the elements. For the line terminals at the common junction, however, not only an identical displacement but also the corresponding tangent relation is demanded.

Our task is, however, the determination of stresses. Since their distribution is unknown, only the determination of their approximative values at given points may be sought for. By means of these point values, the functions describing the stresses are approximated by polynomes, whereby the line deformations are then expressed. The lines intersecting the surfaces dividing the body into elements create a spatial network whose lines are connected, even after a deformation of the body caused by external forces, in such a manner that where the common points maintain this character and, as a consequence, the angle of inclination of the tangents of these points varying only to an insignificant extent, is expressed by the junction stresses. The equations expressing the equality of the displacements of bar ends connected to the common junction, and those describing the predetermined difference in the rotation of the associated axial intersections (that calculated from and expressed by the stresses) are, then, the equations of continuity.

The relative displacement of the two terminals of each line section can be calculated from the stresses produced in the body, and its approximative value may be expressed by the given stress figures.

The form of the surfaces realizing division into elements has no theoretical significance. Thus, the form of these elements as well as the network of intersections may be entirely optional as illustrated in Fig. 1. However, with respect to the actual calculation, the correct selection of this division is of a great importance from both quantitative and qualitative aspects.

Division by planes parallel to the co-ordinates may be regarded as the simplest procedure, that is, when the distance of one plane from the other is equal to that between the next ones. Although in special cases such as the examination of solids of revolution, other divisions might be more advanta-

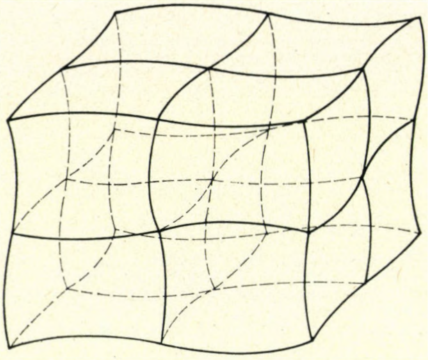


Fig. 1

geous, the method is first presented for the case when the surfaces performing the division into elements are parallel and/or perpendicular, and the parallel planes are located at equal distances (Fig. 2). Relations concerning other cases can be derived in a similar way.

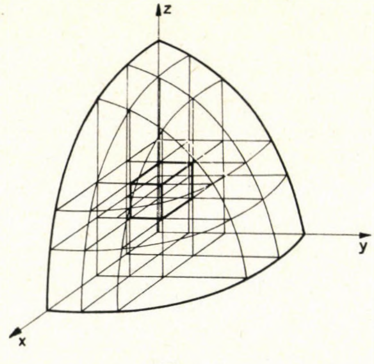


Fig. 2

In the case being studied, the elements are rectangular bodies, i.e. parts cut off such bodies by their boundary surfaces (Fig. 3), while the network consists of straight lines and/or plane curves.

The stress values pertaining to the junctions are regarded as unknown which means 6 unknowns per junction, including the normal stresses σ_x, σ_y and σ_z perpendicular to the planes, and the shear stresses τ_{xy}, τ_{xz} and τ_{yz} parallel thereto.

If all the 6 stresses are assumed as being unknown in each nodal point, and each possible equilibrium and continuity equations are expressed, then the

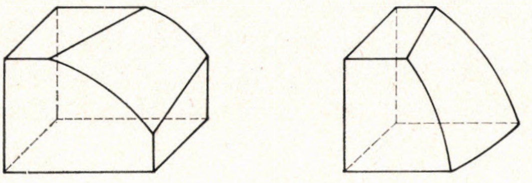


Fig. 3

number of equations will exceed that of the unknowns. In addition, this over-defined equation system will have to satisfy the condition of

$$||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|| = \text{min!}$$

If the number of equations and unknowns must be made equal, this may be readily accomplished as, in a similar case, under [2], so this problem will not be discussed here.

The coefficients of the equation system can be calculated by means of definite integrals: those of the equilibrium equations by double, and those of the continuity equations by single integrals. It is rather advantageous that the coefficients are definite integral values, since this will reduce the extent and effect of errors as against other operations e.g. differentiation. At the same time, some advantages of computing technics are achieved. Calculation of the plane curve integrals does not present any problems in general cases, either, but it should still be pointed out here that, as a peculiar feature of division, there are some formulae of general validity for both single and double integrals to be derived on the elements within the body, promoting numerical solution, which resemble the operators of the method of differences. Thus, an occasional precise calculation of the integrals is only necessary along the surface surrounding the body.

3. Equilibrium equations

An element is in equilibrium, if the components of the forces acting on its surface (stresses representing the section forces plus the surface forces) and of its mass forces, parallel to the axes, x, y, and z, as well as their moments related to these axes, are zero. This means 3 force and 3 moment- equilibrium equations, i.e. a total of 6 equations per element.

Since the dividing planes have been assumed as parallel to the co-ordinate planes, there will be only 3 unknown stresses acting on the surface of each section, while the rest will equal zero. Any external load acting on the surface of the body (including the forces of reaction) can best be specified, as resolved to components parallel to the co-ordinate axes.

Expression of the equilibrium equations requires the calculation of the integrals related to the surface of the elements. Although the problem may be considered as solved thereby, taking the aspects of computing technics, this necessitates a detailed explanation.

The surface parts surrounding the elements may be classified into three main categories:

(α) The surface element is rectangular, and the neighbouring elements in its plane are similarly congruent rectangles (Fig. 4). As mentioned above, the stresses are approximated by polynomes along one line each, while the function and the relevant integrals are expressed by function values pertaining to the selected points. However, the latter is only feasible if, not only the functions along the individual lines, but also the two-variable function related to the entire domain is approximated by a polynome. If the form of the polynome is given, its coefficients can be unequivocally expressed by means of the function values of the given points. For example, in the case of Fig. 4, the values pertaining to nodal points 1, 2, . . . 12 give a two-variable function that will assume, in these very points, the given values. The exact solution demands the finding of 12 coefficients. In this case the following function has the most favourable form

$$f(x,y) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dy^3 + Ey^2 + Fy + Gx^3y + \\ + Hxy^3 + Jx^2y + Kxy^2 + Lxy + M, \tag{1}$$

since this equation system, containing 12 unknowns, wherefrom the coefficients $A, B, C, \ldots M$ can be calculated, may be resolved to equation systems contain-

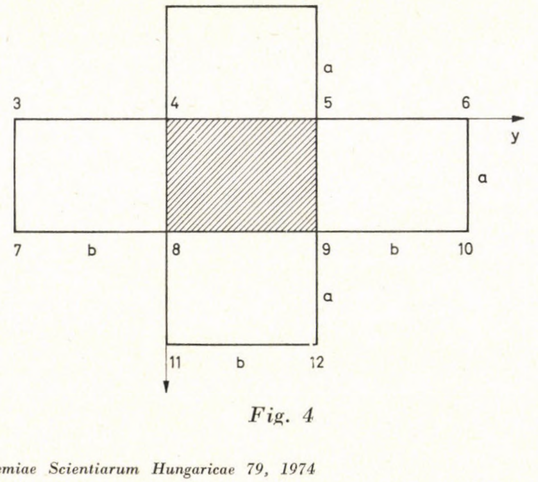


Fig. 4

ing maximum 3 unknowns. Expressing the coefficients by the function values pertaining to the nodal points, the function sought for will be

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & \frac{-f_1+3f_4-3f_8+f_{11}}{6a^3}x^3+\frac{f_1-2f_4+f_8}{2a^2}x^2 \\
& +\frac{-2f_1-3f_4+6f_8-f_{11}}{6a}x+\frac{-f_1+3f_4-3f_5+f_6}{6b^3}y^3+ \\
& +\frac{f_3-2f_4+f_5}{2b^2}y^2+\frac{-2f_3-3f_4+6f_5-f_6}{6b}y+ \\
& +\frac{f_1-f_2-3f_4+3f_5+3f_8-3f_9-f_{11}+f_{12}}{6a^3b}x^3y+ \\
& +\frac{f_3-3f_4+3f_5-f_6-f_7+3f_8-3f_9+f_{10}}{6ab^3}xy^3+ \\
& +\frac{-f_1+f_2+2f_4-2f_5-f_8+f_9}{2a^2b}x^2y+ \\
& +\frac{-f_3+2f_4-f_5+f_7-2f_8+f_9}{2ab^2}xy^2+ \\
& +\frac{2f_1-2f_2+2f_3-3f_5+f_6-2f_7-3f_8+6f_9-f_{10}+f_{11}-f_{12}}{6ab}xy+f_4 .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

In the case illustrated by Fig. 4, the integrals in the equilibrium equations can be calculated by using the following operators:

$$
\iint_{(F)} f(x,y)\,dxdy = \frac{ab}{48}
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{c|}{} & -1 & -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-1 & 14 & 14 & -1 \\
\hline
-1 & 14 & 14 & -1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & -1 & -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\end{array}
f(x,y) .
\tag{3}
$$

$$
\iint_{(F)} xf(x,y)\,dxdy = \frac{a^2b}{720}
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{c|}{} & -7 & -7 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-5 & 71 & 71 & -5 \\
\hline
-10 & 139 & 139 & -10 \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & -8 & -8 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\end{array}
f(x,y) ,
\tag{4}
$$

$$
\iint_{(F)} yf(x,y)\,dxdy = \frac{ab^2}{720}
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{c|}{} & -5 & -10 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-7 & 71 & 139 & -8 \\
\hline
-7 & 71 & 139 & -8 \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & -5 & -10 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-3}
\end{array}
f(x,y) .
\tag{5}
$$

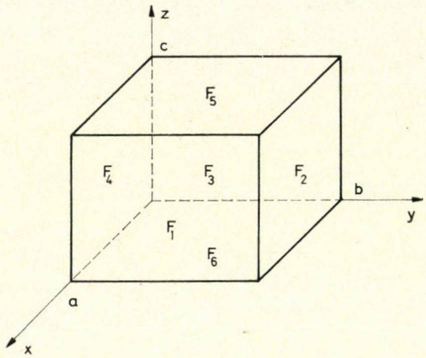


Fig. 5

Let us consider now the element in Fig. 5. For example, the equilibrium of the forces parallel to axis x is expressed by equation

$$\iint_{(F_1)} \sigma_x(a, y, z)dydz - \iint_{(F_3)} \sigma_x(o, y, z)dydz + \iint_{(F_2)} \tau_{xy}(x, b, z)dxdz -$$
$$- \iint_{(F_4)} \tau_{yx}(x, o, z)dxdz + \iint_{(F_5)} \tau_{zx}(x, y, c)dxdy -$$
$$- \iint_{(F_6)} \tau_{zx}(x, y, o)dxdy + X = 0\,, \tag{6}$$

and that of the x axis moment by

$$- \iint_{(F_1)} z\tau_{xy}(a, y, z)dydz + \iint_{(F_1)} y\tau_{xz}(a, y, z)dydz +$$
$$+ b\iint_{(F_2)} \tau_{yz}(x, b, z)dxdz - \iint_{(F_2)} z\sigma_y(x, b, z)dxdz +$$
$$+ \iint_{(F_3)} z\tau_{xy}(o, y, z)dydz - \iint_{(F_3)} y\tau_{xz}(o,y,z)dydz +$$
$$+ \iint_{(F_4)} z\sigma_y(x, o, z)dxdz + \iint_{(F_5)} y\sigma_z(x, y, c)dxdy -$$
$$- c\iint_{(F_5)} \tau_{zy}(x, y, c)dxdy - \iint_{(F_6)} y\sigma_z(x, y, o)dxdy + M_x = 0 \tag{7}$$

where X is the component of the mass forces parallel of axis x, and M_x is their moment related to the same axis. The equations expressing the equilibrium of the forces parallel to axes y and z, and of the moments associated with these axes may be written in a similar way.

Expressing the double integrals of formulae (6) and (7) by the function values at given points according to equations (3), (4) and (5) reveals that the equilibrium equations can be written in a relatively simple form as far as the internal rectangular bodies are concerned.

If the body under test is rectangular in itself (or composed of rectangles), then it may be resolved into identical elements. In this case expressions similar to those given above can be derived for the sections of the elements contacting the surface. For the calculation of the double integrals related to the exterior rectangles, the relevant points are best determined as shown in Fig. 6.

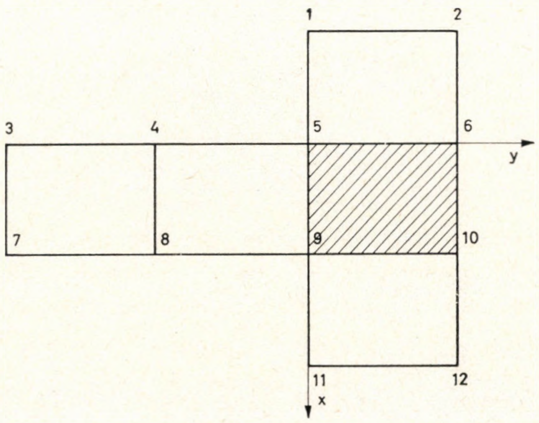


Fig. 6

(β) The situation is much more complicated in the case of elements whose boundary surfaces include a surface which limits the body under examination. Actually, the rectangular bodies with adjacent similar rectangles can also be added to this category, although in this chapter only the calculation of double integrals related to plane sections will be dealt with.

The calculation process will be given in detail only for a single plane section as that in Fig. 7. Although Fig. 7a particularly resembles the above case, it is still not identical thereto since, while theoretically the same procedure is followed, function $f(x, y)$ must be rewritten in each case, and the value of the coefficients must also be calculate, das the integral values are affected, through the coefficients, by the co-ordinates of points 2, 6, and 10 as well. Since, however, these are given values, their expressions involve only the stresses pertaining to the nodal points as unknown. The difference as compared to that of (α) is, therefore, merely that, while in a uniform division the operators are given with a general validity, and can be given similarly for approximations by higher-order polynomes, in other cases operator elements must be calculated for each surface or line element. However, these calculations do not represent difficul-

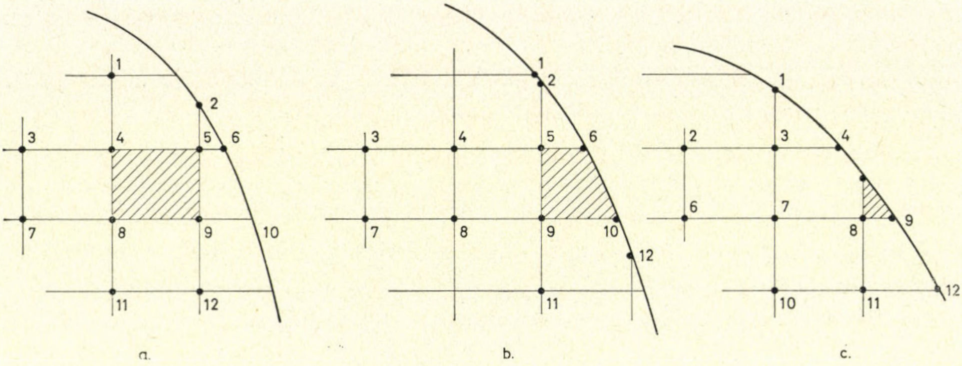


Fig. 7

ties, either, as they may be readily automated. In the cases corresponding to Fig. (a), the integration boundaries are as simple, that is constant, as with the previous type. As for the need of calculating the coefficients of function $f(x, y)$ shown under (1), in each case, the examples in Fig. 7 give full agreement. This is the reason why they can be classified into one single group.

Variations (b) and (c) differ from (a) only by their integration field being other than rectangular. Their respective numbers in Fig. 7 illustrate an expedient plotting of the points reckoned with in the calculation.

(γ) The third category of the double integrals in the equilibrium equations is represented by integrals related to that part of the surface elements which are, at the same time, the part of the surface of the body under examination. This will greatly differ from the two previous types, since these surface parts are usually other than plane figures, and in the case of given surface stresses these integrals can be accurately calculated in theory.

4. Continuity equations

The continuity conditions are expressed for the lines of intersection of the planes used in division (resolution into elements), representing the spatial framework. These lines will be deformed on the effect of stresses, although they maintain their continuity unchanged. These lines, meeting in a common nodal point, will do the same after deformation, i.e., the displacement of these terminals of the lines meeting at the same junction point will be equal.

The situation is somewhat more complicated when the tangents of lines are rotated.

In the case of rigid angle connection of bars, the angle included by the nodal point tangents of the axis lines will remain unchanged although the structure is deformed. In this investigation, however, bars other than such true separate structural elements are being dealt with whose cross section can be further resolved into elementary parts, as the cross section itself is an elementary section impossible to divide any further. Since the deformation due to shear stress cannot be neglected, either, in calculating the deformation the angular changes at the junction of the lines, so, these must be taken into account, too.

As an illustration it may be said that, while in the case of a rigid angle connection of two real bars, the angle of inclination exhibited by the tangents of their centrelines remains unchanged during deformation, the angles included by the nodal point tangents of the system plotted within a body and over its surface may vary to a slight degree, owing to the deformation caused by shear stress.

Hence, it cannot any longer be said that the angles included by the lines meeting at a common junction point remain unchanged, but that their angular distortion can be expressed by the nodal point stresses.

When the lines are normal to each other (Fig. 8) then the angular distortion can be expressed by the shear stress alone. The stresses are assumed to be continuous functions, thus the lines connecting the common tangent do not reveal any angular distortion, that is, their tangent will remain common even after deformation. For example, the tangents associated with the C point terminal of the centerlines C-1 and C-3 in Fig. 8 are the same after deformation, too. On the other hand, the C point tangents of lines C-1, C-2, and C-5 pertaining to point C may exhibit an angular distortion, with the following values:

between C-1 and C-2:	$1/G\ \tau_{xy}$,
between C-1 and C-5:	$1/G\ \tau_{xz}$,
between C-2 and C-5:	$1/G\ \tau_{yz}$.

Along the boundary surface of the body the system will not in general be so regular. Such a junction point is illustrated in Fig. 9. The C-point tangent of lines C-2 and C-4 or C-5 and C-6 is identical and, therefore, they will not reveal

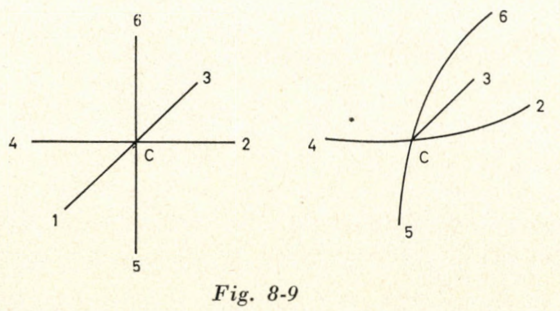


Fig. 8-9

any angular distortion whatsoever. On the other hand, the angular distortions between lines C-2 and C-3, C-2 and C-6, or C-3 and C-6, respectively, can be readily calculated by means of the formula in Appendix No 2. For example, the angular distortion of the C-point tangents of lines C-2 and C-3 is

$$\gamma_{2,3} = (2\varepsilon_n - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \tan \alpha_{2,3}$$

where ε_2 and ε_3 represent specific strain in the direction of the C-2 and C-3 tangents, respectively, ε_n is the same in the direction normal to their bisector, and $\alpha_{2,3}$ indicates the half of the angle included by the tangents. Thus, to learn the total deformation we have to know nothing else but the deformation of the individual line sections.

In view of the method we have selected the case when the surfaces cutting off the elements are planes, the tests can also be restricted to planar lines. The following paragraphs supply formulae for a plane parallel to the (y, z) coordinate plane proper.

Calculation of the deformations exhibited by the straight lines parallel to the co-ordinate axes is much simpler, so this will be described first, and only thereafter the deformation of the (planar) curve representing the general case.

For example, if the displacement of the starting point j of the line parallel to axis z is known, the components of the terminal displacement of k can be calculated on the basis of the following equations:

$$\Delta x_k = \Delta x_j + (z_k - z_j)\Delta\varphi_{y,j} + \int_{(l_{j,k})} (z_k - z)\left[\frac{1}{G}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)\right] dz\,,$$

$$\Delta y_k = \Delta y_j - (z_k - z_j)\Delta\varphi_{x,j} + \int_{(l_{j,k})} (z_k - z)\left[\frac{1}{G}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)\right] dz\,,$$

$$\Delta z_k = \Delta z_j + \frac{1}{E}\int_{(l_{j,k})} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)\, dz\,,$$

$$\Delta\varphi_{x,k} = \Delta\varphi_{x,j} + \frac{1}{G}(\tau_{yz,j} - \tau_{yz,k}) + \frac{1}{E}\int_{(l_{j,k})} \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)\, dz\,,$$

$$\Delta\varphi_{y,k} = \Delta\varphi_{y,j} + \frac{1}{G}(\tau_{xz,k} - \tau_{xz,j}) - \frac{1}{E}\int_{(l_{j,k})} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)\, dz\,,$$

$$\Delta\varphi_{z,k} = \Delta\varphi_{z,j} + \frac{1}{2G}\int_{(l_{j,k})} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\right) dz\,.$$

Analysis of the individual terms of these expressions can be found in Appendix No 1 where the effects of each stress are examined separately. It appeared to be expedient to derive these formulae in an elementary way, although they are well-known expressions, and can be written, for example, on the basis of (4.16) — (4.20) on pages 17—18 of [3].

If the displacement of the starting point j of the curve section $l_{j,k}$ in plane (y, z) is known, the components of the terminal displacement of k (in the case of negligation of members multiplied with curvature) will be

$$\begin{aligned}\Delta x_k = {} & \Delta x_j + (z_k - z_j)\Delta\varphi_{y,j} - (y_k - y_j)\Delta\varphi_{z,j} + \\ & + \int_{(l_{j,k})} \left\{ \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n)\left[(y_k - y)\cos(n,z) - (z_k - z)\cos(n,y)\right] + \right. \\ & + \frac{1}{G}\frac{\partial\tau_{tx}}{\partial s}\left[(y_k - y)\cos(t,y) + (z_k - z)\cos(t,z)\right] + \\ & \left. + \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{tx}}{\partial n}\right)\left[(z_k - z)\cos(t,y) - (y_k - y)\cos(t,z)\right]\right\} ds ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta y_k = {} & \Delta y_j - (z_k - z_j)\Delta\varphi_{x,j} + \int_{(l_{j,k})}\left[\frac{1}{G}\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial s} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial_n}(\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n)\right](z_k - z)ds ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta z_k = {} & \Delta z_j + (y_k - y_j)\Delta\varphi_{x,j} + \int_{(l_{j,k})}\left[\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial n}(\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{G}\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial s}\right](y_k - y)ds ,\end{aligned}$$

$$\Delta\varphi_{x,k} = \Delta\varphi_{x,j} + \frac{1}{G}(\tau_{tn,j} - \tau_{tn,k}) + \frac{1}{E}\int_{(l_{j,k})}\frac{\partial}{\partial n}(\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n)ds ,$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{y,k} = {} & \Delta\varphi_{y,j} + \int_{(l_{j,k})}\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{tx}}{\partial n}\right)\cos(t,y) - \\ & \left. - \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n)\cos(n,y)\right] ds ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{z,k} = {} & \Delta\varphi_{z,j} + \int_{(l_{j,k})}\left[\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{tx}}{\partial n}\right)\cos(t,z) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n)\cos(n,z)\right] ds .\end{aligned}$$

The above formulae do not contain the changes of the angles included by the lines meeting in the common nodal point, so in each case those must be taken into account according to the particular local conditions.

APPENDIX

1. Deformation of a line in the continuum

Let us regard the line as a bar cut off from the continuum, limited by two parallel planes and two cylindrical surfaces normal to the former, when the distance of the planes and surfaces from each other approximate zero (Fig. A-1). Let us first examine an element of length 1 in this system, located in the spatial orthogonal co-ordinate system in such a way so as to make its sides parallel

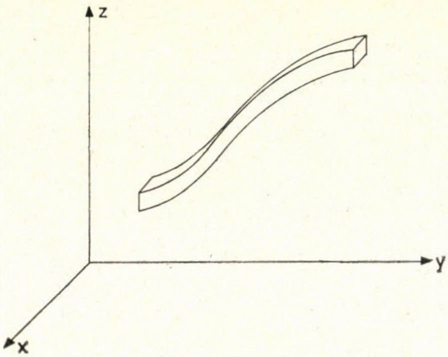


Fig. A — 1

with the co-ordinate planes (Fig. A-2).

Our calculations assume that the joint effect of the stresses exerted on deformation is equal to the sum of the effects exerted by the individual stresses. These individual stress effects are, therefore, separately investigated.

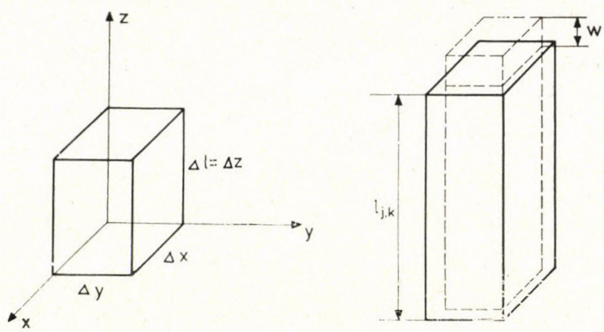


Fig. A — 2-3

a) *Effects exerted by normal stresses*

It is known from the theory of elasticity* that

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

whereby the displacement w of the terminal k of an $l_{j,k}$, the long line parallel to axis z (Fig. A-3) will be

$$w = \frac{1}{E}\int_{(l_j,k)} (\sigma_z - \varphi\sigma_x - \nu\sigma_y)dz.$$

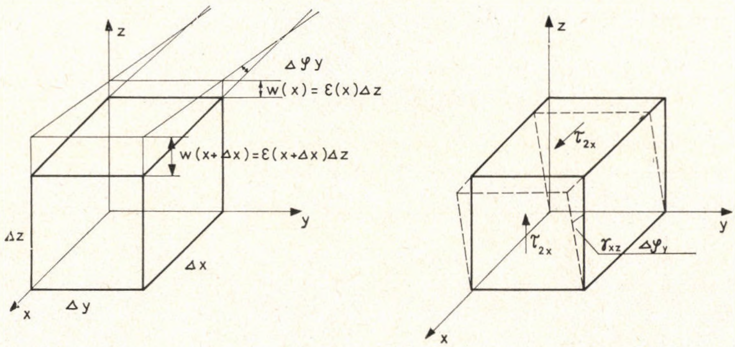


Fig. A—4-5

b) *Variation of the normal stresses in a direction normal to the line*

If the stresses vary in direction x only then, on the basis of Fig. A-4, may be written that

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_y &= -\frac{\varepsilon_z(x+\Delta x) - \varepsilon_z(x)}{\Delta x}\Delta z = \\ &= -\frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_z(x+\Delta x) - \nu\sigma_x(x+\Delta x) - \nu\sigma_y(x+\Delta x)}{\Delta x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_z(x) - \nu\sigma_x(x) - \nu\sigma_y(x)}{\Delta x}\right]\Delta z = \\ &= -\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)\Delta z,\end{aligned}$$

* See, for example, page 7 in [1].

which means that the rotation of the end face of a bar of $l_{j,k}$ length and elementary cross section is

$$\varphi_y = -\frac{1}{E}\int_{(l_{j,k})} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)dz\,,$$

and the displacement of the line terminal (k), due to the variation of the normal stresses can be expressed by

$$u_k = -\frac{1}{E}\int_{(l_{j,k})} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)(z_k - z)dz\,.$$

As for their buildup, the formulae on variations in direction y are absolutely identical, the only difference being in the indices and sign.

c) *Effect of the shearing stress*

Furthermore, from the theory of elasticity we know, that the shearing strain, the angular distortion due to a shearing stress of, for example, τ_{zx} will amount as in Fig. A-5 to

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}\,.$$

As can be seen in Fig. A-6a, the rotation of the tangent due to the shearing stress does not depend on the length of the line but only on the magnitude of the shearing stress. If the latter is constant all along the straight line, then the x direction component of the relative terminal displacements will be expressed by

$$u = \frac{1}{G}\tau_{zx}l_{j,k}\,.$$

If, on the other hand, the shearing stress varies along the line, then the rotation of its tangent will be proportional at each point to the shearing stress generated (Fig. A-6b), thus, we obtain

$$\gamma_{zx,k} - \gamma_{zx,j} = \frac{1}{G}(\tau_{zx,k} - \tau_{zx,j})\,.$$

The relative terminal displacement parallel to axis x is

$$u = \frac{1}{G}\tau_{zx,j}l_{j,k} + \frac{1}{G}\int_{(l_{j,k})} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(z_k - z)dz\,.$$

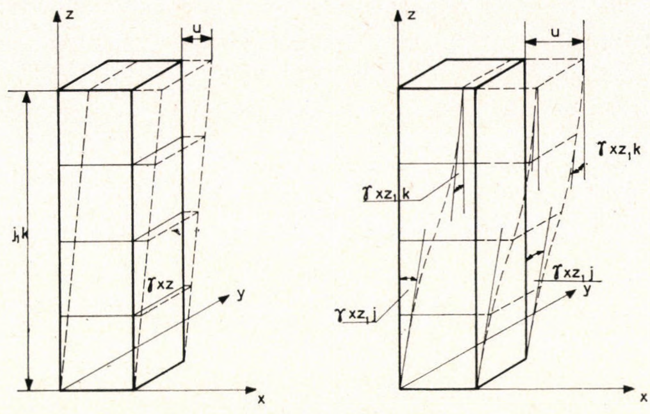


Fig. 6 A—a, b

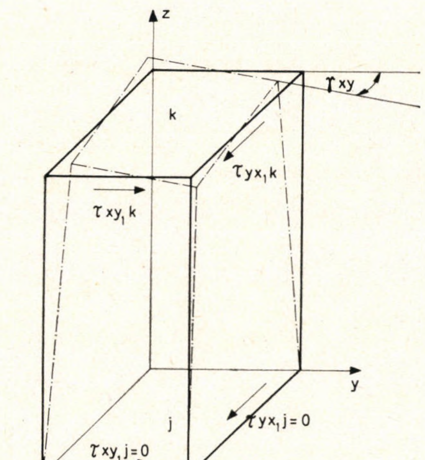


Fig. A—7

Owing to the variation of shearing stress τ_{xy}, the straight lines associated with terminals j and k, and originally parallel to axis y, will include an angle of

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2G}(\tau_{xy,k} - \tau_{xy,j})$$

as shown in Fig. A-7.

d) *Variation of the shearing stress in a direction normal to the line*

The y direction variation of shearing stress τ_{zx}, and that of τ_{yz} in direction x lead to a torsional deflection around axis z. In addition, the x direction variation of shearing stress τ_{yz} brings about the y direction displacement of the Δx co-ordinate apex of a prism of Δz height, as expressed by

$$\Delta v = \frac{1}{2G}\left[\tau_{yz}(\Delta x) - \tau_{yz}(0)\right]\Delta z .$$

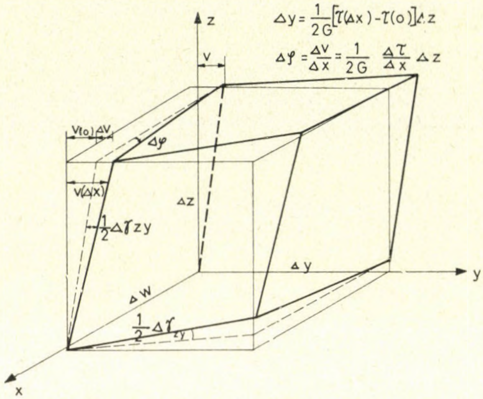


Fig. A—8

(Fig. A-8). Thus the specific value of the torsional deflection around axis z, due to the variation of shearing stress τ_{yz} in direction x, will amount to

$$\varphi_{z0} = \frac{1}{2G}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} .$$

The effect of the y- direction variations can be determined in a similar manner. Thus, the variations in directions x and y, along a length of $l_{j,k}$, bring about a torsional deflection of

$$\varphi_z = \frac{1}{2G}\int_{(l_{j,k})}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right) dz$$

as a joint effect.

2. Concentrated angular distortion

In the theory of elementary strength the effect of shearing stress as exerted on deformation is usually neglected. This means that the concentrated angular distortion between two lines of the system is similarly neglected. If, however, the shearing stress effect on deformation is reckoned with, then the concentrated angular distortion must also be taken into account. This is, in a perpendicular connection, exactly $\gamma = \tau/G$, which is due to the shearing stress, or else it can be determined as follows.

Such a prism cut off from the body under test surface in the section being examined is rhombus- shaped. Two sides of this rhombus are parallel with two lines of the netweork. If the edge of the rhombus is of a unit length, then the e_1 and e_2 elongations are equal to the unit elongations parallel thereto, i.e., $e_1 = \varepsilon_1$, and $e_2 = \varepsilon_2$, while the elongation of the rhombus diagonal is $e_3 = 2\varepsilon_3 \sin\alpha$, where α is the half of the angle included by directions 1 and 2. On the basis of Fig. A—9 it can easily be realized that the angular variation of the tangents of lines 1 and 2 at the points examined is

$$\gamma = \frac{e_3 - (e_1 + e_2)\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\varepsilon_3 \sin\alpha - (\varepsilon_1 + \varepsilon)\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tan\alpha\,.$$

The unit strains ε_1, ε_2 and ε_3 can be expressed by means of the stresses paralle, with and normal to the given directions, just as by the unit elongations ε_x ε_y, ε_z and shearing strains γ_{xy}, γ_{xz}, and γ_{yz}, according to the equation on page 223 of [1]:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2(n,x) + \varepsilon_y \cos^2(n,y) + \varepsilon_z \cos^2(n,z) +$$
$$+ \gamma_{xy}\cos(n,x)\cdot\cos(n,y) + \gamma_{xz}\cos(n,x)\cdot\cos(n,z) +$$
$$+ \gamma_{yz}\cos(n,y)\cdot\cos(n,z)\,.$$

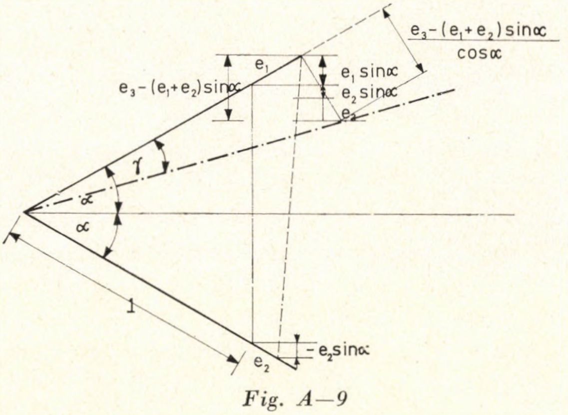


Fig. A—9

During the subsequent transformation, in the first case the stresses pertaining to the parallel and normal directions, respectively, while in the latter instance the strains are expressed by means of the stresses σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, and τ_{yz}.

3. Numerical calculation of the integral according to arc length of a function formed by given derivatives of a function of more variables

When the line along which the integration is performed is parallel to one of the co-ordinate axes, the situation is far more simple than a general case that it deserves separate discussion, and the general case from our point of view be analyzed only afterwards. For the sections parallel to the axes, in the surroundings of which the points involved in the calculation have a regular arrangement, the formula expressing the definite integral by means of the function values pertaining to the surrounding points can be given, in general, thus, there is no need for integration in each case here. On the other hand, in the general case, both the integrations for the individual line sections and the parametric representation by arc length of the curve should be carried out.

a) *Straight line parallel to the co-ordinate axis*

Let us start out from the case when the straight line is parallel to axis z, by indicating the function whose derivatives are involved in the integral with σ. Thus the values of the following integrals must be determined:

$$\int_{(l_j, k)} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} dz \,,$$

$$\int_{(l_j, k)} (a - z) \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} dz \,, \qquad (\alpha = x, y)$$

$$\int_{(l_j, k)} (a - z) \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz \,.$$

Actually, our objective is to determine the values of definite integrals by means of the function values associated with the nodal points. Since the functions are unknown, they will have to be approximated by polynomes determined by the function values pertaining to the junction points. Theoretically, the degree of these polynomes is optional, but our investigations are illustrated here for that case where the approximative polynomes of the integrated are of the third degree, whereas the differential quotient is approximated by a fourth- degree polynome.

When expressing the integrals containing the function thus derived by function values corresponding to the surrounding junction points, first the value of the differential quotient is expressed for the necessary four points (approximation by a third- degree polynome), then these figures are added to the formulae supplying the integral value. This means that the derivative function in the integrand is approximated by a polynome of third degree after

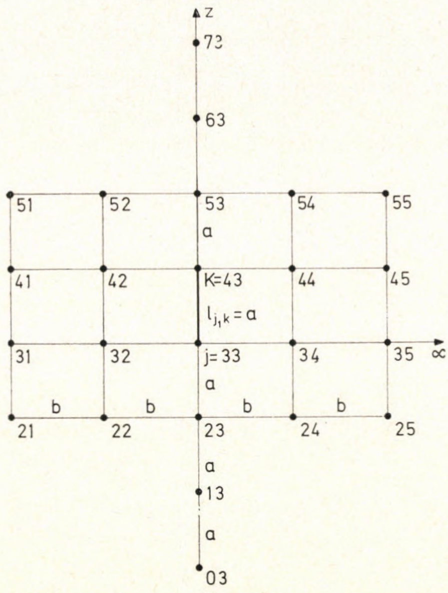


Fig. A—10

the differential quotient values had been calculated by approximation with fourth- degree polynomes.

Using the symbols of Fig. A-10 we obtain

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\right)_{z=z_i} = \frac{1}{12b}(\sigma_{i1} - 8\sigma_{i2} + 8\sigma_{i4} - \sigma_{i5})$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_{z=z_i} = \frac{1}{12a}(\sigma_{i-2,3} - 8\sigma_{i-1,3} + 8\sigma_{i+1,3} - \sigma_{i+2,3})$$

and, therefore, the operands giving the approximative value of the definite integrals corresponding to the $l_{j,k}$ section parallel to axis z, will be

$$\int_{(l_{j,k})} \sigma dz = \frac{a}{24} \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 13 \\ \hline 13 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z)$$

$$\int_{(l_{j,k})} (a - z)\sigma dz = \frac{a^2}{360} \begin{array}{|c|} \hline -7 \\ \hline 66 \\ \hline 129 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z)\,,$$

$$\int_{(l_j,k)} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\, dz = \frac{a}{288b} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 8 & & -8 & 1 \\ \hline 13 & -104 & & 104 & -13 \\ \hline 13 & -104 & & 104 & -13 \\ \hline -1 & 8 & & -8 & 1 \\ \hline \end{array}\ \sigma(\alpha, z)$$

$$\int_{(l_j,k)} (a - z) \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\, dz =$$

$$= \frac{a^2}{4320b} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -7 & 56 & & -56 & 7 \\ \hline 66 & -528 & & 528 & -66 \\ \hline 129 & -1032 & & 1032 & -129 \\ \hline -8 & 64 & & -64 & 8 \\ \hline \end{array}\ \sigma(\alpha, z)\,,$$

$$\int_{(l_j,k)} (a - z) \frac{\partial \sigma}{\partial z}\, dz = \frac{a}{4320} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline -122 \\ \hline 399 \\ \hline 1096 \\ \hline -599 \\ \hline -966 \\ \hline 193 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array}\ \sigma(\alpha, z)\,.$$

Naturally, the above formulae can only be used if the uniform division applies to the next section as well or, in the case of differentiation, to the next two section from the point just examined. If the division is not uniform, then the calculation must be performed in each case. If, on the other hand, the division is uniform but there is no further section following that under examination, that is, one of the section's terminals is at the surface of the body, then the relevant formulae, similar to those above, can again be readily derived. Since, however, these are needed only for the examination of special- shape bodies (rectangles or other bodies composed thereof), their discussion will be omitted as their expression would not present any theoretical difficulties after the above description.

b) *Plane curve parallel to the co-ordinate plane*

Our general investigations will be restricted now to plane curves since the accomplishment of our actual task does not require anything more. Thus, let us have a curve in a plane parallel to the coordinate plane (y, z). The task is to express by means of function values the following type integrals

$$\int_{(1)} \frac{\partial\sigma}{\partial x} f(s)ds\,, \qquad \int_{(1)} \frac{\partial\sigma}{\partial n} f(s)ds\,, \qquad \int_{(1)} \frac{\partial\sigma}{\partial s} f(s)ds\,,$$

where n is the normal of the curve.

Functions $\partial\sigma/\partial x$, $\partial\sigma/\partial n$ and $\partial\sigma/\partial s$ are approximated in the integrals with the Lagrange polynomes expressed by means of their values pertaining to the points selected. It will be shown below that the values of the integrals can be obtained in this way, as the linear combinations of the function values of surrounding points.

Let us have a look at Fig. A—11. Let the i, j, k, m point values be of the derived function indicated by D_i, D_j, D_k, and D_m, respectively, then, if the

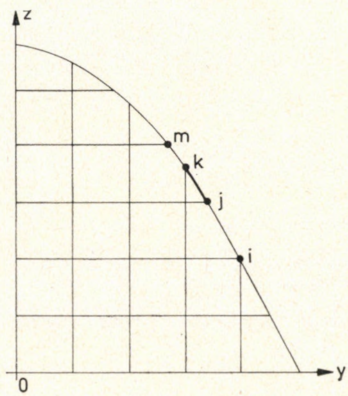


Fig. A—11

derived function is approximated by the Lagrange polynome $L(s)$, the integral may be written in the form

$$I = \int_{(l_{j,k})} L(s)f(s)ds = \int_{(l_{j,k})} \left\{\sum_{(\nu)} L_\nu(s)D_\nu\right\} f(s)ds =$$

$$\sum_{(\nu)} D_\nu \int_{(l_{j,k})} L_\nu(s)f(s)ds$$

where $L_\nu(s)$ is the ν-th Lagrangeian basic polynome, and $\nu = i, j, k, m$. Since the value of the integrals

$$\int_{(l_{j,k})} L_\nu(s)\, f(s)\, ds$$

depends only on the characteristics of the curve, they will not contain the unknowns sought for and, therefore, they can readily be calculated if the body, or the line cut off from the body by plane $x = x_j$, is known. If their values are indicated by C_ν, then we shall have

$$I = \sum_{(\nu)} C_\nu D_\nu .$$

Thereafter, the only thing to be demonstrated is that the D_i, D_j, D_k, D_m values at points i, j, k, m of the derived function could be expressed by means of the function values of the surrounding points.

Fig. A—12 illustrates the three projections of the network of a body, formed by the intersections of the planes $x =$ const, $y =$ const, and $z =$ const. The section $x = x_j$ containing (j, k) is accentuated by a thick line.

With respect to the differential quotient according to x, points j and k represent two different cases. In addition to plane $x = x_j$, point j can also be found in plane $z = z_j$ and, therefore, the differential quotient of point j is expressed by means of the σ values associated with the $z = z_j$ plane points. This $z = z_j$ section is illustrated in Fig. A—13. By using the function values corresponding to points $i1$, $i2$, $i3$, $i4$ in this plane section, the Lagrange poly-

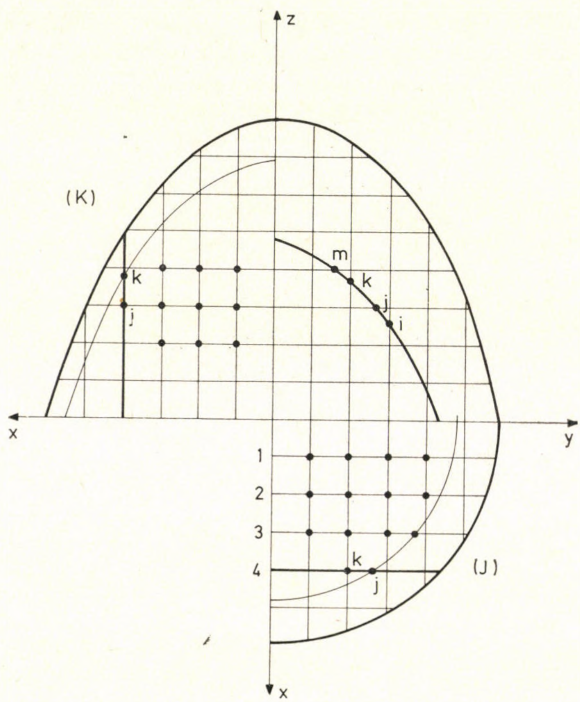


Fig. A — 12

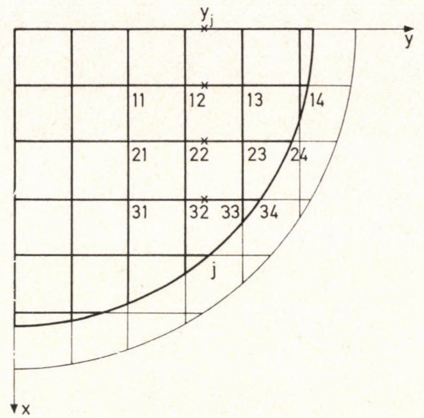


Fig. A — 13

nome $L_{ij}^{(z_j)}(y)$ can readily be expressed, whose value $M_{ij}^{(z_j)}$, pertaining to $y = y_j$, can be obtained as linear combination of the $\sigma_{i\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$) values.

This is

$$L_{ij}^{(z_j)}(y) = \sum_{p=1}^{4} \sigma_{ip} L_{ijp}^{(z_j)}(y),$$

where $L_{ijp}^{(z_j)}(y)$ is the p-th basic polynome whose value H_{ijp} pertaining to $y = y^j$ is a precalculable constant, thus

$$L_{ij}^{(z_j)}(y_j) = \sum_{p=1}^{4} H_{ijp} \tilde{\sigma}_{ip} = \tilde{\sigma}(x_i, y_j).$$

(Symbol $\sim$ intends to call the attention to the approximative character). Section $y = y_j$ of function depends only on x which is similarly approximated with a Lagrange polynome. The only precondition is to have at points (x_i, y_j) the value $\tilde{\sigma}(x_i, y_j)$, while in j the value σ_j is assumed. This polynome will read

$$L^{(z_j, y_j)}(x) = \sum_{q=1}^{3} L_q^{(z_j, y_j)}(x) \tilde{\sigma}(x_q, y_j) +$$
$$+ L_4^{(z_j, y_j)}(x) \tilde{\sigma}_j,$$

and its derivative

$$\frac{d}{dx} L^{(z_j, y_j)}(x) = \sum_{q=1}^{3} \tilde{\sigma}(x_q, y_j) \frac{d}{dx} L_q^{(z_j, y_j)}(x) + \sigma_j \frac{d}{dx} L_4^{(z_j, y_j)}(x).$$

The value of function

$$\frac{d}{dx} L_q^{(z_j, y_j)}(x)$$

as assumed at the locus $x = x_j$, is a K_q constant that can be calculated from the network, thus

$$D_j = \left\{ \frac{d}{dx} L^{(z_j, y_j)}(x) \right\}_{x=x_j} = \sum_{q=1}^{3} K_q \tilde{\sigma}(x_q, y_j) + K_4 \sigma_j .$$

Finally, expressing the value of $\tilde{\sigma}(x_q, y_j)$ with the values pertaining to the points selected, we shall get

$$D_j = \sum_{q=1}^{3} K_q \sum_{p=1}^{4} H_{qjp} \sigma_{qp} + K_4 \sigma_j .$$

Since, however, the K_q and H_{qjp} values are constants calculated from the network, the last expression means that the approximative value of the D_j differential quotient at point j may be written as the linear combination of the function values corresponding to the nodal points in the neighbourhood of point j.

The differential quotient value according to x in point k can be determined in a similar way, with the only difference that, in this case, not the values of the junction points in plane $z = z_k$ will be reckoned with (as generally there is no such junctionp oint except that indicated by k), but those in plane $y = y_k$.

The foregoing applies to D_i and D_m too, of course, thus the entire

$$\int_{(l_j,k)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(s)\, ds$$

expression may be written as the linear expression of the function values pertaining to the surrounding nodal points.

The derivatives assumed in the direction of the tangent and/or normal of the curve are expressed in the well-known way on the basis of the equations

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos(t, y) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin(t, y) ,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin(n, y) ,$$

by making use of the derivatives with respect to y and z, where t is the tangent, and n the normal of the curve.

Since approximation requires the values of these derivatives only for certain points (in the example and its illustration Fig. A—11 only at points i, j, k, m), in the case of a value related to a certain point the angles and their angular functions will be given constants, thus the subsequent investigations will have to apply only to the y and z derivatives.

The z derivative in point j can be expressed with the function values pertaining to the loci of Fig. A – 14a, indicated by dots, while the derivative with respect to y at point k may be described by those in Fig. A—14b, with the intermediary of the points crossed. The calculation, and proving that the integral can be expressed by the function values associated with the points selected, are the same as those used for the derivative of x.

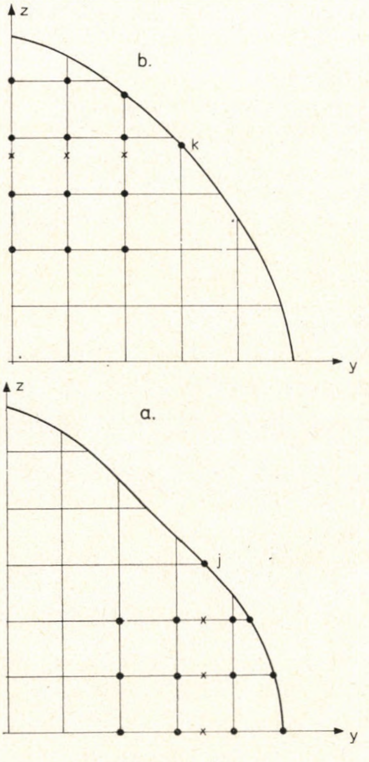


Fig A — 14

REFERENCES

1. Timoshenko, S., — Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, McGraw Hill, New York — Toronto — London, 1951
2. Béres, E.: Calculation of Bent Shells by Means of a Grid Model — *Acta Tech. Hung.*, **74**, 173 — 196
3. Lurje, A,I.: Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1963

Dreidimensionale Spannungsanalyse mit Hilfe eines Kontinuum-Unterraums. Behandelt wird eine Methode der dreidimensionalen Spannungsanalyse, wodurch die Gleichgewichtsgleichungen unmittelbar für Elemente von endlichen Dimensionen, die Kontinuitäts-

bedingungen für den eindimensionalen Unterraum des dreidimensionalen Kontinuums, d.h., für das sich als Schnittlinien der Teilungsoberflächen ergebende Netz aufgeschrieben werden. Die Spannungen beschreibenden Funktionen durch Polynome angenäbert führen die numerische Lösung zu einem System linearer Gleichungen, deren Koeffizienten sich aus bestimmten Integralen ergeben. Bei gleichmäßiger Aufteilung können zu deren Aufschreibung Operatoren von allgemeiner Geltung angewandt werden und so ist die Durchführung dieser Integrale nicht erforderlich.

Анализ трехмерного напряжения с помощью континуумного подпространства. В работе описывается такой метод анализа трехмерного напряжения, который записывает уравнения равновесия непосредственно на элементы конечных размеров, а условия сплошности — на одномерное пространство трехмерного континуума, на сеть, получающуюся в качестве секущей линии разделяющих плоскостей. Приближая с помощью полиномов функции, описывающие напряжения, числовое решение в конечном счете приводит к системе линейных уравнений, коэффициенты которой получаются из определенных интегралов. В случае равномерного распределения для их записи можно использовать операторы общей действительности, поэтому в таких случаях нет необходимости в конкретном выполнении интегрирования.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 267—275 (1974)

BERECHNUNG DER KENNGRÖßEN VON PSEUDOSTOCHASTISCHEN VIELSTUFIGEN SIGNALEN

T. BONDY*

[Eingegangen am 4. Juni 1971]

Eine Klasse von pseudostochastischen Folgen, die Folgen maximaler Länge, werden oft bei der Gewichtsfunktionsbestimmung mittels Kreuzkorrelationsanalyse verwendet. Solche Folgen können mittels rückgekoppelter Schieberegister verwirklicht werden. Das so erhaltene binäre Signal kann durch ein parallel geschaltetes digitales Filter in ein Analogsignal umgewandelt werden. Die Arbeit beschreibt ein Rechenverfahren für den zeitlichen Verlauf des analogen Signals und seiner statistischen Kennwerte, welches sich besonders gut für die Auswertung mittels eines Rechners eignet.

1. Einführung

Die Bedeutung einer Klasse von pseudostochastischen Folgen, den sogenannten Folgen maximaler Länge (kurz: m-Folgen) liegt darin, daß sie schaltungstechnisch einfach mit Hilfe von rückgekoppelten Schieberegistern verwirklicht werden können. Eine Methode der Umwandlung des so erhaltenen pseudostochastischen binären Signals in ein vielstufiges (multilevel-) Signal ist die parallele Umwandlung, bei der den Ausgängen der einzelnen Kippstufen des Schieberegisters entsprechende Gewichte zugeteilt und die Ausgänge dann addiert werden.

Die Amplitudenverteilung des so erhaltenen vielstufigen Signals kann nicht exakt angegeben werden. Der Grund hierfür ist, daß das binäre pseudostochastische Signal als Funktion der Zeit — nach unseren heutigen Kenntnissen — in geschlossener Form nicht angegeben werden kann.

Die Amplitudenverteilung des analogen Signals kann in dem Fall berechnet werden, wenn die Anzahl der Gewichtswiderstände, d. h. die Anzahl der für die Erzeugung des vielstufigen Signals benützten Einheiten, der Anzahl der an der Erzeugung des binären Signals teilnehmenden Einheiten des Schieberegisters gleich ist [1, 2].

In diesem Fall wird jene Eigenschaft der m-Folgen ausgenützt, daß in einer Periode jede aus n Bits bestehende Folge (oder Codewort), ausgenommen die nur aus Nullen bestehenden Folgen, nur ein einzigesmal vorkommt. Die Länge der längsten Folge ist $L = 2^p - 1$, worin p die Länge des Schiebe-

* Bondy T., Csorbai úti lakótelep XI., Budapest, Ungarn.

registers bedeutet. Der Nachteil des Verfahrens ist, daß es nur für $r = p$ benützt werden kann sowie, daß es nicht über den zeitlichen Verlauf des Signals informiert und daher die Autokorrelationsfunktion nicht berechnet werden kann. Die nachstehend beschriebene Methode kann auch für $r > p$ verwendet werden und ergibt den zeitlichen Verlauf einer Periode des Signals, woraus die Autokorrelationsfunktion berechnet werden kann. Für längere Periodendauer erfordert die Methode zwar viel Rechenarbeit, ist aber eine systematische Methode, und die Berechnungen können auf einem Rechner leicht durch vielfache Wiederholung einiger Operationen — je nach dem Grad der Polynome — durchgeführt werden. Der Algorithmus besteht immer aus einer endlichen Zahl von Schritten. (Für $r > p$ gibt es Berechnungsmethoden [3, 4], aber die eine bezieht sich nur auf den Fall gleicher Gewichte, die andere [4] ist keine systematische, sondern eine von der gegebenen m-Folge abhängige, nur für sehr begrenzte Fälle gültige Methode. Für alle Verfahren gilt auch weiters, daß sie nicht über den zeitlichen Verlauf und daher auch nicht über die Autokorrelationsfunktion informieren.)

2. Beschreibung der Methode

Eine Art der Darstellung einer m-Folge ist, sie mit Hilfe der Generatorfunktion anzugeben:

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n , \tag{1}$$

wo $b_0, b_1, b_2, \ldots b_i, \ldots b_n$ die m-Folge, $G(u)$ die Generatorfunktion der Folge bedeuten.

Andererseits ist

$$G(u) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{p} c_i u^i} , \tag{2}$$

wo $1 - \sum_{i=1}^{p} c_i u^i = F(u)$ das charakteristische Polynom der Reihe bedeutet.

In (1) und (2) sind die Operationen modulo 2 zu verstehen. Aus (1) kann durch die Substitution $u = z^{-1}$ die z-transformierte Form gewonnen werden:

$$G(u) = G(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} .$$

Das ist jedoch die z-Transformierte der Zeitfunktion der m-Folge. Auf Grund von Bild 1 gilt für das analoge Signal

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^{r} x(nT - kT) \cdot a(kT), \tag{3}$$

wo $x(t)$ das binäre Signal auf einer beliebigen Stufe des Schieberegisters und $a(kT) = a_k T$ sind; $Y_n(t)$ ist das analoge Signal im n-ten Zeitintervall. Auf Grund von (3) kann die z-Transformierte von $Y(t)$ angeschrieben werden:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{p} \left[\sum_{k=0}^{p} x(nT - kT)\, a(kT) \right] \cdot z^{-n}.$$

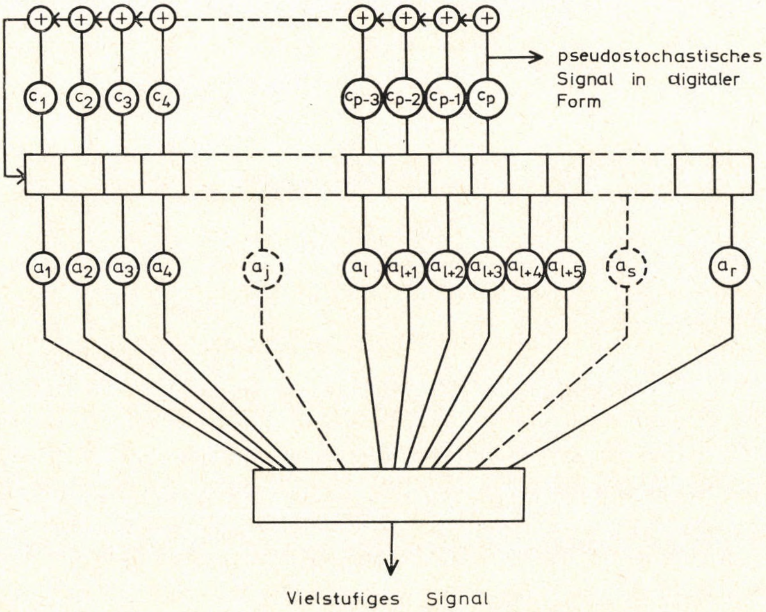


Bild 1. Erzeugung eines vielstufigen pseudostochastischen Signals

Nach Einführung der Bezeichnung $n_k = n - k$ wird

$$Y(z) = \sum_{n_k=-k}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} x(n_k T) \cdot a(kT) \cdot z^{-n} k \cdot z^{-k} =$$

$$= \sum_{n_k=0}^{\infty} x(n_k T) \cdot z^{-n} k \cdot \sum_{k=1}^{r} a(kT) \cdot z^{-k},$$

wobei angenommen wurde, daß für $n_k = 0$, $x(n_k t) = 0$. Daher wird

$$Y(z) = X(z) \cdot A(z)\,,$$

worin

$$X(z) = \sum_{n_k=0}^{\infty} x(n_k T) \cdot z^{-n_k}$$

die z-Transformierte des binären Signals ist,

$$A(z) = \sum_{k=1}^{r} a(kT) \cdot z^{-k}$$

hingegen die Impulsübertragungsfunktion des Analog-Digitalumformers ist.

Nach Rückkehr zur Bezeichnung $u = z^{-1}$ und Einführung der Bezeichnung $n_k = n$ ergeben sich

$$Y(u) = X(u) \cdot A(u) \tag{4a}$$

und

$$X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u^n, \tag{4b}$$

sowie

$$A(u) = \sum_{k=1}^{r} a_k u^k .$$

Der Vergleich von (1) und (4b) zeigt, daß $G(u) = x(u)$. Daher könnte man denken, daß wenn $A(u)$ in geschlossener Form angegeben werden kann, auch $Y(u)$ mit Hilfe von (4b) in geschlossener Form angegeben werden kann, wenn $X(u) = G(u)$ in (4a) eingesetzt wird. Leider ist dies jedoch nicht möglich, denn die in (2) vorgeschriebenen Operationen sind modulo-2 zu verstehen, die in (4) vorgeschriebenen jedoch nicht. Deswegen sind wir gezwungen, aus einem gegebenen charakteristischen Polynom $F(u)$ auf Grund von (2) $G(u)$ als Polynom darzustellen und dieses Polynom mit $A(u)$ zu multiplizieren. (Unabhängig davon, ob $A(u)$ in geschlossener Form angegeben werden kann oder nicht.)

Ein anderes Problem ist, daß wenn L die Periode von $G(u)$ ist, notwendigerweise auch die Periode von $Y(u)$ gleich L sein muß. Das trifft jedoch nicht allgemein zu, wenn die Berechnung nur für eine Periode auf folgende Weise durchgeführt wird:

$$Y(u) = \sum_{n=0}^{L-1} x_n u^n \cdot \sum_{k=1}^{r} a_k u^k ,$$

das heißt, der folgende Zusammenhang gilt nicht:

$$Y(u) = \frac{Y^*(u)}{1 - u^L} ,$$

wo $Y^*(u)$ eine Periode von $Y(u)$ bedeutet. Es besteht jedoch die Möglichkeit, $Y^*(u)$ so abzuändern, daß es wirklich eine Periode von $Y(u)$, nämlich $Y_L(u)$ ergibt. Dies zu zeigen würde sehr schwerfällige Berechnungen ergeben, deswegen wird dies an Hand eines konkreten Beispiels veranschaulicht. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß die Werte der Gewichtswiderstände, nämlich $a_i = a = 1$ gleich sind. (Die Methode kann natürlich nicht nur auf diesen Fall angewendet werden, wie dies später ersichtlich wird.) Ferner sei $p = 4$ und das charakteristische Polynom sei:

$$F(u) = 1 - (u^3 + u^4)\,.$$

Da für eine Modulo-2-Arithmetik die Operationen Addition und Subtraktion miteinander vertauscht werden können, ist

$$F(u) = 1 + u^3 + u^4\,.$$

Die Summierung geschehe für $r = 4$ (d. h. $p = r$).

Die Periode der vom charakteristischen Polynom erzeugten Folge ist $L = 15$ wie folgt:

$$X(u) = \frac{1}{1+u^3+u^4} = 1+u^3+u^4+u^6+u^8+u^9+u^{10}+u^{11}. \tag{5}$$

Eine Periode des binären Signals ist daher

. . . 100110101111000 . . .

Die Übertragungsfunktion hat folgende Form:

$$A(u) = 1 + u + u^2 + u^3\,. \tag{6}$$

Diese kann natürlich auch in kürzerer Form angegeben werden, jedoch ist der Ausdruck (6) günstiger für die Durchführung der Berechnungen, da er keine Brüche enthält.

Auf Grund von (5) und (6) kann $Y^*(u)$ berechnet werden.

$$Y^*(u) = 1 + u + u^2 + 2u^3 + 2u^4 + 2u^5 + 3u^6 + 2u^7 + 2u^8 + 3u^9 + 3u^{10} +$$
$$+ 4u^{11} + 3u^{12} + 2u^{13} + u^{14}\,.$$

Daraus kann das Signal abgelesen werden (die Koeffizienten geben den Wert der Amplituden an):

. . . 111222322334321 . . .

Da die Zahl der Glieder 15 ist, ist in diesem Fall

$$Y^*(u) = Y_L(u)\,. \tag{7}$$

Dies ergibt sich jedoch nur als Folge dessen, daß $m = 4$ gewählt wurde. Z. B. für $m = 5$ gilt die Gl. (7) nicht mehr. Bevor auf die Untersuchung des Falles

$m = 5$ eingegangen wird, wird die Amplitudenverteilung des Signals abgelesen, welche in der nachstehenden Zahlentafel zusammengefaßt ist:

Amplitude	Anzahl des Vorkommens
1	4
2	6
3	4
4	1

Das Ergebnis ist offensichtlich gleich der binomischen Verteilung, abgesehen davon, daß die Amplitude 0 nicht vorkommt, da die nur aus Nullen bestehende Folge in der maximal langen Folge nicht enthalten ist. In diesem Fall ($r = p$)

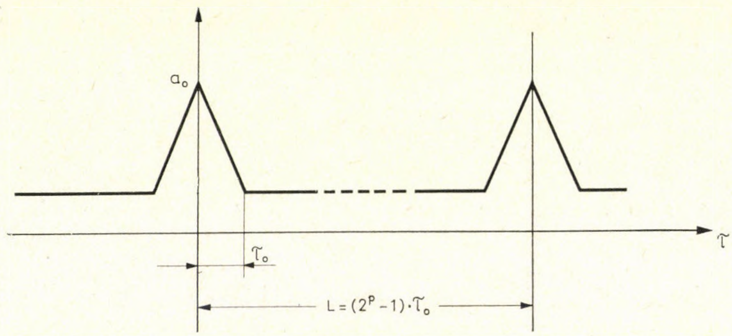


Bild 2. Autokorrelationsfunktion eines vielstufigen pseudostochastischen Signals

hätte die Verteilung selbst auch mit einer anderen Methode berechnet werden können, welche jedoch bloß die Amplitudenverteilung und auch diese nur für $r = p$ angibt, weiterhin muß dort das gewonnene Resultat entsprechend dem Umstand noch modifiziert werden, daß die erhaltene Verteilung von der Binomialverteilung abweicht.

Die Autokorrelationsfunktion des Signals zeigt Bild 2. Wie ersichtlich, ist der Scheitelwert der Autokorrelationsfunktion im Verhältnis zu den bei den dazwischenliegenden Verschiebungswerten angenommenen Werten wesentlich kleiner als im Falle eines Binärsignals. (Dies ist verständlich, da ja der Digital-Analog-Umwandler — oder hier das digitale Filter — eine mittelwertbildende Wirkung ausübt.) Im Falle von $r = 5$ ist das Ergebnis der Multiplikation ($A(u) = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4$):

$$Y^*(u) = 1 + u + u^2 + 2u^3 + 3u^4 + 2u^5 + 3u^6 + 3u^7 + 3u^8 + 3u^9 + 4u^{10} + 4u^{11} + 4u^{12} + 3u^{13} + 2u^{14} + u^{15} .$$

Danach ist:

$$Y^*(u) = 111232333344321\,. \tag{8}$$

In diesem Fall besteht $Y^*(u)$ aus 15 Gliedern, ergibt daher nicht unmittelbar eine Periode der Folge. Hingegen ist offensichtlich, daß das ganze Signal sich aus diesen Folgen $Y^*(u)$ derart ergibt, daß diese mit Überdeckung untereinander geschrieben werden (siehe weiter unten) und wo eine Überdeckung besteht, werden die entsprechenden Glieder addiert. (Die Überdeckung ergibt sich daraus, daß in $Y^*(u)$ die Anzahl der Glieder größer ist als L die Anzahl der Perioden.) Aus (8) wird eine Periode des Signals folgendermaßen gewonnen:

$$\begin{array}{l cc|ccccccccccccccc|cccc l}
Y^*(u) = \ldots & & & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
\ldots & 3 & 2 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 2 & \ldots \\
\hline
\ldots & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & \ldots
\end{array}$$

$$L = 15\,.$$

Eine Periode des Signals ist daher

$$2\ 1\ 1\ 2\ 3\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 3\ 2\,.$$

Offensichtlich genügt es für einen vorgegebenen Wert von p diejenigen Fälle zu untersuchen, für welche $r < 2^p - 1$, wenn die Summierung für $a_i = \mathrm{const}$ durchgeführt wird. Es sei $a_i = \mathrm{const} = 1$. (Dadurch wird die Allgemeingültigkeit nicht beeinträchtigt, da für $a_i = a_0 \neq 1$ der entsprechende Wert der Amplitude a_0-mal größer ist.) Für $m = 2^p - 1$ erscheint am Ausgang des Registers eine komplette Periode und in derselben werden diejenigen Bits zusammengezählt, deren Wert 1 ist (d. h. das Gewicht des Code-Wortes wird gebildet). Ihre Anzahl ist immer auf Grund der bekannten Eigenschaften der Folgen maximaler Länge 2^{p-1}. D. h. für $r = 2^p - 1$ ist die erhaltene Amplitudenverteilung an einer Stelle definiert und die zugehörige Amplitude ist 2^{p-1} für $a_0 = 1$ und für $a_0 \neq 1$ wird sie $a_0 \cdot 2^{p-1}$. Zu erwarten ist daher, daß der Bereich der Verteilung für solche Werte von m, welche dem Wert $(2^p - 1)$ naheliegen, jedoch noch $r < 2^p - 1$, gegen Null strebt. Z. B. ergeben $p = 4$ und $a_0 = 1$ für verschiedene m die folgenden Werte (E bezeichnet den Bereich):

r	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	3	3	4	3	3	4	3	3	3	2	1	0

Es ist leicht einzusehen, daß falls $r > 2^p - 1$, die Untersuchung der Verteilung so durchgeführt werden kann, daß r durch $(2^p - 1)$ dividiert wird und die Untersuchung der Verteilung für den Rest durchgeführt wird. Es sei angenommen, daß

$$p = 2 \cdot (2^n - 1) + r \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Dann ist

$$p' = s \qquad \mod (2^n - 1)$$

Die Untersuchung der Verteilung wird dann für $p' = s$ durchgeführt. Die auf die ursprünglichen Werte von p bezügliche Verteilung kann so aus der auf s bezüglichen Verteilung gewonnen werden, daß zu jeder Amplitude, die in der Verteilung vorkommt, $a_0 \cdot r \cdot (2^p - 1)$ addiert wird. Mit anderen Worten, für jede Vergrößerung der Amplitudenverteilung um $r_0 = 2^p - 1$ erleidet die Amplitudenverteilung im Definitionsbereich eine Verschiebung um $a_0 \cdot (2^p - 1)$. (Der Erklärungsbereich ist der vorkommende Amplitudenwert, der Wertevorrat besteht aus den einzelnen Häufigkeitswerten.) Durchschnittswert des Signals ist für $r < 2^p - 1$:

$$x = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1} (4 + r - p) a_0 .$$

Die Gültigkeit der obigen Beziehung ist leicht einzusehen, wenn in Betracht gezogen wird, daß für $m = n$ und $a_0 = 1$ der Durchschnittswert

$$x = \frac{2^{p+1}}{2^p - 1}$$

beträgt, sowie weiters, daß die Vergrößerung von p um 1 den Nenner des Ausdrucks um 2^{p-1} vergrößert.

Der Anschaulichkeit halber geben wir die Autokorrelationsfunktion nicht in Form einer Formel an, sondern stellen sie in Bild 2 dar, woraus gegebenenfalls mit Hilfe der entsprechenden Werte die Funktion aufgeschrieben werden kann. Natürlich kann in diesem Fall eine Periode der Autokorrelationsfunktion bei weitem nicht mehr als gute Näherung der Diracschen δ-Funktion angesehen werden. (Was verständlich ist, wenn wir bedenken, daß die konstante Gewichtsbelastung mehr oder weniger eine »Durchschnittsbildung« des pseudostochastischen Signals erzielt.)

Das beschriebene Rechnungsverfahren würde bei größeren Werten von p und r eine langwierige Rechnungsarbeit erfordern, eignet sich aber als Grundlage für ein einfaches Rechenprogramm, da einige Arten von Operationen in großer Zahl zu wiederholen sind. Das Programm könnte auch gleichzeitig die statistische Auswertung der erhaltenen Folge beinhalten.

SCHRIFTTUM

1. Davies, A. C.: Probability Distribution of Pseudorandom Waveforms Obtained from m-Sequences. *Electronics Letters* **3** (1967) No. 3, 115—117
2. Davies, A. C.: Probability Distribution of Noiselike Waveforms Generated by a Digital Technique. *Electronics Letters* **4** (1968) No. 19, 421—423

3. HEALY, T. J.: Forms of Probability-Density Functions Obtainable from Summed m- Sequences. *Electronics Letters* **5** (1969), 624—625
4. DAVIES, A. C.: Probability-Density Functions of Summed m-Sequences, *Electronics Letters* **6** (1970), 89—90
5. COLOMB, W. S.: Shift Register Sequences. Holden-Day, San Francisco 1967

Calculation of the Characteristics of Pseudorandom Signals. A class of pseudorandom sequences, the maximum-length sequences is frequently used for the determination of weight functions by cross-correlation analysis. Such sequences can be realized with the aid of feedback shift registers. The binary signal obtained in this way can be transformed by a parallel digital filter into an analog signal. The paper deals with a method for calculating the waveform of the analog signal and determines its statistical properties, which are well suited for evaluation on a computer.

Расчет показателей многоуровневых псевдослучайных сигналов. Один класс псевдослучайных серий, а именно серий максимальной продолжительности, часто используется при определении весовой функции, производимой с помощью перекрестного корреляционного анализа. Такие серии можно осуществить с помощью скифрегистров с обратной связью. Полученный таким образом двоичный сигнал с помощью параллельно соединенного двоичного фильтра можно преобразовать в аналоговый сигнал. В статье предлагается методика вычисления для определения статических характеристик и протекания во времени аналогового сигнала, что особенно подходит для производства оценки с помощью электронной вычислительной машины.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 277—308 (1974)

VERDICHTUNGSTECHNISCHE BEITRÄGE ZUR ENTWURFSTHEORIE DER KIESBETONE

J. CSUTOR*

[Eingegangen am 22. Dezember 1971]

Der Autor hat schon früher für die grundsätzlichen Vibrationsbetriebsarten Formeln abgeleitet. Diese Formeln messen den Arbeitsbetrag (Energien) ab, der im Laufe der Verdichtung der unbewehrten Betone von diesen selbst verlangt ist, um vom losen in verdichteten Zustand zu kommen. In der vorliegenden Abhandlung erstreckt der Autor seine energetische Theorie bezüglich der Verdichtung auch auf Regelung der Verdichtung von beliebig bewehrten Betonen und gibt hierzu eine geschlossene Formel ebenfalls mit Gültigkeit auf alle fünf grundsätzlichen Betriebsarten. Das dargelegte Regelungsverfahren kann in Verbindung mit jeder beliebigen Betonentwurfmethode angewandt werden.

1. Vorwort

Im Kreise der Betontechniker ist allgemein bekannt, daß das in den Betonkomponenten im dispersen Zustand befindliche Materialsystem sich durch Mischung und Verdichtung in ein kompaktes System verwandelt.

In dem von der völligen Dispersität bis zur völligen Kompaktheit ablaufenden Vorgang bedeutet die Abnahme des Dispersionsgrades, daß die Meßzahl des Hohlraumgehalts sich dem Nullwert nähert. Die Ermittlung der Zahlen, die die Proportionen der Betonbestandteile bezeichnen, ist der Betonentwurf, der ein doppeltes Ziel verfolgt. *Das erste* Ziel besteht aus einer derartigen mengenmäßigen Ermittlung der räumlichen Struktur der Betonbestandteile, daß diese die Raumeinheit in ihrem kompakten Zustand lückenlos ausfüllen können. *Das zweite* Ziel besteht darin, daß der durch die Menge und Güte des Zements und die Menge des Anmachwassers definierte chemische Prozeß das Erreichen der Größtfestigkeit des kompakten Materialystems ermöglichen soll.

Der disperse Zustand der Betonbestandteile kann auch als eine unstabile Struktur aufgefaßt werden. In der Ausbildung der stabilen Struktur spielt die Verdichtung eine wichtige Rolle, denn sie vermittelt die zur Zustandsänderung erforderliche äußere Energie an der Grenze der Instabilität und der Stabilität in aktiver Art mit dem passiven System der Komponenten. Die diese

* Dr. J. CSUTOR, Villányi út 55—65, 1118 Budapest, Ungarn

äußere Energie liefernden Maschinen sind die *Verdichtungsgeräte*. Diese sind zur Zeit dadurch gekennzeichnet, daß sie die Verdichtungsarbeit in der Form von erregten *mechanischen Schwingungen* verrichten. Während der Verdichtung befindet sich zwischen dem noch losen Frischbeton und der Maschine ein enger Zusammenhang, da sie ein einheitliches, dynamisches System bilden. Die übliche Praxis des Betonentwurfes, daß er auf die Verdichtung nicht eingeht, benötigt deshalb eine gewisse Abänderung. Der Betonentwurf kann nur dann als umfassend und komplett betrachtet werden, wenn er außer der quantitativen Ermittlung der räumlichen Struktur, auch die Regelung der Verdichtung umfaßt, die sich auch auf den Endzustand des Betons auswirkt. Mit anderen Worten: der Betonentwurf soll auch für die Verdichtung quantitative Zusammenhänge angeben können.

