

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMET, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 57

FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelendő a belföld számára a „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külvkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereich der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forint, Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

TOMUS 57

INDEX

- Barna, J.—Marschalkó, B.*: Elektrischer Einfluß auf die rheologischen Eigenschaften wäßriger Bentonitdispersionen — Electric Influence on Aqueous Bentonite Dispersions — Influence électrique sur les propriétés rhéologiques des dispersions de bentonite aqueuses — *Барна, Й. — Маршалко, Б.*: Электрическое воздействие на реологические свойства водных бентонитовых суспензий 113
- Bella, E.—Gulyás, J.—Juhász, S.*: Der Vorgang der Warmverformung des Kupfers bei verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten — Process of Hot Forming of Red Copper at Different Forming Speeds — Les processus de façonnage à chaud du cuivre rouge à vitesses de façonnage différentes — *Белла, Э. — Гуяш, Й. — Юхас, Ш.*: Процесс протекания горячей обработки меди при различных скоростях обработки 397
- Benyő, P.*: Anwendung der Wellengleichungen auf kurze Rohre, II — Application of Wave Equations to Short Pipes, II — Application des équations d'ondes aux tubes courts, II — *Беньо, П.*: Применение волновых уравнений к коротким трубам, II 309
- Csonka, P.*: Boundary Conditions of the Stress Function along Perfectly Free Edges of Discs and Shells — Randbedingungen der Spannungsfunktion von Scheiben und Schalen längs ihrer ganz freien Ränder — Conditions au contour de la fonction de tension sur les sections de bords libres des tympans et des voiles minces — *Чонка, П.*: Окружные условия функции напряжения на свободных краевых участках плит и оболочек 211
- Dundrová, V.—Kovařík, V.—Šlapák, P.*: Nichtlineare Biegungstheorie von Sandwich-Platten, III — The Non-Linear Flexion Theory of Sandwich Plates, III — Théorie de la flexion non-linéaire des plaques sandwich, III — *Дундроева, В. — Коварик, В. — Шлапак, П.*: Теория нелинейного изгиба биметаллических пластин, III 19
- Geleji, A.—Voith, M.—Mecseki, J.—Tóth, L.*: Rechnerische Grundlagen für die Bemessung der Pilgerwalzwerke, I — Calculating Principles for the Design of Pilgrim's Seamless Tube Rolling Mills, I — Fondements du calcul pour le dimensionnement des laminoirs à pas de pèlerin, I — *Гелеи, А. — Войт, М. — Мечеки, Й. — Тот, Л.*: Математические основы расчета пильгертных станов, I 227
- Goschy, B.*: Torsion einzelliger Kastenträger — Torsion of Box Girders — Torsion des poutres-caissons — *Госши, Б.*: Кручение одноклеточных коробчатых балок 155
- Huszthy, L.*: Analysis of Ground Worm Surfaces — Analytische Untersuchung der geschliffenen Schneckenfläche — Examen analytique de la surface d'une vis rectifiée — *Хусти, Л.*: Аналитическое исследование шлифованной спиральной поверхности 261
- Hornung, A.*: Der Einfluß der Rundlaufgenauigkeit des Fräzers auf die Produktivität und die Werkzeugkosten beim Fräsen — Influence of the Circular Running Accuracy of Milling Cutters on Productivity and Tools Costs — L'influence de la précision de course de la fraise sur la productivité et les frais d'outillage — *Хорнунг, А.*: Воздействие точности хода фрез на производительность и расходы на инструмент при фрезерной обработке 415

Heller, G.—Rosta, L.: Wahl der Betriebscharakteristiken des Luftverdichters und des Hauptluftbehälters an Eisenbahntriebfahrzeugen auf Grund der Betriebsanforderungen, II — Dimensioning Principles of the Air-Compressor and the Main Air-Receiver for the Brake-Equipment in Railway-Trains, II — Choix, du point de vue de l'exploitation, des caractéristiques des compresseurs et réservoirs d'air comprimé des engins de traction ferroviaires, II — Хеллер, Д.—Роста, Л.: Выбор характеристик оборудования по выработке и аккумуляции сжатого воздуха на основе производственных соображений, для случая железнодорожной тяги, II	275
Kollár, L.—Gárdonyi, Z.: Déversement latéral des poutres à paroi mince suspendues par leurs extrémités — Lateral Buckling of Thin-Walled, Suspended Beams — Das Kippen von dünnwändigen, aufgehängten Balken — Коллар, Л.—Гардони, З.: Кручение тонкостенных подвесных балок	187
Krysko, W. W.—Fenton, R. G.: Contribution to the Problem of Extrusion of Lead and Lead Alloys — Beitrag zum Strangpressen von Blei und Bleiegierungen — Contribution au problème du filage à la presse du plomb et des alliages de plomb — Крицко, В. В.—Фентон, Р. Г.: К проблеме прессования пруткового материала из свинца и свинцовых сплавов	345
Löcsei, B.: Processes during the Calcination of Ceramic Products, II — Die im Laufe des Brennens vor sich gehenden Vorgänge in keramischen Produkten, II — Procès ayant lieu dans des produits céramiques pendant leur cuisson, II — — Лёцеи, Б.: Процессы происходящие в керамических изделиях при обжиге, II	1
Murthy, M. G. K.: Torsion of Prismatic Bars — Torsion von prismatischen Stäben — Torsion des barres prismatiques — Мурти, М. Г. К.: Кручение призматических стержней	133
Öllös, G.: Hydraulics for Lowering the Ground Water Table Using Vacuum Wells — Die hydraulischen Vorgänge bei der Grundwassersenkung durch Vacuumbrunnen — Processus hydrauliques du rabattement du niveau par puits à vide — Ёллюс, Г.: Гидравлические процессы погружения уровня грунтовых вод при помощи вакуумных колодцев	67
Rózsa, M.: A New Iterative Method for the Finite Deflection Analysis of Frameworks. — Ein neues Iterationsverfahren für die Berechnung von Rahmentragwerken nach der Theorie zweiter Ordnung. — Nouvelle méthode itérative pour le calcul des cadres, basée sur la théorie du deuxième ordre — Рожса, М.: Новый итеративный метод расчета стержневых конструкций на основе теории второго порядка	35
Rédei, I.: Controlling Method of Bar-Forces Arising in Spatial Trusses — Nachprüfung der Stabkräfte von räumlichen Fachwerkträgern — Contrôle des efforts de barre des poutres en treillis spatiales — Редеи, И.: Контроль стержневых усилий пространственных арок	47
Reményi, K.: Investigation of the Distribution by Weight Percent of the Components in Size Fractions of Ground Product Mixtures — Die Untersuchung der Gewichtsprozent-Verteilung von Komponenten in den Fraktionen nach Korngröße der Mahlgüter von Stoffgemischen — Étude de la distribution en pourcent de poids des composantes, dans les fractions granulométriques des mélanges de produits broyés — Ремени, К.: Анализ распределения по весовому проценту гранулометрических фракций помолов смесей материалов	333
Sólyom, J.: Study on the Recrystallization of Pure Copper Technical Grade — Untersuchung der Rekristallisation von technisch reinem Kupfer — Examen de la recristallisation du cuivre technique pur — Шойом, Е.: Исследование рекристаллизации технической чистой меди	297
Szidarovszky, J.: Effect of the Alteration in the Flexural Rigidity of Hyperstatic Beams under Bending — Einfluß der Veränderung der Biegesteifigkeit von statisch unbestimmten Biegebalken — L'effet de la modification de la rigidité de flexion des poutres hyperstatiques fléchies — Сидаровски, Я.: Влияние изменения жесткости на изгиб на изогнутую балку	169

Szidarovszky, J.: Examination of the Effect of Temperature Gradients by Means of Influence Lines — Untersuchung der Wirkung von ungleichmäßigen Temperaturveränderungen durch Einflußlinien — Examen de l'effet des variations inégales de température à l'aide des lignes d'influence — Сидаровски, Я.: Исследование неравномерных изменений температуры при помощи кривых влияния	145
Varga, J.—Sebestyén, Gy.: Contribution to the Investigation of the Intensity of Cavitation Erosion — Beiträge zur Untersuchung der Intensität der Kavitationserosion — Contribution à l'étude de l'intensité de l'érosion par cavitation — Варга, Й.—Шебештьен, Дь.: Дополнение к исследованию интенсивности кавитационной эрозии	373
Varga, J.—Sebestyén, Gy.: Cavitation Noise Spectrum and Cavitation Damage — Schallspektrum der Kavitation und die Kavitationskorrosion — Profil de bruit de la cavitation et destruction par cavitation — Варга, Й.—Шебештьен, Дь.: Спектр кавитационного шума и кавитационное разрушение	383
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRE ОБЗОР КНИГ	
T. Cholnoky: Mechanik II., Festigkeitslehre (P. Csonka)	223
A. Gheorghiu: Statica construcțiilor (P. Csonka)	224
L. G. Johnson: Theory and Technique of Variation Research (L. Gillemot)	429
L. G. Johnson: The Statistical Treatment of Fatigue Experiments (L. Gillemot)	429
L. Mohácsi: Contemporary Formings (Gy. Haviár)	223
H. Ziegler: Mechanics (P. Csonka)	223

PROCESSES DURING THE CALCINATION OF CERAMIC PRODUCTS

PART II. THE EFFECT OF SMALL QUANTITIES OF AlF_3 ON THE FORMATION OF PHASES DURING THE CALCINATION OF GROSSALMERODE CLAY*

B. LŐCSEI

SILICATE RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received August 23, 1963]

The transformation mechanism of the Grossalmerode clay was demonstrated partly by dynamic and partly by static methods in the course of the experiments. SiO_2 changes from the quartz phase through the cristobalite phase into the tridymite phase. The above mechanism of phase transformation is supported by Debye-Scherrer and diffraction patterns, and is further confirmed by microscopic pictures. The addition of AlF_3 promotes the initiation of mullite formation at lower temperatures, which is equivalent to the acceleration of the transformation process. Acceleration of the transformation process can be explained by the mineralizing effect of the fluorohydrogen which is formed by the reaction of AlF_3 with kaolinite.

I. Introduction

In the production of ceramic products the energy requirement of the heat treatment — a highly important operation in the production process — is one of the most significant cost factors. Heat treatment is necessary in order to ensure the desirable properties of the end product. The temperature gradient which can be applied during heat treatment determines the length of the heat treatment operation, i.e. the velocity with which the material can pass through the heat transfer equipment. The temperature gradient on the other hand is determined by the given heat transfer equipment and by the rate of the physical-chemical processes which take place in the basic material. By the acceleration of these processes a way is opened to raise the thermo-gradient applied.

One important ceramic product used in the glass industry is the melting pot, produced from acidic refractory material, the basic material of which everywhere in the world is Grossalmerode clay.

The SiO_2 content of the earthenware goods made from Grossalmerode clay changes into tridymite during use. In addition the excellent refractory properties of this material justify the study of its behaviour during calcination, to which neither its chemical nor its mineralogical composition give a satisfactory explanation [1, 2, 3].

Recent experiments have clarified the synthesis of silicates, e.g. mullite, under a far more favourable temperature and rate conditions in fluoride con-

* Part I. *Reports of the University of Chemical Industry Veszprém*, 7, (1963), 93.

taining systems, as compared to their synthesis in oxide systems from clay and aluminium oxide [4–8]. It was the task by further studies to investigate the effect of small quantities of fluoride on the formation of silicates, on the one hand, and on the other hand, on the rate of the processes which take place during the calcination of the basic materials of ceramic products.

II. Experimental

In the present experiments the processes taking place in Grossalmerode clay were investigated partly by dynamic and partly by static methods [13–16]. The form of SiO_2 in the clay was checked before calcination and during the various stages of the calcination process and the temperature of transformation of the clay minerals was determined [17]. Phase formation was followed by the Debye–Scherrer and X-ray diffraction patterns and by microscopic examinations. In order to influence some of the transformation processes certain additives were used. The mullite content was determined by the diffraction pattern with ammonium chloride as internal standard and also by its dissolution in hydrogen fluoride. In this latter case a 10% solution of hydrogen fluoride was added to one gram of the powdered material and 2 hours were allowed for dissolution.

Properties of Grossalmerode clay

The average composition of Grossalmerode clay is given in Table I. The producers ensure uniform composition by constant laboratory checks and by the mixing and purifying of the raw material. The clay is further refined by selection. Table II shows the mineralogical composition, Table III the particle size distribution of the average product [1].

Table I
Chemical composition of the clays used for the experiments

	1.	2.	3.	4.
SiO_2	72,1%	72,1%	74,2%	46,9%
$\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{TiO}_2$	19,4%	19,2%	22,3%	39,1%
Fe_2O_3	1,2%	1,4%	1,7%	0,5%
$\text{CaO} + \text{MgO}$	0,4%	0,3%	0,5%	0,6%
$\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O}$	1,0%	0,4%	1,0%	0,4%
Loss on calcination	6,2%	7,1%	—	13,1%

1. Average composition of Grossalmerode clay.
2. Composition of the Grossalmerode clay used for the experiments.
3. Average composition of anhydrous Grossalmerode clay.
4. Composition of Zettlitz kaolin.

VERESS has demonstrated that in pots made from Grossalmerode clay and from the fire-clay gained after the calcination of the latter, a tridymite net is formed [3]. This obviously plays an important role in the development of the softening point of the Grossalmerode pot under high loads (under a load of 2 kp/sq. cm softening begins at 1450 °C). However, there is no satisfactory explanation for the change of silicon dioxide into the crystalline phase of quartz, first into cristobalite and later into tridymite. Such changes were not observed

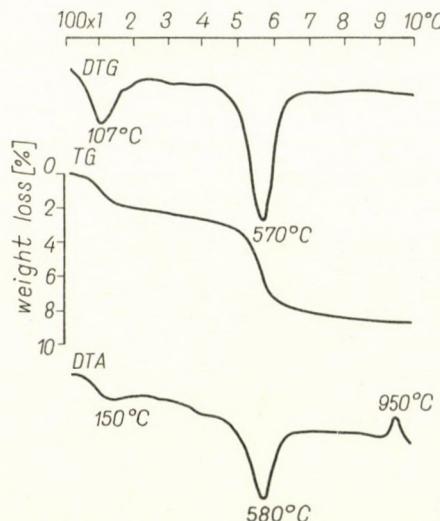


Fig. 1. Results of the differential thermal and gravimetric analyses of crude Grossalmerode clay

in materials of similar compositions. Quartz is present in a very high degree of dispersity, the particles are practically all under 25 micron. A high degree of dispersity in itself is, however, not sufficient to explain the formation of tridymite.

Fig. 1 shows the differential thermogravimetric curve of crude Grossalmerode clay [2]. The composition of the material tested is shown in Table I

Table II
Mineralogical composition of Grossalmerode clay

Kaolinite	50%
Quartz	45%
Illite	3%
Titanium dioxide	2%

Table III
Particle size distribution of Grossalmerode clay

Particle size	Quantity
0,04 to 0,09 mm	2%
0,025 to 0,04 mm	3%
0,0 to 0,025 mm	95%

side by side with the average composition compiled from literary data. According to the differential thermogravimetric test the illite content of the sample reached up to 10%; more recently we have found even 13% illite, as indicated by the rate maximum of the weight loss at 100° and 107 °C, respectively. Otherwise the test shows the characteristic pattern of clay minerals. The beta-alpha quartz transformation cannot appear on the curve, as this is masked by the endotherm effect of the disintegration of kaolinite.

The properties of calcined Grossalmerode clay

The properties of the calcined clay are shown in column 3 of Table I. As an effect of calcination mullite, quartz, glass and cristobalite are primarily formed in the fireclay.

The formation of these crystal structures is confirmed by Fig. 2, which shows the texture formed after 6 hours of heat treatment at 1400 °C of crude Grossalmerode clay. On the microscopic picture, taken at 800× magnification between crossed Nicol prisms, the quartz phase (white on the picture) embedded into the basic texture and interlaced by fine mullite needles, is clearly visible.

Fig. 3 shows the texture of Grossalmerode potter's clay after calcination for 7 days, Fig. 4 the same after 70 days of calcination. (The microscopic pictures were taken by Z. VERESS.) In Fig. 3 the white and dark (nearly black) spots beside each other represent the twin structure of tridymite. On the microscopic picture the mullite crystals are already larger than in the previous figure which shows the state after 6 hours of calcination. Fig. 4 shows the texture of the pot as obtained by an exposition between crossed Nicol prisms on a 1st class violet auxiliary plate. If the gamma direction of the 1st class violet auxiliary plate is placed into the longitudinal direction of the crystal, then in the case of mullite an addition can be observed corresponding to the positive elongation of the crystal.

Both the microscopic pictures and the X-ray patterns of Table IV show that the quartz content of the clay is not directly converted into tridymite

during the calcination process, but that this transformation takes place through an intermediate cristobalite phase.



Fig. 2. The texture of Grossalmerode clay after heat treatment at 1400 °C for 6 hours. 800 × magnification in polarized light

Fig. 5 shows the texture at 800× magnification of Grossalmerode clay after 1700 hours operation. Well developed tridymite crystals with their characteristic twin structures appear beside each other with larger single mullite crystals.

Fig. 6 is a 500× enlarged picture of single mullite crystals embedded in the amorphous phase.



Fig. 3. Polished slide of a glass melting pot made of Grossalmerode clay after 170 hours use in the plant



Fig. 4. Polished slide of a glass melting pot made of Grossalmerode clay after 1700 hours use in the plant

Table IV

Results of the diffraction pattern of a Grossalmerode clay calcined for 6 hours at 1400 °C

d kX I	Material
5,412 4	mullite
4,265 15	quartz
4,069 55	cristobalite
3,391 13	mullite
3,345 50	quartz
2,852 3	cristobalite
2,496 10	cristobalite
2,281 5	quartz
2,208 6	mullite
2,125 6	quartz, mullite
1,980 2	quartz
1,887 2	mullite
1,838 1	mullite
1,817 5	quartz



Fig. 5. Polished slide of a glass melting pot made of Grossalmerode clay after 1700 hours use in the plant. The tridymite twin crystals are clearly visible. 800 \times magnification

III. The possibility of accelerating the processes which take place in Grossalmerode clay

On the basis of the favourable conditions for mullite formation found in fluoride containing systems, the processes during the calcination of Grossalmerode clay were investigated in the presence of small quantities of aluminium fluoride [9–11]. Two, three, four, ten and twenty per cent of aluminium fluoride were added to crude Grossalmerode clay. The effect of aluminium fluoride was followed by differential thermal analysis as well as by thermogravimetric and static tests.

Fig. 7 shows the differential thermogravimetric curve of Grossalmerode clay containing 2% of aluminium fluoride.



Fig. 6. Polished slide of Grossalmerode potter's clay with large mullite crystals embedded in the glass

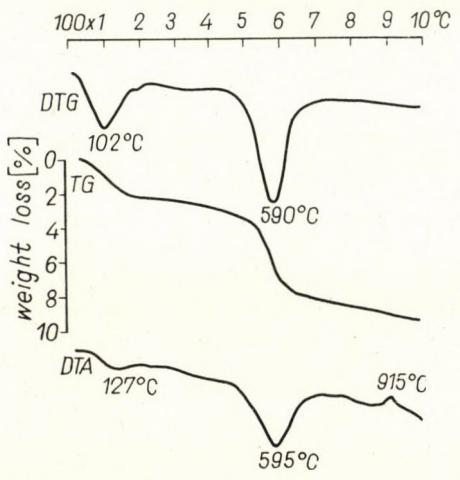


Fig. 7. Results of the differential thermal and gravimetric analyses of a Grossalmerode clay sample with 2% AlF_3 content. Heating rate 10 $^{\circ}\text{C}$ per minute

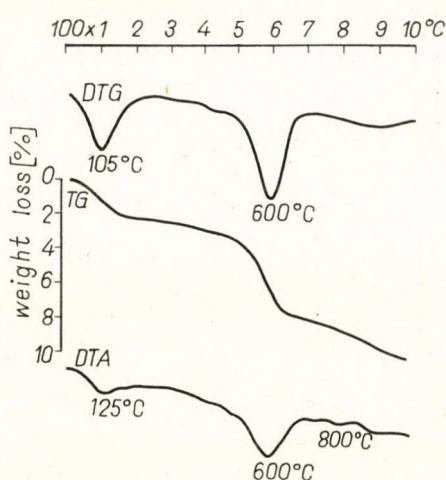


Fig. 8. Results of the differential thermal and gravimetric analyses of a Grossalmerode clay sample with 4% AlF_3 content. Heating rate 10 $^{\circ}\text{C}$ per minute

Fig. 8 is the curve taken of a clay containing 4% under similar conditions, Fig. 9 of a clay containing 10% and Fig. 10 of a clay containing 20% of aluminium fluoride additive. The thermogravimetric and analytical curves of Figs 7–10 were prepared with a heating rate of 10 °C per minute. The initial endotherm section might here too be traced back — as in the experiment without additive (Fig. 1) — to the illite content of the material. This appears at similar temperatures and with similar velocity in each experiment. The

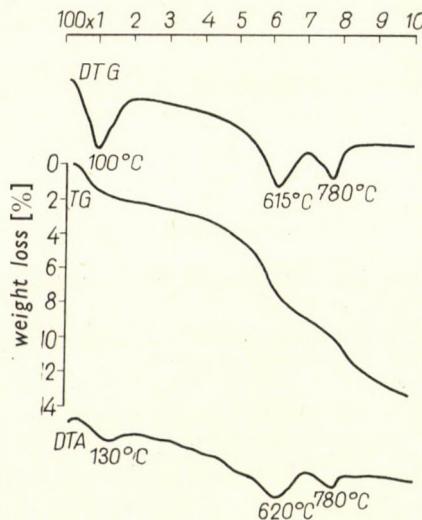


Fig. 9. Results of the differential thermal and gravimetric analyses of a Grossalmerode clay sample with 10% AlF_3 content. Heating rate 10 °C per minute

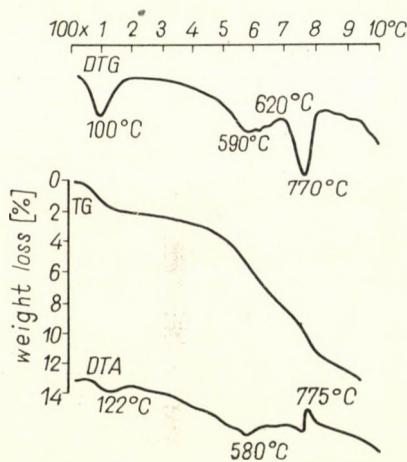


Fig. 10. Results of the differential thermal and gravimetric analyses of a Grossalmerode clay sample with 20% AlF_3 content. Heating rate 10 °C per minute

second endotherm effect and the velocity maximum of the weight loss are shifted with increasing aluminium fluoride content — up to 10% aluminium fluoride content — in the direction of higher temperatures. The effect again appears at 20% of aluminium fluoride content at a lower temperature, similar to the experiment without additive, but with an entirely different character. This can be explained by a fundamental change in the part processes. The higher the aluminium fluoride content of the sample the earlier a weight loss appears, indicating that aluminium fluoride is capable of reacting with the hydroxyl group of kaolinite at temperatures just above 300 °C [12]. This is further confirmed by the descending branch in the above range of the differential thermal analytical curve.

Figs 11 and 13 show the results of the thermal analysis of samples with identical aluminium fluoride content at a heating rate of 40 °C per minute. Curve 1 in Fig. 11 represents a Grossalmerode clay without additive, Curve

2 a sample of the same clay with 2%, Curve 3 a sample with 4% of aluminium fluoride content. Fig. 12 shows the effect of 10 and 20% of aluminium fluoride. The differential thermal analysis represented by Figs 11 and 12, and the thermogravimetric and thermal analyses as shown by Figs 7—10 indicate

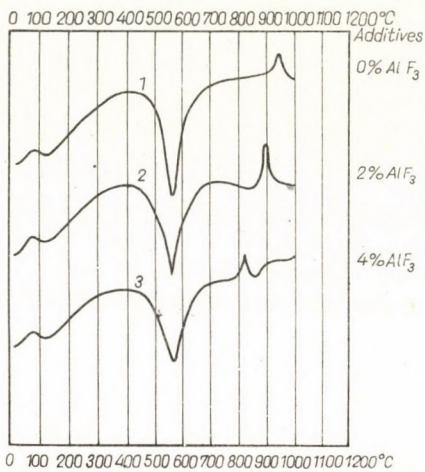


Fig. 11. Results of the differential thermal analysis of Grossalmerode clay samples with 0, 2 and 4% AlF_3 content, respectively. Heating rate 40 °C per minute

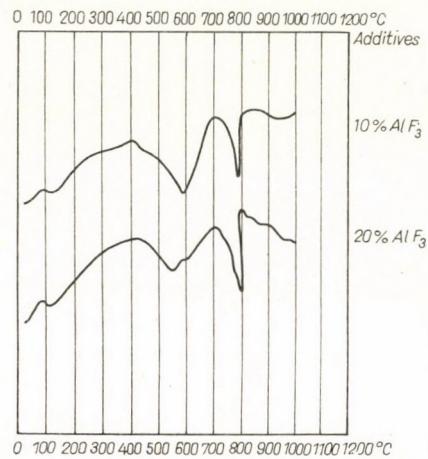


Fig. 12. Results of the differential thermal analysis of Grossalmerode clay samples with 10 and 20% AlF_3 content, respectively. Heating rate 40 °C per minute

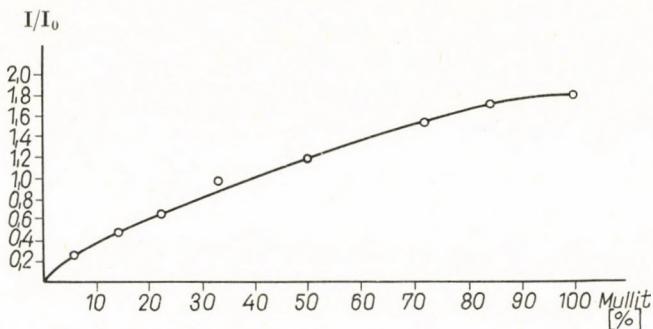


Fig. 13. The standard curve of mullite with NH_4Cl internal standard. ($I_a d = 3,41 \text{ kX}$ mullite line, $I_0 a d = 2,74 \text{ kX}$ the intensity of the NH_4Cl line with graduations between 0 and 100)

as an effect of the addition of AlF_3 a shifting towards lower temperatures at the beginning of mullite formation — which appears on the curves as the temperature at which the exotherm effect reaches a maximum. In addition the following conclusion might also be drawn from these experiments: namely that the character of the transformation of clay minerals does not fundamentally change on the addition of aluminium fluoride, up to a certain limiting quantity. This limiting quantity might be given as 8 to 10 per cent of the clay min-

eral content, taking into consideration that the clay mineral content of the Grossalmerode clay is $45 \div 50\%$. At the same time the curves show that in the case of Grossalmerode clay the processes characteristic of the initial crude Grossalmerode clay change up to 4% of the additive only so far as mullite formation begins at a lower temperature. This can be explained partly by a decrease in the activation energy requirement and partly by the mineralization effect of hydrogen fluoride on mullite formation. The conservation of the fundamental character of the differential thermal curves at the same time confirm that aluminium fluoride reacts primarily with the clay minerals. Only at higher aluminium fluoride contents does an endotherm effect appearing between 700° and 800°C indicate a modification of the basic mechanism.

IV. Transformation of Grossalmerode clay when calcined in the presence of aluminium fluoride

The effect of additives was studied under static conditions by a 4-hour heat treatment at 1400°C . The additives were 2, 4, 10 and 20% of aluminium fluoride. Debye—Scherrer and X-ray diffraction patterns of the samples were prepared.

Mullite was quantitatively determined from the standard curve in Fig. 13 and on the basis of the I/I_0 values of Table VII. The result of the first is given in Table V, of the latter in Table VI. On the basis of the X-ray patterns it can be stated that tridymite formation begins much earlier in the presence of aluminium fluoride than in the sample which contains no additive. Without additive signs of tridymite formation can be demonstrated not earlier than after $70 \div 100$ hours, while in the presence of 2% aluminium fluoride additive it is only $10 \div 15$ hours and in the presence of 4% aluminium fluoride only $3 \div 6$ hours. The profile of mullite formation in heat treated samples with and without aluminium fluoride additive was studied by dissolution in hydrogen fluoride. The results of this test are given in Table VII.

Thus, logically there is an increase in mullite content proportional to the quantity of the aluminium fluoride additive. The formation of the phases was also examined by microscopic sections.

An early formation of tridymite could be demonstrated on the slides too, as shown in Figs 14 and 15. These figures, compared with samples without additives, also show a progress of mullite formation, because for identical calcination periods the mullite crystals are larger. The pictures were taken with crossed Nicol prisms at $800\times$ magnification. The tridymite twins are clearly visible on the polished slides as dark coloured crystals appearing immediately next to the white areas. The line dividing the white and dark crystals is the cross section of the twin planes. In Fig. 15 an amorphous phase appears in addition to

Table V

Debye-Scherrer patterns of Grossalmerode clay samples heat treated with fluoride additive

1.			2.			3.			4.		
d Å hkl	I.	sub- stance									
4,090	5	cr	4,360	3	tr	5,385	1	m	5,518	3	m
3,372	4	m, qu	4,101	4	tr	4,390	4	tr	4,390	4	tr
3,167	2	cr	3,822	3	tr	4,109	4	tr	4,128	4	tr
2,863	3	cr	3,435	4	m	3,829	4	tr	3,872	4	tr
2,695	2	m	2,984	2	tr	3,410	4	m	3,422	4	m
2,505	3×	cr, m	2,707	1	m	2,990	3	tr	3,020	2	tr
2,293	2	m	2,525	3×	m, tr	2,687	2	m	2,707	3	m
2,222	3	m	2,304	1	m	2,529	3×	m, tr	2,579	2	m
2,127	3	cr, m	2,206	2	m	2,315	2	m	2,509	2	tr
2,040	1	cr	2,129	1	m	2,209	3	m	2,318	2	m
1,950	1	cr	1,704	2	m	2,124	1	m	2,224	3	m
1,889	2	m	1,613	1	m	1,853	1	m	2,138	2	m
1,821	3	qu	1,529	3	m	1,703	3	m	1,856	1	m
1,707	1	m	1,446	1	m	1,610	2	m	1,709	2	m
1,620	2×	cr, m	1,340	1	m	1,528	3	m	1,612	3	m
1,539	3×	m, qu	1,283	1	m	1,452	2	m	1,532	4	m
1,446	3	m				1,339	2	m	1,454	2	m
1,379	3	qu				1,282	1	m	1,409	1	m
1,283	2	m							1,342	2	m
1,261	1	m							1,283	1	m
1,201	2	qu							1,264	1	m
1,185	2	qu									

1. 2% of aluminium fluoride additive
2. 4% of aluminium fluoride additive
3. 10% of aluminium fluoride additive
4. 20% of aluminium fluoride additive

m = mullite

tr = tridymite

qu = quartz

cr = cristobalite

tridymite, beside many mullite crystals. No quartz or cristobalite can be demonstrated by microscopic investigations. This is in agreement with the results of the X-ray tests (Table V, column 2 and Table VI, column 2). In Fig. 15 the presence of tridymite twin crystals is particularly clearly visible.

Table VI

Data of the diffraction patterns of Grossalmerode clay samples with aluminium fluoride additive using ammonium chloride as internal standard

1.			2.			3.			4.		
d kX	I.	substance									
5,405	7	m	5,405	7	m	5,405	8	m	5,392	13	m
4,320	35	tr	4,262	10	qu	4,334	39	tr	4,308	33	tr
4,081	45	tr	4,077	66	tr	4,098	44	tr	4,085	43	tr
3,880	6	N	3,865	12	N	3,822	24	tr	3,810	18	tr
3,431	8	m	3,824	19	tr	3,431	12	m	3,428	17	m
3,396	14	m	3,431	10	m	3,396	18	m	3,395	25	m
3,349	43	qu	3,394	14	m	3,251	4	tr	3,254	4	tr
3,145	4	cr	3,248	5	tr	2,978	7	tr	2,970	5	tr
2,882	4	cr	2,978	6	tr	2,887	3	m	2,790	33	N
2,741	26	N	2,744	26	N	2,734	28	N	2,692	12	m
2,544	6	m	2,699	7	m	2,701	7	m	2,543	8	m
2,493	9	cr	2,548	7	m	2,551	8	m	2,485	8	tr
2,283	3	qu	2,496	9	tr	2,498	9	tr	2,293	4	m
2,237	3	N	2,298	4	m	2,296	4	m	2,209	10	m
2,210	6	m	2,233	2	N	2,233	2	N	2,119	6	m
2,125	5	qu, m	2,211	8	m	2,212	8	m	1,930	4	N
1,940	4	N	2,122	4	m	2,124	3	m	1,694	5	m
1,886	3	m	1,939	3	N	1,941	3	N	1,579	6	N
1,819	5	qu	1,887	2	m	1,889	2	m	1,526	7	m
1,668	1	qu	1,844	3	m	1,848	3	m	1,526	7	m
			1,691	4	m	1,734	4	N			
			1,604	3	m						
			1,582	5	N						
			1,527	5	m						

1. 2% of aluminium fluoride additive
2. 4% of aluminium fluoride additive
3. 10% of aluminium fluoride additive
4. 20% of aluminium fluoride additive

m = mullite

tr = tridymite

qu = quartz

cr = cristobalite

N = NH₄Cl (ammonium chloride)



Fig. 14. The texture of a Grossalmerode clay sample with 4% AlF_3 content after 6 hours heat treatment at 1400 °C. The tridymite twins are clearly visible. 800 \times enlargement, made with crossed Nicol prisms

Table VII
Examination of the mullite content of Grossalmerode clay treated for 6 hours at 1400 °C with and without AlF_3 additive

Quantity of the additive	Insoluble residue after 2 hours in 10% HF, g.	Test with NH_4Cl internal standard, I/I_0	Mullite content, %
0,0	24,37	0,5	14,2
2	25,76	0,54	15,6
4	29,05	0,54	15,6
10	35,31	0,64	22,2
20	44,51	0,96	36,0

I/I_0 is the ratio of the intensity of the $d = 3,41 \text{ kX}$ mullite line and of the intensity of the $d = 2,74 \text{ kX} \text{ NH}_4\text{Cl}$ line. The mullite content can be determined from I/I_0 with the aid of Fig. 13 where the I/I_0 — "mullite content" correlation is shown.



Fig. 15. Tridymite twin crystals in the texture of the Grossalmerode clay containing 4% of aluminium fluoride. 1500 \times magnification

V. Study of the character of the mineralization effect

Thus under the influence of aluminium fluoride additive mullite formation begins at a lower temperature. However, it is not entirely clear whether it is the aluminium fluoride itself, or the fluoride ion, that is to say, the process of hydrolysis, or the hydrogen fluoride which is formed through the reaction of kaolinite with aluminium fluoride which shows this effect. The mechanism was analysed by differential thermal tests. Kaolin from Zettlitz was calcined first in air at 560 °C, then as a second test kaolin from Zettlitz and aluminium fluoride were separately placed into the furnace without preliminary mixing. Steam was passed through the furnace in such a way that it came first in contact with the aluminium fluoride and subsequently with the Zettlitz kaolin. Steam hydrolyses the aluminium fluoride at 560 °C and hydrogen fluoride is

carried off by the steam. This hydrogen fluoride comes into contact with the Zettlitz kaolin.

The samples heat treated in air and (as described above) in a medium containing hydrogen fluoride were subjected to differential thermal analysis.

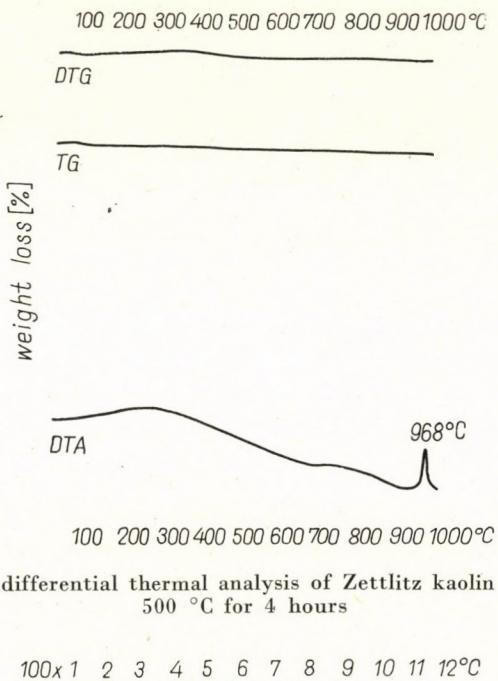


Fig. 16. Result of the differential thermal analysis of Zettlitz kaolin heat treated in air at 500 °C for 4 hours

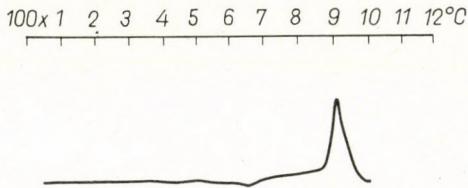


Fig. 17. Result of the differential thermal analysis of a kaolin sample from Zettlitz heat treated for 4 hours at 560 °C in an atmosphere containing hydrogen fluoride

The results were checked several times and are shown in Figs 16 and 17. In the kaolin which had been treated in a medium containing hydrogen fluoride mullite formation began at temperatures which are 50–60 °C lower than the temperature at which mullite formation begins in the air treated samples. This temperature difference depends on the length of the treatment, on the temperature and on the hydrogen fluoride concentration.

This experiment confirms the finding that hydrogen fluoride — formed by the reaction between kaolin and aluminium fluoride — is the primary factor in the mineralization effect resulting in mullite formation, as the presence of

aluminium fluoride is not absolutely necessary. As witnessed by the experiments a contact between hydrogen fluoride in the gaseous phase and kaolin is sufficient to bring about mineralization. This experimental proof beyond all doubt indicates that hydrogen fluoride has a mineralizing effect on mullite formation, as a consequence of which the activation energy of mullite formation is reduced. As a result of heat treatment the fluorine leaves the system. Thus, this experiment contributes valuable data to explain the part process which takes place during the reaction of aluminium fluoride with silicon dioxide or with kaolin.

VI. Evaluation of the results

According to our differential thermogravimetric tests the illite content of Grossalmerode clay increased, though there was practically no change in the oxide composition.

The tridymite structure which is formed during the calcination of Grossalmerode clay is not a primary product of the silicon dioxide content of the clay but is reached through an intermediate cristobalite phase. Thermal analyses have shown that kaolinite—mullite transformation begins at 950 °C in the clay. As proved by thermal analysis small quantities of aluminium fluoride additive — about 8÷10% of the clay mineral content of the material — have no influence on the character of the process. The difference consists in the appearance of the exotherm effect (due to the presence of aluminium fluoride) in the dynamic thermal test indicating that mullite formation begins at a lower temperature. The decrease in the temperature at which the exotherm effect appears is the greater the greater the aluminium fluoride content is. The beginning of mullite formation at lower temperatures is due to the mineralizing effect of hydrogen fluoride.

REFERENCES

1. Original Grossalmeroder Glashäfen. Vereinigte Grossalmeroder Tonwerke. Grossalmerode, 1958.
2. HAUSNER, H.: Sprechsaal f. Keram., Glas, Em. **85**, (1952), 301.
3. LÓCSEI, B.—VERESS, Z.—VÍSSY, L.: Silicates Industriels **9**, (1960), 410.
4. LÓCSEI, B.: *Nature*, **190**, (1961), 907.
5. LÓCSEI, B.: *Silikattechnik*, **12**, (1961), 356.
6. LÓCSEI, B.: *Építőanyag* **13**, (1961), 405.
7. LÓCSEI, B.: *Építőanyag* **14**, (1962), 48.
8. LÓCSEI, B.: *A Veszprémi Vegyipari Egyetem Közl.* **6**, (1962), 29.
9. LÓCSEI, B.: *A Veszprémi Vegyipari Egyetem Közl.* **6**, (1962), 129.
10. LÓCSEI, B.: *Építőanyag* **14**, (1962), 353.
11. LÓCSEI, B.: *Acta Chim. Hung.* **33**, (1962), 197.
12. LÓCSEI B.: *Ber. Dtsch. Keram. Ges.*, **40**, (1963) 24
13. TAKÁTS, T.—MRS. BOROS, J.: *Építőanyag* **14**, (1962), 16.
14. MRS. BOROS, J.: Test Report, ÉaKKI, Budapest, 1963.
15. ERDEY, L.—PAULIK, F.—PAULIK, J.: M. Tud. Akad. Kém. Tud. Oszt. Közl. **7**, (1955), 55.
16. PAULIK, F.—PAULIK, J.—ERDEY, L.: *Z. Ind. Chem.*, **160**, (1958), 141.
17. VERESS, Z.: Microscopic Tests, ÉaKKI, Budapest. 1963.

**DIE IM LAUFE DES BRENNENS VOR SICH GEHENDE VORGÄNGE
IN KERAMISCHEN PRODUKTEN. II**

B. LÖCSEI

ZUSAMMENFASSUNG

Der Mechanismus des Phasenüberganges im Tone von Grossalmerode wurde im Laufe der Versuche teilweise durch dynamische, teilweise durch statische Methoden nachgewiesen. Das SiO_2 geht aus der Quarzphase über den Cristobalit in die Tridymitphase über. Diese Art der Phasenumwandlung wird durch die Debye-Scherrer-Diagramme, Diffraktionsaufnahmen, ferner durch mikroskopische Aufnahmen bewiesen. Durch den Zusatz von AlF_3 wird das Einsetzen der Mullitbildung bei einer niedrigeren Temperatur ermöglicht. Dies bedeutet eine Beschleunigung der Umwandlung. Nach den Versuchen kann diese Beschleunigung durch die mineralisierende Wirkung des aus der Reaktion des AlF_3 und Kaolinit entstehenden Fluorwasserstoffs erklärt werden.

**PROCESSUS SE DÉROULANT DANS LES PRODUITS CÉRAMIQUES
PENDANT LEUR CUISSON. II.**

B. LÖCSEI

RÉSUMÉ

Au cours des essais, le mécanisme de transformation de l'argile de Grossalmérode est démontré par des méthodes dynamiques et statiques. Le SiO_2 tourne de la phase de silice à la phase de tridimite à travers le crystobalite. Cette transformation de phase est vérifiée par Debye-Scherrer, par des figures de diffraction et par prises micros. L'additif AlF_3 permet le commencement du dégagement de mullite à une température plus basse, ce qui signifie l'accélération de la transformation. D'après les expériences, l'accélération peut être expliquée par l'effet de minéralisation de l'acide fluorhydrique produite par la réaction de l' AlF_3 et de la caolinite.

**ПРОЦЕССЫ, ПРОИСХОДЯЩИЕ В КЕРАМИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЯХ ПРИ
ОБЖИГЕ, II**

Б. ЛЕЧЕИ

РЕЗЮМЕ

По ходу экспериментов, отчасти динамические, а отчасти статические методы приводят к выявлению механизма перехода фаз в глинах Гросальмероде. Двуокись кремния переходит из кварцевой фазы в тридимит через стадию кристобалита. Такой путь фазовых превращений доказан снимками Дебая—Шерера, дифракционными, а также микроскопическими. Добавка фтористого алюминия обуславливает образование муллита при более низкой температуре. Это свидетельствует об ускорении преобразования. Ускорение, по результатам экспериментов, объясняется минерализующим влиянием фтористого водорода, образующегося в результате реакции фтористого алюминия с каолинитом.

NICHTLINEARE BIEGUNGSTHEORIE VON SANDWICH-PLATTEN*

TEIL III. DIE SANDWICH-PLATTE MIT LEICHTEM KERNE

V. DUNDROVÁ—V. KOVAŘÍK—P. ŠLAPÁK

PRAG

[Eingegangen am 1. Juli 1964]

Der III. Teil dieser Arbeit ist den Platten mit leichtem Kern und sehr dünnen äußeren Schichten gewidmet. Ähnlich wie in Kap. I setzen wir hier isotrope Schichten voraus, und die Theorie großer Durchbiegungen wenden wir nur für die äußeren Schichten an. Eine wesentliche Vereinfachung wurde durch die Einführung der Voraussetzung einer gewissen Verteilung der Belastung auf die Ober- und Unterfläche der Platte erreicht. Die Formulierung wird in zwei Stufen durchgeführt. Zuerst wird eine gewisse lineare Aufgabe definiert, welche auch eine selbständige Bedeutung haben kann. Darauf folgt die Formulierung des nichtlinearen Problems. Die Auflösung eines Spezielfalles ist mit der Galerkinmethode durchgeführt.

1. Zusammenstellung der Ausgangsgleichungen

Wir leiten zuerst die Theorie der Durchbiegung einer dreischichtigen Platte mit der physikalischen und geometrischen Symmetrie der Anordnung zur Mittelfläche. Die äußeren Schichten und den Kern betrachten wir als transversale isotrope Körper.

In den äußeren Schichten von sehr kleiner Dicke t setzen wir die Gültigkeit der Kirchhoffschen Hypothese von der Einhaltung der Normalen voraus. Die geometrischen Gleichungen nehmen wir in nichtlinearer Form an.

Der leichte Kern ist durch die Zusammenhänge

$$E_1 \doteq E_2 \doteq G_{12} \doteq 0$$

charakterisiert, woraus

$$\sigma_1 \doteq \sigma_2 \doteq \tau_{12} \doteq \mu_{13} \doteq \mu_{23} \doteq 0$$

folgt und insbesondere

$$G_{13} \doteq G_{23} \doteq G_3 .$$

In obigen Gleichungen entsprechen die Indizes 1, 2, 3 den Richtungen der zugehörigen Achsen x, y, z . Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir noch die praktisch unwichtige Voraussetzung an, daß sich Spannung σ_3 im Kern nach

* Der erste und zweite Teil dieser Arbeit wurde im Band 53, Heft 3—4, bzw. Band 55, Heft 1—2 der *Acta Technica* mitgeteilt.

der Beziehung (5) verteilt (siehe weiter). Aus dieser Beziehung ergibt sich die Verteilung der Belastung auf die Ober- und Unterfläche.

Durch die Integration der Differentialgleichungen in dem Kerne bekommen wir

$$\tau_{13}^C = \varphi_1(x, y), \quad (1)$$

$$\tau_{23}^C = \varphi_2(x, y), \quad (2)$$

$$\sigma_3^C = \varphi_3(x, y) - z(\varphi_{1x} + \varphi_{2y}), \quad (3)$$

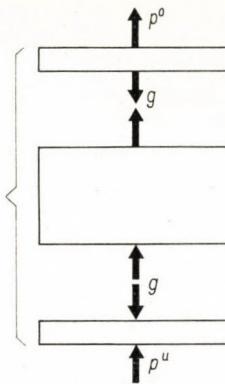


Bild III. 1. Bezeichnung von σ_3 auf der Grenzoberfläche

wo φ_i ($i = 1, 2, 3$) die gesuchten Funktionen bedeuten. Die Indizes x, y, z bedeuten immer die partielle Ableitung nach den zugehörigen Variablen. Wir setzen nun

$$\varphi_3 = 0, \quad (4)$$

so daß die gedachte Spannung σ_3^C durch den Ausdruck

$$\sigma_3 = -z(\varphi_{1x} + \varphi_{2y}), \quad (5)$$

beschrieben wird. Im weiteren bezeichnen wir (Bild III. 1)

$$\begin{aligned} \sigma_3^C(x, y, s) &= q, \\ \sigma_{3*}^C(x, y, -s) &= -q. \end{aligned} \quad (6)$$

Für die Verschiebungskomponenten folgen aus dem Vorhergehenden die Zusammenhänge:

$$w^C = \varphi_4(x, y) - \frac{z^2}{2E_3}(\varphi_{1x} + \varphi_{2y}), \quad (7)$$

$$u^C = \varphi_5(x, y) + z\left(\frac{\varphi_1}{G_3} - \varphi_{4x}\right) + \frac{z^3}{6E_3}(\varphi_{1xx} + \varphi_{2xy}), \quad (8)$$

$$v^C = \varphi_6(x, y) + z \left(\frac{\varphi_2}{G_3} - \varphi_{4y} \right) + \frac{z^3}{6 E_3} (\varphi_{1xy} + \varphi_{2yy}), \quad (9)$$

wo φ_i ($i = 4, 5, 6$) weitere unbekannte Integrationsfunktionen sind. Die Kompatibilitätsbedingungen sind für den Kern erfüllt.

In den äußeren Schichten ergeben sich bei Beachtung der Kirchhoff'schen Hypothese von der Einhaltung der Normalen die Verschiebungskomponenten u, v, w in der Form

$$u = \alpha - zw_x, \quad v = \beta - zw_y.$$

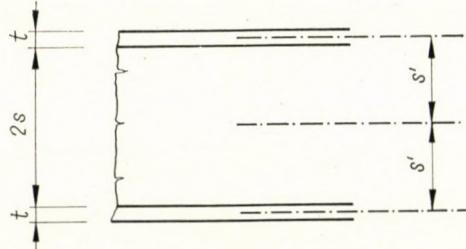


Bild III. 2. Schichtendicke

Hier sind α, β die Funktionen der Variablen x, y , welche wir aus den Bedingungen der Gleichheit der Verschiebungen am Übergang von einer Schicht zur anderen ableiten. Mit Rücksicht auf (7) bis (9) erhalten wir für die Ober- bzw. Unterschicht

$$\begin{aligned} u &= \varphi_5 \pm s \frac{\varphi_1}{G_3} \pm \frac{s^2}{3} \frac{q_x}{E_3} - zw_x, \\ v &= \varphi_6 \pm s \frac{\varphi_2}{G_2} \pm \frac{s^2}{3} \frac{q_y}{E_3} - zw_y. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Mittelebenen dieser Schichten

$$u' = \varphi_5 \pm s \frac{\varphi_1}{G_3} \pm \frac{s^2}{3 E_3} q_x \mp s' w_x, \quad (10)$$

$$v' = \varphi_6 \pm s \frac{\varphi_2}{G_2} \pm \frac{s^2}{3 E_3} q_y \mp s' w_y, \quad (11)$$

wo (Bild III. 2) $s' = s + t/2$. Da die äußeren Schichten dünn sind, können wir w gleich Konst. setzen, so daß wir mit Bezug auf (7)

$$w' = w = \varphi_4 + \frac{s}{2 E_3} q$$

oder

$$\varphi_4 = w - \frac{s}{2E_3} q \quad (12)$$

erhalten.

Die Komponenten der Membranspannungen in den äußeren Schichten haben auf Grund der nichtlinearen geometrischen Beziehungen die Form

$$\delta'_1 = E' \left[u'_x + \mu v'_y + \frac{1}{2} (w_x^2 + \mu w_y^2) \right], \quad (13)$$

$$\delta'_2 = E' \left[v'_y + \mu u'_x + \frac{1}{2} (w_y^2 + \mu w_x^2) \right], \quad (14)$$

$$\tau'_{12} = \frac{1-\mu}{2} E' (u'_y + v'_x + w_x w_y), \quad (15)$$

wo

$$E' = \frac{E}{1-\mu^2} \quad (16)$$

ist. Durch Einsetzen von (10) und (11) erhalten wir für die Spannungskomponenten in der Mittelebene der oberen bzw. unteren Schicht die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= E' \left[\varphi_{5x} + \mu \varphi_{6y} \pm \frac{s}{G_3} (\varphi_{1x} + \mu \varphi_{2y}) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{s^2}{3E_3} (q_{xx} + \mu q_{yy}) \mp s' (w_{xx} + \mu w_{yy}) + \frac{1}{2} (w_x^2 + \mu w_y^2) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_2 &= E' \left[\varphi_{6y} + \mu \varphi_{5x} \pm \frac{s}{G_3} (\varphi_{2y} + \mu \varphi_{1x}) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{s^2}{3E_3} (q_{yy} + \mu q_{xx}) \mp s' (w_{yy} + \mu w_{xx}) + \frac{1}{2} (w_y^2 + \mu w_x^2) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{12} &= \frac{1-\mu}{2} E' \left[\varphi_{5y} + \varphi_{6x} \pm \frac{s}{G_3} (\varphi_{1y} + \varphi_{2x}) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2s^2}{3E_3} q_{xy} \mp 2s' w_{xy} + w_x w_y \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in der Richtung x in der oberen (unteren) Schicht ist (Bild III. 3)

$$\sigma'_{1x} + \tau'_{12y} \mp \frac{1}{t} \tau'_{13} = 0.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_5 - \frac{1+\mu}{2} (\varphi_{5yy} - \varphi_{6xy}) \pm \frac{1-\mu}{2} \frac{s}{G_3} \nabla^2 \varphi_1 \mp \\ \mp \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{G_3} q_x \pm \frac{s^2}{3E_3} \nabla^2 q_x \mp s' \nabla^2 w_x + w_x \nabla^2 w + \\ + \frac{1+\mu}{2} (w_y w_{xy} - w_x w_{yy}) \mp \frac{1}{tE'} \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

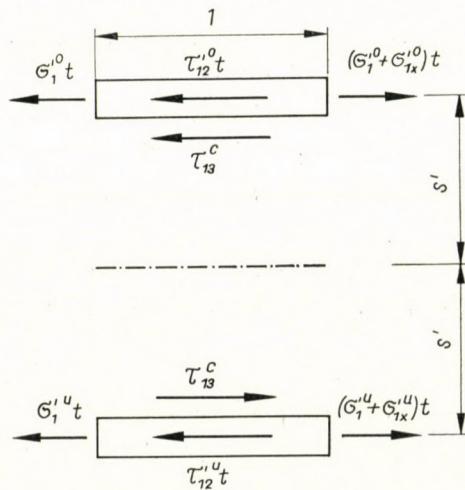


Bild III. 3. Zur Gleichgewichtsbedingung in der Richtung x

Durch Addition resp. Subtraktion von (20) für die Ober- und Unterschicht erhalten wir

$$2 \nabla^2 \varphi_5 - (1+\mu) (\varphi_{5yy} - \varphi_{6xy}) + 2 w_x \nabla^2 w + (1+\mu) (w_y w_{xy} - w_x w_{yy}) = 0, \quad (21)$$

$$(1-\mu) \frac{s}{G_3} \nabla^2 \varphi_1 - \frac{2}{tE'} \varphi_1 + \frac{2s^2}{3E_3} \nabla^2 q_x - (1+\mu) \frac{1}{G_3} q_x - 2s' \nabla^2 w_x = 0. \quad (22)$$

Die erste Gleichung ist nichtlinear, die zweite jedoch linear. Die Gleichgewichtsbedingung für die obere und untere Schicht in der Richtung y

$$\tau'_{12x} + \sigma'_{2y} \mp \frac{1}{t} \tau_{23}^C = 0$$

ergeben ähnliche Zusammenhänge und durch Addition bzw. Subtraktion erhalten wir

$$2 \nabla^2 \varphi_6 - (1+\mu) (\varphi_{6xx} - \varphi_{5xy}) + 2 w_y \nabla^2 w + (1+\mu) (w_x w_{xy} - w_y w_{xx}) = 0, \quad (23)$$

$$(1-\mu) \frac{s}{G_3} V^2 \varphi_2 - \frac{2}{tE'} \varphi_2 + \frac{2s^2}{3E_3} V^2 q_y - (1+\mu) \frac{1}{G_3} q_y - 2s' V^2 w_y = 0. \quad (24)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in der Richtung der Achse z hat für den Kern mit Rücksicht auf den gedachten Verlauf von σ_3^C und unter Berücksichtigung von (1), (2), (5) und (6) die Form

$$\varphi_{1x} + \varphi_{2y} + \frac{q}{s} = 0. \quad (25)$$

Für die äußere Belastung p wäre es im Hinblick auf die Voraussetzung nicht nützlich, den Unterschied zwischen der Ober- und Unterfläche zu berechnen. Man kann für beide äußereren Schichten eine Gleichung anschreiben-

$$\Sigma (\sigma'_1 w_{xx} + \sigma'_2 w_{yy} + 2\tau'_{12} w_{xy}) + \frac{1}{t} (p - 2q) = 0,$$

wo mit dem Symbol Σ die schichtenweise Addition angedeutet wird (obere, untere). Durch Einführung von (17) bis (19) und nach Umformung erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} w_{xx} \left(\varphi_{5x} - \mu \varphi_{6y} \right) + \frac{w_x^2 + \mu w_y^2}{2} + w_{yy} \left(\varphi_{6y} + \mu \varphi_{5x} \right) + \frac{w_y^2 + \mu w_x^2}{2} + \\ + w_{xy} (1-\mu) (\varphi_{5y} + \varphi_{6x} + w_x w_y) + \frac{1}{2tE'} (p - 2q) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir haben also ein System von sechs Gleichungen (21) bis (26), für sechs unbekannte Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_6, 2, w$. Das System zerfällt in drei lineare und drei nichtlineare Beziehungen.

2. Lineare Aufgabe

Belassen wir die lineare Gleichung (25) ohne Veränderung und führen wir (22) und (24) in folgender Form ein:

$$L_1 \varphi_1 + L_2 w_x + L_3 q_x = 0, \quad (27)$$

$$L_1 \varphi_2 + L_2 w_y + L_3 q_y = 0. \quad (28)$$

Hier bedeuten L_i ($i = 1, 2, 3$) lineare Differentialoperatoren nach den Zusammenhängen

$$L_1 = \frac{G_3}{tE'} - s \frac{1-\mu}{2} V^2,$$

$$L_2 = s' G_3 V^2, \quad (29)$$

$$L_3 = \frac{1+\mu}{2} - \frac{s^2}{3} \frac{G_3}{E_3} V^2.$$

Nach Umformung von (27) und (28) erhalten wir

$$L_1 \varphi_1 + L_3 q_x = -L_2 w_x, \quad (30)$$

$$L_1 (\varphi_{1y} - \varphi_{2x}) = 0 \quad (31)$$

und mit der Gleichung (25)

$$\varphi_{1x} + \varphi_{2y} + \frac{1}{s} q = 0$$

haben wir also ein System von drei linearen Grundgleichungen. Wir definieren weiter die Funktion ω durch

$$\left[-\frac{1}{s} L_{1x} \right] \omega = \varphi_1, \quad \left[-\frac{1}{s} L_{1y} \right] \omega = \varphi_2, \quad V^2 L_1 \omega = q \quad (32)$$

und durch die Differentialgleichung (30), welche nach Einsetzen von (32) auf die Form

$$K \omega = -L_2 w_x \quad (33)$$

gebracht wird, wobei wir

$$K = -\frac{1}{s} L_1 L_{1x} + L_{3x} V^2 L_1 = \frac{s^3}{3} \frac{G_3}{E_3} \frac{1-\mu}{2} V_x^6 - \\ - s \left(\frac{s G_3^2}{3 t E' E_3} + \frac{1-\mu}{2} \right) V_x^4 + \frac{G_3}{t E'} \frac{3-\mu}{2} V_x^2 - \frac{1}{s} \left(\frac{G_3}{t E'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \quad (34)$$

eingesetzt haben. Die Gleichungen (25) und (31) sind nach Einsetzen von (32) identisch erfüllt.

Die lineare Aufgabe wird nun folgendermaßen formuliert: Wir suchen eine solche (von w abhängige) Funktion ω , welche innerhalb des gegebenen Gebietes die Differentialgleichung (33) befriedigt und an den Grenzen des Gebietes gewissen Randbedingungen genügt.

Betrachten wir zum Beispiel eine Platte, welche in der Ebene x, y ein rechteckiges Gebiet $0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$ umfaßt (Bild III. 4) und auf dem Rande frei aufgelagert ist. Die gegebene äußere Belastung $p(x, y)$ entwickeln wir in eine Fouriersche Reihe

$$p = \sum_{m,n} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \cdot \sin \frac{n\pi y}{l_2}. \quad (35)$$

Die Auflagerbedingungen charakterisieren wir durch die Forderung, daß an den Rändern der Platte

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \sigma'_n &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

sei, wo σ'_n die Normalkomponente der Spannung in der Richtung der äußeren Normale bedeutet. Zufällige Schubspannungen werden am Umfang durch eine gewisse aussteifende Membrane übernommen.

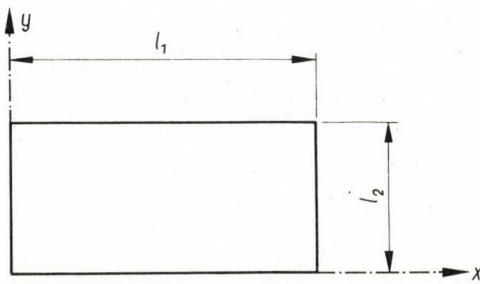


Bild III. 4. Beispiel

Wegen der Ausdrücke für die Normalspannungen (17), (18) werden wir wie folgt vorgehen.

Wir teilen die Ausdrücke für σ_1 und σ_2 in symmetrische und antimetrische Teile in bezug auf die Mittelebene der Platte. Wir bezeichnen

$$\sigma'_1 = E'(\nu_1^S \pm \nu_1^A), \quad (37)$$

$$\sigma'_2 = E'(\nu_2^S \pm \nu_2^A). \quad (38)$$

Für den Rand $x = \text{konst.}$ werden wir verlangen

$$\nu_1^S = \nu_1^A = 0;$$

ähnlich muß für $y = \text{konst.}$

$$\nu_2^S = \nu_2^A = 0$$

sein. Während wir die Randbedingungen $\nu_1^S = \nu_2^S = 0$ erst bei der Lösung der nichtlinearen Aufgabe erfüllen, können wir die Beziehungen $\nu_1^A = \nu_2^A = 0$ an den Grenzen durch die Wahl gewisser Bedingungen für die Funktionen ω und w erfüllen. Wegen (32) und (18) sind genügende Randbedingungen

$$L_1 \omega = \nabla^2 L_1 \omega = \nabla^4 L_1 \omega = 0, \quad (39)$$

$$w = \nabla^2 w = 0. \quad (40)$$

Die Funktionen ω , w nehmen wir in der Form

$$\omega = \sum_{m,n} \omega_{mn} \sin m \xi \sin n \eta, \quad (41)$$

$$w = \sum_{m,n} w_{mn} \sin m \xi \sin n \eta, \quad (42)$$

an, wo

$$\xi = \frac{\pi x}{l_1}, \quad \eta = \frac{\pi y}{l_2}. \quad (43)$$

Die Randbedingungen (39) und (40) sind bei dieser Wahl erfüllt.

Die linke Seite der Gleichung (33) wird die Form

$$\begin{aligned} K\omega &= \sum_{m,n} -\omega_{mn} \frac{m\pi}{l_1} \left[\zeta_{mn}^3 \frac{\pi^6}{l_1^6} \frac{(1-\mu)s^3 G_3}{6E_3} + \zeta_{mn}^2 \frac{\pi^4}{l_1^4} \left(\frac{s^2 G_3^2}{3tE' E_3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + s \frac{1-\mu}{2} \right) + \zeta_{mn} \frac{\pi^2}{l_1^2} \frac{(3-\mu)G_3}{2tE'} + \frac{1}{s} \left(\frac{G_3}{tE'} \right)^2 \right] \cos m \xi \sin n \eta = \\ &= \sum_{m,n} -\omega_{mn} \frac{m\pi}{l_1} \Omega_{mn} \cos m \xi \sin n \eta \end{aligned}$$

haben, wenn

$$\zeta_{mn} = m^2 + \left(\frac{l_1}{l_2} n \right)^2 \quad (44)$$

ist und Ω_{mn} die verkürzte Bezeichnung für den Ausdruck in der eckigen Klammer darstellt.

Für die rechte Seite der Gleichung (33) gilt

$$-L_2 w_x = \sum_{m,n} w_{mn} m \zeta_{mn} \frac{\pi^3}{l_1^3} s' G_3 \cdot \cos m \xi \cdot \sin n \eta.$$

Durch Vergleich der linken und rechten Seite ist

$$\omega_{mn} = -w_{mn} \frac{\zeta_{mn}}{\Omega_{mn}} \cdot \frac{s' \pi G_3}{l_1}. \quad (45)$$

Weiter folgt auf Grund von (32)

$$q = \sum_{m,n} q_{mn} \sin m \xi \cdot \sin n \eta , \quad (46)$$

wo

$$q_{mn} = -\omega_{mn} \zeta_{mn} \frac{\pi^2}{l_1^2} \left(\frac{G_3}{tE'} + \zeta_{mn} \frac{\pi^2}{l_1^2} s \frac{1-\mu}{2} \right) . \quad (47)$$

Es ist

$$\varphi_1 = \sum_{m,n} \alpha_{mn} \cos m \xi \cdot \sin n \eta , \quad (48)$$

wo

$$\alpha_{m,n} = -\omega_{mn} m \frac{\pi}{l_1} \frac{1}{s} \left(\frac{G_3}{tE'} + \zeta_{mn} \frac{\pi^2}{l_1^2} s \frac{1-\mu}{2} \right) \quad (49)$$

und schließlich

$$\varphi_2 = \sum_{m,n} \beta_{mn} \sin m \xi \cdot \cos n \eta , \quad (50)$$

wo

$$\beta_{mn} = -\omega_{mn} n \frac{\pi}{l_2} \frac{1}{s} \left(\frac{G_3}{tE'} + \zeta_{mn} \frac{\pi^2}{l_1^2} s \frac{1-\mu}{2} \right) . \quad (51)$$

Für das Zahlenbeispiel wählen wir zur Vereinfachung die Belastung $p(x, y)$ in der Form des ersten Gliedes der Fourierschen Reihe

$$p = p_{11} \sin \frac{\pi x}{l_1} \cdot \sin \frac{\pi y}{l_2} .$$

Die Berechnung führen wir mit folgenden Angaben durch:

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{l_2} &= 2 , & s &= 5 \text{ cm} , & t &= 0,04 \text{ cm} , & l_1 &= 200 \text{ cm} , & \mu &= 0,3 \\ E &= 7 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2 , & G_3 &= 40 \text{ kp/cm}^2 , & E_3 &= 104 \text{ kp/cm}^2 . \end{aligned}$$

Im Einklang mit dem weiteren nehmen wir in unserem Fall nur das erste Glied in der Entwicklung (42), so daß

$$\omega = \omega_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta ,$$

wo

$$\omega_{11} = -w_{11} \frac{\zeta_{11}}{\Omega_{11}} \cdot \frac{s' \pi G_3}{l_1} .$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} q &= 0,2033 w_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta , \\ \varphi_{1x} &= -0,00813 w_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta , \\ \varphi_{2y} &= -0,03254 w_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die unsymmetrischen Teile des Ausdrückes (18) für die Normalspannung σ'_2 als $\tilde{\sigma}'_2$, erhalten wir zum Beispiel in der Mitte der Platte folgenden Maximalwert der Normalspannung:

$$\max \tilde{\sigma}'_2 = 713,5 w_{11} . \quad (52)$$

Der weitere Gang der Berechnung ist durch die Lösung der nichtlinearen Gleichungen bedingt.

3. Nichtlineare Aufgabe

Die nichtlinearen Gleichungen (21), (23) und (26) enthalten drei unbekannte Funktionen φ_5, φ_6, w . Im Hinblick auf den Aufbau der Ausdrücke für die Spannungskomponenten (17) bis (19) ist es nützlich, neue Unbekannte ψ_i ($i = 1, 2, 3$) nach diesen Definitionen einzuführen:

$$\psi_1 = \varphi_{5x} + \mu\varphi_{6y} + \frac{w_x^2 + \mu w_y^2}{2}, \quad (53)$$

$$\psi_2 = \varphi_{6y} + \mu\varphi_{5x} + \frac{w_y^2 + \mu w_x^2}{2}, \quad (54)$$

$$\psi_3 = \varphi_{5y} + \varphi_{6x} + w_x w_y. \quad (55)$$

Diese nichtlinearen Gleichungen haben nun die Form

$$\psi_{1x} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{3y} = 0, \quad (56)$$

$$\psi_{2y} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{3x} = 0, \quad (57)$$

$$w_{xx} \psi_1 + w_{yy} \psi_2 + (1-\mu) w_{xy} \psi_3 = -\frac{p-2q}{2tE'}. \quad (58)$$

Zu diesen Grundgleichungen ist es notwendig, die Beziehungen zwischen ψ_i und w , welche aus (53) bis (55) folgen, hinzuzufügen. Im Hinblick auf den Aufbau dieser Gleichungen muß die Forderung

$$\psi_{1yy} - \mu\psi_{1xx} + \psi_{2xx} - \mu\psi_{2yy} - (1-\mu^2)\psi_{3xy} = (1-\mu^2)_q (w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy})$$

erfüllt sein.

Wenn wir in diesem Zusammenhang für ψ_3 nach Gleichungen (56) und (57) einsetzen, erhalten wir »die Kompatibilitätsbedingung« in der Form

$$\nabla^2 (\psi_1 + \psi_2) + (1-\mu^2) (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) = 0. \quad (59)$$

Wir suchen also die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, w$ der unabhängigen Variablen x, y , welche innerhalb des gegebenen Bereiches die Beziehungen (56) bis (59) und an den Grenzen des Gebietes die zugehörigen Randbedingungen erfüllen.

Wir beschränken uns auf den früher berechneten Fall eines rechteckigen Gebietes. Die Randbedingungen sind zum Beispiel folgender Art:

$$\text{für } x = \text{Konst} \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad w = 0, \quad (60)$$

$$\text{für } y = \text{Konst} \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad w = 0. \quad (61)$$

Die Gleichungen (60) und (61) sind im Einklang mit der Bedingung $\nu_1^s = \nu_2^s = 0$ — siehe (37), (38).

Die unbekannten Funktionen ersetzen wir durch die zugehörigen Fourierreihen. Im Hinblick auf (60), (61) benutzen wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{m,n} a_{mn} \sin m\xi \cdot \sin n\eta, \\ \psi_2 &= \sum_{m,n} b_{mn} \sin m\xi \cdot \sin n\eta, \\ \psi_3 &= \sum_{m,n} c_{mn} \sin m\xi \cdot \sin n\eta,\end{aligned}\quad (62)$$

wenn für die Funktion w die Beziehung (42) gilt und ξ, η durch (43) gegeben sind.

Die Lösungen führen wir für das obengenannte Beispiel nach der Galerkinschen Methode aus. Wir schreiben die Grundgleichungen (56) bis (59) in verkürzter Form als

$$f_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4)$$

an. Dann sind die Zusammenhänge zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , w_{mn} durch die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_0^\pi \int_0^\pi f_i \sin m\xi \cdot \sin n\eta \cdot d\xi \cdot d\eta = 0$$

ausgedrückt, wo $i = 1, \dots, 4$.

In dem angeführten Beispiel zeigte sich als genügend, zur Bestimmung der Funktionen ψ_i ($i = 1, 2, 3$) immer drei Glieder der zugehörigen Entwicklung (62) zuzunehmen; bei der Funktion w kann man sich mit den ersten Annäherungen begnügen.

Die Orthogonalitätsbedingungen der Gleichung (56) ergeben

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^\pi \left[\sum_{m,n} m a_{mn} \cos m\xi \cdot \sin \alpha\xi \cdot \sin n\eta \cdot \sin \beta\eta + \right. \\ \left. + \frac{1-\mu}{2} \sum_{m,n} n \frac{l_1}{l_2} c_{mn} \sin m\xi \cdot \sin \alpha\xi \cdot \cos n\eta \cdot \sin \beta\eta \right] d\xi \cdot d\eta = 0,\end{aligned}$$

wobei die von Null verschiedenen Koeffizienten die folgenden Werte haben:
für $\alpha, \beta \approx 2, 1$:

$$c_{22} + \frac{2}{5} c_{24} = - \frac{2 l_2}{(1-\mu) l_1} a_{11} - \frac{18 l_2}{5(1-\mu) l_1} a_{31},$$

für $\alpha, \beta \sim 2, 3$:

$$\frac{9}{5} c_{22} - \frac{6}{7} c_{42} = - \frac{2 l_2}{(1-\mu) l_1} a_{13},$$

für $\alpha, \beta \sim 4, 3$:

$$c_{42} = - \frac{4 l_2}{9(1-\mu) l_1} a_{13}$$

usw.

Die Orthogonalitätsbedingungen der Gleichung (57) sind

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^\pi \left[\sum_{m,n} n \frac{l_1}{l_2} b_{mn} \sin m\xi \cdot \sin \alpha\xi \cdot \cos n\eta \cdot \sin \beta\eta + \right. \\ \left. + \frac{1-\mu}{2} \sum_{m,n} m c_{mn} \cos m\xi \cdot \sin \alpha\xi \cdot \sin n\eta \cdot \sin \beta\eta \right] d\xi \cdot d\eta = 0\end{aligned}$$

und die von Null verschiedenen Koeffizienten geben diese Kombinationen:
für $\alpha, \beta \sim 1, 2$:

$$c_{22} + \frac{2}{5} c_{42} = -\frac{2 l_1}{(1-\mu) l_2} b_{11} - \frac{18 l_1}{5(1-\mu) l_2} b_{13},$$

für $\alpha, \beta \sim 3, 2$:

$$\frac{9}{5} c_{22} - \frac{6}{7} c_{42} = -\frac{2 l_1}{(1-\mu) l_2} b_{31}$$

für $\alpha, \beta \sim 3, 4$:

$$c_{24} = -\frac{4 l_1}{9(1-\mu) l_2} b_{31}$$

usw.

Die Orthogonalitätsbedingungen der Gleichung (59) ergeben

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left[\sum_{m,n} \xi_{mn} (a_{mn} + b_{mn}) \sin m\xi \cdot \sin \alpha\xi \cdot \sin n\eta \sin \beta\eta + \right. \\ \left. + \lambda w_{11}^2 (1 - \sin^2 \xi - \sin^2 \eta) \sin \alpha\xi \cdot \sin \beta\eta \right] d\xi \cdot d\eta = 0,$$

wo

$$\lambda = \frac{\pi^2}{l_1^2} (1 - \mu^2) \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2$$

ist. Die Beziehungen für die gesuchten Funktionen bekommen wir folgenderweise:
für $\alpha, \beta \sim 1, 1$:

$$a_{11} + b_{11} = w_{11}^2 \frac{16}{15} \frac{\lambda}{\pi^2},$$

für $\alpha, \beta \sim 1, 3$:

$$a_{13} + b_{13} = -w_{11}^2 \frac{44}{45} \frac{4}{37} \frac{\lambda}{\pi^2},$$

für $\alpha, \beta \sim 3, 1$:

$$a_{31} + b_{31} = -w_{11}^2 \frac{44}{45} \frac{4}{13} \frac{\lambda}{\pi^2}.$$

Durch die Lösung der angeschriebenen Gleichungen kommen wir zu diesen Ergebnissen

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1,840 \cdot 10^{-5} w_{11}^2, \\ a_{13} &= -4,610 \cdot 10^{-5} w_{11}^2, \\ a_{31} &= -1,587 \cdot 10^{-5} w_{11}^2, \\ b_{11} &= 0,787 \cdot 10^{-4} w_{11}^2, \\ b_{13} &= 0,364 \cdot 10^{-4} w_{11}^2, \\ b_{31} &= -0,115 \cdot 10^{-4} w_{11}^2, \\ c_{22} &= 0,613 \cdot 10^{-4} w_{11}^2, \\ c_{24} &= 0,146 \cdot 10^{-4} w_{11}^2, \\ c_{42} &= 0,146 \cdot 10^{-4} w_{11}^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (58) wird bei Begrenzung auf die erwogenen Glieder nach Einsetzen
e Form

$$\begin{aligned}
 & -w_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta \left[\left(a_{11} + \frac{l_1^2}{l_2^2} b_{11} \right) \sin \xi \cdot \sin \eta + \right. \\
 & \quad \left. + \left(a_{13} + \frac{l_1^2}{l_2^2} b_{13} \right) \sin \xi \cdot \sin 3\eta + \left(a_{31} + \frac{l_1^2}{l_2^2} b_{31} \right) \sin 3\xi \cdot \sin \eta \right] + \\
 & \quad + (1 - \mu) \frac{l_1}{l_2} w_{11} \cos \xi \cdot \cos \eta (c_{22} \sin 2\xi \cdot \sin 2\eta + c_{24} \sin 2\xi \cdot \sin 4\eta + c_{42} \sin 4\xi \cdot \sin 2\eta) - \\
 & \quad - \frac{l_1^2}{\pi^2} \frac{1}{tE'} 0,204 w_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta + \frac{l_1^2}{\pi^2} \frac{1}{2tE'} p_{11} \sin \xi \cdot \sin \eta = 0
 \end{aligned}$$

haben, oder

$$F(\xi, \eta) = 0.$$

Die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^\pi \int_0^\pi F(\xi, \eta) \sin \alpha \xi \cdot \sin \beta \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = 0$$

für $\alpha, \beta \sim 1,1$ gibt uns

$$0,4066 w_{11} + 0,00374 w_{11}^3 = p_{11}.$$

Hieraus folgt für $p_{11} = 1 \text{ kp/cm}^2$

$$w_{11} = 2,342 \text{ cm},$$

was gleichzeitig der Wert der Maximaldurchbiegung der Mittelebene der oberen (unteren) Schicht im betrachteten Beispiel ist.

Wenn wir die symmetrischen Teile der Ausdrücke (18) für die Spannung σ'_2 als $\tilde{\sigma}'_2$ bezeichnen, gilt

$$\tilde{\sigma}'_2 = E' \psi_2$$

und wir bekommen zum Beispiel in der Mitte (in der Oberschicht)

$$\max \tilde{\sigma}'_2 = 41,3 w_{11}^2.$$

Mit Rücksicht auf (52) ist

$$\max \sigma'_2 = \max \tilde{\sigma}_2 + \max \tilde{\sigma}_2 = 713,5 w_{11} + 41,3 w_{11}^2$$

und nach Einsetzen für w_{11}

$$\max \sigma'_2 = 1670,8 + 226,9 = 1897,7 \text{ kp/cm}^2.$$

SCHRIFTTUM

1. DUNDROVÁ, V.—KOVAŘÍK, V.—ŠLAPÁK, P.: O některých problémech teorie sandwichových desek, *Stavebníky Časopis* **11** (1963), 5.
2. DUNDROVÁ, V.—KOVAŘÍK, V.—ŠLAPÁK, P.: Theorie der Sandwich Platten, *Acta Technica ČSAV* **9** (1964), 3.
3. DUNDROVÁ, V.—KOVAŘÍK, V.—ŠLAPÁK, P.: Theorie ohybu sendvičových desek, NČSAV Praha, 1965.
4. HARDY, G. H.—ROGOSINSKI, W. W.: Fourier series, Cambridge, 1956.
5. Колтунов, М. А.: Изгиб прямоугольных пластинок с учетом больших прогибов. *Инж. Сборник* **15** (1952).
6. KOVAŘÍK, V.: Konečné pruhyby sandwichových desek, *Stavebníky Časopis* **12** (1964), 8.
7. Прусаков, А. П.: Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем, *PMM* **15** (1951).
8. REISSNER, E.: Finite deflections of sandwich plates, *Journal of the Aeronaut. Sci.* (1948), 7—15.
9. Волмир, А. С.: Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, Москва 1956.

THE NON-LINEAR BENDING THEORY OF SANDWICH PLATES. III

V. DUNDROVÁ, V. KOVAŘÍK, P. ŠLAPÁK

SUMMARY

Finally Part III includes a theory which holds true for a plate with very thin faces and a light core. Finite deflection relations are introduced only in the faces. The formulation of the problem separates in two parts, one of them being linear and the other non-linear. The solution is again received by the method of Galerkin. The numerical example solved according to the three theories shows good agreement in the results. Especially it should be noted that the finite deflection theories have to be applied to the analysis of the state of stress in thin faces.

THÉORIE DE LA FLEXION NON-LINÉAIRE DES PLAQUES SANDWICH. III

V. DUNDROVÁ, V. KOVAŘÍK, P. ŠLAPÁK

RÉSUMÉ

La troisième partie de l'étude traite des plaques du type «sandwich» à couche médiane légère et à couches extérieures fines possédant de grandes déformations. L'exposé du problème se divise en deux parties: une linéaire et une autre non-linéaire. La solution est donnée encore par la méthode de Galerkine. Un exemple résolu selon les trois théories montre qu'il est nécessaire d'appliquer la théorie des grandes déformations pour le calcul des tensions dans les couches fines.

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН, III

В. ДУНДРОВА, В. КОВАРИК, П. ШЛАПАК

РЕЗЮМЕ

Статья III посвящена трехслойным пластинкам с изотропными слоями — очень тонкими внешними слоями и легким заполнителем. Формулировку проблемы можно разбить на задачу линейную и нелинейную. Решение производится при помощи метода Галеркина. Числовой пример, решенный по всем трем теориям, показывает хорошее совпадение полученных результатов. Особенно важно заметить, что теории, учитывающие конечный прогиб, нужно применять именно для анализа напряженного состояния в тонких внешних слоях.

A NEW ITERATIVE METHOD FOR THE FINITE DEFLECTION ANALYSIS OF FRAMEWORKS

M. RÓZSA

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES
BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received May 21, 1965]

This paper reduces the finite deflection analysis of arbitrary frameworks to the solution of an integral equation. For structures common in engineering practice, this integral equation is mostly closely approached by a Fredholm inhomogeneous integral equation of the second kind. The integral equation is solved by iteration. In case of the Fredholm integral equation, this iteration corresponds to the calculation of subsequent members of the Neumann-series.

1. Introduction

The moments and internal forces of frameworks are usually determined by linear analysis. The question arises, how much these approximate values differ from the more accurate values determined by finite deflection analysis. Especially for frameworks consisting of slender bars acted upon by essential axial forces, the assumption of linearity may involve a neglect of inadmissible magnitude. Therefore, the moments and internal forces of such frameworks ought to be determined by finite deflection analysis. However, in the engineering practice this method is rather seldom applied, because of the tediousness of the computations involved.

The application of finite deflection analysis is significantly facilitated by the use of the Chwalla function charts (known in the Soviet literature as function charts of SHUKOVSKY and KORNOUHOV) [1]-[4], these are valid, however, only for frameworks consisting of straight bars of constant cross-section, submitted to constant axial forces of a value not significantly differing from those according to linear analysis. In the cases where these tables cannot be applied, complicated transcendental equations are to be established and solved.

To avoid the application of transcendental equations, BÜRGERMEISTER, G., and STEUP, H. have developed a method of iteration [5], [6], valid for any framework. According to this method, the deflection of the framework due to the given load is first determined by linear analysis, then applying this load to the deflected structure, the deflection is again determined by linear analysis, and so on. Each step of this iteration requires for an n -times hyperstatic structure $2n$ integrations to determine the moment diagram, then the deflection is obtained by twice integrating the reduced moment diagram.

This paper presents an integral equation for the finite deflection analysis of arbitrary frameworks, to be solved by iteration. In this method, similarly to that of BÜRGERMEISTER and STEUP, each step of iteration consists of computations based on linear analysis, however, differing from the Bürgermeister—Steup method each step requires only a *single* integration. Thereby the computations are significantly simplified and are made more comprehensible.

2. Differential equation of the deflected shape of the framework

At the derivation of the differential equation of the deflected shape of the framework the following assumptions were made:

- a) The bars of the framework are perfectly elastic;
- b) Deflections can occur only in the plane of the framework;

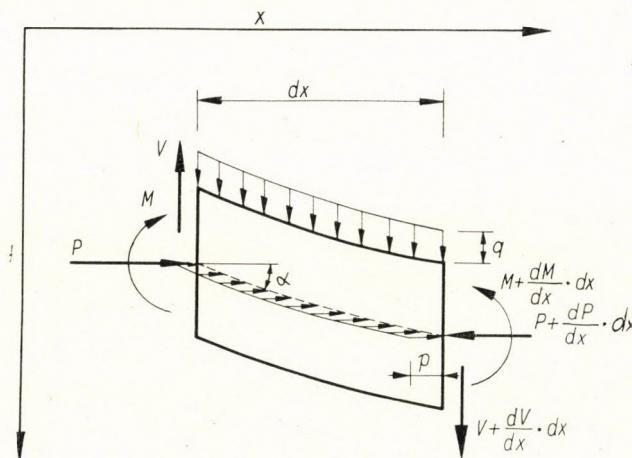


Fig. 1

- c) Axial deformations are negligible;
- d) Shear deformations equal zero;
- e) Deflections are so little as to make $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$ at any point of the bar axes, where α is angular rotation of the tangent to the bar axis;
- f) The direction and value of the loads remain unchanged during deflection.

Fig. 1 shows an element of length dx of a deflected bar. In this figure, axis x is coincident with the original position of the bar axis. We obtain from the equilibrium conditions of the element the following equations:

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dx} = p, \quad (2)$$

$$\frac{dM}{dx} = V + P \tan \alpha, \quad (3)$$

where

q distributed load normal to the original bar axis;
 p axial distributed load.

Differentiating Eq. (3) with respect to x and taking into consideration relations $M = -IE dy^2/dx^2$, $\tan \alpha = dy/dx$, and (1), differential equation of the deflected bar can be written as:

$$(IE y'')'' = q - (Py')' \quad (4)$$

where

' $\equiv d/dx$ denotes differentiation with respect to x ,
 IE flexural rigidity of the bar.

According to the right-hand side of Eq. (4), the load of the deflected bar can be considered as consisting of two parts. One is the given load q , and the other is a fictitious distributed load $-(Py')'$. Both loads are normal to the original direction of the bar axis.

Based on the simple consideration in [7], load $-(Py')'$ can be replaced by a fictitious distributed moment load Py' .

3. Integral equation of the deflected framework

According to the foregoing chapter, deflection of an arbitrary cross-section of the bar is:

$$y = y_I + y_{II}, \quad (5)$$

where

y total deflection;
 y_I deflection due to load q ;
 y_{II} deflection due to fictitious moments Py' .

Deflection y_I equals that determined by linear analysis.

To derive the integral equation of the deflected shape, deflections y_I and y_{II} are expressed by means of the respective influence functions:

$$y_I(x_2) = \int_0^L R(x_2, x_1) \cdot q(x_1) \cdot dx_1, \quad (6)$$

$$y_{II}(x_2) = \int_0^L \frac{\partial R(x_2, x_1)}{\partial x_1} P(x_1) \cdot y'(x_1) \cdot dx_1, \quad (7)$$

where

$R(x_2, x_1)$ deflection of the point of abscissa x_2 due to unit normal force acting at the point of abscissa x_1 (according to linear analysis);
 L sum of bar lengths.

Substituting expressions (6) and (7) into (5) and differentiating with respect to x_2 , we obtain:

$$y'(x_2) = \int_0^L \frac{\partial R(x_2, x_1)}{\partial x_2} q(x_1) \cdot dx_1 + \int_0^L \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} P(x_1) \cdot y'(x_1) \cdot dx_1.$$

Introducing notations:

$$\eta(x) = I_c E y'(x) \quad \text{reduced angular rotation according to finite deflection analysis}$$

$$\eta_0(x) = I_c E \int_0^L \frac{\partial R(x_2, x_1)}{\partial x_2} q(x_1) \cdot dx_1 \quad \text{reduced angular rotation according to linear analysis;}$$

$$K(x_2, x_1) = \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} \quad \text{angular rotation of the tangent to the bar axis at the point of abscissa } x_2 \text{ due to unit moment load acting at point } x_1, \text{ determined by linear analysis;}$$

the above equation can be written as:

$$\eta(x_2) = \eta_0(x_2) + \int_0^L K(x_2, x_1) \cdot P(x_1) \cdot \eta(x_1) \cdot dx_1. \quad (8)$$

Integral equation (8) is *not a linear one*, since not only function $\eta(x)$, but usually also function $P(x)$ is unknown. This latter, however, can be determined from the given load and from function $\eta(x)$ by elementary relations of statics.

For most frameworks encountered in engineering practice, according to [8], [9] and [10], the value of $P(x)$ exactly determined by finite deflection analysis differs so slightly from $P_0(x)$ determined by linear analysis that their difference can be neglected. Substituting into Eq. (8) the known function $P_0(x)$ for $P(x)$, we obtain:

$$\eta(x_2) = \eta_0(x_2) + \int_0^L K(x_2, x_1) \cdot P_0(x_1) \cdot \eta(x_1) \cdot dx_1. \quad (9)$$

This is a Fredholm inhomogeneous integral equation of the second kind, having as kernel $K(x_2, x_1) \cdot P_0(x_1)$, a function which can be determined by linear analysis of the framework.

4. Solution of the integral equation

Integral equation (8) will be solved by iteration, using the following recursive formula:

$$\eta_n(x_2) = \eta_0(x_2) + \int_0^L K(x_2, x_1) \cdot P_{n-1}(x_1) \cdot \eta_{n-1}(x_1) \cdot dx_1, \quad (10)$$

$$(n = 1, 2, 3\dots)$$

At the first step of iteration ($n = 1$), the known function $K(x_2, x_1) \cdot P_0(x_1) \cdot \eta_0(x_1)$ is under the sign of integration. At the n th iteration step, after the determination of $\eta_n(x)$, axial force $P_n(x)$ for the $n + 1$ st step of iteration is to be determined from the given external load and from function $\eta_n(x)$, according to the elements of statics.

When solving integral equation (9) by iteration, recursive formula (10) takes the form:

$$\eta_n(x_2) = \eta_0(x_2) + \int_0^L K(x_2, x_1) \cdot P_0(x_1) \cdot \eta_{n-1}(x_1) \cdot dx_1, \quad (11)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Formula (11) is identical with the *Neumann-series* [11] for solving inhomogeneous equation (9).

Function $\eta_n(x)$ determined from (10) or (11) — in case of convergence of the iteration — for $n \rightarrow \infty$ approaches function $\eta(x)$, solution of the integral equation. In case of divergence, the calculated deflections increase beyond all limits. In this case original assumptions are wrong and finite deflection analysis cannot be applied.

After having determined function $\eta(x)$, the moments and internal forces can be computed by elementary methods.

For more complicated frameworks (e.g. bars of variable cross-section) influence function $K(x_2, x_1)$ and integrals (10) or (11) are to be computed by numerical methods.

5. Numerical examples

Example 1. Let us determine moments in framework shown in Fig. 2 by finite deflection analysis.

To determine influence function $K(x_2, x_1)$, first find reaction V produced by moment 1 Mpm acting in a clockwise direction at point of abscissa x_1 of the bar $A - B$. The elementary computation gives:

$$V = \frac{12}{19} x_1.$$

Integrating the $1/IE$ -fold of the moment produced by reaction V from point A to the point of abscissa x_2 of bar $A - B$, we obtain the following expressions for the influence function:

a) For $x_1 \leq x_2 \leq h$:

$$K(x_2, x_1) = \frac{1}{525} x_1 \left(1 - \frac{6}{19} x_2 \right),$$

b) For $x_2 \leq x_1 \leq h$:

$$K(x_2, x_1) = \frac{1}{525} x_2 \left(1 - \frac{6}{19} x_1 \right).$$

At bar $B-C$ no axial force arises, hence according to (10) no determination of the influence function for this bar is needed.)

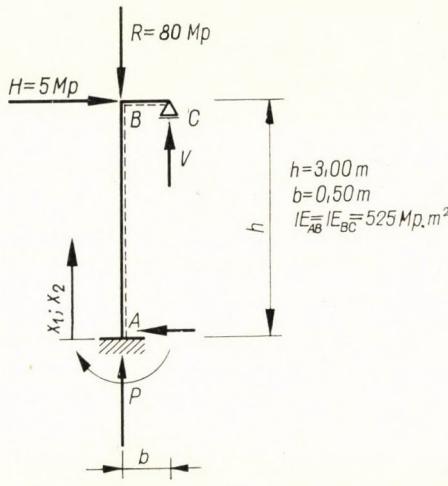


Fig. 2

The reduced angular rotation in point of abscissa x_2 of bar $A-B$ due to load shown in Fig. 2, found by linear analysis, is:

$$\eta_0(x_2) = H \frac{2h - x_2}{2} x_2 - V_0 b x_2,$$

where

$$V_0 = H \frac{h^2}{2bh + \frac{2}{3}b^2}$$

reaction at C . Substituting given numerical values:

$$V_0 = 14,2105 \text{ MP},$$

$$\eta_0(x_2) = 7,89474 x_2 - 2,5 x_2^2.$$

Axial force acting along bar $A-B$ is:

$$P_0(x) = 80 - 14,2105 = 65,7895 \text{ MP}.$$

Substituting into recursive formula (10) the expressions obtained by linear analysis, the first step of iteration ($n = 1$) gives:

$$\begin{aligned} \eta_1(x_2) &= 7,89474 x_2 - 2,5 x_2^2 + \\ &+ \frac{65,7895}{525} \left[\int_0^{x_2} x_1 \left(1 - \frac{6}{19} x_2 \right) (7,89474 x_1 - 2,5 x_1^2) dx_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_2}^3 x_2 \left(1 - \frac{6}{19} x_1 \right) (7,89474 x_1 - 2,5 x_1^2) dx_1 \right]. \end{aligned}$$

After integrating we obtain the *first iterated* expression for the reduced angular rotation along bar $A-B$:

$$\eta_1(x_2) = 8,71873 x_2 - 2,5 x_2^2 - 0,16489 x_2^3 + 0,02611 x_2^4.$$

The first iterated value of reaction V is, according to elementary relations:

$$V_1 = \frac{3 \eta_1(3)}{b^2}.$$

By substituting:

$$V_1 = 15,8274 \text{ Mp.}$$

The first iterated value of axial force along bar $A-B$ amounts to

$$P_1 = R - V_1 = 80 - 15,8274 = 64,1726 \text{ Mp.}$$

Substituting expression $\eta_1(x_1)$ and value P_1 on right-hand side of Eq. (10) ($n = 2$) and integrating, we obtain the *second iterated* expression of the reduced angular rotation:

$$\begin{aligned} \eta_2(x_2) = & 8,79914 x_2 - 2,5 x_2^2 - 0,17762 x_2^3 + 0,02546 x_2^4 + \\ & + 0,00101 x_2^5 - 0,000106 x_2^6. \end{aligned}$$

The second iterated value of reaction V is:

$$V_2 = \frac{3 \eta_2(3)}{b^2} = 15,9814 \text{ Mp},$$

and the axial force:

$$P_2 = 80 - 15,9814 = 64,0186 \text{ Mp.}$$

Third iterated expression of the reduced angular rotation is, by analogy:

$$\begin{aligned} \eta_3(x_2) = & 8,80709 x_2 - 2,5 x_2^2 - 0,17883 x_2^3 + 0,02540 x_2^4 + \\ & + 0,00108 x_2^5 - 0,000103 x_2^6 - 0,0000029 x_2^7 + 0,0000002 x_2^8, \end{aligned}$$

and

$$V_3 = 16,0016 \text{ Mp},$$

$$P_3 = 63,9984 \text{ Mp.}$$

After each step of iteration, for moments acting at A and B , resp., values compiled in Table I were obtained from formulae:

$$M_{An} = \left[-\frac{d\eta_n(x_2)}{dx_2} \right]_{x_2=0} \quad \text{and} \quad M_{Bn} = bV_n.$$

Table I

Bending moments

Iteration number n	0	1	2	3
M_A , Mpm	-7,89474	-8,71873	-8,79914	-8,80709
M_B , Mpm	+7,10526	+7,91368	+7,99069	+8,00078

This table shows a difference of about 0,1 per cent between moments obtained by the third and second iteration, respectively.

To check iteration results, the value of axial force P has been computed from transcendental equation presented in [5], deduced by finite deflection analysis:

$$\frac{H}{P} \cos \sqrt{\frac{P}{IE}} h + \frac{H \sin \sqrt{\frac{P}{IE}} h - (R - P)b \sqrt{\frac{P}{IE}}}{P} \tan \sqrt{\frac{P}{IE}} h = \frac{H}{P} + \frac{(R-P)b^2}{3IE}.$$

This equation has a root, found by trial and error method, of

$$P = 63,9968 \text{ Mp.}$$

This value differs by 0,0016 Mp from $P_3 = 63,9984$ Mp, obtained by the third iteration.

Exact value of M_B exceeds by $0,0016 \cdot 0,5 = 0,0008$ Mpm that of M_{B3} , corresponding to a difference of 0,01 per cent.

Example 2. Let us determine the moments in framework shown in Fig. 3, by finite deflection analysis.

The calculation is analogous to Example 1, thus obtained results will only be presented.

Influence function $K(x_2, x_1)$ is given by the following expression, using notations of Fig. 3:

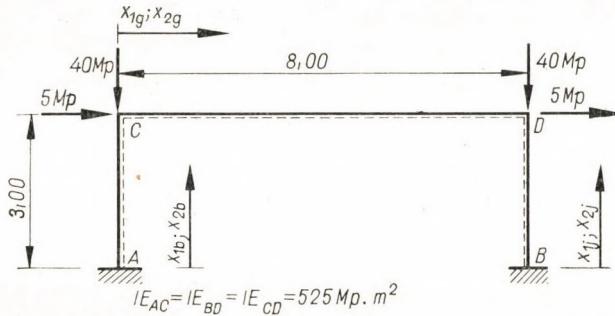


Fig. 3

I. Influence function along column AC :

a) Load on column AC, for $x_{1b} \leq x_{2b}$:

$$IEK(x_{2b}, x_{1b}) = x_{1b} + (-0,6417 x_{1b} + 0,0965 x_{1b}^2)x_{2b} + (0,0965 x_{1b} - 0,0205 x_{1b}^2)x_{2b}^2.$$

b) Load on column AC, for $x_{1b} > x_{2b}$:

$$IEK^*(x_{2b}, x_{1b}) = IEK(x_{2b}, x_{1b}) + x_{2b} - x_{1b}.$$

c) Load on beam CD :

$$IEK(x_{2b}, x_{1g}) = (-0,0567 - 0,0627 x_{1g} + 0,0144 x_{1g}^2)x_{2b} + (0,1053 - 0,0263 x_{1g})x_{2b}^2.$$

d) Load on column BD :

$$IEK(x_{2b}, x_{1j}) = (0,4109 x_{1j} - 0,0965 x_{1j}^2)x_{2b} + (-0,0965 x_{1j} + 0,0205 x_{1j}^2)x_{2b}^2.$$

II. Influence function along column BD :

a) Load on column BD, for $x_{1j} \leq x_{2j}$:

$$IEK(x_{2j}, x_{1j}) = x_{1j} + (-0,6417 x_{1j} + 0,0965 x_{1j}^2)x_{2j} + (0,0965 x_{1j} - 0,0205 x_{1j}^2)x_{2j}^2.$$

b) Load on column BD, for $x_{1j} > x_{2j}$:

$$IEK^*(x_{2j}, x_{1j}) = IEK(x_{2j}, x_{1j}) + x_{2j} - x_{1j}.$$

c) Load on column AC :

$$IEK(x_{2j}, x_{1b}) = (0,4109 x_{1b} - 0,0965 x_{1b}^2) x_{2j} + (-0,0965 x_{1b} + 0,0205 x_{1b}^2) x_{2j}^2.$$

d) Load on beam CD :

$$IEK(x_{2j}, x_{1g}) = (0,3644 - 0,1680 x_{1g} + 0,0144 x_{1g}^2) x_{2j} + (-0,1053 + 0,0263 x_{1g}) x_{2j}^2.$$

III. Influence function along beam CD :

a) Load on beam CD , for $x_{1g} \leq x_{2g}$:

$$\begin{aligned} IEK(x_{2g}, x_{1g}) &= 0,7773 + 0,5749 x_{1g} + 0,0433 x_{1g}^2 + \\ &+ (-0,4251 - 0,2206 x_{1g} + 0,0144 x_{1g}^2) x_{2g} + (0,0433 + 0,0144 x_{1g} - 0,0018 x_{1g}^2) x_{2g}^2. \end{aligned}$$

b) Load on beam CD , for $x_{1g} > x_{2g}$:

$$IEK^*(x_{2g}, x_{1g}) = IEK(x_{2g}, x_{1g}) + x_{2g} - x_{1g}.$$

c) Load on column AC :

$$IEK(x_{2g}, x_{1b}) = -0,0567 x_{1b} + 0,1053 x_{1b}^2 + (-0,0627 x_{1b} - 0,0263 x_{1b}^2) x_{2g} + 0,0144 x_{1b} x_{2g}^2.$$

d) Load on column BD :

$$\begin{aligned} IEK(x_{2g}, x_{1j}) &= 0,3644 x_{1j} - 0,1053 x_{1j}^2 + \\ &+ (-0,1680 x_{1j} + 0,0263 x_{1j}^2) x_{2g} + 0,0144 x_{1j} x_{2g}^2. \end{aligned}$$

The reduced angular rotation is, according to linear analysis:

On column AC :

$$\eta_0(x_b) = 9,80769 x_b - 2,5 x_b^2.$$

On column BD :

$$\eta_0(x_j) = 9,80769 x_j - 2,5 x_j^2.$$

On beam CD :

$$\eta_0(x_g) = 6,92308 - 5,19241 x_g + 0,64905 x_g^2.$$

The first iterated value of the reduced angular rotation is, from recursive formula (10):

On column AC :

$$\eta_1(x_b) = 10,80185 x_b - 2,51016 x_b^2 - 0,12050 x_b^3 + 0,01536 x_b^4$$

On column BD :

$$\eta_1(x_j) = 10,78647 x_j - 2,48984 x_j^2 - 0,12858 x_j^3 + 0,01639 x_j^4.$$

On beam CD :

$$\eta_1(x_g) = 7,80450 - 5,85404 x_g + 0,73178 x_g^2.$$

The second iterated value of the reduced angular rotation is:

On column AC :

$$\begin{aligned} \eta_2(x_b) &= 10,92529 x_b - 2,51290 x_b^2 - 0,13215 x_b^3 + \\ &+ 0,01535 x_b^4 + 0,000442 x_b^5 - 0,000038 x_b^6. \end{aligned}$$

On column *BD* :

$$\begin{aligned}\eta_2(x_j) = & 10,90540 x_j - 2,48709 x_j^2 - 0,14198 x_j^3 + \\ & + 0,01639 x_j^4 + 0,000508 x_j^5 - 0,000043 x_j^6.\end{aligned}$$

On beam *CD* :

$$\eta_2(x_g) = 7,91544 - 5,93762 x_g + 0,74238 x_g^2 - 0,000038 x_g^3 + 0,000002 x_g^4.$$

Bending moments computed after each step of iteration from the reduced angular rotation at *A*, *B*, *C* and *D*, resp., further axial forces in bars *AC*, *BD*, and *CD* are shown in Table II.

Table II
Bending moments and axial forces

Iteration number <i>n</i>	0	1	2
<i>M_A</i> , Mpm	- 9,80769	- 10,80185	- 10,92529
<i>M_B</i> , Mpm	+ 9,80769	+ 10,78647	+ 10,90540
<i>M_C</i> , Mpm	+ 5,19241	+ 5,85404	+ 5,93762
<i>M_D</i> , Mpm	- 5,19241	- 5,85451	- 5,93816
<i>P_{AC}</i> , Mp	+ 38,702	+ 38,536	+ 38,516
<i>P_{BD}</i> , Mp	+ 41,298	+ 41,464	+ 41,484
<i>P_{CD}</i> , Mp	± 0,0	- 0,020	- 0,026

From the convergence speed of the iteration it can be concluded that moments obtained after the second step of iteration differ by not more than about 0,1 per cent from the exact value.

This table shows that for this framework, axial forces *P* hardly differ from those determined by linear analysis. Therefore, here approximative formula (11) may be used instead of formula (10).

REFERENCES

1. СНВАЛЛА, Е.: Die neuen Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie II. Ordnung und von Knickproblemen. *Bauingenieur* **34** (1959), 128—137, 240—245, 299—309.
2. Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie II. Ordnung und von Knickproblemen. Stahlbau-Verlag, Köln 1959.
3. Корноухов, Н. В.: Устойчивость и прочность стержневых систем. Госстройиздат. 1949.
4. Снитко, Н. К.: Устойчивость сжатых и сжатоизогнутых стержневых систем. Госстройиздат. 1956.
5. BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.: Zur iterativen Lösung von Problemen der Verformungstheorie, *Stahlbau* **26** (1957), 183.
6. BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.—KRETSCHMAR, H.: Stabilitätstheorie II. 1963. Akademie Verlag.
7. RÓZSA, M.: Iterative stability analysis of frameworks. *Acta Techn.[Hung.]* **46** (1964), 303—316.
8. GODER, W.: Beitrag zur praktischen Berechnung von Rahmentragwerken nach der Stabilitätsvorschrift DIN 4114. *Der Stahlbau* **28** (1959), 265—274, 304—311.
9. KLOPPEL, K.—GODER, W.: Näherungsweise Berechnung der Biegemomente nach Spannungstheorie II. Ordnung zur Bemessung von außermittig gedrückten Stäben nach DIN 4114. *Der Stahlbau* **26** (1957), 188—195.
10. KLOPPEL, K.—FRIEMANN, H.: Übersicht über Berechnungsverfahren für Theorie II. Ordnung. *Der Stahlbau* **33** (1964) 270—277.
11. FRANK, Ph.—MISES, R.: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Dover Publication, 1961.

**EIN NEUES ITERATIONSVERFAHREN
FÜR DIE BERECHNUNG VON RAHMENTRAGWERKEN
NACH DER THEORIE ZWEITER ORDNUNG**

M. RÓZSA

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegender Aufsatz führt die Berechnung von beliebigen Rahmentragwerken nach der Theorie zweiter Ordnung auf die Lösung einer Integralgleichung zurück. Bei Rahmentragwerken der Ingenieurpraxis lässt sich diese Integralgleichung meist mit einer guten Annäherung durch eine Fredholmsche inhomogene Integralgleichung zweiter Art ersetzen. Die Integralgleichung wird durch Iteration gelöst. Im Falle der Fredholmschen Integralgleichung entspricht diese Iteration der Berechnung der konsekutiven Glieder der Neumannschen Reihe.

**NOUVELLE MÉTHODE ITÉRATIVE POUR LE CALCUL DES CADRES,
BASÉE SUR LA THÉORIE DU DEUXIÈME ORDRE**

M. RÓZSA

RÉSUMÉ

Le calcul des cadres de forme et à charge arbitraires, basé sur la théorie du deuxième ordre, est ramené à la solution d'une équation intégrale. Pour les structures habituelles connues de la pratique de l'ingénieur, cette équation est, dans la plupart des cas, bien approchée par une équation inhomogène de Fredholm de la deuxième sorte. L'équation intégrale est résolue par itération. Dans le cas de l'équation intégrale de Fredholm, cette itération correspond au calcul des membres consécutifs de la série de Neumann.

**НОВЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

М. РОЖА

РЕЗЮМЕ

Расчет стержневых конструкций произвольной формы и нагрузки на основе теории второго порядка сводится в работе к решению интегрального уравнения. Это интегральное уравнение при конструкциях, встречающихся в практике проектирования, в большинстве случаев можно заменить с удовлетворительным приближением неоднородным интегральным уравнением Фредгольма второго вида. Решение интегрального уравнения производится итерационным методом. В случае интегрального итерационного уравнения Фредгольма эта итерация соответствует вычислению последовательных членов ряда Неймана.

CONTROLLING METHOD OF BAR-FORCES ARISING IN SPATIAL TRUSSES

I. RÉDEI

RAILWAY DESIGN OFFICE OF THE HUNGARIAN STATE RAILWAYS, BUDAPEST

[Manuscript received April 5, 1965]

In a previous paper, author presented a method for checking plane trussed beams. The present paper is a generalization of the same method for spatial trussed beams. The relationship serving as a basis for the checking method has been derived solely by geometrical-structural means, and it is demonstrated that each algebraic sum of products of bar forces by bar lengths is a constant, independent of system, form of the structure, of number, direction and length of its bars. This sum solely depends on external forces, and even, in some cases, it depends only on active forces. This method is equally valid for externally and internally indeterminate and for statically determinate trussed beams. Its application has been illustrated on numerical examples.

1. Introduction

This is an integral part of the paper published in Publications of Section VI of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. 33, on Computation Method for Checking Plane Trusses. This paper aims at deriving and presenting a simple computation method for checking spatial trusses.

2. Supporting conditions of spatial beams

The equilibrium of a three-dimensional force system is expressed by six independent equations:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0.$$

Accordingly, six conveniently chosen supporting bars (bars connecting it with the soil), are necessary and sufficient for a statically determinate support of three-dimensional beams.

More than six supports make the three-dimensional play of forces of the structure externally a hyperstatic one.

The directions of the six supports, however, are by far not arbitrary. Spatial supporting is indeterminate if:

1. all six supports are parallel to a common plane;
2. there exists an axis either intersecting or parallel to all support directions;

3. three supporting bars pass through a common point and the other three through another common point;
4. three supporting bars pass through a common point, and other three ones are parallel to each other;
5. three supporting bars lie in a common plane and the other three in another common plane;
6. four supporting bars pass through a common point (be this latter either in the finite or in the infinite);
7. four supporting bars lie in a common plane.

Combining two spatial supporting bars gives a spatial pendulum, and combining three ones gives a spherical joint. Hence theoretically either

- 6 supporting bars; or
- 4 supporting bars and 1 pendulum; or
- 2 supporting bars and 2 pendulums; or
- 3 pendulums; or
- 3 supporting bars and 1 spherical joint; or

1 supporting bar, 1 pendulum and 1 spherical joint could be applied, carefully avoiding of course cases 1 through 7.

In practice, however, — apart from exceptional cases — spatial beams are supported at 4 nodal points, by means of bearings. Examining this problem from the angle as to how many of the overall possible spatial displacements and rotations these bearings, currently applied in the engineering practice, permit, or, in other words, how many fictitious bars they correspond to, bearings applied in practice can be divided into the following categories:

1. Cylindrical fixed bearings which permit unidirectional rotation, i.e., correspond to 5 bars.
2. Fixed spherical joint bearings which permit rotation in three directions, i.e., correspond to 3 bars.
3. Hinged free roller block bearings which permit unidirectional displacement and rotation, i.e., correspond to 4 bars.
4. Double-row, free roller-block, roller joint bearings, permitting bidirectional displacement and unidirectional rotation, hence corresponding to 3 bars.
5. Roller-block, spherical joint bearings, permitting unidirectional displacement and tridirectional rotation, i.e., corresponding to 2 bars.
6. Double-row roller-block, spherical joint bearings, permitting bidirectional displacement and tridirectional rotation, i.e., corresponding to 1 bar.

Taking into consideration supporting over 4 points, theoretically it could be applied:

1 spherical joint bearing as in 2., and 3 roller-block, spherical joint bearings as in 6., with the reservation that one of the latter *must not lie in a horizontal plane*.

This latter requirement is in practice almost impossible to be met. Similarly, it is impossible to realize the other fictitious bearing combinations, such as 1 bearing to 4., with 3 bearings to 6., as similarly to the first one, they require bearing seats of not horizontal direction.

Now, in engineering practice, primarily, all bearings are seated on horizontal plates (except for some high-rise arch beams). Practically, for not very wide spatial beams 2 fixed roller joint bearings and 2 free roller-block, roller joint bearings; and for wide beams 1 fixed spherical joint bearing, 2 free roller-block, roller joint bearings and 1 free 2 roller-block spherical joint bearings have been applied.

In the former case the number of fictitious supporting bars amounts to: $5 + 5 + 4 + 4 = 18$; in the latter case to: $3 + 4 + 4 + 1 = 12$; hence in both cases their number largely exceeds six bars that can be determined from equilibrium conditions to be absolutely necessary.

From the above considerations it is clear that the external supporting of spatial beam structures is redundant irrespective of a few exceptions. Reaction-supporting forces can only be determined or assessed by using more or less idealization, simplification.

3. Deduction of the fundamental theorem

To avoid needless repetitions, the fundamental theorem deduced for plane trusses is often referred to in the following deduction.

3.1. Case of a hinged tetrahedron

Same as for plane trusses, where the starting point was an irregular hinged triangle, the spatial relationship is deduced from an irregular tetrahedron (Fig. 1).

Let this tetrahedron be acted upon by a single active force \bar{C} , the supporting points be A , B and D . Assume that at the supporting points, the supports themselves are so designed as to interact as a statically determinate and rigid support, hence, if active force \bar{C} is given, then these supports can also be determined.

It is assumed of course that forces C , A , B and D constitute a balanced spatial force system, i.e.:

$$(C, A, B, D) \doteq 0.$$

In the six bars acting as six edges of the tetrahedron, the force system (A, B, D, C) produces bar forces that can unambiguously be determined if the force system (A, B, C, D) is known. Thus, denoting bar forces, acting in each bar, by subscripts of the bar number, the produced bar forces are:

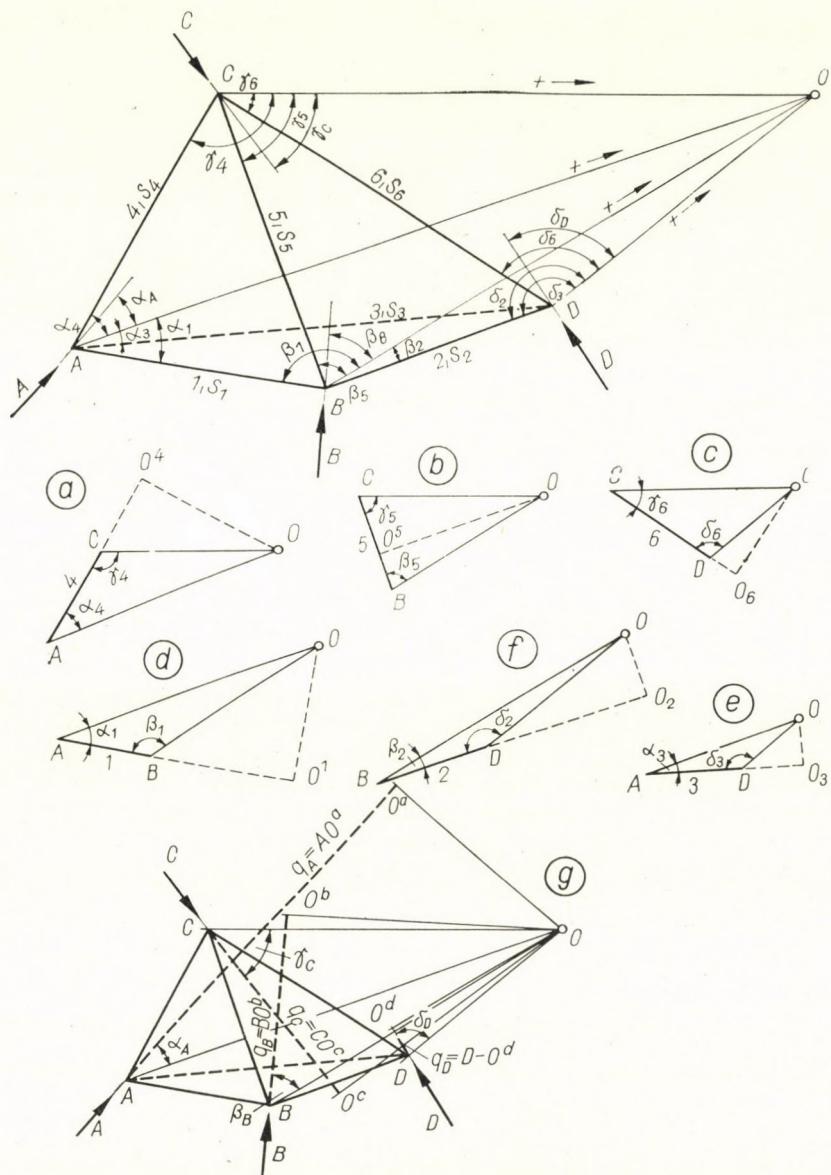


Fig. 1. Hinged tetrahedron

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$; these can unambiguously be determined, although in a somehow more difficult manner than for plane trusses.

Assume that the bar forces developing in all bars have been determined and are known. The system being balanced, outer and inner forces meeting at any joint of the hinged tetrahedron are, in themselves separately in equilib-

rium. Hence, using notations of Fig. 1:

$$(C, S_4, S_6, S_5) \doteq 0,$$

$$(A, S_3, S_4, S_1) \doteq 0,$$

$$(B, S_1, S_5, S_2) \doteq 0,$$

$$(D, S_1, S_2, S_6) \doteq 0.$$

If then the above equations are valid, it means that the algebraic sum of projections of outer and inner forces enumerated in each equation, referred to any straight line of the space, has to be zero.

Thereafter, let us assume some point O arbitrarily in space (Fig. 1).

By connecting the assumed point O to two end points of any bar of the tetrahedron, an in-plane triangle is obtained, in view of the fact that three spatial points, provided they do not lie on the same straight line, determine a plane. Thus, writing the quote projection theorems for these connecting straights, in any case forces in a common plane are obtained.

Let us connect now point O to four corners of the tetrahedron. For the resulting straights \overline{CO} , \overline{AO} , \overline{BO} , \overline{DO} the positive direction is to be assumed in the direction of point O for all four straights.

Denote angles between the *positive* direction of outer forces \bar{C} , \bar{A} , \bar{B} , \bar{D} and the positive direction of secondary straights \overline{CO} , \overline{AO} , \overline{BO} and \overline{DO} by:

γ_C at point C , between outer force \bar{C} and straight \overline{CO} ;

α_A at point A , between outer force \bar{A} and straight \overline{AO} ;

β_B at point B , between outer force \bar{B} and straight \overline{BO} ;

δ_D at point D , between outer force \bar{D} and straight \overline{DO} .

Furthermore, denote angles between straight sections forming tetrahedron edges and *positive direction* of secondary straights by:

γ_4 , γ_5 and γ_6 at point C ;

α_1 , α_3 and α_4 at point A ;

β_1 , β_2 and β_5 at point B ;

δ_2 , δ_3 and δ_6 at point D .

Thereafter put to zero the force projections for the four secondary straights \overline{CO} , \overline{AO} , \overline{BO} and \overline{DO} :

$$C \cos \gamma_C + S_4 \cos \gamma_4 + S_5 \cos \gamma_5 + S_6 \cos \gamma_6 = 0;$$

$$A \cos \alpha_A + S_1 \cos \alpha_1 + S_3 \cos \alpha_3 + S_4 \cos \alpha_4 = 0;$$

$$B \cos \beta_B + S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 + S_5 \cos \beta_5 = 0;$$

$$D \cos \delta_D + S_2 \cos \delta_2 + S_3 \cos \delta_3 + S_6 \cos \delta_6 = 0.$$

Multiply the first equation in this system by distance \overline{CO} , the second one by \overline{AO} , the third one by \overline{BO} and the fourth one by \overline{DO} , and sum the resulting equations. Thus we obtain:

$$\begin{aligned} & \overline{CO} \cdot C \cos \gamma_C + \overline{CO} \cdot S_4 \cos \gamma_4 + \overline{CO} \cdot S_5 \cos \gamma_5 + \overline{CO} \cdot S_6 \cos \gamma_6 + \\ & + \overline{AO} \cdot A \cos \alpha_A + \overline{AO} \cdot S_1 \cos \alpha_1 + \overline{AO} \cdot S_3 \cos \alpha_3 + \overline{AO} \cdot S_4 \cos \alpha_4 + \\ & + \overline{BO} \cdot B \cos \beta_B + \overline{BO} \cdot S_1 \cos \beta_1 + \overline{BO} \cdot S_2 \cos \beta_2 + \overline{BO} \cdot S_5 \cos \beta_5 + \\ & + \overline{DO} \cdot D \cos \delta_D + \overline{DO} \cdot S_2 \cos \delta_2 + \overline{DO} \cdot S_3 \cos \delta_3 + \overline{DO} \cdot S_6 \cos \delta_6 = 0. \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

In the above equation each bar force occurs in two summands. Let us contract these latter to give:

$$\begin{aligned} & \overline{CO} \cdot S_4 \cos \gamma_4 + \overline{AO} \cdot S_4 \cos \alpha_4 = S_4 (\overline{CO} \cos \gamma_4 + \overline{AO} \cos \alpha_4) \\ & \overline{CO} \cdot S_5 \cos \gamma_5 + \overline{BO} \cdot S_5 \cos \beta_5 = S_5 (\overline{CO} \cos \gamma_5 + \overline{BO} \cos \beta_5) \\ & \overline{CO} \cdot S_6 \cos \gamma_6 + \overline{DO} \cdot S_6 \cos \delta_6 = S_6 (\overline{CO} \cos \gamma_6 + \overline{DO} \cos \delta_6) \\ & \overline{AO} \cdot S_1 \cos \alpha_1 + \overline{BO} \cdot S_1 \cos \beta_1 = S_1 (\overline{AO} \cos \alpha_1 + \overline{BO} \cos \beta_1) \quad (\text{II}) \\ & \overline{AO} \cdot S_3 \cos \alpha_3 + \overline{DO} \cdot S_3 \cos \delta_3 = S_3 (\overline{AO} \cos \alpha_3 + \overline{DO} \cos \delta_3) \\ & \overline{BO} \cdot S_2 \cos \beta_2 + \overline{DO} \cdot S_2 \cos \delta_2 = S_2 (\overline{BO} \cos \beta_2 + \overline{DO} \cos \delta_2) \end{aligned}$$

Quantities in brackets, however, have very simple meanings. In Figs 1/a to 1/f, each bar has been traced in a reduced scale together with point O and secondary straight lines drawn to both bar ends.

From Fig. 1/a it is:

$$\frac{AO^4}{AO} = \cos \alpha_4, \frac{CO^4}{CO} = \cos(\pi - \gamma_4) = -\cos \gamma_4;$$

$$AO \cos \alpha_4 + CO \cos \gamma_4 = AO^4 - CO^4 = l_4.$$

From Fig. 1/b:

$$\frac{BO^5}{BO} = \cos \beta_5, \frac{CO^5}{CO} = \cos \gamma_5;$$

$$BO \cos \beta_5 + CO \cos \gamma_5 = BO^5 - CO^5 = l_5.$$

From Fig. 1/c:

$$\frac{CO^6}{CO} = \cos \gamma_6, \frac{DO^6}{DO} = \cos(\pi - \delta_6) = -\cos \delta_6;$$

$$CO \cos \gamma_6 + DO \cos \delta_6 = CO^6 - DO^6 = l_6.$$

From Fig. 1/d:

$$\frac{AO^1}{AO} = \cos \alpha_1, \frac{BO^1}{BO} = \cos (\pi - \beta_1) = -\cos \beta_1;$$

$$AO \cos \alpha_1 + BO \cos \beta_1 = AO^1 - BO^1 = l_1.$$

From Fig. 1/e:

$$\frac{AO^3}{AO} = \cos \alpha_3, \frac{DO^3}{DO} = \cos (\pi - \delta_3) = -\cos \delta_3;$$

$$AO \cos \alpha_3 + DO \cos \delta_3 = AO^3 - DO^3 = l_3.$$

From Fig. 1/f:

$$\frac{BO^2}{BO} = \cos \beta_2, \frac{DO^2}{DO} = \cos (\pi - \delta_2) = -\cos \delta_2;$$

$$BO \cos \beta_2 + DO \cos \delta_2 = BO^2 - DO^2 = l_2,$$

hence equations (II) can successively be written as: $S_4l_4; S_5l_5; S_6l_6; S_1l_1; S_3l_3;$ and $S_2l_2;$ denoting lengths of bars 1, 2, 3, 4, 5 and 6 by l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 and $l_6,$ respectively.

Let us determine now meanings of 4 summands in first column of Eq. (I), namely of those involving outer forces.

In Fig. 1/g again tetrahedron $(ABCD)$ has been drawn, together with outer forces and point $O.$ Let us draw a straight line from point O perpendicular to each force direction, and denote the point of intersection of this normal to the force direction by O^c, O^a, O^b and $O^d,$ resp. From Fig. 1/g it is:

$$\frac{CO^c}{CO} = \cos \gamma_C; \frac{AO^a}{AO} = \cos \alpha_A; \frac{BO^b}{BO} = \cos \beta_B; \frac{DO^d}{DO} = \cos \delta_D,$$

hence

$$CO \cos \gamma_C = q_C, AO \cos \alpha_A = q_A, BO \cos \beta_B = q_B \text{ and } DO \cos \delta_D = q_D,$$

denoting distances CO^c, AO^a, BO^b and DO^d of the normal drawn from O to the force directions (dotted lines in Fig. 1/g) by q_C, q_A, q_B and $q_D,$ respectively. In what follows, these distances q will be termed the force arms and considered distances with appropriate signs. The arm will be positive if the force is directed towards intersection points O^c, O^a, O^b and $O^d,$ resp. (This assumption logically follows from the fact that angles between the positive force direction and the positive secondary straight line have been denoted by $\gamma_C, \alpha_A, \beta_B$ and $\delta_D,$ resp.);

namely, if these angles are greater than $\pi/2$, then so are $\cos \gamma_C$, $\cos \alpha_A$ etc., hence also $CQ \cos \gamma_C$, $AQ \cos \alpha_A$ etc. are negative.)

Substituting all these results into Eq. (I), we obtain the relationship:

$$\begin{aligned} Cq_C + Aq_A + Bq_B + Dq_D + S_1l_1 + S_2l_2 + \\ + S_3l_3 + S_4l_4 + S_5l_5 + S_6l_6 = 0. \end{aligned}$$

Written in terms of symbols:

$$\sum P_i q_i + \sum S_i l_i = 0,$$

or

$$\sum P_i q_i = -\sum S_i l_i, \quad (\text{III})$$

where P_i is an external force in general, and q_i its arm in the above meaning. S_i is a bar force, and l_i is length of the same bar. Summation has to cover all forces in the left-hand side ($i = 1, 2, 3, 4$), and all bars in the right-hand side ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

3.2. General case of a spatial truss

Fig. 2 is a general picture of a spatial trussed beam. It has also superfluous bars, hence it is inherently hyperstatic. The truss is loaded at its nodal points x, y, \dots by external (active and reaction) forces X, Y, \dots . As a starting assumption, force system (X, Y, \dots) is self-equilibrated, furthermore, the truss is immobile under the effect of these forces, i.e. its nodal points are not displaced by forces (X, Y, \dots) . This is only possible if external forces acting at each nodal point and forces of three or more bars meeting at the same nodal point form together an equilibrium force system.

Accordingly, for each straight Ox, Oy, \dots starting from a point O assumed at random in space and connecting it with the nodal points of the truss, zeroing force projections we obtain:

$$\begin{aligned} X \cos(Ox) + S_a \cos(s_a - Ox) + S_b \cos(s_b - Ob) + \dots + S_n \cos(s_n - On) = 0, \\ Y \cos(Oy) + S_a \cos(s_a - Oy) + S_c \cos(s_c - Oc) + \\ + \dots + S_m \cos(s_m - Om) = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

where terms in brackets stand for angles in the figure. Exactly as many such equations can be written as there are nodal points (either external or internal) in the structure.

Evidently, in the equation system (IV) all external forces are present, but each in a single equation i.e., in that of projection for the straight line

connecting the application point of the given force to point O , for instance, force X in an equation of projection for straight Ox only.

Each bar force occurs, however, in exactly two equations, namely in those of projection for two straights connecting two end points of the given bar to O . Such as, for instance, bar force S_a of the (otherwise redundant) bar S_a in Fig. 2 occurs only in the equations of projection for two straights connecting nodal points x and y to O , actually in first and second equations of (IV).

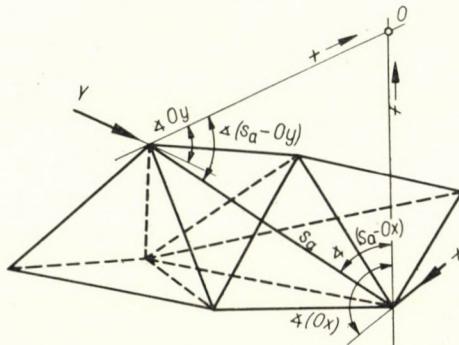


Fig. 2. General spatial trussed beam

Nevertheless, in these circumstances, the deduction applied in 3.1 to the simple tetrahedron can be done along the lines above, and its final result will also be exactly identical with the final result of (III), obtained in section 3.1, hence:

$$\sum P_i q_i = -\sum S_i l_i \quad (V)$$

with the only difference that actually the left-hand summation is to be extended to all external (active and reaction) forces, and the right-hand one to all bars of the spatial trussed beam, including redundant bars.

On the basis of all these considerations, the fundamental theorem for checking bar forces of the spatial trussed beam can be formulated as:

The algebraic sum of the products of external forces by their arms equals the algebraic sum of the products of bar forces by bar lengths; but of the opposite sign.

This equation is seen to be identical in all particulars with the basic relation deduced for plane trussed beams. It differs only in that, in this case, \bar{P}_i denotes a spatial force system, arms q_i pertaining to each force of the force system denote spatial straights instead of plane ones, and the right-hand side of equality (V) denotes the algebraic sum of the products of bar forces by bar lengths for all bars of the spatial trussed beam.

It should be noted here that, although point of origin O can be chosen at random in space, the position of the examined spatial truss is advisably selected so as to facilitate checking, which is even more imperative here than for plane beams. In the case of an inconvenient assumption, the right-hand side of formula (V) requires a tedious computation work.

Finally, another, somehow theoretical remark should be made. Point O being assumed at random, the deduced final result is valid for any assumption of point O . It follows, however, that the assumption of external forces perfectly determines the algebraic sum of the products of bar forces by bar lengths, hence this sum of products depends solely on the magnitude, direction and sense of external forces, but is independent of number, direction and length of bars. It is interesting to note that the sum of products

$$\sum S_i l_i$$

is *constant, invariable* for the given trussed beam. It can be formulated as follows: if geometrical loci of force-loaded nodal points of the spatial truss are given, just as are the external forces (in equilibrium) themselves, then the sum of the products of bar forces by bar lengths is a given and invariable one. This quantity is perfectly independent of the number, direction and length of bars serving to connect force-loaded nodal points.

This statement is, of course, only of theoretical interest, and of no practical value. In engineering practice namely, geometrical conditions of the truss are determined first, and loads only thereafter.

4. Practical application of the method

4.1. Numerical example

The spatial trussed beam shown in Fig. 3 by plain lines is a shed roof structure in frequent use actually. The truss contains 9 nodal points and 21 bars, thus condition $9 \cdot 3 - 6 = 21$ is met.

Load is applied by a single external active force: $W = 8 \text{ Mp}$ (wind force) at nodal point 5. The truss is supported at nodal points $0 = A$, $1 = B$, $7 = C$ and $6 = D$.

A spherical joint is assumed at point A , vertical supporting bars at points B and C and also a simple supporting bar at point D , which latter, however, lies *skewly* in the plane of the beam end plate (plane of triangle between nodal points 6–7–8).

Thus there are $3 + 3 = 6$ supporting bars, and the idealized supporting system of the truss is statically determinate. Unknowns primarily to be determined are the reaction components, i.e. $A_x, A_y, A_z; B_y; C_y; D_x, D_y$. Accordingly, there are 7 unknowns. If, however, a perfect symmetry had been started from (not an absolute necessity!) then $B_y = C_y$, that is only 6 unknowns remain to be determined. The 6 equations expressing the spatial equilibrium of forces are:

1. Sum of force projections to the x axis: $A_x + D_x + W = 0$,
2. Sum of force projections to the y axis: $A_y + B_y + C_y + D_y = 0$,
3. Sum of force projections to the z axis: $A_z = 0$,
4. Moment for the x axis: $C_y \cdot 16 \text{ m} + D_y \cdot 16 \text{ m} = 0$,
5. Moment for the y axis: $W \cdot 8 \text{ m} + D_x \cdot 16 \text{ m} = 0$,
6. Moment for the z axis: $B_y \cdot 4 \text{ m} + C_y \cdot 4 \text{ m} + W \cdot 3 \text{ m} = 0$.

These equations can be solved unambiguously, taking into consideration that $B_y = C_y$, as assumed above, to give:

$$A_x = D_x = -4 \text{ Mp} \text{ (acting against to } W),$$

$$A_y = D_y = +3 \text{ Mp} \text{ (upwards directed),}$$

$$A_z = 0,$$

$$B_y = C_y = -3 \text{ Mp} \text{ (anchoring force, downwards directed).}$$

The above reaction directions appear in Fig. 3a. Skew bar lengths are: bar 2—3: 8,55 m; bar 2—4: 9,42 m; bar 0—4: 8,95 m.

Thereafter all bar forces have been calculated. Their values, together with checking computation according to formula (V), are shown in Table I.

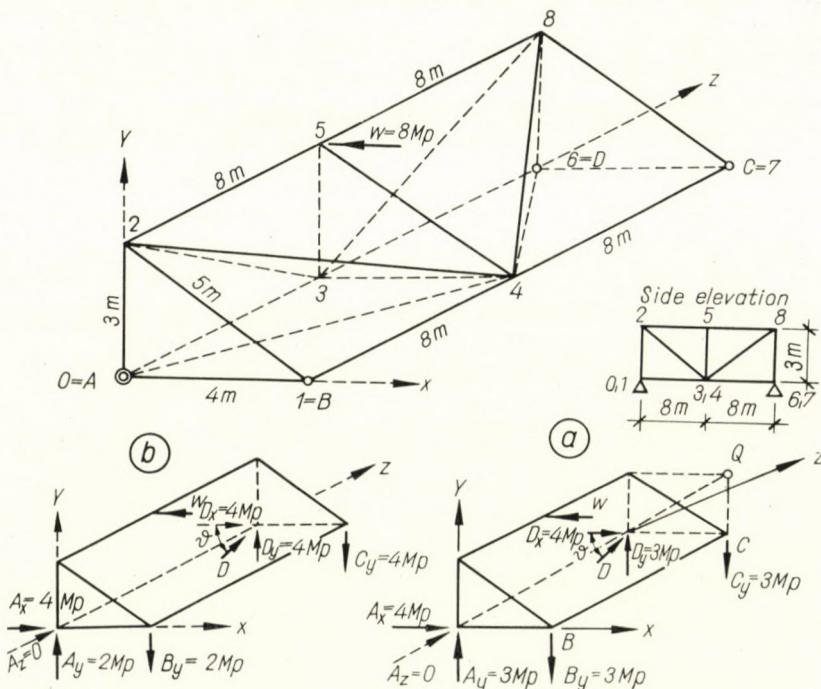


Fig. 3. Analysis of a shed roof structure for horizontal forces

Because of complete symmetry, it is sufficient to determine bar forces for half a truss. In view of the fact that bars (5—3), (5—4) and (3—4) at midtruss occur but once throughout the truss, while all other bars have their symmetricals, the nomogram itself is to be developed for the half truss only, while values for bars in symmetrical positions are to be doubled in the summation. Accordingly, the first sum in the table is to be taken twice, the second one once. Hence, the right-hand side of the checking formula can be written as:

$$\sum S_i l_i = -2 \cdot 16 + 32 = 0.$$

For the computation of the left-hand side of the checking formula, it is convenient to assume the point of origin 0 at point A, zeroing arms of all reaction forces and of active force W . Hence, at the left-hand side it is:

$$\sum P_i q_i = 0.$$

Accordingly, condition of formula (V) has been fulfilled.

In the above example we started from the assumption that, because of complete symmetry, $B_y = C_y$.

Table I

Symbol of bar	Bar length l (m)	Bar force S (Mp)	Sl (Mpm)
1-0	4,00	- 4,00	- 16,00
1-2	5,00	+ 5,00	+ 25,00
0-2	3,00	- 3,00	- 9,00
1-4	8,00	0	0
0-3	8,00	0	0
0-4	8,95	0	0
2-4	9,434	- 9,434	- 89,00
2-5	8,00	0	0
2-3	8,544	+ 8,544	+ 73,00
		$\Sigma_1 =$	- 16,00
5-3	3,00	- 6,00	- 18,00
5-4	5,00	+ 10,00	+ 50,00
3-4	4,00	0	0
		$\Sigma_2 =$	+ 32,00
$2 \Sigma_1 + \Sigma_2 = - 2 \cdot 16,00 + 32,00 = 0$			

This definition, however, can be given another formulation. In particular, the above assumption has led to the result that $D_x = -4$ Mp, $D_y = +3$ Mp. This statement means, in other words, that in fact the *direction* of supporting bar D has been fixed. Namely, this bar cannot have but the same direction as the reaction force transmitted by it to the truss, hence the angle between this fictitious bar and horizontal is: $\tan \theta = 3/4$ (Fig. 3a).