Die Wechselwirkung zwischen der Maschine und Beton kann durch Arbeit determiniert werden. Deshalb konnten für die fünf Grundfälle der Rüttelbetriebsarten Meßzahlen angegeben werden [1], [2], [3], deren tabellarische Zusammenstellung dem *Bild* 1 zu entnehmen ist. In [2] und [3] wurde ausführlich nachgewiesen, daß die auf die einzelnen Verdichtungsbetriebsarten bezüglichen *dynamischen Drücke* (Bild 1), die während der Zustandsänderung aufgetretene spezifische Verdichtungsarbeit messen.

Die Betriebsregelung, die von einer großen Menge von Parametern abhängt, kann nur stufenweise erreicht werden. Die dazu führenden Schritte sind die folgenden:

1.3 Zwischen der effektiven *Verdichtung* und der einfachen *Einarbeitung* des Betons in den Schalungsraum besteht ein prinzipieller und maßgebender, praktischer Unterschied.
Die Verdichtung ist eine mit der Zunahme der Dichte des Betons verbundene Volumenverringerung [2], dagegen ist die Einarbeitung ein Prozeß, der im Prinzip keine Dichtezunahme (= Volumenverringerung) hervorrufen kann.

1.4 In der Annäherung dieses Prozesses durch eine Theorie sind drei Phasen zu unterscheiden, und zwar

1.4.1 Untersuchung der Zustandsänderungen des unbewehrten Betons in einem unbegrenzten Raum.

1.4.2 Untersuchung der Zustandsänderungen des unbewehrten Betons in einem begrenzten Raum.

1.4.3 Untersuchung der Zustandsänderungen des bewehrten Betons in einem begrenzten Raum.

Die auf Bild 1 angeführten Formeln beziehen sich auf den Fall 1.4.1.

Der Betonentwurf ist eine halbempirische Wissenschaft und so ist in den dem Entwurf zugrunde liegenden Formeln die Anwendung von Größen, die nicht als kontinuierliche Variable betrachtet werden können, unvermeidlich.

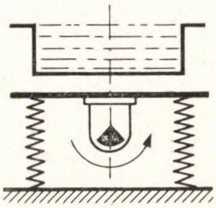
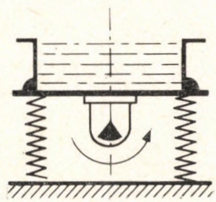
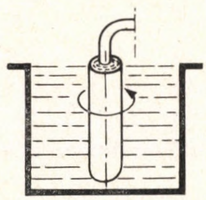
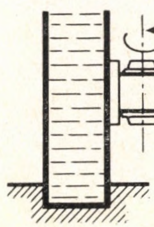
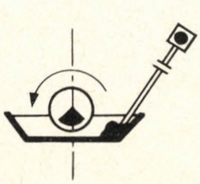
Betriebsart	Verdichtungsgerät	Formel des dynamischen Druckes	Parameter: Beton	Parameter: Gerät
1 Rütteltisch, freie Form		$P_d = \frac{\gamma \cdot V_o \cdot t}{\beta - 1}$ (kpcm^{-2})	G_b = Gewicht des Betons γ = Raumgewicht β = Verdichtungsfaktor	G_f = Gewicht der Form G_r = Gewicht der Tischplatte G_e = Gewicht des Erreger-apparates V_o = Geschwindigkeits-amplitude
2 Rütteltisch, feste Form		$P_d = 1{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{\gamma \cdot n \cdot V_o^2 \cdot t}{\beta - 1}$ (kpcm^{-2})		n = Schwingungszahl je Minute
3 Nadelrüttler		$P_d = \frac{C_o \cdot V_o \cdot t \cdot \beta}{V_l (\beta - 1)} \sin \varepsilon$ (kpcm^{-2})	V_l = loses Betonvolumen	ε = Phasenwinkel
4 Schalungsrüttler		$P_d = \frac{C_o \cdot V_o \cdot t}{V_d (\beta - 1)} \sin \varepsilon$ (kpcm^{-2})	V_d = dichtes Betonvolumen	C_o = Zentrifugalkraft
5 Oberflächenrüttler		$P_d = 6{,}97 \cdot 10^{-6} \frac{G_g \cdot n \cdot V_o^2 \cdot t}{V_d (\beta - 1)}$ (kpcm^{-2})		G_g = Gesamtgewicht der Konstruktion

Bild 1

Die Grundlage jeder Betonentwurfstheorie ist die Festigkeitsvorschätzungsformel. Infolge ihrer Übersichtlichkeit ist es zweckmäßig, als Ausganggrundlage die Formel nach Bolomey—Palotás von den mehreren vorhandenen Formeln auszuwählen [4], [5], [6]:

$$K_{28} = A\left(\frac{z}{w} - B\right), \tag{1}$$

wo:

K_{28} = die an Probewürfeln von 20 cm Kantenlänge im Alter von 28 Tagen ermittelte Druckfestigkeit;
z/w = den Kehrwert des Wasser—Zement-Wertes; und
A und B von der Zementgüte abhängige Konstanten bedeuten.

Für unsere einheimischen Zemente gilt im allgemeinen

$$\left.\begin{array}{l} 100 \leqq A \leqq 300 \\ 0{,}5 \leqq B \leqq 0{,}8 \end{array}\right\}, \tag{2}$$

und für die Kiesbetone

$$\left.\begin{array}{l} 140 \leqq K \leqq 800 \\ 0{,}3 \leqq \dfrac{w}{z} \leqq 1 \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Ohne sich mit den weiteren Einzelheiten des Betonentwurfes zu befassen, kann man feststellen, daß die Formel (1) nur innerhalb des »Auslegungsbereiches« von (1), (2) und (3) als funktioneller Zusammenhang betrachtet werden kann. Auch überdies werden die diskreten Punkte der unabhängigen Variable w/z durch die Praxis bevorzugt.

Durch die Behauptung, daß aufgrund der Formel (1) die Proportionszahlen der Zusammensetzung zur Erreichung der im voraus angegebenen Gütemeßzahlen auf logisch begründete Weise gerechnet werden können, wird *im Prinzip* die Frage der Untersuchung der *Identitätskriterien*, sowohl im Zusammenhang mit den Betonkomponenten, als auch mit deren Resultierenden aufgeworfen. Konzentriert man die Aufmerksamkeit von den zahlreichen, in der Grundformel (1) implizite enthaltenen und das Endresultat beeinflussenden Parametern, nur

— auf die spezifische fiktive Oberfläche des Zuschlagstoffes;
— auf die Eigenfestigkeit des Zements; und
— auf die Wassermenge,

so können deren Meßzahlen nur durch das statistische Aufschreiben in betreffender Reihenfolge als korrekt gegeben betrachtet werden:

$$\begin{aligned} F &= F_0 \pm s_0, \\ Z &= Z_e \pm s_e, \\ W &= W_w \pm s_w. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Bezeichnung s bedeutet hier mit ihrem Index die Streuung des betreffenden Parameters, die Zuverlässigkeitsgrade angebenden Multiplikationkoeffizienten inbegriffen. Versteht man unter der Genauigkeit des Aufschreibens eine derartige Annäherung der Wirklichkeit, wo sich die Abweichung zwischen den tatsächlichen und aufgeschriebenen Werten dem Nullwert nähert, so ist das nur durch die Einbeziehung in die Berechnungen der zahlreichen Parameter samt den Streuungen möglich. Es kann nachgewiesen werden, daß eine derartige Beschreibung [7] für die Praxis unbrauchbar ist und zu sehr komplizierten mathematischen Abhängigkeiten führt. So muß man sich in der Betontechnik mit begrenzten Genauigkeiten begnügen. Die Anforderung hinsichtlich der *Identität* können nur auf diese Weise als erfüllbar betrachtet und gültige Meßzahlen im voraus berechnet werden. Deshalb muß die Betonfestigkeit derart definiert werden, daß diese *ein statistischer Durchschnittswert ist, den man von den Zerstörungsuntersuchungen der unter reproduzierbaren Umständen hergestellten normgerechten Probekörper erhält.*

2. Der dynamische Druck als funktioneller Zusammenhang und als Meßzahl

Schneidet man aus einer in einen beliebigen Schalungsraum hineingeschütteten Frischbetonmenge ein auf Bild 2 dargestelltes Raumelement derart aus, daß H_l die ganze Höhe des im Schalungsraum befindlichen losen Betons bedeutet, so kann der *Verdichtungskoeffizient*

$$\beta = \frac{H_l}{H_d} \geqq 1 \tag{5}$$

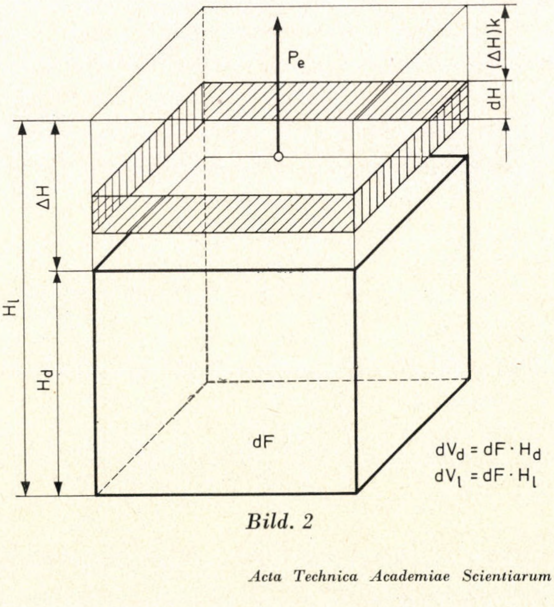


Bild. 2

definiert werden. Es ist nachweisbar, daß nach der Interpretation des Begriffes des losen Volumens für gleiche Betone die Höhe H_l ein von ihrem Absolutwert unabhängiger, konstanter Wert is [2]. Auch das kann man nachweisen, daß die Annahme einer geebneten Oberfläche des Raumelementes [2] die allgemeine Gültigkeit der gezogenen Folgerungen nicht einengt.

Hier muß betont werden, daß der Verdichtungskoeffizient nach (5) nicht mit dem RILEMschen Verdichtungskoeffizienten identisch ist [8]. Dieser letztere ist nämlich weniger zur Beschreibung der effektiven Zustandsänderungen geeignet als der nach (5).

Der zum dichten Betonvolumen gehörige Wert H_d ist ein Grenzwert, denn er kann nicht unterhalb eines von der Zusammensetzung des Betons abhängigen Mindestwertes vermindert werden, vorausgesetzt, daß zur Verdichtung nur in der Praxis anwendbare Geräte benutzt werden. H_d determiniert das dichteste Volumen, den minimalen Hohlraumgehalt, die stabile Kornstruktur und die maximale Festigkeit.

Während der Zustandsänderung, die infolge der Verdichtung eintrifft, muß die Resultierende P_e der inneren Widerstandskräfte überwunden werden, um den mit H_d charakterisierten Zustand zu erreichen. Der Innenwiderstand (= die Innenreibung) des Frischbetons ist von der Zusammensetzung abhängig, deshalb gilt die Gleichung

$$(P_e)_1 = P_e\left(D_m;\ \frac{w}{z}\right), \tag{6}$$

wenn man die Körnung und deren sämtliche Wirkungen mit der Bezeichnung D_m des Größtkorns und jeden Effekt des Zements und Wassers vereinfacht mit w/z symbolisiert. Infolge der schon behandelten Ursachen ist auch *P_e ein statistischer Materialbeiwert*. Jedoch ändert sich P_e im Laufe der Verdichtung auch mit der Zeit, denn eine Verminderung des Hohlrauminhalts nach einem derartigen Gesetz, wobei P_e eine Konstante bleiben könnte, kann nicht erreicht werden. Wenn N_1 die *Leistung* (die hier und im folgenden absichtlich nicht nach den maschinellen Komponenten zerlegt wird) des die Volumenverminderung des Betons hervorrufenden Verdichtungsgerätes ist, dann wird die Setzung der Oberfläche des losen Betons durch P_e und N_1 zusammen bestimmt. Jedoch wird P_e in diesem Zusammenhang bereits auch von N_1 abhängen, d. h.

$$(P_e)_2 = P_e\left(D_m;\ \frac{w}{z};\ N_1\right). \tag{7}$$

Da aber N_1 auch von den Parametern des Verdichtungsgerätes und der erregten Schwingungen abhängt, ist es *innerhalb eines untersuchten Prozesses notwendigerweise konstant*. Sinkt die Oberfläche des losen Betons um einen Wert von dH (Bild 2), so wird die innere Arbeit P_e dem Produkt

$$P_e \cdot dH$$

proportional. Infolge der Gleichwertigkeit der Innen- und Außenarbeit gilt die Gleichung

$$P_e \cdot dH = N_1 \cdot dt. \tag{8}$$

Zeichnet man das Weg – Zeit-Diagramm der Setzung der Betonoberfläche auf, so erhält man die Verhältnisse auf Bild 3. Diesen Diagrammen sind einige, durch Versuche bestätigte [9] grundsätzliche Eigenschaften im Ablauf der Weg – Zeit-Kurven zu entnehmen. Diese sind:

2.1 Begrenzt man die Änderung der Betonzusammensetzung nur auf die Änderung der Wassermenge nach

$$\left(\frac{w}{z}\right)_{\min} \leqq \frac{w}{z} \leqq \left(\frac{w}{z}\right)_{\max},$$

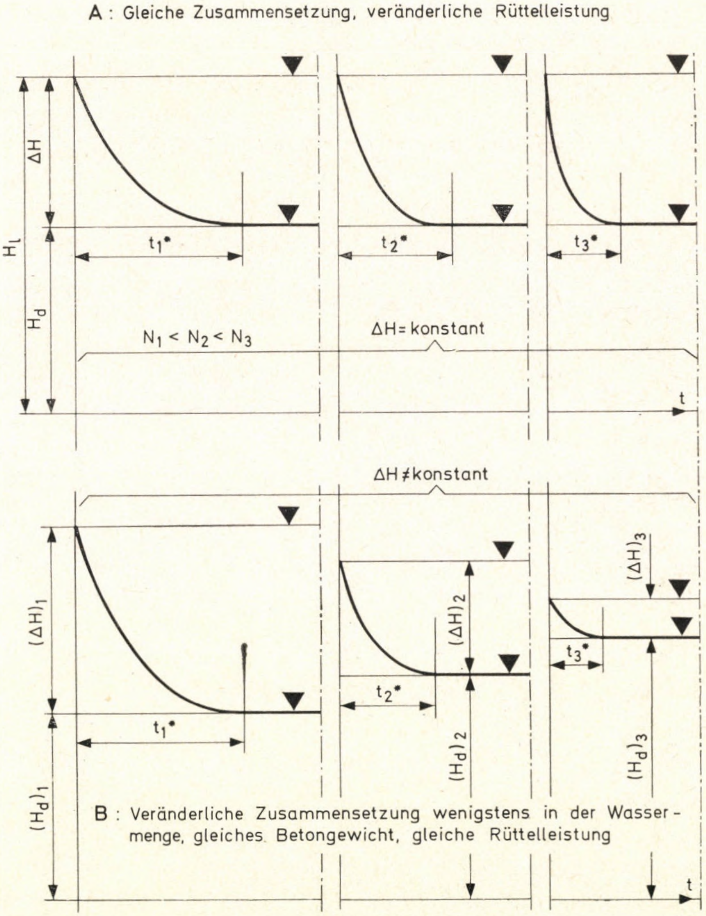


Bild 3

so gilt der Satz, daß mit der Zunahme des Wasserzementwertes bei Betongemengen von gleichem Gewicht H_e zu- und H_d abnimmt.

Diese Tatsache kann auch für Betone von gleicher Zusammensetzung, jedoch auch mit veränderlichem Zementgehalt und dementsprechend mit veränderlichem Wassergehalt verallgemeinert werden.

2.2 Als Folge der obigen Feststellung kann man behaupten, daß es einen Zustand gibt, wo

$$\beta = 1; \quad H_l = H_d$$

sich gemäß der Zusammensetzung des Betons ändert und bei einem als obere Grenze zu betrachtenden Wert von w/z zutrifft. Dabei ist der Beton raumständig und eine Volumenänderung tritt nur infolge der im Abschnitt 1.3 behandelten Einarbeitung auf.

In diesem Zustand *verliert die Äquivalenz nach* (8) *ihre Gültigkeit*. Der Wasserzementwert hat auch einen unteren Grenzwert, unterhalb dessen der Beton wirtschaftlich nicht weiter verdichtet werden kann.

2.3 Der zur Erzielung der mit H_d gekennzeichneten verdichteten Struktur erforderliche Zeitpunkt t^* hat eine bevorzugte Rolle, u. zw. erstens, weil wenn N_1 = konstant ist, dieser für dieselben Betone als Materialkonstante betrachtet werden kann. Es ist weiters auch darum ein bevorzugter Zeitpunkt, weil t^* und H_d ein zusammengehörendes Wertepaar sind. Am Ende des Zeitpunktes t^* kann die mit σ_0 bezeichnete maximale Festigkeit des Betons nicht notwendigerweise erreicht werden. Die die optimale Betonfestigkeit sichernde räumliche Struktur kann in den in der Praxis vorkommenden Fällen nur im Laufe einer Zeitdauer von

$$t = t^* + x \cdot t^* = t^*(1 + x)$$

sich entwickeln. D. h., im allgemeinen gilt zwar, daß

$$t \geqq t^* \tag{9}$$

ist, jedoch kann t im Prinzip keine *weitere Volumenverminderung zugeordnet werden*.

Aufgrund der Verhältnisse nach Bild 3 und des Besagten kann man unmittelbar einsehen, daß die exakte mathematische Beschreibung außerordentlich schwierig ist.

Betrachtet man P_e vorläufig als eine Konstante, so folgt aus (8), daß

$$P_e \cdot \Delta H = N_1 t^*. \tag{10}$$

Jedoch, nach Formel (6) und Bild 2 gilt, daß

$$\Delta H = H_l - H_d = H_d\beta - H_d = H_d(\beta - 1). \tag{10a}$$

Deshalb ist eine andere Form der Formel (10):

$$P_e = \frac{N_1 \cdot t^*}{H_d (\beta - 1)} . \tag{11}$$

Dem bisher Gesagten entsprechend kann man aus der Formel (11) erkennen, daß infolge der Zusammensetzung des Betons und der Benutzung von denselben Verdichtungsgeräten N_1, t^*, H_d und β als Konstanten zu betrachten sind. Von denen sind t^* und H_d zu einem Endzustand gehörige Werte und deshalb ist ersichtlich, daß die Formel (11) ein sich auf den Endzustand beziehender funktioneller Zusammenhang ist. Jedoch, infolge seiner Eindeutigkeit, ist man vom formellen Zwang, P_e als Variable zu betrachten, entbunden.

Ermittelt man aus Formel (11) für einen beliebigen Zeitpunkt

$$t' < t^*$$

die Oberflächenabsenkung

$$(\Delta H)_t' = \frac{N_1 \cdot t'}{P_e} = \frac{N_1 \cdot t'}{P_e \left(D_m ; \frac{w}{z} ; N_1 \right)} , \tag{12}$$

so ist der nicht konstante Wert von P_e determinierend. Aufgrund von (7) kann man feststellen, daß deren Funktionbeschreibung außerordentlich kompliziert und in der Praxis unanwendbar ist, wie auch, *daß nach dem Beweis der Formel (11) ein derart komplizierter funktioneller Zusammenhang nicht erforderlich ist.*

Der Charakter von P_e in Formel (11), wonach dieser Wert bloß von Größen abhängt, die alle als Konstante gelten, ermöglicht eine Beziehung auf eine beliebige und ganze Schalungsoberfläche:

$$F = \int dF. \tag{12a}$$

Hier ist F die auf die Verarbeitungsrichtung senkrechte (d. h. waagerechte) Fläche. Also

$$p_d = \frac{P_e}{F} = \frac{N_1 \cdot t^*}{V_d (\beta - 1)} \qquad \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \text{Druck} \right],$$

bzw.

$$p_d = \frac{N_1 \cdot t^*}{V_d (\beta - 1)} \ \text{kpcm}^{-2} . \tag{13}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit den auf Bild 1 zusammengestellten dynamischen Druckformeln, so ist leicht zu erkennen, daß die strukturelle und Inhaltsidentität bewiesen ist. Danach kann man schon sehr einfach beweisen

[2], daß die Formel (13), trotz ihrer Druckdimension, die spezifische Verdichtungsarbeit mißt. Da die Formel (13) auch einen Endzustand beschreibt, kann man aussagen, daß es überflüssig ist, eine die Volumenverminderung auch in einem beliebigen Zeitpunkt genau beschreibende Funktion zu suchen.

Aus dem Vergleich der Gleichung (13) mit den Formeln des Bildes 1 gehen auch die Unterschiede hervor: hier kommt N_1 schon mit den entwickelten Komponenten vor, andererseits wird t^* durch jene Zeitdauer abgelöst, die σ_0 zugeordnet werden kann. Durch das Einsetzen der Zeitdauer, die man der maximalen Festigkeit des Betons zuordnen kann, in die Formel erhält man

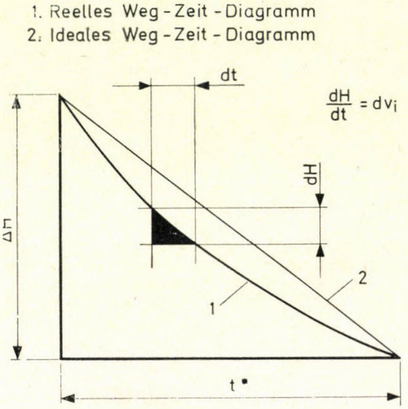


Bild. 4

nämlich einen solchen Wert von p_d, der als Meßzahl proportional zur notwendigen und hinreichenden Verdichtungsarbeit ist.

Nun wollen wir aus Bild 3 einen beliebigen Fall herausgreifen und dem Bild 4 entsprechend den für die vorliegende Abhandlung wichtigen Teil hervorheben. Im Zusammenhang mit der Formel (11) kann man sich auch durch unmittelbare Betrachtung Gewißheit darüber verschaffen, daß das effektive Weg—Zeit-Diagramm durch das aufgrund von unmittelbaren (d. h. immer meßbaren) Angaben aufgezeichnete Lineardiagramm ersetzt werden kann. Hierbei wird die ideale Geschwindigkeit der Oberflächenabsenkung

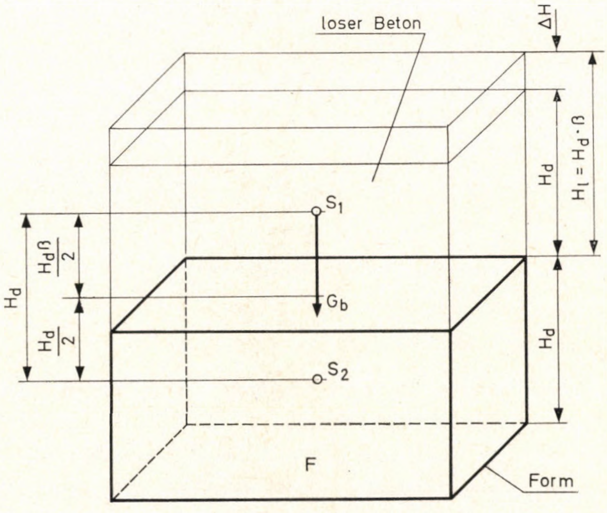
$$v_i = \frac{\Delta H}{t^*} = \frac{H_d(\beta - 1)}{t^*} \tag{14}$$

und diese Geschwindigkeit ist in einem beliebigen Zeitpunkt *immer niedriger* als die tatsachliche Absetzungsgeschwindigkeit der Oberfläche.

3. Verdichtung des bewehrten Betons und deren Arbeitsbedarf

Aufgrund der Bilder 1 und 5 wird man zur weiteren Behandlung von den folgenden Prinzipien ausgehen:

3.1 Zwischen den Einfüllungen der Schalungsräume von unbewehrten und bewehrten Betonen gibt es prinzipielle und praktische Unterschiede. Die



$F . \Delta H = \Delta V = V_d\,(\beta - 1) =$ „verschwindendes" Volumen

$F . H_d = V_d =$ dichtes Volumen

$F . H_l = V_l =$ loses Volumen

$$G_b = V_d \cdot \gamma = \frac{V_l}{\beta} \cdot \gamma$$

Bild. 5

Einfüllung des losen Betons eines unbewehrten Betonobjektes findet ungehindert statt, dagegen ist dieselbe im Falle von Stahlbetonkonstruktionen eine Funktion des Bewehrungsnetzes.

3.2 Demzufolge ist die Verdichtung und Einarbeitung eines nichtbewehrten Betonobjekts gleichwertig mit der Volumenverminderung $\Delta V = F \cdot \Delta H$. Da diese auch mit der Einarbeitung gleichwertig ist, kann der Zahlenwert von p_d auch selbst jede spezifische Arbeitsmenge messen.

3.3 Im Falle eines bewehrten Betonelementes (Fertigteiles) befindet sich *ein beträchtlicher Anteil* des losen Betons nach der Einfüllung nicht im Schalungsraum, sondern verbleibt infolge der Sperrwirkung der Bewehrung über dem Schalungsraum. So kann die auf die Volumenverminderung ΔV verwendete Arbeitsmenge auch für die Einarbeitung, d. h. für das Hineinzwingen des

Betons in den Schalungsraum nicht hinreichen, es wird also eine Mehrarbeit erforderlich. Man kann beweisen [2], daß die vielen Einfüllungsarten auf den auf Bild 5 dargestellten Fall zurückgeführt werden können, bei dem ein großer Anteil des losen Betons über dem Schalungsraum verbleibt.

3.4 Der Arbeitsbedarf der Verdichtung und jener der Verarbeitung können durch Addition superponiert werden.

Aufgrund des Bildes 5 soll angenommen werden, daß das *ganze Betongemenge* auf der Bewehrung hängenbleibt. So wird seine Lage durch die Höhe des Schwerpunktes S_1 über der endgültigen Schwerpunktlage S_2 durch

$$\overline{S_1 S_2} = \frac{\beta H_d}{2} + \frac{H_d}{2} = H_d \frac{\beta + 1}{2} \tag{15}$$

bestimmt. In der Höhe des Schwerpunktes S_1 beträgt die Potentialenergie des Betongewichtes G_B

$$E_p^* = G_B H_d \frac{\beta + 1}{2} . \tag{16}$$

Diese Potentialenergie wird durch den Anteil N_2 der Gesamtleistung des Verdichtungsgerätes in effektive Arbeit umgewandelt, die laut des Gesagten auf N_1 superponiert wird.

Die Voraussetzung, daß der Widerstand der Bewehrung gegen die Verarbeitung des Betons innerhalb der proportional zu der freien (= ganzen) Schalungsfläche F verursachten Verringerung ist, liegt auf der Hand. Bezeichnet man die Summe der gesamten horizontalen Projektion der Bewehrung mit F_v, so wird die der freien Fläche proportionale Widerstandszunahme durch den *Widerstandskoeffizienten*

$$\xi = \frac{F}{F - F_v} = \frac{1}{1 - (F_v/F)} \tag{17}$$

gemessen. Es ist zu erkennen, daß wenn man mit den extremen Grenzwerten $F_v = 0$ und $F_v = F$ rechnet,

$$1 \leqq \xi \leqq \infty \tag{18}$$

wird.

Da infolge der immer realen Abmessungen des Betonelementes F_v/F immer eine konkrete Zahl ist, ist auch die mögliche obere Grenze von ξ in der Praxis nicht so unbestimmt, wie man es aufgrund der Formel (18) annehmen würde.

Hier ist es zweckmäßig, den proportional ξ erhöhten Widerstand derart aufzufassen, daß der Schwerpunkt S_1 auf das durch den Widerstandskoeffizienten *erhöhte* Potentialniveau gelangt, d. h.

$$\Delta S = \overline{S_1' S_2} = H_d \frac{\xi(\beta + 1)}{2} . \tag{19}$$

Die derart erhöhte, maßgebende Potentialenergie des Betongewichtes G_B wird mit der Arbeit gleichwertig, die durch N_2 ausgeübt wird. So wird der Arbeitsbedarf der Einarbeitung

$$L_B = G_B \cdot H_d \frac{\xi(\beta + 1)}{2} \tag{20}$$

bzw., da $G_B = \gamma V_d$ ist, erhält man:

$$L_B = \gamma \cdot V_d H_d \frac{\xi(\beta + 1)}{2} . \tag{21}$$

So wird der gemeinsame Arbeitsbedarf der Verdichtung und Verarbeitung

$$L_d + L_B = V_d \left[(\beta - 1) p_d + \gamma H_d \frac{\xi(\beta + 1)}{2} \right] . \tag{22}$$

Die dritte Komponente N_3 der Gesamtleistung N des Verdichtungsgerätes wird zur Bewegung der vom Gesichtspunkt des Prozesses passiven Gewichte benötigt. Der Weg der Arbeit in dieser Hinsicht ist die totale Ausschwingung (d. h. das Zweifache der Amplitude). Bedeutet G_p das Gewicht der passiven Massen, so erhält man

$$L_p = G_p \cdot 2A_0, \tag{23}$$

der Gesamtarbeitsbedarf wird also

$$L_g = L_d + L_B + L_p, \tag{24}$$

und die Gesamtleistung

$$N = N_1 + N_2 + N_3. \tag{25}$$

Demnach wird die notwendige Zeit der gesamten Verdichtung als Quotient der Zusammenhänge (24) und (25)

$$t_d = \frac{L_g}{N} = \frac{1}{N} \left\{ V_d \left[(\beta - 1) \cdot p_d + \gamma \cdot H_d \frac{\xi(\beta + 1)}{2} \right] + G_p \cdot 2A_0 \right\} . \tag{26}$$

Aufgrund der Analyse von Formel (26) kann man folgendes feststellen:

3.5 Wenn $\beta = 1$, $L_d = 0$, dann ist eine effektive Verdichtung nicht möglich, deshalb wird $L_g = L_B + L_p$.

3.6 Wenn der Betongegenstand unbewehrt ist, so wird $L_q = L_d + L_p$.

3.7 Läuft das Verdichtungsgerät leer, so ist $L_d = 0$, $L_B = 0$ und $L_q = L_p$.

3.8 Wie auch bereits vorher betont wurde, sollte es auch im folgenden betont werden: die einzelnen Größen sind in den Formeln mit ihren *maßgebenden Werten* enthalten. Aus der Formel (26) ist zu erkennen, daß auch diese sich auch auf den Endzustand bezieht. Aus den bisherigen Erörterungen ging hervor, daß im vorliegenden Falle keine komplizierte Funktion erforderlich ist, die den in der Zeit untrennbaren Ablauf der Verdichtung und der Einarbeitung für jeden Zeitpunkt gültig beschreibt. Da die Zahlenreihe V_d, H_d, β, γ, ξ, p_d im Falle eines konkreten Betongegenstandes und einer konkreten Betonzusammensetzung konstant ist, ist ersichtlich, daß zwischen t_d und N eine unbestimmte Beziehung besteht, u. zw. im Sinne, daß die *beliebige* Auswahl der einen Größe die andere bestimmt. Eine willkürliche Wahl beider Größen hat jedoch ihre praktischen Grenzen.

Hier kann weiter erklärt werden, wie die einzelnen Betonparameter die Genauigkeit der erhaltenen Ergebnisse beeinflussen. Es kann bewiesen werden [9], daß im Falle einer gleichen Kornverteilung des Zuschlagstoffes und gleichen Zementzugabe, sowohl der Verdichtungskoeffizient, als auch das Raumgewicht des Frischbetons als lineare Funktionen folgender Struktur aufgeschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \beta &= k_1 - k_2 \left(\frac{w}{z}\right), \\ \gamma &= k_3 - k_4 \left(\frac{w}{z}\right), \end{aligned} \tag{27}$$

worin k_1, k_2, ... Konstanten sind.

Gleichzeitig gilt für die normalen Kiesbetone, daß

$$\begin{aligned} 1{,}4 &\geqq \beta \geqq 1 \\ 2{,}5 \cdot 10^{-3} &\geqq \gamma\ [\mathrm{kpcm}^{-3}] \geqq 2{,}1 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \tag{28}$$

Da der bereits vorangehend häufig vorkommende Ausdruck $(\beta - 1)$ aufgrund von (28) in einem Bereich von

$$4 \cdot 10^{-1} \geqq (\beta - 1) \geqq 0 \tag{29}$$

schwanken kann, ist ersichtlich, daß der Änderungsbereich beider Größen verhältnismäßig eng ist. Deshalb ist es als besonders wichtig zu betrachten, daß ihre Werte für einen großen Kreis von praktischen Betonarten genau bekannt werden (bei deren Anwendung der Fehler möglicherweise innerhalb des Bereichs $\pm s$ bleiben sollte) und diese Werte für den Betonentwurf in ähnlicher weise aufgestellten Funktionen wie unter (27) zusammengefaßt werden müssen. Es muß als eine eigenartige Erscheinung erachtet werden, daß im Verlauf der zxr Theorie des Betonentwurfes als Grundlage dienenden Untersuchungen von zahlreichen Probekörpern und Betonkategorien die beiden erwähnten Parameter nicht ausführlich geprüft und gemessen wurden. Um so merkwürdiger ist dies, da sowohl β als auch γ an für irgendwelche Zwecke bestimmten Probekörpern einfach gemessen werden können.

Wegen der statistischen Gültigkeit der betontechnischen Zusammenhänge und des verhältnismäßig engen Änderungsbereiches von β und γ, kann jedoch die Rolle dieser beiden Parameter nicht unterschätzt werden, weil ohne sie der Themenkreis der Betonverdichtung nicht behandelt werden kann.

Deshalb soll auch der Widerstandsfaktor ξ ausführlich behandelt werden, dessen Funktionsbild aufgrund der Formel (17) auf *Bild* 6 dargestellt ist. Es kann die Frage auftauchen: in welchem Maße die Hypothese als begründet zu betrachten ist, daß die Zunahme des Potentialniveaus des Schwerpunktes S_1 von der auf dem Bewehrungsnetz hängengebliebenen Betonmenge als eine lineare Funktion des Widerstandkoeffizienten ξ angenommen werden kann.

Vorausgeschickt, daß solche Werteskalen des Widerstandsfaktors, die sich der Wirklichkeit gut nähern, nur durch Versuche ermittelt werden können, kann man folgendes feststellen:

Unter der Voraussetzung, daß die ganze Betonmenge auf der Bewehrung hängen bleibt, wurde im Vergleich der Wirklichkeit eine vergrößerte Sicherheit in Absicht genommen, insbesondere im Falle, wenn der Betongegenstand nicht zu dicht bewehrt ist. Nimmt man in Betracht, daß schon eine geringfügige Vermehrung des Anmachwassers zu einer starken Verminderung der Innenreibung führt, so kann die nach dem Vorstehenden verstandene Linearität als *erste Annäherung* angenommen werden. Dazu soll man noch ergänzend bemer-

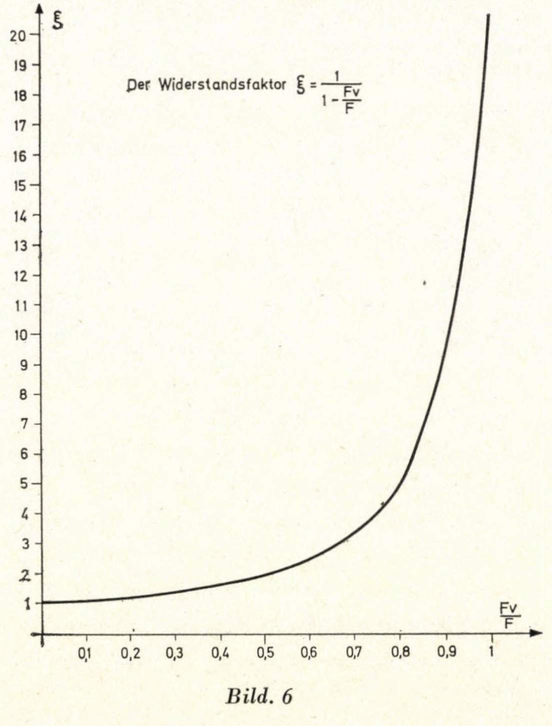


Bild. 6

ken, daß wenn in F_ν außer der horizontalen Projektionssumme der tatsächlichen Bewehrung auch alle Verengungseffekte des Schalungs- oder Formenraumes inbegriffen sind, die Sicherheit noch größer wird.

Da ξ eine von der Zusammensetzung des Betons unabhängige Verhältniszahl ist, kann sie einfach gemessen werden. Auf einem Labor-Rütteltisch mit entsprechender Tischfläche und konstanten Parametern (der als Standardrütteltisch betrachtet wird) soll man einen Probewürfel herstellen. Dann läßt man die offene Fläche der Würfelform nach und nach auf die Werte $F_\nu/F = 9 \cdot 10^{-1}, 8 \cdot 10^{-1}, \ldots$ verengen und mißt die Dauer der Durchdringung des Frischbetons gleicher Zusammensetzung. Aus den erhaltenen Meßergebnissen kann einfach entschieden werden, ob die den Widerstand beschreibende Funktion der Formel (17) entspricht, oder ein anderer Zusammenhang gesucht werden muß. Variiert man danach die Betonzusammensetzung nur durch eine systematische Änderung der Anmachwassermenge, so können die Widerstände der Betone von abweichender Konsistenz in Abhängigkeit von gleichen F_ν/F Verhältniszahlen ermittelt werden. Die Durchführung des Versuchs ist um so einfacher, weil man dazu keinen tatsächlichen Würfel und nur sehr wenig Beton benötigt.

4. Die Rolle des begrenzten Raumes

Die allgemein gültigen Formeln (13), (22) und (26) könnten in exakter Weise nur dann als korrekt bezeichnet werden, wenn sie aufgrund der Annahme des begrenzten Raumes abgeleitet würden. Da in den Rechnungen immer ein unendlicher Raum angenommen wurde, muß die Größenordnung des Fehlers, der sich aus dieser Voraussetzung ergibt, durch eine ausführliche Untersuchung der Rolle des endlichen Raumes ermittelt werden.

In Zusammenhang mit den Bildern 2 und 5, die in den vorangehenden Erwägungen als Grundlagen benutzt wurden, wurde vorausgesetzt, daß der Rauminhalt des losen Betons *in zwei horizontalen Richtungen* unendlich ist. Damit setzt man einfach voraus, daß die freie Oberfläche des losen Betons frei von irgendwelchen Umgebungshindernissen *parallel zu sich selbst absinkt*.

Im Gegensatz zur obigen Vereinfachungsannahme ist das Betonvolumen in der Tat *immer* begrenzt: es ist durch die Seitenwände der Schalung oder der Fertigungsform, weiter durch die an der Grenze des Wirkungsbereichs des Verdichtungsgerätes befindliche und sich weiter nicht verdichtende Betonschichte begrenzt. Bei der theoretischen Untersuchung steht man einer *Wandwirkung* gegenüber, die in der Nähe der Wand die zu sich selbst parallele Absinkung der horizontalen Betonfläche verhindert.

Es muß hier betont werden, daß aus der Fachliteratur der Betontechnik — hauptsächlich infolge der Tätigkeit von FAURY — der Begriff des *Wand-*

effekts bekannt ist [10], [11]. Nach Faurys Interpretation kann man den Wandeffekt folgenderweise beschreiben. Im endlichen Raum ändert sich die Zusammensetzung der Kornverteilung des losen Betons, in der Wandnähe erhöht sich der prozentuelle Anteil der größeren Zuschlagstoffkörner. Mit anderen Worten: im begrenzten Raum (unter dem Begriff der Wand versteht man hier in einem weiteren Sinne auch den unmittelbaren Effekt der Bewehrungsstruktur) wird der Beton magerer in Mörtel, als entworfen war. Dieser Fehler sollte im Laufe des Betonentwurfes durch die Erhöhung des Prozentsatzes der feineren Körner korrigiert werden. Es ist ersichtlich, daß der Faurysche Wandeffekt bloß eine Korrektion der Kornzusammensetzung erfordert, die von dem Verdichtungsvorgang unabhängig ist. Vom Gesichtspunkt der Verdichtung hat der

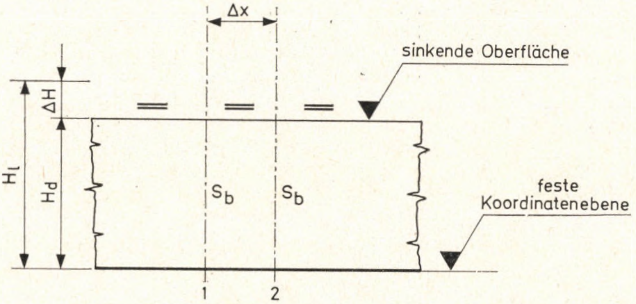


Bild. 7

Beton von korrigierter Zusammensetzung andere β-, γ- und $p \rightarrow p_d$-Werte im Vergleich mit demselben der originalen Zusammensetzung und die auf den unendlichen Raum bezügliche Annahme ist unbeschränkt. Im Laufe der tatsächlichen Verdichtung und Verarbeitung des Betons entsteht ein Wandeffekt von abweichendem Charakter, wie es aus dem Folgenden hervorgeht.

Die parallele Oberflächensenkung kann aufgrund des Bildes 7 auch so erklärt werden, daß für die Resultierende der Reibungskräfte, die entlang den voneinander in einem Abstand von Δx befindlichen 1 und 2 imaginären Schnittebenen angreifen,

$$S_1 = S_2, \tag{30}$$

d. h., keine physische Ursache besteht, die die parallele Senkung verhindern würde. Seien S_f, bzw. S_b die in einer imaginären Schnittebene neben der Wand bzw. im Beton wirkenden Reibungskräfte, dann gilt im allgemeinen:

$$S_f \lesseqqgtr S_b\,. \tag{31}$$

Diesen drei Möglichkeiten entsprechend kann sich die Betonfläche nach Bild 8 ausbilden. In der vorliegenden Abhandlung ist von den im Bild 8 dargestellten drei Möglichkeiten nur der Fall A interessant, u. zw. als eine solche, die Mehrenergie erfordert. Der Fall *B* ist nämlich der schon behandelte Fall des unbegrenzten Raumes; der Fall *C*, der keine Mehrenergie erfordert, kommt nicht in Betracht.

Schon durch Besichtigung kann bewiesen werden, daß (in erster Annäherung) der Charakter der Reibung zwischen der Wand und dem Beton sowie die Meßzahl des Reibungsfaktors indifferent sind. Infolge der Rüttelungsverdichtung verwandelt sich der Beton *allmählich* in eine schwere Flüssigkeit, u. zw. sowohl von der Zeit, als vom Wasserzementwert, wie auch von der Kornstruktur und Körnerform abhängig. Deshalb verwandelt sich auch stufenweise die Coulombsche Reibung in die Flüssigkeitsreibung. Es gibt Betone

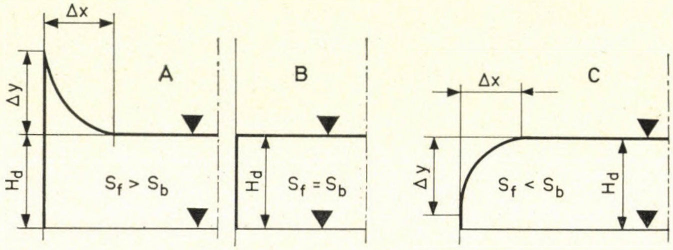


Bild. 8

mit niedrigeren Wasserzementwerten, die während des ganzen Verdichtungsprozesses kaum als Flüssigkeit betrachtet werden können. Demzufolge ist die Annahme einer reinen Flüssigkeitsreibung nur über einer versuchsmäßig ermittelten Größe des Wasserzementwertes begründet.

Stellen wir Probewürfel von 20 · 20 cm auf einem Standardrütteltisch her und nehmen wir an, daß die freie Betonfläche sich dem Fall *A* des Bildes 7 entsprechend ausbildet. In diesem Fall kann ein loses Mehrvolumen

$$(V_l)_m = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} \cdot 8 \cdot 10 = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} K_k \tag{32}$$

die Wände der Würfelform entlang im Vergleich mit der im unbegrenzten Raum stattfindenden Verdichtung nur durch *Mehrarbeitsaufwand* in den, im übrigen schon dichten Betonstoff »hineingepreßt« werden.

In Formel (32) ist K_k der (in der horizontalen Ebene gemessene) maßgebende Umfang der Würfelform, und man nimmt an, daß der Querschnitt des Volumens $(V_l)_d$ als ein Dreieck betrachtet werden kann. Nun soll die zur meßbaren Volumenänderung des sich im unendlichen und endlichen Raum verdichtenden Betons erforderliche Zeitdauer mit

$$t^* \text{ bzw. } t_v^*$$

bezeichnet werden.

In diesem Fall ist zur Leistung der Mehrarbeit die Zeit

$$t_v^* > t_\infty^* , \tag{33}$$

$$t_2 = t_v^* - t_\infty^* \tag{34}$$

erforderlich. Da die Rüttelleistung konstant ist, wird die Mehrarbeit

$$L_m = N\,t_2 = N\,(t_v^* - t_\infty^*) \,. \tag{35}$$

Ließe sich das Volumen $(V_l)_m$ ungehindert verdichten, so würde der spezifische Arbeitsbedarf nach (13)

$$(p_d)_m = \frac{N\,t_2}{(V_d)_m(\beta - 1)} = \frac{\beta\,N\,t_2}{(V_l)_m\,(\beta - 1)} \tag{36}$$

infolge des Zusammenhanges

$$(V_d)_m = \frac{(V_l)_m}{\beta} \,. \tag{36a}$$

Eine andere Form der Formel (36) unter Einbeziehung des Ausdrucks (32) des losen Mehrvolumens ist

$$(p_d)_m = \frac{2N\,t_2\,\beta}{\Delta y \cdot \Delta x \cdot K_k\,(\beta - 1)} \,. \tag{37}$$

In diesem Zusammenhang soll betont werden, daß $(p_d)_m$ vom Umfang des Probekörpers abhängt. Das lose Mehrvolumen kann aber, infolge der die Wand entlang entstehenden Reibungskraft, durch eine größere spezifische Arbeit verdichtet werden als die für den unendlichen Raum gültige spezifische Arbeit p_d. Demzufolge gilt, daß

$$(p_d)_m > (p_d) : \tag{37a}$$

bzw.

$$(p_d)_m = \xi_1 \cdot p_d \,, \tag{38}$$

wo: ξ_1 den den Wandwiderstand charakterisierenden Faktor bedeutet.

Der Wert dieses Widerstandsfaktors hängt von der Flächengröße und Art der Wand sowie von der Zusammensetzung des Betons ab. Innerhalb der Betonzusammensetzung hängt er auch noch von der Maßzahl der Konsistenz bzw. vom Werte des Wasserzementwertes ab.

Nimmt man an, daß bei gleichen Wandarten und spezifischen Verhältnissen

$$[S_f]_{\text{Würfelform}} = [S_f]_{\text{Betonelementenform}}$$

ist, so gilt unter Berücksichtigung von (37) und (38), daß

$$\begin{aligned} [(p_d)_m]_{\text{Würfel}} &= [(p_d)_m]_{\text{Betonelement}}, \\ (\Delta y \cdot \Delta x)_{\text{Würfel}} &= (\Delta y \cdot \Delta x)_{\text{Betonelement}} \,. \end{aligned} \tag{39}$$

Diese beiden Gleichungen können nur dann gleichzeitig gelten, wenn

$$(N \cdot t_2)_{\text{Standardrütteltisch}} = (N \cdot t_2)_{\text{Betonelement-Rütteltisch}} \tag{40}$$

ist.

Durch diese letztere Gleichung wird das Bestehen eines Proportionalitätsfaktors

$$\psi = \frac{K_{\text{Betonelement}}}{K_k} \tag{41}$$

vorausgesetzt.

Dies bedeutet, daß *unter dem Einfluß des begrenzten Raumes die absolute Mehrarbeit proportional zum maßgebenden (d. h. horizontalen) Umfang des Betonelements und des Würfels zunimmt.*

Die Praxis beweist eindeutig, daß das durch die Formel (32) bestimmte lose Mehrvolumen nur einen *vernachlässigbaren Bruchteil* des jeweiligen dichten Volumens V_d des Betonelementes ausmachen kann. Dies kann aufgrund der allgemeinen Erfahrung, daß in der Wandnähe, bei einem beliebig niedrigen, jedoch vom Gesichtspunkt der Betonfertigung reellen Wasserzementwert sich eine gewisse Menge von wasserreichem Zementmörtel ausscheidet und bei einem höheren Wasserzementwert diese Erscheinung schon am Anfang des Vorgangs eintritt. Demzufolge verwandelt sich der Fall A des Bildes 7 zum Großteil, besonders am Ende des Prozesses, in den Fall 7C.

Deshalb kann man — ohne die mühsame Messung des numerischen Wertes der Widerstände — feststellen, daß der unendliche Raum mit dem Vergrößerungsfaktor

$$1{,}05 \leqq \xi_1 \leqq 1{,}1 \tag{42}$$

mit einer großen Sicherheit berücksichtigt werden kann. Deshalb kann man die Gleichung

$$(p_d)_v = (p_d)_\infty \, \xi_1 \tag{43}$$

korrekt aufschreiben, denn auf dem Standardtisch wird $(p_d)_v$, und nicht $(p_d)_\infty$ gemessen. Dies bedeutet, daß bei der Herstellung der Würfel der aus den Meßergebnissen gerechnete Wert p_s unmittelbar dem maßgebenden dynamischen Druck gleichwertig ist.

5. Die relative Rolle der Parameter des Verdichtungsgerätes in der Rüttelungsleistung N

In obigen Erwägungen wurde durch die bewußt angewandte Methode, daß die Wechselwirkung des Verdichtungsgerätes und des Betons in den angeführten Funktionen durch die einzige Rüttelleistung N ausgedrückt wurde, in der Formel (26) der Zusammenhang zwischen den rein betontechnischen und rein maschinellen Parametern veranschaulicht.

Konkret kann man aber nur dann rechnen, wenn man die Größe N in Komponenten zerlegt.

Dabei kann eine bedeutende Vereinfachung durchgeführt werden, wenn man das erregte Schwingungssystem: Verdichtungsgerät—Beton für *einmassig* betrachten kann. Bei Kenntnis der einzelnen Betriebsarten des Bild 1 kann dies auch im als am günstigsten geltenden Fall 2 nur mit einer gewissen Idealisierung durchgeführt werden. Hier ist der exakt einmassige Charakter nur insofern unvollkommen, daß *der Beton kein starrer Körper ist.* Die Systeme in den übrigen Betriebsarten des Bildes 1 als einmassig zu betrachten, bedeutet eine starke Abweichung von der Wirklichkeit. Die Größe der Abweichung wird später ausführlich untersucht. Zur Bestimmung der Komponenten von N soll man den Fall 2 des Bildes 1 mit Hilfe des Bildes 9 modellisieren.

Die folgenden Bezeichnungen werden angewandt:

G_b = Gewicht des Betons;
G_f = Gewicht der Form;
G_r = Gewicht der Rütteltischplatte;
G_b = Gewicht des Erregergerätes;

weiters bedeutet

$$G_0 = \sum_{1}^{2n} G_{01}$$

das Gewicht der sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von ω drehenden exzentrischen Erregermasse, welche als in G_e enthalten betrachtet wird.

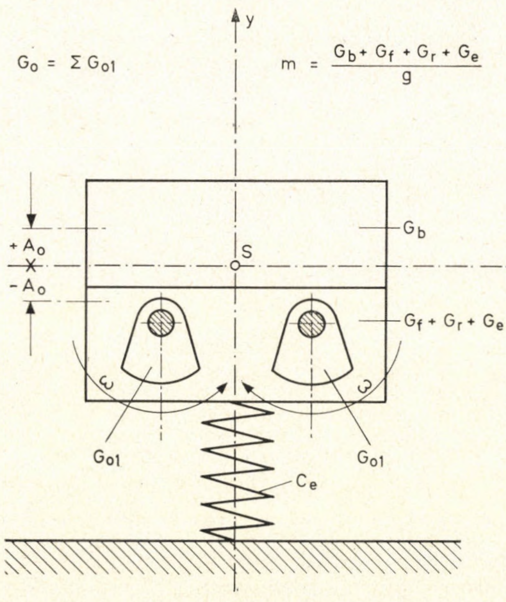


Bild. 9

In diesem Fall ist das erregende Gesamtgewicht

$$G_g = G_b + G_f + G_r + G_e \tag{44}$$

und die zu erregende Masse

$$m = \frac{G_g}{g} . \tag{45}$$

Bezeichnet man im Modell die Resultierende der Federung des Rütteltisches mit c_R, den Dämpfungskoeffizienten der Eigenschwingungen des Systems mit k und die Exzentrizität der exzentrischen Erregermasse G_0/g mit e, so wird

$$M = G_0 e \tag{46}$$

das *kinetische Moment der Erregung*. Mit diesen Bezeichnungen wird der Weg in Richtung der y-Achse des einmassigen Systems, gemessen von der ruhenden Mittellage in einem beliebigen Zeitpunkt t, als Lösung der Differentialgleichung der Bewegung [1]:

$$A = \frac{M \omega^2 g}{\frac{1}{c_R} \sqrt{\left(1 - c_R \omega \frac{G_g}{g}\right)^2 + k c_R^2 \omega^2 \frac{G_g}{g}}} \sin \left(\omega t - \arctan \frac{c_R k}{1 - \frac{G_g}{g} \omega^2} \right) . \tag{47}$$

Davon erhält man die Wegamplitude für den Fall, daß das Argument des Sinus 1 ist, d. h.

$$A_0 = \frac{M \omega^2 g}{\frac{1}{c_R} \sqrt{\left(1 - c_R \omega \frac{G_g}{g}\right)^2 + k c_R \omega^2 \frac{G_g}{g}}} . \tag{48}$$

Hierzu ist zu bemerken, daß zwar sowohl die Gleichung (47), als auch (48) exakte Funktionen sind, der Wert von k aber aufgrund des logarithmischen Dekrements nur mehr durch Annäherungsmessungen ermittelt werden kann, was von vornherein A_0 einen statistischen Charakter verleiht. Es kann weiters bewiesen werden, daß k im Vergleich zur erregenden Zentrifugalkraft

$$C_0 = \frac{M}{g} \omega^2 \tag{49}$$

im Fall von reellen Verdichtungsgeräten immer vernachlässigbar klein ist [1]. Demzufolge kann im Teil unter dem Wurzelzeichen des Nenners in (47) das zweite Glied weggelassen werden und das System als ein ungedämpftes erregtes Schwingsystem betrachtet werden. In diesem Fall gilt [2], daß

$$A_0 = \frac{M}{G_g} \tag{50}$$

und auch dieser ist ein Zahlwert von statistischem Charakter. In Zusammenhang mit den polarisierten Schwingungen kann für die Arbeit der Erregungskraft für eine Periode abgleitet werden [12], [13], daß

$$L = C_0 A \pi \sin \varepsilon \tag{51}$$

ist, worin ε der zwischen den erregenden und erregten Schwingungen auftretende Winkel ist. Da die Periodenzeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{52}$$

ist, wird deshalb die Rüttelleistung

$$N = \frac{L}{T} = \frac{C_0 A_0 \omega \sin \varepsilon}{2}, \tag{53}$$

bzw. mit der Geschwindigkeitsamplitude

$$N = \frac{C_0 v_0 \sin \varepsilon}{2}. \tag{54}$$

Nach einer anderen Gedankenfolge [12], [13] kann man beweisen, daß

$$\sin \varepsilon = \frac{2G_b''}{(G_g)_2 \pi}, \tag{55}$$

wo

$$G_b'' = \xi_2 G_b \tag{55a}$$

$$6{,}5 \cdot 10^{-1} \leqq \xi_2 \leqq 8 \cdot 10^{-1}$$

und

$$(G_g)_2 = G_g + G_p + G_f + G_b'$$

$$G_b' = \xi_3 \cdot G_b \tag{55b}$$

$$2 \cdot 10^{-1} \leqq \xi_3 \leqq 3{,}5 \cdot 10^{-1}$$

ist.

Zu den Schätzungen gilt in erster Annäherung:

$$10^\circ \leqq \varepsilon \leqq 20^\circ, \tag{56}$$

deshalb kann die Formel (26) aufgrund der Ausgangswerte für den Fall 2 des Bildes 1 berechnet werden. Ob (54) als eine allgemein exakte Funktion auf die übrigen Betriebsarten erstreckt werden kann, oder nicht, das hängt offenbar davon ab, wieweit diese als einmassige Systeme aufgefaßt werden können. Wie aus (54) ersichtlich, wird das durch die Änderung von v_0 bzw. A_0 entschieden.

Infolge der weitgehenden Ähnlichkeit soll nun von diesem Gesichtspunkt aus der Fall der auf den Rütteltisch lose aufgelegten Fertigungsform untersucht werden (Bild 1, Fall 1). Dann bewegen sich die Gewichte des Betons + der Form

$$G_b + G_f = G_1 \tag{57}$$

und des Rütteltisches + Erregers

$$G_p + G_e = G_2 \tag{58}$$

als zwei separate, sich stoßende Massen. Unter welchen Bedingungen das System einmassig betrachtet werden kann, das kann aufgrund der nachstehenden Gedankenfolge entschieden werden.

Das Schwingungsdiagramm des Rütteltisches (Bild 9) mit vertikal polarisierter Erregung ist auf Bild 10 in unbelastetem Zustand dargestellt.

Legt man auf den Rütteltisch, der das auf Bild 10 gezeigte Leerlauf-Bewegungsdiagramm ergibt, eine mit Beton gefüllte Form, so deformieren sich die harmonischen Schwingungen. Infolge der Wechselwirkung zwischen der Form und dem Rütteltisch deformiert sich auch das originale Bewegungsdiagramm des Rütteltisches und die Form folgt dem Bewegungsgesetz der in vertikaler Richtung hinaufgeworfenen starren Körper. Die den vertikalen Aufwurf auslösende Kraftwirkung erreicht die Form durch die Anstöße in den Momenten, in welchen sie mit dem Tisch in Berührung kommt. Die als harmonische Schwingung zu betrachtende Bewegung hängt davon ab, in welcher Phase der Anstoß in einer einzigen Schwingung auftritt. Die Form kann nämlich mit dem Rütteltisch in Berührung kommen:

a) im oberen Totpunkt der Rütteltisches,
b) im unteren Totpunkt des Rütteltisches,
c) am Niveau der ruhenden Mittellage des Rütteltisches,

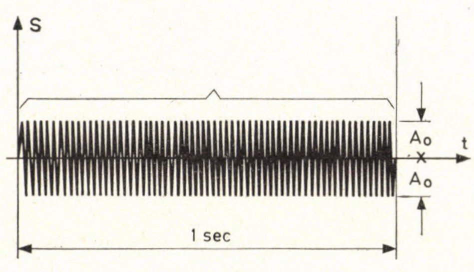


Bild. 10

d) zwischen den oberen und unteren Totpunkten wenn sich der Rütteltisch und die Form in der gleichen Richtung bewegen,

e) wenn sich zwischen den beiden Totpunkten die beiden, sich anstoßenden Körper in entgegengesetzter Richtung bewegen.

In den Fällen a) bis e) ändert sich der Impuls des Rütteltisches in jedem Augenblick, und so nimmt das Wegzeitdiagramm der Form im allgemeinen die auf Bild 11 dargestellte Form an.

Da bleibende Formänderungen auf den sich anstoßenden Körpern nur nach einer so langen Zeit bemerkbar werden, daß die Zahl der zugehörigen Schwingungen als unendlich angenommen werden kann, können die Anstöße von geradlinigem und zentralem Charakter — auf *eine einzige Schwingung* bezogen — für ***vollkommen elastisch*** angenommen werden (Restitutionskoeffizient = 1).

Aufgrund der Argumente, angeführt zur Begründung der statistischen Behandlungsmethode, kann man bei der Untersuchung der Verhältnisse des Anstoßes mit der Durchschnittsgeschwindigkeit rechnen. Diese ist [2]:

$$v_d = 6{,}41 \cdot 10^{-1} \cdot v_0. \tag{59}$$

Hier muß die Geschwindigkeitsamplitude aus dem Gesamtgewicht des unbelasteten Rütteltisches berechnet werden, d. h.

$$v_0 = A_0 \omega = \frac{M}{G_p + G_e} \omega. \tag{60}$$

Infolge des vollkommen elastischen Charakters des Anstoßes, nimmt man an, daß beim Anstoß der Rütteltisch seine ganze kinetische Energie der Form übergibt. Dies gilt jedoch nur dann, wenn man die akzessorische Wellenform der vorangehend behandelten Bewegungsdiagramme außer acht läßt. Sei die Masse des Rütteltisches

$$m_1 = \frac{G_r + G_e}{g}, \tag{60a}$$

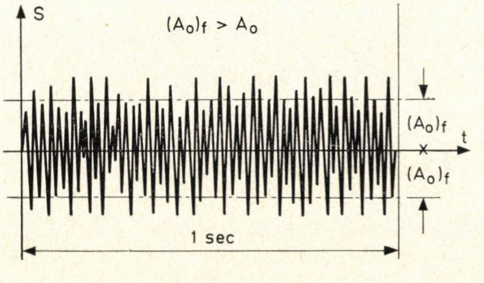


Bild. 11

so wird seine kinetische Energie

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_d^2 . \tag{60b}$$

Infolge der durch die Form übernommenen kinetischen Energie hebt sie sich auf eine Höhe h, die durch die Gleichung

$$\frac{1}{2} m_1 v_d^2 = m_2 g h \tag{61}$$

bestimmt wird, wo

$$m_2 = \frac{G_b + G_f}{g} , \tag{61a}$$

die Maße der gefüllten und sich frei bewegenden Form bedeutet. Weiters ist

$$h = 2(A_0)_f \tag{61b}$$

die durchschnittliche ganze *Ausschwingung* der unregelmäßigen Schwingung der Form. Aus (61) ergibt sich

$$h = \frac{v_d^2}{2g} \cdot \frac{G_r + G_e}{G_b + G_f} . \tag{62}$$

Demzufolge wird die Durchschnittswegamplitude

$$(A_0)_f = \frac{v_d^2}{4g} \cdot \frac{G_r + G_e}{G_b + G_f} . \tag{63}$$

Setzt man hier anstelle der Durchschnittsgeschwindigkeit den aus der Formel (59) erhaltenen Wert ein, so erhält man die Beziehung

$$(A_0)_f = 1 \cdot 10^{-1} \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{G_r + G_e}{G_b + G_f} . \tag{64}$$

Substitutiert man nun in Formel (64) anstelle der Geschwindigkeitsamplitude den Wert aus (60), so erhält man eine andere Form der durchschnittlichen Wegamplitude

$$(A_0)_f = 1 \cdot 10^{-1} \frac{M^2 \omega^2}{g(G_r + G_e)(G_b + G_f)} . \tag{65}$$

In dem für ein Modell annehmbaren einmassigen System, das anstelle des Falles 1 auf Bild 1 untersucht werden kann, bleibt das kinetische Moment

M der Erregung unveränderlich. Deshalb wird das Gewicht der einzigen zu ersetzenden Masse des Modells

$$(G_g)_i = \frac{M}{(A_0)_f} . \tag{66}$$

In der Produktion von Massengütern kommt der Taktzeit eine konkrete Rolle zu. Innerhalb dieser Zeitdauer *müssen* die sämtlichen einzelnen Teiloperationen der Produktion durchgeführt werden.

Demzufolge muß die Leistung des Rütteltisches dazu ausreichen, um die gesetzte Aufgabe unter der reinen Zeitdauer der Verdichtung erfüllen zu können. Aufgrund dieser Erwägungen steht an der linken Seite der Formel (26) die *bekannte* Zeit, wozu N gesucht wird, da an der rechten Seite der Formel diese die einzige Unbekannte ist. Wird dadurch N aus (26) eine konkrete Zahl, so erhält man unter Berücksichtigung der Formeln (54), (49) und (59) die Gleichung

$$M = \sqrt[3]{\frac{2Ng^2 \cdot G_1 \cdot G_2}{10^{-1}\,\omega^5 \sin\varepsilon}} , \tag{67}$$

wo G_1 und G_2 die den (57) und (58) entsprechenden Gewichte sind. So bleibt nur die von der Schwingungszahl abhängige ω die einzige Unbekannte an der rechten Seite der Formel (67). ω kann aber — wie dies aus dem Charakter der Aufgabe hervorgeht — innerhalb des Bereiches

$$\begin{gathered} 3{,}14 \cdot 10^2 \leq \omega \leq 6{,}28 \cdot 10^2 \\ 3 \cdot 10^3 \leq n \leq 6 \cdot 10^3 \end{gathered} \tag{68}$$

willkürlich angenommen werden. Von dieser Wahl abhängig werden aufgrund von (67) auch die übrigen Parameter des Rütteltisches projektierbar.

Auch der Betrieb des Oberflächenrüttels bildet ein einmassiges erregtes Schwingungssystem (Bild 1, 5). Nach der Betriebsart ist nämlich die einzige Quelle der Verdichtungsarbeit der in der vertikalen Richtung wirkende Teil der kinetischen Energie des Gerätes [14], weil er in der Weise verdichtet, die als Stampfverdichtung betrachtet werden kann.

Etwas komplizierter sind die Verhältnisse im Fall der Nadelrüttler oder der Schalungsrüttler mit vertikaler Achsenstellung, bei denen, zur Verwirklichung der Einmassigkeit das Prinzip der sog. *Mitschwingung* angewendet werden muß [2], [9]. Hier setzt man voraus, daß der zu verdichtende Frischbeton ein mit dem Verdichtungsgerät mitschwingender Körper ist.

Mit Hilfe der behandelten und geschilderten Methoden kann man auch im Zusammenhang mit dem Nadelrüttler und Schalungsrüttler eine derartige eindeutige Beziehung zwischen den Formeln (54) und (26) herstellen, wie es in den vorherstehenden im Zusammenhang mit (67) beschrieben wurde.

6. Zahlenbeispiel

Die Aufgabe ist: Stahlbetonplatten in Serienproduktion herzustellen (Bild 12).

Die Betongüte ist B500. Der Betonentwurf wird aufgrund der Formeln und Versuchskonstanten (1)—(3) der erwähnten Bolomey—Palotás-Theorie durchgeführt. Die erhaltenen Ergebnisse sind in Tafel I zusammengefaßt.

Tafel I

Betonparameter zum Zahlenbeispiel

D_m mm	20
Zementzugabe kpm^{-3}	$4{,}88 \cdot 10^2$
Der Abramssche Feinheitsmodul	5,0
Verdichtungskoeffizient	1,34
Dynamischer Druck bei der Herstellung von Versuchswürfeln p_d kpcm^{-2}	8

Hinsichtlich der gegebenen Bewehrung des Betonelementes nimmt man an, daß sie ihrer Funktion entsprechend durch die Regeln des Stahlbetonentwurfes bestimmt wurde.

Sei die Anzahl der in einer Arbeitsschicht von 7 Stunden herzustellenden Elemente $5 \cdot 10$ Stücke, d. h. eine Leistung von 7,6 Stück je Stunde. Diese Leistung wird — sicherheitshalber — auf 9 Stück je Stunde erhöht; die gesuchte Taktzeit wird daher 7 min/Stück, d. h. $4{,}2 \cdot 10^2$ sec/Stück. Eine Zeitanalyse ergibt die folgenden Werte:

Einrollen der Fertigungsform auf den Rütteltisch	$2 \cdot 10$ sec
Einfüllung des losen Betons in die Form	$9 \cdot 10$ sec
Reinigung der Form nach der Verdichtung	$2 \cdot 10$ sec
Ausrollen der Form von dem Rütteltisch	$2 \cdot 10$ sec
Insgesamt:	$1{,}5 \cdot 10^2$ sec

Demzufolge bleibt für die Verdichtung:

$$4{,}2 \cdot 10^2 - 1{,}5 \cdot 10^2 = 2{,}7 \cdot 10^2 \text{ sec.}$$

Frage: Was für Parameter besitzt der Rütteltisch, womit die Aufgabe zu lösen ist? Die Form liegt frei auf dem Rütteltisch (Bild 1,1). Die weiteren erforderlichen Angaben sind, wie folgt.

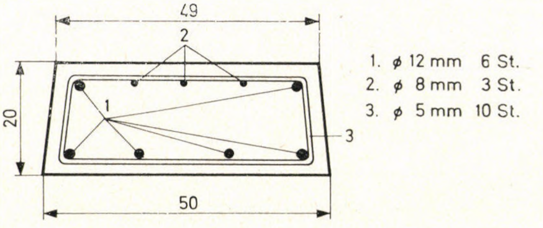


Bild. 12

Die maßgebende und die freie Formfläche reduzierende horizontale Projektion der Bewehrungselemente ist:

$$F_1 = 1{,}41 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$$
$$F_2 = 4{,}7 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \quad F_v = \sum_1^3 F_i = 2{,}34 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$$
$$F_3 = 4{,}6 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$$

maßgebende freie Fläche der Form	$F = 9{,}8 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$
Gewicht der Bewehrung	$G_s = 2 \cdot 10 \text{ kp}$
Rauminhalt des dichten Betons	$V_d = 1{,}88 \cdot 10^5 \text{ cm}^3$
Gewicht des dichten Betons	$G_b = 4{,}56 \cdot 10^2 \text{ kp}$
Gewicht der Form	$G_f = 6{,}95 \cdot 10^2 \text{ kp}$
Gewicht der Form samt dem Beton	$G_2 = G_b + G_f = 1{,}15 \cdot 10^3 \text{ kp}$
Gewicht des Rütteltisches samt dem Erreger	$G_1 = G_r + G_e = 7 \cdot 10^2 \text{ kp}$
das zu erregende Gesamtgewicht	$G_g = G_1 + G_2 = 1{,}871 \cdot 10^3 \text{ kp.}$

der Widerstandsfaktor gemäß (17) wird

$$\xi = 1{,}31.$$

Dieser Wert wird auf $\xi = 1{,}4$ erhöht, da man die Schiefe der Seitenwände der Form, der Einfachheit halber nicht separat berechnet hat.

Infolge seiner Kleinheit kann das die zur Bewegung der passiven Gewichte erforderliche Arbeit ausdrückende dritte Glied in (26) vernachlässigt werden; so erhält man für N

$$N = 1{,}93 \cdot 10^3 \text{ cmkps}^{-1}.$$

Da diese Leistung verhältnismäßig klein und die Verdichtungsperiode verhältnismäßig lang ist, bietet sich die Möglichkeit, bei gleichzeitiger Abkürzung der Verdichtungsperiode eine größere Leistung zu bestimmen. Diese Möglichkeit der Korrektion wird jedoch hier nicht behandelt.

Aufgrund (55) wird der Phasenwinkel

$$\sin \varepsilon = 1{,}85 \cdot 10^{-1} \quad (\varepsilon \sim 10°).$$

Nun bleibt nur die freie Wahl der Schwingungszahl und damit der Winkelgeschwindigkeit ω aufgrund von (68) übrig. Der einfachen Durchführbarkeit halber wählen wir die Frequenz $\left(= \begin{matrix}\text{Drehzahl} \\ \text{Schwingungszahl}\end{matrix}\right)$

$$n = 3 \cdot 10^3,$$

$$\omega = 3{,}14 \cdot 10^2,$$

womit aus (67) sich

$$M = 4{,}25 \cdot 10 \text{ cmkp}$$

ergibt.

Anhand dieses Wertes können der Erreger und das Triebwerk projektiert werden, womit wir uns hier nicht befassen. In Kenntnis von M wird die Erregungskraft

$$C_0 = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ kp}.$$

Zur Wahl der Frequenz ist noch zu bemerken, daß die höheren Schwingungszahlen durch die kleinere Wegamplitude des Rütteltisches, durch die technisch mögliche Abkürzung der Zeit t_t, durch den niedrigeren Geräuschpegel, d. h. durch einen »ruhigeren Betrieb« usw. gerechtfertigt werden kann, jedoch kann dadurch *kein Beton von »höheren Güte« hergestellt werden.* Es ist zu betonen, daß dieser Vorgang keine derartige willkürliche Voraussetzung anwendet, die früher üblich war, nämlich, daß die Ausgangsformel der Bemessung

$$C_0 = 4G_g$$

sei, die weder durch die Betonzusammensetzung, noch durch die Bewehrungsstruktur logisch gerechtfertigt werden kann. Der in dieser Abhandlung verfolgte Gedanke wird auch noch durch die Tatsache unterstützt, daß die reelle Leistung des Antriebsmotors aufgrund der berechneten Leistung N infolge der *beim Anlauf des Motors auftretenden sechs- bis achtfachen Stromaufnahme* (also wieder nicht beliebige) — mit besonderer Rücksicht auf das öftere Anlassen — höher angenommen werden muß.

7. Schlußbemerkungen

Es ist festzustellen, daß die Unterscheidung der in Formel (26) enthaltenen drei Arbeitskomponenten die Struktur dieses sehr verwickelten und bedeutenden betontechnischen Prozesses eindeutig aufklärt. Dies schafft die Vorbedingungen für die Möglichkeit, den Vorgang völlig regulierbar zu gestalten. Anhand der Formel (26) kann man die Richtigkeit für die industrielle Praxis — in Zusammenhang mit allen physischen Größen — der statistischen Auffassung und Behandlungsart als gerechtfertigt betrachten. Sowohl aus der Struktur der Formel (26) als auch aufgrund des Zahlenbeispiels kann beurteilt werden, wieweit die einzelnen Größen das Endresultat beeinflussen und *die Betonparameter eine entscheidende Rolle in der Streuung der Ergebnisse spielen.*

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß sich der dynamische Druck je nach Betonkategorien stark ändert. Die Ursachen dafür können — aufgrund der wenigen Meßergebnisse — in den folgenden *Tendenzserien* zusammengefaßt werden:

7.1 Im Falle einer erstklassigen und kontinuierlichen Kornverteilung verschieben sich mit zunehmendem D_m die unteren Grenzen der Verdichtbarkeit in Richtung zu den niedrigeren Wasserzementwerten.

7.2 Im Falle eines zunehmenden Wasserzementwertes vermindern sich das Raumgewicht und der Verdichtungskoeffizient linear, bei einer sonst unveränderlichen Betonzusammensetzung.

7.3 Der die spezifische Verdichtungsarbeit messende dynamische Druck *nimmt* bei zunehmendem Wasserzementwert *nach einer Potenzfunktion stark ab.*

7.4 Bei sonst unveränderlicher Zusammensetzung und gleichzeitiger Gültigkeit des Punktes 7.2 vermindert sich β und nimmt γ mit zunehmendem D_m zu.

7.5 Bei sonst unveränderlicher Zusammensetzung und gleichzeitiger Gültigkeit des Punktes 7.3 nimmt der dynamische Druck mit zunehmendem D_m ab.

Infolge der obigen Tendenzen dominiert in der Formel (26) das die Verdichtungsarbeit messende erste Glied. Bei zunehmenden Wasserzementwerten verlegt sich die Hauptrolle auf das zweite, die Einarbeitungsarbeit messende Glied. Die Rolle des dritten, die zur Bewegung der passiven Gewichte erforderliche Arbeit messenden Gliedes kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Vorangehend wurde in Zusammenhang mit der Gedankenfolge, die zur Formel (26) geführt hat, bewiesen, daß die das disperse Materialsystem bestimmenden Berechnungsschritte des Betonentwurfes vor der Verdichtung nicht als abgeschlossen betrachtet werden sollen und können. Aus der Argumentation ist ersichtlich, daß sie ohne logische Widersprüche auf andere, beliebige Arten von Verdichtungsgeräten, genauer: auf die Wechselwirkung des Betons und des Verdichtungsgerätes während des Verdichtungsprozesses verallgemeinert werden kann. Um der Wirklichkeit durch die richtigen quantitativen Beziehungen je näher zu kommen, ist es — wie dies aus unseren Formeln hervorgeht — erforderlich, die Zahlwerte einiger Betonparameter genauer, und für mehre Betonkategorien als bisher, zu ermitteln.

Diese sind Betonparameter, die erstens immer tatsächlich existieren, zweitens, deren Veränderungsbereich verhältnismäßig schmal ist, drittens in den bisherigen betontechnischen Forschungen nicht die ihrer Bedeutung entsprechende Rolle spielten. Unserer Meinung nach soll die Ursache, welche die Untersuchung der Wechselbeziehung des Betons und des Verdichtungsgerätes in den Hintergrund stellte, in der Vernachlässigung dieser drei Faktoren gesucht werden.

Dies hatte notwendigerweise zur Folge, daß in dieser Hinsicht sich keine auf einer gut begründeten Theorie aufgebaute, allgemein eingeführte einheitliche Praxis entwickeln konnte. Die auf Bild 1 zusammengefaßten Formeln und Formel (26) wurden zur Änderung dieses Zustandes vorgeschlagen.