There is, however, no theoretical restriction as to the direction of bar D , except that it cannot be vertical. For instance, we may proceed from the assumption of $D_x = D_y$, hence $\tan \theta = 1/1 = 45^\circ$. For this assumption 6 equilibrium equations of three-dimensional statics can be written and reactions and bar forces can be computed just as above. Omitting computation particulars, we obtain (Fig. 3b):

$$\begin{aligned} A_x &= D_x = -4 \text{ Mp (direction opposite to } W), \\ A_y &= +2 \text{ Mp, } A_z = 0, \\ B_y &= -2 \text{ Mp, } C_y = -4 \text{ Mp (anchoring forces),} \\ D_y &= +4 \text{ Mp.} \end{aligned}$$

However strange it seems, by changing the direction of fictitious supporting bar D , all reaction values change; the truss is not symmetrical any longer from the viewpoint of reactions, on one side of the vertical plane intersecting force W the reactions give different values from those on the other side of the same plane. In spite of this, the truss is in equilibrium, that can be checked by zeroing moment sums referred to any assumed axis.

Evidently, however, for this assumption, *all bar forces will change* as compared to the assumption above.

Value

$$\sum P_i q_i$$

on the right-hand side of the checking formula remains however 0, that can most simply be verified by taking the point of origin O identical with point A , just as before. This means, however, that the left-hand sum of the checking formula (V),

$$\sum S_i l_i,$$

invariably equals the value determined above (in this case 0). Thus, as a final result, the algebraic sum of bar forces and bar lengths of the examined truss is *independent of the idealized assumption of the reaction supporting forces*.

This statement presents a lot of advantages for designing.

A last remark should be made in connection with the above example. The direction of supporting force acting at point D has been assumed to be in the plane of the truss end plate. Of course, this assumption represents the determinate and rigid supporting of the truss only when the external active force is of the direction given in the example, or in general, when it is in the plane parallel to the end plate. In other cases, e.g., for a skew force W , the bar assumed at point D is necessarily supposed to be of a different direction, to run along a straight line deviating from the end plate plane.

4.2. Numerical example

Fig. 4 shows a scheme of a steel truss structure for a roof-light spanning of 16 m. This truss has 9 joints and 21 bars, hence condition $3 \cdot 9 - 6 = 21$ is met.

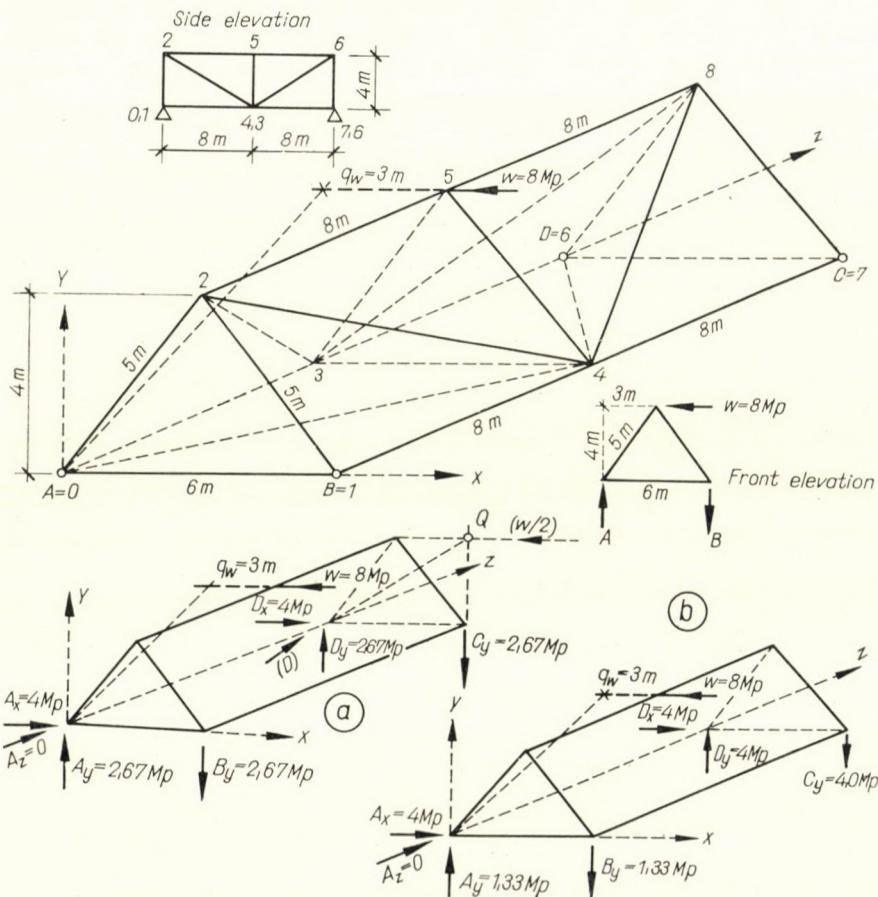


Fig. 4. Analysis of a roof-light structure for horizontal forces

The truss is acted upon by a single, horizontal active force $W = 8 \text{ Mp}$. As to the reaction supporting forces, similarly to the example above, the supporting by a spherical joint has been assumed at point A, and that by supporting bars, at points B, C, D. Evidently,

according to the statements in Chapter 2, at point D no vertical supporting bar can be applied. In the given case, for a horizontal force W , normal to the longitudinal truss axis, the supporting bar at point D can be assumed to be in the plane of the truss end plate.

Assume $B_y = C_y$.

With the above assumptions, based on 6 equilibrium equations of the three-dimensional statics, all supporting force components can unambiguously be determined. Zeroed force projections and moments for the three co-ordinate axes can be written as:

$$A_x = D_x = -4 \text{ Mp} \quad (\text{direction opposite to } W),$$

$$A_y = D_y = +2,67 \text{ Mp}, \quad A_z = 0,$$

$$B_y = C_y = -2,67 \text{ Mp} \quad (\text{anchoring force}).$$

Reaction force directions are shown in Fig. 4a.

Hence, by virtue of this assumption, $D_x/D_y = 2,67/4 = 0,66$, i.e., the axis of the fictitious bar at point D passes through point Q (Fig. 4a).

This point Q is the point of intersection of the vertical of supporting bar C and of a horizontal supposed to pass through the roof structure tip. In other words, this assumption produces equilibrium by taking the direction of the fictitious bar at D to be on the end plate plane, similarly to that for the plane truss, an assumption holding only if three forces in a common plane, namely C, D as well as component $W/2$ of force W , supposed to act at the truss tip, intersect at a common point. For plane trusses this is a necessary condition of equilibrium. For spatial trusses this is not an absolute necessity.

After these considerations, bar forces of truss bars can unambiguously be determined. Omitting computation particulars, final result can be found in Table II.

Table II

Symbol of bar	Bar length l (m)	Bar force S (Mp)	$S l$ (Mpm)
1-0	6,00	-2,00	-12,00
1-2	5,00	+3,33	+16,67
0-2	5,00	-3,33	-16,67
1-4	8,00	0	0
0-3	8,00	0	0
0-4	10,00	0	0
2-4	9,434	-6,29	-59,34
2-5	8,00	0	0
2-3	9,434	+6,29	+59,34
		$\Sigma_1 =$	-12,00
5-3	5,00	-6,66	-33,33
5-4	5,00	+6,66	+33,33
3-4	6,00	0	0
		$\Sigma_2 =$	0
$2 \Sigma_1 + \Sigma_2 = -24,00$			

In view of the symmetry, here, as in the example before, bar forces have been computed for half a truss only. Thereby the right-hand sum of checking formula (V) has been obtained by taking into account the summation of the upper part of the table twice, and that of its lower part once.

Accordingly, the right-hand side of the checking formula becomes:

$$\Sigma S_i l_i = -2 \cdot 12 \text{ Mpm} + 0 = -24 \text{ Mpm}.$$

The left-hand side of the checking formula is obtained most simply by supposing point O in place of point A . In this case namely, arms q of all reaction forces are zeroed, and nothing but active force W remains in the summation. According to the figure, the arm of this latter is 3 m, hence:

$$\sum P_i q_i = 3 \cdot 8 = +24 \text{ Mpm},$$

demonstrating the correctness of computed bar forces.

In connection with this example, just as for the example before, even a bar of a direction different from that assumed above can be taken as supporting bar D . Thus, for instance bar D can be assumed to be in the end plate plane, along a 45° skew straight line. In terms of force components, this will mean $D_x = D_y$ (Fig. 4b).

Solving then 6 equations of spatial equilibrium, the reaction forces will be:

$$\begin{aligned} A_x &= D_x = +4 \text{ Mp (against to } W), \\ A_y &= +1,33 \text{ Mp (upwards directed force), } A_z = 0, \\ B_y &= -1,33 \text{ Mp (downwards directed anchoring force),} \\ C_y &= -4 \text{ Mp (downwards directed anchoring force),} \\ D_y &= +4 \text{ Mp (upwards directed force).} \end{aligned}$$

Again, it appears that the reaction component values are quite different from those assumed, there is no symmetry with respect to the truss midplane. Accordingly, all bar force values will of course change, such as:

$$S_{1-0} = -1,0 \text{ Mp; } S_{1-2} = +1,67 \text{ Mp; } S_{0-2} = -2,0 \text{ Mp; etc.}$$

but even in this case, just as for the assumption above, the left-hand sum of the checking formula is the same, in view of the fact that all reaction forces of this sum vanish, just as before and nothing but force W persists, invariably with an arm of 3,0 m. Thus, the left-hand sum invariably amounts to +24,0 Mpm. Consequently, neither right-hand sum value can change. Thus, it appears again that the algebraic sum of the products of bar forces by bar lengths is independent of the idealized assumption of the positive supporting forces, and of their numerical values.

4.3. Numerical example

Fig. 5 shows the scheme of an upper deck bridge. Its structure is to be considered a relatively wide beam, in view of the fact that it spans 8,0 m for a width of 6,0 m. The spatial trussed beam has 8 joints and 18 bars, hence condition $3 \cdot 8 - 6 = 18$ is fulfilled. The composition was based on basic triangle (7, 4, 5), to which nodal points 2, 6, 1 and 3 were connected, in this order, according to the tetrahedron composition law. At nodal point 0, we somewhat departed from this law. It should be noted that, in order to obtain the desired statically determinate structure, this latter is asymmetrical, i.e., there is no bar symmetrical to bar (5–6).

This structure is supported at nodal points 0, 3, 6 and 7; i.e., at point $A = 3$ a spherical joint, at points $B = 0$ and $C = 6$ vertical supporting bars, and at point $D = 7$ a skew supporting bar constitute the supporting system of the structure.

This structure is loaded by a single horizontal force $W = 8 \text{ Mp}$ (wind force) acting at nodal point 1.

Let us examine this truss on the basis of two types of supporting systems.

a) Assume as supporting condition that at supporting points B and C , the structure is acted upon by equal vertical supporting forces, i.e., $B_y = C_y$.

Based on this condition, positive supporting forces can unambiguously be computed, and this yields:

$$\begin{aligned} A_x &= D_x = +4 \text{ Mp (in direction of } +x), \\ A_y &= D_y = -2 \text{ Mp (anchoring force), } A_z = 0, \\ B_y &= C_y = +2 \text{ Mp.} \end{aligned}$$

This condition, i.e. $B_y = C_y$, also determines the direction of the fictitious supporting bar at point D . Hence, with respect to the horizontal, the direction of the bar, for this assumption, is

$$\tan \vartheta = 2/4 = 0,5 (\sim 26^\circ 30'),$$

in other words, it passes through point Q in the figure, i.e., through the intersection point of the horizontal straight line drawn through nodal point 1 and lying over the end plate of the structure, on the one hand and of the vertical C on the other (Fig. 5a).

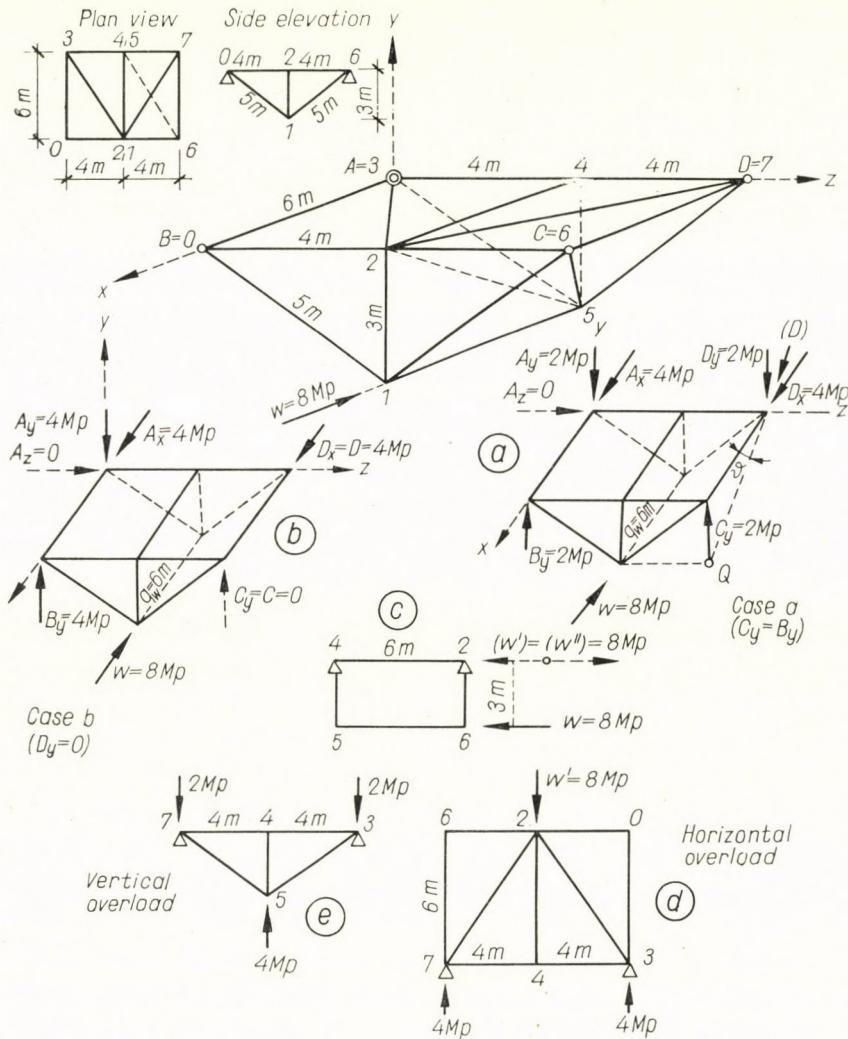


Fig. 5. Analysis of a deck bridge structure for horizontal forces

If these data are available, each bar force can unambiguously be determined. The succession of the steps in determination is just the opposite of those necessary for composition, i.e., starting from nodal point 0, nodal points 3, 1, 6, 2, 5, 4 and 7 are to be solved. In this case max. 3 unknown bar forces are to be determined at each nodal point. Omitting computation particulars, the final result is reproduced in Table III. In addition, this table includes the right-hand sum of the checking formula (V).

The left-hand sum of checking formula (V) is most easily obtained by assuming the point of origin O to be at point A . In this case, normals to all reaction force directions intersect reaction force influence lines at the point of application of the given reaction force, zeroing positive force arms q .

Table III

Symbol of bar	Bar length l (m)	Bar forces S (Mpm)		Sl (Mpm)		Computed as horizontal and vertical overdesign	
		Case a $B_y = C_y$	Case b $D_y = 0$	Case a	Case b	Bar force (Mpm)	Sl (Mpm)
0-1	5,00	+3,33	+ 6,67	+16,67	+ 33,33	+3,33	+16,67
0-2	4,00	-2,67	- 5,35	-10,66	- 21,33	-2,67	-10,66
0-3	6,00	0	0	0	0	0	0
3-2	7,21	-4,80	- 4,80	-34,61	- 34,61	-4,80	-34,61
3-4	4,00	+5,33	+ 8,00	+21,33	+ 32,00	+5,33	+21,33
3-5	5,00	-3,33	- 6,67	-16,67	- 33,33	-3,33	-16,67
1-6	5,00	+3,33	+ 6,67	+16,67	+ 33,33	+3,33	+16,67
1-5	6,00	-8,00	- 8,00	-48,00	- 48,00	0	0
1-2	3,00	-4,00	- 8,00	-12,00	- 24,00	0	0
2-6	4,00	-2,67	0	-10,66	0	-2,67	-10,66
2-7	7,21	-4,80	-14,37	-34,61	-103,61	-4,80	-34,61
2-4	6,00	0	0	0	0	0	0
2-5	6,71	+8,90	+17,90	+59,72	+120,01	0	0
6-5	7,81	0	-10,50	0	-82,01	0	0
6-7	6,00	0	+ 8,00	0	+ 48,00	0	0
4-5	3,00	0	0	0	0	0	0
4-7	4,00	+5,33	+ 8,00	+21,33	+ 32,00	+5,33	+21,33
5-7	5,00	-3,33	0	-16,67	0	-3,33	-16,67
			$\Sigma Sl =$	-48,16	- 48,22		-47,88

There remains only force W in the sum, of an arm length of 6 m, to give:

$$\Sigma P_i q_i = 8 \cdot 6 = +48,0 \text{ Mpm},$$

showing a fair agreement with the final result in the table (-48,16 Mpm), within slide rule accuracy. Accordingly, somewhat complex calculation of bar forces has been correct.

b) Resolve the same structure, acted upon by the same active force, assuming the reaction transmitted at supporting point D to be horizontal, i.e., $D_y = 0$.

Just as before, all reaction forces can unambiguously be determined (Fig. 5b):

$$\begin{aligned} A_x &= +4 \text{ Mpm}, D_x = +4 \text{ Mpm}, \\ B_y &= +4 \text{ Mp}, C_y = 0, \\ A_y &= -4 \text{ Mp} \text{ (anchoring force)}, A_z = 0. \end{aligned}$$

After reactions, each bar force can in turn be determined. The values of these are given in Table III together with the right-hand sum of the checking formula (V) for this assumption.

The left-hand side of the checking formula (V) shows no deviation from the previous case, nor does this sum include other than external force W , of an arm length $q = 6$ m. Hence, the left-hand side of checking formula (V) is invariably +48,0 Mpm. This can be compared with the tabulated value of -48,22 Mpm, the deviation being again due to the slide rule calculation error.

It is interesting to note how bar force values vary depending on the assumed direction of fictitious supporting bar D .

Table III has been completed by bar forces supplied by the theory of horizontal and vertical overloading. It appears that this widely extended theory of calculation may yield bar force values identical with those for case a (Figs. 5c, d, e). It appears, however, that for some bars, particularly for those developing the highest stresses, this method gives no bar force values at all, as against assumptions a) and b). This fact clearly demonstrates that the overload design of broad bridges, wide structures, may lead to highly unrealistic values. The summation of checking formula (V), however, is not altered even for this latter method (+48.0 Mpm), as shown by the last column in Table III (-47.88 Mpm).

5. Conclusions

According to the numerical examples presented, the values of bar forces arising in each bar of spatial trussed beams largely depend on how the truss, as a spatial structure, is supported, clamped to the soil, or better, how reaction supporting forces are *conceived*. In general we have no exact idea of these supporting forces. The most frequently used system, i.e., two fixed and two free bearings (with a block of rollers moving along the longitudinal axis of the beam), is 12-fold redundant, as shown in Chapter 2.

While there are exact methods available to resolve *internal* redundancy, there are no generally valid methods to resolve *external* redundancy. The usual arrangements yield a faultless solution only for vertical loads (reaction-forces can accurately be determined), but for force effects of general direction the relation forces cannot be determined. Each bar force value varies as a function of the types and systems of these somewhat arbitrary assumptions.

For relatively narrow, long structures, assuming a heavy vertical load, this uncertainty is not a significant one; as compared to vertical load effects, the described variation of skew forces, as a matter of fact, is of no importance.

For short, broad structures, however, acted upon by slight vertical loads, these facts cannot be neglected.

For structures of this type, design could advisably be based on the "hazardous position" of fictitious supporting bars.

Spatial trusses cannot be supported against skew forces by vertical fictitious bars alone. By means of skew or partially skew bars this would, of course, be possible, but such bars do not exist in reality. As a matter of fact, skew forces are absorbed by *sliding frictional forces* developing at the bearings. The maxima of these can, however, be computed, hence, the extreme directions of fictitious supports, and thereby the supporting forces of maximum skewness can be determined.

All these aspects make our computations somewhat intricate, another justification for the necessity of a simple checking procedure as described above.

NACHPRÜFUNG DER STABKRÄFTE VON RÄUMLICHEN FACHWERKTRÄGERN

I. RÉDEI

ZUSAMMENFASSUNG

In einem vorigen Aufsatz beschrieb der Verfasser ein Verfahren für die Nachprüfung ebener Fachwerkträger. Vorliegender Aufsatz ist eine Verallgemeinerung des erwähnten Verfahrens für räumliche Fachwerkträger. Die grundlegende Beziehung des Nachprüfverfahrens wurde auf rein geometrisch-statistischem Wege abgeleitet, und es wird nachgewiesen, daß die algebraische Summe der Produkte der zusammengehörigen Stabkräfte und Stablängen eine vom System, von der Form des Fachwerkes, von der Anzahl, Richtung und Länge der Stäbe unabhängige Konstante darstellt. Diese Summe hängt ausschließlich von den Außenkräften und in Spezialfällen sogar ausschließlich von den aktiven Kräften ab. Das Verfahren eignet sich für innerlich und äußerlich bestimmte als auch für statisch unbestimmte Fachwerkträger. Seine Anwendung ist an Hand von Zahlenbeispielen veranschaulicht.

CONTRÔLE DES EFFORTS DE BARRE DES POUTRES EN TREILLIS SPATIALES

I. RÉDEI

RÉSUMÉ

Dans un article précédent, l'auteur a présenté une méthode pour le contrôle des poutres en treillis planes. L'article est la généralisation de cette méthode aux poutres en treillis spatiales. La relation servant de base à la méthode de contrôle est déduite par des moyens purement géométriques-statiques. Il est ensuite démontré que la somme algébrique des produits des efforts de barre et des longueurs de barre respectives est une constante indépendante du système et de la forme de la structure, ainsi que du nombre, de la direction et de la longueur des barres. Cette somme est fonction exclusivement des forces extérieures et même, dans certains cas, elle ne dépend que des forces actives. Le procédé est également valable pour les poutres en treillis extérieurement ou intérieurement déterminées et hyperstatiques. Son application est illustrée à l'aide d'exemples numériques.

КОНТРОЛЬ СТЕРЖНЕВЫХ УСИЛИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АРОК

И. РЕДЕИ

РЕЗЮМЕ

Автор в своей предыдущей работе продемонстрировал метод, пригодный для контроля плоских арок. Данная работа представляет собой обобщение этого метода на пространственные арки. Уравнения, служащие основой предлагаемого метода контроля, автор выводит чисто геометрически — статистическим путем и показывает, что алгебраическая сумма соответствующих стержневых усилий и длины стержней независима от системы и формы конструкции, числа стержней, их направления и длины постоянной. Эта сумма является единственно только функцией внешних усилий, более того, в определенных случаях, зависит только от активных сил. Метод действителен как для наружных, так и для внутренних определенных и неопределенных арок. Применение метода демонстрируется на числовых примерах.

HYDRAULICS FOR LOWERING THE GROUND WATER TABLE USING VACUUM WELLS

G. ÖLLŐS

CAND. OF TECHN. SC.

TECHNICAL UNIVERSITY OF BUILDING AND TRANSPORT ENG., BUDAPEST

[Manuscript received April 15, 1965]

The paper deals with the basic questions of the hydraulics of vacuum wells. After showing the relations and the differences between gravitational and vacuum hydraulics, the potential distribution in the seepage field developing around the line of vacuum wells, in the case of more important suction, is discussed in detail. The results of investigations on the particularities of the movement of the air in granular soil provide the theoretical bases for the numerical calculation of the flow of air and water in case of a row of wells along one or both sides of the working ditch provides the designer with numerous points of view (e.g. optimum distance between wells, possibility of excavating the work ditch). The results referring to drainage phenomena in inhomogeneous soils are illustrated by the infavourable cases of drainage.

1. Introduction

Ever since dewatering of construction pits with the help of vacuum wells was introduced in Hungary following a suggestion of G. VASTAGH [30, 31], increasing attention has been devoted to the detailed exploration of both theoretical and practical aspects involved in the dewatering process. During this development, relying on theoretical considerations and experiences gained in the evaluation of practical dewatering problems, K. SZÉCHY pointed to the significant differences between the hydraulics of gravity and vacuum wells [25, 26, 27]. At the same time the important role played by the capillary zone and the spacing of wells was recognized.

The development of a correct engineering approach was largely promoted by observations of H. LAMPL made in connection with the lowering of ground water table. Conclusions relating to operational features of wellpoint systems used in ground water lowering, as well as for the evaluation of physical characteristics of soils with special regard to dewatering, are of particular interest [11].

Valuable contribution to the better understanding of this problem was made by G. KARÁDI, whose principal attention was devoted to the theoretical aspects of non-steady seepage occurring during the process of dewatering [7].

Noteworthy investigations of L. MOLNÁR centered on the movement of air in granular media [15] and on the appropriate selection of dewatering methods for a particular application.

In civil engineering practice the development of lowering the ground water table by vacuum wells was promoted in Hungary especially by the work of G. VASTAGH, S. KNEFFEL, G. Kovács and I. OLÁH.

The objective of model studies, started in 1962 at the Chair for Water Management, Technical University for Building and Transport Eng. Budapest, was the comprehensive, scientifically founded exploration of vacuum-well hydraulics [19, 20]. Characteristic differences between conditions around gravity and vacuum wells were already given a positive and detailed demonstration by these early investigations (Fig. 1): as long as drawdown in the well is of a minor extent (diagram a), when the perimeters of wells constituting the

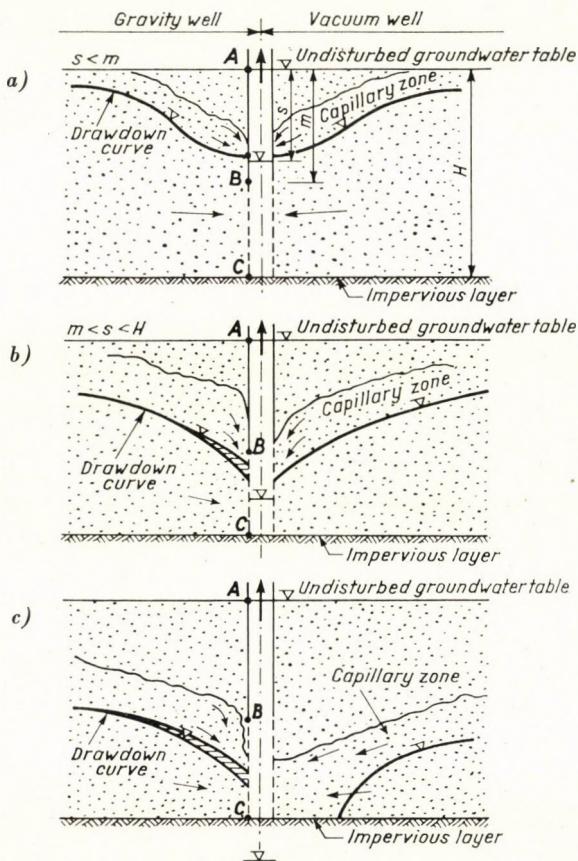


Fig. 1. Comparison of hydraulic conditions around gravity- and vacuum wells

row are intersected by the drawdown curve above their perforated section, seepage conditions about rows of gravity and vacuum wells are identical.

The first discrepancy occurs when the drawdown curve is lowered to the perforated section of the wells (diagram b).

The difference between the two types of well hydraulics becomes especially conspicuous, when the drawdown in the well becomes larger than the water column corresponding to the vertical difference between the well bottom and the original ground water table (diagram c). If this condition is attained in the case of well rows sunk into uniform soils, then the drawdown curve departs on the perforated section of the wells. Consequently the seepage streamlines, originating in the two-phase region under the drawdown curve, intersect the latter, and thus the discharge of a vacuum well is primarily controlled by the extent of vacuum in the well, rather than by the hydraulic gradient pertaining to the drawdown curve. A three-phase seepage region is developed in the vicinity of the well where, depending on the perviousness to air of the capillary zone, smaller or larger amounts of air may enter the well interior.

A common feature of investigations both at home and abroad is the failure of presenting, either from the theoretical or the practical aspects of the problem, a comprehensive picture of phenomena involved in dewatering operations. Thus, further extensive fundamental research is needed before a generally accepted hydraulic approach can be developed.

From among the evidence of similar efforts made abroad, the works of N. R. ARUTJUNJAN [1], J. CHAPMAN [2], V. M. DEGTJAREV [3], G. GÄRTNER [4], M. B. GRIGORJEV [5], J. JESENAK [6], H. MATSCHAK [13], and G. M. MARIUPOLSKIJ [14, 32] are worth mentioning.

Recognizing the need for additional information on the subject, the Building Research Institute, Budapest, invited early in 1963 the Chair for Water Management, Technical University for Building and Transport Eng., Budapest, to continue the model studies started in 1962 [19].

A brief summary of results attained by these recent studies is presented in this paper. Hydraulic phenomena occurring during dewatering of construction pits excavated in uniform and non-uniform soils, are dealt with in the first and second parts, respectively.

1.1. *Description of the model*

Before embarking on a discussion of hydraulic conditions the hydraulic seepage model will be introduced (Fig. 2).

The total length of the seepage space (tank) was 380 cm, at a width of 60 cm and a height of 65 cm.

Naturally, if the construction pit is flanked on both sides by well rows, then investigations extending to half of the total tank length are also satisfactory.

The width of the construction pit is 20 cm and its bottom elevation above the impervious layer (m) is variable.

The centerline of the row of vacuum wells is displaced relative to the centerline of the construction pit by 21,7 cm, so that there is a constant distance of 11,7 cm between the well row and the top of the pit-slope. Wells in a row can be spaced at different intervals. In the experiments to be described below, spacings of 20, 30 and 60 cm were used. As an extreme condition 0 spacing, i.e. the case of a vertical slit, was also studied. The diameter of the well pipe was 15 mm, that of the suction pipe 5 mm, while the overall diameter of the gravel filter built around the well was 30 mm. The well pipe was perforated

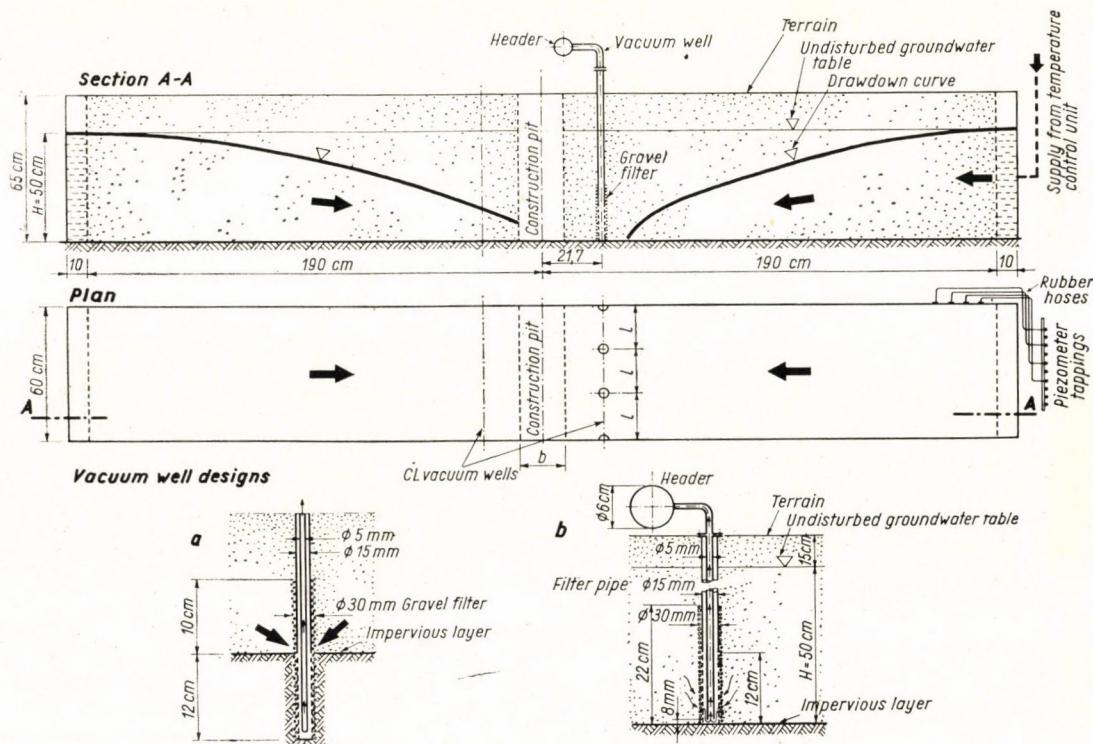


Fig. 2. Main dimensions and design of the model

to a height of 12 cm above the impervious layer, while the height of the gravel filter was 22 cm. The lower, open end of the suction pipes was 8 mm above well bottom. In this paper the vacuum created within the wells — expressed as height of water column s — will always be related to the original ground water table.

From the suction pipes water (or the mixture of water and air) is forwarded into the header pipe, and thence into a cylindrical tank permitting the separation of water and air.

The thickness of the soil layer in the seepage tank is 65 cm, while the undisturbed ground water depth is 50 cm.

Comparing the geometric dimensions of the model described above with conventional prototype dimensions, a geometrical scale factor of about $\lambda \approx 6$ is obtained.

Physical constants of the soil used in the seepage tank were:

1. Sand of type 1: Effective particle size: $D_m = 0,12$ mm; Uniformity coefficient: $U = 3,2$; permeability coefficient: $k = 7,8 \times 10^{-3}$.
2. Sand of type 2: $D_m = 0,085$ mm; $U = 1,7$; $k = 6,5 \times 10^{-3}$ cm/sec.
3. Silt soil of type 3: $D_m = 0,008$ m; $U = 2,94$; $k = 2,8 \times 10^{-4}$ cm/sec.

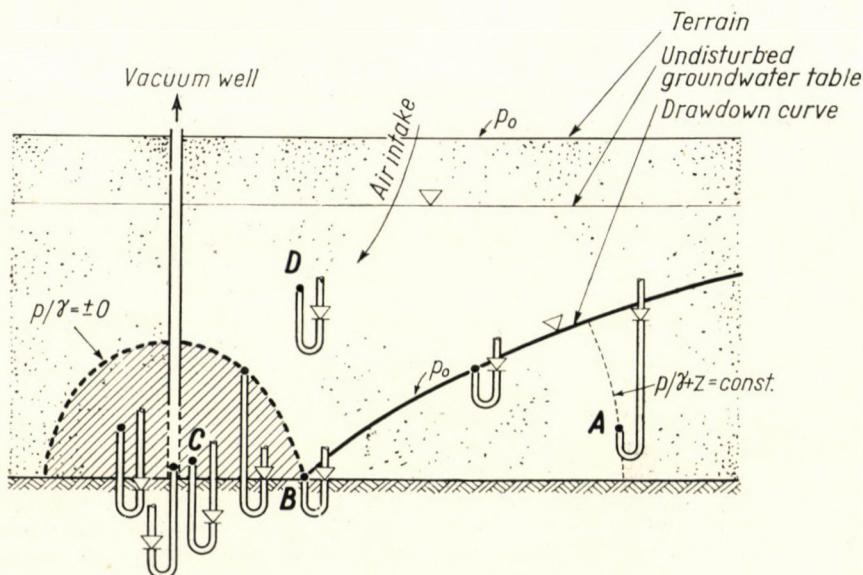


Fig. 3. Interpretation of piezometric heads in a seepage system involving vacuum wells

As was explained in detail in a previous paper [21], the model law of seepage is not fully understood yet, in the strict hydromechanical sense of the word. Data obtained from the model are therefore given a primarily qualitative interpretation, with the main emphasis laid on evaluating characteristic features of the phenomena involved. For getting a clearer insight into problems associated with the model law of seepage, investigations are being conducted with the objective of comparing corresponding phenomena in the model and prototype.

Before proceeding further, the interpretation of piezometer heads in the present paper should be explained (Fig. 3).

The potential ($\varphi = p/\gamma + z$) at point *A* is regarded as positive in this interpretation, since the corresponding piezometric head is higher than the

upper plane of the impervious layer ($z = 0$). From the value p/γ the presence of a two-phase seepage range may be inferred, since the corresponding head reaches to above the tapped corresponding point.

Point *C* is in the vacuum space created by the well, which is reflected also by the circumstance that the head p/γ is below the tapped point.

Point *B* assumes an intermediate position between the two conditions, inasmuch as p/γ is at the elevation of the tapped point (free water surface, which is acted upon by atmospheric pressure p_0).

The level p/γ at point *D* is similarly below the point tapped. Consequently point *D* also lies in the vacuum space.

2. Dewatering of construction pits excavated in uniform soil

2.1. Optimum well spacing

The optimum spacing (l) of wells in a row running along a construction pit is controlled by a combination of numerous factors:

$$l = f(k, p, l_1, l_2, m, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4),$$

where

- k is the permeability coefficient of the soil, p is the vacuum created in the soil,
- l_1 is the height of the perforated section of the well pipe,
- l_2 is the height of the gravel filter around the well, incorporating its design
- m is the depth to which the construction pit is excavated,
- Φ_1 is a factor depending on the situation of the perforated well section relative to the construction pit representing, in general, effects associated with the external boundary conditions of the seepage system,
- Φ_2 is a factor depending on the uniformity of the soil representing, in general, effects associated with internal hydraulic boundary conditions of the seepage system,
- Φ_3 is a factor depending on the amount of air drawn into the wells, and
- Φ_4 is a factor indicating whether the well is fully, or partially penetrating the aquifer.

Dewatering processes will be considered in the following for different well spacings l' in the model. Sand of type No. 1 was used in these experiments.

1. At a well spacing $l' = 30$ cm the distribution of φ in the case of a vacuum $s/H = 1,05$ is illustrated in Fig. 4 (s is the vacuum created in the well, expressed as height of water column, H is the depth of the undisturbed ground water layer). At the row of wells the drawdown surface is lowered practically to the well bottom, i.e. to the level of a water column corresponding to the vacuum in the well. This is at the same time indicative of the fact that as the vacuum in the well is increased, the row of wells tends to approach hydraulic conditions arising normally in a vertical slit.

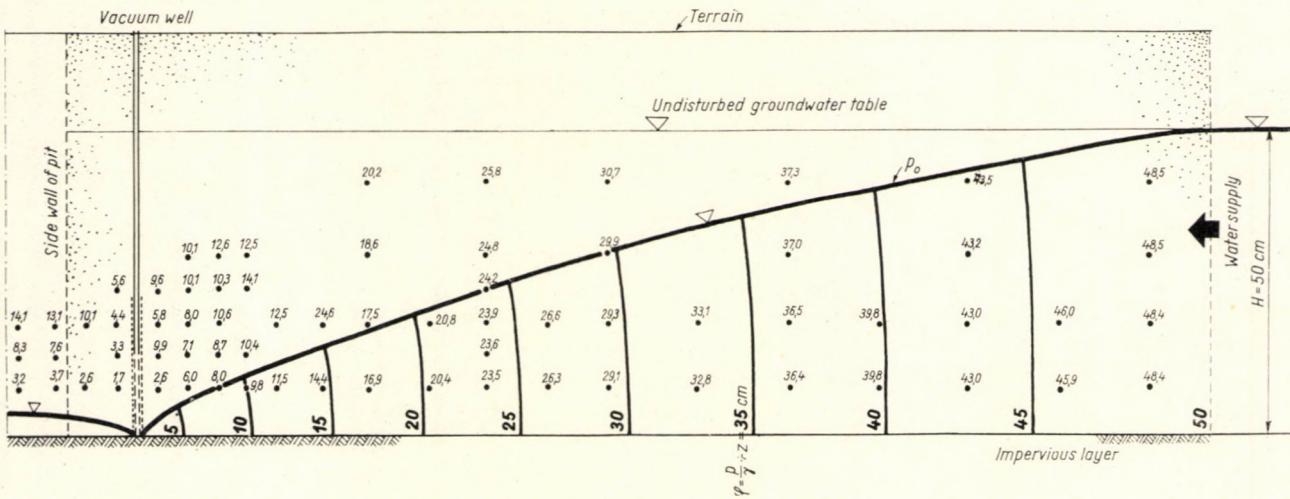


Fig. 4. Hydraulic conditions for $l' = 30$ cm, $s/H = 1,05$, $m/H = 1,0$. $k = 7,8 \times 10^{-3}$ cm/sec

2. At a well spacing $l' = 20$ cm the phenomena described above become even more pronounced (Fig. 5, $s/H = 1,0$).

3. Hydraulic conditions pertaining to a well spacing $l' = 0$, i.e. to the case where a vertical slit is operated in a manner similar to that of vacuum wells, are indicated in Fig. 6 (e.g. for a vacuum in the slit corresponding to the values $s/H = 0,95$). Taking into consideration conditions arising in the

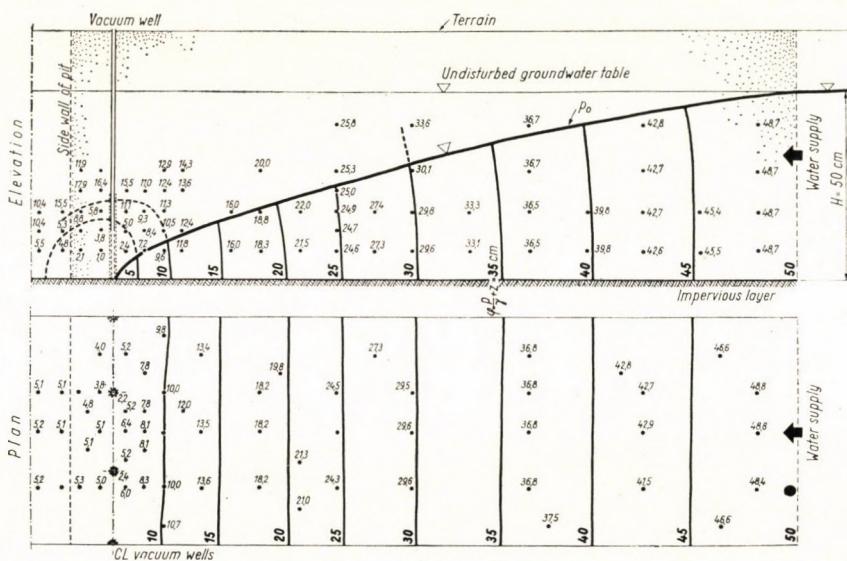


Fig. 5. Hydraulic conditions for $l' = 20$ cm, $s/H = 1,0$, $m/H = 1,0$. $k = 7,8 \times 10^{-3}$ cm/sec

case of identical vacuum values, such as is displayed in Figs 4, 5 and 6, further discharge data illustrated in Fig. 7, it will become apparent that in the range

$$0 \leq l' [\text{cm}] \leq 20,$$

the process of dewatering follows an almost identical trend as regards both the position of the drawdown curve and the discharge pumped from the wells.

Optimum well spacing is influenced by numerous factors, of which the coefficient k and the uniformity of the soil play the most important parts.

If the vacuum in the well (or slit) can be increased beyond the level pertaining to conditions shown in Figs 4, 5 and 6, then the drawdown curve retreats from the perforated section. At the same time air is drawn into the soil and hence into the wells through the terrain surface, the side wall, or bottom of the construction pit (Fig. 8). Certain quantities of air are, however, conveyed in the suction pipe already before this condition is attained, since the air entrapped in water separates as pressure is reduced.

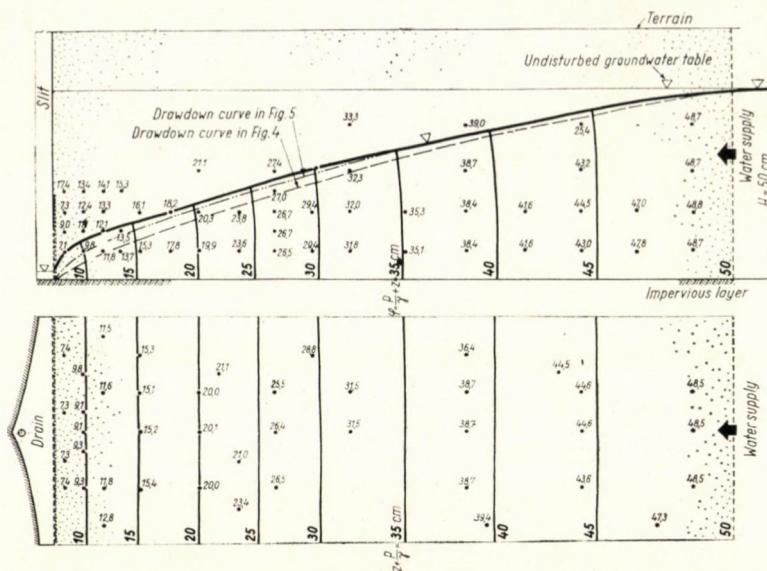


Fig. 6. Hydraulic conditions for $l' = 0 \text{ cm}$, $s/H = 0.95$, $m/H = 1.0$. $k = 7.8 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$

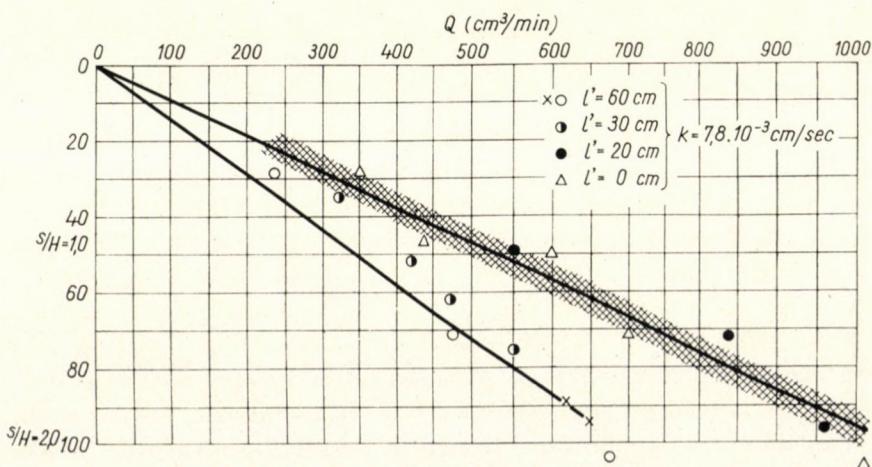


Fig. 7. Discharge data for different well spacings

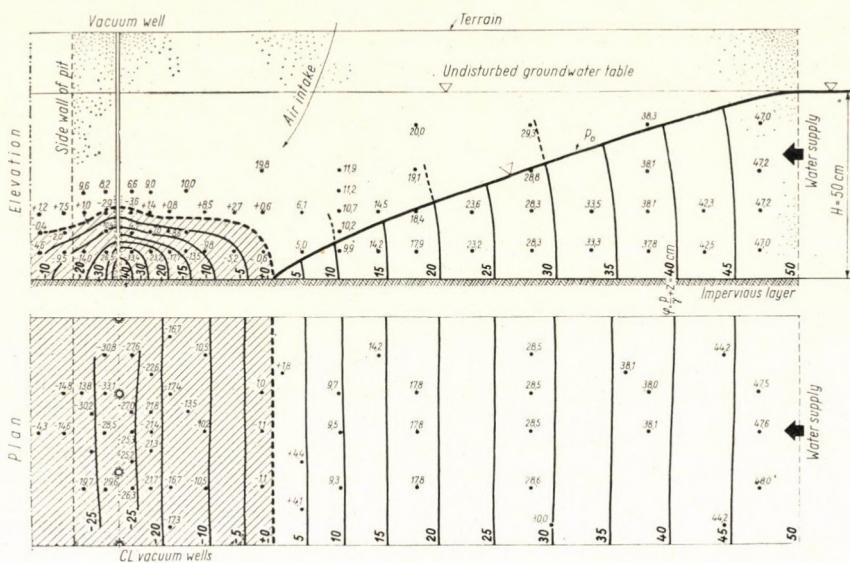
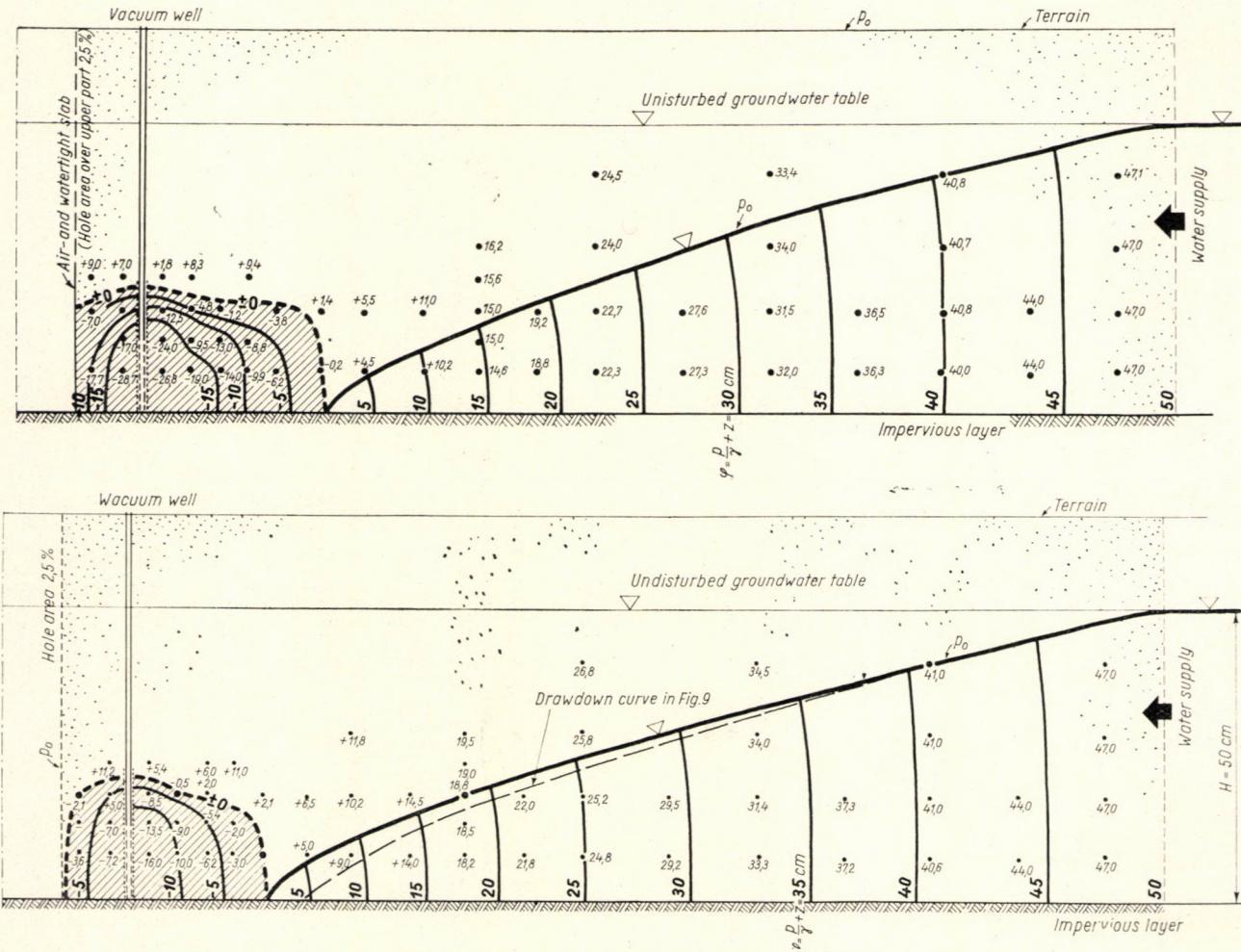


Fig. 8. Hydraulic conditions in the case of a drawdown surface removed from the row of wells. $l' = 20 \text{ cm}$, $s/H = 1,96$

2.2. Effect of air-permeability at the side walls and bottom of the construction pit on hydraulic conditions

In coarse-grained soils the capillary zone in the region above the perforated well section may not provide effective air sealing and then, depending on the magnitude of vacuum in the well, certain amount of air may leak into the well. This condition is illustrated in Fig. 8. This situation becomes more severe as the construction pit is excavated, inasmuch as the lower parts of the pit are usually separated from the perforated well section only by a relatively thin soil layer. As a result of lagging, or sheet piling, only a certain portion of the pit walls is directly exposed to air of pressure p_0 . Hydraulic conditions in the immediate vicinity of the well row are obviously affected by the amount of air entering the soil through this surface, and also by the conditions of entrance. In order to gain information about the order of magnitude of this influence, the following conditions were observed at a well spacing of $l' = 20 \text{ cm}$ in soil type 1. (The construction pit is flanked at both sides by a row of wells.)

1. If the air-impervious side wall of the construction pit excavated to the impervious sublayer is perforated over the top portion only (Fig. 9), then the $\varphi = \pm 0$ line follows a horizontal trend in the vicinity of the well and is perpendicular to the lower air-impervious surface of the construction pit. It was concluded therefrom that from the horizontal direction water, from the vertical direction — as in the case illustrated in Fig. 8 — air leaks into the well.



Figs 9–10. φ distribution for different air permeability at the pit side wall. [$s/H = 1,83$, $l' = 20 \text{ cm}$, $m/H = 0$ (Fig. 9); $s/H = 1,62$, $l' = 20 \text{ cm}$, $m/H = 0$ (Fig. 10)]

2. If the entire side wall of the construction pit is air-pervious (with openings occupying e.g. 2,5% of the total surface as in Fig. 10), then the resulting shape of the $\varphi = \pm 0$ line will considerably depart from that observed in the previous case. From the curvature conditions of the line the following conclusions were derived:

- a) The initially curved then straight section between the well row and the side wall of the pit reflects flow conditions of air leaking through the side wall.
- b) The moderately sloping section of the line $\varphi = \pm 0$ above the perforated well section is indicative of air intake from the terrain surface.
- c) The section of the $\varphi = \pm 0$ line which displays a downward curvature suggests the range of water seepage.

The rate of air intake depends primarily on the amount of moisture contained in the soil. Thus, there are contradictory requirements to be satisfied: as far as dewatering is concerned, the primary objective is to minimize the water content of the soil in the vicinity of the construction pit. However, this involves a loss in the airtightness of the soil layer. The optimal solution of the problem eventually depends on the coefficient k of soil, beyond a certain value of which the operation of the dewatering system is hardly affected by the amount of air leaking in.

2.3. Possibility of dewatering a construction pit with a single row of vacuum wells

At the dewatering operations economic considerations would frequently call for a single well instead of one on each side of the pit.

Investigations carried out in this problem were concerned with wells fully penetrating the waterbearing layer down to the impervious stratum. The wells were spaced at $l' = 20$ cm in the model built by using soils of types No. 1 and No. 2. The solution of the problem is given by the functional relationship

$$\frac{h}{H} = f \left(\frac{s}{H}, \frac{m}{H} \right),$$

where, with reference to the notations explained in Fig. 12, h denotes the vertical distance of the drawdown surface above the impervious layer in the plane of the pit wall situated farther from the well row. Besides the parameters mentioned previously, m denotes the vertical distance of the pit bottom above the impervious layer. In view of the relatively coarse soil, considerable air intake should usually be anticipated, especially in the range of higher vacuums. For this reason a similar case should be considered (Figs 11a—c).

In the case outlined in Fig. 11a, the lateral extension of the vacuum space is considerable, and thus from the hydraulic point of view favourable conditions ensue for dewatering the construction pit. The ratio h/H is no higher than 0,07. On the other hand, from the relatively flat slope of the $\varphi = \pm 0$ line it would follow that air intake from the gradually deeper construction pit would become intensive.

As the construction pit is excavated the following observations can be made (Fig. 11b):

a) Vacuum in the wells is reduced (e.g. from 1,70 to 1,62) as the pit is deepened. This becomes understandable if it is considered that deepening of the pit creates increased opportunity for the entrance of air into the soil and thus into the wells.

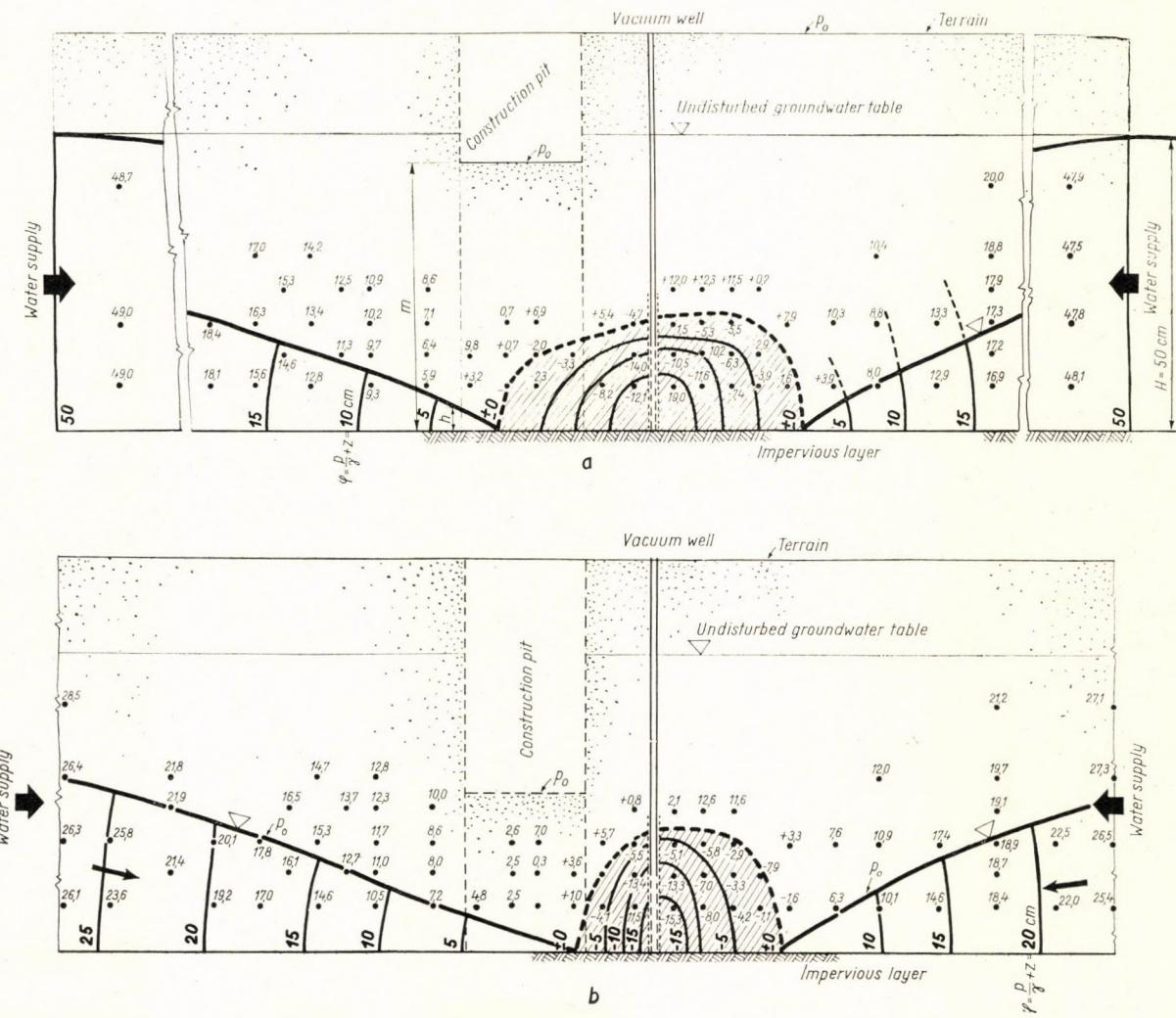
b) The extent of the vacuum space (shaded area) around the wells decreases as the construction pit is excavated. This can also be related to the increasing intensity of air flow.

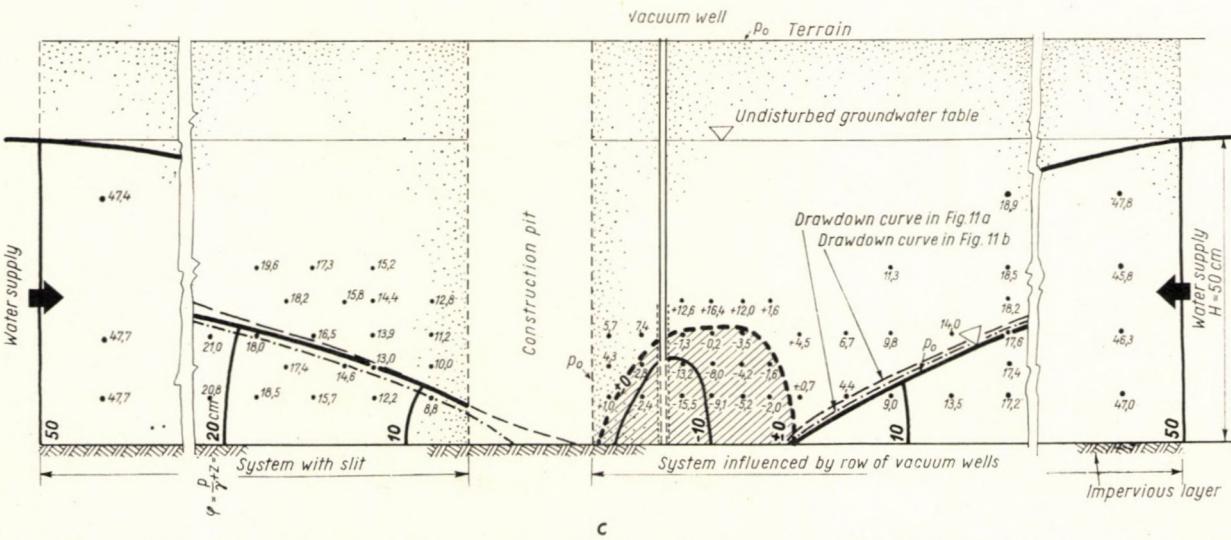
c) At the same time as the vacuum space around the well was observed to contract, the drawdown surface on the left-hand side rose slightly, although the magnitude of vacuum within the well remained practically unaltered. Accordingly the previous value $h/H = 0,07$ increased to $h/H = 0,12$. A probable explanation for this can be given as follows: When pumping under conditions illustrated in Fig. 11a, there is still a soil layer of considerable thickness ($m/H = 0,9$) under the construction pit. As a result, the vacuum around the well is extended to a greater distance and thus the drawdown surface is removed from the well row, respectively, from the bottom of the pit, since the drawdown surface is lowered in such cases to a greater depth. If, on the other hand, the construction pit is gradually deepened, the situation as regards the drawdown surface is reversed. This was the reason for the increase of h/H .

At $m/H = 0$, i.e. once the construction pit was deepened to the impervious layer, the so far continuous seepage system developed into two separate systems (Fig. 11c). The seepage field containing the row of wells continues to be influenced by vacuum, while the other bounding on the opposite side of the construction pit is no longer a vacuum system, but one in which gravity and friction (in coarse-grained soils these are the principal forces) assume predominance. As far as hydraulics are concerned, this system represents the well-known seepage phenomenon towards a vertical slit.

The question to be answered by the designer now is to determine the depth to which the construction pit can be excavated for a given vacuum in the well. This problem has been extensively investigated using a single row of wells in different soils and results can be summarized as follows (Fig. 12): The ratio h/H is hardly affected by using a soil having a k -value of 10^{-3} instead of one of 10^{-4} cm/sec.

As a general conclusion it could be established that a single row of wells





Figs 11a-c. Hydraulic conditions with a row of wells at one side of the pit. $s/H = 1.70$, $l' = 20 \text{ cm}$, $m/H = 0.90$ (Fig. 11a); $s/H = 1.62$, $l' = 20 \text{ cm}$, $m/H = 0.47$ (Fig. 11b); $s/H = 1.60$, $l' = 20 \text{ cm}$, $m/H = 0$ (Fig. 11c)

at one side of the construction pit can be used where the ground water table is to be lowered to a relatively small depth only. Naturally, conditions of dewatering can be improved by reducing the spacing of wells.

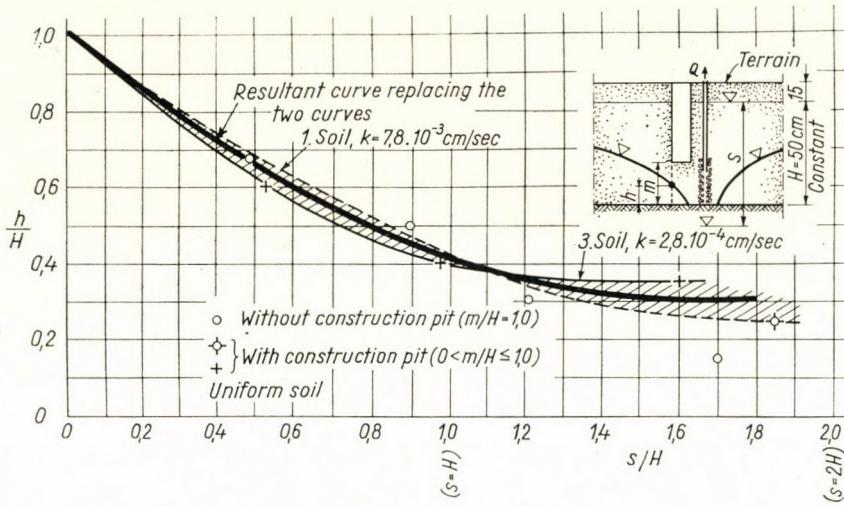


Fig. 12. Chart of the function $h/H = f(s/H, k) \cdot l^* = 20 \text{ cm}$

2.4. Vacuum wells with the perforated section penetrating into the impervious layer

The objective of these experiments was to furnish information on the advisability of extending the perforated well section into the impervious layer.

a) Hydraulic problems arising in connection with the operation of a well row at each side of the pit will be dealt with first. Conclusions derived can be summarized, with reference to Figs 13 and 14, as follows:

Rows of vacuum wells operated in this manner also create a two-dimensional seepage field (disregarding conditions developing in the immediate vicinity of the well).

The shape of the drawdown surface is entirely similar to that observed with the wells penetrating the water-bearing pervious layer only. In this case, however, the drawdown surface is situated a bit higher.

The difference between the two well designs becomes more significant when discharges are considered. The discharge Q' yielded by the well penetrating into the impervious layer at a vacuum $s/H \approx 1.0$ is in fact only about 60% of the discharge Q'' withdrawn from the other well type:

$$100 \frac{Q'}{Q''} \approx 60\%.$$

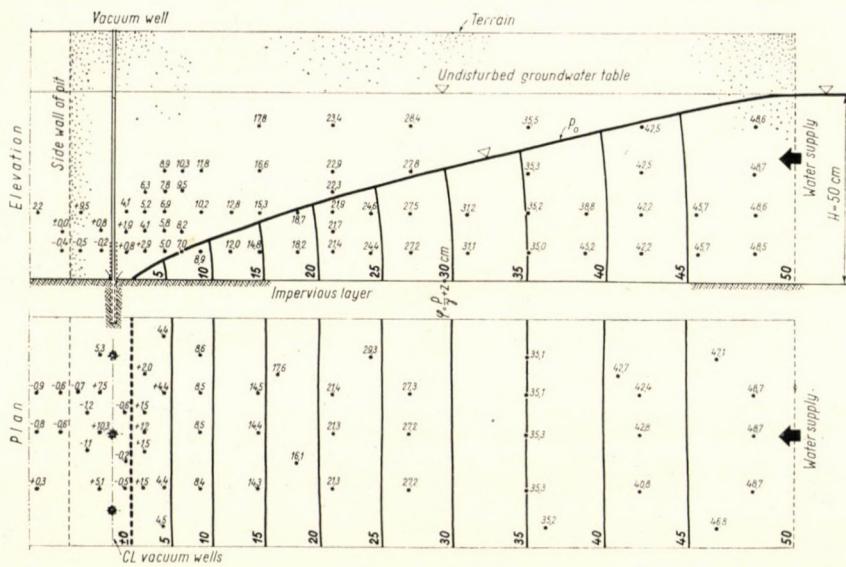


Fig. 13. Hydraulic conditions with vacuum wells extended on both sides into the impervious layer. $s/H = 1,10$, $l' = 20$ cm, $m/H = 1,0$

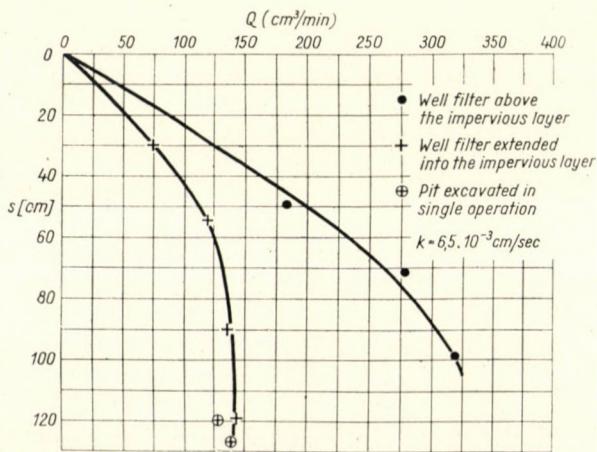


Fig. 14. Comparison of the discharge yielded by wells extended on both sides of the construction pit into the impervious layer, with the discharge of partially penetrating wells

The development of the dewatering process is obviously influenced by this difference. The following can be offered as an explanation for the reduction of discharge: the highest vacuum in the seepage system is created under the top of the impervious layer, rather than under it. Thus suction becomes effective in an upward direction, through the relatively thin annular space filled with gravel which forms the filter. In the seepage field in the immediate vicinity of the well mantle, flow conditions resembling those around a point-sink are created, and offer a resistance to seepage flow sufficient to account for the reduction of discharge mentioned above. This case may be regarded as a convincing illustration of the principle that in any seepage system the hydraulic role played by the smallest seepage cross section is of fundamental significance.

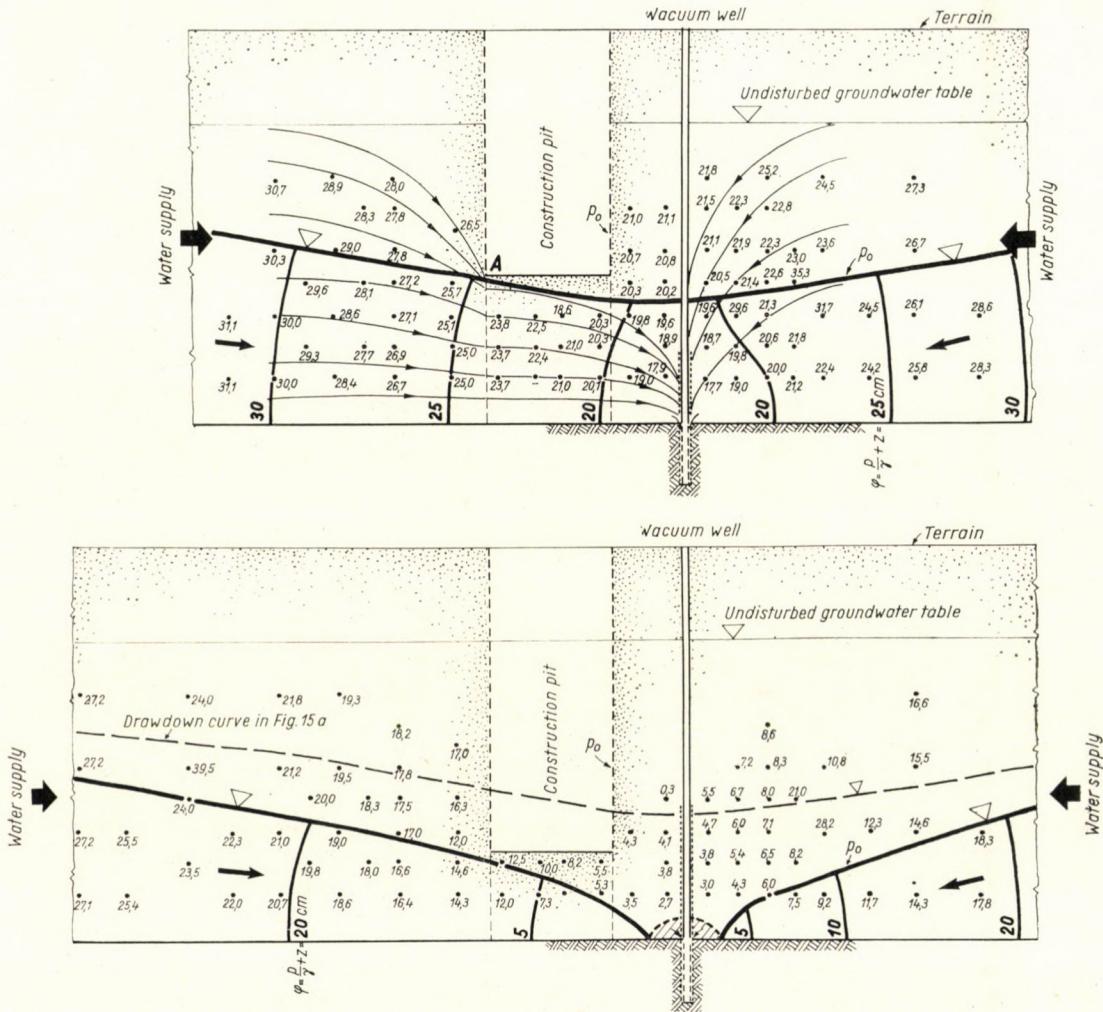
On the other hand, as far as the quantity of air entering the wells is concerned, the wells penetrating into the impervious layer are superior to those remaining above it. This circumstance can be traced back to the improved air-sealing properties of the capillary zone under these hydraulic boundary conditions.

From the information described above it was inferred that the use of well rows at each side of the pit, penetrating into the impervious layer, may be justified in coarse-grained soils where the entrance of excessive quantities of air is undesirable.

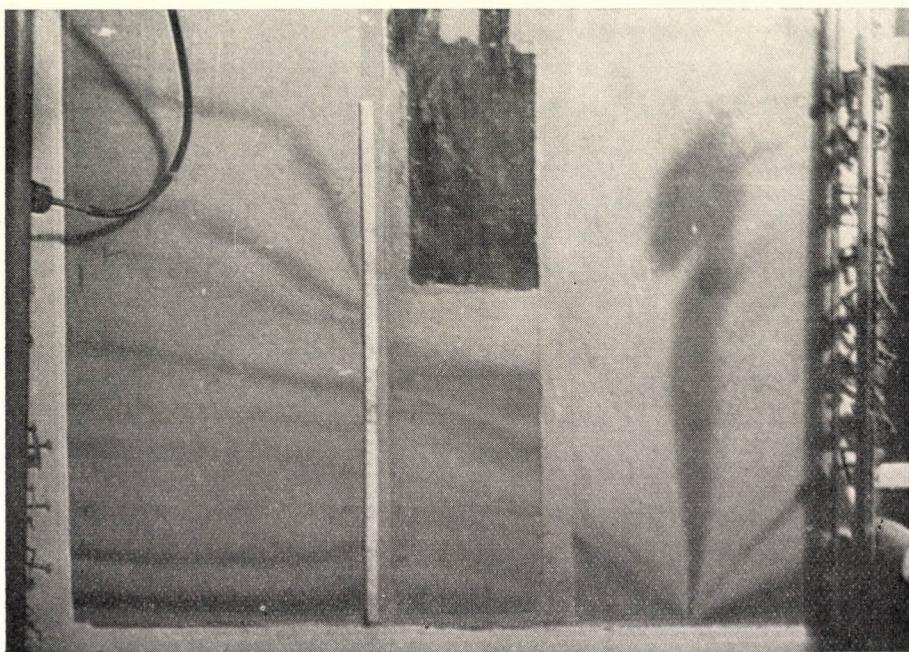
b) Hydraulic conditions arising during the operation of a single well row at one side of the pit will now be surveyed.

The drawdown surface pertaining to a vacuum $s/H = 0,91$ in the well is established at a relatively high level, as illustrated in Fig. 15a. The reason for this is that the surface of the gravel filter around the well draining the seepage system is small (12 cm high). No air was drawn into the wells, which consequently operated as well-points. It will be perceived that at the left-hand sidewall of the pit, at point A, the density of seepage flow lines originating from the three-phase field (the capillary zone) is increased (Picture 1).

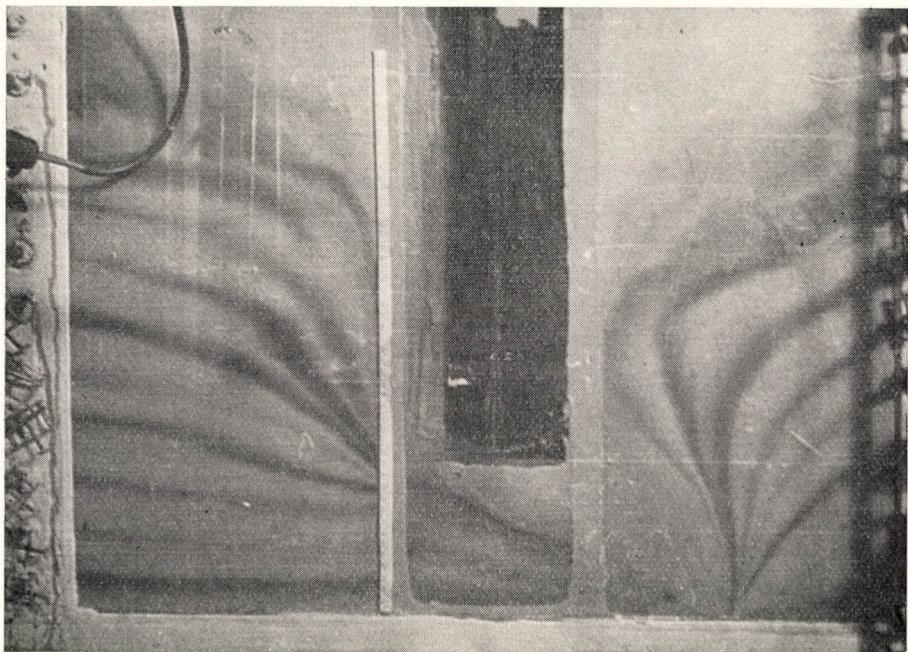
Hydraulic conditions pertaining to a vacuum $s/H = 1,92$ in the well clearly show the hydraulic features associated with the operation of vacuum wells penetrating into the impervious layer (Fig. 15b). In the vicinity of the well the extension of the vacuum field situated under the $\varphi = \pm 0$ line is relatively smaller than that observed at the same drawdown in the case of wells partly penetrating the pervious layer. Since, however, the depression in the well becomes effective in the impervious layer, i.e., at a deeper level, and drainage is effected there, the drawdown surface can be lowered in this case also, as indicated by Picture 2. The fundamental difference between the drawdown surfaces produced by well rows sunk to the two different mentioned depths is, that drawdown surfaces pertaining to wells penetrating into the impervious layer are situated higher at all vacuum values in the wells. At a



Figs 15a—b. Hydraulic conditions around a row of wells extended on one side of the pit into the impervious layer
 φ -distribution applies to the vertical plane at mid-distance between two adjacent wells.
 $s/H = 0,91$, $l' = 20$ cm, $m/H = 0,50$ (Fig. 15a); $s/H = 1,92$, $l' = 20$ cm, $m/H = 0,29$ (Fig. 15b)



Picture 1. Seepage flow lines pertaining to Fig. 15a



Picture 2. Seepage flow lines pertaining to Fig. 15b

ratio in the range $s/H = 1,0$ the difference has an order of magnitude of about 10 to 15% [21].

The analysis of discharge data leads to the following conclusion:

An important fact demonstrated by the rating curve is that discharges practically cease to increase in the range

$$\frac{s}{H} \geq 1,4.$$

This is probably due to the considerable drop in the air-sealing properties of the capillary zone, which occurs in this range (in soils having a permeability coefficient $k \sim 10^{-3}$ cm/sec). This is indicated by the relatively narrow vacuum field around the well in Fig. 15b. Consequently, vacuum becomes effective primarily in the vertical direction.

Comparing discharge data from the two types of well, it can be observed that in the range $s/H = 1,0 \sim 1,5$ the discharges yielded by the wells penetrating into the impervious layer are only about 60 to 70% of that withdrawn from the other well type. The progress of dewatering in time is slightly modified by this circumstance.

As a conclusion it can be established that vacuum wells penetrating with their perforated section into the impervious layer become — from the point of view of hydraulics — especially advisable, when the intention is to exploit the air-sealing properties of the capillary zone. Operation of the dewatering equipment may be more trouble-free in such cases.

2.5. Process and conditions of air flow to vacuum wells

Certain quantities of air are inevitably entrained in vacuum wells. In the strict sense of the word, pumping of an air-water mixture from the wells can only be considered. Conditions of air intake investigated as characteristic are illustrated in Fig. 16. A single row of wells is located at the side of the construction pit. The impermeability coefficient of the soil is $k = 7,8 \times 10^{-3}$ cm/sec (soil type No. 1). Three characteristic conditions will be considered:

Case 1. $m/H = 0,90$, $s/H = 1,70$. Air drawn into the well originates from three different sources, which can be distinguished with the aid of curve 1.

a) Relatively large quantities of air are drawn into the soil through the terrain surface lying to the right of the construction pit. This was indicated by experiments in which smoke was used as tracer material [21]. In a direction perpendicular to that of the construction pit the rate of intake (v , cm/min) is variable, as indicated by curve 1, with the highest rates occurring at the terrain surface slightly to the right of the well row. This should be expected, since excavation of the construction pit has been started and its bottom is

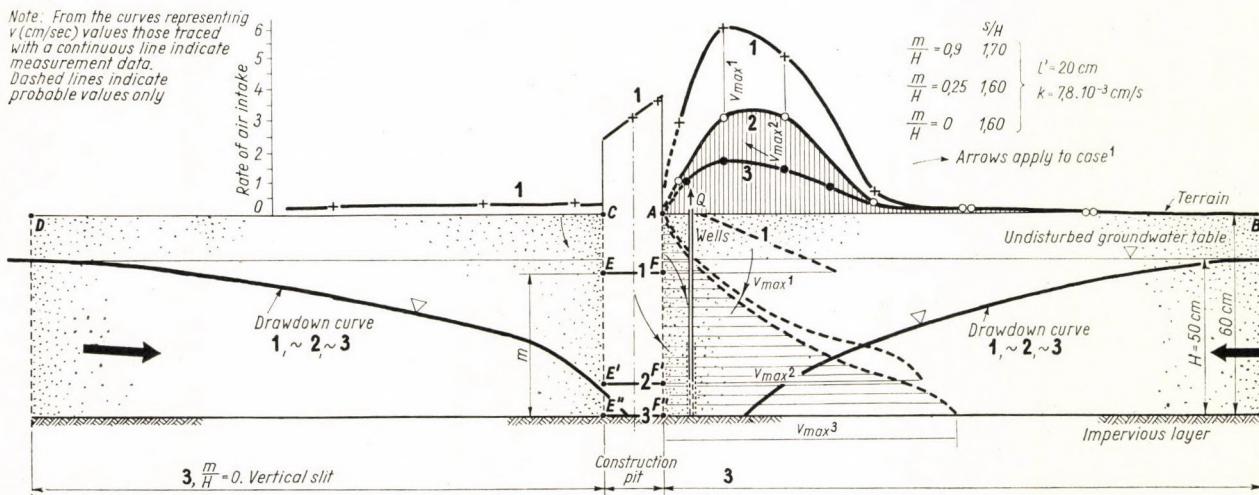


Fig. 16. Air intake at different boundary conditions. $s/H = \text{const}$

closer to the perforated well section than the terrain surface. Highest intake rates might occur at the centerline of the well if no excavation had taken place from the construction pit. The distance over which appreciable air intake occurs is largely comparable to the depth of the well bottom under the terrain.

b) Highest intake rates occur at the bottom of the construction pit. This was to be anticipated, since this is the closest to the perforated well section.

c) As a consequence considerations outlined under a) and b), the development of flow conditions over the surface between points *A* and *F*, as indicated by the dashed line of curve 1, may well be assumed.

d) Only a negligibly small quantity of air is drawn in from the terrain surface at the farther side of the construction pit.

Case 2. $m/H = 0,25$, $s/H = 1,60$. Vacuum in the well is slightly reduced in comparison to the former value, since owing to the deeper excavation of the pit more air is given the opportunity to enter the well. Relying on curve 2, which is characteristic of the rate of air intake, the following conclusions can be arrived at:

a) Over the terrain surface lying to the right of the construction pit intake occurs very similarly to the case illustrated by curve 1, however, at a reduced rate. This follows from the fact that owing to the greater depth of the construction pit the principal direction of air intake became perpendicular to the vertical side wall of the pit, i.e. horizontal.

b) No significant air intake occurs from the bottom of the pit, indicating that the bottom is excavated to the greatest possible depth from the point of view of dewatering, since the region under the bottom is practically a two-phase one.

c) From point b) it follows that — as demonstrated also by experiments — no intake of air occurs between points *C* and *D*.

d) Through the surface of the construction pit between *A* and *F'* the intake of air follows probably according to the indicated curve 2.

Case 3. $m/H = 0$, $s/H = 1,60$. Information on this case is contained in curve 3. In comparison with the former cases the situation became simpler:

a) The character of seepage through the soil surface between points *A* and *B* is the same as in the two previous cases, but its rate is reduced because of reasons already explained.

b) Between points *A* and *F'* on the side wall of the construction pit air intake follows probably according to that illustrated by curve 3.

Conclusions arrived at in connection with Fig. 16 must not be extended to soils having an arbitrary k value, since conditions of air intake may be significantly affected by the air-sealing properties and functions of the capillary zone [21, 24]. These conclusions were fully verified by experiments carried out using a soil with a permeability coefficient $k = 2,8 \times 10^{-4}$ cm/sec (soil type 4), which revealed fundamental differences with respect to seepage conditions

in soils having a permeability coefficient of 10^{-3} cm/sec order of magnitude [21].

Under conditions prevailing in Fig. 16 the seepage system may be divided into the following characteristic parts (Fig. 17):

$\alpha)$ The space denoted as I under the drawdown surface (acted upon by the atmospheric pressure p_0) is a two-phase region.

$\beta)$ After passing through the drawdown surface, water particles through

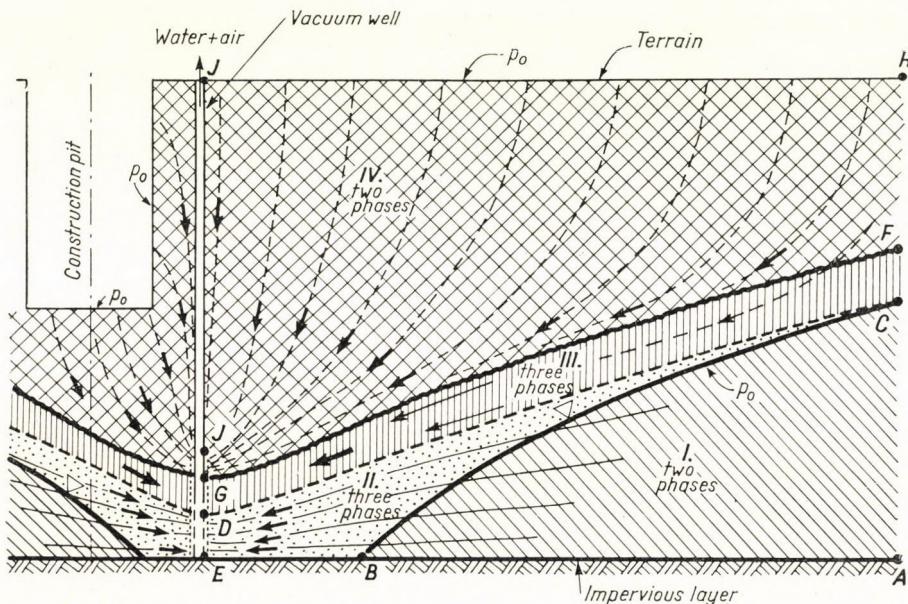


Fig. 17. Typical hydraulic conditions around the row of vacuum wells in the case of air motion

the three-phase region denoted as II attain the part of height DE of the perforated well section.

$\gamma)$ The capillary zone (denoted III), which is essentially a three-phase region, is situated above this space.

$\delta)$ The space through which air is drawn to the part of height GJ of the perforated well section, is situated at the top. Inasmuch as there are no significant water quantities between the soil particles, this region may be considered — from the point of view of hydraulics — approximately as a two-phase one.

2.6. Pressure distribution in a seepage field involving vacuum wells

2.6.1. As demonstrated by earlier researches [23], the movement of air in a granular medium can be described within certain ranges of movement with the aid of Laplace's equation for irrotational motion, i.e., the flow-net

approach to seepage can be applied. From the theoretical works of LEJBENZON, MUSKAT and BOTSET it is well known that for the movement of air in a granular medium Laplace's equation assumes the form

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} = 0.$$

The equation applied to the motion of fluid has the form

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0.$$

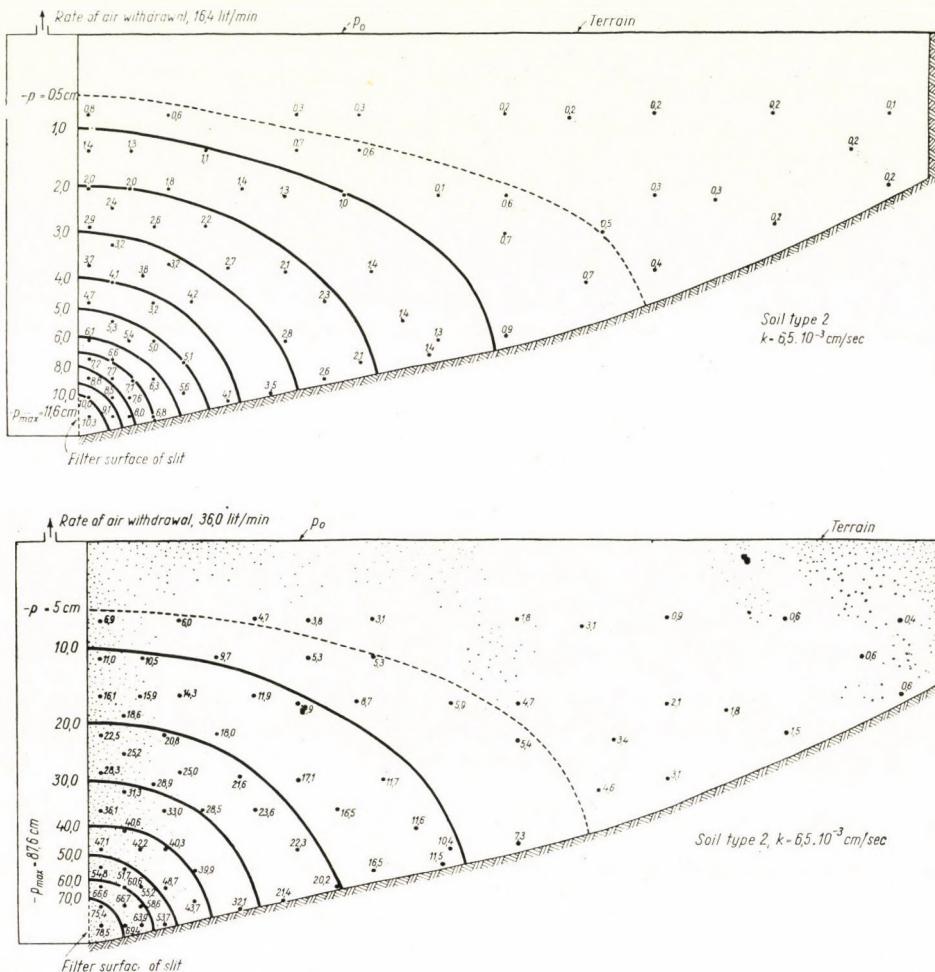
The difference between the two is that in the case of air flow the pressure value p^2 must be substituted instead of p . Thus it follows that the flow of different fluids, including air, yields to a relationship of general validity.

It should be obvious from the foregoing that the motion of air in the soil pores is also accompanied by a head loss (Figs 18a—b): the vertical slit exemplified is perforated over its lower part. As a result of the vacuum created therein, air is drawn through the soil surface under the atmospheric pressure p_0 .

A comparison of lines connecting points of equal pressure in Figs 18a and b will reveal the similarity of these lines, (i.e., the shape of the flow-net remains practically unchanged) but the pressure values pertaining to individual pressure lines show changes corresponding to the vacuum created in the slit. This conclusion would be entirely correct also in the case where instead of air, water would be drawn into the slit. The soil e.g. should be filled up to terrain level with water and the waterlevel on the soil surface should be permanent. The shape of pressure lines pertaining to seepage remains the same as in Figs 18a—b after a depression is created in the slit. Thus it follows that both the flow of air in the granular medium and the seepage of water yield to the laws of potential motion. It should be added that this conclusion was verified at the Building Research Institute by L. MOLNÁR in a model relying on electric analogy for its operation. There is a full agreement between observed pressure and the corresponding air-flow data.

The validity of the flow-net approach is demonstrated convincingly by Fig. 19. With the notations given in the auxiliary diagram, the depth m below the terrain surface of points along the wall is plotted on the horizontal axis, while percentage values of pressures ($-p$) prevailing in the corresponding points are indicated on the vertical axis. Pressure in this case is identical with potential, since the specific gravity related to air is $\gamma \approx 0$. In this coordinate system measured values, pertaining to arbitrary vacuum values in the slit, fit well to the same curve, regardless of the k coefficient of the soil used in the experiment. Consequently the shape of potential lines remains unchanged, although the lines assume different values.

2.6.2. In the knowledge of potential distribution for air flow the resultant potential distribution in the seepage system created by vacuum in the wells, can be traced (Fig. 20). The main features of this system can be summarized as follows:



Figs 18a—b. Potential distribution in the case of air suction from the vertical slit (vacuum levels in the two figures are different)

a) In the region between points *A*, *B* and *C* the value of p/γ is positive, since this region is situated below the surface of pressure p_0 .

b) In the region included between the lines *CD*, *DE*, *EF* and *FB* and situated above the curved line connecting points *B* and *C* (along which line the atmospheric pressure p_0 is prevalent) p/γ values are negative (the p/γ level is below the elevation of the point considered).

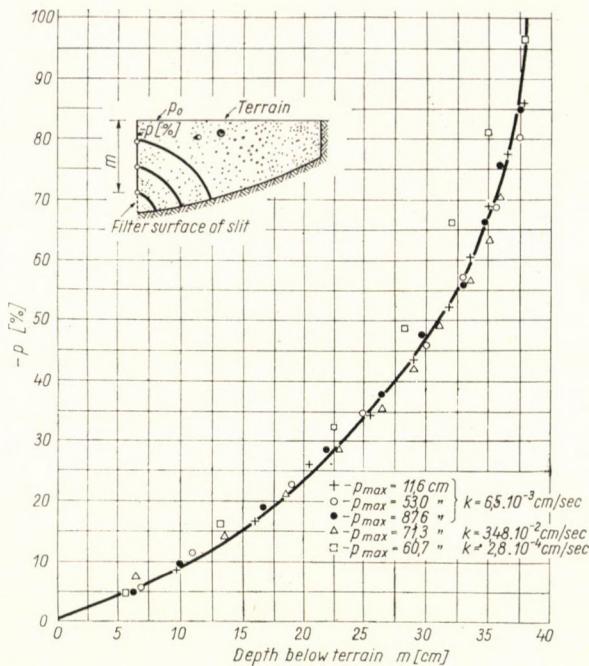


Fig. 19. Evidence for the validity of the flow pattern

- c) In the region bounded by the lines A, D, E, G and H negative p/γ values prevail.
- d) The pressure acting on the terrain surface is p_0 .

Information on pressure distribution offers the possibility of studying the model law relating to dewatering with the aid of vacuum wells. The general features of air- and water seepage being known, a reasonable, hydromechanically correct comparison of phenomena observed at different scales should encounter no obstacles.

3. Dewatering of a construction pit excavated in non-uniform soil with the help of vacuum wells

Experiences gained in the course of dewatering operations in many cases showed the difficulties encountered because of the non-uniformity of the soil. In such soils hydraulic conditions of dewatering are more involved than those occurring in uniform soils. For this reason it was felt necessary to extend investigations to this aspect of the problem as well. The subsequent part of the paper will be concerned with particularities of dewatering processes in non-uniform soil profiles, as illustrated in Fig. 21.

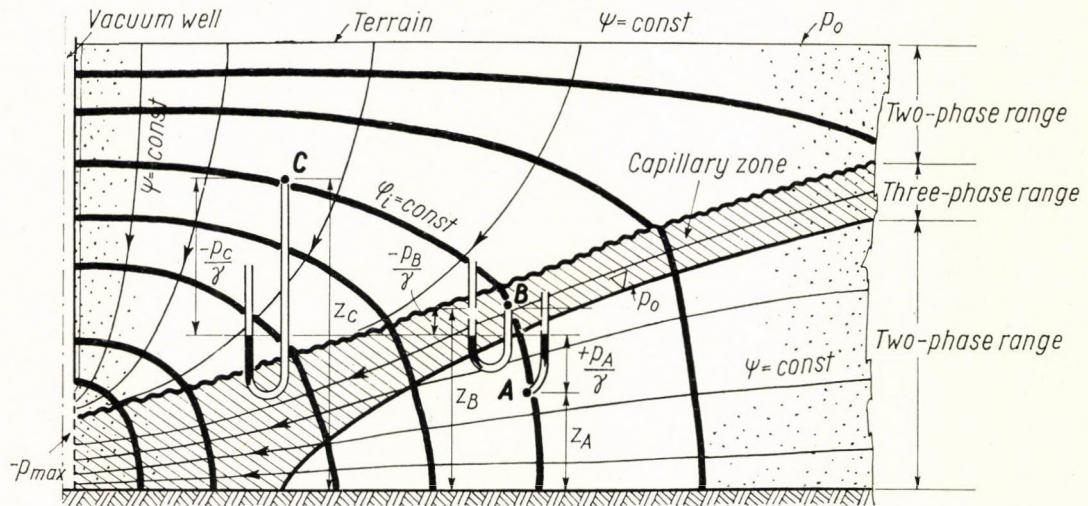
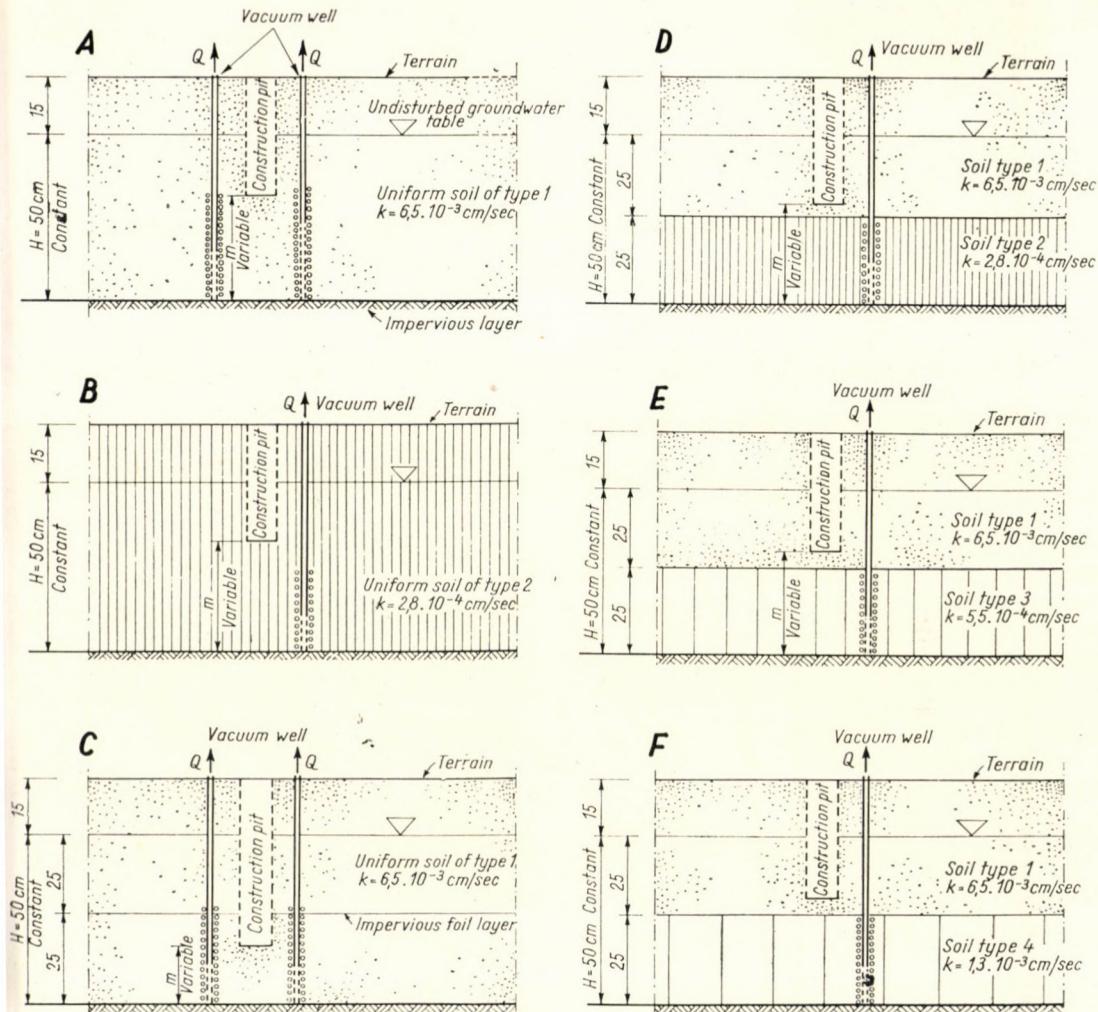


Fig. 20. Potential distribution in the system involving vacuum wells with water and air moving simultaneously (the soil is coarse-grained, k is of 10^{-3} to 10^{-2} order of magnitude, no capillary air sealing is effective). Schematic diagram

Fig. 21. Particulars of soil profiles. $l' = 20 \text{ cm}$

3.1. Description of studied non-uniform soils

The considered soil profiles can be grouped as follows:

- A) Uniform soil of type 1. Furnishes basic information for comparison with seepage phenomena in non-uniform soils.
- B) Uniform soil of type 2. Furnishes also basic information for comparison with seepage phenomena in non-uniform soils.
- C) At mid-depth of a uniform, permeable layer a thin, horizontal impervious layer of plastic foil is placed.
- D) The upper part of the permeable layer consists of soil type 1, while the lower of soil type 2. The ratio of the respective permeability coefficients is $k_f/k_a = 23,2$.
- E) The upper part of the permeable layer consists of soil type 1, while the lower of soil type 3. The ratio of the respective permeability coefficients is $k_f/k_a = 11,8$.
- F) The upper part of the permeable layer consists of soil type 1, while the lower of soil type 2. The ratio of the respective permeability coefficients is $k_f/k_a = 5,0$.

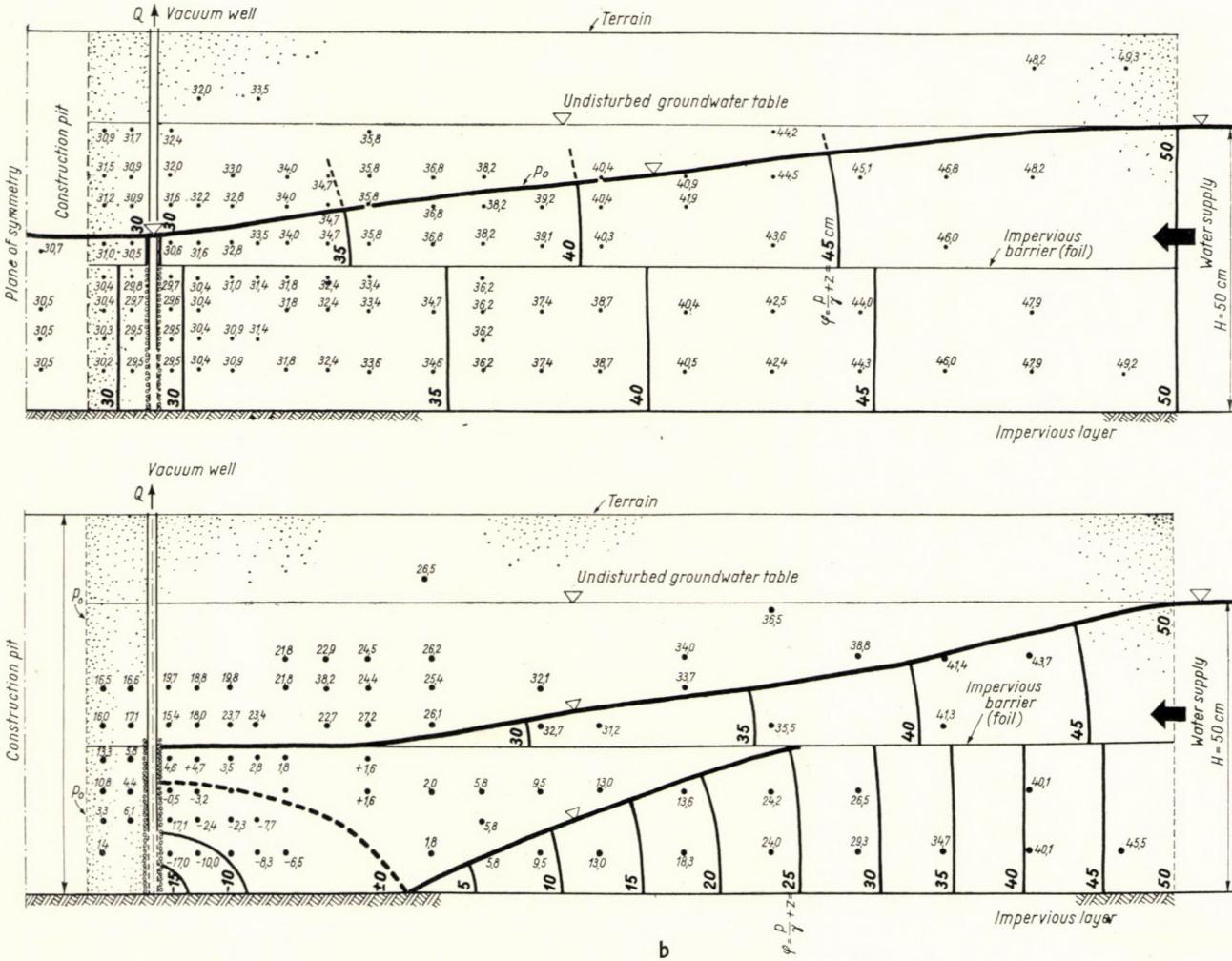
3.2. Effect of a thin impervious layer in a uniform aquifer

In the series of experiments C shown in Fig. 21, a thin, horizontal impervious layer is located at mid-depth of the ground water layer having a constant thickness of 50 cm. The ground water layer of depth H is transformed by this impervious stratum into two discreet systems revealing independent behaviours. Communication between the two systems is possible only through the annular, gravel-filled ring filter around the wells. Owing to the presence of an intermediate impervious barrier, dewatering must be realized with the help of a well row at each side of the construction pit.

As long as vacuum in the wells remains moderate (the value expressed as height of water column does not exceed $H/2$), hydraulic properties of the seepage system resemble those observed in the absence of an intermediate impermeable barrier, i.e. in uniform soil. This is readily understandable by taking into consideration that for water particles moving above the intermediate impervious barrier the vertical component of the corresponding velocity vector is significantly smaller than their horizontal component (Fig. 22a).

At vacuum values increased beyond $H/2$ it was noted with interest that free drawdown surfaces developed in both the upper and the lower strata. On both drawdown surfaces the atmospheric pressure p_0 was prevalent (Fig. 22b).

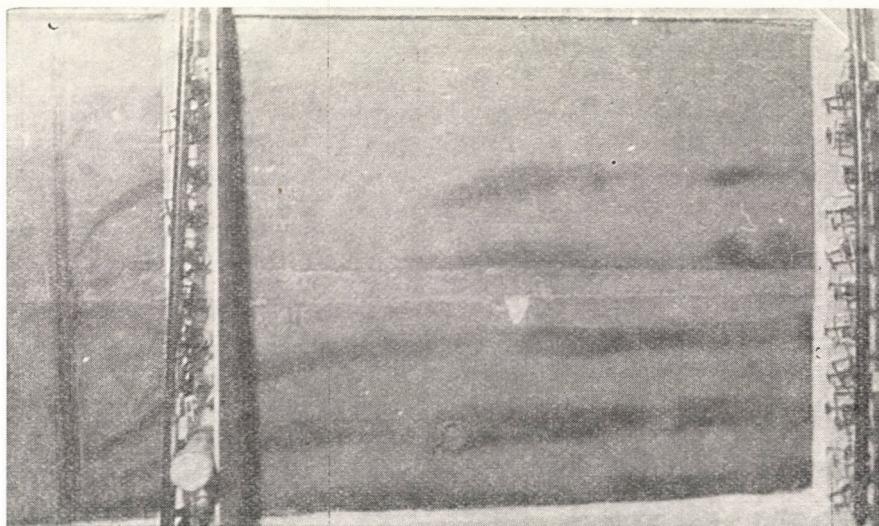
In the upper stratum the depth of the two-phase water layer becomes practically zero in the closer vicinity of the well row. Thus it follows that water



Figs 22a—b. Potential distributions in the presence of an intermediate impervious barrier for smaller depressions in the well. $s/H = 0,404$ and $1,68$, $m/H = 1,0$ and 0 , $l' = 20 \text{ cm}$

from the upper stratum is conveyed by a three-phase seepage system to the ring filters surrounding the wells. Since the wells were spaced at $l' = 20$ cm, and other conditions permitted excavation of the construction pit down to the impervious sublayer, this meant that all the water from the upper stratum could be conducted through the ring filter to the perforated well section (Picture 3).

Flow lines originating from the two-phase seepage field intersect the free drawdown surface in both the upper and the lower stratum. Water entering through the gravel ring filter into the lower stratum was observed to spread



Picture 3. Seepage flow lines pertaining to the [hydraulic] conditions in Fig. 22 b

first in a fan-like manner in the vacuum space forming the closer environment of the wells. Subsequently these water particles joined the path of seepage towards the well from the lower stratum and thus were conveyed to the perforated well section. The development of this particular seepage pattern is obviously also affected by air moving towards the wells. From these observations it became apparent that under the conditions prevailing, the suction effect from the lower stratum was adequate for the complete drainage of the upper stratum. In this process the contribution of air drawn in through the lower part of the pit side wall and flowing through the pores, may be assumed to be significant, as the conveyance of water to the drainage points is promoted thereby.

In fine soils having a permeability coefficient lower than $k = 10^{-3}$ cm/sec used in these experiments, complete drainage of the upper stratum through the gravel ring filters surrounding the wells is less likely to occur.

In such cases the vacuum space developed in the soil around the gravel ring filter at the level of the intermediate barrier, is no longer sufficient to induce complete drainage. Development of this situation is supported by taking the fact into consideration that owing to the air-sealing effect of the capillary zone, decreasing quantities of air are admitted through the soil layer above the impervious barrier to the gravel filters. Through the capillary zone above the gravel filter water may proceed to the side wall of the construction pit, and may even appear on the face at the height of the impervious barrier.

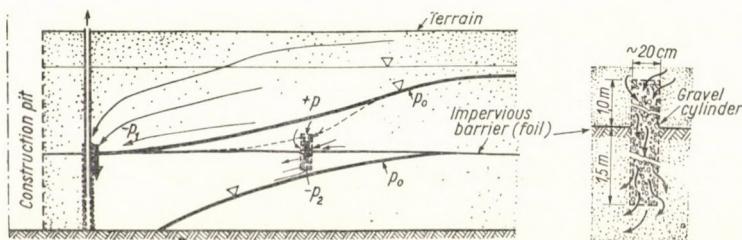


Fig. 23. Alternative designs and arrangements of gravel cylinders for drainage

Dewatering may be solved by two alternative solutions:

- By reducing the well spacing, with the objective of intercepting all seepage water before the construction pit and conveying it to the perforated well section.
- The same objective can be achieved by the gravel cylinders illustrated in Fig. 23. These are widely used in engineering practice both at home and abroad for a variety of purposes. Their application in dewatering operations using vacuum wells is also advisable, for besides the possibility of a technically sound solution, they prove to be economical as well.

For deciding on the location of gravel cylinders, optimum drainage conditions must be determined. As will be perceived from the figure, gravel cylinders can be located in the immediate vicinity of the well row (eventually between the wells of a row, e.g. at point 1), or at a greater distance from the well row (point 2, unless there are interfering buildings or other structures).

Discharge data are contained in Fig. 24. Discharges obtained in the presence of an intermediate impervious barrier can be compared fairly well with corresponding values obtained for uniform soils. (The comparison is of an approximating character, since seepage factors involved in the development of individual curves were not identical.)

As revealed positively by the central rating curve, the effect of non-uniform soil conditions resulting from the presence of the intermediate barrier, assumes significant proportions when the drawdown s exceeds $H/2$ (at $s \sim$

$\sim 0,7 H$), inasmuch as it is this part of the curve which departs from the rating curve representing uniform soil conditions.

From the comparison of the two curves representing the presence of an intermediate barrier, it will become apparent that any increase of well spacing in the row is accompanied by a reduction of the water volume which can be withdrawn from a band of the same width.

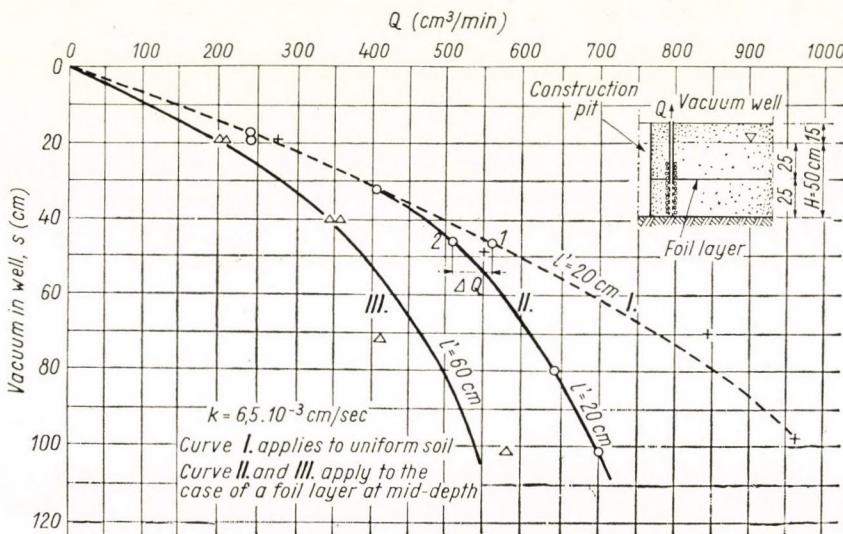


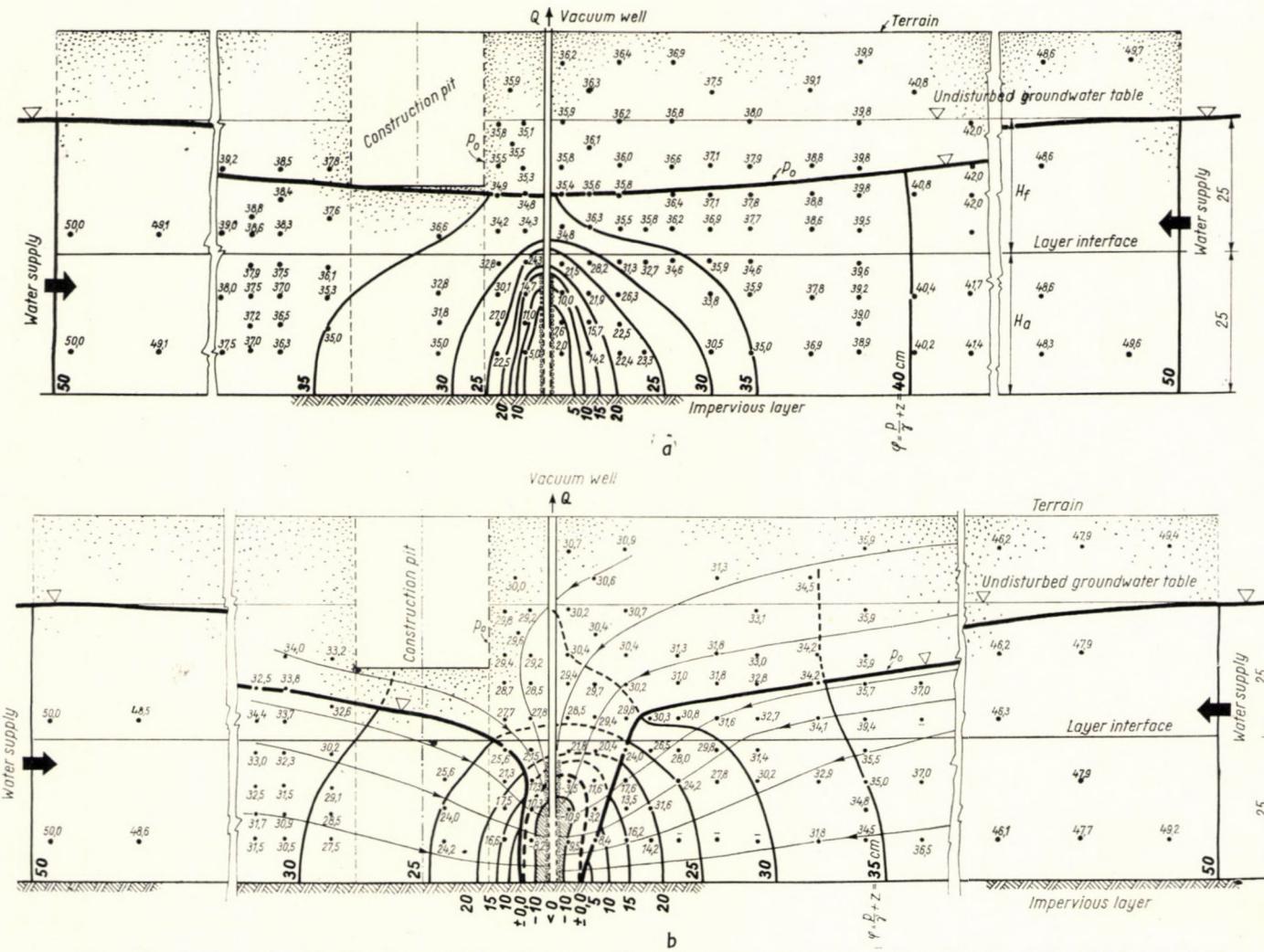
Fig. 24. Discharge data

3.3. Conditions of dewatering in a horizontally stratified aquifer

Conditions of dewatering occurring in soil profiles denoted *D*, *E* and *F* in Fig. 21 will be considered in greater detail below.

Dewatering with the aid of a single row of wells at one side of the construction pit is illustrated in Figs 25a–b. At first glance these diagrams will already reveal fundamental differences with respect to hydraulic conditions discussed so far. Conclusions derived from these figures can be summarized as follows:

- In the range of smaller depressions in the well the drawdown surface can only be lowered very little. As demonstrated by Fig. 25a the drawdown surface occupies high position even at a ratio $s/H = 1,06$. (In a uniform layer the drawdown surface was already removed from the perforated well section at this depression! [21, 23]) The reason for this is that the lower layer, which is less permeable than the upper one, offers a higher hydraulic resistance to seepage. Therefore, water is conveyed in the upper layer to the well row, and it is only in the vicinity of the latter that water particles begin



Figs 25a–b. Potential distribution and development of the drawdown surface in soil profile D. $s/H = 1.06$ and 1.68

to move downward, towards the perforated well section. Hydraulic conditions could not be improved appreciably by extending the gravel filter surrounding the well, up in the upper layer, since water would continue to seep from laterally both directions in the upper layer to the single row of wells.

b) In the range of higher depressions the extension of the vacuum space around the well is conspicuously smaller than in the case of a uniform soil [33]. This is clearly supported by Fig. 25b.

The reason for this is that the vacuum space formed is practically drowned by water from the upper layer. Along the layer interface no wide band is

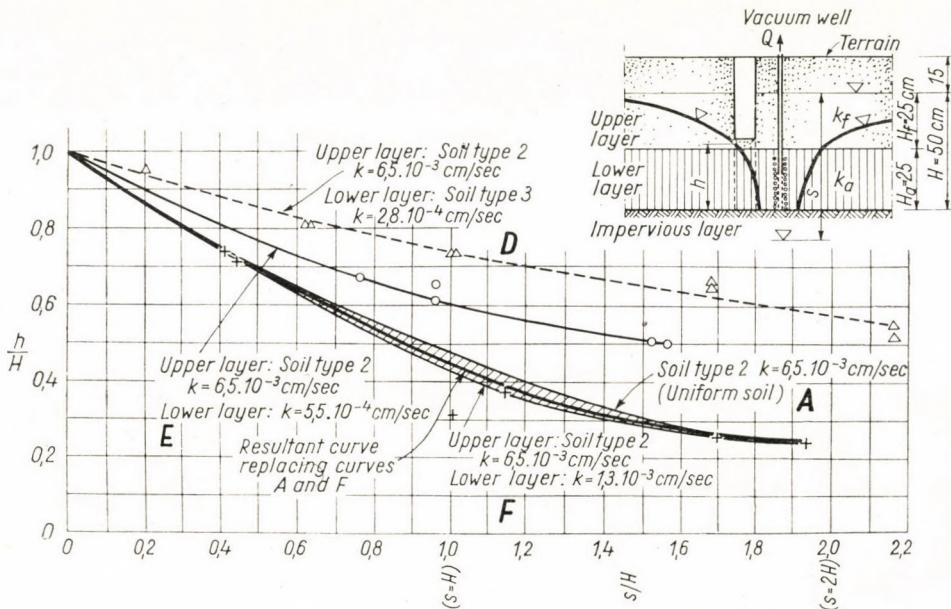


Fig. 26. Interpretation of the function $h/H = f(s/H, k_f/k_a)$ for the soil profiles A, D, E and F

formed through which air could find access to the wells, and thus air in the granular medium has no opportunity of spreading and thus to displace the drawdown surface downward and laterally. In the case shown in Fig. 25b, some air was already being drawn into the wells, which was a result of deepening the bottom of the construction pit. Evidently a slight discontinuity already developed in the capillary zone.

c) As revealed by Fig. 25b, the air sealing properties of the capillary zone are effective.

d) With a row of wells contemplated at one side of the construction pit only, the deepest elevation to which the bottom can be excavated will be obtained by examining the functional relationship (Fig. 26)

$$\frac{h}{H} = f\left(\frac{s}{H}, \frac{k_f}{k_a}\right)$$

Comparing curve *A* relating to a uniform layer of soil type 1 ($k = 6,5 \times 10^{-3}$ cm/sec) with that relating to the top soil profile denoted *D*, it will become apparent that deepening of the construction pit is adversely influenced by the presence of the lower layer of low permeability. The effect of the latter is that the drawdown curve in the vertical of the value h (for an explanation of notation reference is made to Fig. 26) is not lowered below the interface between the two layers, but remains permanently in the upper layer. The situation would hardly be better if the gravel filter would be extended into the upper layer, since seepage flow in the upper layer would still remain essentially horizontal in the vicinity of the wells and the construction pit.

Thus high h/H values are indications of the circumstance that in the case of a ratio $k_f/k_a = 23,2$ the height of the layer interface above the impervious sublayer is of decisive importance for dewatering the construction pit.

Further evidence gained during continued investigations also corroborated to the conclusion according to which, in the study of the role played by the ratio h/H , the fundamental problem consists in solving the functional relationship

$$\frac{h}{H} = f\left(\frac{s}{H}, \frac{H_f}{H_a}, \frac{k_f}{k_a}\right)$$

(for an explanation of notations reference is made to Fig. 26). Investigations were based on the assumption of $H_f = H_a$ (Fig. 25a). Quite obviously, conditions for dewatering deteriorate if

$$H_f < H_a.$$

In the case of a well row at each side of the construction pit, dewatering occurs under conditions which are slightly better than in the case of a single row at one side of the pit only.

From the information gained during the model tests described above, the general conclusion can be arrived at that in every case, where preliminary soil explorations indicate a ratio between permeability coefficients of the upper and lower layers

$$k_f/k_a \approx 20,$$

i.e. one of a relatively high order of magnitude, adverse conditions for dewatering are to be anticipated, since seepage conditions are greatly influenced by the non-uniformity of the soil.

For

$$k_f/k_a \rightarrow 1$$

the permeable soil becomes of an increasingly uniform structure. The fundamental problem for the designer is to determine the ratio beyond which the soil may be regarded as uniform.

In the case of the soil profile denoted *E*, the difference over profiles considered so far is that the lower layer is of a coarser gradation. Thus the ratio of permeability coefficients is also lower:

$$\frac{k_f}{k_a} = \frac{6,5 \times 10^{-3}}{5,5 \times 10^{-4}} = 11,8 .$$

As far as the drawdown surface is concerned, the situation has improved over that in series *D*, inasmuch it could be lowered to a slightly lower level. At low vacuum values, however, conditions are still appreciably poorer than in the case of uniform soils, because the drawdown surface is still situated above the layer interface. (The depth of the construction pit can, of course, be increased over that shown in the figure.)

At a ratio $s/H = 1,50$ the situation becomes more favourable. The region affected by vacuum around the well is considerably larger than at comparable drawdown values in the wells of series *D* (Fig. 27).

The role of the capillary zone, however, must still be regarded as unfavourable. This conclusion is verified by Fig. 27, from which it is to be seen that flow lines in the capillary zone tend to prevent deepening of the construction pit.

Even the ratio $k_f/k_a = 11,8$ is to be qualified as adverse for dewatering with the help of a single row of wells (Fig. 28). In fact, h/H values are, in the entire range of s/H values, appreciably higher than those observed in the case of a uniform soil, thus clearly demonstrating that the depth to which the construction pit can be excavated is limited. The effect of the non-uniform character of the soil is still considerable in seepage conditions, inasmuch as the drawdown surface is still in the upper layer on the left-hand side of the construction pit, which is away from the row of wells.

Seepage conditions occurring at the ratio

$$\frac{k_f}{k_a} = \frac{6,5 \times 10^{-3}}{1,3 \times 10^{-3}} = 5$$

should be eventually considered (Fig. 28). This soil profile, denoted *F*, offers much better conditions for dewatering than the two previously discussed.

a) The vertical position and shape of the drawdown curve are exactly similar to the familiar ones observed in uniform soils. The drawdown surface has no steeply inclined section in the vicinity of the well indicating that water arriving from the upper layer is conveyed into the well by the lower one,

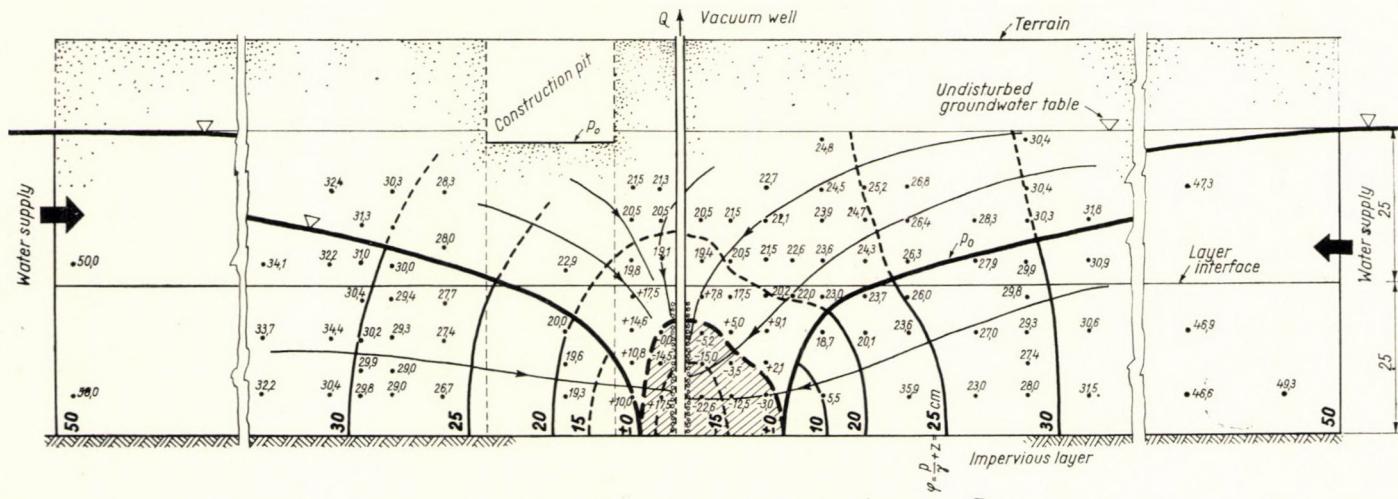


Fig. 27. Potential distribution and development of the drawdown surface in soil profile E. $s/H = 1,52$

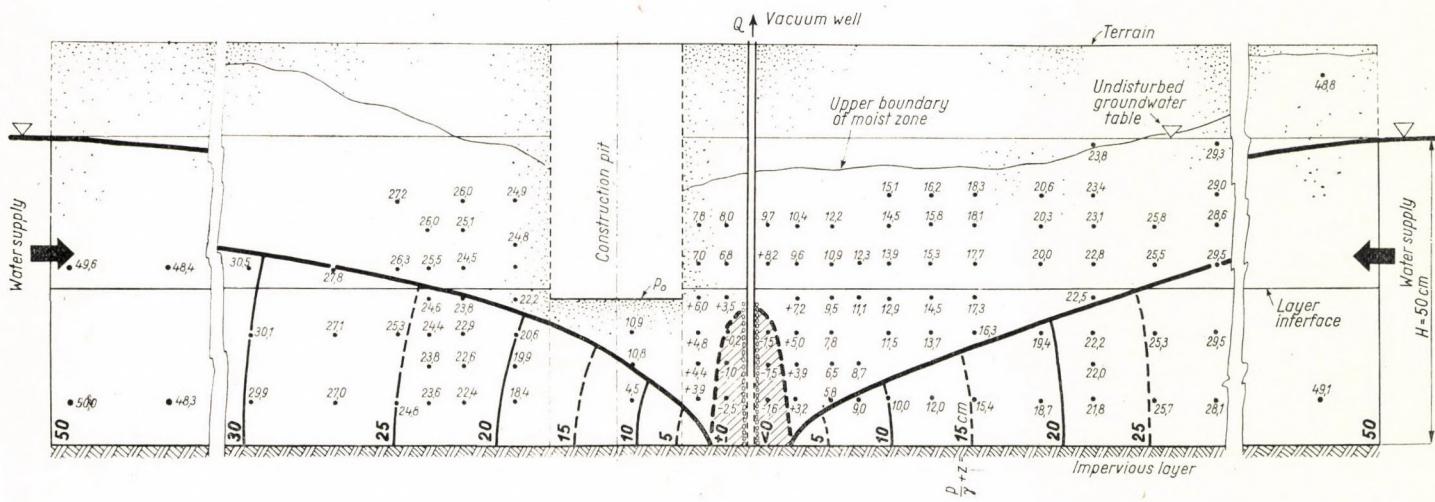


Fig. 28. Potential distribution and development of the drawdown surface in soil profile F. $s/H = 1,13$

without offering any significant resistance to its passage. True, the permeability coefficient of the lower layer is again smaller than that of the upper layer, but the important circumstance should be noted that vacuum is created also within the granular soil surrounding the wells. The hydraulic effect thereof may be regarded as equivalent to an increase of the permeability of the lower layer. Consequently, the vacuum around the well contributes, in the case of the soil profile under consideration, to the development of hydraulic conditions which would otherwise occur in a uniform soil. At a ratio $k_f/k_a \approx 20$ this effect

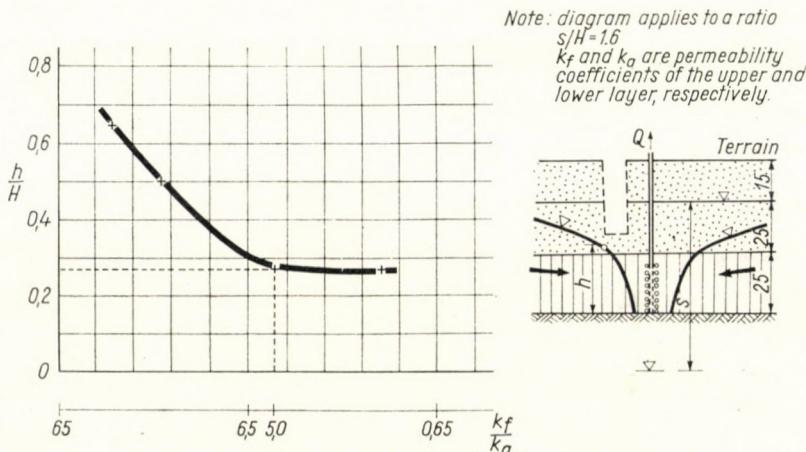


Fig. 29. Chart of the function $h/H = f(k_f/k_a)$

was not apparent. The situation was the same at a ratio $k_f/k_a \approx 10$, although h/H became smaller here.

b) The depth to which the construction pit can be excavated, can be decided on the basis of curve *F* in Fig. 26. As revealed by a comparison of this curve with curve *A*, the two curves are practically identical, so that a soil profile corresponding to the ratio $k_f/k_a \approx 5$ may be regarded as uniform as far as dewatering with vacuum wells is concerned. This conclusion is also demonstrated by Fig. 29, which illustrates the relationship

$$\frac{h}{H} = f\left(\frac{k_f}{k_a}\right).$$

(It will be noted that the figure applies to the case, where the thicknesses of both the upper and the lower layers are constant: $H/2$.) The figure gives a clear demonstration of the necessity of determining, on the basis of preliminary soil explorations, the permeability coefficient of individual layers. The ratio

of these will give information on the magnitude of difficulties likely to be encountered as a result of soil stratification during dewatering operations.

In specifying the equation of the set of curves shown in Fig. 26, the values s/H , k_f/k_a and h/H should be introduced as dimensionless parameters. With the aid of the correlation, the relationship between these parameters was found to be

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{1,264}{\sqrt{k_f/k_a}} \left(\frac{s}{H} \right)^{0,75}$$

(valid for the range $k_f/k_a \gtrsim 10$). In developing this equation it was tacitly assumed that the process of dewatering is a two-dimensional one. In practice this assumption is usually permissible, since previous investigations [33] revealed the similarity between hydraulic conditions occurring in the case of dewatering with the help of vacuum wells and those ensuing around vertical slits.

In determining the depth to which the bottom of the construction pit can be excavated, the value h calculated from the above equation should be increased by about 20 to 30 cm, depending on the grain-size distribution of the soil, to take care of effects due to the capillary zone.