SCHRIFTTUM

1. CSUTOR: Verdichtung des Betons, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967*
2. CSUTOR: Einheitliche Theorie zur Regelung der Rüttelungsverdichtung der Betone mit besonderer Rücksicht auf die Kiesbetone. Budapest 1968*
3. CSUTOR: Verdichtung des Betons. Fortbildungskurs für Ingenieure, Budapest 1971*
4. PALOTÁS: Baustoffe I—II. Akadémiai Kiadó, Budapest 1960*
5. ÚJHELYI—ARMUTH: Der Beton. Műszaki Könyvkiadó Budapest 1968*
6. PALOTÁS—KILIÁN—BALÁZS: Erhärtung des Betons. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968*
7. STORK: Teória skladby betónovej zmesi. Vydávatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava 1964
8. VISY: Gütekontrolle an der Baustelle. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966*
9. CSUTOR: Verdichtungstechnische Beiträge zur Entwurfstheorie der Kiesbetone. *Acta Techn. Hung.*, (1970)
10. FAURY: Le béton. Dunod, Paris 1953
11. WEISS: Verdichtung des Betons. Fortbildungskurs für Ingenieure, Budapest 1954*
12. SZAPOZSNYKOV: Fertigungsanlagen für Stahlbetonkonstruktionen und wärmeisolierende Paneele. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966*
13. CSUTOR: Energetische Eigenschaften der Rütteltische für Betonverdichtung. *Építőanyagok* (1971), Budapest*
14. CSUTOR: Theorie zur Regelung des Betriebs der Oberflächenrüttel für Betonverdichtung. Mitteilungen der Sektion VI der Ung. Akademie der Wissenschaften (1968)*
15. BAUMAN—VYCHOVSKIJ—GOLDSTEIN: Vybrazionnye maschini w stroitelstwe i proisvodstwe stroitelnych materialow. Isdatelstvo «Maschinostroenie», Moskau 1970
16. CSUTOR: Die Rolle des Phasenwinkels im Betrieb des Nadelrüttlers für Betonverdichtung. *Acta Techn. Hung.* (1970)

Contribution from Compaction-technical Viewpoint to the Theory of Planning Gravel Concrete. The author earlier deduced formulas for five different basic compaction methods. These formulas are measuring those amounts of work (= energies) which, in compacting the plain concrete, are required by concrete itself to change from loose into compact state. The author extends in this paper his energetical theory on the compaction, of discretionally reinforced concrete and presents a closed formula valid for all of the five basic compaction methods. The control procedure presented may be used in connection with any theory of concrete planning.

К технологии уплотнения по теории проектирования гравийных бетонов *(Я. Чутор)* Автором ранее были выведены формулы по пяти основным режимам вибрационного уплотнения. Эти формулы отображают те количества работы (вернее, энергии), которые требуются для самого бетона в случае неармированных (т. н. чистых) бетонов для того, чтобы из неплотного состояния бетон перешел в плотное состояние. В данной работе автор распространяет свою энергетическую теорию по уплотнению и создает формулу замкнутого характера и для уплотнения произвольным образом армированных бетонов; эта формула действительна также для всех пяти режимов уплотнения. Иллюстрируемый метод органически может быть связан с произвольной теорией проектирования бетона.

* Ungarisch.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (1—2), pp. 309—334 (1974)

INCONSISTENCIES IN THE LINEAR THEORY OF CREEP OF CONCRETE

SUGGESTION FOR THEIR ELIMINATION

J. SZALAI*
CAND. OF TECHN. SCI.

[Manuscript received: July 3, 1972]

The recommandation of the F.I.P. — C.E.B. published in 1970 has been elaborated by international working committees by making use of recent scientific findings. However, this valuable international work involves certain inconsistencies. It is verified that these inconsistencies — which may be pointed out both in the deformation due to creep and in the relaxation of the stresses — result from the adopted explanation of the ageing function. The requirements are formulated which should be satisfied — by taking into account the theory of linear creep — in order to eliminate these inconsistencies. The adoption, of the said function is recommended and is verified, and by its application the theory will be free from inconsistencies.

1. Theory of the linear creep in case of uniaxial state of stresses

1.1 *Adopted assumptions on the theories of linear creep*

— The concrete is homogeneous and isotropic;

— Hooke's Law is valid without restraint both for the elastic and creep deformations as well, therefore, the absolute value of both the elastic and creep deformations is independent of the sign of stress;

— The principle of superposition applies to the deformations due to creep.

1.2 *Notation*

The following symbols are used in this paper:

σ_0, $\sigma(t)$	stresses in concrete at times $t = o$ and t, respectively [kp/cm^2],
E_0, $E(t)$, $E(\tau)$	moduli of elasticity of concrete [kp/cm^2],
t	time in years. Time of observation calculated from initial stress σ_0,
t_0	age of concrete at first application of load,
τ	time of later change in stress, calculated from first application of load,
$t_0 + t$, $t_0 + \tau$	age of concrete at times t and τ respectively,
$k(t) = k(t_0 + t)$	
$k(\tau) = k(t_0 + \tau)$	values of ageing function at different times;
$k_0 = k(t_0)$	

* Dr. J. SZALAI, Révay u. 32. 1205, Budapest, Hungary

φ_0	basic creep coefficient,
$\varphi_N = \varphi_0 c_1 c_2$	creep coefficient taking into account relative humidity of storage, composition of mix and size of member,
$f(t), f(t-\tau)$	unit creep functions,
$f_s(t)$	unit shrinkage function,
$\varphi(t)$	creep function belonging to initial stress σ_0,
$\varphi_\infty = k_0\varphi_0$	creep function at infinite time,
$\varphi(t, \tau)$	creep function to change in stress at time τ,
$\varepsilon(t) = \varepsilon$	whole specific deformation of concrete member (strain in concrete)
$\varepsilon_{e0}, \varepsilon_e(\tau)$	specific elastic deformation,
$\varepsilon_k(t)$	specific deformation due to creep,
$\varepsilon_{s\infty}$	specific ultimate shrinkage of concrete after time $t = 0$,
$\varepsilon_s(t) = \varepsilon_{s\infty} f_s(t)$	shrinkage function,
$\varepsilon_s(t) = \varepsilon_{s\infty}/\varphi_\infty \, f(t)$	shrinkage function in case of affinity.

1.3 *Basic equation of creep*

Be the age of concrete t_0 when applying the first load. The time of observation (t) and change in stress (τ) are calculated from this time, in years. The change in stress can be gradual (with constant intensity at each step) or continuous.

The total strain of the concrete in case of gradual change in stress is:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}\left[1 + \varphi(t)\right] + \sum_{\tau_i} \frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(\tau_i)}\left[1 + \varphi(t, \tau_i)\right] + \varepsilon_s(t). \tag{1.1}$$

If the change in the stress is continuous:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}\left[1 + \varphi(t)\right] + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{\partial\,\sigma(\tau)}{\partial\tau}\,\frac{1}{E(\tau)}\left[1 + \varphi(t, \tau)\right] d\tau + \varepsilon_s(t), \tag{1.2}$$

which, after partial integration of the second term in the right-hand side of the equation, may be brought to the form:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau=0}^{\tau=t} \sigma(\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + \frac{\varphi(t, \tau)}{E(\tau)}\right] d\tau + \varepsilon_s(t). \tag{1.3}$$

In the basic equation of the creep

$$\varphi(t) = k_0\,\varphi_N f(t) \tag{1.4}$$

is the creep function associated with the initial load. In case of change in load or stress in a later time τ:

$$\varphi(t, \tau) = k(\tau)\varphi_N f(t - \tau). \tag{1.5}$$

In a general case, the unit creep function is:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \nu_i\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}}\right), \tag{1.6}$$

i.e.,

$$f(t-\tau)\sum_{i=1}^{i=n}\nu_i\left(1-e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_i}}\right). \tag{1.7}$$

In both bases:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\nu_i = 1{,}0\,. \tag{1.8}$$

Significant term of the creep function is the ageing function $k(\tau)$. This one should reflect the effect of ageing and inheritance properties (capacity of memory) of the concrete on creep. One of the causes of the inconsistencies among the different theories of creep is that they are based on ageing functions incorrectly interpreted.

In the equation of creep the $\varepsilon_S(t)$ is the shrinkage function. Most of the theories of creep — in order to simplify the method of calculation — permits the assumption of affinity between the creep and shrinkage functions.

1.4 *Theories of creep*

The most significant difference among the theories of creep consists in the different interpretation of the ageing function.The best known theories are as follows:

1.41 *Theory of inheritence*

This theory has been developed by BOLTZMANN, VOLTERRA, RZHANITZIN and other authors. This theory assumes the aging function to be constant

$$(k\tau) = k_0, \tag{1.9}$$

so it ignores the ageing of concrete. According to this theory, after unloading, the strain due to creep is totally reversible (creep recovery) (Fig. 1b) — not conforming to the behaviour of concrete — and leads to a significant difference between the theoretical and experimental diagrams.

1.42 *Theory of ageing*

This theory was developed by DISCHINGER and WHITNEY. Numerous researchers have dealt with further development of this theory.

DISCHINGER simplified the solution of the basic integral equation of creep (1.2) taking into account the creep function in the following form:

$$\frac{\varphi(t,\tau)}{E(\tau)} = \frac{\varphi(t)-\varphi(\tau)}{E_0}\,. \tag{1.10}$$

By assuming a constant modulus of elasticity and the affinity between the creep and shrinkage functions, the well known differential equation was obtained

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{1}{E_0}\,\frac{d\sigma}{d\varphi} + \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}\,. \tag{1.11}$$

Dischinger's creep function might also be interpreted in the form

$$\varphi(t, \tau) = k(\tau)_D \varphi_N f(t - \tau). \tag{1.12}$$

If

$$f(t - \tau) = 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}, \tag{1.13}$$

then Dischinger's ageing function will be

$$k(\tau)_D = k_{0D}\, e^{-\frac{\tau}{\lambda}} \tag{1.14}$$

wherein

$$k_{0D} = e^{-\frac{t_0 - c}{\lambda}}, \tag{1.15}$$

$$c = \frac{28}{360}\ \text{year} \tag{1.16}$$

By making use of this ageing function:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t) - \varphi(\tau). \tag{1.17}$$

The latest experiments and observations also revealed the inconsistencies in this theory, namely, that it wrongly takes into account the effect of the age and inheritence behaviour of concrete. The deformations due to creep at unloading remain totally irreversible (Fig. 1c). By appyling this theory, the obtained values for relaxation are noticeably low which follows from the ageing function imperfectly interpreted.

1.43 *Theory of the creeping elastic body*

The theory has been elaborated by Arutunian and improved by Maslow, Gwozdew, Prokopowitsh, Panarin, Alexandrovski and many others.

The basic principles of the theory do not differ from that suggested by the F.I.P.—C.E.B. The reflections made in connection with this latter theory also refer to the theory in question, therefore, herein they will not be discussed.

1.44 *Recommendation of the F.I.P.—C.E.B.*

The working committees of the F.I.P. (Fédération Internationale de la Précontrainte) and C.E.B. (Comité Européen du Béton) developed this international recommendation [4]. This work deals with the new basic principles for the calculation of creep. Its aim is to develop a uniform international code for design and construction of reinforced and prestressed concrete structures, based on scientific results in every respect. Collecting the up-to-date results, it points out the direction of further research and gives intentions to all countries to develop their own code.

This theory permits the application of a constant modulus of elasticity as well as the assumption of affinity between creep and shrinkage functions.

It presents each factor of creep function — as basic data of theory of creep — graphically.

The unit creep functions, as functions of theoretical thickness of concrete, are shown in Figs 2 and 3. The theoretical thickness of a concrete body is the ratio of the whole cross-sectional area and half of the periphery being in contact

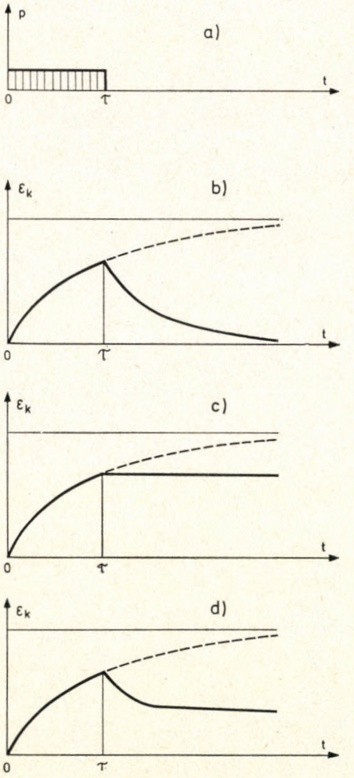


Fig. 1

with the atmosphere. In a general case, the diagrams shown in the figures might be approached by polynomial exponential functions of the form:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\nu_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}}\right) \right). \tag{1.18}$$

A reasonable approximation may be obtained — in the case of concrete units of larger thickness — calculating one or two terms of the above expression, while of thinner members calculating three terms. The constants of the functions associated with the different theoretical thicknesses are given in Table I.

The recommended procedure represents the ageing function by a single curve independent of the theoretical thickness of the concrete body (Fig. 4).

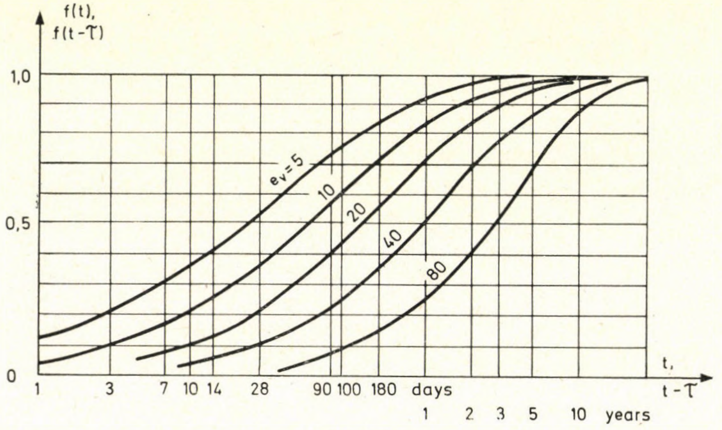


Fig. 2

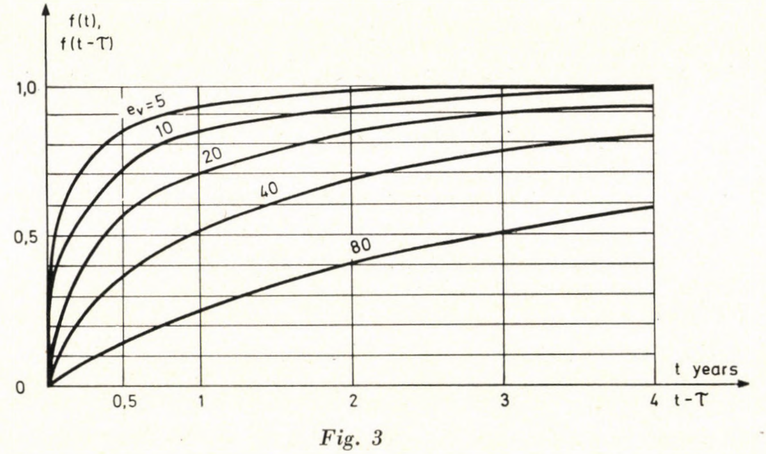


Fig. 3

Table I

e_v cm	ν_1	ν_2	ν_3	λ_1	λ_2	λ_3
5	0,23	0,43	0,34	1/150	1/13	1/1,5
10	0,20	0,50	0,30	1/60	1/4	1/0,7
20	0,20	0,43	0,37	1/15	1/2	2,0
	0,45	0,55	—	1/6	2,0	—
40	0,40	0,60	—	1/2	3,0	—
80	1,0	—	—	4,0	—	—

It may closely be approached by a function taking the form

$$k(t) = a_0 + \frac{a_1}{1 - a_2(t_0)e^{-\gamma_1 t}} + a_3(t_0)e^{-\gamma_2 t} \tag{1.19}$$

(in the figure dashed line). In this relation

$$a_0 = 0{,}20, \quad a_1 = 0{,}21, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 24,$$

$$a_2(t_0) = 0{,}70e^{-\gamma_1(t_0 - 0{,}0777)}$$

$$a_3\,(t_0) = 0{,}10e^{-\gamma_2(t_0 - 0{,}0777)} \tag{1.20}$$

t_0 and t being time values expressed in years.

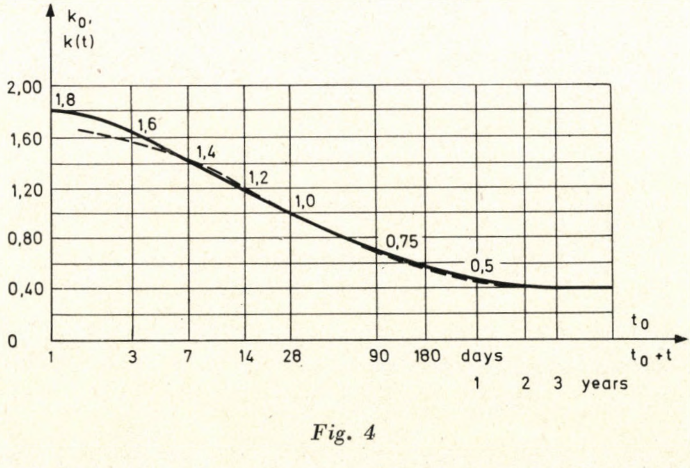


Fig. 4

The ageing function represented in the figure concerns concretes manufactured by using Portland cement, hardening slowly under natural conditions (at an average temperature of 20 centigrades).

For the calculation of the creep coefficient φ_N, the values φ_0, c_1 and c_2 may be read in the graphs [4].

1.5 *Solution of the basic equation of creep*

The Volterra-type integral equation may be transformed by several derivations into differential equation. The differential equation will only be discussed for the case where the unit creep function might be approximated by the monomial exponential function

$$f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} . \tag{1.21}$$

In this case

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau=0}^{\tau=t} \sigma(\tau) \Bigg\{ - \frac{1}{E(\tau)^2} \frac{dE(\tau)}{d\tau} + \frac{\varphi_N}{E(\tau)^2} \Bigg[\frac{dk(\tau)}{d\tau} E(\tau) - \\ - \frac{dE(\tau)}{d\tau} k(\tau) \Bigg] (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}) - \frac{\varphi_N k(\tau)}{\lambda E(\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \Bigg\} d\tau + \varepsilon_{s\infty} f_s(t) . \end{aligned} \tag{1.22}$$

By making use of the relations

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t) , \tag{1.23}$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt} f(t, \tau) d\tau + f(t, t) \tag{1.24}$$

concerning the derivation of the integral, for producing the derivatives of $\varepsilon(t)$, we obtain for the first derivative

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{\varphi_N k(t)}{\lambda E(t)} \cdot \sigma(t) - \\ - \int_{\tau=0}^{\tau=t} \sigma(\tau) \Bigg\{ \frac{\varphi_N}{\lambda E(\tau)^2} \Bigg[\frac{dk(\tau)}{d\tau} E(\tau) - \frac{dE(\tau)}{d\tau} k(\tau) \Bigg] e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} + \\ + \frac{\varphi_N k(\tau)}{\lambda^2 E(\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \Bigg\} d\tau + \varepsilon_{s\infty} \frac{d}{dt} f_s(t) . \end{aligned} \tag{1.25}$$

The second derivative will be:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{1}{E(t)}\,\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \left[-\frac{1}{E(t)^2}\,\frac{dE(t)}{dt} + \frac{\varphi_N}{\lambda E(t)}\,k(t)\right]\frac{d\sigma(t)}{dt} -$$
$$-\frac{\varphi_N}{\lambda^2 E(t)}\,k(t)\,\sigma(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t}\sigma(\tau)\left\{\frac{\varphi_N}{\lambda E(\tau)^2}\left[\frac{dk(\tau)}{d\tau}\,E(\tau) - \right.\right. \tag{1.26}$$
$$\left.\left. -\frac{dE(\tau)}{d\tau}\,k(\tau)\right]e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} + \frac{\varphi_N\,k(\tau)}{\lambda^3\,E(\tau)}\,e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}}\right\}d\tau + \varepsilon_{s\infty}\,\frac{d^2}{dt^2}f_s(t)\,.$$

Adding the value $d\varepsilon/dt$ multiplied by $1/\lambda$ to the value $d^2\varepsilon/dt^2$, the integral vanishes, and therefore, the differential equation of the creep is as follows:

$$\frac{d^2\,\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{\lambda}\,\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E(t)}\,\frac{d^2\,\sigma(t)}{dt^2} + \frac{1}{E(t)}\left[-\frac{1}{E(t)}\,\frac{dE(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi_N}{\lambda}\,k(t)\right]\frac{d\sigma\,(t)}{dt} + \varepsilon_{s\infty}\left[\frac{d^2}{dt^2}f_s\,(t) + \frac{1}{\lambda}\,\frac{d}{dt}f_s\,(t)\right]. \tag{1.27}$$

If the modulus of elasticity is constant and affinity is assumed, then

$$\frac{d^2\,\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{\lambda}\,\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_0}\,\frac{d^2\,\sigma(t)}{dt^2} + \frac{1}{\lambda E_0}\left[1 + \varphi_N\,k(t)\right]\frac{d\sigma(t)}{dt}\,. \tag{1.28}$$

In case of constant modulus of elasticity, affinity and constant ageing function

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\lambda}\,\varepsilon = \frac{1}{E_0}\,\frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{1 + k_0\,\varphi_N}{\lambda E_0}\,\sigma(t) + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\lambda}\,. \tag{1.29}$$

2. Inconsistencies in the linear theory of creep

The inconsistencies in this theory may be realized by investigating the effect of creep in two special cases, namely:

— investigating the development of deformations (strains) due to creep after unloading, when the deformations may freely take place (case of pure creep),

— investigating the change of stresses when the deformations due to creep are entirely restrained (case of relaxation).

2.1 *Inconsistencies in the deformations due to creep*

Let us subject the concrete bodies of different thicknesses to load at the time $t = 0$. Let the load remain unchanged up to the time τ, and then wholly removed. Consider the development of the specific deformations due to creep after the removal of load, under sustained load causing the unit specific elastic deformation.

In the first rate, the results of the linear theory adopted in our days are interesting, however, for making a comparison, also the deformations calculated by using Dischinger's method, should be determined.

The sustained load is applied at the one-day age of the concrete, i.e., $t = \tau = 0$. The load will be removed after 28 days when $t_0 + \tau = 28$ days.

The values of the ageing function are (Fig. 4) $k_0 = 1{,}8$ and $k(\tau) = 1{,}0$. It is assumed that the sustained load induces the unit specific deformation, further that $\varphi_N = 1{,}0$.

The unit creep functions are known (Figs 2 and 3).

In Figs 5 to 8, curve 1 represents the strain due to creep under the effect of the initial load. This is valid up to the time τ.

$$\varepsilon_k(t) = k_0 \varphi_N f(t). \tag{2.1}$$

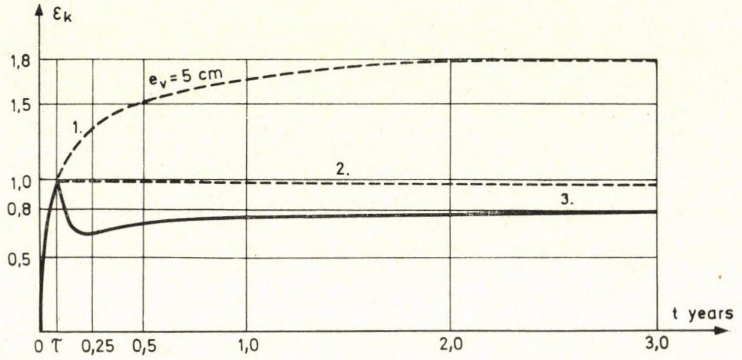


Fig. 5

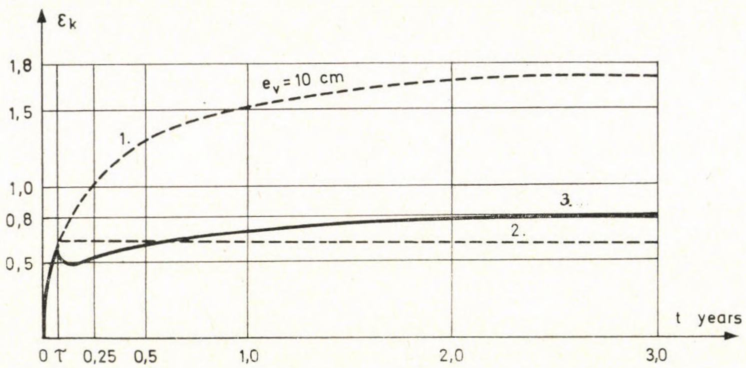


Fig. 6

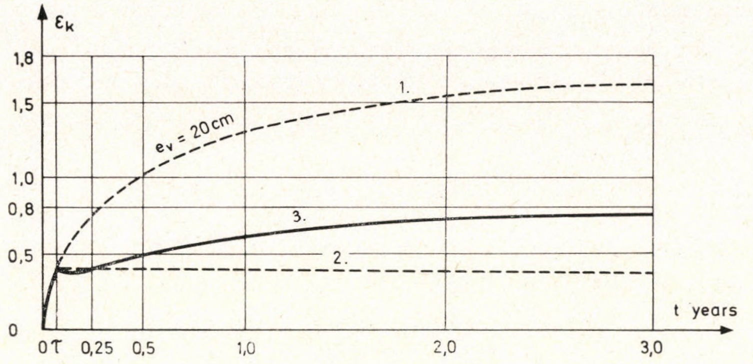


Fig. 7

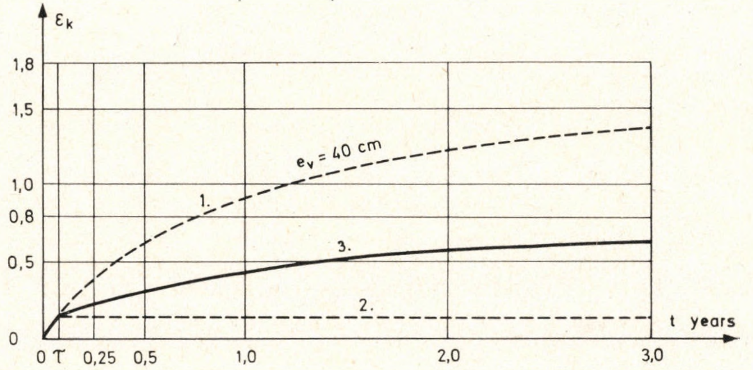


Fig. 8

Curve 2 is obtained by applying Dischinger's theory. At the values $t \geqq \tau$

$$\varepsilon_k(t) = k_0 \varphi_N f(t) - k_0 \varphi_N [f(t) - f(\tau)] = k_0 \varphi_N f(\tau) = \text{const.} \tag{2.2}$$

According to the recommendation of the F.I.P.—C.E.B., the strains are, after removing the load, i.e., when $t \geqq \tau$

$$\varepsilon_k(t) = k_0 \varphi_N f(t) - k(\tau) \varphi_N f(t - \tau). \tag{2.3}$$

The deformations of the concrete bodies due to creep are represented by the full line 3 in Figs 5 to 8. After the removal of the load, the deformation due to creep increases almost in every case.

These theoretical results contradict those obtained by the experiments, according to which the deformations due to creep do not increase after removing the load but, related to the value observed at the time of relieving, gradually decrease in all cases and tend towards a final value, less than this latter.

The inconsistency may also be pointed out for other values of t_0 and τ. This tendency of the deformations (strains) is independent of the magnitude of load and takes place, not only in the case of the entire unloading, but also when the change in loading takes place gradually or continuously.

2.2 *Inconsistencies in the relaxation of stresses*

Investigating the relaxation of a concrete body, by making use of different ageing functions, i.e.,

— if $k(t) = k_0$,

— by using Dischinger's ageing function, and

— with the aid of the function $k(t)$ of the recommendation of the F.I.P.—C.E.B.

In all three cases the same conditions are assumed:

the time of the initial load is $t_0 = 28$ days,

the theoretical thickness of the concrete member is: $e_\nu = 80$ cm.

$$f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}, \tag{2.4}$$

$$E(t) = E_0. \tag{2.5}$$

The initial stress is: σ_0 kp/cm^2.

The strains due to creep are entirely restrained, therefore:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} = \text{const.} \tag{2.6}$$

2.21 *Solution of the relaxation problem.*
The ageing function is constant

The differential equation of the relaxation problem is [see relation (1.29)]:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1 + k_0 \varphi_N}{\lambda} \sigma = \frac{\sigma_0}{\lambda}. \tag{2.7}$$

The solution of the differential equation, by allowing for the initial condition

$$t = 0, \qquad \sigma = \sigma_0 \tag{2.8}$$

will be

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[1 - \frac{\varphi_\infty}{1 + \varphi_\infty} \left(1 - e^{-\frac{1+\varphi_\infty}{\lambda} t}\right) \right]. \tag{2.9}$$

According to Dischinger's theory:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} + \sigma = 0, \tag{2.10}$$

and the solution is

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\varphi(t)} \tag{2.11}$$

Solution by making use of the ageing function according to the recommendation of the F.I.P.—C.E.B.

The differential equation of the relaxation problem is

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1}{\lambda}[1 + \varphi_N k(t)]\frac{d\sigma}{dt} = 0, \tag{2.12}$$

wherein $k(t)$ is the relation (1.19). By introduction of the new variable

$$\xi = e^{-\gamma_1 t} \tag{2.13}$$

one obtains:

$$\frac{d^2\sigma}{d\xi^2} + p(\xi)\frac{d\sigma}{d\xi} = 0. \tag{2.14}$$

In this differential equation

$$p(\xi) = \xi^{-1}\left[1 - \frac{1}{\gamma_1\lambda} - \frac{\varphi_N}{\gamma_1\lambda}k(\xi)\right]\cdot \tag{2.15}$$

The solution of the differential equation will be:

$$\sigma(\xi) = C_1 \int e^{-\int p(\xi)d\xi}\, d\xi + C_2, \tag{2.16}$$

$$e^{-\int p(\xi)d\xi} = \xi^{\alpha_1}(1 - a_2\xi)^{-\alpha_2} e^{\alpha_3 \xi^{\gamma_2/\gamma_1}}, \tag{2.17}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1\varphi_N}{\gamma_1\lambda} + \frac{1 + a_0\varphi_N}{\gamma_1\lambda} - 1, \tag{2.18}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_1\varphi_N}{\gamma_1\lambda}, \tag{2.19}$$

$$\alpha_3 = \frac{a_3\varphi_N}{\gamma_2\lambda}. \tag{2.20}$$

In determining $\sigma(\xi)$, the further integration for the general case may only be carried out with the aid of series expansion.

$$(1 - a_2\xi)^{-\alpha_2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \xi^n, \tag{2.21}$$

$$d_n = \frac{\alpha_2(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_2 + n - 1)}{n!} a_2^n \tag{2.22}$$

The following simplification may be applied

$$e^{\alpha_3 \xi^{\gamma_2/\gamma_1}} = 1 + \alpha_3 \xi^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}, \tag{2.23}$$

because α_3 is as low as is sufficient to consider only the first two terms of the series.

By making use of these relations one obtains:

$$\sigma(\xi) = C_1 \left(\frac{1}{1+\alpha_1} \xi^{1+\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_1 + 1} \xi^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_1 + 1} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n + \alpha_1 + 1} \xi^{n+\alpha_1+1} + \tag{2.24}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_3 d_n}{n + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_1 + 1} \xi^{n + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_1 + 1} \right) + C_2$$

The initial conditions are as follows:
If $t = 0$, $\xi = 1$,

$$\sigma(1) = \sigma_0 \tag{2.25}$$

$$\frac{d\varepsilon(1)}{d\xi} = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma(1)}{d\xi} - \frac{\varphi_N}{E_0 \gamma_1 \lambda} \xi^{-1} k(1) \sigma(1) = 0 . \tag{2.26}$$

By taking into account the two initial conditions two, equations can be obtained, from which

$$C_1 = \sigma_0 \frac{\varphi_\infty}{\gamma_1 \lambda} e^{\alpha_2 \ln(1-a_2) - \alpha_3}, \tag{2.27}$$

$$C_2 = \sigma_0 - C_1 \left(\frac{1}{1+\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + a_1 + 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n + \alpha_1 + 1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_3 d_n}{n + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_1 + 1} \right) . \tag{2.28}$$

2.22 *Numerical example*

Given values: $k_0 = 1$, $\varphi_N = \varphi_\infty = 3{,}0$ $\lambda = 4$ years.

If $$k(t) = k_0, \ \sigma_\infty = 0{,}25\, \sigma_0$$

According to Dischinger's theory: $\sigma_\infty = 0{,}05\,\sigma_0$.
According to the recommendation of the F.I.P.—C.E.B.:

$$a_0 = 0{,}20,\ a_1 = 0{,}21,\ a_2(t_0) = a_2 = 0{,}70,\ a_3 = 0{,}10,$$

$$\gamma_1 = 1{,}0,\ \gamma_2 = 24,\ \alpha_1 = 0{,}4425,$$

$$\alpha_2 = 0{,}1575,\ \alpha_3 = 0{,}00313.$$

$$C_1 = 0{,}618\,\sigma_0$$

$$\sum_{n=1}^{n=7} \frac{d_n}{n+\alpha_1+1} = 0{,}09989,\ \frac{\alpha_3 d_1}{1+\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}+\alpha_1+1} = 0{,}0000135\,.$$

$$\sigma_\infty = -0{,}175\,\sigma_0.$$

The values of the relative stresses are shown in Table II and Fig. 9.

Table II

t year	$\sigma(t)/\sigma_0$		
	$k(t) = k_0$	Dischinger	FIP—CEB
0	1,000	1,000	1,000
0,25	0,834	0,834	0,829
0,50	0,705	0,703	0,690
0,75	0,604	0,599	0,572
1,00	0,526	0,515	0,471
2,00	0,351	0,307	0,191
3,00	0,287	0,205	0,034
4,00	0,264	0,150	—0,056
∞	0,250	0,050	—0,175

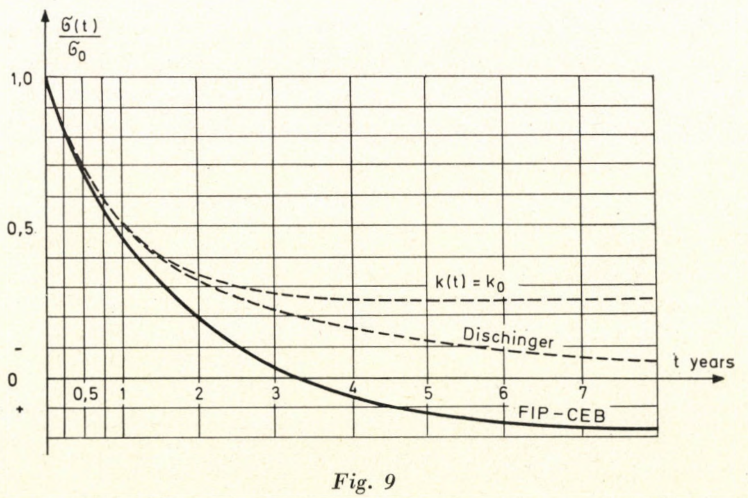


Fig. 9

The value of the residual calculated by applying Dischinger's theory is not higher than 5 per cent of the initial stress which is improbably low. Even more improbable is the result obtained by using the ageing function suggested by the F.I.P.—C.E.B. The initial stress changes its sign during the relaxation which contradicts the observations and may only be explained by the imperfections of the theory of creep. This is the consequence of inconsistency already discussed in connection with the investigation of deformations due to creep.

2.3 *Cause of the inconsistencies in the linear theory*

The results of the preceeding investigations, namely, that

— the deformations due to creep increase after the removal of the load, and

— the initial stress changes its sign due to relaxation,

follow from the inconsistencies of the theory of creep.

The cause of the inconsistencies is the wrong interpretetion of the ageing function $k(\tau)$. In this function the recommended method does not allow for the effect of the concrete thickness exerted on ageing but independently of it, applies the same function in case of any thicknesses of concrete.

The ageing of the concrete depends on the thickness of the concrete body.

This statement is verified by the very same tests upon which the theory is based.

The effect of the factors affecting the deformations due to creep, asserts itself in the creep functions. The method recommended gives the unit creep function $f(t)$ as the function of the theoretical thickness of concrete (Figs 2 and 3). These curves are steeper in case of thinner, and flatter in case of thicker concrete bodies. They also characterize the velocity and duration of the creep. The creep may be considered practically finished when the tangent of the curve representing the function $f(t)$ becomes nearly horizontal. Immediately after hardening, depending on the thickness of the loaded concretes, a longer or shorter period is required to reach this age. Then they may be considered to be aged because, by assuming unchanged load and unchanged conditions, the effect of the factors causing creep, does not change significantly, practically it is to be considered as constant. Some of the factors causing creep are connected with the ageing of the concrete, therefore, from the unit creep functions it is to be concluded that the ageing of the concrete depends on the thickness.

Thinner concrete bodies grow old faster, the thicker ones more slowly.

The effect of the thickness — as it is to be seen later — reveals itself in Dischinger's ageing function which supports the above statement.

In a theory without inconsistencies the ageing function cannot be independent of the thickness of concrete.

3. Suggestion for a theory of creep without inconsistencies

3.1 *Requirements raised against the ageing function*

Already in Chapter 1 the ageing of concrete bodies of different thicknesses is not identical was discussed, it differs depending on their thickness. In addition to the statements made so far the ageing function should satisfy even further requirements in order to eliminate the present inconsistencies of the theory of creep.

First of all the question arises, how should the ageing function be applied if the unit creep functions are polynomial, i.e., they may be set up by additioning several exponential functions.

Let us first consider Dischinger's ageing function. In Section 1.42 it has already been seen that by applying Dischinger's ageing function

$$k_i(\tau)_D = e^{-\frac{t_0-c}{\lambda_1}} e^{-\frac{\tau}{\lambda_i}} \tag{3.1}$$

one obtains

$$k_i(\tau)_D \varphi_N f_i(t-\tau) = \varphi_i(t) - \varphi_i(\tau). \tag{3.2}$$

It can be verified, that in case if

$$f(t-\tau) = \sum_{i=1}^{i=n} \nu_i f_i(t-\tau), \tag{3.3}$$

is valid then Dischinger's creep function may only be set up if all of the terms of the sum will be multiplied by the corresponding $k_i(\tau)_D$, i.e.,

$$\varphi(t,\tau) = \sum_{i=1}^{i=n} k_i(\tau)_D \varphi_N \nu_i f_i(t-\tau) = \sum_{i=1}^{i=n} k_{i0D} \varphi_N \nu_i \left[f_i(t) - f_i(\tau)\right], \tag{3.4}$$

or

$$\varphi(t,\tau) = \sum_{i=1}^{i=n} \nu_i \left[\varphi_i(t) - \varphi_i(\tau)\right]. \tag{3.5}$$

Dischinger's ageing function is proportionate to the derivative of the creep function, i.e., it takes into account the effect of the thickness of concrete and expresses it with the unit creep function.

The actual creep function, similarly to Dischinger's case, should be written in the form

$$\varphi(t,\tau) = \sum_{i=1}^{i=n} k_i(\tau) \varphi_N \nu_i f_i(t-\tau). \tag{3.6}$$

The ageing functions $k_i(\tau)$ associated with each term of the sum should be determined to this function.

From experiments it is known that after the removal of the load, a certain part of the deformations due to creep goes back, i.e., it is reversible (creep recovery) (Fig. 10, curve 4). The residuary deformation (creep irrecovery), in case of young concretes, comes to 0,50 to 0,80 times of the value observed at the time of the removal of load.

According to Dischinger's theory, the deformations taking place after unloading, are irreversible. These may be calculated simply. It is known how the actual deformations develop in comparison with the former. In knowing Dischinger's ageing function, by analysing the deformations — this procedure will not be detailed herein — may the requirements raised against the actual ageing functions be determined, namely:

1. The actual ageing function cannot be independent of the concrete thickness or unit creep function closely associated with the former. It should be revealed that thinner concretes are growing old faster and thicker concretes slower.

2. The values of the actual ageing function are, in case of concretes younger than 28 days, lower, and in case of concretes older than 28 days, higher than those of the Dischinger's function, associated with the corresponding concrete thickness. However, at the 28 day's age they are identically of unit value (Fig. 11).

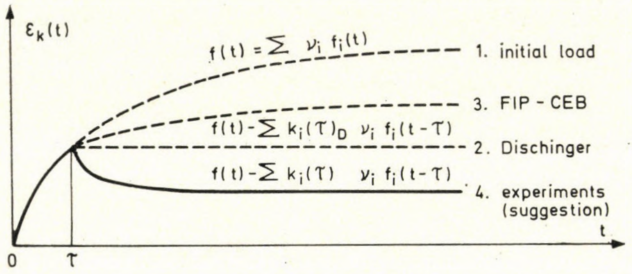


Fig. 10

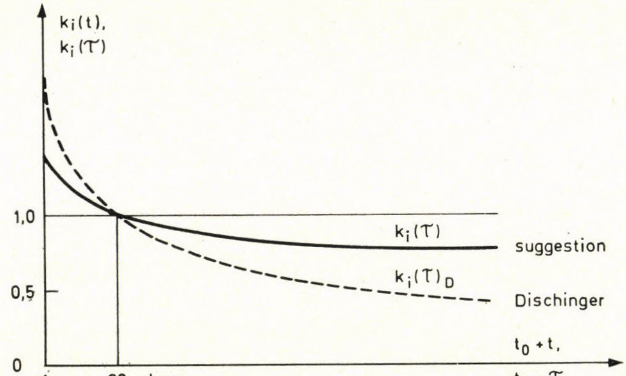


Fig. 11

3. The velocity of ageing of concretes of different thicknesses — the absolute value of the first derivative with respect to time — is lower than that to be calculated from Dischinger's ageing function. This, at the same time means that the actual ageing functions may be exhibited by flatter curves than Dischinger's corresponding functions.

4. The ageing function decreases monotonically, no extreme values occur at its intermediate loci.

These requirements should still be completed with the finding of experimentation that the ageing function asymptotically tends, with the increase of time, towards a constant end value.

3.2 *The proposed ageing function*

It may be verified that the ageing function satisfies all of the mentioned requirements, if

$$k_i(\tau) = a_{0i} + a_{1i} k_i(\tau)_D \tag{3.7}$$

wherein

$$k_i(\tau)_D = e^{-\frac{t_0+\tau-c}{\lambda_i}}, \tag{3.8}$$

$$c = \frac{28}{360} \text{ year}, \tag{3.9}$$

and a_{0i} and a_{1i} are constants which should be selected in such a way that the relations

$$a_{0i} + a_{1i} = 1{,}0$$

$$a_{0i} > 0 \tag{3.10}$$

should be true. Their numerical values, by taking into account $t_0 = 1/360$ year, may be determined from the following relations:

$$a_{1i} = \frac{k_{i0,\max} - 1}{e^{(t_0-c)/\lambda_i} - 1}, \tag{3.11}$$

$$a_{0i} = 1 - a_{1i}, \tag{3.12}$$

$$k_{i0,\max} = \frac{1}{1 - \bar{\alpha} f_i (c - t_0)} \tag{3.13}$$

$$\bar{\alpha} = 0{,}50 \div 0{,}80. \tag{3.14}$$

The constants of the ageing functions of concrete bodies of different thicknesses — by assuming that $\bar{\alpha} = 0{,}60$ — are listed in Table III. They can simply be determined, also in case of other values of $\bar{\alpha}$, with the aid of the above relations.

The results obtained theoretically are supported, among others, by the experimental findings to be found in reference [11]. In accordance with them, the actual $k(\tau)$-function is represented by a significantly flatter curve than that recommended by the F.I.P.—C.E.B. which is identical with that prescribed by the DIN.

Table III

e_v cm	i	k_{i0max}	a_{0i}	a_{1i}	λ_i	$\Sigma \nu_i k_{i0max}$
5	1	2,50	~1,0*	~0*	1/150	1,626
	2	1,60	0,64	0,36	1/13	
	3	1,06792	0,429	0,571	1/1,5	
10	1	2,46	0,9835987	0,0164013	1/60	1,393
	2	1,1841	0,474	0,526	1/4	
	3	1,0316595	0,413	0,587	1/0,7	
20	1	1,2422	0,884	0,116	1/15	1,095
	2	1,09122	0,437	0,563	1/2	
	3	1,022588	0,409	0,591	2,0	
30	1	1,09122	0,437	0,563	1/2	1,045
	2	1,015022	0,407	0,593	3,0	
80	1	1,01128	0,40	0,60	4,0	1,0113

*Exact values: $a_{01} = 0{,}9999804744$ $\quad a_{11} = 1{,}9525582 \cdot 10^{-5}$

3.3 *Determination of the deformations due to creep with the aid of the suggested function*

Be a concrete body subjected to load at the time $t = 0$, and the load removed at a time τ, then the deformations due to creep may be calculated with the aid of the proposed ageing function from the relation

$$\varepsilon_k(t) = \varphi_N \sum_{i=1}^{i=n} k_{i0}\, \nu_i f_i(t) - \varphi_N \sum_{i=1}^{i=n} k_i(\tau)\, \nu_i f_i(t-\tau) \tag{3.15}$$

Let us investigate the problems which were discussed in Section 2.1, pointing out the inconsistencies in the deformations due to creep.

The intensity of load, the time of the application of the initial load and that of the removal of the load, as well as the unit creep functions and φ_N are the same as in the cases discussed in the mentioned section.

The values of the ageing functions associated with the initial load which should be determined and applied according to the suggestion, are deviating. Since $t_0 = 1$ day, therefore

$$k_{i0} = k_{i0,\max} \,. \tag{3.16}$$

The removal of load takes place at the age of 28 days, therefore

$$k_i(\tau) = 1{,}0. \tag{3.17}$$

The results of the simple calculations are represented in Figs 12 to 15. Curve 1 shows the creep developed under the effect of the initial load. Curve 2 drawn with a dashed line, represents the values calculated by using Dischinger's theory, curve 4 drawn with a full line, shows those obtained by making use of the function $k(\tau)$, according to which the deformations developed after the removal of the load are, in their tendencies, in close agreement with the results of the experiments.

3.4 *Stress relaxation with the proposed function*

3.41 *Solution of the problem*

The very same problem will be discussed which has already been dealt with in pointing out the inconsistencies of the recommendation of the F.I.P.—C.E.B. With the exception of the ageing function, all of the given values are unchanged:

$$t_0 = 28 \text{ days}, \quad e_v = 80 \text{ cm}, \quad E(t) = E_0, \tag{3.18}$$

$$f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}, \tag{3.19}$$

$$k(t) = a_0 + a_1 e^{-\frac{t_0+t-c}{\lambda}} \,. \tag{3.20}$$

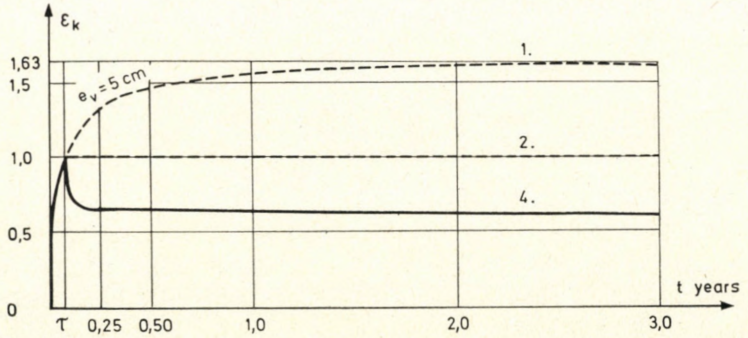


Fig. 12

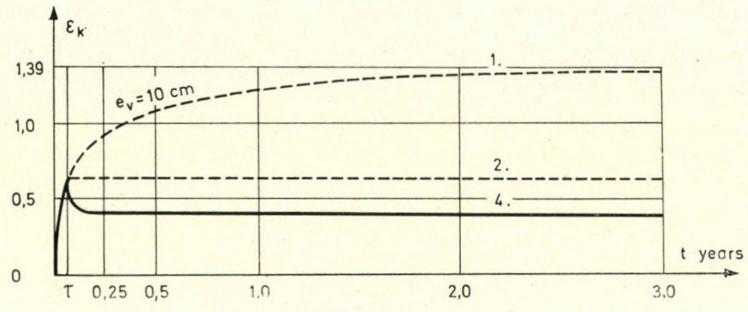


Fig. 13

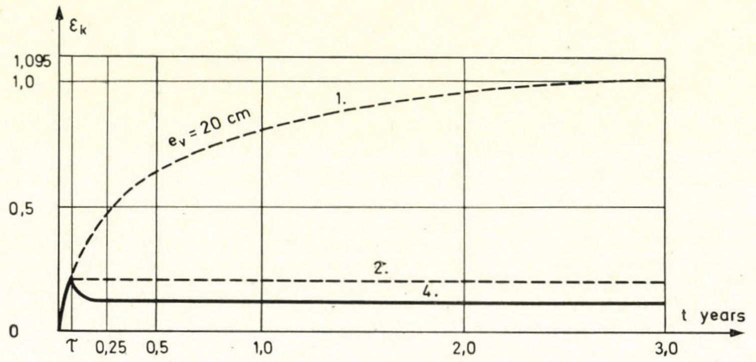


Fig. 14

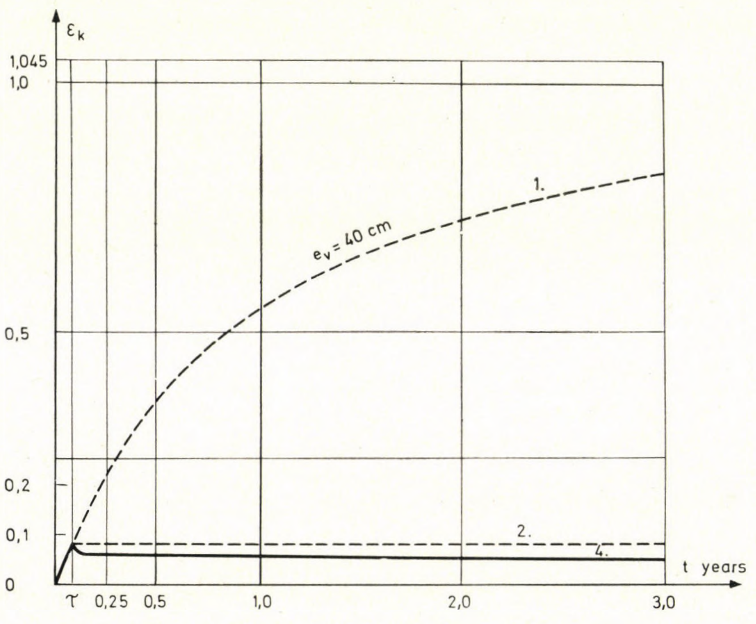


Fig. 15

The initial stress: σ_0 kp/cm²

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} = \text{const.} \tag{3.21}$$

The differential equation of the relaxation problem is:

$$\frac{d^2\sigma}{d\xi^2} + p(\xi)\frac{d\sigma}{d\xi} = 0 \tag{3.22}$$

wherein

$$p(\xi) = -\varphi_N(a_0\xi^{-1} + a_1), \tag{3.23}$$

$$\xi = e^{-\frac{t}{\lambda}}. \tag{3.24}$$

Initial conditions:
If $t = 0$, $\xi = 1$, then

$$\sigma(1) = \sigma_0, \tag{3.25}$$

$$\frac{d\varepsilon(1)}{d\xi} = \frac{1}{E_0}\frac{d\sigma(1)}{d\xi} - \frac{\varphi_N}{E_0}\xi^{-1}k(1)\sigma(1) = 0. \tag{3.26}$$

The solution of the differential equation is

$$\frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} = C_1\xi^{\alpha_1}e^{\alpha_2\xi}, \tag{3.27}$$

$$\sigma(\xi) = C_1\left[\frac{1}{1+\alpha_1}\xi^{1+\alpha_1} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_2^n}{n!(1+n+\alpha_1)}\xi^{1+n+\alpha_1}\right] + C_2, \tag{3.28}$$

$$\alpha_1 = a_0\varphi_N, \qquad \alpha_2 = a_1\varphi_N, \tag{3.29}$$

$$C_1 = \sigma_0\varphi_\infty e^{-\alpha_2}, \tag{3.30}$$

$$C_2 = \sigma_0\left\{1 - \varphi_\infty e^{-\alpha_2}\left[\frac{1}{1+\alpha_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_2^n}{n!(1+n+\alpha_1)}\right]\right\}. \tag{3.31}$$

3.42 *Numerical example*

Given values:

$k_0 = 1$, $\varphi_N = 3$, $\varphi_\infty = 3$, $\lambda = 4$ years,

$a_0 = 0{,}40$, $a_1 = 0{,}60$, $\alpha_1 = 1{,}2$, $\alpha_2 = 1{,}8$.

$$\sum_{n=1}^{n=8}\frac{\alpha_2^n}{n!(1+n+\alpha_1)} = 1{,}2350,$$

$\sigma_\infty = 0{,}164\ \sigma_0$.

The relative stresses $\sigma(t)/\sigma_0$ are represented in Fig. 16 with full line. The function values are summarized in Table IV.

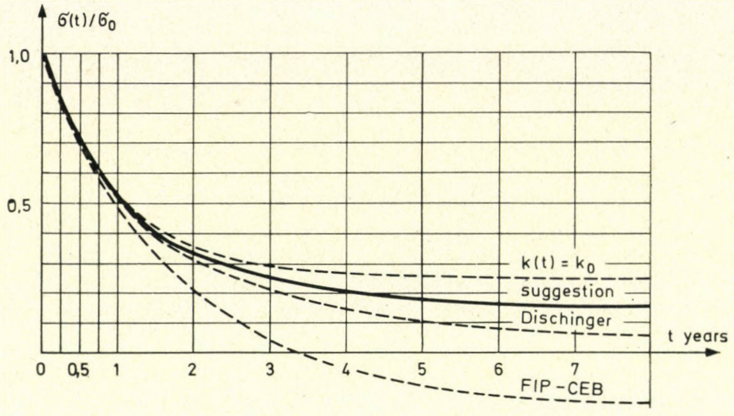


Fig. 16

3.5 *The approximate ageing function*

Be the relation

$$k(t) = e^{-\gamma_1(t_0+t-c)} \tag{3.32}$$

applied instead of the ageing function of the problem discussed in the preceeding chapter — other things being equal — then, the differential equation may be solved in a closed form.

The results of the calculations carried out by taking into account the value $\gamma_1 = 0{,}125$ and found in Table IV are almost identical with the "exact" values.

The solution of the problem shows that in the case of concretes loaded at their early age, it is of no significance towards what end value the ageing

Table IV

t year	$\sigma(t)/\sigma_0$			
	Exact	Dischinger	$k(t) = k_0$	approximate $k(t)$
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,25	0,834	0,834	0,834	0,834
0,50	0,705	0,703	0,705	0,704
0,75	0,602	0,599	0,604	0,601
1,00	0,521	0,515	0,526	0,520
2,00	0,327	0,307	0,351	0,323
3,00	0,243	0,205	0,287	0,241
4,00	0,204	0,150	0,264	0,208
∞	0,164	0,050	0,250	0,166

function tends, if otherwise along the intense section of the creep it osculates reasonably to the "actual" function.

The truth of this statement may be understood if one takes into consideration that in case of restrained creep the changes of the stresses caused by the initial load, after a few years, are of negligibly low values. Their values multiplied by the ageing function, i.e., by the creep function involving also the ageing function — as well as the sums of these products — from a certain time on may be ignored, independently of the fact whether to what an end value the function $k_i(\tau)$ tends to.

The example also draws the attention to that, from the findings of experiments of a period of a few years, no reassuring conclusion might be drawn in respect to the end value of the ageing function.

3.6 *Basic equation of the creep without inconsistencies*

Taking into account the results of the research in establishing the basic equation only means substantial changes:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}[1 + \varphi(t)] + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} [1 + \varphi(t, \tau)] d\tau + \varepsilon_s(t). \quad (3.33)$$

By using the proposed ageing function

$$\varphi(t) = \varphi_N \sum_{i=1}^{i=n} k_{i0} \nu_i f_i(t), \quad (3.34)$$

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_N \sum_{i=1}^{i=n} k_i(\tau)\, \nu_i f_i(t - \tau) \quad (3.35)$$

where

$$k_i(\tau) = a_{0i} + a_{1i}\, e^{-\frac{t_0 - c + \tau}{\lambda_i}}. \quad (3.36)$$

The integral equation may in every case be transformed into differential equation, therefore, the creep problems may, in principle, be solved.

If the unit creep function might be approached by a monomial exponential function, the same result would be obtained, as in Chapter 1.5.

However, in cases where the unit creep function may be written down in the form of a polynomial exponential function, higher-order, inhomogeneous differential equations of variable coefficients will be obtained. The equations themselves as well as their solutions are intricate; they are not suitable for practical calculations.

Author proposes an approximate calculation method for this purpose [16].

REFERENCES

1. ARUTUNIAN, N. CH.: Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures, Pergamon Press London 1966 (Translation from Russian). Application de la Théorie du Fluage. Edit. Eyrolles. Paris 1957. (Translation from Russian)
2. BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Vol. I. P. 146 S. Hirzel Verlag, Leipzig 1953
3. BÖLCSKEI, E.—TASSI, G.: Prestressed Beams, Tankönyvkiadó, Budapest 1968. (Published in Hungarian)
4. C.E.B.—F.I.P.: International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures. Principles and Recommendations. FIP Sixth Congress, Prague 1970
5. DISCHINGER, F.: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke, insbesondere der Bogenbrücken. *Bauingenieur* (1939) **5—6**
6. ÉLIÁS, E.: Berechnung der Wirkungen des Kriechens mit Hilfe der Laplaceschen Transformation. *Acta Techn. Hung.* (1962) **4**
7. L'HERMITE, R.: Les déformations du béton. Edit. Eyrolles. Paris 1961
8. KOLLÁR, L.—KÉKEDY, P.: Einfluß des Kriechens auf den Spannungszustand und auf die Formänderungen statisch unbestimmter Stahlbetonkonstruktionen. *Bauplanung—Bautechnik* (1955) **11**
9. LEONHARDT, F.: Spannbeton für die Praxis. 2. Auflage. W. Ernst u. Sohn, Berlin 1962
10. LIPTÁK, L.: Die Untersuchung des Schwindens elastisch gebetteter mehrschichtiger Betonträger. *Der Bauingenieur* (1965) **6**
11. MEHMEL, A.—WEIGLER, H.: Kriechbeiwerte für Beton bei frühzeitiger Belastung. *Beton- u. Stahlbetonbau* (1967), 6
12. NEVILLE, A. M.: Creep of Concrete: Plain Reinforced and Prestressed. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1970.
13. NOWACKI, W.: Theorie des Kriechens — Lineare Visko-Elastizität. Franz Deuticke, Wien 1965
14. PALOTÁS, L.: Lassú alakváltozás okozta feszültségátrendeződés a betonban (Rearrangement of the Stress Pattern Due to Creep) *Mélyépítéstudományi Szemle* (1971) **1** (Published in Hungarian)
15. PUCHER, A.: Lehrbuch des Stahlbetonbaus. 3. Auflage. Springer-Verlag, Wien 1961
16. SZALAI, J.: A beton kúszási elméletének ellentmondásai és javaslat azok kiküszöbölésére. (Inconsistencies in the Theory of Creep, of Concrete, Suggestion for their Elimination) Manuscript in Hungarian
17. TROST, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. *Beton- u. Stahlbetonbau* (1967), **10—11**

Einige Widersprüche der linearen Theorie des Kriechens des Betons und ein Vorschlag zu deren Beseitigung. Die in 1970 veröffentlichten FIP—CEB Empfehlungen wurden aufgrund der neuesten wissenschaftlichen Ergebnisse von internationalen Ausschüßen ausgearbeitet. Jedoch enthalten diese wertvollen Empfehlungen gewisse Widersprüche. Es wird nachgewiesen, daß diese Widersprüche, die sowohl in den Kriechdehnungen, als auch in den Spannungsrelaxation nachweisbar sind, sich aus der angenommenen Deutung der Alterungsfunktion $k(\tau)$ ergeben. Der Verfasser formuliert die Anforderungen, die durch die Funktion $k(\tau)$ unter Berücksichtigung der linearen Theorie des Kriechens zwecks Beseitigung der Widersprüche befriedigt werden müssen. Die Annahme dieser Funktion wird vorgeschlagen und es wird nachgewiesen, daß durch deren Anwendung die Theorie von den Widersprüchen befreit wird.

Противоречия линеарной теории ползучести бетона и предложения по устранению этих противоречий (Салаи Й.). Опубликованная в 1970 году рекомендация ГIP—CEB была разработана международными комиссиями с использованием новейших научных достижений. Этот ценный международный труд все-таки содержит определенные противоречия. Автор подтверждает, что эти противоречия, которые можно показать как по деформациям ползучести, так и по релаксации напряжений, получаются от принятого толкования функции старения ($k(\tau)$). Автор определяет те требования, которые должны быть удовлетворены функцией ($k(\tau)$) сучетом линеарной теории ползучести для того, чтобы были устранены эти противоречия. Вносится предложение в отношении записи этой функции и доказывается, что при таком подходе теория не будет иметь противоречий.

INDEX

Millner, T.: Über die Fremdstoff-Frage der Fasergrenzen bzw. der Kristallgrenzen von gezogenen bzw. rekristallisierten Wolframdrähten — Influence of Foreign Matter on the Fibre Boundary (Crystallite Boundary) of Drawn (Recrystallized) Tungsten Wires — *Мильнер, Т.:* О вопросе посторонних веществ фазовых границ или же кристаллитных границ волоченных и кристаллизированных вольфрамовых проволок 1

Bogárdi, J.: Actual Theoretical and Practical Problems of Sediment Transportation — Zeitmäßige theoretische und praktische Probleme der Geschiebeführung — *Богарди, Я.:* Современные теоретические и практические вопросы движения наносов 15

Szabó, J.—Scharle, P.: Über die Beziehungen zwischen der Theorie der Stabkonstruktionen und der Kontinuumaufgabe — Relations between the Theory of Bar Structures and the Continuum Problem — *Сабо Я., Шарле П.:* О связи между теорией стержневых косртукций и континуумной задачей 51

Michelberger, P.—Keresztes, A.: The Estimation of Stresses due to Production Inaccuracies by Means of Higher Order Moments — Schätzung der aus Fertigungsungenauigkeiten herrührenden Beanspruchungen mit Hilfe von höheren Momenten — *Михельбергер, П., Керестеш, А.:* Оценка нагрузок от неточностей производства при высоких моментах 63

Csonka P.: Regular Polygon Based Paraboloid Shells of Revolution, Having a Circular Skylight Opening — Rotationsparaboloidschale über regelmäßigem Vieleckgrundriß mit kreisförmiger Oberlichtöffnung — *Чонка, П.:* Оболочки параболоида вращения с основанием в виде правильного многоугольника и с круглым верхним фонарем 73

Czibere, T.. Über die Berechnung der ebenen Unterschallströmung von kompressiblen Medien — The Calculation of the Plane Subsonic Flow of Compressible Fluids — *Цибере, Т.:* О расчете двухмерного движения потока ниже звуковой скорости сжимаемых сред 93

Hangos, I.—Frl. Juhász, I.: Simultane Gleichgewichte in Halogenlampen mit zwei verschiedenen Halogenzusätzen. Gleichgewichte beim gleichzeitigen Vorhandensein von H_2, Br_2 und J_2 — Simultaneous Equilibriums in Halogen Lamps Containing Two Different Halogens. Equilibriums in the Case of Pure Halogens — *Хангош И., Юхас, И.:* Одновременные равновесия в галогеновых лампах, содержащих два различных галогена. Равновесия в случае одновременного присутствия 101

Somlyódi, L.: Improvement of the Efficiency of Free-Blow-out Axial Fans Using Variable Circulation — Verbesserung des Wirkungsgrades von frei ausblasenden Axiallüftern durch veränderliche Zirkulation — *Шомлоди, Л.:* Повышение кпд аксиальных вентиляторов со свободным сдувом применением переменной циркуляции 115

Kalló, P.: Critical Summary of the Design Methods of Form-independent Thin Triplet Systems — Kritische Zusammenfassung der Entwurfsmethoden des gestaltungabhängigen dünnen Systems des Triplets — *Калло, П:* Критическое обобщение метода проектирования формонезависимой тонкой системы триплета 133

Csemniczky, J.: Linear Characteristics of Stationary and Rotary Cascades under Three-dimensional Flow Conditions of an Ideal Incompressible Liquid — Die linearen Eigenschaften von stationären und rotierenden Schaufelgittern bei dreidimensionaler Durchströmung mit einer inkompressiblen Flüssigkeit — *Чемницки, Я.:* Линейные свойства неподвижной и вращающейся решеток, образуемых лопатками, в случае трехмерного движения потока идеальной несжимаемой жидкости 143

Kolonits, F.: Flash Temperature of Gears, Part I. Review of the Problem and Stationary Models — Blitztemperaturen von Zahnrädern. I. Teil. Überblick und stationäre Modelle. *Колонич, Ф.:* Температура молнии зубчатого колеса, I. Обзор и стационарные модели 153

Szűcs, L.: Physico-chemical Investigation of the Effect of Nickel Dissolved in a Steel Bath on Desulfurization — Physikalisch-chemische Untersuchung der Einwirkung des im Stahlbad gelösten Nickels auf die Entschwefelung — *Сюч, Л.:* Физико-химическое исследование десульфирующего действия никеля, растворенного в стальной ванне 175

Farkas, J.: Structural Synthesis of Press Frames Having Columns and Cross Beams of Welded Box Cross-section — Konstruktionssynthese von Pressengestellen mit Ständern und Querträgern geschweißten Kastenquerschitts — Фаркаш, Й., Конструкционный синтез станин прессов со стойками и поперечинами сварного коробчатого сечения 191

Soriano, A.—Krizek, R. J.—Gyuk, I.: Application of Conformal Mapping to Transient Tile Drainage — Anwendung der konformen Abbildung auf transiente Tonrohrdränung — *Сориано, А. Критцек, Р. Й., Дюк, И.:* Применение конформного отображения для глиняных дренажных труб 203

Nath, G.: Local Similarity Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer Equations — Lokale Ähnlichkeitslösungen für die kompressiblen laminaren Grenzschichtströmungen — *Нат, Г.:* Местные решения подобия для сжимаемых ламинарных граничных уравнений 225

Béres, E.: Three-Dimensional Stress Analysis by Means of a Continuum Sub-space — Dreidimensionale Spannungsanalyse mit Hilfe eines Kontinuum-Unterraums— *Береш Э.:* Анализ трехмерного напряжения с помощью континуумного подпространства 239

Bondy, T.: Berechnung der Kenngrößen von pseudostochastischen vielstufigen Signalen — Calculation of the Characteristics of Pseudorandom Signals — *Бонди, Т.:* Расчет показателей многоуровневых псевдоспучайных сигналов. параметров псевдослучайных многоступенчатых сигналов 267

Csutor, J.: Verdichtungstechnische Beiträge zur Entwurfstheorie der Kiesbetone — Contribution from Compaction-technical Viewpoint to the Theory of Planning Gravel Concrete — *Чутор, Я.:* Данные к технологии уплотнения по теории проектирования гравийных бетонов 277

Szalai, J.: Inconsistencies in the Linear Theory of Creep of Concrete Suggestion for their Elimination — Einige Widersprüche der linearen Theorie des Kriechens des Betons und ein Vorschlag zu deren Beseitigung — *Салаи, Я.* Противоречия линеарной теории ползучести бетона и предло жения по устранению етих противоречий. 309

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Zacsik Annamária

A kézirat nyomdába érkezett: 1974. V. 24. — Terjedelem: 29,4 (A/5) ív 115 ábra 1 melléklet

74.459. Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *1—14*

MILLNER, T.: *Influence of Foreign Matter on the Fibre Limits (Crystallite Limits) of Drawn (Recrystallized Tungsten Wires* (Statement and Ideas).

In the tungsten filaments containing additions (e.g. 1...50‰ K, Si, Al traces) not only the chemical quality of the traces but also the position of the additive traces and their changes of place are of considerable importance in the development of the large-crystal structure of the filaments, the maintaining of filament shape at high temperatures and the development of the filament mechanical characteristics at room temperatures. These statements are illustrated, as the author has ascertained, by a) the the independence of the crystallite growing speed from the quality of the additions, b) displacement of the foreign-phase particles during recrystallization, c) influence of foreign atoms instead of foreign-phase particles during recrystallization (e.g. Ga atoms instead of Al_2O_3, Tl atoms in the place of K_2O, d) the role played by the Si addition — replaceable by Be — in the creep characteristics at 2800°K, e) the slipping on each other of the drawn tungsten wire fibres during the development of uniform yield and chiefly of the contraction during tensile tests.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *15—49*

BOGÁRDI, J.: *Actual Theoretical and Practical Problems of Sediment Transportation*

The actual theoretical investigations of sediment transportation are based on the fundamental laws of physics. Considering the sediment transportation as a physical phenomenon, according to the principle of conservation, author establishes the balance equations of the mass, kinetic energy, internal energy and momentum. Their comparison and evaluation led to several basic perceptions. Starting from theoretical principles, the sediment-transportation capacity of water courses is investigated. Measurements carried out on the river Drava parallel with observations of the energy requirement needed to the sediment transportation and to the modification of the river bed is determined.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *51—62*

SZABÓ, J.—SCHARLE, P.: *Relations between the Theory of Bar Structures and the Continuum Problem.*

The well-known state-equation in the theory of bar structures can be regarded as stationarity condition of a functional of energetic type. The paper presents the chain of thought in detail for the case of the linear problem (formulated without considering initial strains and stresses).

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *62—72*

MICHELBERGER, P.—KERESZTES, A.: *The Estimation of Stresses Due to Production Inaccuracies by Means of Higher Order Moment*

In statically indeterminate structures any production inaccuracy may lead to considerable stresses, the estimation of which by the Tchebishev inequality is rather pessimistic. This is why the elaboration of far more accurate estimations has become necessary.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *73—91*

CSONKA, P.: *Regular Polygon Based Paraboloid Shells of Revolution, having a Circular Skylight Opening*

Paper presents on the bases of the usual assumptions of the membrane theory method for the determination of the state of stresses in the shells mentioned in the title. It is assumed that the skylight opening of the shell is bordered by an edge ring wich exerts no resistance on horizontally planed bending moments and the arehes supporting the outer edge of the shell do not resist lateral forces. The presented solution is of approximate character: the conditions relating to the edge ring of the skylight opening are exactly satisfied, but those referring to the edge arches are only approximately so. The application of the given formulae is explained by a numerical example, a circumstance which at the same time testifies the suitability of the expounded method.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *93—99*

CZIBERE, T.: *The Calculation of the Plane Subsonic Flow of Compressible Fluids.*

The non-harmonic potential and stream functions of the isentropic plane flow of compressible fluids at subsonic velocities can be expressed with the aid of fluid density, harmonic functions selected in accordance with the boundary conditions, and their derivatives. By this method equations suitable for the direct calculation of the velocity components in the plane of flow are obtained, which are suitable for carrying out the calculations by iteration, starting from the velocity field of the corresponding incompressible flow.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *101—113*

HANGOS, I., JUHÁSZ, I.: *Simultaneous Equilibriums in Halogen Lamps Containing Two Different Halogens. Equilibriums in the Case of Pure Halogens.*

The temperature dependence of the equilibrium concentration of tungsten haloids was calculated from thermodynamical data for the combined use of Br and J under conditions corresponding to the gas charge of halogen-filled incandescent lamps. Generalizing the results for real conditions, it appears that the combined injection of two different halogens into the gas space, at suitably chosen conditions, goes with considerable advantages as compared to the use of one single halogen.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *115—132*

SOMLYÓDY, L.: *Improvement of the Efficiency of Free Blow-Out Axial Fans Using Variable Circulation*

Variable circulation at a given geometry has a twofold effect: a) higher outlet losses due to the distortion of the axial velocity; b) the reduction of the load acting on the blade sections at the root. The latter permits the reduction of the hub dimensions. If the hub can be diminished to a larger degree than would be necessary to compensate for the higher loss the static efficiency could be appreciably increased. The author solves this task by using the equation of the optimisation of free blow-out deflectorless axial fans generalized for variable circulation and by the establishment of the maximum attainable diminution of the hub diameter.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *133—142*

KALLÓ, P.: *Critical Summary of the Design Methods of Form-Independent Thin Triplet Systems*

Following a critical review of the known methods used for the data determination on triplet-form independent thin systems a new simple algorithm readily adaptable for computerization is described for the focal length and other data of the components, as well as their relation. The correctness and systemization plus detection capacity of the new algorithm is evidenced first by already analysing well-known triplets. Thereafter, the applicability of the new algorithm will be proved by a numerical example, with reference to the possibilities of generalization and further fields of application.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *143—151*

CSEMNICZKY, J.: *Linear Characteristics of Stationary and Rotary Cascades Under Three-Dimensional Flow Conditions of an Ideal Incompressible Liquid*

The paper derives the linear flow properties by the fundamental kinematic relations applied to the flow. Thus, it determines the relation between the parameters of stationary and rotary cascades of the same geometry, as well as the expression of the theoretical characteristic curve ($\psi = \psi(\varphi)$) containing these parameters. By replacing the areas in front of and behind the blading with a suitable model, these houndary conditions can be defined for a circular symmetric plane flow. As a consequence, the correlation between the cascade parameters and the angles characteristic of the inflow and outflow, respectively, is formally identical to that obtained for a two-dimensional flow. The two cascade parameters pertaining to a stationary, and the three to a rotary bladings are defined by special working conditions.

Acta Techn. Hung. **79** (1974) *153—173*

KOLONITS, F.: *Flash Temperature of Gears*, Part I

The results attained so far in the calculation of the contact temperature of gears have been surveyed and the models assuming one- and two-dimensional heat conduction and stationary state have been examined in detail. Equations for arbitrary heat-source distribution have been deduced, which involve as special cases the already published results for given distributions. It has been shown that the distribution for the one-dimensional case is, in general, the asymptotic approximation of the two-dimensional case for large Blok numbers B, the difference diminishes in inverse proportion to $\sqrt{B}$. The results can be applied not only to gears, but to the investigation of any moving heat sources.

Acta Techn. Hung. **79** (1974) *175—190*

SZŰCS, L.: *Phisico-Chemical Investigation of the Effect of Nickel Dissolved in a Steel Bath on Desulfurization*

The paper investigates the special behaviour to be noticed when desulfurizing chromium-nickel content steels (Ni content: max 2,5%) with the aid of plant experiences and thermodynamic calculations. It was established that the development of the desulfurizing reaction was greatly slowered in case of nickel-content steel batches than in those not containing nickel. With the latter the desulfurization reaction approached the state of equilibrium more quickly, as in terms of time-unit a greater amount of the motive force of the reaction was used up. The experiments confirmed the empirical experience that nickel hinders the desulfurization of steel.

Acta Techn. Hung. **79** (1974) *191—201*

FARKAS, J.: *Structural Synthesis of Press Frames Having Columns and Cross Beams of Welded Box Cross-Section*

A complex design procedure is presented for the welded box sections of a press frame having two columns and two cross beams. Both the frame and the cross sections are of double symmetry. Only a centric loading is considered. The eight unknown sizes of the sections are calculated by means of a systematic treatment of the following conditions: constraints of maximum bending and shear stresses, limitation of maximums deflection of cross beams, conditions of local buckling of flange and webs of cross beam criterion of minimum volume and limitation of the ratio of flange thickness to web thickness, in order to avoid lamellar tearing of weld-affected zone of box sections. In the calculation of deflection, the shear deformation must be taken into account. The inner space of work must also be guaranteed. In the calculation of bending stresses of cross beams, corner moments can be neglected, but in column design they must be considered.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *203—223*

SORIANO, A., KRIZEK, R. J., GYUK, I.: *Application of Conformal Mapping to Transient Tile Drainage*

The problem of transient drainage toward a tile drain in an aquifer of finite depth involves the solution of Laplace's equation within a strip domain bounded by a curved and moving free surface, a straight impervious boundary, and a small circular drain contour within the domain. Application of conformal mapping allows the problem to be stated in a new plane in which the moving free surface and the imprevious boundary are mapped into fixed straight lines, whereas the drain is mapped into an upward moving closed contour. The boundary conditions of the problem in the new plane are time-dependent, and the potential and mapping functions appear coupled. This system of boundary conditions is expanded into a series of time-independent systems in terms of the coefficients of the Taylor series expansions for all functions entering the problem. Two operations, termed "Complex Integration" and "Complex Regularization", allows a solution to be found for each of these systems up to third order of the time power expansion. Finally, a parameter study is performed with the use of a digital computer, and the effect of different variables is evaluated.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *225—238*

NATH, G.: *Local Similarity Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer Equations*

Similar solutions of the steady compressible laminar vicous fluid, both at the stagnation point and away from the stagnation point of two-dimensional and axisymmetric bodies at zero incidence have been obtained without imposing any restriction on the total enthalpy at the wall, the product of viscosity and density, and the Prandtl number. The two coupled nonlinear ordinary differential equations, representing momentum and energy equations, are simultaneously solved, using Runge—Kutta—Gill method. The results show that the skin-friction coefficient and the Nusselt number decrease when moving away from the stagnation point. The skin-friction coefficient increases, but the Nusselt number decreases, as the total enthalpy at the wall increases. The skin-friction coefficient and the Nusselt number for a two-dimensional body (a cylinder) are less than those of an axisymmetric body (a sphere).