From the above equation it should become apparent that beyond a ratio of about $k_f/k_a \approx 5$ the construction pit can hardly be excavated or dewatered to the desired depth, especially if the thickness of the lower layer H_a is larger than that of the upper one, H_f . The solution in similar cases may first of all consist in the application of two well rows. However, even in this case it is impossible to excavate the construction pit down to the impervious layer if the well spacing of $l' = 20$ cm (corresponding in the prototype to about 1,20 m) is adhered to. The greatest depth (in the model) to which the soil could be excavated was $0,2 H$ above the impervious layer. The reason for this is the considerable wetting effect of the capillary zone, further that the very fine grained soil under the excavated construction pit tends to hold absorbed water. As a result of the atmospheric pressure p_0 acting on the bottom of the pit, no significant vacuum can be created there.

One of the prerequisites of excavating the construction pit down to the impervious layer is very likely a reduction of the well spacing.

It should be noted that in a uniform soil layer having a permeability coefficient $k = 2,8 \times 10^{-4}$ cm/sec, the pit could be excavated without difficulty to the impervious layer even at a well spacing of $l' = 20$ cm. This evidence also points to the conclusion that appreciable water volumes are supplied by the coarse upper layer to the lower one, thus increasing the difficulties of dewatering the lower, fine grained layer.

4. Conclusions

More important results of model experiments carried out at the Chair for Water Management, Technical University for Building and Transport Eng., Budapest, in connection with dewatering with the aid of vacuum wells, are summarized in the present paper. Conclusions of a general character can be grouped as follows:

1. More concrete information has been gained on common features of, and differences between, hydraulics of gravity and vacuum wells (Fig. 1).
2. In the knowledge of pressure distribution in the entire seepage system involving vacuum wells (Fig. 20), a theoretically exact analysis of seepage phenomena becomes increasingly possible, together with the rational performance of investigations into the model law. For designing and construction practice a scientifically founded approach to similar problems is provided by these studies.
3. Research into the properties of air flow in granular media contributed on the one hand to a better engineering understanding of problems involved, on the other hand to the development of quantitative estimates on the quantity of air drawn into the wells. The positive verification of the applicability of the flow-net approach to the motion of air in granular media is considered of fundamental significance, as far as both theoretical, and practical research, as well as laboratory problems of measurement are concerned.
4. Studies into the concrete evaluation of hydraulic relationships between air intake developing in the dewatering system, and the boundary conditions (terrain surface, side walls and bottom of the construction pit, gravel filter around the well, uniformity of the soil, spatial distribution of soil moisture) gave practical results (Figs 9, 10, 16, 17, 18a—b, 22a—b, 25b) primarily for designers and construction engineers.
5. Results obtained by the study of conditions occurring in the course of dewatering with a row of wells at one or both sides of the construction pit, provide information on problems of both engineering and economical character. Ample evidence is available on the considerable influence of permeability on optimum well spacing within a row (Figs 4—7), on the extension of vacuum around the wells (e.g. Figs 25a—b) and on the depth to which the construction pit can be excavated.
6. Conditions of dewatering encountered in non-uniform soils provide examples of adverse circumstances for designers' practice (Figs 25a—b, 26 and 27).

REFERENCES

1. Арутюнян, Н. Р.: Экспериментальные исследования вакуумирования фильтрационного потока. Специальные способы строительного водопонижения. 1959. Сборник. 35.
2. CHAPMAN, J.: Ground-water through a Bank with Vertical Faces. Geotechnique. 1957. 1.
3. DEGYAREV, V. M.: Yield Coefficient of Low-Permeability Soils. Particular Problems of Groundwater Lowering. Moscow 1959, Nr. 35. (In Russian.)
4. GÄRTNER, G.: Neuzeitliche Grundwasserabsenkung in Feinsanden. Bohrtechnik-Brunnenbau-Rohrleitungbau. **13** (1962), 276—287.
5. Григорьев, М. В.: Фильтрация воды и воздуха через грунт в условиях вакуумного водопонижения. Академия строительства и архитектуры СССР. Москва 1959.
6. JESENÁK, J.: Vakuové odvodnenie jemnozrnných zemin. Bratislava. 1959.
7. KARÁDI, G.: Hydraulics of Linear Systems for Lowering the Groundwater Table. Khartoum 1963. Doctors thesis. Manuscript.
8. KARÁDI, G.—V. NAGY I.: Investigation into the Validity of the Linear Seepage Law. IAHR. Ninth Convention. Dubrovnik. 1961.
9. KÉZDI, Á.: Fundamentals of a New Physics of Soils. Budapest 1964. Manuscript. (In Hungarian.)
10. KOVÁCS, Gy.: Theoretical Investigation into Micro-Seepage. *Hidrológiai Közlöny*, **37**, (1957) 210—222. (In Hungarian.)
11. LAMPL, H.: Dewatering of Construction Pits by Lowering the Groundwater Table. Közlekedési Kiadó, Budapest 1954. (In Hungarian.)
12. LIPTÁK, F.—ÖLLŐS, G.: Seepage from Lined and Sealed Irrigation Canals. *Vízügyi Közlemények*, (1964) 549—574. (In Hungarian.)
13. MATSCHAK, H.: Überblick über die Vakuumverfahren und ihre Anwendung zur Entwässerung feinsandiger Böden. Bergakademie. 1961. 3.
14. Маринопольский, Г. М.: Теоретические основы и расчет гидромеханического и электроизометрического вакуумирования фильтрационного потока при водопонижении. Специальные способы строительного водопонижения. 1959. Сборник. 35.
15. MOLNÁR, L.: Reports on Investigations into the Dewatering of Construction Pits. Építész-tudományi Intézet. Budapest 1963—1964. (In Hungarian.)
16. MÖLLER, B.: Das Vakuumverfahren und die Grundwasserabsenkung nach der Wellpoint Methode. Baumaschine und Bautechnik. 1957. I. 4.
17. NÉMETH, E.: Hydromechanics. Tankönyvkiadó, Budapest 1963. (In Hungarian.)
18. ÖLLŐS, G.: Free Seepage Surface on the Well Perimeter. *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei*, (1962) 107—130. (In Hungarian.)
19. ÖLLŐS, G.: Model Studies on Lowering the Groundwater Table with the Help of Vacuum Wells. Expert opinion. Chair for Water Management, Technical University for Building and Transport Eng. Budapest 1962. (In Hungarian.)
20. ÖLLŐS, G.—DELI, M.—SZOLNOKY, Cs.: Results of Model Studies on Lowering the Groundwater Table with the Help of Vacuum Wells. *Hidrológiai Közlöny*, **43** (1963). (In Hungarian.)
21. ÖLLŐS, G.: Model Studies on the Dewatering of Construction Pits. Expert Opinions, 1963 and 1964. Budapest. Chair for Water Management, Technical University for Building and Transport Eng. Budapest. (In Hungarian.)
22. ÖLLŐS, G.: Fundamental Problems of Vacuum-well Hydraulics. *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei*. X. (1964), 115—128.
23. ÖLLŐS, G.: Notes on the Motion of Air in Granular Media. *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei*, (1965). No. 4. (In Hungarian.)
24. ÖLLŐS, G.: Dewatering Construction Pits Excavated in Non-Uniform Soils with the Help of Vacuum Wells. *Hidrológiai Közlöny* (1965). (In Hungarian.)
25. SZÉCHY, K.: Foundations with the Help of Lowering the Groundwater Table in Hungary. *Vízügyi Közlemények*. (1935). (In Hungarian.)
26. SZÉCHY, K.: On Problems of Lowering the Groundwater Table. Conference on Hydraulics, Budapest 1960, Section 4. (In Hungarian.)
27. SZÉCHY, K.: Foundation Engineering, Vol. II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1963. (In Hungarian.)
28. SZÉCHY, K.: Beitrag zur Theorie der Grundwasserabsenkungen. Bautechnik. 1959. Febr.
29. SCSERKASCEV, V. N.: Underground Hydraulics. Nehézipari Könyvkiadó, Budapest 1952. (In Hungarian.)
30. VASTAGH, G.: Lowering the Groundwater Table by the Vacuum Method. *Mélyépítéstudományi Szemle*, (1952). (In Hungarian.)

31. VASTAGH, G.: Experiences Gained with New Methods of Lowering the Groundwater Table, Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1954, No. 2807. (In Hungarian.)
32. Зенков, М. В.—Мариупольский, Г. М.: Опыт применения грунтового вакуумирования для искусственного уплотнения грунта. Основания, Фундаменты, Механика грунтов. 1960. 6.
33. ÖLLÖS, G.: Dewatering of Construction Pits Excavated in Uniform Soils with the Help of Vacuum Wells. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények*, (1965).

DIE HYDRAULISCHEN VORGÄNGE BEI DER GRUNDWASSERSENKUNG DURCH VAKUUMBRUNNEN

G. ÖLLÖS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit den grundlegenden Fragen der Vakuumbrunnen-Hydraulik. Nach Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Gravitations- und der Vakuumhydraulik, bzw. der Unterschiede zwischen ihnen, wird die Potentialverteilung behandelt, welche sich in dem Sickerfeld um die Vakuumbrunnenreihe ausbildet. Die Forschungsergebnisse bezüglich der Eigenheiten der Luftbewegung im granulösen Boden ergeben die theoretische Grundlage für die zahlenmäßige Bestimmung der in die Brunnen gelangenden Luftmenge. Bei einer Brunnenreihe entlang einer oder beider Seiten des Baugrubens liefert die Bestimmung der Luft- und der Wasserströmung zahlreiche Anhaltspunkte für den Konstrukteur (z. B. optimale Entfernung zwischen den Brunnen, Abteufbarkeit des Baugrabens). Die Ergebnisse für Entwässerungsvorgänge in inhomogenen Böden illustrieren die Fälle ungünstiger Entwässerung.

PROCESSUS HYDRAULIQUES DU RABATTEMENT DU NIVEAU PAR PUITS À VIDE

G. ÖLLÖS

RÉSUMÉ

L'étude traite des problèmes fondamentaux de l'hydraulique des puits à vide. Après analyse des rapports et différences existant entre l'hydraulique des puits filtrants et des puits à vide, l'auteur étudie en détail le mode de la distribution potentielle produite en cas d'un abaissement plus fort dans la zone de filtration de la rangée de puits à vide. Les résultats des recherches relatives au mouvement de l'air dans les sols granuleux fournissent une base théorique au calcul de la quantité d'air pénétrant dans les puits. En cas de rangées de puits disposées sur un ou sur deux côtés de la fouille, la détermination du mode d'écoulement de l'eau et de l'air offre de nombreuses données utiles au constructeur (distance optimale entre les puits, possibilité d'enfoncement de la fouille, etc.). Les résultats relatifs au processus d'assèchement dans les sols inhomogènes illustrent les cas de drainage défavorables.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПОГРУЖЕНИЯ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ПОМОЩИ ВАКУУМНЫХ КОЛОДЦЕВ

Г. ЭЛЛЕШ

РЕЗЮМЕ

Работа занимается основными вопросами гидравлики вакуумных колодцев. Излагаются связи и отклонения между гравитационной гидравликой и гидравликой вакуумных колодцев. После этого дается детальное описание образа распределения потенциалов, формирующегося при значительном отсосе в фильтрационной области вокруг ряда вакуумных колодцев. Результаты исследований свойств движения воздуха в зернистом грунте дают теоретическую основу для числового определения количества воздуха, попадающего в колодец. В случае ряда колодцев, расположенных с одной или с обеих сторон траншей, определение образа движения потоков воды и воздуха дает проектанту ряд исходных данных (например, оптимальное расстояние между колодцами, возможность устройства траншей). Результаты, касающиеся процесса отсоса воды в ингомогенном грунте, иллюстрируют отрицательные случаи отвода воды.

ELEKTRISCHER EINFLUSS AUF DIE RHEOLOGISCHEN EIGENSCHAFTEN WÄSSRIGER BENTONITDISPERSIONEN

J. BARNA und B. MARSHALKÓ
FORSCHUNGSIINSTITUT FÜR BERGBAU, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. Mai 1965]

An — durch Scheren beanspruchten — Bentonitdispersionen wurden die so entstehenden elektrischen Erscheinungen geprüft und gemessen. Zwischen Scher- und elektrischer Spannung besteht eine entschiedene Beziehung, deren Gegenseitigkeit besonders zwischen der elektrischen Spannung und der Fließfestigkeit auffallend ist. Diese Beobachtung bietet die Möglichkeit, durch elektrische Einflüsse auch den Wert der Fließfestigkeit und deren thixotropen Wiederaufbaugeschwindigkeit ganz bedeutend zu beeinflussen. Die in Tabellen und Kurven zusammengefaßten und beigelegten Meßwerte dienen zur Erläuterung der Erscheinung.

1. Einleitung

Wie allgemein bekannt, verhält sich jede Bentonitdispersion als ein plastischer Stoff mit Strukturviskosität und Fließfestigkeit, kann also an einem Teil der Fließkurve als »Bingham«-Körper betrachtet werden.

Nun konnten wir aber feststellen, daß bei elektrolytarmen Dispersionen nicht nur ihre »Strukturviskosität«, sondern auch die Fließfestigkeit Funktion der Schergeschwindigkeit ist, und zwar nicht nur bei niedrigen Schergeschwindigkeiten, sondern im ganzen Bereich der Fließkurve. Elektrolytarme Dispersionen können also nicht als »Bingham«-Körper betrachtet werden [6].

Schon bei unseren früheren Untersuchungen sind uns die bedeutenden Unterschiede zwischen den thixotropen Aufbaugeschwindigkeiten der elektrolytreichen und elektrolytarmen Dispersionen aufgefallen.

Wir konnten dies an Dispersionen von Bentoniten verschiedener Herkunft eindeutig feststellen. Darüber haben wir unlängst bereits berichtet [6].

Es wurde darauf hingewiesen, daß bei gleicher Konzentration stark angereicherter — also nahezu aus reinem Montmorillonit bestehenden — elektrolytarmen Dispersionen die rheologischen Eigenschaften (Viskosität, Fließfestigkeit usw.) einen annähernd gleichen, vom Fundort unabhängigen Wert annehmen. Dessen Vorbedingung ist aber — und das ist das wesentliche, zugleich der Grund der meisten Fehlfolgerungen —, daß bei jeder Bestimmung immer der Endwert der thixotropen Regenerierung abgewartet und nur dieser in Betracht gezogen werden darf.

Solche Messungen sind aber oft praktisch undurchführbar, da die thixotrope Aufbaugeschwindigkeit meistens so gering ist, daß das Erreichen eines Grenzwertes oft auch Wochen in Anspruch nehmen kann. Dies hat uns veranlaßt, das Wesen der thixotropen Aufbaugeschwindigkeit und die Möglichkeiten ihrer Beeinflussung zu klären, um die Thixotropie den jeweiligen praktischen Bedürfnissen entsprechend einstellen zu können. In einer vorherigen Mitteilung [6] haben wir es schon festgestellt, daß einer dieser Einflüsse die sog. »Vorgeschichte« des Grundmaterials ist, d. h., wie oft und bis zu welchem Grade das Gerüst durch Scherung schon abgebaut wurde, wie groß die Kristallbündel sind, die als Bauelemente des Gerüstes dienen, inwieweit sie polar und günstig orientiert waren usw.

Es ist daher naheliegend [13], ihre weitere Orientierung durch elektrische Einwirkungen zu beeinflussen.

Anwendung des Rheo-Kondensatorviskosimeters und die Meßmethode

Unsere diesbezüglichen Messungen wurden ebenfalls mit Rheoviskosimeter nach MARSCHALKÓ durchgeführt [2, 3, 4]. Einer der beiden koaxialen Zylinder, der sog. »Meß«-Zylinder wurde vom anderen elektrisch vollkommen isoliert und dadurch auch den elektrostatischen Messungen angepaßt.

Der Apparat in dieser Anordnung ermöglichte:

1. die Messung des Kontaktspotentials zwischen Meßzylinder und Dispersion;
2. Kontaktpotentialermittlung zwischen dem rotierenden Zylinder und der Dispersion;
3. Messen des elektrischen Widerstandes zwischen beiden Zylindern;
4. Ermittlung der zwischen den Schichten der Dispersion im ruhenden Zustande auftretenden Potentialdifferenz;
5. wie ad 4., jedoch während der Scherung; schließlich
6. konnten die beiden konzentrischen Zylinder auch als Elektroden dienen und mit aus äußerer Energiequelle stammenden — beliebig regel- und meßbaren — Ladungen versehen werden, oder aber zur
7. Änderung der elektromotorischen Kraft durch schnellen und leicht durchführbaren Austausch des Materials der Zylinder bzw. deren Kontakt-Potentiale.

All diese Messungen konnten im weiteren als Funktion

- a) der Schergeschwindigkeit,
- b) der Scherkraft,
- c) der Zeit

durchgeführt und zur selben Zeit immer auch der Wert der Fließfestigkeit weglos ermittelt werden.

Die Vorbedingung all dieser Messungen war, die Möglichkeit zu schaffen, Schergeschwindigkeiten über $6 \div 8$ Größenordnungen hindurch fortlaufend zu ändern, zugleich die Scherkraftswerte über $4 \div 6$ Größenordnungen hindurch messen zu können, ohne aber die konzentrischen Zylinder und das zwischen ihnen liegende Material nur im geringsten zu berühren oder zu erschüttern.

In Hinsicht auf die verhältnismäßig sehr geringen elektrischen Energien konnten nur Kompensationsmessungen in Frage kommen. Es wurde also ein elektrischer Kompensator dem Viskosimeter angeschlossen.

Hier beschränken wir uns bloß auf die qualitative Darstellung der Erscheinung, des Zusammenhangs der sie bewirkenden Ursachen im Rahmen einiger besonders auffallenden und charakteristischen Meßreihen.

Die Verhältnisse quantitativer Art werden nur oberflächlich berührt, obzwar auch in dieser Hinsicht ein gewisser Fortschritt erzielt wurde.

Zu den Untersuchungen wurden — falls es nicht eigens betont ist — im allgemeinen 5%-ige wässrige Dispersionen verwendet, denn diese Konzentration erwies sich als genügend hoch, um die mechanischen und rheologischen Konstanten zuverlässig — mit kleiner Streuung — zu messen, und auch genug niedrig, daß die Meßwerte und Konzentration als einander proportional betrachtet werden können.

Die Herstellungsweise dieser Dispersionen wollen wir hier nicht weiter behandeln, da das Verfahren in früheren Abhandlungen [1, 5] schon eingehend beschrieben wurde.

2. Meßergebnisse

Die Untersuchungen wurden an zahlreichen von verschiedenen Fundorten stammenden Bentonitdispersionen mit verschiedener »Vorgeschichte« durchgeführt. Sie waren in hohem Maße dialysiert, also elektrolytarm, mit sehr geringer elektrischer Leitfähigkeit und soweit als möglich an Montmorillonit angereichert.

Unsere Schlußfolgerungen wollen wir nun — an einigen der vollendeten zahlreichen Meßreihen — näher erörtern.

In sämtlichen nachfolgenden Abbildungen und Tabellen wird der Wert der Fließfestigkeit als Funktion des Schergeschwindigkeitsgefälles und die zur selben Zeit zwischen den beiden konzentrischen Zylindern des Rheoviskosimeters auftretende und bestimmte elektrische Potentialdifferenz dargestellt.

Als Abszisse dient in jeder Abbildung das Schergeschwindigkeitsgefälle (sec^{-1}), während als Ordinate links der Wert der elektrischen Potentialdifferenz in Millivolt, rechts hingegen die Scherspannung (Fließfestigkeit) in dyn/cm^2 dargestellt wurde.

Im Bild 1 und Tafel I werden die Meßwerte einer an Montmorillonit angereicherten und stark dialysierten, 5,22%-igen Bentonitdispersion aus

Tafel I

No.	Zr	U	n	Kal	U	Zm	Zm	U	Zr	$f(\tau)$	τ_δ	τ^*
	$-$	mV	$+$	$+ mV$	$-$	$+ mV$	$-$	mV	$-$	sec^{-1}	Dyn/cm^2	Dyn/cm^2
	Kurve IV		Kurve V		Kurve I				Kurve II		Kurve III	
1.	102,3		30		71,5		0,014		257,94		257,9	
2.	56,5		45,4		9,3		0,077		266,84		271,3	
3.	35		30		36,1		0,138		300,19		302,4	
4.	21,9		26,6		— 4,2 +		0,307		322,43		329,1	
5.	29,6		45,4		— 20,7 +		0,768		337,99		360,2	
6.	22,1		41,1		— 18,0 +		1,429		333,54		373,6	
7.	28,2		40,9		— 12,2 +		3,07		328,65		378,0	
8.	51,0		43		— 8,0 +		6,14		295,74		373,6	
9.	80,5		52		30		9,22		240,6		340,2	
10.	100,0		61,7		43,8		13,83		211,24		315,08	

τ = Scherspannung
 τ_δ = Fließfestigkeit
 $f(\tau)$ = Schergeschwindigkeitsgefälle
 U = Elekt. Potentialdifferenz
 Kal. n. = Normal Kalomelelektrode
 Zm = Meßzylinder
 Zr = Rotierender Zylinder
 mV = Millivolt

Koldu (Ungarn) zusammengefaßt. Die Kurve I zeigt die elektrische Potentialdifferenz, Kurve II die Fließfestigkeit, während Kurve III die gesamte Scherspannung. Sämtliche werden als Funktion von verhältnismäßig geringen Schergeschwindigkeitsgefällen dargestellt. Kurven IV und V geben die Potentialdifferenz zwischen dem rotierenden bzw. dem Meßzylinder und einer mit der in der Meßspalte befindlichen Dispersion in Berührung stehenden Normalelektrode. Die algebraische Summe der einzelnen Werte der Kurven IV und V ergibt also die Werte der Kurve I.

Bei einfachem Betrachten der Kurven I und II im Bild 1 wird der Zusammenhang sofort auffallend (Kurve I ist nahezu ein Spiegelbild der Kurve II).

Im Bild 2 und Tafel II werden gleichfalls obige, jedoch an einer an Montmorillonit angereicherten 5%-igen Wyomingdispersion gemessenen Werte dargestellt. Der Zusammenhang zwischen beiden Kurven ist auch hier offensichtlich, doch zeigt die Polarität der Kristallkomplexe (Mizelle) eine entgegengesetzte Ladung (Kurve I läuft ganz ähnlich wie Kurve II).

Bild 3 und Tafel III entsprechen dem Bild 2, die Dispersion wurde aber mit einem höheren Schergeschwindigkeitsgefälle abgebaut, wobei die Polarität der Mizellen entgegengesetzte Ladung annimt.

Tafel II

No.	$f(\tau) \text{ sec}^{-1}$	$Z_m U Zr$	τ_δ Dyn/cm ²	τ Dyn/cm ²
		— mV +		
		Kurve I	Kurve II	Kurve III
1.	0,0017	342,0	73,38	73,4
2.	0,0034	356,2	122,3	122,3
3.	0,0101	362,3	131,19	135,6
4.	0,0171	366,1	120,08	146,8
5.	0,0522	370,0	122,30	153,4
6.	0,1383	376,2	128,97	171,2
7.	0,1705	377,6	124,52	173,4
8.	0,3380	381,0	115,63	184,6
9.	0,4778	382,7	122,30	186,8

Bild 4 und Tafel IV zeigen ebenfalls die Scherwerte derselben angereicherten, elektrolytarmen 5%-igen Wyomingdispersion sowie — im steigenden und sinkenden Zweige — den allmählichen Ab- und thixotropen Aufbau des Gerüstes, jedoch im ganz breiten Bereich des Schergeschwindigkeitsgefälles, ganz bis zum vollkommenen Abbau des Gerüstes und der Struktur.

Alle bisher erwähnten Bilder und Tafeln geben Meßergebnisse einiger Dispersionen an, deren Werte mit dem — schon erwähnten — Rheoviskosimeter gemessen, dessen konzentrische Zylinder jedoch aus genau demselben Material hergestellt wurden. Es kann daher von einer Potentialdifferenz — infolge verschieden großer Potentialsprünge an den Elektroden — keine Rede sein. Trotzdem konnten wir — wie gezeigt — an den Dispersionen der von verschiedenensten Fundorten stammenden Montmorillonite bei Scherbe-

Tafel III

No.	$f(\tau) \text{ sec}^{-1}$	$Z_m U Zr$	τ_δ Dyn/cm ²	
		— mV +		
		Kurve I	Kurve II	
1.	0,678	+35,3—	197,94	
2.	10,99	86,2	131,96	
3.	28,50	103,4	120,96	
4.	69,22	99,1	120,96	
5.	108,57	103,4	107,77	
6.	217,15	109,5	96,77	
7.	339,3	117,2	83,57	
8.	685,38	120,7	83,57	

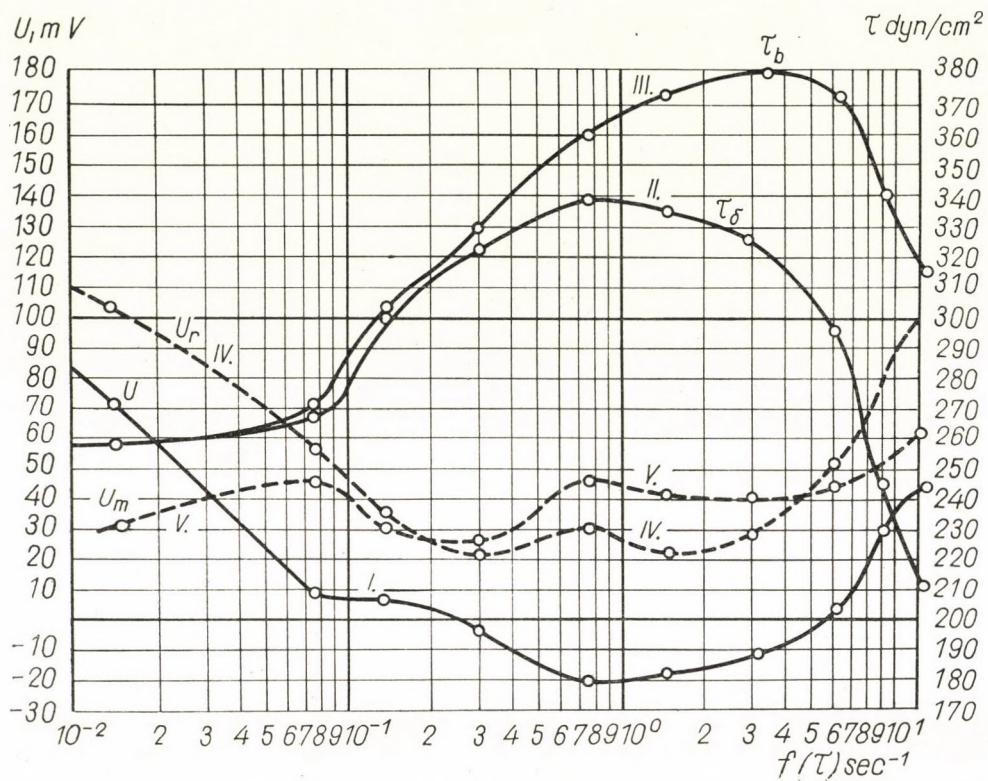


Bild 1

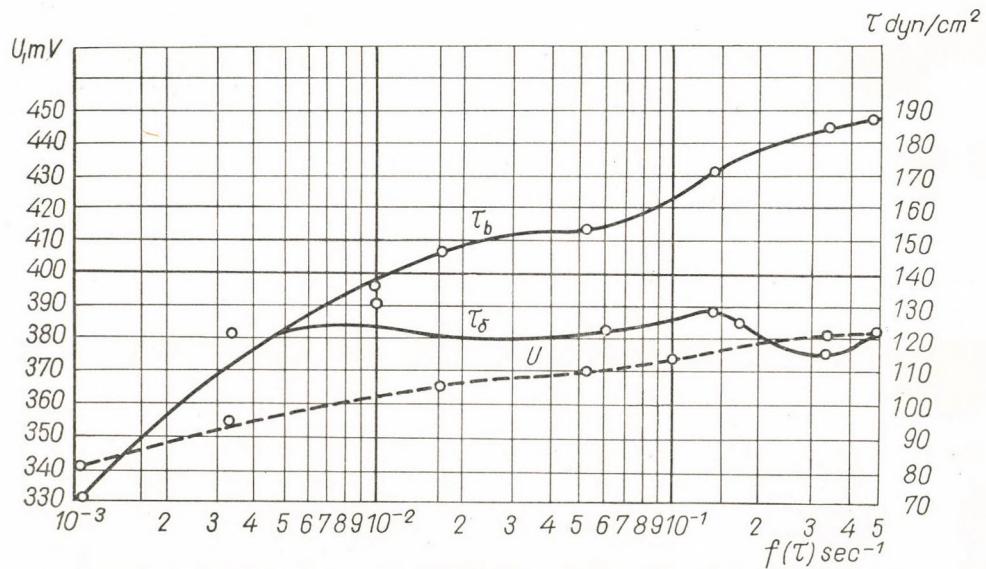


Bild 2

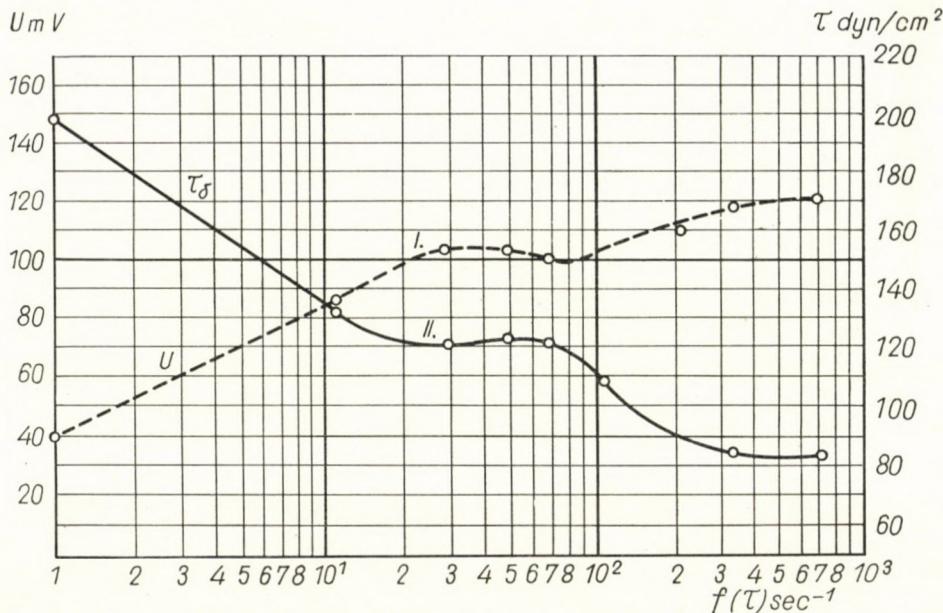


Bild 3

anspruchung zwischen den einzelnen Schichten elektrische Potentialdifferenz nachweisen, deren Größenordnung der »Vorgeschichte« des Materials, ihre Richtung der ursprünglichen oder der durch Scherung entstandenen Orientierung proportional bzw. mit ihr in gewissem Zusammenhange ist.

Auf Grund dieser Tatsachen ist es wohl naheliegend, daß auch umgekehrt: eine zugeführte elektrische Potentialdifferenz auch die mechanischen Eigenschaften der Dispersion beeinflussen muß und dadurch wahrscheinlich auch die Thixotropie und deren Geschwindigkeit [11]. Wir haben nun unsere Untersuchungen weiterhin in dieser Richtung fortgesetzt. An Hand einiger

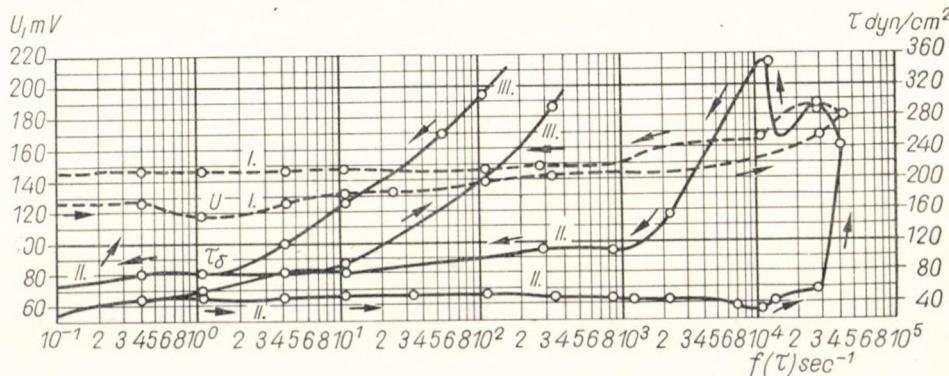


Bild 4

Tafel IV

No.	$f(\tau)$ sec ⁻¹	U mV +	τ_δ	τ Dyn/cm ²
			Kurve I	
1.	0,04	120	27,49	27,49
2.	0,41	126	47,29	47,29
3.	1,09	120	48,39	58,28
4.	4,07	127	50,59	84,68
5.	10,86	132	50,59	93,47
6.	33,93	136	52,79	141,86
7.	115,36	138	52,79	205,64
8.	325,73	142	50,59	295,82
9.	827,89	143	43,99	401,39
10.	1221,48	145	43,99	457,47
11.	2062,94	145	43,99	607,03
12.	5985,25	151	35,19	1013,92
13.	10192,57	155	26,39	1249,25
14.	14250,60	163	39,59	1451,59
15.	28365,48	169	50,59	2001,44
16.	38408,76	190	241,93	2419,33
17.	25379,64	186	294,72	2199,39
18.	14318,46	173	248,53	1609,95
19.	10640,45	165	351,90	1407,61
20.	5930,96	163	281,52	1090,90
21.	2347,96	159	158,36	897,35
22.	1235,05	154	114,37	659,82
23.	868,61	150	114,37	563,04
24.	298,58	148	109,97	415,68
25.	115,36	147	101,17	318,91
26.	54,29	147	94,57	260,63
27.	10,88	147	83,58	171,55
28.	4,07	147	82,48	118,77
29.	1,09	146,6	82,48	82,48
30.	0,41	140,6	75,88	75,88
31.	0,04	146,6	75,88	75,88

besonders ausgewählter Beispiele möchten wir nachstehend einen Beitrag hierzu liefern.

Da es sich aber offensichtlich um eine Wechselwirkung handelt, wollen wir nun im weiteren die Wirkung einer elektrischen Potentialdifferenz auf die Gestaltung der mechanischen Werte der Dispersionen behandeln.

Als erstes wurde die Zufuhr äußerer -- nicht von den Dispersionen selbst stammenden -- elektrischer Energie derart gelöst, daß wir beim Rheoviskosimeter die beiden konzentrischen Zylinder aus voneinander verschiedenen Metallen anfertigten. Da die Zylinder die Rolle einander gegenübergestellter Elektroden spielen, kann die Potentialdifferenz zwischen ihnen durch entsprechende Auswahl der Metalle bzgl. des an den Berührungsflächen sich bildenden elektrochemischen Potentialsprunges in bedeutendem Maße geändert bzw. verschieden eingestellt werden.

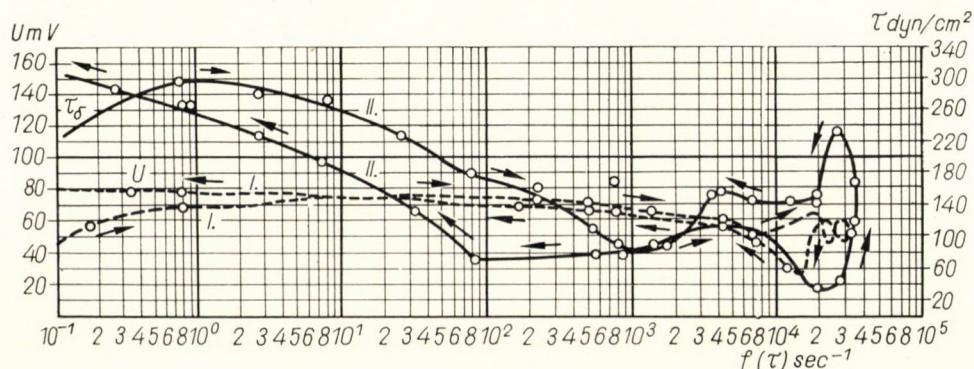


Bild 5

Im Bild 5 und Tafel V ist dieser Einfluß gut ersichtlich. Die hier verwendete Dispersion ist in jeder Hinsicht identisch mit der im Bild 4, der einzige Unterschied ist, daß der eine konzentrische Zylinder (der Meßzylinder) aus rostfreiem Stahl (Potentialsprung $-0,205$ V, bezogen auf n. Kalomel-Elektrode), der andere (der Rotationszylinder) hingegen aus vergoldetem Kupfer (Potentialsprung $-0,105$ V, bezogen auf n. Kalomel-Elektrode) bestand.

Wenn wir nun die Werte der beiden Meßreihen miteinander vergleichen, fällt der große Unterschied sofort auf. Die Potentialdifferenz im Bild 4 stammt ausschließlich von den mechanischen Kräften der Dispersion. Zwischen der Fließfestigkeit und der elektrischen Spannung kann bis zu einem Schergeschwindigkeitsgefälle von etwa $10\ 000\ sec^{-1}$ ein deutlicher Zusammenhang festgestellt werden. (Die bei höheren Schergeschwindigkeiten plötzlich mit hohen Werten erscheinende Scherkraft ist nicht mehr die Folge elektrischer Einwirkungen, sondern eines aus früheren Mitteilungen [6] schon bekannten mechanischen Abbaus und Orientationswechsels der Mizellen.)

Nun muß aber darauf hingewiesen werden, daß die elektrische Einwirkung in erster Reihe mit der Fließfestigkeit und nur indirekt mit der gesamten Scherkraft im Verhältnis steht, wie das auch durch Kurve III

Tafel V

No.	$f(\tau)$ sec $^{-1}$	$Zm\ U\ Zr$ — mV +	τ_δ	τ Dyn/cm 2
			Kurve I	
1.	0,018	46,5	91,91	91,9
2.	0,182	57,4	253,32	253,3
3.	0,753	67,4	293,67	293,7
4.	2,723	69,9	280,22	311,6
5.	7,987	74,6	269,01	369,9
6.	27,228	75,3	224,18	414,7
7.	79,870	74,2	179,34	479,7
8.	235,976	73,8	156,92	612,0
9.	526,408	71,8	112,09	730,8
10.	816,84	66,0	89,67	865,3
11.	1424,9	66,6	89,67	1067,1
12.	4175,0	61,2	112,09	1714,9
13.	6897,8	55,5	100,88	2201,4
14.	12343,4	22—65	112,09	2999,5
15.	19967,2	22—65	33,63	2999,5
16.	28317,1	22—65	44,84	3721,3
17.	36667,1	22—65	168,13	4158,5
18.	27863,3	22—65	235,38	3378,8
19.	20511,8	17—38	123,30	2634,1
20.	13886,3	47,0	145,71	2089,3
21.	7260,8	55,8	145,71	1414,2
22.	4265,7	58,0	156,92	1114,2
23.	1751,7	60,4	89,67	654,6
24.	798,69	65,0	78,46	470,8
25.	553,64	66,8	78,46	410,2
26.	168,81	68,8	73,98	322,8
27.	81,68	70,6	71,74	246,6
28.	31,766	73,2	134,51	240,6
29.	7,261	75,4	190,55	235,4
30.	2,723	75,7	224,18	230,9
31.	0,726	77,0	262,29	262,3
32.	0,272	78,2	281,22	280,2
33.	0,027	79,3	286,95	286,9

(im Bild 4) bestätigt wird, die einen Teil des ansteigenden und des sinkenden Zweiges der gesamten Scherkraft darstellt, die aber — wie ersichtlich — von dem Verlauf der Kurven I und II wesentlich abweicht.

Ganz anders stellen sich die Werte im Bild 5. Der Potentialsprung an der Berührungsstelle Goldkupferzylinder-Dispersion, orientiert die Mizellen des mit geringer Schergeschwindigkeit abgebauten Gerüstes so schnell, daß die Geschwindigkeit des thixotropen Wiederaufbaues größer ist als die Abbaugeschwindigkeit. Daher steigen die Werte der Fließfestigkeit bei geringen Schergeschwindigkeiten anfangs an. Bei etwas höherem Geschwindigkeitsgefälle stellt sich Gleichgewicht ein, und erst nachher erfolgt ein Abbau, jedoch bei bedeutend höheren Schergeschwindigkeiten als im Bild 4.

Bei Schergeschwindigkeitswerten von über $10\,000 \text{ sec}^{-1}$ erscheint auch hier, wenn auch in geringerem Maße, das Ansteigen der Fließfestigkeit, das aber auch hier eine schon bekannte Folge der mechanischen Einflüsse und nicht der elektrischen Orientation ist. Ähnlich ist das Verhalten — jedoch im entgegengesetzten Sinne — im sinkenden Zweige.

Auf diese Weise erfolgten auch weitere Messungen an verschiedenen elektrolytarmen Bentonitdispersionen, wobei zwecks Herstellung verschieden großer elektrischer Potentialdifferenzen Zylinder aus Zink, Kupfer, Nickel usw. verwendet wurden. Die Ergebnisse waren dem Wesen nach den schon mitgeteilten ganz ähnlich.

Im weiteren wurde an beiden konzentrischen Zylindern, die als Elektroden verwendet wurden, eine von einer äußeren Energiequelle — Galvan-Element — stammende Potentialdifferenz angelegt, natürlich weit unter der Zersetzungsspannung des Wassers.

Die Ergebnisse dieser Messungen haben unsere Erwartungen, dem vorher Gesagten entsprechend, in jedem Falle bestätigt. Wir haben auch hier einen gewissen Zusammenhang zwischen dem Werte der Potentialdifferenz und der Fließfestigkeit beobachtet [11].

Um den Vergleich mit den vorherigen Bildern zu erleichtern, wollen wir hier ebenfalls die an einer angereicherten und dialysierten 5%igen Wyoming-Bentonitdispersion gemessenen Werte vorführen. Es ist ersichtlich, daß bei Erhöhung der elektrischen Potentialdifferenz mit äußerer Energiequelle (Bild 7, Kurve I bei 125 sec^{-1}), der Abbau des Gerüstes infolge Scherung erhöht, oder was damit gleichbedeutend ist, die Geschwindigkeit des thixotropen Wiederaufbaues vermindert wird. Dadurch wird auch der Anstieg des Wertes der Fließfestigkeit wesentlich vermindert. Das geringfügige Ansteigen bei höheren Schergeschwindigkeiten wird nun wiederum durch den schon bekannten mechanisch bewirkten Umbau des Gerüstes erzielt, der aber im Verhältnis zu den starken elektrischen Einwirkungen nur mit geringeren Werten zur Geltung kommen kann.

Dagegen wird der mechanisch bewirkte Abbau des Gerüstes durch Verringerung, oder aber durch Erhöhen mit entgegengesetztem Vorzeichen der Potentialdifferenz (Bild 6, Kurve I, 250 sec^{-1}), verlangsamt bzw. die Geschwindigkeit des Wiederaufbaues erhöht.

Tafel VI

No.	$f(\tau)$ sec ⁻¹	$Zm U Zr$ (-) mV (+)	$\tau \delta$	$\frac{\tau}{\delta}$ dyn/cm ²
			Kurve I	
1.	0,018	-25,3+	85,18	85,18
2.	0,181	33,4	107,60	107,60
3.	0,798	38,3	155,44	154,70
4.	2,72	41,7	112,09	152,44
5.	7,98	42,5	89,67	172,6
6.	27,23	44,0	89,67	228,7
7.	79,97	44,4	78,46	284,7
8.	254,13	45,9	78,46	374,4
9.	453,8	1550,0	728,57	1963,8
10.	689,77	1550,0	773,41	1869,6
11.	816,84	1548,0	1345,05	1869,6
12.	1143,57	1545,0	1457,14	1988,4
13.	3494,26	1544,0	1885,32	2712,5
14.	6807,0	1542,0	3125,01	4136,0
15.	10528,16	1540,0	2750,64	4801,8
16.	18152,0	1428,8	3481,45	6164,8
17.	27228,0	1426,8	3586,81	7173,6

Diese Einwirkung kann dann durch weitere Erhöhung der entgegengesetzten gerichteten elektrischen Ladung soweit gesteigert werden, daß der kontinuierliche Abbau des Gerüstes, sogar bei bedeutender Erhöhung des Schergeschwindigkeitsgefälles, zum Stehen gebracht wird, die Fließfestigkeit wird also nicht

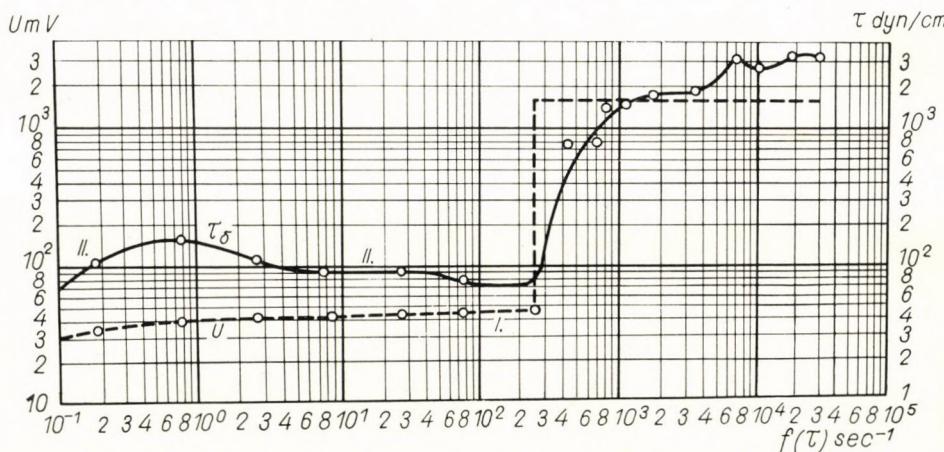


Bild 6

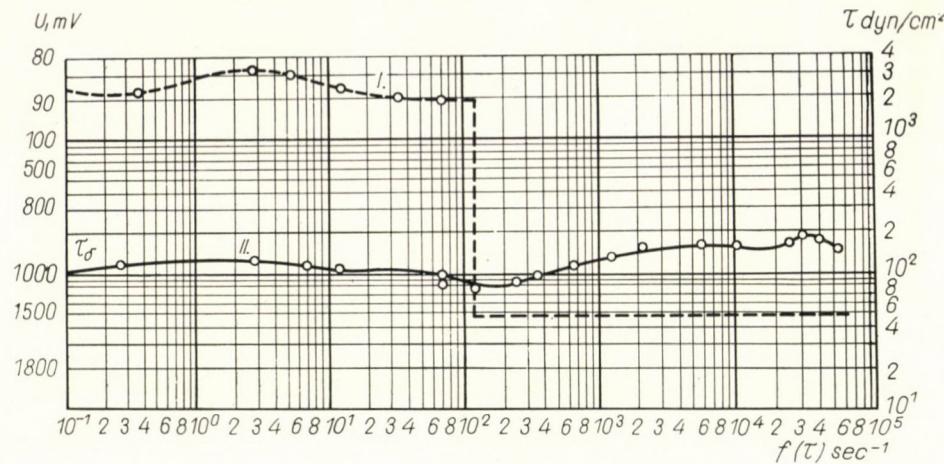


Bild 7

geringer, im Gegenteil, sie steigt bedeutend an. Mit anderen Worten: die Geschwindigkeit des thixotropen Wiederaufbaues ist höher als die Abbaugeschwindigkeit infolge mechanischer Scherung.

Tafel VII

No.	$f(\tau)$ sec $^{-1}$	Zm U Zr — mV +	τ_δ Dyn/cm 2
		Kurve I	Kurve II
1.	0,027	85,8	79,18
2.	0,27	87,0	116,57
3.	2,71	76,1	125,37
4.	7,06	81,3	116,57
5.	12,49	86,7	109,97
6.	31,22	89,3	98,97
7.	69,22	91,2	87,98
8.	123,51	90,0	87,98
9.	244,3	+1509,0—	98,97
10.	343,37	1507,6	109,97
11.	665,03	1506,8	114,37
12.	1248,62	1505,8	131,96
13.	2171,52	1504,7	153,96
14.	5835,96	1504,0	153,96
15.	10450,4	1502,6	153,96
16.	21715,2	1501,4	153,96
17.	31894,2	1500,8	182,55
18.	40444,6	1499,6	171,55
19.	54423,7	1498,6	158,36

Durch entsprechende Einstellung und richtige Auswahl der Richtung der elektrischen Ladung kann jeder Zwischenzustand eingestellt werden. Bilder 6, 7 und Tafeln VI, VII zeigen dies eindeutig.

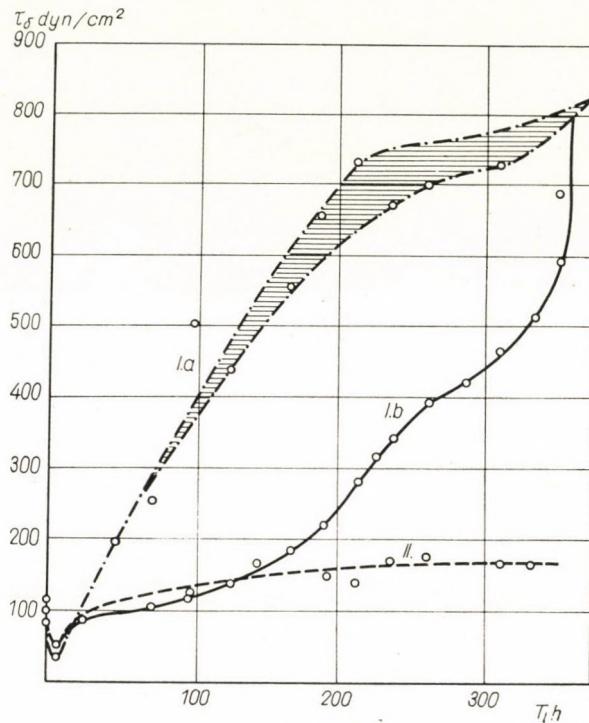


Bild 8

Bild 8 und auch Tafel VIII zeigen die Fließfestigkeit einer 5%-igen Wyoming-Dispersion als Funktion der Zeit — im wesentlichen also die thixotrope Wiederaufbaugeschwindigkeit — im Ruhezustande des Stoffes, jedoch unter ständiger Belastung, zwischen dem aus gleichem Metall bestehenden Zylinderpaar des Viskosimeters, und ohne jegliche elektrische Einwirkung (siehe Kurve II).

Kurve Ia zeigt das Verhalten desselben Stoffes unter identischen Bedingungen, jedoch ist der eine Zylinder aus vergoldetem Kupfer. Hier wirkt also in einem gewissen Maße auch schon ein elektrischer Einfluß [11, 12].

Schließlich sind die Bedingungen von Kurve Ib wieder ganz identisch mit denen der Kurve Ia, die Wertbestimmung erfolgte aber bei einer um 10 °C niedrigeren Temperatur.

Kurven I und II im Bild 9 als auch Tafel IX zeigen Meßwerte unter ganz denselben Bedingungen wie die Kurven I und II im Bild 8, jedoch an einer Dispersion von Bentonit aus Koldu (Ungarn). Bild 10 und Tafel X geben die

Fließfestigkeit—Zeit-Kurve einer 5%-igen Bentonitdispersion aus Wyoming (USA) während des Abbaus mit kleiner Schergeschwindigkeit von 10 sec^{-1} , nach 28 Minuten wurde dann der Zwischenraum der Zylinder unter 1550 Millivolt Spannung gesetzt.

Wie groß der Einfluß einer solchen Einwirkung auf die thixotrope Aufbaugeschwindigkeit ist, geht hervor, wenn wir beachten, daß eine annähernd ähnliche Änderung der Fließfestigkeit ohne elektrische Einwirkung (siehe Bilder 8 und 9) Stunden, im Bild 10 aber nur Sekunden benötigt. Der Anstieg der Geschwindigkeit erreicht also nahezu vier Größenordnungen.

Tafel VIII

No.	h	Au/Fe τ_δ Dyn/cm ²		Fe/Fe τ_δ Dyn/cm ²	
		Kurve I.a	Kurve I.b	h	Kurve II
1.	0	85,77	80,0	0	86,64
2.	9	36,27	60,0	6	63,23
3.	23	93,12	60,0	23	147,53
4.	46	196,04	92,0	46	133,48
5.	70	245,05	130,0	70	145,19
6.	96	502,35	135,0	96	161,58
7.	121	438,64	140,0	121	161,58
8.	140	546,46	170,0	140	168,60
9.	164	656,73	150,0	164	168,60
10.	188	732,70	150,0	188	168,60
11.	212	666,54	140,0	212	142,85
12.	236	700,84	173,0	236	168,60
13.	260	708,19	180,0	260	175,63
14.	310	791,51	170,0	310	166,26
15.	331	686,14	170,0	331	166,26
16.	356	686,14			
17.	381	833,17			

h = Zeit in Stunden

Au/Fe = Rotierender Zylinder aus vergoldetem Kupfer, Meßzylinder aus rostfreiem Stahl, $U = 0,1 \text{ V}$.

Fe/Fe = Beide Zylinder aus rostfreiem Stahl, $U = 0$

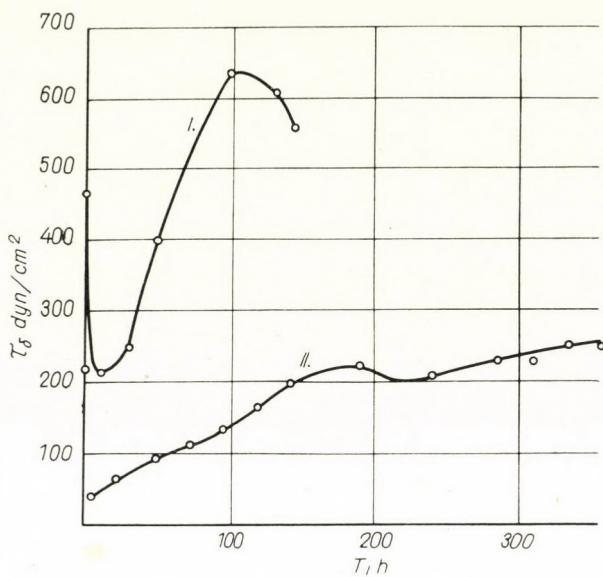


Bild 9

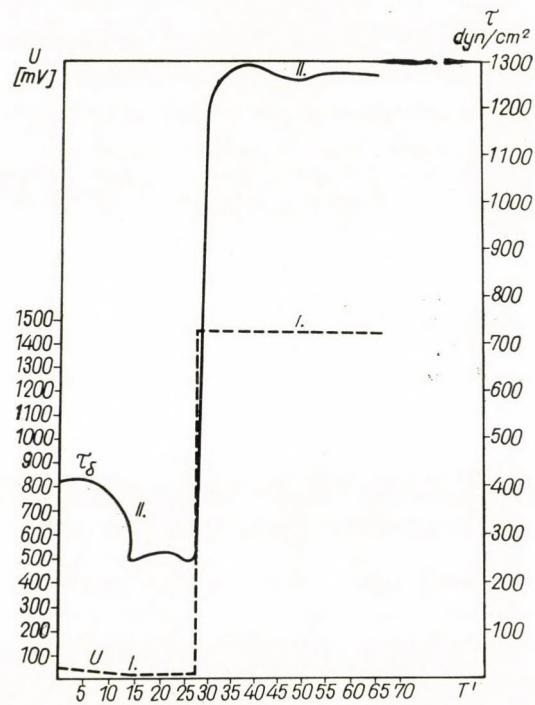


Bild 10

No.	<i>h</i>	$\frac{\tau_\delta}{\text{Au/Fe}}$ Dyn/cm ²	Fe/Fe	$\frac{\tau_\delta}{\text{cm}^2}$
		Kurve I	<i>h</i>	Kurve II
1.	0	465,60	0	30,20
2.	11	210,70	6	39,81
3.	29	245,05	22	62,06
4.	48	396,98	48	88,99
5.	98	632,23	70	110,06
6.	120	605,27	93	133,48
7.	144	531,76	117	161,58
8.			141	194,36
9.			165	194,36
10.			190	220,12
11.			217	201,39
12.			238	206,07
13.			284	227,15
14.			309	227,00
15.			334	250,57
16.			357	238,86

h = Zeit in Stunden

Au/Fe = Rotierender Zylinder aus vergoldetem Kupfer } Potentialdifferenz

Meßzylinder aus rostfreiem Stahl }

U = 0,10 V.

Fe/Fe = Beide Zylinder aus rostfreiem Stahl, U = 0

Tafel X

No.	Min.	$Zm \ U \ Zr$ mV	$\frac{\tau_\delta}{\text{cm}^2}$
		+ Kurve I -	Kurve II
1.	0	21,00	410
2.	5	13,80	415
3.	10	8,80	385
4.	15	3,50	345
5.	20	3,50	260
6.	27	1455,60	250
7.	30	1455,00	1200
8.	35	1453,20	1275
9.	40	1453,40	1290
10.	45	1452,40	1270
11.	50	1451,00	1260
12.	55	1449,60	1270
13.	60	1448,00	1270
14.	65	1448,80	1270

Schlußfolgerungen

Als Zusammenfassung des bisher Gesagten kann festgestellt werden, daß

1. wenn Bentonitdispersionen mit hohem elektrischem innerem Widerstand mechanischer Scherung ausgesetzt sind, zwischen den gescherten Flächen elektrische Spannungsdifferenz nachgewiesen werden kann;

2. zwischen der Scherspannung und der elektrischen Spannungsdifferenz der einzelnen Schichten eine bestimmte Beziehung besteht, die aber auch von äußeren Umständen und Einwirkungen abhängig ist.

3. Es muß besonders hervorgehoben werden, daß diese Beziehung primär nur zwischen den *beiden Spannungen* (mechanische und elektrische) und nicht zwischen der *Schergeschwindigkeit* und der elektrischen Spannung besteht. Die Schergeschwindigkeit spielt hier nur eine indirekte Rolle, indem sie nur die Scherspannung beeinflußt.

Hier ist aber zu bemerken, daß wenn von einer Beziehung zwischen Scherspannung und Potenzialdifferenz die Rede ist, nicht die unmittelbar gemessene gesamte Scherspannung, sondern in erster Linie nur die Fließfestigkeit gemeint werden darf. In dieser Hinsicht muß nämlich immer zwischen dem von der Fließfestigkeit stammenden und dem zur Überwindung des Reibungswiderstandes benötigten Anteil der Scherspannung unterschieden werden; wo ersterer eine primäre, der zweite aber in Beziehung zur elektrischen Spannungsdifferenz bloß untergeordnete Rolle spielt.

4. Dementsprechend verläuft in den vorgeführten Abbildungen die Kurve der Fließfestigkeit mit der der elektrischen Potentialdifferenz ganz ähnlich oder bildet das Spiegelbild der anderen, je nachdem ob die einzelnen Kristallkomplexe positiv oder negativ geladen sind.

Dies bestätigt unter anderen auch die Beobachtung, daß im Ruhezustande — d. h. bei Schergeschwindigkeit = 0 — zwischen den einzelnen Schichten einer unter Belastung stehenden Dispersion auch noch eine elektrische Potentialdifferenz besteht, die einen mit der mechanischen Spannung in Zusammenhang stehenden konstanten Wert annimmt.

5. Wir konnten uns nicht überzeugen, ob nach Verschwinden der mechanischen Spannung auch die elektrische Spannungsdifferenz gleich Null wird, da ja sowohl die mechanische als wahrscheinlich auch die elektrische Spannung sich von Schicht zu Schicht ändert. Wir können folglich nur die Durchschnittswerte verlässlich messen, die Messung von Schicht zu Schicht kann auf die mitgeteilte Weise nicht erfolgen. Bei entsprechender Regelung der Schergeschwindigkeit konnte jedoch immer ein solcher Wert eingestellt werden, bei dem die elektrische Spannungsdifferenz gleich Null wurde. Der Mittelwert der Scherspannung war sodann in jedem Falle ebenfalls nahezu Null.

6. Der Zusammenhang zwischen Potentialdifferenz und Fließfestigkeit der übrigens auch Funktion mehrerer äußerer Nebeneinwirkungen (mechani-

sche Wärme Zeit usw.) ist, konnte jedoch bisher zahlenmäßig noch nicht geklärt werden.

Sämtliche Beobachtungen sind übrigens natürliche Folgen der Polarität der die Dispersion bildenden Molekülkomplexe [11, 12, 13].

7. Da es sich aber zwischen der mechanischen Scherspannung und den elektrischen Erscheinungen um eine gegenseitige Einwirkung handelt, müssen die von außen wirkenden elektrischen Energien auch im Werte der Fließfestigkeit eine Änderung verursachen. Diese Gegenseitigkeit konnte experimentell bestätigt werden.

Eine derartige Einwirkung kann in ihrem Endergebnis auch als Änderung der thixotropen Aufbaugeschwindigkeit aufgefaßt werden, und dadurch ist

8. auch auf diese Weise eine Möglichkeit der Beeinflussung der thixotropen Aufbaugeschwindigkeit vorhanden.

SCHRIFTTUM

1. BARNA, J.—MARSCHALKÓ, B.: *Acta Techn. Hung.* **15** (1956).
2. BARNA, J.: *Acta Techn. Hung.* **8** (1954).
3. BUÓCZ, T.: *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* **3—4** (1959), 503—514.
4. BUÓCZ, T.: *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* **3** (1963), 63—73.
5. BARNA, J.—MARSCHALKÓ, B.: *Mitteilungen d. Ung. Forschungsinstituts f. Bergbau* **5** (1961), 164—183. (Russisch.)
6. BARNA, J.—MARSCHALKÓ, B.: *Acta Techn. Hung.* **46** (1964), 319—416.
7. WORALL, W. E.—TULIANI, S.: *Transactions of the British Ceramic Society* **63** (1964), 167—185.
8. HOFMANN, U.: *Berichte d. deutschen Keram. Ges.* **41** (1964), 680—685.
9. OEL, H. J.: *Z. Phys. Chem. N. F.* **5** (1955), 32—51.
10. PAULI, W.—VALKÓ, E.: *Elektrochemie der Kolloide*, Wien 1929.
11. DEJNEGA, In. F.-G. V. VINOGRADOV: *Kolloid. Journ.* **24** (1962), 667—673.
12. LUSCSEJKIN, G. A.—GULL, V. E.—DOGADKIN, B. A.: *Kolloid. Journ.* **25** (1963), 334—341.
13. DEJNEGA In. F.-G. V. VINOGRADOV: *Kolloid. Journ.* **25** (1963), 379.

ELECTRIC INFLUENCE ON AQUEOUS BENTONITE DISPERSIONS

J. BARNA—B. MARSCHALKÓ

SUMMARY

Electrical phenomena in bentonite dispersions subjected to shear have been examined and measured. Certain relations have been established between the limit stress of the dispersion and the electromotoric force caused by the shear. Mutual relation could be detected between the limit stress of the dispersion and the voltage, according to which under electrical action due to an external energy source the value of the limit stress is also changed. External electrical action also changes the velocity of the tixotropic regenerating power. Some results of the measurement series which are the basis of these constatations are summarized in the tables and graphs joined to the paper.

**INFLUENCE ÉLECTRIQUE SUR LES PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES
DES DISPERSIONS DE BENTONITE ACQUEUSES**

J. BARNA—B. MARSHALKÓ

RÉSUMÉ

Les auteurs ont examiné et mesuré les phénomènes électriques dans les dispersions de bentonite soumises au cisaillement. A l'issue des examens, certaines relations ont pu être établies entre la contrainte aux limites de la dispersion et la force électromotrice due au cisaillement. Entre la contrainte aux limites de la dispersion et la valeur de la tension électrique existe une relation mutuelle en vertu de laquelle la valeur de la contrainte aux limites varie sous l'action électrique provoquée par ses sources d'énergie extérieures. Des actions électriques de l'extérieur changent aussi la vitesse du pouvoir de régénération tixotropique de la contrainte aux limites. Des résultats de quelques-unes des séries de mesures ayant servi de base à ces constatations sont résumés sur les figures et tableaux accompagnant l'étude.

**ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ВОДНЫХ БЕНТОНИТОВЫХ СУСПЕНЗИЙ**

Й. БАРНА и Б. МАРШАЛКО

РЕЗЮМЕ

Исследованы и измерены электрические явления, возникающие на бентонитовых дисперсиях, работающих на срез. Установлена определенная зависимость между граничным напряжением дисперсий и электродвижущей силой, возникающей от среза. Между граничным напряжением дисперсии и значением электрического напряжения можно показать взаимосвязь, согласно которой на электрические воздействия от наружных источников тока изменяется и величина граничного напряжения. Наружные электрические воздействия изменяют также тиксотропную регенерирующую способность граничного напряжения. Результат некоторых серий измерений, служащих основой приведенных выше определений, приводится на прилагаемых иллюстрациях и таблицах.

TORSION OF PRISMATIC BARS

M. G. K. MURTHY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, REGIONAL ENGINEERING COLLEGE WARANGAL (INDIA)

[Manuscript received May 26, 1965]

A formal solution has been obtained for the torsion of prismatic bars, when the mapping function, which maps conformal the section of the bar on to the unit circle, is known in power series. As an example of the method followed, the torsion of a bar whose cross section is one half of a multi-symmetrical curved boundary is solved. Some results are derived as particular cases.

1. Introduction

Saint-Venant's torsion problem was discussed by quite a few authors using various techniques. Conformal mapping techniques have been extensively used by MUSKHELISHVILI [1], SOKOLNIKOFF [2], MORRIS and HAWLEY [3], HIGGINS [4] and others. Recently DEUTCH [5] has solved the problem of torsion of prismatic bars whose cross section can be conformally mapped on to the unit semicircle. The method is further simplified in the case of mapping functions which can be analytically continued. In the present paper, the problem is solved when the mapping function is in the form of power series. The solutions of various problems are derived as particular cases.

2. Basic equations

The mapping function

$$z = w(\zeta) \quad (2.1)$$

maps the region S on to the unit semicircle $|\zeta| \leq 1, \eta \geq 0$ in the $\zeta = \xi + i\eta$ plane. Let $F(z)$ be the complex torsion function of the region S and let $f(\zeta) = F[w(\zeta)]$ be the same complex torsion function expressed in terms of the variable ζ . If the mapping function can be continued analytically into the semicircle $|\zeta| \leq 1, \eta < 0$, the expressions for $f(\zeta)$, I , the polar moment of inertia and D , the torsional rigidity are given by [5]

$$f(\zeta) = i\omega(\zeta)\bar{\omega}(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\omega(\sigma)\bar{\omega}(\sigma) - \omega(\sigma)\bar{\omega}(\sigma)] \left[\frac{1}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{\sigma - 1/\zeta} \right] d\sigma, \quad (2.2)$$

$$I = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \{ \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}^2 - \omega(\sigma) \bar{\omega}^2(\sigma) \} d\omega(\sigma), \quad (2.3)$$

and

$$D = \mu(I + L + \bar{L}) \quad (2.4)$$

where

$$L = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma} f(\sigma) d \{ \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} - \omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma) \}. \quad (2.5)$$

Γ is the semicircumference $|\zeta| = 1$, $\eta \geq 0$, and $\sigma = e^{i\theta}$ is a point on Γ . μ is the rigidity modulus.

3. Application

Let the mapping function (2.1) be written in the form

$$z = \omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} a_n \zeta^n \quad (3.1)$$

where a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) are, in general, complex quantities. After some algebraic manipulations, we find

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} &= \sum_0^{\infty} c_n \sigma^n + \sum_1^{\infty} \bar{c}_n \sigma^{-n}, \\ \omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma) &= \sum_0^{\infty} b_n b^n \end{aligned} \quad (3.2)$$

where

$$c_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} \bar{a}_r,$$

$$b_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n-r} \bar{a}_r.$$

Substituting (3.2) into (2.2) and making use of the results given in the Appendix, we have the torsion function, besides a nonessential constant, given by

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= i \sum_1^{\infty} b_n \zeta^n + \frac{1}{2\pi} \left[2 k_0 \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \right. \\ &+ \sum_1^{\infty} \left\{ i\pi K'_n \zeta^n - 2 M'_n (\zeta^n + \zeta^{-n}) + \right. \\ &\quad \left. \left. + K''_n (\zeta^n + \zeta^{-n}) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

where

$$\begin{aligned} K_0 &= c_0 - b_0, & K'_n &= c_n - \bar{c}_n - b_n, \\ K''_n &= c_n + \bar{c} - b_n, & M'_n &= M_n + N_n, \\ M_n &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K_{n+2r+1}}{2r+1}, & N_n &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{n+2r+1}}{2r+1}. \\ K_n &= c_n - b_n \end{aligned}$$

To calculate the polar moment of inertia, we take

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) d\omega(\sigma) &= \sum_0^{\infty} \beta_n \sigma^n, & \beta_n &= \sum_{r=0}^{\infty} (n-r+1) a_r a_{n-r+1}, \\ \overline{\omega(\sigma)}^2 &= \sum_0^{\infty} \alpha_n \bar{\sigma}^n, \\ \overline{\omega^2(\sigma)} &= \sum_0^{\infty} \alpha_n \sigma^n, & \alpha_n &= \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_r \bar{a}_{n-r}, \\ \overline{\omega(\sigma)^2} \omega(\sigma) d\omega(\sigma) &= \sum_0^{\infty} \nu_n \sigma^n + \sum_1^{\infty} \nu'_n \bar{\sigma}^n, \\ \overline{\omega^2(\sigma)} \omega(\sigma) d\omega(\sigma) &= \sum_0^{\infty} \delta_n \sigma^n, \end{aligned}$$

where

$$\nu_n = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{n+r} \alpha_r, \quad \nu'_n = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_n \alpha_{n+r}$$

and

$$\delta_n = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{n-r} \beta_r. \quad (3.4)$$

Substituting (3.4) into (2.3) we have

$$I = \frac{i}{4} \left[\sum_{0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{2H_n}{n+1} - \sum_{2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2\nu'_n}{n-1} - i\pi\nu'_1 \right]. \quad (3.5)$$

$$H_n = \nu_n - \delta_n$$

If the coefficients a_n are taken to be real, then

$$I = \frac{\pi}{4} \nu'_1. \quad (3.6)$$

Towards the calculation of L , we take

$$d \{ \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} - \omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma) \} = \sum_1^{\infty} n K_n \sigma^{n-1} - \sum_1^{\infty} n \bar{c}_n \sigma^{-(n+1)},$$

$$\begin{aligned}
& f(\sigma) d \{ \omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma) - \omega(\sigma) \bar{\omega}(\sigma) \} = \\
& = i \left[\sum_1^{\infty} A_n \sigma^n - \sum_1^{\infty} B_n \sigma^{n-2} - \sum_1^{\infty} B'_n \bar{\sigma}^{(n+1)} \right] + \\
& + \frac{1}{2\pi} \left[2 K_0 \left\{ \sum_1^{\infty} n K_n \sigma^{n-1} - \sum_1^{\infty} n \bar{c}_n \bar{\sigma}^{(n+1)} \right\} \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} + \right. \\
& + \sum_1^{\infty} D_n \sigma^n - \sum_0^{\infty} E_n \sigma^n - \sum_1^{\infty} E'_n \bar{\sigma}^n + \\
& + \left\{ \sum_1^{\infty} F_n \sigma^n - \sum_0^{\infty} F'_n \sigma^n - \sum_1^{\infty} F''_n \bar{\sigma}^n + \right. \\
& + \left. \sum_0^{\infty} G_n \sigma^{n-1} + \sum_1^{\infty} G'_n \bar{\sigma}^{(n+1)} - \sum_1^{\infty} G''_n \bar{\sigma}^{(n+2)} \right\} \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} - \\
& - \sum_1^{\infty} L_n \sigma^n + \sum_0^{\infty} L'_n \sigma^n + \sum_1^{\infty} L''_n \bar{\sigma}^n - \\
& \left. - \sum_0^{\infty} P_n \sigma^{n-1} - \sum_1^{\infty} P'_n \bar{\sigma}^{(n+1)} + \sum_1^{\infty} P''_n \bar{\sigma}^{(n+2)} \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

with

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{r=1}^{\infty} (n-r+1) b_r K_{n-r+1}, & D_n &= \sum_{r=1}^{\infty} (n-r+1) K'_r K_{n-r+1}, \\
K_n &= c_n - b_n,
\end{aligned}$$

$$B_n = \sum_{r=1}^{\infty} r b_{n+r-1} \bar{c}_r, \quad B'_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n+r) b_r \bar{c}_{n+r},$$

$$E_n = \sum_{r=1}^{\infty} r \bar{c}_r K'_{n+r+1}, \quad E'_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n+r-1) K'_r \bar{c}_{n+r-1},$$

$$F_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n-r+1) K''_r K_{n-r+1}, \quad F'_n = \sum_{r=1}^{\infty} r \bar{c}_r K''_{n+r+1},$$

$$F''_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n+r-1) K''_r \bar{c}_{n+r-1},$$

$$G_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n+r) K''_r K_{n+r}, \quad G'_n = \sum_{r=1}^{\infty} r K_r K''_{n+r},$$

$$G''_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n-r+1) K''_r \bar{c}_{n-r+1},$$

$$L_n = \sum_{r=1}^{\infty} (n-r+1) M'_r K_{n-r+1}, \quad L'_n = \sum_{r=1}^{\infty} r \bar{c}_r M'_{n+r+1},$$

$$\begin{aligned} L''_n &= \sum_{r=1}^{\infty} (n+r-1) M'_r \bar{c}_{n+r-1}, \\ P_n &= \sum_{r=1}^{\infty} (n+r) M'_r K_{n+r}, \quad P'_n = \sum_{r=1}^{\infty} r K_r M'_{n+r}, \\ P''_n &= \sum_{r=1}^{\infty} (n-r+1) M_r c_{n-r+1}. \end{aligned}$$

Substituting (3.7) into (2.5), we obtain, after evaluating the integrals,

$$\begin{aligned} L + \bar{L} &= \frac{\pi}{8} (G_0 - F''_1 - 4 B_1) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\sum_1^{\infty} \left\{ \frac{D'_{2n}}{2n+1} - \frac{E'_{2n}}{2n-1} \right\} - (E_0 - \lambda_0) \right] - \frac{1}{4\pi} \Sigma \end{aligned} \quad (3.8)$$

where

$$D'_{2n} = D_{2n} - E_{2n}, \quad \begin{aligned} \lambda_n &= F_{2n+1} - F'_{2n+1} + G_{2n+2} \\ \lambda'_n &= G'_{2n} - G''_{2n-1} - F''_{2n+1}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_1^{\infty} \int_T \left[4 k_0 \left(n K_{2n} \sigma^{2n-1} - \frac{n \bar{c}_{2n}}{\sigma^{2n+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n \sigma^{2n+1} + \frac{\lambda'_n}{\sigma^{2n+1}} \right] \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Substituting (3.8) and (3.6) into (2.4) we have the torsional rigidity given by

$$\begin{aligned} \frac{D}{\mu} &= \frac{\pi}{8} (G_0 - F''_1 - 4 B_1 + 2 \nu'_1) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\sum_1^{\infty} \left\{ \frac{D'_{2n}}{2n+1} - \frac{E'_{2n}}{2n-1} \right\} + (\lambda_0 - E_0) \right] - \frac{1}{4\pi} \Sigma. \end{aligned} \quad (3.9)$$

The shearing stresses \widehat{xZ} and \widehat{yZ} are given by

$$\widehat{xZ} - i \widehat{yZ} = \mu \tau [F'(z) - i \bar{z}] \quad (3.10)$$

where τ is the constant angle of twist per unit length of the cylinder. In cylindrical coordinates R, Θ, Z , the shear stresses are given by

$$\widehat{RZ} - i \widehat{\Theta Z} = \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{R |\omega'(\zeta)|} (\widehat{xZ} - i \widehat{yZ}) = \quad (3.11)$$

$$= \frac{\mu \tau \zeta}{R |\omega'(\zeta)|} [f'(\zeta) - i \omega'(\zeta) \bar{w}(\bar{\zeta})] \quad (3.12)$$

from (3.10).

Substituting (3.1) and (3.3) into (3.12) and separating the real and imaginary parts, after putting $\zeta = Re^{i\theta}$, we have the peripheral stress

$$\begin{aligned} (\widehat{\Theta Z})_{R=1} = & - \frac{\mu\tau}{\pi\sqrt{\vartheta}} \left[\pi \sum_1^{\infty} \left(n b_n + \frac{1}{2} K'_n \right) \cos n\theta - \right. \\ & - 2n \sum_1^{\infty} M'_n \sin n\theta - \sum_1^{\infty} n K''_n \sin n\theta \cdot \log \tan \theta/2 + \\ & + \frac{2 \left(K_0 + \sum_1^{\infty} K''_n \cos n\theta \right) \sin \theta}{1 - \cos 2\theta} - \\ & \left. - \pi \left\{ \sum_1^{\infty} n a_n \cos \overline{n-1} \theta \sum_1^{\infty} a_n \cos n\theta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_1^{\infty} n a_n \sin \overline{n-1} \theta \sum_1^{\infty} a_n \sin n\theta \right\} \right] \end{aligned}$$

which becomes infinite at $\theta = 0, \pi$.

Here

(3.13)

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r(n+r) a_r a_{n+r} \cos n\theta$$

and $(\widehat{RZ})_{R=1}$ vanishes, as it should.

4. Example

As an example, let us consider a bar whose cross section is one half of a multisymmetrical curved boundary. In this case the mapping function is given by

$$Z = W(\zeta) = a(q\zeta + t\zeta^4 + m\zeta^7 + n\zeta^{10} + p\zeta^{13}), \quad (4.1)$$

with $a > 0, q = 1, t = 0.0887, m = 0.0566,$

$$n = 0.0244 \text{ and } p = 0.022,$$

or $q = 0.9202, t = 0.0647, m = 0.0129,$

$$n = -0.0029 \text{ and } p = 0. \quad (4.2)$$

Here $a_1 = aq, a_4 = at, a_7 = am, a_{10} = an, a_{13} = ap.$

From (3.3) we have

$$\begin{aligned} f(\zeta) = & \frac{ia^2}{2} [q^2 \zeta^2 + 2qt\zeta^5 + (t^2 + 2qm)\zeta^8 + 2(mt + nq)\zeta'' + \\ & + (m^2 + 2nt + 2pq)\zeta^{14} + 2(mn + pt)\zeta^{13} + \\ & + (n^2 + 2mp)\zeta^{20} + 2np\zeta^{23} + p^2\zeta^{26}] + \\ & + \frac{a^2}{2\pi} \left[\sum_1^{25} S_n (\zeta^n + \bar{\zeta}^n) + \sum_0^{26} r(\zeta^n + \bar{\zeta}^n) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

where

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 0,8 p^2 + 0,10526 n^2 + 0,15384 m^2 + 0,28572 t^2 + 2 q^2 - \\
 &\quad - 0,58948 pm - 0,05596 pq - 0,49232 nt - 0,22856 mq, \\
 S_2 &= -(3,80952 pn + 3,73332 mn + 0,30476 pt + \\
 &\quad + 3,55556 mt + 0,127 nq + 2,66667 qt), \\
 S_3 &= 0,08696 p^2 + 0,11764 n^2 + 0,18182 m^2 + 0,4 t^2 - \\
 &\quad - 0,96968 nt - 0,53332 mq - 0,0808 pq - 0,27451 pq, \\
 S_4 &= 0,21052 pn + 4 qt + 0,30768 mn + 0,57144 mt - 0,49232 pt - 0,22856 nq, \\
 S_5 &= 0,09524 p^2 + 0,13334 n^2 + 0,22222 m^2 + 0,66667 t^2 - \\
 &\quad - 2,66667 mq - 4 nt - 3,73332 mp + 0,44444 nt - 0,127 pq, \\
 S_6 &= -0,53332 nq - 0,06968 pt + 0,8 mt + 0,36364 mn + 0,23528 pn, \\
 S_7 &= 2 t^2 + 0,28572 m^2 + 0,15384 n^2 + 0,10526 p^2 - \\
 &\quad - 0,22856 pq + 4 qm + 0,57144 nt + 0,30768 mp, \\
 S_8 &= -2,66667 nq - 3,55556 pt + 1,3333 mt + 0,44444 mn + 0,26668 pn, \\
 S_9 &= 0,11764 p^2 + 0,18182 n^2 + 0,4 m^2 - 0,53333 pq + 0,8 nt + 0,36364 mp, \\
 S_{10} &= 4 mt + 4 nq + 0,57144 mn + 0,57144 pt + 0,30768 pn, \\
 S_{11} &= 0,13334 p^2 + 0,22222 n^2 + 0,66667 m^2 - 2,66667 pq + 1,33333 nt + 0,44444 mp \\
 S_{12} &= 0,8 mn + 0,8 pt + 0,36364 pn, \\
 S_{13} &= 2 m^2 + 0,28572 n^2 + 0,15384 p^2 + 0,57144 mp + 4 pq + 4 nt, \\
 S_{14} &= 1,33333(mn + pt) + 0,44444 pn, \\
 S_{15} &= 0,4 n^2 + 0,18182 p^2 + 0,8 mp, \quad S_{16} = 4(mn + pt) + 0,57144 pn, \\
 S_{17} &= 0,22222(p^2 + 3 n^2 + 6 mp), \quad S_{18} = 0,8 pn, \\
 S_{19} &= 2 n^2 + 4 mp + 0,28572 p^2, \quad S_{20} = 1,33333 pn, \\
 S_{21} &= 0,4 p^2, S_{22} = 4 pn, S_{23} = 0,66667 p^2, S_{24} = 0, S_{25} = 2 p^2,
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 r_0 &= p^2 + q^2 + t^2 + m^2 + n^2, & r_2 &= -q^2, \\
 r_3 &= 2(qt + mt + mn + np), & r_5 &= -2 qt, & r_6 &= 2(mq + nt + mp), \\
 r_8 &= -(t^2 + 2 qm), & r_9 &= 2(nq + pt), & r_{11} &= -2(mt + nq), \\
 r_{12} &= 2 pq, & r_{14} &= -(m^2 + 2 pq + 2 nt), & r_{17} &= -2(mn + pt), \\
 r_{20} &= -(n^2 + 2 mp), & r_{23} &= -2 pn, & r_{26} &= -p^2.
 \end{aligned}$$

The remaining r 's are zero.

From (3.5) we have

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi a^4}{4} [q^4 + 10 q^2 t^2 + 4(t^2 + 2 qm)^2 + 22(nq + mt)^2 + \\
 &\quad + 7(m^2 + 2 nt + 2 pq)^2 + 34(mn + pt)^2 + 10(n^2 + 2 mp)^2 + 46 n^2 p^2 + 13 p^4], \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

and from (3.9)

$$\begin{aligned} \frac{D}{\mu} = & \frac{\pi a^4}{2} [\chi] - \frac{a^4}{4 \pi} [16 q^4 + 50,89821 t^4 + \\ & + 82,73185 m^4 + 144,31991 p^4 + 130,82967 n^4 + \\ & + q^3(12,95747 m + 0,06535 p) + 26,82212 nt^3 + \\ & + m^3(74,58285 p + 18,32208 q) + p^3(138,36149 m - \\ & - 7,52881 q) + 24,68935 tn^3 + q^2(528,20985 p^2 + \\ & + 280,84407 m^2 + 384,24760 n^2 + 73,83214 t^2 + \\ & + 5,94828 mp - 49,87748 nt) + t^2(389,08866 n^2 + \\ & + 103,99184 mq - 67,26449 pq + 322,64791 mp) + \\ & + m^2(270,01096 t^2 + 356,42747 n^2 + 295,54874 nt + \\ & + 495,20537 pq) + p^2(469,05428 n^2 + 535,97151 t^2 + \\ & + 859,28277 m^2 - 23,09594 mq - 59,28628 nt) + \\ & + n^2(556,37226 mp - 16,58840 mq + 60,45157 pq) + \\ & + 1111,84196 pqnt + mnt(550,87542 q + 770,50464 p)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

where χ stands for the quantity within the brackets of (4.4).

The peripheral stress, from (3.13) is obtained in the form

$$\begin{aligned} (\widehat{\Theta Z})_{R=1} = & - \frac{\mu \tau a}{\pi \sqrt{\vartheta}} \left[\pi \left\{ q^2 \cos 2\Theta + 5 qt \cos 5\Theta + 4(t^2 + 2qm) \cos 8\Theta + \right. \right. \\ & + 11(mt + nq) \cos 11\Theta + 14(m^2 + 2pq + 2nt) \cos 14\Theta + \\ & + 17(mn + pt) \cos 17\Theta + 10(n^2 + 2mp) \cos 20\Theta + 23 np \cos 23\Theta + \\ & + 13 p^2 \cos 26\Theta \left. \right\} + \left\{ \sum_1^{25} ns_n \sin n\Theta - \sum_1^{26} nr_n \sin n\Theta \cdot \log \tan \Theta/2 + \right. \\ & + 2 \sum_0^6 \frac{r_n \cos n\Theta \sin \Theta}{1 - \cos 2\Theta} \left. \right\} - \pi \left\{ (q^2 + 4t^2 + 7m^2 + 10n^2 + 13p^2) + \right. \\ & + (5qt + 11mt + 17mn + 23pn) \cos 3\Theta + (8qm + 14nt + \\ & \left. \left. + 20mp\right) \cos 6\Theta + (11nq + 17pt) \cos 9\Theta + 14pq \cos 12\Theta \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

where

$$\begin{aligned} \vartheta = & [(q^2 + 16t^2 + 49m^2 + 100n^2 + 169p^2) + \\ & + (8qt + 56mt + 140mn + 260pn) \cos 3\Theta + \\ & + (14mq + 80nt + 182pm) \cos 6\Theta + \\ & + (20nq + 104pt) \cos 9\Theta + 26pq \cos 12\Theta]. \end{aligned}$$

5. Particular cases

a) Cross section: a semicircle.

In this case

$$z = w(\zeta) = a \zeta. \quad (5.1)$$

Substituting $q = 1$, $t = 0 = m = n = p$ in (4.3), (4.4), (4.5) and (4.6) we get the torsion function, polar moment of inertia, torsional rigidity and the non-vanishing peripheral stress given by

$$f(\zeta) = \frac{a^2}{2\pi} \left[i\pi\zeta^2 + 2(\zeta + 1/\zeta) - (\zeta - 1/\zeta)^2 \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right], \quad (5.1)$$

$$I = \frac{\pi a^4}{4}, \quad D = \mu a^4 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right], \quad (5.2)$$

$$(\overline{\Theta Z})_{R=1} = \frac{\mu \tau a}{\pi} [2 \sin \Theta (\pi \sin \Theta - 2) - 2 \sin 2\Theta \log \tan \Theta/2]. \quad (5.3)$$

The above results agree with those given by DEUTCH in [5].

b) Cross section: One half of a right angled triangle with 30° and 60° angles.

The mapping function is

$$z = \omega(\zeta) = a(\zeta + t\zeta^4).$$

Putting $q = 1$, $m = 0 = n = p$ in (4.3), (4.4), (4.5) and (4.6)

we obtain

$$\begin{aligned} f(\zeta) = & \frac{\alpha^2}{2\pi} \left[i\pi\zeta^2(1+t\zeta^3)^2 + 2 \left(1 + \frac{t^2}{7}\right)(\zeta + \bar{\zeta}^1) - \right. \\ & - \frac{8}{3}t(\zeta^2 + \bar{\zeta}) + \frac{2}{5}t^2(\zeta^3 + \bar{\zeta}^3) + 4t(\zeta^4 + \bar{\zeta}^4) + \frac{2}{3}t^2(\zeta^5 + \bar{\zeta}^5) + \\ & \left. + 2t^2(\zeta^7 + \bar{\zeta}^7) - \{(\zeta - \bar{\zeta}') + t(\zeta^4 - \bar{\zeta}^4)\}^2 \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$I = \frac{\pi \alpha^4}{4} (1 + 10t^2 + 4t^4), \quad (5.5)$$

$$D = \frac{\pi \mu \alpha^4}{2} (1 + 10t^2 + 4t^4) - \frac{\pi \alpha^4}{4\pi} (16 + 73,83214t^2 + 50,89821t^4), \quad (5.6)$$

and

$$\begin{aligned} Z_{R=1} = & + \frac{\mu \tau a}{\pi \sqrt{\vartheta}} \left[\pi \{(1+4t^2) - \cos 2\Theta + 5t(\cos 3\Theta - \cos 5\Theta) - \right. \\ & - 4t^2 \cos 8\Theta\} - 2 \left(1 + \frac{t^2}{7}\right) \sin \Theta + \frac{16}{3}t \sin 2\Theta - \frac{6t^2}{5} \sin 3\Theta - \\ & - 16t \sin 4\Theta - \frac{10}{3}t^2 \sin 5\Theta - 14t^2 \sin 7\Theta - 2 \{\sin 2\Theta - 3t \sin 3\Theta + \\ & + 5t \sin 5\Theta + 4t^2 \sin 8\Theta\} \log \tan \Theta/2 - \frac{1}{\sin \Theta} \{1 + t^2 - \cos 2\Theta + \\ & \left. + 2t \cos 3\Theta - 2t \cos 5\Theta - t^2 \cos 8\Theta\} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

where

$$\vartheta = 1 + 16t^2 + 8t \cos 3\Theta.$$

The results for various sections have similarly been obtained directly from the results in section 3, with suitable choice of the coefficients in the mapping function.

Appendix

Use has been made of the following integrals:

$$1. \int \sigma^{2n-1} d\sigma = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ i\pi, & n = 0 \end{cases}$$

$$\int \sigma^{2n} d\sigma = -\frac{2}{2n+1}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$2. \int \sigma^n \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} d\sigma = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{n+1} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} \right], & n = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{\pi^2}{2}, & n = -1 \\ -\frac{2i\pi}{n+1}, & n = -2, -4, -6, \dots \\ -\frac{4}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right), & n = -3, -5, -7, \dots \end{cases}$$

$$3. \int \sigma^n \left(\frac{1}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{\sigma-1/\bar{\zeta}} \right) d\sigma = i\pi + 2 \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad n = 0$$

$$= -\frac{2}{n-1} (\zeta + \bar{\zeta}^1) - \frac{2}{n-3} (\zeta^3 + \bar{\zeta}^3) -$$

$$- \frac{2}{n-5} (\zeta^5 + \bar{\zeta}^5) - \dots + i\pi\zeta^n + (\zeta^n + \bar{\zeta}^n) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad n = 2, 4, 6, \dots;$$

$$= -\frac{4}{n} - \frac{2}{n-2} (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2) - \frac{2}{n-4} (\zeta^4 + \bar{\zeta}^4) -$$

$$- \frac{2}{n-6} (\zeta^6 + \bar{\zeta}^6) - \dots + i\pi\zeta^n + (\zeta^n + \bar{\zeta}^n) \log \frac{1-\zeta}{1-\bar{\zeta}}, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$4. \int \bar{\sigma}^n \left(\frac{1}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{\sigma-1/\bar{\zeta}} \right) d\sigma = -i\pi\zeta + (\zeta + \bar{\zeta}^1) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad n = +1$$

$$= -\frac{2}{n-1} (\zeta + \bar{\zeta}^1) - \frac{2}{n-3} (\zeta^3 + \bar{\zeta}^3) - \dots$$

$$- i\pi\zeta^n + (\zeta^n + \bar{\zeta}^n) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$= -\frac{2}{n-2} (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2) - \frac{2}{n-4} (\zeta^4 + \bar{\zeta}^4) -$$

$$- \dots - i\pi\zeta^n + (\zeta^n + \bar{\zeta}^n) \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

REFERENCES

1. MUSKHELISHVILI: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (1953)
2. SOKOLNIKOFF: Mathematical Theory of Elasticity (1956).
3. MORRIS and HAWLEY: Q. J. M. A. M. (1958), p. 462.
4. HIGGINS: Journal of Applied Physics (1942), p. 457.
5. DEUTCH E.: Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, (1962), Vol. X, No. 2, p. 85
6. SNEDDON—BERRY: The Classical Theory of Elasticity. Springer, Berlin 1958.
7. SAWIN: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. Verlag Technik, Berlin 1956.

TORSION VON PRISMATISCHEN STÄBEN

M. G. K. MURTHY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit bringt eine prinzipielle Lösung der Torsion von prismatischen Stäben für den Fall, daß die Funktion, welche den Stabquerschnitt auf den Einheitskreis konform abbildet, in Form einer Potenzerie bekannt ist. Als Anwendungsbeispiel wird die Lösung des Drillungsproblems für einen Stab vorgeführt, dessen Querschnitt die Hälfte eines mehrfach symmetrischen Profils bildet. Einige Spezialfälle werden ebenfalls behandelt.

TORSION DES BARRES PRISMATIQUES

M. G. K. MURTHY

RÉSUMÉ

L'étude présente une solution pour la torsion des barres prismatiques, pour le cas où la fonction représentant la section de barre d'une façon conforme au cercle unitaire est donnée sous la forme d'une série exponentielle. Comme exemple d'application, l'auteur décrit la solution du problème de torsion d'une barre dont la section est la moitié d'une section multiplement symétrique. Certains cas spéciaux sont aussi examinés à la fin de l'étude.

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

М. Г. К. МУРТИ

РЕЗЮМЕ

В работе приводится принципиальное решение кручения призматических стержней для того случая, когда отображающая функция, отображает стержневое сечение приведенным к единичному кругу, и известна в виде потенциального ряда. В качестве примера применения демонстрируется решение проблемы кручения стержня, сечение которого равно половине многократно симметричного разреза. Рассматриваются также отдельные специальные случаи.

EXAMINATION OF THE EFFECT OF TEMPERATURE GRADIENTS BY MEANS OF INFLUENCE LINES

J. SZIDAROVSKY

CAND. OF TECHN. SC.

MINISTRY OF COMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received June 7, 1965]

Analysis of statically indeterminate structures has often to take the effect of temperature gradients into consideration. Now, a fictitious load, equivalent to the temperature gradient, will be determined, and displacements and internal forces, resp., due to temperature gradients, can be determined by loading this fictitious load onto the influence lines. Application of this procedure is illustrated in the examples.

1. Introduction

In certain cases, bridge specifications require examination of the effect of temperature gradients. In this examination a linear temperature variation is assumed throughout the beam section.

In statistically determinate structures this effect produces only a deformation and no internal forces, while for redundant structures unrestrained deformations cannot develop and thereby internal forces arise.

This problem can be solved by the well-known method of reducing the beam into primary structures, to determine the relative displacements due to temperature gradient at the joints assumed to be dissolved at the reduction into primary structures, and to establish an equation system for determining redundant forces at these joints.

However, this procedure cannot be applied directly for suspension bridges, pre- and post-tensioned beams, compressed and tensile bars, neither for shallow arches to be analyzed by deflection theory, since for these beam types the displacement of the primary structures produced by the temperature variation gives rise to internal forces, this being difficult to take into consideration and their effect on relative displacements to be examined.

This paper describes a procedure, valid, beside simple structures, also for these special structures, involving almost no excess work if their influence lines are available, and labour saving.

2. Equivalent load of the effect of temperature gradient on a statically determinate structure

Over an infinitesimal length of a beam submitted to a temperature gradient, lower fibre is of length dx , top fibre of $\Delta x = dx(1 + \omega t)$, where ω is the linear thermal expansion coefficient, t is the temperature difference between lower and top fibre. Relative change in length, assumed to be unrestrained, i.e. the beam to be statically determinate, is expressed by:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta x - dx}{dx} = \omega t .$$

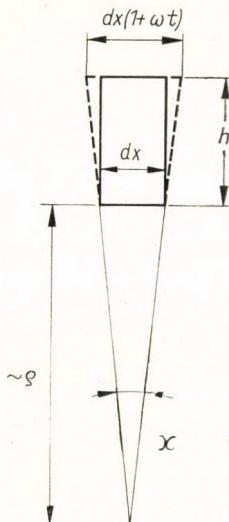


Fig. 1

At two boundaries of the infinitesimal beam length dx , originally parallel plane sections are subject to a relative rotation φ such as (Fig. 1):

$$\varphi = \frac{\varepsilon_t}{h} dx = \frac{\omega t}{h} dx$$

where h is section depth. The curvature is:

$$\frac{1}{\varrho_t} = \frac{\varphi}{dx} = \frac{\omega t}{h} . \quad (2.1)$$

For a beam loaded by external forces producing bending moment \dot{M} , the curvature is:

$$\frac{1}{\varrho_M} = \eta'' = - \frac{\dot{M}}{EI} . \quad (2.2)$$

If the external load is such as to develop a bending moment producing a curvature equal to that produced by temperature gradient, i.e. (2.1) and (2.2) are equal, then a substitutive internal moment

$$M_t = - \frac{EI \omega t}{h} \quad (2.3)$$

will develop in the beam. The same moment will be produced by an external load, the so-called substitutive load:

if the beam at its origin ($x = 0$) is subjected to an external moment

$$M_{t(0)} = - \frac{EI_0 \omega t}{h_0}, \quad (2.4)$$

at its end point ($x = l$) to

$$M_{t(l)} = - \frac{EI_l \omega t}{h_l}, \quad (2.5)$$

and at an intermediate section to the external distributed moment

$$m_t = \frac{d}{dx} M_t = - \frac{d}{dx} \frac{EI \omega t}{h} = - \omega t \left[\frac{EI}{h} \right]'_x. \quad (2.6)$$

In these expressions $I_0, h_0; I_l, h_l$; and I, h are moments of inertia and depths of the beam resp., at the origin, at the end section and at an arbitrary section, respectively. Derivation was made with respect to abscissa x of the beam section, as indicated by the subscript.

Where there is an inflection or jump in the value of

$$\frac{EI}{h},$$

there the beam is subjected to a concentrated moment

$$M_{tk_{dx \rightarrow 0}} = \omega t \left[\frac{E(x+dx)I(x+dx)}{h(x+dx)} - \frac{E(x-dx)I(x-dx)}{h(x-dx)} \right]. \quad (2.7)$$

Deflection of beam due to temperature gradient may also be produced by the substitutive load according to Eqs. (2.4) to (2.7).

However, internal forces produced by this substitutive load are not equal to those produced by the temperature gradient. Namely, in the statically determinate primary beam, the deformation due to temperature gradient arises without restraint and, therefore, no internal forces develop.

It should be noted that external substitutive moments are in equilibrium, so that in the statically determinate (primary) beam no reactions develop.

If some beam elements are not horizontal, at derivation the abscissa x in all sections is to be assumed normally to that section i.e. parallelly to the beam axis. Thus, the expression containing cross-sectional characteristics is to be derived in the axial direction. If there is a hinge in the beam (e.g. hinged continuous beams), $EI = 0$ is assumed for a short length $dx \rightarrow 0$. Thus, according to (2.7), concentrated moments

$$M_t = -\omega t \left[\frac{EI}{h} \right]_{\text{left}} \quad (2.8)$$

and

$$M_t = \omega t \left[\frac{EI}{h} \right]_{\text{right}} \quad (2.9)$$

act in front of and behind the hinge, respectively.

3. Effect of temperature gradient on a redundant structure

Analysis of a redundant structure involves its reduction into a primary structure. For this primary structure, relative displacements will be determined at joints assumed as being dissolved, and then redundant forces are applied that cause these relative displacements to vanish. The actual internal forces and deformation will be produced on the primary structure by a combination of external and redundant forces.

Deformation of the primary structure due to temperature gradient equals that produced by the substitutive load, hence redundant force due to temperature gradient equals that due to the substitutive load. However, temperature gradient does not give rise to internal forces in the primary structure, while the substitutive load does.

Accordingly, for a redundant structure, deformation due to a substitutive load equals that due to a temperature gradient. Internal forces in redundant structures due to the substitutive load are to be lessened by internal forces in the primary structure produced by the substitutive load, to give internal forces in the redundant structure produced by temperature gradient. Thus, our procedure is the same as that for statically determinate structures.

If the structure is such that deformation of the primary structure produces internal forces (such as bars in compression), primary structures exempt from the effect of the cause producing the internal force (in this case the compression), the "first" primary structure (without compression) should be exposed to the substitutive load. Accordingly, when analysing internal forces, those developing in the "first" primary structure are to be subtracted.

4. Influence line for external moments

To analyse the effects on structures due to vertical external loads, influence lines are constructed, which, when loaded by vertical external forces, yield the deformation or internal forces wanted. For structures loaded by external moments instead of vertical external forces, theoretically, influence lines can be constructed to analyse the effects due to external moments and these

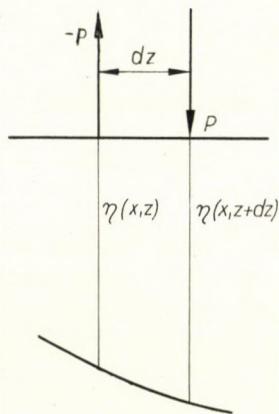


Fig. 2

influence lines loaded by external moments give beam deformations and internal forces. However, there is an internal relationship between influence lines for external vertical force effects and external moment effects, respectively, and if influence lines for vertical force effects are available, then those for moment effects are easy to construct.

Denote effect developing in beam section x due to unit vertical load acting at beam section z by:

$$\eta(x, z). \quad (4.1)$$

Then $\eta(x, z)$ is the influence line of vertical forces.

Let locus z be acted upon by an upward force P and $(z + dz)$ by a downward force P . Their combined effect will be the same as that of an external moment $M = P.dz$. This effect is expressed by (Fig. 2):

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= -P\eta(x, z) + P\eta(x, z + dz) = P[\eta(x, z + dz) - \eta(x, z)] = \\ &= P \frac{\eta(x, z + dz) - \eta(x, z)}{dz} dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

For $dz \rightarrow 0$

$$\bar{E} = P\eta'_z(x, z) dz. \quad (4.3)$$

External load moment is, however,

$$P dz = M . \quad (4.4)$$

This gives:

$$\bar{E} = M \eta'_z(x, z) \quad (4.5)$$

where M is the external load, and $\eta'_z(x, z)$ is the influence line of moments, a derivative of influence line of vertical forces with respect to z (external load locus), as indicated by the subscript.

If individual units of the structure are vertical or nearby vertical, then influence lines are to be constructed for horizontal forces. Abscissa z will be assumed normally to influence line of the force the effect of which the influence line refers to.

In case of frameworks, for horizontal members, influence lines for vertical forces, and for vertical members, influence lines for horizontal forces are to be constructed. Influence lines will be derived normally to the forces, i.e. horizontally or vertically, as the case may be.

5. Determination of effects due to temperature gradients by means of influence lines

The above considerations lend themselves to an easy determination of deformation and of internal forces due to temperature gradients, if influence lines for vertical forces are available.

The first derivative of vertical influence lines with respect to z (ordinate of loading) is loaded by the external substitutive moments determined from Eqs. (2.4) to (2.7), and in the case where the internal forces are to be determined, the effects on the "first" primary structure are to be subtracted. Internal moment value developing in the "first" primary structure will be obtained from (2.3), its shearing force is its first derivative with respect to x (ordinate of section). Accordingly, if temperature gradients throughout load the length of the structure a displacement of

$$y(x) = \omega t \left[\frac{E_l I_l}{h} \eta'_{yz}(x, l) - \int_0^l \left(\frac{EI}{h} \right)' \eta'_{yz}(x, z) \cdot dz - \frac{E_0 I_0}{h_0} \eta'_{yz}(x, 0) \right] \quad (5.1)$$

and a bending moment and a shearing force, resp., of:

$$M(x) = \omega t \left[\frac{E_l I_l}{h_l} \eta'_{Mz}(x, l) - \int_0^l \left(\frac{EI}{h} \right)' \eta'_{Mz}(x, z) dz - \frac{E_0 I_0}{h_0} \eta'_{Mz}(x, 0) + \frac{E(x) I(x)}{h(x)} \right] \quad (5.2)$$

and

$$Q(x) = \omega t \left[\frac{E_l I_l}{h_l} \eta'_{Qz}(x, l) - \int_0^l \left(\frac{EI}{h} \right)'_x \eta'_{Qz}(x, z) \cdot dz - \frac{E_0 I_0}{h_0} \eta'_{Qz}(x, 0) + \left(\frac{E(x) I(x)}{h(x)} \right)'_x \right] \quad (5.3)$$

result.

In the symbols for functions $\eta(x, z)$ (influence lines) subscripts refer to the examined effects.

For a constant cross-section

$$y = \frac{EI \omega t}{h} [\eta'_{yz}(x, l) - \eta'_{yz}(x, 0)], \quad (5.4)$$

$$M = \frac{EI \omega t}{h} [\eta'_{Mz}(x, l) - \eta'_{Mz}(x, 0) + 1], \quad (5.5)$$

$$Q = \frac{EI \omega t}{h} [\eta'_{Qz}(x, l) - \eta'_{Qz}(x, 0)] \quad (5.6)$$

where $\eta(x, z)$ is an influence line (influence function) of external vertical forces for the examined effect.

6. Examples]

6.1 Simple beam

Bending moment at quarter span, $x = l/4$, arising in a simple beam of constant cross-section, of span l (Fig. 3) is to be determined.

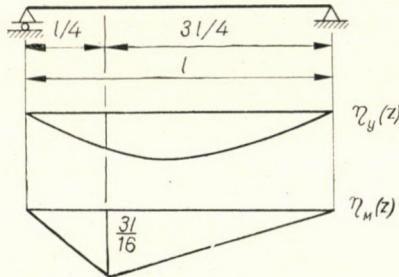


Fig. 3

Moment influence lines are given by relationships:

$$\begin{aligned} \eta_M(x, z) &= \frac{l-x}{l} z && \text{for } z \leq x, \\ \eta_M(x, z) &= \frac{x}{l} (l-z) && \text{for } z \geq x. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Derivatives of both end tangents (6.12) with respect to z are at $z = 0$ and $z = l$, respectively:

$$\eta'_{Mz} \left(\frac{l}{4}, 0 \right) = \left[\frac{l-x}{l} \right]_{x=l/4} = \frac{3}{4},$$

$$\eta'_{Mz} \left(\frac{l}{4}, l \right) = \left[-\frac{x}{l} \right]_{x=l/4} = -\frac{1}{4}$$

to give a moment according to (5.5) as:

$$M = \frac{EI \omega t}{h} \left[-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 \right] = 0.$$

6.2 Two-span continuous beam

Let us determine the moment at the middle support and at midspan, respectively, due to temperature gradient arising in a two-span continuous beam of constant cross-section and of equal spans b . Beam length is: $l = 2b$ (Fig. 4).

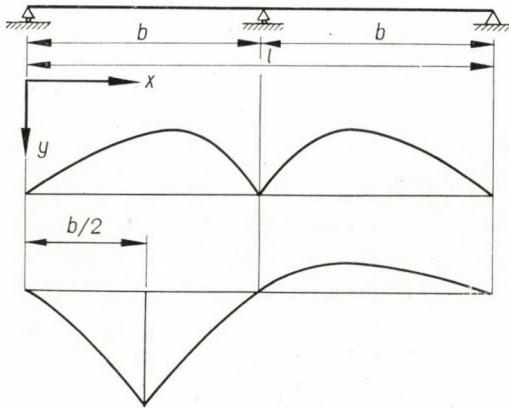


Fig. 4

According to the Anger table (G. Anger: Zehnteilige Einflusslinien für durchlaufende Träger, Bd. III. Berlin, 1949) ordinates of the moment influence line at the middle support i.e. of the section $x = l/2$ at $z = b/10 = l/20$ and at $z = 19b/10 = 19l/20$, respectively, are:

$$\eta_M \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{20} \right) = -0,0248 l$$

to give:

$$\eta'_{Mz} \left(\frac{l}{2}, 0 \right) = -\eta'_{Mz} \left(\frac{l}{2}, l \right) \approx -\frac{0,0248 l}{0,1 l} = -0,248.$$

Moment at the middle support is, according to (5.5):

$$M \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{EI \omega t}{h} (0,248 + 0,248 + 1) = 1,496 \frac{EI \omega t}{h}.$$

Moment influence lines at $x = l/4$, i.e. at midspan are, according to the quoted table:

$$\eta_M \left(\frac{l}{4}, \frac{l}{20} \right) = 0,0376 l, \quad \text{and} \quad \eta'_M \left(\frac{l}{4}, 0 \right) \approx \frac{0,0376 l}{0,1 l} = 3,376,$$

$$\eta_M \left(\frac{l}{4}, \frac{19 l}{20} \right) = 0,0124 l, \quad \eta'_M \left(\frac{l}{4}, l \right) \approx \frac{0,0124 l}{0,1 l} = 0,124.$$

The moment is, according to (4.5):

$$M \left(\frac{l}{4} \right) = \frac{EI \omega t}{h} (0,124 - 0,376 + 1) = 0,748 \frac{EI \omega t}{h};$$

it is the half of $M(l/2)$.

The same result can be obtained by the usual computation method.

6.3 Simply supported suspension bridge

The bending moment due to a temperature gradient, i.e. a warming up by 15°C of the top flange of the stiffening truss at $x = 0,15 l$ of the middle span of a simply supported

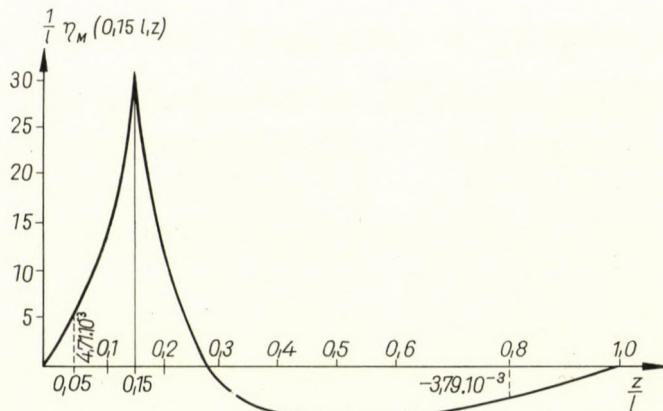


Fig. 5

suspension bridge built in 1941 in Sweden is to be determined. Relevant data are taken from the book by S. O. ASPLUND: "On the Deflection Theory of Suspension Bridges" (Stockholm, 1945). Tables of the same book serve to calculate influence line ordinates (Fig. 5).

Bridge data :

Middle span

$$l = 140 \text{ m},$$

Flexural rigidity of the stiffening truss

$$EI = 19,6 \cdot 10^3 \text{ tm}^2 (\text{m}^2 \text{ Mp}),$$

Cable sagging

$$f = 16,8 \text{ m},$$

Cable force due to dead load

$$H_w = 199t [\text{Mp}],$$

Depth of stiffening truss (estimated) h

$$= 0,6 \text{ m},$$

Linear thermal expansion coeff.

$$\omega = 1,2 \cdot 10^{-5}.$$

Ordinate x of the moment influence line at $0,5 l = l/20$ (Fig. 5) from the quoted book: ($w =$ dead load),

$$\eta_M(0,15 l, 0,05 l) = \frac{471 \cdot 10^{-3} \cdot wl^2}{wl} = 4,71 \cdot 10^{-3} \cdot 140 = 0,660 \text{ m}$$

to give approximately:

$$\eta'_M(0,15 l, 0) \approx \frac{0,660 \text{ m}}{0,05 \cdot 140 \text{ m}} = 0,094.$$

Similarly, ordinate x of the influence line at $0,8 l$ is

$$\eta_M(0,15 l, 0,8 l) = -3,79 \cdot 10^{-3} \cdot 140 = 0,530 \text{ m}$$

to give approximately:

$$\eta'_{Mz}(0,15 l, l) \approx \frac{0,530 \text{ m}}{0,2 \cdot 140 \text{ m}} = 0,019.$$

The moment at the examined locus is, according to (5.4):

$$M(0,15 l) = \frac{19,6 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15}{0,6} (0,019 - 0,094 + 1) = 5,4 \text{ tm},$$

some 15 per cent of the max. moment ($=37,2 \text{ tm}$) developing in the stiffening truss. It is interesting to note that the moment is almost the same as would be for a perfectly restrained beam, since the cable allows but a slight deformation.

UNTERSUCHUNG DER WIRKUNG VON UNGLEICHMÄSSIGEN TEMPERATURVERÄNDERUNGEN DURCH EINFLUSSLINIEN

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Untersuchung statisch unbestimmter Konstruktionen muß öfters auch der Einfluß der ungleichmäßigen Temperaturveränderung berücksichtigt werden. In diesem Aufsatz wird eine, mit der Wirkung der ungleichmäßigen Temperaturveränderung gleichwertige Fiktivlast festgestellt, wodurch belastete Einflußlinien die durch die ungleichmäßige Temperaturveränderung verursachten Bewegungen und Beanspruchungen ergeben. Die Anwendung des Verfahrens wird an Hand von Beispielen dargelegt.

5

EXAMEN DE L'EFFET DES VARIATIONS INÉGALES DE TEMPÉRATURE A L'AIDE DES LIGNES D'INFLUENCE

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

L'analyse des structures hyperstatiques doit souvent prendre en considération l'effet des variations inégales de température. L'étude détermine une charge fictive équivalant à l'effet des variations de température. En reportant cette charge fictive sur la ligne d'influence, on obtient les déplacements et les sollicitations dus aux variations de température. L'application du procédé est illustrée par des exemples.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ПОМОЩИ КРИВЫХ ВЛИЯНИЯ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

При исследовании статически неопределенных систем, как правило, необходимо принимать во внимание и неравномерные изменения температуры. В работе определяется активная нагрузка, равнозначная влиянию неравномерных изменений температуры, и проявляющиеся смещения и напряжения, являющиеся результатом неравномерных изменений температуры, определяются с помощью отражения этой фиктивной силы на кривых влияния. Применение метода показано на примерах.

TORSION EINZELLIGER KASTENTRÄGER

B. GOSCHY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR QUALITÄTSKONTROLLE IM BAUWESEN BUDAPEST

[Eingegangen am 29. November 1965]

Die Stahl- und Spannbeton-Kastenträger werden oft aus technischen und wirtschaftlichen Gründen ohne Zwischenschottertage ausgebildet, wodurch sich die Querschnitte des verdrillten Trägers ihre Anfangsform nicht beibehalten, sie verformen sich durch Verzerrung. In der vorliegenden Arbeit wird die Torsionsberechnung des Kastenträgers mit verformbaren Querschnitt ohne Verwölbung gezeigt, da der Einfluß der Verwölbung bei geschlossenen Querschnitten nur einen örtlichen Charakter annimmt. Es wird bewiesen, daß die Torsionsssteifigkeit der kurzen und breiten Kastenträger infolge der Querschnittsverformung wesentlich verringert wird, ferner, daß der Einfluß der Querschnittsverformung bei Trägern, wo die Länge zehnmal größer als die Breite ist, vernachlässigt werden kann.

1. Voraussetzungen

Es werden die in der Torsionstheorie der dünnwandigen, geschlossenen Querschnitte üblichen Voraussetzungen getroffen. Wenn die Bedingungen

$$\frac{d_{\max}}{b} < 0,1 \text{ und } \frac{b}{l} < 0,1$$

(d_{\max} = maximale Wanddicke) erfüllt sind (Bild 1.), kann man eine gleichmäßige Schubspannungsverteilung in den Kastenwänden annehmen. Die Wölkrafttorsion wird vernachlässigt.

Die Verformungen der Kastenwände werden nach den Prinzipien der elementaren Biegetheorie bestimmt.

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird ein symmetrischer I oder II förmiger Querschnitt betrachtet (Bild 2a).

2. Verformungsgleichungen

Die auf den untersuchten Kastenträger wirkende exzentrische, verteilte Belastung $2p(z)$ nach Bild 2 kann in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil zerlegt werden. Der symmetrische Belastungsfall kann nach der Biegetheorie der Stabwerke untersucht werden und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht besprochen.

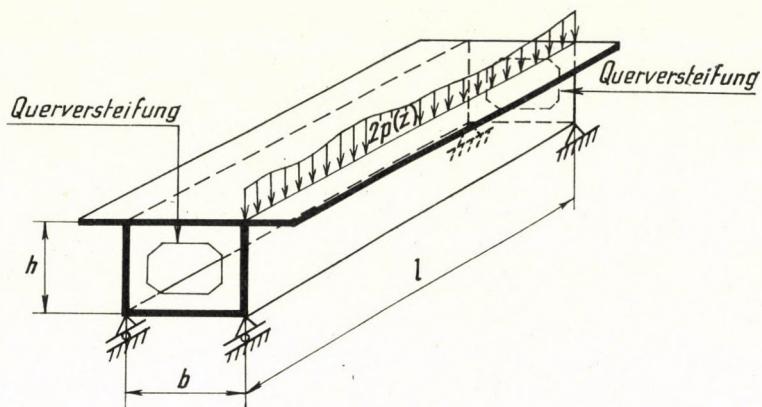


Bild 1. Exzentrisch belasteter, einzelliger Kastenträger mit zwei Endquerversteifungen

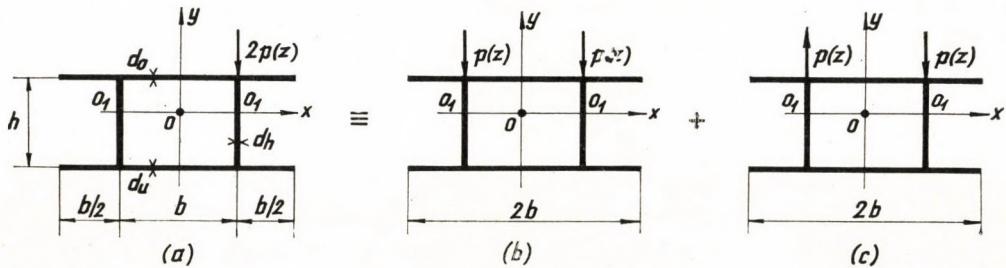


Bild 2. Zerlegung der exzentrischen Belastung in einen symmetrischen (a) und in einen antimetrischen Lastanteil (b)

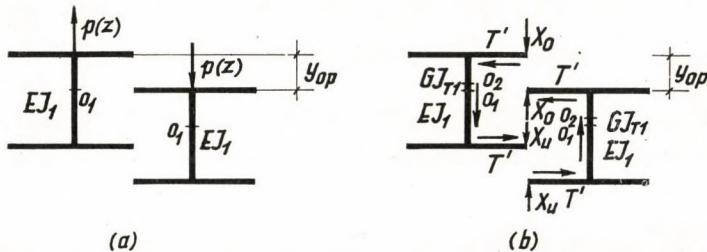


Bild 3. Das statisch-bestimmte Grundsystem, äußere- und Zwangskräfte

Die antimetrische Belastung führt zur Drillmomentenbelastung

$$m_T = p(z)b. \quad (1)$$

Der torodierte Trägerquerschnitt bildet ein innerlich statisch-unbestimmtes System.

Die überzähligen Kräfte werden aus den Verformungsgleichungen bestimmt. Zu diesem Zwecke werden die waagerechten Scheiben in der Zellenmitte zerschnitten womit ein statisch-bestimmtes Grundsystem entsteht. An den zerschnittenen Trägerkanten wirken nun als Zwangskräfte die Querkräfte X_0 und X_u , je Einheit der Stablänge, ferner der Schubfluß $dT/dz = T'$ (Bild 3).

2.1 Lotrechte Verschiebungen

Aus der äußeren Belastung $p(z)$ kann die relative Verschiebung der zwei Trägerkanten des Grundsystems mit der Beziehung (Bild 3a)

$$y_{op}^{IV} = -\frac{2 p(z)}{EI_1} \quad (2)$$

berechnet werden, wo EI_1 die Biegesteifigkeit des I-förmigen Hauptträgers bedeutet.

Die relativen lotrechten Verschiebungen an den Schnittstellen (im entgegengesetzten Sinne positiv genommen) aus den überzähligen Kräften $X_0 + X_u$ bestehen aus drei Teilen (Bild 3b):

a) aus der Verschiebung infolge der Biegung, die der Differentialgleichung

$$y_{1x}^{IV} = \frac{2(X_0 + X_u)}{EI_1} \quad (3)$$

genügt;

b) aus der Verschiebung infolge der Verdrillung

$$y_{2x} = \varphi_x b, \quad (4)$$

wo der Verdrehungswinkel aus

$$\vartheta'_x = \varphi''_x = \frac{(X_0 + X_u)b}{2GI_{T1}} \quad (5)$$

zu berechnen ist. Hier bedeuten:

$GI_{T1} = G(\alpha_0 d_0^3 b + \alpha_u d_u^3 b + \alpha_h d_h^3 h) =$ Torsionsteifigkeit des offenen I Hauptträgers,
 $\alpha_0, \alpha_u, \alpha_h =$ Beiwerte.

Nach vierfacher Differentiation der Gl. (4) bekommt man

$$y_{2x}^{IV} = \varphi''_x b = \frac{(X_0'' + X_u'')b^2}{2GI_{T1}}. \quad (6)$$

c) Die relative Verschiebung infolge der Plattenbiegung der Flanschen — wenn keine Mittelquersteifen angeordnet sind — werden aus

$$y_{3x} = \beta_0 b + \frac{X_0 b^3}{12 EI_0} \quad (7)$$

berechnet, mit

$$\beta_0 = \left(\frac{m_0}{3} - \frac{m_u}{6} \right) \frac{h}{EI_h} = (2 - k) \frac{m_0 h}{6 EI_h} = (2 - k) \frac{X_0 b h}{12 EI_h} .$$

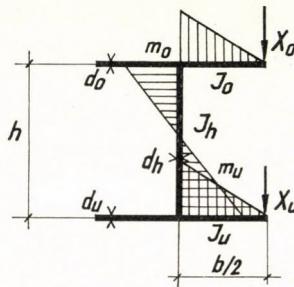


Bild 4. Querverbiegung des I-förmigen Teilträgers. Rahmenwirkung

Indem wir die Durchbiegung der oberen und unteren Flanschen als gleich voraussetzen, ist

$$X_u = \frac{I_u}{I_0} \frac{1 + 3 \frac{h}{b} \frac{I_0}{I_h}}{1 + 3 \frac{h}{b} \frac{I_u}{I_h}} X_0 = k X_0 . \quad (8)$$

Dabei sind mit der Querkontraktionsziffer ν

$$I_0 = \frac{d_0^3}{12(1-\nu^2)} \text{ das Trägheitsmoment der oberen Platte,}$$

$$I_u = \frac{d_u^3}{12(1-\nu^2)} \text{ das Trägheitsmoment der unteren Platte,}$$

$$I_h = \frac{d_h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ das Trägheitsmoment der Seitenplatten.}$$

Mit diesen Werten kann die Verschiebung in der Form

$$y_{3x} = \frac{X_0 b^3}{12 EI_0} + (2 - k) \frac{X_0 b^2 h}{12 EI_h} = \frac{X_0 b^3}{12 EB}$$

angeschrieben werden, wo

$$B = \frac{I_0}{1 + \frac{h}{b} \frac{I_0}{I_h} (2 - k)}$$

ist. Durch Differenzieren wird schließlich

$$y_{3x}^{\text{IV}} = \frac{X_0^{\text{IV}} b^3}{12 EB}.$$

Aus dem Schubfluß T' kommen folgende Verschiebungen zustande (Bild 3b)

a) die Verschiebung infolge der Biegung

$$y_{1T}^{\text{IV}} = \frac{2}{EI_1} \frac{dQ}{dz} = \frac{2 T' h}{EI_1}; \quad (11)$$

b) die Verschiebung infolge der Verdrillung

$$y_{2T}'' = \varphi_T'' b = - \frac{T' b^2 h}{2 GI_{T1}}, \quad (12)$$

und

$$y_{2T}^{\text{IV}} = - \frac{T''' b^2 h}{2 GI_{T1}}. \quad (12a)$$

Das Verschwinden der resultierenden lotrechten Relativverschiebungen wird nun mit Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 y_{ix}^{\text{IV}} + \sum_{j=1}^2 y_{jT}^{\text{IV}} = y_{op}^{\text{IV}} \quad (13)$$

durch die Relation, oder nach der Einführung der einzelnen Werte und mit (8)

$$(1 + k) X_0 + (1 + k) \frac{EI_1}{4 GI_{T1}} X_0'' b^2 + \frac{I_1}{24 B} X_0^{\text{IV}} b^3 + \\ + T' h - \frac{EI_1}{4 GI_{T1}} T''' b^2 h = p(z) \quad (14)$$

ausgedrückt.

2.2 Waagerechte Verformungen

Die zweite Bedingungsgleichung kann aus den Dehnungen in der Richtung z an der Schnittstelle bestimmt werden.

Die äußere Kraft ruft an der Schnittstelle des linken Teilträgers oben die Dehnung (Bild 6a)

$$\varepsilon_{op} = + \frac{\sigma_{op}}{E} = + \frac{M(z)}{EI_1} y_M \quad (15)$$

und unten die Dehnung

$$\varepsilon_{up} = - \frac{\sigma_{up}}{E} = - \frac{M(z)}{EI_1} (h - y_M) \quad (16)$$

hervor, wobei y_M (vgl. Bild 5) den Abstand der Null-Linie von der oberen Flanschenmitte des I-förmigen Querschnittes bedeutet (Das negative Vorzeichen

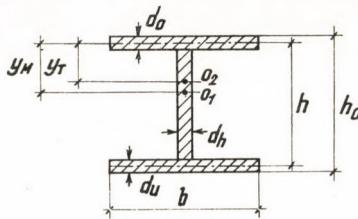


Bild 5. Waagerechte Verzerrungen des statisch-bestimmten Grundsystems

bedeutet eine Verkürzung). Nach zweimaliger Differentiation der Gl. (15) und (16) bekommt man:

$$\varepsilon''_{op} = + \frac{p(z)}{EI_1} y_M; \quad \varepsilon''_{up} = - \frac{p(z)}{EI_1} (h - y_M). \quad (15a; 16a)$$

Aus der Biegung der Zwangskräfte X_0 , X_u entstehen (Bild 6b)

$$\varepsilon''_{o1} = - \frac{X_0 + X_u}{EI_1} y_M \quad (17)$$

oben, und

$$\varepsilon''_{u1} = + \frac{X_0 + X_u}{EI_1} (h - y_M) \quad (18)$$

unten.

Aus der durch die Zwangskräfte X_0 , X_u verursachten Verwölbung werden die Dehnungen oben

$$\varepsilon_{o2} = w_x = \vartheta' xy = \frac{m_T}{GI_{T1}} \frac{b}{2} y_T = \frac{(X_0 + X_u) b^2}{4 GI_{T1}} y_T \quad (19)$$

bzw.

$$\varepsilon''_{02} = \frac{(X''_0 + X''_u) b^2}{4 G I_{T1}} y_T \quad (19a)$$

und unten

$$\varepsilon''_{u2} = - \frac{(X''_0 + X''_u) b^2}{4 G I_{T1}} (h - y_T) \quad (20a)$$

wo y_T die Lage des Schubmittelpunktes des I Querschnittes bestimmt (Bild 5).

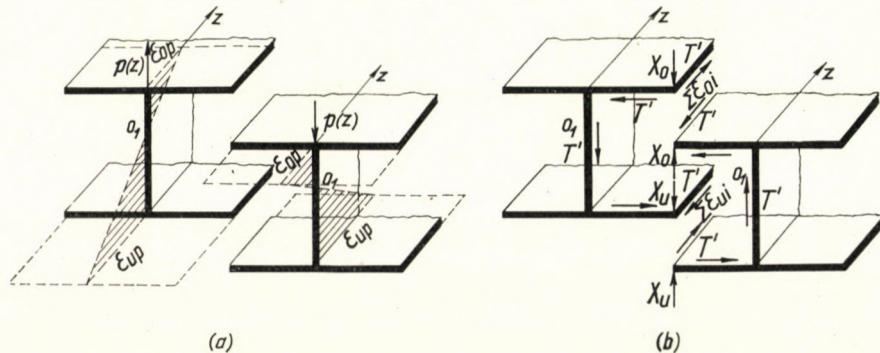


Bild 6. Querschnittsfestwerte des Teilträgers: O_1 = Schwerpunkt; O_2 = Schubmittelpunkt

Auch der Schubfluß erzeugt Biegung und Torsion. So entstehen durch Biegung des im Steg wirkenden Schubflusses die Dehnungen

$$\varepsilon''_{03} = - \frac{M''(T')}{EI_1} y_M = - \frac{q_t}{EI_1} y_M = - \frac{T' h}{EI_1} y_M, \quad (21)$$

$$\varepsilon''_{u3} = + \frac{T' h}{EI_1} (h - y_M) \quad (22)$$

und aus der Verwölbung

$$\varepsilon_{04} = w'_T = \vartheta' xy - \frac{T'}{G} \left(\frac{y_T}{d_h} + \frac{h}{2 d_0} \right) = - \frac{m_T b}{2 G I_{T1}} y_T - \frac{T'}{G} \left(\frac{y_T}{d_h} + \frac{b}{2 d_0} \right). \quad (23)$$

Da das Torsionsmoment mit

$$m_T = - \frac{T' bh}{2}$$

ausgedrückt werden kann, sind die Verzerrungen:

$$\varepsilon''_{04} = - \frac{T''' b^2 h}{4 G I_{T1}} y_T - \frac{T'''}{G} \left(\frac{y_T}{d_h} + \frac{b}{2 d_0} \right), \quad (23a)$$

und

$$\varepsilon''_{u4} = + \frac{T''' b^2 h}{4 GI_{T_1}} (h - y_T) + \frac{T'''}{G} \left(\frac{h - y_T}{d_h} + \frac{b}{2 d_u} \right). \quad (24a)$$

Die Verformungsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} (\Sigma \varepsilon'')_{\text{links}} - (\Sigma \varepsilon'')_{\text{rechts}} &= 0, \\ (\Sigma \varepsilon''_u)_{\text{links}} - (\Sigma \varepsilon''_u)_{\text{rechts}} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Durch Addieren der zwei Bedingungsgleichungen (25) bekommt man die Verformungsgleichung

$$\frac{X_0 + X_u}{EI_1} - \frac{(X''_0 + X''_u) b^2}{4 GI_{T_1}} + \frac{T' h}{EI_1} + \frac{T''' b^2 h}{4 GI_{T_1}} \left(1 + \frac{8I_{T_1}}{I_{T_0}} \right) = \frac{p(z)}{EI_1}, \quad (26)$$

oder mit $X_u = kX_0$ schließlich

$$\begin{aligned} (1+k)X_0 - (1+k) \frac{EI_1}{4 GI_{T_1}} X''_0 b^2 + T' h + \\ + \frac{EI_1}{4 GI_{T_1}} (1 + 8I_{T_1}/I_{T_0}) T''' b^2 h = p(z), \end{aligned} \quad (26a)$$

wo

$$I_{T_0} G = - \oint_{(s)} \frac{ds}{d_i} \frac{4 b^2 h^2}{d_i} G \text{ die Torsionssteifigkeit des geschlossenen Querschnittes}$$

und

$$\oint_{(s)} \frac{ds}{d_i} = \frac{2h}{d_h} + \frac{b}{d_0} + \frac{b}{d_u}$$

bezeichnen.

3. Differentialgleichungen der Torsion

Um die Berechnung der simultanen Differentialgleichungen (14) und (26a) zu vereinfachen, werden die beiden Gleichungen addiert und subtrahiert. Damit bekommt man

$$(1+k)X_0 + \frac{I_x}{96 B} X_0^{IV} b^3 + T' h + \frac{EI_x}{2 GI_{T_0}} T''' b^2 h = p(z) \quad (27)$$

und

$$(1+k)X''_0 + \frac{GI_{T_1}}{12 EB} X_0^{IV} b - T''' h \left(1 + \frac{4 I_{T_1}}{I_{T_0}} \right) = 0, \quad (28)$$

wo $I_x = 2 I_1$ das Trägheitsmoment des geschlossenen Querschnittes bezogen auf $x-x$ bedeutet.

Aus der Gl. (28) kann durch Integration

$$(1+k) X_0 + \frac{GI_{T1}}{12EB} X''_0 b - T' h \left(1 + \frac{4I_{T1}}{I_{T0}} \right) = 0 \quad (28a)$$

abgeleitet werden.

Die Gl. (27), (28) und (28a) werden in

$$\begin{aligned} & \frac{I_x}{96Bb} (1 + 8I_{T1}/I_{T0}) b^4 X_0^{IV} + \\ & + \frac{I_x}{12Bb} \left[\frac{GI_{T1}}{EI_x} + \frac{6EBb}{GI_{T0}} (1+k) \right] b^2 X''_0 + \\ & + 2(1+k)(1+2I_{T1}/I_{T0}) X_0 = (1+4I_{T1}/I_{T0}) p(z) \end{aligned} \quad (29)$$

zusammengefaßt und da in der Torsionstheorie der inhomogene Anteil der Differentialgleichung üblicherweise mit dem Torsionsmoment ausgedrückt wird, schließlich auf die Form

$$\begin{aligned} & \frac{Ix}{96Bb} \frac{1+8I_{T1}/I_{T0}}{1+4I_{T1}/I_{T0}} b^5 X_0^{IV} + \\ & + \frac{I_x}{12Bb} \left[\frac{GI_{T1}}{EI_x} + \frac{6EBb}{GI_{T0}} (1+k) \right] \frac{b^3}{1+4I_{T1}/I_{T0}} X''_0 + \\ & + \frac{2(1+k)(1+2I_{T1}/I_{T0})}{1+4I_{T1}/I_{T0}} bX_0 = p(z) b = m_T(z) \end{aligned} \quad (30)$$

gebracht.

Durch (30) ist die Gleichung des verdrillten Kastenträgers mit Rücksicht auf die Querschnittsverformung formuliert. Da (30) eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten darstellt, hat die allgemeine Lösung die Form:

$$X_0 = X_{01} + X_{02}, \quad (31)$$

worin X_{01} die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$a_1 X_0^{IV} + a_2 X''_0 + a_3 X_0 = 0 \quad (32)$$

und X_{02} die partikuläre Lösung der vollständigen Gleichung bedeutet.

Aus den Abmessungen und Steifigkeitswerten kann man die Beziehungen $a_2 < 0$ und $a_2^2 - 4a_1a_3 < 0$ feststellen. Die charakteristische Gleichung mit der partikulären Lösung $X_1 = e^{\lambda z}$ ist:

$$a_1 \lambda^4 - a_2 \lambda^2 + a_3 = 0 \quad (33)$$

mit den vier Wurzeln,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{a_2}{2a_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1}} = +\sqrt{a+ib}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{a+ib}; \\ \lambda_3 &= +\sqrt{a-ib}; \quad \lambda_4 = -\sqrt{a-ib}, \end{aligned} \quad (34)$$

die alle komplexe Zahlen sind.

Mit der Einführung der durch

$$\lambda_1 = \sqrt{a+ib} = A + iB$$

definierten Hilfsgrößen

$$A = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad B = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad (35)$$

bekommt man schließlich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung z. B. nach der Methode der Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} X_0 &= e^{Az} (C_1 \cos Bz + C_2 \sin Bz) + \\ &+ e^{-Az} (C_3 \cos Bz + C_4 \sin Bz) + \\ &+ \int_0^z X(z-\alpha) p(\alpha) da. \end{aligned} \quad (36)$$

Es wird hier auf die Einzelheiten dieser Methode nicht eingegangen.

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt.
Die lotrechte Verschiebung der Kastenrippe wird aus

$$y^{IV} = \frac{p - (X_0 + X_u) - T' h}{EI_1} = \frac{b}{2} (\varphi_0^{IV} + \gamma^{IV}) \quad (37)$$

berechnet, wo

$$\gamma^{IV} = \frac{X_0^{IV} b^2}{12 EB}$$

die Querschnittsverformung darstellt. Daraus hat man nach der Integration

$$y = \frac{b}{2} (\varphi + \gamma) = \varphi \frac{b}{2} + \frac{X_0 b^3}{24 EB}$$

und insbesondere

$$X_0 = \frac{24 EB}{b^3} \left(y - \varphi \frac{b}{2} \right). \quad (37a)$$

Zur Formulierung des der Differentialgleichung (30) zugehörigen Randwertproblems müssen sämtliche Randwertaussagen durch die Größe X_0 ausgedrückt werden. So sind z. B. für einen beiderseits eingespannten Kastenträger bei $z = 0$ und $z = l$ die geometrischen Randbedingungen

$$y = 0, \varphi = 0, y' = 0, \varphi' = 0,$$

was den Randwertaussagen

$$X_0 = 0, X'_0 = 0$$

entspricht.