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *239—266*

BÉRES, E.: *Three-Dimensional Stress Analysis by Means of a Continuum Sub-Space*

The paper describes a three-dimensional stress analysis method expressing the equilibrium equations directly for the finite-size elements, and the continuity conditions for the one-dimensional sub-space of the three-dimensional continuum, that is, for the network of the lines of intersection of the dividing surfaces. An approximation with polynomes, the functions describing the stresses making the numerical solution, lead to a linear system of equations whose coefficients are given by definite integrals. In the case of a uniform division they may be written down by using operators of general validity and, therefore, the concrete determination of the integrals is not necessary.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *267—275*

BONDY, T.: *Calculation of the Characteristics of Pseudorandom Signals*

A class of pseudorandom sequences, the maximum-length sequences is frequently used for the determination of weight functions by cross-correlation analysis. Such sequences can be realized with the aid of feedback shift registers. The binary signal obtained in this way can be transformed by a parallel digital filter into an analog signal. The paper deals with a method for calculating the waveform of the analog signal and determines its statistical properties, which are well suited for evaluation on a computer.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *277—308*

CSUTOR, J.: *Contribution from Compaction-technical Viewpoint to the Theory of Planning Bravel Concrete*

The author earlier deduced formulas for five different basic compaction methods. These formulas measure those amounts of work (= energies) which, in compacting the plain concrete, are required by concrete itself to change from loose into compact state. The author extends in this paper his energical theory on the compaction of directionally reinforced concrete and presents a closed formula valid for all of the five basic compaction methods. The control procedure presented may be used in connection with any theory of concrete planning.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), *309—334*

SZALAI, J.: *Inconsistencies in the Linear Theory of Creep of Concrete*

The recommandation of the F.I.B.—C.E.B. published in 1970 has been elaborated by international working committees by making use of recent scientific findings. However, this valuable international work involves certain inconsistencies. It is verified that these inconsistencies — which may be pointed out both in the deformation due to crep and in the relaxation of the stresses — result from the adopted explanation of the ageing function $k(\text{c})$. The requirements are formulated which should be satisfied — by taking into account the theory of linear creep — in order to eliminate these inconsistencies. The adoption of the said function is recommended and it is verified, that by its application the theory will be free from inconsistencies.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 32.00 a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Account No. 218 10990) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 32.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Compte courant No. 218 10990) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 32.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (1389 Budapest 62, P. O. B. 149 Текущий счет № 218 10990) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following adresses:

ALBANIA
Drejtorija Qändrone e Pärhapjes dhe Propagandimit tä Librit
Kruga Konferenca e Päzes
Tirana

AUSTRALIA
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA
GLOBUS
Höchstädtplatz 3
A-1200 Wien XX

BELGIUM
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
162. rue du Midi
1000 Bruxelles

BULGARIA
HEMUS
11 pl Slaveikov
Sofia

CANADA
Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA
Artia
Ve Směčkách 30
Praha 2
Poštovní Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arska Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
SLOVART A. G.
Gorkého
Bratislava

DENMARK
Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE
Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay-Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstraße 3—4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN
Blackwell's Periodicals
Oxenford House
Magdalen Street
Oxford
Collet's Subscription Import Department
Dennington Estate
Wellingsborough, Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
4—5 Fitzroy Square
London W. 1

HOLLAND
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA
Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

ITALY
Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
Techna
Via Cesi 16.
40135 Bologna

JAPAN
Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central

KOREA
Chulpanmul
Phenjan

NORWAY
Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgt 41—43
Oslo 1

POLAND
Ruch
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA
Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
București

SOVIET UNION
Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN
Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
S—101 20 Stockholm

USA
F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood Mass. 02090
Stechert Hafner Inc.
31. East 10th Street
New York, N. Y. 10003

VIETNAM
Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA
Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslavenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

31. I. 1975 Index: 26.025

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 79

FASCICULI 3–4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1974

ACTA TECHNICA

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (1363 Budapest Pf. 24. Bankszámla 215 11448), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankszámla: 218 10990) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespendenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 32.00

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankkonto Nr. 218 10990) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (3–4), pp. 335–350 (1974)

ON THE STATICS AND DYNAMICS OF DOUBLE-LAYER OBLIQUE SQUARE MESH GRIDS

M. V. SOARE*
DOCTOR OF TECHN. SC.

[Manuscript received: June 11, 1974]

A method of analysis for double-layer oblique square mesh grids is developed, based on the replacement of the discrete structure by an equivalent continuum. In the considered case, this continuum is a plate working with over-torsion. The statical solution is based on double and simple trigonometrical series. The dynamic aspect is also examined dealing with the free vibrations of the simply supported grid on a rectangular planform.

1. Introduction

Double-layer mesh grids consist of two parallel layers of bars linked at the joints by bracing members which ensure the geometrical indeformability of the whole system. The main feature of this type of structure is the high degree of regularity of its mesh conforming (the discrete distribution of the joints).

Double-layer oblique square mesh grids represent, besides simple and diagonal grids, an important type of reticulated space structures, the advantageous statical behaviour of which has already been signalled in the technical literature [2], without indicating however, an analysis method or numerical results (Fig. 1).

A double-layer oblique square mesh grid has the same geometrical configuration as the double-layer simple square mesh grid, the single difference consisting in the different orientation of the bars in the two layers, with respect to a rectangular or square contour: while in the simple (rectangular) grid the bars in the two layers are parallel to the boundary lines, in the oblique grid the bars are inclined to 45° with respect to the same contour.

In a previous study [9], the simple grid has been studied by assimilation to a equivalent continuum, which in the considered case, was a homogeneous torsionless plate.

Compared with the effectively continuous and homogeneous media, in which for a given boundary, the axes orientation does not modify the state of stress, in the case of double-layer simple square mesh grids the qualitatively new difference appears in that, that an oblique angle of the bars, with respect to the boundary, modifies considerably the state of stress and deformation.

* Prof. Dr. MIRCEA SOARE, Str. Pictor Băncilă 22, București 5, Sector 6, Romania.

In the present study the analytical design of double-layer oblique square mesh grids will be developed by two methods. In the first method, one takes into account that, in fact, the oblique grid is a simple one, whose boundary lines are inclined with respect to the bar directions of the top and bottom layers. In the second method is effectuated an axis-rotation, so that the new resulting axes are parallel to the boundary lines, while the bars in the two layers are inclined to 45°.

After having established solutions by means of double and simple trigonometrical series, for the statical behaviour, the free vibrations are examined and a comparison between simple and oblique grids is carried out.

2. Analysis of double-layer simple square mesh grid

In a previous study [10] we have shown according to J. D. RENTON [4], [5] that the equivalent continuum towards which a simple grid tends, when the mesh size vanishes, preserving the geometrical configuration, is a torsionless plate; this is governed by the following partial differential equation, satisfied by the deflections w of the joints in the two layers:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{2p}{kh^2}, \tag{2.1}$$

where it is assumed — by definition — that the bars in the two layers are parallel to the coordinate axes,

h — height of the structure (vertical separation between the two layers),
k — axial stiffness of the bars in the top and bottom layers, presumed to be identical,
p — uniformly distributed load per unit area, resulting from the distribution of the nodal loads, over the afferent surface l^2.

Once the deflections w determined, the displacements of a joint in the bottom layer (A), and top layer (B) respectively, are deduced from the following equations:

$$\begin{aligned} u_B, (-u_A) &= +\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v_B, (-v_A) &= +\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

The expressions of the bar forces in the bottom layer (T, T'), in the top layer (S, S') in the x-direction (T, S), and in the y-direction (T', S') are also deduced:

$$\begin{aligned} T, (-S) &= -\frac{1}{2}khl\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ T', (-S') &= -\frac{1}{2}khl\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

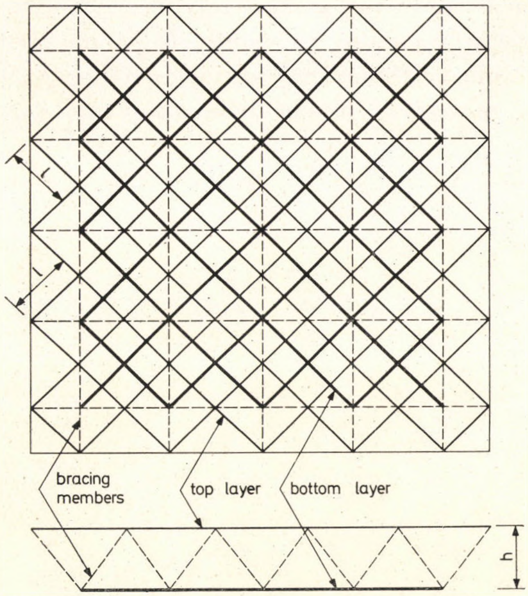


Fig. 1. Geometry of the double-layer oblique square mesh grid

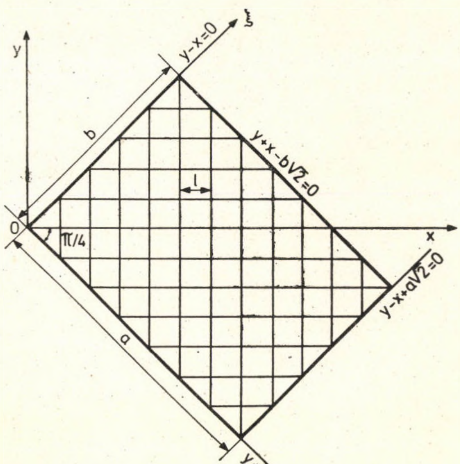


Fig. 2. Simple grid on a rectangular planform, the sides of which are inclined with 45° with respect to the bars in the two layers

In the case of the rectangular planform solutions were established by means of double and simple series of characteristic functions [9], [10].

The oblique grid may be also considered as a simple grid, whose edges are no more parallel to the bars, but inclined with 45°.

Maintaining the same orientation of axes and the origin in one of the corners of the top layer, the edges of the rectangular planform will be the bisecting lines of the coordinate axes, and respectively parallel to these lines at a and b distances (Fig. 2); the equations of these lines are respectively:

$$\begin{aligned} &y - x = 0,\ y - x + a\sqrt{2} = 0; \\ &y + x = 0;\ y + x - b\sqrt{2} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

We shall search a solution of Eq. (2.1), which ensures vanishing deflections along the edges (2.4); an expression of the form

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} \tag{2.5}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

satisfies obviously these conditions.

We calculate the fourth order partial derivatives which appear in Eq. (2.1):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\pi^4}{4} w_{mn} \left(\frac{m^4}{a^4} + 6\frac{m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} - $$

$$- \frac{\pi^4}{4} w_{mn} \left(\frac{m^3n}{a^3b} + \frac{mn^3}{ab^3} \right) \cos \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{4} w_{mn} \left(\frac{m^4}{a^4} + 6\frac{m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} + $$

$$+ \frac{\pi^4}{4} w_{mn} \left(\frac{m^3n}{a^3b} + \frac{mn^3}{ab^3} \right) \cos \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}}$$

and the left member of Eq. (2.1) becomes:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{2} w_{mn} \left(\frac{m^4}{a^4} + 6\frac{m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}}.$$

Expression (2.5) represents a solution of this equation if the load term of the right member can be also expressed in a similar form, say

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}}; \tag{2.6}$$

which is always possible; for example in the case of a uniformly distributed load, we have

$$p(x, y) = p \equiv \frac{16p}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} .$$

$$(m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

The second member of Eq. (2.1) becomes

$$\frac{2p}{kh^2} = \frac{2}{kh^2} \sum_m \sum_n p_{mn} \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} .$$

Comparing the two members, one obtains the expression of the coefficient w_{mn}:

$$w_{mn} = \frac{4}{\pi^4 kh^2} \frac{p_{mn}}{\dfrac{m^4}{a^4} + 6\dfrac{m^2n^2}{a^2b^2} + \dfrac{n^4}{b^4}} , \tag{2.7a}$$

or, denoting the edge ratio $\alpha = a/b$:

$$w = \frac{4a^4}{\pi^4 kh^2} \frac{p_{mn}}{m^4 + 6\alpha^2 m^2 n^2 + \alpha^4 n^4} . \tag{2.7b}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

The deflections are completely determined by the Eqs (2.5) and (2.7). Using the second order derivatives, we can express the bar forces, according to (2.3):

$$\begin{aligned} T, (-S) = \frac{\pi^2}{4} khl \sum_m \sum_n w_{mn} \Bigg[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} - \\ - 2\frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} \Bigg], \end{aligned} \tag{2.8a}$$

$$\begin{aligned} T', (-S') = \frac{\pi^2}{4} khl \sum_m \sum_n w_{mn} \Bigg[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} \\ + 2\frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.8b}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

After the complete determination of deflections and bar forces solution we shall verify the second boundary condition. The simple support condition implies that in the joints on the boundary, the bar forces should have a vanishing resultant in a normal direction; when the support of the grid lies in the top layer, this condition is written (Fig. 3):

$$S + S' = 0.$$

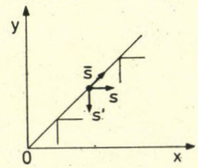


Fig. 3. S-forces along the boundary

From Eqs (2.8a) and (2.8b) there results:

$$S + S' = \frac{1}{2} khl \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) =$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} khl \sum_m \sum_n w_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi(x+y)}{b\sqrt{2}}$$

which vanishes on the four sides (2.4).

The same condition also holds when the support of the grid occurs in the joints of the bottom layer ($T + T' = 0$).

Along the edges it occurs a resultant of the S and S'-forces; let it be $\bar{S}$; for example, along the edge $y - x = 0$, we have

$$\bar{S} = \sqrt{2}\,(S - S') = \frac{1}{\sqrt{2}} khl \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=y} =$$

$$= \frac{\pi^2 khl}{\sqrt{2}\,ab} \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \frac{\sqrt{2} n\pi y}{b} .$$

In order to illustrate the state of stress, we want to present an extremely simple application; assuming that the double-layer square mesh grid has a square planform ($a = b$, $\alpha = 1$) and it is loaded with a double sinusoidal load

$$p(x, y) = \frac{16p}{\pi^2} \sin \frac{\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(x+y)}{a\sqrt{2}} .$$

Then $p_{mn} = p_{11} = 16p/\pi^2$ and from Eq. (2.7b) we deduce

$$w_{11} = \frac{8pa^4}{\pi^6 kh^2},$$

and the deflections w have the following expression:

$$w = \frac{8pa^4}{\pi^6 kh^2} \sin \frac{\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(x+y)}{a\sqrt{2}} . \tag{2.9a}$$

From Eqs (2.8) one obtains for the bar forces:

$$\begin{aligned} T, (-S) = -\frac{4pa_l^2}{\pi^4 h}\Big[\cos \frac{\pi(x+y)}{a\sqrt{2}} \cos \frac{\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} - \\ - \sin \frac{\pi(x+y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(x-y)}{a\sqrt{2}}\Big] = -\frac{4pa_l^2}{\pi^4 h} \cos \frac{\sqrt{2}\,\pi x}{a}, \end{aligned} \tag{2.9b}$$

$$\begin{aligned} T' (-S') = +\frac{4pa_l^2}{\pi^4 h}\Big[\cos \frac{\pi(x+y)}{a\sqrt{2}} \cos \frac{\pi(x-y)}{a\sqrt{2}} + \\ + \sin \frac{\pi(x+y)}{a\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(x-y)}{a\sqrt{2}}\Big] = +\frac{4pa_l^2}{\pi^4 h} \cos \frac{\sqrt{2}\pi y}{a} . \end{aligned} \tag{2.9c}$$

It may be easily seen from (2.9b) that T vanishes for $x = a/2\sqrt{2})$ and $3a/(2\sqrt{2})$ and has negative values in the intervals $0 \ldots a/2\sqrt{2}$ and $3a/2\sqrt{2} \ldots$ $\ldots a\sqrt{2}$ and positive values in the interval $a/2\sqrt{2} \ldots 3a/2\sqrt{2}$. The same variation, of opposite sign, holds for S and a similar discussion may be established for T' and S'.

In this way the grid planform can be divided in a central square inscribed in the basic square and the four corners. The discussion of the state of stress results from Fig. 4.

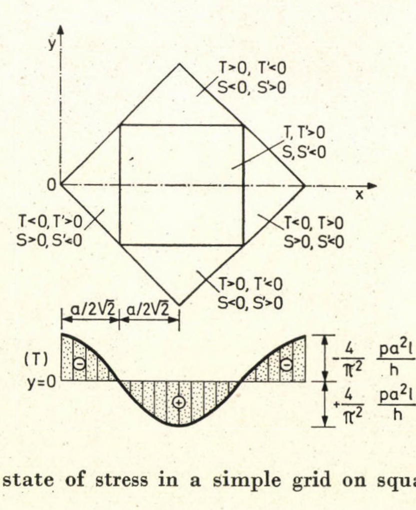


Fig. 4. The state of stress in a simple grid on square planform

This state of stress, essentially different from that of the simple grid, finds a simple physical explanation, when assimilating the space structure with a diagonal grid of beams. These beams have all the same flexural stiffness EI, however, due to the fact that they are inclined with respect to the edges, their relative stiffness EI/l varies considerably. This means that the shorter corner beams, owing to their greater relative stiffness, provide in effect intermediate supports for the longer diagonal beams which thus become continuous beams on yielding supports [2].

3. Deduction of the partial differential equation for the deflections

It is easier to look directly for the solutions, after a previous transforming of the Eq. (2.1), so that the coordinate axes be parallel to the rectangular boundary.

If we choose the axes $\xi\, 0\, \zeta$, according to Fig. 2, the relations between the old and the new axes will be written as

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \zeta), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \zeta),$$

and respectively

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y).$$

Using the relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

one finds the following expressions for the partial derivatives of fourth order of the deflections w:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \zeta} + 6\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} - 4\frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \zeta^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \zeta} + 6\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + 4\frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \zeta^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4}\right).$$

Introducing the two previous expressions in Eq. (2.1) and after all the reductions, we obtain the following partial differential equation:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 6\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} = \frac{4p}{kh^2}.$$

If we return, for the sake of uniformity, to the $x\,0\,y$-axes (Fig. 5), the deflection equation takes its final form:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{4p}{kh^2}. \tag{3.2}$$

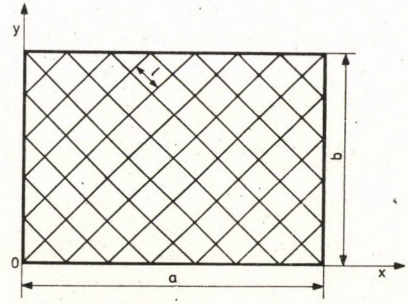


Fig. 5. Double-layer oblique square mesh grid referred to the x 0 y-axes of co-ordinates

It was also deduced by TROFIMOV and BEGUN [11], starting from the assumption that the double-layer mesh grid may be assimilated to a plate (i.e. a continuum which works only in bending and which, consequently, is governed by a fourth order partial differential equation). This is possible only when the bars in the two layers are identical.

The displacements and the bar forces are drawn by means of the transformation relations (3.1) and are written, in a final form

$$\begin{aligned} u_B, (-u_A) &= \frac{h}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ v_B, (-v_A) &= \frac{h}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned} T, (-S) &= -\frac{1}{4}khl\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ T', (-S') &= -\frac{1}{4}khl\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

A comparision of Eqs (2.1), (3.2) and the equation of isotropic plates shows that they can all be considered as particular cases of orthotropic plates governed by the equation [1], [3]

$$A\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K},$$

or, after an affine transformation of the co-ordinate axes:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K}. \tag{3.5}$$

The values of the parameter λ corresponding to the three considered cases and remarks on the possibility of the space grid to work in torsion are given in Table 1.

Table I

Structure	Equation of the deflections	$\lambda =$	Remarks
Isotropic plate*	$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K}$	1	The plate works in torsion
Double-layer simple square mesh grid	$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{2p}{kh^2}$	0	The analogous plate does not work in torsion
Double layer oblique square mesh grid	$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{4p}{kh^2}$	3	The analogous plate works in over-torsion

* The same equation is obtained for the double-layer diagonal square mesh grid, using an approximate method [8].

4. Solutions by means of double trigonometrical series

Solution (2.5) for the deflections and the form of Eq. (3.2) suggests us to look for solutions which are analogous to those met with in the literature of isotropic plates. Thus, if the double-layer mesh grid is simply supported on the boundary (Fig. 5), we can assume that the applied load $p(x, y)$ is expressed by means of double trigonometrical series:

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.1}$$

In this case, we can find for the deflections a solution which has a similar form:

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.2a}$$

which obviously satisfies all the boundary conditions.

Using the same procedure as in Chapter 2, one determines the expression of the constants w_{mn}:

$$w_{mn} = \frac{4}{\pi^4 k h^2} \frac{p_{mn}}{\dfrac{m^4}{a^4} + 6\dfrac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \dfrac{n^4}{b^4}} . \tag{4.2b}$$

For the bar forces, we obtain from Eqs (3.4)

$$\begin{aligned} T,\,(-S) = \frac{\pi^2}{4} khl \sum_m \sum_n w_{mn} \Bigg[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ + 2 \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \Bigg], \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} T',(-S') = \frac{\pi^2}{4} khl \sum_m \sum_n w_{mn} \Bigg[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \\ - 2 \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \Bigg], \end{aligned}$$

where w_{mn} is given by (4.2b).

By the particularisation of the coefficients p_{mn}, for a given external load, the state of stress and deformation will be determined completely.

5. Solutions by means of simple trigonometrical series

A more general solution from the point of view of the boundary conditions and with a higher convergency as in the case of double trigonometrical series may be obtained by means of simple trigonometric series.

For that purpose, it is necessary to have two opposite simply supported sides $x = 0$ and $x = a$. Then, the external load and the deflections may be expressed under the form

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_m p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ w(x, y) &= \sum_m W_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ &(m = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{5.1}$$

where W_m are functions of y which are to be determined.

Introducing the expressions (5.1) in (3.2), after a convenient grouping of terms one obtains:

$$\sum_m \left(W_m^{iv} - 6\frac{m^2\pi^2}{a^2} W_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} W_m - \frac{4p_m}{kh^2} \right) \sin\frac{m\pi x}{a} = 0 .$$

The previous sum can vanish only if each expression in brackets, corresponding to each term m, vanishes; there results that function $W_m(y)$ satisfies the linear differential equation:

$$W_m^{iv} - 6\frac{m^2\pi^2}{a^2} W_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} W_m = \frac{4p_m}{kh^2} . \tag{5.2}$$

The solution of Eq. (5.2) is obtained as the sum

$$W_m = W_m^0 + \overline{W}_m$$

of a particular solution W_m^0 and of the solution of the homogeneous equation

$$\overline{W}_m^{iv} - 6\frac{m^2\pi^2}{a^2} \overline{W}_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} \overline{W}_m = 0. \tag{5.3}$$

A solution of the form

$$\overline{W}_m = e^{m\pi r y/a}$$

is sought for, where r satisfies the characteristic equation

$$r^4 - 6r^2 + 1 = 0,$$

with the roots

$$r_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2} \pm 1.$$

Introducing the simplifying notation

$$\xi_{1m} = \pi(\sqrt{2} + 1) m \frac{y}{a}, \qquad \xi_{2m} = \pi(\sqrt{2} - 1) m \frac{y}{a},$$

the solution of the homogeneous equation is written as a function of four arbitrary constants:

$$\overline{W} = C_{1m} \cosh \xi_{1m} + C_{2m} \cosh \xi_{2m} + C_{3m} \sinh \xi_{1m} + C_{4m} \sin \xi_{2m}.$$

The particular solution can be obtained applying the constant variation method or, in simpler cases, by trial. For example, if $p_m = \text{const}$, there results

$$W_m^0 = \frac{4a^4}{\pi^4 kh^2} \frac{p_m}{m^4} ,$$

and the general solution can be expressed under the form

$$w = \sum_m (W_m^0 + C_{1m} \cosh \xi_{1m} + C_{2m} \cosh \xi_{2m} +$$
$$+ C_{3m} \sinh \xi_{1m} + C_{4m} \sinh \xi_{2m}) \sin \frac{m\pi x}{a} .$$

The arbitrary constants $C_{1m}, \ldots C_{4m}$ are determined from the boundary conditions along the edges parallel to the $0x$-axis.

In certain cases, the particular solution can be written in a closed form; for example, if $p(x, y) = p(x)$, one can find a particular solution w^0 which depends only on x. From

$$\frac{\partial^4 w^0}{\partial x^4} = \frac{4p(x)}{kh^2},$$

we obtain by four times integration:

$$w^0 = \frac{4}{kh^2} \int dx \int dx \int dx \int p(x) dx .$$

6. Free vibrations of the oblique grid

The free vibrations can be easily studied, starting from Eq. (3.2) and replacing the applied load p by the inertia forces $(-\varrho \cdot \partial^2 w/dt^2)$, where ϱ represents the mass of the grid per unit area. We get the equation

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{4\varrho}{kh^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{6.1}$$

Assuming now that the space grid performs a natural mode of vibration, the frequency of which is ω, the solution of Eq. (6.1) should be taken in the following form:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t , \tag{6.2}$$

in which $W(x, y)$ is a certain function of x and y, determining the shape of the normal mode of vibration under consideration.

Expressing that (6.2) satisfies Eq. (6.1) and simplifying with $\sin \omega t$, we get the following partial differential equation:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{4\varrho\omega^2}{kh^2} W = 0 . \tag{6.3}$$

Equation (6.3) is linear and includes only the unknown function W and its fourth order even partial derivatives. As it is homogeneous, it allows the determination of eigen-values.

In order to find the solution, we assume that the space grid is simply supported on the rectangular boundary and, by analogy to Eq. (4.2a), we consider a solution of the same form:

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{6.4}$$

in which w_{mn} are arbitrary constants.

We introduce Eq. (6.4) in (6.3) and obtain

$$\sum_m \sum_n \pi^4 w_{mn} \left(\frac{m^4}{a^4} + 6 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} - \frac{4 \varrho \omega^2}{\pi^4 k h^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

The last expression is identically satisfied only and only if every expression in brackets vanishes, corresponding to each term of rank m, n of the double trigonometrical series; let be

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 k h^2}{4\varrho} \left(\frac{m^4}{a^4} + 6 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right), \tag{6.5}$$

which determines the frequency ω_{mn} corresponding to the m, n mode of vibration.

Introducing the side ratio $\alpha = a/b$, it results from the formula (6.5):

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2 h}{2a^2} \sqrt{\frac{k}{\varrho} (m^4 + 6\alpha^2 m^2 n^2 + \alpha^4 n^4)} = c_{mn} \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{k}{\varrho}}, \tag{6.6}$$

which shows that the frequencies of various orders depend on a numerical coefficient

$$c_{mn} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{m^4 + 6\alpha^2 m^2 n^2 + \alpha^4 n^4} \tag{6.7a}$$

and on the dimension factor

$$\frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{k}{\varrho}}.$$

In the case of the double-layer simple square mesh grid, the coefficient c_{mn} has the expression [10]:

$$c_{mn} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \sqrt{m^4 + \alpha^4 n^4}. \tag{6.7b}$$

The comparison of the two expressions shows that the frequency of the oblique grid is superior to that of the simple grid.

For the lowest frequency and a square planform ($\alpha = 1$), it results

— for the simple grid: $c_{11} = \pi^2 \approx 9{,}8696$

— for the oblique grid: $c_{11} = \pi^2\sqrt{2} \approx 13{,}9577.$

7. Final remarks

In the present study, an analysis method was developed for double-layer oblique square mesh grids, based on the replacement of the discrete structure by an equivalent continuum. In this case, this continuum is a plate which works with over-torsion, the partial differential equation of w-deflections being represented by Eq. (3.2).

The special form of this equation allows us to obtain solutions by means of double and simple trigonometric series. A more general method, based on the introduction of parameters in the origin, will be the object of a future publication.

To conclude, the free vibrations of the grid were studied directly (for the case of a simple support along the boundary sides), replacing the applied load by the inertia forces.

The application of the continuum equivalent method for the statical and dynamical approach of double-layer mesh grids appears thus extremely efficient, since it uses a mathematical apparatus well known in the theory of structures.

REFERENCES

1. Heki, K.—Saka, T.: Stress Analysis of Lattice Plates as Anisotropic Continuum Plates. Paper 7—7, IASS Pacific Symposium-Part II on Tension Structures and Space Frames, October 17—23, 1971, Tokyo and Kyoto.
2. Makowski, Z. S.: Double-Layer Grids. *The Consulting Engineer*, Febr. 1968.
3. Makowski, Z. S.: Prefabricated Double-Layer Grid Roof Frameworks. *Dansk Ingeniørforening* (1972).
4. Renton, J. D.: The Related Behaviour of Plane Grids, Space Grids and Plates. Space Structures (edited by R. M. Davies). Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh, 1967, pp. 19—32.
5. Renton, J. D.: General Properties of Space Grids. *Int. J. Mech. Sci.*, Pergamon Press, **12,** (1970), 801—810.
6. Renton, J. D.: The Formal Derivation of Simple Analogies for Space Frames. Paper 7—5, IASS Pacific Symposium-Part II on Tension Structures and Space Frames, October 17—23, 1971, Tokyo and Kyoto.
7. Soare, V. M.: Modern Problems of Structures: Space Structures (in Romanian), *Revista Construcţiilor*, **20** (1968), 561—568.
8. Soare, V. M.: Contributions to the Study of Double-Layer Diagonal Square Mesh Grids (in Romanian). *Construcţii şi Materiale de Construcţii*, **24** (1970), 423—440.
9. Soare, V. M.: Application of the Equivalent Continuum Method to the Analysis of Double-Layer Parallel Square Mesh Grids. *Buletinul ştiinţific al Institutului de Construcţii Bucureşti*, XIV (1971), 251—269.

10. SOARE, V. M.: The Statics and Dynamics of Double-Layer Simple Square Mesh Grids by Using the Equivalent Continuum Method (in Romanian). *Studii şi cercetări de mecanică aplicată*, **31** (1972), 673—702.
11. TROFIMOV, V. I.—BEGUN, T. B.: The Analysis of the Behaviour of Space Roofs Consisting of Reticulated Space Structures with Regular Configuration (in Russian). *Metallicheskii Konstruktsii* (editor prof. dr. techn. V. A. Baldin), TNIISK V. A. Kucherenko, Isdatel'stvo literaturi po stroitel'stva, Moscow, 1968, 143—170.

Statik und Dynamik der zweilagigen, zweiläufigen schrägen Stabroste. Es wird eine Rechenmethode für zweilagige, zweiläufige schrägen Stabroste entwickelt, die sich auf den Ersatz der diskreten Struktur durch ein gleichwertiges Kontinuum stützt. Im hier betrachteten Falle ist dieses Kontinuum eine mit Übertorsion arbeitende Platte. Die Lösung im statischen Fall wird mittels doppelter und einfacher trigonometrischen Reihen erhalten. Der dynamische Fall wird ebenfalls untersucht, und zwar hinsichtlich der Eigenschwingungen des auf einen rechteckigen Umriß einfach gelagerten Stabrost.

Статика и динамика пространственных пластинообразных косых сеток с квадратной решеткой. В настоящей работе развит метод расчета пространственных пластинообразных косых сеток с квадратной решеткой, основанный на замене дискретной структуры эквивалентной непрерывной средой. В исследуемом случае эта среда представлена плитой, работающей при сверхкручении. Статическое решение основано на применении двойных и одинарных тригонометрических рядов. Исследован также динамический вопрос в отношении собственных колебаний однопролетной сетки прямоугольного контура.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (3—4), pp. 351—382 (1974)

ALLGEMEINTHEORETISCHE ANNÄHERUNG UND NEUE AUSFÜHRUNGSMETHODE DER RUNDHEITSMESSUNGEN IM PRISMA

T. CSERNA*

[Eingegangen am 16. August 1972]

Die Größe der Unrundheit ist bei rundsymmetrischen Maschinengrundteilen (z. B. bei Wälzlagern) ein wichtiger Kennwert der Güte und wird mit verschiedenen Meßgeräten gemessen. Im Prisma läßt sich die Unrundheit durch Verzerrung bestimmen. Die Verzerrungsverhältnisse können analytisch im allgemeinen definiert und graphisch dargestellt werden. Die Ergebnisse von Vergleichsmessungen bestätigen die theoretische Lösung.

1. Einleitung

Die Konstrukteure von Maschinenbauteilen — so auch von Wälzlagern — rechnen mit der idealen geometrischen Gestalt der Grundteile. Diese geometrische Präzision läßt sich aber in den Betrieben nur annähernd erreichen, da sie nämlich von der angewandten Technologie abhängt. Gestaltabweichungen können Schwierigkeiten bei der Montierung und später Betriebsstörungen hervorrufen. Eine typische Gestaltabweichung der rundsymmetrischen Grundteile ist die Unrundheit. Grundteilrundheitsfehler bei Lagerungen erhöhen die mechanischen Verluste, die als Erwärmung und Geräusch auftreten, obwohl dieser Effekt aus mehreren Komponenten besteht [1].

2. Deutungen

Für die Bestimmung der Rundheitsfehler gibt es mehr, in den Einzelheiten voneinander abweichende Definitionen. Alle stimmen aber insoweit überein, daß sie die Rundheitsabweichungen als Funktion einer radialen Strecke zwischen der Rißkurve der wirklichen Oberfläche und eines konstruierten geometrischen Kreises auffassen [2], [3], [4].

Im weiteren wird die Unrundheit nach Bild 1 gedeutet. Als Werkstückmittelpunkt O_m wird der Mittelpunkt des kleinsten Kreises, der sich um die Rißkurve des Werkstückes zeichnen läßt, betrachtet. *Die Größe der Unrundheit* ist die radiale Dicke des, die Rißkurve umfassenden Kreisringes mit Mittelpunkt O_m.

* Dr. T. CSERNA, Vörösvári út 17, 1035 Budapest, Ungarn.

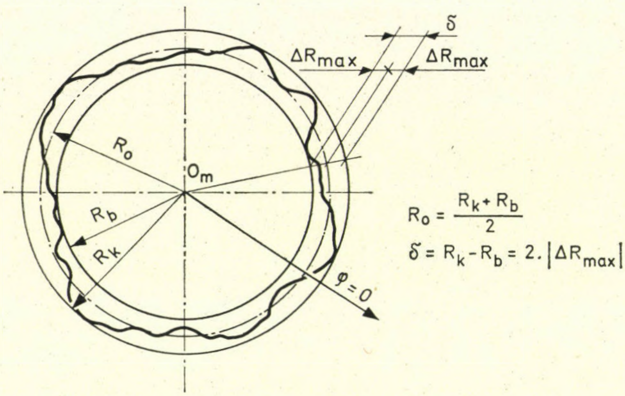


Bild. 1. **Deutung des Rundheitsfehlers. (δ = Größe des Rundheitsfehlers; R_k = Radius des kleinsten Umkreises der Rißkurve; R_b = Radius des größten Inkreises mit Mittelpunkt O_m; O_m = Mittelpunkt des kleinsten Umkreises bzw. des Werkstückes; R_0 = Nennradius; ΔR_{max} = größte radiale Abweichung der wirklichen Rißkurve vom Nennradius)**

Wenn die Polarachse $\varphi = 0$ durch Werkstückmittelpunkt O_m beliebig gewählt und in der Ebene fixiert, ferner das Werkstück um den Mittelpunkt O_m herumgedreht wird, dann wird sich die Strecke ΔR zwischen der Rißkurve und dem nominellen Halbmesser auf der fixierten Achse $\varphi = 0$ in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ verändern. Der Ablauf dieser radialen Veränderung in Abhängigkeit vom Drehwinkel, proportional zum nominellen Halbmesser, ist *der Charakter des Rundheitsfehlers*, der sich im allgemeinen durch folgende Funktion beschreiben läßt:

$$\Delta R = F(\varphi; a), \tag{1}$$

wo a ein, auf die Form des Werkstückes hinweisender Kennwert ist.

Funktion (1) ist offensichtlich stetig und periodisch ($p = 2\pi$) und hat ein Extrem im Intervall $[\xi; \xi \pm 2\pi]$, dessen Wert laut unserer Deutung $\pm \Delta R_{max}$ ist.

Der Charakter der Unrundheit wirklicher Werkstücke ist im allgemeinen unregelmäßig. Es gibt aber auch regelmäßige, oder annähernd regelmäßige Unrunde. Von den letzten sind die Rißkurven der Profile »von gleicher Dicke« oder die der »Scheinkreise« [5], [6]. Diese sind auf Bild 2 dargestellt.

Da die Funktionen der Rißkurven begrenzt und periodisch sind, können die Kurven mittels der Fourierschen Reihe der Funktionen angenähert werden. Die Reihenentwicklung ermöglicht ferner die harmonische Analyse des Problems [7], [8].

Als Ergebnis der Reihenentwicklung kann die Rißkurve des Werkstückes durch folgende Funktion ausgedrückt werden. Die Deutung wird mit Hilfe des Bildes 3 noch leichter gefunden.

$$R(\varphi) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos n(\varphi + \Theta_n) \tag{2}$$

wo $R(\varphi)$ die Funktion der Rißkurven des Werkstückes in Polarkoordinatenform mit Werkstückmittelpunkt O_m ist,
A_n die maximale Amplitude des n-ten harmonischen Störgliedes,
n die Laufzahl der harmonischen Störglieder,
φ den Laufwinkel und
Θ_n den Phasenverschiebungswinkel zwischen den harmonischen Störgliedern mit unterschiedlichen Laufzahlen
bedeuten.

Die beschriebene Näherungsart kann vereinfacht werden, wenn gleichzeitig nur der modifizierende Effekt von je einem harmonischen Störglied bestimmter Laufzahl angenommen wird. In diesem Fall kommen wir zur Konfiguration des Bildes 4.

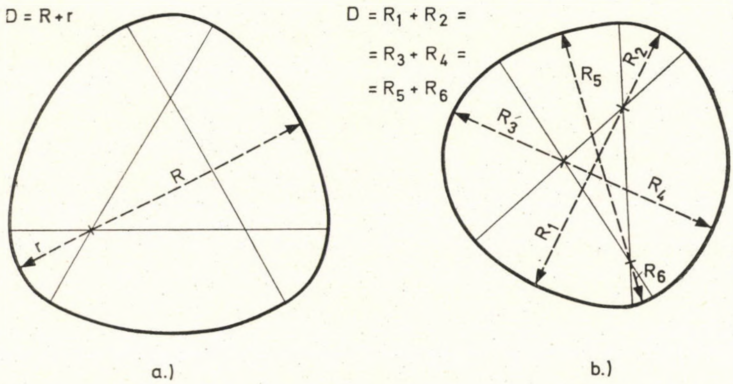


Bild. 2. Schnitte von gleicher Dicke, oder »Scheinkreise«. (a) regelmäßiger »Scheinkreis« — Rundheitsfehler regelmäßigen Charakters, (b) unregelmäßiger »Scheinkreis« — Rundheitsfehler unregelmäßigen Charakters

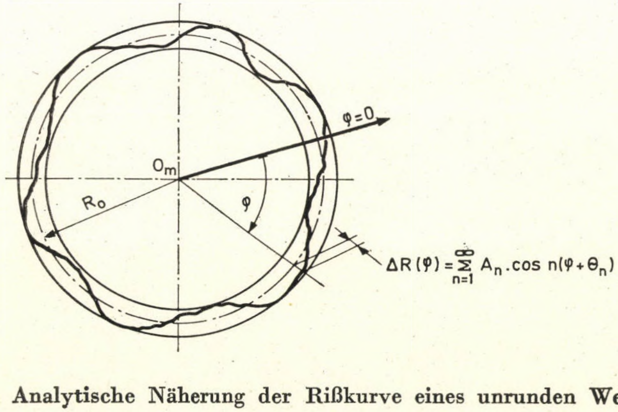


Bild. 3. Analytische Näherung der Rißkurve eines unrunden Werkstückes

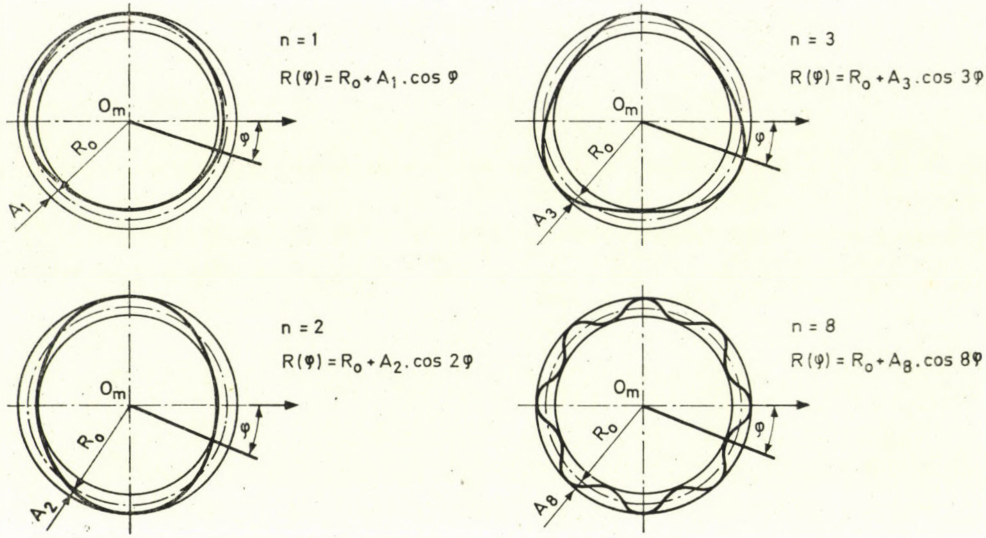


Bild. 4. Mit unterschiedlichen harmonischen Störgliedern Nummer *n* genäherte Rißkurven

Auch die mit den gegebenen harmonischen Störgliedern angenäherte Rißkurve kann »von gleicher Dicke« sein. Der mit harmonischen Störgliedern ungerader Laufzahl berechnete Durchmesser läßt sich im allgemeinen folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} D_{n=2i+1} &= 2R_0 + 2A_n[\cos n\varphi + \cos n(\varphi \pm \pi)] = \\ &= 2R_0 + 2A_n[\cos n\varphi + \cos n\varphi \cdot \cos n\pi \mp \sin n\varphi \cdot \sin n\pi] = \\ &= 2R_0 + 2A_n[\cos n\varphi + (-1)\cos n\varphi] = 2R_0 \neq f(\varphi) \end{aligned}$$

d. h. der Durchmesser ist in jeder Lage gemessen identisch und gleich dem zweifachen des nominellen Halbmessers.

Bild 5 veranschaulicht unregelmäßige Unrunde und die im folgenden gültige Deutung deren Größe.

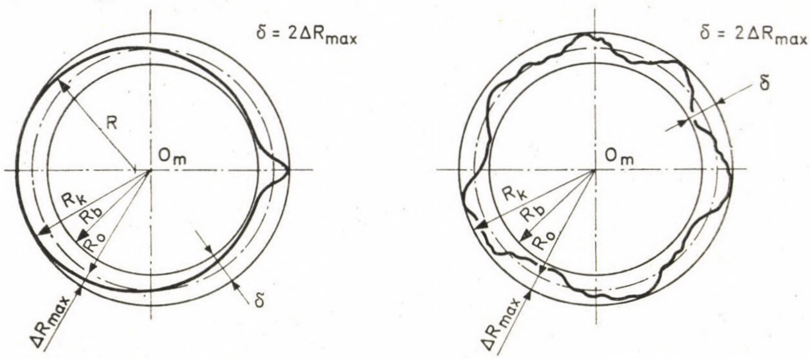


Bild. 5. Deutung der Rundheitsfehler unregelmäßigen Charakters

3. Messungsmöglichkeiten der Unrundheit

Aus der Fachliteratur der Rundheitsmessung — meist aus den umfassenden Werken in diesem Themenkreis [9], [10], [11] — geht hervor, daß die wertmäßigen Unrundheitsmessungen sich in zwei Grundrichtungen entfaltet haben:

1. Direkte Messungen der radialen Differenz, in einfachen Fällen durch Drehen zwischen den Spitzen. Dahin gehören jene Meßapparate mit Präzisionsspindel, die die heute bekannte meist exakte Unrundheitsmessung ermöglichen (Talyrond-Instrumentenfamilie der Firma Taylor-Hobson, die Hommel-Instrumente, usw.). Diese letzteren werden zufolge ihres hohen Kaufpreises und sorgfältiger, fachgemäßer Behandlung in erster Linie in Laboratorien für Kontroll- und Labormessungen eingesetzt [12], [13].

2. Auf vereinfachte Geometrie basierte Meßmethode für Betriebszwecke, mit Prisma, die die radiale Abweichung nicht unmittelbar und mit Verzerrung messen. Die industrielle Praxis entfaltete sich in dieser Richtung, obwohl dabei nur annähernde Meßprinzipien und Ergebnisse erzielt werden können [10], [14], [15], [16], [17].

3.1. *Das Prinzip der Messung mit Prisma*

Die Genauigkeit der Rundheit kann durch die Abtastung des Umrißes der fraglichen Oberfläche kontrolliert werden. Eine Methode dieser Abtastung besteht darin, daß der zu prüfende Körper selbst als Lagerung in einem Prisma mit einem Öffnungswinkel 2γ herumgedreht wird, wobei der Ausschlag des Instruments während einer Umdrehung mit dem Fühler eines zum Prismakörper arretierten Meßinstruments bestimmt wird.

Die Messung in einem Prisma ist die sog. »Dreipunktmessung«, wobei zwei Punkte Berührungspunkte mit dem Prisma sind und der dritte ist der Abtastpunkt.

Für die weiteren Überlegungen wurde das Koordinatensystem laut des Bildes 6 angenommen.

Die Winkel zwischen den Normalen der Seitenfläche eines Prismas mit Öffnungswinkel 2γ und zwischen der y-Achse wird mit α, der zwischen der Versetzungsrichtung des Instruments und zwischen der x-Achse mit β bezeichnet.

Die sog. »Zweipunktmessung«, die in der Praxis für die Bestimmung eines »Ovalität« genannten Umrißfehlers angewendet wird (das ist die allgemein bekannte Weise auch der Durchmessermessung), läßt sich als ein Spezialfall der »Dreipunktmessung« auffassen, wie aus Bild 7 ersichtlich. In diesem Fall — unserer Deutung nach — ist die Umwertung des üblichen Ovalitätswertes $(D - d)$ auf Radiusdifferenz erforderlich. Dieses Glied wird im weiteren mit

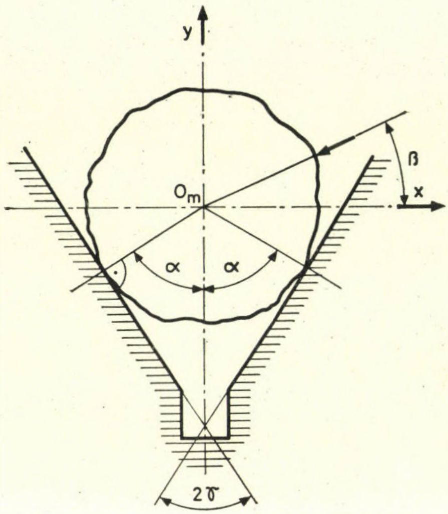


Bild. 6. Schema der Messung mit Prisma und das Koordinatensystem

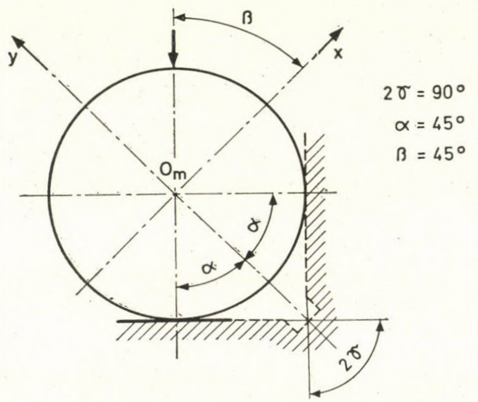


Bild. 7. »Zweipunktmessung« als Spezialfall der »Dreipunktmessung«

dem harmonischen Störglied Nummer $n = 2$ angenähert und die Messung als ein Fall der »Dreipunktmessung« behandelt.

Das Problem der Messung im Prisma wird im Bild 8 vorgeführt.

Es ist leicht einzusehen, daß der gemessene Wert in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Prismas, von der relativen Stellung des Meßfühlers zum Prisma und vom Charakter der Unrundheit des Werkstückes auch bei demselben wirklichen Rundheitsfehler variabel ist, d. h. die Messung *verzerrt*.

Sei der am Instrument gemessene Wert, d. h. der Ausschlag des Zeigers des Instruments mit δ' bezeichnet; dann gilt, laut der obigen Überlegungen, die

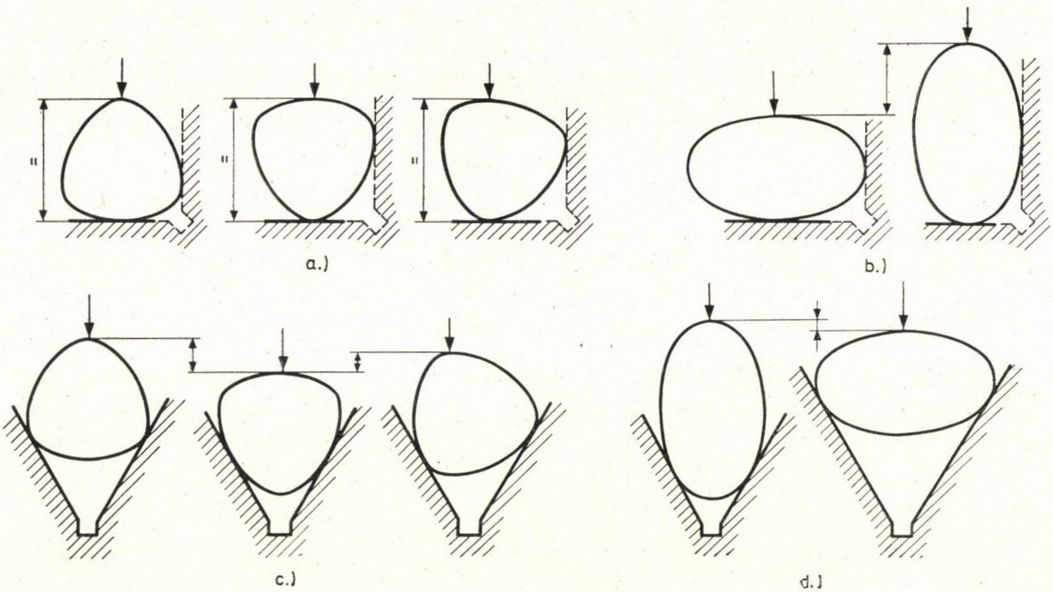


Bild. 8. Verzerrung der Messung im Prisma

folgende Relation bei Messungen im Prisma:

$$k_a = \frac{\delta'}{\delta} = f(\alpha; \beta; a), \tag{3}$$

wo k_a den Verzerrungsfaktor (Reproduktionsfaktor) des Prismas und
a einen den Charakter des Rundheitsfehlers ausdrückenden Faktor
bedeuten.

Aus Relation (3) folgt, daß der Verzerrungsfaktor k_a auch bei den gegebenen Winkelverhältnissen des Meßsystems mit Prisma nicht unbedingt konstant ist, sondern er hängt vom Charakter des Gestaltfehlers des zu messenden Werkstückes ab.

Da der den Charakter des Gestaltfehlers ausdrückende Faktor a bei der Messung unbekannt ist, würde die Messung im Prisma ein zuverläßiges Ergebnis bezüglich der Größe des Rundheitsfehlers geben, wenn die Relation $k_a \neq g(a)$ für das Meßsystem mit Prisma gelten würde — aber ein solches System ist nicht bekannt.

In der Fachliteratur werden die Beziehungen der Messung im Prisma für mit harmonischen Störgliedern, die mit je einer Laufzahl charakterisiert werden können, angenäherte Rundheitsfehler (n-zahlige Eckigkeit, Dreieckigkeit, Fünfeckigkeit usw.) behandelt. In diesem Fall spielt das harmonische Störglied Nummer n die Rolle des Rundheitsfehlercharakters a. Die bekannten und angewandten Meßsysteme mit Prisma sichern, daß der Verzerrungsfaktor k_n bei der Messung der Werkstücke mit Rundheitsfehlern bei den typischsten Laufnummern n identisch oder fast identisch ist.

Eine noch einfachere Variante der erwünschten optimalen Winkelverhältnisse des Meßsystems mit Prisma ist, wenn $\beta = 90°$, d. h. die Anordnung des Meßfühlers in bezug mit dem Durchschnitt des Prismas symmetrisch ist, d. h. wenn sie mit der Winkelhalbierenden koinzidiert (c und d im Bild 8). Die vorteilhafte Lösung ist dann der Prismawinkel $2\gamma = 108°$ [18]. Für die Bestimmung der Verzerrungsfaktoren gibt die Fachliteratur vereinfachte Formeln an [19].

Die Beziehung wird verwickelter, wenn der Fühler des Meßinstruments von der Symmetrie-Ebene rückt, d. h. $\beta \neq 90°$. In der Fachliteratur [20] sind zwei solche zusammengehörende Winkelwerte α und β bekannt, bei welchen die Abhängigkeit des Verzerrungsfaktors k_n von der den angenäherten Werkstückunrundheit ausdrückenden Nummer n bedeutend abnimmt.

Tafel I gibt einen Überblick über die wichtigsten Winkelkombinationen der aus der Fachliteratur bekannten und in der Praxis angewandten Meßinstrumente mit Prisma, sowie über die typischen Verzerrungsfaktoren.

Tafel I

Charakteristische Winkelkombinationen			Für das charakteristische Harmonische (n)								
			2	3	4	5	6	7	8	9	10
2γ	α	β	Werte des Verzerrungsfaktors (k_n)								
60°	60°	90°	0	3		0		0		3	
90°	45°	90°	1	2		2		0		0	
108°	36°	90°	1,38	1,38		2,24		1,38		0	
120°	30°	90°	1,58	1		2		2		1	
60°	60°	60°	1,41	2		2		2		2	
120°	30°	30°	2,38	2		2		2		2	

Nach den bezüglichen Fachliteraturquellen können die folgenden Schlußfolgerungen gezogen werden:

a) Bei Rundheitsmessungen im Prisma läßt sich die Unrundheit mit Verzerrung nachweisen.

b) Die Verzerrung hängt vom Charakter des Rundheitsfehlers, vom Öffnungswinkel des Prismas und von der Winkelstellung des Meßfühlers in bezug auf das Prisma ab.

c) Der Verzerrungsfaktor drückt das Maß der Verzerrung in geeigneter Form aus.

d) Keine Beziehungen werden für beliebige Unrundheitscharakter in der Fachliteratur behandelt. Die Rundheitsfehler werden mit Annahme harmonischer Störglieder Nummer n angenähert und Beziehungen werden auf deren Grund für die Bestimmung optimaler Winkelverhältnisse bzw. Verzerrungsfaktoren bestimmt.

e) Die meist einfache Variante der Messung im Prisma ist, wenn der Meßfühler in die Symmetrieebene des Prismas gestellt wird. In diesem Fall ist der optimale Prismawinkel $2\gamma = 108°$, wobei der Verzerrungsfaktor — je ein Störglied nehmend — bei $n = 2$, $n = 3$ und $n = 7$ identisch, bei $n = 5$ größer und bei $n = 9$ Null ist.

f) Die asymmetrische Stellung des Meßfühlers in bezug auf die Symmetrieebene des Prismas erweitert die Möglichkeiten der optimal wählbaren Winkelverhältnisse, wodurch die Abhängigkeit des Verzerrungsfaktors k_n von der Nummer n weiter abnimmt. Doch hört diese Abhängigkeit auch bei der vereinfachten Annäherung des Rundheitsfehlers nicht ganz auf.

4. Zielsetzungen, Ausgangsbedingungen

Für die allgemeine theoretische Klärung der oben kurzgefaßten Probleme der Rundheitsmessung im Prisma und der Verzerrungsverhältnisse, sowie für die Bestimmung des mit optimal gewählter Winkelkombination gestalteten Meßsystems mit Prisma, sind noch weitere Prüfungen erforderlich. Im vorliegenden Aufsatz werden folgende Fragen beantwortet:

— Ob sich eine Winkelkombination mit der analytischen Deduktion der in der Fachliteratur verfolgten Näherung des Unrundheitscharakters auswählen läßt, aufgrund deren ein Meßsystem mit Prisma so vorteilhaft gestaltet werden kann, daß die Verzerrung bei dem für die Praxis wichtigsten Unrundheitscharakter ($2 \leq n \leq 10$) identisch sei?

— Ob sich das Maß der Verzerrung bei Rundheitsfehler beliebigen Charakters bestimmen ließe, oder ob die Einschränkung der Verzerrung bei den gegebenen Winkelkombinationen möglich sei?

— Ob die Verzerrungsverhältnisse, die Änderung des Verzerrungsfaktors allgemein theoretisch bestimmt werden konnten?

Für die folgende Prüfung gelten die nachstehenden Ausgangsbedingungen:

a) Es wird angenommen, daß während der Messung im Prisma bei Umdrehung des Werkstückes die Rißkurve gleichzeitig die beiden Prismaseiten berührt;

b) daß das Meßinstrument zum Prismakörper arretiert ist und seine Lage mit dem Winkel β bestimmt wird, so daß die Versetzungsrichtung des Fühlers durch den Mittelpunkt O_m des Werkstückes mit nominellem Radius zeigt;

c) daß der Meßfühler während der Umdrehung unbehindert die Änderung der Umrißkurve des Werkstückes folgt;

d) daß sowohl die Berührungspunkte des Prismas, als der Abtastungspunkt und die Versetzungsrichtung des Meßfühlers sich in derselben Ebene, u.zw. in einer zur Längsachse des Werkstückes senkrechten Ebene befinden;

e) daß die Prismaseiten eine ideale Ebene bilden, welche Ebenen zum Radius des ideal runden Werkstückes senkrecht und die Prismaseiten selbst unendlich starr und verschleißfest sind;

f) daß der Meßfühler das Werkstück punktförmig berührt, sein Radius kleiner als die kleinste Wölbung des Gestaltfehlercharakters der Rißkurve ist, und daß er unendlich verschleißfest ist;

g) daß außer dem Rundheitsfehler von allen übrigen Gestaltfehlern, mikrogeometrischen Abweichungen abgesehen wird;

h) daß die Größe des Rundheitsfehlers um Größenordnungen kleiner als der nominelle Radius des Werkstückes ist;

i) daß die Größe und der Charakter des Rundheitsfehlers laut 2. aufgefaßt wird.

5. Analytische Näherung der Rundheitsmessung im Prisma im Falle der Störglieder von harmonischem Charakter

Im ersten Schritt der Prüfung werden Fälle vereinfachter Rundheitsfehlercharakter betrachtet. Für die Näherung wählen wir aus den in 2. erwähnten Möglichkeiten des regelmäßigen Unrundheitscharakters den analytisch verfolgbaren harmonischen Charakter, anstatt der konstruierbaren, aber analytisch komplizierter beschreibbaren »Scheinkreise«. Für diese letzteren wird aber teils die Analogie der nachfolgend abgeleiteten Beziehungen, teils aber die Verallgemeinerung des nachstehend folgenden Punktes gelten.

Die Unrundheit des Werkstückes läßt sich laut Beziehung (2) nähern. Die in Polarkoordinatenform geschriebene Funktion kann auch in einem Koordinatensystem dargestellt werden, wenn als unabhängige Veränderliche der Laufwinkel φ der Umdrehung auf die Abszissenachse aufgetragen wird. Zweckmäßig wird der Schnittpunkt der beliebigen Polarachse $\varphi = 0$ und des mit nominellem Radius konstruierten Kreises als Origo des Koordinatensystems angenommen, wobei die Ordinaten die radiale Abweichung, d. h. die Größe der Unrundheit bedeuten. (Der Werkstückmittelpunkt O_m ist in diesem Koordinatensystem eine von der Abszissenachse in negativer Richtung um den Wert R_0 verschobene, dazu parallele Gerade.) Diese Darstellung ermöglicht, bei der Beschreibung des Gestaltfehlerscharakters vom nominellen Radius abzusehen. Die Aufgabe wird noch einfacher, wenn mit harmonischen Störgliedern gleichzeitig nur mit je einer Laufnummer n gerechnet wird (Bild 4), nachdem dann auch der Phasenverschiebungswinkel θ_n vernachläßigt werden kann. In dieser Weise nimmt die Fehlerfunktion die folgende einfache Form an:

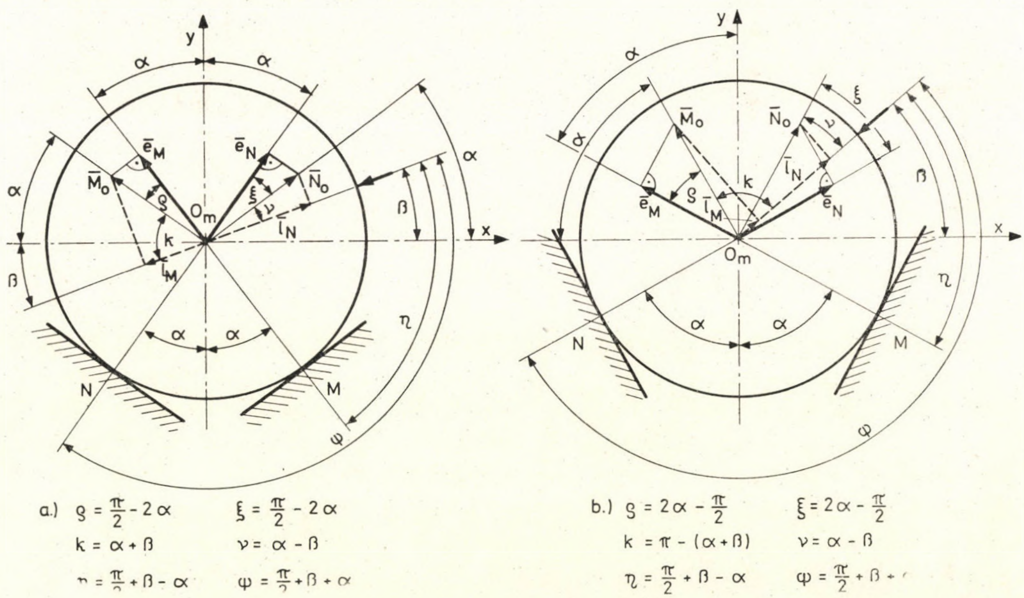
$$\Delta R = A_n \cdot \cos n\varphi \,. \tag{4}$$

Die Frage ist also, mit welcher Verzerrung das Störglied sich laut Funktion (4) im mit den Winkeln α und β gekennzeichneten Meßsystem mit Prisma nachweisen läßt.

Die Beziehungen der Abtastung des mit dem aufgeschriebenen Störglied angenäherten Werkstückes im Prisma können mittels der Analyse der möglichen Verschiebungen des Werkstückmittelpunktes bestimmt werden. Dazu dient die Adaptation einer, in einem anderen Themenkreis abgefaßten Fachliteraturquelle [21], [22] als theoretische Begründung.

Für die analytische Bestimmung der Verzerrungsbeziehungen nehmen wir an, daß die Größe der Unrundheit des Werkstückes in beliebiger radialer Richtung *eine Einheit* ist. Das Werkstück in einem, mit den Winkeln α und β gekennzeichneten Meßsystem mit Prisma umdrehend (Bild 9) sollen drei typische Umdrehungsstellungen betrachtet werden.

Wenn der Rundheitsfehler, dessen Größe die Einheit ist, sich in der radialen Richtung des die Versetzungsrichtung des Meßfühlers bestimmenden Winkels β befindet, dann wird der Meßfühler mit einer Versetzung der Größe e offensichtlich frei von Verzerrung sein.



a.) $\varrho = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ $\quad \xi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$

$k = \alpha + \beta$ $\quad \nu = \alpha - \beta$

$\eta = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \beta + \alpha$

b.) $\varrho = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$ $\quad \xi = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

$k = \pi - (\alpha + \beta)$ $\quad \nu = \alpha - \beta$

$\eta = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \beta + \alpha$

Bild. 9. **Durch Einheitsfehler der Rundheit verursachte Verschiebungen des Werkstückmittelpunktes**

Wenn das Werkstück im Sinne des Uhrzeigers weiter umgedreht wird, erreicht der Einheitsfehler die Prismaseite M. Aus dem Bild ist ersichtlich, daß diese Stellung durch den Phasenverschiebungswinkel η gekennzeichnet wird, der mit den Winkeln des Meßsystems ausgedrückt werden kann:

$$\eta = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha. \tag{5}$$

Prismaseite M berührend verursacht der Einheitsfehler der Rundheit notwendig die Verschiebung des Werkstückmittelpunktes. Der Mittelpunkt O_m sollte sich also in der Richtung des Vektors $\bar{e}_M$ versetzen. Es wurde aber angenommen, daß die Rißkurve des Werkstückes während der Messung gleichzeitig die beiden Prismaseiten berührt; die Verschiebung kann also nur senkrecht zum Radius $\overline{NO}$ erfolgen, d. h., die wirkliche Mittelpunktverschiebung hat die Richtung und Größe $\bar{M}_0$. Der Fühler des Meßgerätes verschiebt sich auch in diesem Falle, u.zw. im Verhältnis zur in der Fühlerverschiebungsrichtung fallenden Projektion $\bar{M}_0$ der Mittelpunktverschiebung. Diesen Instrumentausschlag drückt der Modifizierungsvektor $\bar{i}_M$ aus, dessen Größe sich ebenfalls mit dem das Meßsystem kennzeichnenden Winkeln ausdrücken läßt:

$$i_M = |\bar{i}_M| = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha}. \tag{6}$$

Wenn das Werkstück noch weiter nach dem Besagten gedreht wird, dann wird der Fehler, dessen Größe die Einheit ist, an einer, mit dem Phasenverschiebungswinkel ψ gekennzeichneten Stelle die Prismaseite N erreichen. Der Phasenverschiebungswinkel wird dann offensichtlich

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \beta + \alpha \tag{7}$$

sein.

Die obigen Überlegungen führen uns zu $\bar{e}_N$, bzw. zum die wirkliche Mittelpunktverschiebung bedeutenden Verschiebungsvektor $\bar{N}_0$, der die mit dem Modifizierungsvektor $\bar{i}_N$ ausdrückbare Verschiebung des Meßfühlers ergibt, deren Größe sich mit der folgenden Beziehung bestimmen läßt:

$$i_N = |\bar{i}_N| = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}. \tag{8}$$

Im Bild 9 wurden die das Meßsystem mit Prisma kennzeichnenden Winkel α und β beliebig angenommen. Offensichtlich ist der Interpretationsbereich der typischen Winkel bei der vollständigen Verallgemeinerung des Meßsystems der folgende:

$$0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Beziehungen (6) und (8) gelten nachweisbar in den Interpretationsbereichen (9) und (10).

Die Modifikationsvektoren werden im weiteren als positiv betrachtet, wenn ihre Richtung vom Mittelpunkt O_m zum Abtastungspunkt des Meßinstruments zeigen.

Die laut Gleichung (4) angenäherte Werkstückunrundheit wird an jeder Umdrehungsstelle als Summe teils der Fehlergröße unmittelbar beim Fühler, teils aber der sich aus der Berührung der Prismaseiten ergebenden Mittelpunkt- bzw. Fühlerverschiebung meßbar. Die Funktion der Fühlerverschiebung kann also nach Gleichung (4) in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} m(\alpha; \beta; n; \varphi) &= A_n \cdot \cos n\varphi - A_n \cdot i_M \cdot \cos n(\varphi + \eta) + A_n \cdot i_N \cdot \cos n(\varphi + \psi) = \\ &= A_n[\cos n\varphi - i_M \cdot \cos n\varphi \cdot \cos n\eta + i_M \cdot \sin n\varphi \cdot \sin n\eta + \\ &+ i_N \cdot \cos n\varphi \cdot \cos n\psi - i_N \cdot \sin n\varphi \cdot \sin n\psi] = \\ &= A_n[\cos n\varphi(1 + i_N \cdot \cos n\psi - i_M \cdot \cos n\eta) - \\ &- \sin n\varphi(i_N \cdot \sin n\psi - i_M \cdot \sin n\eta)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Zur Abkürzung der Berechnung führen wir die folgenden Faktoren ein:

$$A = i_N \cdot \cos n\psi - i_M \cdot \cos n\eta, \tag{12}$$

$$B = i_N \cdot \sin n\psi - i_M \cdot \sin n\eta. \tag{13}$$

Mit diesen Kürzungen kann die Gleichung (11) in folgender Form geschrieben werden:

$$m(\alpha; \beta; n; \varphi) = A_n[(1 + A) \cos n\varphi - B \cdot \sin n\varphi]. \tag{14}$$

Die spezielle Form der Funktion (14)

$$m(\alpha; \beta; n; \varphi) = 0 \tag{15}$$

tritt offenbar dann ein, wenn die Bedingungen

$$(1 + A) = 0 \quad \text{und} \quad B = 0$$

gleichzeitig bestehen. Nachweisbar ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$|\beta| = \left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right| \quad \text{und} \quad n = 2i + 1. \tag{16}$$

Bei der Bestimmung der Größe der Unrundheit wird der Ausdruck des größten (bzw. kleinsten) meßbaren Wertes erstrebt. Dazu müssen die Extremwerte der Funktion (14) bestimmt werden, d. h. der Wert der Funktion muß an den aus

$$\frac{\partial m}{\partial \varphi} = 0 \tag{17}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \varphi^2} \neq 0 \tag{18}$$

Beziehungen festgestellten Extremwertstellen ermittelt werden. Die ermittelten Kalküle ergeben:

$$m_{\max} = \pm A_n \sqrt{(1 + A)^2 + B^2}. \tag{19}$$

Die Funktion der Fühlerverschiebung ist offenbar ebenfalls periodisch, ihre Amplitude verzerrt und sie läßt sich mit einer Phasenverschiebung im Verhältnis zum wirklichen Rundheitsfehler kennzeichnen:

$$m' = a_n \cdot \cos n(\varphi + \varepsilon), \tag{20}$$

wo m' den momentanen Wert des Instrumentausschlages bei Winkelstellung φ,
a_n die maximale Amplitude der Fühlerverschiebung,
ε den Phasenverschiebungswinkel zwischen dem wirklichen Werkstückrundheitsfehler und der Fühlerverschiebung
bedeuten.

Extremwerte aus Funktion (20), d. h. der größte Werte des Instrumentausschlages sind:

$$m'_{\max} = \pm a_n. \tag{21}$$

Aus Gleichungen (19) und (21) folgt:

$$\pm a_n = A_n \sqrt{(1 + A)^2 + B^2}. \tag{22}$$

Wenn der Verzerrungsfaktor

$$k_n = \frac{|a_n|}{|A_n|}$$

mit einer Deutung nach Gleichung (3) eingeleitet wird, dann läßt sich die Beziehung ermitteln, die den für die Messung im Prisma des mit n-zähligen harmonischen Störgliedern charakterisierten Werkstückes im allgemeinen kennzeichnenden Index ergibt:

$$k_n = \sqrt{(1+A)^2 + B^2}, \tag{23}$$

wo die Faktoren A und B aufgrund der Entwicklung der Gleichungen (12) und (13)

$$A = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \cos n \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos n\alpha - \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \sin n \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \sin n\alpha, \tag{24}$$

$$B = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \sin n \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos n\alpha + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \cos n \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \sin n\alpha \tag{25}$$

sind.

In den vorliegenden Beziehungen ist der Deutungsbereich der Winkel mit den Grenzen (9) und (10) gegeben.

6. Analytische Bestimmung der Meßmöglichkeiten der unregelmäßigen Unrundheit

Die Durchschnitte der zu prüfenden wirklichen Werkstücke sind nie harmonische, sondern aus Spitzen und Tiefpunkten bestehende unregelmäßige Gebilde. Weitere Überlegungen sind erforderlich um die Meßverhältnisse im Prisma mehr allgemein, analytisch zu bestimmen. Aus der bezüglichen Fachliteratur ist kein verallgemeinendes Prüfungsergebnis mit solchem Zweck bekannt.

Daher müßen die möglichen Fälle der Werkstückmittelpunktverschiebung noch weiter geprüft werden. Im Bild 10 wird die Umgebung des Werkstückmittelpunktes O_m vergrößert dargestellt. Die Berührungspunkte (M und N) der Umrißkurve des Werkstückes wurden mit den Seiten des willkürlich genommenen, mit Winkel α gekennzeichneten Prismas nur figürlich, gestrichelt gezeichnet.

Im Bild 9 wurde die Verschiebung des Mittelpunktes mit Einheitsvektoren bestimmt. Es ist einzusehen, daß sich ein ähnlicher Gedankengang auch dann verfolgen läßt, wenn der den Mittelpunkt verschiebende Effekt der Unrundheit der Größe δ und nicht e geprüft wird. Demgemäß, wenn sich beim Berührungspunkt M eine Unrundheit ($\delta_M = \delta$) der Größe δ ergibt, dann ist die Verschiebung des Mittelpunktes $\overline{M}$; wenn der Fehler ($\delta_N = \delta$) während des Umdrehens den Berührungspunkt N erreicht, dann wird eine Verschiebung $\overline{N}$ des Mittelpunktes ermittelt.

Nachdem das Profil unserer Annahme nach völlig unregelmäßig ist, können im Extremfall Wellenscheitel der Größe δ gleichzeitig bei den Berührungspunkten M und N auftreten. Dann ist die Mittelpunktverschiebung die

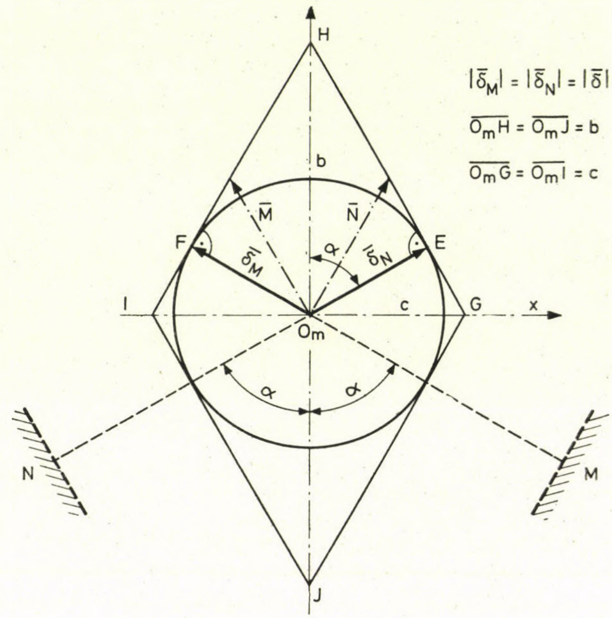


Bild. 10. Mögliche Verschiebungen des Werkstückmittelpunktes durch Rundheitsfehler der Größe δ hervorgerufen (Umgebung des Werkstückmittelpunktes stark vergrößert)

Summe von $\bar{M}$ und $\bar{N}$, d. h. der Mittelpunkt verschiebt sich in Punkt H. Wenn Wellentäler der Tiefe δ gleichzeitig die beiden Prismaseiten erreichen, wird der Mittelpunkt der den vorigen ähnlichen Überlegungen in Punkt J gelangen. Ein anderes Extremfallpaar ist, wenn ein Wellenscheitel der Größe δ die eine Prismaseite berührt und gleichzeitig ein Wellental der Größe δ sich im Berührungspunkt der anderen Prismaseite befindet. Dann wird der Mittelpunkt in die Punkte G bzw. I fallen.

Aufgrund des oben beschriebenen Verlaufes der Mittelpunktverschiebung ist einzusehen, daß wenn zu den Berührungspunkten M und N in den verschiedenen Stellungen der Umdrehung Radiusabweichungen $\delta_M \leqq |\bar{\delta}|$ und $\delta_N \leqq |\bar{\delta}|$ kommen, sich der Werkstückmittelpunkt in Punkte am Unfang oder im Flächeninhalt des Viereckes (GHIJ) verschiebt, die von den gleichzeitigen Radiusabweichungen bei den Berührungspunkten abhängen.

Daraus folgt die Behauptung, daß die möglichen Mittelpunktverschiebungen eines Werkstückes, dessen Unrundheit der gegebenen Größe (δ) ist, während der Umdrehung im mit Winkel α gekennzeichneten Prisma, mit dem Flächeninhalt des Viereckes GHIJ (eines Rhombus) gekennzeichnet werden können. Die Diagonalen dieses Viereckes sind die x- und y-Achse und der Neigungswinkel seiner Seiten wird durch den, für das Prisma α charakteristischen Winkel eindeutig bestimmt. Die Halblängen der Diagonalen lassen sich aus $EHO_m\Delta$ bzw. aus $GEO_m\Delta$ analytisch ausdrücken:

$$b = \frac{|\delta_N|}{\cos\alpha} = \frac{\delta}{\cos\alpha}, \tag{26}$$

$$c = \frac{|\bar{\delta}_N|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\delta}{\sin\alpha}. \tag{27}$$

Um die Unrundheit zu bestimmen, muß die in der Richtung der Fühlerverschiebung fallende Projektion der Mittelpunktverschiebung bestimmt werden. Im Bild 11 wurde der Winkel β beliebig gewählt, der die Verschiebungs-

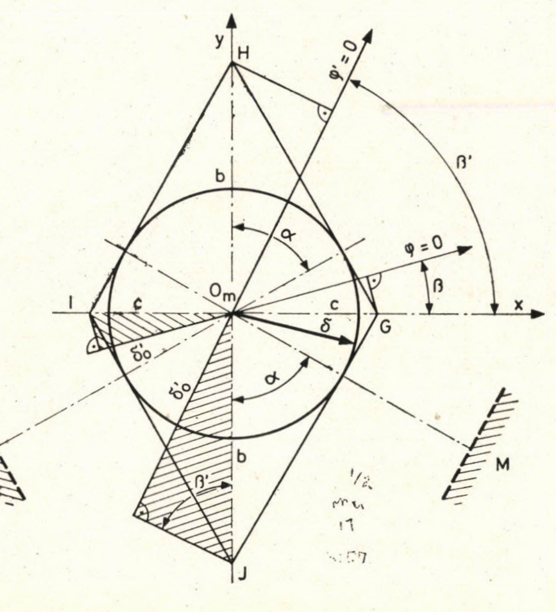


Bild. 11. Rolle der Verschiebungsrichtung des Meßfühlers bei der Messung

richtung des Fühlers kennzeichnet. Beim gewählten Winkel β ist einzusehen, daß der größte Ausschlag durch die Projektion der Halbdiagonale c hervorgerufen wird, der analytisch folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$|\bar{\delta}'_0| = c \cdot \cos\beta = \delta \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}. \tag{28}$$

Wenn der Winkel β vergrößert wird, dann werden beim Wert $|\beta| = (\pi/2) - \alpha$ die gesuchten Projektionen der beiden Halbdiagonalen der gleichen

Größe sein; bei weiterer Vergrößerung des Winkels wird die Projektion des Halbdiagonals b die bestimmende größte Verschiebung in Fühlerrichtung. Diese Stellung wird im Bild durch den Winkel β' bezeichnet, wobei die den größten Instrumentausschlag hervorrufende Projektion folgendermaßen aufgeschrieben werden kann:

$$|\bar{\delta}_0'| = b \cdot \sin\beta' = \delta \cdot \frac{\sin\beta'}{\cos\alpha}\,. \tag{29}$$

Ähnlich wie bei den Überlegungen im Zusammenhang mit Bild 9, muß auch in diesem Fall außer der in die Fühlerrichtung entfallenden Projektion der Mittelpunktverschiebung der Effekt der radialen Abweichung beim Abtastungspunkt in Betracht gezogen werden. Der am Instrument gezeigte Wert wird in jedem Moment die Summe dieser beiden Faktoren. Im Extremfall ist möglich, daß in der mit Winkel β gekennzeichneten Radiusrichtung eben die radiale Abweichung der Größe $|\bar{\delta}|$ kommt, die das Instrument ohne Verzerrung nachweist. Dieser Effekt läßt sich nach Bild 12 darstellen. Die am Instrument nachgewiesene Unrundheit kann also bei einem beliebig gewählten Wert α wie folgt ausgedrückt werden:

$$|\bar{\delta}'| = |\bar{\delta}_0'| + |\bar{\delta}|\,. \tag{30}$$

Setzt man in diese Beziehung den vom Winkel β abhängigen Faktor ein, so erhält man:

$$|\delta'| = \delta\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} + |\bar{\delta}|, \tag{31}$$

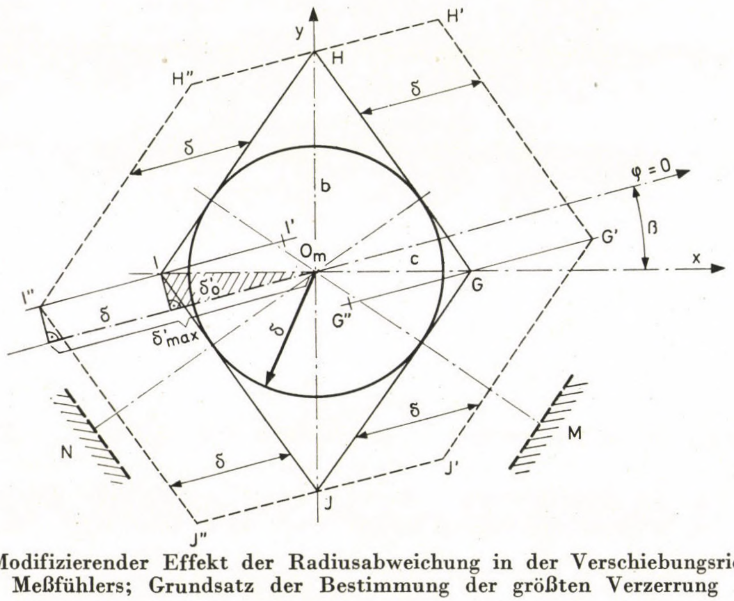


Bild. 12. Modifizierender Effekt der Radiusabweichung in der Verschiebungsrichtung des Meßfühlers; Grundsatz der Bestimmung der größten Verzerrung

und

$$|\bar{\delta}'| = \delta \frac{\sin \beta'}{\cos \alpha} + |\bar{\delta}|. \tag{32}$$

Bei der Prüfung wird die Bestimmung der oberen Grenze der Verzerrung der Unrundheit beliebigen Charakters und einer Größe δ verlangt, d. h., der Wert ($\delta'_{\max}$) wird gesucht. Aufgrund der Beziehungen (31) und (32) ist einzusehen, daß die größte Verzerrung dann erscheint, wenn die Komponenten von gleichem Vorzeichen sind:

$$|\bar{\delta}'_{\max}| = \left| \delta \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} + 1 \right) \right|, \tag{33}$$

und

$$|\bar{\delta}'_{\max}| = \left| \delta \left(\frac{\sin \beta'}{\cos \alpha} + 1 \right) \right|. \tag{34}$$

Führen wir den Verzerrungsfaktor laut Deutung (3) ein, der in diesem Fall als der größte Verzerrungsfaktor betrachtet wird, so erhalten wir

$$k_{\max} = \frac{|\bar{\delta}'_{\max}|}{|\bar{\delta}|} .$$

Aufgrund der obigen kann die allgemein kennzeichnende Beziehung nach Einsetzung der Gleichungen (33) und (34) und nach Reduktion folgenderweise geschrieben werden:

$$k_{\max} = \left| \frac{\cos \beta + \sin \alpha}{\sin \alpha} \right| \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq |\beta| \leqq \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \tag{35}$$

und

$$k_{\max} = \left| \frac{\sin \beta + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right| \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \leqq |\beta| \leqq \frac{\pi}{2} . \tag{36}$$

Es ist einzusehen, daß der Deutungsbereich der kennzeichnenden Winkel mit Beziehungen (9) und (10) gegeben ist, und daß in diesem Deutungsbereich

$$k_{\max} \geqq 2 \tag{37}$$

ist. Die Folgerung läßt sich also ziehen:

Bei Rundheitsmessungen im Prisma kann die Unrundheit gegebener Größe und beliebigen Charakters verzerrt gemessen werden; die Verzerrung hängt nur von den das Meßinstrument mit Prisma kennzeichnenden Winkelverhältnissen ab. Der größte Wert des Verzerrungsfaktors (das Maß der zu erwartenden größten Verzerrung) läßt sich mit Hilfe der Beziehungen (35) und (36) bei beliebiger Winkelkombination bestimmen.

Es kann bewiesen werden, daß die zur Richtung der Fühlerverschiebung senkrechte Verschiebung des Werkstückmittelpunktes einen vernachläßigbaren Fehler in der exakten Messung ergibt.

7. Allgemeine analytische Bestimmung und graphische Darstellung der Rundheitsmessung im Prisma

Als Ergebnis des vorangehenden Punktes läßt sich folgendes feststellen:

a) Der Verzerrungsfaktor bei Rundheitsmessung im Prisma kann im allgemeinen mit einem funktionellen Zusammenhang mit drei Variabeln ausgedrückt werden:

$$k_a = f(\alpha; \beta; a), \tag{38}$$

wo k_a den Verzerrungsfaktor bei Rundheitsfehler beliebigen Charakters;
a den den Charakter des Rundheitsfehlers ausdrückenden Kennwert
bedeuten.

Die Funktion (38) kann in konkreter Form nicht geschrieben werden.

b) Die maximale Größe der Verzerrung wird durch folgende Funktion gekennzeichnet:

$$k_{\max} = g(\alpha; \beta), \tag{39}$$

welche Beziehung in den Formen (35) und (36) geschrieben werden kann und es ist einzusehen, daß

$$2 \leqq k_{\max} \leqq \infty. \tag{40}$$

c) Die möglichen Verschiebungen des Werkstückmittelpunktes O_m analysierend kann auch die untere Grenze der Beziehung ausgedrückt werden:

$$k_{\min} = 0, \tag{41}$$

also

$$0 \leqq k_a \leqq k_{\max}. \tag{42}$$

d) Ein Spezialfall der Funktion (38) wird durch die Annäherung der Unrundheit mit Störgliedern voll harmonischen Charakters erreicht. Dann wird die Funktion des Verzerrungsfaktors:

$$k_n = h(\alpha; \beta; n), \tag{43}$$

deren konkrete Formen mit der Gleichung (23) bzw. mit den zugehörigen Gleichungen (24) und (25) ausgedrückt werden können. Aufgrund des besagten ist einzusehen, daß

$$0 \leqq k_n \leqq k_{\max}. \tag{44}$$

e) Die Beziehung $|\beta| = (\pi/2) - a$ der Winkelverhältnisse ist besonders beachtenswert. Wenn die obige Winkelkombination in die Gleichungen (23) bzw. (24) und (25) eingesetzt wird, erhält man:

$$k_{n=2i} = 2; \quad k_{n=2i+1} = 0; \quad k_{\max} = 2, \tag{45}$$

wo

$$i = 0, 1, 2, 3 \ldots j.$$

Dieses Winkelverhältnis ist im wesentlichen der Fall der »Zweipunktmessung«. Aus Beziehung (45) folgt, daß die Verzerrung des durch gerade Zahlen gekennzeichneten harmonischen Rundheitsfehlers unabhängig von der Lage des »dritten«, des Stützpunktes, d. h. vom Prismawinkel selbst ist.

Die den Verzerrungsfaktor ausdrückenden Winkelbeziehungen als parametrische Funktionen im Raum auffassend ist einzusehen, daß der Wert k_a bei jedem Wert a einen solchen Punkt im rechtwinkligen Koordinatensystem mit ($k_a - \alpha - \beta$)-Achsen im Raum bedeutet, der zwischen der durch ($\alpha - \beta$)-Achsen bestimmten Ebene ($k_{\min} = 0$) und den durch die Gleichung (39) bestimmte Oberfläche$k_{\max}$, oder in der Ebene selbst bzw. an der Oberfläche liegt. Ähnlicherweise ist einzusehen, daß der einen rein harmonischen Rundheitsfehler bedeutende funktionelle Zusammenhang nach Gleichung (43) mit je einer Fläche n = const darzustellen ist und diese Flächen befinden sich ebenfalls zwischen den vorigen Ebene- bzw. Oberflächengrenzen.

Um die Bestimmung der optimalen Winkelverhältnisse der Messung mit Prisma zu kürzen, ist es zweckmäßig die Änderungen der Verzerrungsfaktoren graphisch darzustellen. Diese Aufgabe läßt sich mit der Darstellung der zueinander parallelen Flächenschnitte der im dreidimensionellen Raum ($k_a - \alpha - \beta$) liegenden Oberflächen lösen. Die Schnitte können aufgezeichnet werden; für die gelten:

$$k_a = F_1(\alpha; \beta = \text{const}) \tag{46}$$

und

$$k_a = F_2(\alpha = \text{const}; \beta). \tag{47}$$

Im rechtwinkligen Koordinaten-System nach (46) und (47) im Raum können die Funktionen (39) und (43), d. h. die Änderung des mit rein harmonischem Fehlercharakter angenäherten Rundheitsfehler bzw. des maximalen Verzerrungsfaktors des Rundheitsfehlers beliebigen Charakters, zusammen dargestellt werden.

Die Koordinaten der für die Auftragung der Kurven erforderlichen Punkte wurden aus Gleichungen (23); (24); (25), sowie (35) und (36) mit einem Elektronenrechner bestimmt. Beim Rechnungsverfahren wurde

der Wert α um je 5 Grad,
der Wert β um je 10 Grad

in den Interpretationsbereichen laut (9) und (10) bei den Diskretwerten $n = 2$; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 der die harmonischen kennzeichnende Zahl.

In dieser Weise standen für die Darstellung je eines Diagramms ($k_a - \beta$), bzw. ($k_a - \alpha$) 190 Koordinatenpunkte zur Verfügung und nachdem die untersuchten Funktionen in den Interpretationsbereichen kontinuierlich sind, ließen sich die Kennlinien mit großer Exaktheit darstellen.

Die Richtigkeit der Lösung wird durch Diagramm ($k_a - \alpha$) im Bild 13 bestätigt, wobei der Flächenschnitt der allgemeinen Beziehung dargestellt wird. An diesem Diagramm können sämtliche vorstellbaren, die symmetrischen angeordneten Meßinstrumente mit oberer Fühlerstellung kennzeichnenden Verzerrungsfaktoren, so auch die aus der Literatur und in der Praxis bekannten, in Tafel I zusammengefaßten Fälle abgelesen werden.

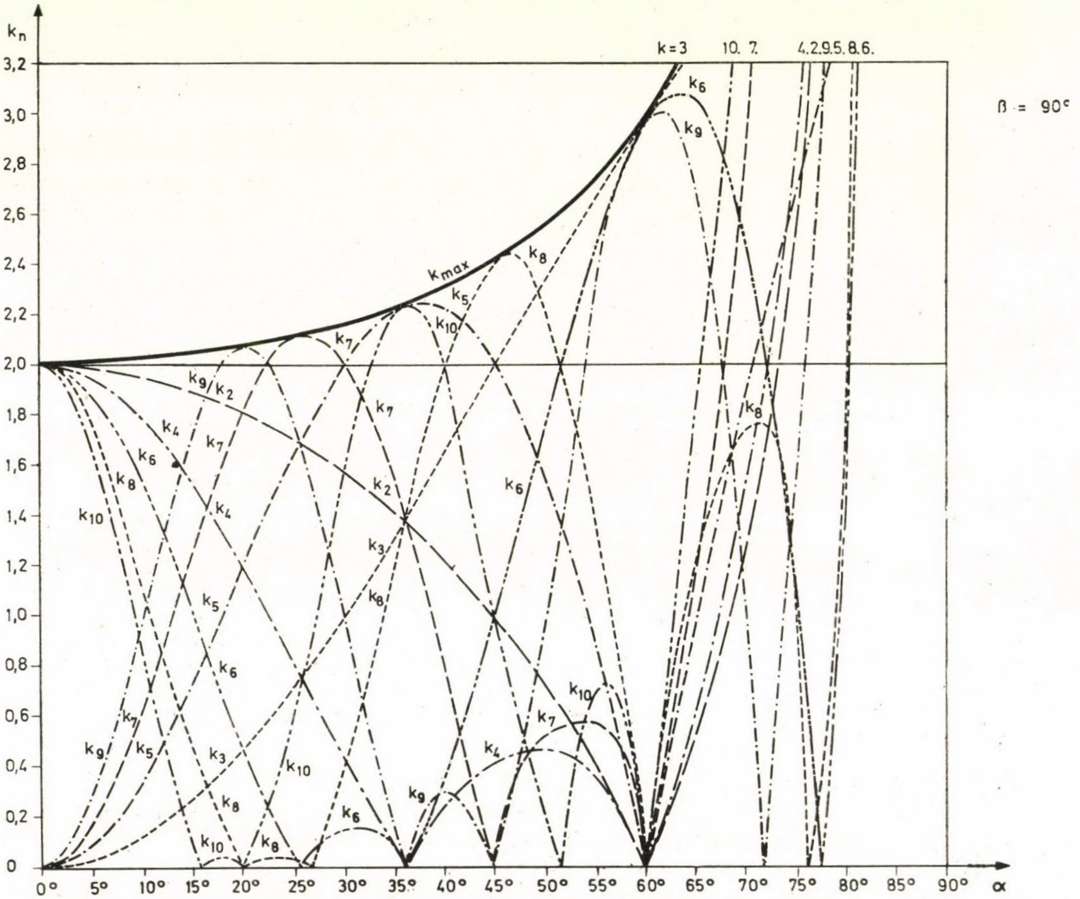


Bild. 13. Änderung der Verzerrungsfaktoren in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Prismas bei »symmetrischer Stellung« des Fühlers ($\beta = 90°$)

Bild 14 weist den Weg für Lösung des Problems.

Am Schnitt $\beta_1 = 60°$ des Diagramms kann abgelesen werden, daß

$$k_{n=2i} < 2; \quad k_{n=2i+1} = 2; \quad k_{\max} = 2{,}732.$$

Am Schnitt $\beta_2 = 30°$ (Fall $|\beta| = (\pi/2) - \alpha$) ist es dagegen ersichtlich, daß

$$k_{n=2i} = 2; \quad k_{n=2i+1} = 0; \quad k_{\max} = 2.$$

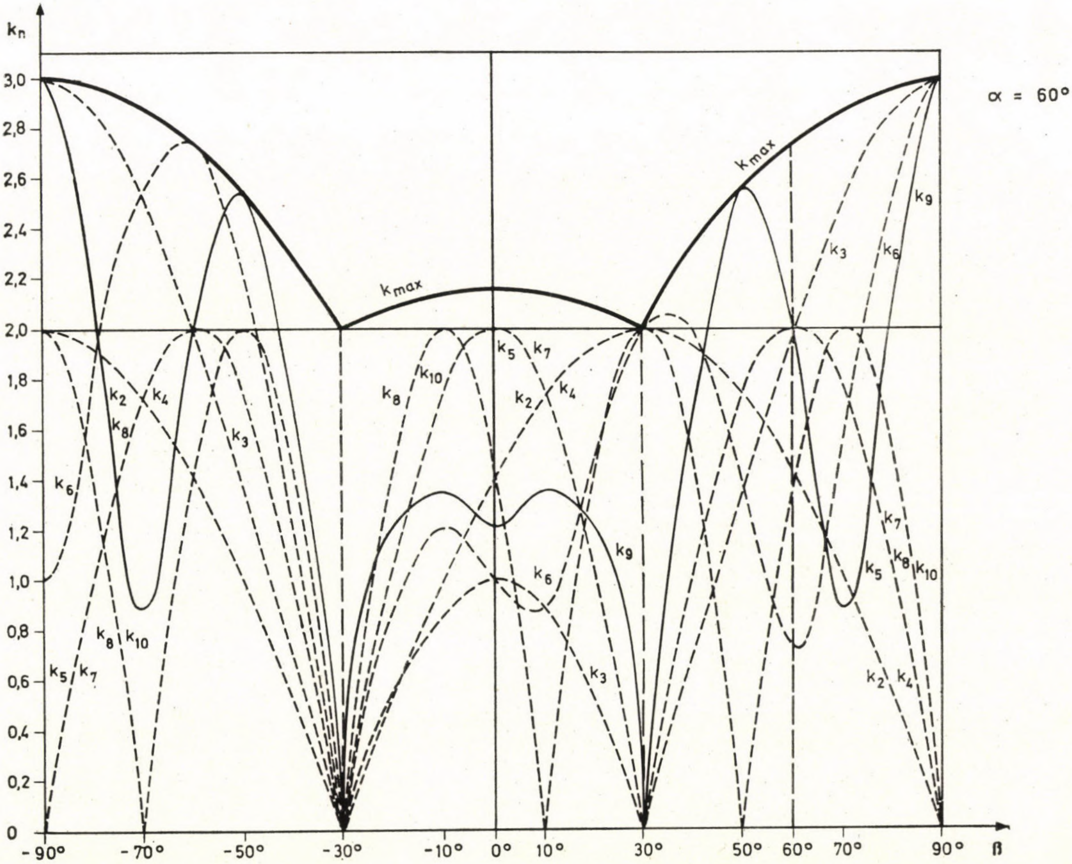


Bild. 14. Änderung der Verzerrungsfaktoren in Abhängigkeit vom Winkel der Meßfühlerstellung beim Prisma mit einem Öffnungswinkel $2\,\gamma = 60°$

Aufgrund des Obigen läßt sich feststellen, daß bei $\alpha = 60°$ ein zu $\beta_1 = 60°$ gestellter Meßfühler den mit ungerader Zahl gekennzeichneten harmonischen Rundheitsfehler (ungerade Vieleckigkeit) aufs zweifache verzerrt fühlt, während die Verzerrung der mit gerader Zahl gekennzeichneten Fehler nicht so stark ist. Aber der zu $\beta_2 = 30°$ gestellte Meßfühler zeigt den mit gerader Zahl gekennzeichneten harmonischen Rundheitsfehler (die gerade

Vieleckigkeit) mit zweifacher Verzerrung, während die mit ungeraden Zahlen gekennzeichneten harmonischen Fehler grundsätzlich nicht wahrgenommen werden.

Diese Erkennung ermöglicht die Gestaltung eines vollständigeren Einzweckinstruments als die bisher bekannten Rundheitsmeßinstrumente.

Nach Bild 15 sei ein mit Winkel $\alpha = 60°$ gekennzeichnetes Prisma, dessen Öffnungswinkel also $2\gamma = 60°$ ist, in welchem das unrunde Werkstück umgedreht und bei $\beta_1 = 60°$ und $\beta_2 = 30°$ mit je einem Meßinstrument abgetastet wird. Von den an den beiden Instrumenten abgelesenen Werten wird *der größere* als der aufs zweifache verzerrte Rundheitsfehler des Werkstückes angenommen.

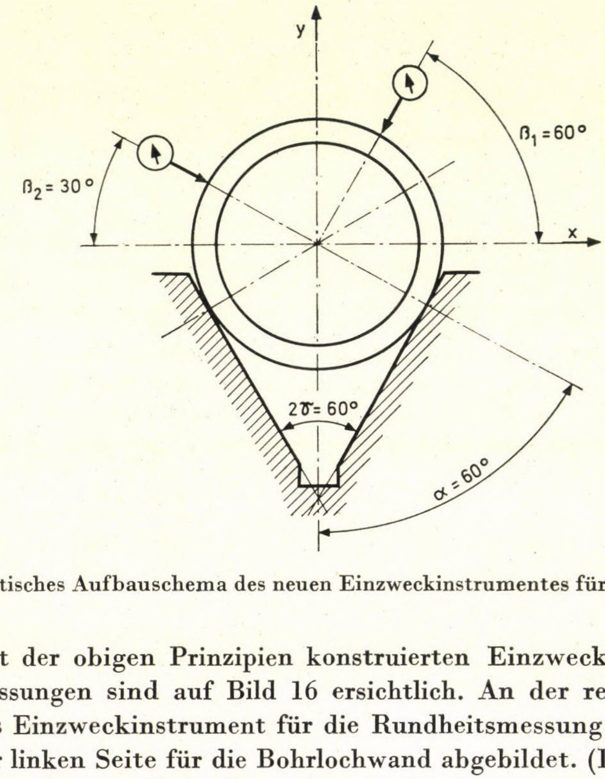


Bild. 15. Theoretisches Aufbauschema des neuen Einzweckinstrumentes für Rundheitsmessung

Die laut der obigen Prinzipien konstruierten Einzweckinstrumente für Rundheitsmessungen sind auf Bild 16 ersichtlich. An der rechten Seite des Bildes ist das Einzweckinstrument für die Rundheitsmessung für die Mantelfläche, an der linken Seite für die Bohrlochwand abgebildet. (Die Prismaseiten sind auf das letztere durch Rollen verkörpert.)

Das so gestaltete Einzweckinstrument besitzt die folgenden vorteilhaften Eigenschaften:

— im Fall $2 \leq n \leq 10$ wird die Abhängigkeit der Rundheitgenauigkeitsmessung mit Prisma von Charakter des Rundheitsfehlers beseitigt;

— die durch die »Zweipunktmessung« und die »Dreipunktmessung« verursachte meßtechnische Gebundenheit wird aufgelöst, d. h. die »Ovalität« wird mit der »Viereckigkeit« zusammen meßbar;

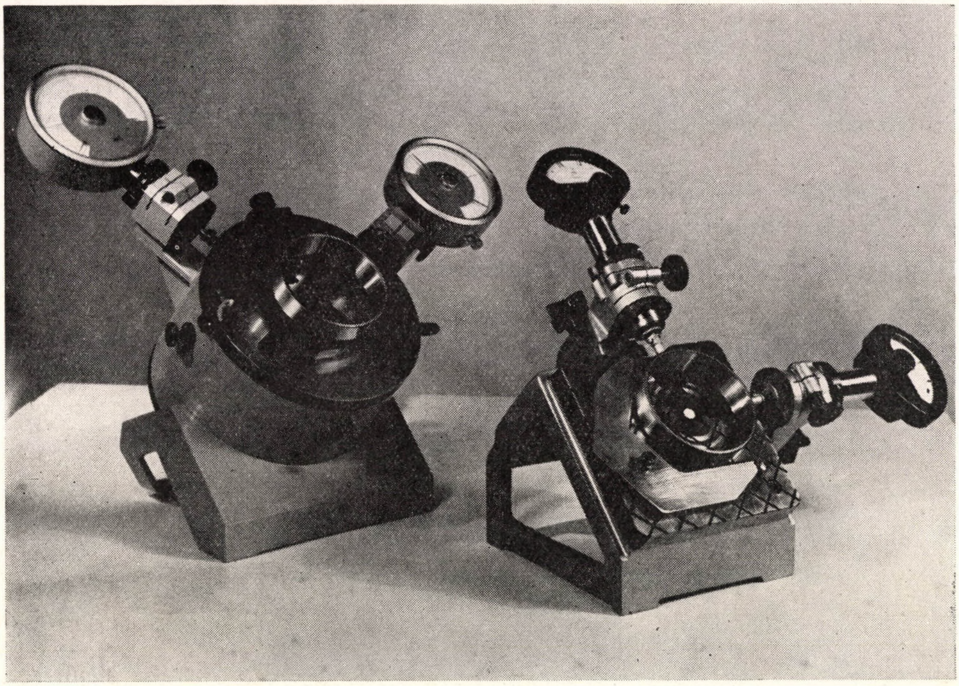


Bild. 16. Experimentelle Einzweckinstrumente zur Rundheitsmessung für Kontrolle der Mantelflächen und Bohrungen

— der Verzerrungsfaktor ist größer als die für das bekannte und angenommene 108°-Prisma allgemein kennzeichnenden Werte, — so können die gemessenen Werte leichter und exakter abgelesen werden;

— da das Prinzip des Instruments auch die herkömmliche »Zweipunktmessung« umfaßt, kann es auch für die gleichzeitige Bestimmung des Durchmessers benutzt werden.

8. Vergleichende Untersuchung der Einzweckinstrumente mit Prisma für Rundheitsmessung

Die theoretischen Überlegungen des vorangehenden Punktes wurden in der Praxis durch Rundheitsmessung bei Werkstücken bestätigt, die in der Wirklichkeit jeweils eine, vom regelmäßigen harmonischen Charakter abweichende Unrundheit aufweisen.

Den Gegenstand für vergleichende Messungen bildeten rundgeschliffene Mantel- und Bohrungsoberflächen der Außenringe von Kegelrollenlagern.

Als wirkliche Unrundheit der Oberflächen wurden die Angaben der am Talyrond-Instrument aufgenommenen und ausgewerteten Diagramme angenommen, die als Vergleichsbasis dienten.

Die Unrundheit der Manteloberflächen wurde im 108°-Prisma und am neuen Einzweckinstrument für Mantelrundheitsmessung, während die Unrundheit der Bohrungen am neu ausgestalteten Einzweckinstrument für Rundheitsmessungen der Bohrung bestimmt. Sämtliche Messungen wurden im identischen, in einem auf die Achse senkrechten Querschnitt durchgeführt.

Sämtliche, an den Instrumenten mit Prisma gemessenen Werte wurden zur von derselben Oberfläche gefertigten Talyrond-Aufnahme ins Verhältnis gestellt, d. h. der *individuelle Vorzerrungsfaktor* wurde in allen Fällen bestimmt. Aus den je Stück und je Oberfläche bestimmten Verzerrungsfaktoren wurden die mathematisch-statistischen Kennwerte bestimmt (Tafel II).

Tafel II

Matematisch-statistische Kennwerte	Prisma mit Öffnungswinkel 108°	Einzweckinstrument zur Rundheitsmessung für Mantelfläche	Einzweckinstrument zur Rundheitsmessung für Bohrung
Arithmetrisches Mittel der Verzerrungen ($\bar{x}$)	1,359	2,024	2,010
Spannweite der Standardabweichung (R)	0,8	0,9	0,9
Empyrische Standardabweichung (s)	0,1347	0,1552	0,1862
Relative Standardabweichung $\left(v = \frac{s}{\bar{x}}\right)$	9,98%	7,66%	9,26%

Es war nicht nötig die Rundheitsfehlerverteilung zu bestimmen, nachdem nicht die Fertigungskontrolle und die Produktenqualifikation, sondern die der mit Verzerrung messenden unterschiedlichen Einzweckinstrumente beabsichtigt war. Das Muster änderte nicht, die Änderung der mathematisch-statistischen Kennwerte charakterisierte also die geprüften Instrumente.

Aus der Wertung der Ergebnisse lassen sich die folgenden Schlüsse ziehen:

a) Trotz der vom regelmäßigen, harmonischen Charakter wesentlich abweichenden Rundheitsfehler der gemessenen Profile stimmen bei den drei unterschiedlichen Einzweckinstrumenten die arithmetischen Mittel $\overline{(x)}$ der Verzerrungen die mit Annahme rein harmonischer Fehler gerechneten theoretischen Verzerrungsfaktoren annähernd überein. (Diese Behauptung gilt am wenigsten für das 108°-Prisma, wofür nämlich die gerechneten Verzerrungsfaktoren in der Funktion der Nummer n abweichen.)

b) Bei der praktischen Anwendung von Einzweckinstrumenten für Mantelrundheits- und Bohrungrundheitsmessungen, deren Verzerrungsfaktoren gleich sind, ist die Größe des Rundheitsfeblers auch bei vom rein harmonischen Charakter abweichenden Unrunden mit identischer, den theoretischen Verzerrungsfaktor sehr gut annähernder durchschnittlicher Verzerrung meßbar.

c) In keinem Fall war der Verzerrungsfaktor bei den zahlreichen gemessenen Profilen größer als der theoretisch bestimmte Wert $k_{max} = 2{,}732$.

Anhang

A) *Die Herleitung der Gleichung (6)*

Für die Herleitung wird auf die Bezeichnungen des Bildes 9 verwiesen.

Der den Punkt M erreichende Einheitsfehler der Rundheit sollte die Verschiebung $\bar{e}_M$ des Mittelpunktes O_m verursachen, das Werkstück rollt aber an der anderen Prismaseite etwa ab und die Mittelpunktverschiebung ($\overline{M}_0$) wird zu der den Punkt N haltenden Prismaseite parallel sein. Der Winkel zwischen den Vektoren $\bar{e}_M$ und $\overline{M}_0$ kann mit der Beziehung

$$\varrho = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

ausgedrückt werden, da der Winkel zwischen der y-Achse und $\bar{e}_M$ mit α gleich ist (Scheitelwinkel), und der Winkel zwischen der x-Achse und $\overline{M}_0$ ebenfalls der Größe α ist (Normalwinkel mit senkrechten Schenkeln).

Aus dem von den Endpunkten der Vektoren $\bar{e}_M$ und $\overline{M}_0$ bestimmten rechtwinkligen Dreieck kann die Größe von $\overline{M}_0$ ausgedrückt werden:

$$|\overline{M}_0| = M_0 = \frac{|\bar{e}_M|}{\cos\varrho} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} .$$

Nach Zerlegen des Nenners ergibt sich:

$$M_0 = \frac{1}{\sin 2\alpha} .$$

Für die Bestimmung der Größe des Modifizierungs-Vektors $\bar{i}_M$ ist die Kenntnis des Winkels $\varkappa$ erforderlich. Dieser ist aber aufgrund des Bildes offenbar:

$$\varkappa = \alpha + \beta .$$

Aus dem von den Endpunkten der Vektoren $\overline{M}_0$ und $\bar{i}_M$ bestimmten rechtwinkligen Dreieck kann folgendes ausgedrückt werden:

$$|\bar{i}_M| = i_M = M_0 \cos\varkappa = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha} . \qquad (6)$$

B) *Die Herleitung der Gleichung (8)*

Die Bezeichnungen der Herleitung wurden dem Bild 9 entnommen.

Der den Punkt N erreichende Einheitsfehler der Rundheit würde die Verschiebung $\bar{e}_N$ des Mittelpunktes O_m verursachen, laut unserer Interpretation erhält aber die Verschiebung zufolge der gleichzeitigen Berührung der anderen Prismaseite den Wert $\overline{N}_0$. Der Winkel zwischen den Vektoren $\bar{e}_N$ und $\overline{N}_0$ läßt sich mit dem von der y-Achse nach rechts liegenden Winkeln ausdrücken:

$$\alpha + \xi + \frac{\pi}{2} + \alpha = \pi ,$$

woraus

$$\xi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha .$$

Aus dem von den Endpunkten der Vektoren $\bar{e}_N$ und $\overline{N}_0$ bestimmten rechtwinkligen Dreieck kann die Größe des Vektors $\overline{N}_0$ ausgedrückt werden:

$$|\overline{N}_0| = N_0 = \frac{|\bar{e}_N|}{\cos \xi} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} .$$

Nach Zerlegen des Nenners:

$$N_0 = \frac{1}{\sin 2\alpha} .$$

Für die Bestimmung der Größe des Modifikationsvektors $\bar{i}_N$ muß der Winkel ν bekannt sein. Aus dem senkrechten Verhältnis zwischen den x- und y-Achsen folgt offenbar aufgrund des Bildes, daß

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \xi + \nu + \beta = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \nu + \beta ,$$

woraus man nach dem Ordnen den Wert

$$\nu = \alpha - \beta$$

erhält.

Die aus dem von den Endpunkten der Vektoren $\overline{N}_0$ und $\bar{i}_N$ bestimmten rechteckigen Dreieck gesuchte Modifikation ist:

$$|\bar{i}_N| = i_N = N_0 \cdot \cos \nu = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha} . \tag{8}$$

C) *Die Herleitung der Gleichung (19)*

Die gesuchte Beziehung wird nach der Bestimmung der Extremwerte der Funktion (14) erreicht:

$$\frac{\partial m}{\partial \varphi} = A_n \left[(1 + A) \cdot n \cdot (-\sin n\varphi) - Bn \cdot \cos n\varphi\right] = 0$$

$$\text{nachdem} \quad A_n \neq 0$$

$$\text{und} \quad n \neq 0$$

woraus

$$(1 + A) \sin n\varphi + B \cos n\varphi = 0$$

$$-\frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi} = \frac{B}{1 + A} .$$

Die Lösung der obigen Gleichung läßt sich mit Hilfe des Bildes 17 graphisch durchführen. Die Extremwertstellen können aus $VWZ\Delta$ bzw. $VW'Z'\Delta$ ausgedrückt werden:

$$\sin n\varphi = \mp \frac{B}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} ,$$

$$\cos n\varphi = \pm \frac{1 + A}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} .$$

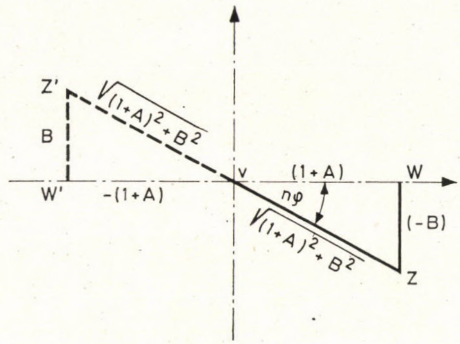


Bild. 17. Graphische Bestimmung der Extremwertstellen für die Herleitung der Gleichung (19)

Zurückeinsetzend wird die Gleichheit erfüllt:

$$\frac{\partial m}{\partial \varphi} = A_n \left[(1 + A) \cdot n \cdot \frac{\pm B}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} - B \cdot n \frac{\pm (1 + A)}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} \right] = 0 ,$$

$$\frac{A_n \cdot n}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} [\pm B(1 + A) \mp B(1 + A)] = 0.$$

In dieser Beziehung ist der Zähler des ersten Gliedes ungleich Null, das zweite Glied ist aber gleich Null. Der Nenner ist von den Bedingungen (16) abgesehen jeweils ein Wert ungleich Null, im Falle der Bedingung laut (16) ist aber die Funktion (14) gleich Null.

Beim Extremwertfall muß auch die nachstehende Bedingung erfüllt werden:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \varphi^2} = A_n[(1 + A) \cdot n^2 \cdot (-\cos n\varphi) - Bn^2(-\sin n\varphi)] \neq 0.$$

Wenn man in die obige Gleichung die Extremwertstellen einsetzt, erhält man:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \varphi^2} = A_n \left[(1 + A)n^2 \frac{\mp (1 + A)}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} - Bn^2 \frac{\pm B}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} \right] =$$

$$= \frac{A_n \cdot n^2}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} [\mp (1 + A)^2 \mp B^2] =$$

$$= \mp A_n \cdot n^2 \sqrt{(1 + A)^2 + B^2} \neq 0,$$

da sämtliche Glieder ungleich Null sind (vom Fall der Bedingung laut (16) abgesehen, dann ist aber die Grundfunktion nach dem Gesagten gleich Null).

In dieser Weise hat die Funktion an den Extremwertstellen Extremwerte, welches Extremwertpaar aus der Gleichung (14) ausgedrückt werden kann:

$$m_{\max} = A_n \left[(1 + A) \frac{\pm (1 + A)}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} - B \frac{\mp B}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} \right] =$$

$$= A_n \frac{\pm (1 + A)^2 \pm B^2}{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2}} = \pm A_n \sqrt{(1 + A)^2 + B^2} . \qquad (19)$$

D) *Die Herleitung der Beziehungen (24) und (25)*

Setzen wir die Ausdrücke (5), (6), (7), (8) in den Gleichungen (12) und (13) ein:

$$A = i_N \cos n\psi - i_M \cos n\eta =$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha} \cos n\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)+\alpha\right] - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha} \cos n\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\alpha\right] =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha}\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha\right] -$$

$$- \frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha\right].$$

In Wirklichkeit haben die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$ keine Bedeutung, da beim ersten die zwei Prismaseiten im wesentlichem sich gegenseitig decken; der andere bedeutet dagegen die Überbestimmung des Systems, d. h. in diesen Extremfällen kann von einem Prisma nicht mehr gesprochen werden. Das hat gleich zur Folge, daß die Faktoren des Nenners der vorigen Beziehung ungleich Null sind und die Kürzung sich durchführen läßt.

Es kann also geschrieben werden:

$$A = \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha +$$

$$+ \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha -$$

$$- \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha +$$

$$+ \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha =$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha. \tag{24}$$

Und in ähnlicher Weise:

$$B = i_N\cdot\sin n\psi - i_M\cdot\sin n\eta =$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha}\sin n\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)+\alpha\right] - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}\sin n\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\alpha\right] =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\left[\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha\right] -$$

$$- \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\left[\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha\right] =$$

$$= \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha +$$

$$+ \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha -$$

$$- \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \frac{\cos\beta}{2\sin\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha +$$

$$+ \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha - \frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha =$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos n\alpha + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\sin n\alpha. \tag{25}$$

SCHRIFTTUM

1. Blüm, H.: Messung der Gestaltabweichungen an Wälzlagerteilen. — *Feingerätetechnik*, **8** (1971), 211—215
2. ГОСТ—10356—63. Отклонения формы и расположений поверхностей. Основные определения. Продельные отклонения. 1963. (Sowjetischer Standard).
3. BS: 3730,64. Methodes for the Assessment of Departures from Roundness, 1964. (Britischer Standard).
4. MSZ 14001. Az alakhűség és helyzetpontosság alapfogalmai (Grundbegriffe der Formgerechtigkeit und der Lagenexaktheit), 1966. (Ungarischer Standard)
5. Szabadits Ö.: Állandó érintőirányú leképezés és a K-profil analízise. (Stetige tangentielle Abbildung und die Analyse des K-profils). Sonderdruck aus *MTA Műszaki-Tudományos Osztályának Közleményei*, (1962), 140—164
6. Szőke B.: A forgácsolószerszámok geometriája (Geometrie der Schneidwerkzeuge). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966, 37—38
7. Wiemer, A.—Pich, R.—Lehman, R.: Das Messen von Unrunden. — *Feingerätetechnik*, **4** (1955), Heft 8
8. Tomaszewski, A.: Analiza harmóniczna blendów ksztaltu i chropowatosci zarysów kolowych. (Harmonische Analyse der Gestaltfehler und Oberflächenrauheit der Kreisprofile). *Mechanik* **39,** (1966), Sept.
9. Schneider, E. J.: Roundness Measurement. — *Mechanical Engineering* **36** (1969). Nov. S. 36—40.
10. Breitinger, R.: Rundheitsmessung in Theorie und Praxis. — *Werkstattstechnik* **55** (1965), H. 12.
11. Reason, R. E.: 1966 Report on the Measurement of Roundness. Leicester 1966.
12. Perthen, J.: Die Elektronik in der Oberflächenmessung. — *VDI-Berichte* **90** (1965) 15—19.
13. Bianchi, B.: La metrologia delle superfici: i rilievi di forma nel controlle e nella ricerca industriale meccanica. (Meßtechnik der Oberflächen: Messung der Formgerechtheit bei der Kontrolle und bei der industriellen Entwicklung). *Giornale ad atti della »Associazione Technica dell'Automobile«* **21** (1968), 651—663.
14. Appareil de mesure industrielle d'erreurs de forme de pièces de révolution. — *Machine-Outil*, No. 281, décembre 1971.
15. Tatsachen und Vorgänge im Gebiet der Meßtechnik. — *SKF Wälzlagertechnische Mitteilung*, (1958), Nr 42.
16. Bobovics, G.: Optimális háromérintkezős becslési módszerek körhagyósági hibáknál. (Abschätzungsmethoden mit optimalen Dreipunktberührungen bei Unrunden). *Technisch-Ökonomisches Bulletin der RGW-Kooperationsorganismen für die Wälzlagerindustrie* (Ungarisch), (1967), Juni, № 4.
17. Duthaler: Pontatlan körkeresztmetszetű furatok mérése mechanikus hárompontos mérőműszerrel (Messung ungenauer Rundbohrungen mit mechanischem Dreipunktmeßinstrument). GTE-Vorlesung, Budapest 1966.
18. Steger, A.: Zur Messung der Unrundheit von spitzenlos geschliffenen Werkstücken. — *Feingerätetechnik* **7** (1958), Heft 4—5.
19. Филкин, В. П.: К вопросу контроля формы круглих деталей. Труды Института Машиноведения. Семинар по точности в машиностроении и приборостроении. Вып. 8. Изд.-во. АН СССР, 1955.
20. Палей, М. А.: Трехконтактное устройство для контроля некруглости. — Станки и Инструмент, Вып. 1., 1964.
21. Алперович, Т. А.: Теория копирования погрешностей базовой поверхности при внутреннем шлифовании. — Станки и Инструмент, Вып. 5. 1966.
22. Cserna, T.: Csúcsnélküli furatköszörülésnél fellépő alakhibák meghatározása (Bestimmung der beim spitzenlosen Innenschleifen auftretenden Gestaltfehlern). Dissertation, BME 1970, Budapest.

A General Theory of Roundness Measurement in Vee-blocks. The size of the roundness error in rotating, centrally symmetrical machine elements (e.g. rolling bearings) is an important quality factor. Various measuring instruments are known to measure it. In a Vee-block, the departure from circular shape can be measured, but with distortion. The distortion can in general be analyzed and represented graphically. Results of comparative measurements confirm the theoretical solution.

Общее теоретическое приближение и новый практический метод измерения круглости в призме, уделяя при этом особое внимание исследованию элементов подшипников качения. Размер погрешности круглости в случае вращающихся центрально симметричных элементов машин (напр. подшипников качения) является важной характеристикой качества. Для измерения этой погрешности известны различные измерительные приборы. В случае призмы погрешность круглости может быть измерена с искажением. Условия искажения могут быть определены в общих чертах аналитическим путем и изображены графическим способом. Результаты сравнительных измерений подтверждают правильность теоретических решений.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (3—4), pp. 383—411 (1974)

BERECHNUNG VON EINSCHICHTIGEN, AUF BIEGUNG BEANSPRUCHTEN ANISOTROPEN FACHWERKSCHALEN

A. KEREK*

[Eingegangen am 22. Nov. 1972]

Dargestellt wird die Berechnung des allgemeinsten Falls der einschichtigen räumlichen Dreieckfachwerke mit Hilfe der Kontinuitätsmethode. Die Festigkeitskennwerte des vom statischen Standpunkt dem Fachwerk gleichwertigen Kontinuums (d. h. der anisotropen, auf Biegung beanspruchten Schale) werden ermittelt, die Hauptdifferentialgleichungen aufgeschrieben, und dann werden, in Abhängigkeit von den Schnittkräften (Membrankräften, spezifischen Momenten) die in den Stäben des Fachwerks entstehenden Beanspruchungen (Stabkräfte, Stabmomente) bestimmt. Die Ableitungen erstrecken sich auch auf Fälle, wo die Schale in eine Flachplatte übergeht und auch die Bedingungen der Orthotropie werden gesondert behandelt.

Bezeichnungen

Im Aufsatz werden folgende Bezeichnungen benutzt:

1, 2, 3	Indexe der gleichgerichteten, in zueinander parallelen vertikalen Ebenen liegenden Stabreihen;
α, β, γ	— durch die Stabreihenebenen gebildete Winkel;
l_1, l_2, l_3	— Stablängen zwischen zwei Knotenpunkten;
a_1, a_2, a_3	— Achsenabstand der Stabreihen 1, 2, 3;
F_1, F_2, F_3	— Querschnittflächen der den Stabreihen 1, 2, 3 zugehörigen Stäbe;
I_1, I_2, I_2	— Trägheitsmomente der Stabquerschnitte;
I_{1t}, I_{2t}, I_{3t}	— Torsionsträgheitsmoment der Stäbe;
E	— Elastizitätsmodul des Stabwerkstoffs;
G	— Schub-Elastizitätsmodul des Stabwerkstoffs;
S_1, S_2, S_3	— in den Stäben der Stabreihen auftretende Stabkräfte;
M_1, M_2, M_3	— in den entsprechenden Stäben auftretende Biegemomente, die positiv sind, wenn sie unten eine Zugspannung hervorrufen;
M_{1t}, M_{2t}, M_{3t}	— in den entsprechenden Stäben auftretende Torsionsmomente, die positiv sind, wenn sie die Kanten des Stabes rechtsgängig verdrehen;
n_x, n_y, n_{xy}	— Membranschnittkräfte;
m_x, m_y, m_{xy}	— Biegeschnittkräfte;
q_x, q_y	— spezifische Schubkräfte;
u, v, w	— Axialverschiebungen;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$	— Komponenten der Dehnungsverformungen;
$\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_{xy}$	— Komponenten der Biegeverformungen;
p	— die Schale senkrecht angreifende Komponente der äußeren Belastung;
Φ	— Spannungsfunktion, die mit den Membrankräften die folgenden Funktionen bildet:

$$n_x = \frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}, \quad n_y = \frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}, \quad n_{xy} = \frac{\delta^2\Phi}{\delta x \cdot dy}$$

* Dr. A. KEREK, Weiner-k. 2, Dunaújváros, Ungarn.

L — der Pucherse Operator:

$$L = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta y^2} - 2\,\frac{\delta^2 z}{\delta x \cdot \delta y} \cdot \frac{\delta^2}{\delta x \cdot \delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta x^2}$$

$\mathbf{F}$ — Drehmatrix;
$\mathbf{A}$ — Zugsteifigkeitsmatrix;
$\mathbf{B}$ — Biegesteifigkeitsmatrix;
$\partial/\partial x(\ )$ $\equiv (\ )'$
$\partial/\partial y(\ )$ $\equiv (\ )^{\cdot}$

1. Einleitung

Das Dreieckfachwerk ist vom Standpunkt der Berechnung das Einfachste in dem Fall, wenn es doppelschichtig ist (in diesem Fall wirkt nämlich nur die Zugsteifigkeit EF in den Stäben) und das Stabnetz der beiden mit Gurtstäben verbundenen Gurtebenen gleichseitige Dreiecke bildet. Angenommen, daß die Steifigkeit der beiden Gurtebenen einander gleich ist, besteht eine sehr einfache Abhängigkeit zwischen der Zugsteifigkeit der ganzen Konstruktion und derselben einer von der beiden Gurtebenen. Diese Konstruktion wurde das erste Mal von WRIGHT, im Jahre 1966 behandelt [15].

Das Ersatzkontinuum ist hier eine als isotrop annehmbare Vollplatte.

Die Aufgabe wird verwickelter, wenn das aus den gleichseitigen Dreiecken bestehende Fachwerk einschichtig ist, denn in diesem Fall werden sowohl die Biegesteifigkeit EI als auch die Torsionssteifigkeit GI_t in Anspruch genommen. Auch hier ist das Ersatzkontinuum isotrop, jedoch sind die Einschnürungsbeiwerte der Dehnung auf der Biegung verschieden [3].

Der nächste Schritt war die Lösung des doppelschichtigen Fachwerks mit ungleichseitigem Dreiecknetz [5]. Es wurde eindeutig klargestellt, daß das Ersatzkontinuum des Dreieckfachwerks nur in einem und einzigen Fall isotrop werden kann, nämlich wenn es sich um ein aus Stäben von gleicher Zugfestigkeit zusammengesetztes gleichseitiges Dreieckfachwerk handelt.

RÓZSA [8] und SZMODITS [12] haben die Differentialgleichung der Ersatzplatte des einschichtigen aus auch gegen Biegung steifen Stäben zusammengesetzten, aeolotropen Fachwerks, jedoch nur für Fachplatten aufgeschrieben.

Auf die als Ersatzkontinuum anwendbare Schale übergehend haben WLASSOW [14], FLÜGGE [2], SOARE [10] u. a. die allgemeinen Diffenrentialgleichungen der Schale, jedoch nur aufgrund der Annahme von homogenen und isotropen Materialien aufgeschrieben.

Der vorliegende Aufsatz behandelt den allgemeinsten Fall des Dreieckfachwerks, wozu die auch Gleichungen der anisotropen, inhomogenen flachen Schale aufgeschrieben werden mußten.

2. Zielsetzung, Berechnungsmethode

Zweck der Abhandlung ist die Erläuterung der Berechnung von einschichtigen räumlichen, aus allgemeinen Dreiecken zusammengesetzten Fachwerke, aufgrund des kontinuierlichen Berechnungsmodells. Die obenerwähnte, zur Bestimmung des Kräftespiels dienende Methode betrachtet das räumliche Fachwerk als ein Kontinuum. Ihr Grundprinzip ist die Ermittlung der Steifigheitsbeiwerte des statisch gleichwertigen Ersatzkontinuums (Schale, Platte), führt die Rechnungen mit denselben durch und überträgt die erhaltenen Ergebnisse auf das Fachwerk.

Eine wirtschaftliche Ausbildung des einschichtigen Fachwerks kann man sich nur dann vorstellen wenn das Dreiecknetz in einer gekrümmten Ebene liegt.

Für die Berechnungen stellt man die folgenden Annahmen auf:

a) jeder einzelne Stab des Fachwerks liegt in einer von den drei verschiedenen vertikalen Ebenen;

b) in jedem Knotenpunkt begegnen sich drei Gitterstäbe;

c) die Längen- und Querschnitte der zu einer Richtung parallelen Stäbe sind konstant;

d) der Werkstoff der Gitterstäbe ist homogen, isotrop und elastisch;

e) für die Knotenpunkte nimmt man an, daß sie eine steife räumliche Verbindung der Stäbe sichern;

f) die auf die Mittelfläche des Fachwerks senkrecht stehenden Geraden bleiben auch nach der Verformung geradlinig und senkrecht zur deformierten Mittelfläche der Schale;

g) die Verschiebungen sind im Verhältnis zur Stärke der Ersatzschale gering;

h) auf die Mittelfläche senkrecht wirkende Spannungen werden vernachläßigt;

i) die Abmessungen des Fachwerks sind so gewählt, daß es als flache Schale behandelt werden kann.

Um das Ersatzkontinuum nicht nur als eine Membranschale (die nicht immer stabil ist), sondern auch als biegesteife Schale behandeln zu können, berücksichtigt man in den Berechnungen die Zugsteifigkeit EF, die Biegesteifigkeit EI und die Torsionssteifigkeit GI_t der einzelnen Stäbe.

Die Berechnungen des Fachwerks werden in zwei Schritten durchgeführt:

1. Als erster Schritt werden die Zug-, Biege- und Torsionssteifigkeit des Fachwerks, dann die in den einzelnen Stäben auftretenden Stabkräfte und Stabmomente aus den Schnittkräften des Kontinuums ermittelt;

2. Im zweiten Schritt werden die das Gitterwerk ersetzenden Differentialgleichungen mit Hilfe der Steifigheitsbeiwerte aufgeschrieben. Dieses Kontinuum ist jetzt eine aeolotrope, inhomogene, auf Biegung beanspruchte Schale.

In den Ableitungen werden auch diejenigen Fälle behandelt, wo die Schale in eine Platte übergeht und gesondert werden auch die Bedingungen der Orthotropie erörtert.

4. Das Erzsatzkontinuum

4.1. *Ausdruck der Schnittkräfte des Ersatzkontinuums mit Hilfe der Stabkräfte und Stabmomente*

Gegeben ist ein Dreiecknetzfachwerk nach Bild 1a und 1b. Der gestrichelten Linie des Bildes 1b entsprechend schneidet man aus dem Netz, d. h. dem Ersatzkontinuum ein Rhomboid, u. zw. so, daß die Schnittlinie durch die Mitte der Knotenpunkte geht, und die oberen und unteren, in Richtung (1) liegenden Stäbe halbiert.

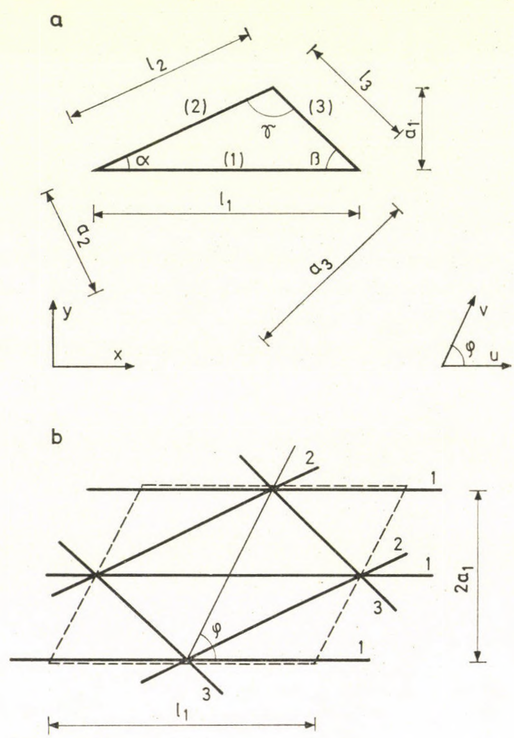


Bild 1

Die folgenden trigonometrischen Zusammenhänge können aufgeschrieben werden:

$$\tan\varphi = \frac{2}{\cot\alpha - \cot\beta}, \tag{1a}$$

$$l_1 = a_1(\cot\alpha + \cot\beta), \tag{1b}$$

$$l_2 = \frac{a_1}{\sin\alpha}, \tag{1c}$$

$$l_3 = \frac{a_1}{\sin\beta}, \tag{1d}$$

$$\tan\varphi = \frac{a_1}{a_1\cot\alpha - 0{,}5l_1} = \frac{a_1}{0{,}5l_1 - a_1\cot\beta}, \tag{1e}$$

$$a_2 = l_1 \sin\alpha, \tag{1f}$$

$$a_3 = l_1 \sin\beta. \tag{1g}$$

4.1.1. *Ermittlung der Membranschnittkräfte in Abhängigkeit von den Stabkräften*

Es empfiehlt sich, die Schnittkräfte der auf Bild 1b dargestellten und dem aus dem Netz ausgeschnittenen schiefen Viereck zugeordneten Schale in einem schiefwinkeligen Koordinatensystem zu behandeln, weshalb die Aufgabe nur in mehreren Schritten gelöst werden kann.

Erstens nimmt man die Resultierende der an den Rhomboidseiten des Bildes 2a heraustretenden Stabkräfte gleich den an den entsprechenden Seiten des auf Bild 2b dargestellten Ersatzkontinuums angreifenden Schnittkräften. Die Projektionsgleichung der Richtung X an der Seite AB wird:

$$l_1(n_v \cdot \cos\varphi + n_{uv}) = S_2\cos\alpha - S_3\cos\beta. \tag{2}$$

Die Projektionsgleichung der Richtung Y an der Seite AB:

$$l_1\, n_v \sin\varphi = S_2 \sin\alpha + S_3 \sin\beta. \tag{3}$$

Die Projektionsgleichung der Richtung X an der Seite BC:

$$\frac{2a_1}{\sin\varphi}(n_u + n_{vu}\cos\varphi) = 2S_1 + S_3\cos\beta + S_2\cos\alpha. \tag{4}$$

Die Projektionsgleichung der Richtung Y an der Seite BC:

$$\frac{2\alpha_1}{\sin\varphi}(n_{vu}\sin\varphi) = S_2\sin\alpha - S_3\sin\beta. \tag{5}$$

Nimmt man die Gleichungen (1a) bis (1g), sowie den Umstand in Betracht, daß eine von den vier Gleichungen einen Kontrollcharakter hat ($n_{uv} = n_{vu}$),

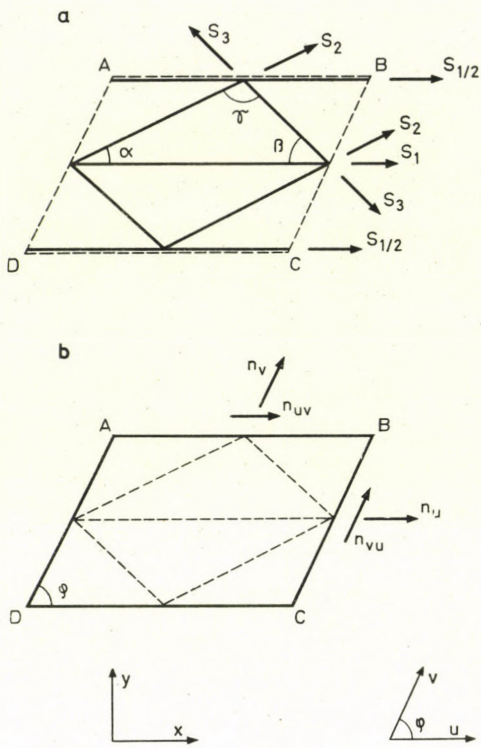


Bild 2

so können die Werte der Stabkräfte S_1, S_2 und S_3, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$S_1 = n_u \frac{a_1}{\sin \varphi} - n_v \frac{l_1^2}{4a_1} \sin \varphi, \tag{6}$$

$$S_2 = n_v \frac{l_1 \sin \varphi}{2 \sin \alpha} + n_{uv} \frac{a_1}{\sin \alpha}, \tag{7}$$

$$S_3 = n_v \frac{l_1 \sin \varphi}{2 \sin \beta} - n_{uv} \frac{a_1}{\sin \beta}. \tag{8}$$

Zwischen den einerseits im schiefwinkeligen, andererseits im rechteckigen Koordinatensystem aufgeschriebenen Schnittkräften gelten die folgenden Beziehungen [1]:

$$n_u = n_x \sin \varphi - 2n_{xy} \cos \varphi + n_y \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, \tag{9}$$

$$n_v = \frac{n_y}{\sin \varphi}, \tag{10}$$

$$n_{uv} = n_{xy} - n_y \cot \varphi. \tag{11}$$

Setzt man die Ausdrücke (9) bis (11) in die Gleichungen (6) bis (8) ein und führt man die entsprechenden Operationen durch, so erhält man für die im Koordinatensystem xy aufgeschriebenen Schnittkräfte des Kontinuums in Abhängigkeit von den Stabkräften:

$$n_x = \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{l_1} \cdot S_1 + \frac{\cot\alpha \cdot \cos\alpha}{l_1} \cdot S_2 + \frac{\cot\beta \cdot \cos\beta}{l_1} \cdot S_3 , \quad (12)$$

$$n_y = \frac{\sin\alpha}{l_1} S_2 + \frac{\sin\beta}{l_1} S_3 , \quad (13)$$

$$n_{xy} = \frac{\cos\alpha}{l_1} S_2 - \frac{\cos\beta}{l_1} S_3 . \quad (14)$$

4.1.2. *Ermittlung der Biegeschnittkräfte in Abhängigkeit von den Stabmomenten*

Bei der Darstellung der auf die Seiten des vom Kontinuum ausgeschnittenen Rhomboids wirkenden Momente (Bild 3b) geht man sinnvoll davon aus, daß die Momentenvektoren die im Abschnitt 4.1.1. und im Bild 2b dargestellten entsprechenden Schnittkräfte immer senkrecht angreifen.

Die Resultierenden derselben und der auf Bild 3a dargestellten Stabmomente auf den entsprechenden Seiten des Rhomboids sind einander gleichwertig. Die Gleichwertigkeitsgleichungen lassen sich wie folgt aufschreiben:

Gleichheit der Momentenvektoren in Richtung X an der Seite AB:

$$M_2 \sin\alpha + M_3 \sin\beta - M_{2t} \cos\alpha + M_{3t} \cos\beta = l_1\, m_v \sin\varphi . \quad (15)$$

Gleichheit der Momentenvektoren in Richtung Y an der Seite AB:

$$-M_2 \cos\alpha + M_3 \cos\beta - M_{2t} \sin\alpha - M_{3t} \sin\beta = -\, l_1 (m_{uv} + m_v \cos\varphi) . \quad (16)$$

Gleichheit der Momentenvektoren in Richtung X an Seite BC:

$$M_2 \sin\alpha - M_3 \sin\beta - 2M_{1t} - M_{2t} \cos\alpha - M_{3t} \cos\beta = \frac{2a_1}{\sin\varphi} m_{uv} \sin\varphi . \quad (17)$$

Gleichheit der Momentenvektoren in Richtung Y an Seite BC:

$$-2M_1 - M_2 \cos\alpha - M_3 \cos\beta - M_{2t} \sin\alpha + M_{3t} \sin\beta =$$
$$= -\frac{2a_1}{\sin\varphi} (m_u + m_{uv} \cos\varphi) . \quad (18)$$

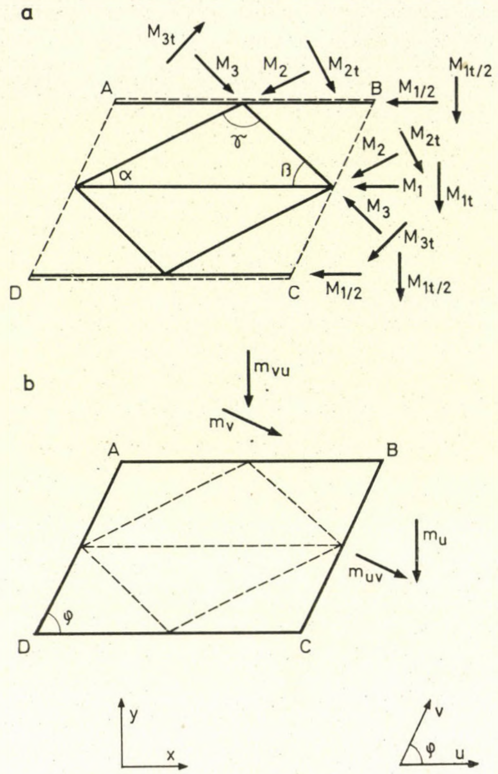


Bild. 3

Zwischen den im schiefwinkeligen und im rechteckigen Koordinatensystem aufgeschriebenen Momentenvektoren können den Gleichungen (9) bis (11) analoge Gleichungen abgeleitet werden [1]:

$$m_u = m_x \sin\varphi - 2m_{xy}\cos\varphi + m_y \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}, \tag{19}$$

$$m_v = \frac{m_y}{\sin\varphi}, \tag{20}$$

$$m_{vu} = m_{yx} - m_y \cot\varphi, \tag{21}$$

$$m_{uv} = m_{xy} - m_y \cot\varphi. \tag{21'}$$

Da $m_{xy} = m_{yx}$, folglich wird $m_{uv} = m_{vu}$.

Setzt man die Werte (19) bis (21) mit Hilfe der Gleichungen (1a) bis (1g) in die Gleichungen (15) bis (18) ein, und führt man die entsprechenden

Operationen durch, so erhält man die spezifischen Biegemomente der Schale in Abhängigkeit von den Stabmomenten:

$$m_y = M_2 \frac{\sin\alpha}{l_1} + M_3 \frac{\sin\beta}{l_1} - M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} + M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}, \tag{22}$$

$$m_x = M_1 + M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha + M_3 \frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta + M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} - M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}, \tag{23}$$

$$m_{xy} = M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1} - M_3 \frac{\cos\beta}{l_1} - M_{1t}\frac{1}{a_1} - M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha - \\ - M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta, \tag{24}$$

$$m_{yx} = M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1} - M_3 \frac{\cos\beta}{l_1} + M_{2t}\frac{\sin\alpha}{l_1} + M_{3t}\frac{\sin\beta}{l_1}. \tag{24'}$$

Für die spezifischen Momente m_{xy} und m_{yx} ergaben sich zwei Ausdrücke, je nachdem, für welche Seite des Rhomboids die Gleichgewichtsgleichung aufgeschrieben wurde. Infolge des Reziprozitätssatzes sind die rechten Seiten der Gleichungen (24) und (24') einander gleich. Beim Aufschreiben der Gleichheit (24) = (24') entfallen die entsprechenden Ausdrücke der Biegemomente und man gewinnt zwischen den Drehmomenten die folgenden Beziehungen:

$$M_{1t} l_1 + M_{2t} l_2 + M_{3t} l_3 = 0, \tag{25}$$

oder

$$\frac{M_{1t}}{a_1} + \frac{M_{2t}}{a_2} + \frac{M_{3t}}{a_3} = 0. \tag{25'}$$

Die Gleichungen (25) und (25') wurden lediglich aus den Gleichgewichtsbedingungen gewonnen, deren Geltung folglich unbeschränkt ist, und sie geben eine konstante Verbindung zwischen den Torsionsmomenten der in drei Richtungen liegenden Stäbe. Man wird sich dieses Zusammenhangs beim Aufstellen der Biegefestigkeitsmatrix bedienen.

Die Gleichungen (12) bis (14) und (22) bis (24) können auch in Matrixform aufgeschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1} \begin{bmatrix} \cot\alpha + \cot\beta & \cot\alpha\cos\alpha & \cot\beta\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

und

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1} \begin{bmatrix} l_1 & \cot\alpha\cos\alpha & \cot\beta\cos\beta & 0 & \cos\alpha & -\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \sin\beta & 0 & -\cos\alpha & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\cos\beta & 0 & \sin\alpha & \sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_{1t} \\ M_{2t} \\ M_{3t} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

4.2. *Ermittlung der Zug- und Biegesteifigkeiten*

Die *Steifigheit* eines Kontinuums widerspiegelt den Zusammenhang zwischen den Schnittkräften und den Verformungen. Im allgemeinen empfiehlt es sich, dieses Materialgesetz in Matrixform aufzuschreiben. Das Ersatzkontinuum ist jetzt eine auf Biegung beanspruchte Schale, die durch zwei Materialgesetze charakterisiert werden kann; infolgedessen kann man zwei Steifigkeitsmatrizen aufschreiben.

Die erste ist die sog. *Zugsteifigkeitsmatrix* (**A**), woraus klar hervorgeht, wie die Membranschnittkräftekomponenten n_x, n_y und n_{xy} von den Verformungskomponenten abhängen:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} \tag{28}$$

d. h.,

$$n_{xy} = \mathbf{A} \cdot \varepsilon_{xy}.$$

Die zweite ist die sog. *Biegesteifigkeitsmatrix* (**B**), die den Zusammenhang zwischen den spezifischen Momenten m_x, m_y und m_{xy} und den Biegeverformungen beschreibt:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ 2\varkappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{29}$$

d. h.,

$$m_{x,y} = -\mathbf{B} \cdot \varkappa_{x,y}.$$

(Das negative Zeichen folgt aus den nach Übereinkunft verwendeten Zeichen der Krümmung und des Momentes.)

Die Steifigkeitsmatrixen **A** und **B** sind — nach dem für die Gleichheit der äußeren fremden Arbeiten geltenden Satz — immer symmetrisch, d. h., $A_{ik} = A_{ki}$, und $B_{ik} = B_{ki}$.

Die Biege- und Zugsteifigkeiten des räumlichen Fachwerks, d. h., die Elemente beider Matrizen werden so ermittelt, daß man dem Fachwerk der Reihe nach die einzelnen Dehnungs- und Biegeverformungskomponenten aufzwingt, und dabei die dazu erforderlichen Schnittkräfte ermittelt.

Da die Stäbe des räumlichen Fachwerks verschiedene Winkel mit den Achsen des Koordinatensystems xy bilden und in den Gleichungen (28) und (29) die Verformungsvektoren $\varepsilon_{x,y}$ und $\varkappa_{x,y}$ sich auf das Achsenkreuz xy beziehen, sollte man auch die von der Elastizitätslehre bekannten Gleichungen aufschreiben, welche diejenigen Verformungskomponenten ergeben, die mit dem Achsenkreuz xy einen φ Winkel bildenden Achsenkreuz $\xi\eta$ bestimmt werden. Bei dem Dehnungsformänderungsvektor wird dies wie folgt ausgedrückt [1]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \nu_{\xi,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \cos\varphi\cdot\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\cos\varphi\cdot\sin\varphi \\ -2\cos\varphi\cdot\sin\varphi & 2\cos\varphi\cdot\sin\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} \tag{30}$$

d. h.,

$$\varepsilon_{\xi,\eta} = \mathbf{F}\cdot\varepsilon_{x,y} \tag{30'}$$

(worin **F** die Drehmatrix ist).

Und für den Biegeverformungsvektor:

$$\varkappa_{\xi,\eta} = \mathbf{F}\cdot\varkappa_{x,y}, \tag{31}$$

(worin **F** dieselbe Drehmatrix wie oben ist).

4.2.1. *Die Zugsteifigkeitsmatrix*

Aus der Untersuchung der Gleichungen (28) ist es ersichtlich, daß man die einzelnen Elemente der Steifigkeitsmatrix derart erhalten kann, daß man die einzelnen Verformungskomponenten der Reihe nach dem Fachwerk aufzwingt und dabei die dazu erforderlichen Membranschnittkräfte ermittelt.

Zuerst führt man eine Dehnung ε_x ins Fachwerk ein, und unter Berücksichtigung der Gleichungen (12) bis (14) drückt man die Werte der Elemente A_{11}, A_{21} und A_{31} wie folgt aus:

$$A_{11} = \frac{n_x}{\varepsilon_x} = \frac{1}{\varepsilon_x}\left(\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{l_1}\cdot S_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\cot\alpha\cdot\cos\alpha}{l_1}\cdot S_2 + \frac{\cot\beta\cdot\cos\beta}{l_1}\cdot S_3\right),$$

$$A_{21} = \frac{n_y}{\varepsilon_x} = \frac{1}{\varepsilon_x} \left(\frac{\sin \alpha}{l_1} S_2 + \frac{\sin \beta}{l_1} S_3 \right),$$

$$A_{31} = \frac{n_{xy}}{\varepsilon_x} = \frac{1}{\varepsilon_x} \left(\frac{\cos \alpha}{l_1} S_2 - \frac{\cos \beta}{l_1} S_3 \right).$$

Da der Werkstoff der Gitterstäbe als elastisch betrachtet wurde, $S_i = \varepsilon_i \cdot E \cdot F_i$ $(i = 1, 2, 3)$, weiters sich der Formeln (30) der in schräger Richtung auftretenden Dehnung bedienend, entfällt das Element ε_x aus den obigen Ausdrücken:

$$A_{11} = \frac{EF_1}{a_1} + \cos^4 \alpha \frac{EF_2}{l_1 \cdot \sin \alpha} + \cos^4 \beta \frac{EF_3}{l_1 \cdot \sin \beta},$$

$$A_{21} = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \frac{EF_2}{l_1 \cdot \sin \alpha} + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta \frac{EF_3}{l_1 \cdot \sin \beta},$$

$$A_{31} = \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha \frac{EF_2}{l_1 \cdot \sin \alpha} - \sin \beta \cdot \cos^3 \beta \frac{EF_3}{l_1 \cdot \sin \beta}.$$

Führt man nun die Dehnung ε_y in das Fachwerk ein, so können auch die Steifigkeiten A_{22} und A_{32} in ähnlicher Weise ausgedrückt werden: $(A_{12} = A_{21})$:

$$A_{22} = \frac{n_y}{\varepsilon_y} = \sin^4 \alpha \frac{EF_2}{l_1 \sin \alpha} + \sin^4 \beta \frac{EF_3}{l_1 \sin \beta},$$

$$A_{32} = \frac{n_{xy}}{\varepsilon_y} = \sin^3 \alpha \cos \alpha \frac{EF}{l_1 \sin \alpha} - \sin^3 \beta \cos \beta \frac{EF_3}{l_1 \sin \beta}.$$

Schließlich kann man unter Einwirkung von γ_{xy} auch den Wert von A_{33} $(A_{13} = A_{31}$ und $A_{23} = A_{32})$ ermitteln:

$$A_{33} = \frac{n_{xy}}{\gamma_{xy}} = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \frac{EF_2}{l_1 \sin \alpha} + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta \frac{EF_3}{l_1 \sin \beta}.$$

Beachtet man die Formeln (1f) bis (1g), so sieht man, daß die Dehnungssteifigkeit der in den obigen Ausdrücken befindlichen Stäbe in jedem Glied durch den Achsenabstand der benachbarten Stäbe der entsprechenden Stabreihe dividiert ist.