Für einen beiderseits frei aufliegenden Kastenträger gilt für $z = 0$ und $z = l$

$$y = \varphi = 0 \text{ und } y'' = \varphi'' = 0.$$

Zahlenbeispiel

Die Anwendung der abgeleiteten Formeln und die Bedeutung der Querschnittsverformung sollen an dem Kastenquerschnitt (Bild 7) gezeigt werden.

Die Trägheitsmomente der Kastenwände werden mit $\nu = 0$

$$I_0 = I_u = \frac{1 \cdot d_0^3}{12} = \frac{1 \cdot 10^3}{12} = 83,3 \text{ cm}^4; I_h = \frac{1 \cdot d_h^3}{12} = \frac{1 \cdot 8^3}{12} = 42,7 \text{ cm}^4,$$

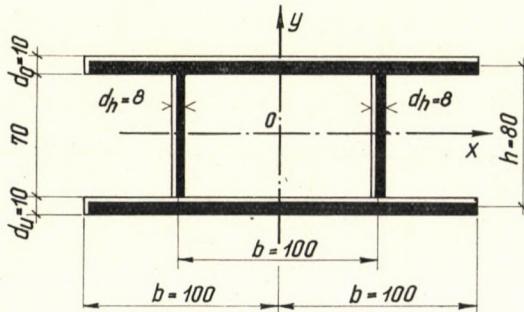


Bild 7. Zahlenbeispiel

das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes

$$I_x = 2 I_1 = 72,57 \cdot 10^5 \text{ cm}^4,$$

und die Biegesteifigkeit der Rahmen (Querbiegesteifigkeit) wird mit $k = 1$

$$B = \frac{1 \cdot I_0}{1 + \frac{h}{b} \frac{I_0}{I_k} (2 - k)} = \frac{1 \cdot 83,3}{1 + 0,8 \frac{83,3}{42,7} (2 - 1)} = 32,5 \text{ cm}^4,$$

Das Torsionsträgheitsmoment des offenen, symmetrischen I Profils bekommt man aus

$$I_{T_1} = \frac{1}{3} (2 \cdot d_0^3 b + d_h^3 b) = \frac{1}{3} (2 \cdot 10^5 + 0,358 \cdot 10^5) = 0,786 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

und das Trägheitsmoment des geschlossenen Kastenquerschnittes aus

$$I_{T_0} = \frac{\frac{4}{2} \frac{b^2 h^2}{d_0} + 2 \frac{h}{d_h}}{\frac{b}{d_0} + 2 \frac{h}{d_h}} = \frac{\frac{4 \cdot 100^2 \cdot 80^2}{80}}{\frac{80}{8} + 2 \frac{100}{10}} = 64,10^5 \text{ cm}^4.$$

Die Beiwerte der Gleichungen (30) und (35) betragen mit $G = 0,46 \text{ E}$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{I_x}{96 Bb} \frac{1 + 8 I_{T_1}/I_{T_0}}{1 + 4 I_{T_1}/I_{T_0}} = \frac{72,57 \cdot 10^5}{96 \cdot 32,5 \cdot 10^2} \frac{1 + 0,098}{1 + 0,049} = 24,40, \\ a_2 &= \frac{I_x}{12 Bb} \left[\frac{GI_{T_1}}{EI_x} + \frac{6EBb}{GI_{T_0}} (1+k) \right] \frac{1}{1 + 4 I_{T_1}/I_{T_0}} = \\ &= \frac{72,57 \cdot 10^5}{12 \cdot 32,5 \cdot 10^2} \left[\frac{0,46 \cdot 0,786 \cdot 10^5}{72,57 \cdot 10^5} + \frac{6 \cdot 32,5 \cdot 10^2}{0,46 \cdot 64 \cdot 10^5} \cdot 2 \right] \frac{1}{1,049} = 3,22, \\ a_3 &= \frac{2(1+k)(1+2I_{T_1}/I_{T_0})}{1+4I_{T_1}/I_{T_0}} = 2,2 \frac{1,025}{1,049} = 3,92. \end{aligned}$$

Im Falle einer statisch-bestimmten Lagerung der Flanschen (die Stützenmomente der Flanschen sind gleich null) und eines sinusförmig verteilten Drehmomentes

$$m_T = m_{T_0} \sin \frac{\pi z}{l},$$

wobei $m_{T_0} = pb$ ist, kann eine einfache Lösung der Gl. (30) angegeben werden.
Dann wird

$$X_0 = X_{00} \sin \frac{\pi z}{l},$$

ferner

$$X_0 = \frac{\pi^4}{l^4} X_{00} \sin \frac{\pi z}{l}; \quad X''_0 = -\frac{\pi^2}{l^2} X_{00} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Aus Gl. (30) folgt damit

$$\left(a_1 \frac{\pi^4 b^4}{l^4} - a_2 \frac{\pi^2 b^2}{l^2} + a_3 \right) X_{00} b = p_0 b,$$

woraus

$$X_{00} = \frac{p}{a_1 \frac{\pi^4 b^4}{l^4} - a_2 \frac{\pi^2 b^2}{l^2} + a_3} = a_0 p.$$

Nach der Umformung der Gl. (28)

$$2 T' b h = \left[2(1+k) X_0 b + \frac{GI_{T_1}}{6 EBb} X''_0 b^3 \right] \frac{1}{1 + 4 I_{T_1}/I_{T_0}}$$

und mit der Einführung der Bezeichnungen

$$T' = T'_0 \sin \frac{\pi z}{l} \quad \text{und} \quad X''_0 = -\frac{\pi^2}{l^2} X_{00} \sin \frac{\pi z}{l}$$

bekommen wir

$$2 T'_0 b h = \frac{2(1+k) I_{T_0}}{I_{T_0} + 4 I_{T_1}} X_{00} b \left[1 - \frac{G I_{T_1}}{12 E B b} \frac{\pi^2 b^2}{l^2} \frac{1}{(1+k)} \right] = \\ = \frac{2(1+k) I_{T_0}}{I_{T_0} + 4 I_{T_1}} a_0 p b \left[1 - \frac{G I_{T_1}}{12 E B b} \frac{\pi^2 b^2}{l^2} \frac{1}{(1+k)} \right].$$

Wenn der Kastenquerschnitt nicht deformierbar ist, entsteht die bekannte Gleichung:

$$2 T' b h = p b .$$

Der Einfluß der Querschnittsverformung ist in der Tafel mit der Verhältniszahl T'_0/T' für verschiedene b/l Werte dargestellt.

Verhältniszah	b/l		
	1,0	0,5	0,1
T'_0/T'	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$23,4 \cdot 10^{-3}$	0,99

Es ist zu bemerken, daß der Einfluß der Querverformungen auf die Torsionssteifigkeit bei kleinen Spannweiten am größten ist, und hier der Schubfluß (T') entsprechend klein wird. Auf diese Verhältnisse soll bei der Auswahl der Abmessungen Rücksicht genommen werden.

TORSION OF BOX GIRDERS

B. GOSCHY

SUMMARY

Reinforced concrete and prestressed concrete beams of box cross-section without stiffening members between supports are frequently designed for technical and economic reasons. By omitting stiffening members the cross-section will not keep its original shape during twisting and distortion of the section will occur. The purpose of this paper is to give a method for the calculation of twisted box girders with deformable cross-section neglecting the effect of warping which is, as known, of local character by hollow sections. From the results of the presented calculations it can be stated that short and large box girders without diaphragms have a low torsional rigidity, on the other hand, with girders ten times longer than the width, the effect of the distortion can be neglected.

TORSION DES POUTRES-CAISSONS

B. GOSCHY

RÉSUMÉ

Pour des raisons techniques et économiques, les poutres-caissons en béton armé et béton précontraint sont souvent réalisés sans raidisseurs intermédiaires (diaphragmes). Par suite de l'absence de raidisseurs entre les deux appuis, il y a déformation de la section originale de la poutre en torsion, c'est-à-dire la section souffre une distorsion. L'étude présente une méthode de calcul de la torsion des poutres sans raidisseurs ayant une section en caisson, en négligeant l'effet du voilement, car cet effet est de caractère local chez les poutres creuses. Les résultats de l'étude permettent de constater que la rigidité de torsion des poutres-caissons courts et larges est fortement diminuée à cause de la distorsion de la section et qu'on peut négliger l'effet de la distorsion si la longueur de la poutre dépasse de plus de dix fois sa largeur.

КРУЧЕНИЕ ОДНОКЛЕТОЧНЫХ КОРОБЧАТЫХ БАЛОК

Б. ГОШИ

РЕЗЮМЕ

По причинам технического и экономического характера железобетонные и предварительно напряженные бетонные балки часто выполняются без промежуточного ребра жесткости (диафрагмы). Следствием отказа от ребра жесткости является изменение первоначальной формы коробчатого сечения, подвергнутого кручению, то есть сечение искажается. Настоящее исследование посвящено расчету кручения коробчатой балки с искажающимся сечением, при условии пренебрежения влиянием расширения, так как такое, как известно, для закрытого сечения имеет местное значение. На основе результатов исследования можно установить, что жесткость кручения коротких и широких коробчатых балок значительно снижается вследствие искажения, и далее, что влиянием искажения можно пренебречь, если длина балки превышает десятикратную ширину ее.

EFFECT OF THE ALTERATION IN THE FLEXURAL RIGIDITY OF HYPERSTATIC BEAMS UNDER BENDING

J. SZIDAROVSKY

CAND. OF TECHN. CS.
MINISTRY OF COMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received December 21, 1965]

Internal forces of hyperstatic structures depend, among others, on cross-sectional dimensions of the structure. In bridge design, internal forces are determined after assuming the dimensions, and those alter the cross-sectional dimensions assumed, which in turn modify the former. Therefore, the design of hyperstatic bridges may involve as many as three or four structural recalculations. Here it will be examined, in what direction and order will the modification of internal forces be due to the alteration of the cross-sectional dimensions. In their knowledge the cross-sectional dimensions can be made to cope with the internal forces to be modified, hence recalculation of the structure can be avoided.

Introduction

Alteration of the flexural rigidity of hyperstatic beams under bending affects internal forces, in addition to deformation. Structural engineers are familiar with the law that by increasing the flexural rigidity along a length of a hyperstatic beam under bending causes this length to attract the bending moment.

This law, however, fails to inform either on the order of magnitude of the internal force alteration or on the direction of the rearrangement of internal forces due to a combined effect of multiple section alterations.

This paper seeks an answer to both problems.

Of course, when examining the effect of alteration in the flexural rigidity — giving the modification of the internal forces or of the deflection — it is needless to calculate with the same accuracy as for structural analyses. Namely, if in structural analysis an accuracy of 4 per cent is required, and the actual value varies by 20 per cent, then for the modification it is quite sufficient to calculate to $100/20 \cdot 4 = 20$ per cent. Thus for the calculation of the alteration effect, a less accurate method can be applied, which means an important saving in time and labour.

EI_0	$EI_0(x)$	flexural rigidity of the original beam;
EI_1	$EI_1(x)$	flexural rigidity of the modified beam;
φ	$\varphi(x)$	absolute rotation of the beam section;
$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi(x)_0$	relative rotation in the beam at x_0 ;
y	$y(x)$	beam displacement;
Δy	$\Delta y(x)_0$	relative deflection at x_0 ;
M	$M(x)$	bending moment due to an external load;
m	$m(x_0)$	moment due to unit relative rotation;

$\Delta M = \Delta M(x)$ moment arising due to a modification in flexural rigidity;
 $r = r(x)$ shearing force due to unit relative displacement;
 $* =$ asterisk as superscript refers to the modified beam.

Subscripts : m refers to moment influence line;
 r refers to resultant influence line.

1. Examples on the examination of the effect of altering the flexural rigidity

Let us determine the bending moments under the load point and at restraints in a bilaterally restrained beam under load P at midspan, on symmetrically altering the flexural rigidity at both ends of the beam of an originally uniform section (Fig. 1).

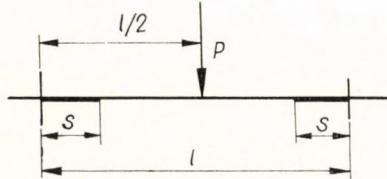


Fig. 1

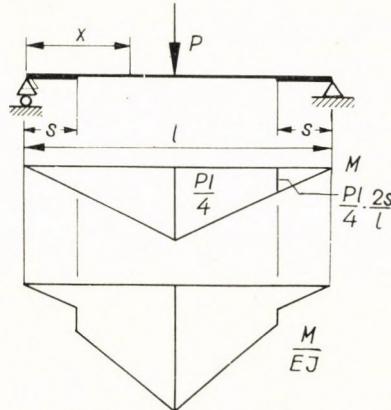


Fig. 2.

Choosing a simple beam as primary beam, bending moment under point of force P is: (Fig. 2)

$$M = \frac{Pl}{4} .$$

Symmetry zeros rotation at midspan, while at beam ends

$$\begin{aligned} \varphi_0 = a_{01} &= - \int_0^{l/2} \frac{M}{EI} dx = - \int_0^s \frac{M}{EI} dx - \int_s^{l/2} \frac{M}{EI} dx = \\ &= - \frac{P}{2E} \left\{ \int_0^s \frac{xdx}{I_1} + \int_s^{l/2} \frac{xdx}{I_0} \right\} = - \frac{P}{2E} \left\{ \frac{s^2}{2I_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(l/2)^2 - s^2}{2I_0} \right\} = - \frac{Pl}{16EI_0} \frac{(l^2 - 4s^2)\tau + 4s^2}{l\tau} \end{aligned} \quad (1.11)$$

where I_0 is the initial moment of inertia; I_1 is the same altered along length

$s-s$; E is the modulus of elasticity; l is the span; and finally,

$$\tau = \frac{I_1}{I_0} . \quad (1.12)$$

Rotation produced by unit moments acting at both ends of the primary beam will be:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = a_{11} &= - \int_0^{l/2} \frac{M}{EI} dx = - \int_0^s \frac{1}{EI_0} dx = - \frac{1}{E} \left\{ \frac{s}{I_1} + \frac{l/2 - s}{I_0} \right\} = \\ &= - \frac{1}{2E} \left\{ \frac{l - 2s}{I_0} + \frac{2s}{I_1} \right\} = - \frac{l}{2EI_0} \frac{(l - 2s)\tau + 2s}{l\tau} . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Moment of restraint is:

$$M_b = - \frac{a_{01}}{a_{11}} = - \frac{Pl}{8} \frac{(l^2 - 4s^2)\tau + 4s^2}{(l^2 - 2ls)\tau + 2ls} \quad (1.14)$$

and moment under force P :

$$M_P = \frac{Pl}{4} + M_b = \frac{Pl}{8} - \frac{[l^2 - 4s(l-s)]\tau + 4s(l-s)}{[l^2 - 2ls]\tau + 2ls} . \quad (1.15)$$

For $\tau = 1$, i.e. $I_0 = I_1$ or if $s = 0,5 l$, the well-known relationship for constant sections is obtained:

$$M_P = \frac{Pl}{8} = - M_b .$$

On the one hand, this example justifies the mentioned law familiar to structural engineers, and on the other hand, relationship (1.15) points out the non-linearity of the internal force modification produced by the alteration of the flexural rigidity.

Let us determine the bending moment in the same beam produced by external bending moments $+M$ at both ends.

Now, the diagram of the moment developing in the primary beam will be as shown in Fig. 3. In this case

$$\varphi_0 = a_{01} = \varphi_1 = a_{11} = - \frac{Ml}{2EI_0} \frac{(l - 2s)\tau + 2s}{l\tau}$$

and at midspan:

$$M^* = \frac{a_{01}}{a_{11}} = M,$$

hence, the moment value is unaffected by the modification of the flexural rigidity.

From this example it appears that the mentioned practical law is not valid in each case and that the load features affect the modification of the bending moment.

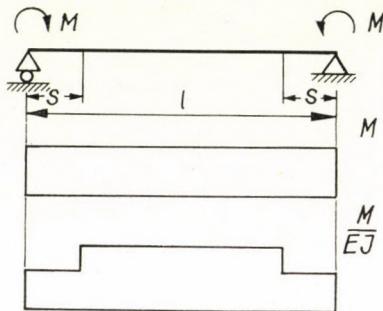


Fig. 3

2. Effect of flexural rigidity modification over an elementary length

In a beam of flexural rigidity $EI = EI(x)$, an external load produces a bending moment $M = M(x)$ and a vertical displacement $y = y(x)$.

Insert a hinge into the cross-section of the beam described by abscissa x_0 , and apply on both adjacent ends of the beam bi-parted by the hinge the moments $M(x_0)$ and $-M(x_0)$, respectively. Then both the bending moment and the deformation will equal those of the original beam. Thus, no relative rotation will occur at the hinge (Fig. 4).

Let the moment of inertia of this hinged beam be bilaterally of the hinge increase from $I = I_0$ to I_1 along elementary lengths $dx/2$ (totalling dx). Then a relative rotation $\Delta\varphi$ will develop at the hinge, between both beam part axes (Fig. 5), to give:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{M}{EI_1} - \frac{M}{EI_0} \right) dx = - \frac{M}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx. \quad (2.1)$$

Since actually the beam contains no hinge, on altering the flexural rigidity, a moment $M^*(x_0)$ producing zero relative angular rotation must arise in the hingeless (primary) beam. The same internal forces will develop on loading the hinged beam with an additional couple of moments $\pm \Delta M^*$ at the hinge-side ends.

Moment influence line of the section x_0 will correctly be given by the diagram of vertical displacement of the beam if a hinge is inserted in the beam at x_0 , and the hinge is loaded bilaterally by a moment couple $\pm m_m(x_0)$ producing the relative rotation at the hinge

$$\Delta\varphi = \alpha = -1$$

(Fig. 6). Now, bending moment $m_m(x)$ will arise in the beam at x .

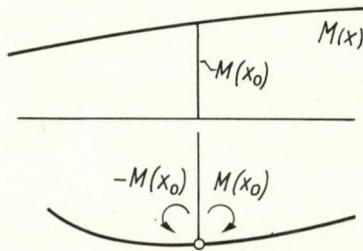


Fig. 4

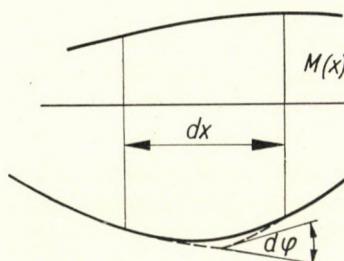


Fig. 5

Then the bending moment causing relative angular rotation $-\Delta\varphi$, is

$$\Delta M_0^* = \Delta M^*(x_0) = m_m(x_0) d\varphi$$

producing in other beam sections bending moment

$$\Delta M^*(x) = m_m(x) d\varphi.$$

The overall moment in the beam will be:

$$M^*(x) = M(x) + \Delta M^*(x). \quad (2.2)$$

Combining (2.1) and (2.2):

$$M^*(x) = M(x) - M(x_0) m_m(x) \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot \frac{dx}{EI_0}. \quad (2.3)$$

In the analysis, moment $m_m(x)$ producing unit angular rotation should be determined on the modified beam, i.e. it should be in fact $m_m^*(x)$. If, however, the alteration of the flexural rigidity concerns an elementary length, there is but a slight difference between $mg(x)$ and $m_m^*(x)$, hence difference effect is negligible.

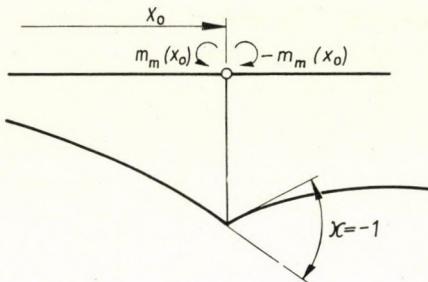


Fig. 6

Moment producing a unit relative rotation at the hinge in the primary beam can easily be determined.

Namely, the moment influence line is identical with the deflection diagram pertaining to a unit relative rotation at the hinge. The moment itself, however, is proportional to the second derivative of the deflection, i.e.:

$$m_m(x) = -EI \eta''_m(x) \quad (2.4)$$

where $\eta_m(x)$ is the ordinate of the moment influence line.

From (2.3), the formula of the moment at x_0

$$M^*(x_0) = M(x_0) \left[1 - m_m(x_0) \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot \frac{dx}{EI_0} \right] \quad (2.5)$$

clearly proves the mentioned empirical observation that for hyperstatical structures, the increase of the flexural rigidity over a length attracts the bending moment, i.e. it locally increases the bending moment — or better said its absolute value — produced by an external load.

Namely, in this case $I_1 > I_0$, the moment $m_m(x_0)$ producing a unit relative rotation is negative (Fig. 6), hence the term in square parentheses is greater than unit.

Now, from formula (2.3) it appears that if the moment $M(x)$ produced by an external load at x , and the product from moment $m_m(x)$ arising at x is

due to a moment causing a unit relative rotation at x_0 , and from the moment $M(x_0)$ at the hinge due to the external load, are of the same sign, then increasing the flexural rigidity will reduce the bending moment at x .

3. Effect of altering the flexural rigidity along a finite length of a span

Let us assume the primary beam to be cut through in an arbitrary section x_0 and loaded at the cutting by a couple $\pm R(x_0)$ totalling zero, equal but oppo-

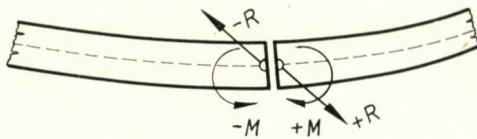


Fig. 7

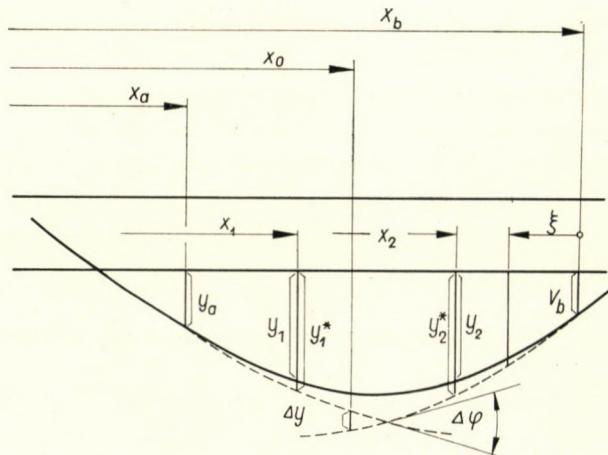


Fig. 8

site to the internal forces of the cut beam, and by the moment couple $\pm M(x_0)$, as external loads (Fig. 7). Thereby the internal forces of the cut beam will not change, and even the deformation will be the same as for the primary beam. Internal moment in the beam (either primary or cut) is $M(x)$.

If the flexural rigidity of the beam changes over a length from $x_a < x_0$ to $x_b > x_0$ in the span, then at the cutting a relative angular rotation and a vertical displacement develop. According to Figs 8 and 9 the deformation of the primary beam is expressed by relationships:

$$\varphi_1(x) = \varphi_a - \int_{x_a}^x \frac{M}{EI_0} dx; \quad x < x_0, \quad (3.1a)$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_b - \int_{x_b}^x \frac{M}{EI_0} dx; \quad x > x_0, \quad (3.1b)$$

$$y_1(x) = y_a + \varphi_a(x - x_a) - \iint_{x_a}^x \frac{M}{EI_0} dx dx; \quad x < x_0, \quad (3.1c)$$

$$y_2(x) = y_b - \varphi_b(x_b - x) - \iint_{x_b}^x \frac{M}{EI_0} dx dx; \quad x > x_0. \quad (3.1d)$$

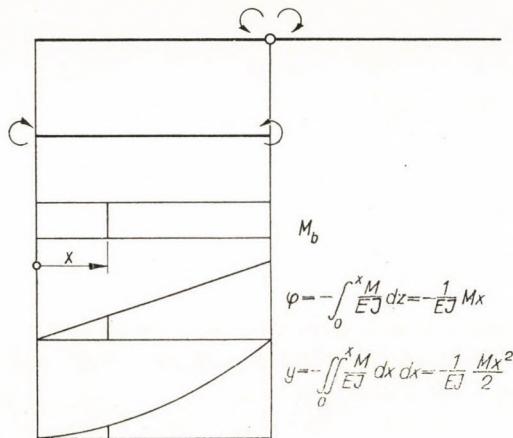


Fig. 9

The same are valid for the beam of modified flexural rigidity, but taking I_1 instead of I_0 , to give:

$$\varphi_1^*(x) = \varphi_a - \int_{x_a}^x \frac{M}{EI_1} dx; \quad x < x_0, \quad (3.2a)$$

$$\varphi_2^*(x) = \varphi_b - \int_{x_b}^x \frac{M}{EI_1} dx; \quad x > x_0, \quad (3.2b)$$

$$y_1^*(x) = y_a + \varphi_a(x - x_a) - \iint_{x_a}^x \frac{M}{EI_1} dx dx; \quad x < x_0, \quad (3.2c)$$

$$y_2^*(x) = y_b - \varphi_b(x - x) - \iint_{x_b}^x \frac{M}{EI_1} dx dx; \quad x > x_0. \quad (3.2d)$$

Relative rotation at x_0 is:

$$\Delta\varphi = \varphi_2^*(x_0) - \varphi_1^*(x_0).$$

Applying (2.1) we obtain:

$$\Delta\varphi = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{M}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \quad (3.3a)$$

and for the relative vertical displacement at x_0 :

$$\Delta y = y_2^*(x) - y_1^*(x).$$

From (3.3a) it is:

$$\Delta y = - \iint_{x_a}^{x_b} \frac{M}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx.$$

Relative vertical displacement can also be written as:

$$\Delta y = \iint_{x_b}^{x_0} \frac{M}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx - \iint_{x_a}^{x_0} \frac{M}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx. \quad (3.3b)$$

If the beam is acted upon at x_0 by an external force produced at x_0 in the cut beam of original flexural rigidity a unit negative relative rotation and zero relative vertical displacement, internal moment $m_m(x)$ will develop. Then, the vertical displacement diagram will give the moment influence line of the primary beam. The same bending moment will alter the relative rotation in the beam of modified flexural rigidity by:

$$\Delta\varphi_m = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{m_m(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx. \quad (3.4)$$

Relative rotation at x_0 is, from (3.3a):

$$\varkappa_m = -1 + \Delta\varphi_m = -1 - \int_{x_a}^{x_b} \frac{m_m(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx. \quad (3.4a)$$

At the same point, the relative vertical displacement is, from (3.3b):

$$\Delta y_m = \iint_{x_b}^{x_0} \frac{m_m(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx - \iint_{x_a}^{x_0} \frac{m_m(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx \quad (3.4b)$$

and the bending moment arising in the beam:

$$m_m(x) = -EI_0 \eta_m''(x) \quad (3.4c)$$

where $\eta_m(x)$ is the ordinate at x of the moment influence line, as a displacement diagram.

In general, the influence line is given by its individual ordinates, calculated at discrete loci, rather than by functions. Finite differences can be substituted by its difference quotient (Fig. 10).

In the beam of modified flexural rigidity moment $m_r(x)$ produces a relative rotation and a vertical displacement, according to (3.3a) and (3.3b), respectively, of

$$\Delta\varphi_r = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{m_r(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \quad (3.4d)$$

and

$$y_r = -1 + \iint_{x_b}^{x_a} \frac{m_r(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx - \iint_{x_a}^{x_b} \frac{m_r(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx dx \quad (3.4e)$$

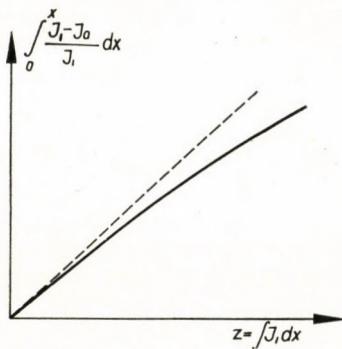


Fig. 10

and a moment of

$$m_r(x) = -EI_0 \eta''_r(x)$$

where $\eta_r(x)$ is the influence line of the cross-sectional resultant.

In the beam of modified flexural rigidity neither relative rotation nor vertical relative displacement can be produced by external load at x_0 ; hence in addition to the moment $M(x)$ developing in the primary beam, another bending moment $c_m m_m(x) + c_r m_r(x)$ has to develop to counteract relative deformation at x_0 , to give:

$$\Delta\varphi + c_m \alpha_m + c_r \Delta\varphi_r = 0 \quad (3.5a)$$

and

$$\Delta y + c_m \Delta y_m + c_r y_r = 0. \quad (3.5b)$$

While the bending moment will be

$$M^*(x) = M(x) + c_m m_m(x) + c_r m_r(x). \quad (3.5c)$$

From (3.5a) and 3.5b) it is

$$c_m = - \frac{\Delta\varphi y_r - \Delta y \Delta\varphi_r}{\varkappa_m y_r - \Delta y_m \Delta\varphi_r}$$

and

$$c_r = - \frac{\Delta y \varkappa_m - \Delta\varphi \Delta y_m}{\varkappa_m y_r - \Delta\varphi_r \Delta y_m}.$$

Neglecting products of Δ -type relative displacements — as secondary magnitudes — and substituting, we obtain

$$c_m = - \frac{\Delta\varphi}{\varkappa_m} = - \frac{\int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx}{1 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{m_m(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx} \quad (3.5d)$$

and

$$c_r = - \frac{\Delta y}{y_r} = \frac{\iint_{x_b}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx - \iint_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx}{1 - \iint_{x_b}^{x_0} \frac{m_v(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx + \iint_{x_a}^{x_0} \frac{m_v(x)}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx}. \quad (3.5e)$$

Locating x_0 to give

$$\iint_{x_b}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot dx \cdot dx = \iint_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot dx \cdot dx \quad (3.6a)$$

leads to $c_r = 0$.

In the double integral, to interchange limits, equalities

$$\iint_a^b f(x) \cdot dx \cdot dx = - \iint_b^a f(x) \cdot dx \cdot dx + (a - b) \int_b^a f(x) \cdot dx \quad (3.7a)$$

and

$$\iint_a^c f(x) \cdot dx \cdot dx = \iint_a^b f(x) \cdot dx \cdot dx + (c - b) \int_a^b f(x) \cdot dx + \iint_b^c f(x) \cdot dx \cdot dx \quad (3.7b)$$

are proved, where b lies within the range $a - c$.

Namely, on the one hand

$$\begin{aligned} \iint_a^b f(x) \cdot dx \cdot dx &= \int_a^b \left[\int_a^x f(x) \cdot dx \right] dx = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b f(x) \cdot dx - \int_x^b f(x) \cdot dx \right] dx = \\ &= - \int_b^a \left[- \int_b^a f(x) \cdot dx + \int_b^x f(x) \cdot dx \right] dx = \\ &= (a - b) \int_b^a f(x) \cdot dx - \iint_b^a f(x) \cdot dx \cdot dx \end{aligned}$$

the same as (3.7a), and on the other hand:

$$\begin{aligned}
 \iint_a^c f(x) \cdot dx \cdot dx &= \int_a^c \left[\int_a^x f(x) \cdot dx \right] dx = \\
 &= \int_a^b \left[\int_a^x f(x) \cdot dx \right] dx + \int_b^c \left[\int_a^x f(x) \cdot dx \right] dx = \\
 &= \iint_a^b f(x) \cdot dx \cdot dx + \int_b^c \left[\int_b^x f(x) \cdot dx + \int_a^b f(x) \cdot ax \right] dx = \\
 &= \iint_a^b f(x) \cdot dx \cdot dx + \iint_b^c f(x) \cdot dx \cdot dx + (c-b) \int_a^b f(x) \cdot dx,
 \end{aligned}$$

the same as (3.7b).

Applying (3.7a) and (3.7b), from (3.6a) we obtain:

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{x_0}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx - \iint_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx = \\
 &= - \iint_{x_0}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx + (x_b - x_0) \int_{x_0}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot dx - \\
 &\quad - \iint_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx - (x_b - x_0) \int_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx + \\
 &\quad + (x_b - x_0) \int_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx = \\
 &= - \iint_{x_0}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx - \\
 &\quad - \iint_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx - (x_b - x_0) \int_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx + \\
 &\quad + (x_b - x_0) \int_{x_0}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx + (x_b - x_0) \int_{x_a}^{x_0} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx = \\
 &= - \iint_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx + (x_b - x_0) \int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx
 \end{aligned} \tag{3.7c}$$

whence:

$$x_b - x_0 = \frac{\iint_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx}{\int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx}. \tag{3.6b}$$

If x_0 satisfies this equality, then from (3.5c) and (3.5d) the bending moment is:

$$M^*(x) = M(x) - \frac{\int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx}{1 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{m_m(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx} \quad (3.8)$$

4. Effect of altering the flexural rigidity in several spans

If the flexural rigidity of the beam changes in several spans, then the effect of the change in one span will be determined first, on the basis of Item 3, and then the alteration of the influence lines, based on Item 5. Thereby, moment diagram or influence line can gradually be determined, after having taken into consideration the alteration in flexural rigidity in one span.

Calculation on the basis of the initial influence lines gives a close approximation, hence order of magnitude of the deviation can adequately be determined from the alteration computed on the basis of the influence lines of the primary beam.

For the calculation of the support moment it is practically sufficient to take the alteration in flexural rigidity in both adjacent spans into consideration.

5. Change of influence lines due to the alteration in flexural rigidity

Moment influence line of the cross-section x_0 can be obtained by inserting a hinge at x_0 into the beam, and applying a moment couple $m_m(x_0)$ and $-m_m(x_0)$ to the two beam parts to produce a relative rotation $\varkappa = -1$. Cutting the beam at x_0 and applying moment couple $m_m(x_0)$ and $-m_m(x_0)$ as well as vertical load couple

$$r_m(x_0) = \left[\frac{dm_m(x)}{dx} \right]_{x=x_0}$$

and $-r_m(x_0)$ to the two parts, both cut and primary beams will assume the same form, and the same moment will develop in them.

Altering the flexural rigidity of the beam in one span, a deformation to be determined from (3.4), (3.4a) and (3.4b) will develop.

Applying a moment couple $m_r(x_0)$ and $-m_r(x_0)$ and a vertical force couple

$$r_r(x_0) = \left[\frac{dm_r(x)}{dx} \right]_{x=x_0}$$

and $-r_r(x_0)$ to the beam in the cut section, vertical displacement will give the influence line for shearing force.

For the modified beam, displacements will be given by formulae (3.4d) and (3.4e).

For a moment influence line, relative displacement is zero, and relative angular rotation is -1 at x_0 . Hence, in addition to the original moment $m_m(x)$, moments $(c_m - 1)m_m(x)$ and $c_r m_r(x)$ producing the above deformation at x_0 develop. Thus:

$$\begin{aligned} c_m \alpha_m + c_r \Delta \varphi_r &= -1 \\ c_m \Delta y_m + c_r y_r &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

hence:

$$c_r = -c_m \frac{\Delta y_m}{y_r} \approx \frac{\Delta y_m}{\alpha_m y_r} \quad (5.2)$$

and

$$c_m = \frac{-y_r}{\alpha_m y_r - \alpha_r \Delta y_m} \approx -\frac{1}{\alpha_m}. \quad (5.3)$$

Influence line yields deflection, such as:

$$\eta_m^*(x) = c_m y_m^*(x) + c_r y_r^*(x)$$

where $y_m^*(x)$ and $y_r^*(x)$ are deflections of the cut beam with modified flexural rigidity.

Substituting expressions (5.2) and (5.3) gives the moment influence line for the modified beam:

$$\eta_m^*(x) = -\frac{1}{\alpha_m} \left[y_m^*(x) - \frac{\Delta y_m}{y_r} y_r^*(x) \right]. \quad (5.4)$$

Influence line for the shearing force is, by analogy:

$$\eta_r^*(x) = -\frac{1}{y_r} \left[y_m^*(x) - \frac{\Delta \varphi_r}{\alpha_m} y_r^*(x) \right]. \quad (5.5)$$

A comparison between (5.4) and (5.5) shows that alteration in the shearing force is of secondary order as compared with that of the bending moment.

It can be written from (3.1):

$$\begin{aligned}
 y_m^*(x) &= \eta_m(x) - \iint_{x_a}^{x_b} \frac{m_m(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx; \quad x < x_0, \\
 y_n^*(x) &= \eta_m(x) - \iint_{x_b}^x \frac{m_m(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx; \quad x > x_0, \\
 y_r^*(x) &= \eta_r(x) - \iint_{x_a}^x \frac{m_r(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx; \quad x < x_0, \\
 y_r^*(x) &= \eta_r(x) - \iint_{x_b}^x \frac{m_r(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx \cdot dx; \quad x > x_0.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Locating x_0 in the influence line as by replacing $M(x)$ by $m(x)$, Eq. (3.6) is satisfied, then c_r is made zero and

$$\eta_m^*(x) = -\frac{y_m^*(x)}{\chi_m} \tag{5.7a}$$

and

$$\eta_r^*(x) = -\frac{y_r^*(x)}{y_r}. \tag{5.7b}$$

6. Influence line for the moment produced by the alteration in flexural rigidity

For a given beam load, alteration in the bending moment produced by a change in flexural rigidity can be determined from formulae (3.5c to 3.5e). Accordingly, the alteration in bending moment is not proportional to the change in the flexural rigidity, but the more as a rule the bending flexural rigidity changes, the less the bending moment alteration increases. This relationship can be represented by a curve originating from point

$$z = \int I_1 dx = 0$$

and similar in form to that in Fig. 11. For a change in the flexural rigidity over an infinitesimal length, bending moment alteration will be given by Eq. (2.3).

In case of a greater length, the value given by integrating this equation is only an approximate value, since in this case $m_m(x)$ will be calculated with, instead of $m_m^*(x)$.

Accordingly, value of bending moment will be altered at x_1 by:

$$\begin{aligned}
 \Delta M(x) &= -m_m(x_1) \int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx = \\
 &= m_m(x_1) \int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{E} \left[\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right] dx.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

In general, this relationship in itself answers the problem: it furnishes both the sign of the combined effect of the alteration in bending moment at several loci, and — provided there is no great alteration in the flexural rigidity — the order of magnitude of the modification in the bending moment.

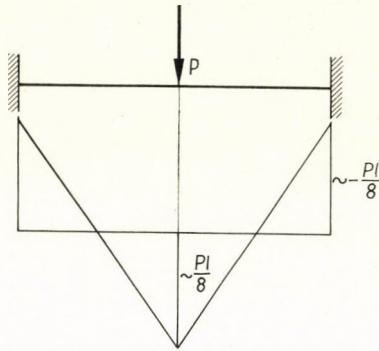


Fig. 11

7. Application of the presented method

Let us determine the moment at midspan of the beam in Fig. 1 by the method described in Item 3.

Both load and beam are symmetrical, thereby locus x_0 where formula (3.6) is met (i.e. where there is no relative vertical displacement) is at midspan.

Moment $M(x)$ developing in the original beam is shown in Fig. 11.

Let us determine this moment from formula (3.8):

$$\begin{aligned} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M(x)}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx &= \int_0^s \frac{M}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx + \\ &+ \int_s^{l-s} \frac{M}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_0} dx + \int_{l-s}^l \frac{M}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx = 2 \int_0^s \frac{M}{EI_0} \cdot \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx = \\ &= 2 \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot \frac{1}{EI_0} \int_0^s M dx = 2 \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot \frac{1}{EI_0} \left[\frac{Pl}{8}s - \frac{Ps^2}{4} \right] = \\ &= \frac{P}{4} \cdot \frac{1}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} s(l - 2s) = \frac{Ps(l - 2s)}{4EI_0} \cdot \frac{\tau - 1}{\tau}. \end{aligned}$$

Influence line can be established from Fig. 12.

The relative rotation at $z = l/2$ is:

$$\alpha = -2 \frac{m_m}{EI_0} \frac{l}{2} = -\frac{m_m l}{EI_0} = 1,$$

to give

$$m_m(x_0) = -\frac{EI_0}{l} m_m(x) = \text{const.}$$

Thus

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{m_m}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{I_1} dx = 2 \int_0^s \frac{m_m}{EI_0} \frac{I_1 - I_0}{l_1} dx = -2 \frac{I_1 - I_0}{I_1} \frac{s}{l} = -\frac{2s}{l} \frac{\tau - 1}{\tau}.$$

From formula (3.8) the moment at midspan ($x = x_0 = l/2$) is:

$$\begin{aligned} M^*(x_0) &= M^*(l/2) = \frac{Pl}{8} - \frac{Ps(l-2s)(\tau-1)}{4EI_0 \left[\tau - \frac{2s}{l}(\tau-1) \right]} \frac{EI_0}{l} = \\ &= \frac{Pl}{8} \frac{[l^2 - 4s(l-s)]\tau + 4s(l-s)}{[l^2 - 2sl]\tau + 2sl}, \end{aligned}$$

the same as (1.15).

Be $s = l/4$, $\tau = 1,25$; then

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{8} \frac{\tau+3}{2\tau+2} = \frac{Pl}{8} \frac{4,25}{4,50} = \frac{17}{18} \frac{Pl}{8} = 0,955 \frac{Pl}{8}$$

hence the bending moment will alter by:

$$\Delta M = -0,045 \frac{Pl}{8}.$$

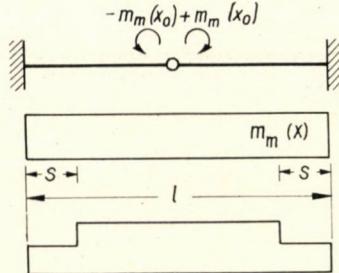


Fig. 12

Let us determine alteration in bending moment also by approximative formula (6.1): On the basis of the above it is:

$$m_m(x) = -\frac{EI_0}{l},$$

$$\begin{aligned} \int_{x_a}^{x_b} \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot \frac{M(x)}{EI_0} dx &= -2 \frac{\tau-1}{\tau} \cdot \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{EI_0} = \\ &= -\frac{0,25}{1,25} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{EI_0} \cdot \frac{Pl}{8} = -\frac{0,25}{5,0} \cdot \frac{l}{EI_0} \cdot \frac{Pl}{8} = -0,05 \frac{l}{EI_0} \cdot \frac{Pl}{8}. \end{aligned}$$

And the effect will be:

$$\Delta M\left(\frac{l}{2}\right) = -m_m\left(\frac{l}{2}\right) \int_{x_a}^{x_b} \frac{I_1 - I_0}{I_1} \cdot \frac{M(x)}{EI_0} dx = -0,05 \frac{Pl}{8},$$

in fair agreement with the value above. Of course, there is a poorer agreement for a more pronounced alteration in the flexural rigidity. For $\tau = 2$, exact value of $\Delta M(l/2)$ will be:

$$\Delta M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{8} \left[\frac{\tau+3}{2\tau+2} - 1 \right] = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1-\tau}{2\tau+2} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{8} = -0,166 \frac{Pl}{8}$$

as against the approximate bending moment value of:

$$\Delta M \left(\frac{l}{2} \right) \approx - \frac{\tau - 1}{4\tau} \cdot \frac{Pl}{8} = - \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl}{8} = - 0,125 \frac{Pl}{8}$$

presenting a significant difference between approximate and exact values, 25 per cent for the bending moment.

EINFLUSS DER VERÄNDERUNG DER BIEGESTEIFIGKEIT VON STATISCH UNBESTIMMTEN BIEGEBALKEN

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Das Kräftespiel der statisch unbestimmten Konstruktionen hängt u.a. auch von den Querschnittsabmessungen der Konstruktionen ab. Bei der Bemessung von Brücken werden die Innenkräfte nach Aufnahme der Abmessungen bestimmt, während die auf ihrem Grund aufgenommenen Querschnittsabmessungen das Kräftespiel beeinflussen. Deshalb mag die Bemessung der statisch unbestimmten Brücken sogar drei oder vier statische Umrechnungen erfordern. In diesem Aufsatz werden die Richtung und die Größenordnung der Veränderung der Innenkräfte, verursacht durch eine Änderung der Querschnittsabmessungen, untersucht. In deren Kenntnis können die Querschnittsabmessungen in Hinsicht auf das schon veränderte Kräftespiel aufgenommen werden, so daß eine neue Umrechnung der Konstruktion sich erübrigst.

L'EFFET DE LA MODIFICATION DE LA RIGIDITÉ DE FLEXION DES POUTRES HYPERSTATIQUES FLÉCHIES

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

Les forces internes des structures hyperstatiques dépendent entre autres des dimensions de la section transversale de la structure. Dans le calcul des ponts, les efforts internes seront déterminés après le choix des dimensions transversales qui, de leur côté, modifient ceux-ci. C'est pourquoi dans l'étude des ponts hyperstatiques, trois ou même quatre répétitions du calcul peuvent s'imposer.

Cette étude examine la direction et l'ordre de grandeur de la modification des efforts internes produite par la variation des dimensions transversales. En leur connaissance, les dimensions transversales peuvent être choisies en tenant compte des réactions modifiées, ce qui rend inutile un nouveau calcul de la structure.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ НА ИЗГИБ НА ИЗОГНУТУЮ БАЛКУ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

Эпюра сил статически неопределенных конструкций зависит от размеров сечения этих конструкций. При проектировании мостов внутренние силы были определены после принятия размеров, и размеры поперечного сечения, полученные на этой основе, изменяют эпюру сил. При проектировании статически неопределенных систем, поэтому может оказаться необходимым провести три—четыре статических расчета.

Исследуется, в каком направлении и в какой мере изменяются внутренние силы при изменениях размеров поперечного сечения. Зная эти закономерности, можно определять размеры сечения уже с учетом измененной эпюры сил, то есть отпадает надобность в многократном перерасчете конструкции.

DÉVERSEMENT LATÉRAL DES POUTRES A PAROI MINCE SUSPENDUES PAR LEURS EXTRÉMITÉS

L. KOLLÁR

DOCTEUR DES SCIENCES TECHNIQUES

BUREAU D'ÉTUDES DE CONSTRUCTIONS INDUSTRIELLES ET AGRICOLES, BUDAPEST

Z. GÁRDONYI

BUREAU D'ÉTUDES DE CONSTRUCTIONS POUR LES COMMUNICATIONS ET LES TRANSPORTS, BUDAPEST

[Manuscrit reçu le 18 avril 1966]

La charge de déversement des poutres à paroi mince suspendues par leurs extrémités est déterminée par la méthode de l'énergie de déformation, en utilisant la théorie de l'élasticité. Le procédé peut s'appliquer à des poutres de n'importe quelle section supportant des charges quelconques, mais l'étude n'examine que des poutres soumises à des charges uniformément réparties, dont la section transversale a un bord libre comprimé. Les auteurs déduisent des formules pour la charge de déversement de poutres aux extrémités libres ou raidies par des diaphragmes et examinent, quel nombre de termes de la fonction de déformation faut-il considérer pour arriver à une exactitude suffisante. Outre la déformation symétrique, les possibilités de déformation antimétrique sont également envisagées par les auteurs, qui terminent l'étude par un exemple numérique comparatif.

1. Introduction

1.1. — Description du problème

Le déversement latéral des poutres droites à paroi mince et à section transversale ouverte simplement symétrique (figure 1) sera étudié par la méthode de l'énergie de déformation. La méthode à présenter est également valable pour des poutres à section variable soumises à des charges quelconques, mais notre étude se limitera au cas de poutres de section et d'épaisseur constantes supportant une charge uniformément répartie.

La poutre que nous examinerons est suspendue par ses deux extrémités et peut tourner librement autour de la droite passant par les points de suspension. Ce cas correspond à celui de la mise en place des poutres préfabriquées.

1.2. — Antécédents littéraires

Les équations du déversement des poutres à *paroi mince* soumises à des charges quelconques ont été établies par CHWALLA [3], mais seulement pour le cas de l'appui simple, défini dans notre étude par une liberté de rotation complète en flexion latérale et verticale, ainsi que par l'absence de toute rotation en torsion. A la suite de Chwalla, MEISSNER [9] a résolu plusieurs cas concrets.

Le déversement des poutres *suspendues* a été étudié d'abord par CSONKA [4], [2], mais seulement pour des sections *rectangulaires*. Or il est connu que le comportement des poutres à parois minces diffère notablement de celui des poutres à section pleine, d'abord parce que leur centre de cisaillement ne coïncide pas avec le centre de gravité, et ensuite parce que le jeu des forces est modifié par suite de la faible épaisseur des parois.

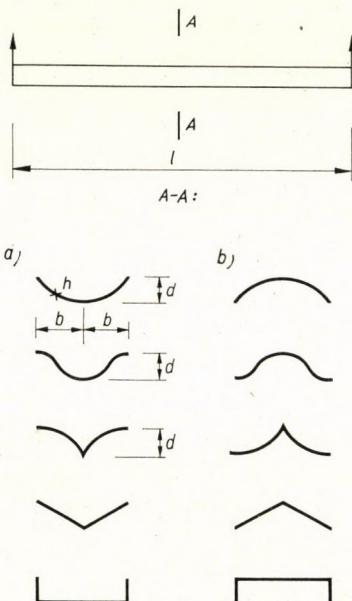


Fig. 1

LEBELLE [7] a résolu le problème du déversement des poutres suspendues en double *T* asymétrique, mais sa déduction étant basée sur les propriétés particulières des poutres en double *T*, ne saurait être généralisée aux sections représentées sur la figure 1.

1.3. Résultats nouveaux

La présente étude apporte certains résultats nouveaux, notamment:

a) le moment fléchissant critique de la poutre *suspendue* par ses extrémités est déterminé aussi pour des sections *quelconques à paroi mince*;

b) le problème est résolu aussi pour le cas de poutres raidies à leurs extrémités par des *diaphragmes*;

c) il est démontré au cours du calcul qu'il *ne suffit pas* de considérer *un seul terme* de la série de Fourier de la fonction de déformation.

1.4. Hypothèses

- a) Le matériau de la poutre est parfaitement élastique;
- b) la section de la poutre est à paroi mince, ouverte, symétrique, et sa forme reste inchangée pendant le déversement;

Forme de la section	Moment fléchissant transversal dans le plan de symétrie	Contrainte de cisaillement maximum au niveau du centre de gravité
Arc de cercle plat /parabole/	$d \frac{h}{2} - 0,1875 pb^2$	$0,722 pl \frac{b}{dh}$
Onde plate	$d \frac{h}{2} - 0,405 pb^2$	$0,638 pl \frac{b}{dh}$
Aile plate	$d \frac{h}{2} - 0,750 pb^2$	$0,722 pl \frac{b}{dh}$
V raide	$-0,50 pbs$	$0,75 pl \frac{s}{dh}$

Tableau I

- c) la rigidité de flexion verticale de la poutre est tellement grande, qu'on peut négliger la courbure de l'axe provoquée par la charge de déversement;
- d) la charge est verticale et agit dans le plan de symétrie de la poutre; sa position en hauteur peut être quelconque. La répartition transversale est arbitraire, mais on suppose que la flexion transversale qui en résulte ne modifie pas sensiblement la forme de la section, de sorte qu'on peut compter avec la forme de section initiale;
- e) la charge maintient sa direction originale pendant le déversement.

La poutre étant en général chargée par son poids propre uniformément réparti sur la section transversale, on peut aisément calculer le *moment de flexion transversale* engendré dans le plan de symétrie. Afin de faciliter le calcul pratique, nous avons déterminé ces moments pour quelques sections; on les trouve résumés dans le *Tableau I*. La charge par unité de surface a été désignée par p (kp/m^2). Pour le calcul du moment fléchissant des sections paraboliques, ondulées et en forme d'aile, on a admis l'hypothèse que la section est plate, c'est-à-dire que sa longueur d'arc peut être remplacée par sa projection horizontale. Le moment fléchissant transversal est considéré comme positif

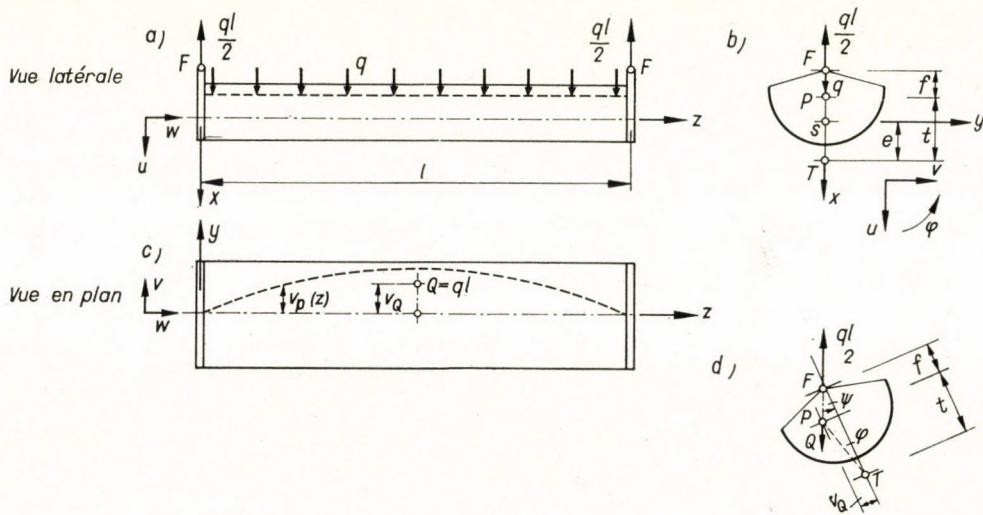


Fig. 2

s'il développe une contrainte en traction dans la fibre inférieure. La section inférieure (U) de la figure 1 n'a pas été représentée sur notre tableau, parce que les contraintes qui s'y produisent peuvent être aisément calculées, de la façon connue de la résistance des matériaux.

Si l'on *invertit* les sections du Tableau I suivant la figure 1b, le moment transversal conserve son signe négatif, c'est-à-dire il provoque encore une compression dans la fibre inférieure.

On ne s'occupera pas du mode de calcul des tensions de cisaillement et du moment de flexion transversale, car les ouvrages consacrés aux voiles cylindriques [8] examinent ce problème d'une façon détaillée.

2. Relations générales

Les notations nécessaires pour la déduction sont visibles sur la figure 2.

La méthode de l'énergie de déformation nécessite tout d'abord l'établissement des expressions du *travail intérieur* et *extérieur* de la poutre déversée. On

les obtient le plus opportunément en substituant 0 à $1/R$ dans les expressions écrites en [6] pour des barres courbes à paroi mince.

2.1. — L'expression du travail intérieur

La formule du *travail intérieur* sera la suivante:

$$L_i = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \frac{C_1}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{B_x}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v_T}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1)$$

où (voir figure 2)

- $C = GI_t$ rigidité de torsion de la poutre;
- $C_1 = EI_\theta$ rigidité de gauchissement de la poutre par rapport au centre de cisaillement T ;
- $B_x = EI_x$ rigidité de flexion latérale de la poutre par rapport à l'axe x passant par le centre de gravité S .
- Les valeurs de ces trois quantités sont représentées pour quelques sections sur la Figure 3.
- φ rotation des sections autour de leur centre de cisaillement T ;
- v_T déplacement latéral des centres de cisaillement T .

2.2. — L'expression du travail extérieur

L'expression du *travail extérieur* a été établie en [6] pour un *moment fléchissant* M_0 constant le long de la barre. Après substitution de 0 à $1/R$, elle prend la forme:

$$L'_e = \frac{M_0}{2} \int_0^l \left[\left(2e - d \cdot j_x^0 - \frac{b^2 j_y^0}{d} \right) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dv_T}{dz} \right] dz. \quad (2)$$

(Nous considérons comme moment fléchissant positif le moment développant une contrainte en traction dans la fibre inférieure).

j_x^0 et j_y^0 sont des constantes dépendant des données géométriques de la section transversale, définies par les formules:

$$dj_x^0 = \frac{\int x^3 dF}{I_y}, \quad (3a)$$

$$\frac{b^2}{d} j_y^0 = \frac{\int xy^2 dF}{I_y}. \quad (3b)$$

Leur valeur numérique est donnée sur la figure 3.

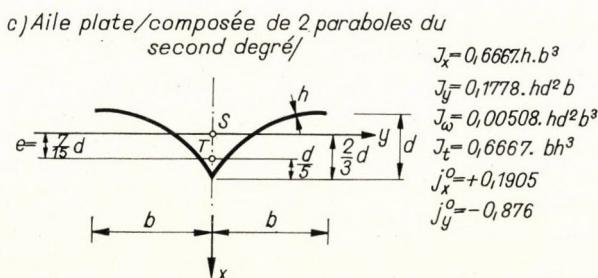
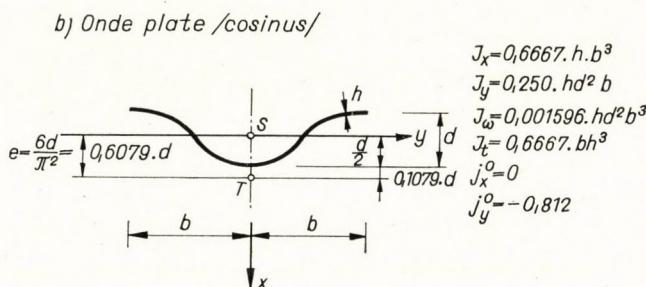
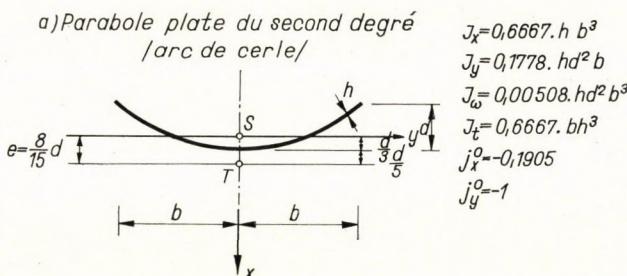
Au côté droit de l'équation (2), l'expression à intégrer signifie la quantité $\partial w / \partial z$ correspondant à l'allongement spécifique des fibres, ou plus exactement au produit de cette quantité par la contrainte en flexion, intégré sur la section

transversale. Donc, si le moment fléchissant M varie le long de la poutre, il faut le faire entrer sous le signe d'intégral, pour multiplier $\partial w / \partial z$ dans chaque section transversale par les contraintes en flexion correspondantes. Vu qu'on ne considère que des charges uniformément réparties, le moment fléchissant sera:

$$M = \frac{q}{2} (lz - z^2). \quad (4)$$

En substituant (4) dans (2) et introduisant, pour des raisons de simplicité, la notation

$$K_0 = 2e - dj_x^0 - \frac{b^2 j_y^0}{d} \quad (5)$$



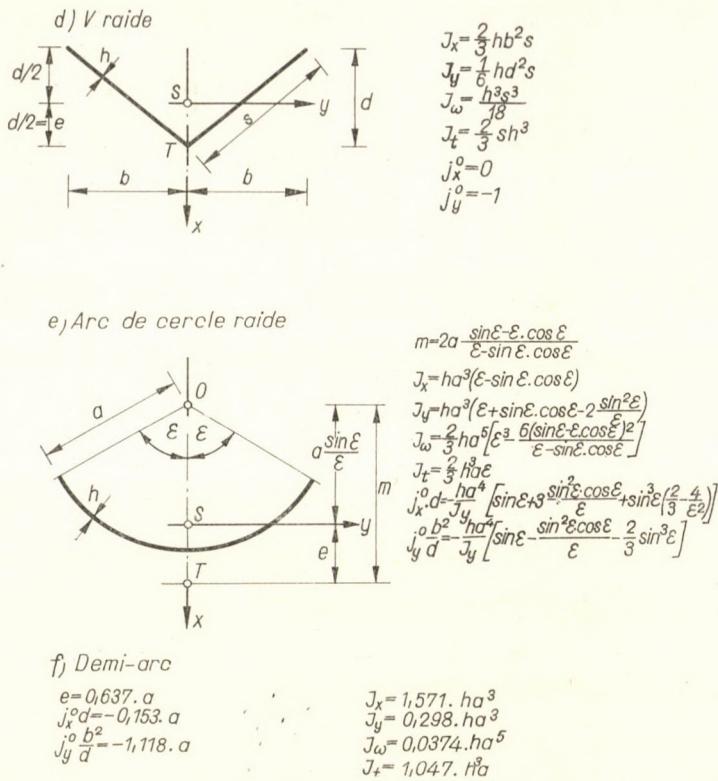


Fig. 3

on reçoit:

$$L'_e = \frac{q}{4} \int_0^l (lz - z^2) \left[K_0 \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dz} \frac{dv_T}{dz} \right] dz. \quad (6)$$

Il y a un travail extérieur supplémentaire quand le point d'application *P* de la charge (figure 2) ne coïncide pas avec le centre de cisaillement. Dans ces cas, le point *P* se déplace verticalement pendant la rotation de la section transversale, de la valeur

$$t(1 - \cos \varphi) \approx \frac{t\varphi^2}{2}.$$

Ainsi, la charge répartie fait un travail extérieur

$$L''_e = \frac{qt}{2} \int_0^l \varphi^2 dz. \quad (7)$$

Il faut enfin tenir compte aussi du travail effectué par suite de la rotation de la poutre autour du point de suspension *F*.

A la suite des déformations φ et v_T se produisant pendant le déversement, la droite reliant les points d'application P de la charge se courbe dans le plan horizontal. Le déplacement horizontal des points P sera donc:

$$v_P = v_T - t \cdot \varphi. \quad (8)$$

La résultante $ql = Q$ de la charge extérieure s'appliquera donc au centre de gravité de cette courbe, ce qui signifie qu'elle se déplacera horizontalement de sa position initiale de la valeur

$$\frac{\int_0^l v_P dz}{l} = \frac{\int_0^l v_T dz - t \int_0^l \varphi dz}{l} = v_Q. \quad (9)$$

La poutre étant suspendue dans le point F des sections extrêmes, elle peut tourner librement autour de ces points. Elle tournera d'un angle ψ tel que la résultante Q de la charge soit juste ramenée au plan vertical passant par les points de suspension. On peut écrire ainsi, suivant la figure 2d:

$$\psi = \frac{v_Q}{f}. \quad (10)$$

Le travail de la charge extérieure sera, par suite de cette rotation:

$$L_e''' = ql \cdot \left(\frac{f}{\cos \psi} - f \right) \approx ql \cdot \frac{f\psi^2}{2} = ql \frac{v_Q^2}{2f}. \quad (11)$$

Si le point de suspension est infiniment haut ($f = \infty$), toute rotation en torsion des extrémités de la poutre est impossible ($L_e''' = 0$), ce qui correspond au cas de l'appui simple.

L'expression du *travail extérieur total* sera donc:

$$L_e = \frac{q}{4} \int_0^l (lz - z^2) \left[K_0 \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{d\varphi}{dz} \frac{dv_T}{dz} \right] dz + \frac{qt}{2} \int_0^l \varphi^2 dz + \frac{ql}{2f} v_Q^2, \quad (12)$$

où v_Q est déterminé par la formule (9).

On détermine la charge de déversement en égalisant d'abord les expressions (1) et (12) relatives au travail intérieur et extérieur. On prend ensuite aussi bien pour φ que pour v_T une série de fonctions satisfaisant aux conditions aux limites et l'on détermine le minimum de l'expression de la charge de déversement, selon les coefficients de chaque terme de la série. Le déterminant du système d'équations linéaires homogènes ainsi reçu étant rendu égal à zéro, on obtient pour la charge de déversement une équation, dont le degré correspond au nombre des termes considérés [10].

3. Remarques sur le calcul

3.1. Approximation négligeant la courbure latérale

D'après nos recherches, on ne peut pas se borner au premier terme de l'une et de l'autre série. De ce fait, les calculs deviennent très compliqués. Mais le problème peut être grandement simplifié en vertu de la considération suivante:

Il ressort de nos études précédentes [5] et [6] qu'en cas de moment fléchissant *constant* et de poutres reposant sur des *appuis simples* ($f=\infty$), on obtient de très bons résultats pour les sections de la figure 1, si la rigidité de flexion latérale B_x de la poutre est supposée infiniment grande (par rapport à la rigidité de torsion C). Cela signifie qu'on néglige la courbure horizontale de l'axe des centres de cisaillement ($v_T = 0$), ne tenant compte que de la déformation de torsion. Nous verrons cependant qu'une telle approximation a pour condition que la flexion provoque une *compression dans les bords libres*. Dans notre cas, la contrainte en compression ne se développant que dans la fibre supérieure, l'approximation $v_T = 0$ ($B_x/C = \infty$) n'est permise que pour les sections visibles figure 1a.

Notons que dans notre cas, on se trouve le plus rapproché du cas du moment constant et de l'appui simple examinés dans [5], quand la charge répartie est appliquée au centre de cisaillement ($t = 0$) et le point de suspension se trouve infiniment haut ($f = \infty$), car alors L_e'' et L_e''' sont nuls [voir formules (7) et (11)], et seul L_e' (6) dû au moment fléchissant subsiste. Or—en prenant momentanément $f = \infty$ —si t est négatif, la charge correspondante, c'est-à-dire appliquée *au-dessous* du centre de cisaillement effectuera, suivant (7), un *travail négatif* et entraînera la torsion. Si t a une valeur négative assez grande, elle l'empêchera même complètement: si $L_e'' = -L_e'$, aucun travail extérieur ne pourra résulter, en effet, de la torsion pure. La charge de déversement serait ainsi infiniment grande. Il est donc évident qu'en augmentant la valeur négative de t , la déformation v_T jouera un rôle de plus en plus grand, et l'erreur due à l'omission de v_T augmentera en conséquence. Toujours d'après le même raisonnement, si t est *positif*, v_T jouera un rôle moins important qu'en cas de charge appliquée au centre de cisaillement. Il s'ensuit que les sections de la figure 1a nous intéresseront seules au cours de notre examen, car elles correspondent, en cas de charge propre, à un t *positif*, c'est-à-dire à un cas de charge appliquée *au-dessus du centre de cisaillement*. Les sections de la figure 1b seront donc exclues de notre examen.

En diminuant la hauteur F du *point de suspension*, on accroît, selon (11), le travail extérieur. Donc, toujours d'après notre raisonnement ci-dessus, l'erreur due à l'omission de v_T diminuera probablement, ou du moins n'augmentera pas par rapport au cas d'appui simple ($f = \infty$) [6].

En conclusion: on ne considérera, par la suite, que des poutres à sections correspondant à la figure 1a et le cas de charges appliquées *au-dessus* du centre de cisaillement. On négligera la courbure horizontale de l'axe des centres de cisaillement ($v_T = 0$) et l'on ne tiendra compte que de la *rotation* φ autour de cet axe.

3.2. — Les conditions aux limites et la fonction de rotation $\varphi(z)$

Ainsi qu'il ressortait déjà de notre déduction sous 2.2., la suspension fait que la poutre tourne autour du point de suspension F à la manière d'un corps rigide et cet angle de rotation ψ et la rotation en torsion $\varphi(z)$ des sections peu-

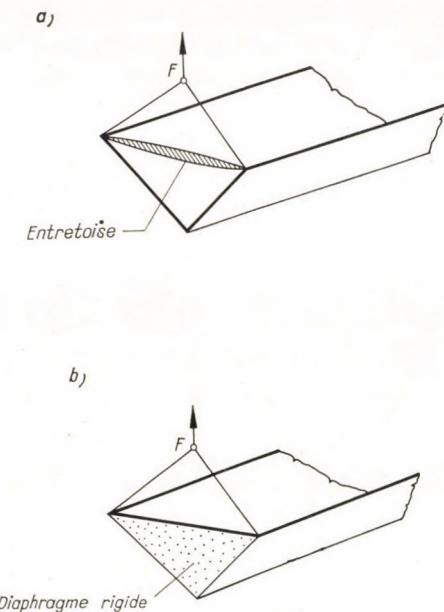


Fig. 4

vent être traités séparément. Ainsi la fonction $\varphi(z)$ peut être écrite comme si les extrémités de la poutre reposaient sur des appuis simples, c'est-à-dire en satisfaisant la condition $\varphi = 0$ aux points $z = 0$ et $z = l$.

On envisagera par la suite deux sortes d'extrémité de poutre. Dans le premier cas, les sections extrêmes de la poutre sont *libres*, ce qui signifie qu'on n'empêche nullement leur déformation axiale (figure 4a). (Ici, l'entretoise ne sert qu'à annuler le moment transversal dû à la suspension). Il s'ensuit que dans la section extrême, il ne se produira pas de contrainte longitudinale de gauchissement σ_z , ce qui équivaut, d'après [10], à la condition

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \quad (13)$$

Si, par contre, on munit les deux extrémités de la poutre de *diaphragmes infiniment rigides* même à la flexion (figure 4b), on empêchera ainsi la déformation axiale des sections extrêmes (le gauchissement), ce qui peut s'exprimer, d'après [10], par la condition

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (14)$$

En conséquence, la fonction de rotation pourra s'écrire, en cas d'extrémités *libres*, sous forme d'une série de fonctions $\sin(n\pi/l)z$, tandis qu'en cas d'extrémités à diaphragmes, elle prendra la forme d'une série de fonctions $\cos(n\pi/l)z$.

4. Solution pour le cas de déformation symétrique

4.1. Détermination de la charge de déversement en cas d'extrémités libres

Eu égard aux conditions aux limites (13), la fonction de rotation s'écrira sous forme de la série

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} z; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (15)$$

(figure 5a). (Les termes de nombre pair représentant la déformation antimétrique ont été omis, étant donné qu'au cours de la déduction ils se présentent séparément des termes symétriques et fournissent une charge critique plus grande, voir paragraphe 5.).

L'expression (1) du *travail intérieur* donne comme résultat:

$$L_i = \frac{C\pi^2}{4l} \sum_n n^2 \varphi_n^2 + \frac{C_1\pi^4}{4l^3} \sum_n n^4 \varphi_n^2; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (16)$$

Le déplacement v_Q nécessaire pour le *travail extérieur* sera, selon (9):

$$v_Q = -\frac{2t}{\pi} \sum_n \frac{\varphi_n}{n}; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (17)$$

Par conséquent, le *travail extérieur* pourra s'écrire, selon (12), sous la forme (cf. [10], p. 109):

$$L_e = \frac{qK_0 l}{4} \left[\sum_n \varphi_n^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) - 4 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \frac{mn(m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2} \right] + \\ + \frac{qtl}{4} \sum_n \varphi_n^2 + ql \frac{2t^2}{\pi^2 f} \left(\sum_n \frac{\varphi_n}{n} \right)^2. \quad (18)$$

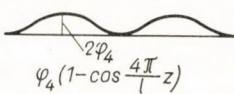
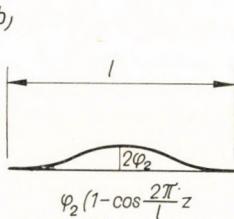
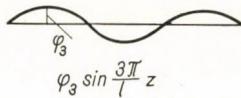
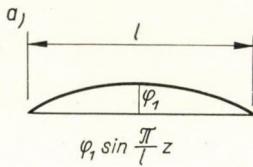


Fig. 5

Dans les sommes: $n = 1, 3, 5, \dots$ et $m = 1, 3, 5, \dots$, mais dans les sommes selon m , il faut omettre les termes $m = n$, tandis que dans la double somme, chaque combinaison (m, n) ne doit figurer qu'une seule fois. D'après les règles de la méthode de l'énergie de déformation [10], nous devons former les expressions

$$\frac{\partial L_i}{\partial \varphi_n} - \frac{\partial L_e}{\partial \varphi_n} = 0.$$

Celles-ci donnent pour chaque n ($n = 1, 3, 5, \dots$) les équations linéaires suivantes:

$$\varphi_n \left\{ n^2 \pi^2 \left(C + C_1 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) - 2M \left[K_0 \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} - 1 \right) + 4t + \frac{32}{\pi^2 n^2} \frac{t^2}{f} \right] \right\} + 16M \cdot K_0 \sum_m \frac{mn(m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2} \varphi_m - \frac{64}{\pi^2 \cdot n} M \frac{t^2}{f} \sum_m \frac{\varphi_m}{m} = 0. \quad (19)$$

Pour simplifier, nous avons introduit ici la notation

$$\frac{ql^2}{8} = M. \quad (20)$$

Dans les sommes, $m = 1, 3, 5, \dots$, mais le terme $m = n$ doit être omis.

En écrivant l'équation (19) pour chaque φ_n et en rendant égal à zéro le déterminant du système d'équations ainsi reçus, on obtient pour le moment fléchissant critique

$$M_{cr} = \frac{q_{cr} \cdot l^2}{8}$$

une équation de degré égal au nombre des termes considérés dans la série de φ .

Si on ne prend qu'un seul terme, alors $n = 1$ et la sommation selon n devient superflue, de sorte qu'on aura la relation simple ci-dessous:

$$M_{cr} = 2,155 \frac{C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2}}{K_0 + 1,747t + 1,416 \frac{t^2}{f}}. \quad (21)$$

En cas de deux termes, déjà, on reçoit pour M_{cr} l'équation du second degré

$$aM_{cr}^2 + bM_{cr} + c = 0 \quad (22)$$

où les coefficients seront:

$$a = 5,145 K_0^2 + 12,36 \cdot K_0 t + 10,17 K_0 \frac{t^2}{f} + 1,6 t^2 + 1,441 \frac{t^3}{f}, \quad (23a)$$

$$b = - \left[24,29 \cdot K_0 C + 1042,7 K_0 \frac{C_1}{l^2} + 19,74 \cdot tC + 1597,5 t \frac{C_1}{l^2} + 14,58 \frac{t^2}{f} C + 1280,8 \frac{t^2}{f} \frac{C_1}{l^2} \right], \quad (23b)$$

$$c = 21,92 C^2 + 2163 C \frac{C_1}{l^2} + 19214 \frac{C_1^2}{l^4}. \quad (23c)$$

Pour quelques cas, nous avons calculé le moment fléchissant critique par les formules (21) et (22), pour voir dans quelle mesure le moment de déversement calculé avec deux termes de la série de φ diffère du résultat calculé avec un seul terme. Nous avons trouvé que la différence était maximum si

a) $C_1 = t = 0$.

Dans ce cas f peut être quelconque, comme il ne figure que dans l'expression t^2/f , mais naturellement $f > 0$. Pour ce cas, nous avons calculé le moment critique en prenant plusieurs termes de φ et avons reçu les résultats suivants:

1 terme :	$M_{cr} = 2,155 \ C/K_0$	(100%)
2 termes :	1,215	(56,5%)
3 termes :	1,096	(50,9%)
4 termes :	1,055	(49%)
5 termes :	1,037	(48,1%)

Au fur et à mesure de l'augmentation du nombre des termes considérés, la valeur du moment fléchissant critique se rapproche donc (en cas de $C_1 = t = 0$) du moment fléchissant critique

$$M_{cr} = 1,0 \ C/K_0$$

de la poutre fléchie par deux couples appliquées à ses extrémités, mais ne prend jamais une valeur inférieure.

b) Si $C_1 = 0, t = K_0/2, f = \infty$:

1 terme :	$M_{cr} = 1,150 \ C/K_0$	(100%)
2 termes :	0,954	(83%)

c) Si $C_1/l^2 = C/100, t = 0, f = \text{arbitraire}$:

1 terme :	$M_{cr} = 2,368 \ C/K_0$	(100%)
2 termes :	1,779	(75%)

d) Enfin si $C_1 = 0, t = K_0/2, f = K_0/2$:

1 terme :	$M_{cr} = 0,8348 \ C/K_0$	(100%)
2 termes :	0,7824	(93,8%)

Dans n'importe quel cas, les données ci-dessus peuvent nous renseigner sur l'erreur de M_{cr} (22) calculé en prenant deux termes de la série de φ .

On voit que dans les trois derniers cas, les résultats correspondant aux fonctions φ à un seul et à deux termes sont sensiblement plus rapprochés les uns des autres que dans le cas le plus défavorable $C_1 = t = 0$. On peut donc

s'attendre à ce qu'ils diffèreront aussi beaucoup moins des résultats plus exacts que l'on obtient avec plusieurs termes de φ . Étant donné que dans tous les cas pratiques $C_1 > 0$ et $t > 0$, la formule (22) peut être considérée chaque fois comme suffisamment exacte, car son erreur est nettement inférieure à la différence de

$$\frac{1,215 - 1,037}{1,037} \cdot 100 \% = 17,2 \%$$

démontrable au cas de $C_1 = t = 0$. (La différence diminue surtout si $t > 0$). Rien ne s'oppose naturellement à ce qu'on considère plusieurs termes, en déterminant la valeur M_{cr} à partir d'une équation de degré supérieur.

La formule (21) obtenue en prenant un seul terme de φ est sans doute inexacte, mais elle a l'avantage de faire ressortir l'importance relative et l'ordre de grandeur des divers facteurs ($C, C_1/l^2, K_0, t, f$).

4.2. — Valeur de la charge de déversement en cas d'extrémités à diaphragmes

Nous écrirons à présent la fonction de rotation sous la forme

$$\varphi = \sum_n \left(1 - \cos \frac{n\pi}{l} z \right); \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (24)$$

satisfaisant aux conditions aux limites (14), (figure 5b), fonction qui ne contient encore que les termes correspondant à la déformation symétrique. Le travail intérieur s'écrira donc, selon (1), sous la forme:

$$L_i = \frac{C\pi^2}{4l} \sum_n n^2 \varphi_n^2 + \frac{C_1 \pi^4}{4l^3} \sum_n n^4 \varphi_n^2, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (25)$$

En vertu de la relation (9)

$$v_Q = -t \cdot \sum_n \varphi_n, \quad n = 2, 4, 6, \dots, \quad (26)$$

donc d'après (12) le travail extérieur sera:

$$\begin{aligned} L_e = & \frac{qK_0 l}{4} \left[\sum_n \varphi_n^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{12} + \frac{1}{4} \right) - 8 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \frac{m^2 n^2}{(m^2 - n^2)^2} \right] + \\ & + \frac{qtl}{4} \left[3 \sum_n \varphi_n^2 + 4 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \right] + ql \frac{t^2}{2f} \left[\sum_n \varphi_n^2 + 2 \sum_m \sum_n \varphi_m \varphi_n \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

En déterminant le minimum de la charge, on obtient pour chaque n ($n = 2, 4, 6, \dots$) les équations

$$\varphi_n \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{2} \left(C + C_1 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) - M \left[K_0 \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} + 1 \right) + 12t + 8 \frac{t^2}{f} \right] \right\} + \\ + 16 MK_0 \sum_m \frac{m^2 n^2}{(m^2 - n^2)^2} \varphi_m - 8 Mt \left(1 + \frac{t}{f} \right) \sum_m \varphi_m = 0, \quad m=2,4,6,\dots \quad (28)$$

En se limitant à un seul terme, on reçoit l'expression

$$M_{cr} = \frac{\pi^2}{8} \frac{C + C_1 \frac{4 \pi^2}{l^2}}{K_0 \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16} \right) + \frac{3}{4} t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{f}} = \\ = 1,234 \frac{C + C_1 \frac{4 \pi^2}{l^2}}{0,884 K_0 + 0,75 t + 0,5 \frac{t^2}{f}}. \quad (29)$$

Si on prend deux termes, on aura comme résultat l'équation du second degré (22) avec les coefficients:

$$a = 1,772 K_0^2 + 2,318 K_0 t + 1,640 K_0 \frac{t^2}{f} + 0,200 t^2 + 0,160 \frac{t^3}{f}, \quad (30a)$$

$$b = - \left[5,442 K_0 C + 545,9 K_0 \frac{C_1}{l^2} + 2,961 t C + 397,4 t \frac{C_1}{l^2} + \right. \\ \left. + 1,974 \frac{t^2}{f} C + 265,0 \frac{t^2}{f} \frac{C_1}{l^2} \right], \quad (30b)$$

$$c = 3,896 C^2 + 769,1 C \frac{C_1}{l^2} + 24291 \frac{C_1^2}{l^4}. \quad (30c)$$

Pour vérifier l'exactitude nous avons calculé à nouveau la valeur de M_{cr} pour le cas $C_1 = t = 0$ (f arbitraire), pour plusieurs termes. Voici les résultats:

1 terme :	$M_{cr} = 1,394 C/K_0$	(100%)
2 termes :	1,137	(81,5%)
3 termes :	1,071	(77%)
4 termes :	1,044	(75%)
5 termes :	1,029	(73,8%)

On voit que cette fois encore, en augmentant le nombre des termes considérés, on s'approche de plus en plus du moment critique

$$M_{cr} = 1,0 \frac{C}{K_0}$$

de la poutre fléchie par deux couples à ses extrémités, comme cela s'est vu aussi au cas des poutres à extrémités libres. En effet, en vertu de la supposition $C_1 = 0$, les diaphragmes ne raidissent pas la poutre. Le fait qu'à égalité du nombre des termes les poutres à diaphragmes donnent un moment critique inférieur à celui des poutres à extrémités libres, ne montre que la meilleure convergence, mais il ne s'ensuit pas que les premières soient moins stables que les secondes.

Il ressort de nos calculs ci-dessus qu'en cas de $C_1 = t = 0$, le moment critique des poutres à diaphragmes peut être calculé, à nombre de termes égal, avec une exactitude nettement plus grande que le moment critique des poutres à extrémités libres.

En cas de $C_1 > 0$, les diaphragmes d'extrémité augmentent naturellement le moment critique par rapport aux poutres à extrémités libres, mais généralement dans une assez faible mesure, comme le montrera d'ailleurs notre exemple numérique présenté à la fin de l'étude.

Les diaphragmes utilisés dans la pratique ne sont pas *infiniment rigides* à la flexion, aussi raidissent-ils moins la poutre que les diaphragmes supposés infiniment rigides que nous avons considérés au cours de nos déductions. Mais vu l'effet de raidissement négligeable des diaphragmes, il serait sans intérêt de tenir compte de cette différence.

4.3. — Remarques

Pour le cas du *moment fléchissant variable* nous avons, dans l'expression (2) déduite pour le moment constant, introduit le moment sous le signe d'intégral pour établir l'expression (6) du *travail extérieur*. Mais nous n'avons tenu compte ainsi que du travail des contraintes axiales σ_z , ne considérant ni le travail des contraintes en cisaillement τ se développant toujours en cas de moments variables, ni celui des contraintes transversales σ_y dépendant de la position de la charge (plus précisément le travail des contraintes transversales σ agissant dans le sens de la tangente de la section). Or, en examinant la stabilité des plaques et voiles [10] il faut aussi tenir compte, en dehors de σ_z , de τ et de σ_y dans l'expression de l'énergie extérieure. Pour notre part, nous avons préféré écrire le travail L_e (7) de l'abaissement de la charge. Il reste donc à démontrer que celui-ci est identique au travail de τ et de σ_y .

La comparaison a été faite sur une poutre à section en V, reposant sur des appuis simples ($f = \infty$), à extrémités libres et à charge uniformément répartie. Nous avons déterminé les travaux extérieurs d'une part par les formules (6) et (7) déjà présentées et d'autre part par les équations de la théorie des plaques

[10], les deux demi-poutres ayant été considérées comme des plaques planes. Nous avons supposé que l'axe passant par les centres de cisaillement (la droite reliant les pointes des sections en V) reste droit, c'est-à-dire $B_x = \infty$, et pour rendre la comparaison plus facile, nous n'avons pris que le premier terme de la série (15). Nous avons examiné deux cas de charges: d'abord le cas d'une charge appliquée aux centres de cisaillement ($t = 0$) et ensuite l'effet du poids propre équivalant, selon la théorie des plaques, à une charge uniformément répartie à la surface de la plaque, sa résultante agissant à mi-hauteur de la section ($t = d/2$).

Sans entrer dans le détail de ces calculs, disons seulement que leurs résultats concordaient parfaitement, dans l'un et l'autre cas, avec ceux de la méthode de calcul que nous avons présentée. Les contraintes en cisaillement fournissaient, dans les deux cas, un travail extérieur positif de même valeur, mais en cas de charge appliquée au niveau du centre de cisaillement, celui-ci est annulé par le travail négatif des contraintes σ transversales. En cas de poids propre, d'autres contraintes σ se développent, qui fournissent évidemment un travail extérieur différent. Entre celui-ci et le travail des contraintes en cisaillement existe une différence juste égale à l'expression (7).

Nous avons vérifié ainsi la justesse de la méthode présentée, qui fournit par une voie simple les mêmes résultats que les équations de travail utilisées par la théorie des plaques.

La justesse de notre méthode se trouve aussi confirmée par le fait que si $f = \infty$, c'est-à-dire en cas d'appuis simples, nos expressions déduites au paragraphe 2 montrent, après quelques transformations, un accord parfait avec les résultats de CHWALLA [3].

5. Solution pour le cas de déformations antimétriques

Nous examinerons encore brièvement la déformation antimétrique pour les cas d'extrémités libres et à diaphragmes, et comparerons la charge critique qui en résulte à celle déduite précédemment à partir de la déformation symétrique. Par raison de simplicité, nous prendrons un seul terme de la fonction de rotation et supposerons qu'avec plusieurs termes, le rapport entre les charges critiques des déformations antimétriques et symétriques restera identique ou similaire.

5.1. — Pour les poutres à *extrémités libres*, le cas de rotation antimétrique le plus simple est présenté sur la figure 6a. D'où l'on reçoit, de la manière décrite au paragraphe 4.1., l'expression suivante pour le moment fléchissant critique:

$$M_{cr}^{\text{antimétr.}} = 3 \frac{C}{K_0 + 2t - 6f}. \quad (31)$$

Le composant de travail L_e'' produit par la rotation autour du point de suspension F est à présent négatif, étant donné que les deux extrémités sont forcées de s'élèver d'une valeur

$$f(1 - \cos \varphi_0) \approx f \frac{\varphi_0^2}{2}$$

à cause de leur rotation en sens inverse.

De la comparaison avec l'expression (21) résultant de la fonction de rotation symétrique à un terme, il ressort que le moment critique de la déformation antimétrique ne saurait être inférieur à l'expression (21) qu'en cas de

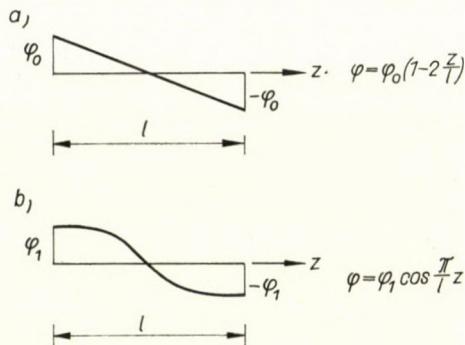


Fig. 6

f négatifs, ce qui correspond à une suspension au-dessous du point d'application de la charge, pratiquement impossible. Ainsi, la charge critique des poutres à extrémités libres doit être calculée toujours par les formules déduites à partir de la déformation symétrique.

5.2. — Pour les poutres à diaphragmes, en prenant la déformation selon la figure 6b, on reçoit le moment critique

$$M_{cr}^{\text{antimétr.}} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2}}{K_0 \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4} \right) + t - 2f} \quad (32)$$

avec un L_e'' négatif et une élévation des points d'application de la charge $f \cdot \varphi_1^2/2$, comme dans le cas précédent. Pour faciliter la comparaison, l'expression (29) correspondant à la déformation symétrique à un terme et l'expression (32) s'écriront sous la forme:

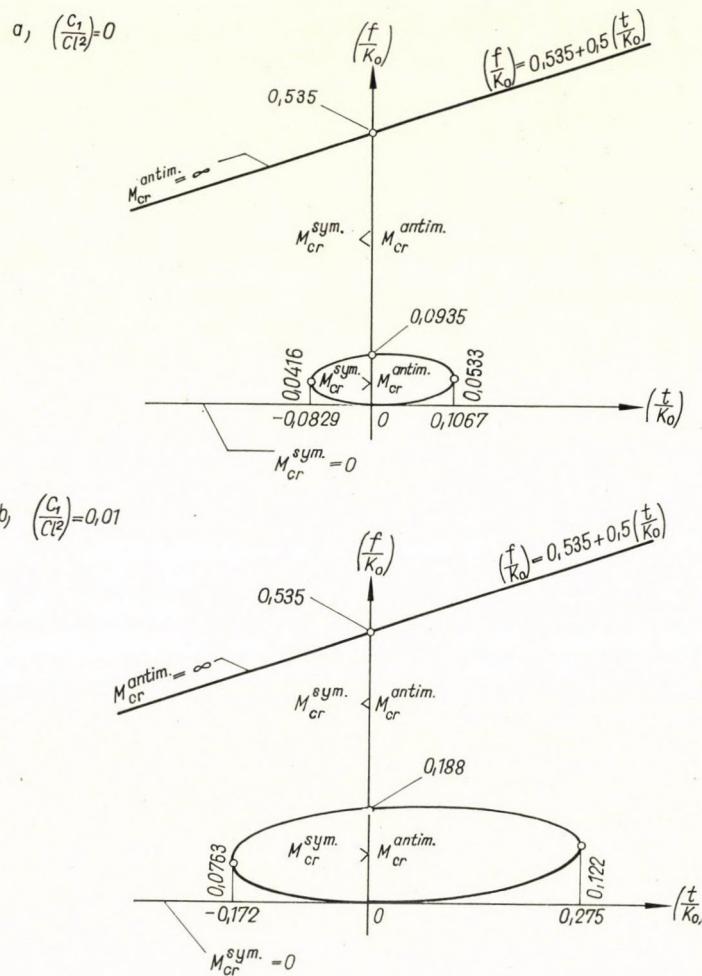


Fig. 7

$$M_{\text{crit}}^{\text{symétr.}} = 1,234 \frac{1 + 4 \pi^2 \left(\frac{C_1}{C l^2} \right)}{0,884 + 0,75 \left(\frac{t}{K_0} \right) + 0,5 \frac{(t/K_0)^2}{(f/K_0)}} \frac{C}{K_0}, \quad (33a)$$

$$M_{\text{crit}}^{\text{antimétr.}} = 1,234 \frac{1 + \pi^2 \left(\frac{C_1}{C l^2} \right)}{1,071 + \left(\frac{t}{K_0} \right) - 2 \left(\frac{f}{K_0} \right) \frac{C}{K_0}}. \quad (33b)$$

La comparaison a été effectuée pour les valeurs 0 et 0,01, deux cas extrêmes de C_1/Cl^2 pouvant se présenter dans la pratique. Les résultats sont mis en évidence sur les figures 7a—b.

Le long de l'ellipse représenté dans le système de coordonnées f/K_0 , t/K_0 , $M_{cr}^{\text{symétr.}} = M_{cr}^{\text{antimétr.}}$. A l'intérieur de l'ellipse, c'est la déformation antimétrique, tandis qu'à l'extérieur de l'ellipse — quand on se limite au domaine des f positifs — c'est la déformation symétrique qui donne un moment critique plus petit.

Ces résultats ont été présentés sur la figure 8 sous une forme pratique: nous y avons donné, en fonction de (C_1/Cl^2) , les valeurs de f/K_0 au-dessus des-

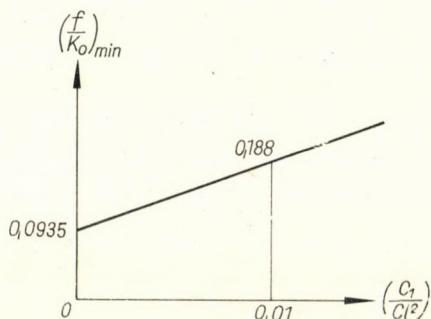


Fig. 8

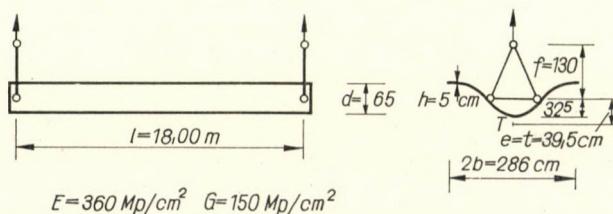


Fig. 9

quelles la déformation symétrique doit être observée. Pour plus de simplicité, les valeurs correspondant aux cas $C_1/Cl^2 = 0$ et $0,01$ ont été reliées entre elles par une ligne droite. Si (f/K_0) se situe au-dessous de la ligne (ce qui n'arrive qu'exceptionnellement), l'examen doit être complété au moyen des ellipses de la figure 7; éventuellement, on peut aussi calculer le moment critique correspondant à la déformation antimétrique.

6. Exemple numérique

Vérifions la stabilité latérale de la poutre à paroi mince visible sur la figure 9, pendant et après la mise en place, pour des extrémités libres et pour des extrémités à diaphragmes. Les données caractéristiques de la section sont calculées suivant les figures 2 et 3b.

$$e = t = + 39,5 \text{ cm}$$

$$j_x = 0$$

$$j_y = -0,812$$

$$f = 130 \text{ cm}$$

$$K_0 = 2e - j_x^0 d - j_y^0 \frac{b^2}{d} = 79 + 0 + 0,812 \cdot \frac{143^2}{65} = 335 \text{ cm}$$

$$C = GI_t = 150 \cdot \frac{5^3 \cdot 286}{3} = 1,79 \cdot 10^6 \text{ Mp cm}^2$$

$$C_1 = EI_\phi = 360 \cdot 0,001596 \cdot 5 \cdot 65^2 \cdot 143^3 = 3,54 \cdot 10^{10} \text{ Mp cm}^4$$

$$C_1/l^2 = 3,54 \cdot 10^{10}/1800^2 = 1,09 \cdot 10^4 \text{ Mp cm}^2$$

6.1. — Extrémités libres

6.11. — Poutre suspendue

Fonction de rotation à deux termes. Les coefficients de l'équation du second degré sont les suivants:

$$(23a): a = 785,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

$$(23b): b = -2094 \cdot 10^8 \text{ Mp cm}^3$$

$$(23c) \quad c = 1145,9 \cdot 10^{12} \text{ Mp}^2 \text{ cm}^4$$

$$(22): M_{cr}^{\text{à deux termes}} = 77,0 \text{ Mp m}$$

Fonction à un terme. La formule (21) donne:

$$M_{cr}^{\text{à un terme}} = 97,0 \text{ Mp m}$$

Nous avons calculé encore le moment critique en prenant trois termes de φ :

$$M_{cr}^{\text{à trois termes}} = 76,1 \text{ Mp m}$$

Le résultat à un terme étant pris égal à 100%, ceux à deux, resp. à trois termes seront de 79,5%, resp. de 78,5%. En comparant ces résultats aux valeurs en pourcentage données au paragraphe 4.1., on constate que la convergence est nettement meilleure que celle obtenue au cas $C_1 = t = 0$. En prenant deux, resp. trois termes, on constate un écart minime de 1,26% entre les deux résultats.

A titre de comparaison, nous calculerons encore le moment critique d'une poutre fléchie par des couples à ses deux extrémités, et ensuite le moment critique de la poutre suspendue, à section rectangulaire étroite, pour voir quelle erreur on commet en utilisant ces formules.

Dans le cas de la poutre fléchie par deux couples appliquées à ses extrémités [10], [5]:

$$M_{cr}^{\text{const}} = \frac{C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2}}{K_0} = \frac{(1,79 + 0,109 \cdot 9,87) 10^6}{335} = 56,6 \text{ Mp m}$$

(Naturellement, cette formule ne tient compte ni du fait de la suspension, ni de ce que la charge est appliquée au-dessus du centre de cisaillement).

L'équation du troisième degré valable pour la section rectangulaire [4] donne:

$$M_{cr}^{\text{rectangulaire}} = 1420,0 \text{ Mp m}$$

(De son côté, cette formule ne tient pas compte de la paroi mince de la section et du fait que le centre de cisaillement ne coïncide pas avec le centre de gravité.)

6.12. — Poutre à appuis simples

A titre comparatif, calculons aussi le moment de déversement après la mise en place de la poutre, en supposant un appui simple défini au paragraphe 1.2. Par conséquent, f devra être remplacé par ∞ dans les formules.

En prenant deux termes:

$$(23a): a' = 743,9 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

$$(23b) b' = -2046,3 \cdot 10^8 \text{ Mp cm}^3$$

$$(23c): c' = 1145,9 \cdot 10^{12} \text{ Mp}^2 \text{ cm}^4$$

(22): $M_{cr} = 78,0 \text{ Mp m}$, soit seulement 1,3% de plus qu'à l'état suspendu.

6.2. — Poutre suspendue à diaphragmes

Les coefficients de l'équation du second degré sont:

$$(30a): a = 94,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^2$$

$$(30b): b = -2285 \cdot 10^9 \text{ Mp cm}^3$$

$$(30c): c = 12145 \cdot 10^{12} \text{ Mp}^2 \text{ cm}^4$$

$$(22): M_{cr}^{\text{diaphr.}} = 79,1 \text{ Mp m},$$

valeur dépassant à peine le moment critique de la poutre à extrémités libres. On voit donc que le diaphragme n'augmente la stabilité de la poutre que dans une très faible mesure. Et si l'on tient compte de ce que le diaphragme n'est pas infiniment rigide, alors en prenant la moyenne arithmétique des résultats obtenus pour les extrémités libres et à diaphragmes, on reçoit

$$M_{cr}^{\text{moyen}} = \frac{77 + 79,1}{2} = 78,55 \text{ Mp m}$$

valeur qui ne dépasse que de 2% celle obtenue pour la poutre à extrémités libres.

LITTÉRATURE

1. BLEICH, F.: Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill, New York 1952.
2. BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.: Stabilitätstheorie I. Akademie-Verlag, Berlin 1957.
3. CHWALLA, E.: Kippung von Trägern mit einfachsymmetrischen dünnwandigen und offenen Querschnitten. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*. Abt. II. a. 153.Bd., 1—10.Hefte, 1944.
4. CSONKA, P.: Die Stabilität der an ihren Enden aufgehängten prismatischen Stäbe von rechteckigem Querschnitt. *Acta Techn. Hung.* **8** (1954), 79—90.
5. KOLLÁR, L.: Lateral Buckling of Thin-walled Curved Bars (Shell-Arches). *Acta Techn. Hung.* **45** (1964), 297—314.
6. KOLLÁR, L.—IVÁNYI, Gy.: Kippen und Biegendrillknicken von Schalenbögen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv* (Sous presse).
7. LEBELLE, P.: Stabilité élastique des poutres en béton précontraint à l'égard du déversement latéral. *Annales de l'Inst. T. B. T. P.* **12** (1959). No 141, 780—831. Série: Béton précontraint (32).
8. LUNDGREN, H.: Cylindrical Shells. Vol. 1. The Danish Technical Press, Copenhagen 1951.
9. MEISSNER, F.: Einige Auswertungsergebnisse der Kipptheorie einfach-symmetrischer Balkenträger. *Der Stahlbau*, **24** (1955), 110—113.
10. TIMOSHENKO, S.—GERE, J.: Theory of Elastic Stability. 2nd Ed. McGraw-Hill, New York 1961.

LATERAL BUCKLING OF THIN-WALLED, SUSPENDED BEAMS

L. KOLLÁR and Z. GÁRDONYI]

SUMMARY

In the paper the load causing lateral buckling of thin-walled beams, suspended on both ends, is determined on the basis of the energy-method of the elasticity theory. The method can be applied to beams having cross sections on any form and being loaded in any arbitrary way; however, authors show the application of the procedure on uniformly loaded beams, the cross sections of which have free edge on the compressed upper side. They derive formulas for loads causing lateral buckling of beams with free and diaphragm-type ends, and examine the problem: how many members the deformation function, which has to be assumed, should have for attaining a result of an accuracy as required. Besides the symmetrical, the possibility of the antimetrical deflection is also investigated. Finally a comparative numerical example is presented.

DAS KIPPEN VON DÜNNWANDIGEN, AUFGEHÄNGTEN BALKEN

L. KOLLÁR und Z. GÁRDONYI

ZUSAMMENFASSUNG

In der Abhandlung wird die Last, die das Kippen der an beiden Enden aufgehängten dünnwandigen Balken verursacht, auf Grund der Energiemethode der Elastizitätstheorie bestimmt. Das Verfahren kann für Balken mit beliebigem Querschnitt und mit beliebiger Belastung angewendet werden; die Verfasser legen jedoch die Anwendung des Verfahrens für solche gleichmäßig belastete Balken dar, deren Querschnitt auf der oberen gedrückten Seite freie Ränder hat. Es werden Formeln ermittelt für die Belastung, die das Kippen der Balken mit freien oder mit Diaphragmenenden verursacht. Nachdem wird die Zahl der Glieder der Formänderungsfunktion ermittelt, welche für das Erreichen der notwendigen Genauigkeit erforderlich ist. Außer der symmetrischen Formänderung wird auch die Möglichkeit der antimetrischen Formänderung untersucht. Schließlich wird ein numerischer Vergleichsbeispiel vorgeführt.

ПОТЕРЯ ОБЩЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ
ПОДВЕСНЫХ БАЛОК

Л. КОЛЛАР и З. ГАРДОНИ

РЕЗЮМЕ

В работе определяются нагрузки, причиняющие потерю общей устойчивости тонкостенных балок, подвешенных за оба конца, на основе энергетического метода теории упругости. Метод может быть применен для балок любого сечения при любой нагрузке, однако, авторы приводят лишь один пример применения метода, а именно для случая, когда сечение балки имеет свободный край со стороны верхней, нагруженной грани. Вызедены формулы для балок со свободными и диафрагмированными концами, и проведен анализ с целью определения нужного числа членов функции деформации, для получения достаточно точного результата. Кроме симметричной деформации исследована и возможность асимметричной деформации. Наконец приводится числовой пример.

BOUNDARY CONDITIONS OF THE STRESS FUNCTION ALONG PERFECTLY FREE EDGES OF DISCS AND SHELLS

P. CSONKA

DOCTOR OF TECHN. SC.

WORKING COMMUNITY FOR BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received September 26, 1966]

The paper describes the boundary conditions of Airy's, resp. Pucher's stress function of discs and membrane shells along their perfectly free edges. Results obtained are equally valid for discs loaded by optionally distributed boundary and mass forces and for shells loaded by optionally distributed forces, not only by those perpendicular to the basic plane.

1. Introduction

In one of his former papers, author [1] dealt with the boundary conditions of Pucher's stress function $F = F(x, y)$. He demonstrated that this function has to satisfy conditions

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= A, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= B, \\ F &= Ax + By + C\end{aligned}\tag{1}$$

on the perfectly free parts of the shell's edge, where A , B and C are constant values for the treated edge part. If the shell has only one single perfectly free edge part, boundary conditions (1) may be restricted, i.e. it can be prescribed that along the mentioned edge part the boundary conditions should be:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ F &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

All the considerations, which have led to formulae (1) and (2) in the case of membrane shells, can be repeated unaltered for Airy's stress function

$F = F(x, y)$ of discs in membrane-like stress state, provided that the discs in question are only loaded on their edges. This is why boundary conditions (1) and (2) are valid — with some reasonable modifications — also for the perfectly free edge parts of these discs.

Aim of the present paper is the generalization of formulae (1) and (2) for discs loaded by optionally distributed forces (edge forces and mass forces), as well as for membrane shells loaded by optionally distributed forces (not only forces perpendicular to the basic plane). The relations to be deduced are closely connected with theorems of TREFFFTZ, E. [2] and SOBRERO, L. [3] concerning the physical interpretation of Airy's stress function. These theorems, modified for discs and shells loaded by optionally distributed forces, have been formulated by FINZI, L. [4]. The following will offer a possibility for the further generalization of these theorems.

2. Boundary conditions concerning Airy's stress function

Present section deals with discs loaded by optional forces (edge forces and mass forces). The investigations will be carried out in the co-ordinate system $O(x, y)$ placed in the middle plane of the disc. The components of the mass forces acting on the disc in direction x, y are characterized by load functions

$$g_x = g_x(x, y), \quad g_y = g_y(x, y).$$

As is known, the inner forces of the disc can be expressed by formulae

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x, \\ n_{xy} = n_{yx} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y \end{aligned} \tag{3}$$

where $F = F(x, y)$ is Airy's stress function and G_x, G_y mean

$$G_x = \int_{x_I}^x g_x dx, \quad G_y = \int_{y_{II}}^y g_y dy. \tag{4}$$

The upper limit of the definite integrals figuring in above formulae is the co-ordinate x , resp. y of the investigated point, their lower limit can be freely chosen. If the lower end-point is lying on the curve marked by I or II on Fig. 1, then the integration has to be extended to the straight line parts $P_I P$ and $P_{II} P$.

respectively, when calculating values G_x and G_y . Curves I and II may be chosen freely, however, with the restriction that straight lines of direction x and y resp. may only cut curves I and II resp. at one single point each.

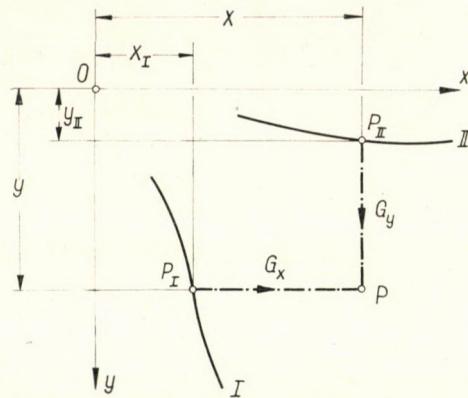


Fig. 1. Straight line parts P_1P and P_2P

Let us denote by R the resultant of forces acting from the left side of the disc on its right side, right and left being determined by proceeding along the curve from P_1 to P_2 . The x and y components of resultant R should be marked by symbols R_x and R_y , the moment of resultant R taken for point P_2 by M and their values should be determined.

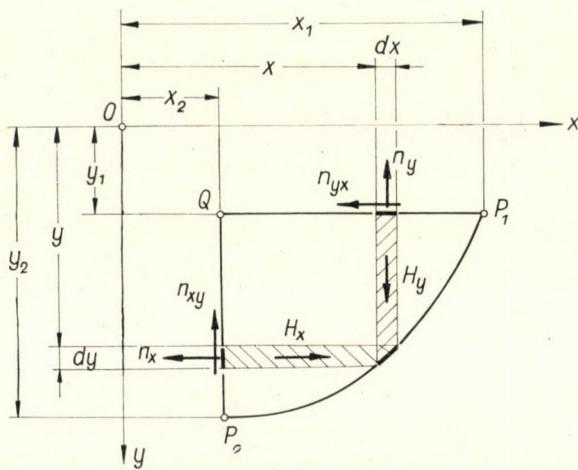


Fig. 2. The investigated part of the disc

When calculating values R_x , R_y and M , it is expedient to work, not with the forces acting on curve PP_2 , but with the forces equilibrating these, that is with all the other forces acting on disc-part P_1P_2Q (Fig. 2). In this case values R_x , R_y and M can be expressed as follows:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \int_Q^{P_2} (n_x - H_x) dy + \int_Q^{P_1} n_{yx} dx, \\
 R_y &= \int_Q^{P_1} (n_y - H_y) dx + \int_Q^{P_2} n_{xy} dy, \\
 M &= \int_Q^{P_2} (y_2 - y) (n_x - H_x) dy + \\
 &\quad + \int_Q^{P_1} (x - x_2) (n_y - H_y) dx + (y_2 - y_1) \int_Q^{P_1} n_{yx} dx.
 \end{aligned} \tag{5}$$

The meaning of H_x and H_y figuring in above formulae is:

$$H_x = \int_{x_2}^x g_x \cdot dx, \quad H_y = \int_{y_1}^y g_y \cdot dy. \tag{6}$$

Substituting values (3) into formulae (5), the latter may be written as follows:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \int_Q^{P_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x - H_x \right) dy - \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dx, \\
 R_y &= \int_Q^{P_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y - H_y \right) dx - \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dy, \\
 M &= \int_Q^{P_2} (y_2 - y) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x - H_x \right) dy + \\
 &\quad + \int_Q^{P_1} (x - x_2) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y - H_y \right) dx - (y_2 - y_1) \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dx.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Taking into consideration the fact that along line QP_2 , that is at the place $x = x_2$

$$G_x = \int_{x_I}^{x_2} g_x \cdot dx,$$

and along line QP_1 , that is on place $y = y_1$

$$G_y = \int_{y_{II}}^{y_1} g_y \cdot dx,$$

then, making use of formulae (6), the quantities $G_x + H_x$, and $G_y + H_y$ resp. can be expressed in the following way:

$$\begin{aligned}
 G_x + H_x &= \int_{x_I}^{x_2} g_x \cdot dx + \int_{x_2}^x g_x \cdot dx = \int_{x_I}^x g_x \cdot dx, \\
 G_y + H_y &= \int_{y_{II}}^{y_1} g_y \cdot dy + \int_{y_1}^y g_y \cdot dy = \int_{y_{II}}^y g_y \cdot dy.
 \end{aligned}$$

Putting these values into formulae (7), we obtain:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dx - \int_Q^{P_2} \int_{x_I}^x g_x \cdot dx \cdot dy, \\
 R_y &= \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx - \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dy - \int_Q^{P_1} \int_{y_{II}}^y g_y \cdot dy \cdot dx, \\
 M &= \int_Q^{P_2} (y_2 - y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy + \int_Q^{P_1} (x - x_2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx - \\
 &\quad - (y_2 - y_1) \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dx - \int_Q^{P_2} (y_2 - y) \int_{x_I}^x g_x \cdot dx \cdot dy - \\
 &\quad - \int_Q^{P_1} (x - x_2) \int_{y_{II}}^y g_y \cdot dy \cdot dx. \tag{8}
 \end{aligned}$$

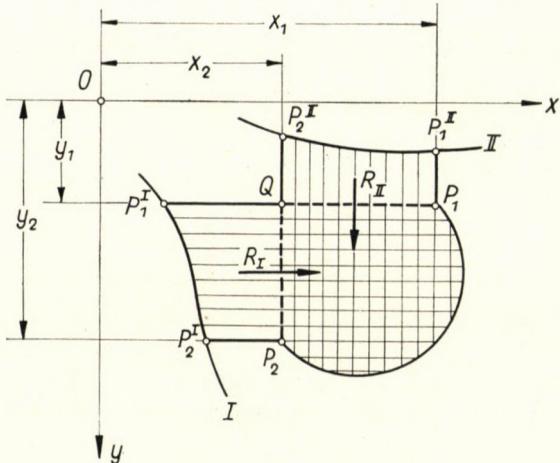


Fig. 3. Resultants R_I and R_{II}

In above formulae expression

$$\int_Q^{P_2} \int_{x_I}^x g_x \cdot dx \cdot dy \equiv R_I \tag{9}$$

represents the resultant R_I of mass forces acting on disc-part $P_1 P_2 P_2^I P_1^I$ — horizontally lined in Fig. 3 — whereas expression

$$\int_Q^{P_2} (y_2 - y) \int_{x_I}^x g_x \cdot dx \cdot dy \equiv M_I \tag{10}$$

is the moment M_I of resultant R_I written for point P_2 . Similarly, expression

$$\int_Q^{P_1} \int_{y_{II}}^y g_y \cdot dy \cdot dx \equiv R_{II} \quad (11)$$

means resultant R_{II} of mass forces in y direction acting on the disc-part $P_1 P_2 P_2^{II} P_1^{II}$, marked by vertical lining in Fig. 3. Expression

$$\int_Q^{P_1} (x - x_2) \int_{y_{II}}^y g_y \cdot dy \cdot dx \equiv M_{II} \quad (12)$$

again means the moment of resultant R_{II} on point P_2 . As already mentioned, curves I and II in Fig. 3 are freely chosen, only cut by straights of x and y direction respectively at one single point each.

The value of the other integrals figuring in formulae (8) can be determined by simple or partial integration, respectively:

$$\begin{aligned} \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_2} - \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1}, \\ \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx - \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dy &= \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} - \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_2}, \\ \int_Q^{P_2} (y_2 - y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy &= y_2 \int_Q^{P_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - \int_Q^{P_2} y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy = \\ &= -y_2 \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_Q + y_1 \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_Q + [F]_{P_2} - [F]_Q, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_Q^{P_1} (x - x_2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx &= x_2 \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \int_Q^{P_1} x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx = \\ &= -x_2 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} + x_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} - [F]_{P_1} + [F]_Q, \\ \int_Q^{P_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1} - \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_Q. \end{aligned}$$

Substituting expressions (9)–(13) into formulae (8), it was found, after simplification, that

$$\begin{aligned} R_x &= \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_2} - \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1} - R_I, \\ R_y &= -\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} - R_{II}, \\ M &= [F]_{P_2} - [F]_{P_1} - x_2 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} - y_2 \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1} + \\ &\quad + x_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} + y_1 \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1} - M_I - M_{II}. \end{aligned} \quad (14)$$

Up to now, both end-points of line-part P_1P_2 were considered as fixed. In the following only point P_1 will be assumed as such one, while point P_2 will be treated as a point running in positive direction on a given curve. According to this, its symbol will be P instead of P_2 , and its co-ordinates marked by x and y instead of x_1 and y_1 . At the same time, symbols

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} &= \text{const} \equiv A, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1} &= \text{const} \equiv B, \\ x_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{P_1} + y_1 \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{P_1} - [F]_{P_1} &= \text{const} \equiv -C\end{aligned}$$

will be introduced. In consequence of these modifications, formulae (14) can be transformed into

$$\begin{aligned}R_x &= \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P - B - R_I, \\ R_y &= - \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P + A - R_{II}, \\ M &= [F]_P - Ax - By - C - M_I - M_{II}.\end{aligned}\tag{15}$$

According to above formulae, we get the relations

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P &= -R_y - R_{II} + A, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P &= R_x + R_I + B, \\ [F]_P &= M + M_I + M_{II} + Ax + By + C,\end{aligned}\tag{16}$$

or, if omitting the linear terms insignificant from the point of view of stress calculation, we obtain:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P &= -R_y - R_{II}, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P &= R_x + R_I, \\ [F]_P &= M + M_I + M_{II}.\end{aligned}\tag{17}$$

If for curves I and II figuring in the previous deductions the straight lines $x = x_2$ and $y = y_1$ resp. are chosen (Fig. 4), then the quantities R_I , R_{II} and $M_I + M_{II}$ have the following meaning: R_I resp. R_{II} are the x and y components of the mass forces acting on disc-part P_1PQ ; $M_I + M_{II}$ means the moment of mass forces acting on the same disc-part, as written for running point P .

It goes without saying that curve P_1P_2 may also be taken freely. If the corner line P_1QP is chosen for this purpose (Fig. 5), the area P_1QP shrinks to a

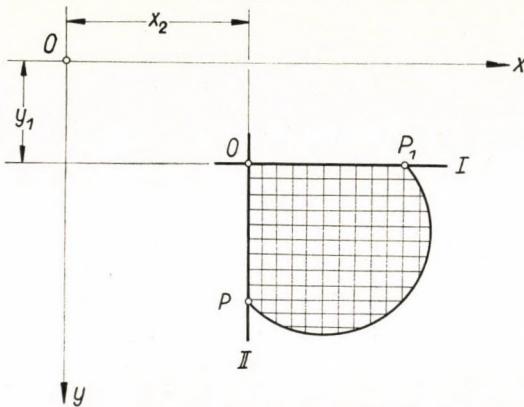


Fig. 4. Part P_1PQ of the disc

single line. In such a case $R_I = 0$, $R_{II} = 0$, $M = 0$, and so formulae (17) change into the following formulae of FINZI, L. [4]:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P &= -R_y, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P &= R_x, \\ [F]_P &= M.\end{aligned}\tag{18}$$

These formulae — as FINZI L. has stated — lead to a possible, simple physical interpretation of the stress function: the x - and y -directed partial derivatives of the stress function in point P represent — regardless of their sign — the x and y components of the resultant of inner forces acting on one side of the corner line P_1QP , whereas the value of the stress function in point P is identical with the moment of inner forces acting on one side of corner line P_1QP .

Formulae (17) have an interesting meaning in that case if curve P_1P is chosen for the purpose of curves I and II . Also in this case

$$R_I = 0, \quad R_{II} = 0, \quad M = 0,$$

consequently

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P &= -R_y, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P &= R_x, \\ [F]_P &= M. \end{aligned} \tag{19}$$

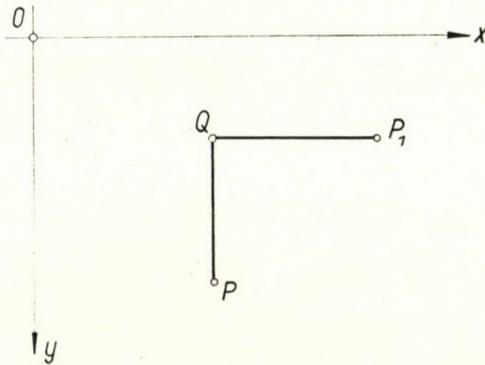


Fig. 5. Corner line P_1QP

These latter formulae, although formally identical with those of FINZI, L., have a broader meaning: according to formulae (19), the x - and y -directed partial derivatives of the stress function are — regardless of their signs — equal to the x and y components of the resultant of inner forces acting on one side of curve P_1P ; the value of the stress function in point P is identical with the moment acting on one side of the same curve. Consequently, the FINZI theorems are valid, not only for the corner line P_1QP , but also for the freely chosen curve P_1P , provided that the x - and y -directed straight lines do not cut this curve in more than one point each.

Obviously, formulae (19) can also be applied when curve P_1P is the perfectly free edge line of the disc. In such a case no kind of force is acting on the disc along the curve P_1P , so

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad M = 0,$$

which simplifies formulae (19) as follows:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P &= 0, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P &= 0, \\ [F]_P &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Above formulae are identical as to their shape with those concerning the free edge line of discs merely loaded by edge forces [1]. However, their validity is somewhat limited in the presence of mass forces. Namely, the mentioned formulae are only valid for that part of the perfectly free edge line which is not

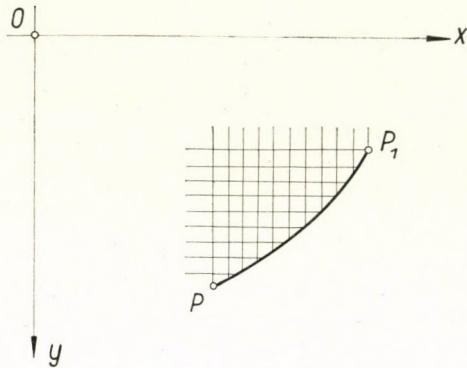


Fig. 6. The x - and y -directed straights cut the free edge-line part P_1P at one point each

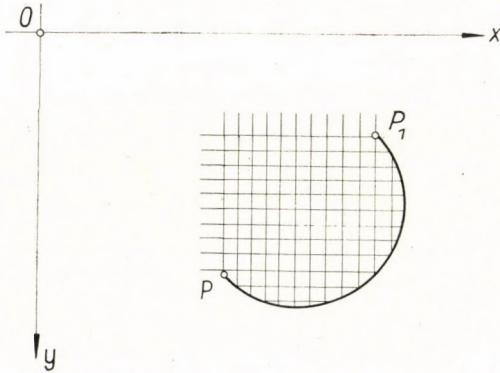


Fig. 7. Some of the x - and y -directed straights cut the free edge-line part P_1P at two points

cut by x - and y -directed straights in more than one point by each of them (Fig. 6).

In a more general case, that is, when x - and y -directed straights (or one of them) cut the P_1P part of the perfectly free edge line at more than one point (Fig. 7), the following equations express the boundary conditions concerning the free edge line:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_P &= -R_{II}, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_P &= R_I, \\ [F]_P &= M_I + M_{II}. \end{aligned} \tag{21}$$

3. Boundary conditions concerning Pucher's stress function

This section investigates the boundary conditions of Pucher's stress function on the perfectly free edge part of a membrane shell in case optionally distributed forces (not only such as are perpendicular to its base-plane) are acting on it.

The investigations will be carried out in an orthogonal co-ordinate system $0(x, y, z)$, the x and y axes of which are parallel to the basic plane of the shell. The x, y, z components of the loads acting on the shell are characterized by the specific load values g_x, g_y, g_z related to the unity of the ground-plan area.

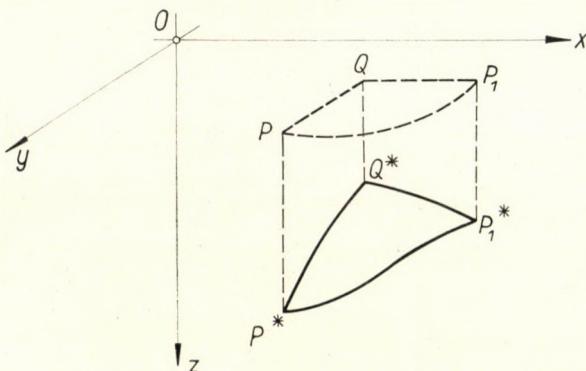


Fig. 8. Line P^*P^* drawn on the middle surface of the shell and its ground-plan projection

The inner forces of the shell are expressed by the reduced values n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y . The latter are in the same relation with Pucher's stress function $F = F(x, y)$, as the inner forces of discs loaded by optionally distributed forces are with Airy's stress function $F = F(x, y)$. It follows from this identity that the theorems deduced in the previous section may be also applied — with a reasonable modification — to membrane shells. In this case, obviously, curve P_1P means the ground-plan projection of curve $P_1^*P^*$ drawn on the middle surface of the shell (Fig. 8.). The forces and moments figuring in the formulae must also be interpreted as projected forces and their moments.

REFERENCES

1. CSONKA, P.: Membrane Shells with Perfectly Free Edges. *Acta Technica Hung.* **40** (1962), 151—167.
2. TREFFTZ, E.: Mathematische Elastizitätstheorie, Handbuch der Physik, VI., Verlag von Julius Springer, Berlin 1928.
3. SOBRERO, L.: Del significato meccanico della funzione di Airy. *Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei* **21** (1935), Ricerche di Ingegneria **3** (1935).
4. FINZI, L.: Sulle equazioni di Pucher nell'equilibrio delle strutture a guscio. Instituto di Scienza delle Costruzioni del Politecnico di Milano, Publicazione No. 42. Estratto dai "Rendiconti Classe di Scienze" **88** (1955).

RANDBEDINGUNGEN DER SPANNUNGSFUNKTION VON SCHEIBEN
UND SCHALEN LÄNGS IHRER GANZ FREIEN RÄNDER

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz beschreibt die Randbedingungen der Airyschen, bzw. Pucherschen Spannungsfunktion von Scheiben, bzw. Membranschalen längs ihrer ganz freien Randlinie. Die erzielten Ergebnisse sind gleicherweise gültig für mit beliebig verteilten Rand- und Massenkräften belastete Scheiben und für Schalen, die mit beliebig verteilten, in beliebiger Richtung wirkenden Kräften belastet sind.

CONDITIONS AU CONTOUR DE LA FONCTION DE TENSION SUR LES SECTIONS
DE BORDS LIBRES DES TYMPANS ET DES VOILES MINCES

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'étude établit les conditions au contour de la fonction de tension d'Airy, resp. de Pucher, des tympans et voiles minces en état de contrainte sans flexion, le long des sections de bords complètement libres de ces constructions. Les résultats obtenus sont également valables pour des tympans et des voiles soumis à des charges quelconques réparties arbitrairement.

ОКРУЖНЫЕ УСЛОВИЯ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ НА СВОБОДНЫХ
КРАЕВЫХ УЧАСТКАХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

В данной работе определяются окружные условия функций напряжения Айри и Пухера плит и оболочек, находящихся в мембральнообразном напряженном состоянии, на совершенно свободных краевых участках этих конструкций. Выведенныи результаты действительны как для плит, нагруженных произвольно распределяющимися силами (краевыми и массовыми силами), так и для оболочек, нагруженных произвольно распределющими (не только перпендикулярными к основанию) силами.

RECENSIONES

L. Mohácsi

CONTEMPORARY FORMINGS

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1966. 321 pp., 393 illustrations 28 tables.

The author in this book deals with the contemporary formworks and scaffolding equipments developed for construction in site monolithic concrete, reinforced and prestressed concrete structures.

In chapters 1 and 2 the shuttering shell as an auxiliary structure is treated in its different kinds made of metal, wood or other materials defining the final form of concrete.

In chapter 3 the scaffolding structures supporting the shuttering shell and sliding-climbing formworks, self-carrying steel works and suspended supports are discussed.

Chapter 4 is devoted to the problems of interaction of concrete and formwork as well as to the concrete and reinforced concrete technics in connection with these latter.

In chapter 5 author presents the structural analysis of the shutterings with special regard to the loadings to be taken into consideration for this purpose.

In chapter 6 author refers to the possibilities concerning future development.

The author submits to the reader the above detailed subject ranging over an extraordinarily wide field in a logical layout and clear manner. Besides he describes numerous Hungarian methods, several well proved procedures, designs and licences. Parallel to the procedures applied in the western countries he also refers to methods which are in general use in the Soviet Union.

Author treats the question in such a manner as to give the outlines of the progress that was achieved since World War II hardly imaginable at that time, in the field of concrete, reinforced concrete and prestressed concrete construction which had been promoted particularly by the keen competition which was developed between reinforced concrete and light steel structures. The progress had been still more expediated by the other competition which took place between prefabrication and in site monolithic construction. This latter owes its competitiveness with prefabrication in a few countries precisely to the development of the up-to-date shuttering and scaffolding methods.

The elaboration of the subject is of present interest and is suitable for advancing the problem of individual construction which is backward in comparison to prefabrication.

The book supplies a need; no work had been published up to this day treating this subject with similar elaborateness.

The illustrations are expressive. The neat make-up of the volume deserves particular attention.

Dr. Gy. Haviár

T. Cholnoky

MECHANIKA II, SZILÁRDSÁGTAN (MECHANIK II, FESTIGKEITSLEHRE)

Tankönyvkiadó, Budapest, 1966 (732 Seiten, 444 Abbildungen)

Der vorliegende zweite Band des in ungarischer Sprache erschienenen Lehrbuches »Mechanik« des Professors Cholnoky umfaßt die für die Ingenieurpraxis wichtigsten Kapitel der Festigkeitslehre und besteht aus zwei Teilen.

Der erste Teil (492 Seiten) des Bandes enthält sechzehn Kapitel über die elementaren Probleme der Festigkeitslehre: Zug, Druck, Schub, gerade und schiefe Biegung, exzentrischer Zug und Druck, Torsion, und Knickung. Die zur Behandlung der verschiedenen Probleme nötigen Hilfsbegriffe (Momente zweiter Ordnung, Kern des Querschnittes usw.) werden vor den entsprechenden Kapiteln eingeführt. Ausführlich behandelt der Verfasser die Herstellung der Schnittkraftdiagramme, die Theorie der kleinen Verschiebungen, die Bestimmung der Formänderungen, aber die Theorie der statisch unbestimmt Tragwerke wird nur anhand des durchlaufenden Trägers besprochen.

Der zweite Teil (210 Seiten) des Bandes enthält acht Kapitel über die allgemeinen Probleme der Festigkeitslehre: homogene Spannungs- und Formänderungszustände, ihre graphische Darstellung nach Mohr, Gleichungen des Gleichgewichtes, Formeln des Formänderungsgesetzes, Arbeitssätze der Festigkeitslehre, Bruchtheorien.

Wie aus dieser Aufzählung ersichtlich, enthält der Band einen Lehrstoff, der in den bekannten Lehrbüchern der Festigkeitslehre schon oft beschrieben wurde. Der Lehrstoff ist in diesem Band — der Zielsetzung des Vorwörtes entsprechend — an den Anspruch der Studenten der Abendkurse der Technischen Universität weitgehend angepaßt. Hierdurch erklärt sich die minuziöse Behandlungsweise des Lehrstoffes, die auf den ersten Blick vielleicht als zu weitschweifig erscheint.

Durch die allzu eingehende Behandlungsweise wurde das Buch äußerst umfangreich. Infolgedessen war der Verfasser gezwungen nur den nötigsten — in der Thematik der Universitätsvorlesungen vorgeschriebenen — Lehrstoff zu behandeln und die Behandlung vieler interessanter neuerer Probleme der Festigkeitslehre zu unterlassen. Das Buch wäre interessanter, wenn sein zweiter Teil mit den Grundgleichungen der Scheiben- und Plattentheorie und mit einer eingehenderen Behandlung des Torsionsproblems ergänzt worden wäre.

Der behandelte Lehrstoff ist übersichtlich gruppiert und in klarem Gedankengang dem Leser vorgeführt. Lobenswert sind die äußerst fachgemäße Erklärung der Begriffe, sowie die leichtverständliche Herleitung der Formeln. Der Text wird durch sorgfältig gezeichneten Abbildungen begleitet und auch die Typographie des Buches ist in jeder Beziehung musterhaft.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß dieses Lehrbuch den im Vorwort gestellten Anforderungen vollkommen entspricht und geeignet ist, das Interesse der Leser für die Festigkeitslehre zu erwecken und sie fähig zu machen die Ergebnisse dieser Wissenschaft in die Praxis zu übertragen.

Dr. P. Csonka

H. Ziegler

MECHANICS

Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, 1965

This work consists of two volumes. It is the English translation of the text-book "Mechanik" whose first, second and third editions were published in 1946, 1948 and 1960 by Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart. The translation was done by D. B. McVEAN.

The heading of the first volume is "Statics of rigid bodies, fluids and deformable solids". This volume (247 pages) is divided into three parts. In the first part, the basic notions of the rigid body statics are explained, namely, the geometry of forces in plane and in space, the composition of forces, the analytic and graphical methods of statics, the center of gravity, the friction and the problem of flexible string. The second part is devoted to fluid statics. In this part the inner and outer forces of a fluid, the determination of the fluid pressure and the problem of a solid body submerged in a liquid are discussed. The third part deals with the basic concepts and fundamental problems of the strength of materials: the state of stress and that of strain, the conditions of yield and fracture, the simple and composed sectional forces, the buckling problem and the energy theorems of elastostatics.

The heading of the second volume may obviously be "Dynamics of rigid bodies and rigid systems". That copy of the second part which the reviewer has at disposal, has — by mistake — likewise the heading "Statics of rigid bodies, fluids and deformable solids". This volume (206 pages) is divided into four about equal parts. The first part contains the basic concepts of kinematics, namely, the characterisation of motions of particle and rigid body, the velocity, the acceleration, the general and a few particular cases of motion. The second part expounds the following chapters: Newton's laws of motion, the fundamental theorems

of kinetics, the principles of constrained motion, several cases of vibrations and the motion produced by gravity. The third part contains the following chapters: general theorems of rigid body kinetics, D'Alembert's principle, the rectilinear and curvilinear translations, the rotation, the plane motion and the gyroscopic motion. The fourth part is devoted to the kinetic of systems and contains the following chapters: the general theorems of system kinetics, the principles of virtual displacements, the Lagrange's equations and the phenomenon of impact.

As can be seen, a wealth of subject matter is collected in these two volumes. Since the extent of the volumes is rather restricted, the author was compelled to treat the subject matter in a very concise style. From this point of view, the present work differs from the standard text books of mechanics. The author succeeded in reaching clear expositions and rigorous argumentations. In spite of the concise style, all explanations are very comprehensible. Precise definitions of notions and accurate formulation of the theorems augment the textbook character of this work. Many theoretical examples are elaborated which have in the last part analysis of practical importance. The results of the examples — differing from the German edition — are told at the ends of the volumes; in this way, the reader can control whether his answers are right or not.

In this work, mostly the analytic methods, and in a few cases also the more perspicuous graphical methods are applied for solving the problems. Contrary to many other text-books, this work is not limited to the case of plane stresses, but it also comprises the case of stresses in space. Several simple structures are treated by means of limit design theory which is based on the principles of plasticity.

By summarizing all these, it seems doubtless that this work of professor ZIEGLER, which was accepted with pleasure at the Universities of German language, will be similarly accepted at the Universities of English language.

Dr. P. Csonka

A. Gheorghiu

STATICĂ CONSTRUCȚIILOR (LA STATIQUE DES CONSTRUCTIONS) II.

Editura Tehnica, Bucuresti, 1965 (726 p., 287 fig., 21 tabl.)

L'ouvrage en roumain du prof. Gheorghiu traite des problèmes des structures hyperstatiques dans le cadre des hypothèses de la théorie de l'élasticité.

L'ouvrage se divise en trois parties.

La première partie résume les connaissances générales relatives aux structures. Elle contient les théorèmes de l'énergie de déformation, les calculs des barres droites et courbes, de section constante ou variable et le calcul des déformations des différentes poutres en treillis. L'auteur faisant connaître les méthodes générales de calcul des systèmes hyperstatiques, expose d'une façon détaillée les principes des méthodes des forces et des déplacements. L'examen de ces méthodes est suivi de l'exposé de l'algorithme de Gauss et des méthodes d'itération de Gauss et de Seidl, permettant la solution des systèmes d'équations linéaires.

La deuxième partie s'occupe de la méthode des forces et de ses applications au calcul des poutres continues, des poutres en treillis hyperstatiques, des arcs et des structures composées. L'auteur présente ensuite une méthode de calcul des systèmes hyperstatiques à l'aide d'une colonne conjugée (analogie de colonne).

La troisième partie est consacrée aux applications de la méthode des déplacements aux différents types de cadres (à un et à plusieurs étages, à noeuds fixes ou déplaçables) et aux arcs et structures reposant sur des montants obliques. Les modifications de la méthode des déplacements, la méthode de Cross, la méthode de Kani et quelques-unes de ses variantes sont également expliquées par l'auteur. Une brève indication relative au calcul des grillages chargés normalement à leur plan et des barres courbes planes complète la troisième partie.

Ainsi qu'il apparaît de cette énumération, le volume ne contient ni les problèmes de stabilité et de vibration, ni l'application des principes de la plasticité aux constructions. L'auteur prévoit certainement la publication, à une date ultérieure, de ces questions très importantes dans la pratique de l'ingénieur.

La valeur principale de l'ouvrage réside dans l'exposé simple et expressif, assuré avant tout par le groupement logique et la division claire des sujets, ainsi que par les notations simples exemptes de tout indice superflu. L'abondance et la préparation soigneuse des figures divisant

les problèmes en plusieurs parties, avec un sens pédagogique excellent, et illustrant le raisonnement conduisant à la solution offrent de leur côté une aide des plus précieuses au lecteur.

Pour mieux faire comprendre les explications théoriques, l'ouvrage contient aussi 121 exemples numériques présentées en détail. Ils permettent au lecteur de vérifier s'il a bien compris l'exposé. Les nombreux exemples fournissent enfin des indications utiles concernant les applications pratiques des théories présentées par l'auteur.

L'ouvrage du professor Gheorghiu, tout en étant un excellent instrument de l'enseignement universitaire, est aussi un aide-mémoire fort utile pour l'ingénieur, et aura donc sa place méritée sur l'étagère des étudiants aussi bien que sur le bureau des ingénieurs.