Führt man also die Bezeichnungen

$$e_1 = \frac{EF_1}{a_1}, \tag{32a}$$

$$e_2 = \frac{EF_2}{a_2}, \tag{32b}$$

$$e_3 = \frac{EF_3}{a_3} \tag{32c}$$

ein, so nehmen die Elemente der Zugsteifigkeitsmatrixen die folgenden Formen an:

$$A_{11} = e_1 + e_2 \cos^4 \alpha + e_3 \cos^4 \beta, \tag{33a}$$

$$A_{21} = A_{12} = e_2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + e_3 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta, \tag{33b}$$

$$A_{22} = e_2 \sin^4 \alpha + e_3 \sin^4 \beta, \tag{33c}$$

$$A_{31} = A_{13} = e_2 \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - e_3 \sin \beta \cdot \cos^3 \beta, \tag{33d}$$

$$A_{32} = A_{23} = e_2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha - e_3 \sin^3 \beta \cdot \cos \beta, \tag{33e}$$

$$A_{33} = e_2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + e_3 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta. \tag{33f}$$

Die Gestalt der Steifigkeitsmatrix **A** wurde durch Einsetzen der Werte (33a) bis (33f) in Tafel I auch gesondert angeführt.

Tafel I

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_1 + e_2\cos^4\alpha + e_3\cos^4\beta & e_2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + e_3\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta & e_2\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - e_3\sin\beta \cdot \cos^3\beta \\ e_2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + e_3\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta & e_2\sin^4\alpha + e_3\sin^4\beta & e_2\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - e_3\sin^3\beta \cdot \cos\beta \\ e_2\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - e_3\sin\beta \cdot \cos^3\beta & e_2\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - e_3\sin^3\beta \cdot \cos\beta & e_2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + e_3\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} i_1 + (i_2 + i_{2t}\tan^2\alpha) \cdot \cos^4\alpha + (i_3 + i_{3t}\tan^2\beta) \cdot \cos^4\beta & (i_2 - i_{2t})\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + (i_3 - i_{3t})\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta & (i_2 - i_{2t})\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - (i_3 - i_{3t})\sin\beta \cdot \cos^3\beta \\ (i_2 - i_{2t})\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + (i_3 - i_{3t})\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta & (i_2 + i_{2t})\cot^2\alpha \cdot \sin^4\alpha + (i_3 + i_{3t}\cot^2\beta) \cdot \sin^4\beta & (i_2 - i_{2t})\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - (i_3 - i_{3t})\sin^3\beta \cdot \cos\beta \\ (i_2 - i_{2t})\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - (i_3 - i_{3t})\sin\beta \cdot \cos^3\beta & (i_2 - i_{2t})\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - (i_3 - i_3 t)\sin^3\beta \cdot \cos\beta & i_2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_3\cos^2\beta \cdot \sin^2\beta + \frac{i_{1t}}{4} + \frac{i_{2t}}{4} \cdot (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + \frac{i_{3t}}{4}(\sin^2\beta - \cos^2\beta)^2 \end{bmatrix}$$

4.2.2. *Die Biegesteifigkeitsmatrix*

Zur Ermittlung der in den Gleichungen (29) befindlichen Steifigkeitselemente B_{ik} wird das im vorangehenden Abschnitt beschriebene Verfahren angewendet.

In den Berechnungen sollte man beachten, daß auf den Schnitt der Normale x das positive Torsionsmoment des Kontinuums in den Stäben, die am entsprechenden Schnitt heraustreten, ein negatives Torsionsmoment verursacht.

Mit Rücksicht darauf, daß man im Abschnitt 4.1.2. für die Torsionsmomente $m_{xy} = m_{yx}$ zwei Ausdrücke von verschiedenen Formen, jedoch von gleichem Wert erhielt, werden auch für die Torsionselemente B_{31}, B_{32} und B_{33} der Steifigkeitsmatrix **B** je zwei Ausdrücke aufgeschrieben, die sich voneinander in Form unterscheiden, aber den gleichen Wert haben. Benutzt man anstelle der zwei Ausdrücke deren arithmetisches Mittel, so kann man nachweisen, daß die Matrix symmetrisch ist und dann bringt man die ganze Matrix auf eine Form, die die Untersuchung der Orthotropiebedingung wesentlich vereinfacht.

In den Berechnungen werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{EI_1}{a_1}, \quad & i_{1t} &= \frac{GI_{1t}}{a_1}, \\ i_2 &= \frac{EI_2}{a_2}, \quad & i_{2t} &= \frac{GI_{2t}}{a_2}, \\ i_3 &= \frac{EI_3}{a_3}, \quad & i_{3t} &= \frac{GI_{3t}}{a_3}. \end{aligned} \tag{34}$$

Man zwingt das Fachwerk der Reihe nach auf Biegung $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ und auf Verdrehung $\varkappa_{xy}$. Durch Summierung die in den heraustretenden Stäben entstehenden Biege- und Torsionsmomente kann man die Biegesteifigkeiten bestimmen, die in Matrixform aufgeschrieben in der Tafel I angeführt sind.

Die Einzelheiten der Ableitungen sind im Anhang zusammengestellt.

4.2.3. *Bedingung der Orthotropie*

Da die meisten Probleme der Platten- und Schalentheorie für die isotrope und orthotrope Platte und Schale entwickelt wurden, empfiehlt es sich, die Bedingungen zu bestimmen, nach deren Erfüllung das Kontinuum isotrop oder orthotrop wird.

Im ersten Abschnitt wurde schon erwähnt, daß das Ersatzkontinuum des Dreieckfachwerks nur in einem und einzigen Fall isotrop sein kann: wenn das aus Stäben von gleicher Zugsteifigkeit zusammengestellte Fachwerk gleichseitige, regelmäßige Dreiecke bildet [5].

Bei einem aus ungleichseitigen Dreiecken bestehenden Fachwerk handelt es sich auch im besten Fall nur um Orthotropie. Im folgenden wird nun deren Bedingung erörtert.

Vom Standpunkt der Steifigkeiten ist das orthotrope Kontinuum dadurch charakterisiert, daß im mit den sog. Hauptrichtungen der Orthotropie koinzidierenden xy Koordinatensystem:

$$A_{13} = A_{23} = 0, \tag{44}$$

und

$$B_{13} = B_{23} = 0, \tag{45}$$

d. h.,

$$\mathbf{A}_{\text{orthotrop}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \tag{46}$$

und

$$\mathbf{B}_{\text{orthotrop}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Es kann auch speziell von Zugorthotropie und von einer besonderen Biegeorthotropie gesprochen werden, je nachdem, ob von den Bedingungen (44) und (45) nur die erste oder nur die zweite erfüllt wird. Im Falle der in dieser Abhandlung erörterten, auf Biegung beanspruchten Schale ist aber nur die »völlige« Orthotropie vorteilhaft, d. h., dann, wenn die Hauptrichtungen der beiden Orthotropien übereinstimmen, da in den Differentialgleichungen der gebogenen Schale die zweierlei Steife und das zugeordnete Membran- bzw. Biegekräftespiel verbunden werden. Im Falle der »völligen« Orthotropie, wenn man von einem Koordinatensystem xy auf ein, mit den Hauptrichtungen der Orthotropie koinzidierenden Koordinatensystem $\xi\eta$ übergeht, welches mit dem ersteren einen Winkel φ bildet, müssen die Bedingungen (44) und (45) gleichzeitig erfüllt werden.

Die Untersuchung der Bedingung der Orthotropie kann auf zweierlei Art durchgeführt werden: zuerst unter Vernachläßigung und dann unter Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit.

a) *Die Torsionssteifigkeit der Stäbe wird vernachläßigt.*

Die Bedingungen (44) und (45) können in folgender Weise aufgeschrieben werden (Tafel I):

$$\begin{aligned} e_2 \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - e_3 \sin\beta \cdot \cos^3\beta &= 0, \\ e_2 \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - e_3 \sin^3\beta \cdot \cos\beta &= 0, \end{aligned} \tag{48}$$

und

$$\begin{aligned} i_2 \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - i_3 \sin\beta \cdot \cos^3\beta &= 0, \\ i_2 \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - i_3 \sin^3\beta \cdot \cos\beta &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Aus dem Vergleich der Bedingungen (48) und (49) ist ersichtlich, daß es genügt, die Zugorthotropie (48) zu ermitteln. Wenn die Querschnitte der Stäbe proportional zu deren Biegeträgheitsmoment sind, d. h., wenn die Bedingung

$$\frac{F_1}{I_1} = \frac{F_2}{I_2} = \frac{F_3}{I_3} = k_1 \tag{50}$$

erfüllt ist, dann wird auch der Bedingung der Biegeorthotropie (49) Genüge geleistet.

Kollár und Hegedűs [5] stellten die Bedingung der Zugorthotropie mit den folgenden Formeln fest:

$$\begin{aligned} &\frac{F_1 \sin 2\alpha}{2F_2 \sin \beta} - \frac{F_1 \sin 2\beta}{2F_2 \sin \alpha} + \frac{F_2 \sin \nu}{2F_1 \sin \alpha} - \frac{F_2 \sin 2\alpha}{2F_3 \sin \nu} + \frac{F_3 \sin 2\beta}{2F_2 \sin \nu} - \\ &- \frac{F_3 \sin \nu}{2F_1 \sin \beta} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \nu} + \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin \beta} + \frac{\sin(\beta - \nu)}{\sin \alpha} = 0\,, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{F_2 \sin \beta \cdot \sin 2\alpha - F_3 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{F_1 \sin \nu + F_2 \sin \beta \cdot \cos 2\alpha + F_3 \sin \alpha \cdot \cos 2\beta}\,. \tag{52}$$

Mit Hilfe der ersten Formel können — für ein Fachwerk von gegebenem geometrischem System — die Orthotropie sichernden Proportionalitäten der Stabquerschnitte ermittelt werden.

Erfüllt sich die Bedingung (50), so stimmt die für die Zugorthotropie aufgeschriebene Hauptrichtung (52) mit derselben der Biegeorthotropie überein, da die Formel (49), die die letztere definiert, mit der Formel (48) übereinstimmt.

b) *Die Torsionssteifigkeit wird berücksichtigt.*

In diesem Fall lassen sich die Bedingungen (44) und (45) wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} e_2 \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - e_3 \sin \beta \cdot \cos^3 \beta = 0, \\ e_2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha - e_3 \sin^3 \beta \cdot \cos \beta = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

und

$$\begin{aligned} (i_2 - i_{2t}) \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - (i_3 - i_{3t}) \sin \beta \cdot \cos^3 \beta = 0, \\ (i_2 - i_{2t}) \sin^3 \alpha \cdot \cos^3 \alpha - (i_3 - i_{3t}) \sin^3 \beta \cdot \cos \beta = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Betrachtet man die Bedingungen (53), so sieht man, daß wenn sich die Ergänzungsbedingung

$$\frac{EI_1}{GI_{1t}} = \frac{EI_2}{GI_{2t}} = \frac{EI_3}{GI_{3t}} = k_2 \tag{54}$$

erfüllt, die Gleichungen (53) den Gleichungen (49) proportional werden, was bedeutet, daß die Feststellungen unter Punkt a) auch für diesen Fall gelten.

Und zwar: sind die Querschnitte (F_i), Biegeträgheitsmomente (I_i) und Torsionsträgheitsmomente (I_{it}) der Stäbe proportional zueinander, so wird die Orthotropiebedingung des Fachwerks durch die Formel (51), und die Hauptrichtungen der Orthotropie werden durch die Formel (52) gegeben.

Dies kann in der Praxis gesichert werden, und zwar:

a) bei offenen Profilen — (z. B. bei I-Profil)

$$I_t \ll I, \quad \text{also} \quad I_t \approx 0,$$

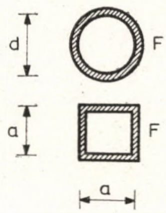
was bedeutet, daß nur (50) befriedigt werden muß. Das Biegeträgheitsmoment eines I-Profils ist

$$I = 2v \cdot b \cdot \frac{h^2}{4} + \frac{v_g \cdot h^3}{12} = h^2 \left(\frac{F_{1\text{gurt}}}{2} + \frac{F_g}{12} \right),$$

wo v_{gurt} die Stärke, b die Breite des Gurtes, v_g die Stärke des Steges und h die Höhe des Profils bedeuten.

Ändern sich F_{gurt} und F_g *proportional* zueinander — bei gleichen Profilhöhen —, so erfüllt sich die Bedingung (50).

b) Bei geschlossenen Profilen kann die Torsionssteifigkeit schon nicht mehr vernachläßigt werden. Wie z. B. bei



$$I = F \cdot \frac{d^2}{8}, \quad I_t = F \cdot \frac{d^2}{4},$$

$$I = F \cdot \frac{a^2}{6}, \quad I_t = F \cdot \frac{a^2}{4},$$

wo d und a Durchschnittsabmessungen sind (gemessen von der Mitte der Wandstärke).

Man kann von beiden Profilen feststellen, daß bei Beibehaltung der äußeren Abmessungen (der Durchschnittswerte) und Veränderung der Wandstärke, den Bedingungen (50) und (54) entsprochen werden kann.

Hiezu sei bemerkt, daß die »völlige« Orthotropie im Prinzip auch dann existieren kann, wenn die Proportionalität (54) nicht befriedigt ist. Jedoch sind die erforderlichen Berechnungen sehr kompliziert und haben keine praktische Bedeutung.

4.3. *Ermittlung der Stabkräfte und Stabmomente aus den Schnittkräften*

Mit Hilfe der im Abschnitt 4.2. berechneten und in der Tafel I angeführten Steifigkeitsmatrixen **A** und **B** wurde das Kontinuum, das das räumliche Fachwerk ersetzt, vollkommen bestimmt.

Ersichtlich war auch, daß dieses Kontinuum im allgemeinen eine anisotrope, inhomogene Schale (eventuell eine Platte) war, die bei Zufriedenstellung gewisser Bedingungen auch orthotrop sein kann.

In Kenntnis der Steifigkeitsmatrixen **A** und **B** können — vorausgesetzt, daß auch die Beanspruchungen n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy} in jedem Punkte des Ersatzkontinuums bekannt sind —, die in jedem Stabe dieses Fachwerks auftretenden Stabkräfte und Stabmomente ermittelt werden.

Die Berechnung der *Stabkräfte* ist eine sehr einfache Aufgabe, da diese aus den Gleichungen (26) unmittelbar festgestellt werden können. Nach Invertierung des Gleichungssystems werden die Werte der Stabkräfte S_1, S_2, S_3:

$$S_1 = a_1 \left[n_x - \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} n_y - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} n_{xy} \right], \tag{55}$$

$$S_2 = a_2 \left[\frac{\cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)} n_y + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)} n_{xy} \right], \tag{56}$$

$$S_3 = a_3 \left[\frac{\cos\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)} n_y - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)} n_{xy} \right]. \tag{57}$$

Die Ermittlung der Stabmomente ist nicht mehr so einfach; dazu müssen auch die Biegeverformungen errechnet werden. Man kann diese Hilfsgrößen aus den Gleichungen (29) errechnen, unter der Bedingung jedoch, daß die Steifigkeitsbeiwerte B_{ik} und die spezifischen Momentenkräfte m_x, m_y, m_{xy} bekannt sind. Man sollte also das Gleichungssystem (29) invertieren, welches genau aufgeschrieben die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} B_{11}\varkappa_x + B_{13}\varkappa_y + 2B_{13}\varkappa_{xy} &= -m_x, \\ B_{21}\varkappa_x + B_{22}\varkappa_y + 2B_{23}\varkappa_{xy} &= -m_y, \\ B_{31}\varkappa_x + B_{32}\varkappa_y + 2B_{33}\varkappa_{xy} &= -m_{xy}. \end{aligned} \tag{58}$$

Zur Durchführung der Invertierung lassen sich die folgenden Determinanten aufschreiben:

$$D = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & 2B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & 2B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & 2B_{33} \end{vmatrix} \tag{59a}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -m_x & B_{12} & 2B_{13} \\ -m_y & B_{22} & 2B_{23} \\ -m_{xy} & B_{32} & 2B_{33} \end{vmatrix} \tag{59b}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} B_{11} & -m_x & 2B_{13} \\ B_{21} & -m_y & 2B_{23} \\ B_{31} & -m_{xy} & 2B_{33} \end{vmatrix} \tag{59c}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & -m_x \\ B_{21} & B_{22} & -m_y \\ B_{31} & B_{32} & -m_{xy} \end{vmatrix} \tag{59d}$$

Folglich werden die gesuchten Verformungen:

$$\varkappa_x = \frac{D_1}{D}, \qquad \varkappa_y = \frac{D_2}{D}, \qquad \varkappa_{xy} = \frac{D_3}{D} \text{ sein.} \quad (60), (61), (62)$$

Aus den Gleichheiten (60) bis (62) können mit Hilfe der Drehmatrix **F** (31) die gesuchten Biegemomente und Torsionsmomente der Stäbe wie folgt ermittelt werden:

$$M_1 = EI_1(-\varkappa_x), \tag{63}$$

$$M_2 = EI_2(-\varkappa_x \cos^2\alpha - \varkappa_y \sin^2\alpha - 2\varkappa_{xy}\cos\alpha \cdot \sin\alpha), \tag{64}$$

$$M_3 = EI_3(-\varkappa_x \cos^2\beta - \varkappa_y \sin^2\beta + 2\varkappa_{xy}\cos\beta \cdot \sin\beta), \tag{65}$$

$$M_{1t} = GI_{1t}\varkappa_{xy}, \tag{66}$$

$$M_{2t} = GI_{2t}[-\varkappa_x \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \varkappa_y \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \varkappa_{xy} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)], \tag{67}$$

$$M_{3t} = GI_{3t}[\varkappa_x \cos\beta \cdot \sin\beta - \varkappa_y \cos\beta \cdot \sin\beta + \varkappa_{xy} \cdot (\cos^2\beta - \sin^2\beta)]. \tag{68}$$

Vernachläßigt man die Torsionssteifigkeit der Stäbe, so werden die Ausdrücke der Biegemomente völlig analog der Gleichungen (55) bis (57) der Stabkräfte

$$M_1 = a_1\left(m_x - \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} m_y - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} m_{xy}\right), \tag{69}$$

$$M_2 = a_2\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} m_y + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} m_{xy}\right), \tag{70}$$

$$M_3 = a_3\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)} m_y - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)} m_{xy}\right). \tag{71}$$

5. Theorie und Berechnung der anisotropen, durch Biegung beanspruchten Schalen

5.1. *Einleitung*

In diesem Abschnitt werden die Differentialgleichungen des das räumliche Fachwerk ersetzenden Kontinuums mit Hilfe der bisher erläuterten Steifigkeitsbeiwerte beschrieben.

Im zweiten Abschnitt wurde vorausgesetzt: die Dimensionen der Konstruktion lassen das Kontinuum als eine flache Platte behandeln. Die Flachheit der Schale erlaubt außer den im zweiten Abschnitt angeführten Voraussetzungen die Einführung der folgenden Vernachläßigungen [2], [9], [14]:

Die erste Voraussetzung hat einen geometrischen Charakter: sie erlaubt, daß man die auf gekrümmten Flächen behandelten Abmessungen als identisch mit den Dimensionen der entsprechenden ebenen Fläche betrachtet.

Die zweite Voraussetzung hat einen geometrischen Charakter: die Größenordung des Verhältnisses δ/r wird der Einheit gegenüber vernachläßigt (in diesem Verhältnis δ ist die Stärke der Schale oder eine von den Verschiebungen u, v, während r der Halbmesser einer von den beiden Hauptkrümmungen ist).

Die dritte Voraussetzung hat einen statischen Charakter: sie läßt die Werte der Schubkräfte Q_x und Q_y, die in die für die Schalenmittelfläche aufgeschriebenen Gleichungen eingehen, vernachläßigen.

Aufgrund der vierten Voraussetzung werden die in der Schalenfläche liegenden Komponenten (die parallel zur xy Achse sind) der äußeren senkrechten Belastung außer acht gelassen.

Nach Bild 4a schneidet man von der $z = z(x, y)$ Schalenfläche ein Teilelement derart heraus, daß die Seiten des ausgeschnittenen Elementes parallel zu den Achsen x und y liegen. Die an den entsprechenden Seiten angreifenden Schubkräfte und deren Änderungen sind auf den Bildern 4b und 4c ersichtlich.

Die Differentialgleichungen der auf Biegung beanspruchten orthotropen und isotropen Schale können — vorausgesetzt, daß sie flach ist — verhältnismäßig einfach aufgestellt werden [2], [10], [14]. Die Autoren befassen sich nicht mit dem Fall, wo der Werkstoff der Schale allgemein nicht isotrop ist. Da das betreffende Ersatzkontinuum dem letzteren entspricht, werden die Ableitungen und die Behandlung dieser Gleichungen nachstehend erläutert.

5.2. *Aufschreiben des Differentialgleichungssystems*

Wie bekannt [2], [9] stehen zur allgemeinen Lösung der auf Biegung beanspruchten Schale — in irgendeinem Koordinatensystem — 17 Differentialgleichungen, mit ebensoviel unbekannten Funktionen zur Verfügung, und zwar:

a) fünf Gleichgewichtsgleichungen (wo die Unbekannten sind: n_x, n_y, $n_{xy} = n_{yx}$, m_x, m_y, $m_{xy} = m_{yx}$, q_x, q_y):

$$n_x^{|} + n_{xy}^{|\cdot} = 0, \tag{72a}$$

$$n_{xy}^{|\cdot} + n_y^{\cdot} = 0, \tag{72b}$$

$$n_x z^{||} + 2n_{xy} z^{|\cdot} + n_y z^{\cdot\cdot} + q_x^{|} + q_y^{\cdot} + p = 0, \tag{72c}$$

$$m_x^{|} + m_{xy} - q_x = 0, \tag{72d}$$

$$m_{xy}^{|} + m_y^{\cdot} - q_y = 0; \tag{72e}$$

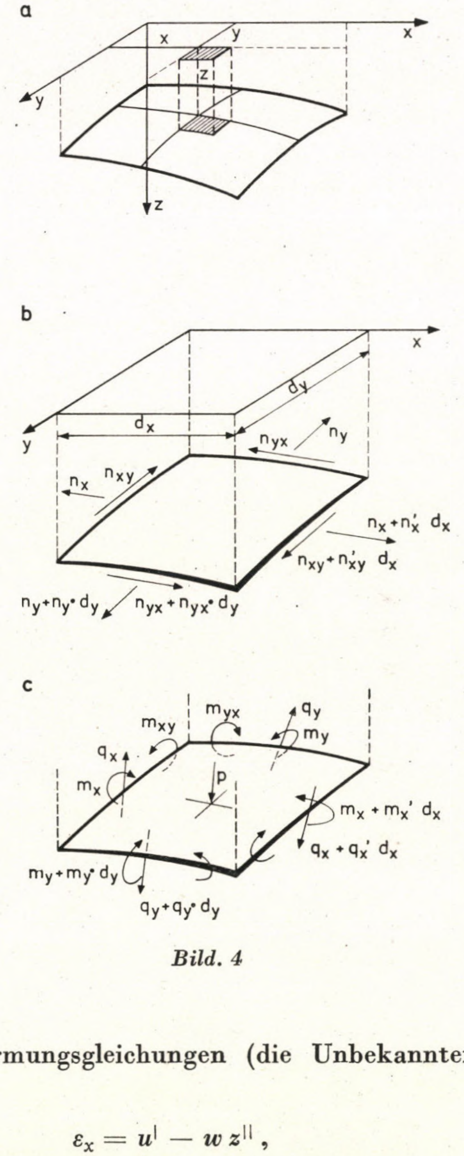


Bild. 4

b) sechs Verformungsgleichungen (die Unbekannten sind: ε_x, ε_y, γ_{xy}, $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_{xy}$, u, v, w):

$$\varepsilon_x = u^{|} - w\, z^{||}\,, \tag{73a}$$

$$\varepsilon_y = v^{\cdot} - w\, z^{\cdot\cdot}\,, \tag{73b}$$

$$\gamma_{xy} = u^{\cdot} + v^{|} - 2wz^{|\cdot}\,, \tag{73c}$$

$$\varkappa_x = w^{||}\,, \tag{73d}$$

$$\varkappa_y = w^{\cdot\cdot}, \tag{73e}$$

$$\varkappa_{xy} = w^{|\cdot}; \tag{73f}$$

c) sechs Elastizitätsgleichungen (vgl. Abschnitt 4.2):

$$n_{x,y} = \mathbf{A}\,\varepsilon_{x,y}, \tag{28}$$

$$m_{x,y} = -\,\mathbf{B}\,\varkappa_{x,y}. \tag{29}$$

Die Aufgabe kann im Prinzip als gelöst betrachtet werden, da lediglich das obige Gleichungssystem integriert werden soll.

Praktisch kann man einige der Unbekannten — mit Hilfe von verschiedenen Methoden — eliminieren, und somit ein Gleichungssystem erhalten, in dem die Zahl der Grundgleichungen zwar reduziert, deren Ordnung jedoch erhöht wird.

Dazu bedient man sich einer aus der Statik der Träger bekannten drei Aufschreibungsarten:

1. das Kraftgrößenverfahren, wo die Kräfte (Momente) oder Kräftenfunktionen unbekannt sind;

2. die Verschiebungsmethode, worin die Verschiebungen u, v, w unbekannt sind;

3. komplexe Methode: die Unbekannten der Grundgleichungen sind teils Verschiebungen (gewöhnlich w), teils Kräfte (im allgemeinen die Funktion Φ).

Im folgenden werden die Aufschreibungsarten 2. und 3. behandelt.

5.2.1. *Aufschreibung mit den Verschiebungsfunktionen*

Setzt man die Ausdrücke (73a) bis (73f) in die Gleichungen (28) und (29) ein, so erhält man die Schnittkräfte in Abhängigkeit von den Verschiebungen u, v und w:

$$n_x = A_{11}u^{|} + A_{12}v^{\cdot} + A_{13}u^{\cdot} + A_{13}v^{|} - w(A_{11}z^{||} + A_{12}^{\cdot\cdot} + 2A_{13}z^{|\cdot}), \tag{74a}$$

$$n_y = A_{21}u^{|} + A_{22}v^{\cdot} + A_{23}u^{\cdot} + A_{23}v^{|} - w(A_{21}z^{||} + A_{22}z^{\cdot\cdot} + 2A_{23}z^{|\cdot}), \tag{74b}$$

$$n_{xy} = A_{31}u^{|} + A_{32}v^{\cdot} + A_{33}u^{\cdot} + A_{33}v^{|} - w(A_{31}z^{||} + Q_{32}z^{\cdot\cdot} + 2A_{33}z^{|\cdot}), \tag{74c}$$

$$m_x = -(B_{11}w^{||} + B_{12}w^{\cdot\cdot} + 2B_{13}w^{|\cdot}), \tag{75a}$$

$$m_y = -(B_{21}w^{||} + B_{22}w^{\cdot\cdot} + 2B_{23}w^{|\cdot}), \tag{75b}$$

$$m_{xy} = -(B_{31}w^{||} + B_{32}w^{\cdot\cdot} + 2B_{33}w^{|\cdot}). \tag{75c}$$

Setzt man nun die Gleichungen (74a) bis (74c) in die Gleichgewichtsgleichungen (72a) bis (72c) ein, so erhält man nach Umordnung der einzelnen Glieder ein aus drei Gleichungen bestehendes Partial-Differentialgleichungssystem, worin die Verschiebungen u, v, w die Unbekannten sind. Die Schubkräfte wurden aus der Gleichung (72c) mit Hilfe der Gleichungen (72d) und (72e) eliminiert.

Die Matrix des Gleichungssystems wurde in Tafel II zusammengestellt. Interessant ist, daß die angeführten Differentialoperatoren im Verhältnis zur Diagonalen symmetrisch sind.

Nach Lösung des Gleichungssystems und in Kenntnis der Werte von u, v, w können auch die weiteren Unbekannten aus den Gleichungen (74a) bis (74c) und (75a) bis (75c) ermittelt werden.

Tafel II

U	V	W	
${}^{\mathrm{II}}A_{11} + {}^{\mathrm{I}\cdot}2A_{13} + {}^{\cdot\cdot}A_{33}$	${}^{\mathrm{II}}A_{13} + {}^{\mathrm{I}\cdot}(A_{33} + A_{12}) + {}^{\cdot\cdot}A_{32}$	$-{}^{\mathrm{I}}(A_{11}z^{\mathrm{II}} + A_{12}z^{\cdot\cdot} + 2A_{13}z^{\mathrm{I}\cdot}) - {}^{\mathrm{I}}(A_{13}z^{\mathrm{II}} + A_{13}z^{\cdot\cdot} + 2A_{33}z^{\mathrm{I}\cdot})$	0
${}^{\mathrm{II}}A_{13} + {}^{\mathrm{I}\cdot}(A_{33} + A_{12}) + {}^{\cdot\cdot}A_{32}$	${}^{\mathrm{II}}A_{33} + {}^{\mathrm{I}\cdot}2A_{23} + {}^{\cdot\cdot}A_{22}$	$-{}^{\mathrm{I}}(A_{13}z^{\mathrm{II}} + A_{23}z^{\cdot\cdot} + 2A_{33}z^{\mathrm{I}\cdot}) - {}^{\cdot}(A_{12}z^{\mathrm{II}} + A_{22}z^{\cdot\cdot} + 2A_{23}z^{\mathrm{I}\cdot})$	0
$-{}^{\mathrm{I}}(A_{11}z^{\mathrm{II}} + A_{12}z^{\cdot\cdot} + 2A_{13}z^{\mathrm{I}\cdot}) - {}^{\cdot}(A_{31}z^{\mathrm{II}} + A_{32}z^{\cdot\cdot} + 2A_{33}z^{\mathrm{I}\cdot})$	$-{}^{\mathrm{I}}(A_{13}z^{\mathrm{II}} + A_{23}z^{\cdot\cdot} + 2A_{33}z^{\mathrm{I}\cdot}) - {}^{\cdot}(A_{12}z^{\mathrm{II}} + A_{22}z^{\cdot\cdot} + 2A_{23}z^{\mathrm{I}\cdot})$	$+ {}^{\mathrm{IV}}B_{11} + {}^{\mathrm{III}\cdot}4B_{13} + {}^{\mathrm{II}\cdot\cdot}(2B_{12} + 4B_{33}) + {}^{\mathrm{I}\cdot\cdot\cdot}4B_{23} + {}^{::}B_{22} + [A_{11}z^{\mathrm{IV}} + 4A_{13}z^{\mathrm{III}\cdot} + 2(A_{12} + 2A_{33})z^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + 4A_{23}z^{\mathrm{I}\cdot\cdot\cdot} + A_{22}z^{::}]$	$+p$

5.2.2. *Aufschreibung mit komplexen Funktionen*

Die Einführung der Spannungsfunktion Φ (vgl. Abschnitt 3) ermöglicht, daß man anstelle der in Tafel II angeführten drei Partialdifferentialgleichungen nur zwei erhält.

Ersetzt man die Gleichungen (75a) bis (75c) in der Gleichgewichtsgleichung (72c) durch die Gleichungen (72d) und (72e), erhält man nach entsprechender Ordnung der Glieder die erste Grundgleichung:

$$B_{11}w^{\mathrm{IV}} + 4B_{13}w^{\mathrm{III}\cdot} + 2(B_{12} + 2B_{33})w^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + 4B_{23}w^{\mathrm{I}\cdot\cdot\cdot} + B_{22}w^{::} - L\Phi = 0. \quad (76)$$

Dies ist die sog. *Gleichgewichtsgleichung*, in der die Unbekannten die Ableitungen der Verschiebungsfunktion $w(x, y)$ bzw. der Spannungsfunktion Φ sind.

Um die zweite Gleichung aufschreiben zu können, geht man von den Gleichungen (74a) bis (74c) aus. Man sieht, daß die Koeffizienten von $u^{\cdot}$ und v' innerhalb je einer Gleichung übereinstimmen. Demgemäß können die drei Gleichungen auch als ein inhomogenes Gleichungssystem mit drei Unbekannten betrachtet werden, worin die Unbekannten u', $v^{\cdot}$ und $(u^{\cdot} + v')$ sind.

Die Wurzeln des Gleichungssystems sind:

$$u^{\mathrm{I}} = \frac{D_1^*}{D^*}, \qquad v^{\cdot} = \frac{D_2^*}{D^*}, \qquad (u^{\cdot} + v^{\mathrm{I}}) = \frac{D_3^*}{D^*}. \quad (77\,\mathrm{a}), (77\mathrm{b}), (77\mathrm{c})$$

Die hier angewendeten Bezeichnungen bedeuten die folgenden Determinanten:

$$D^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \tag{78}$$

$$D_1^* = \begin{vmatrix} n_x + wM_1(z) & A_{12} & A_{13} \\ n_y + wM_2(z) & A_{22} & A_{23} \\ n_{xy} + wM_3(z) & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \tag{79}$$

$$D_2^* = \begin{vmatrix} A_{11} & n_x + wM_1(z) & A_{13} \\ A_{21} & n_y + wM_2(z) & A_{23} \\ A_{31} & n_{xy} + wM_3(z) & A_{33} \end{vmatrix}, \tag{80}$$

$$D_3^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & n_x + wM_1(z) \\ A_{21} & A_{22} & n_y + wM_2(z) \\ A_{31} & A_{32} & n_{xy} + wM_3(z) \end{vmatrix}. \tag{81}$$

Wo die Werte von $M_1(z)$, $M_2(z)$ und $M_3(z)$ wie folgt sind:

$$\begin{bmatrix} M_1(z) \\ M_2(z) \\ M_3(z) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} z^{||} \\ z^{\cdot\cdot} \\ 2z^{|\cdot} \end{bmatrix}. \tag{82}$$

Die Kontinuität der Formänderungen wird durch die Gleichheit der komplexen Ableitungen gesichert, und diese Bedingung kann wie folgt aufgeschrieben werden:

$$(u^{|})^{\cdot\cdot} + (v^{\cdot})^{||} = (u^{\cdot} + v')^{|\cdot}\,. \tag{83}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke (77a) bis (77c) erhält man:

$$\left(\frac{D_1^*}{D^*}\right)^{\cdot\cdot} + \left(\frac{D_2^*}{D^*}\right)^{||} = \left(\frac{D_3^*}{D^*}\right)^{|\cdot}, \tag{84}$$

d. h.,

$$(D_1^*)^{\cdot\cdot} + (D_2^*)^{||} = (D_3^*)^{|\cdot} \tag{85}$$

Zersetzt man und führt man die einzelnen Operationen durch, so erhält man nach Gruppierung der Glieder die zweite Grundgleichung:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} \Phi^{|V} - 2 \begin{vmatrix} A_{21} & A_{11} \\ A_{23} & A_{13} \end{vmatrix} \Phi^{|||\cdot} + \left(\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} - \right.$$
$$\left. - 2 \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} \right) \Phi^{||\cdot\cdot} - 2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \Phi^{|\cdot\cdot\cdot} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \Phi^{::} + \tag{86}$$
$$+ \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix} \right) L \cdot w = 0.$$

Dies ist die sog. *Verträglichkeitsgleichung*, wo die Unbekannten ebenfalls die Ableitungen von w und Φ sind.

Bezeichnet man die Determinanten kürzer:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{11} \\ A_{23} & A_{13} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \\
d_4 &= \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad d_5 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}, \quad d_6 = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},
\end{aligned}
\tag{87}
$$

so kann man die Verträglichkeitsgleichung auch in abgekürzter Form aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
d_1\Phi^{\mathrm{IV}} - 2d_2\Phi^{\mathrm{III}\cdot} + (\mathrm{d}_3 - 2d_4)\Phi^{\mathrm{II}\cdot\cdot} - 2d_5\Phi^{\mathrm{I}\cdot\cdot\cdot} + d_6\Phi^{::} + \\
+ (A_{13}d_5 + A_{23}d_2 + A_{33}d_3)Lw = 0.
\end{aligned}
\tag{86'}
$$

Die Gleichungen (76) und (86) sind die Grundgleichungen der anisotropen, auf Biegung beanspruchten flachen Schale. Demzufolge kann das in Abschnitt 5.2 aufgeschriebene, 17 Unbekannte enthaltende Gleichungssystem durch zwei Gleichungen ausgedrückt werden, u. zw. so, daß diese Gleichungen Partialdifferentialgleichungen von vierter Ordnung werden.

Im Falle der Orthotropie, werden die Gleichungen (76) und (86), wie nachstehend ersichtlich, einfacher:

$$
B_{11}w^{\mathrm{IV}} + 2(B_{12} + 2B_{33})w^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + B_{22}w^{::} - L\Phi = 0, \tag{76a}
$$

$$
d_1\Phi^{\mathrm{IV}} + (d_3 - 2d_4)\Phi^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + d_6\Phi^{::} + A_{33}d_3Lw = 0. \tag{86a}
$$

Und wenn die orthotrope Schale sich in eine Platte umwandelt:

$$
B_{11}w^{\mathrm{IV}} + 2(B_{12} + 2B_{33})w^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + B_{22}w^{::} = 0, \tag{76b}
$$

$$
d_1\Phi^{\mathrm{IV}} + (d_3 - 2d_4)\Phi^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + d_6\Phi^{::} = 0. \tag{86b}
$$

Nach Lösung des aus den Gleichungen (76) und (86) zusammengestellten Gleichungssystems kann man aus der Spannungsfunktion Φ die Membrankräfte n_x, n_y, n_{xy}, aus der Durchbiegung w mit Hilfe der Gleichungen (73d) bis (73f), (29), (72d) und (72e) die Momente m_x, m_y, m_{xy}, bzw., die Schubkräfte q_x, q_y ermitteln.

Von den drei für die Reduktion des 17 Unbekannte enthaltenden ganzen Gleichungssystems anwendbaren Methoden wurden zwei dargestellt. Welche der Konstrukteur von diesen drei Methoden anwendet (oder überhaupt das Gleichungssystem reduziert), hängt hauptsächlich von den Randbedingungen, von der Form des Randes, der Schalenfläche, und von den rechnungstechnischen Mitteln ab.

Das Differentialgleichungssystem kann — in Kenntnis der Randbedingungen — nach den üblichen rechnerischen Verfahren gelöst werden. Ein numerisches Beispiel wird bei einer anderen Gelegenheit mitgeteilt.

SCHRIFTTUM

1. CHOLNOKY, T.: Mechanics.* Tankönyvkiadó, Budapest 1966.
2. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer Verlag, Berlin (Göttingen), Heidelberg 1962.
3. KOLLÁR, L.: Räumliche Fachwerke.* Lehrbehelf für Diplomentwurf, Budapest, 1971.
4. KOLLÁR L.: Statische Entwurfsgesichtspunkte der Raumabdeckungsträgerroste.* *Magyar Építőipar* (1965), 328—335.
5. KOLLÁR, L.—HEGEDŰS, I.: Solution of Double-Layer Space Trusses of General Triangular Grid by the Equivalent Continuum Method. *Acta Techn. Hung* (1973).
6. MAKOWSKI, Z. S.: Räumliche Tragwerke aus Stahl. Verlag Stahleisen G.m. b. H. Düsseldorf 1963.
7. PALOTÁS, L.: Handbuch für Ingenieure,* B. 1. Műszaki Kiadó, Budapest 1956.
8. RÓZSA, M.: Equations différentielles des grillages fléchis. *Acta Techn. Hung.* **8** (1954).
9. SOARE, M.: Application des équations aux différences finies au calcul des coques. Ed. Acad. Roumanie, — Ed. Eyrolles, Paris 1962.
10. SOARE, M.V.—BELEŞ, A.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. Akad. Verlag Bukarest.
11. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Theorie und Berechnung von Stabfachwerken. Műszaki Kiadó, Budapest 1971.
12. SZMODITS K.: Leichte räumliche Stahlkonstruktionen.* *ÉTI Tudományos Közlemények*, Nr. 75, Budapest 1969.
13. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKI—KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells (2nd Edition) McGraw-Hill Book Comp., London—New York 1959.
14. WLASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akad. Verlag. Berlin 1958.
15. WRIGHT, D. T.: A Continuum Analysis for Double Layer Space Frame Shells. *Eng.* Zurich, **26** (1966).

Anhang

Berechnung der Biegesteifigkeitsbeiwerte

Zuerst zwingt man das Fachwerk auf Biegung χ_x. Man drückt die Steifigkeiten von den Gleichungen (29) aus, ersetzt aus den Gleichungen (22) bis (24) die Werte der Momente und verwendet dann die Formeln der in schrägen Richtungen auftretenden Durchbiegungen;

$$B_{11} = -\frac{m_x}{\varkappa_x} = -\frac{1}{\varkappa_x}\left(\frac{M_1}{a_1} + M_2\frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha + M_3\frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta + M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} - \right.$$

$$\left. - M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}\right) = \frac{1}{\varkappa_x}\cdot\left(EI_1\frac{\varkappa_x}{a_1} + EI_2\cos^2\alpha\,\varkappa_x\frac{\cos\alpha}{l_1}\cdot\cot\alpha + EI_3\cos^2\beta\cdot\right.$$

$$\cdot\varkappa_x\frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta + GI_{2t}\frac{1}{2}\cdot 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{l_1}\cdot\varkappa_x + GI_{3t}\frac{1}{2}\cdot\cos\beta\cdot$$

$$\left.\cdot\sin\beta\frac{\cos\beta}{l_1}\varkappa_x\right).$$

* Ungarisch.

Wo zwischen der Durchbiegung (bzw. Verdrehung) und dem Biegemoment (Torsionsmoment) die folgende Abhängigkeit berücksichtigt wurde:

$$M_i = EI_i(-\varkappa_i),$$

$$M_{it} = \frac{GI_{it}}{2} \cdot 2\varkappa_{it} .$$

Nach Reduktion, mit den Bezeichnungen (34):

$$B_{11} = i_1 + i_2 \cos^4\alpha + i_3 \cos^4 \beta + i_{2t} \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_{3t} \cos^2\beta \cdot \sin^2\beta. \tag{35}$$

In ähnlicher Weise:

$$B_{21} = -\frac{m_y}{\varkappa_x} = -\frac{1}{\varkappa_x}\left(M_2 \frac{\sin\alpha}{l_1} + M_3 \frac{\sin\beta}{l_1} - M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} + M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_x}\left(EI_2 \frac{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{l_1}\varkappa_x + EI_3 \frac{\cos^2\beta \cdot \sin\beta}{l_1}\varkappa_x - \frac{GI_{2t}}{2} 2 \cos\alpha \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sin\alpha \frac{\cos\alpha}{l_1}\varkappa_x - \frac{GI_{3t}}{2} 2\cos^2\beta \frac{\sin^2\beta}{l_1}\varkappa_x\right),$$

$$B_{21} = i_2 \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_3 \cos^2\beta \cdot \sin^2\beta - i_{2t} \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - i_{3t} \cos^2\beta \cdot \sin^2\beta, \tag{36}$$

$$B_{31} = -\frac{m_{xy}}{\varkappa_x} = -\frac{1}{\varkappa_x}\left(M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1} - M_3 \frac{\cos\beta}{l_1} + M_{2t}\frac{\sin\alpha}{l_1} + M_{3t}\frac{\sin\beta}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_x}\left(EI_2\, \varkappa_x \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{l_1 \sin\alpha}\cos^2\alpha - EI_3 \cos^2\beta\, \varkappa_x \frac{\cos\beta}{l_1} +\right.$$

$$\left.+ \frac{GI_{2t}}{2} 2\varkappa_x 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \frac{\sin\alpha}{l_1} - \frac{GI_{3t}}{2} 2\cos\beta \cdot \sin\beta \cdot \varkappa_x : \frac{\sin\beta}{l_1}\right),$$

$$B_{31} = i_2 \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - i_3 \cos^3\beta \cdot \sin\beta + i_{2t} \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - i_{3t} \sin^3\beta \cdot \cos\beta. \tag{37}$$

Durch Ableitung mit dem anderen Ausdruck von $m_{yx} = m_{xy}$ (vgl. Gleichungen 24 und 24') erhält man für B_{31} eine andere, jedoch mit der vorausgehenden gleichwertige Form:

$$B'_{31} = i_2 \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - i_3 \cos^3\beta \cdot \sin\beta - i_{2t} \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha + i_{3t} \cos^3\beta \cdot \sin\beta. \tag{37a}$$

Man zwingt das Fachwerk auf Biegung $\varkappa_y$:

$$B_{12} = -\frac{m_x}{\varkappa_y} = -\frac{1}{\varkappa_y}\left(\frac{M_1}{a_1} + M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha + M_3 \frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta +\right.$$

$$\left.+ M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} - M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}\right) = \frac{1}{\varkappa_y}\left(EI_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot \varkappa_y +\right.$$

$$+ EI_2 \frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta \cdot \sin^2\beta \cdot \varkappa_y - \frac{GI_{2t}}{2} 2 \frac{\cos^2\alpha}{l_1}\sin\alpha \cdot \varkappa_y -$$

$$\left.- \frac{GI_{3t}}{2} 2\cos\beta \cdot \sin\beta \frac{\cos\beta}{l_1}\right),$$

$$B_{12} = i_2 \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_3 \cos^2\beta \cdot \sin^2\beta - i_{2t} \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - i_{3t} \cos^2\beta \cdot \sin^2\beta, \tag{38}$$

$$B_{22} = -\frac{m_y}{\varkappa_y} = -\frac{1}{\varkappa_y}\left(M_2 \frac{\sin\alpha}{l_1} + M_3 \frac{\sin\beta}{l_1} - M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} + M_3 \frac{\cos\beta}{l_1} = \right.$$

$$= \frac{1}{\varkappa_y}\left(EI_2 \frac{\sin\alpha}{l_1}\varkappa_y \cdot \frac{\sin^2\alpha}{l_1} + EI_3 \frac{\sin\beta}{l_1}\varkappa_y \sin^2\beta + \right.$$

$$\left. + GI_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1}\varkappa_y \cos\alpha \cdot \sin\alpha + GI_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}\varkappa_y \cos\beta \cdot \sin\beta\right),$$

$$B_{22} = i_2 \sin^4\alpha + i_3 \sin^4\beta + i_{2t}\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_{3t}\cos^2\beta \cdot \sin^2\beta; \tag{39}$$

$$B_{32} = -\frac{m_{xy}}{\varkappa_y} = -\frac{1}{\varkappa_y}\left(M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1} - M_3 \frac{\cos\beta}{l_1} + M_{2t}\frac{\sin\alpha}{l_1} + \right.$$

$$\left. + M_{3t}\frac{\sin\beta}{l_1}\right) = \frac{1}{\varkappa_y} \cdot \left(EI_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\sin^2\alpha \cdot \varkappa_y - EI_3 \frac{\cos\beta}{l_1}\sin^2\beta\,\varkappa_y - \right.$$

$$\left. - \frac{GI_{2t}}{2} 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \frac{\sin\alpha}{l_1} \cdot \varkappa_y + \frac{GI_{3t}}{2} 2\cos\beta \cdot \sin\beta \frac{\sin\beta}{l_1}\varkappa_y\right),$$

$$B_{32} = i_2 \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - i_3 \sin^3\beta \cdot \cos\beta - i_{2t}\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha + i_{3t}\sin^3\beta \cdot \cos\beta. \tag{40}$$

Bzw. mit dem anderen Ausdruck von $m_{xy} = m_{yx}$

$$B_{32} = i_2 \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - i_3 \sin^3\beta \cdot \cos\beta + i_{2t}\cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - i_{3t}\cos^3\beta \cdot \sin\beta. \tag{40a}$$

Schließlich zwingt man das Fachwerk auf Verdrehung $\varkappa_{xy}$:

$$B_{13} = -\frac{m_x}{2\varkappa_{xy}} = -\frac{1}{2\varkappa_{xy}}\left(\frac{M_1}{a_1} + M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha + M_3 \frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta + \right.$$

$$\left. + M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} - M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}\right) = \frac{1}{2\varkappa_{xy}}\left[EI_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\cot\alpha 2\,\varkappa_{xy} \cdot \right.$$

$$\cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha - EI_3 \frac{\cos\beta}{l_1}\cot\beta \cdot \sin\beta \cdot 2\varkappa_{xy} - \frac{GI_{2t}}{2}\frac{\cos\alpha}{l_1} 2\varkappa_{xy} \cdot$$

$$\left. \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \frac{GI_{3t}}{2}\frac{\cos\beta}{l_1} 2\varkappa_{xy} \cdot (\cos^2\beta - \sin^2\beta)\right],$$

$$B_{13} = i_2 \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - i_3 \cos^3\beta \cdot \sin\beta - i_{2t}\frac{1}{2}\cos\alpha \cdot \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) +$$

$$+ i_{3t}\frac{1}{2}\cos\beta \cdot \sin\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{41}$$

$$B_{23} = -\frac{m_y}{2\varkappa_{xy}} = -\frac{1}{2\varkappa_{xy}}\left(M_2 \frac{\sin\alpha}{l_1} + M_3 \frac{\sin\beta}{l_1} - M_{2t}\frac{\cos\alpha}{l_1} + M_{3t}\frac{\cos\beta}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\varkappa_{xy}}\left[EI_2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot 2\varkappa_{xy}\frac{\sin\alpha}{l_1} - EI_3 \cos\beta \cdot \sin\beta \cdot \right.$$

$$\left. \cdot 2\varkappa_{xy}\frac{\sin\beta}{l_1} + \frac{GI_{2t}}{2}\frac{\cos\alpha}{l_1} 2\varkappa_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \frac{GI_{3t}}{2}\frac{\cos\beta}{l_1}(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\right],$$

$$B_{23} = i_2 \cos\alpha \cdot \sin^3\alpha - i_3 \cos\beta \cdot \sin^3\beta + \frac{1}{2} \cdot i_2 \sin^2\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) -$$

$$- \frac{1}{2} i_{2t} \sin^2\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{42}$$

und endlich:

$$B_{33} = -\frac{m_{xy}}{2\varkappa_{xy}} = -\frac{1}{2\varkappa_{xy}}\left(M_2 \frac{\cos\alpha}{l_1} - M_3 \frac{\cos\beta}{l_1} + M_{2t}\frac{\sin\alpha}{l_1} + M_{3t}\frac{\sin\beta}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\varkappa_{xy}}\left[EI_2 \frac{\cos\alpha}{l_1}\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot 2\varkappa_{xy} + EI_3 \frac{\cos\beta}{l_1}\cos\beta \cdot \sin\beta \cdot\right.$$

$$\cdot 2\varkappa_{xy} - \frac{GI_{2t}}{2}\frac{\sin\alpha}{l_1}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)2\varkappa_{xy} -$$

$$\left. - \frac{GI_{3t}}{2}\frac{\sin\beta}{l_1}(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\,2\varkappa_{xy}\right]$$

$$B_{33} = i_2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_3\cos^2\beta \cdot \sin^2\beta - i_{2t}\frac{1}{2}\sin^2\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) -$$

$$- i_{3t}\frac{1}{2}\sin^2\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta). \tag{43}$$

Bzw. mit dem anderen Ausdruck von $m_{xy} = m_{yx}$:

$$B_{33} = i_2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + i_3\cos^2\beta \cdot \sin^2\beta + \frac{1}{2} i_{2t}\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} i_{3t}\cos^2\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \frac{1}{2} i_{1t}\,. \tag{43a}$$

Untersucht man die Werte der Steifigkeitsglieder:

— da die rechten Seiten der Gleichungen (36) und (37) übereinstimmen, deshalb wird $B_{12} = B_{21}$;

— da $B_{31} = B'_{31}$ und 0,5 $(B_{31} + B'_{31}) = B_{13}$, daraus folgt: $B_{31} = B'_{31} = B_{13}$;

— in ähnlicher Weise: da $B_{32} = B'_{32}$ und 0,5 $(B_{32} + B'_{32}) = B_{23}$, und daraus folgt: $B_{32} = B'_{32} = B_{23}$.

Demgemäß ist die Steifigkeitsmatrix *symmetrisch!*

Die entgültige Form der Steifigkeitsmatrix **B** ist in der Tafel angeführt, wo auch berücksichtigt wurde, daß
$B_{31} = B'_{31}$; $B_{13} = B'_{31}$; $B_{23} = B_{32}$
und $B^x_{33} = (B_{33} + B'_{33})$ 0,5.

Calculation of Single-layer Anisotropic Bent Shells Consisting of Scalene Web System. The calculation of the most general case of the single layer spatial triangulated web system with the aid of the continuum method is presented. The strength characteristics of the continuum (anisotropic shell subjected to flexural stresses) which, from the statical viewpoint is equivalent to the latticework, are determined; the governing differential equations of the shell are established, then the stresses (internal bar forces, bar moments) are expressed as functions of the stress resultants (membrane forces, specific moments). The deductions are extended also to cases where the shell turns into a flat plate; the conditions of the orthotropy are treated separately.

Расчет изогнутых анизотропных оболочек, состоящих из однослойных решеток с общей треулогьной сеткой. В работе показан расчет наиболее общего случая пространственных решетчатых конструкций, состоящих из однослойных треугольных сеток, континуумным методом. Определяются характеристики прочности континуума (анизотропной изогнутой оболочки), являющегося в статическом отношении совершенно однозначным решетчатой конструкции, выводятся дифференциальные уравнения оболочки, затем в функции сил разреза (мембранные силы, удельные моменты) выражаются нагрузки (стержневые силы, стержневые моменты), возникающие в стержнях пространственной решетки. Математические выводы занимаются с теми случаями, при которых оболочки переходят в плоскую пластину и отдельно рассматриваются условия ортотропии.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (3—4), pp. 413—449 (1974)

RED MUD SMELTING EXPERIMENTS

GY. HORVÁTH*

[Manuscript received: 13. April, 1973]

Examination of synthetic Na—Al hydrosilicates and plant grade red mud types revealed how the Na_2O losses during smelting could be reduced. Effects of lime, coke, and their simultaneous presence, as well as of the temperature and duration of the heat treatment on the Na_2O loss have been determined. The causes of such losses have become clarified. As a result, such technologies were developed whereby, in addition to the Fe_2O_3 and Al_2O_3 contents, the Na_2O content of the red mud could also be extracted with minimum losses.

Introduction

Processing of the red mud produced in the course of Bayer alumina production is all the more justified as it represents one of the environment protection problems arising from the aluminum industry [1] and, in addition, since the recovery of the useful components therein (Na_2O, Al_2O_3, Fe_2O_3) might cover part of the raw material shortages of this country (caustic soda, iron ore, bauxite).

For the processing of red mud quite a number of technologies have been elaborated [2] whose economic efficiency is greatly influenced by the caustic soda quantity recovered [3, 4].

Our experiments were aimed at investigating on the conditions where under the Na_2O content would remain in the slag, to be recovered therefrom in the form of aluminate alkali.

The experiments were built on testing synthetic sodium aluminium hydrosilicates and red mud. These investigations used Paulik—Paulik—Erdey type MOM derivatograph, Müller Micro-111 X-ray diffractometer, and Stanton MF-H5 thermobalance.

Prior to beginning the description of the experimental work, the abbreviated indications of some complex compounds referred to in this paper will have to be enumerated, to be used hereafter instead of the complete formulae of these compounds:

* Gy. Horváth, 1115 Fejér L. út 34, Budapest, Hungary.

Sodium aluminium silicate = NAS

$Na_2Al_2O_4$	= NA	$Ca_3Al_{10}O_{18}$	= C_3A_5
Ca_2SiO_4	= C_2S	$Ca_2Al_2SiO_7$	= C_2AS
$CaTiO_3$	= CT	$Ca_{12}Al_{14}O_{33}$	= $C_{12}A_7$
$Ca_2Fe_2O_5$	= C_2F	$Na_4Ca_3Al_{10}O_{20}$	= $N_2C_3A_5$

1. Synthetic Na—Al hydrosilicate experiments

The Na_2O content of the red mud is usually bonded in various sodium aluminum hydrosilicates (zeolite, sodalite, and cancrinite compounds, see 5—8), or is found as an adhesive alkali. During the examinations therefore, one had to pay attention, to the behavior of the bonded and adhesive alkali contents in order to discover the sources of Na_2O losses.

1.1 *Zeolite test*

This compound was produced by reacting sodium silicate with a sodium aluminate solution at 90 °C. According to NEMECZ et al. [7], under such conditions a material composition similar to the LINDE zeolite would be produced. In full agreement with the literature referred to, our thus produced material actually had this composition type (see Table I). The X-ray diffractogram obtained with this sample is presented in Fig. 1a. According to the location and intensity of the lines, the sample is identical to the LINDE 5-Å zeolite, and may be characterized with the formula $Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 4{,}5H_2O$.

The mass variations in zeolite, on the effect of temperature, were studied in argon atmosphere with a sensitive thermobalance (see Fig. 2a), while Fig. 3a illustrates the derivatogram of the same sample, whose DTA curve gives information on the phase transformation temperatures.

Table I presents the composition of the samples heated to different temperatures, and the Na_2O losses calculated from their chemical analysis.

1.1.1 *Na_2O losses of zeolite in the function of temperature*

Fig.2a and Table I reveal that part of the adhesive Na_2O content of zeolite, and its total water content will be lost at a temperature of about 400 °C. At 440 and 575 °C, that is, in two stages up to 625 °C, still more Na_2O will be lost. This means that before 625 °C is reached, the total adhesive Na_2O ($Na_2O_{ad.}$) amount will be removed from the system, which is equal to an 8,7 per cent Na_2O loss. Thereafter, the mass of the sample will not vary up to 1200 °C. At 1320 °C, however, another volume reduction will be observed, this time in the bonded Na_2O content, amounting to 3,7 per cent. Thus, the total Na_2O loss will be 12,4 per cent.

Table I

Composition and Na_2O losses (%) of differently treated zeolites

Sample No			Symbol	Na_2O	Al_2O_3	SiO_2	CaO	Ignition losses	Na_2O loss
			Zeolite	19,5	29,2	34,5	0,1	17,6	0
			Zeolite 400°C	22,8	34,1	41,7	0,1	1,3	3,4
			Zeolite 525°C	22,1	34,9	42,6	0,1	0,2	8,0
			Zeolite 625°C	22,1	35,0	42,8	0,1	0	8,7
			Zeolite 1220°C	22,1	35,0	42,8	0,1	0	8,7
	Heated to	1	Zeolite 1350°C	21,4	35,3	43,2	0,1	0	12,4
2			57,2% Zeolite +42,8% CaO	8,8	21,6	26,5	43,0	0	40,3
3		1400°C	44,4% Zeolite +33,4% CaO +22,2% coke	8,0	21,8	26,6	43,5	0	46,5
4			66,7% Zeolite +33,3% coke	21,1	35,4	43,3	0,1	0	14,2

1.1.2 *Zeolite phase transformations in the function of temperature*

Information on the temperature of the phase transformations in zeolite, on the effect of temperature increase, was supplied by the derivatogram presented in Fig. 3. The DTA curve shows minima at 180, 465, and 840 °C, and maxima at 880 and 1090 °C. The minima are associated with water and Na_2O losses, while the water loss limit temperature (400 °C) and the maxima of the DTA curve at 880 and 1090 °C, observed without any mass variation whatsoever, refer to phase transformations.

The structural transformation of zeolite was studied on samples heat treated in advance at temperatures of 400, 625, 750, 850, 950, 1100, 1200, 1300, and 1400 °C, respectively, for one hour. A few samples were analyzed simultaneously and, on the basis of the composition, their Na_2O losses have been calculated. These data, too, are shown in Table I.

The phase transformations in zeolite on the effect of temperature are illustrated by the X-ray diffractograms of Figures 1/a—e.

Fig. 1a presents the phase composition of our starting material: a zeolite of $(NaAlSiO_4)_{12} \cdot 27H_2O$ composition.

After heating up to 400÷850 °C, the crystal structure of the zeolite was still almost identical to that of the initial substance. The difference was only

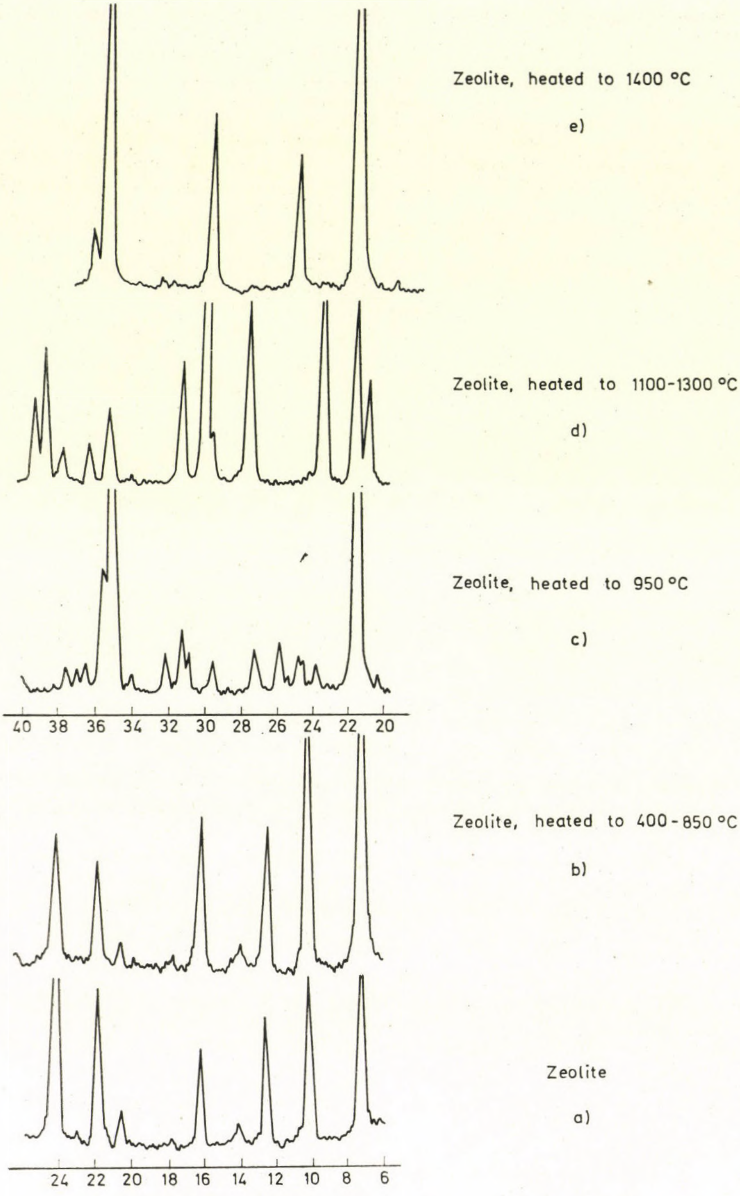


Fig. 1

indicated by the displacement of the reflections towards lower Å values (Fig. 1b).

Fig. 1c illustrates the phase composition of a sample heated to 950 °C. Zeolite had already been transformed: mainly carnegieite ($NaAlSiO_4^A$), stable at low temperatures, and some nephelite ($Na_2Al_2Si_2O_8$) had been produced.

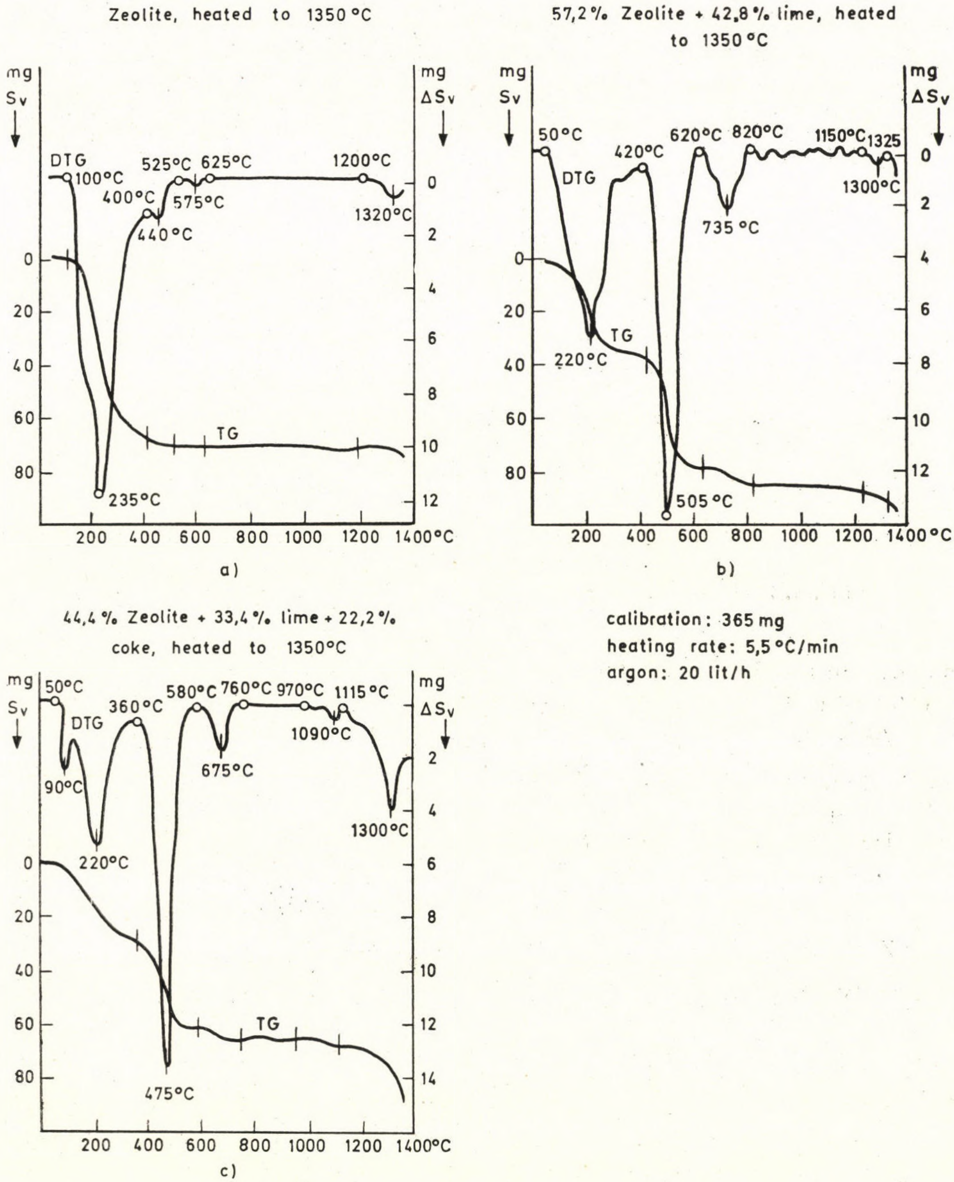


Fig. 2

This phase transformation is indicated by the maximum of the DTA curve at 880°C in Fig. 3.

Between 1100 and 1300°C the samples mostly contain nephelite, and only to a smaller amount carnegieite which is rather stable at lower temperatures,

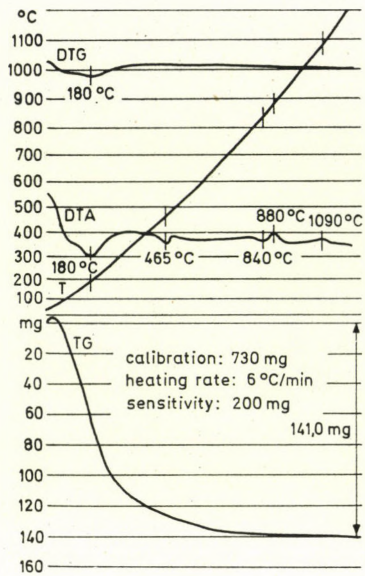


Fig. 3. Zeolite (from aluminate lye and sodium silicate, at $t = 90$ °C)

as shown in Fig. 1d. In this temperature range nephelite is the prevailing phase as referred to by the maximum at 1090°C.

According to Fig. 1e, the 1400°C material does not any longer contain nephelite, thus only the carnegieite stable at low temperature can be identified in the sample.

Diffractograms show that zeolite will undergo the following phase transformations on the effect of temperature elevation:

$$\text{Zeolite} \xrightarrow{880\,°\text{C}} \text{NaAlSiO}_4^{\text{A}} + (\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{1090\,°\text{C}} \text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8 + (\text{NaAlSiO}_4^{\text{A}}) \xrightarrow{1350\,°\text{C}} \text{NaAlSiO}_4^{\text{A}}\,*$$

Experiments verify that the zeolite will lose, prior to the phase transformations, that is, at a low temperature (<625 °C) about 8,7 per cent of its Na_2O content, whereas between 880 and 1090 °C no Na_2O loss takes place. Another, if insignificant Na_2O loss of 3,7 per cent, will be observed at high temperatures above 1200 °C. This proves that both the nephelite and carnegieite phases are highly stable compounds and decompose only at elevated temperatures, while neither their production nor transformation is associated with Na_2O losses.

Thus, the Na_2O losses observed at low temperatures may only be from the adhesive Na_2O content of the zeolite, and sometimes they represent as

* The quantity of the phase in brackets is less than that of the others.

much as 71 per cent of the total Na_2O losses. Bonded Na_2O can be removed only at high temperatures, amounting to about 29 per cent of the total.

1.1.3 *Calculation of the activation energy and the order of reaction during the thermal decomposition of zeolite*

Calculations have been performed on the thermal decomposition of zeolite. The rate of decomposition can be expressed by the following equation [9, 10]:

$$v = \frac{-\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} = k \cdot c_A^x \tag{1}$$

In the above equation

c_A = the quantity of the material not decomposed as yet, at the time moment t, in mole/cm³,
k = velocity constant of the reaction, 1/sec,
x = order of reaction.

The value of k varies with the temperature, according to the equation below:

$$k = k_0 \cdot \exp(-E/RT) \cdots$$

where
E = activation energy, cal/mole,
k_0 = the constant of the equation expressing the variation of k with the temperature, 1/sec.

On the basis of these two equations we obtain

$$k = k_0 \cdot \exp(-E/RT) = \frac{-\mathrm{d}\, c_A/\mathrm{d}t}{c_A^x} \,. \tag{2}$$

Logarithmization of the above equation gives

$$\ln k = \ln k_0 - \frac{E}{RT} = \ln \left| \frac{-\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \right| - x \ln c_A \,. \tag{4}$$

After differentiation with respect to T we have

$$\mathrm{d} \ln k = \frac{E\mathrm{d}T}{RT^2} = \mathrm{d} \ln \left| -\frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} \right| - x\, \mathrm{d} \ln c_A \tag{5}$$

while division d ln c_A will give

$$\frac{\mathrm{d} \ln k}{\mathrm{d} \ln c_A} = \frac{E}{RT^2} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d} \ln c_A} = \frac{\mathrm{d}\ln \left| \frac{-\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} \right|}{\mathrm{d} \ln c_A} - x \,. \tag{6}$$

Since this equation is rather difficult to use because of its differential form, it will have to be integrated between T_1 and T_2, that is, c_{A1} and c_{A2}. Thus, the equation of the straight line will read as

$$\frac{\ln \dfrac{\left|\dfrac{-\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t}\right|_{T_2}}{\left|\dfrac{-\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t}\right|_{T_1}}}{\ln \dfrac{C_{A2}}{C_{A1}}} = \frac{\dfrac{-E}{R}\left|\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right|}{\ln \dfrac{C_{A2}}{C_{A1}}} + x \,. \tag{7}$$

If the values expressed in mole/cm^3 are replaced by (g), this will certainly not mean any error, since the quotient of the conditions under temperatures T_1 and T_2 will be involved, and the conversion coefficient is eliminated. Thus,

Table II

Calculation of the activation energy (E) and order of reaction (X) in the thermal decomposition of zeolite and the (zeolite + lime + coke) compound (10)

1 T, K°	2 $\frac{-\Delta g}{\Delta t}$, g/sec	3 $\frac{\left(\frac{-\Delta g}{\Delta t}\right)_{T_2}}{\left(\frac{-\Delta g}{\Delta t}\right)_{T_1}}$	4 lg 3*	5 g, gramm	6 $\frac{g_{T_2}}{g_{T_1}}$	7 lg 6*
1518	$0{,}66 \cdot 10^{-6}$			0,2939		
		2,515	0,4006		0,999	−0,0004
1553	$1{,}66 \cdot 10^{-6}$			0,2935		
		1,403	1,472		0,997	−0,0013
1583	$2{,}33 \cdot 10^{-6}$			0,2928		
		0,571	−0,2434		0,997	−0,0013
1613	$1{,}33 \cdot 10^{-6}$			0,2923		
1515	$0{,}566 \cdot 10^{-5}$			0,2931		
		2,350	0,3711		0,989	−0,0048
1548	$1{,}330 \cdot 10^{-5}$			0,2902		
		0,702	−0,1537		0,989	−0,0048
1578	$0{,}943 \cdot 10^{-5}$			0,2866		
		0,713	−0,1469		0,993	−0,0031
1608	$0{,}666 \cdot 10^{-5}$			0,2844		
		1,150	0,0607		0,997	−0,0013
1623	$0{,}766 \cdot 10^{-5}$			0,2833		

The figures marked by asterisk indicate the corresponding columns changing over to decimal log, and substituting the R value, the equation will assume the following form:

$$\frac{\lg \dfrac{\left.\dfrac{-\Delta g}{\Delta t}\right|_{T_2}}{\left.\dfrac{-\Delta g}{\Delta t}\right|_{T_1}}}{\lg \dfrac{g_2}{g_1}} = \frac{-0{,}218E\left|\dfrac{1}{T_2}-\dfrac{1}{T_1}\right|}{\lg \dfrac{g_2}{g_1}} + x . \tag{8}$$

In this equation $-\Delta g/\Delta t$ indicates the mass reduction per unit time at temperature T, while g means the quantity of the material not decomposed yet at the same temperature level.

On the basis of the temperature/volume reduction diagram of the zeolite, as plotted by means of the thermobalance, the corresponding data of Eq. (8)

8 $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{K^\circ}$	9 $\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}$	10 0,218.9*	11 $\frac{4^*}{7^*}$	12 $\frac{10^*}{7^*}$
$0{,}659 \cdot 10^{-3}$			$-1{,}0 \cdot 10^{3}$	$0{,}762 \cdot 10^{-2}$
	$-0{,}014 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}0305 \cdot 10^{-3}$		
$0{,}645 \cdot 10^{-3}$			$-0{,}113 \cdot 10^{3}$	$0{,}218 \cdot 10^{-2}$
	$-0{,}013 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}028 \cdot 10^{-4}$		
$0{,}632 \cdot 10^{-3}$			$+0{,}187 \cdot 10^{3}$	$0{,}202 \cdot 10^{-2}$
	$-0{,}012 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}0262 \cdot 10^{-4}$		
$0{,}620 \cdot 10^{-3}$				
$0{,}659 \cdot 10^{-3}$				
	$-0{,}013 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}02830 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}0773 \cdot 10^{3}$	$0{,}059 \cdot 10^{-2}$
$0{,}646 \cdot 10^{-3}$				
	$-0{,}012 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}02615 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}0320 \cdot 10^{3}$	$0{,}0545 \cdot 10^{-2}$
$0{,}643 \cdot 10^{-3}$				
	$-0{,}013 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}2830 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}0474 \cdot 10^{3}$	$0{,}0913 \cdot 10^{-2}$
$0{,}621 \cdot 10^{-3}$				
	$-0{,}005 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}01090 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}0467 \cdot 10^{3}$	$0{,}0838 \cdot 10^{-2}$
$0{,}616 \cdot 10^{-3}$				

The figures marked by asterisk indicate the corresponding columns have been calculated for temperatures 1245, 1280, 1310 and 1340 °C, whereby the activation energy (E) and the order (x) of the reaction could then be determined. These data are presented in Table II and Fig. 4. According to the calculations the activation energy is

$$E = 1{,}87 \times 10^5 \text{ cal/mole},$$

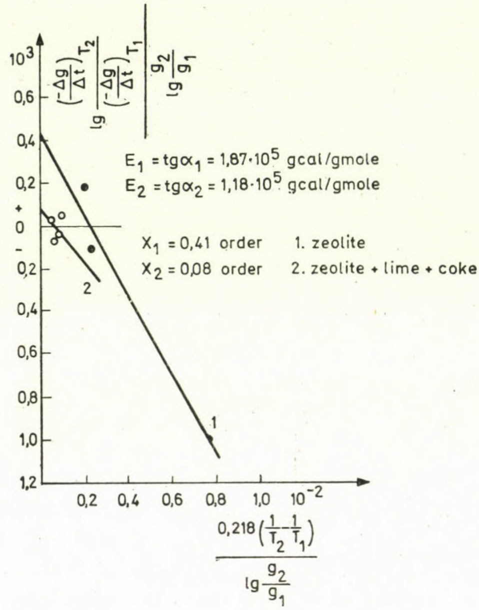


Fig. 4. Illustration of the straight line $\Delta\, lg\, (g/t) / \Delta\, lg\, g$ during the decomposition of zeolite and the zeolite + lime + coke compound

a rather high value which refers to nephelite stability. Decomposition is based on a 0,41-order reaction.