Dr. P. Csonka

INDEX

Lőcsei, B.: Processes during the Calcination of Ceramic Products. II. — Die im Laufe des Brennens vor sich gehenden Vorgänge in keramischen Produkten. II. — Processus se déroulant dans les produits céramiques pendant leur cuisson. II. — Лечеи, Б.: Процессы происходящие в керамических изделиях при обжиге. II.	1
Dundrová, V.—Kovářík, V.—Šlapák, P.: Nichtlineare Biegungstheorie von Sandwich-Platten. III. — The Non-Linear Bending Theory of Sandwich Plates. III.—Théorie de la flexion non-linéaire des plaques sandwich. III. — Дундро́ва, В.—Ко́вари́к, В.—Шла́пак, П.: Теория нелинейного изгиба биметаллических пластин. III.	19
Rózsa, M.: A New Iterative Method for the Finite Deflection Analysis of Frameworks. — Ein neues Iterationsverfahren für die Berechnung von Rahmentragwerken nach der Theorie zweiter Ordnung. — Nouvelle méthode itérative pour le calcul des cadres, basée sur la théorie du deuxième ordre — Рóзса, М.: Новый итерационный метод расчета стержневых конструкций на основе теории второго порядка.	35
Rédei, I.: Controlling Method of Bar-Forces Arising in Spatial Trusses — Nachprüfung der Stabkräfte von räumlichen Fachwerkträgern — Contrôle des efforts de barre des poutres en treillis spatiales — Редеи, И.: Контроль стержневых усилий пространственных арок	47
Öllős, G.: Hydraulics for Lowering the Ground Water Table Using Vacuum Wells — Die hydraulischen Vorgänge bei der Grundwassersenkung durch Vacuumbrunnen — Processus hydrauliques du rabattement du niveau par puits à vide — Еллэш, Г.: Гидравлические процессы погружения уровня грунтовых вод при помощи вакуумных колодцев	67
Barna, J. — Marschallkó, B.: Elektrischer Einfluß auf die rheologischen Eigenschaften wäßriger Bentonitdispersionen — Electric Influence on Aqueous Bentonite Dispersions — Influence électrique sur les propriétés rhéologiques des dispersions de bentonite aqueuses — Барна, Й. — Маршалко, Б.: Электрическое воздействие на реологические свойства водных бентонитовых суспензий	113
Murthy, M. G. K.: Torsion of Prismatic Bars — Torsion von prismatischen Stäben — Torsion des barres prismatiques — Мурти, М. Г. К.: Кручение призматических стержней	133
Szidarovszky, J.: Examination of the Effect of Temperature Gradients by Means of Influence Lines — Untersuchung der Wirkung von ungleichmäßigen Temperaturveränderungen durch Einflußlinien — Examen de l'effet des variations inégales de température à l'aide des lignes d'influence — Сидаровски, Я.: Исследование неравномерных изменений температуры при помощи кривых влияния	145
Goschy, B.: Torsion einzelliger Kastenträger — Torsion of Box Girders — Torsion des poutres-caissons — Гоши, Б.: Кручение одноклеточных коробчатых балок	155

<i>Szidarovszky, J.</i> : Effect of the Alteration in the Flexural Rigidity of Hyperstatic Beams under Bending — Einfluß der Veränderung der Biegesteifigkeit von statisch unbestimmten Biegebalken — L'effet de la modification de la rigidité de flexion des poutres hyperstatiques fléchies — Сидаровски, Я.: Влияние изменения жесткости на изгиб на изогнутую балку	169
<i>Kollár, L.—Gárdonyi, Z.</i> : Déversement latéral des poutres à paroi mince suspendues par leurs extrémités — Lateral Buckling of Thin-Walled, Suspended Beams — Das Kippen von dünnwandigen, aufgehängten Balken — Кollar, Л.—Гардони, З.: Потеря общей устойчивости тонкостенных подвесных балок	187
<i>Csonka, P.</i> : Boundary Conditions of the Stress Function along Perfectly Free Edges of Discs and Shells — Randbedingungen der Spannungsfunktion von Scheiben und Schalen längs ihrer ganz freien Ränder - Conditions au contour de la fonction de tension sur les sections de bords libres des tympons et des voiles minces — Чонка, П.: Окружные условия функции напряжения на свободных краевых участках плит и оболочек	211
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRE — ОБЗОР КНИГ	
<i>L. Mohácsi</i> : Contemporary Formings (<i>Gy. Haviár</i>)	223
<i>T. Cholnoky</i> : Mechanik II., Festigkeitslehre (<i>P. Csonka</i>)	223
<i>H. Ziegler</i> : Mechanics (<i>P. Csonka</i>)	224
<i>A. Gheorghiu</i> : Statica construcțiilor II (<i>P. Csonka</i>)	225

Printed in Hungary

B. LŐCSEI: *Processes during the Calcination of Ceramic Products*

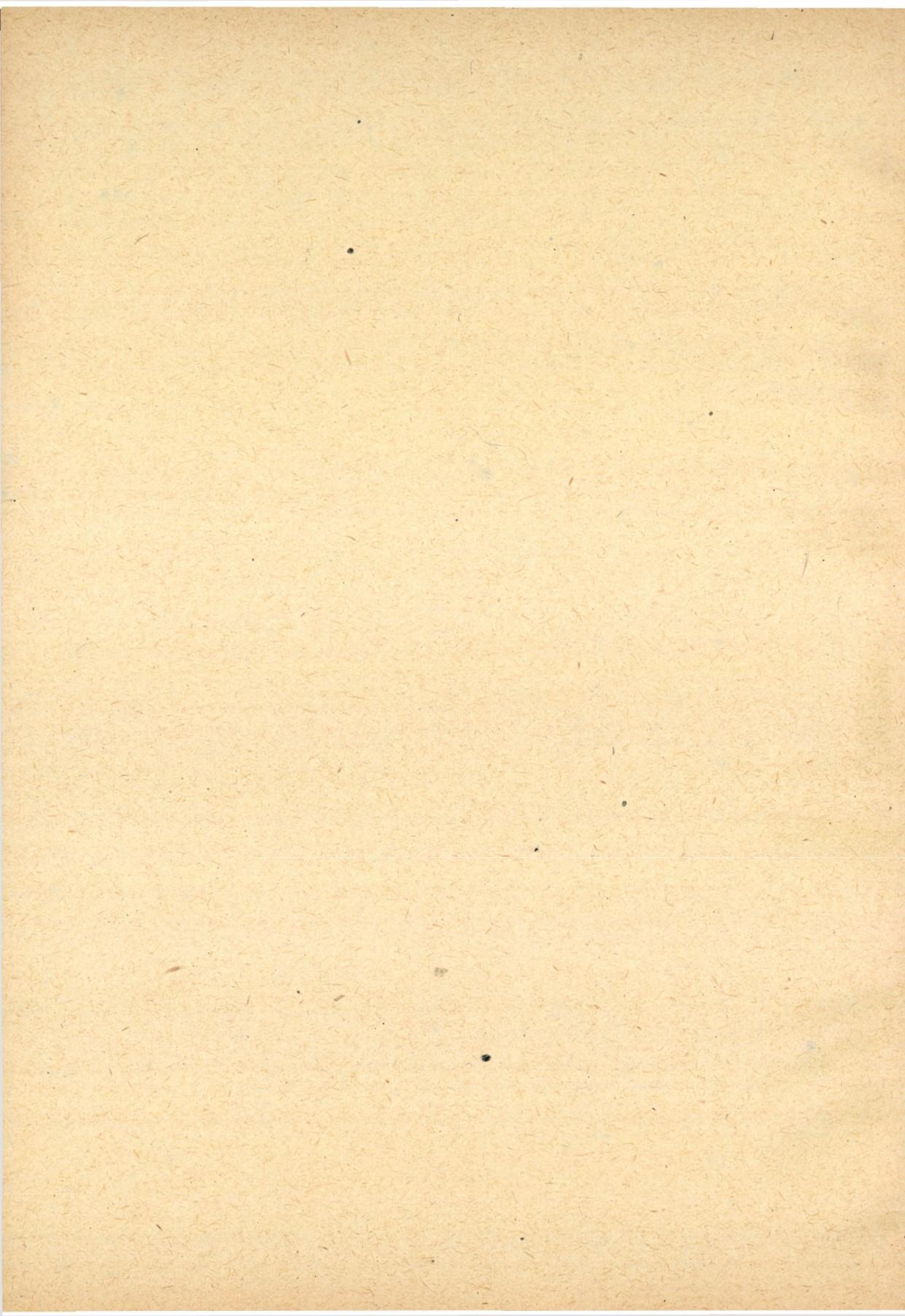
The transformation mechanism of the Grossalmerode clay was demonstrated partly by dynamic and partly by static methods in the course of the experiments. SiO_2 changes from the quartz phase through the cristobalite phase into the tridymite phase. The above mechanism of phase transformation is supported by Debye–Scherrer and diffraction patterns, and is further confirmed by microscopic pictures. The addition of AlF_3 promotes the initiation of mullite formation at lower temperatures, which is equivalent to the acceleration of the transformation process. Acceleration of the transformation process can be explained by the mineralizing effect of the fluorohydrogen which is formed by the reaction of AlF_3 with kaolinite.

V. DUNDROVÁ—V. KOVÁŘÍK—P. ŠLAPÁK: *The Non-Linear Bending Theory of Sandwich Plates. III.*

Finally Part III includes a theory which holds true for a plate with very thin faces and a light core. Finite deflection relations are introduced only in the faces. The formulation of the problem separates in two parts, one of them being linear and the other nonlinear. The solution is again received by the method of Galerkin. The numerical example solved according to the three theories shows good agreement in the results. Especially, it should be noted that the finite deflection theories have to be applied to the analysis of the state of stress in thin faces.

M. RÓZSA: *A New Iterative Method for the Finite Deflection Analysis of Frameworks.*

This paper reduces the finite deflection analysis of arbitrary frameworks to the solution of an integral equation. For structures common in engineering practice, this integral equation is mostly closely approached by a Fredholm inhomogeneous integral equation of the second kind. The integral equation is solved by iteration. In case of the Fredholm integral equation, this iteration corresponds to the calculation of subsequent members of the Neumann-series.



Acta Techn. Hung. 57 (1967) 47—65

I. RÉDEI: *Controlling Method of Bar-Forces Arising in Spatial Trusses*

In a previous paper, author presented a method for checking plane trussed beams. The present paper is a generalization of the same method for spatial trussed beams. The relationship serving as a basis for the checking method has been derived solely by geometrical-structural means, and it is demonstrated that each algebraic sum of products of bar forces by bar lengths is a constant, independent of system, form of the structure, of number, direction and length of its bars. This sum solely depends on external forces, and even, in some cases, it depends only on active forces. This method is equally valid for externally and internally indeterminate and for statically determinate trussed beams. Its application has been illustrated on numerical examples.

Acta Techn. Hung. 57 (1967) 133—143

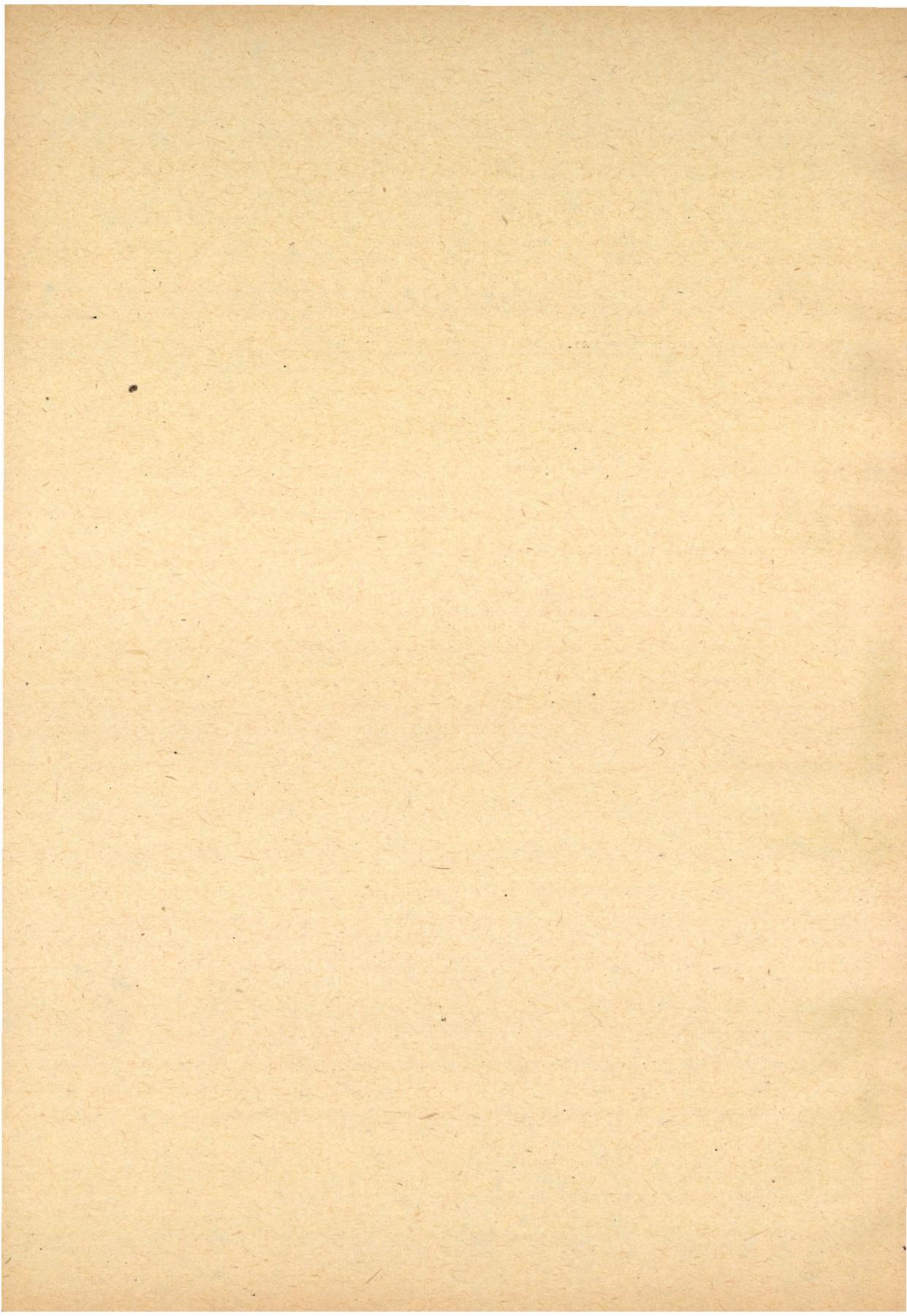
M. G. K. MURTHY: *Torsion of Prismatic Bars*

A formal solution has been obtained for the torsion of prismatic bars, when the mapping function, which maps conformal the section of the bar onto the unit circle, is known in power series. As an example of the method followed, the torsion of a bar whose cross section is one half of a multi-symmetrical curved boundary is solved. Some results are derived as particular cases.

Acta Techn. Hung. 57 (1967) 67—111

G. ÖLLÖS: *Hydraulics for Lowering the Ground Water Table Using Vacuum Wells*

The paper deals with the basic questions of the hydraulics of vacuum wells. After showing the relations and the differences between gravitational and vacuum hydraulics, the potential distribution in the seepage field developing around the line of vacuum wells, in the case of more important suction, is discussed in detail. The results of investigations on the particularities of the movement of the air in granular soil provide the theoretical bases for the numerical calculation of the air seeping into the wells. The determination of the flow of air and water in case of a row of wells along one or both sides of the working ditch provides the designer with numerous points of view. The results referring to drainage phenomena in inhomogeneous soils are illustrated by the infavourable cases of drainage.



J. BARNA—B. MARSCHALKÓ: *Electric Influence on Aqueous Bentonite Dispersions*

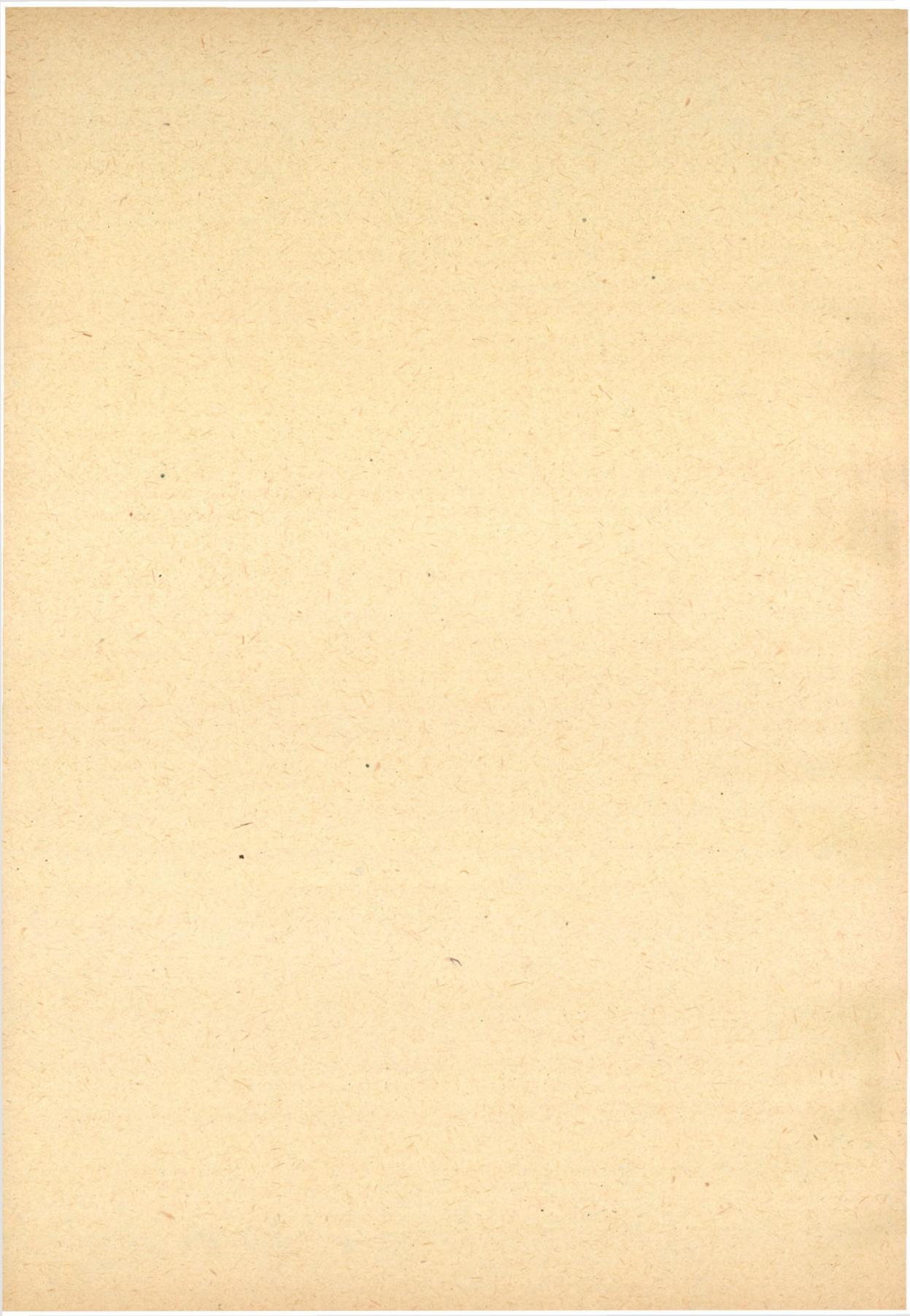
Electrical phenomena in bentonite dispersions subjected to shear have been examined and measured. Certain relations have been established between the limit stress of the dispersion and the electromotoric force caused by the shear. Mutual relation could be detected between the limit stress of the dispersion and the voltage, according to which under electrical action due to an external energy source the value of the limit stress is also changed. External electrical action also changes the velocity of the tixotropic regenerating power. Some results of the measurement series which are the basis of these constatations are summarized in the tables and graphs joined to the paper.

J. SZIDAROVSKY: *Examination of the Effect of Temperature Gradients by means of Influence Lines*

Analysis of statically indeterminate structures has often to take the effect of temperature gradients into consideration. Now, a fictitious load, equivalent to the temperature gradient, will be determined, and displacements and internal forces, resp., due to temperature gradients, can be determined by loading this fictitious load onto the influence lines. Application of this procedure is illustrated in the examples.

B. GOSCHY: *Torsion of Box Girders*

Reinforced concrete and prestressed concrete beams of box cross-section without stiffening members between supports are frequently designed for technical and economic reasons. By omitting stiffening members the cross-section will not keep its original shape during twisting and distortion of the section will occur. The purpose of this paper is to give a method for the calculation of twisted box girders with deformable cross-section neglecting the effect of warping which is, as known, of local character by hollow sections. From the results of the presented calculation it can be stated that short and large box girders without diaphragms have a low torsional rigidity, on the other hand, with girders ten times longer than the width, the effect of the distortion can be neglected. The method of calculation and the interpretation of the formulas deduced in the paper are shown in a numerical example.



Acta Techn. Hung. **57** (1967) 169—186

J. SZIDAROVSZKY: *Effect of the Alteration in the Flexural Rigidity of Hyperstatic Beams Under Bending*

Internal forces of hyperstatic structures depend, among others, on cross-sectional dimensions of the structure. In bridge design, internal forces are determined after assuming the dimensions, and those alter the cross-sectional dimensions assumed, which, in turn, modify the former. Therefore, the design of hyperstatic bridges may involve as many as three or four structural recalculations. Here it will be examined, in what direction and order will the modification of internal forces be due to the alteration of the cross-sectional dimensions. In their knowledge the cross-sectional dimensions can be made to cope with the internal forces to be modified, hence recalculation of the structure can be avoided.

Acta Techn. Hung. **57** (1967) 187—210

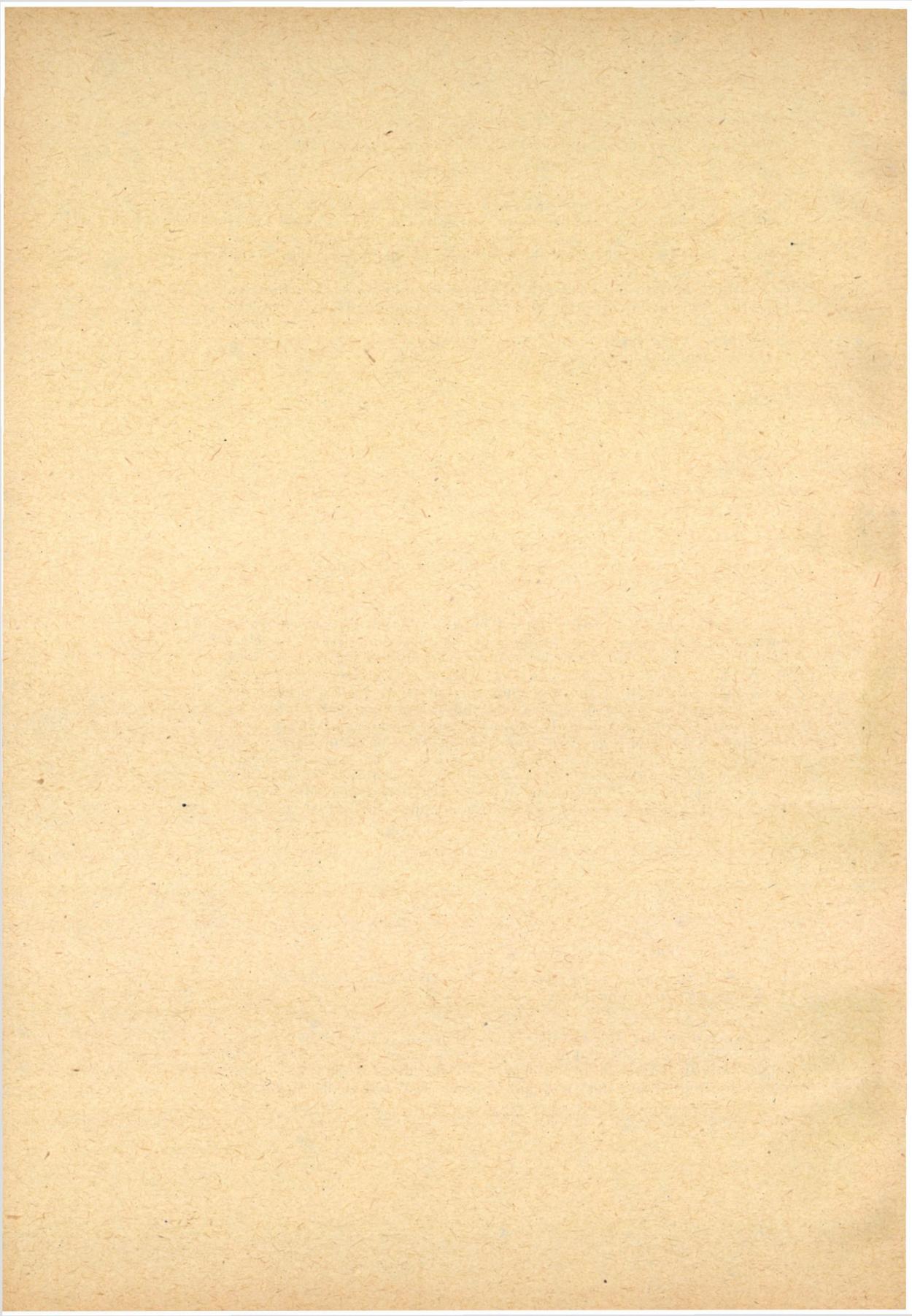
L. KOLLÁR—Z. GÁRDONYI: *Lateral Buckling of Thin-walled, Suspended Beams*

In the paper the load causing lateral buckling of beams, suspended on both ends, is determined on the basis of the energy-method of the elasticity theory. The method can be applied to beams having cross sections of any form and being loaded in any arbitrary way; however, authors show the application of the procedure on uniformly loaded beams, the cross sections of which have free edge on the compressed upper side. They derive formulas for loads causing lateral buckling of beams with free and diaphragm-type ends, and examine the problem: how many members the deformation function, which has to be assumed, should have for attaining a result of an accuracy as required. Besides the symmetrical, the possibility of the antimetrical deflection is also investigated. Finally a comparative numerical example is presented.

Acta Techn. Hung. **57** (1967) 211—222

P. CSONKA: *Boundary Conditions of the Stress Function along Perfectly Free Edges of Discs and Shells*

The paper describes the boundary conditions of Airy's, resp. Pucher's stress function of discs and membrane shells along their perfectly free edges. Results obtained are equally valid for discs loaded by optionally distributed boundary and mass forces and for shells loaded by optionally distributed forces, not only by those perpendicular to the basic plane.



The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 165 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra” Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

**Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable
at the following addresses:**

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien 1.

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznozns
1 Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88.

CZECHOSLOVAKIA

Artia A. G.
Ve Smeckách 30
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Madarská Kultura
Praha 1
Václavské nám. 2.
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradska 14
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nørregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstrasse 16.
Leipzig 701
Zeitungsviertelsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart 5.

GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough. Northamps.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhoff
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay I.

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
92, Ikebukur O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18.
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezdunarodna Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York, N. Y. 1003
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York, N. Y. 1003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27.
Beograd

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVENTIBUS

L. GILLEMET, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 57

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1967

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereich der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

RECHNERISCHE GRUNDLAGEN FÜR DIE BEMESSUNG DER PILGERWALZWERKE

TEIL I

A. GELEJI, M. VOITH, J. MECSEKI und L. TÓTH

[Eingegangen am 14. Oktober, 1966]

In der zeitgemäßen Erzeugung von Stahlrohren mit 4–16 Zoll Durchmesser kam das Mannesmannsche Pilgerverfahren wieder in den Vordergrund. Aus diesem Grund kommt der Lösung der technisch-wissenschaftlichen Aufgaben, die mit der Erhöhung der Kapazität der bereits bestehenden und der neu konstruierten Pilgerwalzenstraßen verknüpft sind, eine immer steigende Bedeutung zu. Hierfür spricht auch die große Anzahl der Mitteilungen, die sich mit diesem Themenkreis befassen und in unseren Tagen in der internationalen Fachliteratur erscheinen. Es werden auch zahlreiche Patente über dieses Thema erteilt. Die Leistungsfähigkeit der Pilgerwalzenstraßen ist der Umdrehungszahl der Walzen und dem Vorschub je Umdrehung proportional. Das Maximum der Leistungsfähigkeit der Walzenstraße wird durch die miteinander im Einklang stehenden Maxima der Umdrehungszahl und des Vorschubes bestimmt. Durch die ausführliche Analyse der Wechselwirkung zwischen dem Vorschub und der Umdrehungszahl werden in dem Aufsatz die miteinander zusammenhängenden Maxima bestimmt, die die vorgeschriebenen Qualitätsbedingungen und den ungestörten Gang des Walzens noch sichern können.

Symbole

<i>A</i>	[mm]	Breitenmaß der Druckflächenprojektion;
<i>a_{Brems}</i>	[m/sec ²]	Bremsverzögerung;
<i>a_{be}</i>	[m/sec ²]	Beschleunigung in der Beschleunigungszone;
<i>a_{ve}</i>	[m/sec ²]	Verzögerung;
<i>B</i>	[mm]	Maß der Druckflächenprojektion;
(<i>BW</i>)	[mm]	Bremsweg;
<i>b</i>	[mm]	Breite des Walzgutes;
<i>C</i>	—	Faktor, abhängig von den geometrischen Verhältnissen;
<i>D₀</i>	[mm]	Nenndurchmesser der Pilgerwalze;
<i>D₁</i>	[mm]	Außendurchmesser des gelochten Walzgutes;
<i>D₂</i>	[mm]	Außendurchmesser des gepilgerten Rohres;
<i>d₁</i>	[mm]	Innendurchmesser des gelochten Walzgutes;
<i>d₂</i>	[mm]	Innendurchmesser des gepilgerten Rohres;
<i>E_{Rohr}</i>	[kp/cm ²]	Elastizitätsmodul des Rohrwerkstoffes;
<i>E_{Dorn}</i>	[kp/cm ²]	Elastizitätsmodul des Dornwerkstoffes;
<i>F_{Rohr}</i>	[mm ²]	Querschnitt des gepilgerten Rohres;
<i>F_{Nenn}</i>	[mm ²]	Nennquerschnitt des Walzgutes;
<i>F_{Kal}</i>	[mm ²]	Kaliberquerschnitt;
<i>f</i>	[mm ³]	Projektion der Druckfläche;
<i>G</i>	[kp]	Gewicht des Walzgutes;
<i>G_Z</i>	[kp]	das gesamte Gewicht der bewegten Teile;
(<i>Gü</i>)	—	Gütegrad der Wasserbremse;
(<i>GZ</i>)	—	Glättzahl;
<i>g</i>	[m/sec ²]	Erdbeschleunigung;
<i>H</i>	[mm]	Maß der Druckflächenprojektion;
<i>h</i>	[mm]	Stückhöhe;
<i>i</i>	—	i-ter Teil;
<i>j</i>	—	j-tes Glätten;

$K_1, K_2 \}$	[1/mm ²]	aus den Rohrabmessungen bestimmbarer Koeffizient zu der Berechnung des Vorschubes;
(KD)	[mm]	Kolbendurchmesser;
(KF)	[mm ²]	Kolbenfläche des Luftzylinders;
k_f	[kp/mm ²]	Formänderungsfestigkeit;
k_m	[kp/mm ²]	mittlerer Umformungswiderstand;
L	[m]	Hublänge;
L_α	[mm]	Bogenlänge am Abrollkreis bei der Walzendrehung;
$L_{\alpha_{st}}$	[mm]	Länge des Pilgerkopfes;
l_d	[mm]	gedrückte Länge;
l_k	[mm]	Berührungsboenlänge von Glättkaliber und Rohr in einer zur Rohrachse senkrechten Ebene;
l_{Walzg}	[mm]	Länge des Walzgutes;
M	[mkp]	Walz-Drehmomentenbedarf;
m	[mm]	Walzgutvorschub je Walzenumdrehung;
N	[kW]	Leistungsbedarf;
n	[1/min]	Drehzahl der Pilgerwalze;
P	[kp]	Walzdruck;
p	[atü]	im Luftzylinder der Zuführvorrichtung vorhandener Luftüberdruck;
Q_{be}	[kp]	Beschleunigungskraft;
Q_{ve}	[kp]	Verzögerungskraft;
Q_{Luft}	[kp]	Kolbenkraft;
Q_{Brems}	[kp]	auf das Rohr wirkende Bremskraft längs des Bremsweges;
q	[kp/m]	Metergewicht des gepilgerten Rohres;
R	[kp]	Reibkraft;
(RO)	[%]	Ovalität des Rohres;
(RP)	[kp/cm ²]	Druckspannung zwischen Walzgut und Dorn;
r	[mm]	Radius des Rohres;
(SZ)	—	Schlagzahl (Walzenumdrehung);
s	—	Proportionalitätsfaktor zur Bestimmung der zurückgebliebenen elastischen Formänderung im Pilgerkopf;
T	[kp]	Scherkraft;
t	[°C]	Walztemperatur;
U	[kp/St]	theoretische Leistungsfähigkeit des Walzwerks;
V	[dm ³]	Volumen des Luftzylinders;
v	[m/sec]	Walzgeschwindigkeit;
v_{Aus}	[m/sec]	Geschwindigkeit des Loslassens;
v_{max}	[m/sec]	maximale Geschwindigkeit der bewegten Teile in der Zone der Zuführung;
v_U	[m/sec]	Umfangsgeschwindigkeit des Kalibers;
v_{rel}	[m/sec]	mittlere relative Gleitgeschwindigkeit;
v_{WE}	[m/sec]	Geschwindigkeit am Ende des Wasserbremsweges;
w	—	Proportionalitätsfaktor;
y	[mm]	vom Abrollradius aus gemessene Stückhöhe;
z	[sec]	Zeit;
α	[Grad]	Winkel der Walzendrehung;
β	—	Sicherheitsfaktor;
γ	[Grad]	Anzug des Walzenkalibers;
ΔF	[mm ²]	Querschnitt des Werkstoffüberschusses;
Δb	[mm]	Breitung;
Δh	[mm]	Höhenverminderung;
Δt	[°C]	Abkühlung des Walzgutes zwischen zwei Schlägen;
$\Delta \delta_2$	[mm]	Wanddickenabweichung des gepilgerten Walzgutes;
δ_1	[mm]	Wandstärke des Walzgutes;
δ_2	[mm]	Wandstärke des gepilgerten Rohres;
ε	—	Hauptdehnung;
$\bar{\varepsilon}$	—	reduzierte spezifische Dehnung;
ζ	—	charakteristischer Exponent des Streckkalibers;
η	—	Korrektionsfaktor;
η_{mech}	—	mechanischer Wirkungsgrad;
Θ	—	Faktor, der vom Anstieg der Abkühlungskurve abhängig ist;
ϑ	[Grad]	spezifischer Winkelaußschlag;
χ	—	Exponent der polytropischen Zustandsänderung;
λ	—	Streckkoeffizient;

μ	—	Reibungszahl zwischen Rohr und Walze bzw. Rohr und Dorn;
μ_{gleit}	—	Gleitreibungszahl;
μ_z	—	Reibungszahl der Walzenzapfen;
ν	—	Stoffkonstante, die der Reziprokwert der Poissonschen Zahl ist;
ξ	—	Proportionalitätsfaktor;
ϱ	[mm]	Walzenradius;
ϱ_r	[mm]	Abrollradius;
ϱ^*	[mm]	Hüllkreisradius des Walzstreckprofils;
σ_t	[kp/cm ²]	Tangentialspannung;
σ_r	[kp/cm ²]	Radialspannung;
τ	[kp/cm ²]	Schubspannung;
φ	[Grad]	Winkelausschlag der Rohrprofilkurve;
ψ	[%]	Kontraktion;
Ω	[1/°C]	Wärmeausdehnungskoeffizient;
ω	[1/sec]	Winkelgeschwindigkeit der Pilgerwalzen.

1. Einleitung

Die zum Rohrstrecken verwendete Walzenstraße nach dem System Mannesmann besteht aus einem Duowalzwerk und aus einen Speiseapparat (Bild 1.1). Für dieses Duowalzwerk bedeuten die besonders ausgebildeten

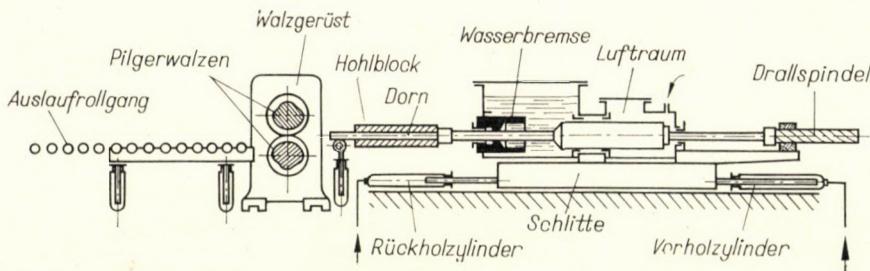


Bild 1.1. Pilger-Walzwerk für Rohrstreckung

Walzen die kennzeichnendsten Merkmale (Bild 1.2). Die Walzen drehen sich entgegen der Bewegungsrichtung des Walzgutes. In die Walzen ist ein Kaliber von einem besonderen Profil eingearbeitet, das nur entlang eines Bogens, der einem bestimmten Winkelwert entspricht, die Umformung ausführt (α_{Umf}). Der andere Teil der Aussparung läuft leer (α_{zuf}). Der Vorgang des Streckwalzens kann aus dem Bild 1.3 entnommen werden.

Die Umformzone des Walzenprofils kann auf drei charakteristische Abschnitte unterteilt werden (Bild 1.2). Der erste Teil vollführt die Einspannung (α_{Angr}), der zweite Teil bedeutet die eigentliche Streckzone (α_{st}) und der dritte Teil die Glättzone (α_{gl}). Die Glättzone wird benötigt, damit die Ungleichmäßigkeiten der Wandstärke, die von der Technologie des Streckens, vom Vorschub und vom Verdrehen herrühren, ferner die Ovalität des Rohres im stärksten Maß vermindert werden.

Zu diesem Zweck muß ein gegebener Punkt des gestreckten Rohrteiles möglichst oft vom Glättkaliber berührt werden. Die Zahl der Berührungen

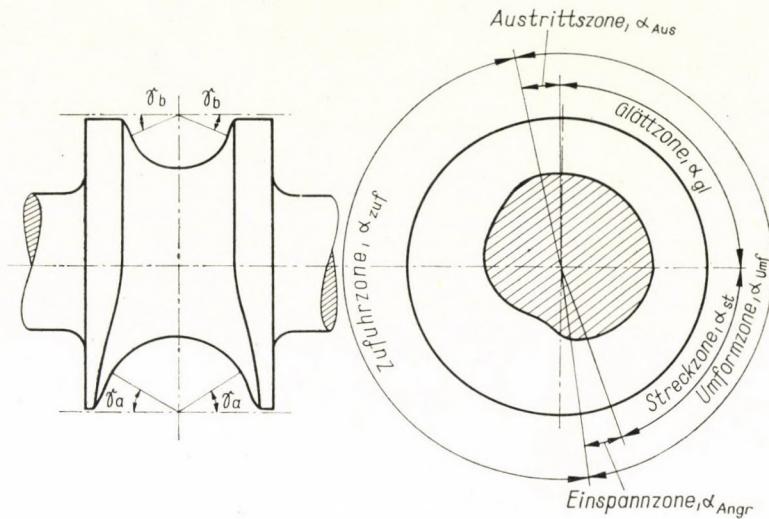


Bild 1.2. Pilgerwalze

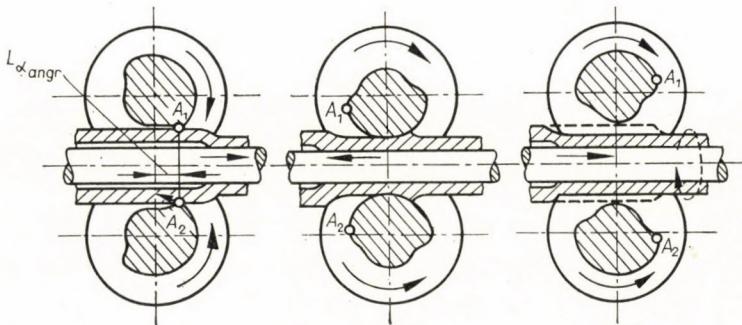


Bild 1.3. Walzvorgang des Rohrstreckens

wird mit Glättzahl bezeichnet. Die Glättzahl ist also der Quotient von der Länge des Glätt-Walzenkalibers zu der gestreckten Rohrlänge während einer Walzenumdrehung:

$$(GZ) = \frac{\varrho_{rgl} \cdot \hat{\alpha}_{gl}}{\lambda m}. \quad (1.1)$$

Die während einer Walzenumdrehung gestreckte Rohrlänge ist gleich dem Produkt aus Vorschub (m) und Streckkoeffizient (λ). Mit Streckkoeffizient wird der Quotient vom Querschnitt des vorgelochten Walzgutes zum Querschnitt des gestreckten Rohres bezeichnet:

$$\lambda = \frac{D_1^2 - d_1^2}{D_2^2 - d_2^2}. \quad (1.2)$$

Die technologischen Kennzahlen $m, n, (GZ), \lambda$ usw. können nicht willkürlich angenommen werden.

Zweck der vorliegenden Arbeit besteht in der Ausarbeitung eines Rechenverfahrens, mit dessen Hilfe die Fachleute, die sich mit der Projektierung und Entwicklung von Pilgerwalzwerken beschäftigen, im Rahmen der gegebenen Bedingungen optimale Verhältnisse schaffen können.

2. Bestimmung des Abrollradius

Beim Pilgerwalzen, ähnlich wie beim elementaren Walzen, gibt es einen Punkt, der sich zusammen mit der Walze bewegt. In diesem Punkt stimmt die Umfangsgeschwindigkeit der Walze mit der Rohrgeschwindigkeit überein, und da das Abrollen frei vom Gleiten ist, muß der zu diesem Punkt gehörende Radius als der Abrollradius angesehen werden.

Die genaue Bestimmung des Abrollradius kann an Hand des Gleichgewichts der entlang der gedrückten Fläche entstandenen Spannungen erfolgen. Da durch die exakten theoretischen Berechnungen, die mit Hilfe dieser Methode durchgeführt werden, kein für die praktische Anwendung geeignetes Ergebnis erzielt werden kann, schlägt man in der Literatur zur Bestimmung der funktionellen Beziehung $\varrho_r = f(L_\alpha)$ eine empirische Formel vor (2.1).

Auf Grund der Versuchsmessungen kann der Abrollradius durch den Radius der Pilgerwalze aus der Glättzone ausgedrückt werden (2.2), (2.3):

$$\varrho_r = \xi \varrho_{gl}, \quad (2.1)$$

wobei ξ den aus Versuchen festgestellten Proportionalitätsfaktor bedeutet (Tafel 2.1).

Tafel 2.1
Werte des Proportionalitätsfaktors ξ

In der Streckzone	1,1 ÷ 1,2
In der Glättzone	1,04 ÷ 1,08
Mittelwert in der ganzen Umformungszone	1,06 ÷ 1,1

ϱ_{gl} in Gleichung (2.1) beträgt

$$\varrho_{gl} = \frac{D_0 - D_2}{2}. \quad (2.2)$$

3. Bestimmung der technologischen Kennwerte, die die Leistungsfähigkeit des Pilgerwalzwerks beeinflussen

Bei der Projektierung eines Pilgerwalzwerks muß man die technologischen Kennzahlen so annehmen bzw. wählen, daß bei ihrer Anwendung der Walzvorgang störungsfrei durchführbar, die Güte des gepilgerten Rohres den Vorschriften entsprechend und die spezifische, theoretische Leistungsfähigkeit des Walzwerks eine maximale sei.

Die grundlegenden technologischen Kennzahlen, die die Störungsfreiheit des Pilgerwalzens beeinflussen, sind die Drehzahl der Pilgerwalzen (n) und der Streckkoeffizient (λ). Die Güte des gepilgerten Rohres (Maßtoleranzen, Risse) wird von den grundlegenden technologischen Kennzahlen, wie der Rohrvorschub je Walzenumdrehung (m) und der Winkel des Kaliberanzugs der Walze beim Glätten (γ_{gl}) beeinflußt. Die grundlegenden technologischen Kennzahlen können bei gegebenen Verhältnissen (d. h. bei den festgelegten Werten aller anderen technologischen Kennzahlen) einen gewissen maximalen Wert nicht überschreiten.

Bei einem gegebenen Walzprozeß gibt es für die Wahl der Werte von zusammengehörenden technologischen Kennzahlen zahlreiche Möglichkeiten, bei denen die obigen Bedingungen erfüllt werden, d. h.:

$$\begin{aligned} \gamma_{gl} &\leq \gamma_{gl\max}, \\ m &\leq m_{\max}, \\ n &\leq n_{\max}, \\ \lambda &\leq \lambda_{\max}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wenn man auch die wirtschaftlichen Beziehungen des Pilgerwalzens in Betracht zieht, dann muß man beim Pilgern eines gegebenen Rohres derartige zusammengehörende technologische Kennzahlen wählen, daß bei ihrer Anwendung die spezifische theoretische Leistungsfähigkeit zu einem Maximum wird.

3.1. Die Bestimmung des maximalen Walzkaliberanzugs beim Glätten

Der Höchstwert des Kaliberanzugs ergibt sich daraus, daß bei Winkeln, die kleiner sind als der maximale Kaliberanzug, die Toleranzen des gepilgerten Rohres kleiner, bei größeren Winkeln dagegen größer sind als zulässig. Mit anderen Worten: bei Verwendung eines das Maximum übersteigenden Kaliberanzugs wird das hergestellte Rohr zum Ausschuß, dagegen werden bei der Anwendung eines kleineren Kaliberanzugs die Toleranzen des hergestellten Rohres zwar besser sein als die zulässigen Werte, die Leistungsfähigkeit der Walzstraße wird sich jedoch vermindern.

Der maximale Kaliberanzug für das Glätten wurde im Querschnitt $\Delta F_{(GZ=j)}$ (Abschnitt 3.1.2) des Werkstoffüberschusses, der nach dem letzten ($GZ = j$ -ten) Glätten entsteht, verwendet. Dieser Querschnitt wurde dem Querschnitt des Werkstoffüberschusses (ΔF_{zul} ; Abschnitt 3.1.3), der den zulässigen Toleranzen des gepilgerten Rohres entspricht, gleichgesetzt:

$$\Delta F_{(GZ=j)} = \Delta F_{zul}. \quad (3.2)$$

Setzt man die Werte von $\Delta F_{(GZ=j)}$ und ΔF_{zul} in die Gleichung (3.2) ein, so erhält man eine Gleichung, in der lediglich eine Unbekannte vorkommt, nämlich $\gamma_{gl\ max}$. $\gamma_{gl\ max}$ kann jedoch in impliziter Form nicht ausgedrückt werden, daher kann die Bestimmung von $\gamma_{gl\ max}$ auf graphischem Wege erfolgen (Bild 3.1).

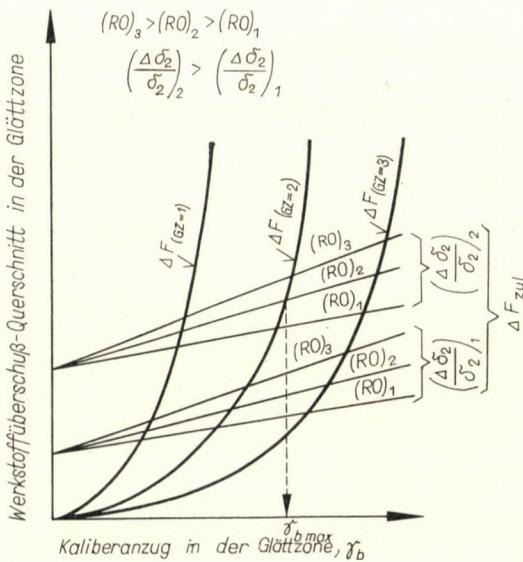


Bild 3.1. Bestimmung des maximalen Kaliberanzugs in der Glättzone

Die im Bild 3.1 gezeigten Kurven $\Delta F_{(GZ=1)}$, $\Delta F_{(GZ=2)}$, $\Delta F_{(GZ=3)}$ usw. bedeuten die Querschnitte des Werkstoffüberschusses, die den einzelnen Glättvorgängen entsprechen, die Geraden dagegen den zulässigen Toleranzen

$$\left[(RO)_1; (RO)_2; (RO)_3 \text{ bzw. } \left(\frac{\Delta \delta_2}{\delta_2} \right)_1; \left(\frac{\Delta \delta_2}{\delta_2} \right)_2; \dots \right]$$

entsprechende ΔF_{zul} Querschnitte der Werkstoffüberschüsse. Die maximale Kaliberöffnung, die den gegebenen Abmessungen des fertigen Rohres entspricht, ergibt sich aus dem Schnittpunkt einer der Glättzahl entsprechenden Kurve und einer Geraden die den zulässigen Toleranzen entspricht.

3.1.1 Maßtoleranzen des gepilgerten Rohres

Aus der Technologie des Pilgerns folgt, daß außer zufälligen Maßabweichungen (Streuung) auch ständige Maßabweichungen am hergestellten Rohr vorkommen: das gepilgte Rohr besitzt eine Ovalität (RO) und eine örtliche Abweichung der Wandstärke [Stauchung ($\Delta\delta_2$)].

Die Maßabweichung des gepilgerten Rohres hängt von der Glättzahl, vom Kaliberanzug des Glättns und von der Querschnittsgröße des Werkstoffüberschusses am Ende der Arbeitszone ab. Der Querschnitt des sich ausbildenden Werkstoffüberschusses ist dagegen dem Vorschub proportional.

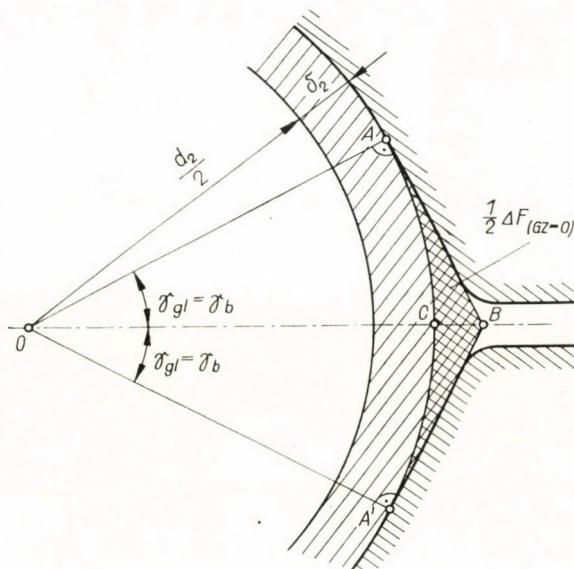


Bild 3.2. Entstehung des Werkstoffüberschusses am Ende der Streckzone

In der Streckzone kann ein so großer maximaler Vorschub zugelassen werden, daß der am Ende der Streckzone entstehende Werkstoffüberschuß zwar den für die Breitung zur Verfügung stehenden Raum vollkommen ausfüllt, jedoch noch keinen Grat bildet. Auf Grund des Bildes 3.2 beträgt der Querschnitt des Werkstoffüberschusses, der sich am Ende der Streckzone, d. h. vor dem ersten Glätten bildet:

$$\Delta F_{(GZ=0)} = 2 T_{ACA'B} = 4 (T_{OAB} - T_{AOC}) = 2 \left(\frac{d_2}{2} + \delta_2 \right)^2 (\tan \gamma_b - \hat{\gamma}_b). \quad (3.3)$$

Der Werkstoffüberschuß, der durch die obige Gleichung definiert ist, muß in der Glättzone weggewalzt werden, und zwar mit Hilfe der Glättvorgänge, deren Zahl durch die Glättzahl gegeben ist.

3.1.2. Untersuchung der Formänderungen in der Glättzone

Der am Ende der Arbeitszone entstandene Werkstoffüberschuß wird nach einer Drehung von 90 Grad, die zur nächsten Walzenumdrehung gehört, im ersten Abschnitt des Glättns weggeschwemmt, wobei entsprechend dem Kaliberanzug, infolge der Breitung des Walzgutes ein weiterer, im Vergleich zum vorherigen jedoch kleinerer Werkstoffüberschuß entsteht. Dieser Vorgang wiederholt sich so oft, wie oft es die Glättzahl vorsieht.

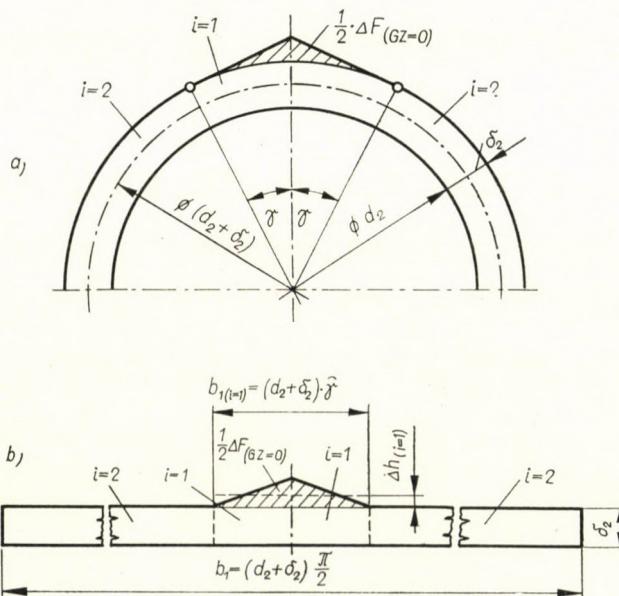


Bild 3.3. Rohrabbnahme in der Glättzone nach einer Verdrehung von 90 Grad

Der Querschnitt des Werkstoffüberschusses, der vor dem ersten Glätten vorhanden und durch die Gleichung (3.3) definiert ist, d. h. $\Delta F_{(GZ=0)}$ vermindert sich während des ersten Glättns ($GZ = 1$) auf $\Delta F_{(GZ=1)}$.

Der volle Rohrquerschnitt ist vor dem ersten Glätten:

$$F_{\text{Rohr}(GZ=0)} = F_{\text{Nenn}} + \Delta F_{(GZ=0)}, \quad (3.4)$$

wo

$$F_{\text{Nenn}} = (d_2 + \delta_2) \pi \delta_2 \quad (3.5)$$

ist.

Der Rohrquerschnitt nach dem ersten Glätten kann mit Hilfe der resultierenden spezifischen Dehnung (ε_m) bestimmt werden.

Auf Grund der Raumkonstanz ist

$$F_{\text{Rohr}(GZ=1)} = \frac{F_{\text{Rohr}(GZ=0)}}{1 + \varepsilon_m(GZ=1)}. \quad (3.6)$$

Der Querschnitt des Werkstoffüberschusses, der nach dem ersten Glätten entsteht:

$$\Delta F_{(GZ=1)} = F_{\text{Rohr}(GZ=1)} - F_{\text{Nenn}}. \quad (3.7)$$

Die resultierende Dehnung wird unter Anwendung der Theorie der Formänderungsarbeit von A. GELEJI [3.1] festgestellt. Nach der Gelejischen Theorie von der Gleichheit der Formänderungsarbeiten ist die Arbeit, die die resultierende spezifische Dehnung des ungleichmäßig gedrückten Werkstoffs verursacht, gleich der Summe der Arbeiten, die die freie Dehnung der einzelnen Teile hervorruft.

Zur Bestimmung der resultierenden mittleren spezifischen Dehnung in der Glättzone wird entsprechend dem Bild 3.3 der Rohrquerschnitt in zwei Teile geteilt: in die Rohrteile $i = 1$ und $i = 2$.

Im Rohrteil $i = 2$ erfolgt keine unmittelbare Höhenverminderung.

Im Rohrteil $i = 1$ beträgt die durchschnittliche Höhenverminderung in einem Abschnitt, der der Breite $b_{1(i=1)}$ entspricht (Bild 3.3b):

$$\Delta h_{(i=1)(GZ=1)} = \frac{\Delta F_{(GZ=0)}}{2 b_{1(i=1)}}, \quad (3.8)$$

wobei auf Grund der Bezeichnung im Bild 3.3b

$$b_{1(i=1)} = (d_2 + \delta_2) \hat{\gamma}_b \quad (3.9)$$

ist.

Die mittlere spezifische Dehnung beträgt während des ersten Glättens:

$$\varepsilon_{m(GZ=1)} = \frac{\Delta h_{(i=1)(GZ=1)}}{\delta_2 + \Delta h_{(i=1)(GZ=1)}} \cdot \frac{b_{1(i=1)}}{b_1} \left(1 - \frac{1}{2} 0,35 \frac{l_{d(GZ=1)}}{b_{1(i=1)}} \right), \quad (3.10)$$

wobei nach dem Bild 3.3:

$$b_1 = \frac{d_2 + \delta_2}{2} \pi \quad (3.11)$$

ist.

Im Verlauf des ersten Glättens beträgt die gedrückte Länge in der Glättzone:

$$l_{d(GZ=1)} = \sqrt{\rho_{gl} \Delta h_{(i=1)(GZ=1)}}. \quad (3.12)$$

Beim nächsten ($GZ = 2$) Glätten wird der Teil des Rohres, der beim ersten Glätten von der Walze bildsam geformt wurde, einer weiteren bildsamen Umformung unterworfen. Während des zweiten Glättens vermindert sich der Rohrquerschnitt $F_{\text{Rohr}(GZ=1)}$ auf den Querschnitt $F_{\text{Rohr}(GZ=2)}$. Dieser Vorgang ähnelt dem Vorgang, der sich beim ersten Glätten abspielt, daher können die für das erste Glätten abgeleiteten Gleichungen sinngemäß verwendet werden.

*3.1.3. Querschnitt des Werkstoffüberschusses,
entsprechend den Maßtoleranzen des gepilgerten Rohres*

Den Querschnitt des Werkstoffüberschusses [Gleichung (3.3)], der sich im Verlauf der Glättvorgänge, am Ende der Arbeitszone ausbildet, muß man auf einen Wert vermindern, der den Maßtoleranzen des gepilgerten Rohres entspricht.

Der Querschnitt des zulässigen maximalen Werkstoffüberschusses ergibt sich nach dem letzten Glätten, im Falle der zulässigen Ovalität (RO_{zul}), als Funktion des Kaliberanzugs. Bei einer zulässigen relativen Abweichung in der Wanddicke ($\Delta\delta_2/\delta_2$)_{zul}, an Hand von Versuchsdaten ist:

$$\Delta F_{zul} \cong 2 (RO)_{zul} (d_2 + \delta_2) \delta_2 \frac{\tan \gamma_b - \hat{\gamma}_b}{\frac{1}{\cos \gamma_b} - 1} + 40 \left(\frac{\Delta \delta_2}{\delta_2} \right)_{zul} \delta_2^2. \quad (3.13)$$

*3.2. Die Bestimmung des maximalen Vorschubs
vom Walzgut je Umdrehung der Pilgerwalze*

Die Größe des maximalen Vorschubs je Umdrehung, der beim Pilgern verwendet werden kann, wird von zwei Erscheinungen beeinflußt. Einerseits, sofern der größte Vorschub verwendet wird, kann unter Einwirkung der Breitung nur ein so großer Werkstoffüberschuß entstehen, daß sein Querschnitt nicht die Querschnittsfläche überschreitet, die durch den Kaliberanzug gesichert wird. Andererseits, im Falle des größten Vorschubs, können die Spannungen, die infolge der ungleichmäßigen Formänderungen auftreten, keinen Riß in der Rohrwand verursachen.

Von den »maximalen« Vorschüben, die aus zwei voneinander unabhängig untersuchten Erscheinungen — Breitung und Rißgefahr — bestimmt wurden, kann in der Praxis der kleinere Vorschub verwendet werden.

*3.2.1. Der Vorschub je Umdrehung,
bestimmt an Hand der Toleranzen des gepilgerten Rohres*

Am Ende der Streckzone besteht zwischen dem eintretenden (F_1) und austretenden (F_2) Rohrquerschnitt — zufolge der Volumenkonstanz — folgende Beziehung:

$$F_2 = \frac{F_1}{1 + \varepsilon_m}, \quad (3.14)$$

wobei ε_m die mittlere spezifische Dehnung bedeutet.

Die maximale Größe des in den Walzspalt eintretenden Querschnitts F_1 am Ende der Streckzone (Bild 3.4; Position b des Walzens):

$$F_{1\max} = (d_2 + \delta_2 + \Delta h_{\max(i=1)}) \pi (\Delta h_{\max(i=1)} + \delta_2). \quad (3.15)$$

Der austretende Rohrquerschnitt F_2 bedeutet die Summe des Rohrquerschnittes (F_{Nenn}), der den Nennwerten der Rohrdurchmesser bei einer

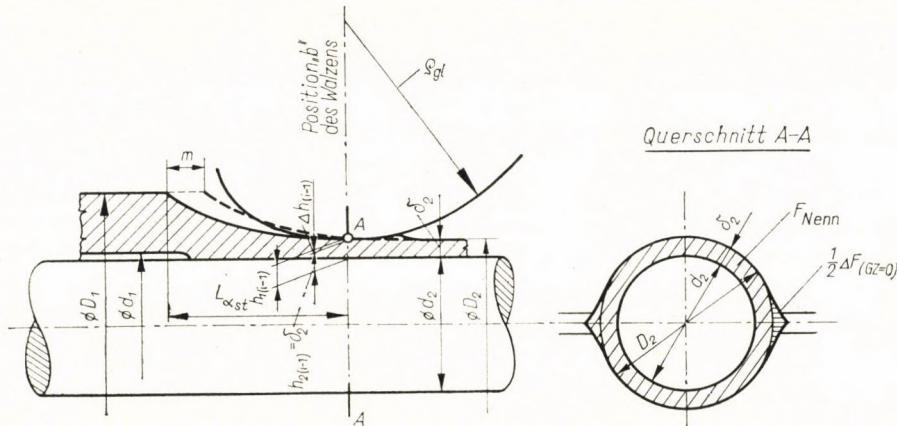


Bild 3.4. Querschnitt des gepilgerten Rohres am Ende der Streckzone

gegebenen Walzenposition entspricht und des Querschnittes vom Werkstoffüberschuß; in dieser Weise beträgt der austretende maximale Rohrquerschnitt am Ende der Streckzone (Bild 3.4):

$$F_{2\max} = F_{\text{Nenn}} + \frac{1}{\beta_3} \Delta F_{(GZ=0)\max}. \quad (3.16)$$

Dabei ist β_3 der Sicherheitsfaktor der Kaliberfüllung ($\beta_3 \approx 1,25$).

Der größte zulässige Querschnitt des Werkstoffüberschusses, der am Ende der Streckzone, d. h. vor dem ersten Glätten ($GZ = 0$) entsteht, beträgt auf Grund der Gleichung (3.3):

$$\Delta F_{(GZ=0)\max} = 2 \left(\frac{d_2}{2} + \delta_2 \right)^2 (\tan \gamma_{gl\max} - \dot{\gamma}_{gl\max}). \quad (3.17)$$

Die in der Gleichung (3.14) vorkommende mittlere Dehnung kann nach dem Abschnitt 3.2.2 berechnet werden.

Wenn man die Werte von $F_{1\max}$, $F_{2\max}$ und ε_m in die Gleichung (3.14) einsetzt, erhält man zur Bestimmung des Maximums (m_{\max}) des Vorschubs vom Walzgut zwar eine Gleichung mit einer Unbekannten, sie ist jedoch von drittem Grad.

Nach Ordnung wird die Gleichung (3.14):

$$K_1 m_{\max}^3 + K_2 m_{\max}^2 + K_3 m_{\max} + K_4 = 0, \quad (3.18)$$

wobei

$$K_1 = \frac{\zeta^3 y_{\text{Rohr}}^3 \pi}{(d_2 + \delta_2) \pi \delta_2 + \frac{2}{\beta_3} \left(\frac{d_2}{2} + \delta_2 \right)^2 (\tan \gamma_{gl\max} - \hat{\gamma}_{gl\max})}, \quad (3.19)$$

$$K_2 = \frac{\zeta^2 y_{\text{Rohr}}^2 \pi (d_2 + 3 \delta_2)}{(d_2 + \delta_2) \pi \delta_2 + \frac{2}{\beta_3} \left(\frac{d_2}{2} + \delta_2 \right)^2 (\tan \gamma_{gl\max} - \hat{\gamma}_{gl\max})} + \frac{0,35 (1 + \lambda) \zeta y_{\text{Rohr}}}{2 \pi (d_2 + \delta_2)}, \quad (3.20)$$

$$K_3 = \zeta y_{\text{Rohr}} \times \times \left[\frac{\pi \delta_2 (2 d_2 + 3 \delta_2)}{(d_2 + \delta_2) \pi \delta_2 + \frac{2}{\beta_3} \left(\frac{d_2}{2} + \delta_2 \right)^2 (\tan \gamma_{gl\max} - \hat{\gamma}_{gl\max})} - \frac{180 - \gamma_{gl\max}}{90} \right], \quad (3.21)$$

$$K_4 = \frac{\delta_2^2 \pi (d_2 + \delta_2)}{(d_2 + \delta_2) \pi \delta_2 + \frac{2}{\beta_3} \left(\frac{d_2}{2} + \delta_2 \right)^2 (\tan \gamma_{gl\max} - \hat{\gamma}_{gl\max})} - \delta_2. \quad (3.22)$$

Die Größe des maximalen Vorschubs je Umdrehung (m_{\max}) kann man aus der Gleichung (3.18) bestimmen; an Hand der bekannten Lösungsformel der Gleichung dritten Grades kann ein richtiges Ergebnis jedoch nur mit Hilfe einer Rechenmaschine erzielt werden (in der Lösungsformel sind Differenzen von großen Zahlen enthalten) [3.2]. Die unter (3.18) angegebene Gleichung dritten Grades wird daher mit Hilfe einer Annäherungsmethode gelöst. Von den in der Gleichung (3.18) enthaltenen Koeffizienten ist K_1 [Gleichung (3.19)] neben den üblichen Rohrabmessungen eine sehr kleine Zahl, daher kann in erster Annäherung ($K_1 \cdot m_{\max}^3$) neben den übrigen Gliedern der Gleichung vernachlässigt werden. Nach der Vernachlässigung erhält man eine Gleichung zweiten Grades:

$$K_2 m_{\max 0}^2 + K_3 m_{\max 0} + K_4 \approx 0. \quad (3.23)$$

Die Auflösung der Gleichung (3.23) nach $m_{\max 0}$ ergibt in grober Annäherung die Wurzel der Gleichung (3.18):

$$m_{\max 0} = \frac{-K_3 + \sqrt{K_3^2 - 4 K_2 K_4}}{2 K_2}. \quad (3.24)$$

Den Wert der Quadratwurzel muß man mit positivem Vorzeichen ansetzen, denn nur in dieser Weise erhält man eine positive Wurzel.

Von den möglichen Verfeinerungsmethoden der groben Annäherung kann die Newtonsche (Tangenten) Methode angewendet werden:

$$m_{\max 1} = m_{\max 0} - \frac{f(m_{\max 0})}{f'(m_{\max 0})}. \quad (3.24a)$$

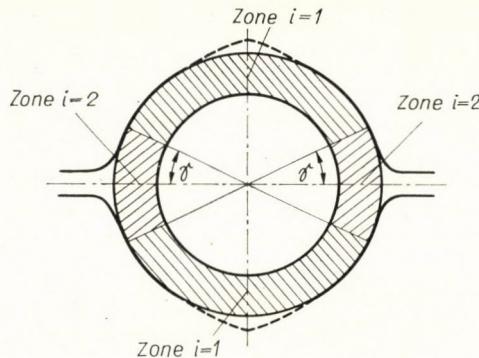


Bild 3.5. Aufteilung des Rohrquerschnittes für Bestimmung der resultierenden Formänderung

In der Praxis gibt die Näherung $m_{\max 0}$ bereits einen entsprechenden Wert, d. h. sie gibt die Größe des verwendbaren maximalen Vorschubs je Umdrehung an.

Im Verlauf der Berechnung des Vorschubs wird auch der Streckkoeffizient benötigt. λ_{\max} und m_{\max} sind voneinander abhängige Größen, daher nehmen wir bei der Bestimmung von m_{\max} einen Näherungswert des Streckkoeffizienten an. Nach praktischen Erfahrungen ist der übliche Streckkoeffizient

$$\lambda = 8 \div 12. \quad (3.25)$$

Mit dem angenommenen λ Wert bestimmen wir m_{\max} , und mit m_{\max} auf Grund des Kapitels 3.4 den Wert von λ_{\max} . Wenn der angenommene Wert von λ vom Wert λ_{\max} abweicht, dann muß man die Berechnung von m_{\max} mit den neuen λ_{\max} wiederholen.

3.2.2. Untersuchung der Formänderungen in der Streckzone

Die Formänderung des gepilgerten Rohres kann man auch in der Streckzone an Hand der im Kapitel 3.1.2 mitgeteilten Grundsätze untersuchen.

Zur Bestimmung der resultierenden Dehnung teilen wir den Rohrquerschnitt in zwei Teile (Bild 3.5):

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m(i=1)} + \varepsilon_{m(i=2)}. \quad (3.26)$$

In der Streckzone ist die mittlere resultierende Dehnung durch die freie Dehnung des $i = 1$ -ten Abschnittes gegeben. Der $i = 2$ -te Abschnitt erhält nur einen indirekten Druck, daher verändert die freie Dehnung dieses Abschnittes die resultierende Dehnung des Rohres nur in geringem Maße.

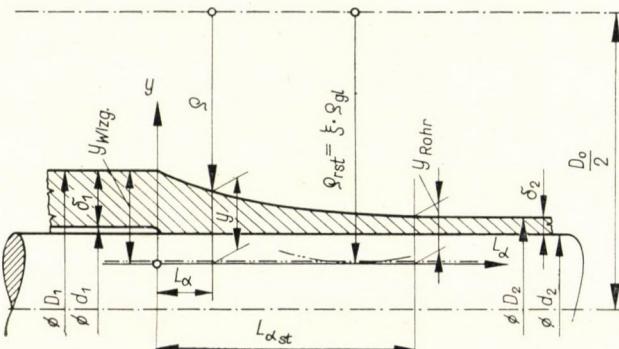


Bild 3.6. Die geometrischen Verhältnisse des Rohres in der Streckzone

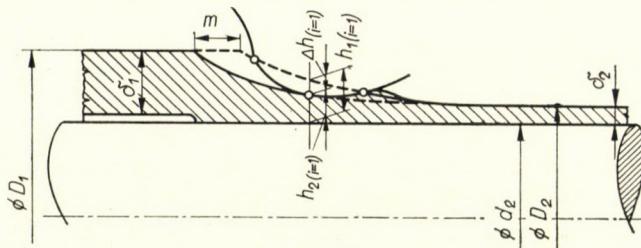


Bild 3.7. Höhenverminderung in der Streckzone

$\varepsilon_{m(i=2)}$ kann neben $\varepsilon_{m(i=1)}$ vernachlässigt werden:

$$\varepsilon_{m(i=2)} \ll \varepsilon_{m(i=1)}, \quad (3.27)$$

das heißt

$$\varepsilon_m \approx \varepsilon_{m(i=1)} = \frac{180 - 2\gamma}{180} \left(\frac{\Delta h_{(i=1)}}{h_{1(i=1)}} - \frac{\Delta b_{(i=1)}}{b_{1(i=1)}} \right), \quad (3.28)$$

wo γ die Öffnung des Walzkalibers im untersuchten Schnitt bedeutet, wogegen nach dem Kapitel 3.2.3

$$\Delta h_{(i=1)} = my \zeta \quad (3.29)$$

ist.

An Hand der Bilder 3.6 und 3.7 ist:

$$h_{1(i=1)} = h_{2(i=1)} + \Delta h_{(i=1)} = y - (y_{Rohr} - \delta_2) + \Delta h_{(i=1)}. \quad (3.30)$$

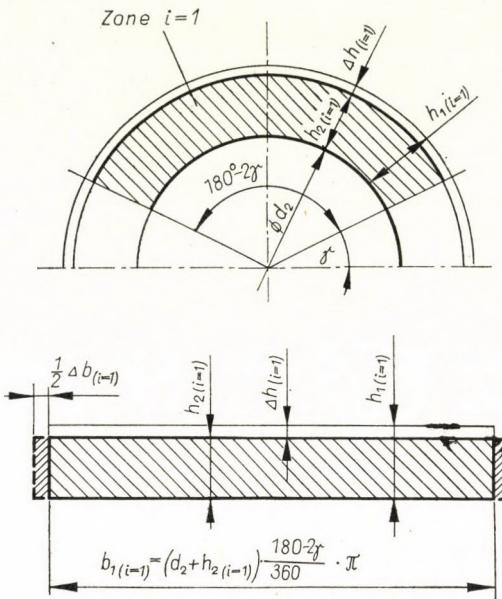


Bild 3.8. Formänderung des unter unmittelbarem Druck stehenden Rohrteiles am Ende der Streckzone

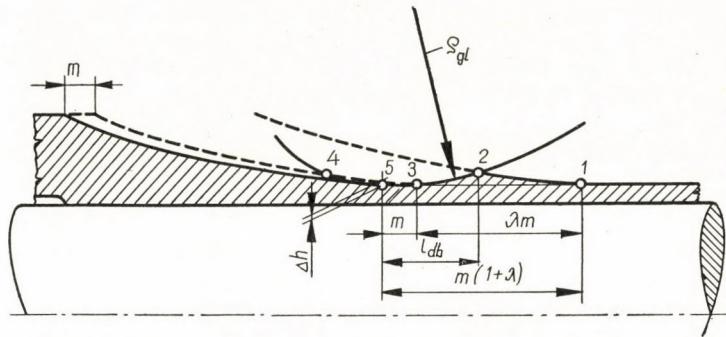


Bild 3.9. Gedrückte Länge zu Beginn der Glättzone

Die Breitung der unter direktem Druck stehenden Zone $i = 1$ ist, unter Berücksichtigung der Faktoren, die die freie Breitung verhindern, und mit den Bezeichnungen des Bildes 3.8:

$$\Delta b_{(i=1)} = \frac{1}{2} \cdot 0,35 l_{d(i=1)} \cdot \frac{\Delta h_{(i=1)}}{h_{1(i=1)}} \quad (3.31)$$

und die Breite der Zone $i = 1$

$$b_{1(i=1)} = \left(d_2 + h_{2(i=1)} \right) \frac{180 - 2\gamma}{360} \pi. \quad (3.32)$$

Die gedrückte Länge (l_{db}) am Ende der Streckzone ist bestimmt durch die aus dem umgeformten Abschnitt verdrängte Werkstoffmenge. Nach Bild 3.9 ist die gedrückte Länge am Ende der Streckzone etwa die Hälfte der in der Streckzone entstandenen Verlängerung. Das ist aus dem Umstand zu erklären, daß der Kurventeil mit der Bezeichnung 1—2 identisch ist mit dem mit 3—4 bezeichneten Teil der Kurve, denn infolge der Streckung verschiebt sich der

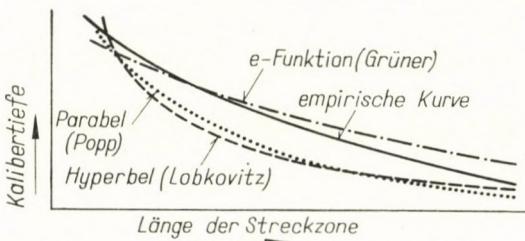


Bild 3.10. Verschiedene Walzenprofile

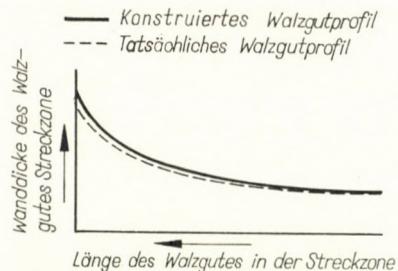


Bild 3.11. Das entworfene und wirkliche Walzgutprofil

mit 3—4 bezeichnete Kurventeil zuerst auf die Stelle des Teiles 1—2 und unterliegt dort der Verformung. Andererseits sind die Kurventeile mit der Bezeichnung 5—2 und 2—1 symmetrisch, denn am Ende der Streckzone ändert sich kaum der Radius des Walzenprofils und er kann dem Glättradius annähernd gleichgesetzt werden.

Auf Grund des obigen Gedankenganges und des Bildes 3.9 ergibt sich die gedrückte Länge zu

$$l_{db} \approx \frac{1}{2} m(1 + \lambda), \quad (3.33)$$

wo λ die volle Dehnung des Rohres ist [Gleichung (1.2)].

3.2.3. Analyse der Streckzone des Walzenprofils

Zur Konstruktion der Streckzone des Kaliberprofils empfehlen die verschiedenen Verfasser voneinander abweichende Kurven (Bild 3.10). P. GRÜNER [3.3] empfiehlt auf Grund von theoretischen und versuchsmäßigen Erwägungen

gen die Form einer Exponentialkurve, da bei Verwendung dieser Kurve die spezifische Formänderung während des ganzen Verlaufs der Streckzone konstant ist. Die allgemeine Gleichung der Exponential-Profilkurve lautet auf Grund des Bildes 3.6:

$$y = y_{\text{Walzg}} e^{-\zeta \cdot L_\alpha} = y_{\text{Walzg}} e^{-\zeta \cdot \varrho_{\text{rest}} \hat{x}}. \quad (3.34)$$

P. GRÜNER wandte die Bedingung der gleichbleibenden Formänderung auf die Änderung der Wanddicke des Rohres an, die in dieser Weise kalibrierte

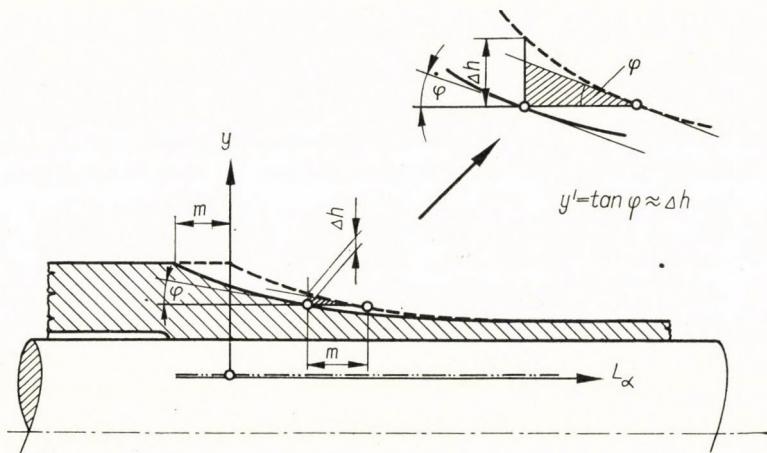


Bild 3.12. Bestimmung der elementaren Höhenverminderung

Pilgerwalze ergab jedoch keine exponentielle Verminderung der Wanddicke (Bild 3.11). Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß die Konstruktion des Profils nicht auf den Abrollkreis bezogen wurde.

Da das Rohr und die Walze entlang des Abrollkreises miteinander gleitfrei in Berührung stehen, muß man das Abrollprofil vom Streckabschnitt des Kalibers — im Gegensatz zu P. GRÜNER — auf den Abrollkreis beziehen (Bild 3.6). In dieser Weise wird zwar die spezifische Formänderung nicht vollkommen konstant bleiben, die Rohrform kann dagegen in Kenntnis des Walzprofils auch theoretisch bestimmt werden.

Der annähernde Wert der Höhenabnahme, die im Falle der Anwendung eines korrigierten Exponential-Rohrprofils (Bild 3.12) beim das Pilgerwalzen ersetzen elementaren Rohrwalzen auftritt, beträgt:

$$\Delta h \approx my' = m \zeta y. \quad (3.35)$$

Die Konstante ζ kann dadurch bestimmt werden, daß man in die Gleichung (3.34) die bekannten geometrischen Abmessungen einsetzt.

Die Länge des Pilgerkopfes beträgt auf Grund des Bildes 3.6:

$$L_{a_s} = \varrho_{rst} \cdot \hat{\alpha}_{st}. \quad (3.36)$$

Die zu berücksichtigenden Ordinaten am Anfang und am Ende des Pilgerkopfes betragen:

$$y_{\text{Walzg}} = \frac{D_1}{2} - \left(\frac{D_0}{2} - \varrho_{rst} \right), \quad (3.37)$$

$$y_{\text{Rohr}} = \frac{D_2}{2} - \left(\frac{D_0}{2} - \varrho_{rst} \right). \quad (3.38)$$

Die bekannten Werte in die Gleichung (3.34) eingesetzt, wird der für das Profil charakteristische Exponent:

$$\zeta = \frac{\ln(y_{\text{Walzg}}/y_{\text{Rohr}})}{L_{a_s}}. \quad (3.39)$$

In Kenntnis des Wertes von y für die verschiedenen Walzenumdrehungen wird der jeweilige Radius des Streck-Walzenkalibers:

$$\varrho = \varrho_{rst} - y. \quad (3.40)$$

3.2.4. Der maximale Vorschub des Walzgutes je Umdrehung, bestimmt auf Grund der Rißgefahr

Beim Pilgerwalzen bildet sich trotz der ungleichmäßigen Höhenabnahme die mittlere Dehnung des gewalzten Stoffes aus. Als eine Folge hiervon, treten zwischen den einzelnen Stoffteilen Spannungsunterschiede auf. Die zusätzlichen Spannungen können auch so große Werte erreichen, daß im Werkstoff Risse entstehen.

Risse können in erster Linie an den Teilen des Werkstoffes entstehen, wo die aus den Formänderungen bestimmte reduzierte, spezifische Dehnung den kritischen Wert übersteigt, der mit der Kontraktion des Werkstoffes zusammenhängt. Die reduzierte spezifische Dehnung kann aus den Hauptformänderungen bestimmt werden [3.4]:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]} \approx 1,155 \varepsilon_{m(i=1)}. \quad (3.41)$$

Die auftretende reduzierte spezifische Dehnung kann den Wert der zulässigen Dehnung nicht übersteigen:

$$\bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_{\text{zul}}. \quad (3.42)$$

Die zulässige reduzierte Dehnung ist der Kontraktion des untersuchten Werkstoffes (ψ) proportional:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{zul}} = w \psi. \quad (3.43)$$

Auf Grund der Erfahrung ist $w \approx 0,5 \div 0,6$.

3.3. Bestimmung der maximalen Walzendrehzahl

Das Rohr-Streckwalzen nach dem Pilgerverfahren besteht, wie bekannt, aus zwei Hauptzonen: aus der Walzzone (Rückwärtsbewegung) und aus der Vorholzone (Vorwärtsbewegung und Drehung).

In der Walzzone erfolgt die Umformung des Rohres. Unter der Einwirkung des für die Formänderung erforderlichen Walzdruckes tritt zwischen den Walzen und dem Rohr eine Reibkraft auf, die das Rohr zu einer dem Drehsinn der Walzen entsprechenden Bewegung zwingt. Infolge der konstruktiven Ausführung der Zuführvorrichtung muß dabei zusammen mit dem Rohr auch der Dorn, ferner der im Luftzyylinder der Zuführvorrichtung bewegliche Kolben eine Bewegung ausführen.

Die Größe der zwischen Walzen und Rohr auftretenden kleinsten Reibkraft bestimmt die zulässige Größe des im Luftzyylinder der Zuführvorrichtung vorhandenen Luftdruckes. Der geringste Walzdruck tritt am Ende der Glättzone auf (P_{gl}), hier ist nämlich die Formänderung des Rohres am kleinsten. Den dem Ende der Glättzone entsprechenden Zustand zeigt Bild 3.13. Beim Walzen, in der Verformungs- und in der Glättzone bewegt die Walze den Kolben um den Weg L_1 weiter; wegen dieser Kolbenbewegung wird die im Luftzyylinder vorhandene Luft komprimiert. Daher entsteht am Ende der Glättzone der größte Luftdruck. Es ist leicht einzusehen, daß die bei der Rückwärtsbewegung des gewalzten Rohres und der bewegten Massen auftretende Kraft — die aus der Summe des Produkts aus Luftdruck und Kolbenfläche und der Reibungskräfte besteht — die auf die bewegten Teile der Zuführvorrichtung wirkt — am Ende der Gleitzone nicht größer sein kann als die zwischen dem Rohr und den Walzen vorhandene Reibkraft $R_{gl} = \mu \cdot P_{gl}$. Im entgegengesetzten Fall tritt an irgendeinem Punkt der Gleitzone zwischen Rohr und Walzen ein Verrutschen auf.

Das Rutschen kann die Aufhebung des kinetischen und kinematischen Gleichgewichts, das zwischen der Bewegung von Rohr und Walzen besteht, verursachen, und damit kann es das ungestörte Walzen unmöglich machen.

Am Ende der Glättzone geben die Walzen das Rohr frei. Danach wirkt auf die in Bewegung befindlichen Massen außer der Reibkraft lediglich die vom Luftdruck erzeugte äußere Kraft. Die Resultierende der äußeren Kräfte bremst zuerst die infolge ihrer Trägheit sich noch weiter bewegenden Massen, dann führt sie mit wachsender Geschwindigkeit das Rohr zwischen die Walzen

zu. Zwecks Verminderung der beim Angriff auftretenden dynamischen Kräfte ist es wünschenswert, daß die dem Drehsinn der Walzen entgegengesetzt sich bewegenden Massen mit möglichst geringer Geschwindigkeit auf die Walzen stoßen. Das Bremsen wird im allgemeinen hydraulisch (mit einer Wasserbremse) vorgenommen. Die in der Wasserbremse erreichte Verzögerung kann

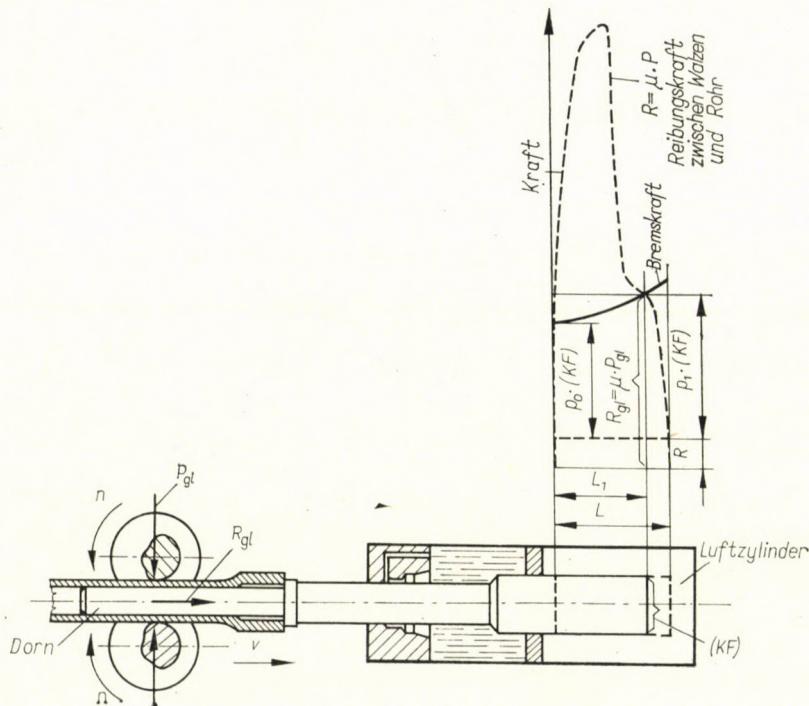


Bild 3.13. In der Arbeitszone sich abspielende Vorgänge

nicht beliebig groß werden, damit kein Wegrutschen des Rohres am Dorn auftrete. Zur Bestimmung der Verzögerung, die in der Wasserbremse erreicht werden kann, ist zu untersuchen, wie groß die auftretende Spannkraft zwischen Rohr und Dorn wird, wenn das Rohr am Dorn nicht besonders befestigt wird.

Im Interesse der Sicherheit muß die Reibkraft R_{gr} , die zwischen Rohr und Dorn auftritt, immer größer sein als das Maximum der auf das Rohr wirkenden Brems(Trägheits)-kraft (Bild 3.14).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß man bei der Projektierung die Bewegungskennzahlen zulassen kann, bei denen weder in der Glättzone (zwischen den Walzen und dem Rohr), noch in der Bremszone (zwischen dem gewalzten Rohr und dem Pilgerdorn) ein Gleiten auftritt.

3.3.1. Vorgänge, die sich in der Arbeitszone abspielen

Beim Walzen bewegen die Pilgerwalzen den Kolben um die Strecke L_1 rückwärts. Es ist einzusehen, daß ein Gleiten zwischen der Walze und dem Rohr dann nicht auftritt, wenn zwischen dem Luftdruck p_1 (Bild 3.13 und 3.15) — der zur Hublänge L_1 gehört — und dem Walzdruck $P = P_{gl(GZ=j)}$ (Abschnitt 4.2) am Ende der Gleitzone die folgende Gleichheit besteht:

$$2\mu \cdot \frac{P_{gl(GZ=j)}}{\beta_1} = p_1(KF) + R. \quad (3.44)$$

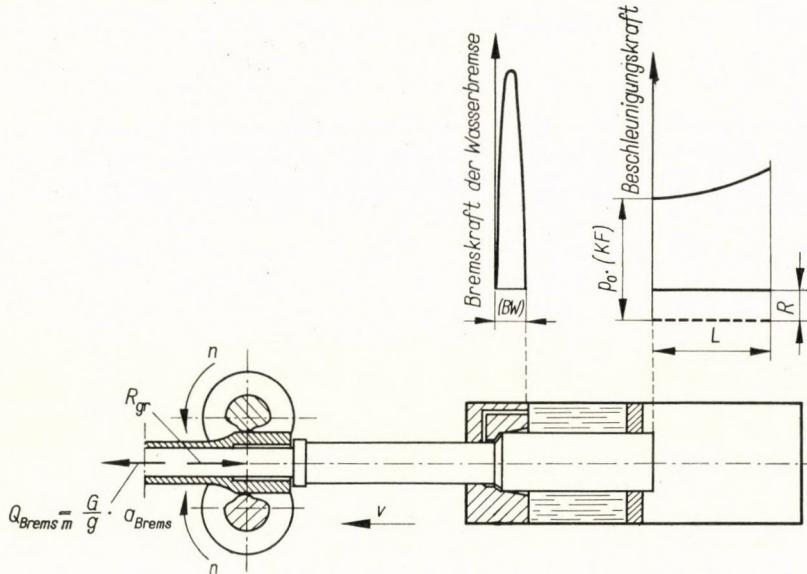


Bild 3.14. Die sich in der Angriffszone abspielenden Vorgänge

Dabei ist

$$\mu = 0,92 - 0,0005 t - 0,056 v \geq 0,25, \quad (3.45)$$

die Reibungszahl zwischen Rohr und Walze [3.5], β_1 der Sicherheitsfaktor gegen Rutschen zwischen Rohr und Walze ($\beta_1 \approx 1,25$).

$$R \approx 2\mu_{gleit} \cdot G_\Sigma, \quad (3.46)$$

wobei R die bei der Bewegung der Massen (Walzgut + Dorn + Kolben + Abstreifring + Dornschloß + Verbindungskopf) auftretende Reibkraft; und $\mu_{gleit} \approx 0,1$.

Aus der Gleichung (3.44) ergibt sich die Größe des zur Hublänge L_1 gehörenden Luftdruckes zu

$$p_1 = \frac{1}{(KF)} \cdot \left(2\mu \frac{P_{gl(GZ=j)}}{\beta_1} - R \right). \quad (3.47)$$

3.3.2. Berechnung der Hublänge

Die ganze Hublänge setzt sich aus drei Teilen zusammen:

$$L = L_1 + L_2 + L_3. \quad (3.48)$$

L_1 bedeutet den Teil der Hublänge, bei dem die beweglichen Teile der Zuführvorrichtung von den Walzen zurückgeschoben werden, mit anderen Worten, während des Zurücklegens der Hublänge L_1 bewegt sich das Walzgut entlang der dem Abrollradius entsprechenden Bogenlänge ohne zu gleiten.

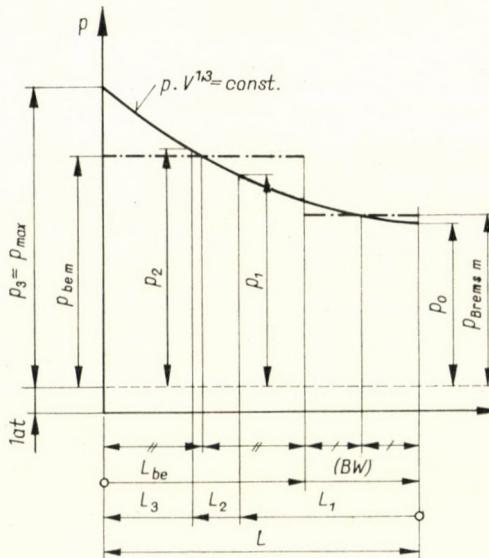


Bild 3.15. Zustandsänderung im Luftzyylinder

Die Walzen bewegen sich zusammen mit dem Walzgut während der Streck- und Glättzone, ferner in der Angriffszone. Die Walzen greifen das gelochte Walzgut vor einer Ebene, die durch die Walzmittelpunkte gelegt wird (Bild 1.3). Der zum Berührungs punkt gehörende Zentriwinkel ist der Angriffswinkel α_{Angr} .

Auf Grund von Angaben aus der Literatur [3.6] und aus der Praxis kann man mit guter Annäherung schreiben:

$$\hat{\alpha}_{Angr} \approx \frac{3m}{\varrho_{rst}} \quad [\text{im Bogenmaß}]. \quad (3.49)$$

Zentriwinkel des Walzen-Glättprofils, Gleichung (1.1):

$$\hat{\alpha}_{gl} = \frac{(GZ)m\lambda}{\varrho_{rgl}} \quad [\text{im Bogenmaß}]. \quad (3.50)$$

Dementsprechend ist die zum Gleichlauf gehörende Bogenlänge, wenn der Zentriwinkel des Walzen-Streckprofils α_{st} ist:

$$L_1 = \varrho_r (\hat{\alpha}_{st} + \hat{\alpha}_{gl} + \hat{\alpha}_{Angr}). \quad (3.51)$$

Im zweiten Teil der Hublänge (L_2) geben die Walzen das umgeformte Rohr frei. Mit Hilfe der foronomischen Kurve kann der Teil L_2 der Hublänge berechnet werden, sofern angenommen wird, daß in der Zone des Loslassens die Geschwindigkeit der beweglichen Teile als Funktion der Zeit einen parabolischen Charakter hat (Bild 3.16):

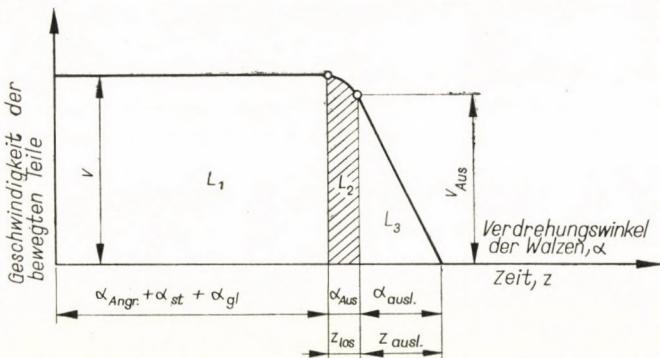


Bild 3.16. Geschwindigkeitsänderung in der Zone des Loslassens

$$L_2 = \frac{z_{los}}{3} (2v + v_{Aus}). \quad (3.52)$$

In der Gleichung (3.52) bedeutet z_{los} die für die Zurücklegung der Hublänge L_2 erforderliche Zeit, die aus der Drehzahl der Walzen ($n[1/\text{min}]$) und aus dem zur Zone des Loslassens gehörenden Zentriwinkel (α_{Aus} [Grad]) bestimmt werden kann:

$$z_{los} = \frac{60}{n} \cdot \frac{\alpha_{Aus}}{360} = \frac{\alpha_{Aus}}{6n}. \quad (3.53)$$

Der Freigabewinkel (α_{Aus}) ist eine Funktion der elastischen Formänderung der Walze, des Walzengerüsts usw. und der Änderung des Walzprofils nach dem Glättkaliber.

Die in der Gleichung (3.52) enthaltene Größe v bedeutet die Geschwindigkeit der bewegten Teile zu Beginn des Hubabschnittes L_2 (Walzgeschwindigkeit):

$$v = \frac{2\varrho_{rgl} \cdot \pi n}{60} \quad [\text{m/sec}] \quad (3.54)$$

und v_{Aus} die Geschwindigkeit der bewegten Teile nach Zurücklegung der Teilstrecke des Hubes L_2 (Geschwindigkeit des Loslassens). Die Größe der Geschwindigkeit v_{los} kann mit Hilfe des Impulssatzes bestimmt werden:

$$v_{Aus} = v - \frac{\mu P_{gl(GZ=j)} \cdot z_{los}}{\beta_1 \left(\frac{G_\Sigma}{g} \right)}. \quad (3.55)$$

Im dritten Teil der Hublänge (L_3) bewegen sich die von den Walzen freigegebenen beweglichen Teile infolge ihrer Trägheit entgegen die Kolbenkraft des Luftzylinders und entgegen die Reibung weiter. Die Hublänge L_3 , die zum Abbremsen der mit der Geschwindigkeit v_{Aus} sich bewegenden Teile gehört, kann aus dem Arbeitssatz bestimmt werden:

$$L_3 = \frac{\left(\frac{G_\Sigma}{g} \right) v_{Aus}^2}{2,4 p_1(KF) + 2R}, \quad (3.56)$$

wobei der auf den Kolben wirkende mittlere Luftdruck während des Hubabschnittes L_3 annähernd $(1,2 \cdot p_1)$ beträgt.

Zur Bestimmung der Hublänge wird die Walzendrehzahl benötigt. Die Drehzahl kann jedoch erst in Kenntnis der Größe der Hublänge bestimmt werden. Bei Berechnung der Gleichungen (3.53) und (3.54) kann die Drehzahl nach folgender Erfahrungsformel angenommen werden:

$$n_{auf} = \frac{25,8 (360 - \alpha_{st} - \alpha_{gl} - \alpha_{Angr})}{G_\Sigma} \cdot (56 - 4\delta_2) \quad [1/min], \quad (3.57)$$

wobei α_{st} , α_{gl} und α_{Angr} in Grad, G_Σ in kp und δ_2 in mm eingesetzt werden müssen.

3.3.3. Vorgänge, die sich in der Zone der Zuführung abspielen

Wie es bereits am Anfang des Abschnitts 3.3 erwähnt wurde, muß wegen der Sicherheit die Reibkraft (R_{gr}), die zwischen Rohr und Dorn auftritt, immer größer sein als das Maximum der auf das Rohr wirkenden Brems-(Trägheits)-kraft (Bild 3.14):

$$R_{gr} \geq Q_{Brems\ max}. \quad (3.58)$$

Durch Einführung des Sicherheitsfaktors (β_2) gegen das Rutschen am Dorn ($\beta_2 \approx 1,25$):

$$R_{gr} = \beta_2 Q_{Brems\ max}. \quad (3.59)$$

In Wirklichkeit ist die Bremskraft in der Wasserbremse entlang des Bremsweges veränderlich (Bild 3.17). Das Verhältnis vom Maximum der auftretenden Bremskraft zur mittleren Bremskraft $Q_{\text{Brems } m}$ kann als Gütegrad ($Gü$) der Wasserbremse bezeichnet werden:

$$(Gü) = \frac{Q_{\text{Brems max}}}{Q_{\text{Brems } m}}. \quad (3.60)$$

Man muß sich bemühen, die Wasserbremse so auszustalten, daß bei ihr die Bremskraft annähernd konstant sei. Eine Wasserbremse ist daher um

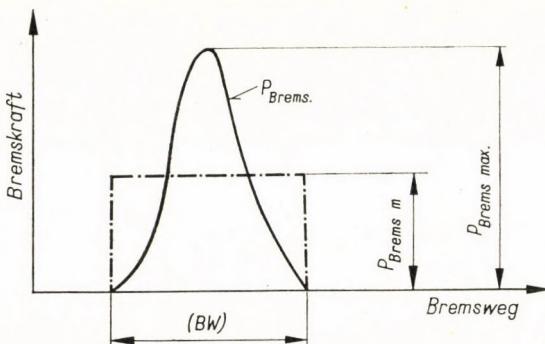


Bild 3.17. Änderung der in der Wasserbremse auftretenden Bremskraft

so besser, je mehr das ($Gü$) sich dem Wert von 1 nähert. In ausgeführten Wasserbremsen ist nach Versuchswerten

$$(Gü) \approx 2. \quad (3.61)$$

Nach dem Bild 3.17 ändert sich die Bremskraft, und damit die Verzögerung der sich bewegenden Teile entlang des Wasserbremsweges. Bei der Berechnung der Bewegungskennzahlen kann man nach Bild 3.18 mit einer konstanten Verzögerung ($a_{\text{Brems } m}$) rechnen. Beim Bremsen besteht folgendes Gleichgewicht der auf das gepligte Walzgut wirkenden mittleren Kräfte:

$$Q_{\text{Brems } m} = \frac{G}{g} a_{\text{Brems } m}, \quad (3.62)$$

wo $Q_{\text{Brems } m}$ die während des Bremsens ständig auf das Walzgut wirkende fiktive Bremskraft (Bild 3.17) und $a_{\text{Brems } m}$ die durch Kraft $Q_{\text{Brems } m}$ ausgeübte mittlere Verzögerung bedeutet.

Setzt man die Gleichungen (3.60) und (3.62) in die Gleichung (3.59) ein, so ist die bei der Wasserbremse erreichbare mittlere Verzögerung, bei der ein Rutschen des Walzgutes am Dorn nicht eintritt:

$$a_{\text{Brems } m} = \frac{gR_{gr}}{\beta_2(Gü) G}. \quad (3.63)$$

Zur numerischen Auflösung der Gleichung 3.63 ist der Wert von R_{gr} erforderlich. Die Bestimmungsmethode der Größe der Greifkraft wird im Kapitel 6 erläutert.

Die Beschleunigung, die im Beschleunigungsabschnitt der Zuführung verwirklicht werden kann, ist aus der Bedingung bestimmbar, wonach die Walze am Walzgut nicht rutschen darf. Dieser Umstand bedeutet, daß in der Arbeitszone, beim Zurücklegen des Teilhubes L_1 der im Luftzyylinder herrschende Luftdruck höchstens p_1 betragen darf.

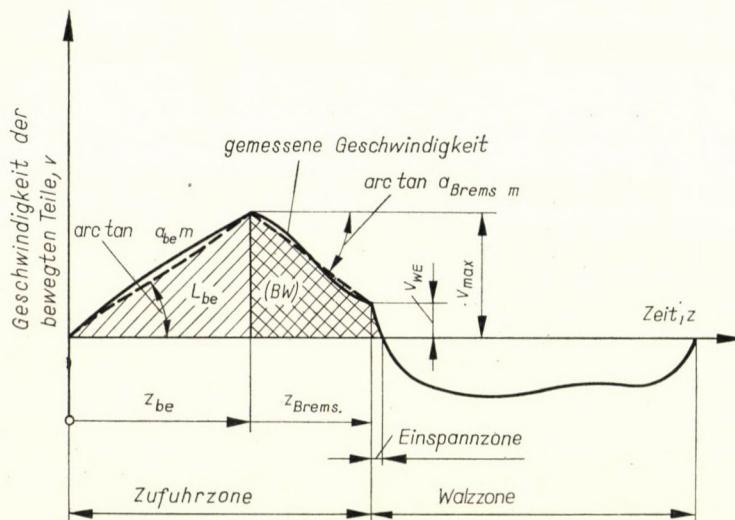


Bild 3.18. Geschwindigkeit der bewegten Teile in der Zuführzone

Nach unseren Berechnungen beträgt der mittlere beschleunigende Luftdruck ($p_{be\ m}$) im beschleunigten Abschnitt der Zuführung:

$$p_{be\ m} = (1,1 \div 1,3) p_1 \approx 1,2 p_1. \quad (3.64)$$

Die mittlere Beschleunigung ($a_{be\ m}$) kann aus dem Gleichgewicht der auf die bewegten Teile wirkenden Kräfte bestimmt werden. Die durch den mittleren Luftdruck entstandene Kolbenkraft muß die Trägheit und Reibung der sich bewegenden Teile überwinden:

$$p_{be\ m}(KF) = \left(\frac{G_\Sigma}{g} \right) a_{be\ m} + R. \quad (3.65)$$

Aus den Gleichungen (3.64) und (3.65) wird

$$a_{be\ m} = \frac{g}{G_\Sigma} [1,2 p_1(KF) - R]. \quad (3.66)$$

Die zwischen den Bewegungskennzahlen in der Arbeitszone bestehenden Beziehungen kann man aus den drei unabhängigen Gleichungen, die an Hand des Bildes 3.19 angeschrieben worden sind, bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} z_{be} &= \frac{v_{max}}{a_{be\ m}}, \\ z_{Brems} &= \frac{v_{max} - v_{WE}}{a_{Brems\ m}}, \\ L &= L_{be} + (BW) = \frac{1}{2} v_{max} z_{be} + \frac{1}{2} (v_{max} + v_{WE}) z_{Brems} \end{aligned} \right\}. \quad (3.67)$$

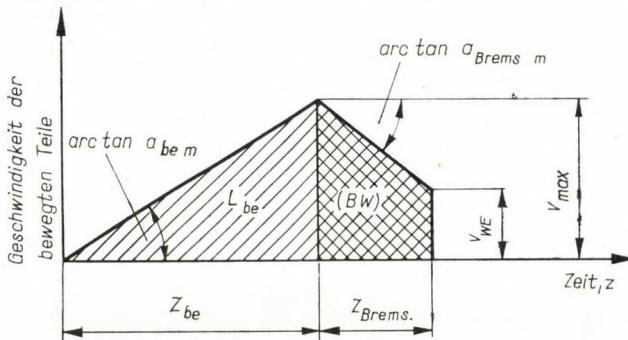


Bild 3.19. Vereinfachte Bewegungsverhältnisse der bewegten Teile

In dem aus drei Gleichungen bestehenden Gleichungssystem gibt es drei Unbekannte, wobei $a_{Brems\ m}$ aus der Gleichung (3.63) a_{tem} aus der Gleichung (3.66) und L aus der Gleichung (3.48) bestimmt werden können.

Die Bremsverhältnisse liegen an Hand von praktischen Angaben gewöhnlich so, daß die Geschwindigkeit der sich bewegenden Teile im Augenblick des Angriffs, am Ende des Wasserbremsweges (Bild 3.18)

$$v_{WE} \approx 1 \quad [\text{m/sec}] \quad (3.68)$$

ist.

Aus dem Gleichgewichtssystem (3.67) können die Werte von z_{be} , z_{Brems} und v_{max} ermittelt werden:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{[2 \cdot a_{Brems\ m} \cdot L + 1]}{\frac{a_{Brems\ m}}{a_{be\ m}} + 1}} \quad [\text{m/sec}], \quad (3.69)$$

$$z_{be} = \frac{1}{a_{be\ m}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a_{Brems\ m} \cdot L + 1}{\frac{a_{Brems\ m}}{a_{be\ m}} + 1}} \quad [\text{sec}], \quad (3.70)$$

$$z_{\text{Brems}} = \frac{1}{a_{\text{Brems}m}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot a_{\text{Brems}m} \cdot L + 1}{\frac{a_{\text{Brems}m}}{a_{\text{be}m}} + 1}} - 1 \right) \quad [\text{sec}] . \quad (3.71)$$

Aus den errechneten Werten der Bewegungskennzahlen kann die Drehzahl der Pilgerwalzen bestimmt werden. Die Drehzahl der Pilgerwalzen muß nämlich so groß sein, daß während der Zeit der Zuführung (Bild 3.18: $z_{\text{be}} + z_{\text{Brems}}$) die Walzen eine Drehbewegung um einen Winkel α_{zuf} ausführen:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{zuf}} &= \frac{z_{\text{be}} + z_{\text{Brems}}}{60/n}, \\ n_{\text{ber}} &= \frac{\alpha_{\text{zuf}}}{6 \cdot (z_{\text{be}} + z_{\text{Brems}})} \quad [1/\text{min}], \end{aligned} \quad (3.72)$$

wobei

$$\alpha_{\text{zuf}} = 360 - (\alpha_{\text{Angr}} + \alpha_{\text{st}} + \alpha_{\text{gl}} + \alpha_{\text{Aus}} + \alpha_{\text{ausl}}) \quad [\text{Grad}] . \quad (3.73)$$

ist.

Die Winkelverdrehung der Walze in der Arbeitszone während der Zeit des freien Auslaufs (α_{ausl} , [sec]) ist:

$$\alpha_{\text{ausl}} = \frac{360}{60/n} z_{\text{ausl}} = 6n z_{\text{ausl}} \quad [\text{Grad}] . \quad (3.74)$$

Laut dem Bild 3.16 ist

$$\alpha_{\text{ausl}} = 12n \frac{L_3}{v_{\text{Aus}}} \quad [\text{Grad}] . \quad (3.75)$$

Bei der Drehzahlbestimmung an Hand der Gleichung (3.72) wurde für dieselbe Drehzahl auf Grund der Gleichung (3.57) ein Näherungswert angenommen. Wenn die durch die Gleichung (3.72) errechnete Drehzahl mit der angenommenen nicht übereinstimmt, so muß die Berechnung mit einer korrigierten Drehzahl wiederholt werden:

$$n = \frac{n_{\text{auf}} + n_{\text{ber}}}{2}, \quad (3.76)$$

Bei genauer Kenntnis der Walzendrehzahl ergibt sich die Länge der Wasserbremse an Hand des Bildes 3.19 zu

$$(BW) = \frac{v_{\text{max}}^2 - v_{\text{WE}}^2}{2 a_{\text{Brems}m}} . \quad (3.77)$$

Wenn man die Gleichungen (3.68) und (3.69) in die Gleichung (3.77) einsetzt, ergibt sich die Länge der zu verwendenden Wasserbremse:

$$(BW) = \frac{1}{2 a_{\text{Brems}m}} \cdot \left(\frac{2 a_{\text{Brems}m} \cdot L + 1}{\frac{a_{\text{Brems}m}}{a_{\text{be}m}} + 1} - 1 \right). \quad (3.78)$$

3.4. Bestimmung des maximalen Streckkoeffizienten

Der anwendbare maximale Streckkoeffizient kann aus der Festigkeitsanalyse des Walzwerks bestimmt werden.

Der Streckkoeffizient ist dem auftretenden Walzdruck proportional. Die obere Grenze des Walzdruckes (P_{\max}) wird durch die Festigkeit der Walzwerksbauteile bestimmt. Der größte Walzdruck tritt in der Position »b« des Walzens (P_b) auf, daher beträgt bei einem gegebenen Walzwerk der anwendbare größte Walzdruck (dessen Ausnutzung im Interesse des wirtschaftlichen Walzens liegt):

$$P_{\max} = P_b. \quad (3.79)$$

Nach Abschnitt 4.1.2 ist

$$P_b = k_{mb} \cdot f_b = k_f \left(1 + C \mu \frac{l_{db}}{\delta_2} \sqrt[4]{v} \right) 0,85 \frac{D_2 l_{db}}{\cos \gamma_{gl \max}}. \quad (3.80)$$

Wenn man in die Gleichung (3.80) die Gleichungen (3.79) und (3.33) einsetzt, und die Gleichung dann ordnet:

$$\lambda_{\max} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4 C \mu P_{\max} \sqrt[4]{v} \cos \gamma_{gl \max}}{0,85 \delta_2 D_2 k_f}}}{C \mu \sqrt[4]{v} \frac{m_{\max}}{\delta_2}}. \quad (3.81)$$

Sollte der mit Hilfe Gleichung (3.81) bestimmte Streckkoeffizient wesentlich von dem λ -Wert abweichen, der zur Berechnung des maximalen Vorschubs, und damit zur maximalen Drehzahl angenommen wurde, dann muß die Berechnung von m_{\max} und n_{\max} mit dem Mittelwert der angenommenen und mit Hilfe der Gleichung (3.81) errechneten Streckkoeffizienten wiederholt werden, und hinterher ist der Streckkoeffizient mit den korrigierten m_{\max} - und n_{\max} -Werten erneut zu errechnen. Diese Berechnung muß so lange wiederholt werden, bis die angenommenen und berechneten Werte von λ_{\max} einander entsprechend nahe liegen.

3.5. Maximale Leistungsfähigkeit des Walzwerks

Die theoretische Leistungsfähigkeit (bezogen auf die reine Walzzeit) beträgt:

$$U = 6 \cdot 10^{-2} \lambda mnq \quad [\text{kp/st}], \quad (3.82)$$

wo q [kp/m] das Metergewicht des gepilgerten Rohres, m , n und λ beim Walzen des gegebenen Rohres die zusammengehörenden Werte des Vorschubs [mm/Umdrehung], der Walzendrehzahl [$1/\text{min}$] und des Streckkoeffizienten bedeuten.

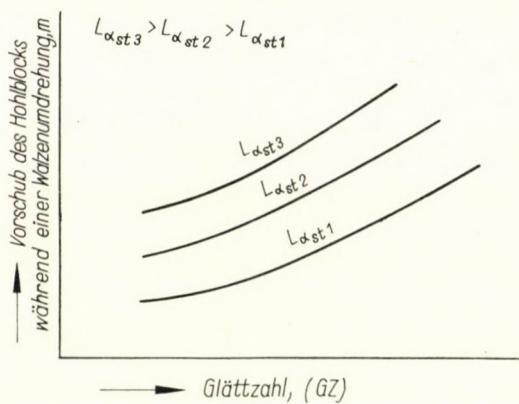


Bild 3.20. Vorschubänderung des Walzgutes als Funktion der Glättzahl und der Streckzonenlänge

Die beim Walzen verwendeten technologischen Kennzahlen sollen von der Art sein, daß mit ihnen die in der Zeiteinheit hergestellte Rohrmenge U ein Maximum ergebe. Im Falle eines gegebenen Rohres (q ist konstant) müssen wir daher das Maximum des $(mn\lambda)$ Produkts in Abhängigkeit von den technologischen Kennzahlen aufsuchen.

Zu Bestimmung der anzuwendenden technologischen Kennzahlen, mit denen die maximale theoretische Leistungsfähigkeit des Walzwerks erreicht werden soll, muß man nachfolgende Berechnungen durchführen:

Beim Walzen mit den gegebenen Toleranzen des Rohres muß der maximale Rohrvorschub je Umdrehung in bezug auf verschiedene Glättzahlen bestimmt werden (Bild 3.20).

Die maximale Walzendrehzahl, die zur vorher berechneten Glättzahl und zum Rohrvorschub (eigentlich zur Bogenlänge des Streckens) gehört, muß ebenfalls bestimmt werden (Bild 3.21).

Auf Grund der Bilder 3.20 und 3.21 kann man das zur gleichen Glättzahl und zur gleichen Streck-Bogenlänge gehörende Produkt aus dem maximalen Rohrvorschub und der maximalen Walzendrehzahl, d. h. die maximale Vor-

wärtsgeschwindigkeit vom Schlitten der Zuführvorrichtung (Bild 3.22) bestimmen. Das Produkt ($m \cdot n$) kann durch eine Fläche dargestellt werden; diese Fläche hat bei einer bestimmten Glättzahl und Streck-Bogenlänge ein Maximum (Bild 3.23). Diese Fläche gehört zu einem konstanten Streckkoeffizienten. Mit

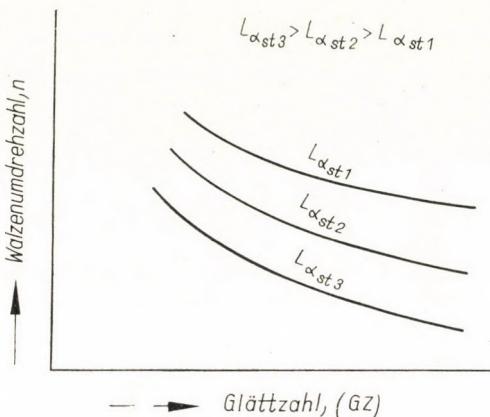


Bild 3.21. Änderung der Walzendrehzahl in Funktion der Glättzahl und der Streckzonenlänge

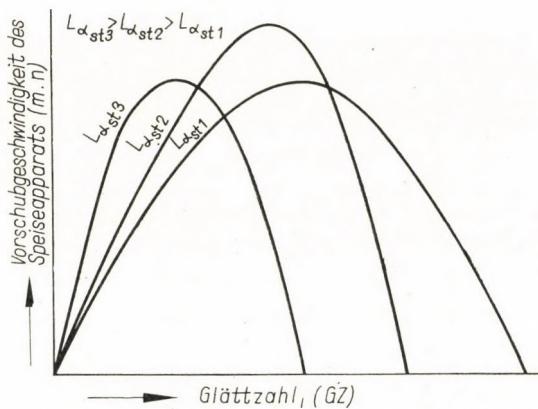


Bild 3.22. Vorwärtsgeschwindigkeit des Zuführschlittens in Abhängigkeit von der Glättzahl und der Streckzonenlänge

der Vergrößerung des Streckkoeffizienten wächst auch die theoretische Leistungsfähigkeit. Der Streckkoeffizient wird durch die Festigkeit der Bauteile des Walzwerks bestimmt (Kapitel 3.4), in dieser Weise hängt der Streckkoeffizient von den Walzenabmessungen ab. Die Vergrößerung des Walzendurchmessers erhöht zwar durch die Vergrößerung des Streckkoeffizienten die Leistungsfähigkeit des Walzwerks, über einen gewissen Walzendurchmesser hinaus wird jedoch diese Erhöhung von kleinerem Ausmaß. Die übertriebene Vergrößerung des Walzendurchmessers erhöht im starken Maße den Kraft- und Momentenbedarf des Walzwerks, daher ist aus wirtschaftlichen Gründen

die Wahl eines übertrieben großen Walzendurchmessers nicht gerechtfertigt. Der wirtschaftliche Bestwert des Walzendurchmessers ist dort zu suchen, wo die Richtungstangente der Funktion $mn = f(D_0)$ sich vermindert. Nach eigenen Berechnungen und nach Angaben des Schrifttums [3.3, 3.6] kann zur

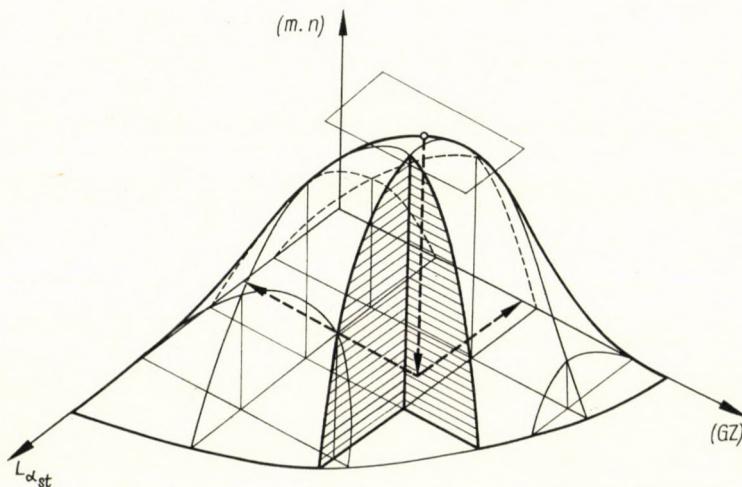


Bild 3.23. Bestimmung der optimalen Glättzahl und der optimalen Streckzonenlänge

Errechnung des Nenndurchmessers der Pilgerwalze folgende empirische Beziehung verwendet werden:

$$D_0 = 1,25 D_2 + 550 \text{ [mm]}, \quad (3.83)$$

wo D_2 [mm] den Außendurchmesser des gepilgerten Rohres bedeutet.

Aus Bild 3.23 geht es hervor, welche Glättzahl und welche Streck-Bogenlänge beim Pilgern eines gegebenen Rohres mit gegebenen Toleranzen angewendet werden sollen, damit die theoretische Leistungsfähigkeit des Walzwerks ein Maximum sei. Die übrigen technologischen Kennziffern kann man als Funktion dieser beiden grundlegenden Größen bestimmen.

(Fortsetzung folgt)

CALCULATING PRINCIPLES FOR THE DESIGN OF PILGRIM'S SEAMLESS TUBE ROLLING MILLS, PART I

A. GELEJI, M. VOITH, J. MECSEKI and L. TÓTH

SUMMARY

In making seamless tubes having diameters within the range of 4 to 16 inches, the process of rolling carried out according to the Mannesmann principle becomes in our times the most preferred method. Thus, everywhere in the world the solution of technical-economical problems when asking how to increase productivity of such rolling trains becomes day by

day more important, for existing plants as well as for those just being planned. This is well proved by the ever increasing number of papers dealing with this question within the frame of international technical periodicals and also of patent applications. Productivity of pilgrim's rolling trains is proportional to the speed (n) of rolls and the advance (m) per rotation. The maximum of production is determined by the special maxima of both speed and advance when they are in harmonic correlation. By a thorough analysing of the interdependence between speed and advance, in this paper the corresponding values of maxima are determined by which the quality requirements of the tubes can be reached through an undisturbed rolling process.

FONDEMENTS DU CALCUL POUR LE DIMENSIONNEMENT DES LAMINOIRES A PAS DE PÈLERIN, PARTIE I

A. GELEJI, M. VOITH, J. MECSEKI et L. TÓTH

RÉSUMÉ

Dans la fabrication moderne des tubes d'acier de 4 à 16 pouces de diamètre, on fait à nouveau appel au procédé de laminage Mannesmann (à pas de pèlerin). Aussi la solution des problèmes techniques et scientifiques relatifs à l'accroissement de la capacité des laminoirs à pas de pèlerin existants ou en projet revêt-elle une importance grandissante à l'échelle mondiale. Les nombreuses publications consacrées à ce sujet qui paraissent actuellement dans la littérature spéciale, ainsi que plusieurs brevets viennent à l'appui de cette constatation. La capacité de production des laminoirs à pas de pèlerin est proportionnelle au nombre de tours (n) des cylindres et à l'avance par tour (m). Le rendement maximum du train se trouve déterminé par les maxima coordonnés du nombre de tours et de l'avance. L'étude analysant en détail le rapport réciproque entre l'avance et le nombre de tours, détermine leurs maxima assurant les conditions qualitatives et la marche normale du laminage.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПИЛЬГЕРНЫХ СТАНОВ, ЧАСТЬ I

А. ГЕЛЕИ, М. ВОЙТ, Й. МЕЧЕКИ и Л. ТОТ

РЕЗЮМЕ

В области современного производства стальных труб диам. 4—16 дюймов вновь на первый план выступил пильгерный метод производства (маннесмановский метод). Вследствие этого решение технико-экономических задач по повышению производительности пильгерных прокатных станов во всем мире приобретает все большее значение. Это доказывается большим числом публикаций, занимающихся данной областью и публикуемых в наши дни в международной технической литературе, а также рядом патентов. Производительность пильгерных прокатных станов пропорциональна числу оборотов прокатных валков (n) и подача за оборот (m). Максимум производительности определяется максимумами числа оборотов и подачи, находящимися между собой в согласии. Детальным анализом взаимодействия между подачей и числом оборотов работы определяет те взаимозависимые максимумы, которые обеспечивают заданные качественные требования на трубы и бесперебойность процесса прокатки.

ANALYSIS OF GROUND WORM SURFACES

L. HUSZTHY

TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC (HUNGARY)

[Manuscript received March 1, 1965]

The equation that describes the worm surface is set up by analytical methods. The case dealt with is characterized by a worm that is ground by means of a grinding wheel having a trapezoid as meridional section. The grinding wheel is supposed to perform a helicoidal movement around the worm axis that is assumed to stand at a fixed position, whereby, during this movement, the angle enclosed by the worm axis and the tool axis is constant and so is the normal transversal line of these axes. The moving tool generates a bundle of surfaces; the finished surface of the worm is but the enveloping surface of these generated surfaces. The equation of the worm surface can be used as a suitable means for analysing the face-section, the axial section and the sections parallel to the axial plane. The method expounded is based on the elements of the vector and tensor calculus.

I. Introduction

Here a calculus will be demonstrated of how to determine the face-section, the axial section and the sections in planes parallel to the axial plane of a ground worm surface. The sectional curves are plotted after the coordinates of the contour-points of the sections had been computed from the equations that are established by means of the elements of the vector and tensor calculus.

II. General scheme; course of the calculus

The relative position of the worm to be ground and the tool is shown in Fig. 1. The tool is a grinding wheel the meridional section of which is of trapezoidal shape. Let the data be given:

d pitch diameter of the worm;

γ lead angle of the worm helice;

δ diameter of the pitch cylinder of the tool;

α pressure angle in the meridional section of the tool;

s lead of the worm helice; although it is determined by d and γ , this symbol is used for simplification.

The calculus is explained in a three dimensional system of rectangular coordinates (Fig. 2). The z -axis of the system is represented by the worm axis.

The surface to be analysed is considered as the result of a generating helical movement of the tool that rotates around the worm assumed to be in a fixed position.

The trapezoidal tool-section being symmetrical, it is sufficient to analyse the surface that is generated only by one side of the tool profile.

In the course of our calculation the following equations are set up:

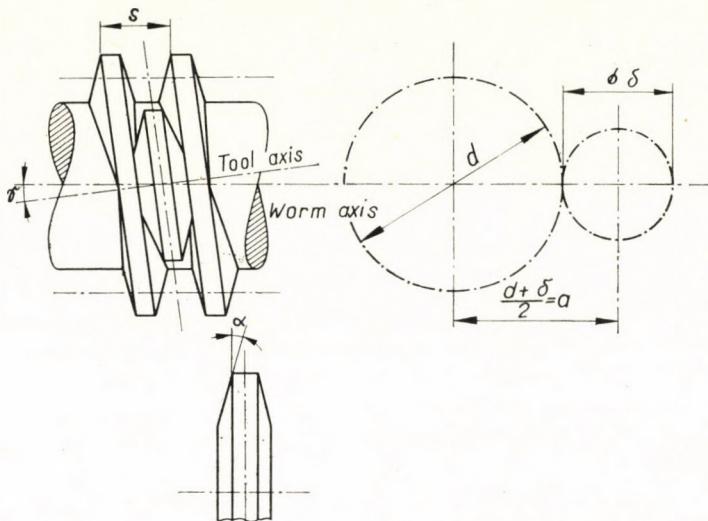


Fig. 1

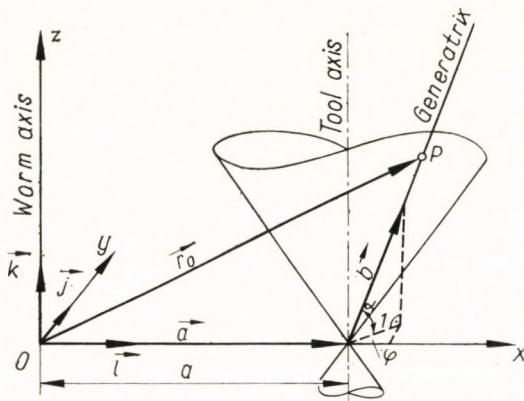


Fig. 2

Equation of the tool surface when the tool is in a position in which its axis is parallel to the z -axis (the worm axis);

equation of the tool surface when the tool is in a position in which its axis is inclined at an angle γ to the z -axis;

equation of the tool surface when the tool rotates around the worm axis;

equation of the ground surface;

equations that describe the profile curves of the single sections of the ground surface.

III. Equation of the worm surface

1. Equation of the tool surface when the tool is in a position in which its axis is parallel to the z-axis

According to Fig. 2 the worm axis and the tool axis are parallel to each other and their distance is:

$$\frac{\delta + d}{2} = a$$

as denoted in Fig. 1.

In what follows the "lower" half-cone surface of the grinding wheel profile will be considered, and only that portion of the worm surface which is generated by this "lower half-cone" will be analysed.

Let the tip of the cone be positioned on the x -axis. The angle α is to be understood as shown in Fig. 1.

Coordinated to some optional point P on the cone surface, let the local vector be denoted by \mathbf{r}_o , whereby the subscript " $_o$ " refers to a cone-surface in fixed position.

Further on, let the local vector that is coordinated to the tip of the cone surface be denoted by \mathbf{a} , and the directional vector of the generatrix that contains point P be denoted by \mathbf{b} , so we have:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

where the theoretic range of the scalar parameter λ is

$$-\infty < \lambda < +\infty.$$

While the parameter assumes the whole range, the end point of the vector \mathbf{r}_o takes its place at all the points of the chosen generatrix.

Vector \mathbf{a} is positioned on the x -axis, wherefore its coordinates are:

$$\mathbf{a} = \{a; 0; 0\}.$$

As for the vector \mathbf{b} , it is advisable to let its xy plane projection have the unit-length. Let the angle of this projection with the x -axis be denoted by φ , so it is:

$$\mathbf{b} = \{\cos \varphi; \sin \varphi; \tan \alpha\}.$$

Let us substitute the coordinates of the vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} into the explicit equation of \mathbf{r}_o , thus we obtain as *the equation of the tool surface the axis of which is parallel to the z-axis in fixed position*:

$$\mathbf{r}_o = \{a + \lambda \cos \varphi; \lambda \sin \varphi; \tan \alpha\}. \quad (1)$$

*2. Equation of the tool surface when the tool is in a position
in which its axis is inclined at an angle γ to the z-axis*

The tool should be revolved at an angle γ to the z-axis, around a straight line as the axis of rotation that is parallel to the x-axis and passes through the point Q , as shown in Fig. 3. Our calculus is simplified when the whole tool

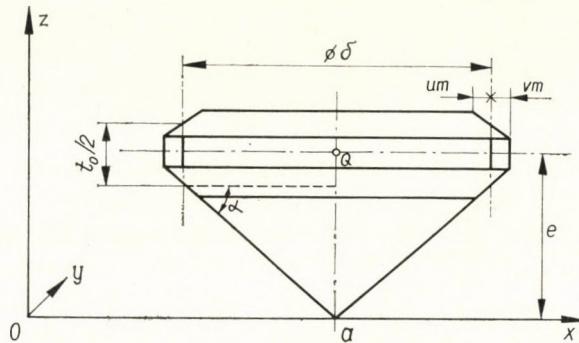


Fig. 3

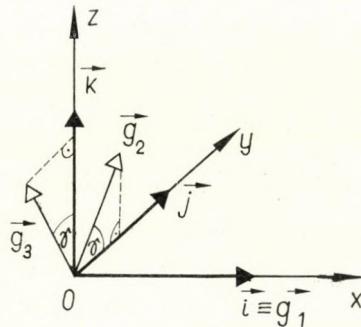


Fig. 4

surface is shifted in a parallel displacement to the z-axis, at a distance e (according to Fig. 3); so the point Q becomes positioned on the x -axis, and the revolving angle γ refers to the x -axis. According to Fig. 3 we have:

$$e = \frac{\delta}{2} \tan \alpha + \frac{t_0}{4} \quad (2)$$

where t_0 is the tool-pitch.

In the shifted position we obtain for the tool surface:

$$\vec{r}_0 = \{a + \lambda \cos \varphi; \lambda \sin \varphi; \lambda \tan \alpha - e\}. \quad (3)$$

The revolving operation is produced by a tensor G that causes all the vectors of the space to rotate at the angle γ around the x -axis; the sense of *counter-clockwise rotation* is called positive when looked at from the $+x$ -axis.

By the tensor \mathbf{G} , the vectors $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ (according to Fig. 4) are formed from the unit vectors $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{g}_1 = \{1; 0; 0\} \equiv \mathbf{i},$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{g}_2 = \{0; \cos \gamma; \sin \gamma\},$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{g}_3 = \{0; -\sin \gamma; \cos \gamma\}.$$

The scalar components of the vectors $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ are members in the columns of the matrix of the rotating tensor \mathbf{G} , wherefore this matrix can be set up as follows:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Equation of the tool surface when the tool is in a position in which its axis is inclined at an angle γ to the z-axis:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\gamma = \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a + \lambda \cos \varphi \\ \lambda \sin \varphi \\ \lambda \tan \alpha - e \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a + \lambda \cos \varphi \\ \lambda \cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot (\lambda \tan \alpha - e) \\ \lambda \sin \gamma \cdot \sin \varphi + \cos \gamma \cdot (\lambda \tan \alpha - e) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and returning to the vectorial form as usual:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\gamma &= \{a + \lambda \cos \varphi; \\ &\quad \lambda (\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) + e \sin \gamma; \\ &\quad \lambda (\sin \gamma \cdot \sin \varphi + \cos \gamma \cdot \tan \alpha) - e \cos \gamma\}. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Equation of the tool surface when the tool describes a helical movement around the worm in fixed position

Let the tool surface that is determined by equation (5) make a helical movement around the worm axis. This movement can be conceived as being composed of a rotation around the z-axis, and a longitudinal displacement parallel to the z-axis. During this movement both the angle γ formed by the worm axis and the tool axis, and the normal transversal distance a between the two axes are constant.

Assuming a unit-angular speed $\omega = 1$, the speed of the displacement parallel to the z -axis is:

$$c = \frac{s}{2\pi}.$$

The two movements (rotation, and longitudinal displacement) should be chosen in such a way, that when making a right-hand helical movement the displacement would be carried out upwards along the z -axis.

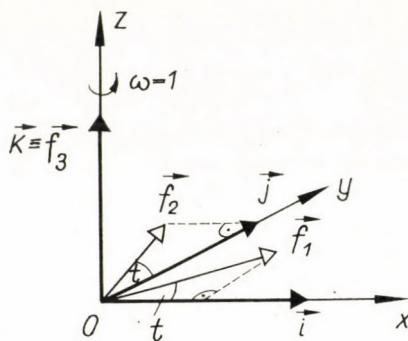


Fig. 5

The rotation around the z -axis, is generated by the tensor \mathbf{F} . Consequently, the vectors in three dimensions are rotating at an angle t , around the z -axis, during a time t ; i.e. the unit vectors $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ are transformed into $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ as can be seen in Fig. 5

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \mathbf{i} &= \mathbf{f}_1 = \{\cos t; \sin t; 0\}, \\ \mathbf{F} \mathbf{j} &= \mathbf{f}_2 = \{-\sin t; \cos t; 0\}, \\ \mathbf{F} \mathbf{k} &= \mathbf{f}_3 = \{0; 0; 1\} = \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Accordingly, the matrix of tensor \mathbf{F} is:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Thus, the equation of the tool surface when rotating around the z -axis is:

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_y = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + \lambda \cos \varphi \\ \lambda (\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \tan \alpha) + e \sin \gamma \\ \lambda (\sin \gamma \sin \varphi + \cos \gamma \tan \alpha) - e \cos \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a + \lambda \cos \varphi) \cos t - [\lambda (\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \tan \alpha) + e \sin \gamma] \sin t \\ (a + \lambda \cos \varphi) \sin t + [\lambda (\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \tan \alpha) + e \sin \gamma] \cos t \\ \lambda (\sin \gamma \sin \varphi + \cos \gamma \tan \alpha) - e \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Now, taking into account the additional longitudinal movement, i.e. the axial displacement equaling $(s/2\pi)t$ during time t in the direction z , so we have for the *tool surface that makes a helical movement around the z-axis*:

$$\mathbf{r} = \{(a + \lambda \cos \varphi) \cos t - [\lambda (\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \tan \alpha) + e \sin \gamma] \sin t; \\ (a + \lambda \cos \varphi) \sin t + [\lambda (\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \tan \alpha) + e \sin \gamma] \cos t; \\ \lambda (\sin \gamma \sin \varphi + \cos \gamma \tan \alpha) - e \cos \gamma + s/2\pi t\}. \quad (7)$$

4. Equation of the ground worm surface

The equation of the ground surface is to be found as the enveloping surface of the surface-bundle determined by Equ. (7).

Taking into account an elementary variation of the independent variables denoted $d\varphi, dt$ and $d\lambda$, then the elementary variation of the vector \mathbf{r} that generates the surface of the moving tool, is

$$d\mathbf{r} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} d\varphi \\ dt \\ d\lambda \end{bmatrix}$$

where \mathbf{D} represents the derivated tensor of the vector \mathbf{r} . Denoting the components of vector \mathbf{r} by x, y, z , we obtain

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

At the points of the enveloping surface the vector $d\mathbf{r}$ is perpendicular to the normal vector \mathbf{n} of the surface bundle, whereby

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$$

further on, the local vectors of the surface-bundle and the enveloping surface are coincident wherefore

$$\mathbf{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (8)$$

Since \mathbf{n} is a vectorial product of two vectors, expression (8) is a mixed product; and because

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{r} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ dt \\ d\lambda \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} d\lambda; \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} d\lambda; \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} d\lambda \right\}, \end{aligned}$$

thus we can write in a form as a determinant for the mixed product (by applying the thesis of the decomposition of a determinant into a sum, and by exfactoring the common factor):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{r} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right) &= \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} d\lambda & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} d\lambda & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} d\lambda \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} \end{vmatrix} d\varphi + \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} \end{vmatrix} dt + \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \end{vmatrix} d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Now, both the 1st and the 3rd determinant equals zero, since two lines in each are identic. Accordingly, the enveloping surface is determined by the condition:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

at every optional value of dt except zero.

The single derivatives of the vector-components (7) are:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -(a + \lambda \cos \varphi) \sin t - [\lambda(\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) + e \sin \gamma] \cos t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\lambda \sin \varphi \cdot \cos t - \lambda \cos \gamma \cdot \sin \varphi \cdot \sin t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \cdot \cos t - (\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) \sin t;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (a + \lambda \cos \varphi) \cos t - [\lambda(\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) + e \sin \gamma] \sin t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\lambda \sin \varphi \cdot \sin t + \lambda \cos \gamma \cdot \cos \varphi \cdot \cos t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \cdot \sin t + (\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) \cos t;$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{s}{2\pi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \lambda \sin \gamma \cdot \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \sin \gamma \cdot \sin \varphi + \cos \gamma \tan \alpha.$$

Making use of these derivatives by substitution into the determinant (9) and after expounding we obtain:

$$\lambda = \frac{\left[\frac{s}{2\pi} \cot \gamma - a - \left(a \cot \gamma \cdot \tan \alpha + \frac{s}{2\pi} \tan \alpha \right) \sin \varphi + e \tan \alpha \cdot \cos \varphi \right] \cos^2 \alpha}{\cos \varphi}. \quad (10)$$

Denoting

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha \left(\frac{s}{2\pi} \cot \gamma - a \right) &= A ; \\ -\cos^2 \alpha \left(a \cot \gamma \tan \alpha + \frac{s}{2\pi} \tan \alpha \right) &= B ; \\ \cos^2 \alpha \cdot e \tan \alpha &= C\end{aligned}$$

or in a modified form:

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{2\pi} \cot \gamma - a \right) \cos^2 \alpha &= A \\ - \left(a \cot \gamma + \frac{s}{2\pi} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} &= B \\ \frac{e \cdot \sin 2\alpha}{2} &= C\end{aligned}\tag{11}$$

we can write

$$\lambda = \frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi}.\tag{12}$$

Further on, by substituting this expressions into Equ. (7), the decomposed form of the equation of the ground worm surface is:

$$\begin{aligned}x &= \left(a + \frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi \right) \cos t - \\ &\quad - \left[\frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi} (\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) + e \sin \gamma \right] \sin t , \\ y &= \left(a + \frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi \right) \sin t + \\ &\quad + \left[\frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi} (\cos \gamma \cdot \sin \varphi - \sin \gamma \cdot \tan \alpha) + e \sin \gamma \right] \cos t , \\ z &= \frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi} (\sin \gamma \cdot \sin \varphi + \cos \gamma \cdot \tan \alpha) - e \cos \gamma + \frac{s}{2\pi} t .\end{aligned}\tag{13}$$

IV. Various sections of the worm surface

The equation of one face-section of the worm surface is obtained, when we set up, with $z = 0$, the explicit equation of the parameter t from the third equation of (13), and after substitution of this value t into the first two equations.

In an analogous way, putting $y = 0$ in the 2nd equation in (13), we express the corresponding value of t (or $\tan t$), now let it be substituted into the 1st and 3rd equation, in order to find the axial cross section.

The sections parallel to the worm axis are found, when y is put as being a constant value.

V. Example

We determine the coordinates of some points of the axial section on the basis of the following main data:

for the worm — module $m = 10$, diameter quotient $q = 8$, number of starts $z = 4$;

for the tool — $\delta = 80$ mm, $\alpha = 20^\circ$.

Let us consider the working length of the tapered profile of the tool: according to Fig. 3 the projection of this length in direction x is $u \cdot m + v \cdot m$; consequently, the variation of the factor λ in equation (3) of the conical surface is limited within the range:

$$\left(\frac{\delta}{2} - um \right) \leq \lambda \leq \left(\frac{\delta}{2} + vm \right).$$

For the sake of simplicity, let us assume it to be:

$$u = v = 1,$$

from where

$$\frac{\delta}{2} - m \leq \lambda \leq \frac{\delta}{2} + m,$$

in concreto:

$$30 \leq \lambda \leq 50.$$

Now, all the coordinates of the section curve will be calculated as functions of φ ; accordingly, we have to determine the values (say φ_a and φ_b) belonging to the values of $\lambda_a = 30$ and $\lambda_b = 50$, respectively by using Equ. (12). Then, the coordinates are calculated for various φ values within the range of the above mentioned values φ_a and φ_b ; from Equ. (12) we can re-arrange:

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{(\lambda - C) A \pm B \sqrt{(\lambda - C)^2 - A^2 + B^2}}{(\lambda - C)^2 + B^2}. \quad (14)$$

Here follows the calculation of the constants wanted:

$$d = m \cdot q = 10 \cdot 8 = 80 \text{ mm},$$

$$a = \frac{d + \delta}{2} = \frac{80 + 80}{2} = 80 \text{ mm};$$

$$\tan \gamma = \frac{z}{q} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$\sin \gamma = \frac{\tan \gamma}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} = \frac{0,5}{\sqrt{1 + 0,25}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,4472,$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1,25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,8944,$$

$$\cot \gamma = \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{1}{0,5} = 2 ;$$

$$s = d\pi \tan \gamma = 80 \pi \cdot 0,5 = 40 \pi ;$$

$$\tan \alpha = \tan 20^\circ = 0,36397 ,$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 20^\circ = 0,93969^2 = 0,88302 ,$$

$$\sin 2 \alpha = \sin 40^\circ = 0,64279 ;$$

$$A = \left(\frac{s}{2\pi} \cot \gamma - a \right) \cos^2 \alpha = \left(\frac{40\pi}{2\pi} \cdot 2 - 80 \right) 0,88302 = - 35,3208 ,$$

$$B = - \left(a \cdot \cot \gamma + \frac{s}{2\pi} \right) \frac{\sin 2 \alpha}{2} = - \left(80 \cdot 2 + \frac{40\pi}{2\pi} \right) \frac{0,64279}{2} = - 57,8511 ;$$

$$e = \frac{\delta}{2} \tan \alpha + \frac{t_0}{4} = \frac{\delta}{2} \tan \alpha + \frac{m\pi}{4} = \frac{80}{2} \cdot 0,36397 + \frac{10\pi}{4} = 22,413 ;$$

$$C = \frac{e \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{22,413 \cdot 0,64279}{2} = 7,2034 .$$

From Equ. (14) we obtain: (with $\lambda_a = 30$)

$$\cos \varphi_a = - 0,97395 ,$$

(Of course, the calculus results in a second value, a positive one, too, for $\cos \varphi_a$: this alternative has to be disposed of, since, as is shown in Fig. 2, this would mean that the other side of the tool is also a machining side, which, of course, is a non-sense.)

$$\sin \varphi_a = \sqrt{1 - 0,97395^2} = \pm 0,22675 .$$

Employing Equ. (12) and taking $\sin \varphi > 0$,

$$\lambda_a = \frac{- 35,3208 - 57,8511 \cdot 0,22675 - 7,2034 \cdot 0,97395}{- 97,395} \approx \frac{- 55,45429}{- 0,97395} > 30 \quad (\text{no solution}) ;$$

taking $\sin \varphi < 0$,

$$\lambda_a = \frac{- 35,3208 + 57,8511 \cdot 0,22675 - 7,2034 \cdot 0,97395}{- 0,97395} \approx \frac{- 29,21881}{- 0,97395} = 30 .$$

Hence it follows:

$$\varphi_a = 180^\circ + \arccos 0,97935 = 193,09^\circ .$$

The same consideration leads to obtain the value of φ_b belonging to $\lambda_b (= 50)$:

$$\varphi_b = 180^\circ - \arccos 0,99234 = 172,92^\circ .$$

Replacing into the 2nd Equ. of (13)

$$y = 0$$

and according to (12):

$$\lambda = \frac{A + B \sin \varphi + C \cos \varphi}{\cos \varphi}$$

we obtain:

$$\tan t = \frac{-[\lambda(\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \tan \alpha) + e \sin \gamma]}{a + \lambda \cos \varphi} . \quad (15)$$

First, by employing Equ. (12), the values of the parameter λ , and then by employing Equ. (15) the values of $\tan t$, $\sin t$, $\cos t$ are calculated for some concrete values of φ within the already fixed interval between the limit values φ_a and φ_b . Finally, making use of the 1st and 3rd equations in (13) we obtain the values of the coordinates x and y .

All these results are gathered together in Tables I and II; making use of these values, in the diagram of Fig. 6 the profil of the axial section is plotted.

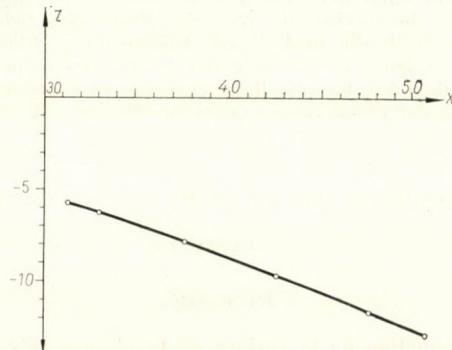


Fig. 6

Table I

φ	193,09°	190°	185°	180°	175°	172,92°
λ	30,00	32,87	37,59	42,52	47,72	50,00
$\tan t$	0,01861	0,00915	-0,02284	-0,08272	-0,18410	-0,24380
t	0,01861	0,00915	-0,02284	-0,08253	-0,18206	-0,23913
$\sin t$	0,01861	0,00915	-0,02284	-0,08243	-0,18105	-0,23685
$\cos t$	0,99982	0,99995	0,99973	0,99658	0,98346	0,97151

Table II

φ	193,09°	190°	185°	180°	175°	172,92°
x	50,79	47,63	42,56	37,61	33,01	31,27
y	-12,93	-11,69	-9,71	-7,83	-6,27	-5,77

REFERENCES

1. LIPKA, I.: Geometrie der Wölbung von Laufflächen an Wälzlagerringen. *Acta Techn. Hung.* **31** (1960), 359–390.

ANALYTISCHE UNTERSUCHUNG DER GESCHLIFFENEN SCHNECKENFLÄCHE

L. HUSZTHY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Untersuchung der geschliffenen Schneckenfläche erfolgt für den Fall, wenn die Schleifscheibe im Meridianschnitt als Trapez profiliert ist. Einfachheitshalber wird eine feststehende Schnecke, und eine um die Schneckenachse sich entlang einer Schraubenlinie bewegende Scheibe vorausgesetzt. Hierbei sind der Winkel den die Schneckenachse und die Scheibenachse einschließen und auch der transversal-normale Abstand ebenfalls unverändert. Während dieser Bewegung beschreibt die Werkzeugfläche eine Schar von Flächen, und die Schneckenfläche bildet sich als die umhüllende Fläche dieser Flächenschar. Die Gleichung der Schneckenfläche ist geeignet die wichtigsten Profilschnitte d. h. den Stirnschnitt, den Axialschnitt und die mit dem Axialen parallelen Schnitte zu analysieren. Das gesamte Beweisverfahren wird mit Hilfe der elementaren Vektoren-Tensoren Rechnungsweise durchgeführt.

EXAMEN ANALYTIQUE DE LA SURFACE D'UNE VIS RECTIFIÉE

L. HUSZTHY

RÉSUMÉ

L'étude établit l'équation de la surface de la vis par voie analytique. L'examen se rapporte au cas où la section méridienne de la meule est trapézoïdale. Autour de la vis supposée fixe, l'outil (la meule) décrit un trajet hélicoïdal, l'angle compris entre l'axe de la vis et celui de la meule, et la distance des axes restant constants. Au cours du mouvement, la surface de l'outil décrit une famille de surfaces et la surface de la vis usinée peut être produite comme l'enveloppe de cette famille de surfaces. L'équation de la surface de la vis sert à l'examen analytique des sections les plus importantes, telle que la section normale, la section axiale et les sections parallèles. La méthode présentée utilise les éléments du calcul vectoriel et tensoriel.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ШЛИФОВАННОЙ СПИРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Л. ХУСТИ

РЕЗЮМЕ

Уравнение спиральной поверхности в работе составлено аналитическим путем. Исследование рассматривает случай, когда продольное сечение шлифовального круга которым шлифована спиральная поверхность, имеет форму трапеции. Инструмент описывает винтовую линию вокруг оси, принятой в качестве закрепленной спирали, таким образом, что угол между осями спирали и инструмента, а также линия соприкосновения между поверхностью и шлифовальным кругом остаются постоянными. Инструмент при вращении описывает множество поверхностей, и поверхность обработанной спирали можно рассматривать как оболочку этого множества поверхностей. Уравнение спиральной поверхности позволяет аналитически исследовать важнейшие сечения, как то лобового, осевого и параллельных сечений. Изложенный метод пользуется элементами векторного и тензорного исчислений.

WAHL DER BETRIEBSCHARAKTERISTIKEN
DES LUFTVERDICHTERS
UND DES HAUTPLUFTBEHÄLTERS
AN EISENBAHNTRIEBFAHRZEUGEN
AUF GRUND DER BETRIEBSANFORDERUNGEN
TEIL II*

G. HELLER und L. ROSTA
UNGARISCHE STAATSBAHNNEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 1. Oktober, 1965]

V. Wahl der Parameter des Verdichters und des Hauptluftbehälters

Auf Grund der oben geschilderten Leitprinzipien können wir nun daran gehen, die konkreten Zusammenhänge, die als Grundlage der Dimensionierung dienen sollen, auszuarbeiten.

Wir zitieren die erste Bedingung laut Gl. (1), wonach *der Verdichter zumindest eine stündliche Liefermenge von M_{gh} [l/h] zu leisten hat*.

Ein Luftverdichter von der Nennleistung Q [l/min] ist gewöhnlich nicht geeignet, ununterbrochen während der ganzen Betriebszeit der Lokomotive ständig die Menge

$$60 \cdot Q \text{ [l/h]}$$

zu liefern. Vor allem spielen hier die Begleitumstände der Antriebs- und Steuerungsart des Verdichters stark mit. Wir müssen also allgemein an Stelle der Nennleistung Q mit einer effektiven Leistung Q' rechnen, woraus sich ein Leistungsfaktor

$$\alpha = \frac{Q'}{Q} \quad (6)$$

ergibt, wobei selbstredend $\alpha \leq 1$ ist. Doch kann der günstige Grenzfall $\alpha = 1$ nur erreicht werden, falls der Verdichter (z. B. bei elektrischen Lokomotiven) durch einen unabhängigen Elektromotor (oder in ähnlich unabhängiger Weise) angetrieben wird. Diesen Fall finden wir wesentlich auch bei Dampflokomotiven vor.

Hingegen läuft der Verdichter mit veränderlicher Drehzahl, wenn der Antrieb vom Hauptmotor eines Diesel-Fahrzeuges erfolgt, wobei die Drehzahl

* Teil I siehe *Acta Techn. Hung.* **56** (1966), 65—74.

des Verdichters jener des Haupt-Dieselmotors proportional ist. Für das Lösen der Bremsvorrichtung ist der Fall maßgebend, wenn der Zug nach dem Halt sofort anzufahren hat. Dieses plötzliche Anfahren ist an ein rasches Lösen der Bremsen gebunden, wobei hier — infolge des Motor-Leerlaufes — meistens

$$\alpha_1 < 1$$

ist. (Index 1 bezieht sich auf den Leistungsfaktor der Leerlaufleistung.)

Die Aufgabe kann mehr oder weniger durch die vorübergehende Steigerung der Leerlaufleistung zur Überwindung des Luftmangels gelöst werden. Während der Fahrt wird aber die momentane Leistung des Verdichters von der momentanen Tourenzahl des Dieselmotors eindeutig bestimmt, also bleibt die Ungleichung

$$\alpha_2 < 1$$

aufrecht, wo der Index 2 den Leistungsfaktor des Verdichters für den Betrieb während der Fahrt bezeichnet. Wenn wir nun nach dem Leistungsfaktor für die Gesamtbetriebszeit der Lokomotive fragen, dann finden wir als Mittelwert den Leistungsfaktor

$$\alpha_{2m} < 1.$$

Da sich ein Verdichter meistens nicht für einen ununterbrochenen Betrieb eignet, müssen wir diesen Umstand durch Einführung eines zweiten Leistungsfaktors berücksichtigen. Also, im Verhältnis zur vollen Betriebszeit der Lokomotive, kann und soll eine Verdichtung nur während eines durch

$$\beta < 1$$

gekennzeichneten Bruchteils der Betriebszeit erfolgen.

Wie bekannt, ist die effektive Betriebsleistung Q_i eines Verdichters allgemein kleiner als die an der Probestation abgenommene (nominelle) Leistung Q_n ; hier erscheint ein zusätzlicher Leistungsfaktor

$$\gamma = Q_i/Q_n. \quad (7)$$

(Index i bezieht sich auf die Istleistung, Index n auf die Nennleistung.)

Der Faktor γ ist für die gegebenen Betriebsverhältnisse charakteristisch. Nach einer Generalreparatur kann ein Aufbohren des Zylinders stattfinden, und in diesem Fall ist möglicherweise

$$\gamma > 1.$$

Unter Berücksichtigung aller drei Leistungsfaktoren α, β, γ und bei Anwendung der Bezeichnungen der Tafeln I und II und dem Bilde 4 soll die folgende Bedingung für die minutliche Durchschnittsleistung Q_m erfüllt werden:

$$Q_m = \frac{1}{60} \left[\frac{t_l}{60} n \alpha_1 \gamma Q + \left(\beta \cdot 60 - \frac{t_l}{60} n \right) \alpha_2 \gamma Q \right] \quad [1/\text{min}], \quad (8)$$

um nämlich zu erreichen, daß die stündliche Druckschnittsleistung des Verdichters

$$M_{gh} = 60 Q_m \quad (9)$$

ausreichen soll. Für die benötigte minimale Nennleistung des Verdichters gilt laut Gl. (1), (8) und (9):

$$\begin{aligned} n M_b + (t_{hs} f_{hs} + t_{hh} f_{hh} + 60 f_{hr}) + 60 m v &= \\ = \left[\frac{t_l}{60} n \alpha_1 \gamma Q + \left(\beta 60 - \frac{t_l}{60} n \right) \alpha_2 \gamma Q \right] &\quad [\text{l/min}] \end{aligned}$$

bzw.

$$Q = \frac{n M_b + (t_{hs} f_{hs} + t_{hh} f_{hh} + 60 f_{hr}) + 60 m v}{\gamma \left[\frac{t_l}{60} n (\alpha_1 - \alpha_2) + 60 \beta \alpha_2 \right]} \quad [\text{l/min}] . \quad (10)$$

Nun kommen wir auf die in der Einleitung an zweiter Stelle unter b) aufgestellte Bedingung zurück: die vereinigte Lieferleistung des Verdichters und des Behälters soll genügen, die zum Lösen sämtlicher Bremseinrichtungen des Zuges unter den gegebenen Umständen benötigte Druckluftmenge binnen der durch die Parameter der Steuerventile und des Führerbremsventils der Lokomotive zugelassenen minimalen Zeitspanne allen Fahrzeugen zuzuführen. Im Laufe eines gegebenen Lösevorganges läßt sich der gesamte Luftbedarf selbstredend wie folgt anschreiben:

$$M_{lh} = M_l + M_h = M_b + \frac{t_l}{60} m v + \frac{t_l}{3600} M_{hh} \quad [\text{l}] , \quad (11)$$

wobei M_l die für das eigentliche Lösen der einzelnen Bremseinrichtungen, M_h die für die Hilfseinrichtungen benötigte Luftmenge bedeutet.

Dieser Luftbedarf soll durch die vom Verdichter während der Löseperiode erzeugte Luftmenge und die im Hauptbehälter zu Beginn des Lösens aufgespeicherte, effektiv verbrauchbare Luftmenge zusammen gedeckt werden. Also ist die zum Lösen verfügbare Druckluftmenge

$$L_{lh} = \frac{t_l}{60} \alpha_1 \gamma Q + V \Delta p \quad [\text{l}] , \quad (12)$$

wo V [l] den Fassungsraum des Hauptbehälters, und Δp [kp/cm²] den während des gesamten Lösevorganges zugelassenen Druckabfall im Behälter bezeichnet. Da unserer Bedingung gemäß:

$$M_{lh} \leq L_{lh} , \quad (13)$$

so ist die Druckluftversorgung des Lösens ausreichend, wenn zumindest die Bedingung:

$$M_b + \frac{t_l}{60} \left(\frac{M_{hh}}{60} + m v \right) = \frac{t_l}{60} \alpha_1 \gamma Q + V \Delta p \quad [l] \quad (14)$$

erfüllt ist.

Die einzelnen in Gleichung (14) bezeichneten Größen sind allgemein von einander unabhängige Betriebskenngroßen; die Zeitgröße t_l ist — wie bereits angedeutet — eine Größe, die von den Parametern der Zugbremsen des Zuges und dem Führerbremsventil der Lokomotive bestimmt wird. Deshalb ist es notwendig, die Bestimmbarkeit dieser Zeitgröße t_l in Abhängigkeit von den gegebenen Betriebskenngroßen analytisch zu untersuchen.

Zur Dimensionierung des Verdichters und des Hauptluftbehälters ist allgemein ein langer Zug maßgebend, bei dem die Lösezeitperiode immer länger ist als die für nur ein Triebfahrzeug benötigte. Daher ist nun der »maßgebende enge Querschnitt« immer die Kenngröße a_2 des Führerbremsventils (s. Bild 1). So ist also in der Analyse der Größe t_l in gegebenem Fall die Bestimmung der Funktion

$$q = \text{Funktion } (t) \quad [1/\text{min}] ,$$

und noch mehr dessen Integral

$$\int_0^t q \, dt$$

wichtig, wobei q die Durchlaßfähigkeit des Führerbremsventils bedeutet.

Diese Bestimmung auf theoretischem Wege auszuarbeiten* ist allenfalls schwerfällig, da die Größe q effektiv von vielen Parametern $x_1 \div x_n$ abhängt, unter welchen als die wichtigsten die Werte des Luftdruckes vor und hinter dem Ventil zu nennen sind.

Es lässt sich aber der Weg finden, durch gewisse Überlegungen die Aufgabe entsprechend zu vereinfachen. Der Durchlaß des Führerbremsventils ist nämlich um so größer, je größer der zu Beginn der Löseoperation im Hauptbehälter herrschende Überdruck p_{hb} [atü] und je kleiner der den gesamten Leitungswiderstand bestimmende »enge Querschnitt« a_3 ist. Wenn wir also eine Meßversuchsreihe am einzelnen Triebfahrzeug (also ohne Wagen) — vom Anfangswert des Behälterluftdruckes ausgehend — bei offenem Absperrhahn zur Bestimmung der Durchlaßfunktion

$$q_0 = \text{Funktion } (t),$$

* Siehe z. B. [5].

bzw. des Integrals (das die während der Zeitspanne $0-t$ durchgelassene Gesamtluftmenge angibt)

$$L_0 = \int_0^t q_0 dt \quad [1] \quad (15)$$

durchführen, so erhalten wir q_0 -und L_0 -Werte, die allenfalls *größer* sind als für den Fall eines Zuges. Zur Dimensionierung des Verdichters und des Druckluftbehälters sind aber gerade diese *hohen* q_0 - und L_0 -Werte maßgebend. Bei so einem Rechnungsgang bzw. bei einer solchen Annahme der Kenngrößen des Bremsventils haben wir den vorausgesetzten Wert der Periode t_l allenfalls unterschätzt, mit anderen Worten erfolgt die Dimensionierung des Verdichters und des Luftbehälters bereits mit einer gewissen Sicherheit.

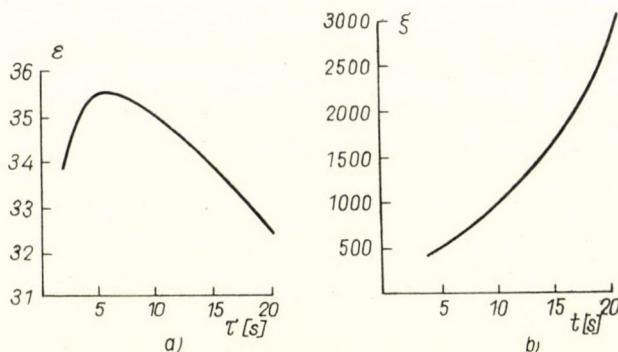


Bild 6

Selbstredend sollen für die Fälle von Bremsventilen verschiedener Bauart in Gleichung (15) jeweils die für die eben aktuellen Typen bezeichnenden Parameterwerte eingesetzt werden. Ferner ist aber der zeitliche Verlauf der Funktion L_0 vom Zeitabschnitt [s] abhängig, während dessen der Hebel des Führerbremsventils in der Füllstellung gehalten wird, bevor man es wieder in Fahrtstellung stellt.

Mit Rücksicht auf das bei der MÁV (den. Ung. Staatsbahnen) an modernen Lokomotiven angewendete Ventil Typ Knorr D2, haben wir an diesem die zur Analyse notwendigen Messungen durchgeführt.

Der Gegenstand des Versuches war eine Lokomotive mit einem Behältergesamt fassungsraum von 1410 l und einem Anfangsüberdruck von 9 atü. Also war das Bremsventil voraussetzungsgemäß geeignet, eine ziemlich hohe Leistung von L_0 abzugeben, unabhängig von der nicht vorhandenen Zuggarnitur. Die Versuchsergebnisse haben — nach Durchführung einiger, hier nicht ausführlich dargelegter Korrektionsrechnungen — bewiesen, daß die bei Berücksichtigung der überhaupt möglichen Lösezeiten wichtigen Strecken der aus der Gleichung (15) den verschiedenen Füllstoßdauern entsprechend sich

ergebenden Kurven ohne nennenswerte Vernachlässigung durch je eine — der Gleichung

$$\tau L_0 = \varepsilon t + \xi \quad [l] \quad (16)$$

entsprechende — Gerade ersetzbar sind. Die hier als τL_0 bezeichnete Integralkurve entsteht unter der Bedingung, daß sich der Hebel des Führerbremsventils zu Beginn des Lösevorganges während τ [s] in der Füllstellung befindet. Für die auf der rechten Seite der Gleichung (16) stehenden Funktionen

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau) \quad [l/s]$$

und

$$\xi = \xi(\tau) \quad [l]$$

können die konkreten Zahlenwerte — in Kenntnis der Größe τ — den Diagrammen in Bild 6a und 6b entnommen werden.

Normale Betriebsverhältnisse vorausgesetzt kann erfahrungsgemäß die optimale Zeitdauer τ des Füllstoßes mit folgenden empirischen Zahlen ausgedrückt werden:

für einen Zug aus 2-achsigen Waggons

$$\tau_2 = \frac{m}{5} \quad [s]; \quad (17)$$

für einen Zug aus 4-achsigen Waggons

$$\tau_4 = \frac{m}{3} \quad [s]; \quad (18)$$

für Züge mit Schnellzugbremse

$$\tau_{4'} = \frac{2m}{3} \quad [s]. \quad (19)$$

Mit höheren τ -Werten als die hier aus den Gleichungen (17), (18), (19) erhaltenen besteht die Gefahr, daß die Bremseinrichtungen an der Lokomotive benachbarten Zugende überladen werden. Durch diese störende Erscheinung kann bei Führerbremsventilen mit einer Niederdruckfüllperiode (z. B. die Bremse Knorr D2) vorübergehend eine Verschlechterung der Selbsttätigkeit hervorgerufen werden; bei Führerbremsventilen älterer Bauart können die im Zuge vorne stehenden Waggons hierdurch ungewollt eingebremst werden. Folglich soll eine starke Verlängerung der Füllperiode nur erfolgen, wenn wir mit einem überaus großen Undichtigkeitsverlust zu rechnen haben.

Mit Hilfe der konkret aufgestellten Gleichung (16) für τ können wir die Ableitung fortsetzen. Auf Grund der Formel (11) ist die Luftmenge, die während einer Löseoperation durch das Führerbremsventil durchströmen soll, die folgende:

$$M_l = M_b + \frac{t_l}{60} mv \quad [l].$$

Nun aber ist der Durchlaß des Führerbremsventils während der Löseperiode:

$$\tau L_0 = \varepsilon t_l + \xi \quad [\text{l}]$$

und daher kann die wahrscheinliche Zeitdauer der Löseoperation aus den Gleichungen

$$M_l = \tau L_0 \quad [\text{l}] \quad (20)$$

bzw.

$$M_b + \frac{t_l}{60} mv = \varepsilon t_l + \xi$$

errechnet werden.

Die unseren Zwecken entsprechende neue Gestalt dieser Gleichung:

$$t_l = \frac{M_b - \xi}{\varepsilon - \frac{mv}{60}} \quad (21)$$

ist auffallend einfach.

Es soll nochmals betont werden, daß sich die Gültigkeit der Gleichung (21) lediglich auf das oben bezeichnete Knorr D 2 Bremsventil beschränkt. Es ist aber ohne weiteres möglich, einen ähnlichen Zusammenhang auf irgend eine andere Bauart aufzustellen, allenfalls mit abweichenden ε - und ξ -Werten.

Im Falle eines Füllstoßes, die in den vorderen Waggons vorübergehend bei einigen Fahrzeugen eine Überladung hervorruft, ist die durch Gl. (21) gelieferte Lösezeit bedeutend kürzer als die effektiv wirkliche Zeitspanne. Der Grund liegt darin, daß die zum Überfüllen verwendete Luftmenge als Mehrverbrauch erscheint, also ist der Wert M_b größer als die theoretisch vorgestellte Menge. Dies zeigt wiederum, wie arg der Druckluftverbrauch und die Wirtschaftlichkeit durch forcierte Verlängerung des Füllstoßes beeinflußt werden. Also ist so ein Lösevorgang nur in einer Zwangslage anwendbar.

Die den Zeitwert t_l (für den Ventiltyp Knorr D2) bestimmende Gleichung (21) oder jede, für andere Ventiltypen aufgestellte ähnliche Formel ist nur in Fällen verwendbar, in welchen für den Lösevorgang der im Bild 1 bezeichnete Parameter a_2 als symbolischer »enger Querschnitt«, also die Durchlaßfähigkeit des Führerbremsventils, entscheidend ist. Nun aber liegt die Sache bei kurzen Zuggarnituren anders. Für diese ist nicht a_2 , sondern der Parameter a_3 als symbolischer »enger Querschnitt«, also die Kennzahl des Gesamtwiderstandes des Systems im Zuge maßgebend. Wenn also die aus Gl. (21) errechnete Zeitspanne kürzer sein sollte als die Lösezeitperiode für die Bremse eines einzelnen Fahrzeuges, so setzt man an Stelle des Rechenergebnisses als gute Annäherung jenen Zeitwert t_l , welcher für ein einziges Fahrzeug in den internationalen Vorschriften enthalten ist. Da aber unsere Deutung der Löseperiode nicht vollauf mit der UIC-Definition übereinstimmt

(gemäß der letzteren ist die Löseoperation beim Erreichen eines Überdruckwertes von 0,4 atü beendet) — so haben wir in Tabelle III — mit Ausnahme

Tafel III

Bremsbauart	t_l min [s]
Bremse am Personenzug	20
Bremse am Schnellzug	20
Bremse am Güterzug	60

der Güterzüge Güterzugbremsen — die obere Grenze der in den UIC-Vorschriften gegebenen Werte angeführt. Mit den gegebenen Werten t_l lässt sich die numerische Berechnung aus Gl. (14) mit Hilfe der Tafel durchführen.

Im Sinne unserer zweiten *Hauptbedingung* darf der Lösevorgang — nebst den Steuerventilen der gebremsten Fahrzeuge — nur von der Durchläßfähigkeit des Führerbremsventils beschränkt werden. Dieser Anforderung kann nur dann restlos entsprochen werden, falls die in der Gleichung aufgestellte Bedingung in jedem Augenblick erfüllt wird. Also ist es offenkundig, daß die auf den gesamten Lösevorgang als Einheit bezügliche Gleichung (14) eine *notwendige* Forderung darstellt, die aber *nicht zugleich auch hinreichend* ist.

Eine weitere, ergänzende Bedingung kann auf Grund von Bild 4 aufgestellt werden.

Normalerweise ist in der Füllstellung der Durchlaß des Führerbremsventils entlang der Kurvenstrecke t_{0x} (eventuell t_{xy}) der Funktion $q(t)$ derart ausgiebig, daß sogar im günstigsten Fall

$$q_{0x} \gg \alpha_1 \gamma Q \quad [\text{l/min}]$$

ist. Also erfolgt ein Druckabfall im Hauptluftbehälter.

Unter ungünstigen Umständen mag eventuell der Lösevorgang während einer aus Gl. (20) gewonnenen Zeitperiode t_l trotz Erfüllung der Gleichungen (18), (14), (21) undurchführbar sein. Es kann nämlich gegebenenfalls während des letzten Abschnittes der Füllperiode τ der Druck im Hauptbehälter stark fallen (sogar auf den momentanen Wert des Druckes in der Hauptleitung herabsinken), und damit ist auch der Durchlaß des Bremsventils nur äußerst gering geworden. (Dies entspricht dem Falle gemäß Bild 5c.) So müssen wir im weiteren auch diese Umstände berücksichtigen, um dem Vorkommen einer solchen Erscheinung vorzubeugen.

Aus Gl. (14) erhalten wir die für den gesamten Lösevorgang giltige Formel:

$$\frac{t_l}{60} \alpha_1 \gamma Q + V \Delta p_{tl} = L_{otl} + \frac{t_l}{3600} M_{hh} \quad [\text{l}] . \quad (22)$$

Auf ähnlicher Grundlage lässt sich die für die Füllperiode τ giltige Gleichung

$$\frac{\tau}{60} \alpha_1 \gamma Q + V \Delta p_{\tau} = \tau L_{0\tau} + \frac{\tau}{3600} M_{hh} \quad [l] \quad (23)$$

aufstellen.

Wir haben in Gl. (22) und (23) folgende zusätzliche Bezeichnungen eingeführt:

- Δp_{tl} Druckänderung im Hauptluftbehälter während der Löseperiode t_l ;
- τL_{0tl} Luftbedarf des Zuges während der Lösezeit t_l im Falle eines Füllstoßes von der Dauer τ ;
- Δp_{τ} Druckänderung im Hauptbehälter zu Ende des Füllstoßes von der Dauer τ ;
- $\tau L_{0\tau}$ Luftbedarf der gesamten Zuggarnitur in der Periode τ des Füllstoßes.

Im Sinne der oben angeführten Zusammenhänge kann angeschrieben werden:

$$\tau L_{0\tau} = \varepsilon \tau + \xi \quad [l] \quad (24)$$

und

$$\tau L_{0tl} = \varepsilon t_l + \xi \quad [l]. \quad (25)$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke und Umstellung lassen sich die Gleichungen (22) und (23) wie folgt anschreiben:

$$V \Delta p_{tl} = \frac{t_l}{60} \left(60 \varepsilon + \frac{M_{hh}}{60} - \alpha_1 \gamma Q \right) + \xi \quad [l], \quad (26)$$

bzw.

$$V \Delta p_{\tau} = \frac{\tau}{60} \left(60 \varepsilon + \frac{M_{hh}}{60} - \alpha_1 \gamma Q \right) + \xi \quad [l]. \quad (27)$$

Die Produkte ($V \Delta p_{tl}$) und ($V \Delta p_{\tau}$) bezeichnen jene Luftmenge, um welche die Luftreserve des Hauptbehälters vom Anfang des Lösens bis zum Zeitpunkte t_l bzw. τ vermindert wird.

Setzen wir

$$V \Delta p_{tl} = x \quad (28)$$

und

$$V \Delta p_{\tau} = y, \quad (29)$$

so haben wir die Proportion:

$$x : y = \Delta p_{tl} : \Delta p_{\tau}, \quad (30)$$

woher

$$\Delta p_{tl} = \frac{x}{y} \Delta p_{\tau} \quad [\text{kp/cm}^2] \quad (31)$$

und

$$\Delta p_{\tau} = \frac{y}{x} \Delta p_{tl} \quad [\text{kp/cm}^2]. \quad (32)$$

Es hängt von der Lieferleistung Q des Verdichters ab, welche von den zwei Größen Δp_{ll} und Δp_τ die größere ist.

Wenn nämlich

$$\alpha_1 \gamma Q > q_f + \frac{M_{hh}}{60} \quad [\text{l/min}] \text{ ist,}$$

so ist auch die Luftreserve des Hauptluftbehälters zwischen den Zeitpunkten τ und t_l im Ansteigen. Ist aber

$$\alpha_1 \gamma Q < q_f + \frac{M_{hh}}{60},$$

so ist diese Reserve sinkend; hier bedeutet q_f [l/min] die Luftpumpefähigkeit des Führerbremsventils in Fahrtstellung.

Im ersten Falle ist

$$\Delta p_\tau > \Delta p_{ll};$$

im zweiten Falle ist

$$\Delta p_\tau < \Delta p_{ll}.$$

Um den Durchlaß des Führerstandbremsventils konstant zu halten, muß man die Werte Δp_{ll} und Δp_τ möglichst klein halten. In Abhängigkeit von den Begleitumständen sollte keine der beiden Größen größer sein als $1-1,5 \text{ kp/cm}^2$, und auch im ärgsten Fall darf der für den Druckabfall zugelassene Höchstwert 2 kp/cm^2 nicht übersteigen.

Im Sinne der Relationen (28)–(30) werden durch die Wahl der einen (der größeren) Größe der zwei Druckverluste (Δp) die anderen zwei Größen (Δp und V) bereits bestimmt.

Somit sind wir in der Lage, den Fassungsraum V des Hauptbehälters innerhalb gewisser Grenzen zu halten. Sind die entscheidenden Druckdifferenzen größer, so kann der Fassungsraum kleiner bleiben. Umgekehrt, bei kleineren Druckdifferenzen muß man für einen größeren Fassungsraum sorgen.

VI. Anwendung der Methode

Eine kurze Zusammenfassung der oben beschriebenen Methode:

Vor allem sollen auf Grund der Betriebsverhältnisse die Parameter eines für die Dimensionierung des Verdichters und des Hauptbehälters maßgebenden Zuges bestimmt werden. Allgemein ist es praktisch, zumindest je einen Typ des Güterzuges und des Personenzuges ins Auge zu fassen. Wenn die Zusammensetzung des Zuges bekannt ist, so kann man die Zeittafel des dem gegebenen Lösevorgang angepaßten Füllstoßes aus einem der Zusammenhänge (17), (18), (19) bestimmen. Mit Hilfe dieses Wertes kann man aus Gl. (21) nach Einsetzen der Werte M_b , m und v jene Lösezeit bestimmen, die

für die Dimensionierung als maßgebend erachtet wird. In Kenntnis der Größe τ können die Werte ε und ξ aus Bild 6a und 6b entnommen werden. Unter Berücksichtigung der für die Antriebsart, für die Erwärmungserscheinungen, die Betriebseigenheiten und den Betriebszustand des Verdichters charakteristischen Kennziffern α_1 , α_2 , β und γ , und in Kenntnis der Verbrauchs-ziffern der Hilfseinrichtungen läßt sich aus Gl. (10) die minimale Nennleistung Q [l/min] des Verdichters errechnen; anschließend kann man aus den folgenden Gleichungen:

$$x = \frac{t_l}{60} \left(60 \varepsilon + \frac{M_{hh}}{60} - \alpha_1 \gamma Q \right) + \xi, \quad (33)$$

$$y = \frac{\tau}{60} \left(60 \varepsilon + \frac{M_{hh}}{60} - \alpha_1 \gamma Q \right) + \xi; \quad (34)$$

$$V = \frac{x}{\Delta p_{tl}} \quad [\text{l}], \quad (35)$$

$$V = \frac{y}{\Delta p_\tau} \quad [\text{l}] \quad (36)$$

u. zw. mit Hilfe von Kombinationen aus einer der Dreier-Gruppen: [(31), (33), (34)] und [(32), (33), (34)] mit einer Vierten, nämlich (35) oder (36) den notwendigen Fassungsraum des Hauptbehälters errechnen.

Die Bestimmung der benötigten minimalen Verdichterleistung Q [l/min] und des benötigten minimalen Hauptbehälter-Fassungsraumes V [l] kann also aus sehr einfachen und leicht anwendbaren Zusammenhängen erfolgen. Es wird aber nützlich sein, auf einige Gesichtspunkte hinzuweisen, deren Berücksichtigung im Laufe des numerischen Rechenganges zweckmäßig sein kann.

1. Der Lokomotiv-Konstrukteur kann nicht selbständig über die optimale Bauart und Größe des Verdichters in voller Freiheit entscheiden. Ihm wird eine beschränkte Zahl von Verdichtern dieses oder jenes Typs zur Wahl vorgelegt und er ist genötigt, aus diesen jene Bauart und jene Baugröße zu wählen, deren Nennleistung am nächsten zum [aus Gl. (10)] errechneten Q -Wert steht; keinesfalls darf sie kleiner als Q sein. In diesem Falle wird der Ausnutzungsgrad des Verdichters kennzeichnende Leistungsfaktor β kleiner, und hierdurch wird der Betrieb des Verdichters jedenfalls günstig beeinflußt. Zugleich ist die im Hauptbehälter auftretende Druckschwankung etwas kleiner als die zugelassene.

2. Wir wollen annehmen, daß für zwei als maßgebend erachtete Fälle aus den alternativen Ausgangsparametern sich folgende Resultate ergaben:

für den ersten Q' , V' ;

für den zweiten Q'' , V'' .

Es fragt sich, welche von diesen Werten als maßgebend akzeptiert werden sollen.

- a) Ist $Q' > Q''$
und $V' > V''$,

so wird allenfalls Q' und V' maßgebend sein.

- b) Ist $Q' > Q''$
und $V' < V''$,

so ist — mit Rücksicht darauf, daß der aus Gl. (10) errechnete Q -Wert vom Fassungsraum V des Hauptbehälters unabhängig ist — allenfalls die größere Liefermenge Q' maßgebend.

Anders steht es aber um die Beurteilung des größeren Hauptbehälter-Fassungsraumes V'' . Gleichgültig, ob das Resultat aus Gl. (26) oder (27) errechnet wurde, ist die Größe V allenfalls vom Werte Q abhängig. Wird Q größer, so kann V entsprechend kleiner gewählt werden.

Bei Anwendung der Gleichungen (22)–(25) können für einen zum Wert Q' des Verdichters durch Korrektion angepaßten Fassungsraum V'_{Korr} folgende Gleichungen angestellt werden:

$$V'_{\text{korr},t} = \frac{1}{4p_{tl}} \left(\varepsilon t_l + \xi + \frac{t_l}{3600} M_{hh} - \frac{t_l}{60} \alpha_1 \gamma Q' \right) [1]$$

und

$$V'_{\text{korr},\tau} = \frac{1}{4p_\tau} \left(\varepsilon \tau + \xi + \frac{\tau}{3600} M_{hh} - \frac{\tau}{60} \alpha_1 \gamma Q' \right) [1],$$

als maßgebend ist der größere von diesen zweien anzunehmen.

- c) Die weiteren Variationen

$$Q' < Q'' \quad \text{und} \quad V' < V''$$

bzw.

$$Q' < Q'' \quad \text{und} \quad V' > V''$$

sind prinzipiell mit den unter 1. und 2. angeführten Fällen identisch.

Wenn wir unter besonderen Umständen mehr als zwei Alternativen ins Auge fassen, so läßt sich die Endkombination immer auf eine der oben erörterten zwei Fälle a) und b) zurückführen.

VII. Die Folgerungen unserer Prüfungen

Außer dem bisher gewonnenen Überblick der Betriebsumstände und Beziehungen liefert uns die beschriebene Methode noch einige interessante Beziehungen und läßt einige weitere Folgerungen zu.

1.

Die Lieferleistung Q des Verdichters ergibt sich aus Gl. (10), in welcher keiner der Parameter des Hauptluftbehälters vorkommt. Dies folgt selbstredend aus dem Umstande, daß in der Befriedigung des Luftbedarfes je Stunde die Luftreserve des Hauptbehälters nicht von Belang ist. Die minimal erforderliche Liefermenge des Verdichters kann also aus den Betriebsumständen, dem Regelvorgang des Verdichters und den Erwärmungserscheinungen eindeutig bestimmt werden.

Hingegen kann man bezüglich des zumindest erforderlichen Wertes des Haupt-Luftbehälter-Fassungsraumes nicht dasselbe aussagen. Der minimal erforderliche Fassungsraum V — entweder durch Gl. (35) oder durch Gl. (36) berechenbar — wird nämlich durch die Wahl eines der Druckabfallgrößen Δp_{tl} bzw. Δp_r (die wir — innerhalb gewisser Grenzen — frei wählen können) und durch die bereits voraus bestimmte Liefergröße

$$\alpha_1 \gamma Q$$

beeinflußt.

a) Zur richtigen Beurteilung des zugelassenen Wertes von Δp_{tl} bzw. Δp_r ist vor allem der während des Lösens zulässig niedrigste Druck p_{min} im Hauptbehälter maßgebend. Daraus folgt zur Bestimmung der während des Lösens verfügbaren Reserveluftmenge bei einer Erhöhung des Höchstdruckes von einem ursprünglichen Wert p'_{max} auf einen höheren Wert p''_{max} (im Hauptbehälter) die Formel:

$$\delta = \frac{p''_{max} - p_{min}}{p'_{max} - p_{min}} \cdot V(p'_{max} - p_{min}). \quad (37)$$

Aus dieser Formel ist auch ohne genaue algebraische Ableitung sofort ersichtlich, daß eine Steigerung des zugelassenen Höchstwertes p_{max} wirksam zur Herabsetzung des notwendigen Hauptbehälter-Fassungsraumes beiträgt (z. B. bei einem $p_{min} = 8$ atü kann man durch Höhersetzen des Originalwertes $p'_{max} = 9$ atü auf die Stufe $p_{max} = 10$ atü, den notwendigen Fassungsraum V um 50% niedriger wählen).

b) Die Beeinflussung von V durch Q führt dazu, daß der gewünschte (minimal benötigte) Fassungsraum V für jede spezielle Betriebsart (Dampflokomotive, elektrische Lokomotive, Diesel-Lokomotive) einen anderen Wert annimmt. Weiter unten werden wir zeigen, daß für den Dampfbetrieb allgemein der relativ kleinste Fassungsraum genügt. Der nächst höhere Fassungsraum ist für eine elektrische Lokomotive oder ein Diesel-Triebfahrzeug geboten, wenn der Verdichter periodisch betrieben wird. Der notwendige Fassungsraum ist am höchsten, wenn ein Diesel-Triebfahrzeug mit einem leerlauf-gesteuerten Verdichter ausgerüstet ist.

Tafel IV

Maßgebende Betriebsfälle

Zugart	Traktionsart	τ [s]	t_1 [s]	Leistungsfaktoren				Q [l/min]	Maßgebender Druckabfall, A_p [atm]	Fassungsraum, V [l]
				α_1	α_2	β	γ			
I.	Dampf	5	47,0	1,0	0,4	1,0		1350	1,5	785
				1,0	1,6	0,67		1280	1,5	900
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	1065	1,5	1010
				0,5	0,8	0,67		1755	1,5	1042
	Diesel			0,5	0,8	0,8		1440	1,5	1250
II.	Dampf	6,67	35,4	1,0	0,4	1,0		1248	1,5	817
				1,0	1,0	0,67		1060	1,5	950
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	970	1,5	980
				0,5	0,8	0,67		1560	1,5	1020
III.	Dampf	13,33	54,0	1,0	0,4	0,1		1270	2,0	1102
				1,0	1,0	0,67		1286	2,0	1213
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	1070	2,0	1255
				0,5	0,8	0,67		1568	2,0	1345
IV.	Dampf	6,0	43,2	1,0	0,4	1,0		1500	1,5	745
				1,0	1,0	0,67		950	1,5	1055
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	792	1,5	1120
				0,5	0,8	0,67		1190	1,5	1190
V.	Dampf	15,0	121,0	1,0	0,4	1,0		2990	1,5	965
				1,0	1,0	0,67		2690	1,5	1038
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	2240	1,5	1345
				0,5	0,8	0,67		3885	2,0	1285
VI.	Dampf	2,0	21,9	1,0	0,4	1,0		748	0,1	648
				1,0	1,0	0,67		793	1,0	620
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	662	1,0	730
				0,5	0,8	0,67		1048	1,0	782
VII.	Dampf	2,0	20,0	1,0	0,4	1,0		865	1,0	812
				1,0	1,0	0,67		922	1,0	545
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	754	1,0	610
				0,5	0,8	0,67		1185	1,0	656

Zugart	Traktionsart	τ [s]	t_l [s]	Leistungsfaktoren				Q l/min]	Maßgebender Druckabfall, Δp [atm]	Fassungsraum, V [l]
				α_1	α_2	β	γ			
VIII.	Dampf	10,0	65,8	1,0	0,4	1,0		2215	1,5	748
				1,0	1,0	0,67		1840	2,0	783
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	1530	2,0	938
	Diesel			0,5	0,8	0,67		2480	2,0	1083
IX.	Dampf	6,0	60,0	1,0	0,4	1,0		1455	2,0	730
				1,0	1,0	0,67		1275	2,0	880
	Elektrisch			1,0	1,0	0,80	0,9	1065	2,0	974
	Diesel			0,5	0,8	0,67		1700	2,0	1072
X.	Elektrisch	2,67	20,0	1,0	1,0	0,67		576	1,5	546
				1,0	1,0	0,80	0,9	485	1,5	562
				0,5	0,8	0,67		737	1,5	588
	Diesel			0,5	0,8	0,80		612	1,5	600

2.

Zur leichteren Anwendung unserer Methode wurde, auf Grund der früheren Tafeln I, II und III die Tafel IV ausgearbeitet.

Aus diesen Ziffern, die für einen Güterzug mit einem angenommenen Verlust $v_G = 12$ [l/min/Wagen] und für einen Personenzug mit einem angenommenen Verlust von $v_P = 8$ [l/min/Wagen] errechnet sind, lassen sich interessante Folgerungen ziehen.

a) Die Luftlieferleistungszahlen Q des Verdichters stimmen — für Dampfbetrieb — auffallend mit jenen Bauarten des Verdichters überein, die sich im Laufe einer langjährigen Praxis bereits bewährt haben. Diese, in Europa gebräuchlichen Typen sind in Tafel V zusammengestellt.

Tafel V

Dampfmaschine	Verdichter	Nennleistung, l/min
Einstufig	Einstufig	~ 8—900
Einstufig	Zweistufig	~ 1500—2000
Zweistufig	Zweistufig	~ 2810—3000

Die für Verdichter von elektrisch- bzw. dieselbetriebenen Triebfahrzeugen ermittelten Q -Werte sind gleichfalls reelle Werte. Man sieht, daß die Verwen-

dung von Verdichtern, die sich für einen fortlaufenden Betrieb eignen, eine merkliche Senkung (um ca. 20%) des Wertes Q zuläßt.

b) Demgegenüber gibt einem der Umstand zu denken, daß man in gewissen Fällen (insbesondere bei einer Leerlaufsteuerung des Verdichters) zur sicheren, ungestörten Ausführung des Lösen gezwungen wäre, einen überaus umfangreichen Hauptluftbehälter anzutragen. Ist nämlich der Fassungsraum des Hauptluftbehälters kleiner als die errechnete Größe, so erfolgt daraus ein unzulässiger Druckabfall im Verdichter, und demzufolge eine unerwünschte Beeinflussung des Durchlasses im Führerbremsventil.

c) Der Fall eines langen Güterzuges, gemäß Fall V in Tafel IV, ist besonders beachtenswert wegen der langen Löseperiode $t_l = 121$ s, deren Dauer die für ähnliche Fälle international zugelassene Lösezeit übertrifft. Diese Abweichung läßt sich teils darauf zurückführen, daß — wie bereits angedeutet — unsere Definition für t_l von der international vereinbarten etwas abweicht, teils darauf, daß der Dichtigkeitsgrad eines Zuges betriebsmäßig nicht dem gleichkommen kann, den man an den zum internationalen Bremsversuch vorbereiteten Zuggarnituren erreicht; auch ist die gezwungene Verlängerung des Füllstoßes aus bereits mitgeteilten Gründen mit Gefahren verbunden.

d) Den in der Tafel IV für einen leerlaufgesteuerten Verdichter, dessen Umdrehungszahl der des Dieselmotors proportional ist, berechneten Angaben liegt die Annahme eines Leistungsfaktors $\alpha_1 = 0,5$ zu Grunde. Nun gibt es manche, zeitgemäß gebaute Bauarten des Dieselmotors, deren Leerlaufdrehzahl (gegenüber den Tafelangaben) bedeutend niedriger ist. Wenn aber das Lösen bei einer solch niedrigen Drehzahl erfolgt, so wird — der Natur der Gl. (10) entsprechend — der Wert der Leistung Q kaum beeinflußt, es werden aber die Ansprüche x und y an Luftreserve plötzlich gesteigert. Wenn wir aber mit einem Verdichter rechnen müssen, dessen Drehzahl an Stelle des angenommenen Leistungsfaktors $\alpha_1 = 0,5$ (Tafel IV, Fall VII, Zeile 5) einem niedrigeren Leistungsfaktor $\alpha_1 = 0,3$ entsprechend sinkt, so steigt Q (die erwünschte Liefermenge des Verdichters) von 980 l/min nur auf 995 l/min, hingegen steigt die benötigte Luftreserve von 735 l auf 792 l.

Für den Fall einer Leerlaufsteuerung des Verdichters ist allgemein ein großer Hauptluftbehälter oder aber ein hoher Behälterbetriebsdruck erforderlich. Durch fallweise Erhöhung der Umdrehungszahl im Leerlauf kann man in einem kritischen Betriebszustand den Bedarf an Luftreserve verringern. Es gibt auch andere zweckmäßige Lösungen dieser kritischen Lage. Z. B. durch Anwendung eines hydraulischen Übertragungs-Triebwerkes wird sich die Umdrehungszahl des Verdichters in Abhängigkeit von der Motordrehzahl auch bei Leerlaufsteigerung nur wenig ändern. Bei den ung. Staatsbahnen sind derzeit Versuche im Lauf, ein Steuersystem auszuarbeiten und einzuführen, bei welchem in der Periode des leerlaufenden Motors der Verdichter durch den im Hauptluftbehälter herrschenden Druck gesteuert wird.

3.

Die technischen Kennziffern des Verdichters und des Hauptluftbehälters sind in dem die Typisierung der Diesel-Lokomotiven betreffenden Merkblatt B 13/RP-1 Nr. 6 der ORE (Ausgabe 1. Jan. 1964) geregelt. Mit Rücksicht hierauf ist ein Vergleichen dieser Angaben nicht überflüssig. In Tafel VI haben wir in entsprechender Anordnung die von ORE (als Minimum) angegebenen und die von uns berechneten Werte einander gegenübergestellt. Da in der Entscheidung ORE die Erwärmungseigenschaften des Verdichters nicht erwähnt sind, so wurden alle Angaben mit der Annahme $\beta = 0,67$ errechnet.

Wir können daraus folgende Folgerungen ziehen:

a) Als maßgebender Fall soll prinzipiell ein Güterzug gelten, da für einen solchen Zug die Anforderungen bezüglich Druckluftversorgung immer größer bzw. strenger sind als für einen Personenzug. Die Sätze I, II, III, IV, V und VII (in Tafel I und IV) beziehen sich als spezielle Fälle auf Lokomotiven, die lediglich für Personenzüge bestimmt sind; der letzte Satz X gilt für Motorzüge.

b) In dem zitierten ORE-Merkblatt wird für den Fall eines der Motordrehzahl proportional gesteuerten Verdichters über den Wert des Leistungsfaktors α_1 nichts ausgesagt; vorgeschrieben ist lediglich die bei der minimalen Umdrehung erwünschte minimale Leistung. In Tafel VI haben wir die Angaben für die Fälle $\alpha_1 = 0,5$ und $\alpha_1 = 0,3$ angegeben. Da sich nun die Verdichter-Lieferleistung Q nach unserer Rechenmethode für verschiedene α_1 Werte nicht bedeutend ändert, wogegen die zwei ORE-Werte (für die Fälle $\alpha_1 = 0,5$ und

Tafel VI

Vergleich der durch die Berechnung erhaltenen Resultate mit den ORE-Vorschriften

Typenbezeichnung nach ORE	Unsere Bezeichnung der maßgebenden Zugart	Verglichene Größe	Verdichter-Umdrehung proportional der Motordrehzahl				Verdichter Umdrehung von der Motordrehzahl unabhängig		
			Fall $\alpha_1 = 0,3$		Fall $\alpha_1 = 0,5$		Laut ORE	Laut Berechnung	Laut ORE
			Laut ORE	Laut Berechnung	Laut ORE	Laut Berechnung			
c_1, c_2	IX.	Q [l/min]	3000	1780	1800	1700	1200	1275	
		V [l]	600	1214	600	1072	600	880	
d_1, f_1, f_2	VIII.	Q [l/min]	4670	2590	2800	2480	1600	1840	
		V [l]	800	1320	800	1083	800	783	
d_2, f_3, f_4 f_5, g_1, g_2 g_3, g_4	V.	Q [l/min]	5330	4290	3200	3885	2000	2690	
		V [l]	1000	1000	1000	1285	1000	1030	

$\alpha_1 = 0,3$) voneinander stark abweichen, übersteigt nun der gegebene ORE-Wert für den Fall $\alpha_1 = 0,3$ allgemein den berechneten. Hingegen ist für den

Fall $\alpha_1 = 0,5$ und auch für eine von der Motordrehzahl unabhängige Verdichtersteuerung der Unterschied zwischen dem ORE-Wert und dem von uns errechneten nicht bedeutend.

Es ist unzweifelhaft, daß in der Gl. (10), durch welche die minimale Verdichterleistung bestimmt wird, dem Zahlenwert des Gliedes ($60 \text{ m} v$) im Zähler besondere Bedeutung beizumessen ist, wobei dieser Wert stark vom technischen Niveau des Fahrzeugparks abhängt. Jedoch ist die Abweichung der ORE-Wertangaben bei verschiedenen Werten des Faktors α_1 voneinander bedeutend größer als der reine Einfluß des Gliedes ($60 \text{ m} v$). Unserer Meinung nach ist die ORE-Entscheidung durch Fehlen einer Vorschrift bezüglich α_1 mangelhaft.

c) Die durch ORE vorgeschriebenen Werte des Behälter-Fassungsraumes V sind meistens bedeutend geringer als die von uns berechneten. Dies will bedeuten, daß bei einem im ORE-Merkblatt empfohlenen Hauptbehälter-Fassungsraum der Behälterdruck am Ende des Lösevorganges ganz bedeutend sinkt, wodurch aber der Durchlaß des Führerbremsventils ungünstig beeinflußt wird.

Es ist unzweifelhaft, daß durch den im Merkblatt vorgesehenen, relativ hohen Behälter-Betriebsdruck $p_{\max} = 10 \text{ atü}$ gegebenenfalls eine bedeutende Druckschwankung entstehen kann. Wenn wir aber den Umstand berücksichtigen, daß der Regelvorgang des Verdichters sich innerhalb der Grenzen einer Druckschwankung von 1 at abspielt, so ist es offenkundig, daß infolge einer während des Lösevorganges entstehenden Druckminderung von 2 at der Betriebsdruck im Hauptluftbehälter bis auf 7 atü herabsinken kann. Ein weiterer Druckabfall ist allenfalls ungünstig und sollte deshalb nicht zugelassen werden.

Es soll jedenfalls bemerkt werden, daß in kritischen Fällen der Druckluftbedarf während des Lösevorganges soweit ansteigen kann, daß die Menge der nötigen Luftreserve vom Verdichter nur wenig beeinflußt werden kann. Also kann man einen relativ kleinen Fassungsraum des Hauptluftbehälters mit einer noch so erhöhten Förderleistung des Verdichters nicht ausgleichen.

Für Eisenbahnen, bei welchen die Instandhaltung der Bremsen auf hohem Niveau steht, ist es möglich, Eisenbahnfahrzeuge mit einem etwas kleineren Hauptluftbehälter, als in Tafel VI vorgeschrieben, in Betrieb zu halten. Für so einen Fall werden selbstredend die *tatsächlichen* Werte des spezifischen Druckluftverlustes v [$\text{l}/\text{min}/\text{Wagen}$], d. h. *kleinere* als die nach unseren Angaben üblichen Zahlen, in die Rechnung eingesetzt. Dies bewirkt eine bedeutende Kürzung der Löseperiode eines langen Zuges, da im Nenner auf der rechten Seite der Gleichung (21) der Zahlenwert des zweiten (negativen) Gliedes geringer wird.

d) Unserer Meinung nach sollte man im zitierten ORE-Merkblatt als einen bedeutenden Mangel bezeichnen, daß die Vorschriften für den Haupt-

luftbehälter vom System der Regelung unabhängig aufgestellt sind. Dieser Standpunkt ist durch die Zahlenangaben der Tabelle V stark motiviert.

e) Das ORE-Merkblatt betrifft nur Diesellokomotiven. In Fällen einer vom Diesel-Motor unabhängigen Verdichter-Drehzahlregelung sollten alle Angaben auch für elektrische Triebfahrzeuge gültig sein.

Wir glauben, daß auf Grund der Bemerkungen a)—e) die folgende Stellungnahme berechtigt sei: die ORE-Merkblatt Vorschriften gehen allzuweit in der Vereinfachung der wirklichen Betriebsverhältnisse, folglich ist eine gewisse tiefergehende Verfeinerung der Merkblatt-Empfehlungen erwünscht.

4.

Unsere Rechenmethode gewährt uns eine tiefergehende Einsicht in die Betriebsverhältnisse und dies ermöglicht uns, Folgerungen bezüglich der zukünftigen Entwicklung der Bremstechnik zu ziehen. Jedoch können wir hier nicht auf eine weitgehende Behandlung des Problems eingehen: wir begnügen uns, darauf hinzuweisen, daß der zu erwartende Fortschritt auf dem Gebiete der *elektropneumatischen Bremsung* und der *Manövriertfähigkeit der Bremsen* denkbar bedeutend ist.

5.

Abschließend soll hier ein ganz besonderer Fall einer Verringerung des Druckluftbedarfes von Bremsvorrichtungen beleuchtet werden. Der Wert der bei Klotzbremsung wirkenden Bremskraft:

$$F = \mu \cdot P \quad [\text{kp}] \quad (38)$$

ist wohlbekannt (P ist die Bremsklotzkraft, μ ist der Reibwert zwischen den Reibungsflächen). Je größer der Koeffizient μ , um so kleiner ist die benötigte Druckkraft P und um so kleiner auch der notwendige Bremszylinder zur Erreichung derselben Bremskraft F . So kann man also durch Schaffung größerer Reibungskoeffizienten (als die bisher üblichen) den Druckluftbedarf bedeutend verringern und dadurch auch eine günstigere Dimensionierung des Verdichters und des Hauptluftbehälters erzielen.

So gebührt auch eine anerkennende Einschätzung der derzeitigen Bestrebungen, durch laufende Versuche Bremsklotze aus Kunststoff herzustellen, die mit einem gegenüber dem Gußeisen günstigeren, also höheren Reibungskoeffizienten arbeiten. Solche Versuche werden bereits in vielen Eisenbahnbetrieben durchgeführt.

Die angeführten Gesichtspunkte lassen zugleich erkennen, welch enger Zusammenhang zwischen gewissen, ansonst voneinander ferne stehenden Beziehungen der Bremstechnik besteht. Die Bremseinrichtung eines Zuges ist strenge Einheit: die kleinste, wo immer angebrachte Änderung wirkt sofort auf das ganze System zurück.

SCHRIFTTUM

1. HELLER, G.: Vasúti fékezés (Bremsen von Eisenbahnzügen), Budapest 1965.
2. HILDEBRAND, W.: Die Entwicklung der selbsttätigen Einkammer-Druckluftbremsen bei den europäischen Vollbahnen, Berlin 1927/39.
3. KAZARINOV: Derniers progrès de freinage du matériel ferroviaire. *Bulletin Mensuel de l'Association Internationale du Congrès des Chemins de Fer* (1962), 6.
4. LAPLAICHE: Le frein électropneumatique pour le Matériel de Chemin de Fer. *Revue Générale des Chemins de Fer* (1962), 11.
5. LOOSLI, H.: Stationäre und instationäre Strömungen in den Leitungen von Eisenbahndruckluftbremsen, Zürich 1961.
6. MÖLLER: Kritische Betrachtungen zur Eisenbahn-Druckluftbremse. *Glasers Annalen* (1965), 11.

**DIMENSIONING PRINCIPLES
OF THE AIR-COMPRESSOR AND THE MAIN AIR-RECEIVER
FOR THE BRAKE-EQUIPMENT IN RAILWAY-TRAINS, PART II**

GY. HELLER and L. ROSTA

SUMMARY

The principles developed in this paper should ensure a more consistent method for the determination of the main dimensions of the air compressor and the main air-receiver than was possible by relying on the traditional method of routine-like choice of parameters. Conditions of running and the necessary air-supply are investigated in order to find the operation-conditioned relations between the parameters of the main braking valve and those of the compressor and the receiver. The results of this thorough investigations form a useful basis for establishing a more consistent system of dimensioning equations. Relying on the obtained mathematical relations the authors give a critical survey of the ORE-Recommendations and suggest a rational modification of this specification. Finally, some features of the whole problem of braking technique are explained that may influence the presently general solution of the problems and their future development as far as compressed-air producing implements and air-storage equipments for railway-train braking purposes are concerned.

**CHOIX, DU POINT DE VUE DE L'EXPLOITATION, DES CARACTÉRISTIQUES
DES COMPRESSEURS ET RÉSERVOIRS D'AIR COMPRIMÉ DES ENGINS
DE TRACTION FERROVIAIRES, PARTIE II**

GY. HELLER et L. ROSTA

RÉSUMÉ

Le but principal de l'étude est d'élaborer une méthode de dimensionnement logique permettant le choix correct, du point de vue de l'exploitation, du compresseur et du réservoir d'air principal, méthode reposant sur des bases théoriques remplaçant les considérations empiriques actuelles. Après avoir exposé les exigences, l'étude s'occupe de l'analyse du besoin en air comprimé et examine les relations entre le robinet du frein et les caractéristiques du compresseur et du réservoir d'air principal. Les connaissances acquises au cours de l'analyse des installations pneumatiques de l'engin de traction, considérées comme un système cohérent, permettent d'établir les équations pour le dimensionnement concret. En possession des données obtenues sur la base du procédé de dimensionnement, les auteurs critiquent en détail la décision de l'ORE concernant le compresseur et le réservoir d'air comprimé et font des recommandations quant au développement futur de cette décision. La partie finale de l'étude met en évidence certains problèmes actuels et futurs de la technique du freinage, qui ont aussi une répercussion sur les dispositifs de production et les réservoirs d'air comprimé des véhicules de traction.

ВЫБОР ХАРАКТЕРИСТИК ОБОРУДОВАНИЯ ПО ВЫРАБОТКЕ
И АККУМУЛЯЦИИ СЖАТОГО ВОЗДУХА НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ
СООБРАЖЕНИЙ, ДЛЯ СЛУЧАЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ТЯГИ, ЧАСТЬ II

Д. ХЕЛЛЕР и Л. РОШТА

РЕЗЮМЕ

Первоочередной целью настоящего исследования является то, чтобы разработать метод расчета компрессоров и главных баллонов сжатого воздуха, основанный на производственных соображениях, вместо применявшихся ранее эмпирических соображений. После выяснения требований, дается анализ потребности в сжатом воздухе, а затем проводится исследование взаимоотношений между тормозным вентилем и характеристиками компрессора и баллона сжатого воздуха. По ходу анализа пневматического оборудования, являющегося связанный системой, получаются результаты, которые позволяют вывести уравнения, применимые для конкретного расчета. Полученные на основе методики расчета данные позволили авторам подвергнуть подробной критике и общие правила, касающиеся компрессоров и главных баллонов сжатого воздуха средств тяги, и внести предложение относительно дальнейшего усовершенствования этих правил. Заключительная часть исследования указывает на такие существующие и перспективные проблемы техники торможения, которые имеют влияние также и на оборудование,рабатывающее и аккумулирующее сжатый воздух на средствах железнодорожной тяги.

STUDY ON THE RECRYSTALLIZATION OF PURE COPPER TECHNICAL GRADE

J. SÓLYOM

TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRY, MISKOLC (HUNGARY)

[Manuscript received January 24, 1966]

By means of an optical microscope, the recrystallization of technical grade pure copper after cold working, especially the structural change, was investigated. The investigation included a cold working deformation degree of 30, 60 and 90%, and the crystallization process was observed at 260, 300, 350 and 400°C. From these it could be stated that the activation energy of the process decreases with the increasing degree of working. At an assumed ductility of 100%, the activation energy calculated by extrapolation amounts to 33,7 kcal/gmol. Considering that part of the energy which is needed for grain growth, this is independent of the working degree; quantitatively, this part equals the activation energy of self-diffusion. At an assumed working deformation of 100%, the activation energy of recrystallization can be taken as equal to the activation energy of self-diffusion.

I. Introduction

The last phase of the metal annealing process after cold working consists of the building up of crystal nuclei, and of their increase. The first period of this process, the so-called primary recrystallization or the proper recrystallization, in a narrow sense endures up to the moment when the worked crystallites have disappeared from the structure. This has clearly to be distinguished from the next period, the so-called secondary recrystallization during which the whole structure becomes rougher by the more intense increase of some crystallites at the expense of others. In this paper, it is the first period which will be dealt with.

When investigating the various phases of the annealing process, research work will first aim at the clearing up of kinetic and energetic relations. Since the recrystallization is at the same time represented by a change of structure, the whole process can be observed by metallographic methods.

When comparing the experimental results, one can state that none of the usual methods applied to determine the course of recrystallization is able to secure a greater accuracy than the classical method of metallographic observation, that consists of a planimetric determination of the ratio of the part already recrystallized and that one being still in the state of worked deformation [1].

In this paper, the recrystallization conditions are described that were observed by the metallographic method on the process of technical grade pure copper.

II. Description of the experimental methods

The starting material was a 5 mm rolled sheet of copper Cu—C, having a minimum Cu-content of 99,4%. Among the tolerated impurities the highest is Ni 0,3%. Strips of 16×110 mm were cut out. In order to have specimens of the wanted homogeneity and roughness, the strips were heated, for 1 hour, at a temperature of 850°C ; after heating the structure showed grains of $5500 \mu^2$ size (Fig. 1).

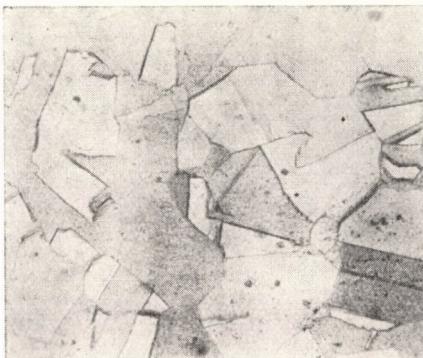


Fig. 1. Structure of the starting material ($340\times$)

The strips were formed in cooled state by rolling to a 30, 60 and 90% degree of deformation. The rolled strips were cut into smaller pieces for the purpose, to carry out the heat treatment on each piece at the same temperature, but at various periods of time. The heating temperature was chosen by aiming at a rather long period of time for the wanted recrystallization. Doing this, the period of heating up the cold pieces was negligible. For this purpose, we choose the temperature levels of 260, 300, 350 and 400°C . Recrystallization at 300 and 350°C was studied at a deformation corresponding to all the three degrees. With the temperature of 260°C , we observed the recrystallization process only at a deformation of 60 and 90%, because at a lower degree the investigation of the structure needed a considerable period of time. Whereas after a recrystallization at 400°C the process on a 90% deformed piece had been so quick it had escaped the possibility of observation; in this case, we confined our cold working operation only to 30 and 60%.

For carrying out the heat treatment we applied an electric muffle furnace. In order to secure a dependable constancy of the temperature, a heat resisting steel block was placed into the furnace, and the specimens were placed on the block. Doing this, the heating up period of the pieces could be neglected without causing a perceptible deviation [3]. The temperature fluctuation of the block did not surpass $\pm 3^{\circ}\text{C}$.

In order to facilitate the determination of the period of recrystallization, and for the sake of a nearer information, we examined some pieces reserved for this purpose. This first experiment served to set up recrystallization periods the series of which formed a sequence of geometric progression. Always preventing carefully any warming up, the pieces treated were cut into two halves in the rolling direction by a slitting saw, and the cut surfaces were subjected

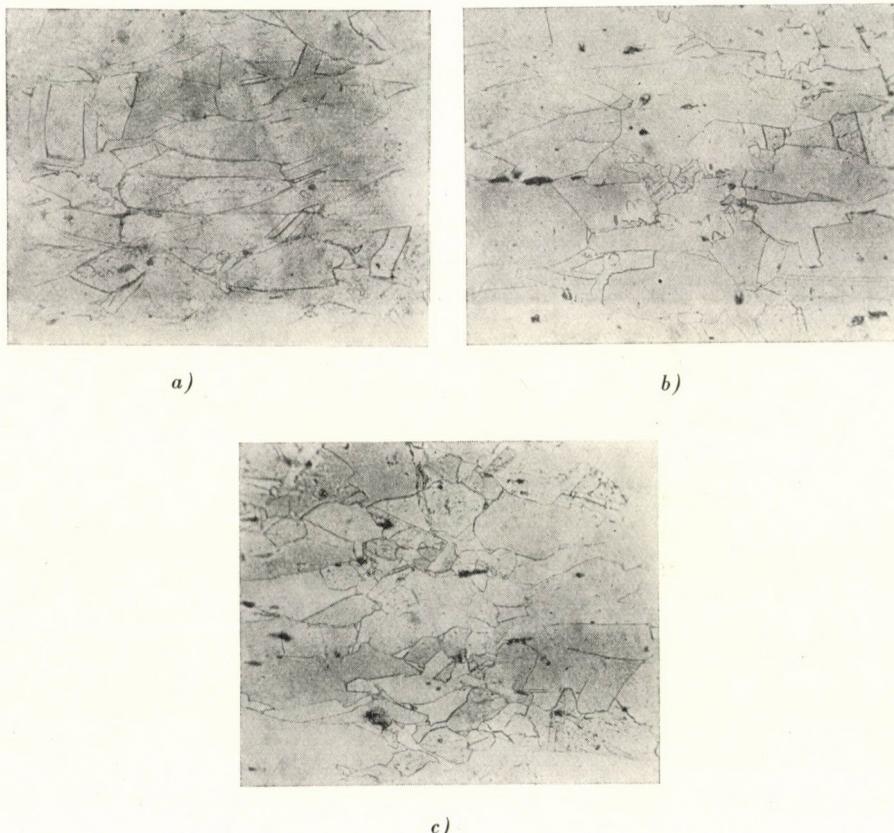


Fig. 2. Structure of copper ($340\times$) after a 30% deformation (a); after heating at 300°C for 20 hours (b); and after heating at 300°C for 30 hours (c)

to metallographic examination. For polishing, we applied a chemical process, by using a polishing agent having the following composition: $\text{CH}_3\text{COOH} = 67\%$, $\text{H}_3\text{PO}_4 = 28\%$, $\text{HNO}_3 = 5\%$. The polishing operation was carried out at $65 \div 75^\circ\text{C}$ [4]. After having the surface etched with a solution of $5\text{ g FeCl}_3 + 10\text{ cm}^3\text{ of HCl} + 100\text{ cm}^3\text{ water}$, the structure was ready to be observed.

III. Measuring results

The recrystallization in the worked structure starts with nucleation, and continues by grain growth. It was well observable that the nucleation took place at the grain boundaries of worked crystallites mostly at spots where more than two crystallites meet. Various stages of recrystallization are to be seen in Figs 2 and 3.

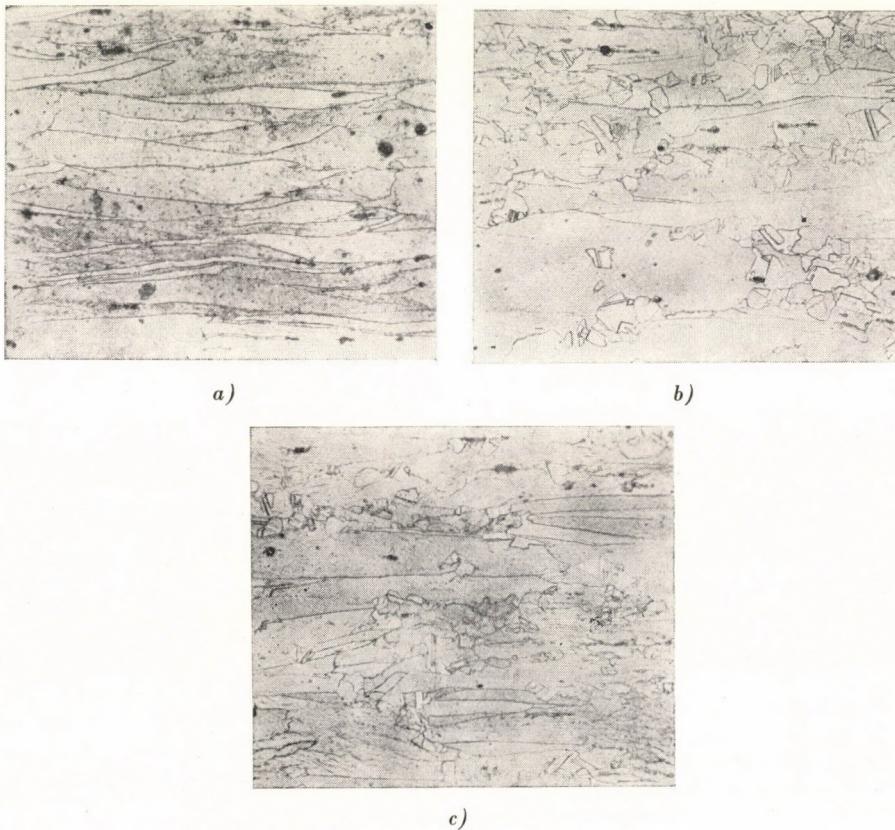


Fig. 3. Structure of copper ($340 \times$) after a 60% deformation (a); after heating at 400°C for 2 minutes (b); and after heating at 400°C for 3 minutes (c)

In order to determine the quantity of the recrystallized fraction, measurements were carried out on many places of one specimen. When the measuring results were plotted as functions of the logarithm of time, we obtained characteristic S-shaped curves which represent nucleation and grain growth (Fig. 4).

Also measurements were carried out in order to determine the grain size at the very moment of perfect recrystallization. To this end many places of one polished specimen were compared with a series of standardphotos. The results are shown in Table I.

Table I
Average grain diameter at the end of primary recrystallization, $d[\mu]$

Degree of deformation by cold rolling	Heating temperature			
	250° C	300° C	350° C	400° C
30%	—	—	50	50
60%	—	35,2	28,2	24,9
90%	12,4	12,4	13,6	13,6

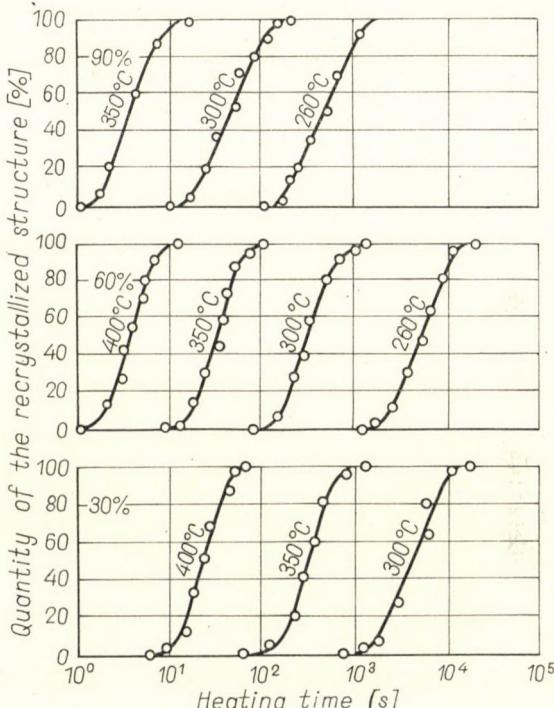


Fig. 4. Quantity of the recrystallized structure as function of time, at constant temperature, after various degrees of deformation

IV. Interpretation of the results

1. Analysis of the recrystallization process as a function of time

The curves in Fig. 4 represent the course of the process. There were various tentatives to find the mathematical expression of the curves. The most frequently accepted formula is that of AUSTIN and RICKETT [3]:

$$\frac{dx}{dt} = K(1-x)^{p-1}. \quad (1)$$

Here is x the fraction recrystallized, expressed as the aliquot part of the structure (this latter being considered as a unit); t the time; K and p are constants.

Obviously, by plotting the measuring points of this system in coordinates $\log \log 1/(1-x)$ and $\log t$, the curve that fulfils the condition of Equ. (1) is a straight line the direction of which is determined by a tangent value equal-

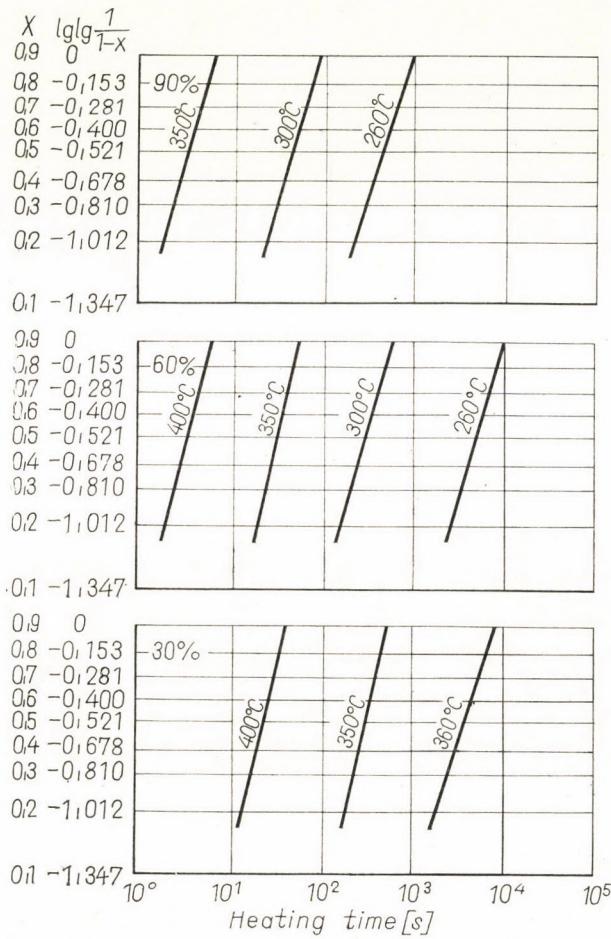


Fig. 5. The values of Fig. 4. represented in a system of coordinates $\log \log 1/(1-x)$; $\log t$

ing p . Transformed into the system of coordinates as mentioned above, the curves shown in Fig. 5 correspond to the original curves of Fig. 4. The tangent value p of these straight lines varies between $1,7 \div 2,1$. This corresponds to the data calculated and published in the most recent publications [5, 6], and deviates from informations given by former authors, according to whom p equals abt. $3 \div 4$. In the case of a higher percentage of rolling deformation, the value of p is less (near 1,7), and inversely with a lower percentage of rolling deformation, the value of p is higher (near 2,1). This can be explained by the relation in a structure after a higher degree of

deformation the increase of crystallites in every possible direction meets more intense obstacles, since the nuclei formed in a large number at one and the same time are as many impediments to each other [5]. This relation seems to be motivated by the figures shown in Table I.

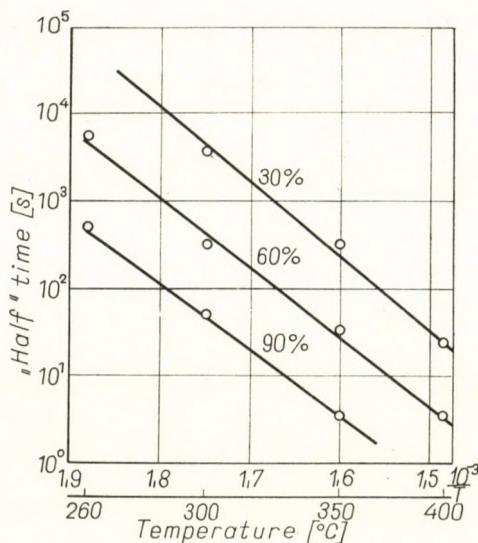


Fig. 6. Influence of the temperature on the time required for recrystallization

2. Effect exerted by the temperature on the course of recrystallizing

The processes of nucleation and grain growth as function of temperature are described by the equation of BECKER [2, 4, 7]:

$$\ln t = K + \frac{Q}{RT} + \frac{A}{RT}. \quad (2)$$

Here is t the time, T the temperature, R the gas-constant, Q the activation energy of diffusion (in this case energy of self-diffusion), and A the correction member representing the activation energy of nucleation or some other concomitant process.

By differentiating the above equation according $1/T$, we obtain:

$$\frac{\partial \ln t}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} = \frac{Q}{R} + \frac{A}{R} + \frac{1}{RT} \frac{\partial A}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)}. \quad (3)$$

The diagram in Fig. 6 shows the periods of time representing a recrystallization degree of 50% in logarithmic scale as function of $1/T$. By the metallographic method, obviously the determination of a half-time value is obtained

at the highest possible accuracy. Consequently, these series of values are the most appropriate for characterizing the activation energy of the process. As seen in Fig. 6, the plotted points of the single grades of deformation can be connected by a straight line. This corresponds to the statement that the activation energy of nucleation energy observed within the temperature range of the test, is independent of the temperature, or in other words, the 3rd member at the right side of Equ. (3) disappears, viz.

$$\frac{\partial \ln t}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} = \frac{Q + A}{RT}. \quad (3a)$$

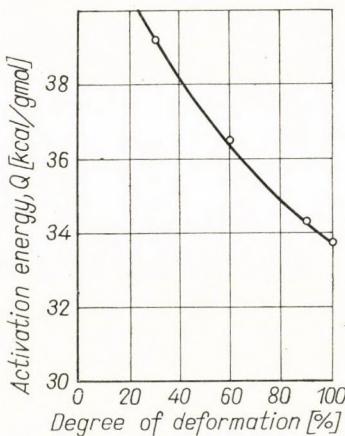


Fig. 7. Recrystallization activation energy in function of the degree of deformation

The tangent of direction of the single straight lines is proportional to the sum $Q + A$. Its real value can be calculated from the diagram. When plotting these values as function of the degree of deformation Fig. 7 it is obvious that the activation energy decreases with the increasing degree of deformation. Obviously, this decrease is a consequence of the decrease of the energy of nucleation as an aliquot part of the activation energy [2]. As already mentioned, the value corresponding to a 100% deformation obtained by extrapolation, amounts to 33.7 kcal/gmol. This value can be considered as the activation energy of the growth of grains, and can be identified at the same time as the activation energy of self-diffusion along the crystal boundaries of the metal tested.

The activation energy of grain growth can be determined by making use of the values gathered together in Table I. As a matter of principle, the method applied herebelow is not so exact as could be expected but as witnessed by literary sources it has in general been adopted. The quotient will be set up by taking the actual diameter of the grains at the moment of the recrystallization's end, and in dividing it by the real time elapsed, i.e. by the difference

between the point of time at which 100% recrystallization is finished and the point of time when it started ($t_v - t_k$). This quotient is the rate of grain growth, G [μ/s]; when taken as constant, it is expressed:

$$G = \frac{d}{(t_v - t_k)}. \quad (4)$$

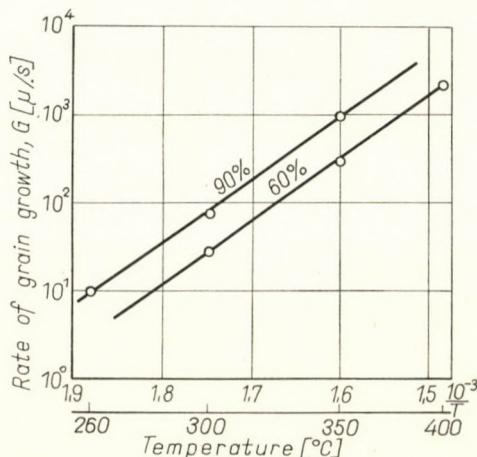


Fig. 8. Grain growth as function of temperature

When the logarithm of speed is represented as the function of $1/T$ (Fig. 8), it is to be seen that the single points plotted as coordinated to the degrees of deformation, the curves are straight lines as well. In other words, change of grain growth can be described by an equation of the Arrhenius type:

$$G = G_0 \cdot e^{-\left(\frac{Q}{RT}\right)}. \quad (5)$$

Fig. 8 contains points belonging to the deformation degrees of 60 and 90%, because it was attainable only for these to find at least three points which could be plotted as the grain values at some fixed temperature. After having determined the tangent of direction of these straight lines, the obtained values of activation energy are the following:

for a deformation degree of 60%: 34,05 kcal/gmol;

for a deformation degree of 90%: 34,0 kcal/gmol.

The coincidence of these values with each other and with the value as calculated by means of our former method (33,7 kcal/gmol) is striking. By this statement our former thesis seems to be motivated, namely, that the activation energy of the grain growth is independent of the degree of deformation, and the change of activation energy during recrystallization is due to the decrease of that part of activation energy which is needed for nucleation.

The self-diffusion activation energy at the crystal boundaries of copper is not known as yet but for metals with a face-centered lattice the statement holds true that the self-diffusion activation energy at the crystal boundaries equals abt. $0,6 \div 0,7$ part of the same energy what is needed by self-diffusion through the lattice [8]. Now, when comparing the obtained value (33,7 kcal/gmol) with the self-diffusion activation energy of 48,6 kcal/gmol as found in literary sources [9] the ratio is 0,69; in other words, it corresponds to what has been stated above. Results given by other authors [6, 10] are found to be somewhat less ($24 \div 26$ kcal/gmol) for the recrystallization activation energy of copper. This deviation may be motivated by the higher rate of impurities in the copper examined in our investigating process. As is known, the recrystallization activation energy is increased by higher impurity contents in copper [10]. When the impurities infiltrated into the lattice reach a certain amount, the recrystallization process is influenced by these foreign atoms to such a degree that it is rather the diffusion of this impurity into the base metal which is decisive to the process. In order to know the nature of this kind of diffusion, further investigations have to be carried out.

REFERENCES

1. MOULD, P. R.—COTTERILL, P.: *Metallurgia* **71** (1965), 149.
2. KÁLDOR, M.—BÁRCZY, P.: (to be published).
3. KÁLDOR, M.—SZIKSZAI, M.: *Acta Techn. Hung.* **32** (1961), 149—162.
4. McG. TEGART, W. J.: *The Electrolitic and Chemical Polishing of Metals*; Pergamon Press 1959.
5. DETERT, K.—DRESSLER, G.: *Acta Met.* **13** (1965), 845.
6. MENGELEBERG, H. D.—MEIXNER, M.—LÜCKE, K.: *Acta Met.* **13** (1965), 845.
7. SÓLYOM, J.—TRANTA, F.: *MTA VI. Oszt. Közl.* **32** (1963), 200.
8. BELL, F.—KRISEMENT, O.: *Z. Metallkunde* **53** (1962), 115.
9. DEHLINGER, U.: *Theoretische Metallkunde*; Springer Verlag 1955.
10. DAHL, W.—GEISSLER, J.: *Z. Metallkunde* **51** (1960), 421.
11. WENZ, H.: *Materialprüfung* **7** (1965), 170.

UNTERSUCHUNG DER REKRISTALLISATION VON TECHNISCH REINEM KUPFER

J. SÓLYOM

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde der Verlauf der Rekrystallisation von technisch reinem Kupfer nach Kaltverformung untersucht, indem die strukturellen Veränderungen an metallografischen Lichtbildern beobachtet wurden. Im Laufe der Prüfung des Verlaufes der Rekrystallisation nach Verformungsgraden zu 30, 60 und 90% bei ständig gehaltenen Temperaturen von 260, 300, 350 und 400° C, konnte man eine Abnahme der Aktivierungsenergie des Prozesses bei Erhöhung des Verformungsgrades feststellen. Durch Extrapolation zu eines vorausgesetzten Verformungsgrades von 100%, wurde der Wert von 33,7 kcal/gmol gefunden; man sieht, daß binnen der gesamten Aktivierungsenergie der Rekrystallisation die zum Keimwachstum benötigte Teilenergie vom dem Verformungsgrad unabhängig ist, und sie ist eigentlich gleich der Aktivierungsenergie der Selbstdiffusion. Bei Annahme eines 100%-igen Verformungsgrades kann man die Aktivierungsenergie der Rekrystallisation mit der Aktivierungsenergie der Selbstdiffusion gleichstellen.

EXAMEN DE LA RECRYSTALLISATION DU CUIVRE TECHNIQUE PUR

J. SÓLYOM

RÉSUMÉ

L'auteur a examiné la recristallisation après écrasissage du cuivre technique pur, en suivant le changement de la structure au microscope optique. En examinant le cours de la recristallisation à 260, 300, 350 et 400°C après un écrasissage de 30, 60 et 90%, on constate que l'énergie d'activation du processus diminue avec l'accroissement du taux de déformation. En extrapolant jusqu'à 100% de taux de déformation, l'énergie d'activation est de 33,7 kcal/gmol. Dans le cadre de l'énergie d'activation de la recristallisation, la part revenant à l'accroissement des grains est indépendante de la déformation et est égale à l'énergie d'activation de l'auto-diffusion. En supposant une déformation de 100%, l'énergie d'activation de la recristallisation peut être aussi considérée comme égale à l'énergie d'activation de l'auto-diffusion.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИ ЧИСТОЙ МЕДИ

Е. ШОЙОМ

РЕЗЮМЕ

Автор провел исследование рекристаллизации технически чистой меди после холодной деформации, путем наблюдения изменений структуры оптическим микроскопом. После обжатия в 30, 60 и 90% исследовалась рекристаллизация во времени при 260, 300, 350 и 400° С. Энергии активации процесса снижаются по мере роста степени обжатия. Экстраполируя до воображаемого обжатия в 100%, получается 33,7 ккал/г моль. Доля энергии активации процесса рекристаллизации, приходящаяся на рост зерна, не зависит от степени обжатия и равна энергии активации самодиффузии. Предполагая 100%-ное обжатие, получают энергию активации рекристаллизации, равную энергии активации самодиффузии.

ANWENDUNG DER WELLENGLEICHUNGEN AUF KURZE ROHRE

TEIL II*

P. BENYÓ

CANZ MÁVAG LOKOMOTIV-, WAGGON- UND MASCHINENFABRIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 21. Februar, 1966]

Die im I. Teil erhaltenen Zusammenhänge wurden angewandt für den Fall, wenn im Druckvolumen der als kurzes Rohr betrachteten Einspritzpumpe der Kolben durch eine Feder bewegt wird. Statt der im Kontinuitätsfall erhaltenen homogenen Differentialgleichung III. Ordnung ergab sich in diesem Fall eine inhomogene Gleichung II. Ordnung, deren rechte Seite u. U. mit konstantem Wert in Betracht gezogen werden konnte. So ergab sich für die Berechnung des auftretenden Druckverlaufs eine Rekursionsformel. Die durchgeföhrten Untersuchungen bewiesen, daß für die im I. oder II. Teil ermittelten Zusammenhänge die erhaltenen Gleichungen mit den tatsächlichen Druckverhältnissen gut übereinstimmen.

IV. Untersuchung des Druckverlaufes bei einem durch Federkraft bewegten Kolben

Diesem Prinzip entsprechend arbeiten z. B. die auf den verschiedensten Gebieten verwendeten *Ganz-Jendrassik* Einspritzpumpen. Um den durch den Kolben erzeugten Druckverlauf berechnen zu können, muß der Weg- und Geschwindigkeitsverlauf des Kolbens — in Abhängigkeit von der Zeit — bekannt sein. Die bezügliche Untersuchung wird — ähnlich wie in den Abschnitten II bzw. III — unter Verwendung der Wellengleichungen vorgenommen. Offensichtlich ist, daß in diesem Falle die Kolbenbewegung einer gedämpften Schwingung entspricht, da der Kolben durch die Druckwirkung abgebremst wird. Es besteht aber die Frage, welchen Charakter diese Dämpfung aufweist und wie sie sich zur Kolbengeschwindigkeit verhält. Um dies feststellen zu können, wollen wir zunächst die Verhältnisse für folgenden Fall prüfen.

1. Der Druckleitungs durchmesser stimmt mit dem Kolbendurchmesser überein ($D = d$)

Bild 8 stellt den Aufbau des Systems dar. Auf Grund der entstehenden Kräfte wirkungen — unter Berücksichtigung der bezeichneten positiven Richtung — kann die Bewegungsgleichung des Kolbens folgendermaßen auf-

* Teil I siehe *Acta Techn. Hung.* **56** (1966), 1—2

geschrieben werden (die Reibungskraft zwischen Kolben und Zylinder wird vernachlässigt und ferner vorausgesetzt, daß die Druckleitung des Durchmessers d lang genug ist, um zu verhindern, daß während der Kolbenbewegung eine Störung — reflektierte Druckwelle — zum Kolben gelangt):

$$\frac{1}{k}x = -M \frac{d^2x}{dt^2} - \delta \frac{dx}{dt}.$$

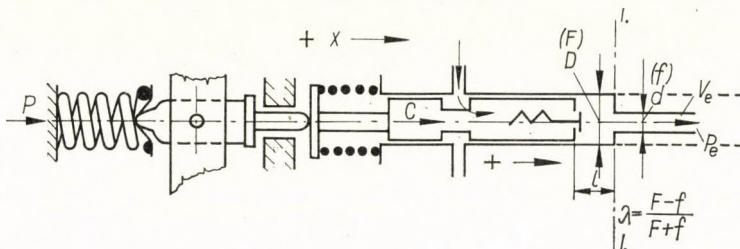


Bild 8. Federbetätigte Kolbenpumpe, wenn $D = d$, bzw. $D > d$

Wird diese Gleichung geordnet und die Bezeichnung $x^2 = 1/Mk$ eingeführt, dann ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{M} \frac{dx}{dt} + x^2 x = 0, \quad (39)$$

wo

x [m]	Kolbenweg;
M [kp · sec ² /m]	die bewegte Masse;
δ [kp · sec/m]	der der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungsfaktor;
k [m/kp]	Federkonstante;
t [sec]	laufende Zeit sind.

Bei der Gleichung (39) haben wir vorausgesetzt, daß die Dämpfung der Geschwindigkeit proportional ist. Um dies beweisen zu können, soll davon ausgegangen werden, daß die dämpfende Kraft — falls die Kolbengeschwindigkeit

$$c = dx/dt,$$

und $P = \delta c$ beträgt, d. h.

$$\delta = P/c \quad (40)$$

ist.

Die Kraft (P) entspricht dem Produkt aus dem auf den Kolben wirkenden Drucke und der Kolbenfläche, welcher Wert mit der aus der Dämpfung stammenden Kraft übereinstimmen muß, d. h.

$$P = pF = \delta c. \quad (41)$$

Aus der Gleichung (12) im Abschnitt III. 1. a. konnten wir jedoch sehen, daß

$$p = \varrho ac$$

ist, demzufolge sich die Gleichung (41) wie folgt gestaltet:

$$\delta = \varrho a F, \quad (42)$$

wo ϱ die Flüssigkeitsdichte, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Druckwelle und F die Kolbenfläche bedeuten. Es kann daher festgestellt werden, daß die Kolbendämpfung und die Geschwindigkeit tatsächlich in einem linearen Verhältnis zueinander stehen. Ersichtlich ist auch, daß bei einer gegebenen Flüssigkeit der Wert δ nur von der Kolbenfläche abhängt (vorausgesetzt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle und die Dichte vom Druck unabhängige Werte darstellen — was übrigens bei Flüssigkeiten als gute Annäherung gilt).

Wie bekannt, ist die Lösung der Gleichung (39) die folgende: $t = 0$; $x = -x_0$ und $dx/dt = c = 0$, unter Voraussetzung folgender Anfangsbedingungen:

$$x = -x_0 e^{-\mu t} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t + \cos \varepsilon t \right). \quad (43)$$

Für den Fall, daß

$$\mu = \frac{\delta}{2M}$$

ist und $\mu^2 < \alpha^2$ bzw. $\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 - \mu^2}$.

Wenn aber $\mu = \delta/2M$ und $\mu^2 > \alpha^2$ $\beta = \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}$ ist, dann ist

$$x = -x_0 e^{-\mu t} \left(\frac{\mu}{\beta} \sinh \beta t + \cosh \beta t \right). \quad (43a)$$

Wird die Kolbengeschwindigkeit auf Grund der Gleichung (43) bestimmt, so ist

$$c = \frac{dx}{dt} = x_0 e^{-\mu t} \frac{\mu^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \sin \varepsilon t$$

oder unter Berücksichtigung, daß

$$\mu^2 + \varepsilon^2 = \alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{1}{Mk}, \quad P_0 = \frac{x_0}{k}$$

ist, erhält man

$$c = \frac{P_0}{M\varepsilon} e^{-\mu t} \sinh \varepsilon t, \quad (44)$$

oder auf Grund der Gleichung (43a)

$$c = \frac{P_0}{M\beta} e^{-\mu t} \sinh \beta t, \quad (44a)$$

wo P_0 die Anfangsfederkraft bedeutet.

In Kenntnis der Kolbengeschwindigkeit kann nunmehr der auf die Kolbenfläche wirkende Druck (der gleichzeitig in der Leitung mit dem Durchmesser D die Funktion der vorlaufenden Druckwelle darstellt) aus $p = \varrho a c$ bestimmt werden, wobei wir uns nur auf die Gleichung (44) beschränken:

$$p = \varrho a \frac{P_0}{M\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t. \quad (45)$$

Aus Gleichung (45) geht klar hervor, daß, wenn $c = 0$ ist, sich der Druck ebenfalls auf Null verringert. (Dies ist der Fall, wenn der Kolben infolge einer Anschlagwirkung zum Stillstand gebracht wird, was selbstverständlich nur für den Fall gültig ist, wenn $D = d$ ist.)

2. Der Durchmesser der Druckleitung ist kleiner als der Kolbendurchmesser, $d < D$

a) Bestimmung des Kolbenweges bzw. der Geschwindigkeit

Unsere Aufgabe besteht auch hier — ähnlich wie in den Abschnitten II bzw. III — in der Bestimmung des Druckverlaufes im Druckraum der Länge l , wie dies im Bild 8 dargestellt ist. (Druckverlauf an der Kolbenfläche bzw. im Querschnitt $I-I$ im Anfangsabschnitt der Druckleitung mit dem Durchmesser d .) Der grundlegende Unterschied im Verhältnis zum System, das mittels einer Nockenwelle betätigt wird, besteht darin, daß hier die Kolbengeschwindigkeit infolge der Druckwirkung sich verändert. Die am Anfangsabschnitt der Druckleitung reflektierte Druckwelle gelangt zum Kolben nach Ablauf der Zeit von $2l/a$ zurück, welche Zeitdauer von der Inbewegungssetzung des Kolbens zu rechnen ist. Dies bedeutet, daß bis zu diesem Zeitpunkt die Kolbenbewegung durch die Gleichungen (43) bzw. (44) dargestellt ist (diesbezüglich verweisen wir auf Abschnitt IV.1).

Wir wollen nunmehr die Verhältnisse, wie früher, in Zeitabständen von $2l/a$ betrachten.

Im Zeitabschnitt (I) $0 \approx 2l/a$:

$$x_1 = -x_0 e^{-\mu t} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t + \cos \varepsilon t \right), \quad (43)$$

$$c_1 = \frac{P_0}{M\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t. \quad (44)$$

In den Zeitabschnitten (2) $2 l/a \approx 4 l/a$ wird sich infolge der reflektierten Druckwelle die Bewegungsgleichung des Kolbens im Verhältnis zu (39) ändern, und zwar ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{M} \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = -2\lambda \frac{F}{M} p_1, \quad (46)$$

wo p_1 auf Grund der Gleichung (45) berechnet werden kann und der im Zeitabschnitt (1) entstandene Druckverlauf im Zeitbereich $0 - 2 l/a$ zu deuten ist. Der Index »1« weist darauf hin, daß der Druck in der ersten Periode entstanden ist.

Der Wert λ beträgt, ähnlich wie früher,

$$\frac{F-f}{F+f}.$$

Aus der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (46) erhält man die in der zweiten Periode entstehenden Funktionen $x_2 = f(t)$ bzw. $c_2 = f(t)$. Vom Kolben aus bewegt sich in Richtung des Querschnittes I—I nunmehr eine aus zwei Gliedern bestehende Druckwelle, namentlich $\lambda \cdot p_1$ und der aus der Gleichung (46) bestimmmbare Wert p_2 ; die beiden Glieder sind natürlich nicht unabhängig voneinander. Vorläufig wollen wir von der Lösung der Gleichung (46) Abstand nehmen und folgende Verhältnisse prüfen:

In der Periode (3) $4 l/a \approx 6 l/a$ ist die Bewegungsgleichung des Kolbens, unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $p = \varrho a c$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{M} \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = -2\lambda \varrho a \frac{F}{M} c_2 - 2\lambda^2 \varrho a \frac{F}{M} c_1, \quad (47)$$

in welchem Ausdruck (c_2) die auf Grund der Gleichung (46) bestimmmbare Kolbengeschwindigkeit bedeutet.

In der Periode (4) $6 l/a \approx 8 l/a$ auf Grund der Gleichung (47):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{M} \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = -\varrho a \frac{F}{M} 2(\lambda c_3 + \lambda^2 c_2 + \lambda^3 c_1). \quad (48)$$

Nach entsprechender Umformung und unter Berücksichtigung, daß $\delta = \varrho a F$ ist, erhält man:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = -\varrho a \frac{F}{M} \left[\frac{dx}{dt} + 2(\lambda c_3 + \lambda^2 c_2 + \lambda^3 c_1) \right], \quad (49)$$

wo $dx/dt = c_4$ die auf Grund der Gleichung (49) berechenbare Kolbengeschwindigkeit bedeutet.

Unter Zugrundelegung der gleichen Erwägungen in der Periode (n) $(2 n - 2) l/a \approx 2 nl/a$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = -\varrho a \frac{F}{M} \left[\frac{dx}{dt} + 2(\lambda c_{n-1} + \lambda^2 c_{n-2} + \dots + c_1 \lambda^{n-1}) \right]. \quad (50)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (50) figuriert in der runden Klammer in bezug auf λ eine geometrische Reihe, wo die Potenzen von λ mit der Geschwindigkeitsfunktion $c = f(t)$ multipliziert sind. Die Frage besteht darin, welche Form die einzelnen Funktionen $c_1(t), c_2(t), \dots, c_{n-1}(t)$ haben und inwiefern diese voneinander abweichen.

Diesbezüglich wollen wir bemerken, daß auf Grund der Gleichungen (39), (46), (47), (48), (50) der Definitionsbereich der Geschwindigkeitsfunktion c_1, c_2, \dots, c_n berechnet werden kann; hinsichtlich der im Zeitabschnitt $0 - 2 l/a$ und im Zeitpunkt $t = 0$ bestimmten Werte ist nur $c_1 = 0$; der Anfangswert der übrigen Geschwindigkeitsstufen kann — aus der Gleichung (39) ausgehend — rekursiv bestimmt werden. (Hierauf wollen wir noch zurückkommen.) Wird in Verbindung mit dem Zusammenhang (50) der der Wirklichkeit nicht entsprechende Fall angenommen, daß $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = c_n = dx/dt$ ist, so gestaltet sich die Differentialgleichung (50) wie folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = -\varrho a \frac{F}{M} \frac{dx}{dt} [1 + 2(\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1})]. \quad (51)$$

Bei der Ableitung (18) konnte aber festgestellt werden, daß

$$1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda^i = \frac{F}{f}$$

ist. Wird dies in die Gleichung (51) eingesetzt, so ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = -\varrho a \frac{F^2}{f} \frac{1}{M} \frac{dx}{dt}$$

oder geordnet und nach Einsetzen der Bezeichnung $\alpha = (F^2/f)\varrho a$ ergibt sich, daß

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{M} \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0 \quad (52)$$

ist, welch letztere Gleichung lediglich mit dem Unterschied mit der Differentialgleichung (39) übereinstimmt,* daß in diesem Fall $\alpha = (F/f)\delta$ ist.

Offensichtlich ist, daß die Lösung der Gleichung (52) mit der auf Grund der Gleichung (39) ermittelten übereinstimmt, wobei aber die Zusammenhänge in bezug auf (43) und (44) gemachten Erwägungen zu berücksichtigen sind, nämlich: welchen Wert hat der Ausdruck $\alpha/2M$ bzw. welches Vorzeichen besitzt die Differenz $(\alpha/2M)^2 - \alpha^2$. Hiervon hängt es ab, ob sich die Lösung (52) der Gleichung (43) oder der Gleichung (43a) ähnlich gestaltet.

Aus den vorangehenden Erwägungen geht hervor, welche Art von Vernachlässigungen im Falle von $D > d$ gemacht werden können (dies ist aus der Gleichung »51« ersichtlich), wenn angenommen wird, daß die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist. Auf Grund der unsererseits abgeleiteten Erwägungen kann darauf gefolgert werden, daß die Kolbengeschwindigkeit konstant sein müßte, um die Gesetzmäßigkeit der Kolbenbewegung im Sinne der Differentialgleichung (52) bestimmen zu können. Die vorstehenden Ausführungen haben aber erwiesen, daß dies nicht zutrifft. Das Ausmaß der Vernachlässigung kann derzeit noch nicht festgestellt werden, denn der Wert der Funktionen $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ist unbekannt und die Summe der Glieder in den Zusammenhängen (50) und (51) konvergiert — in Abhängigkeit vom Werte λ — gegen den Quotienten (F/f) .**

Zur genauen Untersuchung des Vorganges und zur Bestimmung der Kolbenbewegung ist die nichthomogene Differentialgleichung (50) in Zeitabschnitten von je $2l/a$ zu lösen, wie dies übrigens in den Gleichungen (46) bzw. (47) vorgeschrieben wurde, hierbei sind aber folgende Überlegungen zu berücksichtigen:

Wird Gleichung (46) gelöst und die ermittelte Funktion $c_2 = F(t)$ in die rechte Seite der Gleichung (47) eingesetzt, so ergibt bereits die zweite bzw. dritte Stufe ziemlich verwickelte Zusammenhänge. Wird dies in n Fällen vorgenommen, so erscheint bei der Lösung der n -ten Gleichung das Ergebnis vollkommen unübersichtlich. Die Annahme ist aber plausibel, daß die Kolbengeschwindigkeit innerhalb einer Periode (d. h. innerhalb der Zeitspanne von $2l/a$) als konstant angenommen wird, da die Zeitspanne von $2l/a$ im Verhältnis zur vollen Zeitspanne der Kolbenbewegung sehr gering ist. In diesem Falle wird die Lösung der Gleichungen wesentlich leichter, und die Aufzeichnung der von der Periodenzahl abhängigen Funktionen $c = f(n)$ bzw. $c = f(t)$ bereitet ebenfalls keine Schwierigkeit.

* Zu diesem Resultat gelangte auch S. Gösi, als er in bezug auf den Druckraum der Länge l die Kontinuität bestimmte und die Flüssigkeit als unzusammendrückbar bzw. das Volumen des Druckraumes als $V=0$ angenommen hat [7].

** Selbstverständlich kann die Kontinuitätsgleichung unter Anwendung des Hookeschen Gesetzes auch für den Fall der federbetätigten Kolbenpumpe aufgeschrieben werden, wenn die Möglichkeit der statischen Untersuchung der Verhältnisse gegeben ist. In diesem Falle erhalten wir eine Differentialgleichung dritter Ordnung; siehe diesbezüglich die Bemerkung (*).

Dementsprechend ist daher in der Periode $0 \approx 2 l/a$ die Gleichung des Kolbenweges

$$x_1 = -x_0 e^{-\mu t} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t + \cos \varepsilon t \right), \quad (43)$$

und die Geschwindigkeit

$$c_1 = \frac{P_0}{M \varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t. \quad (44)$$

Periode (2) $2 l/a \approx 4 l/a$: Die Bewegungsgleichung des Kolbens weicht insofern von der Gleichung (46) ab, daß die rechte Seite nunmehr konstant ist und mit der Gleichung (44) übereinstimmt. (Z. B. die zum Wert von $t = 2 l/a$ gehörende Funktion.) Wir bezeichnen dies mit c'_1 , wodurch

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{M} \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = -2\lambda \frac{F}{M} \varrho a c'_1, \quad (53)$$

deren Lösung

$$x_2 = -2\lambda \frac{\delta}{M \alpha^2} c'_1 + e^{-\mu t} (c_1 \cos \varepsilon t + c_2 \sin \varepsilon t) \quad (54)$$

ist. Im Falle von (54) spielt sich der Vorgang im Zeitbereich $(2 l/a - 4 l/a)$ ab, und dementsprechend ergibt sich die Bestimmung der Anfangsbedingungen durch Einsetzen von $t = 2 l/a$.

Wir wollen nunmehr die Anfangsbedingungen mit $t = 0$, $x_2 = x_{20}$ bzw. $c_2 = c_{20}$ bezeichnen. (Hier bezieht sich $t = 0$ lediglich auf die Gleichung (54), in Wirklichkeit ist für den Gesamtvorgang $t = 2 l/a$ gültig.) Unter dieser Voraussetzung und Annahme der Bezeichnung $K = 2\lambda(\delta/M \alpha^2) c'_1$ ist

$$x_2 = -K + e^{-\mu t} [(K - x_{20}) \cos \varepsilon t + c_2 \sin \varepsilon t].$$

Nach Ableitung kann hieraus der Wert von c_2 wie folgt ausgedrückt werden:

$$c_2 = \frac{c_{20} + \mu K - \mu x_{20}}{\varepsilon}.$$

Wird nunmehr dieser Wert in die Gleichung (54) eingesetzt und die erforderlichen Umformungen durchgeführt, so ergibt sich:

$$x_2 = -K + e^{-\mu t} \left[(K - x_{20}) \cos \varepsilon t + \frac{c_{20} + \mu K - \mu x_{20}}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right].$$

Danach ist der Wert von K abermals einzusetzen und die Gleichung entsprechend zu ordnen, ferner zu berücksichtigen, daß $\alpha^2 = 1/Mk$ ist. So erhält man, daß

$$x_2 = -2k\delta\lambda c'_1 + e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) (2k\delta\lambda c'_1 - x_{20}) + \frac{c_{20}}{\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t \quad (55)$$

ist. Die Kolbengeschwindigkeit ergibt sich aus der Ableitung von (55):

$$c_2 = \frac{x_{20} - 2\lambda\delta k c'_1}{Mk} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t + c_{20} e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right). \quad (56)$$

Wie vorstehend bereits hervorgehoben wurde, bedeutet c'_1 den zum Zeitabschnitt $t = 2l/a$ gehörenden Geschwindigkeitswert. Dies würde eigentlich in dem Fall zutreffen, wenn $t = l/a$ die für den betreffenden Augenblick gültige Geschwindigkeit bedeutete. Wird jedoch aus der Erwägung ausgegangen, daß dies nur einen unbedeutenden Fehler bedeutet, so kann angenommen werden, daß $c'_1 = c_{20}$ ist.

Hieraus folgt, daß auf der rechten Seite der zu den einzelnen Perioden gehörenden Differentialgleichungen [z. B. (53)] die als konstant angenommenen Geschwindigkeitswerte mit den als Ausgangsbedingung angenommenen Geschwindigkeitswerten oder in Frage stehenden Perioden übereinstimmen.

Betrachten wir nunmehr die Verhältnisse während folgender (3) Periode $4l/a \approx 6l/a$ ist die Bewegungsgleichung des Kolbens:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\delta}{M} \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = -2 \frac{\delta}{M} (\lambda c_{20} + \lambda^2 c_{10}). \quad (57)$$

Nehmen wir an, daß $2(\delta/M)(\lambda c_{20} + \lambda^2 c_{10}) = Z$ ist, wodurch sich für Gleichung (57) folgende Lösung ergibt:

$$x_3 = -\frac{Z}{\alpha^2} + e^{-\mu t} (C_1 \cos \varepsilon t + C_2 \sin \varepsilon t). \quad (58)$$

Ähnlich dem in der zweiten Periode angewandten Verfahren gestaltet sich der Kolbenweg bzw. die Kolbengeschwindigkeit wie folgt:

$$x_3 = -2k\delta(\lambda c_{30} + \lambda^2 c_{20}) + \\ + e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) [2k\delta(\lambda c_{30} + \lambda^2 c_{20}) - x_{30}] + \frac{c_{30}}{\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t, \quad (59)$$

$$c_3 = \frac{x_{30} - 2\delta k(\lambda c_{30} + \lambda^2 c_{20})}{Mk\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t + c_{30} e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right). \quad (60)$$

Periode (4) $6 l/a - 8 l/a$: Die Zusammenhänge können in der vierten Periode ähnlich abgeleitet werden, womit der Kolbenweg bzw. die Kolbengeschwindigkeit folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$x_4 = -2k\delta(\lambda c_{40} + \lambda^2 c_{30} + \lambda^3 c_{20}) + \\ + e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) [2k\delta(\lambda c_{40} + \lambda^2 c_{30} + \lambda^3 c_{20}) - x_{40}] + \frac{c_{40}}{\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t, \quad (60a)$$

$$c_4 = \frac{x_{40} - 2\delta k(c_{40}\lambda + c_{30}\lambda^2 + c_{20}\lambda^3)}{Mk\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t + \\ + c_{40} e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right). \quad (61)$$

Offensichtlich ist, daß dieselben Erwägungen auch für die weiteren Zeitperioden angewendet werden können, weshalb auch in der Periode (n) $2(n-2)la \approx 2nl/a$:

$$x_n = -2k\delta(\lambda c_{n_0} + \lambda^2 c_{(n-1)_0} + \lambda^3 c_{(n-2)_0} + \dots + \lambda^{n-1} c_{20}) + \\ + e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) [2k\delta(\lambda c_{n_0} + \lambda^2 c_{(n-1)_0} + \\ + \lambda^3 c_{(n-2)_0} + \dots + \lambda^{n-1} c_{20}) - x_{n_0}] + \frac{c_{n_0}}{\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t, \quad (62)$$

$$c_n = \frac{x_{n_0} - 2k\delta(\lambda c_{n_0} + \lambda^2 c_{(n-1)_0} + \lambda^3 c_{(n-2)_0} + \dots + \lambda^{n-1} c_{20})}{Mk\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t + \\ + c_{n_0} e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) \quad (63)$$

ist.

Auf Grund der Zusammenhänge (62) bzw. (63) erhalten wir eigentlich eine Rekursionsformel, denn aus den Gleichungen (43) bzw. (44) und auf Grund der zwischen der Kolbenoberfläche und der Druckleitung stattfindenden Flüssigkeitsschwingungen können die Funktionen $x = f(t)$ und $c = f(t)$ bzw. $x = f(n)$ bestimmt werden.

Besteht bei der Berechnung der Funktionen nicht der Wunsch, die Änderung der Geschwindigkeit bzw. des Kolbenweges innerhalb einer gewissen Periode zu bestimmen (und in Anbetracht dessen, daß diese Änderung unbedeutend und die Vereinfachung nur mit geringen Fehlern verbunden ist), können folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$e^{-\mu t} \sin \varepsilon t = A; \quad e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t - \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) = B; \quad e^{-\mu t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\mu}{\varepsilon} \sin \varepsilon t \right) = D,$$

wo auf Grund der vorstehenden Ausführungen A , B und D konstante Werte sind und $t = 2l/a$ ist. Es sollen ferner folgende Bezeichnungen eingesetzt werden:

$$\delta c_{n_0} = R_{n_0}; \quad \delta c_{(n-1)_0} = R_{(n-1)_0}, \dots, \delta c_{20} = R_{20}.$$

Hierzu sei bemerkt, daß R eigentlich jener Kraft entspricht, die die als konstant betrachtete vorlaufende Druckwelle nach Reflexion an der Druckleitung als Bremseffekt auf den Kolben ausübt. In der zweiten Periode $2\lambda R_{20}$, ferner in den weiteren Perioden gemäß den Bestimmungen der Zusammenhänge (62) bzw. (63). Unter Berücksichtigung dieser Erwägungen ändert sich die Gleichung (62) wie folgt:

$$x_n = -x_{n_0} D - 2k(\lambda R_{n_0} + \lambda^2 R_{(n-1)_0} + \dots + \lambda^{n-1} R_{20}) (1 - A) + \frac{c_{n_0}}{\varepsilon} A. \quad (64)$$

Unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{x_{n_0}}{k} = P_0$$

ist, d. h. die Federkraft zu Beginn der Periode (n), kann (63) wie folgt aufgeschrieben werden:

$$c_n = \frac{P_{n_0} - 2(\lambda R_{n_0} + \lambda^2 R_{(n-1)_0} + \dots + \lambda^{n-1} R_{20})}{M\varepsilon} A + c_{n_0} B. \quad (65)$$

Nach Prüfung der Gleichungen (64) und (65) und Vergleich derselben mit den Zusammenhängen (43) und (44) ist es ersichtlich, daß die letzteren, wenn die Druckschwingungen im Druckraum vernachlässigt werden, den Sonderfällen von (64) bzw. (65) entsprechen. Wird z. B. aus Gleichung (65) die geometrische Reihe und das Glied $c_{n_0} B$ fortgelassen, so erhält man die Beziehung:

$$c_n = \frac{P_0}{M\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t,$$

was eigentlich mit (44) identisch ist. Diese Feststellung ist auch in bezug auf die Gleichungen (64) und (43) gültig.

b) Untersuchung des Druckverlaufes im Druckraum der Pumpe

Bisher wurden die Bewegungsgesetze der durch Federkraft bewegten Kolben geprüft. Bei der Ableitung der hierbei ermittelten Zusammenhänge wurde selbstverständlich auch der im Druckraum herrschende Druck berücksichtigt, was aber erst hier ausgesprochen zur Geltung kommt. Ähnlich wie

in den Abschnitten II und III, wird auch in diesem Falle der Druckverlauf an der Kolbenfläche bzw. im Anfangsabschnitt der Druckleitung untersucht und in Abhängigkeit der Periodenanzahl dargestellt.

Druckverlauf auf der Kolbenfläche in der Periode (1) $0 \approx 2 l/a$. Offensichtlich beträgt der Wert des auf die Kolbenfläche wirkenden Druckes

$$p_d = \varrho a c_1 = \varrho a \frac{P_{10}}{M\varepsilon} e^{-\mu t} \sin \varepsilon t,$$

wo, im Sinne der früheren Erwägungen c_1 die Kolbengeschwindigkeit in der ersten Periode bedeutet und einen konstanten Wert aufweist.

In Periode (2) $2 l/a \approx 4 l/a$:

$$p_d = \varrho a c_2 + 2 \lambda \varrho a c_1 = \varrho a (c_2 + 2 \lambda c_1);$$

in Periode (3) $4 l/a \approx 6 l/a$:

$$p_d = \varrho a [c_3 + 2 (\lambda c_2 + \lambda^2 c_1)];$$

in Periode (4) $6 l/a \approx 8 l/a$:

$$p_d = \varrho a [c_4 + 2 (\lambda c_3 + \lambda^2 c_2 + \lambda^3 c_1)];$$

in Periode (n) $(2 n - 2) l/a \approx 2 n l/a$:

$$p_d = \varrho a [c_n + 2 (\lambda c_{n-1} + \lambda^2 c_{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} c_1)] = \varrho a (c_n + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda^i c_{n-i}). \quad (66)$$

Es ist klar ersichtlich, daß der auf die Kolbenfläche wirkende Druck nach der Form mit der Beziehung (15) (siehe Abschnitt III.1a) übereinstimmt. Eine Abweichung besteht nur darin, daß in der Gleichung (15) $c_n = c_{n_1} = \dots = c_0$ und gleichzeitig die in der Gleichung (66) enthaltenen Geschwindigkeitswerte ($c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$) je Periode auf Grund der rekursiven Formel (65) zu bestimmen sind.

Nach erfolgtem Stillstand des Kolbens in der Periode ($n + 1$), da $c_{n+1} = 0$ ist und die Anzahl der Glieder in der runden Klammer von (66) sich um λc_n erhöht — ferner der periodische Druckverlauf weiter vor sich geht — erhält man, daß:

$$p_d = \varrho a [2 (\lambda c_n + \lambda^2 c_{n-1} + \dots + \lambda^n c_1)] \quad (67)$$

ist. Wird das Glied $\varrho a 2 \lambda c_n$ in zwei Teile zerlegt und der Wert von λ ausgeklammert, erhält man:

$$p_d = \varrho a (c_n + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda^i c_{n-i}) + \varrho a c_n] \lambda. \quad (68)$$

Das erste Glied dieser Summe ist aber mit (66) gleichwertig, was nunmehr mit (p_{dn}) bezeichnet werden soll (der in der Periode n herrschende Druck), des weiteren kann λ in jeder weiteren Periode ausgeklammert werden, demzufolge

$$p_d = (p_{dn} + \varrho a c_n) \lambda^m \quad (69)$$

ist, wo $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ und wenn $m \rightarrow \infty$ ist, dann wird $p_d \rightarrow 0$.

*Druckverlauf im Anfangsabschnitt der Druckleitung
beim Querschnitt I—I (vorlaufende Druckwelle)*

Auf Grund der vorangehenden Erwägungen, erhält man in der Periode (1) $l/a \approx 3 l/a$:

$$p = \varrho a c_1 + \varrho a c_2 \lambda = \varrho a c_1 (1 + \lambda);$$

in der Periode (2) $3 l/a \approx 5 l/a$:

$$p = \varrho a c_2 + \varrho a c_2 \lambda + \varrho a c_1 \lambda_1 + \varrho a c_1 \lambda^2 = \varrho a [c_2 + (c_2 + c_1) \lambda + b_2 \lambda^2];$$

in der Periode (3) $5 l/a \approx 7 l/a$:

$$p = \varrho a [c_3 + (c_3 + c_2) \lambda + (c_2 + c_1) \lambda^2 + c_1 \lambda^3];$$

und dementsprechend in der Periode (n) $(2n - 1) l/a \approx (2n + 1) l/a$:

$$p = \varrho a [c_n + (c_n + c_{n-1}) \lambda + (c_{n-1} + c_{n-2}) \lambda^2 + \dots + c_1 \lambda^n]. \quad (70)$$

Hierdurch erhält man eine ähnliche Beziehung wie Gleichung (24), jedoch mit dem Unterschied, daß in der Gleichung (70) der Multiplikator der einzelnen λ -Werte (mit Ausnahme von λ^n) aus der Summe von zwei benachbarten Kolbengeschwindigkeiten besteht und die einzelnen Geschwindigkeiten c_1, c_2, \dots, c_n aus der rekursiven Formel (65) bestimmt werden können.

Es ist offensichtlich, daß sich die vorlaufende Druckwelle ab Periode ($n + 1$) dementsprechend gestaltet. In der Periode ($n + 1$) ist

$$p = \varrho a [c_n \lambda + (c_n + c_{n-1}) \lambda^2 + \dots + c_1 \lambda^{n+1}].$$

Wenn hier λ ausgeklammert wird, entspricht der Multiplikator von λ genau dem Zusammenhang (70); wird dies nunmehr mit p_n bezeichnet, so ist

$$p = p_n \lambda^m, \quad (71)$$

wo $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$, ferner wie früher, wenn $m \rightarrow \infty$ ist, dann wird $p \rightarrow 0$.

Im Laufe unserer bisherigen Untersuchungen war die Druckleitung unmittelbar an den Druckraum der Länge l angeschlossen. Bei den in der Praxis verwirklichten Einspritzpumpen ist hier jeweils ein Druckventil eingebaut, dessen Einwirkung die Gestaltung der vorlaufenden Druckwelle in Abhängigkeit von der Ventilkonstruktion ändert. Obzwar bei Vernachlässigung der Wirkung des Druckventils die Erscheinungen den tatsächlichen Vorgang nur mit einer gewissen Annäherung darstellen, erscheinen diese Prüfungen aus folgenden zwei Gründen wichtig: einerseits kann die Wirkung des Druckventils nur dann ausgewertet werden, wenn der Verlauf der Erscheinungen ohne Vorhandensein des Ventils bekannt ist, andererseits — wie sich dies bei den Untersuchungen herausgestellt hat — wirkt sich in den meisten Fällen der Druckventileffekt nicht in jeder Beziehung entscheidend aus und macht sich in erster Linie im ersten Abschnitt der Förderung geltend.

V. Versuchsprüfungen

Da wir im Laufe der theoretischen Untersuchungen (infolge mathematischer Schwierigkeiten oder anderer Gründe) gewisse Vereinfachungen angewendet haben, erscheint es unerlässlich, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der aufgestellten Beziehungen zu entscheiden, wozu wir die zu diesem Zwecke entwickelten Prüfgeräte verwendet haben. Dies hat sich nicht nur bei den experimentellen Kontrollprüfungen der vorstehend erörterten theoretischen Erwägungen bewährt, sondern es konnte mit dessen Hilfe auch die Mehrzahl der mit den Einspritzpumpen verbundenen Erscheinungen gemessen werden.* Im Rahmen dieses Aufsatzes wollen wir von der Beschreibung des Meßgerätes Abstand nehmen, da dies in keinem engen Zusammenhang mit den bisherigen Ausführungen steht.

1. Prüfung des Druckverlaufes bei durch Nockenwellen betätigten Pumpen

Zu diesen Versuchen wurden Einspritzpumpen der ungarischen Fabrik *Gamma Optische Werke* herangezogen. Diese gehören zu jenen Pumpen, deren Arbeitsweise auf dem Prinzip der sogenannten schlitzgesteuerten Drehkolbenpumpen beruht. (In der Fachliteratur bzw. in der Praxis werden diese Pumpen »*Bosch-Pumpen*« genannt, da dieser Pumpentyp durch *Bosch* entwickelt wurde.)

Bild 9 zeigt die zu Versuchszwecken umgebaute Pumpe samt dem zur Druckbestimmung verwendeten piezoelektrischen Quarzgeber. Der Rohrabschnitt hinter dem Quarzgeber war $L = 2,2$ m lang, wodurch die Gewißheit geschafft werden konnte, daß während der Kolbenbewegung vom anderen

* Der Beitrag [8] enthält eine kurzgefaßte Beschreibung und Lichtbilder der Meßvorrichtung.

Rohrende keine Druckwelle einlangt, sowie daß die Förderung ungestört vor sich geht. Die Länge des Druckraumes betrug $l = 10 \text{ mm}$ und $l = 63 \text{ mm}$. Das Geschwindigkeitskennbild bzw. Wegkennbild der die Kolbenbewegung bewerkstelligenden Nockenwelle ist aus Bild 10 ersichtlich. Die hier bezeich-

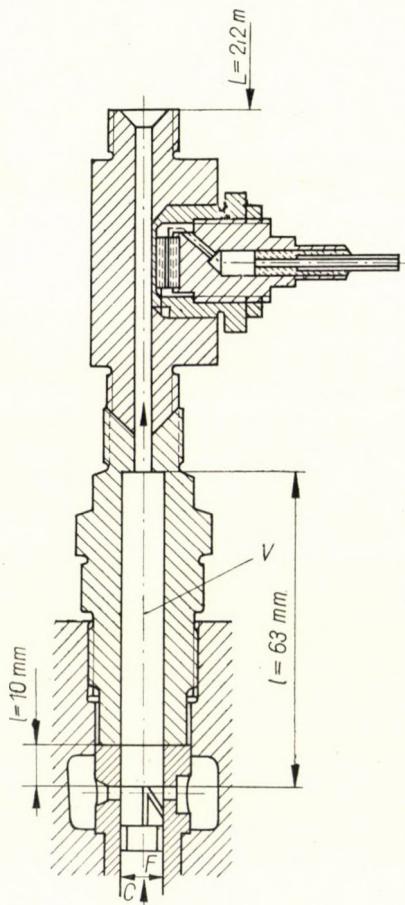


Bild 9. Druckraum der bei den Versuchen verwendeten, durch Nockenwelle betätigten Kolbenpumpe

nete Geschwindigkeit $c_0 = 0,2325 \text{ mm}/\alpha^\circ$ entspricht der sogenannten Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher die obere Steuerkante des Kolbens die Eintrittsöffnungen eben verschließt (Bild 9 zeigt diese Position). Der im Bild 10 bezeichnete Winkelbereich $\Delta\alpha$ entspricht dem Arbeitsbereich des Kolbens; am Ende des Abschnittes $\Delta\alpha$ verbindet nämlich die untere Steuerkante des Kolbens den Druckraum V mit dem Saugraum V_{sz} .

Wie aus den Bildern ersichtlich, stimmt das Geschwindigkeitskennbild des Kolbens genau mit dem Bild 2c überein, d. h. der Druckverlauf im Druck-

raum V wird durch die Gleichung (37) dargestellt. Die Gleichung (37) weicht von den Bedingungen der Abb. 10 insoweit ab, daß im Druckraum V schon vor der eigentlichen Förderleistung ein gewisser Druckanstieg stattfindet, da nämlich der Kolben die Flüssigkeit nicht nur in den Saugraum, sondern auch in Richtung des Raumes V fördert, was zu einem Druckanstieg führt.

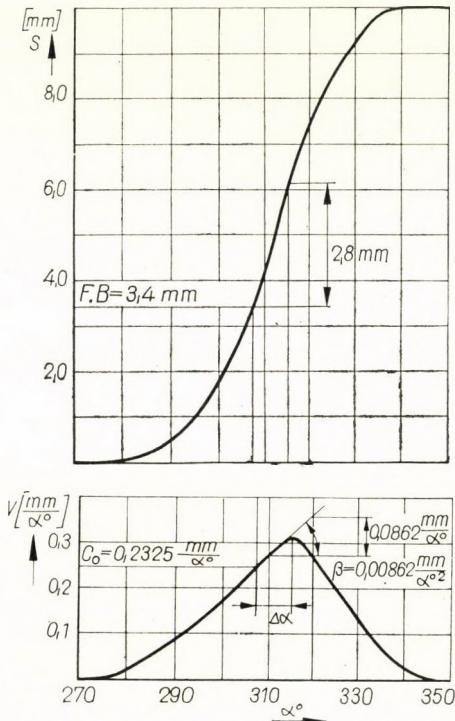


Bild 10. Weg- und Geschwindigkeitskennbild der Nockenwelle der Versuchspumpe

Dies kann übrigens am ursprünglichen Indikatordiagramm auf dem Bilde 11 gut beobachtet werden. Der Förderbeginn wurde der Bezeichnung am Ende des 4° Abschnittes zugeordnet, und wie es aus der Abbildung ersichtlich ist, entstand bereits schon früher ein gewisser Druckanstieg.