Thus, the nephelite-carnegieite phase obtained from the zeolite is a stable compound which does not decompose during the high-temperature processing of the red mud, whereby melting can be performed without any significant Na_2O loss.

1.1.4 *Effect of the addition of lime, coke and the combination of the two on the zeolite*

The mixture compositions used in these investigations were:

(1) Zeolite in itself,

(2) 100 mass part zeolite + 75 mass part CaO = 57,2% zeolite + 42,8% CaO,

(3) 100 m.p. zeolite + 75 m.p. CaO + 50 m.p. coke = 44,4% zeolite + 33,4% lime + 22,2% coke,

(4) 100 m.p. zeolite + 50 m.p. coke = 66,7% zeolite + 33,3% coke.

The lime quantity added to compounds 2 and 3 is almost enough for zeolite decomposition when, according to the following equation, NA and C_2S will be produced:

$$Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 + 4CaO = Na_2O \cdot Al_2O_3 + 2(2CaO \cdot SiO_2).$$

The calcium content of the compounds is, as compared to the quantity required for C_2S production, 87 and 88 per cent, respectively.

These compounds were heated to 1400°C, and maintained at this temperature for 1 hour, each. The chemical composition of the heat treated samples, and their Na_2O losses are presented in Table I, while their phase composition in Figures 5a—d are given, where Fig. 5a is identical to Fig. 1e.

On the effect of calcium addition the carnegieite structure will decompose whereby β—C_2S and NA are produced, although some non-decomposed carnegieite could also be found in the samples (Fig. 5b). Besides, after lime addition, this material contains a carnegieite modification ($NaAlSiO_4^F$) quite different from that in a sample without lime ($NaAlSiO_4^A$).

Fig. 5c illustrates the phase composition of a sample obtained from the zeolite + lime + coke compound. This sample shows practically the same phases as the previous one.

Fig. 5d presents the X-ray diffractogram of the sample obtained by the heat treatment of the zeolite + coke compound. On the effect of coke addition the carnegieite, quite stable at low temperatures, will be partly transformed into nephelite (lime addition made the same material transform into upper carnegieite: $NaAlSiO_4^F$!).

According to the X-ray diffractograms the zeolite does not change too much in the presence of coke. This finding is verified by the Na_2O loss of 14,2 per cent calculated in Table I for this compound. In the presence of lime, on the other hand, the zeolite will decompose, β-C_2S and NA will be produced and, in the meantime, a considerable amount of Na_2O (40,3 per cent) will leave the sample. If lime and coke are simultaneously present, the Na_2O loss will further increase to 46,5 per cent.

In order to study the Na_2O losses during phase transformation, the above compounds have been examined with the thermal balance method Figures 2a—c illustrate the results obtained by testing compounds Nos 1, 2, and 3, respectively, while the chemical composition and Na_2O losses of these compounds are shown in Table I.

Fig. 2b reveals that, up to 420°C, the water content and part of the adhesive Na_2O content of the zeolite will be removed. Up to 620°C the water

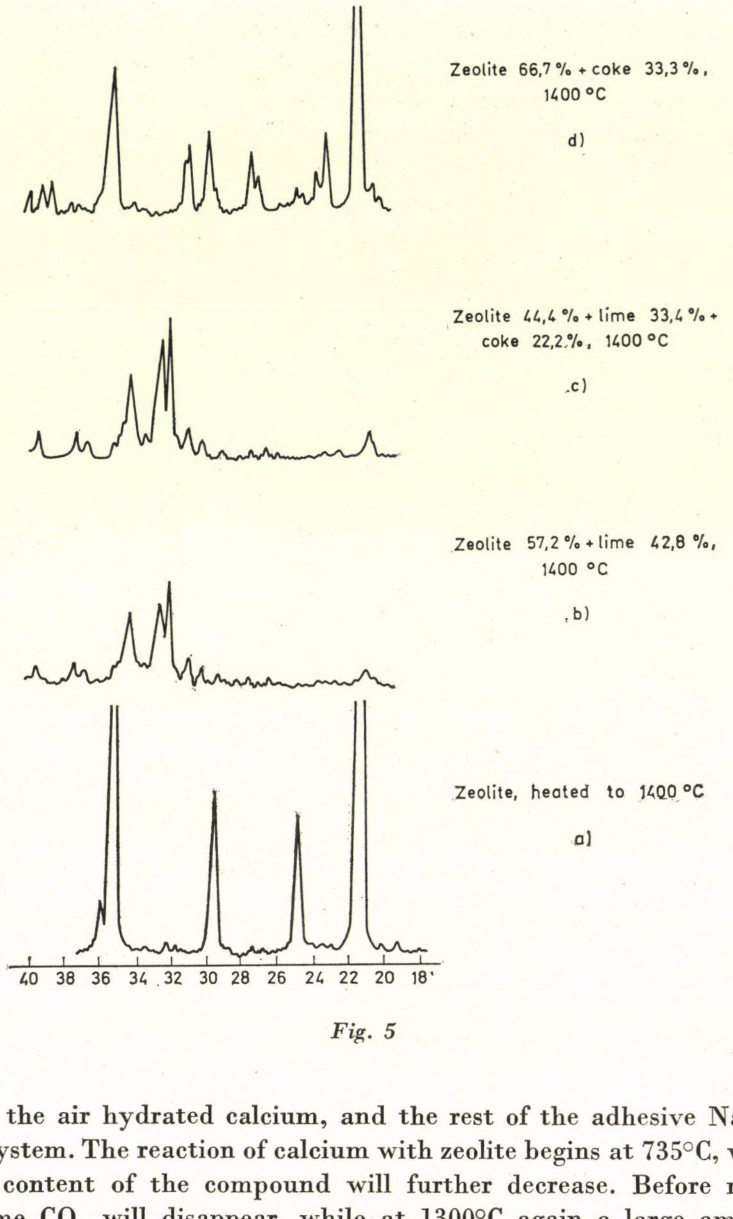


Fig. 5

content of the air hydrated calcium, and the rest of the adhesive Na_2O will leave the system. The reaction of calcium with zeolite begins at 735°C, whereby the Na_2O content of the compound will further decrease. Before reaching 1150°C some CO_2 will disappear, while at 1300°C again a large amount of Na_2O is evaporated. In the presence of lime, therefore, the Na_2O loss will increase from 12,4 to 40,3 per cent, if the zeolite is heated up to 1350°C.

In the simultaneous presence of lime and coke (Fig. 2c) the water loss is almost completed up to 360°C, and also part of the adhesive Na_2O, will leave the system by this time. Up to 580°C the rest of the adhesive Na_2O and the water content of the lime will be removed. Before 760°C the Na_2O bonded as a result of the reaction between calcium and zeolite will disappear, while SO_3 and CO_2 leave the system prior to reaching 1115°C. At a still higher temperature further Na_2O will evaporate as the reaction $Na_2O + C = 2Na + CO$ should also take place. Thus, in the presence of lime and coke, the zeolite would lose about 46,5 per cent of its original Na_2O content.

Calculations have been made on the thermal decomposition of the zeolite + lime + coke compound as referred to earlier (see Table II), and curve No. 2 in Fig. 4 was plotted on the basis of the data thus obtained.

According to this curve the activation energy of decomposition, $E = 1{,}18 \times 10^5$ cal/mole, is rather low as compared to the decomposition of the zeolite. This confirms that, in the presence of lime and coke, zeolite decomposition requires much less energy.

As for the calculations, it will have to be noted here that the E value determined while heating is much less accurate than the figure obtained isothermally. Furthermore, in this case the equation of the straight lines in Fig. 4 is expressed by means of three or four points only which, also leads to uncertainties.

1.2 *Sodalite test*

Depending on the process conditions, caolin digested at a higher 100°C temperature will produce sodalite and cancrinite type phases [7].

We have followed the same process, at a temperature of 210°C. The chemical composition of the material thus produced is shown in Table III, and its phase composition in Fig. 6a. The sample mostly contained natrodavyne ($3NaAlSiO_4 \cdot Na_2CO_3$), nosean ($3NaAlSiO_4 \cdot NaOH$), and cancrinite ($3NaAlSiO_4 \cdot NaOH$) plus, however, illite, two zeolite types, non-reacted caolin, and NA.

Hence, for the sake of simplicity, instead of the natrodavyne, nosean, and cancrinite phases the term "sodalite" will be used.

1.2.1 *The Na_2O losses of sodalite in the function of temperature*

On the effect of heating the sodalite will lose its water content, just as the zeolite does, and its Na_2O content, too, will decrease. This was verified by the analysis of sodalite samples heat treated for 1 hour at different temperatures. The sample compositions are given in Table III, whereby Fig. 7, illustrating the sodalite derivatogram, can then be evaluated.

Up to 415°C the sodalite will lose its water content as well as some of its adhesive Na_2O content, amounting to a Na_2O loss of 5,8 per cent. Up to 660°C its total water and $Na_2O_{a\alpha}$ content is lost, representing a 13,7 per cent Na_2O loss. By the time 950°C is reached, all the SO_3 and the majority of CO_2 will

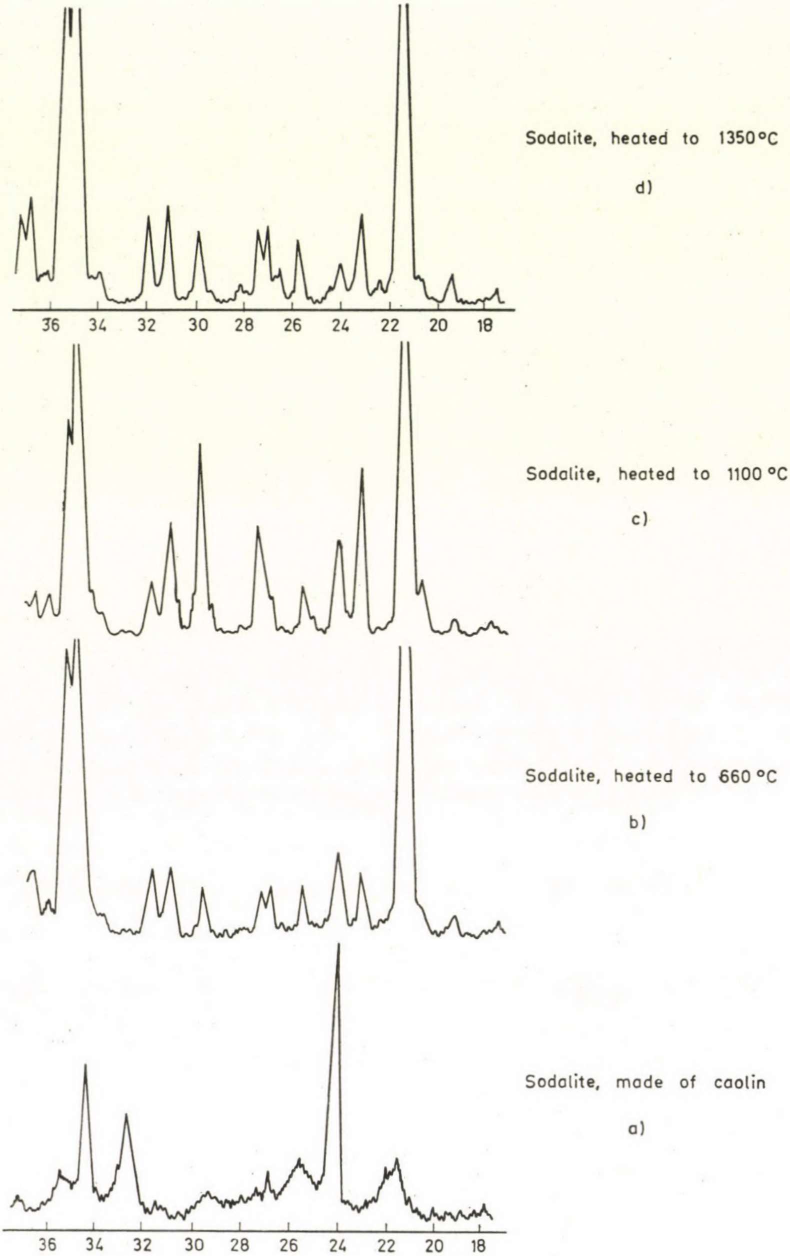

Sodalite, heated to 1350 °C
d)
Sodalite, heated to 1100 °C
c)
Sodalite, heated to 660 °C
b)
Sodalite, made of caolin
a)
36 34 32 30 28 26 24 22 20 18
36 34 32 30 28 26 24 22 20 18

Fig. 6

Table III

Composition and Na_2O losses (%) of differently treated sodalites

		Sample Symbol...	Na_2O	Al_2O_3	SiO_2	CaO	Fe_2O_3	SO_3	CO_2	Moisture	Ignition losses	Na_2O loss
		sodalite	25,5	33,3	32,9	0,7	0,3	0,25	1,85	5,1	10,4	—
	1	sodalite 415°C	25,8	35,6	35,2	0,8	0,3	0,3	2,0	—	4,2	5,8
		sodalite 660°C	24,1	36,5	36,0	0,8	0,3	0,3	2,0	—	2,1	13,7
		sodalite 950°C	24,5	37,1	36,6	0,8	0,3	—	0,6	—	0,35	13,7
		sodalite 1100°C	24,7	37,2	36,9	0,8	0,3	—	0,2	—	0,20	13,7
		sodalite 1200°C	24,7	37,3	37,0	0,8	0,3	—	—	—	—	13,7
	1	sodalite 1400°C	23,6	37,8	37,5	0,8	0,3	—	—	—	—	18,6
Heated to 1350°C	2	86,2% sodalite + 13,8% lime	20,1	32,7	32,4	14,5	0,3	—	—	—	—	20,0
	3	75,8% sodalite + 24,2% lime	17,3	28,9	28,7	24,9	0,2	—	—	—	—	22,4
	4	62,3% sodalite + 37,7% lime	11,8	24,2	24,0	39,7	0,2	—	—	—	—	36,1
	5	52,2% sodalite + 47,8% lime	8,1	20,8	20,7	50,2	0,2	—	—	—	—	49,0
	6	87,0% sodalite + 13,0% coke	23,2	37,7	38,0	0,8	0,3	—	—	—	—	21,2
	7	68,0% sod. + 21,8% lime + 10,2% coke	17,0	28,8	29,0	24,8	0,5	—	—	—	—	24,3
	8	56,9% sod. + 34,5% lime + 8,6% coke	9,0	25,5	25,7	39,4	0,4	—	—	—	—	54,9
	9	48,4% sod. + 44,3% lime + 7,3% coke	4,0	21,5	21,7	52,4	0,3	—	—	—	—	76,1

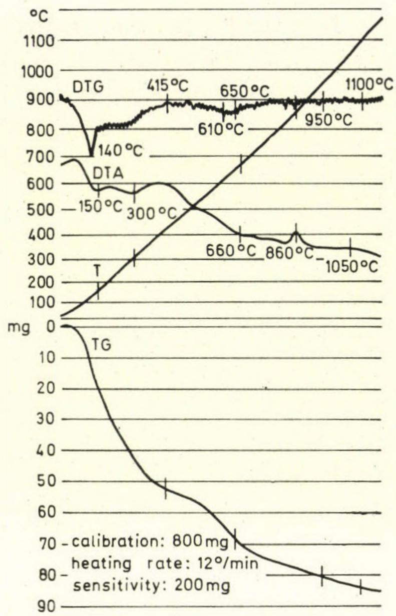


Fig. 7. Sodalite (by caolinite digestion at $t = 210$ °C)

leave the system, with continuous CO_2 losses up to 1200°C. The Na_2O losses at higher temperatures can be concluded from the chemical composition of a sample heated to 1400°C. The total Na_2O loss at 1400°C is 18,6 per cent, of which adhesive alkali has a share of 13,7 per cent, and only 4,9 per cent is due to the evaporation of bonded Na_2O.

1.2.2 *Phase transformations of the sodalite in the function of temperature*

Figure 7 shows DTA curve maxima at 860 and 1050°C, while minima can be observed at 150, 300, and 660°C, respectively. Thus, taking into consideration the limit temperature (415°C) referring to a loss of volume, as well as the above temperatures indicating phase transformations, the structural transformation of sodalite was studied on X-ray diffractograms obtained with samples heated for 1 hour to 415, 660, 950, 1100 and 1350°C, respectively, then cooled off. The exposures are presented in Figs 6a—d.

Figure 6a illustrates the initial sodalite composition described above.

The sample heat treated at 415°C contains the phases referred to earlier but, due to the water losses, the intensity of the individual reflections would be changed.

The picture of the sample heat treated at 660°C (Fig. 6b) reveals the appearance of new phases: carnegieite stable at low and high temperatures, respectively ($NaAlSiO_4^A$, $NaAlSiO_4^F$), and nephelite ($Na_2Al_2Si_2O_8$), with the majority of the sample consisting of the two carnegieite types. The minimum of the DTA curve in Fig. 7 at 660°C refers to the appearance of the carnegieite phases. Besides some non-decomposed natrodavyne and nosean, the sample exhibits small amounts of $Na_2Al_2O_4$, illite, zeolite, and cancrinite phases. Since the caolinite has been decomposed, it cannot be any longer identified.

The X-ray picture of the material heat treated at 950°C is the same as that described above, with the exception of the absence of cancrinite, and the almost completed decomposition of natrodavyne.

Fig. 6c illustrates the sample cooled off after a sustaining time at 1100°C. Just as in the previous samples again carnegieite prevails, although the nephelite quantity, too, has increased considerably. This is shown by the maximum of the DTA curve at 1050°C in Fig. 7.

At 1350°C (Fig. 6d) the nephelite quantity will decrease again since, at this temperature, it is not any longed a stable phase. The sample is characterized by the two different carnegieite phases, but some non-decomposed nosean, a small amount of zeolite and NA can also be identified therein.

According to Figures 6a—d, the phase transformations of sodalite, in the function of temperature, are:

$$\text{Sodalite} \xrightarrow{660\,°C} NaAlSiO_4^A + NaAlSiO_4^F +$$
$$+ (Na_2Al_2Si_2O_8) \xrightarrow{1050\,°C} NaAlSiO_4^A + NaAlSiO_4^F +$$
$$+ Na_2Al_2Si_2O_8 \xrightarrow{1350\,°C} NaAlSiO_4^A + NaAlSiO_4^F + (Na_2Al_2Si_2O_8).$$

Table III proves that also sodalite, will lose 5,8 per cent of its Na_2O content prior to the beginning of the phase transformations. At the phase transformation temperatures (660 and 1050°C) another 7,9 per cent Na_2O loss may be observed due, however, still to adhesive Na_2O and/or NA-decomposition. Evaporation of the bonded Na_2O content will start only above 1200°C, amounting to only a Na_2O loss of 4,9 per cent. Thus, the total Na_2O loss of the sample heated up to 1400°C amounts to 18,6 per cent of which the share of the adhesive Na_2O is 74, while that of the bonded Na_2O 26 per cent.

1.2.3 *The effect of lime and coke addition on sodalite*

These investigations made use of the following compounds:

1) 100% sodalite
2) 86,2% sodalite + 13,8% CaO
3) 75,8% sodalite + 24,2% CaO
4) 62,3% sodalite + 37,7% CaO
5) 52,2% sodalite + 47,8% CaO
6) 87,0% sodalite + 13,0% coke

7) 68,0% sodalite + 21,8% CaO + 10,2% coke
8) 56,9% sodalite + 34,5% CaO + 8,6% coke
9) 48,4% sodalite + 44,3% CaO + 7,3% coke

In compounds Nos 2, 3, 4, and 5 the lime quantity was gradually increased. The calcium contents expressed in the percentage of the lime quantity providing for the decomposition of NAS, that is, for the production of C_2S and NA are presented in Table IV.

Table IV

Calcium content of sodalite compounds in the percentage of the lime quantity related to C_2S formation

Sample	Calcium content of the compounds in the percentage of the lime quantity related to C_2S production
1.	0
2.	24,0
3.	46,6
4.	88,6
5.	129,6
6.	0
7.	45,8
8.	82,1
9.	129,0

Compound No. 6 contains coke, while the mixtures 7, 8 and 9 include lime and coke simultaneously. Their relative calcium contents are similarly shown in Table IV.

The samples were heated to 1350°C, then cooled off after a sustaining time of 1 hour. Their chemical composition is illustrated in Table III which presents, in addition, the Na_2O losses of the differently treated sodalites.

The effects of lime addition can be studied in Figs 8a—e.

Figure 8a illustrates the composition of calciumfree sodalite. This pattern is identical to the sample shown in Fig. 6d.

About 25 per cent of the lime quantity required for C_2S formation (compound No. 2, Fig. 8b) will already cause some changes. New phases appear: C_2S and C_3A_5, indicating the partial decomposition of the carnegieite and nephelite phases.

In sample No. 3 (Fig. 8c), besides the nephelite and the two different carnegieite phases, the C_2S and C_3A_5 compounds may again be found, but another new phase: gehlenite (C_2AS) can also be discovered as against the prevailing carnegieite-nephelite phases.

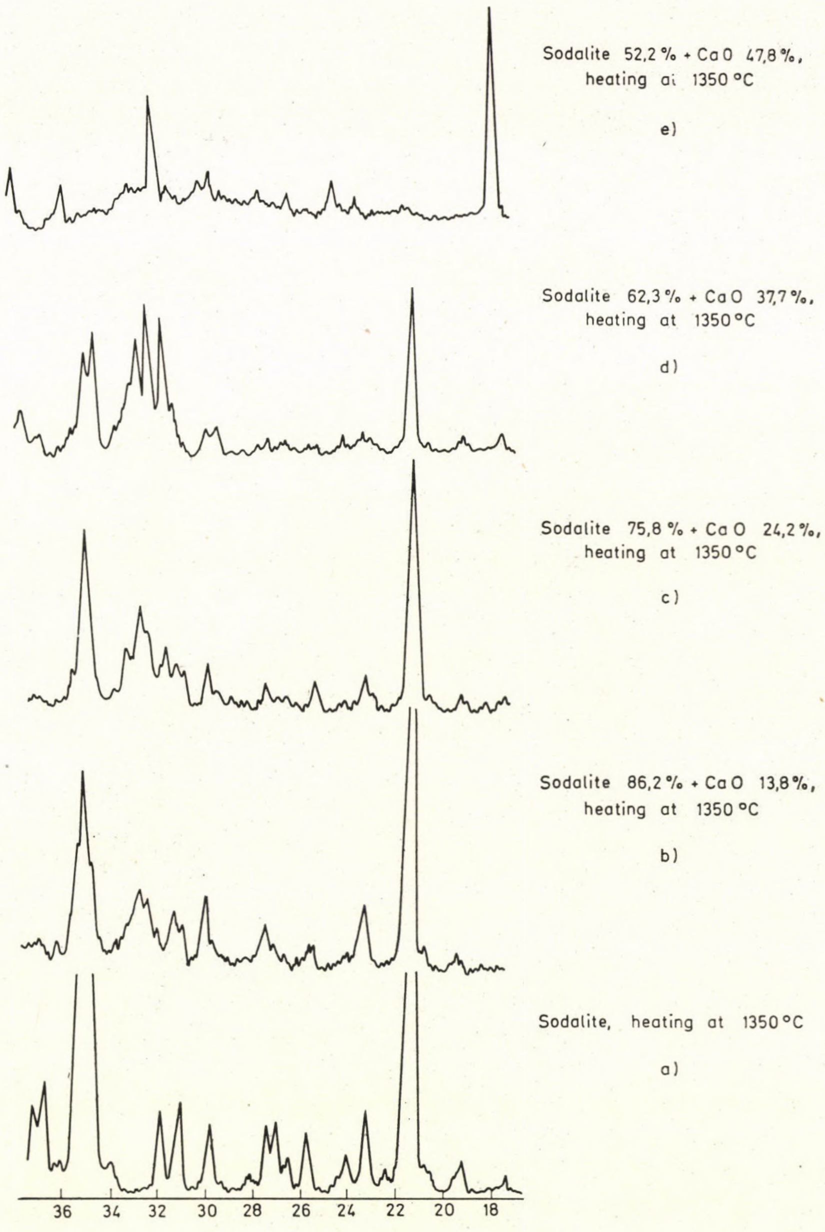

Sodalite 52,2 % + CaO 47,8 %,
heating at 1350 °C
e)
Sodalite 62,3 % + CaO 37,7 %,
heating at 1350 °C
d)
Sodalite 75,8 % + CaO 24,2 %,
heating at 1350 °C
c)
Sodalite 86,2 % + CaO 13,8 %,
heating at 1350 °C
b)
Sodalite, heating at 1350 °C
a)
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18

Fig. 8

When the lime quantity is sufficient for C_2S formation then, theoretically, the NAS phases start to decompose and produce C_2S and NA. However, according to Fig. 8d, although the quantity of the NA and C_2S phases has increased as compared to the previous samples, non-decomposed nephelite and carnegieite phases as well as gehlenite could still be found in compound No. 4.

If the calcium quantity is increased to such an extent that it will be sufficient for the production of both C_2S and $C_{12}A_7$, that is excessive, then the phases shown in Fig. 8e will be seen on the X-ray diffractogram of the sample. The nephelite and carnegieite phases will almost disappear and be replaced by C_2S and $C_{12}A_7$ produced therefrom. Hardly any NA will be detected in the system, but the most remarkable phenomenon will be the increased quantity of C_2AS.

The effects of coke addition may be studied by comparing compounds Nos 1 and 6. Fig. 9a illustrates the phase composition of sodalite treated at 1350°C, and Fig. 9b that of the sodalite + coke compound. The two phase compositions are nearly identical.

This supports the experience gained during the examination of zeolite, namely, that coke will hardly decompose the nephelite-carnegieite phases up to a temperature of 1400°C. Thus, the Na_2O loss of sample No. 6 is only 21,2 per cent (see Table III).

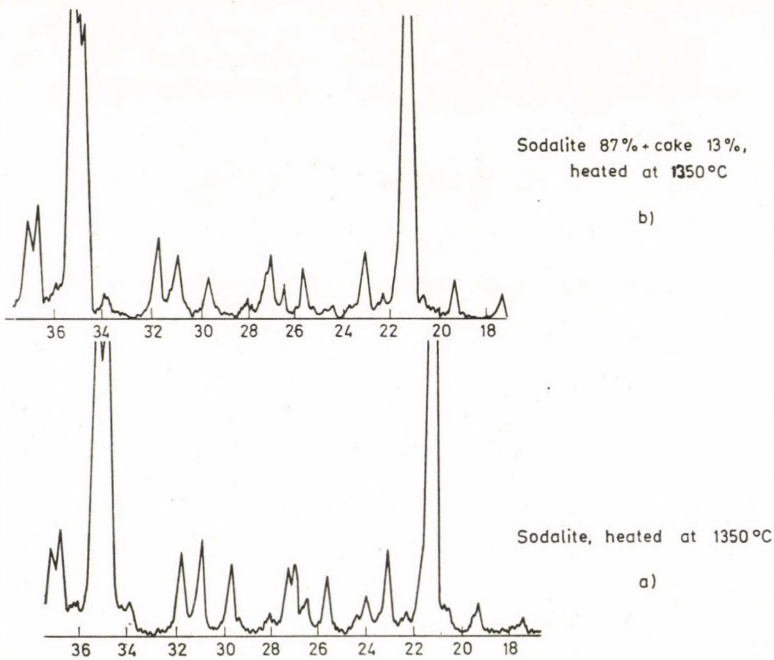


Fig. 9

The joint effect of lime and coke addition on the phase composition of sodalite may be studied in Figs 10a—b.

Figure 10a illustrates the X-ray diffractogram of compound No. 3, while Fig. 10b presents that of compound No. 7. The effect of coke addition, as compared to the sodalite + lime compound, is manifested mainly in the increased gehlenite phase, which is in close correlation with the higher Na_2O losses. Practically the same is experienced with the higher lime content compounds 4 and 8 as well as 5 and 9.

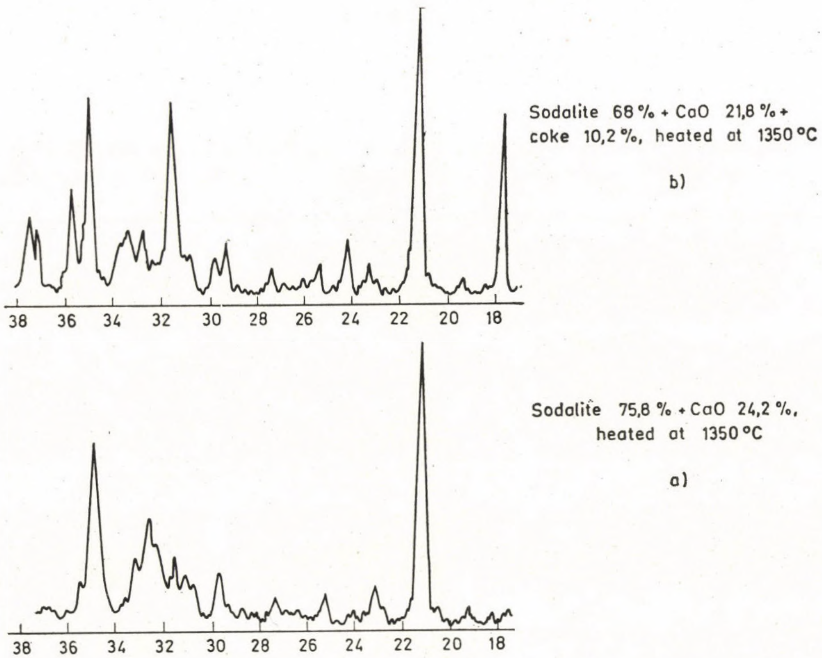


Fig. 10

Summing up the experiences collected in testing zeolite and sodalite, the following statements may be made:

(a) On the effect of a temperature increase both zeolite and sodalite will first lose their water and adhesive Na_2O contents. The bonded Na_2O will leave the system only at very high temperatures (>1200°C), thus causing only a small Na_2O loss.

The Na_2O losses suffered by zeolite and sodalite in the function of temperature are illustrated in Fig. 11. It is to be seen that up to 600÷650°C only the Na_2O_{ad}, will disappear, then up to 1200÷1250°C no more Na_2O discharge will occur, while above 1200°C the Na_2O losses will increase considerably as (NAS-s) decomposition would start.

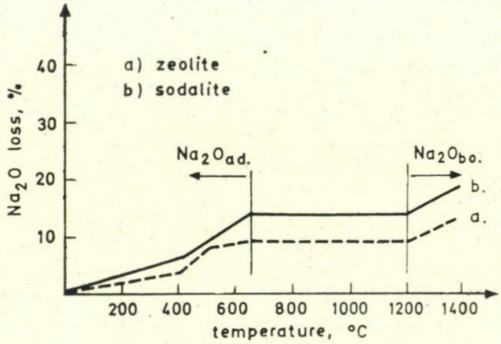


Fig. 11. Na_2O losses of zeolite and sodalite in the function of temperature

It follows that both zeolite and sodalite, as well as the compounds produced therefrom are very stable, they do not decompose before a temperature of 1350 to 1400°C is reached, and their Na_2O losses from bonded Na_2O are only 3,7 and 4,9 per cent, respectively, that is, not more than about 27 to 29 per cent of their total Na_2O losses.

(b) On the effect of coke addition the Na_2O losses will increase only to a slight extent: in the case of zeolite from 12,4 to 14,2 per cent, and with sodalite from 18,6 to 21,2 per cent.

(c) Figure 12 illustrates the Na_2O losses of sodalite on the effect of calcium addition (see curve "a").

If lime is added to sodalite in different quantities, it will be found that a small amount of lime will increase the Na_2O losses only to a slight degree (see compounds 2 and 3 in Table III). If, however, the lime quantity added is sufficient to bind the total SiO_2 content of NAS in the form of C_2S, then NAS will be completely decomposed whereby the Na_2O losses would significantly increase (see sample No. 2 in Table I, and sample No. 4 in Table III). Further lime addition will continue to increase the Na_2O losses (sample No. 5 in Table III).

(d) In the simultaneous presence of lime and coke the Na_2O losses of sidalite will further increase as shown by curve "b" in Fig. 12.

Figure 13 illustrates the variation of the Na_2O quantity leaving the zeolite and sodalite systems, if the initial material is supplemented with coke (compounds Nos 4 and 6), a CaO quantity sufficient for C_2S formation (compounds Nos 2 and 4), or lime plus coke in the above quantities (compounds Nos 3 and 8). It is to be seen, however, that coke will increase the Na_2O losses only to a slight extent; addition of a lime quantity sufficient for C_2S production exerts a more serious effect: the Na_2O losses will increase from 12,4 to 14,2 per cent in the case of zeolite, and from 18,6 to 21,2 per cent when sodalite is treated; the joint addition of lime and coke will further increase the sodium oxide losses: in the case of zeolite to 46,5 per cent, and in that of sodalite to 54,9 per cent.

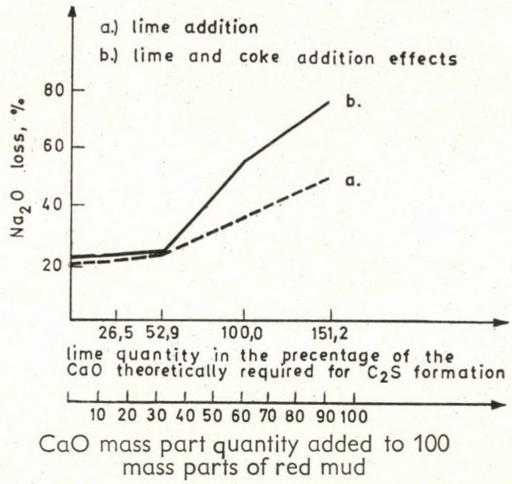


Fig. 12. Na_2O losses of sodalite

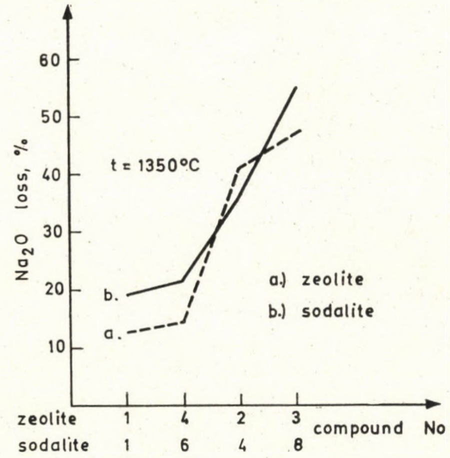


Fig. 13. Na_2O losses of zeolite and sodalite, in the function of coke, lime, and coke + lime addition

2. Experiments with operational grade red mud

Following the experiments involving synthetic Na—Al hydrosilicates, the various red mud types supplied by the Almásfüzitő Alumina Works were tested. One type was causticized under the usual operational conditions, while the other was not causticized at all. The two compositions are shown in Table V. The Na—Al hydrosilicate is present in both types in the forms of natrodavyne and cancrinite, that is, $[3(NaAlSiO_4) \cdot Na_2CO_3]$ and $[3(NaAlSiO_4) \cdot NaOH]$.

Table V

Red mud compositions, %

Sample	Fe_2O_3	Al_2O_3	SiO_2	Na_2O	CaO	MgO	MnO	TiO_2	SO_3	Igni-tion losses
Red mud 1968	32,5	17,8	11,0	6,4	10,6	1,3	0,1	4,6	1,1	14,0
Red mud 1969	39,5	16,5	13,0	10,1	1,3	1,1	0,2	6,5	1,1	9,8

In the causticized mud the quantity of these phases is much less and, as new phases, Ca-aluminate hydrate ($3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 6H_2O$) and calcite ($CaCO_3$) can also be identified. In addition, both samples contain goethite, hematite, gibbsite, boehmite, diaspore, rutile, and anatase.

Both mud types as well as their compounds with coke, lime, and coke plus lime have been tested with the thermobalance method in order to determine their phase transformations on the effect of heat treatment and additives, and their Na_2O losses.

2.1 *Examination of the causticized red mud samples*

Figures 14a—d present the thermodiagrams of the various compounds.

Figure 14a illustrates the TG and DTG curves of the causticized red mud: up to 570°C the sample will lose its water and adhesive Na_2O contents ($Na_2O_{ad} = 14,1$ per cent), then, before reaching 720°C, another 18,2 per cent Na_2O will be lost because of the reaction of lime with sodalite. Up to 800°C all the SO_3 will disappear, then the CO_2 content before the temperature of 1180°C is reached and, finally, the decomposition of sodalite will start at 1340°C, accompanied by a further 11,7 per cent Na_2O loss. Thus the sample would lose about 44 per cent of its original Na_2O content.

Figure 14b reveals the volume loss of a compound consisting of the same mud (70%) and coke (30%): up to 580°C the water and the adhesive alkali (14,1 per cent) will leave the system, then before reaching 700°C about 35,3 per cent Na_2O will be released owing to the interaction between sodalite and lime and, prior to 780°C, the SO_3 content will be removed. Up to 980°C the reduction of Fe_2O_3 takes place, with an efficiency of $\eta_R = 97,4$ per cent, according to the equation

$$\begin{array}{l} 2Fe_2O_3 + C = 4FeO + CO_2 \\ 4FeO + 4C = 4Fe + 4CO \\ \hline 2Fe_2O_3 + 5C = 4Fe + CO_2 + 4CO \end{array}$$

The CO_2 will exit before 1080°C. In the next step the nephelite-carnegieite content of the red mud will decompose, leading to the evaporation of 18,6 per cent Na_2O. Thus, the total Na_2O loss will amount to 68%.

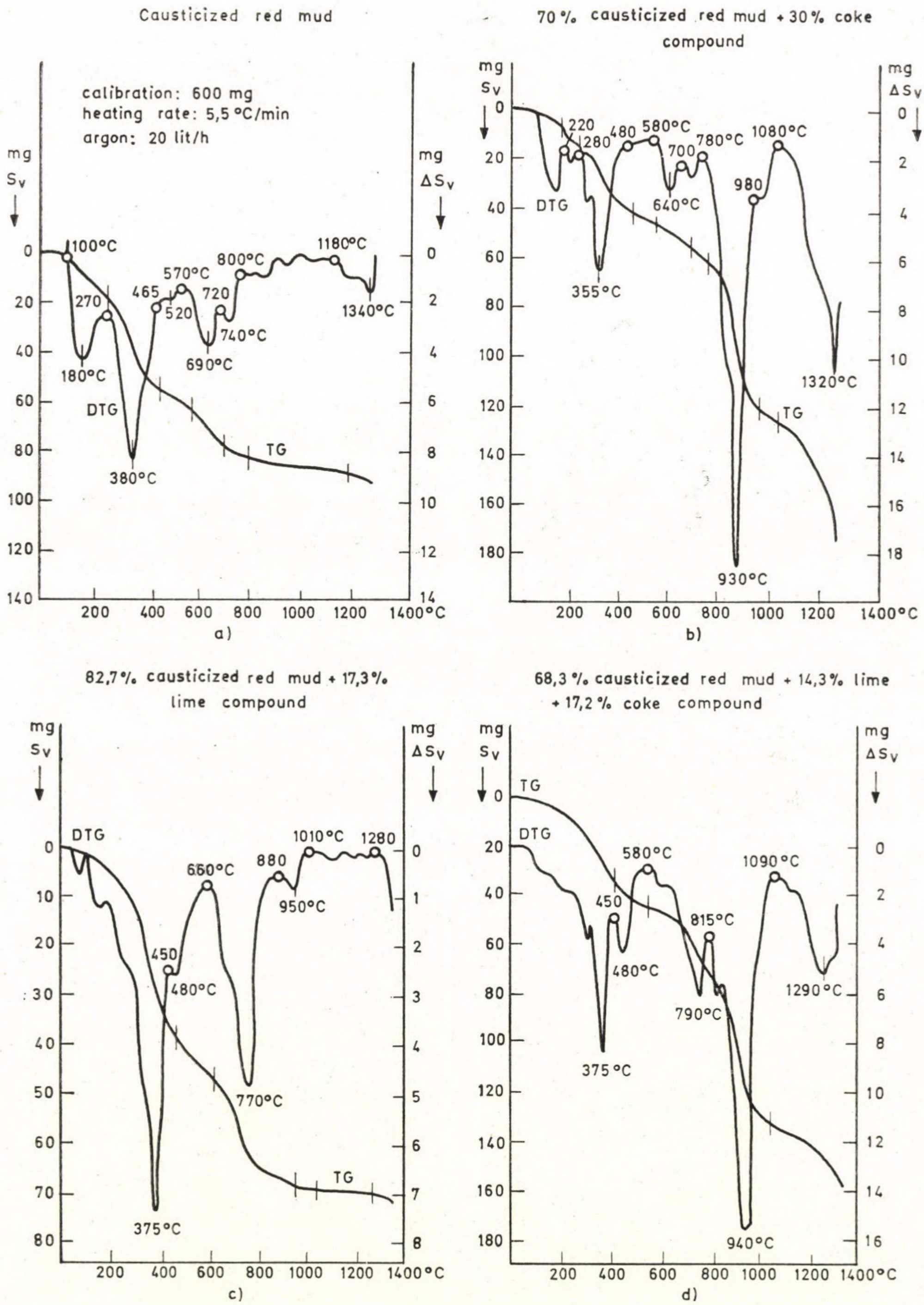

Causticized red mud
calibration: 600 mg
heating rate: 5,5 °C/min
argon: 20 lit/h
mg
S_v
mg
ΔS_v
100°C
270
180°C
DTG
380°C
465
520
570°C
690°C
720
740°C
800°C
1180°C
1340°C
TG
a)
70 % causticized red mud + 30 % coke compound
220
280
480
580°C
700
640°C
780°C
1080°C
980
355°C
930°C
1320°C
DTG
TG
b)
82,7 % causticized red mud + 17,3 % lime compound
DTG
450
480°C
650°C
880
950°C
1010°C
1280
770°C
375°C
TG
c)
68,3 % causticized red mud + 14,3 % lime + 17,2 % coke compound
TG
DTG
450
480°C
580°C
815°C
790°C
1090°C
1290°C
375°C
940°C
d)
200 400 600 800 1000 1200 1400°C

Fig. 14

The TG and DTG curves of the calcium compound (17,3 per cent) sufficient to produce causticized red mud (82,7 per cent), $C_{12}Af$, CT, and C_2S are illustrated in Fig. 14c: the sample will lose its water and adhesive Na_2O contents before 600°C then, because of the reaction of calcium with sodalite, a considerable amount (43,2 per cent) of Na_2O and SO_3 will leave the system at 770°C, whereas at 1280°C a volume loss to the CO_2 removal will be observed. At still higher temperatures another Na_2O loss of 4,7 per cent must be reckoned with. Thus, the total Na_2O loss is 62 per cent.

Figure 14d illustrates how the volume loss of the red mud plus lime compound would vary upon the addition of further calcium and coke quantities to the system: after the removal of the water and Na_2O_{ad} (at a temperature of 580°C), the Na_2O and SO_3 contents will disappear up to 815°C, owing to the reaction of sodalite with lime. This Na_2O loss, however, is much greater than that in the previous case (60,8 against 43,2 per cent), due to the presence of coke. The reaction taking place at 790°C will be completed by losing 60,8 per cent of the Na_2O content of the sample. Up to 1090°C the CO_2, will also be removed and the reduction of the Fe_2O_3 content of the red mud will take place as well:

$$\eta_R = 91{,}4 \text{ per cent.}$$

At a temperature of 1290°C a further Na_2O loss of 16 per cent may be observed, whereby the total Na_2O removal will equal 90,9 per cent.

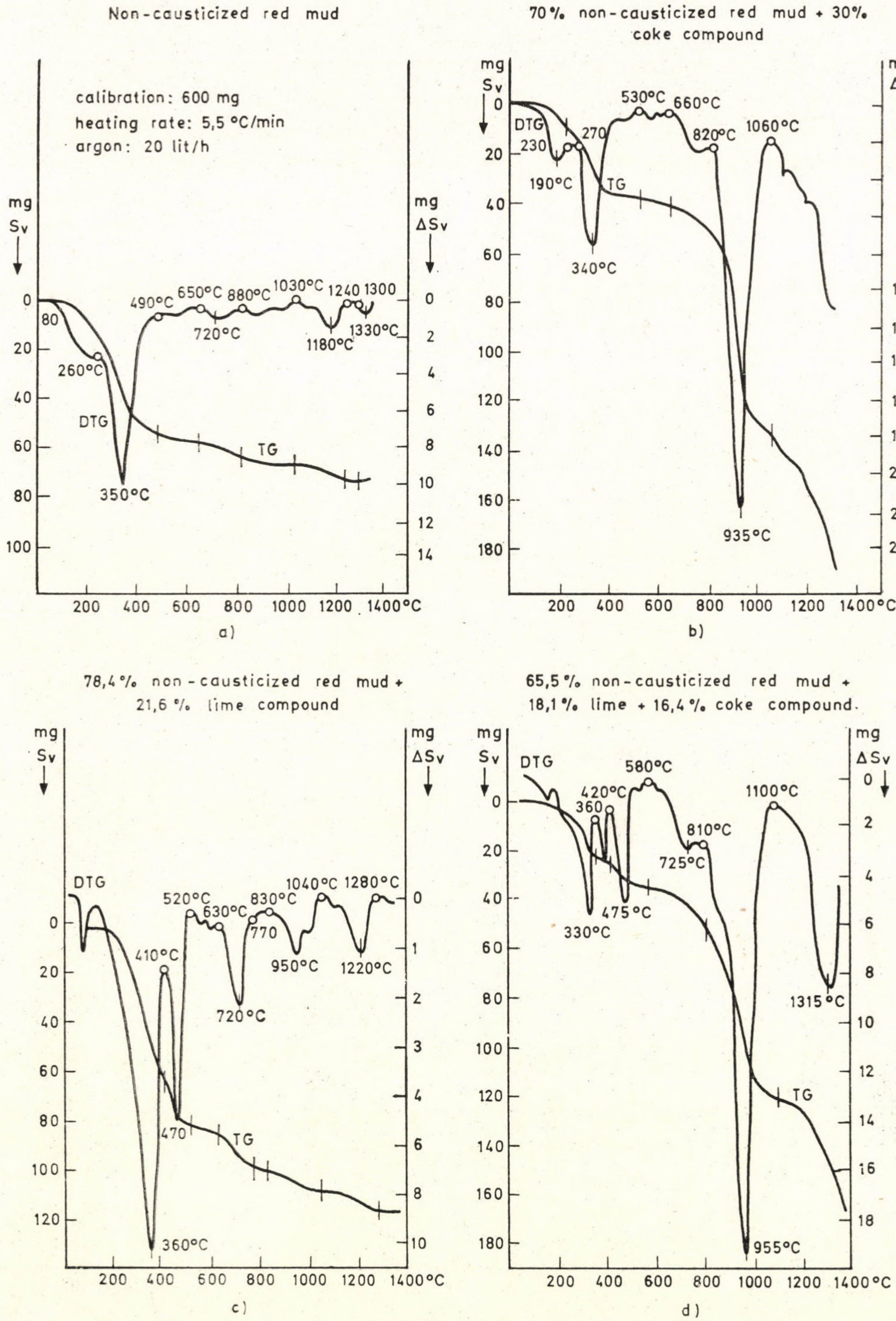
2.2 *Examination of the non-causticized red mud grades*

Figures 15a—d illustrate the thermograms of samples obtained from non-causticized red mud materials.

Figure 15a presents the volume loss of non-causticized red mud: up to 650°C the water and the chemically not bonded Na_2O (10,9 per cent) will leave the specimen, up to 820°C the SO_3 will disappear, then before 1030°C the removal of the CO_2 content can be witnessed. The nephelite-carnegieite content will decompose before reaching 1330°C whereby a Na_2O loss of 12 per cent is caused. Thus, the total Na_2O loss amounts to 22,9 per cent.

Variation of the mass of the red mud (70 per cent) and coke (30 per cent) compound is shown in Fig. 15b. The water and Na_2O_{ad} contents of the red mud will disappear before 660°C. This is followed by the removal of SO_3 prior to 820°C, and the evaporation of CO_2 up to 1060°C. At the same time the reduction of iron(III)oxide can also be observed: $\eta_R = 96{,}7$ per cent. A 14,4 per cent quantity of bonded Na_2O will leave only thereafter. Accordingly, the total Na_2O loss is 25,2 per cent.

Figure 15c illustrates the mass variation of a 78,7 per cent red mud and 21,3 per cent lime compound. The sample will lose the water up to 635°C while the adhesive alkali will leave as well (10,9 per cent). At 720°C, owing



Non-causticized red mud
calibration: 600 mg
heating rate: 5,5 °C/min
argon: 20 lit/h
mg Sv
mg ΔSv
80
260°C
DTG
350°C
490°C
650°C
880°C
1030°C
1240
1300
720°C
1180°C
1330°C
TG
200 400 600 800 1000 1200 1400°C
a)
70 % non-causticized red mud + 30% coke compound
230
190°C
270
340°C
530°C
660°C
820°C
1060°C
935°C
b)
78,4 % non-causticized red mud + 21,6 % lime compound
410°C
520°C
630°C
830°C
770
720°C
1040°C
1280°C
950°C
1220°C
470
360°C
c)
65,5 % non-causticized red mud + 18,1 % lime + 16,4 % coke compound.
580°C
420°C
360
330°C
475°C
810°C
725°C
1100°C
1315°C
955°C
d)

Fig. 15

to the reaction of sodalite and lime, about 9,9 per cent of the Na_2O content will evaporate, followed by the disappearance of the total SO_3 content and, before 1040°C, of the CO_2. Finally, at a temperature of 1220°C, another 7,4 per cent of Na_2O is released. Thus, the sample will lose about 28,2 per cent of its original Na_2O content.

Figure 15d illustrates the TG and DTG curves of the red mud-lime-coke compound: the water and Na_2O contents leave before 580°C, another 24,4 per cent Na_2O and the total SO_3 at 725°C because of the reaction of sodalite, calcium, and coke, whereas up to 1100°C the iron oxide reduction of an efficiency of 95,7 per cent, and the evaporation of CO_2 can be observed. A further 21,2 per cent of the sodium oxide is removed at 1315°C, whereby the total Na_2O loss will amount to 56,4 per cent.

Figure 16 explains the development of the Na_2O losses from the two different red mud types, in the function of the additives. Compounds No. 1 represent red mud alone, No. 2 the addition of coke, No 3. that of lime, while compounds No. 4 contain red mud, lime, and coke.

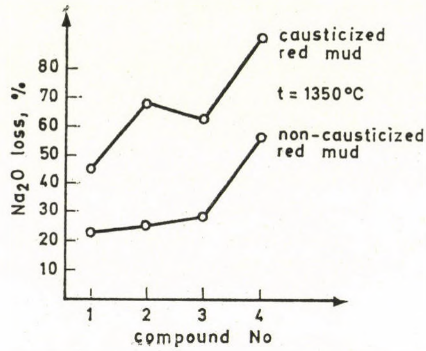


Fig. 16. Na_2O losses of causticized and non-causticized red mud grades in the function of coke, lime, and coke + lime additions

Figures 14a—d, 15a—d, and 16 reveal that

(1) The nephelite-carnegieite compound produced from the sodalite content of red mud is exceedingly stable, hardly decomposing even at temperatures of about — 1350°C (22,9 per cent Na_2O loss); however, in the case of a material with previously decomposed structure by causticization the Na_2O loss will amount, because of the presence of lime, to 44,0 per cent (see Fig. 16, compounds No. 1).

(2) The Na_2O loss will not vary excessively, if the red mud is heated with the simultaneous addition of coke. If a material not causticized in advance is involved, then the Na_2O loss would increase from 22,9 to 25,2 per cent. If, however, a previously causticized red mud is processed in the presence of coke, then a much greater (68,0 per cent) caustic soda loss must be reckoned with (see Fig. 16, compound No. 2) as, in this case, about 50 per cent of the calcium

quantity required for C_2S production, that is, for the decomposition of NAS-s, is already in the red mud.

(3) If such a lime quantity is added to the red mud that, in addition to NA, the production of C_2S and CT, and in the case of causticized mud that of $C_{12}A_7$, too, is feasible, then a Na_2O quantity of 28,2 per cent will leave the system if non-causticized, and 62,0 per cent if causticized mud is involve (see Fig. 16, compound No. 3).

(4) If, in the simultaneous presence of lime and coke, the red mud is completed by the addition of so much lime that, as above, not only NA but also C_2S and CT, and in the slag of the causticized mud also a $C_{12}A_7$ phase, will be produced, then, during fusion, the Na_2O content will lose 56,4 and 90,9 per cent, respectively. The former figure applies to non-causticized, the latter to causticized mud types (Fig. 16, compound No. 4).

Figure 17 illustrates the losses observed when melting low calcium content red mud (No. 1969) in the presence of coke, in the function of the melting temperature and sustaining time. Both these factors will increase the quantity of the released Na_2O. Above 1500°C all the sodium-aluminum-silicates will melt (see Fig. 18, 11), and the Na_2O loss will be significant (about 40 per cent)

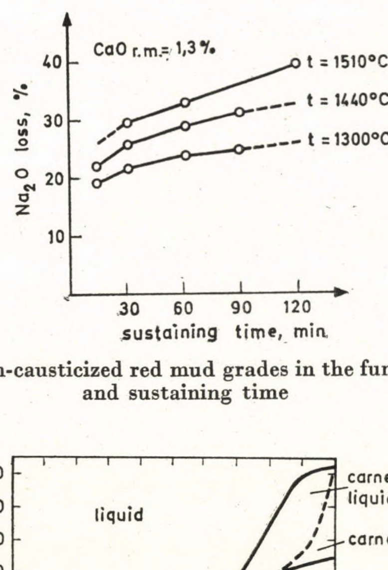


Fig. 17. Na_2O losses of non-causticized red mud grades in the function of melting temperature and sustaining time

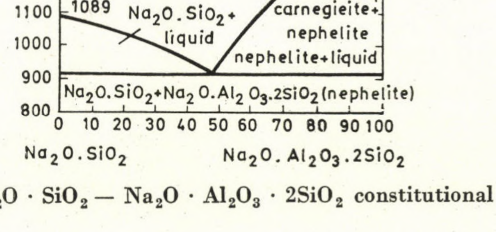


Fig. 18. $Na_2O \cdot SiO_2 - Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ constitutional diagram [11]

even in low calcium content compounds. Extension of the heat treatment period is not reasonable either, as even at low temperatures a Na_2O loss of about 20 to 30 per cent would be experienced, if the molten material was held at that temperature for 90 minutes longer.

Red mud experiments support the results of zeolite and sodalite investigations and, in addition, lead to further conclusions as well: if a red mud, partly causticized in advance, is processed then a much greater Na_2O loss is to be reckoned with than if the mud had not been causticized at all.

3. Kinetics of the Na_2O losses

The Na—Al hydrosilicates lose their water and adhesive Na_2O contents on the effect of a temperature increase, then they will be transformed into carnegieites characterized by the formula $NaAlSiO_4$ and/or nephelites of a $Na_2Al_2Si_2O_8$ composition. Depending on the initial substance, these transformations take place at different temperatures.

At a temperature of 880°C, the zeolite will be transformed into carnegieite ($NaAlSiO_4^A$) and nephelite ($Na_2Al_2Si_2O_8$), both stable at low temperatures (see Fig. 1c). On the other hand, sodalite will be transformed into carnegieite and nephelite ($NaAlSiO_4{}^{A,F}$ and $Na_2Al_2Si_2O_8$, respectively), each stable at both high and low temperatures, at 660°C (see Fig. 6b).

On the effect of further temperature increase such a temperature range will be arrived at where the quantity of the nephelite phase will increase as against that of the carnegieite phases, as shown in Figs 1d and 6c. This temperature range is between 1100 and 1300°C, as attested by the maximum of 1090°C of Fig. 3 for zeolite, and the transformation of sodalite at 1050°C in Fig. 7. In the material heated to 1350—1400°C, mainly carnegieite stable at both high and low temperatures, and a small amount of nephelite can be identified.

Both carnegieite and nephelite are rather stable phases, decomposing only at very high temperatures (>1200°C). This is why when testing zeolite, sodalite, and red mud samples without lime, a Na_2O loss of only about 10 to 20 per cent may be observed up to a temperature of 1300 to 1400°C, the greater part of which (50 to 70 per cent) is due to the evaporation of the adhesive Na_2O content of the samples. Thus adhesive alkali represents the primary source of Na_2O losses.

In the presence of coke the decomposition of the bonded Na_2O content is increasing since, above 1000°C, the reaction

$$Na_2O + C \rightarrow 2Na + CO \tag{1}$$

will also take place, whereby the Na_2O losses will amount to about 15 to 25 per cent.

If the material tested is supplemented with lime, then NAS-s will react with calcium and, at a temperature of 600 to 800°C, the following reaction will take place:

$$NAS + CaO \rightarrow C_2S + C_2AS + NAS + NA + N\nearrow \tag{2}$$

In the course of this reaction the NAS structure will decompose depending on the calcium quantity, and new phases: NA, C_2S and C_2AS will be formed, while part of the structurally bonded Na_2O (N) will leave the system. The total Na_2O loss amounts to 20–40 per cent.

The non-decomposed NAS quantity is inversely proportional to the quantity of lime. The more of the latter, the less the non-reacting NAS, but the greater the Na_2O loss (see Table III).

At higher temperatures above 1200°C the NAS phases decompose even without additives, and about 5 to 15 per cent of the bonded Na_2O content disappears.

In the simultaneous presence of lime and coke the NAS-s decomposition is still more intensive as reaction (1) also takes place to cause a considerable Na_2O loss increase. Thus, the total Na_2O loss may be as much as 40 to 80 per cent.

During the decomposition of NAS⁻s the Al_2O_3 "left without pair" because of the Na_2O loss will be bonded by the C_2S content to form C_2AS, that is, gehlenite.

All these mean that another Na_2O loss source is represented by the evaporation of Na_2O during the decomposition of the NAS structure.

The third part of the Na_2O losses is due to the fact that the $Na_2O \cdot Al_2O_3$ produced during NAS-s composition is not stable either, as the NA composition thus formed depends on temperature. At higher temperatures less Na_2O is involved [12] or, in other words, the Na_2O content of the compound will decrease with an increased temperature.

The stability of $Na_2O \cdot Al_2O_3$ was tested in the presence of calcium, coke, and coke plus lime (NA was made of soda and alumina at 1350°C, by shrinkage for 1 hour). The following specimen compositions were studied:

1) NA
2) 91 per cent NA + 9 per cent coke
3) 83,3 per cent NA + 16,7 per cent CaO
4) 74,1 per cent NA + 14,8 per cent CaO + 11,1 per cent coke

The X-ray diffractograms of the samples are shown in Figs 19a–d, while their chemical composition is presented in Table VI.

According to Fig. 19a, there were two different NA modifications produced during the shrinkage of soda and alumina. If coke is added to this

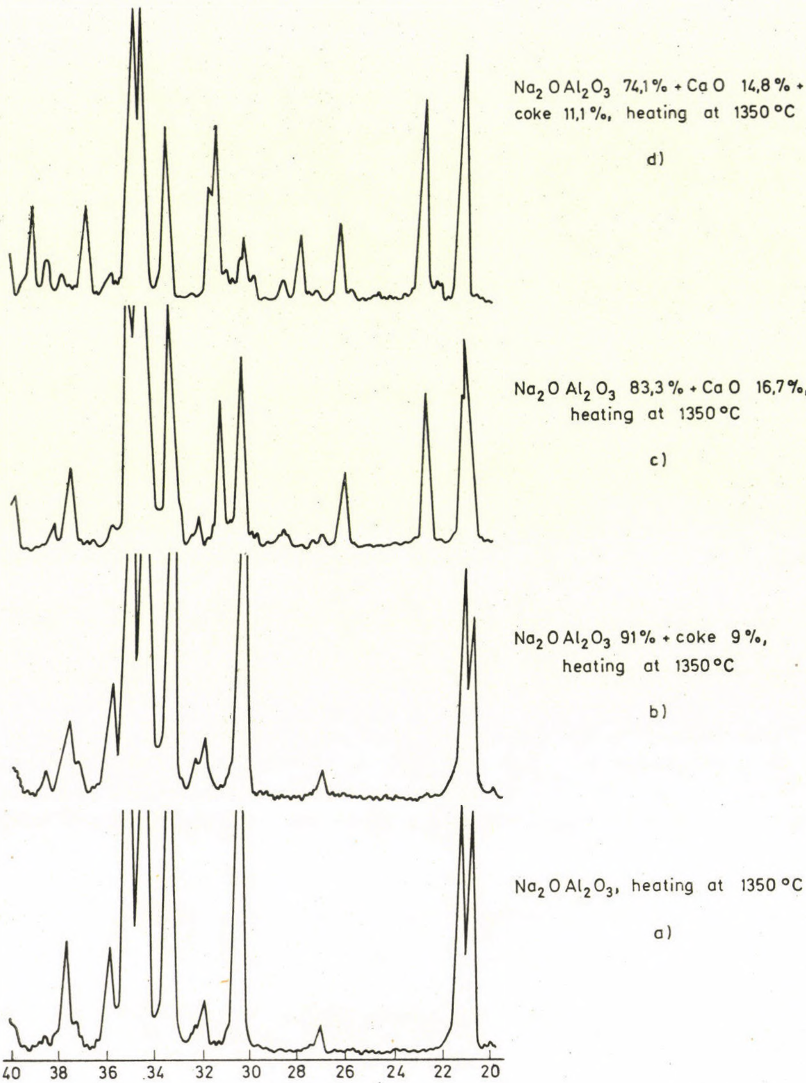


Fig. 19

compound, then the reflections of both NA compounds will seem to have been reduced and a Na_2O loss of 5,3 per cent can be calculated from the sample composition (see Fig. 19b and Table VI, sample No. 2).

In the presence of lime the NA will decompose and, according to equation

$$NA + CaO \rightarrow C_{12}A_7 + N_2C_3A_5 + NA + N\nearrow \tag{3}$$

some calcium aluminate ($C_{12}A_7$) and sodium calcium aluminate ($N_2C_3A_5$) will be formed therefrom. The non-decomposed NA quantity depends on the

Table VI

Composition and Na_2O losses (%) of different sodium aluminate compounds

No. Sample	Na_2O	Al_2O_3	CaO	SiO_2	Ignition losses	Na_2O loss
1. NA (sodium aluminate)	37,3	39,9	—	0,1	4,4	0
2. 91% NA + 9% coke	36,1	61,3	—	0,6	3,8	5,3
3. 83,3% NA + 16,7% CaO	29,1	51,2	16,4	0,2	6,3	8,5
4. 74,1% NA + 14,8% CaO + + 11,1% coke	16,0	56,0	17,5	1,1	8,3	54,0

calcium quantity involved. During the decomposition of NA again Na_2O will be released as verified by the phases in Fig. 19c, and the 8,5 per cent Na_2O loss of sample No. 3 in Table VI.

In the simultaneous presence of lime and coke (Fig. 19d) the NA stability will further decrease, and the Na_2O losses may reach 54 per cent (see sample No. 4 in Table VI).

On the basis of these experiments the importance of temperature and sustaining time in red mud fusion is further explained: NA produced in the course of NAS-s decomposition will also decompose if the temperature or the sustaining time is increased.

4. Development of new technologies

The above test results enabled us to further develop the earlier method of complex red mud processing [13, 14], and to plan a new technology.

The original procedure (I) consisted of the reduction type heat treatment of the red mud by using the Krupp technique, followed by the soda/lime sintering of the slag [15]. In the course of this heat treatment the iron was recovered in the form of 1 to 3 mm lumps while, from the slag, the Na_2O and Al_2O_3 were obtained as aluminate alkali, by leaching after sintering. The final grey mud can be used in cement production [16, 17].

According to one of the new technologies (II), red mud is first fused in the presence of some lime, whereby liquid pig and slag will be produced. The iron is post-treated in order to achieve the desired composition (to reduce the P and S content, cementation, alloying, etc.).

The cold slag is sintered with soda and lime, and then leached [18].

According to laboratory test results [19], the Fe_2O_3, Na_2O, and Al_2O_3 contents of red mud can be recovered in a single run (III), if red mud mixed with lime is quickly melted at the lowest possible temperature. Under suitable conditions such a slag will thus be produced that contains, in addition to the iron product, NA and $C_{12}A_7$ adjacently plus β-C_2S, CT, and C_2F. Then the Na_2O and Al_2O_3 can be extracted from the slag by means of alkali and soda solutions.

A further development of this method is when the low CaO content red mud is melted in a reducing atmosphere then, after separation of iron from slag, the latter is mixed in an oxidizing atmosphere with a precalculated quantity of suitably preheated lime in order to obtain a directly leachable Na and Ca aluminate content slag [4].

Table VII

Comparison of the characteristic data of the different complex technologies

Denomination		Method I	Method II	Method III
Iron product Slag type and consistency Characteristic Technological steps		Krupp technique Lumps Plastic nephelite + glass (1) Reducing fusion (2) Magnetic separation (3) Sintering with soda and limestone (4) Leaching with an alkaline solution	Melting + sinter Liquid iron Liquid nephelite (1) Reduction melting (2) Sintering with soda and limestone (3) Leaching with an alkaline solution	Melting in a single run Lumps + liquid iron Plastic Na aluminate + + Ca aluminate (1) Reduction melting and limestone sinter (2) Magnetic separation (3) Leaching with a soda-alkaline solution
Melting recoveries, %	Fe_2O_3	94	93	94
	Al_2O_3	100	99	100
	Na_2O	90	85	60
Fe content of the iron product, %		85	95	90
Sintering Na_2O losses, %		5	5	—
Leaching recoveries, %	Na_2O	85	85	80
	Al_2O_3	84	84	70
Recoveries as related to the red mud,* %	Fe_2O_3	80	92	80
	Na_2O	68	68	44
	Al_2O_3	76	83	64

* = The mechanical losses, too, are reckoned with

Table VII presents the characteristic data of the three (I—III) methods.

The Fe_2O_3, Na_2O, and Al_2O_3 contents of the red mud are utilized in each method, whereas the so-called "grey mud" left over after leaching represents a raw material suitable for cement production.

While method I was tested under large-scale operational conditions, methods II and III were checked only by pilot plant experiments [20]. Economic calculations, however, require the data of all the large-scale alternatives which, therefore, represent a future task.

5. Summary

Laboratory experiments were conducted with synthetic Na—Al hydrosilicates and operational grade red mud in order to determine the conditions under which the Na_2O quantity evaporating in the course of the pyrometallurgical processing of red mud might be considerably reduced.

— It was found that the Na—Al hydrosilicates would transform into carnegieite and nephelite type Na—Al silicates on the effect of heating, stable even at high (1200 to 1400°C) temperatures, which could decompose only to a slight degree (10 to 20 per cent Na_3O losses).

— In coke content compounds the NAS-s decomposition would increase only to a slight extent (15 to 25 per cent Na_3O losses).

— In the presence of calcium, the NAS decomposition would start at low temperatures (600 to 800°C) whereby the Na_2O losses might even reach 30 to 50 per cent.

— If lime and coke are present simultaneously, the Na_2O losses would increase to 40—80 per cent.

— The effect of lime and coke addition on the stability of zeolite type NAS was checked by calculations. Accordingly, lime and coke addition would reduce the activation energy of NAS which, therefore, would be much easier decomposed.

— Phase investigations verified that the sodium aluminum hydrosilicates would lose their water and adhesive Na_2O contents in the function of the temperature increase, then transform into carnegieite-nephelite NAS types. The stability temperature intervals and/or the temperatures of the individual phase transformations have been precisely determined. These investigations revealed three main sources of Na_2O losses:

1. The adhesive alkali in the red mud that will always be lost even on the effect of low temperature (500 to 700°C) heating, leading to a Na_2O loss of 10 to 15 per cent.

2. The other cause of Na_2O disappearance is the decomposition of the bonded Na_2O content of the red mud, taking place at elevated temperatures above 1200°C, and resulting in 5 to 15 per cent Na_2O losses. In the presence of lime, however, this decomposition would take place even at low temperatures (600 to 800°C), causing a Na_2O loss of 20 to 50 per cent.

In the simultaneous presence of lime and coke this process is increased, and the Na_2O quantity leaving the system might reach as much as 40 to 80 per cent.

3. Further losses are caused by the unstable character of the $Na_2O \cdot Al_2O_3$ obtained from the decomposed NAS. Temperature, an extended sustaining time at this temperature, or the presence of lime, coke, or both would make part of the Na_2O content leave that phase (5 to 50 per cent).

If the Na_2O content is to be saved, then

(a) the mud to be processed must be thoroughly washed in order to reduce the adhesive alkali content and eliminate or moderate, one source of the Na_2O losses thereby.

(b) In the addition of lime and coke, any surplus must be avoided, or else the Na_2O losses would be greatly increased and, by the production of gehlenite, not only the Na_2O but also the Al_2O_3 recovery might be significantly reduced.

(c) It should be endeavoured to perform melting, after reduction (900 to 1100°C), at the lowest possible temperature and within the possibly shortest period of time, whereby the Na_2O losses might again be alleviated.

(d) The simultaneous presence of lime and coke in the compound would greatly increase the Na_2O quantity leaning the system.

On the basis of the above considerations some new technologies have been elaborated for the complex utilization of the red mud [3, 4, 18].

REFERENCES

1. Dobos, Gy.: Paper Presented at the Scientific Session of the 1972 General Assembly of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 10 May, 1972 (in Hungarian).
2. Dobos, Gy.—Solymár, K.—Horváth, Gy.: *Kohászati Lapok* **105,** (1972) 417.
3. Dobos, Gy.—Solymár, K.—Horváth, Gy.: Paper Presented at the Conference Organized by the General Assembly of the German Metallurgical and Mining Industry Society, Stuttgart 26—30 April, 1972.
4. Dobos, Gy.—Horváth, Gy.—Felföldi, Z.: Paper Presented at the International ICSOBA Colloquium, Banska Bistrica Ziar nad Hronom 6—8 June, 1972.
5. Juhász, Á., et al.: *Kohászati Lapok* **98,** 66. (1965) 66, and **100** (1967), 48.
6. Vörös, I.: *Fémipari Kut. Int. Közl. IX.* (1970), 105.
7. Nemecz, E., et al.: *Kohászati Lapok* **101** (1968), 89.
8. Solymár, K.: Paper Presented at the ICSOBA Congress, Budapest 6—8 Oct., 1969.
9. Horváth, Z.: Theoretical Metallurgy I. Tankönyvkiadó, Budapest 1967, 92. (in Hungarian).
10. Mihalik, Á.—Horváth Z.: *Kohászati Lapok* **102** (1969), 174.
11. Levin, E. M.—Robbins, C. R.—F. Mc Howard: Phase Diagrams for Ceramists — Amer. Ceram. Soc. 1964, Columbus, Ohio, Fig. 505.
12. Arakelyan, O. I.: *Trudy VAMI* **40,** (1957), 32.
13. Hungarian Patent No. 146434
14. Hungarian Patent No. 154125
15. Dobos, Gy.: Further Development of the Bayer Alumina Production Process to Increase Aluminum Oxide Recovery and Utilize the Iron Content of Bauxite — Doctor's Thesis, Budapest 1966.
16. Nemecz, E.: Research Report, Veszprém University of the Chemical Industry, Department of Mineralogy, Veszprém 1966 (in Hungarian).
17. SzIKKTI Research Report, Budapest 1968 (in Hungarian).
18. Hungarian Patent No. 162284
19. Horváth, Gy.: Paper Presented at the VAMI-FKI Research Consultation, Budapest 2. Sept.—3. Oct., 1970. (in Hungarian).
20. Horváth, Gy.: Pilot Plant Type Red Mud Smelting Experiments I. and II. — *FKI Reports*, April and Sept., 1972 (in Hungarian).

Versuche über die Verhüttung des Rotschlammes. Durch Untersuchung von künstlichen Na—Al-Hydrosilikaten und betriebsmäßig anfallendem Rotschlamm wurde festgestellt, wie die Verluste an Na_2O während der Verhüttung verringert werden können. Der Einfluß der

Anwesenheit von Kalk, Koks und von beiden gemeinsam, ferner von Temperatur und Zeit der Wärmebehandlung auf den Na_2O-Verlust wurden bestimmt. Die Ursachen der Na_2O-Verluste wurden geklärt. Auf diese Art wurde es möglich Technologien zu entwickeln, mit welchen aus dem Rotschlamm neben dem Fe_2O_3- und dem Al_2O_3-Gehalt — bei minimalem Verlust — auch der Na_2O-Gehalt gewonnen werden kann.

Экспериментальные опыты по доменной переработке красного шлама. Исследованием искусственных гидросиликатов Na—Al и производственных красных шламов установлено, каким образом можно добиться снижения потерь Na_2O, возникающих в процессе доменной переработки. Определено воздействие кокса и извести, а также их совместного присутствия, далее температуры термообработки и ее времени на потери Na_2O. Выяснены причины потерь Na_2O. Таким образом, стало возможным разработать такие технологии, в процессе которых из красного шлама наряду с содержанием Fe_2O_3 и содержанием Al_2O_3 можно извлечь — при минимальных потерях — также и содержание Na_2O.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 79 (3—4), pp. 451—463 (1974)

LOCAL AND OVERALL SPECIFIC INELASTIC ROTATION CAPACITIES IN REINFORCED CONCRETE BEAMS

P. LENKEI

CAND. OF TECHN. SCI.

[Manuscript received October 6, 1973]

The influence exerted by the length of the constant (or nearly constant) maximum bending moment zone on the specific inelastic rotation capacity of r.c. beams is discussed on the basis of experiments carried out on 49 beams. The relationship between the local and overall rotation capacities are determined and formulae for calculations are given.

Notations

M — bending moment
L — span
L_0 — length of the constant bending moment zone
ϱ — reinforcement ratio
s — tie spacing
b — width
h — total depth
d — effective depth
x — depth of the compressed concrete
ξ — relative depth of the compressed concrete
θ — overall inelastic rotation
$\varkappa$ — specific inelastic rotation
$\varkappa_\infty$ — specific inelastic rotation for $L_0 = \infty$
ε_c — inelastic part of the concrete compressive strain
f_c — concrete cubic strength
f_y — steel yield stress
f_s — steel tensile strength

1. Introduction

The inelastic rotation capacity in r.c. beams, having an extended zone of constant (or nearly constant) maximum bending moment, has been experimentally investigated and discussed by several authors. MACCHI in 1969 described that in tests on prestressed concrete beams the failure and consequently the large inelastic rotations are concentrated in a limited length zone. This could lead to overestimating the inelastic rotation capacity, in case of large failure zones assumed to be equal to the length of the constant (or nearly constant) maximum bending moment zone.

In a great number of cases this danger may be avoided as BERTERO and FELIPPA showed in 1965, that closely spaced ties and compression reinforce-

* Dr. P. LENKEI, 1119 Bp. Szakasits Á. u. 4, Hungary.

ment simultaneously applied, increase ductility and consequently the zone of great inelastic rotation capacity.

At the same time the probabilistic approach to the analysis and design of concrete structure assumes, that strength and deformability depend on the length dimension of the element investigated.

However, these problems represent only the different formulations of one and the same question:

How does the length of the constant (or nearly constant) maximum bending moment zone affect the specific rotation capacity of reinforced concrete beams?

As concrete is hardly liable to be subjected to theoretical idealization, this question is to be answered by experimental investigations.

Aiming to contribute to the qualitative solution of this problem, an experimental programme was carried out in 1962—65 at the Hungarian Institute for Building Science (ÉTI, Budapest) on the basis of theoretical investigations made by GARAY (1963). Since the results have been reported in Hungarian only (LENKEI—GARAY, 1965; LENKEI, 1966) a short summarization these tests will be given here.

However, it must be emphasized, that this paper basically deals with the evaluation of the test results. The experimental programme included the investigation of the influence of some other parameters (e.g. reinforcement ratio, which essentially determines the effective depth) on the rotation capacity, too.

These not too recent results seem actual and worth reporting, as GERSTLE stated in 1972, as this problem still needs further study.

2. The Test Program

Two types of experiments in two groups (Group I and Group II) were carried out in order to determine the relationship between the local and overall specific plastic rotation capacities. The variable parameters were in Group I (25 beams):

— length of the constant bending moment zone $L_0 = 300$ and 1500 mm (Fig. 1),

— reinforcement ratio $\varrho = 0{,}296$, 1,21 and 4,80%,

— spacing of the ties along the constant moment zone $s = 50$ and 150 mm,

and in Group II (24 beams):

— length of the constant bending moment zone $L_0 = 300$, 900 and 1500 mm (Fig. 1),

— reinforcement ratio $\varrho \approx 0{,}25$, 0,5, 1,00 and 2,40%.

The constant parameters were as follows:

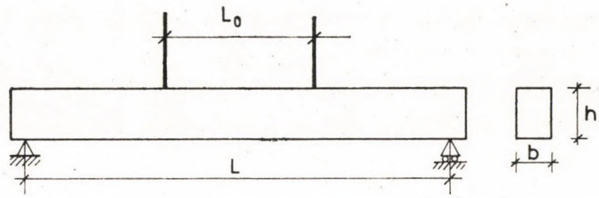


Fig. 1. Loading arrangement

	Group I	Group II
Concrete cubic strength (measured) f_c [N/mm²]	36,0–52,8	31,1–45,1
Reinforcing steel (nominal) $\frac{\text{yield strength}}{\text{tensile strength}} f_y/f_s$ [N/mm²]	350/350	400/600
Cross sectional dimensions $b \times h$ [mm]	120×300	150×300
Span L [mm]	2800	3000

The number of analogous beam specimens was at least 2. The measuring instruments for Group I consisted of electric resistance strain gauges for measuring concrete compressive strains, a mechanical deformeter for measuring elongations at the level of the reinforcement, clinometers for measuring inclinations (rotations) and mechanical indicators for measuring deflections. Principally, the same measuring instruments were used for Group II, however, in addition to these the concrete compressive strains were determined by means of mechanical deformeters too, and clinometer measurements were taken at several points.

The principal difference between the two test groups consisted in using different methods for the test procedure. In Group I the tests were carried out and consequently the measurements were taken (or extrapolated) up to the maximum bending moment, while in Group II, by means of a special loading arrangement (Lenkei 1969), the tests were carried out and the measurements taken on the downgoing (falling) branch of the moment-rotation diagram up to the actual failure, however, the results were taken into account up to 0,8 $M_{\max}$ only on the downgoing branch (Fig. 2). This loading arrangement slowed down the failure process by means of vertically movable supports placed under each acting load. The load values, taken by the beams were determined as the difference between the acting loads and the corresponding additional support reactions, by means of pairs of appropriately placed load cells.

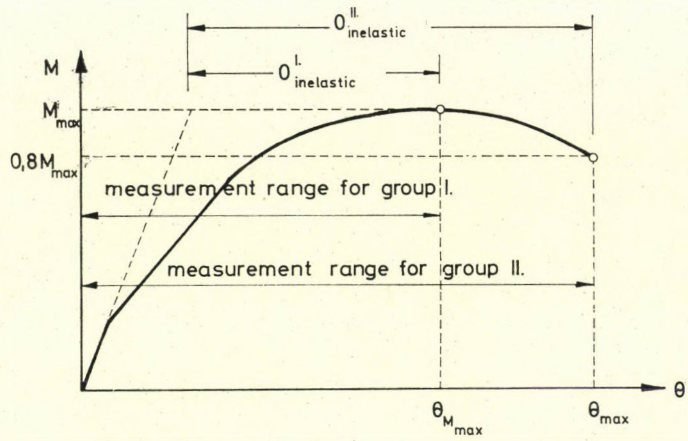


Fig. 2. Measurement ranges for the test groups

Furthermore, for Group II instead of two, three L_0 values were investigated so as to obtain a better knowledge of the relationship between inelastic rotations and the constant moment length (Figs 7a and 7b).

The crack formation and propagation were registered during the tests.

The age of the specimens at the time of testing exceeded one month.

The first 4 load steps applied amounted to 15 per cent and the remaining steps up to the maximum load to 5 per cent of the calculated ultimate load. At each step the load was applied to the specimen for 15 minutes, the measurements were taken during the last 5 minutes.

3. Test results

An ideal elasto-plastic envelope set the elastic and inelastic rotations apart from the real moment-rotation diagramme (Fig. 2). For the sake of simplifying the evaluation of the specimens were assumed to behave elastically only in the uncracked state.

On account of the different testing techniques used for measuring the rotations, these were usually higher for Group II than for Group I.

The basic test results, the inelastic rotations along the constant maximum bending moment zone are presented in Tables I and II.

4. Evaluation of the test data

The results clearly show that (within the measured ranges) the reinforcement ratio ϱ has a far more significant influence on the specific inelastic rotations than the tie spacing s.

Table I

Results of Test Group I

Beams	Reinforc. ratio ϱ [%]	Constant moment length L_0 [mm]	Tie spacing s [mm]	Inelastic rotations Θ [rad] 10^{-3}	Specific inelastic rotations $\varkappa = \Theta/L_0$ [rad/mm] 10^{-6}	$\varkappa$ averages [rad/mm] 10^{-6}	$\varkappa_\infty$ [rad/mm] 10^{-6}	$\varkappa/\varkappa_\infty$
10				110,4	368			
12	0,296	300		61,3	204	241		2,85
13			150	45,4	151		81,1	
21				167,1	111			
23	2 ∅ 8 mm	1500		152,4	101	113		1,39
24				190,6	127			
37		1500	50	230,7	154		—	—
38				126,0	084	119		
14				24,3	081			
15		300		21,3	071	89,3		5,94
16	1,21		150	34,7	116		15,05	
25				34,0	22,7			
27	2 ∅ 16 mm	1500		55,7	37,1	29,9		1,98
34				27,1	90,3			
35		300		35,1	117	110		6,71
36			50	36,7	122,3		16,4	
39				37,4	25			
40		1500		56,8	37,9	35,1		2,13
41				63,6	42,4			
17				13,4	44,6			
18		300		7,0	25,6	30,8		6,77
20	4,80		150	06,7	22,3		4,55	
42	4 ∅ 22 mm			19,7	13,1			
43		1500		17,6	11,7			2,15
44				6,9	4,6	9,8		

Since the main goal of the present paper is to investigate the relationship between the local and overall specific inelastic rotations $\varkappa$, the following evaluation method was used to shift out the other parameters as tie spacing s and reinforcement ratio ϱ. Using the $\varkappa$ values (Tables I and II) for different constant moment lengths L_0 and extrapolating for $L_0 = \infty$ the $\varkappa_\infty$ values were determined for each s and ϱ (the results of beams 37 and 38 were not used), assuming linear relationship between $\varkappa$ and $1/L_0$ (Figs 4a and 4b). This was

Table II

Results of Test Group II

Beams	Reinforc. ratio ϱ [%]	Constant moment length L_0 [mm]	Inelastic rotations Θ [rad] 10^{-3}	Specific inelastic rotations $\varkappa = \Theta/L_0$ [rad/mm] 10^{-6}	$\varkappa$ averages [rad/mm] 10^{-6}	$\varkappa_\infty$ [rad/mm] 10^{-6}	$\varkappa/\varkappa_\infty$
3		300	60,4	201	231		2,82
4	0,25		78,2	261			
5		900	112,5	125	121,5	82	1,48
6	2 ⌀ 8 mm		106,4	118			
9		1500	171,0	114	120		1,46
10			189,4	126			
13		300	52,5	175	184		2,78
14	0,5		57,9	193			
11		900	89,1	99		66,2	1,52
12	2 ⌀ 12 mm		92,9	103	101		
7		1500	131,0	87,4	93,7		1,42
8			150,2	100			
23		300	57,6	192			
24	1,0		49,2	164	178		2,77
1		900	67,9	75,5	95,7	64,3	1,49
2	2 ⌀ 16 mm		104,4	116			
15		1500	147,7	98,5	90		1,39
16			122,8	81,6			
17		300	35,9	119,7	123		3,2
18	2,4		37,9	126,3			
19		900	67,9	75,4	63,4		1,63
20			45,7	51		38,6	
21	2 ⌀ 25 mm	1500	95,7	63,8			
22			48,5	32,3	48		1,26

assumed as the relationship between $\varkappa$ and L_0 was similar to the hyperbolic (see Fig. 3b).

In the next evaluation step the ratios of $\varkappa/\varkappa_\infty$ were determined. Since the $\varkappa/\varkappa_\infty$ values were nearly independent of the ϱ and s values (Fig. 5b) they could be expressed in function of $1/L_0$ for Group II in the following general form:

$$\varkappa/\varkappa_\infty = f(1/L_0) = 1 + 565\ 1/L_0 \tag{1b}$$

where L_0 is measured in millimeters.

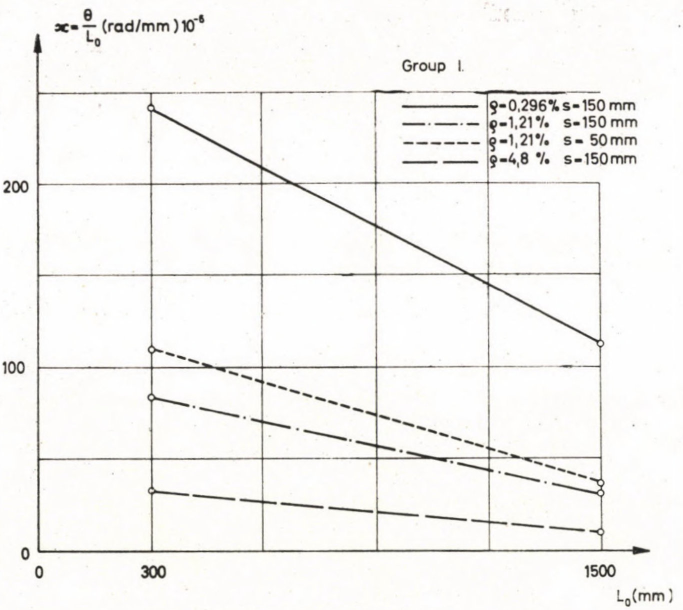


Fig. 3/a Relationship between the specific inelastic rotations $\varkappa$ and the constant moments lengths L_0 (Group I)

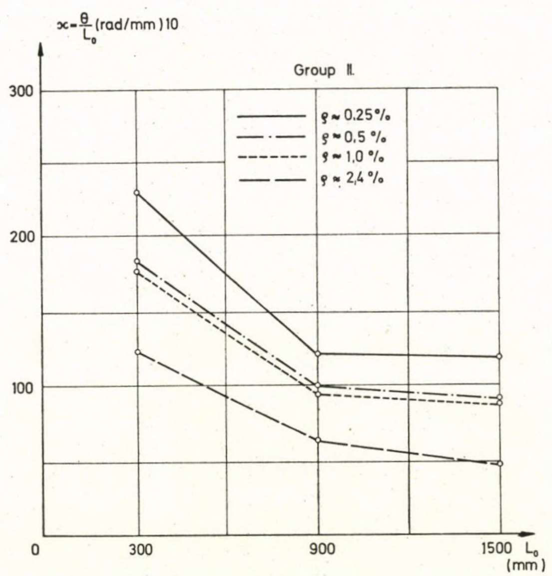


Fig. 3/b Relationship between the specific inelastic rotations $\varkappa$ and the consta nt moment length L_0 (Group II)

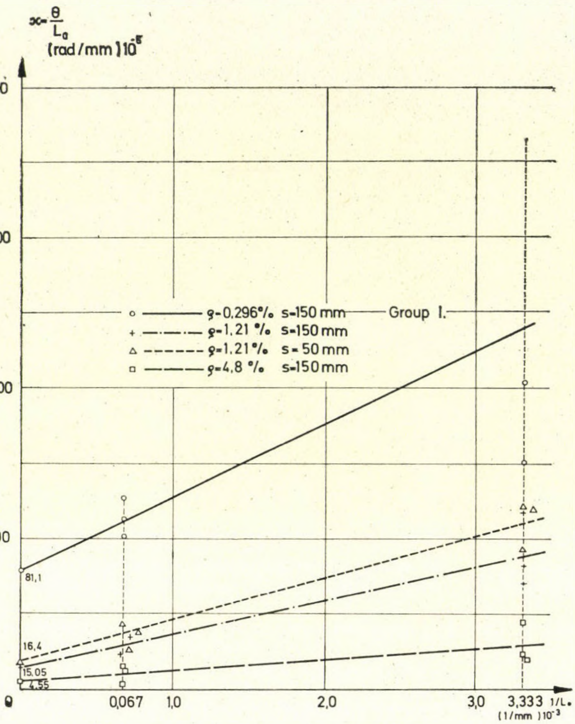


Fig. 4/a **Relationship between the specific inelastic rotations $\varkappa$ and the inverse of the constant moment lengths $1/L_0$ (Group I)**

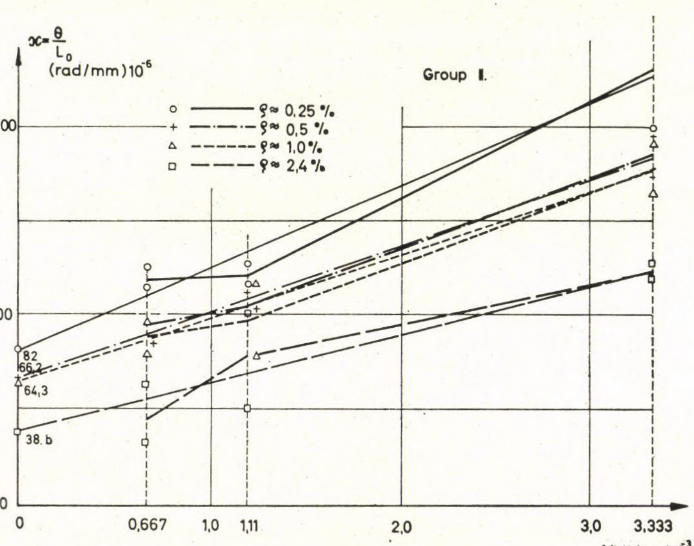


Fig. 4/b **Relationship between the specific inelastic rotation $\varkappa$ and the inverses of the constant moment lengths $1/L_0$ (Group II)**

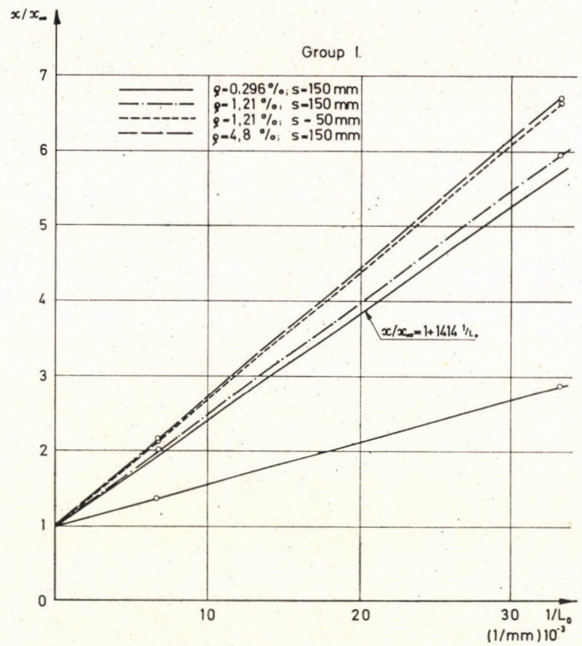


Fig. 5/a Relationship between the relative specific inelastic rotations $\varkappa/\varkappa_\infty$ and the inverses of the constant moment lengths $1/L_0$ (Group I)

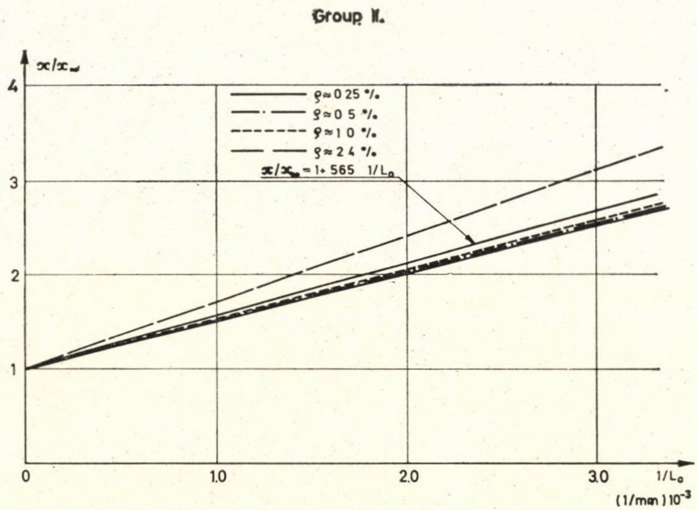


Fig. 5/b Relationship between the relative specific inelastic rotations $\varkappa/\varkappa_\infty$ and the inverses of the constant moment lengths $1/L_0$ (Group II)

Owing to the different testing techniques used, the above expression for Group I should be modified (Fig. 5a) as follows:

$$\varkappa/\varkappa_\infty = 1 + 1414\,(1/L_0). \tag{1a}$$

The $\varkappa_\infty$ values depend first of all on the reinforcement ratio, then become further affected by the concrete composition and quality, tie spacing, compression reinforcement, etc. In the test reported, this relationship was assumed to be a function of the inverse relative depth of the compressed concrete $1/\xi = d/x$ because this is a more general characteristic of the r.c. cross section than the reinforcement ratio ϱ. The equations determined by the method of least squares (Fig. 6) are as follows for Groups I and II consequently:

$$\varkappa_\infty = f(1/\xi) = 3{,}209 \cdot 1/\xi - 2{,}13 \approx 3 \cdot 1/\xi \tag{2a}$$

$$\varkappa_\infty = f(1/\xi) = 2{,}213 \cdot 1/\xi + 37{,}44 \approx 2{,}2 \cdot 1/\xi + 37{,}5. \tag{2b}$$

The last evaluation step was aimed at obtaining the inelastic part of the concrete compressive strains ε_c from the specific inelastic rotations using the following well-known expression

$$\varepsilon_c = \varkappa \cdot x \tag{3}$$

The inelastic concrete compressive strains are shown separately for Groups I and II in Fig. 7a and 7b.

The values referring to the above (1)—(3) formulae should be measured as follows: $\varkappa$ and $\varkappa_\infty$ in rad/mm $\cdot\, 10^{-6}$, L_0 and x in millimeters.

5. Discussion of the test results

First it is to be emphasized that the different behaviour shown by Group I and II is due to the different testing techniques used. When the measurements were taken up to the maximum bending moment only (Group I), the inelastic rotations were much lower than in case of Group II when the rotations associated with the decreasing bending moment was taken into account, too (Figs 3a and 3b). The only exception was the case of the very low reinforcement ratios (0,25—0,296%) giving nearly identical results, obviously due to the fact, that no substantial decrease of the maximum bending moment was observed in Group II for $\varrho \approx 0{,}25\%$.

Secondly it is to be pointed out that the specific inelastic rotations were considerably lower for longer constant bending moment lengths (L_0). The tendency was not linear but resembling the hyperbolic (Fig. 3b) and assuming this relationship the specific inelastic rotations for infinite constant moment lengths ($\varkappa_\infty$) were determined by extrapolations (see Figs 4a and 4b).

The relative values of $\varkappa/\varkappa_\infty$ were determined in function of the inverse constant moment lengths $1/L_0$ (see Figs 5a and 5b). Since no substantial difference appeared in these functions in either of the groups, similarly formulated expressions were determined (Formulae 1a and 1b). It is obvious from these expressions, that if the behaviour of an r.c. element would be considered up to the maximum bending moment only the L_0 values would have a more significant influence (Figs 5a and 5b).

The influence of the length of the constant bending moment zone could be interpreted on a statistical basis, as the probability of having a less deformable part along an extended zone, this being higher than that of along a limited zone. This probability increased when the measurements were taken up to the maximum bending moment only, because the upgoing and consequently the part of the behaviour with a lesser redistribution capacity appeared only.

So as to make formulae 1a and 1b expedient for practical purposes in case of both groups general expressions (formulae 2a and 2b) were derived for the approximate $\varkappa_\infty$ values in function of the inverse relative depth of the compressed concrete zone $1/\xi$.

By means of these expressions the effect of the constant moment lengths may be taken into account.

Formulae 2a and 2b and Figs 6a and 6b make it obvious that the $\varkappa_\infty$ values are higher for the complete diagramme (Group II including the falling branch) and depend less on the depth of the compressed concrete zone.

These expressions were determined on the basis of short time tests. Higher $\varkappa$ and $\varkappa_\infty$ values are expected to be obtained by long time tests.

It must be underlined, however, that the above expressions are valid within the investigated range of the experimental parameters only, regardless of the tie spacing effect.

Lastly the magnitude of the computed maximum inelastic concrete compressive strains ε_c are to be discussed (Figs 7a and 7b). The values, resulting from all the tests of Group I and from the specimens of Group II having $L_0 =$ $= 300$ mm and a low reinforcement ratio, run between 2,5 and 3,5‰ and are in good agreement with the CEB-FIP International Recommendations. On the other hand the ε_c values ran up to three times higher for the specimens of Group II having $L_0 = 300$ mm but a higher reinforcement ratio.

It is interesting to note, that the inelastic concrete strains were in direct proportion to the reinforcement ratios. Nevertheless it should be mentioned, that these ε_c values were not actual but only apparent strains, for at these loading stages the extreme concrete compressive fibres had failed. These computed ε_c values were averages obtained along the lengths L_0, and consequently decreasing with the increase of the latter.

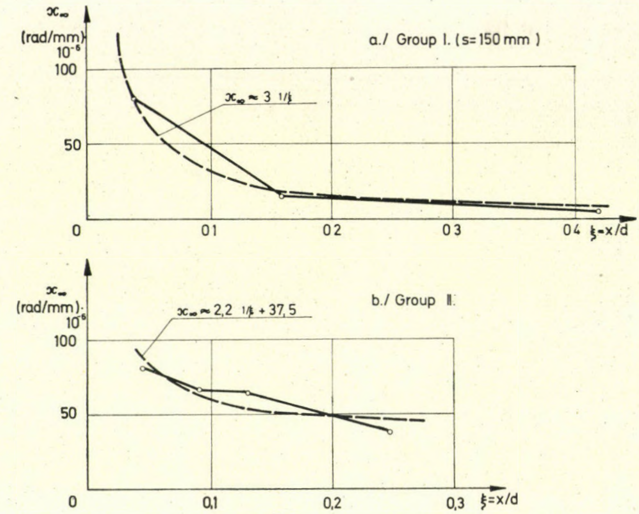


Fig. 6. **Relationship between the specific inelastic rotations (for $L_0 = \infty$) $\varkappa_\infty$ and the relative depth of the compression concrete zone $\xi = x/d$ (Group I and II)**

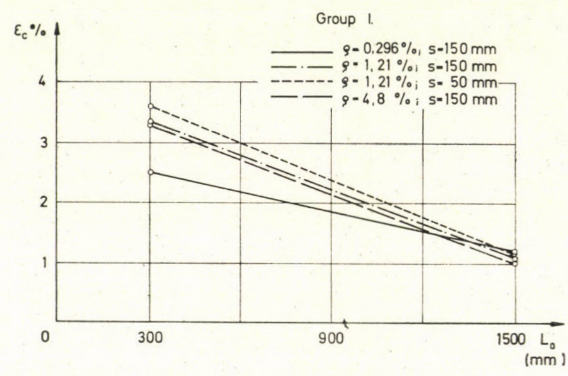


Fig. 7/a **Relationship between the inelastic concrete compressive strains ε_c and the constant moment length L_0 (Group I)**

It must be emphasized, however, that the ε_c values depend on the concrete strength and composition, which were constant parameters in these investigations.

REFERENCES

1. Macchi, G.: Limit States Design of Statically Indeterminate Structures Composed of Linear Members. Costruzioni in cemento armato. *Studi e Rendiconti*, **6** 1969, 1—41.
2. Bertero, V. V.—Felippa C.: Discussion on "Ductility of Concrete" by Roy, H. E. H. and Sozen, M. A. Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposium, Miami, Florida, November 10—12, 1964. *ASCE-ACI* 1965, 227—234.
3. Garay, L.: Discussion on "Problems on Plastic Analysis and Design of R. C. Slabs" by Kaliszky, S. Technical University of Building and Transportation Engineering (ÉKME). *Scientific Publications* **9** Budapest (1963) 126—130.

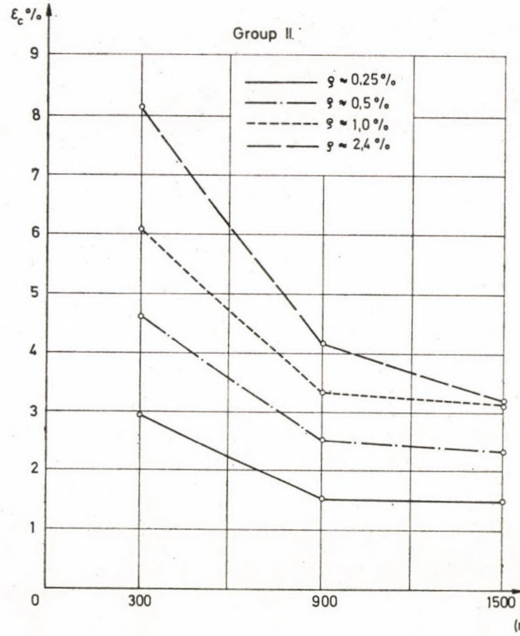


Fig. 7/b Relationship between the inelastic concrete compressive strains ε_c and the constant moment lengths L_0 (Group II)

4. Lenkei, P.—Garay L.: Limits of Plastic Hinges Deformation in R. C. Beams (in Hungarian) *Scientific Publications* No. 48, Hungarian Institute for Building Science (ÉTI) Budapest (1965), 1—78.
5. Lenkei, P.: Investigations on the Plastic Rotation Capacity of R. C. Beams Subjected to Bending and Shear (in Hungarian) *Scientific Publications* No. 58, Hungarian Institute for Building Science (ÉTI), Budapest (1966) 1—60.
6. Gerstle, K. H.: Flexural Characteristics of R. C. Members. SAR Report No. 1 Technical Committee No. 22 ASCE-IABSE Joint Committee, International Conference on Planing and Design of Tall Buildings. Lehigh University, August 21—26, 1972 Preprints, Reports Vol. III. 22, 23—41.
7. Lenkei, P.: Direct Recording of the Falling (Downgoing) Part of the Load-Deflection Diagram for R. C. Beams Subjected to Bending. RILEM International Symposium "Testing Methodology and Technique of Full-scale and Model Structures", Bucharest, 1969, Vol. III, 126—130.

Die örtliche und mittlere spezifische, nichtelastische Verdrehungsfähigkeit von Stahlbetonträgern. Im vorliegenden Beitrag wird die Wirkung der Länge einer Sektion mit ständigem (oder beinahe ständigem) maximalem Biegemoment auf die spezifische, nicht elastische Verdrehungsfähigkeit von Stahlbetonträgern untersucht, auf Grund der, mit 49 Balken durchgeführten Prüfungen. Der Zusammenhang zwischen örtlicher und mittlerer Verdrehungsfähigkeit wird bestimmt und die für die Berechnung notwendigen Formeln werden ermittelt.

Местные и средние удельные неупругие повороты железобетонных балок. В работе исследуется воздействие на удельные неупругие повороты, оказываемое длиной участка железобетонных балок с постоянным (или приближенно постоянным) максимальным изгибающим моментом, на основе экспериментов, проведенных на 49 балках. Определяется зависимость между местными и средними поворотами и даются наобходимые при расчетах формулы.

BOOK REVIEW

A. A. Beleş—M. V. Soare

BERECHNUNG VON SCHALENTRAGWERKEN

Bauverlag GmbH, Wiesbaden—Berlin, 622 Seiten 228 Abbildungen, 177 Tafeln, Literaturverzeichnis

Das neueste Buch der bekannten Verfasser Prof. A. A. BELEŞ und Prof. M. V. SOARE ist die deutschsprachige Übersetzung des in rumänischer Sprache geschriebenen Werkes *Calcul plăcilor curbe subţiri.* Dieses Buch ist ein neuartiger Versuch zur Zusammenfassung der Ergebnisse der internationalen Schalenliteratur in der Form von Formeln und Tafelsammlungen die von einem praktisch tätigen Ingenieur im Laufe seiner Entwurfsarbeiten auf einfache Art verwertet werden können. Die Bestrebung der Verfasser ist vom Gesichtspunkt der Praxis besonders wertvoll, denn die sich mit Problemen der Schalenkonstruktionen befassenden Abhandlungen führen die Aufgaben im allgemeinen nicht mit einer Ausführlichkeit vor, die eine unmittelbare praktische Anwendung der mitgeteilten Lösungen ermöglichen würden.

Das Buch ist in sechs Kapiteln geteilt. Das erste Kapitel macht den Leser mit grundlegenden Angaben und Beziehungen der Schalentheorie bekannt. Das zweite Kapitel befaßt sich mit dem Spannungszustand der Membranschalen, wobei die Probleme der über verschiedenartige Grundrisse errichteten Konstruktionen ausführlich behandelt werden. Im dritten Kapitel werden Fragen des Formänderungszustandes der Membranschalen analysiert. Gegenstand des vierten Kapitels ist die Biegungstheorie der an den Rändern verschiedenartig abgestützten Schalen. Das fünfte Kapitel setzt sich mit den Problemen der zusammengesetzten Rotationsschalen auseinander. Im sechsten Kapitel werden einige Spezialfragen der Schalenbauweise (Anwendung der Vor- und Nachspannung, Einfluß von Temparaturschwankungen, Kriechen und Schwinden bei Stahlbetonschalen, große Formänderungen der Schalentragwerke, Netzkuppeln, elastische Stabilität der Schalen) behandelt. Das Buch wird durch ein reiches, 193 bibliographische Daten enthaltendes Literaturverzeichnis ergänzt.

Die Erörterungen des Buches sind klar verfaßt, und beschränken sich unter Verzicht auf Ableitungen, bloß auf das Wesentliche. Die Erklärungen sind leicht zu verfolgen. Gut gewählte, einfache numerische Zahlenbeispiele verhelfen ebenfalls zum richtigen Verständnis. Dem praktischen Ingenieur wird durch die Tabellen ein großer Dienst erwiesen, da sie Lösungen für die verschiedensten Belastungsfälle enthalten und Möglichkeit zu verschiedenen Vergleichen bieten.

Als Endergebnis kann festgestellt werden, daß das Buch der Professoren BELEŞ und SOARE eine wertvolle Bereicherung der internationalen Schalenliteratur bedeutet und als solches auf einen günstigen Empfang seitens der theoretischen Forscher, der Konstrukteure und der Sachverständigen der Praxis Anspruch erheben darf.

P. Csonka

Hampe, E.

STATIK ROTATIONSSYMMETRISCHER FLÄCHENTRAGWERKE

5. BAND: HYPERBOLOIDSCHALEN

VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1971, 160 Seiten, 18 Bilder, 69 Tafeln, Literaturverzeichnis, Namen- und Sachregister

Der vorliegende fünfte Band von Prof. HAMPEs Buch ist eine wertvolle Ergänzung seines vorher bereits in drei Auflagen erschienenen vierbändigen Werkes. Der gegenwärtige fünfte Band macht den Leser mit der Theorie und Berechnung der hyperbolischen Hyperboloidschalen mit vertikaler Achse bekannt, also mit einem Problemenkreis, der im Bau von Behältern und Kühltürmen immer mehr an Bedeutung gewinnt.

Die Fachliteratur befaßte sich auch bisher eingehend mit dem erwähnten Problemenkreis, jedoch erschienen die meisten diesbezüglichen Abhandlungen in den Spalten verschiedener Zeitschriften und Kongreßberichte. Diese weit verstreuten Aufsätze waren oft nur in umständlicher Weise zu beschaffen, auch wurde deren Studium dadurch erschwert, daß die verschiedenen Verfasser von einander abweichende Bezeichnungen und sogar verschiedene Behandlungsweisen verwendeten. Professor HAMPEs Buch schaltet die auf diesem Gebiet herrschenden Schwierigkeiten dadurch aus, daß er das auf Hyperboloidschalen bezügliche, in der Praxis unentbehrliche Wissensmaterial zusammen mit den Ergebnissen seiner eigenen diesbezüglichen Forschungen mit einheitlicher Bezeichnung und Behandlungsweise vorlegt.

Der Verfasser beabsichtigte durch dieses Werk einem von vielen Seiten auftauchenden Wunsch und Bedürfnis zu entsprechen und es gelang ihm diese Absicht erfolgreich zu verwirklichen. In seinem Buch bietet er eine klare und systematische Übersicht und Lösungen der verschiedenen Problemen und Methoden, die sich auf Entwurf und Berechnung von Hyperboloidschalen beziehen. Die unmittelbar benützbare reiche Formelsammlung, die klaren Tafeln und anschaulichen Diagramme loben einzeln und in ihrer Gesamtheit die Arbeit des über ausgezeichnete pädagogische Begabung, sicheren technischen Sinn und ausgedehnte fachmännische Praxis verfügenden gelehrten Professors.

Es untersteht keinem Zweifel, daß diesem mit großer Hingabe und opfervoller Mühe verfaßten Buch von Professor HAMPE nicht nur in seiner Heimat, sondern auch außerhalb ihrer Grenzen in technischen Kreisen allgemeiner Beifall zuteil werden wird.

P. Csonka

H. H. Happ

GABRIEL KRON AND SYSTEMS THEORY

Union College Press, Schenectady, New York, 1973. 172 pages, 70 figures

Only a few engineers are known who had such a great impact on the development of modern technology and engineering sciences as had Gabriel KRON. This book, dedicated to his memory, focuses on his immortal work, dealing with KRON as a personality, with his achievements, and his influence on present day science and technology.

From the biographical data it is worth-while mentioning that Gabriel KRON was born in Nagybánya, Hungary (at that time) in 1901 and deceased in Schenectady, USA in 1968. He was a remarkable personage, a pioneer whose true accomplishments were appreciated by relatively few when his works were first published but whose methods of systems analysis are now widely employed. Nevertheless, many Institutions and Universities acknowledged his oeuvre by honorary degrees. This book is a compilation of some lectures and papers, held or written by outstanding and distinguished contemporary colleagues.

After the foreword by Edwin K. TOLAN and the introduction by H. H. HAPP, Professor Philip L. ALGER in the first part KRON's outlines early life and education under the title "The Evolution of an Engineering Scientist", while Professor Banesh HOFFMANN gives an insight into KRON's working methods, his personal difficulties, and some of the technical problems his work posed for those who attempted to follow it. Professor Thomas J. HIGGINS under the title "G. Kron and Large-scale System Engineering" sketches the broad scope of KRON'S achievement.

The following five papers, forming the second part, are devoted to detailed areas in KRON's work. Professor ALGER emphasizes KRON's contribution to the theory of induction motors, then, Charles CONCORDIA describes KRON's contributions to practical problems on this same subject Professor J. W. LYNN deals with tensor analysis and shows how this influential method was applied by KRON to the investigation of electric machines and networks. The paper of HAPP describes the problem through which KRON conceived Diakoptics (Greek "kopto" means to break or to tear apart; "dia" reinforces the word to follow as the English "very"), its theory, and some of its practical applications to large-scale systems. Finally, Harold CHESTNUT throws light on the impact of KRON's influence on the broader field of system engineering.

The third part begins with an article by Professor A. BRAMELLER and D. W. MORTIFEE (United Kingdom) describing various engineering applications of KRON's work and showing his influence in their country. Then, Professor Kazuo KONDO's paper described the impact of KRON's work in Japan.

For the convenience of the readers a complete list of KRON's publications is added to the appendix.

Undoubtedly, Gabriel KRON's influence extends far beyond the frontiers, and this book describes not only the broad implications of KRON's oeuvre and the course of his life but will also point the way to those intending to study his methods to some depth.

F. Csáki

Márkus, Gy.

KREIS- UND KREISRINGPLATTEN UNTER ANTIMETRISCHER BELASTUNG

Akadémiai Kiadó, Budapest — W. Ernst und Sohn, Berlin (München), (Düsseldorf) — 1973

Das Werk ist sozusagen die Fortsetzung des vom selben Verfasser früher erschienenen Buches (»Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke« — Akadémiai Kiadó, Budapest — Werner-Verlag, Düsseldorf, 1967) das sich mit der Berechnung der kreissymmetrischen Belastung von aus Platten und Schalen bestehenden rotationssymmetrischen Konstruktionen nach dem Verfahren der Momententeilung befaßt, und kurz die Theorie der Berechnung der verschieden starken kreis- und kreisringförmigen Platten auf antimetrische Belastungen bei starrer und elastischer Abstützung beschreibt. Außerdem werden auch die statischen Probleme des Anschlusses an die Rotationsschalen besprochen und es wird auch auf die Inanspruchnahmen von kreissektorförmigen Platten eingegangen. Das Werk enthält 36 ausführliche Zahlentabellen zur Berechnung der sämtlichen in Frage kommenden Belastungen von gleich bleibend starken Kreis- und Kreisringplatten, mitsamt dem Setzen des Stützträgers, sowie 12 Tabellen zur Berechnung verschiedener Belastungen von Kreissektorplatten mit verschiedenen Mittelpunktwinkeln und -abstützungen. Die praktische Berechnung wird an 22 Zahlenbeispielen dargestellt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das Werk die Berechnung der antimetrisch belasteten Kreis- und Kreisringplatten (die Grundplatten der durch Windlast beanspruchten Türme und Behälter) in hohem Maße erleichtert und auch die statische Prüfung der zusammengesetzten Konstruktionen (wie z.B. die der Zylinderschale angeschlossene Bodenplatte) ermöglicht. Der theoretische Teil ist auch an und für sich, d.h. also ohne Vorstudium, leicht verständlich. Für die öfters vorkommenden Fälle enthält das Werk Tabellen, die die Berechnungsarbeit — samt der Anwendung der Methode der Momentenverteilung — auf einen Bruchteil der bisherigen Arbeit verringert. Die seltener vorkommenden Fälle können durch Anwendung der beschriebenen allgemeinen Verfahren gelöst werden. Das Werk bietet den Konstrukteuren große Hilfe.

L. Kollár

Hans Rehbein

BASIC — LEICHT GEMACHT

EINE BASIC-EINFÜHRUNG UND 50 VOLLSTÄNDIGE ÜBUNGSAUFGABEN MIT LÖSUNGEN

VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1972, 212 S., 9 Abb., 12 Tafeln. (VDI-Taschenbücher T-37)

Das nützliche Heft das in der Reihe der volkstümlichen VDI-Taschenbücher erschienen ist, gibt die Programmsprache BASIC bekannt.

BASIC als eine vereinfachte Variante von FORTRAN für den Dialogbetrieb im Timesharing-Verfahren, spielt eine immer wichtigere Rolle. Ein mit den Grundlagen des Programmierens vertrauter Anfänger kann nach einem Tag Studium mit einfacheren Programmen beginnen; der Dialogbetrieb mit seiner verhältnismäßig reichlichen Fehleranzeige bildet ihn in ein — zwei Wochen zu einem geübten Anwender aus. Auch das Büchlein illustriert dies; kaum 44 Seiten beträgt die Beschreibung der Sprache und dann folgen auf 150 Seiten 50 Übungsbeispiele. Das Taschenbuch entspricht seinem Zweck ausgezeichnet und beschreibt, passend zur Einfachheit der Sprache, ohne mathematische Strenge und ohne Formulierung die Möglichkeiten und Aufgaben die BASIC-Anweisungen des an der Außenstation sitzenden Programmierers.

Der Verfasser ist selbst auch ein Anwender, er schrieb sein Buch aufgrund der Erfahrungen des Lehrstuhls für chemische Technologie der TH Dortmund. Die Verbrauchermentalität trägt in großem Maße zum Erfolg der Arbeit bei. Die Einführung behandelt das Timesharing-Verfahren, wobei sich die etwas einseitige Praxis eher als ein Nachteil erwies. Der nächste Teil des Büchleins ersetzt ein gutes Handbuch für Anwender.

Kleinere Mängel: es wäre nützlich gewesen die Tastatur des Terminals (teletype, display) außer auf Photos auch auf gezeichneten Skizzen darzustellen. Auf S. 21 hätte die Kombination des Befehls GOTO mit OF etwas besser erklärt werden müßen. Ähnlicherweise erscheint die Erklärung der Druckformat-Anweisungen als zu spärlich (S. 52). Die Anweisung NEW fehlt.

Die Besprechung hält sich stellenweise etwas einseitig bloß an die Variante der Einrichtung des Verfassers und es fehlt der Hinweis auf die sonstigen BASIC-Dialekte. Das Rückgrat des Taschenbuchs bildet die ausgezeichnet redigierte, lehrreiche Beispielsammlung mit kompletten und detailliert kommentierten Programmprotokollen.

Der Verfasser dieser Besprechung wünscht den an den hoffentlich schnell sich verbreitenden Fernstationen arbeitenden ungarischen Anwendern eine erfolgreiche Praxis und viel Vergnügen.

T. Vámos

Werner Ribbeck

GRUNDLAGEN DER TIME-SHARING-ANWENDUNG

VDI-TASCHENBÜCHER T-34

VDI-Verlag, Düsseldorf 1973, 96 Seiten, 14 Abbildungen, 7 Tabellen

Das Taschenbuch kann sein Erscheinen einem sehr gut verständlichen Bedarf verdanken, da eine immer größere Anzahl der Benützer von Rechenmaschinen nicht unmittelbar die Besitzer einer solchen Maschine, sondern durch je eine Fernstation auf Grund eines Abonnements nach enstprechender Zeitverteilung Mieter einer größeren zentralen Rechenanlage sind. Das Büchlein verfehlt aber seinen Zweck, da es sich für den Programmierer als ein nicht genug gründliches Lehrbuch erweist (obwohl dies selbst bei dem eng begrenzten Umfang möglich wäre, da ja der BASIC-Band der Serie diesem Ziel entspricht), außerdem enthält es nicht genug Anhaltspunkte für den, der die Wahl zwischen einer eigenen Maschine oder einem Abonnement zu treffen hat und ist nicht klar genug aufgebaut, um als allgemeine populärwissenschaftliche Literatur zu dienen. Demnach bietet es nach dem Grundsatz »von allem ein wenig« kaum etwas. Die technische Einleitung weist nur sehr spärlich auf das Wesentliche hin und die Beschreibung der Vorteile (8—9) ohne Erwähnung der Nachteile erinnert an die minderwertigsten Handelsbroschüren. Der sicht mit der Datenübertragung befaßende kleine

Abschnitt (Seiten 10—13) verweist anstelle von einer wesentliche Information auf einige Vorschriftsformulare der Deutschen Post. Auch vom Abschnitt, der sich mit den Programmsprachen befaßt (Seiten 19—43) kann man nicht wissen, wem es von Nutzen sein kann, denn für den Anfänger enthält er zuviel und für den Fortgeschrittenen überhaupt keine Kenntnisse. Aus dem Vergleich der verschiedenen Sprachen würde der arglose Leser annehmen, daß sich diese nur inbezug auf Schikanen des Rechtschreibens voneinander unterscheiden. Auch die Beschreibung der Dienstleistung nach Zeitverteilung (Abschnitt 3.) erinnert den Leser wiederholt an eine Handelsbroschüre und auch die anderen Abschnitte enthalten nur wenige, willkürlich gewähtle Informationen.

Die Hauptaufgabe eines solchen Taschenbuches wäre die volkstümliche Bekanntgabe von einigen technischen und Programmierungsgrundsätzen, eine auch praktisch verwendbare Gebrauchsanleitung und schließlich einige Hinweise dafür inwieweit eine Endstation nützlich ist und wann sich eine eigene Rechenmaschine als vorteilhafter erweist, mit welchen Investitionen, Kosten so ein Vorhaben verbunden ist, was als rationelle Kapazität einer zentralen Maschine erachtet werden kann, mit welchen Wartezeiten zu rechnen ist usw.

Von alldem bekommt aber der Leser garnichts und versteckt sich hinter dem vielversprechenden Titel ein schwaches Produkt der Kölner Honeywell-Bull GmbH.

I. Vámos

Palotás, L.

THEORIE DES STAHLBETONS

Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag,) Budapest 1973, 775 S., 369 Abb., 41 Tafeln

KAPITEL AUS DEM KREISE DER STAHLBETONTHEORIE

Das Buch von Professor PALOTÁS behandelt in zehn Kapiteln die zentralen Probleme des weitverzweigtem Themenkreises der Stahlbetonbauweise.

Das erste Kapitel macht den Leser mit den grundlegenden Fragen der Theorie des Stahlbetons bekannt, bietet eine spannende Übersicht von der Entwicklung des Stahlbetonbaus und illustriert die erzielten Ergebnisse mit schönem Bildmaterial. Es beschreibt die Bemessungsprinzipien von Stahlbetonkonstruktionen, die Grenzzustände, sowie die Frage der nötigen Sicherheit.

Das zweite Kapitel behandelt die Baustoffe des Stahlbetons und faßt deren physische und mechanische Eigenschaften mit einer Ausführlichkeit zusammen, wie sie zur Erkenntnis des tatsächlichen Kräftespiels und zur richtigen Konstruktionsweise erforderlich ist. Die Ergebnisse der verschiedenen Forscher einander gegenüberstellend befaßt sich dieses Kapitel mit der Frage der momentanen und der dauernden Formänderungen des Betons, sowie mit der Theorie der Betonfestigkeit, den Eigenschaften der Betonstähle und den Bedingungen der Verbundwirkung.

Das dritte Kapitel behandelt die charakteristischen Spannungszustände der Querschnitte der auf Biegung beanspruchten Stahlbetonträger, besonders den sogenannten III. Spannungszustand und macht den Leser auch mit den Grundbeziehungen der Bemessung bekannt.

Das vierte Kapitel ist der umstrittensten Frage der Stahlbetontheorie, der Frage der Schubbewehrung der auf Biegung in Anspruch genommenen Stahlbetonträger gewidmet. Verfasser weist mit dem nötigen Nachdruck auf die auf diesem Gebiet bestehende Unsicherheit und auf die Verschiedenheit der Auffassungen hin. Er beschreibt ausführlich die Ergebnisse der Versuche verschiedener Verfasser samt den eigenen. Er versucht durch kritische Bewertung dieser, beruhigende Antworten auf die aufgetauchten Fragen zu erteilen und schlägt gleichzeitig rationelle Berechnungsmethoden vor.

Das fünfte Kapitel umfaßt das Problem der auf Verdrehung beanspruchten Stahlbetonstäbe. Dieses Problem enthält ähnliche Unsicherheiten wie das der auf Schub beanspruchten Stahlbetonträger und kann daher nur mit annähernden Erwägungen behandelt werden. Zur Bestimmung der im elastischen Zustand der Stabquerschnitte entstehenden Spannungen verwendet der Verfasser das von ihm unter dem Namen *kinematischer Vergleich* eingeführte Verfahren, während er für den plastischen Zustand die Sandhügelanalogie von NÁDAI benützt. Die vorgeschlagenen Berechnungsverfahren und Empfehlungen sind trotz der vorhandenen Unsicherheiten rationell und nützlich.

Das sechste Kapitel befaßt sich mit dem zentrischen und exzentrischen Druck und erwähnt nur kurz den Fall des zentrischen und exzentrischen Zuges. Dieses Kapitel bietet eine gute Übersicht des Kräftespiels der Querschnitte in allen drei charakteristischen Spannungszuständen. Es berücksichtigt sorgfältig den Einfluß des Kriechens und des Schwindens, die zulässige und planmäßige Exzentrizität der Druckkraft wie auch die Rolle der Knickgefahr.

Das siebente Kapitel behandelt die Stabilitätsuntersuchung der Stabkonstruktionen, also ein ausgesprochenes Festigkeitsproblem, das als solches den Rahmen des Buches mehr oder weniger überschreitet. In diesem Kapitel setzt sich der Verfasser, mit Hilfe von Zahlenbeispielen nach Erörterung der Grundprinzipien der Stabilitätsuntersuchung, mit den Stabilitätsproblemen der verschiedenen Rahmenkonstruktionen auseinander und beschreibt ein von ihm eingeführtes Annäherungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Kraft.

Das achte Kapitel erörtert die Fragen der Formänderung und Rißbildung der Stahlbetonstäbe, bzw. Träger. Es bestimmt die Größe der Rißkräfte und Momente, die zu erwartende Breite und Entfernung der Risse und faßt zuletzt die auf die Rissebeschränkung bezüglichen Vorschriften zusammen.

Das neunte Kapitel behandelt die durch die gehemmten Formänderungen der Stahlbetonträger hervorgerufene Beanspruchung. Hier macht der Verfasser den Leser mit den durch Temperaturänderung, Schwinden und Kriechen bedingten Kräften und mit den durch sie verursachten Spannungsumlagerung unter Berücksichtigung des gleichzeitigen Einflusses der momentanen und der dauernden Belastung bekannt.

Das zehnte Kapitel trägt den Titel »Theorie des Bruches von Stahlbetonträgern«. Dieses Kapitel vermittelt dem Leser die Grundprinzipien der Bruchtheorie, die Bruchmechanismen, die Berechnung der Formänderungen und Verschiebungen. Die ausführliche Behandlung wird durch die Beschreibung der Bruchlinientheorie der Stahlbetonplatten abgeschlossen.

Jedes Kapitel des Buches ist durch ein ausführliches Literaturverzeichnis ergänzt, die die bibliographischen Daten von beinahe 200 Werken enthält. Beim Überblick des reichen Materials des Buches muß man die Maßhaltung des Verfassers billigen, daß er sich — abgesehen von der ausführlichen Erörterung der Stabilitätsfrage — nur auf die Behandlung der Zentralprobleme des Stahlbetonbaues beschränkt hat, und Sonderprobleme der Stahlbeton-Festigkeitslehre, wie z.B. Probleme der Fachwerkträger, Scheiben, Schalen nicht in den Kreis seiner Abhandlung einbezogen hat. Diese Aufgaben, sowie die Probleme der Spannkonstruktionen beanspruchen tatsächliche eine von den Zentralfragen gesonderte Behandlung.

Das Buch umfaßt nicht bloß die aus der internationalen Literatur allgemein bekannten Kapitel des Stahlbetonbaues, sondern auch die Ergebnisse der vieljährigen Lehr- und Forschungsarbeit des Verfassers. Sein Ziel ist »die prinzipielle bzw. theoretische Klärung der mit der Inanspruchnahme von Stahlbetonkonstruktionen zusammenhängenden Fragen, die Vorführung der Gründe, die im gegebenen Fall für die Praxis mit der nötigen Verläßlichkeit eine Lösung bieten können«. Diese nicht leichte Aufgabe wird durch die Angabe von auf einheitlichem Grundsätzen beruhenden Verfahren erfolgreich gelöst. Das Buch erteilt gründliche Antwort auf die in verschiedenen Fällen der Inanspruchnahme auftretenden Fragen, erörtert Methoden zur Bestimmung des Kräftespiels und der Formänderung, beurteilt mit Umsicht die in verschiedenen Fällen auftretenden Unsicherheiten. Es macht den Leser mit der Auffassung der Fachkreise, inbezung auf verschiedene Probleme, sowie mit eigenen Ansichten des Verfassers, die durch jahrzehntelange Fachpraxis geformt wurden und nicht in allem mit dem in der internationalen Literatur befindlichen Meinungen identlich sind, bekannt. Seine Werturteile, Kritiken, die durch vergleichende Untersuchungen gewonnenen Schlüße, seine Empfehlungen, Vorschläge aus seiner pädagogischen und Forschungstätigkeit gewonnenen Lehren sind überzeugend und auch für die Praxis nützlich und wertvoll.

Die drucktechnische Ausführung des ausgezeichneten Fachwerkes ist tadellos. Dies, sowie das reiche Bildmaterial und die vielen zahlenmäßig durchgerechneten Beispiele sind Gewähr dafür, daß das Buch nicht nur in den an der Stahlbetontheorie interessierten Fachkreisen, sondern auch seitens der praktisch tätigen Fachleute mit einem günstigen Empfang rechnen kann.

P. Csonka

Brian Porter—Roger Crossley

MODAL CONTROL, THEORY AND APPLICATIONS

Taylor and Francis LTD, London 1972, 233 pages, 40 figures

In connection with the deterministic, linear, in time invariant, so-called common controlling systems governed by scanner — the system being of finite degree of freedom and of continuous operation — the book presents (in nine chapters) the theory of the method of design synthesization — which could also be named modal prescription — and some of its more practical applications (in seven chapters).

The book, in evolving the theory — to the development of which also authors contributed — setting out from the equations of state, depends on the method of transformation of the matrices to the normal Jordan's form.

In Chapter 1, the mathematical model being the model for the setting out of the theory, the denominations and the historical preliminaries of the method are treated, presenting homeomorphism which exists between the sampling system of continuous operation and that of the common sampling method. Here, the method of the modal prescription is described, which consists of trying to find such a linear form — expressed by the vector of state — of the vector of the input signal — i.e., the corresponding linear feedback — by which to the dynamic modes (i.e., eigenvectors) of the created closed loop system as an eigenvalue, from some viewpoint being prescribed to be favourable, will be connected.

Chapter 2 deals with the dynamics of the system without input (free system) both in connection with the diagonalizable matrix system and in connection with the matrix system reductible to the general Jordan's form. The calculation of the transition matrix and with the aid of this, the calculation of the dynamics of the heteronom case is demonstrated.

In Chapter three, the calculation of the first order and the second order sensitivities of the eigenvectors and eigenvalues of the free system presenting themselves in depending on the elements of the system matrix are discussed. By these known quantities, the problem, for example, can be solved, that with the selection of the parameters of the systems might be minimized, or for example, the problem which might be considered to be the calculation of perturbation that by setting out from a system matrix of a familiar spectral resolution also the spectral resolution of other system matrices being sufficiently near the former, might be obtained.

By introducing the ideas of modal directivity and modal perceptibility, authors in Chapter 4 consider the problem of directivity and perceptibility in connection with each mode. In the case related to the most general system matrix of Jordan shape, they arrive through cases growing progressively more intricate.

In Chapter 5, the method of synthesis which may be called modal control, will be evolved in connection with the single input system, first in the form relating to a single mode, then later to other shapes, relating to several modes are evolved.

The solution of the synthesis problem working with model prescription and relating to a system of multiple input is dealt with in Chapter 6. Demonstrating that the initial starting conditions do not permit a definite solution, several ways are shown for the elimination of the ambiguity. These are as follows: 1) to find the minimum of the sum of the squares or modulus of the required "amplification factors"; 2) prescription of some of the amplification factors if possible; 3) the so-called mode prescription. In this Chapter that is also demonstrated how the synthesis worked out for the case of a single input might be generalized step-by-step to cases of several inputs.

In Chapter 7, the modal prescription synthesis is discussed for that case where the vector of state cannot be measured directly, only with the aid of a discreet dynamic system — the so-called state observing system — which specially serves this object and where both the output and the input signals could be operated. The solution deduced here by the authors seems to be more advantageous from several view-points than other methods of similar purpose. However, the synthesis discussed in this chapter cannot be applied unrestrictedly: it is necessary that the eigenvalues of the matrix of the open-loop system should be different, that the mode to be prescribed should be at least with the aid of a single input variable be directable, and with the aid of at least one output variable be observable and further, that the grade of the output matrix should be the same as the numbers of the elements of the column matrix of the output signal.

Should the feed back be of integrating character, so this circumstance might spoil the directibility of the system. In Chapter 8, the necessary and sufficient conditions are derived

with the purpose of not permitting this damage to take place because for such cases the synthesis problem relating to the eigen-structure prescribed will be solved.

Further on, the case of integrating and proportional feedback of diadic shape is discussed and also the limitations to such solutions.

Chapter 9 contains the calculation of the different characteristics of sensitivity which were not dealt with in Chapter 3. These characteristics of sensitivity are the following:

1) the sensitivity of the elements of the feedback matrix from the eigenvalues of the closed loop system and from the elements of the input matrix; 2) the sensitivity of the eigenvalues of the closed loop system to the elements of the feedback matrix, to the elements of the matrix of the open-loop system and to those of the input matrix.

In Chapters 10 to 16, the application of the theory is demonstrated by using simplified examples, arriving also to numerical results. The examples concern automatic stabilizers both in lateral and in longitudinal direction of aeroplanes, as well as stabilizing systems for helicopters, for coupled systems of vehicles of very high speed and for the synthesis of economy systems and decision systems of manufacturing processes. One of the examples deals with sensitivity analysis of the automatic control system of aeroplanes.

Besides, minor illustrating numerical examples have a role almost in every chapter dealing with the theory.

The book ends by presenting a few unsolved problems with the purpose of permitting the reader to practise the application of the theoretical theses of major significance in order to achieve readiness in applying them in the practice.

The train of thought is, from the beginning of the book up to the end, very clear. Reading it is equally pleasurable and useful for those who are engaged in dealing with the theory of controlling, with the theory of dynamic systems or with the application of matrix calculation. It may conveniently be used in self education.

The paper, binding and cover, quality and finesess of the press-work contributes to the pleasure of reading the book.

Á. Bosznay

Rudolph Szilárd

THEORY AND ANALYSIS OF PLATES

CLASSICAL AND NUMERICAL METHODS

Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974, 724 pahes, 301 figures, 71 illustrative examples, 117 problems, Collection of formulae, Subject Index

The book was published in the outstanding "Civil Engineering and Engineering Mechanics Series". Its author, the well-known professor of the University of Hawaii, did not take on an easy task when choosing and treating the comprehensive presentation of problems on thin plates. His aim was simultaneously to fulfil the demands of a university textbook, of a technical reference book, indispensable for research work, and of a manual, directed on the purposes of practice.

The book consists of four parts. The first discusses the classical static problems of plate theory in three chapters. The second part, divided into two chapters, deals with the dynamic analysis of elastic plates. The subject of the third part is the stability problem of plates, that of the forth, the limit analysis of plates. The Appendix gives a collection of formulae concerning differently loaded and supported plates of circular and quadrangular shape.

With the exception of the last section the treatment of the subject always starts out with the explanation of the classical methods of elasticity. It is common knowledge that these methods are limited to the solution of relatively simple problems and in complex cases the analysis becomes cumbersome and even some times impossible. For this reason author attributes special importance to widely applicable numerical and approximative methods, apt for the solution of different problems occurring in engineering practice.

It deals in detail with the ordinary finite difference methods and their improved alternatives, all these being especially appropriate for solving all kinds of practical problems. It also discusses the energy methods breefly, and their improved variants, especially Galerkin's and Vlasov's methods, both very useful for practical application. In addition matrix-displacement analysis of gridwork, framework method and finite element methods are also exhaustively treated. The exactitude of the different approaches is checked by comparing their results with those of known classical methods. At the same time, directions are given as to which of the suggested methods can appropriately be applied to a given case.

The material dealt with is presented in a clear style, easy to read. Special emphasis is placed on the clear presentation of fundamentals and a strict watch is kept on avoiding superfluous piling up of cases not directly connected with the subject.

The manner in which the book treats its subject is examplary. As a rule, its demands do not exceed the common mathematical knowledge possessed by engineers. If additional expertise is needed, the book itself conveys it. Application of the presented methods is explaned by numerous, well selected illustrative examples, very important for practice as well. Nearly every section is followed by a list of wide-spread bibliographic references. These latter, containing 845 titles, enhance the value of the book, making it easy for the reader to complement his knowledge in the pertinent subject matter. The collection of formulae at the end of the book, extending to almost 100 pages, contains the solution of 170 practical problems and has hereby special importance for designing engineers.

Summing up, it must be stated, that professor SZILÁRD's book is an excellent, gap-filling work which covers the whole field of knowledge relating to the theory and practice of plates. It is sure it will find its way to every engineers desk interested in plate problems and there occupy the prominent place it deserves.

P. Csonka

R. Szilárd

HYDROMECHANICALLY LOADED SHELLS

PROCEEDINGS OF THE IASS 1971. PACIFIC SYMPOSIUM PART I.

The University Press of Hawaii, Honolulu (Hawaii), 927 pages, 531 figures, 30 tables, Author Index.

The International Association for Shell Structures (IASS) organized a conference under the title *Pacific Symposium* held in two parts (Part I and Part II) in 1971. Part I of the conference was held at Honolulu (Hawaii, USA). Part II at the other side of the ocean, in Tokyo and Kyoto (Japan).

The issue mentioned in the title comprises the material of the lectures given in Part I of the conference, that of Part II is contained in the volume "Tension Structure and Space Frames" published by the Architectural Institute of Japan.

The publication containing the material of Part I of the Symposium gives the 8 general reports, the 61 papers and the pertinant discussions delivered at the symposium in their whole extent.

Conformly to the 8 Sections of the conference, the conference book is divided into 8 Chapters dealing with the following problems: Design Criteria and Conceptual Design (I, II); Surface and Shallow Water Shell Structures; Submerged Shells; Static and Stability Analysis of Hydromechanically Loaded Shells; Hydrodynamically Loaded Shells; Pertinent Shell Theories and Methods for Analysis; Model Tests, Construction Methods and Related Fields.

One of the central problems of the Hawaii Symposium was that of floating cities. This subject is a matter of serious interest in Honolulu because of the space shortage prevailing there. The extremely intensive building activity means namely a threatening danger to the wonderful natural beauties of the island. Enlarging of the airport presents a grave problem too, which could only be solved by extending the airfield, the concrete runways and different buildings over the surface of the sea. (According to data given by professor CRAVEN the airfield which had received 300 passengers in 1940, 55 000 in 1950, 390 000 in 1960, was used by 2 000 000 passengers in 1970 and this process is still increasing!) The population explosion in Honolulu as well as in Japan, projects the realisation of floating cities to the near future.

Another important subject of the conference was the problem of submerged containers and habitats (laboratories, oceanographic observation posts, etc.). These objects demand the creation of structures resistent to extreme fluid pressure and rolling waves. Thus, it became imperative to generalize and further develop the current shell theorie, the elaboration of methods for nonlinear analysis of moderately and thick-walled shells, the investigation of free vibration and visco-elastic respons of shell structures in fluid environments.

In connection with the mentioned structures the failure modes, the collapse strength and safety factor of shells became a foremost problem too. Special regard is needed by the phenomenon of buckling and different instability problems. Numeral lectures and contributors to the discussions endeavoured to clear this very important question through theoretical investigations and by different experiments.

Beside the above outlined questions other ones also came to be dealt with in detail, mainly special problems connected with underwater structures. Such problems were among others containers with elliptic cross-section, optimum design of liquid storage tanks, inflatable shells in the fluid environment, undersea oil storage systems, the application of ferro-cement and reinforced concrete hulls for ocean tankers and different questions of general interest relating to shells.

Obviously, the mentioned specific problems make it necessary to find new shell forms, design criteria and concepts as well as to elaborate new appropriate methods of calculation and principles of construction, including their test by experiments.

The conference book, based on the lectures and discussions of experts gathered from all over the world answers the questions outlined above according to the present level of technological science.

P. Csonka

Dr. Károly Széchy

THE ART OF TUNNELLING

Second revised and enlarged English edition. Akadémiai Kiadó, Budapest 1973. 1097 pages, 740 figures, several tables

The requirements raised by transport, storage, parking, building of underground plants etc., gave tunnelling a new momentum. Of special significance is the construction of underground railways indispensable for satisfying in an up-to-date manner the requirements of mass transportation in urban traffic. Tunnelling is an extraordinarily complex problem involving a wide region in engineering; the design, construction, operation and maintenance of a tunnel require a thorough, comprehensive knowledge of the specialists, and even of the builder. However, there are hardly any books to be found, giving a full review, in the professional literature on the subject, than that of Dr. K. SZÉCHY unlooked for decease of the Professor of the Technical University of Budapest. Also the first edition of this book published in 1961 called forth a wide interest. This was followed by an edition in English (which was reprinted leaving the text unchanged in 1967 and 1970), then the work which proved to be very successful was published again, in 1969 in German, in 1970 in French, and in 1972 in Japanese. The key of its success was, that Prof. SZÉCHY revised and rewrote, upgraded and enlarged the also renewed initially rich material again and agein. That is why this English edition is hitherto the most perfect variant of this work wherein also the effect of the critiques — which, in general, were very favourable — as is also reflected earlier editions.

After an introduction, in Chapter 1, extending over 28 pages, the purpose of tunnelling as well as the classification into different groupes of the tunnels are described, followed by a short historical review of tunnelling and finally a table is presented summarizing the data of major significance, relating to the large tunnels of the world.

In Chapter 2, the preliminary studies are dealt with, including the economic analysis of tunnelling, the geological and petrographical exploration, selection of the most advantageous site, profile and cross-section of the tunnel. Details of several existing tunnels are quoted as examples in this chapter to an extent of 95 pages.

On the 161 pages of the third chapter the loads undermining the underground structures are treated. This chapter deals at the beginning in an unusually detailed way with stress analysis, then, partly the conventional theory of the earth and rock pressure, partly those based on recent observations are discussed and also the problems of water pressure, lateral pressure, bottom pressure and rolling loads are treated.

The regulations in respect to loads of the underground railways, of several European great cities might give rise to a special interest. From this chapter it appears that the author attaches great importance to site-surveying and emphasizes that to the description of the variability of the actual site-conditions hardly could a theory be found whereupon one could rely absolutely. That is why so many methods of surveying and types of instruments to be applied for the determination of rock pressure are described in this chapter.

In Chapter 4, through 261 pages the main factors in designing tunnels are described: determination of the necessary and sufficient dimensions of the abutment walls both in case of the conventional hours-shoe arc and circular or rectangular cross-sections. Here, it can be felt that the author wrestled with the "embarras de richesse" by eliminating the less commonly applied and less convenient methods and could have directed the ideas more positively, instead of the extraordinarily detailed mathematical treatment of the problems reports on programs mirroring the results probably could have been more useful. The drainage and waterproofing of tunnels, protection from corrosion, ventilation, lighting as well as some questions on the portals of tunnels and accessory constructions are discussed in this chapter.

Chapter 5 contains the descriptions of the surveying, tracing, pegging out and other surveying operations in connection with tunnelling, taking, in general, the conventional instrumentation for basis, however, also briefly mentioning the principles of the application of laser sighting methods.

Chapter 6, which is the longest one in the book, gives the construction of tunnels in details. The description of the conventional mining methods is intentionally narrowed down in order to be able to treat more thoroughly tunnelling on the one hand in hard rocks without lining; roof legging, and on the other dealing, with meticulous care, with the most significant method of construction in watered loose rocks and soils, shield tunnelling. At the same time, the construction, starting from the ground surface, the method of cut-and-cover, application of screen walls, different injection procedures, soil consolidation, construction with float cases are treated. Here, also the method of pressing through of tubes and tunnels for public utilities of relatively small diameters are described. A significant part of the chapter is devoted to the architectural treatment of the stations of underground railways as well as to the vertical and inclined shafts for starting the tunnelling. The chapter is terminated by report on sanitary and safety prescriptions.

In Chapter 7, through 95 pages the problems concerning the operation, maintenance, and reconstruction of tunnels are described.

At the end of each chapter — and also at the end of the whole volume — an unusual abundance of references on the professional literature serves for information in further details; to get one's bearing in the book, a name and catchword index at the reader's disposal.

This excellent book undoubtedly achieves its aim already the first Hungarian edition: it gives an up-to-date review on the present state of tunnelling, it is a useful manual equally for university students, designers, contractors, builders. The publisher: Akadémiai Kiadó, also deserves credit for the fine work in setting up the book.

Dr. L. Varga

ZEMENTTASCHENBUCH 1972/1973

Verein Deutscher Zementwerke e.V., Düsseldorf, 550 Seiten

Das Zementtaschenbuch, als Fortsetzung des in 1911 das erste Mal erschienenen Zement-Kalenders, verfolgt mit ständiger Aufmerksamkeit die jeweilige Entwicklung der Eigenschaften des Zements und Betons, sowie deren neuesten Einsatzmöglichkeiten und erweist sich eben deshalb in seiner allgemein alle zwei Jahre erscheinenden neuen Ausgabe (die gegenwärtige Ausgabe ist die 12. seit 1950) als unbedingt notwendig für den Fachmann. Das Interesse für das Zementtaschenbuch ist so groß, daß man es in mehreren Hunderttausend Exemplaren erscheinen läßt.

Die vorliegende Neuausgabe weicht sowohl hinsichtlich ihres Systems, als auch ihres Inhaltes von den bisherigen Ausgaben ab, denn sie bietet durch Verfolgen der Entwicklung in der Industrie, in der Forschung und Standardisierung viel Neues. Das Taschenbuch gliedert sich in 9 Abschnitte, u.zw.: Chemie des Zementes und der Hydratationsprodukte; Der Zuschlagstoff; Die Zuschlagstoffsysteme; Der Beton; Der Leichtbeton; Besondere Verwendungsgebiete des Zementes; Übersicht der seit 1962 im Zement-Taschenbuch behandelten Sondergebiete; Wichtige Standards, Richtlinien und Merkblätter für den Bau; Allgemeine und bautechnische Tabellen. Ergänzend hiezu enthält das Taschenbuch auch ein Sachverzeichnis samt einer Übersicht der Organisation der Zementindustrie und der Zementfabriken der Bundesrepublik Deutschland. Die einzelnen Abschnitte gewinnen durch Enthalten von übersichtlichen und aufschlußreichen Abbildungen, Tabellen sowie reichlichen und zeitgemäßen Literaturverzeichnissen für den Fachmann nur noch mehr an Wert.

Die Redakteure und Verfasser dieses schön ausgefertigten, auf gutes Papier gedruckten und sorgfältig redigierten Buches gelten als ausgezeichnete Kenner des Fachzweiges und so ist mit Sicherheit damit zu rechnen, daß das Zementtaschenbuch alle ihm gegenüber seitens des Verlegers und des Benutzers gestellten Erwartungen befriedigen wird.

L. Palotás

INDEX

Soare, M. V.: On the Statics and Dynamics of Double-Layer Oblique Square Mesh Grids — Statik und Dynamik der zweilagigen, zweiläufigen schrägen Stabroste — *Мирча Соаре:* Статика и динамика пространственных пластинообразных косых сеток с квадратной решёткой 335

Cserna, T.: Allgemeintheoretische Annäherung und neue Ausführungsmethode der Rundheitsmessungen im Prisma — A General Theory of Roundness Measurement in Vee-Blocks — *Черна, Т.:* Общее теоретическое приближение и новый практический метод измерения концентричности в призме 351

Kerek, A.: Berechnung von einschichtigen auf Biegung beanspruchten anisotropen Fachwerkschalen — Calculation of Single-Layer Anisotropic Bent Shells Consisting of Scalene Web System — *Керек, А.:* Расчет изогнутых анизотропных оболочек, состоящих из однослойных решеток с общей треугольной сеткой 383

Horváth, Gy.: Red Mud Smelting Experiments — Versuche über die Verhüttung des Rotschlammes — *Хорват, Д.:* Экспериментальные опыты по доменной переработке красного шлама 413

Lenkei, P.: Local and Overall Specific Inelastic Rotation Capacities in Reinforced Concrete Beams — Zusammenhang zwischen der örtlichen und der mittleren spezifischen, nicht elastischen Verdrehungsfähigkeit von Stahlbetonträgern — *Ленкеи, П.:* Местные и средние удельные неупругие повороты железобетонных балок 451

BOOK REVIEW

Beleş, A. A.—Soare, M. V.: Berechnung von Schalentragwerken (Csonka, P.)........ 465
Hampe, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke (Csonka, P.) 466
Gabriel Kron and Systems Theory, Ed. H. H. Happ Union College Press (Csáki, Fr.) 466
Márkus, Gy.: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung (Kollár, L.) 467
Rehbein, H.: Basic, leicht gemacht (Vámos, T.) 468
Ribbeck, W.: Grundlagen der Time-Sharing-Anwendung (Vámos, T.).......... 468
Palotás, L.: Theorie des Stahlbetons (Csonka, P.) 469
Porter, B.—Crossley, R.: Modal Control, Theory and Applications (Bosznay, Á.)...... 471
Szilárd, R.: Theory and Analysis of Plates. Classical and Numerical Methods (Csonka, P.) 472
Szilárd, R.: Hydromechanically Loaded Shells (Csonka, P.) 473
Széchy, K.: The Art of Tunnelling (Varga, L.) 474
Zementtaschenbuch 1972/1973 (Palotás, L.) 475

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Zacsik Annamária
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. VII. 4. — Terjedelem: 12,6 (A/5 ív) 57 ábra

75.635 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. **79** (1974) 335—350

SOARE, M. V.: *On the Statics and Dynamics of Double-Layer Oblique Square Mesh Grids*

A method of analysis for double-layer oblique square mesh grids is developed, based on the replacement of the discrete structure by an equivalent continuum. In the considered case, this continuum is a plate working with over-torsion. The statical solution is based on double and simple trigonometrical series. The dynamic aspect is also examined dealing with the free vibrations of the simply supported grid on a rectangualr planform.

Acta Techn. Hung. **79** (1974) 351—382

CSERNA, T.: *A General Theory of Roundness Measurement in Vee-blocks.*
The size of the roundness error in rotating, centrally symmetrical machine elements (e.g. rolling bearings) is an important quality factor. Various measuring instruments are known to measure it. In a Vee-block the departure from circular shape can be measured, but with distortion. The distortion can in general be analyzed and represented graphically. Results of comparative measurements confirm the theoretical solution.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), 383—411

KEREK, A.: *Calculation of Single-layer Anisotropic Bent Shells Consistings of Scalene Web System.*

The calculation of the most general case of the single layer spatial tringulated web system with the aid of the continuum method is presented. The strength characteristics of the continuum (anisotropic shell subjected to flexural stresses) which, from the statical viewpoint is equivalent to the latticework are determined; the governing differential equations of the shell are established, then the stresses (internal bar forces, bar moments) are expressed as functions of the stress resultats (membrane forces, specific moments). The deductions are extended also to case where the shell turns into a flat plate; the conditions of the orthotropy are treated separately.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), 413–449

HORVÁTH, GY.: *Red Mud Smelting Experiments*

Examination of synthetic Na–Al hydrosilicates and plant grade red mud types revealed how the Na_2O losses during smelting could be reduced. Effects of lime, coke, and their simultaneous presence, as well as of the temperature and duration of the heat treatment on the Na_2O loss have been determined. The causes of such losses have become clarified. As a result, such technologies were developed whereby, in addition to the Fe_2O_3 and Al_2O_3 contents, the Na_2O content of the red mud could also be extracted with minimum losses.

Acta Techn. Hung. **79** (1974), 451–463

LENKEI, P.: ***Locaé and Overal Specific Inelastic Rotation Capacities in Reinforced Concrete Beams***

The influence exerted by the length of the constant (or nearly constant) maximum bending moment zone on the specific inelastic rotation capacity of r.c. beams is discussed on the basis of experiments carried out on 49 beams. The relationship between the local and overal rotation capacities are determined and formulae for calculations are given.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 32.00 a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Account No. 218 10990) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 32.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Compte courant No. 218 10990) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 32.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (1389 Budapest 62, P. O. B. 149 Текущий счет № 218 10990) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following adresses:

ALBANIA
Drejtorija Qändrone e Pärhapjes dhe Propagandimit tä Librit
Kruga Konferenca e Päzes
Tirana

AUSTRALIA
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA
GLOBUS
Höchstädtplatz 3
A-1200 Wien XX

BELGIUM
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
162. rue du Midi
1000 Bruxelles

BULGARIA
HEMUS
11 pl Slaveikov
Sofia

CANADA
Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA
Artia
Ve Směčkách 30
Praha 2
Poštovní Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arska Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
SLOVART A. G.
Gorkého
Bratislava

DENMARK
Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE
Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay-Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstraße 3–4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN
Blackwell's Periodicals
Oxenford House
Magdalen Street
Oxford
Collet's Subscription Import Department
Dennington Estate
Wellingsborough, Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
4–5 Fitzroy Square
London W. 1

HOLLAND
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471–487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA
Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

ITALY
Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
Techna
Via Cesi 16.
40135 Bologna

JAPAN
Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central

KOREA
Chulpanmul
Phenjan

NORWAY
Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgt 41–43
Oslo 1

POLAND
Ruch
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA
Cartimex
Str. Aristide Briand 14–18
București

SOVIET UNION
Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G–200

SWEDEN
Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
S–101 20 Stockholm

USA
F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood Mass. 02090
Stechert Hafner Inc.
31. East 10th Street
New York, N. Y. 10003

VIETNAM
Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA
Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslavenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

26. II. 1975 Index: 26.025