Im Bild 12 sind (als Beispiel) zwei Druckverläufe abgebildet, die bei einer Druckraumlänge von $l = 10$ mm und $l = 63$ mm gemessen und auf Grund der Gleichung (37) berechnet wurden. Es kann gut beobachtet werden, daß der Charakter der Kurven zufriedenstellend übereinstimmt; vom Standpunkt der Druckwerte ist diese Übereinstimmung bei der Länge $l = 63$ mm weitgehend befriedigend, was aber bei der Länge $l = 10$ mm nicht mehr der Fall ist. Es kann genau beobachtet werden, daß unter Einwirkung der kürzeren Flüssigkeitssäule bzw. infolge der größeren Anzahl von Reflexionen der Druck wesentlich steiler ansteigt. Dies ergibt sich außerdem aus der

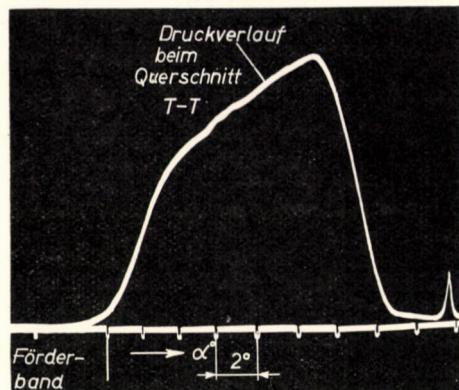


Bild 11. Mit der im Bild 9 dargestellten Pumpe aufgenommenes, originelles Indikatorschaubild

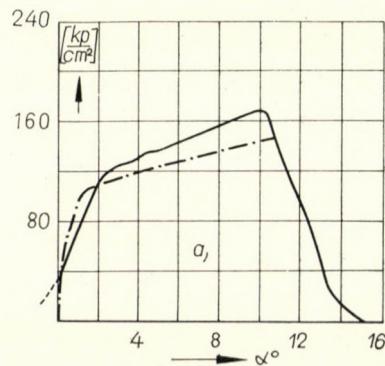
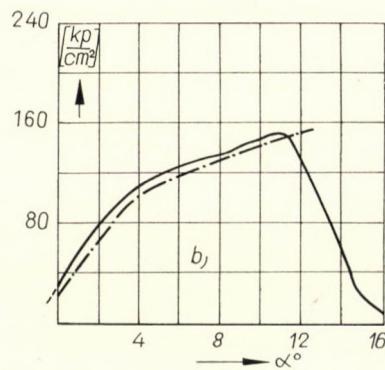


Bild 12. Vergleich der theoretischen und experimentellen Untersuchungen

Bezeichnungen:

- a) $n = 600$ Umd/min, $l = 10$ mm, $d = 2,4$ mm, $D = 8$ mm;
- b) $n = 596$ Umd/min, $l = 63$ mm, $d = 2,4$ mm, $D = 8$ mm;
- gemessen, - - - berechnet

Gleichung (37), da hier der Wert des in Klammern angeführten Gliedes wesentlich schneller abnimmt, wenn l einen kleineren Wert erhält.

Der Zweig des Druckverlaufes mit abnehmendem Wert wurde hier nicht berechnet, und zwar mit Rücksicht auf den Umstand, daß am Ende der Flüssigkeitsförderung der Druck nicht im Sinne der Gleichung (38) abnimmt, denn bei Verbindung des Druck- und Saugraumes strömt die Flüssigkeit dem letzteren zu.

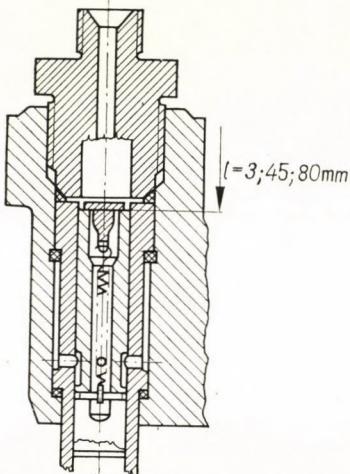


Bild 13. Druckraum der federbetätigten Versuchspumpe

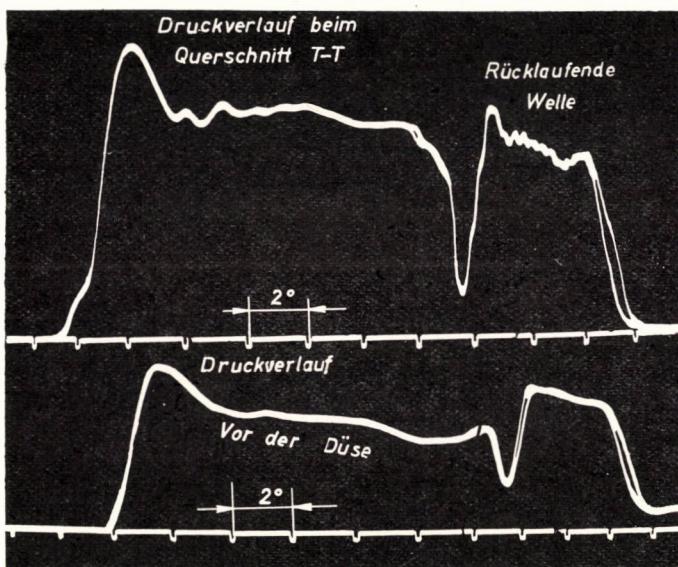


Bild 14. Mit der im Bild 13 dargestellten Pumpe aufgenommene originelle Indikatorsschaubilder

Dieses Problem muß durch Anwendung anderer Methoden behandelt werden, und die vorstehend erörterten Wellengleichungen könnten hier kaum angewendet werden.

2. Untersuchung des Druckverlaufes bei einem durch Federkraft betätigten Kolben

Bild 13 stellt den Druckraum der federbetätigten Versuchspumpe dar. Der Quarzgeber war an die Leitung (mit dem Durchmesser d) ähnlicherweise angeschlossen wie bei der Anordnung gemäß Bild 10. Die Druckraumlänge betrug 3, 45 bzw. 80 mm. Bei diesem Versuch haben wir uns ebenfalls das Ziel gesetzt, die von der Pumpe in Richtung des Zerstäubers laufende Druckwelle zu erfassen, bzw. die Richtigkeit der Beziehungen (70) bzw. (71) zu bestätigen. Zur Lösung der Gleichung (70) mußten wir vorerst die zu den einzelnen Perioden gehörenden Durchschnittsgeschwindigkeiten c_1, c_2, \dots, c_n auf Grund der Formel (65) bestimmen.

Zu diesem Zwecke haben wir eine elektrische Rechenmaschine verwendet. Bild 14 zeigt zwei originale Indikatordiagramme, die unter Berücksichtigung der in dieser Abbildung bezeichneten Kennwerte aufgenommen wurden.*

Bild 15 bzw. Bild 16 stellt den gemessenen und berechneten Druckverlauf dar, und zwar im Bild 15 unter Berücksichtigung einer Druckraumlänge von $l = 3$ mm und im Bild 16 bei einer Druckraumlänge von $l = 45$ mm bzw. $l = 80$ mm. Außer den gemessenen Kurven wurde in den Diagrammen auch der berechnete Druckverlauf aufgezeichnet, wozu wir drei verschiedene Berechnungsmethoden angewendet haben.

Die hier erarbeiteten und unter Verwendung der Druckgleichungen ermittelten Gleichungen (64), (65), (70) und (71), ferner den auf Grund der Lösung der Differentialgleichung (52) ermittelten Druckverlauf bzw. Kolbenweg und Geschwindigkeitsverlauf — die unter Verwendung der Gleichungen (43a), (44a) bzw. (45) berechnet werden können (die im Druckraum befindliche Flüssigkeit wird als nicht zusammendrückbar betrachtet) — und schließlich den Druckverlauf bzw. die Gesetzmäßigkeit der Kolbenbewegung, die mit Hilfe jener Differentialgleichungen aufgeschrieben werden können, zu deren Erarbei-

* In diesen Diagrammen ist auch der Druckverlauf an den Düsen abgebildet; wir haben den Druckverlauf an der Pumpe und an der Düse gleichzeitig photographiert.

Im vorliegenden Fall ist am Zerstäuber eine offene Düse eingebaut. Die sich hier abspielenden Erscheinungen sind in jeder Beziehung instationär (d. h. die in der Düse befindliche Flüssigkeitsmenge ist ebenfalls berücksichtigt). Hinsichtlich der hiermit verbundenen Untersuchungen verweisen wir auf den Aufsatz von BENYÓ, P.: Einige Gesichtspunkte bezüglich der Druckvorgänge an den Zerstäubern des Einspritzsystems; *Ung. Wissenschaftliche Akademie, Dieselmotor-Konferenz*, Budapest 1965.

tung die auf den Druckraum anwendbare elastische Kontinuität herangezogen wird. (Annahme des sog. statischen Druckverlaufes.)

Bezüglich der letzteren sind folgende Gleichungen gültig*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{F}{M} p + \alpha^2 x = 0 \quad (72)$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f}{\rho a F} + \frac{V}{EF} \frac{dp}{dt}. \quad (73)$$

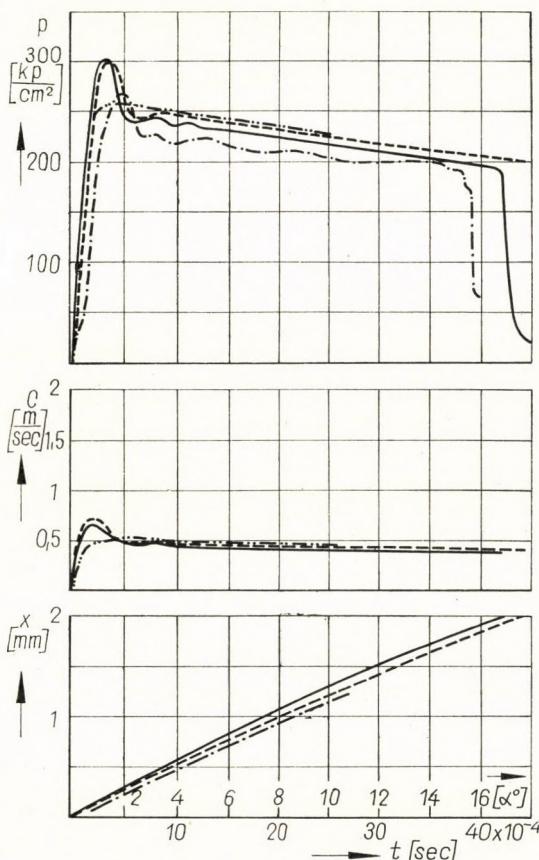


Bild 15. Vergleich der durch Versuche und drei Berechnungsverfahren erhaltenen Druckkurven: ist $n = 600$ Umd/min, $D = 12$ mm, $d = 1,8$ mm, $k = 0,327 \cdot 10^{-4}$ m/kp, $x_0 = -6,7$ mm, $M = 4,86 \cdot 10^{-2}$ kp/sec²/m, $V = 0,38$ cm³, $l = 3$ mm

Bezeichnungen: —·—·— gemessen; ———— dynamisches Verfahren nach Gleichungen (64), (65), (70) und (71); ——·—·— statisches Verfahren nach Differenzialgleichungen (72) und (73); —··—··— $V = 0$ nach Gleichungen (43a) und (44a)

* Siehe Bemerkung auf Seite 365.

Diese Differentialgleichungen ergeben sich aus der Lösung folgender homogener Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:*

$$\frac{V\zeta}{EF^2} \frac{d^3 p}{dt^3} + \frac{d^2 p}{dt^2} + \left(\frac{V\zeta}{EF^2} \alpha^2 + \frac{\zeta}{M} \right) \frac{dp}{dt} + \alpha^2 p = 0.$$

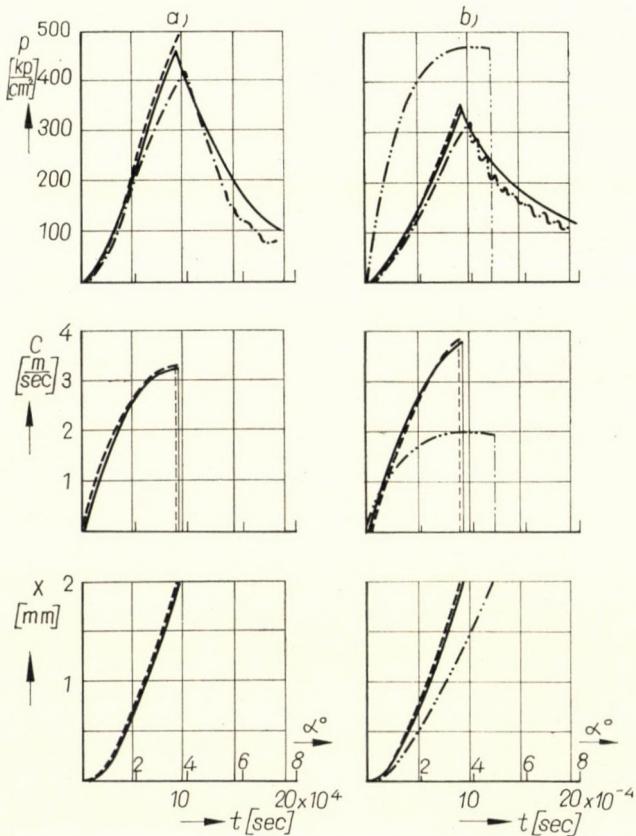


Bild 16. Vergleich der durch Versuche und drei Berechnungsverfahren erhaltenen Druckkurven, bei größeren Druckrauminhalten: es ist $D = 8$ mm, $d = 1,8$ mm, $M = 4,6 \cdot 10^{-2}$ kp.sec²/m, $x_0 = 6,7$ mm und (a) $n = 596$ Umd/min, $l = 80$ mm, $V = 4,079$ cm³ bzw. (b) $n = 615$ Umd/min, $l = 45$ mm, $V = 2,29$ cm³

Bezeichnungen: —— gemessen; —— dynamisches Verfahren nach Gleichungen (64), (65), (70) und (71); —— statisches Verfahren nach Differenzialgleichungen (72) und (73); —— $V = 0$ nach Gleichungen (43a) und (44a)

Bei Vergleich der Kurven (Diagramme) kann festgestellt werden, daß am meisten die dynamische Methode dem gemessenen Druckverlauf ähnlich ist. (Dies ist in erster Linie aus Bild 15 ersichtlich, indem hier der berechnete Druckverlauf den gemessenen Druckschwingungen weiterfolgt.) Die bei $V = 0$ bzw. bei der Voraussetzung eines nicht zusammendrückbaren Mediums erziel-

* Der Verlauf des Kolbenweges wird durch eine ähnliche Gleichung dargestellt.

ten Resultate weichen besonders im Falle eines größeren Druckraumvolumens von der Wirklichkeit ab und führen zu falschen Resultaten. Im Bilde 15 und 16 haben wir auch die Gesetzmäßigkeiten der berechneten Kolbenbewegung aufgetragen.

Außer den hier behandelten Fällen haben wir auch für zahlreiche andere Kennwerte (wie Kolbendurchmesser, Rohrdurchmesser, Federvorspannung usw.) Versuche durchgeführt bzw. bezügliche Berechnungen vorgenommen, können aber auf deren Erörterung hier nicht weiter eingehen.

VI. Zusammenfassung

In den vorstehenden Ausführungen haben wir auf Grund von theoretischen Voraussetzungen und teilweise auf Grund von experimentellen Untersuchungen jene Druckwellen behandelt, die in zwei Systemen von Kolbeinspritzpumpen (durch Nockenwelle bzw. Federkraft betätigtes Kolben) erzeugt wurden. Die hierbei ermittelten Zusammenhänge sind selbstverständlich nicht nur für Einspritzpumpen, sondern auch für sonstige, unter instationären Verhältnissen stattfindende Flüssigkeitsschwingungen gültig.

Das Wesentliche der hier erörterten theoretischen Untersuchungen besteht darin, daß der im Druckraum stattfindende Druckverlauf der Wirklichkeit entsprechend, unter Berücksichtigung der sich hier abspielenden Hochfrequenz-Druckschwingungen, aufgeschrieben wurde. Hierdurch gelang es, dieses Problem — bei den mittels Nockenwelle betätigten Pumpen — anstatt einer nichthomogenen Differentialgleichung erster Ordnung, durch Erarbeitung einer unendlichen geometrischen Reihe zu lösen. Die statischen Verhältnisse der durch Federkraft betätigten Pumpen werden im allgemeinen mittels einer Differentialgleichung dritter Ordnung dargestellt; es gelang uns, diese auf eine nichthomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zu vereinfachen. Durch Anwendung gewisser vereinfachender Voraussetzungen gelang es, die rechte Seite dieser Gleichung als konstant anzunehmen und hierdurch die Funktionen $x(t)$ bzw. $p(t)$ in einer rekursiven Form auszudrücken. Durch Vergleich der Ergebnisse der theoretischen und experimentellen Untersuchungen konnte bestätigt werden, daß die gemessenen und berechneten Resultate zufriedenstellend übereinstimmen.

Die numerischen Berechnungen (hierauf wurde bereits hingewiesen) haben wir in der Rechentechnischen Zentrale der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine durchgeführt.

Die experimentellen Untersuchungen wurden mit Hilfe von piezoelektrischen Quarzen und eines Kathodenstrahl-Oszillographen vorgenommen. Obwohl sich die Messung und Registrierung der sich besonders rasch abspielenden Vorgänge (besonders wenn diese Prüfungen wiederholt und authentisch

vorzunehmen sind) auch mit Hilfe einer solchen Apparatur schwerfällig gestaltet und besondere Sorgfalt erfordert, kann festgestellt werden, daß die zum Meßverfahren verwendete Einrichtung in jeder Beziehung zufriedenstellend arbeitete.

SCHRIFTTUM

7. GÖSI, S.: Untersuchung des Arbeitsvorganges an der Dieseleinspritzpumpe von Ganz—Jendrassik. *Acta Techn. Hung.* **26** (1959), 273—300.
8. BENYÓ, P.: Beitrag zur Untersuchung von Einspritzvorgängen *MTZ* (1962), 3 und *Járművek, Mezőgazdasági Gépek*, **1** (1964).

APPLICATION OF WAVE EQUATIONS TO SHORT PIPES, PART II

P. BENYÓ

SUMMARY

The relations obtained in Part I were applied to the case where the piston situated in the pressure space of the injection pump, considered to be a short tube, is displaced by a spring. Instead of the homogeneous differential equation of the third order obtained by the continuity method, an inhomogeneous differential equation of the second order was obtained, the right side of which can be taken as constant under certain conditions. Thus a recursion formula was obtained for the calculation of the pressure phenomena. The experiments made by the author prove that — for the relations deduced in Part I as well as for those deduced in Part II — the equations obtained agree well with real pressure conditions.

APPLICATION DES ÉQUATIONS D'ONDES AUX TUBES COURTS, PARTIE II

P. BENYÓ

RÉSUMÉ

Les relations obtenues dans la première partie ont été appliquées au cas où le piston est mis par un ressort dans l'espace de compression d'une pompe à injection considérée comme un tube court. Au lieu de l'équation différentielle homogène du troisième ordre obtenue en cas de continuité, on a eu dans ce cas une équation inhomogène du deuxième ordre, dont le côté droit pouvait être considéré comme constant dans certaines conditions. Pour le calcul de la pression, on trouvait ainsi une formule de récursion. En ce qui concerne les relations déduites tant dans la première que dans la deuxième partie de l'étude, les essais prouvent que les équations obtenues suivent bien les conditions de pression réelles.

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ К КОРОТКИМ ТРУБАМ, ЧАСТЬ II

П. БЕНЬЮ

РЕЗЮМЕ

Полученные в I части зависимости были применены для случая, когда в камере сжатия топливного насоса движение поршня происходит от пружины. В случае непрерывности, вместо однородного дифференциального уравнения третьего порядка, в этом случае было получено неоднородное уравнение второго порядка, правую часть которого, при известных условиях, можно было принять за постоянную. Для расчета возникающих давлений, таким образом, была получена рекурсационная формула. Проведенные эксперименты показали, что выведенные в I и II частях зависимости хорошо совпадают с действительным режимом давления.

INVESTIGATION OF THE DISTRIBUTION BY WEIGHT PERCENT OF THE COMPONENTS IN SIZE FRACTIONS OF GROUND PRODUCT MIXTURES*

K. REMÉNYI

HUNGARIAN ELECTRIC POWER PLANTS, BUDAPEST

[Manuscript received March 29, 1966]

The composition of mixed ground products of homogeneous substances are examined. The assumption which serves as a starting point for the investigation is that the size-distribution curves of the components follow the regularities of distribution, characterizing homogeneous substances. General graphic and computation methods are given for determining the function representing the composition by weight per cent of the size fractions. It has been demonstrated that in the mixture of ground products characterized by intersecting lognormal or RRB distribution curves, on the curve representing the composition of the size fractions depending on the grain size, one end value can be found. The grain size representing the end value is determined unambiguously by the parameters characterizing the distribution of the components constituting the mixture. For the case of lognormal distribution examples are given both for designing and computing RRB distributions.

I. Introduction

In the following size fractions of ground products of mixture will be investigated in order to establish the per cent by weight of each component of the chosen fraction. For the size distribution of ground products of homogeneous substances KOLMOGOROV proved, on theoretical considerations, that they follow a lognormal distribution. Experiments on simultaneous grinding of mixtures, outlined in the papers [1—4] and carried out by the author, described in other studies, have proved that between the components reciprocal effects were supervening. However, the experiments also showed that in the ground product of the mixture, the size distribution of the components is approximately lognormal which, at the same time, means that the size distribution of the resulting ground product already does not follow a lognormal distribution. Thus the reciprocal effect verified by the experiments, implies that the size-distribution curves of mixtures ground simultaneously, cannot be plotted by the addition according to which the mixing ratio of the size-distribution curves that were obtained by separate grinding of the components. This, however, does not preclude the possibility of trying to compute the curves of size distribution by weight per cent obtained by simultaneous grinding of each component on the basis of the size-distribution curves described in lognormal or RRB system.

* Author prepared this paper as an aspirant to the candidate's degree within the scope of his research work carried out at the *Electric Energy Research Institute*.

II. The basis of the investigation

We have set ourselves the aim that by mixing the ground products *A* and *B* in proportions c_A and c_B , the composition by weight per cent of the components *A* and *B* of the fraction falling within the interval $x_1 \leq x \leq x_2$, by weighing the density values $s_A(x_1, x_2)$ and $s_B(x_1, x_2)$ in proportion of the ratio, should be determined. The basis of the computation is that the resulting distribution curve contains the components *A* and *B* according to the density function of the components.

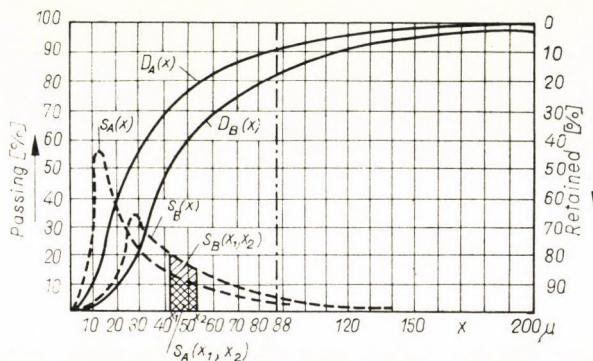


Fig. 1. Weight distribution and density functions of the components at simultaneous grinding of the components *A* and *B*

To give a clear view of the problem let us take the mixture of two ground products characterized by the weight distribution curves $D_A(x)$ and $D_B(x)$ shown in Fig. 1. By plotting the curves in Fig. 1 those size-distribution curves had been taken into account which were already developed by the simultaneous grinding of the homogeneous components of the substances *A* and *B* depending on the grindability factors of the ground products of the components.

Thus, if the resulting ground product contains the components *A* and *B* in proportion c_A and c_B , respectively, in the fractions $x_1 \leq x \leq x_2$ the per cents by weight of the components *A* and *B* are:

$$G_{A\%}(x_1, x_2) = \frac{c_A \cdot s_A(x_1, x_2)}{c_A \cdot s_A(x_1, x_2) + c_B \cdot s_B(x_1, x_2)} \cdot 100, \quad (1)$$

$$G_{B\%}(x_1, x_2) = \frac{c_B \cdot s_B(x_1, x_2)}{c_A \cdot s_A(x_1, x_2) + c_B \cdot s_B(x_1, x_2)} \cdot 100; \quad (2)$$

$$G_{A\%}(x_1, x_2) = \frac{\frac{c_A \cdot s_A(x_1, x_2)}{c_B \cdot s_B(x_1, x_2)}}{1 + \frac{c_A \cdot s_A(x_1, x_2)}{c_B \cdot s_B(x_1, x_2)}}, \quad (3)$$

$$G_{B\%}(x_1, x_2) = \frac{c_B \cdot s_B(x_1, x_2)}{1 + \frac{c_A \cdot s_A(x_1, x_2)}{c_B \cdot s_B(x_1, x_2)}} \quad (4)$$

where c_A and c_B are the proportions of the components, respectively, in the resulting ground product mixture;

$s_A(x_1, x_2)$ and $s_B(x_1, x_2)$ are the proportions of the area beneath the density functions of the ground products A and B , respectively, falling within the interval $x_1 - x_2$;

$G_A\%(x_1, x_2)$ and $G_B\%(x_1, x_2)$ are the compositions by weight per cent of the components A and B , respectively, of the resulting ground product fraction falling into the interval $x_1 - x_2$ prepared in C_A and C_B proportions, respectively.

In the case of a system of binary mixture, the knowledge of the per cent by weight of one of the components unambiguously determines the per cent by weight of the other component, i.e.:

$$G_{A\%}(x_1, x_2) = 100 - G_{B\%}(x_1, x_2). \quad (3)$$

Thus, it is sufficient to investigate the function of the grain size by weight per cent only of one of the components, for instance, that of component A . By reducing the dimensions of the intervals and by increasing their number, a continuous curve will be obtained:

$$G_{A\%}(x) = \frac{c_A \cdot s_A(x)}{1 + \frac{c_B \cdot s_B(x)}{c_A \cdot s_A(x)}} \cdot 100, \quad (6)$$

$$G_{B\%}(x) = \frac{c_B \cdot s_B(x)}{1 + \frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)}} \cdot 100. \quad (7)$$

In treating problems in connection with grain-sets, in general, graphic solution methods are given preference. This is motivated partly by the fact that the granulometric curves D of the ground products, owing to the stochastic character of the procedure of size reduction can be described, according to our present knowledge, only approximately even by the best theoretical mathematical formulas. On the other hand, on the making of ground products of substances to be met with in practice, in many cases, the restrictions ensuring the absolute validity of the mathematical formulas characterizing the size reduction products do not prevail in an approximate manner either. Starting from these considerations the distribution by weight per cent of size-fraction compositions of mixtures obtained by mixing together of ground products characterized by given size-distribution curves, should be first determined by

graphic method. For the examples of investigation the lognormal or RRB distribution functions have been utilized, but the plotting can be carried out with the aid of any kind of distribution curves.

III. Investigation of the tracing function describing the distribution of composition by weight per cent in the size fraction of the ground product mixture

For instance, in a mixture constituted of the components A and B , in proportions c_A and c_B , the existence of the extreme value of the function describing the weight per cent distribution of the component should be verified by applying the theory of G. TARJÁN.

In the case, if the granulometric curves $p_A(x)$ and $D_B(x)$ of any kind of tracings of two ground products A and B intersect each other, the density curves $s_A(x)$ and $s_B(x)$ will intersect at least at two points. If the density functions are known, the curves $c_A \cdot s_A(x)$ and $c_B \cdot s_B(x)$ can also be plotted by a convenient variation of the ordinates of the density functions.

The weight per cent distribution function of the component A can be obtained on the basis of curves resulting from the density functions with the aid of the formula:

$$G_{A\%}(x) = \frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_A \cdot s_A(x) + c_B \cdot s_B(x)}. \quad (8)$$

The function $c_B \cdot s_B(x)$ can be written at every value of x as the sum of the function $c_A \cdot s_A(x)$ and of the difference between the ordinates of the two functions, i.e.:

$$c_B \cdot s_B(x) = c_A \cdot s_A(x) + [c_B \cdot s_B(x) - c_A \cdot s_A(x)] = c_A \cdot s_A(x) + \Delta c_{A,B} s_{A,B}(x). \quad (9)$$

By substituting the value obtained, into the basic equation, we obtain:

$$G_{A\%}(x) = \frac{c_A \cdot s_A(x)}{2 c_A \cdot s_A(x) + \Delta c_{A,B} s_{A,B}(x)} = \frac{1}{2 + \frac{\Delta c_{A,B} s_{A,B}(x)}{c_A \cdot s_A(x)}}. \quad (10)$$

At the point of intersection of the functions $c_A \cdot s_A(x)$ and $c_B \cdot s_B(x)$ the $\Delta c_{A,B} s_{A,B}(x) = 0$, thus $G_{A\%}(x) = 0,5$, i.e. 50 per cent.

The extreme value of the function $G_{A\%}(x)$ describing the weight per cent according to the component A of the size fractions will be there, where the function

$$\frac{\Delta c_{A,B} \cdot s_{A,B}(x)}{c_A \cdot s_A(x)}$$

also has an end value.

Let us examine the function, as a numerical example, showing the percent by weight of the component A in the mixture $c_A = c_B$ of the ground product A and B having a lognormal size distribution, representable in the

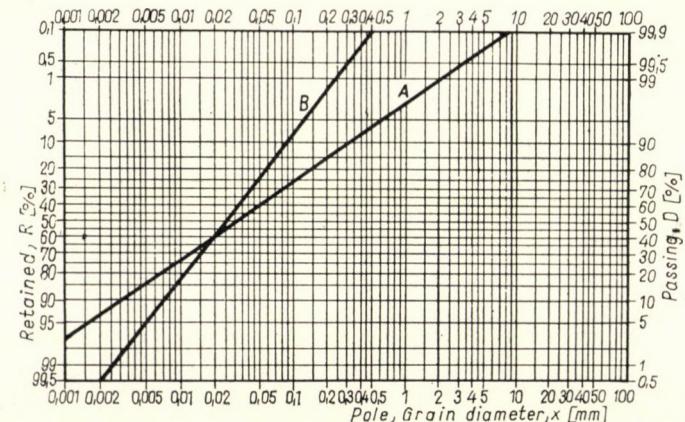


Fig. 2. Weight distribution curves representing the grain-sets A and B (Plotted in the Mathematical Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences)

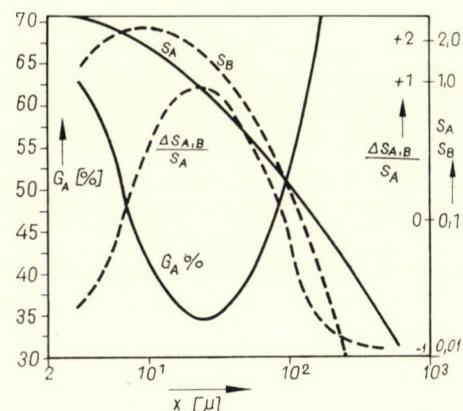


Fig. 3. Composition of the size fractions in the mixture proportioned 1 : 1 of the ground products A and B of lognormal distribution

KFZ net by straight lines to be seen in Fig. 2 where the tracing followed by this function and the locus of its extreme value should be determined. The values to be read in Fig. 2 and computable by the given formulas, are shown in the following table.

The density functions, the functions $s_{A,B}(x)/c_A \cdot s_A(x)$ and $G_{A\%}(x)$ are plotted in Fig. 3 on the basis of Table I.

Table I

The two limit sizes of the investigated fraction [microns]	Medium grain-size [microns]	D_A [%]	D_B [%]	$s_A(x)$	$s_B(x)$	$s_{A,B}(x)$	$\frac{\Delta s_{A,B}(x)}{c_A \cdot s_A(x)}$	$G_{A\%}(x)$ [%]
2—4,5	3,25	7,5	3,2	3,00	1,28	-1,72	-0,426	63,3
4,5—6,0	5,25	3,9	3,0	2,60	2,00	-0,60	-0,230	56,3
6—10	8,0	8,2	9,7	2,04	2,42	+0,38	+0,186	45,7
10—20	15,0	13,8	23,5	1,38	2,35	+0,97	+0,701	36,9
20—30	25,0	9,0	17,0	0,90	1,70	+0,80	+0,889	34,6
30—40	35,0	6,0	10,6	0,60	1,06	+0,46	+0,766	36,4
40—50	45,0	4,9	7,2	0,49	0,72	+0,23	+0,469	40,4
50—100	75,0	13,6	16,0	0,27	0,32	+0,05	+0,185	45,6
100—200	150,0	11,0	6,2	0,11	0,06	-0,05	-0,455	64,5
200—300	250,0	4,7	1,2	0,05	0,01	-0,04	-0,800	83,0
300—500	450,0	4,2	0,5	0,02	0,003	-0,017	-0,848	86,5

The extreme value of the function is at a grain size of about 25 microns.

After the graphic solution of the posed problem, in the following the mathematical investigation will be carried out. In working out the general solution and in elucidating the theoretical principles, G. HORNIÁK (Industrial Electric Energy Research Institute, Department of Combustion Theory) was a great help to us.

If in the resulting distribution the proportion of the component A has an end value, it will present itself on the zero point of the derivative of the function $G_{A\%}(x)$.

$$\frac{dG_{A\%}(x)}{dx} = 0 = \frac{\left(\frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)} \right)'}{\left[1 + \frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)} \right]^2}. \quad (11)$$

Excluding the zero value of the denominator, the zero points of the function in the numerator have to be determined.

The function representing the per cent by weight of the component A has extremum points at each of the points $x = x_{0i}$, where the conditions which follow are fulfilled:

$$\left[\frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)} \right]' \Big|_{x=x_{0i}} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

$$\left[\frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)} \right] \neq -1, \quad (13)$$

$$\left| \frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)} \right|^n \Big|_{x=x_0} \neq 0. \quad (14)$$

The relation $G_{A\%}(x)$ is of a monotone character in each zone where the left-hand side of the equation does not change its sign. It appears from the equation that the number n of the extremum points depends on the character of the density functions $s_A(x)$ and $s_B(x)$.

IV. Character of variation of the composition by weight per cent of fractions when mixing two grain-sets of lognorm distribution

It is to be investigated that in case of mixing together the grain-sets A and B of lognormal distribution the different fractions to what proportion does it contain, for inst. the component A . Thus, on the basis of the general formula, the zero loci of the derived function of the quotient of the density functions should be determined. Let the distribution be of the two components defined by the parameters a_A, b_A and a_B, b_B , then the weight-distribution function will be as follows:

$$D_A(x) = \Phi \left(\frac{\ln x - \ln a_A - 3 b_A^2}{b_A} \right), \quad (15)$$

$$D_B(x) = \Phi \left(\frac{\ln x - \ln a_B - 3 b_B^2}{b_B} \right) \quad (16)$$

where Φ is the Gaussian error integral.

The density functions relating to the two components, will be obtained as the derivatives of the distribution functions.

$$s_A(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi} \cdot a_A^3 \cdot b_A \cdot e^{9/2 b_A^2}} \exp \left[-\frac{(\ln x - \ln a_A)^2}{2 b_A^2} \right], \quad (17)$$

$$s_B(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi} \cdot a_B^3 \cdot b_B \cdot e^{9/2 b_B^2}} \exp \left[-\frac{(\ln x - \ln a_B)^2}{2 b_B^2} \right]. \quad (18)$$

For the quotient of the density functions, in case of a mixture of a weight ratio c_A and c_B of the components A and B , respectively, the following equation will be obtained:

$$\begin{aligned} c_A \cdot s_A(x) &= \frac{c_A \cdot a_B^3 \cdot b_B \cdot e^{9/2 b_B^2}}{c_B \cdot a_A^3 \cdot b_A \cdot e^{9/2 b_A^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\ln x - \ln a_B}{b_B} \right)^2 - \left(\frac{\ln x - \ln a_A}{b_A} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

In the loci of the extreme values the derivative of the equation is equal to zero, i.e.:

$$\left[\frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_B \cdot s_B(x)} \right]' = 0 = \frac{c_A \cdot e^{g/2(b_B^2 - b_A^2)} \cdot a_B^3 \cdot b_B}{c_B \cdot a_A^3 \cdot b_A} \times \left\{ e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\ln x - \ln a_B}{b_B} \right)^2 - \left(\frac{\ln x - \ln a_A}{b_A} \right)^2 \right]} \right\} \times \\ \times \left[-\frac{1}{2} (m_B - m_A) (m_B + m_A) \right] \cdot \left[\frac{1}{x} 2 \ln x - \ln (a_B^{m_B} a_A^{m_A})^{\frac{1}{m_B + m_A}} \times \right. \\ \left. \times (a_B^{m_B} \cdot a_A^{m_A})^{\frac{1}{m_A - m_B}} \right]. \quad (20)$$

The two trivial solutions of the equation is offered at the values $x_I = \infty$ and $x_{III} = 0$. The actual extreme values, however, will be obtained at the grain size defined as follows:

$$x_{II} = \sqrt{(a_B^{m_B} \cdot a_A^{m_A})^{\frac{1}{m_B + m_A}}} \cdot \sqrt{(a_B^{m_B} \cdot a_A^{m_A})^{\frac{1}{m_B - m_A}}}. \quad (21)$$

Although in reality no grains of a size of zero exists, neither that of ∞ , the distribution of the grain size, as a variable of probability, can be continuous which continuity is needed to be maintained from zero (actually from the size of the elementary crystal) to infinity [5].

The per cent by weight of the component A at the extreme values can be determined by substitution into equation (8).

On mixing together by weight proportions c_A and c_B the ground product of the components A and B , having two grain-number distribution curves parallel to each other, the function representing the composition by weight per cent of the size fractions of the ground product mixture, has a monotone character, intermediate extreme values cannot be found.

By mingling the ground-product components A and B where the size-distribution curves intersect in the median of the grain number, the intermediate extreme value of the function giving the composition according to the size fraction of the resulting ground product, also presents itself at the grain size: $a_A = a_B$.

V. Character of the variation of the composition by weight per cent of the fraction

The weight per cent of the components A and B should be determined in the two grain sets given by the parameters $x_{OA}, n_A; x_{OB}$, in different ranges $x_1 \leq x \leq x_2$. The weight distribution functions of the two components can be written with the aid of the known formula:

$$R_A = 100 \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{x_{OA}} \right)^{n_A} \right], \quad (22)$$

$$R_B = 100 \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{x_{OA}} \right)^{n_A} \right]. \quad (23)$$

From the foregoing it is clear that the question whether the characteristic curve describing the composition of the resulting distribution has extrema or not, the zero loci of the derivative of the quotient of the density functions will give an answer. The density functions for the two components are as follows:

$$R'_A = - \frac{n_A}{x_{OA}^{n_A}} \cdot x^{n_A-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{x_{OA}} \right)^{n_A} \right], \quad (24)$$

$$R'_B = - \frac{n_B}{x_{OB}^{n_B}} \cdot x^{n_B-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{x_{OB}} \right)^{n_B} \right]. \quad (25)$$

Mixing up the ground products of the components *A* and *B* in proportions c_A and c_B , respectively, the extreme value of the portion of the component *B* can be established by applying equation (12) to component *B*.

Details of the deduction are disregarded, the results of which are that the two radices present themselves at the values $x = 0$ and $x = \infty$. The intermediate extreme value may be determined by the following equation:

$$(n_B - n_A) x^{-n_A} - \frac{n_B}{x_0^{n_B}} x^{(n_B-n_A)} + \frac{n_A}{x_0^{n_A}} = 0. \quad (26)$$

As an example of the computation method for the case of lognormal distribution, the mixture by a proportion of 1 : 1 of the two ground products represented by the straight lines *A* and *B* in Fig. 2 should be examined. For the computation relating to the mixture of ground products which may be characterized by the RRB distribution curves, a mixture of the ground products *A* and *B* characterized by the parameters, given in Table II, should be prepared.

Table II

Parameters	Ground product <i>A</i>	Ground product <i>B</i>
P.c. by weight of grains larger than 88 microns	28,5	10
P.c. by weight of grains larger than 20 microns	60	60
x_{0RRB} (retained p.c. on the RRB net, 38%)	60	38
n (size distribution exponent according to RRB)	0,6	1
a (retained on the net KFZ 50 p.c.)	32	26
m (size distribution exponent on the net KFZ)	0,55	1,03

By substituting the values shown in the table into formula (21) or (26), respectively, the intermediate extreme value is obtained at a grain size of 24.3 microns in the case of lognormal distribution, and at a grain size of 30 microns in the case of RRB distribution.

REFERENCES

1. FUERSTENAU, W.—SOMANSUNDARAN, P.: Zur Kinetik des Zerkleinerns (On kinetics of the comminution). *Aufbereitungstechnik* (1964), 205—210.
2. GÖTTE, A.: Fragen der Hartzerkleinerung (Problems of size reduction of hard materials). *Zement-Kalk-Gips* (1952), 383—394.
3. TANAKA, T.: Preferential Grinding Mechanism of Binary Solid Mixtures whose Components are of different Grindability. Symposium on Size Reduction 1962.
4. OCEPEK, D.: Grinding of Binary Mixtures. *Rudarsko-Metallurski Zbornik* (1964), 157—167.
5. BEKE, B.: Aprításelmélet (Theory of Size Reduction). Akadémiai Kiadó, Budapest 1963.
6. BASSA, G.: A porszénégés elmeletének gyakorlati alkalmazása (Practical Application of the Theory of Pulverized-Coal Firing). Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1961.
7. FÁY, Gy.—ZSELEV, B.: Az aprításelmélet alapjairól (On the Bases of Theory of Size Reduction). *Energia és Atomtechnika* (1960), 8.
8. ROSE, H. E.: A Mathematical Analysis of the Internal Dynamics of the Ball Mill on the Basis of Probability Theory. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers* (1957), 87—97.

DIE UNTERSUCHUNG DER GEWICHTSPROZENT-VERTEILUNG VON KOMPONENTEN IN DEN FRAKTIONEN NACH KORNGRÖÙE DER MAHLGÜTER VON STOFFGEMISCHEN

K. REMÉNYI

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Zusammensetzung des Mahlgutgemisches von homogenen Stoffen untersucht. Als Ausgangspunkt bietet sich die Voraussetzung, daß die Kornverteilungskurven der Komponenten im Mahlgutgemisch den die homogenen Stoffe charakterisierenden Verteilungsgesetzmäßigkeiten folgen. Es wurden allgemeine graphische und rechnerische Verfahren zur Bestimmung einer die gewichtsprozentige Zusammensetzung der Körnungsfraktionen darstellenden Funktion ausgearbeitet. Es wurde nachgewiesen, daß im Gemisch von Mahlprodukten, gekennzeichnet durch lognormale oder RRB Verteilungskurven, auf der die Zusammensetzung der Kornfraktionen in Abhängigkeit von der Korngröße darstellenden Kurve ein Extremwert gefunden werden kann. Die den Extremwert bestimmende Korngröße wird durch die Parameter, welche die Verteilung der das Gemisch bildenden Komponenten charakterisieren, eindeutig bestimmt. Für den Fall der lognormalen Verteilung werden sowohl graphische als auch rechnerische, und für die RRB Kornverteilungen Rechenbeispiele mitgeteilt.

ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION EN POURCENT DE POIDS DES COMPOSANTES, DANS LES FRACTIONS GRANULOMÉTRIQUES DES MÉLANGES DE PRODUITS BROYÉS

K. REMÉNYI

RÉSUMÉ

L'auteur a examiné la composition des mélanges de produits broyés de matières homogènes. On peut admettre comme point de départ que dans le mélange de produits broyés, les courbes granulométriques des composantes suivent la distribution caractérisant les matières homogènes. Des procédés graphiques et de calcul ont été élaborés pour déterminer la fonction représentant la distribution en pourcentage de poids des fractions granulométriques. Il a été démontré que dans le mélange des produits broyés caractérisés par des courbes sécantes de

distribution logonormale ou RRB, on peut trouver une valeur extrême sur la courbe représentant la composition granulométrique en fonction de la taille des grains. La grosseur des grains fixant la valeur extrême est exactement déterminée par les paramètres caractérisant la distribution des composantes du mélange. Pour le cas de distributions logarithmiques normales, des exemples graphiques et de calcul, et pour les distributions RRB, des exemples de calcul sont présentés par l'auteur.

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ВЕСОВОМУ ПРОЦЕНТУ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКЦИЙ ПОМОЛОВ СМЕСЕЙ МАТЕРИАЛОВ

К. РЕМЕНИ

РЕЗЮМЕ

Автор в работе исследует состав смешанных помолов гомогенных материалов. Исходной основой служило то, что в смешанных помолах кривые гранулометрического распределения компонентов следуют закономерностям распределения, характерным для гомогенных материалов. В работе дается общие графические и математические методы для определения функции, описывающей состав по весовому проценту гранулометрических фракций. Доказывается, что в смеси помолов, характеризуемых пересекающимися друг друга логарифмически нормальными или RRB кривыми распределения, для состава гранулометрических фракций на кривой, отображающей в функции гранулометрического состава, можно найти место крайнего значения. Крупность зерна, дающая крайнее значение, однозначно определяется параметрами, характеризующими распределение компонентов смеси. Для случая логарифмически нормального распределения приведены примеры как графического, так и математического методов вычисления, а для RRB распределения приведен пример математического метода вычисления.

CONTRIBUTION TO THE PROBLEM OF EXTRUSION OF LEAD AND LEAD ALLOYS*

W. W. KRYSKO and R. G. FENTON
SCHOOL OF METALLURGY SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES, SYDNEY (AUSTRALIA)

[Manuscript received May 11, 1966]

During the extrusion of lead and lead alloys, the authors differentiate between two types of friction. Heterogeneous friction is the interfacial friction between the container and the material, whereas homogeneous friction is a shear in the material itself. The normal pressures of the material on the container wall, as recorded in practice, show that heterogeneous friction (slip) can take place only if the coefficient of friction is 0,001 or less. In all other cases the movement of the material, lead or lead alloys, takes place by homogeneous friction, i.e. by shear. The authors further found that the normal pressure is velocity dependent, and due to the increased velocity of the material leaving the press the normal pressure decreases rapidly and a zone is formed where both frictions coincide. The position of this zone has an influence on the formation of circumferential cracks. Calculations were also undertaken to find the dimensions by which a minimum extrusion work is required and a minimum ram pressure is needed to extrude a given volume of material. These dimensions are different in both cases.

List of symbols

d	diameter of die hole [in];
f	area of die hole cross section [in^2];
r	distance from container centre [in];
z	distance from dead metal zone [in];
C	coefficient to calculate axial stress;
D	container diameter [in];
E	Young's modulus [lb/in^2];
F	area of container cross section [in^2];
K_1-K_6	coefficients;
L	container length measured from dead metal zone to ram face [in];
P	ram force [lb];
P_f	friction force per unit area [lb/in^2];
F/f	reduction ratio;
V	container volume measured from dead metal zone to ram face [in^3];
W	work required for extrusion [in-lb];
ε_Φ	circumferential strain;
μ	coefficient of friction;
μ_c	critical friction coefficient for which slip of material on container surface ceases;
ν	Poisson's ratio;
τ_{rz}	shear stress [lb/in^2];
τ_{\max}	maximum shear [lb/in^2];
σ_r	radial stress [lb/in^2];
σ_Φ	circumferential stress [lb/in^2];
σ_z	axial stress [lb/in^2];
σ_{z_0}	axial stress at end of the dead metal zone [lb/in^2];
σ_s	tensile strength in simple tension test [lb/in^2].

* Presented at a *Special Extrusion Committee Meeting of the Lead Development Association*, London 1965 and at the "Metalfachabend der Deutschen Gesellschaft für Metallkunde" at the *Institut für Werkstoffkunde* (Prof. W. HOFMANN), Technische Hochschule Braunschweig 1965).

I. Introduction

One of the most important factors influencing ram force, power consumption and the mode of deformation of materials during the process of extrusion is the behaviour of the boundary surface layer which separates the extruded material from the container and the die surface. The main factors affecting the behaviour of the material in the boundary surface layer are first the coefficient of friction between extruded material and container-die surface, second the properties of the extruded material, and third the geometry of the container-die system.

Little is known of the coefficient of friction during the process of extrusion. It is dependent on a large number of factors and is influenced by the material and the surface finish of the container, as well as by the nature and the intensity of the lubricant used, the temperature, and the normal surface pressure between the extruded material and the container-die system. During extrusion the velocity of the material undergoes a considerable change which influences the normal pressure distribution on the container surface and, affects the interfacial behaviour of the material and the container surface. The static and kinetic coefficients of friction are different in magnitude, however, fortunately the kinetic friction coefficient is not affected by the relative sliding velocity of the two materials at the interface for conventional extrusion speeds [1].

Behaviour of the material-container interface is also influenced by the properties of the extruded material, mainly its tensile or shear strength, and also to some extent, Young's modulus and Poisson's ratio of the material. The tensile strength and the shear strength are both dependent on the composition of the material and its grain structure, the distribution of impurities, segregations, inhomogeneities and unisotropies, and also on the temperature. The strain rate also has some effect on the tensile strength of the material.

The behaviour of the material-container interface is also influenced by the geometry of the container-die system. The normal pressures on the container and the change in temperature usually result in some changes in the geometry of the container during the operation of the extrusion press, even though this change is small, it still may produce such defects as bamburings [2].

There is little hope to take the influence of all the variable factors into consideration, to find the exact solution for the ram force and the power consumption for the extrusion process, but using a number of simplifying assumptions a solution can be obtained which is acceptable for practical purposes.

II. Movement of material on container-material interface

The material either slips over the container surface (heterogeneous friction), or sticks to the container, in which case all motion takes place by internal sliding within the material itself (homogeneous friction). It is possible for the material to slip over certain areas of the container and stick to the container at other areas. The slip-stick condition usually changes with the plasticity of the material, the normal pressure, and the velocity of flow.

The friction force per unit surface area P_f between material and container is related to the normal surface force per unit area by Coulomb's Law. Knowing that the normal force per unit area on the container surface is equal to the

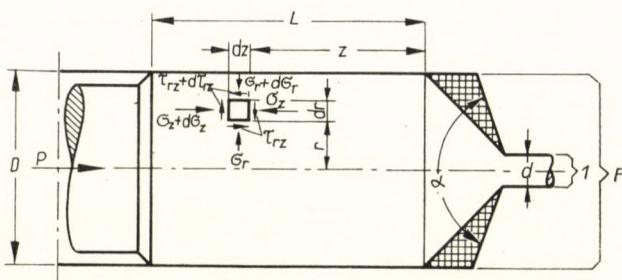


Fig. 1. Stresses in the material during the process of extrusion

radial stress σ_r in the material and denoting the coefficient of friction by μ the friction force can be expressed as

$$P_f = \mu \sigma_r .$$

The friction force acting on the surface of the extruded material results in an equal amount of shear force on the surface of the material. The material is subjected to a combination of radial σ_r , axial σ_z and circumferential σ_ϕ direct stresses, shear stress τ_{rz} acting in the axial direction on planes parallel to the container surface, and shear stress acting in the radial direction on the transverse cross sectional surfaces (Fig. 1). Due to equilibrium conditions the two shear stresses are equal in magnitude. The material slips along the container surface (heterogeneous friction) if the shear stress induced by the friction force superimposed on the direct stresses at the material-container interface, do not result in plastic yielding. By increasing the friction force, the shear stress on the surface of the material also increases to balance the friction force. The shear stress, however, can only increase until a maximum value is reached. By increasing the friction force the resistance to internal slide (homogeneous friction) or shear becomes smaller than the interfacial frictional resistance (heterogeneous friction), therefore the material sticks to the container surface and moves by internal slide rather than by slip.

Condition of slip or stick is governed by the magnitude of the friction coefficient, the radial stress, and the maximum value of the shear stress at a point, so that if

$$F = \mu\sigma_r < \tau_{\max} \quad (1)$$

then the material slips, but otherwise it sticks to the container.

The term "friction" may be used in the broadest sense to include the conditions of heterogeneous and homogeneous friction, and the laws of friction may be applied with certain restrictions. If during an experiment to determine the frictional force, the normal pressure is constantly increased then the frictional force also increases proportionally till it approaches the value of the shear strength of the material, and with the further increase of the normal pressure, the shear strength remains a constant value, and the term "coefficient of friction" becomes meaningless.

To determine the plasticity conditions for the material, either the *maximum shear stress theory* (TRESCA, SAINT-VENANT) or the *maximum octahedral shear stress theory* (HUBER, MISES, HENCKY) for yielding may be used.

It can be concluded, by using any of the two theories and the results of experimental investigations by GELEJI [3] which shows that the three direct stresses have nearly equal values, that plastic yielding commences if the shear stress reaches the value of the shear strength of the material obtained from a simple shear test.

III. Effect of temperature and strain rate

The tensile and shear strength of materials are influenced by the temperature and the strain rate. The curves on the right hand side of Fig. 2 show the variation of the shear strength of 99,9999% high purity lead in terms of the relative interfacial shear movement rate at various temperatures. Results were obtained from double shear tests by KRYSKO and FENTON [4]. The left hand side of the diagram shows the minimum value of the radial stress (normal surface pressure) for a given coefficient of friction and shear strength at which slip ceases and sticking of the material to the container surface commences during extrusion.

The variation of the shear strength of 99,995% purity lead in terms of temperature is shown in Fig. 3. Results were taken from data published by SCHNAKENBERG [5] obtained with a shearing velocity of 0,005 in/min, which corresponds to 0,126 mm/min relative interfacial shear movement rate of Fig. 2. The shear strength values in Figs 2 and 3 are not comparable because of the different composition of the lead. The shearing velocity in Fig. 3 is rather small. At small shearing velocities the shear strength shows considerable

decrease as can be seen in Fig. 2. The left hand side of Fig. 3 shows the minimum value of radial stress (normal surface pressure) for a given coefficient of friction and shear strength at which slip ceases and sticking of the material to the container surface commences during extrusion.

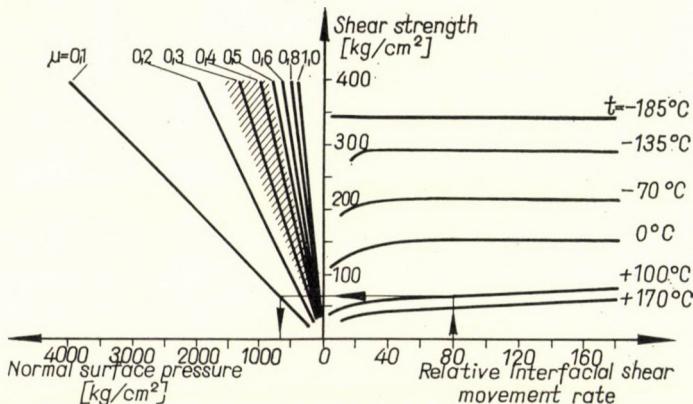


Fig. 2. Coefficient of friction between material and container for which slip ceases for a given surface pressure and shear strength for 99,9999% purity lead

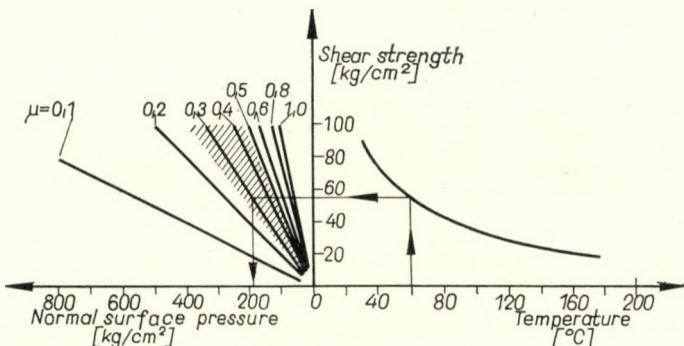


Fig. 3. Coefficient of friction for which slip of material over container surface ceases for a given surface pressure and shear strength for 99,95% purity lead (shearing velocity 0,005 in/min)

IV. Friction coefficient

It is rather difficult to determine the coefficient of friction between the extruded material and container surface under operating conditions. CHADWICK [6] states that the coefficient of friction is larger than 0,1 for non-lubricated areas, 0,06 for solid lubricated areas, and goes down to zero for molten glass lubricated areas.

In some practical cases the application of lubricant during extrusion is limited. In cases where a good surface finish of the extruded material is required,

lubrication is not advisable as it is known that lubricated extrusion produces a rather rough surface. In case of worm driven continuous extrusion presses such as used for lead cable sheathing, lubrication of the moving interface along the worm drive will entrap the lubricant in the material. In case of double-barrel screw presses lubrication of the barrel is not possible since the lubricant would interfere with the welding of the two extruded cylinders [2].



Fig. 4. Polished cross-section of surface cracks on extruded lead rod (magnification 300 \times composition $\frac{1}{2}$ E, British Standard)

The actual value of the coefficient of friction for a non-lubricated surface between lead and steel, according to KRYSKO, BOWERS and WADHWANI [1], is between 0,25 and 0,45. Figs 2 and 3 show that extruded lead sticks to the container surface if the coefficient of friction is between 0,25 and 0,45, as was suggested even if the radial stresses, are relatively small. It is known, that the Hansson—Robertson extrusion press has bursting discs adjusted to break at 20 000 p.s.i. pressure. During normal operation these discs often fracture and are occasionally replaced by 30 000 p.s.i. bursting discs to avoid unnecessary stoppages [7]. At this normal pressure sliding of 99,95% lead at 270° C on the container wall could only take place if the coefficient of friction is less than 0,001. Such a low friction coefficient cannot be obtained in extrusion, therefore the material moves by internal shear only.*

* Following the presentation of this paper in Braunschweig, the late Professor W. HOFMANN confirmed, by his observations during the determination of friction of lead with other material, that in all cases the movement took place inside the lead by creep or shear and no interfacial movement was ever observed.

V. Slip-stick at the die

It is difficult to determine the slip-stick condition especially in the vicinity of the die, where severe plastic deformation and a considerable change in the velocity of material flow takes place. It is likely that circumferential cracks will appear on the surface of the extruded product, if the material sticks to the die just before flowing out.

According to some theories surface cracks appear because segregations take place in the material. Fig. 4 shows a section across the circumferential surface cracks and no segregations along the faces of the cracks are visible. It is true that cracks may develop due to segregation, but that is not always

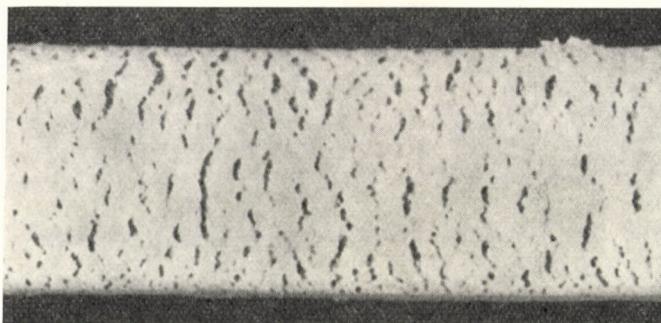


Fig. 5. Circumferential surface cracks on extruded plasticine

the reason. In most cases cracks are caused by the sticking of the material to the die just before leaving it. By altering the location of slip-stick, cracks disappear. Changing the location of slip-stick can be achieved in a number of different ways; for example, by introducing lubricant or changing the temperature of the extrusion, but the simplest way is to alter the speed of extrusion. If the speed of extrusion is reduced until the friction force decreases to a value smaller than the shear strength of the material at the die under prevailing conditions, then the extruded material slips out of the die and surface cracks disappear.

The above theory is simply proved by extruding plasticine. No segregation takes place in the case of plasticine extrusion, but under certain conditions, the extruded surface cracks are apparent, as is shown in Fig. 5. However, by reducing the extrusion speed the cracks suddenly disappear, and by increasing the speed of the extrusion the cracks reappear on the extruded rod. The surface of the material might also crack inside the container if the stick-slip conditions were retracted, but this is not harmful since surface cracks will pressure-weld by slip before leaving the die. Only if the stick-slip position is close to the die face, will cracked material leave the die, because the surface

cracks will have no opportunity of being pressure welded. Fig. 6 shows circumferential surface cracks on extruded $2\frac{1}{2}$ " dia. lead cable sheathing. In comparison Fig. 7 shows a shear face of 99,9999 high purity lead and the similarity of the cracks in both cases is striking. Fig. 8 shows shear face of a lead-tin alloy rod loaded, where interfacial shear movement showing similar cracks, as in Figs 5, 6 and 7.

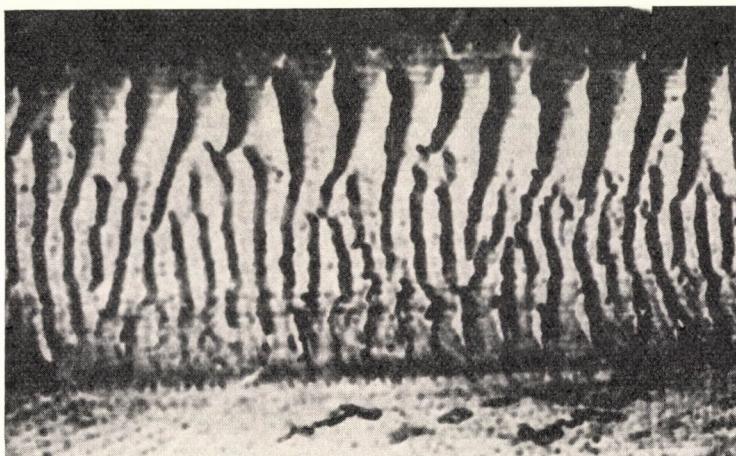


Fig. 6. Circumferential surface cracks on extruded lead rod (composition $\frac{1}{2}E$, British Standard)



Fig. 7. Surface of a 0,5" diameter high purity (99,9999) lead rod: the interfacial cracks produced by shear test are similar to the surface cracks in Fig. 6 produced by extrusion

VI. Extrusion experiments

A number of experiments were made by extruding 2 in diameter and 4 in long commercially pure lead billets. Figs 9 and 10 show the vertically operating press used in the experiments. The extrusion press was mounted on a

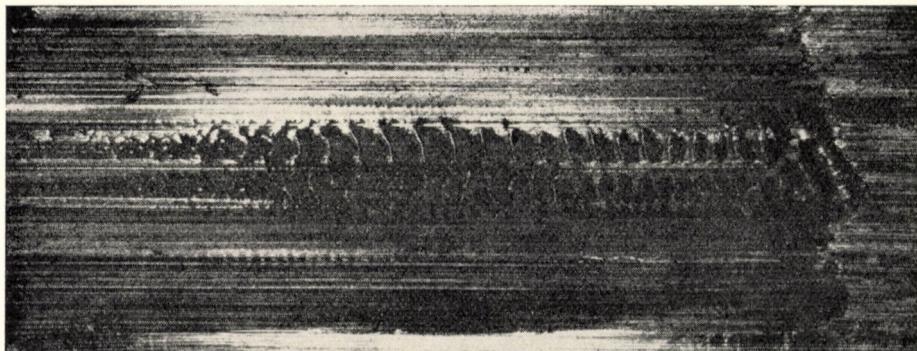


Fig. 8. Shear face of a 1" \varnothing lead-tin (2 % Sn) alloy rod loaded with 18" /1"/ min interfacial shear movement showing similar cracks as in Figs 5, 6 and 7

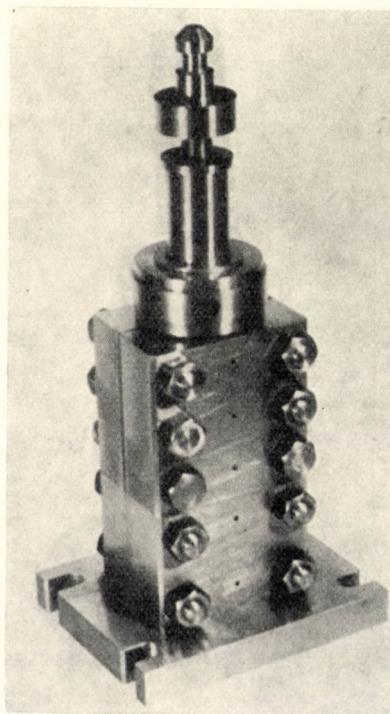


Fig. 9. Experimental extrusion press

universal Amsler testing machine. All tests were done with a ram speed of 0,4 in/min but using different dies. Figs 11, 12, 13 and 14 show the ram force displacement diagrams for extrusion through dies having 10 mm diameter holes and 180°, 120°, 90° and 60° die angles. Fig. 15 shows the ram force-displacement diagram for extrusions through a die having 3/4 in hole and a 180° die angle.

In all five cases a thin, uniform scull remained in the container after completing the extrusion. The press was dismantled and the scull removed.

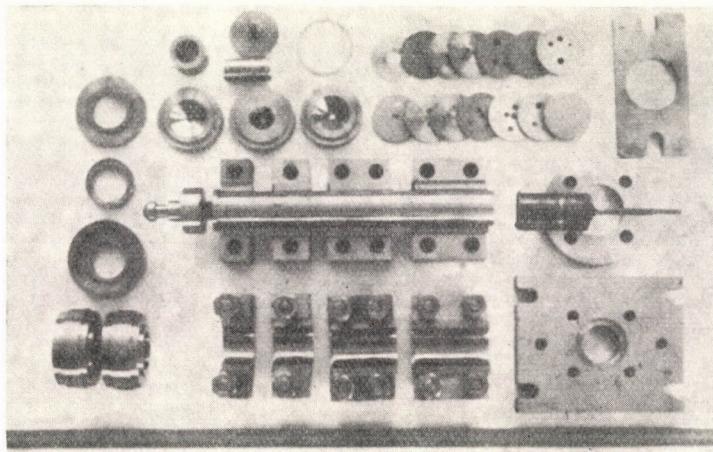


Fig. 10. Experimental extrusion press—parts

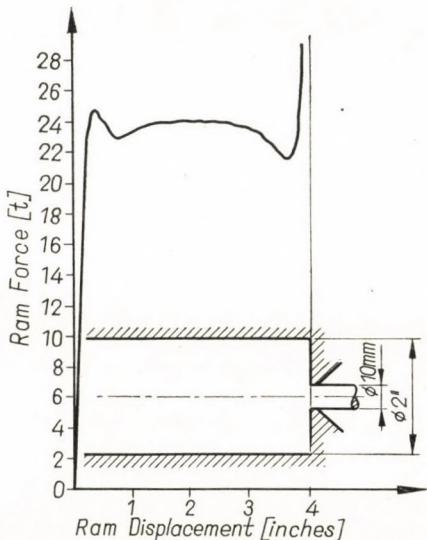


Fig. 11. Ram force—displacement diagram for lead extrusion $\alpha = 180^\circ$, $d = 10$ mm

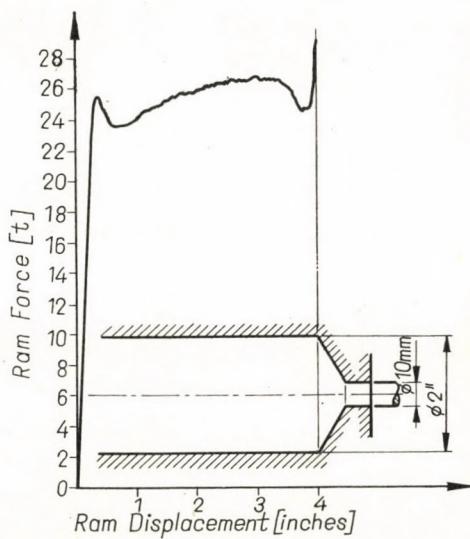


Fig. 12. Ram force—displacement diagram for lead extrusion $\alpha = 120^\circ$, $d = 10$ mm

The length of this thin scull, Fig. 16, is about the same as the length of the original billet. Formation of the scull proves that the material stuck to the container in each of the above five cases of extrusion over the whole container surface.

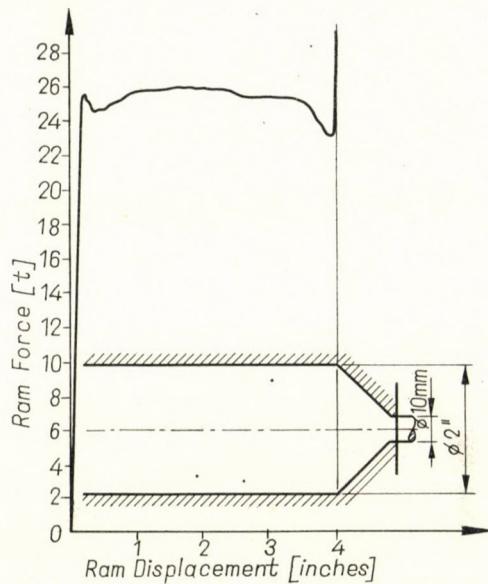


Fig. 13. Ram force—displacement diagram for lead extrusion $\alpha = 90^\circ$, $d = 10$ mm

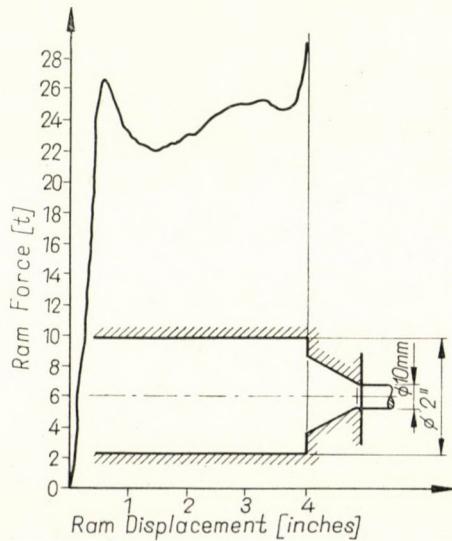


Fig. 14. Ram force—displacement diagram for lead extrusion $\alpha = 60^\circ$, $d = 10$ mm

Results of the experiments and study of Figs 2 and 3 point to the fact that the material does not slip over the container surface, but in fact, sticks to it, and all motion takes place by internal slide within the material itself.

VII. Equations of equilibrium

In an axially symmetrical container-die system the differential equations of equilibrium of the stresses in the axial and in the radial directions using polar-coordinates are given by

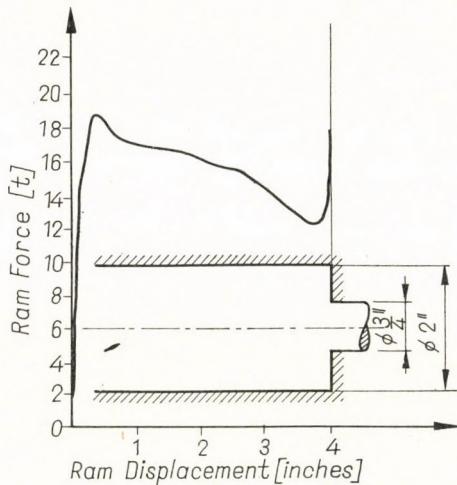


Fig. 15. Ram force—displacement diagram for lead extrusion $\alpha = 180^\circ$, $d = 3/4$ in

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (2)$$

and

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0. \quad (3)$$

Assuming that the shear stress distribution in the radial direction is linear, so that

$$\tau_{rz} = \frac{2\tau_{\max}}{D} \cdot r.$$

Equation (2) now becomes

$$\frac{4\tau_{\max}}{D} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

and after integration yields

$$\sigma_z = \frac{4\tau_{\max}}{D} z + \sigma_{z_0}, \quad (4)$$

where z is the distance measured from the dead metal zone as shown in Fig. 1, and σ_{z_0} is the axial stress at the cross section where z is zero.

If the material sticks to the container surface then the shear stress on the surface is constant and its value is τ_{\max} . Therefore

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0.$$

Assuming that the radial stress is independent of the radius so that

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0$$

equation (3) yields

$$\sigma_r = \sigma_\Phi. \quad (5)$$

This equation is certainly true if the coefficient of friction is zero, (i.e., a hydrostatic stress condition exists) but it is also an acceptable approximation in cases of non-zero friction coefficients.

VIII. Stress distribution

The material inside the container is now examined, taking a volume surrounded by two concentric cylinders, the ram face and a cross section parallel to the ram face. The volume of the material inside this hollow cylinder remains constant. If the plane section limiting the hollow cylinder is at least a half container-diameter away from the die, then, as a result of the conclusions obtained in studying the flow lines it can be assumed that this initially straight surface will remain straight. The diameters of the hollow cylinders also remain unchanged since the outer-most concentric cylinder having a diameter equal to the container, does not change its size and the volume of each hollow cylinder remains unchanged. Therefore, the circumference of the concentric cylinders are constant. It follows that the circumferential strain must be zero. This is true in the case of hydrostatic stress condition but it is also a fairly good approximation in other cases as well.

The circumferential strain ε_ϕ can be expressed in terms of the three direct stresses, Young's modulus and Poisson's ratio:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} [\sigma_\phi - \nu(\sigma_p + \sigma_z)].$$

Substituting equation (5) and making ε_ϕ zero, yields

$$\sigma_\phi = \sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z$$

and substituting equation (4)

$$\sigma_\phi = \sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{4\tau_{\max} z}{D} + \sigma_{z_0} \right].$$

Using the octahedral shear stress theory to determine plasticity conditions, the maximum value of the shear stress which can be superimposed on a near hydrostatic stress condition to cause yielding can be found

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad (6)$$

where σ_s is the tensile yield strength of the material under the given conditions of temperature and strain rate. Therefore,

$$\sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{4\sigma_s}{\sqrt{3} D} z + \sigma_{z_0} \right]. \quad (7)$$

IX. Ram force

The total ram force consists of two parts. The force required to deform the material and the force needed to overcome friction. Total ram force is obtained if the ram cross sectional area is multiplied by the axial stress at the ram face. Using equations (6) and (4) the total ram force P becomes:

$$P = \frac{D^2 \pi}{4} \left[\frac{4\sigma_s L}{\sqrt{3} D} + \sigma_{z_0} \right],$$

where L is the length of the billet measured from the dead metal zone to the ram face (see Fig. 1). The value of σ_{z_0} can be obtained by considering the work requirements of the extrusion process, and its value is

$$\sigma_{z_0} = \sigma_s \ln \frac{F}{f}$$

where F and f are the areas of cross sections of container and die hole (see Fig. 1). The above equation corresponds to the ideal frictionless case and gives rather small value. In practical cases the stress is larger than what is obtained from the above equation. ZALESSKII [8] suggested using a coefficient C so that

$$\sigma_{z_0} = C \sigma_s \ln \frac{F}{f}, \quad (8)$$

where the coefficient C is function of the die angle. The values of coefficient C were determined by ZALESSKII experimentally, and were found to be between 3,5 and 7,0. The values suggested by ZALESSKII seem to be rather conservative. In the following calculation the modified values of the Zaleskii coefficient are used and they seem to be in good agreement with experimental results.

Table I
Values of Coefficient C

Die angle	60°	90°	120°	150°	180°
Coeff. C	2,7	2,0	1,75	1,8	2,0

Total ram force now becomes:

$$P = \frac{D^2 \pi}{4} \left[\frac{4 \sigma_s L}{\sqrt{3} D} + C \sigma_s \ln \frac{F}{f} \right]. \quad (9)$$

The ram force for cases shown in Figs 11 to 15 can now be calculated. The tensile strength of commercially pure lead at 40° C with an assumed strain rate of 0,05 in/in/min, is 125 kg/cm². In calculating the ram force using equation (9) the distance L is taken from the ram force—displacement diagrams. (Distance along container axis between the point where the ram force has its maximum value at the beginning of the extrusion process, to the point where the ram force has its minimum value just before finishing the extrusion.)

When the die angle is 180° and die hole is 10 mm (Fig. 11) the calculated ram force P becomes

$$P = \frac{5^2 \times \pi}{4} \left[\frac{4 \times 125 \times 8}{\sqrt{3} \times 5} + 2 \times 125 \times 3 \cdot 2 \right] = 24\ 800 \text{ kgf.}$$

Results of calculations for all five cases are shown in Table II.

Table II
Calculated ram force for extrusion experiments

Figure	Die angle	Length, L [cm]	Ram force, P [kgf]	Ratio, $\ln F/f$
Fig. 10	180°	8,0	24 800	3,2
Fig. 11	120°	9,5	24 500	3,2
Fig. 12	90°	9,5	26 600	3,2
Fig. 13	60°	8,0	26 500	3,2
Fig. 14	180°	9,0	19 800	1,96

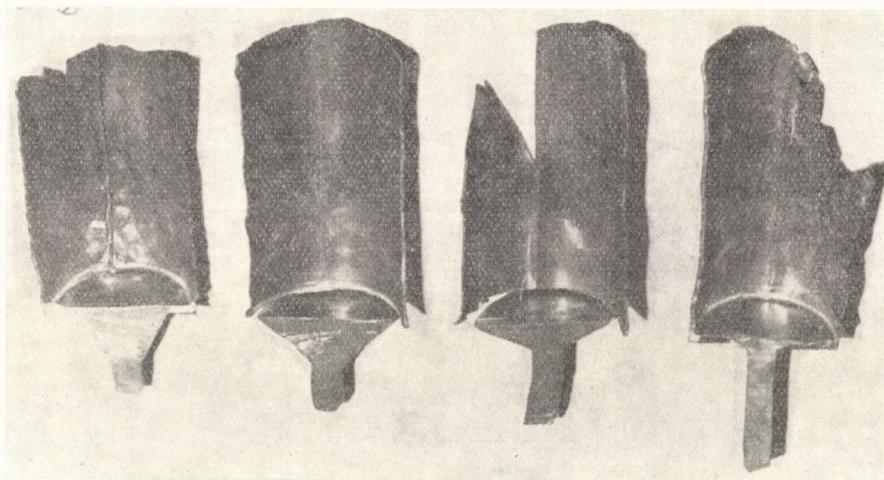


Fig. 16. Sculls remaining in container after extrusion

The results obtained by calculations are rather close to the actual values obtained by experiments, which indicate that the assumptions used in the derivation of the formulae were correct.

As the ram moves towards the die, the ram force usually decreases due to the reduction of the area where friction takes place. This is not observed in the results of experiments shown in Figs 11 to 15. A long, uniform-diameter ram was used in these experiments and as the ram moves forward, a scull remained behind in the container (Fig. 16) and friction took place between the scull and the ram. As the friction area between material and container decreased, the friction area between the ram and the scull increased. As a result of this, contrary to the usual experience, the ram force did not decrease as the ram advanced. This indicated that a well designed ram should be made slightly conical or the ram diameter should be reduced after a short straight portion. This observation also confirms that material moves by internal slide

(shear). The sudden drop of ram force when the material flow commences at the beginning of the extrusion is caused by the change of friction coefficient from the static to the smaller kinetic value, thus decreasing the frictional resistance.

X. Critical friction coefficient

The material sticks to the container surface during the process of extrusion if the coefficient of friction

$$\mu > \frac{\tau_{\max}}{\sigma_r}.$$

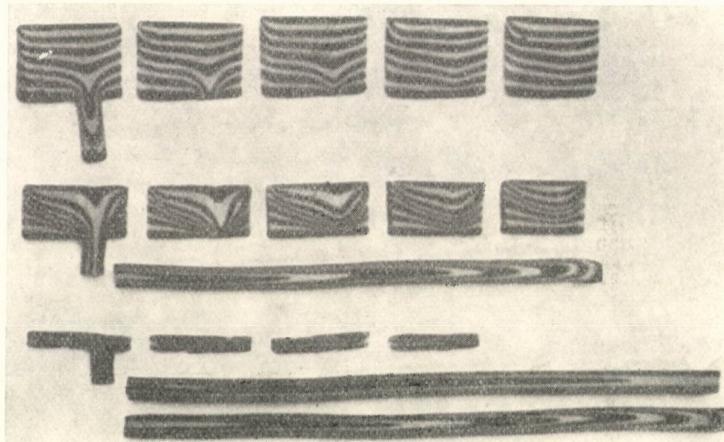


Fig. 17. Critical friction coefficient at which material sticks to container surface, for lead extrusion in terms of the reduction ratio F/f and the die angle

Substituting equations (6), (7) and (8) yields

$$\mu > \frac{1 - \nu}{\nu \left[\frac{4z}{D} + \sqrt{3} C \ln \frac{F}{f} \right]}.$$

The friction coefficient obtained from the above equation is the largest if z is zero. The largest value of the friction coefficient is referred to as the critical friction coefficient. The material sticks to the container surface over the whole area of contact from the dead metal zone to the ram force if the actual coefficient of friction between the material and the container is larger than the critical coefficient of friction. The critical coefficient of friction is

$$\mu_c = \frac{1 - \nu}{\sqrt{3} \nu C \ln \frac{F}{f}}. \quad (10)$$

Fig. 17 shows the critical friction coefficient of lead in terms of the reduction ratio F/f and die angle α . (Poisson's ratio for lead was taken as 0,43.)

If lead is extruded having a contraction ratio of 7,4 and using a die angle of 60° , then from Fig. 17 the critical friction coefficient is 0,142. This is a rather small value and the actual friction coefficient is larger than this in practice unless lubrication is used. If the actual friction coefficient in the above case is larger than 0,142 then the material sticks to the container all the way from the dead metal zone to the ram.

XI. Optimum container shape to minimize ram force

The volume of extruded metal V is

$$V = \frac{D^2\pi}{4} L. \quad (11)$$

The material in the dead metal zone is not included in the extruded volume, The extrusion is usually stopped as soon as the dead metal zone is reached, because any further extrusion requires sudden, steeply increasing ram force and power.

Substituting equation (11) into equation (9) the ram force can be expressed in terms of the container diameter D .

$$P = \sigma_s \left[\frac{4V}{\sqrt{3}D} + \frac{D^2\pi}{4} C \ln \frac{F}{f} \right]. \quad (12)$$

If the diameter of the container is changed, but the extruded volume is kept constant, the ram force changes. Equation (12) is differentiated with respect to the container diameter D , and the derivative is equated to zero, in order to obtain the optimum diameter of the container to extrude a certain volume of material with minimum ram force:

$$\frac{\partial P}{\partial D} = \sigma_s \left[-\frac{4V}{\sqrt{3}D^2} + \frac{D\pi}{2} C \ln \frac{F}{f} + \frac{D\pi}{2} C \right] = 0.$$

Substituting equation (11), the following solution for the optimum shape of the container is obtained:

$$\frac{L}{D} = \frac{\sqrt{3}C}{2} \left[1 + \ln \frac{F}{f} \right]. \quad (13)$$

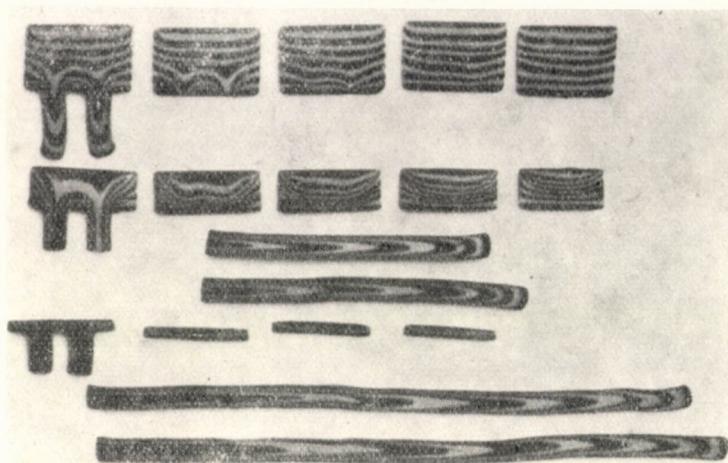


Fig. 18. Optimum container shape to minimize ram force $D = K_1 \cdot v^{1/3}$, $L = K_2 \cdot V^{1/3}$

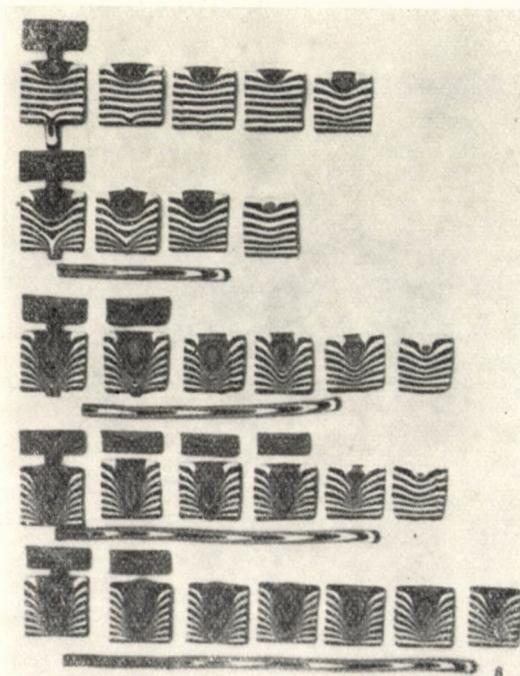


Fig. 19. Minimum ram force corresponding to optimum shaped container $P = K_3 \cdot \sigma_S \cdot D^2$

Fig. 18 shows the optimum container, length to diameter L/D ratio which results in minimum ram force, in terms of the reduction ratio F/f and the die angle α , for lead extrusion. The curve of Fig. 18 can only be used if the actual coefficient of friction is larger than the critical, so that the material sticks to the container surface. If the material slips then the optimum L/D ratio to give minimum ram force is larger than the one obtained from Fig. 18.

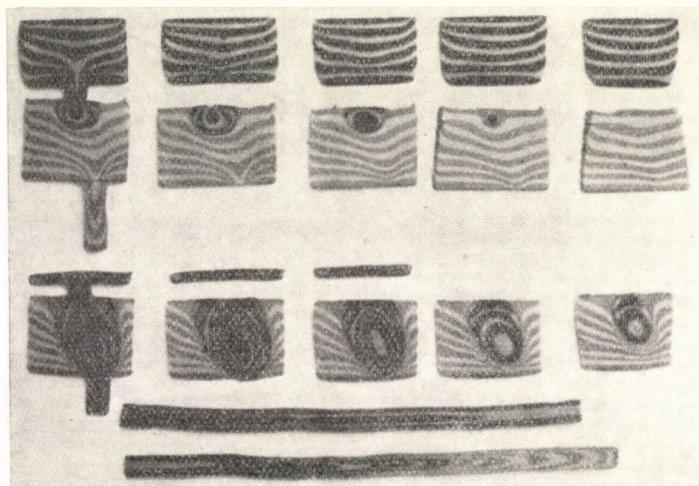


Fig. 20. Optimum container shape to minimize work required for extrusion $D = K_4 \cdot V^{1/3}$,
 $L = K_5 \cdot V^{1/3}$

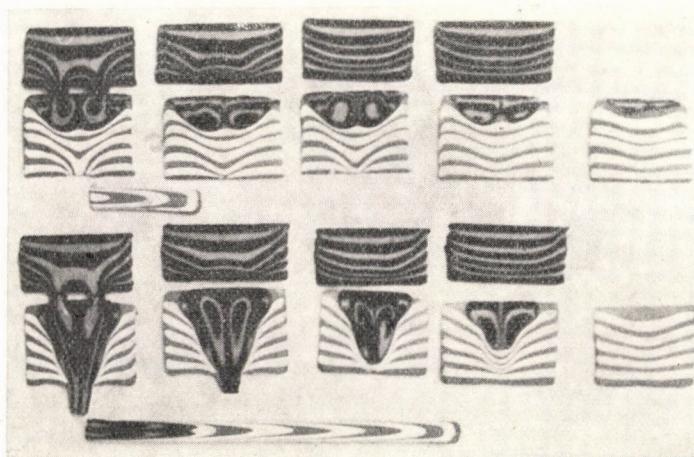


Fig. 21. Minimum work required for extrusion corresponding to optimum shaped container
 $W = K_6 \cdot \sigma_S \cdot D^3$

The values of the coefficients K_1 and K_2 shown on Fig. 18 can be used to determine the size of the container, the length and diameter, for a given extruded volume:

$$D = K_1 V^{\frac{1}{3}}$$

and

$$L = K_2 V^{\frac{1}{3}},$$

where

$$K_1 = \sqrt[3]{\frac{4D}{\pi L}}$$

and

$$K_2 = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2}.$$

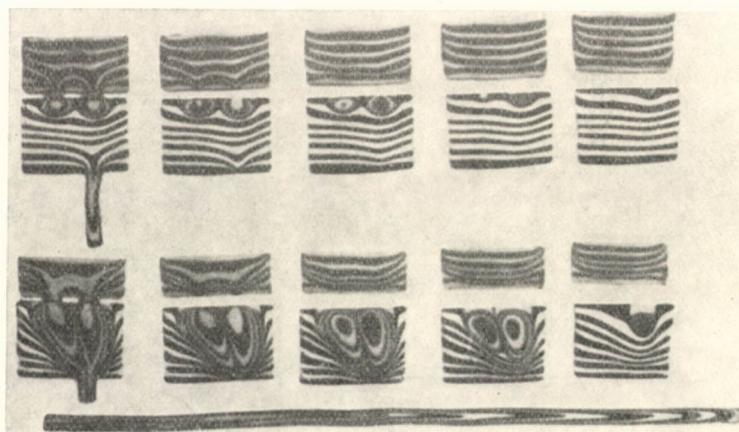


Fig. 22

The largest required ram force corresponding to the optimum container shape is obtained if equation (13) is substituted into equation (12). Then

$$P = \sigma_s D^2 \pi C \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln \frac{F}{f} \right] \quad (14)$$

or

$$P = K_3 \sigma_s D^2, \quad (15)$$

where

$$K_3 = \pi C \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln \frac{F}{f} \right]. \quad (16)$$

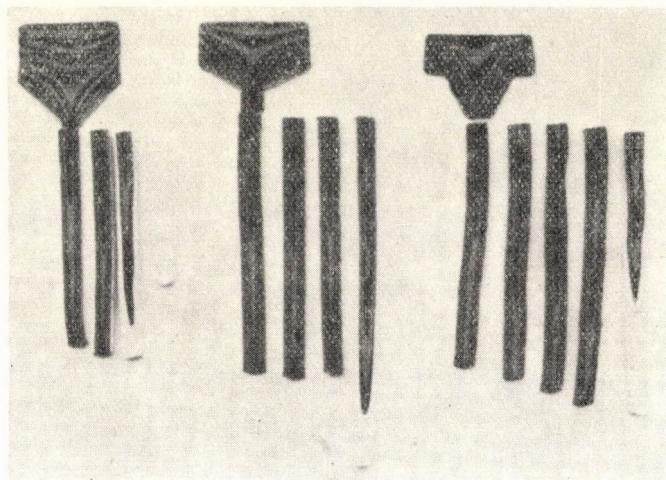


Fig. 23

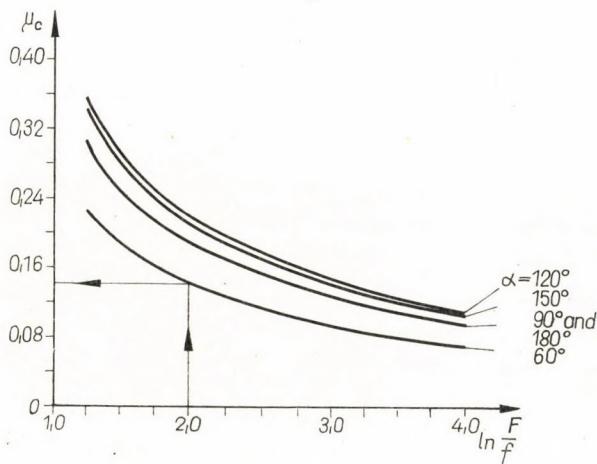


Fig. 24

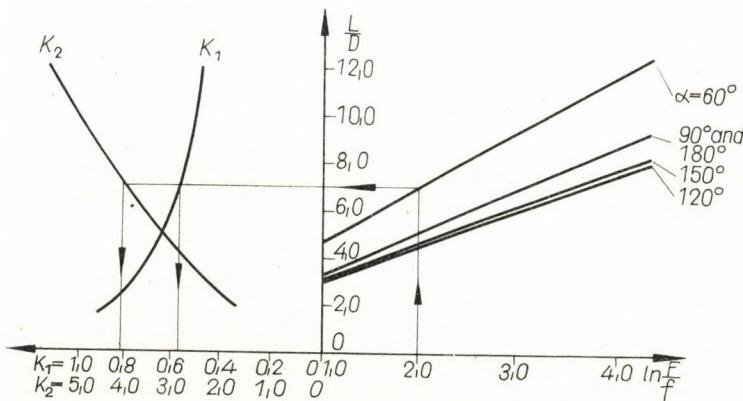


Fig. 25

Values of K_3 are shown on Fig. 19 for lead extrusion in terms of the reduction ratio F/f and the die angle α .

Example: Lead is extruded through a die having a die angle of 60° . The reduction ratio is 7,4. The optimum container shape to minimize the ram force is obtained from Fig. 18. The largest required ram force is found by using Fig. 19.

$$\frac{L}{D} = 7,0; \quad D = 0,57 \sqrt[3]{V}, \quad L = 4,1 \sqrt[3]{V}; \quad P = 16,9 \sigma_s D^2.$$

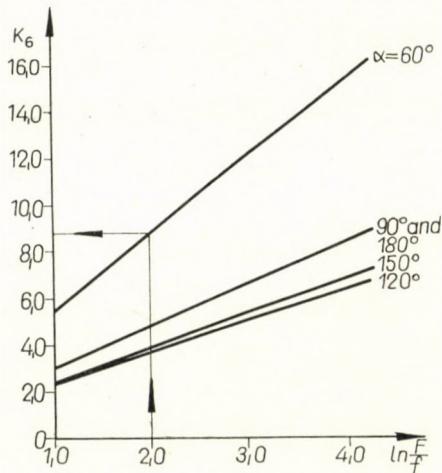


Fig. 26

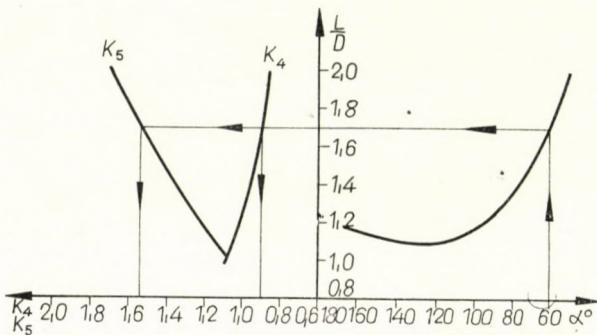


Fig. 27

XII. Optimum container shape to minimize required work

The work required to extrude the material is obtained from the equation

$$W = \int_0^L \frac{D^2 \pi}{4} \sigma_z dz.$$

Substituting equations (4), (6), (8) and (11) and integrating between the limits, gives

$$W = \sigma_s \left[\frac{8V^2}{\sqrt{3} \pi D^3} + VC \ln \frac{F}{f} \right]. \quad (17)$$

The work required to extrude a given volume of material is dependent on the diameter of the container. If the diameter of the container is altered the required work is changed. Equation (17) is differentiated and the derivative equated to zero, in order to obtain the optimum shape of the container which

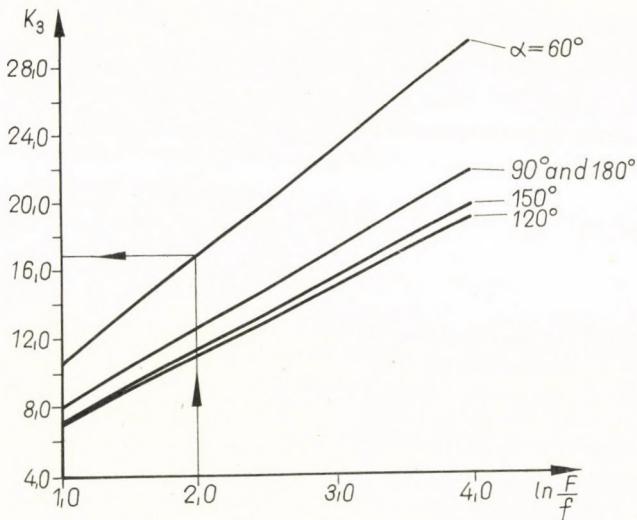


Fig. 28

will require the minimum amount of work for extruding a certain volume of material. Then

$$\frac{\partial W}{\partial D} = \sigma_s \left[-\frac{24V^2}{\sqrt{3} \pi D^4} + \frac{2VC}{D} \right] = 0$$

and

$$\frac{L}{D} = \frac{C}{\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Fig. 20 shows the optimum container shape and the length-to-diameter ratio in terms of the die angle, for lead extrusion to require minimum work. The curve shown on Fig. 20 can only be used if the actual friction coefficient is larger than the critical, so that the material sticks to the container surface. If the material slips along the container surface then the optimum L/D ratio is larger than the one obtained from Fig. 20.

Values of the coefficients K_4 and K_5 obtained from Fig. 20 give the actual values of the container shape, the length, and the diameter for a given extruded volume, so that

$$D = K_4 \cdot V^{1/3}$$

and

$$L = K_5 \cdot V^{1/3}.$$

The optimum shape of the container to minimize the ram force is different from the optimum shape of the container to minimize the work required for extrusion. In practice the container shape is chosen to minimize the work required, thus making the process more economical. However, if the available ram force of the machine is limited, then the object might be to choose a container shape which requires minimum ram force.

Having optimum container shape, the total work required to extrude the material is obtained if equation (18) is substituted into equation (17). Then

$$W = \sigma_s D^3 \frac{\pi C^2}{2 \sqrt[3]{3}} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{F}{f} \right] \quad (19)$$

or

$$W = K_6 \sigma_s D^3, \quad (20)$$

where

$$K_6 = \frac{\pi C^2}{2 \sqrt[3]{3}} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{F}{f} \right]. \quad (21)$$

Values of K_6 are shown on Fig. 21 for lead extrusion in terms of reduction ratio and die angle.

Example: Lead is extruded through a die having a die angle 60° . The reduction ratio is 7,4. The optimum container shape to minimize the required work is obtained from Fig. 20.

$$\frac{L}{D} = 1,69; \quad D = 0,91 \sqrt[3]{V}, \quad L = 1,55 \sqrt[3]{V}$$

and the corresponding work required is found by using Fig. 21

$$W = 8,85 \sigma_s D^3.$$

XIII. Conclusions

The process of extrusion is too complex to obtain an exact theoretical solution which would give good results in practice. However, results were obtained, by using a number of simplifying assumptions which may be acceptable in practice and are useful for the designer in determining the shape of the container, the reduction ratio, the ram pressure and the work required in the extrusion process.

It was shown that in most cases of conventional extrusion the material sticks to the container surface and all motion takes place by internal slide of the material (homogeneous friction). If the material sticks to the container in the vicinity of the die hole, then the possibility of circumferential cracks appearing on the extruded product is likely. To avoid having surface cracks on the extruded product the location of the slip-stick area at the die must be altered.

The ram force needed to extrude a certain volume of material depends amongst other factors on the shape of the container. The shape of the container can be chosen to require minimum ram force. The work required to extrude a given volume of material is the sum of the work needed to deform the material and to overcome friction. The total work is also dependent on the shape of the container. In order to make the extrusion process economical the container shape can be designed to require minimum extrusion work. The optimum shape for minimum ram force and the optimum shape for minimum required extrusion work are different. A suitable compromise after considering all requirements, has to be found by the designer when selecting the shape of the container.

REFERENCES

1. KRYSKO, W. W.—BOWERS, J. E.—WADHWANI, V. H.: Some experiments on factors effecting the extrusion of lead and lead alloys. Second International Conference on Lead, Arnhem (Holland) 1965.
2. KRYSKO, W. W.: Recent development in cable sheathing equipment with particular reference to continuous ram press operation. *The Australasian Engineer* (1965); March, 40—47.
3. GELEJI, S.: A rúdsajtolás folyamatának megvilágítása kísérletekkel és számítással. *Kohászati lapok* (1963), 386—390.
4. KRYSKO, W. W.—FENTON, R. G.: The influence of temperature and relative deformation rate on the shear strength of high purity lead. *Acta Techn. Hung.* **54** (1966), 137—142.
5. Catalogue of Schnackenberg Chemische Apparatebau.
6. CHADWICK, R.: *Metallurgical Review* 4 (1959).
7. GAYNOR, T. S.: Power Cables of Australia Pty. Limited (Private communications).
8. ZALESSKII, V. I.—VASILEV, L. I.: Methods of working steel and alloys. *Moscow Steel Institute Symposium XXXIII*, Moscow 1955.

BEITRAG ZUM STRANGPRESSEN VON BLEI UND BLEILEGIERUNGEN

W. W. KRYSKO und R. G. FENTON

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Strangpressen von Blei und Bleilegierungen unterscheiden die Verfasser zwei Arten von Reibung. Die heterogene Reibung ist die Reibung zwischen dem Gehäuse und dem Werkstoff, während die homogene Reibung ein Scheervorgang des Werkstoffes ist. Bei den im Betrieb auftretenden Normaldrücken des Werkstoffes auf die Gehäusewand kann heterogene Reibung (Gleitung) nur stattfinden, wenn der Reibungskoeffizient 0,001 oder kleiner ist. In allen anderen Fällen erfolgt die Materialbewegung des Bleies oder seiner Legierungen durch Materialabscheerung, d. h. homogene Reibung. Ferner fanden die Verfasser, daß der

Normaldruck geschwindigkeitsabhängig ist, und daß durch erhöhte Geschwindigkeit des Materials beim Austritt ein Druckabfall stattfindet und eine Zone entsteht bei der beide Arten der Reibung zusammenstoßen. Die Lage dieser Zone hat einen Einfluß auf die Ausbildung von Umfangrissen. Ferner wurden Berechnungen angestellt, um die Dimensionen zu bestimmen, bei welchen ein Minimum der Arbeit benötigt wird, und bei welchen ein Minimum des Kolbendruckes erforderlich ist, um ein gegebenes Volumen zu verpressen. Die Dimensionen sind in beiden Fällen verschieden.

CONTRIBUTION AU PROBLÈME DU FILAGE A LA PRESSE DU PLOMB ET DES ALLIAGES DE PLOMB

W. W. KRYSKO et R. G. FENTON

RÉSUMÉ

Au filage à la presse du plomb et de ses alliages, les auteurs distinguent deux sortes de frottement. Le frottement hétérogène intervient entre la boîte de la presse et la matière à ouvrir, tandis que le frottement homogène est un processus de cisaillement de la matière. Aux pressions normales exercées à la boîte de la presse par la matière au cours de l'usinage, il ne se produit qu'un frottement hétérogène (glissement) dans le cas où le facteur de frottement a une valeur de 0,001 ou encore plus réduite. Dans tous les autres cas, le mouvement de la matière du plomb ou de ses alliages s'effectue par cisaillement de la matière, c'est-à-dire par frottement homogène. En outre, les auteurs trouvaient que la pression normale dépend de la vitesse et qu'à une vitesse élevée de la matière à la sortie, il existe une chute de pression et il se produit une zone, où se rencontrent les deux sortes de frottement. L'emplacement de cette zone exerce une influence sur le développement de la fissuration périphérique. Par la suite, une méthode de calcul est présentée pour la détermination des dimensions auxquelles un minimum de travail est exigé pour le filage à la presse d'un volume donné. Les dimensions sont différentes dans les deux cas.

К ПРОБЛЕМЕ ПРЕССОВАНИЯ ПРУТКОВОГО МАТЕРИАЛА ИЗ СВИНЦА И СВИНЦОВЫХ СПЛАВОВ

В. В. КРИСКО и Р. Г. ФЕНТОН

РЕЗЮМЕ

Авторы при прессовании пруткового материала из свинца и свинцовых сплавов различают два различных вида трения. Гетерогенное трение представляет собою трение между корпусом и материалом, в то же время гомогенное трение является процессом среза материала. При нормальных давлениях, возникающих во время производства материала, на стенке корпуса может иметь место только гетерогенное трение (скольжение), когда коэффициент трения равен 0,001 или меньше этой величины. Во всех остальных случаях происходит движение материала свинца или его сплавов вследствие явления среза, т. е. имеет место гомогенное трение. В частности авторы установили, что нормальное давление зависит от скорости и что вследствие повышенной скорости материала на выходе наблюдается падение давления и возникает зона, в которой сталкиваются оба вида трения. Положение этой зоны воздействует на образование трещин по периметру. В частности, произведены вычисления с целью определения размерностей, при которых требуется минимальная работа и при которых требуется минимальное давление поршня, чтобы произвести прессование заданного объема. В обоих случаях получаются различные размерности.

CONTRIBUTION TO THE INVESTIGATION OF THE INTENSITY OF CAVITATION EROSION

J. VARGA

DOCTOR OF TECHN. SC.

and

GY. SEBESTYÉN

CAND. OF TECHN. SC.

DEPARTMENT OF HYDRAULIC MACHINERY,

TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received June 13, 1966]

The authors have carried out flow and cavitation erosion investigations in a closed circuit hydrodynamic tunnel, and claim that in tests made with different flow velocities but identical cavitation conditions for attaining identical eroded condition (weight loss) identical energy must be employed. The energy exerted on the surface of the test specimen by collapsing bubbles will be characterized by a so-called equivalent impact number introduced by the authors. It will be proved that under the above conditions for a given constant eroded weight loss the equivalent impact numbers are identical. Using this equivalent impact number the cavitation condition is also determined in which erosion intensity is at its maximum.

I. Introduction

In world-wide investigation of cavitation erosion one of the most important — for practical purposes also — achievement was the conclusion that flow velocity has a very significant influence on the intensity of cavitation erosion. This scale effect of the velocity has been the subject matter of investigations by SHALNEV [1], SCHRÖTER [2], KNAPP [3], KERR and ROSENBERG [4], RATA [5], GOVINDA RAO [6], HAMMITT [7] and also by the authors [8, 9]. Their own results also supported by other data from the literature lead to the conclusion that for a certain constant weight loss due to cavitation erosion, with a given material, in the same test facilities, with constant cavitation conditions, between the flow velocity and the time necessary for damaging the given amount of material show the following correlation

$$\tau_1 v_1^n = \tau_2 v_2^n = \tau_i v_i^n = \text{const.} \quad (1)$$

and the velocity exponent is $n = 5$. The correlation is valid for identical cavitation condition, i.e. for identical cavitation zone length. The correlation hints, at a given state of cavitation, to the intensity of the cavitation erosion also; however, it does not give any information as to the change of erosion intensity under other cavitation conditions.

In the following, an account is given of some experimental results that yielded some information on the correlation between cavitation and the intensity of erosion.

II. Frequency of shedding wakes

In the course of earlier tests with circular cylinder models placed in a closed circuit hydrodynamic tunnel [10, 11], the correlations between the frequency of wakes shedding from a circular cylinder, i.e. the Strouhal number, cavitation number and cavitation zone length were determined with the empirical correlations:

$$S = \frac{\lambda \sigma^3}{8} \quad (2)$$

and

$$S = 0,2 \sqrt{\sigma}. \quad (3)$$

In these equations S is the Strouhal number calculated with the stream velocity v in the cross section narrowed by the cylinder:

$$S = f d/v,$$

where f is the frequency of wakes shedding from the cylinder during unit time, d is the characteristic length of the model (diameter of the cylinder), λ is the dimensionless cavity length i.e. $\lambda = l_z/d$, l_z is the length of the cavity. Between the relative cavity length and the cavitation number the correlation

$$\lambda = 1,6 \sigma^{-2,5} \quad (4)$$

was found, where σ is the cavitation number calculated with the flow velocity in the narrowed cross section

$$\sigma = \Delta p / (0,5 \varrho v^2),$$

in which $\Delta p = p_\infty - p_v$, p_∞ is the static pressure of undisturbed flow, p_v is the vapor pressure belonging to the given fluid temperature, ϱ is the fluid density.

The periodically shedding cavities and the collapse of the bubbles in the cavities are the source of vibration noise and cavitation damage following cavitation phenomena.

The mechanism of damage can be explained in a simplified form by the periodically occurring stresses, impacts from bubble collapse on the surface

or near to the surface exposed to erosion; the rate of impact occurrence is determined by the frequency of shedding wakes, while its energy by pressure conditions. Using the earlier correlation, the frequency can be written in the form

$$f = Cv \sqrt{\sigma}, \quad (5)$$

where $C = \text{const}$. For determining the pressure values, the cavitation number, or the flow velocity can be taken as a basis.

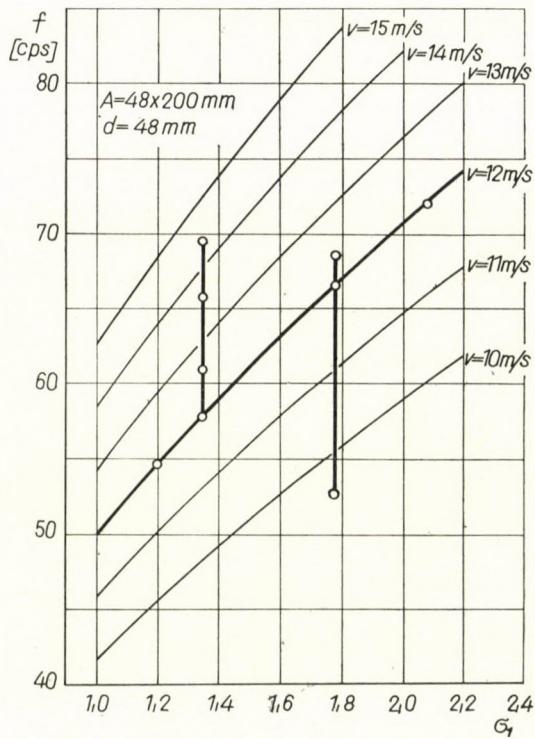


Fig. 1. Frequency (f) of wakes shedding from a circular cylinder, as a function of cavitation number (σ_1) calculated with undisturbed flow velocity

III. The equivalent impact number

Fig. 1. gives the frequency values of wakes shedding from a circular cylinder, as a function of cavitation number (σ_1) calculated with undisturbed flow velocity, for different flow velocities. A heavy line marks the ranges taken into consideration for our erosion tests. The erosion tests had been made in a test section sized $48 \times 200 \text{ mm}$ — described in earlier works [8, 9] —

with a $d = 48$ mm sized circular cylinder model placed in the test section perpendicularly to the direction of flow with lead test specimens. The tests were carried out partly with constant cavitation number, partly with constant flow velocity.

1. Tests made with $\sigma_1 = \text{const.}$ values

Considering the correlation $\lambda(\sigma)$ it seems to be obvious that a constant cavitation number means constant cavity length as well. Consequently, it can be assumed that when an identical value of erosion weight loss is reached, the place and shape of the damage on the test specimens must be identical, as was well proved by our investigations in this field. On the $\Delta G(\tau)$ chart in Fig. 2 plotted from tests where $\lambda = 3$ (where ΔG is the erosion weight loss of the test specimen during testing time τ). A definite, for example $\Delta G = 5000$ mgf weight loss is marked; this means not only the uniformity of the eroded surfaces, but also the assumption that even those energy values are identical which were necessary for removing the given quantity of material. At present there is no infallible method to give absolute values for the work necessary for damaging on the basis of considerations of fluid mechanics and material structure. In this paper we only wish to call the attention to the so-called equivalent impact number, which can usually be determined in the course of cavitation erosion investigations.

The equivalent impact number (ψ) is defined as the product of the number of actual impacts on the surface and of the square of the dimensionless pressure conditions marking the strength of the impacts. The number of actual impacts on the surface during τ time can be calculated from the product of frequency and time, i.e. $N = f\tau$. This number is essentially proportional with the correlation $N = v\tau/(d\lambda)$ given for the number of cavities used earlier by GOVINDA RAO and THIRUVENGADAM [12, 13] for calculating the "cavitation damage number". This, following our earlier correlations, is quite obvious. If, in this correlation, we substitute the value of velocity $v = f \cdot d/S$ expressed from the Strouhal number, and since when $d = \text{const.}$, and $\sigma = \text{const.}$, then $\lambda = \text{const.}$, and $S = \text{const.}$,

$$N = \frac{v\tau}{d\lambda} = C_1 f\tau$$

where C_1 is const. Following this, the equivalent impact number is

$$\psi = N \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_0} \right)^2 \quad (6)$$

where $\Delta p = p_\infty - p_v$ and $\Delta p_0 = 1 \text{ kp/cm}^2$.

It is assumed that with identical cavitation conditions the equivalent impact numbers necessary for reaching identical erosion conditions must also be identical. To prove this, some data are given in Tables I, II, and III. In Table I comparative calculations were made for the points belonging to $\sigma_1 = 1,34$, shown in Fig. 1. The damage curves are shown in Fig. 2. In this chart the values

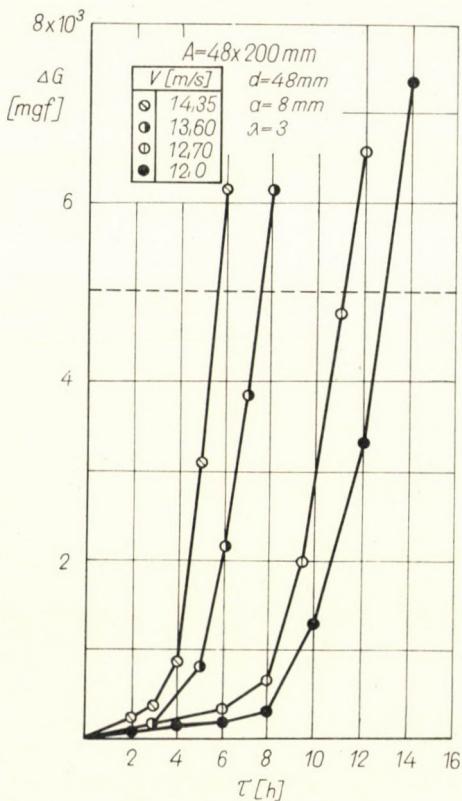


Fig. 2. Erosion weight loss (ΔG) of the test specimens as a function of test time (τ), a is the thickness of test specimens

of ψ were calculated for $\Delta G = 5000$ mgf erosion weight loss. Table II contains the results of the erosion tests of 3 mm thick lead test specimens. The cavitation erosion tests were also made in the cavitation flow condition belonging to $\sigma_1 = 1,34$ cavitation number.

The data in Table III were gained from the tests shown in Fig. 1, belonging to $\sigma_1 = 1,78$ cavitation number. The ψ values in all three Tables justify our presumption.

The determination of the value proportional to the equivalent impact number can also be accomplished through correlation (1). Since, in the case

Table I $a = 8 \text{ mm}, \Delta G = 5000 \text{ mgf}, \lambda = 3$

v [m/s]	$N \times 10^{-6}$	$\psi \times 10^{-6}$
12,0	2,71	3,22
12,7	2,47	3,65
13,6	1,78	3,45
14,35	1,42	3,43
		$\bar{\psi} = 3,44$

Table II $a = 3 \text{ mm}, \Delta G = 4000 \text{ mgf}, \lambda = 3$

v [m/s]	$N \times 10^{-6}$	$\psi \times 10^{-6}$
9,05	8,87	3,33
10,4	4,43	2,93
13,05	1,99	3,18
13,6	1,78	3,45
13,95	1,52	3,27
14,43	1,32	3,47
		$\bar{\psi} = 3,27$

Table III $a = 8 \text{ mm}, \Delta G = 5000 \text{ mgf}, \lambda = 1,5$

v [m/s]	$N \times 10^{-6}$	$\psi \times 10^{-6}$
12,46	0,89	2,09
12,0	1,00	2,05
9,54	2,67	2,16
		$\bar{\psi} = 2,10$

of $\sigma = \text{const.}$, $f \sim v$, and from the cavitation number $\Delta p = c \cdot \sigma v^2$, the correlation $\tau v^5 = \text{const.}$ can be written as

$$\tau f \cdot \Delta p^2 = C_2 \quad (7)$$

and substituting $\tau f = N$, we get $N \Delta p^2 = C_2$, which, after dividing by Δp_0^2 , is identical with the equivalent impact number ψ .

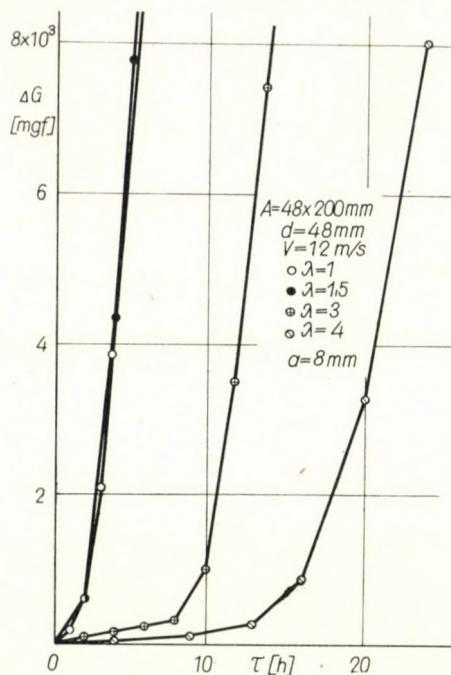


Fig. 3. Erosion weight loss (ΔG) of test specimens as a function of test time (τ), a is the thickness of test specimens

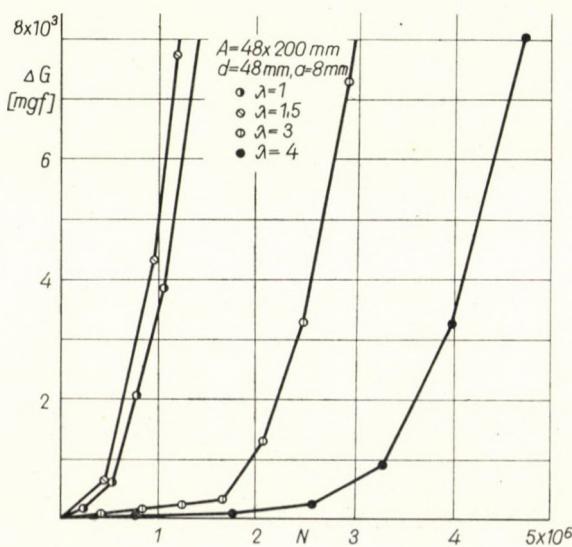


Fig. 4. Erosion weight loss (ΔG) of test specimens, as a function of impact number (N) on the test specimen

2. Tests made at value $v = \text{const.}$

The tests were made with $v = 12 \text{ m/s}$ flow velocity; and with $\lambda = 1; 1,5; 3$ and 4 dimensionless cavity lengths. Fig. 3 shows the erosion weight loss curves as a function of time. In view of the fact that the cavitation conditions are different here, it is more expressive if the erosion weight loss is plotted as a function of the amount of the impacts on the test piece (Fig. 4).

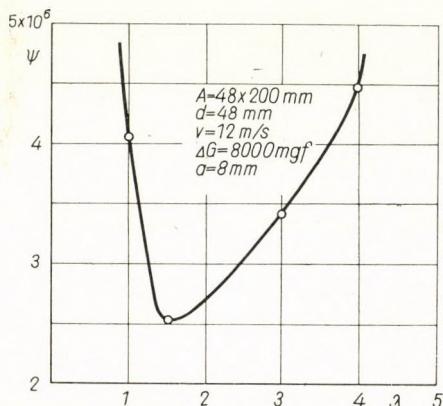


Fig. 5. The equivalent impact number (ψ) as a function of dimensionless (relative) cavity length (λ)

When plotting the function $\psi(\lambda)$ from these test results, for e.g. $\Delta G = 8000 \text{ mgf}$ erosion weight loss (Fig. 5), it can be seen that at the value $\lambda = 1,5$ the curve has its minimum, and the most intense damage is caused by this state of cavitation. Namely in this case, the greatest weight loss belonged to the least equivalent impact number, which means that the intensity of erosion is, in this case, the strongest. The intensity peak belonging to $\lambda = 1,5$ relative cavitation means that the bubbles grow along the flow length obtainable from the data to their most favourable size involving the greatest collapse energy.

In our earlier works we have concluded — for instance, by investigating cavitation noise — that even according to the amount of the eradiated sound energy which can be taken as an energy proportional to the damage energy, $\lambda = 1,5$ must produce the maximum erosion.

REFERENCES

1. Шальнев, К. К.: Энергетический параметр и масштабный эффект кавитационной эрозии. *Изв. АН СССР. ОТН.* (1961), № 5.
2. SCHRÖTER, H.: Korrosion durch Kavitation in einem Diffusor. *VDI 76* (1932), 511.
3. KNAPP, R. T.: Recent investigations of the mechanics of cavitation and cavitation damage. *Trans. ASME 77* (1955), 1045–1054.
4. KERR, S. L.—ROSENBERG, K.: An index of cavitation erosion by means of radio isotopes. *Trans. ASME 80* (1958), 1308–1314.

5. RATA, J. M.: Erosion de cavitation. Mesure de l'erosion par jauge résistante. *Symp. Rech. sur les Turbines Hydr. de Nice* (1960); C4, 1—10.
6. GOVINDA RAO, N. S.: Cavitation — its inception and damage. *Irrigation and Power* (1961), Jan.
7. HAMMITT, F. G.: Observations on cavitation damage in a flowing system. *Trans. ASME* (Ser. D. Jour. of Basic Eng.) **85** (1963), 347—349.
8. VARGA, J.—SEBESTYÉN, Gy.: Observations on cavitation velocity-damage exponent in a flowing system. *Periodica Polytechnica* **8** (1964), 343—352.
9. VARGA, J.—SEBESTYÉN, Gy.: The intensity and scale effect of cavitation damage. *Periodica Polytechnica* **10** (1966), 47—54.
10. VARGA, J.—SEBESTYÉN, Gy.: Determination of the frequencies of wakes shedding from circular cylinders. *Acta Techn. Hung.* **53** (1966), 91—108.
11. VARGA, J.—SEBESTYÉN, Gy.: Experimental investigations of some properties of cavitating flow. *Periodica Polytechnica* **9** (1965), 243—254.
12. GOVINDA RAO, N. S.—THIRUVENGADAM, A.: Prediction of cavitation damage. *Proc. ASCE* (Jour. Hyd. Div.) **87** (1961), 37—62.
13. THIRUVENGADAM, A.: A unified theory of cavitation damage. *Trans. of the ASME* (1963), 365—376.

BEITRÄGE ZUR UNTERSUCHUNG DER INTENSITÄT DER KAVITATIONSEROSION

J. VARGA und GY. SEBESTYÉN

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Ergebnisse, die von den Autoren bei der Untersuchung der Kavitationserosion in einem hydrodynamischen Kanal mit geschlossenem Kreislauf durchgeführt worden sind, wird es in dem Aufsatz demonstriert, daß bei den mit verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten, aber in dem gleichen Kavitationszustand durchgeföhrten Versuchen zur Erreichung des gleichen erodierten Zustandes (Gewichtsverlustes) die gleichen Inanspruchnahmen gehören müssen. Die Beanspruchung durch die an der Oberfläche des Probestückes zusammenbrechenden Blasen wird durch die von den Autoren entwickelte »äquivalente Schlagzahl« gekennzeichnet. Es wird bewiesen, daß unter den obigen Bedingungen bei einem konstanten Erosions-Gewichtsverlust die äquivalenten Schlagzahlen die gleichen sind. Mit Hilfe der äquivalenten Schlagzahl wurde auch der Kavitationszustand bestimmt, in dem die Erosion die größte Intensität aufweist.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'INTENSITÉ DE L'ÉROSION PAR CAVITATION

J. VARGA et GY. SEBESTYÉN

RÉSUMÉ

D'après les résultats de leurs essais hydrauliques et d'érosion par cavitation, faits dans un canal hydrodynamique à circuit fermé, les auteurs montrent qu'aux essais effectués à vitesses d'écoulement différentes mais à état de cavitation égal, des sollicitations identiques doivent correspondre aux érosions (pertes de poids) égales. Les contraintes dues aux bulles s'affaissant à la surface du spécimen sont caractérisées par le «nombre équivalent de coups» défini par les auteurs. Ceux-ci prouvent que dans les conditions mentionnées, les nombres équivalents de coups sont égaux pour des pertes de poids érodé constantes. En connaissance du nombre équivalent de coups, ils ont déterminé aussi l'état de cavitation pour lequel l'intensité de l'érosion est maximum.

ДОПОЛНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ИНТЕНСИВНОСТИ
КАВИТАЦИОННОЙ ЭРОЗИИ

Й. ВАРГА и ДЬ. ШЕБЕШТЬЕН

РЕЗЮМЕ

На основе результатов исследования движения потоков и кавитационной эрозии, проведенных в гидродинамических каналах замкнутого потока, авторы показывают, что при экспериментах, проведенных при разных скоростях потока, но при равном состоянии кавитации, для достижения равной эрозии (потери веса) необходимо иметь равные нагрузки. Нагрузка на поверхность образца, происходящая от разрыва пузырей, охарактеризована при помощи введенной авторами величины т. н. равнозначного числа ударов. Доказывается, что при упомянутых условиях для данной постоянно-эродированной потери веса, равнозначное число ударов постоянно. Используя равнозначное число ударов, определяют то состояние кавитации, при котором интенсивность эрозии наиболее велика.

CAVITATION NOISE SPECTRUM AND CAVITATION DAMAGE

J. VARGA

DOCTOR OF TECHN. SC.

and

GY. SEBESTYÉN

CAND. OF TECHN. SC.

DEPARTMENT OF HYDRAULIC MACHINERY,

TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received June 24, 1966]

The authors report on their investigations of sound pressure level and vibration acceleration level measured at cavitation generated by various models (circular cylinder, wedge) in a closed circuit hydrodynamic tunnel; further, account is given of the correlations between the state of cavitation and the intensity of cavitation and the above-mentioned results. An unequivocal correlation has been found between the sound pressure level and acceleration level of the vibrations as measured at the frequency determined by the investigations, and the state of cavitation. It has been stated that these curves have a maximum value and the place of maximum coincides with the maximums of the curve resulting from the damage investigations in different states of cavitation. The authors claim that cavitation noise level investigations are excellent for judging cavitating flow conditions and can thus give information about the extent of the probable erosion damages.

I. Introduction

The appearance of cavitation is — apart from special cases — usually not desirable; it is, however, often unavoidable. Its effect can be felt, besides changing flow conditions, in erosion damages. Though the mechanism of cavitation erosion has not been clarified yet, it seems to unquestionably arise in the first place from the mechanical stresses of pressure waves generated by the collapse of bubbles.

It is also plausible to assume that the vibration generated by periodically shedding and collapsing bubbles and eradicated partly in the form of sound is very likely able to give information on the state of cavitation. Though this probability has been recognized by many [1—4], an investigation into the problem to the extent of clarifying the correlations between the noise level and the state of cavitation has not yet been realized.

In the following account we report on our sound pressure and vibration investigations proving that there is a unequivocal correlation between cavitation, sound pressure level and the acceleration level of the vibrations. The correlation between cavitation and the intensity of erosion had been shown

in our earlier investigations. From this it follows that with the possibility of clearing up the correlation between the sound pressure level, i.e. the acceleration level of the vibrations, and the cavitation, the intensity of cavitation erosion can also be concluded from the data gained.

II. Description of experiments

1. Test equipment

The test were carried out in the 48×200 mm test section of a closed circuit hydrodynamic tunnel (Fig. 1). In this, perpendicularly to the direction of flow, first a circular cylinder of 48 mm dia., then an equilateral, isosceles wedge with 30° vertex angle — which can be drawn into the above diameter — were placed (Fig. 2). Measuring conditions gave simultaneous investigation of acoustic, vibration, erosion and cavitation characteristics.

For the sound pressure and acceleration measurements a condenser microphone, i.e. acceleration-measuring (vibration measuring) head frequency analyzer and connected level recorder (*Brüel & Kjaer*) were used. The microphone was placed beside the perpendicular plexiglass window of the test section, in a horizontal plane to the longitudinal axis of the model, about 10 cm from the test section. The acceleration measuring heads were placed at the plexiglass side plate as well as the opposing steel wall of the test section.

2. Frequency spectrum

In the course of our earlier investigations it was found that the periodical shedding of the wakes from a body placed in flow is, from the viewpoint of cavitation erosion, of basic importance. The shedding frequency is a definite, well determinable value and its periodic character has considerable influence on the vibration appearing in the system. However, the shock-waves generated on the collapse of the bubbles delivered by the shedding wakes can be observed in a considerably higher frequency range. The pressure has considerable influence on the velocity of the collapse. From the point of view of the investigation, the determination of the frequencies of the shedding cavities, the sound pressure level appearing at the collapse of bubbles, and the determination of acceleration values of the vibrations are significant.

The sound pressure level can be expressed with the correlation

$$n_p = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 [\text{dB}], \quad (1)$$

where p is the measured sound pressure value, p_0 is the basic level of sound pressure: $p_0 = 2,04 \cdot 10^{-4} \mu\text{bar}$. The acceleration level of the vibrations can also be expressed as

$$n_g = 10 \log \left(\frac{g}{g_0} \right)^2 [\text{dB}], \quad (2)$$

where g_0 is the local value of the gravitational acceleration.

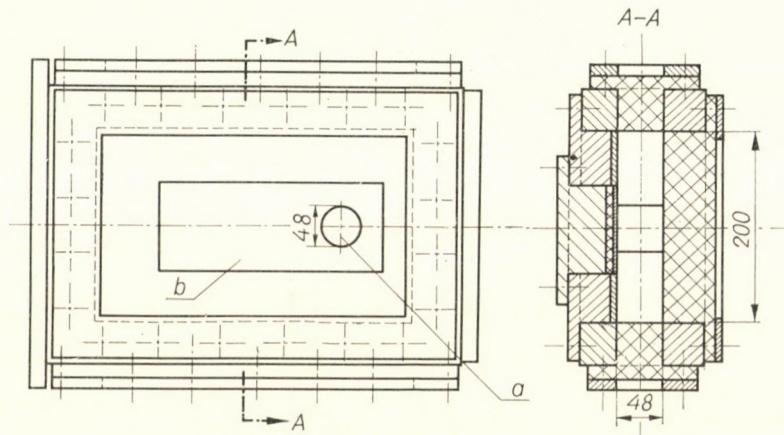


Fig. 1. Sketch of test section sized 48×200 mm (a is the circular cylinder model, b is the lead test piece)

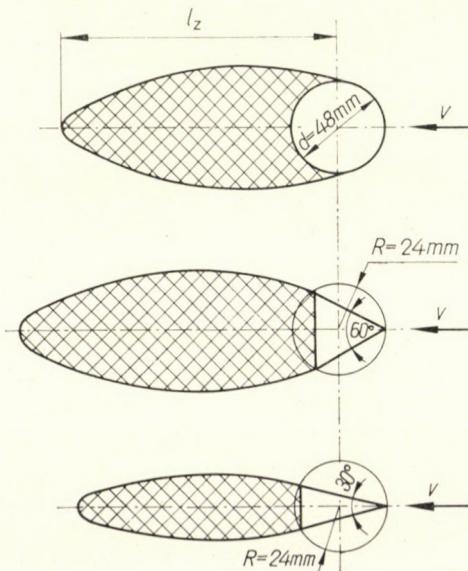


Fig. 2. Test models with cavitation zone length l_z

From the values of sound pressure level, i.e. acceleration level of two identical frequencies the increase in the sound pressure level and acceleration level can be calculated with the following correlation

$$\delta n_p^* = 10 \log \left(1 + \frac{1}{10^{\frac{n_{p_1} - n_{p_2}}{10}}} \right). \quad (3)$$

From this correlation one can see that when the sound pressure level is $n_{p_1} = n_{p_2}$, which means that it is the same as n_{p_2} taken as the basic one, the originating value with $\delta n_p^* = 3$ dB greater than n_{p_1} , i.e. n_{p_2} ; and if the

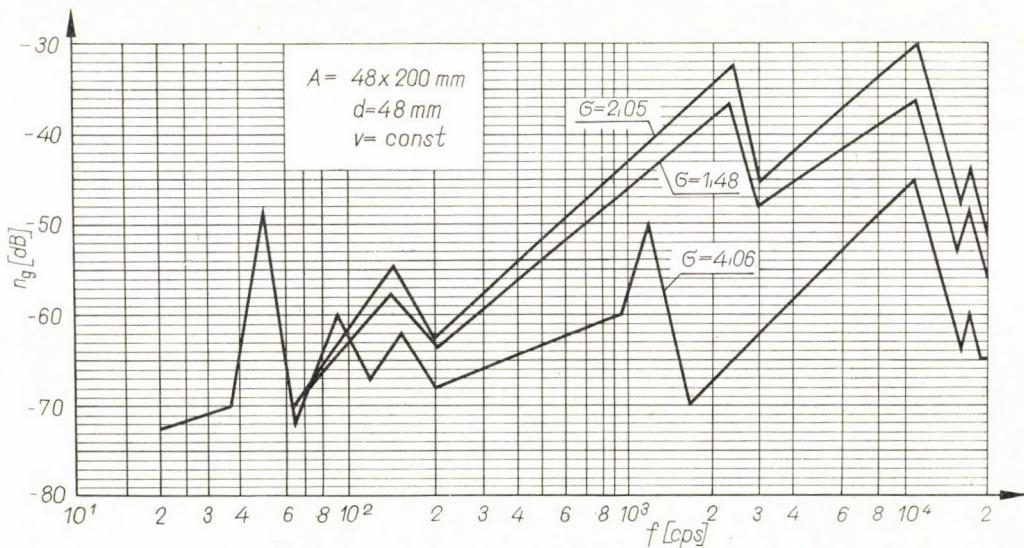


Fig. 3. Vibration acceleration level (n_g) as a function of frequency (f), in case of circular cylinder model

difference between the basic level and the resulting curve is 6 dB, this practically means that the resulting curve is a reflection of the investigated phenomenon, since the influence of the basic level can be neglected [5].

Frequency of sound pressure level and frequency of acceleration level investigations were made in the 20–20 000 Hz range. A scheme of the latter is shown in Fig. 3. In the figure, the cavitation number appears as a parameter. The cavitation number is defined as usually: $\sigma = (p_\infty - p_v)/(0.5 \rho v^2)$, in which p_∞ is the static pressure at the place of the model placed in the test section, when it is absent; p_v is the vapor pressure belonging to the given fluid temperature, ρ is the fluid density and v is the speed of undisturbed flow.

When evaluating the investigations, in some cases, it appeared to be practicable to illustrate the results as functions of the cavitation zone length

(l_z) or of the relative length of the cavitation zone (λ), ($\lambda = l_z/d$, where l_z is the visually observable length of the cavitation zone and d is the characteristic dimension of the model). As there is a unequivocal correlation between the cavitation number and the cavitation zone length [6, 7], accordingly, the representation of the results as functions of σ or λ can be taken as equivalent.

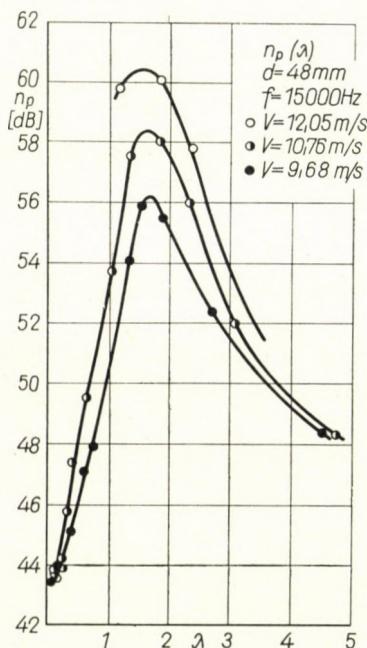


Fig. 4. Sound pressure level (n_p) as a function of relative cavity length (λ), in case of circular cylinder model

In Fig. 3, the $f < 70$ Hz range is dominated by the noise of the machinery (electric motor and pump). In the $70 < f < 6 \cdot 10^3$ Hz range the state of cavitation exerts a considerable, but not unequivocal influence on the acceleration level values of each frequency value. In the range above $f > 6 \cdot 10^3$ the curves are nearly parallel. This leads to the conclusion that in this range any frequency value can serve the purpose of determining the acceleration and sound pressure level value belonging to a given state of cavitation, while there are characterizing the cavitation conditions.

III. The results of the model tests

The following parts deal with the measurement results of sound pressure level (n_p , or Δn_p) and acceleration level (n_g , or Δn_g) of a circular cylinder model placed in the test section. Here $\Delta n_p = n_{p1} - n_{p2}$ in dB, where n_{p1} is

the sound pressure level determined by measurement and n_{p2} is a sound pressure level taken as an arbitrary basis, similarly to the accelerations: $\Delta n_g = n_{g1} - n_{g2}$.

On the basis of the foregoing, the frequency values $f = 1,2 \cdot 10^4$; $1,5 \cdot 10^4$ and $2 \cdot 10^4$ have been chosen, and with them the sound pressure and acceleration levels belonging to the different states of cavitation have been measured.

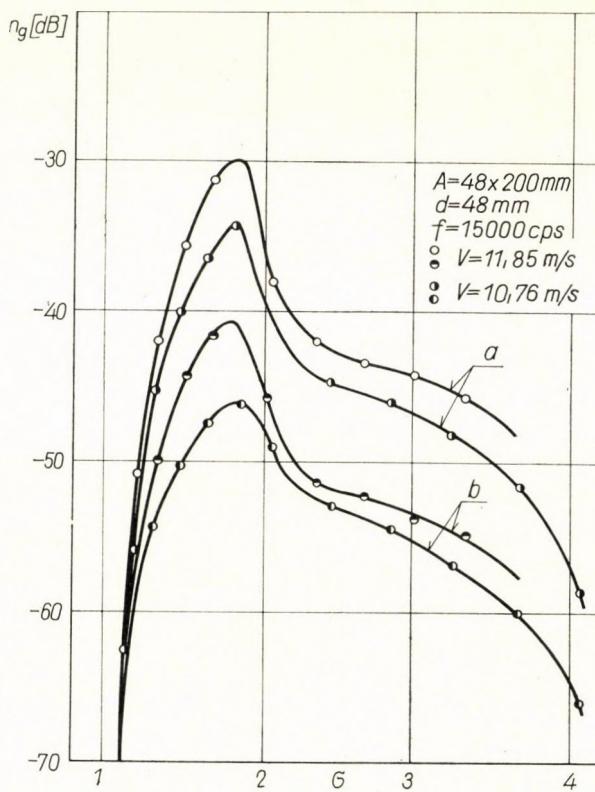


Fig. 5. Vibration acceleration level (n_g) as a function of cavitation number (σ) with circular cylinder model

Fig. 4 presents the test results from condenser microphone as functions of the cavitation relative cavity length; Fig. 5 gives the values of acceleration measurements and as a function of the cavitation number. Both cases are for a circular cylinder model. The ordinate carries the levels in dB. From the curves in Fig. 5, the ones marked *a* were yielded by the acceleration measuring heads placed on the persplex wall, the ones marked *b* were given by those placed on the steel plate sidewall of the test section. The figure refers to the fact that these two results are not essentially affected whether measured on the persplex window, or on the steel plate. Namely, if we calculate the difference in the peak values belonging to cavitation number $\sigma = 1,8$ and the acceleration

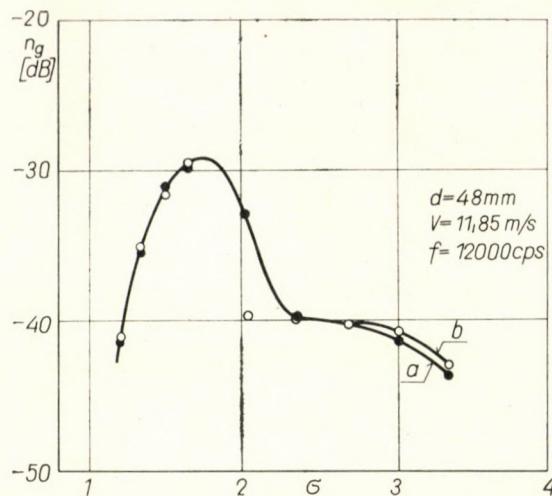


Fig. 6. Acceleration level (n_g) as function of cavitation number (σ) with circular cylinder model

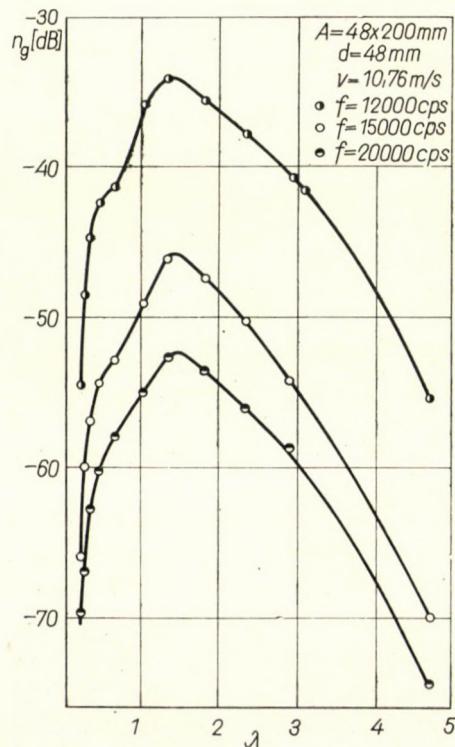


Fig. 7. Acceleration level (n_g) as function of relative cavity length (λ) with circular cylinder model

level values of the basic $\sigma = 3,6$ cavitation free flow, these show the following values: with $v = 11,85$ m/s flow velocity Δn_g perspl. = 18 dB; Δn_g steel = 16,5 dB and with $v = 10,76$ m/s flow velocity Δn_g perspl. = 17 dB, Δn_g steel = 14 dB, respectively. With $f = 12\ 000$ Hz, the two resulting curves plotted at the persplex window (*a*), and at the steel plate sidewall (Fig. 6) cover each other. Owing to this essential coincidence, there will be no further reference to the place of vibration measuring — with respect to the given test sections.

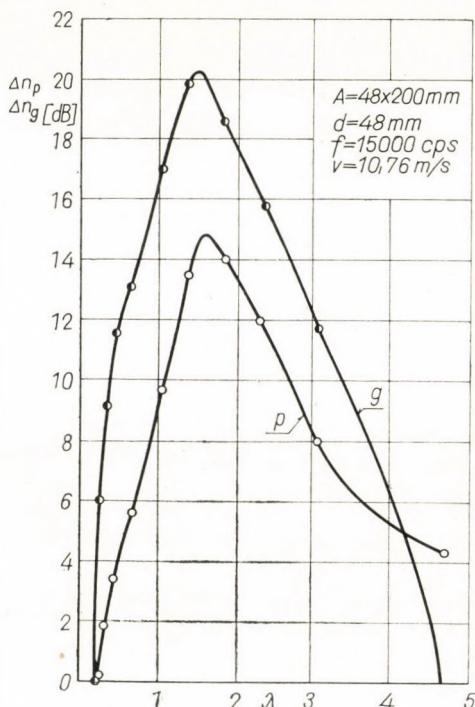


Fig. 8. Acceleration (Δn_g) and sound pressure level (Δn_p) differences as functions of relative cavity length (λ)

Fig. 7 contains the acceleration level values, again for a circular cylinder model, as a function of the relative cavity length, at the chosen 3 frequency values. It can be seen that the curves for the different frequency values are similar in character and have a maximum. The place of the maximum is, in accordance with the curves in Fig. 4 at $\lambda = 1,5$ relative cavity length.

In Fig. 8 the resulting curves of sound frequency test (curve marked *p*), and acceleration measuring (curve marked *g*) are compared. The character of the curves show a high degree of similarity, and it can also be seen that the abscissa values of the peaks marking maximum values coincide well. The values gained from acceleration measuring, owing to their greater differences, are somewhat more characteristic and can be better evaluated.

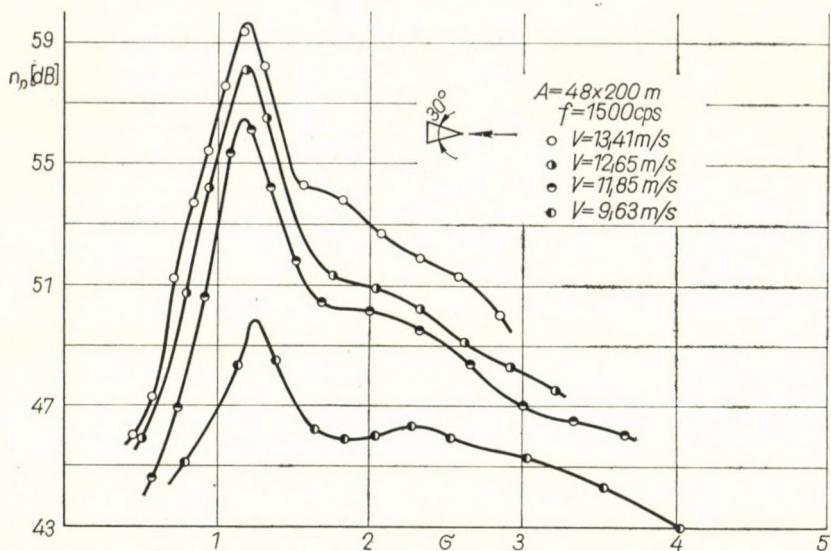


Fig. 9. Sound pressure level (n_p) as a function of the cavitation number (σ), with a wedge model

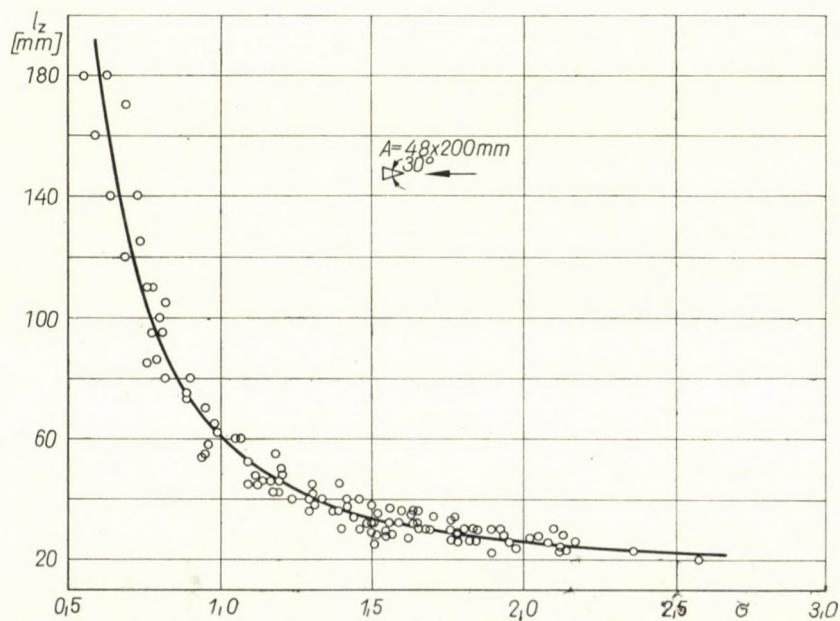


Fig. 10. Cavitation zone length (l_z) as a function of the cavitation number (σ), with a wedge model

Our investigations extended to wedges with 30° and 60° vertex angles. The results of tests made with a 30° vertex angle wedge are shown in Fig. 9. Fig. 10 gives for this wedge the correlation $I_2(\sigma)$. Fig. 11 shows the curve $n_p(\lambda)$ for the 60° -wedge. The results correspond perfectly to the results outlined earlier for the tests made with circular cylinder model.

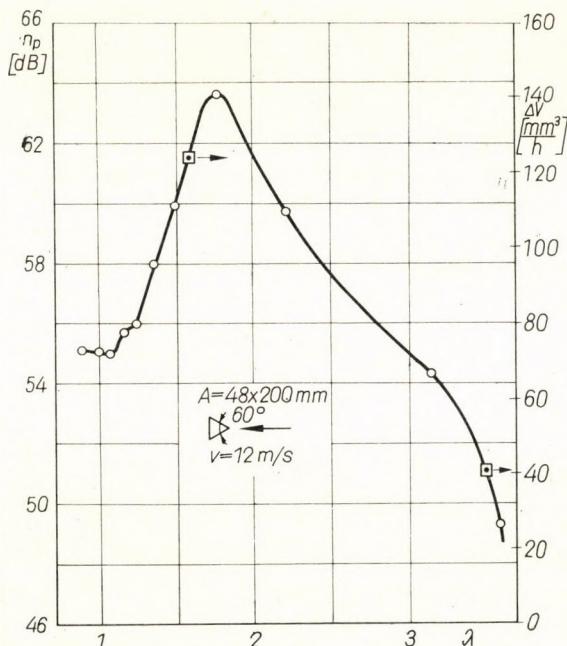


Fig. 11. Sound pressure level (n_p) and erosion volume loss per unit time (ΔV) as a function of relative cavity length (λ), with a wedge

IV. The results of cavitation erosion tests

The sound pressure level and the vibration acceleration level measurements of the model tests yielded results which clearly show that for a definite cavitation number value there is a definite value of sound pressure level and acceleration level. Assuming that the sound energy is a proportional part of the work causing material fatigue and damage, it can be expected that the change of the intensity of the cavitation erosion as a function of the state of cavitation, will also approach this character. To ascertain this fact, a lead plate test piece was placed on the perpendicular sidewall of the test section mentioned. In the tests made with circular cylinder, the flow velocity was kept at constant value, the investigations were made with different cavity lengths, i.e. the cavitation number was changed. The measurements yielded ΔG weight

loss curves plotted against test time τ (where ΔG is the weight loss in mgf-s of the test piece subjected to erosion tests); from these curves of eroded volumes per unit time $\Delta V = \Delta G/(\gamma\tau)$ for a definite (8000 mg) erosion weight loss was calculated (where γ is the specific weight of the test piece); this is shown in Fig. 12. The curve plotted from the measurements and its similarity to the

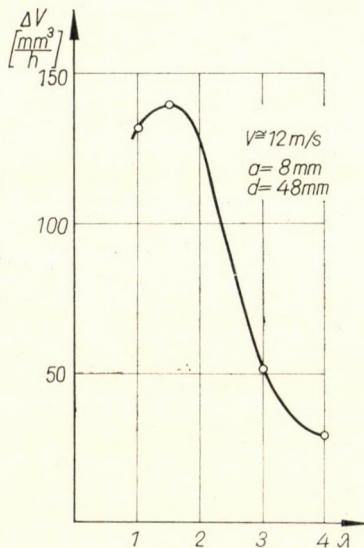


Fig. 12. Erosion volume loss per unit time (ΔV) as a function of relative cavity length (λ) with circular cylinder

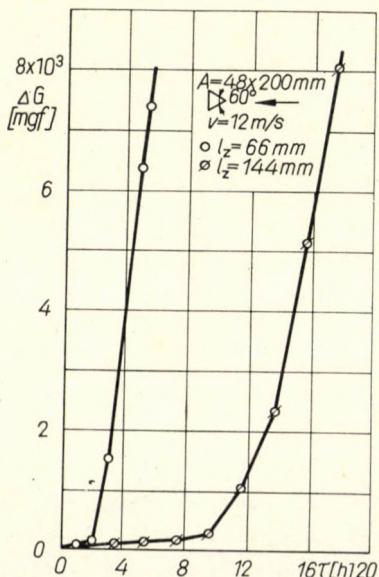


Fig. 13. Erosion weight loss (ΔG) as a function of test time (τ), with a wedge model

curves from the acceleration tests, further, the good coincidence of the peaks showing maximum values corroborates our presumption of the correlation between damage energy and eradicated vibration energy.

Since the correlation between the test results of sound pressure level and acceleration caused by cavitation from a circular cylinder, and the intensity of cavitation erosion yielded unequivocal and satisfactory results, the

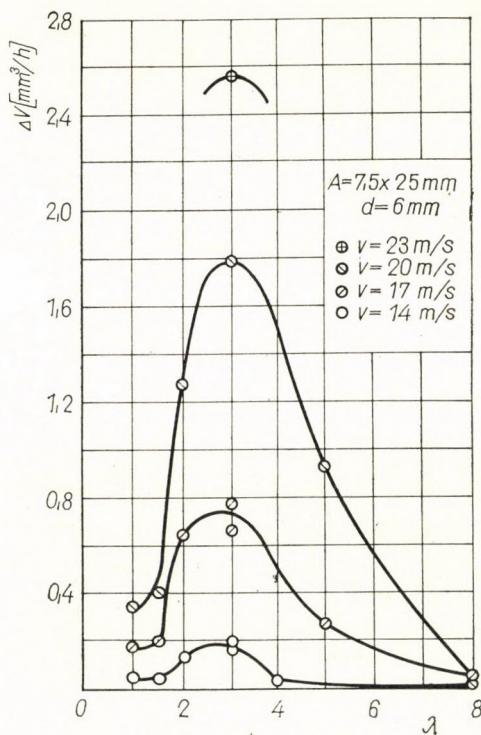


Fig. 14. Volume loss per unit time (ΔV) as a function of relative cavity length (λ), with circular cylinder model

aforementioned 60° vertex angle wedge was built into the test section to produce cavitation damage on lead plates. The cavitation conditions were selected according to the earlier determined sound values. The results of the two measurements (Fig. 13) were drawn on the $n_p(\lambda)$ curve of Fig. 11. The result of these two measurements — with respect to changes in the values of the sound pressure level of the circular cylinder, as well as the change of the erosion intensity as a function of the state of cavitation — is in good agreement with the earlier results.

SHALNEV [8] made tests on similar test sections also with lead test pieces to determine the change of the erosion intensity as a function of the state of cavitation. He made his experiments in the range of the critical Re number

$10^5 < Re < 2,5 \cdot 10^5$. As an example, one of his test results is shown in Fig. 14. The character of the curves corresponds to our measurement results made in the range above the critical Re number ($Re > 2,5 \cdot 10^5$); however, the place of maximum appears somewhat displaced on the abscissa, at $\lambda = 3$.

The test results refer to the fact that the place of the erosion intensity maximum can be found at different states of cavitation depending on whether the tests were made in the critical Re number range, or above it.

The above considerations corroborate our presumption that there is an unequivocal correlation between the cavitation noise level arising in an equipment and the intensity of the cavitation erosion.

REFERENCES

1. WILLIAMS, E. E.—MCNULTY, P.: Some factors affecting the inception of cavitation. *Proc. Symp. on Cavitation in Hydrodynamics*, Teddington 1955; Paper No. 2.
2. HICKLING, R.—PLESSET, M. S.: Collapse and rebound of a spherical bubble in water. *The Physics of Fluids* 1964.
3. CORMAULT, P.: Contribution à l'étude de l'influence des teneurs en gaz de l'eau sur la cavitation dans les turbomachines hydrauliques. *Bull. Centr. Rech. et d'Essais de Chatou* (1962); dec., Suppl. No. 2.
4. RATA, M.: Recensement et examen critique des méthodes d'observation de la cavitation par voie acoustique. *La Houille Blanche* (1963), No. 6.
5. SZENTMÁRTÓNY, T.: Zajtalanítás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1963.
6. SILBERMAN, E.—SONG, C. S.: Instability of ventilated cavities. *Journ. of Ship. Res.* (1961), June.
7. VARGA, J.—SEBESTYÉN, GY.: Experimental investigations of some properties of cavitating flow. *Periodica Polytechnica* 9 (1965), No. 3.
8. SHALNEV, K. K.: Experimental study of the intensity of erosion due to cavitation. *Proc. Symp. on Cavitation in Hydrodynamics*, Teddington 1955; Paper No. 22.

SCHALLSPEKTRUM DER KAVITATION UND DIE KAVITATIONSEROSION

J. VARGA und GY. SEBESTYÉN

ZUSAMMENFASSUNG

In dem Aufsatz wird über die Meßergebnisse des Schalldruckniveaus und der Beschleunigung der Kavitation berichtet, die in einem hydrodynamischen Kanal mit geschlossenem Kreislauf mittels verschiedener Modelle (Kreiszylinder, Keil) hervorgerufen worden ist. Es werden ferner die Zusammenhänge angegeben, die zwischen diesen Ergebnissen und dem Kavitationszustand und der Intensität der Kavitationserosion bestehen. Es wurde zwischen dem bei der auf Grund der Untersuchungen bestimmten Frequenz gemessenen Schalldruck- und Beschleunigungsniveau und dem Kavitationszustand ein eindeutiger Zusammenhang festgestellt. Es wurde festgestellt, daß diese Kurven ein Maximum aufweisen, wobei die Stelle des Maximums mit der Stelle des Maximums auf der Ergebniskurve zusammenfällt, die im Laufe der in den verschiedenen Kavitationszuständen durchgeführten Zerstörungsuntersuchungen erhalten worden ist. Es wurde festgestellt, daß die Kavitationsschallniveauntersuchungen zur Beurteilung der Kavitationsströmungsverhältnisse ausgezeichnet geeignet sind und so geben sie auch über das Ausmaß des zu erwartenden Erosionsschadens Aufschluß.

PROFIL DE BRUIT DE LA CAVITATION ET DESTRUCTION PAR CAVITATION

J. VARGA et GY. SEBESTYÉN

RÉSUMÉ

Les niveaux de pression acoustique et d'accélération dus à la cavitation engendrée par différents modèles (cylindre circulaire, coin) dans un canal hydrodynamique ont été mesurés par les auteurs qui rendent compte de leurs résultats, ainsi que des relations que l'état de cavitation et l'intensité de l'érosion par cavitation présentent avec ces derniers. Ils ont constaté une relation univoque entre les niveaux de pression acoustique et d'accélération mesurés à une fréquence déterminée et l'état de cavitation. Ces courbes ont des maxima dont le lieu coïncide au maximum des courbes obtenues aux examens destructifs faits à différents états de cavitation. Ils ont constaté également que les examens du niveau de bruit de cavitation permettent fort bien de juger des conditions (de service) de l'écoulement par cavitation et escampter ainsi l'importance des dommages causés par l'érosion.

СПЕКТР КАВИТАЦИОННОГО ШУМА И КАВИТАЦИОННОЕ РАЗРУШЕНИЕ

Й. ВАРГА и ДЬ. ШЕБЕШТЬЕН

РЕЗЮМЕ

Авторы описывают результаты измерений уровня звукового давления и ускорения кавитации, возбужденной в гидродинамических каналах замкнутого потока различных моделей (круговой цилиндр, клин), а также зависимости этих результатов от кавитационного состояния и интенсивности кавитационной эрозии. Была установлена ясная зависимость между звуковым давлением, замеренным при частоте определенной на основе исследований, и уровнем ускорения и кавитационным состоянием. Было установлено, что кривые имеют максимум, и что место этого максимума совпадает с местами максимума на кривых результатов различных исследований разрушения проведенных в различных состояниях кавитации. Было также установлено, что исследования уровня кавитационного шума могут быть удовлетворительно использованы для оценки условий кавитационного потока (производственного) и, таким образом, дают информацию и об ожидаемой мере эрозионных потерь.

DER VORGANG DER WARMVERFORMUNG DES KUPFERS BEI VERSCHIEDENEN VERFORMUNGSGESCHWINDIGKEITEN

42. MITTEILUNG DER METALLURGISCHEN
ARBEITSGEMEINSCHAFT DER UNGARISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN, AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT
FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC (UNGARN)

E. BELLA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

J. GULYÁS und S. JUHÁSZ
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 20. Juni, 1966]

Zur Erkenntnis der während der Warmverformung des Kupfers entstehenden Erscheinungen wurden bei drei Verformungstemperaturen (500°C , 700°C , 900°C) und mit elf verschiedenen Formänderungsgeschwindigkeiten Stauchversuche durchgeführt. Aus den Versuchsergebnissen wurden die Zusammenhänge für die beim Stauchen entstehenden wahren Spannungen und Gefügeänderungen ermittelt. Auf Grund dieser Zusammenhänge lassen sich die wesentlichen Unterschiede zwischen Warmverformung der Metalle und einer bei Werkstattemperatur durchgeföhrten plastischen Formänderung mit darauffolgendem Glühen gut erklären.

I. Einführung

Der Vorgang der Warmverformung der Metalle ist heute noch nicht völlig bekannt. Die stürmische Entwicklung der Technologie bei der Erzeugung von Metallhalbfabrikaten und die Projektierung moderner Einrichtungen für die plastische Verformung bedingt eine ständig wachsende Kenntnis der Formänderungsvorgänge. Der Vorgang der Warmverformung ist besonders kompliziert. Zur Erforschung dieses Vorganges haben mehrere Forscher in den vergangenen zehn Jahren Versuche mit verschiedenen Verformungsarten durchgeföhr [1–4]. Diese Versuche richteten sich im wesentlichen auf die Prüfung der Festigkeitsänderungen bei Warmverformung, aber sie erstreckten sich nicht auf die Beobachtung der mit den Festigkeitsänderungen eng zusammenhängenden anderen Erscheinungen, z. B. Gefügeänderungen. Die Verfasser untersuchten in ihrer mehrjährigen Arbeit die Zusammenhänge der während der Warmverformung des Kupfers auftretenden Erscheinungen innerhalb großer Bereiche der Formänderungsgeschwindigkeit.

II. Der Zweck der durchgeführten Versuche

Die im folgenden kurz beschriebenen Versuche wurden zu dem Zwecke durchgeführt, die Ausgestaltung eines einheitlichen Bildes über die Verhältnisse bei der Warmverformung des Kupfers bei den verschiedenen Formänderungsgeschwindigkeiten ($1\% \text{ sec}^{-1} \div 15\,000\% \text{ sec}^{-1}$) mittels Stauchung zu ermöglichen. Es wurde angestrebt, dieses Bild so zu gestalten, daß es die während der Verformung unmittelbar entstehenden Spannungen und die mit diesen eng zusammenhängenden Gefügeänderungen, als Funktion verschiedener Faktoren (Formänderung, Verformungstemperatur, und Formänderungsgeschwindigkeit) darstellt.

III. Versuchsdurchführung

Als Versuchswerkstoff wurde Elektrolytkupfer mit 99,94% Reinheitsgrad und einem Phosphorgehalt von 0,018% sowie den üblichen Verunreinigungen verwendet. Das Gefüge des Ausgangswerkstoffes wies eine Korngröße von $0,045 \div 0,05$ mm auf. Die Proben wurden gestaucht, was den Verhältnissen der praktischen Verformungsverfahren am besten entspricht. Um von der Verformungsart unabhängige Ergebnisse zu erhalten, wurde ein einachsiger Spannungszustand angestrebt, d. h., es mußte die Reibung an den Stirnflächen ausgeschaltet werden. Dies wurde durch die Verwendung verschiedener — in der Literatur bereits beschriebener — Glaspulver [1] als Schmiermittel erreicht.

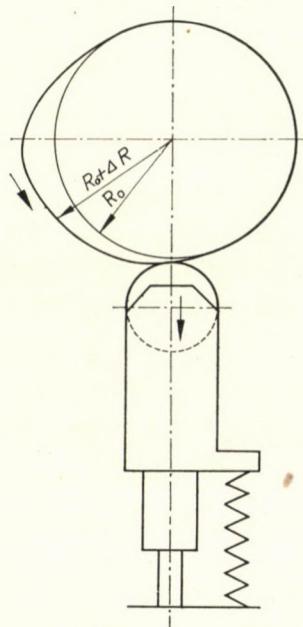
Die Versuche wurden bei den folgenden veränderlichen Faktoren durchgeführt:

- a) Stauchtemperatur,
- b) Verformungsgrad,
- c) Formänderungsgeschwindigkeit,
- d) Abkühlungsgeschwindigkeit nach der Stauchung.

Die Temperaturen der für die Stauchung verwendeten Proben waren 500° C , 700° C und 900° C . Die Erwärmungszeiten wurden dabei je Temperatur konstant gehalten. Der Verformungsgrad wurde von 10, bis 60% mit einer Stufe von 5% gewählt, und zwar für alle elf Formänderungsgeschwindigkeiten (Tafel I). Die Formänderungsgeschwindigkeiten: 1 bis 9 wurden auf einer entsprechend umgebauten Exzenterpresse erreicht, die Geschwindigkeiten 10 und 11 auf einem 840 m kp-Fallhammer (s. Bilder 1 und 2). Um den Einfluß der Geschwindigkeit während der Warmverformung besser erkennen zu lassen, mußte man eine ständige Verformungsgeschwindigkeit anstreben ($v = dH/dt = \text{const.}$, ständige Verformung in der Zeitenheit). Die Exzenterpresse mußte hierzu in dem von OROWAN vorgeschlagenen Plastometer [3] umgestaltet

Tafel I*Die Werte der bei den Versuchen geeigneten Geschwindigkeiten*

Geschwindigkeitsstufe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Geplante Formänderungsgeschwindigkeit, $\dot{\delta}$ [%sec $^{-1}$]	89	125	178	465	650	750	930	1 040	1 480	8 000	15 000
Tatsächliche Formänderungsgeschwindigkeit, $\dot{\delta}$ [%sec $^{-1}$]	87	123	175	455	620	746	897	1 000	1 430	9 300	16 200
Durchschnittliche Verformungsgeschwindigkeiten, v [mmsec $^{-1}$] bei Probekörper $H_0 = 35$ mm und $\varepsilon = 60\%$ Verformung	20	29	41	107	150	173	216	240	340	2 200	3 800

*Bild 1. Skizze der mit Nockenscheibe ausgestatteten Stauchpresse*

werden (Bild 3). Dem Verhältnis $v/H = \text{const.}$ entsprechend kann das Profil der Plastometernockenscheibe nach der Gleichung der logarithmischen Spirale gestaltet werden. Der wechselnde Profilradius, als Funktion der momentanen Probekörperhöhe ergibt sich aus dem folgenden Zusammenhang:

$$R = R_0 + H_0 [1 - \exp(\delta \varphi/\omega)],$$

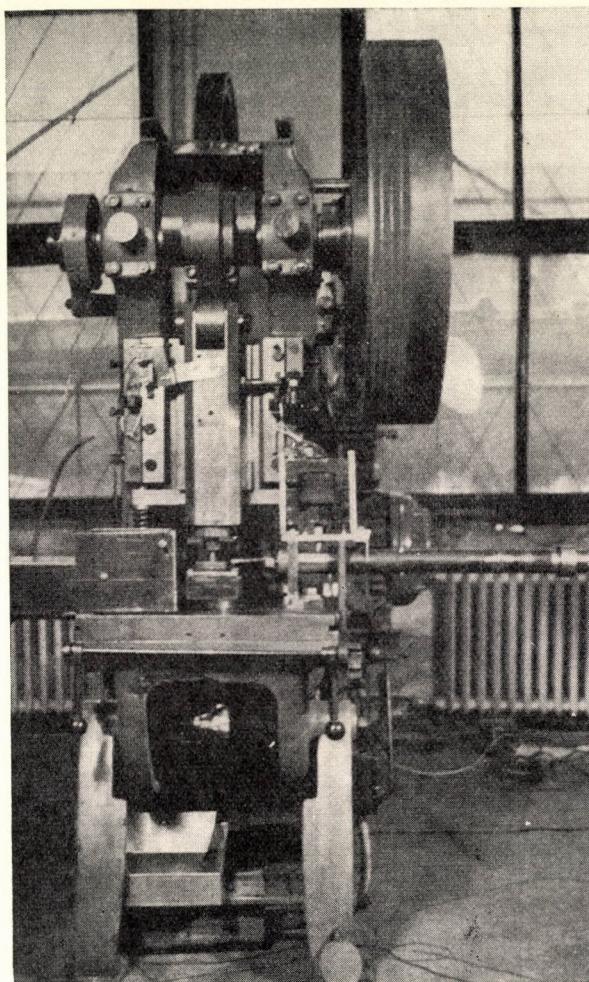


Bild 2. Stauchpresse für die Versuche

wo R_0 den Grundradius, H_0 die ursprüngliche Höhe des Probekörpers, δ die ständige Formänderungsgeschwindigkeit, φ den momentanen Verdrehungswinkel des Radius und ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Es wurde bei der auf dem Fallhammer durchgeführten Verformung eine ständige Formänderungsgeschwindigkeit in dem Maße angenähert, daß der nachstehende Zusammenhang am Anfang und am Ende des Stauchvorganges gleicherweise gültig sein soll:

$$\frac{v_1}{H_1} = \frac{v_2}{H_2}.$$

Dies wurde dadurch erreicht, daß eine größere Energie als zur Verformung des Probestückes erforderlich ist, in dem Bär des Fallhammers gespeichert

wurde. Dadurch wurde die Bärgeschwindigkeit am Ende des Stauchvorganges nicht auf Null, sondern auf die gewünschte Geschwindigkeit (v_2) vermindert, und die überflüssige Energie des Bäres durch elastische Puffer verzehrt.

Die möglich schnellste Abschreckung bezweckte eine Fixierung des Gefüges der Probekörper während der Verformung. Dies wurde durch Verwendung einer zu diesem Zweck projektierten Federvorrichtung durchgeführt,

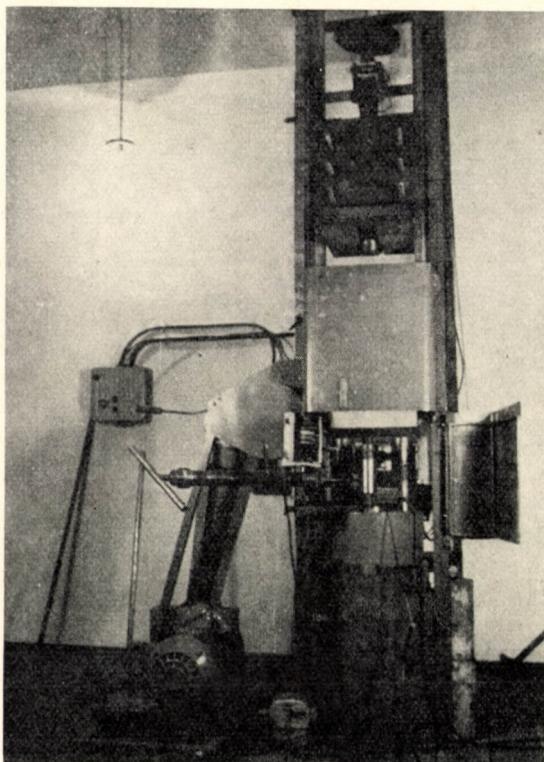


Bild 3. Der Versuchsfallhammer

die unmittelbar nach der Stauchung die Probe in eine 10-prozentige Kochsalzlösung automatisch hineingeschossen hat. In diesem Fall vergingen von der Beendigung der Verformung bis zum Eintreffen in die Flüssigkeit etwa 0,012 sec (Messung mit elektrischen Signalen). Um die Vorgänge nach der Verformung beobachten zu können, wurde die andere Hälfte der Proben an der Luft abgekühlt.

Die bei der Stauchung entstehenden Kräfte wurden mit Hilfe einer unter die Stauchwerkzeuge zentrisch angebrachten Meßdose und eines darauf geklebten Dehnungsmeßstreifens gemessen. Zur Schonung der Meßdose gegen übermäßige Erwärmung diente eine gut isolierte Wasserkühlvorrichtung. Ferner wurde der Bewegung des Druckkopfes proportionale Weg mit einem Schiebe-

widerstand als Spannungsteiler gemessen. Für eine Überwachung der Geschwindigkeitsverhältnisse wurden Zeitmarken während des Stauchvorganges im Registriergerät aufgetragen. Für die Registrierung wurde ein Lichtsrahloszilloskop mit drei Schleifen bei Formänderungsgeschwindigkeiten $1 \div 9$, dagegen bei Geschwindigkeiten $10 \div 11$ ein Gleichstromoszilloskop mit zwei Kathodenstrahlen (Duoscop) verwendet. Ein mit dem Kathodenstrahlloszilloskop aufgenommenes Oszillogramm wurde im Bild 4 dargestellt.

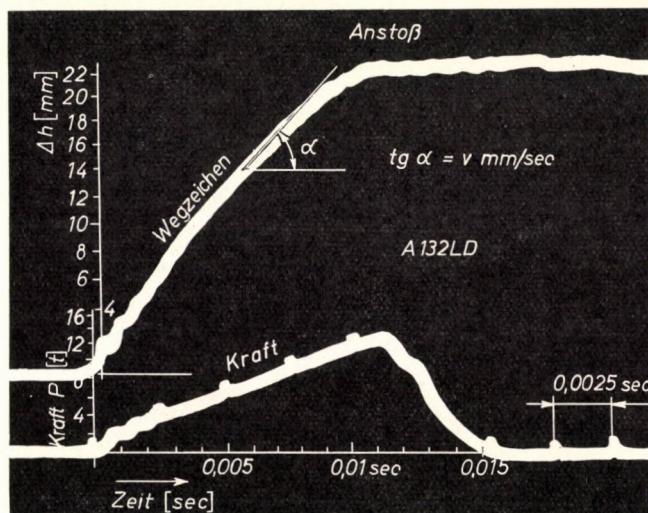


Bild 4. Oszillogramm des auf dem Fallhammer durchgeföhrten Stauchens

IV. Auswertung der Versuchsdaten

1. Spannungsänderungen

Die Auswertung der Kräfteoszillogramme wurde so durchgeführt, daß die den Formänderungen $\Delta H = 2, 4, 6, 8$ mm usw. entsprechenden Punkte der Wegkurve auf die Krätekurve projiziert wurden, und die zu ihnen gehörenden Werte der Verformungskraft mittels der Eichkurve der Meßdose abgelesen wurden. Da die Probeform auch nach der Stauchung zylindrisch geblieben ist, kann man den gedrückten Querschnitt aus der Konstanz des Volumens berechnen:

$$F_i = \frac{F_0 \cdot H_0}{H_i},$$

wo H_i die momentane Höhe, F_i die gedrückte Fläche in dem i -ten Zeitpunkt bedeutet.

Die momentane wahre Spannung (σ_i), die bei einachsigem Spannungszustand die Verformungsfestigkeit (k_i) bedeutet, wurde mit Hilfe der zu der

Formänderung (ΔH) gehörenden Kraft (P_i) und des Querschnittes (F_i) berechnet:

$$\sigma_i = \frac{P_i}{F_i}.$$

Aus den als Funktion der Zeit aufgenommenen Wegkurven wurden die Werte der Formänderungsgeschwindigkeiten mit grafischem Differenzieren bestimmt und kontrolliert. Die unter Berücksichtigung aller angeführten Einflußgrößen konstruierten $\sigma' - \varepsilon$ Kurven wurden für Verformungstemperaturen und Formänderungsgeschwindigkeiten in den Bildern 5, 6 und 7 veranschaulicht. Zum Vergleich wurden auch die Spannungskurven der früheren, mit geringeren Formänderungsgeschwindigkeiten ($\delta = 1\% \text{ sec}^{-1}$) durchgeführten Versuche mit θ bezeichnet eingetragen. Die Versuchsergebnisse lassen sich kurz folgendermaßen zusammenfassen:

a) Wirkung der Formänderung. Auf Grund der dargestellten Diagramme läßt es sich feststellen, daß die durch Stauchung bei einer gegebenen Temperatur und gleicher Formänderungsgeschwindigkeit entstehende wahre Spannung zuerst immer zunimmt, bis sie ein Spannungsmaximum erreicht. Nach der Erreichung dieses Höchstwertes nimmt die Spannung wieder ab, oder sie bleibt mit dem Formänderungswert unverändert. Die Stellen und Werte der Spannungsmaxima hängen von der Verformungstemperatur und der Formänderungsgeschwindigkeit ab.

Bei der Verformungstemperatur 500° C ist kein Maximum innerhalb des Bereiches der bei den Versuchen verwendeten Verformungsgrade zu finden.

Bei der Verformungstemperatur 700° C liegen die Stellen des Maximums bei den Geschwindigkeiten Nr. 1–11, zwischen den Formänderungswerten $\varepsilon = 28 \div 50\%$.

Bei der Verformungstemperatur 900° C sind die Maximalwerte zwischen den Formänderungen $\varepsilon = 18 \div 38\%$ zu finden.

b) Die Wirkung der Verformungstemperatur zeigt sich darin, daß mit ihrer Zunahme die Absolutwerte der Spannungen bei allen Geschwindigkeiten abnehmen. Die prozentuelle Abnahme nimmt mit erhöhter Verformung bei konstanter Geschwindigkeit zu (Tafel II). Die Verfestigungsfähigkeit ($d\sigma'/d\varepsilon$) steigt mit der Abnahme der Verformungstemperatur, die anfänglichen Strecken der Spannungskurven sind steiler. Mit der Zunahme der Temperatur verschieben sich die Stellen der Verfestigungsmaxima nach der Seite der geringeren Formänderungen hin.

c) Die Formänderungsgeschwindigkeit hat eine der Verformungstemperatur entgegengesetzte Wirkung, demnach steigen mit der Zunahme der Geschwindigkeit die Spannungswerte bei allen drei Verformungstemperaturen (Tafel III). Die relative Zunahme der Spannungen ist der Erhöhung der Tem-

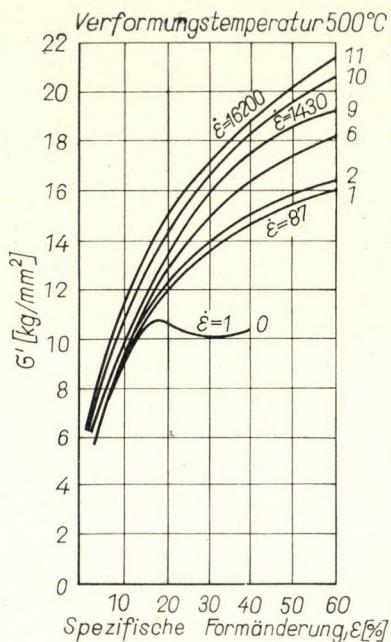


Bild 5. Änderung der wahren Spannungen bei Verformungstemperatur von 500° C

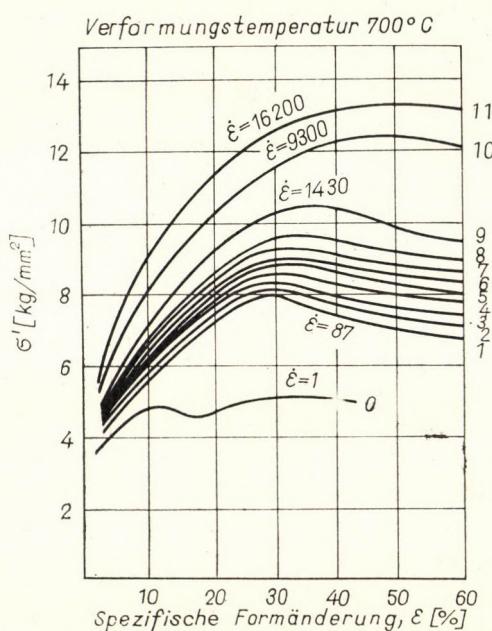


Bild 6. Änderung der wahren Spannungen bei Verformungstemperatur von 700° C

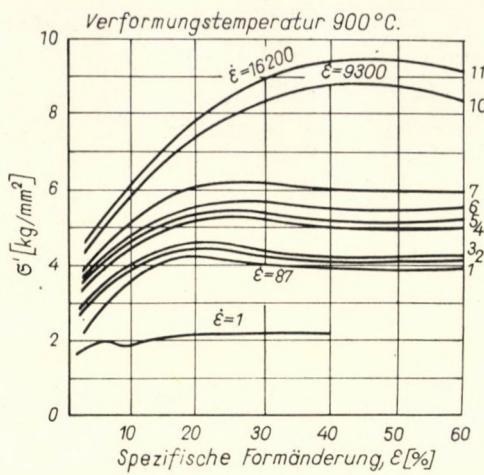


Bild 7. Änderung der wahren Spannungen bei Verformungstemperatur von 900°C

Tafel II

Die Wirkung der Verformungstemperatur auf die Spannungsänderungen

Formänderungsgeschwindigkeit	500°C		700°C		900°C		Formänderung [%]
	σ' [kg/mm²]	σ'' [kg/mm²]	Spannungsabnahme [%], gegenüber Wert bei 500°C	σ' [kg/mm²]	Spannungsabnahme [%], gegenüber Wert bei 500°C		
I	9,2	5,5	40	3,6	61	10	
	12,2	7,3	40	4,2	66	20	
	13,6	8,0	41	4,0	71	30	
	14,7	7,4	50	3,9	73	40	
	16,1	6,7	58	3,8	76	60	
9	9,7	7,0	28	5,4	44	10	
	13,5	9,2	33	6,5	52	20	
	16,0	10,2	36	6,55	59	30	
	17,6	10,4	40	6,35	64	40	
	19,4	9,4	52	6,25	68	60	
II	11,6	9,3	19,8	6,0	48	10	
	15,2	11,3	25,7	7,7	49,4	20	
	17,2	12,5	27,4	9,0	47,7	30	
	19,1	13,3	30,3	9,5	50	40	
	21,8	13,3	39,0	9,3	55	60	

peratur proportional, das heißt, die Wirkung der Geschwindigkeit auf die Zunahme der Spannungen ist geringer. Unterhalb einer bestimmten Temperatur bewirkt die Verformungsgeschwindigkeit keine beträchtliche Zunahme der Spannungen (Bild 8). Diese Grenztemperatur ergibt sich durch Extrapolieren zu einem Wert von $0,4 T_n$ (T_n ist die Homologtemperatur), die ungefähr dem unteren Grenzwert der Rekristallisationstemperatur des Kupfers entspricht.

Tafel III

Die Wirkung der Formänderungsgeschwindigkeit auf die Spannungsänderungen

Ver-formungs-temperatur	Geschwindigkeiten, σ' [kg/mm ²]			Spannungs-zunahme [%], bei Geschwindigkeit 9 im Vergleich zu Geschwindigkeit 1	Spannungs-zunahme [%], bei Geschwindigkeit 11 im Vergleich zu Geschwindigkeit 9	Formänderung [%]
	1	9	11			
500° C	9,2	9,5	11,6	5,5	22,2	10
	12,2	13,5	15,2	10,7	12,6	20
	13,6	16,0	17,2	17,6	7,5	30
	14,7	17,6	19,1	20,0	8,5	40
	16,1	19,4	21,8	20,5	12,3	60
700° C	5,5	7,0	9,3	27	33,0	10
	7,3	9,2	11,3	26	22,8	20
	8,0	10,2	12,5	28	22,6	30
	7,4	10,4	13,3	40	28,0	40
	6,7	9,4	13,3	40	41,5	60
	3,6	5,4	6,0	50	11,2	10
900° C	4,2	6,5	7,7	55	18,5	20
	4,0	6,55	9,0	64	37,4	30
	3,9	6,35	9,5	63	41,8	40
	3,8	6,25	9,3	65	44,0	60

2. Gefügeänderungen

Die Gefügeuntersuchung der gestauchten Probekörper wurde an Längsschnitten der Symmetrieachse entlang durchgeführt. Aus jedem Probekörper wurde ein Mikroschliff angefertigt, welcher mit 10%-iger Ammoniumpersulfatlösung geätzt wurde. Die Korngröße wurde je Schliff durch Vergleich mit den ASTM-Tafeln ermittelt. Die Feststellung der Gefügeänderung konnte durch sprunghafte Änderung (Abnahme) der Korngröße erfolgen. Zwecks besserer Erkenntnis des Vorganges der Warmverformung wurden auch die Streckungswerte der Kristallite, wo es möglich war, geprüft. Auf Grund der Gefügeuntersuchungen lassen sich folgende Schlußfolgerungen ziehen:

Bei der Stauchung bei 500°C und den Geschwindigkeiten 1—9 war keine Gefügeänderung feststellbar, dagegen zeigte sich von einer Verformung von etwa 40% an eine starke Streckung (Bild 9). Bei den Geschwindigkeiten 10 und 11 läßt sich von einer Verformung 40% an eine teilweise Rekristallisierung auf den Korngrenzen beobachten (Bild 10). Das Gefüge der an der Luft abgekühlten Proben zeigt von der Verformungsgeschwindigkeit abhängig und ab etwa $15 \div 20\%$ Verformung eine steigende teilweise Rekristallisation,

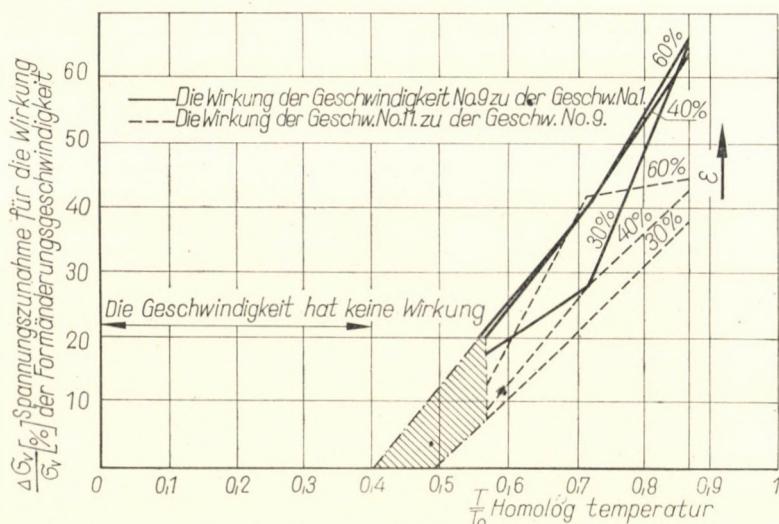


Bild 8. Die Wirkung der Formänderungsgeschwindigkeit auf die Spannungszunahme als Funktion der Homologtemperatur

die bei 60% und jeder Geschwindigkeit schon vollständig wird (Bild 11). Aus dem Vergleich der Spannungskurven bei der Verformungstemperatur von 500°C mit der Richtung der Gefügeänderungen ergibt sich, daß das Gefüge der Proben auch im warmen Zustand unverändert bleibt, obwohl bei größeren Geschwindigkeiten eine teilweise Rekristallisierung in der Phase der Verfestigung bemerkbar ist. Diese Tatsache läßt sich dadurch erklären, daß die Verformungsdauer um Größenordnungen kleiner ist als die Abkühlungsdauer, die $0,7 \div 0,8$ sec betrug. In diesem Fall zeigt das Probegefüge einen wesentlich späteren Zustand als die Gefüge der mit kleineren Geschwindigkeiten verformten Probestücke. Dieselbe Feststellung ist auch bei höheren Verformungstemperaturen gültig.

Die Gefüge der bei 700°C verformten Proben waren von der Geschwindigkeit und Verformung in ganz verschiedenerweise abhängig. Von kleineren Geschwindigkeiten (5—9) und 15% Verformung an erscheint eine teilweise Rekristallisierung (Bild 12), die bei etwa 40% Verformung schon vollständig wird (Bild 13). Dieses Rekristallisationsbereich fällt annähernd mit dem Ver-

festigungsmaximum der Spannungskurven zusammen (Bild 14). Bei den größten Geschwindigkeiten ($10-11$) verschiebt sich dieses Bereich in Richtung der kleineren Formänderungen hin, wobei das Gefügebild, infolge seiner verhältnismäßig langsamen Festsetzung, einen späteren Zustand wiedergibt als bei kleineren Geschwindigkeiten. Die Tatsache, daß bei einer Verformungsgeschwindigkeit 11 ein 80%-iger rekristallisierter Anteil (Bild 15) schon bei 20% Formänderung vorhanden ist, läßt sich mit der vorher geschilderten Ursache erklären.



Bild 9. Gefüge der Stauchung bei 500°C (Verformung: 48%, Formänderungsgeschwindigkeit: 620 sec^{-1} , Abschreckung in Kochsalzlösung, Vergrößerung: 50%)



Bild 10. Gefüge der Stauchung bei 500°C (Verformung: 60%, Formänderungsgeschwindigkeit: 16200 sec^{-1} , Abschreckung in Kochsalzlösung, Vergrößerung $100\times$)



Bild 11. Gefüge der Stauchung bei 500° C (Verformung: 60%, Formänderungsgeschwindigkeit: 746% sec⁻¹, Abkühlung in Luft, Vergrößerung: 50×)



Bild 12. Gefüge der Stauchung bei 700° C (Verformung: 15%, Formänderungsgeschwindigkeit: 620% sec⁻¹, Abschreckung in Kochsalzlösung, Vergrößerung: 50×)



Bild 13. Gefüge der Stauchung bei 700° C (Verformung: 48%, Formänderungsgeschwindigkeit: 620% sec⁻¹, Abschreckung in Kochsalzlösung, Vergrößerung: 50×)

Während des bei 900°C durchgeföhrten Stauchens ergab sich eine so große Rekristallisierungsgeschwindigkeit, daß schon vor dem Spannungsmaximum eine vollständige Rekristallisierung vor sich geht. Die von der Verformung bis zur vollständigen Abkühlung vergangene Zeit war länger als die Zeit der bei 500°C und 700°C gestauchten Proben. Dagegen blieb das Gefüge der zu 10% verformten Probe bei kleineren Geschwindigkeiten noch unverändert (Bild 16), sogar bei den größten Verformungsgeschwindigkeiten ergab sich nur eine teilweise Rekristallisation.

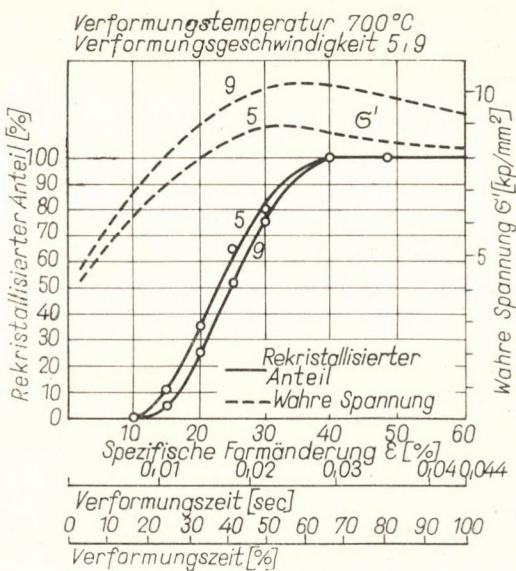


Bild 14. Änderung der wahren Spannung und des rekristallisierten Anteiles bei 700°C (Formänderungsgeschwindigkeit: $620\% \text{ sec}^{-1}$ und $1430\% \text{ sec}^{-1}$)

Die Ergebnisse der Gefügeänderungen wurden in Abhängigkeit von den Verformungsgeschwindigkeiten und Stauchtemperaturen im Bild 17 zusammengefaßt.

V. Theoretische Analyse der Ergebnisse

Die oben geschilderten Erscheinungen, sowohl die Spannungsänderungen als auch die Gefügeänderungen, sind die Folgen des komplizierten Vorganges der Warmverformung. Die wichtigste Konsequenz der Wirkung der Warmverformung ist die Tatsache, daß die Spannungswerte, auch in dem Verfestigungsbereich, immer geringer sind als bei dem kaltverformten Metall. In diesem erhitzten Zustand vermehren sich nämlich die Gleitflächen je nach der Höhe der Temperatur, wodurch die Verformung gefördert und die Folge der Form-

änderung — die Verfestigung — verringert wird. Mit dem Fortschritt der Translation jedoch ändert sich die durch Bewegung, Entstehung und Verdichtung der Dislokationen sowie durch Verzerrung der Atomgitter bedingte Spannungssteigerung auch durch die diffusionsbedingte Wanderung der dislozierten Atome zu den energieärmeren Stellen und freien Gitterstellen. Demnach entsteht der während des Vorganges gegebene Zustand des Werkstoffes in erster Linie als Funktion der Höhe der Temperatur und der durchgeföhrten Formänderung. Außerdem hat die Formänderungsgeschwindigkeit, d. h. der Zeitraum, binnen dessen die Formänderung vor sich geht, einen entscheidenden



Bild 15. Gefüge der Stauchung bei 700° C (Verformung: 20%, Formänderungsgeschwindigkeit: $16\ 200\% \text{ sec}^{-1}$, Abschreckung in Kochsalzlösung, Vergrößerung: $100\times$)



Bild 16. Gefüge der Stauchung bei 900° C (Verformung: 10%, Formänderungsgeschwindigkeit: $620\% \text{ sec}^{-1}$, Abschreckung in Kochsalzlösung, Vergrößerung: $50\times$)

Einfluß. Wenn die für die Diffusionsbewegung der dislozierten Atome und die Entstehung sowie das Wachstum neuer Kristallkeime notwendige Zeit die Verformungsdauer nicht überschreitet, dann hat die Geschwindigkeit einen bedeutenden Einfluß. Bei einer Stauchung bei 500°C erscheinen bei den geringen Formänderungen der Versuchsreihe verzerrte Zwillingsebenen sowie eine mit der Steigerung der Formänderung zunehmende Streckung. Bei dieser niedrigen Temperatur und während der durch die versuchten Formänderungsgeschwindigkeiten bedingten Formänderungsdauer liegen nämlich noch nicht solche Bedingungen für Keimbildung und Wachstum vor, daß sich eine wachstumsfähige Großwinkelkorngrenze und demnach ein neues Gefüge bilden könnte.

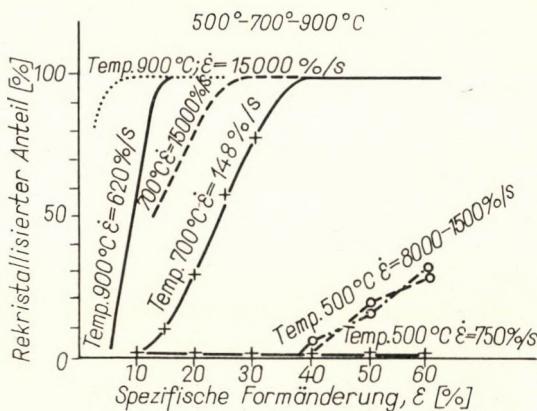


Bild 17. Gefügeänderungen als Funktion der Temperatur und Formänderungsgeschwindigkeit

Beim Stauchen bei 700°C konnte man bei den Maxima der Spannungskurven auch bei geringen Formänderungen eine teilweise Rekristallisierung feststellen, obwohl auf diesem Abschnitt die gemessene Spannung der Probekörper zunimmt. Dies läßt sich mit den verschiedenen Lagen der Kristallite des Probekörpers im Verhältnis zur Richtung der Verformungskraft und demnach mit ihrer verschiedenen Beanspruchung erklären. Es ergibt sich nämlich, daß in den Kristalliten, in denen die entstandene Spannung den für den Beginn der Keimbildung und die Ausbildung der entsprechenden Dislokationswolke nötigen Wert erreicht oder überschreitet, die Bildung neuer Keime bzw. die Rekristallisierung beginnt. Im Gesamtraum des Probekörpers steigt jedoch die Resultierende aller in den einzelnen Kristalliten entstandenen Spannungen durch die weitere Verformung der weniger verformten Kristalle sowie der schon rekristallisierten Körner bei der Erhöhung des Maßes der Verformung weiter. Demnach ergibt sich eine mehrfache Umformung und Gefügeänderung, wodurch über einer bestimmten Formänderung eine Kornverfeinerung bewirkt wird.

Bei der Stauchung bei 900° C kann man ähnliche Erscheinungen feststellen wie bei 700° C.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß im Hinblick auf die gleichzeitige Wirkung der plastischen Verformung und des geglühten Zustandes des Werkstoffes sowie auf die durch die Formänderungsgeschwindigkeit bestimmte Zeitdauer beim Warmstauchen die Spannungsverteilung bezüglich der Spannungswerte bei allen versuchten Verformungstemperaturen, im Charakter aber nur bei den höheren Temperaturen wesentlich verschieden von der bei Werkstattemperatur durchgeführten Stauchung ist. Das Bild der Gefügeänderungen ist gleichfalls verschieden von den Folgen einer bei Werkstatttemperatur durchgeführten Stauchung mit darauffolgender Glühung.

SCHRIFTTUM

1. ALDER, I. F.—PHILLIPS, V. A.: The effect of strain rate and temperature on the resistance of aluminium, copper and steel to compression. *Journal of the Institute of Metals* (1954), XI.
2. ZLOTIN, L. B.—BERMAN, SZ. I.: Protnostnie charakteristiki medji pri dinamitscheskikh ispitaniach w oblasti sarekristallizacionich temperatur (1961).
3. OROWAN, E.: B. I. S. R. A. Restricted Report (*MW/F/22/50*), 1950.
4. HARDWICH, D.—TEGART, MC. G.—ROSSARD, C.—BLAIN, P.: Observations sur la déformation de l'aluminium et du cuivre par torsion aux températures élevées. Département de Métallurgie de l'Université de Sheffield, Angleterre et Institut des Recherches de la Sidérurgie Saint-Germain-en-Laye, 1961.
5. BELLA, E.: Warmstauchversuche mit Kupfer bei kleinen Formänderungsgeschwindigkeiten. *Acta Techn. Hung.* **32** (1961), 221—246.
6. BELLA, E.—GULYÁS, J.: Warmstauchversuche mit Kupfer bei mittleren Formänderungsgeschwindigkeiten. 1964. *Acta Techn. Hung.* **48** (1964), 3—4.

PROCESS OF HOT FORMING OF RED COPPER AT DIFFERENT FORMING SPEEDS

BELLA, E., GULYÁS, J. and JUHÁSZ, S.

SUMMARY

For making clear the processes taking place at hot working of red copper, authors executed gathering tests at 11 different deformation speeds and at three forming temperatures (at 500, 700 and 900 centigrades). From the measurement results gained from these tests the relations between the real stresses induced by the gathering and the changes of the structure of the material are determined. On the basis of the revealed dependences the essential differences between the processes taking place in the metal first cold-worked, thereupon warmed up, and those taking place at hot forming can be established.

**LES PROCESSUS DE FAÇONNAGE A CHAUD DU CUIVRE ROUGE
A VITESSES DE FAÇONNAGE DIFFÉRENTES**

E. BELLA, — J. GULYÁS, — S. JUHÁSZ,

RÉSUMÉ

Pour éclaircir les processus se déroulant au façonnage à chaud du cuivre, les auteurs ont effectué des essais de gonflement à onze vitesses de déformation différentes et à trois températures de façonnage (500° C, 700° C et 900° C). A partir des résultats de mesure obtenus au cours des essais, on a établi les relations entre les contraintes réelles provoquées par le gonflement et les changements de structure du métal. Partant des relations relevées, on peut établir les différences essentielles entre les processus ayant lieu dans le métal façonné à froid, puis chauffé, et ceux qui se déroulent au cours du façonnage à chaud.

ПРОЦЕСС ПРОТЕКАНИЯ ГОРЯЧЕЙ ОБРАБОТКИ МЕДИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЯХ ОБРАБОТКИ

Э. БЕЛЛА, Й. ГУЯШ и Ш. ЮХАС

РЕЗЮМЕ

В интересах установления явлений, возникающий при горячей обработке меди, при трех различных температурах обработки (500° C, 700° C и 900° C) и одиннадцати различных скоростях обработки были произведены испытания осаживанием. На основе результатов испытаний установлены зависимости для возникающих при осаживании действительных напряжений и изменений структуры. На основе этих зависимостей можно уловить объяснить значительные отклонения между горячей обработкой металлов и пластической деформацией при цеховой температуре с последующим нагревом.

DER EINFLUSS DER RUNDLAUFGENAUGKEIT DES FRÄSERS AUF DIE PRODUKTIVITÄT UND DIE WERKZEUGKOSTEN BEIM FRÄSEN

A. HORNUNG

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 9. August, 1966]

Die Rundlaufgenauigkeit des Fräzers hat einen sehr beträchtlichen Einfluß auf die Produktivität und die Werkzeugkosten, besonders beim Walzenfräsen. Es wird durch ein praktisches Beispiel zahlenmäßig vorgeführt, daß die Maschinenhauptzeit des Formfräzers bei unter den angenommenen Bedingungen mit 0,2 mm Schlag laufendem Fräser mit 35% vermindert, und die Werkzeugkosten auf das 2,67-fache erhöht werden. Nachdem sich viele unrundlaufenden Fräser in den Betrieben befinden, es folgt aus dem obigen, daß es der Mühe wert ist, dem genauen Rundlauf des Fräzers die benötigte Sorgfalt zu widmen. Dadurch kann man die Produktivität der Fräsanarbeit ungefähr um 20% vergrößern und die Werkzeugkosten auf die Hälfte vermindern.

Der Fräser ist ein Zerspanungswerkzeug mit mehreren Schneiden, demzufolge gute Fräsanarbeit mit großer Produktivität nur dann erzielt werden kann, wenn alle Fräserzähne mit gleichmäßiger Belastung arbeiten. Das heißt, die wichtigste Bedingung des produktiven Fräsen ist der möglichst genaue Rundlauf des Fräzers. In diesem Falle arbeiten die Fräserzähne mit gleicher Spandicke, also mit gleicher Belastung.

Bei einigen Betrieben herrscht die Auffassung, daß die praktisch erreichbare Rundlaufgenauigkeit des Fräzers auch einige zehntel mm erreichen kann. Dagegen wo die Rundlaufgenauigkeit streng genommen wird, dort laufen die Fräser höchstens mit $0,01 \div 0,015$ mm Schlag.

Mit einem Beispiel ist es leicht zu beweisen, daß es sich sehr belohnt, die Fräser mit hoher Rundlaufgenauigkeit arbeiten zu lassen. Da muß man voraussetzen, daß die Einhaltung der Rundlaufgenauigkeit besonders bei walzenfräsigartigen Arbeiten wichtig ist, weil man da durchschnittlich mit viel kleineren Spandicken arbeitet, als beim Stirnfräsen.

Beim Walzenfräsen verändert sich oft die Spandicke der einzelnen Fräserzähne sogar mit kleineren Schlägen beträchtlich, und dies beeinflußt die Produktivität der Arbeit und vermindert auch die Standzeit des Fräzers auf einen Bruchteil derselben.

Beim Stirnfräsen beeinflußt der Radialschlag auch die Veränderung der Spandicke der einzelnen Zähne. Aber dabei arbeitet man mit einer 10—20-fach größeren mittleren Spandicke als beim Walzenfräsen, so daß hier nur der größere Schlagfehler die Produktivität beeinflußt. Der Axialschlag beeinflußt dagegen die Oberflächengüte beträchtlich.

Die Verhältnisse des unrundlaufenden Fräzers können wir dann genau beurteilen, wenn wir die Veränderung der Zerspanungskräfte und die Standzeit durch ein praktisches Beispiel zahlenmäßig bestimmen. Unser Beispiel wurde für Formfräsen ausgearbeitet, weil man da mit niedrigem Vorschub je Zahn arbeitet, und die durch den Schlag beeinflußte Veränderung der Spandicke ziemlich groß wird.

Wir wählen zwecks Erleichterung des Berechnens einen konvexen Rundformfräser. Fräserdurchmesser $D = 60$ mm, Halbmesser des Kreisbogens $r = 6$ mm, Zähnezahl $z = 12$. Mit diesem Fräser wollen wir in einem

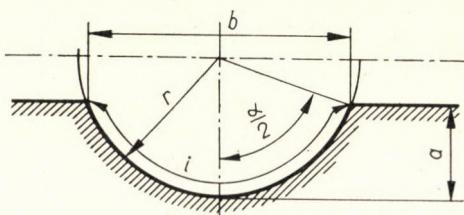


Bild 1. Ausfräsender Querschnitt

flachen Werkstück eine gerade Kreisbogen-Nute mit $a = 4$ mm Spantiefe fräsen. Der zerspannte Querschnitt wird folglich ein Kreisabschnitt sein mit einer Breite b , Bild 1, welche durch den Halbwinkel $\alpha/2$ bestimmbar ist. Dieser Halbwinkel liegt in einer Ebene, welche senkrecht zur bearbeitenden Oberfläche steht. Die Drehachse des Fräzers liegt auch in dieser Ebene. Dabei gehört zu dem Halbwinkel $\alpha/2$ der Bogenwinkel $\varphi = 0$, Bild 2. In diesem Falle verkleinert sich nämlich die Fräsbreite b'_x mit zunehmendem Bogenwinkel.

Der Bogen i gehört zur Fräsbreite b , und der momentane Bogen i'_x gehört zu einer momentanen Fräsbreite b'_x mit einem Bogenwinkel φ_x .

Die Fräsbreite b ist in unserem Beispiel: $\cos \alpha/2 = (r - a)/r = (6 - 4)/6 = 1/3$ und $\alpha/2 = 70,6^\circ$, d. h. $\alpha = 141,2^\circ$; $b = 2 r \sin \alpha/2 = 12 \cdot 0,942 = 11,3$ mm.

Der zerspannte Querschnitt d. h. Kreisabschnitt ist

$$F = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\alpha^0 \pi}{180} - \sin \alpha \right) = 18 \left(\frac{141,2 \pi}{180} - 0,627 \right) = 33,1 \text{ mm}^2.$$

Die Bogenlänge des Kreisabschnittes ist

$$i = \pi r \frac{\alpha^0}{180} = \pi 6 \frac{141,2}{180} = 14,8 \text{ mm}.$$

Nehmen wir in unserem Beispiel den Vorschub je Zahn $s_z = 0,05$ mm und die Schnittgeschwindigkeit für den bearbeitenden Stahl von $\sigma_B = 75$

kp/mm^2 , Zerreißfestigkeit $v = 16 \text{ m/min}$. Dies entspricht einer Umdrehungszahl $n = 84,4/\text{min}$. Die einstellbare Umdrehungszahl der Fräsmaschine ist $88/\text{min}$, welche einer Schnittgeschwindigkeit von $v = 16,6 \text{ m/min}$ entspricht.

Der Vorschub pro Minute wird daher: $S = s_z z n = 0,05 \cdot 12 \cdot 88 = 52,6 \text{ mm/min}$.

Die mittlere Spandicke in der Mittelebene des Fräzers ist

$$h_m = s_z \sqrt{\frac{a}{D} - \frac{a^2}{D^2}} = 0,05 \sqrt{\frac{4}{60} - \frac{16}{3600}} = 0,0125 \text{ mm}.$$

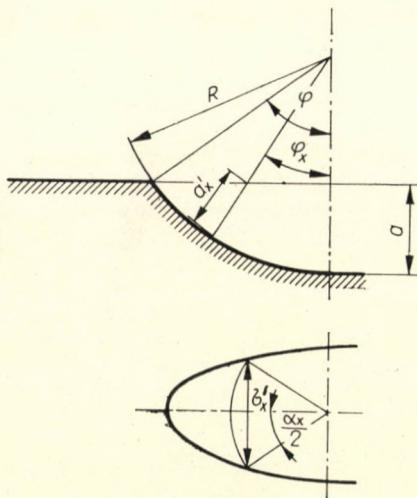


Bild 2. Die Parameter des Spanes

Der Bogenwinkel während dessen ein Fräserzahn arbeitet, wird mit dem Bogenhalbwinkel berechnet

$$\sin \varphi/2 = \sqrt{\frac{a}{D}} = \sqrt{\frac{4}{60}} = 0,258; \quad \varphi/2 = 15^\circ; \quad \varphi = 30^\circ.$$

Die Zerspanungskraft des Fräserzahnes kann mit Hilfe der mittleren Spandicke bestimmt werden. Aber die vorher berechnete mittlere Spandicke h_m gehört zu der Spantiefe $a = 4 \text{ mm}$ in der Mittelebene des Fräzers. So beginnt die Zerspanung jetzt in einer Bogenlänge $i = 14,8 \text{ mm}$, welche zu einer Fräsbreite $b = 11,3 \text{ mm}$ mit einer Spandicke $h = 0$ gehört. In diesem Moment ist auch der Bogenwinkel $\varphi = 0$. Die momentane mittlere Spandicke h'_x kann wie folgt bestimmt werden:

$$a_x = \frac{b'_x}{i'_x} h_x \text{ mm}.$$

Hier bedeutet:

- b'_x die momentane Fräsbreite;
- i'_x die momentane Bogenlänge;
- h_x die momentane mittlere Spandicke in der Mittelebene.

In diesem Falle entspricht die momentane Spanform der Spanform des StirnfräSENS. Hiebei erhalten wir aber eine Abweichung; nämlich die mittlere Spandicke verändert sich in der Mittelebene des FräSers. Im Falle des StirnfräSENS, wenn der Einstellwinkel $\alpha = 90^\circ$ ist, ist dieser Wert konstant und entspricht dem Vorschub je Zahn: s_z .

Die momentane spezifische Schnittkraft k_x kann mit Hilfe der momentanen mittleren Spandicke h'_x bestimmt werden. Der momentane Spanquerschnitt q_x multipliziert mit der momentanen spezifischen Schnittkraft k_x gibt die momentane Zerspanungskraft P_x .

Aus dem Vorangehenden ist es ersichtlich, daß die momentane Spandicke und der momentane Spanquerschnitt einerseits von dem momentanen Bogenwinkel φ_x und andererseits von dem momentanen Winkel $\alpha_x/2$ abhängt. Dieser letztere Winkel bestimmt die momentane Fräsbreite b'_x . Wir wollen diese zwei Veränderliche φ_x und $\alpha_x/2$ auf eine einzige Veränderliche, und zwar auf φ_x beschränken, damit wir die Veränderung der Zerspanungskräfte als Funktion des Verdrehwinkels des FräSers erhalten können.

Zu diesem Zweck können wir die folgenden Zusammenhänge mit Hilfe der Bezeichnungen des Bildes 2 anschreiben:

$$\cos \varphi_x = \frac{R - a}{R - a'_x}, \quad \text{und} \quad \cos \alpha_x/2 = \frac{r - a'_x}{r}$$

(R bedeutet den Halbmesser des FräSers).

Aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich $\cos \alpha_x/2$ als Funktion von $\cos \varphi_x$:

$$\cos \alpha_x/2 = \frac{r \cos \varphi_x - R \cos \varphi_x + R - a}{r \cos \varphi_x}.$$

Nachher kann man mit den allgemein gebräuchlichen Formeln die Veränderung der Umfangskraft (Zerspanungskraft) für einen Zahn bestimmen. Durch diese Formeln berechnen wir die einzelnen Werte der Umfangskraft für einen Zahn. Diese sind in Tafel I zusammengestellt.

Für die Berechnung der Werte in Tafel I braucht man die folgenden Formeln:

Momentane Fräsbreite: $b'_x = 2 r \sin \alpha_x/2$ mm;

Momentane Spandicke in der Mittelebene des FräSers:

$$h_x = s_z \sin \varphi_x \text{ mm};$$

Tafel I

Die Werte der Veränderungen der auf einem Fräserzahn auftretenden Umfangskraft mit den für die Berechnung nötigen Detailldaten

q_x°	$\sin \varphi_x$	$\cos \varphi_x$	$\cos \alpha_{x/z}$	$\alpha_{x/z}$	$\sin \alpha_{x/z}$	b'_x [mm]	i'_x [mm]	h_x [mm]	h'_x [mm]	q_x [mm 2]	k_x [kp/mm 2]	P_x [kp]
0	0	1,0	0,333	70,6	0,944	11,3	14,8	0	0	0	∞	0
3	0,0698	0,9986	0,351	69,5	0,936	11,3	14,5	0,0034	0,0027	0,031	865	26,7
6	0,1045	0,9945	0,364	68,7	0,932	11,3	14,3	0,0052	0,0041	0,047	765	35,8
9	0,1564	0,9877	0,391	67,8	0,920	11,2	14,1	0,0078	0,0062	0,069	705	48,8
12	0,2079	0,9781	0,437	64,2	0,901	10,8	13,4	0,0104	0,0084	0,091	675	61,3
15	0,2588	0,9659	0,482	61,2	0,876	10,5	12,8	0,0129	0,0106	0,110	646	71,2
18	0,309	0,9510	0,562	55,8	0,827	9,9	11,6	0,0154	0,0132	0,131	616	80,8
21	0,3584	0,9336	0,625	51,4	0,780	9,4	10,7	0,0179	0,0156	0,168	594	100
24	0,407	0,9135	0,747	41,8	0,667	8,0	8,7	0,0204	0,0186	0,163	570	93
27	0,454	0,891	0,870	29,5	0,492	5,9	6,2	0,0227	0,0218	0,134	546	73
30	0,500	0,866	1,0	0	0	0	0	0,025	0,025	0	0	0

momentaner Spankreisbogen:

$$i'_x = \frac{\pi r \alpha_x}{180} \text{ mm};$$

momentane mittlere Spandicke:

$$h'_x = h_x \frac{b'_x}{i'_x} \text{ mm}.$$

Zu der momentanen spezifischen Schnittkraft k_x gehört der Wert h'_x ; bei einem Stahl von Zerreißfestigkeit $\sigma_B = 75 \text{ kg/mm}^2$ gemäß der Versuche des Verfassers ergibt sich:

$$k_x = \frac{246}{h'^{0,212}_x} \text{ kp/mm}^2.$$

Momentaner Spannquerschnitt: $q_x = b'_x h_x = i'_x h'_x \text{ mm}^2$;

momentane Umfangskraft für einen Zahn: $P_x = k_x q_x \text{ kp}$.

Nachdem die momentane Umfangskraft für einen Zahn eine Funktion von der 3 Veränderlichen ist, können wir die größte Umfangskraft mit einfachen Maximum-Minimum-Verfahren nicht bestimmen. Da außer der größten Umfangskraft der Verlauf der Kraftveränderung auch wichtig ist, so scheint es am zweckmäßigsten, die Werte der Umfangskraft für jeden 3° Bogenwinkel zu berechnen. Unsere Untersuchungen werden wir in zwei Schritten ausführen.

Im ersten Schritt wird angenommen, daß der Fräser ohne Rundlauf Fehler arbeitet und alle Zähne gleichmäßig belastet sind. Nachher beschäftigen

wir uns im zweiten Schritt mit den Abweichungen der Belastungen der Fräserzähne, d. h. mit dem Falle, in welchem der Fräser mit Rundlauffehler läuft.

Die Veränderung der Umfangskraft gibt ein sehr interessantes Bild, wie das Bild 3 zeigt. Die Umfangskraft steigt am Anfang und bei $\varphi_x = 21^\circ$ erreicht sie einen maximalen Wert. Von hier sinkt die Umfangskraft steil und ist bei $\varphi_x = 30^\circ$ wieder gleich null.

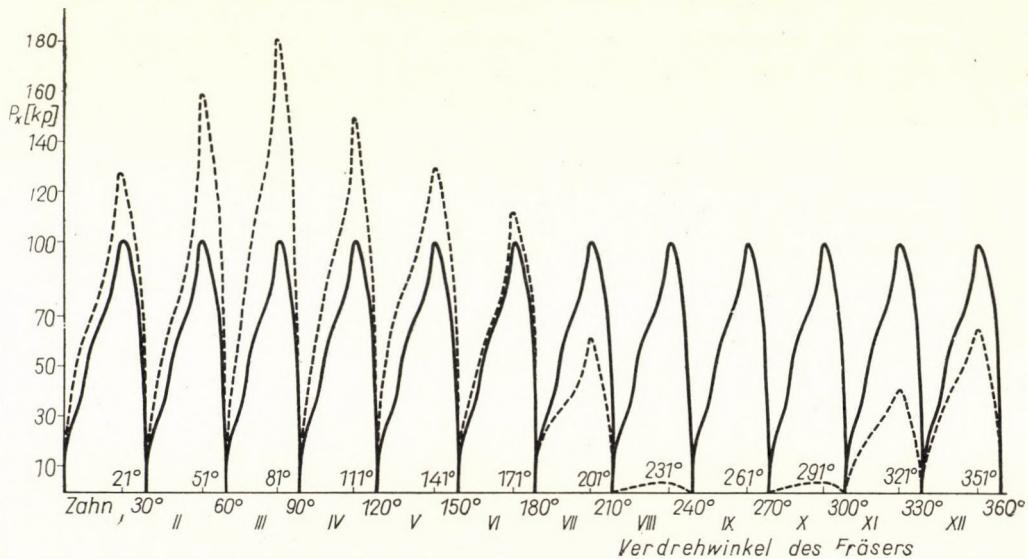


Bild 3. Die Veränderung der Umfangskraft als Funktion des Verdrehwinkels des Fräzers für alle 12 Fräserzähne bei genaulaufendem und unrundlaufendem Fräser

Die mittlere Umfangskraft für einen Zahn kann man von der Arbeitsfläche des Diagramms bestimmen, und zwar $P_m = 60,1$ kp, die rund 60% der größten Umfangskraft $P_{\max} = 100$ kp beträgt.

Nachdem der Bindungsfaktor $\psi = \varphi/\delta = 1$ ist, beträgt die als konstant annehmbare mittlere Umfangskraft des Fräzers $P'_m = \psi P_m = 60,1$ kp. (δ ist der Zahnteilungswinkel des Fräzers.) Dadurch können wir die mittlere Zerspanungsleistung N_m bestimmen, und zwar:

$$N_m = \frac{P'_m v}{4500} PS = \frac{60,1 \cdot 16,6}{4500} = 0,222 \text{ PS.}$$

Die momentan auftretende maximale Zerspanungsleistung ist bei der maximalen Umfangskraft P_{\max} :

$$N_{\max} = \frac{P_{\max} v}{4500} PS = \frac{100 \cdot 16,6}{4500} = 0,369 \text{ PS,}$$

es ist also um 66% größer als der mittlere Wert.

Nachher untersuchen wir die Veränderung der Umfangskräfte der 12 Fräserzähne. Sollte der Fräser mit einer Excentrität $\varrho = 0,1$ mm laufen, so wird der Schlag 0,2 mm. Die Folge dieses Unrundlaufens wird sein, daß die Vorschübe während einer Fräserumdrehung sich je Zahn verändern. Der Vorschub je Fräserumdrehung bleibt $s_u = s_z z = 0,05 \cdot 12 = 0,6$ mm/Umdr. unverändert. Der Vorschub je Zahn wird aber bei manchen Zähnen vergrößert, aber bei anderen vermindert. Dies kann derart aufgefaßt werden, daß der Vorschub je Zahn bei den einzelnen Zähnen durch einen Kurbeltrieb von $\varrho = 0,1$ mm mit unendlicher Schubstange beeinflußt wird.

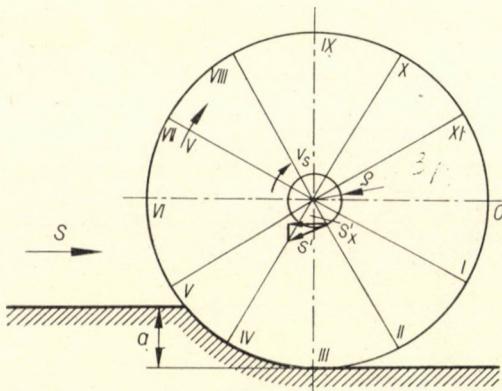


Bild 4. Die Positionen der Fräserzähne bei unrundlaufendem Fräser

Zur Vereinfachung des Berechnens vernachlässigen wir jenen Umstand, daß die Spantiefe a während einer Fräserumdrehung sich auch um $\pm 0,1$ mm verändert. Dies beeinflußt die Spantiefe nur um $\pm 2,5\%$.

Das Unrundlaufen des Fräser ergibt, daß die Achse des Fräser eine Kreisbewegung mit $\varrho = 0,1$ mm Halbmesser ausführt, Bild 4.

Die Umfangsgeschwindigkeit der Kreisbewegung von $\varrho = 0,1$ mm Exzentrizität ist: $v_s = 2 \varrho \pi n = 2 \cdot 0,1 \pi 88 = 55,3$ mm/min. Aber der Vorschub je Zahn wird nur durch die waagerechte Komponente dieser Umfangsgeschwindigkeit beeinflußt. Nachdem die einzelnen Fräserzähne auf einem Bogenwinkel von $\varphi = 30^\circ$ arbeiten, so fällt auf einen Zahn ein Kreisbogen:

$$s' = \frac{v_s}{nz} = \frac{55,3}{88 \cdot 12} = 0,0524 \text{ mm},$$

die waagerechte Komponente dieses Wertes verändert den Vorschub je Zahn. Der Geschwindigkeitsvektor wird sich in diesem Falle der Sinuskurve gemäß verändern.

Aus dem Bilde 4 ist es ersichtlich, daß die größte Umfangskraft an denjenigen Zahn auftritt, welcher dann arbeitet, wenn die Fräserachse sich von

Position *II* bis *III* bewegt. Dieser Zahn wird dann zu arbeiten beginnen, wenn dieser in Position *III* ist, und seine Zerspanungsarbeit in Position *IV* beendet. Mit anderen Worten wird dieser Zahn bei Verdrehwinkel des Fräzers $\varphi' = 60^\circ$ arbeiten zu beginnen und seine Arbeit bei $\varphi' = 90^\circ$ beenden.

Die Veränderung der Umfangskraft P_x des mit Maximalbelastung arbeitenden Zahnes wird auch für je 3° berechnet, beginnend von $\varphi' = 60^\circ$ bis Ende von $\varphi' = 90^\circ$. Tafel I zeigt, daß die größte Umfangskraft bei $\varphi_x = 21^\circ$ auftritt, infolgedessen ist die größte Umfangskraft dieses Zahnes bei $\varphi' = 81^\circ$ (siehe Tafel II).

Tafel II

*Die Werte der Veränderungen der auf dem Fräserzahn von Position *II* auftretenden Umfangskraft als Funktion des Fräserverdrehwinkels bei mit 0,2 mm Schlag arbeitendem Fräser, $s'_z = 0,1018 \text{ mm}$*

φ_z°	φ'_x°	$h_x \text{ [mm]}$	$h'_x \text{ [mm]}$	$q_x = b'_x h_x \text{ [mm}^2\text{]}$	$k_x \text{ [kp/mm}^2\text{]}$	$P_x \text{ [kp]}$
60	0	0	0	0	—	0
63	3	0,00712	0,00554	0,0628	740	46,4
66	6	0,01065	0,00840	0,0953	675	64,5
69	9	0,0159	0,0126	0,141	621	88,0
72	12	0,0213	0,0172	0,185	580	107
75	15	0,0264	0,0216	0,224	555	124
78	18	0,0315	0,0269	0,267	530	141
81	21	0,0365	0,0317	0,345	511	176
84	24	0,0415	0,0380	0,333	492	165
87	27	0,0463	0,0445	0,274	467	128
90	30	0	0	0	0	0

Bei der Berechnung führen wir eine Vereinfachung ein. Nämlich der Geschwindigkeitsvektor verändert sich ständig, aber diese Veränderung ist zwischen $\varphi' = 63^\circ$ und $\varphi' = 87^\circ$ gering, so daß wir mit konstanter Vorschubveränderung kalkulieren können. Der Vorschub je Zahn wird bei $\varphi' = 81^\circ$: $s'_z = s_z + s'_x = 0,05 + \sin 81^\circ s' = 0,05 + 0,988 \cdot 0,0524 = 0,1018 \text{ mm}$ sein.

Die Umfangskraft ist bei $\varphi' = 63^\circ$ noch gering, bei $\varphi' = 69^\circ$ ist $s_z + s'_x = 0,05 + \sin 69^\circ s' = 0,05 + 0,934 \cdot 0,0524 = 0,099 \text{ mm}$. Die ganze Differenz ist $0,1018 - 0,099 = 0,0028 \text{ mm}$, also nur 2 %, und damit ist die Richtigkeit der eingeführten Vereinfachung bewiesen. Dieses 2 % kompensiert die Vergrößerung der Spantiefe in dieser Position, welche Vergrößerung bei der früheren Berechnung vernachlässigt wurde.

Die Werte der Umfangskraftveränderung des Fräserzahnes mit größter Belastung sind in der Tafel II angegeben. Diese Werte sind mit gestrichelter Linie auch in Bild 3 eingetragen.

Es sei erwähnt, daß der genaue Wert der Umfangskraft bei $\varphi' = 69^\circ$ auch berechnet wurde, welcher $P_x = 86$ kp beträgt, anstatt des in der Tafel II angegebenen Wertes von $P_x = 88$ kp. Die Differenz, d. h. Mehrumfangskraft tritt infolge der Vergrößerung der Spantiefe von 4 mm auf 4,1 auf.

Aus diesem und den in Tafel I angegebenen Werten sowie aus den Diagrammen ist zu erschen, daß die Charakter der Umfangskraftveränderungen ähnlich sind. In dem Folgenden genügt es, die größten Belastungen der einzelnen Zähne auszurechnen. Die ausgerechneten größten Werte der einzelnen Zahnbelaustungen sind in der Tafel III angegeben, und der Ablauf der Umfangskraftveränderungen ist für alle 12 Zähne in Bild 3 mit gestrichelter Linien auch angeführt.

Tafel III

Die Bestimmungen der größten Umfangskräfte des mit Schlag 0,2 mm arbeitenden Fräzers in den einzelnen Zahnpositionen, $b_x = 9,35$ mm

Zahn-position	φ'_x °	$\sin \varphi'_x$	$s'_x = s \sin \varphi'$	$s'_z = s_z + s'_x$ [mm]	$h_x = s'_z \sin 21^\circ$ [mm]	$h'_x = 0,875 h_x$ [mm]	$q_x = b'_x h_x$ [mm²]	k_x [kp/mm] ^p	P'_{\max} [kp]
I	21	0,358	0,0188	0,0689	0,0247	0,0216	0,230	553	127
II	51	0,777	0,0406	0,0906	0,0325	0,0285	0,304	523	159
III	81	0,988	0,0518	0,1018	0,0365	0,0320	0,345	511	176
IV	111	0,934	0,049	0,099	0,0356	0,0313	0,293	512	150
V	141	0,629	0,033	0,083	0,0298	0,0262	0,245	531	130
VI	171	0,156	0,0082	0,0582	0,0209	0,0184	0,196	575	112
VII	201	-0,358	-0,0188	0,0312	0,012	0,0105	0,097	644	62,4
VIII	231	-0,777	-0,0406	0,0094	0,00034	0,0003	0,0032	1390	4,4
IX	261	-0,988	-0,0518	-0,0018	0	0	0	∞	0
X	291	-0,934	-0,049	0,001	0,00036	0,0003	0,0034	1350	4,5
XI	321	-0,629	-0,033	0,017	0,0061	0,0054	0,057	746	42,1
XII	351	-0,156	-0,0087	0,0418	0,0152	0,0132	0,123	616	76,0

Vom Diagramm des Bildes 3 sehen wir, daß die Umfangskräfte bei Zähnen von Positionen I—VI größer sind als die Umfangskraft des genau laufenden Zahnes, aber die Umfangskräfte bei den übrigen Zähnen sind geringer. Die Zähne von Positionen VIII und X mit größten 4,4 resp. 4,5 kp Umfangskräften und der Zahn von IX greift in das Arbeitsstück überhaupt nicht ein.

Laut obigem ist die größte Umfangskraft bei dem genau laufenden Fräser $P_{\max} = 100$ kp und $N_{\max} = 0,369$ PS. Die größte Umfangskraft steigt bei dem unrundlaufenden Fräser bis $P'_{\max} = 176$ kp und die Leistung bis auf $N_{\max} = 0,65$ PS.

Die bisher angeführten Umfangskraftwerte beziehen sich auf scharfe Werkzeuge. Wenn wir annehmen, daß man bei diesem Formfräsern bis zu einem Freiflächenverschleiß $\Delta = 0,3$ mm arbeiten kann, so vergrößern sich

die Umfangskräfte infolge des Freiflächenverschleißes beträchtlich. Der Faktor der Vergrößerung der Umfangskraft als Funktion des Freiflächenverschleißes und der mittleren Spandicke ist mit Schnellstahlwerkzeugen bei Stahlbearbeitung:

$$K_{\Delta s} = 1 + \frac{0,289}{h_m' 0,59} (\Delta - 0,1).$$

Mit dieser Formel kann errechnet werden, daß die vergrößerte Umfangskraft bei genaulaufenden Fräser mit einem Freiflächenverschleiß von $\Delta = 0,3 \text{ mm}$ gemäß der schon berechneten Daten:

$$K_{\Delta s} = 1 + \frac{0,289}{0,256^{0,59}} (0,3 - 0,1) = 1,68$$

wird, und

$$P_{\max \Delta} = K_{\Delta s} P_{\max} = 1,68 \cdot 100 = 168 \text{ kp},$$

und die momentane größte Zerspanungsleistung $N_{\max \Delta} = 0,62 \text{ PS}$ wird.

Bei dem mit Bezeichnung II von 0,2 mm Schlag laufenden Fräserzahn wird die größte Umfangskraft bei einem Freiflächenverschleiß von $\Delta = 0,3 \text{ mm}$ sich auch erhöhen und zwar ist in diesem Falle

$$K'_{\Delta s} = 1 + \frac{0,289}{0,0317^{0,59}} (0,3 - 0,1) = 1,445,$$

und daher

$$P'_{\max \Delta} = 1,445 \cdot 176 = 254 \text{ kp},$$

und die momentane größte Zerspanungsleistung $N_{\max \Delta} = 0,94 \text{ PS}$.

Die größte Zerspanungsleistung ist sogar bei dem unrundlaufenden Fräser, betrachtend die Antriebsleistungen der mittleren Fräsmaschinen, gar nicht groß, kaum 1 PS. Aber die momentan auftretende größte Umfangskraft ist sehr beträchtlich: $P'_{\max \Delta} = 254 \text{ kp}$. Dieser Wert kann schon so hoch sein, daß ihm das System — Fräsmaschine, Arbeitsstück und Werkzeug — nicht gewachsen ist. Nämlich alle solche Systeme — Werkzeugmaschine, Arbeitsstück und Werkzeug — haben eine zulässige Kraftgrenze, bei welcher die Zerspanungsarbeit normalerweise noch durchführbar ist. Über diese Grenze ist eine anstandslose Fräasarbeit unmöglich.

In der Praxis stellt man die Beanspruchung dieses Systems — Fräsmaschine, Arbeitsstück, Werkzeug — ohne Berechnung auf die obige Grenze ein, folglich muß das System naturgemäß Kraftschwankungen ertragen.

Wenn diese Grenze überschritten wird, können auch schädliche Schwingungen auftreten, wodurch die anstandslose Fräasarbeiten, wie schon vorgehend bemerkt worden ist, unmöglich wird.

Beim Fräsen mit unrundlaufendem Werkzeug wird die zulässige Kraftgrenze schon bei geringerem Vorschub je Zahn eintreten, und so wird die Produktivität der Fräserarbeit demgemäß niedriger.

Wir nehmen an, daß die zulässige Kraftgrenze bei unserem Beispiel 168 kp beträgt und bei genaulaufendem Fräser mit $S = 52,6$ mm/min bei Freiflächenverschleiß $\Delta = 0,3$ mm nicht überschritten wird. Aber der unrundlaufende Fräser überholt diese Grenze bei Freiflächenverschleiß $\Delta = 0,3$ mm

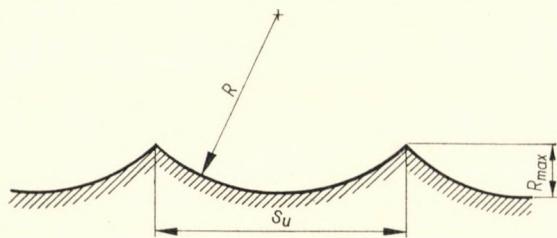


Bild 5. Die Bestimmung der Oberflächengüte bei unrundlaufendem Fräser

um 51%. Daraus folgt wieder, daß wir in diesem Falle den Vorschub beschränken müssen. Gemäß dieser Annahme kann man ohne komplizierte Berechnung, im Verhältnis der größten Kraftschwankungen 168/254 den Vorschub annähernd vermindern. Das bedeutet dann, daß der Vorschub je Zahn anstatt 0,05 mm nur mit 0,032 mm angenommen werden kann, womit der Vorschub/min sich von 52,6 mm/min auf 34 mm/min, also um 35% vermindert.

Man muß sich bei Verwendung von unrundlaufenden Fräsern auch noch mit der Veränderung der erreichbaren Oberflächengüte befassen. In diesem Falle betrachten wir das Fräsen als eine Dreharbeit mit einem Drehmeißel von einer Eckenabrundung $R = 30$ mm und mit einem Vorschub je Werkstückumdrehung von 0,6 mm. Der Eckenhalbmesser entspricht dem Fräserhalbmesser R , der Vorschub desgleichen dem je Fräserumdrehung s_u . Daher entspricht die größte Rauheit R_{\max} der Höhe eines Kreisabschnittes mit einem Halbmesser gleich dem Fräserhalbmesser und mit einer Länge entsprechend dem Vorschub je Fräserumdrehung (Bild 5).

Die Höhe des Kreisabschnittes resp. R_{\max} wird:

$$R_{\max} = R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - s_u^2} = 30 - \frac{1}{2} \sqrt{3600 - 0,36} < 0,0015 \text{ mm.}$$

Dieser Wert entspricht einer theoretischen mittleren Rauheit $R_a \approx 0,3 \mu$. Das ist aber ein so geringer Wert, welcher bei einem mit kleiner Schnittgeschwindigkeit arbeitenden Werkzeug — wie ein Schnellstahlfräser — unerreichbar ist. Nämlich die durch die Werkzeugschneide hervorgerufene Reißwirkung verursacht auf den Metallkristallen eine viel gröbere Rauheit.

Der Einfluß der senkrechten Komponente des Unrundlaufens wird durch die Arbeit der Fräserzähne während einer Fräserumdrehung ausgeglichen.

Zuletzt untersuchen wir noch die Standzeit des genaulaufenden und des unrundlaufenden Fräzers. So bekommen wir einen Vergleich der Werkzeugkosten. Nachdem alle Zähne des genaulaufenden Fräzers mit gleicher Belastung arbeiten, so erreichen die Zähne gleichmäßig den zulässigen Freiflächenverschleiß $\Delta = 0,3$ mm. Nach Beendigung der Standzeit muß man den Fräser wieder nachschärfen. Es kann vorkommen, daß manche Zähne des unrundlaufenden Fräzers bedeutend mehr belastet werden. Nämlich wenn ein am meisten belasteter Zahn den Freiflächenverschleiß $\Delta = 0,3$ mm erreicht, dann muß man den ganzen Fräser nachschärfen, abgesehen davon, daß einige Zähne kaum oder gar keinen Freiflächenverschleiß aufweisen.

In unserem Beispiel muß der Fräserzahn des unrundlaufenden Fräzers, in Position II, eine Mehrlast von 76% ertragen. Dadurch wird die Standzeit dieses Zahnes sich in Verhältnis 1/1,76 verkürzen. Dies allein gibt eine auf 57% beschränkte Standzeit. Aber diese Mehrbelastung wird mit rund zweifachem Vorschub je Zahn durchgeführt. Dieser Umstand wird noch weitere Standzeitbeschränkung hervorrufen.

Die Zusammenhänge der Standzeit des konvexen Formfräzers können wir laut der Kaschirinschen Formel folgenderweise bestimmen. Bei einer bestimmten Standzeit wird die anwendbare Schnittgeschwindigkeit:

$$v = \frac{C}{T^{0,33} s_z^{0,2}} \text{ m/min}$$

und die Standzeit:

$$T = \frac{C^3}{v^3 s_z^{0,6}} \text{ min.}$$

Nachdem die Schnittgeschwindigkeit unverändert bleibt, so wird die abzuarbeitende Metallmenge je Zahn und der Vorschub je Zahn zunehmen. Die Standzeit für den unrundlaufenden Fräser wird daher:

$$T' = \frac{1}{1,76 \cdot 2^{0,6}} = \frac{1}{2,67}$$

ergeben.

Laut der obigen Formel sollte man nur die Differenz des Vorschubes je Zahn in Kauf nehmen. Da aber keine ausführliche Versuchsdaten uns zur Verfügung stehen, so scheint es richtiger, auch die Differenz in die abzuarbeitende Metallmenge einzurechnen.

So sieht man, daß die Standzeit des mit 0,2 mm Schlag unrundlaufenden Fräzers nur 37,5% des genaulaufenden Fräzers beträgt. Wenn der größtbelastete Zahn den Freiflächenverschleiß $\Delta = 0,3$ mm erreicht, so muß man

den Fräser, wie schon erwähnt, gänzlich nachschärfen. Das zeigt, daß die Werkzeugkosten sich bei Fräserarbeiten mit solchem unrundlaufenden Fräser fast auf das Dreifache erhöhen.

Zusammenfassend die Ergebnisse der Arbeit des Fräzers unter den angenommenen Verhältnissen unseres Beispiels bzw. von den ausgerechneten Daten, ziehen wir folgende Folgerungen: Wenn die größte zulässige Belastung des Systems — Werkzeugmaschine, Werkstück und Werkzeug — z. B. 168 kp ist, kann der mit 0,2 mm Schlag arbeitende Fräser nur mit 0,032 mm Vorschub je Zahn arbeiten, gegenüber dem genaulaufenden Fräser mit 0,05 mm Vorschub je Zahn. Die Folge ist, daß die Maschinenhauptzeit sich auf 65% vermindert und außerdem werden die Werkzeugkosten auf das 2,67-fache erhöht.

Aus der Ableitung des angeführten Beispiels ist es klar, daß die Produktivität, mit dem Verhältnis des Schlages zum Vorschub je Zahn, abnimmt. Die Werkzeugkosten erhöhen sich bei unrundlaufendem Fräser auf das Mehrfache gegenüber dem genaulaufenden Fräser.

Die vorgeführten zahlenmäßigen Daten beweisen ganz klar, wie wichtig es ist den Rundlauf des Fräzers ganz genau zu halten. Die hierzu benötigte Sorgfalt zahlt sich reichlich aus. Endlich soll da noch nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß viele Betriebe existieren, in welchen wegen ungenügender Werkzeugkontrolle die Fräser unrundlaufen. In solchen Betrieben könnte die Produktivität der Fräserarbeit durch genaulaufende Fräser bedeutend erhöht werden. Laut des angeführten Beispiels kann diese Erhöhung etwa 20% erreichen und die Werkzeugkosten über die Hälfte vermindert werden.

SCHRIFTTUM

1. HORNUNG, A.: A gazdaságos marás (Das wirtschaftliche Fräsen). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965.
2. KASCHIRIN: Metallzerspanung mit Schnellstahlwerkzeugen. VEB Verlag Technik, Berlin.

INFLUENCE OF THE CIRCULAR RUNNING ACCURACY OF MILLING CUTTERS ON PRODUCTIVITY AND TOOL COSTS

A. HORNUNG

SUMMARY

Especially in the case of peripheral milling, the true circular running of the milling cutter exerts a marked influence on productivity and tool costs as well. By showing an example of milling practice, the investigation carried out by the author results in stating that in the case of a radial run-out of 0,2 mm, when carrying out profile milling, the main machining time decreases by 35%, whereas tool costs rise to a 2,67-times higher level. In view of the large number of inaccurate milling cutters in the workshops it is worth-while to provide true running tools, since by such measures productivity can be raised by abt. 20% and tool costs can be cut down to nearly 50%.

**L'INFLUENCE DE LA PRÉCISION DE COURSE DE LA FRAISE
SUR LA PRODUCTIVITÉ ET LES FRAIS D'OUTILLAGE**

A. HORNUNG

RÉSUMÉ

La précision de course des fraises a une très grande influence, particulièrement chez les fraises à surfacer en bout, sur la productivité et les frais d'outillage. Par un exemple pratique, l'auteur démontre numériquement qu'en cas de profilage à la fraise et dans les conditions données, le temps machine diminue de 35% chez les fraises travaillant avec un jeu de 0,2 mm, en même temps que les frais d'outillage augmentent de 2,67 fois. Étant donné l'imprécision de course d'un très grand nombre de fraises utilisées dans les usines, on a tout intérêt à veiller à leur précision de course, car on arrive ainsi à augmenter d'env. 20% la productivité du fraisage, tout en diminuant d'une moitié env. les frais d'outillage.

**ВОЗДЕЙСТВИЕ ТОЧНОСТИ ХОДА ФРЕЗ НА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ И
РАСХОДЫ НА ИНСТРУМЕНТ ПРИ ФРЕЗЕРНОЙ ОБРАБОТКЕ**

A. ХОРНУНГ

РЕЗЮМЕ

Точность хода фрез очень сильно воздействует на производительность и расходы на инструмент при обработке цилиндров. Автор в рамках практического примера численно доказывает, что в случае фасонного фрезерования наряду с заданными условиями, основное машинное время в случае фрезы, работающей с биением 0,2 мм, уменьшается на 35%-ов, в то же время расходы на инструмент возрастают в 2,67 раза. Вследствие того, что в производственных цехах имеется очень много фрез с неточным ходом, из этого можно сделать вывод, что вопросу точности хода фрез стоит уделять соответствующее внимание, так как этим производительность фрезерных работ можно повысить прибл. на 20%-ов и снизить расходы на инструмент примерно до половины.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG
COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

L. G. Johnson:

THEORY AND TECHNIQUE OF VARIATION RESEARCH

Elsevier Publishing Company, Amsterdam-London-New York; p. 105, fig. 34, tabl. 24.

The literature has produced only very few books dealing with the planning and up-to-date evaluation of experiments. These topics were treated in the excellent fundamental work "Design and analysis of industrial experiments" of Owen L. DAVIES. The work of DAVIES was published in 1954, its extent is 636 pages. The present book of L. G. JOHNSON contains 100 pages only. In spite of this, the latter yields a clear and comprehensible survey on all questions which are important for practising engineers. For instance, in the case when a single phenomenon is influenced by three independent variables, the author shows how the experiments should be planned. He expounds in detail also the question, when must the difference of two phenomena be considered as significant by taking into account the scattering of measurements. These cases are examples from the well chosen matter of the book which is compiled with regard to the claims of the engineering practice. In order to solve the problems, the author applies the Weibull's function. Consequently, all the problems can be treated in the same way. In order to avoid complicated mathematical tools, the author often applies the graphical method, thus a method which is easy to understand for practising engineers. The primary aim of this book of L. G. JOHNSON is to fulfil the expectations of industrial practice. In addition, it will also be useful in certain domains of laboratory researches.

L. Gillemot

L. G. Johnson:

THE STATISTICAL TREATMENT OF FATIGUE EXPERIMENTS

Elsevier Publishing Company, Amsterdam-London-New-York 1964; p. 114, fig. 32, tabl. 23.

The application of the mathematical statistics to engineering problems was considerably promoted by the scientific activity of L. G. JOHNSON. In this present book he deals with the statistical treatment of fatigue experiments. Of all distribution functions, which may serve for this purpose, the Weibull's function is chosen here. This choice is justified by the fact that tentative standard of the American Society for Testing Materials (ASTM) has in 1962 prescribed the use of this function. In order to elucidate the use of Weibull's function, the author elaborates several examples in a very comprehensible simple style, not only for the evaluation of fatigue experiments, but also for the planning of these experiments. Although the book is written for practising engineers and contains the explanation of the mathematical basic concepts, yet, it is assumed that the reader is already familiar with the Weibull's function. Therefore it seems to be expedient that the beginners should get to know the mathematical basic concepts from other sources, e.g. from the above-mentioned standards. Summarizing all these, one can ascertain that this work is an important and useful handbook for engineers.

L. Gillemot

INDEX

- Geleji, A.—Voith, M.—Mecseki, J.—Tóth, L.*: Rechnerische Grundlagen für die Bemessung der Pilgerwalzwerke, I — Calculating Principles for the Design of Pilgrim's Seamless Tube Rolling Mills, I — Fondements du calcul pour le dimensionnement des laminoirs à pas de pèlerin, I — Гелеи, А.—Воит, М.—Мечеки, Й.—Тот, Л.: Математические основы расчета пильгертных станов, I 227
- Huszthy, L.*: Analysis of Ground Worm Surfaces — Analytische Untersuchung der geschliffenen Schneckenfläche — Examen analytique de la surface d'une vis rectifiée — Хусты, Л.: Аналитическое исследование шлифованной спиральной поверхности 261
- Heller, G.—Rosta, L.*: Wahl der Betriebscharakteristiken des Luftverdichters und des Hauptluftbehälters an Eisenbahntriebfahrzeugen auf Grund der Betriebsanforderungen, II — Dimensioning Principles of the Air-Compressor and the Main Air-Receiver for the Brake-Equipment in Railway-Trains, II — Choix, du point de vue de l'exploitation, des caractéristiques des compresseurs et réservoirs d'air comprimé des engins de traction ferroviaires, II — Хеллер, Д.—Роста, Л.: Выбор характеристик оборудования по выработке и аккумуляции сжатого воздуха на основе производственных соображений, для случая железнодорожной тяги, II 275
- Sólyom, J.*: Study on the Recrystallization of Pure Copper Technical Grade — Untersuchung der Rekristallisation von technisch reinem Kupfer — Examen de la recristallisation du cuivre technique pur — Шойом, Е.: Исследование рекристаллизации технически чистой меди 297
- Benyő, P.*: Anwendung der Wellengleichungen auf kurze Rohre, II — Application of Wave Equations to Short Pipes, II — Application des équations d'ondes aux tubes courts, II — Бенъо, П.: Применение волновых уравнений к коротким трубам, II 309
- Reményi, K.*: Investigation of the Distribution by Weight Percent of the Components in Size Fractions of Ground Product Mixtures — Die Untersuchung der Gewichtsprozent-Verteilung von Komponenten in den Fraktionen nach Korngröße der Mahlgüter von Stoffgemischen — Étude de la distribution en pourcent de poids des composantes, dans les fractions granulométriques des mélanges de produits broyés — Ремени, К.: Анализ распределения по весовому проценту гранулометрических фракций помолов смесей материалов 333
- Krysko, W. W.—Fenton, R. G.*: Contribution to the Problem of Extrusion of Lead and Lead Alloys — Beitrag zum Strangpressen von Blei und Bleilegierungen — Contribution au problème du filage à la presse du plomb et des alliages de plomb — Крицко, В. В.—Фентон, Р. Г.: К проблеме прессования пруткового материала из свинца и свинцовых сплавов 345

<i>Varga, J.—Sebestyén, Gy.: Contribution to the Investigation of the Intensity of Cavitation Erosion — Beiträge zur Untersuchung der Intensität der Kavitationserosion — Contribution à l'étude de l'intensité de l'érosion par cavitation — Варга, Й.—Шебештьен, Дв.: Дополнение к исследованию интенсивности кавитационной эрозии</i>	373
<i>Varga, J.—Sebestyén, Gy.: Cavitation Noise Spectrum and Cavitation Damage — Schallspektrum der Kavitation und die Kavitationskorrosion — Profil de bruit de la cavitation et destruction par cavitation — Варга, Й.—Шебештьен, Дв.: Спектр кавитационного шума и кавитационное разрушение</i>	383
<i>Bella, E.—Gulyás, J.—Juhász, S.: Der Vorgang der Warmverformung des Kupfers bei verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten — Process of Hot Forming of Red Copper at Different Forming Speeds — Les processus de façonnage à chaud du cuivre rouge à vitesses de façonnage différentes — Белла, Э.—Гуяш, Й.—Юхас, Ш.: Процесс протекания горячей обработки меди при различных скоростях обработки</i>	397
<i>Hornung, A.: Der Einfluß der Rundlaufgenauigkeit des Fräzers auf die Produktivität und die Werkzeugkosten beim Fräsen — Influence of the Circular Running Accuracy of Milling Cutters on Productivity and Tools Costs — L'influence de la précision de course de la fraise sur la productivité et les frais d'outillage — Хорнунг, А.: Воздействие точности хода фрез на производительность и расходы на инструмент при фрезерной обработке</i>	415
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ	
<i>L. G. Johnson: Theory and Technique of Variation Research (L. Gillemot)</i>	429
<i>L. G. Johnson: The Statistical Treatment of Fatigue Experiments (L. Gillemot)</i>	429

Printed in Hungary

A. GELEJI—M. VOITH—J. MECSEKI—L. TÓTH: *Calculating Principles for the Design of Pilgrim's Seamless Tube Rolling Mills, Part I*

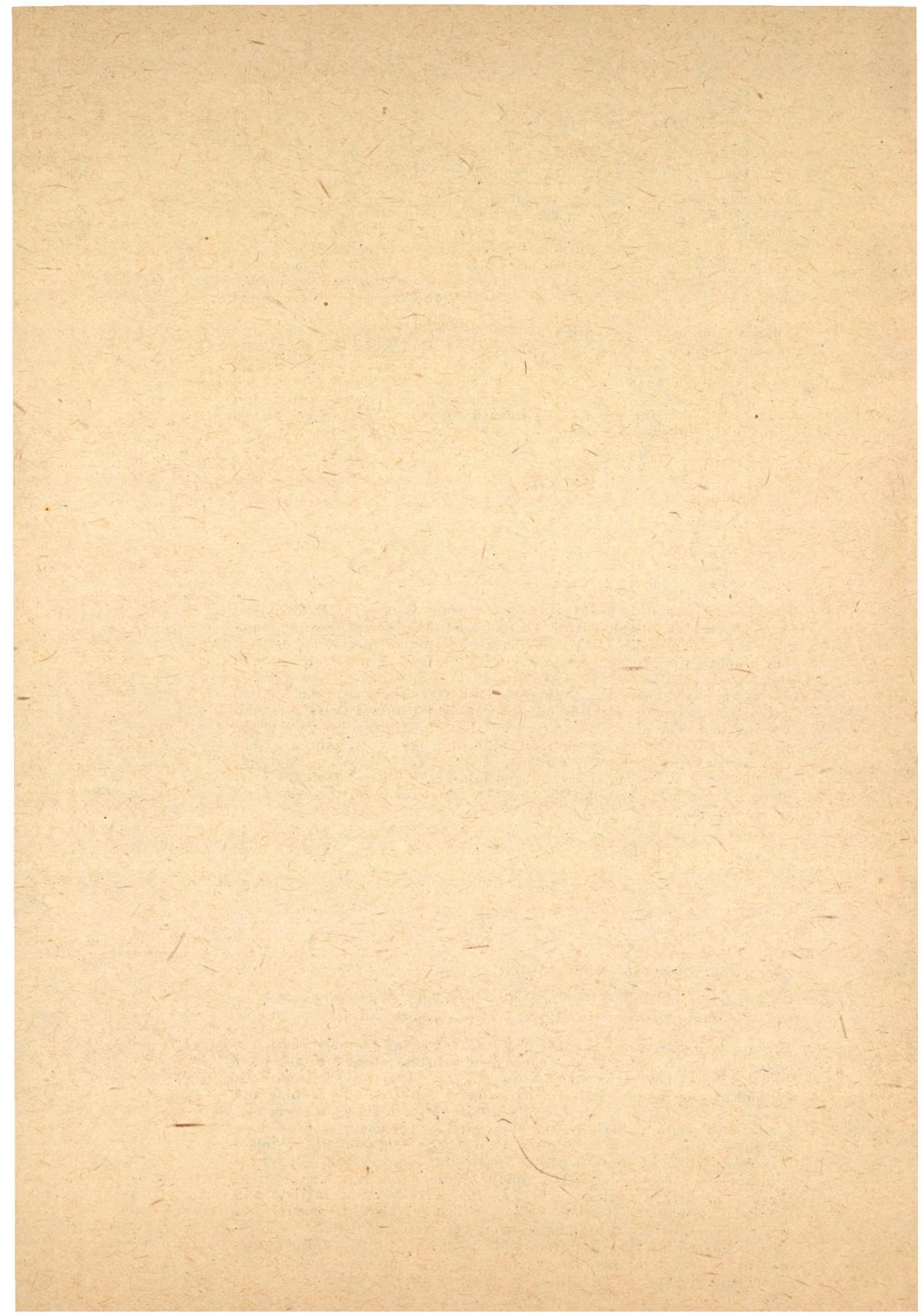
In making seamless tubes having diameters within the range of 4 to 16 inches, the process of rolling carried out according to the Mannesmann principle becomes in our times the most preferred method. Thus, everywhere in the world the solution of technical-economical problems, when asking how to increase productivity of such rolling trains, becomes day by day more important. This is well proved by the ever increasing number of papers dealing with this question within the frame of international technical periodicals and also of patent applications. Productivity of pilgrim's rolling trains is proportional to the speed of rolls and the advance per rotation. The maximum of production is determined by the special maxima of both speed and advance when they are in harmonic correlation. By a thorough analysing of the interdependence between speed and advance, in this paper the corresponding values of maxima are determined by which the quality requirements of the tubes can be reached through an undisturbed rolling process.

L. HUSZTHY: *Analysis of Ground Worm Surfaces*

The equation that describes the worm surface is set up by analytical methods. The case dealt with is characterized by a worm that is ground by means of a grinding wheel having a trapezoid as meridional section. The grinding wheel is supposed to perform a helicoidal movement around the worm axis that is assumed to stand at a fixed position, whereby, during this movement, the angle enclosed by the worm axis and the tool axis is constant and so is the normal transversal line of these axes. The moving tool generates a bundle of surfaces; the finished surface of the worm is but the enveloping surface of these generated surfaces. The equation of the worm surface can be used as a suitable means for analysing the face-section, the axial section and the sections parallel to the axial plane. The method expounded is based on the elements of the vector and tensor calculus.

G.Y. HELLER—L. ROSTA: *Dimensioning Principles of the Air-Compressor and the Main Air-Receiver for the Brake-Equipment in Railway-Trains*

The principles developed in this paper should ensure a more consistent method for the determination of the main dimensions of the air compressor and the main air-receiver than was possible by relying on the traditional method of routine-like choice of parameters. Conditions of running and the necessary air-supply are investigated in order to find the operation-conditioned relations between the parameters of the main braking valve and those of the compressor and the receiver. The results of this thorough investigations form a useful basis for establishing a more consistent system of dimensioning equations. Relying on the obtained mathematical relations the authors give a critical survey of the ORE-Recommendations and suggest a rational modification of this specification. Finally, some features of the whole problem of braking technique are explained that may influence the presently general solution of the problems and their future development as far as compressed-air producing implements and air-storage equipments for railway-train braking purposes are concerned.



J. SÓLYOM: *Study on the Recrystallization of Pure Copper Technical Grade*

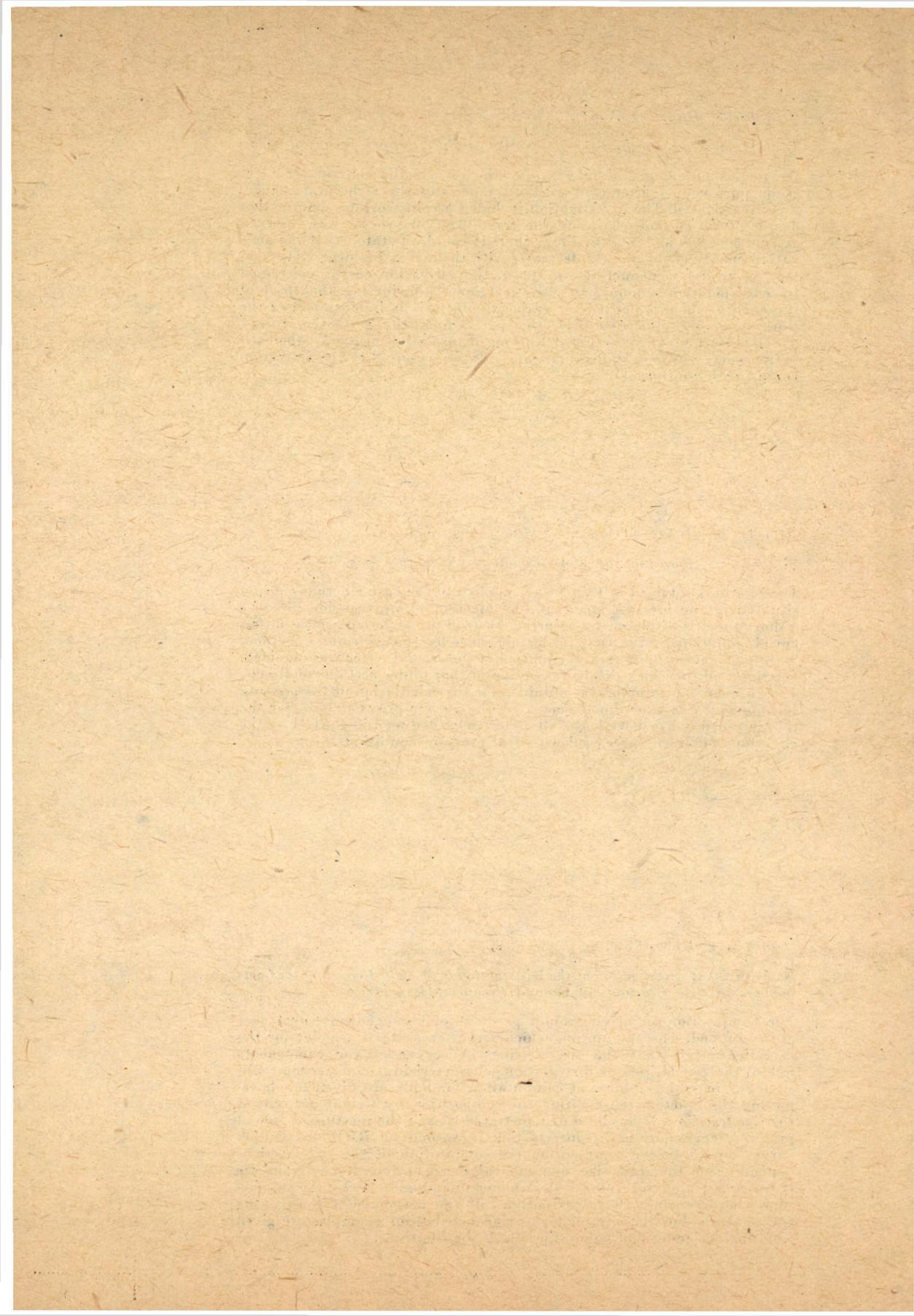
By means of an optical microscope, the recrystallization of technical grade pure copper after cold working, especially the structural change, was investigated. The investigation included a cold working deformation degree of 30, 60 and 90%, and the crystallization process was observed at 260, 300, 350 and 400°C. From these it could be stated that the activation energy of the process decreases with the increasing degree of working. At an assumed ductility of 100%, the activation energy calculated by extrapolation amounts to 33,7 kcal/gmol. Considering that part of the energy which is needed for grain growth, this is independent of the working degree; quantitatively, this part equals the activation energy of self-diffusion. At an assumed working deformation of 100%, the activation energy of recrystallization can be taken as equal to the activation energy of self-diffusion.

P. BENYÓ: *Application of Wave Equations to Short Pipes, II*

The relations obtained in Part I were applied to the case where the piston situated in the pressure space of the injection pump, considered to be a short tube, is displaced by a spring. Instead of the homogeneous differential equation of the third order obtained by the continuity method, an inhomogeneous differential equation of the second order was obtained, the right side of which can be taken as constant under certain conditions. Thus a recursion formula was obtained for the calculation of the pressure phenomena. The experiments made by the author prove that — for the relation deduced in Part I as well as for those deduced in Part II — the equations obtained agree well with real pressure conditions.

K. REMÉNYI: *Investigation of the Distribution by Weight Percent of the Components in Size Fractions of Ground Product Mixtures*

The composition of mixed ground products of homogeneous substances are examined. The assumption which serves as a starting point for the investigation is that the size-distribution curves of the components follow the regularities of distribution, characterizing homogeneous substances. General graphic and computation methods are given for determining the function representing the composition by weight per cent of the size fractions. It has been demonstrated that in the mixture of ground products characterized by intersecting lognormal or RRB distribution curves, on the curve representing the composition of the size fractions depending on the grain size, one end value can be found. The grain size representing the end value is determined unambiguously by the parameters characterizing the distribution of the components constituting the mixture. For the case of lognormal distribution examples are given both for designing and computing RRB distributions.



Acta Techn. Hung. 57 (1967), 345—372

W. W. KRYSKO—R. G. FENTON: *Contribution to the Problem of Extrusion of Lead and Lead Alloys*

During the extrusion of lead and lead alloys, the authors differentiate between two types of friction. Heterogeneous friction is the interfacial friction between the container and the material, whereas homogeneous friction is a shear in the material itself. The normal pressures of the material on the container wall, as recorded in practice, show that heterogeneous friction (slip) can take place only if the coefficient of friction is 0,001 or less. In all other cases the movement of the material lead or lead alloys, takes place by homogeneous friction, i.e. by shear. The normal pressure is velocity dependent, and due to the increased velocity of the material leaving the press the normal pressure decreases rapidly and a zone is formed where both frictions coincide. The position of this zone has an influence on the formation of circumferential cracks. Calculations were also undertaken to find the dimensions by which a minimum extrusion work is required and a minimum ram pressure is needed to extrude a given volume of material. These dimensions are different in both cases.

Acta Techn. Hung. 57 (1967), 373—382

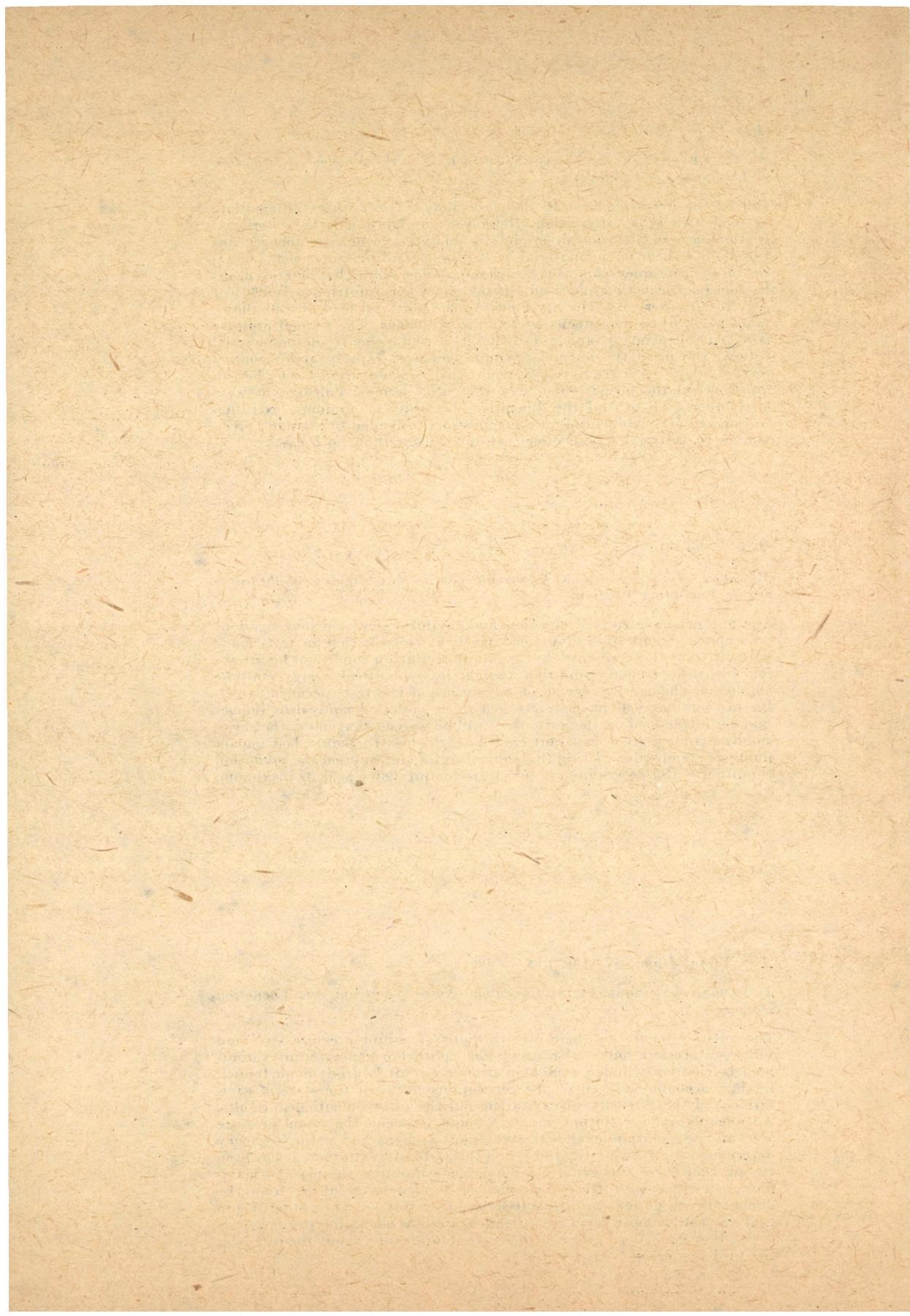
J. VARGA—GY. SEBESTYÉN: *Contribution to the Investigation of the Intensity of Cavitation Erosion*

The authors have carried out flow and cavitation erosion investigations in a closed circuit hydrodynamic tunnel, and claim that in tests made with different flow velocities but identical cavitation conditions for attaining identical eroded condition (weight loss) identical energy must be employed. The energy exerted on the surface of the test specimen by collapsing bubbles will be characterized by a so-called equivalent impact number introduced by the authors. It will be proved that under the above conditions for a given constant eroded weight loss the equivalent impact numbers are identical. Using this equivalent impact number the cavitation condition is also determined in which erosion intensity is at its maximum.

Acta Techn. Hung. 57 (1967), 383—396

J. VARGA—GY. SEBESTYÉN: *Cavitation Noise Spectrum and Cavitation Damage*

The authors report on their investigations of sound pressure level and vibration acceleration level measured at cavitation generated by various models (circular cylinder, wedge) in a closed circuit hydrodynamic tunnel; further, account is given of the correlations between the state of cavitation and the intensity of cavitation and the above-mentioned results. An unequivocal correlation has been found between the sound pressure level and acceleration level of the vibrations as measured at the frequency determined by the investigations, and the state of cavitation. It has been stated, that these curves have a maximum value and the place of maximum coincides with the maximums of the curve resulting from the damage investigations in different states of cavitation. The authors claim that cavitation noise level investigations are excellent for judging cavitating flow conditions and can thus give information about the extent of the probable erosion damages.



Acta Techn. Hung. **57** (1967), 397—414

E. BELLA—J. GULYÁS—S. JUHÁSZ: *Process of Hot Forming of Red Copper at Different Forming Speeds*

For making clear the processes taking place at hot working of red copper, authors executed gathering tests at 11 different deformation speeds and at three forming temperatures (at 500, 700 and 900 centigrades). From the measurement results gained from these tests the relations between the real stresses induced by the gathering and the changes of the structure of the material are determined. On the basis of the revealed dependences the essential differences between the processes taking place in the metal first coldworked, thereupon warmed up, and those taking place at hot forming can be established.

Acta Techn. Hung. **57** (1967), 415—428

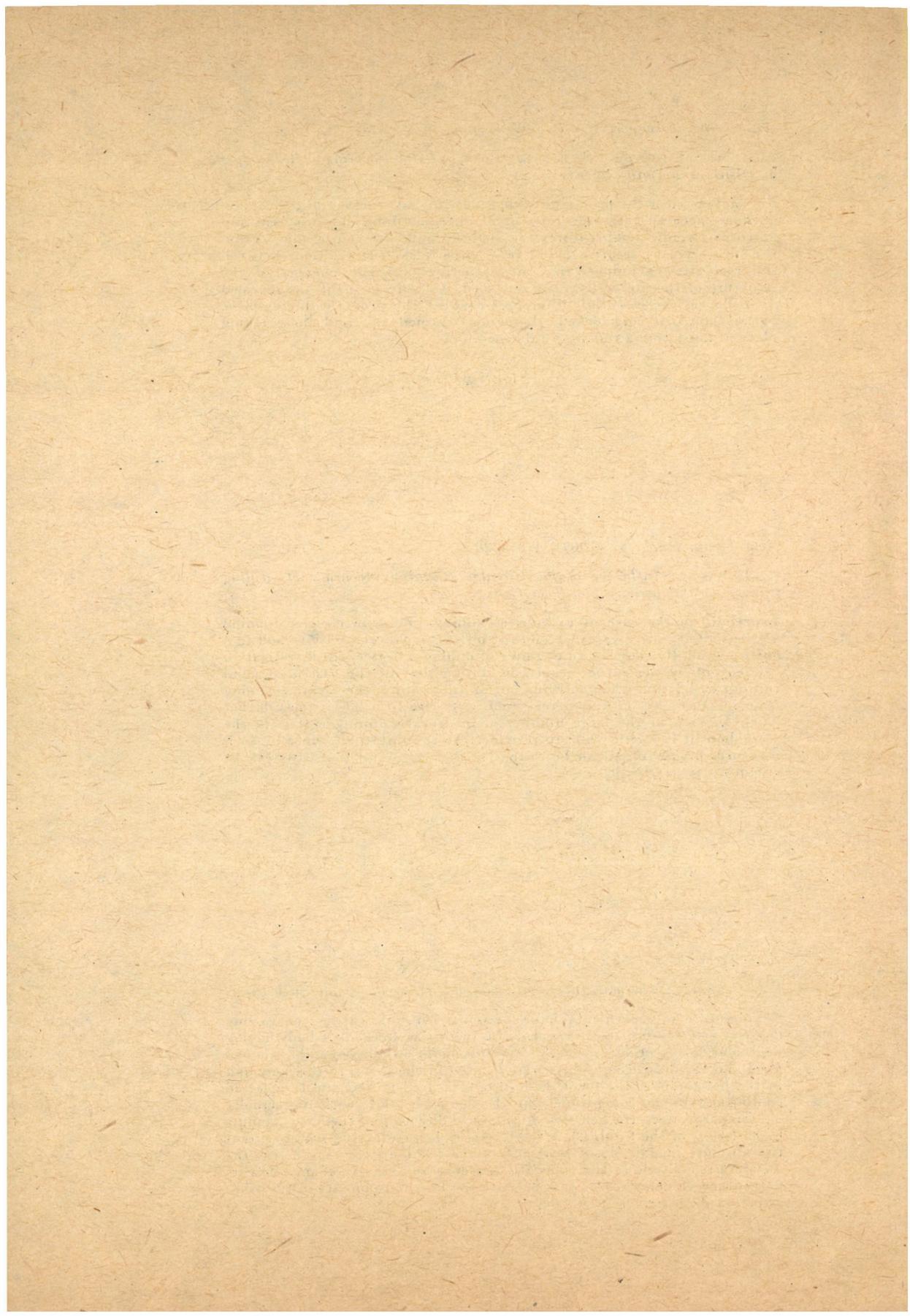
A. HORNUNG: *Influence of the Circular Running Accuracy of Milling Cutters on Productivity and Tool Costs*

Especially in the case of cylindrical milling, the true circular running of the milling cutter exerts a marked influence on productivity and tool costs as well. By showing an example of milling practice, the investigation carried out by the author results in stating that in the case of a radial run-out of 0,2 mm, when carrying out profile milling, the main machining time increases by 35%, whereas tool costs rise to a 2,67 times higher level. In view of the large number of inaccurate milling cutters in the workshops it is worth while to provide true running tools, since by such measures productivity can be raised by abt. 20% and tool costs can be cut down to nearly 50%.

Acta Techn. Hung. **58** (1967), —

G.Y. CSABALIK: *Thermal Investigation of the Head of Small Steel Ingots*

Temperature measurements have been carried out during the cooling (respectively crystallization) period of a small-size steel ingot-body having a circular cross section; the tests were carried out on alloyed and unalloyed steel and the measuring points were located in the head, in the body and in the hot top over the head. From the measured values and the plotted cooling curves the conclusion could be deduced, that, with the actually chosen parameters, the heat-loss in sideward direction of the head amounts to 85÷90% of the total. On a steel with a higher alloying metal content the absolute magnitude of heat-loss of the head decreases, whereas the absolute magnitude of the sideward loss does not greatly change, but its percentage value increases just because the loss components in the other direction decrease.



The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 165 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

**Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable
at the following addresses:**

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien 1

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznoiznos
1 Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA

Aria
Ve Smeckách 30
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mádarská Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Leningradská 14
Bratislava

DENMARK

Einar Munksgaard
Nørregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart 5.

GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough, Northamps.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP
GPO Post Box 1374
Bombay 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
92, Ikebukur O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

RUCH
ul. Wilcza 46
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31, East 10th Street
New York, N. Y. 1003
Walter J. Johnson
111, Fifth Avenue
New York, N. Y. 1003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Misica broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd